Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 2

Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1.*

Zeige, dass ein kommutativer Ring genau dann ein Körper ist, wenn er genau zwei Ideale enthält.

Aufgabe 2.2.*

Es seien $x, y \in R$ Elemente in einem kommutativen Ring R. Welche der folgenden Formulierungen sind zu

$$Rx \subseteq Ry$$

äquivalent.

(1) x teilt y.
(2) x wird von y geteilt.
(3) y wird von x geteilt.
(4) x ist ein Vielfaches von y.
(5) x ist ein Vielfaches von x.
(6) y teilt x.
(7) $Rx \cap Ry = Rx$.
(8) Jedes Vielfache von y ist auch ein Vielfaches von x.
(9) Jeder Teiler von y ist auch ein Teiler von x.
(10) Ein Maikäfer ist ein Schmetterling.

Aufgabe 2.3. a) Zeige, dass ein Ideal in einem kommutativen Ring R eine Untergruppe von R ist.

b) Zeige, dass für $R = \mathbb{Z}$ die Begriffe Untergruppe und Ideal zusammenfallen.

c) Man gebe eine Beispiel für einen kommutativen Ring R und eine Untergruppe $U \subseteq R$, die kein Ideal ist.

Aufgabe 2.4. Zeige, dass es zu ganzen Zahlen d, n mit $d > 0$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen q, r mit $0 \leq r < d$ und mit

$$n = dq + r$$

gibt.

Aufgabe 2.5.*

Zeige, dass der Kern eines Ringhomomorphismus

$$\varphi \colon R \longrightarrow S$$

ein Ideal in R ist.

Aufgabe 2.6. Zeige, dass $\mathbb{Z}[X]$ und der Polynomring in zwei Variablen $K[X, Y]$ über einem Körper K keine Hauptidealbereiche sind.

Aufgabe 2.7. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Zeige, dass im Ring der stetigen Funktionen

$$R = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

die Teilmenge

$$I = \{f \in R | \, f(x) = 0 \text{ für alle } x \in T\}$$

ein Ideal in R ist.

Aufgabe 2.8. Wir betrachten das Ideal zu $T = \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ im Sinne von Aufgabe 2.7. Ist dies ein Hauptideal?

Aufgabe 2.9. Es sei R ein kommutativer Ring und $a_1, a_2, \ldots, a_n, b, f \in R$ Elemente. Zeige die folgenden Aussagen.

1) Wenn b ein größter gemeinsamer Teiler der $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist, so ist auch fb ein größter gemeinsamer Teiler der $fa_1, fa_2, \ldots, fa_n$.

2) Wenn f ein Nichtnullteiler ist, so gilt hiervon auch die Umkehrung.

Aufgabe 2.10. Es seien $a, b \in R$ zwei irreduzible, nicht assoziierte Elemente in einem Integritätsbereich. Zeige, dass a und b teilerfremd sind.

Aufgabe 2.11. Sei R ein Integritätsbereich und $p \in R$, $p \neq 0$. Zeige, dass p genau dann irreduzibel ist, wenn es genau zwei Hauptideale oberhalb von (p) gibt, nämlich (p) selbst und $(1) = R$.

Aufgabe 2.12. Seien r und s teilerfremde Zahlen. Zeige, dass jede Lösung (x, y) der Gleichung
$$rx + sy = 0$$
die Gestalt $(x, y) = v(s, -r)$ hat, mit einer eindeutig bestimmten Zahl v.

Aufgabe 2.13. Zeige durch ein Beispiel, dass die in Aufgabe 2.12 bewiesene Aussage ohne die Voraussetzung teilerfremd nicht stimmt.

Aufgabe 2.14.*

Zeige, dass die Untergruppen von $\mathbb{Z}$ genau die Teilmengen der Form
$$\mathbb{Z}d = \{kd | \, k \in \mathbb{Z}\}$$
mit einer eindeutig bestimmten nicht-negativen Zahl d sind.

Der Begriff des größten gemeinsamen Teilers wird innerhalb der ganzen Zahlen häufig wie folgt definiert.

Seien $a_1, \ldots, a_k$ natürliche Zahlen. Eine natürliche Zahl g heißt *größter gemeinsamer Teiler* der $a_1, \ldots, a_k$, wenn g ein gemeinsamer Teiler ist und wenn g unter allen gemeinsamen Teilern der $a_1, \ldots, a_k$ der (bezüglich der Ordnungsrelation auf den natürlichen Zahlen) Größte ist.

Aufgabe 2.15. Sei $a_1, \ldots, a_n$ eine Menge von ganzen Zahlen. Zeige, dass der nichtnegative größte gemeinsame Teiler der a_i (im Sinne der allgemeinen Ringdefinition) mit demjenigen gemeinsamen Teiler übereinstimmt, der bezüglich der Ordnungsrelation $\geq$ der größte gemeinsame Teiler ist.

Aufgabe 2.16.*

Bestimme in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von $5 + 2\mathrm{i}$ und $3 + 7\mathrm{i}$.

Aufgabe 2.17. Sei R ein euklidischer Bereich mit euklidischer Funktion δ. Zeige, dass ein Element $f \in R$ ($f \neq 0$) mit $\delta(f) = 0$ eine Einheit ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 2.18. (3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und seien n (verschiedene) natürliche Zahlen gegeben. Zeige, dass es eine nichtleere Teilmenge dieser Zahlen derart gibt, dass die zugehörige Summe ein Vielfaches von n ist.

Aufgabe 2.19. (3 Punkte)

Alle Flöhe leben auf einem unendlichen Zentimeter-Band. Ein Flohmännchen springt bei jedem Sprung 78 cm und die deutlich kräftigeren Flohweibchen springen mit jedem Sprung 126 cm. Die Flohmännchen Florian, Flöhchen und Carlo sitzen in den Positionen $-123, 55$ und -49. Die Flohweibchen Flora und Florentina sitzen in Position 17 bzw. 109. Welche Flöhe können sich treffen?

Aufgabe 2.20. (3 Punkte)

Beweise folgende Aussagen für einen kommutativen Ring R.

(1) Das Element a ist ein Teiler von b (also $a|b$) genau dann, wenn $(b) \subseteq (a)$.
(2) a ist eine Einheit genau dann, wenn $(a) = R = (1)$.
(3) Ist R ein Integritätsbereich, so gilt $(a) = (b)$ genau dann, wenn a und b assoziiert sind.

Aufgabe 2.21. (2 Punkte)

Zeige, dass im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{2}i$ die Norm eine euklidische Funktion ist.

Aufgabe 2.22. (6 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich. Betrachte die beiden folgenden Bedingungen:

(1) Es gibt ein Primelement $p \in R$ mit der Eigenschaft, dass sich jedes Element $f \in R$, $f \neq 0$, eindeutig als $f = up^i$ darstellen lässt mit einer Einheit u und $i \in \mathbb{N}$.

(2) R ist ein euklidischer Bereich mit einer surjektiven euklidischen Funktion $\delta : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, die zusätzlich die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt.

a) Es gilt $\delta(fg) = \delta(f) + \delta(g)$ für alle $f, g \in R \setminus \{0\}$.

b) Es gilt $f|g$ genau dann, wenn $\delta(f) \leq \delta(g)$ für alle $f, g \in R \setminus \{0\}$. Zeige, dass beide Bedingungen äquivalent sind. Können Sie Beispiele für solche Ringe angeben?