Übungsaufgaben

Aufgabe 28.1. Berechne das charakteristische Polynom zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 28.2. Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 28.3.*

Zeige, dass das charakteristische Polynom zu einer linearen Abbildung $\varphi \colon V \to V$ auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V wohldefiniert ist, also unabhängig von der gewählten Basis.

Aufgabe 28.4. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Zeige, dass für jedes $\lambda \in K$ die Beziehung

$$\chi_M(\lambda) = \det\left(\lambda E_n - M\right)$$

gilt.[1]

Aufgabe 28.5. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Wie findet man die Determinante von M im charakteristischen Polynom χ_M wieder?

Aufgabe 28.6. Zeige, dass das charakteristische Polynom der sogenannten *Begleitmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

gleich

$$\chi_M = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

ist.

[1]Die Hauptschwierigkeit bei dieser Aufgabe ist vermutlich zu erkennen, dass man hier wirklich was zeigen muss.

Aufgabe 28.7.*

Wir betrachten die reelle Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme

$$M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $n = 1, 2, 3, 4$.

b) Sei

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} := M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Erstelle eine Beziehung zwischen den Folgen x_n und y_n und Rekursionsformeln für diese Folgen.

c) Bestimme die Eigenwerte und die Eigenvektoren zu M.

Aufgabe 28.8.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestimme das charakteristische Polynom von M.
(2) Bestimme eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von M und klammere den entsprechenden Linearfaktor aus.
(3) Begründe, dass das charakteristische Polynom von M zumindest zwei reelle Nullstellen hat.

Aufgabe 28.9.*

Es sei λ eine Nullstelle des Polynoms

$$X^3 + 2X^2 - 2.$$

Zeige, dass

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{(1+\lambda)^3} \\ \frac{1}{(1+\lambda)^2} \\ \frac{1}{(1+\lambda)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor der Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert λ ist.

Zur Lösung der folgenden Aufgabe ist neben den beiden vorstehenden Aufgaben auch Aufgabe 24.31 hilfreich.

Aufgabe 28.10. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi \colon \mathbb{R}^4_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^4_{\geq 0},$$

die einem Vierertupel (a, b, c, d) das Vierertupel

$$(|b-a|\,, |c-b|\,, |d-c|\,, |a-d|)$$

zuordnet. Zeige, dass es Zahlentupel (a, b, c, d) gibt, für die bei beliebig vielen Iterationen der Abbildung nie das Nulltupel erreicht wird.

Aufgabe 28.11.*

Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ v \longmapsto Mv.$$

Aufgabe 28.12.*

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2+\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

a) Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

b) Berechne zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

c) Stelle die Matrix für φ bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren auf.

Aufgabe 28.13. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Berechne:

(1) die Eigenwerte von A
(2) die zugehörigen Eigenräume;
(3) die geometrische und algebraische Vielfachheit der einzelnen Eigenwerte;
(4) eine Matrix $C \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ derart, dass $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 28.14. Bestimme den Eigenraum und die geometrische Vielfachheit zu -2 zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28.15.*

Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 28.16.*

Es sei $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine Matrix mit n (paarweise) verschiedenen Eigenwerten. Zeige, dass die Determinante von M das Produkt der Eigenwerte ist.

Aufgabe 28.17. Es sei K ein Körper, $a \in K$ und $m, n \in \mathbb{N}_+$ mit $1 \leq m \leq n$. Man gebe Beispiele für $n \times n$-Matrizen M derart, dass a ein Eigenwert zu M ist mit der algebraischen Vielfachheit n und der geometrischen Vielfachheit m.

Aufgabe 28.18.*

Bestimme, welche der folgenden elementargeometrischen Abbildungen linear, welche diagonalisierbar und welche trigonalisierbar sind.

(1) Die Achsenspiegelung durch die durch $4x - 7y = 0$ gegebene Achse.

(2) Die Verschiebung um den Vektor $(5, -3)$.
(3) Die Drehung um 30 Grad gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung.
(4) Die Punktspiegelung mit dem Punkt $(1, 0)$ als Zentrum.

Aufgabe 28.19. Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist oder nicht.

Aufgabe 28.20. Eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Finde eine Basis, bezüglich der φ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Die nächsten Aufgaben verwenden die folgende Definition.

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Untervektorraum $U \subseteq V$ φ- *invariant* , wenn

$$\varphi(U) \subseteq U$$

gilt.

Aufgabe 28.21. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige folgende Eigenschaften.

(1) Der Nullraum $0 \subseteq V$ ist φ-invariant.
(2) V ist φ-invariant.
(3) Eigenräume sind φ-invariant.
(4) Es seien $U_1, U_2 \subseteq V$ φ-invariante Unterräume. Dann sind auch $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ φ-invariant.
(5) Es sei $U \subseteq V$ ein φ-invarianter Unterraum. Dann sind auch der Bildraum $\varphi(U)$ und der Urbildraum $\varphi^{-1}(U)$ φ-invariant.

Aufgabe 28.22. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $v \in V$. Zeige, dass der kleinste φ-invariante Unterraum von V, der v enthält, gleich

$$\langle \varphi^n(v),\, n \in \mathbb{N} \rangle$$

ist.

Aufgabe 28.23.*

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die durch

$$U = \{v \in V \mid \text{ es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \varphi^n(v) = 0\}$$

definierte Teilmenge von V ein φ-invarianter Unterraum ist.

Aufgabe 28.24. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, bezüglich der die Matrix zur linearen Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine obere Dreiecksmatrix sei. Zeige, dass die erzeugten Untervektorräume

$$\langle v_1, \ldots, v_i \rangle$$

φ-invariant für jedes i sind.

Aufgabe 28.25.*

Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist oder nicht.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 28.26. (2 Punkte)

Berechne das charakteristische Polynom zur Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 8 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28.27. (3 Punkte)

Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 28.28. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ mindestens einen Eigenvektor besitzt.

Aufgabe 28.29. (4 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Berechne:

(1) die Eigenwerte von A
(2) die zugehörigen Eigenräume;
(3) die geometrische und algebraische Vielfachheit der einzelnen Eigenwerte;
(4) eine Matrix $C \in \operatorname{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ derart, dass $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 28.30. (4 Punkte)

Bestimme für jedes $\lambda \in \mathbb{Q}$ die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28.31. (4 Punkte)

Entscheide, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 8 \\ 6 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ trigonalisierbar ist.

Aufgabe 28.32. (3 Punkte)

Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist oder nicht.