現代初中教科書

幾何

上冊

編輯者 周宣德

校訂者 段育華

商務印書館出版

思笑渦先生 惠贈

上 册 目 錄

現代初中教科書

幾何

上冊

編輯者 周宣德

校訂者 段育華

商務印書館發行

編輯大意

(1) 本書照新學制課程編纂,祗講平面幾何,供初級中學教科之用.

(2) 從前的幾何教本,都是理論很詳,實用很少,學生學了幾個定理外,簡直不知道幾何有什麼用處,自然沒有興趣. 本書就在這種地方注意改良,隨時把定理作法等引到實用方面去.

(3) 初學幾何,最要緊的是開首有合宜的引導. 本書第一篇裏用直接量法同間接量法,漸漸引到幾何的理論方面,不但能使學生知道這種學問的必要,並可使他們認清研究的目的.

(4) 證明題目,構造圖形,該用什麼方法,照什麼次序,初學的人很難領悟. 本書對於這兩層時時參加討論,誘導學生遇到題目有自己解決的能力.

(5) 本書習題很多,都是淺而有趣的;使學生容易發生研究的興味,不知不覺的便把幾何觀念深印腦中.

(6) 本書爲了兼顧理論同應用,又要有條不紊,因此特創一例,把習題分爲三種: (1) 目解題——眼前的事理,一看便能回答的; (2) 理解題——應用定理可以正式證明的; (3) 實驗題——用量法研究圖形,可同幾何定理互相發明的.

Euclid

歐几里得肖像

歐几里得是世界上最有名的幾何學的始祖，這是誰也承認的．當他擔任亞歷山大算學校長的時候，就集從來希臘算學的大成，並且獨創新見，著成一部最有名的著作，叫做『幾何原本』(Elements of Geometry)．

這部書裏面的定理和證法等，都是發前人所未發，做得非常有系統，有組織，又非常嚴密，幾何學得成爲科學，實在完全要歸功於歐氏．後世幾何學的教本，大概都以這部書做根據，所以歐氏的名望，到後來愈加大了，甚至以歐几里得同幾何學混稱——現在英美的學生，聽到歐几里得這名字，簡直就當做幾何學的意義來講．

現代初中教科書

幾何上冊

第一編　緒論

§1. **幾何學**(Geometry). 幾何學是研究空間一切形狀的科學. 田畝成方, 長河成帶, 星辰是點, 日月是圓, 都是幾何圖形. 又如一塊方磚, 不管他的實質是什麼, 但論他的形狀, 大小和位置, 就叫做**立體**(Solid). 研究這立體的科學叫**立體幾何學** (Solid Geometry). 立體圖形的界限叫**面** (Surface). 面上平坦, 無凸無凹, 叫**平面** (Plane). 研究平面圖形各部的關係叫**平面幾何學** (Plane Geometry), 這就是本書所要講的.

§2. **定義** (Definition). 幾何學上的名詞, 要用一句或幾句話去解釋, 並限制他意義的範圍, 叫做定義

譬如§1所說"幾何學是研究空間一切形狀的科學"這句話就是"幾何學"的定義.

§3. 幾何圖形 (Geometry Figures). 空間的形狀種種不一;分析起來,都是幾種原素結合而成的. 前面所說,立體的界限是面,可見立體是面同面的結合. 面的界限叫線,線的界限叫點. 譬如方磚的邊就是線,兩邊相遇的角就是點. 所以無論什麼幾何的圖形都是點,線,面,體的一種組織.

§4. 面,平面. 計算立體的大小,有三種要素,就是長短,闊狹同厚薄. 面或平面既是從立體抽象得來,當然沒有厚薄,所以面或平面祇有長短同闊狹.

譬如一張薄紙,或金葉,厚度很小,無庸計較,就可以代表一個幾何的平面.

§5. 線,直線. 面的邊界叫**線** (Line). 線的方向處處一樣的叫**直線** (Straight Line). 不然就叫**曲線** (Curved Line). **直線有時也單叫**

線. 線既是從面的邊界抽象得來,那麼闊狹又可以不必計較了,所以線只有長短可談.

用鉛筆在紙上沿着直尺一畫,那紙上留下的痕跡,我們平常都叫他做直線. 雖然他多少有點兒闊狹,但是比較的很小,可以無庸計較,所以就可以代表幾何的直線.

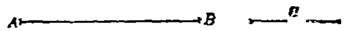
§6. **點.** 線的界限是點 (Point). 所以點衹有位置,沒有長短,闊狹和厚薄. 兩條線相交,那重疊的地方叫**交點**.

平常所說的雨點塵點,以及紙上所畫的墨點,當我們只管他的位置,不管他的大小的時候,就可以把他來代表幾何的點.

§7. **線段** (Line-segment). 一條直線是自然可以伸張到無限遠的. 在這條無限長的線上取出兩點,那麼這兩點中間的線就叫做線段.

線段通常用表示端點的兩個英文字母去稱呼他,如 AB 線段. 有時用一個小字母寫在

當中,稱做 a 線段也可以.



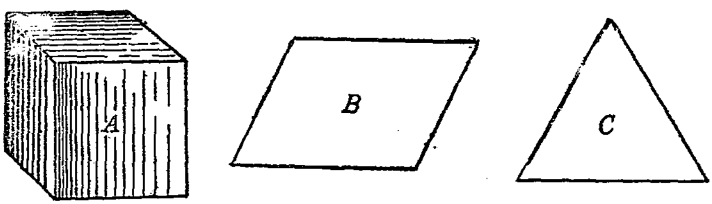
目解題

1. 一枝沒有削過的圓鉛筆有幾個平面? 幾條線? 是直線麼?

2. 課堂內的講桌有幾個面? 幾條線? 幾個交點?

3. 講桌的面都是平面麼? 線都是直線麼?

4. 下面幾個圖形,那個表示立體? 那個表示平面?



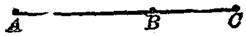
5. 一條絲線,一根頭髮,綳直了好算線段麼?

6. 拿鉛筆沿直尺畫一條線段. 這線段同幾何上理想的線段有什麼分別?

7. 你要試驗桌子的面是不是平面,用什麼法子?

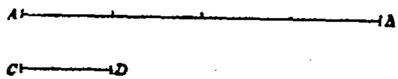
§8. 線段的加減(Addition and Subtraction of Line-segments). 把兩線段連接,畫做一條線

段,便得這兩線段相加的和. 如圖.$AC=AB+BC$.



反轉來把兩線段一端比齊,那參差不齊的部分,就是兩線段的差. 如圖,$AB=AC-BC$

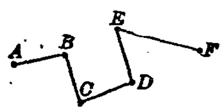
§9. **線段的倍與分** (Multiple and Part of a Line-segment). 如圖 AB 線段是 CD 線段的 4 倍,CD 就是 AB 的 $\frac{1}{4}$ 了. $AB=4CD$, $CD=\frac{1}{4}AB$.



§10. **曲線和折線.** 一條線完全沒有一些兒直的部分,叫曲線. 許多不同方向的線段連接起來的線,叫**折線** (Broken Line),如圖.

曲線

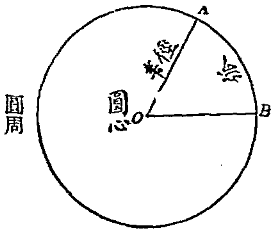
折線



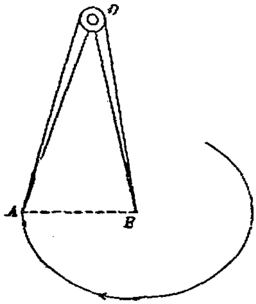
§11. **平面形** (Plane Figures). 在平面上有界的形叫平面形.

§12. **圓.圓心.圓周.** 一條曲線包成的平面形,倘若中間一點到曲線上任意點的距離

都相等,就叫**圓**(Circle). 那中點叫**圓心**(Center). 那條曲線叫**圓周**(Circumference).



§13. 半徑,弧. 從圓心到圓周上的線段叫做**半徑**(Radius),如 OA, OB. 圓周的一段叫**弧**(Arc),如 AB.



§14. 圓的畫法. 畫圓用圓規. 如圖 OA, OB 是圓規的兩脚,能自由開合. 畫圖時把兩脚放開,使脚尖的距離等於半徑,把一尖放在圓心,旋轉別一尖,便成圓如圖. 轉的時候,脚尖的距離不能變動.

目解題

1. 畫一條長9寸又一條長7寸的線段,求他們的和同差.

2. 無限直線有沒有端點? 線段有幾個端點? 圓有麼?

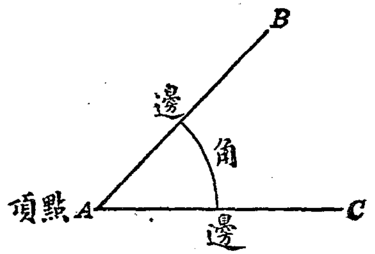
3. 用圓規畫一個半徑五寸的圓.

4. 在地圖上離開某處一里路的地方,你用什麼法子去標他出來?

5. 解釋"地震波及到一百里外"這句話在幾何學上的意義.

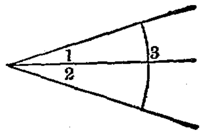
6. 給你一隻釘,一條繩,一塊石灰,你能在地上畫個圓麼? 用什麼法子?

§15. 角,同他的記法. 兩線段公共一端點,這圖形叫**角**(Angles). 那端點叫做**頂點**(Vertex). 那兩線段叫做**邊**(Sides).



如圖 AB,AC 兩線段造成一隻角叫做 $\angle BAC$; AB,AC 是他的兩邊,A 是頂點.

要簡單時 $\angle BAC$ 也可以叫他做 $\angle A$.



還有一個法子,就是隨便畫一個記號,或是寫一個數字在角裏面去稱呼他. 譬如右圖叫 $\angle 3$, 用附近的弧

去做標識，免得和別的相混. 兩隻分開的角就叫他們做 $\angle 1, \angle 2$.

角的大小，是看兩條邊張開的分量去測定的，同邊的長短沒有關係.

§16. **鄰角** (Adjacent Angles). 兩角有公共的頂點，又有站在兩角中間公共的一邊，叫鄰角. 上圖 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 便是鄰角. 不公共的兩邊叫**外邊**(Exterior Sides).

§17. **角的加減.** 兩鄰角的外邊所夾的角，就是這兩角的和.

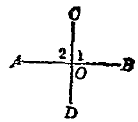
譬如在§15的圖裏 $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$

反過來兩角也可以相減，如在§15的圖裏，$\angle 1 = \angle 3 - \angle 2$, $\angle 2 = \angle 3 - \angle 1$.

§18. **直角同垂線.** 兩線相交所造成的兩鄰角相等，這兩角叫做**直角**(Right Angles). 這兩線就互相叫做**垂線** (Perpendicular Lines), 或說兩線正交.

如圖 $\angle 1 = \angle 2$. 兩角都是直角. AB, CD

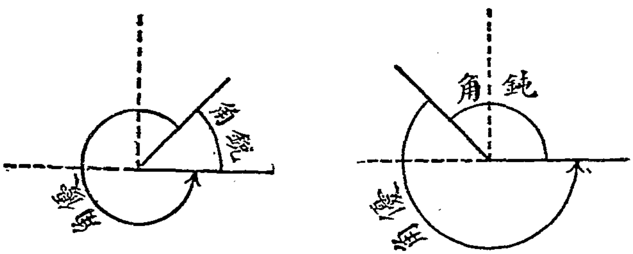
就互做垂線,或說 AB, CD 正交於 O.



分開來說 AB 是 CD 的垂線; CD 也是 AB 的垂線.

§19. **銳角鈍角同優角.** 比直角小的角叫**銳角** (Acute Angle). 比一直角大比兩直角小的角叫**鈍角** (Obtuse Angle). 在銳角或鈍角兩邊相反一側的那部分,叫做**優角**(Reflex Angle).

對優角說,銳角和鈍角都叫劣角. 平常講兩邊所夾的角,都指劣角說.



§20. **平角與週角.** 假使角的兩邊成了一直線,那麼為推廣起見,也算他是角,叫**平角** (Straight Angle). §18 圖裏的 $\angle AOB$ 就是. 再推廣下去,先看角的另一定義. 如圖 1, OA 線

繞 O 點旋轉到 OB 的位置，就成了銳角 $\angle AOB$，再轉下去到 OC 的位置，在 OA 反側，恰成一直線，就轉過了 $\angle AOC$ 平角． 假使再轉下去，就發生了優角 如圖 2，轉到原來地位，與 OA 相合，恰恰一週，這時就說 OA 線轉過了一個**週角**(Perigon).

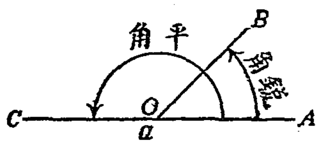


圖 1

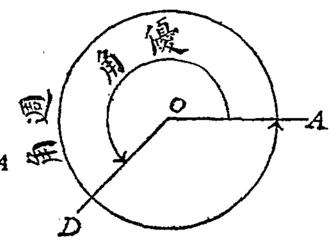


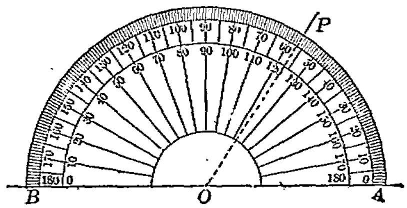
圖 2

平常幾何學上，大於平角的角，往往不大研究．

§21. 角的單位,量角器. 一週角的360分之一叫一**度**(Degree)，是角的單位． 一度分作60**分**(Minute)，一分又分作60**秒**.(Second). 他們的記號是〔 ° 〕,〔 ′ 〕,〔 ″ 〕，寫在數字的右上角，譬如 $2^\circ 3' 5''$ 就是二度三分五秒．

週角等於360°,平角等於180°

一角的度數,可以用一種量角器去量他.如圖,半圓形的週上刻了從0°到180°的數目.把圓心合在角頂,0°度線合在一邊,就可從他邊讀出角度.圖中$\angle AOP$讀得57°.



量角器其他用處,在§35內講.

§22. **對頂角,餘角同補角.** 兩直線相交所成的四隻角,那不相鄰的二角,就叫做**對頂角** (Vertical Angles). 兩角的和是一直角,就互相叫做**餘角** (Complementary Angles). 兩角的和恰是二直角,便互相叫做**補角** (Supplementary Angles).

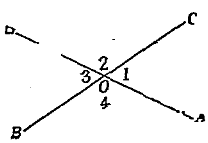


圖 1

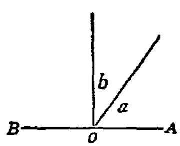


圖 2

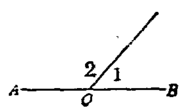


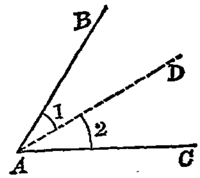
圖 3

圖1裏面$\angle 1$同$\angle 3$是對頂角; $\angle 2$同$\angle 4$

也是對頂角. 圖2裏面,$\angle a$同$\angle b$是餘角.圖3裏面$\angle 1$同$\angle 2$是補角.

§23. 角的平分線. 分一角做兩等角的線叫做這角的**平分線**(Bisector).

如圖AD是$\angle BAC$的平分線,$\angle 1=\angle 2$



§18的圖裏面,CD垂線也可算是AOB平角的平分線,

目解題

1. 直角是平角的幾分之幾? 是週角的幾分之幾?

2. 一直角有幾度? 直角的補角是什麽角?

3. 72°的角是鈍角還是銳角? 銳角的補角是什麼角?

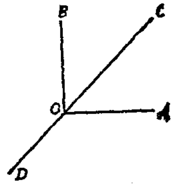
4. 135°的角是不是鈍角? 鈍角的補角是什麽角?

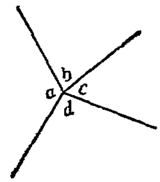
5. 175°的角是不是優角? 197°是鈍角還是優角?

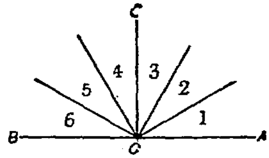
6. 22°17′5″應當怎樣讀法?

7. $\angle AOB$是直角,OC是他的平分線. OD同OC成

一直線,那麼$\angle AOD$有幾度? $\angle BOD$同$\angle AOD$有什麼關係?







8. $\angle a$同$\angle c$是互為補角,那麼$\angle b$同$\angle d$有什麼關係?

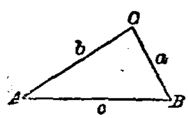
9. 假使$\angle AOB$是平角, $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=\angle 5=\angle 6$,各等於幾度? 又問$\angle AOC$是什麼角?

10. 時鐘在兩點,三點,四點鐘時,兩針各成什麼角?

11. 時鐘長針每走十分鐘,轉過幾度的角?

12. 時鐘兩針在幾時成平角,那幾時成直角,那幾時成銳角,那幾時成鈍角?

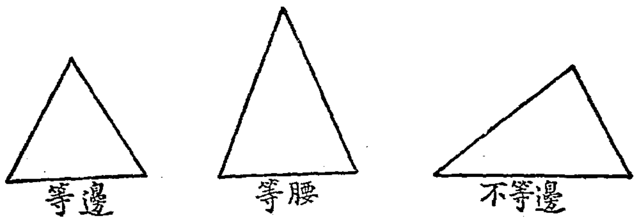
§24. 三角形. 三條線段所圍成的平面形叫做**三角形** (Triangle). 幾何學上用△記號去表他,如$\triangle ABC$.



三角形有三條邊如圖a,b,c;三個頂點如圖A,B,C.

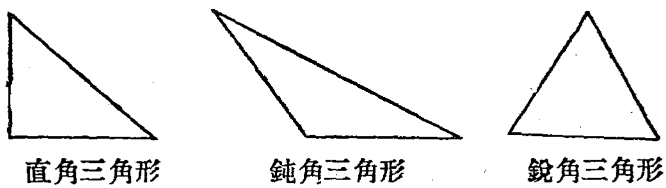
§25. 三角形用邊分類. 三邊都相等的

三角形叫做**等邊三角形**(Equilateral Triangle). 兩邊相等的叫做**等腰三角形**(Isosceles Triangle). 三邊都不相等的就叫**不等邊三角形** (Scalene Triangle).



§26. **三角形用角分類.** 三角中有一角是直角的三角形叫**直角三角形**(Right Triangle).

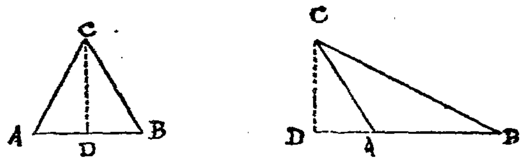
有一角是鈍角的叫**鈍角三角形** (Obtuse Triangle). 各角都是銳角的叫**銳角三角形** (Acute Triangle). 若各角都等, 這三角形就叫**等角三角形**(Equiangular Triangle).



§27. **直角三角形的斜邊同兩股.** 直角

三角形裏面,直角所對的邊叫做斜邊(Hypotenuse). 其他兩邊都叫股(Legs).

§28. **三角形的底邊,頂點同高.** 三角形的任一邊可以做**底邊**(Base). 底邊對角的頂點叫頂點. 從頂點到底邊或底邊的延長線上的垂線叫做這三角形的**高**(Altitude). 如圖 AB 是底邊; C 是頂點; CD 就是高.

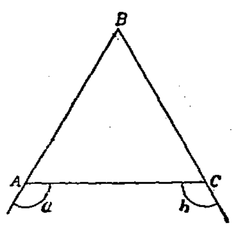


自解題

1. 等邊三角形都是等腰的麽? 等腰三角形都是等邊的麽?

2. 直角三角形有等腰的麽? 鈍角三角形有等腰的麽?

3. $\triangle ABC$ 是等角三角形. 延長 BA 邊所成的 A 角的鄰角 $\angle a$,和延長 BC 邊所成的 C 角的鄰角 $\angle b$ 有



什麼關係?

4. 指出屋子外面的等邊三角形.

5. 舉幾個等邊三角形的例.

§29. 全等形(Congruent Figures). 倘若兩個形的式樣和大小都不變動, 重疊起來, 互相密合,這兩形就全等,叫做全等形.

(1) 直接驗全等法. 把兩形重疊起來檢驗他是不是全等叫直接驗全等法.

(2) 間接驗全等法. 如圖用覆印紙摹下$\triangle ABC$的形狀和大小. 再放在$\triangle A'B'C'$上,驗他們是不是全等. 這種驗法就叫做間接驗全等法.

§30. 全等形的對應部分. 兩個全等的三角形裏面, 相等的邊叫做對應的邊. 那相等的角叫做對應的角. 全等形的對應部分,

就是在兩形相合的時候，也相恰合的部分。所以全等形的對應部分都是相等的。

理解題

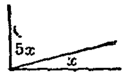
1. 找出 $34°, 28°15', 78°16'45''$ 的餘角。

2. 找出 $85°, 54°15', 120°6'7''$ 的補角。

3. 兩餘角相差 $21°$，問那兩角各是幾度？

〔提示〕 若一角是 x 度。那麼 $x°+x°+21°=90°$

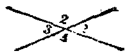
4. 一角是他餘角的五倍。問這兩角各是幾度？



〔提示〕 如圖 $x°+5x°=90°$

5. 一角是他的補角的 $\frac{3}{4}$，問兩角各是幾度？

6. 右圖內 $\angle 1=45°$。 找出 $\angle 2$ 的度數。$\angle 3$ 是多少度？ $\angle 1$ 同 $\angle 3$ 有什麼關係？

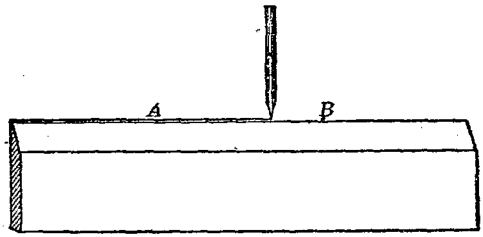


§31. 作幾何圖形 (To Construct Geometric Figure). 作幾何圖形，所用的器具只有二件東西，一件是直尺，一件是圓規。

§32. 直尺(Straight Edge). 直尺的用處是用來畫直線，或延長一直線。

如圖，有 A, B 兩點。要在中間連接做一條

直線. 先把直尺比齊兩點,把筆尖靠着直尺一畫就得直線AB.



§33. **圓規** (Compasses). 圓規的用處是畫圓,畫弧同截取和所給線段等長的線段.

如截取同AB等長的線段,就可先用規比AB的長 (圖一),再在他直線截取同長之$A'B'$ (圖二). 便得所求.

用已知圓心同半徑的長,可以畫弧 (圖三)

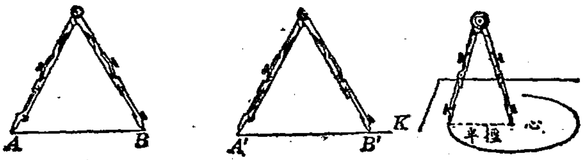


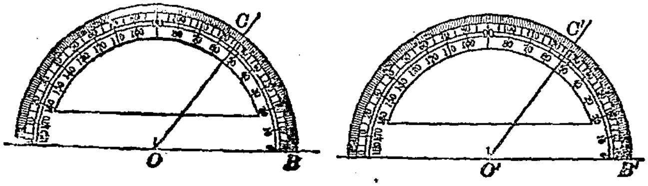
圖 1　　圖 2　　圖 3

§34. **畫圖的儀器.** 作幾何圖雖然只許用直尺同圓規,但在尋常畫圖的時候,因爲方

便的緣故,很有幾種特製的儀器. 例如刻有度數的尺,可以用來量直線的長短,量角器可以用來量角度,三角板和丁字尺可以用來畫直角和平行線. 這都是很緊要的東西.

§35. **量角器**(Protractor). 量角器不但可以量角也可以用來畫一角與所給的角相等.

例如要畫同$\angle BOC$相等的角,可先如下圖放量角器在$\angle BOC$上,讀下OC線經過那線上的刻度. 再把量角器移到他處,用他的中心點做頂點,沿底一畫,就得$O'B'$. 再從剛才所讀下



OC過的刻度地方畫一條線到O',就得$\angle B'O'C'$同$\angle BOC$相等.

後面還要講單用直尺同圓規畫一角與所給角相等的法子.

理解題

1. 用量角器試驗§29的圖裏面,$\angle A,\angle B,\angle C$是不是各等於$\angle A',\angle B',\angle C'$?

2. 畫相交兩直線,用量角器驗出是不是有兩對相等的角?

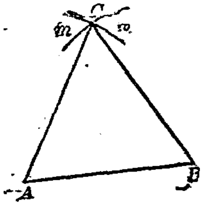
3. 在一直線上畫一條垂線. 再畫直角的平分線.

4. 畫一個三角形,同他的三個高.

5. 畫一個82°的角.

§36. 用直尺與圓規作圖的例:——

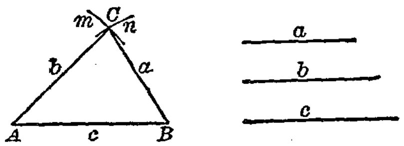
例一 求作等邊三角形.



解法: 任取一直線上的兩點A,B. 用A做圓心,AB做半徑畫圓弧n. 再用B做圓心剛才的半徑畫圓弧m,交n於C點. 畫AC,BC兩線段. 那麼$AC=BC=AB$; 所以$\triangle ABC$就是等邊三角形.

例二 求作一三角形,三邊各和所給三線段等長.

解法: 設所給的三線段是a,b,c.

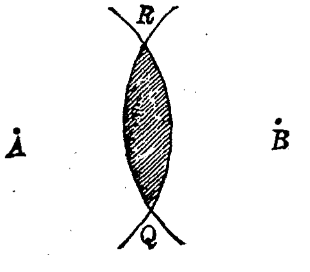


在任一直線上截取$AB=c$. 用A做圓心,b做半徑畫m弧. 再用B做圓心,a做半徑畫n弧,交m弧於C點.

畫AC同BC兩線段. $\triangle ABC$就是所求的三角形.

要這種作法能夠成立,所給三條線段,無論那條不能大於或等於其他兩條的和.

例三　兩隻牛,繫在相距66呎遠的兩株樹上,都是用39呎長的繮繩繫住的. 所以他們只能各在那半徑39呎的圓內吃草. 試畫一圖,表示這兩牛都能吃得着草的公共區域有多大?



解法: 令$\frac{1}{8}$吋代表6呎;那麼$1\frac{3}{8}$吋就代表66呎的遠;$\frac{13}{16}$吋就代表繩的長. 畫A,B兩株樹

椿. 用A做圓心,$\frac{13}{16}$吋做半徑畫弧. 再用B做圓心,剛才的長做半徑畫弧. 那末兩弧所包圍的地方,便是所求的區域.

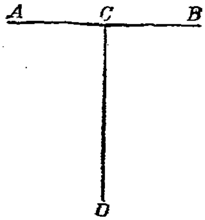
實驗題

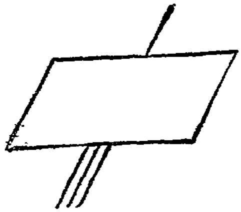
1. 作每邊2吋的等邊三角形.
2. 作三邊是2吋, $1\frac{1}{2}$吋同1吋的一個三角形.
3. 作一個等腰三角形.
4. 海口對岸,各有炮台,相隔16哩遠. 甲台的炮可以射到12哩遠,乙台的祇能射到10哩. 畫圖表示兩砲都打得到的地方. 量這個圖形,求出敵艦駛過火線時,所經最短的距離.

§37. 圖形的外觀不可靠. 幾何圖形的性質,有的一看就可以瞭然. 但是單憑眼睛去看,有時候卻很是靠不住的.

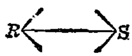
例一　如圖AB,CD兩線段,那一條長些,長多少? 用器械檢驗你的估計.

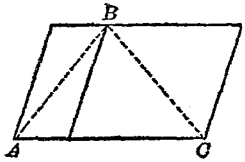
例二　上面右圖裏,上邊的線是下邊三線中那條的延長線? 這樣試驗你所答的錯不錯?





例三　你看下邊兩條線，那條長些？　量一下，看你猜的對不對？



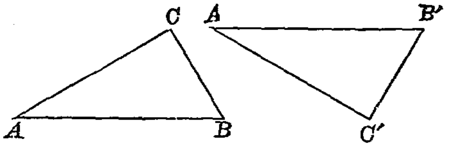


例四　上面右圖的 AB,BC，那條長些，長多少？再用尺去量一下，驗你猜得對不對？

§38. 直接量法的不足夠. 答覆上節的問題，必定要用作圖或畫圖的儀器去量．但是有的問題，直接去量，還是不中用．

例：在 $\triangle ABC$ 同 $\triangle A'B'C'$ 裏面，直接量得 $AB=A'B'$; $BC=B'C'$; $CA=C'A'$; $\angle A=\angle A'$; $\angle B=\angle B'$; $\angle C=\angle C'$ 後，還不能斷定 $\triangle ABC$ 是不是等於 $\triangle A'B'C'$．因為兩個三角形的邊，

角都相等,那兩三角形仍許並不相等.



§39. **幾何學的理論.** 直接量法雖然不足夠, 但是在幾何學裏面, 關於幾何圖形的性質,常可從理論得來.

幾何學的理論是秩序最整齊, 組織最完密的. 在研究這種理論之前, 我們須了解幾種關於幾何理論的要素.

§40. **幾何命辭**(Geometrical Proposition) 陳述幾何圖形的性質,或是要解決一個幾何上的問題都叫做幾何的命辭.

(1) **公理** (Axiom). 不要證明,人人都承認的理叫公理.

公理有兩種: 單在幾何學上適用的叫幾何公理; 也可以適用在算學各門的叫普通公理.

(2) **公法**(Postulate). 不須證據,人人都

認做可能的法子叫公法.

(3) **定理** (Theorem). 凡是要證明了才能成立的命辭叫定理.

(4) **作圖問題**(Problem of Construction). 依法定的條件, 去作一個幾何圖形, 這種命辭叫作圖問題.

(5) **推論**(Corollary). 從已知的命辭容易推究得出的命辭叫推論.

§41. 幾何公理:——

(1) 兩點中間,直線最短.

這個公理實在大家都知道, 譬如走路, 都曉得直的最近. 如圖 AB 直線最短.

(2) 通連兩點祇有一直線.

〔推論一〕 兩直線相交,祇有一個交點.

〔推論二〕 兩線段的兩端點相合,就全線相合且相等.

(3) 一個形可以不改變他的形狀大小,移到別一個形上面.

(4) 兩形相合,就全等.

(5) 和同形相等的形相等.

§42. **公法**:——

(1) 從一點可以作一直線到他點.

(2) 一線段可從隨便那一端點引長到任意長.

(3) 有圓心同半徑,就可畫一圓.

目 解 題

1. 沿直尺畫直線,根據了什麼公理沒有? 根據了什麼公法沒有?

2. 用刻有分寸的尺去量線段的長短可以說明什麼公理?

3. 假使有叁條尺,一條曉得是直的,你能根據什麼公理,用什麼法子,去驗定其它兩條是不是直尺?

4. 兩條線可以決定一個點麼? 何以呢?

5. 兩點可以決定一線麼? 何以呢?

§43. **普通公理** 這些公理在算術,代數

上用得最多. 在平面幾何學上,多半是用在關於線段同曲線的長短,和角同面積的大小上面.

(1) 等量加等量,和相等.

(2) 等量減等量,較相等.

(3) 等量乘等量,積相等.

(4) 等量除等量,商相等.

(5) 等於同量或等量的量相等.

(6) 分量的和,等於全量.

(7) 全量大於他的分量.

(8) 倘若 a 同 b 是同類的量,那麼下列的條件,必有一條能夠成立.

(I) $a=b$, (II) $a>b$, (III) $a<b$.

(9) 若 $a>b$, $b\geqq c$, 那麼 $a>c$.

(10) 若 $a\geqq b$, $b>c$, 那麼 $a>c$.

(11) 若 $a>b$, $m=n$ (m, n 都係正數). 那麼 $a+m>b+n$, $a-m>b-n$, $am>bn$, $\frac{a}{m}>\frac{b}{n}$

(12) 若 $a>b$, $c>d$, 那麼 $a+c>b+d$.

(13)　若 $a=b$, $c<d$, 那麼 $a-c>b-d$,

(14)　在等式或不等式裏面,一量可用他的等量去代替.

§44. **簡單定理**　簡單定理是從公理同定義容易直接推出的定理. 下面幾個就是:——

(1)　兩鄰角的和若是兩直角,那麼兩外邊就成功一直線.

因爲兩直角等於一平角,平角的外邊成功一直線.

(2)　一直線做外邊的兩鄰角的和,等於兩直角.

因爲兩邊成直線的角是平角,一平角等於兩直角.

(3)　同角或等角的餘角相等.

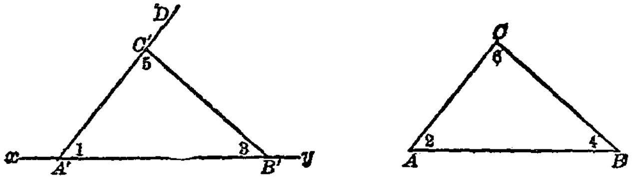
(4)　同角或等角的補角相等.

這兩個定理可從普通公理二推出.

(5)　環繞一點的許多隣角的和是四直角. 看公理(6), §43.

(6)　連續鄰角最外的兩邊在一直線上，他們的總和等於兩直角.

§45. 直接量法的推廣應用. 給$\triangle ABC$，求作$\triangle A'B'C'$，要$A'B'=AB$，$A'C'=AC$，$\angle A'=\angle A$；並用直接量法比較其餘的邊同角.



解法：在xy線上，用圓規截取$A'B'=AB$. 用量角器畫$A'D$，令$\angle 1=\angle 2$.

在$A'D$上截取$A'C'=AC$，畫$C'B'$. 再用量法，知道$\angle 3=\angle 4$，　$\angle 5=\angle 6$，　$C'B'=CB$.

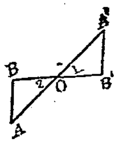
這樣一來，便是用量的法子，可以找出；**若一三角形的兩邊同一夾角等於他三角形的兩邊同一夾角，那麼其餘的各部分，也都對應相等.**

但是這種的結果，雖然試驗幾次，都是如

此，究竟不能證明，所以我們須用幾何理論．且看下節．

實驗題

1. 畫兩直線相交．截取 $OA=OA'$，$OB=OB'$．量出是不是 $AB=A'B'$，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle 1=\angle 2$．



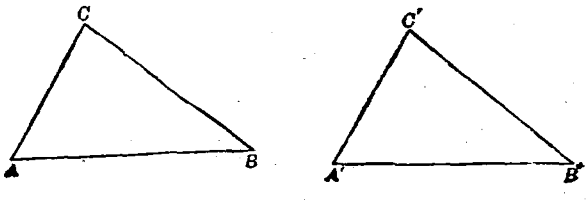
2. 畫兩三角形 ABC 同 $A'B'C'$．令 $AB=A'B'=1$ 吋，$AC=A'C'=2$ 吋，$\angle A=\angle A'=30°$．再量出是不是 $\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$BC=B'C'$．

§46. 用理論證明三角形相等的部分．

現在要來用幾何理論證明：假使在三角形 ABC 同 $A'B'C'$ 內，

倘若 $\begin{cases} AB=A'B' \\ AC=A'C' \\ \angle A=\angle A' \end{cases}$　那麼 $\begin{cases} BC=B'C' \\ \angle B=\angle B' \\ \angle C=\angle C' \end{cases}$

並且要證明 $\triangle ABC$ 全等於 $\triangle A'B'C'$．



〔辯證〕 因 $\angle A=\angle A'$,$\triangle ABC$ 就能夠放在 $\triangle A'B'C'$ 上面使 $\angle A$ 同 $\angle A'$ 合,AB 邊落到 $A'B'$ 邊,AC 就落在 $A'C'$ 上面. 〔§41, (3) (4)〕

因 $AB=A'B'$,B 落到 B' 上. 又因 $AC=A'C'$, C 落到 C' 上. 所以 BC 也與 $B'C'$ 合. 〔§41, (2) 推論二)〕

於是 $\angle B$ 與 $\angle B'$ 合; $\angle C$ 與 $\angle C'$ 合.

這樣我們並不要量, 就能知道 $BC=B'C'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, 並且照 〔§41, (4)〕,$\triangle ABC$ 當然全等於 $\triangle A'B'C'$ 了.

現在且把這試驗全等三角形的法子寫在下面:

一個三角形的兩邊和他的夾角,等於他三角形的兩邊同夾角,這兩個三角形全等.

注意上面的證法並不須實在移動$\triangle ABC$, 祇要知道他一定可以移動, 而且就令實行移動,也必恰合,不爽分毫.

上面的證法,可以叫做理想重合法.

§47. 直接量法同證法的比較. §45所論的方法,同上節所用的證法,不相同的地方,現在寫在下面.

(1) 證法不但可表示$\angle B=\angle B'$,$\angle C=\angle C'$ $BC=B'C'$, 且能推出用量法所得不到的結果$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$.

(2) 量的法子沒有絕對準確的時候. 所以量的結果終免不了幾微的錯誤. 但證明按照幾何理論是絕對準確的. 倘若$\angle A=\angle A'$, $AB=A'B'$, $AC=A'C'$是確的,那麼 $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$,$BC=B'C'$也是確的.

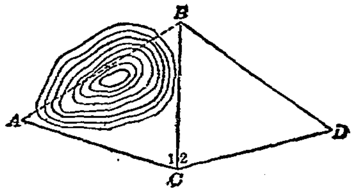
(3) 證明所得的結果,只要在同一情形之下,可適用到隨便那個三角形. 但是量法可就非實地的量過不可.

(4) 直接量法有時做不到.

§48. 間接量法. 間接量法是直接量法,同幾何理論所得結果的結晶,很是重要. 現在舉一個簡單的例在下面.

例　因為測量田地的緣故,想找出一條直線的距離.但是中間隔有一山在平面上,試問怎樣求出那直線距離?

解法: 令 A,B 為山的對邊兩點.這兩點都和 C 相通.



用量角器畫 $\angle 2=\angle 1$, 令 $CD=AC$. 假定 BD 已經畫了,那麼照§46, $\triangle ABC=\triangle CBD, BD=AB$. 所以量 BD, 便得 AB 的長了.

§49. 記號

$\angle$, $\angle$s　角的記號(一個同幾個)

$\triangle$, $\triangle$s　「三角形」的記號(一個同幾個)

$\square$, $\square$s　「平行四邊形」的記號(一個同幾個)

$\angle$R, $\angle$sR　「直角」的記號(一個同幾個)

st$\angle$, st$\angle$s　「平角」的記號(一個同幾個)

rt$\triangle$, rt$\triangle$s　「直角三角形」的記號(一個同

幾個」

○,Ⓢ　「圓」的記號(一個同幾個)

$\frown$,$\overset{\frown}{s}$　「弧」的記號(一個同幾個)

$=$　「等」號.

$\equiv$　「全等」號.

$\sim$　「相似」的記號.

$>$　「大於」的記號.

$<$　「小於」的記號.

$\leqq$　「小於」或「等於」的記號.

$\geqq$　「大於」或「等於」的記號.

$\parallel$　「平行」或「平行於」的記號.

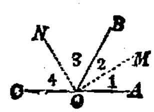
$\perp$　「垂直」或「垂直於」的記號.

$\parallel$s,$\perp$s　「平行」的多數,「垂直」的多數.

$\therefore$　「所以」的記號.

理 解 題

1. 如圖,$\angle AOC$是平角,OM是$\angle AOB$的平分線,ON是$\angle BOC$的平分線. 那麼$\angle MON$是一隻什麼角?

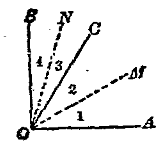


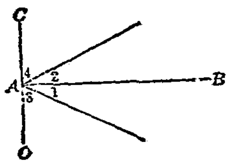
〔提示〕 $\angle 2$是$\angle AOB$的一半，$\angle 3$是$\angle BOC$的一半.

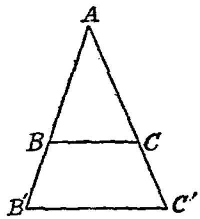
2. 如下圖，$\angle AOB$是直角，OM平分$\angle AOC$，ON平分$\angle BOC$. $\angle MON$有幾度?

3. 在下圖中，$CO \perp AB$，$\angle 1=\angle 2$. 那麼$\angle 3$同$\angle 4$有什麼關係?

4. 如下圖，$\triangle ABC$同$\triangle AB'C'$都是等腰三角形，$AB=AC$，$AB'=AC'$. 那麼BB'同CC'有什麼關係?

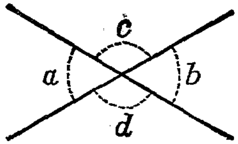






第二編　直界形

§50. **定理.** 兩直線相交,所成的對頂角相等.



設兩直線相交,成功對頂角$\angle a, \angle b; \angle c, \angle d$.

求證　$\angle a=\angle b,\quad \angle c=\angle d$.

[證]　$\angle a+\angle c=2\angle s R$,　§44, (2)

(一直線做外邊的兩鄰角的和等於兩直角.)

$\angle c+\angle b=2\angle s R$,　§44, (2)

$\therefore\quad \angle a+\angle c=\angle c+\angle b$.　§43, (5)

(等於同量或等量的量相等.)

$\therefore\quad \angle a=\angle b$.　§43, (2)

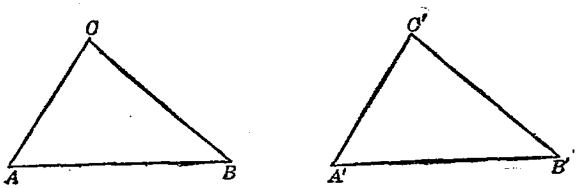
(等量減等量,較相等.)

同樣可以證明$\angle c=\angle d$.

上面的證明,是逐步依了適當的次序推

出來的. 各步都有理由,這些理由就是定義,公理或已經證過的定理.

§51. **定理.** 一個三角形的兩邊和夾角,同別個三角形的兩邊和夾角對應相等,這兩個三角形全等. ~~(S.A.S.)~~ (S.∠.S)



設在$\triangle ABC$ 同 $\triangle A'B'C'$ 裏, $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle A=\angle A'$.

求證　　$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$.

〔證〕 把$\triangle ABC$擺在$\triangle A'B'C'$上, $\angle A$就和$\angle A'$相合, AB落到$A'B'$, AC落到$A'C'$.　§41,(3)

(一個形可以不改變他的形狀和大小,移到別個形上面.)

於是B點落在B'點上, C落在C'上.

(因所設 $AB=A'B'$, $AC=A'C'$.)

$\therefore BC$線段同$B'C'$線段相合.　§41,(2)

(兩線段的兩端點相合,就全線相合.)

$$\therefore \quad \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'. \qquad §41,(4)$$

(兩形相合就全等.)

〔推論〕 兩直角三角形有兩股對應相等,這兩三角形全等.

§52. 組成定理的部分:假設,終結. 定理裏面所設的那部分叫**假設**(Hypothesis),求證的那部分叫**終結**(Conclusion).

例如在 §51 的定理裏面,"一個三角形的兩邊和夾角,同別個三角形的兩邊和夾角對應相等,"是假設;"兩個三角形全等"是終結.

證的時候,須把所設的都引用上去,我們有一個試驗的好法子,就是把那所設的各部,列成一個表式,引用一式,就用筆消去那一式.譬如在上節的定理裏面,所設的是: $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle A=\angle A'$. 等到證的時候,把 $\angle A$ 擺在 $\angle A'$ 上面, $\angle A=\angle A'$ 這式就可以消去;等 $AB=A'B'$, $AC=A'C'$ 兩式都用過了,也把他們

消去. 若是有證裏面用不着的假設(通常命辭的假設都是必需的), 那麼這證法一定是錯了. 所以用這種消去的法子,可以給我們很多的幫助.

目解題

1. 如圖1,已知 $OA=OA'$, $OB=OB'$, 那麼 $\triangle AOB\equiv\triangle A'OB'$.

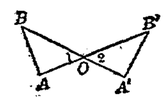


圖 1.

〔提示〕 (1)說明 $\angle 1=\angle 2$ 的理由, (2)用§51證明 $\triangle AOB\equiv\triangle A'OB'$.

2. 如圖2,已知 $OA=OA'$, $OB=OB'$, 那麼 $\triangle AOB\equiv\triangle A'OB'$. 詳細的說出理由來.

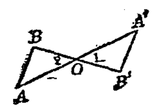


圖 2

3. 如圖3, $\angle 1=\angle 2$, $AB=AB'$, 那麼 $\triangle ABC\equiv\triangle AB'C$. 詳細說出理由來.

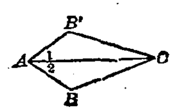


圖 3.

4. 正方形是各邊相等,各角都是直角的四邊形. 如圖4, $ABCD$ 是個正方形, E 是 AB 的中點,證明 $\triangle AEB\equiv\triangle DEC$.

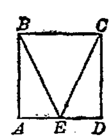


圖 4.

〔提示〕 (1) $\angle A=\angle D$; (2)用§51的推論.

5.　如圖 5, $ABCD$ 是一個正方形, 試證明 $\triangle ADB \equiv \triangle ADC$.

〔提示〕 用 §51 的推論.

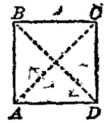
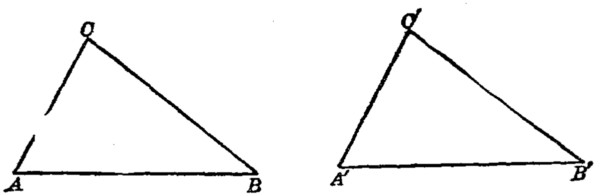


圖 5

§53. 定理. 一個三角形的兩角和夾邊, 同別個三角形的兩角和夾邊對應相等, 這兩個三角形全等. ~~ASA~~ ($\angle S \angle$)



設在 $\triangle ABC$ 同 $\triangle A'B'C'$ 裏, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $AB = A'B'$.

求證　$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

〔證〕 把 $\triangle ABC$ 擺在 $\triangle A'B'C'$ 上, AB 和 $A'B'$ 相合, 使 C 點和 C' 點在 AB 邊的同一側.

§41 (3)

(一個形可以不改變他的形狀和大小. 移到別個形上面.)

於是 AC 落在 $A'C'$ 上; BC 落在 $B'C'$ 上.

(因所設$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$.)

$\therefore C$點落在$A'C'$同$B'C'$兩線上.

就是C落在C'上面. §41,(2)

(兩直線相交,祇有一交點.)

$\therefore \triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$. §41,(4)

(兩形相合就全等.)

註釋:——剛才的定理裏面"一個三角形的兩角和夾邊,同別個三角形的兩角和夾邊對應相等"是假設;"兩個三角形全等"是終結.

研究證的方法,須注意引用假設的次序.

自解題

1. 設$\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$,(圖1),證明$\triangle ABC\equiv\triangle ADC$.

〔提示〕 $AC=AC$, 用§53的定理.

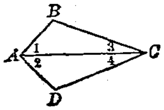


圖 1.

2. 設$\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, (圖2), 證明$\triangle ABC\equiv\triangle ADC$.

3. 設$\angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 4$, (圖2), 證明$\triangle ABC\equiv\triangle ADC$.

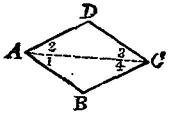


圖 2.

4. 設$\angle 1=\angle 2$, $AB=AD$, (圖2) 證明$\triangle ABC\equiv\triangle ADC$.

5.　設 $\angle 3=\angle 4$, $BC=DC$,(圖3)

證明 $\triangle ABC\equiv\triangle ADC$.

6.　設 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$,(圖3),

證明 $\triangle ABC\equiv\triangle ADC$.

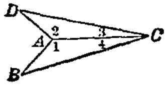


圖 3.

7.　設 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$,(圖4),

證明 $\triangle ADB\equiv\triangle CDB$.

8.　設 $AB=BC$, $\angle 3=\angle 4$,(圖4),

證明 $\triangle ADB\equiv\triangle CDB$.

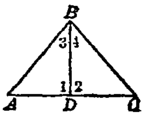
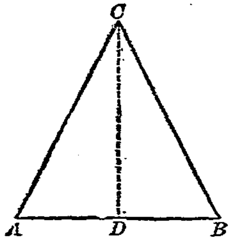


圖 4.

§54. 定理. 等腰三角形裏面,對等邊的角相等.



設在 $\triangle ABC$ 裏面, $AC=BC$.

求證　　　　$\angle A=\angle B$.

〔證〕 設 CD 是 $\angle C$ 的平分線,

那麼,在 Ⓢ ACD 同 BCD 裏面,

$\angle ACD=\angle BCD$, $AC=BC$, $CD=CD$.　　§23

(因所設 AC 同 LC 等, CD 和 CD 同.)

$$\therefore \quad \triangle ACD \equiv \triangle BCD. \qquad §51$$

(一個△的兩邊和夾角,同別個△的兩邊和夾角對應相等,這兩個△全等.)

$$\therefore \quad \angle A = \angle B. \qquad §30$$

(全等形的對應部分相等.)

[推論一] 等邊三角形的各角相等.

[推論二] 等腰三角形裏平分頂角的線段,必平分底邊並且是底的垂線.

照前證 $\triangle ACD \equiv \triangle BCD.$ §51

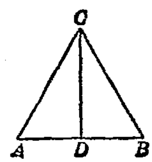
$\therefore AD = DB,$ §30

$\angle ADC = \angle BDC.$ §30

[推論三] 從三角形頂點引到底邊的垂線,若是底邊的平分線,這三角形必是等腰三角形.

[證] 因 $\angle BDC = \angle ADC,$

$CD = CD,\ AD = DB,$



$\therefore \triangle ADC \equiv \triangle BDC.$ §51

$\therefore AC = BC.$ §30

§55. 對應部分的標記. 爲了看起來清楚起見,圖形的對應部分,就用記號去標明他. 例如所設$AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle A=\angle A'$,就可以用下圖的標記. 有時用彩色筆來標明,不過簡單的圖上不常用.

自解題

1. 若$AB=AD$, $BC=DC$ (圖1), 證明 (a) $\angle 1=\angle 2$, (b) $\angle 3=\angle 4$, (c) $\angle ABC=\angle ADC$.

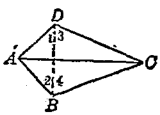


圖 1

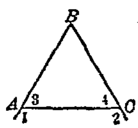


圖 2

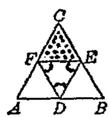


圖 3

2. 若$AB=BC$ (圖2),證明$\angle 1=\angle 2$.

〔提示〕(a) $\angle 3=\angle 4$, §54; (b) $\angle 1=\angle 2$. §44,(4)

3. $\triangle ABC$裏各邊相等, D,E,F是各邊的中點(圖3). 證明$\triangle ADF\equiv\triangle BDE$, $\triangle DEF$裏各角相等.

4. 在圖4的$\triangle ABC$裏面, $AB=BC$, 並且所截的

$AE=DC$, 證明 $\triangle AEB\equiv\triangle CDB$。

5. 在圖5裏面, $AE=ED=DC=CB$, $\angle E=\angle C$. 證明 $\triangle ADE\equiv\triangle BDC$.

6. 在 $\triangle ABC$ 裏面, $AC=BC$, $AD=BD$ (圖6). 證明 $\angle ADC=\angle BDC$.

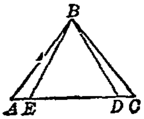


圖 4

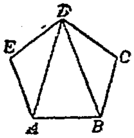


圖 5

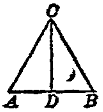


圖 6

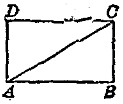
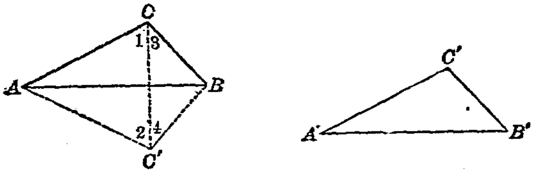


圖 7

7. $ABCD$ 圖形裏的四角都是直角, 且 $AD=BC$, $DC=AB$ (圖7). 證明 $\triangle ABC\cong\triangle ACD$.

§56. 定理. 一個三角形的三邊, 同別個三角形的三邊對應相等,這兩個三角形全等.



設在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 裏面,

$AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $CA=C'A'$.

求證　　$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$.

〔證〕 把$\triangle A'B'C'$舉起,使$A'B'$同$\triangle ABC$裏的AB相合;C,C'兩點在這合線的兩邊,擺平如圖. §41,(3)

(一個形可以不改變他的形狀和大小,移到別個形上面.)

畫 CC'. §42,(1)

於是: $\triangle ACC'$同BCC'都是等腰三角形.

(所設$AC=AC', BC=BC'$)

$\therefore \quad \angle 1=\angle 2, \quad \angle 3=\angle 4.$ §54

(等腰三角形裏面,對等邊的角相等)

$\therefore \quad \angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4.$ §43(2)

就是 $\angle C=\angle C'$. §43,(6),(14)

所以$\triangle ABC$同$A'B'C'$裏,$AC=A'C'$, $BC=B'C'$, $\angle C=\angle C'$.

$\therefore \quad \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. §51

(一個$\triangle$的兩邊和夾角,同別個$\triangle$的兩邊和夾角對應相等,這兩個$\triangle$全等.)

目解題

1. 在圖1裏面,$\triangle ABC$是等腰三角形,且$AD=DC$,

證明 $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$.

2. 在圖2裏面,照§55用標記表明相等的線段,證明 $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$.

3. 在圖3裏面,相等的各線段上也有標記,試證明 $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$.

4. 在圖4裏面,O是圓心,證明 $\triangle AOB \equiv \triangle COD$.

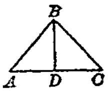


圖 1

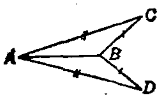


圖 2

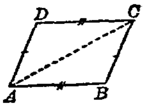


圖 3

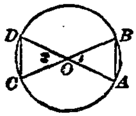


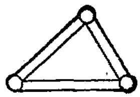
圖 4

§57. 用全等三角形證明等角同等線段.

全等形的對應部分可以相合,所以凡是兩線段或兩角,祇要是全等形的對應部分,就相等.譬如要證兩線段相等,祇要指出他們是全等三角形的對應邊就是了.

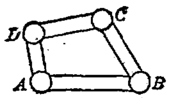
自解題

1. 釘連三條桿的尖端如右圖,問這個形是固定的麼?什麼緣故?



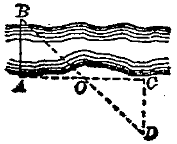
記得從固定的三邊就有固定的三角形.

2.　如右圖,把四條桿的尖端釘連,問這個形可以活動麼? 你會見四條邊的鐵架子有會變形的麼?



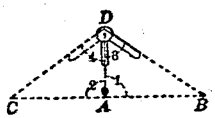
3.　假使在前題所說的形上面,釘一條橫桿,穿過AC,這形會變成固定的麼?

4.　要找出經過一條河從A到B的距離,可以依了同AB成直角的AO線上進行,一直到C,使$AO=OC$,再沿同OC成直角的線走到同O,B成直線的D爲止.指出$CD=AB$.



〔提示〕$\angle A=\angle C$,什麼緣故?$AO=OC$, $\angle BOA=\angle DOC$,什麼緣故? $\triangle BOA\equiv\triangle DOC$,什麼緣故? 再證$CD=AB$,什麼緣故?

5.　想測從A點到望得見走不到的B點的距離,可以用忒理斯(Thales)所發明的儀器:——先把兩桿連在D處,一桿照錘線DA同地面成直角,使別桿指着B點.再旋轉兩桿不變D角,使原來指着B的一桿在DA的位置,原來垂直的一桿就指着走得到的一點C,便可量下AC的距離.證明$AC=AB$.



〔提示〕(1)$\angle 1=\angle R=\angle 2$; (2)$\angle 3=\angle 4$; (3)$DA=DA$.

理解題

1.　圖1裏 $AE=ED=DC=CB$, $\angle E=\angle C$. 證明 $\angle 1=\angle 2$.

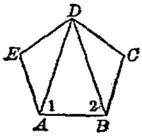


圖 1

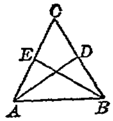


圖 2

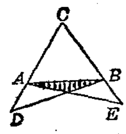


圖 3

〔提示〕證(1) $\triangle AED\cong\triangle BCD$; (2) $AD=BD$.

2.　倘 $AC=BC, AE=BD$, 證明 $BE=AD$. (圖2)

〔提示〕證明 $\triangle ADC\cong\triangle BEC$.

3.　在圖3裏, $AC=BC, AD=BE$, 證明 $BD=AE$.

〔提示〕$\triangle CDB\cong\triangle CEA$.

4.　在圖4裏, 設 $AD=BC$, $\angle DAB=\angle CBA$, 證明 $AC=BD$.

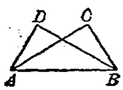


圖 4

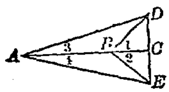


圖 5

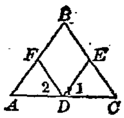


圖 6

5.　在圖5裏邊, 知道 $AD=AE$, $BD=BE$, 證明 $DC=EC$.

〔提示〕(1) 先證 $\triangle ABD\cong\triangle ABE$; (2) 再證 $\angle 1=\angle 2$; (3) 再證 $\triangle BDC\cong\triangle BEC$.

6. 在前題的圖裏邊,倘若已經知道了$\angle 3=\angle 4$,和$\triangle ABD\equiv\triangle ABE$. 證明$DC=EC$.

7. 在圖6裏,設$\angle A=\angle C$, $AD=CD$, $\angle 1=\angle 2$, 證明$DE=DF$.

8. 在前題圖裏,設$AB=BC$, $AD=DC$, $BF=BE$, 證明$DF=DE$.

9. 求A到B的距離,先量AO同BO,再取$OD=AO$, $OC=BO$,倘BOC, AOD同是直線,那麼$AB=CD$.什麼緣故? 所以量CD便得AB(圖7)

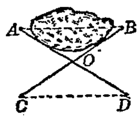


圖 7

10. 在§56的定理裏面,若$\angle B$同$\angle B'$是鈍角,應當怎樣證法?

§58. 幾何作圖. 我們知道作幾何圖形,只許用直尺同圓規,這兩件東西的用處,你們已經學過一些.現在便可以詳細研究作圖法,並要證實我們所作的圖,就是所求的圖.

§59. 解作圖題的步驟. 作圖題解法分四步:

(1) 分辨什麼是所設的;什麼是所求的.

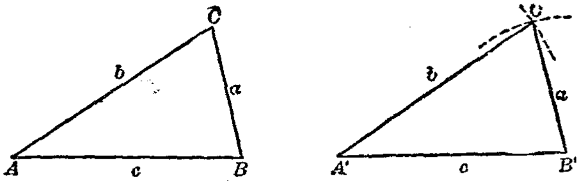
(2) 詳解圖形作法.

(3) 證明所作的圖具有所求的性質.

(4) 討論作圖方法.

有時圖形所需要的性質,顯而易見,那麼就用不着去證.

§60. 作圖題. 作一三角形同所給的三角形全等.



給了$\triangle ABC$,他的三邊是a,b,c.

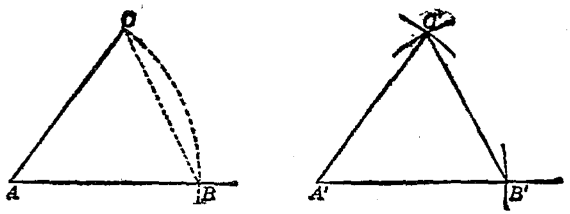
求作$\triangle A'B'C'\equiv\triangle ABC$.

〔作法〕 照§36的例二作$\triangle A'B'C'$的邊同所給a,b,c,三邊相等.

那麼 $\triangle A'B'C'\equiv\triangle ABC$. §56

(一個三角形的三邊,同別個三角形的三邊對應相等,這兩個$\triangle$全等.)

§61. 作圖題. 作一角等於所給的角.



給了 $\angle A$.

求作 $\angle A'=\angle A$.

〔作法〕 A 做圓心,畫弧交 $\angle A$ 的邊於 B,C,畫 BC.　§42, (3), (1)

作　$\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$.　§60

就得　$\angle A'=\angle A$.　§30

(全等形的對應部分相等)

§62. 作圖法的討論　作圖法的討論,是要尋出關於所給的各部分,有沒有作法可能同不可能的重要條件. 下面的例就是:

例一　討論 §60 的作法.

給了隨便什麼三角形,作法總是可能的.

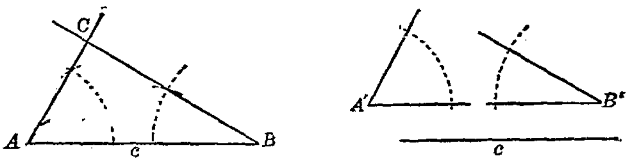
例二　討論三邊等於所給三線段的三角形作法.

所給三線段裏隨便那條總要比其餘兩條的和小,作法就可能;否則就不可能了.

例三　討論§61的作法.

不管所給的是什麼角作法總是可能的.

§63. **作圖題.** 給了兩角同夾邊,作一三角形.



給了 $\angle A'$;$\angle B'$;線段 c.

求作△,一邊等於 c, 夾這邊的兩角等於 $\angle A'$ 同 $\angle B'$

[作法]　在一線段上截 $AB=c$.　§33

作 $\angle A=\angle A'$; AB 做他的一邊.　§61

作 $\angle B=\angle B'$; BA 做他的一邊.　§61

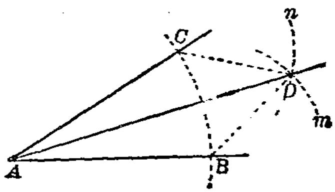
延長 $\angle A$, $\angle B$ 的另一邊,相遇於一點 C.

§42,(2)

那麼　$\triangle ABC$ 就是所求的△.

〔討論〕　這個作法的討論，全靠三角形各角的總和，後面再解釋.

§64. 作圖題. 作一角的平分線.



給了 $\angle A$.

求作 $\angle A$ 的平分線.

〔作法〕　A 做圓心，適宜的長做半徑畫弧，遇 $\angle A$ 的邊於 B,C.　§42,(3)

用 B 同 C 做圓心，相等的長做半徑畫弧得 m,n 的交點 D. 畫 AD.　§42,(3),(1)

那麼　AD 就是所求的平分線.

〔證〕　畫　BD 同 CD.　§42,(1)

於是 $AB=AC, BD=CD, AD=AD$.

$\therefore \triangle ABD \equiv \triangle ACD$.　§56

(一個△的三邊，同別個△的三邊對應相等，這兩個△全等.)

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$. §30

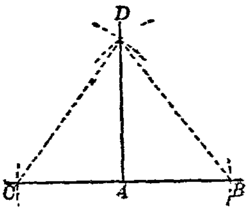
(全等形的對應部分相等.)

就是 AD 平分 $\angle BAC$.

〔討論〕 給了隨便怎樣大的角總可以把他平分的.

§65. **作圖題.** 在所給線上的所給點作垂線.

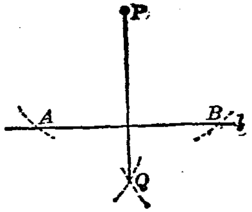
〔作法〕 A 是 BC 線上的所給點. 本題無異要在平角 BAC 裏作平分角線. 作法同證明,都和平分角的一樣.



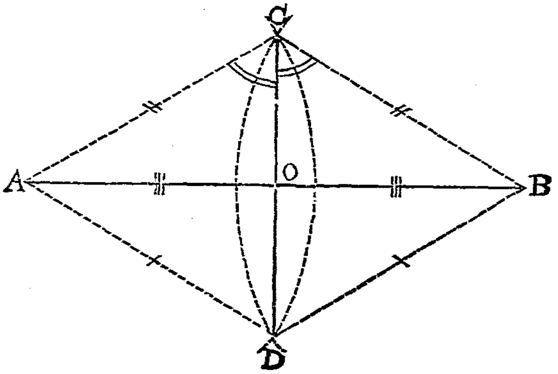
§66. **作圖題.** 在線外的一點,作這線的垂線.

〔提示〕 設 P 同 l 是所給點同所給線. 用 P 做圓心,適宜的長做半徑,畫弧遇 l 於 A,B. 又

用 A 同 B 各做圓心,相等的半徑畫弧遇於 Q,那麼 PQ 是 l 的垂線.



§67. 作圖題 平分所給的線段.



給了 AB 線段,

求作一線去平分 AB.

〔作法〕 用 A,B 做圓心,等長的半徑 (約比 AB 的一半大) 畫兩弧交於 C,D.　　§42,(3)

連結C,D交AB於O, §42,(1)

那麼 $AO=BO$.

〔證〕 $AC=BC, AD=BD, CD=CD$. 爲什麼?

$\therefore \triangle ACD \equiv \triangle BCD$. §56

(一個△的三邊同別個△的三邊相等,這兩個△全等.)

$\therefore \angle ACO=\angle BCO$. §30

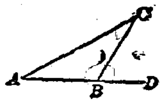
(全等形的對應部分相等)

$\therefore \triangle ACO \equiv \triangle BCO$. 爲什麼

$\therefore AO=BO$. §30

§68. **三角形的外角.** 三角形的一邊同鄰邊延長部分所成的角叫**外角**(Exterior Angle).

例如$\angle CBD$是$\triangle ABC$的外角.



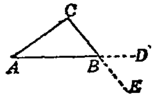
§69. **內鄰角同內對角.** 三角形裏相鄰外角的內角,叫**內鄰角**(Adjacent Interior Angle),其他的兩角,都叫**內對角**(Opposite Interior Angle).

例如上圖,$\angle ABC$是$\angle CBD$的內鄰角,$\angle A$

同 $\angle C$ 都是 $\angle CBD$ 的內對角.

目解題

1. 在三角形的一個頂點上,可以做幾個外角? 那些角的關係怎麼樣?



2. 如圖 $\angle EBD$ 是 $\triangle ABC$ 的外角麼? $\angle EBD$ 同 $\angle ABC$ 有什麼關係?

3. 三角形的外角同內隣角的和是什麼?

實驗題

實驗題裏面所畫的圖,要畫得大些,還得仔細.

每題裏要畫的圖,當按照所指定的,畫大小不同的圖形. 你對於每題的終結,像定理那樣去陳述出來.

1. 畫一個三角形,並延長一邊做成外角. 量外角同兩個內對角. 那個角頂大? 畫幾個大小不同的三角形來試驗.

2. 畫一個 $\triangle ABC$, 使 $AB<BC$. 量這些邊對着的角. 怎樣比較他們?

3. 畫一個 $\triangle ABC$, 使 $\angle A<\angle B$. 量這些角對着的邊. 怎樣比較他們?

4. 畫一個 $\triangle ABC$, 使 $\angle A=\angle B$. 量這些角對着的邊. 怎樣比較他們?

§70. **定理.** 一個三角形的外角比隨便那個內對角大.

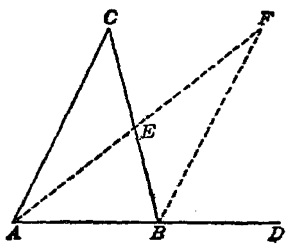


圖 1.

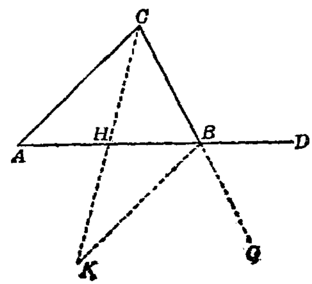


圖 2.

設 $\angle CBD$ 是 $\triangle ABC$ 的外角.

求證 (1) $\angle CBD > \angle C$; (2) $\angle CBD > \angle A$.

[證] (1) 平分 BC, 得中點 E (圖 1). §67

畫 AE 並延長他, 使 $EF = AE$. 畫 BF.

§42, (1), (2)

於是 $CE = EB$; $AE = EF$. 爲什麼?

$$\angle AEC = \angle BEF. \qquad \text{§50}$$

(兩直線相交,所成的對頂角相等.)

$$\therefore \quad \triangle AEC \equiv \triangle BEF. \qquad \text{§51}$$

(一個△的兩邊和夾角,同別個△的兩邊和夾角對應相等,這兩個△全等.)

$\therefore\quad \angle C=\angle EBF.$　§30

(全等形的對應部分相等.)

但是　$\angle CBD>\angle EBF.$　§43,(7)

(全量大於他的分量)

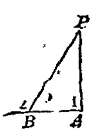
$\therefore\quad \angle CBD>\angle C.$　§43,(9)

(因$\angle CBD>\angle EBF$;$\angle EBF=\angle C$.)

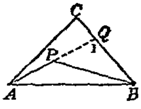
(2) 如圖2,平分AB,得中點H,延長CH到K,使$HK=CH$. 照(1)的證法證明,$\angle A=\angle ABK$;$\angle ABG>\angle ABK$;$\angle CBD=\angle ABG$;$\angle CBD>\angle A$.

[推論一]　從線外的一點只能畫一垂線到線上.

證　如右圖倘若PA,PB都垂直於AB,那麼$\angle 1=\angle 2$,都是直角,但依上面的定理,知道這是不可能的.



[推論二]　若P是$\triangle ABC$裏的任一點,那麼$\angle APB>\angle C$.



證　延長AP遇BC於Q.那麼$\angle 1$是$\triangle ACQ$的外角. 所以

$\angle 1 > \angle C$. 爲什麼? 又$\angle APB$是$\triangle BQP$的外角. 所以$\angle APB > \angle 1$. 爲什麼? $\therefore \angle APB > \angle C$. 爲什麼?

附注. 推論和定理不同的地方,是在推論可從定理的結果, 直接推究出來, 但有時如上面那種簡單的證法,還是不可少.

目解題

1. 在圖 1 裏面, $\angle 1$ 同 $\angle 4$, $\angle 3$ 同 $\angle 6$, $\angle 1$ 同 $\angle 5$, $\angle 3$ 同 $\angle 4$, $\angle 2$ 同 $\angle 6$, $\angle 2$ 同 $\angle 5$ 那一個角較大?說出理由.

2. 倘三角形內一角是直角, 表明其餘兩角必是銳角.

〔提示〕 (a) $\angle 1 > \angle R$, (b) $\angle 2 < \angle R$. 圖 2.

3. 比較圖3裏面 $\angle 3$ 同 $\angle 2$, 並 $\angle 1$ 同 $\angle 4$.

4. 設 D 是三角形裏的任一點,同三頂點連結,證明在D點各角的和比三角形各角的和大.

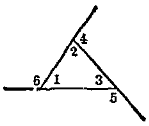


圖 1

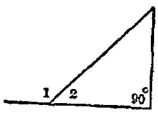


圖 2

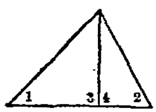


圖 3

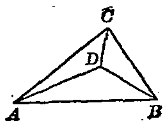
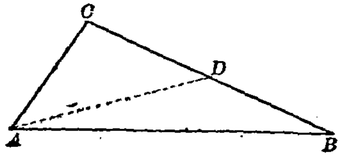


圖 4

〔提示〕 用上面的推論二.

§71. **定理.** 一個三角形的兩邊不等,所對的角不等,大角所對的邊也大.



設在 $\triangle ABC$ 裏面, $CB > CA$.

求證　　$\angle CAB > \angle B$.

[證]　在 CB 線上,截 $CD = CA$.　§33

畫　　AD.　§42,(1)

在 $\triangle ABD$ 裏, $\angle CDA > \angle B$.　§70

(△的外角比隨便那個內對角大.)

但　　$\angle CAD = \angle CDA$.　§54

(等腰△裏面,對等邊的角相等.)

$\therefore$　$\angle CAD > \angle B$.　§43,(14)

(在等式或不等式裏面,一量可用他的等量去代替)

又　　$\angle CAB > \angle CAD$,　§43,(7)

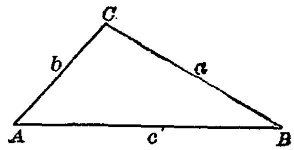
$\therefore$　$\angle CAB > \angle B$.　§43(9)

(因 $\angle CAB > \angle CAD$; $\angle CAD > \angle B$)

§72. **相反的定理.** 一個定理的假設和終結,同別個定理的假設和終結相反,這兩個定理就是相反的定理. §71的定理和下面的定理就是這樣的例. 但是這種相反的定理,有時其中一個是靠不住的. 譬如說"凡是直角都相等"是對的,反過來說"等角都是直角"就不對了.

所以證過的定理的相反的定理,還要去證明才是.

§73. **定理.** 一個三角形的兩角不等,所對的邊也不等.且大邊所對的角也大.



設 $\triangle ABC$ 裏面,$\angle A > \angle B$.

求證　　　　$a > b$.

〔證〕 下列各條必有一條是確實的.

(1) $a=b$, (2) $a<b$, (3) $a>b$.　§43,(8)

但 $\angle A$ 不等於 $\angle B$, $a=b$ 是不確實的, §54

(等腰三角形裏面,對等邊的角相等)

又 $\angle A$ 並不小於 $\angle B$, 那麼 $a<b$ 也不確實了. §71

(一個三角形的兩邊不等,所對的角也不等,
大角所對的邊也大.)

$$\therefore \quad a>b.$$

§74. **除外的證法** (Proof of Exclusion). 上面的證法是叫做除外的證法. 這個法子是在 (1) 指出在一定幾種關係裏, 至少有一種必定確實; (2) 指出不確實的各種,將他除開. 於是祇剩一種,一定就是確實的了. 所以上面的證法簡明說起來,就是:

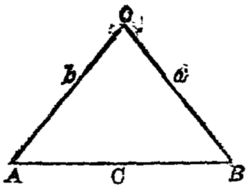
(1) $a=b$, $a<b$, $a>b$ 各條中必有一條是確實的.

(2) $a=b$, $a<b$ 都是不確實的,

那麼 $a>b$ 就是確實的了.

§75. **定理.** 三角形的兩角相等, 所對的

邊也相等,這個三角形就是等腰三角形.



設在$\triangle ABC$裏面,$\angle A=\angle B$.

求證 $a=b$

〔證〕 下列三條中必有一條是確實的.

(1) $a>b$, (2) $a<b$, (3) $a=b$. §43,(8)

但$\angle A$不大於$\angle B$,所以a不大於b. §71

(一個△的兩邊不等,所對的角也不等,大角所對的邊也大.)

依同理$a<b$也是不對的.

$\therefore \quad a=b$.

〔推論〕 等角三角形各邊都相等.

自解題

1. 若把上面的定理反過來說,應該怎樣;以前有沒有過那樣的定理?

2. 設如圖1,$\angle 1=\angle 2$,證$\triangle ABC$是等腰三角形.

又若$\angle 3=\angle 4$,或$\angle 5=\angle 6$,怎樣證他是等腰三角形?

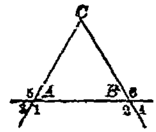


圖 1.

3. 看圖2,比較$\angle 3$同$\angle 1$,$\angle 3$同$\angle 4$,$\angle 9$同$\angle 5$,$\angle 9$同$\angle 6$,$\angle 2$同$\angle 5$,$\angle 3$同$\angle 8$.

4. 同圖裏$AB>BD$,比較$\angle 5$同$\angle 8$.

5. 若$\angle 9>\angle 4$,比較AC同CE.

6. 若$\angle 6>\angle 1$比較AB同AC.

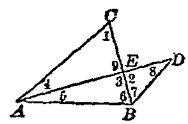
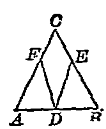


圖 2.

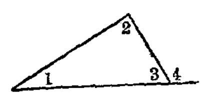
理解題

1. 在$\triangle ABC$裏,$AD=BD$,$DF=DE$,並$\angle ADF=\angle BDE$,證$\triangle ABC$是等腰三角形.



2. 凡三角形的兩隻角的和,必定比兩直角小.

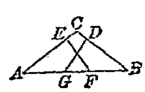
〔提示〕 如右圖



$\angle 3+\angle 4=2\angle R$;

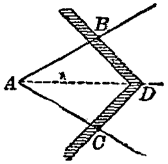
$\angle 2<\angle 4$. $\therefore \angle 3+\angle 2<2\angle R$.

3. 作等腰三角形ABC. 在同C等距離的E,D,兩點,畫AC同BC的垂線,遇底邊於G,F. 證明$EF=DG$.



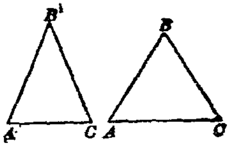
4.　在前題的圖裏面,若先知道$CD=CE$, $DG=EF$, $EF\perp AC$, $DG\perp BC$. 證明$AC=BC$.

5.　一個木匠想平分A角,用下面的法子: 截取$AB=CA$. 放上一個鋼的方尺,令$BD=CD$,如右圖. 畫AD. 這種平分的法子對麼? 試證一證.



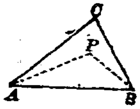
實驗題

1.　畫兩個三角形ABC同$A'B'C'$. 令 $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $\angle B>\angle B'$.量AC同$A'C'$. 再比較他們.

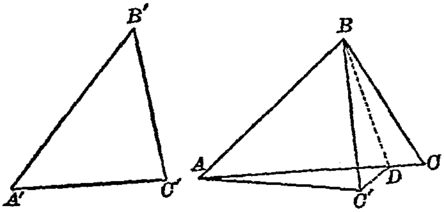


2.　作三角形ABC同$A'B'C'$使 $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $AC>A'C'$,量$\angle B$同$\angle B'$,再比較他們

3.　作$\triangle ABC$,從裏面隨便一點P畫PA, PB.用量的法子去比較$AC+BC$同$AP+BP$.



§76.　**定理.**　兩個三角形裏面,有兩邊對應相等,但是這個三角形的夾角比那個三角形的夾角大,那麼這個的第三邊也比那個的第三邊大.



設在兩$\triangle$s ABC同$A'B'C'$裏面，$AB=A'B'$，
$BC=B'C'$，$\angle B>\angle B'$。

求證　　$AC>A'C'$。

〔證〕把$\triangle A'B'C'$舉起使$A'D'$同$\triangle ABC$裏的AB相合C點和C'點在AB邊的同一側，擺平如圖。　§41,(3)

畫BD平分$\angle CBC'$遇AC於D。　§64

連接　　$C'D$　§42,(1)

那麼，在$\triangle$s BCD同$BC'D$裏面，

$BC=BC'$，$\angle CBD=\angle C'BD$，$BD=BD$。

為什麼?

$\therefore \triangle BCD \equiv \triangle BC'D$　§51

(一個△的兩邊和夾角同別個△兩邊和夾角對應相等，這兩個$\triangle$s全等。)

$\therefore$　$DC=DC'$。　為什麼?

$\therefore \quad AC=AD+DC=AD+DC'$. 爲什麼?

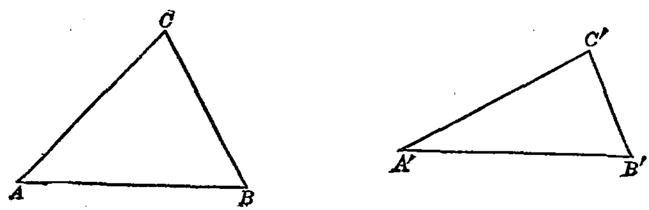
但 $\quad AD+DC'>AC'$. §41, (1)

(兩點中間,直線最短.)

$\therefore \quad AC>AC'$, 就是 $AC>A'C'$. §43, (10)

(因 $AC=AD+DC'$.)

§77. **定理.** 兩個三角形裏面,有兩邊對應相等,但這個的第三邊比那個的第三邊大,那麼這個的夾角比那個的夾角大.



設在$\triangle$s ABC 同 $A'B'C'$ 裏面,

$AC=A'C'$, $AB=A'B'$, $BC>B'C'$.

求證 $\quad \angle A>\angle A'$.

〔證〕 下面各條中,必有一條是確實的:

(1) $\angle A=\angle A'$, (2) $\angle A<\angle A'$, (3) $\angle A>\angle A'$.

爲什麼?

但 $\angle A=\angle A'$ 是不對的,因爲所設 BC 並不等於 $B'C'$.　　　爲什麼?

又 $\angle A<\angle A'$ 也不對,

因爲假使這樣,就要 $BC<B'C'$　　　§76

(兩個$\triangle$裏面,有兩邊對應相等,但是這個$\triangle$的夾角比那個$\triangle$的夾角大,那麼這個的第三邊也比那個的大.)

$\therefore\quad \angle A>\angle A'$.　　　爲什麼?

自解題

1. §76的定理與§77的定理有什麼關係?

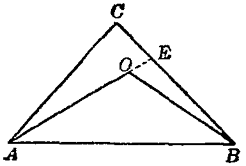
2. 上面的定理用的什麼證法?

3. $\triangle ABC$ 同 $A'B'C'$ 裏, $AB=A'B'$, $BC=B'C'$. 若要 $AC>A'C'$, $\angle B$ 同 $\angle B'$ 應該有什麼關係?

4. 在前題的兩$\triangle$裏,若要 $\angle B>\angle B'$, 對於 AC 同 $A'C'$ 什麼是我們所當知道的.

5. 在同樣$\triangle$裏,若要 $AC=A'C'$, $\angle B$ 同 $\angle B'$ 該有什麼關係? 要 $\angle B=\angle B'$, AC 同 $A'C'$ 該有什麼關係?

§78. 定理. 一個三角形兩邊的和比三角形裏隨便一點同第三邊兩端點的連結線的和大.



設 O 是 $\triangle ABC$ 裏隨便的一點.

求證　　$AC+BC>AO+BO$.

〔證〕 延長 AO 遇 BC 邊於 E 點.　§42,(2)

於是　　$AC+CE>AO+OE$　　§41,(1)

(兩點中間,直線最短.)

且　　$OE+EB>BO$.　　§41.(1)

加攏上面的不等式便得:

$AC+CE+OE+EB>AO+OE+BO$. §43,(12)

(設 $a>b, c>d$, 那麼 $a+c>b+d$.)

$\therefore$　$AC+CE+EB>AO+BO$.　§42,(11)

(設 $a>b$, 且 $m=n$, 那麼 $a-m>b-n$.)

但　　$CE+EB=BC$.　　§43,(6)

(分量的和等於全量.)

$\therefore$　$AC+BC>AO+BO$.　§43,(14)

(在等式或不等式裏面,一量可用他的等量去代替.)

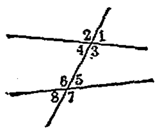
§79. **平行線**(Parallel Lines). 同在一個平面上，而且並不相遇的兩直線叫做平行線. 在平行線上的兩線段也相平行.

§80. **公理**. 證§85, §86, §87, 的定理的時候，要應用下面的一條公理:

從所給線外的一點，只能畫一條直線，同這所給線平行.

〔推論〕 兩線都同第三線平行，那麼他們便互相平行.

§81. **兩線和截線所成的角**. 同兩線相交的線叫做這兩線的截線. 這截線和被截的那兩線所成的各角，有下列各種名稱.



$\angle 4$同$\angle 5$, $\angle 3$同$\angle 6$叫**內錯角**(alternate-interior angles).

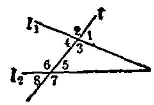
$\angle 2$同$\angle 7$, $\angle 1$同$\angle 8$叫**外錯角**(alternate-exterior angles)

$\angle 1$同$\angle 5$, $\angle 3$同$\angle 7$; $\angle 2$同$\angle 6$, $\angle 4$同$\angle 8$都叫**同位角**(Corresponding angles).

$\angle 3$同$\angle 5$，叫做截線同邊的**內角**(interior angles)；$\angle 4$同$\angle 6$也是一樣.

目 解 題

1. 在上面的圖裏,那幾對角是相等的? 還有那幾對角是補角?



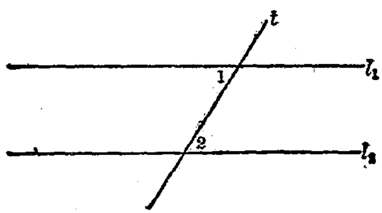
2. 有兩線相遇,畫截線如圖,試比較$\angle 1$同$\angle 5$,$\angle 7$同$\angle 3$,$\angle 6$同$\angle 3$.

3. 同圖裏,$\angle 3+\angle 5$大於或小於$2\angle R$?

4. 同圖裏,$\angle 4+\angle 6$比$2\angle R$大還是小?

5. 設$\angle 3$同$\angle 5$都是直角,l_1,l_2能夠相遇麼? 什麼緣故?

§82. **定理.** 兩線同一截線相交,若內錯角相等,這兩線必定平行.



設l_1, l_2是截線t所交的兩直線;內錯角$\angle 1=\angle 2$.

求證　　　$l_1 \parallel l_2$.

〔證〕 倘l_1與l_2不平行,那麼l_1, l_2必相遇.倘遇於t的右邊,那麼在所成的三角形裏, $\angle 1$是外角, $\angle 2$是內對角.

這樣一來,外角要與內對角相等,那是不可能的. §70

(一個三角形的外角比隨便那個內對角大.)

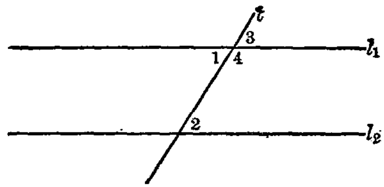
倘l_1, l_2遇於t的左邊,那麼所成的三角形裏, $\angle 2$是外角, $\angle 1$是內對角,同上一樣的理是不可能的.

$\therefore$ l_1同l_2並不相遇,便相平行.

§83. **間接的證法.** 上面的證法叫做間接的證法,假設那定理是不確實的,便至造成不可能的結果,所以像上面l_1與l_2如果相遇,而$\angle 1$和$\angle 2$仍等,那麼三角形外角定理就要推翻了.

§84. **定理.** 兩線同一截線相交,若(1)同位角相等,(2)截線同邊內角的和是兩直角,那

麼這兩線必定平行.



設 l_1, l_2 同截線 t 相交成功 $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, 並且 (1) $\angle 2 = \angle 3$, (2) $\angle 2 + \angle 4 = 2\angle s\ R$.

求證 $l_1 \parallel l_2$

〔證〕 (1) $\angle 3 = \angle 1$. §50

(兩直線相交,所成的對頂角相等.)

$\therefore \angle 1 = \angle 2$. 為什麼?

$\therefore l_1 \parallel l_2$. §82

(兩線同一截線相交,若內錯角相等,這兩線必定平行.)

(2) 據假設 $\angle 2 + \angle 4 = 2\angle s\ R$.

但是 $\angle 1 + \angle 4 = 2\angle s\ R$. §44,(2)

(一直線做外邊的兩鄰角的和等於兩直角.)

$\therefore \angle 2 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 4$. §43,(5)

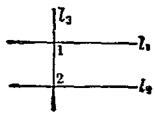
(等於同量的量相等.)

$\therefore \quad \angle 2 = \angle 1.$ §43, (2)

(等量減等量,較相等).

$\therefore \quad l_1 \parallel l_2.$ §82

〔推論〕 兩線都同一線正交,必定平行.

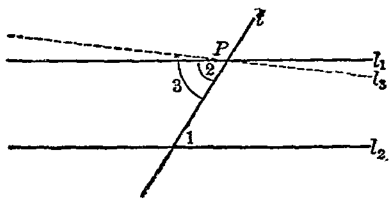


〔證〕 因$\angle 1 = \angle R$; $\angle 2 = \angle R$.

$\therefore \quad \angle 1 + \angle 2 = 2\angle R.$

所以 $l_1 \parallel l_2.$

§85. **定理.** 兩平行線同一截線相交,所成的內錯角相等.



設 $l_1 \parallel l_2$ 同截線 t 相交,所成的內錯角是 $\angle 1$ 同 $\angle 2$.

求證 $\angle 1 = \angle 2.$

〔證〕 假定 $\angle 1$ 不等於 $\angle 2$.

過 l_1 同 t 的交點 P 畫 l_3, 令 $\angle ? = \angle 1.$ §61

那麼　　$l_3 \parallel l_2$.　　§82

(兩線同一截線相交,若內錯角相等,這兩線必定平行.)

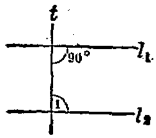
但依假設 $l_1 \parallel l_2$, 那麼過 P 點便有兩線都平行於第三線,這是不可能的.　　§80

(從已知線外的一點,只能畫一直線和他平行.)

所以"$\angle 1$不等於$\angle 2$"的假定是背理的.

$$\therefore \quad \angle 2 = \angle 1.$$

〔推論一〕 若一線同兩平行線的一條正交,也必同其餘一條正交.



〔提示〕 證右圖內 $\angle 1 = \angle R$.

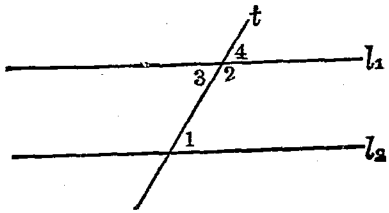
〔推論二〕 若一線和兩平行線的一條平行也必同其餘一條平行.

§86. **定理.** 若兩平行線同一截線相交,那麼(1)同位角相等.

(2)截線同旁內角的和等於二直角.

設 $l_1 \parallel l_2$, 同截線 t 相交,

求證 (1) $\angle 1 = \angle 4$,　(2) $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle R$.



〔證〕 (1)　　$\angle 1 = \angle 3.$　　§85

(兩平行線同一截線所成的內錯角相等.)

$\angle 4 = \angle 3.$　　§50

(兩直線相交,所成的對頂角相等.)

$\therefore \angle 1 = \angle 4.$　　§43, (5)

(等於同量的量相等.)

(2)　　$\angle 2 + \angle 3 = 2\angle s\ R.$　　§44, (2)

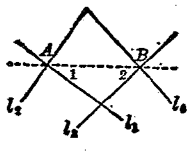
(一直線做外邊的兩隣角的和,等於兩直角.)

但　　$\angle 3 = \angle 1.$　　§85

$\therefore \angle 2 + \angle 1 = 2\angle s\ R.$　　§43, (14)

(等式或不等式裏,等量可以代等量.)

〔推論〕 若兩線垂直於別的相交二線,這兩線必不平行.

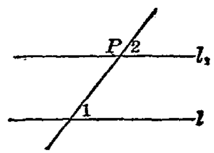


使 $l_1 \perp l_2$, $l_3 \perp l_4$, 畫截線 AB.

證明 $\angle 1 + \angle 2$ 比 $2\angle s\ R$ 小.

注釋:——細察§82的定理同§84的定理的證法,並不須根據公理,而§85,§86的定理,和§88的定理,就非那條公理,便無從證起;這不是很有趣味的嗎?

§87. **作圖題.** 過所給點作一直線同所給線平行.



給了P點,在l線外.

求作一直線過P同l平行.

〔作法〕 過P畫一直線同l成一個適當的$\angle 1$.

過P再畫一線,令$\angle 2=\angle 1$, §61

那麼 $l_1 \parallel l$. §84,(1)

(兩線同一截線相交,若同位角相等這兩線必定平行.)

自解題

1. 兩對鐵道互相穿過,如圖1,裏面那幾個角相

等,那幾對角是補角?

2. 在同圖裏,若$\angle 1=\angle 120°$,找出$\angle 3$, $\angle 9$, $\angle 11$, $\angle 5$,各是多少度.

3. 把一張紙依AB摺攏(圖2.)比齊AD同AC,要使$\angle BAC=\angle BAD$. 證明$\angle BAD$是一個直角.

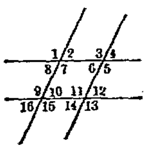


圖 1.

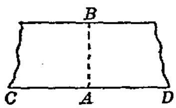


圖 2.

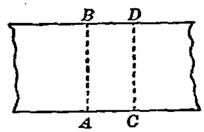


圖 3.

4. 要在紙上摺兩條平行的痕跡(圖3),應該怎樣摺法?

5. 怎樣可以用一根直尺和一塊三角板來畫平行線? (指出AB, CD是平行的,圖4.)

6. 丁字尺怎樣可以用來畫平行線? (圖5.)

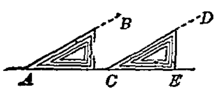


圖 4.

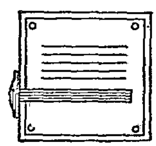


圖 5.

理 解 題

1. 在下面圖1裏面,$\angle BAC=\angle 1+\angle 2$. 證明$l_1 \parallel l_2$.

2. 若平行線被一截線所截，他的同位角的平分線，也必平行。(看圖2.)

3. 如圖3, $l_1 \parallel l_2$, $AO=OB$, 求證 $CO=OD$。

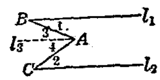


圖 1.

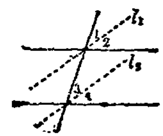


圖 2.

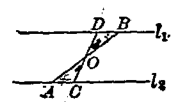


圖 3.

4. 設 l_1, l_2 是平行線; $l_3 \perp l_2$, $l_4 \perp l_1$, 求證 $l_3 \parallel l_4$。(圖4.)

5. 如 $l_1 \parallel l_2$, $\angle a = 5 \times \angle b$, 找出 $\angle c$ 同 $\angle d$。(圖5.)

6. ABC 是隨便一個三角形。平分 BC 於 D, 畫 AD 並延長他，使 $DE=AD$。畫 CE。求證 $CE \parallel AB$。(圖6.)

〔提示〕證 $\triangle CED \cong \triangle ABD$

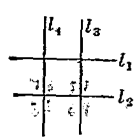


圖 4.

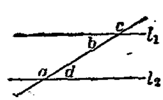


圖 5.

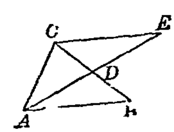


圖 6.

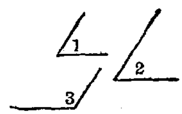
實驗題

1. 作一個 $\triangle ABC$, 使 $\angle A=60^\circ$, $\angle B=70^\circ$, 量 $\angle C$。問這三隻角的總和是多少?

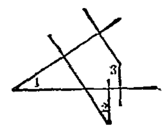
2. 作一個 $\triangle ABC$, 使 $\angle A=110^\circ$, $\angle B=30^\circ$, 量 $\angle C$。問這三隻角的總和是多少?

3. 畫好幾個三角形,每個的角,都去量一下,看各三角形裏面各角的總和,是不是都一樣?

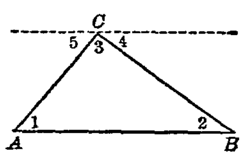
4. 畫兩隻角,令這隻角的邊恰和那隻的平行.量那些角.在右圖裏面,$\angle 1$同$\angle 2$;$\angle 1$同$\angle 3$有什麽關係?



5. 畫兩隻角,令這角的兩邊,各同那角的兩邊正交,量那些角.圖裏$\angle 1$同$\angle 2$,$\angle 1$同$\angle 3$有什麽關連?



§88. 定理. 三角形裏各角的和等於兩直角.



設 $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ 是 $\triangle ABC$ 裏的三隻內角.

求證 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2\angle_s R$.

〔證〕 過 C 畫直線同 AB 平行,成功 $\angle 4$ 同 $\angle 5$. §87

那麽　　$\angle 1 = \angle 5$; $\angle 2 = \angle 4$. §85

(兩平行線同一截線相交,所成的內錯角相等.)

但 $\angle 5+\angle 3+\angle 4=2\angle s\, R.$ §44,(6)

(連續隣角最外的兩邊,在一直線上,他們的總和等於兩直角.)

$\therefore \angle 1+\angle 3+\angle 2=2\angle R.$ §43,(14)

(在等式或不等式等裏面,一量可用他的等量去代替.)

〔推論一〕 在直角三角形裏面,有兩個銳角,他們的和,是一直角.

〔推論二〕 一個三角形裏的兩角,和別個三角形裏的兩角對應相等,其餘一角也必相等.

〔推論三〕 一個直角三角形裏面的一隻銳角,等於別個直角三角形裏面的一隻銳角,其餘的兩銳角也相等.

〔推論四〕 一個三角形的外角等於他的兩個內對角的和.

〔提示〕 $\angle 3+\angle 4=2\angle R,$

又 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=2\angle R.$

目 解 題

1. 直角三角形裏的一銳角是40°. 問別一銳角是幾度?

2. 三角形裏有二隻角都是60°. 其餘一隻角有多少度?

下列的題目裏面,ABC是三角形: 找出$\angle C$的度數?

3. $\angle A=40°$, $\angle B=80°$　　5. $\angle A=50°$, $\angle B=50°$

$\angle C=$ [illegible]　　$\angle C$ 80°

4. $\angle A=70°$, $\angle B=70°$　　6. $\angle A=45°$, $\angle B=45°$

$\angle C=40°$.　　$\angle C=90°$

理 解 題

1. 照下面圖1,證§88的定理.

〔提示〕 $BE \parallel AC$,於是$\angle 4=\angle 2$, $\angle 5=\angle 1$.

2. 用圖2,再證同定理.

〔提示〕 證$\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, $\angle 5=\angle 6$.

3. 如圖3, $AB=BC$, 證$\angle A=\frac{1}{2}\angle DBC$.

4. 用§88的定理,去討論§63的作法.

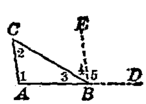


圖 1.

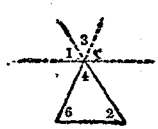


圖 2.

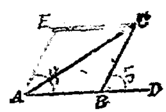
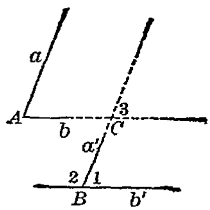


圖 3.

§89. 定理. 兩隻角的邊彼此平行,那麼

這兩角必相等或互為補角.



設 a, b 是 $\angle A$ 的邊; a', b' 交於 B; $a', \parallel a$, $b', \parallel b$.

求證 a', b' 所成的兩隻鄰角中間有一隻等於 $\angle A$, 餘一隻是 $\angle A$ 的補角.

〔證〕 延長 b 同 a' 相交於 C 點.　§42, (2)

那麼　$\angle A = \angle 3$,　$\angle 3 = \angle 1$.　§86, (1)

(兩平行線同一截線相交,所成的同位角相等.)

$\therefore\quad \angle A = \angle 1$.　§43, (5)

(等於同量的量相等.)

但　$\angle 1 + \angle 2 = 2\angle s\ R$.　§44, (2)

(一直線做外邊的兩隣角的和,等於兩直角.)

$\therefore\quad \angle A + \angle 2 = 2\angle s\ R$.　§43, (14)

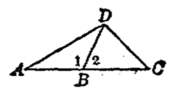
(在等式或不等式裏面,一量可用他的等量去代替.)

便是$\angle A$同$\angle 2$互爲補角.

自解題

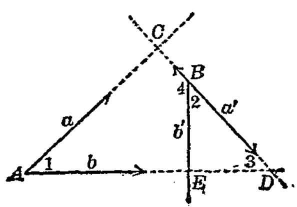
1.　兩個三角形的各角的總和共等於多少?

2.　在三角形ABD同BCD裏,$\angle 1$同$\angle 2$互爲補角.　$\angle A$同$\angle C$也互爲補角嗎?　何以呢?



3.　$\triangle ABC$同$A'B'C'$裏,$AB \parallel A'B'$,$BC \parallel B'C'$,$CA \parallel C'A'$,各角中間有什麼關係麼?(看§88的推論二同§89)

§90.　定理.　兩隻角的邊,彼此正交,那麼兩角必相等或互爲補角.



設a,b是$\angle A$的邊,a',b'遇於B;$a' \perp a$, $b' \perp b$.

求證　a',b'所成的兩隻鄰角裏,有一隻等於$\angle A$,餘一隻是$\angle A$的補角.

[證]　延長a同a'交於C點,再延長b交

b', a' 於 E, D. §42,(2)

那麼 $\triangle ACD$ 同 BED 都是直角三角形.

$\therefore \quad \angle 1+\angle 3=\angle R;\ \angle 2+\angle 3=\angle R.$

§88〔推論一〕

(在直角三角形裏兩個銳角的和是一直角.)

$\therefore \angle 1+\angle 3=\angle 3+\angle 2.$ 何以呢?

$\therefore \angle 1=\angle 2.$ 何以呢?

但 $\angle 2+\angle 4=2\angle s\ R.$ 何以呢?

$\angle 1+\angle 4=2\angle s\ R.$ §43,(14)

(在等式或不等式裏面,一量可用他的等量去代替.)

理 解 題

1. 已知 $\triangle ABC$ 同 $A'B'C'$ 裏, $AB\perp A'B'$, $BC\perp B'C'$, $CA\perp C'A'$, 求他們各角的關係.

2. 如下面圖1, $\angle 2-\angle 1=15°$, $\angle 4=120°$. 問三角形的各角各是幾度?

3. 若在圖2裏面, $AB=AC$. $\angle A=60°$ 的時候, $\angle 1$ 是幾度? 又若 $\angle A=40°$, $\angle 1$ 是多少? 證明無論 $\angle A$ 有多少大, 終究 $\angle 1=90°+\frac{1}{2}\angle A$.

4. 試證等腰三角形靠頂點的外角的平分線, 必

同他的底平行.

5.　一個水手划船,從 A 處向 AD 方向出發,原來知道 $\angle DAC$ 是 40°. 後來划到 64 英里的地方,他找出 $\angle DBC$ 變爲 80° 了. 他於是斷定 BC 的距離,必定也是 64 英里. 這話對不對? (看圖 3.)

〔提示〕 證明 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

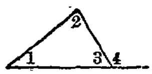


圖 1.

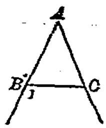


圖 2.

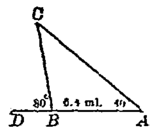


圖 3.

6.　設等腰三角形 ABC 的底角平分線 AD 同 BE 相交於 O,如圖 4,能够成功那幾對等角? 幾對全等三角形? 幾對相等的線段?

7.　設等腰三角形 ABC 內, D 爲底上的一點,而且 $\angle 1 = \angle 2$, 試問有沒有一個 D 點的地位,能令 $DE = DF$ 的麼? (圖 5.)

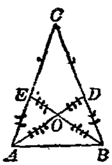


圖 4.

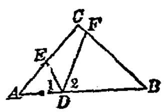


圖 5.

8. 在等腰直角$\triangle ABC$裏面,兩銳角平分線相遇於O,找出所成的$\angle 1$是多少度? (圖 6.)

9. 在下面圖 7 裏, ABC是一個等邊三角形, $AD=BE=CF$. 比較$\triangle DBE, ECF, FAD$. 證明DEF也是一個等邊三角形.

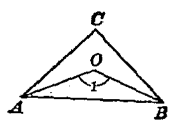


圖 6.

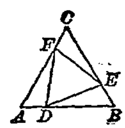
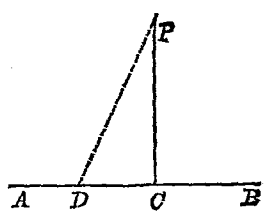


圖 7.

§91. 定理. 從一點到一直線的各線中,垂線最短.



設$PC \perp AB$, PD是P到AB的斜線.

求證 $PD>PC$.

〔證〕 $\angle PCD>\angle PDC$. §88〔推論一〕

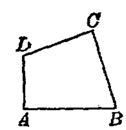
(在直角三角形裏面,兩個銳角的和是一直角.)

$$\therefore \quad PD > PC. \qquad \S 73$$

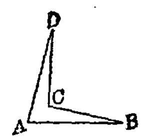
(△的兩角不等,所對的邊也不等;大角所對的邊也大.)

一點到一線的距離,通常都指最短的說,所以就是垂線的長.

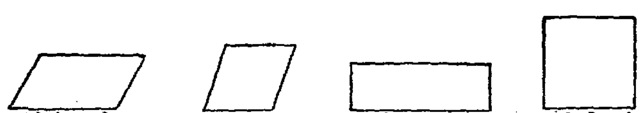
§92. 四邊形同他的各部分. 四條線段所圍成的平面形叫做**四邊形**(Quadrilateral).



那線段叫做四邊形的邊,邊同邊相遇的點叫做頂點;如圖AB, BC是鄰邊,AB,CD就是對邊;A,B是鄰頂點,A,C就是對頂點,聯結對頂點的線叫做**對角線**(diagonal).



含有凹角如$\angle BCD$的那種四邊形,本書裏不研究.

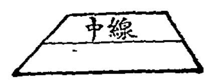


§93. 平行四邊形(Parallelogram). 相對的兩邊互相平行的四邊形叫做平行四邊形,

長方形(Rectangle)是各角都是直角的平行四邊形. **正方形**(Square)是各邊都相等的長方形. **斜長方形**(Rhomboid)是沒有直角的平行四邊形. **斜方形**(Rhombus)是各邊都相等的斜長方形.

§94. **梯形.** 只有一對邊平行的四邊形,叫**梯形**(trapezoid).

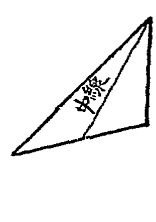
兩不平行的邊倘若相等,就叫**等腰梯形**.



那平行的兩邊都叫做底.

平行四邊形或梯形的高,就是兩底間的垂直距離. 兩邊中點的聯線叫**中線**(Medium).

§95. **三角形的中線.** 三角形的頂點和對邊中點,聯結而成的線段,就是這個三角形的中線.



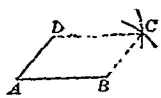
目 解 題

1. 凡正方形都是長方形嗎? 反過來說,凡長方形都是正方形嗎?

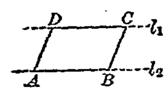
2.　凡正方形同長方形都是平行四邊形麼？　反過來說對不對？

實驗題

1.　如圖作 $ABCD$ 四邊形，令 $DC=AB$, $BC=AD$。用§84(2)去試驗，是不是 $BC \parallel AD$, $DC \parallel AB$，就是，這個四邊形是平行四邊形嗎？

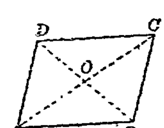


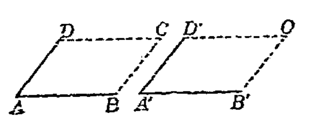
2.　在平行線 l_1, l_2 上，截取相等線段 AB 同 CD。如圖畫 AD 同 BC。問 $ABCD$ 是不是平行四邊形。



3.　在題一裏面作對邊都相等，題二裏面兩對邊等長且平行，這些是不是作平行四邊形的充分條件？

4.　小心作一個大的平行四邊形 $ABCD$。就是令 $AB \parallel DC$, $BC \parallel AD$，畫對角線 AC, BD，相交在 O 點；試比較(1) AB 同 DC，AD 同 BC；(2) AO 同 OC，BO 同 OD；(3) $\triangle ABC$ 同 $\triangle ADC$。(下邊左圖)



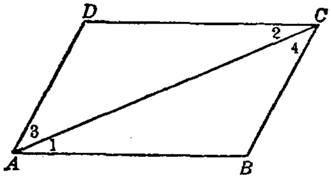


5.　作平行四邊形 $ABCD$, $A'B'C'D'$，如上邊右圖，令

$AB=A'B'$, $AD=A'D'$, $\angle A=\angle A'$ 試量 BC 同 $B'C'$, CD 同 $C'D'$, $\angle B$ 同 $\angle B'$, $\angle C$ 同 $\angle C'$, $\angle D$ 同 $\angle D'$, 再比較他們.

§96. 定理. (1)若兩對對邊都相等.

(2) 若兩對邊相等且平行,那麼這四邊形便是平行四邊形.



(1)設 $ABCD$ 是四邊形, $AB=DC$, $BC=AD$.

求證 $ABCD$ 是一個▱.

〔證〕 畫對角線 AC, 就成功兩個三角形 ABC 同 CDA.

因 $AC=AC$, $AB=CD$, $BC=AD$. 爲什麼?

$\therefore \quad \triangle ABC \equiv \triangle CDA$. §56

(一個△的三邊同別個△的三邊對應相等,這兩個△全等.)

$\therefore \angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$. 爲什麼?

$\therefore AB \parallel CD,\quad BC \parallel AD.$ §82

(兩線同一截線相交,若內錯角相等,這兩線必定平行.)

$\therefore ABCD$ 是 ▱. §93

(2) 設 $ABCD$ 是四邊形, $AB \parallel CD$, $AB=CD$.

求證　$ABCD$ 是一個▱.

〔證〕　$\triangle ABC$ 同 CDA 裏面.

$AB=CD,\quad AC=AC.$ 為什麼?

$\angle 1=\angle 2.$ §85

(兩平行線同一截線相交,所成的內錯角相等.)

$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle CDA.$ §51

(一個△的兩邊和夾角,同別個△的兩

邊和夾對應相等,這兩個△全等.)

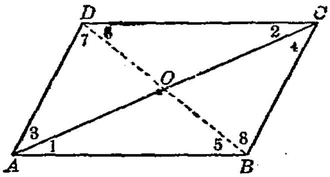
$\therefore \angle 3=\angle 4,\quad AD \parallel BC.$ 為什麼?

$\therefore ABCD$ 是平行四邊形. §93

§97. **定理**. 在平行四邊形裏面, (1)對角線分他成兩個全等三角形.

(2)對邊對角都相等.

(3)兩對角線互相平分.



設 $ABCD$ 是平行四邊形對角線是 AC, BD.

(1) 求證　$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$.

〔證〕　$\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4,$　§85

(兩平行線同一截線交,所成的內錯角相等.)

$\therefore\ \triangle ABC \equiv \triangle ADC$.　§53

(一個△的兩角和夾邊,同別個△的兩角和夾邊,對應相等,這兩個$\triangle$s全等.)

(2) 求證　$AB = CD, BC = AD$.

並且　$\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$.

〔證〕　在全等$\triangle$s ABC 同 ADC 裏,　(1)

$AB = CD, BC = AD$.　§30

(全等形的對應部分相等.)

又　$\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$.　爲什麼?

$\therefore\ \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$.　§43, (1)

(等量加等量,和相等.)

就是 $\angle A=\angle C.$

同樣可以證明 $\angle B=\angle D.$

(3) 求證 $AO=OC, BO=OD.$

〔證〕 ⓈABO 同 CDO 裏, $AB=CD$, 為什麼?

並且 $\angle 5=\angle 6, \angle 1=\angle 2.$ 為什麼?

$\therefore \triangle ABO\equiv\triangle CDO.$ §53

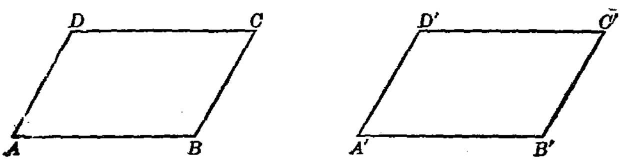
$\therefore AO=OC, BO=OD.$ 為什麼?

〔推論一〕 若兩平行線同別兩平行線相交,就互相截成兩對各相等的線段.

〔推論二〕 平行線間的距離,處處相等.

〔提示〕 畫同兩平行線垂直的截線.

§98. **定理.** 一個平行四邊形的一角同兩鄰邊,等於別個平行四邊形的一角同兩鄰邊,這兩平行四邊形全等.



設 ▱$ABCD$ 同 $A'B'C'D'$ 裏, $AB=A'B'$,

$AD=A'D'$, $\angle A=\angle A'$.

求證 $\square ABCD \equiv \square A'B'C'D'$.

[證] 把 $\square ABCD$ 放在 $\square A'B'C'D'$ 上,使 $\angle A$ 同 $\angle A'$ 相合, AB 就落到 $A'B'$ 上, AD 落在 $A'D'$ 上. §41, (3)

(一個形可以不改變他的形狀和大小,移到別個形上面.)

於是 B 落在 B' 上, D 落在 D' 上.

(因所設 $AB=A'B'$, $AD=A'D'$.)

現在 $\angle B+\angle A=2\angle s\, R$. §86

(兩平行線同一截線相交,截線同旁內角的和等於兩直角.)

$\angle B'+\angle A'=2\angle s\, R$. §86

但 $\angle A=\angle A'$, 所設

$\therefore$ $\angle B=\angle B'$. §44, (4)

(同角或等角的補角相等.

$\therefore$ BC 和 $B'C'$ 相合.

因 $BC=AD$, $A'D'=B'C'$. §97, (2)

(在平行四邊形裏面,對邊對角都相等.)

$\therefore \quad BC=B'C'$、　§43, (5)

(因所設 $AD=A'D'$.)

$\therefore$ C恰落在C'上.

CD同$C'D'$相合.　§41, (2)

(兩線段的兩端點相合,就全線相合.)

$\therefore \quad \square ABCD \equiv \square A'B'C'D'$　§41, (4)

(兩形相合就全等.)

實驗題

1. 拿一張有橫格子的紙,畫一條線穿過那些格子,這條線在每格中間的各段,有什麼關係.

2. 畫離開一吋寬的幾條平行線,再隨便畫一條截線. 比較每相鄰兩平行線在這截線上所割各線段的長. 再畫幾條截線試試. 說出一個似乎可用題1和本題去判定的命辭來. (圖1.)

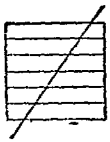


圖 1.

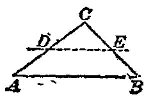


圖 2.

3. 作 $\triangle ABC$, 從 AC 的中點 D 畫 $DE \parallel AB$, 遇 BC 於 E, 量 BE 同 EC. 比較他們的長短. 說出一個似乎可

用本題判定的命辭.（圖2.）

4.　畫梯形,並從一邊的中點畫一線同底平行,問這線平分梯形那邊嗎. 說出一個似乎可以用這試驗判定的命辭來.

5.　在前面圖2裏,若連結 AC,BC 的中點 D,E, 那麼 DE 是不是同底邊平行. 說出一個似乎可以判定的命辭來.

6.　畫 $\triangle ABC$, 連結 AC,BC 的中點 D,E. 比較 DE 同 AB 的長短,同樣多畫幾個三角形做試驗. 說出一個似乎可從這個試驗得來的命辭.

7.　作一個底是6吋,4吋的梯形. 畫中線,量他的長短,再同兩底的和比較. 再作底是5吋,3吋的梯形做試驗. 這裏邊又似乎有什麼命辭好說麼?

8.　畫一個不等邊三角形,聯各邊的中點,把所成的四個三角形剪開來,再一個一個疊起來,比較他們的大小.（圖3.）

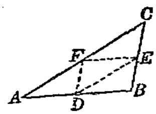


圖 3.

目 解 題

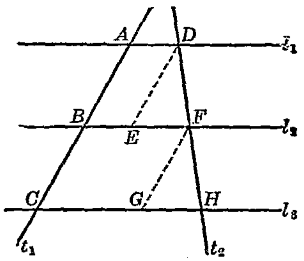
1.　下一個平行四邊形的定義.

2.　從平行四邊形定理,試舉出他的幾個性質.

3.　全等長斜方形定理,是用什麼證法. 前面幾

個定理曾用同樣法子證過麼?

§99. **定理.** 幾條平行線若在截線上截取相等的線段,那麼也可在別的一截線上截取相等的線段.



設 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ 在截線 t_1 上截取 $AB = BC$.

求證　截線 t_2 上的 DF 也等於 FH.

〔證〕　畫 DE, FG 同 t_1 平行.　§87

那麼　$\angle DEF = \angle ABE = \angle BCG = \angle FGH$.

§86, (1)

(兩平行線同一截線相交,所成的同位角相等.)

因　$DE \parallel FG$.　§80, 推論

(兩線都同第三線平行,那麼他們便互相平行.)

$\therefore$　$\angle EDF = \angle GFH$.　§86, (1)

又　　$DE=AB=BC=FG.$　§97.(推論一)

(若兩平行線同別兩平行線相交,就互相截成兩對相等的線段.)

$\therefore\quad \triangle DEF \equiv \triangle FGH.$　§53

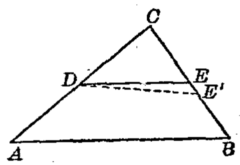
(一個△的兩角和夾邊,同別個△的兩角和夾邊對應相等,這兩個△全等.)

$\therefore\quad DF=FH.$　§30

〔推論一〕　同三角形的底平行的線,若是平分一邊,也必平分別一邊

〔推論二〕　同梯形的底平行的線,若是平分一邊,也必平分別一邊.

〔推論三〕　聯結三角形兩邊中點的線段,必和底邊平行.

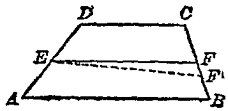


〔證〕　聯 CA,CB 的中點得 DE. 設 DE 不同 AB 平行,畫 DE' 同他平行.

那麼　　$CE'=E'B$.

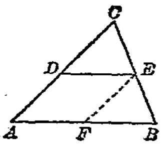
但 $CE=EB$, 所以 E 與 E' 合, DE 便同 AB 平行.

〔推論四〕 聯結梯形兩邊中點的線段,同底邊平行.



〔提示〕 證法同推論三一樣.

〔推論五〕 聯結三角形兩邊中點的線段,等於第三邊的一半.



〔證〕 設 DE 是聯結 AC, BC 的中點的線;畫 $EF \parallel DA$. 用推論三證法,得 $DE \parallel AB$. 在 $\triangle BFE$, EDC 裏面, $\angle B=\angle DEC$, $\angle FEB=\angle C$.

因　　$BE=EC$.

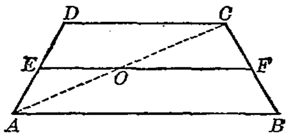
$$\therefore \triangle BFE \equiv \triangle EDC;\ FB=DE.$$

從§97　$DE=AF$,　$DE=FB$.

所以　　$DE=\frac{1}{2}AB$.

〔推論六〕 聯結梯形兩邊中點的線段,等

於兩底和的一半.



〔證〕 畫對角線 AC 遇中線於 O, 那麼

$EF \parallel AB,\ EF \parallel DC,$ (推論四)

$\therefore O$ 是 AC 的中點. (推論一)

$\therefore EO=\frac{1}{2}DC, \quad OF=\frac{1}{2}AB.$ (推論五)

$\therefore EF=\frac{1}{2}(AB+DC).$

目 解 題

1. 聯結 $\triangle ABC$ 內各邊的中點, 設 $AB=22$ 單位, $BC=14$ 單位, $AC=28$ 單位. 找出 DE, DF, 同 EF. (圖1.)

2. 如圖2過 $\triangle AB$ 各頂點,畫和對邊平行的各線.

(a) $ABCD$ 是什麼形?

(d) 比較 AB 同 CD; BD 同 AC.

(c) 同樣比較 AB 同 CF; BC 同 AF; AC 同 BE; CB 同 AE.

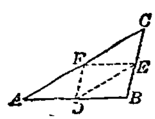


圖 1.

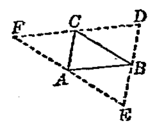


圖 2.

3. 上面圖2裏面,

(a) BC等於EF的一半嗎? 如果這樣,什麼緣故?

(b) 同樣比較AC同ED,AB同FD.

4 又在上邊圖2裏面,若$AB=3$吋,$BC=3$吋半,$AC=2$吋半,找出DF, FE同ED.

5. 用平常的尺,我們怎樣去測定幾條平行線是不是等距離? 是不是一定要使這尺同這些線成直角,才可以測得出來嗎?

6. 倘梯形的一底是五吋,又一底是二吋,中線的長是多少?

7. 倘梯形的一底是六吋,中線是五吋,其他一底是多少?

理解題

1. 聯結四邊形相鄰各邊的中點,證明所成的必是一個平行四邊形. (圖1.)

〔提示〕 證EF同GH都平行於DB,所以也互相平行;同法可證$EH \parallel FG$.

2 三等分等邊三角形的每邊,照圖2畫線,試證$\angle A=\angle F=\angle B$.

〔提示〕 $\angle A=60^\circ$, $AD=AE$. $\therefore \angle EDA=\angle FDG=60^\circ$,

同樣$\angle DGF=60°$. $\therefore \angle F=60°$.

3. 幾根棒用釘連住,可以自由活動,如下邊圖3,假若$AB=AC$,證明不管BC傾斜到甚麼地步,那垂直距離AD同CE總相等.

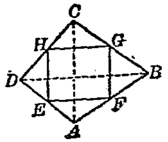


圖1.

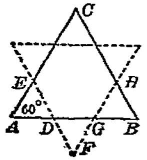


圖2.

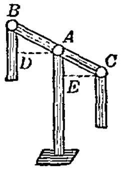
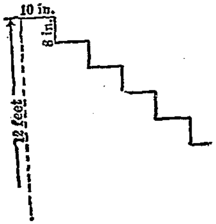


圖3.

4. 有樓梯從下到上,高十二呎. 每步八吋高,十吋寬. 試問要多少長的地氈才可以把這梯鋪滿,鋪到樓還多十吋?



5. ABC是等腰$\triangle$,D是底邊AB的中點,$DE \parallel BC$,$DF \parallel AC$,畫EF並證四個三角形都相等.(圖4.)

6. $\square ABCD$裏面,E,F是AB,CD的中點,證明AF,CE三等分DB.(圖5.)

7. 從▱的頂點,畫對角線的垂線,求證這垂線都相等.(圖 6.)

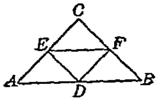


圖 4.

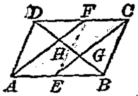


圖 5.

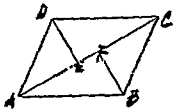


圖 6.

8. 若$l_1 \parallel l_2$, $\angle 1$同$\angle 3$的平分線有什麼關係? $\angle 3$同$\angle 4$, $\angle 1$同$\angle 2$又怎樣? (圖 7.)

9. 如下面圖 8 裏面, l_1, l_2兩平行線被AB所截, AC和AD平分A處的兩內角. 證明CBA, DBA都是等腰三角形. 比較CB同BD.

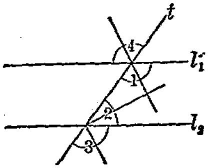


圖 7.

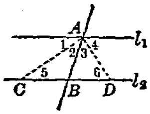


圖 8.

§100. 多邊形同他的各部分. 多數線段所圍成的平面形叫**多邊形**(Polygon). 那線段都叫做邊. 邊的總和叫**周界**(Perimeter). 邊同邊相遇的點叫**頂點**. 不相鄰的兩個頂點的聯

結線如AC叫做**對角線**.

多邊形有多少角,便有多少邊.

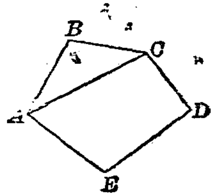


圖 1.

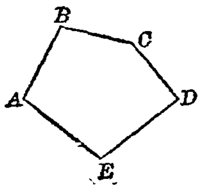


圖 2.

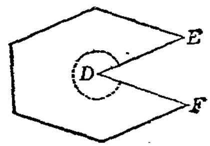


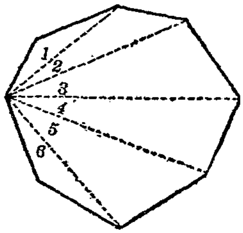
圖 3.

§101. 多邊形的種類. 向裏開口的多邊形如圖 3 叫**凹多邊形**(Convex polygon). 不然,就叫**凸多邊形**(Concave polygon) 圖1, 圖2, 都是.

各角都等的,叫做等角多邊形,各邊都等的,叫做等邊多邊形. 角又等,邊又等的,叫做**正多邊形**(Regular Polygon).

五條邊的形叫**五邊形**(Pentagon),六條邊的叫**六邊形**(Hexagon),八條邊的叫**八邊形**(Octagon). 十條邊的叫**十邊形**(Decagon).

§102. 定理. 若多邊形的邊數是n,那麼這多邊形裏邊各角的和等於$(2n-4)\angle s\ R$.



〔證〕 聯結這多邊形的一頂點同其餘不相鄰的各項點,成功許多三角形,那麼這些三角形裏邊各角的總和等於那多邊形裏邊各角的和。 §43,(6)

(分量的和,等於全量.)

若這多邊形有 n 邊,所成的三角形必定是 $(n-2)$ 個.

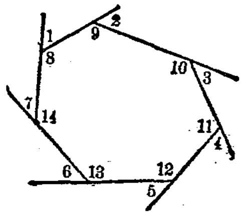
$(n-2)$ 個三角形裏邊各角的總和就是 $2(n-2)\angle s\, R=(2n-4)\angle s\, R.$ §88

(三角形裏各角的和,等於兩直角.)

∴ 多邊形裏邊各角的和,等於

$$(2n-4)\angle s\, R.$$

§103. 定理. 延長多邊形各邊所成外角的和等於四直角.



設一個多邊形的每邊都延長.

求證 外角的和等於$4\angle_s R$.

〔證〕 在每個頂點的外角同裏邊的角的和,等於$2\angle_s R$. 爲什麽?

所以在n個頂點的外角同裏邊各角的和就是$2n\angle_s R$.

但裏邊各角的和等於$(2n-4)\angle_s R$. §102

(若多邊形的邊數是n,那麽這多邊形裏邊各角的和等於$(2n-4)\angle_s R$.)

∴ 外角的總和,便是

$$[2n-(2n-4)]\angle_s R=4\angle_s R.$$

目 解 題

1. 四邊形各角的和等於多少直角?

2. 五邊形各角的和等於多少直角? 等角五邊

形的一隻角是多少度。

3.　等角五邊形的外角是多少度?

4.　等角十邊形的外角是多少度?

§104. **證法的研究.** 前面講過的許多定理,大多數是從假設推到終結,一步步照着論理學的方法去證明出來的,這就叫做**直接證法**(Direct Proof).

所以求證命辭D,我們就先從已知命辭A,證明從A可以推出B,從B可以推出C,從C可以推出D,這D就證明了.

除了直接證法以外,還有間接證法同除外的證法,我們已經曉得了;但是還有一種證法,也很重要,下面就講.

§105. **證的分析法.** 一個定理的證,有時可以從終結反推到假設去求出來,這樣反推的法子,叫**分析法**(Analysis).

譬如我們要證命辭D,先查出他是從命辭C來的,而C又是從B來的,B又是從A來的.倘

若 A 是假設,那麼證 D 的時候,自然可以從 A 證 B, 從 B 證 C, 從 C 便可以證 D 了.

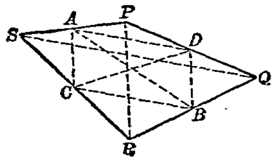
所以分析法是一種工具, 可以用他找出直接證法.

下面舉一個例給你們仔細研究一下:

聯結四邊形各對邊的中點的線段,互相平分.

設 AB, CD 是聯結 $PQRS$ 四邊形對邊中點的線段.

求證 AB,CD 互相平分.



〔證〕 畫 PR, SQ, AD, DB, BC 同 CA.

若 $ABCD$ 是▱, 那麼 AB, CD 彼此平分; 又若 $AD \parallel CB$, $AC \parallel DB$, 那麼 $ADBC$ 就是▱了.

依§80的推論, $AD \parallel CB$ (因為都同 SQ 平行).

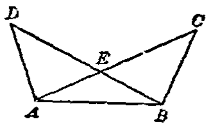
同樣 $AC \parallel DB$. §80.(推論)

$\therefore ADBC$ 是▱,就是AB, CD互相平分.

§106. 分析法進一步的研究. 用分析法求證,最好須把可以證明每一步的法子都舉出,再用實驗去決定那一條最適用;看下面的例,就可以明白.

例一. 設 $AD=BC, \angle BAD=\angle ABC$.

求證 $CE=DE$.



分析: 要證兩線段相等,除非:

(1) 他們是全等形的對應邊.

(2) 他們是等腰三角形裏等角的對邊.

(3) 他們是平行四邊形的對邊.

從題目裏邊看起來,知道祇有(1)可以用,所以我們要證明 $\triangle BCE \equiv \triangle ADE$.

要證兩三角形全等,除非:

(1) 有兩邊同夾角對應相等.

(2) 有兩角同夾邊對應相等.

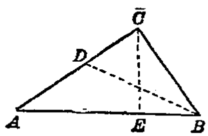
(3) 有三邊對應相等.

已經知道$AD=BC$,所以就要證$\angle D=\angle C$和 $\angle DAE=\angle EBC$;我們先證$\triangle BAD\equiv\triangle ABC$.於是$\angle EAB=\angle ABE$.

$$\therefore \angle BAD-\angle BAE=\angle ABC-\angle ABE,$$

就是 $$\angle DAE=\angle EBC.$$

這樣一來,證法就找着了.



例二. 若圖裏$AB>AC$, $BE=CD$. 證$BD>CE$.

分析: 證兩線段不等,便須表明

(1) 他們是三角形裏不等角所對的邊.

(2) 他們是兩個兩邊對應相等,夾角不等的三角形的第三邊.

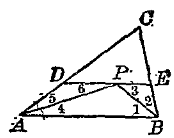
仔細一看,立刻便知 (2) 是合於我們所需要的條件. 換句話說,就是$\triangle$s BCD, CEB裏面,$BC=BC, BE=CD, \angle DCB>\angle EBC$ ($\triangle ABC$裏面

不等邊的角.)

所以這證法就也找着了.

§107. 幾何作圖的解析法. 解決幾何作圖題,也有一個解析的方法,就是先作一個草圖,假定他就是所作的,再用解析法研究他同已給部分的別種關係.

例一. 作一線同一個三角形的底平行,要使包在兩邊中間的線段,等於在這線同底邊中間的兩邊的線段的和.



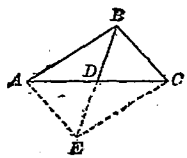
解析: 假定右邊的草圖是所作的圖. 若 $DE=AD+BE$,那麼一定有一點 P 在 DE 上,可使 $AD=DP, BE=EP$;就是可使 $\angle 5=\angle 6, \angle 3=\angle 2$;因 $DE \parallel AB$, $\angle 4=\angle 6$, $\angle 3=\angle 1$; 於是 $\angle 4=\angle 5$, $\angle 2=\angle 1$.

這兩個條件就可表示, $\angle A$ 同 $\angle B$ 的平分線相交在所作的線上. 所以作起圖來,先求這兩個平分線的交點,過這點畫一線同底邊平

行就得了.

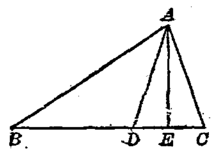
例二. 給了一個三角形的兩邊,同第三邊上的中線,作這個三角形.

解析: 假定右圖的三角形 ABC 有所給的邊 AB, BC; BD 是所給的中線, 作平行四邊形 $ABCE$. 那麼 $AE=BC$,$DE=BD$. 於是在$\triangle ABE$裏面, AB,AE 是所給的邊, BE 是所給中線的兩倍. 所以 $\triangle ABE$ 可以作出,那 $\triangle ABC$ 也可以作得了.



例三. 給了 $\angle A$,$\angle A$ 的平分線,對邊BC 上的高,作 $\triangle ABC$.

解析: 假定$\triangle ABC$是所作的三角形, AE 是已給的高, AD 是所給$\angle A$ 的平分線.



那麼$\triangle ADE$是固定的,因爲他是一個直角三角形, 有斜邊同一股已經知道了. $\angle DAC$ 同 $\angle DAB$ 都等於$\frac{1}{2}\angle A$,那麼 $\triangle ABC$ 自然也可作

得了.

§108. **證定理的要義:**

(1) 讀定理要小心;要辨別假設同終結.

不小心讀定理,常常要失敗. 所以什麼是所設的,什麼是求證的,總要看得明白.

(2) 作圖要作得和假設所規定的不差.

譬如叫你畫三角形,但是沒有指定什麼一定的形狀,那時你就不要畫出等腰或直角三角形來.

(3) 作圖越準越好.

這是在幾何學上起首的時候最要注意的. 因爲作圖作得準,研究圖形的性質,多少有點幫助.

(4) 求證一個定理,要把關於這定理的已知命辭詳細述出來,輪流實驗,擇最適當的引用上去.

例如求證兩線段相等,就當把關於兩線段相等的定理終結都述出來,如"三角形裏對

等角的邊相等;"“□的對邊都相等.”

(5) 到必要的時候可以用虛線.

關於這點,前面的定理已經講過,如§70的定理同§71的定理,都是那樣.

(6) 找不着證明的方法,可以用分析法或間接證法去找(看§146).

§109. 解決作圖題的要義:

(1) 讀題目要小心.

(2) 畫下草圖,好像作法已經做出來了一樣,然後研究他的性質. (參看§107)

(3) 根據解析法所提明的作法,研究那作圖法.

理 解 題

1. 在一個三角形的底邊上的中線,若等於底邊的一半,那麼這個三角形是直角三角形. (圖1.)

〔提示〕 證明 $\angle 3=\angle 4$, $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$.

2. 等腰三角形兩腰上的中線相等. (圖2.)

3. 梯形底邊兩端的角若相等,那麼這個梯形的

不平行的兩邊也相等．證明同這個相反的定理.（圖3.)

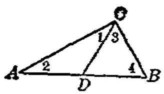


圖 1.

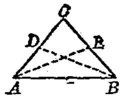


圖 2.

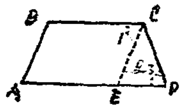


圖 3.

4.　平行四邊形的對角線若相等，那麼這個平行四邊形是一個長方形.（圖4.)

5.　若經過等腰三角形底邊的兩端畫兩線，各同一腰平行，那麼又可成功另外一個等腰三角形.

6.　等腰三角形底邊上隨便那一點到兩腰的垂線的和，等於底邊一端到對邊的高.（圖5.)

7.　證明三角形的隨便那一邊比其餘兩邊的差大.

8.　三角形裏隨便那一點到三頂點的距離的和，比三邊和的一半大.（圖6.)

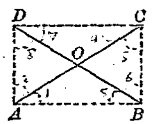


圖 4.

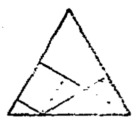


圖 5.

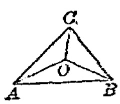


圖 6.

9.　若平行四邊形的兩對角線不等，那麼這個平行四邊形不是長方形.

10. 四邊形各邊的和,比兩對角線的和大,比這和的兩倍小.

11. 三角形兩邊的和,比第三邊上中線的兩倍大.(圖7.)

12. 在 $\triangle ABC$ 裏(圖8.), $AC>BC$, $CD\perp AB$, CE 是 AB 上的中線. 證明: (1) $\angle ACD>\angle BCD$; (2) $\angle AEC>\angle BEC$.

〔提示〕 $\angle B>\angle A$; $\angle CED<\angle R$.

13. 在圖9裏邊,設 BD 平分 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$, 證明 $BC>DC$, $BA>AD$.

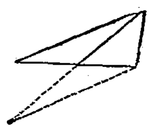


圖 7.

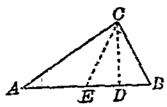


圖 8.

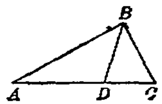


圖 9.

14. 給了頂角同底邊,作一個等腰三角形.

〔提示〕 先求底角.

15. 給了兩邊同其中一邊上的中線作這三角形.

〔提示〕 AB 邊, AC 邊同中線 CD 已經知道,那麼 $\triangle ADC$ 可以決定了. (圖10.)

16. 給了兩邊同其中一邊上的高,作這三角形.

〔解析〕 假定圖已作得. AB, AC 是所給的兩邊, CD

是AB上的高. 那麼先作$\triangle ADC$,就可作三角形ABC了. (圖11.)

17. 給了底邊,同在底邊上的高同中線,作這三角形.

〔解析〕 假定這三角形已經作得. 那麼$\triangle CDE$是rt $\triangle$,裏邊CD同CE已經知道了. (圖12.)

18. 給了一邊同在這邊上的高,又給了這邊的隣角,作這三角形.

19. 給了四邊,作一個梯形.

〔提示〕 $\triangle ADE$是固定了. (圖13.)

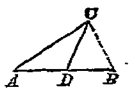


圖 10.

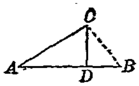


圖 11.

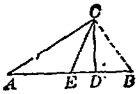


圖 12.

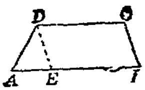


圖 13.

20. 在所給線外的一點,作一線同所給線成功 60° 的角.

21. 給了不在一直線上的三點,作一個等邊三角形,要使每一點在每條邊上或他的延長線上.

22. 斜方形的對角線互爲垂線.

23. 平行四邊形兩隣角的平分線互爲垂線.

24. 兩平行線同一截線所成兩對內錯角的平分

線,成功一個長方形. (圖14.)

25. 在下面圖15裏, $l_1 \parallel l_2$, $BD=AC$, 證明$ABDC$是平行四邊形,或是等腰梯形.

〔提示〕 畫AF同$BE \perp l_2$. 證明$\triangle AFC \cong \triangle BED$, $\therefore AC \parallel BD$. 畫一個等腰梯形的圖.

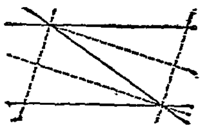


圖 14.

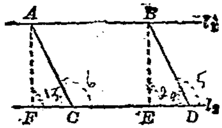


圖 15.

26. 一個木匠要把一塊木板分成幾條一樣闊的板,他用下面的法子: 假定要分成五條. 他用曲尺照圖16的兩位置放下,使尺上的刻度,在木板邊緣中間的都是5的同倍數(在這圖裏是15),再照圖上,於數字的各處做下記號,連起線來. 依線一鋸,就得所求的五條了. 證明這法子不錯.

27. 在圖17裏邊,在B點的角是150°, 怎樣畫出BC同CD,使AB同DE在一直線上.

28. 在等腰三角形底上隨便兩點,各作同兩腰平行的線,成功兩個平行四邊形,證明他們的週界相等. (圖18.)

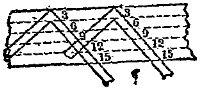


圖 16.

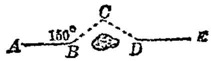


圖 17.

圖 18.

29. 如下邊圖19, $ABCD$ 是一個正方形, 如圖畫直線使 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$ 證 $xyzw$ 是正方形. 照這個樣子,畫一個大一些同方格多一些的. (圖20.)

30. 在下面 圖21 $ABCDEF$ 是正六邊形. $ABHG$, $BCLK$, 等部是正方形.

(a) 三角形 BHK, CLM 等等都是什麼三角形?

(b) $HKLMN$ …… 是不是正二十邊形 (dodecagon)

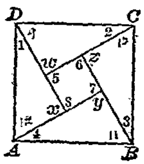


圖 19.

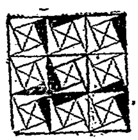


圖 20.

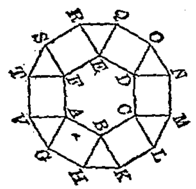


圖 21.

31. 若 ABC 是一個等腰三角形, AC 腰延長到 D, 使 $DC=AC$, 證明 $DB\perp AB$. (圖22.)

32. 設 ABC 是等腰三角形, 於 AC 上截取 AD, 延長 BC 到 E, 使 $EB=AD$, DE 交底邊 AB 於 F, 證明 $DF=FE$. (圖23.)

33. 在$\triangle ABC$裏. E, D是AB同BC的中點. 畫AD,延長到F,使$DF=AD$;畫CE,延長到G,使$EG=CE$. 證F,B,G在一直線上. (圖24.)

〔提示〕 證明 $F \parallel AC$,$BG \parallel AC$.

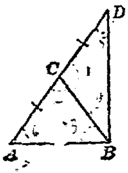


圖 22.

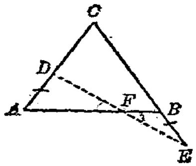


圖 23.

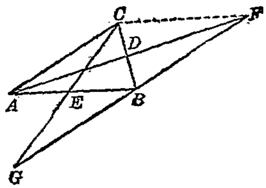


圖 24.

三民主義教育適用

商務印書館出版

新學制初中教科書

混合編制
科目完備

新學制初級中學的精神，在各科混合教授，這一套「新學制初級中學教科書」就是採用混合方法編輯的。取材新穎，分配得宜，尤能使教者減少困難，學者增加效率。內容自經修正，更合於三民主義教育之用。

國語	六冊	前三冊各三角半 第四冊四角半 第五冊五角 第六冊八角
歷史		全二冊各四角
地理	二冊	上冊五角 下冊六角
人生地理	三冊	第一二冊各九角 第三冊一元四角
自然科學	四冊	第一冊四角 第二冊六角 第三冊七角半 第四冊九角
實用自然科學		全四冊各六角
混合算學		全六冊各六角
同上習題答案		全六冊 前三冊各二角
同上教員準備書	六冊	第一冊九角 第二三冊各一元二角
英文讀本文法合編	三冊	第一冊六角 第二冊八角 第三冊一元二角
同上注音本	三冊	第一冊六角半 第二冊八角半 第三冊一元二角半
同上教授法		全三冊各五角
同上草寫本		第一冊二角
英文文法		全一冊一元
樂理		全六冊各二角半
唱歌	六冊	前三冊各八角
風琴		一冊一元半
鋼琴		一冊三元
圖畫	六冊	前二冊各五角 第三冊七角
手工	六冊	前二冊各二角半 三四冊各三角半

樣本及目錄承索即寄

三民主義教育適用

現代初中教科書

商務印書館出版

新學制初中的特色，在混合教授。但因師資難得，新近改組的各校，或仍有採用分科教授法者。本館為應此需要，除採用混合方法已編「新學制初級中學教科書」全套外，另編「現代初級中學教科書」一套。分科較細，而仍注重於全體之聯絡。其中「動物學」「植物學」「水彩畫」等科，已經大學院審定，餘書在審查中。

國文	莊適編	六册	前三各二角 四五各三角 六册四角
世界史	傅運森 王鍾麒編	二册	上册二角半 下册四角
本國地理	王鍾麒編	二册	各六角
同上上册參考書		二册	一元五角
世界地理	王鍾麒編	二册	各六角
礦物學	杜其堡編	一册	四角
動物學	杜就田編	一册	四角
植物學	淩昌煥編	一册	四角
生理衛生學	顧壽白編	一册	七角
物理學	周昌壽編	一册	七角
化學	鄭貞文編	一册	六角
算術	嚴濟慈編	一册	八角
同上習題解答		一册	一元
代數學	吳在淵編	二册	各六角
同上習題解答		一册	八角
幾何	周宣德編	二册	各四角
三角術	劉正經編	一册	四角
英語	周越然編	三册	一册四角 二册五角 三册七角
註音英語	周越然編	三册	一册四角半 二册五角半 三册七角半
英文法	林藎青編	二册	各七角
水彩畫	楊長濟編	一册	六角

現代初中教科書

幾　何

二　册

中華民國十三年九月初版
中華民國十八年六月五四版

回上册定價大洋肆角
外埠酌加運費滙費

編輯者　周宣德
校訂者　段育華
發行兼印刷者　上海寶山路　商務印書館
發行所　上海及各埠　商務印書館

Modern Textbook Series

GEOMETRY

for Junior Middle Schools

By

CHOW SUAN TE

Edited by

Y. H. TWAN, M. S.

1st ed., Sept., 1924　　54th ed., June, 1929

Price: $0.40, postage extra

THE COMMERCIAL PRESS, LTD., SHANGHAI

八二九一自