5 Equazioni di grado superiore al secondo

5.1 L'equazione di terzo grado, un po' di storia

"Trovare un numero il cui cubo, insieme con due suoi quadrati e dieci volte il numero stesso, dia come somma 20".

Il problema enunciato venne posto da Giovanni Panormita, astronomo e filosofo alla corte di Federico II, a Leonardo Pisano, detto Fibonacci, che ne tentò la soluzione nella sua opera "Flos".

Con il linguaggio matematico attuale il problema si formalizza nell'equazione di terzo grado $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$; Fibonacci pervenne al valore approssimato $x = 1{,}3688$ come soluzione al problema, senza indicare la via seguita per la sua determinazione. Pur tuttavia egli riuscì a dimostrare che le soluzioni di un'equazione di terzo grado non possono mai esprimersi mediante radicali quadratici neanche se sovrapposti.

Solo tra il 1540 e il 1545, ad opera dei matematici italiani Niccolò Fontana, detto Tartaglia[1], e Gerolamo Cardano[2], fu scoperta la formula risolutiva dell'equazione generale di terzo grado. Cardano dimostrò che ogni equazione di terzo grado $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ è riconducibile alla forma $y^3 + py + q = 0$ operando la sostituzione $x = y - \frac{b}{3a}$, per la quale ricava la formula risolutiva:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

da cui poi si risale alla soluzione in x dell'equazione assegnata.

Esempio 5.1. Risolvere l'equazione: $x^3 + 3x^2 + 6x + 5 = 0$.

Operiamo la sostituzione $x = y - \frac{b}{3a}$ che in questo caso è $x = y - 1$; l'equazione diventa $(y-1)^3 + 3(y-1)^2 + 6(y-1) + 5 = 0$ ed eseguendo i calcoli si ha $y^3 + 3y + 1 = 0$, quindi $p = 3$ e $q = 1$. Applicando la formula risolutiva si ha

$$y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 1}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{5} - 1}{2}}$$

e quindi, sostituendo $y = x + 1$, si ha $x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{5} - 1}{2}} - 1$.

Esempio 5.2. Risolvere l'equazione $x^3 = 15x + 4$ applicando la formula di Tartaglia-Cardano.

Notiamo che è $p = -15$ e $q = -4$ e dunque sotto la radice quadrata della formula si ha $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = (-5)^3 + (-2)^2 = -121$ pertanto non un numero reale, mentre è evidente la soluzione reale $x = 4$, infatti $4^3 = 64 = 15 \cdot 4 + 4$. Questa circostanza ha spinto il matematico

[1] soprannome dovuto al suo linguaggio balbettante (1499 ca. - 1557).
[2] matematico, medico, astrologo e filosofo (1501 - 1576).

Raffaele Bombelli[3], ad elaborare nella sua opera "Algebra" del 1572, calcoli con radici quadrate di numeri negativi (numeri) che troveranno una sistemazione coerente nella teoria dei *numeri complessi* sviluppata da Friedrich Gauss.[4]

Vediamo come possiamo determinare l'IS dell'equazione di Bombelli con le nostre conoscenze. Scriviamo l'equazione nella forma canonica $p(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 15x - 4 = 0$; sappiamo che uno zero intero è $x = 4$ dunque scomponiamo dividendo $p(x) = x^3 - 15x - 4$ per il binomio $x - 4$. Potete verificare che si ottiene $x^3 - 15x - 4 = (x - 4) \cdot (x^2 + 4x + 1) = 0$ da cui, per la legge di annullamento del prodotto,

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \quad \vee \quad x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Poco dopo la scoperta della formula risolutiva per le equazioni di terzo grado, il matematico italiano Ferrari[5] trovò anche la formula per risolvere le equazioni di quarto grado. Le ricerche per trovare la formula che risolvesse l'equazione di quinto grado furono invece vane, non perché i matematici non furono abbastanza "ingegnosi" bensì per il fatto che, come dimostrò Galois[6] non esistono formule che per mezzo di radici ed altre operazioni algebriche possano risolvere le equazioni dal quinto grado in poi. In altre parole, esistono solo formule per le equazioni di primo, secondo, terzo e quarto grado.

Oggigiorno, tuttavia, si preferisce non approfondire le applicazioni di queste formule. Lo studio è generalmente rivolto soltanto alle equazioni di primo e secondo grado e per quelle di grado superiore al secondo si applicano i metodi che vedremo in questo capitolo, oppure si utilizzano metodi di calcolo numerico che forniscono soluzioni per approssimazioni successive.

5.2 Equazioni riconducibili al prodotto di due o più fattori

In questo capitolo ci proponiamo di determinare l'insieme soluzione di equazioni algebriche di grado superiore al secondo.

Ricordiamo che un'equazione algebrica si presenta nella forma $p(x) = 0$ dove $p(x)$ è un polinomio nella variabile x, di grado n, a coefficienti reali:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$$

Esempio 5.3. Determinare le radici reali dell'equazione $4x^3 + x^2 - 4x - 1 = 0$.

Scomponiamo in fattori il polinomio al primo membro mediante raccoglimento parziale:

$$p(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1 = 4x\left(x^2 - 1\right) + \left(x^2 - 1\right) = \left(x^2 - 1\right)(4x + 1).$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto si ottiene

$$x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1 \vee x_2 = 1,$$

$$4x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{4}.$$

L'equazione ha dunque tre soluzioni reali distinte e $\text{I. S.} = \left\{-1, 1, -\frac{1}{4}\right\}$.

[3] matematico ed ingegnere italiano, noto anche con il nome di Rafael o Raphael (1526 - 1572).
[4] Johann Carl Friedrich Gauss è stato un matematico, astronomo e fisico tedesco (1777 - 1855).
[5] Lodovico Ferrari (1522 - 1565).
[6] Évariste Galois è stato un matematico francese (1811 - 1832).

Esempio 5.4. Determinare le radici reali dell'equazione fratta $\frac{2x+3}{2x+1}+\frac{x^2}{x+1}=5x+3$.

Riduciamo allo stesso denominatore

$$\frac{2x^2+5x+3+2x^3+x^2-10x^3-15x^2-5x-6x^2-9x-3}{(2x+1)\cdot(x+1)}=0.$$

Poniamo le condizioni d'esistenza: $x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq -1$. Eliminiamo il denominatore e sommiamo i monomi simili; otteniamo un'equazione di terzo grado $8x^3+18x^2+9x=0$, che, scomponendo il polinomio, può essere scritta come $x\cdot\left(8x^2+18x+9\right)=0$. Per la legge di annullamento del prodotto si ha $x=0 \vee x^2+18x+9=0$. Risolvendo anche l'equazione di secondo grado con la formula risolutiva si ottengono le soluzioni $x_1=0 \vee x_2=-\frac{3}{4} \vee x_3=-\frac{3}{2}$.

❑ **Osservazione** Si dimostra che un'equazione ammette tante soluzioni, che possono essere reali (distinte o coincidenti) o non reali, quante ne indica il suo grado.

Ricordiamo che uno zero di un polinomio è il valore che assegnato alla variabile rende il polinomio uguale a zero. Quindi trovare gli zeri di un polinomio equivale a trovare le soluzioni dell'equazione che si ottiene ponendo il polinomio uguale a zero, come nell'esempio seguente.

Esempio 5.5. Trovare gli zeri del seguente polinomio di terzo grado $p(x)=x^3-7x^2+4x+12$.

Scriviamo l'equazione $x^3-7x^2+4x+12=0$ e cerchiamo di scomporre con il metodo di Ruffini. Sostituendo $x=-1$ si ottiene $(-1)^3-7(-1)^2+4(-1)+12=-1-7-4+12=0$. Possiamo allora dividere il polinomio $p(x)$ per il binomio $x+1$. Applicando la regola di Ruffini si ha:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -7 & 4 & 12 \\ -1 & & -1 & 8 & -12 \\ \hline & 1 & -8 & 12 & // \end{array}$$

Il polinomio si scompone in $(x+1)(x^2-8x+12)$. Per la legge di annullamento del prodotto $x+1=0 \vee x^2-8x+12=0$. L'equazione $x+1=0$ dà come soluzione $x=-1$. L'equazione $x^2-8x+12=0$ si può risolvere con la formula risolutiva ridotta $x_{1,2}=4\pm\sqrt{16-12}=4\pm 2$. Il polinomio assegnato ha tre zeri distinti $x_1=-1 \vee x_2=2 \vee x_3=6$.

✍ *Esercizi proposti:* 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11

5.3 Equazioni binomie

Definizione 5.1. Un'*equazione binomia* è un'equazione del tipo $ax^n+b=0$ con $a\neq 0$ e con $n\in\mathbb{N}_0$.

L'equazione scritta come $ax^n+b=0$ è detta in *forma normale* o *canonica*.
Dobbiamo distinguere i casi:

- n è pari e $a\cdot b<0$. I coefficienti a e b hanno segno discorde. L'equazione ammette due sole soluzioni reali ed opposte: $x_1=\sqrt[n]{-\frac{b}{a}} \vee x_2=-\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$;

- n è pari e $a \cdot b > 0$. I coefficienti a e b hanno lo stesso segno. L'equazione non ammette soluzioni reali;
- n è dispari e $b \neq 0$. L'equazione ha un'unica soluzione reale $x_1 = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$;
- $b = 0$. L'equazione è $ax^n = 0$ e le n soluzioni sono coincidenti nell'unica soluzione $x = 0$. In questo caso si dice che l'unica soluzione $x = 0$ ha molteplicità n.

Esempio 5.6. Risolvere le seguenti equazioni binomie

- $3x^4 - 8 = 0$.

  L'esponente n è pari, i coefficienti sono discordi: l'equazione ammette due soluzioni reali distinte: $x_1 = \sqrt[4]{\frac{8}{3}} \vee x_2 = -\sqrt[4]{\frac{8}{3}}$.

  Osserviamo che l'equazione proposta può essere risolta col metodo della scomposizione in fattori: $3x^4 - 8 = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{3}x^2 + \sqrt{8}\right) \cdot \left(\sqrt{3}x^2 - \sqrt{8}\right) = 0$ e per la legge di annullamento del prodotto $\left(\sqrt{3}x^2 + \sqrt{8}\right) = 0 \vee \left(\sqrt{3}x^2 - \sqrt{8}\right) = 0$. La prima equazione non ha soluzioni reali, mentre per la seconda si ha $x^2 = \sqrt{\frac{8}{3}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\sqrt{\frac{8}{3}}} \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{8}{3}}$.

- $-6x^4 + 9 = 13$.

  Riducendo alla forma normale troviamo $-6x^4 - 4 = 0$; moltiplicando ambo i membri per -1 si ottiene $6x^4 + 4 = 0$ in cui il primo membro è una somma di numeri sempre positivi sempre maggiore di zero, quindi in $\mathbb{R}$ l'equazione è impossibile e $\text{I.S.} = \emptyset$.

- $8x^3 + 3 = 4$.

  Riduciamo l'equazione alla forma normale $8x^3 - 1 = 0$. Essendo di grado dispari, l'unica soluzione è $x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$.

  Allo stesso risultato perveniamo scomponendo in fattori la differenza di due cubi: $8x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (2x - 1) \cdot \left(4x^2 + 2x + 1\right) = 0$. Per la legge di annullamento del prodotto $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \vee 4x^2 + 2x + 1 = 0$ ma l'equazione di secondo grado non ha soluzioni reali essendo $\Delta < 0$. Pertanto l'unica soluzione è $x = \frac{1}{2}$, quindi $\text{I.S.} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

- $2x^7 + 3 = 2$.

  In forma normale $2x^7 + 1 = 0$. Si trova così l'unica soluzione reale $x = \sqrt[7]{-\frac{1}{2}} = -\sqrt[7]{\frac{1}{2}}$.

- $3x \cdot \left(x^4 - 1\right) = 4 \cdot (1 + x) - (7x + 4)$.

  Sviluppando i calcoli si ottiene $3x^5 = 0 \Rightarrow x^5 = 0 \Rightarrow x = 0$, cioè una sola soluzione reale con molteplicità 5.

- $x^3 + 3 = 0$.

  L'equazione ha l'unica soluzione reale $x = -\sqrt[3]{3}$. Spieghiamo il risultato scomponendo la somma di cubi $(x)^3 + \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 = 0 \Rightarrow \left(x + \sqrt[3]{3}\right)\left(x^2 - x\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2}\right) = 0$. Per la legge di annullamento del prodotto otteniamo: $\left(x + \sqrt[3]{3}\right) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{3}$ e $x^2 - \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{3^2} = 0$ che non ha soluzioni reali essendo $\Delta < 0$.

✍ *Esercizi proposti:* 5.12, 5.13, 5.14, 5.15, 5.16, 5.17

5.4 Equazioni trinomie

Definizione 5.2. Un'*equazione trinomia* è un'equazione del tipo $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ dove $n \in \mathbb{N}_0$ e $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Sono esempi di equazioni trinomie $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, $x^6 - 4x^3 + 3 = 0$, $x^{10} - x^5 + 6 = 0$.

Per risolvere queste equazioni è opportuno fare un cambio di incognita: ponendo $t = x^n$ l'equazione trinomia diventa di secondo grado: $at^2 + bt + c = 0$ e da questa, detta *equazione risolvente*, si ricavano i valori di t. Successivamente, dalla relazione $t = x^n$, si ricavano i valori di x.

5.4.1 Equazione biquadratica

Se $n = 2$ l'equazione è detta *biquadratica* e si presenta nella forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Esempio 5.7. Risolvere le seguenti equazioni biquadratiche.

- $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

  L'equazione è biquadratica; facciamo un cambio di incognita ponendo $x^2 = t$; l'equazione diventa $t^2 - 5t + 4 = 0$ che ha due soluzioni reali distinte $t_1 = 1 \vee t_2 = 4$. Per determinare le soluzioni dell'equazione assegnata teniamo conto della sostituzione fatta. Da $t_1 = 1$ otteniamo $x^2 = 1$ con soluzioni $x_1 = -1 \vee x_2 = +1$ e da $t_2 = 4$ otteniamo $x^2 = 4$ con soluzioni $x_1 = -2 \vee x_2 = +2$. Pertanto l'equazione assegnata ha quattro soluzioni reali distinte e $\text{I.S.} = \{-1, +1, -2, +2\}$.

- $2x^4 + 3x^2 - 2 = 0$.

  L'equazione è biquadratica, ponendo $x^2 = t$ diventa $2t^2 + 3t - 2 = 0$ che ha per soluzioni $t_1 = -2 \vee t_2 = \frac{1}{2}$. Ritornando alla sostituzione iniziale, da $t_1 = -2$ otteniamo $x^2 = -2 \Rightarrow \text{I.S.} = \emptyset$ e da $t_2 = \frac{1}{2}$ otteniamo $x^2 = \frac{1}{2}$ con soluzioni $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}} \vee x_2 = +\sqrt{\frac{1}{2}}$ e razionalizzando $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x_2 = +\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- $x^4 - \frac{16}{9}x^2 = 0$.

  L'equazione è biquadratica incompleta; si può determinare l'insieme soluzione raccogliendo x^2 a fattore comune, ottenendo così $x^2\left(x^2 - \frac{16}{9}\right) = 0$ e per la legge di annullamento del prodotto possiamo concludere $x^2 = 0 \vee x^2 = \frac{16}{9}$ da cui $\text{I.S.} = \left\{0, -\frac{4}{3}, +\frac{4}{3}\right\}$.

❍ **Conclusione** L'equazione biquadratica $ax^4 + bx^2 + c = 0$

- ha quattro soluzioni reali distinte se il discriminante dell'equazione risolvente è positivo e se risultano positivi anche i rapporti $-\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$ che indicano rispettivamente la somma e il prodotto delle sue soluzioni;
- ha due soluzioni reali distinte se il discriminante dell'equazione risolvente è positivo e se risulta negativo il rapporto $\frac{c}{a}$ che indica il prodotto delle sue soluzioni;
- non ha soluzioni reali se il discriminante dell'equazione risolvente è positivo e se risulta positivo il rapporto $\frac{c}{a}$ e negativo il rapporto $-\frac{b}{a}$;

- non ha soluzioni reali se il discriminante dell'equazione risolvente è negativo.

Per stabilire il numero di soluzioni di un'equazione biquadratica si può anche utilizzare la regola dei segni di Cartesio:

- $\Delta > 0$ e due variazioni si hanno 4 soluzioni reali;
- $\Delta > 0$ una permanenza e una variazione si hanno 2 soluzioni reali;
- $\Delta = 0$ e $-\frac{b}{2a} > 0$ si hanno due soluzioni reali; $-\frac{b}{2a} < 0$ nessuna soluzione reale;
- $\Delta < 0$ nessuna soluzione reale.

✍ *Esercizi proposti:* 5.18, 5.19, 5.20, 5.21, 5.22, 5.23, 5.24, 5.25, 5.26, 5.27, 5.28, 5.29

5.4.2 Equazioni trinomie con n maggiore di 2

Esempio 5.8. Risolvere le seguenti equazioni trinomie.

- $x^6 - 4x^3 + 3 = 0$.

  Ponendo $t = x^3$ abbiamo l'equazione risolvente $t^2 - 4t + 3 = 0$, le cui soluzioni reali sono $t_1 = 1$, $t_2 = 3$; per ricavare i valori di x è sufficiente risolvere le due equazioni binomie $x^3 = 1$ e $x^3 = 3$, trovando così le soluzioni reali per l'equazione assegnata $x_1 = 1 \vee x_2 = \sqrt[3]{3}$;
- $x^8 - x^4 - 2 = 0$.

  Ponendo $t = x^4$ arriviamo all'equazione $t^2 - t - 2 = 0$ da cui $t_1 = 2$ e $t_2 = -1$; pertanto le due equazioni binomie da risolvere sono: $x^4 = 2$ e $x^4 = -1$. Quindi $x^4 = 2 \Rightarrow x^2 = -\sqrt{2} \vee x^2 = \sqrt{2}$ e di queste due, solo la seconda ha soluzioni reali e precisamente $x_1 = \sqrt[4]{2} \vee x_2 = -\sqrt[4]{2}$; la prima equazione binomia $x^4 = -1$ non ha invece soluzioni reali. Concludendo: I. S. $= \left\{-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}\right\}$.

5.5 Equazioni che si risolvono con sostituzioni

Molte altre equazioni si possono risolvere con opportune sostituzioni.

Esempio 5.9. Risolvere la seguente equazione $\left(x^2 - 4\right)^4 - 1 = 0$.

Sostituendo $t = x^2 - 4$ l'equazione diventa $t^4 - 1 = 0$. È un'equazione binomia che ha per soluzioni $t_1 = -1$, $t_2 = +1$. Sostituendo questi valori nella relazione $t = x^2 - 4$ si ha:

$$x^2 - 4 = -1 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \quad \text{e} \quad x^2 - 4 = +1 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{5}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 5.30, 5.31, 5.32, 5.33,5.34, 5.35

5.6 Equazioni reciproche

Definizione 5.3. Un'equazione è detta *reciproca di prima specie* se, posta nella forma canonica $p(x) = 0$, il polinomio $p(x)$ ha i coefficienti dei termini estremi e quelli dei termini equidistanti dagli estremi *uguali*.

Definizione 5.4. Un'equazione è detta *reciproca di seconda specie* se, posta nella forma canonica $p(x) = 0$, il polinomio $p(x)$ ha i coefficienti dei termini estremi e quelli dei termini equidistanti dagli estremi *opposti*. In particolare, se $p(x)$ ha grado $2k$ (pari), il coefficiente di x^k è nullo.

Dalle definizioni si ha che:

- $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$ è un'equazione di terzo grado reciproca di prima specie;
- $3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 3 = 0$ è un'equazione di quarto grado reciproca di prima specie;
- $-7x^4 + 5x^3 - 5x + 7 = 0$ è un'equazione di quarto grado reciproca di seconda specie;
- $3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 6x^2 - 2x - 3 = 0$ è un'equazione di quinto grado reciproca di seconda specie;
- $-2x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 8x + 2 = 0$ è un'equazione di quarto grado, ma non è reciproca di seconda specie, in quanto il coefficiente di secondo grado dovrebbe essere nullo.

Il seguente teorema mette in luce una importante proprietà di cui godono queste equazioni.

Teorema 5.1 (delle radici reciproche). *Se λ è una radice non nulla di un'equazione reciproca di qualunque grado, allora anche $\dfrac{1}{\lambda}$ è radice dell'equazione.*

Consideriamo il polinomio dell'equazione reciproca di prima specie

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Ipotesi. $x = \lambda$ è una radice dell'equazione $p(x) = 0$;
Tesi. $x = \frac{1}{\lambda}$ è una radice dell'equazione $p(x) = 0$.

Dimostrazione. Sappiamo che se $x = \lambda$ è una radice di $p(x) = 0$ allora $p(\lambda) = 0$, cioè

$$p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Scriviamo il polinomio con $x = \frac{1}{\lambda}$

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= a_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{1}{\lambda}\right) + a_0 \\ &= \frac{1}{\lambda^n}\left(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_1\lambda^{n-1} + a_0\lambda^n\right) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo messo in evidenza il termine $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n$ (è consentito perché per ipotesi λ non è nullo). Confrontando le scritture di $p(\lambda)$ e $p\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ risulta

$$p\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^n}p(\lambda) = 0$$

Quindi anche $\dfrac{1}{\lambda}$ è una radice di $p(x) = 0$. □

Dimostra tu il teorema per le equazioni di seconda specie.

5.6.1 Equazioni di terzo grado reciproche di prima specie

Queste equazioni hanno la seguente struttura:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Una radice dell'equazione è $x = -1$, infatti sostituendo tale valore al posto della x nel polinomio al primo membro si ottiene:

$$p(-1) = a_0(-1)^3 + a_1(-1)^2 + a_1(-1) + a_0 = -a_0 + a_1 - a_1 + a_0 = 0.$$

Ricordiamo che secondo la regola del resto, il valore trovato (zero) ci assicura che il polinomio al primo membro è divisibile per $x+1$; con la divisione polinomiale o con la regola di Ruffini possiamo scrivere $a_0x^3 + a_1x^2 + a_1x + a_0 = (x+1) \cdot \left(a_0x^2 + (a_1 - a_0)x + a_0\right) = 0$ da cui, per la legge di annullamento del prodotto, possiamo determinare le soluzioni dell'equazione assegnata.

Un modo alternativo per determinare l'insieme soluzione dell'equazione reciproca di prima specie consiste nel raccogliere parzialmente i due coefficienti a_0 e a_1 in modo da ottenere $a_0\left(x^3+1\right) + a_1\left(x^2+x\right) = 0$ da cui $a_0(x+1)\left(x^2-x+1\right) + a_1x(x+1) = 0$ e raccogliendo il binomio $(x+1)$ ritroviamo la fattorizzazione precedente: $(x+1)\left(a_0x^2 + (a_1-a_0)x + a_0\right) = 0$.

Esempio 5.10. Risolvere le seguenti equazioni di terzo grado reciproche di prima specie.

- $x^3 - 5x^2 - 5x + 1 = 0$.

  Si tratta di un'equazione di terzo grado reciproca di prima specie. Una radice è $x = -1$, per cui possiamo fattorizzare il polinomio al primo membro eseguendo la divisione polinomiale e ottenere $(x+1)\left(x^2-6x+1\right) = 0$. Per la legge di annullamento del prodotto otteniamo la radice $x = -1$ già nota e, risolvendo l'equazione $x^2 - 6x + 1 = 0$ troviamo le altre radici $x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$ e $x_3 = 3 - 2\sqrt{2}$. Quindi I. S. $= \left\{-1, 3+2\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2}\right\}$.

  Notiamo che x_2 e x_3 sono tra loro reciproche: $x_2 \cdot x_3 = 1$ cioè $(3+2\sqrt{2}) \cdot (3-2\sqrt{2}) = 1$.

- $3x^3 - 5x^2 - 5x + 3 = 0$

  L'equazione assegnata è reciproca di terzo grado e di prima specie; ammette dunque $x = -1$ come radice. Infatti $p(-1) = 3(-1)^3 - 5(-1)^2 - 5(-1) + 3 = \dots$ Il polinomio al primo membro si può scomporre con la regola di Ruffini cioè $(x+1)\left(3x^2-8x+3\right) = 0$; per la legge di annullamento del prodotto avremo $x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$, come già noto, e $3x^2 - 8x + 3 = 0$ con soluzioni $x_2 = \dots$ e $x_3 = \dots$ Quindi I. S. $= \{\dots\dots\dots\dots\}$.

✍ *Esercizi proposti:* 5.36, 5.37, 5.38, 5.39

5.6.2 Equazioni di terzo grado reciproche di seconda specie

Queste equazioni hanno la seguente struttura:

$$a_0x^3 + a_1x^2 - a_1x - a_0 = 0.$$

Una radice dell'equazione è $x = 1$, basta verificare sostituendo tale valore al posto della x nel polinomio al primo membro. Si ottiene:

$$p(1) = a_0(1)^3 + a_1(1)^2 - a_1(1) - a_0 = a_0 + a_1 - a_1 - a_0 = 0.$$

Procedendo come nel caso precedente si può ottenere la scomposizione in fattori del polinomio al primo membro: $(x-1)\cdot\left(a_0x^2+(a_0+a_1)x+a_0\right)=0$ e quindi determinare l'I. S. dell'equazione assegnata applicando la legge di annullamento del prodotto.

Esempio 5.11. Risolvere le seguenti equazioni di terzo grado reciproche di seconda specie.

- $2x^3-7x^2+7x-2=0$.

  È un'equazione di terzo grado reciproca di seconda specie, i coefficienti infatti sono opposti a due a due. Una radice è $x_1=1$ infatti $p(1)=2-7+7-2=0$. Applicando la regola di Ruffini per scomporre il polinomio di terzo grado si ottiene $(x-1)\left(2x^2-5x+2\right)=0$. Per la legge di annullamento del prodotto abbiamo la radice $x=1$, già nota, e risolvendo $\left(2x^2-5x+2\right)=0$ si ricavano le altre due radici: $x_2=2$ e $x_3=\frac{1}{2}$. Dunque I. S. $=\left\{1, 2, \frac{1}{2}\right\}$.

- $2x^3-9x^2+9x-2=0$.

  L'equazione assegnata è reciproca di terzo grado e di seconda specie perché ha i coefficienti opposti a due a due, quindi ammette $x=+1$ come radice. Infatti $p(1)=\ldots$ Applichiamo la regola di Ruffini per scomporre in fattori il polinomio di terzo grado. Il polinomio si scompone in $(x-1)\left(2x^2-\ldots\ldots\right)=0$. Per la legge di annullamento del prodotto avremo $x-1=0 \Rightarrow x=1$, come già noto, e $2x^2-7x+2=0$ con soluzioni $x_2=\ldots$ e $x_3=\ldots$. Quindi I. S. $=\{\ldots\ldots\ldots\}$. L'equazione assegnata ha tre soluzioni reali di cui le due irrazionali sono l'una il reciproco dell'altra.

✍ *Esercizi proposti:* 5.40, 5.41, 5.42

5.6.3 Equazioni di quarto grado reciproche di prima specie

Rientrano in questa classificazione le equazioni del tipo:

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0.$$

Prima di tutto osserviamo che $x=0$ non può essere una radice in quanto, se lo fosse, sarebbe nullo il termine noto, cioè $a_0=0$ e di conseguenza sarebbe nullo anche il coefficiente di x^4 quindi il grado dell'equazione diventerebbe 3 o inferiore. Questa premessa ci consente di dividere per x^2 ottenendo l'equazione equivalente $a_0x^2+a_1x+a_2+\frac{a_1}{x}+\frac{a_0}{x^2}=0$ e raccogliendo a fattori parziali si ha $a_0\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a_1\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_2=0$.

Ponendo $t=x+\frac{1}{x}$ si ha $t^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \Rightarrow t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$.

Sostituendo nell'equazione otteniamo la seguente equazione di secondo grado equivalente a quella data: $a_0\left(t^2-2\right)+a_1t+a_2=0$, ovvero

$$a_0t^2+a_1t+a_2-2a_0=0.$$

Una volta trovate, se esistono (reali), le radici t_1 e t_2 di questa equazione, possiamo determinare le corrispondenti radici dell'equazione iniziale risolvendo le due equazioni fratte $x+\frac{1}{x}=t_1$ e $x+\frac{1}{x}=t_2$ nell'incognita x, rispettivamente equivalenti a

$$x^2-t_1x+1=0 \qquad \text{e} \qquad x^2-t_2x+1=0.$$

Queste ultime equazioni hanno soluzioni reali se e solo se $|t| \geqslant 2$. Infatti, risolvendo rispetto a x l'equazione $x + \dfrac{1}{x} = t$, troviamo: $x^2 - tx + 1 = 0$ e calcolando il discriminante $\Delta = t^2 - 4$ vediamo che ci sono soluzioni reali se e solo se $t^2 - 4 \geqslant 0$ ovvero se e solo se $t \leqslant -2 \vee t \geqslant 2$ cioè $|t| \geqslant 2$.

Esempio 5.12. Risolvere le seguenti equazioni di quarto grado reciproche di prima specie.

- $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$.

  Si tratta di un'equazione di quarto grado reciproca di prima specie. Dividiamo per x^2, otteniamo $x^2 - 4x + 5 - 4\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$. Raccogliendo in fattori comuni come nella regola abbiamo $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0$. Ponendo $t = x + \frac{1}{x}$ otteniamo l'equazione $\left(t^2 - 2\right) - 4t + 5 = 0$ ovvero $t^2 - 4t + 3 = 0$ da cui $t_1 = 1$ e $t_2 = 3$. Il primo valore t_1 non dà soluzioni reali poiché l'equazione $x + \frac{1}{x} = 1$ ha il discriminante negativo mentre l'equazione $x + \frac{1}{x} = 3$ ha due soluzioni reali distinte $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

- $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$.

  Dividiamo ambo i membri dell'equazione per x^2, certamente diverso da zero e otteniamo: $2x^2 + 3x - 16 + 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 0$. Mettiamo in evidenza 2 nel primo e quinto addendo e 3 tra il secondo e quarto addendo: $2 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0$. Ponendo $x + \frac{1}{x} = t$ otteniamo l'equazione $2(t^2 - 2) + 3t - 16 = 0 \Rightarrow 2t^2 + 3t - 20 = 0$ che ha come soluzioni $t_1 = -4 \vee t_2 = \frac{5}{2}$. Poiché $|t| \geqslant 2$ le equazioni $x + \frac{1}{x} = t_1$ e $x + \frac{1}{x} = t_2$ hanno entrambe soluzioni reali distinte, pertanto $\text{I.S.} = \left\{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

✍ *Esercizi proposti:* 5.43, 5.44

5.6.4 Equazioni di quarto grado reciproche di seconda specie

Fanno parte di questa classe le equazioni del tipo:

$$a_0x^4 + a_1x^3 - a_1x - a_0 = 0$$

in cui il coefficiente di x^2 è nullo. Per risolvere questa equazione, raccogliamo a fattore parziale a_0 e a_1 ottenendo: $a_0\left(x^4 - 1\right) + a_1\left(x^3 - x\right) = 0 \Rightarrow a_0\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right) + a_1x\left(x^2 - 1\right) = 0$.

Raccogliendo a fattore comune totale si ha:

$$\left(x^2 - 1\right)\left[a_0\left(x^2 + 1\right) + a_1x\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 1)(x + 1)\left(a_0x^2 + a_1x + a_0\right) = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto si hanno quindi le due radici $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ e le eventuali radici reali dell'equazione di secondo grado $a_0x^2 + a_1x + a_0 = 0$.

Esempio 5.13. Risolvere l'equazione $x^4 - 8x^3 + 8x - 1 = 0$.

Si tratta di un'equazione di quarto grado reciproca di seconda specie, si osservi che il coefficiente di secondo grado è nullo e che gli altri coefficienti sono a due a due opposti. Raccogliendo a fattore comune parziale abbiamo

$$(x^4 - 1) - 8x(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2 - 1)(x^2 + 1) - 8x(x^2 - 1) = 0.$$

Mettendo poi in evidenza il binomio (x^2-1) abbiamo $(x^2-1)(x^2-8x+1)$. Risolvendo le equazioni $x^2-1=0$ e $x^2-8x+1=0$, otteniamo tutte le radici:

$$x_1=1 \vee x_2=-1 \vee x_3=4+\sqrt{15} \vee x_4=4-\sqrt{15}$$

e quindi

$$\text{I.S.}=\left\{-1,1,4+\sqrt{15},4-\sqrt{15}\right\}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 5.45, 5.46, 5.47, 5.48, 5.49, 5.50, 5.51

5.6.5 Equazioni di quinto grado reciproche di prima specie

Fanno parte di questa classe le equazioni del tipo:

$$a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0.$$

Con il raccoglimento parziale otteniamo:

$$a_0\left(x^5+1\right)+a_1\left(x^4+x\right)+a_2\left(x^3+x^2\right)=0.$$

Applichiamo ora la formula per la scomposizione della somma di potenze ottenendo

$$a_0(x+1)\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)+a_1x(x+1)\left(x^2-x+1\right)+a_2x^2(x+1)=0.$$

Raccogliendo $(x+1)$ ricaviamo:

$$(x+1)\left[a_0\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)+a_1x\left(x^2-x+1\right)+a_2x^2\right]=0$$

e quindi l'equazione diventa:

$$(x+1)\left[a_0x^4+(a_1-a_0)x^3+(a_2-a_1+a_0)x^2+(a_1-a_0)x+a_0\right]=0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto si determina la soluzione reale $x=-1$ e con i metodi analizzati in precedenza si risolve l'equazione di quarto grado reciproca di prima specie:

$$\left(a_0x^4+(a_1-a_0)x^3+(a_2-a_1+a_0)x^2+(a_1-a_0)x+a_0\right)=0.$$

Esempio 5.14. Risolvere l'equazione $6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 = 0$.

L'equazione è di quinto grado reciproca di prima specie. Una radice è $x_1 = -1$ e l'equazione può essere scritta come:

$$(x+1)\left(6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6\right) = 0.$$

Risolvendo l'equazione di quarto grado reciproca di prima specie

$$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0,$$

si trovano le altre quattro radici:

$$x_2 = -2, \quad x_3 = -\frac{1}{2}, \quad x_4 = 3, \quad x_5 = \frac{1}{3}$$

quindi

$$\text{I. S.} = \left\{-1, \, -2, \, -\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}\right\}.$$

5.6.6 Equazioni di quinto grado reciproche di seconda specie

Fanno parte di questa classe le equazioni del tipo:

$$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0 = 0.$$

Con il raccoglimento parziale si ottiene

$$a_0\left(x^5 - 1\right) + a_1\left(x^4 - x\right) + a_2\left(x^3 - x^2\right) = 0.$$

Applichiamo ora la formula per la scomposizione della differenza di potenze ottenendo:

$$a_0(x-1)\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right) + a_1x(x-1)\left(x^2 + x + 1\right) + a_2x^2(x-1) = 0.$$

Raccogliendo il binomio $(x-1)$ si ottiene

$$(x-1)\left[a_0\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right) + a_1x\left(x^2 + x + 1\right) + a_2x^2\right] = 0$$

e quindi

$$(x+1)\left[a_0x^4 + (a_1 - a_0)x^3 + (a_2 - a_1 + a_0)x^2 + (a_1 - a_0)x + a_0\right] = 0.$$

Una radice è $x = 1$ e le altre provengono dall'equazione di quarto grado reciproca di prima specie:

$$a_0x^4 + (a_1 + a_0)x^3 + (a_2 + a_1 + a_0)x^2 + (a_1 + a_0)x + a_0 = 0.$$

Esempio 5.15. Risolvere l'equazione $x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0$.

È un'equazione di quinto grado reciproca di seconda specie. Una radice è $x_1 = 1$ e l'equazione può essere scritta come:

$$(x-1)\left(x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1\right) = 0.$$

Risolvendo l'equazione di quarto grado reciproca di prima specie

$$x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0,$$

si trovano altre due radici reali:

$$x_2 = -2 + \sqrt{3} \quad \text{e} \quad x_3 = -2 - \sqrt{3}.$$

Pertanto

$$\text{I. S.} = \left\{+1,\ -2+\sqrt{3},\ -2-\sqrt{3}\right\}.$$

5.6.7 Equazioni reciproche di sesto grado

Esempio 5.16. Risolvere l'equazione $-x^6 + 6x^5 + 6x^4 - 6x^2 - 6x + 1 = 0$.

Si tratta di un'equazione di sesto grado reciproca di seconda specie (si osservi che il termine di terzo grado è nullo); l'equazione ammette per radici $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$. Possiamo quindi dividere il polinomio per il binomio $\left(x^2 - 1\right)$, ottenendo come quoziente $-x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 6x - 1$. Si tratta allora di risolvere un'equazione di quarto grado reciproca di prima specie. Si trovano in questo modo altre due radici reali: $x_3 = \frac{7+\sqrt{5}}{2}$ e $x_4 = \frac{7-\sqrt{5}}{2}$.