



DE MORGAN'S

ELEMENTS OF ARITHMETIC.

Translated into the Marathi Language,

BY

COLONEL GEORGE RITSO JERVIS,

CHIEF ENGINEER BOMBAY PRESIDENCY,

ASSISTED BY

VISHNOO SOONDER CHUTRY,
GUNGADHUR SHASTRI PHUDKAY, AND
GOVIND GUNGADHUR PHUDKAY.



BOMBAY:

AMERICAN MISSION PRESS,

T. GRAHAM, PRINTER.

1850

0155



डमार्गेन

याचा

अंकगणिताचा मूळ पीठिका;

X

यांचें मराठी भाषांतर

कारनेल जार्जरिट्सो जर्विस साहेब,

मुंबई खात्याचे चीफ इंजनेर

यांनी

विष्णु सुंदर छत्रे, गंगाधर शास्त्री फडके

आणि

गोविंद गंगाधर फडके

यांचा सहाय्याने केले.



मुकाम मुंबई. माहे फेब्रुवारी सन् १८५०.

मुंबईमध्ये अमेरिकन मिशन छापखान्यांत छापिलें, सन् १८५०.

B1

155A

253212

1/2

1/21

अनुक्रमणिका.



पहिलें पुस्तक.

भाग.	पृष्ठ.
पहिला. अंकसंख्यालेखनवाचन.	१
दुसरा. मिलावणी आणि वजाबाकी.	१७
तिसरा. गुणाकार.	२९
चवथा. भागाकार.	४१
पांचवा. अपूर्णांक.	६४
सहावा. दशांश अपूर्णांक.	७९
सातवा. वर्गमूल.	१०८
आठवा. प्रमाण.	१२२
नववा. संयोग आणि व्युत्क्रम संयोग.	१४३

दुसरें पुस्तक.

पहिला. वजनं मापें इत्यादि.	१५०
दुसरा. त्रैराशिक.	१८६
तिसरा. व्याज इत्यादि.	१९४

पुरवणी.

पहिला. गणन करण्याची रीति.	२०७
दुसरा. नऊ आणि अकरा टाकून ताळा पहाण्याची रीति.	२१३
तिसरा. अंकसंख्या लेखनवाचन क्रम रीति.	२१६



चवथा.	अपूर्णाकांचें व्याख्यान.	२२४
पांचवा.	गुणदर्शकांची रीति.	२२६
सहावा.	पैक्याचे दशांशरूप हिशोबाची रीति.	२२९
सातवा.	वहिवाटवहिचा रितीचीं मूल कारणें.	२४०
आठवा.	अपूर्णाकांचे किमतीचे जवळ जवळ दुसरे अपूर्णांक काढण्याची रीति.	२४४
नववा.	अंकांचे साधारण गुणांविषयीं.	२५६
दहावा.	संयोगांविषयीं.	२६७
अकरावा.	सर्माकरणें उलगडण्याची होर्नर साहेबाची रीति.	२७७
बारावा.	भूमितीला अंकगणित लावण्याचा रिती.	

B4

A3



TO

THE HONORABLE SIR GEORGE RUSSELL CLERK, K. C. B.

GOVERNOR OF BOMBAY.

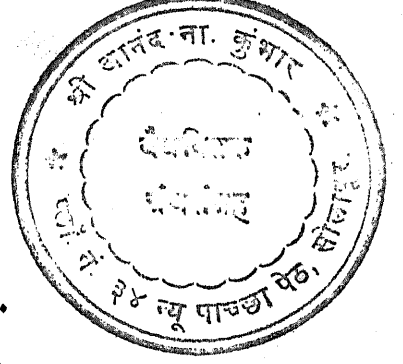
One of the most eminent of those Statesmen who have laboured in many ways, and with conspicuous success, for the mental and moral improvement of the Natives of Hindoostan ; and who considers that the introduction into India of European knowledge and modern science, by translation from the languages of Europe into the languages of the East, is the true basis on which the Education of the mass of the Native population should be founded ; this translation into Marathi of Professor De Morgan's pre-eminently lucid treatise on the Elements of Arithmetic is, with sentiments of unfeigned admiration and regard, dedicated, by his most obedient humble servant,

GEORGE RITSO JERVIS.

Bombay, August 1850.

“ Ce n'est point par la routine qu'on s'instruit, c'est par sa propre reflexion ; et il est essentiel de contracter l'habitude de se rendre raison de ce qu'on fait : cette habitude s'acquiert plus facilement qu'on ne pense ; et une fois acquise, elle ne se perd plus.”—CONDILLAC.

ज्ञानप्राप्ती स्वकष्टाने आणि स्वविचाराने होती. दुसऱ्याचे सांगण्यावरून केवळ पाठ करणे, हा ज्ञानप्राप्तीचा उपाय नव्हे. जे काहीं करायाचे, त्याचे कारण सांगण्याची अवश्य संवय केली पाहिजे. अशी संवय करण्यास, जरी पहिल्याने अवघड वाटते, तथापि ती अभ्यासाने सोपी होती. आणि एकदां संवय झाली, हाणजे, ती कधी सुटत नाही.



मूळ पोठिका.

पहिलें पुस्तक.

अंकगणिताचा मूळ पोठिका.

पहिला भाग.

अंकसंख्या लेखन वाचन यांविषयीं.

१. कांहींएक जातीचे वस्तूंचा समुदाय एकत्र झालेला आहे अशी कल्पना कर; झणजे जसी, एक स्वारांची टोळी. ती पाहिल्यानंतर पाहणारास जरी मोजायाची संवय नसली, तरी त्या टोळींत प्रत्येक मनुष्यास एक एक घोडा आहे असे त्यास पाहिल्याने वाटेल. आतां मनुष्ये आणि घोडे हे दोन्ही जरी भिन्न भिन्न जातीचे आहेत, तरी पहिल्ये जातीचे एकास दुसऱ्ये जातीचा एक आहे, झणजे, प्रत्येक घोड्यावर एक एक मनुष्य आहे, यास्तव पाहणाराचा मनांत एक नवी कल्पना उत्पन्न होईल, ती शब्दांनीं याप्रमाणें बोलतां येईल, झणजे, मनुष्यांची आणि घोड्यांची संख्या सारिखीच आहे. जेव्हां रानटी मनुष्यास मोजण्याची कांहींएक रीति माहित नव्हती, तेव्हां प्रत्येक मनुष्याबद्दल एक एक खडा घेऊन, वरची अंकसंख्या स्मरणांत ठेवीत असेल. अशा तऱ्हेचा रानटी रीतीपासून, उत्पन्न झालेले पुढील कलमांत जे क्रम सांगितले आहेत, त्यांचा योगाने आपला गणना करण्याचा प्रकार झाला असावा असे वाटते. स्वारांचा दोन टोळ्या आहेत, त्यांतून कोणत्या टोळींत संख्या अधिक आहे हें समजावें आणि प्रत्येक टोळीमध्ये किती स्वार आहेत हेहि स्मरणांत ठेवतां यावें, असे एक पुरुष इच्छितो आहे, असे मनांत आण.

२. पहिली टोळी त्याचे समोरून जाते समर्या, त्यांतील प्रत्येक मनुष्य जें त्याचे दृष्टीस पडतें, त्याबद्दल तो पुरुष टोपलींत एक खडा टाकितो असें मनांत आण. प्रत्येक स्वाराविषयीं एकएक खडा आहे, ह्मणजे व्यवहारी बोलण्याप्रमाणें खड्यांची आणि स्वारांची संख्या सारिखीच आहे, याशिवाय खड्यांचा आणि स्वारांचा दुसरा कांहीं संबंध नाही. जासमर्या दुसरी टोळी त्याचे समोरून जाती, तेव्हां तो दुसऱ्या टोपलींत प्रत्येक मनुष्याबद्दल एक एक खडा टाकितो असें मनांत आण; अज्ञाने त्याजवळ खड्यांचा दोन टोपल्या होतील, तेणेंकरून प्रत्येक टोळीमध्ये किती स्वार आहेत, हें त्याचाने दुसऱ्या पुरुषास सांगवेल. आणि कोणती टोळी मोठी आहे, अथवा कोणतींत अधिक स्वार आहेत, असें जेव्हां तो जाणायास इच्छितो, तेव्हां तो प्रत्येक टोपलींतून एक एक खडा काढून त्यांस एकीकडे वेगळाले ठेवील. नंतर त्यांतून एक टोपली रिकामी होईपर्यंत याप्रमाणें करित जाईल. नंतर त्यास जर समजेल, कीं दुसरीहि टोपली रिकामी झाली, तर तो असें ह्मणेल कीं दोहों टोळ्यांमध्ये स्वारांची संख्या सारिखीच आहे; आणि जर दुसऱ्या टोपलीमध्ये कांहीं खडे राहिले, तर पहिल्या टोळीपेक्षां दुसरींत किती स्वार अधिक होते, तें सा राहिल्या खड्यांचा योगाने त्यास सांगतां येईल.

३. जा संख्या रानटी मनुष्यास अगत्याने स्मरणांत ठेवण्याचा असतील, त्यांची गणना त्यास वर सांगितलेल्या तऱ्हेने ठेवतां आली असावी. तशाच तऱ्हेने त्याचे मुलाबाळांची, किंवा गुरांची, किंवा उन्हाळे व हिवाळे जितके त्याणें पाहिले असतील त्यांची गणती, खड्यांनीं, किंवा दुसऱ्या कांहीं लहान वस्तू, जा पुष्कळपणीं सांपडतात, त्यांहींकरून त्याणें ठेविली असावी. सांप्रतकाळीं हि रानटी लोकांमध्ये अशा कांहीं तऱ्हेचा प्रकार आहे, आणि यापेक्षां चांगल्ये रीतीची गणण्याची कल्पना निघाल्यानंतरहि कित्येक जागीं ती रीति तशीच राहिली आहे. रोम शहरामध्ये प्रजाधिपत्याचे वेळेस, तें शहर वसल्यापासून वर्षे किती झालीं हें समजावें, ह्मणून तेथील मुख्य न्यायाधीश, बृहस्पतीचा देवळाचा दारांत प्रतिवर्षीं खिळा मारावा ह्मणून मोठे समारंभाने जात असे; शहर वसविल्यास किती वर्षे झाली याचें स्मरण ठेवण्याची अशी एक रीति होती, यावरून ती गणनेची युक्ती निघाल्याचे पूर्वी निघाली असावी असा संभव होतो.

यांस काळानुक्रमाने नावे ठेविलीं असावीं. परंतु जौपर्यंत केवळ लहान संख्या मोजण्याची गरज होती, तौपर्यंत यांचे मोजण्याचा सोयवार निर्वाह बोटानीं झाला असावा. जा कांहीं कामाकरितां थोड्या मोजण्याची गरज पडे, तेव्हां तीं कामे कोणताहि पुरुष आपल्या दोन्हीं हातांचा बोटानीं करित असे, आणि बोटोंचे वेगळाले समुदायांस नावेहि देत असे. ह्यणजे, एक, दोन, तीन, चार, पांच, सहा, सात, आठ, नऊ, दहा, यांचे अर्थांचे शब्द त्याणें स्वभाषेंत काढले असावे. जसा जसा त्यांचा व्यवहार अधिक वाढला असेल, त्याप्रमाणें त्यास अधिक मोठ्ये संख्यांस नावे देण्याचें, अगत्य पडलें असेल; परंतु जा सगळ्या संख्या कामांत आणाव्या लागल्या असतील, त्या सांगण्यासाठीं अतिशय शब्दांचें प्रयोजन लागलें असेल, आणि त्यांचा अतिशयपणा पाहून तो कुंठित झाला असावा. यावरून कित्येक पहिल्या मूळ अंकांस वेगळालीं नावे देऊन, यांचा योगाने सर्व दुसऱ्या संख्या त्यास सांगतां आल्या असाव्या.

५. या सर्व गोष्टींचा क्रम आतां दाखवितों. या पुढील कोष्टकांत दहांचे पुढील जे अंक येतात, ते एक ओळींत मांडले आहेत, आणि दुसऱ्या ओळींत त्यांचे पूर्वीचे अंकांचा संबंध दाखविला आहे.

एक.	अकरा	ह्यणजे	दहा आणि एक.
दोन.	बारा		दहा आणि दोन.
तीन.	तेरा		दहा आणि तीन.
चार.	चौदा		दहा आणि चार.
पांच.	पंधरा		दहा आणि पांच.
सहा.	सोळा		दहा आणि सहा.
सात.	सतरा		दहा आणि सात.
आठ.	अठरा		दहा आणि आठ.
नऊ.	एकुणीस		दोन दहा उणा एक.
दहा.	वीस		दोन दशक.

एकवांस	दोन दशक आणि एक.	पन्नास	ह्रणज पांच दशक.
बावीस	दोन दशक आणि दोन.	साठ	सहा दशक.
इत्यादि	इत्यादि.	सत्तर	सात दशक.
तीस	तीन दशक.	ऐशी	आठ दशक.
इत्यादि	इत्यादि.	नव्वद	नऊ दशक.
चाळीस	चार दशक.	शंभर	दहा दशक.
इत्यादि	इत्यादि.		

एकशें एक	दहा दशक आणि एक.
इत्यादि	इत्यादि.
हजार	दहा शतक.
दहा हजार	शंभर शतक.
लक्ष अथवा शंभर हजार.	

दशलक्ष { दहा शंभर हजार अथवा हजार
वेळा हजार.

कोटी.
दश कोटी.
इत्यादि.

६. गणनेमध्ये जें वारंवार कृत्य करावें लागतें, तें व्यवहारी भाषेचे शब्दांनीं लिहिण्यास अति लांब पडेल. याकरितां शब्दांचे जागीं लहान चिन्हे घेतलीं असतील; परंतु प्रत्येक निरनिराले अंकास भिन्नभिन्न चिन्हे देण्यास असाध्य, म्हणून कांहीं थोडकीं चिन्हे घेऊन, त्यांचा योगाने बाकीचा सर्व अंकाविषयीं दुसरीं चिन्हे योजण्यास सोईस पडलें असेल. आतां जीं चिन्हे हालीं कामांत आणितात, तीं पुढीलप्रमाणें आहेत.

०, १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९.

शून्य, एक, दोन, तीन, चार, पांच, सहा, सात, आठ, नऊ.

जा रीतीने या चिन्हांपासून दुसरे अंक दाखवितां येतात, ती रीति आतां दाखवितो.

७. कोणीएक पुरुष, पहिल्याने आपलें एक बोट वर करितो, नंतर दोन बोटें, आणि याप्रमाणें, सगळीं बोटें वर होतपर्यंत क्रमाने वर करित जातो अशी कल्पना कर, आणि याप्रमाणेंच, दुसरे कित्येक पुरुष करि-

B4

A3

कडून काहा बोट वर करावल्याने, एक अकापासून दुसरा अक निराळा आहे, असे दाखवितां येईल; आणि असे अनेक तऱ्हांनीं करितां येईल हे स्पष्ट आहे. उदाहरण, पंधरा हा अंक पंधरा पुरुषांनीं एक एक बोट उंच केल्याने, अथवा चार पुरुषांनीं दोन दोन, आणि पांचव्याने सात बोटें वर केल्याने दाखवितां येईल, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. तो अंक दाखविण्यासाठीं, या सर्व युक्तीतून कोणती अति सुलभ पडेल! ही शंका उत्पन्न होती, याकरितां जी युक्ति निवडून काढिलेली आहे, तिला अंकसंख्या लेखनवाचनरीति ह्मणतात.

८. मुलें जेव्हां पहिल्याने गणना करावयास लागतात, तेव्हां बडूत करून बोटानीं मोजितात, आणि अशा चालीवरून संभव होतो, कीं ही आपली गणना करण्याची रीति, आणि बहुतकरून पृथ्वीतील बाकीचा सर्व गणना करण्याचा रीती उत्पन्न झालेल्या असाव्या, ह्मणून वरचे व्याख्यान केले आहे. जी रीति वर सांगितली ती केवळ रानटी आहे; परंतु, त्यांत किंचित् फेरफार केल्याने, अतिशय मोठा अंक सुलभपणीं दाखवितां येईल, असा प्रकार काढितां येईल.

९. मनांत आण कीं काहीं मोठी संख्या मोजावयाची आहे, जसे वज्राचे क्रियेक यार्ड मोजावयाचे आहेत. तुझे समोर एक मनुष्य बसविला आहे, जाची दृष्टी तुझेकडे असून, तूं जसा एक एक यार्ड मोजित जातोस, तसा तो आपलें एक बोट वर करितो असे मनांत आण. जेव्हां दहा यार्ड मोजिले गेले, तेव्हां त्या पुरुषाचीं दहा बोटें वर झालीं असतील, आणि पुनः आरंभ केल्यावांचून, त्याला पुढें मोजतां येणार नाहीं, ह्मणून अकरावे यार्डास तो एक बोट पुनः वर करील, आणि बारावे यार्डास दोन, आणि याप्रमाणें पुढें. परंतु किती यार्ड मोजिले गेले हें जाणायासाठीं, केवळ त्याचीं बोटें वर जितकीं आहेत, तितक्यांनीं पुरें माहित होणार नाहीं, परंतु त्याणें कितीवेळा पुनः पुनः आरंभ केला हें जाणलें पाहिजे. आतां मनांत आण कीं पहिल्या पुरुषाचे उजवेकडे दुसरा पुरुष बसविला आहे, आणि त्याची दृष्टी पहिल्यावर असून, तो पहिले पुरुषास पुनः प्रारंभ करिताना पाहतांच, ह्मणजे जेव्हां दहा यार्डांचें मोजणें संपतें, तत्क्षणीं तो आपलें एक बोट वर करितो. पहिल्या पुरुषाचें प्रत्येक बोट केवळ एक यार्डांचें दर्शक



आहे, परंतु दुसऱ्या पुरुषाचे प्रत्येक बोट पहिल्या पुरुषाचे सर्व बोटांचे, ह्यणजे, दहांचे दर्शक आहे. या तऱ्हेने शंभर पर्यंत मोजितां येईल, कां कीं दुसऱ्या पुरुषाचें एक बोट वर होण्याकरितां पहिल्या पुरुषाने आपलीं दहा बोटे एकवेळ मोजावीं, आणि दुसऱ्याचीं सर्व बोटे वर होण्याकरितां पहिल्या पुरुषाने आपलीं बोटे दहावेळ मोजावीं, यावरून (५) कलमाप्रमाणें, दहा दशक ह्यणजे शंभर. आतां दुसऱ्या पुरुषाचे उजव्येकडे तिसरा एक पुरुष बसिलेला, तो जेव्हां दुसऱ्या पुरुषास पुनः पुनः प्रारंभ करिताना पाहील, तेव्हां तो आपलें एक बोट वर करील. या तिसऱ्या पुरुषाचें एक बोट दुसऱ्या पुरुषाचे सर्व दहा बोटांचे गणनेबरोबर, ह्यणजे, शंभरांबरोबर आहे. या तऱ्हेने तिसऱ्या पुरुषाचीं सर्व बोटे वर होतपर्यंत मोजितां येईल, आणि त्यापासून (५) कलमाप्रमाणें दहा शतक, किंवा एक हजार मोजले गेले असे कळेल. चवथ्या पुरुषाचे योगाने दहा हजारपर्यंत, पांचव्या पुरुषाचे योगाने लक्षपर्यंत, साहव्या पुरुषाचे योगाने दहा लक्षपर्यंत मोजण्याचें सामर्थ्य येईल; आणि याप्रमाणें पुढेहि.

१०. प्रत्येक नवा पुरुष तुझे समोरचे ओळीत तुझे डाव्येकडे बसला आहे. आतां खालचेप्रमाणें कांहीं कोष्टक कर, आणि जे अंक दाखविण्याची इच्छा आहे, ते अंक त्या कोष्टकाचे उजव्येकडे शब्दांनी लिही; तें मोजणें झाल्यानंतर पहिल्या पुरुषाचीं जितकीं बोटे वर असतील, त्यांची संख्या उजव्येकडेचे पहिले ओळीत मांड, नंतर दुसऱ्या पुरुषाचीं जितकीं बोटे वर असतील, तितकी संख्या डाव्येकडेचे दुसऱ्ये ओळीत मांड; याप्रमाणें पुढेहि कर.

१						५	७ सत्तावन.
२						१ ०	४ एकशें चार.
३						१ १	० एकशें दहा.
४				२ ३		४	८ दोन हजार तीनशें अठ्ठ्याचाळीस.
५		१	५	९		०	६ पंधरा हजार नऊशें सहा.
६	१	८	७	०		०	४ एक लक्ष सत्यायशीं हजार चार.
७	३	६	९	७		८	५ छत्तीसलक्ष सत्याणव हजार दोनशें पंचायशीं.

११. १ यांत सत्तावन हा अंक दाखविला आहे. याचा अर्थ (५) प्रमाणें पांच दशक आणि सात आहे. यामुळें पहिल्या पुरुषाने आपलीं सर्व बोटें पांचवेळा मोजून, त्यावर सात बोटें अधिक मोजिलीं आहेत. दुसऱ्या पुरुषाचीं पांच बोटें, आणि पहिल्या पुरुषाचीं सात बोटें उंच केल्याने, हें दाखवितां येतें. २ यांत एकशें आणि चार हा अंक दाखविला आहे. हा अंक (५) प्रमाणें दहा दशक आणि चार इतका आहे. यामुळें यांत दुसऱ्या पुरुषाने आपलीं सर्व बोटें एकवेळा मोजिलीं आहेत, हें तिसऱ्या पुरुषाने एक बोट उंच केल्याने दाखवितां येतें; परंतु दुसऱ्या पुरुषाने फिरून मोजावयास आरंभ केला नाहीं, कां कीं, पहिल्या पुरुषाने दहापर्यंत मोजल्यापावेतो तो एक बोट उंच करित नाहीं, आणि त्या दहांतून केवळ चार मात्र मोजिले. जेव्हां पहिला पुरुष ते दहा मोजितो, तेव्हां दुसरा पुरुष एक बोट उंच करितो. आणि पहिला पुरुष फिरून आरंभ करायास तयार असून, त्याणें कांहीं बोटें वर केलीं नाहीं, आणि जो अंक याप्रमाणें निघाला तो अकरा दशक, किंवा दहा दशक आणि एक दशक, किंवा एक शतक आणि दहा. हा पक्ष वरचा तिसऱ्या उदाहरणांत आहे. आतां कोष्टकांतील सगळ्या दुसऱ्या अंकाविषयीं कांहीं अवघड पडणार नाहीं.

१२. या सर्व अंकांतून जो अंक पहिल्या ओळींत लिहिला आहे, त्याचा अर्थ (६) कलमामध्ये जो त्या अंकाखालीं लिहिला आहे, तितके यार्ड मात्र दाखवितो. जो अंक दुसऱ्या ओळींत लिहिला आहे, तो

तितक याडांचा नाही, परंतु ती याडांचे तितक दशक दाखवता; जी अंक तिसऱ्ये ओळींत लिहिला आहे, तो याडांचे तितके शतक दाखवितो; जो अंक चवथे ओळींत लिहिला आहे, तो तितके सहस्र दाखवितो; आणि याप्रमाणे पुढेहि; ह्मणजे, जर कोणताहि अंक कोणत्याहि ओळींतून त्याचे डाव्येकडेचे ओळींत जाईल, तर तो त्याचे पूर्वी जितके याडे दाखवीत होता, त्याचे दहापट किमतीचा होईल. ही गोष्ट पक्की स्मरणांत ठेविली असतां ओळींमध्ये रेघा करण्याचें प्रयोजन नाही, कां कीं अंकाचे स्थितीपासून प्रत्येक अंकाची पुरतेपणीं किंमत समजण्यांत येईल; ह्मणजे जितके अंक त्याचे उजव्येकडेस असतील त्यांवरून कळेल.

१३. आपल्या ह्या अंक लिहिण्याचे रीतीचा इतका सहवास झाला आहे, कीं ती मूळची असावी असी दिसती, तथापि ती कोणत्याहि दुसऱ्ये रीतीपेक्षा अधिक मूळची नाही, हें स्मरणांत ठेवायास योग्य आहे. उदाहरण, एक दशक दाखविण्याविषयी, एक या अंकाचे बाजूस एक सरचिन्ह केल्याने निर्वाह होतो असें जर कदाचित् मानिले, जसे १'; वीस अथवा दोन दशक, २' याणें दर्शवितां येतील; आणि याप्रमाणे पुढेहि; सभर अथवा दहा दशक १" याणें; सहस्र १''' याणें; आणि याप्रमाणे पुढेहि. या रीतीने कोष्टकांतील चवथी संख्या याप्रमाणे लिहितां येईल, ह्मणजे २" ३" ४' ८, आणि हे तर याप्रमाणेहि मांडितां येतील, ह्मणजे ८ ४' ३" २"', ४' ८ ३" २"'; अथवा अंकाची रचना कोणत्याहि भिन्न भिन्न तऱ्हेने करितां येईल, कां कीं त्यांचा अर्थ त्यांचे डोक्यावरील स्वर चिन्हावरून होतो, त्यांचा स्थितिक्रमापासून होत नाही. यावरून अज्ञे रीतीमध्ये शून्याचें कधीहि प्रयोजन पडणार नाही; कां कीं १०४ आणि १४ यांचें तारतम्य या रीतीने कळेल, ह्मणजे पहिला १"४, आणि दुसरा १'४ अज्ञाने कळेल. जी हालीं व्यवहारांत रीति आहे, ती यापेक्षा खरी आणि बरोबर आहे, याकरितां मान्य झाली असें नाही, परंतु ती हिजपेक्षा सोपी आहे यास्तव मान्य झाली आहे.

१४. प्रत्येक अंकाचा अर्थ कांहींसा स्थानापासून कळतो, हा भेद आमचे, आणि आमचे पूर्वजांचे अंकसंख्या लेखन वाचनाचे रीतीमध्ये आहे. जसे, ४४४४ यांत प्रत्येक चार कांहीं वस्तूचे चार दाख-

अंक, चार मात्र दाखवितो; दुसऱ्या स्थळींचा, दहा खड्यांचे असे चार समुदाय दाखवितो; तिसऱ्या स्थळींचा, शंभरांचे चार समुदाय दाखवितो; आणि याप्रमाणे पुढेहि.

१५. (११) या कलमांत जी वस्तु मोजिली गेली, ते कापडाचे यार्ड होते. त्या पक्षांत कापडाचा जो एक यार्ड त्यास एक ह्मणतात. उजव्येकडील जो पहिला अंक आहे, त्यांत (६) कलमाप्रमाणे जितके एक आहेत, तितके एकचा तो दर्शक आहे, ह्मणून तो एकचे स्थळीं आहे असे ह्मणतात. दुसऱ्या अंकांत जितके एक आहेत, तितके दहाक तो दाखवितो, ह्मणून तो दहाचा स्थळीं आहे असे ह्मणतात. तसेच कारणावरून तिसरा, चवथा, आणि पांचवा हे अंक, शतं, सहस्र आणि दशसहस्र यांचे स्थळीं आहेत असे ह्मणतात.

१६. मोजलेले परिमाण जर भूमीचे एकर असते, तर एक ह्मणजे जा वस्तु मोजिल्या खातून एक आहे, यावरून भूमीचा एक एकरास एक असे ह्मटले असते. परिमाणे दोन जातीची असतात; ह्मणजे जामध्ये एकची पूर्ण संख्या आहे, जसे ४७ यार्ड, आणि जामध्ये तशी संख्या नाही, जसे ४७ यार्ड आणि अर्धा. या दोहों जातीतून पहिल्याने पूर्ण अंकाचा विचार करितो.

१७. गणितांमध्ये बढतकरून सर्व परिमाणांस एक जातीचा एक असावा. २ आणि ३ मिळून ५ होतात, यावरून २ यार्ड आणि ३ फुटी मिळून, ५ यार्ड किंवा ५ फुटी होतात असे ह्मणवत नाही; तथापि २ यार्ड आणि ३ यार्ड मिळून, ५ यार्ड होतात, आणि २ फुटी आणि ३ फुटी मिळून, ५ फुटी होतात असे ह्मणता येईल. एक जातीचे परिमाण दुसऱ्या जातीचे परिमाणाचे एकने मोजणे ही अशुक्तिक गोष्ट होईल; ह्मणजे एक ग्यालनांत किती यार्ड आहेत, अथवा पाण्याचे मापांत दाण्याचे किती शेर आहेत, असे सांगणे निरर्थक आहे.

१८. कांहीं जातीचे एकचे संख्येविषयी जा गोंष्टी खऱ्या आहेत, त्या दुसऱ्या जातीचे एकचे त्याच संख्येविषयी खऱ्या आहेत. जसे, १५ खडे आणि ७ खडे मिळून २२ खडे होतात; १५ एकर आणि ७ एकर मिळून २२ एकर होतात. यावरून १५ आणि ७ मिळून २२ होतात असे ह्मणता येते, ह्मणजे अर्ध हाच कीं एक जाती-

चा १५ वस्तू, आणि त्याच जातीचा ७ वस्तू मिळून, त्याच जातीचा २२ वस्तू होतात, त्या वस्तू खडे किंवा स्वार किंवा भूमीचे एकर किंवा दुसऱ्या कोणत्याहि जातीचा वस्तू असतील. सारांश १५ आणि ७ मिळून २२ होतात, याशिवाय याविषयीं दुसरें कांहीं लिहिण्याचें प्रयोजन नाही. यामुळें खडे किंवा एकर अशा निरनिराळ्या वस्तूंचा एक-विषयीं या विषयाचे या भागांत पुनः कांहीं बोलणार नाही, परंतु केवळ अंकांविषयीं मात्र सांगितलें जाईल.

१९. या अध्यायांत जा मुख्य गोष्टी सांगितल्या त्या एथें पुनः सांगतां.

पहिल्याने, दहा चिन्हें कामांत घेतलीं आहेत, ह्मणजे एक चिन्ह शून्याचे जागीं, आणि बाकी चिन्हें पहिल्या नऊ अंकांचे जागीं घेतलीं आहेत तीं याप्रमाणें.

०, १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, यांतून पहिल्याला शून्य ह्मणतात.

दुसऱ्याने, यापेक्षां मोठ्या अंकांकरितां निरनिराळीं चिन्हें नाहीत, परंतु वर सांगितलेलीं चिन्हें एकाचे बाजूस एक मांडल्याने, आणि जो उजव्याकडचा पहिला अंक आहे, तो एकटा मांडला असतां जी त्याची किंमत असती तीच तो ठेवील; उजव्याबाजूचा दुसरा अंक, एकटा मांडिला असतां जी त्याची किंमत असती, तिचे दहावेळा किमतीचा अर्थ ठेवील; उजव्या बाजूचा तिसरा अंक, एकटा मांडिला असतां जी त्याची किंमत असती, तिचे शंभरवेळा किमतीचा अर्थ ठेवील; चवथा अंक तितक्याचे सहस्रवेळा; आणि याप्रमाणें पुढेंहि; असें मान्य केल्याने ते मोठे अंक दाखवितां येतात.

तिसऱ्याने, उजव्या बाजूचा पहिला अंक एकचे स्थळीं, त्याचे डाव्या बाजूचा अंक दहाचे स्थळीं, तिसरा शतके स्थळीं, आणि याप्रमाणें पुढें आहेत असें ह्मणतात.

चवथ्याने, जेव्हां कोणताहि अंक दशक, शतक किंवा सहस्र, इत्यादि बरोबर पूर्ण संख्या आहे, तेव्हां इच्छिलेले संख्येचे स्थळीं तो अंक येई इतकी त्याचे उजव्याकडे शून्ये मांडिलीं पाहिजेत, याविषयीं हीं पृष्ठील उदाहरणें आहेत.

B4

A3

सातश. ५२८०००

पांचलक्ष अठ्ठावीस हजार. ५२८०००
यांत शून्ये नसतील, तर नुसते अंक ५, ७, ५२८ हे आहेत असे
चुकून समजांत येतील.

पांचव्याने, एक, दह इत्यादि संज्ञांतून कोणत्याहि एक संज्ञेचे जागीं
अंक नसेल, तर अंकाचे मध्ये शून्य मांडावे लागते. जसे, वीस हजार
आणि सहा हे २०००६ आहेत, दोनशें सहा हे २०६ आहेत. अंकाचे
आरंभीं शून्य मांडितां येईल, परंतु तेथें त्याचा कांहीं अर्थ नाही. जसे
०२६ हे आणि २६ एकच आहेत, कां कीं त्यांत शतं नाहीत इतकें
मात्र शून्य दाखवितें आणि ही गोष्ट केवळ अंकापासून स्पष्ट आहे.

२०. १६७८५ अशा भलत्या कोणत्याहि अंकांतून, कोणतेहि जव-
ळजवळचे अंक काढिले, जसे ६७, आणि जर असे विचारिलें, कीं या
सतसष्टांचा अर्थ काय आहे? ते कोणत्या परिमाणाचे सतसष्ट आहेत?
तर उत्तर हेंच, कीं जा स्थळीं ७ हा अंक त्या संख्येत होता, तशाच
समुदायाचे सतसष्ट; ह्मणजे, ६७ शतक आहेत. कां कीं ६ हे सहा
सहस्र, किंवा सहा दशशतक, किंवा साठ शतक आहेत; हे साठ शतक
आणि दुसरे ७ शतक मिळून, ६७ शतक आहेत; याचप्रमाणें, ६७८
हे ६७८ दशक आहेत. यावरून हे अंक या पुढील कोणत्याहि रीतीने
सांगतां येतील.

- १ दहा हजार ६ हजार ७ शतक ८ दशक आणि ५;
- अथवा १६ हजार ७८ दशक आणि ५;
- अथवा १ दहा हजार ६७८ दशक आणि ५;
- अथवा १६७ शतक ८ दशक आणि ५;
- अथवा १६७८ दशक आणि ५, आणि याप्रमाणें पुढें.

२१ अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

- पहिलें. या पुढील अंकांचीं चिन्हें मांड.
- चारशें शहात्तर;
- दोन हजार सयाण्णव;
- चौसष्ट हजार तीनशें पन्नास;



तित
अंक
तो
तो
ळी
या
स्म
की
ये
क
अ
स
उ
स
की
पु

दान काटी सातश चार ;

सत्तावन कोटी ऐशीलाख.

दुसरें. हे पुढील अंक शब्दांनी लिही, ५३, १८०५, १८३०,
६६७०७, १८०९१७३२४, ६६७१३७२१, ९०९७ ६३९०,
२५०००००००.

तिसरें. १९९९९ अशा जा अंकसंख्येमध्ये केवळ नऊ हीं चिन्हें
आहेत, त्यास एक मिळविला असतां, त्यांत काय भेद होईल तो सांग !
चवथें. कांहींएक संख्येमध्ये पांच अंक आहेत, आणि दुसरीमध्ये
चार अंक आहेत, आणि जरी पहिल्ये संख्येमध्ये सगळे अंक लहान आ-
हेत, आणि दुसरीमध्ये सगळे मोठे आहेत, तरी पहिली संख्या दुसरी-
पेक्षा मोठी आहे हें दाखीव ! उदाहरण, १०१११ ही संख्या ९८७९
या संख्येपेक्षा मोठी आहे हें दाखीव !

२२. कित्येक शुद्ध चिन्हांचीं स्थळें जशीं बदलतात, तशा त्यांचा
किमतीहि बदलतात, अशा कल्पनेवरून आपल्या लेखनवाचनरीती-
चा सुलभपणा लक्ष्यांत येईल. व्यवहारातील जा सगळ्या वस्तू कामांत
आणितात, त्यांची तशेंच रितीने गणना केल्याने तसेंच हित होतें. उदा-
हरण, रुपये, आणे, आणि पै, असे पैक्याचे विभाग केल्याने पैका मोजतां
येतो, यांतून एक आणा ह्यणजे १२ पै आहेत, आणि एक रुपया ह्यणजे
१६ आणे आहेत, अथवा १९२ पै. रुपये, आणे, पै यांस वेगळाले
तीन ओळींत मांडितात, आणि प्रत्येक ओळीचे मध्ये बिंदू मांडितात.
जसें, २६३ पै यांस केवळ २६३ असे मांडीत नाहींत, परंतु २१.
९. ३, मांडितात यांत रू यापासून असे समजावें कीं पहिली ओळ
रुपयांची आहे. ही एक अंकसंख्या लेखनवाचनाची परिपाटी आहे,
जांत उजव्येकडून दुसऱ्ये ओळीचा अंक, पहिल्ये ओळीचे त्याच अंकाचे
१२ पट मोठा आहे, आणि जो अंक तिसऱ्ये ओळींत येतो, तो दुसऱ्ये
ओळीतील त्याच अंकाचे १६ पट आहे, अथवा पहिले ओळीचे त्याच
अंकाचे १९२ पट मोठा आहे. यापुढे जे कौष्टक पाहण्यांत येतील
त्यांत अंकसंख्या लेखनवाचनाची दुसरी परिपाटी पाहण्यांत येईल,
परंतु सर्वाविषयी गणना करण्याचा रिती एकसारख्याच होतील.

२३. अंकगणिताची भाषा संक्षिप्त करण्याकरितां, कांहीं दुसरी
चिन्हें कामांत घेतात. तीं या पुढीलप्रमाणें आहेत :

याहेल. १२१-२४ याचा अर्थ हाच की १२१ तून १२४ वजा करायाचे आहेत, ते आणि ५३ एकच आहेत. ही १५ आणि ३८ यांची बेरीज आहे, आणि त्यांस याप्रमाणे वाचितात ह्मणजे पंधरा अधिक अडतीस.

दुसरें. ६४-१२ याचा अर्थ हाच की ६४ यांतून १२ वजा करायाचे आहेत, आणि ते आणि ५२ एकच आहेत. ही ६४ आणि १२ यांची वजाबाकी आहे, आणि त्यांस याप्रमाणे वाचितात ह्मणजे चवसष्ट उणे बारा.

तिसरें. ९×८ याचा अर्थ हाच, की ९ हे ८ वेळा घेण्याचे आहेत, आणि ते आणि ७२ एकच आहेत. हा ९ आणि ८ यांचा गुणाकार आहे, आणि त्यांस नऊ गुणिले आठ याप्रमाणे वाचितात.

चवथें. $\frac{१०८}{६}$ याचा अर्थ हाच की १०८ हे ६ नीं भागायाचे आहेत, अथवा १०८ यांमध्ये कितीवेळा ६ आहेत हे काढायाचे; आणि ते आणि १८ एकच आहेत. हा १०८ आणि ६ यांचा भागाकार आहे; आणि त्यांस एकशें आठ भागिले सहांनीं असे वाचितात.

पांचवें. जेव्हां भलते दोन अंक, अथवा अंकांचे समुदाय, वर लिहिलेल्या चिन्हांनीं युक्त असून, एकसारखे असतात, तेव्हां त्यांचेमध्ये = हें चिन्ह मांडितात. जसे, ७ आणि ५ मिळून १२ होतात, आणि त्यास ७+५=१२, असे मांडितात. यास समीकरण ह्मणतात, आणि त्यास सात अधिक पांच बरोबर बारा असे वाचितात. याचप्रमाणे हवीं तेवढीं समीकरणे केलीं जातात हें स्पष्ट आहे. जसे

$$७ + ५ - ३ = १२ + १;$$

$$\frac{१२}{३} - १ + ३ \times २ = ११, \text{ आणि याप्रमाणे पुढे.}$$

२४. जें केवळ एक अंकाविषयी खरें आहे असें नाहीं, परंतु तें सर्व अंकाविषयी खरें असतें, त्याविषयी बहुधा कांहीं बोलण्याचा प्रसंग पडतो. उदाहरण, १० आणि ७ हे दोन अंक घे; त्यांची बेरीज १७ आहे, त्यांची वजाबाकी ३ आहे. जर ही बेरीज आणि ही वजाबाकी मिळविली तर २० होविल, ह्मणजे हे पूर्वी घेतलेल्या दोन अंकांतून मोठ्या अंकाचे दुप्पट आहेत. जर १७ तून ३ वजा केले, तर १४

+ पुस्तकाचे या भागांत जें लहान गणित करावें लागतें, तें बोटांनीं अथवा खड्यांनीं करितां घेईल.

होतात, हे त्या दोन अंकांतून लहानाची दुप्पट आहेत. कोणत्याहि दोन अंकांविषयी ही गोष्ट खरी आहे असे दिसेल, आणि यावरून ही सामान्य प्रतिज्ञा निघती; जर कोणत्याहि दोन अंकांची बेरीज आणि वजाबाकी मिळविली, तर ती बेरीज त्या दोन अंकांतून मोठ्या अंकाचे दुप्पट होईल; जर त्यांचे बेरीजेतून त्यांची वजाबाकी वजा केली, तर बाकी त्या दोहोंतून लहान अंकाचे दुप्पट होईल. यावरून, जर भलते कांहीं अंक घेतले, आणि त्यांस पहिला अंक आणि दुसरा अंक असे व्हावले, आणि जर पहिला अंक दुसऱ्या अंकापेक्षा मोठा असेल; तर या पुढीलप्रमाणे होईल.

$$(पहि० अं० + दुस० अं०) + (पहि० अं० - दुस० अं०) = दुप्पट पहि० अं०$$

$$(पहि० अं० + दुस० अं०) - (पहि० अं० - दुस० अं०) = दुप्पट दुस० अं०$$

वेगवेगळ्या कुंडल्या जोडणारी जीं चिन्हे आहेत तीं कामांत आणण्याचे पूर्वी, जें कुंडलींत करायास सांगितले तें पहिल्याने केले पाहिजे. जसे, $८ - (२ + १) \times (१ + १)$ याचा अर्थ हाच कीं $२ + १$ हे पहिल्याने $१ + १$ वेळा घ्यावे, नंतर तो गुणाकार ८ तून वजा करावा. तशाच रितीने दोन किंवा अधिक अंकांनीं जें उत्तर येते, आणि ते अंक कसेहि असोत त्याविषयी जर तें उत्तर खरें आहे, तर पहिला अंक, दुसरा अंक इत्यादि त्यांचे जागीं मांडून, आणि (२३) कलमांतील चिन्हे कामांत आणून तें उत्तर दाखवितां येईल. परंतु यास यापेक्षा अधिक संक्षेपरूप देतां येईल, कां कीं पहिला अंक, दुसरा अंक, इत्यादि हे भलत्या कोणत्याहि अंकांचे दर्शक होतील, तर असे शब्दांचा जागीं अ आणि ब हीं अक्षरें कामांत आणितां येतील; आणि आतां लक्षांत ठेविले पाहिजे कीं कोणत्याहि दोन अंकांचे स्थळीं अ आणि ब आहेत, आणि त्यांत ब पेक्षा अ मोठा आहे. दोन वेळा अ दाखविण्यासाठीं २अ घे, आणि दोन वेळा ब दाखविण्यासाठीं २ब घे. तर समीकरणे या पुढीलप्रमाणे होतात.

$$(अ + ब) + (अ - ब) = २अ$$

$$(अ + ब) - (अ - ब) = २ब$$

खाली लिहिल्याप्रमाणे याचा अधिक विस्तार होईल.

२५. मनांत आण कीं, कित्येक बंद केलेली पुडकी आहेत. आणि स्वारंवा बहेरून अ, ब, क, द, इत्यादि खुणा आहेत, त्या प्रत्येकी-

क्रिती क्रिती आहेत, हे ठाऊक नाहीत. जापयत प्रत्येक पुढक्यात क्रिती क्रिती आहेत, हे ठाऊक नाहीत तोंपर्यंत पुढक्यावर जे अक्षर आहे, ते त्या चकत्यांचे जागी घेता येईल, ह्यणजे अ अक्षराने जे पुढकें खूण केलेले आहे, त्यांतील चकत्यांचे अंकांचे जागी अ संख्या आहे असें ह्मटले जाते. आणि जरी चकत्यांचे संख्याविषयी अगदी बरोबर ठाऊक नाही, तरी त्या अंकसंख्याविषयी कांहींच ठाऊक नाही असें नाही; कां कीं सर्व अंकांमध्ये कांहीं तऱ्हेचे संबंध असतात, त्यांस अंकांचे साधारण गुण ह्यणतात. उदाहरण, भलता कांहीं अंक घेऊन, त्याणे तोच गुणून, त्या गुणाकारांतून एक वजा कर; नंतर घेतल्या अंकांतून एक वजा कर. ह्यणजे घेतलेला अंक एकाने वाढविला तितके वेळा दुसरा अंक पहिल्या अंकांत जाईल. ६ हा अंक घे, हा त्याणे तोच गुणिला तर ३६ होतात, त्यांतून एक वजा केला तर ३५ राहतात; पुनः, ६ तून एक वजा करून ५ होतात; आणि ५ हे ३५ मध्ये ७ वेळा जातात, ह्यणजे, ६ + १ वेळा. ही गोष्ट कोणत्याहि अंकाविषयी खरी आहे, हे कळेल; आणि असें सिद्ध झाल्यावर जे पुढकें अ या अक्षराने अंकले आहे, त्यांतील संख्येविषयी किंवा अ संख्येविषयीहि खरे आहे असें ह्यणतां येईल. जर अ ने अ गुणिला हे दाखविण्यासाठीं अभ⁺ अशे तऱ्हेने मांडिला, तर (२३) प्रमाणें

$$\frac{\text{अभ} - १}{\text{अ} - १} = \text{अ} + १$$

२६. यावरून कांहीं अंकाविषयी सांगितल्यावांचून, जर त्याविषयी कांहीं बोलण्याची इच्छा असेल, तर तो अंक दाखविण्यासाठीं अक्षर कामांत घेतात. जसे; भलता कांहीं अंक तीन भागांत विभागावयाचा आहे, तो अंक काय आहे, अथवा जा भागांत विभागावयाचा ते भाग काय आहेत, असें न विचारितां, त्या अंकाशी अशी कृती केल्यापासून काय निघेल, त्याजवर तर्क करण्याची इच्छा आहे, असें मनांत आण. तो अंक दाखविण्यासाठीं अ घे, आणि जा भागांत तो विभागावयाचा

+ (२३) कलमाप्रमाणें अभ हा अ × अ असावा, परंतु एथें × या चिन्हाची गरज नाही. २ × ७ यांत, जे १४ आहेत त्यांशीं आणि २७ यांची घालमेल होऊं मये, ह्यणून या चिन्हास अंकांशीं कामांत आणतात.

आहे, ते भाग दाखविण्यासाठी व, क आणि ड घे. तर कल्पनेप्रमाणे,

$$अ = व + क + ड.$$

याजवर तर्क करून उत्तरे काढितात, ती केवळ कोणत्याहि एकच विशेष अंकाविषयी खरी आहेत असे नाही, परंतु सर्वाविषयी खरी आहेत. जसे, जर अंकांतून एक भाग वजा केला, तर दुसरे दोन भाग राहतील, अथवा

$$अ - व = क + ड.$$

जर प्रत्येक भागाची दुप्पट केली, तर सर्व अंकाची दुप्पट होईल, अथवा

$$२अ = २व + २क + २ड.$$

भागांतला कोणताहि एक भाग, जसा ड, यांतून क्ष अंक वजा केला, तर तितक्याने सगळा अंक कमी होईल, अथवा.

$$अ - क्ष = व + क + (ड - क्ष)$$

अशा रीतीने अंकांचे साधारण गुणांवर तर्क करणे, हे बीजगणित-विद्येचे काम आहे.

२७. अभ्यासासाठी उदाहरणे.

जेव्हा अ = १२, व = १८, क = ७, तेव्हा अ + २ व - क याची किंमत काय आहे? उत्तर ४१.

जेव्हा अ = ६, आणि व = २, तेव्हा $\frac{अ - व व}{अ - व}$ याची किंमत काय

आहे?

उत्तर ८.

अ, व, क आणि ड, यांचा पुढे लिहिलेल्या किमतीपासून, $(अ+व) \times (क + ड)$ आणि अ + व क + ड यांमध्ये अंतर काय आहेत?

अ	व	क	ड	उत्तरे.
१	२	३	४	१०
२	१२	७	१	२५
१	१	१	१	१

२८. अंकगणितांत जा कृतींत अंकांस वाढविणें, किंवा घटविणें, येत नाही असी कृति एकहि नाही. याकरितां खड्यांचे समुदायांनीं करवत नाही असी कांहींच कृति नाही. बहुतरून, पहिल्याने खडे किंवा बोटें कामांत घेतलीं असतील. खडे घेऊन जा गणना लांब आणि श्रमांचा असतात, त्या एकदांच थोड्या श्रमाने व्हाव्या, ह्मणून संक्षिप्त गणण्याचा रिती काढल्या आहेत. यांतील मिळवणी, वजावाकी, गुणाकार, आणि भागाकार, या चार मुख्य रिती आहेत; यांतून शेवटील दोन रिती आहेत, त्या पहिली आणि दुसरी यांस केवळ एकदांच करण्याकरितां आहेत.

२९. जेव्हां एक अंक दुसऱ्या अंकाने वाढविला आहे, तेव्हां जो अंक ते दोन अंक एकत्र केल्याने होतो, त्यास दोन अंकांची बेरीज ह्मणतात. दोन किंवा अधिक अंकांची बेरीज करण्याचे रितीला मिळवणी ह्मणतात, आणि पूर्वी सांगितल्याप्रमाणें, जे अंक परस्पर मिळवायाचे आहेत, त्यांचामध्ये (+) असें चिन्ह मांडून मिळवणी दाखविली जाते.

मनांत आण कीं १८३४ आणि २७९९ यांची बेरीज करावयाची आहे. या अंकांची मिळवणी करावयाकरितां, त्यांचे तुकडे कर, ह्मणजे प्रत्येकाला एक, दहं, शतं, सहस्र, असे विभाग;

१८३४ हे १ सहस्र ८ शतक ३ दशक आणि ४ आहेत;

२७९९ हे २ सहस्र ७ शतक ९ दशक आणि ९ आहेत.

प्रत्येक अंकाचे या रितीने चार भाग होतात, जर पहिल्याचे प्रत्येक भागाशीं, दुसऱ्याचा त्याचे खालचा प्रत्येक भाग मिळवून, जीं वेगळालीं उत्तरे येतात, तीं एकत्र केलीं असतां, १८३४ आणि २७९९ यांची मिळवणी होईल. पहिल्या अंकांत ४ एक आहेत, दुसऱ्यांत ९ आहेत; यांस मिळविले असतां, बेरिजेंत १३ एक येतील. पुनः पहिल्या अं-

कांत तीन दशक आणि दुसऱ्यांत ९ दशक मिळून बेरिजेंत १२ दशक येतील. पहिल्या अंकांत ८ शतक आणि दुसऱ्यांत ७ शतक मिळून बेरिजेंत १५ शतक येतील; आणि पहिल्या अंकांत १ सहस्र आणि दुसऱ्या अंकांत २ सहस्र मिळून बेरिजेंत ३ सहस्र येतील; यामुळे इच्छिली बेरीज याप्रमाणें आहे,

३ सहस्र, १५ शतक, १२ दशक, आणि १३ एक.

या उत्तरास सोंपें रूप देण्याकरितां, स्मरणांत ठेवावें कीं—

- १३ एक हे. १ दशक आणि ३ एक आहेत.
 १२ दशक हे. १ शतक आणि २ दशक आहेत.
 १५ शतक हे. १ सहस्र आणि ५ शतक.
 ३ सहस्र हे. ३ सहस्र.

आतां, पूर्वी केल्याप्रमाणें उजव्याकडचे अंक एकत्र करून, १८३४ आणि २७९९ यांची बेरीज होईल; ह्मणजे, ४ सहस्र, ६ शतक, ३ दशक, आणि ३ एक, यांस (१९) कलमावरून याप्रमाणें मांडितात ४६३३.

३०. वरची कृति; (२३) कलमाप्रमाणें चिन्हांनीं मांडिली असतां, या पुढीलप्रमाणें होय;

$$१८३४ = १ \times १००० + ८ \times १०० + ३ \times १० + ४$$

$$२७९९ = २ \times १००० + ७ \times १०० + ९ \times १० + ९$$

यामुळे,

$$१८३४ + २७९९ = ३ \times १००० + १५ \times १०० + १२ \times १० + १३$$

परंतु $१३ = १ \times १० + ३$

$$१२ \times १० = १ \times १०० + २ \times १०$$

$$१५ \times १०० = १ \times १००० + ५ \times १००$$

$$३ \times १००० = ३ \times १०००$$

$$१८३४ + २७९९ = ४ \times १००० + ६ \times १०० + ३ \times १० + ३$$

$$= ४६३३.$$

३१. सगळे पक्ष तसेच रितीने केले पाहिजेत, परंतु तितक्या लांब विस्ताराने करूं नये. हें करण्यासाठीं मूळ अंकांची बेरीज करावी ही समजलें पाहिजे. हें तर केवळ स्मरणाने करितां येईल; आ-

जि स्मरणाचे सहाय्यकारिता शिकणारान आपल्या कामासाठी हे पुढील
कोष्टक तीन चार वेळा पुनःपुनः करावे ;

०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०
२	३	४	५	६	७	८	९	१०	११
३	४	५	६	७	८	९	१०	११	१२
४	५	६	७	८	९	१०	११	१२	१३
५	६	७	८	९	१०	११	१२	१३	१४
६	७	८	९	१०	११	१२	१३	१४	१५
७	८	९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६
८	९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६	१७
९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६	१७	१८

कोष्टकाचा उपयोग या पुढीलप्रमाणे करितात ; मनांत आण कीं ८
आणि ७ यांची बेरीज करावयाची आहे. डाव्येकडचे उभ्ये ओळींत
त्यांतून कोणताहि एक अंक शोधून काढ, जसे ८; आणि वरचे आ-
डव्ये ओळींत ७ पाहा. ८ चे ओळींत ७ याखाली १५ दिसतात,
ती त्या दोन अंकांची बेरीज आहे.

३२. प्रत्येक नवापेक्षां कधी असे कोणते दोन अंक घेऊन, त्यांची
बेरीज सहज सांगतां येईल इतके जेव्हां वरचे कोष्टक पाठ होतोल,
तेव्हां भलते कोणते दोन अंक, एक नवाहून अधिक आणि दुसरा नवा-
हून कधी, असे घेऊन त्यांची गिळवणी आणि वजाबाकी करण्यांचा अ-
भ्यास करावा. या पुढीलप्रमाणे पुष्कळ वाक्ये लिहावीं, तेणेंकरून मि-
ळवणीचा आणि (२३) कलमांतील चिन्हें कामांत आणण्याचा अभ्यास
होईल.

$$१२+६=१८$$

$$२३+६=२९$$

$$१९+८=२७$$

$$५४+९=६३$$

$$५६+७=६३$$

$$२२+८=३०$$

$$१००-९=९१$$

$$२७-८=१९$$

$$४४-६=३८$$

इत्यादि.
३३. वर लिहिलेलीं दोन कलमें पुरतेपणीं मनांत ठसलीं, तर या

पुढील कृतीप्रमाणें, भलया कोणत्याहि अंकांची बेरीज करण्याचें सामर्थ्य येईल, ही रीति (२९) व्या कलमांत लिहिल्याप्रमाणें आहे.

पहिली रीति. अंकांस एकाखालीं एक मांड, असे कीं एक खालीं एक, आणि दहं खालीं दहं, इत्यादि येतील.

दुसरी रीति. सर्व अंकांचे एक मिळीव, आणि असें केल्याने जो सर्व अंक होईल, त्याचे एक आणि दहं असे दोन विभाग कर. जसें, जर तो अंक ८५ आहे, तर त्याचे ८ दहं आणि ५ एक असे दोन विभाग कर; जर तो अंक १३६ असेल, तर त्याचे १३ दहं आणि ६ एक असे विभाग कर, (२०) कलमाप्रमाणें.

तिसरी रीति. या आलेल्या अंकांचे एक दुसऱ्या अंकांचे एक खाली मांड, आणि दहंचा अंक ध्यानांत ठेव.

चवथी रीति. दहंचे ओळीतील सर्व अंकांची बेरीज घे, आणि तिसऱ्या रीतीत जे दहं ध्यानांत ठेवण्यास सांगितले, तेहि त्यांशीं मिळीव, नंतर ह्या दहंचे बेरिजेचे दहं, आणि शतं, असे दोन विभाग कर. जसें, आलेले अंक ३३५ दहं असतील, तर त्यांचे ३३ शतं आणि ५ दहं असे दोन विभाग कर.

पाचवी रीति. दशकांचे आलेले अंक दशकांखालीं मांड, आणि शतंचे अंक ध्यानांत ठेव.

साहायी रीति. प्रत्येक ओळीस असें करीत पुढें चाल, आणि शेवटील ओळीस आल्यावर, आलेल्या अंकांचे दोन भाग न करितां, त्यास दुसऱ्या सर्व अंकांचे पूर्वी मांड.

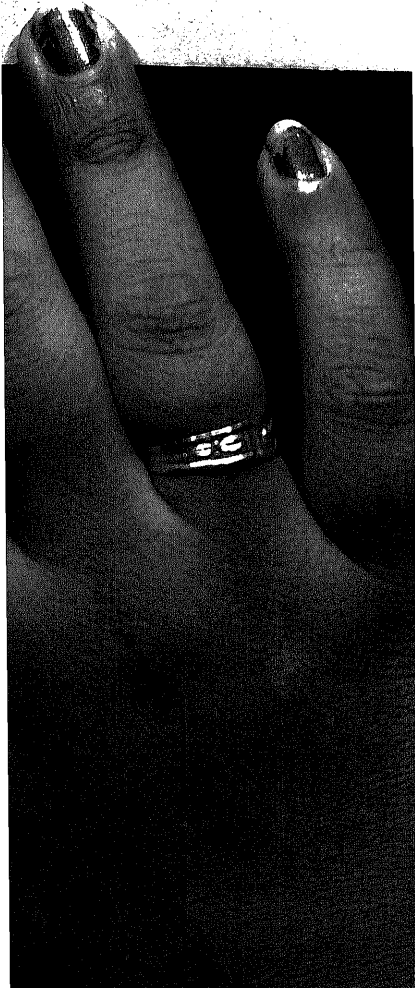
उदाहरण. या पुढील अंकांची बेरीज काय आहे ?

$१८०५ + ३६ + १९७२७ + ३ + १४७४ + २००८$
 १८०५ एकंचे ओळीची बेरीज, अथवा ८ + ४ + ३ + ७ + ६
 ३६ + ५, हे ३३ आहेत, ह्मणजे ३ दहं आणि ३ एक आहेत.
 १९७२७ ते ३ एकंचे स्थळीं मांड, आणि एकंचे बेरिजेपासून आ-
 ३ लेले ३ दहं हातचे घेऊन, दहंचे ओळीची बेरीज घे-
 १४७४ ह्मणजे, ३ + ० + ७ + २ + ३ + ०, हे १५ दशक आहे-
 २००८ ते; ह्मणजे १ शतं आणि ५ दशक आहेत. हे ५ दश-
 २५०५३ काचे स्थळीं मांड, आणि दहंचे ओळीचे बेरिजेपासून
 आलेला १ शतं हातचा घेऊन, शतंचे ओळीची बेरीज घे; ह्मणजे,

० शत आहेत. हे ० शतचे स्थळी मांड, का का तसे न केले, तर दुसरा अंक सहस्राचा ठिकाणी घेण्याचा तो न घेतां, शतचे ठिकाणी घेतला जाईल, आणि शतचे ओळीचे बेरिजेपासून आलेले २ सहस्र हातचे घेऊन, सहस्राचे ओळीची बेरीज घे; ह्यणजे, २ + २ + १ + ९ + १, हे १५ सहस्र आहेत, अथवा १ दशसहस्र आणि ५ सहस्र आहेत. हे ५ सहस्रांचे ओळीत मांड, आणि सहस्राचे ओळीचे बेरिजेपासून आलेला १ दशसहस्र, हातचा घेऊन दशसहस्रांचे ओळीची बेरीज घे; ह्यणजे, १ + १, अथवा २ हे दशसहस्र आहेत. हे दोन, दशसहस्रांचे ओळीखाली मांड, ह्यणजे कृति पुरी होईल.

३४. मिळवणीचा अभ्यासासाठी, या पुढील कोष्टकाविषयी जी गोष्ट सांगतो, ती खरी आहे असे खात्रीस येईल. प्रत्येक आडव्ये, किंवा उभ्ये, किंवा कोपण्यापासून कोपण्यांतचे ओळीत जे अंक लिहिले आहेत, त्यांस एकत्र केले असतां, त्यांची बेरीज २४१५६ इतकी होईल.

२०१६	४२१२	१६५६	३०५२	१२९६	३४९२	९३६	३१३२	५७६	२७७२	२१६
२५२	२०५२	४२४०	१६९२	३०८०	१३३२	३५२०	९७२	३१६०	६१२	२४१२
२४४०	२००	२०००	४२०४	१७२०	३९२४	१३६०	३५६४	१०००	२०००	६४०
६०४	२४०४	३२४	२१२४	४३२०	१७६४	३९६०	१४०४	३२०४	१०४४	२०४४
२०००	७२०	२५२०	३६०	२१६०	४३५६	१०००	३६००	१४४०	३२४०	१०००
१११६	२९१६	७५६	२५५६	३९६	२१९६	३९९६	१०३६	३६३६	१४७६	३२७६
३३१२	११५२	२९५२	७९२	२५९२	३६	२२३२	४०३२	१०७२	३६७२	१५१२
१५४०	३३४०	११००	२९८०	४३२	२६२०	७२	२२६०	४०६०	१९००	३७००
३७४४	१५०४	३३०४	८२०	३०२४	४६०	२६६४	१००	२३०४	४१०४	१९४४
१९००	३७००	१२२४	३४२०	८६४	३०६०	५०४	२७००	१४४	२३४०	४१४०
४१७६	१६२०	३०१६	१२६०	३४५६	९००	३०९६	५४०	२७३६	१००	२३७६



जर एकांतून काहीं भाग घेऊन, तितकाच भाग दुसऱ्याशां मिळवून, त्या दोहोंची बेरीज केली, तर त्या दोन अंकांचे बेरीजेमध्ये काहीं फेर पडणार नाही. जर दोन टोपल्यांत खड्यांचे समुदाय असले, आणि एकांतून कित्येक खडे काढून दुसऱ्यांत टाकले, तर दोन्ही टोपल्या मिळून खड्यांचे समुदायांत काहीं फेर पडणार नाही. जसे, १५ + ७ आणि १२ + १० हे एकच आहेत, कां की १२ हे १५ पेक्षा ३ नी कमी आहेत, आणि १० हे ७ पेक्षा ३ नी अधिक आहेत. (२९) कलमांत जी कृति केली तिला आधार हें मूळ कारण आहे.

३६. (२४) कलमाप्रमाणें, दोन अंकांचे जागीं अ आणि ब घे. ते अंक काय आहेत, हें समजेपावेतों त्यांची बेरीज सांगण्यास अशक्य. परंतु सद्यः तर त्यांची बेरीज दाखविण्यासाठीं अ + ब घे. अ आणि ब यांतून अला क मिळविला, आणि लागलाच बतून क वजा केला, तर बीजगणिताचे भावेप्रमाणें, अ आणि ब यांचे बेरीजेत काहीं फेर पडत नाही, असें ह्मटल्याने, हें पुढील समीकरण होते;

$$(अ + क) + (ब - क) = अ + ब;$$

हें समीकरण कुंडलीवाचून या पुढीलप्रमाणें मांडतां येईल, जसें,

$$अ + क + ब - क = अ + ब.$$

कां की विचार केला असतां या दोन्ही समीकरणाचा अर्थ एकच आहे, असें दिसण्यांत येईल.

३७. जर दोन, तीन किंवा अधिक वेळा अ घेतला, तर त्यास बीजगणितांत २अ, ३अ, ४अ इत्यादि रूपाने मांडितात. या पदांतून कोणत्याहि दोन पदांची बेरीज, त्यांचेमध्ये + हें चिन्ह मांडल्यापेक्षां ती अधिक संक्षेपरूपाने दाखवितां येईल; कां की अ कोणत्या अंकाचे स्थळीं घेतला आहे, तें जरी कळलें नाही, तरी तो कसाहि असल्याने, २अ + २अ = ४अ, ३अ + २अ = ५अ, ४अ + ९अ = १३अ असें होतें; आणि सामान्यतः जर म वेळा अ घेऊन, त्याहीं न वेळा अ मिळविला, तर उत्तर म + न वेळा अ घेतला असें होईल, अथवा

$$मअ + नअ = (म + न)अ.$$

३८. कुंडलीविषयीं येथें काहीं सांगितलें पाहिजे. तिचा अर्थ हाच; कीं तींत जीं पदवीं असेल, तिचेजागीं एकच अक्षर आहे असें जाणून,

पअ याचा अर्थ हाच कीं प वेळा अ घेतला आहे, आणि (म + न)अ याचा अर्थ हाच कीं म + न वेळा अ घेतला आहे. यामुळे (म + न)अ आणि म + न अर्ही दोन्ही भिन्न आहेत, कां कीं म + नअ याचा अर्थ हाच कीं न वेळा अ घेऊन, नंतर त्याशीं म मिळविला आहे. जसे, $(३+४) \times २$ हे ७×२ अथवा १४ आहेत; परंतु $३+४ \times २$ हे $३+८$, अथवा ११ आहेत.

३९. एक अंक दुसऱ्यांतून वजा करून जो अंक राहतो, त्यास बाकी किंवा शेष म्हणतात. बाकी काढण्याचे रितीस वजाबाकी म्हणतात. जो अंक वजा करावाचा आहे, तो दोन अंकांतून अर्थात् लहान अंक आहे.

४०. वजाबाकीचे कृतीचा आश्रय या पुढील दोन मूळ कारणावर आहे.

पहिलें. दोन अंकांची वजाबाकी करायाची असेल, आणि पहिल्या अंकाला कांहीं अंक मिळवून, तितकाच जर दुसऱ्याशीं मिळविला; अथवा पहिल्या अंकांतून कांहीं अंक वजा करून, तितकाच जर दुसऱ्यांतून वजा केला, तर त्या दोन अंकांचे वजाबाकीमध्ये कांहीं फेर पडणार नाही. दोन टोपल्या खड्यांनीं भरलेल्या आहेत, आणि दुसरीपेक्षां पहिल्या टोपलीत शंभर खडे अधिक आहेत, अशी कल्पना कर. जर प्रत्येक टोपलीमध्ये ५० खडे अधिक टाकले, किंवा प्रत्येक टोपलींतून ५० खडे काढिले, तरी दुसऱ्या टोपलीपेक्षां पहिल्या टोपलीत १०० खडे अधिक होतील. यामुळे भलत्या दोन अंकांची वजाबाकी काढतेंसमयीं जर सोईस पडेल, तर दोनही अंकांस भलता कोणताहि अंक मिळवितां येईल, कां कीं, जरी असें केल्याने त्या अंकांत भेद होतो, तथापि त्यांचे वजाबाकीमध्ये कांहीं भेद होत नाही.

दुसरें. ६ हे ४ पेक्षां २ नीं अधिक आहेत,

आणि ३ हे २ पेक्षां १ ने अधिक आहेत,

आणि १२ हे ५ पेक्षां ७ नीं अधिक आहेत,

यामुळे ६, ३, आणि १२ हे सर्व, अथवा २१ हे, ४, २, आणि ५ हे सर्व, अथवा ११, यांपेक्षां २, १, आणि ७ हे सर्व, अथवा १०, इतक्यांनीं अधिक आहेत; कोणत्याहि दुसऱ्या अंकाविषयीं ही गोष्ट खरी आहे.



४२. अ, ब, आणि क, असे तीन अंक असतील, आणि जर ब पक्षां अ मोठा असेल, तर (४०) या कलमांतील पहिल्यामूळ कारणावरून पुढील-प्रमाणे होतें,

$$(अ + क) - (ब + क) = अ - ब.$$

पुनः, अ आणि ब यांपैक्षां जर क कमी असेल, तर

$$(अ - क) - (ब - क) = अ - ब.$$

(३६) कलमाप्रमाणे या उदाहरणांत कुंडली काढवत नाहीं. ह्मणजे प - (क - र) आणि प - क - र हीं दोन्ही सारिखां नाहीत. कां कीं, पहिलींत, क आणि र यांची बाकी, पतून वजा केली आहे; परंतु दुसरींत पतून पहिल्याने क आणि दुसऱ्याने र असे वजा केले आहेत, ह्मणून क आणि र अथवा क + र, वजा केले असतां वरचे सारिखेंच होतें. यामुळे प - क - र ही पद्धती प - (क + र) आहे. प - (क - र) या-पासून कुंडली कशी काढावी कीं उत्तराचे किमतींत कांहीं फेर पडणार नाही, हे दाखवायासाठीं, पुढील सोपें उदाहरण घे, ह्मणजे १२ - (८ - ५). जर १२ तून ८ वजा केले, किंवा १२ - ८, असें केले तर अधिक वजा केले असें होईल; कां कीं केवळ ८ वजा करायाचे नाहीत, परंतु ८ हे ५ नीं कमी करून बाकी मात्र वजा करायाची आहे. यामुळे १२ - ८ असें केल्याने ५ अधिक वजा होतात. यामुळे त्यांस नीट करायासाठीं उत्तरास ५ मिळविले पाहिजेत, ह्मणून, १२ - (८ - ५) यांची किमत १२ - ८ + ५ आहे. सर्व पक्षांस ही तर्करीति लागू होय, आणि यामुळे हें पुढील प्रमाणे होतें.

$$प - (क + र) = प - क - र.$$

$$प - (क - र) = प - क + र.$$

तशेंच तर्क रीतीने,

$$अ - (ब + क - ड - इ) = अ - ब - क + ड + इ.$$

$$२अ + ३ब - (अ - २ब) = २अ + ३ब - अ + २ब = अ + ५ब.$$

$$४क्ष + य - (१७क्ष - ९य) = ४क्ष + य - १७क्ष + ९य = १०य - १३क्ष.$$

४२. ५७७६२ आणि ३४६३१ या अंकांची वजाबाकी करण्याची इच्छा आहे. (२९) या कलमाप्रमाणे या संख्यांचे तुकडे कर;

३४६३१ हे ३ दशसहस्र, ४ सहस्र, ६ शत, ३ दशक, १ एक आहेत.
 आतां २ एक हे १ एकपेक्षा १ एकने अधिक आहेत.
 ६ दशक हे ३ दशकांपेक्षा ३ दशकांनीं अधिक आहेत.
 ७ शतक हे ६ शतकांपेक्षा १ शतकाने अधिक आहेत.
 ७ सहस्र हे ४ सहस्रांपेक्षा ३ सहस्रांनीं अधिक आहेत.
 ५ दशसहस्र हे ३ दशसहस्रांपेक्षा २ दशसहस्रांनीं अधिक आहेत.

यामुळे (४० कलमाचे दुसऱ्या मूळ कारणप्रमाणें) पहिल्या ओळीचा सर्व अंकांची एकंदर, दुसऱ्या ओळीचे सर्व अंकांचे एकंदरीपेक्षा, तिसऱ्या ओळीचे सर्व अंकांचे एकंदरीने अधिक आहे, ह्मणजे यांणीं

२ दशसहस्र, ३ सहस्र, १ शतक, ३ दशक आणि १ एक, ह्मणजे ते २३१३१ आहेत. यामुळे ५७७६२ आणि ३४६३१ यांची वजाबाकी २३१३१ आहे, अथवा ५७७६२ - ३४६३१ = २३१३१.

४३. अशी कल्पना कर, कीं ६१२७४ आणि ३९६२८ यांची वजाबाकी करायाची आहे. हे दोन अंक विस्ताराने लिही, ह्मणजे ६१२७४ यांत ६ दशसहस्र, १ सहस्र, २ शतक, ७ दशक आणि ४ एक आहेत.

३९६२८ यांत ३ दशसहस्र, ९ सहस्र, ६ शतक, २ दशक आणि ८ एक आहेत.

वरचे कलमाप्रमाणें कसं लागलें, तर लागलीच अडचण पडती, कां कीं ८ हे, ४ पेक्षा अधिक आहेत, ह्मणून त्यांतून वजा होत नाही. परंतु (४०) व्या कलमावरून असें दिसतें कीं जर दोन अंकांची वजाबाकी करायाची असेल, आणि त्या दोहोंलाहि एकसारिखा अंक मिळविला, तर त्यांचे वजाबाकीत फेर पडणार नाही. पहिल्या अंकास दहा मिळीव, ह्मणजे ४ एकांचे जागीं १४ एक घे, आणि दुसऱ्या अंकाला दहा मिळीव, परंतु एकांचा अंकाला दहा मिळविण्याचे जागीं, दहा या अंकाला एक मिळीव ह्मणजे सारिखेंच होईल. ह्मणजे ते दोन अंक या पुढीलप्रमाणें मांडले जातील.

६ दशसहस्र, १ सहस्र, २ शतक, ७ दशक आणि १४ एक.†

३ दशसहस्र, ९ सहस्र, ६ शतक, ३ दशक आणि ८ एक.

† जा-अंकांस फिरविलें आहे-स्यूस-सोळा अक्षरांनी लिहिलें आहे.

ओळीचे एक आणि दहं यांतून वजा करितां येतील, परंतु खालचे ओळीचे शतक, वरचे ओळीचे शतकांतून वजा केले जात नाहीत. यासाठी, त्या दोहों अंकांस एक सहस्र अथवा १० शतक मिळीव, ह्मणजे असें केल्याने त्यांचे वजाबाकीत कांहीं फेर पडणार नाही, आणि स्मरणांत ठेव की वरचे ओळीचे शतक १० नीं अधिक कर, आणि खालचे ओळीचे सहस्र, एक याने अधिक कर, ह्मणजे हे दोन सारखेच होतील. आणि खालचे ओळीचे सहस्र, वरचा ओळीचा सहस्रांत वजा होत नाही, यामुळे त्या दोहों अंकांस १ दशसहस्र अथवा १० सहस्र मिळीव, आणि वरचे ओळीचे सहस्रास १० नीं अधिक कर, आणि खालचे ओळीचे दशसहस्रास १ याने अधिक कर, ह्मणजे हे दोनीं सारखेच होतील; असें केल्याने शेवटीं जे अंक निघतात, ते या पुढीलप्रमाणे होतील,

६ दशसहस्र, ११ सहस्र, १२ शतक, ७ दशक, आणि १४ एक.

४ दशसहस्र, १० सहस्र, ६ शतक, ३ दशक, आणि ८ एक.

हे दोन अंक आणि या कलमाचे आरंभी सांगितले अंक सारखेच नाहीत खरे, परंतु (४०) कलमाप्रमाणे त्यांची वजाबाकी सारखेच आहे. (४२) कलमाचे रितीप्रमाणे या शेवटील सांगितल्या अंकांशीं कृति कर, ह्मणजे त्यांची वजाबाकी या पुढीलप्रमाणे निघेल,

२ दशसहस्र, १ सहस्र, ६ शतक, ४ दशक, आणि ६ एक आहेत, ह्मणजे हे २१६४६ आहेत.

४४. यावरून वजाबाकी करण्याचा ह्या पुढील रिती निघतात.

पहिली. जो अंक वजा करायाचा आहे, त्यास दुसऱ्याचे खाली असा मांड की, एकखाली एक, दहंखाली दहं, इत्यादि येतील.

दुसरी. जर खालचे ओळीचा प्रत्येक अंक, वरचे ओळीचे त्याच अंकांतून वजा करितां येतो तर कर. आणि जर तसें करितां येत नाही, तर वरचे अंकास दहा मिळवून, त्यांतून खालचा अंक वजा कर; परंतु स्मरण ठेव, कीं या पक्षांत त्यास वरचे ओळीचे अंकांतून वजा करण्याचे पूर्वी, खालचे ओळीचा जवळचा अंकास एकाने नेहमी वाढविला पाहिजे.

४५. जर खालचे ओळीचीं अंकस्थळे, वरचे ओळीचे अंकस्थळांचे बरोबर नसतील, तर तीं अंकस्थळे बरोबर होतील, इतकीं झुन्ये खालचे

८१८ ह्या दोनहि संख्या सारख्याच आहेत, कां कीं यांतून पहिली-
चा अर्थ हाच आहे,

० दशसहस्र, ० सहस्र, ८ शतक, १ दशक आणि ८ एक;
पहिले दोन अंक शून्य आहेत, आणि बाकी

८ शतक, १ दशक आणि ८ एक, अथवा ८१८ आहेत.

या दोहोंतून दुसऱ्या अंकांमध्ये सहस्र आणि दशसहस्र नाहीत, या
ह्यणण्याशिवाय त्या दोहोंत दुसरा कांहीं फेर नाही, आणि यांत सहस्र
आणि दशसहस्र नाहीत, हे सांगितल्यावांचून ध्यानांत येते. कदाचित्
कोणी असे विचारील, कीं शून्य अंकांचेमध्ये, किंवा यांचे उजव्ये वा-
जूस मांडिले असतां, जसे २८००७ आणि ३९७००, यांत ही गोष्ट
कां लागू होत नाही! परंतु स्मरणांत ठेविले पाहिजे, कीं पहिल्या अं-
कांतील दोन शून्ये नसलीं तर, जे ८ आहेत ते ८ सहस्रांचे जागीं ८
दशक आहेत असे होईल; आणि दुसऱ्या अंकांत दोन शून्ये नसलीं,
तर ७ आहेत ते ७ शतकांचे जागीं ७ एक आहेत असे होईल.

४६.

उदाहरणें.

३७०८२९१६४००३०१७४ } यांची वजाबाकी काय ?
३०८१३६४९२७६१८८
३६७७४७७९९०७५३९८६ बाकी.

अभ्यासकरितां उदाहरणें.

पहिलें. १८३३७+१४९२६३२००-६४७२९०२ उत्तर काय आहे?

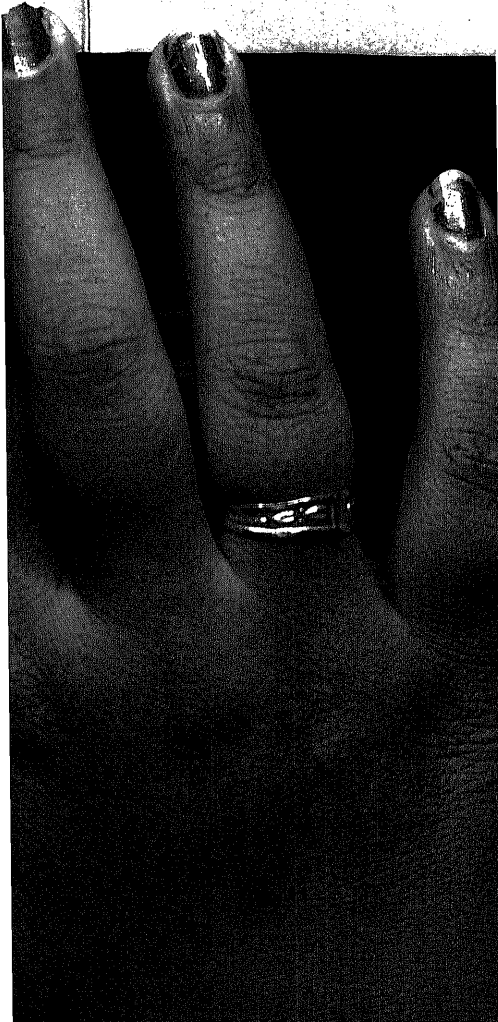
उत्तर १४२८०६३५.

१०००-४६४+३२७९-६४६ उत्तर काय आहे? उत्तर ३१६९.

दुसरें. ३३-२+१०००३७ यांतून ६४+७६+१४४-१८ हे
वजा कर.

उत्तर ९९८०२.

तिसरें. जर उदाहरणांतील वरचे ओळींतल्या डाव्येकडील पहिल्या
स्थळाशिवाय बाकीचे सर्व अंकस्थळीं शून्ये असतील, ह्यणजे ही पुढील
वजाबाकी करायाची आहे, तर वजाबाकी करायाकरितां कोणती अधिक
संक्षेप रीति आहे?



१००००००० - २७३१,६३४.

चवथें. १८३६२+२४६९ आणि १८३६२-२४६९, यांची कि-
मत काढ, दुसरें उत्तर पहिल्या उत्तराशीं मिळीव, नंतर त्यांतून १८३६२
वजा कर; पुनः पहिल्या उत्तरांतून दुसरें उत्तर वजा कर, नंतर त्यां-
तून २४६९ वजा कर. उत्तर १८३६२ आणि २४६९.

पांचवें. अ, ब, क, आणि ड, या क्रमाने एकच ओळीत चार स्थळें
आहेत. अपासून डपावेतो १४६३ मैल; अपासून कपावेतो ७२८ मैल;
आणि बपासून ड पावेतो १३१७ मैल आहेत. तर अपासून ब पा-
वेतो, बपासून कपावेतो, आणि कपासून डपर्यंत हीं वेगवेगळीं
अंतरें किती किती आहेत !

उत्तर अपासून बपावेतो १४६, बपासून कपावेतो ५८२, आणि
कपासून डपर्यंत ७३५ मैल अंतर आहे.

साहायें. या पुढील कोष्टकांत अतून ब वजा कर, आणि त्या बा-
कींतून ब पुनः वजा कर, आणि याप्रमाणें पुढे पुनः पुनः ब वेगळ्यावे-
गळ्या बाकींतून, जोपर्यंत वजा केला जात नाही तोपर्यंत कर. अ पा-
सून ब किती वेळा वजा केला जातो, आणि शेवटील बाकी काय आहे
हें काढ.

अ	ब	वेळांक	बाकी
२३६०४	९९९९	२	३६०६
२०९९६१	३७१७३	५	२४०९६
७४७२२	६७९२	११	०
४८०२४६९	६५४३२१	७	२२२२२२
१८८४९७४७	३१४१५९२	६	१९५
९८७६५४३२१	१२३४५६७८९	८	९

गुणाकार.

४७. अंकगणितांतील सर्व प्रश्नांस मिळवणी आणि वजाबाकी लागती, याशिवाय दुसरें कांहीं लागत नाहीं असें वर सांगितलें आहे. तथापि मागील भागांत जा रिती सांगितल्या आहेत, यांशिवाय कोणत्याहि दुसऱ्या रिती कधीहि कामांत आणू नये, असें सांगण्याचा अभिप्राय नाहीं, परंतु मागील रितींपामून जें फळ उत्पन्न होतें, तेंच फळ संक्षेप रितीनें काढण्याचा मार्ग दुसऱ्या रिती दाखवितात असा अभिप्राय आहे. आणि अशा कल्पनेप्रमाणें जें कांहीं खड्यांनी किंवा चकऱ्यांनी होतें, तेंच करण्याचा संक्षिप्त आणि सोपा मार्ग दाखविणाऱ्या केवळ वरचा दोन रिती आहेत.

४८. पांच सत्रांची बेरीज जाणाऱ्याची इच्छा आहे, अथवा हा पुढील प्रश्न करितों कीं, खड्यांचा पांच राशी आहेत, आणि प्रत्येक राशीत सत्रा खडे आहेत; तेव्हां ते सर्व मिळून किती आहेत? एकाखालीं एक असे सत्रा पांच वेळा मांड आणि बेरीज घे, एणेंकरून ८५ होतात.

१७ या पक्षांत ८५ यांस ५ आणि १७ यांचा गुणाकार झणतात,
 १७ आणि हा गुणाकार करण्याचे कृतीलाहि गुणाकार झणतात,
 १७ यापासून तर भलत्या कांहीं सारख्या परिमाणांची बेरीज नि-
 १७ घेती दुसरें कांहीं होत नाहीं. या उदाहरणांत १७ यांस
 १७ गुण्य झणतात, आणि ५ यांस गुणक झणतात.

८५

४९. यापेक्षां जर अवघड प्रश्न नसते, तर वर केलेल्ये रितीपेक्षां दुसऱ्या कांहीं संक्षेप रितीचें प्रयोजन पडलें नसतें. परंतु जर खड्यांचा १३६७ राशी असतील, आणि प्रत्येक राशीत ४२९ खडे असतील, तर त्यांची एकंदर संख्या ४२९ यांचा १३६७ वेळा आहे, अथवा ४२९ गुणिले १३६७ इतक्याबरोबर आहे. वरचे रितीप्रमाणें केले असतां ४२९ यांस एकाखालीं एक १३६७ वेळा मांडावे लागतील, आणि नंतर मोठी लांब मिळवणी करावी लागेल. ही खटपट चुकवा-यासाठीं त्यापेक्षां संक्षेप रिती अगत्य असावी, ती रिती आतां पुढे सांगवों.

५०. या पुढील कोष्टकावरून,† १० वेळा १० एथपावेतो तरी सर्व अंकांचे गुणाकारांशीं शिकणारानें पहिल्यानें माहित व्हावें, आणि तो कोष्टक त्याणें पाठ करावा.

१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०	११	१२
२	४	६	८	१०	१२	१४	१६	१८	२०	२२	२४
३	६	९	१२	१५	१८	२१	२४	२७	३०	३३	३६
४	८	१२	१६	२०	२४	२८	३२	३६	४०	४४	४८
५	१०	१५	२०	२५	३०	३५	४०	४५	५०	५५	६०
६	१२	१८	२४	३०	३६	४२	४८	५४	६०	६६	७२
७	१४	२१	२८	३५	४२	४९	५६	६३	७०	७७	८४
८	१६	२४	३२	४०	४८	५६	६४	७२	८०	८८	९६
९	१८	२७	३६	४५	५४	६३	७२	८१	९०	९९	१०८
१०	२०	३०	४०	५०	६०	७०	८०	९०	१००	११०	१२०
११	२२	३३	४४	५५	६६	७७	८८	९९	११०	१२१	१३२
१२	२४	३६	४८	६०	७२	८४	९६	१०८	१२०	१३२	१४४

७ वेळा ६ हे किती होतात, हें जर या कोष्टकांतून जाणाऱ्याची इच्छा असेल, तर त्यांतून कोणताहि अंक, जसें ६ हा डाव्येकडचे पहिल्ये

† १ पासून १२ अंकपावेतो फाडे बहुतकरून पाठ करण्याची चाल आहे; यास्तव वरचा कोष्टक १२ वेळा १२ पर्यंत राखिला आहे.

वर ७ हा अंक आहे तेथे थांब, त्या जागी ४२ हा अंक सापडता, आणि तो ७ आणि ६ यांचा गुणाकार आहे.

५१. ६ वेळा ७, अथवा ७ वेळा ६, यांतून कोणत्याही पक्ष या रितीने करितां येईल, आणि या दोहोंपक्षां उत्तर ४२ येईल. ह्मणजे, सहा सात आणि सात सहा यांचा गुणाकार सारखाच आहे. हें या पुढीलप्रमाणें दाखवितां येतें; सात खडे एका आडव्या ओळीत मांड, आणि तशाच एकाखाली एक अशा सर्व मिळून सहा ओळी मांड. वरपासून खाली पावेतो सर्व ओळी मोजिल्या, तर सर्वांत खड्यांची संख्या ६ वेळा ७, किंवा सहा सात आहेत; परंतु बाजूकडून ओळी मोजिल्या, तर असें दिसते कीं सात ओळी आहेत, आणि प्रत्येक ओळीत सहा आहेत, ह्मणून सर्वांत खड्यांची संख्या ७ वेळा ६ अथवा सात सहा आहेत. आणि या दोहोंतून कशेहि तऱ्हेनें मोजिल्या, तरी सर्व संख्या ४२ होती. हीच रीति भलजे कोणजेहि दोन अंकांस लावितां येईल. (२३) कलमांतील भिन्ने कामांत आणिलीं, तर असें ह्मणावें लागेल कीं $७ \times ६ = ६ \times ७$.

५२. जर भलतें कांहीं परिमाण कांहींवेळा घेणें असेल, तर त्या परिमाणाचा प्रत्येक भाग तितक्या वेळा घेतल्यानें कार्य होईल. जसे धान्याचा एका पोयांतील प्रत्येक मणाचा ठिकाणी पन्नास मण याप्रमाणें भरले असतां, तें सर्व धान्य पन्नासपट वाढेल. कोणजेहि मुलुखांतील प्रत्येक विघा, किंवा प्रत्येक परगणा दुप्पट केला असतां, तो मुलुख दुप्पट होईल. जरी ही गोष्ट सरळ दिसत्ये, तरी ती सांगितली पाहिजे, कां कीं ही गोष्ट गुणाकाराचे रितीचा आश्रयरूप मूलकारणांतून एक कारण आहे.

५३. कोणत्याहि अंकानें गुणायचें असेल, तर त्या अंकाचे हवे तेवढे भाग करून, त्या प्रत्येक भागाने वेगवेगळे गुणून, त्या गुणाकारांची बेरीज घ्यावी. उदाहरण, ४ आणि २ मिळून ६ होतात. तर ७ यांस ६नीं गुणायसाठीं, पहिल्याने ७ यांस ४ नीं गुण, नंतर ७ यांस २ नीं गुण, त्या दोन गुणाकारांची बेरीज घे, ह्मणजे इच्छिला गुणाकार होईल. असें केल्याने ४२ होतात, तो ७ आणि ६ यांचा गुणाकार आहे. पुनः,

३२ आणि २५ मिळून ५७ होतात, ह्मणून ५७ वेळा ५० हे ३२ वेळा ५०, आणि २५ वेळा ५०, या दोन गुणाकारांचे बेसिजेवरोबर आहेत, आणि याप्रमाणे पुढेहि. जर चिन्हे कामांत आणिलीं, तर वरचीं दोन उदाहरणे या पुढीलप्रमाणे मांडितां येतील;

$$७ \times ६ = ७ \times ४ + ७ \times २.$$

$$५० \times ५७ = ५० \times ३२ + ५० \times २५.$$

५४: मागील दोन कलमांचीं मूळ कारणे या पुढीलप्रमाणे दाखवितां येतील; जर, क्ष, य, आणि ज हे मिळून अचे वरोबर असतील, तर मक्ष, मय, आणि मज्ञ, मिळून मअचे वरोबर होतील; अथवा,

$$\text{जर अ} = \text{क्ष} + \text{य} + \text{ज्ञ}.$$

$$\text{तर मअ} = \text{मक्ष} + \text{मय} + \text{मज्ञ}.$$

$$\text{अथवा, म (क्ष+य+ज्ञ)} = \text{मक्ष} + \text{मय} + \text{मज्ञ}.$$

क्ष, य, आणि ज हे मिळून अ होतो त्याबद्दल, जर क्ष + य - ज्ञ, क्ष - य + ज्ञ, क्ष - य - ज्ञ, इत्यादि अशा कित्येक मिळवण्या आणि वजावक्या मिळून जर अ होईल, तर वरप्रमाणे फळ उत्पन्न होईल. यांतून पहिली रकम घे; ह्मणजे,

$$\text{जर अ} = \text{क्ष} + \text{य} - \text{ज्ञ}.$$

$$\text{तर अम} = \text{मक्ष} + \text{मय} - \text{मज्ञ}.$$

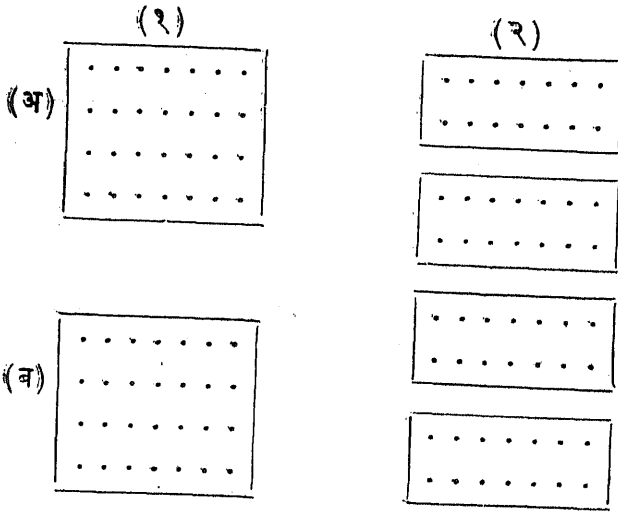
कां, जर अ हा क्ष + य यांचे वरोबर असला, तर मअ हा मक्ष + मय यांचे वरोबर होईल. परंतु क्ष + य यांत ज कमी इतका अ आहे, ह्मणून जितक्या वेळा क्ष + य घेतला, तितक्याच वेळा ज अधिक घेतला आहे; ह्मणजे, मज्ञ अधिक घेतला आहे; यामुळे, मअ हा मक्ष + मय नव्हे, परंतु मअ हा मक्ष + मय - मज्ञ आहे. या जातीचा तर्क दुसऱ्या पक्षांसहि लागू होईल, आणि त्यापासून हीं पुढील फळे निघतील;

$$\text{म (अ+ब+क-ड)} = \text{मअ} + \text{मब} + \text{मक} - \text{मड}.$$

$$\begin{array}{l|l} \text{अ (अ-ब)} = \text{अअ} - \text{अब.} & \text{७अ (७+२ब)} = ४९\text{अ} + १४\text{अब.} \\ \text{ब (अ-ब)} = \text{बअ} - \text{बब.} & \text{(अअ+अ+१)अ} = \text{अअअ} + \text{अअ} + \text{अ.} \\ \text{३ (२अ-४ब)} = ६\text{अ} - १२\text{ब.} & \text{(३अब-२क)४अबक} = \begin{cases} १२\text{अअबक} \\ -८\text{अबकक.} \end{cases} \end{array}$$

५५. कोणत्याहि दोन अंकांचा गुणाकार करण्याची आणखी एक रिती आहे. ४ वेळा २ ह्मणजे ८ होतात, ह्मणून ७ वेळा ८ किती

हस्तात, ह आणियासाठी ७ यांस ४ नीं गुणून, तो गुणाकार २ नीं गुणिला असतां उत्तर येईल. हे दाखवायासाठी, खालचे (१) आणि (२) आकृतीप्रमाणें ७ खडे एक आडव्ये ओळींत मांड, आणि एका-खाली एक अशा आठ ओळी मांड.



सर्व मिळून खड्यांची संख्या ८ वेळा ७, किंवा ५६ आहे. परंतु (पहिल्ये आकृतीप्रमाणे) प्रत्येक चार ओळीभोवतीं एक काटकोनचौकोन कर, जसें (अ) आणि (ब). प्रत्येक काटकोनचौकोनांतील संख्या ४ वेळा ७, किंवा २८ आहे, आणि तसे दोन काटकोनचौकोन आहेत; यामुळे, सर्व मिळून खड्यांची संख्या २८ चे दुप्पट आहे, अथवा २८×२ , अथवा, ७ पहिल्याने ४ नीं गुणून, नंतर तो गुणाकार २ नीं गुणिला इतकी आहे. ७ यांस ८ यांनीं गुणणें, आणि ७ यांस पहिल्याने २ नीं गुणून, नंतर ४ नीं गुणणें हीं दोन्ही एकच आहेत, असें दुसऱ्ये आकृतींत दाखविलें आहे. हीच रीति दुसऱ्या अंकांस लागू होईल. जसें, ८० ह्यणजे ८ वेळा १० आहेत, तर २५६ वेळां ८० हे किती होतात हे समजण्यासाठी, पहिल्याने २५६ यांस ८ नीं गुण, नंतर तो गुणाकार १० नीं गुणावा, ह्यणजे, इच्छिलेला गुणाकार होईल. चिन्हें कामांत आणिलीं असतां, वरचीं उदाहरणें या पुढीलप्रमाणें मांडिलीं जातात;

$$२५६ \times ८० = २५६ \times ८ \times १० = २५६ \times १० \times ८.$$

अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

$$२ \times ३ \times ४ \times ५ = २ \times ४ \times ३ \times ५ = ५ \times ४ \times २ \times ३$$
 इत्यादि हे दाखीव.

$$१८ \times १०० = १८ \times ५७ + १८ \times ४३$$
 हे दाखीव.

५६. अब याचा अर्थ अ हा व वेळा घेतला असा आहे, आणि अबक याचा अर्थ अ, व वेळा घेऊन तो गुणाकार क वेळा घेतला असा आहे; असे समजून (५१) आणि (५५) कलमें या पुढीलप्रमाणे दाखविता येतील.

$$\text{अव} = \text{वअ}.$$

अबक = अकव = वकअ = बअक, इत्यादि.

$$\text{अबक} = \text{अ} \times (\text{वक}) = \text{व} \times (\text{कअ}) = \text{क} \times (\text{अव}).$$

अला व, क, आणि ड, यांणीं एकामागे एक गुणिले असतां, अथवा अला वकड यांणीं एकदांच गुणिले असतां सारखाच गुणाकार होतो असे जर हटले, तर या पुढीलप्रमाणे लिहिले पाहिजे;

$$\text{अ} \times \text{व} \times \text{क} \times \text{ड} = \text{अ} \times \text{वकड}.$$

सारांश कीं जर कांहीं अंक परस्पर गुणयाचे असतील, तर यांतील दोन किंवा अधिक अंकांचे गुणाकार करून, ते गुणाकार त्या अंकांचे जागीं मांडितां येतील; असे,

अवकडइफ हा गुणाकार, हीं पुढील पदें परस्पर गुणिल्यानें होतो,

अव	कडइ	फ
अवफ	इइ	क
अवक	इइफ	इत्यादि.

५७. १० नीं गुणयाचें असेल, तर गुण्याचे उजव्ये बाजूस एक शून्य मांडावें. जसे, १० वेळा २३५६ हे २३५६० होतात. हे दाखवायासाठीं, २३५६ ही संख्या विस्तारानें मांड, जसे,

२ हजार, ३ शतक, ५ दशक, आणि ६ एक.

हे प्रत्येक भाग १० वेळा घे, तर (५२) व्या कलमाप्रमाणें सर्व संख्येस १० नीं गुणणें इतक्याबरोबर होईल, नंतर याप्रमाणें होईल.

हजाराचे २ दशक, शतकाचे ३ दशक, दशकाचे ५ दशक, आणि एकमाचे ६ दशक.

हे याप्रमाणे लिहिले पाहिजे, ह्यणजे, २३५६०, का का ६ ह ६ एक नाहीत, परंतु ६ दशक आहेत, यामुळे $२३५६ \times १० = २३५६०$ आहेत.

१०० यांणी गुणायाचे असेल, तर गुण्याचे उजव्ये बाजूस दोन शून्ये मांडावीं; १००० यांणी गुणायाचे असेल, तर गुण्याचे उजव्ये बाजूस तीन शून्ये मांडावीं, आणि याप्रमाणे पुढेहि. ही रीति खरी आहे असे वरचे रितीप्रमाणे दाखवितां येईल. या पुढील कोष्टकावरून ही रीति सहज ध्यानांत येईल.

$$\begin{array}{ll} १३ \times १० = १३० & १४२ \times १००० = १४२००० \\ १३ \times १०० = १३०० & २३७०० \times १० = २३७००० \\ १३ \times १००० = १३००० & ३०४० \times १००० = ३०४०००० \\ १३ \times १०००० = १३०००० & \left\{ \begin{array}{l} १०००० \times १००००० \\ = १००००००००० \end{array} \right. \end{array}$$

५८. २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, अथवा ९ यांतून कोणत्याहि एक अंकाने गुणायाची रीति दाखवितो. यांत १ हा अंक घेतला नाही, कां की १ ने गुणणे, अथवा कांहीं एक संख्या १ वेळा घेणे, यापासून ती संख्या नुसती लिहावी असा अर्थ होतो. १३६८ यांस ८ नीं गुणायाचे आहे. पहिली संख्या विस्ताराने याप्रमाणे मांड.

१ हजार, ३ शतक, ६ दशक, आणि ८ एक.

यांस ८ नीं गुणायासाठीं, (५०) आणि (५२) प्रमाणे या वेगळ्या भागांस ८ नीं गुण, तर याप्रमाणे होईल,

८ हजार, २४ शतक, ४८ दशक, आणि ६४ एक.

आतां ६४ एक याप्रमाणे लिहितात.....	६४
४८ दशक.....	४८०
२४ शतक.....	२४००
८ हजार.....	८०००

यांची बेरीज घे, ह्यणजे ती १०९४४ आहे, ही १३६८ आणि ८ यांचा गुणाकार आहे, अथवा $१३६८ \times ८ = १०९४४$ आहे. याप्रमाणे कांहीं थोडी उदाहरणे केली असतां ही पुढील रीति ध्यानांत येईल.

५९. पहिल्याने. गुण्याचे उजव्येकडील पहिल्या अंकास गुण-

दशक हातचे घे.

दुसऱ्याने. गुण्याचा दुसऱ्या अंकास पूर्वीप्रमाणे गुण, आणि त्या गुणाकारांत पहिले हातचे दशक मिळीव; यांतील एकचा अंक खाली मांडून त्याचे दशक हातचे घे.

तिसऱ्याने. याप्रमाणे शेवटचा अंकापर्यंत कर, आणि नंतर त्या अंकापासून जो गुणाकार येईल तो सगळा खाली मांड.

चवथ्याने. जर गुण्यांत एकादें शून्य असलें, तर $0 \times 1 = 0, 0 \times 2 = 0$, इत्यादि असें होतें हें लक्षांत धरून, त्याशीं अंकाप्रमाणे कृति कर.

६०. याच रितीनें जे अंकास शून्ये जोडिलेलीं असतात, जसे ८०००, त्याणें कोणताहि अंक गुणितां येईल. कां कीं ८००० हे 8×1000 इतक्याबरोबर आहेत, आणि यामुळें (५५) प्रमाणे पहिल्यानें ८ नीं गुणून नंतर १००० नें गुणावें, हजाराने गुण्याची कृति (५७) प्रमाणे अंकाचे उजव्ये कडेस ३ शून्ये जोडिल्यानें पुरी होवें. यावरून या पक्षाची रीति पुढील आहे, नुसत्या अंकाने गुणून, त्या अंकावर जितकीं शून्ये असतात, तीं त्या गुणाकाराचे उजव्ये बाजूस मांड.

उदाहरण.

१६७९४२३८००८७२ यांस

६०००० यांणी गुण.

१००७६५४२८०५२३२००००

६१. अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

१००७३६०५७ हे किती होतात? उत्तर. ७०५१५२०.

१२३४५६७८९५९+१० आणि १२३५९+४ हे किती होतात?

उत्तर. ११११११११११ आणि ११११.

१३६५३ + १२९५४ + १४७५८ + २७५३०००

उत्तर. ८३१००.

एक लंकरांमध्ये पायदळांचीं ३३ पळटणें आहेत, आणि प्रत्येक पळटणांत ८०० मनुष्ये आहेत; स्वारांची १४ पळटणें आहेत, त्या प्रत्येक पळटणांत ६०० मनुष्ये आहेत; आणि मीलंदाजांची २ पळटणें आहेत, आणि प्रत्येकांत ३०० मनुष्ये आहेत. शत्रूपाशीं पायदळांचीं ६ पळटणें अधिक आहेत, आणि त्या प्रत्येक पळटणामध्ये १०० मनुष्ये

B4

3

पळटणें आहेत, त्या प्रत्येकांतील मनुष्यांची संख्या वरचे गोलंदाजांचे पळटणाप्रमाणेंच आहे. पहिले लश्करांतून स्वारांचीं दोन आणि पायदळांचें एक पळटण शत्रूकडे पळून जातात. तर शत्रूचे लश्करांत पहिल्येपेक्षां किती मनुष्ये अधिक होतील ? उत्तर. १३४००.

६२. मनांत आण कीं २३७०७ यांस ४५६७ याणीं गुणायार्चें आहे. आतां (५८) प्रमाणें ४५६७ हे ४०००, ५००, ६०, आणि ७ या वेगवेगळ्या संख्यांचे बेरजेबरोबर आहेत, तर २३७०७ यांस त्या प्रत्येकानें गुणून, त्या वेगळ्या गुणाकारांची बेरीज घ्यावी.

$$\begin{array}{r} \text{आतां (५८) प्रमाणें } २३७०७ \times ७ = १६५९४९ \\ \text{(६०) प्रमाणें } २३७०७ \times ६० = १४२२४२० \\ २३७०७ \times ५०० = ११८५३५०० \\ २३७०७ \times ४००० = ९४८२८००० \\ \text{यांची बेरीज} = १०८२६९८६९ \end{array}$$

हा इच्छिलेला गुणाकार आहे.

प्रत्येक ओळीचा शेवटीं जीं शून्ये मांडिलीं असतात त्यांस सोडून, ओळीतील बाकीचे अंक त्यांचे त्यांचे जागीं मांडले असतां हि चालेल. शून्ये सोडल्यानंतर, दुसऱ्ये ओळीचे उजव्येकडील पहिला अंक, पहिल्ये ओळीचे उजव्येकडील पहिल्या अंकाचे एक स्थळ डाव्येकडे येतो, तिसरे ओळीचा उजव्येकडील पहिला अंक, दुसऱ्ये ओळीचे उजव्येकडील पहिल्या अंकाचे एक स्थळ डाव्येकडे येतो, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. वरचा गुणाकाराचे ओळींचा डोक्यावर गुण्य गुणक मांडून, गुणाकाराची कृति या पुढीलप्रमाणें होईल.

$$\begin{array}{r} २३७०७ \\ ४५६७ \\ \hline १६५९४९ \\ १४२२४२ \\ ११८५३५ \\ ९४८२८ \\ \hline १०८२६९८६९ \end{array} \quad \begin{array}{l} ६३. जेव्हां गुणकांत मध्ये कोठे तरीं शून्य येतें, असा एक अधिक पक्ष दाखवायाचा राहिला आहे. जा जा अंकानें गुणावयाचें, त्या अंकाचा गुणाकाराचा पहिला अंक त्याच गुणकाकाचे खालीं यावा, इतकें मात्र यापक्षांत केलें पाहिजे, असें पुढील उदाहरणावरून दिसेल. मनांत आण कीं, ३६५ यांस १०१००१ याणीं$$

ति
अं
तो
तो
ळी
या
स्म
का
ये
क
अ
स
उ
स
ह

सांगितलेल्ये गुणकाबरोबर आहे. तर पूर्वी सांगितल्याप्रमाणे कृति कर; ह्यणजे,
 $365 \times 1 = 365$
 (५७) प्रमाणे $365 \times 1000 = 365000$
 $365 \times 1000000 = 365000000$
 यांची बेरीज $= 36765365$

या उदाहरणांत शून्ये सोडून गुणाकार कृति याप्रमाणे होईल;
 365 ६४. सर्व पक्षांत गुणाकाराची रीति
 101001 यापुढीलप्रमाणे आहे.

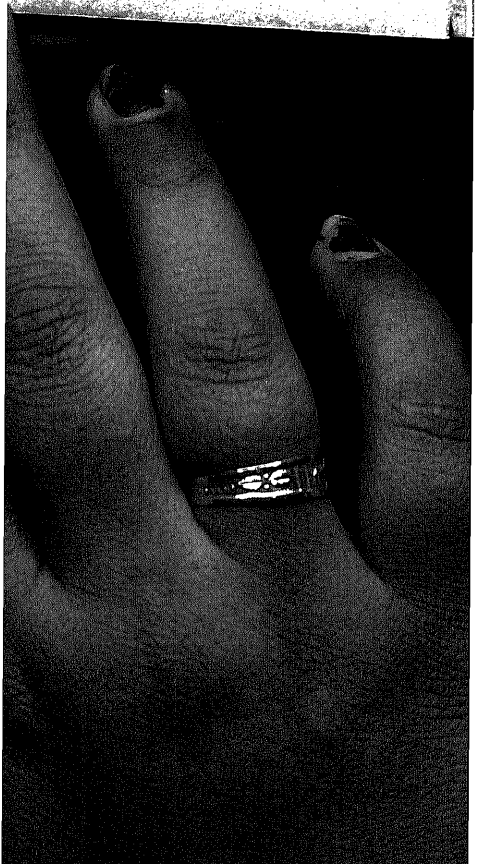
३६५
 365
 365
 365
 36765365
 पहिल्याने. गुण्य आणि गुणक असे मांड, कीं एकाचा एकचा स्थळींचा अंक दुसऱ्याचा एकखाली, दहंखास्थळींचा अंक दुसऱ्याचा दहंखाली, इत्यादि येतील.

दुसऱ्याने. (५९) प्रमाणे सर्व गुण्य, गुणकाचे प्रत्येक अंकाने क्रमाने गुण, आणि अशा प्रत्येक गुणाकाराचा एकचा स्थळींचा अंक त्याच गुणक अंकाखाली मांड.

तिसऱ्याने. वेगळाले गुणाकार जे दुसऱ्याने झाले त्यांची बेरीज घे.

६५. जेव्हां गुण्याचा, किंवा गुणकाचा, किंवा दोहोचे उजव्येकडे स शून्ये असतात, तेव्हां शून्यावांचून गुणाकार कृति कर, नंतर त्या गुणाकाराचे उजव्येबाजूस गुण्यगुणक या दोहोंत जितकीं शून्ये आहेत तितकीं मांड. उदाहरण, 3200×13000 किती होतात? आतां, 3200 हे 32×100 आहेत, अथवा 32 चे 100 पटी बरोबर. पुनः, 32×13000 हे 32×13 आणि त्यावर 3 शून्ये मांडिलीं इतके आहेत, ह्यणजे 416 आणि त्यांचे उजव्येकडे 3 शून्ये, अथवा 416000 आहेत. परंतु इच्छिलेला गुणाकार यापेक्षां 100 पट अधिक असावा, ह्यणून त्यावर आणखी दोन शून्ये मांडिलीं पाहिजेत. यावरून 41600000 हा इच्छिलेला गुणाकार आहे, ह्यणून जितकीं गुण्य आणि गुणकांत शून्ये आहेत तितकीं यांत आहेत.

६६. काही अंक साणे तोच वारंवार गुणिला अमतां, गुणाकाराला त्या अंकाचा घात ह्यणतात. जसे;



६ यांस ६ चा पहिला घात ह्यणतात.

६×६ यांस दुसरा घात ह्यणतात.

६×६×६ तिसरा घात ह्य०

६×६×६×६ चवथा घात ह्य०

इत्यादि. इत्यादि.

दुसऱ्या आणि तिसऱ्या घातास बहुतकरून वर्ग आणि घन ह्यणतात ; भूमितीतील चौरस आणि घनयांशीं दुसऱ्या आणि तिसऱ्या घाताचा संबंध आहे, यासाठी हे दोन शब्द कामांत आणिले आहेत ; परंतु हीं नामें केवळ शुद्ध नाहींत. गुणाकाराचा अभ्यासासाठी, हे पुढील घात कर.

सांगितलेल्या संख्या.	वर्ग.	घन.
९७२	९४४७८४	९१८३३००४८
१००८	१०१६०६४	१०२४१९२५१२
३१४२	९८७२१६४	३१०१८३३९२८८
३१६३	१०००४५६९	३१६४४४५१७४७
५५५५	३०८५८०२५	१७१४१६३२८८७५
६७८९	४६०९०५२१	३१२९०८५४७०६९
३६ यांचा पंचघात.		६०४६६१७६ आहे.
५० यांचा चतुर्घात.		६२५००००—
१०८ यांचा चतुर्घात.		१३६०४८८९६—
२७७ यांचा चतुर्घात.		५८८७३३९४४१—

६७. अ + ब यांस क + ड यांणीं गुणयाचें आहे, ह्यणजे क + ड यांत जितके एक आहेत, तितक्ये वेळा अ + ब घेण्याचे आहेत. परंतु (५३) प्रमाणें अ + ब हे क वेळा आणि ड वेळा घेण्याचे आहेत, अथवा इच्छिला गुणाकार (अ + ब)क + (अ + ब)ड आहे. परंतु (५२) प्रमाणें (अ + ब)क हा अक + बक आहे, आणि (अ + ब)ड हा अड + बड आहे ; यावरून इच्छिलेला गुणाकार अक + बक + अड + बड आहे ; अथवा,

$$(अ+ब)(क+ड) = अक+बक+अड+बड.$$

अशेच रितीनें (अ-ब)(क+ड) हे (अ-ब)क+(अ-ब)ड; अथवा,

$$(अ-ब)(क+ड) = अक-बक+अड-बड.$$

अ-ब हे क-ड वेळा न घेतां क वेळा मात्र घेतले, तेव्हां ड वेळा अधिक घेतले गेले; अथवा (अ-ब)ड इतक्याने गुणाकार अधिक झाला. यामुळे, अक-बक-(अ-ब)ड हे खरे उत्तर आहे. परंतु (अ-ब)ड हे अड-बड, यामुळे,

$$(अ-ब)(क-ड) = अक-बक-(अड-बड)$$

अथवा (४१) प्रमाणे $= अक-बक-अड+बड$

या मागील तीन उदाहरणांपासून बीजगणित परिमाणांचा गुणाकार करायाची ही पुढील रीति निघते; गुण्याचे प्रत्येक पद गुणकाचे प्रत्येक पदाने गुण; जेव्हां दोनीहि पदांस+, किंवा-आहे, तेव्हां त्यांचे गुणाकाराचे पूर्वी+मांड; जेव्हां एक पदास+आणि दुसऱ्याला-आहे, तेव्हां त्यांचे गुणाकारापूर्वी-मांड; आरंभीचे पदास कांहीं चिन्ह नसले, तर+हे चिन्ह आहे असे जाणून कृति कर.

६८. उदाहरण, (अ+ब)(अ+ब) यांचा गुणाकार अअ+अब+अब+बब आहे. परंतु अब+अब हे २अब आहेत; यावरून अ+ब यांचा वर्ग अअ+२अब+बब आहे; पुनः, (अ-ब)(अ-ब) यांचा गुणाकार अअ-अब-अब+बब. परंतु अब ची दोन वेळा वजावाकी, २अब चे वजावाकी बरोबर; यावरून अ-ब यांचा वर्ग अअ-२अब+बब आहे. पुनः, (अ+ब)(अ-ब) यांचा गुणाकार अअ+अब-अब-बब आहे. परंतु अब मिळविल्याने आणि वजा केल्याने कांहीं अंतर पडत नाही; यावरून अ+ब आणि अ-ब यांचा गुणाकार अअ-बब आहे.

पुनः अ+ब+क+ड यांचा वर्ग, अथवा (अ+ब+क+ड)(अ+ब+क+ड) हा गुणाकार, अअ+२अब+२अक+२अड+बब+२बक+२बड+कक+२कड+डड आहे; अथवा अशा परिमाणांचा वर्ग करण्याची रीति ही पुढील आहे; डाव्येकडचा पहिल्या पदाचा वर्ग कर, आणि त्या पदाचे उजव्येकडील वेगळाल्या सर्व पदांस त्या पहिल्या पदाचे दुपटीने गुण; दुसऱ्या पदाने तसेच कर, आणि याप्रमाणे शेवटचा पदापावेतो कर.

253212

६९. १५६ हे काहीं एक भागांत भागितां येतील, असे कीं त्यांतील प्रत्येक भाग १३ होईल, अथवा १५६ यांत किती तेरा आहेत? अशा प्रश्नाचे उलगडण्यास भागाकार ह्मणतात. या पक्षांत, १५६ यांस भाज्य ह्मणतात, १३ यांस भाजक ह्मणतात, आणि इच्छिलेल्या भागांस भागाकार ह्मणतात; आणि भागाकार केल्यानंतर, १५६ यांस १३ नीं भागिले असे ह्मणतात.

७०. १५६ यांतून १३ वजा करावे, आणि नंतर बाकींतून पुनः १३ वजा करावे, आणि याप्रमाणें पुढें करित जावें; अथवा व्यवहारी बोलण्याप्रमाणें १५६ हे १३ नीं मोजून घ्यावे, ही भागाकार करण्याची सोपी रीति आहे. यासारखीच कृति (४६) कलमांत वजाबाकीचे अभ्यासाविषयीचा उदाहरणांत सांगितली आहे. आतां वर सांगितल्याप्रमाणें कर, आणि प्रत्येक वजाबाकी १५६ नांतून १३ कर्मा करिती, ही आठवण राहण्यासाठी प्रत्येक वजाबाकीचे समोर १ हा अंक मांड, ह्मणजे ही कृति या पुढीलप्रमाणें होईल.

१५६	पहिल्याने १५६ नांतून १३ वजा कर, ह्मणजे १४३
१३ १	राहातील. नंतर १४३ सांतून १३ वजा कर, ह्मणजे
१४३	१३० राहतील; आणि याप्रमाणें पुढेंहि. शेवटीं १३ मात्र
१३ १	राहतात, आणि त्यांतून १३ वजा केल्याने काहीं राहात
१३०	नाहीं. तेव्हां किती वेळा १३ वजा केले हें मोजल्याने
१३ १	असें दिसतें, कीं ते १२ वेळा वजा केले आहेत; अथवा
११७	१५६ यांत १३ हे १२ वेळा जातात.

१३ १	ही सर्वांहून सोपी रीति आहे, आणि ही नुसत्या ख-
१०४	ड्यांनीं होईल. आरंभीं १५६ खड्यांची रास घे. नं-
१३ १	तर त्या राशींतून १३ खडे घेऊन ते एक बाजूस ठेव.
	नंतर राशींतून दुसरे १३ खडे घेऊन त्यांची वरप्रमाणें नि-

ति
अं
तो
तो
ळी
या
स्म
की
ये
क
अ
स
उ
स
व
र

१३	१
७८	
१३	१
६५	
१३	१
५२	
१३	१
३९	
१३	१
२६	
१३	१
१३	
१३	१
०	

पुनः असे करीत जा. शिवटी वेगळाल्या राशी मोजल्या-
वर त्या १२ आहेत असे दिसेल.

७१. भागाकार ह्यणजे गुणाकाराची उलट कृति आहे. गुणाकारामध्ये, कित्येक राशींची संख्या अस-
ती, जा प्रत्येकींत एकसारखेच खडे असतात, आणि
त्यावरून सर्वांत किती खडे आहेत, हे जाणण्याची इच्छा
असती. भागाकारांत सर्व खडे किती आहेत, आणि प्र-
त्येक वेगळाले राशींत किती किती असावे हे माहित असते,
त्यावरून अशा किती राशी होतील, हे जाणण्याची इच्छा
असती.

७२. मागील उदाहरणांत अशी संख्या घेतली, कीं
तींत १३ अमुक वेळा बरोबर जातात. परंतु प्रत्येक संख्ये-
शीं असे घडत नाही. उदाहरण, १५९ ही संख्या घे.
(७०) प्रमाणे कृतिकर, नंतर दिसण्यांत येईल, कीं १३
हे १२ वेळा वजा केल्यानंतर ३ बाकी राहतात, ह्यणून
त्यांतून १३ वजा होत नाहीत. तर असे ह्यणण्यांत येते कीं १५९
यांत १२ वेळा १३ आहेत, आणि ३ वर राहतात; अथवा १५९
यांस १३ नीं भागिले असतां, भागाकार १२ आणि बाकी ३ राह-
तात. चिन्हें कामांत आणिलीं असतां, हे या पुढीलप्रमाणे होईल ;

$$१५९ = १३ \times १२ + ३.$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१४६ = २४ × ६ + २, अथवा १४६ यांत सहा, चौवीस वेळा जा-
तात आणि २ वर राहतात.

१४६ = ६ × २४ + २, अथवा १४६ यांत चौवीस, सहा वेळा जातात
आणि २ वर राहतात.

३०० = ४२ × ७ + ६, अथवा ३०० यांत बेचाळीस, सात वेळा जा-
तात आणि ६ वर राहतात.

$$३९६२४ = ७२७७ \times ५ + ३२३९$$

अ = बक + र.

जर कांहीं बाकी नसली, तर अ = बक. वरचे उदाहरणांत अ भाज्य, ब भाजक, क भागाकार, आणि र बाकी आहे. अमध्ये ब हा क वेळा जातो हे दाखवायासाठी या पुढीलप्रमाणे मांडितात,

$\frac{अ}{ब} = क$, अथवा अ : ब = क,

कित्येक पूर्वीचा जुन्या पुस्तकांत याप्रमाणे मांडितात ;

अ ÷ ब = क.

७४. १५६ यांचे निरनिराळे भाग जर केले, आणि त्या प्रत्येक भागांत १३ किती वेळा जातात हे जर पाहिले, तर स्पष्ट आहे की जितक्या वेळा त्या वेगळाल्ये भागांत १३ जातात, तितक्या वेळा मिळून १३ हे १५६ नांत जातात. उदाहरण, ९१, ३९, आणि २६ हे मिळून १५६ होतात. या वेगळाल्या भागांत,

९१ यांत १३ हे ७ वेळा जातात,

३९ यांत १३ हे ३ वेळा जातात,

२६ यांत १३ हे २ वेळा जातात;

यामुळे ९१ + ३९ + २६ यांत १३ हे ७ + ३ + २ वेळा, अथवा १२ वेळा जातात.

पुनः, १००, ५०, आणि ६, मिळून १५६ होतात.

आतां १०० यांत १३ हे ७ वेळा जाऊन ९ वर राहातात,

५० यांत १३ हे ३ वेळा जाऊन ११ वर राहातात,

६ यांत १३ हे ०* वेळा जाऊन ६ वर राहातात.

यामुळे १०० + ५० + ६ यांत १३ हे ७ + ३ + ० वेळा जाऊन, ९ + ११ + ६ वर राहातात; अथवा १५६ यांत १३ हे १० वेळा जाऊन २६ वर राहातात. परंतु २६ यांत १३ हे २ वेळा जातात; यामुळे १५६ यांत १३ हे १० आणि २ वेळा, अथवा १२ वेळा जातात.

* एक सारखेच बोलणे राहायासाठी, ६ मध्ये १३ जात नाही असे द्वाणत नाही, परंतु त्याचे जागी असे द्वाटले पाहिजे, की ६ मध्ये १३ हे ० वेळा जाऊन ६ वर राहातात, याचा अर्थ ६ हे ० पेक्षा ६ नी अधिक आहेत असे द्वाणणे मात्र आहे.

७५. मागील कलमांतल्ये उदाहरणाची गोष्ट या पुढीलप्रमाणें दाखवितां येती.

$$\text{जर } a = b + c + d, \text{ तर } \frac{a}{m} = \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \frac{d}{m}$$

७६. पहिल्या उदाहरणांत, अतिसोप्ये रितीनें उलगडायासाठीं, १३ हे एक वेळेपेक्षां अधिक वेळा वजा केले नाहींत. परंतु दोन वेळा १३, तीन वेळा १३, इत्यादि जाणल्यास, जितके वेळा १३ वजा करायास इच्छिलें, तितक्या वेळा १३ एकदांच वजा करितां येतील, परंतु त्या वेळा वजावाकीचे बाजूस आठवणीसाठीं लिहिल्या पाहिजेत. उदाहरण, १० वेळा १३, ह्मणजे १३०, हे एकदांच १५६ यांतून वजा कर, २ वेळा १३, ह्मणजे २६ त्या वजावाकींतून घे; ह्मणजे याप्रमाणें कृति होईल;

$$\begin{array}{r} १५६ \\ १३० \dots\dots १० \text{ वेळा } १३. \\ \hline २६ \\ २६ \dots\dots २ \text{ वेळा } १३. \\ \hline ०० \end{array}$$

यामुळे १५६ यांत १३ हे १०+२, अथवा १२ वेळा जातात.

पुनः, ३०९६ यांस १८ यांणीं भाग.

$$\begin{array}{r} ३०९६ \\ १८०० \dots १०० \text{ वेळा } १८. \\ \hline १२९६ \\ ९०० \dots ५० \text{ वेळा } १८. \\ \hline ३९६ \\ ३६० \dots २० \text{ वेळा } १८. \\ \hline ३६ \\ ३६ \dots २ \text{ वेळा } १८. \\ \hline ०० \end{array}$$

यामुळे ३०९६ यांत १८ हे १०० + ५० + २० + २, अथवा १७२ वेळा जातात.

७७. यावरून हीं पुढील वाक्ये ध्यानांत येतील, आणि दुसऱ्या कोणत्याहि संख्यांविषयीं तशी प्रतिज्ञा करितां येईल.

४५० हे ७५ x ६ आहेत; यामुळे कोणतीहि संख्या, जसे ५, हे

जातील.

- १३५ यांत ३ हे ... २६ वेळांपेक्षा अधिक वेळा
जातात; यामुळे,
२ वेळ १३५ यांत ३ हे ... ५२ अथवा २ वेळा २६ पेक्षा
अधिक वेळा जातात.
१० वेळ १३५ यांत ३ हे ... २६० अथवा १० वेळा २६ पेक्षा
अधिक वेळा जातात.
५० वेळ १३५ यांत ३ हे ... १३०० अथवा ५० वेळा २६ पेक्षा
अधिक वेळा जातात.
४७२ यांत १८ हे ... २१ वेळांपेक्षा अधिक वेळ जा-
तात; यामुळे,
४७२० यांत १८ हे ... २१० वेळांपेक्षा अधिक वेळा,—
४७२०० यांत १८ हे ... २१०० वेळांपेक्षा अधिक,—
४७२००० यांत १८ हे ... २१००० वेळांपेक्षा अधिक,—
३२ यांत १२ हे ... २ वेळांपेक्षा अधिक—परंतु ३ वे-
ळांपेक्षा कमी वेळा जातात.
३२० यांत १२ हे ... २० वेळा .. ३० वेळा—
३२०० यांत १२ हे ... २०० वेळा .. ३०० वेळा—
३२००० यांत १२ हे ... २००० वेळा .. ३००० वेळा—

इत्यादि.

इत्यादि.

इत्यादि.

७८. वरचा कलमामध्ये भागाकाराची मूळकारणे आहेत. आ-
तां ती संक्षेपाने आणि सोईने कामांत आणावी, इतकें मात्र दाखवायाचें
राहिलें. मनांत आण कीं ४०६८ यांस १८ नीं भागायाचें,
अथवा (२३) प्रमाणें $\frac{४०६८}{१८}$ हे किती येतात हें जाणण्याची इच्छा
आहे.

जर ४०६८ यांचे अनेक भाग केले, तर त्या प्रत्येक भागांत १८
किती वेळा जातात हें (७४) चे कृतीवरून निघेल, आणि त्यावरून त्या
सर्व अंकांत १८ किती वेळा जातात हें कळेल. आतां, ४०६८ यांचे
कसे भाग केल्याने सोईस पडेल? पहा कीं ४०६८ यांचा पहिला अंक ४,

यांत १८ कांहीं वेळा जात नाही; परंतु ४० हे दोन अंक मिळून, त्यांत १८ हे २ वेळांपेक्षा अधिक, परंतु ३ वेळांपेक्षा कमी वेळा जातात. परंतु (२०) प्रमाणें ४०६८ ही संख्या ४० शतक आणि ६८ आहे; ४० शतक यांत (७७) प्रमाणें १८ हे २०० वेळांपेक्षा अधिक, परंतु ३०० वेळांपेक्षा कमी वेळा जातात. यामुळे, ४०६८ यांत १८ हे २०० वेळांपेक्षा अधिक वेळा जातात, कां की ४००० यांत १८ हे २०० वेळांपेक्षा अधिक वेळा जातात. आणखी त्या संख्येंत १८ हे ३०० वेळांपेक्षा कमी वेळा जातात, कां की ३०० वेळा १८ हे ५४०० आहेत, आणि ४०६८ यांपेक्षा अधिक आहेत. आतां ४०६८ यांतून २०० वेळा १८ अथवा ३६०० वजा कर, तर ४६८ राहातील. यामुळे, ४०६८ यांत १८ हे २०० वेळा जातात, आणि ४६८ यांत १८ जितके वेळा जातात, तितके वेळा अधिक जातात.

आतां, ४६८ यांत १८ किती वेळा जातात, हे काढायाचें राहिलें. तर पूर्वीप्रमाणेंच कर. पहा ४६ यांत १८ दोन वेळांपेक्षा अधिक आणि तीन वेळांपेक्षा कमी वेळा जातात; यामुळे (७७) प्रमाणें ४६० यांत १८ हे २० वेळांपेक्षा अधिक आणि ३० वेळांपेक्षा कमी वेळा जातात; ४६८ यांतहि तितक्याच वेळा जातात. तर २० वेळा १८ ह्याजें ३६० यांस ४६८ तून वजा करून बाकी १०८ राहातात. यामुळे ४६८ यांत १८ हे २० वेळा जातात, आणि १०८ यांत जितके वेळा १८ जातात, तितक्या अधिक वेळा जातात. आतां, १०८ यांत १८ बरोबर ६ वेळा जातात असें दिसतें; यामुळे, ४६८ यांत १८ हे २० + ६ वेळा जातात, आणि ४०६८ यांत १८ हे २०० + २० + ६, अथवा २२६ वेळा जातात. जर भाजक, भाज्य, आणि भागाकार, हे कौसानें वेगळे करून एके ओळींत मांडिले, आणि कांहीं विवरण केल्यावांचून वर दाखवलेली कृति केली, तर ती या खालचा (अ) उदाहरणाप्रमाणें होईल.

३६३२६६९९ यांस १३४२ यांणी भागायाचें आहे असें मनांत आण (ब).

(ब)

१३४२)३६३२६५९९ (२०००० + ७००० + ६० + ९

२६८४००००

. ९४८६५९९

९३९४०००

.. ९२५९९

८०५२०

१२०७९

१२०७८

... १

(अ)

१८) ४०६८ (२०० + २० + ६

३६००

. ४६८

३६०

१०८

१०८

...

पूर्वीचा उदाहरणाप्रमाणे, ३६३२६५९९ यांस ३६३२०००० आणि ६५९९ या दोन भागांत विभागिले आहेत; भाजकापेक्षा अधिक असी संख्या असायासाठी, भाज्याचे डाव्येकडून चार अंक घ्यावे लागतात, ह्यापून, ३६३२ हे पहिले चार अंक दुसऱ्यांपासून वेगळे केले आहेत. पुनः ३६३२०००० यांत १३४२ हे २०००० पेक्षा अधिक आणि ३०००० यापेक्षा कमी वेळा जातात असे दिसते; आणि १३४२ × २००००, यांस भाज्यांतून वजा करून ९४८६५९९ बाकी राहातात. पुनः पुनः असी कृति करून, दिसते, कीं २०००० + ७००० + ६० + ९, अथवा २७०६९ असा भागाकार होतो, आणि बाकी १ राहतो.

पुढे चालायाचे पूर्वी हे पुढील प्रश्न वरचा कलमांतील कृतीप्रमाणे विस्ताराने करावे.

१००९३८७४, ६६७७९९२२, २७१८२१८ } यांचा किमती
३२०७, ११४४३३, १३३५२ } काय आहेत?

यांचे वेगवेगळे भागाकार, ३१४७, ५८३, २०३, आणि त्यांचा वेगवेगळ्या बाक्या १४४५, ६५४८३, ७७६२, असा आहेत.

७९. मागील कलमाचा उदाहरणांत, पहा, कीं पहिल्याने, शून्यांशिवाय दुसरे अंक त्यांचे त्यांचे जागी ठेविले, तर वजाबाकीचे उजव्येकडे जीं शून्ये आहेत, त्यांस मांडायाचें प्रयोजन नाही; दुसऱ्याने, भा-

ज्याचे उजव्येकडील जे अंक शून्यावर येतात, त्यांचे मांडण्याचें काम पडत नाहीं, परंतु कृति करतांना त्यांचे खालचीं शून्ये नाहींशीं झाल्यावर ते घ्यावे लागतात, कां कीं वजावाकी करण्यांत ते कामांत येत नाहीं; तिसऱ्यानें, वरचे विस्तार रितीप्रमाणें भागाकाराची संख्या लांब लिहिण्याचें प्रयोजन नाहीं, ते अंक मात्र लिहिले पाहिजेत. उदाहरण, वर दाखविलेला पहिला भागाकार $२००+२०+६$, अथवा २२६ आहे; दुसरा भागाकार $२००००+७०००+६०+९$, अथवा २७०६९ आहे. तर यावरून, पहिल्या ओळीशिवाय, सर्व शून्ये आणि त्यांचे वरले अंक सोडून दे, आणि एक ओळींत भागाकार मांड; ह्मणजे मागल्या क्रमाचीं दोन उदाहरणें याप्रमाणें होतील.

१८) ४०६८ (२२६	१३४२) ३६३२६५९९ (२७०६९
३६	२६८४
०४६	९४८६
३६	९३९४
१०८	९२५९
१०८	८०५२
...	१२०७९
	१२०७८
	१

८०. यावरून ही पुढील रीति निघती;

पहिल्यानें. भाजक आणि भाज्य एक ओळींत मांड, आणि भाज्याचे दोहों बाजूंस कौंस कर.

दुसऱ्यानें. भाज्याचा डाव्येकडून इतके अंक घे, कीं त्यांची संख्या भाजकापेक्षां एक अंक अधिक होईल; या अंकांत भाजक किती वेळा जातो तें काढ, आणि तो वेळांक भागाकाराचे डाव्येकडील पहिल्या स्थळीं मांड.

तिसऱ्यानें. वर सांगितल्याप्रमाणें आलेल्या अंकानें भाजकास गुण, आणि जे अंक भाज्याचे डाव्येकडून घेतले, त्यांचे खालीं वरचा गुणाकार मांडून तो वरचा अंकांतून वजा कर.

चवथ्यानें. दुसऱ्यानें सांगितल्याप्रमाणें जे अंक वेगळे घेतले, त्यांचे

उजव्येकडील जवळचा अंक या वजावाकीचे उजव्येकडे मांड; असे वाढविल्याने वजावाकी जर भाजकापेक्षा अधिक असेल, तर त्यांत भाजक किती वेळा जातो ते काढ; तो वेळांकभागाकाराचा पूर्वीचा अंकाचे उजव्येकडे मांड, आणि असे पुनः पुनः करित जा; जर वजावाकी वाढविल्यानंतर भाजकापेक्षा अधिक नसली, तर भाज्यांतील दुसरा अंक तिचे उजव्येकडे मांड, आणि त्यानंतर दुसरा अंक मांड, आणि जोंपर्यंत ती बाकी भाजकापेक्षा मोठी होई तोंपर्यंत असे कर; परंतु शेवटील घेतलेल्या अंकाशिवाय जितके भाज्यांतून अंक घेऊन मांडिले असतील, त्या प्रत्येकाविषयी भागाकार स्थळीं एक शून्य मांडिलें पाहिजे हें स्मरणांत ठेवावें.

पांचव्याने. भाज्यांतील सर्व अंक संपतपावेतों या रितीने करित चाल.

कौण्येहि मोठ्ये संख्येंत, भलती मोठी संख्या किती वेळा जाईल, हें पहायासाठी, दोहों संख्यांतून अंकांची सारिखी संख्या घेऊन, मोठी संख्या न घेतां खांशी कृति केल्याने, अटकळीने उत्तर कळेल. जसे, ४७३२ आणि १४३७९ यांतून ४ आणि १४ घेतले, तर १४ मध्ये ४ जितके वेळा जातात तितके वेळा सुमाराने १४३७९ यांत ४७३२ जातील, ह्मणजे सुमाराने ३ वेळा. कारण कीं १४००० यांत जितक्या वेळा ४००० जातात, तितक्या वेळा १४ मध्ये ४ जातात, आणि ४००० आणि १४००० यांचें आणि सांगितल्ये अंकांचें अंतर शतक, दशक इत्यादि लहान अंक येतें. तर सुमाराने कळेल, कीं १४००० यांत ४००० जाण्याचा आणि १४३७९ यांत ४७३२ जाण्याचा, या दोहों वेळांत फार अंतर पडणार नाहीं; आणि बढतकरून याप्रमाणेंच घडतें. परंतु भाजकाचा दुसरा अंक ५ किंवा ५ पेक्षा अधिक असेल, तर वर सांगितल्याप्रमाणें कृति केल्याचे पूर्वी, भाजकाचे डावेकडील पहिला अंक १ ने वाढविल्याने सोपें पडेल. ही अटकळ करण्याची इशारी केवळ अभ्यासाने येईल.

८१. गुणाकार कोष्टक चांगला पाठ केल्यानंतर, (५०) प्रमाणें जर भाजक १२ पेक्षा अधिक नसेल, तर वरची कृति अधिक सरळ होईल. उदाहरण, १३२९७६ यांस ४ नीं भागायाचें आहे असे मनांत आण. विस्ताराने कृति पुढीलप्रमाणें होईल.

४) १३२९७६ (३३२४४)

१२
१२
१२
०९
८
१७
१६
१६
१६

परंतु १३ मध्ये ४ हे ३ वेळा जा-
तात, आणि १ बाकी राहाती, ती
मांडल्यावांचून स्मरणांत राहिल; जो
१ राहिला त्यास, भाज्यांतील पुढील
अंक, ह्यणजे, २ याचे पूर्वी मांडून
१२ होतील, त्या वारामध्ये ४ हे ३
वेळा बरोबर जातात, आणि याप्रमाणे
पुढे. भागाकार मांडायास ही पुढील
रीति सोईची आहे;

४) १३२९७६

३३२४४

एथे या पुढील गोष्टी सांगायामें योग्य आहेत; ५ यांणीं गुणायामें
असेल, तर उजव्याकडे शून्य जोडून २ नीं भागावें, ही ५ नीं गुणा-
कार करण्याची सोपी रीति आहे, कां कीं १० वेळांचे अर्ध्या ५ वेळा
आहेत. ५ यांणीं भागायामें असेल, तर पहिल्यानें २ नीं गुणून उज-
व्याकडेचा शेवटील अंक छेकल्यानें भागाकार होईल; आणि छेकलेल्या
अंकाचें अर्ध भागाकाराची बाकी होईल. २५ यांणीं गुणायामें असेल,
तर दोन शून्यें जोडून ४ नीं भाग. २५ यांणीं भागायामें असेल,
तर ४ नीं गुणून त्याचे शेवटील दोन अंक छेकून भागाकार होतो;
दोन शेवटील छेकलेल्या अंकांचा चतुर्थांश बाकी होईल. कोणताहि
अंक ९ नीं गुणायामें असेल, तर त्या अंकास एक शून्य जोडून, त्या-
तून तो सांगितलेला अंक वजा कर, ह्यणजे, तो अंक १० वेळा घेतला
आणि त्यांतून तो अंक एक वेळा वजा केला अशी त्याची कृति आहे.
९९ यांणीं गुणायामें असेल, तर दोन शून्यें जोडून त्यांतून सांगितलेला
अंक वजा कर, इत्यादि.

कोणताहि संख्या २ यांणीं निःशेष भागावयाजोगी असायासाठीं,
तिचें एकचें स्थळीचा अंक सम* असला पाहिजे. कोणताहि संख्या

* शून्यास सम अंक असे मानितात.

४ यांणी निःशेष भागायाजोगी असायासाठी, तिचे उज्व्येकडील दोन अंक ४ नीं निःशेष भागिले जावे. उदाहरण, १२३६ ही संख्या घे; ही संख्या १२ शें आणि ३६ मिळून झाली आहे, आणि तिचा पहिला भाग शतकाचा आहे, ह्मणून तो ४ नीं निःशेष भागिला जातो, आणि त्यापासून १२ पंचवीस येतात, आणि १२३६ ही संख्या ४ नीं निःशेष भागिली जाती कीं नाहीं, हें तिचा शेवटील दोन अंक, ह्मणजे, ३६, हे ४ नीं निःशेष भागले जातील कीं नाहीं, यावरून कळेल. जर कोणखेहि संख्येचे उजवे बाजूचा शेवटील तीन अंक ८ नीं निःशेष भागिले जातात, तर ती संख्याहि ८ नीं निःशेष भागिली जाईल; कारण कीं उज्व्येकडचा शेवटील तीन अंकांशिवाय संख्येतील कोणताहि अंक हजारांचा असतो, आणि ८ नीं १००० निःशेष भागिले जातात; यावरून ती सर्व संख्या ८ नीं निःशेष भागिली जाती कीं नाहीं, हें शेवटील तीन अंकांवरून कळतें; जसें १२७९४६ ही संख्या ८ नीं निःशेष भागिली जात नाहीं, कारण कीं ९४६ हे शेवटील तीन अंक ८ नीं निःशेष भागिले जात नाहींत. जेव्हां एकाद्वे संख्येचा अंकांची बेरीज ३ अथवा ९ यांणी निःशेष भागिली जाती, तेव्हां ती संख्या ३ अथवा ९ यांणी निःशेष भागिली जाईल. उदाहरण, १२३४ ही संख्या घे; ह्मणजे,

१ हजार, अथवा ९९९ आणि १

२ शें, अथवा २ वेळा ९९ आणि २

३ दशक, अथवा ३ वेळा ९ आणि ३

आणि ४ एक अथवा ४

आतां ९, ९९, ९९९, इत्यादि, हे सर्व ९ आणि ३ यांणी निःशेष भागिले जातात हें स्पष्ट दिसतें, आणि ते अंक वारंवार घेऊन जो अंक होईल तोहि ९ आणि ३ यांणी निःशेष भागिला जाईल. तर १२३४ ही संख्या ३ अथवा ९ यांणी निःशेष भागिली जाती कीं नाही, हें $१+२+३+४$, अथवा वेगळाल्या अंकांची बेरीज, ९ अथवा ३ यांणी निःशेष भागिली जाती कीं नाहीं, यावरून कळतें. जेव्हां एकाद्वी संख्या सम असून तिचा वेगळाल्या अंकांची बेरीज ३ नीं निःशेष भागिली जाती, तर ती सर्व संख्या ६ नीं निःशेष भागिली जाईल, हें जर सांगितलेल्या गोष्टीवरून कळतें. जेव्हां एकाद्वी संख्येचा एकचा स्थळीं

० किंवा ५ असतील, तर ती संख्या ५ नीं निःशेष भागिली जाईल.

८२. जेव्हां भाजक १ आहे, आणि त्याचे उजव्येबाजूस शून्ये आहेत, तेव्हां भागाकार करण्याची रीति अति सोपी आहे. ती या पुढील उदाहरणांपासून कळेल.

याची रीति हीच आहे; भाजकाचे उजव्येकडेस जितकीं शून्ये आहेत, तितके भाज्याचे उजवेकडील अंक छेकून टाक; छेकलेले अंक बाकी होईल, आणि भाज्याचे राहिलेले अंक भागाकार होईल.

१००)३३४२९(३३४

३००
३४२
३००
४२९
४००
२९

१०)२७१७३१६

२७१७३१ आणि ६ बाकी.

३३४ शतक आणि २९ आहेत; त्या पहिलीत १०० हे ३३४ वेळा जातात, आणि दुसरीत १०० जात नाहीत; यामुळे ३३४ भागाकार आणि २९ बाकी आहे.

८३. जेव्हां भाजकाचे उजव्येकडेस शून्ये आहेत, तेव्हां भागाकार करण्याची रीति संक्षिप्त कशी करावी, हे या पुढील उदाहरणांपासून कळेल. प्रत्येक उदाहरणाचे एकीकडे तेंच उदाहरण अनुपयोगी अंक छेकून मांडिले आहे; आणि तीं प्रत्येक दोन दोन उदाहरणे परस्पर तांडून पाहिली असता, या कलमाचा शेवटी जी रीति सांगितली, ती ध्यानांत घ्यावी.

अथवा हीं उतरें खरीं आहेत हें याप्रमाणें सिद्ध करितां येईल; (२०) प्रमाणें, २७१७३१६ यांत २७१७३१ दशक आणि ६ आहेत, त्या पहिल्या संख्येत १० हे २७१७३१ वेळा जातात आणि दुसरीत १० जात नाहीत; यामुळे (७२) प्रमाणें २७१७३१ हा भागाकार, आणि ६ ही बाकी आहे. पुनः (२०) प्रमाणें, ३३४२९ यांत

१७८२०००)	६४२४७००००००(३६०५	१७८२)	६४२४७००(३६०५
	५३४६०००		५३४६
	<u>१०७८७०००</u>		<u>१०७८७</u>
(१.)	१०६९२०००		१०६९२
	९५०००००		. . ९५००
	<u>८९१००००</u>		. ८९१०
	५९००००		. ५९००००

१२३०००००)	४२१७६१८९३००(३४२८	१२३)	४२१७६१(३४२८
	३६९०००००		३६९
	५२७६१८९३		. ५२७
(२.)	४९२०००००		४९२
	३५६१८९३०		. ३५६
	<u>२४६०००००</u>		<u>२४६</u>
	११०१८९३००		११०१
	९८४०००००		९८४
	<u>११७८९३००</u>		<u>११७९३००</u>

याची रीति हीच आहे; भाजकाचे उजव्ये वाजूस जितकी शून्ये आहेत, तितके भाज्यातील अंकां छेक. नंतर भाजकातील सर्व शून्ये छेकून, चालखे रितीप्रमाणे भागाकार कर; परंतु कृति संपल्यावर जितके भाज्यातील अंक छेकले, तितके खाली बाकीचे उजव्येकडेस मांड.

८४. अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

भाज्य.	भाजक.	भागाकार.	बाकी.
९६९४	४७	२०६	१२
१७५६१८	३१३६	५६	२
२३७९६४८४	१३००००	१८३	६४८४
१४००२५६४	१८७१	७४८४	०
३१०३१४४२०	७८७८	३९३९०	०
३९३९०४०६४७	६८८९	५७१७८७	४
२२८७६७९२४५४९६१	४३०४६७२१	५३१४४१	०

† अणजे शून्ये जसेस धरून त्याचे भरीस लागतील तितके अंक घेऊन छेक.

$$(१). \frac{१०० \times १०० \times १०० - ४३ \times ४३ \times ४३}{१०० - ४३} \left\{ \begin{array}{l} = १०० \times १०० + १०० \\ \times ४३ + ४३ \times ४३ \end{array} \right.$$

$$(२). \frac{१०० \times १०० \times १०० + ४३ \times ४३ \times ४३}{१०० + ४३} \left\{ \begin{array}{l} = १०० \times १०० - १०० \\ \times ४३ + ४३ \times ४३ \end{array} \right.$$

$$(३). \frac{७६ \times ७६ + २ \times ७६ \times ५२ + ५२ \times ५२}{७६ + ५२} = ७६ + ५२$$

$$(४). १ + १२ + १२ \times १२ + १२ \times १२ \times १२ = \frac{१२ \times १२ \times १२ \times १२ - १}{१२ - १}$$

ही उदाहरणे करून दाखीव.

१३७६४२९ यांचे अति ज्वळची संख्या कोणती आहे, जी ३६३०० यांणी निःशेष भागिली जाईल? उत्तर. १३७९४००

जर १ वर्षांत ३६ बैल २१६ एकरांतील गवत खातात, आणि जर एक मेंढा बैलाचे निम्मे खातो, तर ४९ बैल आणि १३६ मेंढे मिळून १७५५० एकरांतील गवत किती काळांत खातील? उत्तर. २५ वर्षे.

८५. भलते दोन अंक घे, असे की एक दुसऱ्यास निःशेष भागितो; जसे ३२ आणि ४. या दोन अंकांस भलत्या दुसऱ्या अंकांने गुण; जसे ६ यांणी. यांचा गुणाकार १९२ आणि २४ होईल. आतां, जितक्या वेळा ३२ यांत ४ जातात, तितक्या वेळा १९२ यांत २४ जातील. मनांत आण की ६ टोपल्या आहेत, आणि प्रत्येक टोपलींत ३२ खडे आहेत, तर सर्व टोपल्यांत १९२ होतील. एक टोपलींतून ती रिकामी होई ती, ४ खडे वारंवार काढ. स्पष्ट आहे की, केवळ एकच टोपलींतून ४ काढल्याचे जागीं, प्रत्येक टोपलींतून ४ काढले असतां, सर्व ६ टोपल्या एकदांच रिकाम्या होतील; ह्याजें जितक्या वेळा ३२ यांत ४ जातात, तितक्या वेळा, ६ वेळा ३२ यांत ६ वेळा ४ जातात. हा तर्क दुसऱ्या संख्यांस लागू होतो. यामुळे, भाज्य आणि भाजक हे एकच संख्येने गुणिले असतां त्यांचे भागाकारांत कांहीं फेर पडत नाही.

८६. पुनः मनांत आण की २०० यांत ५० यांणी भागायाचें आहे. भाज्य आणि भाजक एकच संख्येने भाग, जसे ५ नीं. तर

२०० हे ५ वेळा ४० आणि ५० हे ५ वेळा १० आहेत. परंतु (८५) प्रमाणें ४० भागिले १० यांचा भागाकार, ५ वेळा ४० भागिले ५ वेळा १० यांचे भागाकाराबरोबर आहे, आणि यामुळे, भाज्य आणि भाजक हे एकच संख्येनें भागिले असतां, त्यांचे भागाकारांत कांहीं फेर पडणार नाही.

८७. (५५) प्रमाणें, जर कोणतीहि संख्या अनुक्रमें दुसऱ्या दोन संख्यांनीं गुणिली, तर ती पहिली संख्या दुसऱ्या दोन संख्यांचे गुणाकारानें गुणिल्याबरोबर होईल. जसें, २७ यांस पहिल्यानें ५ नीं गुणून पुनः तो गुणाकार ३ यांनीं गुणिला, आणि २७ यांस ५ वेळा ३ अथवा १५ यांनीं गुणिलें, हीं दोन्ही बरोबर होतील. जर कांहीं संख्या दुसऱ्या कांहीं संख्येनें भागिली, नंतर, तो भागाकार दुसऱ्या संख्येनें भागिला, अथवा ती पहिली संख्या दुसऱ्या दोन संख्यांचे गुणाकारानें भागिली, तर त्या दोहोंचें उत्तर सारिखेंच आहे. उदाहरण, ६० यांस ४ नीं भागिलें असतां १५ येतात, या भागाकारास ३ नीं भागिलें असतां, ५ येतात. ६० यांत १५ असे ४ समभाग आहेत, आणि तो प्रत्येक समभाग बरोबर ३ समभागांत विभागिला, तर सर्व मिळून १२ समभाग होतात; अथवा पहिल्यानें ४ आणि दुसऱ्यानें ३ यांनीं भागावें, अथवा ४×३ , अथवा १२ नीं एकदांच भागावें या दोन्ही कृती सारिख्याच आहेत, हें स्पष्ट आहे.

८८. पुढें जा रिती सांगतो त्या उदाहरणांपासून लक्षांत येतील. ३२ यांस २४ नीं गुणून तो गुणाकार ६ नीं भागिला, आणि २४ भागिले ६ नीं झणजे ४, या भागाकारानें ३२ गुणिले हीं दोन्ही उत्तरे बरोबर होतील; कां कीं २४ यांचा ६ वा भाग ४ आहे, याकरितां कोणतीहि संख्या २४ वेळा घेऊन तिचा ६ वा भाग, आणि तीच संख्या ४ वेळा घेतली हीं दोन्ही बरोबर आहेत; अथवा २४ नीं गुणून ६ नीं भागावें, हे ४ नीं गुणिल्याबरोबर आहे.

८९. पुनः ४८ यांस ४ नीं गुणून, तो गुणाकार २४ नीं भागिला, अथवा २४ यांस ४ नीं भागून, झणजे ६ या भागाकारानें ४८ यांस एकदांच भागिलें, हीं दोन्ही बरोबर आहेत. कां कीं ४८ यांत जो प्रत्येक एक ६ वेळा घेतला आहे, तोच एक ४ वेळा अधिक घेतला आहे, अथवा, ४ वेळा ४८ यांत तोच एक २४ वेळा घेतला आहे,

अथवा ४८ आणि ६ यांचा भागाकार, आणि ४८ × ४ आणि ६ × ४ यांचा भागाकार हीं दोन्हीं बरोबर आहेत.

९०. बीजगणित रूपानें बरचे पांच कलमांचा कृती या पुढीलप्रमाणें मांडितां येतात ;

$$(८५) \text{ प्रमाणें } \frac{मअ}{मब} = \frac{अ}{ब}$$

जर अ आणि ब यांस न निःशेष भागितो, तर

$$(८६) \text{ प्रमाणें } \frac{अ}{न} = \frac{अ}{ब} \quad (८७) \text{ प्रमाणें } \frac{अ}{क} = \frac{अ}{बक}$$

$$(८८) \text{ प्रमाणें } \frac{अब}{क} = अ \times \frac{ब}{क} \quad (८९) \text{ प्रमाणें } \frac{अक}{ब} = \frac{अ}{\frac{ब}{क}}$$

या पक्षांत सर्व भागाकार निःशेष होतात, या पक्षास मात्र बरची गोष्ट लागू होती हें स्मरणांत ठेविलें पाहिजे.

९१. जेव्हां एक संख्या दुसऱ्या संख्येनें निःशेष भागिली जाती, अथवा, पहिल्या संख्येंत दुसरी संख्या कांहीं बरोबर वेळा जाती, तेव्हां ती दुसरी संख्या पहिल्या संख्येचा भाजक, किंवा मापक, अथवा ती पहिल्या संख्येस निःशेष मापिती, किंवा भागिती, असें म्हणतात. जसें ४ हे १३६ यांचे मापक आहेत, अथवा १३६ यांस ४ हे निःशेष मापितात; परंतु १३७ यांस ४ हे निःशेष मापीत नाहीत. मापक हा शब्द कामांत आणण्याचें कारण हें पुढील आहे; मनांत आण कीं एक काठी ४ फुटी लांबीची आहे, तिजवर कांहीं खुणा केलेल्या नाहींत, आणि या काठीनें कांहीं लांबी मापावयाची आहे; जसें एक रस्ता. तो रस्ता जर १३६ फुटी लांबीचा असेल, तर या काठीनें तो निःशेष मापितां येईल; कां कीं १३६ यांत ४ हे ३४ वेळा जातात, यावरून कळेल, कीं रस्त्याची लांबी काठीचे लांबीचे बरोबर ३४ पट आहे. परंतु रस्त्याची लांबी १३७ फुटी असली, तर ती या काठीनें निःशेष मापवत नाही; कां कीं ३४ काळ्या मापल्यावर, कांहीं बाकी मापावयाची राहिली असें दिसेल, आणि यावरून या काठीचा कांहीं लहान मापावांचून, ती बाकीची लांबी मापवत नाही. यामुळे १३६ यांस ४ हे

निःशेष मापितात, परंतु १३७ यांस ४ निःशेष मापीत नाहीत असें ह्यणतात. तर जी भाजक संख्येस निःशेष भागितो, त्यास त्या संख्येचा निःशेष भाजक किंवा माप ह्यणतात.

१२. जेव्हां कांहीं संख्या दुसऱ्या दोन संख्यांचा मापक किंवा भाजक आहे, तेव्हां तीस, त्या दोन संख्यांचा साधारण मापक, किंवा भाजक ह्यणतात. जसें, १५ हे १८० आणि ७५ यांचा साधारण भाजक आहे. दोन संख्यांस अनेक साधारण भाजक असतात. उदाहरण, ३६० आणि १६८ यांचे साधारण भाजक २, ३, ४, ६, १४, आणि यांशिवाय दुसरेहि आहेत. आतां, यावरून कदाचित् हा पुढील प्रश्न उत्पन्न होईल; कीं ३६० आणि १६८ यांचा सर्व साधारण भाजकांतून, अति मोठा भाजक कोणता? अंकगणिताचे एक रितीपासून या प्रश्नाचें उत्तर कळेल, आणि त्यास अति मोठा साधारण भाजक ह्यणतात. अति मोठा साधारण भाजक यास, भास्कराचार्यांचे रितीप्रमाणें दृढ भाजक ह्यणतात, त्याचा आतां विचार करितों.

१३. जर एक परिमाण दुसऱ्या दोन परिमाणांस भागितें, तर त्या दोन परिमाणांची बेरीज आणि वजाबाकी यांसहि तें परिमाण भागितें. जसें ७ हे २१ आणि ५६ यांस भागितात. यामुळे ५६+२१ आणि ५६-२१, अथवा ७७ आणि ३५ यांसहि ७ भागितात. पूर्वी (७४) कलमांत जी गोष्ट सांगितली, ती हीच आहे, परंतु एथें ती सांगण्याची तऱ्हा निराळी आहे.

१४. जर एक संख्या दुसऱ्या संख्येस भागिती, तर जितक्या संख्यांस ती दुसरी संख्या भागिती, त्या सर्व संख्यांसहि ती पहिली संख्या भागील. जसें, ५ हे १५ यांस भागितात, आणि १५ हे ३०, ४५, ६०, ७५, इत्यादि या सर्व संख्यांस भागितात; यावरून या सर्व संख्यांस ५ भागितील. स्पष्ट आहे, कीं जर,

१५ यांत ५ हे ३ वेळा जातात,

तर ३०, अथवा १५+१५ यांत ५ हे ३+३ वेळा, अथवा ६ वेळा जातात.

४५, अथवा १५+१५+१५ यांत ५ हे ३+३+३ वेळा, अथवा ९ वेळा जातात; आणि याप्रमाणें पुढेहि.

१५. जी संख्या भाजक आणि भाज्य यांस भागिती, ती बाकींसहि भागिती. हें दाखवायासाठीं, ३६० यांस ११२ यांणीं भाग, यांचा

भागाकार ३ येऊन बाकी २४ राहतात, ह्मणजे (७२) प्रमाणें ३६० हे ३ वेळा ११२ आणि २४ आहेत, अथवा $३६० = ११२ \times ३ + २४$. यावरून कळते, कीं ३६० आणि ३ वेळा ११२ यांचें अंतर २४ आहे, अथवा $२४ = ३६० - ११२ \times ३$. ३६० आणि ११२ यांस जे अंक भागितात, त्यांतून कोणताहि एक घे; जसे, ४ तर

४ हे ३६० यांस भागितात,

४ हे ११२ यांस भागितात, आणि यामुळे (९४) प्रमाणें

११२×३ , अथवा $११२ + ११२ + ११२$ यांसहि भागितात,

यामुळे (९३) प्रमाणें $३६० - ११२ \times ३$, अथवा त्यांची वजाबाकी ह्मणजे २४, यांसहि ४ भागितात. ३६० आणि ११२ यांचा सर्व दुसऱ्या भाजकाविरुद्धीहि ही गोष्ट लागू होती; आणि यावरून हें सिद्ध होतें, कीं जें परिमाण भाज्य आणि भाजक यांस भागितें, तें त्यांचे बाकीसहि भागितें. यावरून भाज्य आणि भाजक यांचा जो प्रत्येक साधारण भाजक आहे, तोच भाजकाचा आणि बाकीचाहि साधारण भाजक आहे.

९६. भाजक आणि बाकी यांचा जो साधारण भाजक आहे, तोच भाजक आणि भाज्य यांचाहि साधारण भाजक आहे. वरचें उदाहरण घे, आणि लक्षांत ठेव कीं $३६० = ११२ \times ३ + २४$ आहेत. बाकी २४ आणि भाजक ११२ यांचा कोणताहि साधारण भाजक घे; जसे ८ तर

८ हे २४ यांस भागितात;

आणि ८ हे ११२ यांस भागितात, आणि यामुळे (९४) प्रमाणें

११२×३ यांसहि भागितात.

यावरून (९३) प्रमाणें ८ हे $११२ \times ३ + २४$ यांस भागितात, अथवा ३६० भाज्यासहि भागितात. तर बाकीचा आणि भाजकाचा जो साधारण भाजक आहे, तोच भाजक आणि भाज्य यांचाहि साधारण भाजक आहे, अथवा बाकीचा आणि भाजकाचा असा कोणताहि साधारण भाजक नाही, कीं जो भाजक आणि भाज्य यांचाहि साधारण भाजक होत नाही.

९७. पहिल्यानें. (९५) कलमांत सिद्ध झालें, कीं भाजक आणि

भाज्य यांचे जे सर्व साधारण भाजक आहेत, ते बाकी आणि भाजक यांचेहि सर्व साधारण भाजक आहेत.

दुसऱ्यानें. (९६) कलमांत सिद्ध झाले, कीं यांस कांहीं दुसरे साधारण भाजक नाहींत.

यावरून निघते, कीं वर पहिल्यानें सांगितल्ये दुसऱ्ये दोन रकमांचा जो दृढभाजक आहे, तो पहिल्ये दोन रकमांचाहि दृढभाजक आहे, ह्मणजे यावरून कोणत्याहि दोन संख्यांचा दृढभाजका काढण्याची रीति पुढीलप्रमाणें कळेल :

१८. वरचें उदाहरण घे, ह्मणजे ३६० आणि ११२ यांचा दृढभाजक काढण्याचा आहे असें मनांत आण, आणि पहा कीं

३६० भागिले ११२, यापासून २४ बाकी राहातात,

११२ भागिले २४, यापासून १६ बाकी राहातात,

२४ भागिले १६, यापासून ८ बाकी राहातात,

१६ भागिले ८, यापासून कांहीं बाकी राहात नाहीं.

आतां ८ हे १६ यांस निःशेष भागितात, आणि ८ हे आठांस निःशेष भागितात, यास्तव ८ हे ८ आणि १६ यांचा दृ० भा० आहे, कारण कीं ८ यांस ८ पक्षां कोणत्याहि भोज्ये अंकांनें भागितां येत नाहीं; ह्मणजे १६ यांस जरी ८ पक्षां अधिक मोठा साधारण भाजक असला, तरी तो १६ आणि ८ या दोहोंचा साधारण भाजक असत नाहीं.

यामुळे ८ हा १६ आणि ८ यांचा दृ० भा० आहे, (९७) प्रमाणें १६ आणि ८ यांचा जो दृ० भा०, तोच २४ आणि १६ यांचा दृ० भा० आहे,

२४ आणि १६ यांचा जो दृ० भा०, तोच ११२ आणि २४ यांचा दृ० भा० आहे;

११२ आणि २४, तोच ३६० आणि ११२ यांचा दृ० भा० आहे;

यामुळे ८ हा ३६० आणि ११२ यांचा दृ० भा० आहे.

या पुढीलप्रमाणें दृ० भा० काढण्याची कृति मांडितात.

† संक्षेपानें दृढभाजकाचे स्थळीं, दृ० भा० असें मांडिले आहे.

११२)३६०(३

३३६

२४)११२(४

९६

१६)२४(१

१६

८)१६(२

१६

०

११२	३६०	३
९६	३३६	४
१६	२४	१
१६	१६	२
०	८	

दोन संख्यांचा दृ० भा० काढण्याची रीति.

पहिल्याने. मोठी संख्या लहान संख्येने भाग.

दुसऱ्याने. व्यापासून जी बाकी राहाती, तीस नवा भाजक कर, आणि वरचे भाजकास भाज्यस्थळी मांडून, भागाकार करून दुसरी बाकी काढ.

तिसऱ्याने. याप्रमाणे बाकी न राहापर्यंत पुढे करित जा, ह्मणजे शेवटील भाजक इच्छिलेला दृ० भा० होईल.

९९. कदाचित् असे कोणी विचारील कीं, जेव्हां दोन संख्यांस कोणत्याहि साधारण भाजक नाही, तर ही गोष्ट रितीवरून कशी कळेल? खरे झटले, तर अशा संख्याच नाहीत, कां कीं सर्व संख्या १ याने भागिल्या जातात; ह्मणजे सर्व संख्येत अनेक एकचा संग्रह आहे, आणि यामुळे कोणत्याहि दोन संख्यांचा साधारण भाजक १ आहे. त्यांस दुसरा कांहीं साधारण भाजक नसला, तर शेवटील भाजक १ होईल, जसे या पुढील उदाहरणांत, ८७ आणि २५ यांचा दृ० भा० काढायास सांगितला आहे.

२५)८७(३

अभ्यासासाठी उदाहरणे.

७५

संख्या.

दृ० भा०

१९)२५(२

६१९७

९५२१

१

२४

५८३६३

२६०२

१

१)१२(१२

५५४७

१४७००८४४३

१८४९

१३

६२८१

३२६०४१

५७१

०

२८९१५

३१४९५

५

१५०९

३००३०९

३

$$३६ \times ३६ + २ \times ३६ \times ७२ + ७२ \times ७२,$$

आणि $३६ \times ३६ \times ३६ + ७२ \times ७२ \times ७२$; ह्या संख्या काय आहेत, आणि यांचा दृ० भा० काय आहे? उत्तर. ११६६४.

१००. जर दोन संख्या तिसऱ्या संख्येने भागिल्या जातात, आणि त्यांचे दोन भागाकार पुनः चवथ्या संख्येने भागिले जातात, तर ती तिसरी संख्या दृ० भा० नाही. उदाहरण, ३६०, आणि ५०४ ह्या दोन्ही ४ यांणीं भागिल्या जातात. त्यांचे भागाकार ९० आणि १२६ आहेत. आतां ९० आणि १२६ या दोन्ही ९ नीं भागिल्या जातात, आणि त्यांचे भागाकार १० आणि १४ आहेत. (८७) प्रमाणे, कोणतीही संख्या ४ नीं भागून, तो भागाकार ९ नीं भागिला, अथवा ती संख्या ४×९ अथवा ३६ यांणीं एकदांच भागिली, तर त्या दोन्ही कृती सारख्याच आहेत. तर, ३६० आणि ५०४ यांचा साधारण भाजक ३६ आहे, आणि ४ पेक्षां ३६ मोठे आहेत. तर यावरून त्यांचा दृ० भा० ४ नाही. पुनः १० आणि १४ हे २ नीं भागिले जातात, असें असतां ३६ हाहि दृ० भा० नाही. यावरून कळते कीं जेव्हां दोन संख्या त्यांचे दृ० भा० न भागल्या, तेव्हां (९९) प्रमाणे त्यांचे भागाकारांस १ या शिवाय दुसरा कांहीं साधारण भाजक नाही. अथवा जा संख्येस मागील वाक्यांत दृ० भा० असें नाव दिलें, तें खरें नाही असें होईल.

१०१. तीन संख्यांचा दृ० भा० काढाया करितां, पहिल्यानें, पहिली आणि दुसरी या संख्यांचा दृ० भा० काढ. नंतर तो दृ० भा० आणि तिसरी संख्या, यांचा दृ० भा० काढ. कारण, पहिली आणि दुसरी या संख्यांचे सर्व साधारण भाजक मात्र दृ० भा० कांत आहेत, आणि दुसरे नाहीत. झणून पहिली, दुसरी आणि तिसरी या संख्यांशीं जे साधारण भाजक आहेत, ते मात्र तिसरी आणि पहिली, या दोन संख्यांचा दृढ भाजकांशीं साधारण आहेत, दुसरे भाजक नाहीत. तसेच रितीनें चार संख्यांचा दृ० भा० काढायाकरितां, पहिली, दुसरी, आणि तिसरी, या संख्यांचा दृ० भा० काढून, तो दृ० भा० आणि चवथी संख्या यांचा दृ० भा० काढावा.

१०२. जेव्हां एका संख्येंत दुसरी संख्या जाती, अथवा पहिली संख्या दुसरीनें निःशेष भागिली जाती, तेव्हां पहिल्या संख्येस दुस-

रीचें गुणित झणतात. गुणित आणि भाजक यांचा संबंध पुढें दाखविल्याप्रमाणें आहे; झणजे ४ हा २४ यांचा भाजक आहे, आणि २४ हें ४ चें गुणित आहे. ९६ हें ८, १२, २४, ४८, आणि यांखेरीज अनेक दुसऱ्या अंकांचें गुणित आहे. यामुळे ९६ यांस ८, १२, २४, ४८, इत्यादि यांचें साधारण गुणित झणतात. कोणतेहि दोन संख्यांचा गुणाकार त्या दोन संख्यांचें साधारण गुणित आहे हें स्पष्ट आहे. जसे, ३६×८ , अथवा २८८ हें ३६ आणि ८ यांचें साधारण गुणित आहे. परंतु २८८ पेक्षा लहान अर्सी, ३६ आणि ८ यांचीं साधारण गुणितें आहेत; आणि जेव्हां दोन परिमाणांचे साधारण गुणिताचें काम लागते, तेव्हां त्यांतून अति लहान गुणित घेतल्यानें सुलभ पडते, यासाठीं दोन संख्यांचें अति लहान गुणित* काढण्याची रीति दाखवितो.

१०३. उदाहरण, ३६ आणि ८ या दोन संख्या घे. यांचा दृ०-भा० काढ, झणजे तो ४ आहे, आणि पहा, कीं ३६ हे ९×४ , आणि ८ हे २×४ आहेत. तर ३६ आणि ८ यांस त्यांचे दृ० भाजकाने भागून त्यांचे भागाकार ९ आणि २ आहेत. हे दोन भागाकार परस्पर गुणून तो गुणाकार त्यांचे दृ० भा० ४ यांणीं गुण, झणजे $९ \times २ = ४$, अथवा ७२ होतात. तर, (५५) प्रमाणें ८, अथवा ४×२ यांचें गुणित ७२ आहे; आणि ३६ अथवा ४×९ यांचेंहि तेंच गुणित आहे. आणि ७२ हें ३६ आणि ८ यांचें लघुतम गुणित आहे; परंतु ही गोष्ट याजागीं सिद्ध करून दाखवितां येत नाहीं, कां कीं, अंकांचे जागीं अक्षरें कामांत आणण्याचा अधिक अभ्यासावांचून, याची सिद्धता पुरतेपणीं समजाव येणार नाही. वर सांगितलेल्या पक्षांत ७२ हें लघुतम साधारण गुणित आहे, यापेक्षां अधिक जाणण्याचें प्रयोजन नाही, आणि दुसऱ्या कोणत्याहि पक्षांत अति लहान साधारण गुणित असे कृतीनें काढितां येईल. हेंच अति लहान साधारण गुणित आहे, असें जाणाऱ्याचें केवळ अगत्य नाही. कां कीं, जेव्हां कोणतेहि साधारण गुणित कामांत आणण्याचें आहे, तेव्हां अति लहानाचा जागीं त्याचा सारिखें दुसरें कोणतेहि साधारण गुणित कामांत घेतां येईल. अति मोठ्ये संख्यांशीं काम करण्याचें चुकविण्यासाठीं मात्र दुसरें गुणित न घेतां, लघुतम गुणितास घेतात. लघुतम गुणितास लघुतम साधारण गुणाकारहि झणतात.

* अति लहान साधारण गुणित यास प्रसिद्ध चालीप्रमाणें लघुतम गुणित झणतात.

लघुतम साधारण गुणाकार त्यांचे गुणाकाराबरोबर आहे.

लघुतम साधारण गुणाकार काढण्याची रीति; दोन संख्यांचा लघुतम गुणाकार काढायासाठी, त्यांचा दृ० भा० काढ, नंतर त्यांतून एक संख्या या दृ० भाजकाने भागून, त्या भागाकाराने दुसऱ्या संख्येस गुण, ह्मजे तो गुणाकार लघुतम साधारण गुणाकार आहे. तीन संख्यांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढायासाठी, आरंभी पहिल्या दोन संख्यांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढ, नंतर तो लघुतम साधारण गुणाकार, आणि तिसरी संख्या यांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढ, आणि याप्रमाणे पुढेहि.

अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

सांगीतल्या संख्या.	लघुतम साधारण गुणाकार.
१४, २१	४२
१६, ५, २४	२४०
१, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, १०	२५२०
६, ८, ११, १६, २०	२६४०
८७६, ८६४	६३०७२
८६८, ८५४	५२९४८

अनेक संख्यांचा दृ० भा० सहज लक्षांत येतो, त्यावरून त्या संख्यांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढायास ही पुढील रीति सोईची आहे; दोन किंवा अधिक, असे साधारण भाजक जे केवळ १ याणे भागिले जातात ते घे, आणि ते वेगळाले भाजक स्थळीं मांड, आणि सांगीतल्या संख्यांतून प्रत्येक संख्येस त्या भाजकांतील एक किंवा अधिक भाजकाने भाग. ते वेगळाले भागाकार, आणि जा संख्या भागिल्या जात नाहीत त्या, त्यांचे त्यांचे खालीं मांड. नंतर खालीं घेतलेल्या अंकांशीं तसेच पुनः पुनः कर, जोंपर्यंत त्यांतून कोणत्याहि दोन अंकांस एका वाचून कोणताहि दृ० भा० नाही. नंतर लघुतम साधारण गुणाकार जाणायासाठी, सर्व वेगळाले भाजक आणि खालीं आलेले सर्व अंक पर-

ति
अं
तो
तो
ळ
य
स
क
य
व

धारण गुणाकार काढायाचा असे मनांत आण.

२, २, ३, ५, ७) ११ १२ १३ १४ १५ १६ १७ १८ २९ २० २१

११ १ १३ १ १ ४ १७ ३ १९ १ १

भातां खालचे ओळीचे संख्यांस १ वांचून दुसरा कांही दृ० भा०
नाहीं. तर $२ \times २ \times ३ \times ५ \times ७ \times ११ \times १३ \times ४ \times १७ \times ३ \times १९$, अथवा
 २३२७९२५६० हा लघुतम लाधारण गुणाकार आहे.

पांचवा भाग.

अपूर्णांक.

१०४. मनांत आण कीं ४९ यार्डीस ५ समभागांत भागाव-
याचें आहे, ह्मणजे, व्यवहारी बोलण्याप्रमाणें, ४९ यार्डींचा ५ वा भाग
काढायाचा आहे. जर ४९ यांस ५ यांणीं भागिलें, तर भागाकार
९ येतो, आणि वर ४ राहातात; ह्मणजे, (७२) प्रमाणें, ४९ यांत ५
वेळा ९ आणि ४ आहेत. ४९ यार्ड दाखविण्यासाठीं अब रेघ घे;

अ _____ ब

क _____ ऐ _____

ड _____ ख _____

इ _____ ल _____

फ _____ म _____

ग _____ न _____

ऐ ख ल म न

ह | | | | | | |

९ यार्ड लांबीचा अशा ५ रेघा, क, ड, इ, फ, आणि ग घे, आणि
४ यार्ड लांबीची दुसरी ह रेघ घे. तर जा पेक्षां ४९ हे ५ वेळा ९
आणि ४ आहेत, तर, क, ड, इ, फ, ग, आणि ह, या सर्व रेघा मिळून
अब रेघेचा बरोबर आहेत. ह रेघ ४ यार्डींची आहे, तीस ऐ, ख, ल,-

क, ड, इ, फ आणि ग, या रेषांचे बाजूस जोड. यावरून क, ड, इ, फ, ग, ऐ, ख, ल, म, न, या सर्व रेषामिळून अब, अथवा ४९ यार्डीचे बरोबर आहेत. आतां ड रेषा आणि ख रेषा मिळून, क रेषा आणि ऐ रेषा यांचे बरोबर आहेत, त्याचप्रमाणे इ रेषा आणि ल रेषा, फ रेषा आणि म रेषा, आणि ग रेषा आणि न रेषा, या निरनिराळ्या दोन दोन रेषा क रेषा आणि ऐ रेषा यांचे बरोबर आहेत. यामुळे, क आणि ऐ या दोन रेषा मिळून ५ वेळा घेतल्या असतां, ४९ यार्ड होतील; ह्मणजे, क आणि ऐ मिळून ४९ यार्डीचा पांचवा भाग आहे.

१०५. क ही रेषा कांहीं नियमित लांबीची आहे, ह्मणजे ९ यार्ड; परंतु ऐ रेषा नव्ये जातीचे परिमाण आहे, जें अद्यापी कधीहि आढळांत आलें नव्हतें. ही रेषा पूर्ण यार्ड लांबीची नाहीं, कां कीं ४ यार्डीस ५ समभागांत विभागून, खांतून १ भाग घेतल्यानें ती रेषा उत्पन्न होती. ती रेषा ४ यार्डीचा पांचवा भाग आहे. तीस यार्डीचा अपूर्णाक किंवा अंश ह्मणतात. (२३) प्रमाणें यास $\frac{१}{५}$ याप्रमाणें मांडितात, आणि ४९ यार्डीचा पांचवा भाग पूर्ण करायासाठीं ९ यार्डीस $\frac{१}{५}$ हे मिळवावे लागतात.

धान्याचे ४९ मण, अथवा जमिनीचे ४९ एकर, यास ५ समभागांत भागायास वरची कल्पना लागू होईल. पहिल्याचा पांचवा भाग, ९ मण आणि ४ मणांचा पांचवा भाग याबरोबर होईल; आणि दुसऱ्याचा पांचवा भाग ९ एकर आणि ४ एकरांचा पांचवा भाग यांचा बरोबर होईल.

सर्वांविषयीं याप्रमाणें ह्मटलें पाहिजे, कीं ४९ चा पांचवा भाग, ९ आणि $\frac{१}{५}$, अथवा $९ + \frac{१}{५}$ आहे; यास $९\frac{१}{५}$ या रितीनें मांडितात, अथवा चिन्हें कामांत घेतलीं असतां, $\frac{४९}{५} = ९\frac{४}{५}$ असें लिहितात.

अभ्यासासाठीं उदाहरणें.

१२३७ यांचा सत्रावा भाग काय आहे? उत्तर. $७२\frac{१३}{१७}$
 $\frac{१००३२}{१९७४}$, $\frac{६६३८१९}{२३७१०}$, आणि $\frac{२२७७३३९९}{२४२४}$ हे काय आहेत?
 उत्तर. $\frac{१६२}{१९७४}$, $\frac{२३६४९}{२३७१०}$, $\frac{२३४३}{२४२४}$

१०६. अपूर्णाक या शब्दाचा अर्थ कांहीं संख्येचा भाग आहे असें समजावें, अथवा जा समभागांत एकादि संख्या विभागली आहे त्या समभागांतील कांहीं भागांची बेरीज आहे असें समजावें. जसें,

संग्रह होतो; उदाहरण, १७ हे $\frac{17}{3}$, $\frac{34}{2}$, $\frac{51}{1}$, इ० आहेत.

अपूर्णांकांतील वरचा अंकास अंश ह्मणतात, आणि खालचा अंकास छेद ह्मणतात, आणि या दोहोंस अपूर्णाकाचीं पदें ह्मणतात. जेव्हां अंश छेदापेक्षां कमी असतो, तेव्हां अपूर्णांक एकापेक्षां कमी आहे; जसें, $\frac{6}{10}$ हा एकापेक्षां कमी आहे; कां कीं ६ हे १० समभागांत भागिले असतां प्रत्येक भाग १ चे बरोबर आहे, आणि त्यांस १० भागांत भागिलें असतां प्रत्येक १ पेक्षां अगत्य कमी असावा. यासारखें, जेव्हां अंश आणि छेद बरोबर आहेत तेव्हां अपूर्णांक एकाचे बरोबर आहे; आणि जेव्हां अंश, छेदापेक्षां अधिक आहे तेव्हां अपूर्णांक एकापेक्षां अधिक आहे.

१०७. $\frac{2}{3}$ याचा अर्थ २ चा तिसरा भाग आहे असें जाणावें. हे आणि १ चा तिसऱ्या भागाची दुप्पट हीं दोन्हीं सारखींच आहेत.

हे सिद्ध करून दाखविण्यासाठीं, दोन यार्ड लांबीची अब रेघ कर, आणि त्यांतील अक आणि कब या प्रत्येक यार्डास तीन समभागांत भाग.

अ ड ई क फ ग ब

तर अइ, इफ आणि फब परस्परांशीं बरोबर असतां २ चा तिसरा भाग अइ आहे. यामुळे तो $\frac{2}{3}$ आहे. परंतु अइ रेघ अड रेघेचे दुप्पट आहे, आणि अड रेघ एक यार्डाचा तिसरा भाग अथवा $\frac{1}{3}$ आहे. यामुळे $\frac{2}{3}$ हे $\frac{1}{3}$ चे दुप्पट आहेत; ह्मणजे, अब रेघेची $\frac{2}{3}$ लांबी काढा-यासाठीं, दोन यार्ड एकदांच तीन समभागांत भागून त्यांतून एक भाग घेतला, अथवा एक यार्ड तीन समभागांत भागून, त्यांतून दोन भाग घेतले, तरी कांहीं फेर होत नाही. त्याच कल्पनेवरून $\frac{5}{8}$ हा अपूर्णांक, ५ हे ८ भागांत भागून त्यांतून एक घेतल्यानें, अथवा १ कास ८ भागांत भागून, त्यांतून ५ भाग घेतल्यानें काढितां येईल. या दोनहि रिती सारख्याच आहेत, यामुळे त्यांतून जी रीति समयास सोईस पडेल, तीच या पुढें घेऊं. हे मूळ कारण या पुढीलप्रमाणें आहे; कोणतेहि संख्येचा तिसरा भाग काढण्यासाठीं, त्या संख्येंत जितके एक असतील,

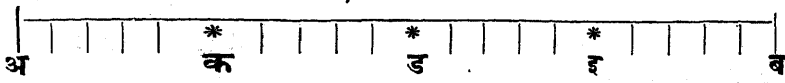
* ५, ७, १००, इत्यादि जात एकमाचो बरोबर संख्या आहे, त्यांस पूर्णांक ह्मणतात, तेणेंकरून ते अपूर्णाकांपासून भिन्न आहेत अस दाखविता येतें—

जस, २चा अथवा २ एकमाचा तिसरा भाग, त्यांतील प्रत्येक एकमाच तिसऱ्या भागांची बेरीज घेतल्याने निघतो, ह्मणजे,

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2.$$

जेव्हां अंश, छेदांपेक्षा अधिक असतात, तेव्हां वरचा गोष्टीपासून संशय उत्पन्न होईल; जसे, $\frac{14}{9}$ याचा अर्थ असा होईल, कीं १ यास ७ समभागांत भागून त्यांतून १५ भाग घेण्याचे आहेत असे वाटेल. परंतु या पक्षां एकमाची संख्या असी घ्यावी, कीं त्यांतून प्रत्येक एक ७ भागांत भागिला असतां, सर्व भागांची संख्या १५ पेक्षा अधिक होईल, आणि नंतर त्या भागांतून १५ भाग घेतले असतां अपूर्णाक उत्पन्न होतो.

१०८. अपूर्णाकाचे अंश आणि छेद एकाच परिमाणानें गुणिले असतां अपूर्णाकाची किंमत बदलत नाहीं. $\frac{3}{8}$ हा अपूर्णाक घे, त्याचे अंश आणि छेद ५ यांणीं गुणिल्यानें $\frac{15}{40}$ होतात, हा अपूर्णाक आणि $\frac{3}{8}$ हे दोन्ही एकच आहेत; ह्मणजे, पंधरा यार्डांचा विसावा भाग आणि तीन यार्डांचा चवथा भाग हे एकच आहेत; अथवा, अपूर्णाक या शब्दाचा वर सांगितलेल्या दोन अर्थांतून दुसरा अर्थ कामांत घेतला तर, एक यार्ड २० भागांत भागून त्यांतून १५ घेतले, आणि एक यार्ड ४ भागांत भागून त्यांतून तीन घेतले, तरी लांबी सारखीच येईल. ही गोष्ट याप्रमाणें सिद्ध होती,



एक यार्ड दाखविण्यासाठीं अब रेघ कर; तीस अक, कड, डइ, आणि इब, अशा ४ समभागांत भाग, नंतर त्यांतील प्रत्येक भाग ५ समभागांत भाग. यावरून दिसते कीं अइ रेघ $\frac{3}{8}$ आहे. परंतु पुनः लहान भाग केल्यानें अब रेघ २० भागांत भागिली आहे, त्यांतील १५ भाग अइ रेघेंत येतात. तर ती अइ रेघ $\frac{15}{40}$ आहे. यामुळे $\frac{15}{40}$ आणि $\frac{3}{8}$ हे एकच आहेत.

पुनः $\frac{14}{9}$ याचे अंश आणि छेद ५ यांणीं भागून $\frac{3}{8}$ होतात, यामुळे अपूर्णाकाचे अंश आणि छेद एकच परिमाणानें भागिले असतां, त्याची किंमत बदलत नाहीं. हें मूल कारण अंकगणितांत सर्वत्र फार उपयोगी पडते, आणि व्यवहारी बोलण्यांतहि तें फार येते, कां कीं २१

णतात.

१०९. $\frac{3}{8}$ आणि $\frac{15}{20}$ या दोन अपूर्णाकांची किंमत जरी बरोबर आहे, आणि त्यांतून कोणताहि एक दुसऱ्याचे जागीं चुकीवांचून कामांत घेतां येईल, तथापि दुसऱ्यापेक्षां पहिला कामांत आणायस सोईस पडतें, कां कीं १५ यार्डांचा २० वा भाग यापासून जो बोध होतो, त्यापेक्षां तीन यार्डांचा चवथा भाग यापासून अधिक बोध होतो, ह्मणून तो केवळ सोईचा आहे इतकेंच नाही, परंतु पहिल्या अपूर्णाकाचे अंक फार लहान आहेत, ह्मणून गुणाकार आणि भागाकार करायास सुलभ पडतें, या कारणावरून तो अपूर्णाक फार करून घेतात. याजकरितां जेव्हां काहीं अपूर्णाक सांगितला आहे, त्याचे अंश आणि छेद यांस काहीं साधारण भाजक किंवा दृढभाजक आहे कीं नाही हें पहावें. (९८) वे कलमांत कोणतेहि दोन संख्यांचा दृढभाजक काढण्याची रीति सांगितली, आणि असें दाखविलें आहे, कीं जर कोणत्याहि दोन संख्या त्यांचे दृढभाजकानें भागिल्या, तर त्यांचा भागाकारास १ शिवाय दुसरा कोणताहि दृढभाजक नाही. अपूर्णाकाचा पदांचा दृढभाजक काढून त्याणें तीं पदे भाग, तर असें केल्यानें त्या अपूर्णाकाचें अतिसंक्षेपरूप झालें असें ह्मणतात, आणि त्याचे या रूपानें त्याचे किंमतीचा बोध चांगला होतो.

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

या प्रत्येक अपूर्णाकापुढे त्याचे अतिसंक्षेपरूप लिहिलें आहे.

$$\frac{2798}{2929} = \frac{22 \times 127}{23 \times 127} = \frac{22}{23}$$

$$\frac{2766}{8920} = \frac{96 \times 148}{30 \times 148} = \frac{96}{30}$$

$$\frac{93206}{13966} = \frac{968 \times 122}{113 \times 122} = \frac{968}{113}$$

$$\frac{66600}{8034800} = \frac{22 \times 80800}{299 \times 80800} = \frac{22}{299}$$

$$\frac{84888}{314008} = \frac{121 \times 702}{848 \times 702} = \frac{121}{848}$$

११०. अपूर्णाकांची पद गुण्य गुणकरूपाने सांगितलली असतात, तेव्हां अंशांतील एक गुण्यगुणक आणि छेदांतील एक गुण्यगुणक, हे एका अंकाने भागिता येतील तर त्यांस त्या अंकाने भागावे. ही गोष्ट (८८) आणि (१०८) कलमांपासून उत्पन्न होती. पुढील उदाहरणांत जे अंक भागाकाराने बदलतात, त्यांवर स्वर चिन्हे केली आहेत.

$$\frac{१२ \times ११ \times १०}{२ \times ३ \times ४} = \frac{३ \times ११ \times १०}{२ \times ३ \times १} = \frac{१ \times ११ \times ५}{१ \times १ \times १} = ५५.$$

$$\frac{१८ \times १५ \times १३}{२० \times ५४ \times ५२} = \frac{२ \times ३ \times १}{४ \times ६ \times ४} = \frac{१ \times १ \times १}{२ \times २ \times ४} = \frac{१}{१६}.$$

$$\frac{२७ \times २८}{९ \times ७०} = \frac{३ \times ४}{१ \times १०} = \frac{३ \times २}{१ \times ५} = \frac{५}{६}.$$

१११. (१०८) प्रमाणे किंमत बदलल्यावांचून, कोणत्याहि अपूर्णाकाचे अंश आणि छेद कोणत्याहि संख्येने गुणिता येतात, यावरून दोन अपूर्णाकांस दुसऱ्या दोन अपूर्णाकांचे रूप देता येते, असे की दुसऱ्यांची किंमत पहिल्यांचे बरोबर असून, त्यांचे छेद सारखेच होतील. उदाहरण, $\frac{२}{३}$ आणि $\frac{४}{६}$; $\frac{२}{३}$ याची दोन्ही पदे ७ यांनी गुण, आणि $\frac{४}{६}$ याची दोन्ही पदे ३ यांनी, गुण यावरून असे दिसते, की

$$\frac{२}{३} \text{ हे } \frac{२ \times ७}{३ \times ७} \text{ अथवा } \frac{१४}{२१} \text{ आहेत.}$$

$$\frac{४}{६} \text{ हे } \frac{४ \times ३}{६ \times ३} \text{ अथवा } \frac{१२}{२१} \text{ आहेत.}$$

एथे तर $\frac{१४}{२१}$ आणि $\frac{१२}{२१}$ असे दोन अपूर्णाक आहेत, आणि त्यांचे छेद २१ सारखेच असून, त्यांची किंमत $\frac{२}{३}$ आणि $\frac{४}{६}$ यांचे बरोबर आहे; या पक्षांत $\frac{२}{३}$ आणि $\frac{४}{६}$ हे समछेद झाले असे ह्मणतात.

$\frac{१}{१०}$, $\frac{२}{६}$ आणि $\frac{९}{६}$ हे समछेद करावयाचे आहेत असे मनांत आण. पहिल्या अपूर्णाकाची दोन्ही पदे ६ आणि ९ यांचे गुणाकाराने गुण; दुसऱ्याची १० आणि ९ यांचे गुणाकाराने गुण; आणि तिसऱ्याची १० आणि ६ यांचे गुणाकाराने गुण. तेव्हां (१०८) प्रमाणे असे दिसते की

* जी संख्या दुसऱ्या संख्येस निःशेष भागिता, तीस दुसरीचा गुण्य किंवा गुणक ह्मणतात; असे ४, ६, ८, हे २४ चे गुण्य किंवा गुणक आहेत, आणि ६×४, ८×३, २×२×२×३, आणि दुसऱ्या कित्येक तऱ्हांनी २४ चे गुण्य गुणकांत पृथक्करण होते.

$$\frac{5}{8} \text{ हे } \frac{5 \times 10 \times 9}{8 \times 10 \times 9} \text{ अथवा } \frac{450}{480} \text{ आहेत,}$$

$$\frac{9}{8} \text{ हे } \frac{9 \times 10 \times 6}{8 \times 10 \times 6} \text{ अथवा } \frac{420}{480} \text{ आहेत,}$$

शेवटींचे अपूर्णाक पाहून, असे दिसते कीं त्यांचे सर्व अंश आणि समछेद, ६ यांणीं भागिले जातात, आणि (१०८) प्रमाणें भागिल्यानें त्यांची किंमत बदलत नाहीं. $\frac{45}{480}, \frac{450}{480}$ आणि $\frac{420}{480}$ यांचे अंश आणि छेद ६ यांणीं भागून $\frac{15}{160}, \frac{150}{160}$ आणि $\frac{140}{160}$ असे अपूर्णाक येतात. हे समछेद अपूर्णाक आहेत, आणि $\frac{15}{160}, \frac{150}{160}$ आणि $\frac{140}{160}$ यांसारखेच आहेत, आणि यामुळे ते पहिल्या अपूर्णाकापेक्षा सरळ आहेत. आणखी पहा कीं ५४० हे १०, ६, ९, अथवा $१० \times ६ \times ९$ यांचें, एक साधारण गुणित आहे, परंतु (१०३) प्रमाणें १०, ६, आणि ९ यांचें लघुतम साधारण गुणित ९० आहे. यामुळे, ही पुढील कृति वरचे कृतिपेक्षा बरी आहे. $\frac{15}{160}, \frac{150}{160}$ आणि $\frac{140}{160}$ यांची किंमत बदलल्यावांचून समछेद करायासाठीं, पहिल्यानें, (१०३) कलमाचे रितीप्रमाणें, १०, ६, ९, यांचें लघुतम साधारण गुणित काढ, ते ९० आहे. पहा कीं ९० यांत १०, ६, आणि ९, हे वेगवेगळे ९, १५, आणि १० वेळा जातात. तर पहिल्या अपूर्णाकाचीं दोन्ही पदे ९ नीं गुण, दुसऱ्याचीं १५ नीं गुण, आणि तिसऱ्याचीं १० नीं गुण, ह्मणजे $\frac{9}{90}, \frac{15}{90}, \frac{10}{90}$ असे अपूर्णाक पूर्वीप्रमाणेंच येतात.

सांगितलेल्या अंकांत कदाचित् पूर्णाक असला, तर त्यास अपूर्णाकाचें रूप देतां येऊन, दुसऱ्याशीं समछेद (१०६) कलमाचे रितीप्रमाणें करितां येईल.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

सांगितले अपूर्णाक

समछेद झालेले.

$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{20}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{5}{30}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{20}{24}$	$\frac{24}{24}$	$\frac{16}{24}$
$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{1}{1000}$		$\frac{3000}{10000}$	$\frac{4000}{10000}$	$\frac{40}{10000}$
$\frac{33}{339}$	$\frac{261}{800}$			$\frac{22341}{248463}$	$\frac{106499}{248463}$	

११२. दोन अपूर्णाकांस समछेद कल्यान, त्यास ताडून पहातां येतें; ह्यणजे, दोहोंतून कोणता मोठा आणि कोणता लहान हें सांगतां येतें. उदाहरण, $\frac{1}{2}$ आणि $\frac{9}{14}$ घे. यांची किंमत न बदलतां समछेद करून, $\frac{14}{30}$ आणि $\frac{18}{30}$ निघतात. यांतून पहिला अगळ मोठा असावा, कां कीं (१०७) प्रमाणें एकांस ३० समभागांत भागिल्यानें, आणि यांतून १५ घेतल्यानें तो अपूर्णाक होतो, परंतु त्याच समभागांतून १४ घेतल्यानें मात्र दुसरा होतो.

दोन अपूर्णाकांस समछेद असले तर जास मोठा अंश आहे तो यांतून मोठा आहे; आणि जा दोन अपूर्णाकांस सारखेच अंश असतील, त्यांतील जास लहान छेद आहे तो मोठा हें स्पष्ट आहे. जसें $\frac{2}{3}$ पेशां $\frac{1}{2}$ मोठे आहेत, कां कीं पहिला ८ चा १ नवमांश, आणि दुसरा ८ चा १ सप्तमांश आहे. पुनः, छेद हवा तेवढा वाढविल्यानें, कोणताहि अंश हवातेवढा लहान अपूर्णाकाचा आहे असें करितां येईल. जसें, (१०८) प्रमाणें $\frac{100}{1000}$ हे $\frac{1}{10}$ आहेत, $\frac{100}{10000}$ हे $\frac{1}{100}$ आहेत, आणि $\frac{100}{10000000}$ हे $\frac{1}{10000000}$ आहेत.

आतां, $\frac{1}{2}$ यास $\frac{10}{14}$ मिळवितां येतील किंवा यांतून वजा करितां येतील. कां कीं पहिला अपूर्णाक हा, १ याचे ३० समभागांतील १५ भाग आहेत. दुसरा अपूर्णाक त्या समभागांतील १४ भाग आहेत. यामुळे त्या दोहोंची बेरीज १५+१४, अथवा त्या समभागांतून २९ भाग अगळ असावी; ह्यणजे, $\frac{1}{2} + \frac{9}{14}$ हे $\frac{29}{30}$ आहेत. त्या दोहोंची वजाबाकी १५-१४, अथवा त्या समभागांतून १ भाग अगळ असावी; ह्यणजे, $\frac{1}{2} - \frac{9}{14} = \frac{1}{30}$.

११३. मागील दोन कलमांपासून या पुढील रिती निघतात ;

पहिल्यानें. अपूर्णाकांस ताडून पहायासाठीं, त्यांची बेरीज, किंवा वजाबाकी करायासाठीं, पहिल्यानें त्यांस समछेद कर. असें केल्यानंतर जास मोठा अंश आहे, तोच त्यांतील मोठा अपूर्णाक आहे.

त्या दोन अपूर्णाकांचे बेरिजेचा अंश, त्या दोन अपूर्णाकांचे अंशांची बेरीज आहे, आणि समछेद त्या बेरिजेचा छेद आहे.

त्यांचे वजाबाकीचा अंश त्यांचे अंशांचे वजाबाकी बरोबर आहे, आणि समछेद त्यांचे वजाबाकीचा छेद आहे.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{43}{60}$$

$$\frac{88}{3} - \frac{143}{829} = \frac{10329}{1209}$$

$$1 + \frac{6}{90} + \frac{3}{100} + \frac{8}{1000} = \frac{1038}{1000}$$

$$2 - \frac{1}{6} + \frac{12}{13} = \frac{243}{19}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{6}{16} + \frac{98}{100} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{163}{529} - \frac{99}{209} = \frac{93066}{849009}$$

११४. मनांत आण, कीं एक पूर्णांक अपूर्णाकासीं मिळवायाचा आहे, जसें ६ हे $\frac{4}{5}$ यांस मिळवायाचे आहेत. (१०६) प्रमाणें ६ हे $\frac{4}{5}$ आहेत, आणि $\frac{4}{5} + \frac{4}{5}$ हे $\frac{8}{5}$ आहेत; म्हणजे, ६ + $\frac{4}{5}$, अथवा मांडण्याचे चालीप्रमाणें ६ $\frac{4}{5}$, हे $\frac{34}{5}$ आहेत, या पक्षांत रीति हीच आहे; पूर्णाकास अपूर्णाकाचे छेदानीं गुण, आणि त्या गुणाकारास अपूर्णाकाचे अंश मिळीव; ही बेरीज उत्तराचे अंश होतील, आणि अपूर्णाकाचे छेद उत्तराचे छेद होतील. जसें, $3\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$, $2\frac{2}{8} = \frac{20}{8}$, $78\frac{2}{44} = \frac{4092}{44}$. ही रीति (१०५) कलमांतील रितीचे उलटी आहे.

११५. मागील रितीपासून असें दिसते कीं $1923\frac{209}{10000}$ हे $\frac{19230909}{10000}$ आहेत, $66\frac{224}{1000}$ हे $\frac{669224}{1000}$ आहेत, आणि $23\frac{98}{1000000}$ हे $\frac{2300098}{1000000}$ आहेत. यावरून जेव्हां कोणताहि पूर्णांक अशे अपूर्णाकास मिळवायाचा आहे, कीं जाचें छेदस्थळीं १ आणि त्यावर कांहीं शून्ये येतात, आणि त्या शून्यांची संख्या त्या अपूर्णाकाचे अंशांतील अंकांचे संख्येपेक्षां कमी नाहीं, तर या पुढील रितीनें कर; पहिल्यानें पूर्णांक मांड, नंतर त्याचे उजव्येकडेस अपूर्णाकाचे अंश मांड, आणि अंशांतील अंक संख्येपेक्षां जितकी छेदांतील शून्यांची संख्या अधिक असेल, ति-तकी शून्ये त्या दोहों अंकांचे मध्ये मांड. असें केल्यानें उत्तराचा अंश निघतो, आणि अपूर्णाकाचा जो छेद तोच त्या उत्तराचा छेद आहे. जर छेदस्थळांतील शून्यांची संख्या अंश स्थळांतील अंक संख्येचे बरो-बर असेल, तर पूर्णांक आणि अपूर्णाकाचा अंशाचे अंक यांमध्ये कां-ही शून्ये मांडू नको.

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

$\frac{23909}{1000000}$ $24\frac{6}{10}$, $1209\frac{299}{100000000}$, आणि $23\frac{2210}{1000000}$ या मि-श्रसंख्यांस अपूर्णाकांचे रूप दे.

११६. मनांत आण, कीं $\frac{2}{3}$ यांस ४ नीं गुणायाचे आहे. (४८)

(११२) प्रमाणे यांची बेरीज $\frac{६}{३}$ आहे ; यावरून अपूर्णाकास पूर्णाकाने गुणायाची रीति हीच कीः अपूर्णाकाचे अंश पूर्णाकाने गुण, आणि त्याचे छेद तसेच राहूंदे.

११७. पूर्णाकाने अपूर्णाक गुणायाचा असल्यास, त्या पूर्णाकाने जर अपूर्णाकाचे छेद निःशेष भागिले जातात, तर या पुढीलप्रमाणे रीति आहे. अपूर्णाकाचे छेद पूर्णाकाने भाग, आणि त्याचे अंश तसेच राहूंदे. उदाहरण, $\frac{७}{३६}$ यांस ६ नीं गुणायाचे आहे. तर (११६) प्रमाणे $\frac{७}{३६} \times ६ = \frac{७}{६}$ आहेत, यांत अंश आणि छेद ६ यांनी भागिले जातात, तर (१०८) प्रमाणे ते आणि $\frac{७}{६}$ हे बरोबरच आहेत. तर स्पष्ट होते, कीं वर सांगितलेल्या रीतिप्रमाणे $\frac{७}{३६}$ यापासून $\frac{७}{६}$ हे उत्पन्न होतात.

११८. दुसऱ्या संख्येत जितके एक आहेत, तितक्या वेळा कांहीं संख्या घेणे ही गुणाकार कृति आहे असे पूर्वी दाखविले. जसे १२ यांस ७ नीं गुणायाचे, ह्मणजे ७ यांत जितके एक आहेत तितक्या वेळा १२ घेणे आहेत, अथवा ७ होण्याकरितां जितक्यावेळा १ घ्यावा लागतो, तितक्या वेळा १२ घेण्याचे आहेत. जसे, ७ होण्याकरितां १ या अंकाशी जी कृती करावी लागती तीच कृती ७ वेळा १२ होण्याकरितां १२ या अंकाशी केली पाहिजे. उदाहरण,

७ हे १+१+१+१+१+१+१.

७ वेळा १२ हे १२+१२+१२+१२+१२+१२+१२.

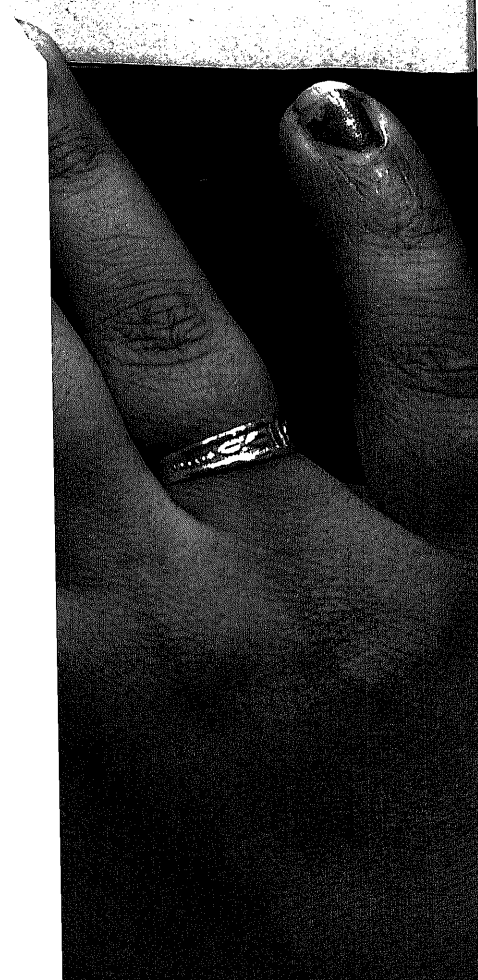
दोन अपूर्णाकांशी अशीच कृति केली, तरी फळास गुणाकार ह्मणतात, आणि या कृतीसहि गुणाकार ह्मणतात. यांत इतकाच भेद, कीं पूर्णाक करायासाठीं १ कांहीं वेळा घ्यावा लागतो, परंतु अपूर्णाक करायासाठीं १ यास कांहीं समभागांत भागून त्यांतील एक समभागास तोच भाग कांहीं वेळा मिळावा लागतो. गुणाकार या शब्दाचा वर सांगितलेला अर्थ अपूर्णाकास लाविला असतां, $\frac{३}{४}$ यांस $\frac{७}{८}$ ने गुणिले तर काय होते ? $\frac{७}{८}$ हे करायासाठीं जें काम १ शी केले तेंच काम $\frac{३}{४}$ यांशी केले पाहिजे; परंतु $\frac{७}{८}$ करायासाठीं, १ यास आठ समभागांत भागून, त्यांतून ७ घेतले आहेत. यामुळे, $\frac{३}{४} \times \frac{७}{८}$ हे करायासाठीं, $\frac{३}{४}$ यांस आठ समभागांत भागून, त्यांतून ७ घेतले पाहिजेत. आतां (१०८) प्रमाणे $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{७}{८}$ सारखेच आहेत. $\frac{२१}{३२}$ हे करायास १ हा ३२ समभागांत,

घेतले, तर $\frac{10}{9}$ उत्पन्न होतील. यामुळे, (१०८) प्रमाण, $\frac{10}{9}$ किंवा $\frac{20}{9}$ यांस उत्पन्न करायासाठी $\frac{12}{9}$ किंवा $\frac{4}{3}$ यांस १२ समभागांत भागून, त्यांतून १० घेतले पाहिजेत; ह्मणजे, $\frac{10}{9}$ हा भागाकार आहे. जर पूर्वीप्रमाणे $\frac{2}{3}$ यांस भाज्य, आणि $\frac{4}{3}$ यांस भाजक ह्मणतात, तर या पक्षांत भागाकार या पुढील रितीपासून निघतो, आणि लक्षांत येईल, कीं ही कल्पना सर्व दुसऱ्या पक्षांसहि लागू होईल:

भाज्याचा अंश गुणिला भाजकाचा छेद, याचे बरोबर भागाकाराचा अंश आहे. आणि भाज्याचा छेद गुणिला भाजकाचा अंश, याचे बरोबर भागाकाराचा छेद आहे. या दोन्ही पक्षांत काय उत्तर यावे हे ताडून पाहिल्याने ही रीति गुणाकाराचे रितीची उलट आहे हे लक्षांत येईल. $\frac{4}{3}$ यांस $\frac{10}{9}$ यांनी गुणायचे, तर या पुढील प्रमाणे प्रश्न होतो, जर $\frac{4}{3}$ यांचे १२ भाग करून, त्यांतून १० भाग घेतले, तर एकमात्रा किती भाग घेतला आहे! याचे उत्तर $\frac{40}{36}$, किंवा $\frac{10}{9}$ आहे. पुनः, $\frac{2}{3}$ यांस $\frac{4}{3}$ यांनी भागणे, तर या पुढीलप्रमाणे प्रश्न होतो, $\frac{2}{3}$ हे $\frac{4}{3}$ यांचा कोणता भाग आहे! याचे उत्तर $\frac{10}{12}$.

१२२. ही रीति केव्हां केव्हां सुलभ करितां येईल, असे या पुढील उदाहरणापासून समजेल. $\frac{16}{33}$ यांस $\frac{26}{11}$ यांनी भाग. पहा कीं १६ हे 8×8 आहेत, आणि २८ हे 8×7 आहेत; ३३ हे 3×11 आहेत, आणि १९ हे 3×7 आहेत; यामुळे ते दोन अपूर्णाक $\frac{8 \times 8}{3 \times 11}$ आणि $\frac{8 \times 7}{3 \times 11}$ या प्रमाणे आहेत, आणि रितीप्रमाणे त्यांचा भागाकार $\frac{8 \times 8 \times 3 \times 11}{3 \times 11 \times 8 \times 7}$ आहे, अंश आणि छेद या दोहोंतहि 3×8 आहेत. यावरून (१०८) प्रमाणे तो अपूर्णाक $\frac{8 \times 8}{11 \times 7}$ अथवा $\frac{80}{77}$ यांचे बरोबर आहे. यावरून वरचे कलमातील रितीत या पुढीलप्रमाणे फेर करिता येतो; दोन अंश अथवा दोन छेद यांस जर साधारण भाजक असेल, तर त्यांचे ते भागून भाज्यांचे स्थळी भागाकार कामांत घ्यावे.

१२३. अपूर्णाकास पूर्णाकानें भागते समयी, जसे, $\frac{2}{3}$ यांस १५ नीं भागते समयी, १५ हे $\frac{15}{3}$ याप्रमाणे अपूर्णाक आहेत असे जाणावे. ह्मणजे रितीप्रमाणे $\frac{2}{3}$ हा भागाकार येतो. यावरून अपूर्णाकास पूर्णाकानें भागायाचे असेल, तर अपूर्णाकाचे छेदास पूर्णाकानें गुणावे.



भाज्य.

$$\frac{४१}{३३}$$

$$\frac{४६७}{१५१}$$

$$\frac{७८१३}{५०७१}$$

भाजक.

$$\frac{६३}{११}$$

$$\frac{९०७}{१०१}$$

$$\frac{६०१}{११}$$

भागाकार.

$$\frac{४१}{१०९}$$

$$\frac{४७१६७}{१३६९५७}$$

$$\frac{१३}{४६१}$$

$$\frac{\frac{१}{५} \times \frac{१}{५} \times \frac{१}{५} \times \frac{२}{१७} \times \frac{२}{१७} \times \frac{२}{१७}}{\frac{१}{५} - \frac{२}{१७}}, \text{ आणि } \frac{\frac{६}{११} \times \frac{६}{११} - \frac{३}{११} \times \frac{३}{११}}{\frac{६}{११} - \frac{३}{११}}, \text{ यांचा किंमती काय?}$$

उत्तरे, $\frac{५५९}{७२२५}$, आणि १.

कोणी पुरुष अ, एक शेत १२ दिवसांत कापितो, तेच शेत ब, ६ दिवसांत कापितो, आणि क, तेच शेत ४ दिवसांत कापितो; तर ते सगळे मिळून ते शेत किती दिवसांत कापतील?† उत्तर, २ दिवसांत.

एक टाक्यास ४ नळ आहेत, आणि ते प्रत्येक निरनिराळे सोडिले असतां १२, ११, १०, आणि ९ तासांत ते टाके भरितात, तर ते सगळे एकदांच सोडिले असतां किती काळांत भरतील? उत्तर, $२ \frac{४५४}{७६३}$ तास.

१२४. या अध्यायांतील मुख्य परिणाम बीजगणितानें या पुढीलप्रमाणें दाखवितां येईल; अ, ब, क, इत्यादि कोणत्याहि पूर्णांकांचे स्थळीं घेतले आहेत असे मनांत आण. तर

(१०७) प्रमाणें $\frac{अ}{ब} = \frac{१}{ब} \times अ$

(१०८) प्रमाणें $\frac{अ}{ब} = \frac{मअ}{मब}$

(१११) प्रमाणें $\frac{अ}{ब}$ आणि $\frac{क}{ड}$ हे - - - $\frac{अड}{बड}$ आणि $\frac{बक}{बड}$ याप्रमाणें आहेत

(११२) प्रमाणें $\frac{अ}{क} + \frac{ब}{क} = \frac{अ+ब}{क}$ $\frac{अ}{क} - \frac{ब}{क} = \frac{अ-ब}{क}$

(११३) प्रमाणें $\frac{अ}{ब} + \frac{क}{ड} = \frac{अड+बक}{बड}$ $\frac{अ}{ब} - \frac{क}{ड} = \frac{अड-बक}{बड}$

† हे आणि पुढील उदाहरणें करण्याची रीति याप्रमाणें आहे; प्रत्येक मनुष्य जितके दिवसांत शेत कापितो त्या दिवसांची संख्या जर दिली आहे, तर प्रत्येक मनुष्य त्या शेताचा किती भाग एक दिवसांत कापिल हें काढितां येईल, आणि त्यावरून सगळे मिळून एक दिवसांत किती कापतील हें कळेल; नंतर, तें सर्व काम करण्यास त्या सर्व मनुष्यांस किती दिवस लागतील हें काढितां येईल.



$$\text{अथवा } \frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{अउ}}{\text{कउ}}$$

१२५. जरीं अक्षरें अपूर्णाकांचे जागीं घेतलीं तरी, हीं वरचीं उत्तरे खरीं आहेत. उदाहरण, $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ हा अपूर्णांक घे, याचे अंश आणि छेद

अपूर्णांक आहेत, आणि यांस $\frac{\text{ह}}{\text{क}}$ या अपूर्णाकानें गुण, त्यापासून $\frac{\text{अउ}}{\text{कउ}}$ असें होतें, हें (१२१) प्रमाणें $\frac{\text{अउउक}}{\text{कककह}}$ आहे, याचे अंश आणि छेद यांस (१०८) प्रमाणें इफ यांणीं भागिलें असतां, $\frac{\text{अउ}}{\text{क}}$ होतो. परंतु मुळचा

अपूर्णांक $\frac{\text{अउ}}{\text{क}}$ आहे; यावरून $\frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{अ} \times \frac{\text{ह}}{\text{क}}}{\text{क} \times \frac{\text{ह}}{\text{क}}}$ हें (१२४) कलमांतील दु-

सऱ्या सारणीसीं मिळतें आहे. याचप्रमाणें जेव्हां अक्षरें अपूर्णाकांचे ठिकाणीं घेतलीं आहेत, अथवा तीं काढून त्यांचे जागीं अपूर्णांक मांडिले आहेत, तेव्हां (१२४) कलमांतील बाकीचा दुसऱ्या सारणी खऱ्या आहेत असें दाखवितां येईल. जा सर्व सारणी या पुस्तकांत सिद्ध केल्या आहेत, त्या जेव्हां पूर्णाकांचे ठिकाणीं अपूर्णांक लिहितात, तेव्हांहि तशाच खऱ्या आहेत. उदाहरण, (५४) कलमांत,

(म+न)अ=मअ+नअ. आतां म, न, आणि अ, हे अनुक्रमानें $\frac{\text{प}}{\text{क}}$, $\frac{\text{र}}{\text{स}}$, आणि $\frac{\text{व}}{\text{क}}$ याप्रमाणें अपूर्णांक आहेत असें मनांत आण. तर म+न, हे $\frac{\text{प}}{\text{क}} + \frac{\text{र}}{\text{स}}$, अथवा $\frac{\text{पस+रक}}{\text{कस}}$ आहेत, आणि (म+न)अ, हे $\frac{\text{पस+रक}}{\text{कस}} \times \frac{\text{व}}{\text{क}}$, अथवा $\frac{\text{पस+रकव}}{\text{कसक}}$ अथवा $\frac{\text{पसन+करव}}{\text{कसक}}$ आहेत. परंतु हे (११२) प्रमाणें $\frac{\text{पसन}}{\text{कसक}} + \frac{\text{करव}}{\text{कसक}}$ आहेत, हे $\frac{\text{पन}}{\text{कक}} + \frac{\text{रव}}{\text{सक}}$ यांचे बरोबर आहेत, का कीं (१०८) प्रमाणें $\frac{\text{पसन}}{\text{कसक}} = \frac{\text{पन}}{\text{कक}}$ आणि $\frac{\text{करव}}{\text{कसक}} = \frac{\text{रव}}{\text{सक}}$ परंतु $\frac{\text{पव}}{\text{कक}} = \frac{\text{प}}{\text{क}} \times \frac{\text{व}}{\text{क}}$ आणि $\frac{\text{रव}}{\text{सक}} = \frac{\text{र}}{\text{स}} \times \frac{\text{व}}{\text{क}}$ यामुळे (म+न)अ, अथवा $(\frac{\text{प}}{\text{क}} + \frac{\text{र}}{\text{स}}) \frac{\text{व}}{\text{क}} = \frac{\text{प}}{\text{क}} \times \frac{\text{व}}{\text{क}} + \frac{\text{र}}{\text{स}} \times \frac{\text{व}}{\text{क}}$. याचप्रमाणें बाकीचा सारणीविषयीं हीच गोष्ट सिद्ध करितां येईल.

† जो बीजरूप पद्धती यरेंवार कामाच पेंती तीस सारणी असें नाव दिले आहे.

$$\frac{\frac{अ \times क}{ब \times द} + \frac{इ \times ग}{क \times ह}}{\frac{अ \times ह}{ब \times क} + \frac{इ \times ग}{द \times ह}} = \frac{अकफह + बडइग}{अहडह + बकफग}$$

$$\frac{१}{अ + \frac{१}{ब}} = \frac{ब}{अब + १}$$

$$\frac{१}{अ + \frac{१}{ब + क}} = \frac{१}{अ + \frac{क}{बक + १}} = \frac{बक + १}{अबक + अ + क}$$

$$\text{जसे } \frac{१}{६ + \frac{१}{७ + \frac{१}{८}}} = \frac{१}{६ + \frac{८}{५७}} = \frac{५७}{३५०}$$

जा रिती सर्व अंकांविषयी खऱ्या अशा सिद्ध केल्या आहेत, त्या जेव्हा अंकांचा जागी अक्षरे घेतली असतील, तेव्हा लागू करिता येतील.

सहावा भाग.

दशांश अपूर्णांक.

१२६. अपूर्णांकांचा मोठेपणा ताडून पडण्याकरिता, त्या अपूर्णांकांस समछेद करावे लागतात, हे (२१२) आणि (१२१) कलमांत पाहिले. अपूर्णांकांस निरनिराले छेद असतां, त्यांशी कृति करितां येती त्यापेक्षां त्यांस समछेद केल्यावर त्यांशी कृति, किती त्वरित होती हेहि वर पाहिले. या कारणावरून जा जा गणिताचा भागांत अपूर्णांकांची गरज लागती, त्या ठिकाणी जा अपूर्णांकांस समछेद आहेत, अथवा जांस समछेदरूप लवकर देतां येईल, त्यांशिवाय दुसरे अपूर्णांक कामांत घेत नाहीत, असा चाल पडून गेली आहे. आतां, सर्व अंकांतून जांशी कृति करायलास सोपें पडते, ते अंक १ यावर शून्ये असे असतात, जसे १०, १००, १०००, इत्यादि. या अंकांस दशगुणक

सतो, यास दशांश अपूर्णांक ह्यणतात, अथवा सामान्यतः दशांश ह्यणतात.

१२७. पूर्णांकास दशांश अपूर्णांकाचें रूप, अथवा दशांश अपूर्णांकास दुसऱ्या दशांश अपूर्णांकाचें रूप, सहज रितीनें देतां येईल. उदाहरण, (१०६) प्रमाणें, ९४ हे $\frac{९४०}{१०}$ अथवा $\frac{९४००}{१००}$, $\frac{९४०००}{१०००}$ इत्यादि आहेत; आणि (१०८) प्रमाणें, $\frac{३}{१०}$ हे $\frac{३०}{१००}$, अथवा $\frac{३०००}{१००००}$ इत्यादि आहेत. (५७) प्रमाणें कोणत्याहि संख्येचे उजव्ये बाजूस एक शून्य मांडणें, हें आणि त्या संख्येस १० नीं गुणणें हें सारिल्लेंच आहे, आणि (१०८) कलमाप्रमाणें याच रितीनें कोणत्याहि अपूर्णांकाचे अंश जितके वेळा १० नीं गुणावे, तितकेच वेळा १० नीं त्याचें छेदहि गुणावे.

१२८. या नंतर असा प्रश्न उत्पन्न होतो, कीं जो अपूर्णांक दशांश नाही, त्यास किमत बदलल्यावाचून दशांशाचें रूप कसे द्यावें? उदाहरणासाठीं $\frac{७}{१६}$ अपूर्णांक घे, त्याचे अंश आणि छेद क्रमानें १०, १००, १०००, इत्यादि यांणीं गुणून, $\frac{७०}{१६०}$, $\frac{७००}{१६००}$, $\frac{७०००}{१६०००}$, $\frac{७००००}{१६००००}$ असे अपूर्णांक होतील, आणि त्यांतून प्रत्येक (१०८) प्रमाणें $\frac{७}{१६}$ यांचे बरोबर आहे. या प्रत्येक अपूर्णांकाचा छेद १६ यांणीं निःशेष भागिला जातो, आणि त्यापासून जे वेगळाले भागाकार येतात, ते हे पुढील दशगुणक अंक आहेत, ह्यणजे, १०, १००, १०००, १००००, इत्यादि. यामुळे त्या अपूर्णांकातील कोणत्याहि एकाचा अंश १६ यांणीं निःशेष भागिला जातो, तर त्याच अंशाचे अपूर्णांकाचा अंश आणि छेद हे दोन्ही १६ नीं निःशेष भागिले जातील. असा भागाकार केल्यावर (१०८) प्रमाणें अपूर्णांकाची किमत बदलल्यावाचून, दुसरा एक अपूर्णांक निघेल, जाचा छेद या पुढील एकादा दशगुणक अंक होईल, ह्यणजे, १०, १००, १०००, इत्यादि. आणि त्याची किमत $\frac{७}{१६}$ याचे बरोबर होईल. आतां, ७०, ७००, ७०००, ७००००, इत्यादि यांतून कोणता पहिल्यानें १६ यांणीं निःशेष भागिला जातो हें शोधायचें राहिलें.

B5

१६)७०(४

$$\frac{६४}{६}$$

१६)७००(४३

$$\frac{६४}{६०}$$

$$\frac{४८}{१२}$$

१६)७०००(४३७

$$\frac{६४}{६०}$$

$$\frac{४८}{१२०}$$

$$\frac{११२}{८}$$

१६)७००००(४३७५

$$\frac{६४}{६०}$$

$$\frac{४८}{१२०}$$

$$\frac{११२}{८०}$$

$$\frac{८०}{०}$$

तर, असे दिसते, की ७०००० हे त्या अंशांतून पहिल्याने १६ यांनी निःशेष भागिले जातात. परंतु वरचा प्रत्येक भागाकार मांडण्याचे प्रयोजन नाही, कां की शेवटल्या भागाकारांत सर्व पूर्वीचे भागाकार आले आहेत हे स्पष्ट आहे. तर शून्यांची संख्या अनंत आहे असे मानून, कृति चालवावी, आणि जेव्हा बाकी शून्य राहिल तेव्हा थांबावे, आणि जितकी शून्ये कामांत घेतली असतील, तीं मोजावी. या पक्षांत, ७०००० हे १६×४३७५ आहेत, तर $\frac{७००००}{१६००००}$ हा $\frac{१६ \times ४३७५}{१६ \times १०००००}$, अथवा $\frac{४३७५}{१००००}$ हा इच्छिला अपूर्णांक होईल.

यामुळे, अपूर्णांकास दशांस अपूर्णांकाचे रूप देण्यासाठी, अंशाचे उजव्याकडे शून्ये मांडून, बाकी न राही तोंपर्यंत छेदाने भाग. जो भागाकार येईल तो इच्छिलेल्या अपूर्णांकाचा अंश होईल, आणि भागाकार करायसाठी जितकी शून्ये कामांत आणिली असतील, तितकी शून्ये १ याचे उजव्याकडे मांडिल्याने इच्छिलेल्या अपूर्णांकाचा छेद होईल.

अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

या पुढील अपूर्णांकांस दशांस अपूर्णांकांचे रूप दे.

$$\frac{१}{२}, \frac{१}{४}, \frac{२}{२५}, \frac{१}{५०}, \frac{३९२७}{१२५०}, \text{ आणि } \frac{४५३}{६२५}$$

$$\text{उत्तर. } \frac{५}{१०}, \frac{२५}{१००}, \frac{८}{१००}, \frac{२}{१००}, \frac{३९४१६}{१००००}, \text{ आणि } \frac{७२४८}{१००००}$$

१२९. बद्धतरून असे पक्ष असतात, की शून्ये मांडिल्याने अपू-

या दहास ७ यांना भाग; ह्यणज याप्रमाणे होईल

$$\frac{1}{6} = \frac{1000000}{6000000} = \frac{182049}{1000000}$$

जर अंशांतील $\frac{1}{6}$ हा अपूर्णांक सोडून दिला, तर जें परिमाण सोडून दिलें, तें वास्तवीक एकमाचा एक दशलक्षांशाचा ७ वा भाग आहे; अथवा एकमाचा एकदशलक्षांशापेक्षां तें परिमाण कमी आहे. यामुळे $\frac{182049}{1000000}$ हा इच्छिला अपूर्णांक आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

$\frac{3}{29}$, $\frac{19}{183}$ आणि $\frac{1}{289}$, या अपूर्णांकांचे मागीलप्रमाणें कोष्टक कर.

$\frac{3}{29}$ { याचे भागाकारांत हे पुढील }
 $\frac{19}{183}$ { पुनः पुनः येणारे अंक आहेत, } ३२९६७०, ३२९६७०, इत्यादि,
 $\frac{19}{183}$ ११८८८१, ११८८८१,
 $\frac{1}{289}$ { ४०४८५८२९९५९५१४१७०० } इत्यादि.
 $\frac{1}{289}$ { ४०४८५८२९९५९५१४१७०० }

१३०. भागाकारांत वरप्रमाणें क्रमाक्रमानें अंकांचे पुनःपुनः येण्याचें कारण हेंच आहे; जर १.०००, इत्यादि अंकांस २४७ यांणी भागिलें, तर भागाकार करितानां जी प्रत्येक बाकी येती, ती २४७ पेक्षां कमी आहे, ह्यणून ती बाकी० किंवा २४६ यांचे मागला कोणताहि अंक येईल. यावरून, जर बाकी कधीहि० होत नाहीं, तर भागाकार हवा तितका चालविल्यानें, एकादी बाकी पुनः दुसरे वेळीं येईल. मनांत आण, कीं पहिल्या सगळ्या २४६ वाक्या केवळ निरनिराळ्या आहेत, ह्यणजे, त्या १, २, ३, इत्यादिपासून २४६ पावेतो आहेत, आणि त्यांचा क्रम बरोबर नाहीं. २४७ वी बाकी २४७ यांचे बरोबर येत नाहीं, यामुळे जा बाक्या पूर्वी आल्या, त्यांतून एकादीचे बरोबर २४७ वी बाकी होईल, तर जी ठिकाणची बाकी कांहीं पूर्वीचे बाकी बरोबर येती, त्या ठिकाणापासून भागाकारांतील पूर्वीचे अंक क्रमानें पुनःपुनः येतील, हें स्पष्ट आहे.

१३१. जर बहुतेक अपूर्णांकांस दशांशांचें रूप देतां येत नाहीं, तर दशांश अपूर्णांकांचा उपयोग काय, असा प्रश्न फारकरून उत्पन्न होईल? त्यास उत्तर हेंच आहे; कीं व्यवहारी अपूर्णांकांची मिळवणी, वजाबाकी, गुणाकार, आणि भागाकार, करण्याचा रितीपेक्षां दशांशांची, मिळ-

वणी, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार करण्याचा रिती फार सोप्या आहेत; आणि जरी सर्व व्यवहारी अपूर्णाकांस दशांशाचें रूप देतां येत नाहीं, तथापि त्या प्रत्येक अपूर्णाकांचे जवळ जवळ असे दशांश अपूर्णाक काढितां येतात, आणि व्यवहारी अपूर्णाकांचे स्थळीं हे दशांश अपूर्णाक घेतल्यानें जी कांहीं चूक होती, ती लक्षांत घेण्याजोगी नसती. उदाहरण, मनांत आण, कीं एक इंचास एक कोटी समभागांत भागिला आहे, तर त्यांतील एक भाग डोळ्यांनीं दिसणार नाहीं. यामुळें सूक्ष्म मानाची जरी गरज असली, तरी लांबी मोजण्यांत इंचाचा कोळ्यांशाची चूक असली तरी कांहीं चिंता नाहीं. आतां, (१२९) कलमांतील कोष्टक वाढविल्यानें $\frac{१४२८५७१}{१००००००००}$ हा अपूर्णाक $\frac{१}{७}$ पेक्षां $\frac{१}{१००००००००}$ इतक्यानें भिन्न नाहीं; आणि जर हे दोन अपूर्णाक इंचाचे भाग दाखवितात, आणि त्यांचें अंतर अतिलहान, दिसण्या जोगें नाहीं, ह्मणून पहिला अपूर्णाक दुसऱ्याचे जागीं घेतां येईल. व्यवहार कामांत अंकगणित लाविलें असतां, कांहीं चुकी वांचून कोणताहि पदार्थ केवळ बरोबर असा मोजतां येत नाहीं, तो पदार्थ लांबी, वजन, किंवा दुसरी कांहीं महत्वाची जात असो. यामुळें दशांश अपूर्णाकांशिवाय दुसरे कांहीं जातीचे अपूर्णाक कामांत घेण्याचें प्रयोजन नाहीं; कां कीं दुसऱ्या कांहीं रितीनें एकादें परिमाण जितकें चुकी वांचून दाखवितां येतें, त्याच प्रमाणें दशांशाने चुकी वांचून दाखवितां येईल.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

या पुढील अपूर्णाकांहून, $\frac{१}{१००००००००}$ इतक्यानें भिन्न नाहींत असे दशांश अपूर्णाक काढ.

$$\frac{१}{३} \dots \text{उत्तर } \frac{३३३३३३३३}{१००००००००}$$

$$\frac{११३}{३५५} \dots \text{उत्तर } \frac{३१८३०९८५}{१०००००००००}$$

$$\frac{४}{७} \dots \text{उत्तर } \frac{५७१४२८५७}{१०००००००००}$$

$$\frac{३५५}{११३} \dots \text{उत्तर } \frac{३१४१५९२९२}{१०००००००००}$$

१३२. प्रत्येक दशांशास असें रूप देतां येईल, कीं त्यांत एकादा पूर्णाक आणि कांहीं सरळ दशांश येतील, अथवा नुसते सरळ दशांश येतील, आणि त्या प्रत्येक दशांशाचा अंशाचा ठिकाणीं केवळ एक अंक येईल. उदाहरण, $\frac{१४७३२६}{१०००}$ हा अपूर्णाक घे. (११५) प्रमाणें $\frac{१४७३२६}{१०००}$ हे $१४७ \frac{३२६}{१०००}$ आहेत; आणि ३२६ हे ३०० , आणि २० , आणि ६ , याचि बरोबर आहेत; (१२२) प्रमाणें $\frac{३२६}{१०००} = \frac{३००}{१०००} + \frac{२६}{१०००}$

वरचा कोष्टक शिकणाराने आपणच लिहावा, नंतर या पुढील उदाहरणांपासून दुसरे कोष्टक करावे.

अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

या पुढील अपूर्णाकांस पूर्णांक, आणि अधिक सरळ अपूर्णांक रूप दे;

$$\frac{37874926}{70},$$

$$\frac{37874926}{100}, \text{ इत्यादि.}$$

$$\frac{2000031}{90},$$

$$\frac{2000031}{100}, \text{ इत्यादि.}$$

$$\frac{2003000}{70},$$

$$\frac{2003000}{100}, \text{ इत्यादि.}$$

$$\frac{3331303}{7000},$$

$$\frac{3331303}{10000}, \text{ इत्यादि.}$$

१३३. वरचे कोष्टकांत, आणि या सारख्याच दुसऱ्या केलेल्या कोष्टकांत, जा अपूर्णाकांपासून पूर्णांक येतात, त्यांस पाहिले असता, असे दिसेल, कीं, ते याप्रमाणे मांडितां येतील; अपूर्णाकाचे छेदस्थळीं जितकीं शून्ये आहेत, तितके अंशाचे उजव्ये कडील अंक विदूने, किंवा दुसऱ्ये कांहीं खुणेने वेगळे कर. तर

जेव्हां अपूर्णांक $\frac{180326}{70}$ आहे, तेव्हां 18032.6 याप्रमाणे होईल

$$\frac{180326}{70} \text{ ----- } 18032.6 \text{ -----}$$

$$\frac{180326}{1000} \text{ ----- } 18032.6 \text{ -----}$$

$$\text{----- इत्यादि. ----- इत्यादि. -----}$$

अपूर्णाकांपासून जे पूर्णांक निघतात, ते विदूचे डाव्येकडचे अंक आहेत. विदूचे उजव्ये कडचा पहिला अंक, तो अशा अपूर्णाकाचा अंश आहे, जाचा छेद १० आहे, तसे उजव्येकडचा दुसरा अंक, तो अशा अपूर्णाकाचा अंश आहे, जाचा छेद १०० आहे, आणि इत्यादि. जा अपूर्णाकांपासून पूर्णांक निघत नाही त्यांविषयीं आतां विचार करितो.

१३४. $\frac{180326}{1000000}$ हा अपूर्णांक घे, यांत छेदस्थळीं जितकीं, शून्ये आहेत, तितकेच अंशस्थळीं अंक आहेत. वर सांगितल्या रितीप्रमाणे

अंशाचे सर्व अंकापूर्वी बिंदू मांडून त्यांस जर वेगळें केले, जसे, १४७३२६, तर (१३३) कलमांत जें सांगितलें तें येथें लागू होतें; कां कीं, $\frac{१४७३२६}{१०००००००}$ यास वरचे कोष्टकांत पाहून, तो पुढील प्रमाणें आहे असें दिसेल,

$$\frac{१}{१०} + \frac{४}{१००} + \frac{७}{१०००} + \frac{३}{१००००} + \frac{२}{१०००००} + \frac{६}{१०००००००}$$

$\frac{१४७३२६}{१०००००००}$ हा दुसरा अपूर्णांक घे; वरचे कोष्टकावरून तो याप्रमाणें आहे,

$$\frac{१}{१००} + \frac{४}{१०००} + \frac{७}{१००००} + \frac{३}{१०००००} + \frac{२}{१००००००} + \frac{६}{१००००००००}$$

या उदाहरणांत १ यास १० यांणीं भागिलें नाहीं, परंतु १०० नीं भागिलें आहे; यामुळे, जर सर्व अंशांकांचे पूर्वीच बिंदू मांडिला, तर वरची रीति खरी नाहीं, कां कीं बिंदूचे उजव्येकडील पहिल्ये अंकाचा जो छेद, तो रितीप्रमाणें दुसऱ्ये स्थळींचा असावा, तसा दुसऱ्या स्थळींचा जो छेद, तो तिसऱ्या स्थळीं असावा, आणि याप्रमाणें पुढें. तर या पक्षांत वरची रीति लागू करायासाठीं, असी योजना केली पाहिजे, कीं १ हा बिंदूचे उजव्येकडचा दुसऱ्ये स्थळीं येईल. ह्मणजे १ आणि बिंदू यांचे मध्ये शून्य मांडिल्यानें असें होईल, जसे, ०१४७३२६. हें खरें आहे, कां कीं वरचा रितीप्रमाणें यांस मांडिले असतां याप्रमाणें होईल,

$$\frac{०}{१०} + \frac{१}{१००} + \frac{४}{१०००} + \frac{७}{१००००} + \frac{३}{१०००००} + \frac{२}{१००००००} + \frac{६}{१००००००००}$$

आतां हें तर वरचे प्रमाणेंच आहे, कां कीं $\frac{०}{१०}$ बरोबर ० आहे, ह्मणून तें पद कामांत आणण्याचें प्रयोजन नाहीं.

याचप्रमाणें, जर अंशस्थळींचे अंकापेक्षां छेदस्थळीं दोन शून्ये अधिक असतील, तर बिंदू आणि अंशातील पहिला अंक यामध्ये दोन शून्ये मांडिल्यानें वरची रीति खरी लागू होईल. यामुळे विस्तारानें रीति, सांगितली असतां, ती या पुढीलप्रमाणें आहे;

कोणत्याहि दशांश अपूर्णांकास, पूर्णांक आणि अधिक सरळदशां-

ज्ञाचें रूप देण्यासाठी, किंवा जा अपूर्णाकांत पूर्णांक नसेल त्यास सरळ दशांशरूप देण्यासाठी, छेदांत जितकीं शून्ये आहेत, तितके अंक अंशांतून बिंदूने वेगळे कर. असें करायास अंशांतील अंक पुरत नाहीत, तर जितकीं स्थळे कमी आहेत, तीं भरायासाठी डाव्येकडे शून्ये मांडून त्या शून्यांचे पूर्वी बिंदू कर. असें केल्यावर बिंदूचे डाव्येकडेस जे अंक येतात, ते सांगितल्ये अपूर्णाकांतील पूर्णांक आहेत. बिंदूचे उजव्येकडे पहिला अंक जाचा छेद १० आहे, दुसरा अंक जाचा छेद १०० आहे, आणि इत्यादि, जे अंक आहेत ते सांगितल्या अपूर्णाकांचे अपूर्णांक आहेत.

१३५. दशांश अपूर्णाकांस विस्तारानें लिहिण्याची चाल नाही. छेदामध्ये जितकीं शून्ये येतात, तितकीं स्थळे अंशांकांतून बिंदूने वेगळीं करायास सोईस पडते. जेव्हां छेदस्थळींचीं शून्ये, अंशस्थळींचे अंकापेक्षां अधिक आहेत, तेव्हां अंशाचीं अंकस्थळे जितकीं कमी आहेत, तितकीं शून्ये त्यांचे डाव्येकडेस मांडून, शून्यांचे पूर्वी बिंदू मांडितात. जसे, $\frac{9}{10}$ यास '७, आणि $\frac{900}{1000}$ यास '०७ याप्रमाणे मांडितात. हे सर्व अंकलेखन या पुढील कोष्टकावरून एकदांच कळेल, आणि पहिल्ये भागांत जें दशांक अंकलेखन सांगितलें, त्यांशीं हे वरचे लेखन जो संबंध ठेवितें तोहि कळेल. पूर्णाकाचे एक स्थळींचा अंकाचे उजव्ये वाजूस जे अंक येतात, ते क्रमानें एक भागिले १०, १००, १००० इत्यादि आहेत, परंतु त्याचे डाव्येकडेचे अंक एक गुणिले, १०, १००, १०००, इत्यादि आहेत, असें पाहाण्यांत येईल.

शिकणारानें एथें दाखविल्याप्रमाणें दशांशाचा बिंदू अंकांचे डोक्याबरोबर अथवा मध्ये संभालून मांडावा, खालीं मांडू नये, कां कीं पुढचा विजादि मोठ्या गणितामध्ये दोन अंकांचा किंवा अक्षरांचा गुणाकार दाखवायासाठी, त्यांचे मध्ये खालचे आंगास बिंदू मांडितात जसे, १५-१६, अ.ब, अ+ब क+ड, एथें या संख्यांचा किंवा अक्षरांचा गुणाकार तो बिंदू दाखवितो.

पहिला कोष्टक.

१२३४६ $\frac{१२३४}{१०}$ अथवा $१२३\frac{४}{१०}$ अथवा $१२३ + \frac{४}{१०}$ यांचे जागण आहेत.

१२३४ $\frac{१२३४}{१००}$ $१२\frac{३४}{१००}$ $१२ + \frac{३४}{१००} + \frac{४}{१००}$

१२३४ $\frac{१२३४}{१०००}$ $\frac{१२३४}{१०००}$ $\frac{१ + २ + ३ + ४}{१०००}$

१२३४ $\frac{१२३४}{१००००}$ $\frac{१२३४}{१००००}$ $\frac{१ + २ + ३ + ४}{१००००}$

०१२३४ $\frac{१२३४}{१०००००}$ $\frac{१२३४}{१०००००}$ $\frac{१ + २ + ३ + ४}{१०००००}$

००१२३४ $\frac{१२३४}{१००००००}$ $\frac{१२३४}{१००००००}$ $\frac{१ + २ + ३ + ४}{१००००००}$

दशांश अपूर्णांक.

दुसरा कोष्टक

तिसरा कोष्टक.

०१००३ $\frac{१००३}{१०००००}$ अथवा $\frac{१}{१०} + \frac{३}{१०००००}$ $०.१२८३ = \frac{१}{१०} + \frac{२}{१००} + \frac{८}{१०००} + \frac{३}{१००००}$

०१००३ $\frac{१००३}{१००००}$ $\frac{१}{१०} + \frac{३}{१००००}$ $= ०.१ + ०.०२ = ०.०८ + ०.००३$

१००३ $\frac{१००३}{१००}$ $१० + \frac{३}{१०}$ $= १ + ०.२८३ = १.२८ + ०.००३$

१००३ $\frac{१००३}{१०}$ $१०० + \frac{३}{१०}$ $= १००.३ + ०.२८ = १००.२८ + ०.००३$

चवथा कोष्ठक. १२३४५६७८९ इतके
इंच आहेत, तर यांत

१	हा	१०००	इंच आहेत
२	ह्य	२००	-----
३	ह्य	३०	-----
४	ह्य	४	-----
५	ह्य	$\frac{५}{१००}$	इंचाचे
६	ह्य	$\frac{६}{१००}$	-----
७	ह्य	$\frac{७}{१०००}$	-----
८	ह्य	$\frac{८}{१००००}$	-----
९	ह्य	$\frac{९}{१०००००}$	-----

१३६. (१०) व्हे कलमांत जें शून्यांपासून कार्य होतें, तेंच कार्य दशांश बिंदूचे उजव्येबाजूचे शून्यांपासून होतें. तीं शून्ये गणनेत येत नाहींत, परंतु त्यांचा योगाने त्यांचे उजव्येकडे जे अंक येतात त्या अंकांचीं स्थळे दाखवितां येतात. पहिल्या भागांत उभ्या ओळी करून त्यांत जसे अंक मांडिले आहेत, त्याप्रमाणे एथे मांडिले असतां तीं शून्ये सोडून देतां येतील. जा अंकांशीं तीं शून्ये लागलेलीं असतात, त्यांपासून तीं वेगळीं आहेत हें जाणायसाठीं, त्या अंकांस अर्थ बोधक अंक झणतात; जसे, ०००३७४७ हे सात अंकस्थळांचे दशांश आहेत, आणि त्यांत चार अर्थ बोधक अंक आहेत; ३४६ हे तीन स्थळांचे दशांश आहेत, आणि त्यांत तीन अर्थ बोधक अंक आहेत, इत्यादि.

१३७. दशांशाचे उजव्ये बाजूस कितीहि शून्ये मांडिलीं तरी त्याची किंमत बदलत नाहीं. उदाहरण, ३ आणि ३०० हे घे. (१३५) प्रमाणे यांत पहिला $\frac{३}{१०}$ आहे, आणि दुसरा $\frac{३००}{१०००}$ आहे, आणि पहिल्याचे अंश आणि छेद १०० यांणीं गुणून दुसरा झाला आहे, झणजे (१०८) प्रमाणे हीं सारखींच परिमाणे आहेत.

१३८. दोन अपूर्णाकांस समछेद करायासाठीं, जांत अंकांचीं स्थळे सोडीं आहेत त्याजवर इतकीं शून्ये मांडावीं, कीं दोन्हीं अपूर्णाकांचीं अंकस्थळे बरोबर होतील. उदाहरण, ५४ आणि ४३२९७ हे घे. यांतून पहिला $\frac{५४}{१००}$ आणि दुसरा $\frac{४३२९७}{१००००}$ आहे. (१०८) प्रमाणे पहिल्याचे अंश आणि छेद १०० यांणीं गुण, यावरून तो $\frac{५४००}{१००००}$ होतो; आणि त्याचा छेद, $\frac{४३२९७}{१००००}$ याचे छेदावरोबर होतो. परंतु (१३५)

प्रमाणें $\frac{५४००}{१००००}$ हा ५४०० आहे. दशांश चिन्ह पूर्णांकांचे उजव्येकडेस मांडिलें पाहिजे; जसें, १२९ हे १२९० याप्रमाणें मांडिले पाहिजेत. परंतु असे पक्षांत दशांश चिन्ह बहुतकरून मांडीत नाहीं; तथापि लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं १२९ आणि १२९०००० यांची किंमत सारिखाच आहे; कां कीं यांतून पहिले १२९ आहेत, आणि दुसरे $\frac{१२९०००}{१००००}$ आहेत.

१३९. मिळवणी, वजाबाकी, गुणाकार, आणि भागाकार, यांचा रिती जा मागील अध्यायांत सांगितल्या, त्या सर्व अपूर्णांकांस लागू होतात, आणि यामुळें दशांश अपूर्णांकांसहि लागू होतात. परंतु या अध्यायांत दशांश अपूर्णांक मांडण्याची जी रिती दाखविली आहे, तिजवरून त्या वेगळाल्या रिती लावण्यास सोपें पडतें. आतां या वेगळाल्या पक्षांचा विचार करितों.

मनांत आण, कीं ४२६३४, ४५२८०६, २००१, आणि ५४ यांची बेरीज करायाची आहे. (११२) प्रमाणें यांस समछेद केले पाहिजेत, ह्मणजे (१३८) प्रमाणें त्यांस समछेदरूप देऊन या पुढीलप्रमाणें मांडितात; ४२६३४०, ४५२८०६, २००१०, आणि ५४०००००. हे वेगळाले दशांश अपूर्णांक आहेत, जांचे अंश ४२६३४०, ४५२८०६, २००१०, आणि ५४०००० असे आहेत, आणि त्यांचा साधारण छेद १०००० आहे. (११२) प्रमाणें यांची बेरीज $\frac{४२६३४०+४५२८०६+२००१०+५४००००}{१००००}$, अथवा $\frac{१४३९१५६}{१००००}$, अथवा १४३९१५६ अशी आहे. ही बेरीज करण्याची सोपी रीति पुढील आहे; वेगळाले दशांश एकाखाली एक मांड, असे कीं त्यांचीं दशांश चिन्हे एकाखाली एक येतील, जसें;

४२६३४

४५२८०६

२००१

५४

१४३९१५६

वेगवेगळाल्ये ओळींची बेरीज साध्ये मिळवणीप्रमाणें करून, दशांश चिन्ह दशांश चिन्हाचे खाली मांड.

अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

$१५२७+६४७३२०९४+२००१३+००००१९७४;$ } यांचा वेग
 $२२७६३+१०७+९+२६३१७२+५६७३२००१;$ } लाल्या वे-
 आणि $१११+७७+००३९+००१४२+८८३८?$ } रजा काय
 आहेत ?

उत्तर, १५९३७३३४१३७४ , ५९०३५६२५२ , ९६९९१२ .

१४०. मनांत आण, कीं १३७३२१ यांतून ९१०७३२४ वजा करायाचे आहेत. या दोन अपूर्णाकांस समछेदकरून (१३८) प्रमाणे ९१०७३२४ आणि १३७३२१०० आहेत. तर यांची वजाबाकी $\frac{१३७३२१००-९१०७३२४}{१०००००}$, अथवा $\frac{४६६५८७६}{१०००००}$, अथवा ४६.२४७७६ आहे. वजाबाकी करायासाठी ही पुढील रीति सोपी आहे; लहान संख्या मोठ्या संख्येखाली मांड, अशी कीं त्यांचीं दशांश चिन्हे एकाखाली एक येतील, जसे;

१३७३२१

९१०७३२४

४६.२४७७६

वरचे ओळीतून खालची ओळ वजा कर, आणि जेव्हां एक ओळीत अंक आहे आणि दुसऱ्या ओळीत नाही, तेव्हां मनांत आण कीं, रिकाम्या जागी शून्य आहे.

अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

$१२३६२-२७४२२१०७+५;$
 $९९७६२०७३९४२-००१४३९७६७२८;$ } हे काय आहेत?
 आणि $१२+०३+००४-०००५?$

उत्तर, १२०८८२७८९३ , ९९७६२०५९५४४३२७२ ; आणि १२३३५ .

१४१. कोणताहि दशांश, $१०, १००, १०००$, इत्यादि यांनी गुणायाचा असेल, तर दशांश बिंदू केवळ उजव्याकडे सारण्याने गुणाकार होतो. मनांत आण, कीं १३२०७९ हे १०० यांनी गुणायाचे

(११७) प्रमाणे $\frac{132099}{100}$, अथवा १३२०.७९ आहे. पुनः, १.३०९
 $\times 1000000 = \frac{1309}{1000} \times 1000000$, अथवा (११६) प्रमाणे $\frac{1309}{1000}$,
 अथवा १३०९.०० आहेत. या आणि पुढील उदाहरणांपासून ही पु-
 ढील रीति निघती; दशांश अपूर्णाकास दशगुणक अंकांने गुणायाने
 असेल, तर (१२६) प्रमाणे दशगुणक अंकांमध्ये जितकी शून्यस्थळे
 आहेत, तितकींस्थळे दशांश बिंदू उजव्येकडे सार. असें जेव्हां करि-
 तां येत नाही, तेव्हां (१३७) प्रमाणे असें होईपर्यंत दशांशाचे उजव्ये-
 कडेस शून्ये मांड.

१४२. मनांत आण, कीं १७.०३६ यांस ४.२७ यांणी गुणायाने
 आहे. यांतील पहिला दशांश $\frac{17036}{1000}$, आणि दुसरा $\frac{427}{100}$ आहे.
 (११८) प्रमाणे १७.०३६ आणि ४.२७ यांचा गुणाकारापासून त्या
 अपूर्णाकांचा गुणाकाराचा अंश होतो, आणि १०००, आणि १०० यां-
 चा गुणाकारापासून छेद होतो; यामुळे गुणाकार $\frac{7238372}{1000000}$, अथवा
 ७२.७४३७२ आहे. १७.०३६ आणि ४.२७ या दोन संख्या पर-
 स्पर गुणून, आणि १७.०३६ आणि ४.२७ यांत जितकी दशांशस्थळे
 आहेत, तितकीं अंकस्थळे गुणाकारांत दशांश चिन्हाने वेगळीं केल्याने
 वरचे काम सोपें पडते, कां कीं दोन दशगुणक संख्यांत जितकीं शून्ये
 आहेत, तितकीं शून्ये त्यांचे गुणाकारांत येतात.

१४३. आतां हा प्रश्न उत्पन्न होतो; गुण्य आणि गुणक यांमध्ये जि-
 तकीं दशांशस्थळे असतील, तितकीं त्यांचे गुणाकारांत नसलीं, तर कसे
 करावे! या पक्षांत कसे करावे हें पहायासाठीं, १.७२ यांस १.०१ यांणी
 गुण, अथवा $\frac{172}{1000}$ यांस $\frac{101}{1000}$ यांणी गुण. या दोहोंचा गुणाकार
 $\frac{17372}{1000000}$, अथवा ०.१७३७२ आहे, (१३५) प्रमाणे. यामुळे, जेव्हां
 मागल्या कलमाची रीति लागू होण्यांस गुणाकाराचीं अंकस्थळे पुरीं
 होत नाहीत, तेव्हां तीं रिकामीस्थळे भरायासाठीं गुणाकाराचे डाव्ये-
 कडे शून्ये मांड, आणि त्यांचे डाव्येकडेस दशांश चिन्ह कर.

आणखी दुसरीं उदाहरणे.

००१ × ०१ हे ००००१ आहेत.

५६ × ०००१ हे ००५६ आहेत.

अभ्यासाकरिता उदाहरणें.

$$\begin{aligned}
 ३००२ \times ३००२ &= ३ \times ३ + २ \times ३ \times ० + ० \times ० + २ \times ० + ० \\
 ११५६०९ \times ५३१९१ &= ८४४ \times ८४४ - ३१२०९ \times ३१२०९ \\
 ८२१७ \times १०००१ &= ८ \times १ + ८ \times ० + ० + १ + ० \times २ + २ \times ० + ० + १ \times २ + १७
 \end{aligned}$$

हे दाखीत !

अपूर्णांक.

वर्ग.

घन.

८२९२	६७५७२६४	५७०१३५२३३०८८
०१७३	०००२९९२९	०००००५१७७७१७
१४३	२०४४९	२९२४२०७
००९	००००८१	००००००७२९

$$\begin{aligned}
 १५६२५ \times ६४ &= १००० & १५६२५ \times ६४ &= १ \\
 १५६२५ \times ६४ &= १ & १५६२५ \times ६४ &= १०० \\
 ०१५६२५ \times ००६४ &= ००००१ & १५६२५ \times ००६४ &= १००००००
 \end{aligned}$$

१४४. कोणताहि दशांश, १०, १००, १०००, इत्यादि दशगुणक अंकांनी भागायाचा असेल, तर दशगुणक अंकांमध्ये जितकीं शून्यस्थळें असतील, तितकीं स्थळें दशांश बिंदू डाव्येकडे सारल्यानें भागाकार होतो. असें करायासाठीं भागाकारांत अंकस्थळें पुरत नाहींत, तर त्याचे डाव्येकडेस इतकीं शून्ये मांड, कीं रिकामींस्थळें भरतील, आणि त्यांचे पूर्वी दशांश चिन्ह मांड. उदाहरण, १७३४२२९ यांस १००० यांनी भाग; हा दशांश अपूर्णांक $\frac{१७३४२२९}{१०००}$ आहे, हाणजे हा

(१२२) प्रमाणे १००० यांना भागिला तर $\frac{१७४२२९}{१००००००}$, अथवा १.७४२२९ होतात. अशा रितीने, १.२१०६ यांस १०००० यांनी भागिले, तर ०.००१२१०६ होतात.

१४५. एक दशांश अपूर्णाक दुसऱ्ये दशांश अपूर्णाकाने भागण्याचे रितीचा संक्षेप करण्याचे पूर्वी, (१२८) कलमांत कोणत्याहि अपूर्णाकास, दशांशरूप देण्याविषयी जी गोष्ट सांगितली ती पुनः लक्षांत आणली पाहिजे. या कलमांत असे दाखविले, कीं $\frac{७}{१६}$ हे $\frac{४३७५}{१००००}$ अथवा ०.४३७५ या बरोबर आहेत. आतां $\frac{३}{१२८}$ यांस दशांश अपूर्णाकाचेरूप दे. (१०८) कलमाचे रितीप्रमाणे कृति कर, जसें;

१२८) ३००००००० (२३४३७५

२५६

 ४४०
 ३८४

 ५६०
 ५१२

 ४८०

४८०
 ३८४

 ९६०
 ८९६

 ६४०
 ६४०

 ०

यावरून असे दिसते कीं ७ शून्ये कामांत आणिल्यावर, ३०,३००, इत्यादि वेगवेगळ्या संख्यांचे श्रेणीतील जी संख्या १२८ यांनी निःशेष भागिली जाता, ती ३००००००० आहे; आणि यामुळे $\frac{३}{१२८}$ अथवा (१०८) प्रमाणे $\frac{३०००००००}{१२८०००००००}$ हे $\frac{२३४३७५}{१००००००००}$ अथवा (१३५) प्रमाणे ०.२३४३७५ यांचे बरोबर आहेत.

या वरचे उदाहरणापासून अपूर्णाकास दशांशरूप देण्याची रिती निघते; अंशाचे उजव्ये बाजूस शून्ये मांड; नंतर छेदाने भाग, आणि अंशातील सर्व अंक कामांत घेणे संपल्यावर, प्रत्येक बाकीवर शून्ये मांड आणि अंशाची शून्ये अनंत असे कल्पून त्यास छेदाने भागायाचें आहे, अशी कल्पना करून पुढे चाल. बाकी न राहिल्यांत कृति करित पुढे चाल, नंतर पहा कीं किती शून्ये कामांत आणिलीं. जितकी शून्ये कामांत आणिलीं असतील, तितकी उजव्येकडील भागाकारांतली स्थळे वेगळीं होतील असे दशांश चिन्ह मांड, यासाठी भागाकारांतली अंकस्थळे पुरत नाहीत,

डून दशांश चिन्ह-त्याच डायकडे मांड.

१४६. (१२९) कलमांत जें सांगितलें, त्यापासून दिसतें, कीं हर एक अपूर्णाकास दशांश अपूर्णाक रूप देतां घेत नाहीं. तथापि, त्यांत दाखविलें, कीं जास हवें तेवढें जवळ जवळ दशांश अपूर्णाकाचें रूप देतां घेत नाहीं, असा कांहीं अपूर्णाक नाहीं. जसें, $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}$, इत्यादि, अथवा '१, '१४, '१४२, '१४२८, '१४२८५ हे अपूर्णाक $\frac{1}{10}$ याचे अधिक जवळ जवळ येतात असें वर दाखविलें. या वेगळाल्या अपूर्णाकांस काढायासाठीं, मागील कलमांतिल रीति लागू होती परंतु त्या रीतींत या पुढील प्रमाणें फेर करावा लागतो. पहिल्यानें कृति करितानां, बाकी शून्य रहात नाहीं, ह्मणून बाकी शून्य आल्यावर तेथें थांबतात त्याप्रमाणें, कृतीमध्ये कोठेहि थांबवें, आणि कृति करण्यांत जितकीं शून्यें घेतलीं असतील तितकीं अंकस्थळें भागाकारांत येतील असें करावें, जर भागाकारांत तितकीं स्थळें नसलीं, तर भागाकाराचे डाव्येकडे तितकीं शून्यें मांडून, स्थळें पुरीं करून त्यांचे डाव्येकडे दशांश चिन्ह मांड. दुसऱ्यानें ना अपूर्णाकाशीं कृति करायास आरंभ केला त्याचे केवळ बरोबर असा अपूर्णाक निघत नाहीं, परंतु त्याचे जवळ जवळ असा अपूर्णाक येतो, आणि भागाकारांत अधिकस्थळें घेतलीं, तर तो अपूर्णाक अधिक जवळ जवळ येतो. जसें '१४२८ हे $\frac{1}{10}$ याचे जवळ जवळ आहेत, परंतु '१४२८५७ इतके जवळ नाहींत; आणि हेहि '१४२८५७१४२८५७ इत्यादि, इतके जवळ नाहींत.

१४७. अपूर्णाकाचे अंशाचे उजव्ये बाजूस शून्यें असतील, त्यांची गणना त्या अपूर्णाकास दशांश रूप देण्याकरितां जीं नवीं शून्यें घ्यावीं लागतात, त्याशीं करू नये. उदाहरण, $\frac{100}{125}$ हा अपूर्णाक घे; याचे अंशाचे उजव्येकडेस शून्यें मांडून, त्यास छेदानें भाग. असें दिसतें कीं १००० हे १२५ यांणीं भागिले जातात, आणि त्याचा भागाकार ८ होतो. या पक्षांत अंशावर केवळ एक शून्य मांडिलें आणि यामुळे १०० भागिले १२५ तर भागाकार ८ होतो. $\frac{1}{125}$ हा अपूर्णाक घेतला, आणि १००० यांस १२५ यांणीं भागिलें तर भागाकार ८ होतो, आणि या पक्षांत अंशावर तीन शून्यें मांडावीं लागतात, तर दशांशअपूर्णाक $\frac{1000}{125}$ आहे.

बाजूस शून्ये आहेत; जसे, $\frac{31}{2500}$. अंशावर शून्ये मांडणे आणि छेदा-
वरून शून्ये छेकणे ही दोन्ही सारखीच आहेत; कां की (१०८) प्रमाणे
 $\frac{310}{2500}$ हे $\frac{31}{250}$ यासारखेच आहेत, आणि $\frac{310}{250}$ हे $\frac{31}{25}$ यासारखेच
आहेत. तर या पक्षांत रीति हीच आहे; छेदांतील शून्ये छेकून अं-
शावर शून्ये मांडून पूर्वीप्रमाणे चाल; नंतर किती शून्ये कामांत आणि-
ली, ते जाणायसाठी अंशावर जी शून्ये मांडिली तीच केवळ मोजू-
नये परंतु छेदांतून जितकी शून्ये छेकली त्यांसुद्धां मोज.

अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

या पुढील अपूर्णाकांस दशांश अपूर्णाकरूप दे;

$$\frac{1}{200}, \frac{36}{1250}, \frac{299}{68} \text{ आणि } \frac{1}{128}.$$

उत्तर. 0.005 , 0.0288 , 4.3881 , आणि 0.0078125 .

या पुढील अपूर्णाकांचे जवळ जवळ ६ स्थळांचे दशांश काढ;

$$\frac{29}{81}, \frac{146}{33}, \frac{22}{37000}, \frac{118}{13}, \frac{2637}{1907}, \frac{1}{2908}, \frac{1}{866}, \text{ आणि } \frac{3}{299}$$

उत्तर. 0.358024 , 4.424242 , 0.000594 , 9.076923 , 0.013896 , 0.000344 , 0.001155 , आणि, 0.010033 .

१४९. (१२१) कलमापासून असे कळले, कीं दोन अपूर्णाक समच्छेद असतील, तर पहिल्याचा अंश दुसऱ्याचे अंशाने भागल्याने, पहिला अपूर्णाक दुसऱ्याने भागला जातो. मनांत आण कीं, 17.762 यांस 6.25 यांणीं भाग्याचे आहे. हे दोन अपूर्णाक (१३८) प्रमाणे समच्छेद झाल्यावर, 17.762 आणि 6.25 , अथवा $\frac{17762}{1000}$ आणि $\frac{6250}{1000}$ असे आहेत. यामुळे त्यांचा भागाकार $\frac{17762}{6250}$ आहे, तर यास मागील रिती-प्रमाणे दशांश अपूर्णाकरूप दिले पाहिजे. ही कृति विस्ताराने या पुढील प्रमाणे आहे; छेदस्थळीचीं शून्ये सोड, आणि अंशावर किंवा वेगळाल्ये वजावाक्यावर हवीं तेवढीं शून्ये मांड, नंतर (१४५) प्रमाणे भागाकार कर.

५२६२
 ५०००
 २६२०
 २५००
 १२००
 ६२५
 ५७५०
 ५६२५
 १२५०
 १२५०
 ०

छेकिलें. तर भागाकारांत पांच द-
 शांश स्थळें कर, ह्यणजे १७७६२
 यांस ६२५ यांणीं भागण्यानें,
 २८४१९२ असा भागाकार होतो.

१५०. एक दशांश अपूर्णाक दु-
 सऱ्ये दशांश अपूर्णाकानें भागण्याची
 ही पुढील रीति आहे; भाज्य आणि भा-
 जक यांमध्ये जांत दशांशस्थळें थोडीं
 आहेत, त्यावर शून्यें मांडून त्या दोहों-
 चीं दशांशस्थळें वरोबर कर. नंतर
 जितकीं दशांशस्थळें पाहिजेत, तितकीं
 शून्यें भाज्यावर मांडून दशांशचिन्ह

काढून सरळ भागाकाराप्रमाणें कृति कर. भागाकारांत इच्छिलेलीं दशां-
 शस्थळें घे.

जसे, ६७१७३ यांस ०१४ यांणीं तीन दशांशस्थळांवावेतो भागा-
 याचें असेल, तर आरंभीं या दोहोंत चार दशांशस्थळें असायासाठीं
 ६७१७३ आणि ०१४० असें मांडावें. भागाकारांत तीन दशांशस्थळें
 असायासाठीं, ६७१७३ यांवर तीन शून्यें मांडावीं लागतात; परंतु असें
 दिसतें कीं ०१४० या भाजकावर एक शून्य आहे, ह्यणून तें शून्य छे-
 कून ६७१७३ यावर दोन शून्यें मांडावीं. दशांशचिन्ह काढून,
 ६७१७३०० यांस ०१४ किंवा १४ यांणीं चालत्ये रितीनें भाग, ह्यणजे
 त्यावरून भागाकार ४७९८०७ आणि बाकी २ येतात. यावरून
 ४७९८०७ हें उत्तर आहे.

सामान्यतः रीति हीच आहे; भाज्यांत भाजकापेक्षां जितकीं अधिक
 दशांशस्थळें आहेत, तितकीं भागाकारांत दशांशस्थळें असावीं. परंतु जे-
 व्हां भाजकापेक्षां भाज्यांत अधिक दशांशस्थळें असतील, आणि भाज्या-
 वर शून्यें मांडावीं लागतात, या पक्षाशिवाय वरची रीति निरुपयोगी हो-
 ती. पूर्वी सांगितलेली रीति याप्रमाणेंच आहे, आणि तीत किती द-

B4

A3

विषयी जी रीति सांगितली आहे, ती शिकणाराने पुरतेपणी माहित करून घ्यावी, आणि दशांशचिन्हाचे स्थळ तर्काने काढण्याचा अभ्यास करावा. जसे, $२६ \cdot ११९ \div ७ \cdot २४३६$ यांचे भागाकारांत दशांशचिन्हाचे पूर्वी एक अंक आहे, हे उघड आहे आणि $२६ \cdot ११९ \div ७ \cdot २४ \cdot ३६$ यांचे भागाकारांत दशांशचिन्हाचे उजव्येकडे सर्व अर्थबोधक अंकांचे पूर्वी एक शून्य आहे.

अथवा ही पुढील रीति कामांत आणावी; भाजकाचे दशांशचिन्ह पुसून टाक, आणि भाजकांत जितकी दशांशस्थळे असतील तितकी स्थळे भाज्याचे दशांश चिन्ह उजव्येकडे सार, आणि स्थळे पुरत नसलीं, तर भाज्यावर शून्ये मांड. नंतर सरळ भागाकाराप्रमाणे भागून, शेवटील कामांत घेतलेल्या प्रत्येक दशांशस्थळाविषयी भागाकारांत एक एक दशांशस्थळ कर, जसे, $१७ \cdot ३१४$ हे $६१ \cdot २$ यांणी भागणे तर $१७३ \cdot १४$ भागिले ६१२ असे होते, आणि दशांशचिन्ह भागाकारांत डाव्येकडील पहिल्या अंकाचे पूर्वी असावे. परंतु $१७ \cdot ३१४$ भागिले $६६१७ \cdot ५$ हे, दशांश चिन्ह सारल्यावर $१७३ \cdot १४$ भागिले ६६१७५ असे होतात; आणि जापेक्षां भागाकारांत पहिला एक अंक येण्याचे पूर्वी, $१७३ \cdot १४००००$ यांतून तीन दशांशस्थळे घ्यावी लागतात, ह्मणून भागाकारांतील पहिला अर्थबोधक अंक दशांशाचा तिसऱ्या स्थळावर येतो, अथवा भागाकार ००२ याप्रमाणे होतो.

उदाहरणे.

$$\frac{३१}{००२५} = १२४०, \quad \frac{०००६२}{०६४} = ०००९६८७५.$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

$$\frac{१५ \cdot ००६ \times १५ \cdot ००६ - ००४ \times ००४}{१५ \cdot ०१} = १५ \cdot ००२ \text{ आणि } \frac{०१ \times ०१ \times ०१ + २ \cdot ९ \times २ \cdot ९ \times २ \cdot ९}{२ \cdot ९१} \\ = २ \cdot ९ \times २ \cdot ९ - २ \cdot ९ \times ०१ + ०१ \times ०१ \text{ हे दाखीव!}$$

६ दशांश स्थळांपावेतो हे पुढील अपूर्णांक काय आहेत? $\frac{१}{३ \cdot १४१५३}$
 $\frac{१}{२ \cdot ७१८२८१८}$ आणि $\frac{३६५}{१८३४९}$

उत्तर. $३१ \cdot ८३१०$, $३६७ \cdot ७७९$, आणि $१९८९ \cdot २०९२२१$.

पुढील श्रेण्यांचे दहापदांची ५ दशांश स्थळेपर्यंत किंमत काढ.



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \text{इत्यादि} = 2.92095.$$

$$\frac{60}{61} + \frac{61}{62} + \frac{62}{63} + \frac{63}{64} + \dots \text{इत्यादि} = 9.66266.$$

१५१. आतां, व्यर्थ श्रम पडूं नये अशी दशांश परिमाणांशीं गणित करण्याची रीति दाखवितो. आरंभीं, मनांत आण, कीं भलत्ये कांहीं मैलांचें मोज घेऊन, त्यांची संख्या १७'८४६२१७ अशी झाली. या लांबींत किती मैल आहेत असें विचारिलें असतां, आणि अंश भागावांचून केवळ सुमाराचें उत्तर इच्छिलें असलें, तर बहुतकरून १७ मैल आहेत असें सांगतां येईल. जरी लांबीतील पूर्ण मैलांची संख्या ही आहे, तरी मैलांचे जवळ जवळ ही संख्या नाही; कां कीं लांबी १७ मैल आणि ८ दशांशापेक्षां अधिक आहे, ह्मणून ती साडेसत्रापेक्षां अधिक आहे तर ती लांबी १८ मैल आहे असें झटलें असतां, १७ मैल ह्मणण्यापेक्षां खरी आहे. ही संख्या अधिक आहे, तथापि हिचा अधिकपणा १७ मैलांचे कमीपणा इतका नाही, ह्मणजे त्यांत अर्ध मैलाइतकी चूक नाही. पुनः जर, ती लांबी मैलाचे दशांशाचे आंत इच्छिली असेल, तर १७'८ हे उत्तर आहे; कां कीं जरी हे उत्तर ०४६२१७ इतक्यानें कमी आहे, तथापि जितक्यानें १७.९ अधिक आहेत, तितक्यानें तें कमी नाही; आणि दशांशाचें अर्ध, अथवा $\frac{1}{20}$ यापेक्षां त्यांत चूक कमी आहे. पुनः जर, ती लांबी मैलाचे शतांशाचे आंत इच्छिली असेल, तर १७'८५ हे १७'८४ यापेक्षां खरे आहेत, कां कीं ००६२१७ इतक्यानें १७'८४ कमी आहेत, ह्मणजे हे ०१ याचे अर्धापेक्षां अधिक आहेत; आणि यामुळे १७'८४ + ०१ हे १७'८४ यापेक्षां अधिक खरे आहेत. यावरून ही सामान्य रीति उत्पन्न होती; कामापुरतीं अमुक दशांशस्थळांची संख्या सांगितली, तर तिचे उजव्येकडचे सर्व बाकी दशांश टाक, परंतु टाकलेल्यांतील डाव्येकडचा पहिला अंक ५ चे बरोबर किंवा त्यापेक्षां अधिक असेल, तर घेतलेल्यांतील उजव्येकडचा पहिला अंक १ ने वाढवावा.

अनुक्रमाने एकएक स्थळ सोडून, दशांशाचा संक्षेप करण्याचीं हीं पुढील उदाहरणे आहेत.

253212

B4

A3

१९९१९, १९९२, १९९, २००, २०

१५२. गुणक आणि भाजक इत्यादि यांत जितकी खरी दशांश स्थळें असतात, त्यांपेक्षा अधिक दशांश स्थळें, गुणाकार आणि भागाकार इत्यादि कृतींचे उत्तरांत आणण्याचें प्रयोजन नाही. मनांत आण, कीं ९९८ आणि ८९६ ह्या दोन, इंचांचा लांब्या दोन दशांश स्थळांपावेतो बरोबर मोजल्या आहेत, अथवा एक इंचाचे शतांशाचे आंत मोजल्या आहेत. जी लांबी ९९८ ह्यटली तिची खरी किंमत ९९७५ आणि ९९८५ यांचेमध्ये कोठेहि असेल, आणि ८९६ इची खरी किंमत ८९५५ आणि ८९६५ यांचे मध्ये कोठेहि असेल. यामुळे खऱ्या लांब्या दाखविणाऱ्या जा संख्या, त्यांचा गुणाकार, ९९७५ × ८९५५ आणि ९९८५ × ८९६५ यांचे मध्ये येईल, ह्मणजे गुणाकारांत तीन दशांश स्थळें घेतल्याने, ८९३२६ आणि ८९५१६ यांचे मध्ये येईल. पहिल्या सांगातल्या संख्यांचा खरा गुणाकार ८९४२०८ आहे. तर, असे दिसते, कीं या पक्षांत गुणाकारांतील ८९ या पूर्णाकावर आणि कदाचित्, दशांशाचे पहिल्ये स्थळावर मात्र भरंवसा ठेवतां येतो. याचें कारण हेंच, कीं ८९६ यांचे मोजण्यांत केवळ दशांशाचे तिसऱ्ये स्थळावर चूक येती, तथापि ती चूक गुणाकार करण्याने ९९७५ इतकी, अथवा जवळ जवळ १० वेळा वाढली जाती, आणि यामुळे ती दशांशाचे दुसऱ्ये स्थळाचे अंकास गुणकरिती. अशा कोणत्याहि गुणाकारावर कोठपर्यंत भरंवसा ठेवावा, हे ह्या पुढील सरळ रितीपासून कळेल. गुणक दाखवायासाठीं अ, आणि गुण्य दाखवायासाठीं ब घे; हे जर केवळ दशांशाचे पहिल्ये स्थळापावेतो खरे आहेत, तर त्यांचा गुणाकार बरोबर खरा होण्यास $\frac{अ+ब}{२०}$ * यांचे आंत यावा; जर ते अंक दशांशाचे दोन स्थळांपावेतो खरे आहेत, तर त्यांचा गुणाकार बरोबर खरा होण्यास, $\frac{अ+ब}{२००}$ यांचे आंत यावा; आणि जर तीन स्थळांपावेतो, तर $\frac{अ+ब}{२०००}$ यांचे आंत यावा; आणि याप्रमाणें पुढेहि. जसे, वरचे उदाहरणांत, ९९८ आणि ८९६ ह्या दोन संख्या दोन

* हे बरोबरच खरें नाही, परंतु कामापुरतें जवळ जवळ खरें आहे.



तर भागाकार ०९४७ हातो, आणि त्यांचा गुणाकार ८९४२०८
 आहे, हा तर खरा बरोबर होण्यास ०९४७ यांचे आंत आहे. जर
 ८९४२०८ हे ०९४७ यांणी वाढविले, आणि कमी केले, तर
 ८९५१५५ आणि ८९३२६१ असे येतात, ह्यणजे हे अंक गुणाका-
 राचा दोन मर्यादा आहेत, आणि त्यांचे मध्ये गुणाकार यावा. याव-
 रून, असे दिसते, कीं या पक्षां दशांशाचे पहिल्ये स्थळावर भरंवसा
 ठेवतां येत नाहीं, कां कीं जर ते पहिले स्थळ खरे आहे, तर (१५१)
 प्रमाणें ०५ इतकी चूक येणार नाहीं; आणि यांत ०९ इतकी, किंवा
 हिजवेक्षां अधिक चूक अवश्य घडती. जर दिलेले अंक खरे आहेत,
 तर त्यांचा गुणाकारहि खरा आहे असे ह्यणण्याचें अगदीं प्रयोजन नाहीं,
 आणि दिलेले अंक केवळ अमुक दशांश स्थळापर्यंत खरे आहेत, असें
 या कलमापासून दिसते हें ह्यणण्याचें प्रयोजन नाहीं. तर याविषयीं
 रीति या पुढीलप्रमाणें आहे; गुण्य आणि गुणक यांची वेरीज करून
 तिचें अर्ध कर, नंतर गुण्य अथवा गुणक यांत जितकीं दशांशस्थळें
 खरी असतील, तितकीं स्थळें दाव्येकडे त्या अर्ध वेरिजेत दशांश चिन्ह
 सार; तर यावरून जें उत्तर येईल त्याचे आंत गुणाकारावर भरंवसा
 ठेवतां येईल. भागाकाराविषयी ही पुढील रीति आहे; गुण्य आणि
 गुणक यांचे जागीं भाज्य आणि भाजक घेऊन वरचे रितीप्रमाणें कृति
 कर, नंतर जें येईल त्यास भाजकाचे वर्गानें भाग; जो भागाकार येईल
 त्याचे आंत दिलेले भाज्य आणि भाजक यांचे भागाकारावर भरंवसा
 ठेवतां येईल. उदाहरण, १७३२४ यांस ५३८०९ यांणी भागा-
 याचें असेल, आणि त्या दोन्ही संख्या तीन दशांश स्थळापर्यंत खऱ्या
 असतील, तर त्यांची अर्ध वेरीज ३५५६६ होईल, आणि ती वरचे
 रितीप्रमाणें ०३५५६६ होईल, ती ५३८०९ यांचे वर्गानें अथवा
 सुमारानें, ५० चे वर्गानें, अथवा २५०० यांणी भागायाची आहे. हा
 भागाकार ००००२ यापेक्षा कांहीं कमी आहे, ह्यणून १७३२४ आणि
 ५३८०९ यांचे भागाकारावर चार दशांशस्थळें पर्यंत भरंवसा ठेवतां येतो.

१५३. दोन दशांश अपूर्णांक परस्पर असे गुणायाचे आहेत, कीं
 अनुपयोगी दशांश सोडून गुणाकारांत कांहीं सांगितलेलीं मात्र दशांश
 स्थळें रहावीं. या पुढील सांगितलेल्या संकेतावरून, पहिल्यानें, स्पष्ट

B4

A3

१२३४ हे ४३२१ असे मांडिले, आणि जर कृति करलेसमयी प्रत्येक ओळ एक स्थळ डाव्येकडे न मांडितां, तशीच उजव्येकडे मांडिली तर चालेल, जसे, या पुढील उदाहरणांत;

२२२१	२२२१
१२३४	४३२१
८८८४	२२२१
६६६३	४४४२
४४४२	६६६३
२२२१	८८८४
२७४०७१४	२७४०७१४

मनांत आण, कीं ३४८८४१४ यांस ५१३०७४२ यांणीं गुणा-याचें आहे, असें कीं गुणाकारांत चार दशांशस्थळे मात्र रहावीं. वर सांगितल्या रितीप्रमाणें गुणकाचे अंक उलटे फिरवून मांडिले, तर या पुढील प्रमाणें होईल.

३४८८४१४	
२७४०७१५	
१७४४२०७०	
३४८८४१४	
१०४६५२४	२
२४४१८	८९८
१३९५	३६५६
६९	७६८२८
१७८९८१५२२	२३१८८

डाव्येकडील पहिलीं चार दशांशस्थळें, आणि जा ओळीपासून तीं चार दशांशस्थळें झालीं, त्या दोहोंस एक्ये उभ्ये रेघेनें दुसऱ्यां-पासून वेगळीं कर. संक्षेप रीति करलेसमयीं स्पष्ट आहे, कीं या पुढील गोष्टी मात्र लक्षांत आणिल्या पाहिजेत. पहिल्यानें, जें सर्व उभ्ये रेघेचे डाव्ये वाजूस आहे, त्याचा

विचार केला पाहिजे; दुसऱ्यानें, उभ्ये रेघेचे उजव्येकडील पहिल्ये ओळीं-तून जे हातचें घेण्याचे आहेत, त्यांचा विचार केला पाहिजे. उभ्ये रेघेचे डाव्येकडील पहिली ओळ पाहिली असतां, ४, ४, ८, ५, ९, हे अंक दि-सतात, त्यांतून पहिले ४ हे ४×१' यापासून होतात, दुसरे ४ हे १×३' यापासून, ८ हे ८×७' यापासून, ५ हे ८×४' यापासून आणि

† १ हा गुणक अंक आहे हें जाणायासाठीं, १' अशें रूपानें मांडिला आहे.



९ हे ४×२ यापासून होतात. गुण्य आणि त्याचे खाली गुणक उलटून मांडिल्याने या पुढीलप्रमाणे होते, ह्मणजे,

३४८८४१४

२४७०३१५

दशांशाची पहिली चार स्थळे उत्पन्न होण्यासाठी, गुणकाचे जा अंकाने गुण्यांतील पहिला अंक गुणावा लागतो, ते दोन्ही अंक एकाखाली एक येतात. आणि एथे पहा, कीं $५१ \cdot ३०७४२$ या गुणकांतील एक स्थळाचा अंक १, हा गुण्यांतील चवथ्या दशांशस्थळीचे ४, या अंकाखाली येतो. जर उभे रेषेचे उजव्येकडून काहीं हातचे घेण्याचे नसतील, तर ही पुढील रीति लागू होईल; गुणकाचे अंक उलटे फिरव, आणि ते गुण्याखाली मांड, अशा रीतीने कीं, गुण्यांतील जे शेवटील दशांशस्थळ ठेवण्याचे आहे, त्याचा खाली गुणकांतील एकमस्थळीचा अंक यावा; गुणकांतील जा अंकांवर गुण्याचे अंक नसतील त्यांवर शून्ये मांड; चालखे रीतीप्रमाणे गुणाकार कर, परंतु गुणकाचा जा अंकाने गुणायाने आहे, त्याचा वरचा गुण्यांत जे अंक आहेत, त्यापासून गुणण्यास प्रारंभ कर, उजव्येकडील अंकांस मनांत आणू नको; गुणाकाराचे ओळीचे पहिले अंक एकाखाली एक मांड. उभे रेषेचे उजव्येकडून डाव्येकडे हातचे नेतां यावे, यासाठी या रीतींत फेर करायास, या पुढील दोन गोष्टींवर लक्ष दिले पाहिजे, पहिल्याने गुणाकाराचा ओळी करतानां जे हातचे घ्यावे लागतात त्यांवर लक्ष दिले पाहिजे, दुसऱ्याने उभे रेषेचे उजव्येकडील पहिल्ये ओळीचे बेरिजेपासून जे हातचे घ्यावे लागतात, त्यांविषयी लक्षांत आणिले पाहिजे. गुणकांतील प्रत्येक अंकाने त्याचे वरल्या उजव्येकडील पहिल्या अंकास गुणावे, आणि गुणाकारांतील एकचा अंक न मांडिता, हातचे दुसऱ्या अंकाचा गुणाकारांत मिळवावे, असे केल्याने, वर सांगितलेली पहिली गोष्ट सिद्ध होती. परंतु (१५१) व्हे कलमांतील मूळकारणावरून ५ पासून १५ पर्यंत हातचा १, १५ पासून २५ पर्यंत हातचे दोन, इत्यादि घेतल्याने, ह्मणजे, जवळचे दशक अंक हातचे घेतल्याने, वरचा दोन ही गोष्टीची व्यवस्था होती. जसे, ३७ आले असतां, हातचे ४ घ्यावे, कीं कीं ३७ हे ३० पेक्षा ४० चे जवळ आहेत. यावरून दशांशाचे शेवटील स्थळ बरोबर येणार नाही, परंतु खरे उत्तर घेण्या-

करितां, जितकीं दशांशस्थळें असावीं, त्यांपेक्षां एक स्थळ अधिक घेऊन प्रारंभ केलां असतां, चूक येणार नाहीं. तर यावरून ही पुढील रिती निघसे.

१५४. दोन दशांशअपूर्णांकांचे गुणाकारांत दशांशाचीं न स्थळें येण्याकरितां याप्रमाणें कर.

पहिल्यानें. गुणकाचे अंक उलटे फिरवून दशांशबिंदू सोडून गुण्याखालीं गुणक मांड, असे कीं गुण्याचे न दशांश स्थळांखालीं गुणकाचा एक स्थळींचा अंक येईल, आणि असें करितांना गुणकाचे प्रत्येक स्थळावर गुण्याचा अंक नसला, तर त्याचे जागीं शून्यें मांड.

दुसऱ्यानें. चालीप्रमाणें गुणाकार कर, परंतु गुणकांतील प्रत्येक अंकावर गुण्यांतील जो अंक येतो, त्याचे उजव्येवाजूचे अंकानें गुणाकार करायास आरंभ कर; ह्या गुणाकाराचा अंक मांडू नये, परंतु त्याचे जवळचा दशक हातचा घेऊन पुढें चाल.

तिसऱ्यानें. सर्व ओळींचे उजव्येकडील पहिले अंक एकाखालीं एक मांड; नंतर चालीप्रमाणें बेरीज घे; आणि दशांशासाठीं उजव्येकडे न स्थळें घे.

१३६४०७२ यांस १३०६०९ यांणीं गूण, असें कीं गुणाकारांत ७ दशांशस्थळें होतील.

$$\begin{array}{r}
 १३६४०७२००० \\
 \underline{९०६०३१} \\
 १३६४०७२००० \\
 ४०९२२१६०० \\
 ८१८४४३२ \\
 \underline{१२२७६६} \\
 १७८१६००७९८
 \end{array}$$

या पुढील उदाहरणांत वरचा दोन ओळीं गुण्य आणि गुणक आहेत; आणि गुणाकारांत जितकीं दशांश स्थळें ठेवायाचीं आहेत तीं उत्तरांपासून कळतील.

४४७१६१८	३३१६६२४८	३४६४१०१६
३७७१९२१४	१४१४२१३६	१७३२५०८
<u>३७७१९२१४</u>	<u>०३३१६६२४८</u>	<u>३४६४१०१६०</u>
८१६१७४४	६३१२४१४१	८०५२३७१
१५०८७६८६	३३१६६२५	३४६४१०१६०
१५०८७६८	१३२६६५०	२४२४८७११२
२६४०३४	३३१६६	१०३९२३०५
३७७२	१३२६६	६९२८२०
२२६३	६६३	१७३२०५
३८	३३	२७७१
३०	१०	६००१५८३७३
<u>१६८६६५९१</u>	२	
	४६९०४१५	

(१४३) कलमापासून अभ्यासाकरिता दुसरी उदाहरणे मिळतील.

१५५. भागाकाराचे उदाहरणाकरिता, भलया काही दोन संख्या घे, जसे, १६८०४३७९२१ आणि ३१४२, यांतून पहिली संख्या काही इच्छिल्या स्थळांपावेतो, जसे, एथे ५ स्थळांपावेतो दुसऱ्या संख्येने भाग. ह्मणजे याप्रमाणे होईल;

$$३१४२ \overline{) १६८०४३७९२१ (५३४८३०} \\ १५७१०$$

(अ)	१०९४३
	९४२६
	<u>१५१७७</u>
	१२५६८
२६०९	२६०९९
२५१४	२५१३६
९५	९६३२
९४	९४२६
१	<u>२०६१</u>

आतां (१५३) प्रमाणे, शेवटचे २६०१ या बाकीतील २ याचे उ

जव्येकडेस जे अंक येतात, त्यांस उभ्ये रेघेने दुसऱ्यांपासून वेगळे कर. गुणाकाराप्रमाणे यांत, जे उभ्ये रेघेचे डाव्येकडे आहेत, ते सर्व वरचे (अ) प्रमाणे संक्षेपरितीने निघतील. गुणाकाराचे संक्षेपरितीविषयी एवढे वर उघड करून सांगितले, आतां एथे अधिक विस्ताराने सांगण्याचे प्रयोजन नाही; तर ह्या पुढील रितीनेहि निर्वाह होईल; एक दशांशअपूर्णांक दुसऱ्या दशांशअपूर्णांकाने न स्थळापर्यंत भागायाचा असेल; तर चालत्ये रितीने एक पायरीपर्यंत भागाकार कर, आणि (१५०) प्रमाणे भागाकार कोणत्या स्थळांचा अंक आहे, त्याचा निश्चय कर; नंतर भाजकांतील अंकांचा स्थळांपेक्षा भागाकारांतील काढण्याचीं राहिलेलीं स्थळे कमी असतील, तोंपर्यंत चालत्ये रितीने भागाकार करित जा; जर भागाकार करण्याचे आधींच असे असेल, तर चालीप्रमाणे भागाकार करित पुढे जाऊं नको. वजावाकीवर शून्य किंवा अंक मांडून ये, परंतु त्याचे बदलीत भाजकाचे उजव्ये बाजूकडील एक अंक सोडून, संक्षेप भाजकाने चालीप्रमाणे एक पायरी पुढे चाल, परंतु ही गोष्ट स्मरणांत ठेविली पाहिजे, कीं या संक्षेप भाजकाचा गुणाकार करते समयीं, त्यांतून जो अंक सोडिला त्याचे जवळचा दशक, (१५४) प्रमाणे हातचा घेतला पाहिजे; याप्रमाणे भाजकांतील सर्व अंक क्रमाक्रमाने कांहीं न राहात पर्यंत सोडीत पुढे चाल. भागाकारांतील पहिल्या अंकाचे स्थळ, आणि इच्छिलेलीं दशांशस्थळे या दोन्ही गोष्टी आरंभी समजतात, यावरून भागाकारांत किती अंकस्थळे होतील हें कृतीचे आरंभी सांगतां येईल. भागाकारापेक्षा भाजकांत अधिक अंकस्थळे असलीं तर तीं कामांत घेण्याचे अगत्य पडत नाही; ह्मणून तीं सोडून द्यावीं. परंतु बाकी अंक (१५२) प्रमाणे नीट केले पाहिजेत; भाजकाचे डाव्येकडेस आरंभी शून्य असलीं, जसें, ००३१७८ असा दशांशअपूर्णांक भाजक असेल, तर तो अपूर्णांक $\frac{३१७८}{१००}$ या रूपाचा आहे, तर चालते रितीप्रमाणे ३१७८ यांणी भाग, नंतर भागाकारास १०० नीं गुण, अथवा दशांशचिन्ह दोन स्थळे उजव्येकडे सार. यामुळे जर ६ दशांशस्थळे इच्छिलीं आहेत, तर स्पष्ट दिसते कीं ३१७८ यांणी भागणे तर ८ स्थळे घेतलीं पाहिजेत. भागाकाराचा शेवटील अंक काढितेसमयीं, जवळचा अंक असेल तो घेतला पाहिजे, जसें, या पुढील उदाहरणांतून दुसऱ्या उदाहरणांत दाखविले आहे.

इच्छिलेलीं स्थळें,	२	८
भाजक,	४१४३२	३१४१५९२७
भाज्य,	६७३१४८९	२७१८२८१८०
	४१४३२	२५१३२७४१६
	<hr/>	<hr/>
	२५८८२८	२०५००७६४
	२४८५९२	१८८४९५५६
	<hr/>	<hr/>
	१०२३७*	१६५१२०८
	८२८६	१५७०७९६
	<hr/>	<hr/>
	१९५१	८०४१२
	१६५७	६२८३२
	<hr/>	<hr/>
	२९४	१७५८०
	२९०	१५७०८
	<hr/>	<hr/>
	४	१८७२
	४	१५७१
	<hr/>	<hr/>
	०	३०१
		२८३
		१८
		१९

भागाकार, १६२४*७१ *८६५२५५९६
(१४३) आणि (१५०) कलमांतून वसरीं उदाहरणें मिळतील.

सातवा भाग.

वर्गमूळ काढण्याविषयीं.

१५६. पूर्वी (६६) कलमांत असें सांगितलें आहे, कीं कोणतीहि संख्या त्याच संख्येनें गुणिली, तर त्या गुणाकारास त्या संख्येचा वर्ग झणतात. जसें, १६९, अथवा १३×१३ हा १३ चा वर्ग आहे. उलटे

* भाज्यातील सोडिलेला अंक ९ आहे, याकरिता या जागीं ६ चे ठिकाणीं ७ मांडिले आहेत (१५१) प्रमाणें.

पक्षाने, १३ यांस १६९ यांचे वर्गमूळ झणतात, आणि ५ हे २५ यांचे वर्गमूळ आहे; आणि जेव्हां एक संख्या त्याच संख्येने गुणून तो गुणाकार दुसऱ्या संख्येचे बरोबर आहे, तर पहिली संख्या दुसरे संख्येचे वर्गमूळ आहे. $\sqrt{\text{अथवा}\sqrt{\quad}}$ या चिन्हांने वर्गमूळ दाखवितात; जसे, $\sqrt{२५}$ याचा अर्थ पंचविसांचे वर्गमूळ, अथवा ५ होतो. $\sqrt{१६+९}$ हे १६+९ यांचे वर्गमूळ किंवा ५ आहे, आणि अशे वर्गमूळ रूपाचा, $\sqrt{१६}+\sqrt{९}$ या रूपाशी गोंधळ करू नये, कां की याचा अर्थ ४+३ अथवा ७ आहे.

१५७. वर सांगितल्या व्याख्यानापासून ही पुढील समीकरणे स्पष्ट कळतील;

$$\sqrt{\text{अ}} \times \sqrt{\text{अ}} = \text{अ}$$

$$\sqrt{\text{अअ}} = \text{अ}$$

$$\sqrt{\text{अब}} \times \sqrt{\text{अब}} = \text{अब}$$

$$(\sqrt{\text{अ}} \times \sqrt{\text{ब}}) \times (\sqrt{\text{अ}} \times \sqrt{\text{ब}}) = \sqrt{\text{अ}} \times \sqrt{\text{अ}} \times \sqrt{\text{ब}} \times \sqrt{\text{ब}} = \text{अब}$$

यावरून

$$\sqrt{\text{अ}} \times \sqrt{\text{ब}} = \sqrt{\text{अब}}$$

१५८. कोणत्याही संख्येचा वर्ग होतो, झणून त्या संख्येचे वर्गमूळहि आहे असा निश्चय नाही; जसे, ५ हे जरी त्याणीच गुणिले जातील, तथापि, तिणे तीच गुणिल्याने ५ होतील अशी कांहीं संख्या नाही. बीजगणितांत ही गोष्ट सिद्ध झाली आहे, कीं त्याणे तोच गुणिला असतां गुणाकार पूर्णांक येईल असा कोणताहि अपूर्णाकां नाही, आणि कितीहि उदाहरणे घेतलीं तरी ही गोष्ट खरी आहे असे कळेल; यामुळे ५ यांस नुसता पूर्णांक किंवा नुसता अपूर्णांक असे एकहि वर्गमूळ नाही. झणजे त्यांस निःशेष वर्गमूळच नाही, असे असतां असे अपूर्णांक काढण्याचा रिती आहेत, कीं जांचे वर्ग हवे तेवढे ५ यांचे अवळ होतील, परंतु बरोबर ५ होणार नाहीत. त्यांतील एकारिती पासून $\frac{१५१२७}{६७६५}$ येतात, झणजे यांचा वर्ग $\frac{१५१२७}{६७६५} \times \frac{१५१२७}{६७६५}$, अथवा $\frac{२२८०२६१२९}{४५७६५२२५}$ होतो; यांचे आणि ५ यांचे अंतर $\frac{४५७६५२२५}{४५७६५२२५}$ इतके मात्र आहे, झणजे, ते अंतर ००००००१ यापेक्षा कमी आहे; यावरून अंक गणित आणि बिजगणित यांतील तर्क करायाम, $\sqrt{५}$ हे

† या ठिकाणी खऱे जातिचा अपूर्णांक, जसे $\frac{७}{८}$, अथवा $\frac{१५}{११}$ असा असावा, परंतु जे अपूर्णाकरूपांत असून खरेपणाने पूर्णांक आहेत, जसे $\frac{१०}{५}$, अथवा $\frac{२७}{३}$, असा नसावा.

कामांत घेतां येतील, परंतु कोणतेहि कृत्य वहिवाटींत आणावें लागेल, तेव्हां जा अपूर्णाकाचा वर्ग ५ यांचे जवळ असेल, त्यास $\sqrt{५}$ यांचे जागीं कामांत घेतलें पाहिजे. आणि जसें जसें खरेपणाचें अगत्य असेल, तसा तसा अपूर्णाक निवडला पाहिजे. कां कीं काहीं कामासाठीं $\frac{१२३}{४५}$ हा अपूर्णाक पुरेल, कां कीं याचा वर्ग आणि ५ यांचे अंतर $\frac{३०२५}{४५}$ इतकें मात्र आहे; दुसऱ्या कामासाठीं, वर सांगितलेला अपूर्णाक घ्यावा लागेल; अथवा कदाचित् जाचा वर्ग त्यापेक्षां ५ यांचे अधिक जवळ जवळ होईल तो घ्यावा लागेल. जा संख्येचें बरोबर वर्गमूळ आहे, तें काढायाची, अथवा जीस वर्गमूळ बरोबर नाही, त्याविषयीं जाचा वर्ग हवा तेवढा तिचे जवळ येईल, असा अपूर्णाक काढायाची रीति आतां दाखवितों. पुढील गोष्ट स्पष्ट आहे, तथापि आरंभीं सांगितलें पाहिजे, कीं दोन संख्यांतून मोठे संख्येचा वर्ग मोठा आहे; आणि कोणतीहि संख्या दुसऱ्या दोन संख्यांचेमध्ये असली, तर तिचा वर्ग त्या दोन संख्यांचे वर्गांमध्ये येतो.

१५९. क्ष ही एक संख्या आहे, आणि तीजमध्ये कांहीं भाग आहेत जसें अ, ब, क, ड, हे चार भाग; ह्मणजे या पुढीलप्रमाणें,

$$\text{क्ष} = \text{अ} + \text{ब} + \text{क} + \text{ड}$$

(६८) प्रमाणें त्या संख्येचा वर्ग पुढीलप्रमाणें आहे,

$$\text{अअ} + २\text{अ(ब+क+ड)}$$

$$+ \text{बब} + २\text{ब(क+ड)}$$

$$+ \text{कक} + २\text{कड}$$

$$+ \text{डड}$$

या क्रमांत वेगवेगळ्या भागांचे संख्येचा वर्ग करायाची रीति याप्रमाणें सांगितली आहे; प्रत्येक भागाचा वर्ग करून, त्याचे उजव्येकडचे सर्व निरनिराळे भाग त्याचे दुपटीनें गुण, नंतर या वेगळाल्या गुणाकारांची बेरीज करून, त्या सर्व संख्येचा वर्ग होईल. वर आलेल्या पद्धतीमध्ये २अ यांस ब, क, आणि ड, या प्रत्येकानें निरनिराळें गुणून त्यांची बेरीज न घेतां, २अ यांस त्यांचे सर्व पुढल्ये भागांचे बेरीजनें गुणिलें आहे, ह्मणजे (५२) प्रमाणें हीं दोन्हीं सारिखीच आहेत, आणि एका संख्येचे निरनिराळे भाग कसेहि मांडिले असतां, त्यांची बेरीज त्या संख्येचे बरोबर आहे, ह्मणून त्या भागांचा क्रम उलटा

मांडितां येईल, ह्यणजे, श्रेवठचे पद पहिल्यानें मांडितां येईल; आणि इत्यादि असें केल्यानंतर वर्ग करण्याची ही पुढील रीति आहे; प्रत्येक भागाचा वर्ग करून त्याचे डाव्येकडचे सर्व निरनिराळे भाग त्याचे दुपटीनें गुण. यावरून वर्गमूल काढायास एक उलटीरीति सोईनें सांपडती. ती ही आहे; न संख्येचें वर्गमूल काढायाचें असेल, तर कांहीं अ संख्या घे, आणि न संख्येतून अ संख्येचा वर्ग वजा होतो किंवा नाही हें पहा; जर वजा होईल, तर वजा करून बाकी काढ, नंतर दुसरी एक ब संख्या घे, तर ब चा वर्ग, आणि पूर्वी घेतलेली अ संख्या ब चे दुपटीनें गुणून तो गुणाकार, हीं दोन्हींवर आलेल्या बाकींतून वजा होतील किंवा नाही हें पहा; जर वजा होतील, तर वजा करून दुसरी बाकी काढ. नंतर तिसरी एक क संख्या घे, तर क चा वर्ग, आणि अ+ब यांस क चे दुपटीनें गुणून तो गुणाकार, हीं दोन्हीं वरचे दुसऱ्ये बाकींतून वजा होतील तर पहा; याप्रमाणे जोपर्यंत बाकी कांहीं राहाणार नाही, तोपर्यंत कर, अथवा कोणताही नवा भाग १ इतका लहान घेऊन त्याशीं कृति केली असतां, पूर्व बाकींतून वजा करितां येत नाही, तोपर्यंत कृति कर. यांतून पहिल्यापक्षीं अ, ब, क, इत्यादींची बेरीज इच्छिलें वर्गमूल आहे; दुसऱ्यापक्षीं वर्गमूल नाही.

१६०. उदाहरण, मनांत आण कीं २०२५ यांचें वर्गमूल जाणायाची इच्छा आहे. पहिला भाग २० घेतला, तर २० यांचा वर्ग ४००, हे २०२५ यांतून वजा करून पहिली बाकी १६२५ निघती. पुनः दुसऱ्या भागासाठीं २० घेतले, तर यांचा वर्ग आणि पहिला भाग २० यांचे दुपटीनें गुणून याप्रमाणे होतें, ह्यणजे $२० \times २० + २ \times २० \times २०$, अथवा १२०० होतात; हे १६२५ या पहिल्या बाकींतून वजा करून दुसरी बाकी ४२५ निघती. तिसऱ्या भागासाठीं ७ घेतले, तर हे अधिक आहेत असें दिसतें, कां कीं $७ \times ७ + २ \times ७ \times २० + २०$, ह्यणजे ६०९ होतात, हे तर ४२५ पेक्षा अधिक आहेत. यामुळे ५ घेऊन पहा, ह्यणजे $५ \times ५ + २ \times ५ \times २० + २०$, हे बरोबर ४२५ होतात, तेणेकरून कृति संपती. यामुळे २०२५ यांचें वर्गमूल $२० + २० + ५$, अथवा ४५ आहे, हे ताडून पाहिलें असतां खरें आहे असें दिसेल; कां कीं $४५ \times ४५ = २०२५$ आहेत. पुनः, १३३४० यांचें वर्गमूल आहे कीं नाही, हे विचारिलें आहे असें मनांत आण. पहिल्या भागा-

साठी १०० घे, ह्मणजे यांचा वर्ग १०००० हा सांगितलेल्या संख्ये-
तून वजाकरून ३३४० ही पहिली बाकी निघती. दुसऱ्या भागासाठी
१० घे, तर $१० \times १० + २ \times १० \times १००$, अथवा २१०० हे पहिल्ये
बाकीतून वजाकरून, ३३४०-२१००, अथवा १२४० ही दुसरी बा-
की निघती. तिसऱ्या भागासाठी ५ घे; तर $५ \times ५ + २ \times ५ \times$
 $(१०० + १०)$, अथवा ११२५ होतात, हे १२४० यांतून वजा केले,
तर बाकी ११५ राहातात. यावरून दिसते की या पक्षांत वर्गमूळ
नाहीं; कां की चवथ्या भागासाठी केवळ एक एक घेतला, तर
 $१ \times १ + २ \times १ \times (१०० + १० + ५)$, अथवा २३१ होतात, हे तर ११५
पक्षां अधिक आहेत. परंतु सांगितली संख्या, १३३४०, ही ११५
इतक्याने कमी असती, तर प्रत्येक बाकी ११५ इतक्याने कमी अस-
ती, आणि शेवटी बाकी शून्य राहाती. यामुळे १३३४०-११५,
अथवा १३२२५ यांचे वर्गमूळ $१०० + १० + ५$, अथवा ११५ आहे;
ह्मणून विचारिलेल्या प्रश्नाचे उत्तर हेच आहे, की १३३४० यांचे वर्ग-
मूळ नाही, आणि १३२२५ ही संख्या तिचे जवळची खालची आहे,
जिचे वर्गमूळ बरोबर ११५ आहे.

१६१. बहुतकरून जे भाग घेण्यास सोईस पडतील, त्यांची सूच-
ना व्हावी असे तऱ्हेचे रूप वरचे रितीस देण्याचे मात्र राहिले आहे.
(५७) प्रमाणे स्पष्ट आहे, की जा संख्येचे उजव्येकडेस शून्ये आहेत,
जसे, ४०००, यांचे वर्गांत शून्यांची संख्या दुप्पट आहे. जसे,
 $४००० \times ४००० = १६००००००$; यामुळे, कोणतीही वर्ग संख्या,[†]
जसे ४९, तिजवर शून्यांची समसंख्या असली, जसे ४९००००, तर
ती वर्ग संख्या आहे. ४९०००० हिचे मूळ* ७०० आहे. ही गोष्ट
मनांत ठेऊन, उदाहरणाकरितां, भलती कांहीं संख्या घे, जसे ७६१७६;
यांत उजव्येकडून डाव्येकडेस दोन दोन अंकांवर खुणा करून त्यांस
वेगळे कर, याप्रमाणे शेवटी एक किंवा दोन अंक राहातपर्यंत करित
जा; जसे ७,६१,७६. ही संख्या ७,००,००, हिजपक्षां अधिक आहे,
परंतु तिचा डाव्येकडील पहिला अंक, वर्ग संख्या नाही, तिचेजवळ

† वर्ग संख्या ह्मणजे जीस वर्गमूळ आहे. जसे २५ ही वर्ग संख्या आहे, परंतु २६ ही तशी नाही.

* वर्गमूळ शब्दाचे जागी बहुतकरून संक्षेपाकरितां केवळ मूळ असें झटले आहे.

ची खालची वर्गसंख्या ४ आहे. यावरून ७,००,००, हिचे जवळ-
 ची खालची वर्गसंख्या ४,००,००, आहे यांत चार शून्ये आहेत,
 आणि तिचे वर्गमूळ २०० आहे. तर २०० हे पहिले भागक-
 रितं घे; त्यांचा वर्ग ७६१७६ यांतून वजा करून, ३६१७६ ही
 पहिली वजावाकी राहाती; आणि ७६१७६ यांचे वर्गमूळांतून, अति
 मोठे संज्ञेची अति मोठी संख्या अशाने निघाली हें स्पष्ट आहे;
 कां की ३०० ही मोठी होती, ह्मणजे तिचा वर्ग ९,००,००, हा
 ७६१७६ पेक्षा अधिक आहे; तर (१६०) कलमांतल्या उदाहरणाप्र-
 माणे, ३६१७६ या बाकीपासून दुसरा भाग निवडून काढायाचा रा-
 हिला. आतां जें वर सांगितले त्यापासून दिसते, कीं हा दुसरा भाग
 १०० एवढा होणार नाही; यामुळे त्याची अति मोठी संज्ञा दशकां-
 तील कांहीं संख्या होईल. १, २, ३, इत्यादि सरळ संख्यांचे दशक
 दाखवायासाठीं न घे; ह्मणजे नवा भाग दाखवायासाठीं १० न घे,
 यांचा वर्ग १० न × १० न, अथवा १०० न न आहे, आणि त्याची
 दुप्पट पूर्वीचे भागाने गुणून २० न × २००, अथवा ४००० न होतात;
 हीं दोन्ही मिळून ४००० न + १०० न न होतात. आतां न ची
 किंमत असी घेतली पाहिजे कीं, वरची पद्धती ३६१७६ यांपेक्षा अधिक
 होणार नाही. ३६१७६ यांत ४००० किती वेळा जातात, अथवा
 ३६ यांत ४ किती वेळा जातात, ती वेळांची संख्या नचे जागीं घे-
 ऊन पाहातां येईल. (८१) कलमांतील गोष्ट एथें लागू होती. ह्मणून
 ९ दशक किंवा ९० घेऊन पहा. तर, २ × ९० × २०० + ९० × ९०,
 अथवा ४४१००, हे वजा करायाचे आहेत, हे तर अधिक आहेत, कां
 की वरची बाकी केवळ ३६१७६ आहे. पुनः ८ दशक, किंवा ८० घेतले,
 तर २ × ८० × २०० + ८० × ८०, अथवा ३८४०० होतात, आणि हेहि
 अधिक आहेत. ७ दशक किंवा ७० घेतले, तर २ × ७० × २०० +
 ७० × ७०, अथवा ३२९०० होतात, हे ३६१७६ यांतून वजा करून
 ३२७६ ही दुसरी वजावाकी निघती. वर्गमूळाचा राहिलेला भाग अ-
 वश्य एकचा असावा. पूर्वीप्रमाणे कांहीं एकाची संख्या दाखवायासाठीं
 न घे. पूर्वीचा भाग २०० + ७० किंवा २७० असतां, जी संख्या
 वजा करायाची आहे, ती २७० × २ न + न न, अथवा ५४० न + न न
 आहे, यावरून, पूर्वीप्रमाणे, ५४० न हे ३२७६ यांपेक्षा कमी असावे,

अथवा ३२७६ यांत जितक्या वेळा ५४० जातात, अथवा (८१) प्रमाणे ३२७ यांत जितक्या वेळा ५४ जातात, त्या वेळां पेशां न अधिक नसावा. यामुळे, ६ चालतील कीं नाहीं हें पाहातों, तर यावरून $२ \times ६ \times २७० + ६ \times ६$, अथवा ३२७६ ही संख्या वजा करायास मिळाली. ही तर दुसऱ्या वजाबाकीचे बरोबर आहे, आणि तिसरी बाकी शून्य होऊन कृति संपती. यामुळे, इच्छिलें वर्गमूळ $२०० + ७० + ६$ अथवा २७६ आहे.

जा संख्या वजा करायाचा आहेत, त्या करण्याची रीति या पुढील-प्रमाणे संक्षिप्त होईल. पूर्वी काढलेल्या भागांची बेरीज दाखवायासाठीं अ, आणि नवा भाग दाखवायासाठीं न घे; तर जी वजा करायाची आहे, ती २अन+नन आहे, अथवा, (५४) प्रमाणे २अ+न गुणिला न आहे. यामुळे वजा करण्याची संख्या काढण्याची रीति हीच आहे; पूर्वीचे सर्व भागांचे बेरिजेची दुप्पट करून त्यांत नवा भाग मिळवून ती बेरीज नव्या भागाने गुणावी.

१६२. मागील कलमांतली कृति या पुढीलप्रमाणे आहे;

७,६१,७६ (२००	७,६१,७६ (२७६
४ ०० ०० ७०	४
४००) ३,६१,७६ ६	४७) ३६१
७०) ३२९००	३२९
४००) ३२७६	५४६) ३२७६
१४०) ३२७६	३२७६
६ ०	०

वरचा पहिल्या उदाहरणांत, संख्या विस्ताराने मांडिल्या आहेत; दुसऱ्या उदाहरणांत, (७९) कलमाप्रमाणे अनुपयोगी शून्ये छेकिलीं आहेत, आणि कृतिपुढें चालवून, ६१, आणि ७६ हे दोन भाग, जोपर्यंत त्यांचे खाली शून्ये येत नाहींत तोपर्यंत खाली आणीत नाहीं. मागील कलमांतली तक्के लागू होईल असे खाली एक दुसरें उदाहरण देतो.

	38,06,90,88,09 (40000)		38,06,90,88,09 (49089)
	24,00,00,0000 १०००		24
१०००००	१०६७०४४०१	४०	१०९) १०६
१०००	१०१००००००	१	१०९
१०००००	५७०४४०१		११००४) ५७०४४
१००००	४७२१६००		४७२१६
४०	१०६२००१		११०००९) १०६२००१
१०००००	१०६२००१		१०६२००१
१००००			
८०			
१			

१६३. कोणत्याहि संख्येचे वर्गमूल काढण्याची रीति;

पहिल्याने. जोंपर्यंत डाव्येकडील दोन किंवा एक अंकस्थळ मात्र राहिल, तोंपर्यंत उजव्येकडून आरंभून दोनदोन अंकांची स्थळे खुणेने निरनिराळीं कर.

दुसऱ्याने. डाव्येकडील पहिल्या भागांतल्या अंकाचे खालचा अवळचा वर्गसंख्येचे मूल काढ. हें मूल इच्छिल्या मूळाचा पहिला अंक होईल; त्याचा वर्ग पहिल्या भागांतून वजाकरून पहिली बाकी निघेल.

तिसऱ्याने. त्या बाकीचे उजव्येकडेस सांगीतल्ये संख्येचा दुसरा भाग मांडून तो पहिला भाज्य होईल.

चवथ्याने. मूळाचा पहिल्या अंकाची दुप्पट करून, ती त्या पहिल्या भाज्याचे उजव्ये कडील एक अंक सोडून त्यांत किती वेळा जाईल तें पहा, पाहिजे तर खालचे (९) प्रमाणे कर; अशांने जो भागाकार येईल, तो इच्छिलेल्या मूळाचा दुसऱ्या अंकस्थळीं मांड; यास पहिल्या अंकाचे दुपटीचे उजव्ये कडेस मांडून त्यास पहिला भाजक ह्मण.

पांचव्याने. पहिला भाजक मूळाचे दुसऱ्ये अंकाने गुण; जर तो गुणाकार पहिल्या भाज्यापेक्षां अधिक असेल, तर असा केलेला गुणाकार जोंपर्यंत पहिल्या भाज्यापेक्षां कमी येईल, तोंपर्यंत मूळाचे दुसऱ्ये स्थळीं आणि भाजकाचे उजव्ये कडेचे स्थळीं त्यापेक्षां लहान अंक मांड, नंतर तो गुणाकार पहिल्या भाज्यांतून वजा करून दुसरी बाकी निघेल.

साहाय्याने. या दुसऱ्या बाकीचा उजव्येकडेस सांगीतले संख्येचा तिसरा भाग मांडून, दुसरा भाज्य होईल.

सातव्यानें. मूळाचा पहिल्या दोन अंकांची दुप्पट* करून, ही, दुसऱ्या भाज्याचे उजव्येकडील एक अंक सोडून त्यांत किती वेळा जाईल तें पहा; अशांनै जो भागाकार येईल तो इच्छित्ये मूळाचे तिसरे स्थळीं मांड. आणि यास पहिल्या दोन अंकांचे दुपटीचे उजव्येकडेस मांडून त्यास दुसरा भाजक ह्मण.

आठव्यानें. पांचव्याप्रमाणें नवी बाकी काढ, आणि सांगितल्या संख्येतील सर्व भाग संपतपर्यंत, अशी कृति पुनःपुनः करीत जा; जर शेवटीं कांहीं बाकी राहिली नाही, तर वर्गमूळ बरोबर निघालें; बाकी राहिली, तर सांगितल्या संख्येला वर्गमूळ नाही, ह्मणजे सांगितल्या संख्येतून शेवटील बाकी वजा करून जी संख्या राहाती, तिचेंच तें काढिलेले वर्गमूळ आहे.

नवव्यानें. भाज्याचे उजव्येकडील अंक आल्यानंतर मूळांतल्ये अंकांची दुप्पट त्यांत जात नाही असें जर घडेल, अथवा जेव्हां, एकवेळा जात असतां, १ यानें कृती करून भाज्यापेक्षा अधिक होतात, या दोहों पक्षांत वर्गमूळस्थळीं आणि भाजकस्थळीं शून्य मांडून, सांगितल्या संख्येचा पुढील भाग खाली घे; असें जर पुनः घडेल, तर मूळ आणि भाजक यांवर दुसरे शून्य मांडून, सांगितल्या संख्येचा पुढील दुसरा अंक भाग खाली घे; आणि याप्रमाणें पुढे कर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

सांगितल्या संख्या.	वर्गमूळें.
७३४४१	२७१
२९९२९००	१७३०
६४१४२४७९२१	८००८९
९०३६८७८९०६२५	९५०६२५
४२४२०७४७४८२७७६५७६	२०५९६२९७६
१३४२२६५९३१०१५२४०१	११५८५६२०१

१६३. कोणत्याहि अपूर्णांकाचा वर्ग, त्याचे अंश आणि छेद यां-

* मूळाचा दुसरा अंक, पहिल्या भाजकाशीं मिळवावा ही वर सांगितल्यापेक्षा सरळ रीति आहे.

चा वर्ग केल्याने होतो, यामुळे अपूर्णाकाचे वर्गमूळ, त्याचे अंश आणि छेद यांचे वर्गमूळ काढण्याने होते. जसे, $\frac{34}{25}$ याचे वर्गमूळ $\frac{2}{5}$ आहे, कां की 5×5 हे २५ आहेत, आणि 2×2 हे ४ आहेत. अंश किंवा छेद, हे दोन्ही वर्गसंख्या नसतील, तर त्या अपूर्णाकास वर्गमूळ नाही असा निश्चय नाही; कां की त्याचे अंश आणि छेद कांहीं एकच संख्येने गुणून, किंवा भागून, (10×10) प्रमाणे ते वर्गसंख्या होतील. जसे, $\frac{39}{40}$ याचे वर्गमूळ नाही असे पहिल्याने दिसते, परंतु यास वर्गमूळ आहे हे खरे, कां की $\frac{39}{40}$ आणि $\frac{1}{10}$ हे दोन्ही सारखेच आहेत, आणि $\frac{1}{10}$ याचे वर्गमूळ $\frac{1}{10}$ आहे.

१६५. आतां (10×10) या कलमापासून पुढे चालतो. या कलमांत असे सांगितले कीं कोणतीहि संख्या किंवा अपूर्णाक दिला असतां, दुसरा अपूर्णाक किंवा संख्या काढितां येईल, आणि तिचा वर्ग त्या पहिल्या दिलेल्या संख्येचे हवा तेवढा जवळजवळ येईल. उदाहरण, असा एक अपूर्णाक काढ, कीं जाचा वर्ग २ होईल, हे कृत्य जरी उलगाडत नाही, तथापि एक अपूर्णाक असा काढ, कीं जाचा वर्ग २ यांशीं 00000001 इतकेच अंतराने जवळ होईल; हे कृत्य उलगाडतां येईल. या अंतरापेक्षांहि लहान अपूर्णाक घेतां येईल; सारांश कांहीं एक अपूर्णाक हवा तेवढा लहान घेतां येईल; आणि अशा कृतीने २ याचे वर्गमूळ जवळ जवळ तो अपूर्णाक येत जातो असे ह्मणतात. हे कोणत्याहि अवधीपर्यंत या पुढीलप्रमाणे करितां येईल; मनांत आण, कीं २ याचे वर्गमूळ $\frac{1}{10}$ इतक्याचे आंत खरे यावे असे इच्छिले आहे; ह्मणजे $\frac{1}{10}$ असा एक अपूर्णाक काढावा, कीं जाचा वर्ग २ पेक्षां कमी होईल. परंतु तो असा असावा कीं $\frac{1}{10} + \frac{1}{1000}$ यांचा वर्ग २ यापेक्षां अधिक होईल. $\frac{2}{5}$ याचे अंश आणि छेद ५७ चे वर्गाने, अथवा ३२४९ यांशीं गुण, ह्मणजे $\frac{64}{3249}$ होतें. या अपूर्णाकाचे अंशांचे वर्गमूळ काढण्याचे कृतीत, (10×10) प्रमाणे असे दिसते कीं ९८ वाकी राहातात, आणि 6498 यांचे खालची वर्ग संख्या 6400 आहे, आणि तिचे वर्गमूळ ८० आहे. यावरून ८० चा वर्ग 6498 यापेक्षां कमी आहे, परंतु ८१ चा वर्ग यापेक्षां अधिक आहे. अपूर्णाकाचे छेदाचे वर्गमूळ अवश्य ५७ आहे. यामुळे $\frac{64}{3249}$ यांचा वर्ग $\frac{6498}{3249}$ अथवा २ यापेक्षां कमी आहे, परंतु $\frac{64}{3249}$ यांचा वर्ग २ यापेक्षां अधिक आहे, आणि या दोन

अपूर्णाकांचें अंतरकेवळ $\frac{1}{2}$ इतकें आहे यावरून इच्छिलें उत्तर सिद्ध झालें.
 १६६. वहिवाटीत कांहीं दशांश पावेतो खरें असें वर्गमूळ काढण्याची चाल आहे. जसें, २ यांचें चार दशांशस्थळांपावेतो खरें वर्गमूळ १.४१४२ आहे, कां कीं १.४१४२ यांचा वर्ग, अथवा १.९९९९६१६४ हे २ पेक्षां कमी आहेत, परंतु त्यांतलें चवथे दशांशस्थळ १ यापे अधिक केलें, तर १.४१४३ होतात, यांचा वर्ग २.०००२४४४९ आहे, म्हणजे हा वर्ग २ पेक्षां अधिक आहे. यापेक्षां एक साधारण पक्ष घे; मनांत आण, कीं चार दशांशस्थळांपावेतो खरें होण्यास १.६३७ यांचें वर्गमूळ काढायाचें आहे. यांचें अपूर्णाकरूप $\frac{1637}{1000}$ आहे, आणि यांचें वर्गमूळ ०.०००१, अथवा $\frac{1}{10000}$ इतक्याचे आंत काढायाचें आहे. आतां त्या अपूर्णाकाचा छेद $\frac{1}{10000}$ यांचा वर्ग होईपर्यंत त्याचे अंश आणि छेद यांवर शून्यें मांड, तर तो $\frac{16370000}{100000000}$ याप्रमाणें होईल; (१६३) प्रमाणें अंशांचें वर्गमूळ काढून, असे कळते कीं त्याचे अति जवळची वर्गसंख्या १६३७००००००-१३५६४ आहे, जीचें वर्गमूळ १२७९४ आहे. यावरून $\frac{12794}{100000}$, अथवा १.२७९४ यांचा वर्ग १.६३७ यापेक्षां कमी आहे, आणि १.२७९५ यांचा वर्ग १.६३७ यापेक्षां अधिक होतो. यावरून ते दोन्ही वर्ग १.६३६८६४३६ आणि १.६३७१२०२५ आहेत.

१६७. अमुक दशांशस्थळांपावेतो खरें वर्गमूळ काढण्याची रीति; मूळांत जितकीं दशांशस्थळें असावीं, त्या स्थळांची दुप्पट होईपर्यंत वर शून्यें मांड; आणि या संख्येचे जवळ जवळ वर्गमूळ काढून सांगितलेले दशांशांचे अंक खुणेने वेगळे कर. अथवा यापेक्षां ही पुढील रीति सोपी आहे; सांगितल्ये संख्येचे दोन दोन अंकांचे भाग कर, असे कीं, एक स्थळीचा अंक एका भागाचे उजव्येकडेस घेईल; नंतर चालीप्रमाणें पुढें कर; आणि एकमाचे उजव्येकडेस दशांश असून, उजव्येकडेस नुसता एक अंक असला, तर त्यास खाली आणतेसमयीं, त्यावर एक शून्य मांड, आणि त्याचे पुढील प्रत्येक भाग दोन शून्यांचा असावा. जा भागांत एक येतो त्याचे मूळाचे उजव्येकडे दशांशचिन्ह मांड.

१६८. उदाहरण, पांच दशांशस्थळांपावेतो $1\frac{3}{4}$ यांचें वर्गमूळ काढाय आहे! (१४५) प्रमाणें $1\frac{3}{4}$ हे १.३७५ आहेत, आणि यांचें वर्गमूळ काढण्याची रीति खाली दाखविल्याप्रमाणें आहे. सात दशांशस्थळां-

पावेली ०८१ यांचें वर्गमूल काढण्याची रीति खाली दाखविली आहे, या पक्षांत, पहिला भाग ०८ आहे, परंतु अनुपयोगी शून्य सोडिलें आहे.

१,३७,५(११७२६०	८,१(२८४६०४९
१	४
<hr/>	<hr/>
२१)३७	४८)४१०
२१	३८४
<hr/>	<hr/>
२२७)१६५०	५६४)२६००
१५८९	२२५६
<hr/>	<hr/>
२३४२) ६१००	५६८६)३४४००
४६८४	३४११६
<hr/>	<hr/>
२३४४६) १४१६००	५६९२०४)२८४००००
१४०६७६	२२७६८१६
<hr/>	<hr/>
२३४५२) ९२४००	५६९२०८९)५६३१८४००

०००००२४१३६७२२२१(००१५५३५९९

१

२५)१४१

१२५

३०५)१६३६

१५२५

३१०३)१११७२

९३०९

३१०६५)१८६३२२

१५५३२५

३१०७०९)३०९९७१०

२७९६३८१

३०३३२९००

१६९. इच्छिलेल्या दशांशस्थळांचे अर्धापेक्षां अधिक स्थळे निघाल्यावर, (१५५) प्रमाणे केवळ भाज्य, भाजकाने भागून दुसरीं दशांशस्थळे निघतील. हे दाखवायासाठी, १२ यांचे वर्गमूल दहा स्थळांपावेतो काढण्याची कृति खाली लिहिली आहे. परंतु या कृतीत, आणि जवळ जवळ येण्याचे दशांश काढण्याचा सर्व दुसऱ्या कृतीत, ही गोष्ट मनांत धरिली पाहिजे, कीं उजव्याकडचे शेवटील दशांश अंकावर नेहेमी भरवसा ठेवत नाही; यास्तव खरें होण्यास जीं दशांशस्थळे अगस्य असावीं, त्यापेक्षां एक किंवा दोन दशांशस्थळे अधिक निघतपावेतो कृति पुढे चालवावी.

(अ)

१२(३४६४२०१६१५१३

(ब)

६४)३००	६९२८२०३२३०२६)५३७२५३५५०८३१(७७५४५८७०५४९
२५६	४८४९७४२२६११८
६८६)४४००	५२२७९३२४७१३
४११६	४८४९७४२२६११
६९२४)२८४००	३७८१९०२१०२
२७६९६	३४६४१०१६१५
६९२८१)७०४००	३१७८००४८७
६९२८१	२७७१२८१२९
६९२८२०१)१११९००००	४०६७२३५८
६९२८२०१	३४६४१०१६
६९२८२०२६)४२६१७९९००	६०३१३४२
४१५६९२१५६	५५४२५६२
६९२८२०३२१)१०४८७७४४००	४८८७८०
६९२८२०३२१	४८४९७४
६९२८२०३२२५)३५५९५	३८०६
३४६४१	३४६४
६९२८२०३२३०१)९५४	३९१७७५००
६९२	८२०३२३०१
६९२८२०३२३०२३)२६१	५७१४५१९९००
२०७	८४६०९६९०६९
६९२८२०३२३०२६)५३	५३

जर कोणत्याही बाकीवरचीं शून्ये, आणि त्या शून्यां खालचे किंवा त्यांचे उजव्येकडील सर्व अंक एकमे उभ्ये रेघेने वेगळे केले, तर त्या रेघेचे डाव्येकडेस (१५५) प्रमाणें संक्षेप भागाकार सांपडेल. जसे, वरचा उदाहरणांत ३४६४१०१ इतकीं मूळाचीं स्थळें निघाल्यावर, ४२६१७९९ हे अंक बाकी राहातात, आणि भाजक ६९२८२०२ होतो. जे अंक उभ्ये रेघेचे डाव्येकडेस आहेत, ते वर सांगितलेली बाकी आणि भाजक यांचा संक्षेप भागाकार आहे. परंतु त्यांत भेद हाच, की त्या भाजकांतील सर्व अंक एकदांच कामांत न घेतां, संक्षेप कृतीचा आरंभ करितेसमयीं त्याचे उजव्ये बाजूकडून एक अंक छेकिला पाहिजे; केवळ याच रितीपासून दशांशाचे स्थळांची दुप्पट झाली असती, आणि पहिले सहास्थळांपेक्षां ६१५१३७ इतकीं अधिक स्थळें मिळालीं असती, आणि यांचे शेवटीं जे ७ आहेत, ते ५३ या बाकीशीं संक्षेप भागाकारानें एक पायरी पुढे चालल्याने उत्पन्न होतात. यामुळें रीति याप्रमाणें आहे; जेव्हां दशांश स्थळांची अर्धी संख्या निघती, तेव्हां बाकीवर दोन शून्ये मांडण्याचे जागीं, कृति पुढे विस्तारानें चालली असतां जो भाजक असेल, त्याचे उजव्येकडील एक अंक छेकून (१५५) प्रमाणें त्या बाकीला संक्षेप भाजकानें भाग.

मनांत आण, कीं ३४६४१०१६१५१३ यांपेक्षां दुप्पट स्थळें काढायचीं आहेत. ५३७२५३५५०८३१ ही बाकी आहे, आणि भाजक ६९२८२०३२३०२६ हा आहे, आणि (ब) प्रमाणें कृति पुढे चालत आहे. यावरून १२ चें वर्गमूल

३४६४१०१६१५१३७७५४५८७०५४९ आहे.

हें तर उजव्येकडील शेवटचा अंकापावेतो खरें आहे, परंतु यत्किंचित् अधिक आहे; जर उजव्ये शेवटास ९ यांचे जागीं ८ मांडिले, तर तें कमी होईल.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

संख्या	वर्गमूळें.
००१७२८	०४१५६९२१९४
६४३४	८०२१२२१८५
८०७४	८९८५५४३९४
१०	३१६२२७७६६
१५७	१२५२९९६४०८६१४१६६७७८४९५

आठवा भाग.

संख्यांचा प्रमाणाविषयी.

१७०. जेव्हां दोन संख्या कोणत्याही कृत्यामध्ये सांगितल्या असतात, त्यांस कांहीं एक तऱ्हेने, पडताळून पहाण्याचें बहुतकरून अगत्य पडतें; ह्मणजे, त्या दोहोंचा परस्पर विचार करून, त्यांचामध्ये असा कांहीं संबंध स्थापवा, कीं तो पुढचे कृतीमध्ये उपयोगी पडेल. हें जाणायासाठीं त्या दोन संख्यांतून मोठी कोणती, व तिचें आणि दुसऱ्याचें अंतर किती आहे हें पहावें ही सरळ रीति आहे. दोन संख्यांमध्ये जो असा संबंध स्थापिलेला असतो, तोच संबंध दुसऱ्या दोन अंकांतहि असेल; उदाहरण, ८ आणि १९ यांचें अंतर ११ आहे, आणि १०० आणि १११ यांचेंहि तितकेंच अंतर आहे. अशा अर्थानें, १०० हे जसे १११ यांस आहेत, तसे ८ हे १९ सांस आहेत, ह्मणजे पहिल्या दोन संख्यांचें अंतर दुसऱ्या दोन संख्यांचे अंतराबरोबर आहे. सांगितलेल्या संख्या, ह्मणजे,

८, १९, १००, १११,

त्या परस्पर गणितप्रमाणांत आहेत असें ह्मणतात. असे तऱ्हेने चार अंक मांडिले असतां, पहिला आणि शेवटिला या अंकांस आदिअंत अंक ह्मणतात, आणि दुसऱ्या आणि तिसऱ्या अंकांस मध्य अंक ह्मणतात. स्पष्ट आहे, कीं $१११ + ८ = १०० + १९$, ह्मणजे, आद्यंतांची बेरीज मध्यांचे बेरीजेबरोबर आहे. जे एथें विशेष अंक घेतले आहेत, त्यांपासून ही गोष्ट अवचित् घडती असें नाहीं, परंतु प्रत्येक गणितप्रमाणांत असें अवश्य घडतें; कां कीं (३५) प्रमाणें $१११ + ८$ यांत, १११ तून कांहीं वजा केले, तितकेच ८ यांत मिळविले, तर बेरीजेंत कांहीं अंतर पडणार नाहीं; आणि वर सांगितल्या व्याख्यानाप्रमाणें, एक मध्यांक जितका १११ पेक्षां कमी आहे, तितकाच दुसरा मध्यांक ८ पेक्षां अधिक आहे.

१७१. जेव्हां एकादे श्रेणींत जवळ जवळचा कोणत्याहि दोन पदांचें अंतर एकसारखेच असतें, तर ते अंक गणितश्रेणींत आहेत असें ह्मणतात. ही गोष्ट या पुढील श्रेणींवरून दिसेल;

१, २, ३, ४, ५, इत्यादि.
 ३, ६, ९, १२, १५, इत्यादि.
 $१\frac{१}{२}$, २, $२\frac{१}{२}$, ३, $३\frac{१}{२}$, इत्यादि.

प्रत्येक जवळ जवळचे दोन पदांचे अंतरास उत्तर ह्मणतात. वर सांगितलेल्या तीन श्रेणींत १, ३, आणि $\frac{१}{२}$ ही उत्तरे आहेत.

१७२. जर एकाद्या गणित श्रेणीतील कांहीं पदे घेतली, तर पहिले आणि शेवटील या पदांची बेरीज, श्रेणीचा दोन शेवटांपासून सारिखे अंतरावरचा कोणत्याहि दोन पदांचे बेरिजेबरोबर होईल. उदाहरण, श्रेणीचीं ७ पदे घेतलीं आहेत, तीं हीं पुढील आहेत,

अ, ब, क, ड, इ, फ, ग.

तर श्रेणीचे लक्षणावरून (१७०) प्रमाणे ब जितका अचे वर आहे, तितका फ, गचे खाली आहे, ह्मणून $अ + ग = ब + फ$. पुनः (१७०) प्रमाणे क जितका बचे वर आहे, तितकी इ, फचेखाली आहे, यावरून $ब + फ = क + इ$. परंतु $अ + ग = ब + फ$ आहे, यामुळे $अ + ग = क + इ$, आणि याप्रमाणे पुढेहि. पुनः दोन्ही शेवटांपासून सारिखे अंतरावरचे पदांची, ह्मणजे मध्य पदाची दुप्पट अदांन पदांचे बेरिजेबरोबर आहे, जेव्हां पदांची संख्या विषम असती तेव्हांही वरची गोष्ट घडती; कां कीं क जितका डचे खाली आहे, तितकी इ, डचे वरतीं आहे, यावरून $क + इ = ड + ड = २ड$. परंतु $क + इ = अ + ग$; यामुळे $अ + ग = २ड$. गणित श्रेणीचे कितीहि पदांची बेरीज काढण्याची संक्षिप्त रीति यावरून निघेल. मनांत आण, कीं वर सांगितलेलीं ७ पदे दिलीं आहेत. $अ + ग$, $ब + फ$, आणि $क + इ$, या तिन्ही बेरीजा सारिख्याच आहेत, यावरून त्या तिहींची बेरीज ($अ + ग$) चे तिप्पट आहे, यांत जर मध्य पद ड, अथवा $अ + ग$ चें अर्ध मिळविलें, तर ती बेरीज तीन वेळा आणि एक अर्धी वेळा $अ + ग$ होईल, अथवा पहिल्या आणि शेवट पदांचे बेरिजेस $३\frac{१}{२}$, अथवा $\frac{७}{२}$, अथवा पदांचे संख्येचें अर्ध इतक्याने गुणिल्याचे बरोबर होईल. जर पदांची संख्या सम असेल, ह्मणजे जर अ, ब, क, ड, इ, आणि फ, इत्यादि सहा पदे असतील, आणि $अ + फ$, $ब + इ$, आणि $क + ड$ हीं सारिखींच आहेत असे कळतें, यावरून त्या पदांची बेरीज $अ + फ$ यांचे तिप्पट आहे, अथवा

पूर्वाप्रमाणे अद्यताचे बेरिजेस पद संख्येचे अर्धाने गुणावे इतक्या बरोबर सा सर्व पदांची बेरीज आहे. यावरून रीति ही आहे; गणितश्रेणीतील कितीहि पदांची बेरीज करणे, तर अद्यतांचे बेरिजेस पदसंख्येचे अर्धाने गुण. उदाहरण, १, २, ३, इत्यादि श्रेणीतील ९९ पदे मिळून बेरीज काय होईल? यांत ९९ वे पद ९९ आहे, आणि $(९९+१) \frac{९९}{२}$ अथवा $\frac{१०० \times ९९}{२}$ अथवा ४९५० ही बेरीज आहे. $\frac{१}{३}, \frac{२}{३}, १, \frac{४}{३}, \frac{५}{३}, २,$ इत्यादि श्रेणीचे ५० पदांची बेरीज $(\frac{१}{३} + \frac{५०}{३}) \frac{५०}{२}$, अथवा १७×२५ , अथवा ४२५ आहे.

१७३. श्रेणीचे पहिले पद आणि उत्तर आणि पदसंख्या दिली असता, उत्तर एकोनपद संख्येने गुणून त्या गुणाकारांत पहिले पद मिळवावे, ह्यणजे शेवटील पद निघते. कां कां दुसरे पद पहिले पदाहून, उत्तराने भिन्न आहे, तिसरे पद पहिले पदाहून उत्तराचे दुपटीने भिन्न आहे, चवथे पद उत्तराचे तिपटीने भिन्न आहे; आणि याप्रमाणे पुढेहि. अथवा न-१ इतके कृति क्रम केल्याने पहिल्या पदापासून न पदापर्यंत जाता येते; यांतून प्रत्येक क्रमांत उत्तर मिळवावे लागते.

अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

दिलेली पदे.		काढायार्ची पदे.	
श्रेण्या.	पदसंख्या.	शेवटील पद.	बेरीज.
४, ६, ९, इत्यादि	३३	८४	१४५२
१, ३, ५, इत्यादि	२८	५५	७८४
२, २०, ३८ इत्यादि	१०००००	१७९९९८४	८९९९९३०००००

१७४. बेरीज, पदसंख्या, आणि पहिले पद दिले असेल, तर यापासून उत्तर काढता येईल. उदाहरण, एका श्रेणीचे पहिले पद एक, पदसंख्या १००, आणि बेरीज १०००० आहे. पहिले आणि शेवटील पद यांचे बेरिजेस $\frac{१००}{२}$ यांनी गुणून १०००० झाले आहेत, ह्यणून जर यास $\frac{१००}{२}$ यांनी भागिले, तर आदिअंतांची बेरीज निघेल. आता $\frac{१००००}{१}$ भागिले, $\frac{१००}{२}$ हे (११२) प्रमाणे २०० आहेत,

आणि पहिलें पद १ आहे, यावरून शेवटलें पद १९९ आहे. यावरून १ पासून १९८ अंकांतून ९९ वेळा सारख्या कृती केल्या असतां, १९९ पर्यंत जातां येईल. यावरून प्रत्येक पायरी $\frac{१९८}{१९९}$, अथवा २ आहे, हे श्रेणीचें उत्तर आहे; अथवा १, ३, ५, इत्यादि १९९ पर्यंत दिलेली श्रेणी आहे.

दिलेलीं पदें.			काढायाचीं पदें.	
बेरीज.	पदसंख्या.	पहिलें पद.	शेवटील पद.	उत्तर.
१८०९०२५	१३४५	१	२६८९	२
४४	१०	३	$\frac{३९}{५}$	$\frac{१४}{४५}$
७०७५६००	१३३०	४	१०६३६	८

१७५. (१७०) कलमामध्ये दोन संख्या त्यांचे अंतरानें पडताळून पहाण्याचें जें सांगितलें, त्या गोष्टीचा एथें पुनः विचार करितों. असी पडताळण्याची रीति वहिवाटीचे कामांत आणीत नाहीं, ही गोष्ट परिपाठांतल्या एका उदाहरणापासून कळेल. उदाहरण, अ जवळ १०००० रुपये आणि ब जवळ ३००० रुपये असतील, तर ब पेक्षां अ फार द्रव्यवान आहे असें ह्मणण्यांत येईल; परंतु क जवळ १०७००० रुपये आणि ड जवळ १००००० असतील, अशा दोहोंपक्षांत संपत्तीचें अंतर जरी सारखेंच ७००० रुपये आहे, तरी क हा ड पेक्षां फार धनवान आहे असें कोणी ह्मणणार नाहीं. संख्या पडताळण्याचे समर्थी केवळ त्यांचें अंतर लक्षांत घेतात असें नाहीं, परंतु त्या संख्याहि लक्षांत आणाव्या लागतात. जसें, ब आणि ड या दोघांस जर ७००० रुपये मिळाले, तर ब जवळ जें पूर्वी द्रव्य होतें, त्यांतील दर १०० स २३३ आणि $\frac{३}{५}$ इतके रुपये मिळतील, परंतु डला दर १०० स केवळ ७ रुपये मिळतील. आणि जरी (१७०) कलमाचे दृष्टांताप्रमाणें, जितके १०७ यांचे जवळ १०० आहेत, तितके १० चे जवळ ३ आहेत, तथापि जा हेतून आतां त्यांचा विचार करितों, यावरून जितके १०० हे १०७ यांचे जवळ आहेत, तितके ३ हे १० चे जवळ नाहींत, कां कीं १० आणि ३ यांचें अंतर ३ चे दुपटीपेक्षां अधिक आहे, परंतु १०७ आणि १०० यांचें अंतर १०० चे एक पंचमांशा इतकेंहि नाहीं. यावरून गणिताचे भाषेप्रमाणें, या गोष्टीस असें ह्मणतात, कीं १०७ यांस १००, या प्रमाणापेक्षां १० यांस ३ हें प्रमाण अधिक आहे.

आतां प्रमाण या शब्दाचा अर्थ अधिक स्पष्ट करून पुढें सांगतों.

१७६. या भागांत पुढें जेव्हां संख्येचा किंवा अपूर्णाकाचा अंश असें लिहिण्यांत येईल, तेव्हां अर्धा भाग, तिसरा भाग, चवथा भाग, इत्यादि जा समभागांत ती संख्या भागिली असेल, त्यांतून १ भाग घेण्याचा आहे असें समजावें; गुणित या शब्दाचा अर्थ पूर्वी (१०२) कलमांत सांगितला आहे. संख्येचे अंशाचें गुणित, याचें संक्षेप वाक्य गुणित अंश असें आहे. जसे, १, २, ३, ४, आणि ६ हे, १२ यांचे अंश आहेत; $\frac{1}{2}$ हाहि १२ यांचा एक अंश आहे, कां की $\frac{1}{2}$ हा १२ यांत २४ वेळा जातो; १२, २४, ३६, इत्यादि हीं १२ यांचीं गुणितें आहेत; आणि ८, ९, ३, इत्यादि हे १२ यांचे गुणितांश आहेत, कां की ते १२ चा कांहीं भागांचीं गुणितें आहेत. १२ यांस १२ चें एक गुणित ह्मणतात, कां की त्याचा गुणक १ आहे, या कारणावरून, जेव्हां विशेषेकरून गुणित भाग असें बोलण्यांत येतें तेव्हां ते भागहि त्यांत गणिले असतात. गुणितांश यांमध्ये गुणितेंहि येतात; कां की सगळे २४ हे ४८ अर्ध भाग आहेत, आणि यामुळे ते १२ चे गुणितांशांत येतात. प्रत्येक अंश वेगवेगळ्या तऱ्हेनें गुणितांश आहे; कां की एक चवथा भाग हा दोन आठवे भाग, आणि तीन बारावे भाग आहेत, इत्यादि.

१७७. प्रत्येक संख्या किंवा अपूर्णाक, दुसऱ्या प्रत्येक संख्येचा किंवा अपूर्णाकाचा गुणितांश आहे. जसें १२ हे ७ यांचा कोणता अंश आहे असें विचारिले असतां, ७ यांस सात समभागांत विभागून, त्यांतून एक अंश १२ वेळा पुनःपुनः घेतला असतां १२ होतात; अथवा ७ यांस १४ समभागांत विभागिले, तर तो प्रत्येक अंश एक अर्धा बरोबर आहे, आणि यांतील १ अंश २४ वेळा पुनःपुनः घेतल्यानें, २४ अर्ध भाग, किंवा १२ होतात. यावरून, १२ हे ७ यांचे $\frac{12}{7}$, अथवा $\frac{24}{7}$, अथवा $\frac{36}{7}$ आणि इत्यादि असे आहेत. सामान्यतः जर अ आणि ब हे दोन पूर्ण संख्या असतील, तर ब चा अ कोणता गुणितांश आहे, तें $\frac{a}{b}$ दाखविणे, आणि अ चा ब कोणता गुणितांश आहे तें $\frac{b}{a}$ दाखविणे. पुनः मनांत आण की $\frac{12}{7}$ हे $\frac{36}{7}$ यांचा, किंवा $\frac{12}{7}$ हे $\frac{12}{7}$ यांचा कोणता गुणितांश असें विचारिले आहे. या दोन अपूर्णाकांस सम- छेद करून, $\frac{36}{7}$ आणि $\frac{12}{7}$ होतात, यांतून दुसऱ्या अपूर्णाकास ११२

७५ वळा घडून $\frac{७५}{११२}$ ही अपूर्णाक निघता. यामुळ दुसऱ्या अपूर्णाकाचा $\frac{७५}{११२}$ इतका गुणितांश पहिला अपूर्णाक आहे, असे गुणितांश (१२१) कलमाचे रीति प्रमाणे निघाले, आणि त्यांत भागाकाराविषयी जी गोष्ट सांगितली, ती प्रत्येक पक्षांत ब चा अ कोणता गुणितांश आहे हे $\frac{अ}{ब}$, अथवा अ भागला ब अशांने दाखवितात.

१७८. जेव्हां चार संख्यांतून तिसरी संख्या चवथे संख्येचा जितका गुणितांश असतो, तितकीच जर पहिली संख्या दुसऱ्या संख्येचा गुणितांश असेल, तर त्या चार संख्या भूमितिप्रमाणांत, अथवा सरळ रितीने प्रमाणांत आहेत असे ह्मणतात. प्रमाण हा शब्द व्यवहारांत फार येतो; आणि व्यवहारांत जो अर्थ त्या शब्दास लावितात, तोच अर्थ त्या शब्दाचा वरदिलेल्या गणितानुरूप व्याख्यानांत आहे, इतकें मात्र दाखवायाचें राहिलें. उदाहरण, मनांत आण, कीं एक नकाशाची नकल लहान भागावर करायाची आहे, अशी कीं, मूळचे नकाशावरची दोन इंच लांबीची रेष, नकलेचे नकाशावर एक इंच आणि एक अर्धा इंच लांबीची असावी; यावरून जर त्या नकाशाचे सर्व अवयव २ होंस $\frac{१}{२}$ याप्रमाणे कमी केले नसतील, तर ती नकल बरोबर नाहीं असे ह्मणतां येईल. दोन इंच ४ भागांत विभागून, त्यांतून तीन भाग घेतल्याने $\frac{१}{२}$ होतो, ह्मणून मूळचे नकाशातील सर्व रेषांशी त्याच प्रमाणे केलें पाहिजे, ह्मणजे मूळचे नकाशातील कोणत्याहि रेषेचे चार भाग करून, त्यांतून तीन भागांनीं नकलेतील रेष केली पाहिजे. पुनः, व्याजाचा भाव शेंकडा ५ रुपये आहे, ह्मणजे १०० रुपयांचें व्याज ५ रुपये पडतें, तर यावरून दुसऱ्या कोणत्याहि रकमेचें व्याज देतां येईल; उदाहरण, ७० रुपयांचें व्याज काय होईल, तर ५ रुपये हे १०० रांचा जो अंश आहे, तितका ७० रांचा अंश ७० साठी घेतला पाहिजे.

तर, जापेक्षा, ब याचा जो अंश अ आहे, तो $\frac{अ}{ब}$, किंवा त्याचे बरोबरीचा कोणत्याहि दुसऱ्या अपूर्णाकानें दाखवितां येतो, आणि डचा जो अंश क आहे तो $\frac{क}{ड}$ याप्रमाणे दाखवितां येतो, यावरून अ, ब, क, आणि ड हे जेव्हां प्रमाणांत आहेत, तेव्हां $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$. प्रमाणांतील परिमाणांविषयी जे तर्क करायाचे आहेत, त्यांस या समीकरणाचा



आधार आहे; आणि प्रमाणांतील परिमाणांचा विचार करते-समयी, केवळ ती परिमाणेच लक्षांत आणिल्याने निर्वाह होत नाही, परंतु यांचे क्रमहि लक्षांत घेतले पाहिजेत, जसे, अ, ब, क, आणि ड, हे प्रमाणांत आहेत, ह्यणजे व चा गुणितांश जितका अ आहे, तितकाच डचा गुणितांश क आहे, तथापि अ, ड, ब, आणि क, हे प्रमाणांत आहेत, असे ह्यणतां येत नाही, कारण कचा जितका व गुणितांश आहे, तितकाच डचा गुणितांश अ आहे, हे सिद्ध होत नाही. ड पक्षां क जसा अधिक, किंवा त्याचे बरोबर, किंवा त्यापेक्षा कमी आहे, तसा व पक्षां अ अधिक, किंवा त्याचे बरोबर, किंवा त्यापेक्षा कमी, असावा हे स्पष्ट आहे.

१७९. अ, ब, क, आणि ड, अशा क्रमाने ह्या चार संख्या जर प्रमाणांत असतील, तर अ, आणि ड यांस आदिअंत, आणि ब आणि क यांस याप्रमाणांचे मध्य ह्यणतात. साईकरितां, आदि अंत, अथवा मध्य पदे यांस सरूपपदे, आणि एक शेवटीलपद आणि एकमध्यपद यांस विरूपपदे असें झाले आहे. जसें अ आणि ड, आणि ब आणि क हीं सरूपपदे आहेत; अ आणि ब, अ आणि क, ड आणि ब, ड आणि क हीं विरूपपदे आहेत. प्रमाण दाखविण्याकरितां पदांमध्ये खालचे प्रमाणे विंदू मांडण्याची रीति आहे, जसें;

अ : ब :: क : ड

१८०. जा संख्या परस्पर बरोबर आहेत, त्या सारिखेच परिमाणाने वाढविल्या, किंवा कमी केल्या, किंवा गुणिल्या, किंवा भागिल्या, तरी बरोबर राहातील. ही गोष्ट या ह्यणण्याप्रमाणे आहे, कीं जर $a = b$, आणि $p = k$, तर $a + p = b + k$, $a - p = b - k$, $ap = bk$, आणि $\frac{a}{p} = \frac{b}{k}$. $a + p - p$, $a - p + p$, $\frac{ap}{p}$, आणि $\frac{bk}{k}$ हीं सर्व अचे बरोबर आहेत हे स्पष्ट आहे.

१८१. आदिअंतांचा गुणाकार मध्य पदांचे गुणाकाराबरोबर आहे. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ अशी कल्पना कर, या दोन बरोबरीचे संख्यांस बडचे गुणाकाराने गुण. तर, $\frac{a}{b} \times बड = \frac{अबड}{ब}$ (११६) प्रमाणे = अबड, आणि $\frac{c}{d} \times बड = \frac{कबड}{द}$ = कबड; यावरून (१८०) प्रमाणे अबड = कबड. जसें, ६, ८, २१, आणि २८, ह्या संख्या प्रमाणांत आहेत, कां कीं $\frac{६}{८} = \frac{२१}{२८}$ आणि (१८०)

ते दोन्ही गुणाकार १६८ आहेत.

१८२. जर दोन संख्यांचा गुणाकार दुसऱ्या दोन संख्यांचा गुणाकाराबरोबर असेल, आणि जर त्यांतील कोणत्याहि गुणाकाराचा दोन संख्या सरूप पदे होतील, अशा रितीने मांडिल्या तर त्या संख्या कोणत्याहि क्रमाने प्रमाणांत होतील; ह्मणजे, जर $अब = पक$, तर ही पुढील प्रमाणे निघतील;—

$$अःप :: कःब$$

$$पःअ :: बःक$$

$$अःक :: पःब$$

$$पःब :: अःक$$

$$बःप :: कःअ$$

$$कःअ :: बःप$$

$$बःक :: पःअ$$

$$कःब :: अःप$$

यांतून कोणतेहि एक प्रमाण पडताळून पहाण्यासाठी, अब आणि पक या दोहोंस त्याचा दुसऱ्या आणि चवथ्या पदांचे गुणाकाराने भाग; उदाहरण, अःक :: पःब, यांचा खरेपणा दाखवायासाठी, अब आणि पक या दोहोंस बक यांणी भाग. तर $\frac{अब}{बक} = \frac{अ}{क}$, आणि $\frac{पक}{बक} = \frac{प}{ब}$; यावरून (१८०) प्रमाणे $\frac{अ}{क} = \frac{प}{ब}$, अथवा अःक :: पःब. वरचे सर्व आठ पक्ष शिकणाराने पडताळून पहावे, आणि कांहीं सरळ उदाहरणे सिद्ध करावी, जसे $१ \times ६ = ३ \times ३$, यावरून जसा $१:३ :: ३:६$, आणि $३:१ :: ६:२$, इत्यादि.

१८३. यावरून, जर चार संख्या प्रमाणांत असतील, आणि त्यांतील सरूप पदे सरूप पदांचे स्थळी रहातील अशा रितीने जर त्या मांडिल्या, तर त्या चार संख्या कोणत्याहि दुसऱ्या क्रमाने प्रमाणांत होतील. कां की, जापेक्षां $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{द}$, तर (१८१) प्रमाणे अड = बक, तेव्हां अड = बक यापासून मार्गील कलमाप्रमाणे सर्व जी प्रमाणे होतात, तीं $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{द}$ यापासूनहि होतील.

१८४. (११४) व्ये कलमापासून $१ + \frac{अ}{ब} = \frac{ब+अ}{ब}$, असें होतें, आणि जर १ पेक्षां $\frac{अ}{ब}$ कमी असेल, तर $१ - \frac{अ}{ब} = \frac{ब-अ}{ब}$, परंतु जर १ पेक्षां $\frac{अ}{ब}$ अधिक असेल, तर $\frac{अ}{ब} - १ = \frac{अ-ब}{ब}$. आणि (१२२) प्रमाणे, जर $\frac{अ+ब}{ब}$ यांस $\frac{अ-ब}{ब}$ यांणी भागिलें, तर भागाकार $\frac{अ+ब}{अ-ब}$ होतो. यावरून, अ, ब, क, आणि ड, हे प्रमाणांत असतील, तर त्यांभासून हीं पुढील दुसरीं प्रमाणे निघतील, जसें;



$\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ आहे असे मनांत आण,
 तर (११४) प्रमाणें $१ + \frac{अ}{ब} = १ + \frac{क}{ड}$
 अथवा, $\frac{अ+ब}{ब} = \frac{क+ड}{ड}$
 अथवा अ + ब : ब :: क + ड : ड.

ह्यणजे जशी पहिल्या आणि दुसऱ्या पदांची बेरीज, दुसऱ्या पदास आहे, तशी तिसऱ्या आणि चवथ्या पदांची बेरीज, चवथ्या पदास आहे. या वेगळाल्या प्रमाणांविषयीं पुढें शब्दांनीं कांहीं विस्तार करून सांगणार नाहीं, कां कीं शिकणारास आपल्या कल्पनेवरून समजेल.

अ : ब :: क : ड.

अथवा $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ हे प्रमाण पुनः घे.

जर १ पेक्षां $\frac{अ}{ब}$ कमी असेल, तर $१ - \frac{अ}{ब} = १ - \frac{क}{ड}$,

अथवा $\frac{ब-अ}{ब} = \frac{ड-क}{ड}$

ह्यणजे, ब-अ : ब :: ड-क : ड,

अथवा जर १ पेक्षां $\frac{अ}{ब}$ अधिक असेल, तर अ-ब : ब :: क-ड : ड.

पुनः, जापेक्षां $\frac{अ+ब}{ब} = \frac{क+ड}{ड}$, आणि १ पेक्षां $\frac{अ}{ब}$ अधिक असून $\frac{अ-ब}{ब} = \frac{क-ड}{ड}$, यांतील पहिलीं दोन पदे दुसऱ्यांनीं भागून $\frac{अ+ब}{अ-ब} = \frac{क+ड}{क-ड}$ असें होतें,

अथवा अ+ब : अ-ब :: क+ड : क-ड.

जर १ पेक्षां $\frac{अ}{ब}$ कमी असेल, तर अ+ब : ब-अ :: क+ड : ड-क.

१८५. अशा तऱ्हेनें अनेक दुसरीं प्रमाणें निघतील. परंतु मागील कलमावरून जीं प्रमाणें निघतात, त्यांतून कांहीं थोडीं दाखवितों.

अ+ब : अ :: क+ड : क

अ : अ-ब :: क : क-ड

अ+क : अ-क :: ब+ड : ब-ड.

यांत आणि सर्व दुसऱ्या पक्षांत ही गोष्ट लक्षांत ठेविली पाहिजे, कीं जेव्हा अ-ब आणि क-ड अशा पद्धती येतात, तेव्हा बपेक्षां अ मोठा, आणि डपेक्षां क मोठा आहे असें समजावें.

१८६. जर चार संख्या प्रमाणांत असतील, आणि त्यांचीं कोणतीं-

माणांत राहातात. जसे, जर अ : व :: क : ड, आणि म आणि न ह्या भलत्या कांहीं संख्या असतील, तर हीं पुढील प्रमाणें निघतील;

मअ : व :: मक : ड

मअ : नव :: मक : नड

अ : मव :: क : मड

$\frac{अ}{म} : \frac{व}{म} :: \frac{क}{म} : \frac{ड}{म}$

$\frac{अ}{न} : \frac{मव}{न} :: \frac{क}{न} : \frac{मड}{न}$

$\frac{अ}{म} : \frac{व}{म} :: \frac{क}{न} : \frac{ड}{न}$

आणि यांशिवाय अनेक दुसरींहि निघतील. यांतील कोणत्याचाहि खरेपणा सिद्ध करितेसमयीं, हें मनांत ठेविलें पाहिजे, कीं चार संख्या परस्पर प्रमाणांत होण्यासाठीं, आदिअंतांचा गुणाकार, मध्यांचे गुणाकाराबरोबर असावा. वरचें तिसरें उदाहरण घेऊन पाहा; त्याचे आदिअंतांचा गुणाकार $\frac{अ}{न} \times मड$ अथवा $\frac{मअड}{न}$ आहे, आणि त्याचे मध्यांचा गुणाकार $मव \times \frac{क}{न}$, अथवा $\frac{मवक}{न}$ आहे. परंतु जापेक्षां अ:व::क:ड, तर (१८१) प्रमाणें अड=वक, यावरून, (१८०) प्रमाणें मअड=मवक, आणि $\frac{मअड}{न} = \frac{मवक}{न}$. यावरून, $\frac{अ}{न}$, $\frac{मव}{न}$, $\frac{क}{न}$, आणि मड, हे प्रमाणांत आहेत.

१८७. जर एक प्रमाणाचीं पदें दुसऱ्या प्रमाणाचे पदांनीं गुणिलीं, तरी ते वेगळाले गुणाकार प्रमाणांत होतील; ह्मणजे, जर अ:व::क:ड, आणि प:क::र:स, तर अप:वक::कर:डस असें होईल. कां कीं, जापेक्षां अड=वक आहे, आणि पस=कर आहे, तर (१८०) प्रमाणें अडपस = वककर, अथवा अप×डस = वक×कर, यावरून (१८२) प्रमाणें अप : वक :: कर : डस.

१८८. जर चार संख्या प्रमाणांत असतील, तर त्या संख्यांचे सारखे घात प्रमाणांत होतील; ह्मणजे, जर

अ : व :: क : ड

तर अअ : वव :: कक : डड

अअअ : ववव :: ककक : डडड

इत्यादि.

इत्यादि.

कां कीं, जर प्रमाण दोन वेळा मांडिलें, जसें,



अःबःःकःड

अःबःःकःड

तर (१८७) प्रमाणे, अबःबबःःककःडड,
परंतु

अःबःःकःड

तर (१८७) प्रमाणे, अबअःबबबःःकककःडडड; आणि याप्रमाणे पुढेहि.

१८९. जेव्हां एकाचे पद्धतीत अ, ब, आणि क, इत्यादि दोन किंवा अधिक अक्षरे येतात, आणि त्या पद्धतीतील प्रत्येक पदांमध्ये अ, ब, आणि क ह्याच अक्षरांची सारिखी संख्या असती, त्या पद्धतीस त्या अक्षरांविषयी सजातीय असें म्हणतात. जसें, मअबब+नअबक+रककक ही पद्धती अ, ब, आणि क, या अक्षरांविषयी सजातीय आहे; आणि ती तिसऱ्या वर्णाची आहे, कां कीं त्यांतील प्रत्येक पदांत तीन तीन अक्षरे यादी, म्हणून कोठें एकाचे पदांत अ, ब, आणि क, हीं अक्षरे आहेत, अथवा त्यांतून एकच अक्षर वारंवार लिहिलें आहे, अथवा एक अक्षर कांहीं वेळा लिहून त्याचे जवळ दुसरें लिहिलें आहे. जसें, ८अअबबक, १२अबककक, मअअअअअ, नअअबबक, हीं सर्व पदे अ, ब, आणि क, या अक्षरांविषयी मात्र सजातीय आणि पांचव्या वर्णाची आहेत; आणि हीं पदे परस्परांस मिळवून, अथवा परस्परांतून वजाकरून, जी पद्धती उत्पन्न होईल, ती त्या अक्षरांविषयी सजातीय असून, पांचव्या वर्णाची होईल. पुनः मअ+मनब ही पद्धती, अ आणि ब अक्षरांविषयी सजातीय आणि पहिल्या वर्णाची आहे; परंतु म आणि न, अक्षरांविषयी सजातीय नाही, तथापि अ आणि न अक्षरांविषयी सजातीय आहे. इतके आरंभी सांगितल्यावर आतां एक सिद्धांत*सांगतो त्यांत (१८४), (१८५) आणि (१८८), या कलमांतील गोष्टी येतील.

१९०. जर चार संख्या प्रमाणांत असतील, आणि जर अ आणि ब अशा दोन पहिल्या संख्यांपासून, सारिख्याच वर्णाचा कोणत्याहि दोन सजातीय पद्धती उत्पन्न केल्या, आणि शेवटील दोन संख्यांपासून,

* सिद्धांत म्हणजे गणितातील खरी गोष्ट आहे: जसें, जा संख्येचे उजव्याकडील शेवटचे दोन अंक चोहोनीं निःशेष भागिले जातात, ती सर्व संख्या चोहोनीं निःशेष भागिली जाईल हा एक सिद्धांत आहे; प्रत्येक प्रमाणांत आदिभंतांचा गुणाकार, मध्याचे गुणाकाराबरोबर आहे, हा दुसरा सिद्धांत आहे.

वरचे सारिख्या दुसऱ्या दोन पद्धती उत्पन्न केल्या, तर ह्या चार पद्धती प्रमाणांत होतील. उदाहरण, जर अः बः:: कः ड आणि २अअअ + ३अअब आणि बबब+अबब ह्या दोन्ही, अ आणि बयांविषयी सजातीय असून तिसऱ्या वर्णाचा आहेत; आणि जर अ आणि ब पासून जशा पूर्वीचा दोन पद्धती निघाल्या, तशा २ककक+३ककड आणि डडड+कडड ह्या क आणि ड यांपासून झाल्या असतील, तर

२अअअ+३अअब : बबब+अबब :: २ककक+३ककड : डडड+कडड ला होईल.

हे सिद्ध करायास, $\frac{अ}{ब}$ दाखवायासाठी क्ष घे. तर, जापेक्षां $\frac{अ}{ब}$ =क्ष, आणि $\frac{अ}{ब}$ = $\frac{क}{ड}$, यामुळे $\frac{क}{ड}$ =क्ष. परंतु जापेक्षां अ यास ब याणें भागिल्यानें क्ष होतो, तर क्ष यास ब यानें गुणिल्यानें अ होईल, अथवा अ=बक्ष. तशेंच कारणानें, क=डक्ष. वरचा चार दिलेल्या पद्धतींमध्ये अ आणि क यांचें जागीं बक्ष आणि डक्ष मांड, आणि ही गोष्ट मनांत ठेविली पाहिजे कीं, अनेक परिमाणें परस्पर गुणून, त्यांची रचना कोणत्याहि क्रमानें केली, तरी गुणाकार सारिखेंच होतील; म्हणजे, बक्षबक्षबक्ष आणि बबबक्षक्ष ह्या पद्धती सारिख्याच आहेत.

यावरून, $२अअअ+३अअब = २बक्षबक्षबक्ष+३बक्षबक्षबक्ष$
 $= २बबबक्षक्षक्ष+३बबबक्षक्षक्ष$

ही तर बबब गुणिली २क्षक्षक्ष+३क्षक्ष असी आहे,

अथवा बबब(२क्षक्षक्ष+३क्षक्ष)*

याच सारिखें, २ककक+३ककड = डडड(२क्षक्षक्ष+३क्षक्ष)

आणि, बबब + अबब = बबब + बक्षबब

= बबब गुणिला १+क्ष

अथवा = बबब(१+क्ष)

याचसारिखें, डडड + कडड = डडड(१+क्ष)

आतां, बबब : डडड :: बबब : डडड

* अ आणि बविषयी कोणत्याहि पद्धती सजातीय असेल, आणि त्या पद्धतींत अचे जागीं बक्ष मांडिला तर त्रिकणाराळा सहज दिसेल, कीं त्या पद्धतींत जितकीं अंकस्थळें आहेत तितक्या वेळा वारंवार पदामध्ये ब येईल, जसें, अअ+अब ही बक्षबक्ष+बक्षब अथवा, बब×(क्षक्ष+क्ष) असी होईल; अअअ+बबब, ही पद्धती बक्षबक्षबक्ष+बबब, अथवा बबब(क्षक्ष+१) असी होईल; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

यावरून (१८६) प्रमाणें, ववव(२क्षक्ष + ३क्षक्ष) : डडड (१+क्ष) :: ववव(२क्षक्ष + ३क्षक्ष) : डडड(१+क्ष) असें आहे, ह्मणून त्या पद्धतीचे बरोबर वर पद्धती निघाल्या, त्यांस ह्यांचे जागी मांडल्या असतां याप्रमाणें होतें, २अअ+३अअव : ववव+अवव :: २कक+३ककड : डडड+कडड. कोणत्याहि दुसऱ्या पक्षास हीच कल्पना लागू होईल, आणि या पुढील सिद्धांताचा खरेपणा शिकणारास अशे तऱ्हेनें दाखवितां येईल;

जर अ : व :: क : ड

तर २अ+३व : व :: २क+३ड : ड

अअ+वव : अअ-वव :: कक+डड : कक-डड

मअव : २अअ+वव :: मकड : २कक+डड

१९१. जर प्रमाणांतील दोन मध्य पदे सारिखींच असतील, ह्मणजे जर अ : व :: व : क, तर अ, व, आणि क, ह्या तीन संख्या अखंड प्रमाणांत, अथवा भूमिती श्रेणींत आहेत असें ह्मणतात. जा श्रेणीचीं एका पुढील एक अशीं कोणतींहि तीन पदे अखंड प्रमाणांत असतील, त्या श्रेणीस वरचें नाव देतात, जसें,

१ २ ४ ८ १६ ३२ ६४ इत्यादि.
२ $\frac{२}{३}$ $\frac{२}{९}$ $\frac{२}{२७}$ $\frac{२}{८१}$ $\frac{२}{२४३}$ $\frac{२}{७२९}$ इत्यादि.

हीं अखंड प्रमाणांत आहेत, कां कीं

१ : २ :: २ : ४

२ : $\frac{२}{३}$:: $\frac{२}{३}$: $\frac{२}{९}$

२ : ४ :: ४ : ८

$\frac{२}{३}$: $\frac{२}{९}$:: $\frac{२}{९}$: $\frac{२}{२७}$

इत्यादि.

इत्यादि.

१९२. अ, व, क, ड, इ, इत्यादि अखंड प्रमाणांत आहेत, असें मनांत आण; तर

अ : व :: व : क

अथवा

$\frac{अ}{व} = \frac{व}{क}$

अथवा

अक = वव

व : क :: क : ड

अथवा

$\frac{व}{क} = \frac{क}{ड}$

अथवा

वड = कक

क : ड :: ड : इ

अथवा

$\frac{क}{ड} = \frac{ड}{इ}$

अथवा

कइ = डड

पद होतें.

जसे, (१८०) प्रमाणें $व = \frac{व}{अ} \times अ$; $क = \frac{क}{व} \times व$; आतां जापेक्षां $\frac{अ}{व} = \frac{व}{क}$,
 $\frac{व}{अ} = \frac{क}{व}$, अथवा $क = \frac{व}{अ} \times व$. पुनः $ड = \frac{ड}{क} \times क$, परंतु $\frac{ड}{क} = \frac{क}{व}$, आणि $\frac{क}{व} =$
 $\frac{व}{अ}$; यामुळे $ड = \frac{व}{अ} \times क$, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. यावरून $\frac{व}{अ}$ यास श्रे-
णीचें साधारण गुणोत्तर ह्मणतात, आणि त्याचे जागीं र घेतला अस-
तां, या पुढील प्रमाणें होईल,

$$व = अर \quad क = वर = अरर \quad ड = कर = अररर$$

आणि याप्रमाणें पुढेंहि; यावरून

अ व क ड इ इत्यादि ही श्रेणी
अ अर अरर अररर अरररर इत्यादि. याप्रमाणें
यावरून अ : क :: अ : अरर आहे.

(१८६) प्रमाणें :: अअ : अअरर

:: अअ : वव

कां कीं, व = अर आहे, तर वव = अरअर अथवा अअरर. पुनः,

अ : ड :: अ : अररर

(१८६) प्रमाणें :: अअअ : अअअररर

:: अअअ : ववव

आणि अ : इ :: अअअअ : वववव, आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

ह्मणजे पहिलें पद आणि तें सोडून न पद या दोहों मधलें प्रमाण,
पहिल्या पदाचा न घात, आणि दुसऱ्या पदाचा न घात या दोहों मधील
प्रमाणाबरोबर आहे.

१९३. अखंड प्रमाणांतील पदांचें सर्वधन काढण्याची सोपी रीति
काढितां येईल. १, र, रर, इत्यादि, पदांचें सर्वधन काढण्याची इ-
च्छा आहे असें मनांत आण, आणि यांत एकापेक्षां र अधिक आहे असें
मनांत आण. कोणत्याहि पद्धति कांहीं संख्या मिळवून, ती लागलीच
वजा केल्यानें त्या पद्धतीमध्ये भेद होत नाही. उदाहरण,

$$प = प - क + क - र + र - स + स$$



आतां, १, २, २२, इत्यादि या श्रेणीचीं चार पदे, अथवा

$$१+२+२२+२२२ \text{ घे}$$

स्पष्ट आहे, कीं

$$२२२२-१=२२२२-२२२+२२२-२२+२२-२+२-१$$

आतां (५४) प्रमाणें $२२-२=२(२-१)$, $२२२-२२=२२(२-१)$, $२२२२-२२२=२२२(२-१)$, आणि वरचें समीकरण याप्रमाणें होतें, $२२२२-१=२२२(२-१)+२२(२-१)+२(२-१)+२-१$; हें (५४) प्रमाणें $२२२+२२+२+१$ यांस $२-१$ वेळा घेतले असे आहेत. यावरून, $२२२२-१$ यांस $२-१$ यांणीं भागिलें, तर $१+२+२२+२२२$ होतात, हें पदांचें सर्वधन आहे. याच तऱ्हेनें समीकरणाची ही पुढील श्रेणी सिद्ध होईल.

$$\begin{aligned} १+२ &= \frac{२२-१}{२-१} \\ १+२+२२ &= \frac{२२२-१}{२-१} \\ १+२+२२+२२२ &= \frac{२२२२-१}{२-१} \\ १+२+२२+२२२+२२२२ &= \frac{२२२२२-१}{२-१} \end{aligned}$$

जर एकापेक्षां २ कधी असेल, तर $१+२+२२+२२२$ यांचें सर्वधन काढायासाठीं, लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं

$$१-२२२२=१-२+२-२२+२२-२२२+२२२-२२२२$$

$$=१-२+२(१-२)+२२(१-२)+२२२(१-२);$$

यावरून, वरचे कल्पनेप्रमाणें, $१+२+२२+२२२$ ही $१-२२२२$ यांस $१-२$ यांणीं भागिल्यानें होईल; ह्मणजे अशांनें वरचे सारिखींच समीकरणें निघतील,

$$\begin{aligned} १+२ &= \frac{१-२२}{१-२} \\ १+२+२२ &= \frac{१-२२२}{१-२} \\ १+२+२२+२२२ &= \frac{१-२२२२}{१-२} \\ १+२+२२+२२२+२२२२ &= \frac{१-२२२२२}{१-२} \end{aligned}$$

रीति; $१+२+३+४$ इत्यादि, असे श्रेणीचे न पदांचें सर्वधन काढा-यासाठीं, १ आणि $(n+१)$ वें पद यांची वजाबाकी, १ आणि n यांचे वजाबाकीनें भाग.

१९४. अखंड प्रमाणाचीं कितीहि पदे असलीं, तरी त्यांचें सर्वधन काढायास वरची रीति लागू होती. अ, ब, क, इत्यादि, पदे आहेत, यांतून चार पदांपर्यंत सर्वधन इच्छिलें आहे, म्हणजे $अ+ब+क+ड$ यांचें सर्वधन काढायाचें आहे; हें (१९२) प्रमाणें, $अ+अर+अरर+अररर$ असें आहे, अथवा (५४) प्रमाणें $अ(१+२+३+४)$, हें (१९३) प्रमाणें जर n एकापेक्षां अधिक किंवा कमी असेल, तर $\frac{२२२२-१}{२-१} \times अ$, अथवा $\frac{१-२२२२}{१-२} \times अ$, असें होईल. यांतून पहिला अपूर्णांक $\frac{२२२२-अ}{२-१}$ आहे, अथवा (१९२) प्रमाणें $\frac{२-अ}{२-१}$ असा आहे. त्याचसारखा, दुसरा अपूर्णांक $\frac{अ-२}{१-२}$ असा आहे. यामुळें रीति हीच आहे; कोणत्याहि अखंड प्रमाणाचा n पदांचें सर्वधन काढायासाठीं, $n+१$ वें पद आणि पहिलें पद यांची वजाबाकी, एक आणि पदांचें गुणोत्तर यांचे वजाबाकीनें भाग. उदाहरण, $१+३+९+२७+$ इत्यादि या श्रेणीचे १० पदांचें सर्वधन काढायाचें आहे असें मनांत आण. या श्रेणीचें ११ वें पद ५९०४९ आहे, आणि $\frac{५९०४९-१}{३-१} = २९५२४$ हें सर्वधन आहे. पुनः, $२+१+\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+$ इत्यादि या श्रेणीचे १८ पदांचें सर्वधन काढायाचें असेल, तर तिचें एकुणिसावें पद $\frac{१}{१३१०७२}$ आहे, यावरून $\frac{२-\frac{१}{१३१०७२}}{१-\frac{१}{२}} = \frac{२ \cdot १३१०७०}{१३१०७२}$ हें सर्वधन आहे.

उदाहरणें.

$१+४+१६+$ इत्यादि या श्रेणीचा ९ पदांचें सर्वधन ८७३८१ आहे.

$३+\frac{९}{४}+\frac{१२}{४}+$	१०	$\frac{८४७४२२६७५}{२०१७६८०३५}$
$\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{८}+$	२०	$\frac{१०४८५७५}{१०४८५७६}$

१९५. जी संख्या किंवा अपूर्णांक एकापेक्षां अधिक आहे, तिचे घात वाढत जातात; कां कीं जापेक्षां $२\frac{१}{२}$ हे १ पेक्षां अधिक आहेत, $२\frac{१}{२} \times २\frac{१}{२}$ यांत $२\frac{१}{२}$ हे एक वेळेपेक्षां अधिक वेळा घेतले आहेत, म्हणजे तो

दा घात त्याहून अधिक होईल. हें सिद्ध करायासाठी, लक्षांत आणिले पाहिजे, कीं $2\frac{1}{2}$ यांचा प्रत्येक घात त्याचे पूर्वीचे घातास $2\frac{1}{2}$ यांणी, अथवा $1+2\frac{1}{2}$ यांणी गुणिल्यानें होतो, ह्मणजे पूर्वीचे घातास तोच घात आणि त्याचें अर्ध मिळविल्यानें पुढचा दुसरा घात होतो. यामुळे १० वें पद करायासाठी, जें ९ वे घातास मिळविलें, त्यापेक्षां ११ वें पद करायास, १० व्हे घातास अधिक मिळवावें लागतें. परंतु स्पष्ट आहे कीं कोणतेंहि सांघीतलें परिमाण, कसेंहि लहान असलें, आणि तें वारंवार $2\frac{1}{2}$ यांशीं मिळविलें, तर त्याचें सर्वधन, कोणतीहि दुसरी सांघीतली संख्या कशीहि मोठी असेल, तरी तिजपेक्षां अधिक होईल; यामुळे $2\frac{1}{2}$ यांस प्रत्येक पायरीवर मिळविण्याचें परिमाण अधिक अधिक वाढवीत गेलें असतां, सर्वधन खचित् अधिक मोठें होईल, यावरून $2\frac{1}{2}$ यांचे एका पुढले एक घात काढिल्यावरून असा पक्ष दिसेल. आणि हेंहि स्पष्ट आहे, कीं १ याचा घात कधीं वाढत नाहीं, कां कीं तो नेहमी १ आहे; जसें, $1 \times 1 = 1$, इत्यादि. आणि, जर म वेळा न पेक्षां अ अधिक असेल, तर अचा वर्ग मम वेळा वचे वर्गाहून अधिक होईल. जसें, जर $a = २ब + क$, यांत २ब पेक्षां अ अधिक आहे, तर अचा वर्ग, अथा-वा $a^2 = (२ब + क)$ प्रमाणें $४बब + ४बक + कक$, हा $४बब$ पेक्षां अधिक आहे, आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

१९६. जो अपूर्णांक एकापेक्षां कमी आहे त्याचे घात उत्तरोत्तर घटत जातात; जसें, $\frac{३}{४}$ यांचा वर्ग, अथवा $\frac{३}{४} \times \frac{३}{४}$ हे $\frac{३}{४}$ पेक्षां कमी आहेत, कां कीं $\frac{३}{४}$ चा वर्ग केवळ दोन पंचमांशाचे दोन पंचमांश आहे. ही घट अनंत होत जाईल; ह्मणजे असें अतिलहान परिमाण नाहीं, कीं त्याहून $\frac{३}{४}$ यांचा एकादा घात कमी होणार नाहीं. कां कीं जर $\frac{५}{६} = क$ तर $\frac{३}{४} = \frac{१}{४}$ आणि $\frac{३}{४}$ यांचे घात $\frac{१}{४क}$ इत्यादि असे आहेत. जापेक्षां १ हून क अधिक आहे, तर (१९५) प्रमाणें काहीं सांघीतल्या परिमाणपेक्षां अधिक असा एकादा कचा घात काढितां येईल, या घाताला म ह्मण; तर $\frac{१}{४}$ हा $\frac{३}{४}$ यांतील कचा घाताचे वर्णांचा घात आहे; आणि अपूर्णाकाचा छंद हवा तेवढा मोठा केल्यानें, तो अपूर्णांक (१९२) प्रमाणें ह्वातेवढा लहान होईल.

B4

A3

१ २ २२ २२२ २२२२ इत्यादि.
 पहिल्यानें. जर १ पेक्षां र अधिक आहे, तर वरची श्रेणी वा-
 दत्या पदांची होईल. दुसऱ्यानें. जर १ चे बरोबर र असेल, तर प-
 दांचा किमती सारख्याच होतील. तिसऱ्यानें. जर १ पेक्षां र कमी
 असेल, तर श्रेणी घटत्या पदांची होईल. पहिल्याे दोन पक्षांत

$$१ + २ + २२ + २२२ + \text{इत्यादि}$$

यांतील, पदांची संख्या पुरतेपणी वाढविली असतां, त्यांचें सर्वघन
 हवें तेवढें मोठें करितां येईल हें स्पष्ट आहे. परंतु तिसऱ्या पक्षांत असें
 घडेल, किंवा घडणारहि नाहीं; कां कीं जरी प्रत्येक पायरीला कांहीं
 मिळविलें असतें, तथापि तें मिळविण्याचें परिमाण प्रत्येक पायरीस घटतें,
 यावरून तें परिमाण किती वेळा मिळविलें तरी उत्तर हवें तेवढें
 मोठें करितां येईल, असें खचित् ह्मणतां येत नाहीं. ही गोष्ट दाखवा-
 यासाठीं या पुढील श्रेणीचा विचार कर,

$$१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८} + \frac{१}{१६} + \text{इत्यादि,}$$

ही श्रेणी किती पुढें वाढविली, तरी तिचें सर्वघन २ चे बरोबर
 करायासाठीं, तिचे उज्व्येकडील शेवटील पदाइतकें मिळविलें पा-
 हिजे. जसें,

$$(१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४}) + \frac{१}{४} = १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{२} = १ + १ = २.$$

$$(१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८}) + \frac{१}{८} = २.$$

$$(१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८} + \frac{१}{१६}) + \frac{१}{१६} = २, \text{ इत्यादि.}$$

परंतु वरचे श्रेणीमध्ये प्रत्येक पद त्याचे पूर्वीचे पदाचे केवळ अर्धा-
 बरोबर आहे; यामुळे कितीहि पदें घेतलीं, तरी त्यांचे पुढील दुसरें
 एक पद त्यांशीं मिळविलें तरी २ याचे बरोबर कधींहि होणार नाहीं.
 यामुळे, $१, \frac{१}{२}, \frac{१}{४}, \frac{१}{८}$, इत्यादि यांचें सर्वघन निरंतर २ यांचे जवळजवळ
 होत जातें, ह्मणून प्रत्येक पायरीवर सर्वघनाचें आणि २ चें अंतर कमी
 होत जातें, परंतु त्याचे बरोबर कधींहि होत नाहीं. यावरून २ यांस
 $१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \text{इत्यादि,}$ या श्रेणीची नियतता ह्मणतात. यावरून प्रत्येक
 उतरती श्रेणीला नियतता आहे, असा निश्चय करवत नाहीं. या गो-



श्रीचे उलटें या सरळ श्रेणीवरून दाखवितां येईल, ह्मणजे, $१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४} +$ इत्यादि, ही या पुढीलप्रमाणें मांडितात.

$$१ + \frac{१}{२} + \left(\frac{१}{३} + \frac{१}{४}\right) + \left(\frac{१}{५} + \dots + \frac{१}{८} \text{ पावेतों}\right) + \left(\frac{१}{९} + \dots + \frac{१}{१६} \text{ पावेतों}\right) + \left(\frac{१}{१७} + \dots + \frac{१}{३२} \text{ पावेतों}\right) + \text{इत्यादि.}$$

पहिल्या दोन पदांशिवाय अशे तऱ्हेनें सर्व श्रेणीचे निरनिराळे भाग केले आहेत, आणि प्रत्येक भागांत शेवटील पदाचा छेदांत जितके एक आहेत, त्यांचे निम्ने पदे प्रत्येक भागांत येतात. जसे, चवथे भागांत १६ अथवा $\frac{३२}{२}$ पदे येतात. हा प्रत्येक भाग $\frac{१}{२}$ पेक्षा अधिक आहे हें दाखवितां येईल. तें दाखविण्यास तिसरा भाग घे, ह्मणजे, $\frac{१}{२}, \frac{१}{३}, \frac{१}{४}, \frac{१}{५}, \frac{१}{६}, \frac{१}{७}, \frac{१}{८}, \frac{१}{९}$ आणि $\frac{१}{१६}$ असा आहे. $\frac{१}{१६}$ या शेवटील पदा खेरीज सर्व दुसरीं पदे $\frac{१}{१६}$ यापेक्षा अधिक आहेत; यामुळे त्या प्रत्येक पदाचे जागीं $\frac{१}{१६}$ मांडिला असतां, त्या भागांतील सर्व पदांची बेरीज पूर्वीपेक्षा कमी होईल; आणि जापेक्षा असें केल्यानें त्यांची बेरीज $\frac{१}{१६}$, किंवा $\frac{१}{३२}$ होती, तर ते सर्व भाग पूर्वीचे $\frac{१}{२}$ पेक्षा अधिक होतील. आतां, $१ + \frac{१}{२}$ यास निरंतर $\frac{१}{२}$ मिळविला, तर केव्हां तरी त्याचें सर्वधन कोणत्याही सांगितल्या संख्येपेक्षा अधिक होईल. तर $\frac{१}{२}$ याचे जागीं, बरचा वेगळाल्या भागांचीं पदे निरनिराळीं एकामागें एक मिळविलीं असतां, त्यांचें सर्वधन पूर्वीपेक्षा खचित अधिक असावें. परंतु $१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३}$, इत्यादि अशे तऱ्हेनें बरची श्रेणी केली आहे, यावरून जी बरची गोष्ट सांगितली ती सिद्ध होती, ह्मणजे या श्रेणीस कांहीं नियतता नाही.

१९८. जेव्हां १ पेक्षा र कमी आहे, तेव्हां $१ + r + r^2 + r^3 + \dots$ इत्यादि, या श्रेणीस नेहेमी नियतता आहे. हें सिद्ध करायासाठी, मनांत आण, कीं जा पदावर थांबतो त्याचे पुढील पद अ आहे, तर (१९४) वरून तिचें सर्वधन $\frac{१-a}{१-r}$ अथवा (११२) प्रमाणें $\frac{१}{१-r} - \frac{a}{१-r}$ आहे. या श्रेणीचीं पदे (१९६) प्रमाणें अनंत घटत जातात, यावरून पहिल्या पदापासून दुसरें पुढलें पद इतकें लांब घेतां येईल, कीं अ, आणि यामुळे $\frac{a}{१-r}$ ह्या तेंवढा लहान होईल. परंतु जरी स्पष्ट आहे, कीं $\frac{१}{१-r}$ यापेक्षा $\frac{१}{१-r} - \frac{a}{१-r}$ हे नेहेमी कमी आहेत, तथापि $\frac{१}{१-r}$ याचे हवे तेंवढे जवळ करितां येतील; ह्मणजे $१ + r + r^2 + \dots$ इत्यादि ही श्रेणी $\frac{१}{१-r}$ या नियतते जवळ उत्तरोत्तर येईल. जसे $१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८} + \dots$ इत्यादि या श्रेणींत $r = \frac{१}{२}$,

कलमांत सांगितले.

अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

$$२ + \frac{२}{३} + \frac{२}{६} + \text{इत्यादि.}$$

अथवा $२(१ + \frac{१}{३} + \frac{१}{६} + \text{इत्यादि})$ याची नियतता ३ आहे.

$$१ + \frac{१}{१०} + \frac{१}{१००} + \text{इत्यादि.} \dots\dots\dots १० \dots$$

$$५ + \frac{१५}{७} + \frac{४५}{४९} + \dots\dots\dots ८\frac{३}{४} \dots$$

१९९. जेव्हां $\frac{अ}{ब}$ हा अपूर्णांक $\frac{क}{द}$ याचे बरोबर नाही, परंतु त्यापेक्षा अधिक आहे, तेव्हां क आणि ड यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचे प्रमाण अधिक आहे असे लक्षणतात; आणि जेव्हां $\frac{अ}{ब}$ हा $\frac{क}{द}$ यापेक्षा कमी आहे, तेव्हां क आणि ड यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचे प्रमाण कमी आहे. या व्याख्यानावर ही पुढील उदाहरणे अभ्यासासाठी सांगतां.

पहिले. जर वपेक्षां अ अधिक असेल, आणि डचाबरोबर किंवा कमी क असेल, तर क आणि ड यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचे प्रमाण अधिक होईल.

दुसरे. वपेक्षां जर अ कमी असेल, आणि क हा डचाबरोबर किंवा त्यापेक्षां अधिक असेल, तर अ आणि ब यांचे प्रमाण, क आणि ड यांचे प्रमाणापेक्षां कमी होईल.

तिसरे. क जसा डला तसा अ जर बला असेल, आणि जर क आणि क्ष यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचे प्रमाण अधिक असले, तर क्षपेक्षां ड कमी होईल; आणि जर क आणि क्ष यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचे प्रमाण कमी असेल, तर क्षपेक्षां ड अधिक होईल.

चवथे. अक्ष आणि वक्ष-य यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचे अधिक प्रमाण आहे, आणि अक्ष आणि वक्ष-य यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचे कमी प्रमाण आहे.

२००. क आणि ड यांचे प्रमाणापेक्षां जर अ आणि ब यांचे



व यांचे प्रमाणोपेक्षा कमी होईल, परंतु क आणि उ यांचे प्रमाणोपेक्षा अधिक होईल; अथवा $\frac{अ}{ब}$ आणि $\frac{क}{द}$ या दोन अपूर्णाकांतून $\frac{अ}{ब}$ अधिक असेल, तर $\frac{अ+क}{ब+द}$ हे $\frac{क}{द}$ यापेक्षा अधिक, परंतु $\frac{अ}{ब}$ यापेक्षा कमी होईल. हे सिद्ध करायासाठी, लक्षांत ठेविले पाहिजे; की $\frac{मक्ष+नय}{म+न}$ यांत क्ष आणि य बरोबर नसतील, तर तो अपूर्णाक क्ष आणि य यांचेमध्ये असावा; कां की क्ष आणि य या दोहोंतून क्ष कमी असेल, तर $\frac{मक्ष+नक्ष}{म+न}$ किंवा क्ष पेक्षा तो अपूर्णाक खचित मोठा होईल; आणि जर त्या दोहोंतून य मोठा असेल, तर $\frac{मय+नय}{म+न}$, किंवा य पेक्षा तो अपूर्णाक खचित कमी होईल. यामुळे क्ष आणि य यांचेमध्ये तो अपूर्णाक येतो. आतां $\frac{अ}{ब} = क्ष$ आणि $\frac{क}{द} = य$ असे घे; तर $अ = बक्ष$ आणि $क = डय$. आतां वर सिद्ध केल्याप्रमाणे $\frac{बक्ष+डय}{ब+द}$ हा अपूर्णाक क्ष आणि य यांचे मध्ये येतो; यामुळे $\frac{अ+क}{ब+द}$ हा अपूर्णाक $\frac{अ}{ब}$ आणि $\frac{क}{द}$ यांचे मध्ये येतो. पुनः, जापेक्षां $\frac{अ}{ब}$ आणि $\frac{क}{द}$ हे $\frac{अप}{बप}$ आणि $\frac{कक}{दक}$ यांचे अनुक्रमे बरोबर आहेत, आणि जापेक्षांवर सिद्ध केल्याप्रमाणे, $\frac{अप+कक}{बप+दक}$ हा अपूर्णाक पहिल्या दोहोंचे मध्ये येतो, यामुळे तो दुसऱ्या दोहोंमध्येहि येतो; ह्यणजे, प आणि क हे काहीं संख्या किंवा अपूर्णाक असतील, तरी $\frac{अप+कक}{बप+दक}$ हा $\frac{अ}{ब}$ आणि $\frac{क}{द}$ यांचा मध्ये येतो.

२०१. जा अवघड पद्धती आहेत, त्यांची किंमत अदमासाने समायास मागील कलमावरून काहीं कल्पना करितां येईल. जसे $\frac{१+क्ष}{१+क्षक्ष}$ हा $\frac{१}{क्ष}$ आणि $\frac{क्ष}{क्षक्ष}$ किंवा $\frac{१}{क्ष}$ आणि $\frac{१}{क्ष}$ यांचे मध्ये येतो; $\frac{अक्ष+बय}{अक्षक्ष+बयय}$ हा $\frac{अक्ष}{अक्षक्ष}$ आणि $\frac{बय}{बयय}$ अथवा $\frac{१}{क्ष}$ आणि $\frac{१}{बय}$ यांचे मध्ये येतो. वर दाखविले, की $\frac{अ+ब}{२}$ हा अपूर्णाक अ आणि ब यांचा मध्ये येतो, येथे त्याचा छेद १+१ अज्ञाने होतो.

२०२. $\frac{अ+ब+क+द}{प+क+र+स}$ हा अपूर्णाक $\frac{अ}{प}$, $\frac{ब}{क}$, $\frac{क}{र}$, आणि $\frac{द}{स}$ यांचामध्ये आहे, ह्यणजे तो अपूर्णाक यांतून जें मोठें पद त्यापेक्षां कमी, आणि जें अति लहान पद त्यापेक्षां अधिक आहे, असे सिद्ध करितां येईल. हे अपूर्णाक त्यांचे महत्वानुसाराने मांड; ह्यणजे $\frac{अ}{प}$ हा $\frac{ब}{क}$ पेक्षा अधिक असावा, $\frac{ब}{क}$ हा $\frac{क}{र}$ पेक्षा अधिक असावा, आणि $\frac{क}{र}$ हा $\frac{द}{स}$ पेक्षा अधिक असावा. तर (२००) प्रमाणे

$\frac{अ+ब+क}{प+क+र}$	$\frac{अ+ब}{प+क}$	आणि	$\frac{अ}{प}$	यपेक्षां कमी आहे,	$\frac{क}{प+क}$	आणि	$\frac{ब}{प+क}$	अधिक
$\frac{अ+ब+क+ड}{प+क+र+स}$	$\frac{अ+ब+क}{प+क+र}$	आणि	$\frac{अ}{प}$	यपेक्षां	$\frac{ड}{स}$			यपेक्षां

यावरून वर सांगितलेली प्रतिज्ञा उघड आहे.

२०३. अ हा व पेक्षां मोठा, आणि अ हा वपेक्षां लहान, हे लिहिण्याची चाल फारकरून अ > व आणि अ < व अशी आहे; यांत मुख्यत्वेकरून कोनाचें तोंड मोठ्ये परिमाणाकडे असावें. शिकणारानें या चिन्हाशीं पक्कें माहित व्हावें.

नववा भाग.

संयोग आणि व्युत्क्रमसंयोग याविषयीं.

२०४. निरनिराळ्या अक्षरांचा अनेक चकत्या पुढें ठेऊन, त्यांतून वारंवार चार चार काढायाचा असतील, तर त्या किती तऱ्हांनीं काढितां येतील, याविषयीं विचार करितों. त्यांतील प्रत्येक तऱ्हेला चोहों चोहोंचा संयोग ह्मणतात, परंतु त्यांतून चोहों चोहोंची निवड करणें असें ह्मणणें हें त्यापेक्षां योग्य आहे. दोन संयोग, किंवा दोन निवडी यांत कोणत्याहि तऱ्हेचा फेर असला, तर त्यांस भिन्न असें ह्मणतात; असें अबकड आणि अबकइ हे भिन्न आहेत, कां कीं एकामध्ये ड आहे आणि दुसऱ्यामध्ये इ आहे, परंतु दोहोंमध्ये दुसरीं अक्षरें सारखींच आहेत. अ, ब, क, ड, इ, आणि फ, अशा साहा चकत्या आहेत, त्यांतून तिहीं तिहींचे संयोग वीस तऱ्हांनीं पुढील प्रमाणें होतील;

अवक	अकइ	वकड	वइफ
अवड	अकफ	वकइ	कडइ
अवइ	अडइ	वकफ	कडफ
अवफ	अडफ	वडइ	कइफ
अकड	अइफ	वडफ	डइफ

आणि त्या सहा चकत्यांतून चार चार अक्षरांचे संयोग पंधरा त-
हानीं होतील, ह्मणजे याप्रमाणें;

अवकड	अवडइ	अकडइ	अडइफ	वकइफ
अवकइ	अवडफ	अकडफ	वकडइ	वडइफ
अवकफ	अवइफ	अकइफ	वकडफ	कडइफ

आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

२०५. वरचा प्रत्येक संयोग अनेक वेगळाल्ये क्रमांनीं मांडितां येईल;
ह्मणजे, अवकड हा या पुढील कोणत्याहि क्रमानें मांडितां येईल;

अवकड	अकवड	अकडव	अवडक	अडवक	अडकव
वअकड	कअवड	कअडव	वअडक	डअवक	डअकव
वकअड	कवअड	कडअव	वडअक	डवअक	डकअव
वकडअ	कवडअ	कडवअ	वडकअ	डवकअ	डकवअ

यांतून कोणत्याहि दोन संयोगांत अक्षरांची रचना एकसारिखी ना-
हीं. ह्मणून प्रत्येक संयोगास अवकड याचा व्युत्क्रमसंयोग ह्मणतात.
तथापि संयोग रूपानें ते सर्व सारिखेच आहेत, कां कीं अ, व, क, आ-
णि ड, हीं चार अक्षरें प्रत्येकांत आहेत.

२०६. अनेक चकत्या दिल्या असतां, जसें सहा, त्यांतून दोन दो-
न, तीन तीन, इत्यादि, चकत्यांचे व्युत्क्रमसंयोग किती तहानीं होती-
ल, याचा आतां शोध करितों. चार चकत्यांचे जे सगळे व्युत्क्रमसं-
योग होतील, ते जर करितां आले, तर पांच चकत्यांचे व्युत्क्रमसंयोग
या पुढीलप्रमाणें होतील. चार अक्षरांचा चार चकत्या घे, जसें

प्रत्येक पात ड आणि इ नाहीत; तर त्या चार चक्रांचे व्युत्क्रमसंयोगाचे श्रेवटी, ड आणि इ हीं अक्षरे मांडिलीं असतां, पुढीलप्रमाणें होतें, अबकफड, अबकफइ, आणि प्रत्येक चार चक्रांचे व्युत्क्रमसंयोगाशीं तशीच कृति कर; जसें, डअबक यापासून डअबकइ आणि डअबकफ असें होतें. चार चक्रांचे सर्व व्युत्क्रमसंयोग समजल्यावर वरचे रितीप्रमाणें चाललें असतां, पांच चक्रांचा कोणताहि व्युत्क्रमसंयोग, दृष्टि चुकून जाणार नाही; कां कीं पांच चक्रांचा कोणताहि व्युत्क्रमसंयोग, जसें डबफइअ, कृति करत्ये समयीं डबफइ यापासून निघेल, ह्यणजे, वर सांगितल्ये रितीप्रमाणें तो डबफइअ असा होतो. रितीप्रमाणें कृति केली असतां, कोणताहि व्युत्क्रमसंयोग दोन वेळा एकसारखाच येणार नाही, कां कीं डबफइअ हा केवळ डबफइ यापासून होतो.

अ ब क ड इ फ

या सहा चक्रांतून, कोणत्याहि दोन चक्रांचे व्युत्क्रमसंयोग काढायास वरचे रितीप्रमाणें चाललें, तर त्या प्रत्येकाचे पांच व्युत्क्रमसंयोग होतील, जसें,

अ यापासून अब अक अड अइ अफ होतात.

ब अब बक बड बइ बफ इत्यादि होतात,

आणि ह्या सर्व चक्रांचे व्युत्क्रमसंयोग 6×5 अथवा 30 होतात.

पुनः अब यापासून अबक अबड अबइ अबफ होतात.

अक अकब अकड अकइ अकफ इत्यादि होतात.

आणि त्यांत दोन चक्रांचे 6×5 अथवा 30 व्युत्क्रम संयोग होतात, ते प्रत्येक ३ चक्रांचे व्युत्क्रम संयोग असे ४ होतात; यामुळे या शेवटीलांचे सर्व व्युत्क्रम संयोग $6 \times 5 \times 4$ अथवा 120 इतके होतात.

पुनः अबक यापासून अबकड अबकइ अबकफ होतात.

अबड अबडक अबडइ अबडफ इत्यादि होतात.

आणि यांत तीन चक्रांचे $6 \times 5 \times 4$ अथवा 120 इतके व्युत्क्रम संयोग होतात, त्या प्रत्येकांत चार चक्रांचे ३ व्युत्क्रम संयोग होतात; यामुळे या शेवटीलांचे सर्व व्युत्क्रम संयोग $6 \times 5 \times 4 \times 3$, अथवा 360 इतके होतात. तसेच तऱ्हेने, ५ चक्रांचे व्युत्क्रम संयोग $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$ होतात, आणि सहा चक्रांचे व्युत्क्रम संयोग किंवा, जित-

$५ \times ४ \times ३ \times २ \times १$ हे आहेत. हीं शेवटील दोन उत्तरे सारिखींच हें खरें आहे; कां कीं पांच चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोगांत केवळ एक चकती सोडिली जाती, तर सोडलेले चकतीपासून, सहा चकत्यांचा केवळ एक व्युत्क्रम संयोग होतो. सहा चकत्यांचे जागीं कोणतीहि दुसरी संख्या घेतली, जसें क्ष, तर त्यांतून दोन चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या क्ष(क्ष-१), तीन चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या क्ष(क्ष-१)(क्ष-२), चार चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या क्ष(क्ष-१)(क्ष-२)(क्ष-३), अशा होतील; यावरून रीति हीच आहे; चकत्यांची सर्व संख्या त्यांचे जवळचे खालचे संख्येनें गुण, नंतर तो गुणाकार त्याचे दुसरे खालचे अंकानें गुण, आणि प्रत्येक व्युत्क्रम संयोगांत जितक्या चकत्या असावयाचा तितक्या वेळा चकत्यांचा संख्या, पहिल्यापासून गुणाकार होईतोपर्यंत पुढें करीत चाल; जो गुणाकार येईल तो इच्छिल्या व्युत्क्रम संयोगांची संख्या होईल. जसें, १२ चकत्यांतून चार चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोग $१२ \times ११ \times १० \times ९$ अथवा ११८८० एवढे होतील.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

२०७. ८ बैठकींकर ८ पुरुषांची किती वेगवेगळ्या तऱ्हांनी रचना करितां येईल? उत्तर ४०३२०.

आठ पुरुषांस वर्तुळाकृती बसवायाचें आहे, असें कीं त्यांतून कोणत्याहि दोन रचनेंत, प्रत्येक पुरुषाचें स्थान सारखें होणार नाहीं, अशे तऱ्हेनें त्या पुरुषांचा किती रचना करितां येतील? उत्तर ५०४०.

पंधरा पुरुषांचा जितक्या वेगवेगळ्या रचना करितां येतील, त्यांतिल प्रत्येक रचनेस, जर १ पैचा शंभरावा अंश दिला तर सर्व मिळून काय द्यावें लागेल?

उत्तर ६८१०८०४० रुपये.

सहा व्यंजनें आणि पांच स्वर असले, तर, एक शब्दांत दोन व्यंजनें आणि एक स्वर, असे त्यांपासून किती शब्द होतील?

उत्तर ४०८०.

गांची संख्या येती, त्यापेक्षां जेव्हां दोन किंवा अधिक चकत्यांवर सारिखींच अक्षरें असतात, तेव्हां व्युत्क्रम संयोगांची संख्या कमी येती. अ, अ, अ, ब, क, ड, अशा सहा चकत्या आहेत, तर अ मध्ये भेद दाखविण्या करितां त्यांस अ, अ', अ', याप्रमाणें क्षणभर मांड, तर रिती प्रमाणें अबकअअड, आणि अबकअअड, हे वेगवेगळे व्युत्क्रम संयोग आहेत, परंतु स्वर चिन्हे नसलीं, तर ते तसे नाहींत, याजकरितां अशे अक्षरांचे वेगवेगळे व्युत्क्रम संयोग काढायासाठी ब, क, आणि ड, हे घेऊन, एक व्युत्क्रम संयोग कर, आणि अचीं वेगवेगळीं स्थळें पुढील प्रमाणें रिकामी ठेव; जसें, () बक () () ड. जर, अ, अ', अ', इत्यादि तऱ्हेनें अचा भेद ठेविला असेल, तर वरचा कुंडलींतलीं रिकामीं स्थळें भरल्यानें, ३×२×१ इतके वेगवेगळे व्युत्क्रम संयोग होतील, आणि जर अमध्ये कांहीं भेद दाखविला नाही, तर ते सहा व्युत्क्रम संयोग एक सारिखेच होतील. यावरून अबअबकड यापासून अ, अ, अ, ब, क, ड, यांचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या काढायासाठी, पहिल्याचे व्युत्क्रम संयोग ३×२×१ अथवा ६ यांणीं भागिले पाहिजेत, त्यापासून $\frac{६ \times ५ \times ४ \times ३ \times २ \times १}{३ \times २ \times १}$ अथवा १२० होतात. त्याच प्रमाणें अअअबबबकक, यांचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या $\frac{१ \times ८ \times ७ \times ६ \times ५ \times ४ \times ३ \times २ \times १}{४ \times ३ \times २ \times १ \times ३ \times २ \times १ \times २ \times १}$ इतकी आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

अ, न, ट, ए, ट, र, ए, न, ऐ, ट, अ, र, ए, अ, न, हीं अक्षरें किति वेगवेगळ्या तऱ्हांनीं रचितां येतील ?

उत्तर, १२६१२६०००.

२०९. व्युत्क्रम संयोगांपासून संयोग सहज काढितां येतात, परंतु, हे संयोग निरनिराळे करायासाठीं, (२०६) कलमांत जी रीति सांगितली, त्याप्रमाणें एथें रीति दाखवितों. अ, ब, क, ड, इ, यांतून दोन-दोन अक्षरांचे संयोग करायास समजले, तर त्या दोहों दोहोंचे संयोगांचे शेवटीं, त्यांचे उजवे कडचीं अक्षरें एकामागें एक मांडून, तीन तीन अक्षरांचे संयोग काढितां येतील. जसें, अब यापासून अबक, अबड,

अबइ, होतात; अड यापासून केवळ अडइ होतो. दोन अक्षरांचे संयोग समजल्यावर अशा रितीने चालले असता, कोणताहि तीन अक्षरांचा संयोग दृष्टि धुकून जाणार नाही; कां कीं अकड, याप्रमाणे तिहींचा कोणताहि संयोग, कृति करियेसमर्थां अक पासून निघेल, ह्यणजे वरचे रिती प्रमाणे यापासून अकड होतो. कोणताहि संयोग दोन वेळा येणार नाही, कां कीं रिती प्रमाणे चालले असतां, अकड हा केवळ अक पासून निघेल, तो अड आणि कड यांपासून कधीहि निघणार नाही. या तऱ्हेने खालचे पांच अक्षरांचे संयोग काढले असतां या प्रमाणे होतील,

अ व क ड इ

अ पासून अब अक अड अइ होतात.

व वक वड वइ

क कड कइ

ड डइ

आणि अब पासून अबक अबड अबइ

अक अकड अकइ

अड अडइ

वक वकड वकइ

वड वडइ

कड कडइ

अब वइ कइ आणि डइ यांपासून कांहीं होत नाहीं.

आणि अबक पासून अबकड अबकइ होतात.

अबड अबडइ

अकड अकडइ

वकड वकडइ

वर प्रमाणे अबइ, अकइ, अडइ, वकइ, वडइ, कडइ, यांपासून कांहीं होत नाहीं. अबकड यापासून अबकडइ होतो, दुसऱ्यांपासून कांहीं होत नाहीं हे स्पष्ट आहे, कां कीं पांच वस्तूंपासून पांचांची एकच निवड होती.

काढण्याचें रितें वरून सरळ निघता. ७ चकत्या घे; तर, जापेक्षा दोहों दोहोंचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या ७×६ इतकी आहे, आणि जापेक्षां बब आणि अब असे दोन व्युत्क्रम संयोग, अब अशा संयोगांतून निघतात, तर संयोगांची संख्या व्युत्क्रम संयोगांचे संख्येचे अर्धाबरोबर आहे, ह्मणजे $\frac{७ \times ६}{२}$. जापेक्षां तिहि तिहींचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या $७ \times ६ \times ५$ अशी आहे, आणि जापेक्षां अबक अशा प्रत्येक संयोगाचे $३ \times २ \times १$ व्युत्क्रम संयोग होतात, तर तिहितिहींचा संयोगांची संख्या $\frac{७ \times ६ \times ५}{१ \times २ \times ३}$ आहे. आणि जापेक्षां अबकड अशे चोहोंचोहोंचे संयोगापासून $४ \times ३ \times २ \times १$ इतके व्युत्क्रम संयोग होतात, तर चोहोंचोहोंचे संयोगांची संख्या $\frac{७ \times ६ \times ५ \times ४}{१ \times २ \times ३ \times ४}$ आहे, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. यावरून रीति याप्रमाणें आहे. न चकत्यांचे संयोगांची संख्या काढायासाठीं, त्या न चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोगांचे संख्येस $१ \times २ \times ३$, इत्यादि न पावेतों अंकांचे गुणाकारानें भाग. जर सर्व चकत्यांची संख्या दाखवायास क्ष घेतला, तर त्यांतून दोहोंदोहोंचे संयोगांची संख्या $\frac{क्ष(क्ष-१)}{१ \times २}$ आहे; तीन अक्षरांचे संयोगांची संख्या $\frac{क्ष(क्ष-१)(क्ष-२)}{१ \times २ \times ३}$ आहे; चोहोंचे संयोगांची संख्या $\frac{क्ष(क्ष-१)(क्ष-२)(क्ष-३)}{१ \times २ \times ३ \times ४}$ आहे; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

२११. काहीं पक्षांत या रीतीस पुढील प्रमाणें सरळ रूप देतां येईल. दहा चकत्यांतून जितक्ये वेळा सात चकत्यांची निवड होती, तितक्या वेळा तीन तीन चकत्यांचे संयोग बाकी रहातात. यावरून जितके सातांचे संयोग होतील, तितकेच तिहींचे संयोग होतात. ह्मणून सातांचे संयोग काढण्याबद्दल तिहींचे संयोग काढल्यानें कार्य होईल; यावरून, या दोन संयोगांचा संख्या काढण्याचा सारिणी, जरी रूपानें भिन्न आहेत, तरी त्यांचें उत्तर सारिखेंच येतें असें निश्चयें ह्मणतां येईल. आणि तसेंच सिद्ध होतें; कां कीं दाहांतून सातांचे संयोगांची संख्या $\frac{१० \times ९ \times ८ \times ७ \times ६ \times ५ \times ४}{१ \times २ \times ३ \times ४ \times ५ \times ६ \times ७}$ आहे, यांत अंश आणि छेद या दोहीं स्थळीं $७ \times ६ \times ५ \times ४$ हा गुणाकार येतो, ह्मणून (१०८) प्रमाणें तो दोहोंतून छेकून टाकला, तर $\frac{१० \times ९ \times ८}{१ \times २ \times ३}$ असें राहातें, ह्मणून दहांतून तिहींचे संयोगांची संख्या ही आहे. याप्रमाणें दुसऱ्या कोणत्याहि पक्षांत दाखवितां, येईल.

द्वारा वस्तूतून चोहोंचोहोंचे संयोग किती होतील ?

उत्तर. ४९५.

$\left. \begin{array}{l} ८ \\ ११ \\ २८ \\ १५ \end{array} \right\} \text{यांतून}$ $\left\{ \begin{array}{l} ६ \\ ४ \\ २६ \\ ६ \end{array} \right\}$ यांचे संयोग किती होतील ?

उत्तर. $\left\{ \begin{array}{l} २८ \\ ३३० \\ ३७८ \\ ५००५ \end{array} \right.$

५२ वस्तूतून तेरातेरांचे संयोग किती करितां येतील ?

उत्तर. ६३५०१३५५९६००.

दुसरें पुस्तक.

व्यवहारी गणित.

पहिला भाग.

वजनें, मापें, इत्यादि.

२१२. पहिल्या पुस्तकांत जा कृती दाखविल्या आहेत, त्यांशिवाय व्यवहारी कामाकरितां, दुसऱ्या कृतींचें प्रयोजन लागत नाहीं. आतां आपल्ये गणनेचा खरेपणाची खात्री व्हावी इतकेंच केवळ नाहीं, परंतु त्या गणनेचीं उत्तरें ताडून, त्यांजविषयीं कांहीं निश्चय करणें, ही एक गोष्ट राहिली आहे. यापूर्वी (१५) प्रमाणें एक जातीचा एक मात्र कामांत आणिला, आणि जीं परिमाणें अनेक एकमानीं झालेलीं आहेत तीं, दुसऱ्या, तिसऱ्या, आणि चवथ्या, भागांत आहेत, आणि जीं

B4

A3

सहावा, या भागात सांगितला आहेत. जस, लांबावपची खोली समयी, एक दाखवायासाठी एक मैल घेतल्याने, अनेक मैलांची, किंवा एक मैलाचे अनेक भागांची लांबी, पूर्ण किंवा अपूर्णाकाने दाखविता येईल;* आणि त्यांत १ हा एक मैल आहे असे मानिले पाहिजे. परंतु पुष्कळ पक्षांत या गोष्टीपासून अडचणी येतील असे दिसेल. मनांत आण की एका खोलीची लांबी मैलाचा $\frac{1}{100}$ आहे, आणि दुसऱ्या खोलीची लांबी मैलाचा $\frac{1}{1000}$ आहे, असे हटले तर दुसरी खोली, पहिली पेक्षा किती लांब आहे, याचा समज कसा होईल ! हे समजण्यासाठी मैलापेक्षा काहीं लहान माप असवें; आणि जर एक मैलास १७६० सप्तभागांत विभागून, त्या प्रत्येक भागास एक यार्ड असे नाव दिले, तर पहिल्या खोलीची लांबी ९ यार्ड आणि एक यार्डाचे $\frac{9}{10}$ आहे, आणि दुसऱ्या खोलीची लांबी १० यार्ड आणि एक यार्डाचे $\frac{10}{100}$ आहे असे दिसेल. यावरून या वेगवेगळ्या लांब्यांचा पूर्वीपेक्षा चांगला समज होतो, परंतु त्यांत $\frac{9}{10}$ आणि $\frac{10}{100}$ हे अपूर्णाक आहेत ह्मणून, पुरतेपणी चांगला समज होत नाही. तो पुरता समज करून घेण्याकरितां एका यार्डाचे तीन समभाग केले आहेत असे मनांत आण, आणि यांतून

* एक दाखविण्यासाठी कोणतेहि परिमाण घेतले, तर त्याच जातीचे दुसरे काहीं परिमाण अनेक एकमानी, अथवा एक एकमाचे अनेक भागांनी, बरोबरच दाखविता येते, ही गोष्ट खरी नाही. हा विषय शिकते समयी जे शिकणाराचे ज्ञान असेल, त्याहून वर सांगितलेली गोष्ट सिद्ध करून समजून घेण्यासाठी, त्याचा आंगी अधिक समज आला पाहिजे; परंतु याविषयी जी काय त्याची समजूत असेल, ती खोटी आहे हे आता दाखवितो. एक फूट लांबीची एक रेष घे, तिचे दहा समभाग कर, त्यांतून प्रत्येक भागाचे पुनः दहा समभाग कर, आणि याप्रमाणे पुनः पुनः करित जा. जर असे त्या रेषेचे दशांश भागणे अनंतपर्यंत चालविले आणि त्या रेषेत अदमासाने एक अ बिंदू घेतला, तर तो बिंदू त्यातील कोणतेहि दशांश भाग स्थळीच येईल असा निश्चय करवत नाही; आणि जरी त्या रेषेचे सात किंवा अकरा किंवा दुसरे काहीं समभागांत भाग केले, तरी तो अ बिंदू बरोबर भाग स्थळीच येईल असेहि घडणार नाही. यावरून एक फुटाचा कोणत्याहि अपूर्णाकाने दाखविता येणार नाही, असा काहीं फुटाचा भाग असेल; आणि ही गोष्ट गणिततील मोठे विषयाने नेहमी घडते असे दिसून येईल. जा शब्दावर ही टीप सांगितली त्या शब्दापासून असे समजावे, की एके फुटाचा काहीं भाग, गणितरूपे अपूर्णाकाने हवा तितका जवळ जवळ दाखविता येईल, आणि व्यवहारांत याहून अधिक सूक्ष्मपणाची गरज लागत नाही.

फुटीचे $\frac{1}{3}$ पेक्षां कांहीं अधिक आहे. यामुळे पहिल्या खोलीची लांबी ९ यार्ड, २ फुटी, आणि एक फुटीचा $\frac{1}{3}$ आहे; आणि दुसऱ्या खोलीची लांबी १० यार्ड आणि एक फुटीचे $\frac{1}{3}$ पेक्षां कांहीं अधिक आहे. यावरून मोठ्या परिमाणासाठी मोठी मापे, आणि लहान परिमाणासाठी लहान मापे, असल्याने सुलभ पडते असे दिसते; परंतु केवळ सोईसाठी मात्र असे असावे, कां की एका पेक्षां अधिक मापे असल्याने कोणत्याही जातीचा परिमाणाशी गणना करितां येती, त्याचप्रमाणे केवळ एक माप असल्यानेहि करितां येईल; परंतु नुसती गणना एक मापाने होती, इतकेच केवळ नाही, परंतु गणना करण्यास एका मापाने फार सोपे पडते.

अंक गणित आणि पदार्थ विज्ञान यांत चांगले प्रविण, अशा पुरुषांनी एकाच काळीं जा मापांचे ठराव केले असते, त्यांसारखीं मापे हालीं या देशांत नाहीत. आतां पदार्थ विज्ञानाचे परिणाम, मापांचे ठराव करण्यासाठीं कोणत्या रितीने उपयोगांत आणले आहेत हे दाखवितों. ज्योतिषापासून सांपडलेले परिमाण कदाचित् हारवले, तर ते परिमाण काढण्याविषयींचा रितींत जा गोष्टी पुढे सांगितल्या आहेत, त्यांचे माहितीवरून त्या रिती खऱ्या आहेत किंवा नाहीत, याविषयीं मतभेद आहे; परंतु व्यवहार कामासाठीं त्या रिती पुरतेपणीं खऱ्या आहेत, याविषयीं कांहीं संशय नाही.

वजन आणि मापे ही नेहमीं एक सारिखीच असावी, आणि त्यांतून एकाद्वे मुळारंभींचे माप कदाचित् सांडले असतां, त्याचा पुनः कसा ठराव करावा, याची सर्वांस अपेक्षा असती हे उघड आहे. एक यार्डाचे खरे माप हालीं इंग्रजी सरकारांत ठेविले असते; परंतु जर कांहीं अपायाने त्याचा नाश झाला, तर सापुढे पांचशें वर्षानंतरचा मनुष्यांस त्याचे वडील जास यार्ड असें ह्मणत होते, त्याची लांबी कशी कळेल! हे कळायसाठीं जे कांहीं मनुष्याचा मतलबाने, किंवा अपायाने बदलवणार नाही, त्यापासून असे माप घेतले पाहिजे. सूर्य मंडळामध्ये कांहीं अकस्मात् आश्चर्यकारक फेरफार झाला नाही, तर ज्योतिषांत दाखविल्याप्रमाणे पृथ्वीचा एक दिवसाचा फिरण्याचा काळ,

B4

A3

आणि एक वर्षाचे लांबीचा काळ, हीं दोन्ही एकसारखीच शेंकडों वर्षांपावेतो राहातील, ह्मणून या दोन काळांपासून मापाचें परिमाण सांपडतें. जोंपर्यंत ज्योतिष शास्त्राचा अभ्यास चालत आहे, तोंपर्यंत या दोन काळांतून कोणता एक काळ सांडेल, असी कल्पना करण्यास अशक्य आहे, आणि एक दिवसाचे दुपारपासून, दुसऱ्या दिवसाचे दुपारपर्यंत जो काळ जातो तो, ह्मणजे सूर्याचा एक मध्यान्हापासून दुसऱ्या मध्यान्हपर्यंत जो काळ जातो, त्या काळाचे $३६५\frac{१}{४}$ अथवा $३६५\cdot२४२२४$ इतके मध्यान्ह दिवस एक वर्षाची लांबी असें माहित आहे. हालीं वर्षाची लांबी ३६५ दिवस धरितात, आणि दिवसाचा एक चतुर्थांश वर राहातो, त्याबद्दल प्रति चवथ्या वर्षी एक दिवस अधिक वाढवितात, त्या वर्षास अधिक दिवसाचें वर्ष ह्मणतात. हे आणि प्रतिवर्षी $\frac{१}{४}$ दिवस वाढविणें हीं सारखींच आहेत, आणि हे वाढविणेंहि कांहीं अधिक आहे, कां कीं वर्षाची लांबी ३६५ दिवसांवर $\cdot२५$ इतकी नाहीं, परंतु दिवसाचें $\cdot२४२२४$ इतकी आहे. यावरून दिवसाचे $\cdot००७७६$ इतकें अंतर पडतें, ह्मणून इतक्यानें आपलें वर्ष अधिक आहे. हे अंतर १२८ वर्षांत एक दिवसाबरोबर होतें, अथवा ४०० वर्षांत तीन दिवसांबरोबर होतें. यावरून वर्षांचे शतकाचे शेवटील वर्ष एक अधिक दिवसाचें असतें, अशीं तीन वर्षे एकाधिक दिवसाचीं न केलीं, आणि चवथें वर्ष एकाधिक दिवसाचें केलें, तर वर सांगितलेली कसर बरोबर होती. असें सन् १६०० व्या वर्षास एकाधिक दिवस वर्ष झटलें तर १७०० वें, १८०० वें, १९०० वें, हीं वर्षे एक अधिक दिवसाचीं नाहींत, परंतु सन् २००० वें, वर्ष एकअधिक दिवसाचें होईल.

२१३. यावरून पहिलें सांपडलेलें माप एक दिवस आहे, आणि त्यास २४ भागांत किंवा अवरांत विभागिलें आहे, प्रत्येक अवरास ६० भागांत किंवा मिनिटांत विभागिलें आहे, आणि प्रत्येक मिनिटास ६० भागांत किंवा सेकंदांत विभागिलें आहे. यावरून एक सेकंद, एक दिवसाचा ८६४०० वा भाग आहे, आणि काळाचें मान या पुढीलप्रमाणें आहे.

६०	सेकंद	हणजे	१	मिनिट	१	मि०
६०	मिनिटे		१	अवर	१	अ०
२४	अवर		१	दिवस	१	दि०
७	दिवस		१	आठवडा	१	आ०
३६५	दिवस		१	वर्ष	१	व०

एक सेकंदास १से० असे मांडितात.

या देशांत एक दिवसास ६० भागांत भागून, त्यांतील एक भागास घटिका हणतात, आणि एक घटिकेचे ६० भाग कल्पून त्यांतील प्रत्येक भागास पळ हणतात; यावरून एक दिवसांत ३६०० पळ आहेत, आणि हे काळमान थाप्रमाण आहे :-

या देशांतील काळमान.

६०	पळ	हणजे	१	घटिका	१	घ०
२	घटिका		१	मुहूर्त	१	मु०
३३	मुहूर्त		१	प्रहर	१	प्र०
८	प्रहर		१	अहोरात्र दिवस	१	दि०
१५	दिवस		१	पक्ष	१	प०
२	पक्ष		१	मास	१	मा०
२	मास		१	ऋतु	१	ऋ०
३	ऋतु		१	अयन	१	अ०
२	अयन		१	वर्ष	१	व०

२१४. असे तऱ्हेने सेकंदाचे माप सांपडल्यावर, घड्याळाचा आंदोलक असा करिता येईल, कीं तो चालू केला असता लंडन शहराचे अक्षांशांत बरोबर एक सेकंदांत एक झोका खाईल. नवे माप करायाचे जर असले, तर असा आंदोलकाचा लांबीस एक यार्ड हाडल्याने, आणि लांबीचे सर्व दुसऱ्ये मोजण्याविषयी यास मूळ माप असे ठरविल्याने सोईस पडेल. परंतु हालीं एक यार्डाचे माप स्थापिले गेले आहे; आणि त्याचा योगाने वर सांगितलेल्या आंदोलकाची लांबी सांगतां

B4

A3

येईल. या आंदोलकाची लांबी काढण्याविषयीचे चौकशीपासून असे कळले आहे, की लंडनांत आंदोलकाची लांबी ३९'१३'९३ इंच आहे, अथवा सुमारे एक यार्ड, तीन इंच, आणि एक इंचाचे $\frac{५}{३२}$ श आहे. यार्डाचे विभाग या पुढीलप्रमाणे आहेत.

इंग्रजी लांबीचीं मानें.

सर्वोहून लहान माप जत्र आहे.

३ अव ह्यणजे	१ इंच	१ इ०
१२ इंच	१ फूट १ फू०
३ फुटी	१ यार्ड १ या०
$५\frac{१}{२}$ यार्ड	१ पोल १ पो०
४० पोल अथवा २२० यार्ड	१ फर्लींग १ फ०
८ फर्लींग अथवा १७६० यार्ड	१ मैल १ मै०
आणि ६ फुटी	१ फादम १ फा०
$६९\frac{१}{३}$ मै	१ अंश १ अं अथवा १०

भूगोलविद्येतील मैल एक अंशाचा $\frac{१}{६०}$ वा भाग आहे, आणि तसे तीन मैल ह्यणजे नावाड्याचा एक लीग.

या देशांतील भूमी लांब मोजणीचे कोष्टक.

८ यव ह्यणजे	१ अंगुळ	१ अं०
२४ अंगुळें	१ हात १ हा०
४ हात	१ दंड १ दं०
२००० दंड	१ क्रोश.कोस १ को०
२ कोस	१ गव्युति १ ग०
२ गव्युति	१ योजन १ यो०

या देशांतील वस्त्रें व काष्ठ मोजणीचे कोष्टक.

२ अंगुळें ह्यणजे	१ तसु	१ त०
१२ तसु	१ हात १ हा०
२ हात	१ गज १ ग०

कापड मोजायाचीं इंग्रेजी मानें.

२ $\frac{1}{2}$ इंच	हणजे	१ नेल	१ ने०
४ नेल	१ पावयार्ड	१ पा०
३ पाव	१ फ्लेमिश एल	१ फ्ले० ए०
५ पाव	१ इंग्लिश एल	१ इं० ए०
६ पाव	१ फ्रेंच एल	१ फ्रें० ए०

२१५. क्षेत्राचीं इंग्रेजी मानें.

सगळीं क्षेत्रे चौरस इंच, चौरस फुटी, इत्यादीनीं मापिलीं जातात; चौरस इंच हणजे जा चौरसाची प्रत्येक बाजू १ इंच लांबीची आहे तें, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. हीं पुढील मानें लांबीचे मानांपासून निघतात, असें दिसण्यांत येईल.

१४४ चौरस इंच	हणजे	१ चौरस फूट	१ चौ० फु०
९ चौरस फुटी	१ चौरस यार्ड	१ चौ० या०
३० $\frac{1}{4}$ चौरस यार्ड	१ चौरस पोल	१ चौ० पो०
४० चौरस पोल	१ रूड	१ रू०
४ रूड	१ एकर	१ ए०

एक एकरांत ४८४० चौरस यार्ड आहेत, जा चौरसाची बाजू २२ यार्ड आहे त्याचे दहा पट एक एकर आहे. जी सांकळी सर्वेपर लोक कामांत आणतात ती २२ यार्डाचे लांबीची असती, तिला १०० कड्या असतात, आणि ती प्रत्येक कडी यार्डाचे २२ किंवा ७९२ इंच लांबीची असती. एक एकर हणजे १० चौरस सांकळ्यांचे बरोबर आहे. एथें लक्षांत आणिलें पाहिजे, कीं जा चौरसाची बाजू ६९ $\frac{3}{4}$ यार्ड आहे, तो १ एकराचे जवळ जवळ आहे, परंतु तो एक चौरस फुटीचा $\frac{1}{4}$ इतक्यानें एक एकराहून अधिक आहे.

या देशातील चौरस मोजणीचे कोष्टक.

८	यव हणजे	१ अंगुळ	१ अं०
४	अंगुळें	१ मुष्टि	१ मु०
३	मुष्टि	१ वीत	१ वी०
२	विती	१ हात	१ हा०
५ $\frac{५}{८}$	हात	१ काठी	१ का०
२०	काठ्या	१ पांड	१ पां०
२०	पांड	१ विघा	१ वि०
१२०	विघे	१ चाहूर	१ चा०

पैमाषीचे चालीप्रमाणे.

१६	आणे हणजे	१ गुंठा	१ गुं०
४०	गुंठे	१ एकर	१ ए०

यांत एक आणा हणजे $\frac{७}{२}$ चौरस यार्डीजवळ आहे.

या देशांत हाताचा लांबीचा सर्वत्र सारखेपणा नाही, यामुळे काठीचा मापांतहि फेरफार आहे. त्यांतून मुंबईचा आसपास जी काठी चालू आहे, तिची लांबी ९'४ फुटी आहे. आणि यावरून एका विघ्यांत $३९२\frac{६}{३}$ चौरस यार्ड आहेत, आणि एक एकरांत ४८४० चौरस यार्ड आहेत, यावरून त्यांचे प्रमाण जवळ जवळ ८५ स १०० असें आहे.

२१६. भरीवाची किंवा *पोकळीची माने.

घन हणजे फांशाचे रूपाचे भरीव आहे. घन इंच हणजे, असा घन आहे, कीं जाची प्रत्येक बाजू एक एक इंच आहे, आणि याप्रमाणे पुढेहि,

*पोकळी या शब्दाचा अर्थ तोच शब्द कामांत घेतल्यानें समजेल. जेव्हा एक मापांत दुसऱ्या मापापेक्षा अधिक रहाते, ते माप दुसऱ्या मापापेक्षा मोठे पोकळीचे आहे असें हणतात.

२७२८ घनइंच ह्यणजे १ घनफूट १ घ० फू०
 २७ घनफूटी १ घनयार्ड १ घ० या०

हें माप फार करून व्यवहारकामांत घेत नाहीं, तथापि तें बहुत-करून मोठ्ये गणिताचे प्रश्नांत मात्र घेतें. पूर्वी वेगवेगळ्या जिनसां-करितां इंग्लंडांत वेगवेगळीं मापें कामांत घेत होते, परंतु हल्लीं तीं सोडून एकच कामांत घेतात. त्यास इंपीरियल किंवा बादशाही मान ह्यण-तात, आणि तें पुढीलप्रमाणें आहे.

प्रवाही पदार्थांचीं आणि सर्व कोरड्ये जिनसांचीं इंग्रजी मानें.

४ जिल	ह्यणजे	१ पैट	१ पै०
२ पैट - - - -		१ कार्ट	१ का०
४ कार्ट - - - -		१ ग्यालन	१ ग्या०
२ ग्यालन - - - -		१ पेक*	१ पे०
४ पेक - - - -		१ बुशल	१ बु०
८ बुशल - - - -		१ कार्टर	१ का०
५ कार्टर - - - -		१ लोड	१ लो०

या मानामध्ये ग्यालन सुमारानें २७७.२७४ घनइंच आहे; ह्यणजे, २७७ $\frac{1}{8}$ घनइंच यांचे फार जवळ जवळ आहे.

या देशांत व्यापारांतील साखर, तेल, तूप, इत्यादि तोलायाचे वज-नाचे कोष्टक.

पुणें चालीचा.

८ गुंजा	ह्यणजे	१ मासा	१ मा०
१२ मासे		१ टांक	१ टा०
७२ टांक		१ पक्का शेर	१ प० शे०
४० शेर		१ मण	१ म०
२ $\frac{1}{2}$ मण		१ पल्ला	१ प०
८ पळे किंवा २० मण		१ खंडी	१ खं०

* पेक आणि त्याचे पुढील सर्व मापें केवळ कोरड्या जिनसां मापायाचे कामांत घेतात;

B4

A3

मुंबई चालीचा.

८ गुंजा	हणजे	१ मासा	१ मा०
१२ मासे	१ तोळा	१ तो०	
२८ तोळे	१ शेर	१ शे०	
४० शेर	१ मण	१ म०	
२० मण	१ खंडी	१ खं०	

दक्षिण महाराष्ट्र देशी तेल, तूप, भाजी, इत्यादि तोलाचे कोष्टक.

२४ तोळे	हणजे	१ कच्चा शेर	१ क० शे०
५ कच्चे शेर	१ पांसरी	१ पां०	
८ पांसऱ्या	१ कच्चा मण	१ क० म०	
२० मण	१ खंडी	१ खं०	

धान्यादि मोजायाचे कोष्टक.

पुणे चालीचा.

४ चिपटी	हणजे	१ शेर	१ शे०
२ शेर	१ अधोली	१ अ०	
२ अधोल्या	१ पायली	१ पा०	
१२ पायल्या	१ मण	१ म०	
२ $\frac{१}{२}$ मण	१ पला	१ प०	
८ पळे किंवा	१ खंडी	१ खं०	
२० मण			

मुंबई चालीचा.

२ टिपऱ्या	हणजे	१ शेर	१ शे०
४ शेर	१ पायली	१ पा०	
१६ पायल्या	१ फरा	१ फ०	
८ फरे	१ खंडी	१ खं०	
२५ फरे	१ मुडा	१ मु०	

१० $\frac{1}{2}$ अधोव्या	हणजे	१ फरा	१ फ०
१०० फरे		१ आणा	१ आ०
१६ आणे		१ रास	१ रा०

२१७. सर्वीपेक्षां जें लहान वजन कामांत घेतात, त्यास घेन हणतात, आणि तें याप्रमाणें ठरविलें जातें. जर एक घनइंच पोकळीचें पात्र पाण्याने भरलें, तर त्याचें वजन पूर्वीपेक्षां २५२.४५८ इतके घेन वाढेल. असे ठरविलेले ७००० घेन अवाड्यूपीडिस चे एक पौंडांत असतात, आणि ५७६० घेन त्रायचे पौंडांत असतात. सोने, रूपे, रत्ने आणि औषधे, इत्यादि खेरीज करून बाकी सर्व पदार्थांचें वजन करण्यासाठी, अवाड्यूपीडिसचा पौंड नेहमी कामांत घेतात. तो पुढील-प्रमाणें विभागिला आहे.

अवाड्यूपीडिसचें इंग्रजी वजन.

२७ $\frac{11}{32}$ घेन	हणजे	१ द्राम	१ द्रा०
१६ द्राम		१ औंस	१ औ०
१६ औंस		१ पौंड	१ पौ०
२८ पौंड		१ क्वार्टर	१ क्वा०
४ क्वार्टर		१ हनद्रेडवेट	१ हं०
२० हनद्रेडवेट		१ टन्	१ ट०

अवाड्यूपीडिसाचे १ पौंडांत ७००० घेन आहेत. शुद्ध पाण्याचे एक घन फुटीचें वजन ६२.३२१०६०६ अवाड्यूपीडिसाचे पौंड, अथवा ९९७.१३६९६९१ औंस आहे.

*पाणी उकळून त्यापासून जी वाफ उत्पन्न होती, ती धरून थंड केल्याने जें पाणी उत्पन्न होतं, तें पाणी बरखा अनुभव पाहण्यास घ्यावें, कारण अशांतें तें निमळें होतें. त्याचे उष्णतेची स्थिती फारनहिटचे थर्मोमिटरचे ६२ अंशांपर्यंत असावी.

B4

A3

या देशांतील सोनें, रुपें, इत्यादि तोलायाचे वजनाचे कोष्टक.

पुणे चालीचा.			मुंबई चालीचा.		
८ गुंजा	हणजे	१ मासा	$३\frac{1}{3}$ वाल	हणजे	१ मासा
१२ मासे		१ तोळा	४० वाल किंवा	}	१ तोळा
२४ तोळे		१ शेर	१२ मासे		
			२४ तोळे		१ शेर

मोतीं तोलाचे कोष्टक.

पुणे चालीचा.			मुंबई चालीचा.		
१६ तांदूळ	हणजे	१ रती	$१३\frac{3}{8}$ टके	हणजे	१ रती
२४ रती		१ टांक	२४ रती		१ टांक

सोनें, रुपें, रत्नें, आणि औषधें हीं वजन करण्यासाठीं त्रायचा पौंड कामांत घेतात, त्यांत ५७६० ग्रॅन आहेत, परंतु या दोन पक्षांत त्याचे भाग निरनिराळे आहेत. तीं मानें या पुढीलप्रमाणें आहेत.

इंग्रिजी त्रायचें वजन.

- २४ ग्रॅन हणजे १ पेनीवेट १ पे०
- २० पेनिवेट . . . १ औंस १ औं०
- १२ औंस १ पौंड १ पौ०

त्रायचे पौंडांत ५७६० ग्रॅन आहेत. शुद्धपाण्याचे १ घन फुटीचें वजन त्रायचे ७५७३७४ पौंड, किंवा ९०८'८४८८ औंस आहेत.

२०	ग्रेन	हणजे	१	स्कूपल्	३
३	स्कूपल्		१	द्राम	३
८	द्राम		१	औंस	३
१२	औंस		१	पौंड	१६

पैक्याचे कोष्टक.

दक्षिणदेशांतील पैक्याचा कोष्टक.

४	कवड्या	हणजे	१	गंडा
२	गंडे		१	टोली
२	टोल्या		१	दमडी
४	दमड्या		१	पैसा
४	पैसे		१	आणा
४	आणे		१	पावला
४	पावले		१	रुपया
१५	रुपये		१	मोहोर

सरकारी रीतिचा कोष्टक.

१००	रेस	हणजे	१	पावला	१२	पै	हणजे	१	आणा
४	पावले		१	रुपया	१६	आणे		१	रुपया

२१८. तांबें, रुपें आणि सोनें यांचें इंग्रजी चलतें नाणें या पुढीलप्रमाणें आहे; हणजे १ पेनी, हें नाणें तांब्याचें आहे, आणि त्याचें वजन $१०\frac{३}{४}$ द्राम आहेत; एक शिलिंग, याचें वजन ३ पेनिवेट आणि १५ ग्रेन आहे, यांत ४० भागांतून ३ भाग हीण आणि बाकी शुद्ध रुपें आहे; एक सावरेन, याचें वजन ५ पेनिवेट आणि $३\frac{१}{४}$ ग्रेन आहे, यांत १२ भागांतून १ भाग तांब्याचा आहे, आणि बाकी शुद्ध सोनें आहे.

B4

A3

इंग्रेजी पैक्याचीं मानें.

सर्वांहून लहान नाणें फार्दिंग आहे, त्यास $\frac{1}{4}$ असें मांडितात, कां कीं तो पेनीचा चवथा भाग आहे.

२ फार्दिंग ह्यणजे	१ अर्धपेनी	$\frac{1}{2}$ पै०
२ अर्धपेनी	१ पेनी	१ पै०
१२ पेनी	१ शिलिंग	१ शि०
२० शिलिंग	१ पौंड*० सावरेन	१ पौंड०

२१९. अनेक तऱ्हेचे परिमाणांनीं एकादें परिमाण झालें असतें, आणि तें निरनिराळ्ये एकमांनीं दाखविलें असतें; असें, १२० १४आ० ६पै, अथवा १पौ० १४शि० ६पै० अथवा, २४० १क्वा० ३पौ०; यांस विविधपरिमाणें ह्यणतात. स्पष्ट आहे, कीं वरचे कोष्टकांपासून कोणखेहि पदार्थाचें विविध परिमाण, अनेक निरनिराळ्ये तऱ्हांनीं मापितां येईल. उदाहरण, जी रकम पांच रूपये आणि चार आण्यांची आहे, ती ८४ आण्यांची, अथवा १००८ पै ची, असेंहि ह्यणतात. कोणतेंहि परिमाण एक रूपांतून दुसऱ्ये रूपांत सहज नेतां येतें; आणि जा रितीस भांजणी ह्यणतात, ती सर्व जातींचे परिमाणांस कशी लावावी तें या पुढील उदाहरणांपासून समजेल.

पहिलें. १८ रु० १२ आ० ६ पै यांत किती पै आहेत ?

एक रूपयांत १६ आणे आहेत, ह्यणून १८ रूपयांत १८×१६, अथवा २८८ आणे आहेत, यामुळें १८ रूपये, १२आणे, हे २८८+१२, अथवा ३०० आणे आहेत. पुनः एक आण्यांत १२ पै आहेत, ह्यणून ३०० आण्यांत ३००×१२, अथवा ३६०० पै आहेत. यामुळें १८रु०, १२ आ०, ६ पै यांत ३६००+६, अथवा ३६०६ पै आहेत. ही कृति या पुढीलप्रमाणें होईल.

* इंग्लिश पौंडाला विशेषकरून पौंड शिलिंग ह्यणतात, आणि तो £ या खुणें लिहितात.

$$\frac{222 + 12 = 200}{12}$$

$$200 + 6 = 206 \text{ पै.}$$

दुसरें. 206 पै यांत रुपये, आणे, आणि पै किती आहेत ?
206 यांस 12 नी भागिलें असतां भागाकार 200 येतो, आ-
णि बाकी 6 राहतात, हणून 206 पैत 200 आणे आणि 6 पै
आहेत.

200 यांस 12 नी भागिलें असतां भागाकार 12 येऊन बाकी
12 राहतात, यावरून 200 आप्यांत 12 रुपये आणि 12 आणे आहेत.

यामुळें 206 पैत 200 आणे आणि 6 पै, अथवा 12 रुपये
12 आणे आणि 6 पै आहेत. आणि ही कृति या पुढीलप्रमाणें आहे.

$$\frac{12)206}{12)200 \dots 6}$$

$$12 \text{ रु. } 12 \text{ आ. } 6 \text{ पै.}$$

तिसरें. 12 पै० 12 शि० * $\frac{3}{4}$ पे० यांत किती फार्दिंग आहेत ?
जापेक्षां एक पौंडांत 20 शिलिंग आहेत, हणून 12 पै०, यांत
 12×20 , अथवा 240 शिलिंग आहेत; यामुळें 12 पै० 12 शि० हे
 $240 + 12$, अथवा 252 शिलिंग आहेत. जापेक्षां एक शिलिंगांत 12
पेनी आहेत, हणून 252 शिलिंगांत 252×12 , अथवा 3024
पेनी आहेत; आणि यामुळें 12 पै० 12 शि० $\frac{3}{4}$ पे० यांत $3024 + 6$,
अथवा 3030 पेनी आहेत.

एक पेनीमध्ये 4 फार्दिंग आहेत, हणून 3030 पेनीमध्ये 3030×4 ,
अथवा 12120 फार्दिंग आहेत; आणि, यामुळें 12 पै० 12 शि० $\frac{3}{4}$ पै०

* फार्दिंग निरळें मांडीत नाहींत, परंतु पेनीचे भाग रूपानें मांडितात. जसें तीन
फार्दिंग हे एक पेनीचे $\frac{3}{4}$ आहेत, आणि त्यास $\frac{3}{4}$ अथवा $\frac{3}{4}$ याप्रमाणें मांडितात. $\frac{3}{4}$ अथवा
 $\frac{3}{4}$ याप्रमाणें एक अर्ध पेनी लिहितात; परंतु दुसरें संज्ञा फार करून घेतात.

B4

A3

यांत १७८८०+३, अथवा १७८८३ फार्दिंग आहेत. ही सर्व कृति या पुढीलप्रमाणे मांडितात.

पौ० शि० पे०
१८...१२...६^३/_४
२०

३६०+१२=३७२

१२

४४६४+६=४४७०

४

१७८८०+३=१७८८३ फार्दिंग.

चवथें. १७८८३ या फार्दिंगांत किती पौंड, शिलिंग, पेनी आणि फार्दिंग आहेत ?

जापेक्षां १७८८३ यांस ४ नीं भागिलें असतां, भागाकार ४४७० येतो, आणि बाकी तीन रहातात, ह्मणून १७८८३ फार्दिंगांत (२१८) प्रमाणें ४४७० पेनी आणि ३ फार्दिंग आहेत.

जापेक्षां ४४७० यांस १२ नीं भागिलें असतां, भागाकार ३७२ येतो, आणि बाकी ६ रहातात, ह्मणून ४४७० पेनीमध्ये ३७२ शिलिंग, आणि ६ पेनी आहेत.

जापेक्षां ३७२ यांस २० नीं भागिलें, तर भागाकार १८ येतो, आणि बाकी १२ रहातात, ह्मणून ३७२ शिलिंगांत १८ पौंड, १२ शिलिंग आहेत.

यामुळे १७८८३ फार्दिंगांत ४४७०^३/_४ पेनी, अथवा ३७२ शि० ६^३/_४ पे०, अथवा १८ पौ० १२ शि० ६^३/_४ पे० आहेत.

ही कृति या पुढीलप्रमाणे होईल;

फार्दिंग.

४)१७८८३

१२)४४७०...३

२०)३७२...६

१८ पौ० १२ शि० ६^३/_४ पे०

अ जवळ १०० रुपये, ४ आणे, ११ $\frac{१}{२}$ पै आणि व जवळ ६४३९२ पै आहेत. जर अ ला १,४९२ पै, आणि ब ला १६० २ आ०, ३ $\frac{१}{२}$ पै मिळाल्या, तर कोणाजवळ अधिक पैका होईल, आणि तो किती होईल ?

उत्तर. अहून २२८ रु० ७ आ० व जवळ अधिक होतील. पुढील कोष्टकांत जीं समोरासमोर परिमाणें आहेत तीं एक सारिखीं च आहेत. ह्मणून प्रत्येक आडव्ये ओळीपासून दोन उदाहरणें निघतील.

१ रु० १ पा० २ आ०	५६३२ कवड्या.
१५ पौ० १८ शि० ९ $\frac{१}{२}$ पे०	१५३०२ फार्दिंग.
६२ रु० २ पा०	१००० आ०, अथवा १२००० पै.
११५ पौ० १ औं० ८ पे०	६६३०७२ ग्रेन.
२० शे० १५ तो०	४७५२० गुंजा.
३ पौ० १४ औं० ९ द्रा०	१००१ द्राम.
५९ खं० १० म० ३० शे०	४७६३० शेर.
३ मै० १४९ या० २ फु० ९ इं०	१९५४७७ इंच.
५ को० ५०० दं०	१०५०० दंड.
१९ बु० २ पे० १ ग्या० २ कार्ट	१२६० पैंट.
४ फ० ८ पा० ३ शे १ टि०	५८३ टिपच्या कैली मुंबई चालीचा.
१६० २३' ४७"	५९०२७ सेकंद.
१० म० ९ दि० २ प्र० ५ घ०	१८५६० घटिका.

२२०. सांगितल्या संख्या अपूर्णांक असल्या, तरी वर प्रमाणेंच करितां येईल. एक रूपयाचा $\frac{१}{३}$ यांत किती आणे व पै आहेत ? आतां रूपयाचा $\frac{१}{३}$ हा १६ आण्यांचा $\frac{१}{३}$ आहे; १६ चा $\frac{१}{३}$ हा $\frac{१६ \times १}{३}$ आहे, अथवा $\frac{१६}{३}$, अथवा (१०५) $\frac{५}{३}$ आणे आहेत. पुनः एक आण्याचा $\frac{१}{३}$ हा १२ पैचा $\frac{१}{३}$, अथवा ४ पै आहेत. यावरून एक रूपयाचा $\frac{१}{३} = ५$ आणे आणि ४ पै आहेत. आणि, एक दिवसाचे २३ हे २३×२४ ,

किंवा ५.५२ अवर आहेत; आणि एक अवराचे ५२ हे ५२×६०, अथवा ३१.२ मिनिटे आहेत; आणि एक मिनिटाचे २ हे २×६०, अथवा १२ सेकंद आहेत; यावरून एक दिवसाचे २३ हे ५ अ० ३१ मि० १२ से० आहेत.

पुनः मनांत आण कीं ६आणे आणि ८पै मिळून, एक रुपयाचा कोणता भाग असें विचारिलें आहे. जापेक्षां ६आ० ८पै० हे ८० पै आहेत, आणि एक रुपयांत १६×१२ किंवा, १९२ पै आहेत, तर रुपयाचा १९२ भागांतून ८० भाग घेतल्यानें ६ आणे आणि ८ पै हे रुपयाचा कोणता भाग आहे हें समजेल. तर तो (१०७)प्रमाणें $\frac{८०}{१९२}$ रुपये आहे; परंतु (१०८)प्रमाणें $\frac{८०}{१९२} = \frac{५}{१२}$; यामुळे ६ आणे आणि ८ पै = $\frac{५}{१२}$ रु० आहेत.

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

अ० मि०

एक दिवसाचे $\frac{३}{५}$ हे - - - ९ - - ३६, अथवा २४ घटिका आहेत.

अ० मि० से०*

एक दिवसाचे १२८४१ हे - - - ३ - - ४ - - ५४.६२४

पौ० औ० द्रा०

एक हंड्रडवेटाचे २५७ हे - - २८ - १२ - ८७०४ आहेत.

शि० पे० फा०

पौंडाचे १४९३६ हे - - २ - ११ - ३३८५६ आहेत.

रुपयाचे १४९३६ हे - - २ आ० - - ४ पै० ६७७१२ आहेत.

२२१, २२२. शिलिंग, पेनी, आणि फार्दिंग, यांस पौंडाचे दशांशांचे रूप देण्याची रीति, पुढें या ग्रंथपुरवणीमध्ये दाखविली आहे.

*जेव्हां पूर्णांकाचे उजव्याकडे दशांश येतात, तेव्हां जा जातीचे पूर्णांकाचे एक आहेत, त्याच जातीचे दशांश आहेत. जसें, ५.५ से० हे पांच सेकंद आणि एक सेकंदाचे पांच दशांश आहेत. जसें, ०.५ सेकंद हे एक सेकंदाचे पांच दशांश आहेत; आणि ०.३ अवर हे एक अवराचे तीन दशांश आहेत.

पुरवर्णांत जा रिती सांगितल्या त्यांशीं शिकणारानें पक्के माहित असावें हें योग्य आहे.

२२३. एक्ये जातीचे दोन विविध परिमाणांची बेरीज करण्याची रिती, या पुढील उदाहरणापासून स्पष्ट कळेल. मनांत आण कीं, १९२ रु० १४ आ० २ $\frac{१}{२}$ पै हे ६४ रु० १३ आ० ११ $\frac{३}{४}$ पै यांशीं मिळवायाचे आहेत. या दोहोंतील निरनिराळे भाग मिळविल्याने जें होतें, ती बेरीज आहे. आतां.

$$\begin{array}{r} \text{पै पै पै} \\ \frac{३}{४} + \frac{१}{२} = \frac{५}{४} \\ \text{पै पै पै} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{रु०} \quad \text{आ०} \quad \text{पै} \\ = ० \quad - - \quad ० \quad - - \quad १\frac{३}{४} \quad (२१९) \text{ प्रमाणें.} \end{array}$$

$$११ + २ = १३ = ० \quad - - \quad १ \quad - - \quad १$$

आ आ आ

$$१३ + १४ = २७ = १ \quad - - \quad ११ \quad - - \quad ०$$

$$\text{रु६४} + \text{रु१९२} = २५६ \quad - - \quad ० \quad - - \quad ०$$

या सर्वांची बेरीज = रु० २५७ - - १२ - - २ $\frac{१}{४}$ आहे.

ही कृति एकदांच करून, पुढीलप्रमाणें मांडितात;

$$\text{रु० } १९२ \dots १४ \dots २\frac{१}{२}$$

$$\text{रु० } ६४ \dots १३ \dots ११\frac{३}{४}$$

$$\text{रु० } २५७ \dots १२ \dots २\frac{१}{४}$$

पहिल्यानें पैचे अपूर्णाकांची बेरीज घेऊन, त्यांतील पूर्ण पै हातचा घेऊन अपूर्णाक खाली मांड; नंतर पैचे ओळींत हातचा आलेल्या पै मिळीव; आणि त्या बेरीजेत किती आणे व पै आहेत ते पाहून त्यांतील, पै मात्र मांडून, आणे हातचे घेऊन आप्यांचा ओळींत मिळीव आणि या प्रमाणें पुढें कर. दुसरे कांहीं जातींचे परिमाणांची बेरीज घेण्याविषयी हीच रिती लागू होईल. आणि कौष्टक पाठ केल्यावर, कृति करायास सोपें पडेल.

२२४. (४०) कलमांतील सांगितल्ये रितीप्रमाणें वजावाकी करितां येईल, सणजे, जर दोन परिमाणांस एक सारिखेंच परिमाण मिळविलें, तर त्या दोन परिमाणांचे अंतरांत कांहीं फेर पडत नाहीं. मनांत

त्या
सावेंची
की,
मि-
हो-

आण, कीं २४६० ५आ० ७ पै यांतून १९६० १३आ० १०पै० हे वजा करायाचे आहेत. हीं परिमाणे या पुढीलप्रमाणे मांड;

रु० २४ -- ५ -- ७

रु० १९ -- १३ -- १०

जापेक्षां ७पै तून १०पै वजा होत नाहींत, ह्मणून या दोन परिमाणांस १ आणा मिळीव, ह्मणजे वरचे परिमाणास १२पै मिळीव, आणि खालचे परिमाणास १आणा मिळीव. यावरून वरचे ओळींत १९पै आणि खालचींत १४आणे होतील, त्यांची वजाबाकी करून बाकी ९पै खालीं मांड; जापेक्षां खालचे ओळीचे आणे १ नें वाढविले, ह्मणून खालचे ओळींत १४ आणे आणि वरचे ओळींत ५ आणे आहेत. वरचे ओळीला १६ आणे आणि खालचे ओळीला १ रूपया मिळवून, खालचे ओळीचे आणे वरचा ओळीचा आण्यांतून वजाकरून बाकी ७ आणे राहातात. आतां खालचे ओळींत २० रु० आणि वरचे ओळींत २४६० आहेत, आणि त्यांची वजाबाकी ४६० आहे; यामुळे या दोन रकमांची वजाबाकी ४६० ७आ० ९पै आहे. वेगवेगळ्या रकमांशीं जें जें वेगळालें मिळविलें आहे, त्या रूपानें मांडलें असतां, कृति याप्रमाणें होईल.

रु० २४ .. २१ .. १९

रु० २० .. १४ .. १०

बाकी रु० ४ .. ७ .. ९

चा
पै
, पै
या
वि-
रा-
रि-
ळ-
ंत

२२५. कोष्टकांतून दुसऱ्ये कोणखेहि जातीचे परिमाणांस ही रीति लावितां येईल. याजकरितां दुसरें एक उदाहरण देतो;

७ह० २कार० २१पै० १४औं० यांतून
२ह० ३कार० २७पै० १२औं० हे वजाकर

मागील कलमाप्रमाणें फेरफार केल्यानंतर उदाहरण याप्रमाणें होतें;

७ह० ६कार० ४९पै० १४औं० यांतून
३ह० ४कार० २७पै० १२औं० हे वजाकर

४ह० २कार० २२पै० २औं० बाकी.

करितां येईल. एथें २१पौंडांत २७ पौंड जात नाहीत, हणून व-
जाबाकी करित नाही, परंतु २१पौंडांत १का० अथवा २८ पौंड
मिळवितों, नंतर त्या बेरिजेंतून २७पौ० वजा करितों. पहिल्यानें
१का० अथवा २८पौ० यांतून २७पौ० वजा करून बाकी, २१पौं-
डांत मिळविली असतां, कृति तोंकडी होऊन उत्तर सारिखेंच
निघेल.

२२६. अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

एका व्यापारी मनुष्याचीं पांच दुकानें होतीं यांतून तीन दुकानांत
त्यास नफा झाला तो या पुढीलप्रमाणें १५४०रु० १२आ० ८पै,
आणि ३०५ रु० ४ आ० ३पै, आणि ७५०रु० २आ० ६पै;
आणि दोन दुकानांत तोटा झाला तो ९१०रु० ८आ० ६पै, आणि
६८५रु० १०आ० ११पै. तेव्हां त्या सावकारास नफा काय
राहिला?

उत्तर. १००० रुपयें नफा झाला.

एका मनुष्यास या पुढील रकमा घेणें आहेत, १९३पौ० १४शि०
११पै०, २०पौ० ०शि० ६पै०, ६४७३पौ० ०शि० ०पै०, आणि
४९पौ० १४शि० ४पै०, आणि त्यास पुढील कर्ज देणें आहे;
२००पौ० १९शि० ६पै०, ३०५पौ० १६शि० ११पै०, २२पौ०, आ-
णि १९पौ० ६शि० ०पै०, तर सर्व कर्ज फेडून त्याजवळ बाकी किती
राहिली?

उत्तर. ६१९०पौ० ७शि० ४पै०

अ, ब, क, ड, अशीं चार शहरें अनुक्रमानें एकापुढें एक आहेत.
आणि जर एक मनुष्य ५अ० २०मि० ३३से० इतक्या काळांत अ पा-
सून ब जवळ जातो; ६अ० ४९मि० २से० इतक्या वेळांत ब पासून
क जवळ जातो; आणि १९अ० ०मि० १७से० इतक्या काळांत
अ पासून ड जवळ जातो; तर ब पासून ड पर्यंत, आणि क पासून
ड पर्यंत जाण्यास त्या मनुष्याला किती काळ लागेल?

उत्तर, १३अ० ३९मि० ४४से० आणि ६अ० ५०मि० ४२से०

B4

A3

२२७. गुणाकाराची कृति करायासाठी, लक्षांत ठेवावें कीं, जसें (५२) कलमांत सांगितलें, कीं जर कांहीं परिमाण अनेक भागांत विभागून, तो प्रत्येक भाग भलत्ये कांहीं संख्येनें गुणिला, आणि त्यांचे वेगळाल्ये गुणाकारांची बेरीज घेतली, तर त्यापासून जें उत्तर निघतें, तें आणि तीं सर्व परिमाणें त्याच संख्येनें गुणून जें उत्तर निघतें, हीं दोनी उत्तरें सारखींच होतील.

७५० १३आ० ६पै यांस १३ नीं गुणायाचें आहे. यांतील पहिलें परिमाण ७ रूपये, १३ आणे, आणि ६पै, या वेगळाल्ये भागांनीं झालें आहे. आणि

$$\begin{array}{r} ६पै० \times १३ = ७८पै० \text{ अथवा } \dots ० \dots ६ \dots ६ \text{ आहेत.} \\ १३आ० \times १३ = १६९आ० \text{ अथवा } \dots १० \dots ९ \dots ० \\ ७५० \times १३ = ९१५० \text{ अथवा } \dots ९१ \dots ० \dots ० \end{array}$$

या सर्वांची बेरीज ५० १०१ -- १५ -- ६ आहेत.
ही बेरीज यांचे बरोबर आहे, ५० ७ -- १३ -- ६ x १३.

ही कृति बहुतकरून पुढीलप्रमाणें मांडितात;

$$\begin{array}{r} ५० \text{ आ० पै०} \\ ७ \dots १३ \dots ६ \\ \hline १३ \\ ५० \dots १०१ \dots १५ \dots ६ \end{array}$$

२२८. (७४) कलमांत जें मूळ कारण सांगितलें आहे, त्यावरून भागाकार करितात, ह्मणजे, जर कांहीं परिमाण अनेक भागांत विभागिलें, आणि तो प्रत्येक भाग, भलत्ये कांहीं संख्येने विभागिला, तर त्या वेगळाल्ये भागाकारांची बेरीज, तें सर्व परिमाण त्याच संख्येने भागून जो भागाकार येईल, त्याचे बरोबर आहे. मनांत आण, कीं ९९५० १४आ० ९पै यांस १३नीं भागायाचें आहे. जापेक्षां ९९ भागिले १३नीं, तर भागाकार ७ येऊन बाकी ८ राहतात; मुळचें सर्व परिमाण, १३५० x ७, अथवा ९१५० आणि ८ ५० १४आ० ९पै यांणीं झालें आहे. १३ भाज्य असून पहिल्ये रकमेचा भागाकार ७५० आहे; दुसऱ्याचा

आहेत, हणून २६० १४० ११२ १०१० १०१० १०१०,
 आणि १४२ यांस १३ नीं भागून भागाकार १० येऊन, बाकी १२ रा-
 हतात; १४२ आणे आणि ९ पै हे १३×१०, अथवा १३० आणे,
 आणि १२ आणे, ९ पै यांणी झाले आहेत, यांतील पहिल्याचा भागा-
 कार १० आणे आहे, आणि दुसऱ्याचा भागाकार काढायाचा राहिला.
 आतां १२ आणे यांत १४४ पै आहेत, हणून १२ आणे, ९ पै मि-
 लून १५३ पै आहेत, यांस १३ नीं भागून भागाकार ११ ये-
 ऊन बाकी १० राहतात; हणजे १५३ पै, ह्या १३×११, किंवा १४३
 पै आणि १० पै मिळून झाल्या आहेत; आणि पहिल्याचा भागाकार ११
 पै, आणि बाकी पैचे $\frac{१०}{१३}$ आहेत. यावरून सर्व परिमाणाचा १३ वा
 भाग ७ रु० १० आ० ११ $\frac{१०}{१३}$ पै आहे. ही सर्व कृति पुढीलप्रमा-
 णें मांडितात; आणि पुढील अभ्यासासाठीं सांगितलेल्या उदाहरणांस,
 तशेंच तऱ्हेची कृति लावितां येईल.—

रु०	आ०	पै०	रु०	आ०	पै०
१३)९९	-- १४	-- ९	(७-- १०	-- ११ $\frac{१०}{१३}$	
९१					
८					
१६					
१२८+१४=१४२					
			१३०		
			१२		
			१२		
			१४४+९=१५३		
			१३		
			२३		
			१३		
			१०		

B4

A3

यांत ९९, १४२, १५३, या प्रत्येक संख्या चालत्ये रितीप्रमाणें १३ नीं भागिल्या आहेत, परंतु भाजक केवळ पहिल्या रकमेचा ढावेकडेस मात्र मांडिला आहे.

अभ्यासाकरिता उदाहरणें.

$$\begin{aligned}
 २खं० ३म० ७शे० \times ३४ &= ७३खं० ७म० ३८शे०. \\
 २ह० १का० २१पौंड ७औंस \times ५३ &= १२९ह० १का० १६पौ० ३औं० \\
 १७रु० ५आ० ७पै \times ८५ &= १४७४रु० १०आ० ७पै \\
 २दि० ४अ० ३मि० २७से० \times १०९ &= २३६दि० १०अ० १६मि० ३से० \\
 २७पौ० १०शि० ८पे० \times ५६९ &= १५६६६पौ० ९शि० ४पे० \\
 १८७रु० \times \frac{३}{४} &= ८०रु० २आ० ३\frac{३}{४}पै. \\
 १६६पौ० \times \frac{६}{३३} &= ४०पौ० ४शि० १०\frac{६}{३३}पे० \\
 १८७पौ० ६शि० ७पे० \times \frac{३}{१००} &= ५पौ० १२शि० ४\frac{३}{२५}\frac{२}{५}पे० \\
 ४शि० ६\frac{१}{२}पे० \times ११२१ &= २५४पौ० ११शि० २\frac{१}{२}पे०
 \end{aligned}$$

२२९. मनांत आण, कीं ३रु० १२आ० ८पै० यांत, २ आणे ४पै, किती वेळा जातात हैं इच्छिलें आहे. तर पहिल्यानें प्रत्येकांत किती पै आहेत तें काढावें. (२१९) प्रमाणें, पहिल्या रकमेत ७२८पै, आणि दुसरीत २८पै आहेत. आतां, ७२८ यांत २८ हे २६ वेळा जातात; यामुळें पहिलें परिमाण दुसरे परिमाणाहून २६ वेळा अधिक आहे. जा उदाहरणांत, रुपये, आणे, पै, येतात, त्यांत रुपयांचे दशांश कामांत घ्यावे हें बरें, ह्मणजे उत्तर पुरतेपणीं जवळ जवळ येईल. जसें, २ आ० - - ४ पै हे १४५८३रु० आहेत; आणि ३रु० १२आ० ८पै० हे ३७९१६रु० आहेत; तर ३७९१६ यांस १४५८३ यांणीं भागिल्यानें २६ $\frac{१४५८३}{१४५८३}$ हा भागाकार येतो. हा पक्ष रूढीचे फार बाहेरचा आहे, कां कीं जितका भाजक लहान असेल, तितकी अधिक चूक सांगितल्ये दशांशांत येईल.

१७शे० १२ तो० ७ मा० ३ गुं० यांत, १ शे० २ तो० ३ मा०
हे किती वेळा जातात ?

उत्तर. १६०२३४

६ह०, २कार०, यांत १कार०, १४पौंड०, १औं०, हे किती वेळा
जातात? आणि १दि०, २अ०, ०मि०, ४७से०, यांत ३मि०, ४६से०,
हे किती वेळा जातात ?

उत्तर. १७३०७५८, आणि ४१४३६७२५७.

जर २हं०, ३का०, १पौं०, यांस १५०पौं० १३शि० १०पे० पड-
तात तर १ पौंडास काय पडेल ?

उत्तर. ९शि० $९\frac{१३}{३०९}$ पे०

एक वाणी दर पौंडास ११ पे० दराची २ह०, १५पौं०, साकर
घेतो, आणि दर पौंडास ५ पे० दराची १४ ह०, ३ पौं, साकर घेतो,
आणि त्या दोन्ही जातींची साकर मिश्र करितो. तर त्यास तोटा न
होता, ती मिश्र साकर कोणत्या दराने त्याणें विकारी ?

उत्तर. ५ पे० $\frac{३१५३}{४२०५}$

२३०. गुणाकार करायची एक सोईची रीत आहे, तीस बरावर्दी
झणतात. जर एक खंडीस २ह० १४आ० ६पै० पडतात, तर
१५३ खंडीस काय पडेल असे विचारिले आहे असे मनांत आण. ही
रकम १५३ नीं गुणून, तो गुणाकार सर्वांची किंमत होईल हें स्पष्ट
आहे.— परंतु दर खंडीस २ह० १४आ० ६पै या दराने १५३
खंडी विकत घेतल्या तर पहिल्याने प्रत्येक खंडीस २ रुपये प्रमाणें, नंतर
प्रत्येक खंडीस ८ आणे प्रमाणें, नंतर प्रत्येक खंडीस ४ आणे प्रमाणें,
नंतर प्रत्येक खंडीस २ आणे प्रमाणें, नंतर प्रत्येक खंडीस ६ पै प्रमाणें;
१५३ खंडीचा पैक्याचा निरनिराळ्या रकमा काढून त्यांची बेरीज
एकंदर पैका होईल. ही कृति या पुढीलप्रमाणे आहे.

१. खंडीस २ रु० प्रमाणे १५३ खंडी-
ची किंमत - - - - - ३०६रु०--०आ०--०पै.
 २. जापेक्षां ८ आणे हे १ रु० यांचे अर्ध
आहे, ह्मणून १ खंडीला ८ आणे या
दराने, १५३ खंडींची किंमत $\frac{१५३}{२}$
आहे. - - - - - ७६ -- ८ -- ०.
 ३. ४आणे हे ८ आण्यांचे अर्ध आहे,
ह्मणून एक खंडीस ८ आणे प्रमाणे
१५३ खंडीस जी किंमत पडली
तिचे निमे किंमत ४ आणे दराने
होईल; अथवा ७६रु० ८आ० यांचे
अर्ध ह्मणजे - - - - - ३८ -- ४ -- ०.
 ४. ४ आण्यांचे अर्ध २ आणे आहे, ह्म-
णून दर खंडीस ४आणे प्रमाणे
१५३ खंडींची जी किंमत, तिचे अर्ध
२ आणे दराने होईल. - - - - - १९ -- २ -- ०.
 ५. २ आण्यांचा $\frac{१}{४}$ सहा पै होतात ह्म-
णून दरखंडीस ६ पै प्रमाणे १५३
खंडींची किंमत १९ रु०--२ आ०
यांचा $\frac{१}{४}$ होईल. - - - - - ४ -- १२ -- ६.
- या सर्व रकमांची बेरीज - - - - - ४४४ रु०--१०आ०--६पै.
ही बेरीज २ रु० १४ आ० ६ पै \times १५३ यांचे बरोबर आहे.-
ही कृति या पुढीलप्रमाणे मांडितात.-

दरखंडीस १ रु. प्रमाणे	१५३रु.०आ. पै
२रु० हे २ \times १ रु० आहेत,	२ -- ० -- ०
८आ० हे १ रु० चा $\frac{१}{२}$ आहे,	० -- ८ -- ०
४आ० हे ८आ० चा $\frac{१}{२}$ आहे,	० -- ४ -- ०
२आ० हे ४आ० चा $\frac{१}{२}$ आहे,	० -- २ -- ०
६पै० ह्या २आ० चा $\frac{१}{४}$ आहे,	० -- ० -- ६
बेरीज	२रु० १४आ० ६पै
	३०६-- ०--०
	७६-- ८--०
	३८-- ४--०
	१९-- २--०
	४--१२--६
	४४४रु. १०.६

एक पौंडास ९शि० १० $\frac{३}{४}$ पे० प्रमाणें १७३५ पौंडास काय पडेल! ५शि० ४शि० १०पे० आणि $\frac{१}{२}$ पे० आणि $\frac{१}{४}$ पे० मिळून सर्व किंमत ९शि० १० $\frac{३}{४}$ पे० होती; त्यांतून ५शि० हे १पौ० चा $\frac{१}{४}$ आहे, ४शि० हे १पौ० चा $\frac{१}{४}$ आहे, १० पे० हे ५शि० चा $\frac{१}{४}$ आहे, $\frac{१}{२}$ पे० हा १० पे० चा $\frac{१}{२०}$ आहे, आणि $\frac{१}{४}$ पे० हा $\frac{१}{२}$ पे० चा $\frac{१}{२}$ आहे. पूर्वीचे उदाहरणाप्रमाणें कृति केली असतां, याप्रमाणें होईल;

	पौ०	शि०	पे०
दर पौ० १ पौ० प्रमाणें	१७३५	--	०--०--०
५शि० हे १पौ० चा $\frac{१}{४}$ आहे,	०	--५--	०
४शि० हे १पौ० चा $\frac{१}{४}$ आहे,	०	--४--	०
१० पे० हे ५शि० चा $\frac{१}{४}$ आहे,	०	--०--	१०
$\frac{१}{२}$ पे० हा १० पे० चा $\frac{१}{२०}$ आहे,	०	--०--	० $\frac{१}{२}$
$\frac{१}{४}$ पे० हा $\frac{१}{२}$ पे० चा $\frac{१}{२}$ आहे,	०	--०--	० $\frac{१}{४}$
वेरीज केल्यानें,	पौ० ०	--९--	१० $\frac{३}{४}$
	पौ० ८५८	--९--	३ $\frac{१}{४}$

सर्व उदाहरणांत, पहिल्यानें सांगितल्ये किंमतीचे पुष्कळ भाग करावे, असे कीं त्यांतून प्रत्येक भाग त्याचे पूर्वीचे भागाचा कांहीं सरळ * अपूर्णाक असेल. हे भाग करण्याविषयी कांहीं रिति सांगतां येत नाही, परंतु प्रत्येक उदाहरणांत भाग कसे करावे, याची रिति अभ्या-

*एकाचा कोणताहि अपूर्णाक जाचा अंश एक आहे, त्यास त्या एकाचा निःशेष भाग बहुतकरून वाणतात. जसें २ शि० आणि १० शि० हे दोन्ही एक पौंडाचे निःशेष भाग आहेत, कारण ते $\frac{१}{२}$ पौ० आणि $\frac{१}{१०}$ पौ० आहेत.

सानें समजेल. याप्रमाणें भाग केल्यावर प्रत्येक भाग, किंमत आहे असें मानून, सर्व परिमाणांची किंमत काढावी आणि नंतर त्यांची बेरीज घ्यावी.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

२४३६० यांस काय पडेल, जर १६० यास १४पौ० १८शि० ८३पे० पडतात ?

उत्तर. ३६२९पौ० १शि० ०३पे०

एक बुशलास २पौ० १शि० ३३पे० पडतात, तर १६९ बुशलांस काय पडेल ?

उत्तर. ३४८पौ० १४शि० ९३पे०

एक कार्टरास १९ शि० २ पे० पडतात, तर २७३ कार्टरांस काय पडेल ?

उत्तर. २६१पौ० १२शि० ६पे०

जर १ विध्यास २६० १३आ० ७पै पडतात, तर ५९५ विध्यांस काय पडेल ?

उत्तर. १६९५६ -- २ आ -- १ पै.

२३१. जेव्हां दिलेली परिमाणें कोष्टकाचा अनुक्रमाप्रमाणें नसतील, परंतु व्यवहारी, किंवा दशांश अपूर्णांक असतील, त्यांसहि या रिती लावितां येतील, असें या सर्व अध्यायापासून कळेल. याविषयीं हीं पुढील उदाहरणें आहेत.

एक हंड्रेडवेष्टास २६० १आ० ३पै पडतात, तर २७२३४७९ ह० काय पडेल ?

उत्तर ५६५९७२९ ह०, अथवा ५६५६० १५आ० ६पै.

एक शोरास २ आणे, ६ पै प्रमाणें ६६ $\frac{१}{२}$ शोरांस १०ह ६आ० ३पै पडतात.

एक एकरास ३१०७६ पौ० पडतात, तर २७९३०१ एकरांस किती पौ० शि० पे० पडतील ?

उत्तर, ८६७९५५८पौ०, अथवा ८६७ पौ० १९शि० १३पे०

उत्तर २३१४६पौ०, अथवा २पौ० ६शि० ३ $\frac{१}{२}$ पे०
 जर १ तोळा सोन्यास १५रु० १०आ० ८पै पडतात, तर ५२० तोळे
 ९ मासे यांस काय पडेल ?

उत्तर, ८१५८रु० ६आ० ८पै.

२३२. दर दिवसास अमुक रकम सांगितली, तर एक वर्षांत एक-
 दर किती होईल, हें जाणायाची वारंवार गरज लागती. ही रकम थो-
 डक्यांत काढितां येईल, कां कीं जापेक्षां एक वर्षाचे दिवसांची संख्या,
 २४०+१२०+५ आहे; तर दरदिवस एक पेनी प्रमाणें १वर्षांत १पौ०,
 १ $\frac{१}{२}$ पौ०, आणि ५ पेनी एकंदर होतील. त्यावरून ही रीति निघते.
 दररोज सांगितल्ये रकमे प्रमाणें, एक वर्षांत एकंदर किती हो-
 ईल, हें जाणायासाठीं, त्या रकमेत पेनी आणि पेनीचे अपू-
 र्णांक किती आहेत हें काढ; त्यांस त्यांचें अर्ध मिळवून जितक्या पेनी
 होतील तितके ते पौंड आहेत, आणि प्रत्येक फादिंग ५ शिलिंगांबरोबर
 आहे असें समज; नंतर दररोजाचे रकमेची पांचपट त्यांत मिळव-
 ली असतां, वर्षाची सगळी एकंदर कळेल. उदाहरण, दररोज १२
 शि० ३ $\frac{३}{४}$ पे० प्रमाणें एक वर्षांत एकंदर रकम किती होईल? यांत १४७ $\frac{३}{४}$
 पेनी आहेत, आणि त्यांचें अर्ध ७३ $\frac{३}{४}$ पेनी आहे, तर या दोहोंची बेरीज
 २२१ $\frac{३}{४}$ पेनी आहे, हे पौंड ह्मणले असतां २२१पौ० १२शि० ६पे० हो-
 तील. पुनः १२शि० ३ $\frac{३}{४}$ पे० × ५ हे ३पौ० १शि० ६ $\frac{३}{४}$ पे० आहेत, हे पूर्वीचे
 रकमेशीं मिळवले असतां, एक वर्षाची एकंदर रकम २२४पौ० १४शि०
 ० $\frac{३}{४}$ पे० होईल. त्याच रितीप्रमाणें, दररोज २शि० ३ $\frac{३}{४}$ पे० प्रमाणें एक-
 वर्षाची रकम ४१पौ० १६शि० ५ $\frac{३}{४}$ पे० आहेत; आणि दररोज ६ $\frac{३}{४}$ पे०
 प्रमाणें वर्षाची एकंदर १०पौ० ५शि० ३ $\frac{३}{४}$ पे० आहेत; आणि दररोज
 ११पे० प्रमाणें वर्षाची एकंदर १६पौ० १४शि० ७पे० आहेत.

२३३. वहिवाटीचे कामास चालेल अशी, पुढीलप्रमाणें वरचे री-
 तिचे उलटी रीति काढितां येईल; जर एक वर्षांत ३६०, अथवा २४०
 चे $\frac{३}{४}$ दिवस असतात असें कल्पिलें, तर दरवर्षास जी रकम आहे, त्या-
 वून तिचा $\frac{३}{४}$ यांस वजा केला तर बाकी २४० दिवसांचें प्रमाण नि-

B4

A3

घेळ; आणि अशा रितीने काढलेला प्रत्येक पौंड, पेनी असे मानिले असता, ते पेनी एक दिवसाची रकम होईल. परंतु जापेक्षा वर्ष ३६० दिवसांचे नाही, परंतु ३६५ चे आहे, ह्मणून वर ठरविल्याप्रमाणे प्रत्येक दिवसाचा भाग घेऊन, त्यास ३६५ भागांत विभागून त्यांतून ५ काढिले, तर ३६० या सर्व भागांतून जी सर्व रकम वजा केली ती, अथवा ३६०×५ तसेले भाग, यांतून पहिल्याने जे ५ दिवस सोडले आहेत, त्यांतले प्रत्येक दिवसास ३६० भाग येतील. जापेक्षा आरंभी ३६० भाग केले आणि ३६५ तून ५ भाग काढिले, ह्मणून प्रत्येक पहिल्या दिवसाविषयी ३६० भाग राहिले; यामुळे या अधिक कृतीने वर्षाची सर्व रकम ३६५ दिवसांस सारखी वांटिली जाती. आतां ३६५ तून ५ भाग, हे ७३ तून एक भाग घेतल्याप्रमाणे आहे, अथवा खरे उत्तर काढायासाठी, पहिल्या उत्तरांतून त्यांचा ७३ वा भाग वजा केला पाहिजे. दिवसाचा दर जर फार मोठा नसला, तर ७२ वा भागहि चालेल, आणि ७२ फार्दिंग हे १८ पेनी आहेत, ह्मणून दर ३८ पेनीस एक फार्दिंग वजा केल्याप्रमाणे, अथवा दर ३ शि०, यांस $\frac{१}{२}$ पेनी, अथवा दर ३ पौंडांस १० पे० याप्रमाणे वजा करणे हें बरोबर आहे. त्यावरून रीति पुढीलप्रमाणे आहे. वर्षाची सांगितलेली रकम होण्यास दररोज काय द्यावे लागेल, हें जाणायासाठी, सांगितल्या रकमेतील शिलिंग इत्यादि यांस (२२१) प्रमाणे पौंडाचे दशांशरूप दे; त्यांतून त्यांचा तिसरा भाग वजा करून, बाकी राहिलेले पौंड, पेनी आहेत असे मनांत समजावे; नंतर त्यांत प्रत्येक १८पेनीसाठी १ फार्दिंग, अथवा प्रत्येक ३ पौंडांसाठी १०पेनी वजा करावे. उदाहरण, दर वर्षास जर २२४पौ० १४शि० ० $\frac{३}{४}$ पे० असतील, तर दर दिवसास काय होईल? हे २२४ \cdot ७०३पौ० आहेत, आणि त्यांचा तृतीयांश ७४ \cdot ९०१पौ० आहेत, हे २२४ \cdot ७०३पौ० यांतून वजा केले, तर १४९ \cdot ८०२पौ० बाकी राहातात, हे पेनी आहेत, तर ते १२ शि० ५ \cdot ८०२ पेनी होतात, ह्मणून यांत १शि० ६पे० किंवा १८पेनी ८ वेळा जातात. याजकरितां ८ फार्दिंग अथवा २ पेनी वजा करून १२शि० ३ \cdot ८०२पे० हे राहातात, ह्मणजे एक फार्दिंगाचे $\frac{१}{२}$ इतक्या अंतराने मात्र खरे उत्तराजवळ हें उत्तर होते. या तऱ्हेने वर्षास १००पौ० असले, तर दर दिवसास ५ शि० ५ $\frac{३}{४}$ पे० होतील.

माग लागू होऊन, दर दिवसास १ रुपया रकम किती होईल हे जाणायची वारंवार गरज लागती. आतां १ रुपयांत १९२ पै आहेत, त्यांची दुप्पट ३८४ आहेत, हाणजे हे ३६५ पेक्षां १९ नीं अधिक आहेत, आणि १९२ चा दहावा अंश १९२ आहे. तर यावरून रीति याप्रमाणें आहे; दर दिवसास किती पै आहेत त्या काढून, त्यांची दुप्पट करून, त्या दुपटीचा २० वा भाग किंवा पहिल्याचा १० वा भाग त्यांतून वजा करून, बाकी रुपये आहेत असें समजून, वर्षाची जवळजवळ एकंदर रकम निघेल. बरोबरच रकम काढायसाठीं, एक दिवसाचे रकमेचा पंचमांश मिळीव.

उदाहरण. दर दिवसास १६० १०आ० ३पै० प्रमाणें एक वर्षाची किती एकंदर रकम होईल ?

$$\begin{array}{r}
 \text{रु०} \\
 १ \text{ रुपया दिवसास} - - - ३६५ \cdot ००० \\
 १०\text{आ० } ३\text{पै०} = १२३\text{पै} \\
 \text{तर, } १२३ \times २ - \frac{१२३}{१०} = २३३ \cdot ७०० \\
 \text{रु० } ५९८ \cdot ७०० \\
 \text{रु० आ० पै.} \\
 = ५९८ \quad ११ \quad २ \cdot ४ \\
 ३ \times १०\text{आ० } ३\text{पै} = \quad ० \quad २ \quad ० \cdot ६ \\
 \hline
 \text{हे उत्तर, रु० ५९८ - - १३ - - ३}
 \end{array}$$

बहिवाटीचे कामास चालेल अशी, पुढीलप्रमाणें वरचे रितीचे उलटी रीति काढितां येईल. ३६५ चें अर्ध १८२.५ आहे, हाणजे हे १९२ पेक्षां ९.५ इतक्यानें कमी आहे;

१८२.५ याचा २० भाग ९१२.५ आहे.

आणि त्याचा ५०० भाग ९१२.५ आहे.

९४९०

तर रीति हीच आहे;

B4

A3

वर्षाचे प्राप्तीला, रूपये आणि रुपयांचे दशांश रूप देऊन, त्यांचे अर्ध घे; नंतर या अर्धाला त्याचा २० वा आणि ५०० वा भाग मिळवून, पैचे रूपांत दिवसाचा दर $\frac{१}{३६५००}$ इतक्या अंतराने खरा येईल.

उदाहरण, वर्षाची प्राप्ती ६०० रूपये असली, तर दर दिवसाची किती प्राप्ती आहे ?

दरदिवसास १ रुपयाप्रमाणे वजा करून बाकी २३५ राहातात;
 २३५ चे अर्ध - - - - - ११७.५ आहे
 ११७.५ यांचा २० वा अंश - - - - - ५.८७५ आहे
 ११७.५ यांचा ५०० वा अंश - - - - - २३५ आहे
 १२३.६१० पै.

१२३.६ पै = १० आ० - - ३.६ पै आहेत.

यावरून दिवसाचा दर, १ रु० १० आ० ३.६ पै आहे.

पुनः दिवसाचा दर सांगितला असता, महिन्याची काच प्राप्ती होईल हे जाणायस इच्छिले आहे असे मनांत आण.

रुपयांत १६ आणे आहेत, आणि त्यांची दुप्पट ३२ आहेत. यामुळे रीति याप्रमाणे आहे; दिवसाचे दराला आण्याचे आणि आण्याचे दशांशांचे रूप देऊन, त्याची दुप्पट कर; आणि हे रूपये आहेत असे मनांत आण. नंतर महिना ३० किंवा ३१ दिवसांचा असेल त्याप्रमाणे दोन किंवा एक दिवसाची प्राप्ती त्या रकमेतून वजा कर.

उदाहरण, दरदिवसास ७ आ० ५ पै प्रमाणे आगष्ट महिन्याची प्राप्ती किती होईल ?

आ० पै आ०

७ - - - ५ = ७४१६६; यांची दुप्पट = १४८३३

रु० आ० पै

= १४८३३ रूपये = १४ - - १३ - - ४

यांतून एक दिवसाचा दर वजा कर. ७ - - ५

उत्तर. रूपये १४ . . ५ . . ११

जेव्हां दिवसाचा दर लहान आहे, तेव्हां मात्र ही रीति उपयोगी पडेल.

प्राप्तीचा वेळ याचप्रमाणे हा पुढील रीतीत द्यावा.

महिन्याचे प्राप्तीला रूपये आणि रूपयांचे दशांशांचे रूप दे, आणि महिन्याचे ३० किंवा ३१ दिवस असतील, तर महिन्याचे प्राप्तीस तिच्या ३० वा किंवा ३१ वा भाग मिळवून ती बेरीज दोहोंनी भाग, तो भागाकार आप्याचे रूपाने दिवसाची प्राप्ती होईल.

अथवा जापेक्षां $\frac{1}{30}$ हा $\frac{1}{31}$ यापेक्षां $\frac{1}{630}$ इतक्याने अधिक आहे, आणि हे अंतर $\frac{1}{9000}$ यांचे जवळ जवळ आहे; ; हणून जर महिना ३१ दिवसांचा आहे, तर $\frac{1}{30}$ मिळवून आणि $\frac{1}{31}$ यांस मिळवून नये परंतु रकमेचा $\frac{1}{9000}$ वा भाग वजा केला असतां एक दिवसाची प्राप्ती निघेल. यांत $\frac{1}{28000}$ इतकी मात्र सर्व रकमेवर चूक होईल.

उदाहरण, ३१ दिवसांचे महिन्याची २५ रूपये प्राप्ती असेल, तर एक दिवसाची किती किंमत होईल?

$$\text{पहिल्या रीतीप्रमाणे, } २५ + \frac{२५}{३१} = २५.८०६४५$$

$$\text{यांचे अर्थ } = १२.९०३२ \text{ आणे}$$

$$\text{उत्तर, } \dots १२ \text{ आ० } \dots १०.८३८ \text{ पै;}$$

$$\text{दुसऱ्या रीतीप्रमाणे, } २५ + \frac{२५}{३०} = २५.८३३३३$$

$$\text{यांचा } \frac{1}{9000} \text{ वजा करून हणजे } = \frac{०.२५८३}{२५.८०७५०}$$

$$\text{यांचे अर्थ } = १२.९०३७५ \text{ आणे.}$$

उत्तर, १२ आ० - - १०-८४५ पै, हणजे, या आणि वरचे उत्तरांत पैचे एक दशांशापेक्षां अंतर कमी आहे, हणून ते फारच थोडे आहे.

३३४. लांबीचीं मानें आणि क्षेत्रांचीं मानें यांमध्ये जो पुढे संबंध दाखविला आहे, तो भुमीतीर्शां अंकगणिताचे संगतीकरण याचा आश्रय आहे. खालचे अबकड आकृतीस भुमीतीत काटकोनचौकोन हणतात. मनांत आण कीं अब बाजू ६ इंच आणि अक बाजू ४ इंच अशी आहे.

	अ	ब	क	ड	ई	ब
फ						क्ष
ग	इ					य
ह						ज्ञ
	क	ल	म	न	ओ	प

अब आणि कड या दोन बाजूंची लांबी बरोबर आहे, तर त्या प्रत्येकीस, अ, ब, क, आणि ल, म, न इत्यादि बिंदूवर एक एक इंच लांबीचे सहा समभागांत विभाग; अक आणि बड या दोन रेषाहि परस्पर बरोबर आहेत, यांतून प्रत्येकीस फ, ग, ह, क्ष, य, आणि ज्ञ या बिंदूवर एक एक इंच लांब अशा ४ समभागांत विभाग. अ, आणि ल, ब आणि म, इत्यादि, आणि फ आणि क्ष इत्यादि सरळ रेषांनीं सांध. असें केल्यानें अबकड ही आकृति अनेक चौरसांत विभागिली असें होईल; कां कीं चौरस ह्यणजे काटकोन चौकोन जाचा सर्व बाजू बरोबर आहेत, आणि यामुळे अफइ चौरस आहे. कां कीं अब आणि अफ सारखेच लांबीचा आहेत, ह्यणजे, त्या दोहोंची लांबी १ इंच आहे. अशा चौरसांचा चार ओळी आहेत, आणि प्रत्येक ओळींत सहा चौरसें आहेत, ह्यणजे एकंदर ६×४ , अथवा २४ चौरसें आहेत, त्या प्रत्येक चौरसाची बाजू एक इंच लांबीची आहे, आणि त्यांतील प्रत्येक चौरस (२१५) प्रमाणें एक चौरस इंच आहे असें ह्यणतात. तसेच कल्पनेनें, जर एक बाजूची लांबी ६ यार्ड आणि दुसरे बाजूची लांबी ४ यार्ड असती, तर त्या आकृतीचें क्षेत्र ६×४ , किंवा २४ चौरस यार्ड होतें; आणि याप्रमाणें पुढेहि.

२३५. आतां मनांत आण कीं अबकड याचा बाजूंत इंचांची कांहीं पूर्ण संख्या नाही, परंतु त्यांची लांबी कांहीं इंच आणि इंचाचे अपूर्णाक आहे.— उदाहरण, अबची लांबी $३\frac{१}{२}$ इंच, अथवा (११४) प्रमाणें एक

क	ड

फ ग

इंचाचे $\frac{3}{4}$ आहे अस मनात आण. अबचे दुप्पटाचे बरोबर अई रेघ कर, आणि अकचे लांबीचे चौपटीबरोबर अफ रेघ कर, नंतर अइफग काटकोनचौकोन पुरे कर. या आकृतीचे बाकीचे अवयवांविषयी कांहीं सांगण्याचें प्रयोजन नाहीं. तर, जापेक्षां अबचे दुप्पट अई आहे, अथवा $\frac{9}{2}$ इंचांचे दुप्पट आहे, ह्यणजे, अइची लांबी ७ इंच आहे; आणि जापेक्षां

अफची लांबीहि अकचे लांबीचे चौपट आहे, अथवा ४ वेळा $\frac{3}{4}$ इंच आहे, ह्यणजे, अफची लांबी ९ इंच आहे. यामुळे अइफग या सर्व काटकोन चौकोनांत, (२३४) प्रमाणें, ७×९ अथवा ६३ चौरस इंच आहेत. परंतु अइफग या काटकोनचौकोनांत आठ दुसरे काटकोनचौकोन आहेत, ते सर्व अबकड या आकृती सारखे आहेत; आणि यामुळे अइफग याचा अबकड एक अष्टमांश आहे, ह्यणजे, अबकड यांत $\frac{६३}{८}$ चौरस इंच आहेत. परंतु $\frac{६३}{८}$ हे (११८) प्रमाणें $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{९}{४}$ हे परस्पर गुणिल्यानें होतात. या आणि मागील कलमापासून असें दिसतें, कीं काटकोनचौकोनाचा बाजूंची लांबी पूर्ण इंच किंवा अपूर्ण इंच असली, तरी त्याचे बाजूंची लांबी जी इंचांची संख्या असेल, त्यांचे गुणाकारानें त्या क्षेत्रातील चौरस इंचांची संख्या कळेल. चौरस ह्यणजे काटकोनचौकोन आहे, जाचा सर्व बाजू बरोबर आहेत, आणि यामुळे, त्याचे एक बाजूचे इंचांची संख्या तिणें तीच गुणिल्यानें चौरसाचे चौरस इंचांची संख्या कळेल. उदाहरण, जा चौरसाचे बाजूची लांबी १३ इंच आहे त्यांत १३×१३ , अथवा १६९ चौ० इंच आहेत.

२३६. अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

एक खोलीचा बाजू ४२ फु० ५ इंच आणि ३१ फु० ९ इंच आहेत, तर त्या खोलीचे क्षेत्र किती चौरस फुटी आणि चौरस इंच होईल! आणि त्या खोलीस बैठक करण्याकरितां वस्त्र $\frac{३}{४}$ यार्ड रुंदीचें आहे, तेव्हां तें किती लांब घेतलें असतां पुरेल ?

उत्तर. १३४६ चौरस फुटी आणि १०५ चौरस

§ २३६-२३७. लांबीची आणि क्षेत्राची मानें. १८५

इंच खोलीचें क्षेत्र; आणि ५९८ फुटी, ६ $\frac{५}{८}$ इंच इतक्या लांबीचें क्षेत्र घेतलें पाहिजे.

एक काटकोनचौकोन शेताचा बाजू २५३ यार्ड आणि $\frac{१}{४}$ मैल आहेत; तर त्यांत किती एकर आहेत ?

उत्तर. २३ एकर आहेत.

एक काटकोनचौकोन तळ्याची लांबी २०० काढ्या व रुंदी ८० काढ्या आहे, त्या तळ्याचें क्षेत्र किती चौरस विघे होईल.

उत्तर. ४० विघे.

१८ चौरस मैल आणि १८ मैल लांबीचें चौरस, अथवा १८ मैलांचें चौरस, या दोहोंत किती अंतर होईल ?

उत्तर. ३०६ चौरस मैल.

२३७. (२१४) कलमांतील मानांपासून (२१५) कलमांतील मानें या वरचे रितीने काढिली आहेत; कां की एक्ये फुटींत १२ इंच आहेत, ह्मणून १२×१२, अथवा १४४ चौरस इंच ह्मणजे एक चौरस फुट होतो हें उघड आहे, आणि याप्रमाणें पुढेहि. याचप्रमाणें एक घन अथवा काटकोनचौकोनभरीव,* याचा जा तीन बाजू एका बिंदूत मिळतात, त्यांचे लांबीचे इंच एकत्र गुणिल्याने त्या आकृतींत जे घन इंच असतात, ते कळतात. जसें ६ इंचांचे घनांत ६×६×६, अथवा २१६ घन इंच आहेत; जा पेटीचा बाजू ६, ८, आणि ५ फुटी लांबीचा आहेत, तींत ६×८×५, अथवा २४० घन फुटी आहेत. ह्मणून (२१४) कलमांतील लांबीचे मानांपासून (२१६) तील मानें याच रितीवरून काढिली आहेत.

* काटकोनचौकोनभरीव ही आकृति इटचे आकृतीसारखी आहे, आणि घन काटकोन चौकोनभरीव आहे. परंतु त्याचा सर्व बाजू बरोबर आहेत. जसें रमळाचा फांसा.

त्रिराशि.

२३८. जर २२ यार्डींचें मोल १७६० ४आ० आहे, तर १५६ यार्डींचें मोल किती होईल? हें जाणायाची इच्छा आहे असें मनांत आण. १७६० ४आ० यांस आप्यांचें रूप दिलें असतां, २७६ आणे येतील; आणि जर २२ यार्डींचें मोल २७६ आणे आहे, तर एक यार्डीची किंमत $\frac{२७६}{२२}$ आणे होईल. परंतु १५६ यार्डींचें मोल, एक यार्डीचे किंमतीचे १५६ पट आहे, यामुळें त्यांची किंमत $\frac{२७६}{२२} \times १५६$ आणे, अथवा (११७) प्रमाणें $\frac{२७६ \times १५६}{२२}$ आणे होईल. पुनः जर १२ $\frac{१}{२}$ शेरा गुळास ११ आणे पडतात, तर २० ६० ३आण्यांचा किती गूळ येईल? जापेक्षां १२ $\frac{१}{२}$ शेरांची किंमत ११ आणे आहे, तर दुप्पट शेरांस दुप्पट आणे पडतील, ह्मणजे २५ शेरांस २२आणे पडतील, आणि २५ शेरांचा २२ वा भाग, अथवा $\frac{२५}{२२}$ एक आण्यास येईल; परंतु २० ६० ३आणे यांत ३२३ आणे आहेत; आणि जापेक्षां एक आण्यास $\frac{२५}{२२}$ शेरा येतात, तर ३२३ आण्यांस $\frac{२५}{२२} \times ३२३$, अथवा (११७) प्रमाणें $\frac{२५ \times ३२३}{२२}$ शेरा गूळ येईल.

२३९. व्यवहारी गणितांत, जी रीति सर्व दुसऱ्या रितीपेक्षां अधिक कामास पडत्ये, आणि जा रितीनें वरचे सारिखे प्रश्न होतात, त्या रितीस त्रिराशि ह्मणतात, कां कीं तींत तीन परिमाणें दिलेलीं असतां, त्यांपासून चवथें परिमाण काढायाचें असतें. वरचे दोन उदाहरणांपासून ही पुढील रीति निघती, आणि त्याच कल्पनेप्रमाणें असें दिसेल, कीं ही रीति त्याच सारिखे सर्व दुसऱ्ये पक्षांस लागू होईल.

वरचे दोन उदाहरणांत एक्ये जातीचीं दोन परिमाणें आहेत, आणि तिसरें परिमाण निराक्ये जातीचें आहे, आणि उत्तर या तिसऱ्ये परिमाणाचे जातीचें असतें, ही गोष्ट लक्षांत ठेविली पाहिजे. जसें, पहिल्ये उदाहरणांत २२ यार्ड आणि १५६ यार्ड, आणि २७६ आणे आहेत, आणि जें काढायाचें इच्छिलें आहे तें आण्यांची कांहीं संख्या आहे.

दुसऱ्ये उदाहरणांत, ११ आणे आणि ३२३ आणे, आणि १२ $\frac{१}{२}$ शेर आहेत, आणि जें काढायाचें आहे तें शेरांची कांहीं संख्या आहे. हीं सांगितलीं तीन परिमाणें एका ओळींत मांड, अशीं कीं जें परिमाण केवळ एक जातीचें आहे, तें उजवे शेवटाकडेस होईल, आणि या शेवटील परिमाणाचे संबंधाचें जें परिमाण आहे, तें डावेकडेस आरंभीं मांड.* तिसरें परिमाण त्या दोहोंचे मध्ये मांड. पहिल्ये उदाहरणांत वेगळाल्ये परिमाणांचा क्रम या पुढीलप्रमाणें होईल. जसें;

२२ यार्ड. १५६ यार्ड. १७ ह० ४ आ०

दुसऱ्ये उदाहरणांत तीं याप्रमाणें मांडिलीं जातील;

११ आ० २० ह० ३ आ० १२ $\frac{१}{२}$ शेर०

पहिल्ये आणि दुसऱ्ये परिमाणास एकरूप कर. जसें, दुसऱ्ये उदाहरणांत २० ह० ३ आणे यांस, (२१९) प्रमाणें आप्यांचें रूप दिलें पाहिजे. सोईस पडेल तर तिसरे परिमाणासहि दुसऱ्ये कोणखेहि नामाचें रूप देतां येईल; अथवा, जसें वरचे दुसऱ्ये उदाहरणाप्रमाणें, पहिलें आणि तिसरें परिमाण इच्छेस येईल त्या परिमाणानें गुणावें, आणि असा गुणाकार केल्यानें कांहीं फेर होत नाही, हें (२३८) आणि (१०८) कलमांतील उत्तरावरून दिसेल. दुसरें आणि तिसरें परिमाण परस्पर गुणून, तो गुणाकार पहिले परिमाणानें भाग. जो भागाकार येईल तो ओळींतील तिसरे परिमाणाचे जातीचा होईल, आणि तें इच्छिलें उत्तर होईल. जसें पहिल्ये उदाहरणाचें उत्तर (२३८) प्रमाणें $\frac{२७६ \times १५६}{२२}$ आणे, अथवा $\frac{१७६० \cdot ४ \text{ आ०} \times १५६}{२२}$ आहे.

* उदाहरण सांगत्येसमयीं बहुतकरून पहिल्या आणि तिसऱ्या स्थळींचीं परिमाणें वाक्यांत जवळ जवळ असतात. परंतु कांहीं पक्षांत पहिल्या स्थळीं कोणतें परिमाण मांडावें, हें शोधण्यास शिकणारास विचार करावा लागेल. (२३०) कलमांत जा कल्पना सांगितल्या आहेत, त्यांपासून वरची गोष्ट कळेल. आतां पुढें जें लिहिलें आहे तें बहुधा उपयोगी पडेल. जा जातीचें उत्तर भसावें त्या जातीचें जें दिलें परिमाण आहे, त्यापेक्षा उत्तर कमी असावें असें जर स्पष्ट दिसेल, तर तें दिलें परिमाण राहिल्ले दोन परिमाणांतून, लहान परिमाणानें गुणावें; जर त्या परिमाणापेक्षा उत्तर अधिक असें असेल, तर त्यास मोठ्या परिमाणानें गुणावें; जसें पहिल्या उदाहरणांत २२ यार्डापेक्षा १५६ यार्डास अधिक किंमत पडेल असें स्पष्ट दिसतें, झणून एथें उत्तराचा जातीचें परिमाणास १५६ यांणीं गुणिलें पाहिजे.

याड याड ह० आ०
२२ : १५६ :: १७ . . ४

$$\begin{array}{r} १६ \\ \hline २७६ \\ १५६ \\ \hline १६५६ \\ १३८० \\ २७६ \end{array}$$

२२) ४३०५६ (१९५७) आणि $\frac{२}{२२}$ अथवा $\frac{१}{११}$

$$\begin{array}{r} २२ \\ \hline २१० \\ १९८ \\ \hline १२५ \\ ११० \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{अथवा } \frac{१२}{११} = १\frac{१}{११} \text{ पै०} \\ \text{रु० आ० पै०} \\ १२२ \text{ -- } ५ \text{ -- } १\frac{१}{११} \end{array}$$

(२२८) प्रमाणें

$$\begin{array}{r} १५६ \\ १५४ \\ \hline ००२ \end{array}$$

१७६० - ४ आणि यांस आप्यांचें रूप न देतां या पुढील प्रमाणें कृति होईल.

* वर दाखविल्याप्रमाणें वेगळले परिमाणांचे मध्ये बिंदू मांडण्याची चाल आहे. या पुस्तकाचा आठवा भाग जास पुरतेपणीं समजला, त्यास त्वरेनें दिसेल, कीं त्रिराशीची रीति ही कांहीं प्रमाणांतले तीन पदांपासून, चवथें पद काढण्याची कृति मात्र आहे.

यार्ड यार्ड रु० आ०
२२ : १५६ :: १७ . . ४

$$\begin{array}{r}
 \frac{156}{22} \quad (227) \\
 22) 2691 \dots 0 (122 \text{ रु० } \cdot 4 \text{ आ० } \cdot 1 \frac{7}{11} \text{ पै० } (227) \\
 \underline{22} \\
 49 \\
 \underline{44} \\
 51 \\
 \underline{44} \\
 7 \times 16 = 112 \\
 \underline{110} \\
 2 \times 12 = 24 \\
 \underline{22} \\
 2
 \end{array}$$

कांहीं विशेष पक्षाला वरचा दोन रितींतून कोणती सोईस पडेल, हें शिकणारास अभ्यासानें कळेल, कां कीं याविषयीं कांहीं रीति सांगतां येत नाहीं.

२४१. तीन सांगीतलीं परिमाणें एकाच नावाचीं असतील असें कदाचित् घडेल; तथापि त्यांतून दोन एका जातीचीं, आणि तिसरें निराळ्ये जातीचें आहे असें दिसेल. उदाहरण, एक रुपयाचे मिळकतीस ४आ० ६पै० देणें पडतें, तर ४०० रुपयांचे मिळकतीस काय देणें पडेल ? या उदाहरणांत ४००रु०, ४आ० ६पै०, आणि १ रु० हीं तीन दिलेलीं परिमाणें नाण्याचे जातीचीं आहेत. तथापि, त्यांतून पहिलें आणि तिसरें परिमाण मिळकतीचे जातीचें आहे; दुसरें परिमाण देण्याचे जातीचें आहे; आणि उत्तरहि त्याच जातीचें इच्छिलें आहे, आणि यामुळे, (१५२) प्रमाणें तीं परिमाणें या पुढीलप्रमाणें मांडलीं पाहिजेत;

$$१ \text{ रु०} : ४०० \text{ रु०} :: ४ \text{ आ० } ६ \text{ पै०}$$

२४२. पुढें जी उदाहरणें अभ्यासाकरितां दिलीं आहेत, त्यांस या रितीचा आश्रय आहे हें स्पष्ट दिसेल, अथवा स्पष्ट न दिसल्यास या रितीचा आश्रय आहे, हें कांहीं विचारानें दिसून येईल. ही रीति कशी लावावी याचा ठराव करण्यास कांहीं विचार करावा लागतो, अशीं पुढील उदाहरणें आहेत.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

जर १० मण, ३० शेर साखरेस ५६ रूपये, ३ पावले, ४० रस पडतात, तर १ खंडी, ४ मण, ५ शेरांस काय पडेल ?

उत्तर. १२७६० २ पा० ३२ रे $\frac{३४}{४३}$.

जर ३अ० २६मि० १२से० इतक्या वेळांत, एक घोडा १४मै० ३फ० २७या० चालतो, तर २३मै० चालायास किती वेळ लागेल ?

उत्तर. ५अ० २९मि० ३४से० $\frac{२४६२}{२५३२७}$.

अ आणि ब अशा दोन पुरुषांचें दिवाळें निघालें, आणि दोघांचें कर्ज बरोबर आहे; दर पौंडास १५शि० ४ $\frac{१}{२}$ पे० प्रमाणें अ ला देण्याचें सामर्थ्य आहे, आणि ब ला केवळ ७शि० ६ $\frac{३}{४}$ पे० याप्रमाणें देण्याचें सामर्थ्य आहे. दिवाळें निघत्ये समयी अचे जवळ ब पेक्षां १३०४पौ० १७शि० अधिक आहेत; तर प्रत्येकाचें कर्ज किती देणें आहे ?

उत्तर. ३३४० पौ० ८शि० ३ $\frac{३}{४}$ पे० $\frac{२५}{२५}$.

एका प्रांतांतील दर १२ $\frac{१}{२}$ एकरांस, दुसऱ्ये प्रांतांत ५६ $\frac{१}{४}$ एकर आहेत. दुसऱ्ये प्रांतांत एकंदर १७३०० चौरस मैल आहेत. यावरून पहिले प्रांतांत एकंदर किती चौरस मैल असावे ? पुनः, पहिल्ये प्रांतांतील दर ३ मनुष्यांस, दुसऱ्ये प्रांतांतील ५ मनुष्य आहेत; आणि पहिल्ये प्रांतांतील २० एकर जमिनीवर २७ मनुष्ये रहातात असें मानात आण, तर प्रत्येक प्रांतांत किती मनुष्ये असावीं ?

उत्तर. पहिल्ये प्रांतांत ३८४४ $\frac{५}{४}$ चौरस मैल आहेत, आणि त्यांत ३३२१६०० इतके लोक आहेत; आणि दुसऱ्ये प्रांतांत ५५३६००० इतके लोक आहेत.

पडतात, तर १ यार्ड रुंदीचे ११ $\frac{1}{2}$ यार्डांस काय पडेल !

उत्तर. ३३२पौ० ५शि० २ $\frac{४}{७}$ पे०

जर ९६० ३आ० ६पै साहा आठवडे पर्यंत पुरतात, तर १००६० किती वेळपर्यंत पुरतील !

उत्तर. ६५ $\frac{२५}{२९५}$ आठवडे.

दर औंसास १०पे० प्रमाणें २ह० चाहाचे बदलींत, दर पौंडास ९ $\frac{३}{४}$ पे० प्रमाणें दराची साखर किती घ्यावी लागेल !

उत्तर, ३२ह० ३का० ७पौ० $\frac{३५}{३९}$.

२४३. मनांत आण कीं हा पुढील प्रश्न केला आहे; ह्मणजे, जें काम ४५ मनुष्ये १० दिवसांत करितात, तें काम १५ मनुष्ये किती दिवसांत करतील ! तर तें काम करण्यास ४५ × १० अथवा ४५० दिवस एक मनुष्यास लागतील. आणि त्याच वेळेचे एक पंधरांश काळांत १५ मनुष्ये करतील, ह्मणजे $\frac{४५०}{१५}$ अथवा ३० दिवसांत करतील, हें उघड आहे. ह्या आणि ह्या सारख्या दुसऱ्या कल्पनेवरून पुढील प्रश्न उलगडतां येतील.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

जर १२ दिवसांत एक एकरांतील गवत १५ बैल खातात, तर १४ एकर खाण्यास २६ बैलांस किती दिवस लागतील !

उत्तर. ९६ $\frac{१३}{१३}$ दिवस.

जर ६ दिवसांत ५ फुट उंचीची भित २२ गंवडी करतील, तर १० फुटी उंचीची भित करण्यास ४३ गंवड्यांस किती दिवस लागतील !

उत्तर. ६ $\frac{६}{४३}$ दिवस.

२४४. जा प्रश्नसमुदायांचे उलगडण्यास दुहेरी त्रिराशि अथवा पंचराशि ह्मणतात, त्या जातीचीं वरचे कलमांत उदाहरणें आहेत, दुहेरी त्रिराशिकास खरें ह्मटलें असतां पंचराशिक ह्मणावे, कां कीं त्यांत पांच परिमाणें दिलेलीं असून, त्यांपासून साहावें परिमाण काढायाचें असतें. उदाहरण, जर ५ मनुष्ये ३० यार्ड वस्त्र ३ दिवसांत करितात,



तर ६८ यार्ड वस्त्र करण्यास ४ मनुष्यांस किती दिवस लागतील? एक मनुष्यास एक यार्ड वस्त्र करण्यास किती काळ लागेल तो पहिल्याने, प्रश्नाचे पहिल्या भागापासून काढावा. ५ मनुष्ये ३ दिवसांत जे कांहीं करितात, त्याचा एक पंचमांश एक मनुष्य ३ दिवसांत करील, ह्मणून तो ३ दिवसांत $\frac{3}{4}$, अथवा ६ यार्ड करील. यावरून तो एक यार्ड वस्त्र $\frac{3}{4}$, अथवा $\frac{3 \times 4}{30}$ दिवसांत करील. यावरून ४ मनुष्यांस ६८ यार्ड वस्त्र करण्यास किती काळ लागेल तो काढावा, जापेशां एक मनुष्य एक दिवसाचे $\frac{3 \times 4}{30}$ इतक्या दिवसांत एक यार्ड वस्त्र करितो, तर $\frac{3 \times 4}{30} \times 68$, अथवा (११६) प्रमाणे $\frac{3 \times 4 \times 68}{30}$ दिवसांत ६८ यार्ड करील; आणि ४ मनुष्ये तितकेंच काम एक चतुर्थांश वेळांत करतील; यावरून (१२३) प्रमाणे $\frac{3 \times 4 \times 68}{30 \times 4}$, अथवा $2\frac{1}{2}$ दिवसांत करतील.

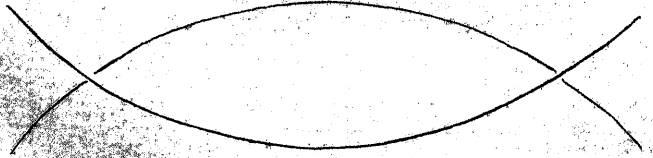
पुनः या पुढीलप्रमाणे प्रश्न केल्यास, ह्मणजे जर ५ मनुष्ये ३० यार्ड वस्त्र ३ दिवसांत करितात, तर ६ मनुष्ये १२ दिवसांत किती यार्ड वस्त्र करतील? एथें एक मनुष्य एक दिवसांत किती करील तें काढावे, मागल्ये उदाहरणाप्रमाणे $\frac{30}{3 \times 4}$ इतके यार्ड करील असें दिसतें. यावरून ६ मनुष्ये एक दिवसांत $\frac{6 \times 30}{3 \times 4}$ यार्ड करतील, आणि १२ दिवसांत $\frac{12 \times 6 \times 30}{3 \times 4}$, अथवा १४४ यार्ड करतील.

या उदाहरणापासून खालची रीति निघती. दिलेलीं परिमाणें दोन ओळींत लिही, असीं कीं एक जातीचीं परिमाणें एकाखालीं एक येतील, आणि जीं परिमाणें परस्परांशीं संबंध ठेवितात तीं एक ओळींत मांडावीं; परंतु या संकेतानें कीं जें परिमाण क्रियेचें फळ दाखवितें, तें पहिल्ये ओळींत मध्यें असावें. वर दिलेल्ये दोन उदाहरणांचीं परिमाणें या पुढीलप्रमाणें लिहिलीं पाहिजेत;

५ मनुष्ये.

३० यार्ड.

३ दिवस.



४ मनुष्ये.

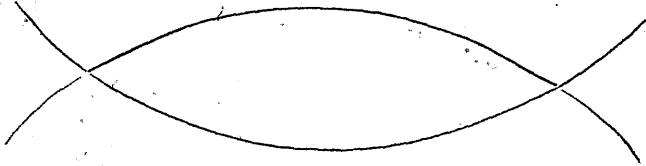
६८ यार्ड.

दुसरें उदाहरण.

५ मनुष्यें.

३० यार्ड.

३ दिवस.



५ मनुष्यें.

१२ दिवस.

एक ओळीचा मध्य आणि दुसऱ्ये ओळीचे शेवट यांतून एक वांकडी रेषा काढ. तर एका रेषेत तीन परिमाणें येतील, आणि दुसरीत दोन येतील. नंतर तीन परिमाणांचे गुणाकारास, दोन परिमाणांचे गुणाकारानें भाग, जो भागाकार येईल तें उत्तर होईल.

(२३८) कलमांतील त्रैराशिकाचे रितीप्रमाणें, प्रत्येक ओळींतील परिमाणास (२१९) प्रमाणें गरज असल्यास सरळ रूप द्यावें.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

६ घोडे २ दिवसांत १७ एकर जमीन नांगरतात, तर ९३ घोडे $8\frac{1}{2}$ दिवसांत किती एकर नांगरतील ?

उत्तर. $५९२\frac{७}{८}$ एकर.

२० मनुष्यें $३\frac{१}{४}$ दिवसांत ७ काटकोन-चौकोन शेते खणितात, त्या प्रत्येकाचा बाजू ४० आणि ५० यार्ड आहेत, तर ९० आणि $१२५\frac{१}{२}$ यार्ड अशा बाजूंची ५३ शेते ३७ मनुष्यें किती दिवसांत खणतील ?

उत्तर. $७५\frac{२४५१}{२०७२०}$ दिवस.

जर ६० हन्डे २० मैल नेण्यास १४ पै ० १० शि ० पडतात, तर ५ पै ० ८ शि ० ९ पे ० इतक्याने ३० मैल पर्यंत किती ओझे जाईल ?

उत्तर. १५ हन्डे ०

१०० रु० यांस एक वर्षाला ५ रु० नफा मिळतो, तर ८५० रुपयांस ३ वर्षे आणि ८ महिने यांत किती नफा मिळेल ?

उत्तर. १५५ रु० १३ आ० ४ पै

तिसरा भाग.

व्याज, इत्यादि.

२४५. मागील लिहिलेल्या किलेक उदाहरणांप्रमाणे, कांहीं पै-
क्याचा अपूर्णांक कसा काढावा, इतकीच कृति मात्र या भागांतील सर्व
उदाहरणांत येती. मनांत आण, कीं १६ रु० चे ४० भागांतून ७
भाग घेण्याचे आहेत, ह्मणजे १६रु० यांस ४० भागांत विभागून खां-
तून ७ भाग घेण्याचे आहेत. प्रत्येक भाग $\frac{१६}{४०}$ रु० आहे, आणि तसे
७ भाग $\frac{१६}{४०} \times ७$, अथवा (११६)प्रमाणे $\frac{१६ \times ७}{४०}$ रुपये. ही कृति या पुढील-
प्रमाणे होईल.

रु०

१६

७

४०)११२(२८० . . . १२आ० . . . ९३३

८०

३२

१६

५१२

४०

११२

८०

३२

१२

३८४

३६०

४

५६पै० १३शि० $\frac{७}{२}$ पै० यांचे १०० भागांतून १३ भाग घ्याव-
याचे आहेत, असे मनांत आण.

पौ०	शि०	पे०	
५६	१३	७ $\frac{१}{२}$	
		१३	
<hr/>			
१००)	७३६	१७	१ $\frac{१}{२}$
			(७पौ० ७शि० ४ $\frac{१}{४}$ पे०)
	७००		
	३६×२०+१७=७३७		
	७००		
	३७×१२+१=४४५		
	४००		
	४५×४+२=१८२		
	१००		
	८२		

३६०, १२आ० यांचे शंभर भागांतून, २ $\frac{१}{२}$ भाग घ्यावयाचे आहेत, तर वरचे रितीवरून उत्तर $\frac{३६०१२आ० \times २\frac{१}{२}}{१००}$ आहेत, अथवा (१२३) प्रमाणे $\frac{३६०१२आ० \times ५}{२००}$ ह्यांतून शंभरांतून २ $\frac{१}{२}$ भाग काढणे, आणि २०० तून ५ भाग काढणे, हीं दोन्ही एकच आहेत.

अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

१६० ८आ० यांचे ५३ भागांतून ७ $\frac{१}{३}$ भाग घे.
उत्तर. ३आ० ३ $\frac{४५}{३३}$ पै.

१०७६०, १३आ०, ४पै यांचे शंभर भागांतून ५ भाग घे.
उत्तर. ५६० ६आ० ३ $\frac{१}{३}$ पै.

५६पौ० ३शि० २पे० हे ३२ पुरुषांस वांटले आहेत. तर २३ जणांचा भाग, बाकी राहिलेल्या पुरुषांचा भागांतून किती अधिक आहे?
उत्तर. २४पौ०, ११शि०, ४ $\frac{१}{२}$ पे $\frac{१}{२}$.

२४६. दोन रकमा असतील, तर दुसऱ्या रकमेचे शंभर भाग करून त्यांतून पहिली रकम होण्यासाठी किती भाग घेतले पाहिजेत, असे व्यवहारांत ह्मणत नाही, परंतु एक रकम दुसऱ्या रकमेचा कोणता अपूर्णांक आहे असे ह्मणतात. जसे ३३६० ४आ० यांचे अर्ध १६६० १०आ० आहे असे ह्मणत नाही, परंतु दुसरी रकम पहिलीचे दरशक-

ड्यास ५० प्रमाणें आहे असें ह्मणतात. जसें ५ रूपये हे २०० रुपयांचे दर शेंकड्यास $2\frac{1}{2}$ आहेत, जर २०० रुपयांस शंभर भागांत विभागिले, तर त्या भागांतले $2\frac{1}{2}$ भाग ५० आहेत. पुनः १३० हे ८०, १०आ०, ८ पै यांचा दरशेंकड्यास १५० आहेत, कां कीं दुसरी रकम आणि तिचें अर्ध मिळून पहिली रकम होती. कांहीं रकमेचे ५६ भागांतून २३ भाग घेतले असतां दरशेंकड्यास काय पडेल? असे विचारिलें आहे; तर याचा अर्थ याप्रमाणें होतो; कीं जाजवळ ५६ रूपये आहेत, त्यास जर १०० रूपये मिळतात, तर जाजवळ २३ रूपये आहेत, त्यास काय मिळेल? (२३/८) प्रमाणें $\frac{23 \times 100}{56}$ रूप०, अथवा $\frac{2300}{56}$, अथवा $41\frac{1}{7}$ रूपये होतात. यावरून ५६ तून २३ हे दरशेंकडा $41\frac{1}{7}$ प्रमाणें आहेत.

त्याच प्रमाणें १८ भागांतून १६ भाग, हे दर शेंकडा $\frac{16 \times 100}{18}$, अथवा $88\frac{2}{9}$ आहेत, आणि ५ भागांतून २ भाग, हे दर शेंकडा $\frac{2 \times 100}{5}$ अथवा ४० आहेत.

यापासून दुसऱ्या अपूर्णाकांस शेंकड्याचा दर कसा काढावा याची रीति स्पष्ट कळेल.

१२० ३आ० यांतून ६० १२आ० २पै हे शेंकड्याचा काय दरानें आहेत, हें विचारिलें असें मनांत आण. जापेक्षां पहिल्या रकमेत २३४० पै आहेत, आणि दुसऱ्या रकमेत १२९८ पै आहेत, यावरून पहिलीचे २३४० भागांतून १२९८ भाग दुसरी रकम आहे; ह्मणजे, मागील रीती प्रमाणें हे $\frac{129800}{2340}$, अथवा ५५ $\frac{1100}{2340}$, अथवा ५५ रूप० ७आ० ६पै० शेंकड्याचे जवळजवळ दरानें आहेत. आणे इत्यादि-कांस रुपयांचे दशांशाचें रूप दिल्यानें वरची कृति त्वरेनें होईल. तीन दशांशस्थले घेतलीं असतां शेंकड्याचा दर, आप्यापर्यंत जवळ निघेल, आणि व्यवहारांत यापेक्षां अधिक गरज लागत नाही. जसें मागील उदाहरण घेतलें, ह्मणजे १२१८७५ रूप० यांतून ६७६ रूप० हे शेंकड्यास काय दरानें आहेत, असें जाणायास इच्छिलें तर, 676×100 हे ६७६ आहेत, यांस १२१८७५ यांणीं भागिलें तर ५५४६६ रूप० अथवा ५५ रूप० ७आ० होतात. पुरवणीत दाखविल्याप्रमाणें केवळ खरें उत्तर काढितां येईल.

अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

२३३ भागांतून १९८ $\frac{1}{2}$ ह्यांचा शेंकडा दर काय आहे ?

उत्तर. ८५पौ० १शि० ८ $\frac{3}{4}$ पे०, अथवा ८५रू० १आ० ४पै
१९३रू० १२आ० इतक्या किमतीचे काहीं सामान घेऊन २१६रू०
१३आ० ४पै इतक्यास विकले; तर दरशेंकड्यास काय नफा होईल ?

उत्तर. ११रू० १४आ० ७पै पेक्षां काहीं कमी.

बचा माल अने विकून दिला, त्याचे २३०रू० १२आ० मिळाले,
आणि त्यास दरशेंकड्यास ३ प्रमाणे दलाली कबूल केली आहे; तर
अला किती *दलाली मिळावी ?

उत्तर. ६रू० १४आ० ९पै०

१७००रू० चा माल दलाल विकत घेतो, आणि व्याजवर दलाली
दरशेंकड्यास ८ $\frac{1}{2}$ रू० कबूल केली आहे, तर त्यास सर्व दलाली किती
मिळेल ?

उत्तर. २रू० २आ०

एक गलबताची किंमत १५४२३ पौ० आहे, आणि त्याचे विम्या-
साठी दर शेंकड्यास १९ $\frac{3}{4}$ पौ० देणे पडते, तर सर्व किती घावे लागेल ?

उत्तर. ३०३३पौ० ३शि० ९ $\frac{1}{2}$ पे० $\frac{3}{4}$

२४७. कोणी सावकाराचे दिवाले निघाल्यावर, त्याचे कर्जदारांस
देण्याचे जें त्यास सामर्थ्य असतें, तें दाखवायासाठी, विशेषेकरून दर रूप-
यास किती आणे सामर्थ्य आहे असें झणतात. जसें कोणी सावकाराचे

*जर एक सावकार दुसऱ्या सावकारासाठी माल विकत घेतो, किंवा विकून देतो, तर
त्यास काहीं नेमलेले द्रव्य घावे लागतें, त्यास दलाली झणतात, आणि ही दलाली सर्व रकमां-
विषयीं बहुतकरून दर शेंकड्यास नेमलेली असते.

तर तो दर रूपयास ८ आणे देतो असें ह्मणतात. (२४६) कलमाप्रमाणें याविषयींची रीति सोईने निघेल. उदाहरण ८२५० यांतून ५०५० हे १रूपयाचे $\frac{५०}{८२}$ ५० आहेत, अथवा दर रूपयास $\frac{५० \times १६}{८२}$ आणे, अथवा ९आ० ९पै $\frac{३}{४}$ आहेत.

२४८. कांहीं पैक्याचे उपयोगासाठीं जो पैका द्यावा लागतो, त्यास व्याज ह्मणतात, आणि त्याचा दर नेहेमी १०० वर असतो. दरवर्षास किंवा, सहा महिन्यांस, किंवा तीन महिन्यांस, किंवा दुसरे कांहीं मुदतीप्रमाणें व्याज भरावें लागतें; परंतु दरशेंकड्यास ४ असें नुसतें ह्मटलें, तर तो दर एक वर्षाचा आहे; ह्मणजे १०० रूपयांचे उपभोगासाठीं प्रतिवर्षीं ४रूपये द्यावे लागतील.

जी रकम कर्जी देतात, तीस मुद्दल ह्मणतात, आणि तिजवर व्याज दोन जातींचें असतें. कराराप्रमाणें जा वेळेस व्याज द्यावयाचें आहे, तें तत्क्षणीं जर कर्ज घेणारा भरतो, तर प्रतिवर्षीं त्यास तितकें भरावें लागेल हें स्पष्ट आहे; आणि जें व्याज त्यास कांहीं वर्षांनंतर भरावें लागेल तें, एक वर्षाचे व्याजास तितक्ये वर्षांचे संख्येने गुणिलें असतां निघेल. परंतु जर तो एकदांच व्याज चुकवून देत नाही, आणि मुद्दल परत देईपावेतो आपल्या जवळ ठेवितो, तर कर्ज देणाराचा पैका त्याचे हातीं प्रतिवर्षीं अधिक होत जाईल, आणि असा करार झाला, तर त्याचे देण्याचे समयावर जितका अधिक वेळ गेला, तर त्याचे प्रत्येक वर्षाचे व्याजाचें व्याज द्यावें लागेल. वरचे पहिल्ये पक्षांतल्ये व्याजास सरळ व्याज ह्मणतात, आणि दुसऱ्ये पक्षाचे व्याजास चक्रवाढ व्याज ह्मणतात. व्याज आणि मुद्दल मिळून रकमेस एकंदर रास ह्मणतात.

२४९. दर शेंकड्यास $४\frac{१}{३}$ प्रमाणें $६\frac{१}{३}$ वर्षांत १०४९५० १२आ० इतके यांचें सरळ व्याज किती होईल? सांगितल्या रकमेचें एक वर्षाचें व्याज $६\frac{१}{३}$ वेळां बरोबर सगळें व्याज आहे; ह्मणजे ती रकम $४\frac{१}{३}$ यांणीं गुणून, तो गुणाकार १०० यांणीं भागून एक वर्षाचें व्याज कळेल. कृति याप्रमाणें आहे;

B5

B4

A3

$$(२३०) \text{ प्रमाणें (अ) } \frac{१०४९.१२.३}{१००}$$

$$\text{अ} \times ४ \quad \frac{४१९९.१.०}{१००}$$

$$\text{अ} \times \frac{१}{२} \quad \frac{५२४.१४.१\frac{१}{२}}{१००}$$

$$(८२) \text{ प्रमाणें. } १००) ४७, २३.०१५.०१\frac{१}{२} (४७६० ३आ० ९पै \frac{९७}{१००}$$

$$\frac{१६}{१००}$$

$$\frac{३,८३*}{१००}$$

$$\frac{१२}{१००}$$

$$\frac{९,९७*}{१००}$$

(ब) रु० ४७००३०९ $\frac{९७}{१००}$ हैं एक वर्षाचें व्याज आहे.

$$\text{ब} \times ६ \quad \frac{२८३.०६.११ \frac{५२}{१००}}{१००}$$

$$\text{ब} \times \frac{१}{३} \quad \frac{१५.०११.११ \frac{३२}{१००}}{१००}$$

$$\text{रु० } २९९.०२.१० \frac{८४}{१००} \text{ म्ह } ६\frac{१}{३} \text{ वर्षाचें व्याज आहे.}$$

अभ्यासाकरिता उदाहरणें..

दर शेंकड्यास ३ प्रमाणें १९ वर्षे आणि ७ आठवडे यांचें १०५ रु० ६आ० २पै यांचें व्याज काय होईल; यांत एक वर्षाचें ५२ आठवडे आहेत असें मानावें!

उत्तर. ६० रु० ७आ० ११पै. जवळ जवळ.

दर शेंकड्यास ३ प्रमाणें ७ वर्षांचें, आणि दर शेंकड्यास २ $\frac{१}{२}$ प्रमाणें ८ वर्षांचें ५० पै० १९ शि० यांचे व्याजांत किती अंतर आहे?

उत्तर. १० शि० २ $\frac{१}{२}$ पे०

दर शेंकड्यास ५ प्रमाणें १ वर्षांत १५७ पै० १७ शि० ६ पे० यांचे व्याज काय आहे?

उत्तर. ७ पै० . . . १७ शि० . . . १० $\frac{१}{२}$ पे०

दर शेंकड्यास ४ प्रमाणें ९ वर्षांत, आणि दर शेंकड्यास ९ प्रमाणें ४ वर्षांत कोणत्याही मुदलाचें व्याज एकच आहे हें दाखीव!

* एथें भाड्यांतिल १५ आ० घेतले आहेत.

* एथें भाड्यांतिल १ पै घेतली आहे.



वर्षाचे शेवटी मुद्दल आणि व्याज मिळून, एकंदर रकम काढिली पाहिजे. कां की या पक्षांत (२४८) प्रमाणे पहिल्ये वर्षाचे शेवटी, मुद्दल आणि व्याज मिळून एकंदर रकमेवर, दुसऱ्ये वर्षांत व्याज चालू होते. उदाहरण, दरशेकड्यास ५ प्रमाणे चक्रवाढ व्याजांन १०० रुपयांचे व्याज काढायाचे आहे, असे मनांत आण. कृति पुढीलप्रमाणे आहे ;

	रु०
पहिले मुद्दल	१००
पहिल्ये वर्षाचे व्याज	५
पहिल्ये वर्षाची एकंदर रकम	१०५
(२४९) प्रमाणे १०५ रु० चे व्याज दुसऱ्ये वर्षाचे	५.०४
दुसऱ्ये वर्षाचे शेवटी एकंदर रकम ११०.०४	
तिसरे वर्षाचे व्याज	५.८०२३
तिसऱ्ये वर्षाचे शेवटी एकंदर रकम ११५.८२३	
पहिले मुद्दल	१००.०००
तीन वर्षांचे व्याजाची प्राप्ती रु० १५.८२३	

वर्षे पुष्कळ असतील, आणि रकम मोठी असेल, तर असे करण्याची रीति फार श्रमाची आहे; यामुळे व्याजाचे अनेक दरांवरून अनेक वर्षांची एक रुपयाची एकंदर रकम दाखविण्यासाठी कोष्टक केलेले असतात. वर सांगितल्ये उदाहरणाविषयी असे कोष्टक कामांत आणण्याचे असतील, तर जा ओळीचे वरल्ये आंगास दर शेकड्यास ५ असे मांडिले असेल ते पहा; आणि जा कोष्टकाचे वरल्ये आंगास वर्षाची संख्या असे मांडिले असेल, त्या ओळीत ३ या संख्येचे समोर ११५.७६२५ हे दिसतील; ह्याजणे त्यांचा अर्थ हाच, की ३ वर्षांत त्या दराप्रमाणे १ रु० याची एकंदर रास ११५.७६२५ रु० इतकी होती. आतां १०० हे त्याचे शंभरपट आहेत; आणि (१४१) प्रमाणे $११५.७६२५ \times १०० = ११५०७.६२५$ आहेत; परंतु (२२१) प्रमाणे हे ११५ रु० १२ आ० २ पै आहेत; यामुळे १०० रुपयांची एकंदर रास वरप्रमाणे ११५ रु० १२ आ० २ पै० आहे.

B5

B4

A3

२५१. सरळ व्याजानें दरशेंकड्यास ५ प्रमाणें ४ वर्षांपावेतो, कां-
हीं एक मुद्दल राहिलें आहे, आणि त्यासमयीं व्याजसुद्धां रकम ३५०६०
झाली असें मनांत आण; तर आरंभीं मुद्दल काय होतें, हें जाणायाची,
इच्छा आहे. जें कांहीं आरंभीं मुद्दल होतें, तें शंभर भागांत विभागून
त्यांतील व्याजाकरितां ५ भाग ४ वर्षांपावेतो प्रत्येक वर्षांत मिळविले असावे;
ह्मणजे मूळचे मुद्दलांत असे २० भाग मिळविल्यानें ३५०६० ही रकम
झाली असावी. यामुळे, जर ३५०६० यांत १२० भागांत विभागिलें,
तर त्यांतील १०० भाग इच्छिलेलें मुद्दल आहे, आणि बाकीचे २०
भाग व्याज आहे; ह्मणजे $\frac{35060 \times 100}{120}$ ६० अथवा २९१६० १० आ० ८ पै०
हें इच्छिलें मुद्दल आहे.

२५२. मनांत आण, कीं ४ वर्षांनंतर अनें, बला ३५०६० देण्याचे
कबूल केले होते, आणि नंतर परस्परांचा असा करार झाला कीं तें
कर्ज सद्यः द्यावें; आणि सरळ व्याजानें दरशेंकड्यास ५ प्रमाणें व्याज
मिळतें; यावरून ३५०६० ही सगळी रकम अनें देऊं नये, दिली
असतां, अला ४ वर्षांचे व्याजाचा तोटा होईल, आणि बला तितका
नफा होईल. यामुळे, अ यणें बला व्याजासुद्धां जी ४ वर्षांत ३५०६०
एकंदर रकम होईल, इतकें मात्र सद्यः देणें द्यावें. यामुळे पैका वेळेचे
पूर्वीं थुकवून देण्यासाठीं कर्जांतून ५८६० ५ आ० ४ पै० कमी केले
पाहिजेत. या रकमेस कटमुद्दत ह्मणतात; आणि दर शेंकड्यास
कटमितीचा भाव ५ असला तर ३५०६० चार वर्षांनंतर देण्याचे, त्यांची
सांप्रत किंमत २९१६० १० आ० ८ पै० आहे असें ह्मणतात. पैक्याचे
कोणखेहि रकमेची सांप्रत किंमत काढण्याची रीति (२५१) वरून या
पुढीलप्रमाणें आहे; सांगितली रकम १०० यांणीं गुणून आणि तो
गुणाकार, १००, आणि कटमुद्दतीचा दर आणि वर्षे यांचा गुणाकार
या दोहोंचा बेरीजेनें भाग. जर कर्जाचे मुद्दतींत, वर्षे आणि महिने,
अथवा केवळ महिनेच असतील, तर महिन्यांस वर्षांचे अपूर्णाकरूप
दिले पाहिजे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

दरशेंकड्यास कटमुद्दतीचा भाव $8\frac{1}{2}$ आहे, तर दोन वर्षांचे मुद्द-
तीचे १३८६० १४ आ० ४ पै० असे हुंडीची कटमुद्दत काय होईल?
उत्तर, ११६० ७ आ० ६ पै०

२५३. अने गुणायाचें असतां, अ+व किंवा अ-व यांणीं गुणिलें, तर गुणाकाराचे $\frac{व}{अ+व}$, अथवा $\frac{व}{अ-व}$ या अपूर्णाका इतकी चूक पडेल; कां कीं पहिल्येपक्षांत उत्तर अधिक येईल, आणि दुसऱ्येपक्षां कमी येईल. पुनः अने भागावयाचें असतां जर अ+व यांणीं भागिलें, तर भागाकाराचे $\frac{व}{अ}$ या अपूर्णाकाइतकें उत्तर कमी येईल; आणि जर अने भागण्याबद्दल अ-व याणें भागिलें, तर भागाकाराचे $\frac{व}{अ}$ या अपूर्णाकाइतकें उत्तर अधिक येईल. जसे, १७ यांणीं भागण्याचे बद्दल २० यांणीं भागिलें, तर भागाकाराचे $\frac{३}{१७}$ इतकें उत्तर कमी येईल; आणि जर ३६५ यांणीं भागण्याचे बद्दल ३६० यांणीं भागिलें, तर भागाकाराचे $\frac{५}{३६५}$, अथवा $\frac{१}{७३}$ इतकें उत्तर अधिक येईल.

वर्षाचे कांहीं भागाचे कांहीं रकमेचें व्याज काढायाची इच्छा असेल, आणि जर कोष्टकाचें सहाय्य नसेल, तर वर्षांत ३६० इतकेच दिवस आहेत, अशी कल्पना सोईस पडेल, ह्मणजे अशे पक्षांत ३६० यांस ३६५ चे जागीं घेण्यासाठीं, उत्तरांतून ३६० दिवसांचा ७३ वा भाग किंवा बद्दल करून ७२ वा भाग वजा केला पाहिजे. ३६० या संख्येस इतके भाजक आहेत, कीं (२३०) प्रमाणेवरावरदीची रीति नेहमी सहज लावितां येईल. जसें, दरवर्षास व्याज १८५० ९आ० १०पै, अथवा १८६१४५५० पडतात, तर २७४ दिवसांचा भाग काय होईल ?

एक वर्षाचें व्याज १८६१४५५०

सांगितले दिवस २७४

१८० हे ३६० चें अर्ध आहे. ९३०७२

९४

९० हे १८० चें अर्ध आहे. ४६५३६

४ हे ३६० चा $\frac{१}{९०}$ आहे. २०६८

९) १४१६७६

८) १५७४१

१९६७

उत्तर. $१३ \cdot ९७०९६० = १३६० १५$ आ० ६पै.

परंतु जर उत्तर अगदि जवळ पाहिजे, तर सांगीतल्ये दिवसांचे दोन दशांश हे गुणक करावे आणि ७३ भाजक करावे ही रीति बरी; कां कीं ३६५ हे $२३ \div ७३०$, किंवा $\frac{३६५}{१००} \div ७३$. जसें, वरचे उदाहरणांत, $५४ \cdot ८$ यांणीं गुणितात आणि ७३ नीं भागितात; आणि $५४ \cdot ८ \times १८ \cdot ६१४५ = १०२० \cdot ०७४६$, यांस ७३ यांणीं भागून $१३ \cdot ९७३६$ होतात, हे वरचांचे जवळजवळ आहेत, ह्मणजे त्यांपासून $१३६० १५$ आ० ७पै होतात, हे खरे होण्यास एक पै पावेतो जवळ जवळ येतात.

२५४. तीन मनुष्यांस १००० विभागून दावयाचे आहेत, असे कीं त्यांचे वांटे ६, ५, ९ या प्रमाणांत होतील; ह्मणजे पहिल्या पुरुषाचे प्रत्येक ६०० चे भागाव्रिषयीं दुसऱ्यास ५०० आणि तिसऱ्यास ९०० मिळतील. १००० यांस जर $६+५+९$ किंवा २० भागांत विभागिले, तर त्या भागांतून ६ भाग पहिल्या पुरुषास, ५ दुसऱ्यास, आणि ९ तिसऱ्यास असे वांटे केले पाहिजेत हें स्पष्ट आहे. यामुळे (२४५) प्रमाणे यांचे वेगळाले वांटे पुढीलप्रमाणे आहेत, $\frac{१०० \times ६}{२०}$ ६०० , $\frac{१०० \times ५}{२०}$ ५०० , आणि $\frac{१०० \times ९}{२०}$ ९०० , अथवा ३०० , २५० , आणि ४५० आहेत.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

चार पुरुषांस $३९४० १२$ आ० विभागून दे, असे कीं त्यांचे वांटे १, ६, ७ आणि १८ या प्रमाणांत होतील.

उत्तर. $१२६० ५$ आ० $४ \frac{१}{२}$ पै, $७४० ०$ आ० ३ पै, $८६० ५$ आ० $७ \frac{१}{२}$ पै, $२२२० ०$ आ० ९ पै.

सहा पुरुषांस २० पै० विभागून दे, असे प्रमाणानें कीं प्रत्येकाचा वांटा त्याचे पूर्वीचे सर्व पुरुषांचे वाट्यांचे बेरिजे बरोबर होईल.

उत्तर, पहिल्या दोन पुरुषांतून प्रत्येकाचा वांटा १२ शि० ६ पे० होईल; तिसऱ्याचा वांटा १ पै० ५ शि०; चवथ्याचा वांटा २ पै० १० शि०; पांचव्याचा ५ पै०; आणि सहाव्याचा १० पै० असे वांटे होतील.

२५५. दोन किंवा अनेक पुरुष सर्कती असून जर कांहीं पैक्याचा

तर त्याच एकदर रकमेपासून काही प्राप्ती, किंवा तोटा आला असतो, तो सर्वांस सारखाच वांटून द्यावा हें योग्य नाही. उदाहरण, मनांत आण, कीं बचे दुप्पट अपैका भरितो, आणि त्यांचे एकदर जमेपासून १५६० नफा होतो, तर अ ला ब, पेक्षां दुप्पट नफा असावा; ह्मणजे जर सगळी प्राप्ती तीन भागांत विभागिली, तर त्यांतून दोन भाग अ ला आणि एक भाग बला असावा, अथवा अचा नफा १०६० आणि बचा नफा ५६० होईल. मनांत आण कीं, अ, ब, आणि क हे तीन पुरुष कांहीं उदिमांत सर्कती आहेत, आणि अ २५०६०, ब १३०६०, आणि क ४५६०, अशा वेगळाल्या रकमा भरितात. त्यांचे एकदर जमेपासून १०००६०, प्राप्ती होये. तर ही प्राप्ती त्या तीन पुरुषांस कशे प्रमाणानें वांटून द्यावी? यावरून एक मनुष्यास १६० वर जितका नफा मिळतो, तितकाच नफा दुसऱ्यास १६० वर मिळाला पाहिजे. आतां, जापेक्षां सर्कतींची एकदर बेरीज २५०+१३०+४५, अथवा ४२५६० आहे, आणि त्यांपासून १०००६० प्राप्ती झाली आहे, तर प्रत्येक रूपयावरची प्राप्ती $\frac{1000}{425}$ होईल. यामुळे अचा नफा $\frac{1000 \times 250}{425}$ रुपये, बचा नफा $\frac{1000 \times 130}{425}$ ६०, आणि कचा नफा $\frac{1000 \times 45}{425}$ ६०, अशी वांटणी होईल. या मूळ कारणावरून, (२४५) कलमाचे कृतीप्रमाणें, या पुढील प्रश्नाचें उत्तर निघेल.

एका जहाजाचा विमा करावयाचा आहे, त्या जहाजांत अ चा भाग १९२८६० आहे, आणि ब चा भाग ४९६३६० आहे. विम्याविषयीं ४७४६० १०आ० २पै, देण्याचे आहेत. तर त्या प्रत्येकास विम्याविषयीं काय भाग द्यावा लागेल ?

उत्तर. अला १३२ ६० १२ आ० ८ पै० द्यावे लागतील.

अ, ब, आणि क अशा तीन पुरुषांनीं १४९ पै० चा तोटा भरायचा आहे. जर प्राप्ती झाली असती, तर बचे प्राप्तीचे चौपटी बरोबर अची प्राप्ती असती, आणि अ आणि ब या दोघांचे प्राप्ती बरोबर कची प्राप्ती आहे. यावरून प्रत्येकानें कशा प्रमाणानें तोटा वांटून घ्यावा?

उत्तर. अने ५९ पै० १२ सि०, बने १४ पै० १८ सि०, कने ७४ पै० १० सि० याप्रमाणें तोटा भरावा.

२५६. कित्येक वेगळाले पुरुष आपआपल्या रकमा अनेक वेगळाले

B5

B

A

हील, तितका तिजवर अधिक नफा किंवा तोटा असावा. उदाहरण, अ आणि ब असे दोन पुरुष जर एकच कामाकरिता सारखेच मुद्दल भरतात, परंतु अ चा पैका बचे पैक्याचे दुप्पट मुद्दत पर्यंत कामांत राहिला, तर अचा नफा बचे नफ्याचे दुप्पट असावा. याचें मूळ कारण हेंच आहे, कीं १२० एक महिना, किंवा एक वर्ष पर्यंत कामांत आणला असतां, प्रत्येकास प्राप्ती बरोबर व्हावी. उदाहरण, मनांत आण कीं, अ ६ महिनेपर्यंत ३२० सरकर्तीत ठेवितो, ब ७ महिने पर्यंत ४२० ठेवितो, आणि क २ महिने पर्यंत १२२० ठेवितो, नंतर त्यांस १०००० प्राप्ती होत्ये; तर प्रत्येकास त्यांतून काय काय मिळावें? आतां जापेक्षां अ सहा महिने पावेतो ३२० सरकर्तीत ठेवितो, ह्मणून केवळ १ महिना ठेविल्यानं जें मिळणार, त्याचे सहा पट प्राप्ती असावी; ह्मणजे ६×३२०, अथवा १९२० केवळ एक महिना ठेविल्या इतकीच प्राप्ती मिळेल; पुनः बला ४×७२०, अथवा २८८० केवळ एक महिना ठेविल्या इतकीच प्राप्ती मिळेल; आणि कला १२×२२०, अथवा २४ केवळ एक महिना ठेविल्या, इतकीच प्राप्ती मिळेल. यामुळे १०००० यांस जर ६×३+४×७+१२×२, अथवा ७० भागांत विभागिले, तर त्या भागांतून अला, ६×३, अथवा १८, बला ४×७, अथवा २८, आणि कला १२×२ अथवा २४ असे भाग असावे. यावरून त्या तीन पुरुषांचा वांटण्या या पुढीलप्रमाणें आहेत, $\frac{६ \times ३ \times १००}{६ \times ३ + ४ \times ७ + १२ \times २}$ २०, $\frac{४ \times ७ \times १००}{६ \times ३ + ४ \times ७ + १२ \times २}$ २०, आणि $\frac{१२ \times २ \times १००}{६ \times ३ + ४ \times ७ + १२ \times २}$ २०.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

अ, ब, आणि क हे तीन पुरुष सर्कती आहेत; त्यांत २ वर्षे अ ३२०० ६ आ० ठेवितो, एकवर्ष ब १०००० ठेवितो, आणि क १ $\frac{१}{२}$ वर्षपर्यंत १२२० ठेवितो. त्यांचे एकंदर जमेवर ४२७६२० ७ आ० प्राप्ती होत्ये, ही तिघांस कशी वांटून द्यावी ?

उत्तर. अला २३१२० ६ आ० ३ पै; बला ३४२८० ० आ० ० पै; कला ६१७२० ० आ० ८ पै.

राहातो, आणि ब राहाण्याचे समयांत क ४^१ महिने रहातो. तर भा-
ड्याविषयीं प्रत्येकानें काय काय द्यावें?*

उत्तर. अचा भाग १९० पै० १२ शि० ६ पे०, बचा भाग ९० पै०
१२ शि० ६ पे०, आणि कचा १८ पै० १५ शि० याप्रमाणें द्यावे.

२५७. व्यवहारास गणित लावण्याचा जा रिती या भागांत सांगी-
तल्या त्याच मुख्य आहेत. दुसऱ्या रिती आहेत खऱ्या, परंतु वर सां-
गीतलेलीं मूळ कारणें मनांत पक्की ठेविलीं, तर त्या रिती वर सांगितल्या
रितीं मध्ये येतात असे स्पष्ट दिसेल. तशाच तऱ्हेचा हुंडणावळीचा रिती
आहेत, त्या या पुढील सारिख्ये प्रश्नास लागू होतात; जर, २० शि० ची
किंमत या देशांत १०^१ रु० असेल, तर १६० पै० ची किंमत किती हो-
ईल? स्पष्ट आहे, कीं हे त्रिराशीचे रितीपासून कळेल. व्यवहार कामांत
वर सांगितल्या रिती बहुतकरून फार उपयोगी पडतात; आणि त्या शि-
कणारास पक्क्या समजल्या, तर त्यांचा योगानें व्यवहारांतील बहुतकरून
कोणताहि प्रश्न त्यापुढें आला असतां, त्याचे समजुतीचे बाहेर राहिल
असें त्याणें भय धरूं नये. परंतु पुढें जो धंदा रोजगार त्यास करावा
लागेल, त्याजविषयींचा योग्य रिती, त्यास त्याचे त्याचे वेगळाल्या विशेष
कामांचा बरोबरच या पुस्तकांत किंवा दुसऱ्या कोणत्याहि पुस्तकांत मि-
ळतील असा भरवंसा शिकणारानें धरूं नये. वाणी, सावकार, किराणे-
वाला, कापडकरी, कुळंबी, आणि दलाल, या सर्वांचे सोईविषयीं एकच
तऱ्हेचा रिती आहेत असें नाहीं; परंतु या पुस्तकांत जीं मूळ कारणें
सांगितलीं आहेत, त्यांशीं जो पुरुष पक्का माहित होईल, तो आपल्या
पुढील गरजेविषयीं विचार करून कसें करावें याविषयीं सामर्थ्यान हो-
ईल, अथवा, जा तऱ्हेनें, त्याचे पूर्वजांनी आपल्या अडचणीं दूर केल्या
त्यांचा रिती शिकणाराचे मनांत तऱ्हेनें येतील.

* पहिल्यानें पाहिलें असतां हे उदाहरण या रितीचें नाहीं. हे उदाहरण करण्यावि-
षयींचो योग्य कृति जो पहिल्यानें नजरेस येईल तो खोटी आहे, असें काहीं विचार केल्यानें
दिसून येईल.

गणन करण्याचे रितीविषयीं.

या पुस्तकांत जा रिती मागें सांगितल्या, त्या व्यवहार चालीप्रमाणें आहेत, आणि जीं उदाहरणें सांगितलीं, तीं चालीप्रमाणें केलेलीं आहेत. परंतु ललित गणित करितां यावें अशी शिकणाराची इच्छा असेल, त्याणें या पुरवणींत जा रिती सांगितल्या आहेत, त्याप्रमाणें खचित् चालावें; ह्मणजे तेंपेकरून त्यास श्रम कमी पडतील इतकेंच नाहीं, परंतु त्यास लरेनें आणि खरेपणानें गणन करण्याची संवई होईल.

पहिल्यानें. अंकसंख्या लेखनवाचन क्रमांत मूळचा दशक संख्या, जसें, १०, १००, १०००, इत्यादि आहेत, त्यांतून प्रत्येकीस एक या अंकाचे स्थानावरून लक्षांत आणूं नको, परंतु त्यावर जितकीं शून्यें येतात त्यांवरून तो अंक लक्षांत ठेव. जसें दहा ही एक शून्यांची संख्या, शंभर ही दोन शून्यांची संख्या, दशलक्ष ही सहा शून्यांची संख्या, इत्यादि आहे असें ह्मण. कोणत्याहि संख्येचे उजव्येकडून पांच अंकस्थळें वेगळीं केलीं, तर बाकी राहिलेले अंक लक्षांचे आहेत; कां कीं १००००० ही पांच शून्यांची संख्या आहे. दशक, शतक, सहस्र, दशसहस्र, लक्ष, कोटी, इत्यादिकांस १, २, ३, ४, ५, ६, इत्यादि शून्यांवरून घ्यानांत धरायास शक. सत्रा शून्यांची संख्या काय आहे? सत्रामध्ये प्रत्येक सहा स्थळांस दशलक्ष ह्मण, आणि बाकी राहिल्ये पांचांस लक्ष ह्मण; ह्मणजे ती संख्या लक्षाचे दशलक्षाचे दशलक्ष आहे हें उत्तर आहे, अथवा परार्ध इतकी संख्या आहे. कोणत्याहि संख्येचे उजव्येकडून बारा अंकस्थळें वेगळीं केलीं, तर बाकी राहिलेली संख्या काय आहे? उत्तर बाकी राहिलेल्ये संख्येमध्ये जितके एक आहेत, तितके त्या संख्येत दशलक्षांचे दशलक्ष, अथवा दशसर्व इतकी संख्या आहे.

दुसऱ्यानें. १, २, ३, ४ इत्यादि, अथवा ३०, २९, २८, २७, इत्यादि



अस उलटसुलट रितान जलद जका पावता, तीन, इत्यादि ९ पावेतों अंक सोडीत सोडीत कोणखेहि अंकापासून प्रारंभ करून मोजायास शिकावें. जसें, ४ या अंकापासून आरंभ करून ७ चें अंतर ठेऊन ४, ११, १८, २५, ३२, इत्यादि याप्रमाणें मोजायास शिकावें, आणि १, २, ३, ४, इत्यादि हे जसे जलद बोलतां येतात, तसे वरचे अंक जलद बोलतां यावे; ह्मणजे, त्या अंकांचा उच्चार करण्यांत कांहीं वेळ जाऊं देऊं नये. मिळवणीची कृति कांहीं सहाय्यावांचून मनांत करण्याची संवई असावी; ४ आणि ७ मिळून ११ आहेत, ११ आणि ७ मिळून १८ आहेत, इत्यादि असें ह्मणूं नये; परंतु ४, ११, १८ असें ह्मणावें. आणि पुढें जितकें सहज मोजतां येतें तितकें मार्गेंहि सहज मोजतां यावें, याची बहुतकरून जर्रीं गरज नाहीं तथापि तसें मोजतां यावें, हें बरें आहे; ह्मणजे ६० या अंकापासून ७ अंतरानें उलटें ६०, ५३, ४६, ३९ इत्यादि मोजावें.

तिसऱ्यानें. एक अंकस्थळाचा दोन संख्या पहातांच, खांतून लहान संख्या मोठीचे बरोबर करायास तिशीं कोणता अंक मिळविला पाहिजे हें शोधून काढायास शिकावें. ८ तून ३ जाऊन ५ राहिले असें न ह्मणतां, ३ आणि ८ हे अंक पहातांच खांचें अंतर ५ आहे असें अभ्यासानें मनांत यावें. आणि त्या दोन संख्यांतून दुसरी लहान असेल, तर ८ पासून पुढल्ये जा संख्येचे शेवटीं ३ येतात, ती संख्या काढण्याचा अभ्यास ठेवावा, ह्मणजे ती संख्या १३ आहे, आणि १३ तून ८ वजा करून बाकी ५ पांच रहातात असें न ह्मणतां, ८ यांस जे ५ मिळवावे लागतात त्यांवर लक्ष पोंचावें. अंकांची एक ओळ घे, जसें,

४ २ ६ ० ५ ० १ ८ ६ ४

यांतून कोणताहि एक अंक आणि त्याचे जवळचा दुसरा अंक घेऊन, त्यांजवर वरची रीति लावावी, परंतु या सोपे उदाहरणांत मोठे अंक बोलून दाखविण्याची गरज नाहीं. जसें, पहिला अंक ४ आणि दुसरा अंक २ असे घेतले, तर ४ चे पुढें जा अंकाचे शेवटीं २ येतात ती अंक १२ आहे, खांत ४ वजा केले, तर ८ बाकी रहातात, याप्रमाणें ४ आणि ८, २ आणि ४, ६ आणि ४, ० आणि ५, ५ आणि ५, ० आणि १, १ आणि ७, ८ आणि ८, ६ आणि ८, अशी कृति करावी.

चवथ्यानें. दोन स्थळांची एक संख्या आणि एक स्थळाची एक

B4

A3

२७ आणि ६ यास पहातांच, २७ पासून पुढे जा अंकांच शब्दा ६ य-
तात, ह्यणजे ३६ पावेतों पुढे चालावे, जा ९ संख्यांतून पुढे जावे लागते
तो अंक मनांत धरून, २७ आणि ९ हे ३६ आहेत इतकें मात्र ह्य-
णावे. जसे, १७७२९६३८१०९ या अंकांचे ओळीपासून अभ्यासा-
करितां ही उदाहरणे निघतात; १७ आणि ० हे १७ आहेत; ७७
आणि ५ हे ८२ आहेत; ७२ आणि ७ हे ७९ आहेत; २९ आणि ७
हे ३६; ९६ आणि ७ हे १०३; ६३ आणि ५ हे ६८; ३८ आणि
३ हे ४१; ८१ आणि ९ हे ९०; १० आणि ९ हे १९ आहेत.

पांचव्यानें. दोन अंक स्थळांचे संख्यांतून, एकंचा अंक मांडून द-
हेंचा अंक ध्यानांत धरण्याची संवई करावी. जसें वरचे उदाहरणांत,
उत्तरांतील एकंचा अंक मांडतेसमयीं दहेंचा अंक मोठ्यानीं ह्यणून ल-
क्षांत ठेवावा.

सहाव्यानें. गुणाकार कोष्टक असा पाठ करावा कीं दोन अंक प-
हातांच त्यांचा गुणाकार मनांत यावा; ह्यणजे, ८ आणि ७, अथवा ७
आणि ८, हे अंक पाहिले असतां ७ वेळा ८ हे ५६ होतात, असें न ह्यण-
तां ५६ मनांत यावे. जसें, ३९७०६५४८ या अंकांचे ओळीकडे
पाहून, प्रत्येक जवळ जवळचे अंकांचा गुणाकार, ते अंक वाचतांच कर-
ण्याची संवई करावी, जसें, २७, ६३, ०, ०, ३०, २०, ३२.

सातव्यानें. वरचीं उदाहरणे शिकल्यानंतर, तीन अंक पहातांच,
कांहीं तोंडानें कृति न करितां, त्यांतून पहिल्ये दोहोंचा गुणाकारास ति-
सरा अंक मिळवण्याची संवई करावी. जसें, ३, ८, ४, हे अंक पाहिले
असतां, ३ वेळा ८ हे २४, आणि ४ मिळून २८ होतात, असें न ह्य-
णतां ३ वेळा ८ आणि ४, अथवा २८ होतात, असें सांगतां येई असा
अभ्यास करावा. जसें, १७९२३६४०८ यांपासून हीं पुढील उदाह-
रणे निघतात, १६, ६५, २१, १२, २२, २४, ८.

आठव्यानें. आतां वरची कृति या पुढीलप्रमाणें अधिक कर; २, ७,
६, ९, असे ४ अंक पहातांच, वर सांगील्ल्याप्रमाणें, कांहीं शब्द न बो-
लतां, पहिल्ये दोन अंकांचे गुणाकारास तिसरा अंक मिळीव; नंतर ती-
सर्व रकम सांगून तीस बाकीचा चवथा अंक मिळवून वेरीज सांग, आ-
णि सांगतेसमयीं दशकावर जोर घालून उच्चार कर. जसें, २, ७,

लघु ५५.

४७९६३ ६, १५, १७, २३, ३१, ३४; ११, १२, २१, २२,

१५९८

२६३१६ ३१, ३७; ९, १७, २४, २७, ३२, ४१;

५४७९२

८१९ १०, १४, २०, २१, २८; ७, ९, १३;

६६८६

१३८१७४

मिळवणीचा ताळा करायसाठी, वरची ओळ सोडून बाकीचे ओळींची बेरीज घेऊन, ती बेरीज सोडिलेल्या ओळीशी मिळवावी, अशी चाल आहे; परंतु यापेक्षा प्रत्येक उभी ओळ खालून वर, वरून खाली असे करून ताळा पहावा हें बरें.

वजावाकी. याविषयी ही पुढील कृति पुरेल. जे हातचे घ्यावे लागतात, तो नेहेर्मा एक आहे, ह्मणून तो बोलण्याचें प्रयोजन नाहीं.

७९४३६२५८१९० यांतून. ८ आणि २, ४ आणि ५, ७ आणि ४,

५८६४५९६२७३ हे वजा कर. ३ आणि ५, ६ आणि ९, १० आणि २,

२०७९०२९५४५२

६ आणि ०, ४ आणि ९, ७ आणि ७,

९ आणि ०, ५ आणि २. आतां ८

आणि २ हे १० होतात असे ह्मणण्याचें प्रयोजन नाहीं; कां कीं २

आले असे समजल्यावर, ते कोठून आले हें लक्षांत ठेवण्याचें प्रयोजन नाहीं.

गुणाकार. करितेसमयीं हे पुढील शब्द मात्र बोलवे लागतात; नंतर चालीप्रमाणें बेरीज घ्यावी. जा अंकांवर चिन्हें नाहींत ते हातचे घेतात.

६७०३८३

९८७६

४०२२२९८

१८, ४९, २२, २, ४२, ४०

४६९२६८१

२१, ५८, २६, २, ४९, ४६

५३६३०६४

२४, ६६, ३०, ३, ५६, ५३

६०३३४४७

२७, ७४, ३४, ३, ६३, ६०

६६२०७०२५०८



गुणाकाराची प्रत्येक ओळ पहा.
पुरवणीचे दुसऱ्ये भागाप्रमाणें ताळा पहा.

जास वरचें आठवें कलम चांगलें माहित आहे, त्यास कृति करि-
तानां एक गुणाकाराची ओळ तिचे वरचे ओळीस सहज मिळवितां
येईल, जसें ;

६७०३८३

९८७६

४०२२२९८ ८; २१ आणि ९ हे ३०'; ५९ आणि २ हे ६१';

५०९४९१०८ २७ आणि २ हे २९'; २ आणि २ हे ४';

५८७२५५५०८ ४९ आणि ० हे ४९'; ४६ आणि ४ हे ५०' आहेत.

६६२०७०२५०८

दुसरी ओळ उत्पन्न करण्याची सर्व कृति उजव्ये बाजूवर करून
दाखविली आहे, आणि त्यापासून ७६ यांचा गुणाकार पुरा होतो,
त्याचप्रमाणें तिसऱ्ये ओळीपासून ८७६ यांचा गुणाकार पुरा होतो,
आणि चवथीपासून ९८७६ यांचा गुणाकार पुरा होतो.

भागाकार. वर सांगितलेल्ये नवव्ये कलमाचे सहाय्यानें, प्रत्येक गु-
णाकार आणि त्याचे पुढील वजावाकी एकदांच या पुढीलप्रमाणें कर ;

२७६९३)४४१९७२८०९६६२(१५९५९७३०

१६५०४२

२६५७७८

१६५४१०

२६९४५९

२०२२२६

८३७५६

६७७२

गुणक ५ असून १६५०४२ यांपासून २६५७७ हे उत्पन्न होतात;
तेव्हां, १५ आणि ७ हे २'२; ४७ आणि ७ हे ५'४; ३५ आणि
५ हे ४'०; ३९ आणि ६ हे ४'५; १४ आणि २ हे १६ इतके
मात्र शब्द बोलवे लागतात.

B4

A3

११ व्यं भागांतील समीकरणे उलगडतेसमयी, या संक्षेप भागाकारा-
प्रमाणे कृति केली पाहिजे.

पुरवणी दुसरा भाग.

नऊ आणि अकरा टाकून ताळा पहाण्याविषयी.

हिशोबाचा ताळा पहाण्यासाठी, नव्ये शिकणाराने नऊ टाकण्याचे कृतीशी माहित होण्यासाठी अभ्यास केला पाहिजे. ही कृति पुरती नाही, कां की जर एक अंक कमी केला आणि तितक्यानेच दुसरा अंक अधिक केला, तर अशी दुहेरी चूक सापासून सांपडणार नाही; परंतु अशी दुहेरी चूक पडत नाही, यावरून ती रीति खरी आहे असा मुद्दा होतो.

या रितीचा आश्रय या पुढील प्रतीशेवर आहे; अ,ब,क,ड, या चार संख्या असतील, अशा कीं,

$$अ = बक + ड,$$

आणि दुसरी एक संख्या म असेल, आणि जर अ,ब,क,ड, हे वेगळाले मनें भागून यांचा वेगळाल्या बाक्या, प, क, र, स, असतील तर प आणि कर+स

यांस मनें भागिल्यानें सारिखीच बाकी निघेल, आणि कंदाचित् त्या परस्पर बरोबरहि असतील.

उदाहरण. $३३४ = १७ \times १९ + ११;$

या चार संख्या ७ नीं भागून, ५, ३, ५, आणि ४, अशा वेगळाल्या बाक्या रहातात. नंतर ५ आणि $५ \times ३ + ४$, अथवा ५ आणि १९ या दोहोंस ७ नीं भागून दोहोंचा बाक्या ५ होतील.

यामुळे कृतीचा खरेपणा ताडून पहाण्यासाठी भाजकाविषयी, कोणतीहि संख्या कामांत घ्यावी. कामास उपयोगी पडे असा ताळा प-



३, ९, आणि ११ या संख्या सोईचे भाजक आहेत, आणि त्यातून ९ बाकीचांपेक्षा अधिक उपयोगी आहे.

३ आणि ९ या दोन संख्यांनीं भागून जी बाकी निघती, ती नेहमीं त्यां संख्येचे अंक स्थळांचे बेरीजेस, याच दोन अंकांनीं भागून जी बाकी निघती, तिचे बरोबर असती. उदाहरण, २४६१२०३७७ यांस ९ नीं भागून बाकी काय राहिल? या संख्येचे अंकस्थळांची बेरीज $२+४+६+१+२+०+३+७+७$, अथवा ३२ आहे, ह्मणजे, त्यापासून बाकी ५ रहातात. परंतु बेरीज करितेसमयीं तींतून जसे जसे ९ निघतात, तसे तसे बरेनें ते टाकून दावे ही सोईची रीति आहे. असें याप्रमाणें ह्मण, २, ६, १२, ३, ४, ६, ९, ७, १४, आणि बाकी ५ तर २४६१२०३७७ यांस ९ नीं भागिलें असतां बरप्रमाणें बाकी ५ रहातात. ताळा या पुढीलप्रमाणें होईल; स्पष्ट आहे कीं, १, १०, १००, इत्यादि या प्रत्येक संख्येस ९ नीं भागून बाकी १ राहिल, कां कीं त्या संख्या १, ९+१, ९९+१, इत्यादि अशा आहेत. यामुळे, २, २०, २००, इत्यादि प्रत्येकीची बाकी २ आहे; ३, ३०, ३०० इत्यादि प्रत्येकीची बाकी ३ आहे; आणि याप्रमाणें पुढेहि. ह्मणजे, जर १७६४ यांस ९ नीं भागिलें, तर १००० हे कित्येक बरोबर नवांचा संख्यांत एक अधिक इतके होतील, ७०० यापासून ७ अधिक होतील, आणि ६० पासून ६ अधिक होतील. तर अशांन, १, ७, ६, ४, हे एकत्र मिळवून त्यांतून ९ टाकून जी बाकी राहिल, ती १७६४ यांस नवांनीं भागून जी बाकी राहिल, तिचे बरोबर आहे.

ही कृति आतां गुणाकारास लावून दाखवितों; यापूर्वीं (६६) व्येकलमांत असें सांगितलें कीं

$$१०००४५६९ \times ३१६३ = ३१६४४४५१७४७ \text{ आहेत.}$$

डाव्येकडील पहिल्ये संख्येंतून नऊ टाकतानां, याप्रमाणें मात्र ह्मटलें पाहिजे, १, ५, १०, १, ७; दुसऱ्यांत ३, ४, १०, १, ४; तिसऱ्यांत ३, ४, १०, १, ५, ९, ४, ९, ८, १२, ३, १०, १. यावरून ७, ४, आणि १, ह्या बाक्या आहेत. आतां $७ \times ४ = २८$ यांतून नऊ टाकून १ रहातो; ह्मणजे ही बाकी, आणि गुणाकाराची बाकी, सारिखीच आहे.

पुनः (८४) कलमांत, असें सांगितलें आहे, कीं

आतां १३००००, १८३, आणि ६४८४, या प्रत्येकांतून नऊ टाकिले असतां ४,३, आणि ४, अशा वाक्या रहातात. आतां $४ \times ३ + ४$ यांतून नऊ टाकिले, तर ७ बाकी रहातात; ह्मणजे, २३७९६४८४ यांतून नऊ टाकून बाकी ७ पूर्वीचे बरोबरच आहेत.

समीकरणाचें एके बाजूचे कृतीचें फळ, दुसऱ्ये बाजूचे फळाशीं ताडायसाठीं, समीकरणाचे एके बाजूचें फळ, स्मरणांत ठेवणें, किंवा मांडणें हे श्रम चुकविण्यासाठीं, या पुढीलप्रमाणें केलें पाहिजे; समीकरणाचा बाजूस दोन किंवा अधिक संख्या असतील, त्यांची वाकी काढून ती वाकी नवांतून वजा करून, ती वाकी समीकरणाचे दुसरे बाजूस एक संख्या आहे, त्यांत मिळीव. नंतर त्या बाजूची वाकी ० होईल. जसें, वरचे कमीकरणाचे उजव्ये बाजूंतून जी ७ बाकी निघाली, ती नवांतून वजा करून बाकी २ आहेत, ते दुसऱ्ये बाजूचे एके संख्येचे आरंभी हातचे घेऊन, याप्रमाणें ह्मण; २,४,७,१४,५,११,२,६, १४,५,९,०. नऊ त्वरेनें टाकायास शिकणारा अभ्यासाने निपूण होईल.

नवांवरची वाकी खरी असती असें जांत घडतें, त्यांत काहीं चूक झाली किंवा नाहीं हें नऊ टाकण्याचे कृतीनें सांपडत नाहीं. जर काहीं कृति श्रमाची असून तिचा काहीं अधिक ताळा पहाण्याची गरज असेल, तर नऊ टाकल्यानंतर अकरा टाकण्याची रीति उपयोगी पडेल. ही गोष्ट लक्षांत ठेविली पाहिजे, कीं १०+१,१००-१,१०००-१, इत्यादि हे सर्व अकरांनीं निःशेष भागिले जातात. तर यावरून अकरांचे भागाकारानें जी वाकी रहाती, ती काढण्यास ही पुढील रीति चालेल, आणि बीजानुरूप वजाबाकीशीं जो माहित आहे, त्याचानें ही रीति सोईनें कामांत घेतां येईल. जाला ती रीति माहित नाहीं, त्याणें अकरांनीं भागाकार करावा हें बरें.

डाव्येकडील पहिला अंक दुसऱ्ये अंकांतून वजा कर, नंतर ती वाकी तिसऱ्ये अंकांतून वजा कर, नंतर ती वाकी चवथे अंकांतून वजा कर, आणि याप्रमाणें पुढेहि. शेवटील वजा बाकी धन अथवा ऋण असली, तर तिचें आणि ११ चें अंतर इच्छिलेली वाकी होईल. जसें, १६४२९१५ यांस ११ नीं भागून, बाकी काढायसाठीं याप्रमाणें होईल; ६ तून १ गेला ५ राहिले; ४ तून ५ गेले, -१ राहिला;



६ गेले, -५ राहिले; ५ तून-५ गेले, १० राहिले; आणि हे १० बाकी आहेत. परंतु १६४ यांपासून -१ येतो, आणि बाकी १० आहेत; १६४२९१ यांपासून -५ येतात आणि बाकी ६ आहे. सांगितली संख्या जितकी त्वरेने तोंडाने सांगता येईल, तितकी त्वरेने अभ्यासाने वरची वजाबाकी सांगता येईल. जसे, १२७६१९८३३४२४ यांविषयी केवळ याप्रमाणे ह्मणावे लागते, १, ६, ०, १, ८, ०, ३, ०, ४, -२, ६, आणि ६ बाकी आहे.

नऊ आणि अकरा या दोहोंचे टाकण्याने कांहीं प्रश्नांचा ताळा पाहिला असता, त्यांत कांहीं चूक नाही, परंतु जर बरोबर ९९ वेळा चूक झाली असली, तर ती चूक ताळ्याने समजणार नाही.

पुरवणी भाग तिसरा.

अंकसंख्या लेखनवाचन क्रमाविषयी.

दहा, दहावेळा दहा, इत्यादि, यांचे स्थळीं १०, १०० इत्यादि येतात, अशी संवई झाली आहे, यामुळे पांचांचे स्थळीं १०, पांच वेळा पांचांचे स्थळीं १००, अथवा बारांचे स्थळीं १०, बारावेळा बारांचे स्थळीं १००, असे कां घेऊं नये याविषयी कांहीं कारण आपल्ये मनांत येत नाही. अंकांचा वेगळाल्या ओळी योजून, त्या वेगळाल्या ओळींतील एकं त्याचे पूर्वीचे ओळींचे एकंमात्रा समुदाय दाखवायास जरी घेतो, तरी दशकांचा समुदायांशिवाय दुसरे कोणतेहि समुदाय घेण्यास कांहीं प्रतिबंध नाही.

जर २ दाखविण्यासाठीं १० घेतले, ह्मणजे ओळींतील प्रत्येक एकं त्याचे उजव्येकडचे ओळींचे एकंचे दुप्पट असला, तर जें हालीं १, ३, ३, ४, ५, ६, इत्यादि हे दाखवितात, ते १, १०, ११, १००, १०१, ११०, १११, १०००, १००१, १०१०, १०११, इत्यादि यांणीं दाखविले जाईल यास द्विक्रम रीति ह्मणतात. त्रिक्रम रीतींत १० हे ३ चे स्थळीं घेतले असतात, तर याप्रमाणे होईल. १, २, १०, ११, १२, २०, २१, २२

B4

A3

खेळतात, तर १२० हे, १ पंचवार, २ पाच, आणि ०, नव्या एकूणहत्तर आहेत. द्वादशक्रम रितीमध्ये, १० हे बारा दाखवितात, तर दहा आणि अकरा या संख्यांविषयी कांहीं नवीं चिन्हे योजिलीं पाहिजेत, कां कीं या नव्या पक्षांत १० आणि ११ हे १२ आणि १३ यांचे जागी येतात; ह्मणून ट आणि इ त्यांचे जागी घे. तर १७६ यांचा अर्थ हाच आहे कीं १ हा बारा वेळा बारा, ७ बारा, आणि ६, अथवा २३४; आणि १८६ यांचा अर्थ २७५ आहे.

जा अंकाचे स्थळीं दहा घेतात, त्यास अंक संख्या लेखनवाचन रितीचें मूळ ह्मणतात. एके रितीचे संख्येस कोणत्याहि दुसऱ्या रितीचें रूप दाखयासाठीं, पहिल्या रितीचे अंक मांडून, त्यांस नव्या रितीचे मूळ संख्येनें भाग; नंतर तो भागाकार त्या मूळ संख्येनें पुनः पुनः भागून, त्या वेगळ्या बाक्या इच्छिलेले अंक आहेत. उदाहरण, दशक रितीप्रमाणें जी संख्या १७०३६ आहे, ती पंचक्रमाप्रमाणें काय आहे?

५) १७०३६

उत्तर, १०२१२२१.

५) ३४०७. . बाकी १

५) ६८१. २

पंचक्रम.

दशक्रम.

५) १३६. १ ताळा १०००००० याचा अर्थ १५६२५

५) २७. १

२०००० १२५०

५) ५. २

१००० १२५

५) १. ०

१०० २५

० १

२० १०

१ १

१०२१२२१ १७०३६

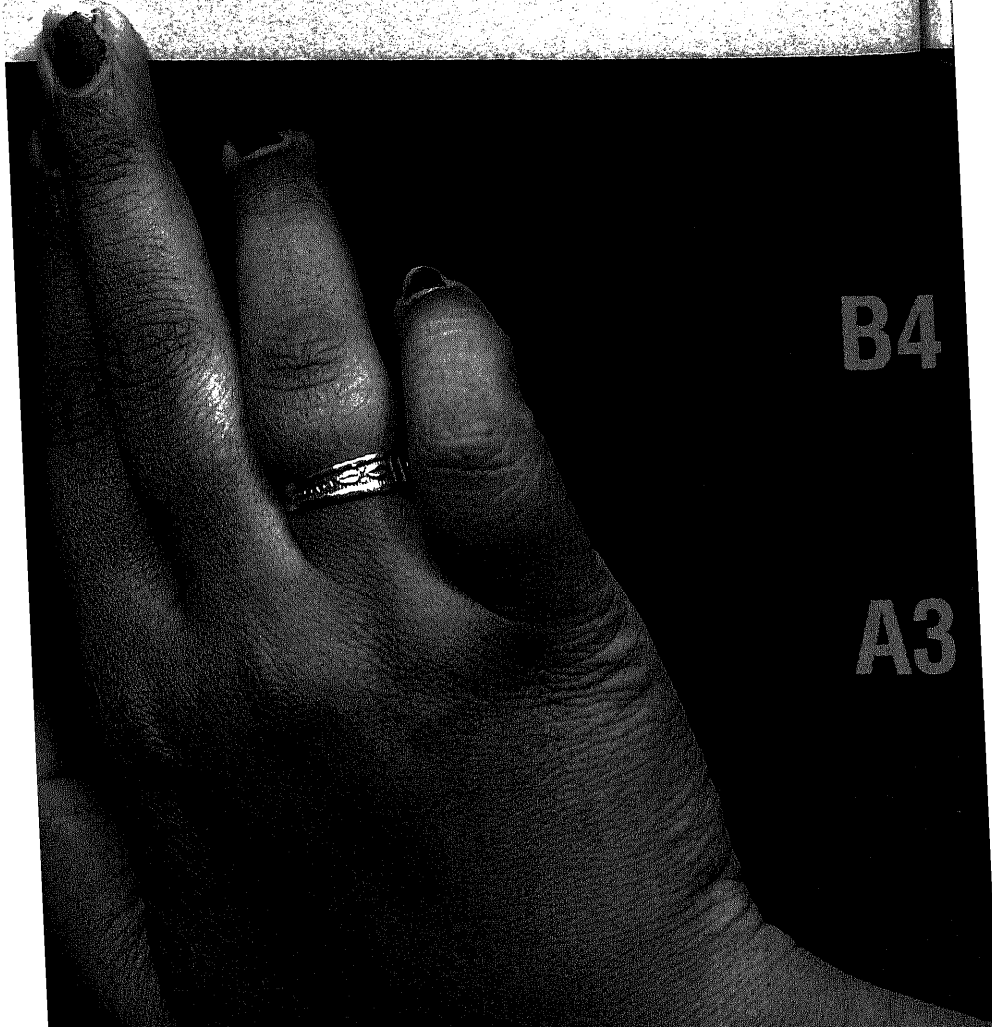
या रितीचें कारण सोपें आहे. भागाकार कृतीनें १७०३६ यांस ३४०७ इतक्या पंचभागांत भागून वर १ रहातो अशी मात्र कृति आहे; नंतर ३४०७ या पांच भागांत पांचांचे ६८१ पांच भाग येऊन वर २ पांच भाग रहातात नंतर पांचांचे ६८१ पांच भाग यांस पांचांचे

व्यवहारीकिका दशकम रितीच शिवाय दुसऱ्या क्रम रितीन जा सख्या दाखवितां येती, तीस गुणायाचें आणि भागायाचें हें अभ्यासाकरितां फार उपयोगी आहे. सगळ्या क्रम रितीविषयीं सर्व रिती सर्वांशीं सारख्या आहेत, हणजे, जे अंक हातचे घेतात ते नेहमी त्या क्रम रितीचे मूळ अंक आहेत. जसे, पंचक्रम रितीमध्ये १० चे जागीं पांच हातचे घेतात;

उदाहरण.

पंचक्रमी०	यांचा अर्थ	दशक्रमी०
४२१४३		२७९८
१२३४		१९४
<hr/>		<hr/>
३२४२३२		१११९२
२३२०३४		२५१८२
१३४३४१		२७९८
४२१४३		<hr/>
<hr/>		५४२८१२
११४३३२२२		

दादशक्रमी०	दशक्रमी०
४८९)७६८५०८(१६६८७	७०५)२२६१०७४४(३२०७१
४८९	१४६०
<hr/>	५०७४
२८१४	१३९४
२५४६	६८९
<hr/>	
२८८३	
२५४६	
<hr/>	
३६५०	
३३२०	
<hr/>	
३३०८	
२८३३	
<hr/>	
४९५	



B4

A3

ही पुढील दुसरी रीति आहे ; डाव्येकडील पाहिल्या अंक स्थळीस नव्ये क्रम रितीप्रमाणे जुन्ये रितीचे मूळ अंकाने गुणून, त्या गुणाकाराशी खाचे उजव्येकडील जवळचा अंक मिळीव; ही बेरीज नव्ये क्रम रितीप्रमाणे जुन्ये मूळ अंकाने पुनः गुणून, त्या गुणाकाराशी खाचे उजव्येकडील दुसरा अंक मिळीव, याप्रमाणे शेवटपर्यंत करित जा, ह्यणजे जी क्रम रीति सोडायची आहे, तीचा मूळ अंक कामांत घ्यावा, परंतु जा रितीत उत्तर इच्छिले आहे त्या रितीप्रमाणे गणित करावे.

जसे, १६६८७ अशे द्वादशक्रम संख्येस दशक्रम रूप दावयाचे आहे, आणि १६४३२ अशे सप्तक्रम संख्येस चतुःक्रमरूप दावयाचे आहे; असे मनांत आण ;

१६६८७	१६४३२
द्वादशक्रमांतून दशक्रमरूप.	सप्तक्रमांतून चतुःक्रमरूप.
$१ \times १२ + ६ = १८$	$१ \times ७ + ६ = १३$
$\begin{array}{r} \times १२ + ६ \\ \hline २२२ \\ \times १२ + ८ \\ \hline २६७२ \\ \times १२ + ७ \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \times ७ + ४ \\ \hline ११३३ \\ \times ७ + ३ \\ \hline २२१३० \\ \times ७ + २ \\ \hline \end{array}$
उत्तर, ३२०७१ १०२१०१२

फुटीचे माप १२ समभागांत विभागिले आहे, यांमुळे बहुधा द्वादशक्रम रीति फारच सोईस पडती. जर एक चौरस फुटीस १२ समभागांत विभागून, प्रत्येक भाग १२ चौरस इंच आहे, आणि या १२ चा १२ वा भाग १ चौरस इंच आहे. एक काटकोन चौकोन शेत आहे, त्याची एक बाजू १७६ फुटी ९ इंच आणि एक इंचाचे ७ बारांश आहे, आणि दुसरी बाजू ६५ फुटी ११ इंच आणि एक इंचाचे ५ बारांश आहे. द्वादशक्रम रीति आणि द्वादशांश कामांत आणिले असतां, वरचा दोन संख्या या पुढीलप्रमाणे होतील, ह्यणजे, १२८.९७



सख्या हाईल, आणि त्या याप्रमाणे निघतात ;

१२८९७	उत्तर, द्वादश क्रमाप्रमाणे ६८३१४४इ
५५इ५	चौरस फुटी, अथवा दशांश रितीप्रमाणे
६१७इइ	११६६० चौरस फुटी १६ चौरस इंच आणि
११६०९५	चौरस इंचाचे $\frac{४}{१२}$ आणि $\frac{११}{१४४}$
६१७इइ	तथापि, इंचाचे प्रत्येक पावाविषयी फुटीचे
६१७इइ	२ शतांश, प्रत्येक ३ इंचांविषयी दुसरा १
६८३१४४इ	शतांश आणि जर इंचाचे पावावर १२ वा

अंश अथवा २ बारा वे अंश असतील, तर १ शतांश अधिक, याप्रमाणे घेतल्याने खरेपणाचे जवळजवळ होईल. जसे, $९\frac{७}{१२}$ इंचांविषयी याप्रमाणे असावे, $७६+०३+०१$, अथवा ८० , आणि $११\frac{५}{१२}$ इंच हे ९५ असावे; अशावरून वरचे उदाहरण दशांशरूपाने याप्रमाणे होईल, ह्मणजे, १७६८×६५९५ , अथवा ११६५९९६ चौरस फुटी आहेत, या व्यवहार कामाकरिता पुरतेपणी खऱ्या होतील.

पुरवणी भाग चवथा.

अपूर्णाकांचे व्याख्यानाविषयी.

पूर्वी जे अपूर्णाकांचे व्याख्यान सांगितले, त्यापासून कळते, कीं $\frac{७}{९}$ हे सातांचा नववा भाग आहे, आणि असे दाखविले, कीं हे आणि एकाचे सात नवमांश सारखेच आहेत. परंतु अपूर्णाकांची सुचना अनेक तऱ्हेचे बोलण्याने होती, ती सर्व न्यूनाधिकतेने कामांत घेतात.

पहिल्याने. $\frac{७}{९}$ हे ७ चा ९ वा भाग.

दुसऱ्याने. एकाचे ७ नवमांश.

तिसऱ्याने. ७ हे ९ वांचा जो अपूर्णाक आहे तो.

चवथ्याने. ७ यांत जितक्या वेळा ९ जातात तितक्या वेळा, अथवा एक वेळाचा भाग.

B4

A3

सहाय्याने. ९ यांचे ७ सात अ प्रमाण, सात
सातव्याने. ७ तांस ९ वांचें जें प्रमाण आहे त्याचा रूप भेद करितो
जो गुणक तो.

आठव्याने. ९, १ आणि ७, यांचें चवथें प्रमाण तें.

वर सांगितलेल्या पहिल्ये आणि दुसरे व्याख्यानाचा अर्थ मागें सां-
गीतला आहे. तिसरें व्याख्यान याप्रमाणें निघतें; ९ यांस ९ समभा-
गांत विभागिलें, तर प्रत्येक भाग १ आहे, आणि त्यांतील ७ भाग ७
आहेत; यामुळें ९ चा जो अपूर्णांक ७ आहे, तो $\frac{७}{९}$ आहे. यापासून
चवथें व्याख्यान खरेनें निघतें; कां कीं गुणाकारांत जी कृति पुनः पुनः
करावी लागती, ती दाखवायासाठीं वेळा शब्द कामांत घेतात, आणि
बोलण्याचे विस्तारानें संख्येचा कांहीं भाग, तो त्या संख्येचे एक वेळे-
चा भाग आहे असें ह्मणतां येतें. पांचव्ये व्याख्यानांत केवळ शब्दां-
ची उलटापालट आहे; कोणत्याहि संख्येचे एकंदर एकमेचे $\frac{७}{९}$ केले,
तर प्रत्येक ९ चे सात होतात, आणि नवांवर जो अपूर्णांक बाकी रहा-
तो, तो ७ शीं संबंधी अपूर्णांक असतो. अ चे $\frac{७}{९} = ७$ वेळा $\frac{७}{९}$ हें समी-
करण सिद्ध केल्यावर, वरची गोष्ट संपूर्ण सिद्ध करितां येईल. सहावें,
सातवें, आणि आठवें, हीं व्याख्यानें प्रमाणाचे अध्यायांत दाखविलीं
आहेत.

जेव्हां शिकणारा बीजगणित शिकू लागेल, तेव्हां त्यास असें क-
ळेल, कीं जेथें बीजगणित लागू करावें लागतें, तेथें $\frac{७}{९}$ असा अपूर्णांक
आला असतां, त्यांत अ आणि व हे प्रत्येक अपूर्णांक आहेत अशी कल्प-
ना बद्दतकरून केली पाहिजे. यामुळें, अशे अवघड जातीचे अपूर्णांक
कांचें मनन करण्याची संवई असावी हें मोठें अगत्याचें आहे,

$\frac{७}{९}$ यांची कल्पना वरचे पहिल्ये आणि दुसऱ्ये व्याख्यानांवरून सहज
ध्यानांत येती; परंतु $\frac{२\frac{१}{२}}{४\frac{३}{४}}$ असा अपूर्णांक घेतला, तर या पक्षांत वरचे

तिसऱ्ये आणि त्याचे पुढील सर्व व्याख्यानांचे अर्थावरून त्यापेक्षां कल्प-
ना अधिक उघड होईल. $२\frac{१}{२}$ चे ($४\frac{३}{४}$), अथवा १ एकचे $२\frac{१}{२}$ चे
($४\frac{३}{४}$) यांविषयीं कांहीं कल्पना मनांत येत नाहीं; खरें ह्मटलें, तर को-



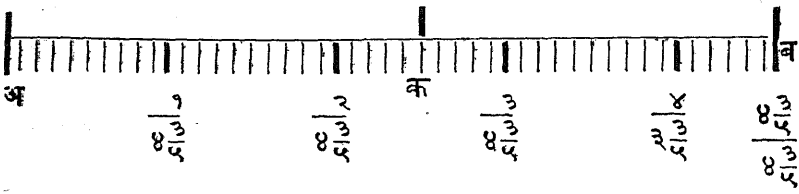
जात. परंतु $२\frac{१}{२}$ हे (४८) चे कांहीं अपूर्णांक आहेत असे सहज मनांत येईल; ह्मणजे पहिला अपूर्णांक दुसऱ्याचे कांहीं एक वेळेचा भाग आहे; आणि कांहीं संख्येचे प्रत्येक $४\frac{३}{४}$ समभागांत $२\frac{१}{२}$ चाचें रूप द्यावयासाठीं कांहीं गुणक असावा; आणि याप्रमाणें पुढेहि. या वरचा मिश्र जातीअपूर्णांकास, पहिलें आणि दुसरें व्याख्यान लागू होईल अशी कांहीं रीति काढितां येईल कीं नाहीं हें आतां पहातों.

कांहीं लांबीचा चवथा भाग, पांचवा भाग, यांची कल्पना सहज मनांत येती, ह्मणजे, हे भाग रेखा आहेत, जांचे ४ आणि ५ सांगितल्ये लांबीचे बरोबर आहेत; आणि दुसरी एक लांबी आहे, तिची चौपट आणि तिचे $\frac{३}{४}$ सांगितल्ये लांबीचे बरोबर होतील. उदाहरण, १४ यांस $२\frac{१}{२}$ समभागांत भागिलें असतां ६, ६, २, असे भाग होतात, ह्मणजे, त्यांत ६, ६, असे २ समभाग, आणि २ हे एक भागाचा $\frac{१}{३}$ असे ह्मणतां येईल. यावरून १४ चे ($२\frac{१}{२}$) चा ६ आहेत असे ह्मणतां येईल. अ व रेघेस क, ड, इ, इत्यादि बिंदूवर ११ समभागांत विभागिली, तर अक, सर्व रेघेचा ११ वा भाग आहे, अड ($५\frac{१}{२}$) वा, अई ($३\frac{३}{४}$) वा, अफ ($२\frac{३}{४}$) वा,

अ क ड इ फ ग ह ऐ ख ल म न

अग ($२\frac{१}{४}$) वा, अह ($१\frac{५}{४}$) वा, अरे ($१\frac{५}{४}$) वा, अख ($१\frac{३}{४}$) वा, अल ($१\frac{३}{४}$) वा, अम ($१\frac{१}{१०}$) वा, अब हा अब चा पहिला पूर्ण भाग आहे. जेव्हां अब १ आहे असे ह्मणतात, तेव्हां अफ $\frac{१}{२\frac{३}{४}}$ आहे,

असे ह्मटलें पाहिजे, नाहीं तर, एक जातीचे अपूर्णांकास एक तऱ्हेचें व्याख्यान, आणि दुसऱ्ये जातीचे अपूर्णांकास दुसऱ्ये तऱ्हेचें व्याख्यान करावें लागेल. या तऱ्हेनें कोणत्याहि संक्षिप्त रीती घेतल्या तरी $\frac{५}{६}$ या अपूर्णांकापासून अशी सुचना होती, कीं कांहीं अपूर्णांक काढायाचा आहे, जो पुनः पुनः बरेला घेतला असतां १ होईल, आणि तो अपूर्णांक अवेळा घेण्याचा आहे असें सर्व कबूल करितील.



अज्ञाने, $\frac{2\frac{1}{2}}{8\frac{3}{4}}$ यांस काढायासाठी, एक एकमास ४६ भागांत भागिल्याने सोईस पडते; असे १० भाग, $४\frac{3}{4}$ वेळा घेतले, तर सर्व लांबी निघेल. यावरून $\frac{४६}{१०}$ हे ($४\frac{३}{४}$) आहेत, आणि असे $२\frac{१}{२}$ भाग घेतल्याने $\frac{२५}{४६}$ अथवा अक होईल. अज्ञा रितीने मिश्र अपूर्णाकाचे विवरण करण्याचा शिकणाराने अनेक उदाहरणांवर अभ्यास करावा.

परंतु $\frac{३\frac{१}{२}}{२\frac{५}{४}}$ यांत छेद एकापेक्षां कमी आहे, तेव्हां याविषयी काय झणावे!

यांत एकाचे ($\frac{३}{४}$) असावे कीं काय! असतील तर ते काय आहेत! छेदाचे स्थळीं जर नुसते ५ असते, तर असा भाग घेतला असता, कीं जो ५ वेळा घेतल्याने १ होईल. परंतु जापेक्षां छेदाचे स्थळीं $\frac{३}{४}$ आहेत, यामुळे असा भाग घेतला पाहिजे, कीं जाचे $\frac{३}{४}$ एक एक बरोबर होतील. तो भाग एक एकपेक्षां अधिक आहे; झणजे तो $२\frac{१}{२}$ एक आहे; तर $२\frac{१}{२}$ चे $\frac{३}{४}$ घेतल्याने १ होतो. यावरून वरचा मिश्र अपूर्णाक असे दाखवितो कीं $२\frac{१}{२}$ एकमास $३\frac{१}{४}$ वेळा पुनः पुनः घेण्याचे आहे. गुणाकार या शब्दाचा अर्थ वेळेचा भाग घेणे असा विस्तीर्ण केला असता, सगळे गुणाकार भागाकार आहेत, आणि सगळे भागाकार गुणाकार आहेत, आणि जे सर्व शब्द त्यांतून एकास लागतात, ते दुसऱ्याचे उत्तरावर लागू होतील.

जर $२\frac{१}{२}$ यार्डांची किंमत $३\frac{१}{४}$ रुपये असेल, तर १ यार्डांची किंमत काय आहे! या तऱ्हेचे पक्षांत, फार सरळ प्रश्न शिकणाराचे दृष्टीपुढे आहे असे वाटते. जर ५ यार्डांची किंमत १० रुपये असली, तर प्रत्येकाची किंमत $\frac{१०}{५}$, किंवा २ रुपये होईल, असे त्यास त्वरेने कळते, आणि त्याच रितीने मिश्र अपूर्णाकापासून खरे उत्तर येईल, असे



त्याच मनांत येऊन या उदाहरणास $\frac{2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{3}}$ असे मांडून रितीप्रमाणे $\frac{3}{2}$ थवा $1\frac{1}{2}$ काढून एक यार्डाची किंमत $1\frac{1}{2}$ रुपये आहेत त्यास समजते. हे उत्तर बरोबर निघते खरे; परंतु ही रीति पूर्णांक विषयी खरी दिसती, ती अपूर्णाकावरहि लागू होण्यासाठी कांहीं सि करून दाखविण्याचे प्रयोजन नाही, असे त्याने मनांत आणू नये; पैसाची भलती कांहीं रकम आहे, तीस $2\frac{1}{3}$ वेळा घेतली असता, $3\frac{1}{2}$ रूप होतात, ती रकम वरचे प्रश्नांत इच्छिली आहे. एक रूपयास १ समभागांत विभागून, त्यांतले ६ भाग $2\frac{1}{3}$ वेळा पुनः पुनः घेतले तर रूपया होईल. त्यास $3\frac{1}{3}$ वेळा घेण्यासाठी, तसेच पुनः पुनः केल्याने प्रत्येक पायरीस $3\frac{1}{3}$ असे ६ भाग किंवा २१ घेतले पाहिजेत. यावरून $\frac{2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{3}}$ अथवा $1\frac{1}{2}$ ही एक यार्डाची किंमत आहे.

पुरवणी भाग पांचवा.

गुणदर्शकांविषयी.

लागरतम् कामांत आणतेसमयी ही पुढील गोष्ट फार उपयोगी आहे, असे शिकणारास दिसेल. आतां, भागाकार करण्याचे पूर्वी, भागाकारांतील दशांश बिंदूंचे स्थळ कोठे असावे, ते बरेने काढण्याचे रितीविषयी मात्र सदाः धेधे सांगतो.

जेव्हां कांहीं संख्येचे वर गराद मांडिली असती, जसे ७, या संख्येस उणी ह्मणावे, आणि त्या अर्थाने ती कामांत घ्यावी; त्याच जातीचे संख्येचे बेरिजेने ती अधिक होती, आणि त्याच जातीचे संख्येचे वजावाकीने ती कमी होती असे समजावे; जसे, ७ आणि २ यांची बेरीज ९ होती, आणि ७ यांतून २ वजा केले, तर ५ रहातात. परंतु उष्णे संख्येची गरादे वांचून संख्येची बेरीज केली, तर संख्या कमी होती, आणि त्यांतून वजा केली, तर ती उणी संख्या अधिक होती असे समजावे. जसे, ७ आणि ४ यांची बेरीज ३, ७ आणि १२ यांची

B4

A3

दशांश विदूचे डाय्केडे ५ अंकस्थळें आहेत. अथवा जर भागाकाराचे पहिले अंक अवकडइफ असे असले, तर अवकडइफ असे दशांश चिन्ह मांडिलें पाहिजे. परंतु ००२७९ यांस १४६०८ यांणीं भागायाचें असतें, तर हातचे घेण्याचें प्रयोजन नसतें; आणि ३ यांतून २ वजा केले, तर ५ होतात; ह्यणजे, भागाकारांत पहिला अर्थबोधक अंक पांचव्येस्थळां येईल. यावरून भागाकारांत पहिल्ये अर्थबोधक अंकाचे डाय्केडे ०००० असें येईल. आणि या रितीवरून काहीं उदाहरणें केलीं असतां, ही गोष्ट पुरतेपणीं लक्षांत येईल. आणि तेणेंकरून भागाकाराचा पहिला अंक काढल्याचे पूर्वीच त्यास त्याचा योग्य अर्थ लावितां येईल.

पुरवणी भाग सहावा.

पैक्याचे दशांशरूप हिशोबविषयीं.

आणे, पै यांस रूपयांचें दशांशरूप देणें, अथवा त्याचे उलट दशांशांस रूपयांचें रूप देणें, असें बहुधा घडतें.

आणे, पै यांस रूपयांचें दशांशरूप देण्यासाठीं, ही पुढील सरळ रीति आहे; आरंभीं लक्षांत ठेवावें, कीं

८ आणे, हे रूपयाचे ०.५०	} आहेत.
४ आणे ०.२५	
२ पै ०.०१२५	

यावरून २ पै ह्या १ रूपयाचे $\frac{1}{80}$ चे इतक्या जवळजवळ आहेत, कीं त्या त्याचे बरोबर आहेत, अशी कल्पना करून ४ आणे होतपर्यंत पहिल्ये दोन दशांशस्थळांत काहीं चूक येणार नाही; दोन स्थळांपर्यंत आल्यावर २४×२ पै = ०.२५; यावरून, दशांशांचीं पहिलीं दोन स्थळें काढण्याची रीति हीच आहे.

प्रत्येक चार चार आण्याविषयीं ०.२५ मांड, आणि त्यावरचे पैची संख्या सम असली, तर प्रत्येक दोन दोन पै विषयीं, दशांशाचे दुसऱ्ये

35

B4

A3

प्याचे वर असल्या, तर त्यावरचे विषम पै विषयीं, दशांशाचे दुसऱ्ये स्थळीं १ अधिक मांडावा, जेव्हां वरचा पै दोन आण्यापैक्षां कमी आहेत, तेव्हां विषम पै सोडाव्या.

जसे, आ. पै आ. पै

$$१३ \dots ४ = १२ \quad १६ = ० \cdot ७५ + ० \cdot ८ = ० \cdot ८३ \text{ रुपयाचे.}$$

$$११ \dots ७ = ८ \quad ४३ = ० \cdot ५० + २२ = ० \cdot ७२ \text{ रुपयाचे.}$$

$$८ \dots ९ = ८ \quad ९ = ० \cdot ५० + ० \cdot ४ = ० \cdot ५४ \text{ रुपयाचे.}$$

शेवटल्ये ४ आण्याचे वर जा पै असतील, त्यांशिवाय दशांशाचे तिसऱ्ये आणि चवथे स्थळांविषयीं कोणत्याहि पैपासून कांहीं निघत नाहीं, हें स्पष्ट आहे. कां कीं प्रत्येक २ पैवर $० \cdot ००४ \frac{१}{८}$ इतकी कसर जाती, ती प्रत्येक ४ आण्यांस $० \cdot १$ होती. आणि ही पूर्वीचे हिशोबांत येती. यामुळे तिसरें आणि चवथें दशांशस्थळ भरायासाठीं या पुढील प्रमाणें कर.

शेवटील चार आण्यांवरचा पै जर सम असतील, तर त्या प्रत्येक पै विषयीं दशांशाचे चवथे स्थळीं २ घे, अथवा विषम असतील, तर शेवटील दोन आण्यांवरचे प्रत्येक पैविषयीं २ घे, आणि प्रत्येक आण्याविषयीं ६×२ पै हणून १ अधिक घ्यावा.

जर चार दशांश स्थळांपेक्षां अधिक स्थळे घेतलीं पाहिजेत, तर शेवटील आण्यांवर जा पै असतील, तितके अंश आणि १२ छेद कल्पून त्या अपूर्णाकास दशांशरूप देऊन जोडून मांडावे.

$$\begin{array}{l} \text{लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं} \quad \frac{१}{१२} = ० \cdot ८३३ \dots \quad \frac{७}{१२} = ५८३३ \dots \\ \frac{२}{१२} = १६६६ \dots \quad \frac{८}{१२} = ६६६ \dots \\ \frac{३}{१२} = २५ \dots \quad \frac{९}{१२} = ७५ \dots \\ \frac{४}{१२} = ३३३ \dots \quad \frac{१०}{१२} = ८३३ \dots \\ \frac{५}{१२} = ४१६६ \dots \quad \frac{११}{१२} = ९१६६ \dots \\ \frac{६}{१२} = ५ \end{array}$$

तर, आणे पै

$$१३ \dots ४ = ८३ \mid ३३ \mid ३३ \text{ रुपयाचे आहेत.}$$

$$११ \dots ७ = ७२ \mid ३९ \mid ५८३३$$

प्रत्येक २५ विषयीं ४ आणे मांड, आणि त्यांचे वर जे राहिले त्यांस, पैचे रूप देण्यासाठी दर शेंकड्यास ४ वजा करून बाकी राहिल तिची दुप्पट करावी, आणि दशांश बिंदू दोन स्थळें उजव्येकडे सारावा. उदाहरण. ७ मण .. १३ $\frac{1}{4}$ शेर लोखंडाची किंमत दरशेरी २ आ. ४ पै प्रमाणें काय होईल ?

आ. पै

$$२ \dots ४ = १४५८३३३$$

$$\begin{array}{r} ४० \\ \hline ५८३३३३ \dots \\ ७ \end{array}$$

$$४० \cdot ८३३३३$$

$$१० \text{ शेर } \dots १४५८३३$$

$$२ \text{ शेर } \dots २९१६६$$

$$१ \text{ शेर } \dots १४५८३$$

$$\frac{1}{४} \text{ शेर } \dots ०३६४५८$$

रु. आ. पै.

$$४२ \cdot ७६५६२ = ४२ \dots १२ \dots ३ \text{ हें उत्तर.}$$

या पुढीलप्रमाणें निघतें.

४२७६५६२ यांपासून ४२ रुपये आणि ७६५६२ रुपये तर ७६५६२

$$\begin{array}{r} ७५ \\ \hline \end{array} = १२ \text{ आणे}$$

$$\begin{array}{r} ०१५६२ \\ \hline \end{array}$$

$$६२$$

शेंकडा चार प्रमाणें वजा करून

$$\begin{array}{r} ०१५०० \\ \hline \end{array}$$

बाकी

१५०० दोन दशांशस्थळें, उजव्येकडे सारून

$$२$$

३०० दुप्पट करून

रु. आ. पै.

३ पै, यावरून ४२०१२३ उत्तर.

B4

A3

बहिवाटवहीचा रितीचे मूळ कारणाविषयी.

याविषयीचे ग्रंथांमध्ये पुरतेपर्णी समजाया जोगें असें बहुतकरून फार धोडे लिहितात, यामुळे जेव्हां हिशोब शुद्ध रितीने ठेविलेले असतात, त्यांचा जा मूळ रिती त्यांविषयी कांहीं सुचना एथें दिली असतां, जांस बहिवाटवही शिकण्याची असेल त्यांचे ती उपयोगी पडेल.

जो पुरुष व्यापार करितो, त्यास आपले व्यवहाराचे स्थितीचा झाडा घेतेसमयी, या पुढील तीन गोष्टी बरोबर समजाव्या अशी इच्छा असती; पहिली, व्यापार करण्याचे आरंभीं अथवा जुना व्यापार असल्यास मागला झाडा घेतल्यावर आपल्ये जवळ काय होते; दुसरी, पूर्वीचा आणि हालींचा झाडा घेण्याचे काळामध्ये व्यापाराचा निरनिराळ्या खात्यांमध्ये लाभ आणि हानी काय झाली ती; तिसरी, झाडा घेतल्यानंतर त्याचे जवळ एकंदर वित्तविषय किती तो. यांतील पहिल्या दोन गोष्टींपासून तिसरी गोष्ट सहज कळेल. याच रितीप्रमाणें एकंदर हिशोब तपासण्याचे मुदतीचे आंतच, कदाचित् एकाद्या खात्याची स्थिती कशी आहे हे जाणण्याची इच्छा असल्यास, तेंही काढितां येईल.

मागील झाड्यापासून, एक प्रकारचे व्यवहारांत जी कांहीं घडामोड जा रितीने मांडितात त्यास खाते ह्मणतात. त्यामध्ये जमा आणि खर्च हीं मात्र असतात, आणि यावरून त्यांत जमेची किंवा रिणको, आणि खर्चाची अथवा धनको, अशा दोन बाजू आहेत असें ह्मणतात.

सगळे हिशोब बहुतकरून पैक्याने ठेवितात. ह्मणजे जर कांहीं माल खरेदी केला, तर त्या खरेदीकरितां जो पैका दिला, त्यापैक्याने त्या मालाचा हिशोब मांडितात. जर कोणी कर्जदारानें एकादी हुंडी भाणून दिली, आणि त्या हुंडीचा पैका मुदतीनंतर मिळाल्याचा आहे, तर त्या हुंडीची किंमत पैक्याने मांडितात. सर्व जिनसा, सरंजाम, घोडे इत्यादि, जा वस्तू व्यवहार कामासाठीं जवळ असतात, त्यांचा हिशोब त्यांचे किंमतीवरून मांडितात. सगळें रोकड नाणें, ब्यांकनोट, इत्यादि जीं आपल्या जवळ असतात, अथवा बाहेरून आलेलीं असतात, तितकाच पैका आपल्ये वहीत लिहिलेला असतो, आणि तो शुद्ध पैका आहे ह्मणून त्यास रोकड असें ह्मणतात.



अशा कल्पनेवरून सर्व हिशोब ठेविलेले असतात. प्रत्येक खाते चालविण्याविषयी वेगळाला कारकून आहे असे मानून शिकणाराची समजूत होत आहे, तर तसे त्याणे मानवें; झणजे रोकड संभाळण्यास आणि तिची देवघेव करण्यास एक कारकून आहे; मुदत पुरी झाल्यावर जा हुंड्यांचा पैका घेणे आहे, त्यांविषयी एक कारकून; मुदत पुरी झाल्यावर जा हुंड्यांचा पैका देणे आहे, त्यांविषयी एक कारकून; जर कापडाचा व्यापार आहे, तर त्याविषयी एक कारकून; जर साकरेचा व्यापार असेल, तर त्याविषयी एक कारकून; सावकारा बरोबर जा जा पुरुषांचा व्यापार असतो, त्याविषयी एक कारकून; लाभ आणि हानी यांविषयी एक कारकून; आणि याप्रमाणे पुढेहि.

हे सर्व कारकून अथवा खाती एक सावकाराची असतात, आणि शेवटी त्या कारकुनांस या पुढीलप्रमाणे हिशोब द्यावा लागतो; झणजे जी मालमत्ता खांचे स्वाधीन होती ती पुढे करावी, अथवा कोणास दिली हे दाखवून त्याणीं मोकळे व्हावे. या कारकुनांनीं जें जें घेतलें असेल, अथवा जाविषयी ते जिम्मेदार होते, त्याविषयी ते सावकारास कर्जदार अथवा रिणको आहेत; जा सर्व वस्तु खांचा पासून जातात, अथवा जाविषयी ते धन्यास जिम्मेदार नाहींसे होतात, त्याविषयी ते मोकळे अथवा धनको होतात. जास हा विषय गुढा सारखा न वाटावा असें असेल त्याणे हे शब्द विस्तीर्ण अर्थाने घ्यावे. जसें, कांहीं व्यवहारामुळे एखाद्या खात्याकडे तिऱ्हाईत पुरुषाची जिम्मेदारी येती, तेव्हां तो हिशोब आपल्या वहीत धनको केला पाहिजे, आणि कांहीं व्यवहारामुळे खात्याकडील तिऱ्हाईत पुरुषाची जिम्मेदारी नाहींसी होती, तेव्हां तो हिशोब आपल्या वहीत रिणको केला पाहिजे. परंतु जेव्हां कांहीं एक हिशोब आपल्या वहीतील एका खात्याची जिम्मेदारी काढून दुसऱ्या खात्याकडे नेतो, तेव्हां पहिला हिशोब आपल्या वहीत रिणको केला पाहिजे, आणि जेव्हां कांहीं हिशोब एकाद्या खात्याकडे जिम्मेदारी आणितो, तेव्हां तो हिशोब धनको केला पाहिजे.

वर सांगितलेले सर्व कारकून अथवा खाती कोणास जिम्मेदार असतात, आणि त्या जिम्मेदारीपासून खांस कोण मुक्त करितो? सावकार,

उत्तर वर सांगितलेला शिलकबाकी काढणारा कारकून आहे, तो त्यांस मुक्त करील. परंतु वेगळालीं खातीं परस्परांला रिणको, आणि परस्परांनीं धनको असें ह्मणण्याची चाल आहे. जसें, घेण्याचे हुंड्यांला रोकड रिणको आहे, ह्मणजे अर्थ हाच, कां रोकडखातें अथवा जो कारकून तें खातें राखितो, तो सावकारास हुंडीचे पैक्याविषयीं जिम्मेदार होतो. ही गोष्ट विस्तारानें उघडून सांगितली असतां याप्रमाणें होईल; कोणीएक कारकून क, रोकडीचें खातें बाळगतो, आणि जेव्हां कोणी अ पुरुषापासून हुंडीचा पैका मिळाला असतो तो जेव्हां कचे हातीं येतो, तेव्हां त्या पैक्याविषयीं क जबाब देणारा असतो. यासारखें घेण्याचे हुंडीचे खात्यांत याप्रमाणें मांडितात, ह्मणजे घेण्याचा हुंड्या रोकडीनें धनको. ही गोष्ट विस्तारानें सांगितली असतां याप्रमाणें होईल; कोणी ब कारकून घेण्याचे हुंडीचें खातें राखितो, आणि जी अ ची हुंडी त्याजवळ होती ती मुदत भरल्यावर, अ जवळून पैका घेऊन क कारकुनास दिल्यावर, ब कडची जिम्मेदारी नाहीशी होती. घेण्याची हुंडी रोकडीनें धनको याचा अर्थ उघड आहे, परंतु रोकड, घेण्याचे हुंडीला रिणको असें ह्मणणें योग्य नाही. हुंडीबद्दल जो पैका मिळतो त्याविषयीं रोकडीचें खातें सावकाराला त्या रकमेनें रिणको, आणि घेण्याचे हुंडीनें रोकड रिणको आहे असें मांडण्यास योग्य आहे. कल्पनारूप ऋणें जांस देण्याचीं असतात, त्यांस त्यांतून काहीं देत नाही, अज्ञानें जरी व्यवहारांत काहीं अडथळा येत नाही, तथापि त्यापासून शिकणारा घोंटाळ्यांत पडतो; असें आहे, तथापि शिकणारानें हाच बोलण्याचा प्रकार काईम ठेवून त्याचा खरा अर्थ ध्यानांत ठेवावा.

जो कोणी ऋणकरी किंवा देणेंदार आहे, त्याचा वेगळाव्या देण्याचा रकमा त्याचा खात्यांत रिणको केल्या असें ह्मणतात; आणि जो धनको किंवा घेणेंदार, अथवा काहीं रकमांपासून मुक्त झाला असतो, त्याचा खात्यांत त्या रकमा धनको केल्या असें ह्मणतात. जे पुरुष घेतात त्यांस रिणको केले पाहिजेत; आणि जे पुरुष देतात त्यांस धनको केले पाहिजेत. हिशोबांत काहीं खोडीत नाही. जर काहीं रोख घेतलेली रकम परत केली, तर ती दिलेली रकम रोकडीचे खात्याचे जमेचे किंवा रि-

धनका अथवा खचाच बाजूस दिली असे लिहितात. जा वहीत निरनिराळीं खातीं घातलेलीं असतात, तीस खतावणी ह्मणतात. तीस दोन बाजू असतात, ह्मणजे पहिली अथवा रिणकोबाजू आणि तिचा समोरची दुसरी अथवा धनको बाजू. डावी बाजू नेहमी रिणको असती. याशिवाय व्यापारी दुसऱ्या काहीं वह्या बाळगतात, परंतु त्यांचा योगाने खतावणी नीट राखण्यास मात्र सहाय्य होतें. जसे खर्डावही, तीत जी सर्व घेवदेव व्यवहारांत होती ती व्यवहारी भाषेने लिहिलेली असती; दुसरी रोजकीर्दीची वही, तीत खर्डावहीत लिहिलेली सर्व देवघेव खतावणीचे पद्धतीप्रमाणे काहीं नियमित काळीं मांडितात. रोजकीर्दीतील रकमा खतावणीचे जा पृष्ठावर नेलेल्या असतात, या पृष्ठांचा अंक रोजकीर्दीत त्या रकमेचे मागे मांडितात, आणि खतावणीतील रकमा रोजकीर्दीचे जा पृष्ठावरून घेतात, त्या पृष्ठाचा अंक खतावणीत त्या रकमेचे मागे असतो; हवाला देण्याचे या रितीपासून खतावणीमध्ये पुष्कळपणीं संक्षेप करितां येतो. जसे, काहीं दिवसांचे व्यवहाराची रोजकीर्दी घालतेसमयीं, जर कित्येक रकमा एकाच दिवशीं एक वेळा किंवा वारंवार दिल्या किंवा घेतल्या असतील, असे जेव्हां घडतें, तेव्हां या सर्वांची बेरीज खतावणीत मांडितां येईल, आणि या किकोळ रकमांनीं रोकडीचा हिशोब रिणको किंवा धनको करावा; ह्मणजे प्रत्येक रकम सर्व रकमेचे पोटची आहे असें जाणून, धनको किंवा रिणको लिहावी. आतां एथे केवळ खतावणी-विषयीं मात्र सांगण्याचें प्रयोजन आहे. बाकी सर्व वह्या, आणि या राखण्याची रीति, जरी फार उपयोगाची आहे, तरी त्यांस वह्या राखण्याचे मुख्य कारणाचा आधाराची गरज नसती. जे जे व्यवहार होतात, त्यांविषयींचा सर्व वेगळाल्या रकमा खतावणीत एकदांच मांडिल्या आहेत अशी कल्पना कर. वर सांगितल्यावरून असें दिसतें कीं प्रत्येक रकम दोन वेळा मांडिली जाती. जर ब चे नावावर काहीं पैका अ देतो, तर एक्ये खाल्यामध्ये तें याप्रमाणें मांडितात, ब ने अ धनको; आणि दुसऱ्या खाल्यामध्ये असें मांडितात, अ ला ब रिणको. यास दुहेरी वहिवाटवही ह्मणतात; यावरून सर्व वहीतील रिणको बाजूचे सर्व रकमांची बेरीज, धनकोबाजूचे सर्व रकमांचे बेरिजेवरोबर असती.



B4

A3

तात, परंतु त्यांचे मांडण्याची तऱ्हा उलटी असते. साहित पडल्यास प्रत्येक रकमेची एकेरी मांडणी झाल्यावर, दुहेरी मांडणीहि करिता येईल. गुणाकाराचा कोष्टकास दुहेरी बहिर्वाटवहीचा कोष्टक हणतात, उदाहरण, ४२ हा अंक त्या कोष्टकांत जरी एक वेळ येतो, तरी तो दोन तऱ्हांनीं दिसण्यांत येतो, हणजे, ६ वेळा ७, आणि ७ वेळा ६. अ, ब, क, ड, ई, अर्शा पांच खातीं आहेत, आणि त्यांतील प्रत्येक खात्याचा दुसऱ्या खात्याशीं व्यवहार आहे असें मनांत आण; आणि सर्व देणें उभ्ये ओळींत आणि सर्व घेणें आडव्ये ओळींत असें मांड. जसें पुढीलप्रमाणें;

६
६ ६ ६ ६
अ ब क ड ई

अ, धनको		२३	१९	३२	४
ब, ध०	१७		६	११	२५
क, ध०	९	४१		१०	२
ड, ध०	१४	२८	१६		३
ई, ध०	१५	४	६०	१	

यांत १६ या रकमेविषयीं डचा खात्यांत ड, कने धनको आहे, आणि कचा खात्यांत याच रकमेविषयीं क, डला रिणको आहे. आणि रिणको आणि धनको बाजूंची बेरीज एकसारखीच असते, या हणण्याचा अर्थ असा आहे, कीं वरचे अंकांची बेरीज उभ्ये किंवा आडव्ये ओळीनें केली तरी सारखीच होईल.

जर वर दाखविल्याप्रमाणें व्यवहारांची स्थिति आहे, आणि खातेबही पुरी करण्याची आहे, तर त्यांची स्थिति या पुढीलप्रमाणें होईल; त्यांत जें बारीक अक्षरांनीं लिहिलें आहे, त्याची समजूत पुढें होईल.



बला. १७	बने. २३	अला. २३	अने. १७
कला. ९	कने. १९	कला. ४१	कने. ६
डला. १४	डने. ३२	डला. २८	डने. ११
इला. १५	इने. ४	इला. ४	इने. २५
बाकीला २३			बाकीने. २७
—	—	—	—
७८	७८	९६	९६

क, रिणको.	क, धनको.	ड, रिणको.	ड, धनको.
अला. १९	अने. ९	अला. ३२	अने. १४
बला. ६	बने. ४१	बला. ११	बने. २८
डला. १६	डने. १०	कला. १०	कने. १६
इला. ६०	इने. २	इला. १	इने. ३
	बाकीने. ३९	बाकीला ७	
—	—	—	—
१०१	१०१	६१	६१

इ, रिणको.	इ, धनको.	बाकी, रिणको.	बाकी, धनको.
अला. ४	अने. १५	बला. ३७	अने. २३
बला. २५	बने. ४	कला. ३९	डने. ७
कला. २	कने. ६०		इने. ४६
डला. ३	डने. १		—
बाकीला ४६		७६	७६
—	—	—	—
८०	८०		

करचा कौष्टकांत जा वेगळाल्या रकमा एकदां मांडिल्या आहेत, त्या रकमा खालचा वेगळाल्या खात्यांमध्ये पुनः निरनिराळ्या मांडिल्या आहेत, असे दिसते. परंतु जेव्हा सर्व खाती पुरी होतात, आणि अधिक कांहीं रकमा मांडण्याचा नसतात, त्या वेळेस ही एक शेवटची कृति

नांत येण्यासाठी, मनांत आण, कीं एक नवा कारकून ठेविला आहे, जो सर्व खातीं पाहून त्यांतील सगळ्या रिणको आणि धनको रकमा काढून आपल्या स्वाधीन घेतो, आणि त्या खात्याबाबद देणें आणि घेणें याविषयीं सावकारास जिम्मेदार होतो. या नव्या कारकुनास बाकी काढणारा कारकून असें नाव देतात, आणि प्रत्येक खातें आपल्या जवळचें सर्व देणें किंवा घेणें त्याचे हवालीं करितें. ह्मणजे, रोकडीचा कारकून आपल्या जवळचीं सर्व रोकड त्याचा हवालीं करितो; दोन जातींचा हुंड्या बाळगणारे कारकून आपल्या जवळचा देण्याचा अथवा घेण्याचा हुंड्या* त्याचा हवालीं करितात; निरनिराळ्या मालांचीं खातीं राखणारे कारकून जवळ जो माल विकल्यावांचून राहिलेला असतो, तो सर्व खरेदीचा दरानें हवालीं करितात; निरनिराळ्या पुरुषांचीं खातीं राखणारे कारकून त्या वेगळाल्ये पुरुषांकडून घेणें किंवा त्यांस देणें असेल, याविषयींचे आपल्या जवळचे दस्ताऐवज हवालीं करितात; याप्रमाणें पुढेहि. परंतु जेथें घेण्यापेक्षां देणें अधिक असतें, तेथें हा बाकी काढणारा कारकून त्याजवळून काहीं न घेतां त्या खात्याचें देणें देऊन खातें पुरें करितो; सारांश जा खात्याचा तपास करण्याकरितां तो जातो, त्या खात्याचा रिणको आणि धनको वाजूंचा बेरिजा बरोबर होत असें करितो. उदाहरण, वर दाखविलेल्या अखात्यामध्ये अनें सावकाराला ५५ रूपये देणें आहे, आणि सावकाराला त्या खात्यानें ७८ रूपये दिले आहेत. यावरून तो बाकी काढणारा कारकून त्या खात्याचे रिणको वाजूस २३ मांडितो, ह्मणजे तेणेंकरून त्या खात्यांत ती बाकी रिणको अशी होती, आणि बाकी खात्यांत ती रकम अचे नावावर धनको होती. परंतु ब खात्यांत ९६ जमा आहेत आणि त्याणें ५९ मात्र दिले आहेत. यावरून तो बाकी काढणारा कारकून त्या ब खात्यापासून ३७ घेतो, ते त्यांत धनकोकडे बाकी असें मांडून ती बाकी, बाकी खात्यांत बचे नावावर रिणको असें मांडितो. जर सर्व खातीं खरीं मांडलेलीं असलीं, तर बाकी खात्याचा दोन वा-

* हिशोब घेतेंसमयीं वेगळाल्ये खात्यांमध्ये प्रत्येक रकमेचे समोर जो पैका मांडिलेला असतो तो घेणें किंवा देणें कसाहि असो, तरी तो त्या रकमेबद्दल पैकाच आहे असें लक्षांत देवांचें.



होत नाहीत, तेव्हा त्यांतून एक रकम बाकी खात्याचा एक बाजूस जाते, आणि दुसरी रकम बाकी खात्याचा दुसऱ्या बाजूस जाते. यावरून सावकाराचे हिशोबाचा एक भागाचे खरेपणाविषयी हे बाकी खाते ताला आहे; जर त्या खात्याचा दोनही बाजूंचा रकमांचा बेरिजासारख्या नसल्या, तर त्यांत कांहीं रकमा लिहून त्यांचा बरोबरीचा रकमाबरोबर मांडिल्या नसाव्या, अथवा बेरिजा घेण्यांत कांहीं चूक झाली असे समजावे.

परंतु जापेक्षा बाकी खात्याचा दोनही बाजूंचा बेरिजासारख्या नेहमी असोव्या, आणि जापेक्षा सावकारास घेणे आहे असे रिणको बाकीपासून, आणि त्यास लोकांचे देणे असे धनको बाकीपासून वाटते, असे जर वाटत आहे, तर जा व्यवहारांत हानी किंवा लाभ कांहींच झाला नसतो, त्यासच केवळ ही रीति लागू होती असे नजरेस येणार नाही की काय? यावरून जा पुंजीने सावकाराने व्यापार करण्यास आरंभ केला, आणि तीपासून जो लाभ किंवा हानी होती ही दोन जा खात्यांत मांडिलेली असतात, त्यांचा विचार करावा लागतो, ती ही आहेत, हणजे पुंजी खाते, आणि लाभ हानी खाते. जी पुंजी व्यापाराचे आरंभी असती, तिची वहीवाट दुहेरी वहीप्रमाणे करायाची असेल, तर खातेवही घालण्याचे आरंभी, सावकार प्रत्येक कारकुनाचे हवाली त्याचे त्याचे काम अथवा खाते करितो, अशी कल्पना करावी. पुंजी खात्यांत पुंजी हणजे स्वता सावकार आहे, असे समजून सर्व माल मत्तेने पुंजीखाते धनको आणि सर्व जिम्मेदारीने रिणको होते; परंतु निरनिराळी खाती पुंजीपासून जे काय घेतात, त्यांविषयी ती रिणको होतात, आणि जी जिम्मेदारी घेतात तितक्याने ती खाती धनको होतात. उदाहरण, खातेवही घालतेसमयी सावकाराची ५०० रुपये पुंजी आहे, अशी कल्पना कर. तर हे ५०० रुपये त्याचे रोकडीचे कारकुनाचे हवाली केले असे दिसेल, आणि तेणेकरून पुंजीचे खात्यांत या पुढीलप्रमाणे दिसेल, हणजे, पुंजी ५०० रुपयांचे रोकडीने धनको; आणि रोकडीचे खात्यांत याप्रमाणे दिसेल, हणजे, रोकड ५०० रुपयांचे पुंजीला रिणको. मनांत आण, की आरंभी

B4

A3

खात्यांत या पुढीलप्रमाणे दिसेल, ह्यणजे, पुजा माताराम याला ५० रुपयांविषयीं रिणको आहे, आणि मोतीरामाचे खात्यांत याप्रमाणे दिसेल, ह्यणजे, मोतीराम पुंजीनें ५० रुपयांविषयीं धनको आहे. याप्रमाणे पुंजी खाते ठेविलें असतां, जा पुंजीनें सावकार व्यवहार आरंभितो, त्याजविषयीं दुहेरी हिशोब होतात.

वह्यांतील जा रकमांचे समोर त्यांचे किमती बरोबरीचा रकमा दिसत नाहीत, त्या सर्व रकमा जा खात्यांत मांडिल्या असता, त्यास लाभ हानीं खाते ह्यणतात. हे लाभहानीं खाते, अथवा जो कारकून तें राखितो, तो प्रत्येक हानींविषयीं आणि प्रत्येक लाभाचा कारणाविषयीं जिम्मेदार आहे असें कल्पितात. ह्यणून हे खाते प्रत्येक हानींविषयीं रिणको आणि प्रत्येक लाभाविषयीं धनको होते; जर काहीं माल ८० रुपयांस खरेदी घेतला आहे, आणि त्यास २० रुपयांची नुकसानी होऊन तो ६० रुपयांस विकला, तर स्पष्ट दिसेल, कीं याप्रमाणे मांडिलें पाहिजे, ह्यणजे, रोकड ६० रुपयांचे मालाला रिणको आणि माल ६० रुपये रोकडीनें धनको. आतां आरंभी सर्व मालाचे खरेदीविषयीं जो रोकड पैका किंवा हुंड्या दिल्या असतील, त्यांजविषयीं ८० रुपयांची रकम मालाला रिणको, अशी वहीत कोठें तरी असावी. ती जर लक्षांत आणली नाही, तर खात्याचे खरेपणांस बाध येईल; कारण खाते पुरें करण्याचेसमयीं, बाकी काढण्याच्या कारकुनाला हे कारण समजल्यावांचून जी रोकड त्यास मिळयासयोग्य दिसती, त्यापेक्षां २० रुपये कमी आहेत असें दिसेल; आणि यावरून दुहेरी बहिवाटवहीची योजना चालणार नाही. जापेक्षां मालाचा बाकी खात्यानें जो माल शिलक असेल तो दाखवून द्यावा. यावरून मालाचा खात्यानें २० रुपयांची जिम्मेदारी लाभहानीं खात्याकडे द्यावी अथवा या पुढीलप्रमाणे मांडावे हे सोईस पडेल, ह्यणजे, माल २० रुपये लाभहानीनें धनको, आणि लाभहानीं २० रुपयांचे मालाला रिणको. पुनः घरखर्च, आणि व्यापारसंबंधीं खर्च, वेतन इत्यादि, जा खर्चाबद्दल काहीं परत येत नाही, त्या सर्व रकमांचीं खातीं बाकी काढण्याचे पूर्वी, लाभहानीं खात्यांत मांडून हिशोब पुरा केला पाहिजे; जसें, मनांत आण, कीं घरभाडें इत्यादिपासून जी मिळकत होती, तिजपेक्षां त्यासंबंधीं खर्च २०० रुपये



भहानीं खात्याकडे नेऊन या पुढीलप्रमाणें त्या खात्याची खातेबाकी काढावी; ह्मणजे घरखर्च लाभहानीने २०० रुपयांविषयीं धनको, आणि लाभहानीं घर खर्चाला २०० रुपयांविषयीं रिणको. अशा तऱ्हेनें पुढल्ये वर्षाची खातेवही घालण्याविषयीं जा रकमा अगत्य असाव्या, त्यांशिवाय बाकीखात्यामध्ये दुसऱ्या कांहीं रकमा घेऊं नयेत, ह्मणून लाभहानीं खाते, बाकी खाते घालण्याचे पूर्वी वेळोवेळीं कामांत येतें.

कांहीं रकम एका खात्यांतून काढून दुसऱ्या खात्यांत नेणे, हें मोठें विचाराचें काम आहे. देण्याचे खात्याचे धनको रकमांविषयीं घेण्याचें खाते धनको होतें, आणि देण्याचे खात्याचे रिणको रकमां- विषयीं घेण्याचें खाते रिणको होतें. यावरून रीति पुढीलप्रमाणें आहे; देण्याचे खात्याची खाते बाकी काढ, आणि जा बाजूस कांहीं बाकी रकम मांडावी लागती, ती बाकी रकम देण्याचे खात्यामध्ये, जसा पक्ष असेल त्याप्रमाणें घेण्याचे खात्याला रिणको, किंवा धनको मांड, आणि तीच रकम घेण्याचे खात्यामध्ये देण्याचे खात्याला रिणको किंवा धनको मांड. जसें अचे खात्यावरून रकम काढून बचे खात्यामध्ये मांडायाची आहे, आणि बचें खाते मात्र बाकी खात्यांत अणायचें आहे, असें मनांत आण. जर हीं दोन्हीं खातीं पुढीलप्रमाणें असलीं, तर बारीक अक्षरांनीं जा रकमा लिहिल्या आहेत त्या मात्र हिशोब करण्याचे पूर्वी येतील.

अ, रिणको.	अ, धनको.	ब, रिणको.	ब, धनको.
किर्कोळीला १००	किर्कोळीने ५००	किर्कोळीला ६००	किर्कोळीने ४००
बल ४००		बाकीला . . २००	अने ४००
-----	-----	-----	-----
रुपये ५००	रुपये ५००	रुपये ८००	रुपये ८००

आणि शेवटीं बाकी खात्यांत याप्रमाणें मांडितात, बनें २०० रुपयां- विषयीं धनको, आणि त्यावरून असें दिसते, कीं या दोन खात्यांबाबद रिणको बाजूपेक्षा धनको बाजू २०० रुपयांनीं अधिक आहे.

B5

B4

A3

यांत नेलें पाहिजे; कां कीं या वर्षींचा लाभ आणि हानी, दुसऱ्ये वर्षीची खातेवही घालतेसमयीं सावकाराची पुंजी किती आहे, हें त्यास समजावें याशिवाय दुसरा कांहीं उपयोग नाही. तर याप्रमाणें केल्यावर, वर सांगितल्ये रितीनें बाकीखातें पुरें करितां येईल.

पुंजी खात्याची स्थिती केवळ लाभहानीं खात्यावरून फिरती, आणि हीं दोन्हीं खातीं पूर्वींचे खात्यापेक्षां कांहीं विशेष तऱ्हेनें भिन्न आहेत, आणि बाकीखातें हा एक सर्वांचा मध्यस्थ आहे. पुंजीखातें आणि लाभहानींखातें हीं दोन्हीं सावकाराचे ऐवजीं असतात; जें त्या खात्याचें हिताहित होतें, तेंच सावकाराचें हिताहित आहे; जर त्या खात्यांतील रिणको बाजूपेक्षां धनको बाजू अधिक असेल, तर तो दार आहे, आणि धनको बाजूपेक्षां रिणको बाजू अधिक आहे, तेव्हां तो नादार आहे. दुसऱ्ये सर्व खात्यांमध्ये हीं गोष्ट उलटी असती. जर कोणी दुष्ट पुरुषाचे हातीं खतावणी सांपडली, आणि व्यवहाराची खरी स्थिति जशी असती, ती स्थिती खोटी करून दाखवायास इच्छितो, तर पुंजी आणि लाभहानींखातें, या दोन खात्यांचे रिणको बाजूकडील निरनिराळ्ये रकमेचे उजव्ये बाजूस एकएक शून्य देईल, आणि बाकी सर्व खात्यांमध्ये धनको बाजूस शून्य मांडील. यावरून लाभहानींखात्याचा हिशोब खात्यांत मांडल्यावर, काईम पुंजीची रकम बाकीखात्याचा धनको बाजूस दिसेल, आणि सावकाराचें कर्ज त्याच बाजूवरहि दिसतें, जर त्याजकळ काईम पुंजी नसली, तर ती रकम पुंजी असै मानूं नये, परंतु ती नादारीची रकम आहे असै समजावें. परंतु बाकीखात्याचे रिणको बाजूस सावकाराचा सर्व ऐवज दिसतो, तो बाकी काढणाऱ्ये कारकुनांनै दुसऱ्ये कारकुनापासून घेतला आहे, आणि तो कारकून त्याविषयीं दुसऱ्या सर्व कारकुनांस रिणको आहे.

नव्ये शिकणारानै धनको आणि रिणको या शब्दांचे अर्थाशीं पकें माहित व्हावें हें अवश्यक आहे, आणि खर्डीवहींतून वेगळाल्या रकमा योग्य खात्यांत योग्य बाजूस मांडण्यास शिकलें पाहिजे, कारण ही गोष्ट केवळ अभ्यासानै येती. बहिवाटवही विषयींचे ग्रंथ पढून समजायास सहाय्य होईल, इतकें मात्र या पुस्तकांत सांगितलें आहे, त्या मोळ्ये ग्रंथांत तरी केवळ उदाहरणांशिवाय दुसरें कांहीं बहुतकरून असत नाहीं असै त्याचे नजरेस येईल.



अपूर्णाकांचा किमतीचे जवळ जवळ असे दुसरे अपूर्णाक
काढण्याविषयी.

सांगीतल्ये अपूर्णाकाचे किमतीचे जवळजवळ अपूर्णाक काढा-
याची एक फार उपयोगी रीति आहे, ती शिकणारास माहित असावी.
सांगीतल्ये अपूर्णाकाचे अंश आणि छेद यांचा दृढभाजक पूर्वी सांगी-
तल्ये रितीप्रमाणे काढून, सर्व वेगळाले भागाकार एका ओळीत मांड.
नंतर याप्रमाणे मांड,

१

दुसरा भागाकार

पहिला भागाकार

पहिला भागाकार × दुसरा भागाकार + १

नंतर तिसरा भागाकार घेऊन त्याने सांगीतल्ये दुसऱ्ये अपूर्णाकाचे
अंश आणि छेद गुण, नंतर अंशाचे गुणाकारास त्याचे पूर्वीचे पदाचा
अंश मिळीव, आणि छेदाचा गुणाकारास छेद मिळीव. अशाने तिसऱ्ये
अपूर्णाकाचे अंश आणि छेद उत्पन्न होतील. चवथा भागाकार घेऊन
तिसऱ्ये आणि दुसऱ्ये अपूर्णाकांपासून चवथा अपूर्णाक उत्पन्न कर; आ-
णि याप्रमाणे सर्व भागाकार संपतपर्यंत कृति कर. उदाहरण, $\frac{११३१}{१३१२८}$
हा अपूर्णाक घे.

११३१) १३१२८ (१, २ ११३१ आणि १३१२८ यांचा दृढ-
११३७ ३९९७ (३, १ भाजक काढण्याची अति संक्षेप कृति
५५१ ५८६ (१, १५ बाजूवर दाखविली आहे, आणि त्याचे
२०१ ३५ (१, २ भागाकार आणि अपूर्णाक हे पुढील
२६ ९ (१, ८ आहेत.
८ १

१ २ ३ १ १ १५ १ २ १ ८ भागाकार,
 $\frac{१}{१}$ $\frac{२}{३}$ $\frac{७}{१०}$ $\frac{९}{१३}$ $\frac{१६}{२३}$ $\frac{३४९}{३५८}$ $\frac{२६५}{३८१}$ $\frac{७७}{११२०}$ $\frac{१०४४}{१५०१}$ $\frac{११३१}{१३१२८}$ अपूर्णाक.

हा एक अपूर्णाकांचा समुदाय आहे, आणि त्यातील शेवटचा अप-

B4

A3

प्रमाणे खाली काढून दाखविले आहेत;

$$\text{पहिला अपूर्णांक} = \frac{1}{\text{पहिला भागाकार}} = \frac{1}{1}$$

$$\text{दुसरा अपूर्णांक} = \frac{\text{दुसरा भागाकार}}{\text{पहिला भागाकार} \times \text{दुसरा भागाकार} + 1} = \frac{2}{3}$$

$$\text{तिसरा अपूर्णांक} = \frac{\text{तिसऱ्याचा अंश} \times \text{तिसरा भागाकार} + \text{पहिल्याचा अंश}}{\text{दुसऱ्याचा छेद} \times \text{तिसरा भागाकार} + \text{पहिल्याचा छेद}} = \frac{2 \times 3 + 1}{3 \times 3 + 1} = \frac{7}{10}$$

$$\text{चवथा अपूर्णांक} = \frac{\text{तिसऱ्याचा अंश} \times \text{चवथा भागाकार} + \text{दुसऱ्याचा अंश}}{\text{तिसऱ्याचा छेद} \times \text{चवथा भागाकार} + \text{दुसऱ्याचा छेद}} = \frac{7 \times 4 + 2}{10 \times 4 + 3} = \frac{30}{43}$$

आणि याप्रमाणे पुढेहि. परंतु भागाकाराचे योगाने मुळचा अपूर्णांक-कावर, केवळ तर्कापेक्षां कांहीं अधिक कृति केली आहे. $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{30}{43}$ इत्यादि अपूर्णांकांचा समुदाय मुळचे अपूर्णांकाचे किमती जवळ जवळ येत जातो, ह्मणजे दिलेल्या अपूर्णांकापेक्षां पहिला अपूर्णांक फार मोठा आहे, दुसरा अपूर्णांक फार लहान आहे, तिसरा फार मोठा आहे, आणि याप्रमाणे अनुक्रमाने आहेत, परंतु प्रत्येक अपूर्णांक त्याचे पूर्वीचे अपूर्णांकापेक्षां दिलेल्या अपूर्णांकाचे अधिकजवळजवळ होत जातो. जसे, $\frac{1}{1}$ हा फार मोठा आहे, आणि $\frac{2}{3}$ हा फार लहान आहे; परंतु $\frac{1}{1}$ हा दिलेल्या अपूर्णांकापेक्षां जितका मोठा आहे, तितका $\frac{2}{3}$ लहान नाही. आणि $\frac{7}{10}$ हा जरी फार मोठा आहे, तरी $\frac{2}{3}$ हा जितका दिलेल्या अपूर्णांकापेक्षां लहान आहे, तितका तो मोठा नाही.

आणखी, मुळचा अपूर्णांकाचे आणि यांतून कोणत्याहि अपूर्णांकाचे अंतर, एका अपूर्णांकापेक्षां कधीहि अधिक असत नाही, या अपूर्णांकाचे अंशस्थळी एक येतो, आणि वजा केलेल्या अपूर्णांकाचा छेद आणि त्याचे पुढील अपूर्णांकाचा छेद यांचा गुणाकार छेदस्थळी येतो. जसे, $\frac{1}{1}$ याचे दिलेल्या अपूर्णांकाशी $\frac{2}{3}$ इतके अंतर नाही, $\frac{2}{3}$ याचे $\frac{7}{10}$ इतके अंतर नाही, $\frac{7}{10}$ याचे $\frac{30}{43}$ इतके अंतर नाही, $\frac{30}{43}$ याचे $\frac{1}{1}$ इतके अंतर नाही, याप्रमाणे पुढेहि.

शेवटी या समुदायातील कोणताहि अपूर्णांक दिलेल्या अपूर्णांकाज-

वळ जितका घेतो, तितका लहान अंश छेदाचा अपूर्णाक जवळ येत नाही. जसे, $\frac{२४९}{३५८}$ हा अपूर्णाक $\frac{९१३१}{१३१२८}$ याचे जवळ जितका घेतो, तितका दुसरा कोणताहि अपूर्णाक जाचा अंश २४९ पेक्षा कमी, आणि जाचा छेद ३५८ पेक्षा कमी, असा अपूर्णाक जवळ येत नाही.

शिकणारानें हवी ती उदाहरणें घ्यावीं, आणि जा अपूर्णाकापासून प्रारंभ केला असतो, तो अपूर्णाक शेवटीं आल्यावर कृतीचा खरेपणाचा ताळा सांपडतो. याच गोष्टीचा दुसऱ्या तऱ्हेचा ताळा यापुढीलप्रमाणें आहे. उत्पन्न झालेल्या अपूर्णाकाचे समुदायांतील जवळजवळचे कोणतेहि दोन अपूर्णाकांचे वजाबाकीचा अंश १ असावा. जसें, वर केलेल्या उदाहरणांत $\frac{१६}{२३}$ आणि $\frac{२४९}{३५८}$ यांस समछेद केल्यावर, त्यांचे अंश ५७२८ आणि ५७२७ आहेत, आणि त्यांचा समछेद २३×२५८ आहे.

दुसऱ्या उदाहरणासाठीं हा पुढील प्रश्न घेतो; वर्षाची लांबी ३६५.२४२२४ दिवस आहे, तिला व्यवहारांत ३६५ $\frac{१}{४}$ दिवस असें घेतात. ह्मणून वरचा अपूर्णाक $\frac{२४२२४}{१०००००}$ घे, आणि रितीप्रमाणें कर.

$$२४२२४) १००००० (४, ७, १, ४, ९, २$$

$$२४९६ \quad ३१०४$$

$$६४ \quad ६०८$$

$$० \quad ३२$$

$$\frac{१}{४} \quad \frac{७}{२९} \quad \frac{८}{३३} \quad \frac{३९}{१६१} \quad \frac{३५९}{१४८२} \quad \frac{७५७}{३१२५}$$

आणि २४२२४ याचे अति जवळचा अपूर्णाक $\frac{७५७}{३१२५}$ आहे. यावरून जी एक वर्षाची कसर ३६५ दिवसांचे वर आहे, ती सुमारे ४ वर्षांत १ दिवसा इतकी होती, आणि अज्ञाने जी ही चूक येती ती ११६ वर्षांनीं एक दिवसा इतकी होत नाही; याहून सूक्ष्मपणानें पाहिलें असतां, २९ वर्षांत ७ दिवस घेतले, तर जी चूक होती ती ९५७ वर्षांत १ दिवसाइतकी होत नाही; आणि याहून अधिक सूक्ष्मपणानें पाहिलें असतां ३३ वर्षांत आठ दिवस घेतले तर जी चूक येती, ती ५३१३ वर्षांत एक दिवसाइतकी होत नाही, आणि याप्रमाणें पुढेहि.

कोणतेहि अपूर्णाकाचे वर्गमुळाचे बरोबरी जवळ जवळ असा अपूर्णाक काढण्यास, वरची रिती याप्रमाणें लावितां येईल;

$$\sqrt{४३} = ६ + \dots$$

जा अंकांचें वर्गमूळ काढाव-

६ | १५४५५४५१६६ | १५४ इत्या० याचें असेल, तो अंक मांड,
१ | ७६३९२९३६७१ | ७६३ इ० जसें, ४३. याचें वर्गमूळ ६
६ | ११३१५१३१११२ | ११३ इ० आणि कांहीं अपूर्णांक आहे.

६ हा पूर्णांक पहिल्ये आणि तिसऱ्ये आडव्ये ओळीचे आरंभीं मांड,
आणि १ हा अंक नेहमीं दुसऱ्ये ओळीचे आरंभीं मांड. नंतर पुढें दा-
खविल्याप्रमाणें मागल्ये उभे ओळीपासून पुढील उभी ओळ सिद्ध कर;

पहिली ओळ व, अ, क, या क्रमानें दुसरी ओळ उत्पन्न करितात.
अ अ=अचेवरची बक ची कसर.
ब ब=४३-अ भागिले ब याचा भागाकार.
क क=६+अ भागिला ब याचे भागाकारांतील पूर्णांक.

यावरून दुसरी ओळ या पुढीलप्रमाणें करितात;

६ | १=६ वरची ७×१ यांची कसर, ७ आणि १ हे वर काढले.
१ | ७=४३-६×६ भागिला १.

६ | १=६+६ भागिले ७ यांचे भागाकारांतील पूर्णांक.

यावरून तिसरी ओळ या पुढीलप्रमाणें होईल;

१ ५=१ वरची १×६ यांची कसर.
७ ६=४३-१×१ भागिले ७.
१ १=६+१ भागिले ६ या भागाकारांतील पूर्णांक.

आणि याप्रमाणें पुढेहि. अशी कृति करित असतां १, ७, १, ही
दुसरी उभी ओळ पुनः येती, आणि त्यानंतर दुसऱ्या उभ्या ओळी अनु-
क्रमानें येतात. शेवटची कृति करायासाठीं तिसऱ्ये आडव्ये ओळीतील
पहिला ६ हा अंक सोडून बाकीचे १, १, ३, १, ५, १, ३, इत्यादि-
अंक घे, आणि या कलमाचे आरंभीं सांगितलेली रीति पुढें दाखविल्या
प्रमाणें त्या अंकांस लाव;

१	१	३	१	५	१	३	१	१	इत्यादि
$\frac{१}{१}$	$\frac{१}{२}$	$\frac{४}{७}$	$\frac{५}{९}$	$\frac{२९}{५२}$	$\frac{३४}{६१}$	$\frac{१३१}{२३५}$	$\frac{१६५}{२९६}$	$\frac{२९६}{५३१}$	

यावरून ४३ सांचे वर्गमूळाचे जवळ $६\frac{१६५}{२९६}$ आहेत, आणि यापासून $\frac{१}{२९६ \times ५३}$ इतकी चूक येत नाही.

जर कृति केली, तर $६\frac{१६५}{२९६}$ हे $\frac{१९४१}{२९६}$ आहेत, आणि यांचा वर्ग $\frac{३७६७४८१}{८७६१६}$, अथवा $४३ - \frac{७}{८७६१६}$ आहे.

जेव्हा कांहीं एक वर्गमूल वारंवार घेण्याचें असतें, तेव्हां ही रीति कामांत आणितात, आणि यावरून जवळ जवळ होई असा कांहीं व्यवहारी अपूर्णांक आहे की नाही हें जाणायाचें असतें.

उदाहरण, $\sqrt{२}$ यांची गरज वारंवार लागते.

$$\sqrt{२} = १ + \dots$$

$$१ \ १ \ १$$

$$१ \ १ \ १$$

$$१ \ २ \ २ \ २ \ २ \ २ \ २$$

$$\frac{१}{२} \ \frac{२}{५} \ \frac{५}{१२} \ \frac{१२}{२९} \ \frac{२९}{७०} \ \frac{७०}{१६९} \text{ इत्या०}$$

कार सोपें पडेल. सारांश $\frac{९९}{७०}$ हे, $१\frac{४१४२८५७}{७०}$ आहेत, परंतु खरे अंक $१\frac{४१४२१३५}{७०}$ आहेत.

हें पुढील एक दुसरें उदाहरण आहे.

$$\sqrt{१९} = ४ + \dots$$

$$४ \ २ \ ३ \ ३ \ २ \ ४ \ ४ \ २$$

$$१ \ ३ \ ५ \ २ \ ५ \ ३ \ १ \ ३$$

$$४ \ २ \ १ \ ३ \ १ \ २ \ ८ \ २ \ १ \ ३ \ १ \ ३, \text{ इ०}$$

$$\frac{१}{३} \ \frac{१४}{३९} \ \frac{५}{३९} \ \frac{१४}{३९} \text{ इत्या०}$$

पुरवणी भाग नववा.

अंकांचे साधारण गुणांविषयी.

पहिलें कृत्य. जर अपूर्णाकास अति संक्षेपरूप दिलें, झणजे, जर त्या अपूर्णाकाचे अंश आणि छेद एकापेक्षा मोठे अंकाने भागिले जात नाहीत, तर यापेक्षा लहान अंश आणि छेदाचे अपूर्णाकाची किंमत त्या अपूर्णाका इतकी होणार नाही.

$\frac{अ}{ब}$ असा अपूर्णांक घे, आणि मनांत आण कीं, अ आणि ब यांस एकाशिवाय दुसरा दृढभाजक नाही; आणि जर शक्य असेल, तर त्या अपूर्णांकाचे किमतीचा अपूर्णांक $\frac{क}{ड}$ आहे, आणि त्यांत अ पेक्षां क लहान आहे, आणि ब पेक्षां ड लहान आहे असें मनांत आण. आतां जापेक्षां $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$, तर $\frac{अ}{क} = \frac{ब}{ड}$; आतां जापेक्षां अ > क, आणि ब > ड, तर या मागल्ये दोन अपूर्णांकांतील अंश त्यांचे त्यांचे छेदानें भागिले असतां भागाकारांत कांहीं पूर्णांक येईल, तो पूर्णांक दाखवायाकरितां म घे, आणि त्यांचा बाक्या दाखवायासाठीं इ आणि फ घे. तर

$$\frac{अ}{ब} \text{ अथवा } \frac{मक+इ}{मड+फ} = \frac{क}{ड} = \frac{मक}{मड}$$

यावरून, $\frac{इ}{क}$ आणि $\frac{मक}{मड}$ हे दोन्हीं बरोबर असावे, जर ते बरोबर नसतील, तर $\frac{मक+इ}{मड+फ}$ हा अपूर्णांक $\frac{मक}{मड}$ याचे बरोबर होणार नाही, परंतु तो $\frac{मक}{मड}$ आणि $\frac{इ}{क}$ या दोन अपूर्णांकांचेमध्ये येईल. यावरून, $\frac{अ}{ब} = \frac{इ}{क}$; म्हणून जा अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद यांस एकापेक्षां मोठा दृढभाजक नाही, तो अपूर्णांक जर लहान अंश आणि छेदाचे अपूर्णांकाबरोबर होईल, तर अधिक लहान अंश आणि छेदाचे अपूर्णांकाबरोबर तो पहिला अपूर्णांक होईल. जर $\frac{अ}{ब} = \frac{इ}{क}$, यांशीं वरचेसारिखी कृति केली, तर $\frac{अ}{ब} = \frac{ग}{ह}$ होईल, त्यांत ग < इ, ह < फ आहे, आणि याप्रमाणें पुढेहि आतां, जर कांहीं अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद प्रत्येक पायरीस एक किंवा अनेक एकमांनीं कमी करणारी अशी कृति चालविली असतां, शेवटीं त्या अपूर्णांकाचे अंश अथवा छेद अथवा ते दोन्हीं शून्याबरोबर होतील. $\frac{अ}{ब} = \frac{वि}{व}$ ही एक कृति आहे अशी कल्पना कर, आणि अ = कवि + क्ष, आणि ब = कव + य, असे घे; यावरून $\frac{कवि+क्ष}{कव+य} = \frac{वि}{व}$ आतां जर क्ष = ० आणि यला कांहीं किंमत आहे असें मानणें अशक्य, कां कीं त्यापासून $\frac{कवि}{कव+य} = \frac{कवि}{कव}$ असें खोटे उत्तर येतें. जर क्षला कांहीं किंमत आहे, आणि य = ० असें असलें, तर वरचे सारिखेंच खोटे उत्तर येईल; आणि जर क्ष आणि य हे दोन्हीं शून्याबरोबर असतील, तर अ = कवि आणि ब = कव, अथवा अ आणि ब यांचा साधारण भाजक क आहे. आतां १ पेक्षां क अधिक असावा, कां कीं,

वि आणि व हे क आणि ड पेशां कमी आहेत, आणि प्रतिज्ञेप्रमाणें क आणि ड हे अ आणि व यांपेशां कमी असावे. यामुळें अ आणि व यांस १ पेशां अधिक असा दृढभाजक क आहे, परंतु प्रतिज्ञेप्रमाणें यांस १ पेशां मोठा भाजक नाही. यावरून जर, अ आणि व हे पूर्णांक १ पेशां मोठे पूर्णांकानें भागिले जात नाहीत, तर $\frac{अ}{व}$ हें अपूर्णाकाचें अतिसंक्षेपरूप अवश्य आहे, आणि अ आणि व हे परस्पर अविभाज्य आहेत.

दुसरें कृत्य. जर अब हा गुणाकार कनें भागिला जातो, आणि जर बनें क अविभाज्य आहे, तर अला क भागील. $\frac{अव}{क} = ड$ असें घे, तर $\frac{व}{क} = \frac{ड}{अ}$. आतां $\frac{व}{क}$ हें अतिसंक्षेपरूप आहे; यावरून, मागल्ये कृत्याप्रमाणें, ड आणि अ यांस साधारण भाजक असावा. तो साधारण दृढभाजक के आहे, आणि अ = केल, आणि ड = केम असें घे. तर $\frac{व}{क} = \frac{केम}{केल} = \frac{म}{ल}$, आणि $\frac{म}{ल}$ अति संक्षेपरूपांत आहे; परंतु $\frac{व}{क}$ हि अतिसंक्षेपरूपांत आहे; यावरून म = व, आणि ल = क, असें असावें, कारण असें नसल्यास एक अति लहान संक्षेपरूप पदांचा अपूर्णांक, यापेशां अधिक लहान संक्षेपरूप पदांचे अपूर्णाकाबरोबर होईल. यावरून अ = केक, अथवा कनें अ भागिला जातो. आणि यावरून असें सिद्ध होतें कीं, जर एक संख्या दुसऱ्या दोन संख्यांनीं अविभाज्य असेल, तर ती त्या दोन संख्यांचे गुणाकारानेंहि अविभाज्य होईल. व आणि क यानें अ अविभाज्य आहे, असें मनांत आण, तर अचा कोणताहि भाजक, व अथवा क यांस भागणार नाही, आणि तो भाजक, वक या गुणाकारासहि भागणार नाही; कारण वकचा जो भाजक खांतून एकानें अविभाज्य आहे, तो दुसऱ्याला भागील.

तिसरें कृत्य. जर बनें अ अविभाज्य आहे, तर तो वचा सर्व घातांनींहि अविभाज्य आहे. अचा प्रत्येक भाजक बनें अविभाज्य आहे, आणि यामुळें वला तो भागीत नाही. ह्मणून, वर सांगितल्याप्रमाणें, अचा कोणत्याहि भाजकानें $ब^2$ भागिला जात नाही. यावरून $ब^2$ याणें अ अविभाज्य आहे, आणि याप्रमाणें अचा प्रत्येक भाजकहि भागील जात नाही; यामुळें अचा कोणताहि भाजक $ब^2$ यास भागीत नाही, यामुळें $ब^3$ नें अ अविभाज्य आहे. आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

यावरून, जर व नें अ अविभाज्य आहे, तर वचा कोणत्याहि घाताला अ निःशेष भागीत नाही. याच कारणावरून जर कोणतेहि अपूर्णाकाचा छेद २ आणि ५ यांशिवाय दुसरे कोणतेहि अविभाज्य अंकानें भागिला जात नाही, तर तशा छेदाचे अपूर्णाकाशिवाय दुसऱ्या अपूर्णाकास दशांशरूप देण्याचें अशक्य. कां कीं जर $\frac{अ}{व} = \frac{क}{१०न}$, यांतून $\frac{क}{१०न}$ हें दशांश अपूर्णाकाचें साधारणरूप आहे, तर $\frac{अ}{व}$ अतिसंक्षेप रूपांत आहे असें मनांत आण ; तर $\frac{१०नअ}{व}$ हा पूर्णांक आहे, यावरून दुसऱ्ये कृत्याप्रमाणें व नें १०^न भागिला जावा, आणि त्याचप्रमाणें व चा सर्व भाजकांनींहि भागीला जावा. यावरून जर व चा भाजकामध्ये २ आणि ५ यांशिवाय दुसरे कांहीं अविभाज्य अंक असले, तर या कृतींत १० स भागीत नाही, असा एक अविभाज्य अंक आहे, आणि तो १० चा एकाद्या घातास भागितो हें अशक्य आहे.

चवथें कृत्य. जर अने व अविभाज्य आहे, तर व, २व, ... (अ-१) व इत्यादि व चा गुणितांस अने भागिले असतां निरनिराळ्या बाक्या रहातील. कां कीं जर न पेशां म मोठा असेल, आणि हे दोन्हीहि अपेक्षां लहान असतील, तर मव आणि नव यांपासून सारखीच बाकी निघेल, यावरून मव-नव, अथवा (म-न)व यास अ निःशेष भागितो; यावरून (दुसरे कृत्या) प्रमाणें, म-न यास अ निःशेष भागितो, ह्मणजे लहान अंकास मोठा अंक भागितो हें अशक्य आहे.

जर कांहीं संख्येचे अविभाज्य अंकांनीं गुण्यगुणकरूप विभाग केले, अथवा तीस केवळ अविभाज्य अंकांचे गुणाकाराचें रूप दिलें, (जसें ३६० = २ × २ × २ × ३ × ३ × ५), आणि जर हे अविभाज्य अंक दाखविण्यास अ, व, क, इत्यादि घेतले, आणि जितक्या वेळा हे अविभाज्य अंक येतात, तो वेळांक दाखविण्यास अ, व, क, इत्यादि घेतले, तर ती संख्या $अ^अ \times व^व \times क^क$ इत्यादि अशी होईल, तर ही गोष्ट केवळ एक तऱ्हेनें मात्र होईल; कां कीं कोणताहि अविभाज्य अंक व, वर दाखविल्याप्रमाणें गुणकांत येत नाही, तर तो अने अविभाज्य आहे, आणि यामुळे $अ^अ$ नें भागिला जात नाही, वनें अविभाज्य आहे, आणि यामुळे व नेंहि अविभाज्य आहे, आणि यामुळे $अ^अ \times व^व$ नें अविभाज्य आहे. याप्रमाणें चाललें असतां सर्व गुणाकार अथवा दिलेल्या संख्येनें व अविभाज्य आहे असें सिद्ध करितां येईल.

वर सांगितलेल्या अ^अ ब^ब क^क ... इत्यादि अशा संख्येचे भाजकांची संख्या $(अ+१)(ब+१)(क+१) \dots$ आहे, आणि यांत ० आणि ती मूळ संख्या यांचाहि संग्रह होतो. कां कीं अ^अ याचे भाजक १, अ, अ^२ ... अ^अ इत्यादि सर्व मिळून अ+१ इतके आहेत, यांशिवाय दुसरे नाहीत. याचप्रमाणे ब^ब याचे भाजकांची संख्या ब+१ आहे, आणि याप्रमाणे पुढेहि. आतां प्रत्येक जातींतून एक एक घेऊन त्या सर्वांचे गुणाकाराने दिलेल्या संख्येचे भाजक निघतात, यावरून त्यांची संख्या १० व्हे पुरवणीप्रमाणे $(अ+१)(ब+१)(क+१) \dots$ आहे.

जर, ३, ५, ७, ११, इत्यादि यांतून कोणत्याहि अविभाज्य अंकांनीं कांहीं न संख्या निःशेष भागिली जाते, तर नपर्यंत सर्व संख्यांचा तिसरा भाग ३ नीं निःशेष भागिला जातो, त्यांचा पांचवा भाग ५ नीं निःशेष भागिला जातो, आणि याप्रमाणे पुढेहि. परंतु याशिवाय अधिकहि घडतें; जेव्हां ३ चीं गुणितें सोडिलीं असतात, तेव्हां जा बाक्या रहातात त्यांचा बरोबर पांचवा भाग ५ नीं निःशेष भागिला जातो; कां कीं सगळ्यांचा पांचवा भाग ५ नीं निःशेष भागिला जातो, आणि जे अंक वेगळे केलेले असतात त्यांचाहि पांचवा भाग ५ नीं निःशेष भागिला जातो, यावरून जे बाकी रहातात त्यांचा पांचवा भागहि ५ नीं निःशेष भागिला जाईल. पुनः सर्वांचा सातवा भाग ७ नीं निःशेष भागिला जातो, आणि जे ३ नीं अथवा ५ नीं अथवा १५ नीं निःशेष भागिले जातात, त्यांचा सातवा भागहि ७ नीं निःशेष भागिला जातो, यावरून ३ अथवा ५ अथवा ते दोन्ही यांची सर्व गुणितें वेगळीं काढून जे बाकी रहातात, त्यांचा सातवा भाग ७ नीं निःशेष भागिला जातो; आणि याप्रमाणे पुढेहि. यावरून ३, ५, ७, अथवा ११ नीं निःशेष भागिल्या जात नाहीत, अशा अंकांची न पेक्षां कमी संख्याही पुढील आहे, नचे $\frac{३}{३}$ चे $\frac{५}{५}$ चे $\frac{७}{७}$ चे $\frac{११}{११}$. याचप्रमाणे चालले असतां असें दिसतें, कीं जा संख्या ननें अविभाज्य आहेत, त्यांची संख्या, ह्मणजे जा अ, ब, क, ... इत्यादि नचे अविभाज्य गुण्यगुणकांनीं निःशेष भागिल्या जात नाही, त्यांची संख्या या पुढीलप्रमाणे आहे.

$$\frac{अ-१}{अ} \frac{ब-१}{ब} \frac{क-१}{क} \dots \text{अथवा } अ^{-१} ब^{-१} क^{-१} \dots (अ-१)(ब-१)$$

$$\times (क-१) \dots$$

जसे, ३६० हे $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, आहेत, यांचे भाजकांची संख्या $8 \times 3 \times 2$, अथवा २४ आहे, आणि ३६० ला अविभाज्य अशा ३६० पेशां $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ अथवा ९६ संख्या कमी आहेत.

पांचवें कृत्य. जर बनें अ अविभाज्य असेल, तर अ, अ^२, अ^३, ... इत्यादि श्रेणीचीं पदे बनें भागिलीं, तर १ बाकी राहीपर्यंत निरनिराळ्या बाक्या येतील, आणि १ बाकी आल्यानंतर बाक्यांचा क्रम पूर्वीसारखा अनुक्रमानें फिरून येऊं लागेल.

अ ÷ ब यापासून र बाकी निघती, परंतु एथें र एका बरोबर नाही; तर अ^२ ÷ ब यापासून जी बाकी निघती, ती रअ ÷ ब याचे बाकी बरोबर आहे, परंतु ती बाकी (चवथे कृत्याप्र०) र नाही; ह्मणून ती स आहे असें मनांत आण. तर अ^३ ÷ ब यापासून जी बाकी निघती, ती सअ ÷ ब याचे बरोबर आहे, आणि १ याचे बरोबर स नसेल, तर ही बाकी (चवथे कृत्याप्र०) र, अथवा स, यांचे बरोबर होऊं शकणार नाही; ती बाकी दाखवायास ट घे. तर अ^४ ÷ ब यापासून जी बाकी निघती, ती टअ ÷ ब याचे बरोबर आहे; जर १ याचे बरोबर ट नसेल, तर ही बाकी र, स, अथवा ट, यांचे बरोबर होऊं शकणार नाही; ती बाकी दाखविण्यास य, घे. याप्रमाणें जोंपर्यंत १ ही बाकी येईतोंपर्यंत निरनिराळ्या बाक्या काढित जावें; नंतर पुढल्ये कृतींत अ ÷ ब याची जी बाकी पूर्वी आलेली असती, तीच पुनः येती. आतां कोठे तरी १ ही बाकी यावी; कां कीं बनें भागिलें असतां ०, १, २, ... ब-१ यांशिवाय दुसऱ्या कांहीं बाक्या येत नाहींत; आणि (तिसऱ्ये कृत्याप्र०) ० कधीं येत नाहीं, यावरून जेव्हां ब-२ इतक्या निरनिराळ्या बाक्या आल्या असतात, आणि यांतून एकहि बाकी १ बरोबर नसती, तेव्हां पुढली बाकी दुसऱ्या पूर्वीचा सर्व बाक्यांहून भिन्न असावी, ह्मणून ती १ असावी. जर पूर्वी १ ही बाकी आली नसती, तर अ^{ब-१} यापासून १ ही बाकी यावी; आणि यानंतर बाक्यांचा क्रम फिरावा हें अवश्य आहे.

जसे, ७, ७^२, ७^३, ७^४, इत्यादि यांस ५ नीं भागिलें असतां २, ४, ३, १, इत्यादि बाक्या येतील असें दिसेल.

सहावें कृत्य. दोन मघातांचें अंतर त्यांचे मूळांचे अंतरानें निःशेष

भागिले जाते; अथवा $a^m - b^m$ हे $a - b$ यांचे निःशेष भागिले जातात, कां कीं

$$a^m - b^m = (a - b) + (a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + \dots + a^2b^{m-2} + ab^{m-1}) = (a - b) + (a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + ab^{m-1})$$

यांतून जर $a^{m-1} - b^{m-1}$ हे $a - b$ यांचे निःशेष भागिले जातात तर $a^m - b^m$ हि निःशेष भागिला जातो. परंतु $a - b$ यांचे $a - b$ निःशेष भागिला जातो; यावरून $a^2 - b^2$ हि निःशेष भागिला जातो; $a^3 - b^3$ हि निःशेष भागिला जातो; आणि याप्रमाणे पुढेहि.

यामुळे जर a आणि b यांस कर्ने भागिले असतां बाकी सारिखीच राहिल, तर a^2 आणि b^2 , a^3 आणि b^3 इत्यादि वेगवेगळे कर्ने भागिले असतां सारिख्याच बाक्या राहतील; कां कीं याचा अर्थ असा होतो कीं कर्ने $a - b$ निःशेष भागिला जातो. परंतु $a^m - b^m$ यांस $a - b$ निःशेष भागितो, आणि यामुळे $a - b$ याचा प्रत्येक भाजक अथवा कर्हि निःशेष भागितो; परंतु a^m आणि b^m यांस कर्ने भागून जर सारख्या बाक्या राहात नाहींत, तर $a^m - b^m$ यांस क निःशेष भागणार नाहीं.

सातवे कृत्य. जर b अविभाज्य अंक आहे, आणि b नें a निःशेष भागिला जात नाहीं, तर a^b आणि $(a-1)^b + 1$ यांस b नें भागिले असतां सारिख्याच बाक्या राहातात. हे कृत्य येथे सिद्ध करून दाखवितां येत नाहीं, कां कीं या ग्रंथापासून जितके बिजगणीताचें ज्ञान होतें, त्यापेक्षां हे कृत्य समजण्यास विशेष ज्ञान असले पाहिजे.

आठवे कृत्य. वरचे पक्षांत a^{b-1} यांस b नें भागिले असतां 1 बाकी रहाती. मागल्ये कृत्यावरून $a^b - a$ यापासून जी बाकी निघती, ती $(a-1)^b - 1 - a$, अथवा $(a-1)^b - (a-1)$ याचे बाकी बरोबर असती; ह्मणजे अतून 1 कमी केला तरी $a^b - a$ याचे बाकींत कांहीं फेर पडत नाहीं. याच रितीप्रमाणे, त्यांतून दुसरा एक कमी करितां येईल, आणि याप्रमाणे पुढे केले असतां बाकींमध्ये कांहीं अंतर पडत नाहीं. शेवटीं त्याचें रूप $1 - 1$, अथवा 0 असें होतें, आणि त्यापासून 0 ही बाकी येती. यावरून $a^b - a$, अथवा $a(a^{b-1} - 1)$ यांस b निःशेष भागितो; आणि जापेक्षां अने b अविभाज्य आहे, यावरून (दुसरे कृत्याप्र०) $a^{b-1} - 1$ यांस b भागिले; ह्मणजे, जर b अविभाज्य अंक आहे, आणि b नें a

निःशेष भागिला जातो, तर a^{n-1} यास बनें भागिलें असतं १ बाकी राहिल.

मार्गे सांगितलेल्या (५) व्या आणि (७) व्या कृत्याप्रमाणे जर बनें अ अविभाज्य असेल, तर १, अ, a^2 , a^3 , इत्यादि यांस अनुक्रमानें बनें भागिलें असतां वाक्या निघतात, त्यांचे आरंभीं १ येतो, आणि जर ब अविभाज्य अंक असेल, तर पूर्वीं कोठे १ ही बाकी आली नसल्यास ती a^{n-1} यापासून येईल, आणि जरी ती बाकी पूर्वीं आली असली अथवा नसली, तरी a^{n-1} यापासून अवश्य येईल. जाठिकाणापासून १ ही बाकी येती तेथून वाक्यांचा क्रम फिरतो, आणि वाक्यांचे क्रमाचे आरंभीं १ हा अंक नेहमी येतो. यावरून जापहिल्या घातापासून १ ही बाकी येती तो घात जर a^m असला आणि ब अविभाज्य अंक असला, तर मची क्रिमत ब-१, अथवा त्याचें कांहीं गुणित होईल.

परंतु ब पेक्षां म लहान असतां म, मअ, मअ^२, मअ^३, इत्यादि श्रेणीचे पदांस ब नें भागिलें असतां वाक्यांचे क्रम निघतील, आणि त्यांचे आरंभीं म येईल. जर १, र, स, ट, इत्यादि असा वाक्यांचा पहिला क्रम असेल, तर म, मर, मस, मट, इत्यादि यांपासून जो वाक्यांचा क्रम निघेल, तो दुसरा क्रम होईल. आरंभा शिवाय पहिल्या क्रमांत a^{n-1} याचा पूर्वीं जर १ येत नाही, तर ब-१ याचा खालचे सर्व अंक १, र, स, ट, इत्यादि क्रमांत येतात; आणि जर (४) कृत्याप्रमाणे बनें म अविभाज्य असेल, तर ते सर्व अंक निराळ्या क्रमानें म, मर, इत्यादि वाक्यांत येतील. परंतु १, र, स, ट, इत्यादि हा क्रम जर पुरा नसेल, तर म, मर, मस, इत्यादि यांपासून वाक्यांचा निराळा क्रम उत्पन्न होईल.

अपूर्णांकास दशांश अपूर्णांकांचें रूप देण्याचे कृतीमध्ये हे सर्व शेवटील सिद्धांत सिद्ध होतात. जर बनें म अविभाज्य असेल, अथवा $\frac{m}{b}$ हा अपूर्णांक अति संक्षेप रूपाचा असेल, तर कृति करितानां म, $m \times 10$, $m \times 10^2$, इत्यादि भागिले बनें असे भागाकार येतील. जर १० चा एकादा घात जसे, 10^n हा बनें भागिला जाणार नाही, तर या कृतीचा शेवट कधीहि होणार नाही; आणि ब मध्ये २ आणि ५ हे अविभाज्य गुण्यगुणक नसतील, तर तो 10^n घात बनें भागिला जाणार नाही. सर्व पक्षांत भागाकार पुनः पुनः येतो, आणि हें येणें पहिल्ये

अंकापासून होतें, किंवा कांहीं अंक सोडून होतें. जसें, $\frac{1}{9}$ यापासून, १४२८५७१४२८५७ इत्यादि येतात; परंतु $\frac{1}{98}$ यापासून ०७(१४२८५७)(१४२८५७), इत्यादि येतात; आणि $\frac{1}{27}$ यापासून ०३(५७१४२८)(५७१४२८) इत्यादि येतात.

$\frac{m}{n}$ या अपूर्णांकांत जेव्हां n अविभाज्य अंक आहे, आणि n पक्षां म लहान आहे, तेव्हां भागाकार आरंभापासून पुनः पुनः येऊं लागतो; आणि जे अंक वारंवार येतात त्यांची संख्या $n-1$, अथवा त्याचा कांहीं मापक अशी संख्या असते. आणि ही गोष्ट अशी असावी असें वरचा कृत्यापासून दिसते.

पुढे चालायाचे पूर्वी एक भागाकारांतील जे अंक वारंवार येतात ते लिहून दाखवितो, आणि ते अंक काढून जा बाक्या रहातात त्याहि त्यांचे वरोवर लिहून दाखवितो. $\frac{1}{9}$ हा अपूर्णांक घे तर,

० १ ० ५ १ ५ ८ १ ४ ८ ४ २ ६ ३ ५ ५ २ १ ६ ९ ७ ४ २ १ ३ १ १ ३ ७ १ १ ६ ८ ४ १ २ ७ १
हे अंक याप्रमाणे वाचावे; १० भागिले १७, भागाकार ०, बाकी १०; १०^२ भागिले १७, भागाकार ०५, बाकी १५; १०^३ भागिले १७, भागाकार ०५८, बाकी १४; आणि याप्रमाणे पुढे. १०^{१६} यांस १७ नीं भागिले असतां सिद्धांताप्रमाणे १ बाकी राहती.

०५८८ इत्यादि यांस १७ चे आंतील कोणत्याहि अंकाने गुणिले, तर वरचे सारखाच क्रम येतो, परंतु त्याचा आरंभ निराळ्या तऱ्हेने होतो. जसें, जर १३ नीं गुणिले, तर

७६४७०५८८२३५२९४११ असें होतें.

आणि वरचा भागाकारांत जा ठिकाणी १३ बाकी आहे, त्यापुढे जो भागाकार येतो, तो यांत आरंभी आहे. जर ७ नीं गुणिले, तर ४११७ इत्यादि येतील; याचे कारण उघड आहे; $\frac{1}{98} \times १३$, अथवा $\frac{१३}{९८}$ या अपूर्णाकास दशांश अपूर्णाकाचे रूप देताना, १३० भाज्यकरून $\frac{१३}{९८}$ याचे कृतीप्रमाणे कृति चालवितो, आणि यापुढे क्रम संपण्यास चार अंक असतात.

भागाकाराचे क्रमांतील पहिल्ये अर्धांतील अंक आणि दुसऱ्या अर्धांतील अंक हे अनुक्रमाने परस्पर ९ चें पूरिकरण आहेत. आणि त्याचप्रमाणें त्या दोन अर्धांतील बाक्या परस्पर १७ चें पूरिकरण आहेत. जैसे, $०, १, ५, ५, ८, १४, ८, ४$ इत्यादि आणि $९, ७, ४, २, १, ३, १, १, ३$ इत्यादि यांत $०+९=९$, $५+४=९$, $८+१=९$, इत्यादि, आणि $१०+७=१७$, $१५+३=१७$, $१४+३=१७$, इत्यादि. याचा उपयोग पुढें दाखविल्याप्रमाणें आहे; अ^१-१ यास कामांत आणायाचे पूर्वी जर बाकी १ रहात नाही, तर व अविभाज्य आहे असें कल्पून व-१ सम होईल; तो रक आहे असें ह्मण. तर, अ^२-१ यास वनिःशेष भागितो; परंतु अ^१-१ आणि अ^१+१ यांचे गुणाकाराबरोबर अ^२-१ आहे, ह्मणून त्यांतून एकपद वने निःशेष भागिलें जावें. अ^१-१ हें पद वने निःशेष भागिलें जात नाही, कारण (व-१) या घाताचे पूर्वीचा अचा घात वने निःशेष भागिला जाईल, आणि या उदाहरणांत तसें घडत नाही; यावरून अ^१+१ हें पद वने निःशेष भागिलें जातें, ह्मणून अ^१ यास वने भागिलें असतां व-१ बाकी रहाती, आणि क पायरीवर कृतीचें अर्ध पुरें होतें, जैसे, वरचा उदाहरणांत व=१७, अ=१० आणि कृतीचा आठवे पायरीवर १६ बाकी रहातात. पुढल्ये पायरीवर $१०(व-१)$, अथवा $९व+व-१०$ यापासून व-१० ही बाकी रहाती. परंतु पहिली बाकी १० आहे आणि $१०+(व-१०)=व$. जर हें पुरिकरण कोणत्याहि पायरीवर आढळेल, तर तें तसेंच पुढें चालेल हें दाखवितो; कोणतीएक बाकी र आहे, तिचे पुढली बाकी व-र आहे, आणि सर्वांची बेरीज व आहे असें मनांत आण. पहिल्या बाकीचे पुढले पायरीवर १०र यांस वने भागितो, आणि दुसऱ्या बाकीचे पुढल्ये पायरीवर $१०व-१०र$ यांस वने भागितो. आतां १०र आणि $१०व-१०र$ यांची बेरीज वने निःशेष भागिली जाती, आणि या दोन नव्ये पायऱ्यांपासून अशा बाक्या निघाव्या कीं यांची बेरीज वचे बरोबर यावी, आणि याप्रमाणें पुढें; आणि भागाकारांची बेरीज ९ यावी, कीं कीं १०र आणि $१०व-१०र$ या बाक्यांचे बेरिजेपासून भागाकार १० येतो, आणि या पैकीं दोन बाक्यांपासून, १ उत्पन्न होतो.

जर $\frac{१}{२}$, आणि $\frac{१}{६९}$ हे अपूर्णांक घेतले, तर यांचे पुनः येणारे भागांत ५८ आणि ६० अंक आहेत असें दिसेल. यापैकीं पहिले अर्धे

अंक एथें लिहून दाखविले आहेत, आणि जें पूरिकरण वर सांगितलें त्याचा आधारानें बाकीचे अर्धे अंक शिकणारानें काढावे.

०१६९४९१५२५४२३७२८८१३५५९३२२०३३८, इत्यादि.

०१६३९३४४२६२२९५०८१९६७२१३११४७५४०, इत्यादि.

या दोन संख्या आहेत त्यांतून पहिलीस ५९ चे आंतील कोणत्याहि अंकांनें गुणिलें, आणि दुसरीस ६१ चे आंत कोणत्याहि अंकांनें गुणिलें, तर जें गुणाकार येतील ते वरचा संख्यांसारखेच येतील, परंतु एक शेवटाकडील कांहीं अंक दुसरे शेवटाकडे येतील.

परंतु ब अविभाज्य असतां ब-१ इतके अंक आल्याचे पूर्वी कदाचित् १ ही बाकी येईल; त्यापक्षांत वर दाखविल्या प्रमाणें ब-१ यास भाजकाचे अंकांची संख्या निःशेष भागील. उदाहरण, $\frac{1}{87}$ हा अपूर्णांक घे. याचे भागाकाराचे पुनः पुनः येणारे अंक वरप्रमाणें मांडिले असतां, ते ५ अंक आहेत असे दिसेल, आणि ४१-१ यांस ५ भागितात.

०१०२१०४१६३३७९१

आतां या भागाचे अंकांस १०, १८, १६, अथवा ३७ इत्यादि यांणीं गुणिलें असतां त्यांचीं स्थानें बदलतील. परंतु यांस ४१ चे आंतील दुसऱ्या कोणत्या अंकांनें गुणिलें, तर तो गुणाकार, दुसऱ्या अपूर्णाकाचा भाग होईल, आणि त्या अपूर्णाकाचा छेद ४१ होईल. पुढे जें क्रम दाखविले ते याप्रमाणें आहेत.

०१०२१०४१६३३७९१

०२०४३६८३२७३३८२

०३०७१३३७१२९७३

०४०९३१७२३५२५६४

१९२०१३९९२१५५

११९४२६६१४३१७४६

२२०६३४८१२३०९११

३२७६२४५३५८२२५१५

$\frac{1}{41}$ या अपूर्णाकाचे दशांश काढायासाठीं बाकी अंकांमध्ये म पहा, आणि जा भागांत तो म आहे तो भाग घेऊन बाकीचे पुढल्या अंकांसासून आरंभ कर. जसे, $\frac{34}{41}$ हे $\cdot ८२९२६८२९२६$, इत्यादि आहेत,

आणि $\frac{14}{81}$ हे ३६५८५३६५८५ , इत्यादि आहेत. या भागांतील दोन शेवटांपासून सारखे अंतरावरचे भाग परस्परांचे पुरीकरण आहेत, जसे, ०२४३९ आणि ९७५६० , ०७३१७ आणि ९२६८२ , इत्यादि, आणि जर ०२४३९ पहिला भाग ४१ चे आंतील कोणखे एक अंकाने गुणिला, तर तो अंक बाकीचे अंकांत पहा, ह्मणजे त्या बाकीचे पुढील अंकापासून त्या भागांत तो गुणाकार सांपडेल. जसे, ०२४३९ हे २३ नीं गुणिले, तर ५६०९७ हे येतात, ६ नीं गुणिले तर १४६३४ येतात.

पुढे जे अंक दिले आहेत, त्यांपेक्षा अधिक अंक न घेतां भागाकाराचे फळ शेवटपर्यंत कसे करितां येते ते शिकणाराने शोधून काढावे. जा अपूर्णाकाचा भाग शोधून काढायाचा आहे, तो $\frac{1}{८७}$ आहे.

$८७)१००(०११४९४२५$

१३०

४३०

८२०

३७०

२२०

४६०

२५

०११४९४२५×२५

२८७३५६२५×२५

७१८३९०६२५×२५

१७९५९७६५६२५×२५

४४८९९४१४०६२५

०११४९४२५२८७३५६२५

७१८३९०६२५

१७९५९७६५६२५

४४८९९४

$०११४९४२५२८७३५६३२१८३९०८०४५९७७$ ०११४९४

पुरवणी भाग दहावा.

संयोगांविषयीं.

संयोगांविषयींचा कांहीं गोष्टी एथें सांगतो, कारण ग्रंथामध्ये जें त्यांचें व्याख्यान केलें आहे, त्यापेक्षा थोडक्यांत व्याख्यान एथें केलें आहे.

मनांत आण कीं चार पेढ्या आहेत, आणि त्यांत अनुक्रमानें ५, ७, ३, आणि ११ अशा चकत्या आहेत. तर पेढ्यांजवळ जाण्याचा क्रम मनांत न आणतां एक चकती प्रत्येक पेटींतून किती तऱ्हांनीं काढितां येईल! उत्तर, $५ \times ७ \times ३ \times ११$ इतक्या तऱ्हांनीं काढितां येईल. कारण, पहिल्या पेटींतून एक चकती ५ निरनिराळ्ये तऱ्हांनीं काढितां येईल, आणि या प्रत्येक काढण्यास दुसऱ्ये पेटींतील ७ काढण्याचा तऱ्हांतून एक एक जोडावी, ह्मणजे तेणेंकरून ५×७ इतक्या काढण्याचा तऱ्हा पहिल्या दोन पेढ्यांतून होतील. तिसऱ्ये पेटींतून काढण्याचा तऱ्हा ३ आहेत, ह्मणून पूर्वीचे तऱ्हांस यांतून एक एक जोडल्यानें $५ \times ७ \times ३$ इतक्या काढण्याचा तऱ्हा पहिल्या तीन पेढ्यांपासून होतील; आणि याप्रमाणें पुढेहि. या पुढील प्रतिज्ञा सहज सिद्ध करितां येतील, आणि त्यांसारख्या दुसरे पक्षांविषयीं करितां येतील.

जर पेढ्यांकडेस जाण्याचे क्रमापासून कांहीं फेर पडतो, आणि जर निरनिराळ्ये पेढ्यांत अ, ब, क, ड, इत्यादि चकत्या आहेत, तर $४ \times २ \times ३ \times १ \times अ \times ब \times क \times ड$, इतक्या निरनिराळ्या तऱ्हा आहेत. जर पहिल्या पेटींतून दोन चकत्या, दुसरींतून तीन चकत्या, तिसरींतून एक चकती आणि चवथींतून तीन चकत्या अशा काढायाचा असतील आणि जर पेढ्यांचा क्रम मनांत आणिला नाहीं, तर चकत्या काढण्याचे तऱ्हांची संख्या.

$$अ \frac{अ-१}{२} \times ब \frac{ब-१}{२} \frac{ब-२}{३} \times क \times ड \frac{ड-१}{२} \frac{ड-२}{३} \text{ आहे.}$$

जर पेढ्यांकडे जाण्याचा क्रम मनांत आणिला, तर वरचे पद्धतीस $४ \times ३ \times २ \times १$ यांणीं गुणिलें पाहिजे. जर पेढ्यांतून काढण्याचे क्रमानें काही फेर होतो, परंतु पेढ्यांचे क्रमानें फेर होत नाहीं, तर संख्या

$$अ(अ-१)ब(ब-१)(ब-२)कड(ड-१)(ड-२) \text{ आहे.}$$

न पेक्षांत निरनिराळ्या खुणा केलेल्या अचकत्या ठेवण्याचे तऱ्हांची संख्या अचा न घात, अथवा अⁿ आहे, आणि या पक्षांत प्रत्येक पेटींत चकत्या ठेवण्याचा क्रम लक्षांत आणीत नाहीं. निरनिराळ्या तऱ्हेने खुणा केलेल्या चार चकत्या सात पेक्षांत ठेवायाचा आहेत. पहिली चकती सातांतून कोणत्याहि पेटींत ठेविली असतां सात तऱ्हा होतील; त्याचप्रमाणें दुसरी चकती सात पेक्षांत ठेवितां येईल; आणि पहिल्या सात तऱ्हांतून एक, दुसऱ्या सातांतील एकीशीं मिळविलीं असतां, त्यापासून ७×७ तऱ्हा होतील; तिसऱ्या चकतीपासून या प्रत्येक तऱ्हेचा ७ निरनिराळ्या तऱ्हा होतात, आणि यामुळे सर्व मिळून $७ \times ७ \times ७$ तऱ्हा होतात; आणि याप्रमाणें पुढेहि. परंतु जर चकत्यांवर काहीं खुणा नसल्या, तर हें कृत्य अगदीं निराळें होईल.

काहीं संख्या दिल्या असतां यांपासून दुसरी एक संख्या किती तऱ्हांनीं करितां येईल, आणि यांत प्रत्येक मोजण्याची तऱ्हा निरनिराळी आहे असें मनांत आण. जसें, $१+३+१$ आणि $१+१+३$ ह्या ५ ही संख्या करण्याचा निरनिराळ्या तऱ्हा आहेत. एक संख्या जितक्या तऱ्हांनीं होती, त्याचे दुप्पट तऱ्हांनीं पुढील संख्या होईल. उदाहरण, ८ ही संख्या घे. जितक्या वेगवेगळ्या तऱ्हांनीं ७ ही संख्या करितां येईल त्या तऱ्हा मांडिल्या, तर प्रत्येक तऱ्हेचा शेवटील भाग एकानें वाढविला, अथवा प्रत्येक तऱ्हेचे शेवटास १ जोडिला, तर ८ ही संख्या करितां येईल. जसें, $१+३+२+१$ यापासून $१+३+२+२$, अथवा $१+३+२+१+१$ असें होईल; आणि याप्रमाणें ८ ही संख्या करण्याचा सर्व तऱ्हा सांपडतील; कारण, ८ करण्याची कोणती एक तऱ्हा, जशी, $अ+ब+क+ड$ ही ७ करण्याचा $अ+ब+क+(ड-१)$ यापासून निघाली असावी. आतां $(ड-१)$ हे ० आहे, ह्मणजे $ड$ हा एक आहे आणि तो—आहे अथवा $ड-१$ ही बाकी रहाती ह्मणजे ती $ड$ मध्ये १ उणा इतकी आहे. यावरून न संख्या करण्याचा $२^{n-१}$ इतक्या तऱ्हा आहेत. कारण १ करण्याची एक तऱ्हा आहे, २ करण्याचा २ तऱ्हा आहेत; यावरून रितीप्रमाणें ३ करण्याचा $२^२$ इतक्या तऱ्हा आहेत, ४ करण्याचा $२^३$ इतक्या तऱ्हा आहेत; आणि याप्रमाणें पुढेहि.

$$\begin{array}{l}
 1 \left\{ \begin{array}{l} 1+1 \\ 1+2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 1+1+1+1 \\ 1+1+2 \\ 1+2+1 \\ 1+3 \end{array} \right. \\
 \\
 2 \left\{ \begin{array}{l} 2+1 \\ 3 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 2+1+1 \\ 2+2 \\ 3+1 \\ 4 \end{array} \right.
 \end{array}$$

या कोष्टकापासून १, २, ३, आणि ४ या संख्या करण्याचा तऱ्हा दिसतात. यावरून असे दिसते की अ+ब करण्याचा तऱ्हा जेवढ्या आहेत, त्या अ करण्याचा तऱ्हांशी ब चा तऱ्हा जोडून जेवढ्या होतात, तेवढ्यांचा दुप्पट आहेत; अ+ब+क करण्याचा तऱ्हा, अ करण्याचा तऱ्हांशी बचा तऱ्हा आणि कचा तऱ्हा जोडून जेवढ्या होतात, त्यांचा चौपट आहेत, ही गोष्ट शिकणाराने शोधून काढावी. आणि याप्रमाणे पुढे आणखी, अ + ब करितांना जा संख्यांची बेरीज घ्यावी लागते त्या तऱ्हांत किलेकांत अ स्पष्ट असतो आणि किलेकांत तो तसा असत नाही, आणि एका जातीचा जेवढ्या तऱ्हा तेवढ्याच दुसऱ्या जातीचा तऱ्हा असतात.

कांहीं विषमसंख्या दिल्या असतां, त्यांपासून दुसरी संख्या करण्याचे तऱ्हांची संख्या काढायाची आहे, प्रत्येक मोजण्याची तऱ्हा निरनिराळी आहे असे समजावे. याप्रमाणे न करण्याचा तऱ्हा जर अ आहेत आणि $n+1$ करण्याचा तऱ्हा ब आहेत, तर $n+2$ करण्याचा तऱ्हा अ+ब आहेत; कारण १० करण्याचे प्रत्येक तऱ्हेचे शेवटचा अंक २नी वाढविल्याने, अथवा ११ करण्याचे प्रत्येक तऱ्हेचे शेवटीं १ जोडिल्याने विषम अंकांपासून १२ करण्याची प्रत्येक तऱ्हा होती. जसे $1+9+3+1$ यापासून १० होतात आणि या तऱ्हेपासून $1+9+3+3$ ही १२ करण्याची तऱ्हा उत्पन्न होती. परंतु ११ करण्याचे $1+9+1$ यातऱ्हेपासून, १२ करण्याची $1+9+1+1$ ही तऱ्हा उत्पन्न होती. यावरून १० आणि ११ करण्याचे तऱ्हांचे बेरीजे बरोबर १२ करण्याचे तऱ्हांची संख्या आहे. आतां केवळ एक

तऱ्हेनें १ होतो. आणि केवल एक तऱ्हेनें २ होतात; यावरून १+१, अथवा २ तऱ्हांनीं ३ होतील, १+२, अथवा ३ तऱ्हांनीं ४ होतील. १, १, २, ३, ५, ८, १३, २१, ३४, ५५, ८९ इत्यादि या श्रेणीत प्रत्येक पद, त्याचे पूर्वीचे दोन पदांचे बेरिजे बरोबर आहे, ही श्रेणी घेतली तर, यांतील न पद, विषम संख्यांपासून न संख्या करण्याचा तऱ्हा दाखवील. जसे, ५५ तऱ्हांनीं १० ही संख्या होईल, ८९ तऱ्हांनीं ११ ही संख्या होईल.

मनें भागिल्या जातील अशा संख्यांपासून मक ही संख्या 2^{n-1} इतक्या तऱ्हांनीं होईल हें दाखिव, यांत क्रमाप्रमाणें मोजितात.

१ १ १ २ ३ ४ ६ ९ १३ १९ २८ इत्यादि
० १ ० १ १ १ २ २ ३ ४ ५ इत्यादि

या दोन श्रेण्यांतून पहिल्ये श्रेणींत तिसरे पदापुढलें प्रत्येक नवें पद, हें शेवटील पद आणि शेवटील दोन पदें सोडून तिसरें पद यांचे बेरिजे-बरोबर आहे; दुसऱ्ये श्रेणींत तीन पदें सोडून शेवटील पदाचे पूर्वीचें एक पद आणि शेवटील पदाचे पूर्वीचें दुसरें पद, यांचे बेरिजे बरोबर प्रत्येक नवें पद आहे. यावरून जा संख्या ३ नीं भागिल्या असतां १ बाकी रहाती, अशा संख्यांनीं न संख्या करण्याचा तऱ्हा, पहिल्ये श्रेणीतील न पद दाखवितें, आणि जा संख्या ३ नीं भागिल्या असतां २ बाकी रहातात, अशा संख्यांनीं न संख्या करण्याचा तऱ्हा दुसरे श्रेणीतील न पद दाखवितें.

जर प्रत्येक क्रम निरनिराळी तऱ्हा आहे, तर काहीं संख्या दिल्या असतां, यांपासून दुसरी संख्या किती तऱ्हांनीं होईल, हें सहज दाखवितं येईल. उदाहरण, ७ निरनिराळ्ये अंकांपासून बर सांगितल्याप्रमाणें १२ हे किती तऱ्हांनीं होतील. जर बारा एक मांडिले, तर त्यांतील प्रत्येक दोन एकमामध्ये एक अंतर अर्शा ११ अंतरें आहेत. यावरून प्रत्येक शेवटाकडून साहा एकमांत एक अंतराची रेष याप्रमाणें साहा अंतरांचा रेषा करून त्यांचे आंतील एकचे अंक एकत्र करून सात अंकापासून १२ होत नाहींत अशी एकहि तऱ्हा नाहीं. जसे, १+१+३+२+१+२+२ ही सात

अंकांपासून १२ करण्याची एक तऱ्हा आहे आणि ती या पुढीलप्रमाणे आहे,

$$१|१|१११|११|१|११|११$$

यांत ११ अंतरांतून पहिले, दुसरे, पांचवे, सातवे, आठवे, आणि दहावे अंतरांवर अंतरखुणा आहेत, यावरून सात अंकांपासून १२ हे किती तऱ्हांनीं करितां येतील, हें विचारणें ११ अंतरांमध्ये ६ अंतरखुणा किती तऱ्हांनीं करितां येतील, या विचारण्यासारखें आहे; अथवा ११ तून सहा सहांचे संयोग, अथवा निवडी किती होतील.

$$\frac{११ \times १० \times ९ \times ८ \times ७ \times ६}{१ \times २ \times ३ \times ४ \times ५ \times ६}, \text{ अथवा } ४६२ \text{ हें उत्तर.}$$

न वस्तूंतून म वस्तू जितक्या तऱ्हांनीं काढितां येतात ती संख्या m_n याणें दाखविली, तर

$$n \times \frac{n-१}{२} \times \frac{n-२}{३} \dots \frac{n-m+१}{m} \text{ एथपावेतों, याचा संक्षेप } m_n \text{ आहे.}$$

तर $n+१$ करण्यासाठीं $m+१$ ह्या संख्या किती तऱ्हांनीं एकत्र केल्या पाहिजेत, त्यांची संख्या m_n दाखवितो. यावरून १२ करण्यासाठीं ७ अंकांची योजना करण्याची संख्या ६,१, आहे, इतकें मात्र वर सिद्ध केले. यावरून हें पुढील सिद्ध करून दाखविण्यास कांहीं अडचण नाही.

$$२^n = १ + १_n + २_n + ३_n \dots + n_n$$

वरचा प्रश्नांत जे अंक कामांत घेतले आहेत त्यांत ० येत नाही. जसें, चार अंकांपासून ५ करण्याचा तऱ्हांत $३+१+१+०$ अशी तऱ्हा येत नाही. अंकांचे संख्येमध्ये ० जमेस धरून ७ अंकांपासून १२ किती तऱ्हांनीं करितां येतील हें आतां विचारितों. अंकामध्ये ० न घेतां ७ अंकांपासून १९ करण्याचा जितक्या तऱ्हा आहेत, त्यांपेक्षां अधिक किंवा उण्या तऱ्हा वरचे उदाहरणांत नाहीत. ० जमेस धरिलें असतां १२ करण्याचा जा तऱ्हा आहेत, त्यांतून प्रत्येक तऱ्हा घेऊन, त्यांतील प्रत्येक अंक १ ने वाढविला, तर अंकांत शून्याची गणना नाही, अशी १९ करण्याची तऱ्हा उत्पन्न होईल. त्याचप्रमाणें अंकांत शून्याची गणना नाही अशी १९ ची तऱ्हा घेऊन, त्यांतील प्रत्येक अंकांतून १ वजा कर, ह्मणजे ० अंकांत जमेस आहे अशी १२ करण्याची तऱ्हा निघेल. यावरून ०

जमेस असतां ७ अंकांपासून १२ करण्याचा तऱ्हांची संख्या $६_{१८}$ आहे, आणि ० जमेस असतां म संख्यांपासून न संख्या करण्याचे तऱ्हांची संख्या $(म-न)_{न+म-१}$ आहे.

वर सांगितले तें पुढील प्रश्नाचे उलगडण्याप्रमाणे आहे; खुणांवांचून न चकत्या मपेट्यांत किती तऱ्हांनीं टाकितां येतील? आणि हें पुढील सहज सिद्ध करून दाखवितां येईल; व पेट्यांतून एक किंवा अधिक पेट्या रिकाम्या ठेवून, त्यांत खुणांवांचून अशा क चकत्या ठेवण्याची संख्या $(ब-१)_{ब+क-१}$ आहे. परंतु प्रत्येक पेट्यांत एक तरी चकती असावी, असें असल्यास $(ब-१)_{क-१}$ ही तऱ्हांची संख्या आहे; प्रत्येक पेट्यांत दोन चकत्या असाव्या असें असल्यास $(ब-१)_{क-ब-१}$; प्रत्येक पेट्यांत तीन चकत्या असाव्या असें असल्यास $(ब-१)_{क-२ब-१}$; आणि याप्रमाणें पुढें.

अंकांमध्ये ० जमेस असतां म समसंख्यांपासून न-म करण्याचे तऱ्हांचे संख्येचे बरोबर, म विषम अंकांपासून न करण्याचे तऱ्हांची संख्या आहे; ह्मणजे ० जमेस असतां म सम किंवा विषम अंकांपासून $\frac{१}{२}(न-म)$ करण्याचे तऱ्हांची संख्या वर सांगितल्याबरोबर आहे. यावरून $\frac{१}{२}(न-म)+म-१$, अथवा $\frac{१}{२}(न+म)-१$ इतक्या वस्तूंतून म-१ वस्तूंचे संयोगांचे संख्येबरोबर, म विषम संख्यां पासून न करण्याचे तऱ्हांची संख्या आहे. जर म आणि न हे दोन्ही सम, किंवा दोन्ही विषम नसतील, तर कृत्य अशक्य होईल.

न संख्यांतून म संख्या काढण्याचे तऱ्हांची संख्या म_१ हें सरळ पद दाखवितें, त्याचा योगानें संयोगांचे संख्यांमध्ये उपयोगी आणि चमत्कारिक संबंध आहेत, त्यांतून कांहीं सहज दाखवितां येतील. मनांत आण कीं १२ तून ५ काढावयाचे आहेत; त्या १२ वस्तूवर अ,ब,क,ड, इत्यादि खुणा मांड आणि त्यांतून एक वस्तू अ एकीकडे ठेव. १२ तून ५ काढण्याचा प्रत्येक समुदायांत अ येतो किंवा येत नाही. अ येत नाही अशा समुदायांची संख्या $५_{११}$ आहे; आणि जांत अ येतो अशा समुदायांची संख्या $४_{११}$ अशी असावी, कारण अ खेरीज करून बाकीचे सर्व वस्तूंतून ४ काढण्याचे तऱ्हांची संख्या $४_{११}$ आहे. यावरून $५_{१२}$ हे $५_{११}+४_{११}$ असावे, आणि याप्रमाणें प्रत्येक पक्षांत सिद्ध करून दाखवितां येईल,

$$m_n = m_{n-1} + (m-1)_{n-1}$$

0_n आणि n_n हे दोन्ही १ याचे बरोबर आहेत; कारण कांहीं न घेण्याची तऱ्हा एकच आहे, आणि सर्व घेण्याची तऱ्हा एकच आहे. पुनः m_n आणि $(n-m)_n$ हीं दोन्ही सारखींच आहेत. आणि जर नपेक्षां म मोठा आहे, तर $m_n = 0$; कारण तसें करण्याची एकहि तऱ्हा नाहीं. पुढीलप्रमाणें लिहिलें असतां वर सांगितले परिणामांतून एकादा परिणाम सरळ रूपाचा होईल, जसें,

$$2^n = 0_n + 1_n + 2_n + \dots + n_n$$

न वस्तूंतून मचे संयोगांची संख्या m_n आहे, आणि जा कोष्टकांतील न व्हे ओळीची $m+1$ वी संख्या m_n आहे, त्या कोष्टकाची चिन्हे मांडिलीं असतां तो कोष्टक करण्याचा नियम पुढीलप्रमाणें आहे, असें वर सिद्ध झालें हें दिसले; प्रत्येक अंकाचे वरचा अंक आणि त्यावरचे अंकाचे मागला अंक, यांचे बेरिजेबरोबर तो पहिला अंक आहे. आतां

	०	१	२	३	इत्या०	१,१,०,०,०, इत्यादि ही पहिली
१	० _१	१ _१	२ _१	३ _१	इ०	आडवी ओळ आहे १,१,१, इत्यादि
२	० _२	१ _२	२ _२	३ _२	इ०	ही पहिली उभी ओळ आहे, यावरून
३	० _३	१ _३	२ _३	३ _३	इ०	कोष्टक या पुढीलप्रमाणें आहे आणि
इत्यादि	इ०	इ०	इ०	इ०		तो हवा तितका पुढें वाढवितां येईल;

	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०
१	१	१	०	०	०	०	०	०	०	०	०
२	१	२	१	०	०	०	०	०	०	०	०
३	१	३	३	१	०	०	०	०	०	०	०
४	१	४	६	४	१	०	०	०	०	०	०
५	१	५	१०	१०	५	१	०	०	०	०	०
६	१	६	१५	२०	१५	६	१	०	०	०	०
७	१	७	२१	३५	३५	२१	७	१	०	०	०
८	१	८	२८	५६	७०	५६	२८	८	१	०	०
९	१	९	३६	८४	१२६	१२६	८४	३६	९	१	०
१०	१	१०	४५	१२०	२१०	२५२	२१०	१२०	४५	१०	१

जसे, ९ व्हे आडव्ये ओळींत जा ओळीचे डोक्यावर ४ आहेत, त्या ओळींत १२६ हा अंक दिसतो, आणि तो $९ \times ८ \times ७ \times ६ \div (१ \times २ \times ३ \times ४)$, अथवा ९ वस्तूंतून ४ वस्तू काढण्याचे तऱ्हाचे संख्येबरोबर आहे, आणि ही गोष्ट ४ चे खाली ९, अथवा ४, अशांनी दाखवितात.

जर प्रत्येक आडव्ये ओळीची बेरीज घेतली, तर १+१ अथवा २, १+२+१, अथवा २^२, पुढली ओळ १+३+३+१ अथवा २^३ इत्यादि, यापासून वर सांगितलेला सिद्धांत सिद्ध होतो; आणि कोष्टक करण्याचे नियमावरून उभ्या ओळी याप्रमाणें केल्या आहेत;

$$\begin{array}{r} ११ \\ ११ \\ \hline १२१ \end{array} \quad \begin{array}{r} १२१ \\ १२१ \\ \hline १३३१ \end{array} \quad \begin{array}{r} १३३१ \\ १३३१ \\ \hline १४६४१ \end{array} \text{ इत्यादि.}$$

यावरून प्रत्येक आडव्ये ओळीची बेरीज तिचे पूर्वीचे ओळीचे बेरीजेचे दुप्पट आहे. परंतु या करण्याचे कृतीचें फळ पुढें नेतां येईल. १+क्ष याचे घात बीजरूप गुणाकारानें केले, तर कृतीमध्ये क्षचेघातांचे अंकरूप गुणक करण्यांत, वरचे सारखीच वांकडी बेरीज करावी लागेल.

$$\begin{array}{r} १+क्ष \\ १+क्ष \\ \hline १+क्ष \\ \hline क्ष+क्ष^२ \\ \hline १+२क्ष+क्ष^२ \end{array} \quad \begin{array}{r} १+२क्ष+क्ष^२ \\ १+क्ष \\ \hline १+२क्ष+क्ष^२ \\ \hline क्ष+२क्ष^२+क्ष^३ \\ \hline १+३क्ष+३क्ष^२+क्ष^३ \end{array}$$

यांत १+क्ष याचा दुसरा आणि तिसरा घात आहे; आणि कोष्टकावरून चवथा घात सहज सांगतां येतो, आणि तो $१+४क्ष+६क्ष^२+४क्ष^३+क्ष^४$ आहे; याप्रमाणें पुढें. यावरून,

$(१+क्ष)^n = ०_n + १_n क्ष + २_n क्ष^२ + ३_n क्ष^३ + \dots + n_n क्ष^n$, असें हो-
ते आणि यांत वढतकरून $०_n, १_n$ इत्यादि सर्व पदे लिहितात जसें,

$$(१+क्ष)^n = १ + nक्ष + n\frac{n-१}{२} क्ष^२ + n\frac{n-१}{२}\frac{n-२}{३} क्ष^३ + \dots$$

बीजांत जास द्वियुक्पद सिद्धांत ह्यणतात, त्याचा हा एक सरळ पक्ष आहे. जर $१+क्ष$ याचे ठिकाणी $क्ष+अ$ असे घेतलें, तर

$$(क्ष+अ)^n = क्ष^n + १_n अक्ष^{n-१} + २_n अ^२ क्ष^{n-२} + ३_n अ^३ क्ष^{n-३} + \dots + n_n अ^n$$

असें होईल. मागे सांगितलेला कोष्टक दुसऱ्ये रूपानें करितां येईल. एका आडव्या ओळींत पहिल्यानें १ आणि त्याचापुढें काहीं शून्यें मांडून, नंतर दुसऱ्ये ओळीचा आरंभी पहिल्या ओळीचा पहिला अंक मांड, नंतर त्याशीं पहिल्ये ओळीचा दुसरा अंक मेळीव ह्यणजे दुसऱ्ये ओळीचा दुसरा अंक होईल, याप्रमाणें शेवटील एक एक अंक सोडून सर्व ओळी पुऱ्या कर, ह्यणजे या पुढीलप्रमाणें होईल.

१	०	०	०	०	०	०
१	१	१	१	१	१	१
१	२	३	४	५	६	
१	३	६	१०	१५		
१	४	१०	२०			
१	५	१५				
१	६					
१						

या कोष्टकाचे तिरकस ओळींत १ १, १ २ १, १ ३ ३ १, इत्यादि अंक आहेत, आणि मूळचे कोष्टकाप्रमाणेंच आहेत, आणि ते तशाच मिळवणीनें उत्पन्न झाले आहेत. वरचा कोष्टक उत्पन्न करण्यासाठीं जा मिळवण्या कराव्या लागतात, त्या करण्याचे पूर्वी जर अनें गुणिले असते, तर $१+अ$ याचा घाताचे निरनिराळे अवयव सांपडले असते, जसें,

१	०	०	०	०
१	अ	अ ^२	अ ^३	अ ^४
१	२अ	३अ ^२	४अ ^३	
१	३अ	६अ ^२		
१	४अ			
१				

या कोष्टकाचे विकस ओळींत १+अ, १+२अ+अ^२, १+३अ+३अ^२+अ^३ इत्यादि, १+अ चे निरनिराळे घात आहेत. जर १,०,०, इत्यादि हे घेऊन आरंभ करण्याबद्दल ५,०,०, इत्यादि घेतले, तर प्रत्येक उभ्ये ओळीचे शेवटीं ५, ५×४अ, ५×६अ^२, इत्यादि आले असते; आणि प्रत्येक ओळीचे डोक्यावर अ^४, अ^३, अ^२, अ, १, हे मांडिले असते, तर प्रत्येक उभ्ये ओळीचे दोन शेवटांवरील पदे गुणून त्या सर्व गुणाकारांची बेरीज घेतल्यानें ५(अ+अ)^४ यास विस्ताररूप देण्याचे अवयव सांपडले असते.

५(अ+अ)^३+क(अ+अ)^२+र(अ+अ)+स, याचें विस्ताररूप वर सांगितले रितीप्रमाणें करितों.

अ ^३	अ ^२	अ	१	अ ^२	अ	१	अ	१	१
५	०	०	०	क	०	०	र	०	स
५	५अ	५अ ^२	५अ ^३	क	कअ	कअ ^२	र	रअ	
५	२५अ	३५अ ^२		क	२कअ		र		
५	३५अ			क					
५									

$$\begin{aligned}
 & ५अ^३ + ३५अ^२ + ३५अअ + ५अ^३ + कअ^२ + २कअअ + कअ^२ + रअ + रअ \\
 + स & = ५अ^३ + (३५अ + क)अ^३ + (३५अ^२ + २कअ + र)अ + ५अ^३ + कअ^२ + \\
 & रअ + स
 \end{aligned}$$

आतां पहिल्या कृतींत क, र, आणि स यांस अचा योग्यघाताचे विकारणीं मांडिले असते, तर ही सर्व कृति एकदांच झाली असती जसें,

क्ष ^३	क्ष ^२	क्ष	१
प	क	र	स
प	पअ+क	पअ ^२ +कअ+र	पअ ^३ +कअ ^२ +रअ+स
प	२पअ+क	३पअ ^२ +२कअ+र	
प	३पअ+क		
प			

पुरवणीचा ११ व्यां भागांत जी कृति सांगितली ती हीच आहे, परंतु यांत शेवटील अक्षराचें चिन्ह बदलावें लागत नाहीं, आणि शेवटील ओळींत मिळवणीचा बदल वजावाकी करावी लागती, इतका मात्र यांत फेर आहे. अनेक बीजरूप पद्धतीमध्ये क्षचा जागी क्ष+अ मांडण्याची ही एक सोईची कृति आहे. उदाहरण, २क्ष^५+क्ष^४+३क्ष^३+७क्ष+९ यांत क्षचा जागी क्ष+५ मांडिले असतां रूप कसें होईल ? ही पद्धती पूर्ण केली असतां या पुढीलप्रमाणे आहे,

	२क्ष ^५	+ १क्ष ^४	+ ०क्ष ^३	+ ३क्ष ^२	+ ७क्ष	+ ९
	१	०	३	७	९	
२	११	५५	२७८	१३९७	६९९४	
२	२१	१६०	१०७८	६७८७		
२	३१	३१५	२६५३			
२	४१	५२०				
२	५१					

उत्तर, २क्ष^५+५१क्ष^४+५२०क्ष^३+२६५३क्ष^२+६७८७क्ष+६९९४.

पुरवणी भाग अकरावा.

समीकरणे उलगडण्याची होर्नर साहेबाची रीति:

गणनेचे अभ्यासासाठी ही रीति फार उपयोगी पडती, ह्मणून ती वा अभ्यायांत सांगितली आहे. यांत जीं उदाहरणे सांगितलीं आहेत, तीं उलगडण्यासाठीं बीजगणिताचे चिन्हांचा थोडासा उपयोग पडेल, आणि या ग्रंथांत बीजगणिताविषयीं जें सांगितलें आहे, त्याची मात्र माहिती असली ह्मणजे हीं उदाहरणे समजतील.

$$२क्ष^४ + क्ष^२ - ३क्ष = ४१६७९३,$$

अथवा लिहिण्याचे चाली प्रमाणें

$$२क्ष^४ + क्ष^२ - ३क्ष - ४१६७९३ = ०,$$

असें समीकरण उलगडण्याचें असेल, तर पहिल्यानें अदमासानें मूळाचा पहिला अंक शोधून काढावा, इतकेंच केवळ नाहीं, परंतु त्या अंकाची जातहि शोधून काढावी. उदाहरण, जर तो पहिला अंक २ असला, तर तो २, अथवा २०, अथवा २०० इत्यादि, अथवा २ अथवा ०२ अथवा ००२ इत्यादि यांतून कोणत्या जातीचा आहे हें जाणिलें पाहिजे. हेंहि अदमासानें कळेल; आणि अदमास करण्याचा सुलभ मार्ग या पुढीलप्रमाणें आहे; दिलेली पद्धती तिचे पूर्णरूपानें मांड. वरचे पक्षांत पद्धतीचें रूप पूर्ण नाहीं, आणि तिचें पूर्ण रूप हें पुढील आहे.

$$२क्ष^४ + ०क्ष^३ + १क्ष^२ - ३क्ष - ४१६७९३.$$

जेव्हां क्ष कांहीं संख्या आहे, ह्मणजे जसें, ३००० आहे, तेव्हां या पद्धतीची किंमत काढण्यासाठीं, पहिल्यानें पहिला गुणक (२) घेऊन त्यास ३००० यांणीं गुणावें, नंतर दुसरा गुणक (०) घेऊन त्यांत मिळवावा, आणि त्या उत्तरास ३००० यांणीं गुणावें, आणि त्यांत दुसरा गुणक (१) मिळवावा, याप्रमाणें पुढें करित जावें. जसें,

$$\begin{aligned}
 २ \times ३००० + ० &= ६०००; ६००० \times ३००० + १ = १८००००१ \\
 १८०००००१ \times ३००० - ३ &= ५४०००००२९९७ \\
 ५४०००००२९९७ \times ३००० - ४१६७९३ &=
 \end{aligned}$$

$$१६२०००००८५७४२०७.$$

आतां क्ष=३० अशी कल्पना करून त्याची किंमत काढ. तर या पुढील प्रमाणे वेगळालीं पदे निघतील, ह्मणजे, ६०, अथवा (२×३०+०), १८०१, ५४०२७, आणि शेवटीं,

$$१६२७८१०-४१६७९३,$$

अथवा क्ष=३० केल्याने पहिलीं पदे ४१६७९३ यापेक्षां अधिक आहेत. आतां क्ष=२० असे घेऊन पाहिलें असतां, याप्रमाणे होईल, ह्मणजे ४०, ८०१, १६०१७, आणि शेवटीं,

$$३२०३४०-४१६७९३,$$

अथवा क्ष=२० केल्याने पहिलीं पदे ४१६७९३ यापेक्षां कमी आहेत. आतां $२क्ष^२ + क्ष^३ - ३क्ष$ यांस ४१६७९३ यांचे बरोबर असायासाठीं, क्षची किंमत २० आणि ३० यांचेमध्ये असावी. ह्मणून कृतीचे आरंभ ही गोष्ट सिद्ध केली पाहिजे.

इतकें जाणल्यानंतर, +२, ०, +१, -३, आणि -४१६७९३ हे गुणक त्यांचे बीजगणित चिन्हांसहित मांडावे, परंतु शेवटल्याचें चिन्ह बदलून मांडावें. जेव्हां शेवटील चिन्ह-आहे, तेव्हां वर सांगितल्या-प्रमाणे करायास सोईस पडतें. परंतु शेवटील चिन्ह+असलें, तर त्याचे पूर्वीचे गुणकांचीं चिन्हे बदलून तें शेवटील चिन्ह तसेच ठेविल्यानें सोईस पडतें. जसें, क्ष^३-१२क्ष+१=०, हें समीकरण उलगडा-यास याप्रमाणे मांडितात.

$$-१ \quad ० \quad +१२ \quad १$$

परंतु पूर्वीचे उदाहरणांत याप्रमाणे मांडिले पाहिजे,

$$+२ \quad ० \quad +१ \quad -३ \quad ४१६७९३,$$

समीकरणें उलगडायाची होर्नर साहेबांची रीति. १६९

याप्रमाणें केल्यानंतर वर उरविलेला मूळाचा मोठा अंक घे, तो या पक्षांत २ दशक, किंवा २० आहे, असें आरंभींचे कृतीपासून कळलें. वरचे ओळींतील डावेकडील पहिलें पद २० नीं गुणून, त्यांत दुसरें पद मिळवून, ती बेरीज दुसऱ्ये पदाखालीं मांड; नंतर अशी आलेली रकम २० नीं गुणून त्या गुणाकारांत तिसरें पद मिळवून, ती बेरीज तिसऱ्ये पदाखालीं मांड; आणि याप्रमाणें पुढें कर. परंतु शेवटील पदाशीं आल्यावर, पूर्वीचे पदास २० नीं गुणून जो गुणाकार होतो, तो शेवटील पदांतून वजा करावा, अथवा त्या गुणाकाराचें चिन्ह बदल करून, त्यास शेवटील पदाशीं जोडून मांडावें. असें केल्यानंतर शेवटील पद किंवा वजाबाकीचें पद सोडून, बाकी ओळीचे अंकांशीं कृति कर; नंतर शेवटील दोन ओळी वांचून बाकीचे ओळींशीं कृति कर, आणि याप्रमाणें ओळींची स्थिती खाली दाखविल्याप्रमाणें होईपर्यंत कर;

अ	ब	क	ड	इ
	फ	ग	ह	ऐ
	के	ल	म	
	न	ओ		
	प			

हीं पदें काढण्याची रीति पुढीलप्रमाणें आहे;

$$\begin{aligned} \text{फ} &= २०\text{अ} + \text{ब}, & \text{ग} &= २०\text{फ} + \text{क}, & \text{ह} &= २०\text{ग} + \text{ड}, & \text{ऐ} &= \text{इ} - २०\text{ह}, \\ \text{के} &= २०\text{अ} + \text{फ}, & \text{ल} &= २०\text{के} + \text{ग}, & \text{म} &= २०\text{ल} + \text{ह}, \\ \text{न} &= २०\text{अ} + \text{के}, & \text{ओ} &= २०\text{न} + \text{ल}, \\ \text{प} &= २०\text{अ} + \text{न}, \end{aligned}$$

ही कृति होर्नर साहेबांनीं काढल्यावरून तीस होर्नर साहेबांची कृति ह्मणतात. आतां ही कृति वरचे उदाहरणाचे अंकांवर लाविली असतां याप्रमाणें होईल;

४० ८०१ १६०१७ ९६४५३
 ८० २४०१ ६४०३७
 १२० ४८०१
 १६०

यावरून पुढे कृति चालविण्यास ही पुढील अंकांची ओळ आहे,

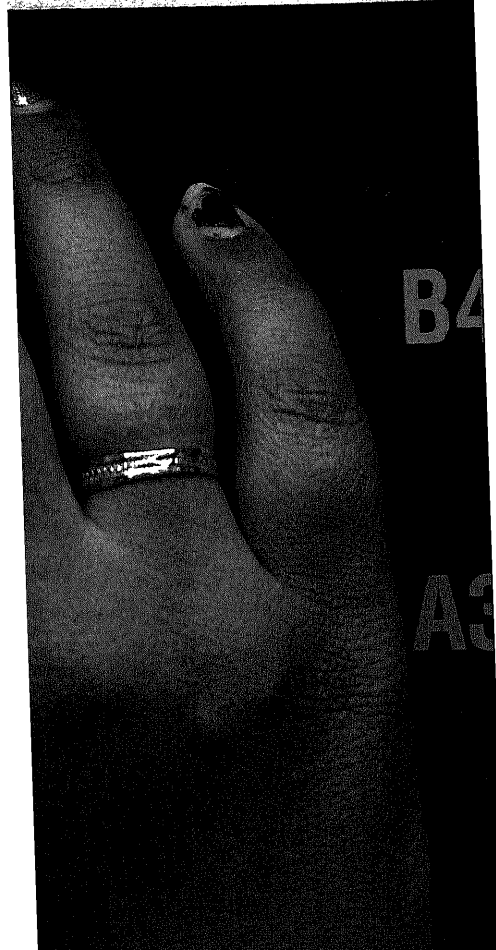
२ १६० ४८०१ ६४०३७ ९६४५३

या ओळीचे अंकांपासून मूळाचा दुसरा, अथवा एकचा अंक काढण्या-
 विषयीं तर्क करितां येईल.

शेवटचे उजवेकडील अंकास भाज्य असें ह्मण, त्याचा डावेकडील
 पदास भाजक ह्मण, बाकीचे डावेकडील सर्व पदांस अग्रसर ह्मण.
 भाज्यांत भाजक किती वेळा जातो हें पहा; यावरून जो भागाकार ये-
 ईल तो, दुसरे अंकाचे कल्पनेकरितां घेतां येईल. जर होर्नरची कृति
 लावल्यावर, पूर्वीचे, अथवा एकचे स्थळींचे अंकाचे कृतीनें तो भाजक
 वाढविलेला असून, जर तितके वेळा भाज्यांत जातो, तर हा कल्पिलेला
 अंक खरा आहे. उदाहरण, वरचे पक्षांत ९६४५३ यांत ६४०३७
 हे एक वेळा जातात; तर १ हा अंक खरा आहे किंवा नाही हें तपा-
 सून पहा. हा अंक खरा आहे असें होर्नरचे कृतीपासून दिसते, आ-
 णि कृतीची ही दुसरी पायरी पुढीलप्रमाणे आहे,

२	१६०	४८०१	६४०३७	९६४५३	(१)
	१६२	४९६३	६९०००	२७४५३	
	१६४	५१२७	७४१२७		
	१६६	५२९३			
	१६८				

याप्रमाणे झळिल्ये मूळाचा पूर्ण भाग काढल्यावर, त्याचा अपूर्ण
 भाग काढायसाठी कृतीचे रूप सुलभ होतें.



समीकरणे उलगडण्याची होर्नर साहेबाची रीति. २७१

सांगीतले समीकरण चवथ्या वर्णाचे आहे ह्मणून, भाज्य अंकांवर चार शून्ये मांड, भाजकावर तीन शून्ये, त्याचे डावेकडल्या जवळचा अग्रसरावर दोन शून्ये, त्याचे डावेकडल्यावर एक शून्य, आणि पहिले पद तसेच ठेवावे; नंतर पूर्वीप्रमाणे नवे भाज्य आणि भाजकापासून भागाकाराचा नवा अंक काढून, तो अंक घेऊन होर्नरचा कृतीप्रमाणे पुढे चालावे. पुनः जीं पदे निघतात, त्यांस वर सांगितल्याप्रमाणे शून्ये जोडून यांशीं पुनः कृति करून, भागाकाराचा पुढला अंक काढावा; आणि याप्रमाणे पुढेहि. अशा तऱ्हेने शून्ये लाविलीं असतां दशांश चिन्हाची कांहीं गरज पडत नाही, आणि त्यापासून भागाकारांतील वेगवेगळ्ये अंकस्थळांचे किमतीचा विचार करावा लागत नाही. पूर्वी वर्गमूळ काढण्याची संक्षेप रीति सांगितली त्याप्रमाणे यांत, जेथून संक्षेप करावा लागतो, त्याचे पूर्वीचीं इच्छिलेलीं स्थळे काढण्याची सर्व कृति पुढे दाखविली आहे. यांत दशांशाचे एक स्थळापर्यंत कृति केली आहे.

२	०	१	-३	४१६७९३ (२१३
	४०	८०१	१६०१७	९६४५३
	८०	२४०१	६४०३७	२७४५३००००
	१२०	४८०१	६९०००	४७३३९७७८
	१६०	४९६३	७४१२७०००	
	१६२	५१२७	७५७३००७४	
	१६४	५२९३००	७७३४८३७६	
	१६६			
	१६८०	५३४३५८		
	१६८६	५३९४३४		
	१६९२	५४४५२८		
	१६९८			
	१७०४			

किती अधिक येतील ते जाणलें असतां बरें. संक्षेप करतेसमयीं भाजकांत जितकीं अंकस्थळें आहेत, तितकीं स्थळें मूळांत येतील, कदाचित् एक किंवा दोन स्थळें कमीहि येतील, असा निश्चय करितां येतो. जसें, वरचे उदाहरणाचे शेवटील भाजकांत आठ अंकस्थळें आहेत, त्यापासून संक्षेप केल्यानें निदान सहा स्थळें तरी येतील. संक्षेपाचा आरंभ करायासाठीं, भाज्यास तसाच राहूं दे, भाजकाचे उजवेकडचा एक अंक काप, त्याचे पूर्वीचे पदाचे उजवेकडून दोन अंक काप, त्याचे पूर्वीचे पदाचे उजवेकडून तीन अंक काप, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. या तऱ्हेनें संक्षेपाचा आरंभ करतेसमयीं ही पुढील ओळ येईल,

|०००२ १|७०४ ५४४५|२८ ७७२४८३७|६ ४७३३९७७८

यांतून पहिलें पद अगदीं निरूपयोगी आहे. जे डावेकडचे अंक रेषेने कापले नाहीत, ते मात्र घेऊन पूर्वीप्रमाणें कृति कर. कृति करतेसमयीं कापलेल्ये अंकांतून दुसऱ्ये अंकांचे हातचे घेऊन, कापलेला पहिला अंक कृति करण्यांत घ्यावा. यावरून या पुढीलप्रमाणें होईल;

१ ७०४	५४४५	२८	७७३४८३७	६	४७३३९७७८	(६
	५४५५	५	७७६७५७०	६	७३४३५४	
	५४६५	७	७८००३६४	८		
	५४७५	९				

दुसऱ्यानें संक्षेप करतेसमयीं, पहिलें पद १|७०४ हें, |००१७०४ असें होतें, आणि यामुळें ते अगदीं निरूपयोगी होतें. दुसरी पायरी निराळी मांडिली असतां याप्रमाणें होईल, परंतु ती या पक्षांत उपयोगी नाही.

५४|७५९ ७८००३६|४८ ७३४३५४ (०

B4

A3

समीकरणे उलगडण्याची होर्नर साहेबाची रीति. २७३

एथें ७३४३५४ या भाज्यांत ७८००३६ हा भाजक जात नाही, ह्मणून मूळाचे अंकांत ० मांडून दुसरा संक्षेप करावा.

$$\begin{array}{r|l} ५४७५९ & ७८००३ \\ \hline & ६४८ \\ & ७८००८५ \\ & ७८०१३४ \end{array} \quad \begin{array}{l} ७३४३५४ \\ ३२२७७ \end{array} \quad (९$$

पुढील संक्षेप करितानां पहिलें पद | ००५४७५९ असें होतें, यामुळें तें निरूपयोगी होतें, ह्मणून बाकीची कृति केवळ संक्षेप भागाकाराप्रमाणें करावी इतकें मात्र बाकी राहिलें.

$$\begin{array}{r} ७८०१ | ३४) ३२२७७(४१३७ \\ \hline १०७२ \\ २९२ \\ ५८ \\ ३ \end{array}$$

आणि २१३६०९४१३७ हें इच्छिलें मूळ, अथवा क्षची किंमत आहे. आतां एका समीकरणाची सर्व कृति पुढें करून दाखवितों, त्या समीकरणाचें एक मूळ ३ आणि ४ यांचामध्यें आहे. तें समीकरण याप्रमाणें आहे;

$$, \text{क्ष}^३ - १०\text{क्ष} + १ = ०$$

३	-१	२०००	९९०७९६
६	X	१७००	२०९०००
X ९०		१७९१	१९७६९०००
९१	X	१८८३००	७४३३६९००००००
९२		१८९२३१	१७२३११७१०२७३०००
X ९३०	X	१९०१६३००	९९१२४७४४७६८१
९३१		१९०२५६३१	३९४६२८७५४२०
९३२	X	१९०३४९६३००००	१३९१४९१५५९
X ९३३०		१९०३५२४२९९०९	५८९९३१२३
९३३१	X	१९०३५५२२९८२७००	१८८६०४७
९३३२		१९०३५६०६९८०५	१७२८३५
X ९३३३००X		१९०३५६९०९७८५	१५१५
९३३३०३		१९०३५६९१४४५२	१८३
९३३३०६		१९०३५६९१९११	१२
X ९३३३०९०		१९०३५६९१९३०	१
९३३३०		९९१९०३५६९१९४९	
९३३३१		०८	
X ०९३३३१		१७	

जे अंक एकाखालीं एक वारंवार येतात ते मांडण्याची गरज नाही; जसे, १९०३५६ हे अंक वारंवार प्रत्येक ओळींत येतात, ह्मणून ते मांडण्याचे प्रयोजन नाही. परंतु ते सोडले असता किती सुलभ पडेल, याविषयी शिकणारानें स्वतां विचार करावा. याविषयीं वर सर्व कृति करून दाखिली आहे.

ही पुढील उदाहरणे अभ्यासाकरिता उपयोगी पडतील;

B5

B4

A3

भूमितीला अंकगणित लावण्याचा रितीविषयी.

शिकणारा भूमितीचे प्रसिद्ध शब्दांशी माहीत झाला असता, त्यास या पुढील रिती समजण्यास सुलभ पडेल. यांत जेव्हां कोणी एक रेषा दुसऱ्या रेषेने गुणायाची असें येते, तेव्हां एका रेषेत जितके एक जातीचे एक आहेत, जसे, फुट, इंच, इत्यादि, तितक्या वेळा दुसऱ्या रेषेतील त्याच जातीचे एक घेण्याचे आहेत असें समजावे. परंतु दुसरे अर्थाने पाहिले असता, एक परिमाण दुसऱ्या परिमाणाने गुणायाचे आहे असें ह्मणणे अयोग्य आहे. सारख्ये जातीचीं सर्व परिमाणें सारख्ये जातीचा एकमाणीं दाखविलीं पाहिजेत. जसे, फुटी आणि फुटीचे दशांश, अथवा इंच आणि इंचाचे दशांश, यांणीं सर्व रेषा दाखवाव्या. आणि जा जातीचे एकमानें लांबी दाखविलेली असती त्याच जातीचे चौरस एकमाणीं क्षेत्र दाखविले जाते; आणि त्याच जातीचे एकमाणीं घन, अथवा भरीव दाखविले जाते. हे समजल्यावर या पुढील रिती सर्व जातीचे एकमांस लागू होतील.

काटकोनचौकोनाचे क्षेत्रफळ करायची रीति. जा दोन बाजू एकत्र मिळतात, त्यांतील एक परस्पर गुण, अथवा जा दोन बाजू एकत्र मिळतात त्या परस्पर गुण; जो गुणाकार येईल तितके चौरस एक क्षेत्रांत आहेत. जसे, जर ६ फुटी आणि ५ फुटी अशा दोन बाजू आहेत, तर क्षेत्र फळ ६×५ , अथवा ३० चौरस फुटी आहे. त्याचप्रमाणे जा चौरसाची बाजू ६ फुटी आहे, त्यांचे क्षेत्रफळ ६×६ , अथवा ३६ चौरस फुटी आहे. (२३४).

समांतर रेषा चौकोनाचे क्षेत्रफळ करायची रीति. एक बाजू आणि तिचे समोरचे बाजूचे लंबांतर हीं परस्पर गुण; तो गुणाकार क्षेत्रफळांतील चौरस एकमा बरोबर होईल.

त्रापीज्यायदाचे* क्षेत्र फळ करायची रीति. जा दोन रेषा समांतर नसतात, त्यांतून एकीचे मध्यापासून दुसरीवर लंब करून, त्या लंबाने ती दुसरी रेषा गुणून; जो गुणाकार येईल ते उत्तर होईल.

* ही चार बाजूंची आकृती आहे, त्यांतील समोरासमोरचा दोन बाजू समांतर असतात. आणि दुसऱ्या समांतर नाहीत.

वर तिचे समोरचे कोनापासून लंब करून, त्याच बाजूने तो लंब गुणून, त्या गुणाकाराचे अर्ध क्षेत्रफळ होईल. अथवा, तीन बाजूंचे लांब्यांची बेरीज घेऊन तिचे अर्ध करावे, नंतर या अर्धातून तीन बाजूंचा लांब्या वेगळाल्या वजा कराव्या, नंतर या तीन बाक्या व अर्ध बेरीज ही परस्पर गुणून, गुणाकाराचे वर्गमूल काढावे. ते मूळ त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रातील चौरस एकमांची संख्या होईल; याची दुप्पट करून ती कोणते-हि बाजूचे लांबीने भागिली, तर भागाकार त्याच बाजूचे समोरचे कोनाचे लंबांतर होईल.

जे वर्तुळ त्रिकोणाचे तीनहि बाजूंस आंतून स्पर्श करिते, त्याची त्रिज्या काढायाची रीति. वर सांगितल्याप्रमाणे त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढून, त्यास त्रिकोणाचे सर्व बाजूंचे अर्ध बेरीजेने भाग, जो भागाकार येईल ते उत्तर.

काटकोनत्रिकोणाचा दोन बाजू दिल्या असतां, कर्णरेघ काढायाची रीति. दोन बाजूंचे वर्ग करून त्यांची बेरीज घ्यावी, आणि तिचे वर्ग मूळ काढावे ते उत्तर होईल.

काटकोनत्रिकोणाचा कर्ण आणि एक बाजू दिली असतां, दुसरी बाजू काढायाची रीति. दिलेल्या दोन बाजूंचे बेरीजेस त्यांचे वजाबाकीने गुणून गुणाकाराचे वर्गमूल काढ.

वर्तुळाचे त्रिज्येपासून जवळ जवळ परिघ काढायाची रीति. दुप्पट त्रिज्या, अथवा व्यास यांस $3 \cdot 1415926$ यांणी गुण, गुणाकारांत इच्छेप्रमाणे दशांशस्थळे घे. जवळ येण्यासाठी व्यासाला २२ नीं गुणून ७ नीं भाग. दशांश सोडून बरोबर उत्तर येण्यासाठी, व्यासाला 3.14 नीं गुणून १३३ नीं भाग. (१३१) कलमांतील शेषटील उदाहरण पहा.

वर्तुळाची त्रिज्या आणि सेक्तोराचा कोन, हीं दिली असतां वर्तुळाचे सेक्तोराची लांबी काढायाची रीति. कोनाचे मापास विकळांचे*

*काटकोनाचे बरोबर ९० भाग केले असतात त्यास अंश क्षणतात, प्रत्येक अंश बरोबर ६० भागांत विभागलेला असतो, त्यास कळा क्षणतात, एक कळेचे बरोबर ६० भाग केले असतात, त्यास विकळा क्षणतात. $2^{\circ} 15' 40''$ याचा अर्थ, २अंश, १५कळा, आणि ४० कळा असे समजावे.

B4

A3

रूप देऊन, त्यांस त्रिज्येने गुण आणि तो गुणाकार २०६२६५ यांणी भाग, जो भागाकार येईल तितके एकं त्याचे कौसाची लांबी होईल.

वर्तुळाची त्रिज्या दिली असतां त्याचें जवळ जवळ क्षेत्रफळ करायाची रीति. त्रिज्येचा वर्ग ३१४१५९२७ यांणी गुण.

वर्तुळाची त्रिज्या आणि सेकतोराचा कोन दिला असतां, सेक्तोराचें क्षेत्रफळ करायाची रीति. कोनाचे मापास विकळांचें रूप देऊन, त्यास त्रिज्येचे वर्गाने गुण आणि तो गुणाकार २०६२६५×२ , अथवा ४१२५३० यांणी भाग, जो भागाकार येईल तें क्षेत्रफळ होईल.

काटकोन भरीवाचें घनफळ करावयाची रीति. जा तीन बाजू एकत्र मिळतात, त्या परस्पर गुण, तो गुणाकार त्याचे घन एकं होतील. जर आकृती काटकोन नसली, तर तिचे कोणयेहि एक बाजूचें क्षेत्रफळ करून, तें त्या बाजू पासून तिचे समोरचे बाजूचे लंबांतराने गुणावें, तो गुणाकार त्या समांतर भरीवाचे घन एकं होतील.

शंकूचें घनफळ करायाची रीति. पायाचें क्षेत्रफळ करून तें शंकूचें लंब उंचीने गुणावें, आणि तो गुणाकार ३ नीं भागावा.

पृज्यमाचें घनफळ करावयाची रीति. पायाचे क्षेत्रफळास दोन तोंडांचे लंबांतराने गुणावें.

गोलाचें पृष्ठफळ करावयाची रीति. त्रिज्येचा वर्गाची चौपट ३१४१५९२७ यांणी गुणावी.

गोलाचें घनफळ करावयाची रीति. त्रिज्येचा घन करून त्यास $३१४१५९२७ \times \frac{३}{४}$, अथवा ४१२८७९ यांणी गुणावें.

सरळ शंकूचें पृष्ठफळ करायाची रीति. पायाची परिमिती बाजूचे तिकेस उंचीने गुणून, त्या गुणाकाराचें अर्ध उत्तर होईल. अशा शंकूचें घनफळ करायासाठीं, पायाचें क्षेत्रफळ लंबउंचीने गुणून गुणाकाराचा एक तृतीयांश उत्तर होईल.

सरळ शिळिंदराचें पृष्ठफळ करायाची रीति. पायाचा परिघ उंचीने गुणावा, तो गुणाकार उत्तर होईल. त्याच घनफळ करायासाठीं पायाचे क्षेत्रफळास उंचीने गुणावें.

जेव्हां कांहीं पदार्थाचें घनफळ माहित असतें, आणि जर त्या पदार्थाचा एक घन इंच किंवा एक घन फुट याचें वजन माहित असल्यास, त्यावरून त्या सर्व पदार्थाचें वजनहि काढितां येईल. परंतु निरनिराळ्या

एक घन लोहाचा पदार्थाचे वजनाची जे प्रमाण ठेवितात, त्याप्रमाणाचे कोष्टक केले असतात. तो पदार्थ बहुतेकरून, शुद्धपाणी असे ठरविले आहे, आणि पाण्याचे वजनाची दुसऱ्या पदार्थाचे वजनाचे प्रमाणास स्पिसिफिक ग्राविटी म्हणतात. जसे, सोन्याची स्पिसिफिक ग्राविटी १९.३६२ आहे, अथवा शुद्धपाण्याचे एक घन फुटीचे वजनाचे १९.३६२ पट, सोन्याचे एक घन फुटीचे वजन आहे. एक सोन्याचे गोळ्याची त्रिज्या ४ इंच आहे, आणि त्याचे वजन किती आहे हे जाणायचे आहे. या गोळ्याचे घनफळ $4 \times 4 \times 4 \times \frac{4}{3} \pi$, अथवा 268.082 घन इंच आहे; आणि जापेक्षा (२१७) प्रमाणे एक घन इंच पाण्याचे वजन २.५२४५८ ग्रेन आहे, यावरून सोन्याचे प्रत्येक घनइंचाचे वजन 2.52458×19.362 , अथवा 4888.091 ग्रेन आहे; यावरून सोन्याचे 268.082 घन इंचाचे वजन 268.082×4888.091 ग्रेन, अथवा चायचे २२७ $\frac{1}{2}$ पौंड जवळजवळ आहे. रसायण शास्त्राचे आणि यंत्र शास्त्राचे बहुतेक ग्रंथांत स्पिसिफिक ग्राविटीचे कोष्टक असतात.

पाण्याचे एक घन फुटीत चायचे ९० $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ औंस, अथवा ७५.७३७ पौंड आहेत, अवाड्युपार्सचे ९९७.१३६९६९१ औंस, अथवा ६२.३२१०६०६ पौंड आहेत. साधारण कामाविषयी एक घन फुट पाण्याचे वजन १००० औंस धरले तरी चालेल, तेथेकरून स्पिसिफिक ग्राविटीचे कोष्टकाचे साधारण रूप होते. जसे, जेव्हा एकाद्या पदार्थाची स्पिसिफिक ग्राविटी ४.११७२ आहे असे जेव्हा आढळते, तेव्हा त्या पदार्थाचे एक घन फुटीचे वजन ४११७ औंस आहे असे समजावे. जापेक्षा खरे उत्तर घेण्यासाठी या आलेखी उत्तरातून प्रत्येक हजार भागावदल ३ भाग वजा करावे.

समाप्त.

B4

A3

शुद्धिपत्र.

पृष्ठ.	ओळ.	अशुद्ध.	शुद्ध.	पृष्ठ.	ओळ.	अशुद्ध.	शुद्ध.
७	२६	अंकाविषयी	अंकाविषयी	११०	२९	प्रपाणे	प्रमार्णे
८	२०	अंकाची	अंकाची	१११	२५	७x२०+२०	७x(२०+२०)
११	७	अंकाचे	अंकाचे	२७	५x२०+२०	५x(२०+२०)	
४७	२७	जागी	जागी	१४७	७	व्युत्क्रम	व्युत्क्रम
६४	३	१८,२९,२०	१८,१९,२०		८	व्युत्क्रम	व्युत्क्रम
		७	साधारण		१८	युक्तस	व्युत्क्रम
६९	८	६	६		२१	एनएटअ	एनएटअ
७०	२६	१०००	१०००	१५१	१	अंशानी	अंशानी
७२	१३	१७२३०९०७ १००००	१७२३०२०७ १००००	१६८	२	माहित	माहित.
	१५	जाचे छेदस्थळी	जाचे छेदस्थळी	१७९	१४	दर ३८ पेनोस	दर १८ पेनोस
७९	१०	पहाण्याकरिता	पहाण्याकरिता	१९३	३	मनुष्ये	६ मनुष्ये
	११	(२१२)	(११२)	२२७	३	पैक्षा	पैक्षा
८९	९	०२=००८	०२+००८	२४०	२२	१३८	१३८
९७	१२	००७८१२५	००७८१२५	२४७	२९	१	१
१०६	३०	२६०१	२०६१	२४८	२९	१-१	१-१
१०७	१९	दशाशस्थळे	दशाशस्थळे	२७८	३१	कळा	विकळा
१०७	२१	आरंभो	आरंभो	२७९	१५	चें	चें
१०९	१६	गुणिले	गुणिले		२७	त्याच	त्याचें