Wiederholung Vertiefendes Niveau 1 (PSA)

Umkehraufgaben der Prozentrechnung

Man hat in seinem Haus ein neues Zimmer aufgebaut. Die Fläche des Hauses ist dadurch um 15% auf 112,7m² gewachsen. Berechnen Sie die ursprüngliche Fläche!

In der Prozentrechnung müssen wir immer erst herausfinden, was der Anfangswert (Grundwert) ist. In diesem Beispiel ist der Wert am Anfang gefragt. Daher ist 100% das Gefragte, also x. Das Zimmer ist um 15% größer geworden, also die 112,7 m² sind (100%+15%=) 115%. Wir machen also die Schlussrechnung:

x	100%	
112,7 m²	115%	x=98 m²

Wenn die Sache weniger wird, müssen wir selbstverständlich den entsprechenden Prozentsatz aus 100% subtrahieren.

Bruchstrichrechnungen mit Primfaktorzerlegung

$$2\frac{11}{36}-3\frac{13}{24}+\frac{44}{45}-\frac{1}{40}$$

Wir haben schon gesehen, wie man zwei Brüche addiert oder subtrahiert. Was ist es aber, wenn man mehrere Brüche hat? Man könnte selbstverständlich erst die zwei Brüche machen, das Ergebnis mit dem nächsten Bruch usw. Das kann lang dauern und Brüche mit sehr große Nennern als Ergebnis haben. Es gibt eine Methode, die schneller ist und die Primfaktorzerlegung (PFZ) benutzt. Schauen wir ein Beispiel an. In unserem Beispiel wandeln wir erst die gemischte Zahlen in „unechten“ Brüchen um:

$$2\frac{11}{36}-3\frac{13}{24}+\frac{44}{45}-\frac{1}{40} \quad = \quad \frac{83}{36}-\frac{85}{24}+\frac{44}{45}-\frac{1}{40}$$

Jetzt machen wir die PFZ der Nenner:

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Also:
36=2·2·3·3   24=2·2·2·3   45=3·3·5 und 40=2·2·2·5

Als nächstes sollen wir das sogenannte „kleinste gemeinsame Vielfache“ (kgV) bilden. Das geht so: Wir schauen welche *Faktoren* in den Nennern vorkommen. In unserem Fall sind es 2, 3 und 5. Dann schauen wir, wo jeder von diesen Faktoren am häufigsten vorkommt.

2 kommt in 36 zwei mal vor, in 24 drei mal vor, in 45 kein mal und in 40 wieder drei mal vor. Am häufigsten also kommt 2 drei mal vor (in 36 oder in 40, das spielt keine Rolle, wichtig ist, dass 2 am häufigsten in irgendeinem Nenner drei mal vorkommt). In diesem Fall müssen wir für das kgV die 2 drei mal benutzen.

3 kommt in 36 zwei mal vor, in 24 ein mal, in 45 zwei mal und 40 kein mal vor. Am häufigsten kommt 3 also zwei mal vor (in 36). In diesem Fall müssen wir für das kgV die 3 zwei mal benutzen.

5 kommt in 36 kein mal, in 24 auch kein mal, in 45 ein mal und 40 auch ein mal vor. Am häufigsten kommt 5 also ein mal vor (in 45 oder in 40, das spielt keine Rolle, wichtig ist, dass 5 am häufigsten in irgendeinem Nenner ein mal vorkommt). In diesem Fall müssen wir für das kgV die 5 ein mal benutzen.

Also die 2 kommt in kgV als drei mal Faktor vor, die 3 zwei mal und die 5 ein mal vor:

kgV= 2·2·2·3·3·5 = 360

Für den nächsten Schritt gibt es verschiedene Wege, wir schreiben hier den Weg, den wir für den einfachsten halten. Unsere Rechnung nach dem ersten Schritt (gemischte Zahlen in unechten Brüchen umwandeln) ist jetzt:

$$\frac{83}{36}-\frac{85}{24}+\frac{44}{45}-\frac{1}{40}$$

Wir multiplizieren unser kgV jeweils mit dem Zähler und dividieren jeweils durch den Nenner für jeden Bruch. Die Ergebnisse schreiben wir in einem Zähler auf, mit den jeweiligen Strichrechnungen dazwischen. Im Nenner kommt das kgV (hier 360) vor.
Also:

Für den ersten Bruch: 360·83:36=830

Für den zweiten Bruch: 360·85:24=1275

Für den dritten Bruch: 360·44:45=352

Für den vierten Bruch: 360·1:40=9

Diese vier Zahlen kommen im Zähler mit den jeweiligen Strichrechnungen dazwischen vor, im Nenner kommt das kgV vor. Im Zähler machen wir dann auch die Strichrechnungen:

$$\frac{830-1275+352-9}{360} = -\frac{102}{360}$$

In diesem Fall können wir den Bruch auch weiter kürzen (hier mit 6). Daher ist das Ergebnis:

$$-\frac{102}{360} = -\frac{17}{60}$$

Wiederholen wir das Ganze:

$$2\frac{11}{36}-3\frac{13}{24}+\frac{44}{45}-\frac{1}{40} = \qquad (kgV=360)$$

$$= \frac{\overbrace{83}^{360\cdot 83:36=830}}{36} - \frac{\overbrace{85}^{360\cdot 85:24=1275}}{24} + \frac{\overbrace{44}^{360\cdot 44:45=352}}{45} - \frac{\overbrace{1}^{360\cdot 1:40=9}}{40} =$$

$$= \frac{830-1275+352-9}{360} = -\frac{102}{360} = -\frac{17}{60}$$

kgV Berechnung:

36=2·2·3·3
24=2·2·2·3
45=3·3·5
40=2·2·2·5

kgV=2·2·2·3·3·5 =360

Umformen einfache Kombinationen

$$3+4(2b-5)=7b-15$$

In solchen Aufgaben ist gefragt herauszufinden, wie viel die unbekannte Variable (hier b) sein muss, damit die Gleichung stimmt. Die Gleichung hat einen linken Teil (links von „=“) und einen rechten Teil (rechts von „=“). Wenn die unbekannte Variable in Klammer(n) steht, dann müssen wir diese erst mal ausmultiplizieren. Dann müssen wir alle „Terme“, die die Variable (hier b) haben, auf einer Seite bringen (z.B. links von „=“) und alle „Terme“ ohne Variable auf der anderen Seite der Gleichung (z.B. entsprechend rechts von „=“). Hier benutzen wir die Gegenrechnung von Plus und Minus (also entsprechend Minus und Plus). Dann müssen wir am Ende zusammenrechnen und die Gegenrechnung von mal (oder auch von durch) benutzen.

$$
\begin{aligned}
3-4(2b-5) &= 7b-22 && /\,ausmultiplizieren\\
3-8b+20 &= 7b-22 && /-3-20\\
-8b &= 7b-22-3-20 && /-7b\\
-8b-7b &= -22-3-20 && /\,zusammenrechnen\\
-15b &= -45 && /:(-15)\\
b &= 3
\end{aligned}
$$

Noch ein Beispiel (mit zwei Klammern)

$$
\begin{aligned}
4-3(5v+3) &= 3(2-3v)-5 && /\,ausmultiplizieren\\
4-15v-9 &= 6-9v-5 && /-4+9\\
-15v &= 6-9v-5-4+9 && /+9v\\
-15v+9v &= 6-5-4+9 && /\,zusammenrechnen\\
-6v &= 6 && /:(-6)\\
v &= -1
\end{aligned}
$$

Proportionalitätenvergleich

Die Schlussrechnung wird sowohl für die „direkte“ als auch für die „indirekte“ Proportionalität benutzt.

Bei der **direkten** Proportionalität wachsen zwei Merkmale gleichzeitig und in der gleichen Weise. Also, wenn das eine Merkmal mehr wird, wird das andere auch mehr. In diesem Fall multiplizieren wir die Zahlen in der Schlussrechnung die SCHRÄG gegenüber stehen (und dann dividieren wir durch die dritte Zahl). Dies ist IMMER der Fall bei der Prozentrechnung, hier aber geht es NICHT um Prozentrechnung (in diesen Aufgaben kommt kein Prozentsatz vor).

Bei der **indirekten** Proportionalität ist es anders. Wenn ein Merkmal mehr wird, wird das andere weniger. In diesem Fall multiplizieren wir die Zahlen in der Schlussrechnung die GERADE gegenüber stehen (und dann dividieren wir durch die dritte Zahl).

In den folgenden Beispielen geht es darum, zu entscheiden, ob es um eine direkte oder indirekte Proportionalität geht und welche Zahlen dann relevant sind. In einer Aufgabe muss man dann zwei Schritte machen und beide (direkte und indirekte) benutzen.

In einem Dorf in Indien mit 30 Bewohnern reichen die vorhandenen 8,4 t Wasser für noch 15 Tage aus.

a. Für wie viele Tage reicht das Wasser aus, wenn 10 Personen das Dorf verlassen?
b. Für wie viele Tage reichen für die 30 Bewohnern 6,3 t Wasser aus?
c. Wie viele Tonnen Wasser brauchen 24 Bewohner für 10 Tage?

a: Hier sind die Tage gefragt, also die Tagen sind relevant. 10 Personen verlassen das Dorf, also die Anzahl der Personen ändert sich, daher ist diese Anzahl auch relevant. Wenn die Personen weniger werden, dann sollte das vorhandene Wasser für mehrere Tage ausreichen. Also wenn das eine Merkmal (Anzahl der Personen) weniger wird, dann wird das andere Merkmal (die Tage) mehr. Wir haben daher eine indirekte Proportionalität und müssen gerade gegenüber multiplizieren. Da 10 Personen das Dorf verlassen, bleiben im Dorf 20 Personen.

30 Personen	15 Tage	
20 Personen	x	x=22,5 Tage

b: Hier sind die Tage gefragt, also die Tagen sind relevant. Die Personen bleiben aber gleich wie in der Angabe. Wir brauchen daher ihre Anzahl in der Schlussrechnung nicht. Die Menge des Wassers (Tonnen) ändert sich, das ist also relevant. Daher brauchen wir in der Schlussrechnung die Tage und die Menge des Wassers (Tonnen). Wenn wir weniger Wasser haben, wird es auch für weniger Tage ausreichen. Wenn das eine Merkmal (Tonnen) mehr wird, wird das andere (Tage) auch weniger. Wir haben daher eine direkte Proportionalität und wir müssen schräg gegenüber multiplizieren.

8,4 t	15 Tage	x=11,25 Tage
6,3 t	x	

c: Hier ändern sich alle drei Merkmale, wir müssen daher zwei Schritte machen. Welchen Schritt wir als erstes machen ist eine freie Entscheidung, wir machen hier erst die Schlussrechnung für die Tonnen und die Tage:

15 Tage	8,4 t	x=5,6 t
10 Tage	x	

Die 5,6 Tonnen reichen daher für 10 Tage, wenn wir allerdings 30 Personen haben. Wir müssen aber mit 24 Personen rechnen, also:

30 Pers.	5,6 t	x=4,48 t
24 Pers.	x	

In dieser Aufgabe haben wir doch zwei mal direkte Proportionalität benutzen müssen. Es kann aber auch sein, dass bei einem Schritt eine direkte und beim anderen eine indirekte notwendig sind. Das hängt vom Beispiel ab.

Potenzzahlen Punktrechnungen

Wenn man Potenzzahlen mit der gleichen Basis multipliziert, muss man die Hochzahlen addieren.
Wenn man Potenzzahlen mit der gleichen Basis dividiert, muss man von der Hochzahl oben die Hochzahl unten subtrahieren. Oft kommt es dann zu Verwirrung, besonders wenn in einem Bruch (in einer Division) von Potenzzahlen der Nenner eine negative Hochzahl hat: in diesem Fall muss man den Wert unten doch addieren (also das minus wird mit minus multipliziert und daher entsteht ein plus).
Ein paar Beispiele:

$3^{2u-4}\cdot 3^{5u+6}=3^{8u+2}$ $\quad$ $a^{-5}\cdot a^{-4}=a^{-9}$ $\quad$ $\frac{b^{-7}}{b^{-3}}=b^{-4}$ $\quad$ $\frac{x^{4}}{x^{11}}=x^{-7}$

Lineare Gleichungssysteme (LGS) mit 2 Variablen: Textaufgaben

(„Einsetzungsverfahren“)

Hier geht es um Aufgaben mit 2 unbekannten. Daher müssen wir zwei Variablen benutzen (z.B. a und b oder x und y). Mit der Angabe können wir dann zwei Gleichungen mit diesen Variablen bilden. Wir formen die einfachste Gleichung um, so dass die eine Variable allein auf einer Seite (z.B. die linke) der Gleichung bleibt. Dann setzen wir das Ergebnis an der Stelle dieser Variable in der zweiten Gleichung ein. Dadurch entsteht eine Gleichung mit einer Variable, die wir mit einfachen Umformungen lösen können. Am Ende müssen wir auch die andere Variable berechnen.

Beispiel:
In einem Café gibt es 8 Tische. Manche sind für 3 Personen und der Rest für 6 Personen. Insgesamt kann das Café 39 Personen bedienen. Wie viele 3 bzw. 5 Personen-Tische gibt es im Café?
Wir brauchen zwei Variablen:

d sind die Tische für drei Personen.
s sind die Tische für sechs Personen.

Die Tische zusammen sind 8. Diese einfache Gleichung formen wir um_
d+s=8 also d=8-s
Es gilt dann für die Personen:
3d+6s=39

Wir setzen 8-s an der Stelle von d in diese zweite Gleichung ein und formen wir dann um:
3 (8-s)+6s=39
24-3s+6s=39 |-24
3s=15 |:3
s=5

Also es gibt 45 Tische für 6 Personen und daher 8-5=3 Tische für 3 Personen.

Kombinationsaufgaben der Prozentrechnung
In diesen Aufgaben muss man mehrere (hier zwei) Prozentrechnungen kombinieren. Es kann sein, dass der Anfangswert oder dass der Endwert gegeben ist. Im zweiten Fall (Endwert gegeben) macht man die Schritte rückwärts, man fängt also vom Ende an.

Beispiel:
Nach eine Bombardierung in einem vom Krieg betroffenem Land wurde bei einem Haus 65% der Fläche zerstört. Das Haus wurde dann erneuert und die neue Fläche war 200% mehr als die Fläche des zerstörten Hauses. Somit war das Haus am Ende 147 m². Wie groß war die Fläche vor der Bombardierung?

Hier ist der Wert am Ende gegeben, also wir fangen vom Ende an und machen Schritte rückwärts. Nach der Erneuerung war das Haus 200% mehr als nach der Bombardierung, also insgesamt 300%. Das waren die 147 m². Das Haus also vor der Erneuerung (und daher nach der Bombardierung) war:

100%	x_2	
300%	147 m²	x_2 = 49 m²

Das Haus also nach der Bombardierung (und vor der Erneuerung) war 91 m². Mit der Bombardierung hat das Haus 65% seiner Fläche verloren, daher sind 35% geblieben. Das Haus vor der Bombardierung war daher:

100%	x_1	
35%	49 m²	x_1 = 140 m²

Ob man Prozentsätze addiert oder subtrahiert, hängt selbstverständlich von der Angabe an.

Bruchrechnungen und Vorrang
Solche Aufgaben sind eine Kombination der uns schon bekannte Strichrechnungen zwischen Brüchen und des Vorrangs der Rechenarten. Wichtig ist in diesem Fall die Brüche bei jedem Schritt so weit wie möglich zu kürzen. Vielleicht ist es auch besser, erst jede Klammer allein zu machen. Ein Beispiel:

$$\frac{2}{3}+\left(\frac{6}{7}-\frac{9}{7}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{16}{21}:\frac{4}{7}\right)$$

$$\textit{erste Klammer} \rightarrow \quad \left(\frac{6}{7}-\frac{9}{7}\right)=\frac{3}{7}$$

$$\textit{zweite Klammer} \rightarrow \quad \left(\frac{2}{5}-\frac{16}{21}:\frac{4}{7}\right)$$

$$=\frac{2}{5}-\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 7}{3\cdot 7\cdot 2\cdot 2}=\frac{2}{5}-\frac{4}{3}=-\frac{14}{15}$$

$$\textit{daher ist die Berechnung jetzt:}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{15}=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{16}{15}=1\frac{1}{15}$$

Umformen in der ebenen Geometrie konkret

Diese Aufgaben sind Anwendungen der Formeln für ebene Figuren. Sie sind ein bisschen wie die Textaufgaben für lineare Gleichungssysteme (LGS) mit zwei Variablen, da wir eine Formel umformen und das Ergebnis in einer anderen Formel einsetzen müssen. Die zwei Formeln allerdings haben nur eine Variable gemeinsam (und nicht 2, wie in den Aufgaben der LGS). In diesen Aufgaben hier fangen wir mit der Formel für das Merkmal an, das gegeben ist (in unseren Beispielen Umfang oder Fläche). Ein Beispiel:

Der Umfang eines Rechtecks ist 3,8 dm, seine Breite 9 cm. Berechnen Sie seine Fläche!

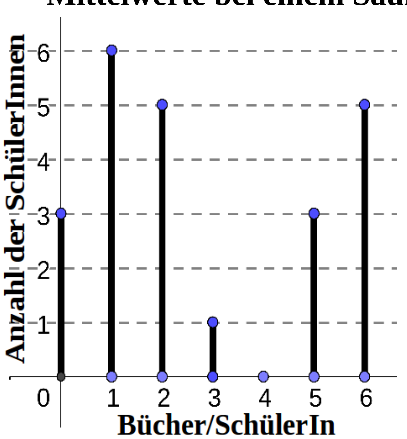
Gegeben ist der Umfang, wir fangen also mit dieser Formel an. Wir müssen allerdings aufpassen und die gleichen Einheiten benutzen. Wir wandeln daher die 3,8 dm in cm um, das sind 38 cm.

$u=2a+2b \qquad 38=2a+2\cdot 9 \qquad 38-18=2a \qquad 2a=20$ also $\quad a=10$

Die Länge ist also 10 cm (und die Breite schon gegeben: 9 cm). Somit können wir die Fläche berechnen:

$A=a\cdot b \qquad A=10\cdot 9 \qquad A=90\text{cm}^2$ (nicht vergessen: die Einheit für Fläche ist hoch 2!)

Mittelwerte bei einem Säulendiagramm



Um den **Durchschnitt** zu berechnen, machen wir eine Tabelle:

B/S	S	B
0	3	0
1	6	6
2	5	10
3	1	3
4	0	0
5	3	15
6	5	30
Summe	**23**	**64**

Durchschnitt: $\frac{64}{23}\approx 2{,}78 \quad \boldsymbol{B/S}$

Den **Modus** (Modalwert) kann man leicht erkennen, das ist der x-Wert bei der höchsten Säule. Die höchste Säule ist hier bei 1, also 1 ist der Modus.

Mit Hilfe der Tabelle können wir auch den **Median** finden. Wir haben 23 Werte, der Wert in der Mitte wird der zwölfte sein. Bis 1 haben wir 9 Werte, in 2 kommen wir auf 14 Werte, also der zwölfte Wert ist darunter, also der Median ist 2.