萬有文庫
第一集一千種
王雲五主編

代數學
順列組合及級數

佐藤充　水田文平著
崔朝慶譯

商務印書館發行

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者
王雲五

商務印書館發行

代數學

順列組合及級數

佐藤充 水田文平著

崔朝慶譯

算學小叢書

目　次

代數學—順列組合及級數

第一章

緒論

1. 組合之定義

今有四物, 以 a, b, c, d 表之 (本編常用文字表事物), 從此等之物中, 同時選擇二物, 有種種不同之配合, 如取 a, b 二物爲一種配合, 取 a, c 二物爲一種配合, 取 b, d 二物爲一種配合, 又同時選擇三物, 亦有種種不同之配合, 如取 a, b, c 爲一種配合, 取 a, b, d 爲一種配合. 略舉其例, 餘可類推.

凡從若干物之中選擇幾物爲一組, 皆謂之組合.

如前例之 (a, b), (a, c), (b, d), 皆爲從 a, b, c, d 四物中同時取二物之組合. 又 (a, b, c), (a, b, d), 皆爲從 a, b, c, d 四物中同時取三物之組合.

注意. 如從 a, b, c 等諸物中, 僅取 a 物, 或僅取 b 物, 或僅取 c 物, 不配附他物, 不適用組合之名, 爲包含於組合公式之中, 亦稱爲從 a, b, c 等物取一物之組合.

例. 求從 a, b, c, d 四物中取三物之三箇組合.

解. 一爲 a, b, c, 一爲 a, b, d, 一爲 b, c, d.

[問 1] 有 a, b, c, d 四物, 求作次之組合.

(一) 取二物之四箇組合.

(二) 取一物之三箇組合.

(三) 取三物之四箇組合.

[問 2] 有 v, w, x, y, z 五物, 求作次之組合.

(一) 取三物之四箇組合.

(二) 取四物之五箇組合.

2. 排列不同之物

設有 a, b, c 三物, 自左而右排列, 其次序有種種不同, 例如置 a 於左, 置 b 於中央, 置 c 於右, 可連書 a b c 成一直線以表之, 或置 b 於左, 置 c 於中央, 置 a 於右, 可連書 b c a 成一直線以表之.

3. 順列之定義

今有 a, b, c, d 四物, 從其中取二物作組合, 如所取之二物爲 a 與 b, 此組合之二文字, 有 a b, b a 兩種次序不同. 又從四物中取 a, b, d 三物, 其次序有 a b d, a d b 等許多不同.

凡從若干物中選擇幾物排列, 有許多不同之次序, 所成之排列, 皆謂之順列.

如上之 a b, b a, 皆爲從 a, b, c, d 四物中取二物之順列, 如 a b d, a d b, 皆爲從 a, b, c, d 四物中取三物之順列.

注意 1. 明瞭組合與順列之區別, 最爲緊要. 組合爲選擇之結果, 而順列乃選擇後排列之結果也.

注意 2. 如 a b c, a c b, c a b, 其選擇之三物相同, 就組合而言, 同爲一種組合, 就順列而言, 則爲三種互異之順列, 文字相同, 排列之次序又同, 始可謂之同一順列也.

注意 3. 論順列之意義, 極少須有不同之二物, 若從 a, b, c 等物中僅取 a 物, 或僅取 b 物, 不能成列, 爲包含於順列公式之中, 亦稱爲從 a, b, c 等物取一物之順列.

例. 有 a, b, c, d 四物, 求以二物作五箇不同之順列.

解. a b, b a, b c, c b, c d.

[問 3] 從 x, y, z 求作次之順列.

(一) 取二物之三箇順列.

(二) 取三物之五箇順列.

第二章

順列

4. 無遺漏無重複之順列之羣

因從 a, b, c 三物取二物之組合, 祇有次之三種.

　即　a 與 b, a 與 c, b 與 c　　　　(1)

故從 a, b, c 三物取二物之順列, 祇有次之六種.

$$\text{即}\quad\left.\begin{array}{l}\text{以 } a \text{ 與 } b \text{ 排列, 得 } ab,\ ba\\ \text{以 } a \text{ 與 } c \text{ 排列, 得 } ac,\ ca\\ \text{以 } b \text{ 與 } c \text{ 排列, 得 } bc,\ cb\end{array}\right\}\quad(2)$$

檢 (2) 之順列羣, 從 a, b, c 三物取二物作順列, 無一相同, 且不能再有不同者, 故如斯之順列羣, 即從三物取二物無遺漏無重複之順列之羣.

5. 作順列羣之方法

如作前節之順列羣, 可有數種方法, 說明其中之一例於次.

設有 a, b, c, d 四物, 取三物作順列, 不使有遺漏重複.

順列之左端一文字所占之位置爲第一位, 其右爲第二位, 再右爲第三位, 餘類推.

其第一位爲 a, 或爲 b, 或爲 c, 或爲 d, 有四種變化, 不能再有其他變化.　第二第三兩位, 暫以 o 表之.

　即 a o o, b o o, c o o, d o o.

次定 a o o 之第二位文字, 因僅餘 b, c, d 三文字, 其第二位爲 b, 或爲 c, 或爲 d, 有三種變化, 不能再有其他變化, 第三位仍暫以 o 表之.

卽 a b o, a c o, a d o.

依同法定 b o o, c o o, d o o 之第二位文字.

卽 bao, bco, bdo, cao, cbo, cdo, dao, dbo, dco.

次定 abo 之第三位文字, 因僅餘 c, d 二文字, 其第三位或爲 c, 或爲 d, 祇有二種變化, 不能再有其他變化.

卽 abc abd.

由此知從四物取三物, 能作二十四箇順列.

如 abc abd acb acd adb adc

bac bad bca bcd bda bdc

cab cad cba cbd cda cdb

dab dac dba dbc dca dcb

此卽無遺漏無重複之順列羣也.

[問 1]　從 a, b, c, d 四物取二物, 作無遺漏無重複之順列.

[問 2]　以 a, b, c 三物作無遺漏無重複之順列.

6.　順列之數

設從不同之四物取三物, 求作無遺漏無重複之順列羣, 其羣中順列之數, 可以 ${}_4P_3$ 表之.

從不同之 n 物中取 r 物, 作無遺漏無重複之順列羣, 其羣中順列之數, 代數學之通例, 以 ${}_nP_r$ 表之.

順列羣中之諸順列, 有時省略, 不一一列擧.

如前節從四物取三物之順列羣, 可以 ${}_4P_3=24$ 表其順列之數.

注意 1.　以 P 表順列, 乃取英語 Permutation 之第一文字.

注意 2.　P 之左下角及右下角之文字或數字, 名曰添數.　左之添數, 表所設之物之總數, 右之添數, 表從共物取幾物之數.　其字

體俱宜略小，右之添數不宜大於左之添數，如左爲 3，右爲 4，乃指從三物中取四物，此爲不可能之事. 故左爲 n，右爲 r，其 r 常小於 n，亦可相等，但無 r 大於 n 之理.

[問 3] 如云從不同之六物取四物，求順列之數，若詳言之，則如何.

[問 4] 求次之諸順列羣之值.

(一) ${}_2P_1$, ${}_1P_2$

(二) ${}_3P_1$, ${}_3P_2$, ${}_3P_3$

(三) ${}_4P_3$, ${}_4P_2$

7. 計算順列之數

問 4 之諸題，皆可依第 5 節之方法，先求得順列之羣，然後合計其順列之數. 若左右添數 n 與 r 之值略大，則一一求其順列，頗覺不易. 今述計算其數之方法於次.

設有 a, b, c, d 四物，取三物作順列，欲求順列之數 (以下宜參觀第 5 節作順列羣之方法)，四物可任意以一物置於第一位，故定此順列之第一位，有 4 種變化. 第一位旣定，續定其第二位，又可任意以三物 (除第一位已置之一物) 中之一物，與第一位配合，故定順列之第一位第二位有 4×3 種變化. 第一第二兩位旣定，續定其第三位，又可任意以二物 (除第一第二兩位已置之二物) 中之一物，與前二位配合，故定此順列之第一位第二位第三位，有 4×3×2 種變化. 結果爲 ${}_4P_3=24$.

[問 5] 倣上之方法，求次之諸順列羣之值.

(一) ${}_5P_2$, ${}_6P_2$, ${}_7P_2$

(二) ${}_5P_3$, ${}_6P_3$

(三) ${}_4P_4$

8. 計算 $_nP_r$ 之公式

由述於前節之方法，推得 $_nP_2=n(n-1)$，$_nP_3=n(n-1)(n-2)$.

故 $_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$.

[問 6]　求證 $_nP_2=n(n-1)$.

[問 7]　求證 $_nP_3=n(n-1)(n-2)$.

注意.　上之公式右邊因數之數，等於 $_nP_r$ 之右下角添數 r.

例.　依公式求 $_8P_5$ 之値.

解.　以 8, 5 代公式之 n, r，依上之注意，知共有五箇因數.

故 $_8P_5=8,7,6,5,4=6720$.

別解.　先計算 $n-r+1$ 之値得 4，以 4 至 8 之五箇整數連乘，得 6720.

[問 8]　求次之諸式之値.

(一)　$_8P_4$　　(二)　$_9P_5$　　(三)　$_{11}P_3$

9. 基本定理

第 7 節中，述從四物取三物作順列，其第一位有 4 種變化．旣定第一位，其第二位各有三種變化，接續定第一位第二位，共有 4×3 種變化．旣定第一第二兩位，其第三位各有二種變化，接續定第一位第二位第三位，共有 $4\times3\times2$ 種變化．所求之順列，應有盡有，完全無缺，由此得定理於次.

定理　作甲事，有 l 種方法，作乙事，有 m 種方法，作丙事，有 n 種方法，連續作甲乙二事（無論用 l 種方法之何一種方法，皆能接用 m 種方法中之一

種方法)，計有 l m 種互異之方法. 又連續作甲乙丙三事 (無論用 l m 種方法之何一方法，皆能接用 n 種方法中之一種方法)，共計有 l m n 種互異之方法.

此爲本篇所常用之定理，有基本定理之稱.

10. 從 $_nP_r$ 之關係求 n 之值

例 1. 設 $_nP_5=2\times{_nP_4}$，問 n 之值如何.

解. 因 $_nP_3=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$.

$_nP_4=n(n-1)(n-2)(n-3)$.

故 $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=2n(n-1)(n-2)(n-3)$. (1)

轉項 $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)-2n(n-1)(n-2)(n-3)=0$.

化得 $n(n-1)(n-2)(n-3)\{(n-4)-2\}=0$.

卽 $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-6)=0$.

左邊之各因數，有一爲 0，則兩邊相等.

由此知 n 之值可使等於次之五數.

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 6.$$

上之五數中，0, 1, 2, 3 皆不適合於此題，僅有一答爲 $n=6$.

注意. 上之 (1) 式兩邊同以 $n(n-1)(n-2)(n-3)$ 除之，卽可豫先删除不適合本題之答數.

[問 9] 從次之相等式求 n 之值.

(一) $_nP_7=3\times{_nP_6}$ (二) $_nP_r=m\times{_nP_{r-1}}$.

例 2. 設 $_nP_5=2\times{_nP_3}$，求 n 之值.

解. 因 $_nP_5=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$.

$_nP_3=n(n-1)(n-2)$.

故 $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=2n(n-1)(n-2)$.

移項 $n(n-1)(n-2)\{(n-3)(n-4)-2\}=0$.

卽 $n(n-1)(n-2)(n^2-7n+10)=0$.

令左邊之各因數同等於 0.

$n=0,\ n-1=0,\ n-2=0,\ n^2-7n+10=0$.

從前三式得 n 之值爲 0, 1, 2.

又分解最後之式爲 $(n-2)(n-5)=0$, 得 n 之值爲 2, 5.

$n<5$, 皆不適合於此題, 僅有一答爲 $n=5$.

注意. 例 1 之左右兩邊 P 之右下角添數差 1, 求 n 用一次方程式之解法, 例 2 之左右兩邊 P 之右下角添數差 2, 求 n 用二次方程式之解法. 若添數差 3, 知求 n 須用三次方程式之解法.

[問 10] 從次之相等式求 n 之值.

(一) ${}_nP_6=30\times{}_nP_4$　　　(二) ${}_nP_5=3\times{}_{n+1}P_4$

11. 從 ${}_nP_r$ 之關係求 r 之值

例 1. 設 ${}_{11}P_r=990$, 問 r 之值若干.

解. 因 ${}_{11}P_r=11.10.9\ldots\ldots(11-r+1)$.

其右邊 r 箇因數之積等於 990, 以因數 11,10,9 連除之, 至得商爲 1 而止, 因最後之除數爲 9, 從 $11-r+1=9$, 化得 $r=3$.

[問 11] 從次之相等式求 r 之值.

(一) ${}_9P_r=504$　　　(二) ${}_{10}P_r=30240$

例 2. 設 ${}_8P_r=3\times{}_8P_{r-1}$, 問 r 之值如何.

解. ${}_8P_r=8.7\ldots\ldots(8-r+1)$.

${}_8P_{r-1}=8.7\ldots\ldots(8-r+2)$.

故 $8.7\ldots\ldots(8-r+1)=3.8.7\ldots\ldots(8-r+2)$.

兩邊同以公共之因數 $8.7\ldots\ldots(8-r+2)$ 約之.

則 $8-r+1=3$, 由此得答數爲 $r=6$.

注意. 若例 2 之左右兩邊 P 之右下角添數差 2, 則求 r 適用二次方程式之解法.

[問 12] 從次之等式求 r 之值.

(一) ${}_{10}P_r=4\times{}_{10}P_{r-1}$ (二) ${}_9P_r=6\times{}_9P_{r-2}$

12. nPr 間之關係式

例. 求證 ${}_nP_r=n\times{}_{n-1}P_{r-1}$

解. 因 ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$

$$=n\{(n-1)(n-2)\ldots\ldots[(n-1)-(r-1)+1]\}.$$

故 ${}_nP_r=n\times{}_{n-1}P_{r-1}$.

別解. 設以 a, b, c,……l 表互異之 n 物, 先於 n 物中除去 a, 從 n−1 箇互異之物, 取 r−1 物作順列, 然後以 a 置於諸順列之首 (其數爲 ${}_{n-1}P_{r-1}$). 次於 n 物中除去 b, 從 n−1 箇互異之物, 取 r−1 物作順列, 然後以 b 置於諸順列之首 (其數亦爲 ${}_{n-1}P_{r-1}$), 無論先除去何一物, 最後以其物置於諸順列之首, 其順列之數俱同爲 ${}_{n-1}P_{r-1}$, 以各組順列羣合併, 其數必爲 $n\times{}_{n-1}P_{r-1}$, 此與從 n 物取 r 物作順列之羣同.

故 ${}_nP_r=n\times{}_{n-1}P_{r-1}$

[問 13] 求證 ${}_nP_r=\dfrac{n}{n-1}\times{}_{n-1}P_{r-1}$

[問 14] 分別從 n 物取 r 物之順列羣中, 含特別之一物與不含此特別一物之順列, 證明次之相等式.

${}_nP_r=r\times{}_{n-1}P_{r-1}+{}_{n-1}P_r$

13. nPr 之添數 r=n 之順列數

此爲求同時全取互異之 n 物作順列之情形.

從第 8 節之公式

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1).$$

令 $r=n$.

則 $nPn=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots3.\ 2.\ 1.$ (1)

卽 $nPn=1.\ 2.\ 3\ldots\ldots(n-2)(n-1)n.$ (2)

此式之右邊爲從 1 至 n 之整數階乘, 通例以 $n!$ 或 $\underline{|n}$ 表之. 本書中用 $n!$ 表 n 之階乘積.

故 $nPn=n!$ (3)

注意 1. 公式 (1), (2) 右邊因數 1 可有可無, 與 $_nP_n$ 之値無關係, 爲 $_nP_r$ 之因數之數等於 r, 今 $r=n$, 則 $_nP_n$ 之因數之數當等於 n. 故宜存因數之 1, 以備因數之數.

注意 2. 從上之注意, 知 $_nP_n={_nP_{n-1}}$

[問 15] 求次之順列之數.

(一) $_5P_5$　　(二) $_6P_6$　　(三) $_8P_8$

[問 16] 求證 $n!=n(n-1)(n-2)!$

14. 從 n! 求 n 之値

例. 設 $n!=120$, 問 n 之値如何.

解. 以 1, 2, 3……各整數, 順次除 120, 使等於 1, 其最後之除數, 卽 n 之値, 實施除法, 得 $n=5$.

[問 17] 從次之相等式求 n 之値.

(一) 設 $n!=5040$, 問 n 之値如何.

(二) 設 $n!=3628800$, 問 n 之値如何.

15. 用階乘積表 $_nP_r$ 之值

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

$$=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\frac{(n-r)(n-r-1)\cdots2.1}{(n-r)(n-r-1)\cdots2.1}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots\cdots2.1}{(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots2.1}$$

故　$$_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$$

注意. 從此公式計算 $_nP_r$ 之値, 不若第 8 節公式之便利.

16. 記號 0! 之値

前節最後之公式 $_nP_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

若　　　　$r=n.$

則　　　　$_nP_r=\dfrac{n!}{0!}$

觀第 13 節之公式 (3), 知 0! 不得不等於 1,

17. 簡單之應用問題

解問題, 須特別注意順列及組合之應用問題, 與初等代數學他部分之題, 稍有不同. 題意常使人易生誤會, 不詳細辨認, 卽誤解其題意, 入於岐途.

此種問題, 有依習慣而定其意味者, 解題時對於此點, 務格外留心.

例 1. 以 1. 2. 3 三箇數字中之兩數字, 排列爲二位之數, 不許數字重複, 問共有若干數.

注意. 問題中不明記不許數字重複者有之.

解. 此與從互異之三物求順列之數無異.

故 ${}_3P_2=3\times2=6$. 答共有六數.

[問 18] x, y, z 三數連乘, 問其積有幾種記法.

[問 19] 甲乙二港間有汽船八艘載客, 今有人常往來此二港, 問能有若干次往來之船名不同.

[問 20] 從 1, 2, 3, 4, 5 五箇數字中, 取不同之數字, 作三位之數, 問共有若干數.

例 2. 以三種菓子分與三童子, 令每童子得一種菓子, 問有幾種分配之方法.

解. 以 a, b, c 表三種菓子, 假定三童子排列爲一列考之.

如分 a 與第一位之童子, b 與第二位之童子, c 與第三位之童子, 可以順列 a b c 表之, 知所求之數與全取 a, b, c 三物之順列羣同.

故 ${}_3P_3=3.2.1=6$. 答共有六種分配之法.

[問 21] 不同之五種信封, 裝入不同之信箋五張, 每一信封之中, 各有信箋一張, 問有幾種不同之配合.

[問 22] 以五種菓子分與三童子, 令一童子得一種菓子, 問有幾種分配之方法 (無論如何分配, 皆餘二種菓子, 此不待言).

例 3. 有桃梨李杏各一枚, 置於六種顏色之碟中, 每碟僅置一枚, 問有若干不同之配置.

解. 六種顏色之碟, 假設有 1, 2, 3, 4, 5, 6 六箇數字爲標記考之, 若順桃梨李杏之次序, 置桃於第一碟, 置梨於第二碟, 置李於第三碟, 置杏於第四碟, 可以順列 1, 2, 3, 4 表之, 知所求之數與從六物中取四物作順列同.

故 ${}_6P_4=6.5.4.3=360$. 答三百六十.

[問 23] 有 8 箇聯隊, 擬先選派將校 4 名各領一隊, 問有若干不同之選派方法.

18. 有若干文字占一定之位置之順列

如從 a, b, c, d, e 五箇文字中, 取四箇文字作順列, a 在第一位不變, 其第二位第三位第四位, 無論用 b, c, d, e 四箇文字中之何一文字皆可. 此五箇文字取四文字之順列之數, 等於從四箇文字取三箇文字之順列之數.

即 ${}_4P_3=4\times3\times2=24.$

限定 a 在第二位, 或在第三位, 或在第四位, 其順列之數亦同.

或限定五箇文字中之他一文字, 其順列之數亦同.

又限定其中之兩箇文字在四位中之某二位, 其順列之數如次.

$${}_3P_2=3\times2=6.$$

凡從不同之 n 物取 r 物作順列, 限定一物占一定之位置, 其順列之數爲 ${}_{n-1}P_{r-1}$. 又限定二物占一定之位置, 其順列之數爲 ${}_{n-2}P_{r-2}$, 餘可類推.

例 1. 有數字 0, 1, 2, 3, 4, 問能排列成若干三位之數.

解. 從五箇數字取三箇數作順列, 其順列之數爲 ${}_5P_3$, 因其中之左端爲 0 者有 ${}_4P_2$, 故所求之數如次.

$${}_5P_3-{}_4P_2=5\times4\times3-4\times3=48.$$

[問 24] 用 0, 1, 2, 3, 4, 5 六箇數字, 問能排列成若干五位之數 (不許數字重複).

[問 25] 用 0, 1, 2, 3, 4, 5 六箇數字, 問能排列成若干六位之數.

〔問 26〕 英語 cambridge 之九文字，變更其位置，其前三位之文字 cam 不動，問共有若干互異之順列.

例 2. 用 0, 1, 2, 3, 4, 5 六箇數字，排列成能以 5 除盡之三位之數，問共有若干數(不許數字重複).

解. 因能以 5 除盡之數，其末位必爲 0 與 5，依本節之公式，三位數之末位爲 0 者，其數有 ${}_5P_2$，又末位爲 5 者，亦有 ${}_5P_2$，即共有 $2\times{}_5P_2$，但其中末位爲 5 而首位爲 0 者，有 ${}_4P_1$，必須删除.

故 $2\times{}_5P_2-{}_4P_1=2\times5\times4-4=36$，爲所求之數.

〔問 27〕 有 3, 4, 5, 6, 7 五箇數字，問能排列成若干五位之偶數.

〔問 28〕 有從 1 至 7 七箇數字，問能排列成若干七位之奇數.

19. 若干文字所占之位置，有相互之關係，求其順列之數.

例 1. 排列 a, b, c, d, p, q 六箇文字，令其中之 p 與 q 常相鄰，問順列之數若干.

解. 因 p 與 q 不宜離開，乃作括弧括此二文字，視爲一文字，依作順列之法考之，其數爲 ${}_5P_5$. 又因括弧內之二文字，可令 p 在 q 之左，亦可令 p 在 q 之右，即全取兩文字之順列，其數爲 ${}_2P_2$.

故所求之數爲 ${}_5P_5\times{}_2P_2=5!\times2!=240$.

例 2. 前題若限制 p 與 q 不相鄰，問順列之數若干.

解. 全取六箇文字之順列之數爲 ${}_6P_6$，由前例知 p 與 q 相鄰之順列有 $5!\times2!$.

故所求之數爲 $6!-5!\times2!=480$.

〔問 29〕 排列 a, b, c, d, e, f, g 七箇文字，令其中之 a 與 b 常相鄰，問順列之數若干.

［問 30］ 前題若限制 a 與 b 不相鄰，問順列之數若干.

［問 31］ 甲，乙，丙，丁，戊，已六人，排爲一列，令甲乙二人恆相鄰，問能有若干排列之法.

［問 32］ 10 人排爲一列，令其中特殊之二人不相鄰，問能有若干排列之法.

20. 若干文字所占之位置，有一定之範圍，求其順列之數.

例. 全取 A, B, C, D, p, q, r 七文字，排列爲一列，其首末二位，限用前四文字中之二文字，問順列之數若干.

解. 置 A, B, C, D 四文字中之二文字於首末二位，其數有 ${}_4P_2$. 又以所餘之文字置於中間之五位，其數爲 ${}_5P_5$.

故得答數爲 ${}_5P_5 \times {}_4P_2 = 1440$.

［問 33］ 從有效數字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 中，取四箇數字，排列爲四位之數，限制首末二位爲偶數，中間爲奇數，問有若干數.

［問 34］ 端陽賽船，有水手十名，僅用八名，某某等四人派在左舷，從某某等六人中，派四人在右舷，前後之位置可互易，左右不能互易，問共有若干不同之排列法.

21. 有若干數字，不拘定同時用幾數字之問題.

例. 有 1, 2, 3, 4, 5 五箇數字，問能排列成若干數（不許數字重複）.

解. 五箇數字中取一箇數字，可作一位之數，取兩箇數字，可作二位之數，最多能全取五箇數字，作五位之數.

故答數爲 ${}_5P_1 + {}_5P_2 + {}_5P_3 + {}_5P_4 + {}_5P_5 = 325$.

[問 35] 用 0, 1, 2, 3, 4, 5 六箇數字，問能作若干有效數(數字不重複).

[問 36] 有紅黃藍白黑旗各一面，問用一面至五面排列之信號，共有若干.

22. 用若干數字所作之數之和

例. 求以 2, 4, 6, 8 四箇數字所作之四位數之總和.

解. 2 在單位，他數字在十百千位者，其數有 ${}_3P_3$. 依同理知 4, 6, 8 在單位者，亦各有 ${}_3P_3$. 故各單位之數之和爲 $(2+4+6+8)\times{}_3P_3$. 又 2, 4, 6, 8 在十位者，其數亦各有 ${}_3P_3$, 故各十位之數之和爲 $(2+4+6+8)\times10\times{}_3P_3$.

又 2, 4, 6, 8 在百位千位者，其數皆各有 ${}_3P_3$.

故各百位之數之和爲 $(2+4+6+8)\times100\times{}_3P_3$, 各千位之數之和爲 $(2+4+6+8)\times1000\times{}_3P_3$.

由此得所求之總和如次.

$(2+4+6+8)\times(1000+100+10+1)\times{}_3P_3$.

卽 $20\times1111\times3\times2\times1=133320$.

[問 37] 求以 1, 2, 3, 4, 5 五箇數字所作五位數之總和.

[問 38] 求以 7, 8, 9 三箇數字所作三位數之總和.

23. 重複順列

本節所述，爲許用重複文字或數字之順列. 此種順列，謂之重複順列.

例如取 a 與 b 兩箇文字之順列，爲 aa, ab, ba, bb.

表重複順列之數之公式，適用第 7 節之方法，今說明從 a, b, c, d 四文字取三文字，作重複順列之法於次.

三文字自左而右排列，先定爲第一位第二位第三位之位置，然後就許文字重複共有若干變化考之，第一位無論置 a, b, c, d 皆可，共計有四種變化，不能再有其他變化 (此點與第 7 節同).

今述其中之一方法. 例如置 a 於第一位，仍可置 a 於第二位 (因許文字重複故也，此點與第 7 節異)，或置 b, c, d 於第二位，共有四種變化，不能再有其他變化. 依同法第三位亦有四種變化，不能再有其他變化. 故依基本定理，從 a, b, c, d 四文字取三文字之重複順列之數爲 $4\times4\times4$，卽 4^3.

從互相異 n 箇文字取 r 箇文字之重複順列之數爲 n^r.

注意. 求重複順列，雖 $r>n$ 亦可，但不能以 ${}_nP_r$ 表其順列之數.

例 1. 用數字 0, 1, 2, 3,……9，問能作二位之整數若干 (數字可重複).

解. 所設之 10 箇數字，取兩數字作二位之數，依重複順列之式爲 10^2，但宜除去 0 在十位之順列之數 10.

故所求之數爲 $10^2-10=90$.

[問 39] 用九箇有效數字，問能作三位之整數若干 (數字可重複).

例 2. 用數字 0, 1, 2, 3,……9，問能作不過五位之有效數若干 (數字可重複).

解. 如不過五位之數 23，其左補三箇 0 爲 00023，在 10 箇數字取 5 箇數字之重複順列中，依 10 箇數字取 5 箇數字之重複順列式，其數爲 10^5，惟須除去其中一無效數 00000，故所求之數爲 $10^5-1=99999$.

注意. 不過五位之有效數, 從 1 起至 99999 止, 共 99999 數, 其事甚明顯.

[問 40] 問不過三位之有效數, 共有若干數.

例 3. 以不同之七物, 隨意分與二人中之一人或二人, 問有幾種分配之法.

解. 假定不同之七物爲 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 二人爲甲與乙. 以 1 物與甲或與乙, 有二法, 因以 1 與甲或與乙, 又有以 2 物與甲或與乙之二法. 故僅分配 1, 2 兩物, 共有 2^2 法. 實行此分配之法之後, 又有以 3 物與甲或與乙之二法, 分配 1, 2, 3 三物, 共有 2^3 法. 由此類推, 至分配七物終了, 合計有 2^7 法, 卽有 128 種分配之法.

例 4. 以不同之七物, 隨意分與二人, 問有幾種分配之法.

解. 此例與前題之區別, 惟不可使二人中之一人不得一物, 則七物不能全與甲或全與乙, 故所求之數爲 $128-2$, 卽有 128 種分配之法.

[問 41] 有書信 6 封, 隨意投入三處郵箱, 問有幾種不同之方法.

[問 42] 以不同之 m 物, 隨意分與 n 人, 求證共有 n^m 種不同之方法.

24. 取不全異之物作順列, 求順列之數.

第 13 節取互異之 n 物之順列之數爲 n! 若 n 物之中有相同者, 則順列之數當有區別, 例如取 a, a, b 三文字之順列祇有次之三種.

$$aab, \qquad aba, \qquad baa$$

此與依第二章第 13 節之式爲 3! 卽 6 種不能符合.

又設取 a, a, a, b, b, c 六文字作順列, 求順列之數. 假定其數爲 x, 此諸順列中, 皆含有三箇相同文字 a, 今就各順列以 A, B, C 代其 a, 則每一順列中三箇相同文字 a 之位置, 改換不同之文字

A. B. C 知有 $3!$ 種變化. 由此從 x 箇順列, 變爲 $3!\,x$ 箇順列. 此諸順列中, 猶含有兩箇相同文字 b. 再就各順列以 D, E 代其 b, 則兩箇相同文字 b 之位置, 改換不同之文字 D, E, 知有 $2!$ 種變化. 由此從 $3!\,x$ 箇順列變爲 $2!\,3!\,x$ 箇順列. 此順列之數, 與用六箇不同文字之順列同. $\therefore\ !\,3!\,x=6!$. 兩邊同以 $2!\,3!$ 除之, 得 $x=\dfrac{6!}{2!\,3!}=60$.

注意. 上之證明中, 不拘定以 A, B, C 代 a, 或添符號於三箇 a 之右上角或右下角, 依法變換, 得 $3!$ 種變化. 兩箇 b 亦可用同法變換, 其公式如次.

n 箇物之中, 設有 p 箇相同之物, 又有 q 箇相同之他物, 更有 r 箇相同之他物, 全取 n 物作順列, 其順列之數爲 $\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}$.

例 1. 設有英語 mississippi, 全取此十一文字作順列, 問順列之數幾何.

解. 所設之語從 i, i, i, i, m, p, p, s, s, s, s 而成, 以 x 代所求順列之數.

則　$x=\dfrac{11!}{4!\,2!\,4!}=34650$.

例 2. 用 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5 七箇數字, 問能作七位之數若干.

解. 以 x 代所求之數, 則 $x=\dfrac{7!}{2!\,2!\,3!}=210$.

[問 43]　設有英語爲 success, 全取此七文字作順列, 問順列之數幾何.

[問 44]　設有英語爲 proposition, 如前問求順列之數.

[問 45]　設有英語爲 essences, 如前問求順列之數, 又問 n 在最前, s 在最後之順列之數幾何.

25.　豫定若干文字之次序作順列

全取所有不同之文字作順列, 其中限制若干文字, 依豫定之次序者, 可依前節之方法, 求其順列之數, 詳述其例如次.

例 1.　全取 A, B, C, p, q, r 六箇文字作順列, 限定 A, B, C 在各順列中, 自左而右, 須依字母之次序 (不拘定相連), 問順列之數如何.

解.　假定如此之順列之數爲 x, 若每一順列中 p, q, r 不動, A, B, C 之位置改換, 可得 3! 種變化 (連原有之一箇順列).　故共有 3! x 箇順列, 此與全取六箇互異之文字所作之順列相等.

卽　$3!\,x=6!$.

兩邊同以 3! 除之, 得 $x=\dfrac{6!}{3!}=120$.

例 2.　以 9 箇有效數作九位之數, 限定奇數須自左而右次第增大, 偶數則須自左而右次第減小 (皆不拘定相連), 問有若干九位之數.

解.　以 x 代所求之數, 則 $x=\dfrac{9!}{5!\,4!}=126$.

[問 46]　甲組生徒 4 人, 乙組生徒 3 人, 排爲一列, 限定自左而右各依甲乙二組生徒之次序 (不拘定相連), 問共有若干變化.

26.　排爲二列或三列以上之方法

例 1.　六人並立爲一列, 問有若干變化.　又問平分爲二列, 共有若干變化.　[此題第一問甚易, 不必解答.]

解. 設分爲前後二列，先從六人中選出三人爲前列，其排列之變化爲 ${}_6P_3$，賸餘三人排爲後列，又有 $3!$ 種變化，故共有 ${}_6P_3\times 3!$ 種變化，卽 720 種變化.

注意. 其前列後列若無區別，前之結果，須以 2 約之，故其答數當爲 360.

例 2. 六人勻分三列，問共有若干變化.

解. 設分爲前中後三列，先從六人中選出二人爲前列，其排列之變化爲 ${}_6P_2$. 次從其餘四人中選出二人爲中列，其排列之變化爲 ${}_4P_2$，賸二人排爲後列，又有 ${}_2P_2$ 種變化，依基本定理知共有 ${}_6P_2\times{}_4P_2\times{}_2P_2$ 種變化，卽 720 種變化.

注意 1. 上之二例，如人數爲 $m\,n$，卽能分爲 m 列，其排爲一列之變化恆爲 $(m\,n)!$.

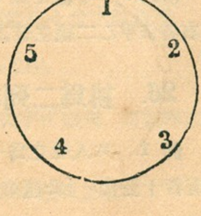
注意 2. 例 2 之前中後三列若無區別，其結果須以 $3!$ 約之，答數當爲 120.

[問 47] 有水手十二人，分配於二船搖櫓 (每船有六櫓)，問共有若干分配之法.

27. 環狀順列

例 1. 圓桌之周圍，排列五人之坐位，問五人圍圓桌而坐，有若干不同之變化.

解. 如右圖以 1, 2, 3, 4, 5 表坐位之次序，其入坐之五人，以 a, b, c, d, e 表之. 坐 1 處爲 a，或爲 b, c, d, e，有五種變化. 其一人 (設爲 a) 坐定，則坐 2 處爲 b，或爲 c, d, e，有四種變化. 由此類推，知五人完全坐畢，共有 $5!$ 種變化，卽一百二十種變化.

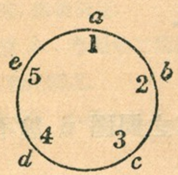


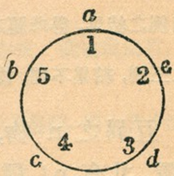
注意.　此情形與排列成線狀無異.

例 2.　前題若不定坐位之次第, 問五人圍坐有若干變化.

題意之說明.　述此例之解法, 須先說明題意.

前例各人之順序同, 而坐位之次第有區別, 就次之二圖考之.





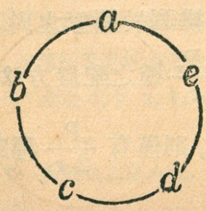
如第一圖 a, b, c, d, e 五人同時右移, a 坐於 2 處, 則 b, c, d, e 坐於 3, 4, 5, 1 四處, a 坐於 3 處, 則 b, c, d, e 坐於 4, 5, 1, 2 四處, 餘類推.　此五種變化, 在本例則視為一種變化.

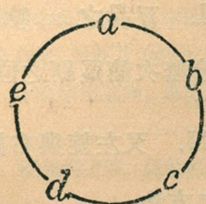
解.　前例之變化, 共有 5! 種, 其中五人之順序同而坐位之數不同者, 在本例視為無區別.

如五人之順序, 自左而右為 a, b, c, d, e, 無論 a 坐 1, 2, 3, 4, 5 何位, 皆同為一種變化.　其他順序亦如是.

故僅注目於人之順序, 則圍圓卓之坐法為$\frac{5!}{5}=4!=24$.

例 3.　有五色之玉珠五顆, 以線穿成一圈, 問共有若干不同之配合.





解. 以 a, b, c, d, e 表五色之珠, 如上圖所示, 爲以絲穿成之二圈, 左圖之圈, a b c d e 順序自左而右, 右圖之圈, a b c d e 之順序, 自右而左, 因兩圈翻轉其一, 卽無區別. 此二種配合, 在本例僅算一種配合. a, b, c, d, e 之其他順序亦如是.

從前例之結果, 得此題之答數爲 $\frac{4!}{2}=12$.

上之三例, 結果不同, 復分別說明於次.

I. 互異之 n 物, 排列於圓形之周圍 n 箇不同之位置, 共有 $n!$ 種配置之方法.

II. 互異之 n 物, 排列於圓形之周圍 r 箇無區別之位置, 祇有 $(n-1)!$ 種配置之方法.

III. 又左旋與右旋亦不區別, 則僅有 $\frac{(n-1)!}{2}$ 種配置之方法.

從 n 物中取 r 物, 如上述之各例, 排列於圓形之周圍, 其結果如次.

I. 互異之 n 物中取 r 物, 排列於圓形之周圍 r 箇次第不同之位置, 共有 ${}_nP_r$ 種配置之方法.

II. 互異之 n 物中取 r 物, 排列於圓形之周圍 r 箇無次第區別之位置, 祇有 $\frac{{}_nP_r}{r}$ 種之配置方法.

III. 又左旋與右旋亦不區別, 則僅有 $\frac{{}_nP_r}{2r}$ 種配置之方法.

定義　上之 II 之意味，排列各物於圓形之周圍之各種順序，謂之環狀順列.

注意 1. 各問題之性質，適合於上之 I, II, III 何意味，須詳細研究，然後決定.

注意 2. 考圓卓之周圍若干人圍坐之方法，就定義而言，當以 II 之意味解之.

［問 48］ 小學生五人，互相攜手作環形之遊戲，問有若干配合之法.

［問 49］ 以線穿七色之珠七顆，成一球圈，問有若干配合之法.

［問 50］ 以八顆淺深互異之紅綠兩色珠，穿成一珠圈，限定紅綠珠相間，問有若干配合之法.

練習問題 I

1. 拜會甲乙丙丁戊五客，其先後次第，問有若干不同之方法.

2. 全取 n 物之順列之數爲 720，問 n 之值如何.

3. 從 17 箇子音 5 箇母音字中，取三箇子音字兩箇母音字，排爲一列，限定母音字之左右爲子音字，問有若干配合之法.

4. 甲乙二港之間，有汽船十艘駛行，乘汽船往返，其船名或同或不同，問選擇之法共有若干.

5. 有英語爲 ordinate，以此四箇母音字與四箇子音字排爲一列，但限制母音與子音相間，左邊須用母音字，問有若干配合之法.

6. 全取 d, g, g, k, k, k, o, o, o, y 十文字作順列，求順列之數.

7. 有異色之旗六面，以一面或多面，縱列爲信號，問能編信號若干.

8. 中文之書籍 4 册, 英文之書籍 6 册, 日文之書籍 5 册, 排列於狹長之几, 限定各國之書籍, 不與他國之書籍混雜, 問能有若干不同排列之法.

9. 以 0, 1, 2, 3, 4 五箇數字, 問能排列爲大於一萬之數共若干.

[除 0 在左端外, 其餘皆大於 10000.]

10. 異姓之老者 6 人, 少者 6 人, 圍圓卓而坐, 限定老少相間, 問有若干不同之坐法.

11. 從 a, b, c, d, e 五箇文字中, 取三箇文字, 排爲一列, 許用重複之文字, 問有若干不同之排列法.

12. 兄弟七人, 排列爲一直線, 限制次郎三郎不並肩而立, 問有若干不同之排列法.

13. 有洋文書 20 册, 其中一部一册者四部, 一部 8 册 5 册 3 册 者各一部, 今以各書排爲一列, 數册爲一部者, 不許分離, 其卷數之次第, 或自左而右, 或自右而左, 問共有若干不同之排列法.

14. 以 1, 2, 3, 4, 5 五箇數字, 作五位之數, 問大於 13000 之數共若干.

[除 12 在左邊之數外, 皆大於 13000.]

15. 以紅球五箇白球四箇排爲一列, 問有若干不同之排列法.

16. 某姓之家庭, 夫婦二人及其子六人, 圍圓卓而坐, 限定夫婦二人並肩而坐, 問共有若干不同之坐法. 又限定其幼子坐於夫婦之中間, 問共有若干不同之坐法.

17. 數學書六部, 物理書十部, 化學書四部, 分與生徒二十人, 使各得一部, 問有若干分配之法.

18. 有 1, 2, 3, 5, 6, 7 六箇數字, 作大於一千小於一萬之數, 問能共有若干數.

19. 以 1, 2, 3, 4, 5 五箇數字, 作五位之數, 問小於 33000 之數共有若干.

20. 不用指數, 記 $x^3 y^2 z^1$ 之值, 問共有若干不同之方法.

21. 以柑子五枚, 柿子三枚, 橘子二枚, 排爲一列, 問共有若干不同之排列法.

22. 全取若干互異之數字, 排列成種種之數, 試證明其諸數之和, 能以所設之數字之和除盡.

23. 全取若干互異之數字, 排列成種種之數, 試證明連續 1 字如所設數字之數, 除其種種之數之和, 必能適盡.

第三章

組合

28. 表組合之數之記號

從互異之 n 箇文字中取 r 箇文字作組合，限制無遺漏，亦無重複，其組合之數，通例以 ${}_nC_r$ 表之，其 C 取組合之英語 Combination (日本音爲コンビネーミヨン) 之第一字母.

注意 1. ${}_nC_r$ 之左下角添數 n 之數值，若小於右下角 r 之數值，或 r 等於 o，卽無意義可言.

注意 2. 所設之文字中有相同者，則 ${}_nC_r$ 之記號不適用.

29. 表組合之數之公式

如第 4 節所述從互異之 n 物取 r 物作順列，使無遺漏，亦無重複，乃先從 n 物取 r 物作組合，然後從組合作順列. 設有 a, b, c 三物，欲取二物作順列，先作二物之組合.

卽　　a 與 b　　a 與 c　　b 與 c

次從 a 與 b，得順列 ab, ba (有 r 文字卽有 r! 箇順列)

又從 a 與 c，得順列 ac, ca (　同　　上　)

又從 b 與 c，得順列 bc, cb (　同　　上　)

今可利用 ${}_nC_r$ 以求公式.

凡從互異之 n 物取 r 物作順列，皆可先取 r 物作組合，其組合之數無論若干，以 ${}_nC_r$ 表之. 次以各組合中之物作順列，每一組合之物數爲 r，卽有 r! 箇順列. 故順列之總數爲 $r!\times{}_nC_r$. 此數不得不等於 ${}_nP_r$，故得組合之數與順列之數之關係式如次.

$$r!\times {}_nC_r={}_nP_r.$$

兩邊同以 r! 除之.

則 $${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$$

卽 $${}_nC_r=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{1.2.3.\cdots\cdots\cdots r}$$

注意. 此公式右邊分子分母之因數之數同爲 r.

30. 以階乘表 $_nC_r$ 之值

前節最後之公式同以 $(n-r)!$ 乘右邊之分母分子.

則 $${}_nC_r=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)!}{1.2.3\cdots\cdots r(n-r)!}$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots3.2.1}{1.2.3\cdots\cdots\cdots r(n-r)!}.$$

故 $${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

注意 1. 最後之公式右邊最簡單，但計算不若前節公式之便利.

注意 2. 本節之公式右邊分母中之 $r=n$，則適用第 16 節所規定之 $0!=1$.

例. 依公式計算 $_9C_4$ 之值.

解. $${}_9C_4=\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}=126.$$

[問 1] 依公式求次之各值.

(一) $_{10}C_5$ (二) $_{12}C_3$ (三) $_{20}C_4$

31. 求證 $_nC_r={}_nC_{n-r}$

證. 前節已證明 $${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

除 r 大於 n 之外, r 爲正整數, 此公式皆能成立, 以 n−r 代公式之 r.

則 $$_nC_{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}.$$

此式之右邊, 與前之公式右邊無區別.

故 $_nC_r={}_nC_{n-r}$

別證. 從互異之 n 物中取 r 物, 賸餘之物爲 n−r, 每作 r 物之組合, 其賸餘者, 卽 (n−r) 物之組合. 此兩種組合之數, 不得不相等.

注意 1. $r>\frac{n}{2}$, 假途於 $_nC_{n-r}$ 以求 $_nC_r$ 之值, 較爲便捷 (見次之例).

注意 2. 求順列不能從 $_nP_{n-r}$ 而得 $_nP_r$ 之值.

例. 計算 $_{18}C_{16}$ 之值.

解. 依第 29 節之公式.

$$_{18}C_{16}=\frac{18.17.16.15.14.13.12.11.10.9.8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16}.$$

依本節之公式

$$_{18}C_{16}={}_{18}C_2\frac{18.17}{1.2}=153.$$

[問 2] 計算次之三式之值.

(一) $_{30}C_{28}$ (二) $_{45}C_{41}$ (三) $_{37}C_{34}$

32. $_nC_r$ 之最大值

設 $_nC_r$ 之 n 有一定之值, r 爲不大於 n 之正整數, 問 r 與 n 之關係如何, 則 $_nC_r$ 之值最大.

依第 29 節之公式 $_nC_r=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots r}$.

因右邊分子之因數之數，與分母之因數之數同爲 r，故上之公式之右邊，可改用次之記法.

$$_nC_r=\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\cdots\cdots\times\frac{n-r+1}{r}.$$

以 1.2.3…n 順次代上式之 r.

則 $_nC_1=\frac{n}{1}$.

$$_nC_2={}_nC_1\times\frac{n-1}{2}.$$

$$_nC_3={}_nC_2\times\frac{n-2}{3}.$$

$$_nC_{n-1}={}_nC_{n-2}\times\frac{2}{n-1}.$$

$$_nC_n={}_nC_{n-1}\times\frac{1}{n}.$$

其各乘數 $\frac{n}{1}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-2}{3}$, ……若不小於 1，每多一乘數，$_nC_r$ 之值必逐漸增大，乘數之分子從 n 起遞減 1，分母從 1 起遞加 1，乘數不得不逐漸減小. 至若干數之後，必從大於 1 而變爲等於 1 或小於 1，至發見乘數等於 1 或小於 1，其後之乘數恆小於 1，詳細研究其情形之區別如次.

(I) n 爲偶數，則諸乘數之分母子，不能同爲偶數，亦不能同爲奇數. 如第一乘數 $\frac{n}{1}$ 之 n 爲偶數，1 爲奇數，第二乘數 $\frac{n-1}{2}$ 之 n−1 爲奇數，2 爲偶數，故大於 1 而近於 1 之乘數，其分子必等於分母與 1 之和.

設第 r 乘數$\frac{n-r+1}{r}$爲大於 1 而近於 1.

則 $n-r+1=r+1$.

由此得 $r=\frac{n}{2}$.

卽 n 爲偶數以 ${}_nC_{\frac{n}{2}}$ 之值爲最大.

(II) n 爲奇數，則諸乘數之分母子同爲奇數，或同爲偶數，如第一乘數$\frac{n}{1}$，母子同爲奇數，第二乘數$\frac{n-1}{2}$，母子同爲偶數，故有等於 1 之乘數，其分子與分母相等.

設第 r 乘數 $\frac{n-r+1}{r}$ 等於 1.

則 $n-r+1=r$.

由此得 $r=\frac{n+1}{2}$.

卽 n 爲奇數以 ${}_nC_{\frac{n+1}{2}}$ 之值爲最大.

又乘數 $\frac{n-r+1}{r}$ 之值爲 1，添此乘數與無此乘數同.

知乘數爲 $\frac{n-r+2}{r-1}$ 時，分子等於分母與 2 之和.

從 $n-r+2=r+1$

得 $r=\frac{n-1}{2}$.

故 n 爲奇數 ${}_nC_{\frac{n-1}{2}}$ 之值亦爲最大.

33. 從 ${}_nC_r$ 之添數 r 之值之關係，求 n 或 r 之值.

例 1. 設 $2\times{}_nC_4=5\times{}_nC_2$, 求 n 之值.

解. 從 ${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{1.2}$, ${}_nC_4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$.

得 $\frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}=\frac{5n(n-1)}{1.2}$.

兩邊同以 $\frac{1.2.3.4}{2n(n-1)}$ 乘之.

卽 $(n-2)(n-3)=30$.

去括弧 $n^2-5n+6=30$.

移項 $n^2-5n-24=0$.

分解因數 $(n-8)(n+3)=0$.

由此得 $n=8$ 或 -3, 因負根不適於此題, 僅有一答爲 $n=8$.

例 2. 設 ${}_{18}C_r={}_{18}C_{r-2}$, 問 r 之值如何.

解. 此題非 $r=r-2$ 或 $r-2=18-r$, 不能成立.

因 $r=r-2$ 不合理, 惟有從第二等式求之.

故 $r=10$ 爲所求之數.

[問 3] 求次之各式中 n 或 r 之值.

(一) ${}_nC_5={}_nC_7$ [宜先用例 1 之方法解之, 次用例 2 之方法解之.]

(二) $5\times{}_nC_3=8\times{}_{n-1}C_4$.

(三) ${}_nC_{20}={}_nC_{35}$.

(四) ${}_{20}C_{r+3}={}_{20}C_{2r-4}$.

34. 簡單之應用問題

例. 某學校有生徒三十人, 選出二人執掃除之役, 問有若干不同之組合.

解. $_{30}C_2=\frac{30.29}{1.2}=435.$

［問 4］ 從候補議員十人中, 選舉議員五人, 問共有若干不同之方法.

［問 5］ 從代議士十二人中, 選委員三人, 問共有若干不同之方法.

35. 選擇有限制之組合

例. 從三十人中選擇六人爲兵士, 但其中有預定錄用之一人, 餘則體格相同, 隨意選用, 問有若干不同之組合.

解. 30 人中已預定 1 人, 實從 29 人中選擇 5 人也.

卽 $_{29}C_5=\frac{29.28.27.26.25}{1.2.3.4.5}=118755.$

［問 6］ 從互異之 12 物中取 3 物作組合, 求證含某一物之組合之數, 等於總數之四分之一.

［問 7］ 從 12 人中選出 5 人, 問各組合內某 2 人共當選有幾.

［問 8］ 從十人中選出五人, 但限制某二人不同時入選, 問有若干不同之組合.

36. 選舉有區別之組合

例. 從生徒 15 人選正副組長各一人, 問有若干不同之組合.

解. 先選正組長之組合數爲 $_{15}C_1$, 卽 15, 今已選出正組長一人, 則選副組長之組合數爲 $_{14}C_1$, 卽 14. 依第 9 節基本定理, 所求之數爲 15×14, 卽 210.

別解. 先不分別組長之正副, 從 15 人選 2 人, 其組合數爲 $_{15}C_2$, 次定組長之正副有 $2!$ 種方法.

故所求之數爲 $2!\times{}_{15}C_2=1\times2\times\frac{15\times14}{1\times2}=210$.

[問 9] 從十人中挑選舵工一人，水手六人，問共有若干不同之組合.

[問 10] 從會員二十名之內選幹事二名，事務員二名（不得兼職)，問共有若干不同之組合.

37. 從若干羣分別選擇之組合

例. 從甲組六人乙組五人中，各選出二人，問有若干不同之組合.

解. 從甲組六人選二人之組合數爲 ${}_6C_2$，卽 15，又從乙組五人選二人之組合數爲 ${}_5C_2$，卽 10，依基本定理，所求之組合數爲 15×10，卽 150.

[問 11] 從陸兵十二人水兵七人中，挑選陸兵三人，水兵二人，同擔任一種職務，問有若干不同之組合.

[問 12] 從商人二十名工人十八名中，推舉商人四名，工人三名，同爲工商業請願之代表，問有若干不同之組合.

[問 13] 從家族 4 人親戚 8 人中，推舉家族 3 人，親戚 5 人，公同處分一事，問有若干不同之組合.

[問 14] 從兵士三十人軍官三人中，挑選兵士四人，軍官一人，擔任斥候之職務，問有若干不同之組合.

38. 幾何學上之應用

例 1. 有七點在一平面之上，以諸直線連結各點，不能有一直線通過七點中之三點，問二點間之直線共若干.

解. 所求直線之數，與從七點中選擇二點之組合數同.

故直線之數卽 ${}_7C_2=\dfrac{7\times6}{1\times2}=21.$　答　二十一條直線.

例 2. 前例若有四點在一直線之上, 問直線之數共若干.

解. 有在一直線上之四點, 若其四點不在一直線上, 惟能以諸直線各連結二點, 其直線之數爲 ${}_4C_2$ 卽 6 條直線, 今四點同在一直線之上, 故比前例少 5 條直線.

所求直線之數爲 $21-5=16.$　答　十六條直線.

例 3. 問十邊形之對角線共若干.

解. 十邊形有十箇交點, 以諸直線各連結其二交點, 知直線之數爲 ${}_{10}C_2=45.$

因內有十條直線爲十邊形之邊, 故對角線爲 $45-10=35.$

答　三十五條對角線.

[問 15]　以諸直線連結平面上之十點, 其中有一直線通過五點, 餘無能通過三點之直線, 問二點間之直線共若干.

[問 16]　以直線 595 條連結平面上之諸點, 無一直線能通過諸點中之三點者, 問點數共若干.

[問 17]　同在一平面上有五點, 不能作一直線通過其中之三點, 今任意以直線連結三點爲三角形, 問能有若干三角形.

39. 從互異或不全互異之各物, 任意取若干物之情形.

例 1. 有 1 兩 2 兩 4 兩 8 兩 16 兩之銅法碼, 問能作若干不同之重量.

解. 僅有 1 兩之法碼, 取用或不取用, 處置有 2 種方法, 有 1 兩 2 兩之兩法碼, 全取用或選用其一或不取用, 配置有 2^2 種方法. 由

此類推至有五箇法碼，配置之方法有 2^5 種，因不用一箇法碼，即無重量可言，不適於題意，故所求之數為 $2^5-1=31$.

別解. 因各法碼之重量不同，任以幾箇法碼配合，亦無相同之重量，故所求之數等於從 5 箇法碼中取 1 取 2 至取五箇之組合之和.

即 $_5C_1+{_5C_2}+{_5C_3}+{_5C_4}+{_5C_5}=31$.

注意 1. 用第 50 節之方法，能證明次之公式.

$$1+{_nC_1}+{_nC_2}+{_nC_3}+\cdots\cdots+{_nC_n}=2^n$$

注意 2. 若所有之法碼為 1 兩，3 兩，4 兩，8 兩，16 兩五種，其配置之方法，除不用一箇法碼，亦為 31，但各重量有相同者，如取 1 兩 3 兩之兩法碼，與取 4 兩之一法碼，其重相等. 又取 1 兩 3 兩 4 兩之三法碼，與取 8 兩之一法碼，其重亦相等，故不得依本例計算.

例 2. 有當十之銅幣三枚，當百之銀幣五枚，當五千之金幣四枚，問能配合為若干不同之值.

解. 取銅幣一枚，或二枚三枚，或不取，配置之方法有 3+1 種，銀幣依同法配置有 5+1 種，金幣有 4+1 種. 又依基本定理，配置三種貨幣之方法為 (3+1) (5+1) (4+1) 種，但不取一枚，其值為 0，不適於題意，應從上數中減一.

故答數為 $(3+1)(5+1)(4+1)-1=119$.

注意. 本例若改銅幣為十二枚，則取銅幣十枚與取銀幣一枚，其值相等，又取銅幣十一枚，與取銅幣銀幣各一枚之值相等，故不得依本例計算.

[問 18] 從候補議員甲乙丙丁戊己六人中，選舉議員四人，選舉票中得舉一人至四人，問有若干不同之組合.

[問 19] 問 $2^3\times3^2\times5^5$ 之約數有幾. [約數之數, 連 1 與本數計算.]

[問 20] 有當十之銅幣八枚, 當百之銀幣四枚, 當五百之銀幣六枚, 問能配合爲若干不同之值.

40. 分配及分割

例 1. 以六種不同之果子, 分給童子三人. 每一人各得二種果子, 問有若干不同分配之法.

解. 以甲乙丙代三童子, 甲得二種果子之組合數爲 ${}_6C_2$, 甲每依各組合中之一種組合分得果子, 則賸餘四種果子, 故乙得二種果子之組合數爲 ${}_4C_2$, 乙每依各組合中之一種組合分得果子, 僅餘二種果子, 故丙得二種果子之組合數爲 ${}_2C_2$, 又依基本定理, 得不同之分配法如次.

$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2=\frac{6\times5}{1\times2}\times\frac{4\times3}{1\times2}\times\frac{2\times1}{1\times2}=90.$$

例 2. 10 人分住大小兩宅, 大宅住 7 人, 小宅住 3 人, 問有若干不同分配之法.

解. 從 10 人中選住小宅之 3 人, 其組合數爲 ${}_{10}C_3$, 每選定 3 人住小宅, 則賸餘之 7 人住大宅, 其組合數爲 ${}_7C_7$.

故依基本定理所求之不同分配法爲 ${}_{10}C_3\times{}_7C_7=120$.

例 3. 平分 10 人爲兩組, 問有若干不同分配之法.

另設簡單之例考之, 假如求平分 A, B, C, D 四文字爲二組.

先取 A, B, 則賸餘 C, D. 若取 C, D, 則賸餘 A, B.

先取 A, C, 則賸餘 B, D. 若取 B, D, 則賸餘 A, C.

先取 A, D, 則賸餘 B, C. 若取 B, C, 則賸餘 A, D.

上之六種分配之法，不注意於賸餘，則六種之分配互異，因分成之兩組無分彼此，故記於同列者祇算一種.

解. 從 10 人中取 5 人之組合數爲 ${}_{10}C_5$，賸餘 5 人之組合數爲 ${}_5C_5$，因前之各組合數中，皆有與賸餘之組合完全相同者，當去其數之半，故答數爲 $\frac{{}_{10}C_5 \times {}_5C_5}{2} = 126$.

注意 1. 上之三例中，最後賸餘之組合數 ${}_2C_2$, ${}_7C_7$, ${}_5C_5$，其值皆爲 1，以 1 乘與不乘同，故可省此組合數.

注意 2. 觀前例，知凡平分若干物爲兩組，與分若干物爲大小兩組，其計算之方法不全相同.

注意 3. 平分 2 n 物爲兩組之簡單公式爲 $\frac{{}_{2n}C_n}{2!}$. 又平分 3n 物爲三組之簡單公式爲 $\frac{{}_{3n}C_n \times {}_{2n}C_n}{3!}$. 餘可類推.

［問 21］ 平分 12 人爲二組，問有若干不同分配之法.

［問 22］ 平分 Y, O, K, O, S, U, K, A 八文字爲二組，限制各組中必須含 k o 二文字於他二文字之中間，問有若干不同分配之法.

41. 順列組合並用之問題

例 1. 從五箇母音字六箇子音字中，取三箇母音字兩箇子音字，排爲一列，問有若干互異之排列法.

解. 從五箇母音字取三箇母音字之組合數爲 ${}_5C_3$，又從六箇子音字取兩箇子音字之組合數爲 ${}_6C_2$，依基本定理，三箇母音字兩箇子音字之配合數爲 ${}_5C_3 \times {}_6C_2$，又每一種配合之五箇文字之順列數爲 ${}_5P_5$.

故所求之數爲 ${}_5P_5 \times {}_5C_3 \times {}_6C_2 = 18000$.

例 2. 西洋式之小艇中，有水手八人，指定三人在右舷，二人在左舷，不能左右調換，可以前後易位，其餘三人中選一人加入右舷，二人加入左舷，問有若干不同之排置法.

解. 三人中選一人加入右舷，二人加入左舷，僅有三種變化，可以組合數 ${}_3C_1$ 表之. 又左右舷四人前後之位置互易，其順列之數同爲 ${}_4P_4$，卽 $4!$.

故所求之數爲 $(4!)^2\times{}_3C_1=1728$.

［問 23］ 從互異之 21 箇子音字 5 箇母音字，取 3 箇子音字 3 箇母音字，排爲一列（不用重複字），問有若干不同配合之法.

［問 24］ 有男子五人女子四人，考某機關之職員，今擬錄取男子三人女子二人，使分任五種職務，問有若干不同之配置法.

練習問題 II

1. 設 ${}_{22}C_{r+3}={}_{22}C_{3r-5}$，問 r 之值如何.

2. 設 $nC_2=66$，問 n 之值如何.

3. 從會員五十人之中，選會長一名，幹事二名，問有若干不同之配合.

4. 從互異之 n 物中取五物，只云其組合之數之半，等於取四物之組合數，問 n 之值如何.

5. 從互異之 n 物中取 r 物，其組合數之 $\frac{1}{3}$，等於取 $r-1$ 物之組合數，又等於取 $r+1$ 物之組合數之 $\frac{1}{6}$，問 n 與 r 之值如何.

6. 從步兵四人騎兵五人礮兵三人中，選步騎兵各二人礮兵一人，合作某種任務，問有若干不同選配之法.

7. 求證 $\frac{{}_nC_r}{n}=\frac{{}_{n-1}C_{r-1}}{r}$.

8. 求證 ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$.

9. 設 $5\times{}_nP_3={}_nC_5$, 求 n 之值.

10. 從 n 物取 3 物之順列數之 $\frac{1}{6}$, 等於取 4 物之組合數, 求 n 之值.

11. 從軍官三名兵士十名, 選出九人爲一隊, 其隊中必須有軍官二名或三名, 問有若干不同之配合.

12. 在同一平面上引 n 條直線, 其中無二直線平行, 亦無三直線同過一點, 問共有若干交點.

13. 某學校有入學試驗合格之學生六十名, 依其成績編爲甲組二十名, 乙組二十五名, 丙組十五名, 今擬從甲乙丙三組各推選交際員二名, 問有若干不同之配合.

14. 從軍官三名兵士十名中, 欲選出五人組織斥候隊, 問依次之情形有若干不同之組織.

(一) 僅有一軍官.

(二) 極少有一軍官.

15. 從巡查之兵士二十名中, 選四名值夜, 問有若干不同之組合數, 又問同有某兵士之組合數若干.

16. 有 n 邊之凸多角形, 求其對角線之數.

17. 有 m 箇點, 其中 n 箇點在同一之直線上, 此外無一直線能通過三點者, 今於二點間各引一直線, 求直線之數.

18. 以十人中之若干人作組合, 只云含某一人之組合數, 等於不含此人之組合數, 問每一組合之人數若干.

19. 從黃青紫三色石子中，取二色之石子六枚，自左而右，排列如黃黃黃青青黃，問有幾種不同之配合.

20. 以 12 種互異之物，平分爲三組（每組四種），使甲乙丙三人各得一組，問有若干不同分配之法.

21. 設有八人自由分爲甲乙二黨各四人，今二黨中各出二人，共議決一事，問有若干不同之組合.

22. 某學校一年級之學生二十人，分爲二組，每組十人，各選舉正副組長一人，問選出之正副組長，能有若干不同之組合.

23. 設囊中有 10 箇球，取出之球爲偶數，問有若干不同之組合.［題未明言 10 箇球是否互異，宜先依互異之球解之，次依相同之球解之.］

24. 設囊中有 n 箇球，問取出之球爲偶數，有若干不同之組合.［本題未明言 n 爲奇數偶數，當有二種解法，又未明言是否互異，若爲互異之球，解釋稍覺困難，此處作相同之球解之，第 51 節另有互異之球之解法.］

第四章

二項定理

42. 二項因數之連乘積

二項式 $x+a$, $x+b$, $x+c$ 之積如次.

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc.$$

實施乘法, 可得右邊之四項式, 亦可如次之方法求之.

此積爲三箇 x 之一次式連乘, 結果必爲 x 之三次式可知. 假定 x^3 之係數爲 S_0, x^2 之係數爲 S_1, x 之係數爲 S_2. 不含 x 之項爲 S_3.

故其積之形爲 $S_0x^3+S_1x^2+S_2x+S_3$, 能求得 S_0, S_1, S_2, S_3 之值代入, 卽爲連乘之終結式.

因三箇因數第一項之 x 之係數同爲 1, 知 S_0 爲三箇 1 之連乘積.

故 $S_0=1$.

又含 x^2 之項, 乃合次之三箇三次項而得.

(一) 第一及第二因數中之 x, 與第三因數中之 c 連乘, 卽 cx^2.

(二) 第一及第三因數中之 x, 與第二因數中之 b 連乘, 卽 bx^2.

(三) 第二及第三因數中之 x, 與第一因數中之 a 連乘, 卽 ax^2.

故 $S_1=a+b+c$.

又含 x 之項, 乃合次之三箇三次項而得.

(1) 第一因數中之 x, 與第二因數中之 b 及第三因數中之 c 連乘, 卽 bcx.

(2) 第二因數中之 x, 與第一因數中之 a 及第三因數中之 c 連乘, 卽 acx.

(3) 第三因數中之 x, 與第一因數中之 a 及第二因數中之 b 連乘, 卽 abx.

故　$S_2=ab+ac+bc$.

最後不含 x 之項, 乃第一因數中之 a 與第二因數中之 b 及第三因數中之 c 連乘.

故　$S_3=abc$.

以 S_0, S_1, S_2, S_3 之值代入假定之連乘積.

得 $$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc.$$

例 1. $$\begin{aligned}(x-1)(x-2)(x+3)&=x^3+(-1-2+3)x^2\\&\quad+\{(-1)\times(-2)+(-1)\times3\\&\quad+(-2)\times3\}x\\&\quad+(-1)\times(-2)\times3\\&=x^3-7x+6.\end{aligned}$$

例 2. $$\begin{aligned}(x-2)(x+3)(x-5)(x+9)&=x^4+(-2+3-5+9)x^3\\&\quad+\{(-2)\times3+(-2)\times(-5)+(-2)\times9\\&\quad+3\times(-5)+3\times9+(-5)\times9\}x^2\\&\quad+\{(-2)\times3\times(-5)+(-2)\times3\times9\\&\quad+(-2)\times(-5)\times9+3\times(-5)\times9\}x\\&\quad+(-2)\times3\times(-5)\times9\\&=x^4+5x^3-47x^2-69x+270.\end{aligned}$$

[問 1] 計算次之各積.

(一) $(x+1)(x-5)(x+2)$.　　(二) $(x-7)(x+3)(x-6)$.

(三) $(x-2)(x-10)(x-\frac{1}{5})$.　　(四) $(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})(x+1)$.

43. 前節之續

如前所述求 $x+a$, $x+b$, $x+c$ 三箇因數連乘之方法，不拘增加若干因數，皆能適用.

假定 n 箇因數 $(x+a)$, $(x+b)$,……$(x+h)$, $(x+k)$ 連乘.

x^n 之係數$=1$.

x^{n-1} 之係數$=a+b+\cdots\cdots+h+k$, [項數$={}_nC_1$]

x^{n-2} 之係數$=ab+ac+\cdots\cdots+hk$, [項數$={}_nC_2$]

x^{n-3} 之係數$=abc+abd+\cdots\cdots+ghk$, [項數$={}_nC_3$]

不含 x 之項$=ab\cdots\cdots hk$.

又設 b, c,……k 之値皆等於 a, 其連乘積各項之係數如次.

x^n 之係數$=1$.

x^{n-1} 之係數$={}_nC_1\times a$, 卽 na.

x^{n-2} 之係數$={}_nC_2\times a^2$, 卽 $\dfrac{n(n-1)}{2!}a^2$.

x^{n-3} 之係數$={}_nC_3\times a^3$, 卽 $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3$.

不含 x 之項$={}_nC_n\times a^n$, 卽 a^n.

故 $(x+a)^n=x^n+{}_nC_1\times ax^{n-1}+{}_nC_2\times a^2x^{n-2}+\cdots+{}_nC_n\times a^n$. (1)

或 $(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\dfrac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2}+\cdots+a^n$. (2)

此公式名曰二項定理，稱其右邊爲展開式.

注意 1. 公式右邊之第一項爲 x^n, 次項 x 之指數減 1, 添乘數 a, 更次項 x 之指數又減 1, 乘數 a 之指數增 1, 其餘各項，可以類推.

注意 2. 公式右邊之項數爲 $n+1$.

注意 3. 設以 $-a$ 代公式中之 a, 則公式之各項如次.

$$(x-a)^n=x^n-{}_nC_1\times ax^{n-1}+{}_nC_2\times a^2x^{n-2}-\cdots+(-1)^n{}_nC_n\times a^n$$

$$=x^n-nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2}-\cdots+(-1)^n a^n.$$

注意 4. 右邊第一項 x^n 之係數, 亦可添組合數 ${}_nC_0$ 及 a^0, 使各項之形一律, 由此知有 n 物不取一物之組合數及 a 之 o 方, 皆不得不等於 1.

注意 5. 以 ${}_nC_1, {}_nC_2, \cdots\cdots$ 爲公式右邊展開之各項係數, 有時省 C 之左下角之添數 n, 僅於 C 之右下角記添數 1, 2, 3……者.

注意 6. 凡於簡單之代數式之右邊, 書其詳式, 成級數之形者, 皆謂之展開, 但本書僅有二項式之諸乘冪之展開 (雖有三項式之諸乘冪之展開, 仍屬二項定理之應用), 故稱其展開式爲二項展開式, 有時或渾言展開.

例 1. $(a+b)^4=a^4+{}_4C_1\times a^3b+{}_4C_2\times a^2b^2+{}_4C_3\times ab^3-{}_4C_4\times b^4$

$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$

例 2. $(x+y)^5=x^5+{}_5C_1\times x^4y+{}_5C_2\times x^3y^2+{}_5C_3\times x^2y^3+{}_5C_4\times xy^4+{}_5C_5\times y^5$

$=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5.$

〔問 2〕 展開次之四式.

(一) $(2x-3x^2)^4.$ (二) $(2x^2+\frac{1}{2})^4.$

(三) $\left(ax-\frac{3}{C}\right)^5.$ (四) $(2x-3y)^8.$

例 3. 求 99^4 之值.

$99^4=(100-1)^4$

$=100^4-4\times100^3+6\times100^2-4\times100+1.$

$=96059601.$

〔問 3〕 用二項定理計算次之值.

(一) $999^3.$ (二) $98^3.$

44. 公項

$(x+a)^n$ 之展開式第二項之係數爲 ${}_nC_1$, 第三項之係數爲 ${}_nC_2$, 第四項之係數爲 ${}_nC_3$, 餘可類推.

凡二項展開式各項中 C 之右下角之添數,比自左而右之項數少 1.

故可任意求第幾項之係數.

例. 求 $(x+a)^{15}$ 之展開式自左而右第 6 項之數係數.

解. $6-1=5$, 知第 6 項之數係數爲 ${}_{15}C_5$, 卽 3003.

注意. 凡係數爲數字, 不用文字表數者, 謂之數係數.

上述之法則, 凡二項展開式皆能適用, 設項數爲 $r+1$, 卽可決定此項之係數爲 ${}_nC_r$.

又各項中 a 之指數, 恆等於本項係數 C 之右下角之添數, x 之指數, 恆等於從 n 減 a 之指數.

故第 $r+1$ 項爲 ${}_nC_r\times a^rx^{n-1}$, 卽 $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots r}a^rx^{n-r}$

此爲 $(x+a)^n$ 之展開式之公項. 若求 $(x+1)^n$ 之展開式之公項, 以 1 代上之公項中之 a, 則其公項如次.

$$ {}_nC_r\,x^{n-r},\ 卽\ \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots r}x^{n-r}. $$

注意 1. 上之公項, 乃指自左而右之第 $r+1$ 項, 非第 r 項也.

注意 2. 公項指從 $(x+a)^n$ 之展開式初項起之第 $r+1$ 項, 但展開式之各項順序, 或依 x 之降冪, 或依 x 之昇冪, 有兩種區別, 本書常以二項式之首項爲主, 依降冪排列, 如 $(x+a)^n$ 則依 x 之降冪排列, 如 $(a+x)^n$ 則依 a 之降冪排列.

例 1. 求 $(a+2x^3)^{17}$ 之展開式自左而右之第五項.

解. 所求之項$={}_{17}C_4\times a^{17-4}(2x^3)^4=38080\ a^{13}\ x^{12}$.

例 2. 求 $(2-a)^{15}$ 之展開式自左而右之第 14 項.

解. 所求之項$={}_{15}C_{13}\ (2)^2\ (-a)^{13}=-420\ a^{13}$.

注意. 次之問題，所云展開式之第幾項，皆從初項起自左而右計算.

[問 4] 求 $(x+6)^8$ 之展開式之第四項.

[問 5] 記 $(x+a)^n$ 之展開式及 $(1+x)^{20}$ 之第十五項.

[問 6] 求 $(2a-x^3)^8$ 之展開式之第五項.

[問 7] 求 $(1+x)^{10}$ 之展開式之第五項.

[問 8] 求 $(\frac{1}{2}x-2y)^7$ 之展開式之第五項.

[問 9] 求 $(a^2-b^3)^{12}$ 之展開式之第六項.

45. 展開式中某文字之幾次冪之係數

例 1. 求 $(2+x^3)^{12}$ 之展開式中 x^9 之數係數.

解. 此展開式之公項如次.

$${}_{12}C_r\times 2^{12-r}\ (x^3)^r={}_{12}C_r\times 2^{12-r}\ x^{3r}.$$

從 $3r=9$ 得 $r=3$.

故 $${}_{12}C_3\times 2^{12-3}=\frac{12.11.10}{1.2.3}2^9=112640.$$

[問 10] 求 $(x^2+2)^{10}$ 之展開式中 x^{16} 之數係數.

[問 11] 求 $(3x+2y)^7$ 之展開式中含 x^4y^3 之項之數係數.

[含 x^4 之項，卽含 x^4y^3 之項.]

例 2. 求 $(2x^3-x)^8$ 之展開式中 x^{16} 之數係數.

解. 因 $(2x^3-x)^8=(2x^2-1)^8x^8$，知所求之數係數等於 $(2x^2-1)^8$ 之展開式中 x^8 之數係數，$(2x-1)^8$ 之公項如次.

$${}_8C_r\ (2x^2)^{8-r}\,(-1)^r=(-1)^r\ {}_8C_r\times 2^{8-r}\ x^{16-2r}.$$

從 $16-2r=8$ 得 $r=4$.

故所求之數係數為 $(-1)^4\ {}_8C_4\times 2^4=\dfrac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\times 16$

$$=1120.$$

別解. 又直接從 $(2x^3-x)^8$ 之展開式之公項解之.

因 ${}_8C_r\,(2x^3)^{8-r}\,(-x)^r={}_8C_r\times 2^{8-r}\,x^{24-3r}\,(-1)^r\,x^r$

$$=(-1)^r\ {}_8C_r\times 2^{8-r}\,x^{24-2r}.$$

從 $24-2r=16$ 得 $r=4$.

故所求之數係數 $=(-1)^4\ {}_8C_4\times 2^4=1120$.

[問 12] 求 $(3x^4-x^2)^9$ 之展開式中 x^{20} 之數係數.

[問 13] 求 $(4x^3-x)^8$ 之展開式中 x^{10} 之數係數.

例 3. 求 $\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 之展開式中不含 x 之項.

解. 所設之式之公項如次.

$${}_6C_r\times x^{6-r}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=(-1)^r\ {}_6C_r\,\frac{x^{6-r}}{(\sqrt{x})^r}=(-1)^r\ {}_6C_r\,\frac{x^{6-r}}{x^{\frac{r}{2}}}$$

$$=(-1)^r\ {}_6C_r\times x^{6-r-\frac{r}{2}}=(-1)^r\ {}_6C_r\times x^{6-\frac{3r}{2}}.$$

因不含 x 之項其 x 之指數等於 0.

從 $6-\dfrac{3r}{2}=0$ 得 $r=4$.

故所求之項 $=(-1)^4\ {}_6C_4=\dfrac{6\times 5}{1\times 2}=15$.

[問 14] 求 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^8$ 之展開式中含 x^2 之項.

[問 15] 求 $\left(2a+\dfrac{1}{3}b\right)^{12}$ 之展開式中 b^4 之係數.

[問 16] 求 $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ 之展開式中 x^4 之數係數.

[問 17] 求 $\left(x-\frac{2}{x}\right)^{12}$ 之展開式中不含 x 之項.

[問 18] 求 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{8}$ 之展開式中 x^2 之數係數.

46. 與初項末項距離相等之項之係數亦相等

從 $(x+a)^n$ 之展開式初項起之第 P 項係數爲 ${}_nC_{p-1}$, 此展開式之項數爲 $n+1$, 故從末項起之第 P 項, 卽從初項起之第 $n+1-(P-1)$ 項, 又卽初項起之第 $(n-P+2)$ 項, 其係數爲 ${}_nC_{n-p+1}$, 卽 ${}_nC_{n-(p-1)}$.

依第 31 節之公式 ${}_nC_{p-1}={}_nC_{n-(p-1)}$, 故知二項展開式與初項末項距離相等之項之係數亦相等.

注意 1. 有本節之證明, 則 $(x+a)^n$ 與 $(a+x)^n$ 全相等, 可以想像而知.

因 $(x+a)^n=S_0\,x^n+S_1\,x^{n-1}\,a+\cdots\cdots+S_{n-1}\,xa^{n-1}\,S_n\,a^n.$ (1)

$(a+x)^n=S_0\,a^n+S_1\,a^{n-1}\,x+\cdots\cdots+S_{n-1}\,ax^{n-1}\,S_n\,x^n.$ (2)

兩式右邊排列之次序雖不相同, 而項數之數相等, 其係數俱一一相等, 本節已證明 $S_0=S_n$, $S_1=S_{n-1}$……故知 (1), (2) 全相等.

注意 2. 讀二項展開式之係數, 從初項起, 自左而右, 與從末項起, 自右而左, 全無區別.

例如 $(x+a)^4=x^4+4ax^3+6\,a^2\,x^2+4\,a^3\,x+a^4$.

無論從初項起自左而右, 或從末項起自右而左, 其各項係數, 同爲 1.4.6.4.1.

47. 書展開式之簡便方法

如第 43 節注意 2 所述, $(x+a)^n$ 之展開式之項數爲 $n+1$, 前節證明與初項末項距離相等之項之係數亦相等, 故 n 爲奇數, 展開之項數爲偶數, 後之 $\frac{n+1}{2}$ 項之各係數, 與前之 $\frac{n+1}{2}$ 項之各係數, 完全相同, 惟次序之順逆不同.

例如 $(x+a)^5=x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+a^5$.

前三項之數係數爲 1, 5, 10. 後三項之數係數爲 10, 5, 1.

又 n 爲偶數, 展開式之項數爲奇數, 後之 $\frac{n}{2}$ 項之各係數, 與前之 $\frac{n}{2}$ 項之各係數, 亦完全相同, 惟次序之順逆不同及中央項之係數無相同者.

例如 $(x+a)^6=x^6+6x^5a+15x^4a^2+20x^3a^3+15x^2a^4+6xa^5+a^6$.

前三項之數係數爲 1, 6, 15. 後三項之數係數爲 15, 6, 1. 中央有單獨之數係數 20.

依上所述, 書展開式可如次之順序.

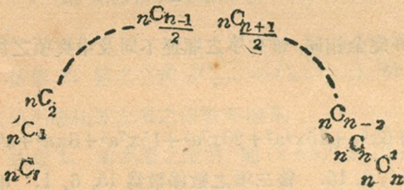
第一. 先求項數 $n+1$ 之值.

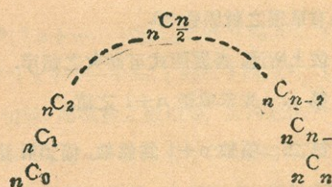
第二. 項數 $n+1$ 爲偶數, 僅須計算前 $\frac{n+1}{2}$ 項之各係數, 其後 $\frac{n+1}{2}$ 項之各係數, 可依前之各係數之次序逆書之. 若 $n+1$ 爲奇數, 僅須計算前 $\frac{n}{2}+1$ 項之各係數, 其後 $\frac{n}{2}$ 項之各係數, 可依前之 $\frac{n}{2}$ 項各係數之次序逆書之.

注意. 本節所述之係數, 指由組合式求得之數, 如依本節之方法, 解第 43 節問 2 之各題, 其各項之數係數, 另有由所設二項式之係數而生之數, 與由組合式求得之數相乘, 試重演一二題, 卽能了然.

48. 最大係數

第 32 節中已證明 n 爲偶數, $r=\frac{n}{2}$, 則 ${}_nC_r$ 之値最大. 又 n 爲奇數, $r=\frac{n+1}{2}$ 或 $\frac{n-1}{2}$, 則 ${}_nC_r$ 之値最大. 此關係知適用於二項展開式之係數, 以之與前節證明之關係綜合表示於次.





上之二圖, 同以最上之組合數爲最大, 左右並列之組合數皆相等.

例. 求 $(1+x)^9$ 之展開式之最大係數.

解. 因 n 爲奇數, 有二最大之係數.

其數爲 ${}_9C_{\frac{9-1}{2}}={}_9C_{\frac{9+1}{2}}=126.$

［問 19］ 求 $(1+x)^{10}$ 之展開式之最大係數.

［問 20］ 求 $(1+x)^{11}$ 之展開式之最大係數.

49. 最大項（絕對值之最大項，省文爲最大項）.

$(1+x)^n$ 之展開式之各項如次.

${}_nC_0,\ {}_nC_1\times x,\ {}_nC_2\times x^2,\cdots\cdots{}_nC_r\times x^r\cdots\cdots{}_nC_n\times x^n.$

卽 $1,\ nx,\ \dfrac{n(n-1)}{1\times 2}x^2,\cdots\cdots\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\times 2\times\cdots\cdots\times r}x^r,\cdots\cdots x^n.$

今欲求其中之最大項，假定 x 之值爲正數考之.

觀上之諸項，有如次之關係.

第二項＝第一項×nx.

第三項＝第二項$\times\dfrac{n-1}{2}x.$

第四項＝第三項$\times\dfrac{n-2}{3}x.$

第 r 項＝第 r−1 項$\times\dfrac{n-(r-2)}{r-1}x.$

第 r+1 項＝第 r 項$\times\dfrac{n-(r-1)}{r}x.$

故 $nx,\ \dfrac{n-1}{2}x,\cdots\cdots\dfrac{n-r+1}{r}x,\cdots\cdots$ 在比 1 大之範圍內，其各項之值，自左而右逐漸增大，在比 1 小之範圍內，其各項之值，自左而右逐漸減小.

求第 r+1 項所用之乘數 $\dfrac{n-r+1}{r}x$，卽 $\left(\dfrac{n+1}{r}-1\right)x$，若 x 與 n 之值一定，僅 r 有變化，r 之值愈增大，則 $\dfrac{n+1}{r}$ 愈減小，至所用

之乘數 $\frac{n-r+1}{r}x$, 等於 1 或小於 1, 其後之各項之值, 必愈減小, 絕無增大之事.

假定第 r 項爲最大, 則其前之一項 (卽第 r−1 項) 及其後之一項 (卽第 r+1 項), 皆不得不小於第 r 項.

故有 $\frac{n-r+2}{r-1}x>1$ 及 $\frac{n-r+1}{r}x<1$ 之關係.

上之兩不等式, 各以左邊之分母乘之, 其兩邊之值之大小, 大者仍大, 小者仍小. (若以負數乘不等式之兩邊, 則大小改變.)

卽 $(n-r+2)x>r-1$, $(n-r+1)x<r$.

去括弧 $nx-rx+2x>r-1$, $nx-rx+x<r$.

第一式之兩邊各加 $rx-x$, 第二式之兩邊各加 rx, 其兩邊之值之大小, 大者仍大, 小者仍小.

卽 $nx+x>r+rx-1-x$, $nx+x<r+rx$.

添括弧 $(n+1)x>(1+x)r-(1+x)$, $(n+1)x<(1+x)r$.

又同以 $1+x$ 除二式之兩邊, 其兩邊之值之大小, 大者仍大, 小者仍小. (若以負數除不等式之兩邊, 則大小改變.)

卽 $\frac{(n+1)x}{1+x}>r-1$, $\frac{(n+1)x}{1+x}<r$.

連合兩不等式爲一式.

卽 $r>\frac{(n+1)x}{1+x}>r-1$.

化爲 $\frac{(n+1)x}{1+x}+1>r>\frac{(n+1)x}{1+x}$.

從此連合不等式, 可依 n 與 x 之值, 而定最大項 (卽第 r 項) 之項數 r 之值.

若 $r=\frac{(n+1)x}{1+x}$, 則 $\frac{n-r+1}{r}x=1$.

如此情形, 第 r 項及第 r+1 項同為最大之項.

$(1+x)^n$ 之展開式之諸項, 設 x 之值為負數, 則各項之正負相間, 與 x 之值為正數之各奇數項皆同, 而偶數項之符號不同, 若求絕對值之最大項, 可不必論 x 之值之正負. 本書為避句之冗長, 每稱絕對值之最大項為最大項, 此宜注意.

設 x 之絕對值為 x', 求最大項之法則如次.

求 $(1+x')^n$ 之展開式之最大項.

先計算 $\frac{(n+1)x'}{1+x'}$ 之值.

I. 若等於整數 P, 則 ${}_nC_{p-1}\ (x')^{p-1}={}_nC_p\ (x')^p$, 此二項同為最大項.

II. 若等於整數 P 與眞分數之和, 則 ${}_nC_p\ (x')^p$ 為最大項.

若求 $(a+x)^n$ 之展開式之最大項, 宜化二項式為 $a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$, 先求 $\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$ 之展開式之最大項, 然後以 a^n 之絕對值乘之.

例 1. 設 $x=\frac{2}{3}$, 求 $(1+x)^9$ 之展開式之最大項.

解. $\dfrac{(9+1)\times\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{20}{5}=4.$

故所求之項$={}_9C_3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3={}_9C_4\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{224}{9}$.

例 2. 設 $x=\frac{1}{3}$, 求 $(1+4x)^8$ 之展開式之最大項.

解. $4x=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

$$因\quad \frac{(8+1)\times\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}}=\frac{9\times4}{3+4}=\frac{36}{7}=5+\frac{1}{7}.$$

故所求之項$={}_8C_5\left(\frac{4}{3}\right)^5={}_8C_3\left(\frac{4}{3}\right)^5=\frac{57344}{243}$.

例 3. 設 $x=1$, 求 $(3-2x)^9$ 之展開式之最大項.

解. $(3-2x)^9=3^9\left(1-\frac{2x}{3}\right)^9$.

須先求 $\left(1-\frac{2x}{3}\right)^9$ 之展開式之最大項, 然後以 3^9 乘之.

$$因\quad \frac{(9+1)\times\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{20}{5}=4.$$

故所求之項$={}_9C_3\times3^9\left(\frac{2}{3}\right)^3=489888$.

[問 21] 設 $x=\frac{2}{3}$, $n=6$, 求 $(1+x)^n$ 之展開式之最大項.

[問 22] 設 $a=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{3}$, $n=9$, 求 $(a+x)^n$ 之展開式之最大項.

50. 從展開式之若干項或其係數求指數或其他文字之值

例 1. 知 $(x+y)^n$ 之展開式之第二項為 $\frac{80}{3}$，第三項為 $\frac{80}{9}$，第四項為 $\frac{40}{27}$，求 n 及 x, y 之值 (x, y 皆為實數).

解. $(x+y)^n$ 之展開式之第二項至第四項如次.

$$nx^{n-1}y,\ \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2,\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}y^3.$$

因 $$nx^{n-1}y=\frac{80}{3}. \qquad (1)$$

$$\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2=\frac{80}{9}. \qquad (2)$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}y^3=\frac{40}{27}. \qquad (3)$$

依三元聯立方程式之解法解之，先以 (1) 式之兩邊除 (2) 式之兩邊，次以 (2) 式之兩邊除 (3) 式之兩邊.

得 $$\frac{n-1}{2}\times\frac{y}{x}=\frac{1}{3}. \qquad (4)$$

$$\frac{n-2}{3}\times\frac{y}{x}=\frac{1}{6}. \qquad (5)$$

又以 (5) 式之兩邊除 (4) 式之兩邊，消去 x, y.

得 $$\frac{3(n-1)}{2(n-2)}=2. \qquad (6)$$

去分母及括弧.

即 $3n-3=4n-8$.

由此求得 $n=5$.

以 5 代 (4) 式之 n.

則 $\frac{2y}{x}=\frac{1}{3}$.

去分母 $6y=x$. (7)

以 5 與 6 y 代 (1) 式之 n 與 x.

得 $5(6y)4y=\frac{80}{3}$.

化為簡單之式 $y^5=\frac{1}{3^5}$. (8)

此方程式之實根為 $\frac{1}{3}$, 其他皆為虛根, 不能與本題適合, 以 y 之實根 $\frac{1}{3}$ 代 (7) 式之 y, 得 x 之值為 2.

故僅有一組答數 $n=5,\ x=2,\ y=\frac{1}{3}$.

注意 1. 依高等代數學, 凡 n 次方程式, 必有 n 箇根, 知 (8) 式當有五箇根 (連虛數算入).

注意 2. 次之問題中, n 之值為正整數, x 與 y 之值不用虛數, 概不贅述.

[問 23] 設 $(x+y)^n$ 之展開式之第二項為 3, 第三項為 $\frac{15}{4}$, 第四項為 $\frac{5}{2}$, 求 n, x, y 之值.

[問 24] 設 $(x+y)^n$ 之展開式之第二項為 40, 第三項為 20, 第四項為 5, 求 n, x, y 之值.

例 2. 設 $(1+x)^n$ 之展開式之第二項第三項第四項係數, 成等差級數, 問 n 之值如何.

解. 第二項至第四項之係數為 ${}_nC_1,\ {}_nC_2,\ {}_nC_3$.

因 ${}_nC_1-{}_nC_2={}_nC_2-{}_nC_3$.

即 $n-\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{n(n-1)}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$.

各項同以 $\frac{6}{n}$ 乘之.

得 $6-3(n-1)=3(n-1)-(n-1)(n-2)$.

即 $6-3n+3=3n-3-n^2+3n-2$.

移右邊之各項於左邊.

$$n^2-9n+14=0.$$

解此二次式, 得 n 之二根爲 2 與 7.

若 $n=2$, 則第四項之係數爲 ${}_2C_3$, 依第 28 節注意 1 毫無意義, 故僅有一答爲 $n=7$.

[問 25] 設 $(1+x)^n$ 之展開式之第五項第六項第七項係數, 成等差級數, 問 n 之値如何.

例 3. 設 $(1+x)^n$ 之展開式連續三項之係數爲 6, 15, 20, 問 n 之値如何.

解. 展開式之第 r 項第 r+1 項第 r+2 項之係數, 令等於 6, 15, 20.

則 $$\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+2)}{1.2.3\cdots\cdots(r-1)}=6. \tag{1}$$

$$\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots r}=15. \tag{2}$$

$$\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r)}{1.2.3\cdots(r+1)}=20. \tag{3}$$

以 (1) 式之兩邊除 (2) 式之兩邊, 又以 (2) 式之兩邊除 (3) 式之兩邊.

得 $$\frac{n-r+1}{r}=\frac{5}{2}. \tag{4}$$

$$\frac{n-r}{r+1}=\frac{4}{3}. \qquad (5)$$

化 (4), (5) 二式爲簡單之式如次.

$$2n-7r=-2. \qquad (6)$$

$$3n-7r=4. \qquad (7)$$

以 (6) 式減 (7) 式得 $n=6$.

[問 26] 設 $(1+x)^n$ 之展開式連續三項之係數爲 36, 84, 126, 求 n 之值.

[問 27] 設 $(1+x)^n$ 之展開式連續三項之係數爲 35, 21, 7, 問 n 之值如何.

51. 係數之和

如次之二項展開式.

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1\times x+{}_nC_2\times x^2+\cdots\cdots+{}_nC_n\times x^n. \qquad (1)$$

設 $x=1$.

則 $2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n. \qquad (2)$

由此知 $(1+x)^n$ 之展開式各係數之和爲 2^n.

注意. 由上之證明, 可見第 39 節注意 1 之公式不誤.

又以 -1 代 (1) 式之 x.

則 $0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots\cdots$

$$=({}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots\cdots)-({}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots\cdots)$$

即 ${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots\cdots={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots\cdots$

由此知 $(1+x)^n$ 之展開式各奇數項係數之和, 等於各偶數項係數之和.

注意. 解組合之問題, 有用本節之定理之事.

例. 囊中有 n 箇互異之球，問取出之球為偶數，有若干不同之組合. [練習問題 II 之 24 題為 n 箇相同之球，今為 n 箇互異之球，兩題之解法，當然不同.]

解. 依本節之 (2) 式.

$${}_nC_0+{}_nC_1+\cdots\cdots+{}_nC_n=2^n.$$

因 $\quad {}_nC_0+{}_nC_2+\cdots\cdots={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots\cdots$

故 $\quad {}_nC_0+{}_nC_2+\cdots\cdots=\dfrac{2^n}{2}=2^{n-1}.$

即 $\quad 1+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots\cdots=2^{n-1}.$

兩邊各減 1.

得 $\quad {}_nC_2+{}_nC_4+\cdots\cdots=2^{n-1}-1.$

答數即 $2^{n-1}-1.$

52. 用二項定理求三項之諸乘冪之展開式

例. 求 $(1+x+x^2)^3$ 之展開式.

解.
$$\begin{aligned}(1+x+x^2)^3&=\{(1+x)+x^2\}^3\\&=(1+x)^3+3(1+x)^2x^2+3(1+x)x^4+x^6\\&=(1+3x+3x^2+x^3)+3(1+2x+x^2)x^2\\&\quad+3(1+x)x^4+x^6\\&=1+3x+3x^2+x^3+3x^2+6x^3+3x^4\\&\quad+3x^4+3x^5+x^6\\&=1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6.\end{aligned}$$

注意. 多項式之乘冪，亦可如二項式之乘冪之展開，求其公式，本書未記述此種多項定理.

[問 28] 求 $(x^2-x+1)^3$ 之展開式.

[問 29] 求 $(a^2+3a+1)^3$ 之展開式.

[問 30] 求 $(1-x+x^2)^4$ 之展開式.

53. 前節之續

例. 求 $(1+x+x^2)^8$ 之展開式中 x^{10} 之數係數.

解. 因 $(1+x+x^2)^8=\{(1+x)+x^2\}^8$. (1)

依二項定理展開, 其公項如次.

$${}_8C_r(1+x)^{8-r}(x^2)^r={}_8C_r(1+x)^{8-r}x^{2r}. \quad (2)$$

本題所求之 x^{10} 之數係數, 在依二項定理展開 (1) 式右邊之諸項之中 [卽在如 (2) 式之形之諸項之中], 但依二項定理展開, 其 x 之最低次之項, 猶比 x^{10} 爲高次者, 無庸計算, 而觀 (2) 式 x 之指數最小者爲 $2r$, 若 $2r>10$, 卽 $r>5$ 可斷其無含 x^{10} 之項. 又依二項定理展開, 其 x 之最高次之項, 猶比 x^{10} 爲低次者, 亦無庸計算, 而觀 (2) 式 x 之指數最大者爲 $8+r$, 若 $8+r<10$, 卽 $r<2$ 可斷其無含 x^{10} 之項. 由此知求 x^{10} 之數係數, 僅須於次之四式中求之.

$${}_8C_2(1+x)^6x^4,\ {}_8C_3(1+x)^5x^6,\ {}_8C_4(1+x)^4x^8,\ {}_8C_5(1+x)^3x^{10}.$$

故所求之數 $={}_8C_2+{}_8C_3\times5+{}_8C_4\times6+{}_8C_5$

$$=\frac{8.7}{1.2}+\frac{8.7.6}{1.2.3}\times5+\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\times6+\frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}$$

$$=28+280+420+56$$

$$=784.$$

[問 31] 求 $(1+x-x^2)^7$ 之展開式中 x^5 之數係數.

[問 32] 求 $(1-2x+3x^2)^7$ 之展開式中 x^5 之數係數.

[問 33] 求 $(1-3x+3x^2-x^3)^3$ 之展開中 x^4 之數係數.

54. 指數爲分數或負數之二項定理

以上數節所說明之二項定理，皆 n 爲正整數之情形，但其公式不拘 n 爲正分數或爲負整數及分數，皆能成立，因證明稍難，出乎本書之範圍，故僅述其結果，以備應用.

若 x 之値小於 1，指數 n 之値，無論爲正數負數整數分數，次之二項展開式皆能成立.

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$$

右邊任意接寫至若干項，永不能盡，惟 n 爲正整數，至第 n+1 項以後，各項皆爲零. 若 n 爲負整數及正或負之分數，其項數皆無窮，卽無窮級數.

例 1. 設 $x<1$，求展開 $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ 至第五項.

解. 以 $\frac{1}{2}$ 代本節二項展開式之 n.

則 $$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1.2.3}x^3$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1.2.3.4}x^4+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{128}x^4+\cdots\cdots$$

注意 1. $(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+x}$，故上式之右邊與 $1+x$ 之平方根同.

注意 2. 指數 n 非正整數，展開式之各項無窮，若 $x\geqq1$，有各項逐漸增大以至無限大之事，如 $n=-2$，$x=1$，卽發現此情形.

例 2. 設 $x<1$，求展開 $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ 至第五項.

解. 以 $-\frac{1}{2}$ 代本節二項展開式之 n.

則 $$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)x+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}x^2+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\cdots\cdots$$

[問 34] 計算 $\sqrt[3]{1+x}$ 至第四項.

[問 35] 展開 $\sqrt{1-2x}$ 至第五項.

[問 36] 展開 $(1+2x)^{-p}$ 至第五項.

[問 37] 展開 $(1-x)^{-m}$ 至第四項.

55. 計算近似值

用二項定理, 可推算某種之近似值.

如前節例 1 之式 $(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\cdots\cdots$

設 x 之值不僅微小於 1, 而甚小於 1, 則 x^2, x^3, …… 之值必極小, 故省略某項以後之各項, 可與 $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ 略相等, 應截取展開式之前幾項, 視欲求至小數若干位而定.

例 1. 求 $\sqrt[3]{1003}$ 之值至小數第三位.

解. $\sqrt[3]{1003}=(10^3+3)^{\frac{1}{3}}=10\left(1+\frac{3}{10^3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$=10\left\{1+\frac{1}{3}\times\frac{3}{10^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1.2}\times\frac{3^2}{10^6}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=10\left(1+\frac{1}{10^3}-\frac{1}{10^6}+\cdots\cdots\right)$$

$$=10(1+0.001-0.000001+\cdots\cdots)$$

$$=10\times1.000998\cdots\cdots$$

$$=10.009\cdots\cdots$$

例 3. 設 y 之值爲甚小於 1 之數, 其各次冪更小, 可以不計, 求次之式之近似值.

$$\frac{(1-4y)^{\frac{3}{5}}+(1+3y)^{-\frac{5}{2}}}{(1+6y)^{\frac{4}{3}}+(1+2y)^{-1}}$$

解. 所設之式$=\dfrac{1+\frac{3}{5}(-4y)+\cdots\cdots+1-\frac{5}{2}\times3y+\cdots\cdots}{1+\frac{4}{3}\times6y+\cdots\cdots+1-2y+\cdots\cdots}$

$$=\frac{1-\frac{12}{5}y+\cdots\cdots+1-\frac{15}{2}y+\cdots\cdots}{1+8y+\cdots\cdots+1-2y+\cdots\cdots}$$

$$=\frac{2-\frac{99}{10}y+\cdots\cdots}{2+6y+\cdots\cdots}$$

$$=\frac{1-\frac{99}{20}y+\cdots\cdots}{1+3y+\cdots\cdots}$$

$$=\left(1-\frac{99}{20}y+\cdots\cdots\right)\left(1+3y+\cdots\cdots\right)^{-1}$$

$$=\left(1-\frac{99}{20}y+\cdots\cdots\right)\left(1-3y+\cdots\cdots\right)$$

$$=1-\frac{159}{20}y+\cdots\cdots$$

所求之近似值爲 $1-\dfrac{159}{20}y$.

例 3. 求 $\sqrt[3]{999}$ 之近似值至小數第五位.

解. $\sqrt[3]{999}=(1000-1)^{\frac{1}{3}}=(10^3-1)^{\frac{1}{3}}$

$$=\left\{10^3\left(1-\frac{1}{10^3}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}=10\left(1-\frac{1}{10^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=10\left\{1+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{10^3}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1.2}\times\frac{1}{10^6}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=10\left(1-\frac{1}{3\times10^3}-\frac{1}{9\times10^6}-\cdots\cdots\right)$$

$$=10-\frac{1}{3\times10^2}-\frac{1}{9\times10^5}-\cdots\cdots$$

$$=10-\frac{0.01}{3}-\frac{0.00001}{9}-\cdots\cdots$$

$$=10-0.00333\cdots-0.0000011\cdots\cdots$$

$$=9.9966656\cdots\cdots$$

所求之近似值爲 9.99666.

[問 38] 計算 $\sqrt{98}$ 之值至小數第五位.

[問 39] 計算 $\sqrt[3]{998}$ 之值至小數第五位.

[問 40] 依二項定理展開 1.05^{10}, 然後精密計算至小數第五位.

練習問題 III

1. 展開次之各式.

(一) $(a+b)^7$　(二) $(2a^2-1)^6$　(三) $(1-2a)^6$

(四) $(2a+3b)^4$　(五) $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{2^{1}}\right)^4$　(六) $\left(x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{x^2}\right)^5$

2. 依二項定理求次之各值.

(一) 999^4　(二) 99^5

(三) 9997^3　(四) 100.1^5

3. 化次之三式爲簡單之式.

(一) $(x+\sqrt{y})^4+(x-\sqrt{y})^4$

(二) $(1+\sqrt{1-a^2})^5+(1-\sqrt{1-a^2})^5$

(三) $(a+\sqrt{a^2-1})^6+(a-\sqrt{a^2-1})^6$

4. 化 $2^n-\frac{n}{1}2^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\times2}2^{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^n$ 爲簡單之式.

5. n 爲正整數, 求證 $1-(3+x)^n$ 能以 $2+x$ 除盡.

6. 求 $(1+x)^{50}$ 之展開式之第四十九項.

7. 求 $(x^3+3xy)^9$ 之展開式之第六項.

8. 求 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$ 之展開式中含 x^6 之項.

9. 求 $\left(x^2+\frac{a^2}{x}\right)^{11}$ 之展開式中 x 之係數.

10. 求 $\left(\frac{2}{3}a-\frac{3}{2a}\right)^{12}$ 之展開式之中央項 [參觀第 43 節注意 2].

11. 求 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ 之展開式之中央項.

12. 求 $\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{14}$ 之展開式之中央項.

13. 求 $\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)^{12}$ 之展開式中 x^6 之係數.

14. 求 $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^3}\right)^{15}$ 之展開式中 x^{-20} 之數係數.

15. 求 $\left(x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{15}$ 之展開式中不含 x 之項.

16. 求證 $(1+x)^{2m}$ 之展開式中 x^m 之係數, 等於 $(1+x)^{2m-1}$ 之展開式中 x^m 之係數之二倍.

17. 求證 $(1+x)^{m+1}$ 之展開式中 x^r 之係數, 等於 $(1+x)^m$ 之展開式中 x^r 及 x^{r-1} 之係數之和.

18. 求 $(a^2-4x)^{25}$ 之展開式中 x^{r+5} 之係數.

19. 問 $(x^2-2x)^{10}$ 之展開式中含 x^{16} 之項爲第幾項.

20. 求證 $(1+x)^{p+q}$ 之展開式中 x^p 及 x^q 之兩係數相等.

21. 求證 $(x+1)^{m+n}$ 之展開式中 x^m 及 x^n 之兩係數相等.

22. 設 $(1+x)^{30}$ 之展開式中第 $r+4$ 項之係數, 與第 $2r+1$ 項之係數相等, 問 r 之値如何 [參觀第 33 節].

23. 設 $(1+x)^{2n}$ 之展開式中第 $r+4$ 項之係數，等於第 $n-2$ 項之係數，問 n 與 r 之關係如何.

24. 次之二式各求展開式中之最大係數.

(一) $(1+x)^7$　　(二) $(1+x)^{12}$

25. 次之二式展開，問第幾項之係數最大.

(一) $(a+x)^8$　　(二) $(x+a)^9$

26. 求 $(1+x+x^2)^3$ 之展開式中 x^4 之係數.

27. 求 $(1+x+x^2)^4$ 之展開式中 x^5 之係數.

28. 求 $(1-7x)^{\frac{1}{3}}$ 與 $(1+2x)^{-\frac{3}{4}}$ 之乘積之近似值 [省略 x 之指數爲 2 及大於 2 之各項].

29. 求 $\sqrt{4-x}$ 與 $\left(3-\frac{x}{2}\right)^{-1}$ 之乘積之近似值 [省略 x 之指數爲 2 及大於 2 之各項].

第五章

等差級數

56. 級數之定義

多數依次序排列，或由小而大，或由大而小，或正負相間，其各數互相關聯有一定之規則者，則此諸數相連謂之級數.

級數中之一數，謂之一項，自左而右，順次呼爲第一項第二項……其第一項或謂之初項，最後之一項或謂之末項，距初末二項相等之一項，謂之中央項.

級數之種類甚多，從成立級數之規則，而有種種之區別. 本書所講述者，爲等差級數，等比級數，調和級數三種.

注意. 本書所論之數皆實數，不涉及虛數.

57. 等差級數

多數相連排列，以相鄰二數之差，加於多數中之任何數，皆得其次之一數者，謂之等差級數.

代數學之書中，有時以 A. P. 表等差級數.

整數依自然之次序排列，如次之(一)式.

$1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (一)

其相鄰二數之差爲 1, 以 1 加於任何數, 皆得其次之數.

又 $2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (二)

此相鄰二數之差爲 $-\frac{1}{2}$, 以 $-\frac{1}{2}$ 加於任何數, 皆得其次之數.

故上之二組之數, 皆爲等差級數.

等差級數之各項, 皆由以一定之數與其前項相加而得. 此一定之數, 謂之**公差**.

如 (一) 之公差爲 1, (二) 之公差爲 $-\frac{1}{2}$.

注意. 級數之各項次第增大者, 公差爲正數, 其級數名曰遞昇等差級數, 各項次第減少者, 公差爲負數, 其級數名曰遞降等差級數, 如前之 (一) 爲遞昇等差級數, (二) 爲遞降等差級數.

58. 公項

以代數式表級數中之任何項, 謂之公項. 如知等差級數之初項與公差, 則其級數之各項, 皆可推求而得.

設初項爲 a, 公差爲 d, 則第二項爲 $a+d$, 第三項爲 $a+2d$, 第四項爲 $a+3d$, 餘可類推.

全級數爲 $a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, \cdots\cdots\cdots\cdots$

其各項 d 之係數, 比其項數少 1.

以 n 代其項數, 則第 n 項爲 $a+(n-1)d$.

其 n 以 1, 2, 3, 4, …… 次第代之, 卽得等差級數之第一項, 第二項, 第三項, 第四項…………

故 $a+(n-1)d$, 卽等差級數初項 a 公差 d 之公項. 此公項以英文第七字母 G 表之.

則 $G=a+(n-1)d$ …………………………………… (1)

例 1. 設初項爲 2, 公差爲 $-\frac{1}{2}$, 求等差級數之公項及第十項.

解. 以 2, $-\frac{1}{2}$ 代公式 (1) 之 a, d.

得 $G=2+(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5-n}{2}$.

以 10 代 n.

得 $\text{第十項}=\frac{5-10}{2}=-\frac{5}{2}$.

例 2. 求偶數連續從 2 起之第 k 項.

解. 從 2 起之各偶數連續, 卽初項 2 公差 2 之等差級數, 以 2, 2, k 代公式 (1) 之 a, d, n.

得 $G=2+(k-1)\times 2=2k$. 答 2k.

59. 推廣等差級數公項之公式之用

表公項之公式爲 $G=a+(n+1)d$, 此式含 G, a, d, n 四要素, 知任何三要素之值, 皆能求得其餘一要素之值.

從上之公式化得次之三公式.

$$a=G-(n-1)d.$$

$$d=\frac{G-a}{n-1}.$$

$$n=\frac{G-a+d}{d}.$$

由此三式, 知 G, d, n 可求 a, 知 G, a, n 可求 d, 知 G, a, d 可求 n.

注意. a, d, G 之値, 可正可負, n 表項數, 常爲正整數, 因此從 G, a, d 求 n, 若所得非正整數, 不宜採用.

例 1. 知奇數連續之第五項爲 21, 求初項.

解. 以 21, 2, 5 代化得三公式中第一式之 G, d, n.

得 $a=21-(5-1)\times2=13.$ 答 13.

例 2. 等差級數之初項 120, 第十七項 100, 求公差.

解. 以 100, 120, 17 代化得三公式中第二式之 G, a, n.

得 $d=\frac{100-120}{17-1}=-\frac{5}{4}.$ 答 $-\frac{5}{4}.$

例 3. 等差級數之初項 −5, 公差 2, 問第幾項之値爲 8.

解. 以 −5, 2, 8 代化得三公式中第三式之 a, d, G.

得 $n=\frac{8-(-5)+2}{2}=\frac{15}{2}.$

依上之注意, 項數 n 宜爲正整數, 今 n 之値爲分數, 不宜採用, 即無合於本題之答.

60. a, d, n, G 四要素之中, 設僅知二要素之値, 但其他之要素, 能與已知之二要素成立兩箇關係式, 卽可利用二元聯立方程式之解法, 求其未知二要素之値. 若三要素或四要素之値爲未知之數, 必須有三箇或四箇關係式, 然後可求.

例 1. 設等差級數之第十五項爲 100, 第二十一項爲 148, 求初項.

解. 以 100, 15 代前節化得三公式中第二式之 G, n.

得 $d=\dfrac{100-a}{14}$.

又以 148, 21 代第二式之 G, n.

得 $d=\dfrac{148-a}{20}$.

上二式之左邊同爲 d, 依聯立方程式之解法, 可消去未知數之 d.

令 $\dfrac{148-a}{20}=\dfrac{100-a}{14}$, 解此式得 $a=-12$.　答　-12.

例 2. 知等差級數初項至第四項之和爲 20, 其初項與第四項之積爲 16, 求級數之各項.

解. 以 $x-3y$, $x-y$, $x+y$, $x+3y$ 表此級數之四項解之.

因四項之和爲 $4x$.

故　$4x=20$……………………………………(1)

又初項與第四項之積爲 x^2-9y^2.

故 $x^2-9y^2=16$……………………………………(2)

用二元二次聯立方程式之解法解之.

從 (1) 式得 $x=5$.

以 5 代 (2) 式之 x.

則 $25-9y^2=16$, 化得 $y^2=\frac{25-16}{9}=1$.

開平方 $y=\pm 1$.

以 5 與 1 代入所設級數之四項.

得 2, 4, 6, 8.

又以 5 與 −1 代入所設級數之四項.

得 8, 6, 4, 2.

求得之兩級數, 惟排列之次序不同, 而其數則同.

注意. 凡求級數遇如上之情形者, 宜全採用, 卽本題有二組答數, 一爲 2, 4, 6, 8, 一爲 8, 6, 4, 2.

例 3. 設等差級數之初項爲 $\frac{5a}{3+\sqrt{7}}$, 第四項爲 $\frac{4a}{2\sqrt{7}-5}$, 求此級數之第十項.

解. 以 $\frac{5a}{3+\sqrt{7}}$, $\frac{4a}{2\sqrt{7}-5}$, 4. 代前節化得三公式中第二式之 a, G, n.

$$得\quad d=\frac{\frac{4a}{2\sqrt{7}-5}-\frac{5a}{3+\sqrt{7}}}{4-1}.$$

即 $d=\dfrac{(37-6\sqrt{7})a}{3(2\sqrt{7}-5)(3+\sqrt{7})}$ ……………………(1)

又以 $\dfrac{5a}{3+\sqrt{7}}$, 10. 代第二式之 a, n.

得 $d=\dfrac{G-\dfrac{5a}{3+\sqrt{7}}}{10-1}$.

即 $d=\dfrac{(3+\sqrt{7})G-5a}{9(3+\sqrt{7})}$ ……………………(2)

上二式之左邊同爲 d.

故 $\dfrac{(3+\sqrt{7})G-5a}{9(3+\sqrt{7})}=\dfrac{(37-6\sqrt{7})a}{3(2\sqrt{7}-5)(3+\sqrt{7})}$.

化得 $G=\dfrac{2(43-4\sqrt{7})a}{(3+\sqrt{7})(2\sqrt{7}-5)}$.

即 $G=\dfrac{2(43-4\sqrt{7})a}{\sqrt{7}-1}$.

分母子同以 $\sqrt{7}+1$ 乘之.

則 $G=\dfrac{(\sqrt{7}+1)(43-4\sqrt{7})a}{3}$

$=(13\sqrt{7}+5)a.$ 答 $(13\sqrt{7}+5)a$.

注意. 凡運算之結果, 分母含有無理者, 宜化之爲有理數. 學生之數學實力未充足時, 演算常有粗略之弊, 此等處最宜留意.

[問 1] 有六項之等差級數, 知初項爲 7, 公差爲 6. 求其各項之數及公項之式.

[問 2] 知等差級數之初項 4 公差 3, 求其第二十六項及第三十五項.

[問 3] 設等差級數之初項爲 a, 次項爲 b, 求其公項.

[問 4] 設等差級數之某項爲 a, 其次項爲 b, 問從 a 起遞數之第 n 項如何.

[問 5] 有三項之等差級數, 初項至第三項之和爲 21, 三項之連乘積爲 168, 問三項各若干.

(此題以 $x-y$, x, $x+y$ 表級數之三項解之, 較便利.)

[問 6] 有三項之等差級數, 其各項之和爲 15, 各項平方之和爲 83, 問三項各若干.

[問 7] 分 20 爲四項之等差級數, 其初末二項之乘積與中二項之乘積之比, 若 2:3, 問四項各若干.

(此題以 $x-3y$, $x-y$, $x+y$, $x+3y$ 表級數之四項, 運算較便.)

[問 8] 有等差級數, 其初項與第五項之和爲 38, 第四項與第九項之和爲 26, 求初項及公差.

[問 9] 有等差級數, 知初項爲 -10, 第十項爲 17, 問從第幾項起爲正數.

注意. 四項之等差級數, 常宜以 $x-3y$, $x-y$, $x+y$, $x+3y$ 表各項解之, 五項常宜以 $x-2y$, $x-y$, x, $x+y$, $x+2y$ 表各項解之, 餘可類推.

61. 等差中項

設 a 與 b 爲已知之二數, 今欲於此二數之間, 插入 m 項, 使全體成等差級數, 求插入之各項.

此等差級數，共有 $m+2$ 項，初項爲 a，第 $m+2$ 項爲 b，假定 d 爲公差，依第 58 節之公式 (1)，得 $a+(m+2-1)d=b$.

故　$d=\dfrac{b-a}{m+1}$ ……………………………………(2)

由 (2) 式得所求之各項爲 $a+\dfrac{b-a}{m+1}$, $a+2\dfrac{b-a}{m+1}$, ………$a+m\dfrac{b-a}{m+1}$.

即　$\dfrac{ma+b}{m+1}$, $\dfrac{(m-1)a+2b}{m+1}$, ……$\dfrac{a+mb}{m+1}$.

其中之第 r 項爲 $a+r\dfrac{b-a}{m+1}$ 即 $\dfrac{(m-r+1)a+rb}{m+1}$.

插入 a 與 b 二數中間之各項，統名之曰 a 與 b 二數之**等差中項**，或稱爲**等差內項**.

若僅插入一項於 a 與 b 二數之間，則 $m=1$.

故　$d=\dfrac{b-a}{1+1}=\dfrac{b-a}{2}$.

所求之中項爲 $a+\dfrac{b-a}{2}$，即 $\dfrac{a+b}{2}$.

因　$\dfrac{a+b}{2}$ 爲 a, b 二數相加平均數，故二數之間求插入一項，使成等差級數，與求二數之相加平均數等.

注意. 觀本節之各公式, 知 m 之值愈大, 則插入 a 與 b 間之項數愈多, 而公差甚小, m 之值至極大時, 公差與零接近, 全級數中之相鄰二項之值, 亦必接近.

例 1. 2 與 30 之間, 欲插入六項, 使成等差級數, 求級數之各項.

解. 以 2, 30, 6 代公式 (2) 之 a, b, m.

則 $d=\dfrac{30-2}{6+1}=4.$

故所求之級數爲 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30.

例 2. 欲於 12 與 58 之間, 插入二十二項, 使成等差級數, 問插入之第七項若干.

解. 插入之公項式爲 $\dfrac{(m-r+1)a+rb}{m+1}$.

以 12, 58, 22, 7 代 a, b, m, r.

$$\text{得插入之第七項}=\frac{(22-7+1)\times 12+7\times 58}{22+1}$$

$$=26.$$

答 26.

[問 10] 22 與 46 之間, 插入若干項成等差級數, 知級數之第三項爲 30, 問共插入幾項.

[問 11] 2 與 -1 之間, 插入五項, 成等差級數, 求級數之第四項.

[問 12] 問何數與 $\sqrt{2}+1$ 之相加平均數爲 $\sqrt{2}-1$.

[問 13] a, b 二數間, 插入 m 項, 成等差級數, 問自 a 起之第 r 項如何.

62. 等差級數之相鄰二項間,各插入項數相同之等差中項,則全體成一新等差級數.

設已知之等差級數爲 a, b, c, d, ……………

每二項之間,各插入 m 項,使與原有之二項成等差級數.

則　a, b 間之公差爲 $\frac{b-a}{m+1}$.

b, c 間之公差爲 $\frac{c-b}{m+1}$.

c, d 間之公差爲 $\frac{d-c}{m+1}$.

餘類推.

因　a, b, c, d, ……… 爲等差級數.

則　$b-a=c-b=d-c=\cdots\cdots\cdots\cdots$

故　$\frac{b-a}{m+1}=\frac{c-b}{m+1}=\frac{d-c}{m+1}=\cdots\cdots\cdots\cdots=k.$

卽此等諸公差皆相等.

由此知新等差級數之公差爲 k, 原級數與新級數之初項同爲 a, 原級數之第二項 b, 爲新級數之第 m+2 項, 原級數之第三項 c, 爲新級數之第 2m+3 項, 原級數之第四項 d, 爲新級數之第 3m+4 項, 餘可類推.

原級數之第 r 項, 與新級數之第 (r−1) m+r 項相當.

例 1. 某等差級數之各項中間，各插入三項，成新等差級數，問原級數之第八項，爲新級數之第幾項.

解. 以 3, 8 代 $(r-1)m+r$ 之 m, r.

得 $(8-1)3+8$，卽 29. 答 第二十九項.

例 2. 從 1 起，順次以整數連續，今於此各數之間，各插入項數相同之等差中項，只云 1 與 2 之間插入之第二項之四倍，等於 5 與 6 之間插入之第三項，問各數間同插入幾項.

解. 第 61 節中表插入第 r 項之代數式爲 $\dfrac{(m-r+1)a+rb}{m+1}$.

以 1, 2, 2 代上式之 a, b, r.

得 $\dfrac{(m-2+1)\times1+2\times2}{m+1}$，卽 $\dfrac{m+3}{m+1}$.

又以 5, 6, 3 代上式之 a, b, r.

得 $\dfrac{(m-3+1)\times5+3\times6}{m+1}$，卽 $\dfrac{5m+8}{m+1}$.

依題意 $\dfrac{5m+8}{m+1}=\dfrac{4(m+3)}{m+1}$.

故 $5m+8=4m+12$.

移項得 $m=4$. 答 四項.

63. 等差級數之和

設等差級數之初項爲 a，公差爲 d，末項爲 l，項數爲 n，級數之和爲 S.

順次記級數之各項.

則　$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+\{a+(n-1)d\}$.

又逆記級數之各項.

則　$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+\{l-(n-1)d\}$.

兩式相加，得 $2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots$ 至 n 項止.

故　$2S=n(a+l)$.

兩邊同以 2 除之.　$S=\frac{n}{2}(a+l)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

此爲有等差級數之初項末項及項數求總和之公式.

又以 $a+(n-1)d$ 代 (3) 式之 l.

得　$S=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

此爲有等差級數之初項公差及項數求總和之公式.

例 1.　設等差級數之初項爲 -12，末項爲 148，共二十一項，問總和若干.

解.　以 -12, 148, 21 代公式 (3) 之 a, l, n.

得　$S=\frac{21}{2}(-12+148)=1428$.　　答　1428.

例 2.　有等差級數 $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\cdots\cdots$ 至第八項止.

求各項之和

解.　從第二項減初項.

得　$d=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=1$.

以 $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, 1, 8 代公式 (4) 之 a, d, n.

$$S=\frac{8}{2}\left\{2\times\frac{1}{\sqrt{2}+1}+(8-1)\times 1\right\}$$

$$=4\left(\frac{2}{\sqrt{2}+1}+7\right)$$

$$=\frac{4(9+7\sqrt{2})}{\sqrt{2}+1}.$$

分母子同以 $\sqrt{2}-1$ 乘之.

$$S=4(9+7\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$$

$$=8\sqrt{2}+20.$$ 答 $8\sqrt{2}+20$.

例 3. 有 $2n+1$ 項之等差級數, 求證奇數項總和與偶數項總和之比, 等於 $n+1$ 與 n 之比.

解. 設此級數之初項爲 a, 公差爲 d, 奇數項共有 $n+1$ 項, 偶數項共有 n 項.

因奇數項之初項爲 a, 公差爲 2d, 以 S 表奇數項之總和.

則 $S=\frac{n+1}{2}\left\{2a+(n+1-1)2d\right\}=(n+1)(a+nd)$.

又偶數項之初項爲 $a+d$, 公差爲 2d, 以 S' 表偶數項之總和.

則 $S'=\frac{n}{2}\left\{2(a+d)+(n-1)2d\right\}=n(a+nd)$.

故 $\frac{S}{S'}=\frac{(n+1)(a+nd)}{n(a+nd)}=\frac{n+1}{n}$.

[問 14] 設等差級數之初項爲 $\frac{3}{2}$, 第七項爲 3, 求從第十項至第二十項之和.

[問 15] 有 n 項之等差級數 $(a+b)^2$, a^2+b^2, $(a-b)^2$,……求其總和.

[問 16] 有項數爲 n 之等差級數 $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n-2}{n}$, $\frac{n-3}{n}$,……求其總和.

[問 17] 求證等差級數 8, 16, 24, 32,……從初項至任何項之總和加 1, 皆等於某奇數之平方.

注意. 設 n 爲任意之整數, 則一切奇數, 知可以 $2n+1$ 或 $2n-1$ 表之.

[問 18] 求證從 1 起連續奇數之和, 皆等於項數之平方數.

[問 19] a 與 b 之間, 插入 n 項, 成等差級數, 求插入各項之總和.

64. 前節公式 (3) 之 a, l, n, S, 與公式 (4) 之 a, d, n, S, 俱爲公式之要素, 無論有何三要素之値, 皆易求得其餘一要素之値.

從公式 (3) 化得次之三公式.

$$n=\frac{2S}{a+l}.$$

此爲知等差級數之初項末項及總和求項數之公式.

$$a=\frac{2S-nl}{n}.$$

此爲知等差級數之總和及項數與末項求初項之公式.

$$l=\frac{2S-na}{n}.$$

此爲知等差級數之總和及項數與首項求末項之公式.

從公式(4)化得次之二式.

$$a=\frac{2S-n(n-1)d}{2n}.$$

此爲知等差級數之總和及項數與公差求初項之公式.

$$dn^2+(2a-d)n-2S=0.$$

此爲知等差級數之公差及初項與總和求項數之方程式.

(3), (4) 兩公式所含四要素之中, 若僅知二要素之值, 但有此等要素之兩個關係式, 卽能求其餘二要素之值, 凡有若干未知之要素, 必須有若干關係式, 如四要素中有三要素或四要素未知其值, 卽須有三箇或四箇關係式, 然後可求.

注意. 從上之方程式求 n 之值, 須用一元二次方程式之解法, 故項數常有二答, 若求得之項數爲分數或負數, 不宜採用, 又知項數及初項與總和, 亦可從上之方程式求公差.

例 1. 有八項之等差級數, 知初項爲 15, 總和爲 40, 求其公差.

解. 用上之方程式, 以 8, 15, 40 代 n, a, S.

得 $8^2d+(2\times15-d)\times8-2\times40=0.$

即 $(8^2-8)d+2\times15\times8-2\times40=0.$

移項 $(8^2-8)d=2\times40-2\times15\times8.$

兩邊同以 8 除之.

得 $(8-1)d=2\times5-2\times15.$

故 $d=-\frac{20}{7}.$　　答 $-\frac{20}{7}.$

例 2. 問等差級數 1, 5, 9,……幾項之和適等於 190.

解. 以 1, 4, 190 代方程式之 a, d, S.

得 $4n^2+(2\times1-4)n-2\times190=0.$

各項同以 2 約之, 即 $2n^2-n-190=0.$

分解因數 $(n-10)(2n+19)=0.$

故 $n=10$ 或 $-\frac{19}{2}.$

項數宜用正整之數, $-\frac{19}{2}$ 不適用.　　答 10.

例 3. 等差級數之第六項爲 49, 第十一項爲 51, 問第十七項若干, 又問自初項至第幾項之總和爲 800.

解. 先求級數之初項與公差, 以 a 代初項, d 代公差.

則 $a+5d=49,\ a+10d=51.$

依二元一次聯立方程式之解法, 得 $a=47,\ d=\frac{2}{5}.$

以 47, $\frac{2}{5}$, 17. 代第 58 節公式 (1) 之 a, d, n.

得　第十七項$=47+(17-1)\times\frac{2}{5}=\frac{267}{5}$.　　答　$\frac{267}{5}$.

又以 $47, \frac{2}{5}, 800$. 代入本節求項數之方程式.

則, $\frac{2}{5}n^2+\left(2\times47-\frac{2}{5}\right)n-2\times800=0$.

各項同以 5 乘之, 2 除之.

得　$n^2+234n-4000=0$.

分解因數 $(n-16)(n+250)=0$.

故　$n=16$ 或 -250.

棄 n 之負值.　　答　第十六項.

注意. 等差級數之和 $a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+\{a+(n-1)d\}$, 有時省略稱爲等差級數.

[問 20] 等差級數 $5+7+9+\cdots\cdots$ 之和爲 480, 求其項數.

[問 21] 等差級數之初項 3, 末項 27, 總和 495, 問項數若干.

[問 22] 等差級數之第二項 5, 第五項 -1, 問從初項起至第幾項之總和爲 12.

[問 23] 等差級數之第七項爲 12, 第十二項爲 7, 總和爲 171, 求其項數.

[問 24] 等差級數 $1\frac{1}{2}+3+4\frac{1}{2}+6+\cdots\cdots$ 之總和爲 99, 求其項數.

[問 25] 等差級數之初項與第三項之和爲 24, 第二項與第六項之和爲 18, 全級數之總和爲 63, 問項數若干.

*[問 26]　等差級數之初項 -10, 第十項 17, 問從初項起至第幾項之總和始爲正數.

[問 27]　等差級數從初項至第四項之和爲 68, 第六項至第十項之和爲 30, 求其第十五項至第三十項之和.

*[問 28]　等差級數從初項至第 m 項之和爲 n, 從初項至第 n 項之和爲 m, 求從初項至第 m+n 項之和.

65. a, d, n, l, S 五箇要素之中, 但能知三要素之值, 代入第 63 節之 (3), (4) 兩公式, 皆可依二元聯立方程式之解法, 求其餘二要素之值.

例 1. 知等差級數之初末兩項及公差, 求總和.

解. 用第 63 節求總和之 (3), (4) 兩公式.

$$S=\frac{n}{2}(a+l).$$

$$S=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}.$$

此兩式中 a, l, d 皆已知之數, S, n 爲未知之數, 故依二元聯立方程式之解法消去 n, 卽可得求 S 之公式.

從第一式得 $n=\frac{2S}{a+l}$, 以右邊代第二式之 n.

則 $S=\frac{S}{a+l}\left\{2a+\left(\frac{2S}{a+l}-1\right)d\right\}.$

兩邊同以 a+l 乘之.

得 $(a+l)S=2aS+\left(\frac{2S^2}{a+l}-S\right)d.$

兩邊同以 S 除之.

得 $a+l=2a+\left(\frac{2S}{a+l}-1\right)d.$

又同以 $a+l$ 乘之, 得 $(a+l)^2=2a(a+l)+2dS-(a+l)d.$

移項變號, 卽 $2dS=(a+l)^2-(a+l)(2a+d).$

故 $S=\frac{(a+l)(l+d-a)}{2d}.$

例 2. 求 111 與 311 之間諸偶數之和.

解. 其最小之偶數爲 112, 最大之偶數爲 310, 相連二數之差同爲 2, 可用例 1 有初末兩項及公差求總和之公式求之.

以 112, 310, 2. 代公式之 a, l, d.

$$\begin{aligned}得\quad S&=\frac{(112+310)(310+2-112)}{2\times2}\\&=\frac{422\times200}{4}\\&=422\times50\\&=21100.\end{aligned}$$

答 21100.

[問 29] 求一百與五百之間能以 9 除適盡之諸數之和.

[問 30] 求二百與四百之間能以 7 除適盡之諸數之和.

[問 31] 求證一百至一千之間以 7 除適盡之諸數之和爲七萬零三百三十六.

［問 32］ 問三百以內能以 7 除適盡者共有若干數，又問能以 7 除之諸數之和若干.

［問 33］ 問三位之數能以 9 除適盡之諸數之和.

［問 34］ 問三位之奇數共有若干，又問其奇數之和若干.

66. 應用問題

例 1. 有邊數爲 n 之凸多角形，其諸角之度數成遞昇等差級數，知最小之度數爲 a，求其公差.

解. 以 d 代公差，依第 63 節之公式 (3)，求得多角形之內角之和.

$$\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}\text{度}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又依幾何學之定理，從邊數之二倍減 4，餘以一直角之度數乘之，亦得多角形之內角之和.

$$90(2n-4)\text{度}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此 (1)，(2) 兩式之度數相等.

故 $\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}=90(2n-4).$

兩邊同以 2 乘之.

得 $n(n-1)d+2an=2(180n-360).$

移項 $n(n-1)d=2n(180-a)-720.$

去 d 之係數.

$d=\frac{2n(180-a)-720}{n(n-1)}$.　　答 $\frac{2n(180-a)-720}{n(n-1)}$.

例 2. 甲從某地出發，初日行一里，其後逐日增加一里，五日以後，乙於同地出發，依甲行之路線而行，每日行十二里，問乙行幾日與甲相會，並說明答數之意味.

解. 以 x 代乙行至與甲相會之日數.

則 $x+5$ 爲甲與乙會甲共行之日數.

$12x$ 爲乙所行之里數.

$(1+2+3+4+5)+\{6+7+\cdots+(6+x-1)\}$ 爲甲行之里數.

故 $\frac{x}{2}(x+11)+15=12x$.

兩邊同以 2 乘之.

$x^2+11x+30=24x$.

移項.

$x^2-13x+30=0$.

分解因數.

$(x-3)(x-10)=0$.

知 $x=3$ 或 10.　　答 三日或十日.

答之意味　三日爲乙與甲初次相會，十日爲乙與甲第二次相會，初次相會之後，每日甲所行之里數，猶少於乙行之里數，至第二次相會以後，每日甲所行之里數，皆多於乙行之里數，故不能有第三次相會，通例僅求初會之日數，可不用第二答.

[問 35]　直角三角形之三邊俱爲整數，夾直角之兩邊之差爲三寸，斜邊與夾直角之大邊亦差三寸，問三邊各幾何.

[問 36]　凸多角形諸內角之度數，成等差級數，其公差爲 4 度，最大角爲 172 度，求其邊數.

[問 37]　某人之遺產四千五百圓，依其子之長幼分配，遞減一百五十圓，只云長子所得之數，等於最幼者所得之二倍，問有子幾人.

[問 38]　甲從某地出發，每一點鐘行二里半，已行三點鐘之後，乙從同地出發追之，最初之一點鐘行三里，每歷一點鐘加速半里，問乙行幾點鐘追及甲.

[問 39]　銅幣廠前，由近而遠有銅十塊置於途中，最近者距廠十步，餘遞隔五步，廠中派一人運銅入廠，每次僅運一塊，問運銅之人共行若干步始能運畢.

[問 40]　以索繫輕重二球，置於滑車之上，重球下降而輕球上昇，最初之一秒鐘，重球下降三公分，第二秒鐘又下降九公分，成遞降之等差級數，問輕球在重球上 1.5 公尺之時，距初下降時幾秒.

[問 41]　某廠有織布機二十三架，每機於一點鐘時間織布 19.5 尺，今第一機於上午九點鐘時開始運轉，其餘各機之運轉遞遲五分鐘，問至本日下午一時停止運轉，共織成布幾何.

練習問題　I

1.　求證以相同之數加於等差級數之各項，亦爲等差級數.

2.　求證以任何數徧乘等差級數之各項，亦爲等差級數.

3. 求證奇數項之等差級數其初項中央項末項亦爲等差級數.

4. 求證順次以等差級數之 n 項集合爲一羣, 則其諸羣亦成等差級數, 其公差與原級數之公差之比, 如 $n^2:1$.

*5. 有等差級數, 其初項至第 n 項之和與 n 項後之 $2n$ 項之和之比, 而與 n 之值無關, 問此級數之 (公差 : 初項) 如何.

*6. 有初項 a 公差 r 之等差級數, 自第三項起, 各項以 d 加之, 自第四項起, 各項以 $2d$ 加之, 自第五項起, 各項又以 $3d$ 加之, 如是累加, 求第 n 項之值.

*7. 有級數爲 $1+(2+3)+(4+5+6)+(7+8+9+10)+\cdots\cdots$ 求第 n 項之諸數之和.

*8. 有級數爲 $1+(3+5)+(7+9+11)+(13+15+17+19)+\cdots\cdots$ 求證第 n 項之諸數之和爲 n^3.

9. a, b, c 爲等差級數, 求證 $a^2(b+c), b^2(c+a), c^2(a+b)$ 亦爲等差級數.

10. a^2, b^2, c^2 爲等差級數, 求證 $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ 亦爲等差級數.

*11. a, b, c 爲等差級數, 求證次之三次式.

$$\frac{2}{9}(a+b+c)^3=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b).$$

12. 設等差級數之公差等於初項之二倍, 求證從初項起至第 m 項之和與至第 n 項之和之比爲 $m^2:n^2$.

13. 設等差級數自初項至第十二項之和爲 354, 而其中之偶數項之和與奇數項之和之比, 若 32:27, 求其公差.

*14. 有 P 項之等差級數, 其第 m 項爲 M, 第 n 項爲 N, 求其總和.

*15. 設等差級數 n 項之和爲 n (5n−3), 間第 P 項如何.

第六章
等比級數

67. **定義**多數相連排列,以某數乘多數中之任何數,皆等於其次之一數者,謂之**等比級數**.

代數學之書中,有時以 G. P. 表等比級數.

設有級數式爲 1, 2, 4, 8, 16 ………………………… (一)

以 2 乘任何數,皆等於其次之一數.

又設級數式如 18, 6, 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, ……………………… (二)

以 $\frac{1}{3}$ 乘任何數,皆等於其次之一數.

故此二組之數,皆爲等比級數.

等比級數之各項,皆由以一定之數與其前項相乘而得,此一定之數,謂之**公比**.

如 (一) 之公比爲 2, (二) 之公比爲 $\frac{1}{3}$.

68. **公項**

以代數式表級數中之任何項,謂之公項,知等比級數之初項與公比,則其級數之各項皆可推求而得.

設初項爲 a, 公比爲 r.

則第二項爲 ar, 第三項爲 ar^2, 第四項爲 ar^3, 餘可類推.

全級數爲 a, ar, ar^2, ar^3, ……………………………………

其各項 r 之指數, 比其項數少 1.

以 n 代項數, 則第 n 項爲 ar^{n-1}.

此卽等比級數初項爲 a 公比爲 r 之公項.

以英文第七字母 G 表此公項.

則　$G=ar^{n-1}$……………………………………………(5)

69. 上式含 G, a, r, n 四要素, 知任何三要素之值, 皆能求得其餘一要素之值.

從公式 (5) 化得次之三式.

$$a=\frac{G}{r^{n-1}}.$$

$$r=\sqrt[n-1]{\frac{G}{a}}.$$

$$^{*}n=\frac{\log G-\log a}{\log r}+1.$$

公式 (5) 及此三公式, 爲知四要素 G, a, r, n 中三要素之值, 求其餘一要素之值之用.

注意第一. 知 a, r, n 求 G, 及知 G, r, n 求 a, 用上之公式皆便利, 若知 G, a, n 求 r, 惟 n−1 之值為 2, 3, 可由開平方或開立方而得 r 之值, n 之值稍大, 須開高次方, 假途於對數求之較便, 凡求 r 開幾次方, 卽有幾答, 但本書限用實數, 遇為虛數時, 不宜採用.

注意第二. 知 G, a, n 求 r, 及知 G, a, r 求 n, 除用對數計算之外, 有時能以特別之方法求之.

例 1. 知等比級數之初項 −5, 公比 −2, 求其第六項.

解. 以 −5, −2, 6 代公式 (5) 之 a, r, n.

得 $G=(-5)(-2)^{6-1}=160.$ 　　　答 160.

例 2. 知等比級數之初項 $\frac{5}{81}$, 公比 −3, 問第幾項為 45.

解. 以 $\frac{5}{81}$, −3, 45. 代公式 (5) 之 a, r, G.

得 $45=\frac{5}{81}(-3)^{n-1}.$

卽 $5\times3^6=5\times(-3)^{n-1}.$

兩邊同以 5 除之.

得 $3^6=(-3)^{n-1}.$

因負數之偶次冪與正數同.

故 $(-3)^6=(-3)^{n-1}.$

由此知 $n-1=6.$

兩邊各加 1, 得 $n=7$.　　答　第七項.

注意. 本題之解, 卽不用對數計算而用特別方法之一例也.

70. 四要素 a, r, n, G 之中, 僅知其二要素之值, 若能成立兩箇關係式, 卽可利用二元聯立方程式之解法, 求其餘二要素之值, 設四要素中之三要素或四要素未知其值, 必須有三箇或四箇關係式, 然後可求.

例 1. 設等比級數之第三項爲 32, 第六項爲 2048, 問全級數如何.

解. 先以 32, 3 代公式 (5) 之 G, n.

則　$32=ar^2$ ……………………………………(1)

又以 2048, 6 代公式 (5) 之 G, n.

則　$2048=ar^5$ ……………………………………(2)

以 (1) 式之兩邊各除 (2) 式之兩邊.

得　$\frac{2048}{30}+\frac{ar^5}{ar^2}$.

卽　$r^3=64$.

兩邊各開立方, $r=4$.

以 4 代 (1) 式右邊之 r.

得　$a=2$.

故知所求之級數爲 2, 8, 32, 128, 512, 2048, …………

例 2. 分 195 爲三部分，令其三部分成等比級數，且令第三項等於第一項與 120 之和.

解. 以 a, ar, ar^2 表所求之三部分，依題意得次之二式.

$$a+ar+ar^2=195 \cdots\cdots (1)$$

$$ar^2=a+120 \cdots\cdots (2)$$

以 (2) 式之右邊代 (1) 式左邊之 ar^2.

則 $a+ar+a+120=195$.

化得 $a=\dfrac{75}{2+r} \cdots\cdots (3)$

以 (3) 式之右邊代 (1) 式左邊之 a.

則 $\dfrac{75}{2+r}(1+r+r^2)=195$.

兩邊同以 15 除之，$2+r$ 乘之.

得 $5r^2+5r+5=26+13r$.

移項 $5r^2-8r-21=0$.

分解因數 $(r-3)(5r+7)=0$.

由此知 $r=3$ 或 $-\dfrac{7}{5}$.

以 r 之值代入 (3) 式，得 $a=15$ 或 125.

故所求之三數爲 15, 45, 135, 或 125, -175, 245.

注意. 本題求 r 之值，須開二次方，故其值有二.

［問 1］ 設等比級數之初項 1，公比 3，求此級數之前五項及公項.

［問 2］ 有四項之等比級數，前二項之和 63，後二項之和 112，問四項各若干.

［問 3］ 有四項之等比級數，第一項與第四項之和 3.375，第二項與第三項之和 2.25，問四項各若干.

［問 4］ 有四項之等比級數，兩外項之和 35，兩內項之和 30，問四項各若干.

注意. 解前之三題，俱以 $\frac{x^2}{y}, x, y, \frac{y^2}{x}$ 表級數之四項爲便利.

［問 5］ 2 與 9 之間插入二數，令前之三數成等差級數，後之三數成等比級數，問插入之二數各若干.

［問 6］ 4 與 12 之間插入二數，令前之三數成等比級數，後之三數成等差級數，問插入之二數各若干.

［問 7］ 有三項之等比級數，其和爲 21，各數之平方之和爲 189，問三項各若干.

注意. 解此題以 x^2, xy, y^2 表級數之三項較利便.

*［問 8］ 設等比級數之第 n 項與第 $2n$ 項之和等於 k，又第 $2n$ 項與第 $3n$ 項之和等於 l，求初項及公比.

*［問 9］ 設等比級數之第 $p+q$ 項爲 m，第 $p-q$ 項爲 n，求第 p 項與第 q 項之值.

[問 10] 已有兩親，兩親又有兩親，次第上溯，問 n 代上之一代祖先幾人.

71. 等比中項

設 a 與 b 為已知之二數，今欲於此二數之間插入 m 項，使全體成等比級數，求插入之各項.

此等比級數，共有 $m+2$ 項，初項為 a，第 $m+2$ 項為 b，假定 r 為公比，依第 68 節之公式 (5)，得 $ar^{m+2-1}=b$，卽 $ar^{m+1}=b$.

兩邊同以 a 除之，$r^{m+1}=\frac{b}{a}$.

開 $m+1$ 次方，$r=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$ ……………………(6)

故所求之各項為 $a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)$，$a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)^2$，…………

$$a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)^m.$$

其中之第 r 項為 $a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)^r$.

插入 a 與 b 二數中間之各項，統名之曰 a 與 b 二數之等比中項，或省略稱為等比中項.

注意. m 之值至極大時，則等比級數相鄰二項之差皆甚少

若僅插入一項於 a, b 二數之間，使成等比級數，其中項與初末二項之關係如何.

先求公比，依公式 (6)，$r=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$.

故所求之中項爲 $a\left(\pm\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$，卽 $\pm\sqrt{ab}$.

因 $\pm\sqrt{ab}$ 爲 a 與 b 之相乘平均數.

由此知 a 與 b 之間，欲插入一項使成等比級數，與求 a, b 二數之相乘平均數同.

注意. 數學書中，有以相加平均數及相乘平均數表等差中項及等比中項者.

又本書中不用虛數，故設 a, b 二數求插入一項使成等比級數，a 與 b 必用同符號之數，否則公比 r 之值 $\pm\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)}$ 爲虛數.

例 1. 求於 $24a$ 與 $192a^4$ 之間插入二項，使成等比級數.

解. 以 $24a$, $192a^4$, 2 代公式 (6) 之 a, b, m.

得 $r=\sqrt[3]{\frac{192a^4}{24a}}=2a$.

答 $24a$, $48a^2$, $96a^3$, $192a^4$.

例 2. 設 a, b, c 爲等差級數，以 x 插於 a, b 之間，以 y 插於 b, c 之間，令 a, x, b 及 b, y, c 皆爲等比級數，求證 x^2, b^2, y^2 爲等差級數.

解. $x=\pm\sqrt{ab}$, $y=\pm\sqrt{bc}$.

故 $x^2+y^2=(a+c)b$ ……………………………………(1)

又從 $b=\dfrac{a+c}{2}$, 化得 $2b^2=(a+c)b$ ……………………(2)

因 (1), (2) 兩式之右邊相同.

知 $x^2+y^2=2b^2$.

兩邊各減 b^2+x^2, 即 $y^2-b^2=b^2-x^2$.

故 x^2, b^2, y^2 爲等差級數.

〔問 11〕 1 與 2 之間, 求插入十一項使成等比級數.

(此題與音樂之理有關係)

〔問 12〕 $5\frac{1}{3}$ 與 $40\frac{1}{2}$ 之間, 求插入四項使成等比級數.

〔問 13〕 3 與 -729 之間, 求插入四項使成等比級數.

〔問 14〕 等比級數之相鄰二項間, 各插入相乘平均數, 求證其全體仍爲等比級數.

〔問 15〕 二數之差爲 8, 插入二數間之等差中項與等比中項之差爲 2, 問二數各若干.

〔問 16〕 有五項之等比級數, 知初項爲 3, 末項爲 48, 問中間之三項各若干.

72. 等比級數之相鄰二項之間, 各加入項數相同之等比中項, 則全體成一新等比級數.

設已知之等比級數爲 a, b, c, d, ……………………

每二項之間插入 m 項，使與原有之二項成等比級數.

則　a, b 間之公比爲 $\sqrt[m+1]{\dfrac{b}{a}}$.

　　b, c 間之公比爲 $\sqrt[m+1]{\dfrac{c}{b}}$.

　　c, d 間之公比爲 $\sqrt[m+1]{\dfrac{d}{c}}$.

餘可類推.

因　$\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{d}{c}=\cdots\cdots\cdots\cdots$

故　$\sqrt[m+1]{\dfrac{b}{a}}=\sqrt[m+1]{\dfrac{c}{b}}=\sqrt[m+1]{\dfrac{d}{c}}=\cdots\cdots\cdots\cdots=k.$

此諸公比皆相等.

由此知新等比級數，卽初項爲 a 公比爲 $\sqrt[m+1]{\dfrac{b}{a}}$ 之等比級數，b 卽新等比級數之第 $m+2$ 項，c 卽新等比級數之第 $2m+3$ 項，d 卽新等比級數之第 $3m+4$ 項，餘類推.

原級數之第 n 項，與新級數之第 $(n-1)m+n$ 項相當.

73.　兩正數之相加平均數，恆大於其相乘平均數.

設二正數爲 a 與 b，其相加平均數與相乘平均數如次.

$$\frac{a+b}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$\pm\sqrt{ab}$ ……………………………………(2)

從 (1) 式減 (2) 式.

$$\frac{a+b}{2}-\left(\pm\sqrt{ab}\right)=\frac{a+b}{2}\mp\sqrt{ab}$$

$$=\frac{a\mp2\sqrt{ab}+b}{2}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})^2}{2}>0.$$

因從 $\frac{a+b}{2}$ 減 $\pm\sqrt{ab}$ 之值大於 0, 故知相加平均數恆大於相乘平均數也.

注意. 假定 $a>0$, $b>0$, 則 $\sqrt{a}$ 與 $\sqrt{b}$ 皆爲實數, 故 $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$ 亦爲實數, 凡實數之平方皆爲正數, 由此得上之不等式.

二數之差爲正數, 或爲 0, 或爲負數, 卽知被減數大於或等於或小於減數.

虛數之平方常爲負數, 例如 $(\sqrt{-5})^2=-5$, 此宜注意.

[問 17] 求證二正數 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ 相加平均數之逆數, 小於 a, b 之相乘平均數.

[問 18] 求證二正數 a, b 之相乘平均數, 等於 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ 之相加平均數之逆數與 a, b 之相加平均數中間之等比中項.

[問 19] 設二正數之相乘平均數爲 12, 其相加平均數爲 $25\frac{1}{2}$, 問二數若干.

[問 20] 設 a, b, c 爲等比級數, 其 a, b 之相加平均數爲 x, 又 b, c 之相加平均數爲 y, 求證 $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$.

[問 21] 已知之二數之間, 設插入 G 成等比級數, 插入 p 及 q 成等差級數, 求證 $G^2=(2p-q)(2q-p)$.

注意. 相加平均數及相乘平均數, 有時稱爲算術平均數及幾何平均數.

74. 等比級數之和

設等比級數之初項爲 a, 公比爲 r, 項數爲 n, 級數之和爲 S.

則 $S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots\cdots+ar^{n-1}$.

兩邊同以 r 乘之.

$rS=\quad ar+ar^2+\cdots\cdots\cdots+ar^{n-1}+r^n$.

上式之兩邊各減下式之兩邊.

$(1-r)S=a-ar^n$.

故 $$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

變右邊分母子之符號.

得 $$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7')$$

(7), (7′) 兩式, 俱爲有等比級數之初項及公比與項數求總和之公式.

例 1. 設等比級數之初項 0.12, 公比 0.01, 項數 4, 求其總和.

解. 以 0.12, 0.01, 4 代公式 (7) 之 a r, n.

得 $$S=\frac{0.12(1-0.01^4)}{1-0.01}$$

$$=\frac{0.12\times0.99999999}{0.99}$$

$$=0.12\times1.010101$$

$$=0.12121212.$$ 答 0.12121212.

例 2. 設等比級數爲 a, am, am^2,………求自初項至第十二項之和.

解. 以 m, 12 代公式 (7) 之 r, n.

得 $$S=\frac{a(1-m^{12})}{1-m}.$$

注意. 公比小於 1, 求和宜用 (7) 式, 若公比大於 1, 求和宜用 (7′) 式.

等比級數之和 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots\cdots+a^{n-1}$, 有時省略稱爲等比級數.

[問 22] 設等比級數爲 $1, \sqrt{2}, 2, \cdots\cdots\cdots$ 求從初項至第十二項之和.

[問 23] 次之等比級數各求其和.

(一) $12+9+6\frac{3}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 至第五項止

(二) $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 至第六項止

(三) $4+0.8+0.16+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 至第十項止

[問 24] 次之級數求初項至第 n 項之和.

$(a-b)+(a^2-2b)+(a^3-3b)+(a^4-4b)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

75. 前節公式 (7) 之要素 S, a, r, n 中, 無論有何三要素之值, 皆能求得其餘一要素之值.

從 (7) 式化得 $a=\dfrac{(1-r)S}{1-r^n}$.

此爲知等比級數之公比及總和與項數求初項之公式.

又從上式化得 $r^n=\dfrac{a-S+rS}{a}$.

依對數理, $n\log r=\log(a-S+rS)-\log a$.

去 n 之係數, $n=\dfrac{\log(a-S+rS)-\log a}{\log r}$.

此爲知等比級數之初項及總和與公比求項數之公式.

又從級數式 $S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+ar^{n-1}$.

化得 $r^{n-1}+r^{n-2}+\cdots\cdots+r^2+r+\left(1-\dfrac{S}{a}\right)=0.$

此爲知等比級數之初項及總和與項數求公比之方程式.

若 n 之値稍大, 須用高次方程式之解法求之.

注意第一. 知 a, r, S 求 n, 雖須假途於對數, 有時或能用特別之方法求之.

又知 a, n, S 求 r, 用高次方程式之解法, 出於本書範圍之外, 亦有時可分解爲一次或二次式之因數而得其結果.

注意第二. n 表級數之項數, 須爲正整數, 若求得 n 之値爲分數或負數, 不宜採用.

例 1. 設等比級數爲 1, 3, 9…………問從初項至第幾項之和爲 121.

解. 以 1, 3, 121 代本節求項數公式之 a, r, S.

得 $3^n=\dfrac{1-121+3\times121}{1}=243=3^5.$

由此知 $n=5$. 答 第五項.

例 2. 知等比級數之初項爲 3, 前三項之和爲 $\dfrac{19}{3}$, 求其公比.

解. 以 3, 3, $\dfrac{19}{3}$ 代前之方程式之 a, n, S.

得 $r^2+r+1-\dfrac{19}{3\times3}=0.$

去分母.

$$9r^2+9r-10=0.$$

依二次方程式之解法.

得 $r=\frac{2}{3}$ 或 $-\frac{5}{3}$. 答 $\frac{2}{3}$ 或 $-\frac{5}{3}$.

例 3. 知等比級數之初項爲 $\frac{2}{3}$, 前四項之和爲 $\frac{8}{3}$, 求其公比.

解. 以 $\frac{2}{3}$, 4, $\frac{8}{3}$ 代前之方程式之 a, n, S.

得 $r^3+r^2+r+1-\frac{8\times 3}{3\times 2}=0.$

卽 $r^3+r^2+r-3=0.$

由視察 $r=1$, 則左邊爲 0.

故可分解因數爲 $(r-1)(r^2+2r+3)=0.$

知 $r=1$ 或 $-1\pm\sqrt{-2}$

因不採用虛數, 僅有一答. 答 1.

注意. 凡公比爲 1 者, 則級數之各項皆與初項相等, 本題之初項爲 $\frac{2}{3}$, 卽知其級數爲 $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$,..................

[問 25] 設等比級數之公比爲 5, 項數爲 4, 總和爲 312, 求初項.

[問 26] 設等比級數前四項之和爲 40, 前八項之和爲 3280, 問此級數如何.

[問 27] 設等比級數前十項之和爲前五項之和之 244 倍，求公比.

76. 整除定理，剩餘定理

因 $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$.

兩邊同以 a 除之.

則 $$1+r+r^2+r^3+\cdots\cdots+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

此公式爲整除定理及剩餘定理之根源，示應用之例於次.

令 $r=\dfrac{y}{x}$，則 $\dfrac{1-r^n}{1-r}=\dfrac{x^n-y^n}{(x-y)x^{n-1}}$.

故 $\dfrac{x^n-y^n}{(x-y)x^{n-1}}=1+\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}+\cdots\cdots+\dfrac{y^{n-1}}{x^{n-1}}$.

兩邊同以 x^{n-1} 乘之.

得 $$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots\cdots+y^{n-1}\cdots\cdots(1)$$

若 n 爲偶數，則以 $-y$ 代 y，得 (1) 式之變形於次.

$$\frac{x^n-y^n}{x+y}=x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots\cdots+xy^{n-2}-y^{n-1}\cdots\cdots(2)$$

n 爲奇數，則以 $-y$ 代 y，又得 (1) 式之變形於次.

$$\frac{x^n+y^n}{x+y}=x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1}\qquad\cdots\cdots(3)$$

由上之 (1), (2), (3) 三式得次之定理.

I. 無論 n 爲偶數奇數.

x^n-y^n 皆能以 $x-y$ 除盡.

II. n 爲偶數.

x^n-y^n 能以 $x+y$ 除盡.

III. n 爲奇數.

x^n+y^n 能以 $x+y$ 除盡.

IV. n 爲偶數.

$x^n+y^n=x^n-y^n+2y^n$.

因 x^n-y^n 能以 $x+y$ 除盡, 故以 $x+y$ 除 x^n+y^n, 當有剩餘 $2y^n$.

又 x^n-y^n 亦能以 $x-y$ 除盡, 故以 $x-y$ 除 x^n+y^n, 亦有剩餘 $2y^n$.

無論 n 爲偶數奇數, 以 $x-y$ 除 x^n+y^n, 不能適盡.

〔問 28〕 依上之三公式求次之四式之值.

(一) $\frac{x^3-y^3}{x-y}$. (二) $\frac{x^4-y^4}{x-y}$.

(三) $\frac{x^3+y^3}{x+y}$. (四) $\frac{x^4-y^4}{x+y}$.

[問 29] 化 $\frac{x^7+1}{x+1}-\frac{x^6-1}{x-1}-\frac{x^5+1}{x+1}-\frac{x^4-1}{x-1}-\frac{x^3+1}{x+1}-\frac{x^2-1}{x-1}$ 爲整式.

[問 30] 問以 $x+y$ 除 x^4+y^4 之剩餘如何.

[問 31] 求證 n 爲奇數以 $x+y$ 除 x^n-y^n, 不能適盡.

77. 無限等比級數

初項 a, 公比 r, 同爲正數, 其等比級數之各項, 皆爲正數, 公比大於 1, 則各項之値, 順次增大, 項數愈多, 其和愈大, 項數至於無限, 其和之大必至於不可思議, 公比等於 1 亦然.

若公比小於 1, 項數雖無限, 而其和有一定之限.

例如初項 $\frac{1}{2}$ 公比 $\frac{1}{2}$ 之等比級數爲 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ………依第 74 節之公式 (7), 求其 n 項之和, 其式如次.

$$\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}.$$

無論 n 之值大至如何，其等比級數之和，決不能大於 1，因 n 愈大，則 $\frac{1}{2^n}$ 愈小，n 至極大，則 $\frac{1}{2^n}$ 幾等於 0，而總和甚接近於 1.

求初項 a 公比 r 之等比級數 n 項之和，有第 19 節之公式 (7)，去分子之括弧，其式爲 $\frac{a}{1-r}-\frac{a}{1-r}$

r

公比 r 無論爲正數負數，但其絕對值不大於 1，則 r^n 之絕對值因 n 愈大而愈小，故項數無限，級數之總和卽略等於 $\frac{a}{1-r}$.

凡公比之絕對值小於 1 之等比級數，若項數無限大，皆可令其和爲 $\frac{a}{1-r}$.

以 S 代和之極限值，則 $S=\frac{a}{1-r}$，但 $|r|<1$…(9)

注意. 某數之兩旁，各引一縱線，乃表其數之絕對值，如上記之 $|r|$ 卽表 r 之絕對值也.

又極限值有時嘗略稱爲值.

例 1. 設無限等比級數爲 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$ 求其和之極限值

但其結果僅須求至小數第三位止.

解. 以 $1, \frac{1}{\sqrt{2}}$ 代公式 (9) 之 a ,r.

得 $S=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$=2+\sqrt{2}=3.4142\cdots\cdots\cdots$ 答 3.414.

例 2. 設等比級數為 $2-1\frac{1}{3}+\frac{8}{9}-\cdots\cdots\cdots$ 求無限項之和.

解. 先求公比, 以初項除第二項, 得公比為 $\dfrac{-1\frac{1}{3}}{2}$, 即 $-\frac{2}{3}$.

次以 $2, -\frac{2}{3}$ 代公式 (9) 之 a, r.

得 $S=\dfrac{2}{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)}=\dfrac{6}{5}$. 答 $\frac{6}{5}$.

例 3. 有無限等比級數, 其前二項之和, 等於第二項以下各項之和之 k 倍, 求其公比.

解. 設初項為 a, 公比為 r.

則前二項之和為 $a+ar$.

又第二項以下之總和為 $\dfrac{ar^2}{1-r}$ (不含前二項).

依題得相等式 $\dfrac{kar^2}{1-r}=a+ar$.

以 a 除兩邊, $\dfrac{kr^2}{1-r}=1+r$.

去分母, $kr^2=1-r^2$.

移項, $(k+1)r^2=1$.

去 r^2 之係數, $r^2=\frac{1}{k+1}$.

兩邊開平方, $r=\pm\frac{1}{\sqrt{k+1}}$.　　　答 $\pm\frac{1}{\sqrt{k+1}}$.

[問 32] 設無限等比級數之初項 a, 公比 $\frac{1}{2}$, 求其和之極限.

[問 33] 設無限等比級數爲 $9-6+4-\cdots\cdots\cdots$ 求其和之極限.

[問 34] 求化次之無限等比級數爲簡單之形.

$a\mathrm{Sin}\theta,\ a\mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{coS}\theta,\ a\mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{coS}^2\theta,\cdots\cdots\cdots\cdots$

[問 35] 設無限等比級數爲 $8\sqrt{2},\ 4\sqrt{6},\ 6\sqrt{2},\cdots\cdots\cdots$ 求其和至小數第三位止.

[問 36] 設無限等比級數爲 $\frac{1}{9}-\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}-\cdots\cdots\cdots$ 問其極限值如何.

[問 37] 設無限等比級數爲 $\frac{1}{1+b}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+b)^3}+\cdots\cdots\cdots$ 問和之值如何.

[問 38] 設無限等比級數爲 $\frac{a}{b-1}-\frac{a^2}{(b-1)^2}+\frac{a^3}{(b-1)^3}-\cdots\cdots\cdots$ 問和之極限如何.

[問 39] 設無限等比級數之和爲 8, 第二項爲 2, 問其級數如何.

[問 40] 設無限等比級數之和爲 9, 第二項爲 2, 問其級數如何.

[問 41] 設無限等比級數之和爲 $4\frac{1}{2}$, 第二項爲 -2, 問其級數如何.

78. 循環小數

例. 設有循環小數 $0.\dot{7}\dot{2}$, 卽 0.72727272…………

因 $0.72=\frac{72}{100}$.

$0.0072=\frac{72}{100}\times\frac{1}{100}$.

$0.000072=\frac{72}{100}\times\frac{1}{100^2}$.

………………………

故知此循環小數, 卽初項爲 $\frac{72}{100}$ 公比爲 $\frac{1}{100}$ 之無限等比級數之和.

以 $\frac{72}{100}$, $\frac{1}{100}$ 代公式 (9) 之 a, r

得 $S=\dfrac{\frac{72}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{72}{100-1}=\frac{72}{99}$.

即　$0.\dot{7}\dot{2}=\frac{72}{99}$.

又設有帶首循環小數 0.3242424……求化爲分數.

此循環小數之簡單記法爲 $0.3\dot{2}\dot{4}$.

$$0.3\dot{2}\dot{4}=(3+0.\dot{2}\dot{4})\div 10$$

$$=\left(3+\frac{24}{10^2-1}\right)\div 10$$

$$=\frac{3\times(10^2-1)+24}{(10^2-1)\times 10}$$

$$=\frac{3\times 10^2+24-3}{10^3-10}$$

$$=\frac{324-3}{990}.$$

算術中化循環小數爲分數之規則，即基於此.

[問 42]　求改次之各循環小數爲分數.

(一)　$0.\dot{4}0\dot{8}$.　　(二)　$0.00\dot{0}5\dot{4}$.

(三)　0.4282828………　　(四)　3.1259259………

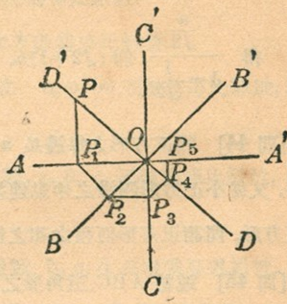
[問 43]　問次之各循環小數，等於如何之分數.

(一)　0.0999………　　(二)　0.454545………

(三)　$0.72\dot{4}\dot{5}$.

79. 應用問題

例. 如圖四直線 AA', BB', CC', DD' 過同一之點 O, 其相鄰二直線之交角, 俱爲 $\frac{1}{2}$ 直角, 在 DD' 上取 P 點, 向 AA' 上作垂線 PP_1, 從此垂線之足 P_1 點, 又向 BB' 上作垂線 P_1P_2, 再從此垂線之足 P_2 點, 向 CC' 上作垂線 P_2P_3, 如是旋轉作無限之垂線, 知 OP 長 A 寸, 問諸垂線之長之和如何.



解. 因 OPP_1 爲直角三角形, $\angle POP_1$ 爲 $\frac{1}{2}$ 直角.

故 $PP_1 = OP_1 = \dfrac{OP}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 寸.

依同理 $P_1P_2 = OP_2 = \dfrac{OP_1}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{2}$ 寸.

$$P_2P_3 = OP_3 = \frac{OP_2}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}} \text{ 寸.}$$

由此知所求諸垂線之長之和, 可以 PP_1, P_1P_2, ……… 之和之極限表之.

其值爲次之無限等比級數式.

$$\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{a}{2}+\frac{a}{2\sqrt{2}}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此級數之初項爲 $\frac{a}{\sqrt{2}}$, 公比爲 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 代入第 77 節 (9) 式之右邊

得 $\dfrac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$, 卽 $(\sqrt{2}+1)a$.　　　　答　$(\sqrt{2}+1)a$ 寸.

[問 44]　設正方形之每邊長 a 寸, 從四邊之中點連結作小正方形, 又從小正方形四邊之中點連結作更小之正方形, 如是作遞小之正方形, 問諸正方形面積之和之極限如何.

[問 45]　連結 ABC 三角形之三邊中點, 成新三角形, 又連結此三角形之三邊中點, 成第二新三角形, 如是作遞小之新三角形, 問諸新三角形面積之和之極限, 對於原三角形面積之比如何.

[問 46]　設圓之半徑 R 寸, 先作一內接正方形, 次於正方形作內接圓, 又於此圓作內接正方形, 如是循環不已, 求諸正方形面積之和之極限.

*[問 47]　設圓球之半徑 R 寸, 先作一內接立方體, 次於立方體作內接圓球, 又於此圓球作內接立方體, 如是循環不已, 求諸立方體體積之和之極限.

[問 48]　有皮球從距地高六尺墜落於地面, 躍上二尺, 復墜落於地, 又從地面躍上, 如是上下多次而後靜止, 其躍上之尺數與墜落之尺數, 成一定之比例, 問此球之上下共若干尺.

練習問題 II

1. 求證任意以何數徧乘等比級數之各項，仍爲等比級數.

2. 求證等比級數各項之逆數仍爲等比級數.

3. 求證等比級數各項之 n 次方仍爲等比級數.

4. 設 8, a, b 三數爲等差級數. a, b, 36 三數爲等比級數，問 a, b 之値各若干.

5. 設 a, 10, c 三數爲等差級數，a, 8, c 三數爲等比級數，問 a, c 之値各若干.

6. 設 a, b, c 三數爲等比級數，b, c, d 三數爲等差級數，知 a, d 之和爲 14，b, c 之和爲 12，問 a, b, c, d 之値各若干.

7. 設 a, b, c 三數爲等比級數，其和爲 19，b, c, d 三數爲等差級數，其和爲 12，問 a, b, c, d 之値各若干.

8. 設 a, b, c 三數成等差級數，其和爲 69，以 1, 3, 18 三數分加於 a, b, c，則成等比級數，問 a, b, c 之値各若干.

9. a, b, c, d 四數成等差級數，若加 2 於 a，加 3 於 d，卽變爲等比級數，問 a, b, c, d 之値各若干.

10. 問初項 a 公比 r 項數 n 之等比級數，各項之連乘積如何，又求證其連乘積等於初末項相乘積之 $\frac{n}{2}$ 次冪.

11. 設 a, b, c, d 爲等比級數，求證 a+b, b+c, c+d 亦爲等比級數.

12. a, b, c, d 爲等比級數, 求證 $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{2b}$, $\frac{1}{b+c}$ 爲等差級數.

13. $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ 爲等差級數, 求證 $2a-b$, $2b-c$, $2c-a$ 爲等比級數.

14. 有 x 之二次方程式 $(a^2+b^2)x^2-2(a+c)bx+b^2+c^2=o$, 若各文字之值皆爲實數, 求證 a, b, c 爲等比級數.

*15. a, b, c 爲等比級數, 若 $a=n^x$, $b=n^y$. $c=n^z$, 求證 x, y, z 爲等差級數.

16. a, b, c 爲等比級數, 若 $a=nx$, $b=ny$, $c=nz$, 求證 x, y, z 亦爲等比級數.

*17. 設等比級數之公比爲小於 $\frac{1}{2}$ 之正數, 求證其各項之絕對值皆大於從其次項起諸項之和之絕對值.

*18. 等比級數前 p 項之和爲 x, 前 2p 項之和爲 y, 前 3p 項之和爲 z, 求證 x, y, $y+z-x$ 亦爲等比級數.

19. 求證等比級數初項至第 $2m+1$ 項之連乘積, 等於其中央項之 $2m+1$ 次冪.

20. 有等比級數, 求證順次各 k 項之和亦爲等比級數.

21. 設等比級數從初項至第 n 項之連乘積等於 $(gl)^{\frac{n}{2}}$, 求證 g 與 l 爲諸數中之最大及最小者.

22. $a+b+c$, $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ 爲四項之等比級數，以 p 表其公比，求證 $p^3+p^2+p=1$ 及 $p=\frac{a}{c}$.

*23 設等比級數之第 x, y, z 項爲 X, Y, Z, 求證能成立次之關係式.

$$(y-z)\log X+(z-x)\log Y+(x-y)\log Z=0.$$

第七章

調和級數

80. 定義 多數相連排列，任意取其連續三數，若第一第二兩數之差與第二第三兩數之差之比，等於第一數與第三數之比者，謂之調和級數.

代數學之書中，有時以 H. P. 表調和級數.

設 a, b, c, d 四數能成次之比例式.

$$a-b:b-c=a:c,\quad b-c:c-d=b:d.$$

則 a, b, c, d 卽爲調和級數.

81. 設 a, b, c 三數爲調和級數.

依定義 $a-b:b-c=a:c.$

故 $c(a-b)=a(b-c).$

兩邊同以 abc 除之.

得 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}.$

由此知 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 爲等差級數.

因 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 爲等差級數，其 a, b, c 爲調和級數，又得次之定義.

諸數相連排列，若諸數之逆數爲等差級數，則其諸數卽調和級數.

例. a, b, c 爲等差級數, b, c, d 爲調和級數, 求證 a 與 b 之比等於 c 與 d 之比.

解. 因 a, b, c 爲等差級數, 得次之 (1) 式.

$$2b=a+c\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 b, c, d 爲調和級數, 得次之 (2) 式.

$$\frac{2}{c}=\frac{1}{d}+\frac{1}{b}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

去 (2) 式之分母.

$$2bd=bc+cd.$$

以 (1) 式右邊之 $a+c$, 代此式左邊之 $2b$.

則 $(a+c)d=bc+cd$.

兩邊同減去 cd.

卽 $ad=bc$.

故 $a:b=c:d$.

82. 調和中項

設 a 與 b 爲已知之二數, 今欲於此二數之間, 插入 m 項, 使全體成調和級數, 求插入之各項.

此調和級數, 共有 $m+2$ 項, 初項爲 a, 第 $m+2$ 項爲 b.

依定義，調和級數各項之逆數爲等差級數，故於 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$ 二數之間，求插入 m 項使成等差級數，然後以求得各項之逆數，插入 a，b 二數之間，即成調和級數.

依第 61 節之公式 (2)，得所求之公差爲 $\dfrac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{m+1}$，即 $\dfrac{a-b}{(m+1)ab}$.

故得插入 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$ 間之各項如次.

$$\frac{1}{a}+\frac{a-b}{(m+1)ab},\ \frac{1}{a}+\frac{2(a-b)}{(m+1)ab},\cdots\cdots\frac{1}{a}+\frac{m(a-b)}{(m+1)ab}.$$

即 $$\frac{mb+a}{(m+1)ab},\ \frac{(m-1)b+2a}{(m+1)ab},\cdots\cdots\frac{b+ma}{(m+1)ab}.$$

此諸數之逆數 $\dfrac{(m+1)ab}{a+mb}$，$\dfrac{(m+1)ab}{2a+(m-1)b}$，$\cdots\cdots$ $\dfrac{(m+1)ab}{ma+b}$.

即所求之調和中項也.

83. 若僅插入一項於 a，b 二數之間，使成調和級數，問所求之中項如何.

以 x 代所求之中項.

則 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{b}$ 爲等差級數.

故 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{x}$.

化得 $(a+b)x=2ab$, 去 x 之係數, $x=\frac{2ab}{a+b}$.

上之結果 $\frac{2ab}{a+b}$, 稱爲 a 與 b 之**調和平均數** (又稱爲**調和中項**).

凡二數之調和平均數, 恆等於以二數之和除二數之積之二倍.

注意. 代數學之書中, 通例以 A, G, H 表相加平均數相乘平均數調和平均數.

84. 等差中項等比中項調和中項相互之關係.

a, b 二數間之三種中項如次.

$$A=\frac{a+b}{2},\ G=\pm\sqrt{ab},\ H=\frac{2ab}{a+b}.$$

因 $A\times H=\frac{a+b}{2}\times\frac{2ab}{a+b}=ab.$

$$G^2=(\pm\sqrt{ab})^2=ab.$$

故 $G^2=A\times H.$

知二數之等比中項, 卽等差中項與調和中項之間之等比中項.

例. a 爲 b 與 c 之等差中項, b 爲 a 與 c 之等比中項, 求證 c 爲 a 與 b 之調和中項.

解. 因 $b+c=2a$……………(1)

$b^2=ac$……………(2)

以 b 乘 (1) 式之兩邊.

$b^2+bc=2ab$……………(3)

又以 (2) 式右邊之 ac, 代 (3) 式左邊之 b^2.

則　$(a+b)c=2ab.$

兩邊同以 $a+b$ 除之.

$$c=\frac{2ab}{a+b}.$$

故知 c 爲 a 與 b 之調和中項.

[問 1]　設從二數之等比中項減 13, 等於其等差中項, 若從二數之等比中項減 12, 則等於其調和中項, 問二數各若干.

[問 2]　b 爲 a 與 c 之等差中項, c 爲 b 與 d 之等比中項, d 爲 c 與 e 之調和中項, 求證 c 亦爲 a 與 e 之等比中項.

85.　調和級數之和

調和級數不能有公式求其各項之和.

練 習 問 題 III

1. a, b, c 爲調和級數, 求證 $\dfrac{b+a}{b-a}+\dfrac{b+c}{b-c}=2.$

2. a, b, c 爲調和級數, 求證 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-b}=0$.

3. 調和級數 a, b, c 之和爲 2S, 求證 $(S-a)^2$, $(S-b)^2$, $(S-c)^2$ 爲等差級數.

4. a, b, c 爲調和級數, 問 $\frac{b}{b-a}+\frac{b}{b-c}$ 之值如何.

*5. x, a, a′, y 爲等差級數, x, b, b′, y 爲等比級數, x, c, c′, y 爲調和級數, 求證 $\frac{bb'}{cc'}=\frac{a+a'}{c+c'}$.

*6. a, b, c 爲調和級數, 求證 $\frac{a}{b+c-a}$, $\frac{b}{c+a-b}$, $\frac{c}{a+b-c}$ 爲等差級數.

*7. a, b, c, d 爲調和級數, 求證能成立次之相等式.

$$3(b-a)(d-c)=(c-b)(d-a).$$

8. a, b, c 爲調和級數, 求證 $\frac{2}{b}=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}$.

9. a, b, c 爲調和級數, 求證 $a-\frac{b}{2}$, $\frac{b}{2}$, $c-\frac{b}{2}$ 爲等比級數.

10. a, b, c 爲調和級數, 求證 a, a−c, a−b 及 c, c−a, c−b 亦爲調和級數.

*11. a, x, y, b 爲等差級數, a, u, v, b 爲調和級數, 求證次之相等式.

$$xv=yu=ab.$$

12. $\frac{a+b}{1-ab}$, b, $\frac{b+c}{1-bc}$ 爲等差級數, 求證 a, $\frac{1}{b}$, c 爲調和級數.

*13. 等差級數與調和級數之前二項同爲 a, b, 等差級數與調和級數之第 n 項, 一爲 x, 一爲 y, 求證 $x-a:y-a=b:y$.

(n 之值爲大於 2 之任何整數.)

*14. 等差級數與調和級數之初項同爲 a, 末項同爲 l, 項數同爲 n, 求證等差級數之第 r+1 項與調和級數之第 n−r 項相乘之積, 與 r 無關係.

*15. 設 P, Q, R 爲等差等比調和三種級數之第 p 項 第 q 項 第 r 項, 求證依等差級數能成立次之 (1) 式, 依等比級數能成立次之 (2) 式, 依調和級數能成立次之 (3) 式.

(1) $P(q-r)+Q(r-p)+R(p-q)=0.$

(2) $P^{q-r}Q^{r-p}R^{p-q}=1.$

(3) $QR(q-r)+RP(r-p)+PQ(p-q)=0.$

第 八 章

他 種 級 數 之 和

86. 前所述之三種級數外，級數之種類無限，有從初項至任何項，悉由簡單之某定則而生，可求其諸項之和者，玆述此類之數種級數於次.

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots\cdots+n^2.$$

$$1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots\cdots\cdots+n(n+1).$$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

此等級數，皆能以簡單之代數式表其公項，故易求其諸項之和，從次節至末節，推演數種級數求和之方法，以爲學者隅反之資.

87. 求級數 $1+2+3+4+\cdots\cdots\cdots+n$ 之和.

此卽初項 1 公差 1 項數 n 之等差級數，以 1, 1 代第 63 節公式 (4) 之 a, d.

得 $$1+2+3+4+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\cdots\cdots\cdots(10)$$

88. 求級數 $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots\cdots+n^2$ 之和.

從恆等式 $m^3-3m^2+3m-1=(m-1)^3$.

變爲 $m^3-(m-1)^3=3m^2-3m+1.$

以 $n, n-1, n-2, \cdots\cdots 2, 1$ 次第代其 m.

則 $n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1.$

$(n-1)^3-(n-2)^3=3(n-1)^2-3(n-2)+1.$

$(n-2)^3-(n-3)^3=3(n-2)^2-3(n-3)+1.$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$2^3-1^3=3\times2^2-3\times2+1.$

$1^3-0^3=3\times1^2-3\times1+1.$

上各式之兩邊各相加·

得 $n^3=3\{n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots\cdots+2^2+1^2\}$

$-3\{n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+2+1\}$

$+n.$

以 Σr 表 $1+2+3+4+\cdots\cdots+n.$

Σr^2 表 $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+n^2.$

卽 $n^3=3\Sigma r^2-3\Sigma r+n.$

移項變號. $3\Sigma r^2=n^3+3\Sigma r-n.$

依公式(10) $\Sigma r=\frac{n(n+1)}{2}.$

故 $3\Sigma r^2=n^3+\frac{3n(n-1)}{2}-n$

$=\frac{n}{2}(2n^2+3n+3-2$

$$=\frac{n}{2}(n+1)(2n+1).$$

兩邊同以 3 除之.

$$\Sigma r^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1).$$

即 $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

…………(11)

注意. 從 1 起遞加 1 之各數立方之和, 以 Σr^3 表之, 各數之四次方之和, 以 Σr^4 表之, 餘可類推.

89. 求級數 $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots\cdots\cdots+n^3$ 之和.

從恆等式 $(m+1)^4=m^4+4m^3+6m^2+4m+1.$

移項 $(m+1)^4-m^4=4m^3+6m^2+4m+1.$

以 $n, n-1, n-2,\cdots\cdots\cdots 2, 1$ 次第代其 m, 如前節以代得之式兩邊各相加, 而以 $\Sigma r, \Sigma r^2, \Sigma r^3$ 表右邊自 1 起遞增 1 之各數及各數之平方立方之和.

得 $(n+1)^4-1=4\Sigma r^3+6\Sigma r^2+4\Sigma r+n.$

移項變號. $4\Sigma r^3=(n+1)^4-(n+1)-6\Sigma r^2-4\Sigma r.$

因 $(n+1)^4-(n+1)=n(n+1)(n^2+3n+3).$

$$6\Sigma r^2=n(n+1)(2n+1).$$

$$4\Sigma r=2n(n+1).$$

故 $4\Sigma r^3=n(n+1)(n^2+3n+3)-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$

$$=n(n+1)(n^2+3n+3-2n-1-2)$$

$$=n^2(n+1)^2.$$

$$\Sigma r^3=(\Sigma r)^2.$$

即 $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots\cdots\cdots+n^3=(1+2+3+4+\cdots\cdots\cdots+n)^2\cdots\cdots\cdots(12)$

得定理於次.

從1起遞增1至任何數,其各數之立方之和,等於各數之和之平方.

依上之方法,可求得 Σr^4, Σr^5,………等之值.

90. 求級數 $1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots$ 至第 n 項之和.

此級數之公項為 $r(r+1)$, 其 n 項之和, 可以 $\Sigma\{r(r+1)\}$ 表之.

因 $\Sigma\{r(r+1)\}=\Sigma(r^2+r)=\Sigma r^2+\Sigma r.$

以 $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $\frac{n(n+1)}{2}$ 代右邊之 Σr^2, Σr.

則 $\Sigma\{r(r+1)\}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{n(n+1)}{2}$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

卽 $1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)$
$(n+2)\cdots\cdots\cdots(13)$

91. 求級數 $1.2+2.5+3.8+\cdots\cdots$ 至第 n 項之和.

此級數之公項爲 $r(3r-1)$, 其各項之和, 可以 $\Sigma\{r(3r-1)\}$ 表之.

因 $\Sigma\{r(3r-1)\}=\Sigma(3r^2-r)=3\Sigma r^2-\Sigma r.$

以 $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $\frac{n(n+1)}{2}$ 代右邊之 Σr^2, Σr.

則 $\Sigma\{r(3r-1)\}=3\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1-1)$$

$$=n^2(n+1).$$

卽 $1.2+2.5+3.8+\cdots+n(3n-1)=n^2(n+1)\cdots\cdots$
(14)

92. 求級數 $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots\cdots n$ 項之和.

級數之公項爲 $r(r+1)(r+2)$, 其 n 項之和, 可以 $\Sigma\{r(r+1)$
$(r+2)\}$ 表之.

因 $\Sigma\{r(r+1)(r+2)\}=\Sigma(r^3+3r^2+2r)=\Sigma r^3+3\Sigma r^2+2\Sigma r.$

右邊以 Σr^3, Σr^2, Σr 之値代入.

則 $$\Sigma\{r(r+1)(r+2)\}=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+3\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$+2\times\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=n(n+1)\left\{\frac{n(n+1)}{4}+\frac{2n+1}{2}+1\right\}$$

$$=n(n+1)\frac{n^2+n+4n+2+4}{4}$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

卽 $$1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots\cdots(15)$$

93. 求級數 $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ 之和.

因 $$\frac{1}{m(m+1)}=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}.$$

以 $n, n-1, n-2,\cdots\cdots 2, 1$ 次第代其 m.

則 $$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

$$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

$$\frac{1}{(n-2)(n-1)}=\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}.$$

....

$$\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}.$$

上之諸式兩邊各相加.

得 $$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

94. 求級數 $a+(a+d)r+(a+2d)r^2+\cdots\cdots n$ 項之和.

以 S 表其和.

則 $S=a+(a+d)r+(a+2d)r^2+\cdots\cdots+\{a+(n-1)d\}r^{n-1}.$

兩邊同以 r 乘之.

$$rS=ar+(a+d)r^2+\cdots\cdots+\{a+(n-1)d\}r^n.$$

上之二式兩邊各相減.

得 $$(1-r)S=a+dr+dr^2+\cdots\cdots+dr^n-ndr^n-ar^n$$

$$=a-ar^n-ndr^n+dr(1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1})$$

$$=a-ar^n-ndr^n+dr\,\frac{1-r^n}{1-r}.$$

故　$$S=\frac{a-ar^n-ndr^n}{1-r}+dr\frac{1-r^n}{(1-r)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

[問 1]　求級數 $a+2a^2+3a^3+\cdots\cdots+na^n$ 之和.

[問 2]　初項 a 公差 d 之等差級數, 初項至第 n 項之和以 S_n 表之, 問次之級數之和如何.

$$S_1+S_3+S_5+\cdots\cdots\cdots+S_{2n-1}.$$

[問 3]　求級數 $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots+(n+1)x^n$ 之和.

問　題　之　答　及　解　法　指　南

第　一　章　緒　論

問 1. (一)　從次之六箇組合任意取四箇組合.

ab, ac, ad, bc, bd, cd

(二)　任意從 a, b, c, d 中取其三.

(三)　abc, abd, acd, bcd.

問 2. (一)　任意從次之十箇組合取四箇組合.

vwx, vwy, vwz, vxy, vxz, vyz,

wxy, wxz, wyz, xyz

(二)　vwxy, vwxz, vwyz, vxyz,

wxyz

問 3. (一)　從次之六箇順列任意取三箇順列.

xy, yx, xz, zx, yz, zy

(二)　從次之六箇順列任意取五箇順列.

xyz, xzy, yxz, yzx, zxy, zyx

第　二　章　順　列

問 1. ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb,

bd, db, cd, dc

問 2. abc, acb, bac, bca, cab, cba

問 3. 從不同之六物中取四物，作無遺漏無重複之順列，成順列之羣，求其順列之數.

問 4. (一) $_2P_1=2$, $_2P_2=2$

(二) $_3P_1=3$, $_3P_2=6$, $_3P_3=6$

(三) $_4P_1=4$, $_4P_2=12$

問 5. (一) $_5P_2=5\times4=20$, $_6P_2=6\times5=30$

$_7P_2=7\times6=42$

(二) $_5P_3=5\times4\times3=60$, $_6P_3=6\times5\times4=120$

(三) $_4P_4=4\times3\times2\times1=24$

問 6. 以 a, b, c,……l 表互異之 n 物，任意以一物置於第一位，共有 n 種不同之情形，凡置定一物，再取一物置於第二位，因尙有 n−1 物，故皆有 n−1 種不同之情形，合計取二物之順列，有 n(n−1) 箇不同之順列，由此知 $_nP_2=n(n-1)$.

問 7. 證明之方法，由前問之解可以推知.

問 8. (一) 1680 (二) 15120 (三) 990

問 9. (一) 9 (二) $m+r-1$

問 10. (一) 10 (二) 9

問 11. (一) 3 (二) 5

問 12. (一) 7 (二) 8

問 13. 依據次之二式，證明甚易.

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1).$$

$${}_{n-1}P_r=(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r).$$

問 14. 先除去特別之一物 a, 從 $n-1$ 物取 $r-1$ 物, 其順列之數爲 ${}_{n-1}P_{r-1}$, 然後以 a 加入各順列, 因 a 可置於各順列之任何位, 從置於每一順列之最前起至最後止, 皆有 r 種變化, 故從 n 物取 r 物作順列, 含特別之一物之順列數爲 $r\times{}_{n-1}P_{r-1}$ 又除去特別之一物 a, 從 $n-1$ 物取 r 物, 其順列之數爲 ${}_{n-1}P_r$, 即從 n 物取 r 物作順列不含特別之一物之順列數也.

故 ${}_nP_r=r\times{}_{n-1}P_{r-1}+{}_{n-1}P_r$.

問 15. (一) 120. (二) 720. (三) 40320.

問 17. (一) 7. (二) 10.

問 18. ${}_3P_3$ 即 6.

問 19. ${}_8P_2$ 即 56.

問 20. ${}_5P_3$ 即 60.

問 21. ${}_5P_5$ 即 120.

問 22. ${}_5P_3$ 即 60.

問 23. ${}_8P_4$ 即 1680.

問 24. ${}_6P_5-{}_5P_4$ 即 600.

問 25. ${}_6P_6-{}_5P_5$ 即 600.

問 26. ${}_6P_6$ 即 720.

問 27. 因限制爲偶數, 知 4 與 6 兩箇數字, 必須有一在末位, 先除去數字 4, 以其餘四箇數字作四位之數, 所得不同之數, 與全取互異之四物之順列數同, 然後以數字 4 添於各數之末, 成五位之數, 次除去數字 6, 以其餘四箇數字作四位之數, 所得不同之數,

亦與全取互異之四物之順列數同，然後以數字 6 添於各數之末，成五位之數，故所求之數 $=2\times{}_4P_4=48$.

問 28. 因限制爲奇數，知 1, 3, 5, 7 四箇數字必須有一在末位，如前問計算，得所求之數爲 $4\times{}_6P_6$ 卽 2880.

問 29. ${}_6P_6\times{}_2P_2$ 卽 1440.

問 30. ${}_7P_7-{}_6P_6\times{}_2P_2$ 卽 3600.

問 31. ${}_5P_5\times{}_2P_2$ 卽 240.

問 32. ${}_{10}P_{10}-{}_9P_9\times{}_2P_2$ 卽 2903040.

問 33. 因限制兩端之數字爲偶數，今有 2, 4, 6 三箇偶數字，知不同之配置，有 ${}_3P_2$ 種變化，又中間之兩數字限制爲奇數，今有 1, 3, 5, 7 四箇奇數字，知不同之配置，有 ${}_4P_2$ 種變化.

故所求之數 $={}_3P_2\times{}_4P_2=6\times12=72$.

問 34. ${}_4P_4\times{}_6P_4=8640$.

問 35. 一位之數，因 0 爲無效數字，只有 ${}_6P_1-1$ 數，卽 5 箇數，二位之數，亦宜除去 0 在首位之數，只有 ${}_6P_2-5$ 數，卽 25 箇數，如是求之，三位之數，有 ${}_6P_3-20$ 數，卽 100 箇數，四位之數，有 ${}_6P_4-60$ 數，卽 300 箇數，五位之數，有 ${}_6P_5-120$ 數，卽 600 箇數，六位之數，有 ${}_6P_6-120$ 數，卽 600 箇數，合計 1630 箇數.

問 36. 325 種信號. 問 37. 3999960.

問 38. 5328. 問 39. 729.

問 40. 999. 問 41. 729.

問 43. 420. 問 44. 1663200.

問 45. 1120, 60. 問 46. 35.

問 47. 479001600. 問 48. 24.

問 49. 360. 問 50. 72.

練習問題 I

1. 120. 2. $n=6$.

3. ${}_{17}P_3 \times {}_5P_2 = 81600$ (用第 20 節之法).

4. 往返所乘之船，皆可於十艘選擇一艘.

故答數爲 ${}_{10}P_1 \times {}_{10}P_1 = 100$.

5. ${}_4P_4 \times {}_4P_4 = 576$ (用第 20 節之法).

6. 依第 24 節之公式，得 $\dfrac{10!}{2!\,3!\,3!} = 50400$.

7. 依第 21 節之例，得 1956 種信號.

8. $6 \times {}_5P_5 \times {}_4P_4 \times {}_6P_6 = 12441600$.

9. 96.

10. 先使老者各間一位而坐，因坐位不定次序，其坐之順列數爲 5! (可參觀第 27 節例 2)，然後使少者坐於所空之各位，雖其坐位不定次序，而第一人入坐，在某某二老之間，已有六箇位置，故其坐之順列數爲 6!. 依基本定理，所求之數爲 $5! \times 6!$，卽 86400.

11. 125.

12. ${}_7P_7-2\times{}_6P_6=3600.$

13. 書共七部，其中有三部卷之順序，或自左而右，或自右而左，故所求之排列數爲 $8\times{}_7P_7=40320.$

14. ${}_5P_5-{}_3P_2=114.$

15. $\dfrac{9!}{5!\,4!}=126.$

16. $2\times{}_6P_6=1440,\ 2\times{}_5P_5=240.$

17. $\dfrac{20!}{6!\,10!\,4!}$ 卽 38798760.

18. 360.

19. ${}_5P_5-2({}_4P_4+{}_3P_3)$ 卽 60.

20. 1260.

21. 756.

22. 2 (須參觀第 22 節)

第三章 組合

問 1. (一) 252. (二) 220. (三) 4845.

問 2. (一) 435. (二) 148995 (三) 7770.

問 3. (一) 12. (二) 8. (三) 55.

(四) 7.

問 4. ${}_{10}C_5$ 卽 252.

問 5. ${}_{12}C_3$ 卽 220.

問 6. 從 12 物取 3 物之組合數爲 ${}_{12}C_3=\dfrac{12\times11\times10}{1\times2\times3}$

$$=4\times\frac{11\times10}{1\times2}.$$

其中含某一物之組合數爲 ${}_{11}C_2=\dfrac{11\times 10}{1\times 2}$, 故 $\dfrac{1}{4}\times {}_{12}C_3={}_{11}C_2$.

問 7. ${}_{10}C_3=120$.

問 8. ${}_{10}C_5-{}_8C_3=196$.

問 9. ${}_{10}C_1\times {}_9C_6=840$.

問 10. ${}_{20}C_2\times {}_{18}C_2=29070$.

問 11. ${}_{12}C_3\times {}_7C_2=4620$.

問 12. ${}_{20}C_4\times {}_{18}C_3=3953520$.

問 13. ${}_4C_3\times {}_8C_5=224$.

問 14. ${}_{30}C_4\times {}_3C_1=82215$.

問 15. ${}_{10}C_2-{}_5C_2+1=36$.

問 16. 從 $\dfrac{n(n-1)}{1\times 2}=595$, 化得 $n^2-n-1190=0$.

分解因數 $(n-35)(n+34)=0$, 由此得 $n=35$ 或 -34.

其負根不合題意, 僅有一答爲 35 箇點.

問 17. ${}_5C_3=10$.

問 18. ${}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4=56$.

問 19. $(3+1)(2+1)(5+1)=72$.

問 20. $8+4+6+8\times 4+8\times 6+4\times 6+8\times 4\times 6=314$.

問 21. $\dfrac{1}{2}\times {}_{12}C_6=462$.

問 22. 因限制各組皆須含 ko 於其中, 先除去兩 k 字及兩 o 字, 賸餘四字 Y, S, U, a 之組合數爲 $\dfrac{1}{2}\times {}_4C_2$, 然後以 ko 加入各

組合之中，故答數爲 $\frac{1}{2}\times\frac{4\times3}{1\times2}=3$.

問 23. ${}_{21}C_3\times{}_5C_3\times{}_6P_6=9576000$.

問 24. ${}_5C_3\times{}_4C_2\times{}_5P_5=7200$.

練習問題 II

1. $r=4$ 或 6.　　2. $n=12$.

3. ${}_{50}C_1\times{}_{49}C_2=58800$.　　4. 物數$=14$.

5. 用二元聯立方程式之解法，得 $n=11$, $r=8$.

6. ${}_4C_2\times{}_5C_2\times{}_3C_1=180$.

7. 用表 ${}_nC_r$ 之值之公式.

8. ${}_{n-1}C_{r-1}$ 爲從 n 物取 r 物含特別一物之組合數，${}_{n-1}C_r$ 爲不含特別一物之組合數，故此兩組合數相加，卽從 n 物取 r 物之組合數.

9. $n=28$.　　10. $n=7$.

11. 有軍官二名與有軍官三名之情形不同，須先分別計算，然後合併.

$${}_{10}C_7\times{}_3C_2+{}_{10}C_6\times{}_3C_3=360+210=570.$$

12. 交點之數爲 ${}_nC_2$ 卽 $\frac{n(n-1)}{1\times2}$.

13. ${}_{20}C_2\times{}_{25}C_2\times{}_{15}C_2=5985000$.

14. (一) ${}_{10}C_4\times{}_3C_1=630$.

(二) ${}_{10}C_2\times{}_3C_3+{}_{10}C_3\times{}_3C_2+630=1035.$

15. ${}_{20}C_4=4845,\ {}_{19}C_3=969.$

16. 邊與對角線之和爲 ${}_nC_2$, 故對角線之數爲 $\frac{n(n-1)}{1\times2}-n$, 即

$\frac{n(n-3)}{2}$.

17. m 箇點之二點連結直線之數爲 ${}_mC_2$, 因其中有 n 箇點同在一直線上, 須減去二點連結直線之數 ${}_nC_2$, 而添此一直線.

故答數爲 $\frac{m(m-1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}+1$, 即 $\frac{m^2-m-n^2+n+2}{2}$.

18. 從 $\frac{9\times8\times7\times\cdots\cdots\times(9-r)}{(r-1)!}=\frac{9\times8\times7\times\cdots\cdots\times(9-r+1)}{r!}$.

得 $r=9-r+1$, 移項 $2r=10$, 故 $r=5$, 答五人.

19. 從三種色選二種色之組合數爲 ${}_3C_2$, 以二種色如題配合排列, 僅有二法, 故答數爲 $2\times{}_3C_2$ 即 6.

20. ${}_{12}C_4\times{}_8C_4\times{}_4C_4=34650.$

21. 420. **22.** 29070.

23. 十球互異之答 $45+210+210+45+1=511.$

十球相同之答 $\frac{10}{2}=5.$

24. n 爲偶數之答 $\frac{n}{2}$, n 爲奇數之答 $\frac{n-1}{2}$.

第四章　二項定理

問 1. (一) $x^3-2x^2-13x-10.$

(二) $x^3-10x^2+3x+126.$

(三) $x^3-\frac{61}{5}x^2+\frac{112}{5}x-4.$

(四) $x^3-\frac{5}{6}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}.$

問 2. (一) $16x^4-96x^5+216x^6-216x^7+81x^8.$

(二) $16x^8+16x^6+6x^4+x^2+\frac{1}{16}.$

(三) $a^5x^{10}-\frac{15a^4}{c}x^8+\frac{90a^3}{c^2}x^6-\frac{270a^2}{c^3}x^4$

$$+\frac{405a}{c^4}x^2-\frac{243}{c^5}.$$

(四) $2^8x^8-8\times2^7\times3x^7y+28\times2^6\times3^2x^6y^2$

$$-56\times2^5\times3^3x^5y^3+70\times2^4\times3^4x^4y^4$$

$$-56\times2^3\times3^5x^3y^5+28\times2^2\times3^6x^2y^6$$

$$-8\times2\times3^7xy^7+3^8y^8.$$

問 3. (一) 997002999.

(二) 941192.

問 4. ${}_8C_3\times6^3x^{8-3}=12096x^5.$

問 5. $x^n+nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2+\cdots\cdots+a^n$, $38760x^{14}$

問 6. ${}_8C_4(2a)^{8-4}(-x^3)^4=1120\,a^4x^{12}$.

問 7. ${}_{10}C_4\times x^4=210\,x^4$.

問 8. ${}_7C_4\left(\frac{x}{2}\right)^{7-4}\left(-2y\right)^4=70\,x^3y^4$.

問 9. ${}_{12}C_5(a^2)^{12-5}(-b^3)^5=-792\,a^{14}b^{15}$.

問 10. x^{16} 之數係數爲 180.

問 11. x^4y^3 之數係數爲 22680.

問 12. x^{20} 之數係數爲 27. 問 13. x^{10} 之數係數爲 -32.

問 14. 因展開式之公項爲 ${}_8C_r\times x^{8-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_8C_r\times x^{8-2r}$.

令 $8-2r=2$, 則 $r=3$.

以 3 代公項之 r, 得 ${}_8C_3\times x^2$, 卽 $56\,x^2$.

問 15. b^4 之係數爲 $\frac{14080}{9}a^8$.

問 16. x^4 之數係數爲 15360.

問 17. 不含 x 之項爲 59136.

問 18. x^2 之數係數爲 -56. 問 19. ${}_{10}C_5=252$.

問 20. ${}_{11}C_5={}_{10}C_6=462$.

問 21. 先計算 $\frac{(n+1)x}{1+x}$ 之值, $\frac{(6+1)\times\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{7\times 2}{3+2}=2\frac{4}{5}$。

依第 49 節之 II, ${}_6C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2$ 爲最大項, 卽 $6\,\frac{2}{3}$.

問 22. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^9=\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(1+\frac{2}{3}\right)^9$, $\dfrac{(9+1)\times\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\dfrac{10\times2}{3+2}=4.$

依第 49 節之 I, ${}_9C_3\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{2}{3}\right)^3$, ${}_9C_4\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{2}{3}\right)^4$ 同爲最大項.

其數爲 $\frac{7}{144}$.

問 23. $n=6,\ x=1,\ y=\frac{1}{2}$.

問 24. $n=5,\ x=2,\ y=\frac{1}{2}$.

問 25. 依第 50 節例 2 之解法, 得 $n=7$ 或 14.

問 26. 依第 50 節例 3 之解法, 得 $n=9$.

問 27. $n=7$ (與問 26 之解法同).

問 28. $x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1$.

問 29. $a^6+9a^5+30a^4+45a^3+30a^2+9a+1$.

問 30. $1-4x+10x^2-16x^3+19x^4-16x^5+10x^6-4x^7+x^8$.

問 31. 公項爲 ${}_7C_r(1+x)^{7-r}(-x^2)^r={}_7C_r(1+x)^{7-r}(-1)^r x^{2r}$.

從 x^{2r} 知 r 不能大於 2, 亦無小於 o 之理.

以 2 代公項之 r, 得 x^5 之數係數爲 21×5, 卽 105, 又以 1 代公項之 r, 得 x^5 之數係數爲 -7×20, 卽 -140, 又以 o 代公項之 r, 得 x^5 之數係數爲 1×21, 卽 21.

故所求之數係數爲 $105-140+21$, 卽 -14.

問 32. x^5 之數係數爲 -5922.

問 33. $(1-3x+3x^2-x^3)^3=\{(1-x)^3\}^3=(1-x)^9$.

展開 $(1-x)^9$ 之第五項之係數爲 ${}_9C_4=126$, 卽 x^4 之數係數.

問 34. $1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3$.

問 35. $1-x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{8}x^4$.

問 36. $$1-2px+2^2\times\frac{p(p+1)}{1\times2}x^2-2^3\times\frac{p(p+1)(p+2)}{1\times2\times3}x^3$$

$$+2^4\times\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{1\times2\times3\times4}x^4.$$

問 37. $1+mx+\frac{m(m+1)}{1\times2}x^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{1\times2\times3}x^3$.

問 38. 9.89949. 問 39. 9.99333.

問 40. 1.62771.

練習問題 III

1. (一) $a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5$

$+7ab^6+b^7$.

(二) $64a^{12}-192a^{10}+240a^8-160a^6+60a^4-12a^2+1$.

(三) $1-12a+60a^2-160a^3+240a^4-192a^5+64a^6$.

(四) $16a^4+96a^3b+216a^2b^2+216ab^3+81b^4$.

(五) $x^{\frac{4}{3}}+4xy^{2\frac{1}{4}}+6x^{\frac{2}{3}}y^{1\frac{1}{2}}+4x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{6}}$

(六) $x^{\frac{5}{3}}+\frac{5}{x^{\frac{2}{3}}}+\frac{10}{x^3}+\frac{10}{x^{\frac{16}{3}}}+\frac{5}{x^{\frac{23}{3}}}+\frac{1}{x^{10}}$.

2. (一) 996005996001.

(二) 9509900499.

(三) 999100269973.

(四) 10050100100.05001.

3. (一) $2x^4+12x^2y+2y^2$.

(二) $32-40a^2+10a^4$.

(三) $6a^6-96a^4+36a^2-2$.

4. $(2-1)^n$ 卽 1.

5. 因 $1-(3+x)^n=1-\{1+(2+x)\}^n$, 用二項定理可證明.

又 $1-(3+x)^n=1^n-(3+x)^n$, $2+x=-\{1-(3+x)\}$, 依賸餘定理亦可證明.

6. ${}_{50}C_{48}\times x^{48}={}_{50}C_2\times x^{48}=1225x^{48}$.

7. ${}_9C_5(x^3)^{9-5}(3xy)^5=30618x^{17}y^5$.

8. 展開式之公項爲 ${}_8C_r\times x^{8-r}(-1)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_8C_r(-1)^r x^{8-2r}$.

因所求之項 x 之指數爲 6, 知上式中之 r 爲 1, 以 1 代公項之 r, 得 $-8x^6$.

9. 展開式之公項爲 ${}_{11}C_r(x^2)^{11-r}\left(\frac{a^2}{x}\right)^r={}_{11}C_r\times a^{2r}x^{22-3r}$.

今求 x 之係數，知上式中之 r 爲 7，以 7 代公項之 r，得 x 之係數爲 ${}_{11}C_7\times a^{2\times7}={}_{11}C_4\times a^{14}=330a^{14}$.

10. 因指數爲 12，知展開式共有 13 項，中央項即第 7 項，依二項定理，得第 7 項爲 ${}_{12}C_6\left(\frac{2}{3}a\right)^{12-6}\left(\frac{3}{2a}\right)^6={}_{12}C_6=924$.

11. 因指數爲 10，知展開式共有 11 項，中央項即第 6 項，依二項定理，得第 6 項爲 ${}_{10}C_5\times x^{10-5}\left(\frac{1}{x}\right)^5={}_{10}C_5=252$.

12. 所求之項爲第 8 項，依二項定理，得 $-\frac{429}{16}x^{14}$.

13. 因 x 之指數最大爲 36，自左而右，各項之指數遞減 6，知 x 之指數爲 6 之項，即第 6 項，其係數爲 ${}_{12}C_5=792$，又各項之正負相間，偶數項爲負數，故答數爲 -792.

14. 因 x 之指數最大爲 30，自左而右，各項之指數遞減 5，知 x 之指數爲 -20 之項，即第 11 項.

依二項定理，第 11 項爲 ${}_{15}C_{10}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{15-10}\left(-\frac{2}{x^3}\right)^{10}={}_{15}C_5\times2^5$ x^{-20}.

故所求之數係數爲 ${}_{15}C_5\times2^5$，即 96096.

15. 因 $\left(x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{15}=\left(x-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^{15}$.

公項爲 ${}_{15}C_r\times x^{15-r}\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^r={}_{15}C_r\left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{15-r-\frac{r}{2}}$

所求之項爲不含 x 之項, 知 $15-r-\frac{r}{2}$ 等於 0, 卽 $\frac{30-3r}{2}$ 等於 0, 由此得 $r=10$, 故能決定所求之項爲第 11 項, 以 10 代公項之 r.

得 ${}_{15}C_{10}\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}={}_{15}C_5\times\frac{1}{2^{10}}=\frac{3003}{1024}$.

16. 依二項定理展開 $(1+x)^{2m}$ 及 $(1+x)^{2m-1}$ 取 x^m 之係數比較, 卽能證明.

18. ${}_{25}C_{r+5}(-4)^{r+5}(a^2)^{25-(r+5)}={}_{25}C_{r+5}(-1)^{r+5}4^{r+5}a^{40-2r}$.

19. x 之指數最大爲 20, 自左而右, 各項之指數遞減 1, 今所問之項 x 之指數爲 16, 故知爲第五項.

22. 依第 33 節例 2 之解法, 令 ${}_{30}C_{r+3}={}_{30}C_{2r}$, 從 $2r=r+3$ 得 $r=3$, 又從 $2r=30-(r+3)$ 得 $r=9$.

23. 依第 33 節例 2 之解法, 令 ${}_{2n}C_{r+3}={}_{2n}C_{n-3}$, 從 $n-3=r+3$ 得 $n=r+6$, 又從 $2n-(n-3)=r+3$ 得 $n=r$.

24. (一) ${}_7C_3={}_7C_4=35$. (二) ${}_{12}C_6=924$.

25. (一) 第五項. (二) 第五項及第六項.

26. 展開式之公項爲 ${}_3C_r(1+x)^{3-r}(x^2)^r$, 今求 x^4 之係數, 知 r 之值不能大於 2, 亦不能小於 1, 先以 2 代公項之 r, 得 x^4 之係數爲 3, 次以 1 代公項之 r, 得 x^4 之係數爲 3, 故答數爲 3+3 卽 6.

27. 展開式之公項爲 ${}_4C_r(1+x)^{4-r}(x^2)^r$, 今求 x^5 之係數, 知 r 之值不能大於 2, 亦不能小於 1, 先以 2 代公項之 r, 得 x^5 之係數爲 12, 次以 1 代公項之 r, 得 x^5 之係數爲 4, 故答數爲 12+4, 卽 16.

28. $$(1-7x)^{\frac{1}{3}}(1+2x)^{-\frac{3}{4}}=\left(1-\frac{1}{3}\times 7x+\cdots\right)\left(1-\frac{3}{4}\times 2x+\cdots\right)$$
$$=1-\left(\frac{7}{3}+\frac{3}{2}\right)x+\cdots\cdots\doteqdot 1-\frac{23}{6}x.$$

29. $$\sqrt{4-x}\left(3-\frac{x}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{6-x}(4-x)^{\frac{1}{2}}=\frac{4}{6-x}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left(\frac{2}{3}+\frac{x}{9}+\cdots\cdots\right)\left(1-\frac{x}{8}-\cdots\cdots\right)$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{x}{36}-\cdots\cdots=\frac{2}{3}\left(1-\frac{x}{24}-\cdots\cdots\right).$$

第五章　等差級數

問 1. 答 7, 13, 19, 25, 31, 37.

公項 $7+(n-1)6$.

問 2. 答 79, 106.

問 3. 答 $a+(n-1)(b-a)$.

問 4. 答 $a-(n-1)(b-a)$.

解. 從 a 減公差 $(b-a)$ 之 $n-1$ 倍, 卽所求之項.

問 5. 答 2, 7, 12.

問 6. 答 3, 5, 7.

問 7. 答 2, 4, 6, 8.

問 8. 答 $22\frac{3}{7}$, $-1\frac{5}{7}$.

*問 *9. 答 第五項.

解. 以 d 代公差, 從 $-10+9d=17$, 得 $d=3$.

假定第 n 項爲正數, 則 $-10+(n-1)3>0$.

卽 $3n-13>0$.

故 $n>4\frac{1}{3}$, 由此知從第五項起爲正數.

問 10. 答 五項.

解. 以 m 代插入之項數, 則公差爲 $\frac{46-22}{m+1}$, 卽 $\frac{24}{m+1}$.

因第三項爲 30.

故 $30=22+2\times\frac{24}{m+1}$.

兩邊同以 $m+1$ 乘之.

$$30m+30=22m+22+48.$$

移項, $30m-22m=22+48-30$.

卽 $8m=40$.

兩邊同以 8 除之.

$$m=5.$$

問 11. 答 $\frac{1}{2}$.

問 12. 答 $\sqrt{2}-3$.

問 13. 答 $a+(r-1)\frac{b-a}{m+1}$.

解. 級數之公差爲$\frac{b-a}{m+1}$, 故第 r 項爲 $a+(r-1)\frac{b-a}{m+1}$.

問 14. 答 55.

解. 以 d 代公差, 從 $\frac{3}{2}+6d=3$ 得 $d=\frac{1}{4}$.

由此知第十項爲 $\frac{3}{2}+9\times\frac{1}{4}$, 即 $\frac{15}{4}$.

第十項至第二十項之和爲 $\frac{11}{2}\left\{2\times\frac{15}{4}+(11-1)\times\frac{1}{4}\right\}$, 即 55.

問 15. 答 $n\{a^2+b^2+(3-n)ab\}$.

解. 先求公差, 次依第 63 節公式 (4) 求總和.

問 16. 答 $\frac{n-1}{2}$.

解. 公差爲 $\frac{n-2}{n}-\frac{n-1}{n}$, 即 $-\frac{1}{n}$.

以 $\frac{n-1}{n}$, $-\frac{1}{n}$, 代第 63 節公式 (4) 之 a, d 即得.

問 17. 證. 級數之初項與公差同爲 8, 以 n 代項數.

則 $S=\frac{n}{2}\left\{2\times8+(n-1)\times8\right\}=4n(n+1)$.

故 $4n(n+1)+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$.

問 18. 證. 以初項 1 公差 2 代公式 (4) 之 a, d.

則 $S=\frac{n}{2}\left\{2\times1+(n-1)\times2\right\}=n^2.$

問 19. 答 $\frac{n}{2}(a+b).$

解. 先求公差，以 n 代第 61 節公式 (2) 之 m, $d=\frac{b-a}{n+1}.$

得插入之初項爲 $a+\frac{b-a}{n+1}$, 卽 $\frac{na+b}{n+1}.$

又以 $\frac{na+b}{n+1}$, $\frac{b-a}{n+1}$ 代第 63 節公式 (4) 之 a, d.

則 $S=\frac{n}{2}\left\{2\left(\frac{na+b}{n+1}\right)+(n-1)\left(\frac{b-a}{n+1}\right)\right\}=\frac{n}{2}(a+b).$

問 20. 答 二十項.

解. 以初項 5 公差 2 總和 480, 代第 64 節求項數之方程式之 a, d, S. 各項同以 2 約之, 得 $n^2+4n-480=0.$

分解因數, $(n-20)(n+24)=0.$

項數須採用正整數, 故 $n=20.$

問 21. 答 三十三項.

問 22. 答 第二項或第六項.

問 23. 答 十八項或十九項.

問 24. 答 二十二項.

問 25. 答 七項或十二項.

問 26. 答 第八項.

解. 先求公差, 從 $-10+9d=17$ 得 $d=3$.

次以 -10, 3 代第 64 節求項數之方程式之 a, d.

得 $S=\frac{n}{2}\left\{2(-10)+(n-1)3\right\}=\frac{n}{2}(3n-23)$.

若 S 爲正數, 則 $\frac{n}{2}(3n-23)>0$.

2 乘 3 除, 卽 $n\left(n-7\frac{2}{3}\right)>0$.

故須令 $n>7\frac{2}{3}$ 或 $n<0$.

因項數不宜用分數及負數, 知 $n=8$.

問 27. 答 -368.

解. 依第 63 節公式 (4).

$$68=\frac{4}{2}\left\{2a+(4-1)d\right\}.$$

$$30=\frac{5}{2}\left\{2(a+5d)+(5-1)d\right\},$$

從此二方程式得 $a=20$, $d=-2$.

故第十五項爲 $20+14\times(-2)$, 卽 -8.

又依公式 (4) 求自第十五項至第三十項之和.

$$\frac{16}{2}\left\{2(-8)+(16-1)(-2)\right\}=-368.$$

問 28. 答 $-(m+n)$.

解. 依第 63 節公式 (4).

$$n=\frac{m}{2}\left\{2a+(m-1)d\right\}.$$

$$m=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}.$$

從此二方程式得 $a=\dfrac{n^2+(m-1)(m+n)}{mn}$, $d=-\dfrac{2(m+n)}{mn}$.

又依公式 (4) 求 $m+n$ 項之和.

$$\frac{m+n}{2}\left\{\frac{2n^2+2(m-1)(m+n)}{mn}+(m+n-1)\left(-\frac{2(m+n)}{mn}\right)\right\}$$
$$=-(m+n).$$

問 29. 答 13266.

解. 100 與 500 之間, 9 除適盡之諸數, 以 108 爲最小數, 495 爲最大數.

所定之範圍內, 9 除適盡之數, 共有 $\dfrac{495-108}{9}+1$ 數.

即 44 數.

依第 63 節公式 (3) 求諸數之和.

$$S=\frac{44}{2}\left(108+495\right)=13266.$$

問 30. 答 8729.

問 31. 答 四十二數, 諸數之和 6321.

問 32. 答 55350.

解. 三位之數, 從 100 起, 至 999 止.

問 33. 答 四百五十數, 諸數之和 247500.

解. 三位之奇數, 最小者爲 101, 最大者爲 999.

共有 $\frac{999-101}{2}+1$ 數, 卽 450 數.

依第 63 節公式 (3) 求諸數之和.

$$\frac{450}{2}(101+999)=247500.$$

問 34. 答 9 寸, 12 寸, 15 寸.

問 35. 答 十二邊.

解. 假定多角形之邊數爲 n, 最小角爲 a 度.

依等差級數求末項之法, 求最大角之度數.

$$a+(n-1)4=172\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又依幾何學定理及第 8 節之公式 (3), 求各內角之和.

$$90\times(2n-4)=\frac{n}{2}\left(a+172\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從 (1), (2) 兩式消去 a.

得 $n^2+3n-180=0.$

分解因數, $(n-12)(n+15)=0.$

多角形之邊數卽等差級數之項數, 不宜用負數, 故 $n=12.$

問 36. 答 五人.

解. 以 a 代最幼者所得之圓數, 則 2a 爲長子所得之圓數.

諸子所得之圓數, 與初項 a 末項 2a 公差 150 總和 4500 之等差級數同.

其級數之項數, 卽所求之人數.

依第 63 節之公式 (3) 及公式 (4).

$$4500=\frac{n}{2}\left(a+2a\right).$$

$$4500=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)\times150\right\}.$$

從上之二式消去 a.

$$n^2-n-20=0.$$

分解因數.

$$(n-5)(n+4)=0.$$

人數不宜用負數，故 $n=5$.

問 37. 答 五點鐘.

解. 可從第 66 節例 2 之解法類推.

問 38. 答 六百五十步.

解. 先運最近之一塊銅，往返共行二十步，爲等差級數之初項，其後由近漸遠，每運一塊，遞增十步，卽級數之公差，共往返十次，卽級數之項數，依第 63 節公式 (4) 求總和.

$$\frac{10}{2}\left\{2\times20+(10-1)\times10\right\}=650.$$

問 39. 答 五秒.

解. 二球一降一昇，成反對方向，知輕球在重球上 1.5 公尺時，重球距原位置爲 75 公分.

求重球下降之秒數，與知等差級數之初項 3 公差 6 總和 75 求項數同.

以 x 代所求之秒數, 依第 63 節之公式 (4)。

$$75=\frac{x}{2}\left\{2\times3+(x-1)6\right\}=3x^2.$$

兩邊同以 3 約之, 各開平方.

$$x=\pm5.$$

不採用負根, 故 $x=5$.

問 40. 答 一百三十八丈二尺八寸七分五釐.

解. 第一機運轉四點鐘時, 織成布 4×19.5 尺, 卽 78 尺, 其餘各機遞少五分鐘時, 布遞少 $\frac{5}{60}\times19.5$ 尺, 卽 1.625 尺, 機二十三架共織之尺數, 卽等差級數初項 78 公差 -1.625 項數 23 之總和.

依第 63 節公式 (4).

$$\frac{23}{2}\left\{2\times78+(23-1)(-1.625)\right\}=1382.875.$$

練習問題 I

1. 證 $a, b, c, d,$………爲等差級數.

則 $b-a=c-b=d-c=$………

原級數之各項, 同以 k 加之.

因 $(b+k)-(a+k)=(c+k)-(b+k)=(d+k)-(c+k)=$………

故 $a+k, b+k, c+k, d+k,$………仍爲等差級數.

2. 證 可從問題 1 類推.

3. 證 設初項爲 a, 公差爲 d, 項數爲 $2n+1$.

則中央項爲 $a+(n+1-1)d$, 卽 $a+nd$.

末項爲 $a+(2n+1-1)d$, 卽 $a+2nd$.

故 a, $a+nd$, $a+2nd$ 亦爲等差級數.

4. 證 設等差級數爲 $a, a+d, a+2d, \cdots\cdots\cdots$

則第一羣之總和爲 $\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}$, 卽 $na+\frac{n(n-1)}{6}d$.

第二羣之初項爲 $a+nd$.

其總和爲 $\frac{n}{2}\left\{2(a+nd)+(n-1)d\right\}$, 卽 $n(a+nd)$

$$+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

第三羣之初項爲 $a+2nd$.

總和爲 $\frac{n}{2}\left\{2(a+2nd)+(n-1)d\right\}$, 卽 $n(a+2nd)$

$$+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

第四羣第五羣……之總和, 可以類推.

此各羣之公差爲 n^2d, 成新等差級數.

故新級數之公差與原級數之公差之比, 如 $n^2:1$.

5. 答 0 或 2:1.

解. 以 a 代初項, d 代公差.

則初項至第 n 項之和爲 $\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}$.

卽 $\dfrac{2an+n^2d-nd}{2}$ ……………………………(1)

又第 n+1 項至第 3n 項之 2n 項之和

$$\frac{2n}{2}\left\{2(a+nd)+(2n-1)d\right\}.$$

卽 $2an+4n^2d-nd$ ……………………………(2)

以 k 表 (1) 與 (2) 之比之值.

$$\frac{2an+n^2d-nd}{2(2an+4n^2d-nd)}=k.$$

分母子同以 n 約之.

$$\frac{2a+nd-d}{2(2a+4nd-d)}=k.$$

去分母.

$$2a-d+nd=2(2a-d+4nd)k.$$

移項.

$$(2a-d)(1-2k)+(1-8k)nd=0.$$

此式無論 n 之値而能成立, 必 $(2a-d)(1-2k)$ 與 $(1-8k)d$ 皆等於 0.

$1-2k$ 與 $1-8k$, 無同時等於 0 之理.

若 $d=0$, 則級數之各項皆相等, $k=\frac{1}{2}$, $d:a=0$.

若 $2a-d=0$, 則級數之公差爲初項之 2 倍, $k=\frac{1}{8}$, $d:a=2:1$.

6. 答 $a+(n-1)r+\frac{(n-1)(n-2)}{2}d.$

解. 累加後之級數式爲 $a,\ a+r,\ a+2r+d,\ a+3r+(1+2)d,$ $a+4r+(1+2+3)d,\cdots\cdots\cdots\cdots$

故第 n 項爲 $a+(n-1)r+\{1+2+3+\cdots\cdots+(n-2)\}d.$

卽 $a+(n-1)r+\frac{(n-1)(n-2)}{2}d.$

7. 答 $\frac{n}{2}\left(n^2+1\right).$

解. 第一組之初項爲 1, 第二組之初項爲 $2=1+1$, 第三組之初項爲 $4=1+1+2$, 第四組之初項爲 $7=1+1+2+3$, 餘可類推.

故第 n 組之初項爲 $1+1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)$, 卽 $1+\frac{n(n-1)}{2}$.

卽 $\frac{2+n(n-1)}{2}$, 其餘各項之公差爲 1, 項數爲 n.

求得第 n 組之各項如次.

$$\frac{2+n(n-1)}{2}+\left\{\frac{2+n(n-1)}{2}+1\right\}+\left\{\frac{2+n(n-1)}{2}+2\right\}+\cdots\cdots$$

$$+\left\{\frac{2+n(n-1)}{2}+(n-1)\right\}.$$

依第 63 節公式 (3) 求總和.

$$S=\frac{n}{2}\left\{2+n(n-1)+(n-1)\right\}=\frac{n}{2}\left(n^2+1\right).$$

8. 證 第一組之初項為 1, 第二組之初項為 $3=1+2$, 第三組之初項為 $7=1+2+4$, 第四組之初項為 $13=1+2+4+6$.

餘可類推.

故第 n 組之初項為 $1+2\{1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)\}$.

即 $1+n(n-1)$, 其餘各項之公差為 2, 項數為 n.

依第 63 節公式 (4) 求總和.

$$S=\frac{n}{2}\left\{2+2n(n-1)+(n-1)2\right\}=n^3.$$

9. 證 a, b, c 為等差級數.

則 $c+a=2b$.

兩邊同以 $2b^2$ 乘之.

$$\begin{aligned}2b^2(c+a)&=4b^3\\&=4b^3-2abc+2abc\\&=b(a+c)^2-2abc+ac(a+c)\\&=b\{(a+c)^2-2ac\}+ac(a+c)\\&=b(a^2+c^2)+ac(a+c)\\&=a^2b+a^2c+c^2a+c^2b\\&=a^2(b+c)+c^2(a+b).\end{aligned}$$

故 $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$ 亦為等差級數.

10. 證 a^2, b^2, c^2 為等差級數.

則 $b^2-a^2=c^2-b^2$.

即 $(b-a)(b+a)=(c-b)(c+b)$.

兩邊同以 $(b+a)(c-b)$ 除之.

$$\frac{b-a}{c-b}=\frac{c+b}{b+a}.$$

兩邊同以 $\frac{c-b}{c+b}$ 乘之.

$$\frac{b-a}{c+b}=\frac{c-b}{b+a}.$$

又同以 $c+a$ 除之.

$$\frac{b-a}{(c+a)(c+b)}=\frac{c-b}{(c+a)(b+a)}.$$

卽 $\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}.$

故 $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ 亦爲等差級數.

11. 證 a, b, c 爲等差級數, 以 d 代公差.

則 $a=b-d,\ c=b+d.$

$$\frac{2}{9}\left(a+b+c\right)^3=\frac{2}{9}\left(b-d+b+b+d\right)^3=6b^3,$$

$$\begin{aligned}
&a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\\
&=(b-d)^2(2b+d)+b^2(2b)+(b+d)^2(2b-d)\\
&=(b^2-2bd+d^2)(2b+d)+2b^3+(b^2+2bd+d^2)(2b-d)\\
&=2b^3-4b^2d+2bd^2+b^2d-2bd^2+d^3+2b^3\\
&\quad+2b^3+4b^2d+2bd^2-b^2d-2bd^2-d^3\\
&=6b^3.
\end{aligned}$$

故 $\frac{2}{9}(a+b+c)^3=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$.

12. 證 以 a 代初項, 2a 代公差, 依第 63 節公式 (4), 求初項至第 m 項之和及初項至第 n 項之和作比.

13. 答 $\frac{590}{19}$.

解. 以 a 代初項, d 代公差, 得二方程式如次.

$$a+11d=354\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\frac{6}{2}\left\{2(a+d)+5\times2d\right\}}{\frac{6}{2}(2a+5\times2d)}=\frac{32}{27}\cdots\cdots(2)$$

從 (1), (2) 兩式消去 a, 求得 d 之值卽公差.

14. 答 $\frac{p}{2}\left\{\frac{(p-2n+1)M+(2m-p-1)N}{m-n}\right\}$.

解. 以 a 代初項, d 代公差.

則 $a+(m-1)d=M,\ a+(n-1)d=N$.

從第一式減第二式.

$$(m-n)d=M-N.$$

兩邊同以 $m-n$ 除之.

$$d=\frac{M-N}{m-n}.$$

故 $a=M-(m-1)\frac{M-N}{m-n}=\frac{(1-n)M+(m-1)N}{m-n}$.

依第 63 節公式 (4) 求 p 項之和

$$S=\frac{p}{2}\left\{\frac{2(1-n)M+2(m-1)N}{m-n}+(p-1)\frac{M-N}{m-n}\right\}$$

$$=\frac{p}{2}\left\{\frac{(p-2n+1)M+(2m-p-1)N}{m-n}\right\}.$$

15. 答 $10p-8$.

解. 先求級數之初項與公差.

以 1 代總和之公式之 n.

得初項爲 $1\times(5\times1-3)$ 卽 2.

又以 2 代總和之公式之 n.

得初項之 2 倍與公差之和爲 $2\times(5\times2-3)$, 卽 14.

故公差爲 $14-2\times2$, 卽 10.

依第 58 節公式 (1).

得第 p 項爲 $2+(p-1)\times10$, 卽 $10p-8$.

第六章 等比級數

問 1. 答 1, 3, 9, 27, 81, 公項 3^{n-1}.

問 2. 答 27, 36, 48, 64, 又 -189, 252, -336, 448.

問 3. 答 0.375, 0.75, 1.5, 3.

問 4. 答 8, 12, 18, 27.

問 5. 答 4, 6 或 $\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}$.

解. 設插入之二數爲 $2+d$, $2+2d$.

因此二數與 9 成等比級數.

故 $\frac{2+2d}{2+d}=\frac{9}{2+2d}$.

去分母.

$4(1+d)^2=18+9d$.

即 $4d^2+8d+4=18+9d$.

移項, $4d^2-d-14=0$.

分解因數, $(d-2)(4d+7)=0$.

得 $d=2$ 或 $-\frac{7}{4}$.

故插入之二項爲 $2+2,\ 2+2\times2$, 即 4, 6.

又 $2+\left(-\frac{7}{4}\right),\ 2+2\times\left(-\frac{7}{4}\right)$, 即 $\frac{1}{4},\ -\frac{3}{2}$.

問 6. 答 6, 9 或 -4, 4.

問 7. 答 3, 6, 12.

問 8. 答 初項爲 $\frac{k^{\frac{3n-1}{n}}}{(k+l)l^{\frac{n-1}{n}}}$, 公比爲 $\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{n}}$.

解. 以 a 代初項, r 代公比.

則 $ar^{n-1}+ar^{2n-1}=k$.

$ar^{2n-1}+ar^{3n-1}=l$.

即 $a(1+r^n)r^{n-1}=k$……………………………(1)

$a(1+r^n)r^{2n-1}=l$……………………………(2)

從 (1), (2) 兩式得 $r^n=\frac{l}{k}$.

去 r 之指數, $r=\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{n}}$ ……………………………(3)

又從 (1) 式得 $a=\frac{k}{(1+r^n)\,r^{n-1}}$ …………………(4)

以 (3) 式之右邊代 (4) 式右邊之 r.

$$a=\frac{k}{\left(1+\frac{l}{k}\right)\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{k^{2+\frac{n-1}{n}}}{(k+l)\,l^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$=\frac{k^{\frac{3n-1}{n}}}{(k+l)\,l^{\frac{n-1}{n}}}.$$

問 9. 答　第 p 項為 $\sqrt{mn}$, 第 q 項為 $\sqrt[2q]{m^{2q-p}n^p}$.

解. 以 a 代初項, r 代公比.

則　$ar^{p+q-1}=m$ ……………………………(1)

　　$ar^{p-q-1}=n$ ……………………………(2)

(1), (2) 兩式相乘.

$$a^2r^{2p-2}=mn.$$

故　$ar^{p-1}=\sqrt{mn}$.

又以 (2) 式除 (1) 式.

$$r^{2q}=\frac{m}{n}.$$

故 $$r=\sqrt[2q]{\frac{m}{n}}.$$

以 r 之值代入 (1) 式之左邊.

$$a\left(\sqrt[2q]{\frac{m}{n}}\right)^{p+q-1}=m.$$

兩邊同以 $\left(\sqrt[2q]{\frac{m}{n}}\right)^{p+q-1}$ 除之.

$$a=\frac{m}{\left(\sqrt[2q]{\frac{m}{n}}\right)^{p+q-1}}=m\times\left(\sqrt[2q]{\frac{n}{m}}\right)^{p+q-1}$$

$$=m\div\left(\sqrt[2q]{m}\right)^{p+q-1}\times\left(\sqrt[2q]{n}\right)^{p+q-1}$$

$$=\left(\sqrt[2q]{m}\right)^{2q}\div\left(\sqrt[2q]{m}\right)^{p+q-1}\times\left(\sqrt[2q]{n}\right)^{p+q-1}$$

$$=\left(\sqrt[2q]{m}\right)^{q-p+1}\times\left(\sqrt[2q]{n}\right)^{p+q-1}.$$

故 $$ar^{q-1}=\left(\sqrt[2q]{m}\right)^{q-p+1}\times\left(\sqrt[2q]{n}\right)^{p+q-1}\times\left(\sqrt[2q]{\frac{m}{n}}\right)^{q-1}$$

$$=\left(\sqrt[2q]{m}\right)^{q-p-1}\times\left(\sqrt[2q]{m}\right)^{q-1}\times\left(\sqrt[2q]{n}\right)^{p+q-1}\div\left(\sqrt[2q]{n}\right)^{q-1}$$

$$=\left(\sqrt[2q]{m}\right)^{2q-p}\times\left(\sqrt[2q]{n}\right)^{p}$$

$$=\sqrt[2q]{m^{2q-p}\,n^{p}}.$$

問 10. 答 2^n 人.

問 11. 解 以初項 1 除末項 2, 開 12 次方爲公比, 因初項爲 1, 故公比及公比之二次冪至十一次冪, 卽插入之各項.

問 12. 答 8, 12, 18, 27.

問 13. 答 $-9, 27, -81, 243$.

問 15. 答 9, 1.

問 16. 答 6, 12, 24, 又 $-6, 12, -24$.

問 17. 證 因 $1\div\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{2}=1\div\dfrac{a+b}{2ab}=\dfrac{2ab}{a+b}$.

從 $\sqrt{ab}$ 減 $\dfrac{2ab}{a+b}$, 化得 $\dfrac{(a+b)\sqrt{ab}-2ab}{a+b}$.

卽 $\dfrac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}$.

$\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$ 爲正數, 則 $a+b$, $\sqrt{ab}$, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ 皆爲正數.

上之結果必爲正數, 故能決定 $\sqrt{ab}>\dfrac{2ab}{a+b}$.

問 18. 證 因 $(\sqrt{ab})^2=\dfrac{a+b}{2}\times\dfrac{2ab}{a+b}$.

故 $\dfrac{2ab}{a+b}$, $\sqrt{ab}$, $\dfrac{a+b}{2}$ 爲等比級數.

問 19. 答 3, 48.

問 20. 證 從 $\dfrac{a+b}{2}=x$, $\dfrac{b+c}{2}=y$.

得 $\frac{a}{x}=\frac{2a}{a+b}$, $\frac{c}{y}=\frac{2c}{b+c}$.

故 $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=\frac{2a}{a+b}+\frac{2c}{b+c}=\frac{2(ab+ac+ac+bc)}{(a+b)(b+c)}$.

因 a, b, c 爲等比級數 $b^2=ac$.

以 b^2 代上式右邊括弧內第二項之 ac.

則 $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=\frac{2(ab+b^2+ac+bc)}{(a+b)(b+c)}$

$=\frac{2(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)}$

$=2$.

問 21. 證 以 a, b 代已知之二數.

則 a, G, b 爲等比級數, a, p, q, b 爲等差級數.

因 $G^2=ab$……………………………(1)

$a+q=2p$…………………………(2)

$p+b=2q$…………………………(3)

從 (2), (3) 兩式得 $a=2p-q$, $b=2q-p$.

以 a, b 之值代 (1) 式之右邊.

卽 $G^2=(2p-q)(2q-p)$.

問 22. 答 $63(1+\sqrt{2})$.

問 23. 答 (一) $\frac{2343}{64}$.

(二) $\frac{133}{243}$.

(三) 4.999999488.

問 24. 答 $\frac{2a(1-a^n)-n(n+1)(1-a)b}{2(1-a)}$.

解. 題式 $=(a+a^2+a^3+\cdots\cdots+a^n)-(b+2b+3b+\cdots\cdots+nb)$

$$=\frac{a(1-a^n)}{1-a}-\frac{n(n+1)b}{2}$$

$$=\frac{2a(1-a^n)-n(n+1)(1-a)b}{2(1-a)}.$$

問 25. 答 2.

問 26. 答 1, 3, 9, 27, …… 又 −2, 6, −18, 54, ……

解. 依第 74 節公式 (7).

$$\frac{a(1-r^4)}{1-r}=40.$$

$$\frac{a(1-r^8)}{1-r}=3280.$$

以第一式除第二式.

$$1+r^4=82.$$

移項. $r^4=81.$

本書不採用虛數, 則 $r=3$ 或 -3.

以 3 代 (1) 式之 r.

化得 $40a=40$, 故 $a=1$.

又以 −3 代 (1) 式之 r.

化得 $-20a=40$, 故 $a=-2$.

問 27. 答 3.

問 28. 答 (一) x^2+xy+y^2.

(二) $x^3+x^2y+xy^2+y^3$.

(三) x^2-xy+y^2.

(四) $x^3-x^2y+xy^2-y^3$.

問 29. 答 $x^6-2x^5-x^4-2x^3-3x^2-2x-4$.

問 30. 答 剩餘 $2y^4$.

解. $x^4+y^4=x^4-y^4+2y^4$.

從第 21 節之 II, 知 x^4-y^4 能以 $x+y$ 除盡.

故以 $x+y$ 除 x^4+y^4, 不能適盡, 有剩餘 $2y^4$.

問 31. 解. $x^n-y^n=x^n+y^n-2y^n$.

n 爲奇數, 從第 76 節之 III, 知 x^n+y^n 能以 $x+y$ 除盡.

故以 $x+y$ 除 x^n-y^n, 不能適盡, 有剩餘 $-2y^n$.

問 32. 答 $2a$.

問 33. 答 $\frac{27}{5}$.

問 34. 答 $\frac{a\sin\theta}{1-\cos\theta}$, 卽 $a\cos\frac{\theta}{2}$.

問 35. 答 $16(2+\sqrt{3})\sqrt{2}$.

問 36. 答 $\frac{1}{10}$.

問 37. 答 $\frac{1}{b}$.

問 38. 答 $\frac{a}{a+b-1}$.

問 39. 答 $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots\cdots\cdots\cdots$

解. 以 a 代初項, r 代公比.

則 $r=\frac{2}{a}$.

依第 77 節之公式 (9),

$$\frac{a}{1-\frac{2}{a}}=8.$$

化得 $a^2-8a+16=0$.

開平方, $a-4=0$.

故 $a=4$.

$r=\frac{1}{2}$.

問 40. 答 $3, 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \cdots\cdots\cdots\cdots$ 又 $6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \cdots\cdots\cdots\cdots$

問 41. 答 $6, -2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{9}, \cdots\cdots\cdots\cdots$

解. 以 a 代初項, r 代公比.

則 $r=-\frac{2}{a}$.

依第 77 節之公式 (9).

$$\frac{a}{1+\frac{2}{a}}=4\frac{1}{2}.$$

化得 $2a^2-9a-18=0$.

分解因數.

$$(a-b)(2a+3)=0.$$

故 $a=6$ 或 $-\frac{3}{2}$.

$$r=-\frac{1}{3}\text{ 或 }\frac{4}{3}.$$

r 之第二值大於 1, 不能求無限級數之和, 故僅有一答.

問 42. 答 (一) $\frac{136}{333}$.

(二) $\frac{1}{1850}$.

(三) $\frac{212}{495}$.

(四) $\frac{17}{135}$.

問 43. 答 (一) $\frac{1}{10}$.

(二) $\frac{5}{11}$.

(三) $\frac{797}{1100}$.

問 44.　答　$2a^2$ 平方寸.

解.　已知之正方形之面積爲 a^2 平方寸, 連結其四邊之中點, 成小正方形, 其面積爲已知之正方形之半, 卽 $\frac{a^2}{2}$ 平方寸, 又連結小正方形四邊之中點, 成更小之正方形, 其面積爲小正方形之半, 卽 $\frac{a^2}{4}$ 平方寸, 由是類推, 得諸正方形面積之和, 如次之等比級數.

$$a^2+\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}+\cdots\cdots$$

依第 77 節公式 (9).

得總和之極限値爲 $\dfrac{a^2}{1-\frac{1}{2}}$, 卽 $2a^2$ 平方寸.

問 45.　答　3:1.

問 46.　答　$4R^2$ 平方寸.

解.　第一正方形之一邊之長爲 $\sqrt{2}\,R$ 寸, 面積爲 $2R^2$ 平方寸, 第二正方形之一邊之長爲 R 寸, 面積爲 R^2 平方寸, 由是類推, 得諸正方形面積之和, 如次之等比級數.

$$2R^2+R^2+\frac{R^2}{2}+\frac{R^2}{4}+\cdots\cdots$$

此級數之初項爲 $2R^2$, 公比爲 $\frac{1}{2}$.

求得總和之極限値爲 $\dfrac{2R^2}{1-\frac{1}{2}}$, 卽 $4R^2$ 平方寸.

問 47. 答 $\frac{8}{7}R^3$ 立方寸.

問 48. 答 9 尺.

練習問題 II

4. 答 $a=16, b=24$, 又 $a=1, b=-6$.

5. 答 $a=16, c=4$, 又 $a=4, c=16$.

6. 答 2, 4, 8, 12, 又 $12\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$.

解. 以 $x-y, x, x+y$ 代後之三數.

因前三數爲等比級數, 故第一數爲 $\frac{(x-y)^2}{x}$.

得聯立方程式如次.

$$\frac{(x-y)^2}{x}+x+y=14\cdots\cdots(1)$$

$$x-y+x=12\cdots\cdots(2)$$

化 (2) 式爲 $y=2x-12\cdots\cdots(3)$

以 y 之值代入 (1) 式.

得 $\frac{(x-2x+12)^2}{x}+x+2x-12=14.$

卽 $\frac{(-x+12)^2}{x}+3x-12=14.$

去分母及括弧.

$$x^2-24x+144+3x^2-12x=14x.$$

移項併項.

$$4x^2-50x+144=0.$$

各項同以 2 約之.

$$2x^2-25x+72=0.$$

分解因數.

$$(x-8)(2x-9)=0.$$

故 $x=8$ 或 $\frac{9}{2}$.

以 x 之值代入 (3) 式之右邊.

$$y=4 \text{ 或 } -3.$$

由第一組 x, y 之值, 得所求之四數為 2, 4, 8, 12.

由第二組 x, y 之值, 得所求之四數為 $12\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$.

7. 答 9, 6, 4, 2, 又 25, −10, 4, 18.

8. 答 12, 23, 34, 又 51, 23, −5.

解. 以 $x-y, x, x+y$ 代所求之三數.

分加 1, 3, 18 於三數, 得 $x-y+1, x+3, x+y+18$.

因前之三數之和為 69, 後之三數為等比級數.

故 $3x=69$ ……(1)

$$(x+3)^2=(x-y+1)(x+y+18) \quad \cdots\cdots(2)$$

去 (1) 式 x 之係數.

$$x=23.$$

以 x 之値代入 (2) 式之兩邊.

$$26^2=(24-y)(41+y).$$

卽 $676=984-17y-y^2$.

移項 $y^2+17y-308=0$.

分解因數

$$(y-11)(y+28)=0.$$

故 $y=11$ 或 -28.

由 $x=23,\ y=11$ 得第一組答數.

由 $x=23,\ y=-28$ 得第二組答數.

9. 答 6, 12, 18, 24.

解. 以 $x-3y,\ x-y,\ x+y,\ x+3y$ 代所求之四數, 運算較便.

10. 答 $a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

解. n 項之連乘積 $=a\times ar\times ar^2\times\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\times ar^{n-1}$

$$=a^n r^{1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)}$$

$$=a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

又級數之初項爲 a, 末項爲 ar^{n-1}, 其相乘積爲 $a^2 r^{n-1}$.

故 $(a^2 r^{n-1})^{\frac{n}{2}} \quad =a^{2\times\frac{n}{2}}\ r^{(n-1)\times\frac{n}{2}}$.

$$=a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

11. 證　以 r 代公比.

從　$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=r.$

得　$b=ar.$

$c=br=ar^2.$

$d=cr=ar^3.$

故　$a+b=a(1+r)$, $b+c=a(1+r)r$, $c+d=a(1+r)r^2$.

由此知 $a+b$, $b+c$, $c+d$ 亦爲等比級數，其公比與原級數之公比同.

14. 證　依二次方程式之解法.

$$x=\frac{2(a+c)b\pm\sqrt{4(a+c)^2b^2-4(a^2+b^2)(b^2+c^2)}}{2(a^2+b^2)}$$

$$=\frac{(a+c)b\pm\sqrt{(a+c)^2b^2-(a^2+b^2)(b^2+c^2)}}{a^2+b^2}.$$

若 x 爲實數.

須　$(a+c)^2b^2-(a^2+b^2)(b^2+c^2)\geqq 0.$

卽　$-b^4+2acb^2-a^2c^2\geqq 0.$

$-(b^2-ac)^2\geqq 0.$

因 a, b, c 同爲實數，$-(b^2-ac)^2$ 不能大於 o, 惟 $b^2=ac$, 可等於 o, 故 a, b, c 爲等比級數.

$$x=\frac{(a+c)b}{a^2+b^2}.$$

以 $\frac{b^2}{a}$ 代右邊括弧內之 c.

則 $x=\frac{\left(a+\frac{b^2}{a}\right)b}{a^2+b^2}=\frac{\left(a^2+b^2\right)\frac{b}{a}}{a^2+b^2}=\frac{b}{a}.$

由此知 x 爲級數之公比.

15. 證 依對數理.

$$\log a = x\log.$$

$$\log b = y\log.$$

$$\log c = z\log.$$

因 a, b, c 爲等比級數.

故 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}.$

依對數理.

$$\log a-\log b=\log b-\log c.$$

以 loga, logb, logc 之值代入兩邊.

$$x\log n-y\log n=y\log n-z\log n.$$

各項同以 logn 除之.

得 $x-y=y-z.$

由此知 x, y, z 爲等差級數.

17. 證 以 a 代初項, r 代公比.

則第 n 項爲 ar^{n-1}, 其次項爲 ar^n.

因　$o<r<\frac{1}{2}$.

依第77節公式(9).

次項起無限項之和$=\frac{ar^n}{1-r}$.

今比較$\left|ar^{n-1}\right|$與$\left|\frac{ar^n}{1-r}\right|$之大小.

因r爲小於$\frac{1}{2}$之正數,則$\frac{r}{1-r}$必爲小於1之正數.

而$\left|\frac{ar^n}{1-r}\right|=\left|ar^{n-1}\right|\times\left|\frac{r}{1-r}\right|$

故$\left|\frac{ar^n}{1-r}\right|<\left|ar^{n-1}\right|$

18.　證　依第74節之公式(7).

$$\frac{a(1-r^p)}{1-r}=x,\ \frac{a(1-r^{2p})}{1-r}=y,\ \frac{a(1-r^{3p})}{1-r}=z.$$

因　$y^2=\frac{a^2(1-r^{2p})^2}{(1-r)^2}=\frac{a^2(1-2r^{2p}+r^{4p})}{(1-r)^2}$.

又　$x(y+z-x)=\frac{a(1-r^p)}{1-r}\times\frac{a(1-r^{2p}+1-r^{3p}-1+r^p)}{1-r}$

$$=\frac{a^2(1-r^p)(1+r^p-r^{2p}-r^{3p})}{(1-r)^2}$$

$$=\frac{a^2(1-r^{2p}+r^{4p})}{(1-r)^2}.$$

故 $y^2=x(y+z-x)$.

由此知 x, y, $y+z-x$ 亦爲等比級數.

19. 證 以 a 代初項, r 代公比.

則第 $2m+1$ 項爲 ar^{2m}, 中央項爲 ar^m。

初項至第 $2m+1$ 項之連乘積

$$=a\times ar\times ar^2\times\cdots\cdots\times ar^{2m}$$

$$=a^{2m+1}r^{1+2+3+\cdots\cdots+2m}$$

$$=a^{2m+1}r^{m(2m+1)}.$$

中央項之 $2m+1$ 次羃

$$=(ar^m)^{2m+1}$$

$$=a^{2m+1}r^{m(2m+1)}.$$

20. 證 以 a 代初項, r 代公比.

依第 74 節公式 (7).

初項至第 k 項之和 $=\dfrac{a(1-r^k)}{1-r}$.

第 $k+1$ 項至第 $2k$ 項之和 $=\dfrac{a(1-r^k)r^k}{1-r}$.

第 $2k+1$ 項至第 $3k$ 項之和 $=\dfrac{a(1-r^k)r^{2k}}{1-r}$.

由此知順次各 k 項之和, 亦爲等比級數, 新級數之公比, 卽原級數之公比之 k 次羃.

21. 證 等比級數之初項與末項，常爲諸數中之最大最小者，故 l 與 g 爲級數之初末二項. 設 l 爲初項，以 r 代公比.

則諸數爲 $l, lr, lr^2, \cdots\cdots lr^{n-1}$，而 $lr^{n-1}=g$.

初項至第 n 項之連乘積

$$=l\times lr\times lr^2\times\cdots\cdots\times lr^{n-1}$$

$$=l^n r^{1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)}$$

$$=l^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$=(l^2 r^{n-1})^{\frac{n}{2}}$$

$$=(l\times lr^{n-1})^{\frac{n}{2}}$$

$$=(lg)^{\frac{n}{2}}.$$

22. 證 以 p 代等比級數 $a+b+c, b+c-a, c+a-b, a+b-c$ 之公比.

從 $b+c-a=(a+b+c)p$.

$c+a-b=(a+b+c)p^2$.

$a+b-c=(a+b+c)p^3$.

得 $p=\frac{b+c+a}{a+b+c}, p^2=\frac{c+a+b}{a+b+c}, p^3=\frac{a+b-c}{a+b+c}$.

故 $p^3+p^2+p=\frac{a+b-c}{a+b+c}+\frac{c+a-b}{a+b+c}+\frac{b+c-a}{a+b+c}$

$$=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

又 $p=\frac{a+b-c}{c+a-b}=\frac{c+a-b}{b+c-a}.$

依合比之理.

$$p=\frac{(a+b-c)+(c+a-b)}{(c+a-b)+(b+c-a)}=\frac{2a}{2c}=\frac{a}{c}.$$

23. 證 從 $ar^{x-1}=X$, $ar^{y-1}=Y$, $ar^{z-1}=Z$, 改爲對數式.

$$\log a+(x-1)\log r=\log X.$$

$$\log a+(y-1)\log r=\log Y.$$

$$\log a+(z-1)\log r=\log Z.$$

故 $(y-z)\log X=(y-z)\log a+(x-1)(y-z)\log r.$

$$(z-x)\log Y=(z-x)\log a+(y-1)(z-x)\log r.$$

$$(x-y)\log Z=(x-y)\log a+(z-1)(x-y)\log r.$$

三式相加.

$$\begin{aligned}&(y-z)\log X+(z-x)\log Y+(x-y)\log Z\\&=(y-z+z-x+x-y)\log a\\&\quad+\{(x-1)(y-z)+(y-1)(z-x)+(z-1)(x-y)\}\log r\\&=0.\end{aligned}$$

第七章 調和級數

問 1. 答 $-\frac{104}{25}, -\frac{234}{25}$.

解. 先求等差中項及等比中項, 以 A 代等差中項, G 代等比中項.

依第 84 節之關係, 則調和中項為 $\frac{G^2}{A}$, 成次之聯立方程式.

$A=G-13$……………………………(1)

$\frac{G^2}{A}=G-12$……………………………(2)

以 (1) 式之右邊代 (2) 式之 A.

$$\frac{G^2}{G-13}=G-12.$$

去分母.

$$G^2=G^2-25G+156.$$

移項.

$$25G=156.$$

去 G 之係數.

$$G=\frac{156}{25}.$$

以 G 之值代入 (1) 式.

$$A=\frac{156}{25}-13=\frac{156-325}{25}$$

$$=-\frac{169}{25}.$$

然後以 a, b 代所求之二數.

則 $\frac{a+b}{2}=-\frac{169}{25}$, $\sqrt{ab}=\frac{153}{25}$.

由此二式易求得 a, b 之值.

問 2. 證 因 $b=\frac{a+c}{2}$, $c^2=bd$, $d=\frac{2ce}{c+e}$.

以第一式之右邊及第三式之右邊, 代第二式右邊之 b, d.

得 $c^2=\frac{a+c}{2}\times\frac{2ce}{c+e}=\frac{(a+c)ce}{c+e}$.

兩邊同以 c+e 乘之, c 除之.

$(c+e)c=(a+c)e$.

去括弧.

$c^2+ce=ae+ce$.

兩邊同減去 ce.

得 $c^2=ae$.

故 c 亦為 a 與 e 之等比中項.

練習問題 III

3. 證 假定 $(S-a)^2$, $(S-b)^2$, $(S-c)^2$ 為等差級數.

從 $a+b+c=2S$ 得 $S=\frac{a+b+c}{2}$.

以 $\frac{a+b+c}{2}$ 代括弧中之 S.

即 $\left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2, \left(\frac{c+a-b}{2}\right)^2, \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2$ 爲等差級數.

故 $2\left(\frac{c+a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2.$

去括弧.

$$\frac{2(a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc)}{4}$$

$$=\frac{2(a^2+b^2+c^2-2ac)}{4}.$$

化得 $4ac=2(a+c)b.$

兩邊同以 4 約之.

$$ac=\frac{(a+c)b}{2}$$

由上式得 $b=\frac{2ac}{a+c}$, 知 $(S-a)^2, (S-b)^2, (S-c)^2$ 能成立等差級數.

6. 證 因調和級數各項之逆數即等差級數.

故 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}.$

各項同以 $a+b+c$ 乘之.

$$\frac{a+b+c}{a}-\frac{a+b+c}{b}=\frac{a+b+c}{b}-\frac{a+b+c}{c},$$

兩邊之第一項減 2, 第二項加 2.

$$\left(\frac{a+b+c}{a}-2\right)-\left(\frac{a+b+c}{b}-2\right)$$

$$=\left(\frac{a+b+c}{b}-2\right)-\left(\frac{a+b+c}{c}-2\right).$$

即 $\dfrac{b+c-a}{a}-\dfrac{c+a-b}{b}=\dfrac{c+a-b}{b}-\dfrac{a+b-c}{c}.$

7. 證 因 a, b, c, d 爲調和級數.

故 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{d}$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{d}\right).$$

化得 $\dfrac{b-a}{ab}=\dfrac{c-b}{bc}=\dfrac{d-c}{cd}=\dfrac{d-a}{3ad}.$

以上式之第一節與第三節相乘，第二節與第四節相乘.

$$\frac{(b-a)(d-c)}{abcd}=\frac{(c-b)(d-a)}{3abcd}.$$

去分母.

得 $3(b-a)(d-c)=(c-b)(d-a).$

9. 證 因 a, b, c 爲調和級數.

從 $\dfrac{2ac}{a+c}=b$ 化得 $ac=\dfrac{b}{2}(a+c).$

移〔 $ac-\dfrac{b}{2}(a+c)=o.$

故 $\frac{b^2}{4}=ac-\frac{b}{2}(a+c)+\frac{b^2}{4}=\left(a-\frac{b}{2}\right)\left(c-\frac{b}{2}\right).$

由此知 $a-\frac{b}{2}$, $\frac{b}{2}$, $c-\frac{b}{2}$ 爲等比級數.

11. 證 依第 61 節從已知之二數 a, b 求插入中項之公式.

得 $x=\frac{2a+b}{3}.$

$$y=\frac{a+2b}{3}.$$

又依第 82 節從已知之二數 a, b 求插入中項之公式.

得 $u=\frac{3ab}{a+2b}.$

$$v=\frac{3ab}{2a+b}.$$

因 $xv=\frac{2a+b}{3}\times\frac{3ab}{2a+b}=ab.$

$$yu=\frac{a+2b}{3}\times\frac{3ab}{a+2b}=ab.$$

故 $xv=yu=ab.$

13. 證 因 $x=a+(n-1)d.$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{a}+(n-1)d'.$$

以 $b-a$ 代 d, $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$ 代 d'.

則 $$x=a+(n-1)(b-a)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{a}+(n-1)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) 式之兩邊各減 a.

$$x-a=(n-1)(b-a)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2) 式之兩邊各減 $\frac{1}{a}$.

$$\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{a}\right)=(n-1)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right).$$

卽 $$\frac{a-y}{ay}=\frac{(n-1)(a-b)}{ab}.$$

兩邊同以 $-ab$ 乘之.

$$\frac{(y-a)b}{y}=(n-1)(b-a)\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

從 (3), (4) 兩式得 $x-a=\frac{(y-a)b}{y}$.

故 $x-a:y-a=b:y$.

14. 證 先求等差級數之第 $r+1$ 項.

從 $a+(n-1)d=l$.

得 $d=\frac{l-a}{n-1}$.

故所求之項 $=a+rd=a+\frac{l-a}{n-1}r=\frac{a(n-1)+(l-a)r}{n-1}$.

次求調和級數之第 $n-r$ 項.

從 $\frac{1}{a}+(n-1)d'=\frac{1}{l}$.

得 $d'=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{a}\right)=-\frac{l-a}{(n-1)al}$.

$$\text{故所求之項}=\frac{1}{\frac{1}{a}-(n-r-1)\frac{l-a}{(n-1)al}}$$

$$=\frac{(n-1)al}{(n-1)l-(n-1-r)(l-a)}$$

$$=\frac{(n-1)al}{a(n-1)+(l-a)r}.$$

以求得之二項相乘.

$$\frac{a(n-1)+(l-a)r}{n-1}\times\frac{(n-1)al}{a(n-1)+(l-a)r}=al.$$

15. 證 (1) $P=a+(p-1)d,\ Q=a+(q-1)d,\ R=a+(r-1)d.$

故 $P(q-r)+Q(r-p)+R(p-q)$

$$=\{(q-r)+(r-p)+(p-q)\}a$$

$$+\{(q-r)(p-1)+(r-p)(q-1)+(p-q)(r-1)\}d$$

$$=o\times a+o\times d=o.$$

(2) $P=at^{p-1},\ Q=at^{q-1},\ R=at^{r-1}.$

故 $P^{q-r}Q^{r-p}R^{p-q}$

$$=(at^{p-1})^{q-r}(at^{q-1})^{r-p}(at^{r-1})^{p-q}$$

$$=a^{q-r+r-p+p-q}\,t^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)}$$

$$=a^{\circ}t^{\circ}=1.$$

(3) $\dfrac{1}{P}=\dfrac{1}{a}+(p-1)d,\ \dfrac{1}{Q}=\dfrac{1}{a}+(q-1)d,\ \dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{a}+(r-1)d.$

故 $\dfrac{q-r}{P}+\dfrac{r-p}{Q}+\dfrac{p-q}{R}$

$$=\left\{(q-r)+(r-p)+(p-q)\right\}\frac{1}{a}$$

$$+\{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)\}d$$

$$=o\times\frac{1}{a}+o\times d=o.$$

首末二節同以 PQR 乘之.

$$QR(q-r)+RP(r-p)+PQ(p-q)=o.$$

第八章 他種級數之和

問 1. 解 以 S 代級數之和.

則 $S=a+2a^2+3a^3+4a^4+\cdots\cdots+na^n.$

兩邊同以 a 乘之.

$$aS=\quad a^2+2a^3+3a^4+\cdots\cdots+(n-1)a^n+na^{n+1}.$$

從第一式減第二式.

$$S-aS=a+a^2+a^3+a^4+\cdots\cdots+a^n-na^{n+1}.$$

即 $(1-a)\,S=\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}-na^{n+1}=\dfrac{a-a^{n+1}-na^{n+1}+na^{n+2}}{1-a}$

$$=\frac{a-(n+1)\,a^{n+1}+na^{n+2}}{1-a}.$$

故 $S=\dfrac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(1-a)^2}$

$$=\frac{a\{1-(n+1)\,a^n+na^{n+1}\}}{(1-a)^2}.$$

問 2. 答 $n^2a+\dfrac{n(n-1)(4n+1)d}{6}.$

解. 設 n 之值爲 1, 3, 5, 7,……2n−1.

則 $S_1 \quad =a.$

$S_3 \quad =3a+3d.$

$S_5 \quad =5a+10d.$

$S_7 \quad =7a+21d.$

$\vdots$

$S_{2n-1}=(2n-1)\,a+(2n-1)\,(n-1)\,d.$

故 $S=S_1+S_3+S_5+S_7+\cdots\cdots+S_{2n-1}$

$$=a+3a+5a+7a+\cdots\cdots+(2n-1)\,a$$

$$+\{3+10+21+\cdots\cdots+(2n-1)\,(n-1)\}d$$

$$=\{1+3+5+7+\cdots\cdots\cdots+(2n-1)\}a$$

$$+\{3\times1+5\times2+7\times3+(2n-1)(n-1)\}d$$

$$=\frac{n}{2}\left\{1+(2n-1)\right\}a+\left\{\sum_{r=2}^{n}(2r-1)(r-1)\right\}d$$

$$=n^2a+\left\{\sum_{r=2}^{n}(2r^2-3r+1)\right\}d$$

$$=n^2a+\left\{2\sum_{r=2}^{n}r^2-3\sum_{r=2}^{n}r+\sum_{r=2}^{n}r^{\circ}\right\}d\cdots\cdots\cdots(A)$$

因 $\sum_{r=2}^{n}r^2=2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1.$

$\sum_{r=2}^{n}r=2+3+4+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}-1.$

$\sum_{r=2}^{n}r^{\circ}=2^{\circ}+3^{\circ}+4^{\circ}+\cdots\cdots\cdots n^{\circ}=n-1.$

以此三式之右邊代入 (A) 式.

得 $S=n^2a+\left\{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}-2-\frac{3n(n+1)}{2}+3+n-1\right\}d$

$$=n^2a+\frac{2n(n+1)(2n+1)-9n(n+1)+6n}{6}d$$

$$=n^2a+\frac{n(4n^2+6n+2-9n-9+6)}{6}d$$

$$=n^2a+\frac{n(4n^2-3n-1)}{6}d$$

$$=n^2a+\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}d.$$

注意. $\sum_{r=2}^{n} r^2$ 乃表從 2 之平方起連續至 n 之平方之和.

$\sum_{r=2}^{n} r$ 乃表從 2 起連續至 n 之和.

$\sum_{r=2}^{n} r^\circ$ 乃表從 2° 起連續至 n° 之和.

問 3. 答 $\dfrac{1-(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$.

解. 以 S 代級數之和.

則 $S=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+(n+1)x^n$.

兩邊同以 x 乘之.

$$xS=\quad x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots+nx^n+(n+1)x^{n+1}.$$

從第一式減第二式.

$$(1-x)S=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^n-(n+1)x^{n+1}$$

$$=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-(n+1)x^{n+1}$$

$$=\frac{1-x^{n+1}-(n+1)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}}{1-x}$$

$$=\frac{1-(n+2)x^{n+1}+(n+1)^{n+2}}{1-x}.$$

故 $$S=\frac{1-(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2},$$

王雲五主編

萬有文庫

第一集一千種

代數學—順列組合及級數

佐藤充 水田文平著

崔朝慶譯

發行人 王雲五 上海寶山路五〇一號

印刷所 商務印書館 上海寶山路

發行所 商務印書館 上海及各埠

中華民國二十年四月初版

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

ALGEBRA—PERMUTATIONS, COMBINATIONS AND PROGRESSIONS
BY SATO AND MIZUTA
TRANSLATED BY TS'UI CHAO CHING

PUBLISHED BY Y. W. WONG

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1931

四四一八分