始

中等教育
新撰
幾何

理學博士
渡邊孫一郎著

株式會社
賰文堂藏版

中等教育
新撰幾何

東京工業大學教授
東京商科大學教授
理學博士
渡邊孫一郎著

株式會社
睟文堂藏版

緒　言

本書ハ曩ニ刊行シタ中等教育新撰算術代數ト共ニ中等實業學校ニ於ケル數學教科書トシテ編纂シタモノデアル。

幾何學ヲ教授スルニ當リ困難ヲ感ズルノハ生徒ガ直觀的ニ眞ナリト思惟スル定理ヲ證明スルコトデアル。本書第一編入門ニ於テハ斯ノ如キ定理ハ直觀ニ訴ヘ實驗ニ徵シテ證明ヲ省キ重要圖形ニ關スル定義,定理ヲ誘導スルト共ニ徐々ニ幾何學的理論ニ慣レ生徒自ラ證明ノ必要ヲ感ゼシメルコトニ努メタ。

第二編直線圖形ニ於テ初メテ從來ノ幾何學ニ入リ或程度ノ嚴正ヲ保持シテアル。サレド,其後ニ於テモ尙或部分ニテハ前編ノ趣旨ヲ踏襲シテ直觀ニヨツテ負擔ノ輕減ヲ圖ツタ。

相似形ニ附隨シテ三角函數ノ初步ヲ授ケ應用ノ一端ヲ知ラシメルコトヲ試ミタ。

教授時數ヲ顧慮シテ作圖問題ノ吟味,軌跡等

ハ立體幾何大意ト共ニ附錄ニ讓ツタ．立體幾何ハ論理ノ嚴正ヲ幾分犧牲ニ供シテ立體ノ展開圖又ハ模型製作等ノ方法ニヨツテ平バ直觀的ニ空間概念ヲ與ヘル方針ヲ取ツタ．

練習問題ハ平易ニシテ趣味ニ富メルモノヲ選定シ既授事項ノ理解ト應用トニ遺憾ナキヲ期スルト共ニ後出事項ノ準備ニナリ暗々ノ裡ニ素地ヲ作ルコトニ注意ヲ拂ツタ．

算術代數トノ聯絡ヲ考ヘ計算問題ヲ課シ,一方定理ノ證明等ニモ代數的方法ニヨツタノガアル．

以上ハ本書構成ノ大要ヲ略述シタノデアルガ要スルニ最小勞力デ最大效果ヲ收メルコトヲ期圖シテ編纂シタノデアル．

昭和八年十月

著者識

中等教育 新撰幾何

目次

第一編 入門

第二編 直線圖形

第三編 圓

第四編 比及比例

附錄第一 補遺

附錄第二　立體幾何大意

附錄第三　補充問題

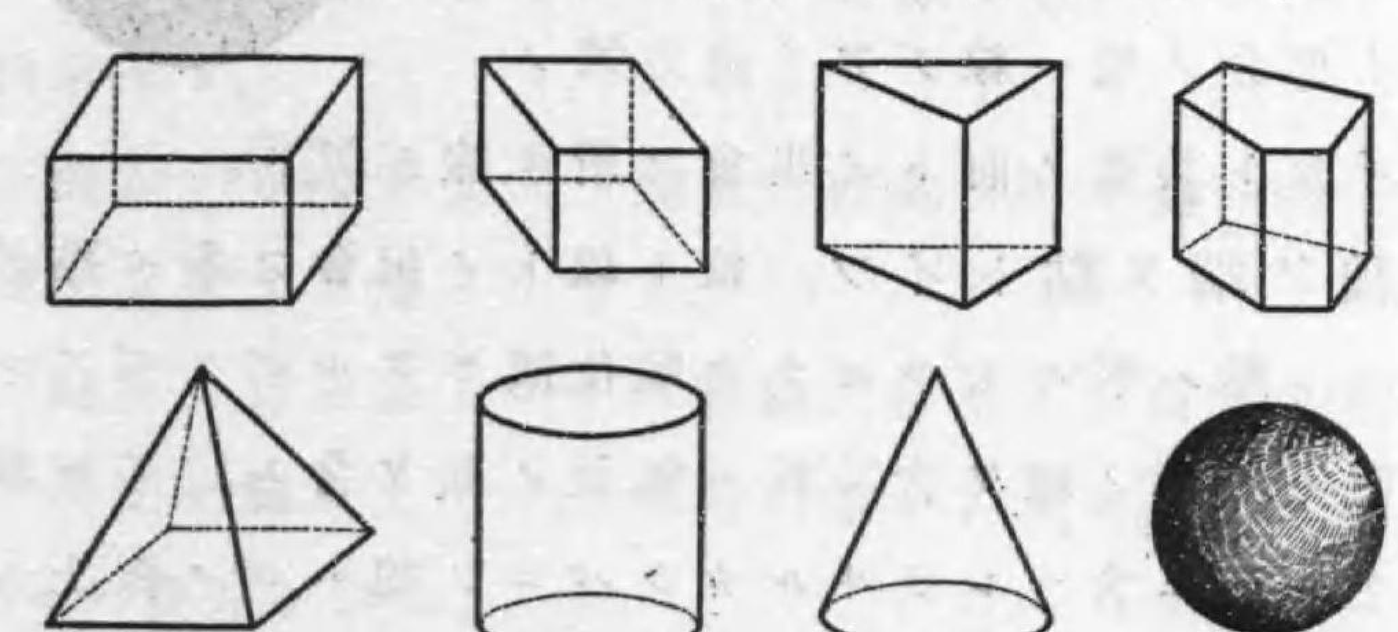
第一編

入門

1. 圖形

物體ハ之ヲ組成セル物質,形,大サ,色,目方等種々ノ方面カラ觀察スルコトガ出來ルガ特ニ形,大サ,位置ダケヲ考ヘル場合ニ之ヲ**立體**トイヒマス。護謨毬モ彈丸モ共ニ球デアリ,マッチ箱モ角砂糖モ共ニ直方體デアルトイフノハ形ダケヲ考ヘタモノデ,球,直方體ナドハ形ノ名デアル。

問1.　次ニ圖示セル立體ノ名ヲ言ヒナサイ。



問2.　角壔,圓壔,角錐,圓錐ノ形ヲシテキル物體ノ例ヲ述ベヨ。

立體ノ境界又ハ其ノ一部分ヲ**面**トイフ。面ニハ厚サハナイ。紙ノ表トカ裏トカイフノハ面デスガ一枚ノ紙全體ヲ考ヘルト面デハナイ。

直方體ハ平ラナ面卽**平面**デ圍マレテキルガ球ノ表面ハドンナ小部分ヲ考ヘテモ平面デハナイ。コノ様ナ面ヲ**曲面**トイフ。

問3. 問1ノ立體ハ各幾ツノ面デ圍マレテキルカ。ソノ面ハ平面カ曲面カ。

面ノ境界又ハ其一部分ヲ**線**トイフ。面ト面トノ出會フ所モ線デアル。線ニハ幅ガナイ。右圖ノ黑イ部分ノ境ハ線デアリ直方體ノアル面ト其隣ノ面トノ出會フ所モ線デアル。

線ノ端(ハシ)ヲ**點**トイフ。線ト線トノ出會フ所モ點デアル。點ハ形モ大サモナク唯位置ガアルダケデアル。

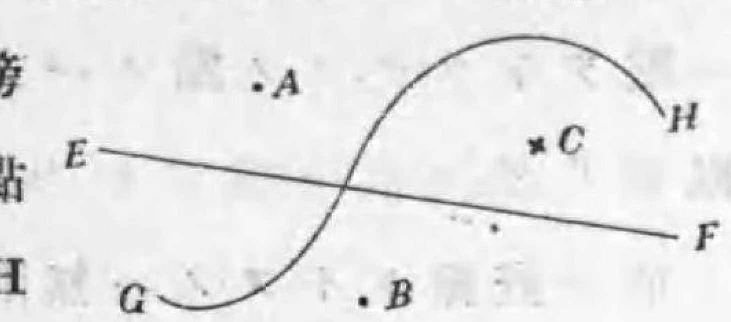
面ハ無數ノ線ヲ含ミ,線ハ無數ノ點ヲ含ム。アル線ガアル面ニ含マレテキルナラバコノ線ハコノ面上ニアルトイヒ,アル點ガアル線上ニアルナラバコノ點ハコノ線上ニアルトイヒマス。

立體,面,線,點又ハ是等デ作ラレルモノヲ**圖形**トイフ。

問4.　點ガ運動スルト其痕跡(アト)ハ何カ。線ガ運動スルト何ガ出來ルカ。面ガ運動スレバ如何。

2. 直　線

點ハ形モ大サモナク之ヲ紙面ニ畫クノハ困難デアルカラ・×ナドヲ畫キ其傍ニA,Bナドト記シテ之ヲ點A,點Bナドトイヒ,又EF,GHノ様ニ畫イテ線ヲ表ハシ之ヲ直線EF,曲線GHナドト呼ブ。



直線トハ眞直ナ線デアリ,ドンナ小部分デモ直線デナイ線ガ**曲線**デアル。

問1.　直線ト思ハレルモノ,曲線ト思ハレルモノヲ例示セヨ。

問2.　定規(ヂヤウギ)ヲ使ツテ適宜ノ直線ABヲ畫キ次ニ尺度(モノサシ)デ其長サヲ測リナサイ。

問3.　目分量デ5cmノ直線ヲ種々ノ方向ニ畫キ次ニ尺度デ測リナサイ。何程ノ違(チガヒ)ガアルカ。ソノ違ハ5cmノ幾%デスカ。

直線ハ如何程デモ引延(ヒキノ)バスコトガ出來ル。ソノ引延バシタ部分ヲ元ノ部分ノ**延長**トイフ。

直線ヲ双方ニ限リナク引延バシタト考ヘルト,ソノ全體ヲ**無限直線**トイッテ今マデ考ヘテキタ様ニ兩端ノアルノヲ**有限直線**又ハ**線分**トイヒマス。

線分ヲ其一方ニダケ無限ニ延バシタモノト考ヘルト,ソノ全體ヲ**半直線**又ハ**射線**トイフ。無限直線上ニ一點ヲトッテ,コノ點ノ一方ノ側ダケヲ考ヘテモ半直線デアル。

單ニ直線トイフノハ無限直線,半直線及線分ノ總稱デアル。

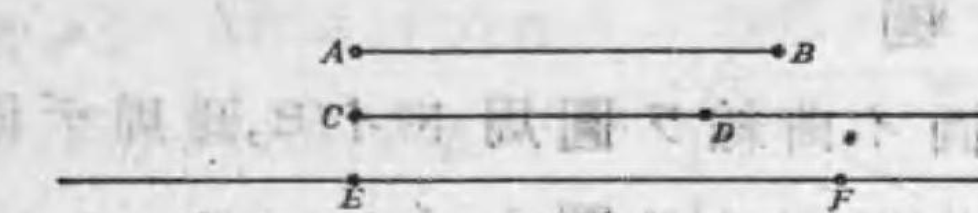
直線
- 線分又ハ有限直線…兩端共ニアル。
- 半直線又ハ射線……一端ダケアル。
- 無限直線…………兩端共ニナイ。

兩端ガAトBトデアル線分ヲ線分AB又ハ單ニABト呼ビ其長サヲ通常小文字a, b等デ表ハス。又半直線ヲ呼ブニハ其一端ノ名ノ次ニ其上ニアル一點ノ名ヲ續ケテ半直線CDナドト呼ブ。半直線CDハ一端ガCデDノ方ニ無限ニ延ビテキル半直線デアル。又無限直線ハ其上ニアル二點ノ名ヲ使ッテ無限直線EFナドトイフ。

半直線ヤ無限直線ハ其長サヲ考ヘルコトガ出來ナイ。又之ヲ限リアル紙面ニ畫クコトモ出來ナイカラ

適宜ノ線分ヲ畫イテ想像スルニ止メル。

二點A,Bヲ兩端トスル線分ヲ作ル



コトヲA,Bヲ**結ブ**又ハ**結ビ付ケル**トイッテ線分ABノ長サヲ二點A,Bノ**距離**トイフ。

線分ABノ眞中ノ點卽ABヲ二等分スル點ヲ線分ABノ**中點**トイフ。

問4　紙面ニ線分ABヲ引キ目分量デ其中點ニ印(シルシ)ヲツケナサイ。次ニコノ紙ヲ二ツニ折リAヲBニ重ネテABノ中點ヲ見付ケナサイ。

紙面ニ畫カレテアル一直線上ノ二點ヲ他ノ紙面ニ畫カレテアル一直線上ニ置クト直線全體ガ重ナリ,又糸ヲ強ク引張ルト糸ガ眞直ニナルノハヨク見受ケルコトデアルガ,之ハ次ニ示ス直線ノ基本性質ノ表ハレタモノデアル。

二點ヲ通リ唯一ツノ直線ヲ引クコトヲ得。

直線ハ二點間ノ最短通路デアル。

從テ二點A,Bノ距離トイフノハAカラBニ至ル最短通路ノ長サノコトデアル。

問5.　定規ノ緣(フチ)ガ正シイ直線デアルカドウカヲ調

ベル方法ヲ考ヘナサイ。

3. 圓

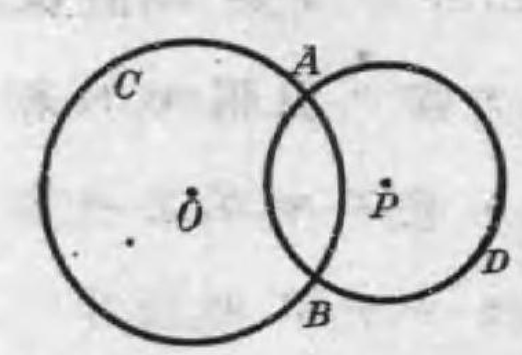
眞圓(マンマル)イ曲線ヲ**圓周**トイヒ,圓周デ圍マレテヰル部分(平面ノ)ヲ**圓**トイヒマス。

圓周ヲ畫クニハ兩脚器(コンパス)ヲ用ヒル。兩脚器ハ圓周ヲ畫クダケデナク長サヲ移スニモ用ヒラレル。

兩脚器デ圓周ヲ畫クトキニ固定シテアル一端ニ當ル點ヲ圓ノ**中心**トイヒ,中心ト圓周上ノ點トヲ結ブ線分ヲ**半徑**トイフ。

同ジ圓ノ半徑ハ皆等シイ

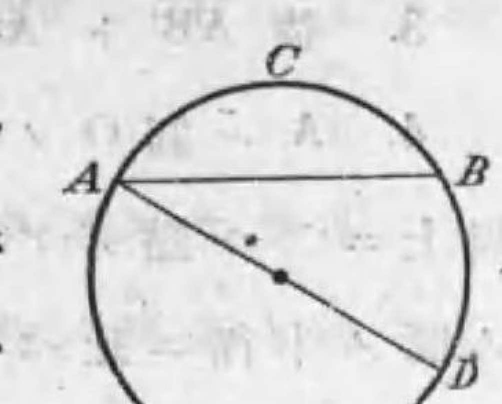
コトハ圓周ノ畫キ方カラ考ヘテ明カデアル。



圓又ハ圓周ヲ呼ブニハ中心ノ名ヲ使フカ又ハ圓周上ノ三點ノ名ヲ使フ。例ヘバ圖ノ左ノ圓ヲ圓O又ハ圓ABCト呼ビ右ノヲ圓P又ハ圓ABDト呼ブ。

問1. 圓周上ノ二點ノ名デ圓ヲ呼ブコトニシテハイケナイデセウカ。

圓周ノ一部分ヲ**弧**トイヒ,圓周上ノ二點ヲ結ブ線分ヲ**弦**トイフ。次圖ニ於テAB,ADハ弦デアル。



兩端ガA,Bデアル弧ヲ弧ABト呼ビ $\overset{\frown}{AB}$ ト書ク。$\overset{\frown}{AB}$ ハ二ツアツテ,通常ハ小サイ方ヲ $\overset{\frown}{AB}$ デ表ハスノデスガ混雜ノ恐レアルトキニハ $\overset{\frown}{ACB}$, $\overset{\frown}{ADB}$ ナドト書イテ區別スル。

中心ヲ通ル弦ヲ**直徑**トイフ。直徑ノ長サハ半徑ノ二倍デアル。同ジ圓ノ半徑ハ皆等シイカラ

同ジ圓ノ直徑ハ皆等シイ。

問2. 圓周ト其一ツノ直徑トヲ畫キナサイ。次ニソノ直徑ヲ折目ニシテ折返シ直徑ノ一方ノ側ニアル弧ヲ他ノ側ノニ重ネナサイ。

直徑ハ圓及圓周ヲ二等分スル。

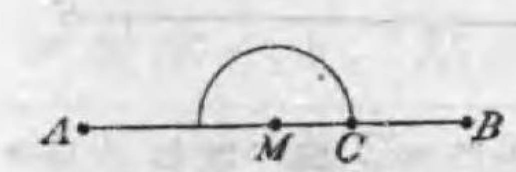
コノ二等分セラレタ各ヲ**半圓**,**半圓周**トイヒマス。

例　題

1. 定規ト兩脚器トヲ使ツテ次ノ二線分 a, b ノ和及差ヲ畫キナサイ。

2. 線分ABノ中點ヲMトシ

AB上ノ一點ヲCトスル。AC=a糎, CB=b糎トシテACトCBトノ差ヲMCニ比較セヨ。



3. 弦 AB ト $\widehat{AB}$ トハドチラガ長イカ。何故カ。

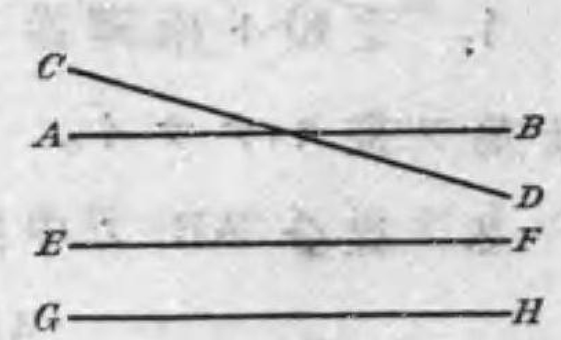
4. A ハ圓 O ノ内ニアル點, B ハ外ニアル點, C ハ圓周上ニアル點デアル。是等ノ點ト中心トノ距離ヲコノ圓ノ半徑ニ比ベナサイ。次ニ半徑ノ長サヲ r デ表ハシテ前ノ結果ヲ等式又ハ不等式デ示シナサイ。

5. 四ツノ點 O, A, B, C ヲ　$OA=4.2cm$,　$OB=2.7cm$, $OC=3.5cm$ ナル樣ニトリ, O ヲ中心ニシテ半徑 $3.5cm$ ノ圓周ヲ畫キナサイ。A, B, C ハコノ圓ノ内ニアルカ, 外ニアルカ。

6. 半徑 $2cm$ ノ圓周上ニ與ヘラレタ點*A ガアル。A ヲ一端ニシテ長サ $3cm$ ノ弦ヲ畫キナサイ。幾ツ畫ケルカ。弦ノ長サガ $1cm$, $2cm$, $4cm$, $5cm$ ナラバ如何。

4. 平行ト垂直

同一平面上ニアル相異ナル二直線ハ出會フコトト, 出會ハヌコト(何程延長シテモ)トガアル。初ノ場合ニハ二直線ハ**交ハル**トイッテ其出會フ點ヲ**交點**トイフ。又後ノ場合ノ二直線ヲ**平行直線**又ハ**平行線**トイフ。

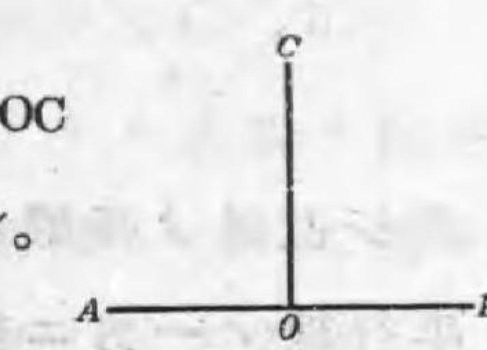


*與ヘレタ點, 與ヘラレタ長サ等トイフノハ既知ノ點, 既知ノ長サ等トイフコトデアル。「與ヘラレタ」ノ代リニ「定マレル」トイフコトモアル。

ヽEF ガ GH ニ平行デアルコト卽 EF ト GH トガ平行線デアルコトヲ $EF \parallel GH$ デ表ハス。

問1. 平行線ト思ハレルモノヲ言ヒナサイ。

障子ノ縱ノ棧ト橫ノ棧或ハ織物ノ經糸(タテイト)ト緯糸(ヨコイト)ノ樣ナ位置ニアル二直線ヲ互ニ**垂直**デアルトイフ。或ハ二直線ノ一方ヲ他ノ**垂線**トイッテ其交點ヲ**垂線ノ足**トイフ。



圖ニ於テ OC ハ AB ノ垂線, AB ハ OC ニ垂直ナル直線デ O ハ其足デアル。

OC ガ AB ノ垂線デアルコトヲ $OC \perp AB$ デ表ハシ線分 OC ノ長サヲ**點 C ト直線 AB トノ距離**トイフ。

相交ハル二直線ガ互ニ垂直デナイトキニハ一方ヲ他ノ**斜線**トイッテ其交點ヲ**斜線ノ足**トイフ。

問2. 垂直ナル二直線ト思ハレルモノヲ言ヘ。

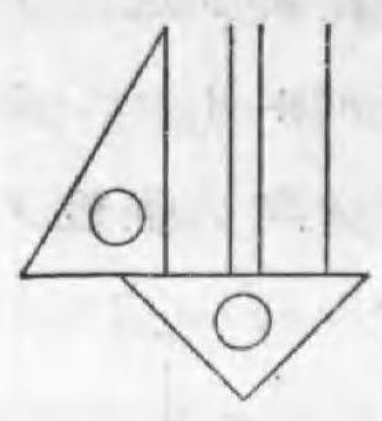
問3. 三角定規ヲ使ッテ種々ノ方向ノ直線トソノ垂線トヲ作リナサイ。

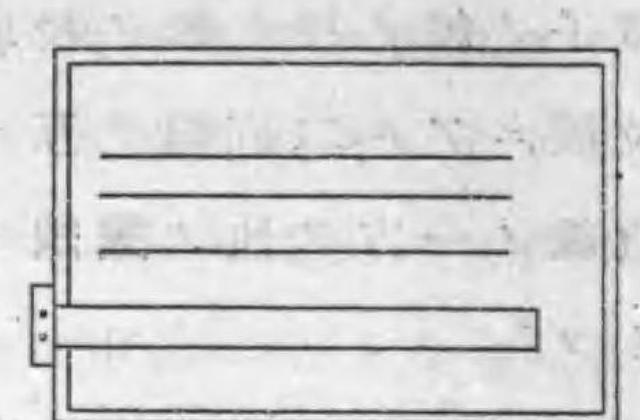
問4. 一點ヲ通ッテ一直線ニ垂線ヲ幾ツ引クコトガ出來ルカ。點ガ直線上ニアル場合ト直線外ニアル場合トヲ實際ニ畫イテ驗シナサイ。

一點ヲ通リ一直線ニ唯一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得。

問5. 一ツノ直線ニ幾ツカノ垂線ヲ引イテ是等ノ垂線ハ互ニ平行ナルコトヲ觀察シナサイ。

コノ事實ヲ利用シテ平行線ヲ畫クコトガ出來ル。





同ジ直線ノ垂線ハ互ニ平行デアル。

平行線ノ一方ニ垂直ナル直線ハ他ニモ垂直デアル。

同ジ直線ニ平行ナル直線ハ互ニ平行デアル。

平行線ノ共通垂線ガコノ平行線間ニ夾マレル部分ノ長サヲコノ**平行線ノ距離**トイフ。織物ノ幅河幅ナドトイフノハ織物ノ兩縁(フチ)又ハ河ノ兩岸ガ平行デアルト見做シテ其距離ノコトデアル。

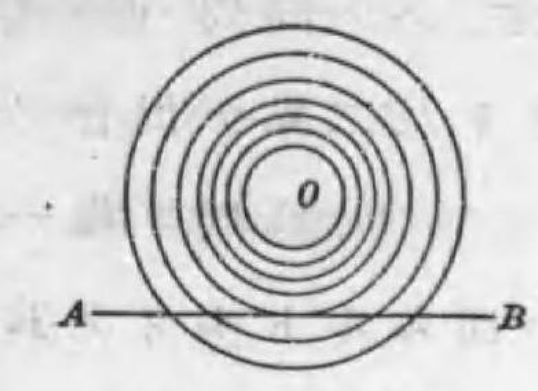
問6. 直線外ノ點ヲ通リコノ直線ニ平行ナル直線ヲ引キナサイ。幾ツ引ケルカ。

直線外ノ點ヲ通リコノ直線ニ平行ナル直線ヲ唯一ツ引クコトヲ得。

5. 圓ト直線及圓ト圓

同ジ點ヲ中心ニスル二ツ以上ノ圓ヲ同心圓トイフ。

問1. 直線 AB トO點トノ距離ガ 2cm ノトキニ,Oヲ中心ニシテ多クノ同心圓ヲ畫キナサイ。半徑ガ幾 cm ノトキニ圓周ト直線トガ唯一點デ出會フカ。



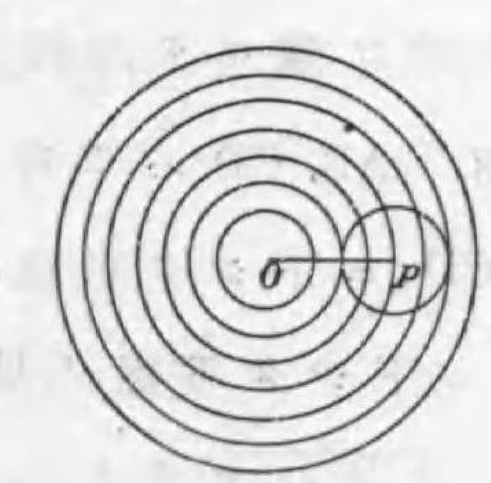
圓周ト直線トハ全ク出會ハヌ場合ト唯一點デ出會フ場合ト二點デ出會フ場合トガアル。

圓周ト直線トガ唯一點デ出會フトキハ直線ト圓周トハ**切スル**トイツテ其出會フ點ヲ**切點**トイヒ,二點デ出會フトキハ**交ハル**トイツテ其出會フ點ヲ**交點**トイフ。

圓ニ切スル直線ヲコノ圓ノ**切線**トイヒ,交ハル直線ヲ**割線**トイフ。

問2. 一ツノ圓周トコノ圓周ニ出會ハヌ直線,割線,切線ナドヲ畫キ,中心ト是等ノ直線トノ距離ヲ測ツテ半徑ニ比較シナサイ。

問3. 距離ガ 4cm デアル二點 O,P ガアル。P ヲ中心トスル半徑 2cm ノ圓ト,O ヲ中心ニシテ種々ノ半徑デ多クノ同心圓トヲ畫イテ觀察シナサイ。



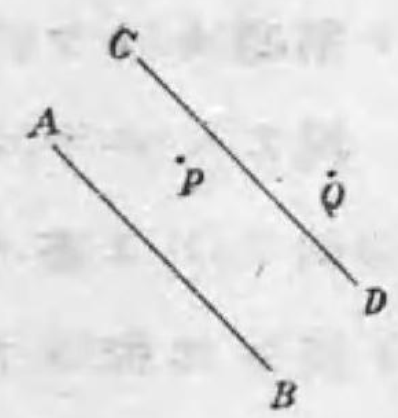
二ツノ圓周ハ全ク出會ハナイコト,唯一點デ出會フコト及二點デ出會フコトガアル。

二ツノ圓周ガ唯一點デ出會フトキニハコノ**二圓周ハ切スル**トイツテ其出會フ點ヲ**切點**トイヒ,二點デ出會フトキニハ**交ハル**トイツテ其出會フ點ヲ**交點**トイフ。

問4. 前問ニ於テO圓ノ半徑ヲ幾 *cm* ニスレバ圓Pニ切スルカ。又幾 *cm* カラ幾 *cm* マデノ範圍内ニアレバ交ハルカ。

例　題

1. 圖ニ於テ AB∥CD デアル。P,Q ノ距離, P ト CD トノ距離, Q ト AB トノ距離及 AB ト CD トノ距離ヲ測リナサイ。



2. 直線 AB 外ノ點 C ヲ通ツテ AB ノ垂線ト幾ツカノ斜線トヲ引キナサイ。次ニ垂線,斜線ノ長サ(點Cト足トノ距離)ヲ測ツテ比較シナサイ。

3. AB, CD ハ平行二直線デアル。AB 上ノ點 M カラ CD ニ下シタ垂線ノ足ヲ N トシ, CD 上ノ點 P カラ AB ニ下シタ垂線ノ足ヲ Q トスル。MN, PQ ノ長サヲ測ツテ比ベナサイ。

4. 一ツノ圓ニ多クノ平行弦ヲ畫キナサイ。次ニ是等ノ弦ノ中點ノ位置ヲ觀察シナサイ。

5. 圓 O ト其弦 AB トヲ畫キ AB ノ中點ヲ求メテ之ヲ C トスル。OC⊥AB デアルコトヲ驗シナサイ。

6. 一ツノ圓ニ長サノ等シイ弦ヲ幾ツカ引イテ是等ノ弦ト中心トノ距離ヲ比較シナサイ。

7. AB ハ圓 O ノ切線デ C ハ切點デアル。OC ト AB トニドンナ關係ガアルカ。

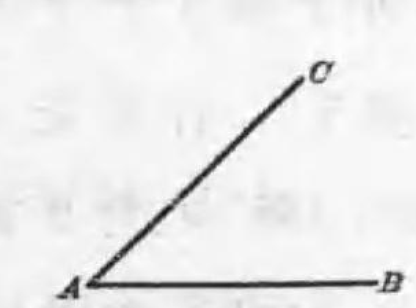
8. 切スル二ツノ圓ヲ O,P トシテ其切點ヲ A トスル。A ニ於テ圓 O ニ切線 XY ヲ引クト XX ハ圓 P ノ切線デスカ,割線デスカ。

6. 角

一點カラ出ル二ツノ射線又ハ線分(線分ハコノ點ヲ一端トスル射線ニ含マレルモノト考ヘル)ノ開キヲコノ二直線ノナス**角**トイツテ其點ヲ角ノ**頂點**,二ツノ射線ヲ角ノ**邊**トイフ。

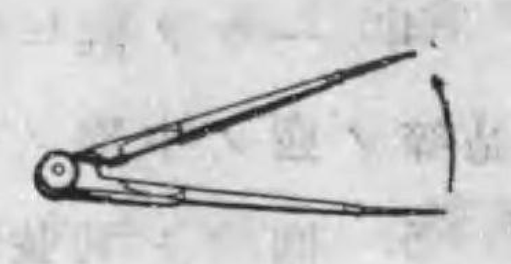
圖ニ於テハ A ハ頂點, AB,AC ハ邊デアル。

問1. 角ト思ハレルモノヲ言ヒナサイ。



角ノ大サハ其二邊ノ開キ方ニヨルノデアル。兩脚器ノ兩脚ヲ

次第ニ開クト兩脚ヲ邊トスル角ガ次第ニ大キクナル。



垂直ナル二直線ノナス角ヲ**直角**トイヒ,之ヲ ∠R デ表ハス。2∠R ハ直角ノ二倍デアリ,直角ノ $\frac{2}{3}$ ハ $\frac{2}{3}$∠R デ表ハサレル。

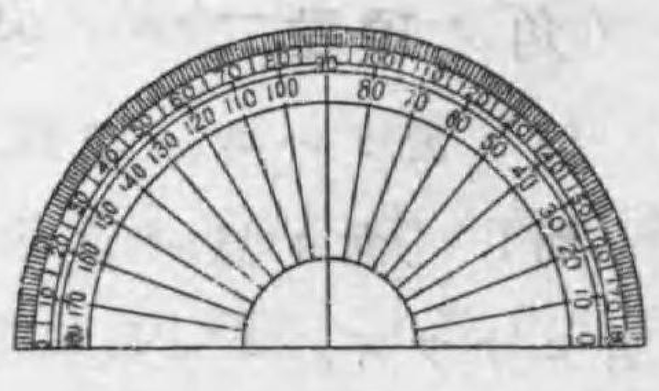
∠R ヨリ小サイ角ヲ**鋭角**,∠R ヨリ大キク 2∠R ヨリ小サイ角ヲ**鈍角**トイフ。

角ノ大サハ前ノ樣ニ直角ヲ單位ニシテ $\frac{1}{2}$∠R, $\frac{5}{3}$∠R ナドトイフコトモアルガ度,分,秒デ言ヒ表ハスコトモアル。34度25分30秒ヲ $34°\ 25'\ 30''$ ト書ク。

問2. 直角ハ幾度デスカ。1度ハ幾分デスカ。1分ハ幾秒デスカ。

問3. $\frac{3}{4}$∠R, $\frac{8}{5}$∠R ハ各幾度デスカ。又是等ノ角ハ鋭角デスカ鈍角デスカ。

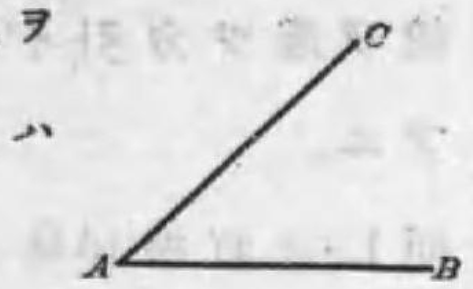
畫カレテアル角ノ大サヲ測リ又ハ既知ノ大サノ角ヲ畫クニハ**分度器**ヲ用ヒル。



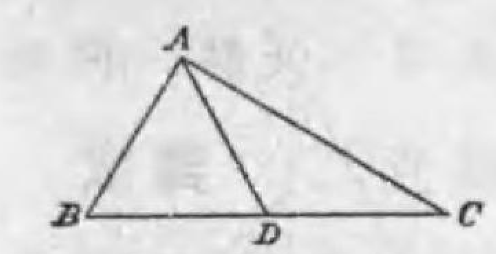
問4. 分度器デ三角定規ノ角ヲ測リナサイ。

問5. 目分量デ 30°, 45°, 60°, 120°, 135° ノ角ヲ畫キナサイ。次ニ是等ヲ分度器デ測ッテ何程ノ誤差ガアルカ調ベナサイ。

圖ノ角ヲ角A又ハA角トイヒ,之ヲ∠A ト書ク。混雜ノ恐レアルトキニハ ∠BAC 又ハ ∠CAB ト書ク。



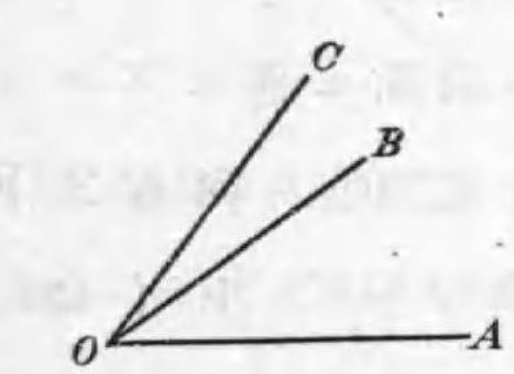
∠a, ∠b ノ樣ニ小文字ヲ使フコトモアルガ,之ハ主トシテ角ノ大サヲ表ハストキニ使ハレル。



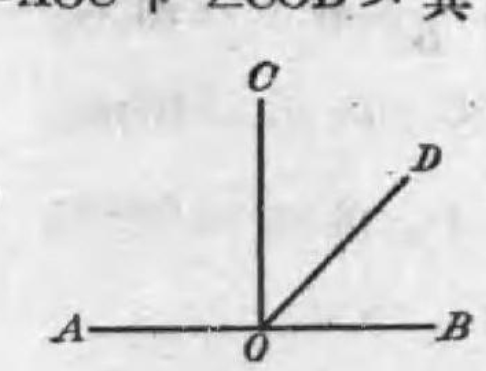
問6. 右圖デ ∠BAC ハドノ角カ。∠ABC ト ∠ACB トハ同ジ角デスカ。∠BAC=90°, ∠CAD=30° ナラバ ∠BAD ハ幾度デスカ。

7. 平 角

圖ニ於テ ∠AOB ト ∠BOC トハ頂點Oト一邊OBトヲ共有シテOBノ兩側ニアル。コノ樣ナ二ツノ角ヲ**接角**トイフ。



直線 AB 上ノ點Oカラ AB ニ垂線 OC ヲ引イテ出來ル接角 ∠AOC ト ∠COB ハ共ニ ∠R デスカラ



∠AOC+∠COB=2∠R

又圖ノ樣ニ O カラ AB ノ斜線 OD ヲ引ケバ

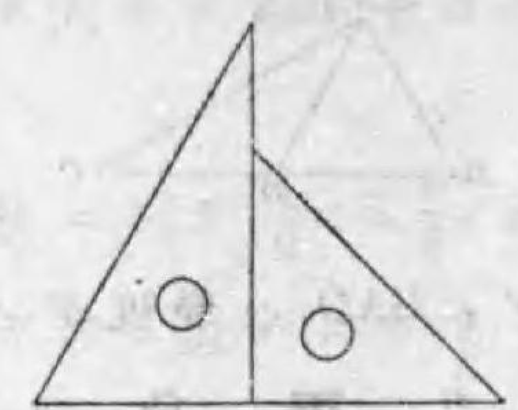
∠AOD+∠DOB=∠AOC+∠COD+∠DOB=2∠R

直線上ノ一點カラコノ直線ノ同ジ側ニ垂線又ハ斜

線ヲ幾ツカ引イテ出來ル次々ノ接角ノ和ハ$2\angle R$デアル。

問1. 直線 AB 上ノ點 O カラ斜線 OD ガ出テヰル。$\angle AOD=\frac{5}{4}\angle R$ ナラバ $\angle DOB$ ハ何程カ。モシ又 $\angle AOD$ ガ $\angle DOB$ ヨリ 30° 大キイナラバ $\angle AOD$, $\angle DOB$ ハ各程カ。

問2. 二枚ノ三角定規ノ直角ヲツナギ合セルト定規ノ二邊ハ一直線ニナルコトヲ驗シナサイ。



二邊ガ同一直線上ニアル角ヲ**平角**トイフ。

平角ノ大サハ$2\angle R$ 卽 180° デアル。平角ノ二邊ハ一直線上ニアルガ單ナル直線ハ平角デハナイ。平角ニハ頂點モ邊モアルガ直線ニハ頂點ヤ邊ガナイ。

二角ノ和ガ$2\angle R$ デアルト,コノ二角ハ互ニ**補角**ヲナストイヒ,二角ノ一方ヲ他ノ**補角**トイフ。

例ヘバ 60° ノ補角ハ 120° デアリ, $\frac{3}{5}\angle R$ ノ補角ハ $(2-\frac{3}{5})\angle R$ 卽 $\frac{7}{5}\angle R$ デアル。

問3. 次ノ角ノ補角ヲ求メナサイ。

(1) 75° (2) $62^\circ\ 30'$ (3) $1\frac{1}{8}\angle R$

問4. $\angle AOC$ ト $\angle COB$ トハ接角デアッテ $\angle AOC=68^\circ$ $\angle COB=112^\circ$ デアル。$\angle AOB$ ハ幾度カ。AO, OB ハ一直線

カ否カ。モシ又 $\angle AOC=\frac{5}{7}\angle R$, $\angle COB=\frac{8}{7}\angle R$ ナラバ如何。

8. 對頂角

圓周トカ角トカイフ様ナ術語ノ意味ヲ其語ノ**定義**トイヒマス。吾人ハ既ニ澤山ノ定義ヲ學ンダ。

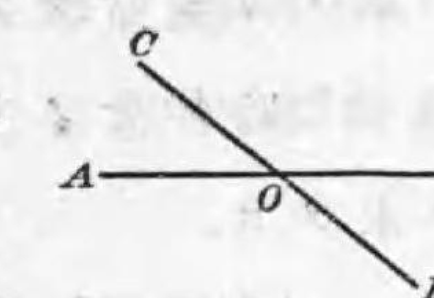
問1. 次ノ語ノ定義ヲ述ベヨ。

接角, 補角, 平角, 弧, 弦,

定義 二直線ガ交ハリテナス四ツノ角ノ中デ向キ合ヒノ二角ヲ**對頂角**トイフ。

例ヘバ圖ニ於テ $\angle AOC$ ト $\angle BOD$ トハ對頂角デアリ, $\angle AOD$ ノ對頂角ハ $\angle COB$ デアル。

問2. 右圖ニ於テ $\angle AOC=40^\circ$ ナラバ他ノ三ツノ角ハ各何程カ。



前問ニヨッテ $\angle AOC$ ガ 40° ナラバ其對頂角 BOD モ亦 40° デアルカラ $\angle AOC$ ト其對頂角トハ等シイ。$\angle AOC$ ノ大サ如何ニ拘ハラズ $\angle AOC$ ト其對頂角トガ等シイコトハ次ノ様ニスレバワカル。

$\angle AOB$ ハ平角 $\therefore$ $\angle AOC = \angle COB$ ノ補角

$\angle COD$ ハ平角 $\therefore$ $\angle BOD = \angle COB$ ノ補角

$\therefore$ $\angle AOC = \angle BOD$

問3. 上ト同様ニシテ前圖ニ於テ一組ノ對頂角 $\angle AOD$ ト $\angle COB$ トガ等シイコトヲ確メヨ。

例題

1. 或角ハ其補角ノ$\frac{2}{3}$デアル。コノ角ハ幾度カ。

2. 時計ノ長針ハ15分間ニ何程廻轉スルカ。1分間,5分間ニハ各幾度廻轉スルカ。又30分間,1時間,1.5時間,2時間ニハ各如何。

〔注意〕コノ様ニ考ヘルト射線ガ其一端ヲ固定シテ廻轉スルトキ一廻轉シテ初ノ位置ニ歸レバ$4\angle R$,二廻轉シテ初ノ位置ニ歸レバ$8\angle R$廻轉スルコトニナルガ,圖ニ畫カレテアル角ハ$2\angle R$以下ト考ヘルノガ通常デアル。

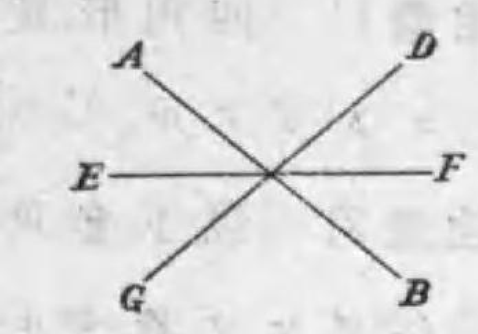
3. 2時40分ノトキニ時計ノ長針ト短針トノナス角ヲ求メヨ。

4. $\angle AOB=60°$デアッテOCハOニ於ケルOAノ垂線デアル。$\angle BOC$ハ幾度カ。OBトOCトガOAノ同ジ側ニアルトキ,反對ノ側ニアルトキノ二様ニ答ヘヨ。

5. 直線AB上ノ點Oカラ二ツノ斜線OC,ODガABノ兩側ニ出テキテ$\angle AOC=\angle BOD$デアル。$\angle COB+\angle BOD$ト平角AOBトヲ比較シテOC,ODハ一直線デアルコトヲ確メヨ。

手引 $\angle COD$ガ平角ニ等シイコトガワカツタナラバ其二邊OC,ODガ一直線ナルコトガワカツタノデアル。

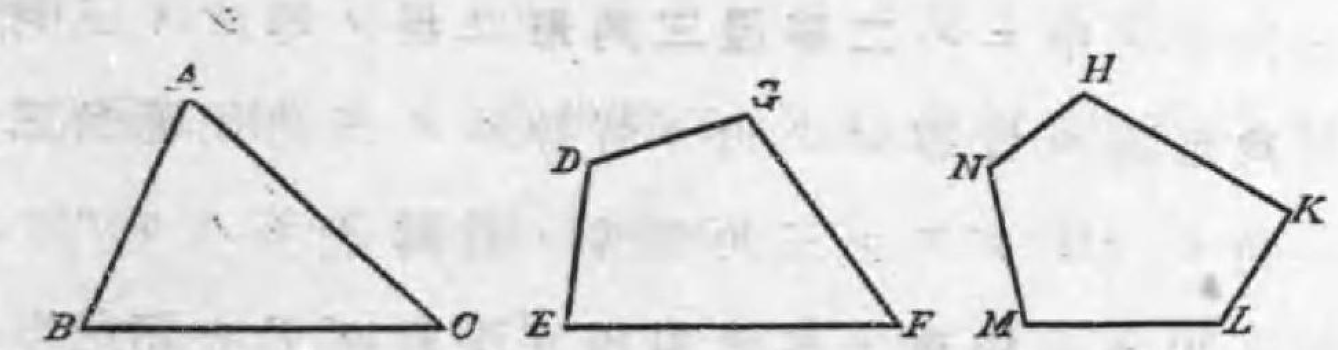
◎6. 一組ノ對頂角ノ各ノ二等分線ハ一直線ヲナスコトヲ確メヨ。*



手引 一組ノ對頂角$\angle AOC$, $\angle BOD$ノ二等分線ヲOE, OFトスル。$\angle AOE$ト$\angle FOB$トヲ比較シ,次ニ$\angle EOA+\angle AOF$ヲ平角AOBニ比較シナサイ。

9. 多角形

三角形,四角形ノヤウニ平面ノ一部分ガ連續シタ幾ツカノ線分デ圍マレテヰルナラバ之ヲ**多角形**トイツテ其線分ヲ**多角形ノ邊**,相隣レル二邊ノナス角ヲ**多角形ノ角**,其頂點ヲ**多角形ノ頂點**トイヒマス。



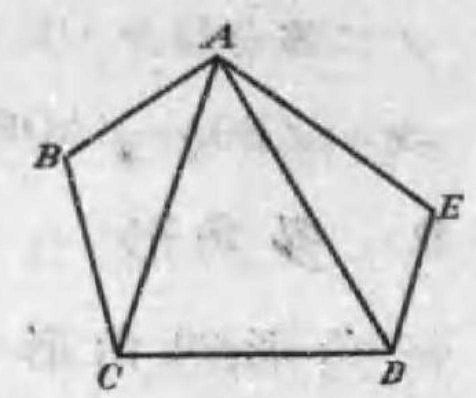
多角形ノ邊ノ數,頂點ノ數及角ノ數ハ等シイ。

多角形ハ其頂點ノ名ヲ順ニツヅケテ呼ビマス。例ヘバ上圖ノ多角形ヲ三角形ABC,四角形DEFG,五角形HKLMNトイフ。特ニ三角形ABCヲ△ABCト書ク。

*◎印ノツイタ問題ハ重要デアル。

〔注意1〕 四角形,五角形等ヲ四邊形,五邊形等トイフコトガアル。

〔注意2〕 以下多角形ノ角ハ總テ $2\angle R$ ヨリ小サイ場合ダケヲ考ヘル。コノ樣ナ多角形ヲ**凸多角形**トイフ。



多角形ノ隣リ合ツテキナイ頂點ヲ結ブ線分例ヘバ圖ノ AC, AD 等ヲ**對角線**トイフ。

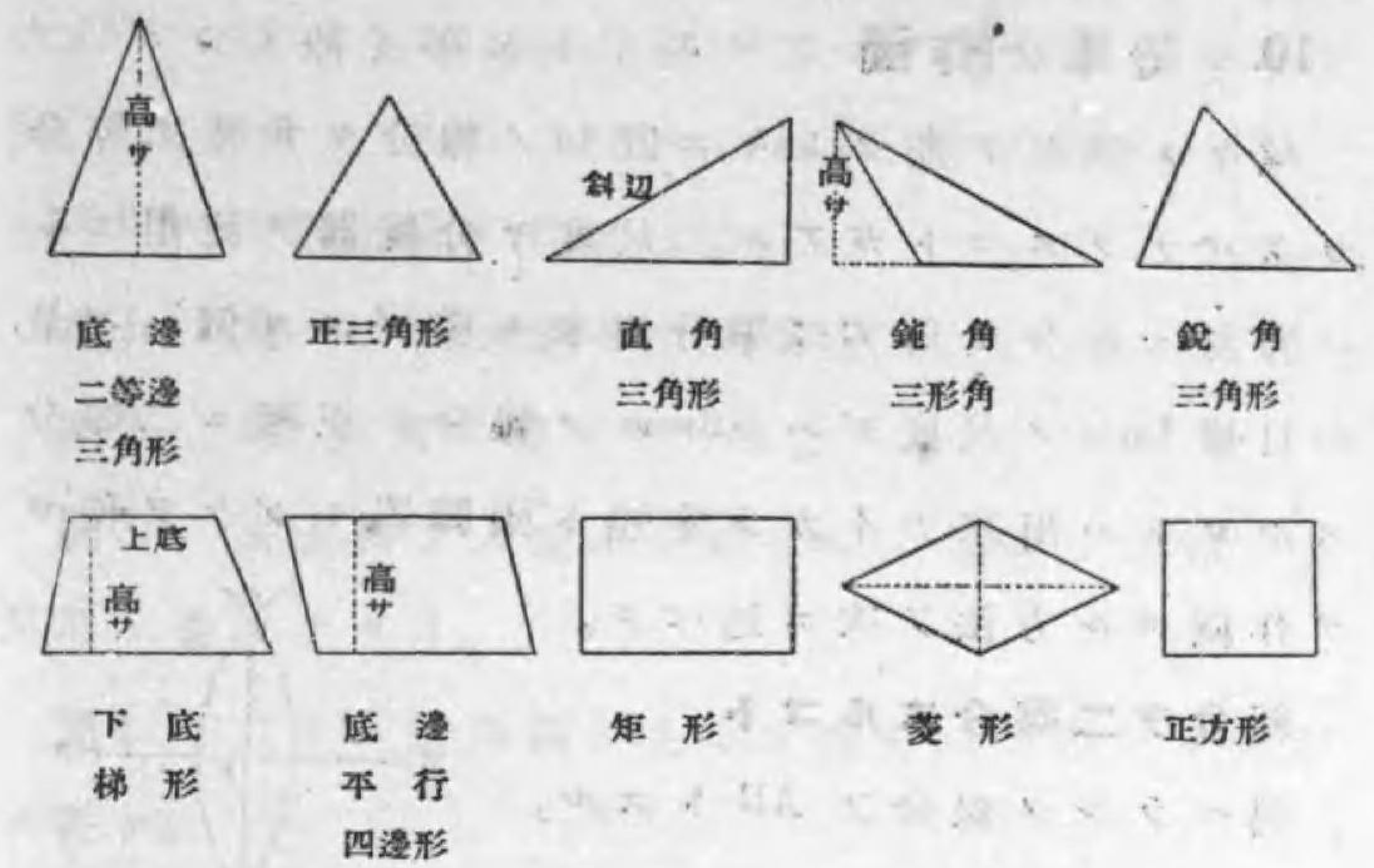
問1. 右圖ノ五角形ニハ AC, AD ノ外ニ幾ツ對角線ガアルカ。

問2. 六角形ヲ畫キ其總テノ對角線ヲ記入シ其數ヲ數ヘナサイ。

三角形ノ中ニハ**二等邊三角形**(二邊ノ等シイ三角形),**正三角形**(邊ガ皆等シク,角ガ皆等シイ三角形),**直角三角形**(一角ガ $\angle R$ デアル三角形)等ノ特殊ノモノガアリ,四角形ノ中ニハ**梯形**(一組ノ對邊ガ平行デアル四邊形),**平行四邊形**(二組ノ對邊ガ各平行ナル四邊形),**矩形**(角ガ皆等シイ四邊形),**菱形**(邊皆ガ等シイ四邊形),**正方形**(邊ガ皆等シク角ガ皆等シイ四邊形)等ノ特殊ナモノガアル。

問3. 三角定規ノ形ハ次圖ノドレニ當ルカ。

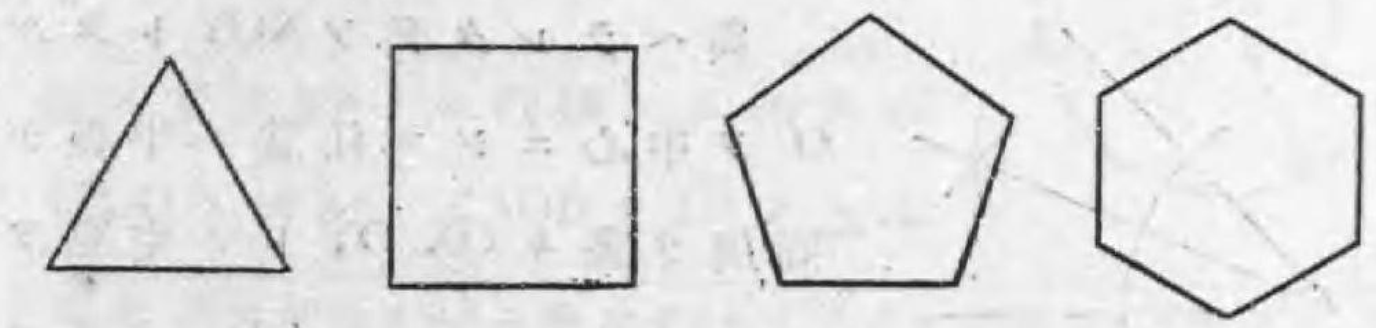
問4. 正方形ハ矩形ナリトイフコトガ出來ルカ。



問5. 二等邊三角形ヲ畫キ,其頂點カラ底邊ニ垂線ヲ引キナサイ。次ニコノ垂線ヲ折リ目トシテ折リ返シ垂線ノ左右ニアル部分ヲ重ネテ見ナサイ。

定義 總テノ邊ガ等シク,總テノ角ガ等シイ多角形ヲ**正多角形**トイフ。

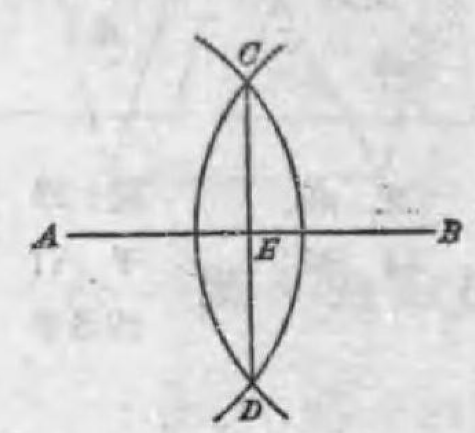
正三角形,正四角形等ハ其例デアル。正四角形ノコトヲ特ニ正方形トイフ。



10. 簡單ナ作圖

種々ノ圖形ヲ畫クトキニ既知ノ線分ヤ角ヲ二等分セネバナラヌコトガアル。尺度ヤ分度器ヲ使用スレバ容易ニ線分ヤ角ヲ二等分出來ル樣デスガ例ヘバ最小目盛 1mm ノ尺度デハ 5.6mm ノ線分ヲ正確ニ二等分スルコトハ出來ナイカラ定規ト兩脚器トダケヲ使ツテ作圖スル方法ヲ次ニ述ベル。

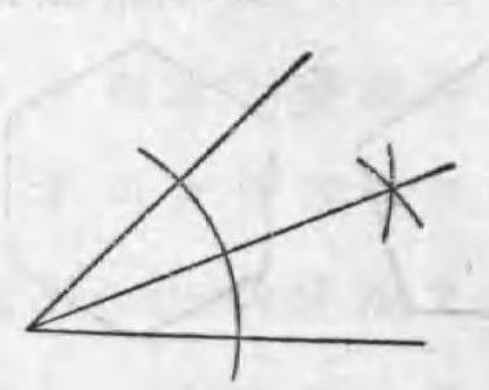
線分ヲ二等分スルコト



與ヘラレタ線分ヲ AB トスル。A, B ノ各ヲ中心ニシテ相交ハル等半徑ノ二圓周ヲ畫キ其交點ヲ C,D トスル。C,D ヲ結ブ線分ト AB トノ交點ヲ E トスレバ E ハ AB ヲ二等分スル點デアル。

〔注意〕 上ノ作圖デ直線 CED ハ AB ヲ二等分スルダケデナク, AB ニ垂直デアル。コノヤウナ直線ヲ AB ノ**垂直二等分線**トイフ。

角ヲ二等分スルコト



與ヘラレタ角ヲ XOY トスル。O ヲ中心ニシテ任意ノ半徑デ圓周ヲ畫キ OX, OY トノ交點ヲ夫々 A,B トスル。A,B ノ各ヲ

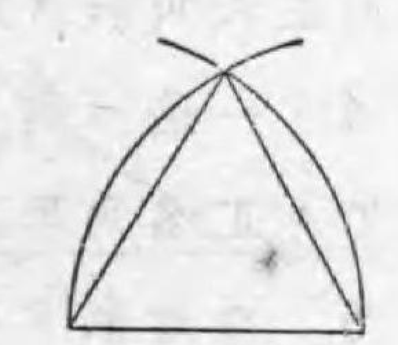
中心ニシテ前ト等シイ半徑デ二ツノ圓周ヲ畫キ其交點(O ト異ナル)ヲ C トスル。射線 OC ヲ作ルト OC ハ ∠XOY ノ二等分線デアル。

問 1.　與ヘラレタ線分ヲ四等分セヨ。

問 2.　45° ノ角ヲ畫キナサイ。

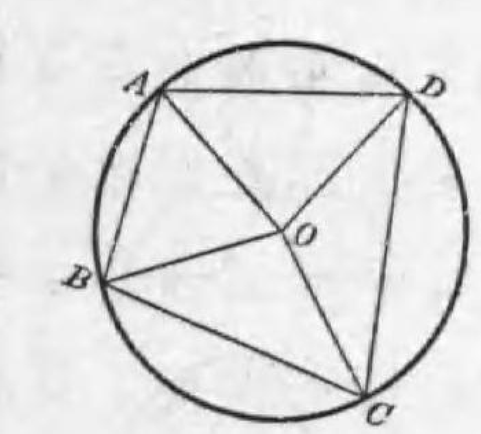
問 3.　底邊高サガ夫々*定線分 a, b ニ等シイ二等邊三角形ヲ畫キナサイ。

問 4.　二ツノ對角線ガ夫々定線分 a, b ニ等シイ菱形ヲ畫ケ。



問 5.　右圖ヲ見テ與ヘラレタル線分 BC ヲ一邊トスル正三角形ノ作圖法ヲ文章デ書キ表ハシナサイ。

11. 多角形ト圓



一ツノ多角形ノ頂點ガ皆同ジ圓周上ニアルナラバコノ多角形ハコノ**圓ニ內接スル**トイツテ圓ヲ多角形ノ**外接圓**トイヒマス。

圖ニ於テ圓 O ニ內接スル四角形ヲ ABCD トスル。∠AOB ヲ $\overset{\frown}{AB}$ ノ**上ニ**

*「底邊, 高サガ夫々 a, b ニ等シイ」トイフノハ底邊ガ a ニ等シク, 高サガ b ニ等シイコトデアル。順序ニ注意セヨ。

立ツ中心角又ハ AB ニ對スル中心角トイフ。

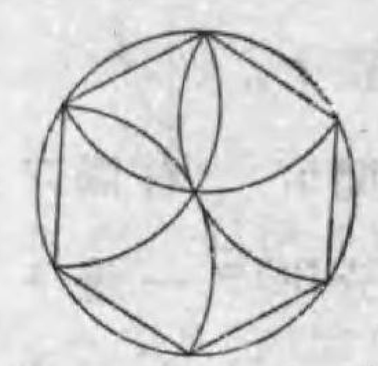
問　圓ニ内接スル正方形,正五角形,正六角形ノ一邊ニ對スル中心角ハ各幾度デスカ。

例題

1. 圓ニ内接スル正方形ヲ畫キ其作圖法ヲ文章デ書キ表ハシナサイ。

2. 前問ノ正方形ノ一邊ニ對スル中心角ヲ二等分シテ同ジ圓ニ内接スル正八角形ヲ畫ケ。

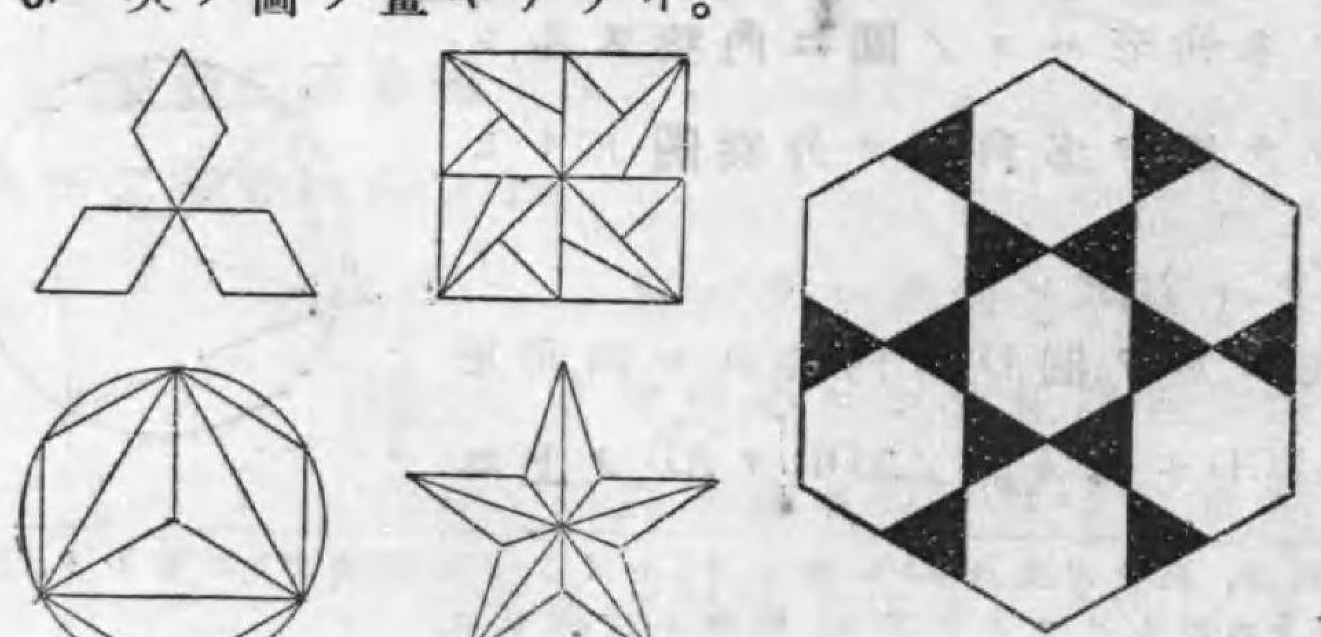
3. 右圖ヲ參考ニシテ圓ニ内接スル正六角形ヲ畫キナサイ。



4. 一邊ニ對スル中心角ガ 24° デアル正多角形ハ幾角形デスカ。

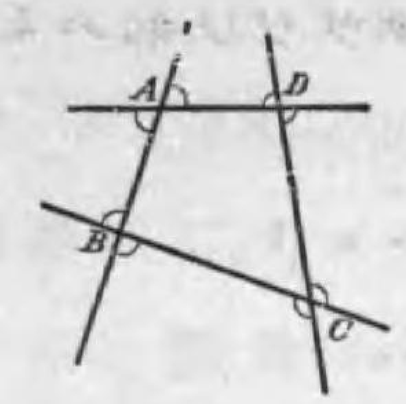
5. 分度器ヲ使ッテ一邊ニ對スル中心角ヲ適當ニ定メテ圓ニ内接スル正九角形ヲ畫ケ。

6. 次ノ圖ヲ畫キナサイ。



12. 三角形ノ角

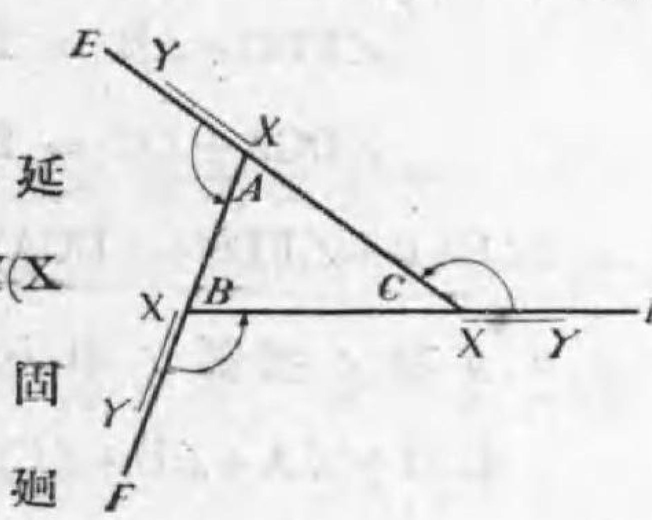
定義　多角形ノ一邊ノ延長ト其隣ノ邊トノナス角ヲ**外角**トイフ。



多角形ノ外角ハ各頂點ニ於テ二ツヅツアル。

外角ニ對シテ多角形ノ角ヲ特ニ**内角**トイフコトガアル。

三角形ニ於テハ一外角ノ接角デナイ内角ヲコノ外角ノ**内對角**トイフ。例ヘバ A ニ於ケル外角ノ内對角ハ ∠B* ト ∠C* トデアル。



△ABC ノ三邊ヲ圖ノ樣ニ延長シ AE ニ重ナレル直線 XY(X ガ A ニ重ナッテヰル)ガ X ヲ固定シ矢ノ方向ニ ∠EAB ダケ廻轉スレバ AB ニ重ナル。次ニ AB 上ヲ滑ッテ X ガ B ニ來タトキ再 X ヲ固定シテ ∠FBC ダケ廻轉スルト BC ニ重ナル。更ニ BC 上ヲ滑ッテ X ガ C ニ來タトキ又 X ヲ固定シテ ∠DCA ダケ廻轉スルト CA ニ重ナル。最後ニ CA 上ヲ滑ッテ X ガ A ニ來ルト最初ノ位置ニ歸ル。

*多角形 ABC…… デ單ニ ∠A, ∠B,…… トイフノハ其内角ヲ指スノデアル。

上ノ運動中XYハA,B,Cデ廻轉シテ最初ノ位置ニ歸ルノデアルカラA,B,Cデ廻轉シタ三ツノ角ノ和ハ4∠Rデアル。ソレ故ニ

三角形ノ各頂點ニ於ケル外角一ツヅツノ和ハ4∠Rニ等シイ。

コノ事實ヲ基礎ニシテ次ノ樣ニ考ヘルト。

三角形ノ內角ノ和ハ2∠Rニ等シイ。

コトガワカル。

前圖デ $\angle EAB+\angle A = 2\angle R$

$\angle FBC+\angle B = 2\angle R$

$\angle DCA+\angle C = 2\angle R$

$\therefore\ (\angle EAB+\angle FBC+\angle DCA)+(\angle A+\angle B+\angle C)=6\angle R$

トコロガ初ノ括弧ノ中ハ前ノ樣ニ4∠Rデアルカラ

$$4\angle R+(\angle A+\angle B+\angle C)=6\angle R$$

從テ $\angle A+\angle B+\angle C=2\angle R$

デアル。即如何ナル三角形デモ其三ツノ角ノ和ハ2∠RデアルコトガワカツタΟ

コノ事實ヲ基礎ニシテ考ヘルト

三角形ノ一外角ハ其內對角ノ和ニ等シイ。從テ三角形ノ一外角ハ其內對角ノ何レヨリモ大キイ。

コトガワカル。

問1. △ABCニ於テ $\angle B = 40°$, $\angle C = 65°$ ナラバ∠Aハ幾度デスカ。

問2. 正三角形ノ一角ハ幾度カ。

問3. △ABCハBCガ斜邊デアル直角三角形デアル。ソウスルト∠B+∠Cハ幾度カ。

定義 二角ノ和ガ∠Rデアルナラバコノニ角ハ互ニ**餘角ヲナス**トイヒ,二角ノ各ヲ他ノ**餘角**トイフ。

例ヘバ40°ノ餘角ハ50°デアリ,$\alpha°$ト$(90-\alpha)°$トハ互ニ餘角デアル。問3ニヨツテ

直角三角形ノ二ツノ銳角ハ互ニ餘角ヲナス

コトガワカル。

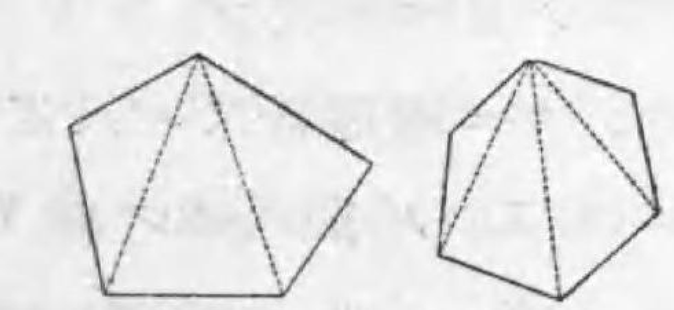
問4. 或角ハ其餘角ヨリ12°小サイ。コノ角ハ幾度デスカ。

例題

1. 四角形ノ四ツノ角ノ和ハ幾直角デスカ。

手引 一對角線ヲ引キ原形ヲ二ツノ三角形ニ分ケテ考ヘナサイ。

2. 五角形,六角形ノ角ノ和ハ各幾∠Rデスカ。



3. 正五角形,正六角形

ノ一ツノ角ハ各幾 ∠R デスカ。又一ツノ外角ハ各幾度デスカ。

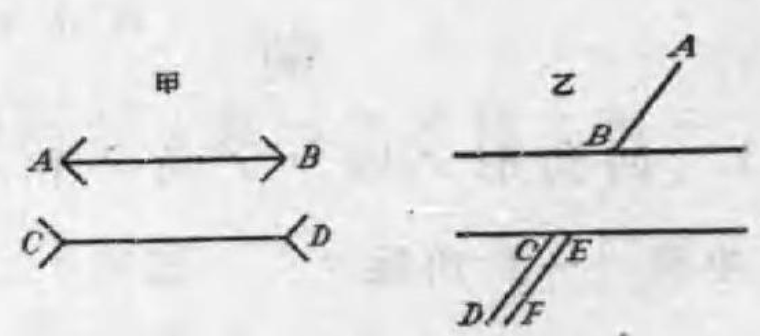
4. 直角三角形ABCニ於テ,直角ノ頂點Aカラ斜邊BCニ下シタ垂線ノ足ヲDトスル。∠B ガ $b°$ デアルトシテ∠BAD, ∠DAC及∠Cヲ各 b デ表ハシナサイ。

5. △ABCニ於テ ∠B, ∠C ノ二等分線ノ交點ヲOトスル。$\angle B = 68°$ $\angle C = 56°$ ナラバ ∠BOC ハ幾度ナルカ。モシ又 $\angle B = b°$, $\angle C = c°$ ナラバ如何。

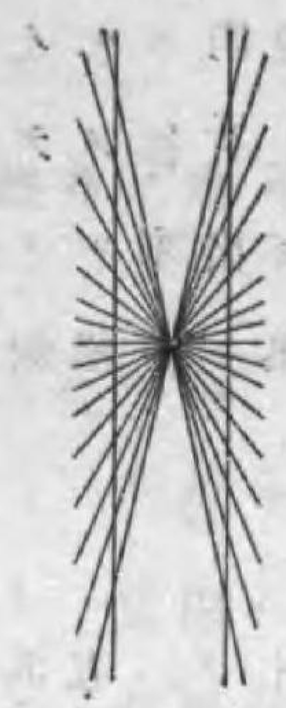
◎6. 一ツノ三角形ノ二角ガ他ノ三角形ノ二角ニ夫々等シイナラバ殘ノ角モ等シイコトヲ確メヨ。

13. 證明ノ必要

以上種々ノ圖形ノ名稱,作圖法及大體ノ性質ナドヲ學ビマシタガ多クハ直觀又ハ實驗ヲ基礎ニシタ。トコロガ直觀又ハ實驗ハ粗漏ナコトモアリ誤ッタ結論ニ達スルコトガアルカモ知レナイ。例ヘバ右ノ甲圖ニ於ケルAB, CD ノ長サヲ先ヅ

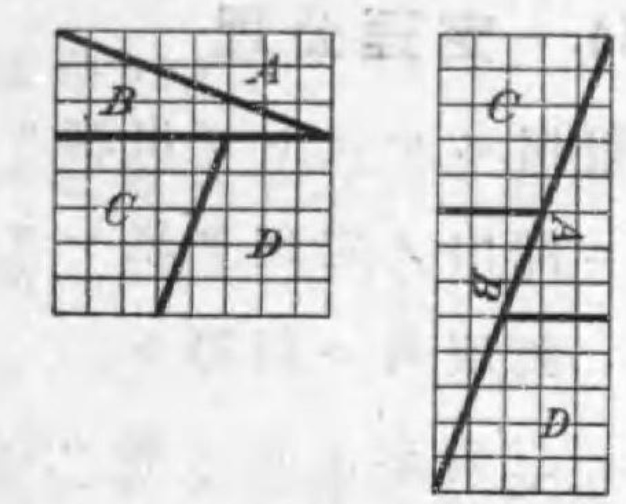


目測シ次ニ兩脚器又ハ尺度デ測ッテ比較セヨ。又乙圖デ CD, EF ノ中ノ何レガ AB ノ延長デアルカヲ先ヅ目測シ次ニ定規ヲ當テテ確メヨ。



更ニ丙圖デハ AB, CD ハ殆ンド平行ナ直線デアルニ拘ハラズ中央部デ膨(フク)レテキル曲線ノ様ニ見エル。

方眼紙ヨリ一邊ノ長サ8ナル正方形ヲ切抜キ之ヲ丁圖ノ様ニ四ツノ部分A,B,C,Dニ切斷シテ戊圖ノ様ニ並べ換ヘテ見ル。丁圖ノ面積ハ64方眼デアリ,戊圖ノハ65方眼デアル。同ジ紙片ヲ切斷シテ並べ換ヘテモ面積ノ増減スル筈ハナイカラ,コノ實驗ハドコカニ誤ヲ含ンデキル。



以上ノ諸例ハ直觀又ハ實驗ハ信頼スルニ足ラナイコトヲ示スモノデアル。又假リニ信頼スルコトガ出來ルトシテモ實驗デ得タ結果ハ實驗シタ範圍内ニ止マルモノデ實驗外ニハ及バナイ。例ヘバ線分ヲ二等分スル作圖法(22頁)ノ正シイコトハ實驗(AEトEBトヲ尺度又ハ兩脚器デ比較スル)ニヨッテ確メルコトガ出來ルトシテモ,其ハ實驗シタ幾ツカノ場合ニ正シイダケノコトデ常ニ正シイコトヲ斷言スルニハ推理ニヨツ

テ考ヘネバナラヌ。

推理ニヨツテ或事實ノ正シイコトヲ說明スルノヲコノ事實ヲ**證明スル**トイフ。證明シタ上デ初メテ或事實ガ正確デアルコトヲ,信用スルコトガ出來ルノデアツテ,證明ナシニ盲信スルコトハ幾何學デハ絕對ニ避ケネバナラヌコトデアル。

14. 定理.公理

證明スルコトガ出來ル眞理ヲ**定理**トイフ。私共ハ既ニ澤山ノ定理ヲ學ンダ。例ヘバ

對頂角ハ相等シ。

三角形ノ角ノ和ハ$2\angle R$デアル。

等ハ皆定理デアル。

定理ハ證明ニヨツテ正シイコトガワカルノデアルガ,餘リニ簡單スギテ證明スルコトノ出來ナイ,又證明スルマデモナイ眞理ガアル。例ヘバ

二點ヲ通リテ唯一ツノ直線ヲ引クコトヲ得。

直線外ノ點ヲ通リ,コノ直線ニ平行ナル直線ハ唯一ツニ限ル。

等ハ之デアル。コノ様ナ自明ノ眞理ヲ**公理**トイフ。

幾何學ニ於テハ既知ノ定義,公理,定理ヲ基礎ニシテ他ノ定理ヲ證明シ更ニコノ定理ヲモ基礎ニシテ他ノ

定理ヲ證明スル等次第ニ斯ノ如クニシテ研究スルノデアル。

參考ノ爲ニ既ニ學ビタル主ナル公理,定理ヲ列記スル。

公　理

a. 二點ヲ通リ唯一ツノ直線ヲ引クコトガ出來ル。

b. 直線ハ二點間ノ最短通路デアル。

c. 直線外ノ點ヲ通リコノ直線ニ平行ナル直線ヲ唯一ツ引クコトガ出來ル。

定　理

a. 一點ヲ通リ一直線ニ唯一ツノ垂線ヲ引クコトガ出來ル。

b, 同ジ直線ノ垂線ハ互ニ平行デアル。

c. 平行線ノ一方ニ垂直ナル直線ハ他ニモ垂直デアル。

d. 同ジ直線ニ平行ナル直線ハ互ニ平行デアル。

e. 直線上ノ一點カラコノ直線ノ一方ノ側ニ垂線又ハ斜線ヲ引イテ生ズル次々ノ接角ノ和ハ$2\angle R$ニ等シイ。

f. 二ツノ接角ノ和ガ$2\angle R$ナラバ,ソノ共有ナラザル二邊ハ一直線上ニアル。

g. 對頂角ハ等シイ。

h. 三角形ノ各頂點ニ於ケル外角一ツヅツノ和ハ $4\angle R$ ニ等シイ。

i. 三角形ノ內角ノ和ハ $2\angle R$ デアル。

j. 三角形ノ一外角ハ其內對角ノ和ニ等シイ.從テ一外角ハ內對角ノ何レヨリモ大デアル。

k. 直徑ハ圓及圓周ヲ二等分スル。

l. 圓周ト直線又ハ圓周ト圓周トハ三ツ以上ノ點デハ出會ハナイ。

前節ニ述ベタ理由ニヨツテ上記諸定理ノアルモノハ再檢討シテ證明シナケレバナラヌノデアルガ其再檢討ハ後ニ夫々適當ナル場所ニ於テ試ミルコトトシ此新學習態度デ第二編以後ヲ學ブコトニスル。

第二編

直線圖形

15. 三角形ノ合同(其一)

二ツノ圖形ガ同形.等大ナラバコノ二ツノ圖形ハ合同又ハ全等デアルトイツテ.兩圖形ノ名ノ間ニ記號≡ヲ置イテ表ハス。例ヘバ △ABC ト △PQR トガ合同デアルノヲ

△ABC≡△PQR　ト書ク。

紙面ニ多角形ヲ書キ之ヲ他ノ紙ニ重ネタママデ切拔クト合同ナル二ツノ多角形ガ出來ル。同形.等大トイフノト重ネ合ハシ得ルトイフノハ同ジ意味デスカラ合同ノ定義ヲ次ノ樣ニ定メルコトガ出來ル。

定義　全ク重ネ合ハシ得ル二ツノ圖形ハ合同ナリ或ハ全等ナリトイフ。

問1. 與ヘラレタル三角形ニ合同ナル三角形ヲ書クニハドウスレバヨイカ。種々ノ方法ヲ工夫セヨ。

三角形ニハ三ツノ邊ト三ツノ角トガアル。是等ノ六ツヲ三角形ノ元素トイフ。二ツノ三角形ガ合同ナ

ラバ六對ノ元素ハ夫々等シイコト勿論デアルガ,六對ノ元素ガ夫々等シイコトガワカラナイデモ其中ノ適當ナ幾對カガ夫々等シイコトガワカレバ二ツノ三角形ガ合同ナルコトヲ證明シ得ルノデアル。

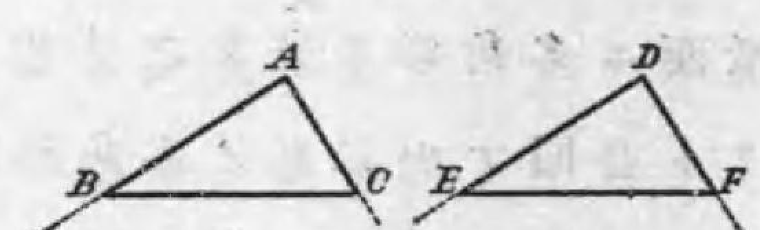
定理一　**一ツノ三角形ノ二邊及其夾角ガ他ノ三角形ノ二邊及其夾角ニ夫々等シイナラバコノ二ツノ三角形ハ合同デアル。**

題意*　△ABC ト △DEF トニ於テ

AB = DE,　AC = DF,　∠A = ∠D

デアルナラバ

△ABC ≡ △DEF



證明　DE ヲ之ニ等シイ AB ノ上ニ重ネ,兩三角形ヲ重ナレル邊ノ同ジ側ニ置ケバ ∠A=∠D デアルカラ射線 DF ハ射線 AC ニ重ナリ,且 AC=DF デアルカラ F ハ C ニ重ナル。

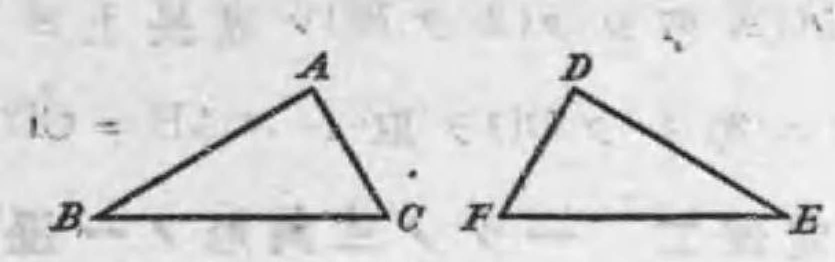
兩三角形ノ三ツノ頂點ガ夫々重ナルカラ兩三角形ハ全ク重ナリ合フ。

∴　△ABC ≡ △DEF

【注意1】. DE ヲ AB ニ重ネルトイフノハ D ヲ A ニ,E ヲ

*定理ノ意味ヲ圖ニツイテ説明スルノデアル。

B ニ重ネルコトデアル。前圖ノ様ナトキニ △DEF ヲ動カシテ DE ヲ AB ニ重ネルト兩三角形ハ重ナレル邊ノ同ジ側ニ來ルガ上圖ノ様ナトキニハ兩三角形ハ重ナツタ邊ノ反對ノ側ニ來ル。コノ様ナトキニハ △DEF ヲ裏返シテカラ DE ヲ AB ニ重ネルトヨロシイノデアル。定理二,五,六ノ證明ニハ略シテアルガ實ハ之ト同ジ様ナ注意ヲ要スルノデアル。



〔注意2〕. △ABC ≡ △DEF ガワカツタナラバ BC=EF, ∠B=∠E, ∠C=∠F, モワカツタノデアル。

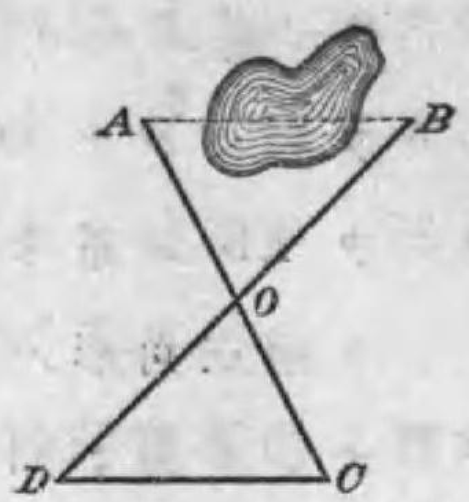
問2. ABCD ハ AB = CD, ∠A = ∠D ナル四邊形デアル。今 AD ノ中點ヲ E トスレバ △ABE ハ △DCE ニ合同ナルコトヲ證明シナサイ。

手引　△ABE ノ二邊夾角ガ △DCE ノ二邊夾角ニ夫々等シイコトガワカレバ重ネ合ハスマデモナク前定理ニヨツテ △ABE ≡ △DCE ナリト斷定スルコトガ出來ル。

問3.　前問ニ於ケル四邊形ノ對角線ハ等シイコトヲ證明セヨ。

手引　△ABD ト △DCA トヲ比較セヨ。

問4. △AOB ノ邊 AO ノ延長上ニAOニ等シクOCヲ,BOノ延長上ニEOニ等シクODヲ取レバ AB＝CD*



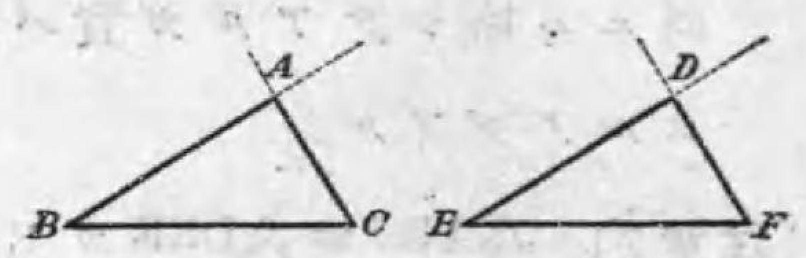
定理二　一ツノ三角形ノ一邊ト其兩端ノ角トガ他ノ三角形ノ一邊ト其兩端ノ角トニ夫々等シイナラバコノ兩三角形ハ合同デアル。

題意　△ABC ト △DEF トニ於テ

要　BC＝EF, ∠B＝∠E,

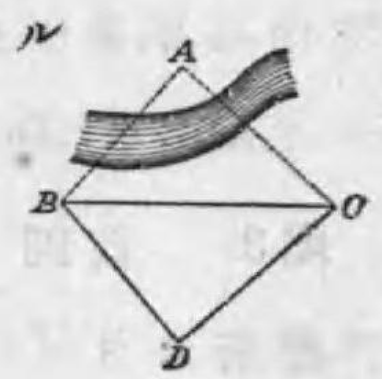
∠C＝∠F　ナラバ

△ABC≡△DEF



證明　EF ヲ之ニ等シイ BC ニ重ネテ兩三角形ヲ重ナレル邊 BC ノ同ジ側ニ置ケバ ∠B＝∠E デアルカラ射線 ED ハ射線 BA ニ重ナリ, ∠C＝∠F デアルカラ射線 FD ハ射線 CA ニ重ナル。

故ニ射線ED, FD ノ交點 D ハ射線 BA, CA ノ交點 A ニ重ナル。兩三角形ノ三ツノ頂點ガ重ナルカラ　△ABC≡△DEF



問5. 四邊形 ABDC ニ於テ∠B, ∠C ガ共ニ BC デ二等分セラレルナラバ

*「之ヲ證明セヨ」ヲ略シテアル。今後多クハ之ニ倣フ。

AB＝DB,　AC＝DC

問6. 斜邊ト一鋭角トガ夫々等シイ二ツノ直角三角形ハ合同デアル。

手引　28 頁例題6參照。

問7 ∠AOB ノ二等分線 OC 上ノ點 P ハコノ角ノ二邊OA, OB カラ等距離ニアル。

手引　點P ト直線OA トノ距離トイフノハドウイフ意味デアルカラ考ヘヨ。

16. 二等邊三角形

問1 二等邊三角形ノ定義ヲ言ヒナサイ。

二等邊三角形デハ等邊ノ夾ム角ヲ**頂角**,其對邊ヲ**底邊**トイヒ,頂角ノ頂點ヲ二等邊三角形ノ**頂點**,底邊ノ兩端ノ角ヲ**底角**トイヒマス。

〔注意〕二等邊三角形ノ二邊ガ等シイコト及二邊ノ等シイ三角形ハ二等邊三角形デアルコトハ定義ニヨツテ知レテキルガ其他ハ一々證明シタ上デナケレバ何事モワカラヌコトニスル。

定理三　二等邊三角形ノ底角ハ相等シイ。

題意　△ABC ニ於テ AB＝AC ナラバ ∠B＝∠C

證明　∠A ノ二等分線ト BC トノ交點ヲ D トスル。

△ABD ト △ACD トニ於テ

AD ハ共通　AB=AC

∠BAD=∠CAD

ヨツテ △ABD ノ二邊夾角ハ △ACD ノ二邊夾角ニ夫々等シイ。

∴　△ABD≡△ACD　從テ ∠B=∠C

コレデ本定理ノ證明ハ出來タガ △ABD≡△ACD ニ注意スルト BD=CD 及 ∠ADB=∠ADC ノ證明モ出來タコトニナル。コノ様ニ或定理又ハ其證明カラ直ニ推定出來ル簡單ナ定理ヲ初ノ定理ノ系トイフ。ソコデ上ノ事實ヲ定理三ノ系トシテ再記スレバ

系　二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分スル。

問2.　二等分邊三角形ノ一角ガ 40° ナラバ他ノ角ハ幾度ナルカ(二ツノ場合アリ)。

問3.　三邊ガ皆等シイ三角形ハ正三角形デアル。

定理四　三角形ノ二角ガ等シイナラバ之ニ對スル二邊ハ等シイ。

題意　△ABC ニ於テ ∠B=∠C ナラバ

AC=AB

證明　∠A ノ二等分線ト BC トノ交點

ヲ D トスル。　△ABD ト △ACD トニ於テ

∠BAD=∠CAD　及　∠B=∠C

デアルカラ　∠ADB=∠ADC…………28頁例題 6

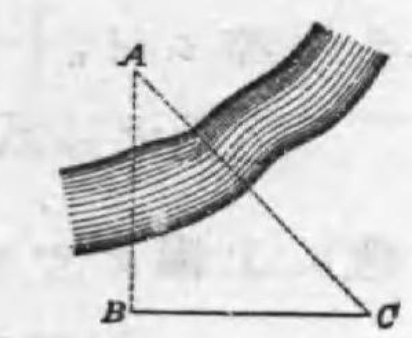
ヨツテ兩三角形ハ一邊 AD ヲ共有シ其兩端ノ角夫々相等シイ。

∴　△ABD≡△ACD　ヨリテ　AB=AC

問4.　三ツノ角ガ皆等シイ三角形ハ正三角形デアル。

問5.　二等邊三角形ノ兩底角ノ二等分線ト底邊トデ出來ル三角形ハ二等邊デアル。

問6.　河ノ兩岸ニアル地點 A, B ノ距離ヲ測ル爲ニ B カラ AB ト直角ノ方向ニ 238m 進ンデ C ニ達シタトキニ ∠ACB ヲ測ツタトコロガ 45° デアツタ。A,B ノ距離ハ何程カ。

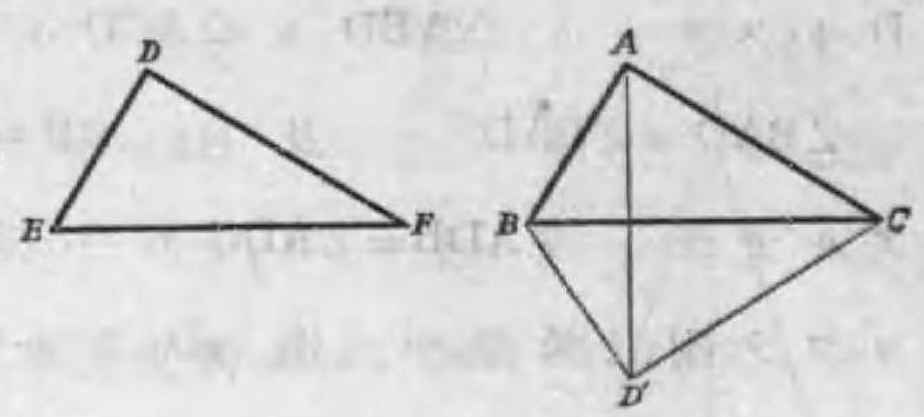


17.　三角形ノ合同(其二)

定理五　一ツノ三角形ノ三邊ガ他ノ三角形ノ三邊ニ夫々等シイナラバ,コノ兩三角形ハ合同デアル。

題意　△ABC ト △DEF トニ於テ AB=DE,　BC=EF,　CA=FD ナラバ　△ABC≡△DEF

證明 $\triangle DEF$ ヲ裏返シテ EF ヲ之ニ等シイ BC ニ重ネタトキニ D ハ D' ニ來ルモノトスル。



A, D' ヲ結ブ

$\triangle ABD'$ ハ二等邊デアルカラ $\angle BAD' = \angle BD'A$

$\triangle ACD'$ ハ二等邊デアルカラ $\angle CAD' = \angle CD'A$

$\therefore$ $\angle BAD' + \angle CAD' = \angle BD'A + \angle CD'A$

即 $\angle BAC = \angle BD'C = \angle EDF$

ヨリテ $\triangle ABC$ ノ二邊及其夾角ハ $\triangle DEF$ ノ二邊及其夾角ニ夫々等シイ。

$\therefore$ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

［注意］ 上圖デハ AD' ハ B ト C ノ間デ BC ニ交ハルモノトシテ證明シタガ AD' ガ B 又ハ C ヲ通ルカモ知レナイ,又ハ BC ノ延長上デ交ハルカモ知レナイ。コノ様ナ場合ニモ本定理ガ成立ツコトヲ證明シナケレバナラヌガ之ハ生徒諸子ニ任シテ置ク。

問1. 定角ヲ二等分スル作圖法(22頁)ガ正シイコトヲ證明シナサイ。

手引 $\triangle OAC$ ト $\triangle OBC$ トヲ比較セヨ。

定義 三角形ノ頂點ヲ對邊ノ中點ニ結ブ線分ヲコノ三角形ノ**中線**トイフ。

如何ナル三角形ニモ中線ハ三ツアル。

問2. 二等邊三角形ノ頂點カラ出ル中線ハ頂角ヲ二等分シ且底邊ニ垂直デアル。

定理六 斜邊ト直角ヲ夾ム一邊トガ夫々等シイ二ツノ直角三角形ハ合同デアル。

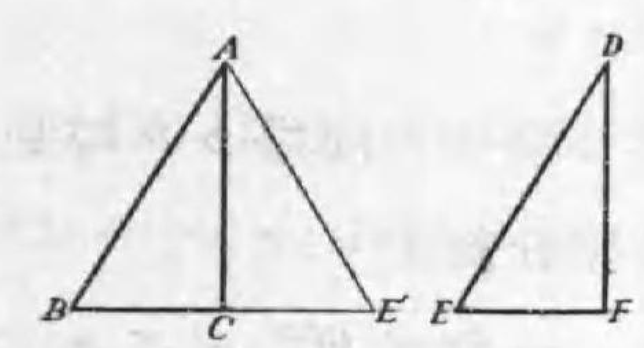
題意 $\angle C = \angle F = \angle R$

$AB = DE$

$AC = DF$

ナラバ

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$



證明 $\triangle DEF$ ヲ裏返シテ DF ヲ之ニ等シイ AC ノ上ニ重ネタトキニ E ハ E' ニ來ルモノトスル。

$\angle C = \angle F = \angle R$ デアルカラ $\angle BCE'$ ハ平角從ッテ BCE' ハ一直線デアル。ヨッテ $ABCE'$ 全體デ一ツノ三角形ニナリ且 $AB = AE'$ デアルカラコノ三角形ハ二等邊デアル。

$\therefore$ $\angle B = \angle E' = \angle E$

ヨッテ $\angle A = \angle D$…………(28頁例題6)

∴ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$…………(定理一叉ハ二)

問3. 角ノ内ニアツテコノ角ノ二邊カラ等距離ニアル點ハコノ角ノ二等分線上ニアル。

問4. 四角形 ABCD ニ於テ $AC=BD$ 且 $\angle B=\angle C=\angle R$ ナラバ $AB=DC$

例題

1. ドレダケノコトヲ知レバ二ツノ三角形ハ合同ナリト斷定スルコトガ出來ルカ。

2. 線分ノ垂直二等分線上ノ點ハ其兩端カラ等距離ニアル。

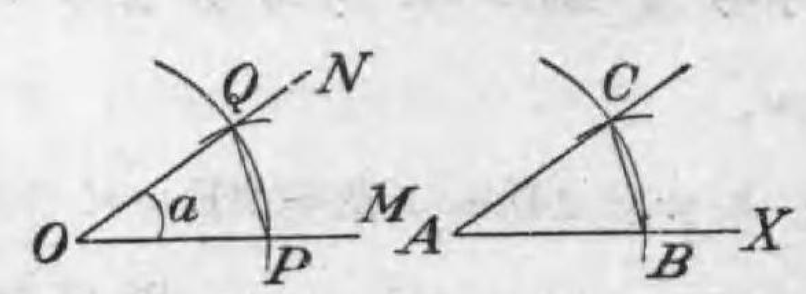
3. 線分ノ兩端カラ等距離ニアル點ハ此線分ノ垂直二等分線上ニアル。

4. 一角ガ60°デアル二等邊三角形ハ正三角形デアル。

5. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端カラ出ル中線ハ相等シイ。

6. 線分ノ中點ヲ通ル直線ハ初ノ線分ノ兩端カラ等距離ニアル。

7. 定角MON＝等シイ角ヲ作ルニハ任意ノ半直線AX



ヲ引キ, O,A ノ各ヲ中心ニシテ等半徑ノ二周圓ヲ畫キ圓周 O ガ OM,ON ニ交ハル點ヲ夫々 P,Q トシ,圓周 A ガ AX ト交ハル點ヲ B トスル。B ヲ中心トシ PQ ヲ半徑トスル圓周ト圓周 A トノ交點ヲ C トシテ射線 AC ヲ引ク。$\angle BAC$ ハ求メル角デアル。コノ方法ノ正シイコトヲ證明セヨ。

8. 底邊ヲ共有スル二ツノ二等邊三角形ノ二ツノ頂點ヲ通ル直線ハ共通底邊ヲ垂直ニ二等分スル。

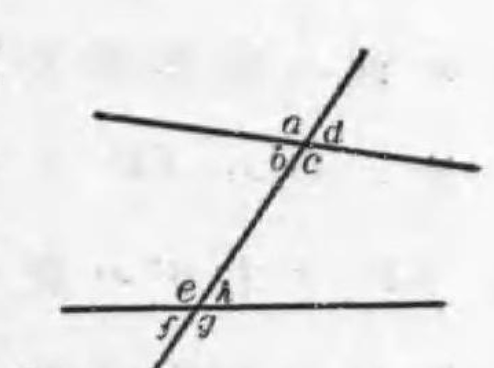
9. 線分ヲ垂直ニ二等分スル作圖法(22頁)ノ正シイコトヲ證明セヨ。

10. 正三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB 上ニ夫々點 D, E, F ガアル。モシ $AF=BD=CE$ ナラバ $\triangle DEF$ ハ正三角形デアル。

11. $OA=OB$, $OC=OD$ ナル様ニ $\angle XOY$ ノ邊 OX 上ニ A,C ヲ, OY 上ニ B,D ヲトル。AD ト BC トノ交點ヲ P トスレバ OP ハ $\angle XOY$ ヲ二等分スル。

18. 平行線

定義 一ツノ直線ガ他ノ二直線ニ交ハツテ出來ル八ツノ角ヲ圖ノ様ニ命名スル。



$\angle a$ ト $\angle e$; $\angle b$ ト $\angle f$; $\angle c$ ト $\angle g$;

∠d ト∠h トヲ同位角トイヒ∠b ト∠h, ∠c ト∠e トヲ錯角トイフ。

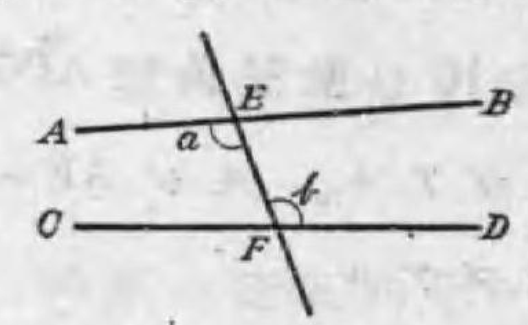
問1. 前圖ニ於テ ∠a=∠e=120° ナラバ他ノ六ツノ角ハ各何程カ。

問2. 一直線ガ他ノ二直線ニ交ハツテ出來ル一組ノ錯角ガ等シイナラバ同位角ハ等シイ。

問3. 平行線ノ定義ヲ述ベヨ。

定理七 二直線ガ他ノ直線ニ交ハツテ出來ル一組ノ錯角ガ等シイナラバ初ノ二直線ハ平行デアル。

題意 二直線 AB,CD ニ他ノ直線EFガ交ハツテ出來ル一組ノ錯角ヲ圖ノ様ニ ∠a,∠b トスル。モシ ∠a=∠b ナラバ



AB ∥ CD

證明 モシ AB,CD ガ平行デナケレバ其交點ヲ O トスル。O ガ EF ノ右ノ方ニアレバ ∠a ハ △OEF ノ外角デ∠bハ其内對角デアル。

∴ ∠a > ∠b ……………………………定理 j

コレハ不合理デアル(題意ニ矛盾スルカラ)。

故ニ O ハ EF ノ右ノ方ニハナイ。卽 AB ト CD トハ EF ノ右デハ交ハラナイ。

同様ニ EF ノ左デモ交ハラナイ。

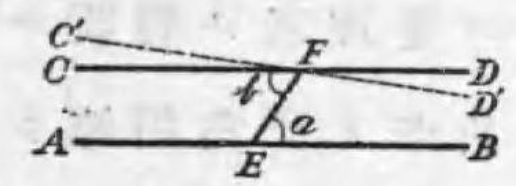
∴ AB ∥ CD

問4. 同ジ直線ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行デアル(31頁定理 b ノ證明)。

定理八 平行線ニ他ノ直線ガ交ハツテ出來ル錯角ハ等シイ。

題意 平行線 AB,CD ニ EF ガ交ハツテ出來ル錯角ヲ ∠a,∠b トスレバ ∠a = ∠b

證明 モシ ∠a=∠b デナケレバ F ヲ通ツテ ∠a ト等シイ錯角ヲナス直線 C'FD' ヲ引ク。サウスレバ前定理ニヨツテ



AB ∥ C'D'

又題意ニヨツテ AB ∥ CD

故ニ F ヲ通リ AB ニ平行ナル直線ガ二ツアルコトニナツテ公理 c ニ矛盾スル。

∴ ∠a = ∠b

系 平行二直線ニ他ノ直線ガ交ハツテナス同位角ハ等シイ。

問5. 平行二直線ノ一方ニ垂直ナル直線ハ他ニモ垂直デアル(31頁定理 c ノ證明)。

19. 定理ノ假設終結逆

定理三ハ三角形ノ二邊ガ等シイナラバ,其二角ハ等

シイコトヲ述ベテアルノデ「二邊ガ等シイ」コトヲ基礎ニシテ二角ノ等シイコトヲ證明シタノデアル。又定理七ニ於テハ二直線ニ他ノ直線ガ交ハツテ出來ル一組ノ錯角ガ等シイコトヲ基礎ニシテ初ノ二直線ガ平行ナルコトヲ證明シタノデアル。

總テノ定理ハ或條件ト之ヨリ誘導セラレル事項トデ出來テヰル。コノ條件ヲ其定理ノ**假設**トイヒ,假設カラ誘導セラレル事項(其定理ニ記セル)ヲ其定理ノ**終結**トイフ。

例ヘバ定理三ノ假設ハ「三角形ノ二邊相等シ」デ終結ハ「其三角形ノ二角相等シ」デアル。又定理七ノ假設ハ「二直線ニ他ノ直線ガ交ハリテナス一組ノ錯角相等シ」デ終結ハ「二直線ハ平行ナリ」デアル。

問 1.　定理四,定理八ノ假設終結ヲ言ヘ。

問 2.　次ノ各定理ノ假設終結ヲ述ベヨ。

(1)　或整數ノ一ノ位ノ數ガ0ナルトキハ,コノ數ハ10ノ倍數ナリ。

(2)　$\angle a$ ト $\angle b$ トガ對頂角ナルトキハ,$\angle a$ ハ $\angle b$ ニ等シ。

定理ノ假設ト終結トヲ入替ヘタルモノヲ其定理ノ**逆**トイフ。

例ヘバ定理三ハ定理四ノ逆ニシテ,定理四ハ定理三ノ逆デアル。又定理七ト八トモ互ニ逆デアル。

定理ノ逆ハ正シイトハ限ラナイ。逆ノ眞僞ハ元ノ定理ニハ關係ナク別ニ確メネバナラヌ。

問 3.　前問ニ於ケル各定理ノ逆ヲ述ベテ其眞僞ヲ考ヘヨ。

〔注意〕　定理七,八ニ於テハ終結ヲ否定スレバ既知ノ事實又ハ其定理ノ假設ニ矛盾スルコトヲ證明シテ結局終結ガ正シイコトヲ證明シタノデアル。

コノ樣ナ證明法ヲ**歸謬法**トイヒマス。

問 4.　歸謬法ニヨツテ次ノ定理(31頁定理 a)ヲ證明シナサイ。一點ヲ通リ一ツノ直線ニ唯一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得（點ガ直線上ニアル場合ト然ラザル場合トヲ別々ニテ考ヘヨ)。

例　　題

1. 同ジ直線ニ平行ナル二直線ハ互ニ平行デアル(31頁定理 d ノ證明)。

◎2. 一角ノ二邊ガ他ノ角ノ二邊ニ夫々平行デアルナラバコノ二角ハ相等シイカ又ハ補角デアル。

3. 三角形ノ頂點ヲ通リ對邊ニ平行ナル直線ヲ引イテ三角形ノ一外角ハ其內對角ノ和ニ等シイコト,從テ三角形ノ內角ノ和ハ $2\angle R$ ナルコトヲ驗シナサイ。

4. 二等邊三角形ノ頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ハ底邊ニ平行デアル。

5. ∠BAC ノ二等分線上ノ點Dヲ通リ BA ニ平行ナ直線ト AC トノ交點ヲEトスレバ EA＝ED

6. △ABC ニ於テ ∠B,∠C ノ二等分線ノ交點ヲOトスル。Oヲ通リ BC ニ平行ナ直線ト AB,AC トノ交點ヲ夫々 D,E トスレバ DE＝DB＋EC

20. 作圖ニツイテ

尺度ヤ分度器デハ其最小目盛未滿ノ端下ヲ正確ニ測ルコトガ出來ナイカラ正確ニ作圖スルコトモ出來ナイコトヲ學ビマシタ。

幾何學デハ作圖ヲスルニ直線定規ト兩脚器トダケヲ用ヒ,次ニ示ス1°,2°ハ如何ナル場合ニモ作圖シ得ルコトニシテアル。

1° **任意ノ二點ヲ通ル直線ヲ引クコト。**

2° **任意ノ點ヲ中心ニシテ任意ノ長サヲ半徑トスル圓周ヲ畫クコト。**

1°,2°ヲ**作圖ノ公法**トイツテ其他ノ作圖ハ如何ニ複雜ナモノデモ公法ヲ幾回カ繰返シテ作圖スルノデアル。

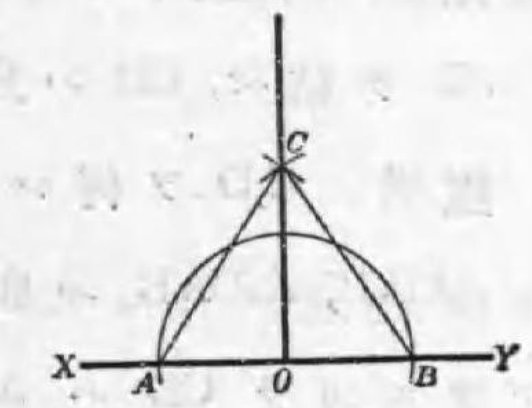
上ノ制限ヲ守ツテ線分,角ヲ二等分スルコト(22頁)及

定角ニ等シイ角ヲ作ルコト(42頁例題7)等ハ既ニ學ビマシタガ垂線ヤ平行線ヲ作ルニハ從來ハ三角定規ヲ利用スルコトニシテアツタカラ,上ノ制限ヲ守ツテノ作圖法ヲ次ニ述ベル。

作圖題一 定直線上ノ定點ヲ通リコノ直線ニ垂直ナル直線ヲ畫クコト。

題意 定直線 XY 上ノ定點Oニ於テ XY ニ垂線ヲ作ルコト。

作圖 Oヲ中心トシテ,任意ノ半徑ニテ圓周ヲ畫キ XY トノ交點ヲ A,B トスル。A,B ノ各ヲ中心トシ等半徑(前ヨリハ大ナル)デ圓周ヲ畫キ其交點ヲCトスル。



C,Oヲ通ル直線ハ求メル垂線デアル。

證明 △COAト△COBトハ三邊夫々相等シイカラ合同デアル(定理五)。

ヨリテ ∠COA＝∠COB

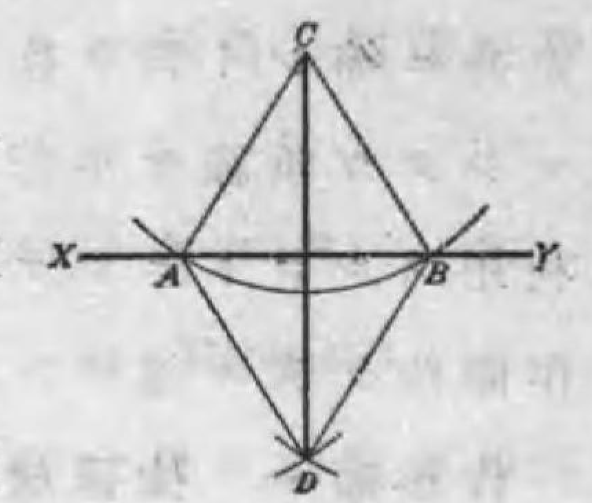
∴ CO ⊥ XY

〔**注意**〕上ノ作圖法ハ結局平角 XOY ノ二等分線ヲ作圖スル方法デアル。

作圖題二 定直線外ノ定點ヲ通リ此直線ニ垂直ナ

ル直線ヲ作ルコト。

題意　定直線 XY ノ外ニアル定點 C ヲ通リ XY ニ垂直ナル直線ヲ作ルコト。



作圖　C ヲ中心トシ, XY ニ交ハル圓周ヲ畫キ XY トノ交點ヲ A,B トスル。 A,B ノ各ヲ中心ニシテ前ト等シイ半徑デ二ツノ圓周ヲ畫キ, 其交點 C ト異ナルヲ D トスル。

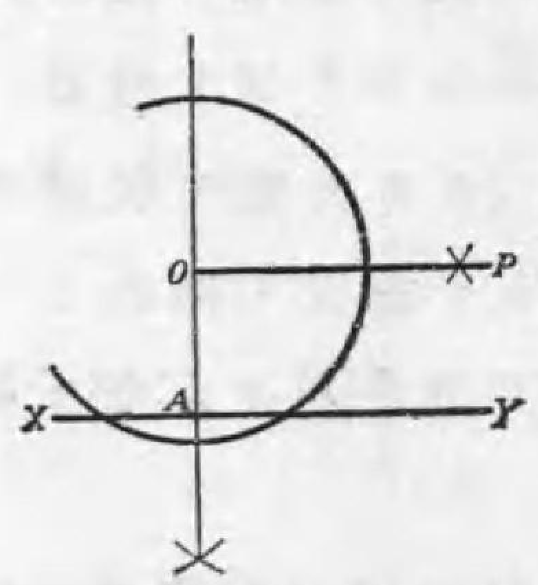
CD ヲ結ベ, CD ハ所要ノ垂線デアル。

證明　C,D ヲ何レモ A,B ニ結ビ付ケヨ。

△CAB, △DAB ハ底邊 AB ヲ共有スル二等邊三角形デアルカラ CD ハ AB ニ垂直デアル(43頁例題8)。

作圖題三　定直線外ノ定點ヲ通リコノ直線ニ平行ナル直線ヲ引クコト。

題意　定直線ヲ XY トシ, XY ノ外ニアル定點ヲ O トスル。 O ヲ通リ XY ニ平行ナル直線ヲ畫クコト。



作圖　O ヲ通リ XY ニ垂線ヲ作リ(作圖題二)其足ヲ A トスル。

O ニ於テ OA ニ垂線 OP ヲ

作ル(作圖題一)。

OP ハ所要ノ直線デアル。

證明　OP, XY ハ共ニ OA ニ垂直デアルカラ

OP ∥ XY

〔**注意**〕 作圖題一,二,三デ示シタ様ニ作圖題ヲ解クニハ題意ト作圖ノ方法トヲ述べ,次ニ出來タ圖形ガ題意ニ適スルコトヲ證明スルノデアル。 モシ題意ニ適スル圖形ガ二ツ以上アレバ其總テヲ作圖セネバナラヌ。

例　題

1. 直角ヲ夾ム二邊ガ夫々與ヘラレタ二線分 a, b ニ等シイ直角三角形ヲ作レ。

2. 三邊ノ長サヲ知ツテ三角形ヲ畫ケ。

〔**注意**〕 三邊ノ長サガ與ヘラレタ三線分ニ夫々等シイ三角形ヲ畫ケトイフ意味デアル。

3. 直角ヲ三等分シナサイ。

手引　直角ノ一邊上ニ一邊ヲ有スル正三角形ヲ畫イテ考ヘヨ。

4. △ABC ノ邊 BC 上ニテ AB, AC ヨリ等距離ニアル點ヲ求ム。

5. 底邊,高サ及底邊ノ一端ノ角ヲ知リテ三角形ヲ

畫キナサイ。

6. 二邊及第三邊ヘノ中線ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

手引 中線ヲ二倍ニ延長シテ考ヘヨ。

7. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ニ平行ニシテ二邊 AB, AC ト夫々 D,E ニテ交ハル直線ヲ引キ DE ガ DB+EC ニ等シクナル様ニシタイ。DE ノ作圖法如何。

手引 48頁例題 6 參照。

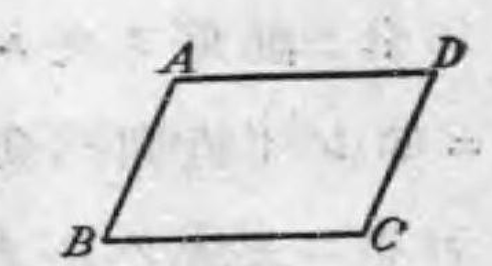
21. 平行四邊形

問1. 平行四邊形ノ定義ヲ述ベヨ。

〔注意〕ABCD ガ平行四邊形デアルナラバ定義ニヨッテ

$AB \parallel DC, \quad AD \parallel BC$

デアルガ其他ノコトハ未ダ何モ知ラナイコトニスル。

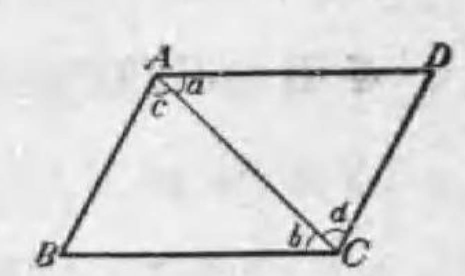


定理九 平行四邊形ノ對邊ハ等シク,對角ハ等シイ。

假設 ABCD ハ平行四邊形。

終結 $AB=DC, \; AD=BC$

$\angle A=\angle C, \; \angle B=\angle D$



證明 對角線 AC ガ邊トナス角ヲ圖ノ様ニ $\angle a, \angle b, \angle c, \angle d$ トスル。

$\triangle ABC$ ト $\triangle CDA$ トニ於テ

$AB \parallel DC$ ナル故 $\angle c=\angle d$ ……………(定理八)

$AD \parallel BC$ 〃 $\angle a=\angle b$

且ツ AC ハ兩三角形ニ共通デアル。

$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle CDA$ ………(定理二)

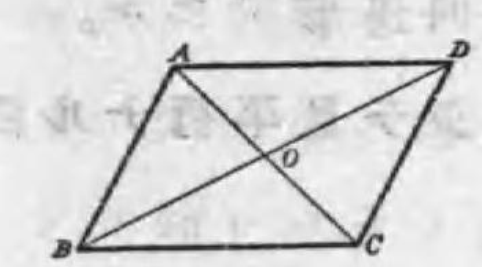
ヨリテ $AB=DC, \; BC=AD, \; \angle B=\angle D$

又 $\angle a+\angle c=\angle b+\angle d \quad \therefore \angle A=\angle C$

系 平行四邊形ノ一對角線ハ原形ヲ合同ナル二ツノ三角形ニ分ケル。

定理一〇 平行四邊形ノ對角線ハ互ニ他ヲ二等分スル。

假設 O ハ▱ABCD* ノ對角線ノ交點



終結 $AO=OC, \; DO=OB$

證明 $\triangle AOD$ ト $\triangle COB$ トハ一邊ト其兩端ノ角夫々相等シ(何故カ)。

$\therefore \triangle AOD \equiv \triangle COB$

ヨリテ $AO=OC, \; DO=OB$

問2. ▱ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トスル。O ヲ通ル直線ガ一組ノ對邊又ハ其延長ニ交ハル點ヲ E,F トスレバ $EO=OF$

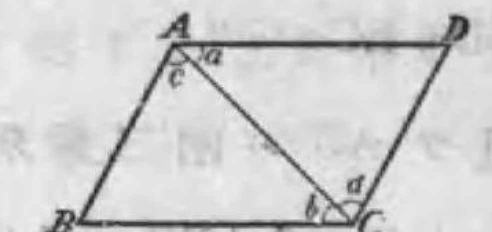
定理一一 二組ノ對邊ガ夫々等シイ四邊形ハ平行

*▱ABCD ハ平行四邊形 ABCD ヲ表ハス。

四邊形デアル。

假設 AB ＝ DC, AD ＝ BC

終結 ABCD ハ平行四邊形



證明 對角線 AC ガ邊トナス角ヲ圖ノ樣ニ $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$ トスル。

△ABC ≡ △CDA (何故カ)

デアルカラ $\angle a = \angle b$, $\angle c = \angle d$

トコロガ $\angle a$,$\angle b$ ハ二直線 AD,BC ニ AC ガ交ハツテ出來ル錯角デアル。ソノ錯角ガ等シイカラ

AD ∥ BC……………(定理七)

同樣ニ AB ∥ DC

故ニ定義ニヨツテ ABCD ハ平行四邊形デアル。

定理一二 一組ノ對邊ガ等シクシテ且平行ナル四邊形ハ平行四邊形デアル。

假設 $AD \mathrel{\underline{\parallel}}^{*} BC$

終結 ABCD ハ平行四邊形

證明 前定理ト同樣ニシテ證明スルコトヲ得。

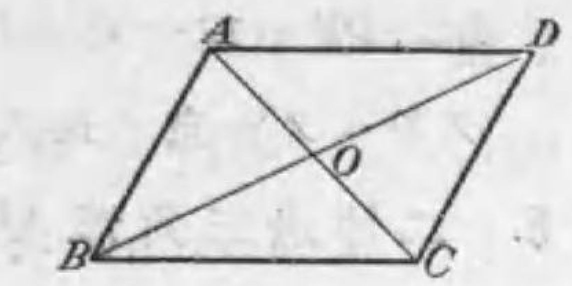
定理一三 對角線ガ互ニ他ヲ二等分スル四邊形ハ平行四邊形デアル。

假設 O ハ四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ニシテ

*$\underline{\parallel}$ ハ等シクシテ且平行ナルコトヲ示ス。

AO ＝ OC, DO ＝ OB

終結 ABCD ハ平行四邊形



證明 △AOD ト △COB トノ合同ヲ證明シ,前定理ヲ利用シテ證明スルコトヲ得。

問3. 矩形,菱形ノ定義ヲ述ベヨ。矩形デアツテ且菱形デアル四邊形ガアルカ。

問4. 菱形ハ平行四邊形デアルコトヲ證明セヨ。矩形モ亦平行四邊形ナルコトヲ證明シナサイ。

例題

1. 平行四邊形ノ邊,角又ハ對角線ニツイテ知ツテヰルコトヲ述ベナサイ。

2. 四邊形ノ邊,角又ハ對角線ニツイテドレダケノコトヲ知レバ,コノ四邊形ハ平行四邊形ナリト斷言スルコトガ出來ルカ。

3. 菱形ノ對角線ハ直交シ且菱形ノ角ヲ二等分スルコトヲ證明セヨ。

4. 矩形ノ對角線ハ等シイ。

5. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ點 D カラ BA, CA ニ平行ニ引イタ直線ガ夫々 AC, AB ニ交ハル點ヲ E,F トスル。DE+DF ハ D ノ位置ニ拘ハラズ一定ナリ。

手引　問題ニ誤ガナケレバDハBC上何處ニアツテモ DE+DF ハ或一定ノ長サニ等シイ。DガBニ重ナルトキヲ考ヘテ一定ノ長テハ何デアルカヲ考ヘヨ。

6. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 EC 上ノ點 D カラ AB, AC ニ下シタ垂線ノ足ヲ夫々 E,F トスル。D ノ位置ニ拘ハラズ DE+DF ハ一定デアル。

7. 二邊ト一對角線トヲ知ツテ平行四邊形ヲ作レ。

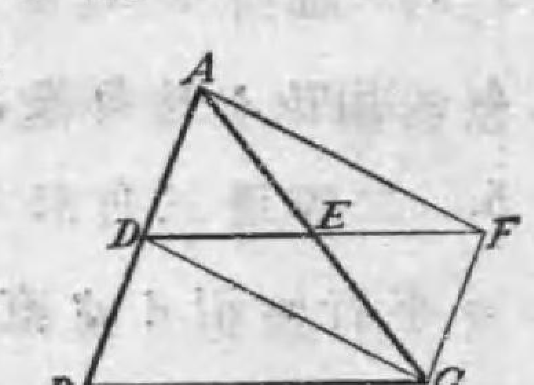
8. 二ツノ對角線ガ夫々定線分 a, b ニ等シク,ソノナス角ガ定角 c ニ等シイ平行四邊形ヲ作リナサイ。

9. △ABC ノ邊 BC ノ上ニ一點 D ヲ求メ, D カラ BA, CA ニ平行ニ引イタ直線ガ夫々 AC, AB ニ交ハル點ヲ E,F トスル。DE+DF ガ定線分 a ニ等シクナル様ニ D ノ位置ヲ定メヨ。

手引　上ノ例題5參照。

22. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分

定理一四　三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ第三邊ニ平行ニシテ,且ツ其半分ニ等シイ。



假設　D,E ハ夫々 AB,AC ノ中點

終結　DE ⫫ $\frac{1}{2}$BC

證明　DE ノ延長上ニ DE ニ等シク EF ヲ取ル。四邊形 ADCF

ハ,ソノ對角線 AC, DF ガ互ニ他ヲ二等分スルカラ平行四邊形デアル(定理一三)。

∴　FC ⫫ AD……………(定理一一)

從テ　FC ⫫ DB

故ニ DBCF ハ平行四邊形デアル(定理一二)。

ヨリテ　DF ⫫ BC……………(定理一一)

トコロガ DE ハ DF ノ半分デアルカラ DE ハ BC ニ平行デアツテ且其半分ニ等シイ。

系　三角形ノ一邊ノ中點ヲ通リ他ノ邊ニ平行ナル直線ハ殘リノ邊ノ中邊ヲ通ル。

手引　本定理ノ圖ニ於テ DE ハ AB ノ中點 D ヲ通リ BC ニ平行ナ直線トシ, C ヲ通リ BA ニ平行ナ直線ト DE ノ延長トノ交點ヲ F トスル。DBCF ガ平行四邊形ナルコト從テ ADCF モ亦平行四邊形ナルコトヲ利用セヨ。

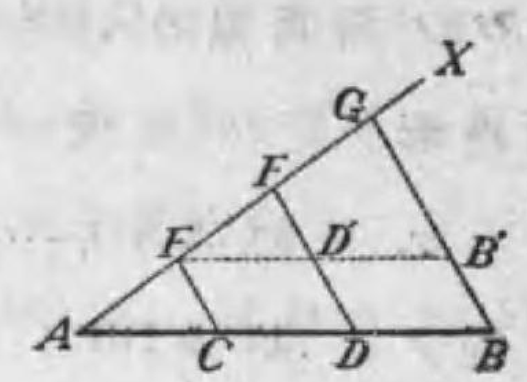
問1.　△ABC ノ各邊ノ中點ヲ夫々 D, E, F トスル。D ト E, E ト F, F ト D トヲ結付ケルト原三角形ハ四ツノ合同ナル三角形ニ分ケラレル。

作圖題四　定線分ヲ三等分セヨ。

題意　定線分 AB ヲ三等分スルコト。

作圖　A ニ於テ AB ニ交ハル直線 AX ヲ引キ, AX 上ニ於テ AE, EF, FG ヲ等シクトリ G,B ヲ結ブ。

E,F ヲ通リ GB ニ平行ナル直線ヲ畫キ AB ト交ハル點ヲ夫々 C,D トスル。



C,D ハ AB ノ三等分點デアル。

證明 △AFD ニ於テ EC ハ AF ノ中點ヲ通リ FD ニ平行ナ直線デアルカラ C ハ AD ノ中點デアル。卽

$$AC = CD$$

次ニ E ヲ通リ CB ニ平行ナ直線ト FD トノ交點ヲ D' トシ, GB トノ交點ヲ B' トスレバ前ト同様ニシテ

$$ED' = D'B'$$

トコロガ ECDD' 及 D'DBB' ハ何レモ平行四邊形デアルカラ $ED' = CD,\quad D'B' = DB$

$$\therefore \quad CD = DB$$

ヨリテ C,D ハ AB ヲ三等分スル點デアル。

問2. 定線分ヲ五等分セヨ。

例題

1. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビ付ケテ出來ル四邊形ハ平行四邊形デアル。

手引 一對角線ヲ引イテ考ヘヨ。

2. ▱ABCD ニ於テ AB ノ中點ヲ E トシ, CD ノ中點ヲ F トスル。ED,BF ハ AC ヲ三等分スル。

3. 梯形ノ定義ヲ述ベヨ。ABCD ハ AD, BC ガ兩底ナル梯形デアルナラバ AB ノ中點 E ヲ通リ BC ニ平行ナ直線ト DC トノ交點 F ハ DC ノ中點ニシテ且 EF ハ AD ト BC トノ和ノ半分ニ等シイ。

手引 一對角線ヲ引イテ考ヘヨ。

4. 線分 AB ノ中點 C カラ他ノ直線 XY ニ下シタ垂線ノ長サハ A,B カラ XY ニ下シタ垂線ノ長サノ和又ハ差ノ半分ニ等シイ。

5. △ABC ノ中線 BE, CF ノ交點ヲ G トスル。B ヲ通リ, FC ニ平行ナ直線ト AG ノ延長トノ交點ヲ H トスレバ AG=GH ニシテ且 GBHC ハ平行四邊形デアル。

6. 前問ヲ利用シテ三角形ノ三中線ハ一點ニ會スルコト及コノ點ト各頂點トノ距離ハ其頂點カラ出ル中線ノ $\frac{2}{3}$ ニ等シイコトヲ證明シナサイ。

〔注意〕 コノ點ヲ初ノ三角形ノ重心トイフ。

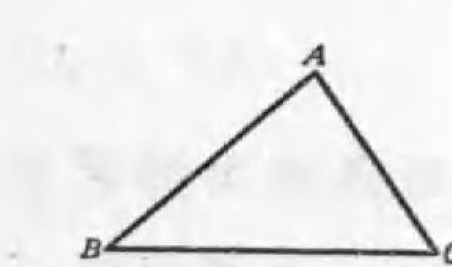
23. 三角形ノ邊ト角トノ關係

定理一五 三角形ノ一邊ハ他ノ二邊ノ和ヨリ小ニシテ差ヨリ大ナリ。

題意 △ABC ニ於テハ

$$AB+AC > BC > AB-AC$$

但 $AB \geqq AC$ トスル。



證明　線分 BC ハ二點 B, C 間ノ最短通路デアルカラ

$$AB+AC > BC \cdots\cdots(1)$$

同様ニ

$$AC+BC > AB \cdots\cdots(2)$$

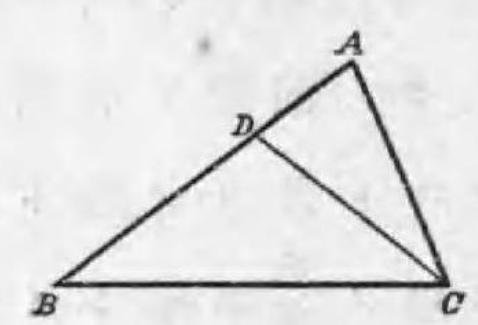
(2)ノ兩邊カラ AC ヲ減ズレバ

$$BC > AB-AC \cdots\cdots(3)$$

(1)ト(3)トヨリ　$AB+AC > BC > AB-AC$

問　任意ノ點 O ヲ △ABC ノ三頂點ニ結ブ線分ノ和 OA+OB+OC ハ △ABC ノ周圍ノ半分ヨリ大キイ。

定理一六　三角形ノ二角ガ等シクナケレバ大角ニ對スル邊ハ小角ニ對スル邊ヨリ大キイ。



題意　△ABC ニ於テ ∠C > ∠B ナラバ AB > AC

證明　大角 ACB ノ內ニ小角 B ニ等シク ∠BCD ヲトレバ CD ハ CB ト CA トノ間ニアルカラ CD ト AB トノ交點 D ハ A ト B トノ間ニアル。

$$\therefore\quad AB = AD+DB$$

ソウシテ

$$DB = DC \cdots\cdots(\text{定理四})$$

$$\therefore\quad AB = AD+DC > AC$$

系　直角三角形デハ斜邊ハ最大邊デアル。

〔注意〕上ノ證明中デ AB=AD+DB ハ圖ヲ一見スレバ明ラカナ様デアルガ其ハ D ガ A ト B トノ間ニアルコトヲ直觀的ニ承認スルカラデアル。モシ D ガ AB ノ延長上ニアレバ AB=AD∼DB ニナル。

定理一七　三角形ノ二邊ガ等シクナケレバ大邊ニ對スル角ハ小邊ニ對スル角ヨリ大キイ。

設假　△ABC ニ於テ AB > AC

終結　∠C > ∠B

證明　モシ ∠C < ∠B ナリトスレバ前定理ニヨリ AB < AC ニナル。之ハ假設ニ矛盾スル。

故ニ ∠C ハ ∠B ヨリ小サクナイ。

モシ又 ∠C=∠B ナリトスレバ定理四ニヨツテ AB=AC トナリ之モ亦假設ニ矛盾スル。

故ニ ∠C ハ ∠B ニ等シクナイ。

∠C ハ ∠B ヨリ小サクモナク,等シクモナイカラ

$$\angle C > \angle B$$

例　題

1. 鈍角三角形デハ鈍角ニ對スル邊ハ最大ナリ。
2. 二等邊三角形ノ底邊上ノ點ト頂點トヲ結ビ付ケル線分ハ等邊ヨリ大キクナイ。
3. △ABC ニ於テ ∠A ノ二等分線ト BC トノ交點ヲ D トスル。モシ AB>AC ナラバ ∠ADB ハ鈍角デアル。

4. △ABC ニ於テ BC ノ中點ヲ D トスル。

AB+AC ＞ 2AD ヲ證明セヨ。

手引 AD ヲ二倍ニ延長スルカ又ハ AC ノ中點ト D トヲ結付ケテ考ヘヨ。

5. 前問ニ於テ AB ＞ AC ナラバ ∠DAB ハ ∠DAC ヨリ小サイ。

6. 三角形ノ三中線ノ和ハ周圍ヨリ小ニシテ,周圍ノ $\frac{3}{4}$ ヨリ大キイ。

手引 一半ハ前々問ヲ用ヒ,他ノ一半ニハ59頁例題 6 ヲ利用セヨ。

7. 四邊形ノ一組ノ對邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ對角線ノ和ノ半分ヨリ小サイ。

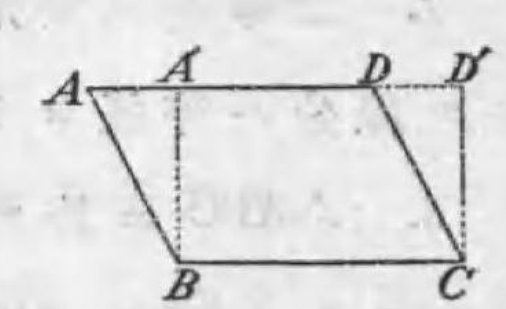
24. 面　積

面積ノ單位ニ平方米,平方糎等ヲ用ヒルコト幷ニ矩形,正方形ノ面積計算法ハ算術デ學ビマシタ。

問1. 平方米,平方糎ノ意義ヲ述ベヨ。

問2. 5 平方米ハ幾平方米カ。又幾平方糎カ。

問3. 二邊ガ夫々 $2\frac{1}{3}cm$, $3\frac{2}{5}cm$ ノ矩形ノ面積ハ幾平方糎デスカ。



問4. ▱ABCD ニ於テ一邊 BC ノ兩端カラ對邊 AD ニ下シタ垂

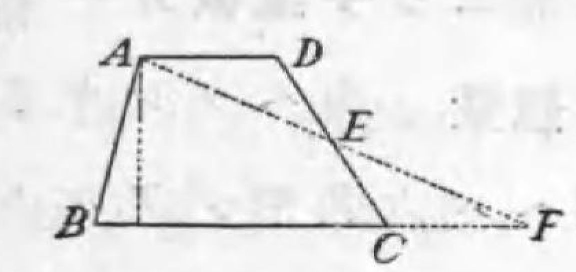
線ノ足ヲ夫々 A′,D′ トスル。△ABA′≡△DCD′ ヲ證明シ,之ヲ利用シテ ▱ABCD=矩形 A′BCD′* ヲ證明セヨ。

問5. 三角形ノ面積ハ之ト等底,等高ナル平行四邊形ノ面積ノ半分ニ等シ。

問6. 底邊,高サガ夫々 a 糎, b 糎,ナル平行四邊形ノ面積ヲ S_1 平方糎,三角形ノ面積ヲ S_2 平方糎トスレバ

$$S_1=ab,\qquad S_2=\frac{1}{2}ab$$

問7. 上底 a 糎,下底 b 糎,高サ h 糎デアル梯形ノ面積ヲ S 平方糎トスレバ $S=\frac{(a+b)h}{2}$ ナルコトヲ證明セヨ。



手引 CD ノ中點ヲ E トス。△AED ≡ △FEC ヲ利用シテ梯形 ABCD = △ABF ヲ證明セヨ。

平行四邊形,三角形ノ面積計算法ヨリ次ノ定理ノ成立ツコトガ明カデアル。

定理一八　等底,等高ナル二ツノ矩形,平行四邊形又ハ二ツノ三角形ハ等積デアル。

系一　等積ニシテ等底ナル二ツノ矩形,平行四邊形又ハ二ツノ三角形ハ等高デアル。

系二　等積ニシテ等高ナル二ツノ矩形,平行四邊形

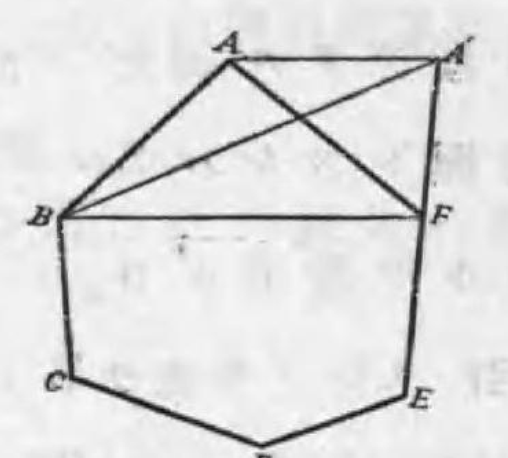
*▱ABCD′ ノ面積＝矩形 A′BCD′ ノ面積ヲ略記シタノデアル。

又ハ二ツノ三角形ハ等底デアル。

問8.　△ABC ノ中線 AD 上ノ一點ヲ E トスレバ △ABE = △ACE

問9.　底邊ヲ共有スル二ツノ三角形ガ等積ナラバ其頂點ヲ結ブ線分ハ底邊ニ平行ナルカ又ハ底邊デ二等分セラレル。

作圖題五　與ヘラレタル多角形(邊數ガ 4 以上ノ)ト等積ニシテ邊數ガ一ツ少ナイ多角形ヲ作ルコト。



題意　與ヘラレタ多角形ヲ例ヘバ六角形デアルトシテ之ヲ ABCDEF トスル。之ト等積ナル五角形ヲ作ルコト。

作圖　B,F ヲ結ビ, A ヲ通リ BF ニ平行ナル直線ヲ引キ EF ノ延長トノ交點ヲ A' トスル。A',B ヲ結ベ。A'BCDE ハ求メル五角形デアル。

證明　BF ヲ △ABF ト △A'BF トノ共通底邊ト考ヘルト,コノ兩三角形ハ等底等高デアル。

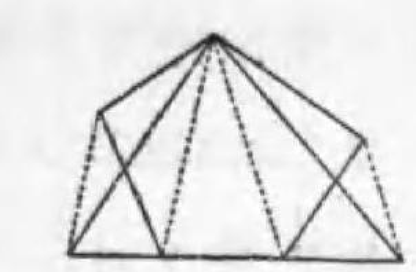
$\therefore$　△ABF = △A'BF

コノ双方ニ五角形 BCDEF ヲ加ヘルト

六角形 ABCDEF=五角形 A'BCDE

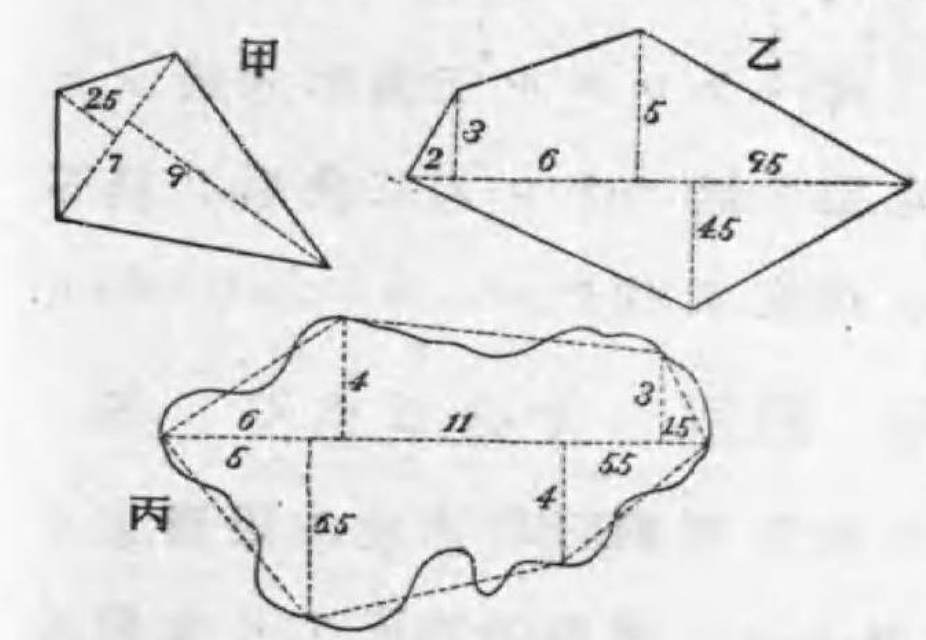
〔注意〕 六角形 ABCDEF ニ等積ナル五角形ハ無數ニアル。A'BCDEF ハソノ中ノ一ツデアル。作圖問題デハ題意ニ適スル圖形ハ殘ラズ作圖スベキデアルガ,本問ノ様ニ無數ニアル場合ニハ其旨ヲ斷ツテ任意ノ一ツヲ畫ケバヨロシイ。

問10.　與ヘラレタ五角形ト等積ナル三角形ヲ作レ(本問モ解答ハ無數ニアル其中ノ一ツヲ畫キナサイ)。



例　題

1.　四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ハ夫々 $24cm$, $32cm$ デアツテ互ニ垂直デアル。ABCD ノ面積ハ何程カ。



2.　左ノ圖形ノ面積ヲ求メナサイ。圖ニ記入シテアル數字ハ m ヲ單位トシタモノデアル。

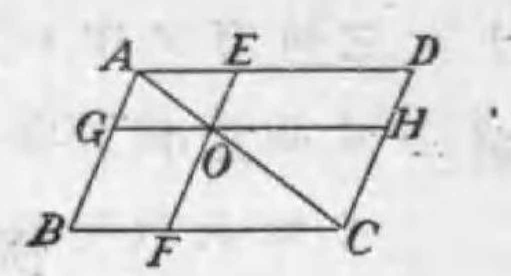
3.　ABCD ハ梯形デ AD ト BC トガ底邊デアル。AD = $5cm$,　BC = $8cm$ ナラバ △ABC : △ADC ノ値ハ何程カ。

4.　四邊形 ABCD ノ對角線 AC ヲ引イテ出來ル △ABC ノ面積ハ △ACD ノ面積ノ $\frac{2}{3}$ デアル。B ト AC トノ距離ガ $10cm$ ナラバ D ト AC トノ距離ハ何程カ。

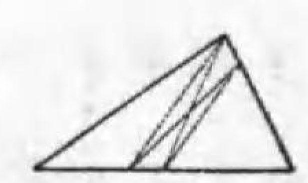
5. 底邊ガ AD, BC ナル梯形ノ對角線ノ交點ヲ O トスレバ　$\triangle AOB = \triangle COD$

6. 四邊形ノ各頂點ヲ通リ,コノ頂點ヲ通ラナイ對角線ニ平行ナル四ツノ直線デ出來ル平行四邊形ノ面積ハ原四邊形ノ面積ノ二倍ニ等シイ。

7. ▱ABCD ノ對角線 AC 上ノ一點ヲ O トス。O ヲ通リ AB, AD ニ平行ナル直線ト ▱ABCD ノ邊トノ交點ヲ圖ノ如ク E, F, G, H, トスレバ



▱GBFO = ▱EOHD



8. 與ヘラレタル三角形ノ邊上ニアル定點ヲ通ツテコノ三角形ヲ二等分スル直線ヲ引ケ。

25. 公式ノ圖表示

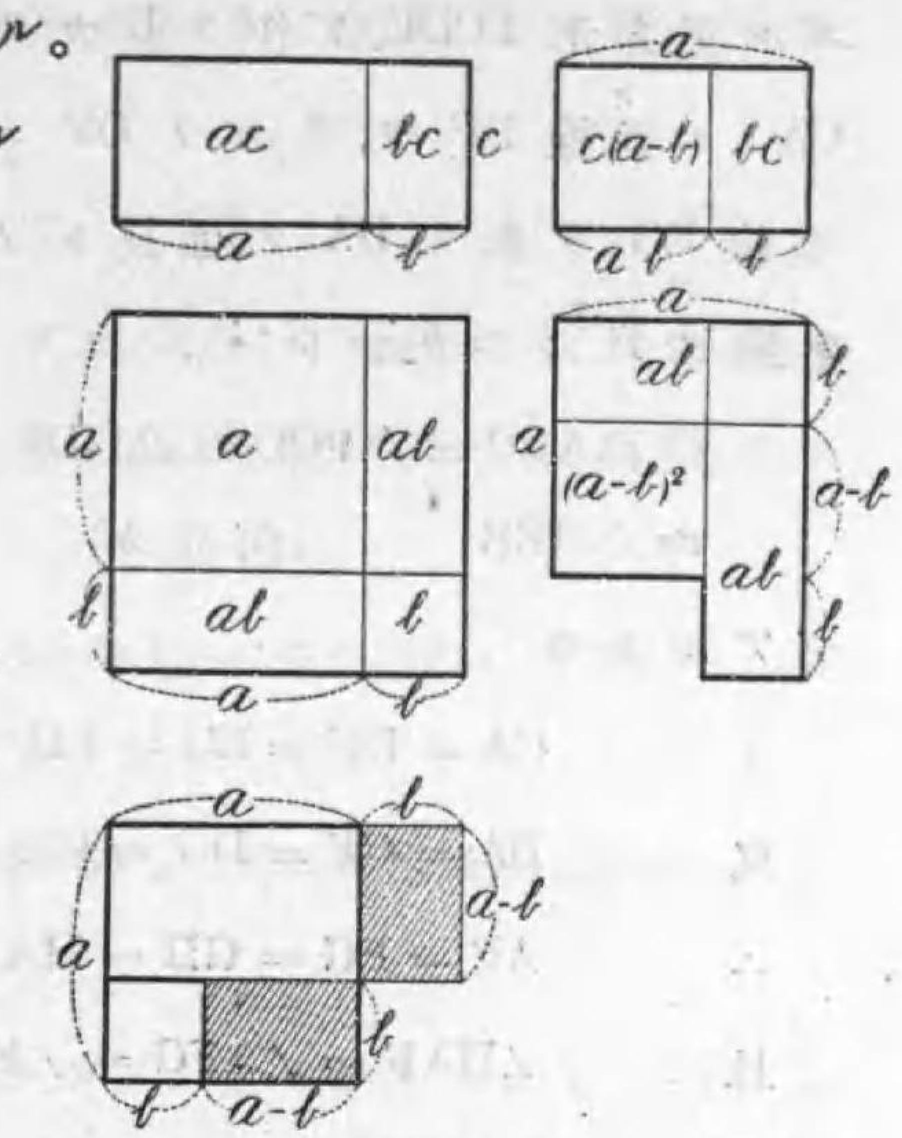
AB, BC ヲ二邊トスル矩形ヲ **AB, BC ノ包ム矩形**トイヒ,其面積ヲ **AB.BC** デ表ハス。又線分 AB ヲ一邊トスル正方形ヲ **AB ノ上ノ正方形**又ハ **AB ノ平方**トイヒ,其面積ヲ $\overline{AB}^2$ デ表ハス。

AB ノ長サヲ a*, BC ノ長サヲ b* トスレバ AB.BC ハ ab*

*長サト面積トハ對應セル單位ヲ用フルモノトシテ單位ノ記載ヲ略シタノデアル。以下多ク之ニ倣フ。

デアリ, $\overline{AB}^2$ ハ a^2 デアル。

代數デ屢々使用スル公式ヲ次ニ圖示スル。



1° $c(a+b)=ac+bc$

2° $c(a-b)=ac-bc$

但　$a \geqq b$

3° $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

4° $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

但　$a \geqq b$

5° $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

但　$a \geqq b$

問　$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab$　及

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ ヲ圖示セヨ。

26. ぴたごらすノ定理

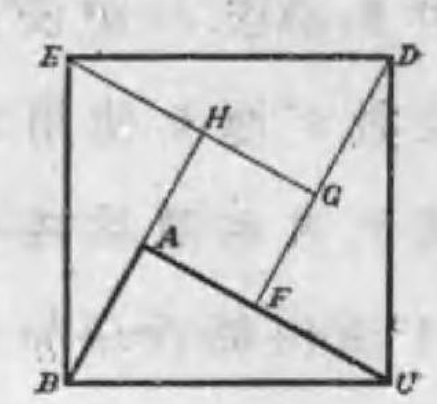
定理一九　直角三角形ノ斜邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シイ。*

題意　ABC ニ於テ $\angle A = \angle R$ デアルトシ, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ トスレバ　$a^2=b^2+c^2$

證明　BC ニ對シテ △ABC ト同ジ側ニ BC ヲ一邊ト

*之ヲぴたごらす (Pythagoras) ノ定理トイフ。ぴたごらすハ希臘ノ數學者デ紀元前500年頃生存シタ人デアル。

スル正方形 BCDE ヲ作リ D カラ CA ニ垂線 DF ヲ, E カラ DF ニ垂線 EG ヲ作リ BA ノ延長トノ交點ヲ H トス($b \geqq c$ トス)。



$$\triangle ABC \equiv \triangle FCD \equiv \triangle GDE$$
$$\equiv \triangle HEB \qquad \text{(何故カ)}$$

デアルカラ

$$CA = DF = EG = BH = b$$

又 $BA = CF = DG = EH = c$

∴ $AF = FG = GH = HA = b-c$

且 $\angle HAF = \angle AFG = \angle FGH = \angle GHA = \angle R$

デアルカラ AFGH ハ一邊ガ $b-c$ ナル正方形デアル。

又 $\angle A = \angle R$ デアルカラ $\triangle ABC = \dfrac{bc}{2}$

∴ $a^2 = \overline{BC}^2 =$ 正方形 $AFGH + 4\triangle ABC$

$$= (b-c)^2 + \frac{bc}{2} \times 4 = b^2 - 2bc + c^2 + 2bc = b^2 + c^2$$

問1. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ガ夫々6m,8mナラバ斜邊ハ幾米デスカ。

問2. 直角三角形ノ斜邊29m, 他ノ一邊21m, ナラバ殘ノ一邊ノ長サ何程。

問3. 二ツノ與ヘラレタル正方形ノ和ニ等シイ正方形ヲ作リナサイ。

問4. 與ヘラレタ線分ノ長サノ $\sqrt{3}$ 倍ニ等シイ線分ヲ作リナサイ。

例題

1. 對角線ガ10cmナル正方形ノ一邊ノ長サ何程。

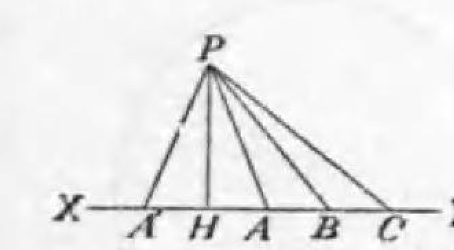
2. 一邊ガ a 米デアル正三角形ノ高サ及面積ヲ求メナサイ。

3. 周圍ガ等シイ正三角形ト正方形トガアル。其面積ハドチラガ大キイカ。

4. $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle B=60°$, $\angle C=45°$, AB=10cm ナラバ其面積何程カ。

手引 A カラ BC ニ下シタ垂線ノ足ヲ D トスルト $\triangle ABD$ ハ正三角形ノ半分デアル。

5. P ハ XY ノ外ニアル點デアル。P カラ XY ニ垂線 PH 斜線 PA, PB, PC ヲ引ク。



モシ $HA < HB < HC$ ナラバ

$PH < PA < PB < PC$

6. 三角形ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ハ第三邊ノ半分ノ上ノ正方形ト,第三邊ニ至ル中線ノ上ノ正方形トノ和ノ二倍ニ等シイ。

手引 第三邊ニ其對角ノ頂點ヨリ中線及垂線ヲ引イテ出來ル三ツノ直角三角形ノ各ニぴたごらすノ定理ヲ適用セヨ。

7. 平行四邊形ノ各邊ノ上ノ正方形ノ和ハ對角線ノ上ノ正方形ノ和ニ等シイ。

8. 定直線上ニ於テ二定點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ最小ナル點ヲ求メナサイ。

第三編

圓

27. 弧,弦及中心角ノ關係

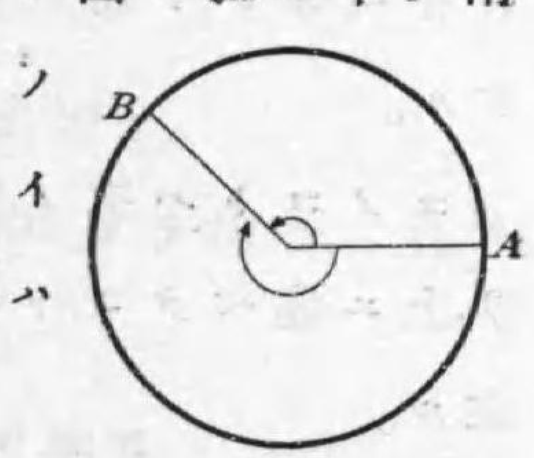
圓及圓周ニ關スル定義ト簡單ナ性質ハ既ニ學ビマシタ。

〔注意〕 圓周ヲ略シテ圓トイフコトガアル。

問 1. 弧,弦,中心角ノ定義ヲ述ベヨ。

問 2. 或點ガ圓周上ニアルコトヲ證明スル爲ニ何ガワカレバヨロシイカ。

圓周上ノ二點ヲ A,B トスル。コノ圓ノ弧ノ中デ兩端ガ A,B デアルノガ二ツアル。コノ樣ナ二ツノ弧ハ**互ニ共軛デアル**トイフ。二ツノ共軛弧ガ等シケレバ各ハ半圓周デアル。



$\overset{\frown}{AB}$ ノ上ニ立ツ中心角ト $\overset{\frown}{AB}$ ノ共軛弧ノ上ニ立ツ中心角トハ**互ニ共軛デアル**トイフ。二ツノ共軛角ガ等シケレバ各ハ平角デアル。

定義 半圓周ヨリ小サイ弧ヲ**劣弧**,大キイ弧

ヲ優弧トイヒ,平角ヨリ小サイ角ヲ劣角,平角ヨリ大キク4∠Rヨリ小サイ角ヲ優角トイフ。

劣弧ノ上ニ立ツ中心角ハ劣角,優弧ノ上ニ立ツ中心角ハ優角デアル。

以下單ニ弧,角ト稱スルハ通常劣弧,劣角ヲ指スノデアル。

厚紙二枚ヲ重ネ其上ノ一枚ニ圓周ヲ畫キ重ネタママデ切拔キ中心ニ針ヲ通シテ中心ハ常ニ重ナル樣ニスル。カクシテ一枚ヲ廻轉スルト如何ホド廻轉シテモ二ツノ圓周ハ常ニ全ク重ナリ合フ。

モシ二圓ノ各ニ相等シイ弧ヲ考ヘ,其兩端ヲ重ネルト是等ノ弧ニ對スル弦モ,中心角モ夫々重ナル。二圓ノ各ニ等シイ弦ヲ考ヘテモ,中心角ヲ考ヘテモ同樣デアル。

コノコトハ次ノ定理ガ成立ツコトヲ示スモノデアリ,上ニ述ベタコトハ其證明デアルト考ヘルコトガ出來ル。

定理一　同シ圓又ハ相等シイ圓ニ於テ

1°. 相等シイ弧ニ對スル弦,中心角ハ夫々等シイ。

2°. 相等シイ弦ニ對スル弧,中心角ハ夫々等シイ。

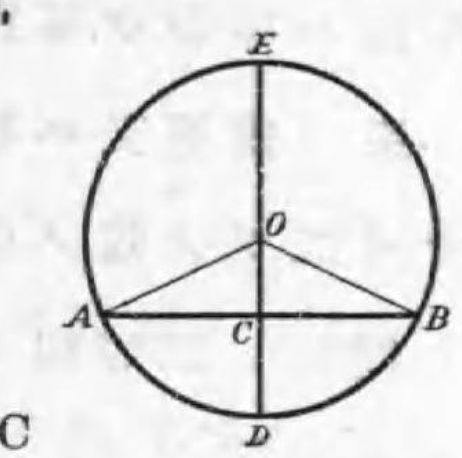
3°. 相等シイ中心角ニ對スル弧,弦ハ夫々等シイ。

上ノ定理ニヨツテ例ヘバ相等シキ圓又ハ同ジ圓ニ於テ二ツノ弦ガ等シイコトヲ證明スルニハ是等ノ弦ニ對スル弧又ハ中心角ガ等シイコトヲ知レバヨロシイ。

28. 弦ニ關スル定理

定理二　圓ノ中心(O)ヲ通ツテ弦(AB)ニ垂直ナル直線(OC)ハコノ弦及之ニ對スル弧($\overset{\frown}{ABD}$, $\overset{\frown}{AEB}$)ヲ二等分スル。*

證明　$OC \perp AB$ デアルカラ $\triangle AOC$, $\triangle BOC$ ハ共ニ直角三角形デアツテ



$OA = OB$,　OC ハ共通

$\therefore \quad \triangle AOC \equiv \triangle BOC$

從テ　$AC = CB$,　$\angle AOC = \angle BOC$

$\therefore \quad \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$ ……………(定理一)

又 $\overset{\frown}{AE}$, $\overset{\frown}{BE}$ ハ夫々半圓周 DAE, DBE カラ等シイ弧 AD, BD ヲ減ジタ殘デアルカラ等シイ。

系　弦ノ垂直二等分線ハ中心ヲ通ル。

問1.　圓ノ中心トコノ圓ノ弦ノ中點トヲ結ブ線分ハコノ弦ニ垂直デアル。

*定理又ハ作圖題ノ本文中ニ圖形ノ要部ノ名稱ヲ記入シテ題意,假設,終結等ヲ特記スルコトヲ略ス。

問 2. 與ヘラレタル弧ヲ二等分セヨ。

定義 弧ノ二等分點ヲコノ弧ノ中點トイフ。

問 3. 半徑 $5cm$ ノ圓ニ於テ長サ $8cm$ ノ弦ト中心トノ距離ヲ求メナサイ。

問 4. 半徑 r 糎ノ圓ニ於テ中心トノ距離ガ d 糎デアル弦ノ長サハ $2\sqrt{r^2-d^2}$ 糎ナルコトヲ證明シナサイ。

本問ニヨツテ次ノ定理ノ成立ツコトガ明デアル。

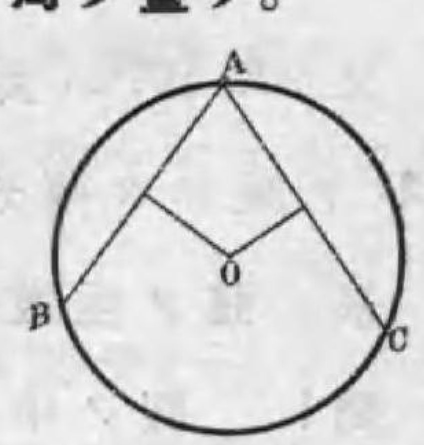
定理三 同圓又ハ等圓ニ於テ中心ヨリ等距離ニアル弦ハ等シク,等弦ハ中心カラ等距離ニアル。

系 同圓又ハ等圓ニ於テ中心ヨリノ距離ガ等シクナイ二ツノ弦ノ中デ中心ニ近イモノガ他ヨリ大キイ。

問 5. 二等圓ガ其中心線*ニ平行ナル直線カラ切取ル弦ハ等シイ。

作圖題一 三定點(ABC)ヲ通ル圓周ヲ畫ケ。

解析** A, B, C ヲ通ル圓周ヲ畫キ得タトシテ其中心ヲ O トスル。AB, AC ハ圓 O ノ弦デアルカラ各ノ垂直二等分線ハ中心 O ヲ通ル(前定理系)。

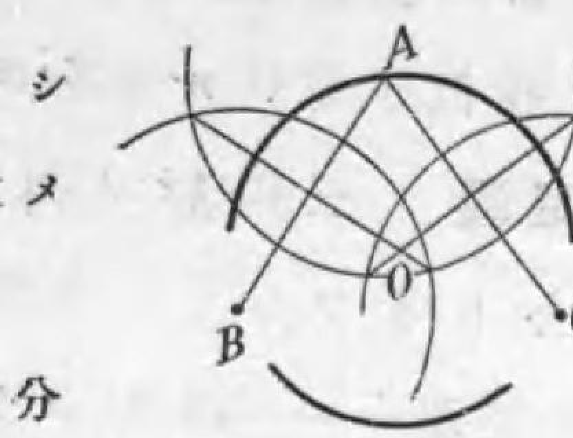


*二圓ノ中心ヲ通ル直線ヲコノ二圓ノ中心線トイフ。
**求メル圖ヲ作リ得タトシテ，之ト既知ノモノトノ關係ヲ調査スルコトデアル。

ソコデ次ノ作圖法ヲ推定スルコトガ出來ル。

作圖 AB ノ垂直二等分線ト AC ノ垂直二等分線トヲ畫キ其交點ヲ O トスル。

O ヲ中心トシ, OA ヲ半徑トシテ圓周ヲ畫ケバ,コノ圓周ガ求メルモノデアル。



證明 O ハ AB ノ垂直二等分線上ニアルカラ OA＝OB……(42頁例題 2)即點 B ト中心トノ距離ハ半徑 OA ニ等シイカラ B ハ圓周上ニアル。

同樣ニ C モ亦圓周上ニアル。

故ニ圓周 O ハ A, B, C ヲ通ル。

〔**注意 1**〕. 解析ニヨツテ A, B, C ヲ通ル圓周ノ中心ハ AB, AC ノ各ノ垂直二等分線上ニナケレバナラヌ。故ニ求メル圓ノ中心ハ是等ノ垂直二等分線ノ共有點ノ外ニハナイ。A,B,C ガ同一直線上ニナケレバ AB,AC ノ垂直二等分線ハ交ハルカラコノ場合ニハ求メル圓ハ唯一ツアル。又 A, B, C ガ同一直線上ニアルト AB,AC ノ垂直二等分線ハ平行ニナルカラコノ場合ニハ題意ニ適スル圓周ハナイ。

〔**注意 2**〕. 上ノ注意ニヨツテ直線ト圓周トハ三點以上デハ出會ハナイコトガ分ル。又三點ヲ通ル圓

周モ唯一ツデアルカラ二ツノ圓周モ三點以上デハ出會ハナイ(32頁定理lノ證明)。

問6.　運動場ニ大キナ圓ガ畫カレテアル。コノ中心ノ位置ヲ求メルニハドウスベキカ。

定義　三角形ノ外接圓ノ中心ヲ其三角形ノ**外心**トイフ。

作圖題一ハ△ABCノ外接圓ノ作圖法ヲ示ス。

例　題

1. 圓Oニ於テ $\overset{\frown}{AB}$ ノ中點ヲCトスル。OCハ弦ABヲ垂直ニ二等分スル。

2. 二ツノ同心圓ガ一直線カラ切取ル弦ヲ夫々AB, CDトスレバ $AC = DB$

3. 圓Oニ於テ定直線XYニ平行ナル多クノ弦ノ中點ハ皆XYニ垂直ナル直徑上ニアル。

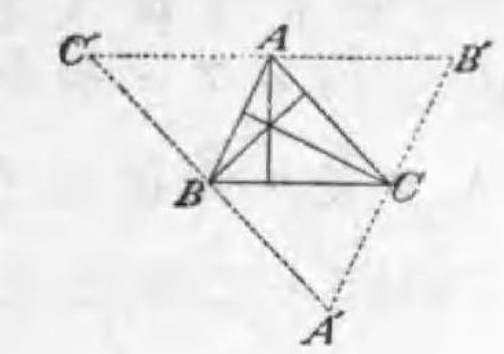
4. 圓Oニ於テ相等シイ多クノ弦ノ中點ハ皆同一圓周上ニアル。

5. 圓Oニ於テ相等シイ二ツノ弦AB,CD又ハ其延長ノ交點ヲPトスレバPOハAB,CDノナス角ノ一ツヲ二等分スル。

6. 圓內ノ定點ヲ通ル弦ノ中デコノ點ヲ通ル半徑ニ垂直ナルモノガ最小デアル。

7. 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ一點ニ會スルコトヲ證明セヨ。

8. 四邊形ABCDノ三邊AB,BC,CDノ垂直二等分線ガ一點ニ會スルナラバコノ四邊形ニ外接スル圓ヲ畫クコトガ出來ル。



9. 三角形ノ各頂點カラ對邊ニ下セル垂線ハ一點ニ會スル。

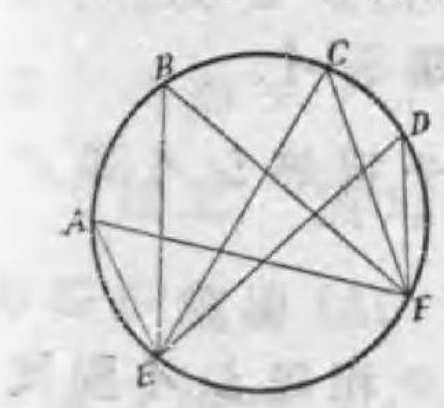
手引　△ABCノ各頂點ヲ通リ對邊ニ平行ナル直線デ出來ル三角形ヲA′B′C′トスル。△ABCノ各頂點ヨリ對邊ニ至ル垂線ハ△A′B′C′ノ何ニ當ルカヲ考ヘヨ。

〔**注意**〕三角形ノ各頂點カラ對邊ニ下セル三垂線ノ會スル點ヲコノ三角形ノ**垂心**トイフ。

10. 垂心ト外心トガ一致スル三角形ハ正三角形デアル。

29. 圓周角

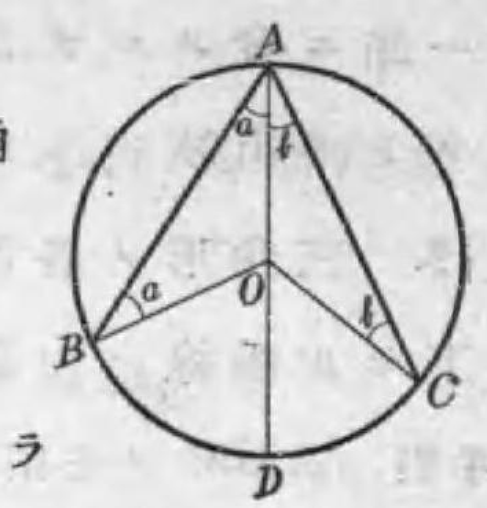
定義　圓周上ノ一點ヲ通ル二ツノ弦ノナス角ヲ**圓周角**トイフ。



圓周角ハ其二邊ノ間ニ夾マレル**弧ノ上ニ立ツ**トイフ。例ヘバ圖ニ於テ∠EAF, ∠EBF, ∠ECF, ∠EDFハ

皆 EF ノ上ニ立ツ圓周角デアル。

定理四　中心角($\angle BOC$)ト圓周角($\angle BAC$)トガ同ジ弧($\overset{\frown}{BC}$)ノ上ニ立ツナラバ中心角ハ圓周角ノ二倍ニ等シイ。



證明　圖ノ様ニ中心 O ガ圓周角 BAC ノ内ニアル場合ヲ考ヘル。

A ヲ通ル直徑ヲ AD トスル。

△OAB ハ二等邊三角形デアルカラ

$\angle BAO$ ヲ a トスレバ $\angle ABO$ モ亦 a デアル。

$\angle BOD$ ハ △OAB ノ外角デアルカラ。

$$\angle BOD = \angle BAO + \angle ABO = a + a = 2a$$

同様ニ $\angle OAC$ ヲ b トスレバ

$$\angle DOC = \angle OAC + \angle OCA = b + b = 2b$$

$$\therefore\ \angle BOC = \angle BOD + \angle DOC = 2a + 2b = 2(a+b)$$

$$= 2(\angle BAO + \angle OAC) = 2\angle BAC$$

問1.　中心 O ガ $\angle BAC$ ノ邊上ニアルトキ, $\angle BAC$ ノ外ニアルトキノ證明法如何。

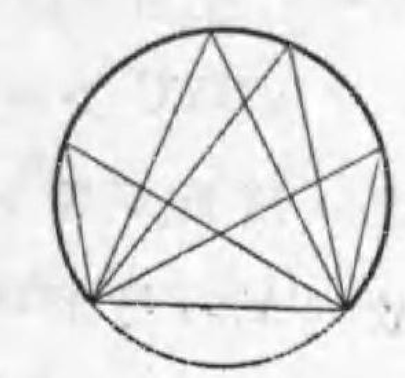
系一　同ジ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ等シイ。

系二　同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テ相等シイ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シイ。

系三　同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テ相等シイ圓周角ハ相等シイ弧ノ上ニ立ツ。

系四　半圓周ノ上ニ立ツ圓周角ハ直角デアル。

定義　弧ト其兩端ヲ結ブ弦トデ圍マレル平面形ヲ**弓形**トイヒ,弓形ノ弧上ノ點ヲ弦ノ兩端ニ結ブ二直線ノナス角ヲ**弓形ノ角**トイフ。



圓ニ一ツノ弦ヲ引ケバ,ソノ圓ハ二ツノ弓形ニ分ケラレル。是等ノ弓形ノ弧ハ互ニ共軛デアル。弓形ノ角ハソノ弧ノ共軛弧ノ上ニ立ツ圓周角デアル。

半圓ハ弓形ノ特別ノ場合デアル。

◎問2.　同ジ弓形ノ角ハ皆等シイ。

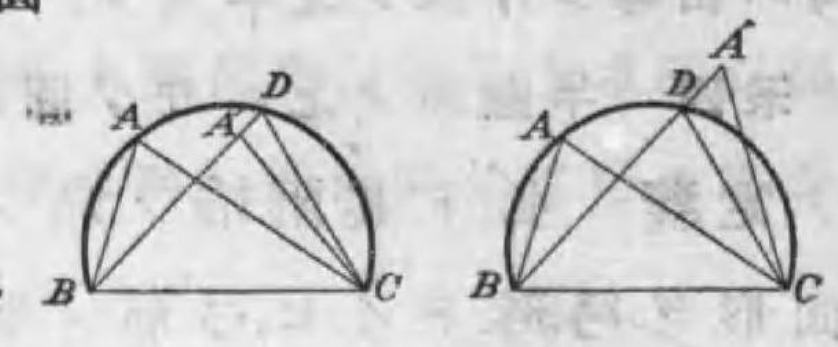
◎問3.　半圓ノ角ハ直角デアル。

問4.　△ABC ノ外接圓ノ弧 BC ノ中點ヲ D トスレバ, AD ハ $\angle A$ ヲ二等分スル。

問5.　△ABC ノ外接圓ノ弧 BC 上ノ點ヲ D トスル。モシ DA ガ $\angle BDC$ ヲ二等分スルナラバ △ABC ハ二等邊三角形デアル。

定理五　頂角ノ等シイ二ツノ三角形(△ABC, △A'BC)ガ同ジ底邊(AC)ノ同ジ側ニ立ツナラバ二ツノ頂點ト底邊ノ兩端(A,A',B,C)トハ同一圓周上ニアル。

證明　$\triangle ABC$ ノ外接圓ヲ畫ク。



モシ A' ガ弓形 ABC ノ內ニアルモノトスレバ BA' ノ延長ト $\overset{\frown}{BAC}$ トノ交點ヲ D トスル。$\angle BA'C$ ハ $\triangle DA'C$ ノ外角デ，$\angle BDC$ ハ其內對角デアルカラ

$$\angle BA'C > \angle BDC = \angle BAC$$

之ハ頂角ガ等シイトイフ假設ニ反スル。

故ニ A' ハ弓形 BAC ノ內ニハナイ。

又 A' ガ弓形 BAC ノ外ニアリトスレバ BA' ト $\overset{\frown}{BAC}$ トノ交點ヲ D トスレバ前ト同樣ニシテ

$$\angle BA'C < \angle BDC = \angle BAC$$

之モ假設ニ反スルカラ A' ハ弓形 BAC ノ外ニハナイ。

A' ハ弓形 BAC ノ內ニモナク，外ニモナイカラ $\overset{\frown}{BAC}$ 上ニアル。

ヨツテ A,A',B,C ハ同一圓周上ニアル。

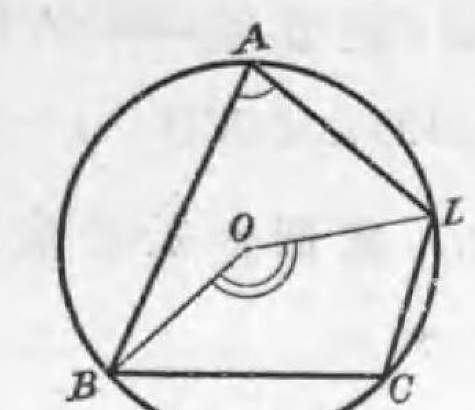
系　**直角三角形ノ斜邊ヲ直徑トスル圓周ハ直角ノ頂點ヲ通ル。**

問 6.　四邊形 ABCD ニ於テ $\angle BAC = \angle BDC$ ナラバ

$$\angle ACB = \angle ADB, \qquad \angle DAC = \angle DBC$$

問 7.　三角形ノ二邊ノ各ヲ直徑トスル二ツノ圓周ハ第三邊又ハ其延長上デ交ハル。

定理六　**圓ニ內接スル四邊形(ABCD)ノ相對スル角ハ互ニ補角デアル。**



證明　圓ノ中心ヲ O トスル。

$$\angle A = \frac{1}{2}\angle BOD \cdots\cdots(\text{定理四})$$

$$\angle C = \frac{1}{2}(\angle BOD\ \text{ノ共軛角})$$

$$\therefore\quad \angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\angle EOD + \angle BOD\ \text{ノ共軛角}) = \frac{1}{2}(4\angle R) = 2\angle R$$

又 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4\angle R, \qquad \angle A + \angle C = 2\angle R$

$$\therefore\quad \angle B + \angle D = 2\angle R$$

系一　**圓ニ內接スル四邊形ノ一外角ハ其內對角*ニ等シイ。**

系二　**四邊形ノ一組ノ對角ガ補角デアルナラバ，コノ四邊形ニ外接スル圓ヲ畫クコトガ出來ル。一外角ガ內對角ニ等シイトキモ亦同樣デアル。**

手引　四邊形 ABCD ニ於テ $\angle A + \angle C = 2\angle R$ トスル。$\triangle BCD$ ノ外接圓ヲ畫キ $\overset{\frown}{BCD}$ ノ共軛弧ノ上ニ點 A' ヲトリ A,A',B,D ガ同一圓周上ニアルコトヲ證明セヨ。

問 8.　矩形ニ外接スル圓ヲ畫クコトガ出來ル。

問 9.　圓ニ內接シ得ル平行四邊形ハ矩形デアル。

---

*外角ノ接角デアル內角ノ對角ヲコノ外角ノ內對角トイフ。

例　題

1. 正方形ABCノ外接圓ノ弧AD上ノ點ヲEトスレバ $\angle AEB = \angle CED$

2. 定圓ニ於テ定點ヲ通ル弦ノ中點ハ皆同一圓周上ニアル。

3. 圓Oノ直徑ABノ一端Aヲ通ル弦ヲACトスル。BCハACト中心Oトノ距離ノ二倍ニ等シイ。

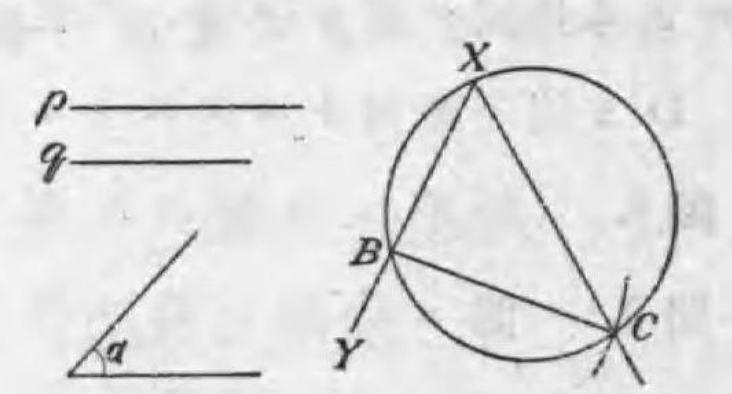
4. 二圓ノ交點ヲA,Bトスル。Bヲ通ル二直線PBQ, RBSト二圓周トノ交點ヲP,Q,R,Sトスレバ,

$$\angle PAQ = \angle RAS$$

5. 圓Oト圓O'トノ交點ヲA,Bトスル。Aヲ通ル直線CADトBヲ通ル直線EBFトガ圓Oニ交ハル點ヲC,E, 圓O'ニ交ハル點ヲD,FトスレバCE∥DF。

6. 與ヘラレタ三角形ト底邊ヲ共有シ,且之ト等シイ頂角ヲモツ二等邊三角形ヲ作レ。

7. 底邊,高サガ夫々定線分 p,q ニ等シク頂角ガ定角 α ニ等シイ三角形ヲ畫キナサイ。



手引　$\angle\alpha$ ニ等シイ角YXZヲ畫キXY上ニXBヲ p ヨリ小サクトリ,Bヲ中心トシ p ヲ半徑トスル圓ト射線XZトノ交點ヲCトスル。所要ノ三角形ハBCヲ底邊トシ△XBCノ外接圓周上ニ頂點ヲ持チ且ツ高サガ q ナル如キモノデアル。

8. 底邊,頂角及底邊ノ中點ヲ通ル中線ヲ知リテ三角形ヲ畫ケ。

9. △ABCノ外接圓周ト∠Aノ二等分線トノ交點ヲDトシ,DヨリAB, ACニ下シタ垂線ノ足ヲ夫々E, Fトスレバ

$$AE = AF = \frac{1}{2}(AB+AC), \qquad EB = CF = \frac{1}{2}(AB \sim AC)$$

手引　先ヅ△DBE≡△DCFヲ證明セヨ。

10. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ直交スルトキ,對角線ノ交點ヲ通リ一邊ニ垂直ナル直線ハ,コノ邊ニ對スル邊ノ中點ヲ通ル。

11. 正三角形ABCノ外接圓ノ弧BC上ノ點ヲPトスレバ　$PA = PB + PC$

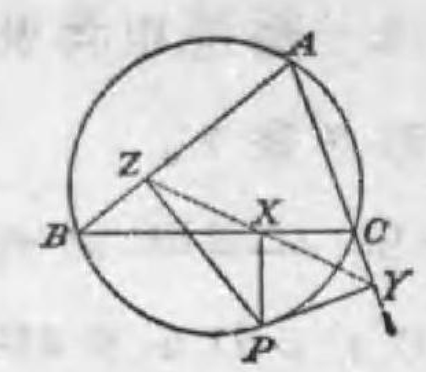
12. △ABCノ垂心ヲHトシ, AH, BH, CH又ハ其延長ト對邊又ハ其延長トノ交點ヲ夫々D, E,Fトスレバ

$$\angle ABH = \angle FDA = \angle ADE = \angle ACH$$

手引　例ヘバ ∠ABH=∠FDA ナル爲ニハF, B, D, Hガ同一圓周上ニナケレバナラヌ。

13　前問ニ於テADヌハ其延長ト△ABCノ外接圓周トノ交點ヲKトスレバ　　HD＝DK

14. △ABCノ外接圓周上ノ點ヲPトシ,Pヨリ三邊ニ下セル垂線ノ足ヲ夫々X,Y,ZトスレバX,Y,Zハ同一直線上ニアル。



手引　圖ニ於テZX,XYヲ結ビ∠ZXB＝∠ZPB＝∠YPC＝∠YXCヲ證明セヨ。

〔注意〕コノ定理ヲ**しむそん定理**トイヒ,直線XYZヲP點ニ關スル△ABCノ**しむそん線**トイフ。

15. 前問ニ於テPX又ハ其延長ト△ABCノ外接圓周トノ交點ヲDトスレバADハPニ關スル△ABCノしむそん線ニ平行ナリ。

30. 直線ト圓トノ關係

圓周ト直線トハ(1)全ク出會ハナイカ,(2)唯一點デ出會フカ,(3)二點デ出會フカノ三ツノ場合ガアルコトヲ學ビマシタ(11頁)

問1. 切線,割線ノ定義ヲ述ベヨ。

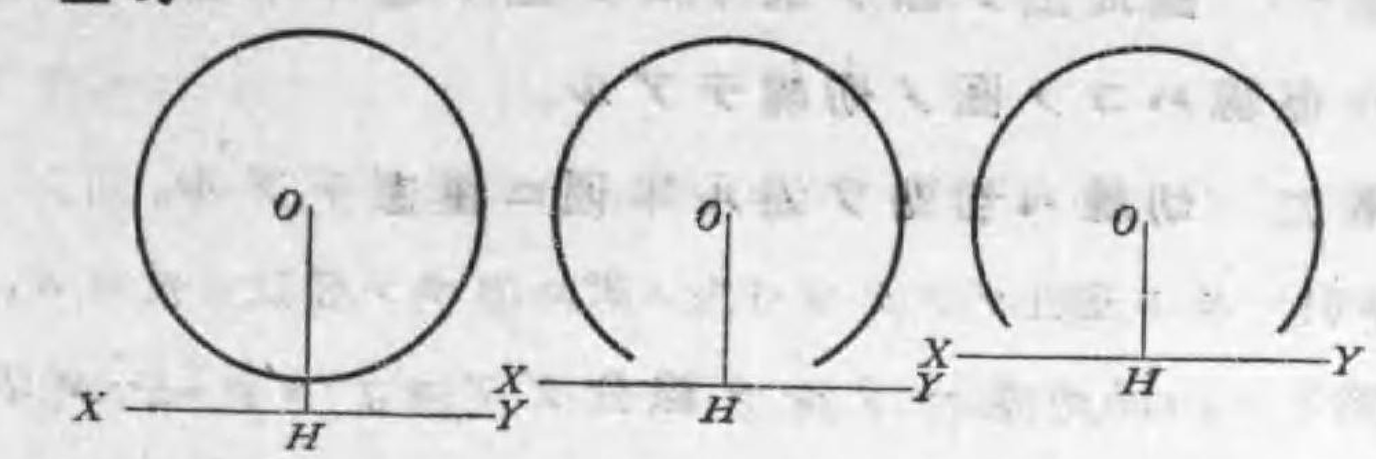
定理七　圖ノ中心(O)ト直線(XY)トノ距離(OH)ヲh,半徑ヲrトスル。

1°　$h>r$ナラバ直線ト圖トハ全ク出會ハナイ。

2°　$h=r$ナラバ直線ハ圖ニ切スル。

3°　$h<r$ナラバ直線ハ圖ニ交ハル。

證明



1°　點OカラXYニ下シタ垂線ノ長サガrヨリ大キイカラXY上ノ總テノ點トOトノ距離ハ皆rヨリ大キイ(69頁例題5)。

故ニXY上ノ總テノ點ハ圓外ニアル。ヨツテXYハ全ク圓周ニ出會ハナイ。

2°　コノ場合ニハHハ圓周上ニアルガ前ト同ジ理由デXY上ニテHト異ナル點ハ皆圓外ニアル。

故ニXYハHデ圓ニ出會ツテキルダケデ其他ノ點デハ圓ニ出會ハナイ。ヨツテXYハAニ於テ圓Oニ切スル。

3°　コノ場合ニハHハ圓内ニアル。XY上ニテHノ兩側ニHA,HBヲ何レモ$\sqrt{r^2-h^2}$ニ等シクトレバ

$\overline{OA}^2=\overline{OH}^2+\overline{AH}^2=h^2+(\sqrt{r^2-h^2})^2=r^2$　　$\therefore$　$OA=r$

ヨツテAハ圓周上ニアル。同様ニBモ亦圓周上ニ

アル。

故ニXYハ二點A,Bニテ圓周ニ交ハル。

系一.　圓周上ノ點ヲ通リ,コノ點ヲ通ル半徑ニ垂直ナル直線ハコノ圓ノ切線デアル。

系二.　切線ハ切點ヲ通ル半徑ニ垂直デアル。

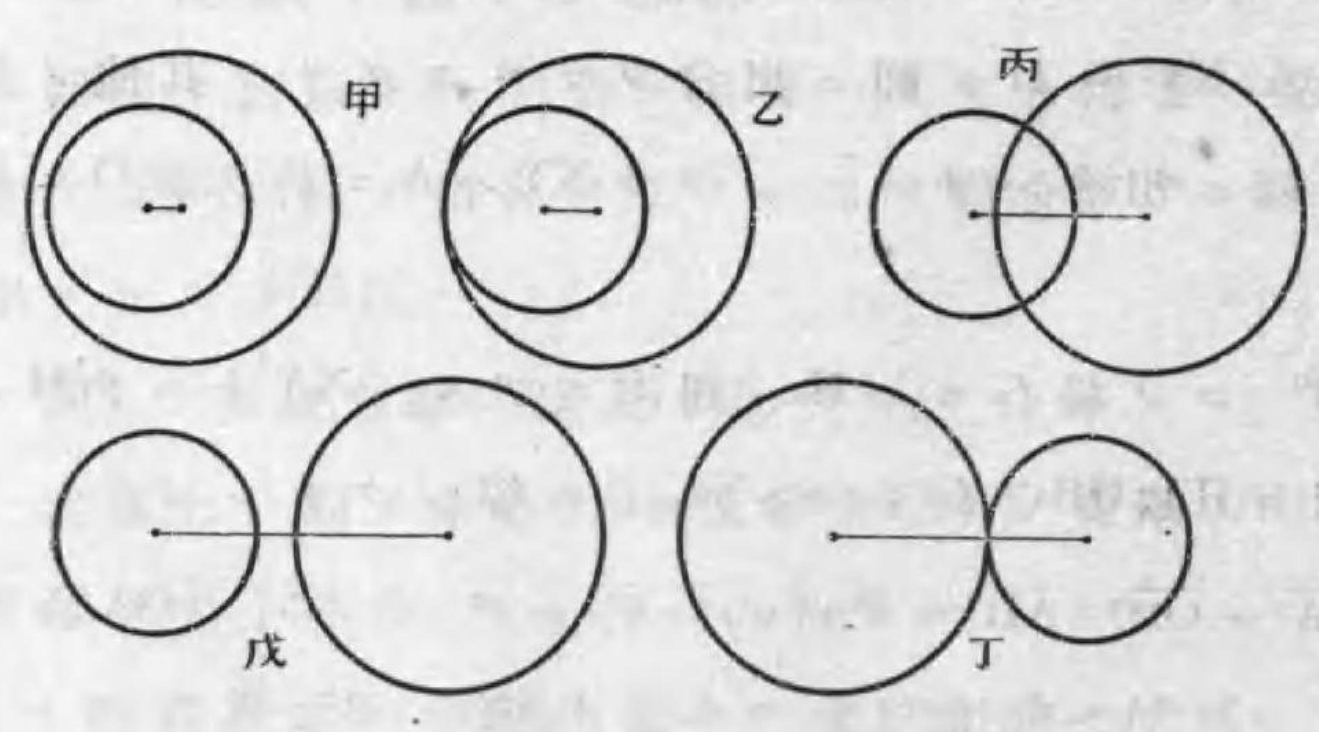
手引　モシ垂直デナケレバ上ノ3°ニヨツテ假設ニ反スル。

問2　r,hガ與ヘラレタ線分デアル。$\sqrt{r^2-h^2}$デ表ハサレル長サヲ作圖シナサイ。

問3　與ヘラレタ圓周上ノ與ヘラレタ點ニ於テコノ圓ニ切スル直線ヲ引ケ。

31.　圓ト圓トノ關係

相異ナル二ツノ圓周ハ(1)全ク出會ハナイカ,(2)唯一點デ出會フカ,(3)二點デ出會フカノ三ツノ場合ガアルコトヲ學ビマシタ(11頁)ガ,全ク出會ハナイトシテモ一



方ガ全ク他ノ内ニアツテ出會ハナイ場合ト,ドチラモ他ノ外ニアツテ出會ハナイ場合トガアル。切スルトキモ同様デアルカラ結局前頁ニ圖示セル五ツノ場合ガアル。

二圓ノ一方ガ全ク他ノ内ニアツテ切スルトキ(乙圖)ニハ,コノ二圓ハ**内切スル**トイヒ,何レモ他ノ外ニアツテ切スルトキ(丁圖)ニハ,コノ二圓ハ**外切スル**トイフ。

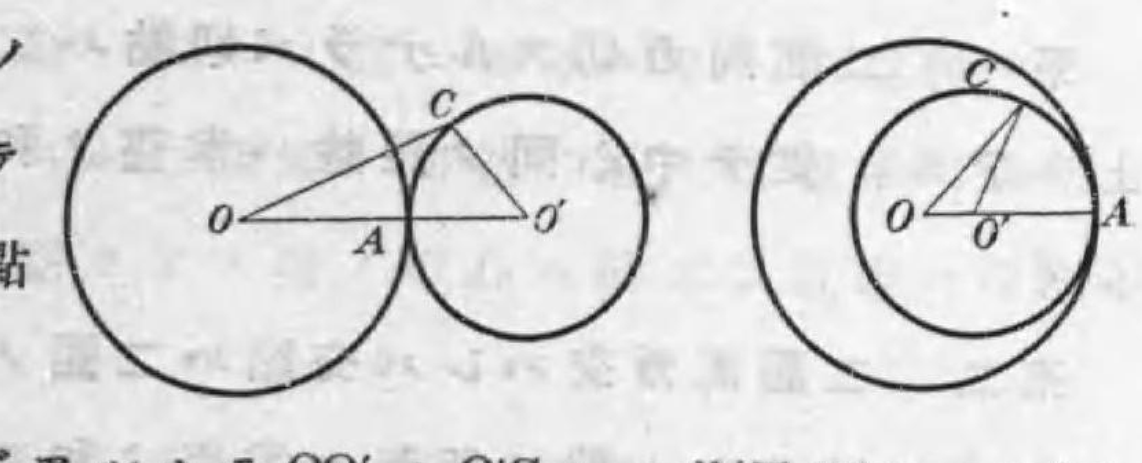
定理八　相異ナル二ツノ圓周(O,O′)ガ

1°　中心線(OO′)上ノ點(A)デ出會フナラバ,コノ二圓周ハ切シ

2°　中線線(OO)上ニナイ點(B)デ出會フナラバコノ二圓周ハ交ハル。

證明

1°　圓O′ノ周上ニアツテAト異ナル點ヲCトスル。



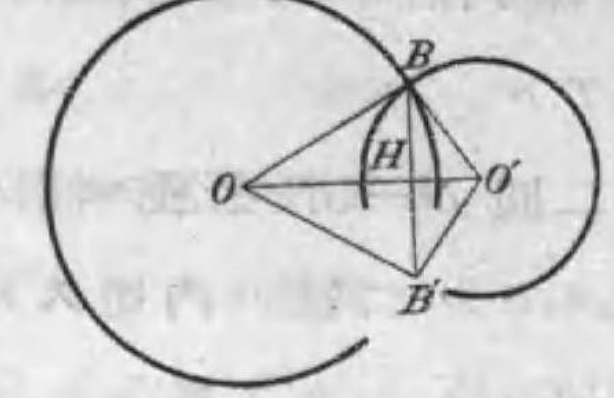
O′A＝O′CデアルカラOO′トO′Cトノ差(甲圖)又ハ和(乙圖)ハOAニ等シイ。

トコロガ△COO′ニ於テ

$$OO' \sim O'C < OC < OO' + O'C \qquad \therefore\ OC \neq OA$$

ヨツテCハ圓Oノ周上ニハナイ。

故ニ二圓周ハAデ出會ツテキルダケデ其他ノ點デハ出會ハナイ。ヨツテ二圓周ハAデ切スル。



2° BカラOO'ニ下シタ垂線ノ足ヲHトシ,BHノ延長上ニBHニ等シクHB'ヲトル。

OハBB'ノ垂直二等分線上ニアルカラ OB=OB'

ヨツテB'ハ圓Oノ周上ニアル。

同樣ニB'ハ圓O'ノ周上ニモアルカラ二圓周ハB'デ出會フノデアル。

二圓周O,O'ガ二點B,B'デ出會フカラ,コノ二圓周ハ交ハル。

系一. 二圓周ガ切スルナラバ切點ハ二圓ノ中心線上ニアル。從テ中心間ノ距離ハ半徑ノ和又ハ差ニ等シイ。

系二. 二圓周ガ交ハレバ交點ハ二圓ノ中心線上ニハナイ。從テ中心間ノ距離ハ半徑ノ和ヨリ小ニシテ差ヨリ大デアル。

〔注意〕 二周圓ガ全ク出會ハナイナラバ中心間ノ距離ハ半徑ノ和ヨリ大ナルカ又ハ差ヨリ小ナルコ

ト明カデアル。

問 二圓周ガ切スルナラバ切點ニ於テ切線ヲ共有スル。

例題

1. 二圓周ガ交ハレバ其交點ヲ結ブ線分ハ中心線ニヨリテ垂直ニ二等分セラレル。

2. 二圓ノ中心間ノ距離ガ半徑ノ和又ハ差ニ等シイトキハ二圓周ハ切シ,半徑ノ和ヨリ小ニシテ差ヨリ大ナルトキハ二圓周ハ交ハル。

3. 定圓周ニ切スル定半徑ノ圓ノ中心ハ皆同一圓周上ニアル。內切スルトキハ如何。

4. 二定圓ノ各ニ外切スル定半徑ノ圓ヲ畫ケ。

5. 圓Oノ多クノ弦 AB, CD, EF, GH 等ガ皆等シイナラバ是等ノ弦ハ同一ノ圓ニ切スルコトヲ證明セヨ。

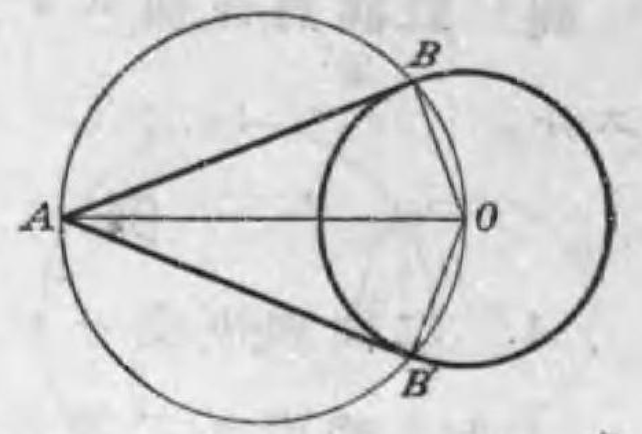
6. 相切スル二圓周ノ切點ヲ通ル直線ガ二圓周ノ各ト交ハル點ヲ,ソノ圓ノ中心ニ結ブ二直線ハ平行デアル。

7. 定直線ニ平行ナル樣ニ定圓ノ切線ヲ引ケ。

32. 切線ニ關スル定理及作圖

作圖題二. 定圓(O)外ノ定點(A)ヲ通リコノ圓ニ切線ヲ引ケ。

解析 求メル切線ヲ引キ得タトシテ其切點ヲBトスレバ定理七系二ニヨツテ$\angle ABO = \angle R$デアル。故ニBハAOヲ直徑トスル圓周上ニアル(定理五系)。



作圖 AOヲ直徑トスル圓周ヲ畫キ,圓周Oトノ交點ヲB, B'トスル。直線AB, AB'ハ共ニ求メル切線デアル。

證明 $\angle ABO$ハ半圓ノ角デアルカラ$\angle R$デアル。故ニ定理七系一ニヨツテABハ圓Oノ切線デアル。

同樣ニAB'モ亦題意ニ適スル直線デアル。

〔**注意**〕 圓外ノ點Aヲ通ル切線ハ上ノ樣ニ二ツアルガ,モシAガ圓周上ニアレバ唯一ツデアリ,Aガ圓內ニアレバAヲ通ル切線ハナイ。

上圖ニ於テ線分ABノ長サヲAカラ圓Oニ引イタ切線ノ長サトイフ。

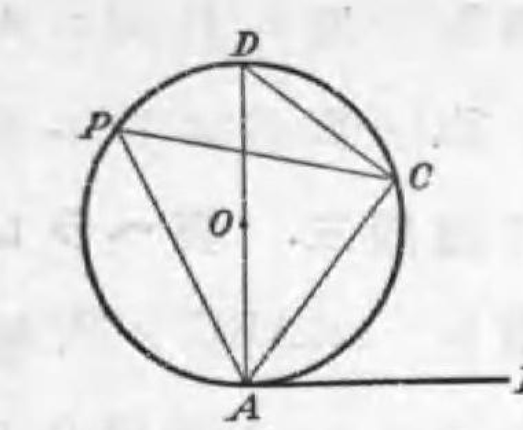
問1. 上圖ニ於テ圓Oノ半徑 5cm, OA=13cm ナラバAカラ圓Oニ引イタ切線ノ長サ何程。

問2° 圓外ノ點カラコノ圓ニ引イタ二ツノ切線ハ相等シ。又コノ點ト圓ノ中心トヲ結ブ線分ハ二切線ノナス角ヲ二等分スル。

定理九. **圓(O)ノ切線(AB)ト其切點(A)ヲ通ル弦(AC)トノナス角ハ其角內ニアラザル弓形ノ角($\angle APC$)ニ等シイ。**

證明 $\angle BAC < \angle R$ナル場合

Aヲ通ル直徑ヲADトスル。



$\angle DAB = \angle R$

$\therefore$ $\angle BAC = \angle DAC$ノ餘角……(1)

又 $\angle ACD = \angle R$

$\therefore$ $\angle ADC = \angle DAC$ノ餘角……(2)

(1)(2)ニヨリテ $\angle BAC = \angle ADC = \angle APC$

$\angle BAC = \angle R$ナル場合, $\angle BAC > \angle R$ナル場合ハ諸子自ラ證明セヨ。

問3. $\triangle ABC$ノ外接圓ノAニ於ケル切線ガBCニ平行ナラバ$AB = AC$

33. 多角形ノ內切圓

定義 多角形ノ總テノ邊ガ皆同ジ圓ノ切線(切點ハ邊上ニアツテ邊ノ延長上ニハナイモノトスル)デアルナラバ多角形ハ**圓ニ外切**,圓ハ多角形ニ**內**

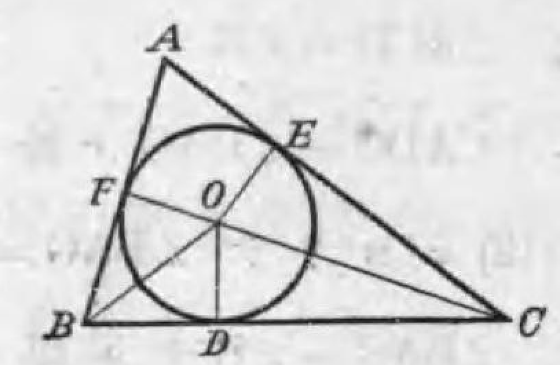
切ストイヒ,コノ圓ヲ多角形ノ**内切圓**トイフ。

三角形ノ内切圓ノ中心ヲコノ三角形ノ**内心**トイフ。

問1. 圓ニ外切スル多角形ノ各角ノ二等分線ハ一點ニ會スル。

問2. 圓ニ外切スル四邊形ノ一組ノ對邊ノ和ハ他ノ一組ノ對邊ノ和ニ等シイ。

作圖題三. 與ヘラレタ三角形ノ内切圓ヲ畫ケ。



解析 △ABCノ内切圓ヲ畫キ得タトシテ其中心ヲOトスレバ BO, CO ハ夫々∠B, ∠Cヲ二等分スル(90頁問2)。

ヨツテ次ノ作圖法ヲ推定スルコトガ出來ル。

作圖 ∠B, ∠Cノ二等分線ヲ引キ其交點ヲOトスル。OカラBCニ垂線ヲ下シ其足ヲDトスレバOヲ中心トシODヲ半徑トスル圓ガ所要ノ圓デアル。

證明 先ヅBCハ圓Oノ切線ナルコト明カデアル。

次ニAB, ACモ亦圓Oニ切スルコトヲ證明スル爲ニOヨリAB, ACニ垂線ヲ下シ其足ヲ夫々E, Fトスル。OハBノ二等分線上ニアルカラOD＝OF即圓ノ中心Oト直線ABトノ距離ガ半徑ODニ等シイカラABハ圓Oニ切スル(定理七)同様ニACモ亦圓Oニ切スル。

ヨツテ圓Oハ△ABCノ内切圓デアル。

〔注意〕 上ノ作圖ニヨツテ如何ナル三角形デモ其内切圓ヲ畫クコトガ出來ルガ四角形,五角形等ニ内切スル圓ガアルトハ限ラナイ。

問3. 四邊形ABCDニ於テ∠A, ∠B, ∠Cノ二等分線ガ一點ニ會スルナラバ,コノ四邊形ニ内切スル圓ヲ畫クコトガ出來ル。

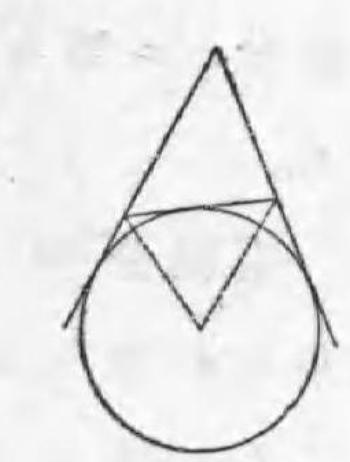
例題

1. 圓Oノ周上ノ點B,Cニ於ケル切線ノ交點ヲAトスレバAOハBCヲ垂直ニ二等分スル。

2. 定圓Oニ於テ定點Aヲ通ル弦ヲ引キ其長サガ定線分aニ等シクナル様ニシナサイ。

3. 平行二直線ト之ニ交ハル一直線トニ切スル圓ヲ畫キナサイ。

4. 三角形ノ一邊ト他ノ二邊ノ延長トニ切スル圓ヲ畫ケ。



〔注意〕 コノ圓ヲコノ三角形ノ**傍切圓**トイヒ,其中心ヲ初ノ三角形ノ**傍心**トイフ。如何ナル三角形ニモ三ツノ傍切圓從テ三ツノ傍心ガアル。

5. $\overset{\frown}{AB}$ ノ中點トAトヲ結ブ線分ハABトAニ於ケ

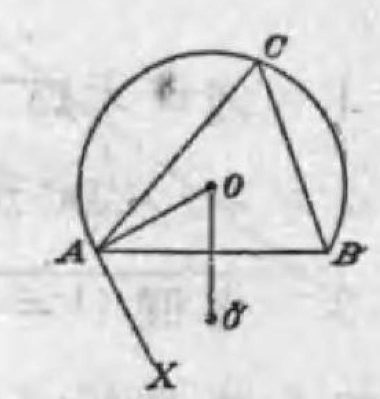
ル切線トノナス角ノ一ツヲ二等分スル。

6. 二圓ノ切點Aヲ通ル二直線ガ一方ノ圓周ト交ハル點ヲP,R,他ノ圓周ト交ハル點ヲQ,Sトスレバ

$PR \parallel QS$

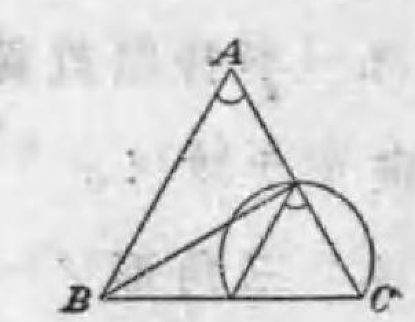
7. 點Aデ内切スル二ツノ圓周ガアル。外圓ノ弦BCガ點Mデ内圓ニ切スルナラバAMハ$\angle BAC$ヲ二等分スル。

8. 定線分ABヲ弦トシ定角αニ等シイ角ヲ容レル弓形ヲ作レ。

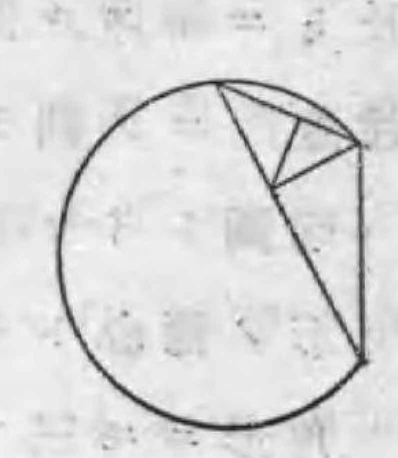


手引 Aニ於テ弓形ノ弧ノ切線AXヲ引イテ考ヘナサイ。求メル弓形ハABノ兩側ニ一ツヅツアル。

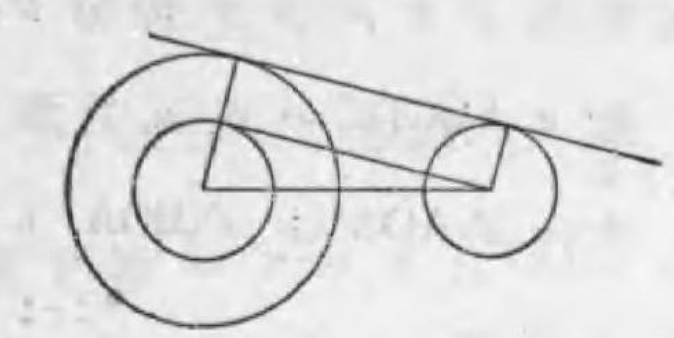
9. 定線分BCヲ底邊トシ,頂角ガ定角αニ等シクBヨリ出ル中線ガ定線分lニ等シイ三角形ヲ作リナサイ。



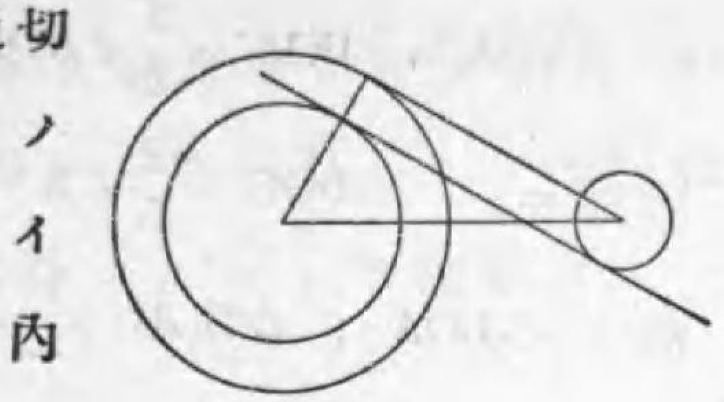
10. 定線分BCヲ底邊トシ,頂角ガ定角αニ等シク,他ノ二邊ノ和ガ定線分lニ等シイ三角形ヲ作リナサイ。



11. 二ツノ圓ガ其共通切線ノ同ジ側ニアルナラバ,コノ共通切線ヲ**外共通切線**トイフ。與ヘラレタル二圓ノ外共通切線ヲ作レ。

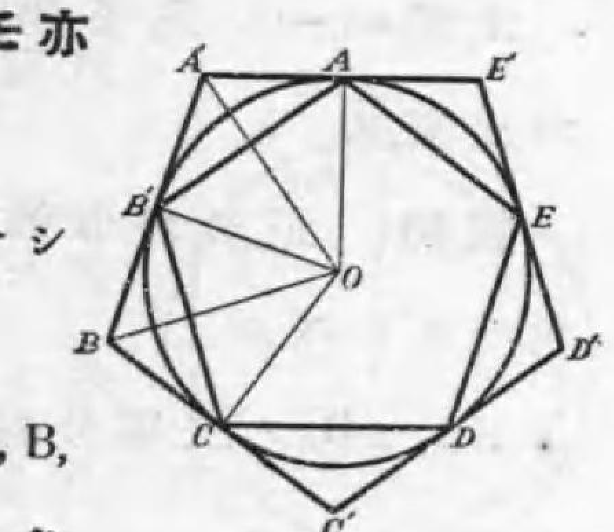


12. 二ツノ圓ガ其共通切線ノ反對ノ側ニアルト,コノ共通切線ヲ**内共通切線**トイフ。與ヘラレタル二圓ノ内共通切線ヲ作リナサイ。



34. 正多角形

定理一〇. 圓周ヲ三ツ以上ニ等分シ其分點ヲ順次ニ結付ケテ出來ル多角形ハ正多角形デアル。又分點ニ於ケル切線デ出來ル多角形モ亦正多角形デアル。



題意 圓周Oヲ例ヘバ五等分シテ其分點ヲA,B,C,D,EトスレバABCDEハ正五角形デアル。又A,B,C,D,Eニ於ケル切線デ出來ル多角形A'B'C'D'E'モ亦正五角形デアル。

證明 ABCDEノ邊ハ相等シイ弧ヲ張ル弦デアルカラ皆等シイ。又ソノ角ハ何レモ圓周ノ$\frac{3}{5}$ノ上ニ立ツ

圓周角デアルカラ皆等シイ。

故ニABCDEハ正五角形デアル。

次ニ$\triangle AOA'$ト$\triangle BOA'$トハ三邊夫々相等シイカラ合同デアル。

$$\therefore\ \angle AOA'=\angle BOA'=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{4\angle R}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{5}\angle R$$

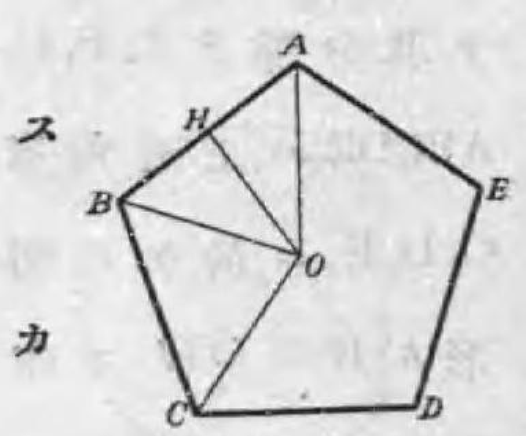
同様ニ　$\angle BOB'=\frac{2}{5}\angle R$

故ニ$\triangle BOA$ト$\triangle BOB'$トハ一邊及其兩端ノ角夫々相等シイカラ合同デアル。

卽$\triangle AOA'$, $\triangle BOA'$, $\triangle BOB'$等ハ皆合同デアル故ニA'B'C'D'E'ハ其總テノ邊ガ等シク,總テノ角ガ等シイカラ正五角形デアル。

定理一一　正多角形ニ外接圓及內切圓ヲ畫クコトガ出來ル。

證明　正多角形例ヘバ正五角形ヲABCDEトシ其一角ヲaトスル。



$\angle A$, $\angle B$,ノ二等分線ノ交點ヲOトスレバ

$\angle OAB$, $\angle OBA$ハ何レモ$\frac{a}{2}$ニ等シイカラ互ニ相等シイ　$\therefore$　$OA=OB$

又$\triangle OBA$ト$\triangle OBC$トハ二邊夾角夫々相等シイカラ合同

デアル。

從テ　$OC=OA$　且　$\angle OCB=\angle OAB=\frac{a}{2}$

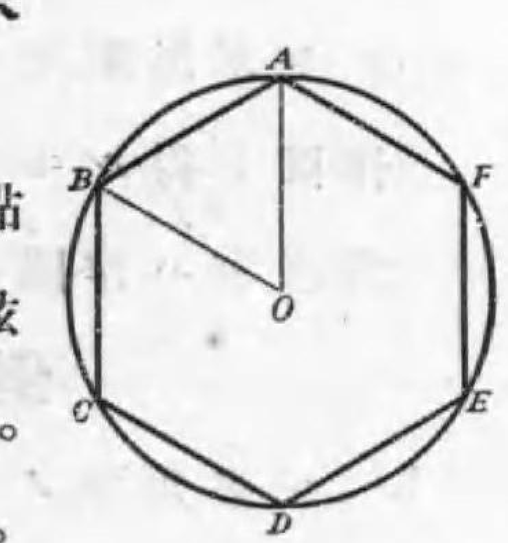
卽點Oハ三點A, B, Cヨリ等距離ニアッテ且OCハ$\angle C$ノ二等分線デアル。

同様ニOハ三點B, C, Dヨリ等距離ニアッテ且ODハ$\angle D$ヲ二等分スルコト及Oハ三點C, D, Eヨリ等距離ニアッテ且OEハ$\angle E$ヲ二等分スルコトヲ證明スルコトガ出來ル。

故ニOヲ中心トシOAヲ半徑トスル圓ハABCDEニ外接シ,Oヲ中心トシOヨリABニ下セル垂線OHヲ半徑トスル圓ハABCDEニ內切スル。

系　正多角形ノ外接圓ト內切圓トハ同心圓ナリ。

作圖題四　定圓ニ內接スル正六角形ヲ作レ。



作圖　定圓Oノ周上ノ任意ノ點ヲAトス。圓Oノ半徑ニ等シイ弦AB, BC, CD, DE, EFヲ作リF,Aヲ結ブ。

ABCDEFハ所要ノ正六角形ナリ。

證明　$\triangle AOB$ハ三邊等シイカラ正三角形デアル。

$\therefore$　$\angle AOB=60^\circ=\frac{360^\circ}{6}$　從テ　$\widehat{AB}=$全圓周ノ$\frac{1}{6}$

同樣ニ $\widehat{BC}=\widehat{CD}=\widehat{DE}=\widehat{EF}=$全圓周ノ$\frac{1}{6}$

$\widehat{FA}$ハ全圓周カラコノ圓周ノ$\frac{5}{6}$ヲ減ジタ殘デアルカラ全圓周ノ$\frac{1}{6}$デアル。

卽 A, B, C, D, E, F デ圓周ガ六等分セラレタカラ定理一〇ニヨツテABCDEFハ正六角形デアル。

問1. 正六角形ノ一邊ハ其外接圓ノ半徑ニ等シイ。

問2. 與ヘラレタル圓ニ內接スル正三角形及正十二角形ヲ作レ。

〔注意〕 正三角形,正六角形ヲ作圖シ得ルカラ正十二角形,正二十四角形一般ニ正 (3×2^n) 邊形ヲ作圖スルコトガ出來ル(nハ正ノ整數)。又正方形ハ容易ニ作圖シ得ルカラ正 (4×2^n) 邊形ヲ作圖スルコトガ出來ル。コノ外尙若干ノ正多角形ハ作圖スルコトガ出來ルガ,任意ノ邊數ヲ有スル正多角形ハ作圖シ得ルモノデハナイ。例ヘバ正七角形,正九角形等ハ作圖スルコトガ出來ナイノデアル。*

例題

1. 正多角形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビ付ケテ出來ル多角形ハ正多角形デアル。

2. 正五角形ノ對角線ガ二ツヅツ交ハツテ出來ル

*通常用器畫デ作圖スル方法ハ近似的ニ眞ナル方法デアル。

五角形ハ正五角形デアル。

3. 圓ニ內接スル正十五角形ノ一邊ニ對スル弧ハ同ジ圓ニ內接スル正六角形ノ一邊ニ對スル弧ト正十角形ノ一邊ニ對スル弧トノ差ニ等シイ。

4. 半徑rノ圓ニ內接スル正三角形,正六角形ノ周圍ヲ計算シナサイ。

5. 前問ニ於ケル正多角形ノ面積ヲ計算セヨ。

6.◎ 正多角形ノ面積ヲ表ハス數ハ其周圍ヲ表ハス數ト內切圓ノ半徑ヲ表ハス數トノ積ノ半分ニ等シイ。

〔注意〕 正多角形デナクテモ,內切圓ヲ畫キ得ル多角形ナラバ同ジ結果ニ達スル。

第四編

比及比例

35. 比例式

問 1. 算術又ハ代數デ學ビタル比,比ノ値,比例式ノ定義ヲ述ベナサイ。

問 2. 比,比例式ニツイテ定義ノ外ニ知ツテキルコトヲ述ベナサイ。

定義 或量 A ガ之ト同種類ノ量 B ノ幾倍(分數倍,無理數倍ヲ含ム)デアルカトイフ意味デノ A ト B トノ關係ヲ **A ノ B ニ對スル比**トイツテ之ヲ **A : B** デ表ハス。

A ガ B ノ m 倍ノトキ卽 $A=mB$ デアルトキ m ヲ **A : B** ノ値トイツテ之ヲ $\frac{A}{B}$ デ表ハス。 例ヘバ A ガ B ノ $\frac{2}{3}$ ナラバ $\frac{A}{B}=\frac{2}{3}$ デアル。又正方形ノ對角線ハ其一邊ノ $\sqrt{2}$ 倍デアルカラ正方形ノ對角線ト一邊トノ比ノ値ハ $\sqrt{2}$ デアル。

二ツノ比ガ等シイトイフノハ其値ガ等シイコトデアル。

定義 二ツノ量 A,B ノ比ガ二ツノ量 C,D ノ比ニ等シイトキ卽

$$A:B=C:D \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナラバ四ツノ量 A, B, C, D ハ**比例ヲナス**トイフ。

(1) ノ樣ニ二ツノ比ガ等シイコトヲ示ス等式ヲ**比例式**トイヒ,D ヲ A, B, C ノ**第四比例項**トイフ。

比例式ノ內項(第二項,第三項)ガ等シイトキ卽

$$A:B=B:C \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナルトキ C ヲ A,B ノ**第三比例項**トイヒ,B ヲ A,C ノ**比例中項**トイフ。

〔注意〕 (1) ニ於テハ A ト B トハ同種類,C ト D トハ同種類デナケレバナラヌガ A,B,C,D 全體ハ同種類デナクトモヨイ。(2) ニ於テハ A ト B トハ同種類,B ト C トモ同種類デアルカラ A,B,C ハ皆同種類デナケレバナラヌ。

二ツノ量ノ比ハ是等ヲ同ジ單位デ測ツテ得ル數値ノ比ニ等シイカラ數ノ比,比例ニ關スル性質ハ量ノ比,比例ノ意義ニ反シナイ限リ其儘適用スルコトガ出來ル。次ニ其主ナルモノヲ列擧スル。

定理一. 比ノ前項後項ニ同ジ數(正ノ數)ヲ乘除シテモ比ノ値ハ變ハラヌ。

定理二. 四ツノ量A,B,C,Dガ比例スルナラバ卽 $A:B=C:D$ ナラバ次ノ比例式ガ成立ツ。但 1°,2° ニ於テハA,B,C,Dハ皆同種類ノ量ナルコトヲ要スル。

1° $A:C=B:D$ 2° $D:B=C:A$

3° $A+B:B=C+D:D$ 4° $A\sim B:B=C\sim D:D$

5° $A+B:A\sim B=C+D:C\sim D$

定理三. A,B,C,D,E,Fガ皆同種類ノ量ニシテ且

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=\cdots\cdots \text{ナラバ} \quad \frac{A+C+E+\cdots\cdots}{B+D+F+\cdots\cdots}=\frac{A}{B}$$

問3. 15*cm*, 25*cm*, 2平方米ノ第四比例項ヲ求メヨ。

問4. a糎トb糎トノ第三比例項及比例中項ヲ求メナサイ。

36. 矩形ノ面積ノ比

問1. 相隣レル二邊ガa糎,b糎ノ矩形トa糎,c糎ノ矩形トノ面積ノ比ヲ求メナサイ。

問1ニヨツテ次ノ定理ガ成立ツコトガ明カデアル。

定理四. 等高ナル二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ底邊ノ比ニ等シク,等底ナル二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ高サノ比ニ等シイ。

系 等高(等底)ナル二ツノ平行四邊形ノ面積ノ比又ハ二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ底邊(高サ)ノ比ニ等シイ。

四ツノ數a,b,c,dガアル。モシ $a:b=c:d$ ナラバ

$ad=bc$ デアル,又 $ad=bc$ デアルナラバ $a:b=c:d$ デアルコトハ算術又ハ代數デ學ビマシタ。a,b,c,dガ線分ノ長サヲ表ハス數ト考ヘルトコノ事實ハ次ノ定理デ言ヒ表ハサレル。

定理五. 四ツノ線分ガ比例ヲナストキハ其内項ヲ二邊トスル矩形ノ面積ハ外項ヲ二邊トスル矩形ノ面積ニ等シイ。又二ツノ矩形ノ面積ガ等シイナラバ一方ノ矩形ノ二隣邊ヲ内項トシ,他ノ矩形ノ二隣邊ヲ外項トスル比例式ガ成立ツ。

問2. $\triangle ABC$ノ一邊BC上ノ點ヲDトスレバ

$\triangle ABD:\triangle ADC=BD:DC$

問3. $\triangle ABC$ノ内心ヲOトスレバ

$\triangle OAB:\triangle OAC=AB:AC$

37. 内分及外分

線分AB上ノ點CハABヲ二ツノ部分AC,CBニ分ケル。今分ケルトイフ語ノ意味ヲ擴張シテ線分ABノ延長上ノ點DハABヲ二ツノ部分AD,DBニ分ケルトイフ。シカシ之デハ混雜スル恐ガアルカラ初ノヲ**内分**,後ノヲ**外分**トイツテ區別スル。何レニシテモ分點ト初ノ線分ノ兩端トノ距離ヲ二ツノ**部分**略シテ**分**トイフ。

例ヘバ前圖ニ於テCハABノ内分點,Dハ外分點デアル。又BハCDノ内分點,Aハ外分點デアル。

線分ABヲCデ内分スルトキ其二ツノ分ノ比ハAC : CBデアリBAヲ内分スルトキノ二ツノ分ノ比ハBC : CAデアル。又ABヲDデ外分スルトキノ二ツノ分ノ比ハAD : DBデアリ,BAヲDデ外分スルトキノ二ツノ分ノ比ハBD : DAデアル。何レガ前項ニナルカニ注意シナサイ。

問 線分ABヲ次ノ比ニ内分,外分スル點ヲ目分量デ求メナサイ。

(1) 2 : 1 (2) 3 : 2 (3) 4 : 1 (4) 1 : 1

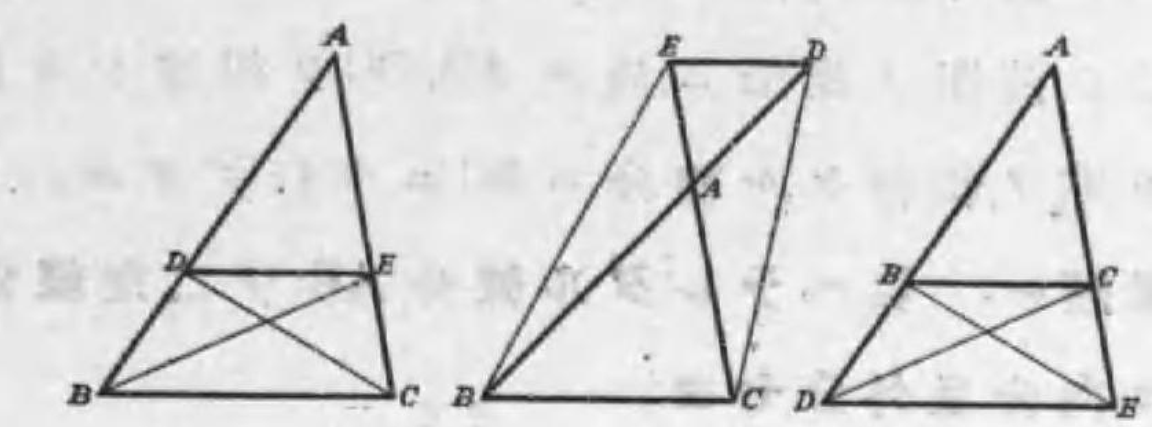
(5) 1 : 2 (6) 2 : 3 (7) 1 : 4

〔**注意**〕 値ガ1ニ等シクナイ比ニ線分ヲ内分,外分スル點ハ各唯一ツヅツアル。又1:1ニ内分スル點ハ初ノ線分ノ中點デアリ,外分スル點ハナイ。

38. 三角形ニ關スル比例線

定理六 三角形(ABC)ノ一邊(BC)ニ平行ナル直線(DE)ハ他ノ二邊(AB, AC)ヲ相等シキ比ニ内分又ハ外分スル。

證明 Eヲ△ADE, △DBEノ共通頂點ト考ヘルト,コノ兩三角形ノ高サハ等シイカラ



$$\triangle ADE : \triangle DBE = AD : DB \cdots\cdots(1)$$

同様ニ $\triangle ADE : \triangle EDC = AE : EC \cdots\cdots(2)$

トコロガ $\triangle DBE = \triangle EDC$

デアルカラ(1),(2)ノ左邊ハ等シイ。故ニ右邊モ等シイ。

即 $AD : DB = AE : EC$

系一. 本定理ノ圖ニ於テ

$$AB : AD = AC : AE \qquad AB : DB = AC : EC$$

系二. 三角形ノ二邊ヲ相等シキ比ニ内分スル點ヲ結ブ線分ハ第三邊ニ平行デアル。相等シキ比ニ外分スル點ヲ結ブ線分モ亦第三邊ニ平行デアル。

手引 △ABCノ二邊AB, ACヲ相等シキ比ニ共ニ内分スル點又ハ共ニ外分スル點ヲD,Eトスル。Dヲ通リBCニ平行ナル直線トACトノ交點E'ガEニ一致スルコトヲ證明セヨ。

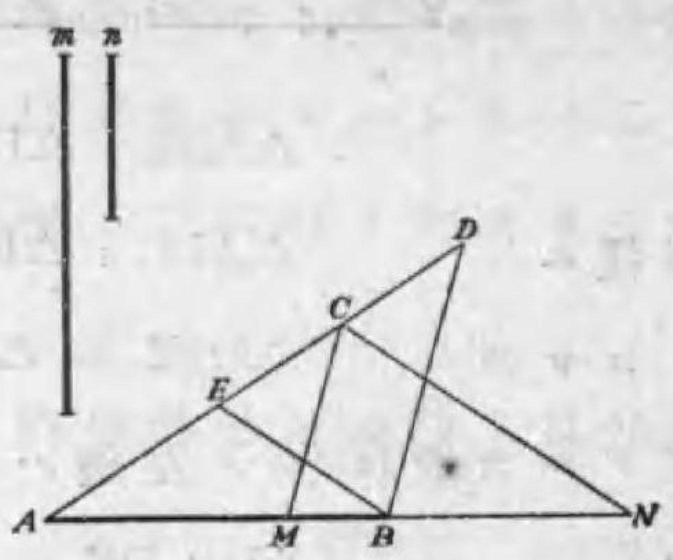
問1. AD, BCガ兩底デアル梯形ノ邊AB上ノ點Eヲ通リBCニ平行ナル直線トDCトノ交點ヲFトスレバ

$$AE : EB = DF : FC$$

手引　一對角線ヲ引イテ考ヘヨ。

問2.　前問ノ梯形ニ於テAB,DCヲ相等シキ比ニ内分スル點ヲ結付ケル線分ハBCニ平行デアル。

作圖題一.　與ヘラレタル線分(AB)ヲ二定線分(m,n)ノ比ニ内分及外分セヨ。



作圖　AデABニ交ハル任意ノ直線上ニテACヲmニ等シクトリ,ACヌハ其延長上ニテCノ兩側ニCE,CDヲ何レモnニ等シクトル。

Cヲ通リDB,EBニ平行ナル直線ヲ引キABトノ交點ヲ夫々M,NトスレバM,Nハ求メル分點デアル。

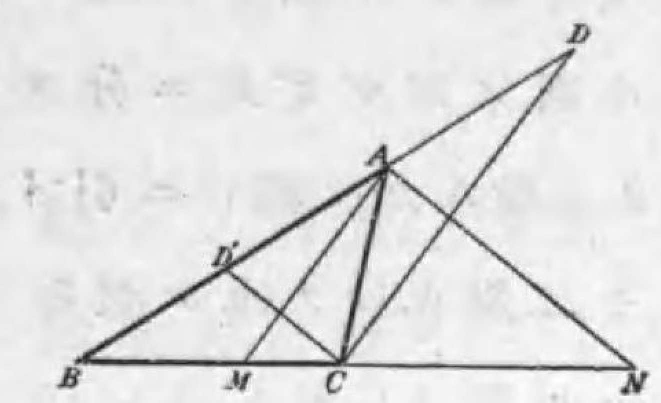
證明　定理六ニヨリテ明カデアル。

問3.　上ノ作圖題ニ於テ$m>n$, $m=n$, $m<n$ナル種々ノ場合ニ實際ニ作圖シテM,Nノ位置ヲ觀察セヨ。

問4.　與ヘラレタ三角形ヲ其一頂點ヲ通ル直線デ與ヘラレタ比ニ分ケヨ。

定理七.　三角形(ABC)ノ一角(∠A)ノ二等分線ハ對邊(BC)ヲ他ノ二邊ノ比(AB:AC)ニ内分シ,一外角(∠DAC)ノ二等分線ハ對邊(BC)ヲ他ノ二邊ノ比(AB:AC)ニ外分スル。

證明　∠Aノ二等分線トBCトノ交點ヲMトシCヲ通リMAニ平行ナ直線トBAノ延長トノ交點ヲDトスレバ定理六ニヨリテ



$$BM:MC = BA:AD \quad \cdots\cdots(1)$$

トコロガ

$$\angle DCA = \angle CAM = \angle MAB = \angle CDA$$

$$\therefore \quad AC = AD \quad \cdots\cdots(2)$$

(1),(2)ニヨリ　$BM:MC = AB:AC$

AニBケル外角ノ二等分線トBCノ延長トノ交點ヲNトシ,Cヲ通リNAニ平行ナル直線トABトノ交點ヲD′トスレバ前ト同樣ニシテ

$$BN:NC = BA:AD' = AB:AC$$

系　三角形ノ一邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ内分又ハ外分スル點ヲ對角ノ頂點ニ結ブ線分ハコノ角又ハ其接角ナル外角ヲ二等分ス。

問5.　△ABCノ三邊ガ$12cm$, $9cm$, $8cm$ナルトキ最大角ノ二等分線ガ對邊ヲ分ツ二部分ノ長サヲ計算セヨ。

例　題

1.　一ツノ直線ガ三ツノ平行線X,Y,Zニ交ハッテ$m:n$ニ分タレルナラバX,Y,Zニ交ハル如何ナル直線

モ $m:n$ ニ分タレル。

2. 二ツノ圓ガ内切スルトキ切點ヲ通ル大圓ノ弦ハ小圓ノ周デ定比ニ分タレル。

3. 點Aカラ圓Oニ引イタ二ツノ切線ノ切點ヲE,Fトシ,二點A,Oヲ通ル直線ガEFト交ハル點ヲB,圓周ト交ハル點ヲC,Dトスレバ AC : CB = AD : DB

手引 EC,EDハ∠AEB及其接角ナル補角ヲ二等分スル。

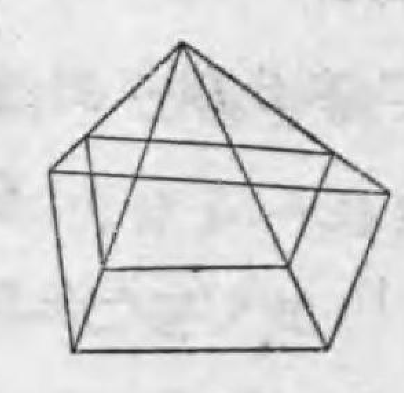
4.◎ 與ヘラレタル三ツノ線分ノ第四比例項ヲ作圖シナサイ。

5. 定點Pヲ通リ定角Oノ二邊ト夫々A,Bデ交ハル直線ヲ引キPA:PBガ定比$m:n$ニ等シクナル樣ニセヨ。

6. △ABCノ内心ヲOトスル。AB = AC = 5*cm*, BC = 6*cm* ナリトスレバAOノ長サ何程ナルカ。

7. △ABCニ於テ邊BCノ中點ヲDトシ,∠ADBノ二等分線トABトノ交點ヲEトス。Eヲ通リBCニ平行ナル直線トACトノ交點ヲFトスレバFDハ∠ADCヲ二等分スルコトヲ證明セヨ。

8. 五角形ABCDEノ邊AB上ノ點Fヲ通リBCニ平行ナル直線トACトノ交點ヲGトシ,Gヲ通リCDニ平行ナル直線トADトノ交點ヲHトス。



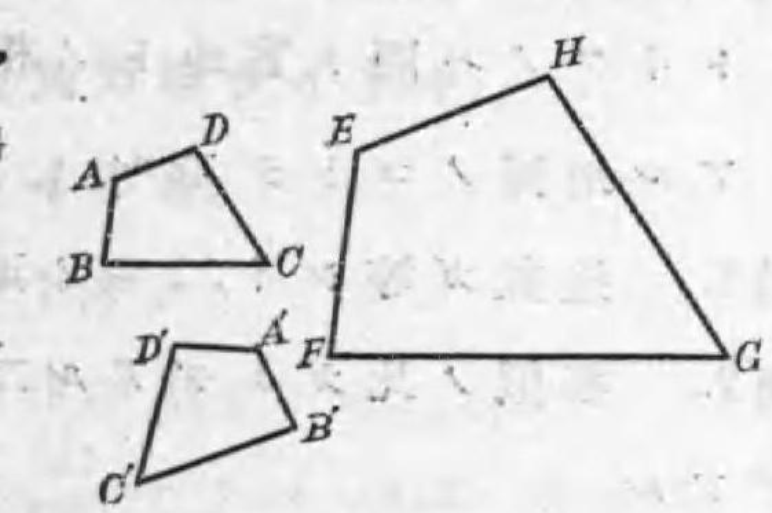
更ニHヲ通リDEニ平行ナル直線トAEトノ交點ヲKトスレバFKハBEニ平行ナルコトヲ證明セヨ。

39. 相似形

定義 一ツノ多角形ノ總テノ角ガ,之ト同邊數ノ多角形ノ總テノ角ニ順次夫々等シイトキハコノ二ツノ多角形ハ**等角**デアルトイツテ,一組ノ相等シイ角ヲ**對應角**トイヒ,對應角ノ頂點ヲ**對應頂點**,二ツノ相隣レル對應頂點間ノ邊ヲ**對應邊**トイフ。

例ヘバ前間ニ於ケル二ツノ四邊形 FGHK, BCDE ハ等角デアツテ∠Fト∠B, ∠Gト∠C等ハ對應角,FGトBCハ對應邊デアル。

又ABCDトEFGHガ等角デアルナラバ其一方ABCDヲ裏返シタA'B'C'D'トEFGHトモ等角デアル。



定義 二ツノ多角形ガ等角デアツテ對應邊ノ比ガ皆等シイナラバコノ二ツノ多角形ハ**相似**デアルトイヒ,對邊應ノ比ヲ**相似ノ比**トイフ。

ABCDトA'B'C'D'トガ相似デアルコトヲ

ABCD $\backsim$ A'B'C'D' デ表ハス。

〔注意1〕. ABCD ト A'B'C'D' トハ A ト A'; B ト B' 等ガ對應頂點デアル相似形ナルコトヲ證明スルニハ定義ニヨッテ

$$\angle A=\angle A',\quad \angle B=\angle B',\quad \angle C=\angle C',\quad \angle D=\angle D',$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}$$

ヲ證明セネバナラヌ。

〔注意2〕. 通俗ニ言フト同形等大ノ二ツノ多角形ハ合同デアリ,同形ノ二ツノ多角形ハ相似デアル。

地圖ハ實際ノ土地ニ相似デアル。$\frac{1}{10000}$ ノ地圖トイフノハ圖ト實地トノ相似ノ比ガ 1 : 10000 デアル地圖ノコトデアル。

問1. 邊數ガ等シイ二ツノ正多角形ハ相似デアル。

問2. 相似ノ比ガ1デアル二ツノ相似多角形ハ合同デアル。

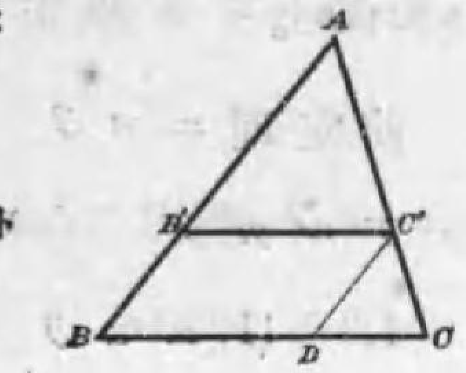
40. 相似三角形

定理八. 三角形(ABC)ノ一邊(BC)ニ平行ナル直線(B'C')ト他ノ二邊(ヲ含ム直線)トデ圍マレル三角形ハ原三角形ニ相似デアル。

證明 先ヅ △ABC ト △AB'C' トハ等角ナルコト明カ

デアル。

次ニ B'C' ∥ BC デアルカラ定理六系ニヨッテ　AB : AB' = AC : AC'



C' ヲ通ッテ AB ニ平行ナ直線ト BC トノ交點ヲ D トスレバ

AC : AC' = BC : BD

トコロガ　BD = B'C'　∴ AC : AC' = BC : B'C'

ヨッテ △ABC ト △AB'C' トハ等角ニシテ且對應邊ノ比ガ皆等シイ。

∴ △ABC $\backsim$ △AB'C'

定理九. 次ノ場合ニハ二ツノ三角形ハ相似デアル。

1.° 二邊ガ比例シ夾角ガ等シイトキ。

2.° 二角ガ夫々等シイトキ。

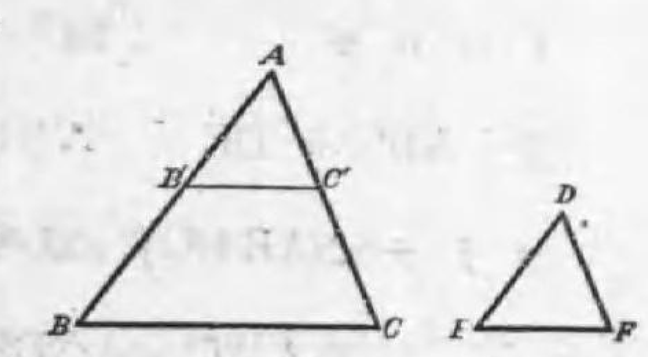
3.° 三邊ガ比例スルトキ。

題意 △ABC ト △DEF トニ於テ

1.° $\angle A=\angle D$, $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$ ナラバ △ABC $\backsim$ △DEF

2.° $\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$ ナラバ △ABC $\backsim$ △DEF

3.° $\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}=\frac{AB}{DE}$ ナラバ △ABC $\backsim$ △DEF



證明 AB又ハ其ノ延長上ニDEニ等シクAB'ヲトリ

B′ヲ通リ BC ニ平行ナル直線ヲ引キ AC トノ交點ヲ C′ トスル。

前定理ニヨリ　$\triangle ABC \backsim \triangle AB'C'$………(1)

デアルカラ　$\triangle AB'C' \equiv \triangle DEF$ ヲ證明スレバヨイ。

1.°　(1)ニヨリ　$AB : AB' = AC : AC'$

トコロガ　$AB : DE = AC : DF$ 及 $AB' = DE$

デアルカラ　$AC' = DF$.

ヨリテ △AB′C′ ト △DEF トハ二邊夾角夫々等シイ。

∴　$\triangle AB'C' \equiv \triangle DEF$

從テ　$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$

2.°　∠B′, ∠E ハ共ニ ∠B ニ等シ。∴ $\angle B' = \angle E$

同樣ニ　$\angle C' = \angle F$　從テ　$\angle A = \angle D$

故ニ △AB′C′ ト △DEF トハ一邊ト其兩端ノ角夫々相等シ。

∴　$\triangle AB'C' \equiv \triangle DEF$　從テ　$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$

3.°　(1)ニヨリ　$BC : B'C' = CA : C'A = AB : AB'$

トコロガ　$BC : EF = CA : FD = AB : DE$

及 $AB' = DE$　∴ $B'C' = EF$　$C'A = FD$

ヨリテ △AB′C′ ト △DEF トハ三邊夫々相等シ。

∴　$\triangle AB'C' \equiv \triangle DEF$　從テ　$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$

系　一鋭角ガ等シイ二ツノ直角三角形ハ相似デア

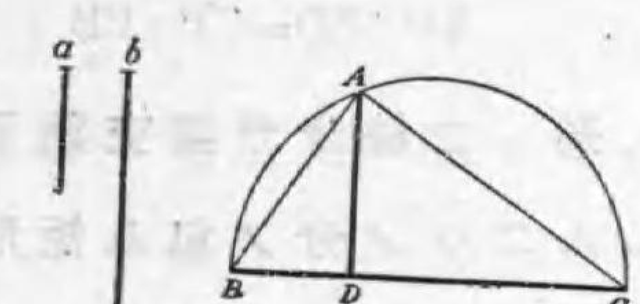
ル。

問1.　二ツノ相似三角形ノ對應頂點カラ出ル中線ノ比ハ相似ノ比ニ等シイ。

問2.°　直角三角形ABCニ於テ直角ノ頂點Aカラ斜邊BCニ下セル垂線ノ足ヲDトスレバ △DBA, △DAC ハ何レモ原三角形ニ相似ナルコトヲ證明シ,之ヲ利用シテ次式ヲ證明セヨ。

$\overline{AD}^2 = BD.DC$,　$\overline{AB}^2 = BD.BC$,　$\overline{AC}^2 = DC.BC$

作圖題二.　與ヘラレタル二線分(a,b)ノ比例中項ヲ求メヨ。



作圖　a ニ等シイ線分BDヲ引キ,其延長上ニbニ等シクDCヲトル。Dニ於ケルBCノ垂線トBCヲ直徑トスル圓周トヲ畫キ,ソノ交點ヲAトスル。ADハ所要ノ比例中項デアル。

證明　∠BACハ半圓ノ角デアルカラ直角デアル。ヨツテ△ABCハ直角三角形デアル。

故ニ前問ニヨリ　$\overline{AD}^2 = BD.DC$

從テ　$BD:AD = AD:DC$　即　$a:AD = AD:b$

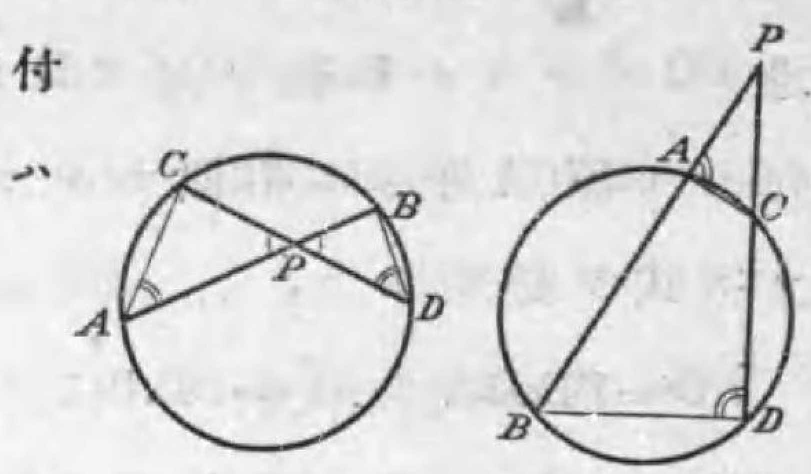
故ニADハ$a, b,$ノ比例中項デアル。

問3.　與ヘラレタ矩形ト等積ナル正方形ヲ作レ。

41. 圓ニ關スル比例線

定理一〇.　同ジ圓ノ二ツノ弦(AB, CD)ガ其交點(P)又ハ延長ノ交點(P)ニヨツテ分レタルトキ各ノ弦ノ二ツノ分ノ包ム矩形(AB.BP, CP.PD)ハ等シイ。

證明　A,C及B,Dヲ結付ケヨ。△APCト△DPBトハ二角夫々相等シ。



∴　△APC ∽ △DPB

ヨリテ

AP : PD=CP : PB　　∴　AP.PB=CP.PD

系　二線分ガ其交點又ハ双方ノ延長ノ交點デ分タレル二ツノ分ノ包ム矩形ガ等シイナラバ二線分ノ兩端ナル四ツノ點ハ同一圓周上ニアル。

手引　二線分ヲAB,CDトスル。三點A,B,Cヲ通ル圓周トCD又ハ其延長トノ交點D′ガDニ一致スルコトヲ證明セヨ。

問1.　相交ハル二圓ノ共通弦上ノ點Cヲ通ル直線ガ一方ノ圓周ト交ハル點ヲA,Bトシ他ノ圓周ト交ハル點ヲD,EトスレバAC.CB=DC.CE

定理一一.　圓外ノ點(P)カラコノ圓ニ引イタ切線ノ平方($\overline{PA}^2$)ハコノ點ヲ通ル割線(PCD)ガコノ點デ外分セラレタ二ツノ分ノ包ム矩形(PC.PD)ニ等シイ。

證明　AトC,AトDトヲ結付ケヨ。

△PACト△PDAトハ二角夫々等シイカラ相似デアル。

∴　　PC : PA = PA : PD

ヨリテ　　$\overline{PA}^2$ = PC.PD

系　Pデ交ハル二直線ノ一方ノ上ニ點A他ノ上ニ二點C.Dガアル。モシ$\overline{PA}^2$=PC.PDナラバPA　Aニ於テ圓ACDニ切スル。

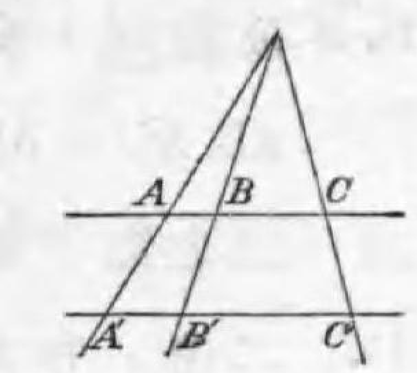
手引　PAガ圓ACDニ再ビ交ハル點ヲA′トシAトA′トガ一致スルコトヲ證明セヨ。

問2.　相交ハル二圓ノ共通弦ノ延長上ノ點ヨリコノ二圓ニ引イタ切線ハ等シイ。

例　　題

1.　一點ヲ通ル三ツノ直線ガ平行二直線トA, A′; B, B′; C, C′デ交ハレバAB : BC=A′B′ : B′C′

2.　平行二直線ノ一方ノ上ニ三點A, B, C他ノ上ニ三點A′, B′, C′ガアツテAB : BC = A′B′ : B′C′デアルトAA′, BB′, CC′ハ平行ナルカ又ハ一點ニ會スル。



3.　相似三角形ノ外接圓ノ半徑ノ比.內切圓ノ半徑ノ比ハ何レモ相似ノ比ニ等シイ。

4. △AEC ノ邊AB上ニDヲ, AC上ニEヲトリ, $AD : DB = AE : EC = 1 : 2$ ナラシメルトDC, EBハ其交點ニヨツテ1 : 3ニ分ケラレル。

5. 相交ハル二圓ノ各ノ弦AB, CDガ其共通弦上デ交ハルナラバA, B, C, Dハ同一圓周上ニアル。

6. 圓Oノ弦ABノ中點ヲ通ル弦ヲCDトシ, A, Bニ於ケル切線ノ交點ヲPトスレバ四邊形PCODニ外接圓ヲ畫クコトヲ得。

7. AB=ACナル△ABCニ於テBヲ中心, BCヲ半徑トスル圓周ガACト再交ハル點ヲDトスレバ $\overline{BC}^2 = AC.DC$

8. △AEC ニ於テAカラBCニ下シタ垂線ノ足ヲHトシ, 外接圓ノ直徑ノ一ツヲAKトスレバ

$$AB.AC = AH.AK$$

9. △ABCニ於テ∠Aノ二等分線ガBCト交ハル點ヲD, 外接圓周ト交ハル點ヲEトスレバ

$$AB.AC = AD.AE = \overline{AD}^2 + BD.DC$$

10. 二定點ヲ通リ且定直線ニ切スル圓周ヲ畫ケ。

11. 二邊ノ和ガ定線分 a ニ等シク面積ガ與ヘラレタル正方形 k^2 ニ等シイ矩形ヲ作レ。

12. 二邊ノ差ガ定線分 b ニ等シク面積ガ與ヘラレタル正方形 k^2 ニ等シイ矩形ヲ作レ。

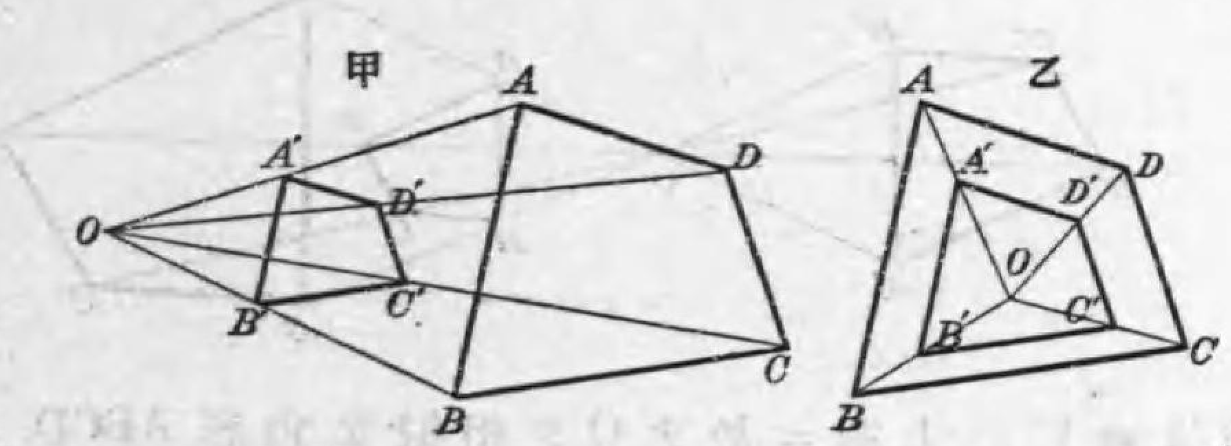
42. 相似多角形

問1. 二ツノ相似多角形(例ヘバ五角形)ヲ對應頂點カラ出ル對角線デ同數ノ三角形ニ分ケルト是等ノ三角形ハ夫々相似デアル。

問2. 與ヘラレタル線分ABヲ一邊トシ與ヘラレタル五角形A'B'C'D'E'ニ相似ナル五角形ヲ畫キナサイ。但ABハA'B'ノ對應邊ニナルモノトスル。

定理一二. 多角形ノ總テノ頂点ヲ一點ニ結ブ線分ヲ相等シキ比ニ内分スル点ヲ順次ニ結付ケテ生ズル多角形ハ原多角形ニ相似デアル。

題意 多角形例ヘバ四角形ABCDノ總テノ頂點ヲ一點Oニ結ブ線分OA, OB, OC, ODヲ $m:n$ ニ内分スル點ヲ夫々A', B', C', D'トスレバ



$$A'B'C'D' \backsim ABCD$$

證明 A', B'ハ△OABノ二邊ヲ相等シキ比ニ内分スル點デアルカラ $A'B' \parallel AB$

同様ニ $B'C' \parallel BC$ $C'D' \parallel CD$ $D'A' \parallel DA$

ヨリテ A′B′C′D′ ト AECD トハ等角デアル。

次ニ A′B′ AB デアルカラ $\triangle OA'B' \backsim \triangle OAB$

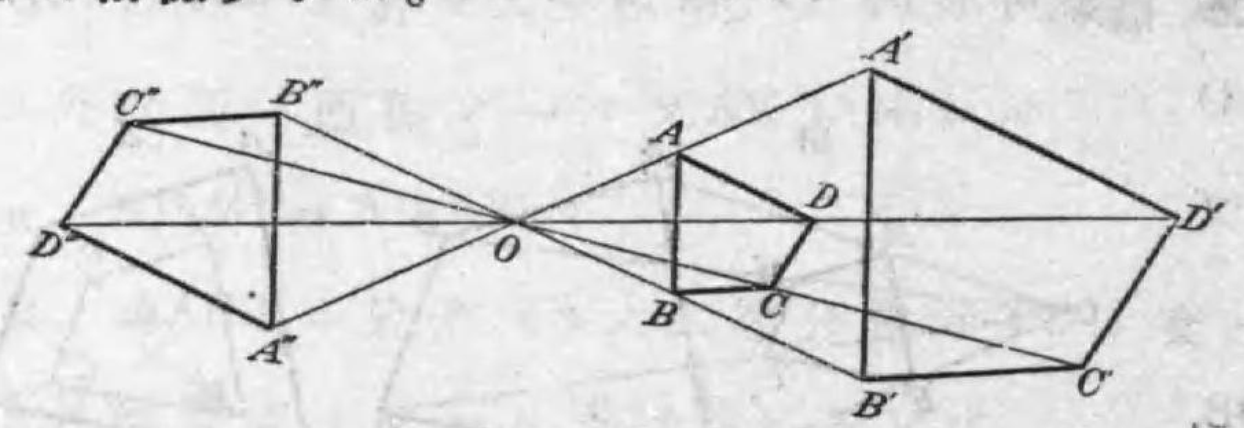
ヨリテ $\frac{A'B'}{AB}=\frac{OB'}{OB}$　同様ニ $\frac{B'C'}{BC}=\frac{OB'}{OB}$

$$\therefore \quad \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$$

同様ニシテ等角多角形 A′B′C′D′, ABCD ノ對應邊ノ比ハ皆等シイコトヲ證明スルコトガ出來ル。

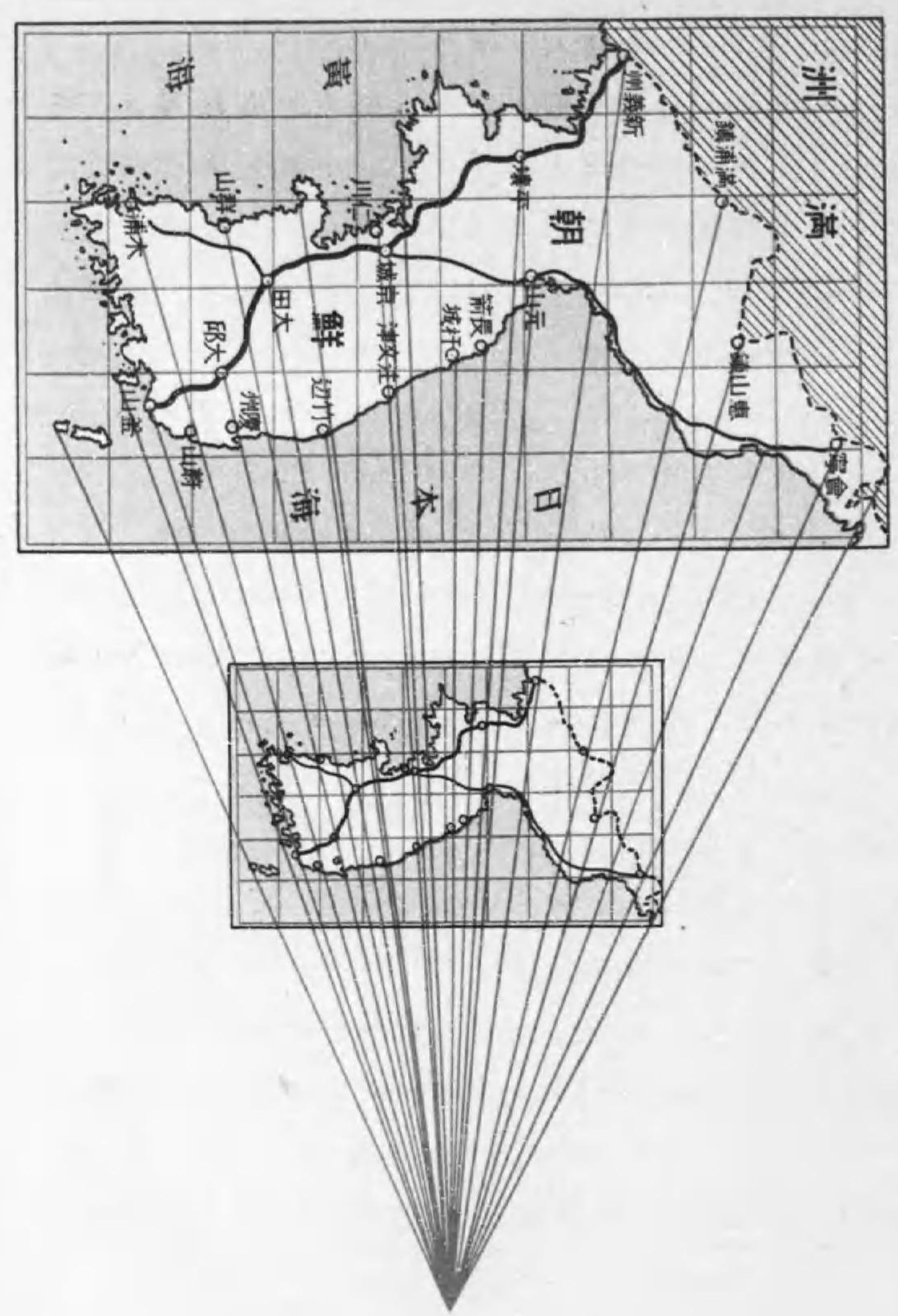
$$\therefore \quad A'B'C'D' \backsim ABCD$$

系　多角形ノ總テノ頂點ヲ一点(O)ニ結ブ線分ヲ定比ニ外分スル點ヲ順次結付ケテ生ズル多角形ハ原多角形ニ相似デアル。



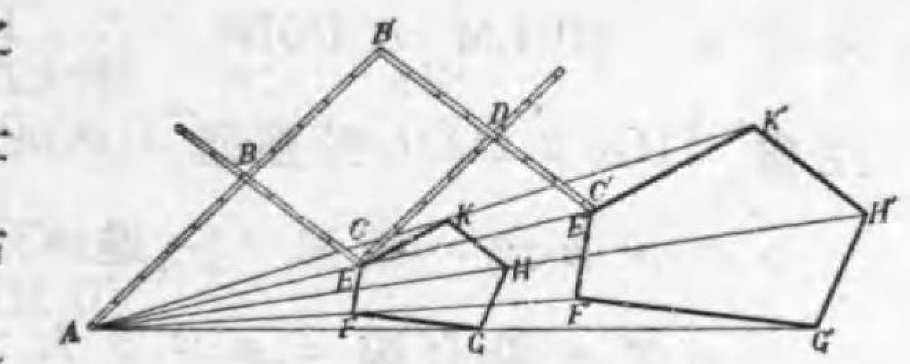
〔**注意**1〕. 上圖ニ於テ O ヲ相似多角形 ABCD, A′B′C′D′ ノ**相似ノ中心**トイフ。

〔**注意**2〕. 上圖ニ於テ多角形 A′B′C′D′ ト多角形 ABCD トノ一方ハ他ヲ縮小,又ハ擴大シタモノデ,モシ A′B′C′D′ ト AECD トノ相似ノ比ガ 2:1 ナラバ ABCI ハ A′B′C′D′ ヲ $\frac{1}{2}$ ニ縮小シタモノデアリ,A′B′C′D′ ハ



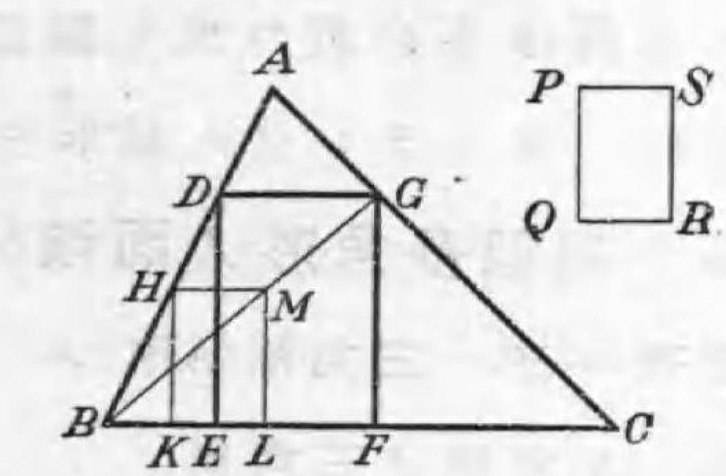
ABCD ヲ 2 倍ニ擴大シタモノデアル。

不規則ナ曲線圖形ハ之ニ近似ナル直線圖形ヲ考ヘテ近似的ニ擴大,縮小スルコトガ出來ル。實際ニ或圖形ノ縮小圖,擴大圖ヲ畫クニハ原圖ノ上ニ透明ナル方眼紙ヲ固定シ他ノ方眼紙上ニ原圖ノ對應點ヲ畫キ之ヲ基礎ニシテ仕上ゲルカ或ハ右ニ圖示スルぱんとぐらふ(Pamtograph)ヲ用フルノデアル。



作圖題三. 與ヘラレタル矩形(PQRS)ニ相似ナル矩形ヲ與ヘラレタル鋭角三角形(ABC)ニ內接セシメヨ。

(一邊ハ三角形ノ一邊上ニ,他ノ二頂點ハ他ノ二邊ノ各ノ上ニ一ツヅツアル矩形ヲ作ルコト)



作圖 AB上ノ任意ノ點HヨリBCニ垂線ヲ下シ其足ヲKトス。HKヲ一邊トシPQRSニ相似ナル矩形HKLMヲ作リ(BKノ延長上ニKLヲトル) BM又ハ其延長トACトノ交點ヲGトス。GヨリBCニ垂線ヲ下シ其足ヲFトシ,Gヲ通リCBニ平

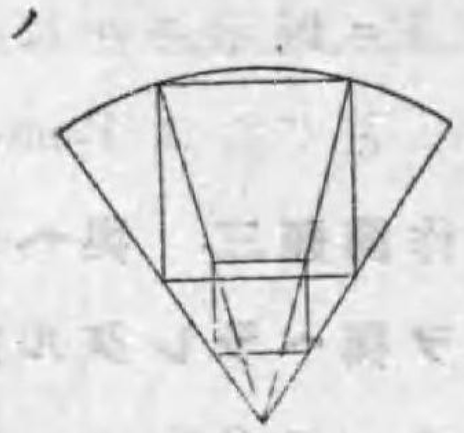
行ナル直線ヲ引キABトノ交點ヲDトスル。DヨリBCニ垂線ヲ下シ其足ヲEトスレバDEFGハ所要ノ矩形ナリ。

證明　D,E,F,G ハ矩形 HKLM ノ頂點ヲ一點 B ニ結ブ線分ヲ相等シキ比ニ内分又ハ外分スル點デアル。

故ニ定理一二系ニヨリテ　　$DEFG \backsim HKLM$

ソウシテ　$HKLM \backsim PQRS$　∴　$DEFG \backsim PQRS$

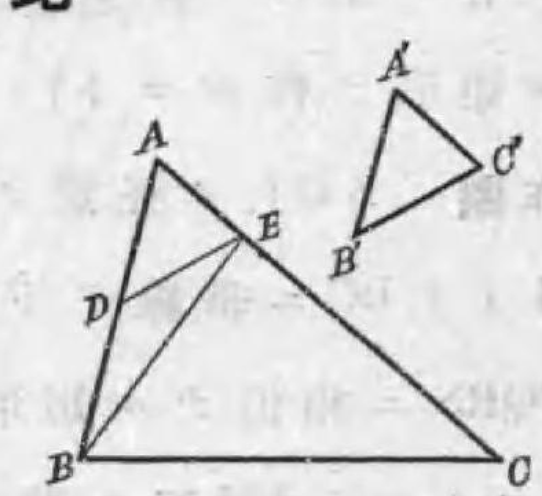
注意　HK ヲ FQ ノ對應邊トスルカ又ハ QR ノ對應邊トスルカ或ハ矩形ノ一邊ガ BC 上ニアル場合, CA 上ニアル場合等ニヨツテ六ツノ場合ガアル。上ニハ其中ノ一ツヲ畫イタノデアル。



問 3.　與ヘラレタル三角形ニ正方形ヲ内接セシメナサイ。

問 4.　與ヘラレタル扇形*ニ正方形ヲ内接セシメヨ。

43. 相似多角形ノ面積ノ比



定理一三.　三角形(ABC)ノ一角(∠A)ガ他ノ三角形(A′B′C′)ノ一角(∠A′)ニ等シイナラバ兩三角形ノ面積ノ比ハコノ角ヲ夾ム二邊ノ包ム矩形ノ比ニ等シイ。

*圓ノ弧ト其兩端ヲ通ル二ツノ半徑トデ圍マレル圖形ヲ扇形トイフ。

證明　AB 又ハ其延長上ニ A′B′ ニ等シク AD ヲ, AC 又ハ其延長上ニ A′C′ ニ等シク AE ヲトル。

$$\frac{\triangle ADE}{\triangle ABE}=\frac{AD}{AB} \qquad \frac{\triangle ABE}{\triangle ABC}=\frac{AE}{AC}$$

邊々掛ケ合ハスト

$$\frac{\triangle ADE}{\triangle ABE}\times\frac{\triangle ABE}{\triangle ABC}=\frac{AD}{AB}\times\frac{AE}{AC}$$

即　$$\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC}=\frac{AD.AE}{AB.AC}$$

トコロガ　$\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$　$AD = A'B'$　$AE = A'C'$ デアルカラ

$$\frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}=\frac{A'B'.A'C'}{AB.AC}$$

系　相似三角形ノ面積ノ比ハ對應邊ノ平方ノ比ニ等シイ。

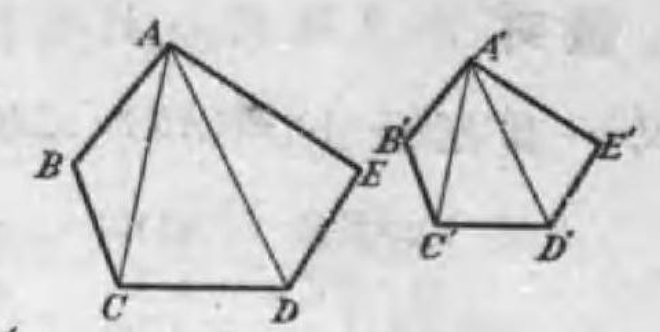
問 1.　△ABC ノ邊 AB, AC 上ニ夫々 D,E ヲトル。$AD : DB = CE : EA = 1 : 2$ ナルトキ　$\triangle ADE : \triangle ABC$ ノ値ヲ求メナサイ。

問 2.　△ABC ト △A′B′C′ トニ於テ ∠A ト ∠A′ トガ補角ナラバ　$\triangle A'B'C' : \triangle ABC = A'B'.A'C' : AB.AC$

手引　B′A′ ノ延長上ニ A′D′ ヲ B′A′ ニ等シクトリ △A′D′C′ ト △ABC トノ比ヲ考ヘヨ。

定理一四．相似多角形ノ面積ノ比ハ其對應邊ノ平方ノ比ニ等シイ。

證明 多角形例ヘバ五角形 A'B'C'D'E' ガ五角形 ABCDE ニ相似デアルトスル。



對應頂點 A, A' カラ出ル對角線デ各ヲ三ツノ三角形ニ分ケルト117頁問1ニヨツテ

$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC,\quad \triangle A'C'D' \backsim \triangle ACD,$

$\triangle A'D'E' \backsim \triangle ADE$

$$\therefore\quad \frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}=\frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2},\qquad \frac{\triangle A'C'D'}{\triangle ACD}=\frac{\overline{C'D'}^2}{\overline{CD}^2}=\frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2},$$

$$\frac{\triangle A'D'E'}{\triangle ADE}=\frac{\overline{D'E'}^2}{\overline{DE}^2}=\frac{\overline{A'B'}^3}{\overline{AB}^2}$$

定理三ニヨツテ

$$\frac{\triangle A'B'C'+\triangle A'C'D'+\triangle A'D'E'}{\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADE}=\frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2}$$

即 $A'B'C'D'E' : ABCDE=\overline{A'B'}^2 : \overline{AB}^2$

例　　題

1. 相似多角形ノ周圍ノ比ハ其相似ノ比ニ等シイ。

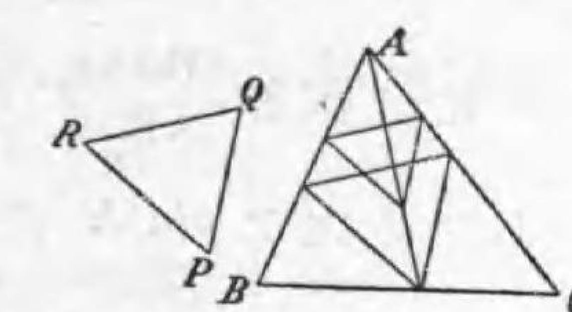
2. 二ツノ相似三角形ノ對應邊ガ平行ナル樣ニ置ケバ對應頂點ヲ結ブ三直線(延長ヲ含ム)ハ平行ナルカ

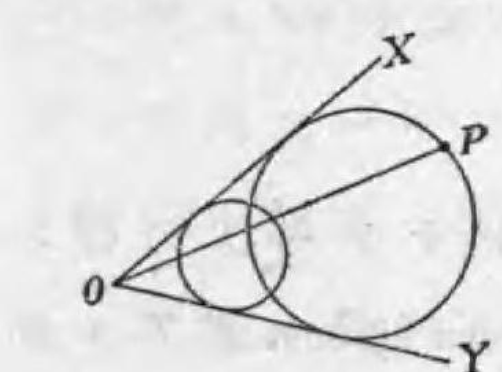
叉ハ一點ニ會ス。

3. △ABC ノ邊 BC, CA, AB 上ニ夫々 D, E, F ヲトル。BD : DC = CE : EA = AF : FB = 2 : 3 ナルトキ △DEF : △ABC ヲ求メナサイ。

4. 定三角形ト一角ヲ共有シ,且之ト等積ナル二等邊三角形(共有セル角ヲ頂角トスル)ヲ作レ。

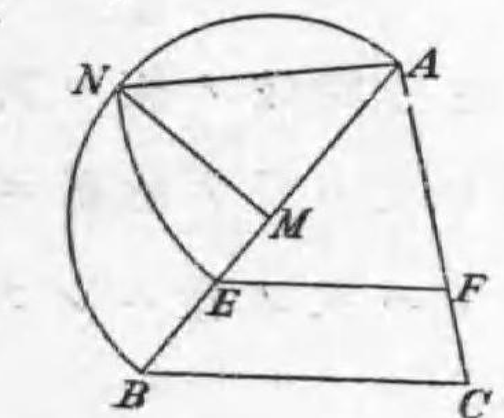
5. 與ヘラレタル三角形 PQR ト相似ナル三角形ヲ他ノ與ヘラレタル三角形 ABC ニ內接セヨ。但QR ノ對應邊ハ QR ニ平行ナラシメルモノトスル。





6. 定角 XOY ノ內ニアル定點 P ヲ通リ,コノ角ノ二邊ニ切スル圓ヲ畫ケ。

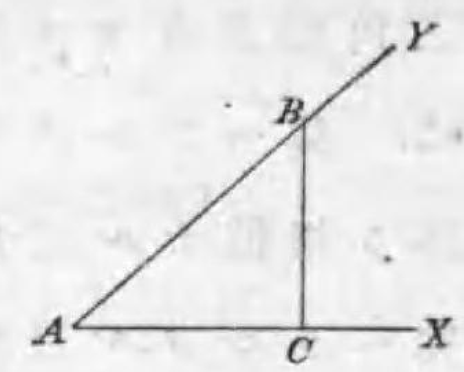
7. △ABC ノ邊 AB ノ中點ヲ通リ AB ニ垂直ナル直線ト AB ヲ直徑トスル圓周トノ交點ヲ N トス。AB 上ニ AN ニ等シク AE ヲトリ,E ヲ通リ BC ニ平行ナル直線ト AC トノ交點ヲ F トスレバ EF ハ △ABC ヲ二等分スルコトヲ證明セヨ。



8. 與ヘラレタル三角形ヲ其一邊ニ平行ナル直線ニテ定比 $m:n$ ニ分ケヨ。

44. 正弦,餘弦

銳角XAYノ一邊上ノ點Bカラ他ノ邊ニ下シタ垂線ノ足ヲCトスレバ △ABCハ直角三角形デ ABハ其斜邊デアル。今BCヲ垂線, ACヲ底邊トイフコトニシテ垂線ノ斜邊ニ對スル比ノ値卽 $\frac{BC}{AB}$ ヲ ∠Aノ**正弦**トイツテ之ヲ $\sin A$ デ表ハシ,

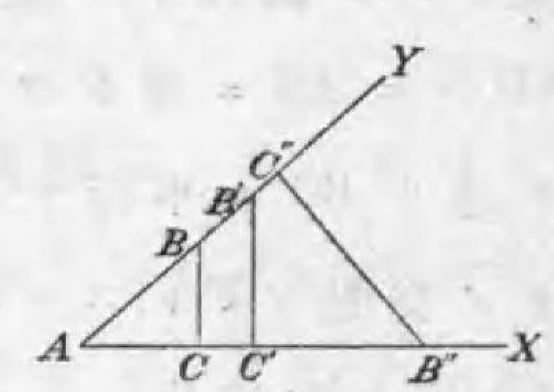


底邊ノ斜邊ニ對スル比ノ値卽 $\frac{AC}{AB}$ ヲ ∠Aノ**餘弦**トイツテ之ヲ $\cos A$ デ表ハス。卽

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \quad \cos A = \frac{AC}{AB}$$

例ヘバ垂線BCガ3cm, 底邊ACガ4cmナラバぴたごらすノ定理ニヨツテ斜邊ABハ $\sqrt{3^2+4^2}$ cm 卽5cmデアルカラ $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos A = \frac{4}{5}$

正弦餘弦ノ値ハ角ノ大サニヨツテ定マルモノデ前圖B又ハCノ位置ニ關係ガナイコトハ次ノ様ニシテ證明セラレル。



∠XAYノ一邊上ニ B, B′, B″ 等ヲ

トリ是等ノ點カラ他ノ邊ニ下シタ垂線ノ足ヲ夫々C, C′, C″ 等トスレバ

$$\triangle ABC \backsim \triangle AB'C' \backsim \triangle AB''C''\ldots\ldots$$

デアルカラ

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''} = \ldots\ldots,$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{AC''}{AB''} = \ldots\ldots$$

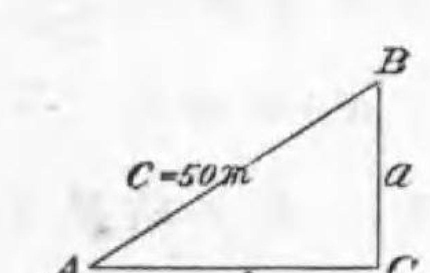
問1. △ABCニ於テ ∠C=90°, AB=13cm, BC=12cm ナラバ $\sin A$, $\cos A$ ハ各何程カ。

問2. $\sin A$ ガ $\frac{1}{2}$ デアル角Aヲ作圖セヨ。

［注意］ 以下△ABCニ於テハ∠A,∠B,∠Cノ對邊ノ長サヲ a, b, c デ表ハシ,△ABCガ直角三角形ナラバ∠Cガ直角ナルモノトスル。

例1. 斜邊ガ50mデ,一角ガ38°デアル直角三角形ノ他ノ二邊ノ長サ各何程カ。

解 直角三角形ABCニ於テ ∠A=38° c=50(m)トスル。



$$\sin A = \sin 38^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

∴ $a = c \sin 38^\circ$

又 $\cos A = \cos 38^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$ ∴ $b = c \cos 38^\circ$

卷末ノ表ヨリ　$\sin 38°=0.6157$,　$\cos 38°=0.7880$

$\therefore\quad a=50\times0.6157=30.785$

$\quad\ b=50\times0.7880=39.40$

答　30.8*m*,　39.4*m*

前例ニヨリ一般ニ直角三角形ABCニ於テハ

$BC=AB\sin A$　即　$\boldsymbol{a=c\sin A}$

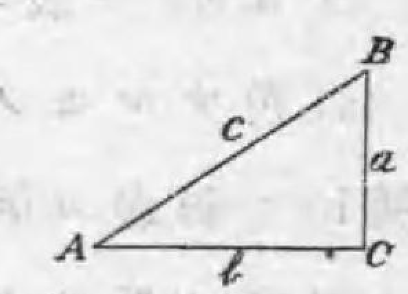
$AC=AB\cos A$　即　$\boldsymbol{b=c\cos A}$

デアルコトガワカル。故ニ直角三角形ノ斜邊ト一鋭角ノ正弦,餘弦トヲ知レバ他ノ邊ノ長サヲ算出スルコトガ出來ル。

例 2.　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$*　ヲ證明セヨ。

解　直角三角形ABCニ於テ

$\sin A=\dfrac{a}{c}$,　$\cos A=\dfrac{b}{c}$



$\therefore\quad \sin^2 A+\cos^2 A=\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{b^2}{c^2}=\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$

トコロガぴたごらすノ定理ニヨツテ

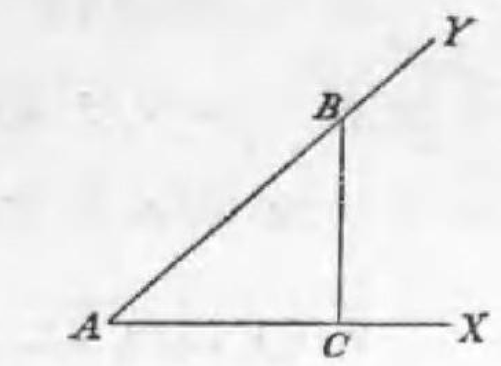
$a^2+b^2=c^2\quad\therefore \sin^2 A+\cos^2 A=1$

問 3.　上ノ結果ヲ利用シテ $\sin A=\dfrac{3}{5}$ ノトキニ $\cos A$ ノ値ヲ算出シナサイ。又 $\cos A=\dfrac{5}{13}$ ナラバ $\sin A$ ハ何程カ。

*$\sin^2 A$ ハ, $(\sin A)^2$ ヲ, $\cos^2 A$ ハ $(\cos A)^2$ ヲ略記シタノデアル。

45.　正切,餘切

前ノ樣ニ∠XAYノ一邊上ノ點Bカラ他ノ邊ニ下シタ垂線ノ足ヲCトスル。

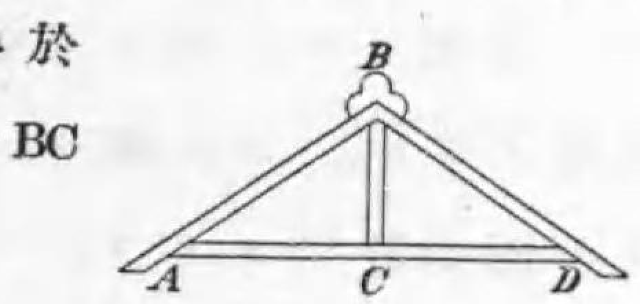


垂線ノ底邊ニ對スル比ノ値即 $\dfrac{BC}{AC}$ ヲ∠Aノ正切トイヒ之ヲ $\tan A$ デ表ハシ,底邊ノ垂線ニ對スル比ノ値即 $\dfrac{AC}{BC}$ ヲ∠Aノ**餘切**トイツテ之ヲ $\cot A$ デ表ハス。

即　$\boldsymbol{\tan A}=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$,　$\boldsymbol{\cot A}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$

正切餘切ノ値モ亦角ノ大サニヨツテ定マルノデアツテB又ハCノ位置ニ關係ガナイコトハ前節ニ於ケルト同樣ニシテ證明スルコトガ出來ル。

例　屋根ノ勾配ハ通常屋根ノ面ト水平面トノナス角ノ正切デ表ハサレル。圖ニ於テ ∠BAC=22°, AD=10*m* ナラバ BC ハ幾 *m* デスカ。



解　$\tan A=\tan 22°=\dfrac{BC}{AC}$

$\therefore\quad BC=AC\tan 22°$

トコロガ　$AC=\dfrac{10}{2}=5$　表ヨリ　$\tan 22°=0.4040$

$\therefore\quad BC=5\times0.4040=2.02$　答　2.02*m*

一般ニ直角三角形ABCニ於テハ

$$BC = AC\tan A \quad 卽 \quad a = b\tan A$$

$$AC = BC\cot A \quad 卽 \quad b = a\cot A$$

又定義ニヨッテ或角ノ正切ト餘切トハ互ニ逆數ヲナスコトモ明カデアル。之ヲ等式デ示スト

$$\tan A.\cot A = 1, \quad \tan A = \frac{1}{\cot A}, \quad \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

問 1.　平地ニ直立シテキル塔ノ基底カラ60*m*離レタ地點デ塔ノ仰角*ヲ測ッタトコロガ16°デアッタ。塔ノ高サ幾*m*デスカ。

問 2.　$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ 及 $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$ ヲ證明シナサイ。

旣ニ述ベタ様ニ或角ノ正弦,餘弦,正切,餘切ハ角ノ大サニヨッテ定マルモノデ,角ノ大サガ變ハレバ之ニツレテ變化スル。故ニ正弦,餘弦,正切,餘切ハ何レモ角ノ函數デアル。コノ四ツノ函數ヲ總稱シテ**三角函數****又ハ**圓函數****トイフ。

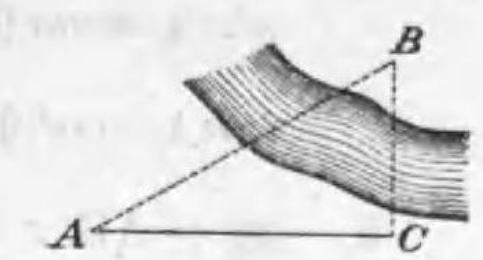
---

*上方ニアルモノヲ望ムトキ視線ト水平面トノナス角ヲ**仰角**トイヒ,下方ニアルモノヲ望ムトキ視線ト水平面トノナス角ヲ**俯角**トイフ。

** $\dfrac{1}{\cos A}$ ヲ∠Aノ**正割**トイッテ之ヲ $\sec A$ デ表ハシ, $\dfrac{1}{\sin A}$ ヲ∠Aノ**餘割**トイッテ之ヲ $\operatorname{cosec} A$ デ表ハス。通常三角函數又ハ圓函數トイフノハ正弦,餘弦,正切,餘切,正割,餘割ノ六ツノ總稱デアルガ正割,餘割ヲ使用スルコトハ稀デアル。

例　題

1.　河岸ノCト其對岸ニアルBトノ距離ヲ測ル爲ニCカラCBニ垂直ノ方向ニ240*m*歩イテAニ達シタ。∠A=35°30′ナラバBCハ何程カ。

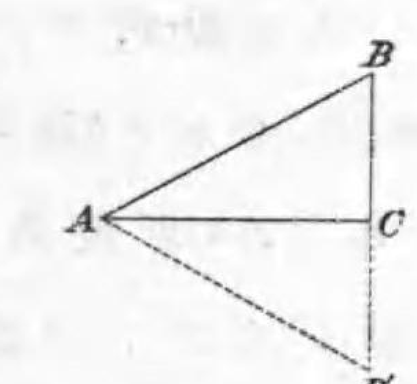


手引　$\tan 35°30'$ ハ $\tan 35°$ ト $\tan 36°$ トノ平均ト見做スコトガ出來ル。

2.　直線狀ノ海岸ABカラ沖ノ離レ島ニアル燈臺Cヲ望ミタルニ∠CAB=32°, ∠CBA=42°30′デアッタ。ABガ800*m*ナラバ燈臺ト海岸トノ距離ハ何程カ。

手引　CカラABニ至ル垂線ノ足ヲDトシ,CDヲ未知數トスル方程式ヲ作リナサイ。

3.　表ニヨラナイデ30°, 45°, 60°ノ三角函數ノ値ヲ求メナサイ。



手引　30°ノ函數値ヲ求メルニハ∠Aガ30°ナル直角三角形ABCニ於テBCノ延長上ニBCニ等シクCB′ヲトレバ△ABB′ハ正三角形ナルコトヲ利用シナサイ。又60°ノ函數値ヲ求メルニハ∠B=60°ナルコトヲ利用セヨ。∠Bヲ考ヘルトキニハ前ニ垂線デアッタBCハ底邊ニナリ,前ニ底邊デアッタACハ垂線ニナル。

4. 直角三角形ABCニ於テ $\angle$Aト$\angle$Bトガ互ニ餘角ナルコトニ注意シテ次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$\sin A=\cos(90^\circ-A).\quad \cos A=sni(90^\circ-A)$$
$$\tan A=\cot(90^\circ-A).\quad \cot A=\tan(90^\circ-A)$$

5. 線分ABノ兩端カラ直線XYニ下シタ垂線ノ足ヲ夫々A', B'トスル。AB又ハ其延長トXYトノナス角ヲα°トスレバ$A'B'=AB\cos\alpha^\circ$ナルコトヲ證明セヨ。

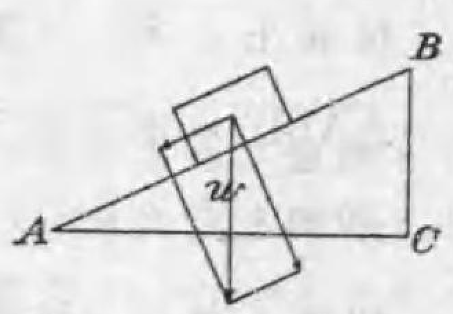
〔注意〕A'B'ヲXYニ投ズルABノ**正射影**トイフ。

6. 半徑rナル圓ニ内接スル正五角形ノ一邊ノ長サハ$2r\sin 36^\circ$ニシテ正n邊形ノ一邊ノ長サハ$2r\sin\dfrac{180^\circ}{n}$ナルコトヲ證明セヨ。

7. $\triangle$ABCニ於テ$\angle$Aガ鋭角ナラバ其面積ハ$\dfrac{1}{2}bc\sin A$ニ等シイコトヲ證明シ,之ヲ利用シテ定理一三($\angle$Aガ鋭角ナル場合)ヲ再ビ證明セヨ。

手引 CカラABニ垂線ヲ下シテ考ヘヨ。

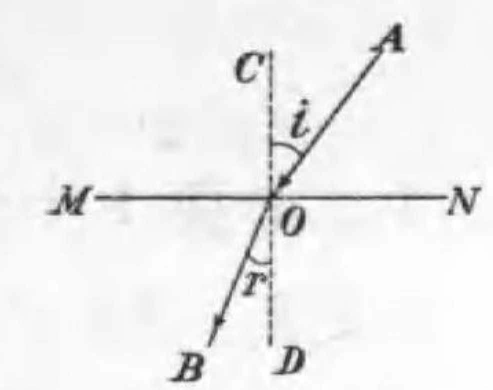
8. $\angle$Aガ鋭角ナラバ$\triangle$ABCノ外接圓ノ直徑ハ$\dfrac{a}{\sin A}$ニ等シイコトヲ證明セヨ。



9. 水平面トA°ノ角ヲナス斜面上ニ重サw瓩ノ物體ヲ押上ゲルニハ$w\sin A$瓩以上ノ力ヲ要スルコトヲ證明セヨ。

手引 下方ニ向フwヲ對角線トシ,斜面ニ平行ナル邊ト,斜面ニ垂直ナル邊トヲ有スル矩形ヲ作ルト斜面ニ平行ナル邊ハ物體ガ斜面ニ沿フテ下ル力ヲ表ハス。

10. 光線ガ甲物質中ヨリ乙物質中ニ入ルトキノ屈折率トイフノハ投射光線AO,屈折光線OBガ投射點ニ於テ兩物質ノ境界面MNニ立テタル垂線CODトナス角ノ正弦ノ比ノコトデアル。ヨツテ屈折率ヲnトシ, $\angle AOC=i$, $\angle BOD=r$トスレバ $n=\dfrac{\sin i}{\sin r}$ デアル。空氣中ヨリ水中ニ入ルトキノ屈折率ヲ$\dfrac{4}{3}$トスレバ$i=30^\circ$ナルトキrハ幾度デスカ。



11. $y=2x$ノぐらふヲ畫キ,直線$y=2x$ノx軸ノ上方ニアル部分トx軸ノ正ノ方向トナス角ノ正切ハ2デアルコトヲ驗シナサイ。$y=2x+3$ナラバ如何。

12. $y=x\tan 60^\circ$ ノぐらふデアル直線トx軸トノナス角ハ幾度デスカ。

附錄第一

補遺

1. 必要ト十分

二等邊三角形ノ二ツノ角ハ等シイ。故ニ或三角形ノ二邊ガ等シイ爲ニハ是非トモ其二角ガ等シクナケレバナラヌノデアル。コノ樣ニ或事柄ガ成立ツ爲ニ是非トモ滿足セラレネバナラヌ條件ヲ,コノ事柄ガ成立ツ爲ニ**必要ナル條件**トイフ。

例ヘバ前例デハ「二角ガ等シイ」トイフ條件ハコノ三角形ノ二邊ガ等シイ爲ニ必要ナル條件デアル。

又或三角形ノ二角ガ等シイナラバ,コノ三角形ノ二邊ガ等シイ。二角ガ等シクサヘアレバ,ソレダケデコノ三角形ノ二邊ハ等シイト斷言スルコトガ出來ル。コノ樣ニ或條件ガ滿足セラレサヘスレバ他ニ何等ノ條件ヲ具ヘナクトモ或事柄ガ成立ツナラバ,初ノ條件ハコノ事柄ガ成立ツ爲ニ**十分ナル條件**トイフ。

前例デハ「二角ガ等シイ」トイフ條件ハコノ三角形ノ二邊ガ等シイ爲ニ十分ナル條件デアル。

菱形ノ對角線ハ直交スルカラ,或四邊形ガ菱形ナル爲ニ對角線ノ直交スルコトガ必要ナル條件デアル。サレド對角線ガ直交スルダケデハコノ四邊形ハ菱形ナリト斷定スル譯ニハイカヌ。故ニ「對角線ガ直交スル」コトハコノ四邊形ガ菱形ナル爲ニ必要デハアルガ十分デハナイ。

正方形ノ角ハ皆等シイカラ或四邊形ノ角ガ皆等シイガ爲ニコノ四邊形ハ正方形デアルコトハ十分ナル條件デアル。サレド四邊形ノ角ガ皆等シイノハ正方形トハ限ラナイ。故ニ「正方形デアル」トイフ條件ハコノ四邊形ノ角ガ皆等シイ爲ニ十分ナ條件デハアルガ必要ナ條件デハナイ。

次ニ二ツノ數aトbトノ積卽abガ0ニナル爲ニ $a=0$ ナルコトハ十分デアルガ必要デハナイ。$b=0$ ナルコトモ同樣デアル。a,bノ中少クモ一ツガ0ナルコトハ必要ニシテ且十分ナル條件デアル。

問1. 次ノ條件ハ必要デアルカ十分デアルカヲ判定セヨ。

(1) 對角線ノ等シイコトハ,四邊形ガ矩形ナル爲ニ。

(2) 三角形ガ二等邊デアル爲ニ,一角ノ二等分線ガ對邊ニ垂直ナルコト。

(3) 四邊形ガ圓ニ內接スル爲ニ,一組ノ對角ガ補角デアルコト。

(4) $ab<0$ ナルガ爲ニ a ト b トガ異符號ノ數デアルコト。

(5) 整數ノ一ノ位ノ數ガ 0 デアルコトハ,其數ガ 5 ノ倍數デアル爲ニ。

或條件ガ或事柄ノ成立ツ爲ニ必要ナル條件デアルコトヲ證明スルニハ,ソノ事柄ガ成立ツナラバ當然其條件ヲ具ヘルコトヲ證明スレバヨロシイ。又十分ナル條件デアルコトヲ證明スルニハ其條件ガ滿足セラレルナラバ其事柄ガ成立ツコトヲ證明スレバヨロシイノデアル。

例ヘバ或四邊形ガ平行四邊形デアル爲ニ二組ノ對角ガ夫々等シイコトガ必要ニシテ且十分デアルコトヲ證明スルニハ

1° 平行四邊形ノ二組ノ對角ハ夫々等シイ(必要)。

2° 二組ノ對角ガ夫々等シイ四邊形ハ平行四邊形デアル(十分)。

コトヲ證明スレバヨロシイノデアル。

問 2. 或四邊形ガ平行四邊形デアル爲ニ對角線ガ互ニ他ヲ二等分スルコトガ必要ニシテ且十分ナルコトヲ證明セヨ。

問 3. 次ノ事柄ガ成立ツ爲ニ必要ニシテ十分ナル條件ヲ求メヨ。

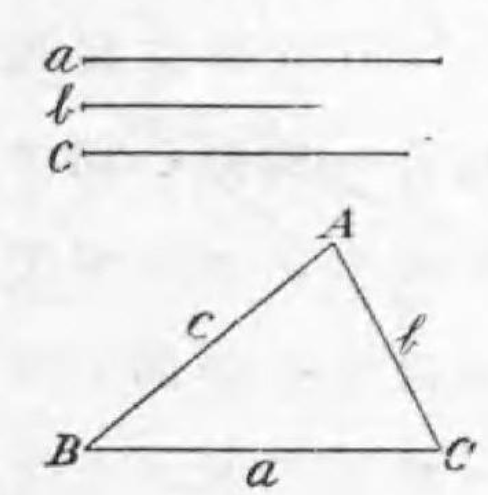
(1) 圓周ト直線トガ交ハル。

(2) 圓周ト圓周トガ交ハル。

(3) a, b ガ二ツノ實數(未ダ虛數ヲ學バナケレバ唯ノ數ト思ツテヨロシイ)デアルトキ $a^2+b^2=0$

2. 作圖問題ノ吟味

作圖題ヲ解クニハ先ヅ題意ヲ明カニスルコトハ勿論デアル。次ニ解析ニヨツテ作圖ノ方法ヲ推定シ,作圖法ヲ述ベ,其方法ガ正シイコト(出來タ圖形ガ題意ニ適スルコト)ヲ證明スルノデアルガ,以上デ作圖題ノ解ガ完結シタノデハナイ。最後ニ如何ナル場合ニ作圖ガ可能デアルカ不能デアルカ,可能ナル場合ニハ題意ニ適スル圖形ガ幾ツアルカ等ヲ調ベネバナラヌ。コノ最後ノ部分ヲ作圖題ノ**吟味**トイフ。



例 1. 三邊ガ夫々 a, b, c ニ等シイ三角形ヲ作ルコト。

解析 三邊ガ夫々 a, b, c ニ等シイ三角形ガ出來タモノトシテ之ヲ △ABC トスル。

BC ヲ定メタ以上ハ $AB=c$, $AC=b$ デアルカラ A ハ B ヲ中心トシ c ヲ半徑トスル圓ト, C ヲ中心トシ b ヲ半徑トスル圓トノ兩方ノ上ニナケレバナラヌ。ソコデ次ノ作圖法ガ推定セラレル。

作圖 任意ノ位置ニ a ニ等シイ線分 BC ヲ引キ, B ヲ中心トシ c ヲ半徑トスル圓周ト, C ヲ中心トシ b ヲ半徑トスル圓周トヲ畫キ其交點ノ一ツヲ A トスル。

$\triangle ABC$ ハ求メル三角形デアル。

證明 作圖ニヨツテ $\triangle ABC$ ノ三邊ハ夫々 a, b, c ニ等シイコトハ明カデアル。

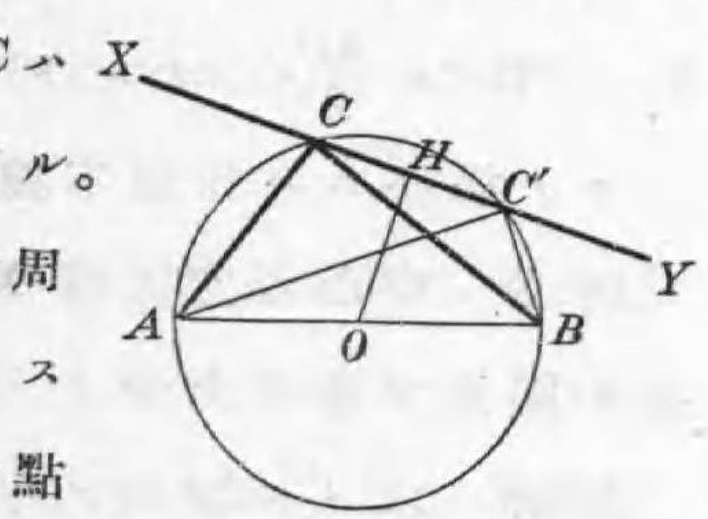
吟味 BC ヲ引クコトハ常ニ可能デアル。作圖ヲ完成シ得ル爲ニハ點 A ノ位置ヲ定メルコトガ出來テ且 A ガ BC 外ニナケレバナラヌ。故ニ圓周 B ト圓周 C トガ交ハルコトガ必要デアル。逆ニ二圓周ガ交ハレバ明カニ作圖ハ可能デアル。

トコロガ二圓周ガ交ハル爲ニ必要ニシテ十分ナル條件ハ其中心間ノ距離ガ半徑ノ和ヨリ小ニシテ差ヨリ大ナルコトデアルカラ $b+c > a > b \sim c$ ナルトキニ限ツテ作圖ハ可能デアリ且コノ場合ニハ解答ハ唯一ツデアル。

〔**注意**〕 $b+c > a > b \sim c$ ガ滿足セラレタトキニ二圓周ノ交點ハ二ツアル。之ヲ A, A′ トセバ $\triangle ABC$, $\triangle A'BC$ ハ共ニ題意ニ適スルカラ解答ハ二ツアル樣ニ見エル。併シ $\triangle ABC \equiv \triangle A'BC$ デアルカラ二ツノ異ナル三角形ガ出來タトハ考ヘナイノデアル。モシ圖形ノ一部分デモ位置ヲ指定セラレテアル場合ニハタトヒ合同圖形デアツテモ位置ノ異ナル以上ハ別ノ圖形ト考ヘル。故ニ例 1 ト殆ド同一デアル「與ヘラレタル線分 BC ヲ一邊トシ他ノ二邊ガ夫々與ヘラレタル線分 b, c ニ等シイ三角形ヲ作レ」ニハ前ト同ジ方法デ作圖シテ得ル $\triangle ABC$ ト $\triangle A'BC$ トノ二ツノ解答ガアル。

例 2. 定直線 (XY) 上ニ一點ヲ求メ, コノ點ヲ二定點 (A, B) ニ結ブ二直線ノナス角* ガ直角ニ等シクナル樣ニセヨ。

解析 所要ノ點ヲ求メ得タモノトシテ之ヲ C トスル。$\angle ACB = \angle R$ デアルカラ C ハ AB ヲ直徑トスル圓周上ニアル。



作圖 AB ヲ直徑トスル圓周ヲ畫キ XY トノ交點ヲ C, C′ トスル。C, C′ ハ共ニ題意ニ適スル點

* コノ角ヲコノ點ニ於テ線分 AB ヲ見ル角トイフコトガアル。

デアル。

證明 點Cハ XY上ニアツテ且コノ點ヲA,Bニ結ブ二直線ノナス角ACBハ半圓ノ角デアルカラ直角デアル。故ニCハ題意ニ適スル點デアル。

同様ニC′モ亦題意ニ適ス點デアル。

吟味 ABヲ直徑トスル圓周ト直線XYトガ出會フコトガ所要ノ點ヲ求メ得ル爲ニ必要ニシテ十分デアリ且ツ出會フ點ノ數ガ解答ノ數ニ一致スルコトガ明カデアル。

ABノ中點OカラXYニ下シタ垂線ノ足ヲHトスレバ

1° $OH < \frac{AB}{2}$ ナルトキ圓周トXYトハ交ハリ解答ハ二ツ。

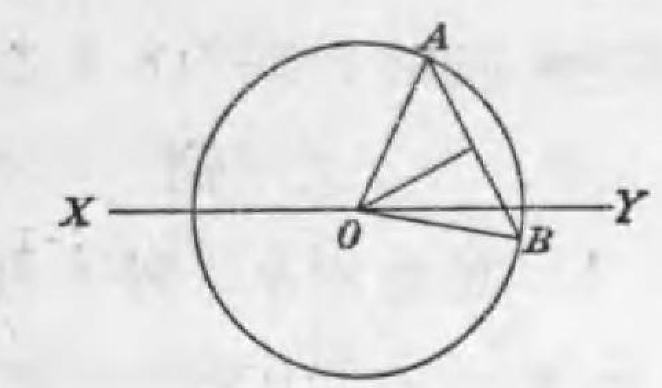
2° $OH = \frac{AB}{2}$ ナルトキ圓周トXYトハ切シ解答ハ唯一ツ。

3° $OH > \frac{AB}{2}$ ナルトキ圓周トXYトハ出會ハズ。コノ場合ニハ作圖不能。

例 3. 中心ガ定直線(XY)上ニアツテ,二定點(A B)ヲ通ル圓周ヲ畫キナサイ。

解析 求メル圓周ノ中心ヲOトスレバ OA＝OB デアルカラOハABノ垂直二等分線上ニアル。

作圖 A,Bヲ結ビ,ABノ垂直二等分線ヲ作リ,XYトノ交點ヲOトスル。Oヲ中心トシOAヲ半徑トスル圓周ハ所要ノ圓周デアル。



證明 コノ圓周ハ二點A,Bヲ通リ,且其中心ハXY上ニアルコト明カデアル。

吟味 中心ヲ定メルコトガ出來レバ作圖ハ可能デアル。ソコデABノ垂直二等分線ガXYニ出會フカ否カガ問題ニナル。

1° ABガXYニ垂直デナイ場合。

コノ場合ニハABノ垂直二等分線ハXYニ交ハリ解答ハ一ツアル。

2° ABガXYニ垂直ナル場合。

モシABノ中點ガXY上ニナケレバABノ垂直二等分線トXYトハ平行ニナツテ中心ヲ求メ得ラレナイ。故ニ解答ハナイ卽作圖不能。

モシABノ中點ガXY上ニアレバABノ垂直二等分線ハXYニ重ナリ,XY上ノ任意ノ點ヲ中心トシAヲ通ル圓周ハ皆題意ニ適スル。卽コノ場合ニハ解答ハ無數ニアル。コノ様ナ場合ニハ**不定**トイフ。

〔注意〕「AB ノ垂直二等分線上ニ中心ヲ有シ,A,B ヲ通ル圓周ヲ畫ケ」トイフ作圖問題ハ不定デアル。

例　題

1. 相交ハル二圓ノ共通弦ガ定直線ニ平行ナル爲ニ必要ニシテ十分ナル條件ヲ求メナサイ。

2. 定圓周上ニ三定點 A,B,C ガアル。A ヲ一端トシテ定長 a ニ等シイ弦ヲ引キコノ弦ガ $\angle BAC$ 内ニアル爲ニ必要ニシテ十分ナル條件ヲ求メヨ。

3. 定圓周上ニテ二定點ヨリ等距離ニアル點ヲ求メヨ。

4. 定點ヲ通リ定平行二直線ノ間ニ夾マレル部分ガ定線分ニ等シイ直線ヲ引キナサイ。

5. 底邊,高サ及外接圓ノ半徑ヲ知リテ三角形ヲ畫キナサイ。

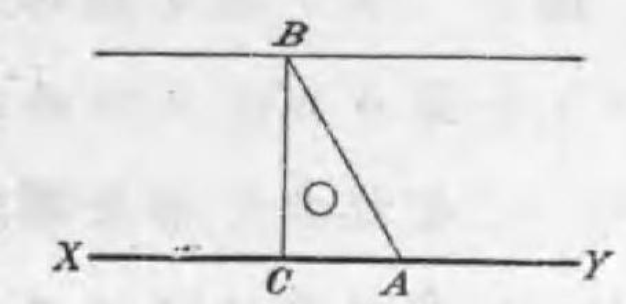
6. 二定點ヲ通ル圓周ヲ畫キ,コノ圓ト定圓トノ共通弦ガ定直線ニ平行ナル樣ニセヨ。

3. 軌　跡

兩脚器ノ兩脚端ノ距離ヲ定線分 r ニ等シクシテ,一脚端ヲ定點 O ニ固定シ他ノ脚端 P ヲ廻轉スレバ P ハ一ツノ圓周ヲ畫ク。此圓周ハ O カラノ距離ガ r ニ等シイ點ノミヲ含ミ且 O カラ r ニ等シイ距離ニアル點

ヲ殘ラズ含ム。

又 $\angle C$ ガ直角デ一邊 BC ノ長サガ l ナル三角定規 ABC ノ一邊 AC ヲ定直線 XY ニ沿ヒテ動カストキハ他ノ一邊 BC ノ端點 B ハ, XY ニ平行ナル直線ヲ畫ク。コノ直線ハ XY ノ一方ノ側ニ於テ XY ヨリノ距離ガ l ニ等シイ點全部ヲ含ミ,且ツコノ樣ナ點ノミヲ含ム圖形デアル。



定義 或條件ニ適スル點ヲ殘ラズ含ミ,且ツコノ樣ナ點ノミヲ含ム圖形ヲ,**コノ條件ニ適スル點ノ軌跡**トイフ。

コノ定義ニヨリ上記ノ例ヲ次ノ如クニ述ベルコトガ出來ル。

定理一. **定點ヨリノ距離ガ定線分ニ等シイ點ノ軌跡ハコノ定點ヲ中心トシ,定線分ニ等シイ半徑ヲ有スル圓周デアル。**

定理二. **定直線ノ一方ノ側ニ於テコノ直線ヨリノ距離ガ定線分ニ等シイ點ノ軌跡ハ,初メノ直線ニ平行ナル直線デアル。**

系 **定直線ニ至ル距離ガ一定ナル點ノ軌跡ハコノ**

直線ノ兩側ニ於テ,コノ直線ニ平行ナル二ツノ直線デアル。

問1. 次ノ點ノ軌跡ハ如何ナル圖形デアルカ(證明スルニ及バズ)。

(1) 二定點ヨリ等距離ニアル點。

(2) 定角ノ内ニアツテコノ角ノ二邊ヨリ等距離ニアル點。

(3) 定直線ニ切スル定半徑ノ圓ノ中心。

(4) 定圓周上ニ定點ガアル。コノ點ニ於テコノ圓ニ切スル圓ノ中心。

(5) 定線分ヲ斜邊トスル直角三角形ノ直角ノ頂點。

〔注意〕 xニツイテノ代數式ノぐらふ又ハx, yニツイテノ方程式ノぐらふヲ考ヘテ見ル。例ヘバx座標ガaデアル點ハ無數ニアルガ是等ノ點ハ皆$x=a$デ表ハサレル直線上ニアリ,逆ニ$x=a$デ表ハサレル直線上ノ點ノ横座標ハaデアル。故ニ定義ニヨツテ横座標ガaデアル點ノ軌跡ハ方程式$x=a$デ表ハサレル直線デアル。同様ニ$3x+2$ノぐらふハ縱座標ガ横座標ノ3倍ヨリ2單位大キイ點ノ軌跡デデアル。又方程式$ax+by=c$ノぐらふハx座標ノa倍トy座標ノb倍トノ和ガc單位ニ

等シイ點ノ軌跡デアル。

或圖形ガ或條件ニ適スル點ノ軌跡デアルコトヲ斷定スルニハ定義ヨリ明カデアル様ニ

1° **其圖形上ノ總テノ點ハ其條件ニ適スルコト。**

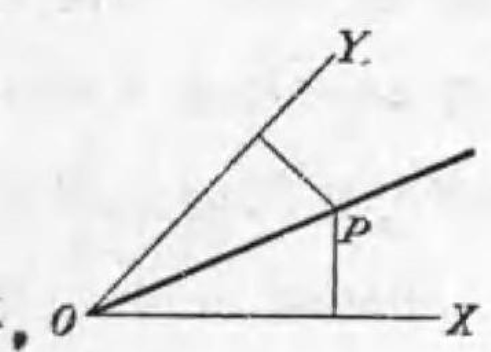
2° **其條件ニ適スル點ハ其圖形上ニアルコト。**

ノ二ツヲ證明シナケレバナラヌ。2°ヲ證明スル代リニ次ノ3°ヲ證明シテモヨロシイ。

3° **其圖形外ノ點ハ其條件ニ適セザルコト。**

定理三. **角(XOY)ノ内ニアツテ其二邊(OX, OY)ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハコノ角ノ二等分線デアル。**

證明 條件ニ適スル點ヲPトスル(卽PハOX, OYヨリ等距離ニアル點)。



42頁問3ニヨリテPハ∠XOYノ二等分線上ニアル(2°ノ證)。

次ニ∠XOYノ二等分線上ニアル點ヲP′トスレバ,P′ハ37頁問7ニヨリテOX, OYヨリ等距離ニアル(1°ノ證)。

故ニ∠XOYノ内ニアツテOX, OYヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ∠XOYノ二等分線デアル。

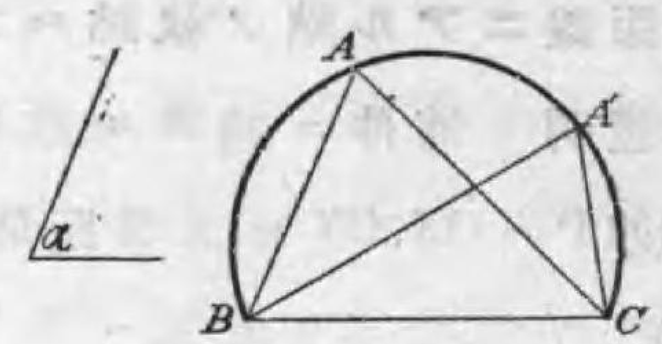
系 **相交二直線ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハコノ二直線ノナス角ヲ二等分スル二ツノ直線デアル。**

問2. 相交二直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メナサイ。

問3.◎ 二定點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,コノ二定點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線デアル。

問4. 定線分ヲ底邊トセル二等邊三角形ノ頂點ノ軌跡ヲ求メナサイ。

定理四. 定線分(BC)ヲ底邊トシ,其一方ノ側ニ立ツ三角形ノ頂角ガ定角(α)ニ等シイナラバ,コノ三角形ノ頂點ノ軌跡ハ,初ノ定線分ヲ弦トシ,コノ定角ヲ容レル弓形ノ弧デアル。



證明 BC ヲ弦トシ $\angle\alpha$ ヲ容レル弓形ヲ作レバ(94頁例題8)第三編定理五ニヨッテ $\angle BAC=\angle\alpha$ ナル點 A ハコノ弧ノ上ニアル。卽條件ニ適スル點 A ハコノ弓形ノ弧ノ上ニアル(2° ノ證)。

次ニコノ弧ノ上ノ點ヲ A′ トスレバ $\angle BA'C=\angle\alpha$ ナルコト勿論デアル(1° ノ證)。

故ニ定理ノ言フ所ハ眞デアル。

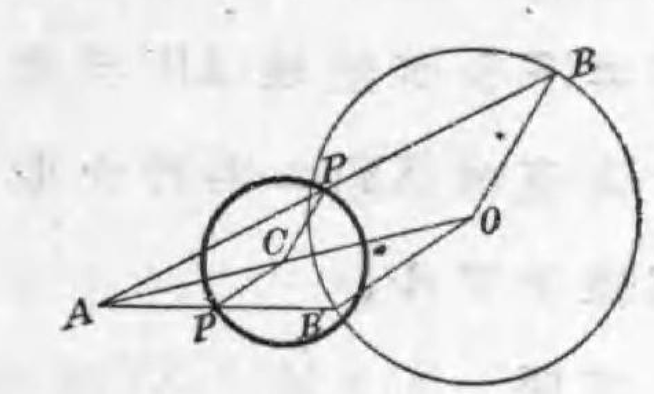
〔**注意**〕 第三編定理五ノ證明ヲ回顧スレバ 2° ヲ證明スルノハ結局 3° ヲ證明スルニ同ジデアルコトガワカル。

系一. 底邊ノ位置ト大サ,頂角ノ大サガ一定デアル三角形ノ頂點ノ軌跡ハ底邊ヲ弦トシ一定ノ頂角ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧デアル。

系二. 斜邊ノ位置ト大サガ一定ナル直角三角形ノ直角ノ頂點ノ軌跡ハ斜邊ヲ直徑トスル圓周デアル。

問5. 定圓ニ於テ定點ヲ通ル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メナサイ。

定理五. 定點(A)ト定圓周(中心O,半徑r)上ノ任意ノ點トヲ結ブ線分ノ中點ノ軌跡ハ定點ト定圓ノ中心トヲ結ブ線分ノ中點ヲ中心トシ定圓ノ半徑ノ半分ヲ半徑トスル圓周デアル。



證明 定圓周上ノ任意ノ點ヲ B トシ, AB ノ中點ヲ P トスル。P ヲ通リ BO ニ平行ナル直線ト AO トノ交點ヲ C トスレバ, C ハ AO ノ中點デ且 $CP=\dfrac{OB}{2}=\dfrac{r}{2}$(第二編定理一四系)。

故ニ P ハ AO ノ中點 C ヲ中心トシ $\dfrac{r}{2}$ ヲ半徑トスル圓周上ニアル(2° ノ證)。

次ニコノ圓周上ノ任意ノ點ヲ P′ トシ, O ヲ通リ CP′ ニ平行ナル直線ト AP′ ノ延長トノ交點ヲ B′ トスレバ P′ ハ AB′ ノ中點デアッテ且

$\mathrm{CP'}=\frac{1}{2}\mathrm{OB'}$　　然ルニ　　$\mathrm{CP'}=\frac{r}{2}$

$\therefore\quad \mathrm{OB'}=r$

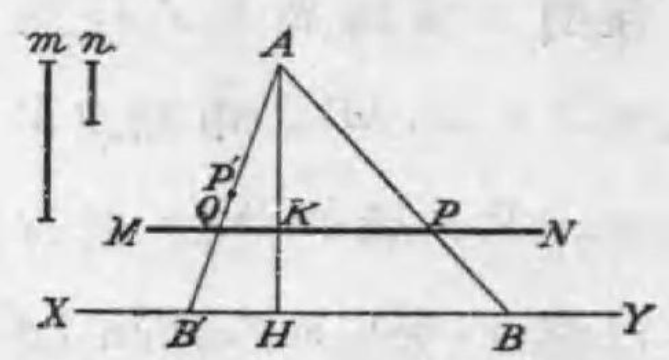
故ニB′ハ圓Oノ周上ニアル。

ヨツテP′ハAト圓Oノ周上ノ點B′トヲ結ブ線分ノ中點デアル(1°ノ證)。

故ニ定理ノ言フ所ハ眞デアル。

問6.　定點Aト定圓周上ノ點Bトヲ結ブ線分ABノ延長上ニABニ等シクBCヲトル。點Cノ軌跡ヲ求メヨ。

定理六.　定點(A)ト定直線(XY)上ノ點トヲ結ブ線分ヲ定比($m:n$)ニ内分スル點ノ軌跡ハ,コノ點カラコノ直線ニ下シタ垂線(AH)ヲ定比($m:n$)ニ内分スル點(K)ヲ通リ定直線(XY)ニ平行ナル直線デアル。



證明　Kヲ通リXYニ平行ナル直線ヲMNトシMN上ノ任意ノ點ヲPトスル。APノ延長ガXYニ交ル點ヲBトスレバ,

AP : PB = AK : KH = $m:n$……第四編定理六

即Pハ條件ニ適スル點デアル(1°ノ證)。

次ニMN上ニナイ任意ノ點ヲP′トシAP′又ハ其延長ガMNニ交ハル點ヲQ,XYト交ハル點ヲB′トスレバ前

證明ニヨツテ

AQ : QB′ = $m:n$

サウシテAB′ヲ$m:n$ニ内分スル點ハ唯一ツ(104頁注意)デアルカラP′ハAB′ヲ$m:n$ニ内分シナイ。

即MN上ニナイ點ハ條件ニ適シナイ(3°ノ證)。

上ノ證明ニヨツテAトXY上ノ點トヲ結ブ線分ヲ$m:n$ニ内分スル點ノ軌跡ハAヨリXYニ下シタ垂線ヲ$m:n$ニ内分スル點ヲ通リXYニ平行ナル直線デアル。

系　定點ト定直線上ノ點トヲ結ブ線分ノ中點ノ軌跡ハ,コノ點カラ定直線ニ下シタ垂線ノ中點ヲ通リコノ直線ニ平行ナル直線デアル。

問7.　定點ト定直線上ノ點トヲ結ブ線分ヲ定比$m:n$ニ外分スル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

例　題

1. 二定點ヲ通ル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メナサイ。
2. 平行二直線カラ等距離ニアル點ノ軌跡。
3. 定圓周上ノ任意ノ點Aニ於ケル切線上ニ點BヲトリABヲ定長lニ等シクトル。Bノ軌跡。
4. 定圓ノ定直徑ヲABトシ,コノ圓周上ノ任意ノ點ヲCトスル。BCノ延長上ニBCニ等シクCDヲトルトキDノ軌跡ヲ求メナサイ。

5. $\widehat{BC}$上ノ任意ノ點ヲAトシ, BAノ延長上ニADヲACニ等シクトル。Dノ軌跡ハBCヲ弦トスル或弓形ノ弧ノ一部分デアル。

手引 Dト$\widehat{BC}$トハBニ於ケル切線ノ同ジ側ニアル。

6. 定線分ヲ底邊トシ頂角ガ定角αニ等シイ三角形ニ於テ

(1) 內心ノ軌跡　　(2) 重心ノ軌跡

ヲ求メヨ。

7. 定點Aト,半徑rナル定圓周上ノ任意ノ點トヲ結ブ線分ヲ定比$m:n$ニ內分スル點ノ軌跡ハAト定圓ノ中心トヲ結ブ線分ヲ$m:n$ニ內分スル點ヲ中心トシ$\dfrac{m}{m+n}r$ヲ半徑トスル圓周デアル。

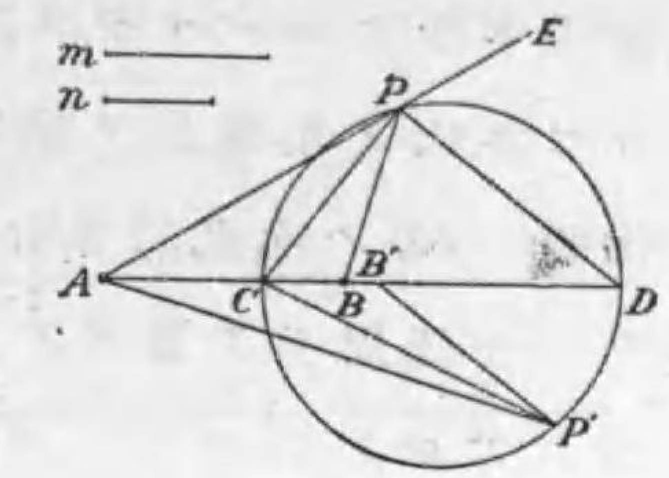
8. 二定點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ定正方形k^2ニ等シイ點ノ軌跡。

手引 69頁例題6參照。

9. 定圓周上ノ定點ヲA,任意ノ點ヲBトスル。AB又ハ其延長上ニ點CヲAB.ACガ定量k^2ニ等シクナル樣ニトル。Cノ軌跡ヲ求メヨ。

10. 二定點ニ至ル距離ノ比ガ定比$m:n$ニ等シイ點ノ軌跡ハ,二定點ヲ結ブ線分ヲ$m:n$ニ內分,外分スル二點ヲ結ブ線分ヲ直徑トスル圓周デアル。

手引 二定點ヲA,BトシABノ內分點,外分點ヲ夫々C,Dトスル。條件ニ適スル點ヲPトシ,APノ延長ヲPEトスレバPC,PDハ夫々∠APB,∠BPEノ二等分線ナルコトヲ證明シ之ヲ利用シテPハCDヲ直徑トスル圓周上ニアルコトヲ證明セヨ。次ニP′ヲコノ圓周上ノ點トシP′Cガ∠APB′ノ二等分線ニナル樣ニPB′(B′ハACBD上ノ點)ヲ引キBトB′トガ同ジ點ナルコトヲ證明セヨ。

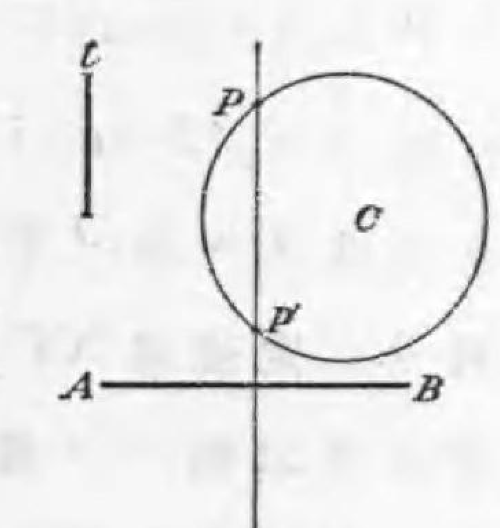


4. 軌跡ヲ利用セル作圖題解法

例 1. 二定點(A,B)ヨリ等距離ニアツテ他ノ定點(C)ヨリノ距離ガ定長lニ等シイ點ヲ求メヨ。

解析 所要ノ點ヲ求メ得タトシテ之ヲPトスル。

PハA, Bカラ等距離ニアルカラABノ垂直二等分線(A, Bヨリ等距離ニアル點ノ軌跡)上ニナケレバナラヌ。



又PトCトノ距離ハlニ等シイカラPハCヲ中心トシ,lヲ半徑トスル圓周(Cヨリノ距離ガlニ等シイ點ノ

軌跡)上ニナケレバナラヌ。

ヨツテ次ノ作圖法ヲ推定スルコトガ出來ル。

作圖 AB ノ垂直二等分線 XY トCヲ中心トシ l ヲ半徑トスル圓周トヲ畫ク。ソノ交點 P,P′ ハ何レモ所要ノ點デアル。

證明 P ハ AB ノ垂直二等分線上ニアルカラ A,B カラ等距離ニアル。

又PハCヲ中心トシ l ヲ半徑トスル圓周上ニアルカラPトCトノ距離ハ l ニ等シイ。

故ニPハ題意ニ適スル點デアル。

同様ニ P′ モ亦題意ニ適スル點デアル。

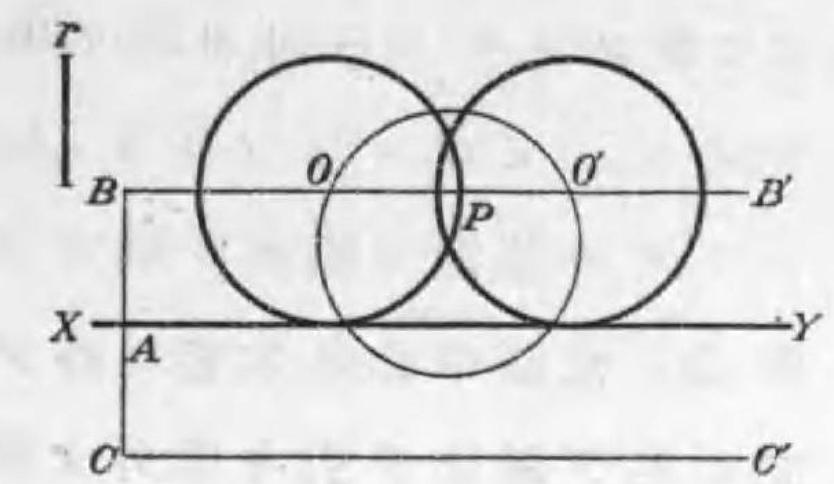
吟味 點C ト AB ノ垂直二等分線トノ距離ヲ m トスル。(1) $m<l$ ナラバ圓周CトXYトハ交ハリ求メル點ハ二ツアル。(2) $m=l$ ナラバ圓周CトXYトハ切シ求メル點ハ唯一ツ。(3) $m>l$ ナラバ圓周CトXYトハ出會ハナイカラ求メル點ハナイ卽作圖不能。

例 2. 定直線(XY)ニ切シコノ直線上ニナイ定點(P)ヲ通ル定半徑(r)ノ圓周ヲ畫ケ。

解析 所要ノ圓ヲ畫キ得タトシテ其中心ヲOトスル。

圓周Oハ點Pヲ通ルカラ　　OP $= r$

故ニOハPヨリノ距離ガ r ニ等シキ點ノ軌跡(卽Pヲ中心トシ半徑ガ r ニ等シイ圓周)ノ上ニアル。



又圓OハXYニ切スルカラOハXYニ至ル距離ガ r ニ等シイ點ノ軌跡(卽XYニ平行ナル二直線)ノ上ニアル。ソコデ次ノ作圖法ガ推定セラレル。

作圖 Pヲ中心トシ, r ヲ半徑トスル圓ヲ畫ク。次ニXY上ノ任意ノ點Aニ於テ XY ニ垂線ヲ作リ,コノ垂線上Aノ兩側ニ夫々B,Cヲ定メ AB $=$ AC $= r$ ナラシメル。B,C ヲ通リXYニ平行ナル直線 BB′,CC′ ト前ノ圓周トノ交點ヲ O,O′ トスル。

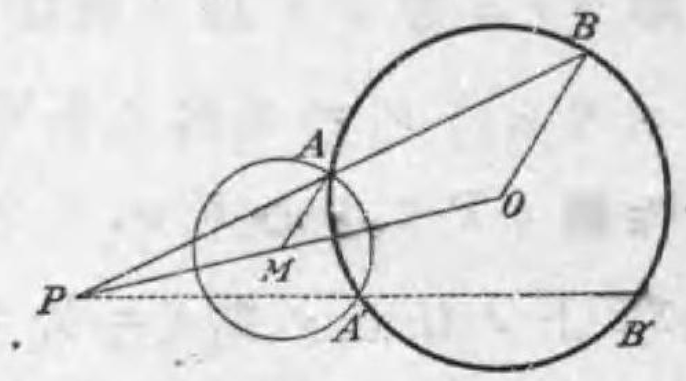
O,O′ ヲ中心トシ, r ヲ半徑トスル圓ガ所要ノ圓デアル。

コノ圓ガ題意ニ適スルコトハ諸子自ラ證明シナサイ。

吟味 BB′ トPトガXYノ同ジ側ニアルモノトスル。PトXYトノ距離ヲ d トスレバPト BB′ トノ距離ハ $r\sim d$ デアリ, CC′ トノ距離ハ $d+r$ デアル。故ニ圓周Pハ CC′ ニハ出會ハナイ。

dガrヨリ大ナラザルトキ及$2r$ヨリ小ナルトキ結局$d<2r$ノトキニハ圓周PハBBニ交ハリ求メル圓ガ二ツアル。又$d=2r$ノトキハ求メル圓ハ一ツ. $d>2r$ナルトキハ題意ニ適スル圓ガナイ。

例 3. 定圓(中心O, 半徑r)外ノ定點(P)ヲ初ノ圓周上ノ點ニ結ブ線分ヲ引キ圓外ノ部分ト圓內ノ部分トガ等シクナル樣ニセヨ。



解析 所要ノ直線ヲ引キ得タトシテ圓周トノ交點ヲ圖ノ樣ニA, Bトスル。AハPBノ中點デアルカラ定點Pト圓周上ノ點トヲ結ブ線分ノ中點ノ軌跡(即POノ中點ヲ中心トシ, $\frac{r}{2}$ヲ半徑トスル圓周)上ニアル。ソコデ次ノ作圖法ガ推定セラレル。

作圖 P, Oヲ結ビ, POノ中點ヲ求メテ之ヲMトスル。Mヲ中心トシ$\frac{r}{2}$ヲ半徑トスル圓周ヲ畫キ圓周Oトノ交點ヲA, A'トスル。直線PA, PA'ト圓周Oトノ他ノ交點ヲB, B'トスレバ線分PAB, PA'B'ハ求メルモノデアル。

證明 諸子自ラ證明セヨ。

吟味 $PO=a$トスレバ$MO=\frac{a}{2}$

圓周Oト圓周Mトハ $r+\frac{r}{2}>\frac{a}{2}>r\sim\frac{r}{2}$即 $3r>a>r$ナルトキニ交ハリ, $a=3r$又ハ$a=r$ノトキニ切シ,其他ノ場合ニハ出會ハナイ。

トコロガPハ圓外ニアルカラ$a>r$

故ニ $3r>a$ ノトキニ求メル線分ヲ二ツ引クコトガ出來, $3r=a$ ノトキニハ一ツ引クコトガ出來ルガ$3r<a$ ノトキニハ題意ニ適スル線分ハナイ。

例 題

1. 相交二直線ニ切スル定半徑ノ圓ヲ畫ケ。

2. 定圓ニ於テ定直線ニ平行シ,且既知ノ長サヲ有スル弦ヲ作レ。

手引 弦ノ中點ノ位置ヲ考ヘヨ。

3. 與ヘラレタ相交二直線カラ等距離ニアッテ一定點カラ與ヘラレタ距離ニアル點ヲ求メナサイ。

4. 底邊,高サ及底邊ノ一端カラ對邊ニ至ル垂線ノ長サヲ知ッテ三角形ヲ作リナサイ。

5. 一頂點ヨリ對邊ニ至ル垂線,中線及外接圓ノ半徑ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

手引 先ヅ垂線,中線ガ二邊デアル直角三角形ヲ作レ。

6. 底邊,頂角及內切圓ノ半徑ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

手引　148頁例題6參照。

7. 底邊高サ及他ノ二邊ノ比ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

手引　148頁例題10參照。

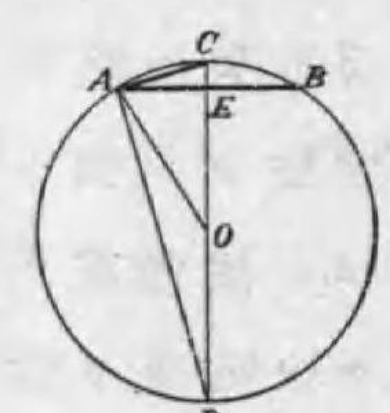
8. X, Y ハ定平行二直線ニシテ A ハ X 上ノ定點ナリ。X, Y ノ外ニアル定點 B ヲ通ル直線ヲ引キ X, Y ト交ル點ヲ夫々 C, D トス。AC=AD ナラシメンニハ直線 BCD ノ作圖法如何。

手引　CD ノ中點ノ位置ヲ決定セヨ。

5. 圓周ノ長サ

定理七. **半徑ガ r デアル圓(中心O)ニ内接スル正 n 邊形ノ一邊(AB)ノ長サヲ a, 同ジ圓ニ内接スル正 $2n$ 邊形ノ一邊ノ長サヲ a' トスレバ**

$$a'=\sqrt{r(2r-\sqrt{4r^2-a^2})}$$



證明　$\widehat{AB}$ ノ中點ヲCトスレバ AC ハ圓Oニ内接スル正 $2n$ 邊形ノ一邊デアル。

C ヲ通ル直徑 CD ト AB トノ交點ヲ E トスル。

$AO=r,\ AE=\dfrac{a}{2}$ デアルカラ　△AOE ヨリ

$$OE=\sqrt{r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$$

$$\therefore\quad CE=r-\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$$

又 $\angle CAD=\angle R$　　$\therefore\quad \overline{AC}^2=CE.CD$……113頁問2

卽　$$a'^2=\left(r-\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}\right)2r=r\left(2r-\sqrt{4r^2-a^2}\right)$$

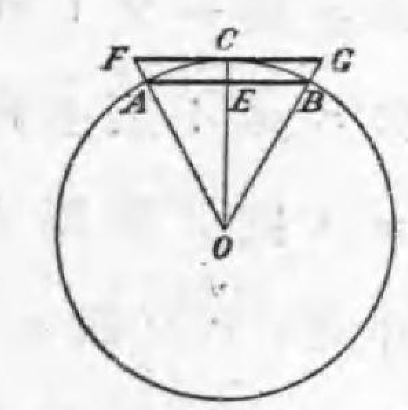
$$\therefore\quad a'=\sqrt{r(2r-\sqrt{4r^2-a^2})}$$

問1.　半徑 $1m$ ノ圓ニ内接スル正六邊形ノ一邊ハ $1m$ デアル。同ジ圓ニ内接スル正十二邊形ノ一邊ノ長サハ何程カ。

定理八. **半徑ガ r デアル圓(中心O)ニ内接スル正 n 邊形ノ一邊(AB)ノ長サヲ a, 同ジ圓ニ外切スル正 n 邊形ノ一邊ノ長サヲ b トスレバ**

$$b=\frac{2ar}{\sqrt{4r^2-a^2}}$$

證明　$\widehat{AB}$ ノ中點ヲCトシ, CO ト AB トノ交點ヲ E トスル。C ニ於ケル切線ガ OA, OB ノ延長ト交ハル點ヲ夫々 F, G トスレバ FG ハ圓Oニ外切スル正 n 邊形ノ一邊デアル。



$FG \parallel AB$

$\therefore\quad FG : AB = OF : OA = OC : OE$

卽　$b : a = r : OE$

トコロガ $\mathrm{OE}=\sqrt{r^2-\dfrac{a^2}{4}}$ ∴

$$\therefore \quad b:a=r:\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$$

$$\therefore \quad b=\frac{ar}{\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}}=\frac{2ar}{\sqrt{4r^2-a^2}}$$

問2. 半徑 $1m$ ノ圓ニ外切スル正十二邊形ノ一邊ノ長サヲ計算セヨ。

手引 前問ノ結果ヲ用ヒヨ。

偖テ圓周ハ之ニ內接スル正多角形ノ周圍ヨリ大キク,外切スル正多角形ノ周圍ヨリ小サイ。サウシテ圓ニ內接又ハ外切スル,正多角形ノ邊數ヲ次第ニ多クスレバ其周圍ハ次第ニ圓周ニ接近シ,邊數ガ非常ニ多クナレバ殆ンド圓周ニ等シクナル。

故ニ與ヘラレタ圓ニ內接若シクハ外切スル邊數ノ非常ニ多イ正多角形ノ周圍ヲ計算スルコトガ出來レバ,コノ圓ノ周圍ノ近似値ヲ求メルコトガ出來ル。

半徑rナル圓ニ內接スル正六邊形ノ一邊ノ長サハrデアルカラ,定理七ニヨリテ正十二邊形ノ一邊ノ長サヲ計算スルコトガ出來ル。再ビ定理七ヲ適用シテ正二十四邊形ノ一邊ノ長サヲ計算スルコトガ出來ル。

次第ニコノ樣ニシテ幾回モ定理七ヲ適用シテ,圓ニ內接スル邊數ノ非常ニ多イ正多角形ノ一邊ノ長サa從テ其周圍ヲ計算スルコトヲ得。ツマリ圓周ノ長サノ近似値ヲ求メ得ラレル。サウシテコノ近似値ハ眞ノ値ヨリハ小サイ。

更ニ前ノ樣ニシテ計算シタaノ値ト定理八トヲ利用シテ同ジ圓ニ外切スル正多角形ノ周圍ヲ計算スレバ眞ノ値ヨリ大キイ近似値ヲ求メ得ルカラ前ニ求メタ近似値ハドノ程度マデ正確デアルカヲ知ルコトガ出來ル。

上ノ方法デ半徑r卽直徑$2r$ノ圓ニ內接,外切スル正多角形ノ周圍ヲ計算スレバ

邊　數	內接正多角形ノ周	外切正多角形ノ周
6	$2r\times 3$	$2r\times 3.46410$
12	〃 3.10583	〃 3.21539
24	〃 3.13263	〃 3.15966
48	〃 3.13935	〃 3.14609
96	〃 3.14103	〃 3.14271

ヨツテ半徑r卽直徑$2r$ナル圓ノ周圍ヲcトスレバ

$$2r\times 3.14103<c<2r\times 3.14271$$

故ニ圓ノ周圍ハ直徑ノ約3.14倍ニ等シイ。コノ數ヲ**圓周率**トイヒ,之ヲ通常πデ表ハス。

上記ノ所論ニヨツテ次ノ定理ガ得ラレル。

定理九. **半徑rナル圓ノ周ハ$2\pi r$デアル。**

〔**注意**〕 圓周率ノ近似値トシテハ通常3.14, $\frac{22}{7}$ 或ハ $\frac{355}{113}$ ヲ用ヒル。本書ニ於テハ明言ナキ限リ $\pi=3.14$ トスル。

6. 圓ノ面積

前節ト同様ニシテ圓ニ外切スル正多角形ノ邊數ヲ十分多クスレバ其面積ハ殆ンド圓ノ面積ニ等シク,邊數ヲ尚一層多クスレバ多角形ノ面積ト圓ノ面積トノ差ヲ如何程デモ小サクスルコトガ出來ル。

サウシテ圓ニ外切スル正多角形ノ面積ハ其周圍ト半徑トノ積ノ半分ニ等シク,邊數ガ非常ニ多イナラバ多角形ノ周圍ハ圓周ニ等シト見做シ得ルカラ圓ノ面積ヲ表ス數ハ其周圍ヲ表ス數ト半徑ヲ表ス數トノ積ノ半分ニ等シイ。之ニヨツテ次ノ定理ガ得ラレル。

定理一〇. **半徑rナル圓ノ面積ハπr^2デアル。**

何トナレバコノ圓ノ面積ヲS,周圍ヲcトスレバ

$$S=c\times r\times\frac{1}{2}=2\pi r\times r\times\frac{1}{2}=\pi r^2$$

例題

1. 半徑8cmノ圓ノ周及面積ヲ計算セヨ。

2. 半徑1cmノ圓ニ內接スル正八角形及外切スル正八角形ノ周圍ヲ計算セヨ。

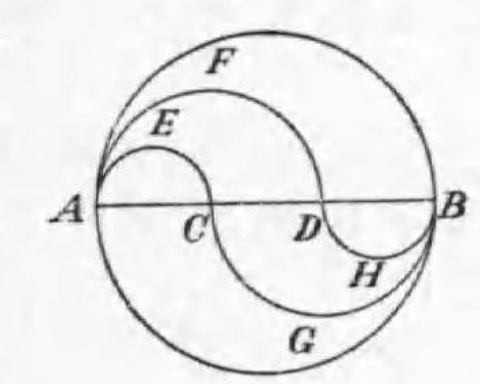
3. 前問ニ於ケル多角形ノ面積ノ比ヲ求メヨ。

4. 二圓周ノ和ハ其半徑ノ和ヲ半徑トスル圓周ニ等シイ。

5. 二ツノ與ヘラレタル圓ノ面積ノ和ニ等シイ面積ヲ有スル圓ヲ畫キナサイ。

6. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ各ヲ直徑トシテ三角形ノ外側ニ畫イテアル二ツノ半圓カラコノ三角形ノ外接圓ガ切取ル部分ヲ除イタ二ツノ新月形ノ部分ノ和ハ原三角形ト等積デアル。

7. 圓ノ直徑ABヲC, Dデ三等分シ,圖ノ様ニAC, AD, CB, DBヲ直徑トスル半圓周ヲ畫ケバ初ノ圓ハ二ツノ波狀線 AFDHB, AECGB ニヨツテ三等分セラレル。



8. 圓ノ弧ト其兩端ヲ通ル二ツノ半徑トデ圍マレル平面ノ一部分ヲ**扇形**トイフ。(120頁脚註)扇形ノ角(中心角)ガ$4\angle R$ノ$\frac{1}{n}$デアルナラバ其弧ハ圓周ノ$\frac{1}{n}$ニ

等シク,面積ハ圓ノ面積ノ$\frac{1}{n}$ニ等シイコトヲ利用シテ半徑r糎,中心角$a°$ノ扇形ノ弧ノ長サハ$\frac{\pi ar}{180}$糎デアリ面積ハ$\frac{\pi ar^2}{360}$平方糎デアルコトヲ證明セヨ。

9. 扇形ノ面積ハ其弧ニ等シイ底邊,半徑ニ等シイ高サヲ持ツ三角形ノ面積ニ等シイコトヲ證明セヨ。

10. 半徑b糎,c糎ノ二ツノ同心圓ノ弧ト,中心角$a°$ヲナス二ツノ半徑トデ圍マレル扇ノ地紙形(ヂガミナリ)ノ部分ノ面積ヲ計算シナサイ。次ニコノ面積ハ二ツノ弧ニ等シイ兩底ト半徑ノ差ニ等シイ高サノ梯形ノ面積ニ等シイコトヲ證明シナサイ。

附錄第二

立體幾何大意

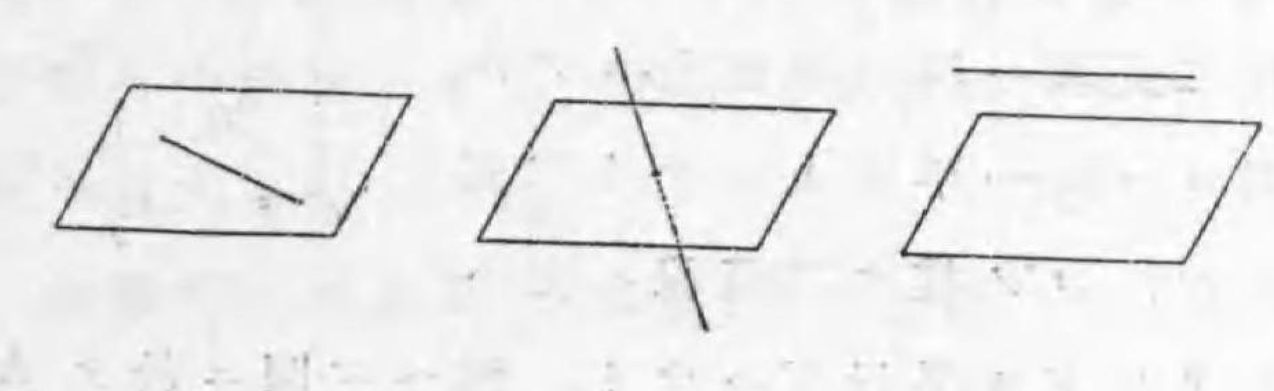
1. 平面ト直線

平面ノ意味ハ既ニ學ビマシタガ更メテ次ノ樣ニ定義スル。

定義　平面トハ其上ニアル任意ノ二點ヲ通ル無限直線ガ全ク其面ニ含マレル面ノコトデアル。

平面ハ無限直線ヲ含ムカラ無限ニ擴ガツテキルノデスガ其ノ一部分ヲモ平面トイヒマス。無限平面ハ限リアル紙面ニ圖示スルコトハ出來ナイカラ其面上ノ圖形ヲ畫イテ想像スルニ止メル。

平面ノ定義ニヨツテ平面ト其上ニナイ直線トハ唯一點ダケデ出會フカ又ハ全ク出會ハナイ。



平面ト直線トガ唯一點デ出會フトキニハ**交ハル**トイツテ,其出會フ點ヲ交點トイヒ,全ク出會ハナイトキニハ**平行スル**トイフ。

平面ニツイテ次ノ公理ガアル。

公理一.　一直線ト其上ニナイ一點トヲ含ム平面ハ唯一ツダケアル。

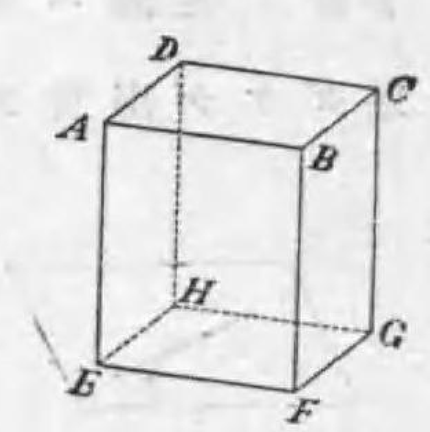
之ヲ略シテ「一直線ト其上ニナイ一點トハ一平面ヲ決定スル」トイフコトガアル。

系一.　同一直線上ニアラザル三點ハ一平面ヲ決定スル。

系二.　相交ハル二直線ハ一平面ヲ決定スル。

系三.　平行二直線ハ一平面ヲ決定スル。

〔**注意**〕 平行線ノ定義ニヨツテ平行二直線ハ同一平面上ニアルコトハ明カデアル。平行二直線ヲ含ム平面ハ唯一ツニ限ルトイフノガ系三ノ主張デアル。

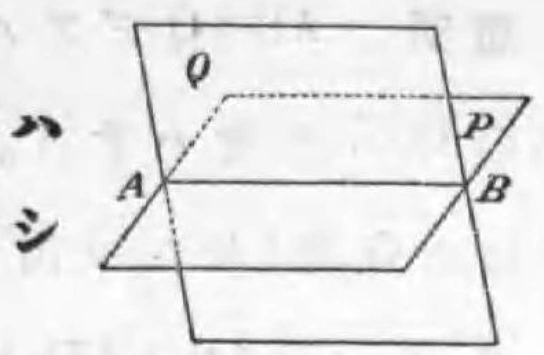


系二,系三ニヨツテ相交ハル二直線,平行二直線ハ同一平面上ニアルガ,空間ニハ同一平面上ニナイ二直線ガアル。コノ様ナ二直線ハ交ハラナイケレドモ平行デハナイ。例ヘバ圖ニ於テ AB

ト FG 又ハ GH ト BC ノ様ナ位置ニアル二直線ガソレデアル。

公理二.　二ツノ平面ガ出會フトキハ少クモ二點ヲ共有スル。

定理一.　二平面ガ出會フトキハ一直線ヲ共有シ其他ノ點ヲ共有シナイ。



證明　二平面 P,Q ガ出會ツテ共有スル二點ヲ A,B トスル。平面ノ定義ニヨツテ直線 AB ハ二平面 P,Q ノ兩方ノ上ニアル。即 P,Q ハ直線 AB ヲ共有スル。

ソウシテ P,Q ハ AB 外ニアル點ヲ共有シナイ。何トナレバモシ共有スルモノトスレバ公理一ニ反スルカラデアル。

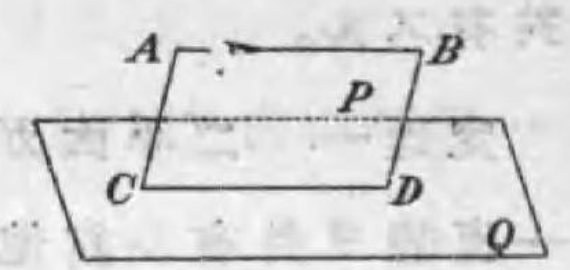
上ノ定理ニヨツテ二平面ハ唯一直線デ出會フカ又ハ全ク出會ハナイカデアル。唯一直線デ出會フトキハ**交ハル**トイツテ其出會フ直線ヲ**交ハリノ線**又ハ單ニ**交ハリ**トイヒ,出會ハナイトキハ**平行スル**トイフ。

直線ト平面又ハ平面ト平面トガ平行スルコトヲ次ノ様ニ書イテ表ハス。

直線AB ∥ 平面P,　　平面P ∥ 平面Q

2. 平行,垂直ニ關スル定理

定理二. **一直線(AB)ヲ含ム平面(P)ト,コノ直線ニ平行ナル平面(Q)トノ交線(CD)ハ初ノ直線ニ平行デアル。**

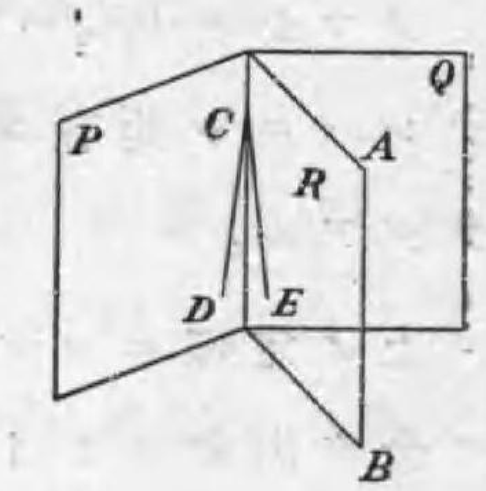


證明 AB∥QデアルカラABハ平面Qニ出會ハナイ。從テ平面Q上ノ直線CDニモ出會ハナイ。

サウシテABトCDトハ共ニP平面上ニアル。

∴ AB∥CD

定理三. **同一直線(AB)ニ平行ナル二平面(P,Q)ノ交ハリノ線ハ初ノ直線(AB)ニ平行デアル。**



證明 P,Qノ交線上ノ點CトABトヲ含ム平面ヲRトスル。PトRトノ交線ヲCDトスレバ前定理ニヨッテ AB∥CD

同様ニQトRトノ交線ヲCEトスレバ

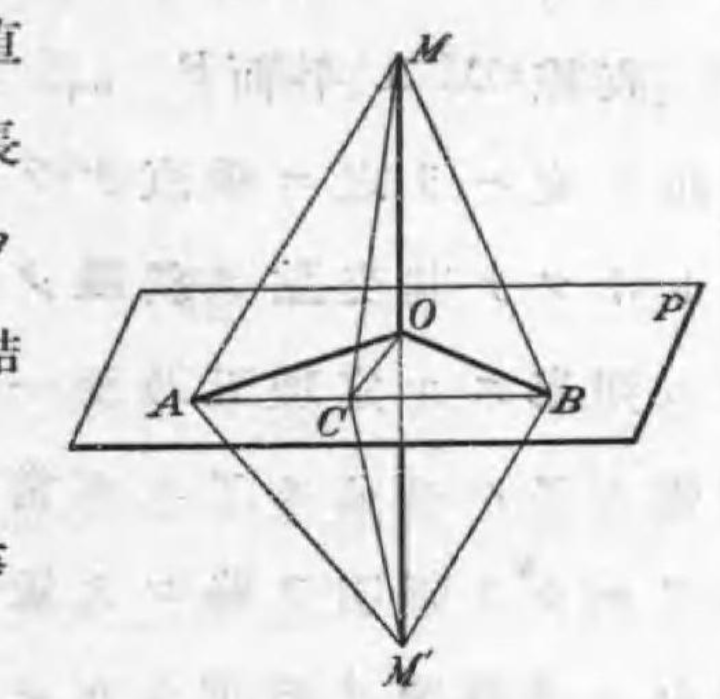
AB∥CE

CDトCEトハ同ジ點Cヲ通ッテ共ニABニ平行デアルカラ同一直線デアル。而シテコノ同一直線ハP,Q二平面ノ上ニアル。故ニコノ直線ハP,Qノ交線ニ外ナラヌ。

故ニP,Qノ交線ハABニ平行デアル。

定理四. **相交ハル二直線(OA, OB)ノ交點ヲ通リ,コノ二直線ノ各ニ垂直ナル直線(OM)ハ初メノ二直線ノ定メル平面(P)上ニ於テコノ二直線ノ交點(O)ヲ通ル總テノ直線ニ垂直デアル。**

證明 P平面上ニ於テOヲ通ル直線ヲOCトス。



OA, OC, OBニ交ハル直線ACBヲ引キ,MOノ延長上ニMOニ等シクOM'ヲ取リM, M'ヲA,B,Cニ結ブ。

OAハMM'ノ垂直二等分線デアルカラ

AM = AM' 同様ニ BM = BM'

故ニ△MABト△M'ABトハ三邊夫々等シイカラ合同デアル。

ヨリテ ∠MAC = ∠M'AC

故ニ△MACト△M'ACトハ二邊夾角夫々等シイカラ合同デアル。

從テ MC = M'C

故ニCハMM'ノ垂直二等分線上ニアル。

∴ $OM \perp OC$

定義 平面ニ交ハル直線ガ,コノ平面上ニ於テ其交點ヲ通ル總テノ直線ニ垂直デアルナラバ初ノ直線ヲコノ平面ノ**垂線**又ハ**垂直ナル直線**トイヒ,ソノ交點ヲ**垂線ノ足**トイフ。

OMガ平面Pノ垂線デアルコトヲ

直線$OM \perp$平面P デ表ハス。

平面ニ交ハリ之ニ垂直ナラザル直線ヲ,コノ平面ノ**斜線**トイツテ其交點ヲ**斜線ノ足**トイフ。

次ニ列擧スル定理五乃至一〇ノ中ニハ其證明ガ案外困難デアルモノモアルガ常識的ニ極メテ明瞭ナ事柄デアルカラ證明ヲ略シテ承認スルコトニスル(次ノ例題中ニ其證明ヲ要求セルモノモアル)。

定理五. 平行二平面ニ他ノ平面ガ交ハレバ其交ハリノ線ハ平行デアル。

定理六. 同一直線ニ平行ナル二直線ハ互ニ平行デアル。

定理七. 一ツノ角ノ二邊ガ他ノ角ノ二邊ニ夫々平行デアツテ且同方向デアルナラバコノ二角ハ等シイ。

定理八. 同一平面ノ垂線ハ平行デアル。

定理九. 平行二直線ノ一方ガ或平面ニ垂直ナラバ,

他モ亦コノ平面ニ垂直デアル。

定理一〇. 平行二平面ノ一方ニ垂直ナル直線ハ他ニモ垂直デアル。

定義 **一點ト一平面トノ距離**トハ,コノ點トコノ點ヨリコノ平面ニ下セル垂線ノ足トノ距離ノコトニシテ,**平行二平面ノ距離**トハ是等ノ平面ノ共通垂線ガ是等ノ平面ノ間ニ夾マレル部分ノ長サノコトデアル。

例題

1. 平行二平面ニ他ノ平面ガ交ハレバ其ノ交ハリノ線ハ平行ナルコトヲ證明セヨ(定理五ノ證明)。

2.° 同ジ直線ニ垂直ナル二平面ハ互ニ平行デアル。

手引 モシ交ハルモノトスレバ不合理ヲ生ズルコトヲ證明セヨ。

3. 平行線ノ一方ガ一平面ニ垂直ナラバ他モ亦コノ平面ニ垂直ナルコトヲ證明セヨ(定理九ノ證明)。

4. 平面P外ノ點Oカラコノ平面ニ垂線OHト多クノ斜線OA, OB, OC, …… ヲ引キ,其足ヲ夫々H, A, B, C, ……トスル。モシ$HA = HB$ナラバ$OA = OB$ニシテ,$HA < HC$ナラバ$OA < OC$ナルコトヲ證明セヨ。

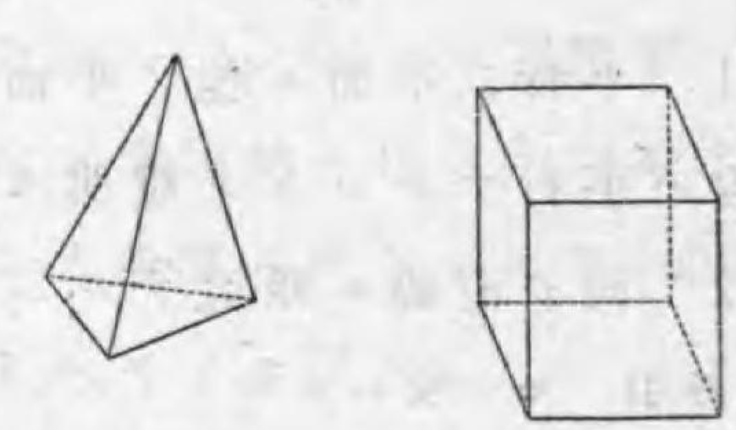
3. 角壔

定義　幾ツカノ平面デ圍マレテヰル立體ヲ**多面體**トイフ。

平面ト平面トノ交ハリハ直線デアルカラ多面體ノ境界ハ幾ツカノ直線デ圍マレテヰル平面形卽多角形デアル。コノ多角形ヲ多面體ノ**面**トイヒ,其邊ヲ多面體ノ**稜**,頂點ヲ多面體ノ頂點トイフ。

同一面上ニアラザル頂點ヲ結ブ線分ヲ多面體ノ**對角線**トイフ。

多面體ハ其面ノ數ニヨツテ**四面體**,**五面體**等ニ分ケル。



問1.　右圖ノ多面體ノ面,稜,頂點及對角線ノ數ハ各幾ツデスカ。

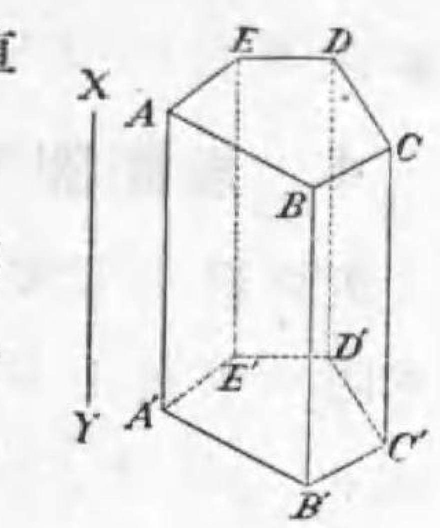
問2.　五面體ヲ圖示シナサイ。

定義　一直線ニ平行ナル三ツ以上ノ平面ト是等ニ交ハル二ツノ平行平面トデ圍マレル立體ヲ**角壔**トイフ。同一直線ニ平行ナル三ツ以上ノ平面ヲ**側面**,側面ト側面トノ交線ヲ**側稜**トイヒ,一組ノ平行平面ヲ**底面**,兩底面ノ距離ヲ**高**

サトイフ。

角壔ハ底面ノ多角形ニヨツテ**三角壔**,**四角壔**等ニ分ケル。

定理一一.　角壔ノ側面ハ平行四邊形ニシテ兩底面ハ合同ナル多角形デアル。



證明　ABCDE−A'B'C'D'E' ハ側面ガ直線XYニ平行ナル角壔トスル。

側面ハ皆XYニ平行ナルガ故ニ其交ハリノ線ナル側稜ハ皆XYニ平行デアル(定理三)。從テ互ニ平行デアル(定理六)。

又兩底面 ABCDE ト A'B'C'D'E' トハ平行デアルカラ

AB ∥ A'B'　BC ∥ B'C'..........(定理五)。

ヨツテ側面ハ平行四邊形デアル。

次ニ AB ト A'B'; BC ト B'C' 等ハ平行四邊形ノ對邊デアルカラ相等シク ∠A ト ∠A'; ∠B ト ∠B' 等ハ二邊夫々平行デアツテ且同方向デアルカラ等シイ(定理七)。

底面 ABCDE ト A'B'C'D'E' トハ各邊夫々相等シク其夾角夫々相等シイカラ

ABCDE ≡ A'B'C'D'E'

系　角壔ノ側稜ハ相等シク且平行デアル。

定義 側稜ガ底面ニ垂直デアル角壔ヲ**直角壔**トイフ。

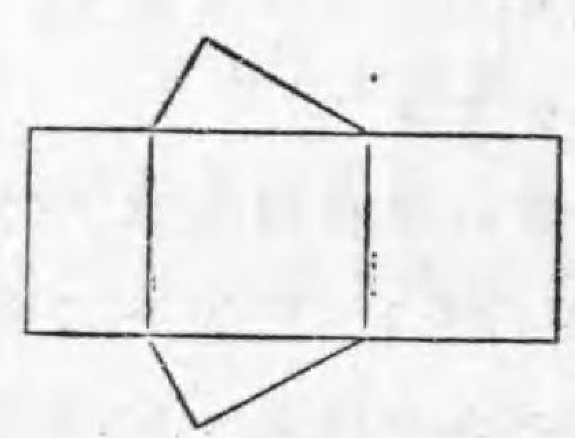
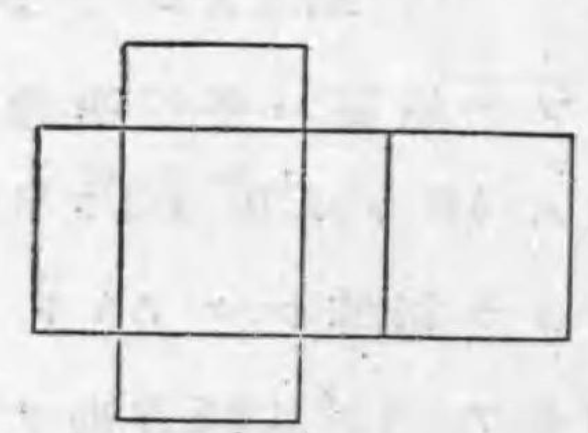
直方體ハ底面ガ矩形ナル直四角壔デアリ,**立方體**ハ總テノ面ガ正方形ナル直四角壔デアル。

問3. 直角壔ノ側面ハ矩形デアッテ,側稜ハ高サニ等シイ。

4. 展開圖ト模型

多面體ヲ其幾ツカノ稜ニ沿ヒテ切リ開キ總テノ面ヲ同一平面上ニ置イテ得ル圖形ヲ其多面體ノ**展開圖**トイフ。

展開圖ヲ厚紙ニ畫キ稜ニ沿ヒテ折リ曲ゲテ糊附ヲスルト元ノ多面體ノ模型ガ出來ル。

問1. 底面ガ平行四邊形デアル直四角壔ノ展開圖ヲ畫キナサイ。

問2. 任意ノ直三角壔ノ模型ヲ作リナサイ。

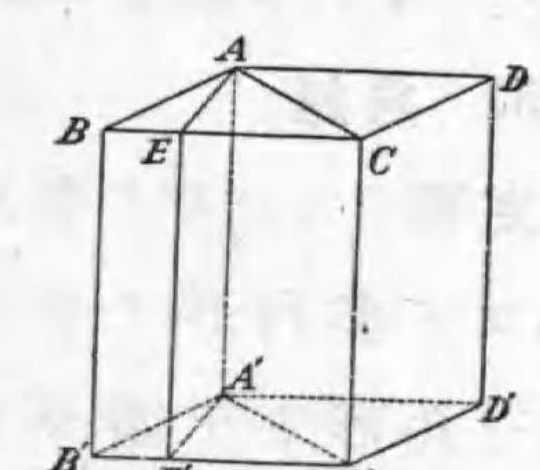
多面體ノ總テノ面ノ面積ノ和ヲコノ多面體ノ**表面**

積トイヒ,角壔ノ總テノ側面ノ面積ノ和ヲコノ角壔ノ**側面積**トイフ。多面體ノ展開圖ノ面積ハコノ多面體ノ表面積デアル。

問3. 底面ハ $3cm$, $4cm$ ヲ二邊トスル矩形デアリ,側稜ガ $5cm$ デアル直方體ノ側面積ヲ計算シナサイ。

直角壔ノ側面積ヲ表ハス數ハ底面ノ周圍ヲ表ハス數ト側稜ノ長サヲ表ハス數トノ積ニ等シイ。

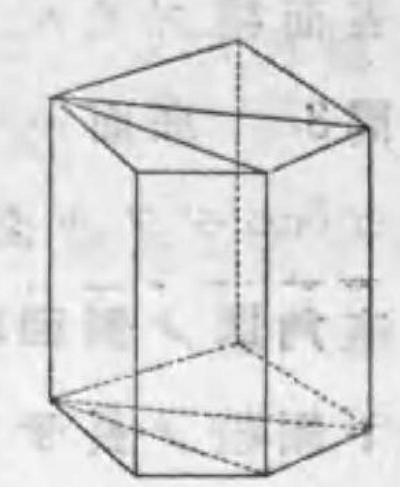
問4. 問2ニ於ケル三角壔ノ底面ニ合同デアル△ADCヲ畫キAD,DCヲ二邊トスル▱ABCDニ於テAカラBCニ下シタ垂線ノ足ヲEトスル。△ABE, △AECヲ底面トシ前ノ三角壔ト高サノ等シイ二ツノ直三角壔ノ模型ヲ作リ,是等ヲ組合ハシテ底面ガ▱ABCDデアル直角壔ノ體積ハAD, AEヲ二邊トスル矩形ヲ底面トスル直角壔ノ體積ニ等シイコト及△ADCヲ底面トスル直角壔ノ體積ノ二倍ニ等シイコトヲ驗シナサイ。



底面ガ矩形デアル直角壔卽直方體ノ體積ヲ表ハス數ハ底面積ヲ表ハス數ト高サヲ表ハス數トノ積ニ等シク問4ニヨッテ直三角壔ノ體積ハ底面積ガ二倍デ

高サガ等シイ直方體ノ體積ノ半分デアルカラ結局直三角壔ノ體積ヲ表ハス數ハ其底面積ヲ表ハス數ト高サヲ表ハス數トノ積ニ等シイ。

次ニ直角壔ハ幾ツカノ直三角壔ニ分ケラレルカラ一般ニ



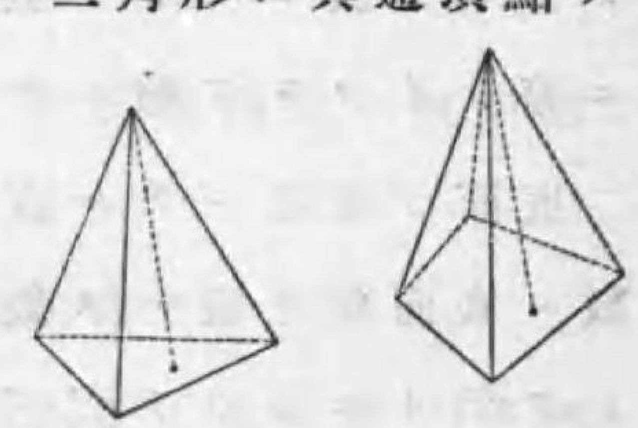
直角壔ノ體積ヲ表ハス數ハ其底面積ヲ表ハス數ト高サヲ表ハス數トノ積ニ等シイコトヲ知ルコトガ出來ル。

問 5. 水ヲ滿タシテアル容器ニ底面積ガ 0.75 平方糎ノ直六角壔ナル水晶ヲ沈メタトコロガ水 2cc 溢レ出シタ。コノ水晶柱ノ長サ何程デスカ。

5. 角錐

定義 一ツノ多角形ト,其各邊ヲ夫々底邊トシ,コノ多角形ノ平面外ノ一點ヲ共通頂點トスル三角形トデ圍マレル多面體ヲ**角錐**トイフ。

初メノ多角形ヲ**底面**其他ノ面ヲ**側面**,相隣レル側面ノ交ハリヲ**側稜**トイヒ,側面ナル三角形ノ共通頂點ヲ角錐ノ**頂點**,頂點ト底面トノ距離ヲ**高サ**トイフ。

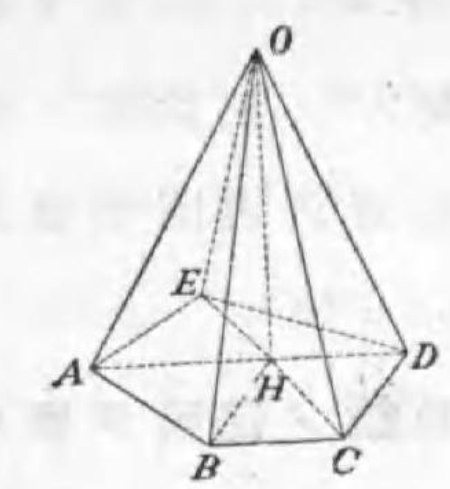


角錐ハ底面デアル多角形ノ邊數ニヨツテ**三角錐**,**四角**

錐等ニ分ケル。

定義 底面ガ正多角形デ其中心*ニ於ケル垂線上ニ頂點ノアル角錐ヲ**正角錐**トイヒマス。

定理一二 正角錐ノ側面ハ合同ナル二等邊三角形デアル。



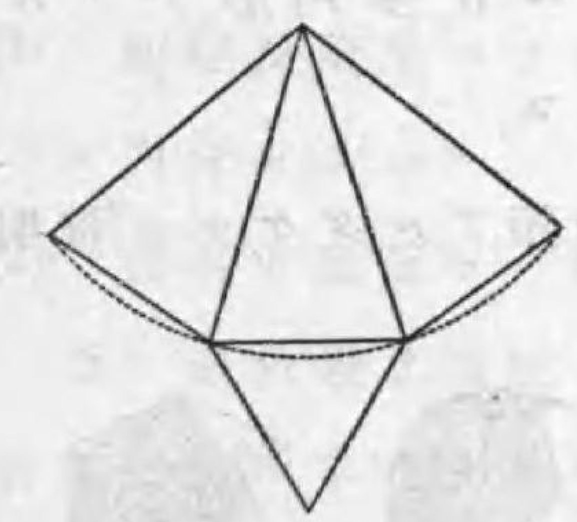
證明 O-ABCDE ヲ正角錐トシ,頂點 O カラ底面ニ下シタ垂線ノ足ヲ H トスレバ定義ニヨツテ H ハ ABCDE ノ中心デアル。

$\therefore\quad AH = BH = CH = DH = EH$

從テ $\triangle OAH \equiv \triangle OBH \equiv \triangle OCH \equiv \triangle ODH \equiv \triangle OEH$

$\therefore\quad OA = OB = OC = OD = OE$

ヨツテ側面デアル三角形ハ皆二等邊三角形デアツテ其三邊ハ夫々相等シイ。



故ニ側面ハ合同ナル二等邊三角形デアル。

正角錐ノ展開圖ハ底面デアル正多角形ト,其各邊ヲ底邊トスル幾ツカノ合同ナル二等邊三角形トデ出來テキル。

*正多角形ノ中心トハ其外接圓ノ中心ノコトデアル。

問1. 底面ハ對角線ガ6cmノ正方形デアッテ,側稜ガ5cmデアル正四角錐ノ展開圖ヲ作リ,次ニコノ四角錐ノ表面積ヲ計算シナサイ。

定義 正角錐ノ頂點カラ底面ノ一邊ニ下シタ垂線ノ長サヲ**側高**トイフ。

問2.® 正角錐ノ側面積(側面ノ面積ノ和)ヲ表ハス數ハ底面ノ周圍ヲ表ハス數ト側高ヲ表ハス數トノ積ノ半分ニ等シイ。

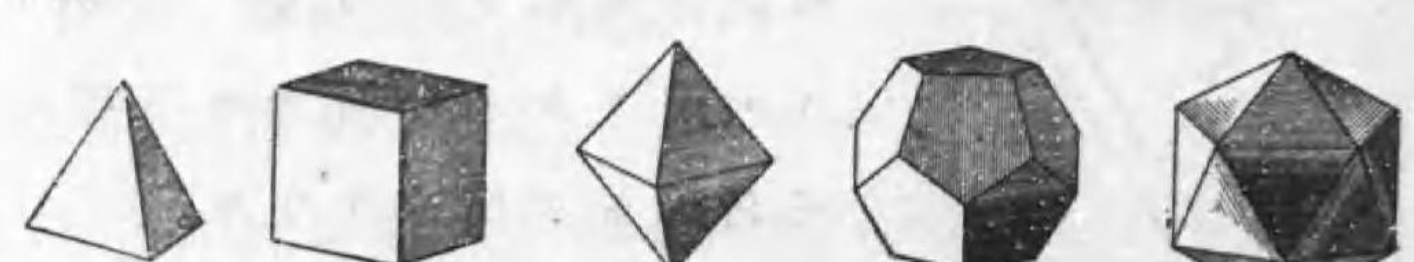
角錐ノ體積ヲ表ハス數ハ底面積ヲ表ハス數ト高サヲ表ハス數トノ積ノ$\frac{1}{3}$ニ等シイ(證明略)ノデアル。

問3. 上ノ問1ニ於ケル正四角錐ノ體積ヲ計算シナサイ。

6. 正多面體

定義 總テノ面ガ合同ナル正多角形デアル多面體ヲ**正多面體**トイヒマス。

正多面體ハ次ニ圖示スル五種類アルダケデス(證明略)。



問1. 稜ノ長サガ2cmデアル正四面體及正六面體ノ展開圖ヲ厚紙ニ畫キ折曲ゲテ糊附ヲナシ正四面體及正六面體ノ模型ヲ作リナサイ。

問2. 正四面體ノ一ツノ頂點カラ對面ニ下シタ垂線ノ足ハ對面デアル三角形ノ外心デアルコトヲ證明シナサイ。

問3 稜ノ長サガa糎デアル立方體ノ對角線ノ長サハ何程カ。

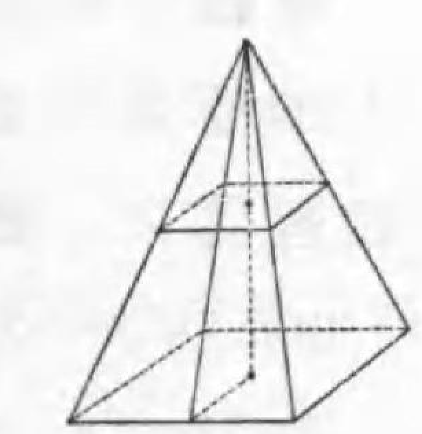
例題

1. 直方體ノ四ツノ對角線ハ皆等シク,且一點ニ出會フコトヲ證明セヨ。

2. 角錐ヲ頂點ト底面トノ間ニ於テ底面ニ平行ナル平面デ截レバ

(1) 側稜及頂點ヨリ底面ニ下セル垂線ハ相等シキ比ニ内分セラレル。

(2) 截面ト底面トハ相似形デアル。



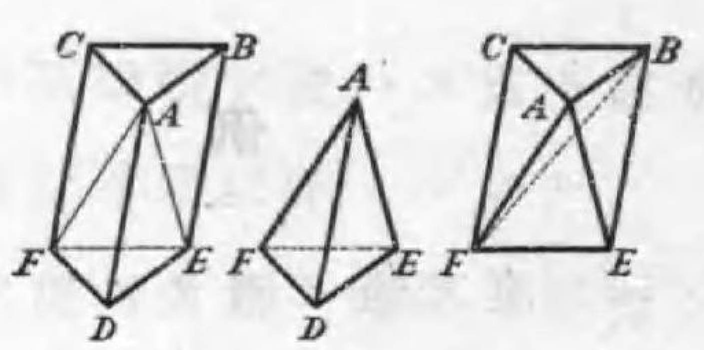
3. 正角錐ヲ頂點ト底面トノ間ニ於テ底面ニ平行ナル平面デ截ッタトキニ,截面ト底面トノ間ニアル部分ヲ**正角錐臺**トイヒマス。正四角錐臺ノ

展開圖ヲ畫キナサイ。

4. 稜ガ $2cm$ デアル正八面體ノ對角線ノ長サヲ計算セヨ。

5. 卷末ニ示セル正八面體,正十二面體,正二十面體ノ展開圖ヲ切拔キ折曲ゲテ糊附ヲナシ模型ヲ作リナサイ。

6. 三角壔ABC−DEF ヲ三點A, E, F ヲ通ル平面デ截ルト三角錐A−DEF ト四角錐 A−BCFE トニ分レル。更ニコノ四角錐ヲ三點 A, B, F ヲ通ル平面デ截ルト二ツノ三角錐 A−BCF ト A−BFE トニ分レル。卷末ニ示セル是等ノ三ツノ三角錐ノ展開圖ヲ切拔イテ模型ヲ作リ,是等ヲ組合セルト初ノ三角壔ニナルコトヲ驗シナサイ。

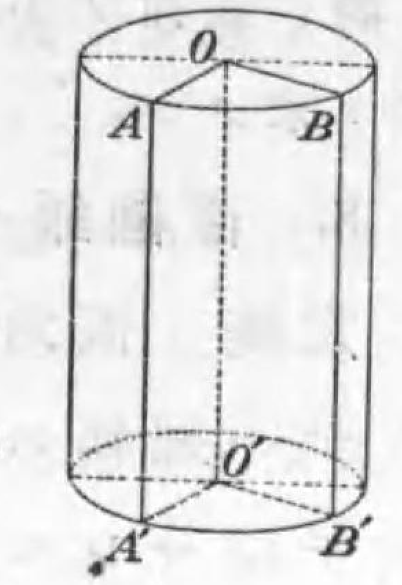


7. 直圓壔

定義 矩形ガ其一邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキ他ノ三邊デ出來ル面ニテ圍マレル立體ヲ**直圓壔**又ハ**圓壔**トイフ。

矩形OAA'O'ガOO'ヲ軸トシテ廻轉スルモノト考ヘルト邊OA, O'A'ノ畫ク面ハ相等シキ圓デアッテ之ヲ底

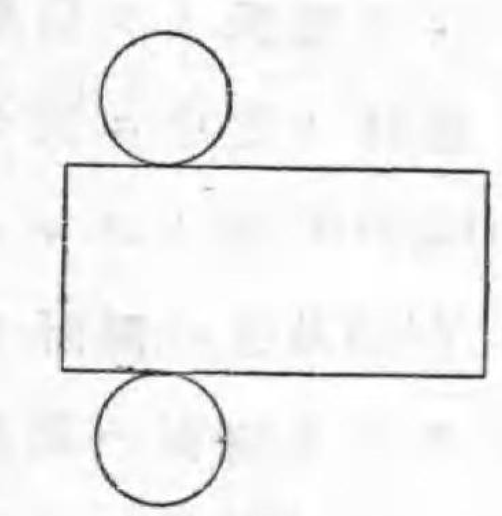
面,兩底面間ノ距離ヲ高サトイヒ,邊AA'ノ畫ク面ヲ側面トイフ。



廻轉ノ途中ニ於ケル矩形ノ位置ヲOAA'O', OBB'O' 等トスレバ OA, OB 等ハ一底面上ニ, O'A', O'B' 等ハ他ノ底面上ニアッテ AA', BB' 等ハ側面上ニアル。

故ニ軸ハ兩底面ニ垂直デアッテ,側面ハ軸ニ平行ナル無數ノ直線ヲ含ム。是等ノ直線ヲ**母線**トイフ。

立體ヲ其面上ニアル線デ切開キ總テノ面ヲ同一平面上ニ展ゲテ得ル圖形ヲ其**立體ノ展開圖**トイフ。



右圖ハ直圓壔ノ展開圖ノ一ツデアル。

直圓壔ノ側面ヲ一ツノ母線ニ沿ヒテ切開クト其展開圖ハ矩形デアッテ一邊ハ底ノ周圍ニ等シク他ノ一邊ハ初ノ直圓壔ノ高サニ等シイカラ。

直圓壔ノ側面積ヲ表ハス數ハ底面ノ周圍ヲ表ハス數ト高サヲ表ハス數トノ積ニ等シイ。

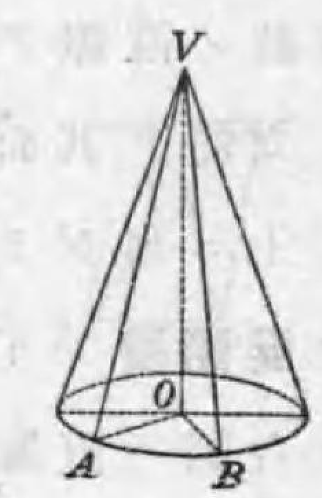
直圓壔ノ體積ヲ表ハス數ハ底面積ヲ表ハス數ト高サヲ表ハス數トノ積ニ等シイ(證明略)。

問　底面ノ半徑r糎,高サh糎ノ直圓壔ノ表面積及體積ヲ求メヨ。

8. 直圓錐

定義　直角三角形ガ直角ヲ夾ム一邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキ他ノ二邊ニヨリテ生ズル面デ圍マレル立體ヲ**直圓錐**又ハ**圓錐**トイフ。

直角三角形VOA($\angle O=\angle R$)ガ邊VOヲ軸トシテ廻轉スルモノト考ヘルト邊OAノ畫ク面ハ圓デアッテ之ヲ**底面**トイヒ,斜邊VAノ畫ク面ヲ**側面**,Vヲ頂點トイフ。



廻轉ノ途中ニ於ケル三角形ノ位置ヲVOA, VOB等トスレバOA, OB等ハ底面上ニ,VA, VB等ハ側面上ニアル。故ニ軸VOハ底面ニ垂直デアッテ側面ハ頂點ヲ通ル無數ノ直線ヲ含ム。是等ノ直線ヲ**母線**トイフ。

軸ノ長サ卽頂點カラ底面ニ下シタ垂線ノ長サヲ**高サ**トイヒ,母線ノ長サヲ**側高**トイフ。

直圓錐ノ母線ハ皆等シイカラ側面ヲ一ツノ母線ニ沿フテ切開キ展開スルト扇形ガ出來ル。コノ扇形ノ弧ノ長サハ底面ノ周圍ニ等シク,半徑ハ側高ニ等シイ。

160頁例題9ニヨリ**直圓錐ノ側面積ヲ表ハス數ハ底面ノ周圍ヲ表ハス數ト側高ヲ表ハス數トノ積ノ半分ニ等シイ。**

又直圓錐ノ體積ヲ表ハス數ハ底面積ヲ表ハス數ト高サヲ表ハス數トノ積ノ$\frac{1}{3}$ニ等シイ(證明略)。

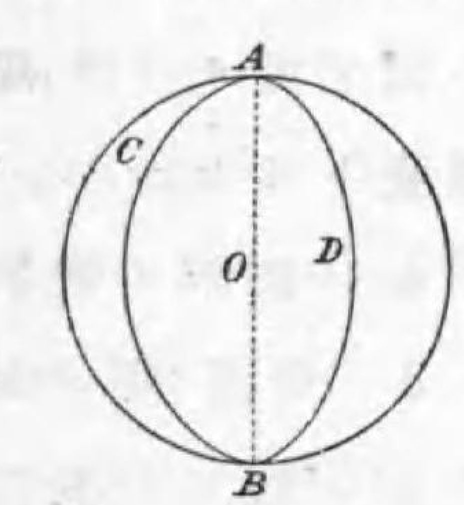
問1.　底面ノ直徑10cm,高サ12cmノ直圓錐ノ側高ハ幾cmデスカ。

問2.　前問ノ直圓錐ノ表面積及體積ヲ計算セヨ。

9. 球

定義　半圓ガ其直徑ヲ軸トシテ一廻轉スルトキ生ズル面ヲ**球面**トイヒ,球面デ圍マレル立體ヲ**球**トイフ。

元ノ半圓ノ中心ヲ**球ノ中心**トイヒ,中心ト球面上ノ一點トヲ結ビ付ケル線分ヲ**半徑**,中心ヲ通リ兩端ガ球面上ニアル線分ヲ**直徑**トイフ。



球ノ半徑ハ皆相等シク,直徑モ亦皆相等シイ。

球面ヲ如何ニ切開イテモ全表面ヲ同一平面上ニ展ゲルコトガ出來ナイ。卽球面ノ展開圖ヲ作ルコトガ出來ナイ。

球ノ直徑ヲd糎,半徑ヲr糎,表面積ヲS平方糎,體積ヲV立方糎トスレバ

$$S=\pi d^2=4\pi r^2 \qquad V=\frac{1}{6}\pi d^3=\frac{4}{3}\pi r^3$$

デアル(證明略)。

問 直徑d糎ノ球ト直徑,高サ各d糎ノ直圓壔トガアル。球ノ表面積ト圓壔ノ側面積トノ差及球ノ體積ト圓壔ノ體積トノ比ヲ求メヨ。

例　題

1. 底面ノ半徑r糎デアル直圓錐ノ頂點ヲOトスル。底面ノ周上ノ點Aヲ通ル母線OAヲ$m:n$ニ內分スル點ヲ通リ底面ニ平行ナル平面デ截レバ截面ハ半徑$\frac{mr}{m+n}$糎ノ圓デアルコトヲ證明シナサイ。

2. 直圓錐ヲ頂點ト底面トノ間デ底面ニ平行ナル平面デ截ルトキ,截面ト底面トノ間ニアル部分ヲ**直圓錐臺**トイヒマス。前問ニ於テ出來ル直圓錐臺ノ體積ト初ノ圓錐ノ體積トノ比ヲ求メナサイ。

3. 半徑r糎ノ球ヲ其ノ中心カラh糎ノ距離ニアル平面デ截レバ,其截面ハ半徑 $\sqrt{r^2-h^2}$ 糎ノ圓デアル。

4. 球面上ノ點ヲ通リコノ點ヲ通ル半徑ニ垂直ナル平面ハ再ビ球面ト出會ハナイコトヲ證明シナサイ。

〔注意〕コノ様ナ平面ヲコノ球ノ**切平面**トイフ。

附錄第三

補充問題

第二編マデノ雜題

1, 多角形ノ內角ノ和ハ2∠Rノ邊數倍ヨリ4∠R小デ,各頂點ニ於ケル外角一ツヅツノ和ハ4∠Rデアル。

2. 邊數ガnナル正多角形ノ一ツノ內角ハ$\left(2-\frac{4}{n}\right)\angle R$デ,一外角ハ$\frac{4}{n}\angle R$デアル。

3. 內角ノ和ガ16∠Rデアル多角形ハ幾角形デスカ。

4. 一角ノ二邊ガ他ノ角ノ二邊ニ夫々垂直ナルトキハコノ二角ハ相等シイカ或ハ互ニ補角ヲナス。

5. △ABCニ於テ∠Aノ二等分線ニ垂直ナル直線ガABトナス角ノ一ツハ∠B,∠Cノ和ノ半分ニ等シク,BCトナス角ノ一ツハ∠B,∠Cノ差ノ半分ニ等シイ。

6. 四邊形ABCDノ各角ノ二等分線ニテ生ズル四邊形ヲEFGHトスル。

(1) EFGHノ相對スル角ハ補角ヲナス。

(2) ABCDガ平行四邊形ナラバEFGHハ矩形デアル。

(3) ABCDガ矩形ナラバEFGHハ正方形デアル。

7. 三ツノ角ガ夫々等シイ二ツノ三角形ハ合同デスカ。モシ合同デナイコトガアルナラバ其例ヲ示シナサイ。

8. 一ツノ三角形ノ一邊ト二角トガ他ノ三角形ノ一邊ト二角トニ夫々等シイナラバ,コノ二ツノ三角形ハ合同デスカ。種々ノ場合ヲ考ヘナサイ。

9. △ABCニ於テBCノ中點Mカラ他ノ二邊ニ至ル距離ガ等シケレバコノ三角形ハ二等邊デアル。

10. △ABCノ外側ニ各邊ヲ一邊トスル正方形ABDE, BCFG及ACHKヲ畫ク。

(1) △DBC≡△ABG, △CBH≡△ACF

(2) A, D, HカラBCニ下シタ垂線ノ足ヲ夫々A', D', H'トスレバ D'B = AA' = CH'

11. 梯形ノ底邊ノ兩端ノ角ガ相等シイトキ之ヲ**等脚梯形**トイフ。等脚梯形ニ於テハ

(1) 底邊デナイ二邊ハ相等シイ。

(2) 相對スル角ハ補角ヲナス。

(3) 對角線ハ相等シイ。

12. 對角線ノ相等シイ梯形ハ等脚梯形デアル。

13. 四邊形ABCDノ邊ADノ中點ヲMトスル。AB, AMヲ二邊トスル平行四邊形ノ第四ノ頂點ヲPトシ、DC, DMヲ二邊トスル平行四邊形ノ第四ノ頂點ヲQトスレバ,PQハBCノ中點Nヲ通ル。

14. 二等邊三角形ABCノ底邊BC上ノ任意ノ點Dヲ通リBCニ垂直ナル直線トAB, AC又ハ其延長トノ交點ヲ夫々E, FトスレバDE+DFハ一定ナリ。

15. 線分AB上ノ一點ヲCトシ且$AC=\frac{1}{3}AB$ナリトスA, C, Bヲ通ル三ツノ平行線ガ線分ABニ出會ハザル直線XYニ交ハル點ヲ夫々A', C', B'トス。$AA'=a$, $BB'=b$ナラバCC'ハ何程ナルカ。

16. 三角形ノ三ツノ頂點カラコノ三角形ニ出會ハナイ直線ニ下シタ三ツノ垂線ノ和ハ重心カラ同ジ直線ニ下シタ垂線ノ3倍ニ等シイ。

17. △ABCニ於テ∠B＝2∠Cナルトキ,AヨリBCニ下シタ垂線ノ足ヲDトシ,BCノ中點ヲE,ABノ中點ヲFトスレバ DE＝DF

18. 四邊形ノ對邊ノ中點ヲ結ブ線分ト對角線ノ中點ヲ結ブ線分トハ一點ニ會ス。

19. △ABC內ノ點ヲOトス。OB+OC＜AB+AC, ∠BOC＞∠BACヲ證セヨ。

20. △ABC內ノ點ヲOトセバOA+OB+OCハコノ三

角形ノ周圍ヨリ小デアル。

21. 直線XYノ同ジ側ニ二點A,Bガアル。XYニツイテノBノ對稱點ヲB′トシAB′トXYトノ交點ヲPトスル。XY上ニテPト異ナル點ヲQトスレバ

$$AP+BP<AQ+BQ$$

22. △ABCノAニ於ケル外角ノ二等分線ニCカラ下シタ垂線ノ足ヲDトスレバ

$$AB+AC<DB+DC$$

23. △ABCニ於テAヨリBCヘノ垂線ノ足ヲHトスル。$\overline{AB}^2\sim\overline{AC}^2=\overline{BH}^2\sim\overline{CH}^2$ヲ證明セヨ。

24. 二等邊三角形ABCノ底邊BC上ノ一點ヲDトスレバ, $\overline{AB}^2\sim\overline{AD}^2=BD.CD$

25. Oハ平行四邊形ABCDノ對角線ノ交點デPハ任意ノ點デアル。ソウスルト

$$2(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2)=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+8\overline{PO}^2$$

26. 三角形ノ三中線ノ上ノ正方形ノ和ノ四倍ハ三邊ノ上ノ正方形ノ和ノ三倍ニ等シイ。

27. 三邊ノ長サガ夫々 m^2+n^2, m^2-n^2, $2mn$ デ表ハサレル三角形ハ直角三角形デアル。

---

* AカラXYニ下シタ垂線ノ足ヲHトシ, AHノ延長上ニAHニ等シクHB′ヲトレバB′ヲXYニツイテノAノ對稱點トイフ。

28. 次ノモノヲ知リテ三角形ヲ作レ。

(1) 一角,其二等分線,コノ角ノ頂點ヨリノ高サ。

(2) 二ツノ角及ビ周圍。

(3) 三ツノ中線

29. 一邊ト高サトノ和ヲ知ツテ正三角形ヲ畫ケ。

30. △ABCノ邊BC上ニ於テ他ノ二邊ニ至ル距離ノ和ガ定線分lニ等シイ點ヲ求メヨ。

手引 56頁例題6參照

31. 與ヘラレタル四邊形ノ一頂點ヲ通ル直線ニテ原形ヲ二等分セヨ。

第三編マデノ雜題

1. 一ツノ圓ノ二ツノ等弦又ハ其延長ノ交點カラ兩端ニ至ル距離ハ夫々等シイ。

2. $\widehat{AB}$ト$\widehat{CD}$トハ同ジ圓ノ弧デアツテ且相等シイナラバAC, BDハ相等シイカ又ハ平行デアル。

3. 圓Oノ弦ABノ三等分點ヲC, Dトスル。∠CODハ∠AOCヨリ大ナルコトヲ證明セヨ。

4. 圓Oノ弦ABノ延長上ニ半徑ニ等シクBCヲ取リCOノ延長ガ圓周ト交ル點ヲDトスル。∠BCOハ∠AODノ$\frac{1}{3}$ナルコトヲ證明セヨ。

5. 圓ニ內接スル四邊形ABCDニ於テAB, DCノ延長

ノ交點ヲPトシ,AD,BCノ延長ノ交點ヲQトスル。$\angle APD = 30^\circ$, $\angle CQD = 40^\circ$ ナラバ,コノ四邊形ノ四ツノ角ハ各何程カ。但BハAトPトノ間ニ,DハAトQトノ間ニアルモノトスル。

6. 四邊形ABCDニ於テ對邊AB,DCノ延長ノ交點ヲP,對邊AD,BCノ延長ノ交點ヲQトスル。四ツノ三角形BCP,DCQ,APD,ABQノ外接圓周ハ一點ニ會ス。

7. △ABCノ邊BC,CA,ABヲ一邊トスル正三角形DBC,ECA,FABヲ△ABCノ外方ニ畫ケバ

(1) $AD = BE = CF$

(2) 三ツノ正三角形ノ外接圓周ハ一點ニ會ス。

(3) AD,BE,CFハ一點ニ會ス。

8. 相交ハル二圓ノ交點ノ一ツヲ通ル直線ガ二圓周ト再ビ交ハル點ヲ夫々B,Cトスル。BCハ二圓ノ中心線ニ平行ナルトキ最大ナルコトヲ證明セヨ。

9. 直角三角形ノ直角ノ一邊ヲ直徑トスル圓ト斜邊トノ交點ニ於ケル切線ハ第三邊ノ中點ヲ通ル。

10. 圓周上ノ點Aヲ通ル二ツノ弦ヲAB,ACトシ,Aニ於ケル切線ニ平行ナル割線ガAB,ACト交ハル點ヲD,Eトスレバ四點D,B,C,Eハ同一圓周上ニアリ。

11. △ABCノ外接圓ノAニ於ケル切線トBCノ延長

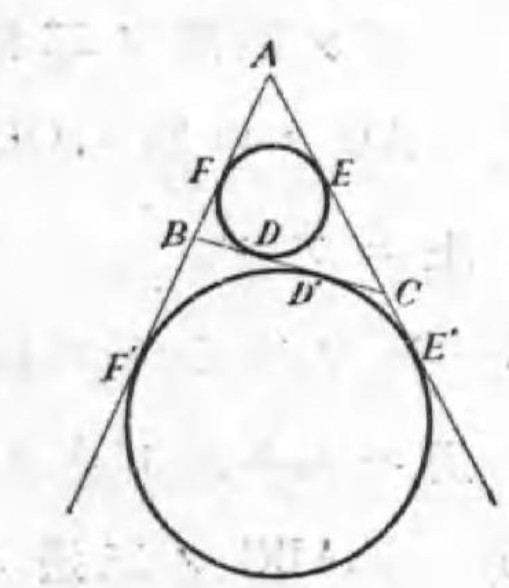
トノ交點ヲDトシ,射線DB上ニDEヲDAニ等シクトル。AEハ∠Aヲ二等分スルコトヲ證明セヨ。

12. 一圓周上ニ三點A,B,Cガアル。B,Cニ於ケル切線ノ交點PヨリABニ平行ニ引ケル直線PQR(Q,Rハ圓周トノ交點)ガ弦ACトMニ於テ交ハルトキMハQRノ中點デアル。

13. △ABCノ内心ヲO,外接圓ノ弧BC(Aヲ含マナイ)ノ中點ヲMトスレバ, $MB = MO = MC$

14. ▱ABCDニ於テBヲ中心,BCヲ半徑トスル圓周ガDC又ハ其延長ト再ビ交ハル點ヲEトスル。∠EACハ∠ABDト∠ACDトノ差ニ等シイコトヲ證明セヨ。

15. △ABCノ内切圓及ビ∠Aノ中ニアル傍切圓ト三邊トノ切點ヲ夫々D,D';E,E';F,F'トスル。今 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $a+b+c=2s$ トスレバ



(1) $AE'=AF'=s$

(2) $AE=AF=s-a$

(3) $DD'=b\sim c$

16. 直角三角形ノ内切圓ノ半徑ハ周圍ノ半分ト斜邊トノ差ニ等シ。

17. 四邊形ノ一組ノ對邊ノ和ガ他ノ一組ノ對邊ノ