9

510

中國統計學社叢書之一

統計論叢

目　　錄

上海黎明書局發行
中華民國二十三年六月出版

June 9. 1945

$1000.-

中國統計學社叢書之一

統計論叢

1934

上海黎明書局發行

序　　言

一國之統計事業欲有長足的進步與健全的發展，至少應從三方面努力：一爲統計學理之高深研究及正當宣傳，二爲統計行政之制度完善及組織嚴密，三爲統計事實之妥愼調查及精細整理。吾國統計事業雖有悠久之歷史，但因墨守成法，不求進步，奉行故事，視同具文。於上述三方面皆缺少不斷之努力。故一旦與他國比擬，逐事事相形見絀，瞠乎其後。且國家一切政治設施與夫經濟社會文化教育諸事業，皆缺乏精確可靠之統計以供參考。今後我們欲發奮圖强，勇猛精進。使我們國族的共同生活與國民的個人生活，均更爲安全鞏固，更爲高尙文明。則統計事業當愈趨重要，統計功用亦應愈見昭著。方能適應時代之需求。本社同人平素對於統計學術頗饒興趣。同時復鑒於吾國統計事業之不振。爰有學社之組織及本刊之發行。對於吾國統計前途實抱有極大之宏願。目下全國統計行政正從事根本革新。統計法規亦將分別次第完成。黨政最高當局倘

能努力提倡，切實扶助，我國今後的統計工作必能大放光明。是以本社同人願各本所學，以與國人相見。縱不能爲發明家，固願爲宣傳家與實行家。盡心竭力，爲國家社會服務。至本刊文字責任均由同志著者自負，編輯同人僅略盡催稿之義務而已。

民國二十三年五月編者誌

目　錄

（以著作人姓之筆畫多寡爲次序）

次數分配之分析——基本的問題

王 仲 武

〔本文曾由著者在民國二十年本社第一屆年會宣讀〕

I. 次數分配之分析法——各種度量——配合曲線——次數曲線系之比較——用轉矩配合次數曲線法——算術平均數與一次轉矩——標準差與二次轉矩——偏度與轉矩——峯度與轉矩——衆數與轉矩——平均差與轉矩。 II. 原轉矩之意義——原轉矩之假定——薛伯氏校正——皮爾生與派爾蒙(Pairman)之校正法——根據插補法之校正法——平均斜度校正法——實例。 III. 皮氏之轉矩計算法——實例——各種方法之比較。 IV. 中位數計算法——實例。 V. 衆數計算法——改進方法。 VI. 配合曲線之用途——轉矩之重要。

I.

次數分配之分析可大別爲兩種。爲通常目的求得分配之各種度量即足以敘述分配之性質，其最主要而常用者爲全體分配之總數，中數(平均數，衆數，中位數或其他百分位數）及

離中差度（標準差,平均差;偏態,峯態)等。再進一步的分析法卽爲曲線之配合。至次數曲線之成爲系統者,要不外下列兩類:一類爲皮爾生氏曲線系(Pearson's System of Frequency Curves),其他爲常態曲線之種種變化。例如西爾(Thiele),格蘭姆（Gram),愛基華斯（Edgeworth)等之次數函數是。後者一類之次數函數由機率的假定推求而得，從理論的觀察自較皮氏之系統爲滿意。惟其長處亦卽其缺點。蓋一般事實現象之次數分配每有相當的偏度（尤其在經濟,社會,生物等現象中)，而此等函數不能適應偏度稍大之分配。卽使並無適應偏態之困難,至少一端受限制之分配（社會,經濟,教育,心理等現象中甚多),或 J 形 U 形之分配不能用此種函數配合,皮氏曲線系則無此缺點。

配合曲線之方法通常用最小二乘法。然若曲線之方程式非多項式而爲超越函數（Transcendental Functions),例如皮爾生氏之曲線型，則最小二乘法往往不切實用或竟爲不可能者。關於此點皮爾生氏曾明白指出(見 Biometrika Vol.I, Part 3. p. 267)，并倡轉矩（Moment）方法以代最小二乘法，氏曾證明此法之理論的根據。其實,倘次數曲線爲多項式(拋物線),則此法與最小二乘法完全一樣。

用轉矩配合曲線,無論在理論上或實際上,並非唯一的方法。皮氏自認此法在理論上不能視爲『最佳』(best)之法，蓋

所謂『最佳』無合理的定義。至於事實上特殊的曲線往往有特殊便利的配合法，卽如人壽保險學上之實例是。然此種特殊方法每不能施之於一般曲線，故不能視爲普遍的有系統的配合方法。若論普遍的有系統的配合法，則除轉矩之法外，尙未有所發現。故轉矩之計算，仍爲次數分配之分析的基礎。

皮氏曲線配合法有賴轉矩之能否準確求得。倘用不甚準確之轉矩配合曲線，則失却配合曲線之本意。然轉矩之用尙不止爲配合曲線也。次數分配之主要度量，除百分位數外幾乎皆可用轉矩表示之。蓋算術平均數卽一次轉矩，標準差卽二次轉矩之平方根。

設μ_n爲第 n 次轉矩，則：

$$\sqrt{\beta_1}=\frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}}$$

爲偏態度量之一種。$\sqrt{\beta_1}=0$ 表示對稱（對於算術平均數上之縱坐標而言。）其他各種偏態之度量，除最簡陋之方法用算術平均數與衆數之距離外，皆根據百分位數而定。百分位數通常不易準確求得。卽使其能準確求得，此種偏態之度量對於各次數之變化幷無靈敏之感覺。$\sqrt{\beta_1}$則不然，任何一組之次數，倘有些微變動卽能影響$\sqrt{\beta_1}$之值。又根據百分位數之偏態度量之精度（Precision）視全體分配之總數而定。倘全體分配之總數不大，則此種偏態度量不甚可靠。$\sqrt{\beta_1}$則不受此影響。

峯態則可用

$$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2{}^2}$$

爲度量，在常態曲綫上$\beta_2=3$。倘$\beta_2>3$則分配之中部較常態曲綫爲平坦。反之，倘$\beta_2<3$則較常態曲線爲陡峭。

至於衆數則可分爲實際分配上之衆數與配合次數曲線上之衆數。後者之衆數可用轉矩表示，設配合次數曲線之微分方程式爲

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}=\frac{x+a}{b_0+b_1x+b_2x^2}$$

此處a_1及b_0,b_1,b_2爲常數。此系曲線之各次轉矩可直接由此微分方程式求得。若假定曲線之兩端與x軸相遇（不必相切）則

$$a=\frac{\sigma\sqrt{\beta_1}(\beta_2+3)}{2(5\beta_2-6\beta_1-9)}$$

故

$$\chi=-a=-\frac{\sigma\sqrt{\beta_1}(\beta_2+3)}{2(5\beta_2-6\beta_1-9)}$$

卽次數曲線上之衆數（原點算術平均數）。故求曲線上之衆數不必實際求得曲線之方程式，只須求得轉矩之値卽可。至於實際分配上之衆數當於下節詳述。

倘分配爲常態者，則平均差爲標準差之$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$倍，故亦可用轉矩表示之。

綜上所述可知轉矩之計算，實爲次數分配分析之基本問題。

II.

設 f 爲次數，m 爲組中值，則四個轉矩之公式爲

$$v_1' = \frac{\Sigma fm}{\Sigma f}$$

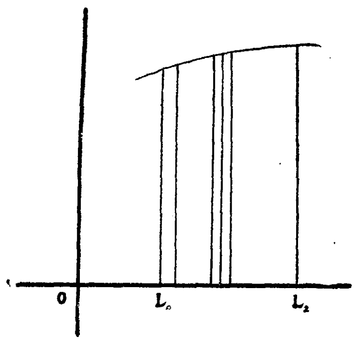
$$v_2' = \frac{\Sigma fm^2}{\Sigma f}$$

$$v_3' = \frac{\Sigma fm^3}{\Sigma f}$$

$$v_4' = \frac{\Sigma fm^4}{\Sigma f}$$

由此四式算出之轉矩通常稱爲原轉矩（Raw Moments）。即次數分配之轉矩，但與次數曲線之轉矩不同，

設O爲原點，L_1 與 L_2 爲一組之上下限，m爲組中值，I 爲組距，$y=f(x)$ 爲次數曲線之方程式。假定將數組距 L_1 L_2 分成若干份，在每一分點上作一縱坐標。如是得多個長而狹之四邊形。將每一四邊形之面積乘其底邊範圍內任何一點與原點之距離。將此各乘積相加。如是相加求得之



和，在 L_1L_2 間部分之數目無限制的增加，每一份無限制的縮小時之極限值，除以曲線下之全面積，卽此一組之一次轉矩。用積分之符號表示之，次數曲線上專就此一組而言之一次轉矩爲

$$\int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} xf(x)dx \Big/ \int_A^B f(x)dx.$$

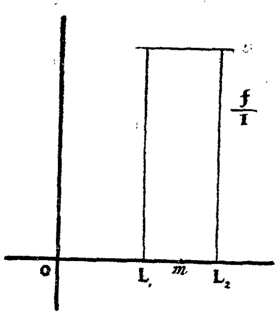
此處 A,B 爲曲線兩端之範圍。

原轉矩專就此一組而言之一次轉矩爲

$$\frac{fm}{\Sigma f}$$

此式之值等於假定在此一組內次數曲線爲與 x 軸平行之直綫。設此直綫與x軸之距離爲f/I，組距組中値如前，則

$$\int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} (fx/\mathrm{I})dx=fm$$



此種假定之缺乏普遍性自不待言。故實際計算時原轉矩求得後尙須加以一種校正，使其更近於次數曲線上之轉矩。

然此處之困難乃求四個轉矩之目的，卽爲求配合次數曲線，次數曲線之形式，旣尙未求得，則如何在原轉矩上加以校正。

薛伯氏（Sheppard）所用之方法，爲假定次數曲線之兩

端與 x 軸爲密切者。用數學的術語述之，卽假定次數函數之一，二，三次微分係數在兩端皆爲零。如是以奧愛勒墨克勞倫定理（Euler-Maclaurin Theorem）用級數表示積分。如是求得之近似值，卽著名之薛伯氏校正（Sheppard Correction 詳見 Biometrika Vol. V)。設 $\nu_1'\ \nu_2'\ \nu_3'\ \nu_4'$ 爲依次四個原轉矩，$\mu_1'\ \mu_2'\ \mu_3'\ \mu_4'$ 爲次數曲線之依次四個轉矩，則薛伯氏之校正爲

$$\mu_1'=\nu_1'$$

$$\mu_2'=\nu_2'-\frac{1}{12}I^2$$

$$\mu_3'=\nu_3'-\frac{1}{4}\nu_1'I^2$$

$$\mu_4'=\nu_4'-\frac{1}{2}\nu_2'I^2+\frac{7}{240}I^4$$

此種校正方法早經世人引用，無須作者介紹。惟本文目的，幷非介紹，乃對於此種校正法，加以批評幷另覓他種更普遍的校正法。區區愚見，不無有相當價值，尙希各位明達指敎！

薛伯氏校正，假定次數函數之一，二，三次微分係數在兩端皆爲零。然此種條件往往與次數分佈之形式不合。卽就皮爾生氏之各種次數曲線型而言，其第一，二，三，八，九，十一，十二各種曲線，往往一端雖與 x 軸相遇而並不密切，縱令其一次微分係數在一端爲零，而二次三次微分係數並不等於零。或爲 J 形，或爲 U 形，則薛伯氏校正之不適用自不待言。

故此種校正並非任何分配皆可應用者，倘不顧此種校正之假定而盲用之，所得結果往往反遠不如原轉矩之爲佳。關於此點下節當舉實例以證明之。

皮爾生氏因感此種校正之乏普遍性，曾用其他方法計算轉矩（詳見 Biometrika Vol. XII. P. 231 et seq.），其法爲假定次數函數在起端之鄰近可用與愛勒墨克勞倫定理展開成

$$1+\frac{a_1}{1!}(x-A)+\frac{a_2}{2!}(x-A)^2+\cdots\cdots$$

之形式；在盡端展開成，

$$1+\frac{b_1}{1!}(x-B)+\frac{b_2}{2!}(x-B)^2+\cdots\cdots$$

之形式。此處 A,B 爲曲綫之起點與終點對於原點之距離，a_1, a_2,……, b_1,b_2,……等爲可用起端之各組次數，與盡端之各組次數表示者。

皮氏如是求得與愛勒墨克勞倫公式中所含曲綫兩端之微分係數，因此得

$$a_1=-\frac{1}{60}\left\{137f_1-163f_2+137f_3-63f_4+12f_5\right\}$$

$$a_2=\frac{1}{12}\left\{45f_1-109f_2+105f_3-51f_4+10f_5\right\}$$

$$a_3=-\frac{1}{4}\left\{17f_1-54f_2+64f_3-34f_4+7f_5\right\}$$

$$a_4=\left\{3f_1-11f_2+15f_3-9f_4+2f_5\right\}$$

$$a_5=-\left\{f_1-4f_2+6f_3-4f_4+f_5\right\}$$

其餘 b_1,b_2,b_3,b_4,b_5 之五個公式與此完全相像。以上各式中 f 為第 r 組之相對次數。如是求得四個轉矩為

$$\mu_1'=\nu_1'+\frac{1}{12}\left(a_1-\frac{1}{60}a_3+\frac{1}{2520}a_5\right)+\frac{1}{12}\left(b_1-\frac{1}{60}b_3+\frac{1}{2520}b_5\right)$$

$$\mu_2'=\nu_2'-\frac{1}{12}-\frac{1}{120}\left(a_2-\frac{5}{126}a_4\right)+\frac{1}{6}A\left(a_1-\frac{1}{60}a_3+\frac{1}{2520}a_5\right)$$
$$-\frac{1}{120}\left(b_2-\frac{5}{126}b_4\right)+\frac{1}{6}B\left(b_1-\frac{1}{60}b_3+\frac{1}{2520}b_5\right)$$

$$\mu_3'=\nu_3'-\frac{1}{4}\nu_1'-\frac{1}{40}\left(a_1-\frac{5}{63}a_3+\frac{1}{240}a_5\right)-\frac{1}{40}A\left(a_2-\frac{5}{126}a_4\right)$$
$$+\frac{1}{4}A^2\left(a_1-\frac{1}{60}a_3+\frac{1}{2520}a^5\right)-\frac{1}{40}\left(b_1-\frac{5}{63}b_3+\frac{1}{240}b_5\right)$$
$$-\frac{1}{40}B\left(b_2-\frac{5}{126}b_4\right)+\frac{1}{4}B^2\left(b_1-\frac{1}{60}b_3+\frac{1}{2520}b_5\right)$$

$$\mu_4'\doteq\nu_4'-\frac{1}{2}\nu_2'+\frac{7}{240}+\frac{1}{126}\left(a_2-\frac{7}{80}a_4\right)-\frac{1}{10}A\left(a_1-\frac{5}{63}a_3+\frac{1}{240}a_5\right)$$
$$-\frac{1}{20}A^2\left(a_2-\frac{5}{126}a_4\right)+\frac{1}{3}A^3\left(a_1-\frac{1}{60}a_3+\frac{1}{2520}a_5\right)$$
$$+\frac{1}{126}\left(b_2-\frac{7}{80}b_4\right)-\frac{1}{10}B\left(b_1-\frac{5}{63}b_3+\frac{1}{240}b_5\right)$$
$$-\frac{1}{20}B^2\left(b_2-\frac{5}{126}b_4\right)+\frac{1}{3}B^3\left(b_1-\frac{1}{60}b_3+\frac{1}{2520}b_5\right)$$

至於 J 形曲綫之轉矩計算法，皮氏假定曲線之起端為向上之一端，並假定其作

$$N\left\{1+\chi^q(A+B\chi+\cdots\cdots)\right\}\qquad q<1$$

之形式。如是求得起端第一組之轉矩（以曲線起點在 x 軸上之射影作原點）為

$$f_1\mu_1'=-.8127818f_1+.6770691f_2-.6605497f_3$$
$$+.3471889f_4-.0737827f_5$$

$$f_1\mu_2'=.7067407f_1-.8241137f_2+.8305586f_3$$
$$-.4415218f_4+.0943572f_5$$

$$f_1\mu_3'=-.6347502f_1+.8572689f_2-.8807900f_3$$
$$+.4714747f_4-.1011083f_5$$

$$f_1\mu_4'=.5814517f_1-.8541149f_2+.8888688f_3$$
$$-.4780407f_4+.1027607f_5$$

如是求得之第一組之各個轉矩須加於其餘各組之各轉矩（亦以起端爲原點)。J 形曲線上之$a_1,a_2,\cdots\cdots$之値爲

$$a_1=-.0679063f_1-1.6512369f_2+1.1771875f_3$$
$$-.5548634f_4+.1118034f_5$$

$$a_2=.3322458f_1+.9155792f_2-2.3842525f_3$$
$$+1.3685243f_4-.2981424f_5$$

$$a_3=-.9887796f_1+2.8237204f_2-2.1260271f_3$$
$$+.4720491f_4-.0279508f_5$$

$$a_4=2.4976496f_1-9.9398504f_2+13.3946734f_3$$
$$-7.8229490f_4+1.6770510f_5$$

$$a_5=-7.4134958f_1+25.3208762f_2-33.8993138f_3$$
$$+20.7685399f_4-4.8564601f_5$$

倘爲U 形則當然兩端皆如是。用此法求轉矩甚爲精確(見下節實例。)然此法極爲繁複，誠有令人望洋興嘆之感。

况此法並非唯一的方法。倘以插補法爲基礎，次數分配之

轉矩未始不可求得。例如在相鄰每三組上配二次拋物綫或在相鄰每五組上配四次拋物綫，即根據二次或四次拋物線，求各次轉矩。惟此處所宜注意者，即各組之次數通常不能視爲高度，而必須當作次數曲線下各組內之面積。故普通之插補方法並不適用。

設 f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 爲相鄰五組之次數。求依次各組之面積等於 $f_1, f_2, f_3, f_4 f_{,5}$ 之四次拋物線。設此拋物線之方程式爲

$$y_{x+1}=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$$

以組距爲單位則

$$f_1=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y_{x+1}dx=\left[ax+\frac{b}{2}x^2+\frac{c}{3}x^3+\frac{d}{4}x^4+\frac{e}{5}x^5\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=a+\frac{1}{12}c+\frac{1}{80}e \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$f_2=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} y_{x+1}dx=\left[ax+\frac{b}{2}x^2+\frac{c}{3}x^3+\frac{d}{4}x^4+\frac{e}{5}x^5\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$=a+b+\frac{13}{12}c+\frac{5}{4}d+\frac{121}{80}e \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$f_3=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} y_{x+1}dx=\left[ax+\frac{b}{2}x^2+\frac{c}{3}x^3+\frac{d}{4}x^4+\frac{e}{5}x^5\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}$$

$$=a+2b+\frac{49}{12}c+\frac{34}{4}d+\frac{1441}{80}e \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$f_4=\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} y_{x+1}dx=\left[ax+\frac{b}{2}x^2+\frac{c}{3}x^3+\frac{d}{4}x^4+\frac{e}{5}x^5\right]_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}}$$

$$=a+3b+\frac{109}{12}c+\frac{111}{4}d+\frac{6841}{80}e \cdots\cdots\cdots (4)$$

$$f_5=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} y_{x+1}dx=\left[ax+\frac{b}{2}x^2+\frac{c}{3}x^3+\frac{d}{4}x^4+\frac{e}{5}x^5\right]_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}}$$

$$=a+4b+\frac{193}{12}c+\frac{260}{4}d+\frac{21121}{80}e\cdots\cdots(5)$$

解此五式

$$a=\frac{1}{1920}(1689f_1+684f_2-746f_3+364f_4-71f_5)$$

$$b=\frac{1}{1920}(-3800f_1+6960f_2-4800f_3+2000f_4-360f_5)$$

$$c=\frac{1}{1920}(2760f_1-8160f_2+8880f_3-4320f_4+840f_5)$$

$$d=\frac{1}{1920}(-800f_1+2880f_2-3840f_3+2240f_4-480f_5)$$

$$e=\frac{1}{1920}(80f_1-320f_2+480f_3-320f_4+80f_5)$$

在方程式

$$y_{x+1}=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$$

中令 $x=0,1,2,3,4$，卽得此曲線在相鄰五組組中値上之高度，換言之卽組中値上之縱坐標。

$$y_1=a$$

$$y_2=a+b+c+d+e$$

$$y_3=a+2b+4c+8d+16e$$

$$y_4=a+3b+9c+27d+81e$$

$$y_5=a+4b+16c+64d+256e$$

以上列 a,b,c,d,e 之値代入得

$$y_1=\frac{1}{1920}(1689f_1+684f_2-746f_3+364f_4-71f_5)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$y_2=\frac{1}{1920}\left(-71f_1+2044f_2-26f_3-36f_4+9f_5\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$y_3=\frac{1}{1920}\left\{2134f_3-116(f_2+f_4)+9(f_1+f_5)\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$y_4=\frac{1}{1920}\left(9f_1-36f_2-26f_3+2044f_4-71f_5\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$y_5=\frac{1}{1920}\left(-71f_1+364f_2-746f_3+684f_4+1689f_5\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

設 f_r 為第 r 組之次數，則次數曲線在第一，第二組中值上之縱坐標可由(6)，(7)兩式求得。(8)式可寫作

$$y_r=\frac{1}{1920}\left\{2134f_r-116(f_{r-1}+f_{r+1})+9(f_{r-2}+f_{r+2})\right\}$$

之形式。除首二組與末二組之縱坐標外，其餘之縱坐標皆可由此式求得。(9)(10)二式可寫作

$$y_{n-1}=\frac{1}{1920}\left(9f_{n-4}-36f_{n-3}-26f_{n-2}+2044f_{n-1}-71f_n\right)$$

$$y_n=\frac{1}{1920}\left(-71f_{n-4}+364f_{n-3}-746f_{n-2}+684f_{n-1}+1689f_n\right)$$

設最後一組為第 n 組，則末二組在組中值之縱坐標，可由此二式得之。

設 $f(x+1)$ 為四次函數，則由葛利哥萊公式 (Gregory's Formula)

$$f(x+1)=f(1)+x\triangle f(1)+\frac{x(x-1)}{2!}\triangle^2 f(1)+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\triangle^3 f(1)$$
$$+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}\triangle^4 f(1)$$

將各次項差 (difference) 簡寫作 $\triangle,\triangle^2,\triangle^3,\triangle^4$；又將上式依

x之指數排列之，得

$$f(x+1)=f(1)+(\triangle-\frac{1}{2}\triangle^2+\frac{1}{3}\triangle^3-\frac{1}{4}\triangle^4)x$$
$$+(\frac{1}{2}\triangle^2-\frac{1}{2}\triangle^3+\frac{11}{24}\triangle^4)x^2$$
$$+(\frac{1}{6}\triangle^3-\frac{1}{4}\triangle^4)x^3+\frac{1}{24}\triangle^4x^4$$

因此得

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}f(x+1)\,dx=2f(1)+\triangle+\frac{1}{12}\triangle^2-\frac{1}{24}\triangle^3+\frac{103}{2880}\triangle^4$$
$$=\frac{1}{2880}\left\{3343f(1)+1628f(2)+1218f(3)-532f(4)+103f(5)\right\}\cdots\cdots(11)$$

$$\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{9}{2}}f(x+1)\,dx=2f(1)+7\triangle+\frac{109}{12}\triangle^2+\frac{125}{24}\triangle^3+\frac{3343}{2880}\triangle^4$$
$$=\frac{1}{2880}\left\{103f(1)-532f(2)+1218f(3)+1628f(4)+3343f(5)\right\}\cdots\cdots(12)$$

又

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}f(x+1)\,dx=\frac{1}{5760}\left\{5178f(3)+308\,[f(2)+f(4)]-17\,[f(1)+f(5)]\right\}\cdots\cdots(13)$$

故

$$\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}f(x)\,dx$$

可用$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，……，$f(n-1)$，$f(n)$表示之。蓋

$$\int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}f(x)\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}f(x)\,dx+\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}}f(x)\,dx+\cdots\cdots+\int_{n-\frac{5}{2}}^{n-\frac{3}{2}}f(x)\,dx$$
$$+\int_{n-\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}}f(x)\,dx$$

此式右邊第一個積分可以(11)式代入。又若假定 $f(5)$ 爲最後一組之次數，則上式最後一個積分可用(12)式代入。再設 $f(1)$，$f(2)$，……$f(5)$ 爲任何相鄰五組之次數，則上式右邊之其餘各個積分可以(13)式代入。如是得

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} f(x)\,dx &= \frac{1}{2880}\Big\{3343f(1)+1628f(2)+1218f(3)-532f(4)\\&\qquad +103f(5)\Big\}\\&+\frac{1}{5760}\sum_{r=3}^{n-3}\Big\{5178f(r)+308[f(r-1)+f(r+1)]-17[f(r-2)\\&\qquad +f(r+2)]\Big\}\\&+\frac{1}{2880}\Big\{103f(n-4)-532f(n-3)+1218f(n-2)+1628f(n-1)\\&\qquad +3343f(n)\Big\}\\&=\frac{1}{5760}\Big\{6669f(1)+3547f(2)+7905f(3)+4713f(4)+5966f(5)\Big\}\\&+\sum_{r=6}^{n-5} f(r)\\&+\frac{1}{5760}\Big\{5966f(n-4)+4713f(n-3)+7905f(n-2)+3547f(n-1)\\&\qquad +6669f(n)\Big\}\end{aligned}$$

設

$$f(x)=x^t y_x,\quad \Sigma f=N \text{ (全體次數之和)}$$

則

$$N\mu_t'=\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} x^t y_x\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} f(x)\,dx$$

卽

$$N\mu'_t=\frac{1}{5760}\Big\{6669m_1^ty_1+3547m_2^ty_2+7905m_3^ty_3+4713m_4^ty_4$$

$$+5966m_5^ty_5\Big\}$$

$$+\sum_{r=6}^{n-5}m_r^ty_r$$

$$+\frac{1}{5760}\Big\{5966m^t_{n-4}y_{n-4}+4713m^t_{n-3}y_{n-3}+7905m^t_{n-2}y_{n-2}$$

$$+3547m^t_{n-1}y_{n-1}+6669m^t_ny_n\Big\}$$

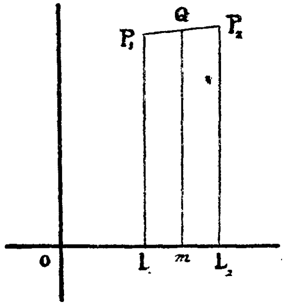
此處m_r爲第r組之中值，在此最後一式中，令$t=1,2,3,4$，卽得四個轉矩。用此式求得之轉矩亦頗準確。此法顯然比皮氏方法爲簡，蓋四個轉矩皆包括於此一個公式內，且次數分配不論爲鐘形，或J形U形，皆可用此公式計算，而皮氏之方法則對于J形或U形之分佈，須另用一式計算。不過此式須先求得各個y_r之值，方能引用，似乎尙嫌繁複。

戴維士氏曾述金氏求一次與二次轉矩之法（詳見 G. R. Davies The Analysis of Frequency Distributions; Journal of the American Statistical Association Vol. XXIV)。其法爲假定次數曲線在一組內可假定其爲直線，此直線在每一組內有相當的斜度。設一組之次數爲f，組距爲I，組中值爲m。又設圖中O爲原點；L_1，L_2爲一組之上下限，m爲組中值，P_1P_2爲用以代次數曲線之直線，並假定此直線之斜度爲τ。

因得

$$OL_1=m-\tfrac{1}{2},$$

$$OL_2=m+\tfrac{1}{2},$$



設梯形 $L_1L_2P_2P_1$ 之面積爲 f, P_1P_2 之方程式爲

$$y=\tau x+c$$

則

$$f=\int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}(\tau x+c)dx=\tau Im+cI$$

$$\therefore\ c=f/I-\tau m.$$

故 P_1P_2 之方程式爲

$$y=\tau x+f/I-\tau m.$$

如是得此一組內之一次轉距爲

$$\int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}xydx=\left[\frac{1}{3}\tau x^3+\frac{1}{2}(f/I-\tau m)x^2\right]_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}$$

$$=fm+\frac{1}{12}\tau I^3$$

同樣得此組內之二次轉矩爲

$$\int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}x^2ydx=\left[\frac{1}{4}\tau x^4+\frac{1}{3}(f/I-\tau m)x^3\right]_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}$$

$$=fm^2+\frac{1}{12}I(fI+2\tau I^2m)$$

緣戴氏文中,並未加以證明,故特爲證之如上。又關於三次四次轉矩,戴氏亦未提及隻字。

其實三次與四次轉矩,亦可用此法求之,三次轉矩爲

$$\int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} x^3 y dx = \left[\frac{1}{5}\tau x^5 + \frac{1}{4}(f/I - \tau m)x^4\right]_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}$$

$$= fm^3 + \frac{1}{4}fmI^2 + \frac{1}{4}I(\tau I^2)m^2 + \frac{1}{80}I^3(\tau I^2)$$

四次轉矩爲

$$\int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} x^4 y dx = \left[\frac{1}{6}\tau x^6 + \frac{1}{5}(f/I - \tau m)x^5\right]_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}$$

$$= fm^4 + \frac{1}{2}fm^2I^2 + \frac{1}{80}fI^4 + \frac{1}{3}I(\tau I^2)m^3$$

$$+ \frac{1}{20}I^3(\tau I^2)m$$

由是得全體分配此四個轉矩(任何原點)爲

$$\mu_1' = \frac{1}{N}(\Sigma fm + \frac{1}{12}I\Sigma\tau I^2) \quad \cdots\cdots (14)$$

$$\mu_2' = \frac{1}{N}(\Sigma fm^2 + \frac{1}{6}I\Sigma\tau I^2 m + \frac{1}{12}I^2) \quad \cdots\cdots (15)$$

$$\mu_3' = \frac{1}{N}(\Sigma fm^3 + \frac{1}{4}I^2\Sigma fm + \frac{1}{4}I\Sigma\tau I^2 m^2 + \frac{1}{80}I^3\Sigma\tau I^2) \cdots\cdots (16)$$

$$\mu_4' = \frac{1}{N}(\Sigma fm^4 + \frac{1}{2}I^2\Sigma fm^2 + \frac{1}{3}I\Sigma\tau I^2 m^3 + \frac{1}{20}I^3\Sigma\tau I^2 m + \frac{1}{80}I^4) \cdots (17)$$

此處 $N=\Sigma f$ 爲全體分配總數。若以組距爲單位則 $I=1$.令

$$\tau I^2 = S, \quad v_1' = \frac{1}{N}\Sigma fm, \quad v_2' = \frac{1}{N}\Sigma fm^2,$$

$$v_3' = \frac{1}{N}\Sigma fm^3, \quad v_4' = \frac{1}{N}\Sigma fm^4$$

之處 $\nu_1', \nu_2', \nu_3', \nu_4'$ 爲原轉矩,上四式變成

$$\mu_1' = v_1' + \frac{1}{12N}\Sigma s \quad \cdots\cdots (18)$$

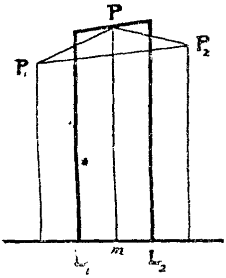
$$\mu_2' = v_2' + \frac{1}{6N}\Sigma sm + \frac{1}{12} \quad \cdots\cdots (19)$$

$$\mu_3'=v_3'+\frac{1}{4}v_1'+\frac{1}{4N}\Sigma sm^2+\frac{1}{80N}\Sigma s \qquad (20)$$

$$\mu_4'=v_4'+\frac{1}{2}v_2'+\frac{1}{3N}\Sigma sm^3+\frac{1}{20N}\Sigma sm+\frac{1}{80} \qquad (21)$$

求得四個轉矩後，倘再欲求 β_1 及 β_2，則不論轉矩之單位爲組距或任何其他單位，所得 $\beta_1\beta_2$ 之值皆相同。

轉矩公式既已求得，進一步的問題，即爲各組中用以代次數曲線之直線的斜度 τ 之决定。斜度之選擇，顯然須注意及左右兩組之大小。設 f_{r-1}，f_r，f_{r+1} 爲相鄰之三組次數。在各組中點上作高 f_{r-1}/I，f_r/I，f_{r+1}/I 之三縱坐標，設其頂點爲 P_1，P，P_2，聯結 P_1P，PP_2，此次數多邊形在第 r 組（卽 f_r 之一組）有兩個斜度，前半組之斜度卽 P_1P 之斜度爲



$$\frac{(f_r/I)-(f_{r-1}/I)}{I}$$

後半組之斜度，卽 PP_2 之斜度爲

$$\frac{(f_{r+1}/I)-(f_r/I)}{I}$$

故第 r 組之斜度不妨用此二斜度之平均值，卽

$$\tau_r=\frac{1}{2}\left\{\frac{(f_r/I)-(f_{r-1}/I)}{I}+\frac{(f_{r+1}/I)-(f_r/I)}{I}\right\}$$

$$=\frac{(f_{r+1}/I)-(f_{r-1}/I)}{\tau I}$$

故

$$\tau_r I^2=\frac{1}{2}(f_{r+1}-f_{r-1}) \quad \cdots\cdots (22)$$

至於第一組及第 n 組(即最後一組)之斜度,則爲

$$\tau_1 I^2=f_2-f_1$$

及

$$\tau_n I^2=f_n-f_{n-1}$$

倘次數分佈爲鐘形,兩端與x軸密切則不妨在第一組次數f_1之前加 f_0,f_{-1},在最後組 f_n 之後加 f_{n+1},f_{n+2},並假定此加添之四組次數皆爲零,各組之斜度皆用(22)式求之。如是則(14),(15),(16)三式可證明與薛伯氏校正完全相同。惟(17)式較薛伯氏校正所與之四次轉矩略小(相差 $\frac{2}{5}I^4$)。蓋薛伯氏校正所假定之曲線爲兩端有長而細之尾者。此種長而細之尾對於高次轉矩之影響至鉅。明乎此則四次轉矩中相差 $\frac{2}{5}I^4$ 夫何足異。

例如用此法求民國二十年青島市民年齡分佈之四個轉矩

組距	人數(f_r)	$S=\tau_r I^2$	m_r
0—5	24905	4206	—5
5—10	29111	2320	—4
10—15	29545	3727	—3
15—20	36564	8611	—2
20—25	46767	5384	—1

25—30	47331	—2402	0
30—35	41964	—5109	1
35—40	37112	—5311	2
40—45	31343	—6154	3
45—50	24804	—6432	4
50—55	18479	—5995	5
55—60	12814	—5251	6
60—65	7977	—3711	7
65—70	5392	—2414	8
70—75	3149	—1931	9
75—80	1529	—1115	10
80—85	919	— 580	11
85—90	369	— 435	12
90—95	50	— 184	13
95—100	1	— 49	14
	$N=400,125$		

由 f 之值求 S_1, S_2, ……等等。

$$S_1=f_2-f_1=29111-24905=4206$$

$$S_2=\frac{1}{2}(f_3-f_1)=\frac{1}{2}(29545-24905)=2320$$

……………………………………

$$S_{20}=f_{20}-f_{19}=1-50=-49$$

至求 $S_r m_r$, $S_r m_r^2$ 等之法與求 $f_r m_r$, $f_r m_r^2$ ……等之法完全相同。

如是求得之結果爲

$$N=\Sigma f \quad =400,125$$

$$N\nu_1'=\Sigma fm=187,020$$

$$N\nu_2'=f\Sigma m^2=4,656,882$$

$$N\nu_3'=\Sigma fm^3=13,031,904$$

$$N\nu_4'=\Sigma fm^4=163,485,786$$

$$\Sigma S \quad =-22,825$$

$$\Sigma Sm=-273,995$$

$$\Sigma Sm^2=-1,085,687$$

$$\Sigma Sm^3=-10,452,029$$

故若以組距爲單位得

$$\mu_1'=\frac{1}{N}(N\nu_1'+\frac{1}{12}\Sigma S)=0.46$$

$$\mu_2'=\frac{1}{N}(N\nu_2'+\frac{1}{12}N+\frac{1}{6}\Sigma Sm)=11.61$$

$$\mu_3'=\frac{1}{N}(N\nu_3'+\frac{1}{4}\nu_1'+\frac{1}{80}\Sigma S+\frac{1}{4}\Sigma Sm^2)=32.01$$

$$\mu_4'=\frac{1}{N}(N\nu_4'+\frac{1}{2}\nu_2'+\frac{1}{80}N+\frac{1}{20}\Sigma Sm+\frac{1}{3}\Sigma Sm^3)=405.61$$

以上各轉矩以27.5作原點，故算術平均數爲

$$\bar{x}=27.5+0.46\times5=29.8$$

倘以算術平均數作原點則各轉矩爲

$$\mu_1=0$$

$$\mu_2=\mu_2'-(\mu_1')^2=11.40$$

$$\mu_3=\mu_3'-3\mu_1'\mu_2'+2(\mu_1')^3=16.18$$

$$\mu_4=\mu_4'-4\mu_1'\mu_3'+6(\mu_1')^2\mu_2'-3(\mu_1')^4=361.35$$

倘以算術平均數作青島市居民生命之期望値 (expectation

of life) 則爲29.8歲。惟此種推論，或欠妥當。關於此點，不屬本文範圍，無須詳論。此處不過舉例，以示計算之方法而已。

III.

上節以實例所述種種，幷不足以見用此種方法求得轉矩之準確程度。皮爾生氏曾用曲線

$$y=10^5x^{\frac{1}{2}}$$

自 $x=0$ 至 $x=10$ 之轉矩爲例，以證明其方法之精確。(詳見 Biometrika Vol. XII. P. 231 et seq.) 此曲線下各組之相對的面積，用積分求得之如下：

組距	面積(f)	S_r	m_r	S_rm_r	$S_rm_r^2$	$S_rm_r^3$
0—1	.031623	.026197	.5	.013099	.006549	.003275
1—2	.057820	.021626	1.5	.032439	.048659	.072988
2—3	.074874	.015423	2.5	.038558	.096394	.240984
3—4	.088665	.012848	3.5	.044968	.157388	.550858
4—5	.100571	.011270	4.5	.050715	.228218	1.026979
5—6	.111205	.010166	5.5	.055913	.307521	1.691368
6—7	.120904	.009338	6.5	.060697	.394531	2.561448
7—8	.129880	.008685	7.5	.065137	.488531	3.663984
8—9	.138273	.008152	8.5	.069292	.588982	5.006347
9—10	.146185	.007912	9.5	.075164	.714058	6.783551
	1.000000	.131617		.505982	3.030831	21.604782

以表中各值代入(18),(19),(20),(21)四式得

$$\mu_1'=\nu_1'+\frac{1}{12}\Sigma S=5.9990$$

$$\mu_2'=\nu_2'+\frac{1}{6}\Sigma Sm+\frac{1}{12}=42.8577$$

$$\mu_3'=\nu_3'+\frac{1}{4}\nu_1'+\frac{1}{4}\Sigma Sm^2+\frac{1}{80}\Sigma S=333.3417$$

$$\mu_4'=\nu_4'+\frac{1}{2}\nu_2'+\frac{1}{3}\Sigma Sm^3+\frac{1}{20}\Sigma Sm+\frac{1}{80}=2727.3579$$

(原轉矩之值詳後。)

倘用配合四次拋物線之方法。可以 (6), (7), (8), (9), (10)五式求各 y 之值如下:

$$y_1=.032415439$$

$$y_2=.058179855$$

$$y_3=.074988855$$

$$y_4=.088640997$$

$$y_5=.100622706$$

$$y_6=.111243372$$

$$y_7=.120965038$$

$$y_8=.129904114$$

$$y_9=.138344838$$

$$y_{10}=.146202197$$

再代入轉矩公式,令 $t=1,2,3,4$ 即得

$$\mu_1'=5.9991$$

$$\mu_2'=42.8598$$

$$\mu_3'=333.3547$$

$$\mu_4'=2727.4927$$

用以上兩種方法求得之各轉矩，相差極微。今將原轉矩之值，加過薛伯氏校正後之值，用配合拋物線方法求得之值，用平均斜度方法求得之值，用皮爾生氏方法求得之值，以及用積分求得各轉矩之眞值，列表於下，以便比較。

原轉矩	加薛伯氏校正	配合拋合線	平均斜度	皮氏校正	眞值
5.9880	5.9880	5.9991	5.9990	5.9994	6.0000
42.6900	42.6067	42.8598	42.8577	42.8570	42.8571
331.0854	329.5884	333.3547	333.3417	333.3349	333.3333
2698.7735	2677.4576	2727.4927	2727.3579	2727.2757	2727.2727

由上表可知原轉矩及薛伯氏校正後與眞值相去更遠。蓋本例之分配爲J形，顯然不合薛伯氏之校正之假定。薛伯氏校正之不能盲用，於此可見。用配合拋物線法所得之結果，與用平均斜度法求得者甚近，且後者就本例而言，似乎較佳。此處用平均斜度法求得之一次轉矩之錯誤，不滿五千分之一，其餘三轉矩之錯誤，皆不滿萬分之一。用皮氏之方法須先求第一組之各次轉矩，然後求其餘各組之 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5;b_1,b_2,b_3,b_4,b_5$，之值，代入各個轉矩公式，其繁複較之平均斜度方法何止數十倍。且爲通常目的，平均斜度所能達之準確程度，實有餘而無不足。

IV.

求中位數以及其他百分位數之方法，似乎以戴維士氏之法爲最佳。此法非特簡便，且甚準確。其公式爲

$$P=m-\frac{f}{\tau I}\pm\sqrt{\left(\frac{f}{\tau I}-\frac{1}{2}\right)^2+2\frac{f_b}{\tau}}$$ （根號前之號從τ之號）

此處 P 爲百分位數，m爲百分位數所在組之中値，f 爲該組次數，I 爲組距，τ 之意義同前。fb 爲百分位數所在組內該數以下之次數。

例如用此式求中位數。設 N 爲全體總次數，f 爲中位數組之次數，fb 爲中位數組內該數以下之次數，Fb 爲中位數組以下各組之總次數，Fa 爲中位數組以上各組之總次數，則由中位數之定義

$$F_b+f_b=(f-f_b)+F_a$$

即

$$f_b=\frac{F_a-F_b+f}{2}$$

再以 $N=Fa+Fb+f$ 代入，得

$$f_b=\frac{N}{2}-F_b$$

例如用此法求1918年美國人民收入分配之中位數。

收入(單位美金一元)	人　數
600 以下	3,577,528

600—	2,154,474
700—	2,668,466
800—	3,013,034
900—	3,144,722
1000—	3,074,351
1100—	2,850,526
1200—	2,535,285
1300—	2,205,728
1400—	1,832,230
1500—	1,512,649
1600 以上	9,000,067

中位數組顯然為1100—1200之一組，

$f=2,850,526$

$m=1,150$

$\tau=(2,535,285-3,074,351)\times\frac{1}{2\times(100)^2}$

$=-26.9533$

$N=37,569,060$

$f_b=18,784,530-17,632,575=1,151,955$

代入上式，得

$$\text{中位數}=1150+\frac{2850526}{2695.33}-\sqrt{\left(\frac{2850526}{2695.33}+50\right)^2-\frac{2303910}{26.9533}}$$

$$=1150+1057.58-\sqrt{1226732.35-85477.84}$$

$$=2207.58-1068.3$$

$$=1139.28$$

實際之中位數爲1140元(見美國 National Bureau of Economic Research Income in the U.S.A.)

V.

求衆數 (Mode) 之方法,通常爲在衆數組之附近數組上配一拋物線。例如芮茲 (Rietz Handbook of Mathematical Statistics P.27) 引用丘培 (E. Czuber Die Statistiechen Forschungsmethoden P. 71) 之法爲

$$x=-\frac{\triangle f_{-1}}{\triangle^2 f_{-1}}$$

此處 x 爲自衆數組之下限至衆數之距離。f_{-1} 爲衆數組前一組之次數。其實此法與巴萊所述之法 (Bowley Elements of Statistics Vol. I. p. 228) 完全一樣,惟巴萊在該書中所用之證法以累積曲線爲出發點,則似乎大可不必(巴氏或爲其前後敘述體例一致之故)。又此法皮爾生氏曾說明其缺點(見 Biometrika Vol. I,p. 260)。因此式之結果受機誤(Probable error)之影響甚大。在本例雖不受其影響,然因此法僅顧及衆數所在組及其左右兩組之次數,故所求得結果不甚正確。

上述收入分配之例中,衆數組顯然爲900—1000組。因得

f_{-1} 3013034

131688

$$
\begin{array}{lll}
f_0 & 3144722 & -202059 \\
 & & -70371 \\
f_1 & 3074351 &
\end{array}
$$

$$\therefore\ x=\frac{131688}{202059}=.652$$

即衆數爲

$$900+.652\times100=965.2$$

實際衆數爲957。

較此法精確之法，當然爲配一四次拋物線。設$f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2$爲依次相鄰之五組次數，$f_0$爲衆數組之次數。設配合之拋物線爲

$$f(x)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$$

令拋物線下各組之面積等於此五組次數得

$$f_{-2}=\int_{-2}^{-1}f(x)dx=a-\frac{3}{2}b+\frac{7}{3}c-\frac{15}{4}d+\frac{31}{5}e$$

$$f_{-1}=\int_{-1}^{0}f(x)dx=a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c-\frac{1}{4}d+\frac{1}{5}e$$

$$f_0=\int_{0}^{1}f(x)dx=a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{4}d+\frac{1}{5}e$$

$$f_1=\int_{1}^{2}f(x)dx=a+\frac{3}{2}b+\frac{7}{3}c+\frac{15}{4}d+\frac{31}{5}e$$

$$f_2=\int_{2}^{3}f(x)dx=a+\frac{5}{2}b+\frac{19}{3}c+\frac{65}{4}d+\frac{211}{5}e$$

解此五個方程式得

$$a=f_{-2}+\frac{3}{2}\triangle+\frac{1}{3}\triangle^2-\frac{1}{12}\triangle^3+\frac{2}{75}\triangle^4$$

$$b=\Delta+\Delta^2-\frac{1}{12}\Delta^3$$

$$c=\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{1}{4}\Delta^3-\frac{1}{10}\Delta^4$$

$$d=\frac{1}{6}\Delta^3$$

$$e=\frac{1}{30}\Delta^4$$

此處

$$\Delta=f_{-1}-f_{-2},\quad \Delta^2=f_0-2f_{-1}+f_{-2}$$

$$\Delta^3=f_1-3f_0+3f_{-1}-f_{-2},\quad \Delta^4=f_2-4f_1+6f_0-4f_{-1}+f_{-2}$$

代入拋物線方程式即得欲求之式。求此式之微分係數得

$$f'(x)=b+2cx+3dx^2+4ex^3$$

解方程式

$$b+2cx+3dx^2+4ex^3=0$$

求其在零與一之間之實根乘組距加於衆數組之下限，即得衆數。

上述收入例中若用此法求衆數得

		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
f_{-2}	2668466				
		344568			
f_{-1}	3013034		-212880		
		131688		10821	
f_0	3144722		-202059		37784
		-70371		48605	

f_1	3074351		—153454
		—223825	
f_2	2850526		

因此

$$b=130786.3$$

$$2c=-218266.3$$

$$3d=5410.5$$

$$4e=5037.9$$

故方程式爲

$$x^3+1.07x^2-43.32x+25.96=0$$

解此方程式可用牛頓求近似根法 (Newton's method) 或任何其他方法。此式左邊在$x=0$時爲正數。$x=1$ 時爲負數。可見0與1之間有一根。此根爲.61至兩位小數。故由此式求得之乘數爲961,與實際乘數957較近,由此式求得乘數之錯誤適爲由丘培或巴萊方法求得乘數 (965) 錯誤之一半。倘欲更求精確,當然可配合高次拋物線。此則又須視研究問題所需之確度而定也。

VI.

次數分配之重要的度量,用本文所述之方法,皆能精確求得。若再輔以圖示則分配之性質,已能了然; 故通常無須配合曲線。倘所欲研究者爲某一分配之本身性質而不欲由此推論

同類之一般的分配性質(換言之,倘分配爲全體分配,而非抽樣分配),則配合曲線初非必須者。例如本文所述美國1918年之個人收入分配。倘配以曲線,則曲線上之百分位數,衆數,算術平均數,通常與實際之百分位數,衆數,算術平均數不同。然則曲線上之此等度量,究相當於實際上之何種事實,頗費解釋。

此處並非反對配合次數曲線,配合次數曲線自有其重要之用處。蓋分配之形式,往往呈凹凸不勻之狀,此種分配每有修勻之必要,然此點又其小焉者也。倘分配爲抽樣的分配,則可由配合之曲線推及全體分佈之性質,用機率的理論,推究其形成分配形式之原因;或考其變遷之趨向、(例如進化論中用次數曲線之理論,研究生物之特徵的分配之演進),或探其定則,以觀宇宙之究竟、(例如物理學中普倫克(Planck)氏研究完全輻射體之各波長,幅射强度之分配,配合次數曲線後,用以量恆星之溫度,因此推論恆星之進化)。配合次數曲線之重要,非數言能盡。然無論是否需要配合曲線,分配之轉矩皆須準確求得。區區私意,故認此爲次數分配分析之基本問題。

中國歷代名人年壽之統計研究

朱 君 毅

I.［本研究之根據］　本研究係以梁廷燦先生所編之歷代名人生卒年表(商務印書館出版)爲根據。本表所錄歷史人物,垂五千人,上起孔子,以迄最近(西歷紀元及1900年)。凡稍有著述行事,足爲世人所觀感,而生卒見於載籍者,靡不錄之。五千人中,有歲數可考者,計名人3901人,帝王210人,高僧561人,閨秀58人;此爲本研究之資料(本研究以周秦之人數太少,故自漢始)。

II.［本研究之目的］　本研究之目的,在求每一朝代或每一世紀各類人物之平均年壽爲多少;及歷代人物之年壽,自古迄今,有無逐漸增高或逐漸減低之趨勢。

III.［本研究之方法］　各代人物,多少不同。若欲求各代人物年壽之平均,以作比較,則各代人數,不應大相懸殊。例如魏

與晉，宋及隋，各自分立，人物均不甚多。因之，魏與晉，隋至宋，唐五代，均各併爲一時期。計共得以下時期：漢；魏晉；宋至隋；唐五代；宋；元；明；清。茲將各朝代之分期，起訖，及其所當西紀年數，歷年若干，列表如下。

朝代	起訖	西紀	歷年
漢	自漢高帝元年 至建安廿四年	前206——後219	425
魏晉	自魏黃初元年 至晉元熙元年	後220——419	199
宋至隋	自宋永初元年 至隋大業十三年	420——617	197
唐五代	自唐武德元年 至周顯德六年	618——959	341
宋	自宋建隆元年 至景定四年	960——1263	303
元	自元至元元年 至至正廿七年	1264——1367	103
明	自明洪武元年 至崇禎十六年	1366——1643	277
清	自清順治元年 至宣統三年	1642——1911	269

惟朝代無論如何合併，長短仍然不同，故復按世紀分爲二十時期如下：

前200—1，後1—100，後101—200，201—300，301—400，401—500，501—600，601—700，701—800，801—900，901—1000，1001—1100，1101—1200，1201—1300，1301—1400，1401—1500，1501—1600，1601—1700，1701—1800，1801—1900。

朝代分期與世紀分期既定，遂將年齡分爲五歲一組，如15—20，20—25等，按照朝代，作一年壽分配表，如表一。次復按照世紀作一年壽分配表，如表二及表二（續）。次復將帝王年

壽按照朝代作一年壽分配表，如表三。閨秀及高僧，因人數太少，不能為之按照朝代分配，故各作一歷代年壽分配表，如表四及表五。

復次求歷代名人按朝代之人數，平均年壽（算術平均數）及標準差如表六；求歷代名人按世紀之人數，平均年壽，及標準差如表七；求歷代帝王按朝代之人數，平均年壽，及標準差如表八；求歷代閨秀及高僧之人數，平均年壽，及標準差如表九。

表　一

中國歷代名人年壽按照朝代分配表

朝代 次數 年壽(以歲計)	漢	魏晉	宋至隋	唐五代	宋	元	明	清	總數
15——20							1	2	3
20——25	2	2	1		1		1	10	17
25——30	4	2	2	3	1		5	19	36
30——35	4		6	1	1	1	11	38	62
35——40	4	10	8	2	5	3	22	38	92
40——45	8	11	7	8	20	8	32	72	166
45——50	10	20	16	8	39	8	32	86	219
50——55	11	15	24	16	50	22	74	116	328
55——60	6	18	19	28	49	18	96	155	389
60——65	26	17	25	34	82	23	119	196	522
65——70	7	14	20	41	91	26	133	177	509
70——75	24	11	26	38	75	29	144	204	551
75——80	13	8	16	26	71	26	124	174	458
80——85	26	4	10	7	48	14	104	128	341
85——90	9	4	7	6	27	8	44	36	141
90——95	5	1	1	4	4	1	14	10	40
95——100		2	3	1	1	3	3	7	20
100——105						1	2		3
105——110	1		1						2
125——130			1						1
155——160							1		1
總　數	160	139	193	223	565	191	962	1458	3901

表 二

中國歷代名人年壽按照世紀分配表

年壽（以歲計）＼世紀＼人數	前200—1	後1—100	101—200	201—300	301—400	401—500	501—600	601—700	701—800	801—900
15——20										
20——25	1		1	1	1	1				
25——30			4	2		2		1	2	
30——35	1		3			3	3	1		
35——40			4	2	8	5	3			
40——45	1		7	6	3	8	1	4	3	
45——50		2	7	10	9	11	6	3	4	1
50——55	1	2	6	9	5	13	12	9	8	1
55——60		2	4	6	10	15	6	4	21	
60——65	5	4	16	8	9	10	16	11	17	1
65——70		3	3	9	6	5	13	13	19	1
70——75	9	6	7	5	7	10	16	12	14	2
75——80	1	3	8	5	4	8	7	4	16	3
80——85	6	9	8	4	2	4	7	4	1	1
85——90	5	3	1		3	3	4	3	3	
90——95	2		1	2		2		1	1	1
95——100				1	1	1	2	1		
100——105										
105——110			1				1			
125——130							1			
155——160										
總 數	32	34	81	70	68	101	98	71	109	11

表 二 (續)

中國歷代名人年壽按照世紀分配表

世紀 人數 年壽(以歲計)	901—1000	1001-1100	1101-1200	1201-1300	1301-1400	1401-1500	1501-1600	1601-1700	1701-1800	1801-1900	總數
15——20								1	1	1	3
20——25		1						2	2	7	17
25——30		1				1		4	8	11	36
30——35		1			1	2	1	14	15	17	62
35——40	2	4	1	1	2	4	7	15	19	15	92
40——45	2	13	4	5	7	4	9	22	34	33	166
45——50	7	14	12	9	8	3	9	30	37	37	219
50——55	6	26	14	17	15	16	28	40	59	42	328
55——60	6	25	15	16	16	25	31	60	74	53	389
60——65	19	31	19	28	15	28	34	94	101	52	522
65——70	22	37	32	27	14	34	42	87	101	43	509
70——75	19	23	28	31	18	37	38	118	105	46	551
75——80	10	26	23	33	16	32	31	111	94	23	458
80——85	6	14	18	20	11	24	34	85	75	9	341
85——90	5	5	9	14	8	9	14	26	22	4	141
90——95	1	3		1	1	5	3	10	5	1	40
95——100			1	1	3	1	1	3	3	1	20
100——105					1	1	1				3
105——110											2
125——130											1
155——160							1				1
總　數	105	224	176	203	136	226	284	722	755	395	3901

表　三

中國歷代帝王年壽按照朝代分配表

朝代／數／年壽（以歲計）	漢	魏晉	宋至隋	唐五代	宋	元	明	清	總數
0——5	2								2
5——10	1		2		1				4
10——15	1		1		1				3
15——20		2	12	2				1	17
20——25	3	3	6	2	1	1	1	1	18
25——30	2	2	5	3	2	1			15
30——35	4	2	6	4	3	2	1	1	23
35——40	1	4	5	3	4	2	6	1	26
40——45	2	3	1	1	4	1	1		13
45——50	4	4	7	2	3		1		21
50——55	2	1	2	7	6	1			19
55——60		2	2	3	6		1	1	15
60——65	2	1	1	2	6		1	1	14
65——70		1	1	1	2		1	2	8
70——75	1	1		1	2		1		6
75——80				1	2		1		1
80——85				1	1	1			3
85——90			1					1	2
總　數	25	26	52	33	42	9	14	9	210

表 四

中國歷代閨秀年壽分配表

年壽(以歲計)	次 數
15——20	2
20——25	4
25——30	5
30——35	4
35——40	5
40——45	4
45——50	3
50——55	2
55——60	6
60——65	3
65——70	5
70——75	4
75——80	3
80——85	6
85——90	2
總 數	58

表 五

中國歷代高僧年壽分配表

年壽(以歲計)	次 數
20——25	1
25——30	2
30——35	4
35——40	7
40——45	4
45——50	8
50——55	23
55——60	31
60——65	52
65——70	72
70——75	105
75——80	96
80——85	75
85——90	46
90——95	13
95——100	16
100——105	1
105——110	1
115——120	1
125——130	1
155——160	1
290——295	1
總 數	561

表六

中國歷代名人按照朝代之人數,平均年壽及標準差

朝代	人數	平均年壽(以歲計)	標準差
漢	160	65.75	19.20
魏晉	139	60.75	16.15
宋至隋	193	62.58	16.00
唐五代	223	65.40	11.10
宋	565	66.20	12.50
元	191	66.05	13.35
明	962	67.00	14.10
清	1458	63.25	14.95
總計	3901	平均=65.70	平均=14.25

表七

中國歷代名人按照世紀之人數,平均年壽及標準差

世紀	人數	平均年壽(以歲計)	標準差
前 200—0	32	72.15	16.25
後 0—100	34	71.90	11.25
101—200	81	59.65	17.70
201—300	70	59.55	15.05
301—400	68	59.20	15.00
401—500	101	58.95	15.80
501—600	98	6 .80	15.65
601—700	71	64.75	13.55
701—800	109	64.55	11.35
801—900	11	73.85	12.45
901—1000	105	67.15	11.10
1001—1100	224	63.55	13.05
1101—1200	176	68.90	11.75
1201—1300	203	68.65	11.85
1301—1400	136	66.25	14.35
1401—1500	226	68.05	12.65
1501—1600	284	67.63	13.95
1601—1700	722	67.75	13.60
1701—1800	755	64.80	14.75
1801—1900	395	57.89	13.50
總計	3901	平均=65.70	平均=14.25

表八

中國歷代帝王按朝代之人數，平均年壽及標準差

朝代	人數	平均年壽(以歲計)	標準差
漢	25	33.70	18.30
魏晉	26	40.75	14.80
宋至隋	52	32.79	16.40
唐五代	33	45.65	16.95
宋	42	48.90	15.95
元	9	40.80	16.60
明	14	45.00	13.95
清	9	49.95	22.60
總計	210	平均=41.30	平均=17.75

表九

中國歷代閨秀高僧之人數，平均年壽及標準差

	人數	平均年壽(以歲計)	標準差
閨秀	58	55.05	19.85
高僧	561	73.15	16.30

IV.［本研究之結果］ 本研究之結果，可作爲以下之敘述與解釋：

1. 歷代名人（帝王，閨秀，高僧除外）之平均年壽，漢爲65歲；魏晉爲60歲；宋至隋爲62歲；唐五代爲65歲；宋爲66歲；元爲66歲；明爲67歲；淸爲63歲，計最低者爲魏晉之60歲，最高者爲明之67歲；相差祇有七歲耳。且自漢至淸，平均年壽，並無漸增高或漸減之趨勢，似或高或低，毫無定向。吾人不能謂古人之壽，高出於今人；亦不能謂今人之壽，超過於古人也明矣(參看表六)。

2. 普通人民之平均年壽，鮮有達到40歲者。美國在1900年，其人民之平均年壽爲36.8歲；在一九一三年，其人民之平均年壽爲39.8歲(參看Whipple. G. C: Vital Statistics. p. 431)。在本研究之中，各代名人平均年壽爲65歲。何以如此之高?

此非由於名人之多壽，實因一人必達到相當年齡，始能建設事業；始能立德，立功，立言。故按照表一，欲爲名人，最少必達到15—20歲之年齡，但此種年少人物，自漢至清，亦祇有三人耳。從統計方面看，名人年壽之限度，係自十五歲至一百歲以上；但普通人年壽之限度，係自0歲至100歲以上。故名人之平均年壽，超過普通人之平均年壽，實不足爲奇。

3.歷代帝王之平均年壽，漢爲33歲；魏晋爲40歲；宋至隋爲32歲；唐五代爲45歲；宋爲48歲；元爲40歲；明爲45歲；清爲49歲。計帝王年壽之最低者爲宋至隋之32歲，最多者爲清之49歲；相差有17歲之多。可見帝王年齡之離中差，較名人爲大。此蓋由帝王出生卽爲帝王，不若名人之必經過選擇而始得爲名人。換言之，帝王與普通人同，不若名人之純齊，故其離中差亦應較大。又帝王之年齡，歷代平均爲41歲，此與美國1913年普通人之平均年齡(39歲)相彷彿。其理由爲計算帝王之年壽，與計算普通人相同，年齡最幼者亦必計入，其平均自然較低也。

4.歷代高僧年壽平均(73.15歲)較任何類人爲高。一則其年壽之高，由修養所致；一則所謂高僧者，須年高者始得入選。故關於此點，似無需若何之解釋。

5.歷代閨秀之平均年壽爲55歲。在其分配內，人數旣少，而次數又無密集之點，故其平均年齡，殊無代表之價値也。

我國統計制度之研究

吳　大　鈞

（一）各國統計制度概述

我國統計事業係屬始創，故欲研究我國統計制度，必先就世界三十餘先進國家之統計制度，加以簡單分析，以資借鑑。惟各國統計事業，因國情不同，設施各異，玆分六點歸納比較之。

一　各國主辦統計機關隸屬之系統

主辦統計機關係指主辦全國重要統計，如調查戶口，編製年鑑之機關而言。其隸屬之系統，各國不同。

1. 直隸內閣者，有意、日、法、丹、波蘭、捷克、墨西哥、萊多尼亞、愛多尼亞等九國。
2. 屬商部或工部者，有美、英、加拿大、印度、匈牙利、土耳

此页无页码

其、西班牙、羅馬尼亞、保加利亞等九國。

3. 屬內政部或社會部者，有比、荷、澳大利亞、芬蘭、挪威、互哥斯拉夫等六國。

4. 屬財政部者，有瑞典、葡萄牙、瑞士、立陶宛等四國。

5. 屬經濟部者，有俄、德、希臘等三國。

6. 屬外交部者，有盧森堡一國。

二 各國主辦統計機關所掌之職務

1. 職務集中。全國主要統計均歸最高統計機關辦理者，有德、俄、日、加拿大、丹麥、捷克、互哥斯拉夫、瑞士、匈牙利、挪威、瑞典、土耳其、芬蘭、羅馬尼亞、盧森堡、澳大利亞、埃及、立陶宛等十八國。

2. 職務未盡集中。主辦統計機關僅辦理一部分之重要統計，如人口與年鑑等，其餘則分由他機關辦理者，有意、比、奧、法、荷、愛多尼亞、希臘、萊多尼亞、墨西哥、保加利亞、波蘭等十一國。

3. 職務散亂重複。全國統計工作不能集中，而各機關各自爲政者，有美、英、西、葡等四國。

三 各國主辦統計機關直轄之人員

此項人員各國多寡不同，其常時人數約計如下：德一六〇〇人，波蘭八五〇人，捷克七五〇人，美六〇〇人，加拿大五五〇人，匈牙利五〇〇人，俄三五〇人，互哥斯拉夫三〇〇人，保

加利亞·荷蘭各二五〇人，瑞士二〇〇人，法·日·瑞典·羅馬尼亞各一五〇人，奧·希臘各一〇〇人，埃及九〇人，芬蘭八〇人，英·挪威各七〇人，萊多尼亞六〇人，比·愛多尼亞各五〇人。惟以上均係各國主辦統計機關之人員，至於其他機關與地方政府之統計人員，則各國主辦統計機關均無任免之權。

四　各國主辦統計機關與各機關統計部分之關係

1.中央統計統歸主辦統計機關辦理，而其他各部不另有統計組織者，爲德、日、丹麥、捷克、巨哥斯拉夫、立陶宛等六國。

2.中央多數機關有統計組織者，爲法、英、美、加拿大、埃及、印度、比利時、瑞士、挪威、瑞典、芬蘭、西班牙、葡萄牙、土耳其、奧、希獵、羅馬尼亞、盧森堡等十八國。

3.中央少數機關有統計組織者，爲匈牙利、保加利亞、墨西哥、萊多尼亞、愛多尼亞等五國。

4.中央其他機關雖有統計組織，而均歸主辦統計機關之直接指揮者，爲俄、意、比、荷、波蘭等五國。

五　各國統計事務聯絡機關之組織

1.無固定聯絡機關者，爲美、英、加拿大、澳大利亞、印度、丹麥、西班牙、挪威、芬蘭、土耳其、墨西哥、萊多尼亞、立陶宛等十三國。

2.有聯絡機關，如統計會議，或統計委員會等，而僅由各

機關代表組織者，爲德、瑞典、比、葡、荷、奧、羅馬尼亞、埃及、盧森堡等九國。

3。聯絡機關由各機關代表及統計專家與教授組織者，爲俄、意、日、法、瑞士、匈牙利、巨哥斯拉夫、保加利亞等八國。

4。聯絡機關除各機關代表，統計專家，教授外，並有法團代表組織者，爲波蘭、揑克、希臘、愛多尼亞等四國。

六　各國地方統計之組織

1。地方政府無統計組織，其事務均歸中央爲之辦理者，有比、荷、丹麥、加拿大、埃及、巨哥斯拉夫、保加利亞、盧森堡等八國。

2。少數重要地方政府有統計組織者，有芬蘭、土耳其、羅馬尼亞、奧、葡、瑞典、印度、挪威、匈牙利、愛多尼亞、立陶宛、萊多尼亞、揑克等十三國。

3。地方政府均有統計組織，但歸中央直接指揮者，有德、俄、日、意等四國。

4。各地方統計事務由中央機關派遣專員辦理者，有英、法西班牙、瑞士、墨西哥、希臘等六國。

5。地方政府自辦統計者，有美、波蘭、澳大利亞等三國。

七　各國統計制度之比較

依以上六種簡單分析觀之，可見各國統計制度尙未盡趨

一致。

第一　主辦統計機關之隸屬，有六種不同之系統，惟以屬於內閣與商工兩部者爲最多。

第二　主辦統計機關所掌職務，有已能集中者，有未盡集中者，更有統計工作且甚感紛歧重複者。

第三　主辦統計機關所轄統計人員之常時人數，自五十人至九百五十人不等，而德國則多至一千六百人。惟各國主辦統計機關於其他機關或下級政府之統計人員，均無直接任免之權。

第四　主辦統統計機關與各機關統計部分之關係，亦不一致。有中央各部不另設統計組織者，有中央各部雖有統計組織但歸主辦統計機關直接指揮者，更有各自爲政者。

第五　各國統計事務之聯絡在多數國家并無固定之機關。其他有聯絡機關者，其組織亦復各不相同，蓋有專由機關代表組織者，有參加專家與教授者，并有兼請法團代表參加者。

第六　關於各國地方統計，有地方政府並無統計組織者，有地方統計組織係歸中央直接指揮者，有由中央機關於各地派遣專員者，惟多數國家其地方統計組織尙未普遍，且有少數國家地方政府自辦統計與中央各不相謀者。

若就各列强之統計制度而論，則系統分明組織完密者，莫如德國。事權集中者，莫如俄國。意日兩國則將次集中，力求統

一。而法國則雖有中央統計機關,而事權則漸趨分散。至於英國則統計工作零散重複。美國則中央與地方皆係各自爲政,復無固定之聯絡。此或因習尙守舊,不欲更張,或以政治組織上關係,改變困難,要皆各有其原因。雖然,其統計工作,已均有良好之成績。我國統計事業,既屬始創,自當博採衆善,效法先進,惟仍須斟酌國情,分別捨取,決不能盡襲西制也。

(二) 我國統計制度之史的演進

在研究我國統計新制度之前,請略述過去之歷史。我國統計制度之歷史,約可分爲三期: (一)清末籌備立憲至光復時期,(二)民國成立至奠都南京時期,(三)設立五院至主計處成立時期,玆分述如下:

一 清末籌備立憲至光復時期

我國統計肇端最早;自三代以迄有淸,統計資料散見於歷代官書,惟雖有統計之實,向無統計之名。直至淸末,因籌備立憲,光緒三十二年始於憲政編查館內,設立統計局,爲最高統計機關。旋於三十四年京內民政、度支、陸軍、郵傳、農、工、商等部,及大理院,復先後設立統計處。雖內部之組織各殊(例如民政部統計處分調查,編制兩科。郵傳部分總務、路政、航政、電政、郵政五科)。但皆受統計局之指導。同年各省次第成立調查局。局內分設法制、統計兩科。其統計科置有三股,分掌(一)

外交、民政、財政，(二)教育、軍政、司法，(三)實業、交通等統計。此項調查局亦受統計局之指導，而隸屬於各該省督撫。此外各司、道、及府、廳、州、縣、均經規定設統計處，並受調查局之指導，成爲一貫之系統。是爲我國統計定制設官之嚆矢。

至於全國統計工作之聯絡，雖無類似中央統計委員會之設置，但統計局除局內員司外，另設有諮議員，由京內外官員及各省調查局總辦充之，藉以討論問題，交換意見。

二 民國成立至奠都南京時期

民國元年中央政府各部，除財政部之統計工作係由他科兼辦外，餘如外交、內務、陸軍、海軍、司法、教育、農林、工商、交通等九部，皆有統計專科之設置。翌年教育部裁撤統計科，其事務改歸文書科辦理，而農林，工商併爲農商部，與蒙藏院各設統計科。大理院則由記錄科兼辦統計事宜。民國三年總統府政事堂設立主計局置局長一，參事四，僉事六，主事及辦事員若干人，其職掌爲(一)籌備關於財政事項，(二)稽核關於預算事項，(三)關於財政文件之擬定及編輯保存事項，(四)關於統計事項。該局之地位雖屬甚高，但係偏重於財政之整飭，尙非統計中心機關。同年交通部之統計科復經取消，隨又有交通統計委員會之設，職責更爲專一，而審計院幣制局與全國水利局亦各有統計之組織。直至民國五年，撤消政事堂，恢復國務院，於院內設統計局，掌理(一)各部院統計之統一事項，(二)

不專屬於各部院之統計事項,(三)彙編統計報告事項,(四)各官署統計會議事項,於是始有最高統計機關。此後教育、交通等部統計科,皆經恢復,外交部之統計事務則歸併於條約司第四科辦理。又全國菸酒事務署與航空署亦次第有統計組織。至於地方方面,統計機關之成立,大抵始於民國二年,各省公署及所屬廳處,多有統計處或統計科股之組設,情形殊不一致。如江蘇、山西等省公署,皆係設統計處。雲南則設統計局。湖北初亦置統計處。後經改為獨立股,直隸於政務廳。其在下級機關之有統計組織者,則山西係於所轄各縣遍派統計主任,湖北係酌於較大縣分派統計專員。

以上為民元至十五年國內統計制度之概略情形。當時中央與各地方統計機關,雖經次第設立,惟因各自為政,不相為謀,加以中心機關,未能充分實行其職務,聯絡貫通,以總其成,故統計局雖負有統一統計工作,彙編統計報告,與主持各機關統計會議等責任。而十餘年來曾未有清查之舉辦,統計會議之舉行,與夫總報告之編印,亦可見當時之政府對於統計事業之未嘗努力矣。

三 設立五院至主計處成立時期

國府奠都南京後,百廢待舉,興革萬端。建國大綱中既規定訓政時期應調查戶口,測量土地,而歷屆中央會議,復經決定佃租制度,工人生活狀況等統計,須限期完成。統計之應用,

日見殷切。於是各方爲應時勢之需要起見，各大學校中增設統計科目，諸私人團體亦競舉行統計事業。政府方面，內而院部，外而省市，其統計部分亦紛然組設。截至主計處成立之時止，中央各機關之統計組織有如下述：

1. 中央各院部會署

甲　有統計組織者可分爲七類

(1) 設統計處者　立法院　鐵道部

(2) 設統計司者　內政部

(3) 設統計科者　實業部　審計部　海軍部　軍政部陸軍署

(4) 設專科辦理統計者　財政部會計司　教育部　交通部　司法行政部　銓敍部

(5) 設調查科者　考試院　建設委員會

(6) 設統計股者　財政部統稅署　賦稅司　國定稅則委員會　考選委員會

(7) 設專員辦理統計者　行政院　內政部衛生署　外交部　禁烟委員會　導淮委員會　賑務委員會　最高法院檢察署　監察院

乙　有辦理統計之職務但未有統計組織或由其他部分兼辦統計者

軍政部　軍務　軍醫　軍械各司　兵工　軍需各署

海軍部　軍務　軍械兩司

財政部　關務署　公債司

實業部　各司

2.中央各部直屬機關

甲　有統計組織者可分爲三類

(1) 設統計處者　海關　國際貿易局

(2) 設統計科者　總稅務司

(3) 設統計股者　鹽務稽核所

乙　由其他部份兼辦者

關監督　印花稅處　捲烟稅務處　國有鐵道局會計處　商標局

上列四院，十二部，四委員會之統計人員，總數共爲二百七十六人。不同之職銜將及二十種，計處長二，司長一，科長二十一，科員一百零八，辦事員二十一，書記三十五，專員五，技正一，技佐三，技士一，書記官一，股長三，主任三，辦事三，事務員十四，調查員三十七，助理八，錄事六。若依學歷分析，則留美者十八，留法者一，留俄者一，留日者十三，大學畢業者九十二，高等或專門學校畢業者六十六，國內統計專修學校畢業者五，中學畢業者三十六，其他學歷者四十一。再就主管人員之俸給等級論，則六七五元者一人，五二五元者一人，五〇〇元者一人，四〇〇元者三人，三七〇元者一人，三五〇元者三

人，三四〇元者一人，三一〇元者一人，三〇〇元者一人，二八〇元者一人，二五〇元者一人，一八〇元者一人，一七〇元者一人，一五〇元者一人，一四〇元者一人，一二〇元者一人。

以上二十機關全年之經費，總數共約百萬元，其中俸給佔大部分，爲九十五萬五千九百九十元。有調查費者，僅立法院統計處，約一萬八千元，國定稅則委員會一萬一千二百四十四元，鐵道部統計處三千六百元，與考選委員會統計股五百元而已。

至各省市之統計組織，據有報告之十四省六市觀察，計設統計股者有湖北、吉林兩省政府之祕書處，與南京市政府之祕書處、山東、湖北之民政廳，安徽、浙江、山東、湖北、江蘇、雲南之財政廳，安徽、湖北、陝西、山西、福建之教育廳，安徽、浙江、湖北、陝西、察哈爾之建設廳，以及上海市之社會、公安、教育、衞生等局。設統計專員者，有河南省政府之祕書處，天津、漢口市政府之祕書處，浙江之民政廳，山東、熱河之建設廳，與南京市之社會局等。此外僅由其他部分兼辦，並未設有專股或專員者，則尙有多處。

以上各省市有統計組織者，共五十九處。統計人員總數一百九十人。若依學歷分析，則留美者一人，留日者五人，大學畢業者五十五人，高等或專門學校畢業者二十八人，國內統計專修學校畢業者十三人，中學畢業者五十人，其他學歷者三十八

人。至全年經費總數共爲二十萬三千餘元，就中調查費僅佔八千餘元，內上海市社會局統計股，每年四千八百元，福建教育廳統計股，每年三千五百元。

在此第三時期統計機關設置固多，惟因系統未立，職責不明，工作既易重複，進行亦覺困難。立法院統計處雖有編製法律、政治、社會、經濟等一切統計，統計年鑑，與其他單行報告之責任，但無指導監督其他統計機關之權。關於聯絡統率仍有感於統計中心機關之缺乏。故於十九年中央各機關乃推立法院統計處召集聯席會議決定：（一）建議政府設立中央統計委員會，以統一聯絡各機關之統計工作，（二）於中央統計委員會未成立之前，暫行聯合組織中央統計聯合會，以爲過渡辦法，（三）組設中國統計學社，以促進學術上之研究與聯絡。旋中央統計聯合會與中國統計學社先後成立。前者由各機關代表共同組織，後者則由國內統計專家教授與各機關統計人員組織之。未幾三屆四中全會議決設立中心計政機關，主計處遂行成立，而我國統計新制度於以產生。

（三） 我國統計新制度之研究

茲根據國民政府公布之各種有關統計法規，將我國統計新制度分爲六點研究之。

一 主辦統計機關隸屬之系統

吾國主辦全國統計之統計局係屬於主計處，而主計處則係採會議制。舉凡計政制度規章之擬訂，計政人員之任免，以及本處各局事務之關聯，均取决於主計會議。由主計長與六主計官組織之。同時三局之正副局長卽由主計官分任，故統計局並非主計處下之另一機關，實卽主計處之本體。

主計處係一超然組織，因其不屬五院，而直隸國民政府。主計長則秉承國民政府之命，綜理處務，故吾國主辦統計機關亦成爲超然組織。至於吾國統計機關所以成爲超然組織之原因，蓋以吾國爲求五權分立，而設五院。五院在行使職權時，各需統計以爲根據，惟一院所需之統計，因職務之特殊，與權限之關係，不能由他院爲之供給，勢必於五院以外另有統計機關，庶材料無偏倚之虞，而五權方能充分行使也。

二 主辦統計機關所掌之職務

主計處統計局管理之事務有四：

1.各機關統計人員之任免，遷調，訓練及攷績。

2.各機關統計事務之指導，監督。

3.各機關統計方法與圖表格式之統一。

4.各機關統計範圍之劃分，與工作之分配。

主計處統計局主辦之事務有六：

1.屬於全國基本國勢調查性質之統計。

2.不應專屬於任何機關範圍之統計。

3.各機關未及調查編製之統計。

4.各機關公務人員及其工作記錄冊籍之掌管。

5.立法、司法、考試、監察各機關所需要之特種統計。

6.全國統計總報告之編製。

三 主辦統計機關直轄之人員

主計處統計局之內部,置正副局長各一人,科長三人至五人,科員五十人至一百人,并得聘用專門人員,與酌用雇員。

各機關主辦統計人員,分爲(一)統計長簡任,(二)統計主任薦任,(三)統計員委任。至於各機關統計佐理統計人員之名額等級,則由主計處按其事務之需要定之。

各機關之統計事務,除簡單者由該管會計人員兼辦外,均歸統計長,統計主任,或統計員主辦。該項主辦統計人員應直接對於主計處負責,並分別受該管上級機關主辦統計人員之監督指揮,同時依法受所在機關長官之指揮。至於各機關統計佐理人員則應分別受該機關主辦統計人員之監督指揮。

主計長得隨時調遣各機關辦理統計人員。

四 主辦統計機關與各機關統計部分之關係

各機關分別辦理有直接關係之統計,其屬全國基本國勢調查性質,或不屬主管範圍,與未及調查編製者,由主計處統計局辦理之。

各機關統計事務概歸主計處統計局指導監督。

各機關之統計報告應由其主管長官，與其主辦統計人員會簽後，呈送該管上級機關，依次遞呈至中央最高主管機關呈由國民政府發交主計處。但由上級主計機關交辦者，得由主辦統計人員，單獨遞呈主計處。

各機關主辦統計人員，對於所在機關原有統計部分之組織，認為有修正之必要者，得擬具修正方案，呈請主計處或呈由該管上級機關主辦統計人員，核轉主計處核辦。

各機關統計人員概歸主計處任免遷調，直接對於主計處負責，并依法受所在機關長官之指揮。該項人員之敘級，由主計處辦理之，并行知所在機關。該項人員之俸給，及其他應支經費，由主計處決定，行知所在機關編入其預算。

五　統計事務聯絡機關之組織

各級政府及中央各機關統計範圍之劃分，由國民政府主計處，根據需要情形，擬具方案，提經全國主計會議之議決，呈請國民政府核定之。

全國主計會議以四種人員組織之：(一)主計處之主計長與主計官，(二)各主要機關主辦歲計、會計、統計之人員，(三)各主要機關之長官或其代表，(四)專門人員，以主計長為主席。

各省政府主計機關，擬具各該省統計方案，提經全省主計會議之議決，由國民政府主計處核定後，轉請省政府公布之。

各市縣政府主計機關,擬具統計方案,呈由上級政府主計機關核定後,轉請所在政府公布之。

此外爲謀統計事務與其他行政事務之聯絡起見,各級政府及其機關並得設立統計委員會,由主辦統計人員與各部分組織(如署、司、廳、處、局、所或科等)指定之人員組織之,以主辦統計人員爲主席。

六 地方統計之組織

各省市縣政府主計機關之內,均分別設置統計機關,以辦省市縣之統計事務,在上項主計機關未成立前,則於各該政府設臨時統計機關,以行使主計機關統計部分之職權,受各該管上級政府主計機關或臨時統計機關之監督指導。

七 我國統計制度與各國之比較

1. 各國主辦統計機關分屬於內閣、商部、工部、內政部、社會部、經濟部、或外交部,而我國則直屬國民政府。
2. 各國統計事務有能集中者,有未盡集中者,更有分歧重複者,而我國各機關統計範圍之劃定,統計工作之分配,圖表格式之製定,與統計辦法之統一,均歸主計處統計局辦理,故事權極爲集中。
3. 各國主辦統計機關僅能直接管轄本機關內之人員,而我國主計處,則有任免遷調訓練考核全國各機關統計人員之權。

4.各國中央各機關統計組織,有歸主辦統計機關指揮者,亦有各自爲政者,而我國各機關主辦統計人員則分爲統計長,統計主任,與統計員均受主計處之監督指導,故系統最爲一貫,工作亦極聯絡。

5.各國統計事務之聯絡,或設統計委員會,或設統計會議,惟多數無固定之機關,而我國則有全國或全省主計會議,與各機關之統計委員會,全國主計會議之規模不獨包括各機關之統計人員,且有各機關長官,與國內專家。

6.各國地方統計組織有歸中央指揮者,有由中央直接派員辦理者,更有自辦統計與中央各不相謀者,而我國之地方統計,則各省市縣政府及其機關均設有統計機關,受主計處之管轄,故全國統計工作最爲一致。

我國新制度自未敢卽稱超越一切,惟綜觀以上六點,誠均有獨到之處,而於集中事權,統一行政,聯絡工作,增進効率各方面,誠不落各國之後。

(四) 我國統計新制度之特徵

綜觀以上所述我國統計制度之研究,可得下列之結論

一　我國之主辦統計機關係一超然組織,不屬於任何機關之下,惟秉承國民政府辦理全國一切統計。如此則所編統

計，不致偏枯，而各種治權機關，均各能得到所需之統計材料，爲其根據，以充分行使其職權。

二　我國主辦統計機關編製全國統計總報告，并辦理全國基本國勢調查，與各機關所不能或未及辦理之統計。如此則全國統計材料，均能集中，而不整齊之材料，亦可補充完全。

三　我國各機關統計人員之任免、遷調、訓練、考核均歸中央主辦統計機關主計處辦理，故統計人員之在該機關中，既有超然之地位，不與一般職員同其進退，其工作自可繼續不斷，而報告亦能準確完整。

四　我國主辦統計機關有指導監督各機關統計事務，劃定統計範圍，分配統計工作，并統一統計方法，與圖表格式之權，故事權極爲集中，而工作亦最爲一致。

五　我國主辦統計機關雖有集中之權，但無獨裁之弊。蓋全國統計之舉辦，必須由主計處統計局根據實際情形，擬具方案，先行提出全國主計會議議决再呈准國府施行。全國主計會議由各機關長官或其代表及主辦統計人員統計專家組織之。在統計方案未經决定之前，各方面均可充分發表意見，既呈准公布之後，則必須一體遵行。

六　我國各機關統計工作之進行，均須依據統計方案，以免紛歧與重複。惟各機關長官因主管行政上所需要之統計，仍得隨時指揮所屬統計人員辦理之。

七　我國各機關統計人員雖由主計處指導監督，惟依法受所在機關長官之指揮，其統計報告亦送由長官簽署後，遞呈上級機關。主計處則立於技術導師之地位，並不抵觸行政之系統。

八　我國各機關長官既免統計技術上指導審核之煩勞，而得統計材料準確之效益。

九　我國全國統計，雖由中央主辦統計機關辦理，惟地方政府於不牴觸上級政府之統計範圍內，仍得辦理地方統計，由各地方政府自定方案，單獨施行，於統一統計行政之中，且不損及地方自治之精神。

十　我國各級政府既得各編其應有統計總報告，而各機關亦得編製主管職務內之統計報告，惟均送呈國府發交主計處彙編全國統計總報告，以總其成，庶國民對於全國現狀，能有整個之觀察。

(五) 我國統計新制度實施之要件

我國統計新制度固已完善，惟欲此制度之推行盡利，尚有待於二種要件：

一　統計系統之確立

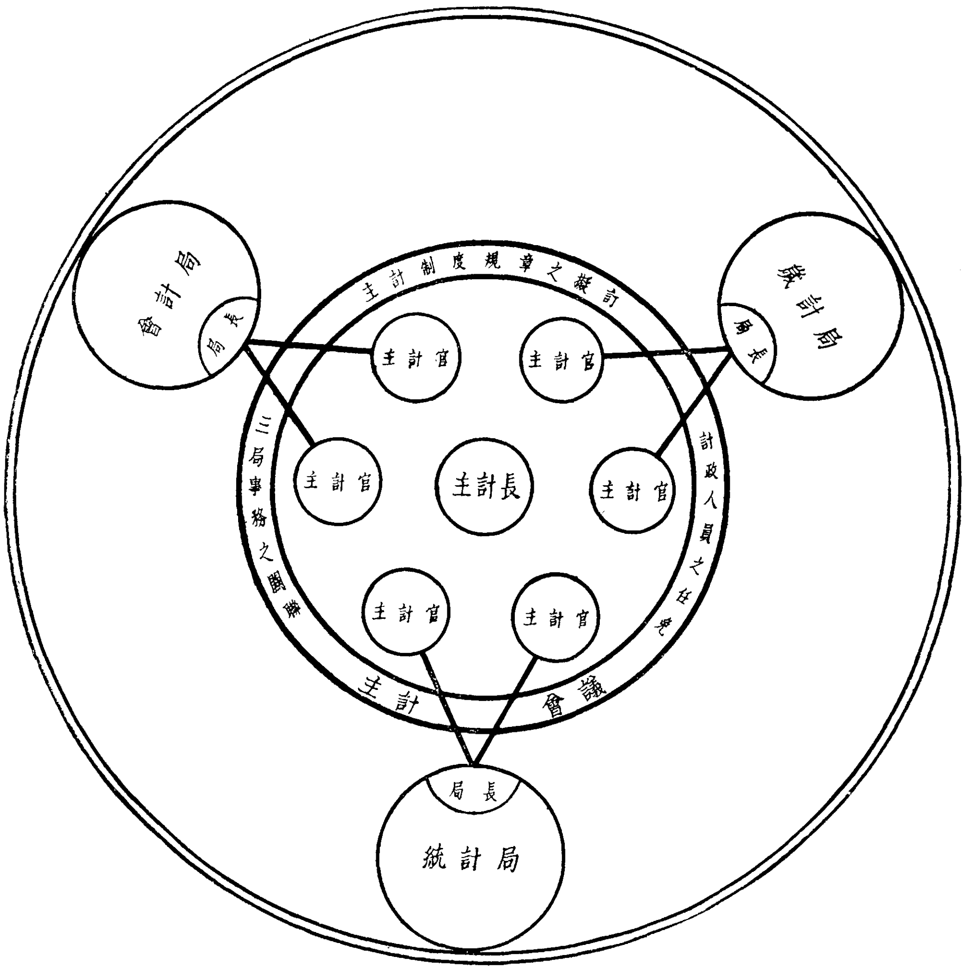
此項新制度之特徵，在有一貫之系統，故欲此制度之實現，必先使統計系統完全確立，職權充分行使，然後事權方得

集中，行政方能統一。

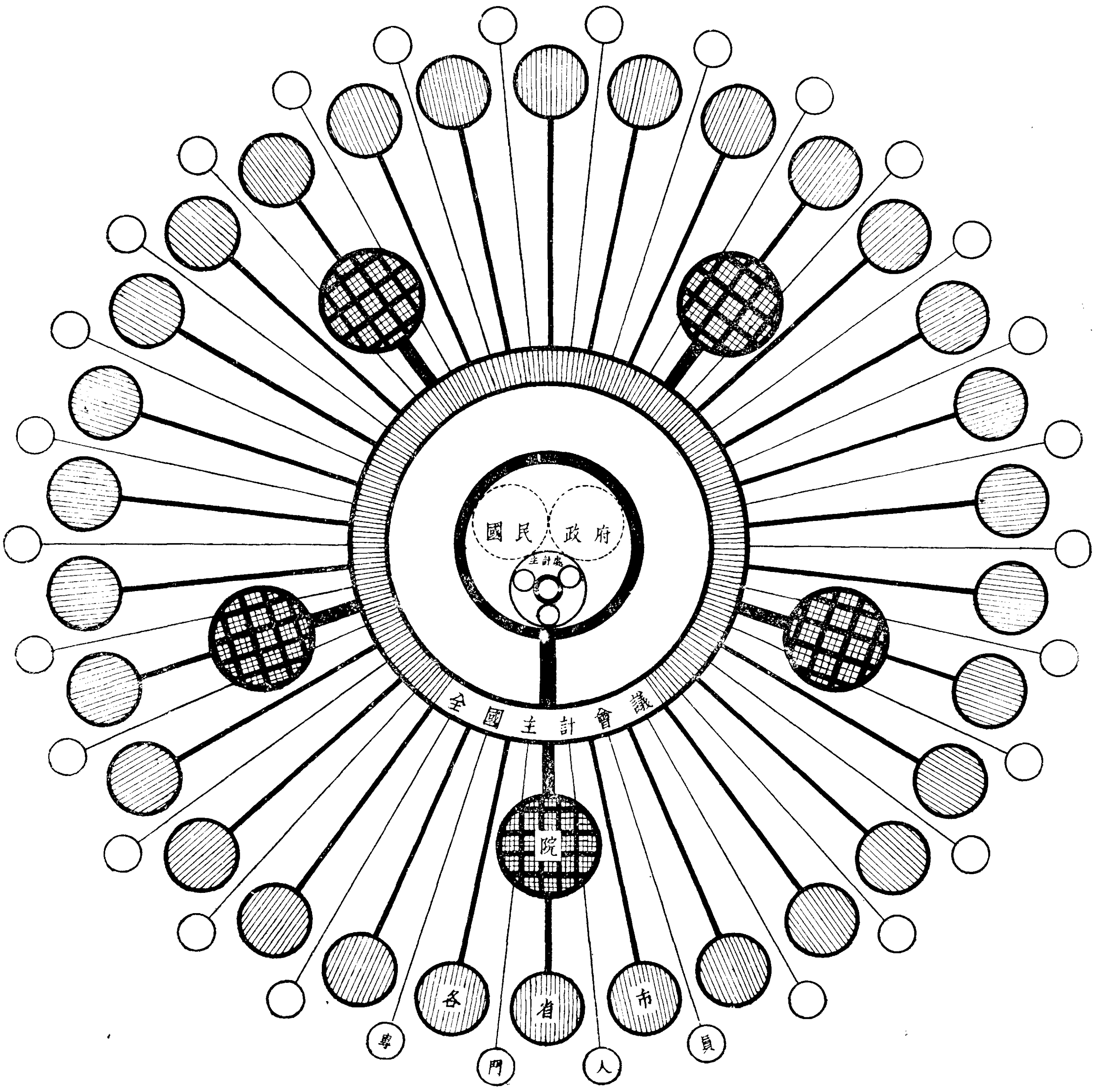
二 統計方案之訂定

統計系統成立之後，主計處應擬定全國統計方案，提出全國主計會議議決，呈准國府施行，此方案之內容包含：（一）統計之機關單位與等級，（二）統計區域，（三）分期統計計劃，（四）統計科目，（五）統計單位，（六）統計表冊格式，（七）調查及編製方法，（八）統計應祕密及應公告之限制。統計方案訂定之後，則全國統計工作方有準繩，而統計方法亦歸統一。

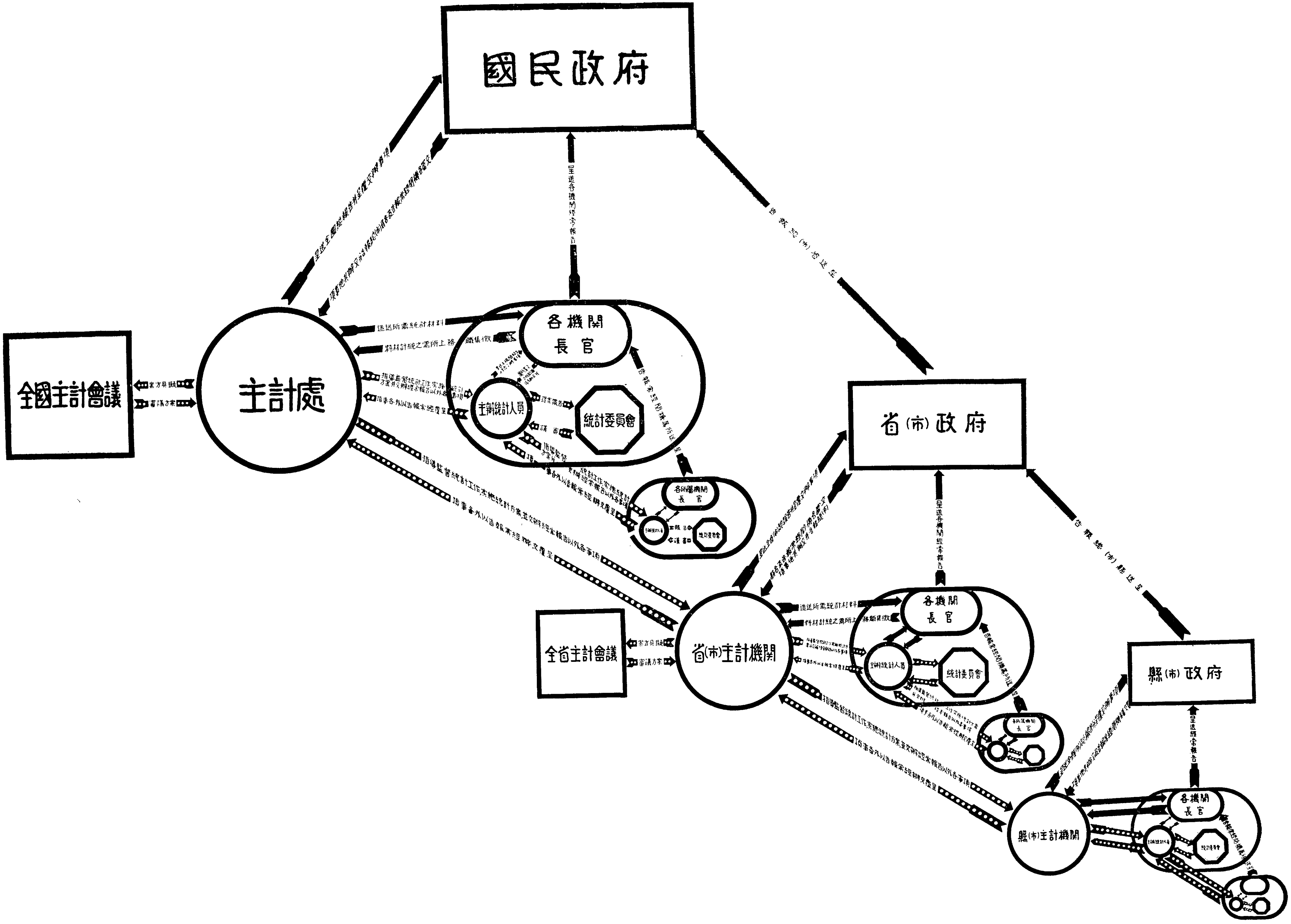
主計處組織圖



全國主計會議組織圖



全國統計系統與工作程序圖



全國統計系統與行政程序摘要

一 統計組織之系統

(甲)「中央政府主辦統計之機關爲國民政府主計處,省市縣政府主辦統計之機關設於各該政府主計機關之內。」(統計法施行細則第二條第一項)

(乙)「各省市縣政府主計機關除受上級政府主計機關之直接監督與指導外,並受所在政府長官之指揮。

各機關或所屬機關主辦統計人員,應對於所在政府主計機關指定之上級主辦統計人員負責,如未經指定上級主辦統計人員時,應直接對於所在政府主計機關負責。

各機關或所屬機關主辦統計人員除受該管上級主辦統計人員或所在政府主計機關之直接監督與指導外,並受所在機關長官之指揮。」(統計法施行細則第七條)

二 經常統計報告之編送

(甲)「統計報告之編送,自最下級機關單位開始,依次遞至最高級機關單位。」(統計法施行細則第三十一條第一項)

(乙)「關於經常統計報告之呈送,各級政府各機關之所屬機關主辦統計人員編製該所屬機關統計報告,送由主管長官簽名蓋章後,送呈上級機關長官,發交該機關主辦統計人員,

連同該機關及其他所屬機關之材料,彙編該機關統計報告,送由主管長官簽名蓋章後,送呈所在政府,發交主計機關,連同各下級政府之材料,彙編該政府之統計總報告。

各下級政府主計機關彙編各該政府統計總報告,送由所在政府長官簽名蓋章後,送呈上級政府,發交該管主計機關,連同本政府各機關之統計報告,彙編該上級政府統計總報告。」(統計法施行細則第五十五條)

三 經常統計報告以外材料之供給

(甲)「各機關需要之統計材料,應通知所在政府主計機關,分飭所在政府有直接關係之機關主辦統計人員或下級政府主計機關,分別查報後,統由所在政府主計機關彙齊具復,遇有現成之材料,或無調查統計之必要,及無調查之可能者,由所在政府主計機關直接具復之。

各機關收到徵集統計材料之文件,應即轉送所在政府主計機關辦理之。」(統計法施行細則第五十四條)

(乙)「各級政府主計機關所需關於經常統計報告以外之材料,得直接命令所在政府各機關主辦統計人員或下級政府主計機關直接呈送之,惟所在政府各機關之所屬機關或下級政府各機關之材料,應由各該管上級主辦統計人員或各該下級政府主計機關轉飭呈轉。」(統計法施行細則第五十六條)

四 統計材料之應用與發表

(甲)「各機關直接調查登記之材料，應先經所在政府主計機關審核後，方得供職務上之應用。」(統計法施行細則第十六條)

(乙)「各級政府統計材料之彙編與發表，由各該政府主計機關爲之。

各機關之統計材料，未經所在政府主計機關之核定，不得發表。」(統計法施行細則第五十三條)

此页空白

清末民政部戶口調查之新研究

陳 長 蘅

一 引言

查前清自光緒三十四年六月宣布九年預備立憲以後，憲政編查館曾進呈逐年籌備事宜清單，規定第一年頒布調查戶口章程，第二年調查各省人戶總數，第三年彙報各省人戶總數，第四年調查各省人口總數，第五年彙報各省人口總數並頒布戶籍法，第六年實行戶籍法。宣統二年十月清廷復宣布提前立憲將九年籌備期間縮短爲六年，意在和緩革命風雲。於是憲政編查館復進呈籌備事宜修正清單，限於宣統三年(即提前二年)將戶口調查辦理完竣。民政部遂於宣統二年再咨各省從造調查戶口，統限宣統三年一律報齊。宣統三年二月，民政部復編訂戶籍法，繕陳憲政編查館覆核。清末籌備立憲各事宜之曾

經発現者，祗此而已。

宣統年間之民政部戶口調查雖頗深入民間，但幷未全部調查完竣，而革命遂起。數年以來美國學者韋爾柯克斯曾特別推重該項調查，認爲有清一代最精確之普查。惜韋氏並未見及原有戶口報告表册，僅由北京美國使館代爲抄得該項調查之分省戶口總數及男女各別人數而加以分析研究。韋氏鑒於原報戶數較口數更爲完全，曾按一九二〇年美國家庭平均每家四·三，人之數第一次推得宣二本部十八省人口爲二萬萬七千七百五十二萬人，外加東三省及各藩屬亦僅爲二萬萬九千四百十六萬四千人。後經本文著者與金陵大學農學院教授卜克氏先後提出異議，韋氏復重新估計，改按每戶平均五人計算，推得中國本部十八省人口爲三萬萬二千二百六十九萬 五千人，全國人口爲三萬萬四千一百七十三萬人。韋氏雖成見頗深，但其熱心探討及實事求是之精神，固有足多者。

又查內務部民國元年五月根據宣統年間戶口調查所彙造戶口表册亦僅列人口總數爲二萬萬三千九百五十九萬四千六百十八人，並註明「外有新疆，湖北，廣東，廣西，各省江寧各屬，及泰甯鎮，熱河各蒙旗，江甯，青州，西安，涼州，伊犂，廣州，西甯等處駐防，滇川邊務均未咨報到部。」且所列人口總數或因原有報告偏而不全，或因整理之時亦有錯訛。遂致計得之性比例爲一三八有奇，甚屬不近情理。據本文著者四年以前之初

步估計,宣末本部人口約爲三萬萬六千九百十萬,全國人口約爲三萬萬八千五百萬。去年北平社會調查所王士達先生復根據更爲完備之資料將宣末民政部戶口調查加以詳密研究,求得宣末中國本部人口爲349,511,933,東三省人口爲17,948,540,新疆爲2,149,654,西藏爲1,357,722,蒙古爲1,057,899,青海爲311,520,川滇邊務爲226,287。全國總計爲372,563,555。王氏並謂「這個估計大部份包含原來的調查報告,或官書記載,僅小部份是著者底推測。所以較比以前任何人的估計爲逼近眞實,殆無異議。」王氏原著「民政部戶口調查及各家估計」一文見社會科學雜誌第三卷第三期及第四卷第一期。

本文著者自一九三〇年出席國際統計學會第十九次會議以後,久欲將宣統年間之民政戶口調查報告再加整理分析,均未能如願。至去年夏間內政部北平擋案保管處將該項擋案全數運京,著者始商得內政部甘次長及統計司代理司長李昌熙先生之同意,將清末民政部戶口調查之全部報告擋案親自計算整理,費時約三月之久,始完成下列詳表。著者的研究方法,與王士達先生所採用者不盡相同。王君間或採用清史稿地理志所列人口數,本文則盡量採用各省區直接咨報之原始材料,除最小一部份出於著者之估計外,其餘最大部份均係根據原有報告表冊,用計算機詳細計得者,又對於原有各省區戶口總數與分縣數目不符之處,亦經審核更正。故本文所求得之全

國人口總數，與每戶平均人數及性比例等與王君所求得者多略有出入。但就大體言之，彼此所得結果實相去不遠。著者自信本文所列各項數目，其可靠程度，至少能與王君之估計相伯仲。且使內政部將來正式整理該項人口文獻之時，亦可事半而功倍也。茲將整理結果列表如下。

修正內務部民國元年彙造清末民政部戶口調查統計總表

省區	戶數	口		數	每戶平均人數	性比例
		男女各別人數		男女合計人數		
華北	15,178,399	男	43,408,661	74,151,247	5.22	121.4
		女	35,742,586			
直隸全省	5,187,758	男	14,773,617	26,721,353	5.15	123.6
		女	11,947,736			
京師內城	83,906	男	292,013	456,502	5.45	177.5
		女	164,489			
京師外城	55,281	男	214,986	304,604	5.51	139.9
		女	89,618			
內外城合計	139,087	男	506,999	761,106	5.47	199.5
		女	254,107			
順天府屬	700,281	男	1,971,273	3,654,210	5.22	117.1
		女	1,682,937			
其他九府六直隸州四口廳	4,150,020	男	11,824,636	21,450,501	5.17	122.8
		女	9,625,865			
京城二十四旗	103,722	男	134,757	284,091	2.74	91.5
		女	149,334			
內務府三旗	4,580	男	100,669	153,771	33.57	189.5
		女	53,102			
京營四郊	74,192	男	195,821	343,366	4.61	131.8
		女	147,545			
左翼四處	854	男	2,373	4,503	5.27	111.4
		女	2,130			

右翼五處	783	男	1,252	2,983	3.81	72.3
		女	1,731			
東陵各旗營	4,206	男	10,260	19.788	4.70	107.7
		女	9,528			
西陵各旗營	1,620	男	4,988	9.956	6.15	100.4
		女	4,968			
馬蘭鎮所屬	968	男	3,411	5,890	6.08	137.5
		女	2,479			
泰甯鎮所屬	2,975	男	7,797	13,715	4.61	131.7
		女	5,913			
直隸提督所屬	532	男	1,109	2,295	4.31	93.5
		女	1,186			
密雲駐防	1,915	男	4,138	7,844	4.10	111.6
		女	3,706			
山海關駐防	2,023	男	4,134	7,334	3.63	129.1
		女	3,200			
山東全省	5,380,277	男	15,960,856	29,556,688	5.49	117.4
		女	13,595,832			
戶口均有報告之各州縣	4,932,002	男	14,631,855	27,095,659	5.49	117.4
		女	12,463,804			
未報口數之七州縣	445,870	男	1,321,871	2,447,826	5.49	117.4
		女	1,125,955			
青州及德州駐防	2,405	男	7,130	13,203	5.49	117.4
		女	6,073			
山西全省	2,097,082	男	5,810,855	10,099,135	4.82	135.5
		女	4,288,280			
陝西全省	1,605,342	男	4,403,501	8,074,013	5.03	110.0
		女	3,670,512			
各府州廳縣	1,601,444	男	4,393,231	8,054,407	5.03	110,0
		女	3,661,176			
西安駐防	3,898	男	10,270	19,606	5.03	110.0
		女	9,336			
甘肅全省	907,940	男	2,459,832	4,700,058	5.18	109.8
		女	2,240,226			

各府州廳縣	906,639	男	2,455,166	4,691,620	5.17	109.8
		女	2,236,454			
涼州駐防	794	男	2,149	4,105	5.17	109.8
		女	1,959			
甯夏駐防	607	男	2,517	4,333	7.13	138.6
		女	1,816			
華中	27,380,375	男	76,884,930	140,009,432	5.11	121,8
		女	63,124,502			
江蘇全省	5.397,738	男	14,072,470	25,833,336	4.80	119.1
		女	11,810,866			
江寧三十五屬	3,213,483	男	9,104,796	16,549,437	5.15	122.3
		女	7,444,641			
江蘇四府一州三十七屬	2,170,128	男	4,839,343	9,184,173	4,23	111.3
		女	4,344,794			
江北提督所屬清河縣	11,072	男	30,784	55,097	4.97	126.6
		女	24,313			
江寧駐防	1,816	男	4.657	8,807	4.85	112.0
		女	4,150			
京口駐防	1,239	男	2,890	5,858	4,73	97.4
		女	2,968			
安徽全省	3,241,018	男	8,954,846	16,229,052	5.01	123.1
		女	7,274,206			
河南全省	4,661,566	男	13,826,775	26,109,931	5.60	112.6
		女	12,283,156			
戶口均有報告之八十七州縣	3,633,375	男	11,668,707	22,035,016	5.60	112.6
		女	10,336,309			
未報口數之二十州縣	727,041	男	2,156,364	4,071,430	5.60	112.6
		女	1,915,066			
開封駐防	790	男	1,704	3,485	4.40	86.0
		女	1,781			
湖北全省	4.938,625	男	14,981,695	27,646,651	5.60	118.3
		女	12,664,956			
六十八州廳縣	4,932,533	男	14,968,871	27,622,185	5.60	118.3
		女	12,653,314			

荊州駐防	6,092	男	12,824	24,466	4.01	110.1
		女	11,642			
四川全省	9,141,410	男	25,049,144	44,140,462	4.83	131.2
		女	19,091,318			
一百四十四州縣	9,118,621	男	24,999,621	44,071,154	4.83	131.1
		女	19,071,542			
濱江五十五屬船戶	18,704	男	39,625	50,626	2.70	360.1
		女	11,001			
成都駐防	3,985	男	9,907	18,632	4.69	112.9
		女	8,776			
華南	24,321,835	男	67,238,401	122,665,409	5.04	121.3
		女	55,427,008			
浙江全省	4,251,383	男	9,808,637	18,072,226	4.25	118.7
		女	8,263,589			
各州縣及商埠	4,249,349	男	9,805,795	18,066,784	4.25	118.7
		女	8,260,589			
杭州駐防	1,977	男	2,740	5,240	2.65	109.6
		女	2,500			
乍浦駐防	57	男	102	202	3.54	102.0
		女	100			
福建全省	2,515,756	男	6,871,738	12,500,266	4.97	122.1
		女	5,628,528			
全省各廳州縣	2,445,833	男	6,693,789	12,204,262	4.99	121.5
		女	5,510,473			
南台廈門及三都各商埠	68,009	男	175,524	291,586	4.29	151.2
		女	116,072			
福州駐防	1,914	男	2,425	4,408	2,30	122.2
		女	1,983			
江西全省	3,439,873	男	9,381,813	16,977,029	4.94	126.5
		女	7,495,206			
全省八十一屬	3,386,328	男	9,312,190	16,725,685	4.94	125.6
		女	7,413,495			
各屬商埠	36,825	男	138,025	211,278	5.73	188.5
		女	73,226			

各屬船戸	16,720	男	31,581	40,066	4.40	311.1
		女	8,485			
湖南全省	4,339,371	男	13,108,577	23,402,991	5.38	127.3
		女	10,294,415			
報有戸口數之七十屬	3,980,327	男	12,161,6[illegible]6	21,712,203	5.45	127.3
		女	9,550,551			
未報口數之九屬	369,044	男	1,126,429	2,011,290	5.45	127.3
		女	884,861			
貴州全省	1,771,533	男	4,635,966	8,702,964	4.91	114.0
		女	4,066,998			
雲南全省	1,548,034	男	3,863,753	7,209,888	4.66	115.4
		女	3,346,135			
廣東全省	5,052,418	男	15,232,022	28,010,564	5.54	119.2
		女	12,778,542			
全省九十四屬	5,041,780	男				
		女				
廣州駐防	10,638	男				
		女				
廣西全省	1,393,467	男	4,225,885	7,789,480	5.59	119.2
		女	3,553,595			
各府州縣	1,155,313	男				
		女				
各土司州縣	207,028	男				
		女				
柳州府懷遠縣人戸	31,126	男				
		女				
東三省	2,777,174	男	10,262,312	18,415,714	6.63	125.8
		女	8,153,402			
奉天全省	1,707,642	男	6,093,637	11,018,517	6.45	123.7
		女	4,924,880			
已報戸口之五十屬	1,640,337	男	5,853,488	10,584,631	6.45	123.7
		女	4,731,143			
未報之金州醴泉兩屬	65,6[illegible]4	男	234,023	423,201	6.45	123.7
		女	189,187			

未報口數之撫松縣	1,359	男	4,847	8,766	6.45	123.7
		女	3,919			
未報戸數之安圖縣	296	男	1,279	1,910	6.45	123.7
		女	631			
吉林全省	800,099	男	3,151,611	5,538,405	6.92	123.0
		女	2,386,794			
三十七府州縣	748,082	男	3,069,304	5,393,744	7.21	123.0
		女	2,324,440			
全省各旗屬	52,017	男	82,307	144,661	2.78	132.0
		女	62,354			
黑龍江省	269,433	男	1,017,064	1,858,762	6.90	120.8
		女	841,728			
新疆全省	471,205	男	1,117,078	2,085,340	4.57	115.3
		女	968,262			
報有戸口之三十八屬	435,878	男	1,024,223	1,615,858	4.40	114.9
		女	891,615			
未報口數之庫車直隸州	16,936	男	39,842	74,518	4.40	114.9
		女	34,676			
塔爾巴哈台所屬	5,177	男	13,922	23,404	4.52	150.2
		女	9.482			
伊犂駐防	9,178	男	27,321	51,426	5.60	113.3
		女	24,105			
伊犂蒙旗	4,036	男	11,770	20,134	4.99	140.7
		女	8,364			
熱察綏	653,632	男	1,931,635	3,525,937	5.39	121.2
		女	1,594,302			
熱河	574,432	男	1,732,031	3,165,970	5.51	120.8
		女	1,433,939			
承德朝陽兩府及赤峯直隸州	502,958	男	1,563,108	2,824,324	5.62	123.9
		女	1,261,216			
熱河所屬卓昭兩盟蒙旗	71,474	男	168,923	341,646	4.78	97.8
		女	172,723			
察哈爾	26,718	男	55,529	110,988	4.15	100.1
		女	55,459			

都統所屬各旗羣台站及駐防	13,070	男	23,283	45,783	3.50	103.4
		女	22,500			
錫林郭勒盟所屬各蒙旗	13,606	男	32,157	65,037	4.78	97.8
		女	32,880			
霍碩特新厄魯特及厄魯特	42	男	89	168	4.00	112.7
		女	79			
綏遠	52,482	男	123,926	248,979	4.74	99.1
		女	123,053			
綏遠城駐防	2,765	男	6,588	11,947	4.32	122.9
		女	5,359			
歸綏土司	572	男	1,188	2,119	3.74	137.6
		女	931			
歸化城土默特	6,416	男	15,171	30,683	4.78	97.8
		女	15,512			
烏蘭察布盟各蒙旗	6,812	男	16,099	32,561	4.78	97.8
		女	16,462			
伊克昭盟各蒙旗	35,914	男	84,880	171,669	4.78	97.8
		女	86,789			
川滇邊務所屬	97,784	男	256,374	464,304	4.75	123.5
		女	207,930			
康定巴安登柯三府十二屬	25,698	男	67,401	122,066	4.75	123.3
		女	54,665			
林葱死撒等土司	7,727	男	20,266	36,703	4.75	123.3
		女	16,437			
乍了察木多等五處	15,449	男	40,520	73,383	4.75	123.3
		女	32,863			
其餘喀木部份戶口估計	48,874	男	128,187	232,152	4.75	123.3
		女	103,965			
青海	68,323	男	166,995	328,122	4.80	103.6
		女	161,127			
青海蒙古二十九旗	5,555	男	13,129	26,552	4.78	97.8
		女	13,424			
青海住收剛咱七族	947	男	1,826	3,629	3.83	101.2
		女	1,806			

青海寺廟僧徒	21	男	4,390	4,390	209.0	
		女	——			
玉樹等土司四十族	61,800	男	147,650	293,550	4.75	101.2
		女	145,900			
外蒙古	72,368	男	148,000	324,770	4.49	837.4
		女	176,770			
庫倫所屬	41,180	男	71,100	186,043	4.52	61.8
		女	114,943			
圖　盟	6,287	男	16,524	38,109	6.06	79.5
		女	21,585			
車　盟	28,932	男	37,681	96,158	3.32	64.4
		女	58,477			
沙　畢	5,961	男	16,895	51,779	8.68	48.4
		女	34,881			
烏里雅蘇台所屬	13,762	男	28,664	55,993	4.07	104.9
		女	27,329			
三音諾彦部落	7,338		——			
札薩克圖汗部落	2,246	男	28,150	54,989	4.07	104.9
		女	26,839			
烏梁海	3,932		——			
寄居官兵商民	246	男	514	1.004	4.07	104.9
		女	490			
利布多所屬	17,426	男	48,236	82,734	4.75	139.8
		女	34,498			
新土爾扈特等各旗下	2,118	男	5,102	8,747	4.13	140.0
		女	3,645			
哈薩克各遊牧	11,819	男	34,064	59,768	5.03	132.5
漢　民	48	女	25,704			
杜爾柏特等四部落	3,421	男	7,118	12,207	3.59	138.2
		女	5,149			

附喇嘛	20	男	1,952	1,952	97.6	
		女	——			
額魯特蒙古	3,240	男	7,957	15,487	4.78	97.8
		女	7,830			
阿拉善額魯特旗	1,522	男	3,597	7,275	4.78	97.8
		女	3,678			
額濟納舊土耳扈特旗	1,718	男	4,060	8,112	4.78	97.8
		女	4,152			
西藏(衛藏及阿里)	244,370	男	616,823	1,160,758	4.75	113.4
		女	543,935			
全國統計	71,268,651	男	202,038,866	368,146.520	5.17	121.6
		女	166,107,654			
二十二行省合計	70,128,970	男	189,611,382	362,327,142	5.17	121.7
		女	163,415,760			
本部十八省合計	66,880,591	男	187,531,992	341,826,088	5.11	121.5
		女	154,294,096			
二十二行省以外各區域合計	1,139,681	男	3,127,484	5,819,378	5.11	116.2
		女	2,691,894			
四川戶口採用宣末最後報告之全國總計	71.332,465	男	205,486,583	374,223,088	5.25	121.8
		女	168,736,505			
四川戶口採用最後報告之二十二行省合計	70,192.784	男	202,359,099	368,403,710	5.25	121.9
		女	166,044,611			
四川戶口採用最後報告之十八省合計	66,944,405	男	190,979,706	347,902,656	5.20	121.7
		女	156.922,947			

二 修正內務部彙編清末民政部戶口調查統計總表之簡略說明

查內政部現存關於清末宣統年間民政部調查戶口之表冊案卷已不甚齊全。故對於該次戶口報告倘不加以全部整理，將來必愈感文獻不足。是以本文屬稿之時，曾商得內政部當局之

許可，將宣統年間之民政部戶口表冊加以全部之整理。上表所列即為整理之總結果。又各省區之每縣戶口雖經抄錄齊全，但因限於篇幅，概從割愛。留待內政部再行校核一次自行發表。玆僅將本文內所計得之各省區之戶口總數，略為分別說明於後，大致表中所列戶口十之八九均係根據各省區原來之報告，至於估計增補之戶口，僅佔十之一二而已。

上表直隸全省戶口係包括京師內外城順天府二十四屬其他九府六直隸州一百二十屬與直隸省內之各旗營及駐防。惟熱河所轄之承德朝陽二府及赤峯一直隸州未包括在內。表中所列該省戶口皆為宣統年間最後咨報之數，核與民元內務彙造戶籍表冊所列着稍有出入。又各旗營之每戶平均人數如京城二十四旗內務府三旗等有失之過小或過大者，明知不可盡信，但因與普通民戶情形不同，未便從新估計。僅對於有戶無口或有口無戶者加以比較增訂，本此求得直隸全省戶口共為5,187,758戶26,721,353人。

山東全省十府三直隸州所屬一百零四州縣，在宣統二年戶數皆有報告，口數則有長山縣范縣福山縣招遠縣掖縣平度縣諸城縣七縣未報。民國元年三月後咨送有宣統三年之戶口清冊核其內容實與宣統二年之報告完全相同。故根據其餘各縣之每戶平均人數及性比例將該七縣人口分別加以補充，求得全省各州縣男女人口總數為29,543,485人。又青州及德州

兩處駐防亦僅報有戶數,故用同樣方法推得其男女數共爲13,205人。故山東全省戶口總數共爲 5,380,277戶,29,556,688人。

山西全省戶口總數根據宣統三年閏六月咨報計一百十三州縣共爲2,097,082戶,10,099,135人。此爲最後更正之數。故口數雖與內務部彙造戶籍表冊相符,而戶數則多 107,047戶。本此求得每戶平均爲4.82人。性比例爲135.5。

陝西全省之最後戶數表係宣統二年十月咨送,人口表則於該年十二月咨送。又宣統三年二月該省巡撫亦奏稱「全省人口已陸續報齊」。惜原送口數詳表未經查出,故採用內務部戶籍表冊所列之數,外加宣統二年十月咨報之西安駐防戶數及估計之口數,作爲全省戶口總數。

甘肅戶口係採用該省宣統二年十月咨送之第二次調查人戶總數表及宣統三年五月咨送之全省口數表,外加涼州駐防宣統二年八月咨報之戶數及估計之口數,與甯夏駐防宣統三年四月咨報之戶口數,作爲全省之戶口總數。

江蘇全省僅江蘇巡撫所轄之四府一州計三十七屬,在宣統三年咨報有戶數及口數。其每戶平均人數僅爲4.23人。至於兩江總督直轄之江甯各屬則僅咨報有戶數而無口數,惟江北提督所轄之淸江縣戶口均有報告。此爲江蘇全省遵照光緒末年民政部奏定調查戶口章程辦理戶口調查所得僅有之結果。

此外江甯各屬雖曾仿照光緒年間咨送滋生民數之舊法分原存，滋生，故絕，實存四柱，報有宣統元年及二年上元等三十六州縣之滋生民數爲23,734,656人，及24,143,390人。但爲數均嫌過大，核其自然增加率爲千分之十七，亦嫌過速，故未採用。僅就山東安徽兩省及淸江一縣之每戶平均數及平均性比例求得江甯三十六屬之人口約爲16,549,437人。故全省人口總數連同駐防在內共爲25,883,336人。每數平均則爲4.80人。因蘇松常鎭太各屬之每戶平均人數甚低，故所估全省總數並不甚大。

安徽全省戶口係採用宣統三年八月咨送之覆查戶口總數，故與內務部戶籍表冊所列之口數雖屬相符，而戶數則稍有變更。

河南全省戶數係採用該省宣統二年七月咨送之全省府廳縣戶數總表計正戶3,969,308戶，附戶692,258戶。正附合計爲4,661,566戶。核與內務部戶籍表冊所列之戶數完全相同。口數則根據宣統三年十二月造送之全省各屬調查人口總數表，惟原咨內稱有「中牟蘭封等二十州縣因匪氛不靖，急切難查，應請展緩造報」等語。故上表特將該二十州縣之戶數提出，按其餘各州縣之每戶平均人數及男女比例推定該二十州縣之人口數及男女各別人數。外加開封駐防戶口，作爲河南全省之戶口總數。

湖北全省祇荊州駐防報有戶數及口數，其餘各府州縣之

普通民戶則僅咨報有戶數而無口數。惟宣統元年正月湖廣總督咨送有夏口漢陽等二十七廳州縣戶數爲1,658,214戶，口數爲男 5,033,031人，女4,255,145人。學童227,554人。茲根據該項統計求得該二十七屬之每戶平均人數爲5.6人，性比例爲118,3。故全省六十八屬4,938,533戶照此類推，應有人口 27,622,185人。外加荊州駐防人口共爲27,646,651人。雖每戶平均人數稍嫌過大，但因缺乏其他統計資料，祇能以此爲推算該省戶口之根據。

四川全省宣統年間咨送之戶數表冊現存內政部者已不齊全。僅第三次續報之懋功廳等十二廳州縣，戶數表列有正附戶共爲666,156戶，與第四次續報之石柱一廳及秀山一縣戶數表列有正附戶共爲87,776戶，據該項表冊內稱「第一次彙報有成都縣等八十九廳州縣，第二次彙報有越嶲廳等四十一廳州縣，連同第三次及第四次續報各屬，通計四川全省一百四十四廳州縣所有人戶總數均已一律報齊」等語。關於四川第一次咨報民政部之戶數僅民政部彙造之修正第一次查報戶數表冊中列有正戶4,179,411戶，附戶1,679,593戶，正附合計爲5,859,004戶。其各縣之詳細數目已無可考。關於第二次咨報之四十一屬詳細戶數，其原送表冊亦已無可考。僅民政部於宣統三年三月十七日咨四川總督將疊次報部戶口不符各數詳核速覆之咨文中，曾列有第二次咨報四十一屬之正戶總數爲 1,755,747

戶，，附戶總數爲750,038戶。正附合計爲2,505,785數。至於民政部彙造之第二次查報戶數清冊中則列有四川五十五屬之正戶爲2,321,725戶，附戶爲937,992戶，正附合計爲3,259,717戶。外加船戶18,704戶，共爲3,278,421戶。按民政部彙造之第二次查報四川五十五屬民戶，卽係四川第二次第三次及第四次咨報各廳州縣民戶之總和。又彙造之船戶，則爲四川第一次第二次及第三次彙報濱江五十八廳州總船戶之總和。故四川全省民戶總數應爲9,118,721戶，外加船戶18,704戶，及宣統二年十一月成都將軍咨報之成都駐防滿漢共3,985戶，總計爲9,141,410戶。比四川總督宣統三年正月二十八日奏報之戶數9,205,224戶及內務部民元彙造戶籍表冊所列9,186,520戶之數，均屬稍低。至於口數則根據四川第一次第二次及第三次彙報各廳州縣調查人口總數表逐縣詳加核算，計全省一百四十四萬共有男子24,999,613人，女子19,071,542人，男女合計爲44,071,145人。外加船戶及成都駐防人口，求得全省男女總數共爲44,140,462人，每戶平均爲4.83人，性比例爲131.2。此外四川總督在宣統三年正月二十八日雖奏報有全省男子爲31,175,522人，女子爲19,041,508人，男女合計爲50,217,030人，核與清史稿食貨志所列該省人口 52,840,446 人之數甚爲相近，但因性比例相差太大，（卽爲男163.7與女100之比）且無分縣詳細數目以資核算，所報總數是否與原表細數相符不得而

知。宣統三年閏六月二十日民政部雖咨行四川總督補造該省戶口總表,似未見覆。又四川總督於宣統三年六月十二日咨覆之更正戶口數目表册四份,(計川省正附戶數表一册,丁口數表一册,船丁口數表一册,又正附戶丁口船戶丁口總數一覽表一册)亦不可考。祇好暫從闕疑。如必欲採用該省最後報告之口數,亦應按照上述131.2之性比例將男女各別人數重新釐訂爲男28,496,861人,女21,720,169人,或較爲合理。

浙江全省戶口據宣統二年十月報部之第二次調查戶數表戶七十八屬及三商埠共有正計2,524,635戶,附戶 1,363,677戶,正附合計爲3,888,312戶。又同年十月報部之第一次調查口數表,計五十三屬三商埠共有男子7,014,082人,女子5,909,237人,男女合計共爲12,923,319人。此五十三屬三商埠共有3,023,853戶,每戶平均爲4.27人。頗嫌過低。照此推算全省七十八屬三商埠共有人口16,618,016人。但據該省宣統三年八月浙江巡撫奏報浙省第三次調查戶口報到戶數者有六十九州縣共計正戶2,662,820戶,附戶1,386,233戶,正附合計爲4,049,053戶。報到口數者五十四州縣計男6,823,210人,女5,742,280人。是戶數雖增而口數反減。今以第三次報到之戶數及第二次報到之口數爲標準,推得浙江全省在宣統末年當有4,570,387戶,按每戶4·27人計算全省各廳州縣當有人口19,515,552人。惜本文屬稿之時,浙省第三次奏報之分縣詳細戶口數目

無從覓得。根據殊嫌薄弱。將依據第二及第三兩次已有戶口報告所推得之全省戶口總數相加折半，求得全省七十八州縣三商埠共有4,249,349戶，18,066,784人，每戶平均爲4.25人，又兩次人口之性比例第二次爲118.7第三次爲118.8相差甚微，故全省各州縣之男子總數約爲9,805,795,795人，女子約爲8,260,989人。外加杭州及乍浦駐防戶口，作爲全省之戶口總數。

福建全省之最後戶數，係於宣統二年十二月咨報，計全省各廳州縣共有2,445,833戶。口數則詳見宣統二年十一月咨送之省會及外府首縣並商埠地方口數表，與該年十二月咨送之各屬廳縣地方人口總數表。惟商埠戶數宣統二年未再行咨報故採用宣統元年所報之戶數，外加宣統二年九月咨報之福州駐防戶口。作爲全省之戶口總數。

江西省原送戶口表册係將各廳州縣戶口商埠戶口及船戶人口分別列報。該省宣統二年十月第二次咨報之戶數核與內務部戶籍表册完全相同。惟第二次咨報之人口數則較內務部戶籍表册所列之數計少 2,545,542人。或因隨後尚咨送有第三次人口報告亦未可知。故本表採用內務部戶籍表册所列之口數。

湖南全省戶口係根據該省咨送之宣統三年分各廳州縣人戶總數表，及人口總數表，戶數係全省皆有報告。口數則有武陵縣，龍陽縣，古丈坪廳，桂陽縣，會同縣，通道縣，綏甯縣，石

門縣,及藍山縣九屬,未經查竣。故根據其餘各屬之每戶平均人數及性比例就該九屬之總戶數推得其人口總數及男女各別人數。然後將兩項總數相加,作爲全省之戶口總數。又該省所報各府之正附戶總數核與各縣詳細數目稍有不符。亦經分別更正。

貴州全省戶口係根據宣統二年十月咨報之數,因原表計算甚多錯誤,致原報人口總數與各縣詳細數目頗有不符。又內務部戶籍科覆核之,總數亦稍有錯誤。均經分別更正。故上表所列人口總數比內務部戶籍表冊所列人口數約多二十萬人。

雲南全省戶口係根據該省宣統二年十月咨送之第二次人戶總表及第一次人口總表所編列者,與內務部戶籍表冊所列多三萬五千零一人。

廣東全省各府廳州縣共有正戶4,358,473戶,附戶683,307戶,正附合計爲5,041,780戶,外加廣州駐防正戶6,885戶,附戶3,753戶,正附合戶爲10,638戶,總計全省共爲 5,052,418戶。口數無報告。惟清史稿地理列有人口28,010,564人,因無其他資料,姑採用之,求得每戶平均爲5.54人。並以廣西人口之性比例爲準,求得男子爲15,232,022人,女子爲12,778,542人。

廣西全省宣統二年四月咨報有各府州縣正附戶1,155,313戶,及各土司州縣正附戶207,028戶。此外柳州府屬之懷甯縣則因苗民滋事,妨害調查,遲至宣統二年九月始咨報有該縣第

一第二第三區之戶數爲19,231戶，又遲至宣統三年九月始咨送有該縣第四區之戶數爲11,895戶。據稱「懷遠人口苗猺獞獠佔十之六七，歸化較遲，幾經開導，始行就範。又平樂府屬之永安州，修仁縣，柳州府屬之象州，潯州府屬之平南縣，所有髮猺向未編戶納糧。故亦未編入調查」云。廣西全省口數無報告。惟清史稿列有8,746,747人。又宣統元年正月咨送有光緒三十四年之廣西人口爲8,627,781人。計男4,691,162人，女3,963,619人。該年之戶數則爲1,542,800戶。故光緒末年之每戶平均人數爲5.59人，性比例爲119.2。宣統年間廣西全省既有1,393,467戶，本此推算，全省應有人口7,789,480人。計男子爲4,235,885人，女子爲3,553,595人。故全省人口比清史稿所載約少一百萬人，或較爲切近，亦未可知。

奉天全省五十五屬除奉天錦州不轄地面外，祇有五十三屬。其報有戶數者第一次爲宣統元年咨報之承德等二十三屬，凡840,537戶，第二次爲宣統二年咨報之昌圖等二十七屬，凡799,836戶。共計爲1,640,373戶。未報戶數者有金州爲日本租借地，醴泉縣則蒙民不服調查。又撫松縣亦無報告。人口則據民國元年四月東三省都督咨送之宣統末年奉天省各府廳州縣人口正册總表，計全省五十三屬，除金州爲日本租借地，醴泉縣蒙民不服調查，及撫松縣無報告外，其餘五十屬共有男子5,853,488人，女子4,731,143人。今以五十屬之平均戶口數及

性比例爲根據，將金州醴泉兩屬之戶數及男子丁口分別補足，並將撫松縣之口數及安圖縣之戶數仿此分別推定，求得全省之戶口總數。又按奉天省人口之每戶平均人數爲6.45人，雖嫌過大，或半緣移民甚爲猛速所致。因該省之人口調查比戶數調查約遲一年有半也。又東三省農作單位較大，或亦爲每戶平均人數較大之又一原因。關於奉天旗戶據東三省總督宣統三年二月咨復民政部謂「原咨原表係連同旗戶一體調查」云。

吉林省三十七屬之戶口據宣統三年十一月咨報共有正戶413,971戶，附戶334,111戶，正附合計共748,082戶。男子爲3,069,304人，女子爲2,324,440人，男女合計共5,393,744人。每戶平均爲7.21人。性比例爲132。此外尚報有各旗屬戶口，亦於表中一併加入計算。以求得全省之戶口總數。

黑龍江全省二十七屬據宣統三年十一月咨送之戶口表，共有正戶146,859戶，附戶122,574戶，正附合計爲266,433戶。共有男子1,017,064人，女子841,728人，男子合計共1,858,792人。每戶平均爲6.90人。亦屬甚高。與奉吉兩省顯有類似原因。

新疆全省根據該省宣統元年至三年先後咨送已有戶口調查報告之各府廳州縣共有435,878戶，1,915,858人。照此推得無口數報告之庫車直隸州爲74,518人，其次則爲塔爾巴哈台所屬，包括塔城戶口，塔城左右翼駐防與霍博賽哩吐爾扈特三

旗官兵，及塔城察哈爾額魯特領隊屬下十蘇木戶口，共有5,177戶，男13,922人，女9,482人。又伊犂駐防有9,178戶，男27,321人，女24,105人。又土爾扈特各屬蒙旗3,392戶，男9,927人，女6,959人。及和碩特中部屬下蒙旗644戶，男1,843人，女1,405人。故新疆全省共有471,205戶，2,085,340人。每戶平均爲4.57人。性比例爲115.3。

熱河察哈爾綏遠在清末係分別隸屬於直隸及山西兩省。熱河包括直隸省承德朝陽二府及赤峯一直隸州。總稱爲熱河道。其宣統年間之戶口調查係由熱河都直接負責辦理，故上表未將熱河道之戶口併入直隸。至熱河各蒙旗原報爲57,758戶，其中土默特右翼旗僅列報155戶，故依王士達君之估計，補充爲13,871戶。並按外蒙古，及伊犂蒙古之每戶平均人數及性比例，推定其人口及男女各別人數。又察哈爾戶口除興和道所屬之民戶已分見於直隸及山西兩省之戶口外，其餘察哈爾都統所屬各旗羣之戶口，因不便強行攤入直晉兩省。故於表中單獨分列。又察哈爾所屬錫林郭勒盟之戶口，以及防駐之霍碩特戶口，亦於表內單獨列明。又綏遠原爲山西省之歸綏道所屬，其民戶已詳見於山西省之各府廳州縣戶口，惟綏遠駐防歸綏土司及歸化城之土默特戶口則亦於表內單獨列明。綏遠駐防及歸綏土司戶口係均係根據宣二及宣三年報告。僅歸化城土默特左右翼兩旗戶數係採用王士達先生之估計，又綏遠將軍

兼轄之烏蘭察布盟及伊克昭盟各蒙旗戶數，亦採用王士達先生之估計。惟口數及男女各別人數則係重新估計。

川滇邊務所屬僅於宣統二年咨報有康定巴安登科三府十二屬，林葱孔撒等五土司，及乍丫察木多等五處之戶數。並未包括喀木(即康)之全部。其口數及男女各別人數係根據四川雲南之每戶平均人數及性比例而推得者。按清末川滇邊務大臣趙爾豐曾奏請於改流地方設兩道三府十廳，三十縣，八設治委員，二理事官。可見喀木全部戶口尚少報甚多。故仿王士達君之辦法將喀木戶口補充一半。

青海戶口包括青海蒙古二十九旗，玉樹等土司四十族，及剛咱七族等戶口。其中蒙古二十九旗原報僅1,989戶，顯有遺漏。故採用王士達先生之估計列5,555戶。又口數原報僅6,412口，遺漏更多。故仿照熱察綏外蒙伊犂等處蒙旗之每戶平均人戶及性比例，求得青海蒙旗之人口為男 13,129人，女13,424人。男女合計為26,553人。又原來報有寺廟二十處僧徒約4,39名，悉作為男性。又原報有剛咱七族戶口計 47戶,3,629人。亦一併列入。按青海人口似遺漏尚多。因該處種族複雜，除蒙旗土司而外，尚有雜居之漢回諸族，並未查報也。

內蒙古在清末共分六盟二十五部四十八旗，一為哲里木盟四部十旗，歸東三省之將軍及都統管轄。二為卓索圖盟凡二部五旗併附牧一旗。三為昭烏達盟凡八部十一旗，均歸熱河都

統兼轄。四爲錫林郭勒盟凡五部十旗歸察哈爾都兼統轄。以上通稱東四盟。五爲烏蘭察布盟，凡四部六旗。六爲伊克昭盟凡一部七旗。均歸綏遠將軍兼轄。以上通稱二盟。查各盟旗戶口有併入所在省區戶口咨報者，如奉天黑龍江是。有分別列報者，如吉林熱河及察哈爾是。有并未列報者，如綏遠之烏伊二盟是。故上表對於內蒙古戶口均分別列入各該管區域，普通民戶之內，并未單獨另列。

外蒙古各盟部在淸末係由庫倫辦事大臣與烏里雅蘇召參贊大臣及科布多參贊大臣分別兼轄。庫倫所屬之圖盟車盟及沙畢三部戶口，據宣統三年咨報共爲41,180戶，186,043口。又烏里雅蘇台所屬之三音諾彥部札薩克圖汗部及烏梁海各旗共有13,516戶。又寄居兵商民246戶。口數則共爲55,993口。至於科布多所屬則共有17,426戶，82,734口。大致外蒙戶口未經查報者尙屬不少。故總計僅有七萬二千餘戶，三十二萬餘人。且觀於男女比例差別之大，想有許多喇嘛人數根據未查報。

額魯特蒙古之阿拉善額魯特與額濟納舊土耳扈特兩旗皆僅報有戶數，共爲3,240戶，故仿照對內蒙戶及靑海口旗等所用之每戶平均人數及性比例，分別加以估計，求得男女人戶及合計人數如表內所列。

西藏戶口在宣統年間並無調查。故仿照王士達先生之估計方法，假定衞藏及阿里三部之戶口等於川滇邊務所屬已報

戶口48,874戶之五倍。卽244,370戶。並仿照對於川滇邊務所屬所採用之每戶平均人數與川滇邊務所屬及青海之平均性比例,求得西藏之人口總數及男女各別人數。如表內所列。

故依上表所列宣統年間民政部調查全國戶口之結果,全國總計共有71,268,651戶,368,146,520人。其中查報之數約佔十之八九 佔計添補之數僅佔十之一二。且添補之數皆從最低方面估計,大致曾經估計添補者多爲藩屬戶口。據表中所列二十二行省以外之戶口總數僅爲1,139,681戶,5,819,378口,可見藩屬戶口只有少估,並未多估。如對於四川戶口採用宣末最後之報告,則全國戶口共爲71,332,465戶,374,223,088口。綜計全國人口之每戶平均人數約爲5.17人,乃至5.25人,固不能視爲過大。惟男女比例則爲121.6乃至121.7,頗嫌過高。想女子人數必有少報。至於男子卽有重報,亦爲數甚少,因內務部原表附列年屆十六歲至四十年之壯丁總數共爲45,149,875人,計佔原表所列總人口百分之20.43。據澳斯達利亞統計學者尼布士與衞庚士(G. H,Knibbs and C. H. Wickens)所編歐洲十一國1900年左右之年齡分配表,計此種年齡之男女人數共佔總人口數百分之39.72。美國此種年齡之男女人數則佔百分之41.90。故宣統年間我國壯丁所佔百分數約等於歐美此種年齡人口所佔百分數平均之一半。足見宣末之壯丁人口甚少浮報或重報也。

總之宣統年間之民政部戶口調查雖頗能深入民間，差勝於清代先前之戶籍編審。但亦不少欠缺疏漏。而藩屬戶口缺漏尤多。今卽假定此項調查大體尙屬正確。亦可證明樂克里耳與韋爾柯克諸人對於中國戶口有故意少估之傾向。蓋樂氏在1904年之估計僅爲275,000,000人，或每戶平均爲四人。1912年之估計亦僅爲311,000,000人，或每戶平均爲4.8人。韋氏1927年之估計爲294,000,000人，或每戶平均爲4.3人。其1930年之估計則爲342,000,000人，或每戶平均爲五人。至於本文著者在民國六年之第一次估計則爲350,000,000人以上乃至400,000,000人(與中華基督敎速辦委員會所估者不約而同)第二次估計爲380,000,000人乃至400,000,000人。故吾人第一次所估計之平均數約與民政部調查所得之結果相當。第二次約多估六百萬乃至二千五百萬。至於樂氏則第一次少估約八九千萬，第二次約少估六千三百萬，又韋氏則第一次約少估八千萬，第二次亦少估三千二百萬也。

此页空白

我國統計學不發達之原因與鄭樵之圖譜學說

戚　俊

我國在昔禹貢一書，劃野分疆，早已以數字表明於政治當時之經濟情形，藉爲徵收賦稅之標準，雖可謂應用統計之嚆矢，顧三千餘年來，迄無進步，直至輓近，始見萌芽，嘗推其所以落後之原因，約有數端；

一，政治上之原因　吾國統治者之傳統政策有二，一曰無爲而治之政策，國家對於人民，僅負一種消極的維持治安之責任，至於如何發展國力，如何增加人民生產力，則諉爲無與政府之事，而一任人民之自由，根本無所謂經濟政策，以故更無調查社會情形，依據數字，以爲施政張本之必要，二曰愚民之政策，政府對於人民常持民可使由，不可使知之觀念，即財

政上之收支，亦有惟王不會之謬說，雖如李吉甫之元和國計簿等，亦祇以供帝王之披覽，而無關於政治之公開，統計材料之缺乏，端由於此。

二，經濟上之原因　編製統計，必先蒐集個別事實之材料，彙集而綜計，方能發見其間因果關係之存在，自非短時期間一手一足之烈所能爲力，故各國每屆舉行國勢調查，所費甚鉅，而在我國，有史以來，治日少而亂日多，自無餘力，爲此不急之務，且交通阻塞，從事調查社會情形，窒礙叢生，不易奏效，即偶因財政關係，對於丁賦等項，責成官署，造册呈報，而閉門造車，虛應故事，斷簡殘編，未必果有當於學術上研究之價值。

三，學術上之原因　編製統計，端恃科學爲基礎，我國所謂士大夫者，夙躭溺於詞章性理等恐疏之學，而關於經世牖民者，轉屬少數，學術界研究之對象，在彼而不在此，統計方法之無由發展，蓋亦事有固然者矣。

四，文字上之原因　社會上之森羅萬象，欲其一一陳列於吾人眼簾，自非以數字表示之不爲功，而數字之賴以互相發明則又須借助於圖表，我國文字縱行左上，不適於編製圖表亦爲斯學之障礙。

五，歷史學上之原因　古代河圖洛書之說，雖不盡可徵信，然圖之與書並重，固可窺見一斑，以故古人讀書嘗左圖右書，蕭何入關，且以搜集秦藏圖籍爲唯一急務，司馬遷作書記，

書表紀傳並列，蓋以圖書兩者，如鳥之有兩翼，車之有雙輪，缺其一端，即無以完成研究工作也。自劉向父子作七略，收書不收圖，班固藝文志因之，嗣後歷代操觚之士，因陋就簡，相率取法孟堅，於是圖譜之學，遂告絕紐，統計失其表現之方，益就淹沒矣。

綜此數因，我國統計之學，在海通以前，遂致晦盲否塞，無人起而注意，緣是而自然科學與社會科學，因缺乏數字比較之故，亦停滯而莫由進步，其中足以阻礙統計之發達者，則尤莫逾乎研究學術之偏畸於書而忽略圖譜之一點，雖然，其間固亦有高瞻遠矚之士，獨標異議，思一掃當時學術研究法之頑劣思想，而爲之振聵發聾者，其人惟何，即南宋之鄭樵是也。

樵字漁仲，福建莆田人，著通志一書，其中二十四卷尤多獨具見解，發前人所未發，他且不論，姑就其提倡圖譜之學一點言之，亦頗足與今日所謂統計學者，互相發明，茲節錄數則如左；

(1)「史記一書，功在十表，猶衣裳之有冠冕，木水之有本源。」

(2)「修史之難，無出於志，其次莫如表，自班固斷代爲史，無前後相因之義，會通之道，自此失矣。」

(3)「圖至約也，書至博也，即圖而求易，即書而求難。」

(4)「見書不見圖，聞其聲不見其形，見圖不見書，見其人不聞其語。」

(5)「索象於圖，索理於書。」

(6)「後之學者，離圖卽書，尙辭務說，以故亦難以爲學，學亦難爲功，雖平日胸有千章萬卷，及置之行事之間，茫茫然不知所向。」

(7)「天下之事，不務行而務說，不用圖譜可也，欲若成天下之事業，未有無圖譜而可行於世者。」

(8)「以圖譜之學不傳，則實學盡化爲虛文矣。」

(9)「逐鹿之人，意在於鹿，而不知有山，求魚之人，意在於魚，而不知有水。」

(10)「爲學者而不知此，則章句無所用。爲治者而不知此，則綱紀無所施。」

漁仲爲宋代有數之史學家，其所論亦僅就史學家立場，說明圖書兩者，爲治史學者之不可有所偏畸，故後人如章實齋梁任公輩，推崇備至，稱之爲歷史學上之彗星，謂其足以推翻過去治史方法上之陋習，然從統計學立場觀之，其內容淺薄，較之今日統計上各種學說，誠相去不可以道里計，惟圖表爲表現統計數字之必要工具，使我國學子七百餘年來，而早能服膺漁仲之說，將各種社會事實自然現象，製爲圖表，依大量觀察之法則，推見其因果關係而詔示世人，則我國科學之進步，或早已遠越歐美，而國勢凌夷，又何至如今日之甚哉，惜莫爲之後，嗣響無人，一鄭漁仲無補於中國統計學術之發展，而發揮

光大之功，端賴同時代者之切磋砥礪，與夫異時代者之前仆後繼，此則凡百學術皆然，亦卽吾人今日之責任也。

此页空白

近六十年來中國農村人口增減之趨勢

喬啓明

世界文明的國家，多數都舉行定期人口清查，與人事登記，所以一國的人口數量與增減的快慢，均可合理的計算出來。這種材料，不但國家可以拿他做爲行政上推進的一種標準，就是在學術方面也有他最大的供獻。例如在政府方面，有了詳確的人口統計，什麼選舉，徵兵，教育，衛生的設施，及財政整理的計劃，均有相當的根據。在學術方面，並可研究人口增減的徐速，與其質的優劣，以作將來改造社會的基礎。反觀我國從未有詳確的人口清查，至於人事登記，更談不到，故國家建設無所依賴。

近年以來，空氣陡變，我國朝野人士，頗有覺人口爲立國之本，國家興亡，確維繫於此。因此國人注意研究人口問題者，日見其多，但研究最大的困難，是沒有稍微可靠的統計，所以

有許多人就片面的觀察,下肯定的斷語。有的人說:中國地大物博,人口問題,並不十分嚴重,用不着作過慮之談。又有人說:中國人口日形減少,民族淪亡危在旦夕,我們聽了這兩種論調,眞使人莫識所從了。金陵大學農業經濟系,爲破除現在我國人口統計迷,故歷年用種種方法調查研究,但以前的工作多爲標本調查,選擇的年度,均爲平常年限,故論及人口增加或減少,只能代表一個平常年限,也就是說在那年不受什麼水,旱,兵,瘟各災的影響,若單根據這種材料推測,我國人口每年自然增加約爲千分之十,也就是說每年增加人數約在四百萬與五百萬之間。但按實際情形而論,恐怕我國人口增加不能如此的快,因爲我國各種天災人禍不時的發生,固然在平常年限,可以有大量的增加。若按長期趨勢觀察,亦未必增加如此之快,著者爲證明此點,特擬定農村人口增減趨勢調查表,利用中央農業實驗所分散全國之農情報告員,作一自己村莊之調查與估計,此項材料,雖不能說十分眞確,然在統計上所謂大量觀察,也不致有離事實過遠的批評。玆將此次調查結果,編爲人口指數,列入下表,以觀吾國各省人口歷年增減之趨勢。

省別	報告數目	人口指數						
		固定基期(同治十二年1873等於100)				移動基期(同治十二年,光緒十九年,民國二年,1873,1893,1913,各等於100)		
		同治十二年(1873)	光緒十九年(1893)	民國二年(1913)	民國廿二年(1933)	光緒十九年(1893)	民國二年(1913)	民國廿二年(1933)
察哈爾	8	100	114	144	160	114	126	111
綏遠	14	100	139	172	175	139	124	102
寗夏	5	100	143	101	88	143	70	87
青海	10	100	167	161	172	167	96	106
甘肅	24	100	115	129	117	115	113	90
陝西	67	100	94	99	96	94	106	95
山西	146	100	77	82	88	77	107	107
河北	390	100	112	122	140	112	108	114
山東	106	100	119	122	128	119	103	105
河南	119	100	104	110	104	104	106	105
江蘇	133	100	108	128	150	108	119	117
安徽	67	100	122	146	166	122	109	114
湖北	34	100	105	116	145	105	110	125
湖南	56	100	118	129	144	118	109	112
江西	44	100	100	100	93	100	100	94
四川	103	100	118	135	157	118	114	116
雲南	35	100	135	179	237	135	132	133
貴州	33	100	106	118	128	106	111	108
浙江	71	100	102	107	123	102	104	115
福建	29	100	92	93	88	92	101	94
廣東	62	100	123	142	157	123	115	110
廣西	66	100	109	149	164	109	136	109
總計	1622	100	108	117	131	108	108	112

根據上表吾人卽可明瞭我國最近六十年來農村人口增減之趨勢,例如以同治十二年西歷一八七三年爲固定基期,在人口指數項下全國之人口總指數在民國廿二年爲一三一,卽在此過去六十年中全國人口共增加百分之三一。如按幾何級數計算之,卽每年全國人口增加千分之四·四稍强,再按移動人口指數計算之,更可明析在過去一時期與其他一時期人口增減之比較,例如在移動人口指數項下,同治十二年至光緒十九年,其全國人口總指數爲一〇八,其意乃表示由同治十二年到了光緒十九年的廿年中,人口共增加百分之八,其次例如民國廿二年之指數一一二乃表示由民國二年到了民國廿二年的廿年內人口共增加百分之一二。

按全國人口總指數而論,我國人口在過去六十年中是有增無減,並不若現在我國一般人口悲觀派,深信我國人口在近數十年內日形減少的臆說,因大多數省分,均有增無減也。吾人若再按省區而研究之,不免其中有數省反呈人口減少的現象,考其中主要原因,亦不外受水,旱,匪,共各災的關係。例如寧夏,陝西,甘肅,江西,福建五省,於近廿年內,其人口移動指數,皆呈人口減少現象,查寧,陝,甘三省,位於西北,常苦乾旱,尤以受民國十八年至民國廿年的大旱,人口死亡遷移的爲數至夥,至於江西在最近數年,因共匪爲患,人口減少卽其重要原因,再福建沿海一帶,居民多去南洋經商,故歷年人口移

出甚多,人口的減少,理所宜然。

再據人口固定指數加以研究,更能明瞭各時期之人口與六十年前比較之趨勢,類如寧夏,陝西,山西,江西,福建五省,現在之人口與同治十二年比較,皆有減無增,但其減少時期,均各不相同,寧夏減少係由光緒十九年以後起。陝西,山西兩省自同治十二年以後,人口至今從未復原,其主要的關係,因光緒三年及民國十八年的大旱,居民死亡及遷移,是很顯明的事實,至於江西人口由同治十二年以後,歷年穩定,惟因最近共匪關係,在近數年內人口減少百分之七,福建由同治十二年起,人口逐年減少,但其主要原因,因歷年沿海各縣,居民赴海外經商的緣故。

惟根據以上觀察,就全國而論,仍係不斷的增加。內中除少數省份,因有種種特殊的情形,反形減少人口,亦事實所不免,總之,此項研究最可使吾人注意者爲吾國人口過去六十年中,經過各種天災人禍的障礙,人口的增加,雖不如在平常年度之速,然仍係徐徐增加,並不若社一部分人士認爲吾國人口現呈減少的見解,據著者推測現在中央政府,正用全力復興農村,什麼交通、水利、衞生等事業,逐漸發展,將來人口的膨漲,是在所不免的。

此页空白

論 分 割 數

楊 西 孟

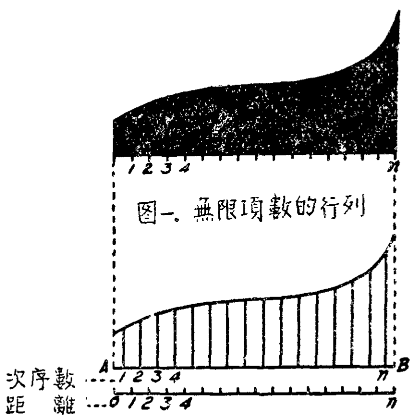
統計學中的中位數(the median),四分位數 (the quartiles),十分位數 (the deciles),百分位數(the perceutiles)等一類的數量,今統之爲分割數(partition values)。歐美各統計學者所給予分割數普通的定義,歸納起來,大意是這樣:把一個行列的項數分成若干等分,在分割界上各項的數值便是分割數。此處所謂行列 (array) 係指未分組的資料按小大的次序所組成的排列。但是這個定義是不十分正確的,由下面的討論可以看出來。

假設一個行列係由連續資料(continuous data),如人體

(1) 此文原寫成英文在美國統計學會會刊發表 (The Journal of the American Statistical Association, June, 1933),今應中國統計學社之命,譯載於此,希海內方家有以正之。

此页无页码

的高度，所組成，包含的項數又是無限的多；替這樣一個行列作圖，使每連續兩項間的距離皆等於一個無限小的單位，那嗎，這個行列便形似一個無縫隙的平面，如圖一。將這平面的底線分成n個相等的部份，把每部份的中項一齊搬出來，同時不改變他們相互間的位置和距離，便得一個行列，如圖二。很顯然的，這第二個行列，在取出n項作選樣條件之下，是最能代表第一個行列的樣本。今稱第一個原行列為無縫隙的行列，第二個行列為選樣的行列。



图一. 無限項數的行列

图二. n項代表選樣的行列

現在我們提出這樣一個解說：在選樣的行列中尋求某種分割數，等於在它所代表的無縫行列中尋求相同的分割數。這個解說是可以普遍地應用的，因為對於每個選樣的行列我們可以假設有它的一個無縫行列之存在，其推論的路綫只不過是上面一段理解的倒敘。

有了這個解說將選樣行列的問題推回到無縫行列去，於是平常求分割數所遇見的許多困難，可以完全解決了。第一，在一個選樣行列中，項數有限，往往缺乏一部份的分割數。但

在無縫行列中，項數是無限的多，任何分割數都可以假設有它的存在。

第二，在選樣行列中，項數不一定能夠分成我們所要求的等分數目；比如十五項不能分成四個項數相等的部份。但在無縫行列中便無此種困難，因爲祇須將它的底線分成某種等分數，它的項目自然分成相同的等分了。

第三，一個選樣行列的兩末端（卽下限與上限），在行列本身上，無從知道。把首尾兩項作兩末端是不確當的，因爲既然是選樣，首尾兩項之外尙有項目存在，是應當認識的。但是首尾兩項之外應當推延到如何的地步，纔算是行列的末端，確是一個問題。正因爲這個難點便發生了許多計算分割數的錯誤公式。但是，我們看看上面所提出的解說，原來這難點於此便很容易的解決了：假設在選樣行列中每連接二項間之距離爲一單位，由首尾兩項各向外延展半個單位的距離；便得行列的兩個末端。

找出行列的兩末端之後，行列的底線的長度自然的便顯露出來，如圖二的AB。現在我們可以給分割數一個新的定義：

在選樣行列中，將底線分爲若干等分，在各個分割界上的各項，實際存在的或添插所得的，謂之分割項。各分割項的數值，謂之分割數。

在這新定義中，分割成爲等分的東西是行列兩端間之距

離,(即底線的長度),不是舊定義所說的項數。距離分割成若干等分的時候,項數不一定是等分的,這點須得注意。

由一個行列中求分割數,於是成爲一個簡單的問題;祇須把行列的底線分成適當的等分數,再尋求位於那些分割界上項目的數值,便是分割數。

因爲平常說分割數之所在,常說第幾項是分割數,換句話說,是以次序數值作分割數所在的表示。在上面所說的,我們係以距離表示分割數的地位。所以還須得把距離的數值變化爲次序的數值。由圖二我們可以看出,在底線之任何一點上,距離數值總是比次序數值少 $\frac{1}{2}$; 所以在距離數值上加入$\frac{1}{2}$便是它的次序數值。例如,在n項的行列中,Q_1的所在與下限的距離爲$\frac{n}{4}$,同時Q_1的次序數值便是$\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right)$,換句話說,$Q_1$是第$\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right)$項的數值。

於是得一普遍的公式如下:

假設把一個n項的行列分割爲 p個等分,則第r個分割數便是第$\left(\frac{rn}{p}+\frac{1}{2}\right)$項的數值。

例如第四十九個百分位數便是第$\left(\frac{49n}{100}+\frac{1}{2}\right)$項的數值。中位數永遠是在第$\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)$項,或第$\frac{n+1}{2}$項,不隨p的數值而改變;比如第五十個百分位數,即中數是在第$\left(\frac{50n}{100}+\frac{1}{2}\right)$項;簡化後,即第$\frac{n+1}{4}$項。

我們的公式既已求得，讓我們回頭看看各統計學者的公式。除了中位數最簡單，各家的公式無誤外，其他的分割數多用錯誤的公式計算。比如金氏[1](King)，白氏[2](Burgess)，塞氏[3](Secrist)諸家所用的公式 $\frac{r(n+1)}{p}$，便是錯誤的。

此外還有英國包氏(Bowley)計算四分位數的方法[4]，按項數是4的倍數，或4的倍數多1，或多2，或多3，分別設立公式，共十二式。這十二式，若按我們上面的公式作標準，確是正確無誤。比如項目的數目爲 $4n+1$ 的時候，包氏給予Q_3的公式爲 $\frac{3}{4}(3n+1)+\frac{1}{4}(3n+2)$。按我們的公式，$Q_3$的次序數値爲$\frac{3n'}{4}+\frac{1}{2}$，此處n'代表項數，故等於4n+1，把包氏的公式簡化後再代入n'，我們看結果如何：

$$\frac{3}{4}(3n+1)+\frac{1}{4}(3n+2)=\frac{12n+5}{4}=\frac{\frac{12(n'-1)}{4}+5}{4}$$
$$=\frac{12n'+8}{16}=\frac{3n'}{4}+\frac{1}{2}$$

末式正是我們計算Q_3的公式，所以包氏的Q_3的公式與我們的公式相符。包氏其他的十一式也可用同樣的方法證明與我們的單一公式是一致的。但是我們只用一個公式，而包氏單爲四

1. King, W. I., The Elements of Statistical Method, 1924, P. 153.
2. Burgess, R. W., Introduction to the Mathematics of Statistics, 1924, p. 137.
3. Secrist. H., An Introduction to Statistical Methods, 1925, p. 357
4. Bowley, A. L., Elements of Statistics, 1920, p. 107.

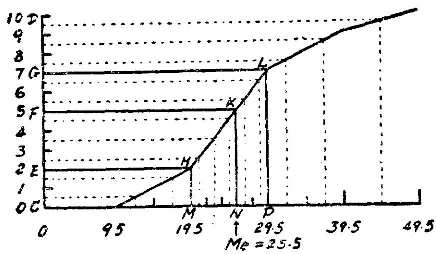
分位數便用了十二式,他的公式可說是過於無謂的繁雜。依包氏的方法,若求百分位數,須用公式$99\times100=9900$之多!

以上論不分組的資料中求分割數的方法。假如資料已經分組,則求分割數的方法有二:一爲圖解法,一爲算術法。圖解法須劃出遞加次數的曲線(Cumulative frequency curve or ogive),這是大家都知道的。但是表示次數總和的距離,如圖三之CD,應該如何分段,便發生問題了。在一方面,有些統計學者主張分爲等分,而在他方面如包氏(Bowley)[1],鍾氏(Jones)[2],呂氏(Riegel)[3]則不用等分的方法;比如求中位數,他們不取中點,而從下限(lower limit)取$\frac{n+1}{2}$一段長度。所以這裏也有問題,須得探討一下。

我們取下面一份簡單的資料作爲例題,並且依照題中的遞加次數作一曲線如圖三。

表面的組距	實際的組距	次　數	遞加次數
10—19	9.5—19.5	2	2
20—29	19.5—29.5	5	7
30—39	29.5—39.5	2	9
40—49	39.5—49.5	1	10

1 Bowley, op. cit, diagram facing p. 106.
2 Jones, D. C, First Course in Statistics, 1927, pp. 66—7.
3 Riegel, R., Elements of Business Statistics, 1924, p. 239.



图三. 遞加次數曲線的分析

於圖三，在縱坐標 CD 上共有10段單位，合於次數的總和；於每段的中點作一水平的虛線 (dotted line) 至與曲線相遇爲止，並且讓這些虛線的長度(按橫坐標的記數法計)代表各項的數值[1]。我們再看這個圖的組織，可說完全與前面圖二相似，所不同的祇是前圖是橫的，此圖是縱的。所以此圖的CD線恰恰相當於圖二的AB線；所以依據前面的定義，求分割數時，CD線應當分爲等分，不應當作其他方式的分割。

問題旣然解決了，用圖解法求分割數便是很簡單的：先將底線(圖三之CD)分爲適當的等分數，從分割點引橫線與曲線相遇，這些橫線的長度(按橫坐標的尺度計) 便代表各個分割數；比如在圖三依此法求得中位數爲25.5。

假如把圖三的曲線修勻 (smooth)，便是把組距中各項之

1　在這個程序之下，關於各項在組距中之分配情形，便含有一個假定，卽是：每個組距再分爲若干相等的小組距，其數與該組所包含之項數相同，並且假設每項恰恰位於一小組距之中點。爲表示這樣的情形，於圖三特引10條豎的虛線；由這些點線在各組中的分配情形，便可以看出我們的假定。關於此點，尙有與此相異的其他假定，但以此假定爲最合理。讀者可參看Burgess，前書P. 87.

分配情形的假定較前更爲改進,(按上面的假定是平勻的分配 even distribution,是一種比較粗略的假定),求得的分割數。亦隨之而更近於準確。

由次數表中求分割數,除了剛纔說的圖解法,還有算術的方法。算術法通常分爲兩步:第一步,在次數總和中取一適當的分數以確定分割數之所在;第二步,由分割數所在的組距中用比例添插法求分割數值。關於第二步沒有什麼問題,但第一步中應該用什麼樣一個分數又發生問題。有的統計者用$\frac{rn}{p}$,但別的統計家如介氏[1],呂氏[2],鍾氏[3] 主張用$\frac{rn}{p}+\frac{1}{2}$,更有塞氏[4] 用 $\frac{r(n+1)}{p}$。此外還有金氏[5]第一步所用公式與塞氏同,而第二步不用比例添插法,用一個公式 $l+\frac{c\,(2i-1)}{2f}$,可說與衆不同。這樣紛亂的情形是應當加以清理的。

依作者的見解,第一步正確的公式是$\frac{rn}{p}$,第二步仍然是比例添插法[6]。兩步合起來,可得一公式如下:

$$l+c\,\frac{\frac{rn}{p}-s}{f},$$

此處l=含有分割數的組的下限,

1 Jerome, H., Statistical Method, 1924, p. 124.

2 Riegel, 前書, P. 237.

3 Jones, 前書, p. 24.

4 Secrist. 前書, p. 287.

5 King, 前書, p. 129 及 p. 153.

6 限於初等統計學的範圍內。

c＝該組的組距，

s＝該組以下各組次數之和，

f＝該組的次數。

這個公式可借用圖三來作證明，今以中位數爲例：

$$
\begin{aligned}
M(\text{中位數}) &= CN \\
&= CM + MN \\
&= l + MN \\
\text{但}\quad MN:MP &= HK:HL \\
&= EF:EG \\
\text{故}\quad MN &= MP\,\frac{EF}{EG} \\
&= MP\,\frac{CF-CE}{EG} \\
&= c\,\frac{\frac{n}{2}-s}{f} \\
\text{故}\quad M &= l + c\,\frac{\frac{n}{2}-s}{f}
\end{aligned}
$$

用同樣的方法可以證明上列的公式用來求其他的分割數也是正確的。

既然知道正確的公式，其他不正確的公式便不用說了。祇是金氏(King)的公式頗值得我們考究一下。依我們剛纔所得的結論，在次數表中求分割數，可視爲先求分割數的所在距行列下限的距離，所以第一步的公式爲$\frac{rn}{p}$，而不是求分割數次

序數値的公式$\frac{rn}{p}+\frac{1}{2}$;第二步自然是簡單的比例添插法。但金氏的方法却與此相異;他的方法第一步不求距離單位,而求次序數値,故用公式$\frac{r(n+1)}{p}$。但此公式爲不正確的,所以金氏的第一步,就是依照次序數値而論,也是錯的——按他的這個公式求分割數所在的次序數祇有中位數一項是對的,其餘的都不對。不過金氏第二步的公式$l+\frac{c(2i-1)}{2f}$可說是不錯,換句話說,假如第一步改用求次序數値的正確公式(卽我們所主張的$\left(\frac{rn}{p}+\frac{1}{2}\right)$,求得的分割數還是不錯。這點可用下列的方法證明:

金氏的公式爲$l+\frac{c(2i-1)}{2f}$,此處$i=\frac{r(n+1)}{p}-s$;

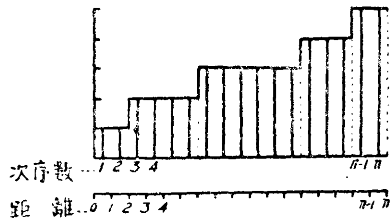
若將$\frac{r(n+1)}{p}$改正爲$\frac{rn}{p}+\frac{1}{2}$,則金氏公式爲

$$l+c\frac{2\left(\frac{rn}{p}+\frac{1}{2}-s\right)-1}{2f}=l+c\frac{\frac{rn}{p}-s+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{f}$$

$$=l+c\frac{\frac{rn}{p}-s}{f}$$

最後的結果與我們上面的公式相同。所以金氏的方法,假如把第一步改正,所得的結果還是不錯。祇是這個方法在計算中多添兩處無謂的麻煩;我們看剛纔的證明演化的程序中,便知道金氏的方法在第一步中多添入$\frac{1}{2}$,在第二步中又減去$\frac{1}{2}$。但在我們的方法中便掃除了此種無謂的麻煩。

以上所論全關於連續的資料。關於不連續的序數 (discrete series)，例如家庭人口數，上面的理論仍然有效，祇是有兩個特點須加以注意：第一，遞加次數的曲線成爲梯形(stair-cased)；第二，分割數的所在祇有落在梯級的交界處(如圖四虛線所示)方有顯著的意義。不連續的資料含有此種缺點是由它本性帶來，沒有法子改進。



图四. 不連續序數的行列

此页空白

波浪式曲線的配合問題

褚一飛　鄭仲陶

我們的題目,『波浪式曲線之配合問題;』看來好似很新,的確,在中國還很少有人討論到這一類問題,但在歐美,却早就引起許多統計家與數學家之注意,并且已有很多的著作。

我們所以要特地提出這一問題來討論的動機,决非僅僅爲了歐美統計學家對於這一問題已有相當研究,而我們就追着去學習,蓋別國已很有研究而尚未介紹到中國的學問,正不知有多少!然我們何以單獨提出這一問題?實因波浪式的曲線,在各種統計中時常遇到,而在經濟統計中更多,因此波浪式曲線之配合問題,於經濟統計研究中,更有其特別重要的地位。本社社員,對於各種統計研究固都有專門特長的人材,而在量的一方面看,又以兼攻經濟的居多,所以我們特地乘此最難得的機會,以這極有關於經濟的統計問題,提出於諸位統計

先進和經濟專家之前，希望給以充分的指教。

波浪式曲線的意義，在字面上便很明白，他是指忽高忽低呈着波浪形式的曲線。我們用這名詞來表示這一類曲線，也就爲他最容易使人了解的緣故。但在旁的觀點上，也可給以別種名詞，例如：『循環性曲線』『週期性曲線』『三角函數曲線』等。究竟應當取何名詞，且待統計名詞委員會去審查決定，在未决定之前，讓我們暫時採用『波浪式曲線。』

什麼是配合？在數理統計學的觀點上最簡單的說，是以實際所得某現象的統計數字，歸納於某一數學公式，此數學公式，便名『配合公式；』而表示此配合公式之曲線，便名『配合曲線。』

『配合公式』『配合曲線』有什麼用處？第一，有此簡單的配合公式，便可省略非常繁複的統計數字，故配合公式，有以簡馭繁之效用，第二，由實際所得的統計數字所繪成的曲線，常呈『不順規』的形態，然此不順規的形態，未必由於現象本身變化之無規律，或許是因爲吾人觀察或測量之不愼，不能求其完全準確，因而呈此突起突落之狀態，在此情形之下，要使其曲線『順規化』便當取其配合曲線替代之，故配合公式，有順規化和消除錯誤之效用。第三，實際所得的統計數字，常限於某某數個不連續的數量，例如

$$x_1 \quad x_2 \cdots\cdots\cdots x_n$$

$$y_1 \quad y_2 \cdots\cdots\cdots y_n$$

從上面的統計，我們固然可以知道當 x 等於 $x_1x_2....x_n$ 的時候，y等於 $y_1\,y_2\cdots\cdots y_n$，而我們却無從知道當x等於x_1與x_2間某一數量(x_1+E)的時候，y是多少。若有了配合公式，我們祗須將x之數值代入配合公式，即得其相互對照的y之數值，故配合公式有插補的效用。外補插有時且可用作預測現象之變化，故配合公式亦有預測的效能。上述三點是配合公式主要的效用，此外雖然還有不少其他的用處，例若：由甲乙兩現象配合公式之相似而推求其性質之相同；再若由甲乙甲丙之配合公式以推求乙丙之關係，諸如此類的效用很多，然不及上述三種之重要，所以我們也不再一一枚舉了。

波浪式曲線和配合兩名詞的意義既已說明，現在我們正式來討論波浪式曲線之配合問題。爲便利敍述起見，且分四段來講：(一)以何種數學公式最適宜於波浪式曲線之配合？(二)既經確定配合公式的形式，如何使其和實際的統計數字相配合？換句話說，就須決定配合公式所含各項係數與實際的統計數字應發生何種關係。(三)如何計算配合公式的各項係數？(四)舉一個實際的例子以說明波浪式曲線之配合法。

一

波浪式曲線是一種時上時下的曲線，升而復降，降而復升似受循環性之作用，所以要配合這一類有循環性的曲線，自當

以具有環循性的數學函數爲最適宜。

設有一函數 $F_{(t)}$,倘使不論 t 之數值如何,而得有

$$F_{(t+T)}=F_{(t)}$$

則 $F^{(t)}$便是一個『循環函數,』而T 便是這循環函數的『週期。』三角函數$\sin x$, $\cos x$,$\operatorname{tg} x$就是循環函數最簡單的例子。所以我們也就首先想着用這一類函數以配合波浪式曲線,而本篇所討論,亦祗以三角函數爲限。

配合波浪式曲線的第一步步驟,應當先決定其週期。决定的方法,可根據理論,譬如以一年爲季節變化的週期,亦可根據經驗,譬如以若干經濟循環的平均週期爲其循環變化的週期。决定了週期,進一步便可選擇配合公式。選擇的標準,一方面以公式愈簡單愈便利爲最善,但另一方面也要配合曲線與實際的統計曲線相離不宜太遠。這兩個條件常是相互矛盾的,可是我們對兩方面都應該顧全到,因爲祗顧了一方面,則不失於『配而不合,』便失於『合而難用,』這是不可不特別加以注意的。

我們在前已聲明過,本篇所應用的配合公式祗限於三角函數。然則最簡單的三角函數是 $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ 壹類的函數,故我們首先就可以這類函數去試一下;不過試驗的結果,很少就能使人滿意的,於是就有人想用較複雜的三角函數,例如 Hermite 所擬的是:

$$f(x)=\frac{\mathrm{Sin}(x-x_2)\ \mathrm{Sin}(x-x_3)\ \cdots\cdots\ \mathrm{Sin}(x-x_n)}{\mathrm{Sin}(x_1-x_2)\ \mathrm{Sin}(x_1-x_3)\ \cdots\cdots\ \mathrm{Sin}(x_1-x_n)}f(x_1)$$

$$+\frac{\mathrm{Sin}(x-x_1)\ \mathrm{Sin}(x-x_3)\ \cdots\cdots\ \mathrm{Sin}(x-x_n)}{\mathrm{Sin}(x_2-x_1)\ \mathrm{Sin}(x_2-x_3)\ \cdots\cdots\ \mathrm{Sin}(x_2-x_n)}f(x_2)$$

$$+\cdots\cdots\cdots+\cdots\cdots\cdots\cdots+\cdots\cdots$$

$$+\frac{\mathrm{Sin}(x_n-x_1)\ \mathrm{Sin}(x-x_2)\ \cdots\cdots\ \mathrm{Sin}(x_n-x_{n-1})}{\mathrm{Sin}(x_n-x_1)\ \mathrm{Sin}(x_n-x_2)\ \cdots\cdots\ \mathrm{Sin}(x_n-x_{n-1})}f(x_n)$$

Cauchy 所擬的是:

$$f(x)=\frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{x-x_2}{2}\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{x-x_3}{2}\right)\cdots\cdots\mathrm{Sin}\left(\frac{x-x_n}{2}\right)}{\mathrm{Sin}\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{x-x_3}{2}\right)\cdots\cdots\mathrm{Sin}\left(\frac{x_1-x_n}{2}\right)}f(x_1)$$

$$+\frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{x-x_1}{2}\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{x-x_3}{2}\right)\cdots\cdots\mathrm{Sin}\left(\frac{x-x_n}{2}\right)}{\mathrm{Sin}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{x_2-x_3}{2}\right)\cdots\cdots\mathrm{Sin}\left(\frac{x_2-x_n}{2}\right)}f(x_2)$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{x-x_1}{2}\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{x-x_2}{2}\right)\cdots\cdots\mathrm{Sin}\left(\frac{x-x_{n-1}}{2}\right)}{\mathrm{Sin}\left(\frac{x_n-x_1}{2}\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{x_n-x_1}{2}\right)\cdots\cdots\mathrm{Sin}\left(\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\right)}f(x_n)$$

Gauss 與 Lachlass 亦曾擬有下列兩式:

$$f(x)=\frac{(\mathrm{Cos}\,x-\mathrm{Cos}\,x_2)(\mathrm{Cos}\,x-\mathrm{Cos}\,x_3)\cdots(\mathrm{Cos}\,x-\mathrm{Cos}\,x_n)}{(\mathrm{Cos}\,x_1-\mathrm{Cos}\,x_2)(\mathrm{Cos}\,x_1-\mathrm{Cos}\,x_3)\cdots(\mathrm{Cos}\,x_1-\mathrm{Cos}\,x_n)}f(x_1)$$

$$+\frac{(\mathrm{Cos}\,x-\mathrm{Cos}\,x_1)(\mathrm{Cos}\,x-\mathrm{Cos}\,x_3)\cdots(\mathrm{Cos}\,x-\mathrm{Cos}\,x_n)}{(\mathrm{Cos}\,x_2-\mathrm{Cos}\,x_1)(\mathrm{Cos}\,x_2-\mathrm{Cos}\,x_3)\cdots(\mathrm{Cos}\,x_2-\mathrm{Cos}\,x_n)}f(x_2)$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{(\mathrm{Cos}\,x-\mathrm{Cos}\,x_1)(\mathrm{Cos}\,x-\mathrm{Cos}\,x_2)\cdots(\mathrm{Cos}\,x-\mathrm{Cos}\,x_{n-1})}{(\mathrm{Cos}\,x_n-\mathrm{Cos}x_1)(\mathrm{Cos}\,x_n-\mathrm{Cos}\,x_2)\cdots(\mathrm{Cos}\,x-_n\mathrm{Cos}\,x_{n-1})}f(x_n)$$

$$f(x)=\frac{\mathrm{Sin}\,x\,(\mathrm{Cos}\,x-\mathrm{Cos}\,x_2)(\mathrm{Cos}\,x-\mathrm{Cos}\,x_3)..(\mathrm{Cos}\,x-\mathrm{Cos}\,x_n)}{\mathrm{Sin}\,x_1(\mathrm{Cos}\,x_1-\mathrm{Cos}\,x_2)(\mathrm{Cos}\,x_1-\mathrm{Cos}\,x_3)..(\mathrm{Cos}\,x_1-\mathrm{Cos}\,x_n)}f(x_1)$$

$$+\frac{\mathrm{Sin}\,x\,(\mathrm{Cos}\,x-\mathrm{Cos}x_1)(\mathrm{Cos}\,x-\mathrm{Cos}\,x_3)..(\mathrm{Cos}\,x-\mathrm{Cos}\,x_n)}{\mathrm{Sin}\,x_2(\mathrm{Cos}\,x_2-\mathrm{Cos}\,x_1)(\mathrm{Cos}\,x_2-\mathrm{Cos}\,x_3)..(\mathrm{Cos}\,x_2-\mathrm{Cos}\,x_n)}f(x_2)$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\mathrm{Sin}\,x\,(\mathrm{Cos}\,x-\mathrm{Cos}\,x_1)(\mathrm{Cos}\,x-\mathrm{Cos}\,x_2)..(\mathrm{Cos}\,x-\mathrm{Cos}\,x_{n-1})}{\mathrm{Sin}\,x_n(\mathrm{Cos}\,x_n-\mathrm{Cos}\,x_1)(\mathrm{Cos}\,x_n-\mathrm{Cos}\,x_3)..(\mathrm{Cos}\,x_n-\mathrm{Cos}\,x_{n-1})}f(x_n)$$

諸如此類的函數很多,斷難一一齊舉,況在經濟統計研究中,很少用得到這類繁復的公式,而普通應用『次級較高的三角和數』已算得很精細的研究了。又以今天提出與諸君討論的是我們對于波浪式曲線配合問題的初步研究,也暫以此三角和數爲限。

三角和數最普通的形式爲

$$f(x)=m+(a_1Cos\ x+b_1Sin\ x)(a_2Cos\ 2x+b_2sin\ 2x)+\cdots\cdots+(a_pCos\ px+b_pSin\ px)$$

p的數目愈大,三角和數便愈形繁複,因此,三角和數有級次的分別。上面寫的公式,更是一個『p級三角和數。』級次愈低,三角和數的公式愈形簡單,所以假使我們決定用三角和數以配合波浪式曲線,可首先試以一級三角和數:

$$y=m+a_1Cos\ x+b_1Sin\ x$$

既得其配合公式,便可比較其由配合公式計算所得之數字和實際統計數字相差幾何,倘使相差很小,配合問題就解決了;否則,便當改以較高次級的三角和數如二級三角和數:

$$y=m+a_1Cos\ x+b_1Sin\ x+a_2Cos\ 2x+b_2Sin\ 2x$$

三級三角和數:

$$y=m+a_1Cos\ x+b_1Sin\ x+a_2Cos\ 2x+b_2Sin\ 2x+a_3Cos3x+b_3Sin3x$$

漸次將級次提高,直至其配合曲線離實際統計曲線極近爲止。又當漸次提高三角和數級次的時候,例若由p級提高至p+1

級,我們祗須計算其末兩項之係數 a_{p+1} 與 b_{p+1},而其他 p 級三角和數各項的係數仍可繼續應用,無須重算,這層在計算方面,是非常便利的。

三角和數是有循環性的函數,當然可用以配合波浪式曲線,不過三角和數的週期是 2π,而波浪式曲線的週期是 T,現在要使實際的統計曲線與表示三角和數的曲線兩相配合起來,還須他們的週期相互一致。欲使其週期相互一致,還須經過一變更變數的手續。

假定統計數字原以 t 爲變數,T 爲週期,要使其週期變爲 2π,祗須將 t 改爲新變數 x,令

$$x=\frac{2\pi}{T}t$$

則 x 的週期就跟三角和數相互一致了。

總括上面的論述,我們以爲配合波浪式曲線,應利用三角函數,而在經濟統計一類的研究中,倘使我們不求過分的精細,且欲避免繁複的計算,以三角和數爲最適宜。但配合公式與實際統計數字應當週期相同,所以在實行配合之前,還須經過一變更變數的手續。

二

現在我們既經確定了配合公式的形式(三角和數)便得進一步决定配合公式所含各項的係數與實際的統計數字應發生

何種關係。

設使實際統計數列爲

$$(1)\begin{cases} y_1\ y_2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y_n \\ t_1\ t_2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t_n \end{cases}$$

假定其週期爲 T。我們第一步手續須先變更變數，卽須將上述統計數列(1)改成下式：

$$(2)\begin{cases} y_1\ y_2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y_n \\ x_1\ x_2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n \end{cases}$$

$$x=\frac{2\pi}{T}\,t$$

變數變更以後，我們便得以一『p 級三角和數』與之配合。欲達到配合的地步，應使各 y 與各配合公式右項之數值『差不多相等，』卽應得下列n個『差不多相等』的公式：

$$(3)\begin{cases} y_1 \triangleq m+a_1Cos\ x_1+b_1Sin\ x_1+a_2Cos\ x+b_2Sin\ 2x_1+\ldots\ldots \\ \qquad +\ldots\ldots+a_pCos\ px_1+b_pSin\ px_1 \\ y_2 \triangleq m+a_1Cos\ x_2+b_1Sin\ x_2+a_2Cos\ 2x_2+b_2Sin\ 2x_2+\ldots\ldots \\ \qquad +\ldots\ldots+a_pCos\ px_2+b_pSin\ px_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n \triangleq m+a_1Sos\ x_n+b_1Sin\ x_n+a_2Cos\ 2x_n+b_2Sin\ 2x_n+\ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots+a_pCos\ px_n+b_pSin\ px_n \end{cases}$$

$\triangleq$爲『差不多相等』的符號。

由這 n 個公式，我們應確定其 2p+1個係數，【(2p+1)當然不得超過於 n】，又配合公式以愈簡愈妙，則三角和數之級次p自亦以愈低愈好，故 $2p+1$當不及 n。然則今由 n 個公式以

求 2p+1 個未知數，公式多過於未知數，將如何決定其2p+1個係數呢？我們可以在此n個公式中選取其 2p+1個，由該選得的 2p+1個一次聯立方程式以求其2p+1個未知數(係數)；亦可根據某種原則而利用其全體材料。比較起來，以後一種方法較爲精確。但根據何種原則以利用其全體材料呢？則在統計上最通用的確定係數方法是根據最小二乘原則，而我們也就根據這個原則來確定此配合公式(p 級三角和數)的 2p+1個係數 $m, a_1, b_1; a_2, b_2, \ldots a_p, b_p$。

根據最小二乘原則，應使

$$\sum_{k=1}^{n}[y_k-(m+a_1 Cos\, x_k+b_1 Sin\, x_k+a_2 Cos\, 2x_k+b_2 Sin\, 2x_k + \ldots\ldots\ldots + a_p Cos\, px_k+b_k Sin\, px_k)]^2 = \text{最小}$$

要符合這條件，應使『從各項係數的微分係數』均等於零，即須令：

$$(4)\begin{cases}\sum_{k=1}^{n} 2[y_k-(m+a_1 Cos\, x_k+b_1 Sin\, x_k+\ldots+a_p Cos\, px_k+b_p Sin\, px_k)]=0\\ \sum_{k=1}^{n} 2Cos\, x_k[y_k-(m+a_1 Cos\, x_k+b_1 Sin\, x_k+\ldots\ldots+a_p Cos\, px_k + b_p Sin\, px_k)]=0\\ \sum_{k=1}^{n} 2Sin\, x_k[y_k-(m+a_1 Cos\, x_k+b_1 Sin\, x_k+\ldots\ldots+a_p Cos\, px_k + b_p Sin\, px_k)]=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \sum_{k=1}^{n} 2\, Cos\, px_k[y_k-(m+a_1 Cos\, x_k+b_1 Sin\, x^k+\ldots\ldots+a_p Cos\, pa_k + b_p Sin\, px_k)]=0\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} 2\ Sin\ px_k[y_k-(m+a_1Cos\ x_k+b_1Sin\ x_k+\ldots+a_pCos\ px_k+b_pSin\ px_k)]=0$$

或化成下列2p+1個等式:

$$(5)\begin{cases}\Sigma\ y_k=n\,m+a_1\Sigma Cos\ x_k+b_1\Sigma Sin\ x_k+\ldots+a_p\Sigma Cos\ px_k+b_p\Sigma Sin\ px_k\\ \Sigma\ y_kCos\ x_k=m\,\Sigma Cos\ x_k+a_1\Sigma Cos^2\ x_k+b_1\Sigma Cos\ x_k\ Sin\ x_k+\ldots\\ \qquad +a_p\Sigma Cos\ x_k\ Cos\ px_k+b_p\Sigma Cos\ x_k\ Sin\ px_k\\ \Sigma\ y_kSin\ x_k=m\,\Sigma Sin\ x_k+a_1\Sigma Sin\ x_k\ Cos\ x_k+b_1\Sigma Sin^2\ x_k+\ldots\\ \qquad +a_p\Sigma Sin\ x_k\ Cos\ px_k+b_p\Sigma Sin\ x_k\ Sin\ px_k\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Sigma\ y_kCos\ px_k=m\,\Sigma Cos\ px_k+a_1\Sigma Cos\ px_k\ Cos\ x_k+\\ \qquad +b\ \Sigma Cos\ px_k\ Sin\ x_k+\ldots+a_p\Sigma Cos^2\ px_k\\ \qquad +b_p\Sigma Cos\ px_k\ Sin\ px_k\\ \Sigma\ y_kSin\ px_k=m\,\Sigma Sin\ px_k+a_1\Sigma Sin\ px_k\ Cos\ x_k+b\ \Sigma Sin\ px_k\ \ Sin\ x_k\\ \qquad +\ldots\ldots+a_p\Sigma Sin\ px_k\ Cos\ px_k+b_p\Sigma Sin^2\ px_k\end{cases}$$

以上2p+1個公式,都是一次方程式,因此祇要解此 2p+1 個聯立一次方程式,便得確定其配合式的2p+1個係數。

三

依據上述第(5)諸式,便不難推求其配合公式的各項係數,因而不難求得其配合公式。但其計算却不免繁複,故在實際計算上,除不得已時,很少直接利用這類計算公式的,又以我們的研究,既專重應用,自當於基本公式之外,再討論一些較合於實際計算的公式。

上述第(5)諸式,大部分是兩個三角函數的乘積;這類

乘積的計算,非常繁複。然兩三角函數的乘積,可使之變爲一簡單三角函數,故爲便利計算起見,可利用下列諸三角公式(6),首先將各三角函數乘積變更一下:

$$(6)\begin{cases} 2\,Cos\,\alpha x\,Cos\,\beta x = Cos(\alpha-\beta)x + Cos(\alpha+\beta)x \\ 2\,Sin\,\alpha x\,Sin\,\beta x = Cos(\alpha-\beta)x - Cos(\alpha+\beta)x \\ 2\,Sin\,\alpha x\,Cos\,\beta x = Sin(\alpha-\beta)x + Sin(\alpha+\beta)x \end{cases}$$

依據這幾個公式,便可將上述第(5)諸式改爲下式:

$$(7)\begin{cases} \Sigma y_k = n\,m + a_1\Sigma Cos\,x_k + b\,\Sigma Sin\,x_k + \dots\dots \\ \qquad + a_p\Sigma Cos\,px_k + b_p\Sigma Sin\,px_k \\ 2\,\Sigma y_k Cos\,x_k = 2m\Sigma Cos\,x_k + a_1[\Sigma Cos(1+1)x_k + \Sigma Cos(1+1)x_k] \\ \qquad + b_1[\Sigma Sin(1-1)x_k + \Sigma Sin(1+1)x_k + \dots\dots \\ \qquad + \dots\dots + a_p[\Sigma Cos(p-1)x_k + \Sigma Cos(p+1)x_k \\ \qquad + b_p[\Sigma Sin(p-1)x_k + \Sigma Sin(p-1)x_k] \\ 2\,\Sigma y_k\,Sin\,x_k = 2\,m\Sigma Sin\,x_k + a_1[\Sigma Sin(1+1)x + \dots\dots \\ \qquad + \Sigma Sin(1+1)x_k] + b_1[\Sigma Cos(1-1)x_k - \Sigma Cos(1+1)x_k] \\ \qquad + \dots\dots + \dots\dots \\ \qquad + a_p[\Sigma Sin(1-p)x_k + \Sigma Sin(1+p)x_k] \\ \qquad + b_p[\Sigma Cos(1-p)x_k - \Sigma Cos(1-p)x_k] \\ \dots\dots\dots\dots \\ 2\,\Sigma y_k\,Cos\,px_k = 2\,m\Sigma Cos\,px_k + a_1[\Sigma Cos(p-1)x_k + \\ \qquad \Sigma Cos(p+1)x_k] + b_1[\Sigma Sin(1-p)x_k - \\ \qquad \Sigma Sin(1+p)x_k] + \dots\dots + \dots\dots \\ \qquad + \dots\dots + a_p[\Sigma Cos(p-p)x_k + \Sigma Cos(p+p)x^k] \\ 2\,\Sigma y_k\,Sin\,px_k = 2\,m\Sigma Sin\,px_k + a_1[\Sigma Sin(p-1)x_k + \Sigma Sin(p+1)x_k] \\ \qquad + b_1[\Sigma Cos(p-1)x_k - \Sigma Cos(p+1)x_k] + \dots\dots \\ \qquad + \dots\dots + a_p[\Sigma Sin(p-p)x_k + \Sigma Sin(p+p)x_k] \\ \qquad + b_p[\Sigma Cos(p-p)x_k - \Sigma Cos(p+p)x_k] \end{cases}$$

第(7)諸式已將第(5)諸式簡化不少，但實際計算仍嫌過繁；而於各 x 成一算術級數時（一般統計，大都能符合此一條件）得應用更簡單的計算公式（Bessel 公式）

設各 x 成一算術級數而如下列之情形

$$x_1 = x_1$$

$$x_2 = x_1 + \frac{2\pi}{n}$$

$$x_3 = x_1 + \frac{4\pi}{n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

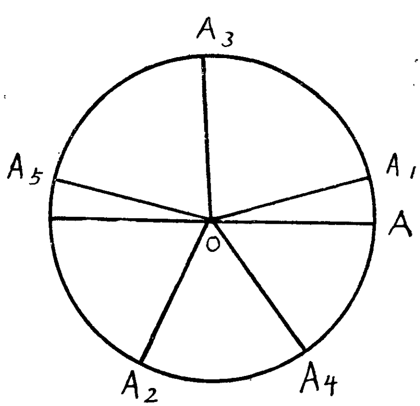
$$x_k = x_1 + (k-1)\frac{2\pi}{n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = x_1 + (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

則上述第(7)諸公式，就能變成非常簡單，因為在這情形之下，第(7)諸式中各聯立方程式除去一項外，(第 h 個公式除去其第 h 項)其餘右列各項皆等於零。要證明這一點最簡單的方法，是用幾何的理論。設使 OA＝1，為右圓形的半徑。



在上述第(7)諸式中,須計算之右列各項,除 nm 一項外,其餘都可歸入下列二式

$$甲式:\sum_{k=1}^{n} Cos(\alpha\pm\beta)x_k=S_1$$

$$乙式:\sum_{k=1}^{n} Sin(\alpha\pm\beta)x_k=S_2$$

α,β 可各取 0,1,2,....p 等整數,而 n 既必大於 2p+1, 則 $(\alpha\pm\beta)$ 亦必小於 n。S_1 或 S_2 之數值,自當隨 $(\alpha+\beta)$ 之數值而不同,現在且分兩格以各求其 S_1 與 S_2 之數值:

$$A\ 格: r=\alpha\pm\beta\neq 0$$

$$B\ 格: r=\alpha\pm\beta=0$$

(A) $r\neq o$

設以

$$\overset{\frown}{AA_1}=rx_1$$

由 A_1 將圓周分成 n 相等部分, 茲爲便於圖示與解釋起見,可暫令 r=3,n=5, 如是,則(見圖1)

$$rx_1=\overset{\frown}{AA_1}$$

$$rx_2=r(x_1+\frac{2\pi}{n})=\overset{\frown}{AA_2}$$

$$rx_3=r(x_1+\frac{4\pi}{n})=\overset{\frown}{AA_3}$$

$$rx_4=r(x_1+\frac{6\pi}{n})=\overset{\frown}{AA_4}$$

$$rx_5=r(x_1+\frac{8\pi}{n})=\overset{\frown}{AA_5}$$

因而

$$Cos\ rx_1 = proj_{OA}\ \overline{OA_1}$$

$$Cos\ rx_2 = proj_{OA}\ \overline{OA_2}$$

$$Cos\ rx_3 = proj_{OA}\ \overline{OA_3}$$

$$Cos\ rx_4 = proj_{OA}\ \overline{OA_4}$$

$$Cos\ rx_5 = proj_{OA}\ \overline{OA_5}$$

$$\sum_{k=1}^{5} Cos\ rx_k = \sum_{k=1}^{3} proj_{OA}\ \overline{OA_k} = proj_{OA}\left[\sum_{k=1}^{5} \overline{OA_k}\right]$$

然 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 爲一正五角形，則 $\sum\limits_{k=1}^{5}\overline{OAk}$ 應等於零，故

$$\sum_{k=1}^{5} Cos\ rx_k = 0$$

同理，假使 OB 爲一垂直於 OA 的直徑，則

$$\sum_{k=1}^{5} Sin\ rx_k = proj_{OB}\left[\sum_{k=1}^{5} OA_k\right]$$

$$=0$$

根據同樣理論，可不論 r 與 n 爲任何數値而證明其

$$(8)\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n} Cos\ rx_k = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} Sin\ rx_k = 0\end{cases}$$

祗須 r 不等於零。

(B) $r=o$

在這一格，計算是非常簡便，因爲

$$Sin\ 0=0$$

$$Cos\ 0=1$$

故

$$(9)\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n} Cos\ rx_k=n\\ \sum\limits_{k=1}^{n} Sin\ rx_k=0\end{cases}$$

依此(8)(9)兩式,上述第(7)諸式可變成非常簡單

$$(10)\begin{cases}\Sigma\ y_k=n\ m\\ 2\ \Sigma y_k\ Cos\ x_k=r\ a_1\\ 2\ \Sigma y_k\ Sin\ x_k=n\ b_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 2\ \Sigma y_k\ Cosp\ x_k=n\ a_p\\ 2\ \Sigma y_k\ Sinp\ x_k=n\ b_p\end{cases}$$

又或

$$(11)\begin{cases}m=\frac{1}{n}[y_1+y_2+\cdots\cdots+y_k+\cdots\cdots+y_n]\\ a_1=\frac{2}{n}[y_1\ Cos\ x_1+y_2\ Cos\ x_2+\cdots\cdots+y_k\ Cos\ x_k\\ \qquad +\cdots\cdots+y_n\ Cos\ x_n]\\ b_1=\frac{2}{n}[y_1\ Sin\ x_1+y_2\ Sin\ x_2+\cdots\cdots+y_k\ Sin\ x_k\\ \qquad +\cdots\cdots+y_n\ Sin\ x_n]\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_p=\frac{2}{n}[y_1\ Cos\ px_1+y_2\ Cos\ px_2+\cdots\cdots+y_k\ Cos\ px_k\\ \qquad +\cdots\cdots+y_n\ Cos\ px_n]\\ b_p=\frac{2}{n}[y_1\ Sin\ px_1+y_2\ Sin\ px_2+\cdots\cdots+y_k\ Sin\ px_k\\ \qquad +\cdots\cdots+y_n\ Sin\ px_n]\end{cases}$$

根據這幾個配合公式,三角和數的各係數便不難計算矣。

四

以上所述，已將波浪式曲線配合問題諸要點，逐條討論。我們的結論是(1)配合波浪式曲線，應用三角函數，而屬於經濟統計一類的問題，材料未臻十分準確，分析自無須過於精細，故其配合公式，以三角和數爲最適當，且便於計算；(見第一節)(2)確定配合公式的各項係數，可用最小二乘法求之；(見第二節)(3)實際計算，可用 Bessel 公式(見第三節。)至此，我們的討論，本可就此告終，況在坐諸君都是統計專家更無舉例說明之必要；但爲完備起見，我們繼以上海棉花市價之材料作實例，來說明波浪式曲線之配合法。

今且以民國十三年至二十二年上海棉花市價的材料（錄自全國經濟委員會棉業統制委員會編印之『棉花統計』(見表一，)而取其各月平均數【以消除其循環變化。按理，本當待消除長期趨勢之後，再消除其循環變化。惟計算勢將非常繁複，而我們的用意，既僅在舉例以說明方法之運用，初不問其結果之效用若何，因此，就假定其無長期趨勢以省計算。此項假定，固未必適合事實，(事實上恐有漸趨低落的長期變化）然亦無損於舉例說明之原意。】所得十二個數字，假定其僅有季節變化，(吾人假定其有耳。至季節變化究竟存在與否，原成問題；而季節變化苟非顯著存在，則以下計算，便失其切實意義；然吾人早已聲明既僅以例示方法運用爲目的，固無妨不問其究竟有無且假定其存在是矣。)而以三角和數配合之。

上 海 棉 花 市 價

民國十二年至廿二年

年份＼月份	正 月	二 月	三 月	四 月	五 月	六 月	七 月	八 月	九 月	十 月	十一月	十二月
民國十二年	5682	6314	4936	5472	5341	5635	5691	5479	5398	5682	6690	6510
十三年	6537	6419	6460	6683	6674	6399	7050	6653	5158	5074	5431	5416
十四年	5448	5745	6078	6000	5675	5761	5931	5791	5309	5378	5306	4772
十五年	4959	4961	4548	4775	4258	4478	4527	4769	4420	4640	4523	4328
十六年	3997	4134	4553	4442	4642	4819	5101	5387	5797	5354	4794	4672
十七年	4825	5066	5256	5573	5794	5606	5752	5143	4789	4766	4703	4668
十八年	4874	5014	5149	5364	5090	5166	5186	5012	5000	4995	4843	4996
十九年	5010	5010	4930	5134	5002	5152	5014	5005	4723	4677	4223	4393
二十年	5128	6513	5806	5906	5760	5637	5652	5033	5104	4951	4755	4562
廿一年	4602	4768*	4934*	4978	4774	4184	4337	4795	4770	4532	4437	4553
廿二年	4591	4406	4336	4305	4500	4770	4600	4450	3950	4075	3850	3800
總 計	55653	58350	56986	58632	57510	58107	58841	57517	54418	54124	54155	52670
平 均	5059	5305	5181	5330	5228	5282	5349	5229	4947	4920	4923	4788

註一：本表數字以 0.01 銀圓爲單位，爲通州棉每担之價格。

註二：有 * 符號者爲插補所得之數字。蓋彼時暴日擾滬，商業停頓，棉價記載遂付缺如。

表 一

茲以 y 表示棉價(見第二表第二行), t 表示月份, x 爲變更變數以後的新變數。茲爲便利計算起見, 當令

$$x_1=0$$

如是, 卽得各 x 之數值(第二表第三行)。今假定以四級三角和數配合之, 則其配合公式之形式應爲:

$$y=m+a_1\ Cos\ x+b_1\ Sin x+a_2\ Cos\ 2x+b_2\ Sin\ 2x$$
$$+a_3\ Cos\ 3x+b_3\ Sin\ 3x+a_4\ Cos\ 4x+b_4\ Sin\ 4x$$

依 Bessel 公式(11) 卽得求其各係數之數值

$$m=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k=\frac{1}{12}(y_1+y_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+y_{12})$$

$$a_1=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k\ Cos\ x_k=\frac{1}{6}(y_1\ Cos\ x_1+y_2\ Cos\ x_2+\cdots\cdots+y_{12}\ Cos\ x_{12})$$

$$b_1=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k\ Sin\ x_k=\frac{1}{6}(y_1\ Sin\ x_1+y_2\ Sin\ x_2+\cdots\cdots+y_{12}\ Sin\ x_{12})$$

....

....

$$a_4=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k\ Cos\ 4x_k=\frac{1}{6}(y_1\ Cos\ 4x_1+y_2\ Cos\ 4x_2+\cdots\cdots+y_{12} Cos\ 4x_{12}$$

$$b_4=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k Sin\ 4x_k=\frac{1}{6}(y_1\ Sin\ 4x_1+y_2\ Sin\ 4x_2+\cdots\cdots+y_{12}\ Sin\ 4x_{12})$$

計算手續, 可先將各 $\cos x_k$ $\cos 2x_k$ $\cos 3x_k$ $\cos 4x_k$ $\sin x_k$ $\sin 2x_k$ $\sin 3x_k$ 及 $\sin 4x_k$ $(k=1,2,3\cdots\cdots n)$ 分別求出(見第二表,)然後按上列公式計算之。(該計算從略, 因另有更簡之計算法詳後),

t	正 月	二 月	三 月	四 月	五 月	六 月	七 月	八 月	九 月	十 月	十一月	十二月
y	5059	5305	5181	5330	5228	5282	5349	5229	4947	4920	4923	4788
x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2x	0°	60°	120°	180°	240°	300°	0°	60°	120°	180°	240°	300°
cos 2x	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
sin 2x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
3x	0°	90°	180°	270°	0°	90°	180°	270°	0°	90°	180°	270°
cos 3x	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
sin 3x	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1
4x	0°	120°	240°	0°	120°	240°	0°	120°	240°	0°	120°	240°
cos 4x	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
sin 4x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

表 二

惟本例 n＝12，為一特別數值，可更求簡單的計算公式。(倘 n 等於 4,6,8,24 等特別數值時，亦得分別求其特別簡單的計算公式。)

為求更簡單的算式，可將其12個數值分寫二行，(見第三表上兩行)而後求其同列兩數之和與差，(見第三表下兩行)得子丑寅卯辰巳午未申酉戌亥諸數值，

y_1 5059	y_2 5305	y_3 5181	y_4 5330	y_5 5228	y_6 5282
y_7 5349	y_8 5229	y_9 4947	y_{10} 4920	y_{11} 4923	y_{12} 4783
子 10408	丑 10534	寅 10128	卯 10250	辰 10151	巳 10070
午 −290	未 76	申 234	酉 410	戌 305	亥 494

表　三

乃再將子丑寅未申卯辰巳亥戌拾值，分列兩行(見第四表上兩行)，同法，取其同列兩數之和與差，(見第四表下兩行) 得甲乙丙丁戊己庚辛壬癸諸數值；

子 10408	丑 10534	寅 10128	未 76	申 234
卯 10250	辰 10151	巳 10070	亥 494	戌 305
甲 20658	乙 20685	丙 20198	丁 570	戊 539
己 158	庚 383	辛 58	壬 −418	癸 − 71

表　四

最後又將乙庚丙辛四值分列兩行 (見第五表上兩行) 亦取其同列兩數之和與差(見第五表下兩行)，得天地日月諸數值。

乙	20685	庚	383
丙	20198	辛	58
天	40883	地	441
日	487	月	325

表　五

有此三表(第三表,第四表,第五表)便極易得其簡單之計算公式如次:

$$m=\frac{1}{12}(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9+y_{10}+y_{11}+y_{12})$$

$$=\frac{1}{12}(子+丑+寅+卯+辰+巳)$$

$$=\frac{1}{12}(甲+乙+丙)$$

$$=\frac{1}{12}(甲+天)$$

$$a_1=\frac{2}{12}[y_1\ Cos\ 0^0+y_2\ Cos\ 30^0+y_3\ Cos\ 60^0+y_4\ Cos\ 90^0+y_5\ Cos\ 120^0$$
$$+y_6\ Cos\ 150^0+y_7\ Cos\ 180^0+y_8\ Cos\ 210^0+y_9\ Cos\ 240^0$$
$$+y_{10}\ Cos\ 270^0+y_{11}\ Cos\ 300^0+y_{12}\ Cos\ 330^0]$$

$$=\frac{1}{6}(y_1-y_7)+\frac{\sqrt{3}}{2}(y_2-y_8)+\frac{1}{2}(y_3-y_9)-\frac{1}{2}(y_5-y_{11})-\frac{\sqrt{3}}{2}(y_0-y_{12})]$$

$$=\frac{1}{6}[午+\frac{\sqrt{3}}{2}未+\frac{1}{2}申-\frac{1}{2}戌-\frac{\sqrt{3}}{2}亥]$$

$$=\frac{1}{6}[午+\frac{\sqrt{3}}{5}(未-亥)+\frac{1}{2}(申-戌)]$$

$$=\frac{1}{6}[午+\frac{\sqrt{3}}{2}壬+\frac{1}{2}癸]$$

$$b_1=\frac{2}{12}(y_1\ Sin\ 0^0+y_2\ Sin\ 30^0+y_3\ Sin\ 60^0+y_4\ Sin\ 90^0+y_5\ Sin\ 120^0$$
$$+y_6\ Sin\ 150^0+y_7\ Sin\ 180^0+y_8\ Sin\ 210^0+y_9\ Sin\ 240^0$$
$$+y_{10}\ Sin\ 270^0+y_{11}\ Sin\ 300^0+y_{12}\ Sin\ 330^0]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}(y_2-y_8)+\frac{\sqrt{3}}{2}(y_3-y_9)+(y_4-y_{10})+\frac{\sqrt{3}}{2}(y_5-y_{11})+\frac{1}{2}(y_6-y_{12})\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}(\text{未}+\text{亥})+\frac{\sqrt{3}}{2}(\text{申}+\text{戌})+\text{酉}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}\text{丁}+\frac{\sqrt{3}}{3}\text{戊}+\text{酉}\right]$$

$$a_2=\frac{2}{12}[y_1\ Cos\ 0^0+y_2\ Cos\ 60^0+y_3\ Cos\ 120^0+y_4\ Cos\ 180^0+y_5\ Cos\ 240^0$$
$$+y_6\ Cos\ 300^0+y_7\ Cos\ 0^0+y_8\ Cos\ 60^0+y_9\ Cos\ 120^0$$
$$+y_{10}\ Cos\ 180^0+y_{11}\ Cos\ 240^0+y_{12}\ Cos\ 300^0]$$

$$=\frac{1}{6}\left[(y_1+y_7)+\frac{1}{2}(y_2-y_8)-\frac{1}{2}(y_3+y_9)-(y_4+y_{10})-\frac{1}{2}(y_5+y_{11})\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(y_6+y_{12})\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\text{子}+\frac{1}{2}\text{丑}-\frac{1}{2}\text{寅}-\text{卯}-\frac{1}{2}\text{辰}+\frac{1}{2}\text{巳}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[(\text{子}-\text{卯})+\frac{1}{2}(\text{丑}-\text{辰})-\frac{1}{2}(\text{寅}-\text{巳})\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\text{己}+\frac{1}{2}\text{庚}-\frac{1}{2}\text{辛}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\text{己}+\frac{1}{2}(\text{庚}-\text{辛})\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\text{己}+\frac{1}{2}\text{月}\right]$$

$$b_2=\frac{2}{12}[y_1\ Sin\ 0^0+y_2\ Sin\ 60^0+y_3\ Sin\ 120^0+y_4\ Sin\ 180^0+y_5\ Sin\ 240^0$$
$$+y_6\ Sin\ 300^0+y_7\ Sin\ 0^0+y_8\ Sin\ 60^0+y_7\ Sin\ 120^0$$
$$+y_{10}\ Sin\ 180^0+y_{11}\ Sin\ 240^0+y_{12}\ Sin\ 300^0]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(y_2+y_8)+\frac{\sqrt{3}}{2}(y_3+y_9)-\frac{\sqrt{3}}{2}(y_5+y_{10})-\frac{\sqrt{3}}{2}(y_6+y_{12})\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\text{丑}+\frac{\sqrt{3}}{2}\text{寅}-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{辰}-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{巳}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\text{丑}-\text{辰})+\frac{\sqrt{3}}{2}(\text{寅}-\text{巳})\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{12}(\text{庚}+\text{辛})$$

$$=\frac{3}{12}\text{地}$$

$$a_3=\frac{2}{12}[y_1 \; Cos \; 0^0+y_2 \; Cos \; 90^0+y_3 \; Cos \; 180^0+y_4 \; Cos \; 270^0+y_5 \; Cos \; 0^0$$
$$+y_6 \; Cos \; 90^0+y_7 \; Cos \; 180^0+y_8 \; Cos \; 270^0+y_9 \; Cos \; 0^0$$
$$+y_{10} \; Cos \; 90^0+y_{11} \; Cos \; 180^0+y_{12} \; Cos \; 270^0)]$$

$$=\frac{1}{6}[(y_1-y_7)-(y_3-y_9)+(y_5-y_{11})]$$

$$=\frac{1}{6}[\text{午}-\text{申}+\text{戌}]$$

$$=\frac{1}{6}[\text{午}-(\text{申}-\text{戌})]$$

$$=\frac{1}{6}(\text{午}-\text{癸})$$

$$b_3=\frac{2}{12}[y_1 \; Sin \; 0^0+y_2 \; Sin \; 90^0+y_3 \; Sin \; 180^0+y_4 \; Sin \; 270^0+y_5 \; Sin \; 0^0$$
$$+y_6 \; Sin \; 90^0+y_7 \; Sin \; 180^0+y_8 \; Sin \; 270^0+y_9 \; Sin \; 0^0$$
$$+y_{10} \; Sin \; 90^0+y_{11} \; Sin \; 180^0+y_{12} \; Sin \; 270^0]$$

$$=\frac{1}{6}[(y_2-y_8)-(y_4-y_{10})+(y_6-y_{12})]$$

$$=\frac{1}{6}[\text{未}+\text{亥}-\text{酉}]$$

$$=\frac{1}{6}(\text{丁}-\text{酉})$$

$$a_4=\frac{2}{12}[y_1 \; Cos \; 0^0+y_2 \; Cos \; 120^0+y_3 \; Cos \; 240^0+y_4 \; Cos \; 0^0+y_5 \; Cos \; 120^0$$
$$+y_6 \; Cos \; 240^0+y_7 \; Cos \; 0^0+y_8 \; Cos \; 120^0+y_9 \; Cos \; 240^0$$
$$+y_{10} \; Cos \; 0^0+y_{11} \; Cos \; 120^0+y_{12} \; Cos \; 240^0]$$

$$=\frac{1}{6}[(y_1+y_7)-\frac{1}{2}(y_2+y_8)-\frac{1}{2}(y_3+y_9)+(y_4+y_{10})-\frac{1}{2}(y_5+y_{11})$$
$$-\frac{1}{2}(y_6+y_{12})]$$

$$=\frac{1}{6}[\text{子}-\frac{1}{2}\text{丑}-\frac{1}{2}\text{寅}+\text{卯}-\frac{1}{2}\text{辰}-\frac{1}{2}\text{巳}]$$

$$=\frac{1}{6}[(\text{子}+\text{卯})-\frac{1}{2}(\text{丑}+\text{辰})-\frac{1}{2}(\text{寅}+\text{巳})$$

$=\frac{1}{6}$ [甲$-\frac{1}{2}$(乙+丙)]

$=\frac{1}{6}$ [甲$-\frac{1}{2}$天]

$b_1=\frac{2}{12}[y_1 \, Sin \, 0^0+y_2 \, Sin \, 120^0+y_3 \, Sin \, 240^0+y_4 \, Sin \, 0^0+y_5 \, Sin \, 120^0$

$+y_6 \, Sin \, 240^0+y_7 \, Sin \, 0^0+y_8 \, Sin \, 120^0+y_9 \, Sin \, 240^0$

$+y_{10} \, Sin \, 0^0+y_{11} \, Sin \, 120^0+y_{12} \, Sin \, 240^0]$

$=\frac{1}{6}\ [\frac{\sqrt{3}}{2}(y_2+y_8)-\frac{\sqrt{3}}{2}(y_3+y_9)+\frac{\sqrt{3}}{2}(y_5+y_{11})-\frac{\sqrt{3}}{2}(y_6+y_{12})]$

$=\frac{1}{6}$ [$\frac{\sqrt{3}}{2}$(丑+辰)$-\frac{\sqrt{3}}{2}$(寅+巳)]

$=\frac{\sqrt{3}}{12}$(乙$-$丙)

$=\frac{\sqrt{3}}{12}$日

由以上計算之結果，計算配合公式中所含各係數，便非常容易。

(12)

$\sqrt{3}=1,732$

$m_1=\frac{1}{12}$(甲+天)$=\frac{1}{12}(20658+40883)=\frac{61541}{12}=5128,42$

$a_1=\frac{1}{12}$(2午+$\sqrt{3}$壬+癸)$=\frac{1}{12}(-290\times2-418\times\sqrt{3}-71)=-\frac{1375.976}{12}$

$=-114.66$

$b_1=\frac{1}{12}$(丁+$\sqrt{3}$戌+2酉)$=\frac{1}{12}(570+\sqrt{3}\times539+2\times410)=\frac{2323.548}{12}=193.63$

$a_2=\frac{1}{12}$(2己+月)$=\frac{1}{12}[2\times158+325]=\frac{641}{12}=53.42$

$b_2=\frac{\sqrt{3}}{12}$地$=\frac{\sqrt{3}}{12}\times441=\frac{763.812}{12}=63.65$

$a_3=\frac{1}{6}$(午$-$癸)$=\frac{1}{6}(-290+71)=-\frac{219}{6}=-36.5$

$b_3=\frac{1}{6}$(丁$-$酉)$=\frac{1}{6}(570-410)=\frac{160}{6}=26.67$

$a_4=\frac{1}{12}$(2甲$-$天)$=\frac{1}{12}(2\times20658-40883)=\frac{433}{12}=36.08$

$b_4=\frac{\sqrt{3}}{12}$日$=\frac{\sqrt{3}}{12}\times487=\frac{843.484}{12}=70.29$

因此，本例所求之配合公式應爲

$$
(13)\begin{cases} y=5128.42-114.66\ Cos\ x+193.63\ Sin\ x+53.42\ Cos\ 2x \\ \quad +63.65\ Sin\ 2x-36.5\ Cos\ 3x+26.67\ Sin\ 3x-2 \\ \quad +36.08\ Cos\ 4x+70.29\ Sin\ 4x \end{cases}
$$

回復至其原有單位與原點，卽得

$$
(14)\begin{cases} y=\text{民國十二年至二十二年間平均棉花市價} \\ \quad [51.284-1.147\ Cos\ \frac{2\pi}{12}(t-0.5)+1.936\ Sin\ \frac{2\pi}{12}(t-0.5) \\ \quad +0.534\ Cos\ \frac{2\pi}{6}(t-0.5)+0.637\ Sin\ \frac{2\pi}{6}(t-0.5) \\ \quad -0.365\ Cos\ \frac{2\pi}{4}(t-0.5)+0.267\ Sin\ \frac{2\pi}{4}(t-0.5) \\ \quad +0.361\ Cos\ \frac{2\pi}{3}(t-0.5)+0.703\ Sin\ \frac{2\pi}{3}(t-0.5) \end{cases}
$$

其間，t 以月爲單位，y 以銀元爲單位。

餘　言

配合公式求得後，還須計算其準確程度，應以公式所得諸數值與實際統計數字相比較而計算其相差度（普通用標準差）相差度之數值愈小，其準確程度卽愈高。

欲由配合公式以求 y 之數值，亦得先將三角和數改成下式：(15)(16)

按

$$
y=m+a_1\ Cos\ x+b_1\ Sin\ x+a_2\ Cos\ 2x+b_2\ Sin\ 2x \\ +\cdots\cdots+a_p\ Cos\ px+b_p\ Sin\ px
$$

倘以

$$a^k = r_k \; Cos \; \alpha_k$$

$$b_k = r_k \; Sin \; \alpha_k$$

$$k = 1 \; 2 \ldots\ldots\ldots p$$

卽得

(15) $$y = m + r_1 \; Cos(x - \alpha_1) + r_2 \; Cos(2x - \alpha_2) + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ r_p \; Cos(px - \alpha_p)$$

或以

$$a_k = r_k \; Sin \; \beta_k$$

$$b_k = r_k \; Cos \; \beta_k$$

$$k = 1, \; 2, \ldots\ldots\ldots p$$

則得

(16) $$y = m + r_1 \; Sin(x + \beta_1) + r_2 \; Sin(2x + \beta_2) + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ r_p \; Sin(px + \beta_p)$$

吾人既得其配合公式，自當將配合曲線與實際統計曲線，并列一紙，以示其配合情形。

中國之統計事業

劉大鈞

本篇爲劉先生提出東京國際統計會議之論文由英文譯出經親自校訂者
——編輯部

中國統計事業之歷史，可分爲兩大時期，而以1860年左右爲其樞紐。蓋所用之統計方法，至1860年以後始爲近代式也。

第二期更區分爲三小期，卽自1860年至淸末爲第一期，自民國肇建至國民政府成立以前爲第二期，國民政府成立以來爲第三期。關於各時期之史料，以較近者爲易得而亦爲讀者所樂聞，本篇之略於古代而詳於近世者以此。

文中所述，雖多爲政府機關之事業，然教育學術機關所編之統計，往往甚關重要，而商業機關近年對於統計資料亦頗有貢獻，故本篇於述政府統計事業時，幷敍及之。

紀述內容，注重於原始材料之搜集及各時期中所有之統

此页无页码

計材料,至於其搜集整理之方法與其所用之表格方式等等,雖亦歷歷可考,因限於篇幅,概不一一詳述。凡政府之統計,雖有主編者,敘述之時,均不列其姓氏,其私人編製者,則因便於檢閱及前後對照起見,列其姓名。

至所述統計範圍,雖以關係重要者爲主,但次要者亦略及之。蓋中國統計,可述者本不甚多,完全之資料既不可得,片鱗隻爪,亦足重耳。

(一) 第一期(自古代至1860年)

中國統計事業,發源甚早。或謂禹貢一篇卽最古之土地統計。惟嚴格言之,禹貢中所能認爲統計者,僅禹域內之耕地畝數及其他些許材料耳。古代土地爲君主諸侯所有,故不得不以册籍記其畝數,於是遂有耕地統計。(註一)人口統計之起因亦同。諸侯計其民數,所以覘兵力之强弱,及至後代,易軍役爲丁稅,人口統計,愈見重要。如明清兩朝,均有甚詳之戶籍統計。所可惜者,此項戶籍僅載丁男,實不過全人口之一部分,(註二)至於當時之土地統計,亦僅載科稅之地,非耕地之全數也。

除土地人口外古代統計多爲關係歲入者。然人民所輸不僅限於貨幣金銀,凡土地所產,手工所製,亦在貢賦之列。故稽

(註一)但數字未必確實,見經濟學社叢刊中所載拙著中國之農田統計。

(註二)同註一。

諸史乘，內庫之收入，每載爲金，銀，錢，米，茶，鹽，紙張，油漆，鐵，煤，綢緞，衣履等若干。若此項徵納之物品，與其產量有一定之比例，則其數字亦可取爲各時代之產量統計。惜乎徵收之種類及數目，常依皇室之需要爲轉移，未必與產量有固定之關係。惟鹽之一項，因爲政府專賣，較有數字可考耳。而史家間有以各種單位不同之物品混合加計列其總數者，亦足見當時統計思想之如何缺乏也。

清代之財政統計，賦役全書及黃册中載之甚詳。惟因卷册浩繁，已難覓得全書。大淸會典與戶部則例中亦有若干重要統計資料。

史書上統計之數字雖不盡可恃，然非統計的記載有數千年來紀錄不絕頗足資爲統計的探討者。例如飢饉，水旱，地震，日月食，彗星見，日中有黑子之類皆是。(註三)此類事象，史書記載概書其大且著者，或亦不少脫漏之處。然在經濟學家社會學家天文學家及氣象學家得之，均爲甚有統計價值之資料矣。

(二) 近代統計之發端及1910年之戶口調查

近代式之統計，可謂起於1859年創刊之海關册。自該年以來關册內容雖時有修改，但逐年印行迄未間斷。海關册中之統計，除進口貨物之數量及價值外，並有各國船隻進出噸數，金

(註三)見二十四史及九通。

銀貨幣進出口數，各通商口岸及各省人口估計，外僑人數，外籍行號數等等。又因各口岸間輪運土貨之貿易亦須納稅，故不僅可以覘國際貿易之狀況，若加以計算，亦可推知內國貿易之情形。中國郵政，初歸總稅務司監督，故曾有一時期海關冊中載有郵政統計，後郵政獨立，郵政統計遂歸郵政總局印行矣。

清宣統二年（即1910年）之戶口調查，凡外人研究中國人口統計者均甚注意，茲略事詳述，或不厭其繁冗。該次調查之價值如何，非明瞭當時政況無從評定。是時著者適在北平，又有稔友數人參與調查事務。其時未習統計，對於所採方法不能詳述，然關於其精神的背景則知之頗悉，以此推測，覺其不足深信。此種見解亦非由於個人政治上之偏見，蓋當時本人並未參加革命運動，對於滿清政府亦無特殊惡感，且當時南方革命風氣雖已濃厚而北方則尚妄冀立憲之成功也。

1910年調查之結果，中國十八省共309,671,000人，東三省14,917,000人，新疆2,491,000人，滿洲旗軍 1,700,000人，各藩屬（西藏除外）760,000人，（註四）按之1885年調查中國本部377,636,000人，是已減少六千八百萬。最近郵局估計中國

（註四）此項數字根據英文中國年鑑，該書中並載中國估計西藏人口為6,500,000人。而中國本部人口共316,271,000人。但四川人數原調查為16,400,100人而該書作23,000,000人。所以變更原數者，因該省調查僅及七分之五未能完全，故為補足。但本文中則皆用原數，因他省調查亦有不完全者也。

本部與東三省人口總數約四萬萬五千五百餘萬，較1910年增一萬萬六千一百萬，此種數字其本身固未必即足證明宣統二年之調查爲低估，卽本文附表中所列民國元年至民國五年與民國十六七年之數字亦未必足爲確證。因此等數字或係高估，亦未可知。但大多數證據似皆不利於該年之估計，而一考當時之政治情形，益信是年數字不免有偏低之傾向。

光緒時代各省督撫多爲漢人，其權甚大，如南北洋大臣，實等無冕之王。故庚子拳匪事變，雖有皇室促獎其成，而袁世凱劉坤一卒能平之。及慈禧死後，攝政王思强滿抑漢，乃漸將各省督撫易爲滿人。此種政策，固爲淸室各王公所贊同，但與立憲政治背道而馳，於是立憲之誠意，不能無疑矣。

當時各省之滿人督撫，雖未嫻於西洋選舉舞弊之法，但至少已知減少戶口卽可減少選民。宣統二年之調查，僅計算戶數已較以後各次調查低估，而口數又從戶數推算。十八省以每戶平均5.5人爲標準，東三省則以每戶8.38人爲標準，其欲使滿人票數多於漢人之意，昭然若揭矣。(註五)

滿淸政府於調查人口時所抱之偏見，已如上述。更有數事亦足使數字不能正確。其一卽官吏之敷衍成習，省事爲貴，故其調查脫漏者多，重複者少。其次卽因革命運動發展甚速，地

(註五) 奉天省按每戶8.38人推算一事僅英文中國年鑑述之其他書中未見此等記載。

方官已無心求調查之正確。再次卽該屆清查係分兩次舉行，先調查戶數，後調查口數，稍有常識者，當不致此，更不足語於統計方法矣。

革命前袁世凱已在華北政治上有極大之勢力，旣就總統，其任內五年中央確能節制各省。固淸末所不逮，亦繼起各任總統所未能及。袁又信新法，在淸任直隸總督時，已採用新政頗多。其左右多爲留日學生。此輩縱非統計專家，至少當知日本或他國之戶口如何調查也。當時各省省政爲革命領袖所主持者，亦注重統計，願與合作。如蘇晉等省，並自行搜集各種統計，卽其明證。故民國元年之戶口調查，雖未完全，較之宣統二年者，應較可信，至少决無前此政治上之偏見，將人口數目故事增減矣。

研究人口問題之外國學者，對於宣統二年淸查之感想多與著者相反。如丁家立(Tenney)羅克希爾(Rockhill)等，其研究探討之精神雖至可欽佩，但因與淸政府接近甚久，或難免不暗存偏見。當攝政王宣佈立憲之初頗得人心，外人亦多樂觀其成，後見其措施，乃悟爲假面具也。

斯篇任務，述而不論，以上所陳，似涉題外，但本會對於宣統二年戶口統計特別注重，故詳述其背景於此。

(三) 民國元年至民國十六年之統計事業

民國成立前之情形，略如上述。民國元年曾舉行兩種淸查即人口淸查及產業淸查同時舉行。人口淸查，包括直，蘇，浙，贛，晉，豫，鄂，吉，奉，新，閩，湘，甘，貴，魯，陝，川，滇，黑，等二十一省及綏遠，京兆兩特別區。其餘諸省，或經舉行，惟前內務部中無案可稽，至少稍詳之統計已不可得。有某數省之人口並曾由前內政部發布民元至民五之逐年數目。其餘諸省或有在民國五年以後舉行淸查者，但是否用近代方法，抑僅由地方官估報，均不可考。但前數年之數目，似曾經逐戶調查，固不僅有戶口數，並有性別，年齡，婚姻，職業，及出生率，死亡率等，似皆非估計法之所能為力也。

工業淸查，由前工商部（嗣改為農工商部）辦理，雖內容稍詳，但是否為實地調查，而非縣知事所估計，殊屬疑問。就現存之統計觀之，似於機器工業曾經詳查，至於手工業，因調查匪易，甚形疏陋，無大價值。此項統計，逐年刊布，迄民國十年始告中輟。報告之省分日見減少。至民國十年之最後一期，僅餘六省矣。（註六）民國二年曾舉行農業淸查，初次似稍作實地調查，但以後諸年則大約皆出估計，此種統計亦迄民國十年止。

該部逐年刊行之農商統計表中除載錄上言工業農業之數字外並嘗刊布商業統計，惟其內容更劣。該部曾有兩年令各地商會調查數種物價，編輯物價統計，惜所選之種類與蒐集之方

（註六）見拙著英文中國之工業及金融。

法，均不能使人滿意。

舊政府所辦之統計，最精確者爲國有鐵路統計，創刊於民國四年之下半年，係交通部會計顧問亞當士(H. C. Adams)所計畫。不獨詳載各路之收支，資本，與財政統計，凡營業里程，運客人數，運貨噸數，機車列車里程，員役人數均備載之。惟至民國十五年工作中輟，最近始由鐵道部補行編製，使勿中墜。

關於電報電話之統計，曩由交通部主管，亦嘗刊布。該部逐年印行之交通部統計圖表共分路電郵航四大類，後三類之內容遠不逮路政統計之詳密。

民國二年因擔保善後公債，設立鹽務稽核所於北京，該所嘗逐年印布鹽消費量及鹽稅收入之統計。前政府時代之財政部，財政整理委員會，審計院等機關，亦時有預算册國債表之印行。財政部編製之正式預算共有六次，內民國元年，民國二年，民國三年，民國四年，及民國八年各一次，民國五年二次，一依年歷起訖，一依會計年度爲起訖。民國十四年財政整理委員會曾編製非正式之預算，但僅供政府之參考，非欲提出任何立法機關討論者也。

前教育部嘗刊行教育統計一次，但未繼續辦理，若欲知較近之教育狀況，惟恃教育改進社所刊印之統計報告矣。

(四) 專辦統計之機關

除上述各行政機關間有搜集統計者外，別有專事統計之機關數所。前國務院所屬之統計局其尤要者也。統計局之制度實仿自日本，但始終未辦理任何淸查，並未嘗自己搜集統計。該局刊行之統計月報僅轉錄他機關之統計報告及命令文牘之類，尙不如國務院印鑄局所刊行之行政統計彙編（民元至民五）爲有用也。

經濟討論處亦屬於國務院，其設立用意原在供給中外人士以中國經濟之消息知識，但關於各種經濟事實如工業，勞工，租佃制度，零售物價，以及公司銀行之調查等等，皆曾擬有調查表格並愼選調查員，嚴加訓練，使之直接蒐集各種統計。惟其所重者旣在一般之經濟報告而非專爲統計機關，故所得統計往往皆夾入經濟紀事之中。又因經費人力所限，亦未能調查遍及全國之統計。然其調查區域及於十五省，其內容及經濟之各方面，對於留心各種經濟統計者供給資料不少，而其藏書與所存資料檔案，尤時供給究經濟學社會學者之參考焉。

財政部駐滬貨價調查處爲專辦物價統計之機關。該處設於上海，其職務調查貨價以便修訂稅則。■編有躉售物價指數，自民國八年九月始，並自民國十五年以來編有輸出入物價指數，該處又曾編有上海生活費指數，旋因未得適當權數，因之

中輟。後又與北京社會調查所合作,調查上海工人家計,據此編製生活費指數,不久卽將公布。其出版物頗多、定期刊行者:有上海物價月報與上海貨價季刊兩種。民國十七年該處併入國定稅則委員會,但其統計工作仍照常進行。

地質調查所之礦產與礦藏之調查,甚有價值。該所雖名屬農商部,實爲一獨立硏究機關,曾派專門地質家多人分往各地實地調查,所得結果,頗稱詳實。民國五年出版中國鑛業誌一書,內有統計資料不少,嗣又於民國十四年及十七年兩次補充,易名爲中國鑛業紀要,內容益見豐富。此外尙有地質彙報與其他專刊出版。國民政府統一後,鑒於該處已往之成績,仍令屬農鑛部,組織一切,大略同前。

江蘇省於民國元年卽刊行報告三冊,所列統計資料頗多。第一冊爲內政報告,載有土地面積,人口,警察等統計。第二冊爲實業報告,第三冊爲敎育報告。其編製方法雖未甚精密,然較之是時中央政府之統計猶爲略勝。山西省統計資料,素稱豐富。人口統計,逐年調查,繼續至十年以上。他如各縣間貿易統計,各縣物價統計,學校統計,與農工鑛業各統計等,在他省所不可得者,該省皆有調查,並曾刊布統計報告多次。其眞確程度,似較他省爲高,惟其實際價值,尙難遽然評定。

天津商品陳列所曾派調查員調查直隸省出產,編有巨帙報告,內列各縣重要農工礦物產之產額。但此種數字似皆由各

縣商會估計,報告調查員者。

廣東建設廳編有自民國元年以來之躉售物價指數,係於民國十四年開始編製。以前各年物價,皆根據報章紀載補查。目下此種工作仍行繼續。此外並編有工資統計及工資指數,其他省分亦間有統計發表,然大都關於財政方面或係臨時特殊性質。

(五)國民政府下之統計工作

立法院統計處

民國十六年四月國民政府成立後,各機關對於統計皆頗注重。建國大綱中規定訓政時期應調查戶口,測量土地,歷次中央委員會議又議決佃租制度工人生活狀況等,應限期完成。因有此種需要,故大學之中,爭增設統計科目,而政府方面,內而各部院,外而各省市,亦爭設統計專司。統計機關,一時紛起。茲因立法院統計處規定之職權較廣,地位較高,先述該處工作如次:

據國民政府組織法立法院統計處之職務,在蒐集編製一切法律政治社會經濟之統計,與編製統計年鑑及他種單行本報告。故其職權範圍頗為廣汎,非其他部院統計司科職掌限於特種統計者之比。處中組織有處長一人,科長五人,專員三人及科員調查員書記等。——第一科掌農業及其他天然資源之

統計，第二科掌人口勞工及社會統計，第三科掌工商及一般經濟統計，第四科掌法律政治及教育統計，第五科掌文書庶務。專員中一人掌編輯統計出版之事。目下出版物尚僅有統計月報一種。編輯統計年鑑雖爲本處職務之一，但因目下關於各種統計，尚乏全國可靠之資料，不得不從緩辦理。而所有資料，或由本處自行蒐集，或由其他政府機關發布者，皆先隨時謍載於統計月報撰述及統計資料各欄之中。將來材料漸多，編製年鑑卽可輕而易舉，而年鑑之編製大約擬在舉行民國二十年人口及農業淸查以後也。處中另有名譽專員二人以備諮詢，並有志願襄助之人員二千餘人分佈全國各地，報告各地農作狀況及其他農業統計，處中方擬根據此等報告，爲農產預測之嘗試焉。

統計處成立後二十個月間曾試行以下抽樣調查：

(1)在南京，上海，無錫，武漢，廣州及北平抽查農工商店僱員5,173家，藉以研究每戶平均人數，男女比例，男女初婚年齡，婦女生育量，人口之移動遷徙，與教育程度經濟狀況等等；

(2)在無錫，廣州，順德，武漢等處調查工廠五百九十九所，作坊一百八十二處，查明其資本，動力，原料，生產額，男女童工人數，工資制度與工資率，工會與罷工，工業傷害，及工人福利工作等等；

(3)調查576家外人在華事業之資本，股東及業主國籍每年營業總額，每年盈利，及對外國匯出與由外國匯入款額等

等。

(4)調查江寧縣270村，其中并有農戶1,421家曾經逐戶訪問。所調查者爲每戶所有田地面積，每戶平均人數，農民中自耕農，半自耕農與佃農之比例，農業勞働者之工銀，上中下各等地價，各種農作物耕作面積，各種農作物收穫數量及其價値，農民所有牲畜家禽頭數及價値等等；

(5)1,500村之農佃制度，其分布區域遍於全國；

(6)全國1,900縣中1,359縣之農民人數，土地面積，與農產數額；

(7)對於江蘇四大市場上之主要農產物如米，麥，麵粉，茶，絲，棉花等加以研究；

(8)按月調查哈爾濱，長春，安東，營口，大連，青島，天津，漢口，上海等市場米，麥，大豆，花生，高梁，玉蜀黍，豆油，豆餅，等之市價；

(9)二十三省六百〇五縣之農況報告，由報告員一千八百人報告，皆毫無報酬，自願合作；

(10)上海，廣州，香港，南京之工資統計；

(11)南京，北京，上海之零售物價；

(12)三百四十六縣之教育統計；

(13)三百餘縣之道路統計；

(14)多數地方之醫院統計。

以上諸項中，第(1)(2)(3)(4)(7)(8)(10)及(11) 諸項皆由本處調查員直接調查，稍得當地人士之協助，第(5)及第(9)兩項則全賴外間人士報告，其餘四項則根據各縣縣長與郵政局長之報告。各項調查皆用處中自行擬定之表格，其中每列多數問項以期互相鈎稽。當本文起草時，各地所填表格，仍不斷送入。

除以上實地調查之事項外，並關於多數問題作學理之研究如：(1)上海物價與國際物價及國際匯兌之關係，(2)銀價之跌落及其對於各方面之影響，(3)國民政府職員之統計的分析，按其年齡，等級，教育，政治工作年限，及黨籍等分別研究，(4)各省市最近調查戶口數目之比較的研究，(5)近五十年中國對外貿易指數，(6)我國職業分類之商榷，分為九類，四十四總業別，二百十二分業別，(7)外人在華投資，(8)郵政統計指數，(9)我國電氣事業之歷史的及統計的研究，(10)中國粮食問題的研究，(11)中央各機關經費預算之研究，(12)中國南部勞工狀況，(13)生活調查計畫大綱，(14)南京，無錫，武漢等處工人家庭調查之分析的研究，(15)江寧縣農業調查結果之分析等。

以上各種研究皆發表於統計月報中。月報並設有統計資料一欄，載錄各種統計資料，其屬定期性質者有(1)上海華北廣州南京北平之物價指數，(2)重要銀行發行鈔票準備檢查統

計,(3)上海錢業公單收付統計,(4)上海存銀及銀進出口之統計,(5)上海國內外匯價統計,(6)上海北京天津各貨幣市價統計,(7)上海及平津之公債價格統計,(8)南京,上海,北平,天津,漢口,廣州,杭州,六大都市之人口統計,(9)以上六都市之生死統計,(10)國有鐵路營業收入統計等。此外非定期性質者範圍尤廣,所有農工商教育財政以及立法司法之統計均經分期載列。

(六) 統計聯席會議

民國十六年後,統計機關設立甚多,然惟因增設過速,彼此系統未能分明,工作易於重複,被調查者每苦應付不遑,輒致敷衍塞責,頗有傷於統計之眞確。中央與各省統計機關皆感覺此種不便,有某數機關提議由立法院統計處召集統計會議,互商分工合作之法,以免紊亂重複之弊。惟在召集全國統計會議以前,自應由中央各統計機關人員先行會商以得諒解,乃由立法院統計處呈准院長,分函各院部及首都其他機關,請各派統計人員在立法院開聯席會議,討論一切。經各機關贊同,遂於二月二十四日開會,會期凡三日,先由分組委員會審查,再提出大會議決。通過議案甚多,其中最重要者有下列數案:

(一)設立中央統計委員會以統一聯絡各機關之統計工作;

(二)於中央統計委員會未成立之前設一臨時聯絡機關;

(三)建議政府於民國二十年舉行人口及農業清查;

(四)與會人員乘時發起中國統計學社,得全體與會人士及多數會外人士贊同。

以上數案中(一)(三)兩項已建議政府(二)(四)兩項因一係臨時組織,一係學術團體,可以無待呈准,不久遂告成立。出席統計聯席會議之人員,大抵皆雙方加入焉。

(七) 中央統計聯合會與中國統計學社

統計聯席會議閉會後,立法院統計處即根據決議分函各關係機關,先成立臨時聯絡組織,經先後函覆贊同,遂於是年四月成立。定名爲中央統計聯合會,由各機關派遣代表一人組織,嗣後每月假立法院統計處開會一次。第一次會議時又選定常務委員五人,掌處理會務,每月集會兩次。聯合會通信處,暫設立法院統計處,並僱用幹事一人,司文書記錄及其他事務,常務委員會亦在立法院統計處開會。

聯合會之目的,既在聯絡中央各統計機關之工作以收分工合作之效,故設立以後,首即擬定表格向各統計機關,調查其已有,現在及將來計劃之工作,暨其材料蒐集之方法,時間地域之範圍,製表摘要之方式,與工作進行之程度等等。此等表格,多數已經填齊送來,後文關於各機關統計工作之敘述,多即以此爲根據,而更就作者個人所知加以補充者也。

聯合會之又一工作爲向各統計機關蒐集其已編製之統計資料。多數機關均已彙送,有曾經印刷者,有油印者,更有向未印行而繕錄送會者。俟此種材料彙齊之後,則對於中央各省及各地方之公私統計,可以得其大概矣。

中國統計學社前已屢有人發起,但因種種原因迄本成立。統計聯席會議之召集,予以促成之機會。會議閉會後統計學社立卽成立,選定理事七人主持會議,多數大學教授與從事統計研究之學者,均加入此社。其第一步工作爲審定統計名詞,並議定刊行出版物,至少每年一卷於來年出書。

(八) 民國十七八兩年之戶口調查

國民政府成立後,內政部於十七年令行各省市使於三個月內完成戶口調查。該部當時尙未設統計司,其戶口調查表格係由警政司擬製。但各省所用表格有與部頒表格不盡相同者,調查方法亦未能一致,時間尤互相參差。計在十七年內調查完畢者,有八省四特別市,在十八年完成者,有四省一市,其餘各省市迄今未有報告。茲將已有報告省市及其所報人數列表如下:

省	年分	人口
察哈爾	1928	1,997,234
陝西	1928	11,802,124
安徽	1929	21,715,396
江蘇	1928	32,128,396

綏 遠	1928	2,123,914
新 疆	1928	2,567,640
山 西	1928	12,087,651
遼 寧	1929	14,999,330
河 北	1929	28,390,932
湖 南	1928	31,500,341
浙 江	1928	20,623,067
湖 北	1929	26,696,253
特別市		
南 京	1928	497,526
上 海	1928	1,503,922
北 平	1928	1,335,549
天 津	1928	1,391,721
漢 口	1928	569,414
共 計		211,930,550

特別市為省以外獨立之行政區域，其人口不包括於各省以內。上海之數目，不包括公共租界與法租界之人口，故遠較實數為小。以上各省市人口總數，共212兆。如假定中國人口總數為470或480兆人，則約當全體五分之二以上。各地調查既非同時，前後期間人口不無移動，後查省分中如有先查省分之移民，自不免重複計算，但同時亦不免有移出之民可冀互相抵銷。然無論如何，除遼寧河北兩省間外，此項移民為數無多，即使對於本省人數稍有影響，對於全國之人口總數上必無關重要也。

至於近年戶口調查之方法可以首都南京為例。實地調查者，皆為志願担任之人，以學生及黨部人員為多。市社會局先

擬定調查表格及調查員須知一紙，並對調查人員，加以指導，解釋表格中各種問項之意義。繼乃實行調查，共費時三小時。調查員分爲多隊。每隊由該區警察領導，警廳預開明該區所有戶數及各戶地址門牌，由調查員逐戶訪問，塡寫表格，或由調查員自塡，或由住戶塡寫經調查員核明。每一調查員指定担任某數家（一家中有數戶同居者）故重複闕漏之弊，大體可免，各省市調查方法，亦大致相同。但其防免重複闕漏之用心，或未能盡如此周至耳。在多數省分省政府僅補助調查經費，而實際調查之事完全由各縣自理。

以住戶口調查既不完全，各省正確程度又參差不齊，立法院統計處乃建議國民政府請於民國二十年世界各國舉行農業淸查之時我國亦乘機舉辦農業淸查，同時舉行戶口調查。並擬有計劃大綱，經提出政治會議及國民政府，奉指令由立法院統計處主辦，會同有關係各部商議進行。而中央政治會議又議定使稍遲一併辦理工商業淸查。當時所擬定之計劃大綱如次。

據所擬計劃，擬將全國分爲五大區域，在各區內擇定中心地點五所，設立訓練處。各區之範圍其中心地點如下：

中心地點	區域
1 南京	江蘇，浙江，安徽；
2 漢口	江西，湖北，湖南，四川，西康；
3 奉天	遼寧，吉林，黑龍江，熱河；

4 包頭 河北,山東,河南,山西,察哈爾,綏遠,新疆,甘肅,青海,陝西;

5 廣州 福建,廣東,廣西,貴州,雲南。

訓練方法,擬由統計處與有關係機關合組人口,農業清查委員會,派遣專家與各指定中心地點,司訓練地方調查人員之任。各省選擇三人至五人,各特別市一人至三人送至中央指定地點,接受特殊訓練。以一個月爲訓練期間。完畢後由中央派回原委省市,担任指導之事。此項人員資格定爲須年在三十歲以上,在國內外大學或專門學校畢業或在黨政軍學各界服務五年以上者,故其智識能力,可望高出中人之上。各省特別市指導員已受訓練後,更在省會或特別指定地點,召集縣市指導員施以訓練。縣市指導員亦須年在二十五歲以上在省內外高中以上畢業或在黨政軍學各界服務二年以上者,方爲合格,訓練期間定爲半月。初次清查既注重於調查員之訓練,所用人數不能甚多,故實際清查時期,定爲半個月至一個月。其實施步驟分爲五層如次:

(壹)通過法案 規定清查之目的,負責之機關,中央及省縣經費分担辦法,清查之方法,人民受調查之義務,清查之人員及其責任報酬,清查之期日等項;

(貳)組織清查機關 中央清查機關應於法令公布之後立即組織,對於清查表格,清查方法,人員選擇,宣傳辦

法等妥爲籌備；

（叁）舉行普遍宣傳　中央清查機關組成之後，即假各黨政機關與教育機關之力，對全國人民舉行大規模之宣傳，使了解清查之目的與其重要；

（肆）訓練省特別市及縣市負責各員；

（伍）實行清查。

現國民政府方在計劃整理各種統計機關使其系統完密，在此項前提未決之前，以上計劃似難實行。立法院現方在起草主計處法案，其中重要規定之一，即爲設一統計局以指導全國之統計事業也。

立法院統計處爲試驗所擬人口及農業清查表格是否合用起見，曾調查南京，上海，無錫，武漢，廣州，北平諸地千餘家之農工家庭，並在江寧縣試查二百七十農村，並曾在各村中實地逐戶調查農戶一四二一家。同時又發出調查表格，用通信調查法調查全國農業，其已經塡還者，約及全國縣分三分之二。此種抽樣調查與通信估計之用意，在試驗表格之是否適當，並藉以得全國各地社會上及農業上之特殊情形，與其他初步之知識，以便利將來清查之進行。而農工家庭調查，皆由調查員親自詢問，塡記表格，材料尤爲確實。關於每戶平均人數，男女比例，年齡分配，婦女生育量等，皆可略得端倪，尤足爲將來清查之助焉。

(九) 農業概測與抽樣調查

已有之農業調查,可大略分爲概測與抽樣調查兩種。概測之法,近來行之最廣者,爲立法院統計處。所用方法爲擬定表格託地方官吏與郵局調查塡報。表格之中,問項甚多,除每縣耕地面積,農民數目及主要作物產額外,並調查各等田地之價值,當地畝之大小,農場上所有牲畜數目,及其他有關農業經濟之各種問題。各縣縣長及郵局局長往往各具報告,可以兩者互相核正。此種數字,自不過一種估計,或僅根據以往官家紀載,未必確實。但製表之時已曾預防,同一表格及其他調查表中每設有互相關聯之問項,足爲稽核之資,校訂之用。爲防度量衡之不齊,凡各地畝數,皆折合爲標準畝,並於調查表上,附以與標準尺一尺相當之紙條,使各量該紙條合本地普通尺若干用以確知該地度量單位之實數。

又一種核訂之方法,厥爲用一種有縣界之暗射統計地圖,標出各種農業數字。以鄰近縣分互相比較。惟坊間出版之全國地圖,有省界者多,有縣界者少,而分省地圖有縣界者,又多比例不一,且其區劃亦未必合於現時情形,不甚適用。統計處乃比較各種地圖並諮詢地理專家意見繪成有縣界全國暗射統計地圖一種。今日全國土地測量,尚未實行,地圖所載,自難盡確。但所根據者,皆爲據地學家意見最良之本,其中並有少數省

分，係根據曾經測量之軍用地圖者。此圖一出，各縣面積可以大略比較。如某縣地形狀況與鄰縣並不懸殊，而其所報數目與面積比例太不相稱，或所報重要農產出產情形與附近各縣迥不相同，則一經塡入地圖，立即發生疑竇，即可將情形說明，函詢本縣，請其復查。故統計地圖之製，有益於核訂者不少。

該圖之又一用途，則爲可藉此考查報告縣分之多少。即凡某縣縣長有報告者，於圖上作一紅點以爲標識，郵政局局長有報告者，作一藍點。故某縣之有無報告，一覽地圖，昭然可曉。當本文起草時(民國十九年八月二十一日)，有縣長報告之省分凡848縣，有郵政局長報告之省分凡1,041縣，除去重複者外，淨得1,359縣，即約當全國縣數百分之七十以上。故調查範圍之廣，爲近十三四年來所未有。而目下繼續塡報者尙絡繹不絕，或能遍及全國，亦未可知。已得全部報告者，計凡七省，即江蘇，浙江，河北，山西，遼寧，熱河，察哈爾是。

統計地圖之又一功用，厥爲藉此以知重要產物在各地下種及收穫之時季。統計處曾試以此法研究小麥下種之時季，按其期日之早遲，劃分爲若干區帶，其界線與按溫度雨量分帶之界線甚爲相近。各地下種時期，係根據各地農況調查員之報告。此項人員共約1,810人，皆樂爲襄助不取報償，在種植收穫期間，按期塡入報告表式。統計處根據此種報告，得以略知去歲全國各地收成之狀況。此事在中國雖爲創舉，而農民似頗能

誠意合作，或因其對於此種報告之功用感覺較深耳。

除以上調查研究外，統計處並曾蒐集他種農業統計如租佃制度，主要市場農產物價格等等，已見上文。各省之中，浙江省於去歲(民國十八年)曾完成全省農業概查，惟其調查範圍稍有不同。廣東甘肅兩省亦曾有相似之調查。江蘇省政府亦曾與統計處合作，擬定該省農業清查計劃。

上所言者皆爲農業之概測。關於抽樣調查，則中央研究院與北平社會調查所曾在山西北滿及浙江試行，而金陵大學卜克教授研究之範圍尤廣。教授曾在七省2,866農場舉行抽樣調查，現又與太平洋國交討論會合作，舉行範圍更廣之中國土地利用狀況調查。其所注重者雖爲農業經濟之研究而非專蒐集農業統計，但其結果固足與將來之農業清查互相核正也。此外可附述者爲戴樂仁及麥龍兩教授關於多數村落農業經濟之研究，戴樂仁教授河北糧食銷售方法之研究，及嶺南廣東兩大學與前東南大學等之農業調查，及直隸定縣平民教育促進會之研究等。

關於林產統計，前北平農商部之調查殊不確實，國民政府成立以來，亦尚未遑蒐集。惟農鑛部關於全國鐵路所用枕木之木材及火柴製造所用之原料，曾有一種估計。江蘇省稍有林產統計，而蠶桑統計則江浙兩省皆有。

(十) 工業與勞工

統計處曾調查無錫武漢及廣州之製造工業，已見上文。工商部嗣亦調查無錫工業，該部並擬有調查全國工業計劃。上海市社會局曾對該市工業舉行兩次調查，頗爲周密。其第一次調查，已刊爲上海之工業一書出版。關於上海工資，罷工及勞資糾紛亦有調查，刊有單行本。中央研究院方試行楊樹浦一帶工人住處調查。北平社會調查所曾在天津北平上海各地用家庭記帳法調查工人生活，該所並曾調查北平手工業，塘沽工人，及北寧平漢兩路鐵路工人狀況，由陶孟和教授指導，成績斐然。

天津方面，南開大學社會經濟研究會何廉教授曾與太平洋國交討論會合作調查天津各種工業。清華大學陳達教授之各種勞工調查，如上海罷工統計，各地勞工情形及工資狀況之調查，北平附近與安徽湖邊生活費用之調查，與正在編製之北平工資指數，皆爲中國統計工作中之佼佼者。其中一有部分調查係與前經濟討論處及立法院統計處合作。今其研究結果，多已載入所著中國勞工問題一書。

鐵道部對於沿鐵道路線之調查有特殊便利，故該部特設經濟調查機關搜集沿路之工業與其他統計。同時該部統計處亦調查沿線生活狀況，尤注重路工生活。

甘博爾氏關於北平洋車夫之調查，及其北平工資物價與

生活費之調查，於中國勞工生活狀況之闡明，頗有貢獻。他如朱君與布萊斯迨爾君之北平地氈工業調查，與白哲斯君之北平行會調查，皆足為治經濟社會學者參考之資。

各工業本身亦嘗發布若干統計，其中歷時最久而最完全者，為華商紗廠聯合會所發布之紗廠統計。此項統計按年發表，列明在華中外各紗廠之已設紗錠數目，實際開工數目，棉花消費量，紗布出產量，及各廠之資本數額工作人數等。此外另有小冊，載刊每年棉田統計與棉產數目，惟聲明因調查所限不能視為詳確。此外尚有他種棉業統計載於該會季報之中。

上海麵粉業公會亦嘗刊有上海麵粉業統計，但現在所有者已為數年前之數字。最近統計並未刊布。前經濟討論處與現在之國定稅則委員會，皆嘗搜集火柴工廠統計，目下全國統計幾備。其他特種工業調查，多由各業公會與經濟討論處調查，大抵皆限於特殊地方，罕能遍及全國。

中國工廠尚少有編製工業成本之統計者，然漢陽鐵廠於十二年以前已設有成本會計之制。所有生鐵鋼及鋼製品之生產費，均備有詳細成本統計。作者曾司其事，故於所著英文中國之工業與財政一書中，略有所述。

（十一）交通統計

民國以來鐵路統計比較詳密，已見上述。中間雖略有停

頓，國民政府統一之後，已漸復舊觀。十五年之報告，業經補行編製，在印刷之中。十六年之報告，亦補編完全，僅待核正付印。故十四年以後中絕之鐵路報告，至此已完全補齊，現鐵道部於年報之外，並每月發布各路營業收入統計及客運貨運統計，皆根據各路每旬報告編製。惟因戰事未息，各路報告未能完全耳。

其他交通統計，由交通部編製。郵政統計由來已久，惟編製方法仍欠精詳，近經該部督率，關於材料之蒐集，統計之編製，加以改良。現編有郵政統計專刊，內容較以往更為詳密，聞不久卽可發布。報告之中，並載有郵政儲金統計。此項事務，現已特設專司主持其事，設於上海，名為郵政儲金匯業總局。

電報電話及無線電之統計，亦由交通部編製。電報統計中列有電線里數，發電次數，發電字數及關於各種設備與職員之數字。電話及無線電，亦有此等統計。關於航業，交通部現方蒐集沿海及內河航路船數噸數及輪船公司數目等之統計。此外航空客運貨運及郵遞統計，亦為交通統計之一種。除無線電及航空兩項統計創辦未久外，其他皆由交通部蒐集編製由民國十三年至十八年之統計以期與舊交通部之統計，可相卸接，惟新編之統計，當較舊有統計尤加詳密。其中一部分現已編成，餘部亦在進行之中，預期不久卽可全部告竣，彙為一集，載於民國十七年交通統計報告之中焉。

舊制凡電燈廠及電力廠皆在交通部登記，自建設委員會成立後，屬於該會監理。該會曾編有詳細統計，分爲民營國營外人經營及中外合辦數種。

道路統計尙無完全者。全國道路協會曾編有局部地方之統計，前經濟討論處亦嘗蒐集此種材料，然新路修築，時在進行，已有紀錄，多非完備。統計處爲求得最近數字起見，曾特擬表格分寄各縣塡報，因戰事未息，郵遞阻滯，已報告者不過五分之一。又曾向各省建設廳調查數字，但亦未能詳確。

（十二）財政統計

財政統計，自以財政部及各省財政廳所發布之預算及收支報告爲主。近年因國債問題關係重要，財政部審計院皆有此種統計發布。審計院並按照預算款目，編有近月政府實際支出統計。

立法院統計處受本院財政委員會之委託，方在蒐集各地國稅省稅及地方稅之統計。擬有兩種調查表格，甲種分寄各征收機關，乙種分寄各縣商會。兩表內容，大致相似，特由雙方調查，以便互相稽核。另向納稅團體如商會之類詢查有無額外徵收及其他事情。目下塡報者已有數百紙，擬俟各地報告彙齊，或至財政委員會限期將滿之時，始作全體統計。

關於貨幣金融之統計，財政部錢幣司近曾發表歷年鑄幣

統計及一部分紙幣發行統計，而上海中央銀行，上海中國銀行，上海交通銀行，天津四行準備庫等，均按週或按旬按月公布發行數額與準備內容。立法院統計月報與上海銀行週報中均為按期載錄。

中國新式銀行，類皆每半年或一年發表營業報告及貸借對照表與損益對照表一次。前經濟討論處會試薈集此等報告編製全體銀行資產負債統計，但各行所用會計名詞不相一致，分類方法亦不齊一，故結果殊不滿意。現統計處鑒於往失，特擬定表格詳附說明，請各銀行按照表格自行填報。各行對於本行賬目內容知之較悉，使之自報，庶免失出失入性質歧異之弊。

上海中外銀行款項劃撥，多經錢莊之手，故錢業公單收付，占上海市場上銀行收付之大部分。此項收付統計，幸由上海錢業月報按期發表，與逐日銀拆統計為上海金融統計上之兩重要數字。此外上海市社會局編有該地外匯內匯指數，而統計處亦方蒐集近六十年來上海之各種金融統計。上海北平與漢口銀行公會，均附設出版機關，有定期刊物，列有各種金融統計，但其最早者，距今不過十餘年。

（十三）政治統計

他國政治統計，注意政黨勢力，選民人數及各個問題投票

數字等等。在我國因無此事實，尙難編製。全國政權現歸於國民黨，關於黨之統計，中央執行委員會之中央統計處蒐集頗詳。對於黨員年齡性別教育職業等等與黨之全部組織，均有詳細調查。

立法統計，曾由立法院編製公布，詳列各種議案及討論審議情形與其結果。惟此乃由該院祕書處編製，非統計處之工作。統計處曾調查中央機關職員數目，並按其年齡，性別，官等，教育程度，在黨年限等等，加以分析研究。其結果出人意表者，即全體官吏中黨員僅居百分之三十六。此種工作，現已停輟，因考試院銓敘部已告成立，應屬該部範圍也。

考試院及該院銓敘部，亦發布甄別表，調查各機關職員其服務成績，此外並附以調查表，調查各人家庭與經濟狀況。

立法院統計處又曾受該院財政委員會之委託，調查全國職員薪俸實狀。全國職員俸給，原應按照官等，各地一律，但事實上未必盡然。更有於本俸之外，另給種種津貼者。此次調查完成以後，即可知全國薪俸制度之如何複雜矣。

此外外交部編有外交官及本部人員與駐外使領統計。其他機關多有編製此種職員統計者。又各機關大部編有文書收發統計，此則僅足供本機關之參考耳。

（十四）生命與其他統計

生命統計由各市衞生局蒐集,受衞生部之指導。現在有七市(南京上海北平天津漢口廣州杭州)舉行出生死亡登記,並按期公布生死統計。出生登記時,記生父之職業,死亡登記時,記本人之職業。關於死因亦行登記,大體按國際死亡原因表分類。惟中國人民向無此種習慣,漏報者多。死亡登記因殯葬之事須報警廳,倘可略有稽考,出生登記尤多闕略。

立法院院長胡漢民氏提倡統計歷十餘年。民國初元主持粵政,曾勵行生死登記之制,並責成棺木鋪報告售棺之數,以資稽核。此爲防止漏報之一善法。然極貧之人往往棺槨不具,故即此亦難免疏漏。出生統計,可責成醫院助產醫生及助產婦報告,然出生既未必皆用醫生助產婦而普通產婆尤多知識低陋不明統計用意,其報告難以盡恃。

衞生部現方蒐集醫院,藥房,中西醫生,及醫藥學校等之統計。在該部成立以前,立法院統計處亦曾試作此等工作,惜所得材料皆不完全。

司法行政部編有民刑案件統計。關於刑事犯,按其罪名,處罰,年齡,職業,教育程度,及父母存亡,與有無配偶子女等編製統計。刑事罪名中有吸食鴉片及其他痲醉藥劑一種,同時全國禁煙委員會亦編有此種統計。該會並編有中外販售鴉片商人統計。關於一般犯罪統計,中央研究院近曾選罪犯數百人作抽樣研究。嗣以主其事者出洋考察,暫時中輟。各都市有編

製自殺統計者，其曾見公布者，據見聞所及，有上海廣州二市。

司法方面又有一種調查，爲民事習慣調查。其法爲設定問項，分發各省縣，使調查各種民事習慣，尤以關於家族之組織，族長之資格，及婚姻承繼遺產者爲多，以爲立法司法之參考。惟此種調查，已行之有年，材料較舊，且未能遍及全國。現立法院民法起草委員會委託立法院統計處將問項化繁爲簡，重行調查。統計處特擬定表格，分寄各階級人士使之填報。現已有報告者，及於二十省四百縣之廣，已施以統計的整理以備起草委員會之參考。而陸續填報者尙絡繹不絕，俟各地填報齊全，可編一總報告。

關於物價指數，除上海躉售物價及輸出入物價指數仍由財政部國定稅則委員會編製，廣州躉售物價指數仍由廣東省建設廳編製，皆爲繼續舊有事業外，工商部近更編製南京漢口青島之躉售物價指數與南京零售物價指數，及食品躉售價格指數。該部並編有民國以來進出口物價物値及物量指數，而南開何廉教授亦編有近六十年之物量指數。此外關於物價之調查，有(1)南開大學經濟研究委員會所編之華北物價指數，(2)北平社會調查所之零售物價統計與生活費指數，(3)立法院統計處調查之每月南京上海北平之零售物價，(4)立法院統計處調查之每月上海漢口濟南青島哈爾濱長春大連四平街營口安東之重要農產品躉售價格，(5)唐啓宇博士所編製由18

67至1922年間之物價指數,(以一九一三年為基年係根據海關冊計出多數品物之平均輸出輸入價格而編製者)(6)卜克教授之1839至1923 年之南京零售物價指數, 以1900—1914 年平均為基年,(7)甘博爾君之由1900年至1924年北平躉售物價指數,(8)河北省建設廳所編該省若干縣分之零售物價指數等皆是。近年各處尙編有他種指數甚多,如上海市社會局所編之匯價指數之類是也。

關於教育統計, 教育部與立法院統計處均曾向各省縣有所調查,惜皆未能賅備。初等教育統計,尤極不完全。教育部因為主管機關,所調查中等及高等教育統計,比較完備。此外各省教育廳亦發表有教育行政及教育經費統計。當立法院統計處調查表格擬製之時,未知教育部亦作同種調查故致重複。其調查表格中之問項,有學生人數,性別, 班數, 及教職員之數目,性別,與學校財產經費圖書設備等等。其所得初等教育之統計,雖不完備,已先於統計月報上公布, 而教育部與各省之教育統計,亦曾載入該報統計資料之中。

外交部關於外人在華教育及其他機關, 外國在華駐兵人數,與外人歸化人數等,稍編有統計。關於天文及雨量之統計,則中央研究院氣象研究所與各氣象台曾有所發布。賴中央研究院指導之力,現全國已設有氣象局多處,專司記錄雨量溫度等等。至於陸海空軍之統計,則主管機關有簿籍可稽焉。

以上所述，不過略示中國統計事業近年發展之情形，並非一詳盡之紀載。而由此亦可知中國統計事業，尚須大見推廣，始可望與先進諸國並駕齊驅也。

附 錄

七省人口統計表

省別	年分	淸宣統二年	民國元年	民國二年	民國三年	民國四年	民國五年
江蘇	a	3,148,134	6,076,869	6,172,810	6,090,748	6,139,375	6,183,628
	b	——	32,283,781	33,249,198	32,498,268	32,599,166	32,923,693
	c	——	5.31	5.39	5.34	5.31	5.32
浙江	a	3,888,312	4,474,699	4,483,274	4,579,407	4,623,704	4,666,983
	b	12,9[illegible]3,3[illegible]9	21,440,151	21,882,052	22,125,752	22,471,812	22,690,494
	c	3.33	4.79	4.88	4.83	4.86	4.86
江西	a	3,439,873	4,579,348	4,673,304	4,727,568	4,739,691	4,958,363
	b	14,472,679	23,987,713	24,649,113	24,940,435	25,032,586	25,090,834
	c	4.21	5.24	5.27	5.28	5.22	5.06
湖北	a	4,532,531	4,843,892	5,755,957	5,261,965	5,301,200	5,261,245
	b	——	29,590,308	30,290,846	30,090,220	26,934,382	27,245,426
	c	——	6.11	5.26	5.71	5.08	5.18
河北	a	5,207,552	4,304,690	4,294,665	4,280,119	4,287,179	4,298,998
	b	25,707,757	22,720,153	22,859,995	22,395,159	23,160,708	23,804,766
	c	4.94	5.27	5.32	5.37	5.40	5.54
山西	a	1,992,800	2,099,618	2,081,634	2,048,563	2,085,829	2,110,523
	b	7,929,164	10,081,893	10,000,825	10,258,416	10,335,675	10,529,523
	c	3.98	4.80	4.80	5.01	4.96	4.99
河南	a	4,661,536	4,838,612	4,730,983	6,304,880	5,621,077	5,963,273
	b	——	34,870,083	28,315,139	29,977,666	30,457,214	30,618,110
	c	——	7.23	5.99	4.75	5.42	5.13

a……………戶數

b……………人口

c……………每戶平均

江西農田及每年米麥產量之估計

劉 治 乾

在一廣大之區域內，無論其爲一國，爲一省，或即爲一縣，欲知其一種大量作物之收穫數量，無論其爲穀，爲麥，或即爲雜糧果實菜蔬，其惟一妥善之方法，即爲根據作物之總面積，及此種作物在平常年每作物面積單位之收穫數量，與本年可收穫及實收穫之成數，而估計之。如列爲公式則如下；

$$\text{本年收穫成數(百分數)} \times \text{平常年每面積單位產量} \times \text{作物總面積} = \text{本年產量}$$

以估計方法求一廣大區域內一種大量作物之產量，較任何其他方法爲妥善，且爲精確。何以言之？欲知一廣大區域內一種大量作物之產量，除估計方法外，尙可用農戶填報及派員實查兩法。如令農戶填報，則以多報少，不惟是我國農戶之通性，各國農戶亦有同然，定難獲確數。若對於不實之填報，附以

罰例，則俟派人前往實行查驗之時，彼已消費或並售出一部份矣，亦難得確數。且如此擾民，亦豈能稱爲妥善。如派員實查，挨戶以斗量之，則所費甚鉅，得不償失，亦不能稱爲妥善。且所得亦未必卽爲確數，因作物初收穫時，尙不能卽行斗量，此時斗量所得之數，必不甚確。若俟分析乾淨後，再行斗量，則中間必有一部份爲農家嘗新或需要而消費矣，仍不能得到確數。而此法之擾民，更數倍於前法。由此觀之，則農戶塡報，派員實查，與估計三法之孰爲妥善精確？可判然矣。

如此，吾人欲知江西每年米麥之產量，亦只有用估計法。至於農戶塡報法，或派員實查法，就現時言，卽欲用亦屬不可能。如用估計法以求本省每年米麥之產量，第一，須知稻麥栽種之畝數；第二，須知平常年稻麥每畝之產量；第三，須知當年之收穫成數。此三項情形在本省如何？茲分別論之於次。

一 江西農田及米麥栽種面積之估計

各種作物面積，年有不同。某種作物面積，在某年究爲若干畝？須當時調查方知。江西最近數年或最近一年稻麥栽種之面積，既未曾調查，自無由知。且在匪患未除以前，欲作此種調查，亦不能得到全省稻麥栽種畝數。吾人現在欲研究此作物面積問題，只有從以前之調查及估計而推測之。江西之農田，就稽考所及：只江西通志，江西賦役全書，及江西田賦問題載有

詳數;前農商部有調查統計總數;及前中央統計局農業統計科科長張心一有估計詳數。茲將此種詳數及總數分別列表於次,以資比較:

江西省全省農田畝數表(以千畝為單位)

數目來源	調查或估計時期	所包之農田種類	農田畝數
江西通志	元代	官民荒熟田地	47,469
	明洪武間	官民田地山塘	39,252
	明宏治間	同上	39,927
	明萬歷間	同上	47,786
	清順治初	同上	47,827
	清同治時	官民成熟田地山塘	46,176
前農商部調查報告	民國三年	園圃不在內	34,261
	民國四年	同上	34,651
	民國五年	同上	35,957
	民國六年	同上	35,844
	民國七年	同上	36,315
中央統計局估計報告	民國二十年	水田旱田	41,630
江西賦役全書	光緒至現在	現在額徵丁米田地	33,934
著者之估計	現在	田地山塘	52,000

江西省各縣農田畝數表(以千畝為單位)

縣名	清初原額畝數	清同治時成熟畝數	現在額徵丁米畝數	中央統計局估計畝數		
				總計	水田	旱田
1 南昌	1,287	1,239	1,239	1,211	739	472
2 新建	1,163	1,179	1,180	1,013	456	557
3 進賢	1,008	997	504	986	572	414
4 豐城	1,457	1,438	1,438	1,349	701	684
5 淸江	1,037	995	692	578	428	150
6 新淦	675	585	478	388	279	109
7 高安	2,360	2,360	953	991	396	595
8 安義	277	278	203	205	164	41
9 萍鄉	1,064	1,099	375	860	525	335
10 宜春	512	513	370	513	370	143
11 宜豐	782	783	453	742	371	371
12 新喩	1,160	865	808	666	179	487
13 分宜	278	281	217	301	268	33
14 萬載	490	482	287	315	158	157
15 上高	631	538	427	390	253	137
16 武寧	583	584	397	584	397	187
17 修水	776	581	530	581	302	279
18 靖安	267	269	269	316	151	165
19 奉新	504	505	454	473	231	242
20 銅鼓	（尙未設分轄境	治屬修水）	124	194	99	95
21 永修	648	655	445	705	406	299
22 瑞昌	187	187	101	180	115	65
23 九江	260	261	143	391	235	156
24 湖口	279	282	197	268	156	112

縣名		清初原額畝數	清同治時成熟畝數	現在額徵丁米畝數	中央統計局估計畝數		
					總計	水田	旱田
25	彭澤	373	366	186	429	214	215
26	都昌	749	755	384	784	392	392
27	星子	165	170	109	124	72	52
28	德安	176	179	113	179	113	66
29	鄱陽	2,228	2,204	939	1,345	834	511
30	樂平	1,065	1,066	484	1,047	660	387
31	浮梁	632	632	362	569	452	117
32	德興	549	549	271	352	247	105
33	萬年	900	901	394	395	277	118
34	餘干	1,142	1,118	693	934	617	317
35	上饒	1,014	1,034	606	606	382	224
36	玉山	700	675	361	372	272	100
37	廣豐	537	445	341	434	281	153
38	鉛山	690	661	396	661	284	377
39	弋陽	693	684	408	215	171	44
40	橫峯	284	285	139	149	105	44
41	臨川	1,385	1,385	1,089	1,297	751	521
42	金溪	785	786	606	650	449	201
43	東鄉	725	726	500	488	439	49
44	資溪	134	135	112	127	102	25
45	貴溪	892	790	664	767	537	230
46	餘江	543	530	352	527	374	153
47	宜黃	476	476	414	413	343	70
48	崇仁	735	733	643	740	503	237

縣名		清初原額畝數	清同治時成熟畝數	現在額徵丁米畝數	中央統計局估計畝數		
					總計	水田	旱田
49	樂安	879	880	747	530	307	223
50	南城	439	440	403	440	220	220
51	南豐	478	478	405	518	52	466
52	黎川	404	405	368	261	130	131
53	吉安	1,409	1,348	1,125	984	590	394
54	吉水	511	402	460	650	400	250
55	永豐	645	581	606	513	108	405
56	峽江	531	448	416	321	244	77
57	泰和	706	660	620	350	100	250
58	興國	294	293	276	359	194	165
59	萬安	489	474	437	744	384	360
60	永新	438	381	385	387	298	89
61	蓮花	204	197	189	329	266	63
62	安福	728	620	519	570	508	62
63	甯岡	110	97	106	175	88	87
64	遂川	251	181	223	220	77	143
65	贛縣	616	603	510	707	176	531
66	信豐	463	464	457	481	289	192
67	大庾	95	96	85	221	189	32
68	崇義	81	82	74	210	126	84
69	上猶	124	125	116	114	59	55
70	南康	449	438	399	453	279	181
71	甯都	832	826	779	1,174	540	634
72	廣昌	246	247	222	147	16	131

縣名		清初原額畝數	清同治時成熟畝數	現在額徵丁米畝數	中央統計局估計畝數		
					總計	水田	旱田
73	石城	203	204	152	204	65	139
74	瑞金	280	281	274	370	141	229
75	會昌	159	160	156	720	120	600
76	雩都	101	101	92	1,000	400	600
77	龍南	166	167	160	113	70	43
78	安遠	155	160	153	248	199	49
79	尋鄔	6	9	11	137	66	71
80	虔南	(尚未設分治屬龍南轄境)		78	105	74	31
81	定南	78	87	81	96	77	19
總計		47,827	46,176	33,934	41,630	23,660	17,970

就前表所列江西全省農田畝數觀之，最大者爲江西通志所載清初之原額，最小者爲江西賦役全書所載現在額徵地丁米折之畝數，其間相差有一千三百八十九萬三千餘畝之鉅。吾人欲知江西全省田畝之確數，只有俟諸清丈完畢之後。現在清丈雖已開始，但至少須十年方克竣事。吾人今日欲得一近似之畝數，以爲估計糧食產量之根據，只有根據前兩表所列之畝數而估計之。江西通志係於清光緒初年所修。其所載明清兩代之畝數，均係地方官吏之所查報，且其查報之目的在徵收賦稅。人民及地方官吏，只有於可能範圍之內，盡量少報，絕不至多報。其總數在四千六百萬畝至四千八百萬畝之間。前農商部發

表民國三年至民國七年之畝數，亦係地方官吏之所查報，恐亦是於可能範圍之內，盡量少報，絕不至多報。其總數亦達三千六百萬畝以上。且其所稱農田，多指稻田而言，不包括園圃在內，如連園圃調查之，其數必超過四千數百萬畝以上，與江西通志所載之數相差不遠。吾人所據之江西賦役全書，係清光緒十年之修訂本。其所載江西各項田地總額與江西通志所載清初原額相同，惟其所載額徵地丁米折之畝數，僅三千三百餘萬畝，與各項田地總額相差有一千三百餘萬畝之鉅。嘉惠人民減收丁米誠屬仁政，若以此數字爲估計農田畝數之根據，則不可。最近國民政府主計處統計局張心一君於民國二十一年二月，在統計月刊農業專號發表之數字，係根據各縣政府，各地郵局，及各地農民報告，估計所得之結果。且其所估計之畝數，係常年之畝數。並且以中央機關名義向地方徵求之數字，仍不免受少報之影響。根據此數種事實來估計江西全省現在已經耕種之農田，至少亦必將數字提高至五千二百萬畝以上。吾人之估計，可從兩點上證明其爲可靠：一，在習慣上地方人民與官吏懼政府加重人民與地方之負担，總是盡量少報。二，試觀各縣農田畝數表，如新建，分宜，靖安，永修，九江，彭澤，都昌，吉水，萬安，興國，蓮花，寧岡，贛縣，信豐，大庾，崇義，寧都，瑞金，會昌，雩都，安遠，尋鄔，定南，及最後設立縣治之銅鼓及虔南等縣之清初原額，與其次三行數字比較，則見其共增

畝數，將近四百萬。其餘各縣有增減極微者，有減少甚鉅者。然考江西近二百年來，並無地理上之大變動，致許多農田變爲湖澤，耕地轉成沙洲。且人民勤勞，繼續墾種，新增田地山塘，當屬不少。是以吾人可斷言江西農田總畝數，只有增而無減。且五千二百萬畝，僅當全省面積百分之十九，尙不及二成。江西全省面積，究爲若干?亦無確數。前淸測定爲六萬九千四百八十英方里。威廉氏(William)估計爲七萬二千一百七十六英方里。布龍氏(G, F, Browns)估計爲六萬七千五百英方里。嘉爾起洪氏(Colquhoun)估計爲六萬八千英方里。內政部在民國十八年估計爲七萬七千六百五十四英方里。惟陸地測量局調查只有二萬六千九百零九萬八千二百餘畝，約合六萬三千八百八十八英方里。著者計算農田與全省面積之比較，則係以此爲根據也。若以內政部十八年估計爲根據，則五千二百萬畝尙不及百分之十六焉。

農田總數既估定爲五千二百萬畝。其中可以種稻之田，無論種粳稻糯稻，又爲若干?江西爲天成的產米之區，而其人民在習慣上又喜食米，凡可以種稻之地無不種稻。總畝數中，至少當有六成五，卽有三千三百八十萬畝，可以種稻;至多可增至七成五，卽有三千九百萬畝，可以種稻。其間差額爲五百二十萬。若遇風雨調順地方安靜之年，假定全省有三百餘萬農戶，每戶能多種一畝至二畝則此五百二十萬畝，均成種稻之田而

可收穀。否則，當隨天時與人事之變異程度而爲之減少，以降至最小成數。去年（民國二十一年）爲本省豐收之年，雖有天時之利，而匪患未清，人事難盡，當有不少可以種稻之田地，未能種稻。故約略估計全省種稻之地，當不出三千三百八十萬畝之最小限度也。中央統計局在民國二十年估計全省粳稻面積爲二千八百六十六萬畝，糯稻面積爲三百五十三萬畝，兩項共計爲三千二百四十九萬畝。前農商部在民國七年調查全省粳稻面積爲三千一百六十七萬五千畝，糯稻面積爲四百一十四萬六千畝，兩項共計爲三千五百八十二萬餘畝。民國二十年有水災兼有匪患，民國七年兩者俱無，在天時人事兩方面均較二十年爲優，自應多種二百餘萬畝。是吾人之估計與此兩次實情頗相吻合也。至於每年種麥之面積，因不能種稻之地可以種麥，即可以種稻之田，如能開溝將水排去，亦可種麥，是種麥之面積，可以極大。但人民在習慣上不喜食麥，種多種少，將隨其意興而定，故估計極難。中央統計局在民國二十年估計全省小麥種植面積爲四百三十八萬九千畝，大麥種植面積爲二百二十一萬五千畝，兩項共計爲六百六十餘萬畝。然此僅能爲民國二十年之約數，其他各年究爲若干？則殊難揣測，非實行調查不知也。

江西農戶究爲若干？未經調查，尚無確數。據前農商部調查，則在民國四年有四百十一萬餘戶，民國七年有四百零六萬餘戶。據中央統計局民國二十年之估計，則爲三百二十九萬餘

戶。此數字距實數究差若干?殊難懸揣。故在前段言及農戶,只假定爲三百餘萬戶也。

二 江西每年米麥產量之估計

江西最上等農田栽培粳稻,每年可收兩次:第一次四月初種,六月底收,稱爲早稻。每畝多則收穀四石,少則收穀二石五斗。第二次七月初種,九月底收,稱爲晚稻。每畝多則收二石五斗,少則收穀一石五斗。兩次共計,每畝多則收穀六石五斗,少則收穀四石。其他各等農田,栽培粳稻,則只收一次。其早種者亦稱早稻。每畝多則收穀四石,少則收穀一石八斗。其晚種者亦稱晚稻。每畝多則收穀三石,少則收穀一石五斗。若將最上等田每年產量平均計之,則爲每畝收穀五石二斗五升;將其他各等田每年產量平均計之則爲每畝收穀二石五斗七升。再將此兩平均數平均之,則爲每畝收穀三石九斗一升。如加工碾成中熟米,耗去百分之五十四强,則得米一石八斗。是則全省各等稻田平常年平均每畝之產米量也。此種計算,當不至過高,亦不至過低。據前農商部民國七年之調查統計,則本省稻田每畝產米量有二石三斗三升六合之多,實屬過高。其數字所以如此高者,必係誤以每年收稻兩次之最上等田每畝平均產量,代表各等田每畝平均產量也。民國五年農商部統計我國全國產米有二十一億三千餘萬石之多,較全世界米之總產額幾倍之。

全世界產米總額,包括中國在內,不過十一億五千餘萬石。其錯誤之所由生,恐亦係將每畝田之平均產米量,定得過高之故也。至有定江西每畝田平均產米量爲一石五斗者,則由於未注意江西爲產米最富之區,有一年收穀兩次之田,將每畝田之平均產米量,又定得太低也。查前農商部民國七年統計長江下游各省每畝田之平均產米量:安徽爲一石五斗八升九合,江蘇爲一石三斗五升二合,浙江爲一石七斗三升五合。今改定江西每畝田之平均產量爲一石八斗,實爲最適中之數。但遇極豐之年,或須將此數稍爲增高;遇極歉之年,又或須將此數稍爲減低。究應增減若干?則視當年收穫之情形而定也。

吾人既估定江西全省稻田至多爲三千九百萬畝,至少爲三千三百八十萬畝,又算定平常年每畝之平均產米量爲一石八斗,則江西全省在平常年每年之產米量,可以估計至多爲七千零二十萬石,至少爲六千零八十四萬石。去年(民國二十一年)全省種稻面積,吾人估計爲三千三百八十萬畝,十成收穫,則全省產米總額當爲六千零八十四萬石也。此數較江西民政廳去年調查所得之數爲高,但較中央統計局前年估計之數則爲低。民政廳去年調查六十三縣,得四千一百九十一萬餘石。假定此六十三縣所產爲全省產米總額四分之三,其餘因匪盤據未能調查之十八縣,所產爲全省產米總額四分之一,約計爲一千三百九十七萬石,則全省產米總額爲五千五百八十八萬

石。較著者估計之數低四百九十六萬石。中央統計局前年估計江西粳米產量為八十三億六千九百六十六萬斤。以一百五十斤為一石計算,約合五千五百七十九萬石。糯米產量為九億八千六百三十四萬斤。亦以一百五十斤為一石計算,約合六百五十七萬石。兩項共計為六千二百三十六萬石。較著者估計之數高一百五十二萬石,相距實屬不遠也。至於麥,平均每畝產量約為一石。小麥每畝少者只產七斗或八斗,多者可產一石二斗或一石三斗。大麥每畝產量稍大,然平均計之約為一石。每年全省種麥田地畝數,既無從估計,則每年全省麥之總產量亦無從估計。據前農商部民國七年之調查統計,江西全省小麥種植面積為五千一百畝,總產量為九千六百九十石,每畝產量為一石九斗;大麥種植面積為一萬二千零二十八畝,總產量為二萬四千零五十六石,每畝產量為二石;兩種總產量共計為三萬三千七百四十六石。一省之大產麥如是之少,實屬不可解。並據海關統計報告,是年江西由九江關輸出之小麥一項,有十五萬四千二百三十一担;以一百四十斤合為一石計之,約合十一萬零一百六十五石,輸出量大過產量三倍,更屬不可解。蓋前農商部是年對於江西之調查統計,完全錯誤也。據中央統計局民國二十年之調查估計,江西小麥種植面積為四百三十八萬九千畝,產額為四百九十七萬九千餘担,約合三百五十五萬餘石。大麥種植面積為二百二十一萬五千畝,產額為二百五十萬零

八千餘担，以八十斤合爲一石計之，約合三百一十三萬餘石。兩種共計爲六百六十六萬餘石。據去年（民國二十一年）江西民政廳已調查之六十三縣計之，共產麥三百一十三萬二千八百餘石；如將未調查之十八縣加入估計之，當在四百五十萬石以上。就前述各年數字估計之，江西每年產麥大約在四百萬石與七百萬石之間也。

上海工人生活程度的一個簡要分析

蔡 正 雅

上海市社會局在民國十八年四月至十九年三月，舉辦了一次上海市工人生活程度調查，詳細分析，擬印專刊，惟尚有待，本篇把所得結果，撮要披露，俾不後時，並供治勞動問題者之參閱。

〔記賬家庭的人口〕 此次調查，凡305家，1,410人。家庭人口以自三口至六口者爲最多，占家庭總數百分之85.9，平均每家人口數爲4.62人，連寄膳者爲5.09人。305家中，寄膳者凡140人，內8人連寄宿。依據國內各調查的結果，農村家庭的人口，平均每家五口强，都市工人家庭人口，平均每家五口弱。他如美印兩國都市家庭人口調查，平均亦在4.2至5.3口之間，所得結果，與國內外各調查，尙稱近似。上海工人家庭，以生活程度的提高，有傾向小家庭化趨勢，夫妻和子女的家庭，占百

分之81.42。

人民的消費需要,和年齡性別,是很有關係的,要正確地比較各戶人口的多少,必須訂一個適當的標準。依據愛脫華氏(Atwater)計算法,以實足十七歲之男子爲一個成年男子,作爲比較人口數的標準,未成年男子和各年齡的女子,卽依計算表折合。照此合算,305個家庭,平均每家等成年男子(Equivalent male adult)數爲3.28,連寄膳者爲3.42人。305家中,以等成年2人至4人之家庭爲最多,占家庭總數百分之73.4。大體說來,一家的收入和等成年男子數是成正比例的。

［年齡性別］ 此次調查的1,410人,內男子707人,平均年齡爲2.31歲,女子703人,平均年齡25.24歲。其中自初生至十四歲的幼年男女,占百分之34.5,十五歲至四十九歲的壯年,占百分之56.2,五十歲及以上的老年,占百分之9.3。依據國內各調查結果,人民年齡分配的百分比,與上述數字,亦甚近似。繩以爽巴格氏(Sundbärg)之說——地人口分配,十五歲以上者占百分之40,五十歲以上者占百分之10時,人口具有增加性——則上海一般工人家庭的人口,有增加的趨勢。

［業務］ 1,410人中,無職業的比有職業爲多,前者占百分之55.39,後者占百分之44.61。在一年之中,失業者有55人,占有業人數百分之8.74。305家中,平均每家有職人數爲2.06,也卽每家二個人中,只有一個人是做工的。此次調查雖以工廠

工人爲主，然各業工人數的分配，尙屬勻稱，男子以業棉紡，機器，棉織者爲多，女子以業棉紡，棉織，繅絲者爲多。在各業中，旣以紡織業工人數爲最多，因此該業調查的人數，占有百分之60.26，其他各業人數分配，也尙能適如其量。

［收入］ 305個家庭，平均每家每年正式收入爲$416.51，其中工資收入占收入總數百分之87.3，此外爲其他收入一房金，包飯，禮品，資助，營業等等。若和國內其他調查結果比較，上海一般工人的家庭，以房金和包飯的收入較多，工資占收入總數的百分比亦最低。收入越大的家庭，其工資收入的百分比越小，收入越小的家庭，夫和妻的工資百分比愈大，也就是牠們在家庭的負担愈重。

［支出］ 305個家庭，平均每年正式支出爲$454.38，其中食物占百分之53.2，房租占百分之8.3，衣着百分之7.5，燃料百分之6.4，雜項百分之24.6，就是說，必需的費用約爲四分之三，其他費用約爲四分之一。除衣着和燃料外，各項百分比的變動，與恩格爾氏（Engel）生活費定律很合。若與國內其他都市比較，上海一般工人的生活程度，似覺稍高，若與各國比較，不免相形見絀，普通說起來，食物費的百分比愈低，雜項費的百分比愈高，是生活優越的徵象，上海工人雜項費百分比雖高，然而生活並不見得優越。

若以平均一等成年一年中的生活費支出（$135.16）作爲

一個成年男子的必需生活費用標準，那末一個有家庭負担者(等成年)，須扶養完全依賴者1.16等成年，津貼半依賴者.44等成年，能自立者僅.03等成年而已。

〔收支盈虧〕 305個家庭，平均每家每年收入$416.51，支出$454.38，收支相抵，不敷$37.87。若僅以工資來維持生活，十家之中，虧短的有八九家之多，若以全部收入來維持生活，也有三分之二的家庭，入不敷出。

正式收入之外，如借款，當物，會款，賒欠，和收還等曰假收入，平均每家每年收入$148.02。假定在記賬前收支平衡，則假收入超過假支出$48.90，減去平均每家每年虧短數$37.87，尙餘$11.03。若合正式收入與假收入爲100，則假收入占收入總數百分之26.2，就是說，四分之一以上的入款，是出重利借來的。若合正式支出與假支出爲100，則假支出占總支出百分之17.6，也就是說，借來的款項，三分之一是還不出的。

依據調査，305個家庭，有借款的家庭，占家庭總數百分之88.2，有當物的占百分之78，合會的占百分之69.5，賒欠的占百分之48.5，典押，借印子錢，合會是工人們彌補虧短的方法，押店當鋪月息多在二分左右，印子錢月息，大半在十分以上。除了不合理的耗費，在此雖見降低，然而物價生活程度却日見增高的時候，節衣縮食，減無可減，更談不到優越的生活，工人們經濟狀況的窘迫，不言可喻。

[食物分配] 上海一般工人的食品，可分米麵，豆及蔬菜，肉魚及蛋，調味品和其他五目。(一)米麵目費用要佔食物類費用二分之一以上，而其中食米一項，又佔該目費用五分之四以上。平均每家全年食米7.19石。305家中食梗米的佔家庭總數百分之90，秈米佔百分之68，粳米和秈米兼吃的佔百分之58。工人食品以米爲主，麵及米麵製品次之，北方人民以麵食爲主，米食次之。

(二)豆及蔬菜的種類雖多，但是工人們常吃的却也不多。豆腐，豆腐乾，百頁，油豆腐，豆瓣，線粉等，都是牠們常吃的豆類，其中尤以豆腐的消費額爲最大。青菜，鹹雪菜，蘿菔，菠菜，韭菜，芹菜，茄子，茭白，豇豆莢，毛豆莢等，是常吃的蔬菜，其中尤以青菜，鹹雪菜的消費額爲最多。

(三)肉魚及蛋目的消費值，和豆及蔬菜幾於相等。鮮猪肉，鮮牛肉，鹹猪肉是常吃的肉類，其中尤以鮮猪肉的消費額爲最多。水屬動物中以鮮黃魚，鮮白魚，鮮帶魚，鮮鯽魚和鹹白魚的消費量爲最多。蛋類中以鮮鴨蛋的消費量爲最多。牛乳一項，爲歐美人民日常食品，但在305個記賬家庭中，購牛乳的只28家。

(四)豆油，醬油，食鹽和白糖幾於每家都備。猪油和花生油購買家庭就少得多。蔴油，醬，醋購買的家庭雖多，然消費量有限。精美的調味品是偶一購買的。

（五）瓜果的供給，上海雖多，然非一般工人們所能常買。水果的消費以西瓜為多，其次為甘蔗荸薺等品。乾果中，以瓜子花生為多，在新年或逢時節購買的。

［食物費分析］ 若按收入多少分組，平均每家全年食物類費用為$241.54，其中米麵目佔百分之53.4，豆及蔬菜目佔百分之17.5，肉魚及蛋目佔百分之16.5，調味品目佔百分之10.5，其他目佔百分之2.1。食物類各目費用都有隨收入增高而遞升的趨勢，但是各目費用，對於該類費用總計的百分比的分配却不一致，

［食物費分配的比較］ 若把上海工人食物類各目費用的百分比和北方農工比較，則上海工人食物類各目費用的分配，較為勻稱。北方米麵目費用極高，佔百分之80以上，其餘各目，均不佔相當地位。若再與東方國家如印度孟買和日本的工人比較，則印日和上海的各目費用百分比分配，反較上海和國內北方人民各目分配為近似—尤其是麵米目費用。在這三處—上海孟買日本—以植物類食品為主，穀類豆和蔬菜等佔食物費百分之60以上，動物類次之，肉，魚，蛋，牛乳等，約佔百分之16左右。若再與西方人民如在歐洲認為貧窮的愛爾蘭和富饒的美洲比較，却有一個重要不同之點，西方人民以肉類，蛋，牛乳，牛油等為主要食品，在食物類費用中約佔百分之50至70之間，穀類費用只佔百分之10至20之間。東方人民是蔬食者，西

方人民是肉食者。

[上海工人膳食營養素的分析] 上海工人的膳食，平均每一個成年男子每日得蛋白質82.5公分，脂肪48.8公分，碳水化物559.8公分，這三種營養素計發生熱量3,008卡羅里。照理論說，上海工人膳食的發熱總量，已不致於不足，但是蛋白質，脂肪，碳水化物三者的比例，尚欠適當。蛋白質僅及最低標準，脂肪太少，碳水化物又太多，並且十分之九的蛋白質是來自植物的—尤其是穀類—十分之一是來自動物的，所以牠的品質上和生理上的價值，尚覺欠佳。至於膳食的熱量，十分之七八，也來自穀類食物，無機鹽類中的鐵，雖尚足用，鈣和磷則患不足。乙丙兩種維生素雖不致過少，然甲丁兩種，則有缺乏之虞。

[住屋的種類] 上海工人住屋，可分三等：（一）優等的住屋，大都是樓房，有石庫門式（有天井）和東洋式（無天井）兩種，（二）次等的住屋，大都是舊平房，質料較差，（三）草棚。

[工人的住屋狀況] 記帳家庭中，住樓房的佔百分之60，住平房的佔百分之34，住草棚的佔百分之6。若照間數分配，僅住一間（實際間）的家庭佔百分之4.76，住兩間的佔百分之42.6，住三間以上的佔百分之 9.8。305家平均每家住 1.65間，以平均每家有4.62人或3.28個等成年計算，平均每間住2.8人或兩個等成年。若依一個成年生理上的需要，再考察實際的情形，定32立方公尺爲一標準間，305家平均每家住1.41個標準間。

每標準間平均住3.2人或2.3個等成年。依據統計,平均每間居住的人數,是隨收入的高低而增減,收入增加,住屋自然跟着寬敞的。若把上海工人每家所住間數的多少和北平的工人比較,固覺此勝于彼,然若和歐美工人比較,無疑地他們擁擠得多。

305個家庭,平均每家只有1.24扇窗,其面積也不到十分之一平方公尺。大都數的草棚是沒有窗的。記帳家庭住屋地面用木板的佔百分之62.3,水泥的佔百分之13.4,泥地的佔百分之24.3。家內洗濯用自來水的佔百分之68,用井水的佔百分之14,用河水的佔百分之18,至於飲食用的熟水,是從熟水店買來的。記帳家庭有公用灶的佔百分之58,在房內烹飪的佔百分之42。

[房租] 記帳家庭平均每家全年支出房租$37.83,平均每月$3.15,平均每間$1.91。每標準間每月$2.19,平均每人全年支出房租$8.19,或每月$0.68,平均每等成年全年支出房租$11.06或每月$0.92。又平均每人或每等成年全年房租支出有隨收入增加而遞增的趨勢。

[衣着] 305個家庭,平均每家全年衣着費用爲$34.10,其中被褥費佔百分之2.0,布疋費佔百分之54.0,衣服費佔百分之11.4,其他如鞋帽襪等費用佔百分之32.6。布疋中消費最多的是:粗布,細布,斜紋布,花標布,竹布,線呢,絨布,線綈等

數種。至於綢緞，眞嗶吱，香雲紗等價格高貴的衣料，購買者不過百分之三四而已。

［燃料］ 305家平均每家全年燃料費爲$29.00，燃料中以煤油，柴爿（劈柴）和廢木柴三種爲大宗，平均每家全年消費煤油83.6斤，柴爿118顆，廢木柴421斤，這三種燃料的消費值，佔全部燃料費三分之二。

［雜項］ 凡不入衣食住和燃料四類的品目，都歸入本類。305家平均每家全年雜項類費用爲 $112.00。本類各目，依費用多少排列，其次序如下：特別費平均每家全年爲$22.64，嗜好$19.10，交際$10.54，其他目（小孩雜用等）$10.50，衛生$7.84，水$7.66，醫藥費$6.05，付利息$5.73，交通$5.37，迷信$5.32，用具$4.55，娛樂$2.40，教育$1.45，修理 $1.09，飾物$0.83，捐稅$0.72，儲蓄$0.18。特別費包括寄家用喪葬喜慶生養等項，費用最多，嗜好費用以烟酒爲大宗，教育並文具書報等項，僅$1.45而已，遠在迷信費用之下，更不及嗜好費用之什一。

［幾個改進的提議］ 從上面的分析，我們知道上海工人家庭平均在四五口之間，一年收入僅四百十六元，支出則須四百五十四元，收支相抵，不敷約三十八元，唯有力求收入增加，以資彌補，然在大都市內，生活程度的提高，容較工資增加爲速，故在支出方面，支配適當，尤覺重要，各類支出費用，食物

計占四分之二強，雜項計佔四分之一，此外衣着，房租，燃料合佔四分之一弱。據研究，工人食物營養素，尙覺過差，衣着居處，亦極簡陋，似難減低，惟雜項費用，卽與國外比較，並未見低，倘能支配適當，生活狀況，當不致如是之窘。雜項費用內，如衞生，娛樂，敎育，儲蓄等項百分比急待提高，不合理費用如特別費一嫁娶，壽辰，彌月，如嗜好一烟酒，如不正當娛樂一賭博，如小孩雜用，如迷信等等，儘可減少，卽雜項費類百分比較現在爲低，生活狀況，或遠勝於此時。

其次膳食的改善，不必待經濟能力增加，始可辦到，下面的幾個提議，雖尙沒有增加屬於動物類的營養素，但尙簡便易行，（一）改食糙米一穀類的皮和胚，富有乙種維生素，卽蛋白質和脂肪的成分，糙米也較輾白米爲多。（二）多食黃豆和牠的製品，酌減穀類食物一豆類含有很好的蛋白質並且維生素和無機鹽類也比較穀類爲多。（三）多食葉類的蔬菜，尤其是番茄一葉類蔬菜，富有甲種維生素和無機鹽類，番茄富有甲乙丙三種維生素。（四）改善烹調法一煮蔬菜的時間勿過長，以防維生素和無機鹽類的分解，煮飯勿用沸水先煮，而棄其水，以防維生素，蛋白質和碳水化合物的損失。煮食物時勿用鹼以速其軟化，鹼能消減胃液中的鹽酸和乙丙兩種維生素。至於住屋的改進，治標方法：（一）設立房租審議委員會，依客觀的標準，審定各區房租之是否適當，評議與防止因房租而發生的爭議。

（二）取締二房東的剝削。（乙）治本方法：（一）徵收荒廢稅，（二）獎勵建築，（三）提倡關于住屋的合作事業。

此页空白

皮爾孫氏次數曲線系之研究

蔣 紹 基

從機率的立場批評皮爾孫氏次數曲線系爲本文之旨。常態曲線之不足以代表一切同類個體的次數分佈在皮爾孫之前早已有人提及，然大部分的統計學者當時仍以常態曲線爲萬應符。不論如何形式的次數分佈都可以常態曲線配上去。配上去若不合那是因爲材料不充足的緣故。猶如做就的一雙尖頭皮鞋長得十分健全的脚倘然穿不進去那是因爲脚還沒有長得完全，『假使』長完全了一定可以穿上去的。皮爾孫氏從生物學方面得到許多非常態的次數分佈的例子說明次數分佈非必成常態者。於是大家漸漸明白德莫弗爾 (De Moivre)，拉不拉斯 (Laplace)，高斯 (Gauss) 所做的鞋子雖然兩邊對稱後跟很闊然而往往不稱脚。

註：Phil. Trans. R. S. 186 A. p. 343.

此页无页码

皮爾孫氏在1895年發表他的次數曲線的理論。(註)根據由經驗而得的次數分佈的幾種極其普通的性質(詳下文)他選定

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}=\frac{x+a}{f(x)}$$

(此處 $f(x)$ 爲 x 之函數)作他的次數曲線系的微分方程式。再從此微分方程式得到十三種曲線,常態曲線包括在內。此微分方程式中包含四個恆數(下文)。令此四恆數等於種種價值卽得到十三個曲線方程式。但是從機率的立場看來此四個恆數須受相當的限制。猶之做鞋子時必須注意到脚之長,闊,厚等恆數。從解剖學看來脚之長,闊,厚等恆數須成相當的比例,換言之卽須受相當的限制。高斯等在此等限制之外再加以其他非必須的限制做成一雙對稱的皮鞋,名曰『常態曲線,』於是天下的鞋子只有一個樣子。皮爾孫氏不顧此等必須的相當限制,於是加了十二個鞋子的式樣,他所做的鞋子非但有長三寸闊兩尺的,並且有長負一尺,闊負兩寸的,長$\sqrt{-1}$尺,闊$\sqrt{-1}$寸的。三寸長兩尺闊的脚從解剖學的立場看來是不可能的。負一尺長,負兩寸闊的鞋子簡直無從想像;至於長$\sqrt{-1}$尺,闊$\sqrt{-1}$寸的鞋子則除相對論的學者外恐無人能了解矣。這種鞋子如果能穿上『脚』去那麼這所謂『脚』決非普通所謂『脚,』其骨骼的構造,假使有骨骼的話,一定與衆迥異。

要研究鞋樣的合理性須從解剖學說起。本文先述同類個體的抽樣問題,然後研究皮爾孫氏曲線系中何者爲此問題之

解答，何者不能認爲解答。

常態曲線可視爲同類個體的抽樣問題之一個特殊解答。此問題如下：

設袋中有形狀，大小，輕重相等之球 n 个，此中 np 个爲白球，nq 个爲黑球，混和後在袋中任意摸取 s 球。求 s 球中得白球 r 個之機率。

此處 s 爲一固定數。故 n 趨近無限則 s/n 趨近於零。此問題之解答全視 n 是否趨近無限而定。今先述 n 趨近無限，s/n 趨近於零時之解答。

倘 s/n 趨近於零或爲小至可以略去之數目則又有 $p=q$ 與 $p\neq q$ 兩種情形。

設 $p=q=\frac{1}{2}$ 則 s 球中得白球 r 個之機率爲

$$ {}_sC_r\left(\frac{1}{2}\right)^s $$

卽

$$ \left(\frac{1}{2}\right)^s(1+1)^s $$

之二項展開中之第$(r+1)$項。

爲比較此二項級數中各項之大小起見可以等距平行直線(曰豎標)代表依次各項之値。以直線聯結相鄰豎標之頂點得一多邊形。此多邊形卽足以敘述機率或相對次數之分佈。

然爲實際的便利與理論的興趣起見此多邊形須以連續的勻順的曲線代表之。

設

$$y_r={}_sC_r\left(\frac{1}{2}\right)^s$$

爲第(r+1)豎標之長則聯結第r及第(r+1)兩豎標之頂點之直線之斜度(卽此直線與底邊所成正角之 tangent)爲

$$\begin{aligned}y_r-y_{r-1}&=\left(\frac{1}{2}\right)^s({}_sC_r-{}_sC_{r-1})\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^s\frac{s!}{(s-r)!(r-1)!}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{sr+1}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^s\frac{s!}{(s-r)!(r-1)!}\left[\frac{s-2r+1}{r(s-r+1)}\right]\end{aligned}$$

因兩豎標間之距離爲單位。又此直線之中點之高爲

$$\begin{aligned}y_{r-\frac{1}{2}}&=\frac{1}{2}(y_r+y_{r-1})\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{s+1}\frac{s!}{(s-r)!(r-1)}\left[\frac{s+1}{r(s-r+1)}\right].\end{aligned}$$

代入上式得

$$y_r-y_{r-1}=2y_{r-\frac{1}{2}}\left[\frac{s-2r+1}{s+1}\right].$$

設

$$y=f(x)$$

爲用以代表此多邊形之曲線。倘以 y_r-y_{r-1} 作此曲線在

$$x=r-\frac{1}{2}$$

時之斜度則

$$\begin{aligned}\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=r-\frac{1}{2}}&=2f(r-\frac{1}{2})\left[\frac{s-2r+1}{s+1}\right]\\&=2f(r-\frac{1}{2})\left[\frac{s+2(r-\frac{1}{2})}{s+1}\right]\end{aligned}$$

以 $x=r-\frac{1}{2}$ 代入得

$$\frac{dy}{dx}=2f(x)\left[\frac{s-2x}{s+1}\right]$$
$$=-f(x)\frac{4(x-s/2)}{s+1}.$$

將原點移至 $x=s/2$ 得

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{-4}{s+1}x\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

因此

$$\int\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx=-\frac{4}{s+1}\int xdx$$
$$\log y=-\frac{2}{s+1}x^2+\log k$$
$$y=ke^{-\frac{x^2}{2\sigma}}$$

此處 k 爲一恆數；$\sigma=\frac{1}{2}\sqrt{s+1}$，前卽常態曲線，爲 n 趨近於無限，$p=q$ 時之特殊解答。

倘 n 趨近無限，s/n 趨近於零而 $p\neq q$ 則 s 球中取得白球 r 個之機率爲

$$y_r={}_sC_rp^rq^{s-r}$$

卽二項式

$$q^s(1+p/q)^s$$

之展開中之等$(r+1)$項。

仍用前法求代表多邊形之曲線。

$$y_{r-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(y_r+y_{r-1})$$
$$=\frac{1}{2}p^{r-1}q^{s-r}\,({}_sC_rp+{}_sC_{r-1}q)$$

$$=\frac{1}{2}p^{r-1}q^{s-r}\frac{s!}{(s-r)!(r-1)!}\left[\frac{(s+1)p+(q-p)r}{(s-r+1)r}\right].$$

因得

$$y_r-y_{r-1}=2y_r-\frac{1}{2}\left[\frac{(s+1)p-r}{(s+1)p+(q-p)r}\right]$$

$$=y_r-\frac{1}{2}\left[\frac{(s+1)p-\frac{1}{2}-(r-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}sp+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(q-p)(r-\frac{1}{2})}\right]$$

以此斜度作曲線上之斜度，並注意 $p+q=1$，即得

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{(x-sp)+\frac{1}{2}(q-p)}{-(spq+\frac{1}{4})-\frac{1}{2}(q-d)(x-sp)}$$

將原點移至 $x=sp$ 則

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{x+\frac{1}{2}(q-p)}{-(spq+\frac{1}{4})-\frac{1}{2}(q-p)x}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

在此微分方程式中，倘令 $p=q=\frac{1}{2}$ 即得微分方程式(1)。故微分方程式(1)爲(2)之特例。

令

$$b_0=-(sdq+\frac{1}{4}),\qquad b_1=-\frac{1}{2}(q-p)$$

則

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{x-b_1}{b_0+b_1x}=\frac{1}{b_1}\left[1-\frac{b_0/b_1+b_1}{b_0/b_1+x}\right]$$

求積分得

$$\log y=\frac{1}{b_1}x-\frac{1}{b_1}\left(\frac{b_0}{b_1}+b_1\right)\log(x+\frac{b_0}{b_1})+\log k$$

故曲線方程式爲(註)

$$y=k(x-\frac{\lambda}{\gamma})^{\lambda-1}e^{\gamma x}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

註：或 $y=k(\frac{\lambda}{\gamma}-x)^{\lambda-1}e^{\gamma x}$

此處 k 爲一恆數,

$$\lambda=-\frac{b_0}{b_1^2}, \qquad \gamma=\frac{1}{b_1}.$$

此曲線一端受限制。其範圍視 γ 之值而定。($\lambda-1$ 恆爲正數)。設 $p>q$ 則 γ 爲正,如是則曲線範圍爲

$$-\infty<x\leqq\frac{\lambda}{\gamma}.$$

設 $p<q$ 則 γ 爲負,如是則

$$\frac{\lambda}{\gamma}\leqq x<+\infty.$$

曲線下之全面積可用 Gamma 函數表示之。令此面積等於一卽可求得 k 之值,用 λ 及 γ 表示之。

此式可證明其原點在算術平均上,至於 λ 與 γ 則可用 x^2 及 x^3 對於算術平均而言之期望值表示之。

不論 p 之值爲何(除却 $p=\frac{1}{2}$)此曲線代表二項式

$$q^s(1+\frac{p}{q})^s.$$

倘 p 之值接近零則此曲線顯然可以代表所謂『小數定則。』故博阿松 (Poisson) 之不連續的公式。

$$y_r=e^{-u}\frac{u^r}{r!}$$

可用連續的曲線代表之

以上假定 s/n 之值爲可以略去者。倘 s/n 之值不能認爲可以略去則 s 球中得白球 r 個之機率爲

$$y_r = ({}_sC_r)({}_{np}p_r)({}_{nq}p_{s-r})/({}_np_s)。$$

倘將超幾何級數書作

$$F(a,b;c;z) = 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3c(c+1)(c+2)} z^3 + \cdots\cdots$$

則 y_r 爲超幾何級數

$$({}_{nq}p_s / {}_np_s) F(-np, -s; nq-s+1; 1)$$

之第 $(r+1)$ 項。

倘 n 趨近無限則

$$y_r = \lim_{n\to\infty} ({}_sC_r)({}_{pn}p_r)({}_{np}p_{s-r})/({}_np_s)$$

$$y_r = \lim_{u\to\infty} {}_sC_r \frac{np(np-1)\ldots\ldots(np-r+1)nq(nq-1)\ldots\ldots(nq-s+r+1)}{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)(n-r)\ldots\ldots(n-s+1)}$$

$$= {}_sC_r p^r q^{s-r}$$

卽

$$q^s\left(1+\frac{p}{q}\right)^s$$

之第 $(r+1)$ 項。同時

$$\lim_{n\to\infty} ({}_{nq}p_s / {}_np_s) F(-np, -s; nq-s+1; 1$$

$$= q^s F\left(-s, 1; 1; -\frac{p}{q}\right)$$

$$= q^s\left(1+\frac{p}{q}\right)^s$$

故以上所述二項級數皆此超幾何級數之特例。故二項級數之性質實包含於超幾何級數內。

前述抽樣問題中共摸取 s 球。設 x 爲 s 球中之白球數則

x之期望值爲何?

設$\overline{x}$爲此期望值,則由定義

$$\overline{x}=\sum_{r=o}^{r=s} ry_r$$

此處y_r卽s球中得白球r個之機率。

若令

$$K={}_{nq}p_s/{}_np_s,\quad a=-np,\quad b=-s,\quad c=nq-s+1,$$

則

$$KF(a,b;c;1)=\sum_{r=o}^{r=s} y_r.$$

以z作參數;由定義

$$KF(a,b;c;z)=\sum_{r=o}^{r=s} y_r z^r.$$

$$K\frac{d}{dz}F(a,b;c;z)=\sum_{r=o}^{r=s} ry_r z^{r-1}$$

$$=K\frac{ab}{c}F(a+1,b+1;c+1;z).$$

令$z=1$卽得

$$\sum_{r=o}^{r=s} ry_r=K\frac{ab}{c}F(a+1,b+1;c+1;1)$$

由超幾何級數與 Gamma 函數之關係

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}$$

得

$$F(a+1,b+1;c+1;1)=\frac{\Gamma(c+1)\,\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}$$

$$=\frac{c\,\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{(c-a-b-1)\,\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}$$

$$=\frac{c}{c-a-b-1}F(a,b;c;1)$$

$$\therefore x = \sum_{r=o}^{r=s} r y_r$$

$$= K \frac{ab}{c-a-b-1} F(a, b; c; 1)$$

$$= sp$$

因由機率之定義$KF(a,b;c;1)=1$。故不論機率之分佈爲如何形式，x之期望值必爲sp。

以垂直於同一底線，相距單位之豎標代表此超幾何級數之依次各項則第$(r+1)$豎標之高爲y_r。聯結第r及第$(r+1)$豎標之頂點之直綫之中點之高爲

$$y_{r-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} y_r + y_{r-\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{1}{2} [({}_sC_{r-1})({}_{np}p_{r-1})({}_{nq}p_{s-r+1}) / {}_{n}p_s]$$

$$\left[\frac{(np-r+1)(s-r+1)}{(nq-s+r)r} + 1 \right]$$

此直線之斜度爲

$$y_r - y_{r-1} = 2y_{r-\frac{1}{2}} \frac{(np+1)(s+1)-(n+2)r}{(np+1)(s+1)+[n(q-p)-2(s+1)]r+2r^2}$$

$$= y_{r-\frac{1}{2}} \frac{(r-\frac{1}{2})+a'}{b_0'+b_1'(r-\frac{1}{2})+b_2'(r-\frac{1}{2})^2}$$

此處

$a' = -(np+1)(s+1)/(n+2)+\frac{1}{2}$, $b_0' = -[nsp+\frac{1}{2}(n+1)]/2(n+2)$,

$b_1' = -[n(q-p)-2s]/2(n+2)$, $b_2' = -1/(n+2)$.

倘以曲線

$$y = f(x)$$

代表此多邊形，以$y_r - y_{r-1}$作曲線在$x = r - \frac{1}{2}$時之斜度則得

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=r-\frac{1}{2}} = f(r-\frac{1}{2}) \frac{(r-\frac{1}{2})+a'}{b_0'+b_1'(r-\frac{1}{2})+b_2'(r-\frac{1}{2})^2}$$

以 $x=r-\frac{1}{2}$ 代入

$$\frac{dy}{dx}=y\frac{x+a'}{b_0'+b_1'x+b_2'x^2}.$$

將原點移至 $x=sp$ 則此式變成

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{x-b_1}{b_0+b_1x+b_2x^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

此處

$b_0=-\left[spq(n-s)+\frac{1}{4}(n+1)\right]/(n+2)$ 恆爲負數，

$b_1=\left(s-\frac{n}{2}\right)(q-p)/(n+2)$，

$b_2=-1/(n+2)$ 恆爲負數。

令 n 趨近無限則此微分方程式之極限值卽前述微分方程式(2)，再令 $p=q$ 卽得微分方程式 (1)。故 (4) 不妨稱爲普偏機率微分方程式。

適合此式之曲線形式視

$$b_0+b_1x+b_2x^2=0$$

之根之性質而定，卽視判別式

$$k=\frac{b_1^2}{4b_0b_2}$$

之値而定。由 b_0 及 b_2 之定義可知其皆爲負數，故 k 不能爲負數。於是有下列四種情形：

(i) $k=\infty$ 卽 k 無限大。

(ii) $0\leqq k<1$

(iii) $k=1$

(iv) $k>1$ 卽 k 爲大於 1 之有限數目。

(i) $k=\infty$ 相當於 n 趨近無限，如是得微分方程式(2)及(1)。其解答早已論及。

(ii) 設 $0\leqslant k<1$ 則

$$b_0+b_1x+b_2x^2=0$$

之兩根爲虛數。故 $4b_0b_2-b_1^2>0$。微分方程式(4)可書成

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_2}\frac{x-b_1}{\left[\frac{b_0}{b_2}+\frac{b_1}{b_2}x+x^2\right]}=\frac{1}{2b_2}\frac{2x-2b_1}{\left[(x+\frac{b_1}{2b_2})^2+\left(\frac{b_0}{b_2}-\frac{b_1^2}{4b_2^2}\right)\right]}$$

求積分得

$$\log y=-\lambda\log\left\{(x+\alpha)^2+\beta^2\right\}+\frac{2\alpha(\lambda-1)}{\beta}\arctan\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)+\log K$$

此處

$$\alpha=\frac{b_1}{2b_2},\quad \beta=\sqrt{\frac{b_0}{b_2}-\frac{b_1^2}{4b_2^2}},\quad \lambda=-\frac{1}{2b_2},\quad K\text{ 爲一恆數。}$$

因得

$$y=K[(x+\alpha)^2+\beta^2]^{-\lambda}e^{\frac{2\alpha(\lambda+1)}{\beta}\arctan\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)}\quad\ldots\ldots(5)$$

λ 爲大於1之正數。故 x 趨近 $\pm\infty$ 時 y 趨近零。故曲線爲鐘形。倘 $p=q$ 或 $s=\frac{n}{2}$ 則此式爲

$$y=K(x^2+p^2)^{-\lambda}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

之形式，爲對稱曲線。

(iii) 設 $k=1$ 則 $b_0+b_1x+b_2x^2=0$ 之兩根相等。如是

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{x-b_1}{b_2(x+\frac{b_1}{2b_2})^2}$$

$$=\frac{1}{b_2}\frac{1}{x+b_1/2b_2}-\frac{b_1(2b_2+1)}{2b_2^2}\frac{1}{(x+b_1/2b_2)^2}$$

因得

$$log\ y=\frac{1}{b_2}\ log(x+b_1/2b_2)+b_1(2b_2+1)/2b_2^2(x+b_1/2b_2)+log\ K$$

$$\therefore y=K(x+\alpha)^{-2\lambda}e^{-2\alpha(\lambda-1)/(x+\alpha)} \quad \text{..........(7)}$$

此處 K 爲一恆數，

$$\alpha=b_1/2b_2,\qquad \lambda=-1/2b_2$$

如前。λ 恒爲正數。倘 α 爲正則曲線之範圍爲

$$-\alpha<x<+\infty\text{.}$$

倘 α 爲負則曲線之範圍爲

$$-\infty<x<-\alpha\text{.}$$

故曲線之一端受限制。又 $x=-\alpha$ 及 $\pm\infty$ 時 y 之極限值皆爲零。故曲線恆爲鐘形。

(iv)設 $k>1$ 則 k 似乎可爲 1 與 $+\infty$ 間之任何數。其實不然。蓋

$$k=\frac{b_1^2}{4b_0b_2}=\frac{(s-\frac{n}{2})^2(q-p)^2}{4spq(n-s)+(n+1)}\leqslant\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{n+1}$$

是以 n 若爲有限數目 k 必小於

$$\frac{n^2}{4(n+1)}\text{.}$$

因此相當於

$$\frac{n^2}{4(n+1)}<k<+\infty$$

之範圍內同類個體抽樣問題並無解答。此點極關重要，下文當有提及之機會。

$k>1$ 則

$$b_0+b_1x+b_2x^2=0$$

之兩根

$$c_1=\frac{-b_1+\sqrt{b_1^2-4b_0b_2}}{2b_2} \quad 及 \quad c_2=\frac{-b_1-\sqrt{b_1^2-4b_0b_2}}{2b_2}$$

爲同號實數，且 $c_2>c_1$。此二根之號因上述 k 之限制故必與 b_1 之號相同。微分方程式可書爲

$$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx}=\frac{x-b_1}{b_2(x-c_1)(x-c_2)}=\frac{1}{b_2}\left[\frac{c_1-b_1}{c_1-x_2}\,\frac{1}{x-c_2}-\frac{c_2-b_1}{c_1-c_2}\,\frac{1}{x-c_2}\right]$$

求積分得

$$log\ y=m_1\ log(x-c_1)-m_2\ log(x-c_2)+log\ K.$$

此處 K 爲一恆數，

$$m_1=\frac{c_1-b_1}{(c_1-c_2)b_2},\quad m_2=\frac{c_2-b_1}{(c_1-c_2)b_2}.$$

因得

$$y=K(x-c_1)^{m_1}(x-c_2)^{-m_2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

倘 b_1 爲負則 $c_1<c_2<o$，曲線之範圍爲

$$c_2<x<+\infty.$$

如是由 m_1 及 m_2 之定義以及

$$1<k\leqslant\frac{n^2}{4(n+1)}$$

之限制可以證明

$$m_1<0\ ,\ -m_2>0.$$

倘 b_1 爲正則 $o<c_1<c_2$，曲線之範圍爲

$$-\infty<x<c_1$$

因此

$$(x-c_1)\ 及\ (x-c_2)$$

皆爲負數。如是則

$$\frac{1}{x-c_1} \text{ 及 } \frac{1}{x-c_2}$$

之積分爲 $log(c_1-x)$ 及 $log(c_2-x)$。故若 b_1 爲正則曲線之方程式爲

$$y=K(c_1-x)^{m_1}(c_2-x)^{-m_2}\dots\dots\dots\dots\dots\dots(8)$$

由 m_1 及 m_2 之定義及 $k\leqslant n^2/4(n+1)$ 之限制可證明若 b_1 爲正則

$$m_1>0 \quad , \quad -m_2<0.$$

然不論 b_1 爲正爲負

$$m_1-m_2=\frac{1}{b_2}$$

必爲負。因此。此曲線在 $x=c_1$ 或 c_2 時 y 爲零；x 趨近 $\pm\infty$ 時 y 亦趨近零。故此曲線之形式亦必爲鐘形。

以上由普偏機率微分方程式得五種曲線，即常態曲線及曲線(3)，(5)，(7)，(8)。此外同類個體抽樣問題不能有其他解答除非爲此五種曲線之特例，如(6)。

此五種曲線中之恆數 K 可由曲線下之全面積等於 1 之條件求得之。x 之期望值皆爲零，因此五種曲線皆以算術平均(即 sp)爲原點者。曲線式中之其餘恆數皆可用 x^2，x^3，x^4 之期望值表示之。蓋若注意各曲線式中諸恆數之限制，則此等期望值皆可用 Gamma 函數及 Beta 函數表示之，絕無例外。此點甚堪注意。

皮爾孫氏之次數曲線系初非由機率之假定而得，* 故其曲線系通常稱為經驗曲線系。皮氏之經驗的假定為：

(1)倘觀察之材料為同類者次數曲線起點之竪標為零，其後增加至極大，再漸降至零。

(2)次數曲線之兩端通常與 x 軸相切。

微分方程式

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{x+a}{f(x)}$$

通常為適合此經驗的條件者。蓋 $y=o$ 時 $\frac{dy}{dx}=o$，即曲線與 x 軸相切。$x=-a$ 時 $\frac{dy}{dx}=o$ 相當於極大。

此方程式中 $f(x)$ 為 x 之函數，皮氏假定其可用麥克勞倫氏定理展開成 x 之方級數

$$f(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots\ldots$$

皮氏僅論及 $f(x)$ 為二次式時之情形。蓋若為高於二次之多項式則必論及高於四次之莫孟 (Moment)。高於四次之莫孟對於次數分佈之誤差 (Error) 過於靈敏故不適用。因此皮爾孫氏以

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{x+a}{b_0+b_1x+b_2x^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

作其次數曲線系之微分方程式。

曲線之莫孟即可由此微分方程式求得。此式可書為

* Phil. Trans. R. S. 186. A. p. 343.

$$(b_0+b_1x+b_2x^2)dy=(x+a)y\ dx\cdot$$

兩邊乘以 x^n 求積分得

$$\int_{x_1}^{x_2} x^n(b_0+b_1x+b_2x^2)dy=\int_{x_1}^{x_2} x^n(x+a)y\ dx$$

此處 $x=x_1, x=x_2$ 爲曲線之兩端。此式左邊可用部分求積法。故上式變成

$$\Big[x^n(b_0+b_1x+b_2x^2)y\Big]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}[nb_0x^{n-1}+(n+1)b_1x^n+(n+2)b_2x^{n+1}]y\ dx$$
$$=\int_{x_1}^{x_2} x^{n+1}y\ dx+a\int_{x_1}^{x_2} y\ dx$$

y 在曲線兩端爲零。故若以 μ_n 表示第 n 次莫孟則上式爲

$$a\mu_n+nb_0\mu_{n-1}+(n+1)b_1\mu_n+(n+2)b_2\mu_{n+1}=-\mu_{n+1}$$

令曲線下之全面積等於1則 $\mu_0=1$。又微分方程式若以算術平均作原點則 $\mu_1=o$。於是令 $n=o,1,2,3$ 得下列四式:

$$\left.\begin{array}{l} a+b_1=0 \\ b_0+3\mu_2 b_2=-\mu_2 \\ \mu_2 a+3\mu_2 b_1+4\mu_3 b_2=-\mu_3 \\ \mu_3 a+3\mu_2 b_0+4\mu_3 b_1+5\mu_4 b_2=-\mu_4 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(9)$$

解此四個聯立方程式之後可以 μ_2, μ_3, μ_4 表示 a, b_0, b_1, b_2。再令

$$\beta_1=\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}, \qquad \beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}, \qquad \sigma=\sqrt{\mu_2}$$

代入微分方程式卽得

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{\beta_1}(\beta_2+3)+(10\beta_2-12\beta_1-18)\frac{x}{\sigma}}{-\sigma\left[(4\beta_2-3\beta_1)+\sqrt{\beta_1}(\beta_2+3)\frac{x}{\sigma}+(2\beta_2-3\beta_1-6)\frac{x^2}{\sigma^2}\right]}\cdots\cdots(10)'$$

同時

$$k=\frac{b_1^2}{4b_0b_2}=\frac{\beta_1(\beta_2+3)^2}{4(2\beta_2-3\beta_1-6)(4\beta_2-4\beta_1)}.$$

由定義 σ,β_1,β_2 皆爲正數。皮爾孫氏更由 β_1 及 β_2 之定義證明*

$$\beta_2-\beta_1-1$$

必爲正。故 $4\beta_2-3\beta_1$ 亦必爲正。

β_1 與 β_2 皆可取 o 與 $+\infty$ 間之任何值。故方程式 (10) 似乎包含兩重無限的曲線羣。倘以直交坐標之橫軸表示 β_1，竪軸表示 β_2 則似乎正象限內每一點相當於一條曲線。然因 $\beta_2-\beta_1-1>0$ 之關係所有合乎皮氏經驗假定之曲線應相當於

$$\beta_1=0, \qquad \beta_2-\beta_1-1=0,$$

兩直線之間之各點。此乃皮氏之經驗的假定。

由機率的立場觀之則皮氏在 β_1, β_2 平面上所定之區域尙嫌過大。蓋若認爲方程式(10)與(4)完全爲一式，換言之卽若方程式(10)卽普偏機率微分方程式則判別式

$$k=\frac{b_1^2}{4b_0b_2}=\frac{\beta_1(\beta_2+3)^2}{4(2\beta_2-3\beta_1-6)(4\beta_2-3\beta_1)}$$

不能小於零。蓋 b_1 爲實數，b_0,b_2 同號也。故

$$2\beta_2-3\beta_1-6$$

必爲正。換言之卽相當於機率曲線之各點皆在

$$\beta_1=0, \qquad 2\beta_2-3\beta_1-6=0,$$

兩直線間之區域內。

* Phil. Trans, Roy. Soc. 216, A, pp. 429—457.

由皮氏由方程式(10)得三大類曲線，相當於

(1) $k<O$

(2) $O<k<1$

(3) $k>1$

三種情形。

(1) $k<o$ 則 $b_0+b_1x+b_2x^2=o$ 之根爲異號實數。微分方程式(10)可書爲

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_2}\frac{x+a}{(x+c_1)(x-c_2)}=\frac{1}{b_2}\left[\frac{c_1-a}{c_1+c_2}\frac{1}{x+c_1}\right.$$

$$\left.+\frac{c_2+a}{c_1+c_2}\frac{1}{x-c_2}\right]$$

此處 $-c_1$ 及 c_2 爲二根。將原點移至 $x=-a$，令

$$a_1=c_1-a,\qquad a_2=c_2+a,\qquad p=1/b_2(c_1+c_2)$$

得

$$y=y_0\left(1+\frac{x}{a_1}\right)^{pa_1}\left(1-\frac{x}{a_2}\right)^{pa_2}\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

此曲線兩端受限制，通常爲鐘形，亦可爲 J 式或 U 式。皮氏稱之爲第一類。

此曲線從同類抽樣問題觀之爲不可能的。蓋就微分方程式(4)而言 $k<o$ 爲不可能者，除非 $(s-\frac{n}{2})(q-p)$ 爲虛數或 $s>n$.

此曲綫之兩端爲受限制者，因 x 之值必在 $-a_1$ 與 a_2 之間。在自然界以及社會與經濟現象之分佈中變遷之範圍受限制者甚多此統計學家所共知者。例如在文明社會中結婚年齡

之分佈必以發育年齡爲一端之限制。至於老年之結婚者雖少然其範圍不易確定，故僅有一端受限制。死亡率之分佈一端當然以出生爲起端，其他一端雖不能大於一定數目，例如三百歲，然究以何數爲限則未易言也。又如心理學上反動時間(Reaction Time)之分佈，一端以零秒爲限，其他一端之範圍亦不易確定。又如百碼賽跑之紀錄一端必以10或9秒爲限，其他一端則無限制之可言。故分佈之兩端皆受確定數目 $-a_1$ 及 a_2 之限制者事實上至爲稀罕。可見皮氏第一類曲線非特在機率理論上爲不可能(至少不能作爲同類抽樣問題之解答)即事實上亦乏例證。猶之不合解剖學之皮鞋其能稱脚也幾希。

(2) $o<k<1$ 之情形前已述及。所得曲線卽曲線(5)。兩端不受限制，成鐘形。此爲皮氏第四類曲線。

(3) $k>1$。所得曲線卽曲線 (8) 或 (8)$'$。此曲線因無 $k<n^2/4(n+1)$ 之限制故可爲 J 式，及一端受限制，y 之値爲零；其他一端 y 趨近無限。然亦可爲 U 式，卽一端受限制，y 趨近無限；其他一端雖無限制 y 亦趨近無限。此爲皮氏第六類曲線。

故皮氏之所謂三大類從機率的立場觀之實僅兩大類。皮氏之其餘九類曲線皆爲此三大類之過渡式或特例。

(4) $k=1$。如是得曲線(7)，爲皮氏第五類。

(5) $k=\infty$。相當於 $2\beta_2-\beta_1-6=0$，卽 $b_2=0$。由是得曲

線(3)。爲皮氏第三類。

(6) $k=0$, $\beta_1=0$, $\beta_2=3$。得常態曲線。

(7) $k=0$, $\beta_1=0$, $\beta_2>3$。得曲線(6)爲曲線(5)之特例。皮氏第七類。

(8) $k=0$, $\beta_1=0$, $\beta_2<3$。由方程式(10)′可知此卽相當於

$$b_1=0, \qquad a=0。$$

故方程式(10)變成

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{x}{b_0+b_2x^2}$$

求積分得

$$log\ y=\frac{1}{b_2}log\left(\frac{b_0}{b_2}+x^2\right)+恆數$$

卽

$$y=K\left(1-\frac{x^2}{d^2}\right)^m$$

此處 K 爲一恆數，

$$d^2=-\frac{b_2}{b_0}, \qquad m=\frac{1}{b_2}$$

皆爲正數。此曲線兩端受限制爲皮氏第二類。

前已述及 $2\beta_2-3\beta_1-6$ 必爲正或零。$\beta_2<3$ 則此式爲負。換言之卽 b_2 須爲正。故由機率理論觀之爲不可能。且事實上兩端限制之分佈亦甚少也。

(9) $k<0$, $5\beta_2-6\beta_1-9=0$。得

$$y=K\left\{\frac{\sigma(\sqrt{3+\beta_1}+\sqrt{\beta_1})+x}{\sigma(\sqrt{3+\beta_1}-\sqrt{\beta_1})-x}\right\}^{\sqrt{\beta_1(3+\beta_1)}}$$

皮氏第十二類。此曲線爲J式。

(10) $k<0$, $5\beta_2-6\beta_1-9<0$。相當於曲線

$$y=K\left(1+\frac{x}{d}\right)^{-m}$$

皮氏第八類,此曲線爲J式

(11) $k<0$, $5\beta_2-6\beta_1-9>0$, $2\beta_2-3\beta_1-6<0$。

$$y=K\left(1+\frac{x}{d}\right)^{m}.$$

皮氏第九類。

此三類因 $k<0$ 故皆非機率曲線。

(12) $k=\infty$, $\beta_1=4$, $\beta_2=9$。此爲曲線(3)之特例,似乎可爲抽樣問題之解答。代入(10)′得

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sigma}+\text{恆數}\quad\left(\sigma=\sqrt{\mu_2}\right)$$

因得

$$y=Ke^{-\frac{x}{\sigma}}$$

此處 K 爲一恆數。此曲線爲皮氏第十類。其形式爲J式。

然此處應注意者卽 $k=\infty$ 相當於 $b_2=0$,卽 n 趨近無限。故方程式(4)變成

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{x+\frac{1}{2}(q-p)}{-(spq+\frac{1}{4})-\frac{1}{2}(q-p)x}$$

卽微分方程式(2)。與上列微分方程式比較得

$$\frac{x+\frac{1}{2}(q-p)}{-(spq+\frac{1}{4})-\frac{1}{2}(q-p)x}=-\frac{1}{\sigma}=-\frac{1}{\sqrt{\mu_2}}=\frac{-1}{\sqrt{spq+\frac{1}{4}}}$$

此式右端之值由聯立方程式(9)之第二式求得。整理之卽得

$$\left[\sqrt{spq+\tfrac{1}{4}}-\frac{1}{2}(q-p)\right]x-\sqrt{spq+\tfrac{1}{4}}\left[\sqrt{spq+\tfrac{1}{4}}-\frac{1}{2}(q-p)\right]=0$$

此式爲恆等式,卽 x 不論爲何值代入皆能適合。故必得

$$\sqrt{spq+\tfrac{1}{4}}=\frac{1}{2}(q-p)$$

$$=\frac{1}{2}(1-2p)$$

因 $p+q=1$。兩邊平方得

$$spq+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(1-4p+4p^2)$$

卽

$$spq=p^2-p=-pq$$

$$\therefore s=-1。$$

在上述同類個體抽樣問題中 s 之值不能爲負,故此曲線亦非機率曲線。

(13) 在曲線(8)之情形中倘 b_1 爲 $b_0+b_1x+b_2x^2=0$ 之一根則(8)成

$$y=K(x-c)^{-2\lambda}$$

之形式。此處 c 爲另一根,$\lambda=-1/2b_2$。此曲線爲 J 式。爲氏第十一類。

由抽樣問題的立場觀之此式爲不可能者,蓋若 b_1 爲

$$b_0+b_1x+b_2x^2=0$$

之一根則

$$b_0+b_1^2+b_2b_1^2=0$$

$$b_1^2=\frac{-b_0}{1+b_2}$$

卽

$$k=\frac{b_1^2}{4b_0b_2}=\frac{-b_0}{4b_0b_2(1+b_2)}=\frac{(n+2)^2}{4(n+1)}>\frac{n^2}{4(n+1)}$$

然上文早已提及 k 必須小於 $n^2/4(n+1)$。

此式雖不能認爲抽樣問題之解答，在實用上却似乎十分重要。蓋研究個人收入分佈問題之統計學家莫不知英德美法諸國之個人收入分佈皆可用此式配合。蓋此式之曲線卽所謂巴雷脫曲線（Pareto Curve)。誠然。惟個人收入分佈倘所用級距稍爲精細而不將收入爲零左右之各級合併則個人收入分佈無論在世界何國決不能爲 J 式。故若用機率曲線（8）配合必較巴雷脫曲線高明萬倍。若將級距放大，將收入爲零左右之各級合併而强以 J 式之巴雷脫曲線配合實削足以適履也。

由上所述可知皮氏十二類曲線中僅有四個基本的曲線式及一個特例式爲同類個體抽樣問題之解答，卽

(i) $k=\infty$。 第三類。

(ii) $k>1$。 第六類。

(iii) $k=1$。 第五類。

(iv) $0\leqslant k<1$。 第四類。 （特例：第七類)。

其餘七類皆不能認爲解答。此兩種曲線其性質有基本的區別：蓋前者五類與常態曲線一樣有先驗的機率的根據，故不妨稱爲機率曲線；後者七類與梅開姆(Makeham) 公式等同類並非由機率的根據而得，故僅爲修勻曲線。事實上後者七類修勻曲線之用處較少，一則因爲兩端有明確限制之分佈甚少，再

則因爲J式分佈本來甚少，且往往經過攷慮之後可知其並非J式，實爲曲線(8)之形式。然此並非謂用修勻曲線配合次數分佈爲非法者。不過不能用機率曲線配合之次數分佈其形成次數分佈之原則決非同類個體抽樣問題所能包括：此則可以斷言者也。

除此理論的區別外皮爾孫氏之經驗曲線尚有一基本的困難。蓋皮氏次數曲線配合問題之基本定理*爲求次數曲線之四個莫孟與次數分佈之四個莫孟之相等。在證明此定理時皮氏假定次數曲線式可用麥克勞倫氏定理展開者。然若曲線爲J式或U式則此假定不能適用，換言之卽皮氏配合次數曲線之方法不能適用。然上述七類修勻曲線幾乎皆爲U式或J式。

非特如是，J式或U式曲線之莫孟實根本無從求得。例如皮氏第一類曲線對於$x=-a_1$而言之n次莫孟爲

$$\mu'_n=\int_{-a_1}^{a_2} a_1^n y_0\left(1+\frac{x}{a_1}\right)^{pa_1+n}\left(1-\frac{x}{a_2}\right)^{pa_2}dx$$

令

$$\frac{a_1+x}{a_1+a_2}=u,\qquad a_1^{-(pa_1+pa_2)}(a_1+a_2)^{pa_1+pa_2+n+1}y_0=K$$

代入卽得

$$\mu'_n=K\int_0^1 u^{pa_1+n}(1-u)^{pa_2}du$$

* Biometrika. vol. 1. p. 167

倘$pa_1+n\leqslant-1$ 或 $pa_2\leqslant-1$ 則此式毫無意義之可言。曲線(8)或皮氏第六類倘無 K 之限制亦有同樣困難。其餘 J 式曲線之莫孟皆然，此乃皮氏本人所老實承認者。然機率曲線則並無此種困難。蓋前已提及機率曲線之全面積及 x^2,x^3,x^4 之期望値(或莫孟)皆可用 Gamma 函數或 Beta 函數表示之，絕無例外者也。

簡略生命表之編製法

（以北平市之人口數及死亡數為例）

羅　志　如

本篇假定讀者已知生命表之意義，及其中所有各函數（一）間之關係。簡略生命表與普通生命表不同之處，乃在後者之各函數，自出生以至生命之極限每一年齡皆有其數字；而在簡略生命表上所示之函數，則僅有每隔五歲或十歲者。是以編製較為簡單，凡公共衛生行政人員得按法編造，對於各區之衛生進步，可時加比較。卽在人壽保險公司，如僅有在保人數及死亡人數，亦可依法製表，以為一時之用。

普通生命表，其編製方法中之主要部分為修勻（Graduation），在編製簡略生命表，其方法中之主要部分為內插（Interpolation），兩者皆根據差數法（Method of difference）

（一）生命表中之 q_x，p_x，l_x，d_x，e_x 等皆依年齡（x）而變化，故為年齡之函數，通稱生命表函數。

之原理。本篇假定讀者對於差數法之理論已有相當基礎，至少對於牛頓之差數公式已了悉其底蘊，蓋以後所用之兩種內插公式，無論由面積以求縱坐標者，或由縱坐標以求面積者，皆由牛頓公式而來。(二)

編製生命表之材料，其來源通常有兩種，一爲戶口調查與人事登記所得之數字，一爲人壽保險之經驗。我國人壽保險之材料，現時是否可用，尙在調查中。(三)至於戶籍法於民國廿年雖經公佈，然至今尙未實行，全國之死亡數字，自難期望，卽任一省亦無此種材料。近年來國中各大都市多已按前內政部頒佈之人事登記暫行條例實際施行，惟係草創，結果殊難置信。按北平向例人死後必報告警察廳領取許可證然後能出葬，此種規定辦理已有多年，且北平警政，素負聲譽，故本篇決定用該市民國七年以至九年三年之男子死亡人數，及民國八年之男子人口數(四)以爲試編之材料，雖不敢卽謂其可靠，然在今日之我國，欲求極完善者勢所不能，且本篇之主要目的乃在說明編製方法，所用材料，不過聊示一例而已。

一. 初步手續

(二)亦有根據中央差之公式而來者，本篇避而不用。

(三)將來如查出合用時擬編一完整之生命表。

(四)見前北京內務部發表之內務統計，民國九年度京師人口之部。

茲將原書中所發表之數字,列爲下表(左一半,)以便參照討論。

第一表

原有數字			修正後數字				
年齡組	人口數(男)民國八年,1919.	死亡人數(男)民國七年至九年,1918-1920	年齡組	人口數	死亡數 (1)	(2) (1)÷3	(3) 20歲後各組重分
1—5	24,749	7,183	0—4	24,815	7,356	3 52	2452
6—10	27,778	2,281	5—9	27,852	2,336	779	779
11—15	32,313	1,651	10—14	32,399	1,691	564	564
16—20	53,170	1,959	15—19	53,312	2,006	669	669
21—25	59,940	2,686	20—24	60,101	2,750	917	468
26—30	62,087		25—29	62,255			449
31—35	56,332	3,154	30—34	56,483	3,230	1077	528
36—40	50,534		35—39	50,670			549
41—45	43,941	3,175	40—44	44,058	3,252	1084	533
46—50	38,600		45—49	38,073			551
51—55	26,091	3,570	50—54	26,161	3657	1219	611
56—60	18,744		55—59	18,794			608
61—65	11,149	3102	60—64	11,178	3177	1059	564
66—70	8,795		65—69	8,819			495
71—75	4,485	1,954	70—74	4,498	2001	667	392
76—80	2,548		75—79	2,555			275
81—85	630	338	80—84	631	346	115	100
86—90	254		85—89	254			15
91—95	19	26	90—94	19	26	9	9
96—100	4		95—99	4			
未詳	1,398	749					
共計	523,561	31,828	共計	523,561	31828		

原來數字中,無論人口或死亡,皆有年齡未詳之人數,此本爲通常情形之所難免者。在未有特別理由確知年齡未詳者

應專屬於某段年齡組，處置之法，惟有假定此項數字按已知者之比例數分佈於各年齡組間，故須先求各組之百分數，以未詳數乘之，再加入於原有之數目上卽得。如已知年齡者之人口總數爲 522,163，以此數除 24,749 得·047，再由24,749+(1398×·047)=24815，是爲第一組年齡之人口數，其他組類推。死亡數之年齡未詳者亦按此法處置，所得結果如上表所列。

死亡數下之第(2)行爲以 3 除前一行之數字而得。此卽爲每年各年齡組之平均死亡數。蓋以後所求之死亡率係以一年爲單位，qx 之意卽謂在 x 歲之人於 x 至 x+1 之一年中的死亡機率。而此處之所以用三年材料者，蓋爲避免某一年之有特殊情形，使不致影響死亡率。如不以 3 除死亡數，而以 3 乘三年間之平均人口，(一)其結果不變，惟求 qx 時，分子分母之數皆較大耳。又此步手續可展緩於重分組後行之，惟先除可使數目較小，便於以後計算。

原來材料之年齡分組爲1－5，6－10，……等，按我國人記年齡之習慣，多爲今年出生，明年卽稱兩歲，故假定所報年齡平均較實際大一歲，由是 1－5 歲組卽改爲 0－4 歲組。其餘照改。且若原來之1－5歲卽代表一歲以下以至五歲以下，仍應以0－4歲記之較合一般通例，若不作如是解釋，則一歲以下無人數，於理亦不合。

(一)求平均人口之方法將另有專論。

二. 重分組

本篇所欲製之簡略生命表,决定爲每隔五歲者。故所有材料,必皆爲五歲一組,方稱合用。原有人口數自始至終皆爲五歲一組,固無問題。死亡數之初段亦爲五歲一組。惟自20歲(原來之21歲)起,卽爲十歲一組,故須重新分組,俾得一律五歲組之數目。不然,惟有將原來之五歲組加合,一律改爲十歲組,而求每隔十歲之簡略生命表。

由五歲組改爲十歲組頗易,不過一簡單加法而已。然由十歲組折分爲五歲組,不能單只以2除之可得。蓋無論人口數或死亡數,皆依年齡而變化,爲年齡之函數,不但兩年齡組之數不能相等,卽毗連之兩年齡之數目亦難相同。故重分組時,必須顧及該函數前後變化之趨勢。卽須藉差數法之原理以求折開一組爲兩組各自應得之數目。

按以差數法表示函數之公式爲

$$u_n=u_0+n\triangle u_0+\frac{n(n-1)}{2}\triangle^2u_0+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\triangle^3u_0+\cdots\cdots(1)^{(二)}$$

今假定原函數爲三次式,則求至第三次差爲止,求三次差必須原有四數,如求 $\triangle^3u_0$, 必須有 u_0, u_1, u_2, 及 u_3, 四項。今若欲求此四數之中點數,卽爲 $u_{1.5}$,故以1.5代入上式中之 n, 則得

$$u_{1.5}=u_0+1.5\triangle u_0+\cdot375\triangle^2u_0-\cdot0625\triangle^3u_0$$

(二)此卽爲牛頓公式。$\triangle u_0=u_1-u_0$, $\triangle^2u_0=u_2-2u_1+u_0$, $\triangle^3u_0=u_3-3u_2+3u_1-u_0$, ……係數合於二項式展開定理,故得上式。

或 $u_x = u_{x-1.5} + 1.5\ \triangle u_{x-1.5} + 375\ \triangle^2 u_{x-1.5} - .0625\ \triangle^3 u_{x-1.5} \ldots$ (2)

$(x_1 u_x)$ 代表分配曲線上之一點，故 x 乃代表單一年齡，u_x 代表在 x 年齡之函數。然實際材料僅有分組年齡之函數。故可假定十歲年齡組爲一單位，而叠加之，則可得達到某一點之數目。如 u_1 爲十歲以上共死之人數，u_2 爲20歲以上共死之人數，其他類推，而由公式直接求得之 $u_{2.5}$，$u_{3.5}$ 等乃代表25歲以上共死之人數，或35歲以上共死之人數。今將應用此公式之法，列表如下：

年 齡	死亡數	$u_{x-1.5}$	$\triangle u_{x-1.5}$	$\triangle^2 u_{x-1.5}$	$\triangle^3 u_{x-1.5}$	u_x
10—	1233	7380	—1233	+ 316	+ 476	5679
20—	917	6147	— 917	— 160	+ 153	4702
30—	1077	5230	—1077	— 7	— 128	3620
40—	1084	4153	—1084	— 135	+ 295	2458
50—	1219	3069	—1219	+ 160	+ 332	1286
60—	1059	1850	—1059	+ 392	+ 160	399
70—	667	791	— 667	+ 552	— 446	24
80—	115	124	— 115	+ 106		
90—	9	9	— 9			
100—	0	0				

10—19之死亡數爲原來之10—14及15－19兩組加合者。其餘則爲原數。第三行 $u_{x-1.5}$ 之數爲由第二行自下一一叠加而得。如所欲求者爲85歲以上之共死亡人數，則 $u_{8.5-1.5} = u_{7.0}$ 卽代表70歲以上之共死亡人數爲791，其他類推。由此可見所欲

求之年齡，必須退回十五歲起算。如求25歲之數必須自10歲起算，求35歲之數必須自20歲起算，此爲計算時之宜特別注意者。

其次三行代表 $u_{x_{1\cdot5}}$ 之第一次，第二次及第三次差。以(2)式中各相應之係數乘之而求其和，卽得 u_x 之數。如求 $u_{2\cdot5}$，則

$$u_{2\cdot5}=u_{1\cdot0}+1.5\ \triangle u_{1\cdot0}+\cdot375\ \triangle^2 u_{1\cdot0}-\cdot0625\ \triangle^3 u_{1\cdot0}$$

$$=7380+1.5\times(-1233)+\cdot375\times316-\cdot0625\times(-476)$$

$$=5679$$

故最末一行之 u_x 數卽按同法求得。

按第二表疊加之結果，已知20歲以上之死亡人數爲6147，今又按公式求得 25 歲以上之死亡人數爲 5679，故 6147－5679＝468，是爲20－24歲之死亡數，又已知20－29歲之死亡人數爲917，故917－468＝449，是爲25－29歲之死亡人數。第一表中右半部死亡數下第(3)行之數字，卽按此法求得。

應用(2)式，尙有一點須加說明。卽欲求85歲之數目，必須利用70歲，80歲，90歲及100歲四數間之差，然100歲組原無數字，故假定100歲以上者爲 0，乃得求出70歲組之第三次差。至於90歲以上卽不必再分，因85－89之數已屬過小，無論用何種方法求出之死亡率皆難合理。蓋編製任何生命表，材料之兩極端，終屬比較不可靠，故任以一種方法處理之皆可。

三. 求各組中央年齡之死亡率

生命表之第一主要函數爲特定死亡率，即按年齡之死亡率，如本有個別年齡之人口數(或死險人數)及死亡數，以前者除後者即可得個別年齡之死亡率。然現今所有者僅爲分組年齡之數目，如欲製完全生命表，則須用含接內插法先求得個別年齡之人口數及死亡數，然後相除；或先求每隔若干歲之死亡率，然後用含接內插法以推算其餘各歲者。在簡略生命表則只求每隔若干歲之死亡率已足，本例以五歲爲一組，故所欲求者爲每隔五歲之死亡率。

欲求每組中央年齡（其他一年齡亦可）之人口數及死亡數，顯然須用內插方法，而爲由面積以求縱坐標之一類。蓋一年齡組之數目，在坐標圖上可以一段面積代表之，而其中單一年齡之數目，可以一縱坐標代表之。

今設 $u_0, u_1, u_2, \cdots\cdots$ 等代表個別年齡之人口數或死亡數。而以 y_x 代表u之有定積分函數。即令 $y_x = u_0 + n_1 + \cdots\cdots + u_{x1} = \Sigma_0^{x-1} u$，而以 Δy_0，$\Delta^2 y_0$ 等爲每隔五數之各次差。即 $\Delta y_0 = y_5 - y_0 = \Sigma_0^4 u$，$\Delta y_5 = y_{10} - y_5 = \Sigma_5^9 u$，

由是 $u_7 = y_8 - y_7$

今若以 $\frac{8}{5}$ 與 $\frac{7}{5}$ 代入(1)式中之n，則得

$$y_8 = y_0 + \frac{8}{5}\Delta y_0 + \frac{24}{50}\Delta^2 y_0 - \frac{8}{125}\Delta^3 y_0 \quad (一)$$

$$y_7 = y_0 + \frac{7}{5}\Delta y_0 + \frac{14}{50}\Delta^2 y_0 - \frac{7}{125}\Delta^3 y_0$$

由是

$$u_7=\frac{1}{5}\triangle y_0+\frac{1}{5}\triangle^2 y_0-\frac{1}{125}\triangle^3 y_0$$
$$=\frac{1}{5}(\triangle y_0+\triangle^2 y_0)-\frac{1}{125}\triangle^3 y_0$$
$$=\cdot 2\triangle y_5-\cdot 008\triangle^3 y_0$$

按前假定 y_x 之定義爲 u_x 數之叠加，而 y 之差數卽代表 u_x 五數之和。今以 w 代表 u_x 五數之和，卽

$$w_x=u_x+u_{x+1}+u_{x+2}+u_{x+3}+u_{x+4}$$

以此代入上式得

$$u_7=\cdot 2w_5-\cdot 008\ \triangle^2 w_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

是爲 G. King 之修勻內插式，(二) 蓋不但以此作內插，且達修勻 (graduation) 之目的。式中 w 代表五歲年齡組，正合實際材料之用。如欲求 7 歲之數，則用 0－4 歲，5－9 歲，及 10－14 歲之三組數目卽可算出，蓋由 w_0，w_5，及 w_{10} 卽可求得 $\triangle^2 w_0$ 之數。若欲求 12 歲者，則用 w_5，w_{10}，w_{15} 之三組數，蓋三組數共包含 u_x 之 15 項數，而所求者爲其中央年齡之數目，其算法如下表所示：

(一)按通常之方法表示 $\triangle y_0=y_1-y_0$，$\triangle^2 y_0=\triangle y_1-\triangle y_0=y_2-2y_1+y_0$，……以 $\frac{8}{5}$ 代入牛頓公式應爲

$$y_{\frac{8}{5}}=y_0+\tfrac{8}{5}\triangle y_0+\frac{24}{50}\triangle^2 y_0-\frac{8}{125}\triangle^3 y_0$$
$$=y_0+\frac{8}{5}\left(y_{\frac{5}{5}}-y_{\frac{0}{5}}\right)+\frac{24}{50}\left(y_{\frac{10}{5}}-2y_{\frac{5}{5}}-y_{\frac{0}{5}}\right)-\cdots\cdots$$
$$y_8=y_0+\frac{8}{5}(y_5-y_0)+\frac{24}{50}(y_{10}-2y_5-y_0)-\cdots\cdots$$
$$=y_0+\frac{8}{5}\triangle y_0+\frac{24}{50}\triangle^2 y_0-\cdots\cdots \qquad \text{(按假定)}$$

(二)詳見 Journal of the Institule of Actuaries, Vol. XLIII, 1909 P. 114—115.

第三表

分組年齡數及其差數							個別年齡數				
年齡組	w (人口)	$\triangle w$	$\triangle^2 w$	w (死亡)	$\triangle w$	$\triangle^2 w$	年齡	人口	死亡	人口+$\frac{死亡}{2}$	死亡率 q_x
5—	27,852	— 4,547	+25,460	779	— 215	+ 320	12	6276.1	110.24	6331.2	.01899
10—	32,399	+20,913	—14,124	564	+ 105	— 306	17	10775.4	136.25	10843.5	.01257
15—	53,312	+ 6,789	— 4635	669	— 210	+ 182	22	12057.3	92.14	12103.4	.00761
20—	60,101	+ 2,154	— 7926	468	— 19	+ 98	27	12514.4	89.02	12558.9	.00709
25—	62,255	— 5772	— 41	449	— 79	— 58	32	11296.9	105.06	11349.4	.00926
30—	56,483	— 5813	— 799	528	+ 21	— 37	37	10140.4	109.10	10195.0	.01070
35—	50,670	— 6612	+ 1257	549	— 16	+ 34	42	8801.5	109.33	8854.7	.01201
40—	44,058	— 5355	— 7187	533	+ 18	+ 42	47	7798.1	109.86	7853.0	.01399
45—	38,703	—12,542	— 5175	551	— 60	— 63	52	5190.8	122.70	5252.2	.02336
50—	26,161	— 7,367	— 249	611	— 3	— 41	57	3760.8	121.93	3821.8	.03190
55—	18,794	— 7,616	— 5257	608	— 44	— 25	62	2193.5	113.00	2250.0	.05022
60—	11,178	— 2,359	— 1962	564	— 69	— 34	67	1643.5	99.27	1693.1	.05863
65—	8,819	— 4,321	— 2378	495	— 103	— 14	72	880.6	78.51	919.9	.08535
70—	4,498	— 1,943	+ 19	392	— 117	— 58	77	510.8	55.46	538.5	.10113
75—	2,555	— 1,924	+ 1547	275	— 175	— 90	82	113.8	19.28	123.4	.15624
80—	631	— 377	+ 146	100	— 85	+ 79	87	49.6	2.37	50.8	.04665
85—	254	— 231		15	— 6						
90—	23(一)			9							

(一)爲19與4之和，蓋90歲以上不分兩組，以與死亡相應。

以(3)式中之係數乘表中相應之數而總結之，卽得單個年齡之人口數及死亡數，如求12歲之人口數當爲

$$n_{12}=\cdot 2w_{10}-\cdot 008\ w_5$$

$$=.2\times 32399-\cdot 008\times 25460=6276.1$$

其他各年齡之人口數由此類推。單個年齡之死亡數，其算法亦與此完全相同。0－4歲之一組因包括嬰孩在內，其變化甚大，且數目亦多不可靠，通常皆另有方法以處理之（如利用出生人數）故此組從略，求出之單個年齡數目自12歲起。

今既得單個年齡之人口數及死亡數，如直接相除則得m_x，通稱中央死亡率，蓋假定人口調查於一年之中央時間（七月一日）舉行，且亦爲觀察期之中點，如用民七至民九三年之死亡數，其觀察期之中點自爲民國八年七月一日。惟通常生命表中所需之死亡率乃爲q_x，卽在x至x+1歲全年之死亡人數與恰滿x歲之人數之比例。故q_x與m_x之關係爲$q_x=\frac{m_x}{1+\frac{1}{2}m_x}$直接求得$m_x$之後按此關係卽可求$q_x$，不過手續較繁，多一次除法，不如卽用原數按$q_x+\frac{d_x}{p_x+\frac{1}{2}d_x}$（一）之關係求之。故前表中有人口數$+\frac{死亡數}{2}$之一行數，其用意卽在此。

四. 求 l_x

生命表中之又一函數爲l_x，卽指定若干出生人數之中，活

（一）$q_x=\frac{m_x}{1+\frac{1}{2}m_x}=\frac{d_x/p_x}{(1+d_x/2p_x)}=\frac{2d_x}{2p_x+d_x}=\frac{d_x}{p_x+\frac{1}{2}d_x}$

到 x 歲首時尚存之人數。欲求 l_x，可先求 $\log {}_5p_x$，卽到 x 歲尙能活五年之概率的對數。吾人當知前所求之 q_x 乃代表到 x 歲之人在一年中死亡之概率，一年中不死卽生故 $q_x+p_x=1$，卽 $p_x=1-q_x$，p_x（實卽 ${}_1p_x$）爲到 x 歲之人尙能生存一年之概率，${}_2p_x$ 爲到x歲之人尙能生存二年之概率，今所欲求者爲 ${}_5p_x$，卽到 x 歲之人尙能生存五年之概率，如已求得 ${}_5p_{12}$，以12歲尙存之人數（卽 l_{12}）乘之則得17歲尙存之人數，卽 l_{17}，於此亦可見簡略表與完全表步驟上一不同之點，後者僅需 p_x 已足。而前者則必求 ${}_5p_x$。

今設有 l_x 人，其尙能活一年之概率爲 p_x，其尙能活第二年之概率爲 p_{x+1}（注意非 ${}_2p_x$），其能再活第三年之概率爲 p_{x+2}，由此類推，其能再活第五年之概率爲 p_{x+4}，如能共活五年之概率，按概率原理，此五事共同出現之概率，當爲各事概率之乘積，卽

$${}_5p_x = p_x \times q_{x+1} \times p_{x+2} \times p_{x+3} \times p_{x+4}$$

兩端取其對數，得

$$\log {}_5p_x = \log p_x + \log p_{x+1} + \log p_{x+2} + \log p_{x+5} + \log p_{x+}$$

由第三表中之 q_x，直接可以算出 p_x 以及 $\log p_x$，然其他四項卽 $\log p_{x+1}$，$\log p_{x+2}$，……則不能直接求出。又須藉助內插法，惟此處乃爲已知一數，而欲求一段之總數，卽須由一縱坐標以求面積，與前相反。今仍根據牛頓之差數公式，卽(1)式，

亦以截至第三次差爲止。而遞次以 $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{9}{5}$ 及 $\frac{10}{5}$（蓋實際所用之差數，爲每隔五歲求得者，故以 5 除）代入該式中之 n 值，則得下列連續之六個等式：

$$u_5 = u_0 + 1.0\ \triangle u_0$$
$$u_6 = u_0 + 1.2\ \triangle u_0 + .12\ \triangle^2 u_0 - .032\ \triangle^3 u_0$$
$$u_7 = u_0 + 1.4\ \triangle u_0 + .28\ \triangle^2 u_0 - .056\ \triangle^3 u_0$$
$$u_8 = u_0 + 1.6\ \triangle u_0 + .48\ \triangle^2 u_0 - .064\ \triangle^3 u_0$$
$$u_9 = u_0 + 1.8\ \triangle u_0 + .72\ \triangle^2 u_0 - .048\ \triangle^2 u_0$$
$$u_{\ 0} = u_0 + 2.0\ \triangle u_0 + 1.00\ \triangle^2 u_0$$

此六項數，可分爲前五數（即5－9），與後五數（即6－10），如以前五數相加則得

$$w_5 = 5u_0 + 7\ \triangle u_0 + 1.6\ \triangle^2 u_0 - .2\ \triangle^3 u_0 \ldots\ldots\ldots (4)$$

此式中包含有首項（即 u_5），故稱爲首項式，合於求 $\log_5 p_x$ 之用。（蓋以 $\log p_x$ 爲首項）。上六式如以後五項相加，則得

$$w_6 = 5u_0 + 8\ \triangle u_0 + 2.6\ \triangle^2 u_0 - .2\ \triangle^3 u_0 \ldots\ldots\ldots (5)$$

此式中包含有末項（即 u_{10}）故稱爲末項式，適合下節中由 l_x 以求 e_x 之用。

無論首項式與末項式，皆假定有五數一組之三組，由公式僅可求出中間之一組。而在所取年齡最幼之一組，即不能應用此公式，變通之法可遞次以 $\frac{0}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ 及 $\frac{5}{5}$ 代入 (1) 式中，亦得下列六式，即

$$u_0 = u_0$$
$$u_1 = u_0 + .2\ \triangle u_0 - .08\ \triangle^2 u_0 + .048\ \triangle^3 u_0$$
$$u_2 = u_0 + .4\ \triangle u_0 - .12\ \triangle^2 u_0 + .064\ \triangle^3 u_0$$

$$u_3 = u_0 + .6 \triangle u_0 - .12 \triangle^2 u_0 + .056 \triangle^3 u_0$$
$$u_4 = u_0 + .8 \triangle u_0 - .08 \triangle^2 u_0 + .032 \triangle_3 u_0$$
$$u_5 = u_0 + 1.0 \triangle u_0$$

前五數相加及後五數相加，亦得首項式及末項式如下：

$$w_0 = 5 u_0 + 2 \triangle u_0 - .4 \triangle^2 u_0 + .2 \triangle^3 u_0 \ldots\ldots\ldots (6)$$
$$w_1 = 5 u_0 + 3 \triangle u_0 - .4 \triangle^2 u_0 + .2 \triangle^3 u_0 \ldots\ldots\ldots (7)$$

(6)式即合於求 $\log {}_5p_{12}$ 之用，蓋此爲最幼之一年齡組。計算之法先由第三表中之 q_x 按 $1-q_x=p_x$ 之關係求出 p_x 取其對數。再求各次差數。然較以(4)及(6)兩式中相當之係數乘之，總結即得 $\log {}_5p_x$，其結果如下表所示：

第　四　表(一)

年齡	$\log p_x$	$\triangle$	$\triangle 2$	$\triangle 2$	$\log {}_5p_x$	$\log l_x$	l_x	年齡
12	$\bar{1}$.99167	+ 284	− 67	− 127	$\bar{1}$.96404	4.00000	10,000	12
17	$\bar{1}$.99451	+ 217	− 194	+ 76	$\bar{1}$.97741	3.96404	9,205	17
22	$\bar{1}$.99668	+ 23	− 118	+ 150	$\bar{1}$.98448	3.94145	8,739	22
27	$\bar{1}$.99691	− 95	+ 32	− 27	$\bar{1}$.98282	3.92593	8,432	27
32	$\bar{1}$.99596	− 63	+ 5	− 34	$\bar{1}$.97847	3.90875	8,105	32
37	$\bar{1}$.99533	− 58	− 29	− 299	$\bar{1}$.97555	3.88722	7,713	37
42	$\bar{1}$.99475	− 87	− 328	+ 362	$\bar{1}$.97272	3.86277	7,291	42
47	$\bar{1}$.99388	− 415	+ 34	− 483	$\bar{1}$.96169	3.83549	6,847	47
52	$\bar{1}$.98973	− 381	− 449	+ 893	$\bar{1}$.94186	3.79718	6,296	52
57	$\bar{1}$.98592	− 830	+ 444	− 1309	$\bar{1}$.91301	3.73904	5,483	57
62	$\bar{1}$.97762	− 386	− 856	+ 1361	$\bar{1}$.88122	3.65205	4,488	62
67	$\bar{1}$.97376	− 1251	+ 496	− 2489	$\bar{1}$.84452	3.53327	3,414	67
72	$\bar{1}$.96125	− 775	− 1933	− 2489	$\bar{1}$.79414	3.37779	2,387	72
77	$\bar{1}$.95370	− 2748	− 4482	− 2489	$\bar{1}$.72649	2.17193	1,486	77
82	$\bar{1}$.92622	− 7230	− 6971	− 2489	$\bar{1}$.50941	2.89842	791	82
87	$\bar{1}$.55392	− 14201	− 7460	− 2489	$\bar{1}$.01844	1.40783	256	87
62	$\bar{1}$.71191	− 21661	− 9949		$\bar{1}$.16115	.42627	27	92
97	$\bar{1}$.49530	− 31610				.58742	4	97
102	$\bar{1}$.17920							

(一)各次差之小數點皆未記出。記算時正負數可以兩種顏色墨水記之，以免錯誤。

(二)本篇求對數及反對數。於末尾數皆未作內插，取其近似值（用七位對數表)。

求 $\log {}_5p_{12}$ 係用第(6)式,17歲及以上者則一律用第(4)式。

按第三表,q_{87} 反比 q_{82} 幾小四倍,實不合理(如將90－99分爲兩組計算,求得者仍屬太小,)故求 $\log p_x$ 時卽用 q_x 至82歲爲止。由此求得第三次差之最後數爲－2489(卽與67歲相對之Δ^3,)由此僅可求到 $\log {}_5p_{72}$ 爲止。若欲補足以後之數,則須另想辦法,今假定 $\log p_{62}$ 以上之三次差皆爲常數卽－2489反推一直求得 $\log p_{102}$ 爲止,而最末之三次差爲 $\Delta^3\log p_{87}$,故可求 $\log {}_5p_x$ 至92歲爲止;按生命表無論何種函數,其最大年齡末端之數本不甚可靠,故任用一種方法皆可。(一)

照定義 ${}_5p_x = l_{x+5}/l_x$,兩端取對數則得 $\log l_{x+5} = \log {}_5p_x + \log l_x$ 按此關係卽可求得 l_x 行之數。惟須先假定最低年齡之 l_x,卽普通之所謂基數 (radix),今設12歲時之生存人數,卽 l_{12} 爲 10,000,由此 $\log l_{12} = 4.00000$,$\log l_{17} = 4.00000 + \bar{1}.96404 = 3.96404$,以後由此類推,由 $\log l_x$ 查反對數卽得 l_x 之數目,最高至97歲。

四. 求 e_x

e_x 在日本譯爲生命餘年。卽達到 x 歲之人,平均尚可生活之年數,e_0 卽爲初生後之生命餘年,換言之,卽平均壽命。

(一)本可假定自 $\log p_{62}$ 及以上各 $\log p_x$ 之第四次差爲常數(按 G King 卽用此法)。惟反推至 $\log p_{.02}$,爲數過小,殊不適合。

本篇材料自12歲起，求出 e_{12} 爲42.43，卽已活到12歲之人平均尙約可活42歲，求 e_x 之公式爲

$$e_x=\frac{l_{x+1}+l_{x+2}+\ldots\text{至最末一年爲止}}{l_x}$$

按第四表中僅有 l_x 之數，卽每隔五歲之數，而無 l_{x+1}，l_{x+2}，…等數。今又可用由縱坐標以求面積之內插公式，蓋已知 l_x，而欲求 $l_{(x+1)-(x+5)}$ 卽由 $x+1$ 歲至 $x+5$ 歲共活之人數。於此則須用末項式，卽(5)及(7)式，蓋首一項自 l_{x+1} 起加至 l_{x+5} 止。故求 l_{13-17} 須用第 (7) 式，以後則用第 (5) 式，計算結果如下表：

第　五　表

年齡	(1) l_x	$\triangle$	$\triangle^2$	$\triangle^3$	(2) $l_{(x+1)-(x+5)}$ (一)	(3) $\Sigma(2)$ (二)	(4) e_x (3)÷(1)	(5) e_x (4)+.5	年齡
12	10,000	− 795	+ 329	− 170	47,449	424,289	42.43	42.93	12
17	9,205	− 466	+ 159	− 179	44,529	376,840	40.94	41.44	17
22	8,739	− 307	− 20	− 45	42,746	332,311	38.03	38.53	22
27	8,432	− 392	− 65	+ 35	41,196	289,565	34.34	34.84	27
32	8,105	− 422	− 30	+ 8	39,368	248,369	30.64	31.14	32
37	7,713	− 444	− 22	− 112	37,309	209,001	27.10	27.60	37
42	7,291	− 578	− 134	− 74	35,154	171,692	23.55	24.05	42
47	6,847	− 786	− 208	− 1	32,569	136,538	19.94	20.44	47
52	6,269	− 995	− 209	+ 130	29,070	103,969	16.58	17.08	52
57	5,483	−1074	− 79	+ 126	24,488	74,899	13.66	14.16	57
62	4,488	−1027	− 47	+ 79	19,224	50,411	11.23	11.73	62
67	3,414	− 991	+ 126	+ 80	13 954	31,187	9.14	9.64	67
72	2,387	− 695	+ 206	− 46	9,166	17,233	7.22	7.72	72
77	1,486	− 535	+ 160	+ 146	5,272	8,067	5.43	5.93	77
82	791	− 229	+ 306	− 100	2,257	2,795	3.53	4.03	82
87	256	− 23	+ 206		491	538	2.10	2.60	87
92	27				47	47	1.74	2.24	92
97	4								

(一)又常有以 $N'_{x\overline{5}|}$ 符號記之者。

(二)又記爲 N'_x。

應用末項式與應用首項式之法完全相同。由此可求至l_{88-92}之491爲止。至最末一數之47乃爲任意估定者，蓋吾人已知l_{92}爲27，則

$$l_{93}=l_{92}\times p_{92}=27\times .51513\ (此爲\overline{1}.71191之反對數)$$
$$=14$$

又已知l_{97}爲4，任定l_{94}，l_{95}及l_{96}爲12，10及7則得l_{93-97}之數爲47。

以l_{92}除l_{93-97}即$47\div27=1.74$是爲已活至92歲之人平均尚可活之年數。又$47+491=538$是爲l_{88-97}，以253除之得2.10是爲l_{87}人平均尚可活之年數。故Σ行之數爲前一行之數叠加而得。然後以其相應之l_x數除之，則得e_x行之數。

e_x又稱爲生命希望簡數(Curtate expestātion of life)以其假定死亡者一律皆在死亡年齡之年初出現，然實際以假定死亡出現平均分配於一年之中較爲合理，卽死者在死亡之年平均有半年之生命，故$e_x+\frac{1}{2}=\mathring{e}_x$ 是爲生命希望整數(Complete expectation of life)

餘　論

本篇主旨雖在介紹簡略生命表之編製方法及其原理，然試算之結果，頗覺北平市之材料，亦非純屬臆造者可比，實有作更進一步研究之價值。故作者正編之完全生命表，亦將以此

爲例，且更擬調查其各種數字之來源及搜集時之種種情形，以期透徹明其底蘊。茲將他國都市生命表之能抽出相同年齡者，各列其死亡率以與北平市之 q_x 相比較，並不注意其各自之高低，而察其各序列數變化之差異，在北平市並未顯有離奇之現象，材料之性質亦於此可約略見之。

第六表　都市人口之 q_x

年齡	Greater London 人口1921 死亡1920—1922	England & Wales central County Urban districts 人口1921 死亡1920—1922	New York City 人口1910 死亡1909—1911	Chicago City 人口1910 死亡1909—1911	Boston City 人口1910 死亡1909—1911	Philadelphia City 人口1910 死亡1909—1911	北平市 人口1219 死亡1918—1920
27	.00377	.00398	.00672	.00679	.00688	.00732	.00709
32	.00480	.00418	.00948	.00880	.00972	.00893	.00926
37	.00617	.00538	.01291	.01177	.01195	.01211	.01070
42	.00781	.00638	.01618	.01516	.01596	.01368	.01201
47	.01071	.00859	.02050	.02060	.01800	.01820	.01399
52	.01547	.01197	.02613	.02581	.02690	.02267	.02336
57	.02163	.01889	.03651	.03774	.03205	.03425	.03190
62	.03222	.02858	.05024	.04592	.05164	.04424	.05022
67	.04691	.04527	.06619	.06656	.06080	.06568	.05863
72	.07370	.07114	.08708	.08482	.09159	.08525	.08535
77	.11273	.10838	.11887	.12391	.11522	.12084	.10113
82	.16359	.16282	.15571	.17137	.15951	.16314	.15624

表中數字皆指男子

按袁貽瑾先生根據中國家譜材料亦製有一簡略生命表（Nankai Statistical Weekly, April 25,1932有轉載），惟以其所取之年齡不同，且僅有 $_5q_x$ 而無 q_x，故未列入上表比較。

統計論叢

民國二十三年六月初版

版權所有

黎明書局

25 00

分發行所

南昌 掃葉山房
漢口 金城圖書公司
開封 豫郁文書莊
濟南 東方書社
天津 會友書局
北平 佩文齋書莊

廈門 新民書社
重慶 北新書局
長沙 明月書店
杭州 武林書店
南京 中南書局
廣州 共和書局

代售處 各埠各大書坊

發行者 黎明書局 上海四馬路 中市二五四號

印刷者 黎明書局

出版者 王仲武

編輯者 陳長蘅

經濟

二

土地經濟學

章植著

二七 三二 開六 本頁

本書爲中國第一部的土地經濟學，凡四十萬言，共分十五章，對於土地之特點分類，及利用之原則，土地上種種生產問題，地權問題，地租，地價，土地信用等問題，地稅及土地政策等，均有精密詳盡之論列。

實價二元四角

勞動經濟學

朱通九著

二五 三八 開〇 本頁

本書注重經濟的背景，與經濟制度的變遷，以解釋勞動運動的發生。並詳述工會內部的組織及工會的技術；並由地方的工會推論至全國的工會及世界的工會，以明近代勞工運動的趨勢。討論解決勞資糾紛的方法，究從何方而着手，以供給政府當局作爲決定勞工政策的參考。故本書充爲大學教本，極爲相宜。

實價二元四角

分配論

伍康成 張素民譯

二三 五一 開八 本頁

本書代表現代邊際生產力分配的一本名著，現在通行的教科書上的分配論，均以此書爲根據，原書爲美國通行的大學課本，今由張伍二先生鄭重譯出，作爲大學經濟的課本，最適當不過。

實價八角

經濟學

李權時著

二二 三二 開七 本頁

全書共分五章：(一)緒論，(二)人類的消費經濟行爲，(三)人類生產經濟行爲，(四)人的交易經濟行爲，(五)人類的分配經濟行爲，全書對於經濟學上各種理論問題，靡不闡發詳盡；不特便於教學，即自修者得此，亦勝讀其他經濟學多矣。

實價六角