始

小倉金之助編輯

數學教育名著叢書
第五篇

ホルスト・フォン・ザンデン

實用解析學

數値計算，圖計算，
機械計算ノ概念

小倉金之助
近藤鷙

譯註增訂

1928

東京
山海堂出版部

譯者ノ序

「眞ニ必要ナモノハ人間ノ精神ノ革命デアル.」
——ぶらんですニ與ヘタいぶせんノ書翰ヨリ.

本書ハ獨逸はのーゔぁー工科大學,ほるすと・ふぉん・ざんでん教授ノ著「實用解析學」[1]ヲ甚ダ自由ナ形ニ邦譯シ,之ニ多大ノ增補ト註釋(ソレハ合計百數十頁ニ亘ル)トヲ加ヘタモノデアル.

後ニ述ベル様ニ,數學ノ一分科トシテノ實用解析學ハ,ソノ成立ノ日尚ホ極メテ淺ク,從ツテ其ノ輪廓モ未ダ確定セズ.又コレヲ包容統一シタ權威的大作ハ絕無ト云フモ,過言デナイ狀態ニアル.[2] 斯様ナ現狀ニアツテ,手頃ナル小冊子ノ內ニ,ヨク其ノ要領ヲ纏メ得タノミナラズ,入門書トシテ手際ヨク書カレタ點ニ於テ,コノ書ハ恐ラクハ現代ヲ通ジテ,最良ナルモノヽ一タルヲ失ハナイト信ズル. 大正十五年(1926)ノ初夏以來,吾等一致協同,此ノ譯註ニ多大ノ努力ヲ傾注シタ理由モ,マタ實ニ此ノ點ニアツタ.

---

(1) Horst von Sanden. Praktische Analysis. Leipzig und Berlin, 1914.
ざんでんハ 1883 年露西亜ぎーるぐづすきーノ地ニ生レ, 獨逸みゆんへん, だんてぃひ, げってぃんげんニ學ビ, 1908 年ドクトルトナツタ. 1911 年カラげってぃんげん大學ニ於テ應用數學ノ講師トナリ, 1918 年くらうすたーる大學ノ敎授トナツタ. 1922 年以來はのーゔぁー工科大學ノ敎授トシテ, 現ニ其ノ地ニ居ル. 實用解析學及ビ工學上ノ應用ニ就イテ幾多ノ研究ガアル.

(2) 卷末ノ「參考書目」參照.

ソレ故ニ,若シ吾等ノ譯註ニシテ幸ニ原著ヲ傷ツケナイモノトセバ,ソレハ斯學ノ性質上,マタ斯學ノ全斑ニ亘ル邦文唯一ノ書ナル點ニ於テ,自然科學タルト社會科學タルトヲ問ハズ,數式又ハ圖表ノ取扱ヒヲ要スル研究者ニ對シテハ,力强イ助力ヲ與ヘルデアラウシ,又數學ノ學生ヤ教授者ニ取ツテハ,從來ノ數學智識ノ最大缺陷ヲ補充スル上ニ於テ,マタ**明日ノ數學**ヘノ暗示ヲ與ヘル點ニ於テ,重要ナル意義ヲ有スルモノト信ズル.

實用解析學ノ意義,ソノ實用上ノ價値及ビ學校教育上ニ於ケル地位ニ就イテハ,原著者ノ序ニ詳シク,マタ十數年來種々ノ機會ニ於テ,[1] 吾等ノ一人ガ唱導シ來タツタ所デアルカラ,コヽニ反覆スル必要ハナイ. タヾ單ニ讀者ノ誤解ヲ防ガンガ爲メニ,一言ヲ添ヘルニ止メル.

嚴密ナ意義ニ於ケル實用解析學ハ,自然科學又ハ社會

---

[1] 例ヘバ小論文「文部省教員檢定試驗數學問題ノ批判及ビ其ノ改良私見」(大正 4 年卽チ 1915 年稿,大正 6 年現代之科學所載,後ニ「るーしぇ.こんぶるーす,初等幾何學」第一卷ニ收ム)ニ於テハ,檢定試驗ニ數學實驗トシテ,"近似計算,補間法,計算尺,方眼紙ノ使用,計算圖表,面積計ナド"ヲ加フベキヲ述ベタ. 次ニ講演「理論數學ト實用數學トノ交涉」(東京物理學校雜誌,大正 8 年)ニ於テハ,實用解析學ノ意義ヲ明カニシ,小著「圖計算及ビ圖表」(山海堂,大正 12 年)ニ於テハ,實用解析學ノ一部分ヲ初等的ニ講述シ,「數學教育ノ根本問題」(イデア書院,大正 13 年)ニ於テハ,實用解析學ノ精神ヲ教授上ニ採用スベキヲ論ジ,「統計的研究法」(積善館,大正 14 年)ニ於テハ,初等實用解析學ノ一方面ニ於ケル應用ヲ示シタ積リデアル.

檢定試驗ニ關スル 1915 年ノ拙案ト,1917 年ノ獨逸ノ規程(本序文第 5 頁)トヲ比較研究セラレンコトヲ切望スル.

科學ニ應用サレタ數學トハ,ヤヽ其ノ意味ヲ異ニスル. 例ヘバ電氣工學上ノ或ル現象ヲ說明スル爲メニ,如何ニシテ其ノ微分方程式ヲ作ルベキカノ問題ハ,數學ヲ應用セル工學マタハ工學ニ適用サレタ數學ニ屬スルモノデアツテ,其ノ方面ノ重要ナルコト[1]ハ勿論デアルガ,併シソレハ實用解析學ノ與カラザル所デアル. 斯クシテ求メラレタ微分方程式ヲ,ソノ現象ノ說明ニ實際ニ役立ツ樣ニ,數值的ニ或ハ作圖的ニ,出來ル丈ケ便宜ニ解カントスル所ニ,初メテ實用解析學存在ノ理由ガアル. 卽チ實用解析學ハ,自然科學タルト社會科學タルトヲ問ハズ,ソレ等ニ共通ナル根本的ノ計算法ヲ研究スル,數學ノ一分科ニ外ナラナイ.

顧フニ昔ねびーあ,にうとん,らぐらんじゅ,らぷらーす,もんじゅ,がうす等ノ如キ曠世ノ偉才ハ,純粹數學ノ精華ヲ熱愛スルト同時ニ,實用解析學的精神ヲ高調スルヲ忘レナカツタ. 然ルニ十九世紀ニ勃興シタ嚴密ナル論理數學ノ趨勢ハ,數學ヲシテ他ノ科學カラ,又ソノ應用カラ絕緣サセル方向ニ進ミ,之ニ關聯シテ實用解析學ハ,純粹數學者ノ興味ノ中心カラ遠ザケラレタノデアル.

---

[1] ソレ故ニ本書ガ屬スル「數學教育名著叢書」ノ中ニモ,地圖作製法,自然科學(特ニ物理,化學)ノ數學的研究,工業數學,理財及ビ保險數學,統計法,其ノ他ノ應用方面ノ數學ヲ含マセル計畫デアル.

ソレヨリ以後ノ實用解析學ハ,寧ロ數學者ノ手ヲ離レ,却ツテ他方面ノ人々ニヨツテ維持サレテ來タ. 若シ吾々ノ見ル所ニシテ大過ナカラシメバ,大體ニ於テ,保險學者,天文學者,物理學者等ガ數値計算ヲ發達サセ,[1]工學者(特ニ巴里工藝大學ノ傳統ニヨレル技術者)ガ圖計算及ビ機械計算ヲ進歩飛躍サセタ[2]ト,言ヒ得ルカト思フ.

重大ナル**價値轉換**ハ,十九世紀ノ晩年獨逸ノくらいんニヨリテ開始サレタ. 彼ハ該博雄大ナル綜合統一ノ立場カラ,斯學ノ復活ヲ叫ビ,[3]幾多ノ試錬ノ後,遂ニるんげニヨツテ有力眞摯ナル實行家ヲ見出シ,1904 年コヽニげつてぃんげん大學ハ正當ナル一課程トシテ,實用解析

(1) 例ヘバふーりぇ(數理物理學者)ノ簡便算省略算及ビ方程式ニ於ケル,べっせる(天文學者)ノ補間公式及ビ調和解析ニ於ケル,ぐれーふぇ(天文學者)ノ方程式ニ於ケルガ如キデアル. 補間法ノ歴史カラ英國ノ保險學者ヲ忘レ得ナイト思フ.

(2) 例ヘバくーじぬりー,くーるまん,まっそー,どかにゅーノ圖計算ニ於ケル,まねーむ・あむすらー,あぶだんく・あばかのうぃっちノ機械計算ニ於ケルガ如クデアル. 瑞西ちゆーりっひノ工科大學ハ,ソノ開校時代ニハ巴里工藝大學ノ流レヲ汲ンデ,之ニ多少ノ改造ヲ加ヘタモノト見做シテ宜シイト思フ.

(3) くらいんが,純粹數學ト應用數學トガ親密ナル交渉ニアルベキコトヲ,初メテ明白ニ公表シタノハ 1880 年デアル. 併シ彼ガ思想ノ眞實ナル轉換期ハ 1892 年デアツタ. 其ノ時代ニ,彼ハ親友タリシ經濟學者れきしすノ感化ヲ受ケ,マタ文部大臣あるとっふノ熱心ナル贊助協力ヲ得タノデアル. 1893 年米國しかご大博覽會ニ赴キ,ソレヨリシテ數學,物理學及ビ工學(應用物理)ノ統一ヲ主張スルニ到ツタ.[以上ハくらいん全集ニアル彼ノ自傳ニヨル].

讀者試ミニ當時ノ獨逸ノ國情ヲ見ヨ. うぃりあむ二世卽位(888),びすまーくノ隱退(1890),產業ノ勃興,財政改革ノ成功,きーる運河ノ開通,社會民主黨ノ勃興,..... くらいんハ實ニ,**工業立國**ト**社會意識**トニ,目醒メタノデハ無カツタラウカ. 彼ガ數學教育改造運動ノ最初ノ動機モマタ,玆ニ在ルノデハ無カツタラウカ.

學ノ講義ト實習トヲ開クニ到ツタノデアル.[1] 眞ニ**意識セル意味デノ實用解析學**ハ,初メテ玆ニ生レタト言フテ宜シカラウト信ズル.

コノ刺戟ハ强カツタ. 今日歐米諸國ニ於テハ,漸ク斯學ノ意義ヲ認容スル樣ニ成リ,斯方面ノ專門的或ハ啓蒙的著述ハ漸ク其ノ數ヲ加ヘ,諸大學ハ漸ク其ノ講義ヲ始メ,中等教師ガ有スベキ必然ノ智識[2]トナルニ到ツタ.

併シナガラ,原著者モ述ベテ居ル樣ニ,實用解析學ハ決シテ純粹數學ニ反抗センガ爲メニ生レタモノデハナイ. 彼等ハ相携ヘテ歩ムベキ双生兒デアル. 獨リ實用解析

(1) 公平ニ言ヘバ,露ノちぇびちぇふ,佛ノどかにゅー,獨ノぶるんす,めーむけノ如キハ,實用解析學上ノ業蹟ニ於テくらいんヨリモ夙クシテ而モ彼ニ優ルノミナラズ,ソノ思想上ニ於テモ或ハくらいんノ先驅者デアツタカモ知レナイ. コノ點ニ就イテハ,後日ノ研究ニ待チタイト思フ.

(2) 例ヘバ 1917 年 7 月 28 日發表サレタ,ぷろいせん中等教員檢定試驗規定ニヨレバ,數學科志望者ニ課スル專門ノ學科ハ次ノ如クデアル.

(i) 副志望

1. 初等數學
2. 平面解析幾何學
3. 空間解析幾何學一斑
4. 微積分學

(ii) 本志望

1. 高等算術及ビ代數
2. 高等解析學
3. 高等幾何學
4. 理論力學
5. 圖計算及ビ數値計算ノ實習
6. 觀測ニヨル天文學

(iii) 應用數學ノ補充志望

1. 圖的及ビ數値的方法(卽チ畫法幾何學,圖計算及ビ數値計算,誤差論)
2. 次ノ科目中カラ,少ナクトモ一科ヲ自由ニ選擇スル.

天文學　測地學　氣象學及ビ地球物理學
應用力學　應用物理學　數理統計學及ビ保險

學ガ純粹數學ノ結果ヲ利用シテ發達シタ[1]許リデナク,逆ニ,實用解析學カラ暗示ヲ得テ美ハシイ純理論的研究ノ生レタ事實[2]モ,マタ甚ダ多イノデアル. 現ニ純粹ナル解析學上ノ基本觀念ノ一トモ云フベキ剩餘式ノ限界,誤差ノ階級,逐次漸近法ガ,同時ニ如何ニ實用解析學ノ根底ニ横ハルカヲ考ヘルナラバ,タヾ此ノ一面カラ觀ル丈ケデモ,彼等ハ相融合シテ其ノ精神ヲ一ニスルモノデアルコトヲ,痛感セザルヲ得ナイト思フ. 實用解析學ハ決シテ,ぎりしやノ理想主義トモ比セラルベキ純粹數學カラ,單ナルろーまノ現實主義ヘト陷キルモノデハナイ. タダ純粹數學ガ講壇ノ奥深ク象牙ノ塔ニ隱ルヽトキ,實用解析學ハ市ニ出デテ社會ヘ呼ビカケルノデアル.

サテるんげノ高弟タルざんでんノ原著ハ,げってぃんげん大學ノ講義ヲ主トシタモノデ,公平ニ見テ,獨逸大學ニ於ケル實用解析學楷梯ノ代表者ト見做シ得ルト思フ.[3] 併シナガラ原著ハ斯學ノ入門ニ過ギナイノデアルカラ,

[1] 例ヘバ微分方程式ノ圖解法(第269頁)ハ,解ノ存在定理(卽チ逐次漸近法ニヨル方法)カラ導カレタモノ,共線圖表ハ直線坐標ノ理論カラ來タ結果デアツタ.

[2] 例ヘバ補間法カラモ,マタ實驗公式カラモ,夫々純理論的ナ解析學ノ分科ガ顯ハレテ來タ.

[3] すてっける,ろーれー等ノ報告(万國數學教科調査會,獨逸之部)ニヨル. るんげノ著書ハ圖計算,數値計算ナドト別々ニ出版サレテキテ,從ツテざんでんノ書ヨリモ細目ニ亘ツテ居ルケレドモ,結局同ジ性質ノモノデアル. 1923年べるりん大學ニ於テ,大ニ擴張シタみぜすノ講義課程モ,ソノ科目ト時間割トカラ想像スレバ,大體同樣ノモノカト思ハレル.

證明ノ不十分ナ點ヤ,重要事項ノ欠ケタ個所モアリ,殊ニ練習用ノ問題ガ餘リニ少ナキニ失スル.

勿論歐米ノ諸國ニアツテハ,容易ニ他ノ參考書ニヨリテ此等ノ點ヲ補充シ得ルカラ,本原著ノ如キアッサリシタ講義ガ,初學者ニ取ツテ或ハ最良ノ方法カモ知レヌガ,文獻ノ極メテ乏シイ日本ニ於テハ,大ニ事情ヲ異ニスルモノガアルト思フ. ソレデ吾々ハ

(i) 重要事項ノ中デ證明ノ不十分ナ點ヲ,脚註或ハ本文ニ於テ補フコトニシタ.[1]

(ii) 重要ト思ハレル事項又ハ方法ノ幾分カヲ補充スル爲メニ,附錄トシテ「計算圖表」,「積分ニ關スル諸機械」[2]及ビ「雜問題及ビ補充」[3]ノ三章ヲ書キ足シタ. コノ中初メノ二章,殊ニ機械ノ説明ニ就イテハ,鹽見理化學研究所員柏原誠一君ノ助力ニ俟ツ所甚ダ多イ. コヽニ謹ンデ感謝ノ意ヲ表スル.

(iii) 練習問題ヲ補足スル爲メニ,本文中(多クハ各節ノ末)ニ比較的平易ナ問題ヲ載セ,稍々困難ナモノ又ハ種々ノ方法ノ比較研究等ニ關スルモノハ,附錄

[1] コノ點ニ就イテハ多クノ參考書中,特ニるんげ-けーにっひノ書ニ負フ所ガ多イ. 原著者ノ意志ニ最モ近イト信ズルカラデアル.

[2] 本文デがるれノ書ヲ薦メテ居ル關係上,材料ヲがるれノ書ニ仰ギ,詳シク書キ改メテ了解シ易クシタ積リデアル. がるれノ書ハ工科ノ學生ニ適スルモ,數學ノ學生ニハ不適當カト信ズル.

[3] 可ナリ多クノ本ヲ渉獵シテ收集シタノデアルガ,吾等ノ一人ノ創作ニ係ルモノモ少ナクナイ. 敢テ慧眼ナル讀者ノ批判ヲ待チタイト思フ.

ノ「雜問題及ビ補充」ノ方ニ廻ハシタ. 併シコレ丈ケデハ未ダ不十分カト思ハレル. 實用解析學ハ唯自ラ行フコトニヨッテ學ビ得ルノミ. 實際問題ニ携ハル讀者諸兄ハ,各專門方面ノ問題ニ對シテ,練習サレンコトヲ切望セザルヲ得ナイ.

(iv) ソレノミナラズ原文ノ如何カト思ハレル點,及ビ説明ノ簡潔ニ過ギルト思ハレル所ハ,原文ヲ全ク書キ變ヘタモノモ少ナクナイ. 原文ニ忠實タランヨリモ,寧ロ平明懇篤ナルコトヲ期シタノデアル.

以上ノ理由ニヨッテ,本書ノ量ハ大ニ增加シ,コノ書ノ約三分ノ一ハ原文以外ノ事項デアル[1]ノミナラズ,譯文,體裁トモ甚ダ原書ト離レタモノニナッタ. ソレガ爲メニ原著者ト譯者トノ責任範圍ヲ,區別シ難イコトニナリ

[1] 吾々ハ原著第一版 (1914) ニヨッテ,傍ラ H. Levy ノ英譯

Sanden, Practical mathematical analysis. London, 1923

ヲ參考シツツ譯シタノデアルガ,印刷校正ノ途中デ,原著第二版 (1923) ヲ手ニスルヲ得タ. 之ニヨッテ見ルト,第二版デモ大ナル變化ハナイシ,殊ニ英譯者ハ第二版ニ於ケル改訂ノ或ル數個所ヲ,原著者カラ豫メ通知サレテ,ソレヲ基ニシタ所ガアル樣ニ思ハレル.

併シ吾々ハ此ノ第二版ヲ標準トシテ,出來得ル限リ何等カノ場所デ補ッタガ,結局原著第二版ノ中デ此ノ譯書ニ收メ得ナカッタ事項ハ,

(i) 複素數ヲ自變數トスル有理整函數ノ値ノ作圖 (約三頁)

(ii) 調和解析ニ關スルへるまんノ方法 (約二頁)

(iii) 常微分方程式ノ數値的近似解法ニ關スル二三ノ注意 (約三頁)

ノミデ,其ノ他ハ極メテ微細ナ三四ノ點ニ過ギナイ.

併シコレ等ハ後日他ノ改訂ト相待ッテ,必ズ本書中ニ補足スル積リデアル.

終ッタ. コノ意味ニ於テ,本書ハ嚴密ナル飜譯トハ言ヒ得ナイノデアル.

元來一般論トシテ,原著ニ對スル譯者ノ不忠實ハ,常ニ吾々ノ蛇蝎視シテ居ル所デアル.[1] 而カモ本書ニ於テハ特ニ日本ノ事情ニ照ラシテ,讀者ヘノ親切ヲ第一ノ眼目トスレバコソ,敢テ斯樣ナ譯法ヲ試ミタノデアルケレドモ,此ノ點ニ就イテハ,原著者並ビニ讀者ニ對シテ,深クオ詫ビセネバナラナイ. 猶ホ不完備ノ點ハ,賢明ナル識者諸先輩ノ御垂教ヲ得テ,後日十分ナル改訂ヲ加ヘル積リデアル.

思ヘバ加筆推敲ノ跡,目マグルシキバカリナル原稿ニ加ヘテ,更ニ吾々ハ宛モばるざっくノ如クニ,其ノ"校正刷ノ上デ創作"シタコトガ屢々デアッタ. コヽニ秀英舍工場ノ諸君ニ對シテ,衷心カラナル感謝ノ意ヲ表シタイト思フ.

昭和二年十一月三日

小倉金之助

近藤鷲

[1] 日本ニハ,如何ナル點ヲ省略シタノカモ告ゲズニ,無責任ナル抄譯ヲ,飜譯ノ名ノ下ニ公ニサレタ譯書ガ,決シテ少數デハナイ. 金ト銀トノ混同ハ避ケタイモノデアル.

原著者ノ序[1]

1. 本書ニ於テ**實用解析學**ト稱スルハ,ふぇりっくす.くらいん[2]ガ嘗テ數學ニ於ケル行政的要素ト呼ンダモノヲ總括スル數學ノ一方面デアル. 本書ニ於テ說カントスル方法ハ,何レモ,數學上ノ問題ヲ解クニ,所要ノ結果ヲ最後ニ**數値的ニ**表示スル所マデ徹底サセルコトヲ,中心思想トスルモノデアル.

元來數學ノ問題ヲ解決スルニハ,ソレガ如何ナル點マデ到達スレバ,完了シタモノト見做シ得ルノカ. コノ疑問ニ對スル解答ハ,絕對的ニハ決マッテ居ナイノデアル. 例ヘバ微分方程式ニ於テハ,之ニヨッテ提供セラレタ問題ハ,方程式ノ解卽チ積分函數ガ存在スルコトガ證明サレタナラバ,ソレデ解決サレタノデアルト,見做スコトモ出來ヨウ. 現ニ理論力學ニ於テサヘ,攻究ノ對象ヲ支配スル微分方程式ノ構成ト,ソノ方程式ニヨッテ確カニ解ガ決定サレルトノ證明ヲ以テ,滿足スルコトガ稀デハナイ.

サテ微分方程式トシテハ,解ノ存在定理ニ關スル基本

---

(1) 原書ノ序文ニハ脚註ハ無イ. コヽニ附シタ脚註ハ,全部本叢書ノ編輯者ガ加ヘタモノデアル.

(2) Felix Klein (1849–1925). 獨逸ノ偉大ナル數學者デ,數學ノ諸分科ニ亘リテ大ニ貢獻シタ所アルノミナラズ,綜合統括ノ明察ト努力トニヨッテ,教育上ニモ異常ナル影響ヲ與ヘタ人デアル.

的ノ證明ハ,固ヨリ必要缺クベカラザルコトデアルガ,併シ解ソノモノヲ實際ニ定メルコトモ,之ニ劣ラナイ價値アル要求ト,認メネバナラヌト思フ. 玆ニ解ノ**實際的決定**ト呼ンダノハ,タヾ單ニ求ムル積分函數ノ性質上ノ論究ノミニ止マラズ,ソノ解ノ數量的表示ヲモ意味スルノデアル. 卽チ,例ヘバ獨立變數ノ適當ナ位置ニ於テ,求ムル所ノ積分函數ノ數値ノ表ヲ作ルトカ,又ハ求メテ得タ函數ヲ,然ルベキ坐標ヲ用ヒ,グラフトシテ圖的ニ表示スルトカ,サウ云フ種類ノ研究ヲ指スノデアル.

代數方程式モ亦,種々ノ方面カラノ觀察ノ對象タリ得ル好箇ノ例デアル. 併シ實用解析學トシテハ,ソノ根ヲ數値的ニ表示スル點ニ重キヲ置キ,コノ目的ニ叶フ種種ノ解法ヲ工夫シ,比較スルノデアル.

2. 所要ノ結果ヲ數値的ニ表示スルコトハ,實用解析學ノ最モ一般的ナ特質デアルガ,ソレト共ニ,實用解析學ノ重要ナ任務ハ,**結果ノ精密度**ヲ評價スルコトデアル. 而カモ此ノ評價問題ハ,多クノ場合,最モ困難ナ部分トシテ顯ハレテ來ル.

問題ガ與ヘラレタトキ,所要ノ結果ヲ求メル方法ハ,一般ニ,二種以上ニ及ブ. 故ニ自然玆ニ方法選擇ノ問題ガ生レル. 何レノ方法ガ所要ノ結果—必要ナ精密度ニ於テ正確ナ結果—ヲ,最小ノ時間ト勞力トデ與ヘ得ルカ.

コレガ方法選擇上ノ標準タル基本觀念デアル.

近時,圖的計算法ガ愈々多ク使用セラレル樣ニ成ツタガ,圖的方法ノ採否モ亦上ノ立場カラ判斷セネバナラヌ. 一般ニ作圖ニハ,ソノ精密度ニ一定ノ限界ガアル. 之ニ反シテ數値的計算ニヨル解析的方法ハ,十分多クノ桁數ヲ取扱フコトニヨリ,ソノ精密度ハ一般ニ,之ヲ如何程デモ,高メルコトガ出來ル. 然ルニ例ヘバ工科方面ノ諸問題デハ,左程高イ精密度ヲ必要トセズ,圖的方法ノ精密度デ十分ナモノガ少ナクナイ. 又中ニハ,ソノ與件トシテ提出セラレル値自身ガ,既ニ實驗或ハソノ他ノ關係カラ絕對的ノ正確ヲ豫期得ズ,從ツテ餘リニ高級ノ近似法ヲ適用シ,或ハ之ヲ繰返ズコトハ,單ナル時間ト勞力ノ浪費ニ終ルモノサヘアル.

斯ル場合ニハ,比較的簡單ナ手續ニヨツテ,而カモ結果ヲ全體的ニ求メ得ラレル圖的方法ガ,最モ有効ニ行ハレル.[1] 特ニ計算ニ入リ來ル個個ノ大サ或ハ函數値ガ,實驗上デ得タモノカ,或ハ特ニグラフデ與ヘラレタ場合ニハ,圖的方法ハ一層ソノ價値ヲ發揮スル.

[1] ほいってっかー Whittaker ハ「えでぃんばら大學數學實驗室ニ於ケル十數年來ノ經驗ニヨルト,同ジ時間デハ,數値計算ノ方ガ圖計算ニ優ル」ト述ベテ居ルガ,併シ夫レハ天文學ナドニ用ヒル,極ク精密ナ計算ニ就イテノ結論デハ無イカト思ハレル.

私ハ原著者ガ本書中デ繰リ返シテ說明スル樣ニ,大體論トシテハ,第一近似トシテ,一般ニ圖解法ガ優ル場合ガ多イト思フ. 其ノ後ニ必要アラバ,逐次漸近法トシテ,數値計算ヲ行フ方ガ,誤算ヲ防グ意味カラ見テモ,最上ノ策カト信ズル.

例ヘバ電氣工學家ガ時時誘導スル微分方程式ニハ,電場ノ强サト磁化ノ程度トノ關係ガ,所謂磁化曲線トシテ實驗的ニ與ヘラレタモノガアル. 此ノ種ノ微分方程式ニハ,圖的方法ガ最モ適スルノデ,圖的方法ニ比ベルト,他ノ方法ハ何レモ必然的ニ迂遠ナモノタラザルヲ得ナイ.

與ヘラレタ問題ニ對シテ,ソノ特性ニ最モ適合シタ方法ノ選擇.—ソレハ解決着手ノ第一歩ニ於テ行フベキモノデアルガ,コノ選擇ニハ最モ大ナル注意ヲ要スル.

3. 次ニ高等ナ數學敎育ニ於ケル實用解析學ノ位置ニ就イテ考ヘヨウ. 實用解析學ハ,少ナクトモ工科大學[1]ニ於テハ,明カニ,今日ヨリモ一層多ク,一層深ク敎授セラルベキモノデアル.[2] 技師ニ對スル數學敎育トシテハ,ソノ學習ノ間,手ニ道具ヲ與ヘ,而カモ之ヲ自由ニ實用シ得ル樣ニセネバナラヌ. 故ニ工科ノ數學敎授ニ於テハ,タヾ單ナル純粹數學講義ノミニ限ラズ,實用解析學ノ十分ナル敎授ヲ無條件ニ加ヘネバナラヌ. 又之ヲ課スルニ際シテモ,方法ヲ精選シテ,目的ニ最モ叶ツタ方法デ,練習ヲ完全ニ實行スル樣ニ,能ク工夫セネバナラヌ. 實用解析學ニ於ケル方法ト其ノ實際上ノ應用ニ際シテ最モ

[1] Technische Hochschule ヲ假ニ工科大學ト譯シテ置ク. 獨逸ノ大學ニハ工學部ヲ置カナイノデアル.

[2] 1927 年ノ今日デハ,獨逸ノ各工科大學デ實用解析學ヲ講ジナイ所ハ,殆ンド無カラウカト思フ.

肝要ナ,計算上ノ十分ナ確實性ト迅速性トハ,唯コノ種ノ練習ニヨツテノミ,養ヒ得ルノダカラ.

又計算尺,計算機,面積計等,計算上ノ補助用具ノ使用ニ關スル敎授モ,工科トシテハ大切デアル. 而カモ此等ノ敎授ハ,同時ニ,誤差論入門ノ適例ヲ供スルコトトナル. 計算用諸機械ノ用法ヲ,物理實驗室又ハ機械工作室等ニ於テ,初メテ授ケル樣ナ面白カラヌ敎授法ガ,ヤヤモスレバ,今日猶ホ認メラレル. コレハ誤ツタ敎授法デ,學生ハ實驗觀測等ノ中心問題ノ爲メニ,機械ソノモノノ理論ニ深ク沒頭スル餘地ガナク,結果不良ニ終ルカラデアル.[1]

實地計算ノ根底アル敎授ト精密度ニ關スル系統的ナ研究ハ,技師ノ基礎敎育ニ對シテ最モ必要デアル. 斯クシテコソ初メテ,實際ノ測定ニ際シテ,計算法徒ニ精細ニ失シテ,却ツテ迂遠ナ方法ニ陷入ル如キ,又結果ノ實際ノ精密度モ檢證セズシテ,徒ラニ計算ヲ進行スル等,普通工學者トシテ最モ陷入リ易イ誤謬ト弱點トカラ,救ハレルデアラウ. 又誤差論(最小自乘法)ノ利用ニ就イテハ,ヨク不安ノ念ヲ抱ク者デアルガ,之ハ簡單ナ多クノ場合ニ於テハ,最モ有効ニ利用出來ル計算法デアル. 故ニ數學敎育ノ裡ニ,此ノ種ノ恐怖心ヲ十分除去シ置クベキデアル.[2]

(1) 獨リ實用解析ノミデ無ク,一般ニ「應用數學ハ數學デアル トノ根本思想ガ,くらいん,るんげ其ノ他ノ人々ニヨリテ唱導サレテ居ル.

(2) 以上ノ議論ハ,獨リ工學ノ學生ノミナラズ,尙ホ廣ク自然科學ヤ社會科學及ビ其ノ應用ヲ學ブ學生ニ對シテモ,或ル程度マデハ言ヒ得ルト思フ.

4. 次ニハ,大學敎育上[1]實用解析學ヲ,如何ナル位置ニ認ムベキカノ問題ニ移ラウ. 此ノ問題ハ主トシテ將來ノ敎授者養成ニ關聯スルモノデアル.

實用解析學ハ,後日彼等ガ敎授上之ヲ利用スルコトアルカ. マタ,此等ノ計算法ハ初等敎育ノ中ニ主トシテ屬セシムベキモノデハ無イカ.

タトヒ此ノ最後ノ疑問ガ肯定セラレルトシテモ,實用解析學ニ於ケル內容方法ハ,ソノ後モ大學敎育ノ中デ(將來ノ敎授者ノ養成ニモ)必要ナ一敎科トシテ,之ヲ認メネバナラヌ.[2]

「純粹數學ニ堪能ノ士ハ,實用解析ノ理解ニ就イテ,餘リ困難ヲ感ジナイ. 故ニ實用解析ヲ大學ニ於ケル一敎科トシテ添加スルノハ蛇足デアル」トハ,屢々耳ニスル意見デアル. 然リ,純粹數學ヲ專攻スル學者ハ,實用解析學ノ理論ハ容易ニ解釋出來ヨウ. 實用解析ニ於ケル方法ノ適當ニ記述セラレタ個個ニ就イテ,之ヲ讀ミ,又各段階ノ必要ニ就テ說明ハ出來ヨウ. 然シ實用解析ハ,ソノ理論ノ理解ノミデ終ツテハ無價値デアル. 單ニソノ必要ト根據ヲ理解スルコトト,與ヘラレタ問題ヲ正確ニ,巧妙ニ實際ノ計算ヲ行ツテ,最後ノ結果ニ到達出來ルコトトノ

(1) コレハ數學專攻又ハ其レニ類スル學生ヲ指スモノト解釋スベキデアラウ.

(2) 試ミニ 1326 年ノ夏學期ニ就テ調ベルト,獨逸ノ諸大學ノ中デ,何等カノ應用數學モ敎授シナイ所ハ,殆ンド無イト見做シテ宜シイ. マタ特ニ實用解析學ヲ講ズル大學ハ,全體ノ三分ノ一ニ上ツテ居ル.

間ニハ,大ナル相違ガアル.

コノ差ハ實用解析ニ對スル熟練ノ有無ニヨッテ生レル. ソノ熟練ハ實習ニヨッテノミ獲得セラレルモノデ,ソノ獲得ハ實用解析ソノモノニ就イテ,實際ニ徹底的ニ從事スルコトヲ必要條件トスル. 又コレガ實行ニハ,多大ノ時間ト注意トヲ必要トシ,ソノ程度ハ理論家ノ想像以上デアル. 多數ノ學生ヲシテコノ種ノ計算ヲ行ハシメ,順序ヨク,間違ヒナク最後迄ヤリ通サシメルコトハ,實ニ驚クベキ難事デアル.[1]

多クノ學生ハ,問題ニ接シテ,方法,算式ニ關シ熟慮ヲ缺キ,結果モ之ヲ種々ノ紙片ニ不用意ニ認メ,順序,整頓,檢證モナク計算ヲ進メル結果,段段明瞭ヲ缺ク様ニナリ,遂ニハ全體ノ中心眼目スラ不明瞭トナルモノガアル. 計算者ハ,徒ラニ,數字ノ海ニ沈ミ;不快不安ノママ進行スル. コレ實用解析學ニ慣レナイ者ノ普通ニ陷キル狀態デアルガ,斯クノ如キ經過ノ下ニ立派ナ結果ガ顯レル筈ガナイ.

之ヲ救フ第一歩ハ,計算ノ結果ガ一目瞭然タル様ニ整頓スルコトデアル. 又絕ヘズ檢證ヲ行フコトデアル. コノ絕ヘザル檢證ハ,老練ナ計算家ニデモ缺クコトノ出來ナイモノデ,而カモ之ヲ巧妙ニ行フニハ相當ノ研究ヲ

(1) 乞フ佛蘭西ノ數學者ぞれってぃノ嘆ズル所ヲ聽ケ. 「メートル法ノ祖國ニ於テ,而カモ一世紀ニ亘ッテ使用サレタ後デモ,資格試驗ノ受驗者ハ,小數ガ何デアルカ,有意義ノ數;ガ何デアルカヲ知ラヌノデアル,....」

必要トスル.

次ニ大切ナコトハ,計算家トシテノ十分ノ自信ヲ與ヘルコトデアル. 卽チ彼等ハ,生キタ計算機,又ハ生キタ思考機械トシテ,算式ノ與ヘラルルママニ,單ニ計算ヲ行フノデハナク,恒ニ計算ノ大局ヲ明察シ,算法ヲ完全ニ支配スル力ト餘裕ヲ備ヘテ居ラネバナラヌノデアル. コノ種ノ自信ト整頓力トハ,實用解析ノ實習ニヨッテ,能ク養ハレルモノデアルガ,整頓ト自信ニ關スルコノ種ノ練習中ニ,實用解析學ノ重要ナ教育的價値ヲ含ンデ居ル. 勿論純粹數學ニ於テモ,コノ種ノ教育的要素ノ存在ヲ認メルコトハ出來ル. 然シソノ場合,實用解析學ニヨッテ得ラレル程ノ自信ト整頓力ヲ獲得スル學生ハ,至ッテ少數デアル.[1]

故ニ實用解析學ハ,將來ニ於ケル教授者ニ取リテノ實用價値ヲ考ヘル迄モナク,大學ノ一教科トシテ十分ナル存在ノ理由ヲ有スル. 況シテ應用數學ハ本書ニ於テ說ク所ノモノ以外,多方面カラノ有益ナ事柄ヲ含ンデ居ル. 而シテ單ニ數學的事實ノ理解ト云フ點ノミカラ言フテモ,之ヲ應用數學ノ様ニ或ハ數値的ニ或ハ圖的ニ誘導スル方ガ,理論數學ノ様ニ之ヲ單ナル理論的陳述ニヨッテ授ケルヨリモ,一層深イ理解ト印象トヲ附與スルモノデ

(1) 併シ斯様ナ點ヲ餘リニ高調スルコトハ,果シテドウ云フモノカト疑ハレル. 私ハ衷心カラ,單ナル想像デナイ,實證的ナ研究ノ結果ヲ知リタイモノデアル.

アル.[1]

斯クシテ大學ニ於テ,應用數學ハ純粹數學ノ對抗者デ無イノミナラズ,ソレハ純粹數學ソノモノノ重要缺クベカラザル補充トシテ,之ヲ課スベキモノデアル.[2]

5. 今日中等諸學校ニ於テ,四則計算,對數計算以上ニ,數値的計算法ヲ課スベキカ,又圖的方法ノ利用ヲ授クベキカ. コレハ卒直ニ言ヘバ,未ダ一ツノ問題デアル.[3] 然シ吾人ノ確信カラ言フト,コノ問題ハ無條件ニ可決セラルベキモノデアル. 今日學校ノ卒業者ニ,彼等ガ受ケタ數學教育ニ就イテノ回想ヲ求メル時,苦イ追憶ヲ以テスルモノガ少ナクナイ. 之ハ數學教育ガ理論ニ偏シタ結果デアッテ若シ中等諸學校ニ於テ,數値計算,特ニ暗算ニ就イテ徹底的ノ練習ヲ與ヘ,之ヲ彼等ノ實生活上ヘノ土

(1) 獨リ其レノミデハ無イ. 實際ニ,自然科學,社會科學又ハ其ノ應用上ニ顯ハレル問題ハ,形式的ナ理論數學デハ解キ得ナイコトガ多イノデアル. (例ヘバ任意ニ畫カレタ閉曲線ノ面積ヲ求メルコトノ如キ,ソノ最モ簡單ナ一例ニ屬スル). 實用解析學ガ生レザルヲ得ヌ必然ノ理由ガ,實ニ玆ニアルト思フ. **理論數學以前ノモノ**ガ,人間ニ取ッテ根本的ニ必要ナルコトヲ忘レテハナラナイ.

實用解析學ガ直觀的分子ヲ多ク含ムコトハ,決シテ斯學ノ恥辱トスベキ所デハナイ. 直觀コソ發明ノ母デアル.

(2) 理論數學ト應用數學トノ關係ヲ,實際ノ數學上ノ事項ニ就イテ講義シタ

Klein, Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf Geometrie, Leipzig. 1902. (譯版ガ近ク刊行サレル筈)

ハ,興味深イモノデアル.

(3) 1927 年ノ今日デハ,モハヤ問題デハアルマイト思フ. マタ譯者ノ序文ノ脚註ニ附セル,1917 年度ノぷろいせん中等教員檢定試驗規定ヲ一讀セラレタイ.

產トシテ與ヘテアツタナラ,斯樣ナ苦イ追憶カラ免レ得タラウト思フ.

マタ假令數學ノ教授ガ理論的訓練ニ重キヲ置ク場合デモ,實用的方面ヲ極小ニシテハナラヌ. 方法ノ如何ニヨツテハ,理想主義ト實用主義トハ,之ヲ調和一致セシメルコトガ出來ルカラ. 卽チ實用解析學ニ於テハ,恒ニ與ヘラレタ問題ニ對シテ,何レノ方法ガ最モ適スルカ,之ガ先ヅ要求サレル. 又結果ニ就イテハ,如何ナル精密度ガ保證サレルカガ問題トナル. コノ種ノ問題ノ解決ハ,實ニ理論的思考ノ好資料ニアラズシテ,果シテ何デアラウカ.[1] 殊ニ適當ナ問題ヲ選ブコトニヨリ,各ノ場合ニ就イテ生徒各自ノ判斷ニヨリテ,各自ラ問題解決ノ方針ヲ定メ,各自ラ其ノ解決ニ向ッテ努力シ思考セシメルコトガ出來ル. 斯クスルコトニヨツテ,彼ノ魂ヲ破壞スル形式主義ヲ,學校數學ノ他ノ領域ニ於テヨリモ,尚ホ一層確實ニ追ヒ出スコトガ出來ルト思フ.

普通教育ニ於テ,計算尺ノ使用法及ビソノ應用ヲ加ヘルコトハ,決シテ有害トハ思ハレナイ. ソノ精密度ハ,生徒ガ物理又ハ測量等デ要求セラレル問題ノ精密度ニ對シテ十分デアル. ソレノミナラズ計算尺ノ使用ニハ,對數表ヲ使用スルヨリモ,尚ホ深イ思慮ヲ要スル. 而シテ

(1) 少シク深ク實用解析學ノ本質ヲ考ヘ見ルガ宜シイ. ソレハ決シテ單ニ,問題ヲ機械的ニ解ク方法デハ無イノデアル.

其レヲ使用シテ居ル間ニハ,最モ自然ノ形ニ於テ,函數觀念,ソノ圖的表示及ビ關係誤差ナル,重要ナ觀念ヲ構成セシメル樣ニ成ル. ソノ好教材タルコト,實ニ明デアル. コノ場合,教授者ハ計算尺ノ使用法ニ就イテ,十分ニ通ジテ居ラネバナラヌコトハ,言フマデモナイ.

中等學校ニ於テハ,大學ニ於ケルト同樣ニ,教授上純粹數學ト應用數學トヲ峻別セズ,互ニ融合シタル一體トシテ,授クベキコトハ勿論デアル.

6. 最後ニ,本書ニ於ケル內容ノ選擇及ビ排列ノ順序ニ就イテ一言シヨウ. 私ハ內容方法共ニ,成ルベク一般數學教育ニ於テ採用シ得ル樣ナモノヲ,多ク選定スルコトニシタ. 實驗函數ノ取扱法ニハ多クノ頁ヲ費シテアルガ,之ハ工科大學ノ學生ノ必要ヲ思ッタ爲デ,ソレ等ノ學生ニ對シテハ,本書ハソノ儘彼等ノ數學教科書ノ補足トナリ,又實用方面ノ講義トナル樣ニト考ヘタ爲デアル.

又圖式靜力學ハ,圖的微分積分法ノ起源ト成ッタモノデアルガ,本書ニハ之ヲ省略スルコトニシタ. 圖式靜力學ハ應用數學ノ中デモ亦,一種特別ナモノデ,其處ニ用ヒラレル方法ハ一般性ヲ缺イテ居ルカラ,此等ハ將來ノ別冊トシテ改メテ說カレルト思フカラデアル.

又成ルベク範圍ヲ限定スル考ヘカラ,圖的方法トシテハ最モ興味アル一方面タル,計算圖表學ニ就イテモ,眞ニ

僅ニ,之ニ觸レルニ止メタ. 計算圖表學ニ就イテ通ゼントスル讀者ハ,どかにゅー[1]ノ著作ヲ讀マレルガ宜シイ. 其處ニ十分ナル參考論文ヲ見出スコトガ出來ヨウ.

卷末附錄ノ參考書及ビ論文ハ,更ニ進ンデ問題ヲ求メ細目ニ亘ッテ一層深ク研究セントスル讀者ノ便宜ノ爲ニ揭ゲタモノデアル.[2]

又歷史的方面及ビ發見ノ先權上ノ研究[3]ハ,之ヲ除外シテ取扱ハナカッタ. 而シテ理解ヲ容易ナラシメル點ニ,專ラ力ヲ注イダ積リデアル.

---

(1) Maurice d'Ocagne (1862—現存). 佛蘭西ノ土木技師及ビぱり工藝大學教授ニシテ,有名ナル實用數學者. 共線圖表ノ創見開拓以外ニモ,理論及ビ實際技術方面ノ貢獻頗ル多ク,現代ニ於ケル佛國實用數學ノ代表者デアル.

(2) 原書卷末ノ參考書ニハ古イモノガ多クマタ參考論文ノ特殊ノ雜誌ニ載セラレタルモノ少ナクナイ. 從ツテ本邦ニ於テハ一般人ガ手ニ入レ難イモノガアル. 又原書第二版ニモ英文ノ良書ガ少ナイ. 由テ譯書ニ於テハ,原書ニ拘泥セズ,適當ト認メル單行書ノミヲ列擧スルコトニシタ.

(3) 古代カラノ數學史ヲ詳シク取調ベルニハ,

M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik

デモ參考スルヨリ致シ方ガナイガ,本書ノ目的自體カラ云ヘバ,唯單ニ知ル丈ケデハ,ソレハ寧ロ無用ノ業デアラウ. 吾々ハ「球面三角形ノ圖的解法ハ大體ニ於テ,紀元前 130 年頃ひっぱるくすニ創マル」トカ,ろーま人ノ算盤ノ使用法トカ,「平方根ノ計算ノ第二近似值(第 63 頁ノ方法)ハ紀元 80 年頃へろんノ發見ニ係ル」トカヲ知ッテ,一種獨特ノ興味ヲ感ズルケレドモ,唯ソレダケデハ本書ノ目的以外ノコトデアル.

思フニ吾々一般ノ學徒ガ,數學史ヲ通ジテ眞ニ學バネバナラヌコトハ,——例ヘバ小數,對數,二項定理ナドノ創見カラ——數學思想發展ノ徑路ヤ發見ノ動機ヲ通ジテ,吾々自ラヲ成長サセ革新サセル所ニ無ケレバナラナイ. 特ニ,成立ノ日新ラシクシテ而カモ根底極メテ古イ實用解析學ニ於テ,コノ感一層深カラザルヲ得ナイノデアル.

併シナガラ近代ニ入ッテカラデモ,實用解析學ノ歷史ハ,之ヲ調査スルコト極メテ困難ナ樣ニ見受ケラレル. 現ニ本書ノ中ニ顯ハレタル事項デモ,例ヘバ

(i) 方程式ノ解法ニ就イテ. ほーなーノ方法ハ,13 世紀ニ於ケル支那ノ數學書ニアリトイヒ,マタ歐洲デモ既ニるっふぃにノ知レル所デアッタトイフ. ぐれーふぇノ方法ハ

本書ノ内容ハ,るんげ先生[1]ガげってぃんげん大學ニ於テ「數値計算及ビ圖計算」ナル題目ノ下ニ講義サレタ,先生一流ノ,應用數學ニ關スル授業ノ一部分デアル. 此等ノ方法ノ大部分ハ,樞密顧問官,教授るんげ先生カラ,自分ガ直接習ツタモノデアルコトヲ特ニ斷ツテ置キタイ.

私ハ尊敬スル同先生ニ對シ,心カラナル感謝ノ意ヲ茲ニ表シタイト思フ.

1913 年 11 月 げってぃんげんニ於テ

ほるすと・ふぉん・ざんでん

既ニだんどらん及ビろばちぇふすきー,否,18 世紀ニうぇーりんぐノ見出シタ所ダトイフ.

(ii) 補間公式ニ就イテ. にうとんノ公式ハ,ソレヨリ以前ニぐれごりーノ發見ニ係ル. すたーりんぐ,べっせる,がうすノ公式ハ其ノ實にうとんノ見出シタモノデアル. えヴぇれっとノ公式ハらぷらーすノ書中ニアル.

斯樣ナ例ハ他ニイクラモアル. マタ積分ノ圖解法ヲらいぷにっつマデ溯ラセタリ,共線圖表ヲめーびうすニ歸スル學者モアル. 計算尺ノカーソルハ,今日デモ其ノ發見者ヲ定メ難イ.

コノ譯書デハ目次ト參考書目ノ所ニ 普通呼バレテ居ル研究者ノ名ヲ,少シヅツ載セテ置イタ.

[1] Carl Runge (1856—1927). 獨逸ニ於ケル應用數學ノ父ト呼バレタ人,外ニ函數論及ビ實驗物理學上(特ニスペクトルニ就イテ)ノ貢獻モアル. 1904 年以來げってぃんげん大學デ實用數學ヲ講義シタガ,ソノ內容ハ「圖計算及ビ數値計算」,「畫法幾何學」及ビ「誤差論」ニ關スルモノガ主デアツタ.

目　次

第二章 計算尺及計算機

第三章 有理整函數

第二節 圖解法

第四章 有理整函數ノ補間法. 補外法

第一節 補外法

第二節 補間法

第三節 微分積分ニ用ヒラレル公式

第五章 一般函數ノ補間法 數値計算ニヨル微分積分法

第一節 任意函數ノ補間法

第二節 數値計算ニヨル微分積分法

第三節 階差ヲ含マナイ近似式

第六章 機械的積分法

第一節 しんぷそんノ法則

第七章 作圖ニヨル微分積分法

第八章 實驗函數ノ解析的近似法

第二節　數値計算ニヨル積分法

附　　錄

附錄第一　計算圖表

第一節　共點圖表

第二節　直線坐標

第三節　共線圖表(どかにゅー)

第四節　四ツ以上ノ變數關係ノ計算圖表

附錄第二　積分ニ關スル機械

第一節　面　積　計

第二節　積　分　機

第三節　調　和　解　析　器

附錄第三　雜問題及ビ補充

近似計算ノ誤差

—(目次終)—

第一章

數計算及圖計算ノ總說

第一節　數計算實用上ノ諸規則

長イ間純粹數學ニ專ラデアツタ學生ガ,初メテ,澤山ノ算術的計算ヲ必要トスル特殊ナ問題ニ出逢フト,多クノ場合,一種特別ノ不快ト困難トヲ覺エルノガ普通デアル.

コレ數値的計算ニハ誤謬ヲ伴ヒ易ク,大ナル數ヤ,近似値ニ伴フ不正確ヤ,取扱ヒノ困難ガ生ム特別ナ感ジデアツテ,甚ダシキハ,求メテ得タ結果ノ正否ニ就イテサヘ,自信ノナイコトガアル. コレ實用數學ニ於テノミ,現ハレル特異點ノ一ツデアル.

コノ不安ヲ除ク一ツノ方法ハ,計算法ソレ自身ヲ能ク實習スルコトデアルガ,コノ誤謬ヲ除クニ就イテ,特ニ初學者ニトリテ,必要ナ規則ヤ,心得モ少クナイ. 所謂數計算實用上ノ諸規則ガソレデアル.

規則ノ第一ハ計算方法ノ選擇デアル. 同一ノ値ヲ定メルノニモ,ソノ計算方法ハ一ツトハ限ラナイ. 多ク數

種ニ及ブ. 又計算方針同一ナリトモ,ソノ進行ノ順序ハ必ズシモ唯一デハナイ. 計算ヲ助ケル補助ノ機器ニモ色色アル.

故ニ何レノ方法,何レノ順序,何レノ器具ヲ採用スルカハ計算者ノ自由デアツテ,算術的計算,特ニ實用數學ニ於テハ,コノ種ノ選擇ニ特別ノ考慮ガ要ルノデアル. コノ選擇ヲ誤ルト,結果不正確トナルハ未ダシモ,貴重ナ時間ト勞力ノ浪費ニ終ルコトサヘアル.

ドンナ方法ヲ選べバ,必要ナ程度ニ於テ正確ナ結果ヲ得,而モ最モ簡易迅速ニ得ラレルカ.

コレガコノ場合ノ選擇ヲ決定スル中心問題デアル. 但シ茲ニ簡易迅速トハ,ソノ方法熟達上ニ現ハレル難易ノ意デハナイ. 何レノ方法モ十分實習ヲ積ンデ自由ニ之ヲ應用シ,利用シ得ルモノトシテ,比較シタ上ノ優劣ノコトデアル.

單一ナ實行デハ,餘リ問題ニナラナイ補助的一計算デモ,同樣ノ計算ガ一連トナリ,度度繰返サレル場合ニハ,重大ナ影響ヲ及ボス樣ニナルカラ,ソノ選擇ヤ,取扱ヒト雖モ等閑ニ附シテハナラヌ.

如何ナル數計算ニ就テモ計算各段ノ結果ヲ締リノアル排列ニヨツテ表サネバナラナイ. ソレニハ方眼紙上ニ書クヲ便ナリトスル. 例ヘバ一函數 $y=f(x)$ ノ種種ノ値ヲ求メル場合, x ノ値ト,之ニ對應スル函數値 $f(x)$ ノ

値ヲ列記セズ, $f(x)$ ノ性質ト,計算方法トカラ考ヘテ,ソノ計算ヲ幾段カニ分段シ,ソノ結果ヲ夫夫適當ノ位置ニ排列シテ認メ行クガヨイ. 斯クスルコトニヨリ,勞力ト時間ノ節約ヲハカルコトガ出來,又檢證ヲ行フ上ニ便宜デアリ,得策デアルカラデアル. 故ニ段階ノ區切法,及ビ結果ノ整頓法,記入法ニ就イテハ相當ノ工夫ヲ必要トスル. 補助計算ナリトテ別紙ニ無方針ニ認メルコトハヨクナイ. 成ルベク,ソノ結果ヲ主要計算ノ結果ト共ニ同一紙面ニ認メ,所定ノ場所ニ記入スルガヨイ. 若シ止ムナク別紙ニ認メタ場合ニハ,之ヲ貼付シテ締リアル一體ノモノニスル程ノ用意ガ望マシイ.

例ヘバ函數 $y=x^2\sqrt{1.29-x^5}$ ノ値ヲ計算スルニハ,次ノ如キ整頓法デ,函數値ノミナラズ,途中ノ諸結果ヲモ明記スルガ,得策デアル.

x	x^2	x^3	x^5	$1.29-x^5$	$\sqrt{1.29-x^5}$	$x^2\sqrt{1.29-x^5}$

コノ數値計算ハ,計算補助機トシテ計算尺ヲ用フルモノトシテノ方案デアルガ,若シ對數表ヲ利用スルノナラバ,更ニ多クノ欄ヲ設ケル必要ガアル.

又差 $1.29-x^5$ ノ計算ノ如ク,同一數 1.29 ヲ繰リ返シ使用スル場合ニハ,移動可能ナ別ノ紙片ニ此ノ數ヲ認メ,之ヲ移動シツツ減法ヲ行フ方ガ便デアル.

數計算ニ瞩シ,次ニ注意スベキコトハ,所要ノ値ノミナラズ,途中ニ於テモ,恒ニ檢證ヲ必要トスルコトデアル.

檢證ノ方法ハ一定シナイ. 問題ノ性質ノ異ルニ從ツテ,檢證ノ方法モ亦變ツテ來ル. 計算ノ途中,或ハ最後ニ於テ,到達スベキ既知ノ特殊値アルガ爲メニ,正確ナ檢證ヲ簡單ニ行ヒ得ラレル場合モアリ,然ラザル場合モアル. 又方程式ノ根ノ如ク,求メ得タ結果ソレ自身ニ就イテ正否ヲ定メ得ルモノモアレバ,然ラザルモノモアル.

又獨立變數ノ値ガ等間隔ニ與ヘラレタ場合,函數値ノ正否ヲ一次ノ階差(或ハ高次ノ或階差)ノ變化ガ平滑デアルカ否ヤニヨリテ,決定セラレル(普通多クノ場合ニ於ケル樣ニ)コトモアレバ,然ラザルモノモアル.(1)

---

(1) 數値表作製ニ關スル注意: 一次的補間法ノ誤差ノ評價.

數値表作製ニハ, 初メヨリ所要ノ間隔ニ取リテ, 函數値ヲ求メズ, 先ヅ大間隔ノ諸點ニ於テ, 之ヲ求メ, 次ニ, ソノ中間ノ諸點ニ於テ, 値ヲ定メルト云フ順序ヲ取リテ, 間隔ヲ所要ノ大サニ縮少スルガ安全ナ方法デアル. 然ラザレバ誤差ニ, 誤差ヲ積ンデ, 意外ノ大誤差ヲ引キ起ス恐レガアル. 又此ノ順序ヲ踏ムト, 計算ノ進行ト同時ニ, 求メ得タ諸函數値ノ檢證ヲ行ヒ得ル便宜ガアル.

例ヘバ $x=-1.00,\ -0.99,\ -0.98,\ \ldots,\ 0.00$ ノ諸點デ, $f(x)$ ノ値ヲ求メテ $f(x)$ ノ表ヲ作ラントセバ, 先ヅ

$$x=-1.00,\quad -0.90,\quad -0.80,\ \ldots$$

ノ諸點デ, $f(x)$ ノ値ヲ求メ, 次ニ此等ノ諸點ノ中間ニ位スル他ノ諸點ノ函數値ヲ求メテ, 最初ノ目的ヲ達スル手順ヲ取ルガヨイ.

尙ホ, コレニ關聯シテ注意スベキコトハ, 斯ル場合函數値ヲ, 之ガ決定ニ必要ナル公式, 或ハ根本條件カラ求メル方法ヲ, 必ズシモ守ル必要ノ無イコトデアル. 重要デ, 便宜ナ諸點デハ, コノ本道ヲ踏ンデ, 函數値ヲ求メルガ, ソノ中間ノ諸點デハ, 補間法ヲ利用シテ決定スルノガ, 簡便デ而モ有效ナコトガ少クナイコトデアル.

コノ場合例ヘバ一次的補間法 (後ノ第四章參照) ヲ採用シタ時ハ, x_1, x_2 ヲ函數値 $f(x)$

斯クノ如ク檢算ノ方法ハ色色アルガ,何レノ場合ニ於テモ檢證ハ恒ニ行フベキモノデアル. 唯一回ノ計算ニヨツテ定ツタ結果ヲ直ニ採用スルガ如キコトハ,眞ニ愼ムベキコトデアル.

前後計算ノ方法ヲ變更シ,補助ノ器具ヲ改メ,又ハ計算スル人ヲ交換スルコトモ,檢證實行ノ手段デアル. 計算尺ヲ用ヒテ得タ結果ヲ,對數表ヲ利用シテ結果ノ正否ヲ確メル樣ナノハ,ソノ一例デアル.

計算繼續ノ程度モ,一般ニ計算ノ面倒ナ實用數學ニ於テハ,時間ト勞力ノ節約上大ニ注意スベキコトデアル.

ノ知レ居ル, 而モ相隣レル二點トシ, x ヲ領域 $(x_1,\ x_2)$ 內ノ點トセバ, $f(x)$ ノ代リニ

$$f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}[f(x_2)-f(x_1)]$$

ノ値ヲ以テ代用スルモノデアルガ, 吾々ハ

$$\frac{(x_2-x_1)^2}{8}|f''(\xi)|\qquad (x_1\leqq\xi\leqq x_2)$$

ノ値ヲ表ニ於テ許サレタ誤差ノ限界ト比較セネバナラヌ. [但 $f''(x)$ ハ $f(x)$ ノ第二導函數]

若シ此ノ値ガ限界ヨリ小ナラバ, 補間法ニヨリテ得タ結果ハ所要ノ精密度ノ範圍內ニ於テ正確デアルガ, ソノ値ガ限界ヨリ大トナルト, コノ保證ガ得ラレナイカラデアル.

猶ホ $\dfrac{(x_2-x_1)^2}{8}|f''(\xi)|$ ノ代リニ $\dfrac{(x_2-x_1)^2}{8}|f''(x)|$ ヲ用ヒテモ普通ノ場合ハ差支ナイ.

コノ證明ハ後ニ第五章第一節ノ脚註デ與ヘラレルガ, 今コヽニ其ノ一例トシテ, 常用對數ヲ比例部分ノ法則 (卽チ一次的補間法) デ計算スルトキノ誤差ノ限界ヲ求メヨウ.

コノ場合ニハ $f(x)=\log_{10}x$. 今 a ト $a+1$ トノ間デ比例部分ノ法則ヲ利用スルトセバ,

$$f''(x)=-\frac{0.43429}{x^2},\quad x_1=a,\quad x_2=a+1,\quad a<\xi<a+1$$

ナル故, 誤差ノ絕對値ハ次ノ値

$$\frac{(x_2-x_1)^2}{8}\cdot\frac{0.43429}{\xi^2}=\frac{0.43429}{8}\cdot\frac{1}{\xi^2}<\frac{1}{16a^2}$$

ヨリモ小デアル. 普通ノ五桁ノ表デハ a ガ 1000 ヨリモ大キイカラ, 誤差ハ $\dfrac{1}{16\times10^6}$ ヨリモ小サイ.

實用數學ニ於テハ,與ヘラレル諸値ガ既ニ多クハ近似値デアル. 更ニ之ニ計算ヲ施ス時ハ,一般ニ誤差ハ更ニ大トナルモノデアル. 故ニ如何ナル程度迄計算ヲ繼續スベキカハ,大イニ心スベキ問題デアル. 然シ此種ノ問題ノ決定ハ案外困難デアル.

一般ニ,實用解析ニ於テ,求メ得タ結果ガ正確ニ所要ノ條件ヲ滿足スルガ如キハ,稀ニ見ル現象デアルガ,斯ル場合,ソノ精密度ハ,如何ニシテ之ヲ定メルカ.

例ヘバ,方程式 $\varphi(x)=0$ ノ根ヲ求メテ x_1 ナル値ヲ得タ場合,形式的ナ,一般的ナ解法ノアル場合ハ別トシテ,一般ニ $\varphi(x_1)=0$ トハナラズシテ, 0 ニ近キ或値トナル. ケレドモ, $\varphi(x_1)$ ノ絕對値ヲ以テ直チニ,根 x_1 ソノモノノ誤差ノ程度ヲ示スモノト,簡單ニ決定スルワケニハ行カヌ.

$\varphi(x_1)$ ノ値ハ x_1 自身ノ不精密ナ爲メカ, 又ハ $\varphi(x_1)$ ナル値ヲ x_1 ヨリ出發シテ計算スル際ニ,增大又ハ減少ヲ來タシタモノカニ就テ熟考セネバナラヌ. $\varphi(x_1)$ ノ計算ニ計算尺ノ代リニ乘算機ヲ利用シタラ,更ニ小ナラシメ得タ値カモ知レヌ. 極端ナ場合ニハ x_1 自身ハ正確ニ $\varphi(x)=0$ ノ根ト成ツテ居ルガ, $\varphi(x_1)$ ヲ計算スル途中ニ於テ,計算ノ誤リ或ハ端數ノ處分等ノ爲メニ,遂ニ零ナラヌ或値ト成ツタカモ知レナイ. 故ニ誤差ノ程度ヲ決定スルコトハ容易デナイ.

一般ニ斯ル場合ノ誤差ノ評價ニハ,誤差ソレ自身ヲ考

ヘルヨリ,所謂百分比誤差,或ハ關係誤差 (Relative Fehler) ヲ考ヘル方ガ適切デアル. 卽チ $y=f(x)$ ノ誤差ヲ Δy デ示セバ, $\frac{\Delta y}{y}$ 卽チ $\frac{\Delta y}{f(x)}$ ナル比ノ値ヲ x ナル點ニ於ケル $f(x)$ ノ**關係誤差**ト云ヒ,此ノ比ノ値ヲ % (プロツェント)デ表シタ數値ヲ**百分比誤差**ト云フノデアル.

二ツノ近似値ノ積或ハ商ノ關係誤差(ノ絕對値)ハ,大キクトモ,ソノ近似値ノ各ノ關係誤差(ノ絕對値)ノ和ニ等シイ.

コレハ關係誤差ニ關スル一定理デ,關係誤差ノ評價上重要ナ關係デアル.

實際 $z=xy$ ナラバ

$$d(\log_e z)=\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}.$$

又 $z=\frac{x}{y}$ ナラバ

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}.$$

故ニ何レノ場合ニモ,ソノ絕對値ヲ取レバ

$$\left|\frac{dz}{z}\right| \leqq \left|\frac{dx}{x}\right| + \left|\frac{dy}{y}\right|$$

トナリ,上ノ關係ハ眞デアル.

但シ,殆ド等シキ二數ノ近似値ノ差,又ハ之ニ關係アル計算ニ於テハ,差ノ誤差ノ關係的値ハ著シク大トナルカラ,關係誤差ヲ用フルニ就イテハ相當ノ注意ヲ要スル[1].

[1] 尙ホ近似値ノ計算ニ就イテハ, 卷末附錄「雜問題及ビ充補」ヲ見ヨ.

大凡計算家ニトリテ最モ嚴格ナ規定ハ,精密度ノ不明ナ數值ヲ容易ニ書キ下スベカラズト云フコトデアル.小數點以下何位迄正確ナルカ,或ハ誤差ノ限界ノ如何ヲモ知ラデ,容易ニソノ值ヲ宜シテハナラヌコトデアル.

誤差ノ限界見積リ上,特ニ計算尺ヲ用ヒル場合ニ,便宜有効ナノハ,值ハ之ヲ小數デ表ハシ,n ヲ正又ハ負ノ整數トシ,10^n ヲ乘ジテ,有効數字ノ部分ハ小數點以上ハ成ルベク一桁,多クトモ二桁トナル樣ニ表示スルコトデアル.

例ヘバ　　2723　ハ之ヲ　2.723×10^3　トシ

0.00037　ハ之ヲ　3.7×10^{-4}

ト記述スル樣ニ.

斯ク表示スルト,大サノ相對關係,所謂**大サノ階級**ハ10ノ指數 n ノ值ニヨリ之ヲ一目瞭然タラシメ得ルカラデアル.

例一　屋根ヲ支持スル垂直ノ柱ニテ,高サ $h=2.65$ 米ナルモノアリ.ソノ足ヲ,地上ニテ,垂直ノ位置ヨリ5糎ダケ移動スルトキハ,ソノ結果,屋根ハ何程降下スルカ.

[解]　移動量ヲ x 糎トスレバ,屋根ノ降下量ハ

$$h-\sqrt{h^2-x^2}$$

ニテ與ヘラレル.但シコノママデ $x=5$ 糎ト置イテ,降下量ヲ計算スルノハ不便デアル.故ニ計算ニ便ナル樣,先ヅ $\sqrt{h^2-x^2}$ ヲ展開スルト

$$\sqrt{h^2-x^2}=h\left(1-\frac{x^2}{h^2}\right)^{\frac12}$$

$$=h\left\{1-\frac12\left(\frac{x}{h}\right)^2-\frac18\left(\frac{x}{h}\right)^4-\cdots\cdots\right\}.$$

今小ナル數 $\frac{x}{h}$ ノ四次以上ノ項ヲ省略シ,降下量ヲ y 糎トシテ表ハスト

$$y=h-h+\frac{h}{2}\left(\frac{x}{h}\right)^2=\frac12\frac{x^2}{h}$$

$$=0.047169\ 糎.$$

例二　前例ニ於テ展開式ノ項ノ省略ヨリ起ル誤差ノ限界如何.

[解]　省略部分ノ絕對值ノ最大ナルモノハ,省略部分ノ第一項

$$\frac18\left(\frac{x}{h}\right)^4h$$

デ,ソノ值ガ誤差ノ大サヲ支配スルヲ以テ[1],ソノ值カラ限界ヲ評價スルト

$$\frac18x\left(\frac{x}{h}\right)^3=\frac58\left(\frac{5}{265}\right)^3<\frac58\left(\frac{1}{50}\right)^3,$$

卽チ　$$\frac18x\left(\frac{x}{h}\right)^3<5\times10^{-6}.$$

故ニ y ノ值ハ　$y=0.04717$ 糎

トシテ處分スルガ適當デアル.

例三　第一例ニ於テ移動量 x ノ值ガ近似值デアツテ,10% 以下ノ關係誤差ヲ有スルモノトスルト,y ノ值ハ如何樣ニ決定スベキモノカ.

[解]　$y=\frac{x^2}{2h}$ ト置ケルノダカラ

$$\frac{dy}{y}=2\frac{dx}{x}.$$

故ニ y ノ關係誤差ハ $10\%\times2=20\%$ 以下トナル.由テ y ノ值トシテハ小數第三位ハ曖昧トナル.

故ニ　$y=0.05$ 糎

ト處分スルガ適當デアル.

問　題

1.　函數 $\frac{e^{-x^2}}{x^2+1}$ ノ值ヲ,$x=0.5$ カラ $x=1.0$ 迄ノ間,0.05 ノ間隔デ計算シ,以テソノ表ヲ作ル場合,最モ整頓シタ計算法如何.

2.　變域ハ $x=0$ カラ $x=1$ 迄,間隔ハ 0.05 ナリトシテ,等間隔ノ諸點ニ於テ函數 $f(x)=(1.28-0.8x^2)^{\frac12}$ ノ值ヲ求メテ,表ヲ作レ.

---

[1] コノ論法ハ今後モ屢々用ヒラレルガ,嚴密ニ言ヘバ之ハ正シクナイ.微分學ニ於ケル平均值ノ定理ヲ應用シテ,之ヲ取扱フノガ正シイ方法デアル.

尙ホ,此函數ヲ近似的ニ,

$$f(x) = \sqrt{1.28}\,(1-0.31x^2)$$

デ表ハストキ,コノ變域內ノ最大ノ關係誤差ヲ評價セヨ.

3. 函數 $\dfrac{\sqrt{\sin x}}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}$ ノ表ヲ $x=0$ カラ $x=3$ 迄ノ變域ニ於テ作製シ,ソノ函數ノ極大値ヲ求メヨ.

又ソノ點ニ於ケル x ノ値ヲ關係誤差ガ5%以內ナル樣ニ決定セヨ

4. $x=0$ カラ $x=1$ 迄ノ變域ニ於テ,函數

$$y=\sqrt{x(1-x^2)} \quad ト \quad y=\frac{\sin x}{\cosh x}$$

トノ表ヲ作リ,以テ次ノ方程式ノ根デ,上ノ變域內ニアルモノヲ求メヨ

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\cosh^2 x(1-x^2)}{\sin x}$$

第二節 圖解法

圖ニヨル計算法又ハ解法ハ,近年著シク發達シタモノデアル. 數値ヲ線分又ハ角,或ハソノ他ノ幾何量ヲ以テ表ハシ,之ニ幾何學的作圖ヲ施シ以テ所要ノ結果ヲ定メントスル方法ヲ總稱シテ,**圖解法**ト云フノデアル. コノ方法ハ圖式靜力學ニ於テハ,久シイ以前カラ能ク用ヒラレタモノデアルガ,圖解法ガ一般應用數學上ノ重要ナ位置ヲ占メル樣ニ成ツタノハ,極ク最近ノコトデアル.

普通初等幾何學デ作圖ト言フト,道具トシテハ,定規ト兩脚器ニ限リ,ソノ用法ニ於テモ特種ノ制限ヲ附シテ居ル. 然シ此ノ制限ハ一般ナ圖的方法トシテハ何等ノ興味ノナイモノデ,實際家ハ,道具ニ關シテモ,ソノ用法ニ關シテモ,正シイ道具,正シイ用法ナル限リ,何等ノ制限モ認メナイノデアル.

唯所要ノ結果ヲ,必要ノ精密度ニ於テ,如何ニスレバ最モ簡易迅速ニ,目的ヲ達シ得ルカヲ,標準ノ骨子トシテ,機器及ビソノ用法ヲ選擇取捨スルノミデアル.

例ヘバ任意ノ角ノ三等分ハ,初等幾何學トシテハ不能ノ作圖問題デアルガ,實際ニハ兩脚器ヲ徐々ニ開キツツ所謂「試メシ法」ニヨリ,角ヲ三等分スルコトガ出來ル. ソノ誤差ハ,之ヲ實際的ニハ認メ得ナイ程度ニ,三等分ノ作圖ガ實行出來ル.

コノ種ノ方法ト雖モ,結果ガ所要ノ精密度ニ到達スル迄中絕シナイモノトスルト,數學的ニ言ツテモ確ニ收斂的方法デアツテ,何モ特ニ卑下シテ「試メシ法」ナドト言フ特別ナ名稱ヲ與ヘル必要ガナイノデアル.

圖解法ノ精密度ハ一般ニ計算尺ト同一程度デアルガ,ソノ長所ハ大ナル誤謬ヲ,一般ニ,伴ハナイ點ト,全體トシテ或程度迄ノ精査ヲ行ヒ得ラレル點トニアル.

又時トシテ圖的方法ガ數値ノ計算ニヨルヨリモ簡易迅速ナコトガアル. 與ヘラレタ値ガ圖(幾何學的要素)デ表ハサレテ居ル場合特ニ然ルヲ見ル. コノ種ノ例ハ力學ニ於テ能ク見出サレル所デアル.

唯圖解法ノ缺點ハ,ソノ結果ノ精密度ヲ任意ノ程度ニ高メ得ナイ點ト,又誤差ノ限界ヲ一般ニ正確ニ決定シ得

ナイ點トニアル．故ニ圖解法ハ近似的解ノ探究ニ用ヒラレルモノガ多イ．高級ノ精密度ヲ要求スル場合ニハ，圖解法ニ解析的方法ヲ併用スルモ，之ガ爲デアル．

圖解法ノ中，特殊ノ地位ニアルモノハ，**計算圖表學**，或ハ單ニ圖表學 (Nomographie) ト呼バレルモノデ，主トシテ函數ノ圖的表示法ヲ研究スル分科デアル．特ニ佛國人ノ手ニヨッテ著シク發達シタモノデ，ソノ大要ニ就イテハ Schilling, Über die Nomographie d'Ocagnes (Leipzig, 1900) ヲ見ルガヨイ．又詳細ヲ盡サントスルモノハ d'Ocagne, Nomographie (Paris, 1899) ヲ見ルガヨイ．[1]

圖表學ノ最大長所ハ多クノ獨立變數ヲ有スル函數ノ圖的表示デ，之ニ依ラネバ，獨立變數ガ二個以上ノ函數ノ表示ハ，一般ニ非常ノ困難ニ遭遇スルカ，餘リ面白カラヌ結果ニ終ルモノデアル．

1.　例ヘバ遊星ノ運動ニ關スル，有名ナけぷれる Kepler ノ方程式

$$\alpha - e\sin\alpha = \mu$$

ハ三變數 α, μ, e 間ノ關係デ，何レノ一ツヲ主體ト考ヘテモ，二變數ノ函數トナル．第一圖[2]ハコノ三者ノ關係ヲ表ハス，所謂共線圖表デアッテ，α, μ, e ノ夫夫對應スル値ハ，三ツヅツ同一直線上ニアル．

2.　z ニ關スル二次方程式

$$z^2 + xz + y = 0$$

(1) 圖表學ニ關シテハ小倉金之助著「圖計算及圖表」(東京，山海堂) ヲ參照セラレヨ．尙ホ本書ニハ附錄トシテ，圖表學ノ概念ヲ附シテアル．

(2) コノ例ニ就イテハ，小倉「圖計算及圖表」第 90 頁以下參照．

ノ根ハ x, y ノ函數デアルガ，ソノ關係ヲ示ス圖表ノ構成ハ簡單デ次ノ如クスレバヨイ．

$$z = \ldots\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots$$

ト置ケバ，夫夫

$$\ldots\ldots,\ 9-3x+y=0,\ 4-2x+y=0,\ \ldots\ldots$$

等，x, y ニ關スル多クノ一次方程式ガ得ラレル．

第 1 圖

今直交軸ヲ取リ，此等ノ方程式ヲ滿足セシムル x, y ノ値ヲ點ノ直角坐標トシテ，各方程式ヲ表スグラフヲ作ルト，夫々一本ノ直線トナリ，第二圖ノ如ク玆ニ一系ノ直線群ヲ得，此等ノ直線群ハ全體トシテ一ツノ拋物線ヲ包絡スル．

尙ホ此ノ直線系ニ於テ各直線ニ，ソノ方程式ヲ決定シタ，z ノ値ヲ記入シテ置クト，斯クシテ得ル圖表カラ，

$$z^2 + az + b = 0$$

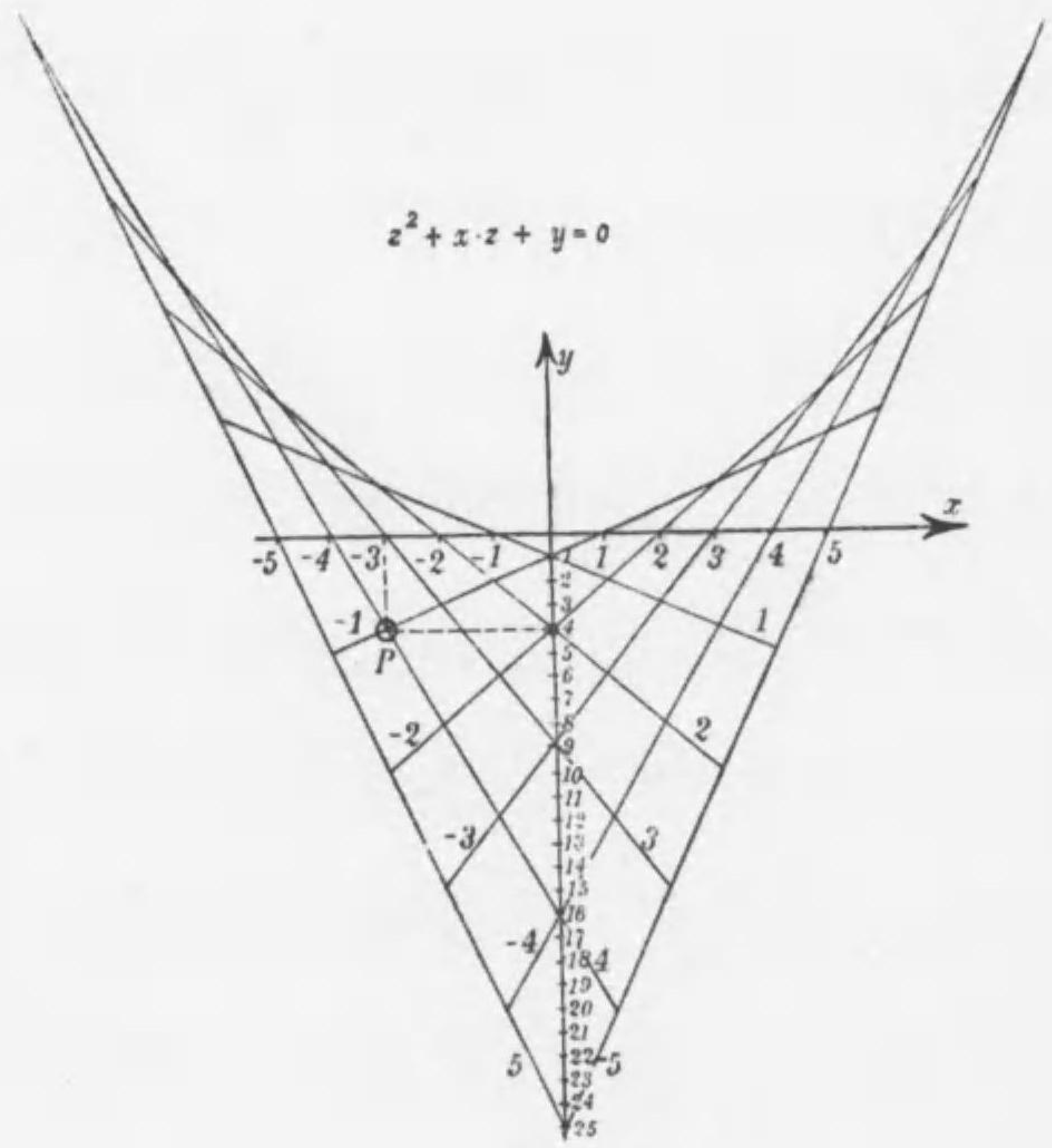
ノ形ノ方程式ノ根ハ何等ノ計算ヲ用ヒズニ，直チニ之ヲ求メルコトガ出來ル．(a, b) ナル點ヲ見出シ，之ヲ過ル直線(コノ點ヲ過リ拋物線ニ切スル直線)ニ附記セル數字ヲ讀メバ足リル．

一般ニ (a, b) ヲ過ル切線ハ，アレバ二本アル．例ヘバ P$(-3, -4)$ ヲ過ル直線ハ數字 4, -1 ヲ附シタル二ツデアル．コノ場合ニハ $a=-3$, $b=-4$ デアルカラ，4, -1 ハ

$$z^2 - 3z - 4 = 0$$

ノ根デアル．

但シ (a, b) ヲ過ル切線ハ二本アリトハ限ラナイ. 若シ (a, b) ガ拋物線上ニアルト,切線ハアルモ,唯一本トナリ,(a, b) ガ拋物線內ニアルト,之ヲ過ル切線ハ一本モナイ. 前ノ場合ハ $z^2+az+b=0$ ガ等根ヲ有ス



第 2 圖

ルコトヲ示シ,後ノ場合ハ,此ノ方程式ノ根ガ虛數トナルコトヲ示スモノデアル.

二次方程式ノミナラズ,同樣ノ原理,方法ガ高次ノ方程式ノ解法ニ對シテモ,同樣ニ行ハレル.

圖解法ニ就イテ注意スベキコトハ,作圖ヲ可及的ノ精密ト正確トヲ期シテ進行スベキコトデアル. 計算機ヲ

利用スル場合,精密ナ結果ヲ得ントスレバ,先ヅ精密ナ計算機ノ特選ヲ必要トスル樣ニ.

材料例ヘバ用紙ノ如キモ,一流ノモノヲ用ヒ,成ルベク誤差ノ伴ハナイモノヲ選バネバナラヌ. 作圖ハ正確ニ行ッテモ,例ヘバ用紙ガ直キニ伸縮スル樣ナモノデアルト,意外ノ誤差ガ無意識ノ間ニ起ルコトガアルカラデアル.

又單位ノ選定ノ如キモ,目的物ノ精密度ト,利用範圍トカラ考ヘテ,適當ニ取捨スベキモノデ,輕輕ニ著手シテハナラヌ. コノ注意ハ初學者ニトリテハ,特ニ肝要デアル.

例ヘバ,大サヲ線分デ表ハス場合ニハ,精密度ハ,圖上識別シ得ル最小ノ長サニ關係スルカラデアル. 後ニモ說明スル樣ニ,[1] 圖表上明ニ區別シテ讀ミ得ル最短ノ距離ヲ1粍ノ $\frac{1}{5}$ トスルト,(之ハ極ク精密ナ圖デ起ルモノデアル),圖表ヲ作ル上ニ用フル長サノ單位ハ少クトモ $\frac{0.2}{\Delta}$ 粍デ,ソレヨリ大ナルコトガ必要デアル. 玆ニ Δ トハ變數ノ增分トシテ,圖カラ讀ミ得ル最小ノ値デアル.

最後ニ圖解法ニ就イテ注意スベキコトハ,何等ノ豫備行動ナクシテ,直ニ本作圖ニ着手スルナト云フコトデアル. 圖解法ヲ實行スルニ際シハテ,ソノ豫備行動トシテ

(1) 第二章第二節參照. Δ ハ數値デアッテ,ソノ數値ヲ表ハス長サデハ無イ. 今長サノ單位ヲ l 粍トセバ,Δ ヲ表ハス長サハ $l\Delta$ 粍デ,コレガ $\frac{1}{5}$粍,即チ 0.2 粍ヨリ小ナラザルコトヲ要スルノデアル. 故ニ $l\Delta \geqq 0.2,\ l \geqq \frac{0.2}{\Delta}$.

先ヅ大凡ノ粗圖ヲ一旦作リ,大局ノ見當ヲ附ケ,概算ヲ行ツテ,後ニ本作圖ニ著手スルノガ安全デアル.

圖解法ヲ行フモノハ,之ニ必要ナ材料器具ノ準備ハセネバナラヌガ,恒ニ透明ナ方眼紙,極坐標紙,對數方眼紙卽チ直角軸ニ對數尺ヲ刻メル直角坐標紙位ハ豫メ用意シテ置カネバナラヌ. 此等ハ用法モ多方面デ,時時必要ノ起ルモノデアルカラデアル.

第三節　表ト機械

圖解法ヤ計算尺ハ能ク利用セラレルガ,然シ實際ノ專門家ガ,計算遂行上利用スル道具ハ,ソノ外ニ色色アル.又諸種ノ表 (Tafeln) ガアル. ソノ中最モ一般的デ,而モ重要ナモノニ就イテハ,章ヲ改メテ解說スルノ機會ガアルカラ,今ハ極ク一般的ナ注意ノ二三ニトドメル.

對數表ハ計算尺ニ比シ,一層精密デアル. 例ヘバ四桁ノ對數表デモ,精密ナ計算尺ニ對シ,約ソノ十倍ノ精密度ヲ有シテ居ル.

同ジク對數表デモ,全體ガ同一紙面上ニ記入シタモノガ一層便宜デアル. 一一紙葉ヲメクル手數ヲ省キ得ルカラデアル. コノ種ノ對數表中最モ工夫セラレテ,便宜ナモノハはいでるべるぐ Heidelberg ノけぇすてる G. Köster 出版ノ對數表デアル.

表及ビ機械ノ優劣比較ニハ注意ヲ要スル. 一般的ニ見テ最モ精密ナモノデモ,特定ノ場合ニハ,必ズシモ最モ便宜ナリ,有効ナリトハ限ラナイ. 例ヘバ數値ハ或位迄シカ必要デナイノニ,ソレ以上多クノ桁數ヲ生ム樣ナ精密ナ對數表ヲ用フル樣ナノガソノ場合ニ當ル.

表ヤ,機械ノ優劣,便不便モ,使用目的ニヨツテ,判斷ハ必ズシモ同一デナイ. 能ク考ヘネバナラヌ. 一般物理學者ニ取ツテハ Jahnke und Emde, Die Funktionstafeln mit Kurven und Formeln (Leipzig, 1909) ガ最モ便宜デ,有効デアル.(1)

精密度ニ就イテ言ヘバ,計算尺ト圖解法トハ,之ヲ正確ニ行ヘバ,共ニ約 0.3% ノ關係誤差ヲ有スルコトニ,トドメ得ラレ,四桁ノ對數表ハ關係誤差ヲ約 0.03% ナラシメルコトガ出來ル. 最モ精密ナモノハ計算機デアル.

方法及ビ補助ノ器具,機械ノ選擇ニ就イテハ,今後モ各章ニ於テ,ソノ注意ヲ怠ラナイガ,計算家トシテハ,コノ點ニ十分ノ注意ヲ拂フト共ニ,計算實行上ノ最大武器トモ言フベキ手練ト技能ノ養成ニ特ニ努力アランコトヲ希望スル. 又ソノ意味ニ於テ,章節ノ終ノ例題ハ之ヲ輕視スルコトナク,自ラ徹底的ニ之ヲ取扱ハンコトヲ望ンデ止マナイ.

問　題

1. $z^3+xz+y=0$ ナル形ノ方程式ノ解法ニ必要ナ圖表ヲ作圖セヨ. 又ソノ圖表ヲ利用シテ,次ノ方程式ノ實根ヲ求メヨ.

(i)　$z^3+2z-5=0,$

(ii)　$z^3-0.1z+2.8=0,$

(iii)　$z^3-10z+1=0.$

(1) 他ノ表ニ就イテハ,卷末ノ附錄「參考書目」ヲ見ヨ.

2. $x\cos z+y\sin z=1$ ナル形ノ方程式ニ對スル圖表ヲ求メ,之ヲ利用シテ,次ノ方程式ノ實根ヲ求メヨ.

(i) $3\cos z+4\sin z=1$,

(ii) $3\sin z-4\cos z=-4$,

(iii) $1.2\cos z-3.5\sin z=-1.5$.

3. $x\cosh z+y\sinh z=1$ ナル形ノ方程式ニ對スル圖表ヲ求メ,之ヲ次ノ方程式ノ實根ヲ求メル上ニ利用セヨ.

(i) $2\cosh z+\sinh z=2$,

(ii) $4\cosh z-3\sinh z=3$,

(iii) $-5\cosh z+4\sinh z=-3$.

近似公式表 (度デ表ハシタ角ハ括弧ニ入レタ)

近似公式	關係誤差ガ次ノ欄ノ如キ場合ノ領域					
	0.1% ナルモノ		1% ナルモノ		10% ナルモノ	
	(ヨリ)	(マデ)	(ヨリ)	(マデ)	(ヨリ)	(マデ)
$\sin U=U$	−0.077 (−4.4°)	+0.077 (+4.4°)	−0.244 (−14.0°)	+0.244 (+14.0°)	−0.780 (−44.0°)	+0.780 (+44.0°)
$\sin U=U-\frac{1}{3!}U^3$	−0.576 (−33.0°)	+0.576 (+33.0°)	−1.032 (−59.0°)	+1.032 (+59.0°)	−1.636 (−93.5°)	+1.636 (+93.5°)
$\cos U=1$	−0.045 (−2.6°)	+0.045 (+2.6°)	−0.141 (−8.1°)	+0.141 (+8.1°)	−0.430 (−24.6°)	+0.430 (+24.6°)
$\cos U=1-\frac{1}{2}U^2$	−0.384 (−22.0°)	+0.384 (+22.0°)	−0.650 (−37.2°)	+0.650 (+37.2°)	−1.034 (−59.2°)	+1.034 (+59.2°)
$\tan U=U$	−0.054 (−3.1°)	+0.054 (+3.1°)	−0.183 (−10.5°)	+0.183 (+10.5°)	−0.522 (−30.0°)	+0.522 (+30.0°)
$\tan U=U+\frac{1}{3}U^3$	−0.385 (−22.0°)	+0.385 (+22.0°)	−0.533 (−30.5°)	+0.533 (+30.5°)	−0.933 (−53.4°)	+0.933 (+53.4°)
$\sqrt{1+U}=1+\frac{1}{2}U$	−0.08	+0.10	−0.24	+0.32	−0 61	+1.53
$\frac{1}{\sqrt{1+U}}=1-\frac{1}{2}U$	−0.04	+0.06	−0.15	+0.17	−0.45	+0 53
$\frac{1}{1+U}=1-U$	−0.03	+0.03	−0.10	+0.10	−0.30	+0.30

又 $|U|<1$ ナル時ハ

$$\sqrt{1+U}=1+\frac{1}{2}U-\frac{1}{8}U^2+\frac{1}{16}U^3-\frac{5}{128}U^4+\cdots\cdot$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+U}}=1-\frac{1}{2}U+\frac{3}{8}U^2-\frac{5}{16}U^3+\frac{35}{128}U^4-\cdots\cdot$$

$$\frac{1}{1+U}=1-U+U^2-U^3+U^4-\cdots\cdot$$

$$\arcsin U=U+\frac{1}{6}U^3+\frac{3}{40}U^5+\cdots\cdot$$

$$\arctan U=U-\frac{1}{3}U^3+\frac{1}{5}U^5-\cdots\cdot$$

$$\log_e(1+U)=U-\frac{1}{2}U^2+\frac{1}{3}U^3-\frac{1}{4}U^4+\cdots\cdot$$ (1)

[附記] 1 レェディアン (Radian) $=57.30°=\frac{180°}{\pi}$.

$$\log_e U=2.302585\log_{10}U.$$

(1) 本書デハ單ニ對數トイヘバ,常用對數ヲ意味スルコトニ規定スル.

第二章

計算尺及計算機

(A) 計算尺

第一節　計算尺總論

計算尺トシテ,取扱ヒノ便宜ナノト,用法ノ多方面ナノトデ,最モ廣ク用ヒラレテ居ルモノハ對數計算尺デアル.然シ一般的ニ言ヘバ,計算尺ノ世ニ普及セラレテ居ル程度ハ,未ダ十分トハ言ヘナイ.之ハソノ長所ト用法トガ未ダ能ク知レ渡ツテ居ラナイカラデアル.本章ハ主トシテ對數計算尺ヲ說明スルモノデアルガ,ソノ解說ニ入ル前ニ,計算尺ノ一般論ニ就イテ述ベヨウト思フ.之ニハ,先ヅ所謂函數尺ニ就イテ概說セネバナラヌ.

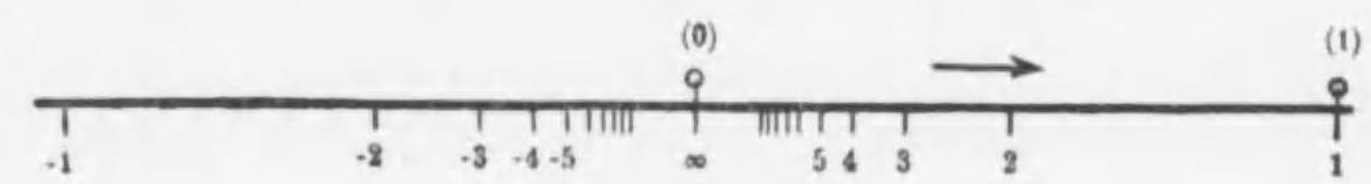
一般ニ函數尺ハ多クノ變數ノ間ニ成立ツ一ツノ函數的關係ヲ表示スル爲ニ,使用セラレルモノデアル.

サテ**函數 $f(x)$ ノ函數尺**トハ $y=f(x)$ ノ値ヲ表ハス目盛ノコトデ,ソノ目盛ノ仕方ハ,一直線上ニ原點 O ト正負ノ方向トヲ適當ニ定メ,別ニ適當ノ長サ l 粍ヲ長サノ單位ト定メ,便宜ナ x ノ値 x_λ (例ヘバ $x=1, 2, 3, \ldots$ ノ如キ値) ニ對スル函數ノ値 $y_\lambda=f(x_\lambda)$ ヲ表ハス線分ヲ,原點 O ヨリ測ツテ,ソノ他端ニ數字 x_λ ヲ記入スルノデアル.例

ヘバソノ直線上ニ一點 P_λ ヲ取リ, $\overline{OP_\lambda}=y_\lambda \cdot l$ (粍) ナル樣ニセバ,點 P_λ ノ所ヘ數字 x_λ ト記入スルノデアル.

x_λ ニ色色ナ,適當ナ多クノ値ヲ配シ,上述ノ手續ヲ踏ムト,一系ノ目盛,卽チ物差ガ出來上ル.之ガ $f(x)$ ノ函數尺ト稱セラレルモノデアル.

第三圖ハ $f(x)=\frac{1}{x}$ ナル場合ノ函數尺デアル.圖ニ於テ括弧ニ入レタ數字 (0) ト (1) ハ,單位トシテ選バレタ長サノ始メト終リヲ (正ノ向キニ) 表ハシテ居ル.原點ハ (0) デ,他ノ數字ハ x_λ ノ値デアル.



第 3 圖

一般ニ函數尺ニ於テハ, x_λ ナル數ヲ有スル點ノ原點 O カラノ距離ハ,測度トシテソノ時ノ函數値

$$y_\lambda=f(x_\lambda)$$

ヲ有スルモノデアル.

今二ツノ函數　$y=f(x)$, $\eta=g(\xi)$

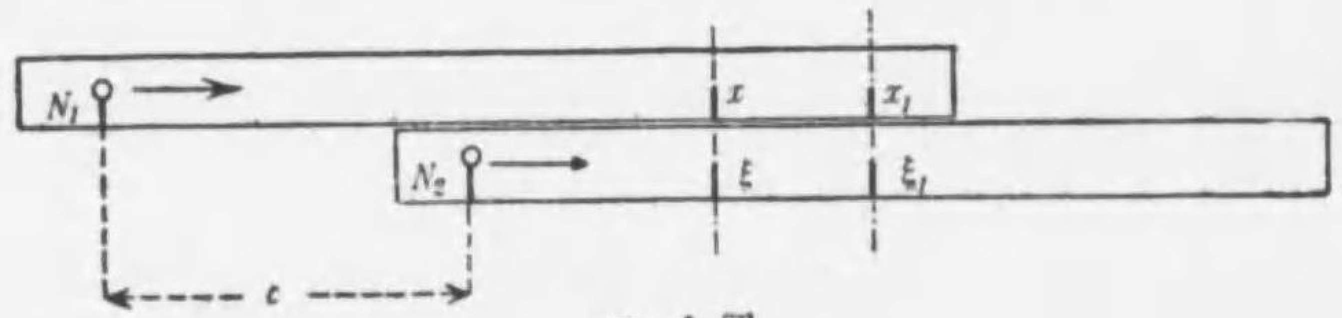
ヲ考ヘ,夫夫 l_x, l_ξ ヲ單位トシテ,ソノ函數尺ヲ作リ,而モ兩尺ハ並置シ得,並置シツツ移動シ得ル樣ニ構成スルコト,第四圖ノ略圖ノ如クショウ.

第四圖ノ N_1, N_2 ハ各函數尺ノ原點ノ位置ヲ示シ,矢ハ各函數尺ノ正ノ方向ヲ示スモノデアルガ,一方ノ目盛 x_1 ガ他方ノ目盛 ξ_1 ニ對スル位置デ,兩尺デ互ニ一致スル目盛ノ數字ヲ一般ニ x, ξ デ示スコトニスル.サスレバ x

カラ N_1 ヘノ距離ハ $l_x f(x)$ デ, ξ カラ N_2 ヘノ距離ハ $l_\xi g(\xi)$ デアルカラ, $\overline{N_1N_2}$ ノ長サヲ c デ表ハセバ,一般ニ

$$f(x)l_x - g(\xi)l_\xi = c$$

ナル關係ガ成立スル.



第 4 圖

コノ式ハ相對スル一般ナル x ト ξ トノ間ノ函數關係ヲ表ハスモノデアリ, c ハ定數デアル. シカルニ今特段ノ場合トシテ, x_1 ト ξ_1 トガ相對シテ居ルノデアルカラ上ノ關係ハ $f(x_1)l_x - g(\xi_1)l_\xi = c$ トナル. 此等ノ兩關係カラ,四ツノ數 x, ξ, x_1, ξ_1 ノ間ニ

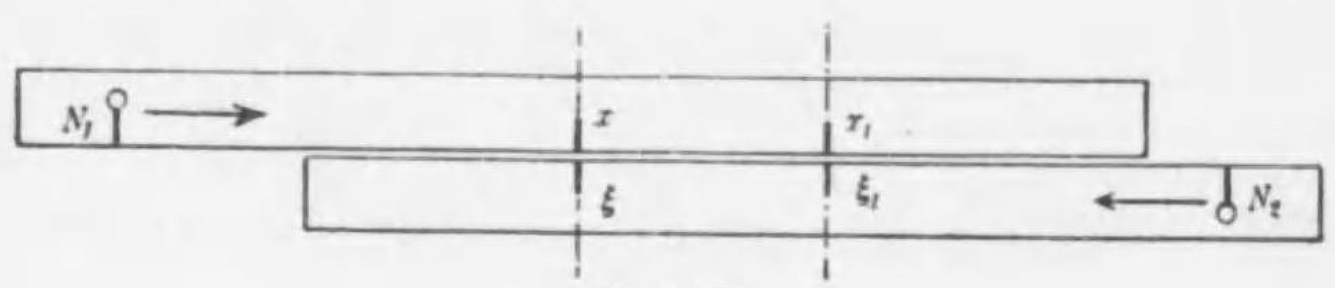
$$l_x f(x) - l_\xi g(\xi) = l_x f(x_1) - l_\xi g(\xi_1) \qquad \text{(I)}$$

ナル關係ガ成立スル.

又兩尺ヲ並置スルノニ,第五圖ノ如ク,正ノ方向ガ反對トナル樣ニスルト,吾々ハ

$$l_x f(x) + l_\xi g(\xi) = l_x f(x_1) + l_\xi g(\xi_1) \qquad \text{(II)}$$

ナル關係式ヲ得ル.



第 5 圖

元來單位 l_x, l_ξ ノ長サハ $f(x)$, $g(\xi)$ ノ性質ト獨立ニ定メテモヨイモノデアルカラ,特ニ $l_x = l_\xi$ 卽チ兩尺共同ジ單位ノ長サヲ用フルモノトスルト,關係式(II) ハ

$$f(x) + g(\xi) = f(x_1) + g(\xi_1) \qquad \text{(II')}$$

トナル.

例ヘバ $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(\xi) = \frac{1}{\xi}$ ノ樣ナ特別ナ場合ナラバ,關係式 II') ハ

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\xi} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{\xi_1}$$

トナル. 更ニ原點ヲ適當ニ取リ, ξ_1 ヲ ∞ トスルト,卽チ x ノ方ノ目盛 x_1 ガ, ξ ノ方ノ目盛 ∞ ノ點ト一致スル樣ニ並置スルト

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\xi} = \frac{1}{x_1}$$

トナル. コノ最後ノ關係ハ,電流ノ通ズル二本ノ平行ナ針金ノ一系ヲ考ヘ, x, ξ デ夫々各線ノ電氣抵抗ヲ表ハセバ, x_1 ハコノ一系ノ全抵抗ヲ表ハスコトト成ルノデアル.

斯クノ如ク關係式 (I), (II) ハ $f(x)$, $g(\xi)$; l_x, l_ξ; x_1 ξ_1 ヲ適當ニ選擇スルコトニヨリ,又 x, ξ ニ色々ノ意味ヲ附スルコトニヨリ,種々ノ函數關係ヲ表示スルコトニナル.

第二節 對 數 尺

對數尺トハ函數尺ニ於テ,函數 $f(x)$ ガ(常用)對數函數

$$y = \log x$$

ナルモノノコトデ,ソノ場合ニハ前述ノ一般的關係ノ外ニ,特ニ計算上便宜有効ナ別種ノ性質ヲ備ヘルコトニナル.

サテ一般ニ函數尺ニ於テ單位ノ長サガ l 粍ナラバ,數値 y ハ ly 粍ノ長サデ表ハサレル. ソレデ目盛デ明カニ讀ミ得ル最小ノ距離ヲ Δs 粍トシ,函數 $y=f(x)$ ノ變化トシテソノ計算尺デ讀ミ得ル最小ノ値ヲ Δy トスルト,

$$\Delta s = l\Delta y$$

トナル. 故ニ $$\Delta y = \frac{\Delta s}{l}.$$

而シテ Δy ハ單位ノ長サ (l粍) ガ定ツタ時,ソノ函數尺デ y ノ値ヲ讀ムトキノ誤差ノ限界トモ解釋ガ出來ル.

次ニ $y=\log x$ ナル特別ノ場合ヲ考ヘルト,コノ場合,函數 y ノ增分ノ第一階ノ近似値ハ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\log e}{x}$ ナル關係カラ

$$\Delta y = \log e.\frac{\Delta x}{x}$$

デ與ヘラレル. 故ニ

$$\log e.\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta s}{l}$$

トナル. 然ルニ特定ノ一函數尺ヲ用フル場合ハ,ソノ函數尺ノ單位トシ,最小ノ讀ミトシテ, l, Δs ハ一定トナルカラ,最後ノ關係式ヨリ $\dfrac{\Delta x}{x}$ ハ一定ナルコトガ分ル. 故ニ次ノ法則ガ成立ツ.

對數尺ニ於テ,目盛 x ヲ讀ム場合,讀ミノ關係誤差ハ恒ニ一定デアル.

又同種ノ對數尺デモ,單位ガ種種アル場合ニ就イテ言ヘバ $\log e.\dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{\Delta s}{l}$ ナル關係カラ,對數尺デハ x ノ讀ミノ關係誤差ハ單位 l ニ逆比例スルコトヲ知ル.

故ニ單位ノ長サ l ヲ成ルベク大ナラシメルコトハ,對數尺デ關係誤差ヲ小ナラシメル有効ナ一方法デアル.

對數尺ニ於テ,

$$x = 1, 2, 3, \ldots, 9, 10$$

ノ諸點ニ於テ $\log x$ ヲ求メ,然ルベキ刻ミニ,數字 1, 2, 3, ..., 9, 10 ヲ目盛ルト,十個ノ一列ガ得ラレル.

次ニ $$x = 10, 20, 30, \ldots, 90, 100$$

ノ目盛ヲ行フト,此等ノ十個ノ點ハ全體トシテ,前ノ一系ヨリ一單位長ダケ,正ノ方向ニ移動スルノミデ,十個ノ點ノ配置間隔ハ全ク同様デアル.

$$x = 100, 200, 300, \ldots, 900, 1000$$

ノ十點ト,第二系ト比較スルモ同様デアル.

是ハ當然ノコトデ. x_1, x_2 ナル二點間ノ距離ハ

$$l(\log x_1 - \log x_2)\text{粍}$$

デアリ, $x_1.10^n$, $x_2.10^n$ (但シ n ヲ正整數トスル) ノ二點間ノ距離ハ $$l(\log 10^n x_1 - \log 10^n x_2)\text{粍}$$

デ與ヘラレルガ,後者ヲ變形スルト

$$\begin{aligned} & l(\log 10^n x_1 - \log 10^n x_2) \\ &= l(\log 10^n + \log x_1 - \log 10^n - \log x_2) \\ &= l(\log x_1 - \log x_2) \end{aligned}$$

トナツテ,兩距離ハ同一トナル. ソシテ

$$\log x_1.10^n = n + \log x_1$$

デ,$x_1 10^n$ナル點ノ位置ハx_1ナル點ノ位置カラ,n單位ダケ右ニ(正ノ方ニ)位スルカラデアル(nガ負ナラバ左ニ).故ニ對數尺ハ左右無限ニ延長スル一直線上ノ刻ミヨリ成ルモ,全體ハ合同ナ目盛ノ一區ノ繰返シヨリ成ル.

此ノ點カラ考ヘテモ,對數尺ニ於テハ誤差ノ關係的値ハ一定トナルコトガ推察サレル.

此ノ關係誤差ノ一定ナルコトト,函數尺全體ハ有限ノ一節ノ繰返シデアルコトトハ,對數尺特有ノ長所デ,計算尺トシテ最モ適シ,又應用ノ多方面ナ所以デアル.

問題

1. 單位ノ長サヲ10粍トシテ,次ノ函數尺ヲ作レ.

   (i) $f(x) = 12.5 \log x$.

   (ii) $f(x) = x^2 - 15 \quad (-7 \leqq x \leqq 7)$.

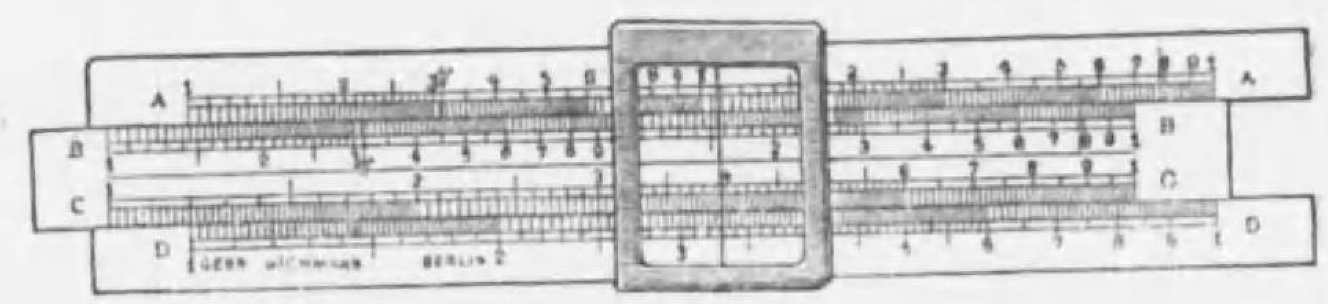
2. 20糎ノ長サノ間ニ,18カラ180迄ノ數ヲ盛ツタ對數尺ヲ作レ.

第三節 對數計算尺ト其ノ法則

普通**計算尺**ト言ツテ居ルガ,嚴密ニ言ヘバ對數計算尺トデモ呼ブベキモノデ,三ツノ主要部分カラ出來テ居ル.

固定部分ヲ**台尺** (Stab) ト云ヒ,ソノ中央ニ縱ニ設ケラレタ溝内ヲ滑動スル物差ヲ**滑尺** (Zunge) ト云フ. コノ外ニ,目盛ノ讀ミヲ正確ナラシメル爲ニ用フル**カーソル**

(Läufer, Cursor) ガアル. カーソルハ台尺ノ兩緣ニ設ケラレタ溝ニハメラレ,台尺ニ沿ヒテ移動出來ル簡單ナ裝置デ,極ク普通ナモノハ,セルロイド等ノ透明ナ薄板上ニ,毛線ヲ引キ,コノ板ヲ兩緣ノ溝ヲ滑動シ得ル枠ニ張リ附ケタモノデアル.



第 6 圖

第六圖ハ長サ約27糎ノ,簡單ナ計算尺ノ圖デアル.

先ヅ滑尺ヲ抜キ去リ,カーソルヲ除去シテ台尺ノミヲ檢スルト,表面ニ上下ニ二個ノ對數尺ガ刻マレテ居ル.

今便宜ノ爲,ソノ上方ノ目盛ヲx尺ト呼ビ,目盛ヲ一般ニ文字xデ示シ,下方ヲξ尺ト呼ビ,ソノ目盛ヲ一般ニ文字ξデ示スト,x尺ハ中央ノ1(之ヲ**中央指數**ト呼ブ)ノ左右全ク同樣ノ目盛カラ成リ,ソノ中大キナ目盛ニハ1, 2, 3, ..., 8, 9ナル數字ガ記入シテアル. ソノ各半分ガ對數尺ノ一節デアル.

ξ尺ノ方ハ全體ガ對數尺ノ一節カラ成リ,矢張リ左方ヨリ右方ヘ,大キナ目盛ニ1, 2, 3, ..., 8, 9ト記入シテアル. 特ニソノ左方1カラ2迄ノ間ハ,他ノ部分ヨリモ細ク目盛シテ

$$1.0,\ 1.1,\ 1.2,\ 1.3,\ \ldots.,\ 1.9,\ 2.0$$

ガ直チニ讀メル樣ニシテアル. x 尺, ξ 尺共ニ左端ノ刻ミ(1 ノ數字ノ目盛)ヲ**左方指數**ト云ヒ, 右端ノ刻ミ (x 尺デハ數字 1 ヲ記入シタ第二區ノ終點, ξ 尺デハ數字 1 ヲ記入シタ第一區ノ終點)ヲ**右方指數**ト云フ.

x 尺, ξ 尺共ニ對數尺デアルカラ, ソノ數字ハ

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots.,\ 9,\ 1$$

ヲ 1, 2, 3, ..., 9, 10 ト讀ンデモ, 0.1, 0.2, ..., 0.9, 1.0 ト讀ンデモ, 10, 20, 30, ..., 90, 100 ト讀ンデモヨイ.

x 尺デ若シ左端ヨリ數字ヲ, 0.1, 0.2, 0.3, ... ト讀ムト, 右半分ノ第二區ノ數字 1, 2, 3, ..., 9, 1 ハ之ヲ

$$1.0,\ 2.0,\ 3.0,\ \ldots.,\ 9.0,\ 10$$

ト讀マネバナラヌ. ソノ他ノ場合ハ推シテ分ルデアラウ.

次ニ x 尺ト ξ 尺トノ目盛間ノ關係ヲ考ヘルト, 兩者共左方指數 1 ハ之ヲ 1 ト讀ムコトニシ, x, ξ ノ一致不一致ハカーソルヲ利用シテ判斷スルト, x 尺ニ於ケル長サノ單位ガ l 粍ナラバ, ξ 尺ノ方ノ單位ハ $2l$ 粍デアルカラ,

$$l.\log x = 2l.\log \xi\ ^{(1)},$$

故ニ

$$\log x = 2\log \xi.$$

---

(1) 第一節ノ關係式 $l_x f(x) - l_\xi g(\xi) = c$ ニ於テ,

$$c = 0,\quad l_x = l,\quad l_\xi = 2l,\quad f(x) = \log x,\quad g(\xi) = \log \xi$$

トオケバヨイ.

卽チ　$x = \xi^2$.　逆ニ　$\xi = \sqrt{x}$.

故ニカーソルヲ利用シ, x 尺, ξ 尺ノ一致スル目盛ヲ讀ムコトニヨリ, 與ヘラレタ數ノ平方ヲ求メルコトガ出來ルシ, 逆ニ與ヘラレタ數ノ平方根ガ求メラレル.

計算尺ノ讀ミ方ニ就イテ, 注意セネバナラヌコトハ, 位取リガ間違ヒ易イコトデアル. 之ニ對スル一ツノ用心法ハ, 數値ヲ表ハスニ第一章, 第一節ニ於テ述ベタ記法ニ從ウノガ安全ナコトデアル.

例ヘバ　0.000376 ノ平方ヲ求メル場合ナラ

$$0.000376^2 = (3.76\times10^{-4})^2$$
$$= 14.14\times10^{-8}\ (=0.000\,000\,1414)$$

ノ樣ニ考ヘ, 計算尺カラハ 14.14 ナル數ヲ求メル樣ニ工夫スルノガヨイ.

又　0.371 ノ平方根ヲ求メルノニハ, 10 ノ偶數冪ヲ取リ

$$\sqrt{0.371} = \sqrt{37.1\times10^{-2}} = 6.09\times10^{-1}\ (=0.609)$$

ノ樣ニ取扱ツテ, 計算尺カラハ 6.09 ト云フ數ヲ讀取ルガ安全デアル.

計算尺ヲ利用スル際ハ, 必ズ鉛筆ト紙片ノ用意ヲ必要トスルノハ, 此等ノ點カラ見テモ十分瞭解ガ出來ルデアラウ.

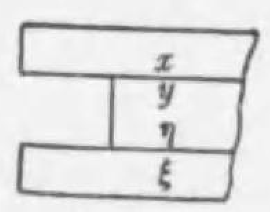
第四節　計算尺ノ第一位置

次ニ滑尺ヲ檢スルト, 之ニモ上下二個ノ函數尺ガアル. 又ソノ裏面ニモ上下二個ノ目盛ガアル. 故ニ滑尺ヲ台尺ニ挿入スル時, 何ノ面ヲ上面トスルカ, 同一面ヲ上面ト

シテモ,猶左右何レノ方向ヲ取ラシメテ挿入スルカニヨリ,四種ノ區別ガ起ル.

表面ノ兩目盛ハ臺尺ノ目盛ト全然同一デアル. 即チ共ニ對數尺デ同様ノ刻ミ方ヲシタモノデアル. 故ニ 1, 2, 3, ... 等ノ數字ヲ左方ヨリ右方ニ讀ム様ニ挿入シテ,而モ台尺,滑尺共ニ其左方指數ガ一致スル様ニスルト,上方ノ目盛ハ全然 x 尺ノ目盛ト一致シ,下方ノ目盛ハ ξ 尺ノ目盛ト全然一致スル. 今後便宜ノ爲メ,x 尺ト一致スル目盛ヲ y 尺ト呼ビ,ξ 尺ト一致スル方ヲ η 尺ト呼ブコトトスル.

此場合四ツノ函數尺ハ上方ヨリ讀ンデ,x 尺,y 尺,η 尺,ξ 尺ノ順トナリ,第七圖ノ如クナル. コノ位置ヲ**計算尺ノ第一位置**(或ハ**正位**)ト云フ.



第 7 圖

y 尺ノ單位ハ l 粍,η 尺ノ單位ハ $2l$ 粍デアル.

之ヨリ第一位置ニ於ケル計算尺ノ利用法ヲ説明ショウ.

1. x 尺ト y 尺トデ,特別ナ目盛デ一致スルモノヲ x_1, y_1 デ示シ,一致スル兩目盛ヲ一般ニ x, y トスルト

$$\log x-\log y=(一定)=\log x_1-\log y_1.$$

從ツテ
$$\frac{x}{y}=\frac{x_1}{y_1}$$
トナル.

同様ニ ξ 尺ト η 尺トノ間ニハ

$$\log\xi-\log\eta=(一定)=\log\xi_1-\log\eta_1.$$

從ツテ
$$\frac{\xi}{\eta}=\frac{\xi_1}{\eta_1}$$
トナル. 換言スレバ x 尺ト y 尺トノ間,又ハ ξ 尺ト η 尺トノ間ニハ,一致スル目盛ノ數値ノ比ガ一定トナル關係ガアル.

滑尺ヲ適當ニ左右シ,y 尺ノ數字 1 ト,x 尺ノ特定ノ數値 x_1 トガ相對スル様ニ置クト

$$\frac{x}{y}=\frac{x_1}{1} \quad 即チ \quad x=yx_1$$

トナル. 故ニ此位置デハ,x 尺ノ或値 x ニ對スル y 尺ノ値 y ハ,x ヲ x_1 デ除シテ得ベキ商デ,y 尺ノ或値 y ニ對スル x 尺ノ値 x ハ y ト x_1 トノ積トナル.

一般ニ二數 x_1 ト y トノ積ヲ求メルニハ,滑尺上 y 尺ノ 1 ヲ台尺上 x 目盛ノ x_1 ト對セシムベシ. 然ル時ハ,y ニ對スル x 尺上ノ目盛ヲ讀ムコトヨリ,所要ノ積ガ得ラレル. 除法ニ關係スル類似ノ法則ハ讀者自ラ容易ニ,之ヲマトメルコトガ出來ル.

實ハ上ノ比例ヲ用ヒズトモ,簡單ニ

$$xy=x_1 \quad ノ時ハ \quad \log x+\log y=\log x_1,$$

$$\frac{x}{y}=x_1 \quad ノ時ハ \quad \log x-\log y=\log x_1.$$

故ニ x y ノ積ニ對シテハ $\log x$, $\log y$ ナル線分ノ和ヲ求メ

テ,ソノ和ガ $\log x_1$ ヲ表ハス線分トナル様ニスレバヨイ. 又 x, y ノ商ニ對シテハ $\log x, \log y$ ナル線分ノ差ガ $\log x_1$ ヲ表ハス線分ニナル様ニスレバヨイノデアル. 而シテ前述ノ滑尺ノ止メ方,及ビ目盛ノ讀ミ方ハ,丁度コノコトヲ行ウタニ過ギナイノダカラ,斯クシテ積又ハ商ガ求メラレルノデアル.

例ヘバ 2×3 ナル積ヲ求メルノニハ,滑尺ノ1ト臺尺ノ2トヲ對セシメテ,3ニ對スル臺尺ノ數字ヲ讀メバ,所要ノ積6ガ顯ハレテ居ル. 卽チ $\log 2$ ナル長サト $\log 3$ ナル長サノ和ガ,臺尺ノ左方指數カラ,滑尺上ノ1ニ對スル臺尺上ノ目盛迄ノ距離ニ成ツテ居ル.

又 x 尺ト y 尺トノ間ノ此ノ關係ハ,比例應用ノ解法ニ利用スルコトガ出來ル.

例ヘバ列氏ノ溫度ヲ華氏ノ溫度ニ換算スルノニハ,水ノ氷點ト沸點トノ間ヲ列氏ハ80等分シ,華氏ハ100等分シタモノデアルカラ,一目ノ比ハ

$$80 : 100,\quad \text{卽チ}\quad 4 : 5$$

トナル. 故ニ

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}$$

ニ於テ $x_1 = 4,\ y_1 = 5$ ノ場合ニ當ル. 卽チ

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

トナル. 故ニ滑尺ノ5ナル目盛ヲ臺尺ノ4ナル目盛ト一致セシメヨ. 華氏ノ溫度ヲ滑尺上ノ y 目盛上ニ考ヘ,列氏ノ溫度ヲ臺尺ノ x 目盛ト考ヘルト,一致スル二數値 x, y ハ,列氏ノ溫度ヲ華氏ニ直ス場合,或ハソノ反對ノ場合ニ,相對スル値トシテ顯ハレル. 前ノ場合ニハ,溫度ガ0度以上ナラバ $y+32$ トシ,0度以下ナラバ,y ト32トノ差ヲ求メテ所要ノ華氏ノ溫度トナル. 反對ノ場合ニハ問題ノ溫度ハ,華氏ノ32°ノ點カラソノ點迄ノ華氏ノ度ヲ y トシテ,以下計算尺ヲ上述ノ様ニ利用スルト,直チニ對應スル列氏ノ溫度 x ガ出ル.

ξ 尺ト η 尺ノ關係ハ x 尺ト y 尺ノ關係ト同樣デアルカラ,ξ 尺,η 尺モ同樣ノ手續ヲ行フコトニヨリ乘法,除法及ビ比例解法ニ,之ヲ利用スルコトガ出來ル.

但シ單位ノ長サガ $2l$ 粍デ,前者ノ2倍トナル結果,ξ 尺,η 尺ノ利用ハ,一般ニ多クノ弱點ヲ有スルコトトナルカラ,普通此等ノ計算ハ x 尺,y 尺ヲ以テ之ヲ行ウ.

例ヘバ $3\times7=21$ ナル乘法ニ,下方ノ兩尺ヲ利用スルト,滑尺ノ1ヲ臺尺ノ7ニ一致セシメテ滑尺上ノ3ニ對スル臺尺上ノ讀ミヲ取ラウトシテモ,滑尺上ノ3ハ此時臺尺ノ領域以外ニ來タリ,21ナル數ヲ見出スコトガ出來ナイ.

商 $\frac{2}{6}$ ヲ求メル時モ,同樣ナ困難ニ陷入ル. 之ハ單位ガ2倍トナリ,讀ミノ精密度ガ高クナルト共ニ,利用シ得ル領域ガ減少スルカラデアル.

尤モ $3\times7=21$ ナル乘法ハ,下方ノ兩尺ヲ利用シテ,全然實行不可能ト云フ譯デハナイ. 滑尺ヲ十分左方ニ引キ,滑尺ノ右方ノ1ヲ臺尺ノ7ニ對セシメ,ソノ7ヲ70ト讀ミ,滑尺ノ3ニ對スル臺尺ノ讀ヲ見レバ,ソノ目盛ハ21ト讀ムベキモノデ,所要ノ積21ハ斯クシテ得ラレル. 之ハ $\frac{21}{3}=7$ ヲ求メル手續ヲ逆ニ利用シタモノデアル. 或ハ無限對數尺ノ次ノ一節ガ普通ノ臺尺ノ ξ 目盛ノ右側ニ添附セルモノト考ヘテ,何故ニ斯クシテ積21ガ求メ得ラレルカノ理由ヲ說明スルコトガ出來ル.

計算尺ノ乘法除法ハ

$$af,\ bf,\ cf,\ \ldots\ldots$$

ノ如ク同一數ヲ順次他ノ若干ノ數ニ乘ズル場合,又ハ

$$\frac{a}{f},\ \frac{b}{f},\ \frac{c}{f},\ \ldots\ldots$$

ノ如ク若干ノ數ヲ同一數デ除スル場合ニ利用シテ,特ニ

便宜有効デアル．ソノ故ハ計算尺ノ位置ノ調整ハ唯一回デ,總テノ積又ハ商ガ同時ニ讀ミ取レルカラデアル．

2. 次ニカーソルヲ利用シテ,x尺トη尺トノ利用法ノ一ツヲ述ベルト,yトηトガ一致スル双方ノ讀ミナラ

$$y=\eta^2.$$

然ルニ　$$\frac{x}{y}=(\text{一定})$$

ナル故　$$\frac{x}{\eta^2}=(\text{一定})$$

トナル．同様ニ　$$\frac{y}{\xi^2}=(\text{一定}).$$

今此ノ一定値ヲcデ示ストx,ηノ間ニハ

$$x=c\eta^2$$

ナル關係ガ成立スル．故ニ吾々ハ計算尺ヲ用ヒテ,二變量間ニ此ノ種ノ關係ガ成立スルヤ否ヤヲ檢シ,實驗公式ノ場合ニハソノ補正ヲ行ヒ,且ツ常數cノ値ヲ決定スルコトガ出來ル．

例ヘバ實驗的ニ次ノ値ヲ得タトシテ,$x=c\eta^2$ナルヤヲ見ヨウ．

$$x=0.328,\quad 0.565,\quad 1.18,\quad 2.07$$

ノ時,ηノ値ハ夫夫

$$\eta=1.13,\quad 1.47,\quad 2.13,\quad 2.80$$

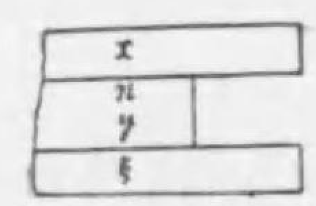
ト成ツタトスルト,x尺トη尺トヲ並置シテ,此等ノ値ガ同時ニ相對スル様ニ置イテ見ヨ．全部ガ丁度一致スレバ幸ヒデアルガ,此ノ種ノ實際問題ニ於テハ多少ノ喰ヒ違ヒアルノガ一般デアル．故ニ對應スル諸値ガ成ルベク能ク重ナル様ニ置イテ,cノ近似値ヲ定メルノガ普通デアル．コノ方針ノ下ニ決定スルト,滑尺上ノ數字1ニ對スル讀ミカ

ラ$c=0.263$ナルコトヲ知ル．コノ方法ニヨルト,cノ値ヲ決メルトキ,同時ニ實驗自身ノ精密度ヲ檢證スルコトガ出來ル．コノ場合$c=0.263$ノ誤差ハ末位ノ2以下デアル．

第五節　計算尺ノ第二位置

滑尺ヲ一旦抜キ放チ上面トシテ滑尺ノ表面ヲ出スコトハ第一位置ト同一デアルガ,上下ヲ轉倒シテ挿入スルト,前述ノ四ツノ物差ハ上ヨリ初メテ,第八圖ノ様ニx尺,η尺,y尺,ξ尺ノ順トナル．此ノ位置ヲ**計算尺ノ第二位置**ト云フ．

1. 四ツノ目盛デ,一致スル目盛ノ數値ヲ夫夫x,η,y,ξデ示シ,特定ノ値デ一致スルモノヲx_1, y_1, η_1, ξ_1デ示スト,コノ場合ノ基本的關係ハ　$\log x+\log y=(\text{一定})=\log x_1+\log y_1$



第8圖

トナリ,從ツテ

$$xy=(\text{一定})=x_1y_1 \qquad (\text{I})$$

トナル．更ニy,η間ニハ$y=\eta^2$ナル關係アルコトヲ利用スルト

$$x\eta^2=(\text{一定})=x_1\eta_1^2 \qquad (\text{II})$$

ヲ得ル．同様ニ次ノ關係モ成立スル,

$$\xi.\eta=(\text{一定})=\xi_1.\eta_1. \qquad (\text{I}')$$

$$\xi^2.y=(\text{一定})=\xi_1^2.y_1. \qquad (\text{II}')$$

今關係(I)デ$x_1=1$ト選ブト

$$xy = y_1 \quad 又ハ \quad x = \frac{y_1}{y} \qquad \text{(III)}$$

トナル. 關係 (I), (III) カラ言フト, x 尺ト y 尺トハ第二位置ニ於テモ,乘法,除法ニ利用スルコトガ出來ル. ソノ手續ハ,第一位置ノ場合ノ手續カラ推シテ案出出來ヨウ. 特ニコレハ同一ノ數ヲ多クノ數デ割ル場合ニ便デアル.

2. 今ハ此等ノ關係ヲ利用スル別ノ仕方ニ就イテ述ベヨウ. ソレハ此等ノ關係ヲ利用シテ,

$$z^3 - az + b = 0 \quad (但\ b \neq 0)$$

ノ形ノ三次方程式ノ實根ヲ決定スルコトデアル.

$b \neq 0$ ナル故,コノ方程式ノ根ハ零ニハナラヌ. 由テ兩邊ヲ z デ割ルト,次ノ形ニナル.

$$z^2 + \frac{b}{z} = a.$$

ξ 尺上ニ數字 b ヲ取ル. 今ハ b ハ正ナリ[1]トシテ説明ヲ續ケル. 左邊ハ「z ノ平方」ト「b ヲ z デ割ツテ得ベキ商」トノ和ダカラ,「平方」ト「除法」ヲ同時ニ行ヘル樣ニ計算尺ヲ利用シ,ソノ和ト a トヲ比較スレバヨイ. ソノ實行法ハ次ノ如クスルガヨイ.

ξ 尺上ノ b ノ目盛ヲ η 尺ノ 1 ト一致セシメ,次ニ ξ 尺

(1) $b<0$ ノ時ハ $z^2 - \frac{|b|}{z} = a$ ノ形ニ成ルガ, ソノ時ハ $_0$ ト η_0 トヲ加ヘル代リニ, 差 $x_0 - \eta_0$ ヲ求メ, 之ヲ a ノ値ト比較スレバヨイ.

更ニ a モ正デナク, $z^2 - \frac{|b|}{z} = -|a|$

ノ形ニ歸スル場合ニハ, $\frac{|b|}{z} - z^2 = |a|$ トナルカラ, $x_0 + \eta_0$ ノ代リニ, $\eta_0 - x_0$ ヲ求メテ, 之ヲ $|a|$ ト比較スレバヨイ.

上ニ試ミトシテ或數値 ξ_0 ヲ考ヘ,之ニ對スル x 尺ノ目盛, η 尺ノ目盛ヲ夫夫 x_0, η_0 トスルト,公式 (I′) カラ

$$\eta_0 \xi_0 = 1.b = b.$$

故ニ
$$\eta_0 = \frac{b}{\xi_0}.$$

又一般ニ $x = \xi^2$, 故ニ $x_0 = \xi_0^2$. 由テ兩方ノ讀ミ x_0 ト η_0 トヲ加ヘルト $\xi_0^2 + \frac{b}{\xi_0}$ トナリ,變形シタ方程式ノ左邊ニ於テ $z = \xi_0$ ト置イタ時ノ値ガ出ル. 故ニ第二位置デ,滑尺ヲ斯ノ如キ位置ニ留メテ置クト,單ニ試ミノ値 ξ_0 ニ對スル x 尺, η 尺ノ讀ミヲ見テ,直チニ

$$\xi_0^2 + \frac{b}{\xi_0} = a$$

ノ左邊ノ値ガ分ル. $x_0 + \eta_0$ ノ値ヲ a ト比較シツツ ξ_0 ノ値ヲ順次變更シテ,如何ナル方向ニ移レバ,ソノ値ガ a ニ近ヅクカ,遂ニ a トナルカガ決定出來ル. カーソルヲ利用シテ正確ニ,少クトモ近似的ニ,所要ノ根ヲ決定シ得ル

コノ際最モ誤リ易イノハ,根 z (卽チ ξ_0) ノ符號ノ正負ト,値ノ小數點ノ位置ノ決定デアル. 注意セネバナラヌ.

時トシテカーソルヲ恒ニ同一方向ニ移動シテ居ルノニモ拘ラズ,和 $x_0 + \eta_0$ ノ値ハ先ヅ a ニ近キ,次ニ a ニ達スルコトナク,或ハ a ヲ越スコトナク, a カラ遠カルコトガアル. 之ハソノ ξ_0 ノ附近ニ實根ハ存在セズ,方程式ニ虛根ガアルコトヲ示スノデアル.

又時トシテ滑尺ヲ何度モ逆ニ引キ戻ス必要ノ起ルコ

トガアル. コノ場合ニハ,ソノ都度,爲ニ生ズル讀ミノ變化ニ十分ノ注意ガ必要デアル.

例ヘバ $z^3-7.23z-2.72=0$ 卽チ $z^2-\dfrac{2.72}{z}=7.23$

ノ根ヲ求メヨウ. 滑尺ヲ左方ニ引キ,右方指數ヲξ尺ノ 2.72 ナル目盛ニ對セシメル. ソノ時試ミニξ尺ノ1(卽チ $\xi_0=1$ ナル場合)ヲ檢査スルト

$$\xi_0^2=+1,\qquad \frac{b}{\xi_0}=\frac{-2.72}{1}=-2.72,$$

故ニ

$$\xi_0^2+\frac{b}{\xi_0}=1-2.72=-1.72\ <\ 7.23.$$

由テ次ニ $\xi_0=+2$ トスルト,

$$\xi_0^2+\frac{b}{\xi_0}=4-1.36=2.64\ <\ 7.23.$$

更ニ大キナ値 $\xi_0=+2.5$ ヲ探ルト,

$$\xi_0^2+\frac{b}{\xi_0}=6.25-1.09=5.16\ <\ 7.23.$$

次ニ滑尺ヲ十分右方ニ引キ,左方指數ヲξ尺ノ 2.72 ニ對セシメテ,$\xi_0=+3$ ノ場合ヲ考ヘルト,今度ハ

$$\xi_0^2=+9,\quad \frac{b}{\xi_0}=\frac{-2.72}{3}=-0.906,$$

由テ

$$\xi_0^2+\frac{b}{\xi_0}=9-0.906=8.094>7.23.$$

故ニコノ方程式ノ實根トシテ, 2.5 ト 3 トノ間ニハ少ナクトモ一ツハアル. コノ見當ノ下ニ,更ニ 2.5 ト 3 トノ間ヲ精査シテ, $z=2.86$ ガ得ラレル.

コノ上,此ノ方程式ノ左邊ニ正ノ値 ξ_0 ヲ配シテモ 7.23 ニ近ヅカナイ. 故ニ正ノ實根ハ 2.86 ノミデアル. 次ニ z 卽チ ξ_0 ニ負ノ値ヲ配シテ

$$\xi_0^2-\frac{b}{|\xi_0|}=a,$$

卽チ z ヲ正數トシテ

$$z^2+\frac{2.72}{z}=7.23$$

ノ根ヲ求メルト, $z=0.381,\ 2.48$ ガ得ラレル. 故ニ所要ノ根ハ

$$z=2.86,\quad -0.381,\quad 及ビ\quad -2.48$$

トナル.

最後ニ根ノ精密度ヲ考ヘル. コノ檢證ハ三根ノ和ガ z^2 ノ係數トナ

ルベキコト,從ツテ此ノ形デハ和ガ 0 ニ成ルベキコトヲ利用スルノガ最モ簡便ナ方法デアル.

$$2.86+(-0.381)+(-2.48)=-0.001.$$

故ニ此等ノ根ハ,和ノ上デ,約 0.001 ノ誤差アルコトガ知レル.

此等ノ根ヨリモ精密度ノ高イ根ヲ求メルニハ,計算尺ノ外ニ,解析的方法ヲ併用セネバナラヌ. 近似度ヲ高メル此ノ種ノ解析的方法ニ就イテハ,後ニ第三章ニ說ク機會ガアル.

上ノ方法ハ,一元三次方程式ガ一般形

$$lz^3+mz^2+nz+p=0$$

ヲ取ツテ居ル場合ニモ,利用出來ル. 何トナレバ,コノ方程式デ

$$X=z+\frac{m}{3l}$$

ナル變數變換ヲ行ウト,

$$z^3+az+b=0$$

ノ形ニ容易ニ書キ換ヘ得ルカラ.

又コノ方法ハ開立ノ實行ニモ利用出來ル. 開立トハ

$$z^3=b$$

ナル形ノ方程式ノ根ヲ求メルコトト,結局同一デ,コレハ

$$z^3-az-b=0$$

ニ於テ $a=0$ ト成ツタ特別ノ場合ニ過ギナイ. 故ニ,b ノ立方根(實根)ヲ求メルノハ

$$z^2-\frac{b}{z}=0$$

ノ根ヲ求メルノト,同一事デ,前記ノ記號ヲ利用スルト, $x_0-\eta_0$ ガ 0 トナル樣ニ, ξ_0 卽チ z ノ値ヲ決メレバヨイ.

一元二次方程式ニ就イテモ,類似ノ方法デ,ソノ解法ニ計算尺ヲ利用スルコトガ出來ル.

尙ホ三次方程式ヲ解クコノ方法ハ,係數ノ値ガ餘リ違

ハナイ一群ノ同形ノ方程式ヲ,順次解カネバナラヌ場合適用シテ特ニ便宜デアル. ソノ故ニ一方程式ノ根ヲ求メルト,ソノ附近デ檢査シテ,比較的容易ニ,他ノ方程式ノ根ヲ求メルコトガ出來ルカラ.

最後ニ注意スベキコトハ,前述ノ方法ハ,例ヘバ同ジク一元三次方程式ヲ解クトシテモ,計算尺ノ唯一ノ利用法デハナイコトデアル. 四種ノ目盛ヲ適當ニ組合セテ,三次方程式ヲ解ク他ノ方法モ案出出來ル. ソノ案出ハ,學生ニ取リテハ,最モ適切ナ練習用課題デアル. 自ラ工夫アランコトヲ希望スル.

第六節　計算尺ノ第三位置

滑尺ヲ引キ拔キ,ソノ裏面ヲ上面トシ,而モ數字ヲ正式ニ讀ミ得ル樣ニ,臺尺ニ挿入シタ位置ヲ**計算尺ノ第三位置**ト云フ.

1. 滑尺ノ裏面ニハ三個ノ物差ガアル. 第三位置ニ於テ,最上方ニ位スルモノニハ,Sナル文字ガ一端ニ記入シテアル. 之ハ

$$f(\alpha) = \log\sin\alpha$$

ナル函數尺デ,ソノ單位ノ長サハ台尺ニ於ケルx目盛ノ單位ト等長デ,前前節ノ記號ニヨレバl粍デアル. ソノ目盛ニ記入シテアル數字ハ, $\log\sin\alpha$ 內ノ角αノ値ヲ,度ト分トヲ用ヒテ表示シタ數値デアル. 例ヘバ $\log 1 = 0$.

$\sin 90^\circ = 1$ デアルカラ,コノ函數尺ノ右端ニ 90° ト記入シテアル. 而シテ右端ヲ90°トシテアルハ,此ノ函數尺ハ右端ガ長サヲ測ル出發點デ,コノ點ガ零點ナルコトヲ示ス.

コノ函數尺ヲ便宜ノ爲メ, S尺ト呼ビ,ソノ目盛ノ數値ヲαデ示サウ. マタx尺ノ右方指數ヲ1ト讀ミ,從ツテx尺ノ數字ヲ左端カラ

$$0.01,\ 0.02,\ \ldots,\ 0.9,\ 1$$

ト讀ムコトニスルト,單位ハ等長ダカラ,x尺トS尺トノ間ニハ

$$\log x = \log\sin\alpha,$$

卽チ

$$x = \sin\alpha$$

ナル關係ガ成立スル. 故ニx尺ノ左右ノ指數ガS尺ノ兩端ト夫夫一致スル樣ニ,滑尺ヲ止メタ場合ニハ, S尺ノαニ對スルx尺ノ讀ミ x カラ,正弦ノ値 $\sin\alpha$ ガ求メラレル. 又逆ニ $\sin\alpha$ ノ値xヲ知ツテ,角αノ値ヲ定メルコトガ出來ル.

又第三位置ニテ滑尺ヲ或位置迄移動シテ, x_1 ト α_1 トガ一致スル樣ニスルト

$$\log x - \log\sin\alpha = \log x_1 - \log\sin\alpha_1$$

卽チ

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{x_1}{\sin\alpha_1}.$$

更ニ $\alpha_1 = 90^\circ$ トスルト, $\sin\alpha_1 = \sin 90^\circ = 1$ ダカラ

$$x = x_1\sin\alpha.$$

然ルニ,一鋭角ガαナル直角三角形ノ斜邊ガx_1デアル

ト,角 α ニ對スル邊ノ長サ(之ヲ x トスル)ハ

$$x = x_1 \sin\alpha$$

デ與ヘラレル. 由テ直角三角形ノ解法,更ニ一般ニ任意ノ三角形ノ解法ニ,計算尺ガ利用サレル. 從ツテ,又三角法的解析ニ於テモ,計算尺ガ利用出來ル.

例ヘバ二邊ガ x_1, x_2, ソノ夾角ガ α_1 ナル三角形ノ第三邊ト他ノ二角ヲ決定スル場合ナラ,第三邊ヲ x_3, 他ノ二角ヲ x_2, x_3 ニ對スル意味デ α_2, α_3 デ表ハスト,

$$\frac{x_1}{\sin\alpha_1} = \frac{x_2}{\sin\alpha_2} = \frac{x_3}{\sin\alpha_3}$$

ナル關係ガ成立スルノダカラ,先ヅ滑尺上S目盛ニ α_1 ヲ考ヘ,之ト x 尺ノ x_1 ト對セシムレバ,

$$\frac{\sin\alpha_2}{x_2} = \frac{\sin\alpha_1}{x_1}$$

カラ,角 α_2 ハ x_2 ニ對スル目盛ヲ讀ンデ直ニ求メラレル. 第三角 α_3 ハ,コノ手續ヲ繰返スヨリモ,

$$\alpha_3 = 180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)$$

ヲ利用シテ求メル方ガ,簡易デアル. 又邊 x_3 ハ,

$$\frac{x_3}{\sin\alpha_3} = \frac{x_1}{\sin\alpha_1}$$

ヲ利用シ,上述ノ位置デ α_3 ニ對スル x 尺ノ讀ミトシテ,直チニ得ラレル.

但シ角ヲ知ツテソノ正弦ヲ求メ,又ハ正弦ノ値ヲ知ツテ角ヲ決メルノニ,角 α ガ $35'$ 以下ナラ,角 α ヲレディアン(Radian)デ表ハシ,近似式

$$\sin\alpha = \alpha \qquad (\alpha < 35')$$

ヲ用ヒテ,ソノ目的ヲ達スレバヨイ.

2. 次ニ第三位置デ,滑尺ノ裏面ノ最下方ノ目盛ヲ檢スルニ,之ニハ,ソノ一端ニTナル文字ガ記シテアル. 之

ハ $\log\tan\beta$ ノ函數尺デ,之ヲ便宜ノ爲メ,T尺ト呼ンデ置ク. コノ函數尺ノ單位ハ ξ 尺ノ單位ト等長デ, x 尺ノ單位ノ2倍ニ成ツテ居ル. 右端ノ目盛ニ 45° トアルカラ,

$$\log 1 = 0, \quad \tan 45^\circ = 1, \quad 故ニ \quad \log\tan 45^\circ = 0$$

トナリ,T尺モ右端ガ零ノ點デアルコトガ分ル. 又ソノ目盛ハ $\log\tan\beta$ ノ角 β ヲ度,分デ表示シタ數値デアツテ,之ヲ β デ示スコトトスル.

サテT尺ト ξ 尺トヲ比較スルニ,先ヅ左右兩端ガ一致スル位置デハ

$$\log\xi = \log\tan\beta,$$

故ニ

$$\xi = \tan\beta. \tag{I}$$

又任意ノ位置デ特定ノ値 ξ_1 ト β_1 トガ一致シ,一般ニ ξ ト β トガ相對スルナラ

$$\log\xi - \log\tan\beta = \log\xi_1 - \log\tan\beta_1.$$

特ニ β_1 ヲ 45° トスルト

$$\log\xi - \log\tan\beta = \log\xi_1$$

由テ

$$\frac{\xi}{\xi_1} = \tan\beta, \quad 卽チ \quad \xi = \xi_1 \tan\beta \tag{II}$$

トナル. 關係(I), (II)ヲ利用スルト,角ヲ知ツテソノ正切ヲ求メ,又正切ノ値ヲ知ツテ角ヲ定メルコト,及ビコノ種ノ計算ヲ必要トスル諸種ノ計算ニ之ヲ利用スルコトガ出來ル.

シカルニ β ヲ鋭角トスル直角三角形ノ底邊ヲ ξ_1 トスルト,高サ ξ ハ $\xi = \xi_1 \tan\beta$ デ與ヘラレルカラ,三角形ノ

解法,一般ニ三角法的解析ニモ,計算尺ノT尺トξ尺トガ利用出來ル.

但シβガ6°以下ノ角ナラバ,計算尺デハ領域外ニナルガ,ソノ時ハ近似的ニ

$$\tan\beta = \beta \qquad (\beta < 6^\circ)$$

ヲ用ヒルコトガ出來ルカラ,差支ヘナイ. 但コノ場合角βハ弧度法デ表示スベキコトヲ忘レテハナラヌ.

3. 次ニT尺デハ45°以上ノ場合モ,領域外トナツテ居ルガ,之ニハ次ノ如キ手續デ矢張リ計算尺ヲ利用スルコトガ出來ル.

今 $\log\tan\beta$尺ノ全體ヲ考ヘ,

$$\tan(45^\circ+\varphi) = \frac{1}{\tan(45^\circ-\varphi)},$$

卽チ

$$\log\tan(45^\circ+\varphi) = -\log\tan(45^\circ-\varphi)$$

ナル關係ヲ併セ考ヘルト, $\log\tan(45^\circ+\varphi)$ノ無限函數尺ハ$\varphi=0$ノ點ニ對シテ,左右對稱デアルコトガ分ル.

故ニT目盛ト,之ガ零點($\varphi=0$ノ點,卽チ$\beta=45^\circ$ノ點)ニ關スル對稱目盛トヲ併セ考ヘルト,無限函數尺カラ,$\beta<6^\circ$ナル部分ト, $90^\circ \geqq \beta > 84^\circ$ノ部分トヲ除去シタ,無限函數尺ト同一物ニ成ル.

今コノ兩端ノ部分ヲ除去シタ無限函數尺デ,目盛ニβノ値ヲ記入セズ, $45^\circ+\varphi=\beta$ナル如キφノ値ヲ記入シタルモノト,假リニ考ヘルト,零點卽チ右端ハ$\varphi=0$トナリ,

φガ正ニシテ順次增加スルト,刻ミハ順次右方ニ移動スル. ソノ或ル位置デ,ソノ點ノ零點ニ關スル對稱點ヲ考ヘルト,ソノ對稱點ハ$45^\circ-\varphi$ガ記入シアルT尺上ノ點トナル.

故ニ滑尺ヲ拔キ放チ,上下轉倒シテ挿入スルト,ソノ時ノT尺ハ$\log\tan(45^\circ+\varphi)$ノ目盛トシテ役立ツコトニナル.

但シ斯樣ニ利用スル場合,ソノT尺ノ讀ミハ,左ヨリ右ヘ $45^\circ,\ 40^\circ,\ 35^\circ.\ 30^\circ, \ldots\ldots$

トアルヲ, $45^\circ,\ 50^\circ,\ 55^\circ,\ 60^\circ, \ldots\ldots$

ト讀ミ改メネバナラヌ.

同時ニξ尺ノ目盛モ,ソノ左方指數ヲ0ト見做シ,左ヨリ右ヘ 1, 2, 3, ..., 10 ト讀ムコトニスルト.

$$\xi = \xi_1 \tan\beta,$$

又ハ

$$\xi = \tan\beta, \qquad (\text{但 } \xi>1,\ \beta>45^\circ)$$

或ハ

$$\frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\tan\beta}{\tan\beta_1}$$

等ノ計算ニモ,T尺ヲ同樣ニ利用スルコトガ出來ル.

此利用法ニ於テ最後ニ注意スベキコトハ,普通滑尺ノ方向ノ轉倒ハ,方向ノ轉換トナルガ,コノ場合ノ轉倒ハ唯無限函數尺ノ次ノ部分ノ實現ヲ目的トスルモノデ,方向ハ矢張前ト同一デアルコトデアル.

$\beta>45^\circ$ノ時$\log\tan\beta$ヲ求メル爲ニ挿入シタ滑尺ノ位置ヲ,**計算尺ノ第四位置**ト云フ.

計算尺ノ第四位置ニ於ケル利用法モ少ナクハナイ．然シ之ハ學生ノ工夫ニ任セ,練習課題トシテ殘シ,今ハソノ他ノ必要ナ二三ノ注意ヲ述ベテ,本章ノ前半ヲ終ラウト思フ．

4. 滑尺ノ裏面ノ中央ノ目盛ハ普通ノ物差デ,他ノ函數尺ノ單位ノ長サヲ知ル外ニハ,直接ニハ必要ノナイモノデアル．

但シ第四位置デ,コノ中央ノ物差ト ξ 尺トヲ左右兩端ガ一致スル様ニ,止メテ比較スルト,コノ物差ノ讀ミハ, ξ 尺ノ或目盛ノ左方指數カラノ距離ヲ示スコトニナルカラ,中央ノ物差ノ讀ミヲ z デ示スト

$$z = \kappa\log_{10}\xi.$$

然ルニ更ニ精査スルト, z ハ右端ガ1ト成ツテ居ルカラ, $z=1$ ノトキ $\xi=10$ ト成ル．コノ條件カラ

$$1 = \kappa\log_{10}10 = \kappa.$$

故ニ

$$z = \log_{10}\xi$$

トナル．

故ニ中央ノ普通ノ物差ハ,第四位置デ, ξ 尺ト共ニ,常用對數ノ計算ニ利用スルコトガ出來ル．

又第四位置デ,滑尺ヲ任意ノ位置トシ,特定ノ値 z_1 ガ ξ_1 ト對スルトキハ,

$$2lz-2l\log_{10}\xi = (\text{一定}) = 2lz_1-2l\log_{10}\xi_1,$$

故ニ

$$z-\log_{10}\xi = z_1-\log_{10}\xi_1.$$

更ニ特ニ z_1 ヲ0ト撰ブト

$$z-\log_{10}\xi = -\log_{10}\xi_1,$$

從ツテ

$$z = \log_{10}\left(\frac{\xi}{\xi_1}\right).$$

前述ノ $z=\log_{10}\xi$ ハ,此ノ一般ノ場合ヲ,更ニ $\xi_1=1$ トシタ特別ノ場合デ,此等ノ關係ハ對數計算ヤ,指數計算ニ利用出來ル．

5. 次ニ滑尺ノ裏面ノ三函數尺ヲ,第一位置ノ儘デ,別ノ目的ニ利用スルコトヲ説明シヨウ．

普通店頭デ販賣サレル計算尺ニハ,臺尺ノ裏面ニ,兩端ニ近ク二個ノ楕圓形ノ穴ガアル．此等ノ穴ニハ夫夫一本ノ指線ガアツテ,穴ヲ通ジテT尺,S尺及ビ中央ノ物差ヲ裏面カラ讀メル様ニ構造シテアル．コノ指線ノ位置ハ計算尺ノ表面,臺尺ノ左右ニアル指數ノ直下ニアル．故ニ若シ臺尺ガ透明デアツタラ,此等ノ指線ハ左方指數右方指數ニ夫夫重ツテ見エルモノデアル．

(1) 今第一位置デ,滑尺ヲ少シク右方ニ引キ,右端ニ位スル穴カラ,裏面カラ,S尺ヲ讀ンデ,ソノ讀ミヲ α トシ,其時表面カラ見テ, x 尺ノ右方指數ニ對スル, y 尺ノ讀ミテ y_1 トスルト, y 尺ノ右方指數カラ y_1 迄ノ距離ハ, S尺ノ α ノ右方指數カラノ距離ト同一デアルカラ(計算尺ガ透明體デ出來テ居レバ明デアル様ニ,

$$y_1 = \sin\alpha.$$

之ハ第三位置ニ於テ,x尺トS尺トノ間ニアル關係ト同一デ,第一位置ノ儘右端ノ穴ヲ通ジ,y尺トS尺トヲ對セシメテ,正弦ニ關スル計算ガ出來ル.

尙ホソノ時,x尺トy尺トヲモ,同時ニ對セシメテ,一致スル目盛ノ讀ミヲx, yデ示スト

$$\frac{y}{x}=\frac{y_1}{1}=\sin\alpha.$$

故ニ　$y=x\sin\alpha$　ト云フ,三角形ノ解法上必要アル計算ガ出來ルノミナラズ,正弦ノ値ガ分數デ與ヘラレタ場合ノ角ノ計算ニモ資スルコトガ出來ル.

例ヘバ　$\sin\alpha=\frac{3}{4}$　カラαヲ求メントスルト,一般ニハ　$\frac{y}{x}=\sin\alpha$ トナルノダカラ,y尺ノ3ナル目盛ヲ,x尺ノ4ナル目盛ニ一致セシメ,次ニ表面ノ右端ノ穴カラ見テ,指線ガ示ス讀ミヲαトスルト,ソノ讀ミガ所要ノ角ノ大イサデ,此ノ場合ハ

$$\alpha=48.6^\circ,\quad 卽チ\quad \sin 48.6^\circ=\frac{3}{4}$$

トナル

(2) 同様ノ利用ハ,左端ノ穴ヲ利用シ,T尺ニ就イテモ工夫出來ル.

滑尺ヲ左方ヘ押シ,裏面ノ左穴カラ見テ指線ガ示スT尺上ノ讀ミヲβトスル. 更ニコノ時η尺ノη_1ナル讀ミガ,ξ尺ノ1ト相對スルモノトスルト(但コノ時讀ミ方ハ表デξ尺ノ數字ハ左カラ右ヘ1, 2, 3, ..., 10ト讀ミ,η尺ノ方ハ左カラ0.1, 0.2, ..., 0.9, 1.0ト讀マネバナラヌ),

$$\frac{\eta}{\xi}=\frac{\eta_1}{1}=\tan\beta$$

トナルカラ,前述ノ正弦ニ關スル計算ト同様ナ利用ガ,正切ニ就イテ行ハレルコトガ分ル.

(3) 最後ニ,右穴ニハ別ニ標線ガアッテ,中央ノz尺ノ目盛ヲ讀メル樣ニナッテ居ル點ノ利用法ヲ述ベヨウ.

コノ讀ミハ滑尺ヲ如何程右ヘ移動シタカノ實際ノ長サヲ知ラセルモノデ,或ル位置ノ裏面カラノ讀ミヲzトシ,ソノ時表面デ,滑尺ノ右方指數ニ對スルξ尺ノ讀ミヲξトスルト

$$z=\log_{10}\xi$$

トナル. 故ニ常用對數ニ關スル計算ハ第三位置デ行フコトヲ必要トセズ,第一位置ノママ右穴ノ中央標線ヲ利用シテモ,之ヲ行フコトガ出來ル.

計算尺ノ精密度ニハ限度ガアル. 故ニ高級ナ精密度ヲ必要トスル場合ニハ,計算尺ト解析的方法トヲ併用セネバナラヌ. 計算尺ノ精密度ハ第一ソノ構造ノ精粗ニ關係スルガ,計算者ノ注意ノ如何ニモ大イニ關係スル.

對數計算尺ハ唯一ノ計算尺デハナイ. 唯一般的ニ言ウト最モ便宜デ,最モ應用ガ廣イト言ヒ得ルノミデアル. 故ニ特種ノ計算ニ對シテ,若シ之ガ爲ニ特ニ工夫セラレタモノガアルナラバ,之ヲ利用スル方ガ策ノ得タモノデアル.

例ヘバ航海者ハ球面三角形ノ解法ガ必要デ,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}$$

等ノ計算ヲ行ハネバナラヌカラ,之ニ必要ナ $\log\sin\alpha$ ナル函數尺ヲ,臺尺ト滑尺トニ刻ンデアル所謂航海用計算尺 (Navigationsrechenschieber) ヲ用ヒルノガ便宜デアル

例一 或品物 5.23瓩ノ直段ハ 82.70馬(マーク)デアル. 然ラバ

(a) ソノ品物 16.5瓩ノ直段如何.

(b) 38.00馬デ求メ得ラレル分量如何.

[解] 第一位置デ x 尺ト y 尺トヲ利用ショウ. $x=5.23$ ノ目盛ト, $y=82.70$ ノ目盛トガ相對スル樣ニ置クト, x 尺ト y 尺トノ相對スル目盛ノ讀ミ x, y ガ,夫夫ソノ品物ノ目方ト直段トニナルカラ, $x=16.5$ ニ對スル y 尺ノ讀ミ, 及ビ $y=38.00$ ニ對スル x 尺ノ讀ミヲ見テ,

(a) 261馬, (b) 2.40瓩

例二 A, B, C, D ナル四商人,或品物ヲ夫夫 12.5噸, 16.0噸, 8.75噸, 6.8噸ダケノ註文ヲ受ケタ. 然ルニソノ品物ノ總在高ハ 35.90噸デアル. 仍ツテ之ヲ按分比例シテ,四人デ納入セントスル. 各人ノ納入高如何.

[解] 第一位置デ註文總高 44.05 ヲ x 尺上ニ取リ,實在總高 35.94 ヲ y 尺上ニ取ツテ兩者ヲ相對シセメルト

A	12.5	10.2
B	16.0	13.05
C	8.75	7.14
D	6.8	5.55
和	=44.05	35.94

$$\frac{x}{y} = \frac{44.05}{35.90}$$

トナル. 然ルニ,例ヘバAノ納入高ヲ y 瓩トスルト

$$44.05 : 35.90 = 12.5 : y$$

トナルノダカラ, $x=12.5$ ニ對スル y 尺ノ讀ミヲ見テ,答

$$y = 10.2$$

ヲ得ル 他モ同樣ニシテ,上記ノ表ノ樣ニ答ガ直ニ得ラレル. 實際,此等ノ諸値ノ關係誤差ハ $\frac{1}{1000}$ 以下デアル.

例三 一定量ノ瓦斯ノ壓力 p ト體積 v トノ間ニハ

$$vp = c\ (一定)$$

ナル關係ガアル. 然ルニ或ル特定ノ瓦斯ニ就イテ實驗シタ結果次ノ値ヲ得タト云フ

$$p = 15.3 \quad ノ時ニ \quad v = 0.36.$$

然ラバ $p = 1, 2, 3, \ldots\ldots, 20$ ナル場合ノ體積如何.

[解] $vp = c$ カラ $v = \dfrac{c}{p}$.

故ニ計算尺ノ第二位置デ, p ヲ x 尺上ニトリ, v ヲ y 尺上ニ取リ

$$x_1 = p_1 = 15.3$$

$$y_1 = v_1 = 0.36$$

ガ互ニ相對スル樣ニ滑尺ノ位置ヲ定メルト,所要ノ p, v ノ對應値ハ x 尺, y 尺ノ相對スル目盛ノ讀ミトシテ與ヘラレルカラ,直ニ次ノ結果ガ得ラレル.

$$v = 5.50,\ 2.76,\ 1.84,\ 1.38,\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots,\ 0.306,\ 0.290,\ 0.276.$$

例四 直圓壔形ノ或ル品物ノ重サ p ハ,高サガ 0.76米,直徑 d ガ 40粍ノトキ, 23.6瓩デアル. 然ラバ等高,同一物質デ重サガ夫夫

10瓩, 15瓩, 20瓩, 25瓩

ノモノノ直徑如何. 又直徑ガ夫夫

20粍, 25粍, 30粍, 50粍

ナルモノノ重サ如何.

[解] 此場合重サハ直徑ノ平方ニ比例スルカラ,滑尺ノ第一位置デ x 尺ト η 尺トヲ利用スルガ便宜デアル. 仍ツテ

$$x_1 = p_1 = 23.6,$$

$$\eta_1 = d_1 = 40.$$

ヲ相對セシメルト,相對スル目盛ノ讀ミ x ト η ハ夫夫對應スル p, d ノ値ヲ與ヘルコトトナリ,直チニ次ノ結果ガ得ラレル.

$x=p$	23.6	5.9	9.2	13.3	36.9	10	15	20	25
$\eta=d$	40	20	25	30	50	26.0	31.9	36.7	41.2

但コノ際 x 尺ヲ讀ム時ハソノ小數點ノ位置ニ注意シ,又 23.6 ノ値

ハx尺ノ右ノ半分上ニ取ルガ便宜デアル.

例五 直徑45粍ノ鐵管ヲ,毎秒4.2米ノ速サヲ以テ流出スル水流ガアル. 流出量之ト同一デアル水流ガ,直徑夫夫25粍,60粍デアル鐵管内ヲ通ラバ,管内ノ流速夫夫如何.

又同一條件ノ下ニ,管内ノ流速ガ毎秒10米ナル爲ニハ,直徑何程ノ鐵管ヲ用フベキカ.

〔解〕 速度ヲ毎秒V米,ソノ場合ノ鐵管ノ直徑ヲd粍トスルト,流出量ガ一定デアルカラ $Vd^2=$(一定) トナル.

故ニ滑尺ノ第二位置デ,Vヲx尺上ニ,dヲη尺上ニ考ヘ,

$$x_1=V_1=4.2 \quad ト \quad \eta_1=d_1=45$$

トガ相對スル樣ニ置ケバ,V,dノ値ハx尺,η尺ノ一致スル目盛ノ讀ミトシテ與ヘラレル.

$x=V$	4.2	13.6	2.4	10
$\eta=d$	45	25	60	29.2

問題

1. 計算尺ヲ用ヒテ次ノ値ヲ求メヨ.

$$\sqrt{27.3},\quad \sqrt{1837},\quad \sqrt[3]{7},\quad \log_{10}58.7,\quad e^{0.275}.$$

2. 計算尺ヲ用ヒテ,滑尺ノ同ジ位置デ $y=1.39\sin x$ ノ値ヲ $x=0.2$, 0.4, 0.6 ナル諸點デ求メヨ. 但シ一弧度ハ 57.30° デアル.

3. $x=0.5$, 0.75, 1.05 ノ場合,次ノ函數ノ値如何.

(i) $y=x^2\log_{10}x$. (ii) $y=2.65\tan x$.

4. 計算尺ヲ利用シ,次ノ各方程式ノ實根ヲ讀ミ取レ.

(i) $x^3-9.15x-3.26=0$,

(ii) $x^3-6.13x+1.84=0$,

(iii) $x^3+1.81x-0.98=0$.

5. R,vノ間ニハcヲ常數トシテ

$$R=cv^2$$

ナル關係アル時,cヲ定メントシテ行ツタ實測ノ結果ハ次ノ如ク成ツ

タト云フ. 此ノ材料カラ最モ適切ナcノ値ヲ定メヨ,

R	2.01	2.92	4.86	7.77	14.1
v	1.57	1.88	2.45	3.07	4.7

6. 三角形ABCデ角A,B,Cニ對スル邊ヲ夫夫a,b,cデ表ハス時,

$$a=7.53,\quad c=3.26,\quad C=15°.30'$$

ノ場合ニ,他ノ二角及ビ第三邊ノ大サ如何.

7. 前問ニ於テ $a=15.4$, $b=14.8$, $C=33°33'$ ナラ,他ノ二角及ビ第三邊ノ長サ如何.

(B) 計算機

第七節 構造

一口ニ計算機ト言ツテ居ルガ,之ニ色色アル. 茲デハ最モ普通ニ行ハレテ居ル計算機ニ就イテノミ説明スル. 尤モ根本ノ原理ハ何レノ機械モホボ同樣デアルカラ,一機ダニ熟知スレバ,他ハ推シテ瞭解出來ル. 數學的計算ニ最モ便宜ナノト,近ク改良セラレテ出來タ最新式ノ諸器ノ原品デアルト云フ意味デ,茲デハ**ぶるくはると** Burkhardt **ノ計算機**ヲ眼目トシテ,説明ヲ進メルコトトスル.

元來コノ種ノ計算機ノ原理ハ既ニらいぶにっつ Leibniz ノ案出シタモノデ[1], 之ヲ實用向ノ機械ヘ迄進メタ

(1) 計算機ノ起原ハ支那算盤 (Chinese Abacus, Swan Pan) デ,西暦紀元前約1000年ニ支那人ハ之ヲ工夫シテ居タ. 紀元前四,五世紀ニエジプトデ用ヒラレタ計算器ハ支那ノガ傳ツタモノデ,其後日本,ローマ,露西亞デ用ヒラレタ或ハ用ヒラレテ居ル,指先ヲ用フル計算器ハ,何レモ支那ノ算盤ヲ改良シタモノデアル.

ノハとーますThomasデアル. 第九圖ハぶるくはるとノアリスモメーター(Arithmometer)ト呼バレルモノデ,之ヲ表面カラ見ルト,上方ニ位スル長方形ノ部分所謂車(Carriage)ノ部ト,下方ニ位スル部分所謂**記數裝置**(Stellwerk, setting mechanism)トノ二部分カラ出來テ居ル.

記數裝置ノ下盤ニハ,縱ニ平行スル十個ノ長穴ガアッテ,ソノ右側ニハ夫夫0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9ノ數字ガ,下ヨリ上ヘ,順次ニ,等距離ニ記入シ,更ニ穴ニハ上下自由ニ移動シ得,又任意ノ位置ニ固定出來ル鈕(Knöpfe, node)ガ備ヘテアル.

此等ノ鈕ヲ手ヲ以テ,例ヘバ第九圖ノ如ク左方ノ長穴カラ,順次ニ, 3, 6, 5, 4, 9, 5ノ位置ニ止メルト, 365,495ヲ表ハスコトニ成ル.

故ニ圖ノ機械デハ鈕ヲ適當ノ位置ニ留メテ, 0,1カラ999,999迄ノ任意ノ整數ヲ表ハスコトガ出來,從ッテ小數

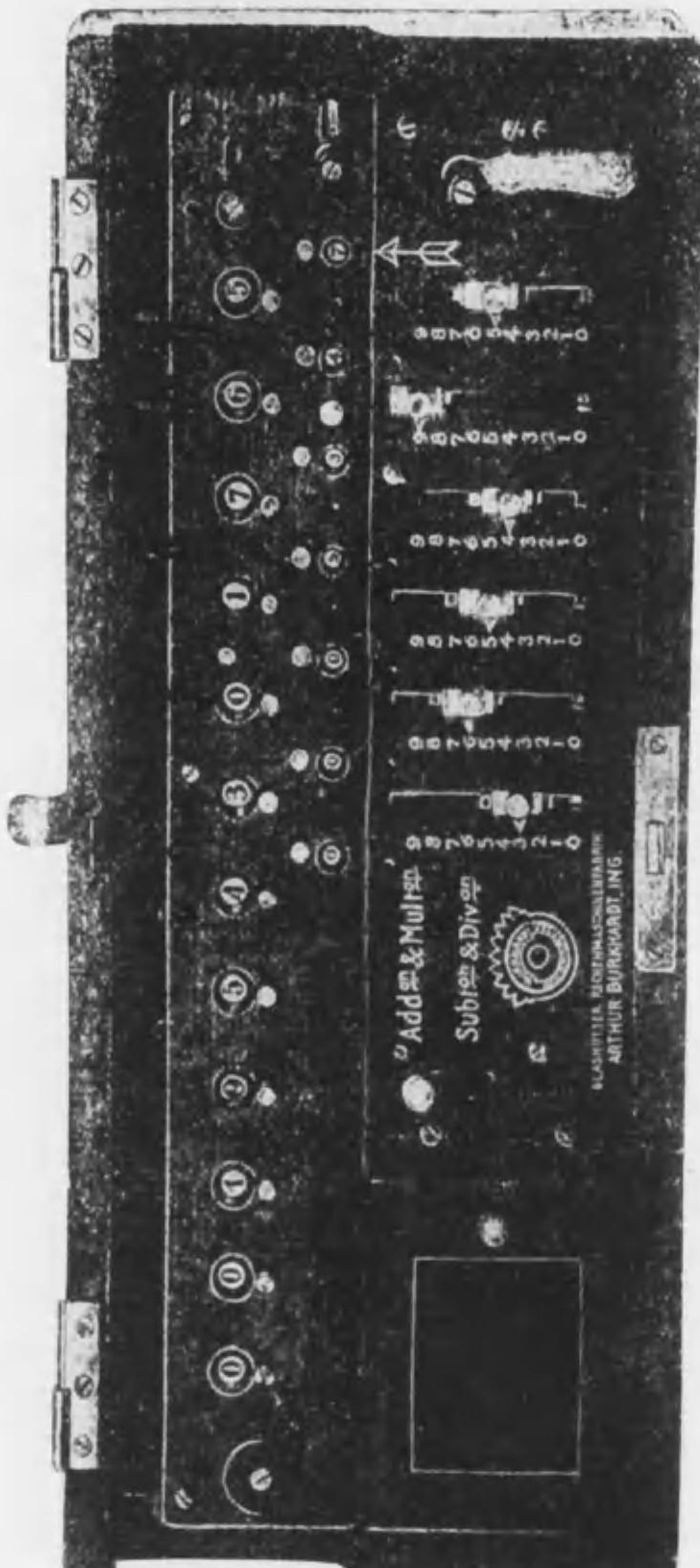
コノ算盤式ノ計算器ニ改良ヲ加ヘタ最初ノ人ハスコットランド人ねぴーあJohn Napierデ,可動的ノ棒,圓盤,圓壔ヲ初メテ利用シタノデソレハ1617年デアッタ.

ねぴーあノ計算器ヲ改良シタノガ,佛人ばすかるBlaise Pascalデ1642年デアッタ.らいぷにっつG.W. Leibnizガばすかるノ機械ヲ改良シテ乘法ヲ易シク行ヒ得ル樣ニシタノハ,ソノ後(1671年)ノコトデアル.

加,減,乘,除ヲ相當ノ正確ト速サトヲ以テ行ヒ得ル樣ニシタノハ,佛國ノ數學者とーます•ど•こるまーるM. Thomas de Colmarデ實用的ノ計算機ヲ完成シタノハ彼ノ功績デアル(1820年). 廻轉柄ノ工夫ハ主トシテ彼ガ苦心ノ結果デアル.

但シ未ダタイプライターノ樣ニ鈕ヲ押シテ數ヲ置ク考案ハ出來テ居ナカッタ. ソレヲ近世ノ新式計算機ノ樣ニ完成シテ,計算機トシテ最初ノ專賣特許ヲ取ッタ人ハ,(1884年),ぼーるどういんFrank S. Baldwinデアル. 而シテ計算機ガ市場デ販賣セラレ,實用セラレ,盛ニ改良セラレル樣ニ成ッタノハ1884年以後ノコトデアル.

點ヲ適當ニ取レバ,6數字カラナル,任意ノ小數,帶小數ヲ表ハスコトガ出來ル.



第9圖

又記數裝置盤ノ右側ニ廻轉柄(Kurbel, turning crank)ガアル. 靜止狀態デハ上下ニ垂直ノ位置ニアルガ,之ハ右ノ方向ヘ(一般ニ左ノ方向ニモ)廻轉スルコトガ出來ル.

又上部,車ノ部ニハ二行ノ横列ヲナス圓形ノ穴列ガアッテ,各ノ穴ニハ,下カラ一個宛0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9ノ中

ノ一數字ガ讀メル樣ニ成ツテ居ル．ソノ內,上方ノ一列ヲ**計算記錄裝置**(Zählwerk, Counting mechanism) 又ハ**上部記錄盤**(Upper Dial)ト云ヒ,下方ノ一列ヲ**廻轉記錄裝置**(Drehwerk, Turning mechanism) 又ハ**下部記錄盤** (Lower Dial) ト云フ．コノ記錄盤ノ右方ニハ一ツノ鈕ガアツテ,之ヲ押スト兩記錄盤內ノ數字ハ一度ニ 0 トナル樣裝置セラレテ居ル．故ニ之ヲ**削除柄**ト云ヒ,兩記錄盤上ノ數ヲ拂ウ爲ニ用ヒル．

計算記錄裝置,廻轉記錄裝置ノ各穴ノ近クニハ,何レモ小サイ鈕ヲ備ヘテ居ル．之ハ之ヲ廻轉シテソノ穴ヘ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ノ任意ノ一ツヲ顯ハサセル爲ニ使ウモノデアル．

先ヅ計算記錄裝置,廻轉記錄裝置ノ各穴ニハ,何レモ 0 ヲ顯ハシテ置キ,記數裝置ニハ,例ヘバ數 365,495 ヲ置イテ,廻轉柄ヲ時計ノ針ノ方向ニ一廻轉シテ見ヨ．ソノ結果 365,495 ナル數ガ計算記錄裝置ニ顯ハレ,廻轉記錄裝置ニハ,右端ノ穴ニ 1 ナル數ガ顯ハレテ來ル．

若シコノ場合,初メニ,計算記錄裝置ニ別ニ,例ヘバ 153256 ト置イテアレバ,廻轉ト同時ニ,兩數ノ和 518751 ガ計算記錄裝置ニ顯ハレテ來ル．

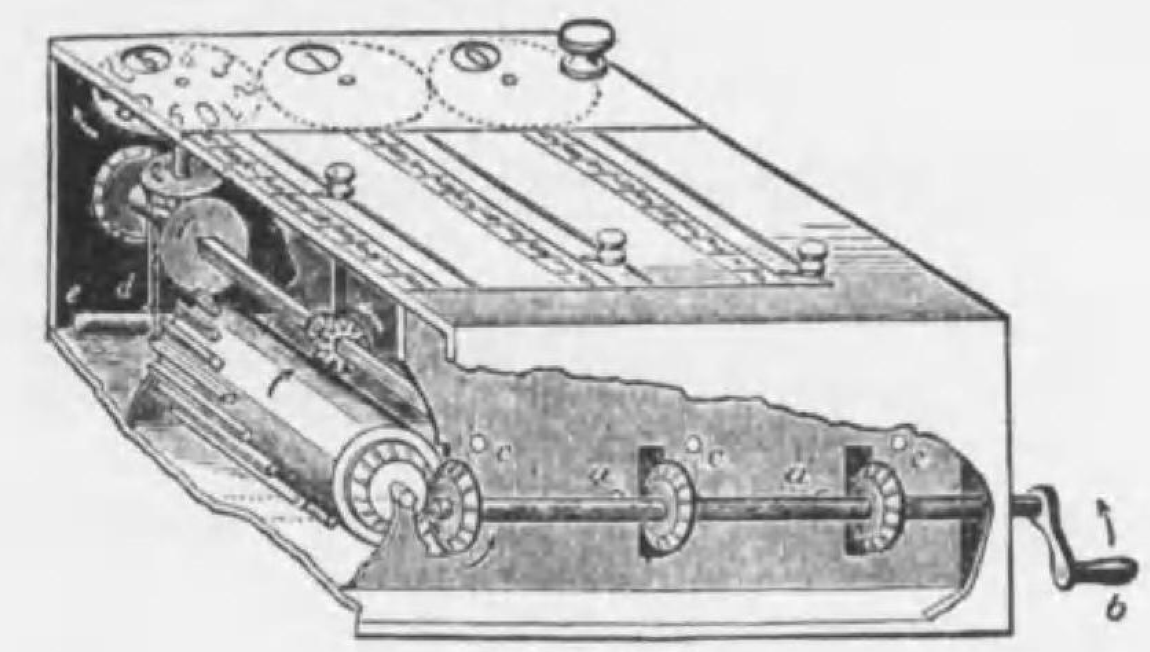
一般ニ廻轉柄ヲ右ニ回轉スルコトハ,記數及ビ計算記錄ノ兩裝置上ニアル二　ノ和ヲ求メルコトトナル．

コノ點ハ何レノ計算機ニ於テモ共通ナ事實デ,コノ意

味ニ於テ,計算機ハ何レモ一種ノ加算機ナリト稱スルコトガ出來ル．

次ニソノ內部裝置ヲ明カニシテ,如何ニシテ,コノ基本作用ガ行ハレルカヲ說明シヨウ．

第十圖ハ內部裝置ノ略圖デ,記數裝置ノ各長穴ノ直下ニハ夫夫一個ノ圓柱體ガアツテ,此等ハ何レモ廻轉柄ノ



第１０圖

一廻轉ト共ニ,齒車仕掛ケデソノ軸ノ周リニ一廻轉スルモノデアル．但シコノ略圖デハ,說明ニ便ナル爲,廻轉柄ノ位置ハ實際ノモノトハ,別ノ位置ニ設ケテアル．

此ノ圓柱體ノ曲面ニハ,九個ノ金屬製ノ細片ヲ,軸ノ方向ニ,互ニ等間隔ニ附着シテアル．此等ノ細片ノ長サハ等差級數的ニ變化シ,一端ヲ揃ヘテ附着シテアル．記數裝置ノ長穴內ノ鈕ハ,表カラ見ルト,一個ノ鈕デアルガ,內部カラ見ルト,盤面ニ對シ,垂直ノ位置ヲ取ル細長キ金屬製細棒ノ一端デアツテ.他ノ一端ニハ十個ノ齒ヲ備ヘ,而

モ圓柱體ノ軸ニ平行ナ細キ方形ノ金屬棒ニ,ハメラレタ齒車ガ之ニ附イテ居ル.

圓柱面ノ細片ノ厚サ,此ノ齒車ノ位置及ビ齒ノ長サハ,能ク調節シテ,齒ハ圓柱面ニハ接觸シナイガ,圓柱ガ廻轉シテ細片ガ齒車ノ直下ニ來タ時ハ,齒ハソノ細片ニカカツテ圓柱ト共ニ齒車ガ廻轉スル樣ニ成ツテ居ル.

齒車ノ中心ヲ貫ク細棒ハ圓柱形デナク,切口ガ正方形ニ成ツ居ルカラ,齒車ト共ニ,此心棒モ廻轉シ,ソノ一端ニ固着シテ居ル圓錐齒車(圓錐曲面ニ齒ヲ刻ンダモノ)デ,齒車ノ廻轉ヲ計算記錄裝置ノ直下ニアル數字圓板ニ傳ヘルコトガ出來ル.

今廻轉柄ノ廻轉ニ伴ウ各部ノ運動ヲ見ルニ,圓柱面上ノ細片ノ長サハ記數裝置ノ鈕ガ數字0ノ位置ニアルト,最長ノモノモ,鈕ノ他端ノ齒車ニ觸レズ,又1ノ位置ニアルト,最長ノ一片ノミニ觸レ,他ヘハ觸レナイ樣ニ,又例ヘバ6ノ位置ニアルト,最モ短イ三片ニハ觸レナイガ,他ノ6本ニ觸ル樣ニ調節シテアルカラ,例ヘバ或長穴ノ鈕ヲ6ノ位置ニ置イテ廻轉柄ヲ一廻轉スルト,ソノ長穴直下ノ圓柱ガ一廻轉シ,ソレト共ニ,ソレニ接スル齒車ハ$\frac{6}{10}$廻轉シ,從ツテ,ソノ軸ノ延長上ニ位スル計算記錄裝置ノ一穴ノ直下ノ數字板ガ$\frac{6}{10}$廻轉シ,元ソノ穴ニ顯レテ居タ數字ニ6ヲ加ヘテ得ル數字ガ顯ハレルコトトナル.

以上ノ說明デ,廻轉柄ノ廻轉ニヨツテ起ル運動傳達ノ

摸樣ト,記數裝置上ノ數字ガ如何ニシテ,計算記錄裝置上ノ數ニ加ヘラレルカノ裝置ガ,ホボ瞭解セラレタデアラウ. コノ外ニモ說明スベキコトハ澤山アル.

例ヘバ或位ノ數ガ10以上ト成ツタ時ハ,丁度時計デ60秒ガ1分トナル樣ナ齒車裝置デ,一ツ上ノ位ニ繰上ゲラレル. ソノ他削除柄ガ如何ニシテ記錄盤上ノ數ヲ拂ウカ,廻轉記錄裝置ヘ,柄ノ廻轉數ガ如何ニシテ顯レルカ,說明ヲ要スルモノモ,少ナクナイ. 然シ吾々現在ノ目的カラ言ヘバ,玆デ機械ノ製作者ナラ必要カモ知レナイ樣ナ,細說ニ說キ及ブ必要ガナイカラ,之ヲ省略スル.[1]

次ニ廻轉柄ヲ左ノ方向ニ,卽チ時計ノ針ト反對ノ方向ニ,廻轉スルト,圓柱體ソノ他凡テガ反方向ニ轉廻スルコトニナリ,計算記錄裝置ノ各穴ノ直下ニアル數字板ヲ逆ニ廻轉スル結果トナリ,結局加法ノ代リニ減法ガ行ハレル樣ニ成ルノデアル.

一般ニ廻轉柄ノ左方廻轉ハ計算記錄裝置上ノ數カラ記數裝置上ノ數ヲ減ズル作用トナル.

第八節　計算ノ方法

1. 加法及ビ減法

計算機デ加法ヲ行フノニハ,加フベキ數ヲ,順次,記數裝

(1) コノ方面ノ詳細ハ Galle, Mathematische Instrumente (Leipzig, 1912) ニ就イテ見ラレヨ. 同書ニハ計算機バカリデナク,ソノ他ノ諸機械ニ就イテモ詳說シテアル.

置上ニ置キ,ソノ都度廻轉柄ヲ一度宛廻轉スレバヨイ.

ソノ時計算記錄裝置上ニ顯ハレル最後ノ數ガ,所要ノ和デアル.

甲數カラ乙數ヲ減ズルニハ,ぶるくはるとノ計算機デハ,記數裝置ノ左方ニアル,スウィチ用ノ鈕 (Umschalteknopf) ヲ上カラ下ヘ反轉シタ後,計算記錄裝置上ニ甲數ヲ置キ,記數裝置上ニ乙數ヲ置キ,加法ノ時ト同樣廻轉柄ヲ右廻轉セヨ. 然ル時ハ,ソノ結果所要ノ差ガ計算記錄裝置上ニ顯ハレテ來ル. (計算機ニヨツテハ左轉セヨ).

卽チコノスウィチ性ノ鈕ハ圓柱體以下ヲ反對ノ方向ニ廻轉サセル裝置デ,之ガ爲,廻轉柄ハ左廻シヲスル必要ガ無ク,加法ノ時ト同樣右ニ廻轉スルノデアル.

故ニ加減ノ兩法,混合ノ連續計算ヲ,ぶるくはるとノ計算機デ行ウ時ハ,柄ハ恒ニ右ニ廻轉シナガラ,スウィチ性鈕ノ方向ヲ適當ニ變更シツツ進行出來ル.

2. 乘法

甲數ヲ n 倍スルノニハ,スウィチヲ加法ノ方向ニ留メ,甲數ヲ記數裝置ニ置イテ,廻轉柄ヲ n 廻轉スレバヨイ.

但シ n ガ例ヘバ367ノ如ク二桁以上ノ數ノ時,廻轉柄ヲ367回廻轉スルノナラ,一寸手數ナコトニ成ルガ,ソノ必要ハナイ.

第九圖ノ樣ニ計算記錄裝置ノ右端ノモノガ,記數裝置

ノ一ノ位ノ長穴ノ丁度延長上ニアル位置デ7廻轉スルト,記數裝置上ノ數ヲ七度加ヘルコトニ成ルガ,若シ記錄盤ノ部分ヲ一段(或ハ a 段)右ヘ移動シ,計算記錄裝置ノ右端カラ第二番目(或ハ第 $a+1$ 番目)ノ穴ガ,記數裝置ノ一ノ位ノ直上ニ來タラシメテ,柄ヲ7廻轉スルト,記數裝置上ノ數ヲ70回(或ハ $7\cdot 10^{a}$ 回)加ヘルコトニ成ルカラ,コノ原理ヲ利用シテ,367倍スルニハ第一ノ位置デ7廻轉,一ツ右ヘ移動シテ6廻轉,更ニ一ツ右ニ移動シテ3廻轉スルト,最初ノ位置デ367回廻轉シタト同一結果ニナル.

例ヘバ 365,495×5,347 ヲ求メルノニハ,先ヅ記數裝置上ニ 365,495 ヲ置キ,車ノ部ヲ十分左方ヘ移シテ置イテ,(一ノ位デ)7廻轉シ,次ニ一段車ヲ右ヘ移シテ4廻轉シ,又一段右ヘ移動シテ3廻轉,更ニ一段右ヘ移動シテ5廻轉スレバヨイ. コノ時第一段ノ終ニ計算記錄裝置ニ表ハレルノハ,部分積 $365{,}495\times 7.$

次ノ段ノ終リガ

$$365{,}495\times 7+365{,}495\times 40$$

卽チ $365{,}495\times 47.$

ソノ次ガ $365{,}495\times 347.$

最後ニ $365{,}495\times 5{,}347$

ガ顯ハレテ來ル.

但シ,之ハ或ル數ヲ5,347倍スル唯一ノ方法デハナイ. 如何樣ニ行ツテモ結局5,347ナル數ガ廻轉記錄裝置ニ顯ハレル樣ニスレバヨイ.

例ヘバ 295倍スルノニ

$$295 = 200+90+5$$

ト考ヘルノモ一案デアルガ,

$$295 = 300-5$$

ダカラ,百ノ位置デ3廻轉シ,次ニスウィチヲ反轉シテ,一ノ位デ5廻轉シ

テモヨイ．而モ此ノ方法ガ普通ノ廻シ方ヨリ遙カニ簡易デアル．

$a(b+c+d+....)$ ノ形ノ計算モ,先ヅ $b+c+d+....$ ヲ求メ,次ニ a ト $(b+c+d+....)$ トノ積ヲ求メテモヨイガ, $b, c, d, ...$ ガ餘リ複雜デナイ數ナラバ

$$a(b+c+d+....)=ab+ac+ad+....$$

ヲ利用シ, $ab, ac, ad, ...$ ヲ求メ,次ニソノ和ヲ求メル方ガ一般ニ簡易デアル．後ノ方法ナラバ a ヲ記數裝置ニ取リ,廻轉記錄裝置上ニ,順次 b, c, d ガ表ハレル樣ニスレバ,積 $ab, ac, ad, ...$ ガ求メラレテ,便宜デアル．尙ホ b ヨリ c, c ヨリ d ヘト移ル場合ニモ,成ルベク簡便ナ方法ヲ取レバ,更ニ策ヲ得タモノデアル．

例ヘバ　$b=28, c=54$ ナラ, ab 卽チ $a\times 28$ ヲ求メタ後, $a\times 54$ ヲ求メズ,

$$54=28-4+30$$

ナルコトヲ利用シ, $28a$ ヲ求メ,ソノ値ヲ別紙ニ寫シ取ルト共ニ,ソノ儘車ヲ一ノ位ニ移シテ,スウィチヲ減法ノ位置ニ置イテ,4廻轉シ,次ニ車ヲ拾ノ位置ニ置イテ,スウィチノ方向ヲ變ヘテ,3廻轉スル樣ニ進行スルガヨイ．

3. 除法, 開平

割算ヲ行ウノニハ,實ヲ計算記錄裝置上ニ取リ,法ヲ記數裝置上ニ取リ,スウィチヲ減法ノ位置ニ止メタ後,車ヲ適當ニ移動シテ,實ノ最高位ノ數字ガ,法ノ最高位ノ數字ノ直上或ハ直グ左ノ位置ニ來タル樣ニシテ,廻轉柄ヲ廻轉セヨ．

コノ廻轉ハ,廻轉ノ際變化スル,實ノ部分ノ殘リガ法ヨリ初メテ小サク成ル迄續ケテ,一旦中止スル．

次ニ車ヲ一段必要アル時ハ數段)左ヘ移シテ又廻轉ヲ始メヨ．

此ノ種ノ手續ヲ繰返シテ,計算記錄裝置上ノ數ガ0トナルカ,全體ノ殘リ(實ノ數字ヲ使ヒツクシタ後ノ殘リ)ガ法ヨリ小サク成ツタ時,コノ作業ハ終リトナル．

コノ時廻轉記錄裝置上ニ顯ハレル數ガ所要ノ商デアル．ソノ理由ハ除法ハ乘法ノ逆デアルコトカラ明デアル．

次ニ平方根ノ計算ヘノ利用法ヲ述ベヤウ．

例ヘバ $x=\sqrt{a}$ ヲ求メルノニハ,先ヅ計算尺ヲ用ヒテ $\sqrt{a}$ ノ近似値 x_1 ヲ求メヨ．

今　$\sqrt{a}=x_1+\xi_1$　ナリトスルト

$$(x_1+\xi_1)^2=a,$$

卽チ

$$x_1^2+2x_1\xi_1+\xi_1^2 \doteqdot x_1^2+2x_1\xi_1 \doteqdot a.$$

故ニ補正量 ξ_1 ノ近似値トシテ,

$$\xi_1'=\frac{a-x_1^2}{2x_1}$$

ヲ採用シ得ル．故ニ $x_1+\xi_1'$ ハ $\sqrt{a}$ ノ第二ノ近似値トナル．之ヲ x_2 ト置イテ　$\sqrt{a}=x_2+\xi_2$　トスルト

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1+\xi_1' \\ &= x_1+\frac{a-x_1^2}{2x_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_1}+x_1\right). \end{aligned}$$

故ニ x_2 ハ $\frac{a}{x_1}$ ト x_1 トノ相加平均トシテ定マルカラ,コノ形デ x_2 ノ計算ニ計算機ヲ利用スルコトガ出來ル.

ξ_2 ハ x_2 ノ誤差デアルガ, x_2 ノ關係誤差 $\frac{\xi_2}{x_2}$ ハ殆ンド, x_1 ノ關係誤差ノ平方ノ半分トナル.

ソノ故ハ　$\xi_1^2+2x_1\xi_1+x_1^2=a,$

由テ　$\xi_1=\frac{a-x_1^2-\xi_1^2}{2x_1}=\frac{a-x_1^2}{2x_1}-\frac{\xi_1^2}{2x_1}=\xi_1'-\frac{\xi_1}{2x_1}.$

從テ

$$\xi_2=\sqrt{a}-x_2=\xi_1+x_1-(x_1+\xi_1')$$
$$=\xi_1-\xi_1'=-\frac{\xi_1^2}{2x_1}.$$

故ニ

$$\left|\frac{\xi_2}{x_2}\right|=\left|-\frac{\xi_1^2}{2x_1x_2}\right|$$

然ルニ,近似的ニ $x_2=x_1$. 故ニ近似的ニ　右邊 $=\frac{\xi_1^2}{2x_1^2}$

由テ近似的ニ

$$\left|\frac{\xi_2}{x_2}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{\xi_1}{x_1}\right|^2.$$

即チ絶對值ニ就イテ言フト, x_2 ノ關係誤差ハ,近似的ニ, x_1 ノ關係誤差ノ平方ノ半分ニ等シイ.

更ニ ξ_2 ノ近似值トシテ $\xi_2'=\frac{a-x_2^2}{2x_2}$ ヲ使ウト,

$$x_3=x_2+\xi_2'=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_2}+x_2\right)$$

トシ,同樣ノコトヲ繰返スコトガ出來ルカラ,段々平方根ノ近似度ヲ高メルコトガ出來ル.

例ヘバ　$\sqrt{227}$ ヲ求メルニハ,先ヅ計算尺カラ

$$\sqrt{227}\fallingdotseq 15.1$$

次ニ計算機ヲ利用シテ,　$\frac{227}{15.1}=15.03311$

故ニ,之ト 15.1 トノ平均ヲ求メテ, $\sqrt{227}$ ノ第二近似值ハ

$$\frac{1}{2}\times(15.1+15.03311)=15.06655.$$

次ニ同ジ方法ヲ繰リ返スト

$$\frac{227}{15.06655}=15.06654\quad(\text{計算機デ}).$$

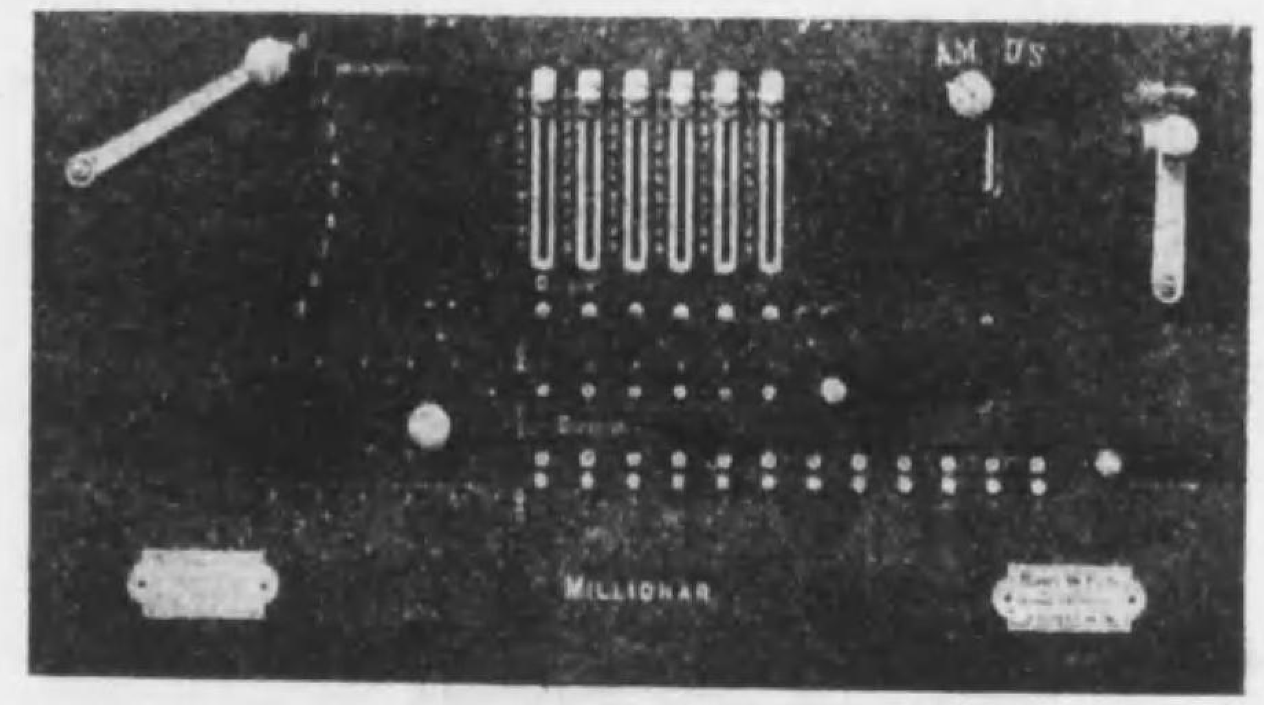
之ト 15.06655 トノ平均ヲ求メレバヨイガ,兩者ハ既ニ小數第四位迄一致シテ居ルカラ, 15.06655 デモ既ニ小數第四位ハ正シイコトガ分ル.

一般ニ計算尺ハ三桁ノ正確ナ結果ヲ與ヘ,六桁ノ計算機ハ上例ノ第二近似值ヲ完全ニ與ヘル.

然シ更ニ進ンデ,第三ノ近似值ヲ完全ニ求メヨウト思ツタラ,計算機ハ十二桁ノモノヲ使ハネバナラヌ.

第九節　ミリオネール計算機

以上ハぶるくはるとノ計算機ニ關スル說明デアルガ,近時計算機ハ種種ノ點ニ於テ改良セラレタ. 改良品中最モ有名ナモノノ一ツハ,ちゅーりっひノえぐり會社 Hans W. Egli カラ發賣スルミリオネール Millionaire ト呼ブ計算機デアル.



第 11 圖

コノ機ニハ記數裝置ノ右ニ,別ニ乘法用ノ廻轉手ガアツテ,二數ノ積ヲ求メルノニ,乘數ノ一數字ニ對シテ,唯一回廻轉柄ヲ廻轉スレバ足リル. コレコノ機ノ特長デアル.

卽チ記數裝置ノ左方ニ,槓杆ト 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ノ數字ノ記入セル部分ガアツテ,槓杆ヲ廻ハシテ,此等ノ數字ヲ任意ニ指シ得ル樣ナ仕掛ケガアル. 卽チ被乘數ヲ記數裝置ニ置キ,次ニ乘數ノ數字ヲ順次槓杆デ指シツツ,一數字每ニ廻轉柄ヲ一廻ハシスレバ,乘數ハ廻轉裝置ニ願ハレ,積ハ計算記錄裝置上ニ現レ來タルノデアル

而モコノ機械ハ廻轉柄ノ一廻リ每ニ,記錄盤ノ部分ガ一段宛移動スル裝置ニ成ツテ居ルカラ,計算者ハ自ラ之ヲ移動スル必要ナク,恒ニ左手ヲ槓杆上ニ置キ,右手ヲ廻轉柄ニ置キツツ,乘法ヲドンドン進行スルコトガ出來ル. コレ亦コノ機ノ特長デアル.

更ニ此ノ機デハ廻轉柄ト記數裝置トノ間ニ特別ノ仕掛ガアツテ,其所ノ鈕ハ之ヲ四種ノ位置ニ固定出來ル. 內二ツハ乘法向キト除法向キ,他ノ二ツハ加法向キニ,減法向キデアル.

上述ノ作用ハコノ鈕ヲ乘法向キニ固定シタ時ノ話デ,コノ鈕ヲ除法向キニ固定スルト,廻轉柄ハ同一方向ニ廻轉シツツ除法ヲ行ウコトガ出來ル.

又加法向キト減法向キノ兩位置デハ,機械ノ自動作用

ハ打消サレテ,機ハ純然タル加算機,又ハ減算機トシテ役立ツコトニナル.

コレ等ノ諸點ガミリオネール機ノ他ニ優ル所デアル.

第三章

有理整函數

x ノ**有理整函數**トハ,x ト任意ノ常數ニ加法,乘法ヲ有限回繰返シテ施シタトキ得ラルベキ代數式ノコトデアル. 之ヲ $g(x)$ デ表ハセバ, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ ヲ $(n+1)$ 個ノ常數(係數)トシテ,

$$g(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ノ形デ顯ハサレルモノ,然ラザルモ,コノ形ニ整頓シ得ルモノデアル. 吾々ハ暫ク總テノ係數ヲ實數ナリト假定スル. $g(x)$ ヲ單ニ $\underbrace{x^n}_{a_n,\, a_{n-1},\, a_{n-2},\, \ldots,\, a_1,\, a_0}$

トシテ記述スルコトガアル(零ナル係數ヲモ含メテ).

之ハ十進數ハ $3607 = 3\times10^3+6\times10^2+0\times10+7$

$= 3\mu^3+6\mu^2+0\mu+7$ (但 $\mu = 10$)

ノ如ク,ソノ基數 10 ノ多項式デアル樣ニ, $g(x)$ ハソノ値ヲ x ヲ基數トシテ表示シタモノト見做シ, $\mu = 10$ ノ時 $3\mu^3+6\mu^2+0\mu+7$ ヲ 3607 ト記述スル既記法ニナラツタモノデアル.

第一節 ほーなーノ法式,ソノ高次方程式解法ヘノ應用

1. $g(x)$ ノ値ハ x ノ値ト共ニ變化スル. 吾々ハ今 $g(x)$

ノ係數 $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ ガ皆ナ數字デアル時ニ, $x=p$ ナル場合ノ $g(x)$ ノ値ヲ求メヨウ.

コノ目的ヲ達スル爲メニ,n ヲ任意ノ整數トシテ,順順ニ次ノ如ク計算ヲ續ケル.

$$\begin{aligned} a_n p &+ a_{n-1} = a'_{n-1} \\ a'_{n-1}p &+ a_{n-2} = a'_{n-2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_2'p &+ a_1 = a_1' \\ a_1'p &+ a_0 = a_0' \end{aligned}$$

サスレバ a_0' ガ求メル所ノ値,卽チ $g(p)$ デアル.[1]

ソシテ上ノ順次ノ計算ハ次ノ形デ之ヲ行フ. 此法式ヲ**ほーなーノ法式**又ハ**ほーなーノ算式** (Hornersche Schema) ト云フ.

$$\begin{array}{ccccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\ & a_n p & a'_{n-1}p & \ldots & a_3'p & a_2'p & a_1'p \\ \hline a_n & a'_{n-1} & a'_{n-2} & \ldots & a_2' & a_1' & \boxed{a_0'} \end{array}$$

卽チ係數ヲ次數ノ高イ項ノモノカラ順次ニ右ヘ列記シ,(或項ガ缺ケテ居ル時ハ 0 ヲ記入セヨ),最初ノ a_n ニ p ヲ乘ジタ積ヲ次ノ a_{n-1} ノ直下ニ記入シテ和 $a_{n-1}+a_n p$ ヲ求メテ,横線ヲ引イテ,更ニソノ直下ニ記入スル. 次

[1] $a_0'=g(p)$ ノ證明ハ, 次ノ如ク容易デアル.

先ヅ $a'_{n-1} \equiv a_{n-1}+a_n p$,

次ニ $a'_{n-2} \equiv a_{n-2}+a'_{n-1}p = a_{n-2}+a_{n-1}p+a_n p^2$,

更ニ $a'_{n-3} = a_{n-3}+a'_{n-2}p = a_{n-3}+a_{n-2}\cdot p+a_{n-1}\cdot p^2+a_n\cdot p^3$,

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$a_1' = a_1+a_2 p+a_3 p^2+\ldots+a_{n-1}p^{n-2}+a_n p^{n-1}$,

$a_0' = a_0+a_1 p+a_2 p^2+\ldots+a_{n-1}p^{n-1}+a_n p^n = g(p)$.

ニコノ和 a'_{n-1} ト p トノ積ヲ a_{n-2} ノ直下ニ書キ, a_{n-2} ニ加ヘテ,ソノ和 a'_{n-2} ヲ線ヲ隔テテ,直下ニ書ク. コノ手續ヲ繰返セバヨイノデアル.

コノ算式ノ計算ニハ,p ヲ何度モ乘ズルカラ,計算尺又ハ計算機ヲ利用スルト甚ダ迅速ニ,目的ノ結果ヲ求メルコトガ出來ル. マタ a_0' ノ正確度ヲ檢算スルニモ容易デアル. (第75頁ノ實例ヲ見ヨ).

2. ほーなーノ算式ヲ $g(x)$ ノ或點ニ於ケル展開ニ利用スルコト.

今 $g(x)$ ヲ點 $x=p$ ニ於テ展開スル,即チ次ノ樣ニ $g(x)$ ヲ $x-p$ ノ冪級數

$$g(x)=a_0'+A_1(x-p)+A_2(x-p)^2+\dots\dots+A_n(x-p)^n$$

デ表ハサウト思フ. ソノ爲メニ $x-p=u$ ト置クト

$$g(x)=a_0'+A_1u+A_2u^2+\dots\dots+A_nu^n$$

トナル. 但シ $A_1, A_2, \dots\dots, A_n$ ハ未定係數デ,此等ヲ定メ得レバ吾人當初ノ目的ガ達シ得タノデアル.

成ルベク具體的ニ取扱ウ爲メ,ソノ他ノ場合モ,同樣ニ取扱ヒ得ルカラ,特ニ $n=4$ ノ場合ヲ詳說シヨウ,

$$\begin{aligned} g(x) &\equiv a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \\ &= a_0'+A_1(x-p)+A_2(x-p)^2+\dots\dots+A_4(x-p)^4 \\ &= a_0'+A_1u+A_2u^2+A_3u^3+A_4u^4. \end{aligned}$$

理論ヲ後ニシ,先ヅ A_1, A_2, A_3, A_4 ノ決メ方ヲ述ベル.

a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 ニほーなーノ算式デ,計算ヲ繰リ返シ,繰返シテ行フコト次ノ樣ニスルト,ソノ一段毎ノ最後ノ係數 $a_0', a_1'', a_2''', a_3'''', a_4$ ガ,夫々展開シタ後ノ係數 a_0', A_1, A_2, A_3, A_4 ヲ與ヘル. (第75頁ノ實例ヲ見ヨ).

$$\begin{array}{lccccc}
 & \underset{\smile}{x^4} & & & & \\
 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & & pa_4 & pa_3' & pa_2' & pa'_1 \\ \hline
(\mathrm{I}) & a_4 & a_3' & a_2' & a_1' & \boxed{a_0'} \\
 & & pa_4 & pa_3'' & pa_2'' & \\ \hline
(\mathrm{II}) & a_4 & a_3'' & a_2'' & \boxed{a_1''=A_1} & \\
 & & pa_4 & pa_3''' & & \\ \hline
(\mathrm{III}) & a_4 & a_3''' & \boxed{a_2'''=A_2} & & \\
 & & pa_4 & & & \\ \hline
(\mathrm{IV}) & a_4 & \boxed{a_3''''=A_3} & & & \\ \hline
(\mathrm{V}) & \boxed{a_4=A_4} & & & &
\end{array}$$

今ソノ理由ヲ案ズルニ,

$$a_0'+A_1u+A_2u^2+A_3u^3+A_4u^4\equiv G(u)$$

ト置クト, $a_0'=G(0)=g(p)$ トナルカラ(ほーなーノ算式カラモ明カデアル樣ニ), 上ノ計算ノ第I段ノ最後ノ値ガ a_0' トナルコトハ明カデアル.

次ニ A_1 ハ,定義ニヨッテ,式 $\dfrac{g(x)-a_0'}{x-p}$ ノ $x=p$ ニ於ケル値デアル. 然ルニ

$$\begin{aligned} g(x)-a_0' &= g(x)-g(p) \\ &= a_4(x^4-p^4)+a_3(x^3-p^3)+a_2(x^2-p^2)+a_1(x-p). \end{aligned}$$

由テ
$$\frac{g(x)-a_0'}{x-p} = a_4(x^3+px^2+p^2x+p^3)$$
$$+a_3(x^2+px+p^2)$$
$$+a_2(x+p)$$
$$+a_1$$
$$= a_4x^3+(a_4p+a_3)x^2$$
$$+(a_4p^2+a_3p+a_2)x$$
$$+(a_4p^3+a_3p^2+a_2p+a_1)$$
$$= a_4x^3+a_3'x^2+a_2'x+a_1'.$$

故ニ
$$\left[\frac{g(x)-a_0'}{x-p}\right]_{x=p} = a_4p^3+a_3'p^2+a_2'p+a_1'.$$

然ルニ,此ノ右邊ハ第 II 段ノ計算ノ最後ノ値 a_1'' ニ外ナラナイ. 故ニ
$$A_1 = \left[\frac{g(x)-a_0'}{x-p}\right]_{x=p} = a_1''.$$

A_2, A_3, A_4 ニ就テモ同様ニシテ證明サレル.

完全ナ三次方程式 $g(x) = a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 = 0$
ヲ解クニハ, $b_2u^2+b_1u+b_0 = 0$
ノ形ニ直ス必要往往アルガ,コノ變形ハ上ノ一般論ニ於テ
$$p = -\frac{1}{3}\cdot\frac{a_2}{a_3}$$
トオイタ場合デアリ,卽チ $g(x)$ ヲ $x=-\frac{1}{3}\cdot\frac{a_2}{a_3}$ ノ點デ展開スルコトニヨリ,ソノ目的ヲ達シ得ルモノダカラ,コノ變形ニモほーなーノ算式ガ應用出來ル.

3. 高次方程式ノ近似的解法

有理整式 $g(x)$ ノ數値ヲ求メ,又ハ $g(x)$ ヲ $x-p$ ノ冪級

數ニ展開スル上述ノ方法,手續ハ,高次方程式
$$g(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0 = 0$$
(但 a_n, a_{n-1}, ..., a_0 ハ實常數)

ノ根ヲ近似的ニ求メル上ニ,之ヲ利用スルコトガ出來ル.

今 p_1 ヲソノ一實根ノ一近似値トシ(例ヘバ第 86 頁以下ヲ見ヨ), $g(x)$ ヲ $x=p_1$ ノ點デ展開スルト,前項ノ計算法デ A_1, A_2, A_3 等ガ定マリ,
$$G(u) \equiv A_nu^n+A_{n-1}u^{n-1}+\dots+A_1u+a_0' = 0$$
ヲ得ル. コノ計算ノ第 (I) 段デ
$$a_0' = g(p_1)$$
ノ値ヲ求メラレルカラ, a_0' ノ大サカラ, p_1 ノ $g(x)=0$ ノ根トシテノ精密度ガ檢證出來ル.

サテ p_1 ハ x ノ近似値デアルカラ, $G(u)$ 中ノ u 卽チ $u=x-p_1$ ハ一般ニソノ絕對値大ナラザル値デアル. 故ニ u^2 以上ノ高次ノ項ヲ省略スレバ
$$A_1u+a_0' = 0.$$

之カラ定マル u ノ値 u_1 ヲ眞ノ u ノ値ノ近似値,從ッテ p_1 ノ第一補正數トシ,第二次ノ近似値トシテ,
$$x = p_1+u_1 = p_2$$
ヲ得ル. コノ時,ほーなーノ算式デ $a_0''=g(p_2)$ ヲ求メ,根 p_2 ノ近似程度ヲ檢證シテ,猶ホ不十分ナラ $g(x)$ ヲ $x=p_2$ ノ周リデ,(卽チ $G(u)$ ヲ $u=u_1$ ノ點デ)展開シ,二次

以上ノ項ヲ省略シテ得ル一次方程式カラ,第二ノ補正數ヲ定メヨ.

之ヲλ回繰返シタトシ.又ソノ最後ノ近似値ヲp_λトスルト

$$a_0^{(\lambda)} = g(p_\lambda)$$

トナルガ,$a_0^{(\lambda)}$ガ所要ノ精密度ノ限界内ニ來ル迄續ケレバヨイ.

今第二回ノ段ヲ式ヲ用ヒテ説明スルト

$$g(x) = A_n(x-p_1)^n + A_{n-1}(x-p_1)^{n-1} + \dots\dots + A_1(x-p_1) + a_0'$$

即チ　$$G(u) = A_n u^n + A_{n-1}u^{n-1} + \dots\dots + A_1 u + a_0'$$

ニ於テ,　$\nu = u - u_1$　ト置キ,$G(u)$ ヲ $u = u_1$ ノ點デ展開シテ

$$g(x) = B_n\nu^n + B_{n-1}\nu^{n-1} + \dots\dots + B_1\nu + a_0''$$

トナルモノトスルト,$B_1, B_2, \dots\dots, B_n$ ハ前條ノ算式ヲ$A_n, A_{n-1}, \dots\dots, A_1, a_0'$ ニ行ツタ各段ノ最後ノ値トシテ定マル.　ソシテ

$$a_0'' = g(x)_{\nu=0} = G(u)_{u=u_1},$$

トナリ,第二ノ補正數ν_1ハ

$$B_1\nu + a_0'' = 0 \quad ノ根,即チ \quad \nu_1 = -\frac{a_0''}{B_1}$$

トシテ與ヘラレル.

故ニコノ手順ヲ繰リ返セバ

$$x = p_1 + u_1 + \nu_1 + \dots\dots$$

トシテ最後ノ近似値ガ與ヘラレル.

精密度ヲ早ク高メル一方法トシテ,次ノ如ク取扱フノモ一案デアル.(第九章第四節ノ末尾ヲ見ヨ).

$$B_n\nu^n + B_{n-1}\nu^{n-1} + \dots\dots + B_3\nu^3 + B_2\nu^2 + B_1\nu + a_0'' = 0$$

ニ於テ,第二補正數トシテ $B_1\nu + a_0'' = 0$ ナル如キ値ν_1ヲ用ヒズ,左邊ノ一次ノ項以外ノνニコノ値ν_1ヲ代入シテ得ル,一次式

$$B_n\nu_1^n + B_{n-1}\nu_1^{n-1} + \dots\dots + B_2\nu_1^2 + B_1\nu + a_0'' = 0$$

ヨリ定マルνノ値,即チ

$$\nu = -\frac{a_0'' + B_2\nu^2 + B_3\nu_1^3 + \dots\dots}{B_1}$$

ヲ以テ第二ノ補正數トナサントスルノデアル.

但シνハ小サナ値ナル故,分子ノ項ハ必ズシモ全部取ルヲ要シナイ,所要ノ精密度ニ應ジテ高次ノ項ヲ省略シテモヨイ.

例ヘバ,次ノ方程式ノ正ノ實根ヲ小數第六位迄求メヨウ.

$$x^5 + 6x^3 + 5x^2 + 1\ x - 18 = 0.$$

先ヅ +1 ヲ第一ノ近似値トシテ,左邊ヲ $x=1$ ノ點デ展開スルト

1	0	6	5	10	−18
	1		7	12	22
1	1	7	12	22	4
	1	2	9	21	
1	2	9	21	43	
	1	3	12		
1	3	12	33		
	1	4			
1	4	16			
	1				
1	5				

故ニコノ場合 G(u) ハ

$$u^5+5u^4+16u^3+33u^2+43u+4=0$$

故ニ　　$43u+4=0$ カラ $u_1=-\frac{4}{43}=-0.1$

次ニ $\nu=u-u_1=u+0.1$ ト置キ,上ノ方程式ノ左邊ヲ $u=-0.1$ ノ點デ展開スルト,

1	5	16	33	43	4
	−0.1	−0.49	−1.551	−3.1449	−3.98551
1	4.9	15.51	31.449	39.8551	$\boxed{0.01449}$
	−0.1	−0.48	−1.503	−2.9946	
1	4.8	15.03	29.946	$\boxed{36.8605}$	
	−0.1	−0.47	−1.456		
1	4.7	14.56	$\boxed{28.490}$		

計算ノ繼續ハ之デ十分デアル. ソノ故ハ,一次ノ項迄トツテνヲ決メルト,νハ約

$$\nu=-\frac{0.01}{.7}<10^{-3}$$

トナル. 又 ν^2 以上ノ高次ノ項ノ係數ハ $1000=10^3$ ヨリハ小サイカラ,三次以上ノ項ノ値デ所要ノ末位ナル,小數第六位ニ影響スルモノハナイ. 更ニ ν^2 ノ項ヲ調査スル爲メ,先ヅ ν_1 卽チνノ一次ノ項迄取ルトキ,定マル値ヲ精算スルト,

$$\nu_1=-\frac{0.01449}{36.8605}=-3.931\times10^{-4}.$$

然ルニνノ二次ノ項ハ, $28.49\nu_1^2$ デ,概算スルト,

$$28.490\,\nu_1^2<28.490\times(4\times10^{-4})^2$$
$$=28.490\times1.6\times10^{-7},$$

故ニ
$$28.490\,\nu_1^2<29\times1.6\times10^{-7},$$

由テ
$$\frac{28.490\,\nu_1^2}{36.8605}<\frac{29\times1.6\times10^{-7}}{3.68605\times10}$$
$$<\frac{29\times1.6\times10^{-7}}{3.6\times10}$$
$$<1.3\times10^{-7}$$

從テ
$$\frac{28.49\,\nu_1^2}{36.8605}<\frac{1}{2}\times10^{-6}$$

トナリ, ν^2 ノ項モ小數ノ第六位ニ影響ノナイコトガ分ル. 故ニコレ以上計算ヲ續ケル必要ガナイ.

故ニ小數第六位迄正確ナ根トシテ, $x=p_1+u_1+v_1$ カラ

$$x=1-0.1-0.0003931$$
$$=0.899607$$

ガ得ラレル.

4. x ガ**複素數値**ヲ有スルトキノ $g(x)$ ノ計算.

u, ν ヲ實數トシ, i ヲ以テ例ノ通リ $\sqrt{-1}$ ヲ表ハスト,複素數ハ一般ニ $u+i\nu$ ノ形デ與ヘラレル. 今 $g(x)$ ヲ以テ, x ニ關スル有理整式ヲ表ハストキ, $g(u+i\nu)$ ナル値ノ計算ニ,前款ト類似ノ方法ヲ以テ,ソノ目的ヲ達スルコトガ出來ル. 從ツテソノ取扱法ハ,方程式

$$g(x)=0$$

ノ**複素數根**ヲ求メル上ニモ利用ガ出來ル.

$$g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+a_1x+a_0$$

トシ, $p(x)$ デ

$$\{x-(u+i\nu)\}\{x-(u-i\nu)\}$$
$$=x^2-2ux+(u^2+\nu^2)$$

ナル二次式ヲ表ハシ, $p(x)$ デ $g(x)$ ヲ除シテ得ベキ商ヲ $q(x)$ (コレハ $n-2$ 次ノ式), 剩餘ヲ $r(x)$ (コレハ一般ニ一次式)デ示スト,

$$\frac{g(x)}{p(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{p(x)}$$

卽チ
$$g(x)=p(x)\cdot q(x)+r(x).$$

シカルニ $p(x)$ ノ定義カラ明カニ

$$p(u+iv)=0.$$

故ニ

$$g(u+iv)=r(u+iv)$$

トナル. ソレデ $g(u+iv)$ ノ値ヲ求メル代リニ,一次式 $r(x)$ ノ $x=u+iv$ ノ時ノ値ヲ求メレバヨイコトトナル.

又 $u+iv=\xi$ ト置キ,若シ丁度 $r(\xi)=r(u+iv)=0$ トナル場合ニハ, $g(\xi)=g(u+iv)=0$ トナリ, ξ 即チ $u+iv$ ガ $g(x)=0$ ノ複素數根トナル.

尙ホコノ場合數値ノ検證ニハ

$$g(x)=p(x)q(x +r(x)$$

ナル關係ヲ使ウノガ一番便宜デアルガ,ソノ時必要ダカラ, $q(x)$ ノ値モ同時ニ求メテ置ク方ガ一般ニ便宜デアル.

此種ノ應用及ビ實行法ヲ例ヲ上ゲテ說明スル爲メ, $x=2.2+2.8i$ ナル時ノ

$$g(x)\equiv x^4-5x^3+15x^2-5 -26$$

ノ値ヲ求メ,又 $g(x)=0$ ノ虛根ヲ求メヨウ.

先ヅ

$$p(x)=x^2-2ux+u^2+v^2$$
$$=x^2-4.4x+2.2^2+2.8^2$$
$$=x^2-4.4x+12.68.$$

次ニ $g(x)$ ヲ $p(x)$ デ割ルト

```
   (p)                 (g)                        (q)
1  -4.4  12.68 ) 1 -5  +15    -5   -26      ( 1  -0.6  -0.32
                   -4.4 +12.68
                 ------------
                   -0.6 + 2.32
                          2.64  -7.60
                 --------------------
                        - 0.32 +2.60
                               1.41 - 4.05
                         ------------------
                               1.19 -21.95
```


故ニ

$$r(x)=1.19x-21.95,$$
$$q(x)=x^2-0.6x-0.32.$$

故ニ 此場合 $2.2+2.8i=\xi$ ト置クト

$$g(\xi)=r(\xi)=1.19\xi-21.95$$
$$=2.62+3.33i-21.95$$
$$=-19.33+3.33i.$$

コノ計算ノ實行ニハ,二本ノ計算尺ヲ用ヒ,一方デハ1ヲ4.4ニ對シ,他ノ方デハ1ヲ12.68ニ對シテ,除法ヲ迅速輕便ニ進行スルノガ得策デアル.

尙ホコノ結果ノ正否,精密度ヲ検査スル爲, $x=1$ ト置イテ比較スルト,

$$g(1)=-20,\quad p(1)=9.28,$$
$$q(1)=0.08 \text{ 且ツ } r(1)=-20.76$$

トナリ.

$$-20=9.28\times 0.08-20.76$$

ナルコトヲ必要トスルガ,コノ等式ハ成立セズ,小數第二位ニ至ツテ誤差ガ生ズル. ソノ故ハ,上ノ除法ニ於テハ係數ノ値ハ總テ小數第二位迄トシ,以下四捨五入ヲシタ結果, $r(x)$ ノ係數ニハソノ近似値ヲ以テ代ヘテアル箇所ガアルカラデアル.

次ニ $g(x)=0$ ノ一虛根ヲ求メル爲, $2.2+2.8i$ ヲ第一近似値トシテ取扱ウト

$$g(\xi)=g(2.2+2.8i)=-19.33+3.33i.$$

然ルニ微係數ノ理論カラ明カデアル如ク, ξ ニ對スル補正値 $\Delta\xi$ ハ,近似的ニ

$$\Delta\xi=-\frac{g(\xi)}{g'(\xi)} \qquad \text{但} \quad g'(\xi)=\left[\frac{dg(x)}{dx}\right]_{x=\xi}$$

デ與ヘラレル. (第九章第四節にうとんノ方法ニヨル).

然ルニ

$$g'(x)=4x^3-15x^2+30x-5.$$

今 $g'(2.2+2.8i)$ ヲ求メル爲,前述ノ除法ヲ行ウト

```
1 -4.4 +12.68 ) 4 -15    +30   -5      ( 4 +2.6
                  -17.6  +5 .6
                ---------------
                    2.6  -20.6
                         -11.4  +32.9
                    -----------------
                       - 9.2   -87.9
```

即チ
$$g'(\xi) = -9.2\xi - 37.9,\quad \xi = 2.2+2.8i.$$
故ニ
$$g'(\xi) = -9.2\times(2.2+2.8i)-37.9$$
$$= -58.1-25.8i.$$
由テ
$$\Delta\xi = -\frac{g(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{-19.3+3.3i}{58.1+25.8i}$$
$$= -0.26+0.17i.$$
故ニ　$g(x)=0$ ノ一虚根ノ第二近似値ハ
$$2.2+2.8i+(-0.26+0.17i) = 1.94+2.97i.$$
更ニコノ手續ヲ繰返スト,第三近似値トシテ
$$\xi = 2.00+3.00i$$
ガ得ラレル. 實際
$$g(2+3i) = 0.$$
故ニ　$2+3i$ ハ $g(x) = x^4-5x^3+15x^2-5x-26 = 0$ ノ根デアル. 從ツテ $2-3i$ モ根トナリ,他ノ二根ハ
$$p(x) = \{x-(2+3i)\}\{x-(2-3i\}$$
$$= x^2-4x+13$$
デ $g(x)$ ヲ除シテ得ル二次式ヲ 0 ト置イテ得ル二次方程式カラ決マル.

問　題

1. $x=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ ノ諸點ニ於ケル次ノ式ノ數値ヲ求メルノニ,ほーなーノ算式ヲ利用セヨ.
$$y = x^4+x^3-3x^2+15x-4.$$
又 $y=0$ ナル方程式ノ二實根ノ値ヲ小數第四位迄求メヨ.

2. $x=0.3+0.8i$ ナルトキ,
$$y = x^4+1.1x^3+2.2x^2+0.9x+1$$
ノ値如何. 又 $y=0$ ナル方程式ノ根ヲ求メヨ.

3. $5x^3+2x^2-3x+1=0$ ノ根ヲ小數第三位迄正確ニ求メヨ.

第二節　圖　解　法

有理整函數ノ數値計算ノ一方法デアルほーなーノ方針ハ,之ヲ圖ニヨリテ計算スル上ニモ利用出來ル.

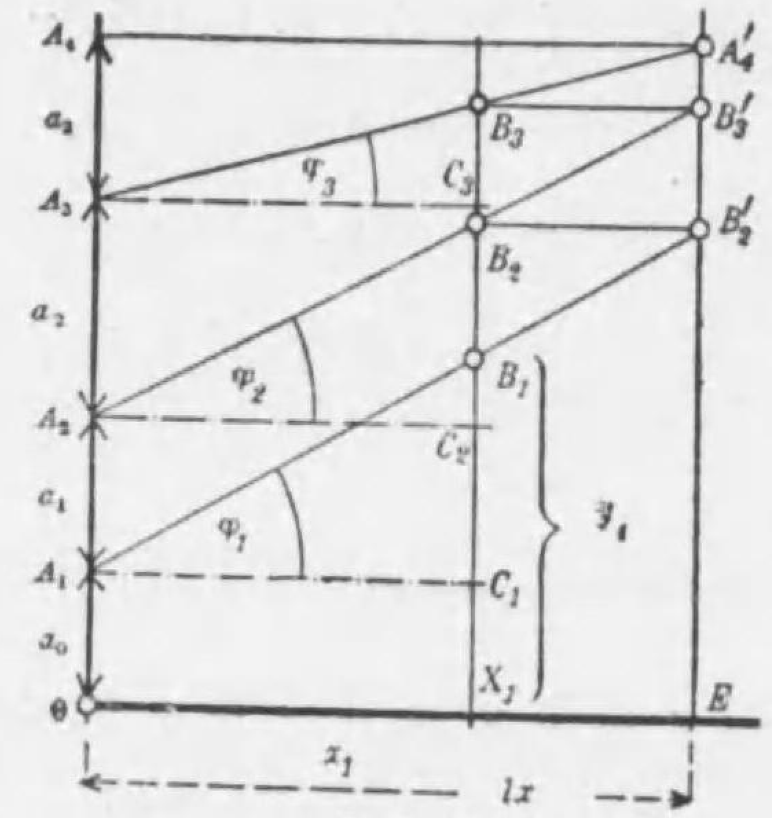
1. 有理整函數ヲ圖デ表示スルコト.

函數ノ變化ハ直角坐標ヲ用ヒ,之ヲ曲線デ表スノガ便宜デアル. 例ヘバ
$$y = g(x) = a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$
ヲ取扱ヘバ, l_x 粍ヲ單位ノ長サトシ, x ノ値ヲ横軸上ニ取リ,之ニ對スル値 y ヲ縦軸ノ方向(l_a 粍ヲ單位ノ長サトシテ)ニトル. 點 (x, y) ヲ定メルニハ,次ノ如クスレバヨイ. 又コノ手續ガ y ヲ求メル圖的方法トナル.

先ヅ Y 軸上ニコノ整式ノ係數 a_λ $(\lambda=0,1,2,3)$ ヲトル. 原點 0 カラ a_0 ヲ取リ,ソノ先ヘ續ケテ a_1, a_2, a_3 ヲトリ,各線分ノ終リノ點ヲ夫夫 A_1, A_2, A_3, A_4 トスルト
$$OA_1 = a_0,\quad A_1A_2 = a_1,\quad A_2A_3 = a_2,\quad A_3A_4 = a_3$$
ナラシメル. 尚ホ a_λ 中ニ負數ガアルト,ソレニ對スル線分ハ反對ノ方向ニトル. 例ヘバ a_0, a_1 ハ共ニ正デ, $a_2<0$ ナラ, A_3 ハ OA_2 上或ハ $\overleftarrow{OA_2}$ ノ延長上ニアツテ且ツ $A_3A_2=|a_2|$ トナル様ニトル(第十三圖參照).

第十二圖デハ $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ ヲ求メルノニ,係數ハ全部正ナリトシテ,作圖シテアル.

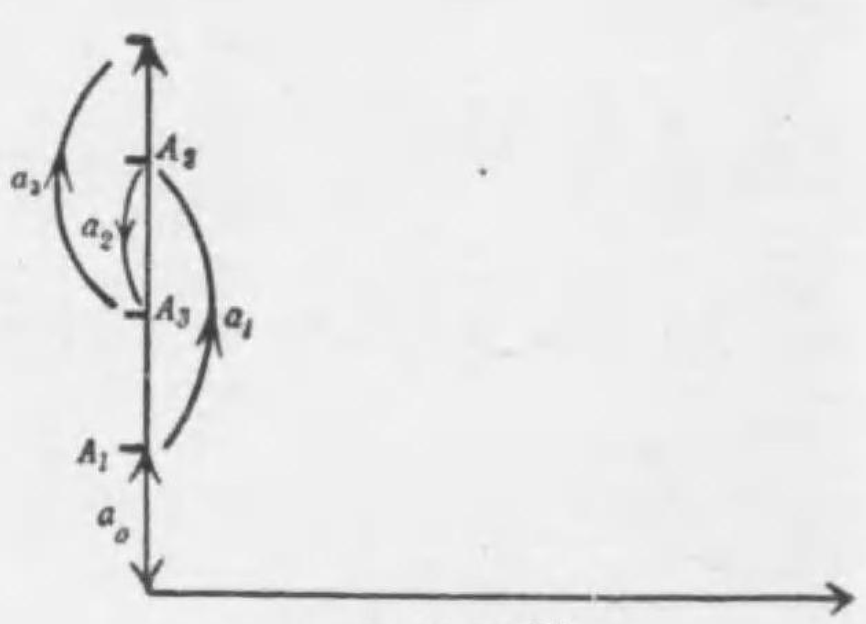
次ニX軸上ニ一點Eヲ取リ, $\overline{OE}$ ヲX軸上ノ單位長 l_x 粍ニ等シクシ, Eヲ過リY軸ニ平行ナ直線ヲ引ケ. コノ直線ヲ單位線 (Einheitsgerade) ト云フ.



第12圖

次ニ $x=x_1$ ナル時ノ y ノ値 y_1 ヲ求メヨウ. X軸ノ上デ $x=x_1$ ノ點 X_1 ヲ過ル縦線ヲ引ケ. (之ヲ簡便ノタメ X_1 直線ト呼ブ).

最後ニ A_4 ヲ過ル横線ト單位線トノ交點ヲ A_4' トシ, A_3A_4' ト X_1 直線トノ交リヲ B_3 トスル. 又 B_3 ヲ過ル横線ト單位線トノ交リヲ B_3' トシ, A_2B_3' ト X_1 直線トノ交リヲ B_2 トスル. 同様ノコトヲ繰返スコト第十二圖ノ如クスルト, A_1B_2' ト X_1 直線トノ交點 B_1 ハ, 所要ノ點 (x_1, y_1) ノ



第13圖

位置ヲ示シ, 線分 $\overline{X_1B_1}$ ノ測度トシテ, 所要ノ値 y_1 ガ與ヘラレル.

今第十二圖デ $A_4'A_3$, $B_3'A_2$, $B_2'A_1$ トX軸トノ夾角ヲ夫夫 φ_3, φ_2, φ_1 トスルト,

$$\tan\varphi_3 = a_3\frac{l_a}{l_x}.$$

故ニ $$\overline{C_3B_3} = \overline{A_3C_3}\tan\varphi_3 = x_1 a_3 l_a \ (粍).$$

然ルニ $$\overline{C_2C_3} = a_2 l_a \ (粍).$$

由テ $$\overline{C_2B_3} = (a_2+x_1a_3)l_a \ (粍).$$

次ニ $$\tan\varphi_2 = (a_2+a_3x_1)\frac{l_a}{l_x}.$$

故ニ $$\overline{C_2B_2} = \overline{A_2C_2}\tan\varphi_2 = (a_2x_1+a_3x_1^2)l_a \ (粍).$$

由テ $$\overline{C_1B_2} = (a_1+a_2x_1+a_3x_1^2)l_a \ (粍).$$

又 $$\tan\varphi_1 = (a_1+a_2x_1+a_3x_1^2)\frac{l_a}{l_x}.$$

由テ $$\overline{C_1B_1} = (a_1x_1+a_2x_1^2+a_3x_1^3)l_a \ (粍).$$

故ニ,最後ニ $$\overline{X_1B_1} = (a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+a_3x_1^3)l_a \ (粍).$$

トナリ, $\overline{X_1B_1}$ ノ測度ガ $y_1 = g(x_1)$ トナル.

實際ハ特ニ細目ナ方眼紙ヲ利用シ,作圖ヲ行ウ場合ニハ,單位線ト點 X_1 ヲ過ル縦線ノミヲ引キ,ソノ他ノ線ハ紙面上ノ縦横ノ線ト定規ノ縁ヲ利用スルノミデ十分デアル.

2. 圖解法(續). 代數方程式ノ圖解法.

有理整函數

$$g(x) \equiv a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

ノ値ハ,次ノ様ニシテモ,之ヲ求メルコトガ出來ル. 而シテコノ方法ハ「試シ法」ニヨリ, $g(x)=0$ ナル方程式ノ根ヲ求メルノニ便宜ナ圖解法デアル. 今 $n=4$ ナル場合ニ就イテ説明シヨウト思フ.

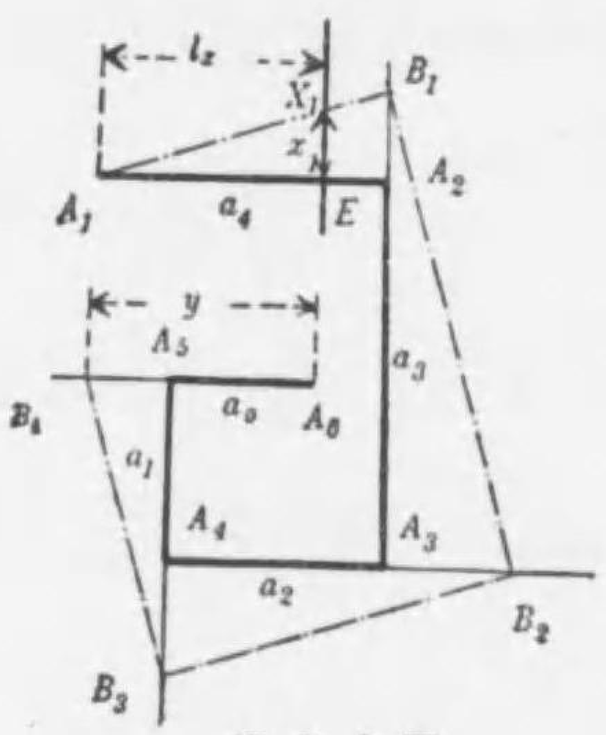
先ヅ單位ノ長サ l_x ヲ適當ニ定メタ後, a_0 ヲ表ハス方向附ケラレタ線分 A_6A_5 ヲ引キ,次ニソノ終端カラ之ニ垂直ニ,時計ノ針ノ廻轉方向ト反對ノ方向ニ直線ヲ引キ,ソノ上ニ點 A_4 ヲ $\overrightarrow{A_5A_4}=a_1l_x$ ナル様ニ取レ. (第十四圖參照).

次ニ A_4 ヲ過リ, A_5A_4 ニ垂直ニ,前ト同様左廻リニ a_2l_x ニ等シク, $\overrightarrow{A_4A_3}$ ヲ取ル.

順次ニ同一方針デ線分 A_3A_2, A_2A_1 ヲ

$$\overrightarrow{A_3A_2}=a_3l_x,\quad \overrightarrow{A_2A_1}=a_4l_x$$

ナル様ニ取ル. 但シ第十四圖デハ a_λ $(\lambda=0, 1, 2\ 3, 4)$ ハ全部正數トシテ,作圖シテアル. 若シ例ヘバ a_1 ガ負數デアルト, A_5A_4 ハ下方ニ取ラズ,上方ニ取ラネバナラヌ.



第14圖

ソノ他ノ場合モ同様デアル.

次ニ一點 E ヲ A_1A_2 上ニ取リ, $A_1E=l_x$ ナラシメ, E ヲ過リ, A_1A_2 ニ垂直ナ直線上ニ,

點 X_1 ヲ

$$\overline{EX_1}=x_1l_x$$

ナル様ニ取レ. 但シ廻轉方向カラ言ヘバ,時計ノ針ト反對方向ニ取ルノダカラ, x_1 ガ正ナラバ圖ノ如ク上方ニ取リ, x_1 ガ負ナラバ下方ニ取ラネバナラヌ.

最後ニ直線 A_1X_1 ト直線 A_2A_3 トノ交點ヲ B_1 トスル. B_1 ヲ過リ,時針ト同一ノ方向ニ, A_1X_1 ニ垂直ナ直線ト A_3A_4 トノ交點ヲ B_2 トスル. 又 B_2 ヲ過リ,時針ト同一ノ方向ニ, B_1B_2 ニ垂直ナ直線ト直線 A_5A_4 トノ交點ヲ B_3 トスル. B_3 ヲ過リ,同ジ廻リ方デ, B_2B_3 ニ垂直ナ直線ト A_6A_5 トノ交點ヲ B_4 トスルト, B_4A_6 ノ測度ガ所要ノ函數値 $g(x_1)$ トナル.

今ソノ理由ヲ考ヘル爲,

$$\angle X_1A_1E=\varphi_1$$

トスルト, $\angle A_3B_1B_2=\angle A_4B_2B_3=\angle A_5B_3B_4=\varphi_1$

トナリ,

$$\overline{A_2B_1}=\overline{A_1A_2}\tan\varphi_1=a_4l_x\frac{EX_1}{A_1E}$$

$$=a_4l_x\cdot x_1$$

故ニ $$\overline{B_1A_3}=\overline{A_2A_3}+\overline{A_2B_1}=a_3l_x+a_4l_xx_1$$

$$=l_x(a_4x_1+a_3)$$

由テ $$\overline{B_2A_3}=l_x(a_4x_1+a_3)x_1=l_x(a_4x_1^2+a_3x_1)$$

從テ $$\overline{A_4B_2}=l_x(a_4x_1^2+a_3x_1+a_2)$$

最後ニ $$\overline{B_4A_6}=l_x(a_4x_1^4+a_3x_1^3+\ldots\ldots+a_0)\ (\text{耗})$$

即チ $\overline{B_4A_6}$ ノ測度ハ $a_4x_1^4+a_3x_1^3+....+a_1x_1+a_0$ デアル.

サテ折線 $A_1B_1B_2B_3B_4$ ハ最初ノ直線 A_1X_1 ノ方向ニヨッテ,換言スレバ x_1 ノ値ニヨッテ,形,位置ヲ異ニスル. 即チ x_1 ノ値ニヨッテ最後ノ點 B_4 ハ直線 A_5A_6 上ヲ種種ニ移動スル.

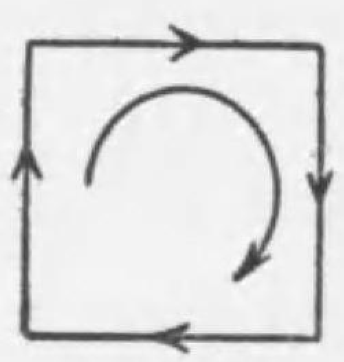
故ニ透明ナ方眼紙ヲ用ヒ,之ヲピンデ A_1 ニ留メテ, A_1 ノ周リニ廻轉シ得ル樣ニスルト,方眼紙上ノ縱横ノ線ヲ利用シテ, A_1X_1 ノ方向ヲ如何ニ變化スルト點 B_4 ハ如何ニ移動スルカヲ觀察シ,注意シテ移動シ, B_4 ガ A_6 上ニ來ル樣ニスルト,

$$a_4x_1^4+a_3x_1^3+....+a_1x_1+a_0=0$$

トナルカラ,ソノ時ノ A_1X_1 ノ方向ヲ決定スル線分 X_1E ノ測度 x_1 ガ, $g(x)=0$ ノ根ヲ與ヘルコトトナル.

a_λ ノ正負ト,垂線ノ方向トノ關係ハ,之ヲ第十五圖ノ如キ補助圖形ト對照シテ決メルノガ便宜デアル.

先ヅ最高次ノ係數 a_n ヲ上方ノ水平ナ邊ト同一方向ヲ有セシメ,次ノ係數 a_{n-1} ハ矢デ示シタ方向ニ廻ッテ,次ノ邊ト同一方向ヲ有セシメ, a_{n-2} ハ又ソノ次ノ隣邊ノ矢ノ方向ヲ以テ,ソノ正ノ方向トスル.



第15圖

以下同樣ニシテ,次次ノ係數ノ正ノ方向ヲ決メルノデアル. 勿論 $n>3$ ナラ,コノ正方形ノ周リヲ一周以上ヲスルコトトナル.

又 a_λ 中ニ 0 ガアルト,ソノ直グ前ト,ソノ直グ後ノ兩係數ヲ示ス兩線分ハ重ッテ同一直線上ニ來タリ,方向ノミヲ異ニスル. 之ヲ補助圖ニ就イテ言ヘバ,一邊ヲ飛ビ越シテ,對邊ト重ナルコトトナル.

第十六圖ハ方程式　$g(x)\equiv 4x^3+6x^2-3x-1.9=0$ ノ根ヲ求メル圖的方法デアル.

折線 $A_1B_1B_2A_5$ カラ,上ノ記號デ言ヘバ A_6 ト B_4 トハ一致シ,

$$x_1=\tan\varphi_1=0.67$$

トナル. 故ニ, $x_1=0.67$ ガ $g(x)=0$ ノ一實根デアルコトガ分ル. 他ノ二根ヲ求メルニハ,同一方法ヲ繰返スヨリモ, $g(x)$ ヲ $x-0.67$ デ除シテ得タ商ヲ 0 ト置イテ得ベキ,二次方程式ヲ解ク方ガ簡單デアル.

一般ノ一元三次方程式

$$g(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

ニ就イテ言ヘバ,ソノ一根ヲ x_1 トスルト

$$\frac{g(x)}{x-x_1}=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+(a_3x_1^2+a_2x_1+a_1).$$

故ニ他ノ二根ハ

$$a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+(a_3x_1^2+a_2x_1+a_1)=0$$

デ與ヘラレル. x_1 ダケ圖解法デ求メ,他ハ上ノ二次方程式ヲ解クガヨイ.

尤モ x_1 ヲ求メタ圖ヲ次ノ如ク利用スルト,他ノ二根 x_2, x_3 モ容易ニ之ヲ圖的ニ求メルコトモ出來ル.

第十六圖デハ　$\overline{B_1A_3}=(a_3x_1+a_2)l_x,$

$$\overline{B_2A_4}=(a_3x_1^2+a_2x_1+a_1)l_x,$$

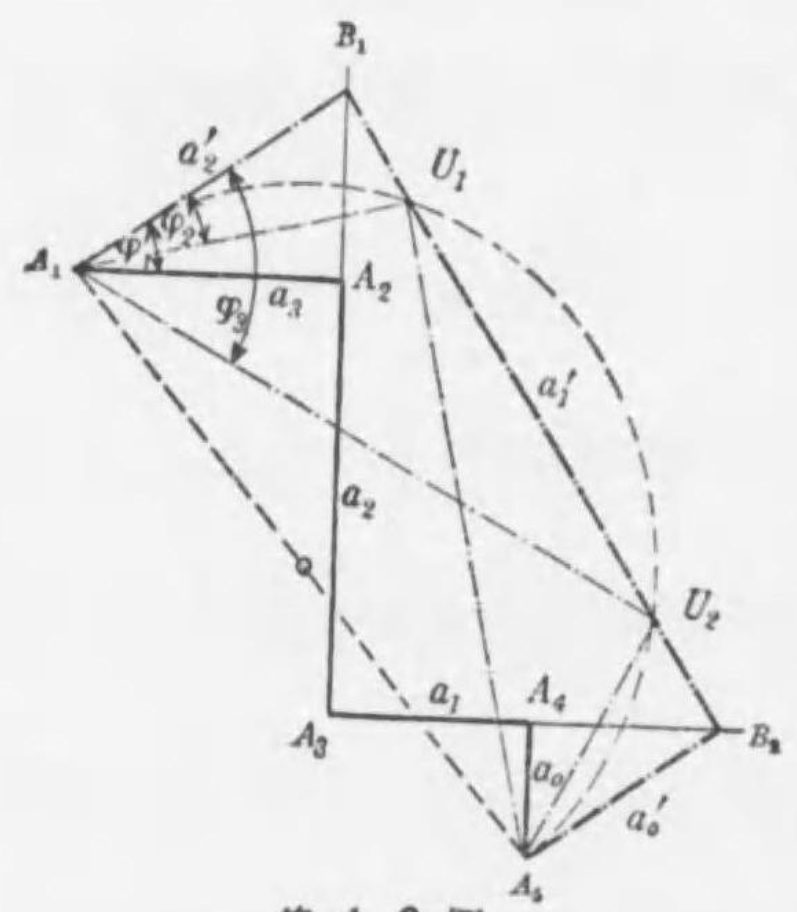
$$\overline{A_1A_2}=a_3l_x,$$

且ツ　　$A_1A_2 : B_1A_3 : B_2A_4 = A_1B_1 : B_1B_2 : B_2A_5$.

由テ最後ノ二次方程式ノ三係數ハ,第一根 x_1 ヲ求メルトキ, x_1 ヲ與ヘル多角形 $A_1B_1B_2A_5$ ノ邊ノ測度トシテ與ヘラレルコトガ分ル. 第十六圖デハ,此等ノ邊ヲ a_2', a_1', a_0' ト命名シテアルカラ,他ノ二根ハ

$$a_2'x^2+a_1'x+a_0'=0$$

ノ根トシテ與ヘラレル.



第16圖

一般ニ n 次ノ有理整方程式 $g(x)=0$ ノ一根 x_1 ヲ,此方法デ求メルト, x_1 ヲ求メル爲メノ多角形ノ邊ハ,他ノ $n-1$ 個ノ根ヲ與ヘル $(n-1)$ 次ノ方程式ノ係數ヲ,夫夫測度トスルモノデアル.

第十六圖ハソノ一特例デ多角形 $A_1B_1B_2A_5$ デ

$$4x^3+6x^2-3x-1.9=0$$

ノ一根 $x_1=0.67$ ヲ求メタ上,續イテ他ノ二根 x_2, x_3 ヲ求メル圖法ヲ示シタモノデ, $\overline{A_1A_5}$ ヲ直徑トスル圓ヲ畫キ,ソノ圓周ト $\overline{B_1B_2}$ トノ交點 U_1, U_2 ヲ夫夫點 A_1, A_5 ニ結ンダノデアル.

之ハ $A_1B_1B_2A_5$ ヲ基礎トシテ A_1 カラ出テ,條件ニ叶ヒツツ, A_5 ニ歸ル多角形トシテ, $A_1U_1A_5$, $A_2U_2A_5$ ヲ得タモノデ,明カニ

$$a_2'x^2+a_1'x+a_0'=0$$

ノ二根 x_2, x_3 ヲ與ヘル多角形デアル.

故ニ a_2' ヲ表ハス線分 A_1B_1 ト A_1U_1, A_1U_2 トノ夾角ヲ夫夫 φ_2, φ_3 トスルト

$$x_2=\tan\varphi_2=-0.43,$$
$$x_3=\tan\varphi_3=-1.77$$

ガ所要ノ他ノ二根デアル.

最後ノ場合, $\overline{A_1A_5}$ ヲ直徑トスル圓ノ周ガ $\overline{B_1B_2}$ ト交ラナイナラバ,

$$a_2'x^2+a_1'x+a_0'=0$$

ハ虚根ヲ有スルコトヲ示シ, $\overline{A_1A_5}$ ガ切線トナルトキハ,コノ二次方程式ハ實ノ等根ヲ有スルコトヲ示スモノデアル.

問　題

1. $x=-2, -1, 1, 3$ ニ於ケル $x^4+x^3-3x^2+5x-4$ ノ値ヲ圖的方法デ求メヨ. (二ツノ方法).

2. 圖ニヨツテ次ノ方程式ヲ解ケ.

(1) $x^3+3x^2-12x-10=0$ (根ハ -5, -0.732, 2.732).

(2) $x^3-2x-5=0$.

(3) $x^3-x-0.2=0$.

3. 曲線 $y=4x^3+6x^2-3x-1.9$ ヲ畫ケ.

以上ノ問題ハ,關係誤差ガ約1%ニ近クナル迄,練習ヲ要スル.

第四章
有理整函數ノ補間法, 補外法

$y=f(x)$ ナル函數デ,

$$x=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

ナル場合ノ函數ノ値ヲ夫夫

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$$

トシ,此等ノ値ヲ知ツテ,x ノ任意ノ値ニ就テ $f(x)$ ノ値ヲ求メルコトガ,本章ノ中心問題デアル.

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n \quad ハ \quad m>k \quad ナラ \quad x_m>x_k$$

ナル様ニ決メテアルモノトスル. x ガ領域 (x_0, x_n) 内ノ値ナラバ, $f(x)$ ヲ求メルコトヲ**補間法** (Interpolation) ト云ヒ, x ガコノ領域外ニアル時ハ,之ヲ**補外法** (Extrapolation) ト云フ.

$f(x)$ ガ任意函數ノ場合ハ之ヲ後章ニ讓リ,本章デハ $f(x)$ ガ有理整函數デ

$$g(x)\equiv a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

ナル形ヲ有スル場合ヲ取扱ウ. $f(x)$ ガ $g(x)$ ノ時ハ $g(x)$ ヲ決メル二種ノ方案ガアル. 一ツハ先ヅ係數

$$a_\lambda \quad (\lambda=n, n-1, \ldots, 3, 2, 1, 0)$$

ヲ定メテ $g(x)$ ヲ求メル法,他ハ a_λ ヲ決メル筋道ヲ取ラズ,特殊ノ方法デ直接 $g(x)$ ノ値ヲ決メル方法デアル.

第一節 補 外 法

函數値 $y_m\ (m=0, 1, 2, \ldots\ n)$ ヲ與ヘル x ノ位置ニモ種種アル. 最モ簡單ナ與ヘ方ハ

$$x_n-x_{n-1}=x_{n-1}-x_{n-2}=\ldots=x_2-x_1=x_1-x_0$$

ナル様ニスルコトデ,**等間隔ニ與ヘル**ト云ヒ,相隣レル x ノ二値間ノ差ヲソノ**間隔**ト云ヒ,之ヲ δ 又ハ Δx デ示スコトトスル.

$g(x)$ ガ n 次ノ有理整式デ,ソノ既知ノ値ガ $(n+1)$ 個アル,即チ

$$g(x_k)=y_k \quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n)$$

ナル場合ニハ,茲ニ $(n+1)$ 個ノ $a_\lambda(\lambda=0, 1, 2, \ldots, n)$ ニ關スル $(n+1)$ 個ノ聯立一次方程式ノ一系ガ得ラレル. ソレデ a_λ ハ一般ニ唯一通決定シ得ラレ,從ツテ任意ノ x ニ對スル $g(x)$ ノ値ヲ定メルコトガ出來ル. ケレドモ此方法ハ實行上不便デアル

ソレデ $g(x)$ ノ値ヲモツト簡單ニ求メル方法ヲ工夫セネバナラヌ. ソノ第一準備トシテ先ヅ階差ノ性質ヲ述ベヨウ.

1. 階差

今 $g(x+\Delta x)$ ト $g(x)$ トノ差ヲ作リ,簡單ノ爲メ之ヲ $\Delta g(x)$ 又ハ $\Delta^{(1)}g(x)$ デ表ハスコトニスル. 即チ

$$g(x+\Delta x)-g(x)=\Delta^{(1)}g(x).$$

同様ニ $\Delta^{(1)}g(x+\Delta x)$ ト $\Delta^{(1)}g(x)$ トノ差ヲ

$$\Delta^{(1)}g(x+\Delta x)-\Delta^{(1)}g(x)=\Delta^{(2)}g(x),$$

ト書ク. 更ニ $\Delta^{(2)}g(x+\Delta x)-\Delta^{(2)}g(x)=\Delta^{(3)}g(x).$

一般ニ　$\Delta^{(m-1)}g(x+\Delta x)-\Delta^{(m-1)}g(x)=\Delta^{(m)}g(x)$　ト書ク.

コレ等ノ差ヲ一般ニ $g(x)$ ノ**階差**ト呼ビ, $\Delta g(x)$ 又ハ $\Delta^{(1)}g(x)$ ヲ**第一階差**, $\Delta^{(2)}g(x)$ ヲ**第二階差**, ... ト稱スル.

$g(x)$ ガ n 次ノ整式ナラバ, $\Delta^{(m)}g(x)$ ハ $(n-m)$ 次ノ整式デアル. $m=n$ ナルトキ, 卽チ $\Delta^{(n)}g(x)$ ハ x ヲ含マナイコトトナルカラ, $\Delta^{(n)}g(x)$ ハ常數トナル.

例ヘバ　$n=3$ デ, $g(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ ナルトキ,

$$g(x_k)=y_k,\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

但シ　$x_1=x_0+\Delta x,\quad x_2=x_0+2\Delta x,\quad x_3=x_0+3\Delta x$

ナルコトヲ知ルト,

$$\begin{aligned}\Delta^{(1)}g(x_0)&=g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\\&=a_3(x_0+\Delta x)^3+a_2(x_0+\Delta x)^2+a_1(x_0+\Delta x)+a_0\\&\quad-(a_3x_0^3+a_2x_0^2+a_1x_0+a_0)\\&=a_3(3x_0^2\Delta x+3x_0\overline{\Delta x}^2+\overline{\Delta x}^3)\\&\quad+a_2(2x_0\Delta x+\overline{\Delta x}^2)+a_1.\Delta x\\&=3a_3\Delta x.x_0^2+(3a_3.\overline{\Delta x}^2+2a_2.\Delta x)x_0\\&\quad+(a_3.\overline{\Delta x}^3+a_2.\overline{\Delta x}^2+a_1.\Delta x).\qquad (x_0\ \text{ニ就テ二次})\end{aligned}$$

次ニ　$$\begin{aligned}\Delta^{(1)}g(x_0+\Delta x)&=3a_3.\Delta x(x_0+\Delta x)^2+(3a_3.\overline{\Delta x}^2+2a_2.\Delta x)(x_0+\Delta x)\\&\quad+(a_3.\overline{\Delta x}^3+a_2.\overline{\Delta x}^2+a_1.\Delta x),\end{aligned}$$

由テ　$$\begin{aligned}\Delta^{(2)}g(x_0)&=\Delta^{(1)}g(x_0+\Delta x)-\Delta^{(1)}g(x_0)\\&=3a_3.\Delta x\{2x_0.\Delta x+\overline{\Delta x}^2\}+(3a_3.\overline{\Delta x}^2+2a_2.\Delta x)\Delta x\\&=3.2a_3.\overline{\Delta x}^2.x_0+(6a_3.\overline{\Delta x}^3+2a_2.\overline{\Delta x}^2).\qquad (x_0\ \text{ニ就テ一次})\end{aligned}$$

且ツ　$$\Delta^{(2)}g(x_0+\Delta x)=3.2a_3.\overline{\Delta x}^2(x_0+\Delta x)+(6a_3.\overline{\Delta x}^3+2a_2.\overline{\Delta x}^2)$$

故ニ　$$\begin{aligned}\Delta^{(3)}g(x_0)&=\Delta^{(2)}g(x_0+\Delta x)-\Delta^{(2)}g(x_0)=3.2a_3.\overline{\Delta x}^2\{(x_0+\Delta x)-x_0\}\\&=3!a_3.\overline{\Delta x}^3\qquad (\text{一定})\end{aligned}$$

トナル.

2. 階差表

此等ノ階差 $\Delta^{(m)}g(x)$ ヲ求メルニハ, 次ノ形式デ, 順次差ヲ

求メテ行クノガ最モ簡便デアル.

首行ハ $g(x)$ ノ與ヘラレタ値ヲ一縱行ニ列記シ, ソノ相隣レル二値ノ差ヲ順次ニ求メテ, 差ヲ第二縱行ニ列記セヨ. 此等ハ $\Delta^{(1)}g(x)$ ノ値ヲ x_i ノ大サノ順ニ列記シタコトニ成ル.

次ニ, $\Delta^{(1)}g(x)$ ノ相隣レル二値ノ差ヲ順次求メテ, $\Delta^{(2)}g(x)$ ノ値トシテ, 第三縱行ニ書ク. 同樣ノ手續ヲツヅケルト, 次ノ樣ナ表ガ得ラレル. 之ヲ**階差表** (Differenzentabelle) ト云フ.

$g(x)$	$\Delta^{(1)}g(x)$	$\Delta^{(2)}g(x)$	$\Delta^{(3)}g(x)$	$\Delta^{(4)}g(x)$
$y_0=g(x_0)$	$\Delta^{(1)}g(x_0)$	$\Delta^{(2)}g(x_0)$	$\Delta^{(3)}g(x_0)$	$\Delta^{(4)}g(x_0)$ (一定)
$y_1=g(x_0+\Delta x)$	$\Delta^{(1)}g(x_0+\Delta x)$	$\Delta^{(2)}g(x_0+\Delta x)$	$\Delta^{(3)}g(x_0+\Delta x)$	
$y_2=g(x_0+2\Delta x)$	$\Delta^{(1)}g(x_0+2\Delta x)$	$\Delta^{(2)}g(x_0+2\Delta x)$		
$y_3=g(x_0+3\Delta x)$	$\Delta^{(1)}g(x_0+3\Delta x)$			
$y_4=g(x_0+4\Delta x)$				

但シコノ表ハ $g(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ デ, 與ヘラルル値ガ

$$y_\lambda=f(x_0+\lambda\Delta x)\quad (\lambda=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

ノ五個ノ場合ヲ豫想シテ居ルガ, 一般ノ場合モ全ク同樣ニ取扱ヘル.

3. 補外法ヘノ應用

サテ第五縱行ノ差ハ恒ニ一定デアルカラ, 第四縱行ノ値ハ等差級數ヲ形成シテ得ル. 故ニコノ行ノ數ニ常數

$\Delta^{(4)}g(x_0)$ ヲ順次加ヘ行キ,又ハ順次減ジテ行クコトニヨリ,上下如何程デモ,最初與ヘラレタ領域外ニ延長出來ル.

例ヘバ $x_{-1}=x_0-\Delta x,\quad x_{-2}=x_0-2\Delta x,\ \ldots\ldots;$

又 $x_5=x_4+\Delta x,\quad x_6=x_4+2\Delta x,\ \ldots\ldots,$

ト置ケバ,

$$\Delta^{(3)}g(x_0+2\Delta x)=\Delta^{(3)}g(x_0+\Delta x)+\Delta^{(4)}g(x_0),$$
$$\Delta^{(3)}g(x_0+3\Delta x)=\Delta^{(3)}g(x_0+2\Delta x)+\Delta^{(4)}g(x_0),$$
$$\Delta^{(3)}g(x_0+4\Delta x)=\Delta^{(3)}g(x_0+3\Delta x)+\Delta^{(4)}g(x_0),$$
$$\Delta^{(3)}g(x_5)=\Delta^{(3)}g(x_0+5\Delta x)$$
$$=\Delta^{(3)}g(x_0+4\Delta x)+\Delta^{(4)}g(x_0),$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

又 $$\Delta^{(3)}g(x_{-1})=\Delta^{(3)}g(x_0-\Delta x)$$
$$=\Delta^{(3)}g(x_0)-\Delta^{(4)}g(x_0),$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

故ニ階差表デ,第五行,第四行ノ補ヒヲ利用シテ,第三行從ツテ,又第二行,第一行ニ於テモ,與ヘラレタ領域外ノ $g(x)$, $\Delta^{(1)}g(x)$ 等ヲ求メルコトガ出來ル.

コレ有理整函數 $g(x)$ ノ補外法トシテ最モ簡易迅速ナ方法デアル. 殊ニソノ加法,減法ヲ行ウニモ計算機ヲ利用スルノガ,最モ策ノ得タモノデアル.

例ヘバ整數ノ立方ノ表ヲ作ルノニ,階差表ヲ利用スルト便宜デアル. 立方ヲ求メルトハ $y=x^3$ ナル函數値ヲ求メルコトノ一部分デアルカラデアル.

サテ四組ノ値 $x=\quad -1,\ 0,\ 1,\ 2$

$y=x^3=-1,\ 0,\ 1,\ 8$

カラ始メレバ,次ノ階差表ヲ得ル. 太イ字體ノ數ハ元ノ値デ,細イ字體ノ數ハ増補擴張サレタモノデアル.

x	y	$\Delta^{(1)}$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$
−1	−1			
		1		
0	0		0	
		1		6
1	1		6	
		7		6
2	8		12	
		19		6
3	27		18	
		37		
4	64			

問 題

1. $g(x)=x^2-2x+2$ ナルトキハ,

(1) $\Delta^{(2)}g(x)=2(\Delta x)^2$ ナルコトヲ示セ.

(2) $\Delta x=1$ トシテ $x=-3$ カラ $x=2$ マデノ階差表ヲ作レ.

(3) $\Delta x=0.5$ トシテ, $x=1.5$ カラ $x=4$ マデノ階差表ヲ作レ.

(4) 前問(3)ノ階差表ヲ用ヒテ, $x=4.5$ 及ビ $x=-0.5$ ナルトキノ $g(x)$ ノ値ヲ計算セヨ.

2. 與ヘラレタル四分圓ノ面積ノ表ヲ利用シ,補外法ニヨツテ,半徑4及ビ5ナル四分圓ノ面積ヲ求ム.

半徑 r	0	1	2
面積 $\frac{1}{4}\pi r^2$	0	0.7854	3.1416

3. $g(x)=2x^3-x^2+3x+1$ ナルトキ, $x=0, 1, 2, 3, 4$ ニ相應スル此函數ノ値ヲ計算シテ,階差表ヲ作レ. 又第二階差ガ $12x+10$ ナルコトヲ理論的ニ證明シ,次ニ其ノ數値ヲ驗證セヨ.

第二節 補 間 法

1. 一次的補間法 (Lineare Interpolation)

有理整式 $g(x)$ ノ値ノ與ヘ方ハ，前節ト同樣ナ場合ヲ考ヘル．

補間法トシテ普通用ヒラレルモノニ種種アル．先ヅ**一次的補間法**又ハ**直線的補間法**ト稱セラレルモノカラ說カウ．ソノ根本ノ考ヘハ，$g(x)$ ノ與ヘラレタ，相隣レル二ツノ値ノ間デハ，$g(x)$ ノグラフハ直線形ヲナスモノトノ假定ノ下ニ，ソノ中間ノ或ル(任意ノ)點ノ値ヲ決定スル所ニアル．

例ヘバ函數値ノ與ヘラレタ，相隣ル二點ヲ x_0, x_1 トシ，

$$g(x_0) = y_0, \quad g(x_1) = y_1, \quad x_1 - x_0 = \Delta x$$

トシ，更ニ x ヲ領域 (x_0, x_1) 間ノ一點トセバ，此函數ハ

$$g(x) = y_0 + (y_1 - y_0).\frac{x - x_0}{\Delta x}$$

デ與ヘラレルモノトシテ，其ノ値ヲ定メルノガ一次的補間法デアル．

最モ多ク用ヒラレル仕方ハ，$y_1 - y_0 = \Delta y_0$ ト置ケバ，領域 (x_0, x_1) ヲ 10 等分シ，$g(x)$ ヲ

$$x = x_0 + a.\frac{\Delta x}{10} \qquad (a = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 8,\ 9)$$

ノ諸點デ求メントスルモノデ，ソノ時ハ前記ノ補間用ノ公式ハ次ノ樣ニ成ル，

$$g(x) = y_0 + \frac{a}{10}\Delta y_0 \quad (但\ \ a = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 8,\ 9).$$

最後ノ場合補間シテ得タ $g(x)$ ノ値ノ精密度ヲ檢證スルニハ，次ノ等式ヲ利用スルガ便利デアル．

$$g\left(x_0 + \frac{9}{10}\Delta x\right) + \frac{1}{10}\Delta y_0 = y_1.$$

2. 二次的補間法 (Quadratische Interpolation)

$g(x)$ ノ與ヘラレタ，相隣レル三値ヲ

$$y_0 = g(x_0), \quad y_1 = g(x_1), \quad y_2 = g(x_2)$$

$$(但 \quad x_1 = x_0 + \Delta x, \quad x_2 = x_0 + 2\Delta x)$$

トシ，x ヲ領域 (x_0, x_2) 間ノ一點トシテ $g(x)$ ノ値ヲ求メルノニ，$\Delta^{(1)}y_0$, $\Delta^{(2)}y_0$ ノ値ハ下記附隨ノ表カラ決メル値トシテ，次ノ公式ヲ用ヒテ計算スル方法ヲ**二次的補間法**ト云フ．

$$y = g(x) = y_0 + \frac{\Delta^{(1)}y_0}{\Delta x}(x - x_0) - \frac{\Delta^{(2)}y_0}{2.\Delta x^2}(x - x_0)(x_1 - x).$$

x_0	y_0		
		$\Delta^{(1)}y_0$	
x_1	y_1		$\Delta^{(2)}y_0$
		$\Delta^{(1)}y_1$	
x_2	y_2		

コノ式ヲ補間用公式トスルコトハ，$g(x)$ ヲ x ニ關スル二次式ト假定シテ取扱フコトデアル．コノ公式ハ，

$x = x_0$ ノトキ $y = y_0$,

$x = x_1$ ノトキ $y = y_0 + \Delta^{(1)}y_0 = y_1$,

$x = x_2$ ノトキ $y = y_0 + 2\Delta^{(1)}y_0 + \Delta^{(2)}y_0 = y_2$

トナルカラ，結局之ヲ幾何學的ニ言ヘバ，$g(x)$ ハ領域 (x_0, x_2) ニ於テハ，三點 (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) ヲ過ル拋物線ト同一變化ヲスルモノト假定スルノデアル．

特ニ領域 (x_0, x_1) ヲ十等分シテ,各分點デ $g(x)$ ノ値ヲ求メルコトトスルト,中間ノ値ハ

$$x = x_0+\alpha.\frac{\Delta x}{10} \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3, \ldots, \ 8,\ 9)$$

ノ諸點トナリ,補間式ノ第二項ハ

$$\frac{\Delta^{(1)}y_0}{\Delta x}(x-x_0) = \frac{\alpha}{10}\Delta^{(1)}y_0$$

トナリ,

$$g(x) = y_0+\frac{\alpha}{10}\Delta^{(1)}y_0-\frac{\Delta^{(2)}y_0}{2\Delta x^2}(x-x_0)(x_1-x)$$

トナル. 第二項迄ハ (x_0, x_1) 間ニ於テ行フ一次的補間用ノ算式ト同一デ,兩者ノ相違ハ第三項バカリトナル.

尚ホ $\alpha = 1, 2, \ldots, 8, 9$ ノ各場合ノ第三項ノ $\Delta^{(2)}y_0$ 以外ノ部分ノ値ヲ求メテ,ソノ結果ヲ表記スルト

α	$\frac{(x-x_0)(x_1-x)}{\Delta x^2}$	α	$\frac{(x-x_0)(x_1-x)}{\Delta x^2}$
1	0.09	6	0.24
2	0.16	7	0.21
3	0.21	8	0.16
4	0.24	9	0.09
5	0.25	10	0.00

一次及ビ二次的補間法ハ, $g(x)$ ノ値ガ等間隔ニ與ヘラレナイ場合デモ,用ヒテ有効デアル.

今 x_1, x_2, x_3 ヲ $g(x)$ ノ値 y_1, y_2, y_3 ガ夫夫與ヘラレル三點トシ,必ズシモ等間隔デナイトシテ,領域 (x_1, x_3) 內ノ一點 x_k ニ於テ $g(x)$ ノ値ヲ求メル場合ヲ考ヘヨウ.

コノ時,一次的補間法ナラバ

$$y_k' = y_1+\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}(x_k-x_1)$$

ナル算式ヲ用ヒ,二次的補間法ナラバ

$$y = y_1+\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}(x_k-x_1)+c(x_k-x_1)(x_k-x_3)$$
$$= y_k'+c(x_k-x_1)(x_k-x_3),$$

$$但 \quad c = \frac{y_2-y_2'}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

ナル算式ヲ用ヒル.

y_k' ノ計算ニハ,計算尺ヲ利用スルガヨイ. 卽チ計算尺デ (x_3-x_1) ト (y_3-x_1) トヲ相對セシメテ,目盛 x_k-x_1 ニ對スル目盛ノ讀ミカラ

$$\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}(x_k-x_1) \quad 卽チ \quad y_k'-y_1$$

ヲ計上スルト便利デアル.

例ヘバ次ノ三材料カラ,x ノ有理整函數 y ノ値ヲ

$x_1 = 1.0$	$y_1 = 0.20$
$x_2 = 2.3$	$y_2 = 1.06$
$x_3 = 3.5$	$y_3 = 2.45$

$$x_4 = 1.4,\quad x_5 = 3.2,\quad x_6 = 4.0$$

ノ諸點ニ於テ求メヨウ.

必要ナ計算ノ結果ヲ表記スルト次ノ樣ニナル.

x	y	一次的補間	$(x-x_1)(x-x_3)$	二次的補正
1.0	**0.20**	0.20	$0 = 0$	0
1.4	0.39	0.56	$-0.4\times2.1 = -0.84$	-0.168
2.3	**1.06**	1.37	$-1.3\times1.2 = \mathbf{-1.56}$	$\mathbf{-0.31}$
3.2	2.05	2.18	$-2.2\times0.3 = -0.66$	-0.132
3.5	**2.45**	2.45	$0 = 0$	**0**
4.0	3.20	2.90	$+3.0\times0.5 = +1.5$	$+0.30$

ニノ場合, 一次ノ補間ハ

$$y_k' = 0.20+\frac{2.45-0.20}{3.5-1.0}(x_k-1.0) = 0.2+0.9(x_k-1.0)$$

デ與ヘラレ, 之ハ表デハ第三行ニ列記サレテアル. 第四行ハ

$$(x_k-x_1)(x_k-x_3)$$

ノ値ヲ　　$x_k = 1.4,\ 2.3,\ 3.2,\ 4.0$

ノ諸點デ求メタ結果ヲ列記シタモノ, 第五行ハ二次的補正數卽チ $c(x_k-x_1)(x_k-x_3)$ ノ値ヲ求メタモノデアル　第五行ノ第三値ハ, コノ横列デハ $y_2 = 1.06,\ y'_2=1.37$ デアルコトカラ, 逆ニ, 二次的補正數ヲ

$$y_2-y'_2 = 1.06-1.37 = -0.31$$

トシテ決メタノデアル. 然ルニ

$$(x_2-x_1)(x_2-x_3) = -1.56$$

デ

$$c(x_k-x_1)(x_k-x_3) = \frac{(y_2-y_2')(x_k-x_1)(x_k-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$= \frac{0.31(x_k-x_1)(x_k-x_3)}{1.56}.$$

故ニ計算尺デ 1.56 ト 0.31 ト相對セシメ, 0.84, 0.66, 1.5 ニ對スル目盛ヲ讀ンデ直チニ第五行ノ諸値ガ得ラレル. 第二行ハ二次的補間ノ結果デアル.

又領域 (x_1, x_3) デ函數値ガ近似的ニ

$$y = y_1+\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}(x-x_1)+c(x-x_1)(x-x_3)$$

デ與ヘラレルコトカラ, 兩邊ヲ微分シテ得ル

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}+c(2x-x_1-x_3)$$

ヲ以テ微係數 $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メル近似公式トシテ利用スルコトガアル.

今　　$x_1 = 2.2,\quad x_2 = 3.4,\quad x_3 = 6.5$

ノ時　　$y_1 = 9{\cdot}7,\quad y_2 = 23.1,\quad y_3 = 84.6$

ナルコトヲ知ツテ, $x=3$ ニ於ケル $\dfrac{dy}{dx}$ ノ値ヲ求メルト,

$$(x_2-x_1)(x_2-x_3) = (3.4-2.2)\times(3.4-6.5) = -3.7,$$

$$y_2' = y_1+\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}(x_2-x_1)$$

$$= 9.7+\frac{84.6-9.7}{6.5-2.2}\times(3.4-2.2)$$

$$= 9.7+\frac{74.9}{4.3}\times 1.2 = 30.6.$$

故ニ　$$c = \frac{y_2-y_2'}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{23.1-30.6}{-3.7} = 2.03.$$

由テ　$$\frac{dy}{dx} = \frac{74.9}{4.3}+2.03(2x-2.2-6.5).$$

$$= 17.4+2.03(2x-8.7).$$

從テ　$x = 3.0$ ナラバ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=3.0} = 17.4+2.03(3.0\times 2-8.7).$$

$$= 11.9$$

3. 一般的補間法

n 次ノ有理整式 $g(x)$ ノ値ガ

$$x_k = x_0+k.\Delta x \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ldots,\ n-1,\ n)$$

ノ諸點デ與ヘラレ, ソノ時ノ値ヲ夫夫

$$y_k = g(x_k) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ldots,\ n-1,\ n)$$

トスル.

又　$A_0, A_1, \ldots\ldots, A_n$ ヲ未定係數トシテ

$$g(x) \equiv A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots\ldots+A_nx^n$$

ト置クト,

$$g(x_k) = y_k = A_0+A_1x_k+A_2x_k^2+\ldots\ldots+A_nx_k^n$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ldots, n)$$

トナリ, $A_0, A_1, \ldots\ldots, A_n$ ニ關スル $(n+1)$ 個ノ一次方程式ガ得ラレル.

然ルニ

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \cdots\cdots\cdots\cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \cdots\cdots\cdots\cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \cdots\cdots\cdots\cdots & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0]$$

ナル故,此聯立方程式ヲ解イテ $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ノ値ヲ定メルコトヲ得ル,從ツテ $g(\ )$ ガ完全ニ決マリ, x ノ任意ノ値ニ對スル $g(x)$ ノ値ヲ定メルコトガ出來ル.

然シコノ理論ヲ實行スルト,案外手數ノ煩雜ナコトヲ發見スルデアラウ. 故ニ別ノ方法ヲ取ツテ,直接 $g(x)$ ヲ求メルヲ可ナリトスル.

今 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ヲ未定係數トシテ, $g(x)$ ヲ

$$g(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots\ldots$$
$$+ a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

ノ形ニ置キ, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ヲ決メル方法ヲ考ヘヨウ.

ソレガ爲ニハ,階差係數 (Differenzenquotienten) ヲ利用スルヲ便トスルカラ,先ヅソノ説明カラ始メル.

4. 階差係數

$$\frac{f(x_r+\Delta x)-f(x_r)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_r)}{\Delta x}\ ^{(1)}$$

ト置クトキ,コノ比ノ値ヲ $x = x_r$ ナル點ニ於ケル函數 $f(x)$ ノ**階差係數**ト云フ. 同様ニ

$$\frac{\dfrac{\Delta f(x_r+\Delta x)}{\Delta x} - \dfrac{\Delta f(x_r)}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\Delta^{(2)} f(x_r)}{\Delta x^2}.$$

一般ニ
$$\frac{\dfrac{\Delta^{(m-1)} f(x_r+\Delta x)}{\Delta x^{(m-1)}} - \dfrac{\Delta^{(m-1)} f(r_r)}{\Delta x^{(m-1)}}}{\Delta x} = \frac{\Delta^{(m)} f(x_r)}{\Delta x^m}$$

ト置キ,此等ノ比ヲ夫夫第二階差係數,第 m 階差係數ト云ヒ,之ニ對シテ $\frac{\Delta f(x_r)}{\Delta x}$ ヲ第一階差係數ト呼ブコトガアル.

(1) $\Delta^{(1)} f(x)$ ヲ略シテ $\Delta f(x)$ ト書イタノデアル.

n 次ノ有理整式 $f(x)$ ノ根 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ガ總テ實數デ,且ツ $x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2} = \ldots = x_2 - x_1 = \Delta x$ ナラバ,

$$f(x) = c(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

ノ形ヲ有シ,ソノ階差係數ハ

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = nc(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})$$

デアル. (卽チ階差係數ハ最大根 x_n ヲ含マヌ).

之ハ階差係數ニ關スル肝要ナ性質デアルガ,次ノ樣ニ簡易ニ證明ガ出來ル.

x_r ガ有理整方程式 $f(x) = 0$ ノ根ナラ, $x - x_r$ ハ $f(x)$ ノ一因數トナルコトカラ, $f(x)$ ガ n 次ナラバ

$$f(x) = c(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

ノ形デ顯ハサレルコトハ明カデアル. 然ルニ

$$f(x+\Delta x) = c(x+\Delta x-x_1)(x+\Delta x-x_2)\ldots(x+\Delta x-x_n),$$

マタ　$x_r = x_{r-1} + \Delta x$　(尙ホ $x_1 - \Delta x = x_0$ トオク)

ナル故　$x + \Delta x - x_r = x - (x_r - \Delta x) = x - x_{r-1}.$

由テ　$f(x+\Delta x) = c(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$

從テ
$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) - f(x) &= c(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \\ &\quad - c(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \\ &= c(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_0-x+x_n) \\ &= c(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}).n\Delta x. \end{aligned}$$

故ニ
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = nc(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}).$$

即チ　　$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=nc(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_{n-1}).$$

5. 係數ノ決定

ココニ到ツテ最初ノ問題ニ立チ戻リ,階差ニ關スルコノ定理ヲ,與ヘラレタ有理整式

$$g(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots\ldots$$
$$+a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_{n-1})$$

ニ適用シヨウ. 假定ニヨツテ

$$x_1-x_0=x_2-x_1=\ldots\ldots=x_{n-1}-x_{n-2}=\Delta x$$

ナル故, $g(x)$ ハ上ノ定理ニ述ベタ $f(x)$ ノ樣ナ項ノ和デアル. 由テソノ各項ニ上ノ定理ヲ應用スレバ

$$\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)(x-x_1)+\ldots\ldots$$
$$+na_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_{n-2}).$$

今コノ式ニ於テ $x=x_0$ トオケバ

$$a_1=\left[\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}\right]_{x=x_0}=\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}$$

トナツテ,係數 a_1 ハ定マル. 次ニ

$$\frac{\Delta^{(2)}g(x)}{\Delta x^2}=\frac{\Delta\left[\dfrac{\Delta g(x)}{\Delta x}\right]}{\Delta x}$$
$$=2a_2+2.3a_3(x-x_0)+3.4a_4(x-x_0)(x-x_1)+\ldots\ldots$$
$$+(n-1)na_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_{n-3})$$

由テ　　$$2a_2=\left[\frac{\Delta^{(2)}g(x)}{\Delta x^2}\right]_{x=x_0}=\frac{\Delta^{(2)}g(x_0)}{\Delta x^2}.$$

一般ニ　$$\frac{\Delta^{(m-1)}g(x)}{\Delta x^{(m-1)}}=(m-1)!\,a_{m-1}+m!\,a_m(x-x_0)+\ldots$$

トナツテ,

$$(m-1)!\,a_{m-1}=\frac{\Delta^{(m-1)}g(x_0)}{\Delta x^{(m-1)}}$$

從テ次ノ結果ヲ得ル

$$a_0=g(x_0),\qquad a_1=\frac{1}{1!}\frac{\Delta^{(1)}g(x_0)}{\Delta x},\qquad a_2=\frac{1}{2!}\cdot\frac{\Delta^{(2)}g(x_0)}{\Delta x^2},$$
$$a_3=\frac{1}{3!}\cdot\frac{\Delta^{(3)}g(x_0)}{\Delta x^3};\ \ldots\ldots,\quad a_n=\frac{1}{n!}\cdot\frac{\Delta^{(n)}g(x_0)}{\Delta x^n}.$$

斯クノ如ク階差係數ヲ利用スルト, a_λ ノ値ハ容易ニ決マル. 猶ホ此等ノ階差係數ヲ求メルニハ,矢張リ階差表ヲ利用スルノガ便デアル.

x	$g(x)$	$\Delta g(x)$	$\Delta^{(2)}g(x)$	$\Delta^{(3)}g(x)$
x_0	$\boldsymbol{g(x_0)}$	$\boldsymbol{\Delta g(x_0)}$		
$x_0+\Delta x$	$g(x_0+\Delta x)$	$\Delta g(x_0+\Delta x)$	$\Delta^{(2)}\boldsymbol{g(x_0)}$	$\Delta^{(3)}\boldsymbol{g(x_0)}$
$x_0+2\Delta x$	$g(x_0+2\Delta x)$	$\Delta g(x_0+2\Delta x)$	$\Delta^{(2)}g(x_0+\Delta x)$	
$x_0+3\Delta x$	$g(x_0+3\Delta x)$			

コノ階差表ノ各行ノ第一數値 $g(x_0)$, $\Delta g(x_0)$, $\Delta^{(2)}g(x_0)$, 等ヲ,夫夫 $(\Delta x)^n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots)$ デ除シテ得ル商カラ,夫夫 a_0, a_1, a_2, ..., ノ値ガ與ヘラレル. 之ハ x ガ領域 $(x_0,\ x_1)$ ノ内ニアル時ニ使用スル. 若シ x ガ領域 $(x_1,\ x_2)$ 内ニアルナラバ,上ノ階差表ノ各行ノ第二數値 $g(x_0+\Delta x)$, $\Delta g(x_0+\Delta x)$, $\Delta^{(2)}g(x_0+\Delta x)$, ... ヲ用フレバヨイ.

一般ニ $g(x_0)$, $\Delta g(x_0)$, $\Delta^{(2)}g(x_0)$, ... ヲ過ル一直線ヲ引キ,第二行ノ或ル値 $g(x_0+\alpha\Delta x)$ ヲ過リ,上ノ直線ニ平行

ナ直線ヲ引イテ見ルト,ソノ直線上ニ横ハル階差ヲ,夫夫 n ノ値ヲ適當ニ取ッテ, $(\Delta x)^n$ デ割ルコトニヨリ,領域 $(x_0+\alpha\Delta x,\ x_0+(\alpha+1)\Delta x)$ 内ノ一點 x ニ對スル函數値 $g(x)$ 決定上,必要ナ係數 $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ ガ定マル.

此方法ヲ利用シテ $g(x)$ ノ補間法ヲ行フト,計算ノ主要部分ハ階差表ノ作製デアル.

階差表ノ作製ニ於テ,計算ヲ檢證スルニハ各行ノ數ノ總和ガ,ソノ直前ノ行ノ第一數ト最後ノ數トノ差トナルカヲ見ルノガ最モ便宜デアル. 斯クテ吾々ハ

$$g(x)=g(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}\frac{\Delta^{(2)}g(x_0)}{\Delta x^2}$$

$$+\ldots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{n!}\frac{\Delta^{(n)}g(x_0)}{\Delta x^n}$$

ナル結果ニ到達シタノデアル. コレヲ通例**にうとん** Newton **ノ補間公式**(又ハ**挿入式**)ト呼ンデ居ル.[1]

例ヘバ $x=3,4,5,6$ ナルトキノ $g(x)=x^3$ ノ値ヲ知リテ, $x=3.4$ ナルトキノ値ヲ求メヨウ. コノ場合ニハ

x	x^3	Δ	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$
3	27			
		37		
4	64		24	
		61		6
5	125		30	
		91		
6	216			

$$x=3.4,\quad x_0=3,\quad x_1=4,\quad x_2=5,\quad x_3=6,\quad \Delta x=1$$

ナル故.にうとんノ補間公式ニヨッテ

$$(3.4)^3=27+\frac{3.4-3}{1}\cdot\frac{37}{1}+\frac{(3.4-3)(3.4-4)}{2!}\frac{24}{1^2}$$

$$+\frac{(3.4-3)(3.4-4)(3.4-5)}{3!}\frac{6}{1^3}$$

(1) 後ニ說明スル種々ノ補間公式ト比較スル便宜上,

$$u=\frac{x-x_0}{\Delta x},\qquad \Delta^{(\lambda)}g(x_0)=\Delta_0{}^\lambda\qquad(\lambda=1,2,\ldots,n)$$

トオケバ,にうとんノ補間公式ハ次ノ樣ニナル.

$$g(x)=g(x_0)+\frac{u}{1!}\Delta_0{}^1+\frac{u(u-1)}{2!}\Delta_0{}^2+\ldots+\frac{u(u-1)\ldots(u-n+1)}{n!}\Delta_0{}^n.$$

$$=27+(0.4)(37)+\frac{(0.4)(-0.6)}{2}(24)+\frac{(0.4)(-0.6)(-1.6)}{6}(6)=39.304.$$

問　　題

$x=0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.7$ ナル時, $2x^4-5x^2$ ノ値ヲ知リテ, $x=0.37$ ノトキノ値ヲ,夫夫一次的,二次的及ビにうとん補間式 $(n=3,\ n=4)$ ニヨリテ計算シ,其結果ヲ比較セヨ.

6. 補間公式ノ猶ホ一般的ナ作リ方

將來ノ應用ニ必要デアルカラ,ココニ上ノ方法ニ似タ他ノ方法ヲ附加シタイト思フ. 其樣ナ方法ハ色々アルガ,ココニ其ノ一ツノ作リ方ヲ示セバ,他モ推シテ知リ得ルデアラウ.

例ヘバ等間隔ニ與ヘル函數値ノ場所ヲ, ヨリ右ヘ,小ナルモノカラ大キイモノヘ,

$$\ldots,\ x_{-4},\ x_{-3},\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots$$

ト表示シ,總數ヲ $(n+1)$ 個,間隔ヲ Δx トシテ

$$g(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_{-1})$$

$$+a_3(x-x_0)(x-x_{-1})(x-x_1)$$

$$+a_4(x-x_0)(x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_{-2})+\ldots$$

ナル形デ表ハスノモ一案デアル. コノ場合ニハ

$$\frac{\Delta^{(1)}g(x)}{\Delta x}=a_1+2a_2(x-x_{-1})+3a_3(x-x_0)(x-x_{-1})$$

$$+4a_4(x-x_0)(x-x_{-1})(x-x_{-2})+\ldots,$$

$$\frac{\Delta^{(2)}g(x)}{\Delta x^2}=1.2a_2+2.3a_3(x-x_{-1})$$

$$+3.4a_4(x-x_{-1})(x-x_{-2})+\ldots,$$

$$\frac{\Delta^{(3)}g(x)}{\Delta x^3}=1.2.3a_3+2.3.4a_4(x-x_{-2})$$
$$+3.4.5.a_5(x-x_{-1})(x-x_{-2})+\ldots\ldots,$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

故ニ
$$a_0=g(x_0),\ \ a_1=\frac{1}{1!}\cdot\frac{\Delta^{(1)}g(x_{-1})}{\Delta x},$$
$$a_2=\frac{1}{2!}\cdot\frac{\Delta^{(2)}g(x_{-1})}{\Delta x^2},\ \ a_3=\frac{1}{3!}\cdot\frac{\Delta^{(3)}g(x_{-2})}{\Delta x^3},$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

トナッテ,矢張 $g(x)$ ハ簡易ニ定マル.

唯コノ時 a_0, a_1, a_2, ..., a_n ヲ決定スル階差ハ,階差表上前ノ場合ト異ナル排列ヲシテ居テ,之ヲ順次結ブ線分ハ一直線形トナラズ,凹凸アル折線トナル違ヒガアルノミデアル.

x_{-4}	$g(x_{-4})$					
		$\Delta^{(1)}g(x_{-4})$				
x_{-3}	$g(x_{-3})$		$\Delta^{(2)}g(x_{-4})$			
		$\Delta^{(1)}g(x_{-3})$		$\Delta^{(3)}g(x_{-4})$		
x_{-2}	$g(x_{-2})$		$\Delta^{(2)}g(x_{-3})$		$\Delta^{(4)}g(x_{-4})$	
		$\Delta^{(1)}g(x_{-2})$		$\Delta^{(3)}g(x_{-3})$		$\Delta^{(5)}g(x_{-})$
x_{-1}	$g(x_{-1})$		$\Delta^{(2)}g(x_{-2})$		$\Delta^{(4)}g(x_{-3})$	
		$\Delta^{(1)}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{-1})$		$\Delta^{(3)}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{-2})$		$\Delta^{(5)}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{-3})$
$\boldsymbol{x}_0$	$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)$		$\Delta^{(2)}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{-1})$		$\Delta^{(4)}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{-2})$	
		$\Delta^{(1)}g(x_0)$		$\Delta^{(3)}g(x_{-1})$		$\Delta^{(5)}g(x_{-2})$
x_1	$g(x_1)$		$\Delta^{(2)}g(x_0)$		$\Delta^{(4)}g(x_{-1})$	
		$\Delta^{(1)}g(x_1)$		$\Delta^{(3)}g(x_0)$		$\Delta^{(5)}g(x_{-1})$
x_2	$g(x_2)$		$\Delta^{(2)}g(x_1)$		$\Delta^{(4)}g(x_0)$	
		$\Delta^{(1)}g(x_2)$		$\Delta^{(3)}g(x_1)$		
x_3	$g(x_3)$		$\Delta^{(2)}g(x_2)$			
		$\Delta^{(1)}g(x_3)$				
x_4	$g(x_4)$					

一般ニソノ他ノ表示法デモ,結局ハ a_λ ヲ決定スル爲メ用フル階差表中適當ニ定メタ(定メ方ガ違ウノミデ)矢張階差係數ノ値カラ a_λ ヲ定メテ, $g(x)$ ヲ,前述ノ二方法以外ノ表示法デ,容易ニ表示スルコトガ出來ル.

尙ホ階差表中必要ナル階差ノ選出ニ關シテハ,一般ニ次ノ關係ガ成立スル.

$g(x)$ ノ此種ノ展開式デハ,第 $(m+1)$ 番目ノ項ハ, $x-x_k$ ノ形ノ一次因數 m 個ノ連乘積ノ形ヲ有シ,ソノ係數 a_m ハ階差表ノ第 $(m+1)$ 番目ノ行卽チ $\Delta^{(m)}g(x)$ ノ一値ニヨッテ決定サレル. 此行ニ於ケル,ソノ階差ノ位置ヲ,ソノ直前ノ行中 a_{m-1} ヲ決定スル爲メ用ヒタ階差ノ位置ト比較スルト,前項ノ因數ノ第二項 x_i ト,本項トシテ新タニ添加スベキ一因數ノ第二項(之ヲ x_a トスルト)ト比較シ, x_a ガ x_i 中ノ値ノ次ノ大キナ値ナラバ,第 m 行カラ第 $(m+1)$ 行ニ移ルノニ一段下リ,次ノ小サイモノデアルナラバ,第 m 行カラ第 $(m+1)$ 行ニ移ルノニ一段上ルコトニナル.

コノ一般關係ヲ利用シテ,第二行ノ或ル値カラ或ハ上リ或ハ下リ階差表中ノ階差ヲ結ビ付レバ,容易ニ係數 a_m ノ決定ニ必要ナ階差ガ選出出來ル.

7. 二ツノ特別ナ補間公式

前款ニ於テ說述シタ階差表ハ既ニ求メテアルモノトスル.

$g(x)$ ノ補間公式トシテ,最モ有効,便宜ナモノト稱セラレルモノハ,次ノ二種ノ表ハシ方 (i), (ii) デアル.

計算及ビ表示ノ便宜上,

$$u = \frac{x-x_0}{\Delta x} \quad \text{卽チ} \quad x = u.\Delta x + x_0$$

ト置イテ, x ノ代リニ新變數 u ヲ用フル.

$g(x)$ ノ與ヘ方ハ, 前ト同樣ニ, 間隔 Δx ナル等間隔デ, 函數値ノ與ヘラレル諸點ヲ, 大サノ順ニ, 左カラ右ヘ, 小サイ方カラ大キイ方ヘ,

$$\ldots\ldots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots$$

トスルト, x ノ方デ $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2$ 等ト考ヘルコトハ, u ノ方デ整數 $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ 等ヲ考ヘレバヨイコトニナル.

公式 (i)

$$g(x) = g(x_0) + \Delta^1{}_0.u + \Delta^2{}_0.\frac{u(u-1)}{2!} + \Delta^3{}_{-1}.\frac{u(u-1)(u-2)}{3!}$$
$$+ \Delta^4{}_{-1}.\frac{u(u-1)(u-2)(u+1)}{4!}$$
$$+ \Delta^5{}_{-2}.\frac{u(u-1)(u-2)(u+1)(u-3)}{5!} + \ldots\ldots$$

公式 (ii)　(がうす Gauss ノ補間公式)

$$g(x) = g(x_0) + \Delta^1{}_0.u + \Delta^2{}_{-1}.\frac{u(u-1)}{2!} + \Delta^3{}_{-1}.\frac{u(u-1)(u+1)}{3!}$$
$$+ \Delta^4{}_{-2}.\frac{u(u-1)(u+1)(u-2)}{4!}$$
$$+ \Delta^5{}_{-2}.\frac{u(u-1)(u+1)(u-2)(u+2)}{5!} + \ldots\ldots$$

但シ Δ^3_{-2} ハ $\Delta^{(3)}g(x_{-2})$ ノ略記號, 一般ニ Δ^λ_μ ハ $\Delta^{(\lambda)}g(x_\mu)$ ヲ表ハスモノデアル.[1]

[1] 或ル種ノ讀者ニ便スル爲メニ, 一般論ニヨラナイデ, 公式 (i), (ii) ヲ直接ニ計算シ

讀者ハ此等ノ展開式ニ含マレル階差ガ, 階差表ノ中デ如何ナル(二ツノ)路ヲ取ルカニ注意スベキデアル.

コレ等ノ二ツノ路ハ他ノドンナ路ヨリモ便利デアル. 何トナレバ, 展開式ノ各項タル多項式ヲ零ニスル値, 卽チ其ノ項ニ含マレル x_i ノ値ガ, 出來ルダケ, x_0 (卽チ $u=0$) ノ近クニ横ツテ居ル. 從ツテ各項ノ値(大イサ)ハ比較的小サクナリ, 一方分母ノ階乘 (Factorial) ノ爲メ項ハ後ノモノ程, 微小トナリ, $g(x)$ ヲ近似的ニ求メル場合, 甚ダ簡易トナリ, ソノ結果ノ精密度ノ判斷ニモ, 他ノ展開式ヨリ便宜デアルカラデアル.

$g(x)$ ヲ求メルノニ, 公式 (i), (ii) ノ何レヲ用ヒテモ, 展

テ誘導ショウ. ソノ方法ハ何レモ同樣ダカラ, 公式 (i) ノミヲ證明スル.

先ヅ u デ表シタ公式中ノ項ヲ x デ書キ改メルト,

$$u = \frac{1}{\Delta x}(x-x_0).$$

由テ

$$u(u-1) = \frac{1}{\Delta x^2}(x-x_0)(x-x_1),$$
$$u(u-1)(u-2) = \frac{1}{\Delta x^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),$$
$$u(u-1)(u-2)(u+1) = \frac{1}{\Delta x^4}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_{-1}),$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

故ニ公式 (i) ハ $g(x)$ ヲ次ノ形ニ展開ショウトスルノデアル.

$$g(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$+ a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_{-1}) + a_5(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_{-1})(x-x_3)$$
$$+ a_6(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_{-1})(x-x_3)(x-x_{-2}) + \ldots\ldots$$

故ニ兩邊ニ於テ $x = x_0$ トオケバ　$a_0 = g(x_0)$.

又
$$\frac{\Delta^{(1)}g(x)}{\Delta x} = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)(x-x_1) + \ldots$$

故ニ　$x = x_0$ トオケバ　$a_1 = \dfrac{\Delta^{(1)}g(x_0)}{\Delta x}$.

又
$$\frac{\Delta^{(2)}g(x)}{\Delta x^2} = 2a_2 + 2.3a_3(x-x_0) + 3.4a_4(x-x_{-1})(x-x_0) + \ldots$$

故ニ　$x = x_0$ トオケバ　$a_2 = \dfrac{1}{2!}.\dfrac{\Delta^{(2)}g(x_0)}{\Delta x^2}$.

開式ノ全部ヲ取ルナラバ結局同一ノ結果ヲ得ル．コレ當然ノコトデアル．然シ，後ノ各項ハ前ノモノニ比ベテ漸次小サクナルコトヲ考ヘレバ，$g(x)$ ヲ近似的ニ求メル時ニハ，初ノ若干項ノミヲ用ヒテモ宜シイ．コノ場合ニハ二ツノ公式ノ結果ハ一致シナイ．

斯樣ナ時ニハ，兩公式カラ得ベキ結果ノ算術平均ヲ取ルノガ最モヨイ．ソノコトヲ豫想シ，之ニ便宜ナ樣公式 (i)，(ii) ノ平均ヲ求メ，同階級ノモノ同志適當ニマトメルト，

公式 I.

$$g(x)=g(x_0)+\Delta^1{}_0.u+\frac{\Delta^2{}_0+\Delta^2{}_{-1}}{2}.\frac{u(u-1)}{2!}$$

又　$$\frac{\Delta^{(3)}g(x)}{\Delta x^3}=2.3a_3+2.3.4a_4(x-x_{-1})+3.4.5a_5(x-x_{-1})(x-x_0)+\ldots.$$

故ニ　$x=x_{-1}$ トオケバ　$a_3=\dfrac{1}{3!}\dfrac{\Delta^{(3)}g(x_{-1})}{\Delta x^3}$.

…　…　…　…　…　…　…　…　…

故ニ　$$g(x)=g(x_0)+\frac{\Delta^{(1)}g(x_0)}{\Delta x}(x-x_0)+\frac{\Delta^{(2)}g(x_0)}{2!\,\Delta x^2}(x-x_0)(x-x_1)$$
$$+\frac{\Delta^{(3)}g(x_{-1})}{3!\,\Delta x^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$+\frac{\Delta^{(4)}g(x_{-1})}{4!\,\Delta x^4}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_{-1})$$
$$+\frac{\Delta^{(5)}g(x_{-2})}{5!\,\Delta x^5}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_{-1})(x-x_3)+\ldots$$

即チ　$$g(x)=g(x_0)+\Delta^{(1)}g(x_0)\frac{x-x_0}{\Delta x}+\Delta^{(2)}g(x_0)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!\,\Delta x^2}$$
$$+\Delta^{(3)}g(x_{-1})\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!\,\Delta x^3}+\ldots.$$
$$=g(x_0)+\Delta^1{}_0u+\Delta^2{}_0\frac{u(u-1)}{2!}+\Delta^3{}_{-1}\frac{u(u-1)(u-2)}{3!}$$
$$+\Delta^4{}_{-1}\frac{u(u-1)(u-2)(u+1)}{4!}$$
$$+\Delta^5{}_{-2}\frac{u(u-1)(u-2)(u+1)(u-3)}{5!}+\ldots$$

$$+\Delta^3{}_{-1}.\frac{u(u-1)(u-0.5)}{3!}$$
$$+\frac{\Delta^4{}_{-1}+\Delta^4{}_{-2}}{2}.\frac{u(u-1)(u+1)(u-2)}{4!}$$
$$+\Delta^5{}_{-2}.\frac{u(u-1)(u+1)(u-2)(u-0.5)}{5!}$$
$$+\ldots.\qquad\text{(但シ } 0\leqq u\leqq 1\text{)}$$

トナル．**之ハべっせる Bessel ノ公式**ト稱セラレルモノデ，x ガ領域 (x_0, x_1) 內ニアルトキ，$g(x)$ ノ値ヲ求メルニ便宜ナ公式デアル．

コノ公式デ用ヒル階差ノ位置ヲ階差表デ示スト，[1]

x	u	$g(x)$	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
x_{-3}	-3	井					
			井				
x_{-2}	-2	井		井			
			井		井		
x_{-1}	-1	井		井		井	
			井		井		井
x_0	0	⊕		⊕		⊕	
			⊕		⊕		⊕
x_1	1	井		⊕		⊕	
			井		井		井
x_2	2	井		井		井	
			井				
x_3	3	井					

但シ「井」ハ夫夫ソノ位置ニ，然ルベキ階差アルコトヲ示シ，「⊕」ハ公式 (I) ヲ利用スル時，必要ナ階差ノ位置ヲ示ス．最後ニ「⊕」ガ同行ニ二個アッテ之ヲ直線デ縱ニ結ンデアルノハ，ソノ行デハ，コノ位置ニアル二階差ヲ用ウベク，從ッテソノ平均ヲ取ルベキコトヲ示ス

[1] 此ノ一段ハ原本ノ第一版デハ第五章ニアル．

記號デアル。

猶ホ各項ノ u ヲ含ム部分ノ値ヲ

$$u = 0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ \ldots,\ 1.0$$

トシテ計算シテ,ソノ結果ヲ表記スルト,次ノ表ヲ得ル

u	$\frac{u(u-1)}{2!}$	$\frac{u(u-1)(u-0.5)}{3!}$	$\frac{u(u-1)(u-2)(u+1)}{4!}$	$\frac{u(u-1)(u-2)(u+1)(u-0.5)}{5!}$
0.0	0.	0.	0.	0.
0.1	−0.045	0.0060	0.007837	−0.0006270
0.2	−0.080	0.0080	0.014405	−0.0008640
0.3	−0.105	0.0070	0.019338	−0.0007735
0.4	−0.120	0.0040	0.022400	−0.0004480
0.5	−0.125	0.	0.023437	0.
0.6	−0.120	−0.0040	0.022400	0.0004480
0.7	−0.105	−0.0070	0.019338	0.0007735
0.8	−0.080	−0.0080	0.014405	0.0008640
0.9	−0.045	−0.0060	0.007837	0.0006270
1.0	0.	0.	0.	0.

次ノ公式 (iii) (本節第 6 欵デ得タモノ)モ, $x = x_0$ ノ附近デ $g(x)$ ヲ求メル算式トシテ有効デアル.

公式 (iii)

$$g(x) = g(x_0) + \Delta^1_{-1}u + \Delta^2_{-1}\frac{u(u+1)}{2!} + \Delta^3_{-2}\frac{u(u+1)(u-1)}{3!}$$

$$+\Delta^4_{-2}\frac{u(u+1)(u-1)(u+2)}{4!}$$

$$+\ldots\ldots$$

コノ公式ト公式 (ii) トノ平均ヲ取ルト,次ノ**すたーりんぐ Stirling ノ補間公式**ガ得ラレル.

公式 II.

$$g(x) = g(x_0) + \frac{\Delta^1_{-1} + \Delta^1_0}{2}.u + \Delta^2_{-1}.\frac{u^2}{2!}$$

$$+\frac{\Delta^3_{-2} + \Delta^3_{-1}}{2}.\frac{u(u-1)(u+1)}{3!}$$

$$+\Delta^4_{-2}.\frac{u^2(u-1)(u+1)}{4!}$$

$$+\frac{\Delta^5_{-3} + \Delta^5_{-2}}{2}.\frac{u(u-1)(u+1)(u-2)(u+2)}{5!}$$

$$+\ldots\ldots$$

(但シ　$-0.5 \leqq u \leqq +0.5$)

すたーりんぐノ公式ハ $x = x_0$ ノ附近ノ補間ニ便利デアルガ,之ヲ利用スルトキ,必要ナ階差ノ階差表上ノ位置ヲ前ト同様ノ記號デ示スト,[1]

x	u	$g(x)$	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
x_{-3}	−3	#					
			#				
x_{-2}	−2	#		#			
			#		#		
x_{-1}	−1	#		#		#	
			#		#		#
x_0	0	#		#		#	
			#		#		#
x_1	1	#		#		#	
			#		#		
x_2	2	#		#			
			#				
x_3	3	#					

又コノ場合初メノ五項ノ u ヲ含ム部分ノ

$$u = 0.0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5$$

(1) コノ一段ハ原著第一版デハ第五章ニアル.

ナル場合ノ値ヲ求メテ,ソノ結果ヲ表記スルト,

u	$\frac{u^2}{2!}$	$\frac{u(u-1)(u+1)}{3!}$	$\frac{u^2(u-1)(u+1)}{4!}$	$\frac{u(u-1)(u+1)(u-2)(u+2)}{5!}$
0.0	0.	0.	0	0.
0.1	0.0050	−0.0165	−0.0004	0.0033
0.2	0.0200	−0.0320	−0.0016	0.0063
0.3	0.0450	−0.0455	−0.0034	0.0089
0.4	0.0800	−0.0560	−0.0056	0.0108
0.5	0.1250	−0.0625	−0.0078	0.0117

但シ $u=-0.1,\ -0.2,\ -0.3,\ -0.4,\ -0.5$

ノ時ハ,唯上ノ表デ第三行,第五行ノ數ノ符號ガ反對トナルノミダカラ,此表ダケデ全體ニ使ヘル.

例ヘバ,或ル有理整函數 $g(x)$ ノ次ノ表カラ[1], $g(3.5)$ ノ値ヲすたーりんぐノ公式ニヨツテ補間シヨウ. Δ^3ガ殆ンド常數トナリ,從テΔ^4ハ0ト見做シ得ルカラ,第四項マデ採リ,以下ヲ切リ棄テレバ,

x	$g(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3
1	0.208460			
		29242		
2	0.237702		−213	
		29029		−27
3	0.266731		−240	
		28789		−26
4	0.295520		−266	
		28523		−26
5	0.324043		−292	
		28231		
6	0.352274			

$$x=3.5,\quad x_0=3,\quad \Delta x=1,\quad u=\frac{3.5-3}{1}=0.5$$

(1) コノ表デハ紙面ヲ經濟ニスル爲メニ, 無効ナ數字 0 ヲ省イテアル. 例ヘバ Δ^2 ノ行デ −213 トアルハ, −0.000213 ノコトデアル.

カラ

$$g(3.5)=g(3)+\frac{0.029029+0.028789}{2}(0.5)-0.000240\frac{(0.5)^2}{2!}$$

$$-\frac{0.000027+0.000026}{2}\cdot\frac{0.5(0.5-1)(0.5+1)}{3!}$$

$$=0.266731+0.028909(0.5)$$

$$-0.000240(0.1250)+0.000027(0.0625)$$ (表ヲ用ヒテ)

$$=0.281158.$$

第三節

微分又ハ積分ニ用ヒラレル公式[1]

すたーりんぐノ公式ヲ用ヒ, $g(x)$ ヲ

$$g(x)=g(x_0)+\frac{\Delta^1_{-1}+\Delta^1_0}{2}u+\Delta^2_{-1}\frac{u^2}{2!}+\cdots\cdot$$

ト置キ,右邊ヲ u ニ關シテ微分スルト

$$\frac{\Delta^1_{-1}+\Delta^1_0}{2}+\Delta^2_{-1}u+\frac{\Delta^3_{-2}+\Delta^3_{-1}}{2}\cdot\frac{u(u-1)(u+1)}{3!}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}\right)$$

$$+\cdots\cdot$$

故ニ $u=0$ (卽チ $x=x_0$ ナル點) ニ於テ $g(x)$ ノ u ニ關スル微分係數ヲ求メルト

$$\left[\frac{dg}{du}\right]_{u=0}=\frac{\Delta^1_{-1}+\Delta^1_0}{2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{\Delta^3_{-2}+\Delta^3_{-1}}{2}$$

$$+\frac{4}{5!}\cdot\frac{\Delta^5_{-3}+\Delta^5_{-2}}{2}+\cdots\cdot$$

(1) コノ一節モ原著ノ第一版デハ第五章ニアル.

$$\left[\frac{dg}{du}\right]_{u=0}=\frac{\Delta^1{}_{-1}+\Delta^1{}_0}{2}-\frac{\Delta^3{}_{-2}+\Delta^3{}_{-1}}{2}\times 0.166\ldots.$$
$$+\frac{\Delta^5{}_{-3}+\Delta^5{}_{-2}}{2}\times 0.0333\ldots+\ldots.$$

ソレデ微係數ヲ計算スルニハ,算術平均ノ記號ヲ書イタ表(前節ノ終ニ近イ表)ノ中デ,垂直ニ結バレタ二ツノ圓デ顯サレタ階差ノミヲ採レバ宜シイノデアル.

又 $\dfrac{dg(x)}{dx}$ ヲ求メルニハ, $u=\dfrac{x-x_0}{\Delta x}$ デ

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{\Delta x}$$

ナル故,

$$\frac{dg(x)}{dx}=\frac{dg}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{\Delta x}\frac{dg}{du}$$

トナルコトヲ利用シ,前記ノ公式ノ右邊ヲ更ニ Δx デ割レバヨイ.

又公式 (I), (II) ハ $g(x)$ ノ積分ノ値ヲ求メル上ニモ利用出來ル.

べっせるノ公式ヲ用ヒ,積分領域ヲ Δx トシ, $x=x_0$ ノ點カラ始メルト,

公式 (I_a)

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} g(x)dx=\Delta x\left\{g(x_0)+\frac{\Delta^1{}_0}{2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{\Delta^2{}_0+\Delta^2{}_{-1}}{2}\right.$$
$$\left.+\frac{11}{720}\cdot\frac{\Delta^4{}_{-1}+\Delta^4{}_{-2}}{2}-\ldots.\right\}$$

ヲ得ル.[1]

---

(1), (2) 公式 (I_a), (II_a) ノ證明. 何レモ同樣ニ證明出來ルカラ, 今ハ公式 (I_a) ヲ證明シヨウ.

又すたーりんぐノ公式ヲ用ヒ,積分領域ヲ

$$(x_0-\Delta x,\ x_0+\Delta x)$$

トスルト,

公式 (II_a)

$$\int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} g(x)dx=2\Delta x\left\{g(x_0)+\frac{\Delta^2{}_{-1}}{6}-\frac{\Delta^4{}_{-2}}{180}+\ldots.\right\}$$

トナル.[2]

積分公式 (I_a), (II_a) 及ビ $\left(\dfrac{dg}{dx}\right)_{x=x_0}$ ヲ求メル公式ハ, $g(x)$ ガ有理整函數ノ時ノミデナク,一般ニソノ他ノ函數 $f(x)$ ニモ近似的ニ適用スルコトガアル. 寧ロ此等ノ公式ノ實用上ノ價値ハソノ點ニアルノデアルガ,コノコトハ章ヲ改メテ後ニ詳設スル.

$$u=\frac{x-x_0}{\Delta x}.$$

故ニ　$x=x_0$ ノ時ハ $u=0$, $x=x_1$ ノ時ハ $u=1$.

又　$dx=\Delta x du$

從ッテ

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} g(x)dx=\int_0^1 g(x).\Delta x du=\Delta x\int_0^1 g(x)du.$$

然ルニ

$$g(x)=g(x_0)+\Delta^1{}_0 u+\frac{\Delta_0{}^2+\Delta^2{}_{-1}}{2}\cdot\frac{u(u-1)}{2!}$$
$$+\Delta^3{}_{-1}\frac{u(u-1)(u-0.5)}{3!}$$
$$+\frac{\Delta^4{}_{-1}+\Delta^4{}_{-2}}{2}\cdot\frac{u(u-1)(u+1)(u-2)}{4!}+\ldots$$

由テ

$$\int g(x)du=g(x_0)u+\Delta^1{}_0\frac{u^2}{2}$$
$$+\frac{\Delta^2{}_0+\Delta^2{}_{-1}}{2}\cdot\frac{1}{2!}\int(u^2-u)du$$
$$+\frac{\Delta^3{}_{-1}}{3!}\int(u^3-1.5u^2+0.5u)du$$
$$+\frac{\Delta^4{}_{-1}+\Delta^4{}_{-2}}{2}\cdot\frac{1}{4!}\int(u^4-2u^3-u^2+2u)du+\ldots.$$

問　　題

1. 公式 (I), (II) 及ビ (i), (ii), (iii) ノ各々ヲ用ヒテ, $(5.2)^3$ ヲ計算セヨ.

2. 補間公式ヲ適用シテ, $x=5$ ナル點ニ於ケル函數 x^3 ノ微係數ヲ求メヨ.

3. 公式 (I_a) 及ビ (II_a) ヲ用ヒテ,

$$\int_{-0.5}^{0.5}(x^2-5x+3)dx$$

ヲ計算セヨ.

以上ノ三問ノ結果ハ,夫夫直接計算ニヨツテ得タ値ト比較スベキデアル.

4. 次ノ恒等式ヲ證明セヨ.

$$x^4=x+7x(x-1)+6x(x-1)(x-2)+x(x-1)(x-2)(x-3).$$

5. x^4-3x^2+x+2 ヲ次ノ形ニ表ハセ

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x(x-1)+\mathrm{D}(x+1)x(x-1)+\mathrm{E}(x+1)x(x-1)(x-2).$$

但シ A, B, ..., E ハ常數デアル

$$=g(x_0)u+\Delta^1{}_0\frac{u^2}{2}+\frac{\Delta^2{}_0+\Delta^2{}_{-1}}{2}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}\right)$$
$$+\frac{\Delta^3{}_{-1}}{3!}\left(\frac{1}{4}u^4\quad\frac{1.5}{3}u^3+\frac{0.5}{2}u^2\right)$$
$$+\frac{\Delta^4{}_{-1}+\Delta^4{}_{-2}}{2}\cdot\frac{1}{4!}\left(\frac{u^5}{5}-\frac{2}{4}u^4-\frac{u^3}{3}+u^2\right)+\ldots.$$

故ニ

$$\int_0^1 g(x)du=g(x_0)+\Delta^1{}_0\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1+\frac{\Delta^2{}_0+\Delta^2{}_{-1}}{2}\cdot\frac{1}{2!}\left[\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}\right]_0^1$$
$$+\frac{\Delta^3{}_{-1}}{3!}\left[\frac{u^4}{4}-\frac{1.5}{3}u^3+\frac{0.5}{2}u^2\right]_0^1$$
$$+\frac{\Delta^4{}_{-1}+\Delta^4{}_{-2}}{2}\cdot\frac{1}{4!}\left[\frac{u^5}{5}-\frac{2}{4}u^4-\frac{u^3}{3}+u^2\right]_0^1+\ldots.$$
$$=g(x_0)+\frac{1}{2}\Delta^1{}_0-\frac{1}{12}\cdot\frac{\Delta^2{}_0+\Delta^2{}_{-1}}{2}+\frac{11}{720}\cdot\frac{\Delta^4{}_{-1}+\Delta^4{}_{-2}}{2}-\ldots.$$

從テ

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}g(x)dx=\Delta x\left\{g(x_0)+\frac{1}{2}\Delta^1{}_0-\frac{1}{24}(\Delta^2{}_0+\Delta^2{}_{-1})\right.$$
$$\left.+\frac{11}{1440}(\Delta^4{}_{-1}+\Delta^4{}_{-2})-\ldots.\right\}$$

第五章　一般函數ノ補間法, 數値計算ニヨル微分及ビ積分法

前章ノ補間公式ハ元來有理整函數ニ就テ成立スルモノデアルガ,之ヲ他ノ一般ナ函數ノ補間ニモ適用スルコト屢々アル. コレヲ適用スル根據ハ,與ヘラレタ變域ニ於テ問題ノ任意函數 $f(x)$ ハ,適當ニ選バレタ有理整函數 $g(x)$ デ置換シ得ラレルトノ考ヘニアル.

コレヨリ以下吾々ハ等間隔ノ補間法ノミヲ研究シヨウ. マタ特ニ圖デ與ヘラレタ函數ノ微分法及ビ積分法ハ,後ノ章デ詳論スルコトニスル.

第一節　任意函數ノ補間法[(1)]

1. 補間法ノ意味

任意函數 $f(x)$ ノ値ガ, Δx ナル等間隔ノ $n+1$ 個ノ點[(2)]

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots.,\ x_i,\ \ldots.,\ x_n$$

デ與ヘラレタトシ,ソノ値ヲ

---

(1) 此節ノ前半ハ原書ニヨラズ,新ニ書キ改メタモノデアル.

(2) コヽデハ便利ノ爲メ,前章ノ最初ノ補間公式(にうとんノ公式)ヲ用ヒテ説明スルコトニシタガ,ソノ論法ハ他ノ補間公式ニ就テモ同様デアル.

$$f(x_0),\ f(x_1),\ \ldots\ldots,\ f(x_i),\ \ldots\ldots,\ f(x_n)$$

トスル. 次ニ此等ノ諸點ニ於テ, $f(x)$ ト等シイ値ヲ有スル n 次ノ有理整函數 $g(x)$ ヲ考ヘル. 卽チ

$$f(x_i)=g(x_i) \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

(斯樣ナ n 次式ハ唯一ツ確定スルコト明カデアル).

今吾々ハ函數 $f(x)$ ノ代リニ,有理整函數 $g(x)$ ヲ用ヒルコトトスル. ソシテ點 $x_0,\ x_1,\ \ldots\ldots,\ x_n$ ニ於テ與ヘラレタ値カラ他ノ點 x ニ對スル $f(x)$ ノ値ヲ計算セントスルニ,ソノ代リニ,ソノ點ニ於ケル $g(x)$ ノ値ヲ補間公式ニヨツテ求メ,斯樣ニシテ得タ値ヲ以テ $f(x)$ ノ値ナリト見做サントスルノデアル.

補間公式トシテハ,第四章ニ述ベタべっせる (I), すたーりんぐ (II) ノ公式ハ勿論,にうとんノ公式,其他公式 (i), (ii), (iii) 等ノ孰レモ,適宜ニ利用サレル.

例ヘバ $\log x_0$ 及ビ $\log x_1$ ノ値ヲ知ツテ, $\log x$ (但シ $x_0<x<x_1$) ノ値ヲ求メルトキ,吾々ハ通例比例部分ノ理論ヲ適用スル. ソレハ $\log x$ ノ値ヲ

$$\log x_0+\frac{\log x_1\ \ \log x_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

ニ等シイト見做スノデアル. 然ルニ此式ハ x ニ就テ一次ノ有理整函數デ,之ヲ $g(x)$ トスレバ,

$$n=1,\quad g(x_0)=\log x_0,\quad g(x_1)=\log x_1$$

ナルコト明カデアル. 卽チ對數計算ニ於テ比例部分ノ理論ヲ用ヒルコトハ,最モ簡單ナ補間法ノ一ツニ外ナラナイ.

2. 補間ノ誤差ノ程度

サテ $f(x)$ ヲ $g(x)$ デ置キ換ヘタ爲メニ生ズル誤差ヲ $\mathrm{R}(x)$ トセバ,

$$\mathrm{R}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_n)$$

ナルコトガ知ラレル.[1] 但シ ξ ハ $x_0,\ x_1,\ \ldots\ldots,\ x_n$ 及ビ x ノ間ニアル或ル値デアリ,又 $f^{(n+1)}(x)$ ハ $f(x)$ ノ第 $n+1$ 次ノ導函數デアル.

例ヘバ $n=1$ ナル時,卽チ一次的補間法ヲ用フル場合ニハ,誤差ハ

$$\mathrm{R}(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1)$$

トナル. 之ヨリ容易ニ

---

(1) コレヲ證明シヨウ. $\mathrm{R}(x)=f(x)-g(x)$. シカルニ $g(x_i)=f(x_i)$, $(i=0,1,2,\ldots,n)$ ナル故, $\mathrm{R}(x)$ ハ總テノ點 x_i ニ於テ零トナル. 由テ

$$\mathrm{R}(x)=\mathrm{F}(x).(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_n) \qquad (1)$$

トオキ,函數 $\mathrm{F}(x)$ ノ形ヲ求メヨウ. ソノ爲メニ今

$$\Phi(z)=f(z)-g(z)-\mathrm{F}(x)(z-x_0)(z-x_1)\ldots\ldots(z-x_n) \qquad (2)$$

ナル函數 $\Phi(z)$ ヲ考ヘルト, ソレハ $n+2$ 個ノ點 $z=x_0,\ z=x_1,\ \ldots\ldots,\ z=x_n,\ z=x$ ニ於テ零トナル. 由テ微分學ニ於ケルろーるノ定理ニヨツテ, 第一次導函數 $\Phi'(z)$ ハ, $\Phi(z)$ ノ相隣ル二根ノ間ニ少ナクトモ一ツノ根ヲ有スル. 從テ $\Phi'(z)$ ハ, 上ノ $n+2$ 個ノ根ノ間ニ,少ナクトモ $n+1$ 個ノ根ヲ有スル. 同樣ニ, $\Phi''(z)$ ハ, $\Phi'(z)$ ノ $n+1$ 個ノ根ノ間ニ, 少ナクトモ n 個ノ根ヲ有スル. 從テ $\Phi''(z)$ ハ, $\Phi(z)$ ノ $n+2$ 個ノ根ノ間ニ, 少ナクトモ n 個ノ根ヲ有スル. コノ論法ヲ繰リ返セバ $\Phi^{(n+1)}(z)$ ハ $\Phi(z)$ ノ $n+2$ 個ノ根ノ間ニ少ナクトモ一ツノ根ヲ有スルコトニナル. コノ根ヲ ξ ト名ヅケレバ, $\Phi^{(n+1)}(\xi)=0$.

シカルニ $g(z)$ ハ n 次多項式ナル故, 恒等的ニ $g^{(n+1)}(z)=0$.

又 $$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}[(z-x_0)(z-x_1)\ldots\ldots(z-x_n)]=\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}(z^{n+1}+\mathrm{A}z^n+\ldots\ldots)=(n+1)$$

故ニ (2) 式ヲ z ニツキテ $n+1$ 回微分シタ後ニ, $z=\xi$ トオケバ

$$\Phi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-\mathrm{F}(x).(n+1)!=0.$$

コレヨリ $$\mathrm{F}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

ヲ得ル. 之ヲ (1) ニ代入スレバ, 本文ノ結果トナル.

$$|\mathrm{R}(x)| \leqq \frac{|f''(\xi)|}{8}\delta^2 \qquad (\text{但シ}\ \delta = x_1 - x_0,\ x_0 < \xi < x_1)$$

ヲ得ル.(1) 對數計算ノ場合ノ實例ニ就テハ, 第一章第一節ノ脚註ヲ見ルガ宜シイ.

一般ノ場合ニ, 與ヘラレタ諸點ノ(等シイ)間隔 Δx ヲ δ デ表ハセバ, 誤差ノ絶對値ハ

$$|f^{(n+1)}(\xi)\cdot\delta^{n+1}|$$

ヨリモ小サイ.(2)

例ヘバ, 次ノ表カラすたーりんぐノ公式ヲ用ヒテ $\log 3.31$ ヲ計算シヨウ.

x	$\log x$	Δ	Δ^2
3.2	0.50514998		
		1336396	
3.3	0.51851394		−39898
		1296498	
3.4	0.53147892		

コノ場合ニハ

$$n = 2,\quad x_0 = 3.3,\quad x = 3.31,$$

$$\Delta x = \delta = 0.1,$$

$$u = \frac{3.31 - 3.3}{0.1} = 0.1.$$

ナル故, 補間公式カラ

$$\log 3.31 = \log 3.3 + \frac{0.01336396 + 0.01296498}{2}\cdot(0.1) - 0.00039898\cdot\frac{(0.1)^2}{2!}$$

$$= 0.51851394 + 0.001316447 - 0.000001995 = 0.51982839.$$

(實際七桁迄正シイ値ハ $\log 3.31 = 0.5198280$ デアルカラ, 誤差ハ 4×10^{-7} デアル). 讀者若シ七桁迄正シイ値ヲ得ントセバ, Δ^3 ノ項マデ取ルヲ要スルヲ見ルデアラウ.

---

(1) 何トナレバ, x ガ x_0 ト x_1 トノ間ニアルトキハ, $(x-x_0)(x-x_1)$ ハ負數トナリ, ソノ極小ハ $x = \frac{x_0+x_1}{2}$ ナルトキニ起リ, ソノ値ハ $-\frac{1}{4}(x_1-x_0)^2$ デアル. 從テ $x_0<x<x_1$ ニ於ケル $|(x-x_0)(x-x_1)|$ ノ極大値ハ $\frac{1}{4}(x_1-x_0)^2$ 即チ $\frac{1}{4}\delta^2$ デアル. 由テ

$$|\mathrm{R}(x)| \leqq \frac{|f''(\xi)|}{2!}|(x-x_0)(x-x_1)| \leqq \frac{|f''(\xi)|}{8}\delta^2.$$

(2) 何トナレバ, 若シ x ガ x_0 ト x_1 トノ間ニアレバ,

$$|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)| < \delta.\delta.2\delta.3\delta\ldots n\delta < (n+1)!\,\delta^{n+1},$$

マタ若シ x ガ x_1 ト x_2 トノ間ニアレバ

$$|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)| < 2\delta.\delta.\delta.2\delta.3\delta\ldots(n-1)\delta < (n+1)!\,\delta^{n+1},$$

其他ノ場合ニ就イテモ同様ニ $|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|$ ハ恒ニ $(n+1)!\,\delta^{n+1}$ ヲ超ヘルコトガ無イカラデアル.

シカルニ $f(x) = \log x$ カラ $f'''(x) = \frac{2\times0.43429}{x^3}$.

由テ $$f'''(\xi).\delta^3 = \frac{2\times0.43429}{\xi^3}\times(0.1)^3 \qquad (3.2<\xi<3.3)$$

コノ値ハ大凡 0.000024 附近ニ止マルカラ, 誤差ヨリモ小サイ.

次ニ, 一般ニ, 第 n 次ノ階差 $\Delta^n f(x)$ ハ $f^{(n)}(x)\delta^n$ ト同ジ階級ノ大イサデアル.(1)

例ヘバ上ノ例ニ示シタ階差表カラ,

$$\Delta^2 \log 3.3 = -0.000399.$$

然ルニコノ場合ニハ

$$\delta = 0.1,\quad n = 2,\quad f(x) = \log x,\quad f''(x) = -\frac{0.43429}{x^2}$$

ナル故 $$f''(3.3).\delta^2 = -\frac{0.43429}{(3.3)^2}\times(0.1)^2 = -0.000398.$$

以上ノ二ツノ事柄ヲ結ビ付ケテ考ヘレバ,(2) 吾々ハ次ノ結論ニ到達スル.

一般函數ノ補間ノ誤差ヲ評價スルニモ, 階差ヲ利用

---

(1) コノ事實ガ成立ツ爲メニハ, 間隔 δ ガ充分ニ小サク, 且ツ函數 $f(x)$ ガ或ル條件ヲ滿足スルヲ要スル.

實際, 微分學ニ於ケル平均値ノ定理ニヨレバ, 階差 Δx ト導函數 $f'(x)$ トノ間ニハ

$$\Delta f(x) = f(x+\delta) - f(x)$$

$$= \delta f'(x) + \frac{\delta^2}{2!}f''(\xi) \qquad (x<\xi<x+\delta)$$

ナル關係アルカラ, $\Delta f(x)$ ト $\delta f'(x)$ トノ差(絶對値)ハ $\frac{\delta^2}{2}|f''(\xi)|$ ヲ超エナイノデアル. 更ニ一般ニ

$$\Delta^n f(x) = \delta^n f^{(n)}(x) + \frac{n}{2!}\delta^{n+1}f^{(n+1)}(\eta) \qquad (x<\eta<x+n\delta)$$

ナルコトガ證明サレル.

實際問題ニ於テ補間法ヲ適用スル場合ニハ, 上ノ式デ右邊ノ第二項ガ第一項 $\delta^n f^{(n)}(x)$ ニ比シテ, (ソノ絶對値ニ於テ) 甚ダ小ナルコトガ普通デアルカラ, 本文ノ如ク結論シテモ, 實際問題ニ就テハ大過ナイト思ハレル.

(2) $\Delta^{n+1}f(x)$ ノ大サノ階級ハ $|f^{(n+1)}(x)\delta^{n+1}|$ デアツテ, 後者ハホボ $n+1$ 個ノ點ヲ與ヘテ補間スル時ノ誤差ヲ超ヘナイ値デアル. 故ニ補間ノ誤差ヲ評價スルニ, 直ニ階差 $\Delta^{n+1}f(x)$ ノ大サヲ以テシテモ宜シイ. ケレドモソレデハ一般ニ誤差ノ評價ガ餘リ大キクナリ過ギルカラ, 本文ノ樣ニスルノデアル.

スルコトガ出來ル. 卽チ前章ノ補間公式ニヨリテ計算ヲ進行スルトキ,省略シタ最初ノ階差ノ影響スル程度ヲ見テ,大凡補間ノ誤差ヲ測ルコトガ出來ル.

例ヘバ,上ノ例ニ示シタ表ニヨレバ,第二階差 Δ^2 ヲ省略シテ起ル影響ハ 0.000002 デアルカラ,すたーりんぐノ公式ニヨツテ,第二項マデ採ツタ近似値ノ誤差ハ,大凡 0.000002 ノ程度デアルコトガ豫想サレル. 實際コノ計算ニヨルト

$$\log 3.31 = \log 3.3 + 0.0131644 \times (0.1) = 0.5198304$$

ヲ得ルカラ, $\log 3.31$ ノ眞ノ値 0.5198280 ニ比シテ, 0.0000024 ナル誤差ガアツテ,吾々ノ豫想ヲ裏切ラナイノデアル. 由テ上例デ小數五桁迄正シイ値ヲ求メルニハ, Δ^2 ヲ省略シテ宜シイ.

3. 補間ニ就テノ注意

ソレ故ニ補間法ニヨル誤差ハ,間隔 δ ヲ小サク採ルコトニヨリ,又使用スベキ階差ノ次數 n ヲ高メルコトニヨツテ,之ヲ益々小サクスルコトガ出來ル.

之ヨリ實際問題トシテ起ル,二ツノ場合ヲ考ヘヨウ.

(I) $f(x)$ ガ解析的ニ表示セラレルカ,何等カノ法則デ, x ノ或領域內デハ,ソノ內ノ任意ノ點ノ $f(x)$ ノ値ガ如何程デモ正確ニ求メ得ル場合.

コノ場合ニハ直接ニ $f(x)$ ノ値ヲ求メルガ最モ普通ナ方法デアル. 然シ,斯ル場合デモ, $f(x)$ ノ値ヲ直接ニ求メル計算ガ甚ダ煩雜ナ時ハ,主要ノ諸點デハ直接ニ求メルガ,其他ノ點デハソノ近似的方法トシテ矢張リ

前述ノ如ク補間公式ヲ利用スルガ得策デアル. コノ時ニハ間隔 $\delta = \Delta x$ ハ思フ樣ニ選ビ得ラレル.

特ニ積分ハ公式 (I_a), (II_a) ヲ利用スルガ有効,便宜ナ場合ガ甚ダ多イ. 但シ微分ダケハ,此場合ニハ, $f(x)$ ニ就イテ直接ニ求メルノガ得策デアル.

(II) 函數 $f(x)$ ノ解析的表示ガ不明ナバカリデハナク,之ヲ決定スル法則モ不明又ハ不正確デ,結局唯 x ノ若干ノ諸點ニ於ケル函數値ノミガ與ヘラレル場合,或ハ求メ得ル場合. (例ヘバ實驗ニヨリ自然現象間ノ法則ヲ定メントスル如キハ,此種ノ場合デアル. 但シ今ハ簡單ノタメ, $f(x)$ ノ値ヲ知ル諸點ハ等間隔ニ排列スルモノトスル).

コノ場合ニハ全然本節ノ初メニ述ベタ方法デ補間法ヲ行フヲ常トスルガ,之ハ「自然現象ハ飛躍セズ」トノ假定ヲ設ケ,變域サヘ十分ニ小サイナラバ,此種ノ實驗函數ハ有理整函數デ近似的ニ評價シ得ルモノトシテ,之ヲ取扱フノデアル.

コノ場合ニハ間隔 Δx ハ初メカラ與ヘラレテアルカラ,近似度ヲ高メル爲メニハ,高次ノ階差ヲ取ルヨリ外ハナイ.

唯玆ニ注意スベキコトハ,階差表ヲ利用シテ補間法ヲ行フニハ,與ヘラレタ函數ノ値ガ何レモ,少ナクトモ許サレタル限界以上デハ,正確デナケレバナラヌコト

デアル．

若シ此等ノ値ニ實驗或ハソノ他ノ理由デ不正確ナモノガ有ツタトスルト，精密度ヲ高メントシテ，高級ノ階差ヲ使用シテモ無効ニ終ルコトガアルカラ．例ヲ以テ説明ショウ．

例ヘバ自然界ノ或觀測デ眞ノ大サハ0デアルモノニ對シテ實驗値トシテ，唯一回0ト異ナル値 ε (ε ハ相當ニ小ナルモ差支ナイ)ヲ得タト假定ショウ．階差表ヲ作ルト左ノ如クナル．

	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
0	0	0	0	0	0	$+\varepsilon$
0	0	0	0	$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	-6ε
0	0	$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	-4ε	-5ε	$+15\varepsilon$
0	$+\varepsilon$	-2ε	-3ε	$+6\varepsilon$	$+10\varepsilon$	-20ε
0	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+3\varepsilon$	-4ε	-10ε	$+15\varepsilon$
ε	0	0	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+5\varepsilon$	-6ε
0	0	0	0	0	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$
0						
0						
0						

斯クノ如ク觀測ノ誤差ハ階差ノ次數ヲ高メレバ高メル程大キクナツテ，觀測誤差ガ近似値ヲ支配スルコトニナリ，無意味ノ値ヲ與ヘル樣ニ成ル．

尤モ此ノ點ハ，階差表ノ作製中，特種ノ現象トシテ顯ハレテ來ル．多クノ函數デハ數値ノ變化ハ階差ノ次數ヲ高メル程，規則正シクナルモノデアルガ(有理整函數ナラバ遂ニハ階差ハ一定トナル)，コノ種ノ誤差ガ最初ノ値ニアル時ハ階差ノ次數ヲ高メルニツレ，同一行間，又ハ相隣レル行間ノ値ニ變化ノ不規則性ガ著シク現ハレテ來ル．此現象ガ顯レタ後ハ，ソレ以上計算ヲ繼續スルコトハ無意味デアルカラ，計算ヲ止メテヨイ．

最後ニ，公式 (II) カラ來タ微分ノ近似公式ヲ用ヒタ時ハ，$f(x)$ ノ近似値トシテ誤差ノ小サイコトハ何ノ意味モナイ．ソノ故ハ $|f(x)-g(x)|$ ノ小サイコトハ，$f(x)$ ニ對シテハ近似式ノ精密ヲ意味スルガ，$\dfrac{df(x)}{dx}$ ニ對シテハ，ソノ誤差測定トハナラヌカラデアル．

問　　題

1. 次ノ表カラ $\sin 17°20'$ ヲ計算セヨ(小數四桁迄正シク)．

$\sin 15° = 0.2588$
$\sin 16° = 0.2756$
$\sin 17° = 0.2924$
$\sin 18° = 0.3090$
$\sin 19° = 0.3256$
$\sin 20° = 0.3420$

2. $\log_{10}\cosh 0.3635$ (小數七桁迄)及ビ $\log_{10}\cosh 0.361$ ヲ求ム．

x	$\log_{10}\cosh x$
0.360	0.0275546
0.362	278552
0.364	281574
0.366	284611
0.368	287662

3. 立方根ノ表ヲ用ヒテ $\sqrt[3]{612.25}$ ヲ求ム．

x	立方根
611	8.4856
612	8.4902
613	8.4948
614	8.4994
615	8.5040

4. 次ノ實測ノ結果カラ溫度15.5ナリシ時刻ヲ求メヨ．

時(分)	溫　度(度)
10.85	18.9
19.30	16.9
28.80	14.9
40.10	12.9
53.75	10.9

5. 問題1ノ表ニ於テ，$n=1$, $n=2$ ノ各ニ就イテ

$$\Delta^n \sin x \text{ ト } \delta^n \cdot \frac{d^n}{dx^n}(\sin x),\quad R(x) \text{ ト } \left|\delta^n \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(\sin x)\right|$$

トヲ比較セヨ．($\cos x$ ノ表ヲ要スル)．

第二節　數値計算ニヨル微分法, 積分法

1.　前章デ $g(x)$ ガ有理整函數ナラ, $g(x)$ ノ $x=x_0$ (卽チ $u=0$) ナル點ニ於ケル微係數ハ,

$$\left(\frac{dg}{du}\right)_{u=0}=\frac{\Delta^1{}_{-1}+\Delta^1{}_0}{2}+\frac{\Delta^3{}_{-2}+\Delta^3{}_{-1}}{2}\cdot\frac{(-1)(+1)}{3!}$$

$$+\frac{\Delta^5{}_{-3}+\Delta^5{}_{-2}}{2}\cdot\frac{(-1)(+1)(-2)(+2)}{5!}+\ldots\ldots$$

$$=\frac{\Delta^1{}_{-1}+\Delta^1{}_0}{2}-\frac{\Delta^3{}_{-2}+\Delta^3{}_{-1}}{2}\times 0.166\ldots\ldots$$

$$+\frac{\Delta^5{}_{-3}+\Delta^5{}_{-2}}{2}\times 0.0333\ldots\ldots+\ldots\ldots$$

デ與ヘラレルコトヲ見タ.

任意ノ函數,特ニ實驗函數 $f(x)$ ノ $x=x_0$, (又ハ $u=0$) ナル點ノ微係數モ, $f(x)$ ヲ之ニ代用シ得ベキ有理整函數 $g(x)$ デ置換シタモノト見做シ,近似的ニ

$$\left(\frac{df(x)}{du}\right)_{u=0}=\frac{\Delta^1{}_{-1}+\Delta^1{}_0}{2}-\frac{\Delta^3{}_{-2}+\Delta^3{}_{-1}}{2}\times 0.166\ldots+\ldots\ldots$$

(但シ單位ハ $x_{k+1}-x_k=\Delta x$) トシテ求メルコトガアル.

コノ方法ヲ**數値計算ニヨル微分法**ト云フ.

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3
1.01	1.030			
		31		
1.02	1.061		1	
		32		−1
1.03	1.093		0	
		32		1
1.04	1.125		1	
		33		
1.05	1.158			

然シ此方法ハ,實驗函數 $f(x)$ ガ凹凸激シイ時ニハ,一般ニ大ナル誤差ヲ與ヘルカラ,後ニ第八章第一節ニ於テ,モット良イ方法ヲ述ベル,又ハ平滑ニシタ後デ(第八章第二節),微分スルガヨイ.

例ヘバ前ノ表カラ, $x=1.03$ ニ於ケル $f(x)$ ノ微係數ヲ求メルニハ,

$$x_0=1.03,\quad \Delta x=0.01,\quad u=\frac{x-1.03}{0.01},$$

$$\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0}=\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{0.032+0.032}{2}-\frac{-1+1}{2}\times 0.166\right]$$

$$=\frac{0.032}{0.01}=3.2.$$

2.　$f(x)$ ノ値ガ等間隔 ($=\Delta x$) ニ與ヘラレタトキ,積分

$$\mathrm{F}(x)=\int_{x_0}^{x}f(x)dx+\mathrm{F}_0\qquad 但シ\quad \mathrm{F}_0=\mathrm{F}(x_0)$$

ヲ求メルノニ,前章ノ有理整函數 $g(x)$ ニ就イテ得タ積分公式ヲ,近似的ニ利用スルコトガアル. コノ方法ヲ**數値計算ニヨル積分法**ト云フ.

今公式 (I_a) ノ利用ニ就イテ詳説ショウ. $f(x)$ ノ既知ノ値ヲ利用シテ,先ヅ必要ナ階差表ヲ作リ,公式ニヨツテ

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)dx=\Delta x\left\{f(x_k)+\frac{\Delta^1{}_k}{2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{\Delta^2{}_k+\Delta^2{}_{k-1}}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{11}{720}\cdot\frac{\Delta^4{}_{k-1}+\Delta^4{}_{k-2}}{2}-\ldots\ldots\right\}.$$

$$\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}}f(x)dx=\Delta x\left\{f(x_{k+1})+\frac{\Delta^1{}_{k+1}}{2}-\ldots\ldots\right\},$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

ト各部分ノ積分ヲ求メ,之ヲ表デ $f(x)$ ノ與ヘラレタ諸値ノ然ルベキ間ヲ過ギル線上ニ列記シ,此等ノ數値ノ和ト F_0 トノ和トヲ求メル. ソノ最後ノ和ガ所要ノ積分函數ノ値デアル.

公式 (I_a) ノ代リニ,公式 (II_a) ヲ用ヒテモ同様デアル. 唯コノ場合ニハ,部分ノ積分ノ積分領域ガ Δx ノ代リニ, $2\Delta x$ トナル違ヒアルノミデアル. 即チ

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x)dx, \quad \int_{x_{k+1}}^{x_{k+3}} f(x)dx, \quad \ldots.$$

ヲ求メテ加ヘレバヨイ. コノ方ハ前ノ方法ヨリモ,一般ニ手數ハ簡單デアルガ,間隔ガ2倍トナツテ結果ガ不精密ニナル缺點ガ伴ウ.

コノ方法デ求メタ結果ノ誤差ヲ求メルニハ,各部分ノ積分ノ誤差ヲ評價シテ,ソノ結果ノ和ヲ求メレバ宜シイ.

コノ理論ト方法トヲ具體的ニ示ス爲メ,

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \log_e x$$

ヲ此ノ方法デ計上シテ,解析的理論ノ結果デアル自然對數 $\log_e x$ ノ値ト,ソノ結果ヲ比較シヨウ.

$$x = 0.9, \ 1.0, \ \ldots., \ 1.9, \ 2.0, \ 2.1$$

ノ時,

$$\frac{1}{x} = 1.111\,111, \ 1.000\,000, \ \ldots., \ 0.476195$$

ナルコトヲ利用シテ,先ヅ階差表ヲ作ルト,次ノ表ノ第三,四,五,六行ノ諸ノ値ガ得ラレル.

次ニ各部分ノ積分ノ求メ方ノ一例ヲ説明スルト,公式 (II_a) カラ

$$\int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} f(x)dx = 2\Delta x\left\{g(x_0)+\frac{\Delta^2{}_{-1}}{6}-\frac{\Delta^4{}_{-2}}{180}+\ldots..\right\}.$$

然ルニ $x_0=1.1$ ト採レバ, $f(x_0)=0.909091$, $2\Delta x=0.2$.

$$\Delta^2{}_{-1}=0.015151, \quad 故ニ \quad \frac{1}{6}\Delta^2{}_{-1}=0.002525,$$

又 $\Delta^4{}_{-2}=0.001556.$ 故ニ $\frac{1}{180}\Delta^4{}_{-2}=0.000009.$

由テ
$$\int_1^{1.2}\frac{1}{x}\,dx = 0.2\times\{0.90909+0.002525-0.000009+\ldots.\}$$
$$=0.1823214\ldots.$$

他モ推シテ知ルコトガ出來ル.

x	$\frac{1}{x}$	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	部分積分	積分函數
0.9	1.111111						
		−0.111111					
1.0	1.000000		+0.020202				0.000000
		−0.090909		−0.005051			
1.1	0.909091		0.015151		+0.001556	0.1823214	
	2525						
	−9	−0.075758		−0.003495			
1.2	0.833333		0.011656		0.000996		0.1823214
		−0.064102		−0.002499			(214)
1.3	0.769231		0.009157		0.000668	0.1541506	
	1526						
	−4	−0.054945		−0.001831			
1.4	0.714286		0.007326		0.000457		0.3364720
		−0.047619		−0.001374			(721)
1.5	0.666667		0.005952		0.000324	0.1335314	
	992						
	−2	−0.041667		−0.001050			
1.6	0.625000		0.004902		0.000234		0.4700034
		−0.036765		−0.000816			(036)
1.7	0.588235		0.004086		0.000169	0.1177830	
	681						
	−1	−0.032679		−0.000647			
1.8	0.555556		0.003439		0.000132		0.5877864
		−0.029240		−0.000515			(867)
1.9	0.526316		0.002924		0.000102	0.1053604	
	487						
	−1	−0.026316		−0.000413			
2.0	0.500000		0.002511				0.6931468
		−0.023805					(472)
2.1	0.476195						

但シ $\frac{1}{x}$ ノ縦行内ノ諸値ノ直下ニ小活字デ記入シタ二行ノ數値ハ, $\frac{1}{6}\Delta^2{}_{-1}$ ト $-\frac{1}{180}\Delta^4{}_{-2}$ トノ値ヲ小數第六位迄取ツタ値デアル. 又最後ノ縦行即チ積分函數ノ欄デ括弧ヲ附ケタ小活字ノ數ハ, $\log_e x$ ノ値ヲ小數第七位迄取ツタ時ノ値ノ最後ノ三桁ノ數字デ,解析的ニ對數表カラ得タ $\log_e x$ ノ値ト近似法デ得タ値ヲ比較セシムル爲メニ,參考迄ニ記入シタモノデアル. コノ場合ニハ,小數第六位ニ至ツテ初メテ1以内ノ誤差ガアルコトガ知レル.

問 題

1. 函數 y ノ値ガ次表デ與ヘラレタトキ,

$$F = \int_7^x y\,dx$$

ノ値ヲ決定セヨ.

x	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y	31.3	29.0	27.2	25.6	24.3	23.2	22.2	21.3	20.6	19.8

2. 右ノ表カラ

$$\int_{20^\circ}^{29^\circ} \cos x\,dx$$

ヲ計算セヨ.

$\cos 20^\circ = 0.93969$　$\cos 28^\circ = 0.88295$
$\cos 22^\circ = 0.92718$　$\cos 30^\circ = 0.86603$
$\cos 24^\circ = 0.91355$　$\cos 32^\circ = 0.84805$
$\cos 26^\circ = 0.89879$

3. 次ノ表デ與ヘラレル函數ハ, $x = 1.3$ ノトキ微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$$

ヲ滿足スルコトヲ示セ.

x	y	x	y
1.0	0.765198	1.4	0.566855
1.1	0.719622	1.5	0.511828
1.2	0.671133	1.6	0.455402
1.3	0.620086		

第三節　階差ヲ含マナイ近似式[1]

積分又ハ微分ヲ近似的ニ計算スルトキ,函數ノ與ヘラレタ値ヲ直接ニ用ヒ,階差表ヲ利用シナイデ實行ス

[1] 此一節ハ原著第一版ニハナイ.

ルガ却ツテ便宜ナコトガアル. 斯ル場合ノ爲ニ,近似公式中ノ階差ヲ元ノ函數値デ顯ハシ,初ノ若干項ダケ取ツタ算式ヲ近似公式トスルコトガアル.

1. 例ヘバ

$$\left(\frac{dg(x)}{du}\right)_{u=0} = \frac{\Delta^1{}_{-1}+\Delta^1{}_0}{2} - \frac{\Delta^3{}_{-2}+\Delta^3{}_{-1}}{2}\times 0.166\ldots\ldots+\ldots\ldots$$

ニ於テ,第二項以下ヲ省畧シテモ可ナル程度ノ精密サヲ要求セラレタナラバ,

$$\left(\frac{dg(x)}{du}\right)_{u=0} = \frac{\Delta^1{}_{-1}+\Delta^1{}_0}{2}.$$

然ルニ　$\Delta^1{}_{-1} = \Delta^{(1)}g(x_{-1})$

$$= g(x_0) - g(x-\Delta x) = y_0 - y_{-1},$$

$$\Delta^1{}_0 = \Delta^{(1)}g(x_0) = y_1 - y_0$$

ナル故

$$\left(\frac{dg(x)}{du}\right)_{u=0} = \left[\frac{dg(x)}{du}\right]_{x=x_0} = \frac{y_1-y_0+(y_0-y_{-1})}{2} = \frac{y_1-y_{-1}}{2}.$$

從ツテ　$\left(\dfrac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0} = \dfrac{1}{\Delta x}\left(\dfrac{dg(x)}{du}\right)_{x=x_0} = \dfrac{y_1-y_{-1}}{2.\Delta x}.$

一般ニ　$x = x_n$ ノ點デハ

$$\left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_n} = \frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2.\Delta x}$$

トナル. コレ階差ヲ含マナイ近似算式ノ一例デ,實驗函數ノ微係數ヲ求メル近似法トシテ用ヒラレル.[1]

[1] $\Delta x = \delta$ ガ極メテ小ナラバ, 其ノ誤差ハ大凡 $\frac{1}{6}\delta^2 g'''(x_n)$ デ評價サレル.

例ヘバ　$x=-0.6,\ -0.4,\ \ldots\ldots,\ 1.0$ ナル時,函數値 y ハ

$y=28.2,\ 29.4,\ \ldots\ldots,\ 15.0$ [次ノ表ノ第一,二行ノ樣ニ]

ナル場合, $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ前記ノ公式デ求メルト,第四行ヲ得ル.

x	y	$y_{n+1}-y_{n-1}$	$\dfrac{dy}{dx}$
−0.6	28.2		
−0.4	29.4	+1.8	+4.5
−0.2	30.0	+0.0	+0.0
0.0	29.4	−1.8	−4.5
0.2	28.2	−3.3	−8.3
0.4	26.1	−5.1	−12.8
0.6	23.1	−6.9	−17.2
0.8	19.2	−8.1	−20.2
1.0	15.0		

但シ $2\Delta x=0.4$ デアルカラ,第四行ハ第三行ノ對應値ヲ 0.4 デ割ツテ得タモノデアル.

若シ函數値ノ凹凸ガ激シイ時ハ,函數ヲ平滑ニ(第八章第二節)シテカラ,此方法ヲ行フガヨイ.

猶ホ精密ナ微分法ニ就テハ,第八章第一節ヲ見ルガ宜シイ.

2. 次ニ公式 (I_a)

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} g(x)dx=\Delta x\left\{g(x_0)+\frac{\Delta^1{}_0}{2}-\frac{\Delta^2{}_0+\Delta^2{}_{-1}}{24}+\cdots\cdots\right\}$$

ニ於テ $\Delta x=\delta$ ト置キ,括弧内デ第三項迄取ツテ變形シ,積分ノ區域ヲ $(x_k,\ x_{k+1})$ トスルト,

公式 (I'_a)

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y\,dx=\delta.\left\{(y_k+y_{k+1}).\frac{13}{24}-(y_{k-1}+y_{k+2}).\frac{1}{24}\right\}$$

ヲ得ル. 之ガ階差ヲ用ヒズニ,部分的ニ積分函數

$$\eta=\int_{x_1}^{x} y\,dx$$

ヲ近似的ニ求メル算式デアル.

例ヘバ　x ガ

$$x_0=3.6,\quad x_1=3.7,\quad \ldots\ldots,\quad x_8=4.4$$

ノ時,函數 y ノ値ガ夫夫

$$y_0=3.420,\quad y_1=5.000,\quad \ldots\ldots,\quad y_8=9.848$$

(次ノ表ノ第二,第三行ノ樣ニ)ナル場合

$$\eta=\int_{3.7}^{x} y\,dx$$

ノ値ヲ前記ノ公式デ求メルト,

(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
k	x_k	y_k	y_k+y_{k+1}	$y_{k-1}+y_{k+2}$	$(3).\frac{13}{24}\delta$	$(4).\frac{\delta}{24}$	$\eta=\int_{3.7}^{x} y\,dx$	第一近似値
0	3.6	3.420						
1	3.7	5.000					0.000	0.000
			11.428	11.80	0.619	0.046	573	571
2	3.8	6.428					0.573	0.571
			14.088	13.66	0.763	0.057	706	704
3	3.9	7.660					1.279	1.275
			16.320	15.83	0.884	0.066	818	816
4	4.0	8.660					2.097	2.091
			18.057	17.51	0.978	0.073	906	903
5	4.1	9.397					3.002	2.994
			19.245	18.66	1.043	0.078	965	962
6	4.2	9.848					3.967	3.956
			19.848	19.24	1.075	0.080	995	992
7	4.3	10.000					4.962	4.948
8	4.4	9.848						

但シ $\delta=0.1$ デ,第 (3) 行ハ $y_k+y_{k+1}\ (k=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ 6)$ ノ値,第 (4) 行ハ $y_{k-1}+y_{k+2}\ (k=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ 6)$ ノ値デアル. マタ第 (5) 行ハ $\frac{13}{24}\delta(y_k+y_{k+1})$ ノ値,第 (6) 行ハ, $\frac{\delta}{24}(y_{k-1}+y_{k+2})$ ノ値デアル.

例ヘバ, $k=1$ ノ場合デハ

$$y_1+y_2=5.000+6.428=11.428$$

$$y_0+y_3=3.420+7.660=11.08$$

故ニ

$$\frac{13}{24}\delta(y_k+y_{k+1})=\frac{13}{24}\times0.1\times11.428=0.619$$

ノ如シ. 斯クスルト $\eta=\int_{3.7}^{x} y\,dx$ ノ各部分ノ積分値ハ (5), (6) 二行ノ對應値ノ差トシテ與ヘラレル. 第 (7) 行デ,小文字デ示シタ値ガ,此

差デ,大文字デ示シタモノハ,ソノ位迄デノηノ値デアル.

猶ホ公式 (I_a) デ括弧内ノ第三項ヲモ省クト

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} g(x)dx = \Delta x\left\{g(x_0) + \frac{\Delta^1{}_0}{2}\right\}$$

トナリ,階差ヲ除クト

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} ydx = \frac{\delta}{2}(y_k + y_{k+1})$$

トナル.

上ノ表ノ第(8)行ノ第一近似値トハ,ηノ値ヲコノ最後ノ近似公式デ計算シタ値デ,之レノミヲ求メルノナラ, (0), (1), (2), (3), (8) ノ五行ノミデ十分デアル.

同樣ノ手續ヲ近似積分公式 (II_a) ニ適用スルト

公式 (II'_a) $$\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} ydx = \frac{\delta}{3}\cdot\{y_{k-1} + 4y_k + y_{k+1}\}$$

トナル. コノ方ハ積分領域ハ (x_{k-1}, x_{k+1}) デ, 2δ ノ幅ヲ有シ,計算ソノモノハ公式 (I_a') ヲ用フルヨリモ簡單デアル.

今公式 (II_a') ヲ利用シテ前記ノ例ヲ取扱ウト,次頁ノ表ノ如クデアル. 但(2)ノ行ノ小文字ノ値ハ,(3)ノ行ノ値(和)ヲ求メルニ便宜ナヨウ,$4y_k$ ノ値ヲ求メテ記入シタモノデアル. 例ヘバ $k=2$ ノ時ハ

$$4y_k = 4y_2 = 6.428 \times 4 = 25.712.$$

故ニ $$y_1 + 4y_2 + y_3 = 5.000 + 25.712 + 7.660 = 38.372.$$

又 $$\eta = \int_{3.7}^{3.9} ydx = \frac{0.1}{3} \times 38.372 = 1.279$$

トナル.

(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
k	x_k	y_k	$y_{k-1}+4y_k+y_{k+1}$	$\eta=\int_{3.7}^{x} ydx$	第一近似値
1	3.7	5.000		0.000	0.000
				1.279	1.286
2	3.8	6.428	38.372		
		25.712			
3	3.9	7.660		1.279	1.286
				1.723	1.732
4	4.0	8.660	51.697		
		34.640			
5	4.1	9.397		3.002	3.018
				1.960	1.970
6	4.2	9.848	58·789		
		39.392			
7	4.3	10.000		4.968	4.988

公式 (II_a') ヲ誘導スル時,公式 (II_a) ノ括弧内デ,第二項ヲ省畧スルト,公式 (II_a') ノ代リニ

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} ydx = 2\delta y_k$$

ガ得ラレル.

前記ノ表デ,第(5)行ノ第一近似値トハ,此公式デ $\int_{3.7}^{x} ydx$ ヲ求メタ値デアル. 兩者ノ結果ハ此例デハ小數第一位迄一致シテ居ル.

3. 次ニ公式 (I_a'), (II_a') ヲ適用シタ時ノ誤差ヲ考ヘヨウ. 先ヅ各部分ノ積分ノ誤差ヲ評價スル. 公式 (I_a') デ言ヘバ,誤差ヲ支配スル最高次ノ項ハ

$$\frac{11}{720}\delta\cdot\frac{\Delta^4{}_{k-1} + \Delta^4{}_{k-2}}{2} \qquad (1)$$

デアル. 故ニコノ値ヲ求メルト,誤差ノ大凡ノ限界ガ分ル. 然ルニ一般ニ[1]

$$\Delta^n{}_k = y_{n+k} - \binom{n}{1} y_{n+k-1} + \binom{n}{2} y_{n+k-2} - \cdots + (-1)^n y_k$$

デアルカラ,コノ式デ $n=4$ ト置イテ得ル結果ヲ (1) ニ代入スレバヨイ. 由テ領域 $(x_k,\ x_{k+1})$ デ積分スルニ,公式 ($\mathrm{I}_a{}'$) ヲ用ヒタトキノ誤差ノ限界ヲ f トスルト,大凡

$$f = \frac{11}{1440}\delta\{y_{k+3} - 3y_{k+2} + 2y_{k+1} + 2y_k - 3y_{k-1} + y_{k-2}\}$$

$$\left[\delta \text{ ガ極メテ小ナラバ}, f = \frac{11}{720}\delta^5 \cdot g''''(x_k) \text{ トナル}\right].$$

第 137 頁ノ例ニ於テ, $k=2, k=5$ ノ ‥ ノ f ノ値ヲ求メルト,大凡夫夫 10^{-5}, 1.4×10^{-5} トナル.

又 $x=4.3$ 迄ノ積分函數 η ノ値ハ部分積分 6 個ノ和デアルカラ,ソノ誤差ノ限界ハ 10^{-4} ナル階級ノ大サデ,此時得タ結果ハ大凡ソ小數第四位ニ於テ 1 丈ケノ誤差アル程度デ正確デアルコトガ分ル.

同様ニシテ, $(x_{k-1},\ x_{k+1})$ デ積分スルニ,公式 ($\mathrm{II}_a{}'$) ヲ用ヒタ時ノ誤差ノ限界ハ大凡ソ

$$f = 2\delta\frac{\Delta^4{}_{k-2}}{180} = \frac{\delta}{90}\{y_{k+2} - 4y_{k+1} + 6y_k - 4y_{k-1} + y_{k-2}\}$$

$$\left[\delta \text{ ガ極メテ小ナラバ}, f = \frac{1}{90}\delta^5 \cdot g''''(x_k) \text{ トナル}\right]$$

トシテ與ヘラレルコトガ分ル.

前頁ノ例デハ最後ノ積分値ハ凡ソ小數第四位ニ於テ 1 丈ケノ誤差アル程度デ正確デアル.

---

(1) コレハ階差ノ定義カラ容易ニ證明サレル. 即チ

$$\Delta^1{}_k = \Delta^1 y_k = y_{k+1} - y_k,$$

$$\Delta^2{}_k = \Delta^2 y_k = \Delta^1 y_{k+1} - \Delta^1 y_k = (y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k,$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

第六章

機械的積分法

實用解析ニ於テハ定積分 $\int_a^b f(x)dx$ ノ計算ガ屢屢必要デアル. 此ノ種ノ計算ハ, $f(x)$ ガ與ヘラレタル時ハ先ヅ積分函數 $\mathrm{F}(x) = \int f(x)dx$ ヲ計算スルノガ最モ普通ナ手續デアルガ,然シ $f(x)$ ノ性質ニヨツテハ積分函數 $\mathrm{F}(x)$ ヲ求メルコトガ甚ダ困難デアル. 時ニハ $\mathrm{F}(x)$ ヲ求メ得ナイモノモアル. 斯様ナ場合之ヲ如何様ニ取扱フベキカ.

前章ニ於ケル補間公式ニヨル近似法ハ,此ノ種ノ解決方案ノ一ツデアツタ. 本章ニ於テハ之ヲ別ノ方面カラ,攻究シテ見ヨウ.

定積分ノ限界 a, b ハ必ズシモ有限トハ限ラナイ. a, b ノ一方或ハ双方ガ無限大トナルコトモアル. 又 $f(x)$ ノ値モ無限大トナルコトモアル. 斯ル場合ニハ $\int_a^b f(x)dx$ ガ果シテ收斂スルヤ否ヤヲ先ヅ決定セネバナラヌ. 但シ此ノ種ノ收斂,發散論ハ,之ヲ一般ノ微積分學ニ讓リ,茲デハ何レモ積分ハ可能ナリトシテ取扱ヒ,唯ソノ計算法ノミヲ論ズルコトトスル.

$\int f(x)dx$ ヲ計算スル場合,何レガ最モ適切ナ方法デアルカノ答ハ,函數 $f(x)$ ノ性質ニヨツテ異ウ. 又要求セラレル結果ノ精密度ニモ關係スル.

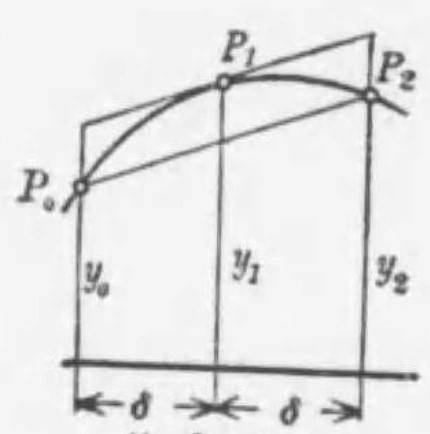
$f(x)$ ノ解析的表示ガ明カデアルカ,冪級數ナドデ與ヘラレ,大キナ面倒ヲ伴ウコトナク $\int_a^x f(x)dx$ ヲ計算出来ル時ハ,先ヅ不定積分 $\int_a^x f(x)dx$ ヲ求メルノガ一番ヨイ. 若シ $\int_a^x f(x)dx$ ガ計算ニ便宜ナ函數デ表ハシ得ナイ時ハ,前章ニ述ベタ數值計算ニヨル積分法ヲ用ヒテモ宜シイ. 即チ積分領域内ノ適當ナ諸點ニ於テ $f(x)$ ノ値ヲ求メ,此等ニ前章デ說イタ近似積分公式ヲ適用スルノデアル.

玆ニ說カントスル方法ハ,積分法デ $\int_a^b f(x)dx$ ノ解析的函數表示ヲ求メズニ,ソノ近似値ヲ**機械的方法**(函數 $f(x)$ ノ形ノ如何ニ係ラズ,常ニ機械的ニ計算スル方法ノ意味デ,必ズシモ機械ヲ用ヒル方法ノ意味デハナイ)デ簡易ニ求メル一般的方法デアル.

第一節 しんぷそんノ法則

1. $f(x)$ ノ値ハ等間隔ニ與ヘラレルモノトハ限ラナイガ,先ヅ最モ簡單ナ場合トシテ,$f(x)$ ノ値ハ等間隔ニ與ヘラレテ居ルモノトシテ論ジヨウ. 斯ル場合機械的積分法トシテ最モ便宜ナモノハ**しんぷそんノ方法**(Simpsonsche Regel) デアル.

$\int_a^b f(x)dx$ ノ積分領域 (a, b) ヲ偶數個ノ分域ニ等分シ,ソノ一分域ヲ δ トシ,兩端及ビ分點ニ於ケル $f(x)$ ノ値(卽チ曲線 $y=f(x)$ ノ此等ノ諸點ニ於ケル縱坐標)ヲ夫夫,左ヨリ右ヘ, y_0, y_1, y_2, ..., y_n トシ,此等縱坐標ノ頭(卽チ曲線上ニアツテ前述ノ分點ノ直上ノ諸點)ヲ夫夫 P_0, P_1, ..., P_n トスルト



第17圖

$$y_0=f(a),\quad y_1=f(a+\delta),\quad ....,\quad y_n=f(b)$$

トナル. 尙ホ $x=a$, b ヲ過ル兩縱線, X 軸及ビ $x=a$ カラ $x=b$ 迄ノ曲線 $y=f(x)$ トデ圍マレタ面積ハ

$$\int_a^b f(x)dx$$

ヲ測度トスル.

今 P_0 カラ P_2, P_2 カラ P_4 ヘト順次二ツ宛偶數番目ノ諸點ヲ線分(卽チ曲線ノ弦)デ結合スルト,何レモ 2δ ヲ高サトスル $\frac{n}{2}$ 個ノ梯形ガ得ラレ,各梯形ノ面積ハ夫夫

$$\delta(y_0+y_2),\quad \delta(y_2+y_4),\quad ....$$

デ與ヘラレルカラ,ソノ總面積ヲ S デ示スト

$$S=\delta\{y_0+2(y_2+y_4+....+y_{n-2})+y_n\}$$

トナル. 勿論面積 S ト $\int_a^b f(x)dx$ デ表ハサレル前述ノ曲面積トノ間ニハ若干ノ差ヲ有スルガ,δ ヲ十分ニ小サクスルコトニヨリ,ソノ差ハ如何程デモ小サクナルカラ,近似的ニ

$$\int_a^b f(x)dx=\delta\{y_0+2(y_2+y_4+....+y_{n-2})+y_n\}$$

ト置イテモ差支ヘナイ. 之ヲ**弦梯形公式**トイフ.

此ノ關係ハ又前章ノ第三節ニ於ケル近似積分公式

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y\,dx=\frac{\Delta x}{2}(y_k+y_{k+1})$$

カラモ得ラレル. 卽チ此ノ近似公式デ

$$\Delta x=2\delta;\quad k=0,\ 2,\ 4,\ ....$$

トシ,$k+1$ ノ代リニ $k+2=2,\ 4,\ 6,\ ....$ ト置イテ,逐逐加ヘレバ,前記ノ公式ガ得ラレル.

次ニ y_0, y_2 間ノ曲線 $y=f(x)$ ハ,δ ガ相當ニ小サイ時ハ,

多クノ場合, P_0, P_1, P_2 ヲ過リ軸ガ Y 軸ニ平行ナ抛線線トノ差ハ甚ダ小デアル. 故ニソノ分域ニ於テ $y=f(x)$ ナル曲線ノ代リニ,ソノ抛物線ノソノ分域内ノ部分ヲ以テ代用スルナラバ, [$y=f(x)$ ナル曲線ノ一部分ヲ前記ノ二次ノ抛物線ノ一部分デ代用スルコトガしんぷそんノ根本的思想デアル], 抛物線ノ性質トシテ點 P_1 (卽チ $x=a+\delta$ ナル點) ニ於ケル曲線ノ切線ハ弦 P_0P_2 ニ平行トナル.[1] 又 y_0, y_2 間ノ曲面積ハ點 P_1 ニ於ケル切線ト, X 軸ト, 縦坐標 y_0, y_2 トデ圍マレル梯形ノ面積ト大差ナイ (δ ガ小ナラバ). 此ノ梯形ノ面積ハ $2\delta y_1$ デ與ヘラレルガ,他ノ梯形,切線ニ關シテモ同樣ナ關係ガ成立スルカラ, $\int_a^b f(x)dx$ ノ他ノ近似公式トシテ

$$\int_v^b f(x)dx = 2\delta(y_1+y_3+y_5+\ldots\ldots+y_{n-1}) \equiv \mathrm{T}$$

ガ得ラレル. 之ヲ**切線梯形公式**トイフ.

---

(1) 此ノ種ノ抛物線ノ方程式ノ一般形ハ $y=a+bx+cx^2$ トナル. 今 Y 軸ガ P_0 ヲ過ルモノトシ,從ツテ本文ニ於ケル積分ノ下限 a ハ零ナリトスル. 抛物線ガ點 P_0, P_1, P_2 ヲ過ル條件カラ

$$y_0=a, \quad y_1=a+b\delta+c\delta^2, \quad y_2=a+2b\delta+4c\delta^2. \qquad (1)$$

此三方程式カラ未定係數 a, b, c ヲ定メルコトガ出來ル. 次ニ切線ノ方向ヲ考ヘル爲メ $\frac{dy}{dx}$ ヲ求メルト

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(a+bx+cx^2)}{dx} = b+2cx.$$

故ニ

$$y'_{x=} = b+2c\delta$$

ハ點 P_1 ニ於ケル切線ノ方向係數デアル. 然ルニ弦 P_0P_2 ノ方向係數ハ, 明カニ

$$\frac{y_2-y_0}{2\delta} = \frac{2b\delta+4c\delta^2}{2\delta} = b+2c\delta,$$

故ニ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_1} = \frac{y_2-y_0}{2\delta}$$

之 P_1 ニ於ケル切線ガ弦 P_0P_2 ト同一方向デアルコトヲ示スモノニ外ナラナイ.

更ニ弦 P_0P_2 ト曲線 P_0P_2 (但シ代用曲線デアル抛物線ノ一部分ヲ指ス)トデ圍マレル面積ハ,前述ノ兩梯形ノ差ナル部分(圖デハ平行四邊形ノ形ヲ有スル部分)ノ $\frac{2}{3}$ トナル[1]カラ, $f(x)$ ヲ抛物線デ代用シタ時ノ $\int_a^b f(x)dx$ ノ値ヲ N デ示スト,

$$\mathrm{N} = \mathrm{S}+\frac{2}{3}(\mathrm{T}-\mathrm{S})$$

トナル. コノ右邊ヘ前ニ得タ T, S ノ値ヲ代入シテ, 整頓スルト

$$\mathrm{N} = \frac{\delta}{3}\cdot(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\ldots\ldots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$$

トナル. 此ノ N ノ値ヲ以テ $\int_a^b f(x)dx$ ノ値デアルト見做スノガしんぷそんノ法則デアル.

コノしんぷそん公式ハ前章ノ近似公式 (II_a')

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} y\,dx = \frac{\delta}{3}\{y_{k-1}+4y_k+y_{k+1}\} \qquad (\text{但 } k=1, 3, \ldots\ldots, n-1)$$

ヲ逐逐加ヘテモ得ラレル.

但シ此ノ公式ヲ利用スル場合ニハ,與ヘラレタ(或ハ豫

---

(1) $$\mathrm{N} = \int_0^{2\delta}(a+bx+cx^2)dc = \left[ax+\frac{b}{2}x^2+\frac{c}{3}x^3\right]_0^{2\delta} = 2a\delta+2b\delta^2+\frac{8}{3}c\delta^3.$$

然ルニ T, S ナル面積ハ前脚註ノ (1) ナル關係ヲ利用スルト,

$$\mathrm{T} = 2\delta y_1 = 2a\delta+2b\delta^2+2c\delta^3,$$

$$\mathrm{S} = \delta(y_0+y_2) = 2a\delta+2b\delta^2+4c\delta^3,$$

故ニ

$$\frac{\mathrm{T}-\mathrm{S}}{\mathrm{N}-\mathrm{S}} = \frac{2c\delta^3}{\frac{4}{3}c\delta^3} = \frac{3}{2}.$$

由テ

$$2(\mathrm{T}-\mathrm{S}) = 3(\mathrm{N}-\mathrm{S}) \quad \text{卽チ} \quad \mathrm{N} = \mathrm{S}+\frac{2}{3}(\mathrm{T}-\mathrm{S}).$$

メ求メル)yノ値ハ奇數個デナケレバナラヌコトヲ忘レテハナラヌ.

例 しんぷそんノ公式ニヨツテ $\int_2^{10}\frac{dx}{x}$ ヲ計算ショウ.

$x=2$ ト $x=10$ トノ間ヲ8等分スレバ $\delta=1$ デ,

$$x_0=2,\ x_1=3,\ x_2=4,\ \ldots\ldots,\ x_7=9,\ x_8=10.$$

由テ $y=\frac{1}{x}$ ハ $y_0=\frac{1}{2},\ y_1=\frac{1}{3},\ y_2=\frac{1}{4},\ \ldots\ldots,\ y_7=\frac{1}{9},\ y_8=\frac{1}{10}.$

従テ $\mathrm{N}=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right)+4\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)+2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)\right]=1.6109.$

シカルニ $\int_2^{10}\frac{dx}{x}=[\log_e x]_2^{10}=\log_e 10-\log_e 2=\log_e 5=1.6094$

ナル故,誤差ハ0.0015デ,關係誤差ハ約0.09%デアル.

($\mathrm{S}=1.6833$, 誤差4.6%; $\mathrm{T}=1.5726$, 誤差2.3%)

2. S, T, N デ示サレタ此等ノ公式ヲ用ヒテ積分スルニハ,計算機ヲ利用スルガ有効デアル. しんぷそん法則デ計算ヲ實行スル時ハ,先ヅ同係數ノ縦坐標ノ和,

$$y_0+y_n;\quad y_2+y_4+\cdots\cdots+y_{n-2};\quad y_1+y_3+\cdots\cdots+y_{n-1}$$

ヲ求メ,第二,第三ノ和ニ夫夫 2, 4 ヲ乗ジ,最後ニ斯様ニシテ得タ三ツノ値ヲ加ヘルノガ一番ヨイ.

コノ時生ズル誤差ノ評價ニ就イテハ,前章末ノ一般的ナ理論ヲ用ヒテ,各部分ノ積分ノ誤差ヲ評價スル値

$$f=\frac{\delta}{90}\Delta^4{}_{k-2}=\frac{\delta}{90}\{y_{k+2}-4y_{k+1}+6y_k-4y_{k-1}+y_{k-2}\}\quad (\text{但}\ k=1,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n-1)$$

ノ總和ヲ求メレバヨイ. 更ニ前記 f ノ右邊ノ括弧 { } 内ノ値ノ平均値ヲ m トスルト,全體ノ誤差ハ

$$\mathrm{F}=\frac{n}{2}\cdot\frac{\delta}{90}m$$

デ評價セラレル.

若シ區分 δ ガ極メテ小ナル場合ニハ, $\Delta^4{}_{k-2}$ ハ近似的ニ $\delta^4.f''''(x_k)$ ニ等シク(第五章第一節), $n=\frac{b-a}{\delta}$ デアルカラ, $x_1, x_3, x_5, \ldots\ldots, x_{n-1}$ ニ於ケル $|f''''(x)|$ ノ中デ最大ノ値ヲ M トスレバ,上ノ式カラ誤差ノ評價トシテ

$$|\mathrm{F}|\leqq\frac{b-a}{2\delta}\cdot\frac{\delta}{90}\cdot\delta^4\mathrm{M},\quad \text{即チ}\quad |\mathrm{F}|\leqq\frac{b-a}{180}\delta^4\mathrm{M}$$

(δ ニ就イテ四次)ヲ得ル. 上ノ例デハ $\delta=1$ デ餘リ小サクナイガ,試ニ此評價ヲ適用スレバ

$$y=f(x)=\frac{1}{x},\quad f''''(x)=\frac{24}{x^5},\quad \mathrm{M}=\frac{24}{3^5}\quad (x_1=3\ \text{ニ當ルモノ}).$$

故ニ $$|\mathrm{F}|\leqq\frac{10-2}{180}\cdot\frac{24}{3^5}=\frac{8}{180}\cdot\frac{24}{243}<0.0045$$

トナルガ,實際ノ誤差ハ0.0015デアルカラ,大凡同ジ階級ノ大サデアル.

上ノ方法ハ, $f(x)$ ガ數値トシテ與ヘラレズ, $y=f(x)$ ガグラフデ與ヘラレタ場合ニモ同様ニ適用ガ出來ル.

即チ積分領域 (x_0, x_n) ヲ偶數個ノ部分ニ等分シ,此等ノ分點ヲ兩端ヲモ含メテ x_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n)$ ト命名シ, x_i ヲ横坐標トスル曲線上ノ點ノ縦坐標ヲ y_i トスレバ, $y_0, y_1, \ldots\ldots, y_n$ ナル縦坐標ノ長サヲ測定スルト,一區切ノ幅ガ δ ナラ $\delta(y_0+y_1+\cdots\cdots+y_{n-1})$ 又ハ $\delta(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n)$ デ $\int_{x_0}^{x_n}y\,dx$ ノ値ガ近似的ニ分カル. 更ニ此等ノ y_i ノ値ヲしんぷそん公式ニ代入シテ,更ニ精密ナ値ガ求メラレル.

但シ $y_0, y_1, \ldots\ldots, y_n$ ノ値,又ソノ和等ハ,一一物差ヲ用ヒテ測定シ,ソノ後加ヘル等ノ手續ヲセズトモ,**測程車** (Messrädchen, Measuring wheel), 又ハ**曲線測定機** (Kurvometer) ヲ利用シテ,簡易ニ之ヲ求メルコトガ出來ル.

普通曲線測定機ト稱セラレルモノノ構造ノ要點ヲ説明スレバ,軸ノ周リニ廻轉自由ナ車ヲ附ケ,ソノ車ノ緣ハ刀ノ齒形ニ削ラレ,直線又ハ曲線上ヲ正確ニ滑走セシメ得ル様ニ便ナラシメ,別ニ簡單ナ装置デソノ車ノ廻轉度

數ガ自動的ニ表示セラレル樣ニ構成セラレテ居ル．故ニ或線分,又ハ曲線ノ長サ或ハソノ和ヲ求メルノニハ,唯車ノ緣ヲ此等ノ線上ヲ滑ルコトナイ樣ニ,廻轉セシメルダケデ十分デアル．然ル時ハ器上ノ指針ノ指度ヲ讀ンデ,直チニ線ノ長サ,或ハソノ和ガ求メラレル．

例ヘバ前述ノ例デ，$y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}$ ノ指度ヲ讀ンデ,ソノ和ガ l 糎デアルコトガ分リ,一區域ガ δ 糎デアルナラバ，$\int_{x_0}^{x_n} y\,dx$ ヲ測度トスル曲面積ハ近似的ニ δl 平方糎デ與ヘラレルノデアル．

$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ ヲ求メル時，$y=f(x)$ ノグラフガ一ツノ閉曲線ヲナシテ居ル時ハ,之ヲ方眼紙上ニ畫クカ,或ハ透明ナ方眼紙ヲソノ上ニ置イテ,ソノ閉線內ニ入リ來タル正方形ノ數ヲ數ヘルガ,最モ簡單ナ近似的積分法デアル．若シ積分領域內デ $f(x)$ ノ變化ガ甚ダ急激デアル時ハ,コノ方法ガ唯一ノ機械的積分法デアルト言ツテモ差支ヘナイ．

尤モ此ノ方法ハ $y=f(x)$ ガ閉線ヲ形成シテ居ラナイ場合デモ適用出來ナイコトハナイ．ソノ場合ニハ $x=x_0$ カラ $x=x_n$ 迄ノ曲線 $y=f(x)$ ト，X 軸ト，x_0, x_n ヲ過ギル縱坐標トデ圍マレタ面積內ノ正方形ヲ數ヘレバヨイカラデアル．

測程車ニ同形ノ車ヲ二ツ備ヘタモノガアル．兩車ノ距離ハ,同軸上ヲ移動シテ,色色ニ變更ガ出來ル．曲面上ノ面積ヲ測定スルニ用フルモノガソレデアル．更ニ此種ノ測面機ニハ,ソノ滑走シタ部分ヲ,他ト區別スル爲ニ,經過部分ハ,別ニインキデ色附ケラレル樣ニ裝置シタモノガアル．之ヲ用ヒテ曲面積ヲ測定スルニハ,兩車ノ齒ト齒トノ距離 δ ヲ適當ニシテ,車ヲ曲線上ヲ滑走セシメテ,測ラントスル曲面積全體ヲ幅 δ ナル帶デ覆ツテ仕舞ヘバヨイ．ソノ最後ノ指針ノ指度ヲ讀メバ,滑走ノ全距離 l ガ分リ,曲面積ハ δl デ近似的ニ與ヘラレルコトトナル．

曲線測定機(測程車)ノ外ニ面積測定用トシテ工夫セラレタ機械ガ少ナクナイ．所謂**面積計**又ハ**プラニメーター** (Planimeter) ナル名デ販賣セラレルモノガ皆ソレデアル.(1) 此ノ種ノ機械器具ニ就イテ詳細ヲ知ラウト思フ人ハ Galle, Die mathematischen Instrumente ヲ見ラレヨ．

3. 次ニ $\int_a^b \Phi(x)dx$ ニ於テ積分セラルベキ函數 $\Phi(x)$ ガ二ツノ函數ノ積ニ分ケラレ,ソノ因數トナル函數ガ或ル特種ノ性質ヲ備ヘテ居ル場合ヲ考ヘヨウ．

今函數 $\Phi(x)$ ガ $f(x).g(x)$ ノ形ニ變ヘラレ,ソノ一因數 $g(x)$ ハ，ソノ積分函數

$$G(x)=\int g(x)dx$$

ガ容易ニ求メラレ,他ノ因數 $f(x)$ ノ値ノ變化ヲ示スグラフガ與ヘラレル(又ハ容易ニ求メラレル)モノトシテ,

積分 $$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

ノ値ヲ求メル機械的方法ヲ考ヘヨウ．

新變數 $t=G(x)$ ヲ導入スルト $dt=g(x)dx$. 仍ツテ，$G(x)$ ノ逆函數ヲ $\varphi(t)$ トシ，$f[\varphi(t)]=F(t)$ ト置クト,定義ニヨツテ $x=\varphi(t)$ デアルカラ

(1) 卷末附錄ニ其ノ大要ヲ載セテアル．

$$\int_a^b f(x).g(x)dx = \int_{a'}^{b'} f[\varphi(t)]dt = \int_{a'}^{b'} \mathrm{F}(t)dt.$$

但シ a', b' ハ x ニ關スル限界 a, b ヲ新變數 t ニ關シテ變換シタ時ノ値デアル.

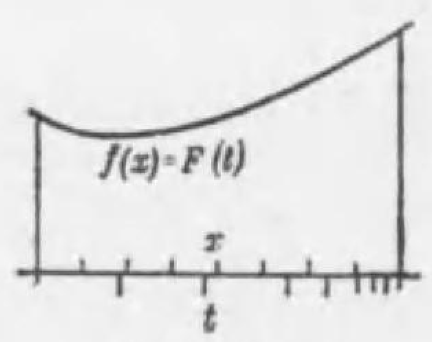
然ルニ以上解析的ニ述ベタ,積分ノ變形ハ,圖ヲ利用シテ之ヲ簡易ニ機械的ニ實行スルコトガ出來ル.

與ヘラレタ $y=f(x)$ ノグラフデ, x_i ナル横坐標ヲ持ッテ居ル曲線上ノ點ノ縱坐標ハ $f(x_i)$ ナル測度ヲ有スル.

故ニ $\mathrm{G}(x_i)=t_i$ ト置クト, $x_i=\varphi(t_i)$ トナリ,其ノ縱坐標ノ測度 $f(x_i)$ ハ $t=t_i$ ナル點ニ對スル

$$f(x)=f[\varphi(t)]=\mathrm{F}(t)$$

ノ値,卽チ $\mathrm{F}(t_i)$ ヲ與ヘルコトニ成ル.



第18圖

故ニ與ヘラレタ $y=f(x)$ ナル曲線ハ, x_i ナル點ヲ t_i 卽チ $\mathrm{G}(x_i)$ ト讀ムコトニヨリ,直チニ $y=\mathrm{F}(t)$ ナル函數ノグラフト考ヘ直スコトガ出來ル.

故ニ (a, b) ヲ t ノ領域 (a', b') ト考ヘ,ソノ間ニ, t ニツキ等間隔 ε ナル諸點ヲ考ヘ,此等ノ諸點 t_i ニ對スル x ノ値 x_i ヲ横坐標トスル曲線上ノ諸點ノ縱坐標ヲ前述ノ機械的方法デ測定シ,和 l ヲ求メルト, εl ハ近似的ニ

$$\int_{a'}^{b'} \mathrm{F}(t)dt \quad 卽チ \quad \int_a^b f(x)g(x)dx$$

ヲ與ヘルコトトナル.[1]

實際之ヲ行フノニハ,變數ノ變換カラ起ル尺度ノ變化ヲ示ス目盛(卽チ函數尺ヲ別ノ小サイ紙片ニ認メ,之ヲ x 軸ニ沿ヒテ置キ測程車ヲ用ヒテ,所要ノ縱坐標ノ長サ,又ハソノ和等ヲ機械的ニ求メル手順ヲ踏ムガヨイ.

此ノ種ノ變數變換ガ行ハレル時,補助機トシテプラニメーターヲ使フノハ甚ダ不便デアル. ソノ故ハ變數ノ變換毎ニ別ニ曲線ヲ作製スル必要ガ起ルカラデアル.

---

(1) 斯樣ナ場合ハ,實驗函數ノ値ヲ,有理整函數 $g(x)$ デ代用シテ,近似的ニ求メル時等ニ能ク起ル. 本書第八章ニ於テ實驗函數ヲ論ズル時ニ, $g(x)$ ガ x^n ナル形ノモノ,卽チ

$$\int_a^b f(x).x^n dx$$

ヲ利用セネバナラヌコトヲ説イテアルガ,コノ場合ニハ

$$t=\mathrm{G}(x)=\int g(x)\,dx=\int x^n dx, \quad 故ニ \quad t=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

トナル. 但シ第八章(第一節)デハ獨立變數ハ x ノ代リニ u ヲ用ヒ,積分領域ハ $(-1, +1)$ トナッテ居ル. 由テ $u=-1$ カラ $u=0$ 迄ト, $u=0$ カラ $u=+1$ 迄ノ二段ニ分ケテ積分スレバ宜シイ. 卽チ

$$t=\frac{1}{n+1}u^{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \ldots.)$$

トナリ, t ニ關スル限界ハ $t=\frac{(-1^{\,n+1}}{n+1}$ カラ $t=\frac{1}{n+1}$ 迄トナル. $u=0$ カラ $u=1$ 迄ノ限界ハ, $t=0$ カラ $t=\frac{1}{n+1}$ 迄トナリ, $u=-1$ カラ $u=0$ 迄ハ $t=\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ カラ $t=0$ 迄トナル.

マタ第八章(第四節)デふーりゑ級數ヲ利用スル時ニハ,必要ナ未定係數 a_λ ガ

$$a_\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos\lambda x\,dx$$

ナル積分値トシテ與ヘラレル. コノ場合ニハ

$$\int\cos\lambda x\,dx=\frac{1}{\lambda}\sin\lambda x+c, \quad 卽チ \quad dt=\cos\lambda x.dx=d\frac{\sin\lambda x}{\lambda}$$

トナルカラ, $t=\frac{1}{\lambda}\sin\lambda x$ ナル變數變換ヲ行フテ,本節末ノ方法ヲ適用スルト便宜ナコトガ多イ.

問　　題

1. $\delta=0.1$ トシテ $\int_2^{10}\frac{dx}{x}$ ヲ計算セヨ．(S, T, N ノ値ト其ノ誤差)．

2. 次ノ定積分ノ近似値ヲ求ム

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx,\quad \int_{100000}^{200000}\frac{dx}{\log_e x},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}dx.$$

3. 平面曲線ノ縦坐標ガ 3.5, 4.7, 5.8, 6.8, 7.6, 8.1, 8.0, 7.2 糎ニシテ，ソレ等ハ互ニ 4 糎ノ距離ニアルトキ，兩端ノ縦坐標ノ間ニ夾マレタル面積ヲ求ム．次ニ此ノ面積ノ重心ノ位置ヲ求ム．

第二節　がうすノ積分法

$\int f(x)dx$ ガ既知函數トシテ表ハシ得ナイ場合，或ハソレハ求メラレルガ $\int_a^b f(x)dx$ ナル定積分ノ數値計算ガ非常ニ面倒ナ場合，其ノ定積分ノ値ノ求メ方ニ就イテ，がうすハ特別ノ工夫ヲシタ．ソノ要點ハ $f(x)$ ノ値ヲナルベク少ナイ度數ダケ求メテ，而モ $\int_a^b f(x)dx$ ノ値ヲ近似的ニ，ナルベク精密ニ求メ得ル樣ニ考案シタノデアル．

今 $f(x)$ ノ計算スベキ(又ハ與フベキ)値ヲ

$$y_\lambda=f(x_\lambda)\qquad(\lambda=1, 2, \ldots\ldots, n)$$

デ示スト，がうすハ $\int_a^b f(x)dx$ ガ

$$\mathrm{N}=\mathrm{R}_1y_1+\mathrm{R}_2y_2+\ldots\ldots+\mathrm{R}_ny_n$$

ノ形デ，近似的ニ，能ク與ヘラレル樣，$\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots\ldots, \mathrm{R}_n$ 及ビ位置 $x_1, x_2\ \ldots\ldots, x_n$ ヲ適當ニ定メタノデアル．

例へバしんぷそんノ法則

$$\int_{x_0}^{x_n}f(x)dx=\frac{\delta}{3}\{y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\ldots\ldots+4y_{n-1}+y_n\}$$

ハ，此ノ種ノ註文ニ對スル一ツノ解答ト見做シ得ルモノデ，只今ノ立場カラ言ウト，$\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots\ldots$ ヲ $\left(\text{因數}\frac{\delta}{3}\text{ヲ除ケバ}\right)$

$$\mathrm{R}_1=1,\quad \mathrm{R}_2=4,\quad \mathrm{R}_3=2,\quad \mathrm{R}_4=4,\quad \ldots\ldots$$

ト定メ，$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ハ之ヲ等間隔ニ取ルコトニ選定シタ一ツノ方案デアル．

此種ノ研究ハ，實驗物理學等ニ就イテハ，甚ダ肝要デアル．ソノ故ハ實驗物理學ニ於テハ被積分函數 $f(x)$ ノ値ハ，實驗，測定ノ結果得ラレルモノデアルガ，精密ナル實驗ノ遂行ハ，一般ニ，甚ダ面倒ナモノデ，之ヲ屢屢繰返スコトハ困難デアル．故ニ實驗度數ハ成ルベク少ナク，而モソノ結果ヲ用ヒテ，成ルベク精密ニ値ヲ決メヨウトノ要求ガ自然ニ起ツテ來ルカラデアル．

今 $\int_a^b f(x)dx$ ニ於テ，次ノ變數變換

$$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}u$$

ヲ行フト，限界 a, b ハ $-1, +1$ トナリ，且ツ與ヘラレタ積分ハ

$$\int_{-1}^{+1}f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}u\right)\cdot\frac{b-a}{2}du$$

トナル. 故ニ

$$\frac{b-a}{2}\cdot f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}u\right)=y(u)$$

ト置クト,更ニ

$$\int_{-1}^{+1} y(u)du$$

ト變ル. 吾々ハ便宜ノ爲メ,積分領域 $(-1, 1)$ ニ於ケル函數 y ノ平均値ヲ W トスル. 卽チ

$$\mathrm{W}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} y(u)du$$

ト置カウ. (コレハ問題ノ積分値ノ半分デアル).

サテ $y(u)$ ハ領域 $(-1, +1)$ デ收斂冪級數

$$y(u)=a_0+a_1u+a_2u^2+a_3u^3+\ldots\ldots$$

ニ展開ガ出來ルト假定ショウ. (若シ之ガ不可能ナラバ,元ノ積分領域 (a, b) ヲモツト小サク別ケテ,ソノ各部分ニ就テ別々ニ計算スルヲ要スル).

サテ上ノ級數ヲ項別ニ積分スレバ,

$$\mathrm{W}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} ydu=a_0+\frac{a_2}{3}+\frac{a_4}{5}+\frac{a_6}{7}+\ldots\ldots$$

トナル. シカルニ此ノ値ハ

$$\mathrm{N}=\mathrm{R}_1y_1+\mathrm{R}_2y_2+\ldots\ldots+\mathrm{R}_ny_n$$

ナル形式ニヨツテ,近似的ニ表ハサレネバナラヌ. 由テ級數 $y(u)$ ニ於テ u ノ代リニ $u_1, u_2, \ldots\ldots$ トオイタ時,ソノ級數ノ値ヲ夫々 $y_1, y_2, \ldots\ldots$ トスレバ,

$$\begin{aligned}\mathrm{N}=\ &\mathrm{R}_1(a_0+a_1u_1+a_2u_1^2+\ldots\ldots)\\ &+\mathrm{R}_2(a_0+a_1u_2+a_2u_2^2+\ldots\ldots)\\ &+\mathrm{R}_3(a_0+a_1u_3+a_2u_3^2+\ldots\ldots)\\ &+\ldots\ldots\end{aligned}$$

但 $y_\lambda=y(x_\lambda)$ $(\lambda=1, 2, \ldots\ldots, n)$

トナリ.コノ右邊ヲ $a_0, a_1, \ldots\ldots$ 等ニ就イテ整頓スルト

$$\begin{aligned}\mathrm{N}=\ &a_0(\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2+\mathrm{R}_3+\ldots)\\ &+a_1(\mathrm{R}_1u_1+\mathrm{R}_2u_2+\ldots\ldots)\\ &+a_2(\mathrm{R}_1u_1^2+\mathrm{R}_2u_2^2+\ldots)\\ &+a_3(\mathrm{R}_1u_1^3+\mathrm{R}_2u_2^3+\ldots)\\ &+\ldots\ldots\end{aligned}$$

今コノ N ノ級數ヲ上ニ掲ゲタ W ノ級數ト比較シテ見ル. 若シ R_λ 及ビ u_λ $(\lambda=1, 2, \ldots\ldots)$ ノ間ニ,次ノ條件ガ成立スルナラバ, W ト N トハ全ク一致スルデアラウ.

(1) $\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2+\mathrm{R}_3+\mathrm{R}_4+\ldots\ldots=1$

(2) $\mathrm{R}_1u_1+\mathrm{R}_2u_2+\mathrm{R}_3u_3+\ldots\ldots=0$

(3) $\mathrm{R}_1u_1^2+\mathrm{R}_2u_2^2+\mathrm{R}_3u_3^2+\ldots\ldots=\frac{1}{3}$

(4) $\mathrm{R}_1u_1^3+\mathrm{R}_2u_2^3+\mathrm{R}_3u_3^3+\ldots\ldots=0$

$\ldots\ldots$ $\ldots\ldots$ $\ldots\ldots$

之ハ $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots\ldots; u_1, u_2, \ldots\ldots$ ニ關スル一組ノ聯立方程式ト見做セル. 而モ此等ハ係數 $a_0, a_1, \ldots\ldots$ ニ無關係デアルカラ,函數 $y(u)$ ノ形ニ無關係ナ値デアル.

方程式ノ個數ハ一般ニ無限ニナルカラ,之ヲ全體トシ

テ解クコトハ事實不可能デアル．然シ，R, u ノ個數ヲ夫夫 n 個ト決メルト，一般ニ $2n$ 個ノ條件ヲ滿足セシメル樣，ソノ値ヲ決メラレルカラ，上ノ方程式ノ中デ初メカラ $2n$ 個ヲ取リ，此等ガ成立スル樣ニ R_λ, u_λ ヲ決メルト，NトWトハ初項カラ a_{2n-1} ノ項迄一致セシメルコトガ出來ル．

例ヘバ $n=3$ トシテ，R_λ, u_λ ノ値ヲ具體的ニ決メルト，コノ時條件ハ次ノ6個トナル．

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad R_1+R_2+R_3 &&=1\\
&(2) \qquad R_1u_1+R_2u_2+R_3u_3 &&=0\\
&(3) \qquad R_1u_1^2+R_2u_2^2+R_3u_3^2 &&=\frac{1}{3}\\
&(4) \qquad R_1u_1^3+R_2u_2^3+R_3u_3^3 &&=0\\
&(5) \qquad R_1u_1^4+R_2u_2^4+R_3u_3^4 &&=\frac{1}{5}\\
&(6) \qquad R_1u_1^5+R_2u_2^5+R_3u_3^5 &&=0.
\end{aligned}
$$

コレ等ノ方程式ハ次ノ値ニヨツテ確ニ滿足サレル．

$$R_1=\frac{5}{18},\quad u_1=-\sqrt{\frac{3}{5}},$$

$$R_2=\frac{4}{9},\quad u_2=0,$$

$$R_3=\frac{5}{18},\quad u_3=+\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

由テ
$$N=\frac{5}{18}\cdot y\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)+\frac{4}{9}\cdot y\,0)+\frac{5}{18}\cdot y\left(+\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$$

ト取ルト，NトWトハ初項カラ a_5 ノ項迄ハ一致スル．故ニ若シ $y(u)$ ガ u ニ就イテ五次，又ハ五次以下ノ有理整式デアツタナラバ，NトWトハ全然同一ノ値ヲ有スルコトニ成ル．

一般ニ R_λ, u_λ ノ個數ヲ夫夫 n 個トスルト，

$$N=\sum_1^n R_\lambda y_\lambda \quad ト \quad W=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} y(u)\,du$$

トハ，$y(u)$ ガ $(2n-1)$ 次又ハソレ以下ノ有理整式ナラバ正確ニ同一ノ値ヲ有スルコトニ成ル．

但シ $y(u)$ ガ $2n$ 次以上ノ高次式デアルカ，一般ノ解析函數ナラバ，N ハ積分 W ヲ近似的ニ與ヘルニ過ギナイ．

再ビ $n=3$ ナル特別ナ場合ニ歸ツテ考ヘルト，N ヲ以テ W ニ代用スルコトハ，ツマリ

$$
\begin{aligned}
&a_6(R_1u_1^6+R_2u_2^6+R_3u_3^6)\\
&+a_7(R_1u_1^7+R_2u_2^7+R_3u_3^7)+\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

ヲ以テ，次ノ値

$$\frac{a_6}{7}+\frac{a_8}{9}+\cdots\cdots$$

ニ代用セントスルモノデ，誤差ハ此ノ兩者ノ値ノ差トシテ生レルノデアル．$n=3$ ノ時，殘リノ條件ノ最初ノモノハ

$$(7) \qquad R_1u_1^6+R_2u_2^6+R_3u_3^6=\frac{1}{7}$$

デアルガ，初メノ六條件カラ得タ R_λ, u_λ ノ前述ノ値ヲ，(7) ノ左邊ヘ代入シテモ $\frac{1}{7}$ トハナラナイ．實際計算シテ見ルト

$$左邊=\frac{1}{7}+\frac{4}{175}$$

トナル．故ニ $\frac{1}{7}a_6$ ノ代リニ，N デハ

$$a_6\left(\frac{1}{7}+\frac{4}{175}\right)$$

ヲ用フルコトニ成リ，第四項ニ於テ $\frac{4}{175}a_6$ ダケノ違ヒガアル．第五項以下デモ，同樣ニ，夫夫違ヒガアルガ，$y(u)$ ノ展開式ハ收斂スル冪級數ダカラ，ソノ係數 a_μ ハ μ ガ增大スルト共ニ減少スル．故ニ N ト W トノ差ハ，差違ガ始マル最初ノ項ノ誤差デ，ソノ大凡ハ評價出來ル．今 $\frac{4}{175}$ ヲ A ト名ヅケレバ，ソノ誤差ノ大イサノ階級ハ，Aa_6 デアル．

サテ一般ニ

$$R_\lambda,\quad u_\lambda \quad (\lambda=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n)$$

ヲ用フル時，R_λ, u_λ ノ値ヲ第 $(2n+1)$ 番目ノ方程式ニ代入