

Singularitätentheorie I

Arbeitsblatt 16

AUFGABE 16.1. Es sei R ein \mathbb{Z} -graduierter Ring. Zeige, dass der verschobene R -Modul $R(n)$ nur bei $n = 0$ ein graduierter Ring ist.

AUFGABE 16.2. Es sei $R = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} R_d$ ein kommutativer \mathbb{Z} -graduierter Ring und seien $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$ und $N = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} N_d$ \mathbb{Z} -graduierte Moduln über R . Es sei

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

ein homogener Modulhomomorphismus. Zeige, dass φ genau dann surjektiv (injektiv) ist, wenn für jede Stufe φ_n surjektiv (injektiv) ist.

AUFGABE 16.3. Es sei $R = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} R_d$ ein kommutativer \mathbb{Z} -graduierter Ring und seien $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$ und $N = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} N_d$ \mathbb{Z} -graduierte Moduln über R . Es sei

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

ein homogener Modulhomomorphismus. Zeige, dass der Kern, das Bild und der Kokern von φ wieder \mathbb{Z} -graduierte R -Moduln sind.

AUFGABE 16.4. Es sei $R = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} R_d$ ein kommutativer \mathbb{Z} -graduierter Ring und $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$ ein \mathbb{Z} -graduierter Modul über R , der endlich erzeugt sei. Zeige, dass M auch von endlich vielen homogenen Elementen erzeugt wird und dass es einen surjektiven homogenen Modulhomomorphismus der Form

$$\bigoplus_{i=1}^k R(-d_i) \longrightarrow M$$

gibt.

AUFGABE 16.5. Es sei $R = R_0 = K$ ein Körper, den wir als einen \mathbb{Z} -graduerten Ring auffassen, bei dem sämtliche Stufen $R_d = 0$ für $d \neq 0$ sind. Zeige, dass man jede Funktion $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, die für fast alle Zahlen den Wert 0 annimmt, als die Hilbertfunktion eines endlich erzeugten graduierten Moduls M über R erhalten kann.

AUFGABE 16.6. Es sei R eine positiv-graduierte kommutative K -Algebra über einem Körper $R_0 = K$. Die Hilbertfunktion von R sei ab einem bestimmten n_0 konstant gleich 0. Zeige, dass jedes Element $a \in R$, $a \notin K$, nilpotent ist.

AUFGABE 16.7. Zeige, dass man jede Funktion $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, für die $f(0) = 1$ ist und die für fast alle Zahlen den Wert 0 annimmt, als die Hilbertfunktion eines \mathbb{Z} -graduierten Ringes R mit einem Körper $R_0 = K$ erhalten kann.

AUFGABE 16.8. Sei R ein standard-graduierter Ring und M ein \mathbb{Z} -graduierter endlich erzeugter Modul über R . In welchem Zusammenhang steht die Hilbertfunktion zu M zur Hilbertfunktion zu $M(n)$?

AUFGABE 16.9. Sei R ein \mathbb{Z} -graduierter Ring mit endlichdimensionalen Stufen über dem Körper $R_0 = K$. In welchem Zusammenhang steht die Hilbertfunktion zu R zur Hilbertfunktion des d -ten Veronese-Unterrings $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_{dn}$?

AUFGABE 16.10. Es sei R ein positiv-graduierter Ring und M ein endlich erzeugter \mathbb{Z} -graduierter R -Modul. Zeige, dass es ein $m \in \mathbb{Z}$ derart gibt, dass für die Hilbertfunktion $H_M(n) = 0$ für $n \leq m$ gilt.

AUFGABE 16.11. Es sei

$$I = (f_1, \dots, f_s) \subseteq K[X_1, \dots, X_m] = P$$

ein homogenes Ideal mit homogenen Erzeugern f_j vom Grad d_j . Es sei d das Minimum der d_j . Zeige, dass für die Hilbertfunktion des graduierten Restklassenringes $R = K[X_1, \dots, X_m]/I$ die Beziehung

$$H_R(n) = H_P(n)$$

für $n < d$ gilt.

AUFGABE 16.12. Es sei R ein kommutativer Ring, M ein R -Modul und $I \subseteq R$ ein Ideal mit $IM = 0$. Zeige, dass M in natürlicher Weise ein R/I -Modul ist.

AUFGABE 16.13. Zeige, dass die Menge der Funktionen vom polynomialen Typ mit punktweiser Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring bilden.

AUFGABE 16.14. Zeige, dass die Menge der Funktionen vom polynomialen Typ, die letztlich den Wert 0 haben, im Ring der polynomialen Funktionen ein Ideal bilden.

Wir besprechen noch eine Variante zur Hilbertfunktion.

Es sei R ein standard-graduierter Ring über einem Körper $R_0 = K$. Es sei M ein endlich erzeugter \mathbb{Z} -graduierter Modul über R . Dann nennt man die Funktion

$$\tilde{H}_M: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \longmapsto \sum_{i < n} \dim_K(M_i),$$

die *kumulative Hilbertfunktion* zu M .

Wegen Aufgabe 16.10 ist dabei die Summe stets endlich und die Funktion ist wohldefiniert. Die kumulative Hilbertfunktion ist analog zu einer Stammfunktion im Sinne der Analysis 1. Mit dem Differenzoperator ist

$$\Delta \tilde{H}(n) = \tilde{H}(n+1) - \tilde{H}(n) = H(n).$$

AUFGABE 16.15. Sei R ein standard-graduierter Ring und M ein \mathbb{Z} -graduierter endlich erzeugter Modul über R . Zeige, dass die kumulative Hilbertfunktion zu M von polynomialen Typ ist.

AUFGABE 16.16. Sei R ein standard-graduierter Ring und M ein \mathbb{Z} -graduierter endlich erzeugter Modul über R . Zeige, dass die Ableitung des kumulativen Hilbertpolynoms zu M das Hilbertpolynom zu M ist. Folgere, dass man die Multiplizität von M , wenn das Hilbertpolynom nicht das Nullpolynom ist, mit der gleichen Formel (also Leitkoeffizient multipliziert mit der Fakultät des Grades) auch aus dem kumulativen Hilbertpolynom berechnen kann. Zeige ebenso, dass, falls das Hilbertpolynom das Nullpolynom ist, die mit dem kumulativen Hilbertpolynom bestimmte Multiplizität die direkt definierte Multiplizität ergibt.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5