Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Maß- und Integrationstheorie

Vorlesung 26

Integralgleichungen

In Lemma 56.1 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) wird ein Anfangswertproblem $x' = F(t,x)$ mit $f(a) = w$ in die Integralgleichung

$$x(s) = w + \int_a^s F(t, x(t))\, dt$$

übersetzt. Damit konnte die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung unter bestimmten Voraussetzungen gezeigt werden und mit der Picard-Lindelöf-Iteration auch ein approximierendes Berechnungsverfahren begründet werden. Eine allgemeinere Form einer Integralgleichung ist

$$x(s) = \int_a^s F(s, t, x(t))\, dt + g(s),$$

wobei die Abbildungen g, F und die gesuchte Abbildung x Werte im $\mathbb{R}^n$ besitzt. Da über t integriert wird, darf das s sowohl im Integranden als auch in der Integrationsgrenze vorkommen. Diese Gesamtsituation ist sehr allgemein, typischerweise betrachtet man Situationen, wo zusätzliche Bedingungen erfüllt sind. Wir betrachten die Situation, wo die gesuchte Funktion $x(t)$ linear in den Integranden eingeht, d.h. der Integrand besitzt die Form

$$F(s, t, x(t)) = K(s,t)x(t)$$

mit einer skalarwertigen Funktion $K(s,t)$, die der Integralkern der Integralgleichung heißt. Man unterscheidet nun die folgenden Varianten gemäß der folgenden Fragen

(1) Kommt die gesuchte Funktion $x(t)$ nur im Integranden oder (wie oben) auch außerhalb (oben auf der linken Seite) vor?
(2) Ist die obere Inegrationsgrenze konstant oder variabel?
(3) Ist $g(t) = 0$ (homogner Fall) oder nicht (inhomogener Fall).

Einige Situationen bekommen einen eigenen Namen.

(1)

$$0 = \int_a^b K(s,t)x(t)dt + g(s)$$

(Fredholmsche Integralgleichung erster Art).

(2)
$$x(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt + g(s)$$
(Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art).

(3)
$$0 = \int_a^s K(s,t)x(t)dt + g(s)$$
(Volterrasche Integralgleichung erster Art).

(4)
$$x(s) = \int_a^s K(s,t)x(t)dt + g(s)$$
(Volterrasche Integralgleichung zweiter Art).

Eine eindimensionale lineare inhomogene Differentialgleichung
$$x' = f(t)x + h(t)$$
mit
$$x(a) = w$$
führt auf die Integralgleichung
$$x(s) = w + \int_a^s f(t)x(t) + h(t)dt = w + H(s) + \int_a^s f(t)x(t)dt,$$
wobei H eine Stammfunktion zu h mit $H(a) = 0$ sei. Dies ist eine Volterrasche Differentialgleichung zweiter Art mit $g(s) = w + H(s)$.

Beispiel 26.1. Wir betrachten die verschiedenen linearen eindimensionalen Integralgleichungen für den Fall, wo der Integralkern konstant gleich 1 ist und im homogenen Fall, also $g = 0$.

(1)
$$\int_a^b x(t)dt = 0.$$
Hier gibt es eine Vielzahl an Lösungsfunktionen.

(2)
$$\int_a^b x(t)dt = x(s).$$
Da die linke Seite nicht von s abhängt, muss die Lösungsfunktion konstant sein, hier ist die Nullfunktion eine Lösung. Bei
$$b - a = 1$$
ist aber auch jede konstante Funktion eine Lösung.

(3)
$$\int_a^s x(t)dt = 0$$
für alle s. Die Nullfunktion ist die einzige Lösung.

(4)
$$\int_a^s x(t)dt \,=\, x(s).$$
Die Nullfunktion ist eine Lösung. Bei $a = -\infty$, wenn wir das hier zulassen und mit uneigentlichen Integralen arbeiten, sind ce^t Lösungen.

Beispiel 26.2. Eine Integralgleichung der Form
$$x(s) \,=\, \int_a^s K(s)x(t)dt \,=\, K(s)\int_a^s x(t)dt,$$
wo also der Integralkern nur von der Variablen s abhängt, nach der nicht integriert wird, kann man wie folgt vorgehen. Alle Daten seien differenzierbar und gesucht sei nach differenzierbaren Funktionen. Es sei ferner $K(s)$ nullstellenfrei. Dann kann man die Gleichung auch als
$$\frac{x(s)}{K(s)} \,=\, \int_a^s x(t)dt$$
schreiben und beidseitig ableiten. So erhält man die Bedingung
$$\frac{x'(s)K(s) - x(s)K'(s)}{K(s)^2} \,=\, x(s)$$
bzw. durch Umstellung
$$x'(s) \,=\, \left(K(s) + \frac{K'(s)}{K(s)}\right)x(s),$$
also eine homogene lineare Differentialgleichung, die mit Satz 29.2 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) gelöst werden kann.

Satz 26.3. *Es sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall,*
$$[a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
ein stetiger Integralkern mit $|K(s,t)| \leq M$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Dann gibt es zur jeder reellen Zahl λ mit $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ eine eindeutige Lösungsfunktion $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit
$$x(s) \,=\, \lambda \int_a^b K(s,t)x(t)dt + g(s).$$

Beweis. Wir betrachten den Vektorraum X aller stetigen Kurven von $[a,b]$ nach $\mathbb{R}^n$. Dieser ist mit der Maximumsnorm ein metrischer Raum und nach Satz 55.9 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) vollständig. Es sei λ mit der beschriebenen Eigenschaft fixiert. Die zum Kern gehörige Transformation
$$(T_K(x))(s) \,=\, \lambda \int_a^b K(s,t)x(t)dt + g(s)$$
ist eine Abbildung
$$X \longrightarrow X,\, x \longmapsto T(x).$$

Die Wohldefiniertheit beruht auf der Existenz der bestimmten Integrale für stetige Funktionen und auf der Stetigkeit des Integrals, siehe Satz 58.2 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)). Eine Lösung der Integralgleichung ist offenbar ein Fixpunkt der Transformation, wir werden also den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Zu Kurven $x_1, x_2 \in X$ ist

$$T(x_1)(s) - T(x_2)(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)(x_1(s) - x_2(s))dt$$

und dies ist durch

$$|\lambda| \cdot M \cdot (b-a) \cdot \|x_1 - x_2\|$$

beschränkt. Daher ist

$$\begin{aligned} \|T(x_1) - T(x_2)\| &= \max\left(\|T(x_1)(s) - T(x_2)(s)\| | s \in [a,b]\right) \\ &\leq |\lambda| \cdot M \cdot (b-a) \cdot \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

und nach Voraussetzung ist $|\lambda| \cdot M \cdot (b-a) < 1$, also ein Kontraktionsfaktor. $\square$

Wenn g die Nullfunktion ist, also der homogene Fall vorliegt, so ist die Nullfunktion $x(s) = 0$ stets eine Lösung. Für λ betragsmäßig klein bedeutet der Satz, dass die Nulllösung die einzige Lösung gibt. Für großes λ gibt es im Allgemeinen nichttriviale Lösungen.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5