從ツテ函數 $f(x)=0$ ノ原函數ハ常數デアル．但シ此ノ常數ノ値ハ何デモヨイ．卽チ函數ガ 0 デアレバ，其ノ原函數ハ常數デアツテ，其ノ値ハ隨意デアル．故ニ之ヲ通常 C トカク．C ハ隨意ノ常數ヲ意味スルノデアル．此ノ事實ヲ

常數 0 ノ原函數ハ隨意常數デアル．

トイフ．

附記 函數 0 ノ原函數ハ常數ノ外ニモ有ルカモ知レナイトイフ疑ハ無用デアル．何故ナラバ，原函數ノ導函數ガ 0 デアルカラ，獨立變數 x ガ變化シテモ原函數ハ變化シナイノデアル．卽チ常數ニ外ナラナイ．

常數ノ微分商ガ 0 デアリ，0 ノ原函數ガ常數デアルコトカラ氣付クノハ，函數 $f(x)$ ノ導函數ガ $f'(x)$ デアレバ，$f(x)$ ハ $f'(x)$ ノ原函數デアルト同時ニ $f(x)+C$ (C ハ隨意常數) モ亦 $f'(x)$ ノ原函數デアルノデハナイカトイフ事デアル．是ヲ驗シテ見ヨウ．x ガ h ダケ增セバ，ソレニ從ツテ $f(x)+C$ ノ增シハ $[f(x+h)+C]-[f(x)+C]=f(x+h)-f(x)$ デ，$f(x)$ ノ增シト全ク同ジデアル．C ハ有ツテモ無クテモ其ノ增分ニ變リハナイノデアル．從ツテ $f(x)+C$ ノ導函數ハ $f(x)$ ノモノト全ク同一デアル．故ニ $f(x)+C$ ハ $f'(x)$ ノ原函數デアルコトニ疑ヒハナイ．併シ $f'(x)$ ノ原函數ハ是ヨリモ尙廣イ範圍ノ函數デハナイカノ疑ヒガ起ル．此ノ問題ヲ解決スル爲ニ $f'(x)$ ノ隨意ナ原函數ヲ $F(x)$ トスルト，$F(x)$ モ $f(x)$ モ共ニ其ノ導函數ハ $f'(x)$ デアルカラ，$F(x)-f(x)$ ナル函數ノ導函數ハ $f'(x)-f'(x)=0$ 卽チ 0 デアル．故ニ $F(x)-f(x)$ ハ 0 ノ原函數デ，從ツテ上ニ得タ結果ニヨレバ，隨意ナ常數デナケレバナラナイ．ヨツテ

$$F(x)-f(x)=C \qquad \text{C ハ隨意常數}$$

書キ直セバ

$$F(x)=f(x)+C$$

トナル．是ハ隨意ナ原函數 $F(x)$ ハ前ニ得タ原函數ニ隨意常數 C ヲ加ヘタモノニ他ナラナイコトヲ示スノデアル．換言スレバ $f(x)+C$ ハ總テノ原函數ヲ表ハスノデ，是以外ニハ原函數ハナイノデアル．故ニ一ツノ原函數ヲ得タナラバ，ソレニ隨意常數ヲ加ヘテ總テノ原函數ヲ得ルノデアル．

此ノ結果カラ見レバ

$$\frac{1}{n+1}x^{n+1},\ \frac{1}{n+1}x^{n+1}+1,\ \frac{1}{n+1}x^{n+1}+\frac{1}{2},\ \frac{1}{n+1}x^{n+1}+3\cdots\cdots$$

等ハ皆函數 x ノ原函數デアル．是等ヲ一括シテ

函數 x^n ノ原函數ハ $\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ デアル．但シ C ハ隨意ノ常數デアル．

ト言ヒ得ラレル．

原函數トイフ語ノ代リニ不定積分[1]トイフコトモアル．例ヘバ上記ノ結果ヲ

函數 x^n ノ不定積分ハ $\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ デアル．

ト言ヒ換ヘテモヨイノデアル．是ハ後ニ說ク樣ニ原函數ヲ知レバ，積分ト稱スルモノノ値ガ直ニ分カルカラデアル．從ツテ又積分ニ用ヰル記號ヲ使用シテ上ノ結果ヲ

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

ト書イテモヨイ．

以下初等函數ノ導函數ヲ計算スルガ，實用ニハ唯ソノ結果ヲ知レバヨイノデアルカラ，面倒ナ計算ハ卷末附錄ニ讓リ篤志家ノ參考ニ供スル．

60 對數函數ノ導函數

獨立變數 x ノ對數 $\log x$ ヲ對數函數トイフガ，前ニモ述ベタ樣ニ，對數ニハ種類ガアツテ，其ノ底數ヲ定ムレバ，其ノ種類ガ定マルノデアル．底數

---

1) *Indefinite integral.*

トハ其ノ對數ガ1デアル數(換言スレバ1ノ眞數)ノ意味デアル．ツマリ a ヲ底數トスレバ $\log a=1$ トナル譯デアル．底數ヲ示ス必要ガアレバ $\log_a$ ト書ク．ヨツテ今對數函數 $\log_a x$ ヲ考ヘテ見ル．

$$f(x)=\log_a x$$

デアルカラ

$$f(x+h)=\log_a(x+h)$$

デアリ，從ツテ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\{\log_a(x+h)-\log_a x\}$$

デアル．然ルニ第 49 頁ニ說明シタ樣ニ

$$\log_a(x+h)-\log_a x=\log_a\frac{x+h}{x}$$
$$=\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

デアルカラ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

トナル．x ヲ不變トシテ唯 h ヲ零ニ近ヅケレバ，$\frac{h}{x}$ ハ漸次零ニ近ヅク量デアル．是ヲ今假ニ ε ト書ケバ $\varepsilon=\frac{h}{x}$ デ上式ノ右邊ハ

$$\frac{1}{h}\log_a(1+\varepsilon)$$

トナルガ，是ハ又

$$\frac{1}{x}\,\frac{x}{h}\log_a(1+\varepsilon)=\frac{1}{x}\,\frac{1}{\varepsilon}\log_a(1+\varepsilon)$$

ト書イテモヨイ．第 49 頁ニ述ベタ樣ニ

$$\log_a r^n=n\log_a r$$

デアルカラ，上式右邊ノ

$$\frac{1}{\varepsilon}\log_a(1+\varepsilon)$$

ハ $\log_a(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ ニ等シイノデアル．ヨツテ上式右邊ヲ書キ直シテ

$$\frac{1}{x}\log_a(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

トシテモヨイ．茲ニ ε ハ $\frac{h}{x}$ デアルカラ $h\to0$ ト共ニ零ニ近ヅク量デアル．今吾人ノ知リタイノハ，第二因子

$$\log_a(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

ハ $\varepsilon\to0$ ノトキ，如何ナル數ニ近ヅクカ，換言スレバ $\varepsilon\to0$ ノトキノ極限如何デアル．幸ニ前ニ第 173 頁ニ於テ

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e$$

ナル結果ヲ得テ居ル．e トハ 2.71828...... ナル定マツタ數デアル．此ノ式中ニ在ル m ガ無限ニ增大スレバ $\frac{1}{m}$ ハ無限ニ小サクナリ 0 ニ近ヅクノデアルカラ，之ヲ ε ト書ケバ上ノ結果ハ

$$\lim_{h\to0}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}=e$$

トモ書キ得ルノデアル．故ニ問題トナツタ $\log_a(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ ハ $\varepsilon\to0$ ノ極限トシテ $\log_a e$ ヲ有ツノデアル．ヨツテ以上ノ結果ヲ纏メレバ

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{x}\log_a(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$
$$=\frac{1}{x}\log_a e$$

トナル．卽チ

$$f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

ヲ得タノデアル．$\log_a x$ ノ導函數ハ $\frac{1}{x}$ ニ常數 $\log_a e$ ヲ乘ジタモノデアル．唯此ノ常數ガ餘リ簡單ナ數デナイノガ不便デアルカラ，之ヲ避ケル爲ニ，對數ノ底數 a ヲ適當ニ選ンデ右邊ヲ成ル可ク簡單ニスルノデアル，此ノ目的ノ爲ニハ底數 a ヲ e トスレバ，上ニ述ベタ如ク底數ノ對數ハ1デアルカラ $\log_e e=1$ トナツテ，上式ハ

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

又ハ

$$\frac{d}{dx}\log_e x=\frac{1}{x}$$

トナル．高等數學ニ於テハ $\log_e x$ ノ e ヲ略シテ單ニ $\log x$ ト書クノデ，上式ハ普通

$$\frac{d}{dx}\log x=\frac{1}{x}$$

ト書イテアル．

茲ニ注意ヲ要スルコトハ，$\log x$ ハ x ガ正ノ値ヲ有ツ時ニノミ意味ヲ有スルコトデ，從ツテ上式ハ元來 x ヲ正ノ數トシテ論ジタノデアル．ヨツテモシ x ガ負ノ數ナラバ，如何ニ考ヘルベキデアラウカ．x ガ負ノ數ナラバ，$-x$ ハ正ノ數デアルカラ $\log(-x)$ ハ有意義ナ函數デアル．ヨツテ

$$f(x)=\log(-x)$$

トシテ上述ノ計算ヲ進メテ見ヨウ．此ノ時ニハ

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)&=\log(-\overline{x+h})-\log(-x)\\&=\log(-x-h)-\log(-x)\\&=\log\frac{-x-h}{-x}\\&=\log\left(1+\frac{h}{x}\right)\end{aligned}$$

ヨツテ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

故ニ再ビ $\frac{h}{x}=\varepsilon$ トオケバ，右邊ハ $\frac{1}{h}\log(1+\varepsilon)$ トナツテ第188頁ノ式ト同一ノ式ヲ得ルノデアル．故ニ結局前ト同ジク

$$\frac{d\log(-x)}{dx}=\frac{1}{x}$$

ヲ得ル．

以上ノ結果ヲ並記シテ見ルト

x ガ正ナラバ　$\frac{d\log x}{dx}=\frac{1}{x}$

x ガ負ナラバ　$\frac{d\log(-x)}{dx}=\frac{1}{x}$

x ガ零ナラバ $\log x$ ハ意味ヲ有タナイ（$-\infty$ デアルトモイフ）．

x ノ絶對値ヲ表ハスニ記號 $|x|$ ヲ用ヰレバ上ノ二式ヲ纏メテ

$$\frac{d\log|x|}{dx}=\frac{1}{x}\qquad(x\neq0)$$

トスルコトガ出來ル．

此ノ故ニ x ハ 0 ニ非ズトスレバ $\frac{1}{x}$ ノ原函數ハ $\log|x|+C$ デアル．式ニ書ケバ

$$\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+C$$

トナル．

61 指數函數ノ導函數

指數函數トハ a^x ノ様ナ函數ヲイフノデアル．a ハ正ノ常數デアル．

函數 a^x ヲ微分スレバ，附錄(1) ノ様ナ計算ニヨツテ

$$\frac{da^x}{dx}=a^x\cdot\log a$$ [1]

ヲ得ル．モシ a ガ常數 e デアレバ $\log a=\log e=1$ デアルカラ

$$\frac{de^x}{dx}=e^x$$

トナル．即チ函數 e^x ノ導函數ハ原ノ函數ト同一ノモノデアル．是ハ此ノ函數ノ著シキ特徴デアル．

此ノ結果ヨリ直チニ原函數ノ式

1) 附錄 (1) 參照.

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C$$

$$\int e^x dx=e^x+C$$

ヲ得ル．

62 三角函數ノ導函數[1]

三角函數卽チ角 x ノ正弦，餘弦，正切，餘切ノ導函數ハ次ノ如キモノデアル．如何ニシテ計算シタカハ附錄 (2)—(5) ニ說明スル．

$$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x$$

$$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$ (sine, cosine, tangent, cotangent ノ中前ニ co ノ付イタモノノ導函數ニハ (−) ガ付ク)

$$\frac{d\tan x}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d\cot x}{dx}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$ [2]

是等ノ式ノ逆トシテ原函數ノ式ガ得ラレル．

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C$$

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C$$

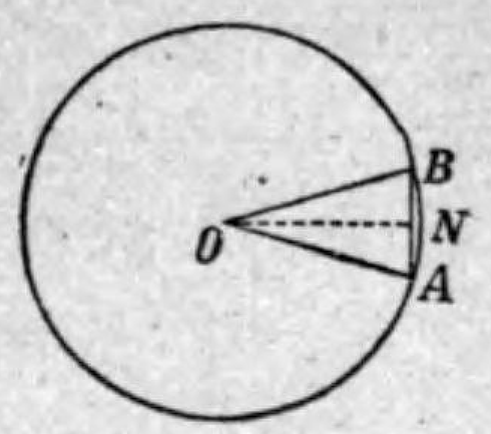
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+C=-\frac{1}{\tan x}+C$$

正弦，餘弦ナドヲ微分スルトキニ知ツテ居ラネバナラヌ豫備知識ヲ此處ニ

1) 附錄 (2)—(5) 參照．
2) cot x ハ餘切トイヒ，$\frac{1}{\tan x}$ ノコトデ，從ツテ $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ デアル．

證明シテ置ク．此ノ事ハ他ノ方面ニモ屢々應用セラレル．

半徑1ナル圓內ニ正 n 角形ヲ內接セシメタトスルト，其ノ一邊ノ長サハ嘗テ說明シタ樣ニ次ノ如ク求メラレル．一邊ヲ AB トスレバ，中心 O ニ於ケル角 AOB ハ $\frac{2\pi}{n}$ デアル(らぢあんデ表ハス)．



今 O カラ AB ニ垂線 ON ヲ下セバ AN=BN デアルカラ，BN ハ一邊ノ長サノ半分デアル．又角 BON ハ $\frac{2\pi}{n}$ ノ半分 $\frac{\pi}{n}$ デアルコトハ明白デアル．故ニ

$$BN=OB\sin\frac{\pi}{n}$$

然ルニ半徑 OB ハ1デアルカラ

$$BN=\sin\frac{\pi}{n}$$

トナル．從ツテ一邊 AB ノ長サハ

$$AB=2\sin\frac{\pi}{n}$$

デアル．n 角形ノ全周ノ長サハ，言フマデモナク，此ノ n 倍卽チ

$$2n\sin\frac{\pi}{n}$$

デアル．

n ヲ漸次增大スレバ，此ノ全周ハ漸次圓周ノ長サニ近ヅキ，其ノ極限ハ全圓周ノ長サトナルコトハ，前ニ圓周率ヲ計算スルトキニ用キタ事デアル．然ルニ全圓周ノ長サハ，半徑ガ1デアルカラ 2π デアル．故ニ

$$\lim_{n\to\infty}2n\sin\frac{\pi}{n}=2\pi$$

デアル．是ヲ次ノ樣ニ書キ替ヘテモヨイ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n\sin\frac{\pi}{n}}{2\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=1$$

此ノ結果ヲ見ルニ，n ガ限リ無ク增大スレバ $\sin\frac{\pi}{n}$ ト $\frac{\pi}{n}$ トハ漸次同ジ値ニ近ヅクノデアル．n ガ增大スレバ $\frac{\pi}{n}$ ハ漸次減少シテ，ソノ極限ハ零デアルカラ，上ノ結果ヲ次ノ樣ニ見テモヨイ．

半徑1ナル圓ノ弧 θ（卽チらぢあんデ表ハシタル角 θ）ガ限リ無ク減少シテ零ニ近ヅケバ $\frac{\sin\theta}{\theta}$ ノ値ハ漸次1ニ近ヅキ，其ノ極限ハ1デアル．

此ノ關係アルニ由リ，角 θ（らぢあん）ガ極メテ小サイ時ニハ $\sin\theta$ ノ代リニ θ ヲ用キテモ大シタ誤差ハナイコトガ分カル．

63 和，差，積，商ノ微分法

以上デ個々ノ初等函數ノ微分法ヲ大體說明シタカラ，次ニハ如上ノ函數ノ和，差，積，商等ノ微分法ヲ述ベル．先ヅ和カラ始メル．

$f(x)$ ト $g(x)$ トハ同ジ獨立變數 x ノ二ツノ函數ナリトシ，是ヲ加ヘ合セルト又一ツノ函數 $f(x)+g(x)$ ヲ得ル．之ヲ假ニ $\mathrm{F}(x)$ ト名ヅケテ，其ノ導函數ヲ索メテ見ヨウ．

$$\mathrm{F}(x)=f(x)+g(x)$$

デアルカラ

$$\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}=\frac{1}{h}\{f(x+h)+g(x+h)-[f(x)+g(x)]\}$$

$$=\frac{1}{h}\{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)\}$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

今 h ガ漸次零ニ近ヅクナラバ，卽チ $h\to0$ ナラバ，右邊ノ第一項ノ極限ハ $f'(x)$ デアリ，第二項ノ極限ハ $g'(x)$ デアル．故ニ上式ハ

$$\mathrm{F}'(x)=f'(x)+g'(x)\quad 又ハ\quad \frac{d\mathrm{F}(x)}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}$$

トナル．ヨツテ

二ツノ函數ノ和ノ導函數ハ各函數ノ導函數ノ和デアル．

次ニ $f(x)$ ト $g(x)$ トノ差ノ導函數ヲ計算シテ見ヨウ．

$f(x)-g(x)$ ヲ $\mathrm{F}(x)$ トスル．

$$\mathrm{F}(x)=f(x)-g(x)$$

カラ

$$\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}=\frac{1}{h}\{f(x+h)-g(x+h)-[f(x)-g(x)]\}$$

$$=\frac{1}{h}\{f(x+h)-f(x)-[g(x+h)-g(x)]\}$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

コヽデ $h\to0$ トスルト，明ラカニ

$$\mathrm{F}'(x)=f'(x)-g'(x)\quad 又ハ\quad \frac{d\mathrm{F}(x)}{dx}=\frac{df(x)}{dx}-\frac{dg(x)}{dx}$$

トナル．卽チ

二ツノ函數ノ差ノ導函數ハ各函數ノ導函數ノ差デアル．

例（1） 函數 x^2+x+c ノ導函數ヲ索メヨ．

解 問題ノ函數ハ x^2 ト $x+c$ トノ和デアルカラ，夫々ノ導函數ヲ加ヘレバヨイガ，第二ノ函數 $x+c$ ノ導函數ハ又 x ト c トノ導函數ノ和デアルカラ，結局 x^2，x，c ノ導函數ヲ加ヘレバヨイ．然ルニ

$$\frac{d(x^2)}{dx}=2x\qquad \frac{dx}{dx}=1\qquad \frac{dc}{dx}=0$$

$$\therefore\quad \frac{d(x^2+x+c)}{dx}=2x+1$$

例（2） $\sin x+\cos x$ ノ導函數ヲ索メヨ．

解 $$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x\qquad \frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

デアルカラ

$$\frac{d(\sin x+\cos x)}{dx}=\cos x-\sin x$$

トナル．

次ニ函數ノ積ノ微分法ヲ説明シヨウ．

二ツノ函數 $f(x)$ ト $g(x)$ トノ積ヲ $F(x)$ ト名ヅケレバ

$$F(x)=f(x)\cdot g(x)$$

斯ノ如キ函數 $F(x)$ ノ微分商ヲ $f(x)$，$g(x)$ 及ビ其ノ微分商デ表ハスノガ吾々ノ問題デアル．

例ニヨッテ x ヲ h ダケ增セバ，之ニ對スル $F(x)$ ノ增分ハ

$$F(x+h)-F(x)=f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)$$

デアル．右邊ヲ少シク書キ替ヘテ（$f(x)\cdot g(x+h)$ ヲ加ヘ又減ジテ）

$$\begin{aligned}f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)&=f(x+h)g(x+h)\\&\quad-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)\end{aligned}$$

トスル．右邊ハ中間ノ二項ガ互ニ相殺シテ左邊ト同ジモノトナル．右邊ハ又

$$\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}$$

ト書キ替ヘテモヨイカラ，結局

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

トナル譯デアル．故ニ h ガ限リ無ク零ニ近ヅケバ，卽チ $h\to0$ ナラバ

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)\\&\quad+f(x)\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\end{aligned}$$

トナリ，左邊ハ $\dfrac{dF}{dx}=F'(x)$ デ，右邊第一項ノ第一因子ハ $\dfrac{df}{dx}=f'(x)$ デ第二因子ハ $g(x)$ トナリ，第二項ノ第二因子ハ $\dfrac{dg}{dx}=g'(x)$ トナル．故ニ上式ハ結局

$$\frac{dF}{dx}=\frac{df}{dx}g(x)+f(x)\frac{dg}{dx}$$

又ハ
$$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

ヲ得ルノデアル．故ニ

二ツノ函數ノ積ノ導函數ハ其ノ因子ヲ一ツヅツ微分シテ（他ノ因子ハ其

ノ儘トシテ）相加ヘタモノデアル．

コトガ分カル．

函數ノ積 $F=f\cdot g$ ニ於テモシ其ノ因子ノ一ツ例ヘバ $g(x)$ ガ常數デアレバ $F=cf$（c ハ常數）トナル．此ノ導函數ハ上式ニ於テ $g(x)=c$ トスレバヨイノデ，$g'(x)=0$ デアルカラ，上式カラ

$$F'(x)=cf'(x)$$

ヲ得ル．卽チ

常數ヲ乘ジタル函數ノ導函數ハ，其ノ函數ノ導函數ニ其ノ常數ヲ乘ジタルモノデアル．

次ニハ函數 $f(x)$ ヲ函數 $g(x)$ デ除シタルモノノ導函數ヲ計算シテ見ヨウ．例ニ依ッテ

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

トオクト

$$F(x+h)-F(x)=\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}$$

デ，右邊ヲ次ノ樣ニ變形スル．

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}&=\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)}\\&=\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)}\\&=\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x)-f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{g(x)g(x+h)}\end{aligned}$$

故ニ

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-f(x)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x)g(x+h)}$$

トナル．ヨッテ $h\to0$ トスレバ

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$=\frac{\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]g(x)-f(x)\left[\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{g(x)\lim_{h\to 0}g(x+h)}$$

卽チ

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{\frac{df}{dx}g(x)-f(x)\frac{dg}{dx}}{\{g(x)\}^2}$$

又ハ

$$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

トナル.

上ノ演算ノ間ハ勿論分母ノ $g(x)$ ハ零ニナラナイト假定スルノデアル.

コノ分子 $f(x)$ ガ 1 デアレバ $f'(x)=0$ トナリ, 又 $F(x)=\frac{1}{g(x)}$ デアル. 此ノ $F(x)$ ノ導函數ヲ求メルニハ上式ノ中ノ $f(x)$ ヲ 1, $f'(x)$ ヲ零トスレバヨイ. 故ニ

$$\frac{dF(x)}{dx}=-\frac{1}{\{g(x)\}^2}\frac{dg}{dx} \quad 又ハ \quad F'(x)=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

トナル.

二ツノ函數ノ積, 商ヲ微分スル例ヲ示サウ.

例 (1) $F(x)=x\sin x$ ヲ微分セヨ.

解 $f(x)=x$, $g(x)=\sin x$ トスレバ F ハ f ト g トノ相乘積デ

$$F(x)=f(x)g(x)$$

デアル. 然ルニ積ノ導函數ハ

$$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

デ, 特ニ此ノ場合ニハ $f=x$, $g=\sin x$ デアルカラ, $f'=1$ $g'=\cos x$ デアル. 故ニ

$$F'(x)=\sin x+x\cos x$$

卽チ

$$\frac{d(x\sin x)}{dx}=\sin x+x\cos x$$

トナル.

例 (2) $F(x)=\tan x$ ヲ微分セヨ.

解 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$ トスレバ

$$F(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{f(x)}{g(x)}$$

デアル. 然ルニ商ノ導函數ハ

$$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

デアル. 此ノ問題デハ

$$f(x)=\sin x \quad \therefore\ f'(x)=\cos x$$

$$g(x)=\cos x \quad \therefore\ g'(x)=-\sin x \quad (第192頁)$$

デアルカラ

$$F'(x)=\frac{\cos^2 x-(-\sin^2 x)}{(\cos x)^2}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}$$

卽チ

$$\frac{d\tan x}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

トナリ第192頁ノ公式ヲ得ルノデアル.

64 逆函數ノ微分法

函數 $y=x^2$ ハ x ヲ獨立變數トシテ, 其ノ二乘 x^2 ヲ意味スルノデアルガ, 以前述ベタ如ク, x ハ又 y ノ函數トモ考ヘ得ラレル. 實際 $x=\sqrt{y}$ デ, y ノ一定ノ値ニ對シテ x ノ値ガ定マツテ居ル. ヨツテ獨立變數ノ平方根ヲ獨立變數ノ二乘ノ逆函數[1]トイフノデアル. 此ノ意味デ, 獨立變數ヲ x ト書

1) *Inverse function.*

イテ，函數 x^2 ニ對シテ $\sqrt{x}$ ヲ其ノ逆函數トイフテモヨイデアラウ．

函數 $y=f(x)$ ヲ x ニ關シテ解イテ

$$x=\varphi(y)$$

ヲ得タトスレバ $\varphi(y)$ (又ハ $\varphi(x)$ デモヨイ) ハ $f(x)$ ノ逆函數デアルガ，此ノ $\varphi(y)$ (又ハ $\varphi(x)$) ノ導函數ヲ求メルノガ問題デアル．ツマリ $\varphi(y)$ ノ導函數ヲ原ノ函數 $f(x)$ ノ導函數デ表ハスノデアル．

$y=f(x)$ ニ於テ x ヲ h ダケ増セバ，ソレニツレテ y モ亦變動スルカラ，ソノ増分ヲ k (k ハ正ノ事モアリ負ノ時モアル) トスレバ

$$y+k=f(x+h)$$

デアル．h ガ小サクナレバナル程，一般ニハ k モ亦小トナリ，h ガ零トナレバ，k モ亦同時ニ零トナルデアラウ．$h\to0$ ノトキノ $\lim\limits_{h\to0}\frac{k}{h}$ ガ $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ デアルガ，吾人ノ問題ハ，y ヲ獨立變數ト考ヘテ $\frac{dx}{dy}$ ヲ索メルノデアルカラ，$k\to0$ ノトキノ $\frac{h}{k}$ ノ極限ヲ索メルコトナノデアル．然ルニ明ラカニ

$$\frac{k}{h}=\frac{1}{\frac{h}{k}} \qquad \frac{h}{k}=\frac{1}{\frac{k}{h}}$$

デアルカラ

$$\lim_{h\to0}\frac{h}{k}=\frac{1}{\lim\limits_{h\to0}\frac{k}{h}} \qquad (h\to0 \text{ ナラバ同時ニ } k\to0 \text{ デアル})$$

卽チ

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

トナル．故ニ又

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f'(x)}$$

トシテモヨイ．卽チ索ムル導函數 $\frac{dx}{dy}$ ハ $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ ノ倒數 (f' デ 1 ヲ除シタルモノ) デアル．但シ此ノ場合右邊ハ函數 x ニテ表ハサレテ居ルカ

ラ，コレヲ獨立變數 y ニテ表ハスニハ，$y=f(x)$ ヲ解イテ得ル $x=\varphi(y)$ ノ右邊 $\varphi(y)$ ヲ x ニ代入シテ $\frac{1}{f'\{\varphi(y)\}}$ ヲ計算スレバ得ラレル．

例 (1) $y=\log x$ ヨリ $\frac{dx}{dy}$ ヲ求メヨ．

解 $\log x$ ノ逆函數ハ e^x デアルカラ ($y=\log x$ ヲ x ニ關シテ解ケバ $x=e^y$ トナル) 此ノ問題ハ結局 e^x ノ導函數ヲ索ムル問題ト同ジデアル．

第190頁ニ說イタ樣ニ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\log x}{dx}=\frac{1}{x}$$

デアルカラ

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

デアル．然ルニ $x=e^y$ デアルカラ

$$\frac{dx}{dy}=e^y$$

卽チ

$$\frac{de^y}{dy}=e^y$$

ヲ得ル．此ノ式デハ獨立變數ヲ y トシテアルガ，ソレヲ x デ表ハセバ，上式ハ

$$\frac{de^x}{dx}=e^x$$

トナツテ第191頁ノ結果ト全ク一致スル．

例 (2) $y=x^2$ ヨリ $\frac{dx}{dy}$ ヲ求メヨ．

解 第182頁ニ計算シタ所ニヨルト

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^2}{dx}=2x$$

デアル．ヨツテ

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2x}$$

然ルニ $y=x^2$ ヨリ x ヲ y ニテ表ハセバ(卽チ y ヲ獨立變數, x ヲ其ノ函數トスレバ)

$$x=\sqrt{y}$$

デアルカラ, 上式ニ代入シテ

$$\frac{d\sqrt{y}}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

トナル. 故ニモシ獨立變數ヲ y ノ代リニ x ト書ケバ

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

トナルノデアル. 是ハ第184頁ニ得タ式

$$\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$$

ニ於テ $n=\frac{1}{2}$ トシテ得ル式 ($x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ デアルカラ)

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ト全ク同一デアル.

65 逆三角函數ノ導函數

三角函數例ヘバ $\sin x$ ノ逆函數トハ $y=\sin x$ ニ於テ x ヲ y ノ函數ト見做ストキノ函數デアルカラ, y ヲ正弦トスル角ノ意デアル. 一例ヲ擧グレバ

$$\frac{1}{2}=\sin x$$

デアレバ, 表ヨリ $x=30°$ ヲ得ルデアラウ. 左邊 $\frac{1}{2}$ ガ定マツタ數 $\frac{1}{2}$ ノ代リニ變數 y デアレバ, x ハ其ノ正弦ノ値ガ y デアル角ノ義デアルカラ, y ガ變動スレバ從ツテ角 x モ亦變動スルノデアル. 卽チ x ガ y ノ函數デアル. 此ノ函數ハ吾人ガ今マデ考ヘタ函數中ニハ無イ種類デ, 從ツテ之ヲ表ハス記號ハ新ニ設定シナケレバナラナイ. 通常之ヲ表ハスニ記號

$$\arcsin y$$

ヲ以テスル. 英語國デハ此ノ代リニ

$$\sin^{-1}y$$

ト記スコトガアルガ, 此ノ記號ハ $\frac{1}{\sin y}$ ト誤リ易イカラ良イ記號デハナイ.

逆函數ノ獨立變數ヲ x トスルニハ最初 $x=\sin y$ トシテ, 此ノ方程式ヲ y ニ關シテ解ケバ

$$y=\arcsin x$$

トナツテ都合ガ良イ. 問題ハ此ノ關係式カラ $\frac{dy}{dx}$ ヲ求ムルニアル. 此ノ式カラ附錄 (6) ノ樣ニ計算シテ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad 卽チ \quad \frac{d\arcsin x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ヲ得ル.

同樣ニ餘弦, 正切, 餘切ノ逆函數ノ導函數ハ次ノヤウニナル.[1]

$$\frac{d\arccos x}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d\arctan x}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d\operatorname{arccot} x}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}$$

是等ノ式ヲ逆ニ考ヘレバ直ニ次ノ原函數ノ式ガ得ラレル.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C \quad 又ハ \quad -\arccos x+C$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C \quad 又ハ \quad -\operatorname{arccot} x+C$$

此處デ疑ガ生ズルノハ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ト $\frac{1}{1+x^2}$ ノ原函數ニ二通リヅツアルコトデアル. 第一ノ原函數ハ

$$\arcsin x+C \quad ト \quad -\arccos x+C$$

デアリ, 第二ノモノハ

1) 附錄 (7), (8), (9) 參照.

$$\arctan x + C \quad ト \quad -\mathrm{arccot}\, x + C$$

デアル．是ハドチラデモヨイノデ，其ノ譯ハ

$$\arcsin x \quad ト \quad -\arccos x$$

トノ差及ビ

$$\arctan x \quad ト \quad -\mathrm{arccot}\, x$$

トノ差ハ孰レモ常數 $\frac{\pi}{2}=90^\circ$ デアルコトニ原因スルノデアル．今此ノ事ヲ說明ショウ．

$$\arcsin x = y \qquad \arccos x = z$$

トオクト $\arcsin x$ ト $-\arccos x$ トノ差ハ

$$\arcsin x - (-\arccos x) = y + z$$

トナルカラ，$y+z$ ガ常數デアルコトガ分カレバヨイ．

y ト z ノ式カラ

$$x = \sin y \qquad x = \cos z$$

トナルガ $\cos z = \sin(90^\circ - z)$ （第27頁）デアルカラ

$$x = \sin y = \sin(90^\circ - z)$$

トナル．正弦ノ場合通常約束スル通リ角ヲ -90° カラ $+90^\circ$ マデノモノニ限ルト

$$\sin y = \sin(90^\circ - z)$$

デアルナラバ，是非トモ

$$y = 90^\circ - z \text{ [1]}$$

デナケレバナラナイ．卽チ

$$y + z = 90^\circ$$

トナツテ常數デアル．

次ニ $\arctan x$ ト $-\mathrm{arc\ cot}\, x$ トノ差ガ同ジク常數 90° ニ等シイコトヲ示

1) 一般ニハ，y ト $90^\circ - z$ トノ差ハ 90°，180° 又ハ其ノ倍數デアルカラ，$y+z$ ハ 90° ノ倍數デアル．兎ニ角常數デアル．

サウ．證明ノ手段ハ前ト同樣デアル．

$$\arctan x = y \qquad \mathrm{arccot}\, x = z$$

トスルト

$$x = \tan y \qquad x = \cot z$$

トナル．卽チ

$$\tan y = \cot z = \frac{1}{\tan z}$$

デアル．然ルニ第27頁ノ公式ニヨリ

$$\cot z = \tan(90^\circ - z)$$

デアルカラ

$$\tan y = \tan(90^\circ - z)$$

トナル．逆正切ノ角ハ皆 -90° ト $+90^\circ$ ノ間ニトルトスレバ

$$y = 90^\circ - z$$

デナケレバナラナイ[1]．從ツテ

$$y + z = 90^\circ$$

トナツテ常數デアル．

66「函數ノ函數」ノ微分法

獨立變數 x ノ一ツノ函數ヲ $u=\varphi(x)$ トスル．次ニ此ノ u ヲ變數トシテ其ノ函數

$$y = f(u)$$

ヲ考ヘテ見ルト，y ハ u ノ函數デアルガ，u ガ又 x ノ函數デアルカラ，y ハ x ノ函數トモ考ヘ得ラレル譯デアル．x ニ一定ノ値ガ與ヘラルレバ，u ノ値ハ定マルカラ，從ツテ其ノ函數 y ノ値ガ定マル．卽チ x ノ値ヲ與ヘレバ y ノ値ガ定マルカラ y ハ x ノ函數ト見做シ得ラレル譯デアル．斯ノ

1) 一般ニハ y ト $(90-z)$ トノ差ハ 180° ノ倍數デアル．故ニ $y+z$ ハ 90° ノ倍數デアル．

如キ函數 y ノ x ニ關スル導函數ハ如何ニシテ計算シタラバヨイカ．換言スレバ

$$y=f(u) \qquad u=\varphi(x)$$

ナル二ツノ關係式カラ直ニ $\frac{dy}{dx}$ ヲ索メントスルノデアル．

今 x ヲ h ダケ增セバ，x ハ $x+h$ トナリ，從ツテ $u=\varphi(x)$ モ亦 $\varphi(x+h)$ トナリ，u ハ變ズルノデアル．ヨツテ之ニ對スル u ノ增分ハ l デアルトスルト

$$u+l=\varphi(x+h)$$

トナルデアラウ．斯ク u ガ l ダケ增セバ其ノ函數 $y=f(u)$ モ亦變動スルカラ，其ノ增分ヲ k トスル．卽チ

$$y+k=f(u+l)$$

トナル．然ラバ，結局 x ガ h ダケ增セバ y ハ k ダケ增スノデアルカラ，$h\to0$ ノトキノ $\lim\frac{k}{h}$ ガ卽チ $\frac{dy}{dx}$ ニ外ナラナイコトハ明白デアラウ．然ルニ明ラカニ

$$\frac{k}{h}=\frac{k}{l}\frac{l}{h}$$

デアルカラ，

$$\lim_{h\to0}\frac{k}{h}=\lim_{l\to0}\frac{k}{l}\lim_{h\to0}\frac{l}{h}$$

ト考ヘテモヨイデアラウ．

右邊ノ第一因子ハ

$$\lim_{l\to0}\frac{k}{l}=\lim_{l\to0}\frac{f(u+l)-f(u)}{l}$$

デアルカラ，明ラカニ $\frac{df}{du}$ 又ハ $\frac{dy}{du}$ デアル．又第二因子ハ

$$\lim_{h\to0}\frac{l}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

デアルカラ，$\frac{d\varphi}{dx}$ 又ハ $\frac{du}{dx}$ デアル．ヨツテ是等ヲ併セ考ヘテ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

ヲ得ル．此ノ式ハ又

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\varphi'(x) \qquad (f'(u) \text{ ハ } \frac{df}{du} \text{ ノ意味})$$

ト書イテモヨイ．是ニ依ツテ

y ノ x ニ關スル導函數ハ y ノ u ニ關スル導函數ト，u ノ x ニ關スル導函數トノ相乘積デアル．

コトガワカツタ．

例　$y=x^n$ ヲ微分セヨ．(n ハ常數)

解　此ノ問題ハ前ニ一度計算シテ nx^{n-1} ヲ得タノデアルガ，玆ニ述ベタ方法ヲ應用シテ計算シテ見ヨウ．

先ヅ $y=x^n$ ノ兩邊ノ對數ヲ取ルト(勿論自然對數)

$$\log y=\log x^n=n\log x$$

トナル．此ノ兩邊ヲ x ニ關シテ微分スル．左邊 $\log y$ ハ明ラカニ y ノ函數デアルガ，y ハマタ x ノ函數デアルカラ上述ノ結果ニヨレバ，$\log y$ ノ導函數ハ，$\log y$ ノ y ニ關スル導函數ト y ノ x ニ關スル導函數 $\frac{dy}{dx}$ トノ積デアル．卽チ

$$\frac{d\log y}{dx}=\frac{d\log y}{dy}\frac{dy}{dx}$$

デアル．$\frac{d\log y}{dy}$ ハ $\frac{1}{y}$ デアルコトハ能ク知レテ居ルカラ

$$\frac{d\log y}{dx}=\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

デアル．

$\log y$ ハ $n\log x$ デアルカラ，ソノ導函數ハ $\log x$ ノ導函數ニ n ヲ乘ジタモノデ，卽チ $\frac{n}{x}$ デアル．ヨツテ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x}$$

ナル關係ガ得ラレル　吾人ノ求メルノハ $\dfrac{dy}{dx}$ デアルカラ，兩邊ニ y 卽チ x^n ヲ乘ズレバ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x}x^n=nx^{n-1}$$

トナツテ前ニ得タ結果ト一致スル(第184頁)． 此ノ計算デハ n ハ唯常數ト假定シタノデアルカラ，此ノ式ハ n ガ如何ナル常數デモ通用スルノデアル．(整數，分數ナドノ制限ハナイ)

今マデニ得タ微分ノ結果ヲ纏メテ卷末ニ附錄トシテ揭ゲル． (導函數並ニ原函數ノ表)

問題 1. 次ノ函數ノ導函數ヲ見出セ．

(1)　$2x^3$　　$\dfrac{1}{n}x^a$　　$4\sin x$　　$n\cos x$

(2)　$\sin x-\cos x$　　$1+\tan x$　　$3x^2+2x+1$

(3)　$\sqrt{x}$　　$2\sqrt{x}$　　$5\sqrt[3]{x}$

(4)　xe^x　　$x^2\log x$　　$\dfrac{x-1}{x+1}$　　$\log(x^2)$　　$\cos(\alpha x+\beta)$

問題 2. 次ノ函數ノ $x=1$ ニ於ケル微分商ヲ求メヨ．

$2x^2$　　$\log x$　　$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

問題 3. 次ノ函數ノ原函數ヲ索メヨ．

(1)　$6x^2$　　$x^{n-1}(n\neq0)$　　$4\cos x$　　$-n\sin x$

(2)　$\cos x+\sin x$　　$\dfrac{1}{\cos^2 x}$　　$2(3x+1)$

(3)　$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$　　$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$　　$\dfrac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

(4)　$\dfrac{2}{x}$　　$-\alpha\sin(\alpha x+\beta)$　　x^2+3e^x

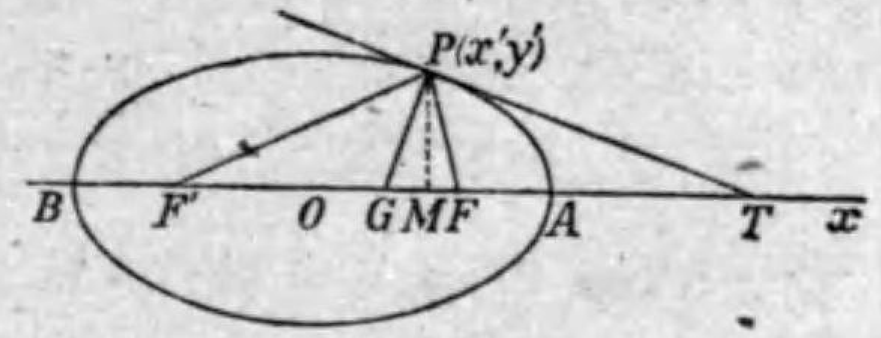
67 導函數ノ應用

普通ニ使用セラルヽ函數ノ微分法ハ大體以上デ述ベタカラ，次ニハ其ノ應用ヲ示サウ．應用ガ非常ニ廣イノデアルカラ，最モ簡單ナルモノノ一二ヲ述

ベルコトニスル．最初ニ橢圓ノ著シキ性質ヲ證明シテ見ヨウ．

68 橢圓ノ面白キ性質

微分商ハ函數ノぐらふノ切線ノ方向係數ヲ與ヘルコトヲ利用シテ橢圓ノ面白キ性質ヲ證明シテ見ヨウ．



橢圓 APB ノ焦點ヲ F, F′ トシ，橢圓上ノ隨意ノ一點ヲ P トスル．中心 O ヲ原點トシテ，AB 直線ヲ x 軸トスル直角座標ヲ用ヰレバ，橢圓ノ方程式ハ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (第148頁)$$

デ，a, b ハ長軸，短軸ノ長サノ半分デアル．OF, OF′ ノ長サハ前ニ第152頁ニ述ベタ樣ニ

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=ae \qquad (e\ ハ離心率^{1)})$$

デアル．P 點ニ於テ橢圓ニ引イタ切線ヲ PT トスレバ，其ノ勾配卽チ x 軸ト作ス角ノ正切ハ $\dfrac{dy}{dx}$ デアル．此ノ値ヲ計算シテ見ル．橢圓ノ式カラ

$$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

トナルカラ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}\frac{d}{dx}(\sqrt{a^2-x^2})$$

然ルニ

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{a^2-x^2})=\frac{d}{dx}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\times(-2x)$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad (函數ノ函數ノ微分法)$$

1) 此ノ e ハ自然對數(ねぴあー對數)ノ底 e トハ，記號ハ同ジダガ，異ナル數デアル．

デアルカラ，結局

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$$

即チ $P(x', y')$ 點ニ於ケル勾配ハ上記 $\frac{dy}{dx}$ ノ式中 x ヲ x' トシタモノデ，

$$-\frac{bx'}{a\sqrt{a^2-x'^2}}$$

デアル．今切線 PT ニ P 點ニ於テ垂線 PG[1] ヲ引ケバ，其ノ勾配即チ方向係數ハ第 126 頁ニ說イタ所ニヨツテ

$$\frac{a\sqrt{a^2-x'^2}}{bx'}$$

デアリ，且ツ P 點即チ (x', y') ヲ通ルカラ，PG ノ方程式ハ

$$y-y'=\frac{a\sqrt{a^2-x'^2}}{bx'}(x-x')$$

デアラウ．實際，此ノ式中 x ト y トニ x', y' ヲ代入スレバ左右兩邊共ニ零トナツテ適合スルコトハ明ラカデアル．

此ノ直線 PG ト x 軸トノ交點 G ノ x 座標ヲ求メルニハ，上式中 $y=0$ トオイテ x ヲ求メレバヨイカラ

$$\text{G點ノ } x \text{ 座標}=x'\left(1-\frac{by'}{a\sqrt{a^2-x'^2}}\right)$$

ヲ得ル．又 P 點ハ楕圓上ノ點デアルカラ，

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

從ツテ

$$\frac{y'}{b}=\sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-x'^2}}{a}$$

故ニ

1) PG 直線ヲ切線ニ對シテ，P 點ニ於テ楕圓ニ引イタ法線 (*Normal*) トイフ.

$$\frac{by'}{a\sqrt{a^2-x'^2}}=\frac{b^2}{a^2}$$

トナル．ヨツテ

$$1-\frac{by'}{a\sqrt{a^2-x'^2}}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2$$

即チ G 點ノ x 座標 OG ハ此ノ量ニ x' ヲ乘ジタルモノ

$$e^2x'$$

デアル．是ヨリ

$$FG=OF-OG=ae-e^2x'=e(a-ex')$$

$$F'G=OF'+OG=ae+e^2x'=e(a+ex')$$

從ツテ

$$FG:F'G=a-ex':a+ex'$$

ナル關係ガアルコトガ分カル．

扨テ次ニ點 P ト焦點 F, F′ トノ距離ヲ考ヘテ見ルニ，P ヨリ x 軸ニ下セル垂線ヲ PM トスレバ

$$\overline{FP}^2=\overline{FM}^2+\overline{PM}^2$$

然ルニ

$$FM=OF-OM=ae-x'$$

$$PM=y'=\sqrt{b^2\left(1-\frac{x'^2}{a^2}\right)}\quad\text{（楕圓ノ式カラ）}$$

故ニ

$$\overline{FP}^2=(ae-x')^2+b^2\left(1-\frac{x'^2}{a^2}\right)$$

$$=(a^2e^2-2aex'+x'^2)+\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}x'^2\right)$$

$$=(a^2e^2+b^2)-2aex'+x'^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)$$

併シ

$$a^2e^2+b^2=(a^2-b^2)+b^2=a^2$$

$$1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2$$

デアルカラ

$$\overline{FP}^2=a^2-2aex'+e^2x'^2=(a-ex')^2$$

從ツテ　$FP=a-ex'$

$\overline{FP^2}$ ノ式ノ平方根ヲ取ルト $FP=\pm(a-ex')$ トナルノデアルガ，明ラカニ $a>x'$ デアリ，又 $e^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}<1$ デアルカラ $a-ex'$ ハ正ノ量デアル．故ニ複號 ($\pm$) ハ ($+$) ヲ取ツタノデアル．

又　$\overline{F'P}^2=\overline{F'M}^2+\overline{PM}^2$

デアリ，且　$F'M=OF'+OM=ae+x'$

$$\therefore\ \overline{F'P}^2=(ae+x')^2+b^2\left(1-\frac{x'^2}{a^2}\right)$$

$$=(a^2e^2+2aex'+x'^2)+\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}x'^2\right)$$

$$=(a^2e^2+b^2)+2aex'+x'^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)$$

デ，前ノ場合ノ式ト唯中央ノ項 $2aex'$ ノ符號ガ異ルノミデアル．即チ

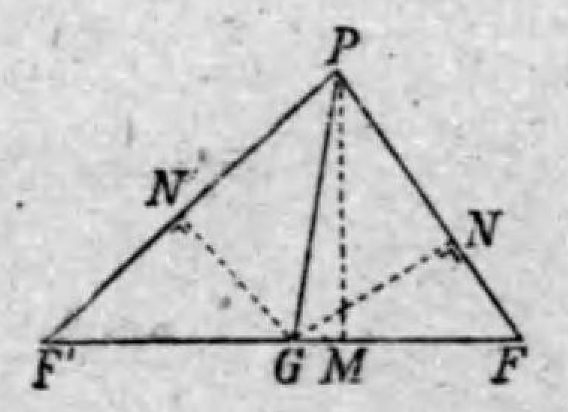
$$\overline{F'P}^2=a^2+2aex'+e^2x'^2$$

$\therefore$ $F'P=a+ex'$　（複號 ($\pm$) ハ前ト同様 ($+$) ヲ取ル）

故ニ前頁ノ比例式カラ

(A)　$FG:F'G=FP:F'P$

ナル關係ガ得ラレル．



三角形 FPG ト F'PG トノ面積ハ夫々

$\frac{1}{2}FG\times PM$　　$\frac{1}{2}F'G\times PM$

デアルカラ

$$\triangle FPG:\triangle F'PG=FG:F'G$$

ナル比例式ガ成立ツ．

G ヨリ PF, PF' ニ下ス垂線ノ足ヲ夫々 N, N' トスレバ，是等ノ三角形ノ面積ハ又

$\frac{1}{2}FP\times GN$　　$\frac{1}{2}F'P\times GN'$

デアル．故ニ上ノ比例式ハ

$$FP\times GN:F'P\times GN'=FG:F'G$$
$$=FP:F'P\quad \text{（前頁ノ (A) 比例式ヨリ）}$$

故ニ必然的ニ

$$GN=GN'$$

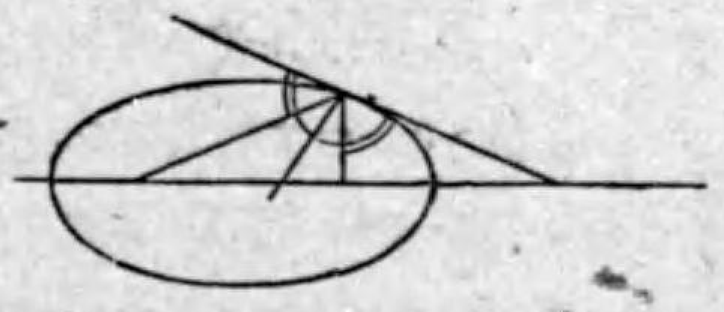
デナケレバナラナイ．二ツノ直角三角形 PGN ト PGN' ニ於テ邊 GN ト GN' トガ相等シク，弦 PG ハ共通邊デアルカラ，是等二ツノ三角形ハ互ニ合同デアル．故ニ互ニ等シキ邊 GN, GN' ニ對スル角 GPN ト GPN' トハ相等シイコトガ分カル．換言スレバ PG ハ角 FPF' ノ二等分線デアル．

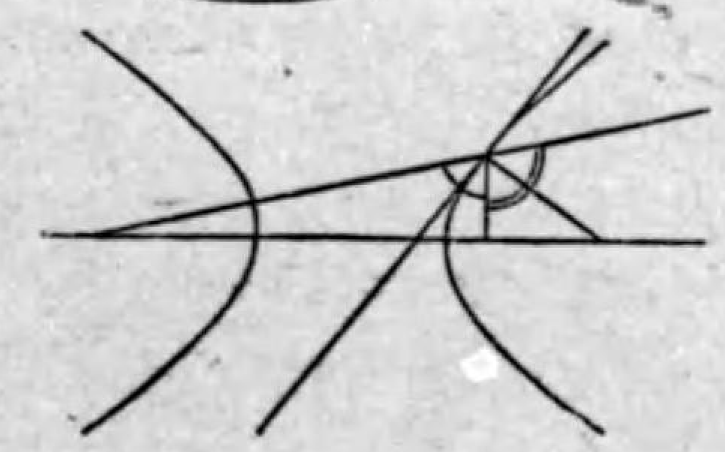
此ノ結果ヲ再言スレバ

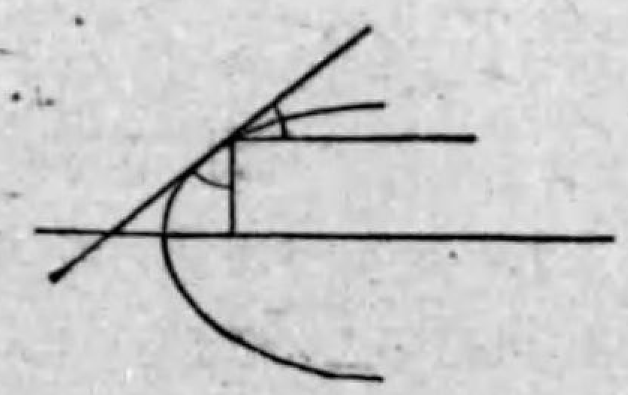
楕圓上ノ隨意ノ點 P ヲ兩焦點 F, F' ニ連結スル兩直線ハ其點ノ法線 PG ト（從ツテ又切線 PT ト）等角ヲ作ル．

トイフノデアル．

故ニモシ楕圓形ノ壁ニテ圍マレタル室内ニテ其ノ焦點ノ一ツ F ニ光源，熱源又ハ音源ヲ置ケバ是ヨリ發散スル光線，熱線又ハ音線ハ壁ニヨリ反射シテ全部他ノ焦點 F' ニ集マル．即チ室内ニテ最モ明カルク，最モ熱ク又最モ大ナル音ヲ聞クノハ F' 點デアル．F ニ於ケル音源ノ音ガ低音ノ場合，他ノ場所ニテハ聞キ難キ程ノ音モ F' ニテハ明ラカニ聞キ得ル如キ事モアルノデアル．







モシ楕圓ノ替リニ抛物線ヲ用キレバ，F' ハ限リ無ク遠方ニ行キ，從ツテ F'P

ハ x 軸ニ平行ニナル．故ニ F ヨリ發スル光線等ハ全部 x 軸ニ平行ナルモノトナリ，又 x 軸ニ平行ナル光線ヲ壁ニ受ケレバ，皆 F 點ニ集マルノデアル．

雙曲線ノ場合ニハ，曲線上ノ點ヲ焦點ニ結ブ二直線ノ作ス外角ヲ法線ガ二等分スルノデアル．(切線ハ是等二直線ノ作ス角ヲ二等分スル)

以上全部ヲ綜合シテ

曲線上隨意ノ點ヲ二ツノ焦點ニ結ブ直線ノ作ル內角ト外角トヲ，其點ニ於ケル切線ト法線トガ二等分スル．

69　函數値ノ增減，極大，極小，蜂ノ巢，光ノ反射屈折

獨立變數 x ノ一ツノ函數ヲ $f(x)$ トスル． x ノ値ガ變動スレバ $f(x)$ ノ値モ亦ソレニ從ツテ變動スル(稀ニハ增減シナイ場合モアル) ノガ常デアル．x ノ値ガ漸次增大スルトシテモ亦減少スルト考ヘテモヨイガ，便宜上增大スルト考ヘル．$x=a$ ナル値ニ對シテハ $f(x)$ ノ値ハ $f(a)$ デアルガ，x ガ a ヨリ $a+h(h>0)$ マデ增大スレバ，$f(x)$ ノ値ハ $f(a)$ カラ $f(a+h)$ ニ變ル．ヨツテ $f(a+h)-f(a)$ ガ正デアレバ $f(x)$ ノ値ハ增加シタノデアリ，負ナラバ減少シタノデアル．x ノ增分 h ハ正ト考ヘタカラ，

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

モ亦函數値ノ增減ニ從ツテ正トナリ負トナルコト勿論デアル．h ヲ漸次減少シテ零ニ近ヅケテモ同樣デ，此ノ式ノ正負ガソノ增減ニ伴フコトニ變リハナイ．從ツテ $h\to 0$ ノ極限ニ於テハ

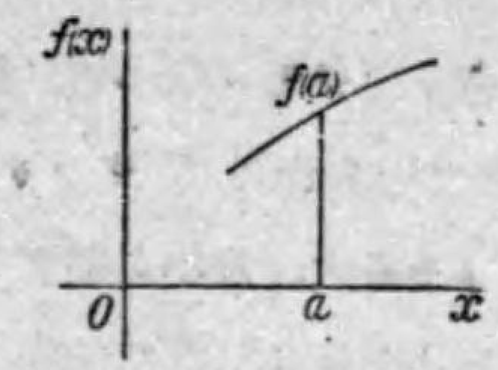
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

デアルカラ，$x=a$ ノ所デ $f(x)$ ガ增加シツヽアルカ又ハ減少シツヽアルカニ由ツテ $f'(a)$ ハ正ノ値ヲ有チ又ハ負ノ値ヲ有ツデアラウ．故ニ之ヲ逆用シテ，$x=a$ ナルトキ導函數 $f'(x)$ ノ値ガ正カ又ハ負カニヨツテ，言ヒ換ヘレバ

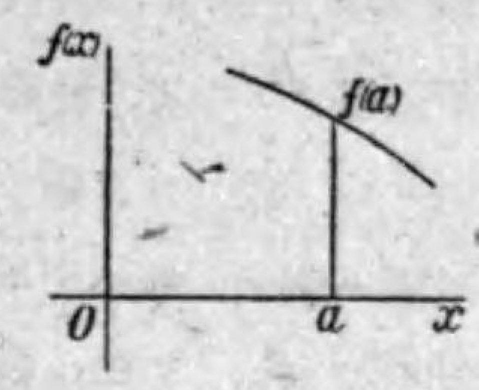
$$f'(a)>0 \quad 又ハ \quad f'(a)<0$$

ナルニ從ツテ，函數 $f(x)$ ハ $x=a$ ノ點デ增シツヽアルカ又ハ減ジツヽアルカヲ判別スルコトガ出來ル譯デアル．ヨツテ又此ノ二者ノ中間卽チ $f'(a)=0$ ナラバ $f(x)$ ハ $x=a$ ナル點デ增加モセズ又減少モセヌコトガ判カル．

(1)



(2)



コレヲ圖示シテ見ルト，$f(x)$ ガ $x=a$ ナル點デ增加スル函數デアレバ，ソノ圖示曲線ハ x ガ增スニ從ツテ卽チ右方ニ向テ上昇シ(第1圖)，$x=a$ デ減少シツヽアル場合ニハ第2圖ノ如ク右方ヘ漸次下降スルデアラウ．

此ノ結果ヲ函數

$$y=(x-1)^2$$

ニ就イテ調ベテ見ルニ，此ノ函數ノぐらふハ圖ノ樣ニ $x=1$ ノ點デ最下點ニ達シ，ソノ左方デハ下降，右方ハ上昇スルノデアル．

此ノ事實ハ

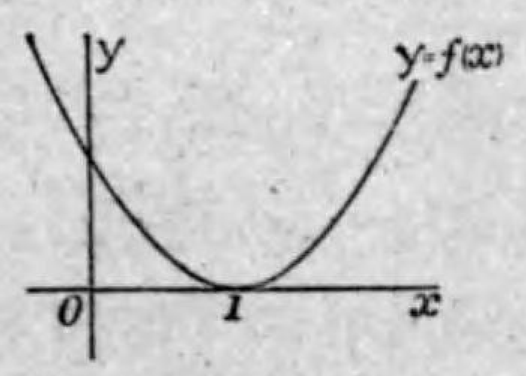
$$\frac{dy}{dx}=2(x-1)$$

ガ $x<1$ ナラバ(卽チ $x=1$ ヨリ左方ニテハ)

$$2(x-1)<0$$

デアリ，$x>1$ ナラバ ($x=1$ ヨリ右方ニテハ)

$$2(x-1)>0$$



トナル事ト一致スル．又其ノ中間ノ點 $x=1$ ニテハ

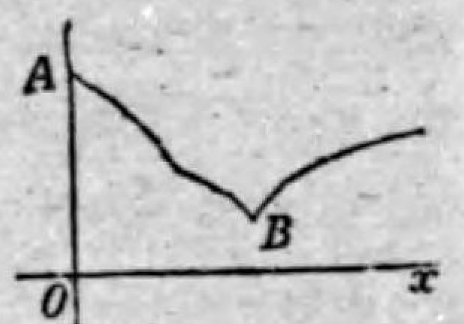
$$2(x-1)=0$$

デアルカラ，曲線ハ上昇モ下降モセズ x 軸ニ平行ニ進行スルコトガ見ラレル．

此ノ例デ見ルヤウニ，曲線ガ下降シ續ケテ，漸ク上昇ニ移ラントスル點ハ，其ノ近傍ニ於ケル最低點デアル．同様ニ曲線ガ上昇シ續ケテ漸ク下降シ始メントスル點ハ其ノ近傍ニ於ケル最高點デアル．斯ノ如ク，少クモ其ノ近傍デノ最低點ヲ函數ガ極小値[1]ヲ取ル點トイヒ，近傍ノ前後ヨリ高キ點ヲ極大値[2]ヲ取ル點トイフ．サレバ，極小値，極大値トイフノハ其ノ點ノ近傍ニ於ケル最小，最大値デアツテ，曲線全體ヲ通ジテノ最小値，最大値デハナイ．極小，極大値ノ中ノ孰レカガ最小，最大値トナルノデアラウ．(曲線ニ端ノ點ガアレバ，其點ハ極大，極小デナクトモ最大，最小ノ點デアルコトガアル)．

以上ノ事ヲ考フレバ，函數ノ値ハ極大，極小ノ點ヲ通過スルトキニ增減ガ逆ニナルノデアルカラ，重要ナル點デアルコトハ明ラカデアラウ．然ラバコレヲ索ムル方法如何ガ問題トナル譯デアル．

上ニ論ジタ様ニ極大又ハ極小ハ函數ノ値ガ增加ヨリ將ニ減少ニ移ラントスル點又ハ減少ヨリ增加ニ移行セントスル點デアルカラ，其ノ點デハ微分商ガ零デアル筈デアル．尤モ圖ノA點ノ如ク曲線ノ端ノ點ガ極大又ハ極小デアル場合，又ハB點ノヤウニ丁度角點ヲ爲ス場合ニハ切線ハ必ズシモ x 軸ニ平行デハナイカラ，微分商ハ必ズシモ零デハナイ．



以上ノ考察カラ見ルト函數 $f(x)$ ノ極大又ハ極小ノ點ヲ見出スニハ，先ヅ

$$f'(x)=0$$

ナル方程式ヲ解イテ，x ノ値ヲ見出スノガ最初ノ手段デアル．モシ $x=a$ ナル點デ函數ノ値ガ極大又ハ極小ナラバ，導函數 $f'(x)$ ニ於テ $x=a$ トスレバ $f'(a)=0$ トナル筈デアルカラ，$x=a$ ナル値ハ必ズ $f'(x)=0$ ノ根ノ一デアル筈デアル．卽チ $f'(x)=0$ ノ根ハ孰レモ皆函數 $f(x)$ ノ値ヲ極大又ハ極小ニスルカ否カハ不明デアルガ，兎ニ角極大又ハ極小ヲ與フル x ノ値ハ

1) *Minimum value* 又ハ *Minimum*.　2) *Maximum value* 又ハ *Maximum*.

必ズ $f'(x)=0$ ノ根ノ中ニアルノデアル．ヨツテ先ヅ凡テノ根ヲ索メテ，其ノ各〻ニ就イテ $f(x)$ ヲ極大，極小ニスルカ否カヲ檢スレバヨイノデアル．

例（1） 100 ヲ二部ニ分ケテ，其ノ積ヲ最大ニスルニハ如何ニ分ケレバヨイカ．

解　分ケタ一方ヲ x トスレバ，他ハ $100-x$ デアル．其ノ積 $x(100-x)=100x-x^2$ ヲ極大ニスルニハ x ノ値ヲ如何ニスレバヨイカガ問題デアル．

$$f(x)=100x-x^2$$

トオケバ

$$f'(x)=100-2x$$

デアルカラ $f'(x)=0$ ハ卽チ

$$100-2x=0$$

デアル．コレヲ解ケバ

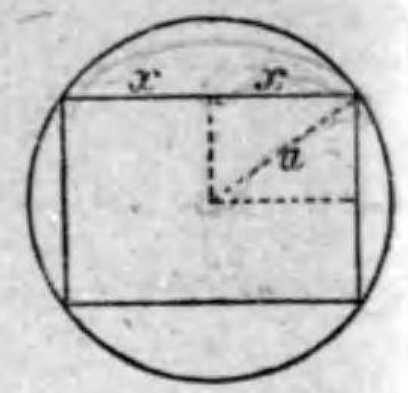
$$x=50$$

トナル．ヨツテ兎ニ角 $f(x)=x(100-x)$ ヲ極大又ハ極小ニスル x ノ値ハ 50 デアルコトガ分カツタ．是ガ極大又ハ極小ヲ與ヘル唯一ノ値デアルカラ，$f(x)$ ヲ最大又ハ最小ニスル値モ亦此ノ外ニハ無イ筈デアル．

扨テ然ラバ $x=50$ ハ $f(x)$ ヲ極大ニスルカ又ハ極小ニスルカヲ調ベテ見ナケレバナラナイ．x ノ値ガ極メテ零ニ近ケレバ，$x(100-x)$ モ亦零ニ近イカラ，$x=50$ ノトキノ $f(x)$ ノ値 $50\times50=2500$ ヨリハ確ニ小サイ，故ニ $x=50$ ハ極大ニ相當スルノデアラウ．$f'(x)=100-2x$ ヲ調ベテ見テモ，$x=0$ ノトキハ $f'(x)=100$ ハ正ノ數デアリ，x ガ漸次增大スルニ從ツテ $f'(x)$ ノ値ハ減少シツヾケ，$x=50$ ニ至ツテ $f'(x)=0$ トナリ，x ガ 50 ヨリ大トナレバ $f'(x)$ ハ負トナル．故ニ函數 $f(x)$ ハ $x=0$ ヨリ暫クノ間ハ增加ヲ續ケ，$x=50$ ニ至ツテ增加ハ止マリ，ソレヨリ以後ハ減少スルノデアル．故ニ $x=50$ ハ函數ノ極大値(此ノ場合ハ同時ニ最大値)ニ相當スルノデアル．

例 (2)　半徑 a ナル圓ノ內ニ最大面積ノ矩形ヲ內接セシムルニハ，其ノ邊ヲ如何ニトレバヨイカ．

解　矩形ノ一邊ノ長サヲ $2x$ トスレバ圓カラ分カル樣ニ他ノ一邊ノ長サハ $2\sqrt{a^2-x^2}$ デナケレバナラナイ．ヨツテ其ノ面積ハソノ相乘積



$$4x\sqrt{a^2-x^2}$$

デアル．此ノ函數値ヲ極大ニスル x ノ値ヲ求メレバヨイノデアル．

面積ハ正ノ量デアルカラ，ソレガ最大値ヲトルトキハ，其ノ二乘卽チ $16x^2(a^2-x^2)$ モ亦最大値ヲトルデアラウ．又逆ニ二乘ガ最大値トナルトキハ，モトノ函數ノ値モ亦最大トナルデアラウ．故ニ問題ハ

$$x^2(a^2-x^2)$$

ノ極大値ヲ見出スコトニ歸スル．式ヲ簡單ニスル爲ニ x^2 ヲ t ト書イテ見ルト上式ハ

$$t(a^2-t) \qquad (t=x^2)$$

トナツテ，二ツノ因子 t ト a^2-t トノ和

$$t+(a^2-t)=a^2$$

ハ常數 a^2 トナルカラ，前問題ト同ジク a^2 ヲ二部ニ分ケテ其ノ積ヲ最大ナラシメル問題デアル．ヨツテ前問題同樣ニ答ハ常數 a^2 ノ半分

$$t=\frac{a^2}{2}$$

デアル．併シ $t=x^2$ デアルカラ

$$x=\sqrt{\frac{a^2}{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$$ [1]

トナリ，函數 $4x\sqrt{a^2-x^2}$ ヲ最大ニスル x ノ値ハ $\frac{a}{\sqrt{2}}$ デアル．此ノ長サ

1) 右邊ニ複號 (±) ガツク筈デアルガ，x ハ邊ノ長サデ正ノ量デアルカラ (+) ノミヲ取ル．

ハ半徑 a ノ圓內ニ內接スル正方形ノ一邊ノ長サデアルカラ，矩形ガ正方形ノトキガ最大ノ面積トナル譯デアル．

此ノ問題ハ圓柱形ノ木材カラ最モ體積ノ多イ角材ヲ取ル問題トモ考ヘラレル．

附記　以上二ツノ問題ハ共ニ二ツノ因數ノ積ノ最大値ヲ索メルモノデ，夫等二ツノ因數ノ和ガ一定ノ常數デアルノデアル．卽チ

$$y=x(a-x) \qquad (a\ \text{ハ正ノ常數})$$

ノ樣ナ函數ノ最大値ヲ索メルノデ，因數ノ和ハ

$$x+(a-x)=a$$

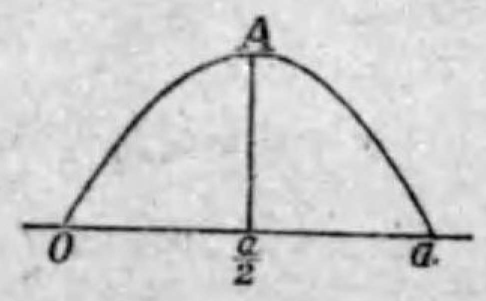
卽チ常數デアル．$y=ax-x^2$ ノ導函數ヲ求メルト

$$\frac{dy}{dx}=a-2x$$

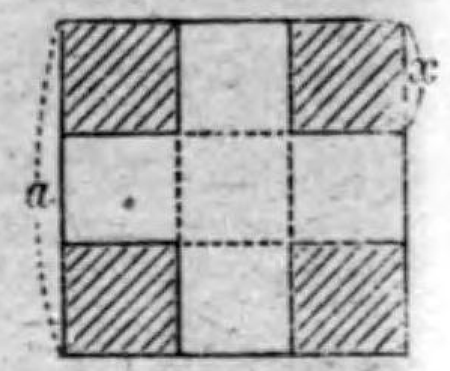
トナルカラ

$$\begin{array}{lllll}
2x>a & \text{卽チ} & x>\frac{a}{2} & \text{ナルトキ} & \frac{dy}{dx}<0 \\
2x=a & \text{〃} & x=\frac{a}{2} & \text{〃} & \text{〃}=0 \\
2x<a & \text{〃} & x<\frac{a}{2} & \text{〃} & \text{〃}>0
\end{array}$$

デアル．卽チ x ガ $\frac{a}{2}$ ヨリ小ナル間ハ $\frac{dy}{dx}$ ハ正デアリ，從ツテ y ノ値ハ x ガ增スニ從ツテ增大スル．x ガ增シテ $x=\frac{a}{2}$ トナルトキ $\frac{dy}{dx}=0$ デ，y ノ値ニハ增減ガナイ．右圖 A 點ガ此ノ位置ヲ示ス．此ノ値ヲ越シテ x ガ $\frac{a}{2}$ ヨリ大キクナレバ，$\frac{dy}{dx}$ ハ負ニナルカラ，函數 y ノ値ハ減少ノ路ヲ辿リ，$x=a$ ニナルマデ減少シツヾケル(問題ハ a ヲ二分シテ其ノ一ヲ x トシタノデアルカラ，x ガ a ヨリ大ニナル場合ハ考ヘル必要ハナイ)．故ニ $x=\frac{a}{2}$ ノトキニ y ノ値ガ最大トナルコトガ明白デアラウ．



例（3）　正方形ノ厚紙ノ四隅カラ圖ノ樣ニ同大ノ四ツノ正方形ヲ切リ取ツテ殘リヲ點線ノ通リニ折リ曲ゲテ繼目ヲ糊付スレバ一ツノ紙箱ガ出來ル．此ノ紙箱ノ容積ヲ最大ナラシムルニハ切リ取ル正方形ノ大キサヲ如何ニスレバヨイカ．



解　原ノ正方形ノ厚紙ノ一邊ノ長サヲ a トシ，切リ取ル正方形ノ一邊ノ長サヲ x トスレバ，a ヨリ切リ取ツタ殘リノ長サハ $a-2x$ デ，是ガ箱ノ底面ノ一邊ノ長サデアル．箱ノ底面ノ面積ハ $(a-2x)^2$ トナルガ，箱ノ高サハ明ラカニ x デアルカラ，箱ノ容積ハ

$$x(a-2x)^2$$

デアル．コレヲ $f(x)$ トスレバ

$$f(x)=x(a-2x)^2=a^2x-4ax^2+4x^3$$

トナル．此ノ函數ノ導函數ハ

$$f'(x)=a^2-8ax+12x^2=(2x-a)(6x-a)$$
$$=12\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{6}\right)$$

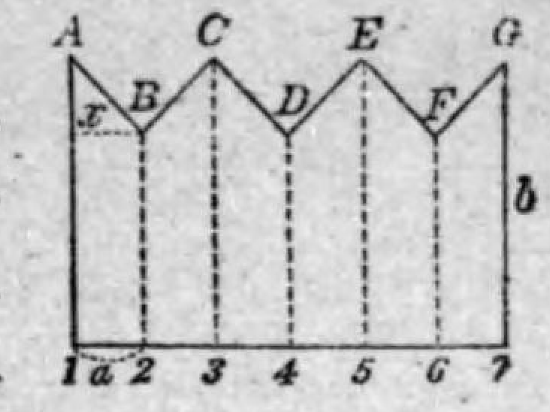
デアル．故ニ $x<\frac{a}{6}$ ナラバ，$f'(x)$ ハ正デ，從ツテ $f(x)$ ハ増加ノ狀態ニアル．$\frac{a}{6}<x<\frac{a}{2}$ ナラバ $f'(x)$ ハ負トナリ，$f(x)$ ハ減少シツヾケルガ，x ガ $\frac{a}{2}$ ヲ越エテ $x>\frac{a}{2}$ トナレバ，$f'(x)$ ハマタ正トナル，問題ノ性質上 x ハ $\frac{a}{2}$ ヨリ大トナルコトハ無イカラ，此ノ部ハ考ヘナクトモヨイ．故ニ $x=\frac{a}{6}$ ノ所デ $f(x)$ ノ値ハ極大デアリ又最大デアル．初メ一邊ノ長サノ $\frac{1}{6}$ ニ等シキ長サヲ正方形ノ四隅カラ切リ取レバ最大容積ノ箱ヲ得ルノデアル．

例（4）　面白イノハ蜂ノ巣[1]ノ問題デアル．此ノ問題ヲこわれうすき一著微分積分學入門[2]ニ倣ツテ述ベテ見ヨウ．

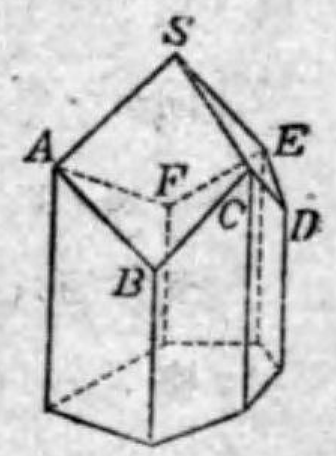
1) 蜂窠ト書クベキデアラウガ，便宜上蜂ノ巣トスル．

2) *Kowalewski: Einführung in die Infinitesimalrechnung.*

右圖ノ樣ニ紙上ニ等距離 a ヲ以テ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ナル點ヲ一直線上ニ記シ，1, 3, 5, 7 ノ各點ニ垂線 1A, 3C, 5E, 7G ヲ立テ，各ノ長サヲ等シク b トスル．同ジク 2, 4, 6 ノ各點ニ垂線ヲ立テ其ノ長サヲ皆 $b-x$ トスル．卽チ b ヨリ x ダケ短イノデアル．（x ヲ如何ニスルカガ問題ナノデアル）

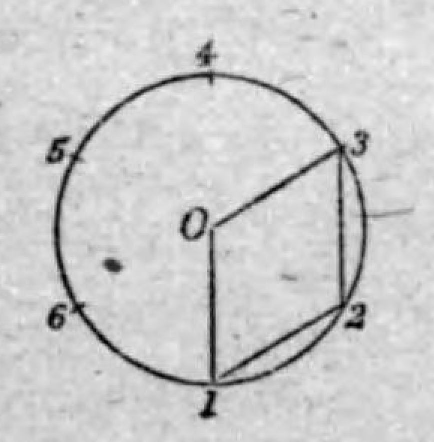


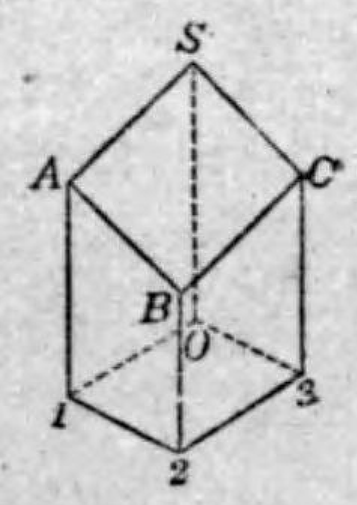
此ノ全體ヲ紙ヨリ切リ取リ，點線ニ沿ウテ折リ曲ゲテ，最後ノ G7 線ヲ A1 線ニ糊着スレバ上部ニ凹凸ノアル六角柱ガ出來ル．其ノ底部ハ正六角形ヲ作ス樣ニスル．A, B, C, D, E, F, G ノ各點ノ中 G 點ハ A 點ト合致スル．AB ト BC トノ間ハ AB ト BC トヲ邊トスル菱形ノ紙 ABCS ヲ以テ覆ヒ，同形ノ菱形 CDES, EFAS ヲ以テ CD, DE ノ間隙，EF, FA ノ間隙ヲ覆ヘバ，六角柱ノ上部ノ間隙ハ丁度覆ヒ盡サレルデアラウ．コレデ蜂ノ巣ガ出來タノデ，入口ハ下方ノ正六角形デアル．此ノ巣ヲ作ルニ蜂ハ紙ノ代リニ自己ノ分泌液ヲ用キルノデアルカラ，蜂ノ立場カラ考フレバ，一定量ノ分泌液デ最大容積ノモノ（又ハ同容積ノモノヲ最小量ノ分泌液デ）ヲ欲スルデアラウカラ，如何ナル形ニスレバ此ノ目的ニ適スルカガ問題ニナルノデアル．



今 a ト b トヲ一定ノ量トシ，x ヲ種々ニ變ズレバ，六角柱ノ底面ヲ爲ス正六角形ノ大サハ變ラナイガ，全體ノ巣ノ形ハ變化スル．此ノ容積ヲ最大ニスル x ノ値ヲ索メル問題ヲ考ヘテ見ヨウ．

底面ヲ爲ス正六角形ノ中心ヲ O トシ，OS ヲ結ベバ，此ノ直線ハ底面ニ垂直デ，明ラカニ，六角柱ノ中心軸デ，此ノ直線 OS ト直線 A1 トヲ通ル平面 A1OS 及ビ直線 OS ト直線 C3 ヲ含ム平面 C3OS トハ夫々底面ニ垂直デ





アル．是等二平面ハ平面 E5OS ト共ニ蜂ノ巣ヲ三等分スルノデ，其ノ三等分シタ一部ハ上圖ノ如キモノデアル．是ハ圖デ見ル通リ四角柱ヲ平面 ABCS デ截ツタ形デアル．故ニ是ト全ク同ジ形ノ立體ヲ倒ニシテ，此ノ上ニ重ネレバ，底面 O123 ノ四角壔ヲ得ル．其ノ高サハ A1=C3 ノ二倍卽チ又 OS+B2 デアル．此ノ高サ及ビ底面ノ四角形(菱形)ノ面積ハ A1 ト B2 トノ長ザノ差 x ニハ無關係デアル．故ニ上圖ノ立體ノ體積ハ a ト b トカラ計算シ得ラレルノデ決シテ x ノ大小ニハ關係ハナイ．蜂ノ巣ノ容積ハ此ノ立體ノ容積ノ三倍デアルカラ，a ト b ドサヘ與ヘラルレバ計算出來ル筈デ，x ガ如何ナル値ヲ取ルトモ，ソレニハ無關係デアルコトガ分カツタ．然ラバ原ノ問題卽チ蜂ノ巣ノ外面ノ面積ヲ一定ニシテ，其ノ容積ヲ最大ナラシムル問題ハ次ノ問題ト同一デアル．

蜂ノ巣ノ容積ガ一定ナルトキ其ノ外面ノ面積ヲ最小ナラシメルニハ x ノ値ヲ如何ニ取ルベキカ．

言ヒ換ヘレバ一定ノ容積ヲ有スル蜂ノ巣ヲ最小ノ材料ニテ作ル問題トナルノデアル．故ニ蜂ノ巣ノ外面ノ面積ヲ a, b, x ニテ表ハシ，x ノ値ヲ如何ニ定ムレバ，其ノ面積ガ最小ニナルカヲ究メレバヨイノデアル．ヨツテ先ヅ總面積ヲ計算スル事ガ必要デアル．併シ實際ノ計算ハ附錄 (12) ニ讓ツテ其ノ結果ヲ述ベルト，底面積ヲ除イタ蜂ノ巣ノ總表面積ハ

$$\frac{3a}{2}\{4b-2x+\sqrt{3a^2+12x^2}\}$$

トナルノデアル．

此ノ式ノ値ヲ最小ナラシメル問題デハ，數係數 $\frac{3a}{2}$ ヲ除イテモヨイコトハ明白デアルカラ

$$f(x)=4b-2x+\sqrt{3a^2+12x^2}$$

トオイテ，$f(x)$ ニ極小値ヲ與フル x ノ値ヲ求メルコトニスル，導函數 $f'(x)$

ヲ計算スル爲ニ假ニ $3a^2+12x^2=z$ トオケバ，

$$\frac{d}{dx}\sqrt{3a^2+12x^2}=\frac{dz^{\frac{1}{2}}}{dx}$$

トナルカラ，函數ノ函數ノ微分法ニヨツテ，$z^{\frac{1}{2}}$ ノ z ニ關スル導函數ト z ノ x ニ關スル導函數トノ積ガ $\frac{dz^{\frac{1}{2}}}{dx}$ デアル．ヨツテ

$$\frac{dz^{\frac{1}{2}}}{dx}=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3a^2+12x^2}}24x$$

$$=\frac{12x}{\sqrt{3a^2+12x^2}}$$

トナリ，延イテ又

$$f'(x)=-2+\frac{12x}{\sqrt{3a^2+12x^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3a^2+12x^2}}(6x-\sqrt{3a^2+12x^2})$$

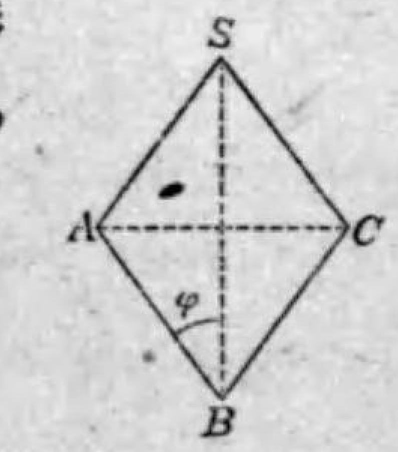
ヲ得ル．コレカラ直ニ分カル樣ニ，

$$6x<\sqrt{3a^2+12x^2}$$

ナラバ $f'(x)<0$ デアル．然ルニ $6x<\sqrt{3a^2+12x^2}$ トナルノハ，$36x^2<3a^2+12x^2$ トナルトキデ，卽チ $x<\frac{a}{\sqrt{8}}$ ナルトキデアル．モシ又之ニ反シテ

$$6x>\sqrt{3a^2+12x^2}$$

ナラバ，卽チ $x>\frac{a}{\sqrt{8}}$ ナラバ，$f'(x)>0$ デアル．故ニ $x=\frac{a}{\sqrt{8}}$ ナルトキノ $f(x)$ 値ハ極小デアリ，同時ニ又最小デアル．コレデ $f(x)$ ヲ最小ニスル x ノ値ヲ得タカラ，x ガ此ノ値ヲ取ルトキノ上部菱形 ABCS ノ形ヲ調ベテ見ル．附錄(12) ニ示ス樣ニ右圖 φ 角ニ關シテ次ノ二式ガアル．



$$\sin\varphi=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+x^2}}\qquad\cos\varphi=\frac{\sqrt{a^2+4x^2}}{2\sqrt{a^2+x^2}}$$

ヨツテ第一式ヲ第二式デ除シテ

$$\tan\varphi=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+4x^2}}$$

トナルカラ，$x=\dfrac{a}{\sqrt{8}}$ ナラバ

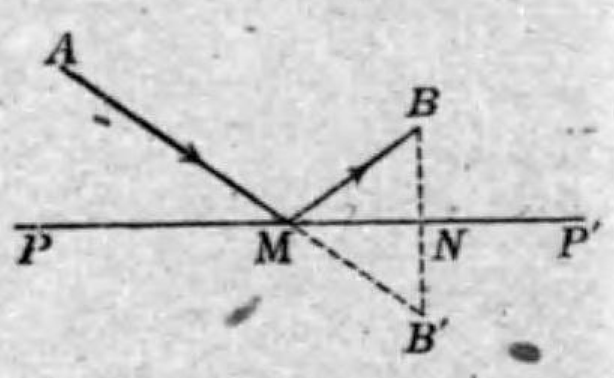
$$\tan\varphi=\sqrt{2}\doteqdot 1.4142$$

トナルノデアル．ヨツテ三角函數表カラ $\varphi\doteqdot 54^\circ 44' 14''$

ヲ得ル．故ニ ∠ABC 卽チ 2φ ハ ∠ABC$=2\varphi\doteqdot 109^\circ 28'$

トナルノデアル．皇紀二千三百七十二年(1712) ニまらるぢ氏[1]ガ蜂ノ巣ニ就イテ實測シタ結果ハ概ネ上ノ結果ト符合シクトノ事デアル．蜂ハ微分學ヲ知ラナクトモ爲シ得ル限リ材料ヲ節約スルコトヲ心得テ居ルカノ如クデアル．

例 (5) 光ノ反射[2]，屈折[3] 光ガ A ヨリ發シテ平面 PP′ ニ達シ，反射シテ B ニ至ルトキ，反射スル點 M ニ於テ入射光線ト反射光線トガ此ノ平面ト作ス角ハ互ニ相等シイ．卽チ



$$\angle \mathrm{AMP}=\angle \mathrm{BMP'}$$

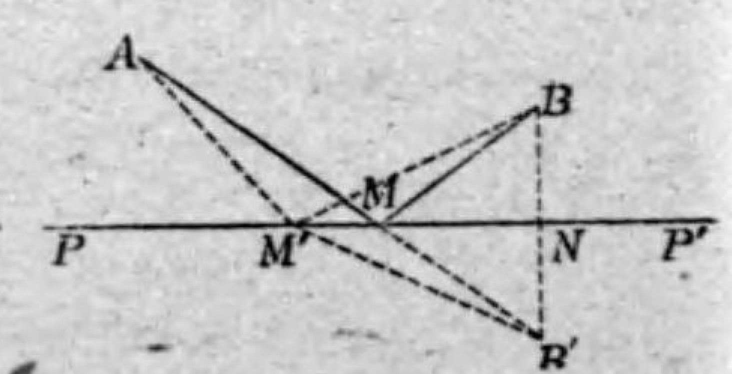
デアルコトハ物理學デ學ブ所デアルガ，M 點ヲ索メルニハ A, B 二點中ノ一，例ヘバ B ヨリ PP′ ニ垂線 BNB′ ヲ引キ，BN=B′N トナル樣ニ B′ 點ヲ取リ AB′ ヲ結ベバ，ソレト PP′ トノ交點ガ索ムル M 點デアルコトハ初等幾何學デ明ラカデアル．實際 △MBN ト △MB′N トハ合同デアルカラ

$$\angle \mathrm{BMN}=\angle \mathrm{B'MN}$$

デアリ，又 ∠AMP ト ∠B′MN トハ互ニ對頂角デアルカラ相等シイ．故ニ

$$\angle \mathrm{AMP}=\angle \mathrm{B'MN}=\angle \mathrm{BMN}$$

トナリ，AM ト BM トハ PP′ ト等シキ角ヲ作ツテ居ルノデアル．



他方 PP′ 上ニ他ノ一點 M′ ヲ取ツテ AM′, M′B ヲ結ベバ

1) *Maraldi*. 2) *Reflection*. 3) *Refraction*.

$$\overline{\mathrm{AM'}}+\overline{\mathrm{M'B}}$$

ハ

$$\overline{\mathrm{AM}}+\overline{\mathrm{MB}}=\overline{\mathrm{AM}}+\overline{\mathrm{MB'}}=\overline{\mathrm{AB'}}$$

ヨリ長イコトハ良ク知ラレテ居ル事實デアル．實際 M′B′ ヲ結ンデ見ルト △BM′N ト △B′M′N トハ合同デアルカラ

$$\overline{\mathrm{M'B}}=\overline{\mathrm{M'B'}}$$

從ツテ

$$\overline{\mathrm{AM'}}+\overline{\mathrm{M'B}}=\overline{\mathrm{AM'}}+\overline{\mathrm{M'B'}}$$

デアル．然ルニ △AM′B′ ニ就イテ考フレバ

$$\overline{\mathrm{AM'}}+\overline{\mathrm{M'B'}}>\overline{\mathrm{AB'}}(=\overline{\mathrm{AM}}+\overline{\mathrm{MB}}$$

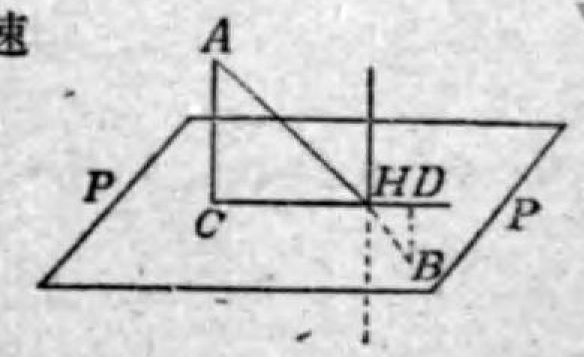
デアルカラ，路線 AM′B ハ光線ノ路 AMB ヨリハ長イノデアル．

是等二ツノ路線ハ同ジ光媒ノ中ヲ進ムノデアルカラ，光ハ同ジ速度デ進ムノデ，路程ノ長イ方ガ長イ時間ヲ要スルノデアル．故ニ

光ガ A 點ヨリ發シ，平面 PP′ ニテ反射シ後 B 點ニ達スルニハ，最短時間ニ達シ得ル路線ヲ通過スルモノデアル．

トモ言ヒ得ル譯デアル．

次ニ光線ノ屈折ニ關スルふぇるまー[1]ノ問題ヲ考ヘル．平面 P ノ上方ニテハ光ハ一定ノ速度 u ヲ有シ，下方ニテハ一定ノ速度 v ニテ進行スルモノトスル．光線ガ上方ノ一點 A ヲ發シテ下方ノ點 B ニ至ルニ最短時間ノ路ヲ選ンデ進ムトスレバ，其ノ通過スル路如何．

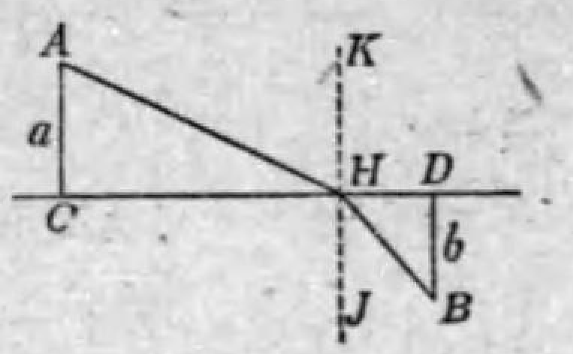


光ガ A ヨリ平面 P 上ノ一點 H ニ至リ，平面ノ下ナ ニ出デテ B 點ニ至ルトスレバ，AH ト HB トハ各々直線デアラウ(最短時間ニ A ヨリ H ニ

1) *Pierre de Fermat* (*1601–1665*). 彼ハ法律家ナリシモ數學ノ研究ヲ樂ミトシ，種々ノ業蹟ヲ遺シタ．特ニ有名ナルハ所謂ふぇるまーノ大定理デ，n ヲ 2 ヨリ大ナル整數トスレバ，x, y, z ヲ如何ナル整數トシテモ關係式 $x^n+y^n=z^n$ ハ成立セズトイフノデアル，彼ハ此ノ定理ノ證明ヲ書キ遺サナカツタガ，今日ニ至ルモ尙其ノ完全ナル證明ハ得ラレテ居ナイ，併シ此ノ定理ハ眞ナリトシテ信ジラレテ居ルノデアル．

至ルニハ直線ガ最モ短イカラ). 又光ハ A 點ト B 點トヲ通リ平面 P ニ垂直ナル平面内ヲ進行スルコトモ明ラカデアル. 其ノ垂直平面ト P 平面トノ交線ヲ CD トスレバ點 H ハ CD 上ニナケレバナラナイ. 又 A ト B トヨリ P 平面ニ垂線ヲ下シテ, 其ノ足ヲ夫々 C, D トスル.

垂線 AC, BD ノ長サヲ夫々 a, b トシ, CD ノ長サヲ c トスル. 問題ハ點 H ノ位置ヲ決定スルニアルカラ, CH ノ長サヲ x トスル. 然ラバ



$$\mathrm{CH}=x \qquad \mathrm{DH}=c-x$$

デアルカラ

$$\mathrm{AH}=\sqrt{a^2+x^2} \qquad \mathrm{BH}=\sqrt{b^2+(c-x)^2}$$

トナル. 光線ガ AH 間ヲ進行スル間ハ速度ハ u デアルカラ AH ヲ通過スルニ要スル時間ハ

$$\frac{\mathrm{AH}}{u}=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{u}$$

デアル. 同樣ニ HB 間ヲ進行スル間ノ速度ハ v デアルカラ, HB ヲ通過スル時間ハ

$$\frac{\mathrm{BH}}{v}=\frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v}$$

デアル. 故ニ A ヨリ H ヲ經テ B ニ到ル全時間 t ハ

$$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{u}+\frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v}$$

トナル. x ニ如何ナル値ヲ與フレバ t ノ値ガ最小ニナルカガ問題デアルカラ,

$$\frac{dt}{dx}=0$$

ヲ解イテ x ノ値ヲ求ムレバヨイノデアル.

扨

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{u}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v}\right)$$

然ルニ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{u}\right)=\frac{1}{u}\frac{d}{dx}(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2u}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x)=\frac{x}{u\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v}\right)=\frac{1}{v}\frac{d}{dx}[b^2+(c-x)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2v}[b^2+(c-x)^2]^{-\frac{1}{2}}\{2(c-x)\}$$

$$=-\frac{c-x}{v\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

故ニ $\frac{dt}{dx}=0$ ハ結局

$$\frac{x}{u\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{v\sqrt{b^2+(c-x)^2}}=0$$

トナル. 此ノ方程式ヲ解イテ x ヲ求ムレバヨイガ, 併シ是ハ x ニ關シテ四次ノ方程式ヲ解クコトニナル. 此ノ面倒ヲ避ケテ, 幾何學的ニ考ヘテ H 點ノ位置ヲ定メヨウ.

點 H ヲ通ジテ平面 P ニ垂線 KJ ヲ引ケバ, ∠AHK ハ光線ノ入射角[1], ∠JHB ハ反射角[2]ト呼バレルモノデアリ, 夫々 i, r デ示スコトニスル. 卽チ

$$i=\angle\mathrm{AHK} \qquad r=\angle\mathrm{JHB}$$

角 HAC ハ i 角ニ等シイカラ

$$\sin i=\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AH}}$$

又角 HBD ハ r 角ニ等シイカラ

$$\sin r=\frac{\mathrm{HD}}{\mathrm{BH}}$$

然ルニ前ニ述ベタル如ク

$$\mathrm{CH}=x \qquad \mathrm{AH}=\sqrt{a^2+x^2}$$

$$\mathrm{HD}=c-x \qquad \mathrm{BH}=\sqrt{b^2+(c-x)^2}$$

---

1) *Angle of incidence.*　2) *Angle of refraction.*

デアルカラ

$$\sin i=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \qquad \sin r=\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

是ヲ用キテ前ノ $\frac{dt}{dx}=0$ 卽チ

$$\frac{x}{u\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{v\sqrt{b^2+(c-x)^2}}=0$$

ヲ書キ直セバ

$$\frac{\sin i}{u}-\frac{\sin r}{v}=0$$

トナル．是ハ又

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{u}{v}$$

ト書ケバ，

入射角ト反射角トノ正弦ノ比ハ速度ノ比ニ等シイコトヲ示ス．然ルニ速度ノ比ハ入射角ニ由ツテ變ラナイカラ

入射角ト反射角ノ正弦ノ比ハ入射角ニ無關係ナル常數デアル．

コトガ分カルノデ，コレ卽チ物理學ニ於ケルすねりうすノ屈折ノ法則[1]デアル．

以上說明シタ二ツノ場合卽チ反射ト屈折ノ場合ヲ總括シテ

光ガ A點ヨリ B點ニ到ルニハ最短時間ニ到達シ得ル路ヲトツテ進行スル．

ト言ヒ得ルデアラウ．

問題

（1） 長サ 1m ノ絲ヲ以テ最大面積ノ矩形ヲ作ルニハ各邊ノ長サヲ如何ニスベキカ．（答 $\frac{1}{4}$m 卽チ正方形）

（2） 三角形ノ二邊ヲ a,b トス．其ノ面積ヲ最大ナラシムルニハ，a,b 邊ノ間ノ角ヲ如何ニスベキカ．（答　直角）

1) *Snell's Law* (*Snelliussches Brechungsgesetz*).

70　逐次微分法

函數 $f(x)$ ノ微分商 $\frac{df}{dx}$ ハ又 x ノ函數ト見做シ得ラレルカラ，其ノ微分商モ亦考ヘラレル譯デアル．卽チ $\frac{dy}{dx}$ ノ微分商 $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ デアルガ，通常之ヲ

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

ト書イテ，$f(x)$ ノ二次ノ微分商又ハ二次ノ導函數トイフノデアル．是ハ x ノ增加ニ伴フ $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ ノ變動ノ割合ヲ示スモノデアル．二次ノ導函數ハ又

$$f''(x)$$

トモ書ク．同樣ニ三次，四次等ノ導函數モ亦用キラルヽ事ガアル．記號ハ通常

$$\frac{d^3y}{dx^3}\quad\frac{d^4y}{dx^4}\cdots\cdots \text{ 又ハ } f'''(x)\quad f^{(iv)}(x)\cdots\cdots$$

ナドデアル．

例トシテ $f(x)=x^3$ ヲ考ヘテ見ヨウ．一回微分スレバ

$$f'(x)=3x^2$$

デアルガ，之ヲ又微分スレバ

$$f''(x)=3(2x)=6x$$

$$f'''(x)=6$$

之ヲモ微分スレバ

$$f^{(iv)}(x)=0$$

トナル．

一般ニ n ヲ正ノ整數トシ $f(x)=x^n$ トスレバ

$$f'(x)=nx^{n-1}$$

$$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(k)}(x)=n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)x^{n-k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n-2)}(x)=n(n-1)\cdots\cdots4\cdot3\cdot x^2$$

$$f^{(n-1)}(x)=n(n-1)\cdots\cdots4\cdot3\cdot2\cdot x$$

$$f^{(n)}(x)=n!$$

$$f^{(n+1)}(x)=0$$

トナルノデアル.

問題 次ノ函數ヲ何回モ微分セヨ.

x^5　ax^3+bx^2+cx+d　$\log x$　e^x　$\sin x$　$\cos x$

71 函數値ノ計算

高次ノ導函數ノ重要ナル應用ノ一ツハ函數値ノ計算デアラウ. 吾人ハ今マデ種々ノ函數ヲ取扱ツタ. 例ヘバ $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\log x$ ナドデアルガ, x ノ種々ナル値ニ對スル是等ノ函數ノ値ハ如何ニシテ計算出來ルデアラウカ. 値ガ計算出來ナケレバ役ニ立タヌ場合ガ多イデアラウ. 勿論表ヲ用キレバヨイガ, 表ハ如何ニシテ計算シ作製スルカ, 少クモ計算シ得ル方法ガナケレバ安心デキナイ. 此ノ問題ニ對シテ次ノ實例ヲ示サウ.

最モ簡單ナル函數カラ始メル.

問題ノ函數ヲ

$$f(x)=(1+x)^3$$

トスル. 此ノ函數ハ簡單デアルカラ, x ノ與ヘラレタル値ニ對シテ實際ニ計算スレバ, 其ノ値ハ容易ニワカルノデアルガ, 一般ノ問題ノ緒(イトグチ)トシテ考ヘテ見ルノデアル. 吾人ガ實際ニ計算シ得ル演算ハ加減乘除デアルカラ, 函數値ノ計算モ亦是等四種ノ計算卽チ四則算法ノ應用ニ依ラナケレバナラナイ. 故ニモシ與ヘラレタル函數ヲ最モ簡單ナル函數例ヘバ冪函數ノ級數ニ展開出來レバ, 其ノ各項ヲ一ツヅツ計算シテ一歩一歩函數ノ眞ノ値ニ近ヅクコトガ出來ル筈デアル. 當面ノ問題ノ函數 $(1+x)^3$ ハ代數學ニ於テ學ンダ如ク x ノ

冪級數ニ展開出來ルノデアルカラ, 假ニ

$$(1+x)^3=c+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\cdots\cdots \qquad (a)$$

トオイテ見テ, 係數 $c, c_1, c_2, c_3 \cdots\cdots$ ヲ決定シ得ルナラバ, 目的ハ達セラレルノデアル. 上式ハ x ノ値ノ如何ニ關セズ左右相等シクナル樣ニシタイノデアルカラ, $x=0$ トシテモ左右相等シイデアラウ. 故ニ $x=0$ トシテ見ルト, 左邊ハ 1 トナリ, 右邊ハ c トナル. 故ニ

$$c=1$$

デナケレバナラナイ. ヨツテ最初ノ係數 c ガ先ヅ定マツタ.

次ニ上記 (a) 式ノ x ハ變數デアルカラ, x ニ關シテ此ノ式ノ左右兩邊ヲ微分シテモ, 尙兩邊ハ相等シイデアラウ. 卽チ微分シテ

$$3(1+x)^2=c_1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+\cdots\cdots$$

トナル. 此ノ式中ノ $x=0$ ナル値ヲ代入シテ見レバ

$$3=c_1$$

トナツテ, 第二ノ係數 c_1 ガ分カツタ.

上式ヲ今一度微分スルト

$$6(1+x)=2c_2+6c_3x+12c_4x^2+\cdots\cdots$$

トナルカラ, 此ノ式中 $x=0$ トスレバ

$$6=2c_2 \quad 卽チ \quad c_2=3$$

ヲ得ル. 更ニ微分シテ

$$6=6c_3+24c_4x+\cdots\cdots$$

ヲ得ルカラ, $x=0$ トシテ

$$6=6c_3 \quad 卽チ \quad c_3=1$$

ヲ得ル.

此ノ上更ニ微分スレバ左邊ハ常ニ零トナルカラ, 從ツテ c_4, c_5, ……等ハ皆零トナルコトガ分カル. 故ニ結果ハ

$$c=1 \quad c_1=3 \quad c_2=3 \quad c_3=1 \quad c_4=c_5=\cdots\cdots=0$$

デアツテ，上記 (α) 式ハ結局

$$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$$

トナルノデアル．此ノ結果ハ左邊卽チ $(1+x)$ ヲ三乘スル演算ヲ實行シテモ，叉ハ二項式定理ヲ用キテ計算シテモ，是ト全ク同一ノ展開ヲ得ルノデアル．

72　e^x ノ 展 開

以上ノ方法ヲ利用シテ指數函數 e^x ノ展開ヲ試ミヨウ．

先ヅ e^x ハ x ノ冪級數ニ展開出來ルモノト假定シテ

$$e^x=c+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\cdots\cdots+c_nx^n+\cdots\cdots$$

トオク．

上式中 $x=0$ ヲ代入スレバ $e^0=1$(a ハ如何ナル數デモ $\frac{a^n}{a^n}=a^{n-n}=a^0=1$ デアル) デアルカラ，左邊ハ 1 デアル．故ニ

$$1=c$$

左右兩邊ヲ一回微分スルト $\frac{de^x}{dx}=e^x$ デアルカラ

$$e^x=c_1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+\cdots\cdots+nc_nx^{n-1}+\cdots\cdots$$

トナル．$x=0$ トスレバ

$$1=c_1$$

ヲ得ル．再度微分スレバ

$$e^x=2c_2+3\cdot2c_3x+4\cdot3c_4x^2+\cdots\cdots+n(n-1)c_nx^{n-2}+\cdots\cdots$$

トナリ，$x=0$ トオケバ

$$1=2c_2 \quad 卽チ \quad c_2=\frac{1}{2}=\frac{1}{2!}$$

ヲ得ル．叉微分シテ

$$e^x=3\cdot2c_3+4\cdot3\cdot2\cdot c_4x+\cdots\cdots+n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}+\cdots\cdots$$

トナリ，$x=0$ トオケバ

$$1=3\cdot2c_3 \quad 卽チ \quad c_3=\frac{1}{2\cdot3}=\frac{1}{3!}$$

此ノ方法ヲ限リ無ク續ケルト，左邊ハ常ニ e^x デアルカラ，一般ニ (n 回微分シテ後 $x=0$ トオイテ)

$$1=n!c_n \quad 卽チ \quad c_n=\frac{1}{n!}$$

ヲ得ル．故ニ各係數ハ

$$c=1 \quad c_1=1 \quad c_2=\frac{1}{2!} \quad c_3=\frac{1}{3!} \quad \cdots\cdots \quad c_n=\frac{1}{n!} \quad \cdots\cdots$$

トナルコト明ラカデアラウ．ヨツテ結局

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$$

ヲ得テ，目的ヲ達シタノデアル．此ノ結果ハ前ニ第 174 頁ニ得タモノト全ク同一デアル．

73　sinx ノ 展 開

前ノ如ク

$$\sin x=c+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots\cdots+c_nx^n+\cdots\cdots$$

ト假定シテ，係數 $c, c_1, c_2\cdots\cdots c_n\cdots\cdots$ ヲ定メ得レバヨイ．前例ニ倣ツテ先ヅ $x=0$ トオイテ見ルト，左邊ハ 0 トナリ，右邊ハ c トナルカラ

$$c=0$$

一度兩邊ヲ微分スレバ

$$\cos x=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots\cdots+nc_nx^{n-1}+\cdots\cdots$$

トナル．コヽデ $x=0$ トシテ見ルト，左邊ハ $\cos 0=1$ デアルカラ

$$c_1=1$$

ヲ得ル．

再度微分シテ

$$-\sin x=2c_2+3\cdot2c_3x+\cdots\cdots+n(n-1)c_nx^{n-2}+\cdots\cdots$$

ヲ得ルカラ，$x=0$ トスレバ

$$0=2c_2 \quad 卽チ \quad c_2=0$$

又微分スレバ

$$-\cos x=3\cdot2c_3+4\cdot3\cdot2c_4x+\cdots\cdots+n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}+\cdots\cdots$$

トナリ，$x=0$ トスレバ

$$-1=3\cdot2c_3 \quad 卽チ \quad c_3=-\frac{1}{3!}$$

又微分シテ

$$\sin x=4\cdot3\cdot2c_4+5\cdot4\cdot3\cdot2c_5x+\cdots\cdots+n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}+\cdots\cdots$$

トナリ，$x=0$ トオイテ

$$0=4\cdot3\cdot2c_4 \quad 卽チ \quad c_4=0$$

今一度微分シテ

$$\cos x=5\cdot4\cdot3\cdot2c_5+\cdots\cdots+n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}+\cdots\cdots$$

トナリ，$x=0$ トオイテ

$$1=5!\,c_5 \quad 卽チ \quad c_5=\frac{1}{5!}$$

ヲ得ル．

此ノ手順ヲ繰返セバ一般ニ

n ガ奇數ナラバ $c_n=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{1}{n!}$ (卽チ符號ハ隔番ニ ＋，－ トナル)

n ガ偶數ナラバ $c_n=0$

トナルコトガ分カル．(上式中 $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ ハ隔番ニ ＋，－ トナル様ニ工夫シタノデアル)

ヨツテ展開式ハ

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots$$

トナル．此ノ式ニヨツテ，x ノ隨意ノ値ニ對スル $\sin x$ ノ値ヲ計算シ得ルノデアル．但シ注意ヲ要スルノハ，此ノ式中ノ x ハらぢあんデ表ハシタモノデナケレバナラナイ事デアル．夫ハ此ノ演算ニ用キタ式

$$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x \qquad \frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

サドハ，x ヲらぢあんデ表ハシタ時ニノミ通用スル式デアルカラデアル．故ニモシ x ガ普通ノ度盛(例ヘバ 15°, 45° 等) ニテ與ヘラレタルトキニハ，此ノ式ヲ次ノヤウニ變形シテ用キナケレバナラナイ．先ヅ x ヲ n° (n 度) トスル．半徑1ナル圓ノ全圓周ノ長サハ 2π デアルカラ

$$360^\circ:2\pi=n^\circ:x$$

ナル比例式カラ n° ヲ弧度法デ測レバ

$$x=\frac{n\pi}{180}$$

トナルノデアル．故ニ上式ハ變ジテ

$$\sin n^\circ=\frac{n\pi}{180}-\frac{1}{3!}\left(\frac{n\pi}{180}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{n\pi}{180}\right)^5-\cdots\cdots$$

トナルノデアル．モシ又 x ガ何度何分何秒ノ如ク與ヘラレタルトキハ，之ニ應ジテ弧度法ニ直シテ上式ヲ應用シナケレバナラナイ．

74 cos$x$ ノ 展 開

$\sin x$ ノ展開ノ時ト同様ニ

$$\cos x=c+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_nx^n+\cdots\cdots$$

ト假定シテ，$x=0$ トスルト

$$1=c$$

ヲ得ル．上式ヲ何回モ微分スレバ順次ニ

$$\begin{aligned}
-\sin x&=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots\cdots+nc_nx^{n-1}+\cdots\cdots\\
-\cos x&=\quad 2c_2+3\cdot2c_3x+\cdots\cdots+n(n-1)c_nx^{n-2}+\cdots\cdots\\
\sin x&=\qquad 3\cdot2c_3+\cdots\cdots+n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}+\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

ヲ得ルカラ，$x=0$ ヲ代入シテ順次ニ

$$0=c_1 \qquad -1=2c_2 \qquad 0=3\cdot 2c_3 \quad \cdots\cdots$$

卽チ　$c_1=0 \qquad c_2=-\dfrac{1}{2!} \qquad c_3=0 \quad \cdots\cdots$

一般ニ

n ガ奇數ナラバ　$c_n=0$

n ガ偶數ナラバ　$c_n=(-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{1}{n!}$

ヲ得ル．從ツテ展開式ハ

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots$$

トナルノデアル．

此ノ式ニ於テモ亦 x ハらぢあんデ表ハシタ角デアル．

75　二項式 $(1+x)^m$ ノ展開

例ノ如ク

$$(1+x)^m=c+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_nx^n+\cdots\cdots$$

トオイテ，$x=0$ トスレバ

$$1=c$$

ヲ得ル．上式ヲ幾回モ微分スレバ順次ニ

$$m(1+x)^{m-1}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots\cdots+nc_nx^{n-1}+\cdots\cdots$$

$$m(m-1)(1+x)^{m-2}=2c_2+3\cdot 2c_3x+\cdots\cdots+n(n-1)c_nx^{n-2}+\cdots\cdots$$

$$m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}=3\cdot 2c_3+\cdots\cdots+n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}+\cdots\cdots$$

トナル．ヨツテ $x=0$ ヲ代入スレバ順次ニ

$$m=c_1 \qquad m(m-1)=2c_2 \qquad m(m-1)(m-2)=3\cdot 2c_3 \quad \cdots\cdots$$

卽チ　$c_1=m \qquad c_2=\dfrac{m(m-1)}{2!} \qquad c_3=\dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!} \quad \cdots\cdots$

ヲ得ル．此ノ手順ヲ續ケレバ結局

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots$$

$$=1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\cdots\cdots+\binom{m}{n}x^n+\cdots\cdots$$

トナツテ前ニ第107頁ニ得タ式ヲ全ク異ナル方法デ再ビ導キ出シタノデアル．

此ノ展開式ニ於テ m ガ正ノ整數ナラバ，右邊ハ有限ノ項數デ止マルガ，然ラザル場合ニハ無限ニ續クノデアル．然ルニ x ガ 1 ヨリ大ナル絕對値ヲ有スルナラバ $\binom{m}{n}x^n$ ガ n ト共ニ大キクナツテ，右邊ノ級數ハ，項數ヲ多クトレバ取ル程大ナル値トナリテ際限ガナイ．依テ式ガ意味ノナイモノニナル．故ニ上式ハ $|x|<1$ トナルトキニハ有效デアルガ，其他ノ場合ニハ必シモ有效デナイ．（記號 $|x|$ ハ x ノ絕對値ヲ示ス）

76　$\log(1+x)$　ノ　展　開

上ニ得タ $(1+x)^m$ ノ展開式ニ於テ $m=-1$ トスレバ展開式ハ

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots \qquad (|x|<1 \text{ トスル})$$

ヲ得ル．此ノ式ハ，上ノ展開式ヲ利用セズトモ，$1+x$ デ 1 ヲ除スル連除法ヲ實行シテモ得ラレル式デアル．

此ノ式ノ左邊ハ明ラカニ $\log(1+x)$ ノ導函數デアリ，右邊ハ

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots$$

ノ導函數デアルコトハ，微分シテ見レバ分カルノデアル．サスレバ，左右兩邊ノ原函數ハ其ノ差ガ常數デアル筈デアルカラ

$$\log(1+x)=C+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots \qquad (C \text{ ハ適當ナル常數})$$

ナル關係ガアルコトヲ知リ得ルノデアル．然ルニ x ガ 0 デアレバ，左邊ハ $\log 1$ 卽チ 0 デ，右邊ハ C トナルカラ，常數 C ハ零デナケレバナラナイ．故ニ展開式ハ結局

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots \qquad (|x|<1)$$

トナルノデアル．此ノ式ハ

$$-1<x\leqq 1$$

ナル範圍デ有效デアルコトガ證明出來ルノデアル[1]．故ニ $x=1$ トスレバ，上式ハ $\log 2$ ヲ計算スル式ヲ與ヘル．卽チ2ノ自然對數ヲ與ヘル式ヲ得ル．

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

展開式ノ x ヲ $\frac{1}{n}$ (n ハ自然數卽チ 1, 2, 3 ……等ノ數) トスレバ，左邊ハ

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log\frac{n+1}{n}=\log(n+1)-\log n$$

トナル．展開式ノ右邊ハ $\log(n+1)-\log n$ ヲ與ヘルノデアルカラ，$\log n$ ノ値ヲ知レバ，此ノ式ニヨツテ $\log(n+1)$ ノ値ヲ計算出來ル筈デアル．上ニ述ベタ樣ニ $\log 2$ ヲ計算シタトスレバ，之ヨリ $\log 3$, $\log 4$, ……等順次計算シ得ル筈デアル．

以上ハ自然對數卽チ e ヲ底トシタ對數デアルガ，常用對數卽チ 10 ヲ底トシタ對數ハ如何ニシテ計算出來ルカヲ考フルニ，コレハ自然對數ヲ知レバ簡單ニ計算出來ルノデアル．以下コレヲ說明スル．

今 x ノ自然對數トハ如何ナル數カヲ考フルニ，e^y ガ丁度 x トナル如キ數 y ノコトデアルカラ，$e^y=x$ ナラバ y ハ $\log x$ デアル．故ニ

$$e^{\log x}=x \qquad (a)$$

デアル．此ノ式ノ正シイコトハ，左邊ノ對數ヲトレバ

$$\log(e^{\log x})=\log x\log e=\log x \qquad (\log e=1)$$

トナルコトカラモ明ラカデアル．

又 x ノ常用對數トハ，$10^z=x$ トナル樣ナ數 z ノコトデアルカラ $z=\log_{10}x$ ヲ $10^z=x$ ニ代入シテ

1) 證明略ス．

$$10^{\log_{10}x}=x$$

ヲ得ル．故ニ上式 (a) ヨリ

$$e^{\log x}=10^{\log_{10}x} \qquad (\text{兩邊トモニ } x \text{ デアル})$$

ナル關係ガアル．此ノ式ノ兩邊ノ自然對數ヲトレバ

$$\log x=\log_{10}x\cdot\log 10$$

卽チ

$$\log_{10}x=\frac{1}{\log 10}\log x$$

ヲ得ル，ヨツテ常數 $\frac{1}{\log 10}$ ヲ M ト書ケバ，上式ハ

$$\log_{10}x=\mathrm{M}\log x$$

トナル．卽チ

x ノ自然對數ニ常數 M ヲ乘ズレバ x ノ常用對數ヲ得ル．M ハ 10 ノ自然對數デ 1 ヲ除シタモノデアル[1]．

M ノ値ハ

$$\mathrm{M}\fallingdotseq 0.43429$$

デアル．

77 圓周率 π ノ級數

今 $\tan y$ ヲ x ト名ヅケルト

$$x=\tan y$$

デアルガ，x ガ y ノ函數デアルト同時ニ y ハ又 x ノ函數デアル．卽チ正切ノ値 x ヲ與ヘレバ，ソノ角 y ガ定マルノデアル．尤モ此ノ場合同ジ正切ヲ與フル角ハ一ツニ限ラズ數多アルガ，併シ夫等ハ互ニ無關係ノモノデハナクテ，互ノ差ハ π ノ倍數(又ハ 180° ノ倍數) デアル．其ノ中ノ一ツヲ α トスレバ他ノモノハ皆 $\alpha+n\pi$ (n ハ正又ハ負ノ整數)ナル形ノモノデアル．併

1) $\frac{1}{\mathrm{M}}=\log_e 10$ アルカラ $e^{\frac{1}{\mathrm{M}}}=10$ デアル．兩邊ノ常用對數ヲ取レバ $\frac{1}{\mathrm{M}}\log_{10}e=1$ 卽チ $\mathrm{M}=\log_{10}e$ トナリ，M ハ e ノ常用對數デアルト言ツテモヨイ．

シ角ヲ $-90°$ ト $+90°$ トノ間ニ限レバ唯一ツトナル．通常 x ナル正切ヲ有スル角ノ中 $-90°$ ト $90°$ トノ間ノモノヲ取リ之ヲ $\operatorname{arc}\tan x$ ト書クノデアル．卽チ

$$y=\operatorname{arc}\tan x$$

デ，$x=0$ ナラバ $y=0$ トナルノデアル．

第203頁ニ記シタ様ニ此ノ函數ノ導函數ハ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

デアル．x^2 ヲ1ヨリ大ナラズトスレバ $(1+x)^m$ ノ展開式ヲ利用シテ

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots$$

ガ得ラレル．兩邊ノ原函數ヲ取レバ

$$\operatorname{arc}\tan x=C+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots \quad (\text{C ハ適當ナル常數})$$

トナル．右邊ノ常數 C ヲ決定スル爲ニ x ヲ 0 トスレバ

$$0=C$$

トナルカラ，上式ハ

$$\operatorname{arc}\tan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots \quad (\text{左邊ハらぢあん})$$

ナル展開式ヲ得ル．

此ノ式ハ $x=1$ ナルトキモ尙通用スルコトガ證明出來ルカラ[1]，$x=1$ トスルト，左邊ハ $\operatorname{arc}\tan 1$ 卽チ正切ガ1ナル角デ且 $-90°$ ト $90°$ トノ間ノ角卽チ $45°$，弧度法デ $\frac{\pi}{4}$ トナル．ヨツテ

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots$$

ナル面白キ關係ヲ得ル．此ノ關係ハ本朝數學卽チ和算ニ於テモ既ニ知ラレテ居ルモノデ，有名ナ關孝和ガコレヲ利用シテ圓周率ノ計算ヲ企テラレタコト

1) 證明略ス．

モアルトイフ．併シ右邊ノ級數ハ項數ヲ餘程多ク取ラナケレバ一定ノ値ニ近ヅカナイカラ，便利ナ式デハナイ[1]．

78　指數函數ト三角函數トノ關係

前ニ得タ e^x，$\sin x$，$\cos x$ ノ展開式ヲ列記シテ見ルト

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\cdots$$

$$\cos x=1 \quad -\frac{x^2}{2!} \quad +\frac{x^4}{4!}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin x= \quad x \quad -\frac{x^3}{3!} \quad +\frac{x^5}{5!}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

デアルガ，コレヲ眺メルト，是等ノ間ニ似寄ツタ處ノアルコトニ氣付クデアラウ．$\cos x$ ノ展開式ノ各項ハ e^x ノ展開式ノ一番，三番，五番等奇數番ノ項ト同ジデ，唯符號ガ隔番ニ異ルダケデアル．$\sin x$ ノ項ハ，偶數番ノソレト同ジデ，其ノ符號ハ同ジク隔番毎ニ異ルノデアル．サレバ是等函數ノ間ニ密接ナル關係ガアルコトハ豫想セラレル．之ヲ得ル爲ニ e^x ノ x ノ代リニ $ix(i=\sqrt{-1})$ ヲ代入シテ見ルト

$$i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=+1,\ i^5=+i\cdots\cdots$$

デアルカラ

$$e^{ix}=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}-i\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots$$

トナル．右邊ニ於テ i ノアル項ト無イ項トヲ分離スルト次ノ様ニナル．

$$e^{ix}=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots\right)$$

右邊ノ第一項ハ $\cos x$ ノ展開ト同ジデ，第二項ノ括弧內ハ $\sin x$ ノ展開ト同一デアル．ヨツテ次ノおいれる關係式[2]ガ得ラレル．

1) $\frac{1}{n}$ ハ n ガ 2001 デアツテモ 0.0005 程度ノ數デアルカラ。右邊ノ項數ヲ 1000 項取ツテモ尙小數第三位ガ危マレル．　2) *Euler's relation.*

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

此ノ式ハ非常ニ有用ナ式デアル．是ニ依ツテ三角函數ト指數函數トノ關係ガ明ラカニナルノデアル．

上述ノ操作ニ於テ e^{ix} ノ代リニ e^{-ix} ヲ用キレバ，i ノ代リニ $-i$ ヲ代入シタ結果ガ得ラレル．卽チ

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

コレヲ上式ト相加減シテ 2 デ除スレバ

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\qquad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

トナルガ，是又非常ニ大切ナル關係式デアル．

おいれるノ關係式ノ兩邊ヲ n 乘スレバ（n ハ隨意ナル數）

$$e^{inx}=(\cos x+i\sin x)^n$$

デアルガ，左邊ハおいれる關係式ノ x ノ代リニ nx ヲ代入シタモノデアルカラ

$$e^{inx}=\cos nx+i\sin nx$$

デアル．ヨツテ上式ト組合セテ

$$(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$$

ヲ得ル．コレ卽チ有名ナど・もあぶるノ定理[1]デアル．

79　すたーりんぐ・まくろーりんノ級數[2]，てーろる級數

以上ノ考察ヲ擴張シテ一般ノ函數ノ展開ヲ考ヘテ見ヨウ．

與ヘラレタル函數 $f(x)$ ハ x ノ冪級數トシテ次ノ形ニ展開出來ルト假定スル．卽チ x ノ値如何ニ關セズ次式ノ左右兩邊ハ相等シキ値ヲ與ヘルトスル．

$$f(x)=c+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_nx^n+\cdots\cdots$$

右邊ノ係數 $c, c_1, c_2, \ldots\ldots c_n, \ldots\ldots$ ヲ決定スレバヨイ．前例ノ如ク先ヅ $x=0$

1) *De Moivre's Theorem.*　2) *Stirling-Mac-Laurin's series.*

トスレバ

$$f(0)=c$$

トナツテ，係數 c ハ簡單ニ知ルコトガ出來タ．

上式ヲ一回微分スレバ

$$f'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots\cdots+nc_nx^{n-1}+\cdots\cdots$$

トナリ，$x=0$ トスレバ

$$f'(0)=c_1$$

ヲ得ル．コレデ c_1 ガ分カツタ．

再度微分シテ

$$f''(x)=2c_2+3\cdot2c_3x+\cdots\cdots+n(n-1)c_nx^{n-2}+\cdots\cdots$$

ヲ得ルカラ，$x=0$ トシテ

$$f''(0)=2c_2\quad\text{卽チ}\quad c_2=\frac{1}{2}f''(0)\qquad\left(\frac{1}{2!}f''(0)\ \text{トモ書キ得ル}\right)$$

ヲ得ル．

三度微分シテ

$$f'''(x)=3\cdot2\cdot c_3+4\cdot3\cdot2\cdot c_4x+\cdots\cdots+n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}+\cdots\cdots$$

トナリ，$x=0$ トシテ

$$f'''(0)=3\cdot2c_3\quad\text{卽チ}\quad c_3=\frac{1}{3!}f'''(0)$$

ヲ得ル．

此ノ手順ヲ繰返セバ，一般ニ

$$f^{(n)}(0)=n(n-1)\cdots\cdots2\cdot c_n\quad\text{卽チ}\quad c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$$

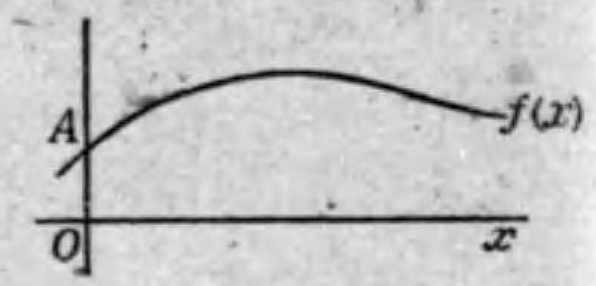
ヲ得ルノデアル．故ニ最初ニ假定シタ展開式ノ係數ハ全部分カツタノデ，夫等ヲ入レルト結局展開式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots\cdots$$

ヲ得ル．係數ハ既知函數 $f(x)$ 及ビ其ノ逐次導函數ノ $x=0$ ニ於ケル値カラ

計算出來ルノデアル．此ノ展開式ヲ用ヰテ x ノ隨意ノ値ニ對スル $f(x)$ ノ値ヲ計算出來ルノデアル．

此ノ結果ハ頗ル重要ナ結果デ，x ノ特定ノ値 $x=0$ ニ對スル函數及ビ其ノ逐次導函數ノ値ヲ知レバ，隨意ノ x ニ對スル函數ノ値ガ分カルコトヲ示スノデアル．換言スレバ，函數 $f(x)$ ハ獨立變數 x ノ特定ノ値 $x=0$ ニ於ケル其ノ値ト逐次導函數ノ値ニヨツテ確定スルノデアル．幾何學的ニ言ヘバ，$x=0$ 卽チ A 點ニ於ケル函數 $f(x)$ ノ性質ノミニ依ツテ曲線全部ガ定マルノデアル．



コヽニ得タ展開式ハ通常函數 $f(x)$ ニ對スルまくろーりんノ級數[1]トイフノデアル．併シ此ノ級數ハまくろーりん以前ニすたーりんぐ[2]ガ發見シタトイフコトデアル．

以上ノ展開ハ $x=0$ ニ於ケル $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$......等ノ値卽チ $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ ......等ヲ知ツテ，x ノ一般ノ値ニ對スル $f(x)$ ヲ計算スルモノデアルガ，是ハ必シモ $x=0$ ニ限ツタコトデハナク，一般ニ $x=a$ ナル特殊ノ値ニ於ケル $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$......等ヲ知レバ一般ノ x ニ對スル $f(x)$ ガ計算出來ルデアラウコトハ豫想ニ難クナイ．此ノ事ヲ考ヘル爲ニ $x-a$ ヲ假ニ z ト書ケバ

$$x-a=z \quad \text{卽チ} \quad x=a+z$$

トナルカラ

$$f(x)=f(a+z)$$

トナル．$f(a+z)$ ハ明ラカニ z ノ函數デアル．故ニ解カリ易クスル爲ニ，假ニコレヲ $\mathrm{F}(z)$ ト書ケバ，

$$\mathrm{F}(z)=f(a+z)$$

トナル．此ノ $\mathrm{F}(z)$ ヲまくろーりんノ級數ニ展開スレバ

$$\mathrm{F}(z)=\mathrm{F}(0)+\mathrm{F}'(0)z+\mathrm{F}''(0)\frac{z^2}{2!}+\mathrm{F}'''(0)\frac{z^3}{3!}+\cdots\cdots+\mathrm{F}^{(n)}(0)\frac{z^n}{n!}+\cdots\cdots$$

1) *Mac-Laurin's series.*　2) *Stirling.*

トナル．然ルニ $\mathrm{F}(z)=f(a+z)$ デアルカラ，函數ノ函數ノ微分法ニヨツテ

$$\mathrm{F}'(z)=f'(a+z)\frac{d(a+z)}{dz}=f'(a+z)$$

$$\mathrm{F}''(z)=f''(a+z)\frac{d(a+z)}{dz}=f''(a+z)$$

$$\mathrm{F}'''(z)=f'''(a+z)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{F}^{(n)}(z)=f^{(n)}(a+z)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

デアル．ヨツテ $z=0$ トスレバ

$$\mathrm{F}(0)=f(a),\ \mathrm{F}'(0)=f'(a),\ \mathrm{F}''(0)=f''(a),\ \ldots\ \mathrm{F}^{(n)}(0)=f^{(n)}(a)\cdots\cdots$$

ヲ得ル．故ニ上ノ展開式ハ

$$f(a+z)=f(a)+f'(a)z+f''(a)\frac{z^2}{2!}+f'''(a)\frac{z^3}{3!}+\cdots\cdots+f^{(n)}(a)\frac{z^n}{n!}+\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\mathrm{T})$$

トナル．玆ニ $z=x-a$ デアルカラ，此ノ式ハ書キ直シテ

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!}+\cdots\cdots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+\cdots\cdots \quad (\mathrm{T}')$$

ヲ得ル．是等 (T) (T′) ノ式ヲてーろる級數[1]トイフノデアル．

てーろる級數ニ於テ $a=0$ トスレバ (T) (T′) トモニまくろーりんノ級數ニナル．故ニ是等二種ノ級數ハ實ハ同ジモノトモ考ヘラレルノデアル．唯形式ノ上デハてーろる級數ノ方ガまくろーりん級數ヨリハ廣イノデアル．

前ニ得タ $\log(1+x)$ ノ展開式（第 238 頁）ヲまくろーりん展開ノ應用トシテ出シテ見ヨウ．

$$f(x)=\log(1+x)$$

1) *Taylor's series.*

トスレバ

$$f'(x)=\frac{1}{1+x} \qquad f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3} \qquad f^{(iv)}(x)=-\frac{3!}{(1+x)^4}$$

$$\cdots\cdots \quad f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \cdots\cdots$$

トナルカラ

$$f(0)=\log 1=0 \quad f'(0)=1 \quad f''(0)=-1 \quad f'''(0)=2! \quad f^{(iv)}(0)=-3! \cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)! \quad \cdots\cdots$$

故ニ

$$f(x)=\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{2!}{3!}x^3-\frac{3!}{4!}x^4+\cdots\cdots$$

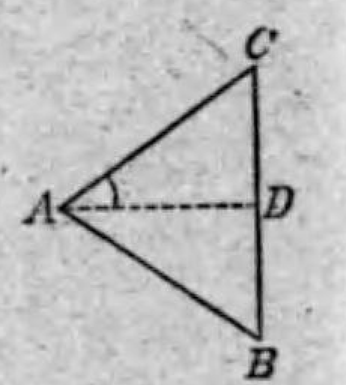
$$+(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n+\cdots\cdots$$

$$\therefore \qquad \log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots$$

卽チ第238頁ノ展開式ト同樣ノモノヲ得タノデアル．

此ノ級數ハ $-1<x\leqq 1$ ノ範圍內デ有效デアルコトハ證明出來ル．(證明略ス)前ニ第237頁ニ得タ $(1+x)^m$ ノ展開式モ亦同樣ニシテ得ラレル．

實例　第234頁ニ得タ $\sin x$ ノ展開式ヲ用キテ 30° ノ正弦ノ値ヲ計算シテ見ヨウ．但シ $\sin 30^\circ$ ハ 0.5 デアルコトハ次ノ樣ニ考ヘレバ分カル．正三角形 ABC ノ頂角 A ヲ AD ガ二等分スレバ ∠CAD ハ 30° デアルカラ



$$\sin 30^\circ=\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}}$$

デアル．然ルニ CD ハ正三角形ノ一邊ノ半分デアルカラ $\frac{\mathrm{AC}}{2}$ デ，從ツテ $\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}$ デアル．ヨツテ

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}=0.5$$

デアル．

之ヲ展開式カラ求メルニハ，先ヅ 30° ヲらぢあんニ直スト

$$\frac{30^\circ}{180^\circ}\times 3.1416=\frac{3.1416}{6}=0.5236$$

トナル．ヨツテ展開式ニヨツテ

$$\sin 30^\circ=0.5236-\frac{(0.5236)^3}{3!}+\frac{(0.5236)^5}{5!}-\cdots\cdots$$

トナル．之ヲ實際ニ計算スルト(對數ヲ用キテ計算スレバ困難ハナイ)

$$\frac{(0.5236)^3}{3!}=\frac{(0.5236)^3}{6}\fallingdotseq 0.02395$$

$$\frac{(0.5236)^5}{5!}=\frac{(0.5236)^5}{120}\fallingdotseq 0.00033$$

デアリ，是ヨリ先ノ項ハ小數點四桁ニハ關係ハナイカラ

$$\sin 30^\circ\fallingdotseq 0.5236-0.02395+0.00033=0.49998\fallingdotseq 0.5$$

卽チ 0.5 ヲ得ルノデアル．

80　てーろる級數ノ應用

第245頁ニ揭ゲタてーろる級數

$$f(a+z)=f(a)+f'(a)z+f''(a)\frac{z^2}{2!}+f'''(a)\frac{z^3}{3!}+\cdots\cdots$$

ニ於テ，モシ z ノ絕對値ガ小サケレバ z^2, z^3 等ハ z ニ比シテ非常ニ小サク，殆ンド度外視シテモヨイ程度ニナルコトモアルカラ，實用ニハ

$$f(a+z)\fallingdotseq f(a)+f'(a)z$$

トシテモヨイコトガ多イ．之ニ依ツテ

$$f(a+z)-f(a)\fallingdotseq f'(a)z$$

トナル．a ヲ一定ノ數ト見レバ $f'(a)$ ハ常數デ，z ガ非常ニ小ナラバ $f(a+z)-f(a)$ ハ大略 z ニ比例スルコトガ分カル．卽チ a ニ於ケル函數 f ノ値ニ於テ，a ガ z ダケ增シテ $a+z$ トナル爲ニ生ズル變動ノ量ハ，大略 z ニ比例シテ居ルノデアル．

故ニ對數表又ハ三角函數表ナドニ於テ，眞數又ハ角ノ差ガ小サケレバ，其ノ對數又ハ三角函數ノ値ノ差ハ眞數又ハ角ノ差ニ比例スルトシテ計算スル所謂比例部分ハ此ノ理ニ據ルノデアル．

81　加法定理[1)]

てーろる級數ヲ應用シテ加法定理ヲ調ベテ見ヨウ．

先ヅ最モ簡單ナ函數 $(a+x)^2$ ヲ考ヘヨウ．之ヲ $f(a+x)$ トスレバ

$$f(a+x)=(a+x)^2$$

デ，逐次微分シテ $x=0$ トスレバ

$$\begin{array}{ll}
f(a+x)=(a+x)^2 & f(a)=a^2 \\
f'(a+x)=2(a+x) & f'(a)=2a \\
f''(a+x)=2 & f''(a)=2 \\
f'''(a+x)=0 & f'''(a)=0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

故ニてーろる展開式(第 245 頁)カラ

$$(a+x)^2=a^2+2ax+2\frac{x^2}{2!}=a^2+2ax+x^2$$

ヲ得ル．コレハ函數 x^2 ノ加法定理ト見做シ得ル式デアル．

次ニ $f(a+x)=\sin(a+x)$ トシテ見ルト逐次導函數ト $x=0$ トシテ得ルモノハ次ノ様ニナル．

$$\begin{array}{lll}
f(a+x)=\sin(a+x) & x=0 \text{ トシテ} & f(a)=\sin a \\
f'(a+x)=\cos(a+x) & & f'(a)=\cos a \\
f''(a+x)=-\sin(a+x) & & f''(a)=-\sin a \\
f'''(a+x)=-\cos(a+x) & & f'''(a)=-\cos a \\
f^{(iv)}(a+x)=\sin(a+x) & & f^{(iv)}(a)=\sin a
\end{array}$$

1) *Addition Theorem.*

即チ導函數ハ最初ノ函數ト同一ノモノニ返ツテ來タノデアル，從ツテ此ノ後ノ逐次導函數ハ今迄ノモノヲ順次繰返スコトニナルコトハ明ラカデアラウ．ヨツテてーろる級數ノ形ハ

$$\sin(a+x)=\sin a+\cos a\frac{x}{1!}-\sin a\frac{x^2}{2!}-\cos a\frac{x^3}{3!}+\sin a\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots$$

$$=\sin a\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots\right)+\cos a\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots\right)$$

トナル．然ルニ右邊ニ現レタ級數ハ前ニ第 234 頁及ビ第 236 頁ニ得タ $\cos x$ ト $\sin x$ トノ展開式ニ他ナラナイカラ，結局上式ハ

$$\sin(a+x)=\sin a\cos x+\cos a\sin x$$

トナツテ，前ニ得タ正弦函數ノ加法定理ガ得ラレルノデアル．

是ト同様ニ $f(a+x)=\cos(a+x)$ トスレバ

$$\begin{array}{lll}
f(a)=\cos a & f'(a)=-\sin a & f''(a)=-\cos a \\
f'''(a)=\sin a & f^{(iv)}(a)=\cos a & \cdots\cdots
\end{array}$$

トナルカラ，てーろる展開式ニヨツテ

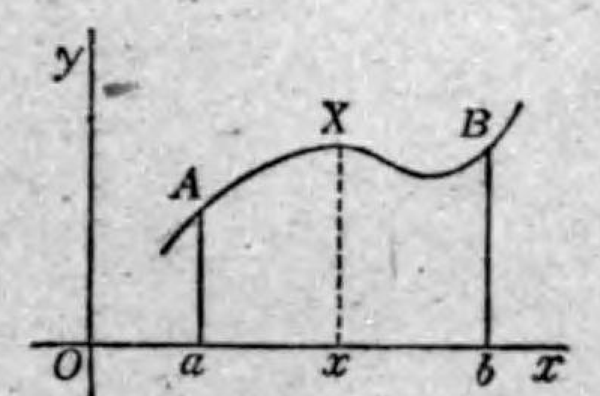
$$\cos(a+x)=\cos a-\sin a\, x-\cos a\frac{x^2}{2!}+\sin a\frac{x^3}{3!}+\cos a\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots$$

$$=\cos a\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots\right)-\sin a\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots\cdots\right)$$

$$=\cos a\ \cos x-\sin a\ \sin x$$

即チ餘弦ノ加法定理ヲ得ルノデアル．

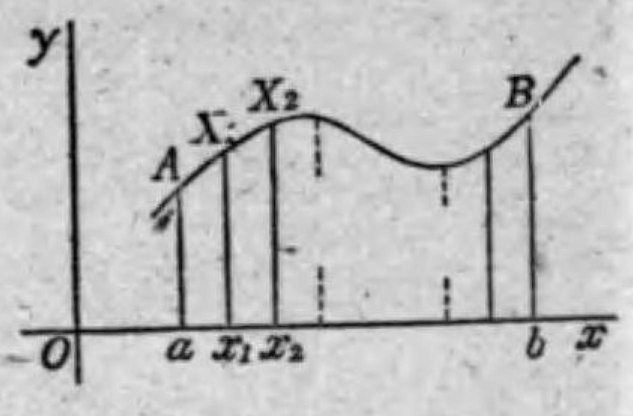
82　積分



函數 $f(x)$ ガ與ヘテアルトシ，コレヲ圖示シテ曲線 AB ヲ得タトスル．　$x=a$ ノトキ，$f(x)=a$A デアリ，$x=b$ナルトキ $f(x)=b$B デアル．一般ニ x ナル値ニ對シテ $f(x)$ ノ値ハ xX デアル．曲線 AB, 直線 aA, bB, 及ビ x 軸

ニテ圍マレタル圖形 abBA ノ面積ヲ「a カラ b マデノ $f(x)$ ノ積分」トイフノデアル.

此ノ積分卽チ面積ヲ求メルニハ次ノ樣ニ考ヘテモヨイデアラウ. 先ヅ此ノ面積ヲ, y 軸ニ平行ナル數多ノ直線ヲ以テ, 多クノ細長キ小部分ニ分ツ. 右圖ニテハ



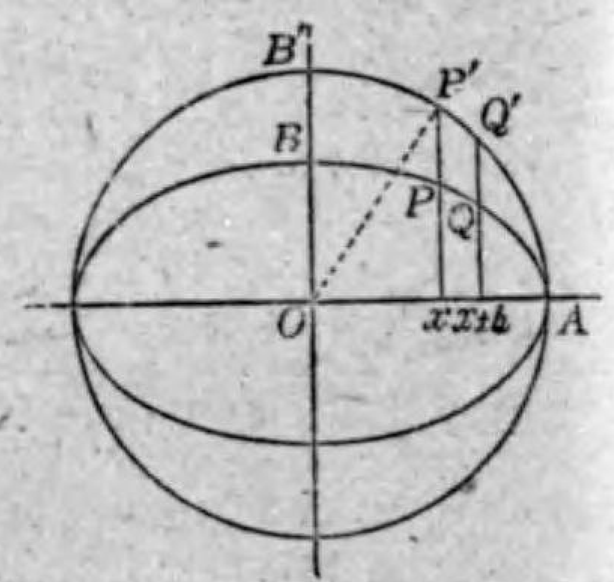
$$aAX_1x_1,\quad x_1X_1X_2x_2 \quad \cdots\cdots$$

等ノ細長キ面積ノ部分ニ分クレテ居ル. 是等ノ各部分ノ面積ヲ總テ加ヘ合セレバ所要ノ面積トナルデアラウ. 各小部分ノ面積ハ, 例ヘバ aAX_1x_1 ノ面積ハ $\overline{ax_1}$ ノ長サト $\overline{aA}$ トノ積ヨリハ稍〻大ニ, 又 $\overline{ax_1}$ ト $\overline{x_1X_1}$ トノ積ヨリハ稍〻小デアラウカラ, $\overline{aA}$ ト $\overline{x_1X_1}$ トノ中間ノ長サニ $\overline{ax_1}$ ヲ乘ジテ得ラレル. 併シ, モシ ax_1 ヲ非常ニ短クスレバ, $\overline{aA}$ ト $\overline{x_1X_1}$ トハ殆ンド差ガ無クナルカラ, $\overline{ax_1}$ ト $\overline{aA}$ トノ積, 又ハ $\overline{ax_1}$ ト $\overline{x_1X_1}$ トノ積ト見テモヨイデアラウ.

斯ノ如ク各小部分ノ面積ヲ計算シテ, ソノ總和ヲ求ムレバ所要ノ面積ト大差ナイモノガ得ラレル. モシ x_1X_1, x_2X_2…… 等ノ樣ナ縱線ノ數ヲ非常ニ多クシ, 從ツテ各部分ノ幅ヲ非常ニ狹クスレバ, 益〻所要ノ面積ニ近イモノトナルノハ明ラカデアル. 故ニ其ノ極限ハ所要ノ面積トナルノデアル. 此ノ面積卽チ a ヨリ b ニ至ル $f(x)$ ノ積分[1)]ヲ記號

$$\int_a^b f(x)dx$$

デ表ハスノデアル.



此ノ考ヘ方ニヨツテ楕圓ノ面積ヲ計算シテ見ヨウ.

楕圓ノ中心ヲ原點 O トシ, 長軸, 短軸ノ線ヲ夫々 x 軸, y 軸ニトレバ, 其ノ方程式ハ

1) *Integral of $f(x)$ taken between the limits a and b.*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>b)$$

トナルコトハ前ニ說イタ. 此ノ式ヲ y ニ關シテ解ケバ

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \qquad y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$\therefore \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$ (P 點ノ y 座標ニハ $\sqrt{\ }$ ハ正ヲトル)

ヲ得ル. 故ニ x 座標ニ對スル楕圓上ノ點 P ノ y 座標ハ

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

デアル.

今原點ヲ中心トシ, OA$=a$ ヲ半徑トシテ圓ヲ畫ケバ AB′ ノ樣ナ圓ヲ得ルデアラウ. xP ヲ上方ニ延長シテ圓トノ交點ヲ P′ トスレバ, OP′$=a$ デアルカラ

$$x\mathrm{P}'=\sqrt{a^2-x^2}$$

デアル. 是ヲ上記 P 點ノ y 座標ト比較シテ

$$x\mathrm{P}=\frac{b}{a}\times\overline{x\mathrm{P}'}$$

ヲ得ル. 卽チ同ジ x 座標ニ對スル楕圓上ノ點ノ y 座標ハ圓上ノ點ノ y 座標ニ $\frac{b}{a}$ ヲ乘ジテ得ラレル.

x 座標ヲ少シク增大シテ $x+h$ トシ, 是ニ對スル楕圓及ビ圓上ノ點ヲ夫々 Q, Q′ トスレバ (x, $x+h$, Q, P) ハ楕圓ノ面積ノ細片デアツテ, 其ノ面積ハ h ガ小サケレバ

$$\overline{x\mathrm{P}}\times h$$

ト見テモヨイ. 然ルニ $\overline{x\mathrm{P}}=\frac{b}{a}\times\overline{x\mathrm{P}'}$ デアルカラ, 又

$$\frac{b}{a}\times\overline{x\mathrm{P}'}\times h$$

トシテモヨイ. 併シ $\overline{x\mathrm{P}'}\times h$ ハ (x, $x+h$, Q′, P′) ナル圓ノ面積ノ細片デアル. 斯カル細片ヲ O ヨリ A ニ至ルマデ作ツテ, 是等ヲ全部集ムレバ全楕圓

ノ四分ノ一ノ面積ヲ得ルノデアルガ，一方 $\overline{xP'}\times h$ ノ如キ細片ノ總和ハ同時ニ全圓ノ四分ノ一ノ面積トナルノデアル．故ニ OAB ナル四分ノ一楕圓ノ面積ハ OAB′ ナル四分ノ一圓ノ面積ニ $\dfrac{b}{a}$ ヲ乘ジタルモノニ等シイ譯デアル．從ツテ此ノ全楕圓ノ面積ハ全圓ノ面積ニ $\dfrac{b}{a}$ ヲ乘ジテ得ラレル．半徑 a ナル圓ノ全面積ハ $a^2\pi$ デアルカラ

$$\text{全楕圓ノ面積}=\frac{b}{a}\times a^2\pi=\pi ab$$

トナル．故ニ

半長徑 a，半短徑 b ナル楕圓ノ全面積ハ πab デアル

コトガ分カツタ．

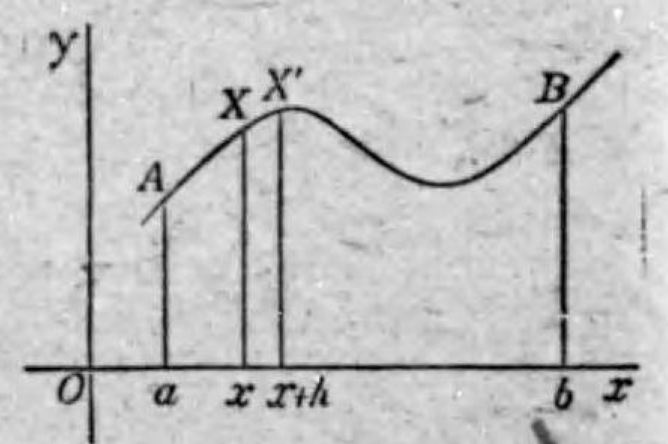
此ノ結果ヲ積分記號デ書ケバ

$$\int_a^b \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}ab$$

トナル．(左邊ノ積分ハ楕圓ノ四分ノ一ノ面積デアルコトハ圖カラ明ラカデアル)．

83 積分ト原函數トノ關係

以上說イタ積分ノ計算ハ甚ダ面倒ナ許リデナク，非常ニ工夫シナケレバ求メ得ラレナイ不便ガアル．此ノ困難モ原函數トノ關係ヲ利用スレバ大ニ輕減出來ルノデアル．以下之ヲ說明ショウ．



函數 $f(x)$ ヲ圖示シタトスル．三方直線デ圍マレ一方 $f(x)$ 曲線デ限ラレタ圖形 $axXA$ ノ面積ハ，定義ニヨツテ a ヨリ x マデ取ツタ $f(x)$ ノ積分卽チ

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

デアル．此ノ面積ハ x ガ增減スレバ，從ツテ變化スルモノデ，變數 x ノ函

$y=\sqrt{4-(a^2-2)}$

數デアル．ヨツテ之ヲ暫ク $F(x)$ デ表ハスコトニスル．卽チ

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$$

デアル．今 x ヲ h ダケ增シタトスレバ $F(x+h)$ ハ面積 $(a, x+h, X', A)$ デアルカラ，$F(x)$ ニ比シテ其ノ增加ハ

$$F(x+h)-F(x)=\text{面積}(x, x+h, X', X)$$

デアル．卽チ幅 h ナル細長キ部分ノ面積ニ他ナラナイ．之ヲ h デ除スレバ

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\ \text{面積}(x, x+h, X', X)$$

トナリ，右邊ハ X 又ハ X′ ニ近イ高サ卽チ y 座標ニ近イモノデアラウ．次イデ h ヲ漸次小サクシテ零ニ近ヅケレバ，卽チ $h\to 0$ トスルトキ X′ ハ X ニ近寄リ，從ツテ右邊ノ値ハ $\overline{xX}$ ノ長サ卽チ $f(x)$ ニ接近スル．ヨツテ其ノ極限ハ $\overline{xX}=f(x)$ トナルノデアル．其ノ時左邊ハ

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

デ卽チ $\dfrac{dF}{dx}=F'(x)$ ニ他ナラヌ，故ニ結局上式ハ變ジテ

$$F'(x)=f(x)$$

トナル．是ニ依テ見ルト $F(x)$ ヲ微分スレバ函數 $f(x)$ トナルノデアル．故ニ $F(x)$ ハ函數 $f(x)$ ノ原函數ノ一ツデアル．式デ書ケバ

$$F(x)+C=\int f(x)\,dx \qquad (C\ \text{ハ隨意常數})$$

トナル．

今函數 $f(x)$ ノ原函數ノ一ツヲ何等カノ方法デ求メ得タトシテ，之ヲ $\varphi(x)$ トショウ．サスレバ之ハ上述ノ $F(x)$ トハ唯常數ノ差アルノミデアル．故ニ

$$\varphi(x)=F(x)+C$$

ナル關係ガアル．茲ニ C ハ適當ナル常數ト考ヘレバヨイ．右邊ノ函數 $F(x)$ ハ或ル面積ヲ表ハス爲ニ用キタノデ，夫ガ如何ナル函數デアルカハ未ダ明瞭デナイガ，左邊ノ $\varphi(x)$ ハ既知ノモノデアルカラ，問題ハ所要ノ面積卽チ $F(b)$

ノ値ヲ既知ノ函數 $\varphi(x)$ ヲ用キテ表ハスコトニ在ル．其ノ爲ニ上式ニ於テ $x=b$ トシテ見ルト

$$\varphi(b)=F(b)+C$$

トナル．然ルニ $F(x)$ ニ於テ $x=a$ トスレバ $F(a)$ トナリ，其ノ定義カラ明ラカニ零デアルカラ，上式ハ又

$$\varphi(a)=C$$

ナル關係ヲ與ヘル．此ノ式ヲ前ノ式カラ減ズレバ

$$\varphi(b)-\varphi(a)=F(b)$$

トナツテ，$F(b)$ ノ値ガ $\varphi(b)-\varphi(a)$ ナルコトヲ知ルノデアル．ヨツテ

函數 $f(x)$ ノ一ツノ原函數ヲ $\varphi(x)$ トスレバ

$$\int_a^b f(x)dx=\varphi(b)-\varphi(a)$$

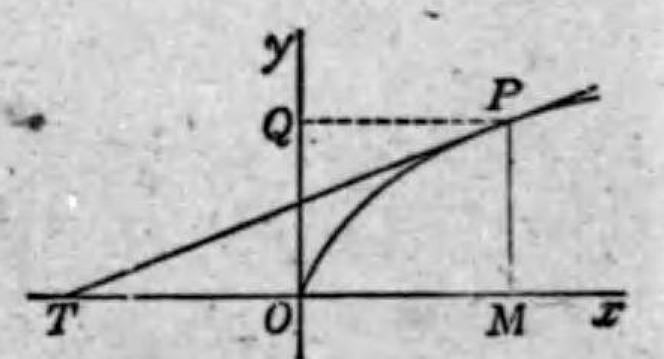
デアル．

故ニ原函數ヲ知レバ積分ヲ計算シ得ルコトガ分カル．

例　OM, OQ ヲ直交スル x 軸及ビ y 軸トシ，曲線

$$y^2=4px \quad (\text{抛物線})$$

ノ上ニ一點 P ヲ取リ，x 軸ニ垂線 PM ヲ下ストキ，直線 OM, PM ト曲線 OP トニテ圍マレタル面積ヲ求メヨ．



解　線 OM ノ長サヲ a トスレバ PM ノ長サハ

$$y^2=4pa$$

ヲ解イテ　$PM=2\sqrt{pa}$

ナルコトガ分カル．ヨツテ

$$OM=a \qquad PM=2\sqrt{pa}$$

デアル．

曲線ノ方程式カラ

$$y=2\sqrt{px}$$

ヲ得ルカラ $f(x)=2\sqrt{px}$ トシテ

$$\int_0^a f(x)dx=2\int_0^a \sqrt{px}\ dx$$

ヲ計算スレバ，其ノ値ガ面積 OPM デアル．ヨツテ先ヅ函數 $2\sqrt{px}$ ノ原函數ヲ求メル．

$$2\sqrt{px}=2\sqrt{p}\,x^{\frac{1}{2}}$$

デアルカラ，附錄ニ揭ゲタ原函數ノ表中 x^n ノ原函數 $\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ ニ於テ $n=\frac{1}{2}$ トスレバ

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

ガ $x^{\frac{1}{2}}$ ノ原函數デアルコトヲ知ルノデアル．事實之ヲ微分シテ見レバ $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ トナルノデアル．故ニ $f(x)=2\sqrt{px}$ ノ原函數ハ是ニ $2\sqrt{p}$ ヲ乘ジタル

$$\frac{4}{3}\sqrt{p}\,x^{\frac{3}{2}}+C$$

デアル．是ガ前ニ述ベタ $\varphi(x)$ ニ相當スルモノデ，從ツテ

$$\int_0^a 2\sqrt{px}\ dx=\varphi(a)-\varphi(0)$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{p}\,a^{\frac{3}{2}}$$

ヲ得ル．右邊ハ又

$$\frac{4}{3}\sqrt{p}\,a^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{pa}\cdot a$$

トモ書キ得ラレルカラ，是ハ

$$\frac{2}{3}\overline{PM}\times\overline{OM}$$

デアル．即チ

$$\text{面積 OPM}=\frac{2}{3}\,\overline{\text{PM}}\times\overline{\text{OM}}$$

トナル．P ヨリ y 軸ニ垂線 PQ ヲ下セバ PM×OM ハ矩形 OMPQ ノ面積デアル．故ニ

　OPM ノ面積ハ矩形 OMPQ ノ面積ノ $\frac{2}{3}$ ニ等シイ

コトガ分カツタ．是ハ拋物線ノ著シイ性質ノ一ツデアル．

P ニ於テ拋物線ニ切線 PT ヲ引イテ，x 軸トノ交點ヲ T トスレバ，OT ノ長サハ幾何カヲ計算シテ見ヨウ．

先ヅ切線 PT ノ傾斜卽チ tan∠PTM (勾配) ハ $y=2\sqrt{px}$ ノ導函數ノ $x=a$ ニ於ケル値デアルカラ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}=\left(2\sqrt{p}\,\frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx}\right)_{x=a}=\left(\frac{1}{2}2\sqrt{p}\,x^{-\frac{1}{2}}\right)_{x=a}=\left(\sqrt{\frac{p}{x}}\right)_{x=a}$$
$$=\sqrt{\frac{p}{a}}$$

デアル．ヨツテ切線 PT ノ式ハ，點 P 卽チ $(a, 2\sqrt{pa})$ ヲ通リ勾配 $\sqrt{\frac{p}{a}}$ ナル直線ノ式デ

$$y-2\sqrt{pa}=\sqrt{\frac{p}{a}}\,(x-a)$$

デアル．是ガ x 軸ト交ル點 T ノ x 座標ハ，上式ニ於テ $y=0$ トシテ，x ニ關シテ解ケバ得ラレル．卽チ

$$-2\sqrt{pa}=\sqrt{\frac{p}{a}}\,(x-a)$$

カラ

$$x=-a$$

トナル．ヨツテ OT ノ長サハ a デアル．然ルニ OM モ亦 a デアルカラ，OT=OM，從ツテ $\text{TM}=2\overline{\text{OM}}$ デアル．

此ノ結果カラ三角形 PTM ノ面積ハ

$$\frac{1}{2}\text{TM}\times\text{PM}=\text{OM}\times\text{PM}.$$

ヨツテ面積 OPM ハ又三角形 PTM ノ $\frac{2}{3}$ デアルトモ言ヒ得ル．

84　原函數ノ應用例

(1)　これら菌ハ三十分間ニ其數ヲ倍加スルトイフ．ソノ增加狀況ヲ調ベヨ．但シ增加率ハ常ニ不變トスル．

或期ニ於ケル菌數ヲ y，增加率ヲ k，時間ヲ t トスレバ單位時間ニ增加スル割合ハ $\frac{dy}{dt}$ ニ他ナラヌ．是ト菌數 y トノ比ガ常數 k デアルカラ

$$\frac{dy}{dt}=ky$$

ナル關係ガアルコトガ分カル．暫ク y ヲ獨立變數トシ，t ヲ其ノ函數ト見做セバ，上式ハ

$$\frac{dt}{dy}=\frac{1}{ky}\text{[1)]}$$

トナル．左邊ノ原函數ハ t デアリ，右邊ノ原函數ハ

$$\frac{1}{k}\log y+C\quad\left(\begin{array}{l}y\text{ ハ菌數デアルカラ正デ，}\\|y|\text{ ト書カナクトモヨイ}\end{array}\right)$$

デアルカラ

$$t=\frac{1}{k}\log y+C$$

ナル關係式ノアルコトヲ知ルノデアル．此ノ式ヲ順次ニ次ノ樣ニ書キ替ヘテ

$$k(t-C)=\log y$$
$$y=e^{k(t-c)}=e^{kt}e^{-kc}=e^{-kc}e^{kt}$$

トナル．$t=0$ ノトキ卽チ最初ノ菌數ヲ y_0 トスレバ，上式ニ於テ $t=0$ トシテ

$$y_0=e^{-kc}$$

ヲ得ル．此ノ式ヲ上式ニ代入スレバ

$$y=y_0e^{kt}$$

1) 逆函數ノ微分法ニヨル．

トナル．此ノ式中ノ常數 k ヲ定メナケレバナラナイ．實驗ノ結果トシテ $t=30$ 分トナレバ菌數ハ倍加シテ $2y_0$ トナルノデアルカラ，上式ヨリ

$$2y_0=y_0e^{30k}$$

ヲ得ル．y_0 デ約シテ

$$2=e^{30k}$$

トナル．此ノ方程式ヲ解イテ k ヲ求メナケレバナラナイ．其ノ爲ニハ通常ノ方法ニ從ツテ，兩邊ノ常用對數ヲ取レバ

$$\log_{10}2=30k\log_{10}e$$

然ルニ對數表ヨリ

$\log_{10}2=0.3010$　　$\log_{10}e=0.4343$　　(第 239 頁ニ M ト書イタ數)

ナルコトガ分カルカラ

$$k\fallingdotseq\frac{0.3010}{30\times0.4343}\fallingdotseq0.0231$$

ヲ得ル．ヨツテ菌數增加ノ規則ハ

$$y=y_0e^{0.0231t}\qquad(t\text{ ハ一分ヲ單位トスル})$$

ナルコトヲ知リ得タノデアル．此ノ式ヲ用ヰテ數分後ノ菌數ヲ概算シ得ルノデアル．

(2)　試驗管內ノ細菌ノ如ク限リアル營養物ノ中ニ在ル細菌ノ增加率ハ各瞬時ニ於ケル營養物ノ量及ビ細菌數ニ比例スルトイフ．實驗ノ初期 ($t=0$) ニ於ケル細菌數ヲ y_0，初期ノ營養物ノ量ヲ a トスル．細菌ガ攝取シタ營養物ガ其ノ儘增殖細菌ニ變ジタト考フレバ，時刻 t ニ於ケル細菌數ヲ y トシテ現存スル(即チ殘リノ)營養物ノ量ハ $a-y$ ト見テヨイデアラウ．故ニ細菌ノ增加率 $\dfrac{dy}{dt}$ ハ $y(a-y)$ ニ比例スル筈デアル．故ニ比例常數ヲ k トスレバ

$$\frac{dy}{dt}=ky(a-y)$$

ナル關係式ガアル筈デアル．斯ノ如キ關係式ニ適合スル函數 y ヲ見出スノガ當面ノ問題デアル．前例ノ如ク t ヲ y ノ函數ト見做セバ上式ヨリ

$$\frac{dt}{dy}=\frac{1}{ky(a-y)}$$

ヲ得ル．右邊ハ獨立變數 y ノミノ函數デアルカラ，其ノ原函數ヲ見出セバヨイノデアル．右邊ハ次ノ樣ニ書キ替ヘ得ラレル．

$$\frac{1}{ky(a-y)}=\frac{1}{ka}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{a-y}\right)$$

第一ノ因子 $\dfrac{1}{ka}$ ハ常數デアルカラ，第二ノ因子

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{a-y}$$

ノ原函數ヲ求メテ，$\dfrac{1}{ka}$ ヲ乘ズレバヨイ．

此ノ第二因子ノ原函數ハ

$$\log y-\log(a-y)$$

デアルコトハ微分シテ見レバ容易ニ分カル．左邊 $\dfrac{dt}{dy}$ ノ原函數ハ t デアルカラ

$$t+C=\frac{1}{ka}\{\log y-\log(a-y)\}\qquad(C\text{ ハ常數})$$

ナル關係ヲ得ル．

右邊ハ書キ直シテ

$$\frac{1}{ka}\log\frac{y}{a-y}$$

トナルカラ，上式ハ

$$t+C=\frac{1}{ka}\log\frac{y}{a-y}$$

トナル．$t=0$ ノトキ $y=y_0$ デアルカラ，上式ニ入レテ

$$C=\frac{1}{ka}\log\frac{y_0}{a-y_0}$$

トナル．ヨツテ上式ノ C ハ決定セラレタ．故ニ

$$t=\frac{1}{ka}\left(\log\frac{y}{a-y}-\log\frac{y_0}{a-y_0}\right)$$

ヲ得ル．是デ必要ナル式ハ得ラレタノデアルガ，細菌數ヲ時刻 t ノ函數トシ

テ表ハスニハ，此ノ式ヲ y ニ關シテ解ケバヨイ． ヨツテ上式ヲ變形シテ順次ニ次ノ樣ナ式ヲ得ル．

$$kat=\log\frac{y}{a-y}-\log\frac{y_0}{a-y_0}$$

$$=\log\frac{(a-y_0)y}{y_0(a-y)}$$

$$\frac{(a-y_0)y}{y_0(a-y)}=e^{kat}$$

$$(a-y_0)y=y_0e^{kat}(a-y)=ay_0e^{kat}-y_0e^{kat}y$$

$$y[a-y_0+y_0e^{kat}]=ay_0e^{kat}$$

$$y=\frac{ay_0e^{kat}}{a-y_0+y_0e^{kat}}$$

分母子ヲ y_0e^{kat} デ除スレバ

$$y=\frac{a}{1+\frac{a-y_0}{y_0}e^{-kat}}$$

ヲ得ル．是ガ所要ノ式デアル．此ノ式ニヨツテ隨意ノ時刻 t ニ於ケル細菌ノ概數ガ計算出來ル譯デアル．但シ少クモ一回ノ實驗ニヨツテ常數 k ヲ前以テ決定シテ置カナケレバナラナイ．

（3） 人口 一國(又ハ全世界)ノ人口ハ移住又ハ戰役或ハ傳染病ナド無ク常ニ一定ノ增加率ヲ有スルモノトスレバ例 (1) ト全ク同樣ニ考ヘ得ラレル．卽チ或ル時期 t ニ於ケル人口ヲ y トシ，增加率[1]卽チ單位時間 (例ヘバ一年)ニ增加スル人口ノ全人口ニ對スル割合ヲ k トスレバ，第257頁ノ通リ

$$\frac{dy}{dt}=ky$$

ナル關係ガアルカラ又同ジク

$$y=e^{-kc}e^{kt}$$

1) *Rate of growth.*

トナル．調査ノ時卽チ $t=0$ ニ於ケル人口ヲ y_0 トスレバ

$$y=y_0e^{kt}$$

ナル式ヲ得ルコトハ明ラカデアル．

本邦ニ於ケル內地現在人口總數ハ昭和十年ノ國勢調査ニヨレバ昭和五年ニ比シテ一年平均千人ニツキ 14.47 人卽チ $\frac{14.47}{1000}=\frac{1447}{100000}$ ノ增加デアル．故ニ上式中ノ k ハ

$$k=\frac{14.47}{1000}=0.01447$$

デ，又昭和五年(皇紀二千五百九十年)ニ於ケル人口總數ハ

64450005 人

デアルカラ，昭和五年ヲ初期 $t=0$ トシ，t ハ一年ヲ單位トスレバ，上式ハ

$$y=64450005e^{0.01447t}$$

トナリ，之ニヨツテ隨意ノ年(アマリ隔ラナイ年)ノ內地人現在數ヲ推算出來ル譯デアル．

（4） 落體 小石ガ或ル高キ場所ヨリ空中ヲ落下スルトキ，十秒後ニ幾米落チタカヲ考ヘル．空氣ノ抵抗ハナイモノトスル．

物理學ノ敎ユル所ニヨレバ，地球ガ小石ヲ引ク爲ニ小石ハ初メ極メテ小サイ速度デ落チ始メルガ，漸次速クナリ，一秒時間每ニ每秒 980cm ノ速度ヲ增ストイフ．故ニ落チ始メヨリ一秒後ニハ每秒 980 cm 落チル速度ヲ有チ，二秒後ニハ，每秒 2×980 cm 落チル速度ヲ得ルノデアル．此ノ事ヲ式ニ書イテ見ヨウ．

小石ガ最初ノ所カラ今現ニ落チツヽアル所 (t 秒後)マデノ距離(卽チ高サ)ヲ s トスレバ，其ノ所ニ於ケル速度ハ $\frac{ds}{dt}$ デアル．然ルニ此ノ時マデ t 秒過ギタノデアルカラ，其ノ時ノ速度ハ $980t$ デアル．故ニ

$$\frac{ds}{dt}=980t$$

ナル關係式ヲ得ル．左邊ハ s ノ導函數デアリ，右邊ハ $980\frac{t^2}{2}$ ノ導函數デア

ルカラ

$$s=980\frac{t^2}{2}+C \qquad (C\ ハ適當ナル常數)$$

デアル．初期卽チ $t=0$ ノトキハ $s=0$ デアルコトハ明ラカデアルカラ，上式ニ於テ $t=0$ トスレバ

$$0=C$$

トナリテ C ガ決定サレル．ヨツテ結局

$$s=980\times\frac{t^2}{2}$$

ナル結果ヲ得ル．此ノ式ニヨツテ t 秒間ニ落チタ距離ガ容易ニ計算出來ル．例ヘバ1秒後ノ位置ハ，$t=1$ トシテ

$$s=490\ \mathrm{cm}$$

トナルカラ，4米90糎ダケ落チタコトニナル．又2秒後ニハ，$t=2$ トスレバ

$$s=980\frac{4}{2}=1960\ \mathrm{cm}$$

トナルカラ，十九米六十糎落チルノデアル．

其ノ他ノ應用　積分ハ平面上ニ圍マレタ面積ノ計算ニ有用デアルコトハ前ニ說明シタ通リデアルガ，又平面上ノ曲線ノ長サ，空間ニ於ケル曲線ノ長サ，立體ノ體積及ビ表面積，物體ノ重心ナドノ計算ナドニモ應用デキルノデアルガ，玆デハ述ベナイコトニスル．

85 確率，其ノ應用

數學ノ面白キ應用ノ一ツニ確率ノ理論ガアル．ソノ又應用トシテ統計ノ理論ガアル．以下夫等ノ緒（イトグチ）ヲ述ベテ見ヨウ．

未來ノ事ヲ考ヘルトキ，或ル事ガ起ルカ起ラナイカヲ知リタイコトガアル．例ヘバ，明日ノ天氣ハ好イカ惡イカヲ知リタイコトガ往々アルガ，唯考ヘテモ判ラナイ．併シ前晩ノ天氣模樣ヲ見タリ，翌日ノ天氣豫報ヲ聞イタリスレバ大凡ノ豫想ガ出來ル．元ヨリコレトテモ確實デハナイ．ソコデ其ノ確

カラシサノ程度卽チ確率[1]ヲ何等カノ方法デ表現シタイ．コレヲ寒暖計ナドノ樣ニ數量的ニ表ハシ得レバ最モ良イ．玆ニ數學ノ確率論[2]ガ存在ノ意義ヲ有ツノデアル．

寒暖計ノ目盛ガ攝氏[3]ナラバ水ノ氷點ト沸騰點トノ間ヲ百度ニ分チ，華氏[4]ナラバ百八十度ニ分ケテアル樣ニ，事件ノ生起スル確カラシサヲ表ハスニ，日常ノ談話ニテハ，十中八九ハ確カダナドトイヒ，又ハ九分九厘マデハ確カナリナドトイフ．卽チ生起スル見込ノ全然ナイ時ニハ豫想ノ程度ヲ0トシ，確實ニ生起スルト考ヘラルヽ時ニハ1トスルニ當ルノデ，ソノ中間ニ九分九厘又ハ七八分ナドガアルノデアル．極端ナ例ヲ擧ゲレバ，明日太陽ガ東天ニ昇ル確率ハ常識ニテハ1デアリ[5]，今夜ノ中ニ太陽ガ紛失シテ明日昇ラナイデアラウ確率ハ0デアル．

確率ハ必シモ未來ニノミ關係シタ事デハナク，過去現在ニモ考ヘ得ルノデアル．例ヘバ昭和十二年七月七日(支那事變勃發)ノ朝太陽ガ昇ツタ事ハ確實デアラウガ，其ノ朝東京ハ晴天デアツタカ否カヲ問ハレルト，特別ノ事情ノ爲ニソレヲ記憶シテ居ルカ又ハ記錄ヲ調ベレバ別デアルガ，普通ノ人ハ確實ニハ知ラナイ．唯「多分晴天デアツタデアラウ」又ハ「曇天デアツタカモ知レナイ」トイフ程度デアラウ．サスレバ其ノ人ニ取ツテハ晴雨ハ何程カノ割合ノ確カラシサヲ以テ推測シ得ルニ過ギナイ．

要スルニ，現在ノ自己ノ知識及ビ推理ニ依ツテハ判然シナイ事ノ存在ヲ考ヘルトキニハ，最モ好都合ノ場合デモ唯何分ノ確カラシサトイフヨリ外ハナイノデアル．

確カラシサヲ數量的ニ表ハサウト試ミタ人ハ以前ニモ在ツタノデアルガ，確率論ノ基礎ヲ置イタノハぱすかる[6]トふぇるまー[7]デアルトイフ．皇紀二千三

1) *Probability.*　2) *Theory of probability.*　3) *Celsius.*　4) *Fahrenheit.*
5) コノ確率ヲ計算シタノモアル，極メテ1ニ近イガ1デハナイ．
6) *Blaise Pascal* (*1623–1662*).　7) *Pierre de Fermat* (*1601–1665*).

百十四年 (1654) ニ博奕ノ好キナしゅばりえー・ど・めれー[1]ガ多分賭博上ノ必要カラデアラウカ，ぱすかるニ次ノ二ツノ問題ヲ問合セタ．

(1) 二箇ノ賽ヲ同時ニ何度投ゲタナラバ，其ノ間ニ少クモ一度二ツ共ニ六ノ目ガ出ルコトヲ期待出來ルカ．

(2) 甲乙二人金錢ヲ賭テ勝負ヲ繰返ストスル．今後甲ガ m 回勝テバ賭金全部ヲ取リ，又乙ガ n 回勝テバ乙ガ之ヲ取ル狀態ニアルトキ，事故ノ爲ニ賭ヲ中止シナケレバナラナイ事ニナツタ．甲ト乙ニハ賭金ヲ幾何宛分配シタラヨイカ．

第 (1) 問ニ關シテしゅばりえー・ど・めれーハ考ヘタ．一ツノ賽ヲ投ゲテ，四回ニ一回ハ六ノ目ガ出ルト豫想シテ賭ヲナセバ，回ヲ重ネル間ニハ結局勝ツ樣デアル．二ツノ賽ヲ同時ニ投ゲル場合ニ二ツ共ニ六ノ目ガ出ルノハ何回ニ一回豫想シテヨイカヲ考ヘテ見ルト，一ツノ賽ノ場合ニハ目ハ六通リニ變化シ得ルガ二ツノ賽ノ場合ニハ出ル目ノ組合セガ $6^2=36$ 通リニ變化シ得ル．サレバ六通リノ變化ニ對シテ四回ニ一回ト豫想シテ有利ナラバ，三十六通リノ變化ニ對シテハ

$$6:36=4:x$$

ナル比例式カラ

$$x=\frac{36\times4}{6}=24$$

卽チ二十四回ニ一回ハ二ツ共ニ六ノ目ガ出ルト豫想シテ賭ヲ爲セバ永イ間ニハ結局利益ヲ得ルデアラウ．コレガめれーノ考ヘデアツタガ，實際ニ賭ヲ行ツテ見ルト結局不利ノ樣デアルノガ不思議ダトイフノデアル[2]．

第 (2) 問ハ甲乙各人ノ勝ツ見込ノ確率ニ比例シテ分ケレバヨイノデアルカラ，其ノ時ニ於テ甲乙ノ有ツ，結局甲ガ勝ツ確率ト乙ガ勝ツ確率トノ計算ノ問題デアル．

1) *Chevalier de Méré.* 2) 詳細ハ第 276 頁ニ在リ．

是等ノ問題ノ解答ハぱすかるニ取ツテハ容易デアツタガ，是ヲ動機トシテ彼ハ確率論ノ基礎ヲ研究シタ．ふぇるまーハぱすかるノ手紙ニヨツテ此ノ事ヲ知ツテ興味ヲ感ジ，前ニ（第 101 頁）述ベタ組合セノ理論ヲ之ニ應用シぱすかるト同ジ結果ニ到達シタトイフコトデアル．續イテおらんだ人ほいへんす[1]ガ又確率論ヲ研究シタガ，此ノ理論ヲ始メテ經濟問題ニ應用シタノハでかるとノ弟子じゃん・ど・うぃと[2]デアルトイフ．卽チ死亡表[3]ニ基イテ終身年金ノ計算ヲシタノデアル．確率論ヲ組織的ニ論ジタノハやこぶ・べるぬゐー[4]ノ著書あるす・こんじぇくたんぢ[5]（確率論）デアル．此ノ書ハ永ラク埋モレテ居タノデアルガ，彼ノ死後八年ニシテ皇紀二千三百七十三年(1713)ニ至ツテ始メテこんどるせー[6]ガ世ニ出シタノデアルトイフ．

確率ノ理論ヲ說クノニ，先ヅ最モ單純ニシテ代表的ナ問題ヲ考ヘテ見ルコトニスル．

一枚ノ銀貨又ハ銅貨ヲ取ツテ之ヲ投出セバ床ニ落チテ表又ハ裏ガ出ルデアラウ．孰レガ出ルカハ判ラナイガ，表ガ裏ヨリモ出易イト考ヘルベキ何等ノ理由モナイシ，逆ニ裏ノ方ガ出易イト考ヘルベキ理由モナイ．サレバ表ガ出ルモ裏ガ出ルモ對等デアリ，五分五分デアル．換言スレバ十中ノ五デアル．卽チ表ガ出ルト考ヘ得ル割合ハ $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ デアル．此ノ故ニ又裏ガ出ルト考ヘ得ル割合モ亦 $\frac{1}{2}$ デアル．此ノ事ヲ言ヒ表ハスニ，表ノ出ル確率ハ $\frac{1}{2}$ デアリ，裏ノ出ル確率モ亦 $\frac{1}{2}$ デアルトイフノデアル．モシ表裏ノ孰レガ出テモヨイトスレバ，其ノ確率ハ

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

トナル．併シ表裏ノ孰レカガ必ズ出ルノデアルカラ，其ノ確率卽チ生起ガ確

1) *Huygens (1629–1695).* 2) *Jean de Witt (1625–1672).* 3) *Mortality table* 4) *James Bernoulli (1654–1705).* 5) *Ars Conjectandi.* 6) *Condorcet (1743–1794)*，詳クハ，*Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, Marquis de Condorcet.*

實ナル確率ハ1デ表ハサレル.

雙六遊ニ用キル賽ヲ投ゲレバ一ヨリ六マデノ中ノ何レカノ目ガ出ルデアラウ. 併シ何ノ目ガ最モ出易イトモ考ヘラレナイ. 皆同ジ程度ニ出易イト考ヘテモヨイデアラウ. サレバ何ノ目モ，六ツノ目ノ中ノ一デアルカラ，ソレガ出ルデアラウト期待シ得ル程度ハ $\frac{1}{6}$ デ表ハシ得ルデアラウ. 卽チ各〻ノ目ハ等シク $\frac{1}{6}$ ヅツノ確率ヲ有ツト考ヘ得ル. モシ何ノ目ガ出テモヨイトスレバ，總體デハ $\frac{1}{6}\times 6=1$ デ卽チ孰レカノ目ノ出ル確率ハ1デアル.

次ニ一ヨリ六マデノ目ノ中一又ハ二ノ孰レカガ出ル(ドチラガ出テモヨイ)確率ハト問ヘバ，一ノ目ノ出ル確率 $\frac{1}{6}$ ト二ノ目ノ出ル確率 $\frac{1}{6}$ トノ和卽チ

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

デアルコトハ頷ケルデアラウ.

賽ヲ二度續ケテ投ゲテ二度ナガラ一ノ目ノ出ル確カラシサハ幾何デアラウカ. 唯一度投ゲテ特定ノ目ノ出ル確率ハ前ニ述ベタ通リ，六通リ（卽チ一ヨリ六ニ至ル目ノ何レデモヨイカラ）ノ目ノ中ノ一ツガ出ルノデアルカラ $\frac{1}{6}$ デアル. 然ルニ今ノ問題デハ續ケテ二度投ゲルノデアルカラ，最初ノ時ニ六通リノ目ノ出方ガアリ，又第二回ノトキニハ第一回ニ出タ目ニ對シテ，ソレト無關係ニ又六通リノ異ナル目ノ出方ガアルノデアル. 故ニ第一回ノ特定ノ目ト第二回ノ特定ノ目トガ丁度組合ツテ(續イテ)出ル出方ハ $6\times 6=36$ 通リ異ナツタモノガアルノデアル. 卽チ第一回ト第二回ノ目ノ取リ合セハ全體デ36通リノ異ナルモノガアルノデアル. 故ニ第一回ニ特定ノ目ガ出テ，續イテ第二回ニ特定ノ目（前ノト同ジデモ異ナツテモヨイ）ノ出ル取リ合セハ是等36通リノ中ノ一ツデアルカラ，其ノ出ル確率ハ $\frac{1}{36}$ デアル. ヨツテ問題ノ二回トモ一ノ目ノ出ル確率ハ同ジク $\frac{1}{36}$ デアル. 然ルニ $\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$ デアルカラ，第一回ニ一ノ目ノ出ル確率 $\frac{1}{6}$ ト第二回ニ一ノ目ノ出ル確率 $\frac{1}{6}$ トノ相乘積ガ求メル確率デアル.

此ノ問題デハ二回トモ一ノ目ガ出ル確率ヲ求メタノデアルガ，一回ト二回トニ出ル目ハ異ナツテモヨイノデアル. 例ヘバ一回ニ二ノ目ガ出テ，二回ニハ五ノ目ノ出ル確率モ亦 $\frac{1}{36}$ デアルコトハ明ラカデアラウ.

前ニ說イタ樣ニ，銅貨ヲ投ゲテ表(又ハ裏)ノ出ル確率ハ $\frac{1}{2}$ デアル. 是ハ次ノ樣ニモ考ヘラレル. 銅貨ヲ投ゲル試ミヲ數多度行ヘバ，大凡ソノ回數ノ半(ナカバ)ハ表ガ出，半ハ裏ガ出ルト考ヘラレル. 百回試ムレバ，丁度五十回表ガ出テ，殘リノ五十回裏ガ出ルトハ限ラナイガ，表ガ約五十回，裏約五十回出ルト期待出來ルノデアル. 此ノ豫想ハ常識ニモ合致スルノデアル. 又賽ヲ投ゲル場合ニ，各〻ノ目ハ $\frac{1}{6}$ ノ確率ヲ有ツテ居ルノデアル. ケレドモ六回投ゲテ中一回ハ必ズ一ノ目ガ出ルト豫想スルコトハ困難デアル. 併シ試ミノ回數ヲ多クシテ，百二十回ノ中大凡二十回，六百回ノ中約百回出ルト豫想スルノハ大シテ無茶デハナイデアラウ. 萬一此ノ豫想ト非常ニ異ナル結果ガ出タ場合ニハ，先ヅ其ノ用キタ賽ガ不正ノ形ノモノカ，其他試ミニ缺陷ガアルノデハナイカト疑フノガ至當デアラウ.

此ノ故ニ數多度試ミ得ルカ又ハ觀測出來ル事項ニ就イテハ確率ノ意味ハアルガ，ソレノ出來ナイ事項ニ就イテハ意味ハナイ，從ツテ確率論デ取扱フニハ不適當デアラウ.

86 ぽあんかれー[1]ノ考案

確率ノ計算ニ便利ナルぽあんかれーノ考ヘ方ヲ述ベテ置ク. 先ヅ例ヲ取ツテ考ヘテ見ヨウ.

一ノ袋ノ內ニ五個ノ同ジ大キサデ同ジ重量ノ球 A, B, C, D, E ガ入レテアル. ソノ中 A ト B トハ白球デ他ノ三ツハ黑球デアルトスル. 目ヲ閉ヂテ無心ニ一球ヲ取リ出ストキ，白球ヲ取リ出ス確率ハ幾何カヲ考フルニ，五個ノ

1) *Henri Poincaré* (1854–1912).

球ノ中何レヲ摑ムカ分カラナイカラ，起リ得ベキ場合ハ五デアル (A ヲ摑ム場合，B ヲ摑ム場合等)．併シ其ノ中白ヲ摑ム場合ハ A ヲ摑ム場合ト B ヲ摑ム場合トダケデ 2 デアル．從ツテ白球ヲ摑ム場合ハ $\frac{2}{5}$ デアル．同樣ニ黑球ヲ摑ム場合ハ $\frac{3}{5}$ デアル．黑球ハ五個ノ中三個デアルカラ $\frac{3}{5}$ ヲ得ルガ，又次ノ樣ニ考ヘテモヨイ．白球ヲ摑マナケレバ黑球ヲ摑ムノデアルカラ，白球ヲ摑ム確率ト黑球ヲ摑ム確率トノ和ハ 1 デアル．故ニ黑球ヲ摑ム確率ハ

$$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

デアル．

次ニ問題ヲ少シク變ヘテ，最初袋カラ一球ヲ取リ出シ，其ノ色ヲ見テ之ヲ袋ノ中ニ戻シ入レ，再ビ袋ヲ探リテ一球ヲ取リ出シ，斯クシテ二回ノ中少クモ一回白球ノ出ル確率ヲ求メテ見ヨウ．

前後二回ノ試ミニ於テ取リ出ス球ノ取リ合セハ全部デ

$$5\times5=25$$

二十五組アリ，卽チ一回目ノ A ト二回目ニ A, B, C, D, E ノ中ノ一ツトノ取リ合セガ五組，一回目ノ B ト二回目ニ五球ノ各々トノ取リ合セガ合計五組等デアルカラ，全部デ上ノ樣ニ 25 組トナルノデアル．此ノ二十五組ハ次ノ樣ニ四種ニ分類デキル．

(1)	第一回 白	第二回 白	ノ場合ノ數	$2\times2=4$
(2)	〃 白	〃 黑	〃	$2\times3=6$
(3)	〃 黑	〃 白	〃	$3\times2=6$
(4)	〃 黑	〃 黑	〃	$3\times3=9$
			合計	25

以上四類ノ中少クモ一ツ白球ノ出ルノハ (1) (2) (3) デアル，其ノ場合ノ數ノ合計ハ

$$4+6+6=16$$

デアル．故ニ問題ノ確率ハ

$$\frac{16}{25}$$

トナル．

又二回ノ中一回ハ白一回ハ黑ヲ引出ス確率ヲ求メルニハ，(2) ト (3) ノ場合ダケ考ヘレバヨイカラ

$$\frac{6+6}{25}=\frac{12}{25}$$

ヲ得ルノデアル．

以上考ヘタト同一ノ事ヲ一般ノ場合ニ就イテ考ヘテ見ヨウ．

二ツノ事 E_1 ト E_2 トガアルトキ，夫等ガ生起スルカ否カニ關シテ次ノ四通リノ場合ガ考ヘ得ラレル．

(1)	E_1 ト E_2 トガ共ニ起ル場合，其ノ數ヲ	α	トスル．
(2)	E_1 ガ起リ E_2 ガ起ラヌ場合 〃	β	〃
(3)	E_1 ガ起ラズ，E_2 ガ起ル場合 〃	γ	〃
(4)	E_1 モ E_2 モ共ニ起ラヌ場合 〃	δ	〃

是等四ツノ場合ノ外ニハ考ヘ得ラレナイカラ，凡ユル場合ノ總數ハ

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta$$

デアル．故ニ

E_1 ト E_2 トガ共ニ起ル確率ハ $\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$ デアル．

又 E_1 ノ起ルノハ (1) ト (2) トデアルカラ

E_1 ノ起ル確率ハ $\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$ デアル．

E_1 ガ起ツタトスレバ，ソレハ (1) ト (2) トノ場合ノ中卽チ $\alpha+\beta$ ノ中デアルカラ，其ノ中デ E_2 ノ起リ得ルノハ (1) ノミデ，其ノ數ハ α デアルカラ，E_1 ガ起ツタトシテ E_2 ノ起ル確率ハ $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ トナルノデアル．

以上三ツノ場合ノ確率ヲ併セ考ヘルト，第二ト第三トノ確率ヲ乘ズレバ

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\times\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

トナルカラ，次ノコトヲ結論シ得ルノデアル.

E_1 ト E_2 トガ共ニ起ル確率ハ E_1 ノ起ル確率ト，E_1 ガ起ツタトシタ場合ニ E_2 ノ起ル確率トノ相乘積ニ等シイ.

是ヲ前例ニ應用シテ見ルト，第一回ニ白ノ出ル確率ハ $\frac{2}{5}$ デ，第二回ニ白ノ出ル確率モ亦 $\frac{2}{5}$ デアルカラ，第一回第二回共ニ白ノ出ル確率ハ

$$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$$

トナル．第268頁ノ (1) ノ場合ノ數ガ4デ，總數ガ25デアルカラ丁度適合スルノデアル.

次ニ第一回第二回ノ中少クモ一回白ノ出ル確率ヲ考ヘテ見ルニ，同頁ノ(1)(2)(3)ガ其ノ場合デアルカラ[1]，求メル確率ハ

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

トナルデアラウ.

第一回ニ白ノ出ル確率ハ

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

デアリ，第二回ニ白ノ出ル確率ハ

$$\frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

デアルカラ，是等ヲ加ヘ合セルト

$$\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

トナル．是ヨリ第一回第二回共ニ白ノ出ル確率

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

ヲ減ズレバ

1) 第一回ニ白ノ出ル事ヲ E_1，第二回ニ白ノ出ル事ヲ E_2 トスル.

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

トナツテ，二回ノ中少クモ一回白ノ出ル確率ト同ジデアル．故ニ

少クモ一回白ノ出ル確率ハ第一回ニ白ノ出ル確率ト第二回ニ白ノ出ル確率トノ和カラ第一回第二回共ニ白ノ出ル確率ヲ減ジテ得ラレル.

又代數的恒等式

$$1-\frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma\times\delta}$$

ヨリ分カル樣ニ

少クモ一回白ノ出ル確率ハ，一回モ白ノ出ナイ確率ヲ1ヨリ減ジテ得ラレル.

此ノ結果ヲ前例ニ就イテ驗シテ見ルニ，

$$\alpha=4\quad \beta=6\quad \gamma=6\quad \delta=9\quad (\text{第268頁})$$

デアルカラ

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=\frac{16}{25}$$

トナリ，是ガ少クモ一回白ノ出ル確率デアルガ，又

$$1-\frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

トナツテ同ジ結果トナル.

又ハ次ノ樣ニ

第一回ニ白ノ出ル確率	$\frac{4+6}{25}=\frac{10}{25}$
第二回ニ白ノ出ル確率	$\frac{4+6}{25}=\frac{10}{25}$
第一回，第二回共ニ白ノ出ル確率	$\frac{4}{25}$

ヨツテ

$$\frac{10}{25}+\frac{10}{25}-\frac{4}{25}=\frac{16}{25}$$

ノ如ク計算シテモ同一ノ結果ヲ得ルノデアル.

確率ノ理論ヲ富籤ノ一問題ニ應用シテ見ヨウ.

九十本ノ籤ノ中ニ一本ノ當リ籤ヲ入レテ，是ヲ引キ當テタ人ニハ九十錢ヲ與ヘルトスル．一本ノ籤ヲ幾錢ニテ引カシメタナラバ損德ナイカ.

一本ノ當リ籤ヲ引キ當テル確率ハ $\frac{1}{90}$ デアルカラ，90 錢ニ之ヲ乘ジテ

$$90錢\times\frac{1}{90}=1錢$$

卽チ一本一錢ニテ引カシムレバ損益ナイ譯デアル．言ヒ換ヘレバ，一人ニ引カシメタ後ニハ，ソノ籤ヲ又元ニ戻シテ，次ノ人ニ引カシメ，斯クスルコトヲ永ク續ケレバ結局損益ナイデアラウ．ソレハ確率ガ $\frac{1}{90}$ デアルカラ，大凡九十回ニ一回ノ當リ籤ヲ引キ當テルデアラウト豫想シ得ラレルカラデアル.

然ルニ，此ノ 90 本ノ籤ヲ 40 本ト 50 本トニ分ケテ，並ベテ置キ，當リ籤ハ秘カニ 50 本ノ中ニ入レテ（40 本ノ中ニ入レルヨリハ引キ當テル確率ガ少イカラ）置ケバ，引ク人ハ先ヅ二束ノ中孰レノ束カラ引カンカト迷フデアラウ．其ノ人ガ 50 本ノ方ニ手ヲ出ス確率ハ $\frac{1}{2}$ デアル（40 本ト 50 本トハ殆ンド同數ニ見ヘルカラ）．サテ其ノ人ガ 50 本ノ方ヲ引カントシテ，ソノ中ヨリ一本ヲ引ケバ，夫ガ當リ籤デアル確率ハ $\frac{1}{50}$ デアル．故ニ，其ノ人ガ先ヅ 50 本ノ方ニ決心シテ，其ノ中ヨリ當リ籤ヲ引キ當テル確率ハ

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{50}=\frac{1}{100}$$

トナル．サレバ此ノ場合，一本ノ價ヲ

$$90錢\times\frac{1}{100}=9厘$$

卽チ 9 厘トスレバ損益ナイノデアルカラ，一本一錢トスレバ一本每ニ 1 厘ヅツ益スルコトニナルノデアル.

二束ニ分ケルノニ 45 本ヅツニシテハ當リ籤ノ確率ハ

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{45}=\frac{1}{90}$$

デ分ケナイ場合ト變リハナク，又 30 本ト 60 本トニ分ケレバ

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{60}=\frac{1}{120}$$

トナツテ確率ハ益ゝ小サクナツテ好都合ノ樣デアルガ，30 本ト 60 本デハ差ガ餘リニ大キイノデ，引ク人ハ少ナイ方ニ當リ籤ヲ入レテ置ク筈ハナイト考ヘテ皆 60 本ノ方カラノミ引ケバ，最初ノ $\frac{1}{2}$ ノ確率ハ消失シテ

$$\frac{1}{60}$$

ノ確率トナリ，結局損ヲスルデアラウ.

確率計算ノ二三ノ實例ヲ說明スル.

例（1）二ツノ賽ヲ同時ニ投ゲテ，ソノ出タ目ノ和ガ偶數デアル確率如何.

解 二ツノ目ノ和ガ偶數デアルノハ，二ツトモ偶數カ又ハ二ツトモ奇數デアル時ニ限ルノデアル．故ニ一ツノ賽ノ目ガ 1 ナラバ他ノ賽ノ目ハ 1,3,5 ノ中ノドレカデアレバヨイ．一ツノ目ガ 3 デモ 5 デモ同ジク他ノ賽ノ目ハ 1,3,5 ノ中ノドレカデアレバヨイ．此ノ樣ナ組合セハ全部デ $3^2=9$ 通リアル．卽チ

(1, 1)　(1, 3)　(1, 5)　(3, 1)　(3, 3)　(3, 5)　(5, 1)　(5, 3)　(5, 5)

デアル.

一ツノ目ガ 2,4,6 ノ中ナラバ他ノ目モ亦 2,4,6 ノ中ノモノデナケレバナラナイ．故ニ二ツノ目ガ共ニ偶數デアル場合ノ數ハ全部デ $3^2=9$ デ，ソノ各ゝハ

(2,2)　(2,4)　(2,6)　(4,2)　(4,4)　(4,6)　(6,2)　(6,4)　(6,6)

デアル.

故ニ二ツノ目ノ合計ガ偶數ナル場合ノ數ハ總計

$$9+9=18$$

デアル．然ルニ一ツノ目ハ 1 ヨリ 6 マデノ中ノドレカデアリ，他ノ目モ亦六通リニ變化シ得ルカラ，現ハレ得ル二ツノ目ノ組合セノ總數ハ

$$6^2=36$$

デアル． 此ノ中前ニ述ベタ18組ダケガ要求ニ適スルモノデアルカラ，ソノ何レカガ出ル確率ハ

$$\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

デアル．

同様ニ合セテ奇數トナル確率モ亦

$$\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

トナルコトハ容易ニ分カル．故ニ

二ツノ賽ヲ投ゲテ，出タ目ノ和ガ偶數デアル確率ハ奇數デアル確率ト同ジデ各，$\frac{1}{2}$ デアル．

例 (2) 見掛ケガ全ク同一ナル三ツノ袋ガアル． 各，ノ袋ニハ互ニ區別スル爲ニ，A, B, C ノ名ガ付ケテアルガ，ソレハ袋ノ内部ニ書イテアツテ，外部カラハ見エナイ．A ノ内ニハ白球ガ二ツ，B ノ内ニハ赤球ガ二ツ，C ノ内ニハ白赤球各，一ツヅツ入レテアル．

(I) 幼兒ガ無心ニ一ツノ袋ヲ摑ムトキ，ソレガ C デアル確率如何．

(II) 幼兒ガ無心ニ摑ンダ袋ノ内ヨリ更ニ一球ヲ取リ出シタノヲ見レバ白球(又ハ赤球)デアツタ．此ノ袋ガ C デアル確率如何．

解 以上二ツノ問題ノ中 (I) ノ答ハ簡單デアル．三ツノ袋ノ中ノドレヲ取ルカデアルカラ確率ハ $\frac{1}{3}$ デアル．

第 (II) 問ハ間違ヒ易イ問題デ，白球ヲ入レテアル袋ハ A ト C ノ二ツデアルカラ，ソレガ C デアル確率ハ $\frac{1}{2}$ デアルト考ヘ易イノデアル．併シAニハ白球ガ二個入レテアリ，C ニハ一個シカ無イノデアルカラ，三個ノ白球ノ中ノドレガ取リ出サレタカガ問題ニナル譯デアル．C ノ内ノ白球ハ三個ノ白球ノ中ノ一ツデアルカラ，取リ出サレタ白球ガ C ノデアル確率ハ $\frac{1}{3}$ デアル．

(I) ト (II) トハ同ジ確率ヲ得タノデアルカラ，袋カラ一球ヲ取リ出シテ，其ノ色ヲ見テモ見ナクテモ同ジ確率トナルノデアル．併シ是ハ袋ニ入レテアル球ノ數ニヨルノデ，ソノ數ガ三個トモナレバ，確率ハ互ニ異ナツテ來ルノデアル．

以上種々ノ問題ヲ解イテ見タノデアルガ，夫々ニ工夫ヲ要スルノデ甚ダ難カシイ．併シソノ考察ノ下ニ隱レテ居テ最モ多ク用キラレル定理ガ三ツアル．ソレヲ述ベテ見ヨウ．先ヅ例ヲ取ル．

例 一ツノ袋ノ内ニ白球 a 個，赤球 b 個，青球 c 個ガ入レテアルトスル．此ノ内カラ一球ヲ取リ出ストキ，ソレガ白色ノ球デナイ確率ヲ計算シテ見ヨウ．

先ヅ白球デナイ凡ユル場合ヲ區分シテ

(1) 赤球ノ出ル場合　　(2) 青球ノ出ル場合

ニ分ケルト，赤球ノ出ルノハ必ズ (1) ノ區分カラデ，青球ノ出ルノハ (2) ノ區分カラニ限ルノデアル．決シテ赤球ガ (2) ノ區分カラ出タリ，青球ガ(1) ノ場合カラ出ルコトハナイ．然ルニ唯白球デナイ球ノ出ルノハ (1) カラデモヨシ，(2)カラデモヨイ．赤球ノ出ルノハ b 個ノ赤球ノ中ノドレカガ出ルノデアルカラ，ソノ出得ル場合ノ數ハ b デアル． 同様ニ青球ノ出得ル場合ノ數ハ c デアル．從ツテ赤カ青カ孰レカガ出ル場合(卽チ白球デナイ場合) ノ數ハ $b+c$ デアル．然ルニ袋ノ内ニハ $a+b+c$ 個ノ球ガアルノデアルカラ，赤青ノ孰レカガ出ル確率ハ

$$\frac{b+c}{a+b+c}$$

デアル．他方赤球ノ出ル確率ハ $\frac{b}{a+b+c}$ デ，青球ノ出ル確率ハ $\frac{c}{a+b+c}$ デアリ，上ノ確率ハ $\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}$ デアルカラ，赤又ハ青ノ出ル確率ハ赤ノ出ル確率ト青ノ出ル確率トノ和デアル．

以上ノ事カラ次ノ定理ガ得ラレル．

定理 I ドノ二ツモ互ニ兩立シナイ m 個ノ事象 $E_1, E_2 \ldots\ldots E_m$ ガアリ，夫等ノ生起スル確率ヲ夫々 $p_1, p_2 \ldots\ldots p_m$ デ表ハセバ，$E_1, E_2 \ldots\ldots E_m$

ノ孰レカガ起ル確率ハ

$$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_m$$

デアル.

次ニ述ベルノハ既ニ第270頁ニ說明シタモノデアル.

定理 II　二ツノ事象 E_1 ト E_2 トガ共ニ起ル確率ハ E_1 ノ起ル確率ト, E_1 ガ起ツタトシタ場合ニ E_2 ノ起ル確率トノ相乘積ニ等シイ.

モシ E_1 ト E_2 トガ互ニ獨立デアレバ, 換言スレバ一ツノ事象ガ起ルト否トハ他ノ事象ノ生起スル確率ニ何等ノ影響ヲモ及ボサナイ性質ノモノデアルナラバ, 上ノ定理ハ次ノ樣ニ述ベ得ルコトハ明ラカデアラウ.

定理 III　互ニ獨立ナル事象 $E_1, E_2 \ldots E_m$ ガ起ル確率ヲ夫々 $p_1, p_2 \ldots p_m$ トスレバ, $E_1, E_2 \ldots\ldots E_m$ ガ全部起ル確率ハ其ノ積

$$p_1 p_2 \ldots\ldots p_m$$

ニ等シイ.

此處デ振返ツテ前ニ第264頁ニ述ベタしゅばりえー・ど・めれーノ問題 (1) ヲ考ヘテ見ヨウ.

便宜上先ヅ次ノ一般ノ問題ノ形ニシテ考ヘルコトニスル.

或ル現象ノ實驗ニ於テ, 其ノ起ル確率ハ p デアルトスル. 此ノ實驗ヲ n 回繰返ストキ, ソノ間ニ此ノ現象ガ少クモ一回起ル確率如何.

此ノ現象ノ起ル確率ハ毎回 p デアルカラ, 毎回ノ實驗ニ於テ起ラヌ確率ハ $1-p$ デアル(起ル確率ト起ラヌ確率トノ和ハ1デアルカラ), 故ニ n 回共ニ起ラヌ確率ハ定理 III ニヨツテ

$$(1-p)^n$$

デアル. 然ルニ n 回ノ實驗中問題ノ現象ハ一回モ起ラヌカ又ハ少クモ一回起ルカノ孰レカデアル. 一回モ起ラヌ確率ハ $(1-p)^n$ デアルカラ, 少クモ一回起ル確率ハ明ラカニ

$$1-(1-p)^n$$

デナケレバナラナイ. 之ガ求ムル確率デアル.

p ハ1ヨリ小ナル正ノ數デアルカラ(確實ニ起ル場合ハ1デアルガ) $1-p$ モ亦同ジク1ヨリ小ナル正ノ數デアル. 故ニ n ガ增大スレバ $(1-p)^n$ ハ漸次減少シテ, 如何程ニテモ零ニ近ヅクノデアル. 從ツテ $1-(1-p)^n$ ハ n ガ增スニ從ツテ益, 1ニ近ヅクコトガ分カル. コレハ, 實驗回數ヲ增スニ從ツテ, ソノ間ニ少クモ一回此ノ現象ノ顯ハレルコトハ益, 確實ニナルコトヲ意味スルノデアル.

今 n 回中ニ少クモ一回起ル確率ヲ P デ表ハセバ, 上式ヨリ

$$P=1-(1-p)^n$$

デアルカラ, 書キ直シテ

$$(1-p)^n=1-P$$

トナル. n ヲ求メル爲ニ左右兩邊ノ常用對數ヲ取レバ

$$n\log(1-p)=\log(1-P)$$

從ツテ

$$n=\frac{\log(1-P)}{\log(1-p)}$$

トナツテ, P ガ與ヘラレレバ, n ハ此ノ式カラ計算出來ル. 此ノ式ヲめれーノ考ヘ方ニ(第264頁)適用シテ見ヨウ.

賽一個ヲ n 回投ゲテ少クモ一回 6 ノ目ノ出ルコトト, 一回モ出ナイコトトガ同ジ程度ニ期待出來ルトスレバ, 上式中ノ P ハ $\frac{1}{2}$ デアル. 又毎回ノ實驗ニ於テ 6 ノ目ノ出ル確率ハ $\frac{1}{6}$ デアルカラ

$$P=\frac{1}{2} \qquad p=\frac{1}{6}$$

從ツテ　$1-P=\frac{1}{2}=0.5 \qquad 1-p=\frac{5}{6}=0.833\cdots\cdots$

故ニ

$$n \fallingdotseq \frac{\log 0.5}{\log 0.833}$$

對數表ヲ探ツテ

$$\log 5 = 0.6990 \qquad \log 8.33 = 0.9206$$

ヲ得ルカラ

$$\log 0.5 = \bar{1}.6990 \qquad \log 0.833 = \bar{1}.9206$$
$$= -1 + 0.6990 \qquad = -1 + 0.9206$$
$$= -0.3010 \qquad = -0.0794$$

故ニ

$$n \fallingdotseq \frac{0.3010}{0.0794} \fallingdotseq 3.9\cdots\cdots$$

卽チ一個ノ賽ヲ投ゲル場合ニハ，三回九分投ゲル毎ニ一度6ノ目ノ出ルコトト，出ナイコトトガ同ジ確カラシサヲ有ツノデアルカラ，めれーノ樣ニ四回ニ一度ノ割合ト豫想スレバ，少シク有利ナル譯デアル．此ノ結果ハめれーノ經驗ヲ裏書スル譯デアル．(n ガ增スニ從ツテ P ハ增ス譯デアル)

次ニ二個ノ賽ヲ同時ニ投ゲル場合ヲ調ベテ見ルニ，n 回投ゲテ二個共ニ 6 ノ目ノ出ルコトヲ期待出來ル確率ヲ $\frac{1}{2}$ トスレバ $\mathrm{P}=\frac{1}{2}$ デアル．各〻ノ賽ノ目ガ6デアル確率ハ $\frac{1}{6}$ デアルカラ，二個トモ同時ニ 6 ノ目ガ出ル確率ハ定理 III (第276頁) ニヨツテ $\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$ デアル．故ニ $p=\frac{1}{36}$ デアル．ヨツテ

$$1-\mathrm{P}=\frac{1}{2} \qquad 1-p=1-\frac{1}{36}=\frac{35}{36}$$

從ツテ

$$n=\frac{\log\frac{1}{2}}{\log\frac{35}{36}}$$

トナル．

$$\log\frac{1}{2}=\log 0.5=\bar{1}.6990=-0.3010$$

$$\log\frac{35}{36}=\log 0.972\cdots\cdots=\bar{1}.9877=-0.0123$$

$$\therefore \quad n \fallingdotseq 24.5$$

トナル．卽チ回數ヲ二十四回ヨリ少シク多クシナケレバ（少クモ二十五回），其ノ間ニ一回6ノ目ガ並ンデ出ルコトヲ期待出來ナイノデアル．故ニめれーノ經驗ノ如ク，二十四回ニ一回ノ豫想デハ永イ間ニハ結局負ケルコトトナル譯デアル．確率論ハめれーノ經驗ト良ク合致シテ居ルノデアル．

問題

（1） 一ツノ賽ヲ二回續ケテ投ゲルトキ，第二回ノミ2ノ目ノ出ル確率如何.

答 $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$

（2） 前ノ問題ニ於テ二回ノ試ミノ中少クモ一回3ノ目ノ出ル確率如何.

答 $1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$

（3） 白球三個，黑球四個，赤球五個ヲ入レタル袋ガアル．此ノ袋ヨリ無心ニ一球ヲ取リ出シ，之ヲ袋ニ戻シ入レテ，又第二回目ニ一球ヲ取リ出ス．二回共ニ赤球ヲ取リ出ス確率如何.

答 $\left(\frac{5}{12}\right)^2=\frac{25}{144}$

（4） 第(3)問ニ於テ第一回目ニ取リ出シタル球ヲ袋ニ戻サズ，其ノ儘第二回ニ一球ヲ引キ出ストキ，二回共ニ赤球ヲ取リ出ス確率如何.

答 $\frac{5}{12}\times\frac{4}{11}=\frac{5}{33}$

87 同ジ實驗ヲ繰返ス場合ノ確率

一ツノ袋ノ內ニ白球ト赤球トガ入レテアリ，其ノ數ノ割合ガ分カツテ居レバ，無心ニ取リ出ス球ガ白球又ハ赤球デアル確率ハ計算出來ル．白球ノ出ル確率ヲ p，赤球ノ出ル確率ヲ q トスレバ，白球カ赤球カ孰レカガ必ラズ出ルノデアルカラ，明ラカニ

$$p+q=1$$

ナル關係ガアル．ヨツテ白球ノ出ル確率ガ p デアレバ，赤球ノ出ル確率卽

チ白球ノ出ナイ確率ハ $1-p$ デアル.

今此ノ袋カラ一球ヲ取リ出シ，後之ヲ袋ニ返シ入レテ，再ビ同ジ樣ニ一球ヲ取リ出ストスレバ，此ノ二回ノ實驗ハ全ク同一デ，從ツテ白球，赤球ノ出ル確率ハ兩回トモ各同一デアル．此ノ場合ニ，赤白ノ球ノ現レル總テノ場合ヲ考ヘテ見ルニ，次ノ四通リノ外ニハナイ．

第一回	白	白	赤	赤
第二回	白	赤	白	赤

第一回ニ白，第二回ニ白ノ現レル確率ハ定理 III (第 276 頁) ニヨツテ $p\times p=p^2$ デアル．

第一回ニ白，第二回ニ赤ノ現レル確率ハ同ジ定理ニヨツテ pq デアリ，第一回ニ赤，第二回ニ白ノ現レル確率モ亦同ジク pq デアル．最後ノ場合卽チ第一回，第二回共ニ赤球ノ現レル確率ハ $q\times q=q^2$ デアル．

以上ノ事カラ見ルト

二回共ニ白球ノ現レル確率ハ p^2

一回ハ白，一回ハ赤ノ現レル確率ハ第二，第三ノ場合合シテ $2pq$

二回共ニ赤球ノ現レル確率ハ q^2

デアル．以上ヲ全部合セレバ確實デアルカラ，是等確率ノ總和ハ 1 トナラナケレバナラナイ．實際，加ヘテ見ルト

$$p^2+2pq+q^2=(p+q)^2$$

トナリ，$p+q=1$ デアルカラ，豫想ノ通リ 1 デアル．

モシ同ジ實驗ヲ三回繰返セバ，豫想シ得ベキ場合ハ次表ノ如ク八通リアル．

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
第一回	白	白	白	白	赤	赤	赤	赤
第二回	白	白	赤	赤	白	白	赤	赤
第三回	白	赤	白	赤	白	赤	白	赤

表中三回共ニ白ノ現レルノハ (1) ノ場合，二回ハ白，一回ハ赤ノ現レルノハ (2)(3)(5) ノ三ツノ場合，一回ハ白，二回ハ赤ノ場合ハ (4)(6)(7) ノ三ツデ，三回共ニ赤ノ現レルノハ(8)ダケデアル．ヨツテ

三回共ニ白ノ　確率ハ　p^3

二回白，一回赤　〃　$3p^2q$

一回白，二回赤　〃　$3pq^2$

三回共ニ赤　〃　q^3

デ，是等ヲ全部合セルト

$$p^3+3p^2q+3pq^2+q^3=(p+q)^3=1$$

トナル．

此ノ樣ニ考ヘルト，同ジ實驗ヲ n 回繰返ストキ，白ト赤トノ種々ノ現レ方ノ確率モ亦容易ニ計算出來ルデアラウ．卽チ二項式定理(第 106 頁)ニヨツテ $(p+q)^n$ ヲ展開スレバ

$$(p+q)^n=p^n+\binom{n}{1}p^{n-1}q+\binom{n}{2}p^{n-2}q^2+\cdots\cdots$$

$$+\binom{n}{k}p^{n-k}q^k+\cdots\cdots+\binom{n}{n-1}pq^{n-1}+q^n$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}$$

トナツテ，

第一項 p^n ハ n 回共ニ白球ノ現レル確率

第二項 $\binom{n}{1}p^{n-1}q$ ハ n 回中 $(n-1)$ 回ハ白，一回ハ赤球ノ確率

………………

第 $(k+1)$ 項 $\binom{n}{k}p^{n-k}q^k$ ハ $(n-k)$ 回ハ白球，k 回ハ赤球ノ確率

………………

最後項 q^n ハ n 回共ニ赤球ノ現レル確率

デアル．此ノ結果ハ $(p+q)^n$ ヲ實際ニ掛ケ合セルトキ，$p^{n-k}q^k$ ナル項ガ丁

度 $\binom{n}{k}$ 個現レル事カラモ分カルノデアル．

以上ノ事ハ次ノ様ニ述ベテモヨイ．

或ル事ノ實驗ヲ繰返ストキ，毎回其ノ事ノ起ル確率ガ p デ，起ラヌ確率ガ $1-p=q$ デアレバ，n 回ノ實驗中丁度 k 回起ル確率ハ

$$\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}$$

デアル．

此ノ式ヲ利用シテ，n 回ノ實驗中何回起ルノガ最モ確ラシイカヲ考ヘテ見ヨウ．ソレハ，結局上式ノ値ガ，k ガ幾何ノトキ，最大トナルカヲ考ヘルニ他ナラナイ．

上式ヲ P_k ト書ケバ

$$P_k=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}$$

デアルガ，先ヅ P_{k-1} ト P_k トノ間ノ關係ヲ調ベル爲ニ，ソノ比ヲ求メルト

$$\frac{P_k}{P_{k-1}}=\frac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}}{\dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}p^{k-1}q^{n-k+1}}$$

$$=\frac{\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}p^kq^{n-k}}{\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1.2\ldots(k-1)}p^{k-1}q^{n-k+1}}$$

$$=\frac{n-k+1}{k}\,\frac{p}{q}$$

デアルカラ

$$P_k=P_{k-1}\times\frac{n-k+1}{k}\,\frac{p}{q}$$

トナル．即チ P_{k-1} ニ $\frac{n-k+1}{k}\,\frac{p}{q}$ ヲ乘ズレバ P_k トナルノデアル．故ニモシ $\frac{n-k+1}{k}\,\frac{p}{q}$ ノ値ガ 1 ヨリ大ナラバ，$P_k>P_{k-1}$ デアリ，反對ニモシ小ナラバ $P_k<P_{k-1}$ デアルコトハ明ラカデアル．從ツテモシ $\frac{n-k+1}{k}\,\frac{p}{q}=1$ ナラバ $P_k=P_{k-1}$ デアル．ヨツテ先ヅ $\frac{n-k+1}{k}\,\frac{p}{q}$ ト 1 トノ大小ヲ較ベテ見ヨウ．

モシ

$$\frac{n-k+1}{k}\,\frac{p}{q}>1$$

ナラバ(n, k, p, q ハ決シテ負ノ數デハナイカラ)，左右ニ kq ヲ乘ズレバ

$$(n-k+1)p>kq$$

トナリ，從ツテ

$$np-kp+p>kq$$

即チ

$$np+p>kq+kp$$

書キ直シテ

$$p(n+1)>k \qquad (p+q=1 \text{ デアルカラ})$$

トナル．

モシ又

$$\frac{n-k+1}{k}\,\frac{p}{q}<1$$

ナラバ，同樣ニシテ

$$p(n+1)<k$$

トナルデアラウ．故ニ

$$k<p(n+1)\quad \text{又ハ}\quad k=p(n+1)\quad \text{又ハ}\quad k>p(n+1)$$

ナルニ從ツテ

$$P_k>P_{k-1}\quad \text{又ハ}\quad P_k=P_{k-1}\quad \text{又ハ}\quad P_k<P_{k-1}$$

デアル筈デアル．

換言スレバ，k ガ 0 ヨリ漸次增ストシテ，$k<p(n+1)$ ナル間ハ P_k ハ漸次增大シ，$k>p(n+1)$ トナレバ(即チ k ガ增大シテ $p(n+1)$ ヲ越ユレバ)漸次減少スル．故ニ P_k ノ最大ナル値ハ k ガ $p(n+1)$ ヨリ小ナル値カラ，漸次增大シテ將ニ $p(n+1)$ ヲ越エントスル時ノ値デアル．$p(n+1)$ ガモシ整數ナラバ[1] $k=p(n+1)$ ノトキ

1) n ハ整數デアルケレドモ，p ハ 1 ヨリ小ナル正ノ數デアルカラ $p(n+1)$ ハ必シモ整數デナイ．

$$\mathrm{P}_k=\mathrm{P}_{k-1}$$

トナツテ，最大値ハ P_k 及ビ P_{k-1} デアル．又 $p(n+1)$ ガ整數デナケレバ，$p(n+1)$ ヲ越エナイ最大ノ整數ヲ k ニ取レバ P_k ガ最大デアル．卽チ n 回ノ實驗中 k 回（k ハ上ノ意味）起ルコトガ最モ確ラシイノデアル．

實例ニ就イテ說明スレバ，賽ヲ十五回投ゲル間ニ 1 ノ目ガ何回出ルノガ最モ確ラシイカヲ考ヘヨウ．此ノ場合ニハ

$$n=15 \qquad p=\frac{1}{6}$$

デアルカラ

$$p(n+1)=\frac{1}{6}(15+1)=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}=2.66\ldots\ldots$$

トナリ，從ツテ $p(n+1)$ ヲ超エナイ最大ナル整數ハ明ラカニ 2 デアル．卽チ 15 回ノ中 2 回 1 ノ目ガ出ルノガ最モ確ラシイノデアル．

今 n ガ非常ニ大キイ時，卽チ實驗回數ガ非常ニ多イトスレバ $p(n+1)$ ヲ書キ替ヘテ

$$p(n+1)=np\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

トシ，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$ デアルコトヨリ

$$p(n+1)\fallingdotseq np$$

トナルカラ，n 回中最モ確ラシク起ルデアラウ回數ノ n ニ對スル割合ハ丁度 p トナル．此ノ事ハ實際ニモ略々實證セラレテ居ルノデアル．例ヘバ賽ヲ幾百回幾千回投ゲレバ，1, 2, 3, 4, 5, 6 ノ中特定ノ目ノ出ル回數ハ大凡全回數ノ $\frac{1}{6}$ デアラウ．

此ノ結果ヲ次ノヤウニ述ベテ見ル．

或ル事ノ實驗ヲ繰返ストキ，每回ソノ起ル確率ガ p デアリ，n 回ノ實驗中其ノ事ノ起ツタ回數ヲ r トスレバ

$$\frac{r}{n}\fallingdotseq p$$

デアル．但シ n ハ非常ニ大ナル數デアルトスル．

此ノ事ハ賽ヲ投ゲル實驗，貨幣ヲ投ゲル實驗ナドデモ略々承認セラレタノデアル．大體ニ於テ回數ヲ增セバ增ス程 $\frac{r}{n}$ ガ p ニ近ヅクコトガ看取セラレル．例ヘバ貨幣ヲ幾回モ投ゲレバ，表ト裏トノ出ル回數ハ略々同ジデアル．併シ唯二回投ゲレバ表ト裏トガ必ズ一回ヅツ出ルトハ限ラナイ．四回投ゲレバ必ズ二回ヅツ出ルトモ限ラナイ．其ノ回數ガ多クナケレバ上述ノ樣ニハ必シモナラナイノデアル．

以上述ベタ確率 p ハ數學者ガ机上ニ於テ計算シタ數デアルカラ，實際事象ノ生起スル數トハ無關係ニ計算シタモノデ，從ツテ之ガ事實ト符合スルカ否カハ唯考ヘタノデハ分ラヌ筈デアル．然ルニ實際ノ場合ニ多數實驗ヲ重ネレバ漸次計算デ得ラレタ確率ニ近ヅク事ガ認メラレル．此處ニ確率論ト事實トノ間ノ繋(ツナガ)リガ見ラレル．此ノ事ヲ大數ノ法則[1)]トイフコトモアル．ツマリ，少數ノ實驗デハ何等ノ規則ラシキモノハ認メラレナクトモ多數ノ實驗觀察ヲスレバ規則正シサガ認メラレルトイフノデアル．例ヘバ一人一人ノ壽命ハ全ク不明デアルガ，多數ノ一群ノ人全體ノ壽命ノ平均ヲ計算スレバ，大體定マツタ數トナリ，之ガ日本人ノ大體ノ壽命ヲ表ハスコトニナルノデアル．又同ジ年ニ生レタ人ヲ多數調ベテ其ノ人々ノ壽命ノ平均ヲトレバ，大體同ジ結果ヲ得ル．之ガ生命保險ノ基礎ニナルノデアル．現ニ何歲ノ人ハ將來何年位生存スルカノ確率ガ分カルカラデアル．

以上ノ考ヘヲ應用シテ，次ノ例ヲ觀察シテ見ヨウ．

これら接種法ガ有效デアルカ否カヲ判斷スル爲ニ統計ガ作ラレタ．接種法ヲ受ケタ者ト受ケナイ者ノ中，これら病ニ罹ツタ者ト否ラザル者トノ數ガ次ノ表ノ通リデアツタ[2)]．

---

1) *Law of large numbers*（又ハ *Law of great numbers*）．大數ノ法則トイフ言葉ハ別ナ意味ニモ用キラレル．例ヘバ確率論ノ專門家ハモツト嚴密ナ意味ニ用キル．　2) ***Yule: An introduction to the theory of statistics*** ヨリ．

	總數	罹病シナイ者	罹病シタ者
接種シタ者	279	276	3
接種シナイ者	539	473	66
合計	818	749	69

同ジ時期ニ同ジ地方ノ多數ノ人ヲ調ベル場合ニハ（故意ニ特殊ナル階級ノ人ヲ集メタノデナケレバ），罹病者ノ數ノ割合ハ凡ソ一定シテ居ルデアラウコトハ，上述ノ大數ノ法則カラ想像出來ルデアラウ．上ノ統計中接種シナイ人ノ中カラ之ヲ求メレバ

$$\frac{66}{539} \doteqdot 0.122$$

デアル．コレガ罹病ノ確率デアル．

接種法ガ無效ナラバ，接種シタ者ノ罹病ノ確率卽チ罹病率モ亦コレト略ゝ同ジデアルベキ筈デアルガ，モシ有效ナラバ罹病率ハズツト少クナクテハナラナイ．ヨツテ上ノ統計表カラ計算シテ見ルト

$$\frac{3}{279} \doteqdot 0.011$$

トナルカラ，前ノ結果ニ較ベテ著シク小サイ．コレデ接種法ガ有效デアルコトガ判然トワカル．

以上ノ理ヲ一般ノ場合ニ擴張シテ見ルト次ノヤウニナル．

A ナル性質ト B ナル性質（例ヘバ，眼ノ黑イ性質ト身長ガ高イトイフ性質，又ハ食物ガ美味デアルトイフコトト，ソレガ消化サレ易イトイフコト等）トノ間ニ何等カノ關係ガアルカ否カヲ判斷スル爲ニ次ノ如キ統計ヲ作ツタトスル．

一群ノモノヲ調査シタ結果

性質 A ヲ有スルモノノ數　　(A)

性質 A ヲ有セザルモノノ數　　$(\bar{A})$

性質 A, B ヲ併有スルモノノ數　　(AB)

性質 A ヲ有セズ，B ヲ有スルモノノ數　　$(\bar{A}B)$

ヲ得タトスル．

モシ A ト B トガ何等關係ノナイ性質ナラバ，性質 A ヲ有ツモノト，有タナイモノトノ中ニ，性質 B ヲ有ツモノノ確率ハ全ク同一デアルベキデアル（A ヲ有ツテモ有タナクテモ B ノ起ルニ無關係デアルカラ）．ヨツテ

$$\frac{(AB)}{(A)} = \frac{(\bar{A}B)}{(\bar{A})}$$

ナル關係ガアルデアラウ．モシ性質 A ヲ有ツモノハ亦性質 B ヲモ有チ易イ傾ガアルナラバ

$$\frac{(AB)}{(A)} > \frac{(\bar{A}B)}{(\bar{A})}$$

トナルベキデアラウ．

上ニ述ベタノハ，性質 A ヲ有ツモノト有タヌモノノ中ニ性質 B ノ起ル確率ヲ比較シタノデアルガ，ソノ代リニ，A ヲ有ツモノト，群全體卽チ $(A+\bar{A})$ トノ中ニ B ノ起ル確率ヲ比較シテモ，此ノ場合

$$\frac{(AB)}{(A)} > \frac{(B)}{(A+\bar{A})}$$

ナル關係ヲ得テ A, B 間ニ關係ノ有無ヲ調ベルニ役立ツデアラウガ，併シモシ群中ノ大部分ガ性質 A ヲ有ツテ居ル樣ナ場合ニハ $\frac{(AB)}{(A)}$ ハ，其ノ分母子 (A, B) 及ビ (A) ハ夫々 (B) 及ビ $(A+\bar{A})$ トアマリ違ハナイカラ，當然 $\frac{(B)}{(A+\bar{A})}$ ニ近イ値ヲ取ルデアラウ．卽チ上式ノ左右ガ殆ド同ジ値ヲ取ルデアラウカラ，果シテ異ルノカ否カ判斷ニ迷フ場合ガ起リ得ル．故ニ前ノ樣ニ $\frac{(AB)}{(A)}$ ト $\frac{(\bar{A}B)}{(\bar{A})}$ トヲ比較シタ方ガ A, B 間關係ノ有無ヲ調ベルニ都合ガ好イ譯デアル．

統計ニ依ツテ研究ヲ爲ス場合ニハ多數ノ材料ヲ集メルコトガ必要デ，多數ノ中ニ始メテ眞ニ近イ確率ガ求メ得ラレルノデアリ，從ツテ眞ニ近イ結論ガ

引カレ得ルノデアル．尙其ノ上ニ，材料ヲ集メルニハ唯無心ニ集メルコトガ必要デ，故意ニ或ル種ノ意向ヲ以テ集メタノデハ，得タ確率ハ信賴シ得ナイモノトナルノデアル．或ハ己ノ欲スル結果ヲ揑造スルニ逆用スルコトモ出來ルノデアル．又不注意カラ誤ツタ結果ヲ得ルコトモアリ得ルカラ，注意ガ大切デアル．次ノヤウナ實例モアツタ．或ル學者ガ或ル地方ノ女子ノ身長ヲ硏究スル目的デ，同ジ年頃ノ女性ノ身長ヲ集メル爲ニ，其ノ地方ノ女學校ニ就イテ，女生徒ノ身長ヲ測ツテ見ルト，ソレガ皆殆ド同ジデ變化ノ少イノニ驚イタ．其ノ地方ノ面白イ現象トシテ喜ンダガ，ヨク考ヘテ見ルト，其ノ學校デハ入學ノ際大體身長ノ揃ツタモノヲ採ツタノデアツタトイフ．又ゆーる氏[1]ハ其ノ著書中ニ次ノ例ヲ擧ゲテ居ル．或ル病院ニ於テ，或ル病氣ニ對スル新治療法ノ效果ヲ調ベルコトニナツタ．ソノ爲，其ノ病氣ノ患者男百人，女百人ヲ選ンダ．此ノ病氣ノ死亡率ハ男ハ 30%，女ハ 60%（卽チ男患者 100 人中三十人，女患者 100 人中六十人死スルコト）ナルコトハ旣ニ知ラレテ居ルノデアル．

此ノ病院ニ於テハ上記男患者 100 人中 80 人，女患者 100 人中 40 人ニ新治療法ヲ施シ，ソノ他ハ在來ノ治療法ヲ施シタノデアル．其ノ結果ノ報告ハ次ノ樣デアツタ．

此ノ病氣ノ患者 200 人中 120 人ニ新治療法ヲ施シ，他ノ 80 人ハ在來ノ方法デ治療シタ．然ルニ新治療法ニ依ル 120 人中死亡數ハ 48 人デ，普通療法ノ 80 人中死亡數 42 人デアツタ．故ニ新治療法ノ場合ノ死亡率ハ $\frac{48}{120}=0.4$ 卽チ 40% デ，普通ノ治療法ノ場合ノ死亡率ハ $\frac{42}{80}=0.525$ 卽チ 52.5% デアル．

此ノ報告ヲ見ルト，如何ニモ新療法ハ有效デ，死亡率ガ減ジタ樣デアルガ，仔細ニ調ベテ見ルト必シモサウデハ無イヤウデアル．例ヘバ新療法ガ舊療法ニ比シテ優劣ガナイトシテモ，男女患者ノ在來ノ死亡率ニヨツテ計算スレバ

1) *Udny Yule: An introduction to the theory of statistics.*

新療法ヲ受ケタル患者死亡數

男 $80\times\frac{30}{100}=24$ 人　　女 $40\times\frac{60}{100}=24$ 人　　計 48 人

舊療法ヲ受ケタル患者死亡數

男 $20\times\frac{30}{100}=6$ 人　　女 $60\times\frac{60}{100}=36$ 人　　計 42 人

トナル．故ニ前ノ報告ト同ジク死亡率ハ 0.4% ト 0.525% トナル．卽チ是ニ依ツテ見レバ，此ノ病院ノ報告ハ新療法ガ著シキ效果アルコトヲ示スモノデハナイノデアル．要スルニ男女ノ死亡率ガ異ルノデアルカラ，男女別々ニ報告シナケレバ效果ハ證明サレナイノデアル．

大數ノ法則ト並ンデ所謂小數ノ法則[1]トイフ法則ヲべるりん大學教授ぼるときえうゐっち氏[2]ガ唱ヘ出シタ．此ノ名稱ハ少シ不適當ト思ハレル．主張スルトコロハ

生起ノ確率ガ非常ニ小ナル場合ニモ尙實際ノ生起ハ確率論ト槪ネ合致スル．

トイフコトニ歸スル．確率ガ非常ニ小サイノデアルカラ多數ノ實驗ノ場合ニモ，ソノ生起スル場合ハ稀デアルガ，尙其ノ生起スル割合ハ確率論ヨリ出ル割合ニ近イコトガ主張サレルノデアル．通常大數ノ法則ノ論證ニハ實驗回數ガ大デアルト同時ニ，ソレニ確率ヲ乘ジタル np モ亦大ナルコトヲ假定スルノデアルカラ，p ガ非常ニ小サクテハ其ノ論理ハ通用シナイコトトナル．ソレニモ拘ラズ，大體生起ノ數ガ確率論ト合致スルノデアル．日常生活ニ於テモ常ニ經驗スル樣ニ每年非常ニ稀ニ起ル事象ハ，其ノ數每年格段ニ多イコトモナク又サレバトテ，全ク起ラヌコトモナイ．稀ニ起ル事象トハ，小兒ノ自殺トカ，馬ニ蹴ラレテ死スル場合ノ如キデアル．ぼーれー氏[3]ハ非常ニ稀ナル

1) *Law of small numbers* (*Das Gesetz der kleinen Zahlen*).

2) *Bortkiewicz.* 3) *Bowley.*

病氣ノ專門家ガ醫師トシテ生活ヲ維持出來ルノモ此ノ法則アルニ由テ始メテ說明出來ルト言ウテ居ル.

附　　錄

(1) 指數函数 a^x ノ微分法

$f(x)=a^x$ トスレバ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$=a^x\frac{a^h-1}{h} \qquad (\alpha)$$

トナル. 右邊ノ第一因子 a^x ハ $h\to0$ デモ何等變化シナイガ, 第二因子 $\frac{a^h-1}{h}$ ハ如何ナル極限ニ近ヅクカヲ考ヘナケレバナラヌ.

a^h ハ $h\to0$ ニ連レテ1ニ近ヅクカラ, a^h-1 ハ h ト共ニ如何程デモ零ニ近ヅク. ヨツテ之ヲ ϵ ト書ケバ

$$a^h-1=\epsilon \qquad (\beta)$$

カラ

$$a^h=1+\epsilon$$

トナル. e ヲ底トスル所謂自然對數ヲ取レバ

$$\log a^h=\log(1+\epsilon)$$

卽チ

$$h\log a=\log(1+\epsilon) \qquad \therefore\ h=\frac{\log(1+\epsilon)}{\log a}$$

故ニ上式 (α) ニ代入シテ (β) ヲ用ヰ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=a^x\log a\frac{\epsilon}{\log(1+\epsilon)}$$

ヲ得ル. 然ルニ右邊ノ第三因子ハ次ノヤウニ變形出來ル.

$$\frac{\epsilon}{\log(1+\epsilon)}=\frac{1}{\frac{1}{\epsilon}\log(1+\epsilon)}=\frac{1}{\log(1+\epsilon)^{\frac{1}{\epsilon}}}$$

前ニ述ベタ如ク $h\to0$ ト共ニ $\epsilon\to0$ デアルカラ第189頁ニ論ジタ樣ニ

$$\lim_{\epsilon\to0}(1+\epsilon)^{\frac{1}{\epsilon}}=e$$

デ, 從ツテ $h\to0$ ノトキノ分母 $\log(1+\epsilon)^{\frac{1}{\epsilon}}$ ノ極限ハ $\log e=1$ デアル. 故ニ

$$\lim_{\epsilon\to0}\frac{\epsilon}{\log(1+\epsilon)}=1$$

デアル．ヨツテ

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}a^x\log a\frac{\epsilon}{\log(1+\epsilon)}$$

$$=a^x\log a\lim_{\epsilon\to0}\frac{\epsilon}{\log(1+\epsilon)}$$

$$=a^x\log a$$

卽チ
$$\frac{da^x}{dx}=a^x\log a$$

ヲ得ル．

（2） 三角函數 $\sin x$ ノ微分法

問題ハ

$$\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

ヲ求メルノデアル．先ヅ

$$x+h=\frac{(x+h)+x}{2}+\frac{(x+h)-x}{2}\qquad x=\frac{(x+h)+x}{2}-\frac{(x+h)-x}{2}$$

デアルコトハ容易ニ分カルカラ

$$\sin(x+h)=\sin\left\{\left(\frac{x+h}{2}+\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{x+h}{2}-\frac{x}{2}\right)\right\}$$

$$\sin x=\sin\left\{\left(\frac{x+h}{2}+\frac{x}{2}\right)-\left(\frac{x+h}{2}-\frac{x}{2}\right)\right\}$$

ヨツテ加法定理(第43頁)ニヨツテ

$$\sin(x+h)=\sin\left(\frac{x+h}{2}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+h}{2}-\frac{x}{2}\right)$$
$$+\cos\left(\frac{x+h}{2}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h}{2}-\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin x=\sin\left(\frac{x+h}{2}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+h}{2}-\frac{x}{2}\right)$$
$$-\cos\left(\frac{x+h}{2}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h}{2}-\frac{x}{2}\right)$$

トナル．是等二式ノ異ル所ハ唯中央ノ正負ノ符號ダケデアルコトニ注目スレバ

$$\sin(x+h)-\sin x=2\cos\left(\frac{x+h}{2}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h}{2}-\frac{x}{2}\right)$$

$$=2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

トナルコトハ容易ニワカルデアラウ．兩邊ヲ h デ除スレバ

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{h}=\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

トナル．斯ク書イテ見ルト上式ノ $h\to0$ ノトキノ極限ガヨクワカル．卽チ $h\to0$ ノ時ハ勿論 $\frac{h}{2}\to0$ デ，從ツテ第194頁ニ證明シタ如ク

$$\lim_{\frac{h}{2}\to0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1$$

デアリ，又上式第一因子 $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ ハ $h\to0$ ナラバ漸次 $\cos x$ ニ限リ無ク近ヅクコトハ明白デアルカラ

$$\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x$$

ヲ得ルノデアル．卽チ

$$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x$$

デアル．

（3） 三角函數 $\cos x$ ノ微分法

求メル導函數ハ

$$\lim_{h\to0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

デアルガ第43頁ノ加法定理ニヨツテ

$$\cos(x+h)=\cos x\cos h-\sin x\sin h$$

デアルカラ

$$\cos(x+h)-\cos x=\cos x\cos h-\cos x-\sin x\sin h$$
$$=\cos x(\cos h-1)-\sin x\sin h$$

兩邊ヲ h デ除スレバ

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\cos x\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h} \qquad (\gamma)$$

トナル. $h\to 0$ ノトキノ右邊ノ極限ヲ索ムレバヨイ. $h\to 0$ ナラバ右邊第二項ノ $\frac{\sin h}{h}$ ノ極限ハ前ノ通リ1デアル. 第一項ノ $\frac{\cos h-1}{h}$ ノ極限ハ何デアラウカ. 加法定理

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

ノ A, B ハ如何ナル角デモ此ノ式ハ正シイノデアルカラ

$$A=B=\frac{h}{2}$$

トシテ見ルト, $A+B=h$ トナリ, 上式ハ

$$\cos h=\left(\cos\frac{h}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{h}{2}\right)^2$$

トナル.

公式 (第27頁)

$$\cos^2A+\sin^2A=1$$

ニ於テ $A=\frac{h}{2}$ トスレバ

$$\cos^2\frac{h}{2}+\sin^2\frac{h}{2}=1$$

卽チ
$$\cos^2\frac{h}{2}=1-\sin^2\frac{h}{2}$$

コレニヨツテ上式ハ

$$\cos h=1-2\sin^2\frac{h}{2}$$

トナル. 書キ換ヘテ

$$\cos h-1=-2\sin^2\frac{h}{2}$$

ヨツテ $\frac{\cos h-1}{h}$ ハ次ノ形ニ書ケル.

$$\frac{\cos h-1}{h}=-\frac{2}{h}\sin^2\frac{h}{2}$$

$$=-\frac{h}{2}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2$$

h ガ漸次零ニ近ヅケバ前ニ說明シタ樣ニ

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1$$

デアルカラ, 亦

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2=1$$

デアラウ. 故ニ上式第二因子ノ極限ハ1, 第一因子 $\frac{h}{2}$ ノ極限ハ零デアルカラ

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0$$

トナル. ヨツテ上記 (γ) ノ式ヨリ

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\cos x\frac{\cos h-1}{h}-\lim_{h\to 0}\sin x\frac{\sin h}{h}$$
$$=-\sin x$$

卽チ

$$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

トナツテ目的ヲ達シタ. $\cos x$ ノ導函數ハ $-\sin x$ デアル.[1)]

(4) 三角函數 $\tan x$ ノ微分法

$f(x)=\tan x$ トスレバ

---

1) 此ノ結果ハ $\frac{d\sin x}{dx}$ ヲ求メルノト同ジ方法デモ容易ニ得ラレル.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}$$

ヲ求メルノデアル． $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ デアルカラ

$$\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}=\frac{1}{h}\left\{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}\right\}$$

$$=\frac{1}{h}\,\frac{\sin(x+h)\cos x-\cos(x+h)\sin x}{\cos x\cos(x+h)}$$

加法定理

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

ニ於テ $A=x+h$, $B=x$ トスレバ右邊ハ丁度上式右邊ノ分子ト同ジニナル．ヨツテ分子ハ

$$\sin(x+h)\cos x-\cos(x+h)\sin x=\sin\{(x+h)-x\}$$

$$=\sin h$$

デ，從ツテ

$$\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}=\frac{\sin h}{h}\,\frac{1}{\cos x\cos(x+h)}$$

トナル． $h\to 0$ トスレバ右邊第一因子ノ極限ハ1トナリ，第二因子ハ明ラカ $=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ ニナルカラ

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

卽チ

$$\frac{d\tan x}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

ヲ得ル．

（5） 三角函數 cot*x* ノ微分法

上記ノ演算ト殆ンド同ジ様ニシテ $\cot x$ ノ導函數ヲ求メ得ル．

$\cot x$ ハ $\dfrac{\cos x}{\sin x}$ デアルカラ

$$\frac{\cot(x+h)-\cot x}{h}=\frac{1}{h}\left\{\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)}-\frac{\cos x}{\sin x}\right\}$$

$$=\frac{1}{h}\,\frac{\cos(x+h)\sin x-\sin(x+h)\cos x}{\sin x\sin(x+h)}$$

$$=-\frac{1}{h}\,\frac{\sin\{(x+h)-x\}}{\sin x\sin(x+h)}$$

$$=-\frac{\sin h}{h}\,\frac{1}{\sin x\sin(x+h)}$$

從ツテ

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cot(x+h)-\cot x}{h}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

卽チ

$$\frac{d\cot x}{dx}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

ヲ得ル．

（6） 逆三角函數 arc sin*x* ノ微分法

$y=\mathrm{arc}\sin x$ トスレバ $x=\sin y$ デアルカラ，逆函數ノ微分法ニヨツテ $\sin y$ ノ y ニ關スル導函數ノ倒數ヲ作レバヨイ．ヨツテ

$$\frac{d\sin y}{dy}=\cos y$$

ヨリ

$$\frac{d\,\mathrm{arc}\sin x}{dx}=\frac{1}{\cos y}$$

トナル．右邊ノ y ヲ x デ表ハセバヨイノデアルカラ

$$x=\sin y$$

ヨリ $\quad 1-x^2=1-\sin^2 y=\cos^2 y$

卽チ $\quad \cos y=\pm\sqrt{1-x^2}$

トナル．角 y ハ其ノ正弦ガ x デアル角デアルカラ一ツニ限ツタ譯デハナク，數多クアルガ，其ノ中 $-90°$ ト $+90°$ トノ間ニ在ルモノニ限レバ一ツニ定マル．然ルニ此ノ範圍內デハ $\cos y$ ハ常ニ正デアルカラ複號（±）ハ（+）ヲ取ル．ヨツテ

$$\cos y=\sqrt{1-x^2}$$

從ツテ
$$\frac{d\arcsin x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
ヲ得ル.

（7） **逆三角函數 arc cos$x$ ノ微分法**

$y=\arccos x$ トスレバ $x=\cos y$ デアルカラ, $\dfrac{d\cos y}{dy}$ ヲ求メテ其ノ倒數ヲ作レバヨイ. 故ニ
$$\frac{d\cos y}{dy}=-\sin y$$
ハ旣ニ知ツテ居ルカラ
$$\frac{d\arccos x}{dx}=-\frac{1}{\sin y}$$
y ヲ x デ表ハセバ $x=\cos y$ カラ $1-x^2=1-\cos^2 y=\sin^2 y$, 從ツテ
$$\sin y=\pm\sqrt{1-x^2}$$
デアルガ, $\arccos y$ ノ場合ハ, 角ハ 0° ト 180° ノ間ノ角ヲ取ルコトニスレバ, ソノ値ハ確定シテシカモ 0° ト 180° トノ間ノ角ノ正弦ハ正ノ數デアルカラ, 根號ノ前ノ複號ハ (+) ヲ取ル, ヨツテ上式ハ
$$\frac{d\arccos x}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
トナルノデアル.

（8） **逆三角函數 arc tan$x$ ノ微分法**

例ニヨツテ $y=\arctan x$ トスレバ $x=\tan y$ トナルカラ $\dfrac{d\tan y}{dy}$ ノ倒數ヲ求メレバヨイ. 旣ニ知ツテ居ル通リ
$$\frac{d\tan y}{dy}=\frac{1}{\cos^2 y}$$
デアルカラ
$$\frac{d\arctan x}{dx}=\cos^2 y$$
右邊ヲ x デ表ハス爲ニ $x=\tan y$ ノ兩邊ヲ二乘シテ 1 ヲ加ヘテ見ルト

$$1+x^2=\tan^2 y+1=\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}+1=\frac{\sin^2 y+\cos^2 y}{\cos^2 y}=\frac{1}{\cos^2 y}$$
トナルカラ直ニ
$$\cos^2 y=\frac{1}{1+x^2}$$
ヲ得ル. 是ヲ上式ニ代入スレバ目的ノ式
$$\frac{d\arctan x}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$
ヲ得ル.

（9） **逆三角函數 arc cot$x$ ノ微分法**

今マデノ通リニ $y=\operatorname{arccot} x$ トオケバ $x=\cot y$ トナル. 然ルニ
$$\frac{d\cot y}{dy}=-\frac{1}{\sin^2 y}$$
デアルコトハ分カツテ居ルカラ,
$$\frac{d\operatorname{arccot} x}{dx}=-\sin^2 y$$
デアル. 併シ
$$x=\cot y$$
ヲ二乘シテ 1 ヲ加ヘルト
$$1+x^2=1+\cot^2 y=1+\frac{\cos^2 y}{\sin^2 y}=\frac{\sin^2 y+\cos^2 y}{\sin^2 y}=\frac{1}{\sin^2 y}$$
トナルカラ
$$\sin^2 y=\frac{1}{1+x^2}$$
デアル, ヨツテ
$$\frac{d\operatorname{arccot} x}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}$$
ヲ得テ目的ヲ達スル.

(10) **tan$x$ ノ原函數**

$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ デアルカラ $\cos x=y$ トオクト, 微分シテ

$$\frac{d\cos x}{dx}=\frac{dy}{dx} \quad \text{卽チ} \quad -\sin x=\frac{dy}{dx}$$

トナリ，從ツテ

$$\tan x=-\frac{\frac{dy}{dx}}{y}$$

トナル．然ルニ $-\log y$ ヲ x ニ關シテ微分スレバ函數ノ函數ノ微分法ニヨツテ

$$\frac{d(-\log y)}{dx}=-\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

トナルカラ上式ト比較シテ

$$\tan x=\frac{d(-\log y)}{dx}$$

ナルコトガ分カル．故ニ $\tan x$ ノ原函數ハ

$$-\log y \quad \text{叉ハ} \quad -\log|\cos x|$$

デアル．

(11) $\cot x$ ノ原函數

$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ デアルカラ $\sin x=y$ トオケバ，微分シテ

$$\frac{d\sin x}{dx}=\frac{dy}{dx} \quad \text{卽チ} \quad \cos x=\frac{dy}{dx}$$

トナル．故ニ

$$\cot x=\frac{\frac{dy}{dx}}{y}$$

トナル，然ルニ前ニ述ベタト同樣ニ

$$\frac{d\log y}{dx}=\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

デアルカラ上式ト比較シテ

$$\cot x=\frac{d\log y}{dx}$$

デ，從ツテ $\log y$ ガ $\cot x$ ノ原函數デアル．卽チ

$$\int\cot x\,dx=\log|\sin x|$$

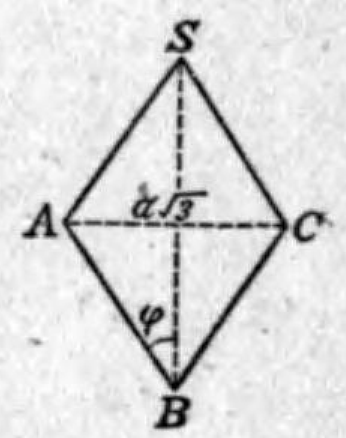
トナル．

(12) 蜂ノ巣ノ總表面積ノ計算

第222頁ニ述ベタ蜂ノ巣ノ表面積ハ底面ノ正六角形ヲ除ケバ，六角柱ノ側面ニアル六箇ノ梯形ノ面積ト上部ヲ覆フ三箇ノ菱形ノ面積トノ總和デアル．各梯形ノ面積ハ容易ニ

$$\frac{a(2b-x)}{2}$$

デアルコトヲ知リ得ルガ，菱形ノ面積ハ稍ゝ面倒デアル．第221頁ノ圖中 A, C, E, G ノ四點ハ皆同ジ高サノ點デアルカラ，紙片ヲ折リ曲ゲテ作リタル巣ニ於テハ A, C, E, G ノ作ル三角形 (G ハ A ト合致スル) ハ底面ニ於ケル點 1, 3, 5, 7 ノ作ル三角形 (7 ハ 1 ト合致スル) ト全ク同形同大デアル．故ニ AC ノ長サ卽チ菱形ノ一ツノ對角線ノ長サハ a ヲ一邊トスル正六角形 $\overline{1234567}$ ノ一對角線 $\overline{13}$ ノ長サニ等シイ．卽チ明ラカニ $a\sqrt{3}$ デアル．然ルニ菱形ノ一邊ハ AB デアルカラ，其ノ長サハ $\sqrt{a^2+x^2}$ デアル．故ニ右圖ノ角 φ ノ正弦，餘弦ハ夫々



$$\sin\varphi=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+x^2}} \qquad \cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}=\frac{\sqrt{a^2+4x^2}}{2\sqrt{a^2+x^2}}$$

デアル．

菱形 ABCS ノ面積ハ $\dfrac{\mathrm{AC}}{2}\times\dfrac{\mathrm{BS}}{2}$ ノ二倍デアルガ

$$\frac{\mathrm{AC}}{2}=\overline{\mathrm{AB}}\sin\varphi \qquad \frac{\mathrm{BS}}{2}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\varphi$$

デアルカラ索ムル ABCS ノ面積ハ

$$2\times\overline{\mathrm{AB}}\sin\varphi\times\overline{\mathrm{AB}}\cos\varphi$$
$$=2\times\overline{\mathrm{AB}}^2\times\sin\varphi\cos\varphi$$

$$=2(a^2+x^2)\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{a^2+4x^2}}{2\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$=\frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+4x^2}$$

$$=\frac{a}{2}\sqrt{3a^2+12x^2}$$

ヨツテ底面ヲ除イタ蜂ノ巣ノ總表面積ハ

$$6\times\frac{a(2b-x)}{2}+\frac{3a}{2}\sqrt{3a^2+12x^2}$$

$$=\frac{3a}{2}\{4b-2x+\sqrt{3a^2+12x^2}\}$$

トナル.

(13) 導函數並ニ原函數ノ表

$f(x)$	$f'(x)=\dfrac{df}{dx}$	$\int f(x)dx$ (隨意常數ヲ略ス)
x^2	$2x$	$\dfrac{x^3}{3}$
x^3	$3x^2$	$\dfrac{x^4}{4}$
x^n	nx^{n-1}	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ $n\neq-1$ ノ場合
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\log\lvert x\rvert$ $n=-1$ ノ場合
c(常數)	0	cx
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x}\log_a e=\dfrac{1}{x\log a}$	
a^x	$a^x\log a$	$\dfrac{1}{\log a}a^x$
e^x	e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-\log\lvert\cos x\rvert$ {附錄(10)}
$\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\log\lvert\sin x\rvert$ { 〃 (11)}
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arccot} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\arcsin x$ 又ハ $-\arccos x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$		$\arctan x$ 又ハ $-\operatorname{arccot} x$
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$	$\int f(x)dx+\int g(x)dx$
$f(x)-g(x)$	$f'(x)-g'(x)$	$\int f(x)dx-\int g(x)dx$
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	
$cf(x)$	$cf'(x)$	
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$	
$y=f(x)$	$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{f'(x)}$ (逆函數ノ微分法)	
$y=f(u)$, $u=\varphi(x)$	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\,\dfrac{du}{dx}$ (函數ノ函數ノ微分法)	

附表

〔I〕三角函數ノ表

〔II〕數ノ對數表

〔III〕三角函數ノ對數表

實用ニハ今少シ精密ナ表ガ便利デアル．例ヘバがうす氏五術對數表ナドガ普通ニ使用セラレテ居ル．

表〔I〕〔III〕中 sin, cos, log sin 等ノ標識ハ，45° 以下ノ角ニハ上欄ノモノヲ，以上ノ角ニハ下欄ノモノヲ用キル．又指標ハ煩雜ヲ避ケル爲メ省イタ處ガアルガ前後ノ關係カラ直ニ得ラレル．

附表〔I〕

三角函數ノ表

角	sin	cos	tan	cot	
0°	0	1	0	∞	90°
0°30′	0.009	1.000	0.009	114.589	89°30′
1°	0.017	1.000	0.017	57.290	89°
1°30′	0.026	1.000	0.026	38.188	88°30′
2°	0.035	0.999	0.035	28.636	88°
2°30′	0.044	0.999	0.044	22.904	87°30′
3°	0.052	0.999	0.052	19.081	87°
3°30′	0.061	0.998	0.061	16.350	86°30′
4°	0.070	0.998	0.070	14.301	86°
4°30′	0.078	0.997	0.079	12.706	85°30′
5°	0.087	0.996	0.087	11.430	85°
5°30′	0.096	0.995	0.096	10.385	84°30′
6°	0.105	0.995	0.105	9.514	84°
6°30′	0.113	0.994	0.114	8.777	83°30′
7°	0.122	0.993	0.123	8.144	83°
7°30′	0.131	0.991	0.132	7.596	82°30′
8°	0.139	0.990	0.141	7.115	82°
8°30′	0.148	0.989	0.149	6.691	81°30′
9°	0.156	0.988	0.158	6.314	81°
9°30′	0.165	0.986	0.167	5.976	80°30′
10°	0.174	0.985	0.176	5.671	80°
10°30′	0.182	0.983	0.185	5.396	79°30′
11°	0.191	0.982	0.194	5.145	79°
11°30′	0.199	0.980	0.203	4.915	78°30′
12°	0.208	0.978	0.213	4.705	78°
12°30′	0.216	0.976	0.222	4.511	77°30′
13°	0.225	0.974	0.231	4.331	77°
13°30′	0.233	0.972	0.240	4.165	76°30′
14°	0.242	0.970	0.249	4.011	76°
14°30′	0.250	0.968	0.259	3.867	75°30′
15°	0.259	0.966	0.268	3.732	75°
15°30′	0.267	0.964	0.277	3.606	74°30′
16°	0.276	0.961	0.287	3.487	74°
16°30′	0.284	0.959	0.296	3.376	73°30′
17°	0.292	0.956	0.306	3.271	73°
17°30′	0.301	0.954	0.315	3.172	72°30′
18°	0.309	0.951	0.325	3.078	72°
18°30′	0.317	0.948	0.335	2.989	71°30′
19°	0.326	0.946	0.344	2.904	71°
19°30′	0.334	0.943	0.354	2.824	70°30′
20°	0.342	0.940	0.364	2.747	70°
	cos	sin	cot	tan	角

角	sin	cos	tan	cot	
20°	0.342	0.940	0.364	2.747	70°
20°30′	0.350	0.937	0.374	2.675	69°30′
21°	0.358	0.934	0.384	2.605	69°
21°30′	0.367	0.930	0.394	2.539	68°30′
22°	0.375	0.927	0.404	2.475	68°
22°30′	0.383	0.924	0.414	2.414	67°30′
23°	0.391	0.921	0.424	2.356	67°
23°30′	0.399	0.917	0.435	2.300	66°30′
24°	0.407	0.914	0.445	2.246	66°
24°30′	0.415	0.910	0.456	2.194	65°30′
25°	0.423	0.906	0.466	2.145	65°
25°30′	0.431	0.903	0.477	2.097	64°30′
26°	0.438	0.899	0.488	2.050	64°
26°30′	0.446	0.895	0.499	2.006	63°30′
27°	0.454	0.891	0.510	1.963	63°
27°30′	0.462	0.887	0.521	1.921	62°30′
28°	0.469	0.883	0.532	1.881	62°
28°30′	0.477	0.879	0.543	1.842	61°30′
29°	0.485	0.875	0.554	1.804	61°
29°30′	0.492	0.870	0.566	1.767	60°30′
30°	0.500	0.866	0.577	1.732	60°
30°30′	0.508	0.862	0.589	1.698	59°30′
31°	0.515	0.857	0.601	1.664	59°
31°30′	0.522	0.853	0.613	1.632	58°30′
32°	0.530	0.848	0.625	1.600	58°
32°30′	0.537	0.843	0.637	1.570	57°30′
33°	0.545	0.839	0.649	1.540	57°
33°30′	0.552	0.834	0.662	1.511	56°30′
34°	0.559	0.829	0.675	1.483	56°
34°30′	0.566	0.824	0.687	1.455	55°30′
35°	0.574	0.819	0.700	1.428	55°
35°30′	0.581	0.814	0.713	1.402	54°30′
36°	0.588	0.809	0.727	1.376	54°
36°30′	0.595	0.804	0.740	1.351	53°30′
37°	0.602	0.799	0.754	1.327	53°
37°30′	0.609	0.793	0.767	1.303	52°30′
38°	0.616	0.788	0.781	1.280	52°
38°30′	0.623	0.783	0.795	1.257	51°30′
39°	0.629	0.777	0.810	1.235	51°
39°30′	0.636	0.772	0.824	1.213	50°30′
40°	0.643	0.766	0.839	1.192	50°
40°30′	0.649	0.760	0.854	1.171	49°30′
41°	0.656	0.755	0.869	1.150	49°
41°30′	0.663	0.749	0.885	1.130	48°30′
42°	0.669	0.743	0.900	1.111	48°
42°30′	0.676	0.737	0.916	1.091	47°30′
43°	0.682	0.731	0.933	1.072	47°
43°30′	0.688	0.725	0.949	1.054	46°30′
44°	0.695	0.719	0.966	1.036	46°
44°30′	0.701	0.713	0.983	1.018	45°30′
45°	0.707	0.707	1.000	1.000	45°
	cos	sin	cot	tan	角

附表〔II〕

數ノ對數表

數	log	數	log	數	log	數	log	數	log	數	log
1.00	0	**1.30**	1139	**1.60**	2041	**1.90**	2788	**2.20**	3424	**2.50**	3979
1.01	0043	**1.31**	1173	**1.61**	2068	**1.91**	2810	**2.21**	3444	**2.51**	3997
1.02	0086	**1.32**	1206	**1.62**	2095	**1.92**	2833	**2.22**	3464	**2.52**	4014
1.03	0128	**1.33**	1239	**1.63**	2122	**1.93**	2856	**2.23**	3483	**2.53**	4031
1.04	0170	**1.34**	1271	**1.64**	2148	**1.94**	2878	**2.24**	3502	**2.54**	4048
1.05	0212	**1.35**	1303	**1.65**	2175	**1.95**	2900	**2.25**	3522	**2.55**	4065
1.06	0253	**1.36**	1335	**1.66**	2201	**1.96**	2923	**2.26**	3541	**2.56**	4082
1.07	0294	**1.37**	1367	**1.67**	2227	**1.97**	2945	**2.27**	3560	**2.57**	4099
1.08	0334	**1.38**	1399	**1.68**	2253	**1.98**	2967	**2.28**	3579	**2.58**	4116
1.09	0374	**1.39**	1430	**1.69**	2279	**1.99**	2989	**2.29**	3598	**2.59**	4133
1.10	0414	**1.40**	1461	**1.70**	2304	**2.00**	3010	**2.30**	3617	**2.60**	4150
1.11	0453	**1.41**	1492	**1.71**	2330	**2.01**	3032	**2.31**	3636	**2.61**	4166
1.12	0492	**1.42**	1523	**1.72**	2355	**2.02**	3054	**2.32**	3655	**2.62**	4183
1.13	0531	**1.43**	1553	**1.73**	2380	**2.03**	3075	**2.33**	3674	**2.63**	4200
1.14	0569	**1.44**	1584	**1.74**	2405	**2.04**	3096	**2.34**	3692	**2.64**	4216
1.15	0607	**1.45**	1614	**1.75**	2430	**2.05**	3118	**2.35**	3711	**2.65**	4232
1.16	0645	**1.46**	1644	**1.76**	2455	**2.06**	3139	**2.36**	3729	**2.66**	4249
1.17	0682	**1.47**	1673	**1.77**	2480	**2.07**	3160	**2.37**	3747	**2.67**	4265
1.18	0719	**1.48**	1703	**1.78**	2504	**2.08**	3181	**2.38**	3766	**2.68**	4281
1.19	0755	**1.49**	1732	**1.79**	2529	**2.09**	3201	**2.39**	3784	**2.69**	4298
1.20	0792	**1.50**	1761	**1.80**	2553	**2.10**	3222	**2.40**	3802	**2.70**	4314
1.21	0828	**1.51**	1790	**1.81**	2577	**2.11**	3243	**2.41**	3820	**2.71**	4330
1.22	0864	**1.52**	1818	**1.82**	2601	**2.12**	3263	**2.42**	3838	**2.72**	4346
1.23	0899	**1.53**	1847	**1.83**	2625	**2.13**	3284	**2.43**	3856	**2.73**	4362
1.24	0934	**1.54**	1875	**1.84**	2648	**2.14**	3304	**2.44**	3874	**2.74**	4378
1.25	0969	**1.55**	1903	**1.85**	2672	**2.15**	3324	**2.45**	3892	**2.75**	4393
1.26	1004	**1.56**	1931	**1.86**	2695	**2.16**	3345	**2.46**	3909	**2.76**	4409
1.27	1038	**1.57**	1959	**1.87**	2718	**2.17**	3365	**2.47**	3927	**2.77**	4425
1.28	1072	**1.58**	1987	**1.88**	2742	**2.18**	3385	**2.48**	3945	**2.78**	4440
1.29	1106	**1.59**	2014	**1.89**	2765	**2.19**	3404	**2.49**	3962	**2.79**	4456

數	log	數	log	數	log	數	log	數	log	數	log
2.80	4472	**3.20**	5051	**3.60**	5563	**4.00**	6021	**4.40**	6435	**4.80**	6812
2.81	4487	**3.21**	5065	**3.61**	5575	**4.01**	6031	**4.41**	6444	**4.81**	6821
2.82	4502	**3.22**	5079	**3.62**	5587	**4.02**	6042	**4.42**	6454	**4.82**	6830
2.83	4518	**3.23**	5092	**3.63**	5599	**4.03**	6053	**4.43**	6464	**4.83**	6839
2.84	4533	**3.24**	5105	**3.64**	5611	**4.04**	6064	**4.44**	6474	**4.84**	6848
2.85	4548	**3.25**	5119	**3.65**	5623	**4.05**	6075	**4.45**	6484	**4.85**	6857
2.86	4564	**3.26**	5132	**3.66**	5635	**4.06**	6085	**4.46**	6493	**4.86**	6866
2.87	4579	**3.27**	5145	**3.67**	5647	**4.07**	6096	**4.47**	6503	**4.87**	6875
2.88	4594	**3.28**	5159	**3.68**	5658	**4.08**	6107	**4.48**	6513	**4.88**	6884
2.89	4609	**3.29**	5172	**3.69**	5670	**4.09**	6117	**4.49**	6522	**4.89**	6893
2.90	4624	**3.30**	5185	**3.70**	5682	**4.10**	6128	**4.50**	6532	**4.90**	6902
2.91	4639	**3.31**	5198	**3.71**	5694	**4.11**	6138	**4.51**	6542	**4.91**	6911
2.92	4654	**3.32**	5211	**3.72**	5705	**4.12**	6149	**4.52**	6551	**4.92**	6920
2.93	4669	**3.33**	5224	**3.73**	5717	**4.13**	6160	**4.53**	6561	**4.93**	6928
2.94	4683	**3.34**	5237	**3.74**	5729	**4.14**	6170	**4.54**	6571	**4.94**	6937
2.95	4698	**3.35**	5250	**3.75**	5740	**4.15**	6180	**4.55**	6580	**4.95**	6946
2.96	4713	**3.36**	5263	**3.76**	5752	**4.16**	6191	**4.56**	6590	**4.96**	6955
2.97	4728	**3.37**	5276	**3.77**	5763	**4.17**	6201	**4.57**	6599	**4.97**	6964
2.98	4742	**3.38**	5289	**3.78**	5775	**4.18**	6212	**4.58**	6609	**4.98**	6972
2.99	4757	**3.39**	5302	**3.79**	5786	**4.19**	6222	**4.59**	6618	**4.99**	6981
3.00	4771	**3.40**	5315	**3.80**	5798	**4.20**	6232	**4.60**	6628	**5.00**	6990
3.01	4786	**3.41**	5328	**3.81**	5809	**4.21**	6243	**4.61**	6637	**5.01**	6998
3.02	4800	**3.42**	5340	**3.82**	5821	**4.22**	6253	**4.62**	6646	**5.02**	7007
3.03	4814	**3.43**	5353	**3.83**	5832	**4.23**	6263	**4.63**	6656	**5.03**	7016
3.04	4829	**3.44**	5366	**3.84**	5843	**4.24**	6274	**4.64**	6665	**5.04**	7024
3.05	4843	**3.45**	5378	**3.85**	5855	**4.25**	6284	**4.65**	6675	**5.05**	7033
3.06	4857	**3.46**	5391	**3.86**	5866	**4.26**	6294	**4.66**	6684	**5.06**	7042
3.07	4871	**3.47**	5403	**3.87**	5877	**4.27**	6304	**4.67**	6693	**5.07**	7050
3.08	4886	**3.48**	5416	**3.88**	5888	**4.28**	6314	**4.68**	6702	**5.08**	7059
3.09	4900	**3.49**	5428	**3.89**	5899	**4.29**	6325	**4.69**	6712	**5.09**	7067
3.10	4914	**3.50**	5441	**3.90**	5911	**4.30**	6335	**4.70**	6721	**5.10**	7076
3.11	4928	**3.51**	5453	**3.91**	5922	**4.31**	6345	**4.71**	6730	**5.11**	7084
3.12	4942	**3.52**	5465	**3.92**	5933	**4.32**	6355	**4.72**	6739	**5.12**	7093
3.13	4955	**3.53**	5478	**3.93**	5944	**4.33**	6365	**4.73**	6749	**5.13**	7101
3.14	4969	**3.54**	5490	**3.94**	5955	**4.34**	6375	**4.74**	6758	**5.14**	7110
3.15	4983	**3.55**	5502	**3.95**	5966	**4.35**	6385	**4.75**	6767	**5.15**	7118
3.16	4997	**3.56**	5514	**3.96**	5977	**4.36**	6395	**4.76**	6776	**5.16**	7126
3.17	5011	**3.57**	5527	**3.97**	5988	**4.37**	6405	**4.77**	6785	**5.17**	7135
3.18	5024	**3.58**	5539	**3.98**	5999	**4.38**	6415	**4.78**	6794	**5.18**	7143
3.19	5038	**3.59**	5551	**3.99**	6010	**4.39**	6425	**4.79**	6803	**5.19**	7152

數	log	數	log	數	log	數	log	數	log	數	log
5.20	7160	5.60	7482	6.00	7782	6.40	8062	6.80	8325	7.20	8573
5.21	7168	5.61	7490	6.01	7789	6.41	8069	6.81	8331	7.21	8579
5.22	7177	5.62	7497	6.02	7796	6.42	8075	6.82	8338	7.22	8585
5.23	7185	5.63	7505	6.03	7803	6.43	8082	6.83	8344	7.23	8591
5.24	7193	5.64	7513	6.04	7810	6.44	8089	6.84	8351	7.24	8597
5.25	7202	5.65	7520	6.05	7818	6.45	8096	6.85	8357	7.25	8603
5.26	7210	5.66	7528	6.06	7825	6.46	8102	6.86	8363	7.26	8609
5.27	7218	5.67	7536	6.07	7832	6.47	8109	6.87	8370	7.27	8615
5.28	7226	5.68	7543	6.08	7839	6.48	8116	6.88	8376	7.28	8621
5.29	7235	5.69	7551	6.09	7846	6.49	8122	6.89	8382	7.29	8627
5.30	7243	5.70	7559	6.10	7853	6.50	8129	6.90	8388	7.30	8633
5.31	7251	5.71	7566	6.11	7860	6.51	8136	6.91	8395	7.31	8639
5.32	7259	5.72	7574	6.12	7868	6.52	8142	6.92	8401	7.32	8645
5.33	7267	5.73	7582	6.13	7875	6.53	8149	6.93	8407	7.33	8651
5.34	7275	5.74	7589	6.14	7882	6.54	8156	6.94	8414	7.34	8657
5.35	7284	5.75	7597	6.15	7889	6.55	8162	6.95	8420	7.35	8663
5.36	7292	5.76	7604	6.16	7896	6.56	8169	6.96	8426	7.36	8669
5.37	7300	5.77	7612	6.17	7903	6.57	8176	6.97	8432	7.37	8675
5.38	7308	5.78	7619	6.18	7910	6.58	8182	6.98	8439	7.38	8681
5.39	7316	5.79	7627	6.19	7917	6.59	8189	6.99	8445	7.39	8686
5.40	7324	5.80	7634	6.20	7924	6.60	8195	7.00	8451	7.40	8692
5.41	7332	5.81	7642	6.21	7931	6.61	8202	7.01	8457	7.41	8698
5.42	7340	5.82	7649	6.22	7938	6.62	8209	7.02	8463	7.42	8704
5.43	7348	5.83	7657	6.23	7945	6.63	8215	7.03	8470	7.43	8710
5.44	7356	5.84	7664	6.24	7952	6.64	8222	7.04	8476	7.44	8716
5.45	7364	5.85	7672	6.25	7959	6.65	8228	7.05	8482	7.45	8722
5.46	7372	5.86	7679	6.26	7966	6.66	8235	7.06	8488	7.46	8727
5.47	7380	5.87	7686	6.27	7973	6.67	8241	7.07	8494	7.47	8733
5.48	7388	5.88	7694	6.28	7980	6.68	8248	7.08	8500	7.48	8739
5.49	7396	5.89	7701	6.29	7987	6.69	8254	7.09	8506	7.49	8745
5.50	7404	5.90	7709	6.30	7993	6.70	8261	7.10	8513	7.50	8751
5.51	7412	5.91	7716	6.31	8000	6.71	8267	7.11	8519	7.51	8756
5.52	7419	5.92	7723	6.32	8007	6.72	8274	7.12	8525	7.52	8762
5.53	7427	5.93	7731	6.33	8014	6.73	8280	7.13	8531	7.53	8768
5.54	7435	5.94	7738	6.34	8021	6.74	8287	7.14	8537	7.54	8774
5.55	7443	5.95	7745	6.35	8028	6.75	8293	7.15	8543	7.55	8779
5.56	7451	5.96	7752	6.36	8035	6.76	8299	7.16	8549	7.56	8785
5.57	7459	5.97	7760	6.37	8041	6.77	8306	7.17	8555	7.57	8791
5.58	7466	5.98	7767	6.38	8048	6.78	8312	7.18	8561	7.58	8797
5.59	7474	5.99	7774	6.39	8055	6.79	8319	7.19	8567	7.59	8802

數	log	數	log	數	log	數	log	數	log	數	log
7.60	8808	8.00	9031	8.40	9243	8.80	9445	9.20	9638	9.60	9823
7.61	8814	8.01	9036	8.41	9248	8.81	9450	9.21	9643	9.61	9827
7.62	8820	8.02	9042	8.42	9253	8.82	9455	9.22	9647	9.62	9832
7.63	8825	8.03	9047	8.43	9258	8.83	9460	9.23	9652	9.63	9836
7.64	8831	8.04	9053	8.44	9263	8.84	9465	9.24	9657	9.64	9841
7.65	8837	8.05	9058	8.45	9269	8.85	9469	9.25	9661	9.65	9845
7.66	8842	8.06	9063	8.46	9274	8.86	9474	9.26	9666	9.66	9850
7.67	8848	8.07	9069	8.47	9279	8.87	9479	9.27	9671	9.67	9854
7.68	8854	8.08	9074	8.48	9284	8.88	9484	9.28	9675	9.68	9859
7.69	8859	8,09	9079	8.49	9289	8.89	9489	9.29	9680	9.69	9863
7.70	8865	8.10	9085	8.50	9294	8.90	9494	9.30	9685	9.70	9868
7.71	8871	8.11	9090	8.51	9299	8.91	9499	9.31	9689	9.71	9872
7.72	8876	8.12	9096	8.52	9304	8.92	9504	9.32	9694	9.72	9877
7.73	8882	8.13	9101	8.53	9309	8.93	9509	9.33	9699	9.73	9881
7.74	8887	8.14	9106	8.54	9315	8.94	9513	9.34	9703	9.74	9886
7.75	8893	8.15	9112	8.55	9320	8.95	9518	9.35	9708	9.75	9890
7.76	8899	8.16	9117	8.56	9325	8.96	9523	9.36	9713	9.76	9894
7.77	8904	8.17	9122	8.57	9330	8.97	9528	9.37	9717	9.77	9899
7.78	8910	8.18	9128	8.58	9335	8.98	9533	9.38	9722	9.78	9903
7.79	8915	8.19	9133	8.59	9340	8.99	9538	9.39	9727	9.79	9908
7.80	8921	8.20	9138	8.60	9345	9.00	9542	9.40	9731	9.80	9912
7.81	8927	8.21	9143	8.61	9350	9.01	9547	9.41	9736	9.81	9917
7.82	8932	8.22	9149	8.62	9355	9.02	9552	9.42	9741	9.82	9921
7.83	8938	8.23	9154	8.63	9360	9.03	9557	9.43	9745	9.83	9926
7.84	8943	8.24	9159	8.64	9365	9.04	9562	9.44	9750	9.84	9930
7.85	8949	8.25	9165	8.65	9370	9.05	9566	9.45	9754	9.85	9934
7.86	8954	8.26	9170	8.66	9375	9.06	9571	9.46	9759	9.86	9939
7.87	8960	8.27	9175	8.67	9380	9.07	9576	9.47	9763	9.87	9943
7.88	8965	8.28	9180	8.68	9385	9.08	9581	9.48	9768	9.88	9948
7.89	8971	8.29	9186	8.69	9390	9.09	9586	9.49	9773	9.89	9952
7.90	8976	8.30	9191	8.70	9395	9.10	9590	9.50	9777	9.90	9956
7.91	8982	8.31	9196	8.71	9400	9.11	9595	9.51	9782	9.91	9961
7.92	8987	8.32	9201	8.72	9405	9.12	9600	9.52	9786	9.92	9965
7.93	8993	8.33	9206	8.73	9410	9.13	9605	9.53	9791	9.93	9969
7.94	8998	8.34	9212	8.74	9415	9.14	9609	9.54	9795	9.94	9974
7.95	9004	8.35	9217	8.75	9420	9.15	9614	9.55	9800	9.95	9978
7.96	9009	8.36	9222	8.76	9425	9.16	9619	9.56	9805	9.96	9983
7.97	9015	8.37	9227	8.77	9430	9.17	9624	9.57	9809	9.97	9987
7.98	9020	8.38	9232	8.78	9435	9.18	9628	9.58	9814	9.98	9991
7.99	9025	8.39	9238	8.79	9440	9.19	9633	9.59	9818	9.99	9996

附表〔III〕

三角函數ノ對數表

度	分	log sin	log cos	log tan	log cot		
0	0	− ∞	0.0000	− ∞	∞	**90**	0
	10	$\bar{3}.4637$	0.0000	$\bar{3}.4637$	2.5363		50
	20	$\bar{3}.7648$	0.0000	$\bar{3}.7648$	2.2352		40
	30	$\bar{3}.9408$	0.0000	$\bar{3}.9409$	2.0591		30
	40	$\bar{2}.0658$	0.0000	$\bar{2}.0658$	1.9342		20
	50	$\bar{2}.1627$	0.0000	$\bar{2}.1627$	1.8373		10
1	0	$\bar{2}.2419$	$\bar{1}.9999$	$\bar{2}.2419$	1.7581	**89**	0
	10	3088	9999	3089	6911		50
	20	3668	9999	3669	6331		40
	30	4179	9999	4181	5819		30
	40	4637	9998	4638	5362		20
	50	5050	9998	5053	4947		10
2	0	$\bar{2}.5428$	$\bar{1}.9997$	$\bar{2}.5431$	1.4569	**88**	0
	10	5776	9997	5779	4221		50
	20	6097	9996	6101	3899		40
	30	6397	9996	6401	3599		30
	40	6677	9995	6682	3318		20
	50	6940	9995	6945	3055		10
3	0	$\bar{2}.7188$	$\bar{1}.9994$	$\bar{2}.7194$	1.2806	**87**	0
	10	7423	9993	7429	2571		50
	20	7645	9993	7652	2348		40
	30	7857	9992	7865	2135		30
	40	8059	9991	8067	1933		20
	50	8251	9990	8261	1739		10
4	0	$\bar{2}.8436$	$\bar{1}.9989$	$\bar{2}.8446$	1.1554	**86**	0
	10	8613	9989	8624	1376		50
	20	8783	9988	8795	1205		40
	30	8946	9987	8960	1040		30
	40	9104	9986	9118	0882		20
	50	9256	9985	9272	0728		10
5	0	$\bar{2}.9403$	$\bar{1}.9983$	$\bar{2}.9420$	1.0580	**85**	0
	10	$\bar{2}.9545$	9982	$\bar{2}.9563$	1.0437		50
	20	$\bar{2}.9682$	9981	$\bar{2}.9701$	1.0299		40
	30	$\bar{2}.9816$	9980	$\bar{2}.9836$	1.0164		30
	40	$\bar{2}.9945$	9979	$\bar{2}.9966$	1.0034		20
	50	$\bar{1}.0070$	9977	$\bar{1}.0093$	0.9907		10
6	0	$\bar{1}.0192$	$\bar{1}.9976$	$\bar{1}.0216$	0.9784	**84**	0
	10	0311	9975	0336	9664		50
	20	0426	9973	0453	9547		40
	30	0539	9972	0567	9433		30
	40	0648	9971	0678	9322		20
	50	0755	9969	0786	9214		10
7	0	$\bar{1}.0859$	$\bar{1}.9968$	$\bar{1}.0891$	0.9109	**83**	0
		log cos	log sin	log cot	log tan	度	分

度	分	log sin	log cos	log tan	log cot		
7	0	$\bar{1}.0859$	$\bar{1}.9968$	$\bar{1}.0891$	0.9109	**83**	0
	10	0961	9966	0995	9005		50
	20	1060	9964	1096	8904		40
	30	1157	9963	1194	8806		30
	40	1252	9961	1291	8709		20
	50	1345	9959	1385	8615		10
8	0	$\bar{1}.1436$	$\bar{1}.9958$	$\bar{1}.1478$	0.8522	**82**	0
	10	1525	9956	1569	8431		50
	20	1612	9954	1658	8342		40
	30	1697	9952	1745	8255		30
	40	1781	9950	1831	8169		20
	50	1863	9948	1915	8085		10
9	0	$\bar{1}.1943$	$\bar{1}.9946$	$\bar{1}.1997$	0.8003	**81**	0
	10	2022	9944	2078	7922		50
	20	2100	9942	2158	7842		40
	30	2176	9940	2236	7764		30
	40	2251	9938	2313	7687		20
	50	2324	9936	2389	7611		10
10	0	$\bar{1}.2397$	$\bar{1}.9934$	$\bar{1}.2463$	0.7537	**80**	0
	10	2468	9931	2536	7464		50
	20	2538	9929	2609	7391		40
	30	2606	9927	2680	7320		30
	40	2674	9924	2750	7250		20
	50	2740	9922	2819	7181		10
11	0	$\bar{1}.2806$	$\bar{1}.9919$	$\bar{1}.2887$	0.7113	**79**	0
	10	2870	9917	2953	7047		50
	20	2934	9914	3020	6980		40
	30	2997	9912	3085	6915		30
	40	3058	9909	3149	6851		20
	50	3119	9907	3212	6788		10
12	0	$\bar{1}.3179$	$\bar{1}.9904$	$\bar{1}.3275$	0.6725	**78**	0
	10	3238	9901	3336	6664		50
	20	3296	9899	3397	6603		40
	30	3353	9896	3458	6542		30
	40	3410	9893	3517	6483		20
	50	3466	9890	3576	6424		10
13	0	$\bar{1}.3521$	$\bar{1}.9887$	$\bar{1}.3634$	0.6366	**77**	0
	10	3575	9884	3691	6309		50
	20	3629	9881	3748	6252		40
	30	3682	9878	3804	6196		30
	40	3734	9875	3859	6141		20
	50	3786	9872	3914	6086		10
14	0	$\bar{1}.3837$	$\bar{1}.9869$	$\bar{1}.3968$	0.6032	**76**	0
		log cos	log sin	log cot	log tan	度	分

度	分	log sin	log cos	log tan	log cot		
14	0	$\bar{1}.3837$	$\bar{1}.9869$	$\bar{1}.3968$	0.6032	**76**	0
	10	3887	9866	4021	5979		50
	20	3937	9863	4074	5926		40
	30	3986	9859	4127	5873		30
	40	4035	9856	4178	5822		20
	50	4083	9853	4230	5770		10
15	0	$\bar{1}.4130$	$\bar{1}.9849$	$\bar{1}.4281$	0.5719	**75**	0
	10	4177	9846	4331	5669		50
	20	4223	9843	4381	5619		40
	30	4269	9839	4430	5570		30
	40	4314	9836	4479	5521		20
	50	4359	9832	4527	5473		10
16	0	1.4403	$\bar{1}.9828$	$\bar{1}.4575$	0.5425	**74**	0
	10	4447	9825	4622	5378		50
	20	4491	9821	4669	5331		40
	30	4533	9817	4716	5284		30
	40	4576	9814	4762	5238		20
	50	4618	9810	4808	5192		10
17	0	$\bar{1}.4659$	$\bar{1}.9806$	$\bar{1}.4853$	0.5147	**73**	0
	10	4700	9802	4898	5102		50
	20	4741	9798	4943	5057		40
	30	4781	9794	4987	5013		30
	40	4821	9790	5031	4969		20
	50	4861	9786	5075	4925		10
18	0	$\bar{1}.4900$	$\bar{1}.9782$	$\bar{1}.5118$	0.4882	**72**	0
	10	4939	9778	5161	4839		50
	20	4977	9774	5203	4797		40
	30	5015	9770	5245	4755		30
	40	5052	9765	5287	4713		20
	50	5090	9761	5329	4671		10
19	0	$\bar{1}.5126$	$\bar{1}.9757$	$\bar{1}.5870$	0.4630	**71**	0
	10	5163	9752	5411	4589		50
	20	5199	9748	5451	4549		40
	30	5235	9743	5491	4509		30
	40	5270	9739	5531	4469		20
	50	5306	9734	5571	4429		10
20	0	$\bar{1}.5341$	$\bar{1}.9730$	$\bar{1}.5611$	0.4389	**70**	0
	10	5375	9725	5650	4350		50
	20	5409	9721	5689	4311		40
	30	5443	9716	5727	4273		30
	40	5477	9711	5766	4234		20
	50	5510	9706	5804	4196		10
21	0	$\bar{1}.5543$	$\bar{1}.9702$	$\bar{1}.5842$	0.4158	**69**	0
	10	5576	9697	5879	4121		50
	20	5609	9692	5917	4083		40
	30	5641	9687	5954	4046		30
	40	5673	9682	5991	4009		20
	50	5704	9677	6028	3972		10
22	0	$\bar{1}.5736$	$\bar{1}.9672$	$\bar{1}.6064$	0.3936	**68**	0
		log cos	log sin	log cot	log tan	度	分

度	分	log sin	log cos	log tan	log cot		
22	0	$\bar{1}.5736$	$\bar{1}.9672$	$\bar{1}.6064$	0.3936	**68**	0
	10	5767	9667	6100	3900		50
	20	5798	9661	6136	3864		40
	30	5828	9656	6172	3828		30
	40	5859	9651	6208	3792		20
	50	5889	9646	6243	3757		10
23	0	$\bar{1}.5919$	$\bar{1}.9640$	$\bar{1}.6279$	0.3721	**67**	0
	10	5948	9635	6314	3686		50
	20	5978	9629	6348	3652		40
	30	6007	9624	6383	3617		30
	40	6036	9618	6417	3583		20
	50	6065	9613	6452	3548		10
24	0	$\bar{1}.6093$	$\bar{1}.9607$	$\bar{1}.6486$	0.3514	**66**	0
	10	6121	9602	6520	3480		50
	20	6149	9596	6553	3447		40
	30	6177	9590	6587	3413		30
	40	6205	9584	6620	3380		20
	50	6232	9579	6654	3346		10
25	0	$\bar{1}.6259$	$\bar{1}.9573$	$\bar{1}.6687$	0.3313	**65**	0
	10	6285	9567	6720	3280		50
	20	6313	9561	6752	3248		40
	30	6340	9555	6785	3215		30
	40	6366	9549	6817	3183		20
	50	6392	9543	6850	3150		10
26	0	$\bar{1}.6418$	$\bar{1}.9537$	$\bar{1}.6882$	0.3118	**64**	0
	10	6444	9530	6914	3086		50
	20	6470	9524	6946	3054		40
	30	6495	9518	6977	3023		30
	40	6521	9512	7009	2991		20
	50	6546	9505	7040	2960		10
27	0	$\bar{1}.6570$	$\bar{1}.9499$	$\bar{1}.7072$	0.2928	**63**	0
	10	6595	9492	7103	2897		50
	20	6620	9486	7134	2866		40
	30	6644	9479	7165	2835		30
	40	6668	9473	7196	2804		20
	50	6692	9466	7226	2774		10
28	0	$\bar{1}.6716$	$\bar{1}.9459$	$\bar{1}.7257$	0.2743	**62**	0
	10	6740	9453	7287	2713		50
	20	6763	9446	7317	2683		40
	30	6787	9439	7348	2652		30
	40	6810	9432	7378	2622		20
	50	6833	9425	7408	2592		10
29	0	$\bar{1}.6856$	$\bar{1}.9418$	$\bar{1}.7438$	0.2562	**61**	0
	10	6878	9411	7467	2533		50
	20	6901	9404	7497	2503		40
	30	6923	9397	7526	2474		30
	40	6946	9390	7556	2444		20
	50	6968	9383	7585	2415		10
30	0	$\bar{1}.6990$	$\bar{1}.9375$	$\bar{1}.7614$	0.2386	**60**	0
		log cos	log sin	log cot	log tan	度	分

度 分	log sin	log cos	log tan	log cot	
30 0	$\bar{1}$.6990	$\bar{1}$.9375	$\bar{1}$.7614	0.2386	60 0
10	7012	9368	7644	2356	50
20	7033	9361	7673	2327	40
30	7055	9353	7701	2299	30
40	7076	9346	7730	2270	20
50	7097	9338	7759	2241	10
31 0	$\bar{1}$.7118	1.9331	$\bar{1}$.7788	0.2212	59 0
10	7139	9323	7816	2184	50
20	7160	9315	7845	2155	40
30	7181	9308	7873	2127	30
40	7201	9300	7902	2098	20
50	7222	9292	7930	2070	10
32 0	$\bar{1}$.7242	$\bar{1}$.9284	$\bar{1}$.7958	0.2042	58 0
10	7262	9276	7986	2014	50
20	7282	9268	8014	1986	40
30	7302	9260	8042	1958	30
40	7322	9252	8070	1930	20
50	7342	9244	8097	1903	10
33 0	$\bar{1}$.7361	$\bar{1}$.9236	$\bar{1}$.8125	0.1875	57 0
10	7380	9228	8153	1847	50
20	7400	9219	8180	1820	40
30	7419	9211	8208	1792	30
40	7438	9203	8235	1765	20
50	7457	9194	8263	1737	10
34 0	$\bar{1}$.7476	$\bar{1}$.9186	$\bar{1}$.8290	0.1710	56 0
10	7494	9177	8317	1683	50
20	7513	9169	8344	1656	40
30	7531	9160	8371	1629	30
40	7550	9151	8398	1602	20
50	7568	9142	8425	1575	10
35 0	$\bar{1}$.7586	$\bar{1}$.9134	$\bar{1}$.8452	0.1548	55 0
10	7604	9125	8479	1521	50
20	7622	9116	8506	1494	40
30	7640	9107	8533	1467	30
40	7657	9098	8559	1441	20
50	7675	9089	8586	1414	10
36 0	$\bar{1}$.7692	$\bar{1}$.9080	$\bar{1}$.8613	0.1387	54 0
10	7710	9070	8639	1361	50
20	7727	9061	8666	1334	40
30	7744	9052	8692	1308	30
40	7761	9042	8718	1282	20
50	7778	9033	8745	1255	10
37 0	$\bar{1}$.7795	$\bar{1}$.9023	$\bar{1}$.8771	0.1229	53 0
10	7811	9014	8797	1203	50
20	7828	9004	8824	1176	40
30	7844	8995	8850	1150	30
40	7861	8985	8876	1124	20
50	7877	8975	8902	1098	10
38 0	$\bar{1}$.7893	$\bar{1}$.8965	$\bar{1}$.8928	0.1072	52 0
	log cos	log sin	log cot	log tan	度 分

度 分	log sin	log cos	log tan	log cot	
38 0	$\bar{1}$.7893	$\bar{1}$.8965	$\bar{1}$.8928	0.1072	52 0
10	7910	8955	8954	1046	50
20	7926	8945	8980	1020	40
30	7941	8935	9006	0994	30
40	7957	8925	9032	0968	20
50	7973	8915	9058	0942	10
39 0	$\bar{1}$.7989	$\bar{1}$.8905	$\bar{1}$.9084	0.0916	51 0
10	8004	8895	9110	0890	50
20	8020	8884	9135	0865	40
30	8035	8874	9161	0839	30
40	8050	8864	9187	0813	20
50	8066	8853	9212	0788	10
40 0	$\bar{1}$.8081	$\bar{1}$.8843	$\bar{1}$.9238	0.0762	50 0
10	8096	8832	9264	0736	50
20	8111	8821	9289	0711	40
30	8125	8810	9315	0685	30
40	8140	8800	9341	0659	20
50	8155	8789	9366	0634	10
41 0	$\bar{1}$.8169	$\bar{1}$.8778	$\bar{1}$.9392	0.0608	49 0
10	8184	8767	9417	0583	50
20	8198	8756	9443	0557	40
30	8213	8745	9468	0532	30
40	8227	8733	9494	0506	20
50	8241	8722	9519	0481	10
42 0	$\bar{1}$.8255	$\bar{1}$.8711	$\bar{1}$.9544	0.0456	48 0
10	8269	8699	9570	0430	50
20	8283	8688	9595	0405	40
30	8297	8676	9621	0379	30
40	8311	8665	9646	0354	20
50	8324	8653	9671	0329	10
43 0	$\bar{1}$.8338	$\bar{1}$.8641	$\bar{1}$.9697	0.0303	47 0
10	8351	8629	9722	0278	50
20	8365	8618	9747	0253	40
30	8378	8606	9772	0228	30
40	8391	8594	9798	0202	20
50	8405	8582	9823	0177	10
44 0	$\bar{1}$.8418	$\bar{1}$.8569	$\bar{1}$.9848	0.0152	46 0
10	8431	8557	$\bar{1}$.9874	0126	50
20	8444	8545	$\bar{1}$.9899	0101	40
30	8457	8532	$\bar{1}$.9924	0076	30
40	8469	8520	$\bar{1}$.9949	0051	20
50	8482	8507	$\bar{1}$.9975	0025	10
45 0	$\bar{1}$.8495	$\bar{1}$.8495	0.0000	0.0000	45 0
	log cos	log sin	log cot	log tan	度 分

索　引

A

頁

B

D

E

G

H

I

K

M

N

O

P

R

S

数學

定價金八拾圓

昭和十七年七月十五日　初版印刷
昭和十七年七月二十日　初版發行
昭和二十二年五月廿五日　改訂再版印刷
昭和二十二年五月三十日　改訂再版發行

著者　吉江琢兒

東京都千代田區神田神保町一ノ一
發行者　三省堂出版株式會社
代表者　今井直一

東京都文京區柳町二六
印刷者　齋藤印刷所

東京都千代田區神田神保町一ノ一
發行所　三省堂出版株式會社
日本出版協會會員番號 A119004

（吉江數學）

終