ヲ得。故ニ上式ノ代リニ

$$dz = F_x(x, y)dx + F_y(x, y)dy \qquad (4)$$

ト書クコトヲ得。dx 及ビ dy ハ卽チ x 及ビ y ノ微分ニシテ其大サハ不定ナレドモ, dz ハ dx 及ビ dy ニヨリテ定マルモノナリ。

モシ $dy=0$ ナルトキニハ dx ヲ ∂x ト書キ, 又 $dx=0$ ナルトキニハ dy ヲ ∂y ト書キ, コノ二ツノ各場合ニ於ケル dz ヲ ∂z ト書クコトトス。而シテ $\partial x, \partial y, \partial z$ ヲ夫夫 x, y, z ノ **偏微分** ト名付ク。

然ルトキハ (4) ヨリ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F_x(x, y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = F_y(x, y)$$

ヲ得, コレ又偏導函數ノ一種ノ記法ナリ*。

dz 又ハ ∂z ハ z ノ實際ノ增分 Δz トハ別ナリ。其關係ヲ圖解スレバ次ノ如シ。

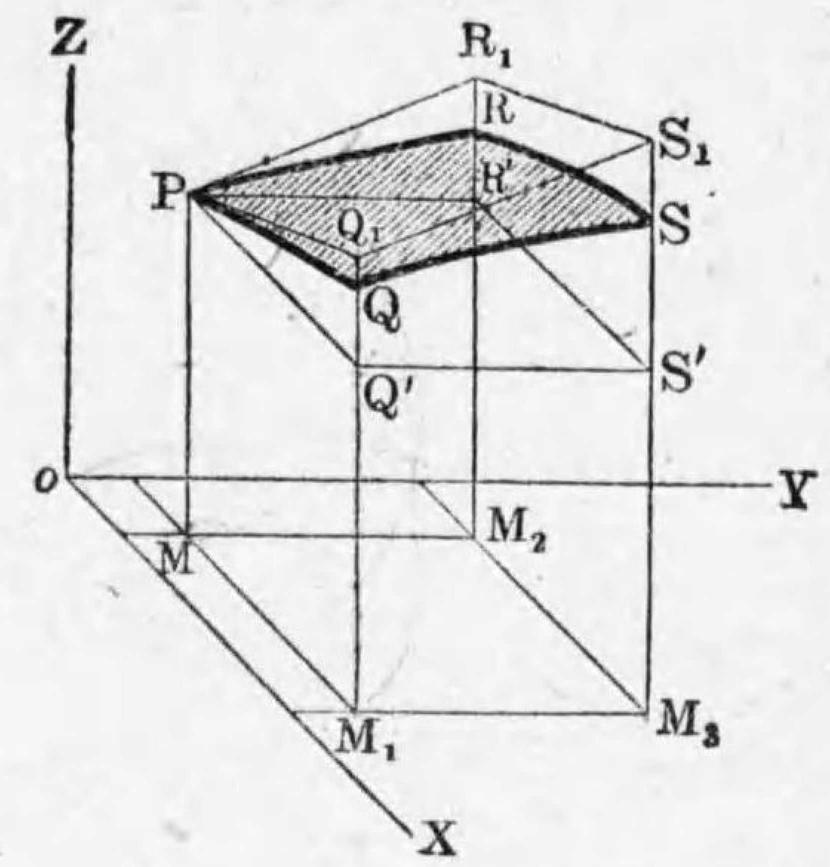
空間ニ於ケル直角座標軸 O−XYZ ヲトリ, xy 面上ニ四點
$M(x, y)$, $M_1(x+dx, y)$, $M_2(x, y+dy)$, $M_3(x+dx, y+dy)$
ヲトリ, 各點ヨリ xy 面ニ垂線ヲ立テ, 曲面 $z=F(x, y)$ ト夫夫點 P, Q, R, S ニ於テ交ラシム。今考フル函數ニ於テ y ガ變ゼズシテ x ノミ變ズルトキ, z ノ變動スル有樣ハ PMM_1Q ナル平面內ニ於ケル曲線 PQ ニヨリテ表示セラル。依ツテ其平

* $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ 又ハ略シテ $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ 等ト書クコトモアリ。

面內ニテ曲線 PQ ノ P ニ於ケル切線 PQ_1, 及ビ P ヲ過リ x 軸ニ平行ナル直線 PQ' ヲ引ケバ

$$F_x(x, y) = \tan\angle Q_1PQ'$$

ナルコト明カナリ。卽チ $F_x(x, y)$ ノ幾何學的意味ハ, $z=F(x, y)$ ナル曲面ヲ xz 面ニ平行ナル (y 軸ニ垂直ナル) 平面ニテ切リタルトキノ切リ口ニ於ケル曲線ニ引キタル切線ガ xy 面トナス角ノ正切ナリトイフコトヲ得。



第三十三圖

$F_y(x, y)$ ノ意味モ同樣ニ說明スルコトヲ得ベシ。

次ニ, P ヲ過リ xy 面ニ平行ナル平面ト垂線 M_1Q, M_2R, M_3S トノ交點ヲ夫夫 Q', R', S' トシ又曲線 PQ, PR ノ P ニ於ケル切線ト M_1Q, M_2R トノ交點ヲ夫夫 Q_1, R_1 トスレバ,

$$Q'Q_1 = F_x(x, y)\partial x = \partial z, \qquad (\partial y = 0),$$

$$R'R_1 = F_y(x, y)\partial y = \partial z, \qquad (\partial x = 0),$$

コレ卽チ偏微分ノ圖形表示ナリ。

二ツノ切線 PQ_1, PR_1 ヲ含ム平面ヲ引ケバ一般ニハ曲面 PQSR ノ P ニ於ケル切平面トナル (第十章參照)。之ガ垂線 M_3S ト交ル點ヲ S_1 トスレバ,

$$S'S_1 = Q'Q_1 + R'R_1$$
$$= F_x(x, y)dx + F_y(x, y)dy,$$

コレ卽チ全微分ノ圖形表示ナリ。(此場合ニハ x, y 共ニ變ズルヲ以テ PQ′ ヲ ∂x トセズシテ dx トスベシ, PR′ ニツイテモ之ニ同ジ。)

S_1 ハ一般ニハ S ト一致セズ, 故ニ全微分 $S'S_1$ ハ増分 $S'S$ トハ一致セズ。然レドモ其差 SS_1 ハ dx, dy 卽チ PQ′, PR′ ガ無限小トナルトキニハ一般ニ之ニ比シテ更ニ高位ノ無限小トナルベシ。

53. 逐次偏微分法

函數 $z=F(x, y)$ ノ偏導函數ハ一般ニ矢張 x 及ビ y ノ函數ニシテ更ニ之ヲ偏微分スルコトヲ得ベシ。其結果ヲ表スニ次ノ如キ記號ヲ用キル。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = F_{xx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{xy} = F_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{yx} = F_{yx}(x, y).$$

カクノ如ク二度續ケテ偏微分セルモノヲ **第二次偏導函數** トイフ。更ニ今一度微分スレバ, 例ヘバ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = z_{xxx} = F_{xxx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = z_{yxx} = F_{yxx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = z_{xyx} = F_{xyx}(x, y)$$

ノ如シ, コレラヲ **第三次偏導函數** トイフ。其他モ之ニ準ズ*。

サテココニ考フベキハ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ト $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ トノ關係ナリ, 次ニ之ヲ論ゼントス。

今 $V = F(x+h, y+k) - F(x+h, y) - F(x, y+k) + F(x, y)$ ナルモノヲ考ヘ, ココニ

$$F(x, y+k) - F(x, y) = \phi(x)$$

ト置ケバ,

$$V = \phi(x+h) - \phi(x) = h\phi'(x+\theta_1 h) \qquad 0<\theta_1<1,$$
$$= h\{F_x(x+\theta_1 h, y+k) - F_x(x+\theta_1 h, y)\}$$
$$= hkF_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k), \qquad 0<\theta_2<1.$$

同様ニシテ

$$F(x+h, y) - F(x, y) = \psi(y)$$

ト置ケバ,

$$V = \psi(y+k) - \psi(y) = k\psi'(y+\theta_3 k) \qquad 0<\theta_3<1,$$
$$= k\{F_y(x+h, y+\theta_3 k) - F_y(x, y+\theta_3 k)\}$$
$$= khF_{yx}(x+\theta_4 h, y+\theta_3 k), \qquad 0<\theta_4<1.$$

故ニ

$$F_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k) = F_{yx}(x+\theta_4 h, y+\theta_3 k).$$

---

* z_{xx}, z_{xxx} 等ノコトヲ z_x'', z_x''' 等ト書クコトアリ。

故ニモシ $F_{xy}(x,y)$ 及ビ $F_{yx}(x,y)$ ガ共ニ連續ナルトキハ, $h\to 0$, $h\to 0$ ナル極限ニ於テ

$$F_{xy}(x, y) = F_{yx}(x, y)$$

トナル。即チ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}.$$

カクノ如ク第二次偏導函數ニ於テ偏微分ノ順序ヲ變更シ得ルコトヲ知レバ, 一般ニ高次ノ偏導函數ニ於テモソレガ連續ナル場合ニハ偏微分ノ順序ヲ任意ニ變更スルコトヲ得ベシ。例ヘバ

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$$

ノ如シ。故ニ通常ハ x, y 等ヲ字母ノ順ニ整頓スルモノトス。今後本書ニ於テハ特ニ斷リナキ限リ偏導函數ハ常ニ連續ニシテ從ツテ微分ノ順序ヲ變更シ得ルモノト考フベシ。

例題. $z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ ナルトキ, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} ヲ求メヨ。

54. 函數ノ函數ノ偏微分法

$z = F(x, y)$ ニ於テ x, y ガ共ニ一ツノ共通ナル變數 t ノ函數ナリトス, 然ルトキハ z ハ實ハ t ノミノ函數ナリ。今 z ハ x, y ニ關シテ微分可能, 又 x, y ハ t ニ關シテ微分可能ナリトシテ, $\dfrac{dz}{dt}$ ヲ求メントス。

t ノ增分 Δt ニ對スル x 及ビ y ノ增分ヲ夫夫 Δx 及ビ Δy トシ, 之ニ對スル z ノ增分ヲ Δz トスレバ

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

然ルニ

$$\begin{aligned}\Delta z &= F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y)\\ &= F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y) + F(x, y+\Delta y) - F(x, y)\\ &= F_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + F_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y, \qquad \begin{matrix}0<\theta_1<1,\\ 0<\theta_2<1.\end{matrix}\end{aligned}$$

故ニ

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = F_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + F_y(x, y+\theta_2\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

$\Delta t\to 0$ ナルトキハ $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ ナリ, 而シテマタ $F_x(x, y)$ 及ビ $F_y(x, y)$ ガ連續ナリトスレバ上ノ關係ヨリ次ノ結果ヲ得:

$$\frac{dz}{dt} = F_x(x, y)\frac{dx}{dt} + F_y(x, y)\frac{dy}{dt}, \qquad (1)$$

即チ

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad (2)$$

(1) ハ第 52 節 (4) ニ示セル z ノ全微分ノ式ノ兩邊ヲ dt ニテ除シタルモノニ他ナラズ。

モシ特ニ

$$z = F(x, y), \qquad y = \phi(x)$$

ナルトキハ,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

トナル。左邊ノ $\dfrac{dz}{dx}$ ハ z ヲ x ノミノ函數トシテ微分シタルモノ, 右邊ノ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ハ z ヲ x 及ビ y ノ函數トシ其 y ノ中ニ含マ

レザル單獨ノ x ノミニ關シテ微分シタルモノナリ。

例ヘバ
$$z = ax^2+bxy+cy^2 \qquad y = x^m$$
ナルトキハ,
$$\frac{dz}{dx} = 2ax+by+(bx+2cy)mx^{m-1}.$$
マタ
$$z = \mathrm{F}(u, v), \qquad u = \phi(x, y), \qquad v = \psi(x, y)$$
ナルトキ, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及ビ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ヲ求ムルニハ夫夫 y 及ビ x ヲ常數ノ如クニ見做シテ偏微分スレバヨキニヨリ, 矢張 (2) ニヨルコトヲ得。即チ
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$
今 (2) ヲ更ニ t ニ關シテ微分スレバ次ノ如シ。
$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2}\\ &\quad+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad (5)\end{aligned}$$
ココニ $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ ハ一般ニ x 及ビ y ノ函數ナルガ故ニ之ヲ t ニ關シテ微分スルニハ更ニ (2) ノ手續ヲ繰リ返スベシ, 即チ
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dy}{dt}\\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dt},\end{aligned}$$
同樣ニ
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}.$$

コレラヲ (5) ニ代入スレバ
$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\\ &\quad+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}. \qquad (6)\end{aligned}$$

例 1. $z = \mathrm{F}(x, y), \quad x = at, \quad y = bt$ ナルトキ, t ニ關スル z ノ逐次導函數ヲ求ム。
$$\frac{dz}{dt} = a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2ab\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+b^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$
$$\frac{d^3z}{dt^3} = a^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+3a^2b\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}+3ab^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}+b^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}, \text{ 等。}$$
依ツテ之ヲ次ノ如ク略記スルコトヲ得:
$$\frac{dz}{dt} = \left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)z,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z,$$
$$\frac{d^3z}{dt^3} = \left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 z, \text{ 等。}$$
一般ニ
$$\frac{d^nz}{dt^n} = \left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z$$
ナルコトモ容易ニ證明セラル。

例 2. 任意ノ數 t ニ對シテ常ニ
$$\mathrm{F}(xt, yt) = t^n\mathrm{F}(x, y)$$
ナル關係ガ成立スルトキハ, 函數 $\mathrm{F}(x, y)$ ヲ n 次ノ **同次函數** トイフ。例ヘバ $ax^2+bxy+cy^2$ ハ二次, $\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ ハ零次ノ同次函數ナリ。

上ノ式ニ於テ $xt = u, \quad yt = v$ ト置ケバ
$$\mathrm{F}(u, v) = t^n\mathrm{F}(x, y)$$
トナル。此兩邊ヲ t ニ關シテ k 度微分スレバ (例 1 ニヨリ)

$$\left(x\frac{\partial}{\partial u}+y\frac{\partial}{\partial v}\right)^k F(u,v)=n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)t^{n-k}F(x,y).$$

ココニ於テ $t=1$ ト置ケバ次ノ式ヲ得：

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k F(x,y)=n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)F(x,y).$$

之ヲ同次函數ニ關スル **Euler ノ定理** トイフ。

例ヘバ $F(x,y)=z$ ト置ケバ

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nz,$$

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=n(n-1)z,$$ 等ナリ。

例題 1. $z=F(x,y),\ y=\phi(x)$ ナルトキ, $\dfrac{d^2z}{dx^2}$ ヲ求メヨ。

例題 2. $z=F(u,v),\ u=\phi(x,y),\ v=\psi(x,y)$ ナルトキ, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial x\partial y},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ヲ求メヨ。

例題 3. $z=\tan^{-1}\dfrac{y}{x},\ k=2$ トシテ Euler ノ定理ヲ驗メセ。

55. Taylor ノ定理ノ擴張

函數 $F(x,y)$ ハ連續ナル第 n 次偏導函數ヲ有スルモノトシ, $F(x+h,y+k)$ ヲ h 及ビ k ノ冪ニ從ツテ展開スルコトヲ考ヘントス。

任意ノ變數 t ヲ用キテ

$$u=x+h=x+\alpha t,\qquad v=y+k=y+\beta t$$

ト置キ, 又

$$V(t)=F(u,v)=F(x+\alpha t,y+\beta t)\qquad(1)$$

トスレバ, 之ヲ t ニ關シテ m 度微分シテ

$$V^{(m)}(t)=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\beta\frac{\partial}{\partial v}\right)^m F(u,v)$$

ヲ得。ココニ於テ $t=0$ ト置ケバ

$$\left.\begin{aligned}&V(0)=F(x,y)\\&V^{(m)}(0)=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)^m F(x,y)\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

トナル。然ルニ Maclaurin ノ定理ニヨリ $V(t)$ ヲ t ノ冪ニ從ツテ展開スレバ

$$V(t)=V(0)+V'(0)t+\frac{V''(0)}{2!}t^2+\cdots\cdots+\frac{V^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}+\frac{V^{(n)}(\theta t)}{n!}t^n.$$

ココニ (1), (2) ヲ代入スレバ

$$\begin{aligned}F(x+\alpha t,y+\beta t)=F(x,y)&+t\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)F(x,y)\\&+\frac{t^2}{2!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)^2F(x,y)+\cdots\cdots\\&+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1}F(x,y)\\&+\frac{t^n}{n!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)^nF(x+\theta\alpha t,y+\theta\beta t).\end{aligned}$$

元ニ戻シテ $\alpha t=h,\ \beta t=k$ トスレバ

$$\begin{aligned}F(x+h,y+k)=F(x,y)&+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)F(x,y)\\&+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2F(x,y)+\cdots\cdots\\&+\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1}F(x,y)\\&+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^nF(x+\theta h,y+\theta k).\qquad(3)\end{aligned}$$

コレ卽チ Taylor ノ定理ヲ二ツノ變數ノ函數ノ場合ニ擴張シタルモノナリ。モシ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n F(x+\theta h, y+\theta k)=0$$

ナルトキハ，上ノ展開式ハ無限級數トナル，而シテ其形式ハ e^x ヲ x ノ冪級數ニ展開シタルモノト同樣ノ構造ヲ有ス。依ツテ之ヲ略記シテ

$$F(x+h, y+k)=e^{h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}}F(x, y)$$

トスルコトヲ得。

(3) ニ於テ $x=y=0$ ト置キ，然ル後 h, k ヲ夫夫 x, y ト書キ直セバ次ノ式ヲ得。

$$\begin{aligned}F(x, y)=F(0, 0)&+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)F(0, 0)\\&+\frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2F(0, 0)+\cdots\cdots\\&+\frac{1}{(n-1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1}F(0, 0)\\&+\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^nF(\theta x, \theta y).\qquad(4)\end{aligned}$$

コレ卽チ Maclaurin ノ定理ノ擴張ナリ。

又 (3) ニ於テ $n=1$ トスレバ，

$$\begin{aligned}F(x+h, y+k)=F(x, y)&+hF_x(x+\theta h, y+\theta k)\\&+kF_y(x+\theta h, y+\theta k)\end{aligned}$$

トナル。コレ卽チ二ツノ變數ノ函數ニ關スル平均値ノ定理ナリ。

例題. $F(x, y)$ ノ逐次偏導函數ハスベテ有限ナリトシ，h 及ビ k ヲ各第一位ノ無限小トスルトキ，第三位以上ノ無限小ヲ省略スル場合ニ於ケル $F(x+h, y+k)$ ノ近似値ヲ求メヨ。

56. 極大及ビ極小

二ツノ變數ヲ有スル函數ニツイテ極大及ビ極小ヲ定義スルコト次ノ如シ。

十分小ナル正數 δ ヲトルトキ

$$0<|h|+|k|<\delta$$

ナル如キスベテノ h, k ニ對シテ常ニ

$$F(a+h, b+k)<F(a, b)$$

ナルトキハ，函數 $F(x, y)$ ハ $x=a, y=b$ ニ於テ **極大トナル** 又ハ **極大値ヲトル** トイヒ，同樣ノ場合ニ常ニ

$$F(a+h, b+k)>F(a, b)$$

ナルトキハ，$F(x, y)$ ハ $x=a, y=b$ ニ於テ **極小トナル** 又ハ **極小値ヲトル** トイフ。

幾何學的ニ考フレバ $F(x, y)$ ガ $x=a, y=b$ ニ於テ極大トナルトイフハ $z=F(x, y)$ ナル曲面上ニテ $x=a, y=b$ ナル座標ヲ有スル點ガ其近傍ナル同ジ曲面上ノ他ノ點ヨリモ大ナル z 座標ヲ有スルコトニ相當ス。極小ノ場合モ之ニ倣ヒテ解釋スルコトヲ得ベシ。

今 $F(x, y)$ ノ逐次偏導函數ガスベテ連續ナリト假定シ，此函數ノ極値ヲ求ムルコトヲ考フベシ。

$F(x, y)$ ガ $x=a,\ y=b$ ニ於テ極値ヲトルトキハ, x, y ヲ a, b ヨリ各如何樣ニ變ジテモ其附近ニテハ常ニ $F(a, b)$ ガ最大又ハ最小ナルベキニヨリ, 特ニ x 又ハ y ノ一方ノミヲ變動セシムル場合ニモ亦然ラザル可カラズ。卽チ $F(x, b)$ ナル x ノミノ函數ハ $x=a$ ニ於テ極値ヲトラザル可カラズ。故ニ第22節ニヨリ

$$F_x(a, b)=0. \qquad (1)$$

同樣ニシテマタ

$$F_y(a, b)=0 \qquad (2)$$

ヲ得。故ニ $F(x, y)$ ヲシテ極値ヲトラシムル x, y ノ値ヲ求ムルニハ先ヅ聯立方程式

$$F_x(x, y)=0, \qquad F_y(x, y)=0$$

ヲ解クベシ, 之ニヨリテ一般ニハ x, y ノ値ノ組ガ有限個數ダケ定マル。其各組ニツイテソレヲ $F(x, y)$ ニ代入シタルトキ極大値又ハ極小値ノ何レトナルカ又ハ極値トナラザルカ等ヲ判定スルニハ次ノ如ク考フルコトヲ得。

Taylor ノ定理ニヨリ

$$F(a+h, b+k)=F(a, b)+\{hF_x(a, b)+kF_y(a, b)\}$$
$$+\frac{1}{2}\{h^2F_{xx}(a, b)+2hkF_{xy}(a, b)+k^2F_{yy}(a, b)\}+R_3.$$

今 $F(x, y)$ ノ逐次偏導函數ハスベテ有限ナルモノト考フレバ, h 及ビ k ヲ各第一位ノ無限小トスルトキ R_3 ハ之ニ對シテ少クモ第三位ノ無限小ナリ。故ニ (1), (2) ノ如キ a, b ノ値ニ對シテハ, h, k ノ絕對値ガ十分小ナルトキハ

$$F(a+h, b+k)-F(a, b)$$

ノ正負ハ

$$h^2F_{xx}(a, b)+2hkF_{xy}(a, b)+k^2F_{yy}(a, b) \qquad (3)$$

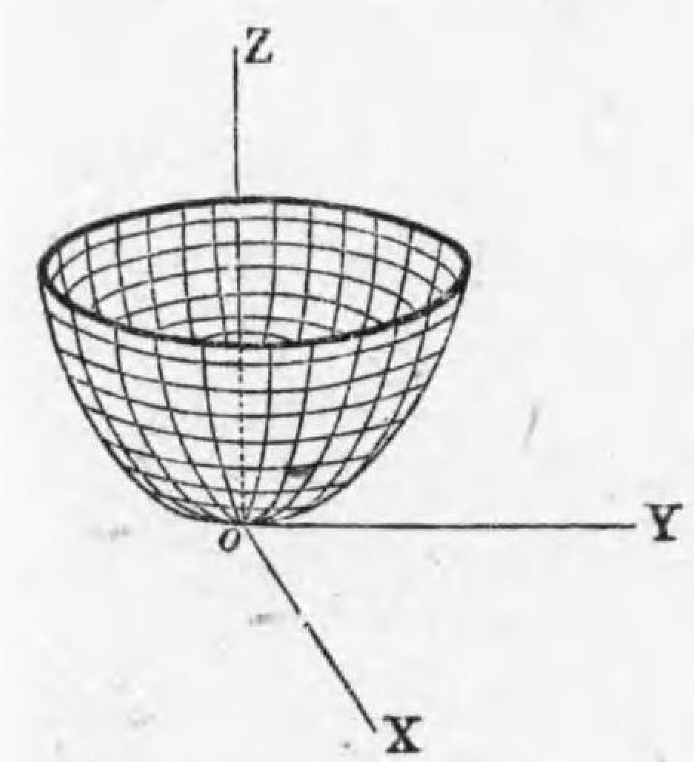
ノ正負ト一致ス。故ニ $F(a, b)$ ガ極大ナルカ極小ナルカヲ判定スルニハ (3) ノ符號ヲ考フレバヨシ。ココニ於テ

$$F_{xx}(a, b)=A, \qquad F_{xy}(a, b)=B, \qquad F_{yy}(a, b)=C,$$
$$h^2A+2hkB+k^2C=D$$

ト置キ; 先ヅ $A\neq 0$ トスレバ

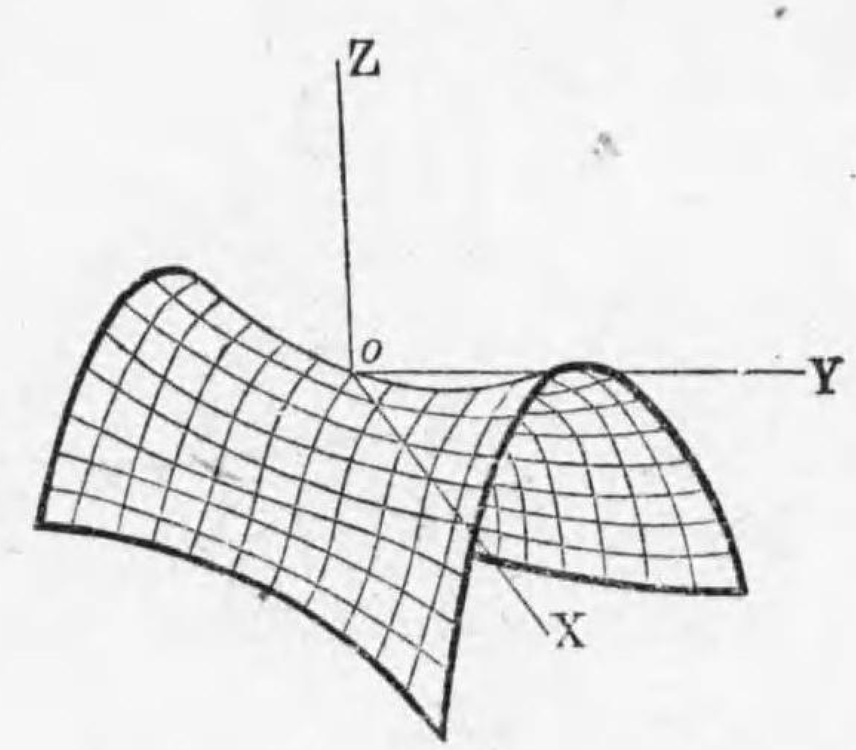
$$AD=h^2A^2+2hkAB+k^2AC=(hA+kB)^2+k^2(AC-B^2).$$

(i) $AC-B^2>0$ ナルトキハ, 一般ニ $AD>0$ ニシテ, h, k ガ共ニ 0 ナラザル限リ $AD=0$ ナルコトナシ。故ニ D ハ A ト同符號ヲ有ス, 依ツテ $F(a, b)$ ハ $A>0$ ナルトキハ極小値, $A<0$ ナルトキハ極大値ナリ。



(i) ノ場合, 原點ニ於テ極小トナル例

第三十四圖



(ii) ノ場合, 原點ニ於テ極値トナラザル例

第三十五圖

(ii) $AC-B^2<0$ ナルトキハ, h, k ノ値ニヨリテ AD ハ正ニモ負ニモナルベシ。例ヘバ

$$h\neq 0,\ k=0 \text{ トスレバ},\quad AD=h^2A^2>0,$$

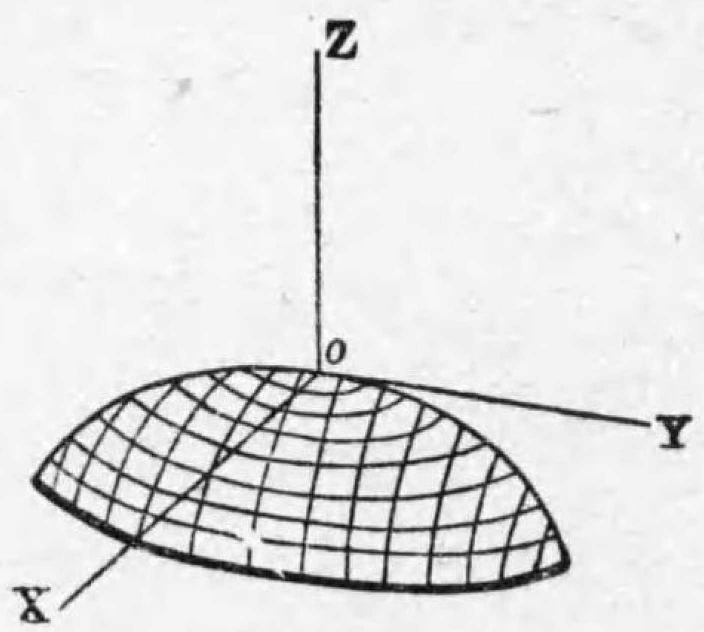
$$hA+kB=0,\ k\neq 0 \text{ トスレバ},\quad AD=k^2(AC-B^2)<0$$

トナルガ如シ。故ニ D ハ一定ノ符號ヲ有セズ, 從ツテ $F(a,b)$ ハ極値ニアラズ。

(iii) $AC-B^2=0$ ナルトキハ,

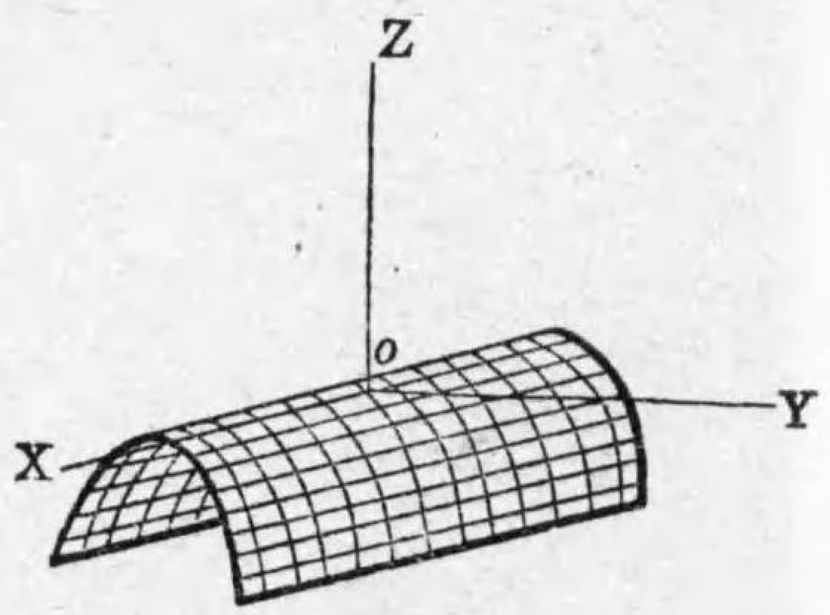
$$AD=(hA+kB)^2$$

ナルヲ以テ, AD ハ一般ニハ正ナレドモ, タダ $hA+kB=0$ ナルガ如キ h, k ニ對シテハ (h, k ガ共ニ 0 ナラザルモ) $AD=0$ トナル。故ニ此場合ニハ h, k ノスベテノ値ニ對シテ D ガ一定ノ符號ヲ有スルヤ否ヤ明カナラズ。此點ヲ更ニ吟味スルニハ第三次偏微係數ノ項ヲトリテ考フルヲ要ス, 然レドモ其理論ハ



(iii) ノ場合, 原點ニ於テ極大トナル例, y 軸ガ $D=0$ ナル方向ニ相當ス

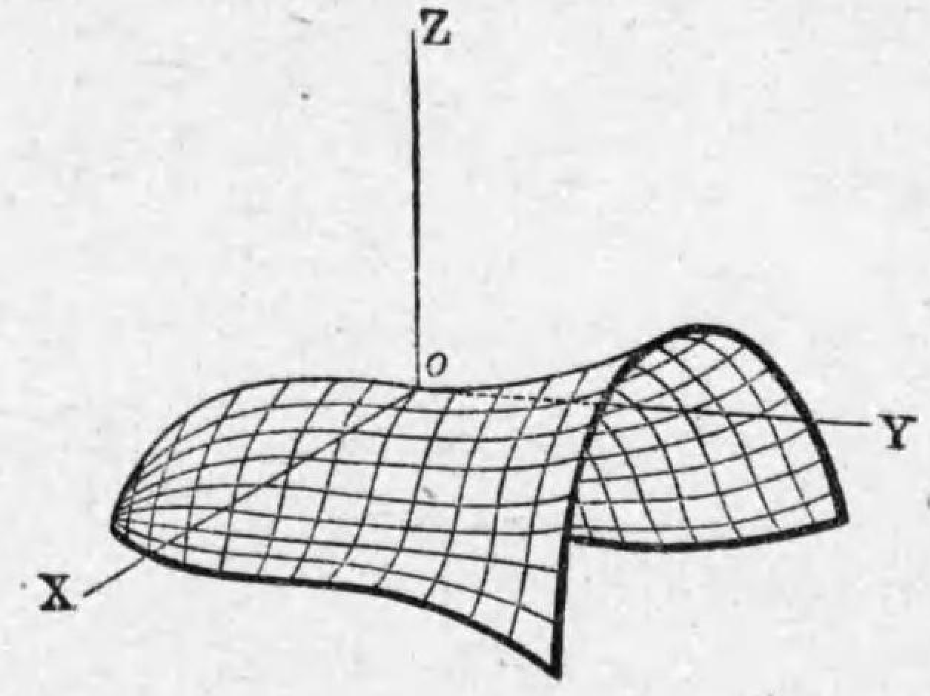
第三十六圖



(iii) ノ場合, 原點ニ於テ完全ナル極値トナラザル例, x 軸ガ $D=0$ ナル方向ニ相當ス

第三十七圖

簡單ナラザルヲ以テ之ヲ略ス。



(iii) ノ場合, 原點ニ於テ極値トナラザル例, y 軸ガ $D=0$ ナル方向ニ相當ス

第三十八圖

以上スベテ $A\neq 0$ トシテ考ヘタルガ, モシ $A=0$ ナルトキハ

$$D=2hkB+k^2C.$$

故ニ $B\neq 0$ ナルトキハ, h, k ノ値ノトリ方ニヨリテ D ハ正トモ負トモナル, 何トナレバ先ヅ k ヲ任意ノ 0 ナラザル數トナシ然ル後 h ヲ適當ニ選ベバ D ヲシテ任意ノ値ヲトラシメ得レバナリ。

モシ又 $A=0, B=0$ ナルトキハ

$$D=k^2C$$

ニシテ上ノ (iii) ノ場合ト同樣ナリ。

之ニヨツテスベテノ場合ヲ總括スレバ次ノ結果ヲ得。($A=0, B\neq 0$ ハ (2) ノ中ニ, $A=0, B=0$ ハ (3) ノ中ニ含マル。)

$F_{xx}(a,b)$ 等ヲ單ニ F_{xx} 等ト略記スルコトトスレバ,

(1) $F_{xx}F_{yy}-F^2_{xy}>0$, $F_{xx}>0$ ナルトキ, $F(a,b)$ ハ極小値,

$F_{xx}<0$ ナルトキ, $F(a,b)$ ハ極大値,

(2) $F_{xx}F_{yy}-F^2_{xy}<0$ ナルトキ, $F(a,b)$ ハ極値ニアラズ,

(3) $F_{xx}F_{yy}-F^2_{xy}=0$ ナルトキ, コレダケニテハ $F(a,b)$ ガ極値ナルヤ否ヤヲ判定スル能ハズ, 更ニ特別ノ吟味ヲ要ス。

注意. (1) ノ場合ニハ $F_{xx}F_{yy}>0$ ナルヲ以テ, F_{xx} ノ正負ヲ見ル代リニ F_{yy} ヲ用キルモ可ナリ。

例. $x+y+z=a>0$ ナルトキ, xyz ノ極値ヲ求ム。

$$F(x, y)=xy(a-x-y)$$

トスレバ

$$F_x(x, y)=y(a-2x-y),$$
$$F_y(x, y)=x(a-x-2y).$$

此二式ヲ共ニ 0 ナラシムル x, y ノ値ハ次ノ四組ナリ:

$$\text{(i)}\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\quad\text{(ii)}\begin{cases}x=0\\y=a\end{cases}\quad\text{(iii)}\begin{cases}x=a\\y=0\end{cases}\quad\text{(iv)}\begin{cases}x=\dfrac{a}{3}\\y=\dfrac{a}{3}\end{cases}$$

更ニ第二次偏導函數ヲ求ムレバ

$$F_{xx}=-2y,\quad F_{xy}=a-2x-2y,\quad F_{yy}=-2x,$$

故ニ

$$F_{xx}F_{yy}-F^2_{xy}=4xy-(a-2x-2y)^2.$$

(i), (ii), (iii) ノ各組ニ對シテハ何レモ

$$F_{xx}F_{yy}-F^2_{xy}=-a^2<0$$

トナリ, (iv) ニ對シテハ

$$F_{xx}F_{yy}-F^2_{xy}=\frac{a^2}{3}>0,\quad F_{xx}=-\frac{2a}{3}<0$$

トナル。

故ニ xyz ハ $x=y=z=\dfrac{a}{3}$ ナルトキ極大トナリ, 其極大値ハ $\dfrac{a^3}{27}$ ナリ。其他ニ極値ナシ。

附言. 此問題ハ幾何學的ニ考フレバ, 直六面體ノ稜ノ總和ガ一定 $(4a)$ ナルトキ其體積ノ極大ナルモノヲ求ムルコトニ相當ス。

57. 二ツヨリ多クノ變數ノ函數

二ツノ變數ノ函數ニツイテ以上述ベ來レル定義及ビ公式等ハ直チニ之ヲ二ツヨリ多クノ變數ヲ有スル函數ノ場合ニ擴張スルコトヲ得。煩雜ヲ避クルタメニココニハ一一證明ヲ揭ゲズ, 主

ナル結果ノミヲ次ニ擧グ。

(I) n 個ノ變數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ ノ函數ヲ表スニ

$$y=F(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$$

ト書ク。

モシ $x_1\to a_1, x_2\to a_2, \cdots\cdots, x_n\to a_n$ ナル極限ニ於テ

$$\lim F(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)=F(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$$

ナルトキハ, 此函數ハ $x_1=a_1, x_2=a_2, \cdots\cdots, x_n=a_n$ ニ於テ連續ナリトイフ。

(II) 上ノ函數ヲ x_1 ノミニ關シテ偏微分シタル結果ヲ

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}\quad 又ハ\quad F_{x_1}(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$$

等ト書ク。モシ又 x_1 ニ關シテ二度, x_2 ニ關シテ一度偏微分シタルトキハ

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x_1^2\partial x_2}\quad 又ハ\quad F_{x_1x_1x_2}(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$$

等ト書ク。

偏導函數ガ連續ナルトキハ微分ノ順序ヲ變ズルモ結果ニ於テ異ルコトナシ。

(III) $y=F(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ ニ於テ

$$x_1=\phi_1(t),\quad x_2=\phi_2(t),\quad \cdots\cdots,\quad x_n=\phi_n(t)$$

ナルトキハ,

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\cdots\cdots+\frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

(IV) Taylor ノ定理ヲ擴張スレバ次ノ如シ。

$$\mathrm{F}(x_1+h_1, x_2+h_2, \cdots\cdots, x_n+h_n)$$

$$= \mathrm{F}(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\mathrm{F}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots\cdots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2\mathrm{F}(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{(k-1)!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k-1}\mathrm{F}(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \mathrm{R}_k.$$

而シテココニ

$$\mathrm{R}_k = \frac{1}{k!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k\mathrm{F}(x_1+\theta h_1, x_2+\theta h_2, \cdots, x_n+\theta h_n),$$

但シ $0 < \theta < 1$.

(V) $\mathrm{F}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ノ極値ヲ求ムルニハ，先ヅ聯立方程式

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{F}_{x_1}(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) = 0, \\ \mathrm{F}_{x_2}(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{F}_{x_n}(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) = 0 \end{array}\right\}$$

ヲ解キテ根ノスベテノ組ヲ求メ，其各組ノ値ニ對シテ

$$\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots\cdots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2\mathrm{F}(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$$

ノ符號ヲ調ブベシ。モシ其符號ガ絶對値ノ十分小ナルスベテノ

$h_1, h_2, \cdots\cdots, h_n$ ノ値ニ對シテ(スベテガ同時ニ 0 ナル場合ヲ除キ)常ニ正ナラバ原函數ハ極小トナリ，常ニ負ナラバ原函數ハ極大トナルモノナリ。

例. 空間ニ n 個ノ點 (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), ……, (a_n, b_n, c_n) アリ，コレラノ點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ極小トナル如キ點ノ位置ヲ求ム。

求ムル點ノ座標ヲ (x, y, z) トシ，

$$\mathrm{F}(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n}\{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2\}$$

ト置ケバ，

$$\mathrm{F}_x(x, y, z) = 2\sum_{i=1}^{n}(x-a_i) = 2nx - 2\sum_{i=1}^{n}a_i,$$

$$\mathrm{F}_y(x, y, z) = 2\sum_{i=1}^{n}(y-b_i) = 2ny - 2\sum_{i=1}^{n}b_i,$$

$$\mathrm{F}_z(x, y, z) = 2\sum_{i=1}^{n}(z-c_i) = 2nz - 2\sum_{i=1}^{n}c_i.$$

故ニ此三ツヲ悉ク 0 ナラシムル値ハ

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}, \quad y = \frac{\sum_{i=1}^{n}b_i}{n}, \quad z = \frac{\sum_{i=1}^{n}c_i}{n} \tag{1}$$

ナリ。マタ

$$\mathrm{F}_{xx} = 2n, \quad \mathrm{F}_{yy} = 2n, \quad \mathrm{F}_{zz} = 2n,$$

$$\mathrm{F}_{yz} = 0, \quad \mathrm{F}_{zx} = 0, \quad \mathrm{F}_{xy} = 0$$

ナルヲ以テ，h_1, h_2, h_3 ガ同時ニ 0 ナラザル限リ常ニ

$$\left(h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y} + h_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\mathrm{F}(x, y, z)$$

$$= 2n(h_1{}^2+h_2{}^2+h_3{}^2) > 0.$$

故ニ題意ニ適スル點ハ唯一ツアリ，(1) ナル座標ヲ有スルモノナリ。

58. 一ツノ變數ノ陰函數

二ツノ變數 x, y ノ間ニ $\mathrm{F}(x, y)=0$ ナル關係アルトキ，y ヲ x ノ **陰函數** ト稱スルコトハ第 3 節ニ之ヲ述ベタリ。此場合ニ y ハ一般ニハ x ノ多價函數ナレドモ，今其中ノ一ツノ價ヲトリタルトキ之ガ x ノ連續函數ニシテ且微分可能ナルモノト假定ス。

ソノ y ヲ x ニ關シテ微分スルニハ次ノ如クスベシ。

先ヅ $\mathrm{F}(x, y)=0$ ノ兩邊ヲ x ニ關シテ微分スレバ(第 54 節 (3) ニヨリ)，

$$\mathrm{F}_x+\mathrm{F}_y\frac{dy}{dx}=0, \tag{1}$$

但シ F_x ハ $\mathrm{F}_x(x, y)$ ノ略ナリ，其他之ニ準ズ。依ツテ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\mathrm{F}_x}{\mathrm{F}_y} \tag{2}$$

トナル。$\mathrm{F}(x, y)$ ガ實際 y ヲ含ムトキハ F_y ガ恒等的ニ 0 トナルコトナキヲ以テ，$\dfrac{dy}{dx}$ ハ一般ニ (2) ヨリテ決定セラル。タダ特ニ(恒等的ナラズシテ) $\mathrm{F}_y=0$ トナル如キ x 及ビ y ノ値ニ對シテハ $\dfrac{dy}{dx}$ ハ有限確定値ヲ有セズ。

(1) ヲ更ニ x ニ關シテ微分スレバ

$$\mathrm{F}_{xx}+2\mathrm{F}_{xy}\frac{dy}{dx}+\mathrm{F}_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\mathrm{F}_y\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

從ツテ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\mathrm{F}_{xx}+2\mathrm{F}_{xy}\dfrac{dy}{dx}+\mathrm{F}_{yy}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\mathrm{F}_y}.$$

ココニ (2) ヲ代入スレバ

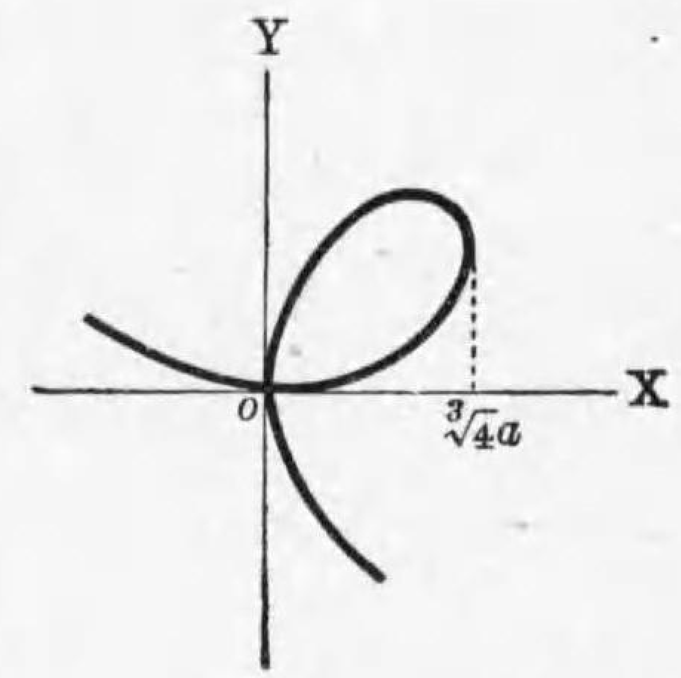
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\mathrm{F}_{xx}\mathrm{F}_y^2-2\mathrm{F}_{xy}\mathrm{F}_x\mathrm{F}_y+\mathrm{F}_{yy}\mathrm{F}_x^2}{\mathrm{F}_y^3} \tag{3}$$

ヲ得。

例ヘバ

$$x^3-3axy+y^3=0,\quad a>0 \tag{4}$$

ナルトキハ，y ハ x ノ代數函數ニシテ，$0\leqq x\leqq\sqrt[3]{4}a$ ナルトキハ三價，其他ノ x ニ對シテハ一價ノ函數ナルコトハ三次方程式ノ性質ニヨリテ容易ニ判定セラル。三次方程式ノ代數的解法ニヨレバ y ヲ x ノ陽函數ニ直スコトヲ得，ソノ結果ニヨリテ見レバ y ハ $x=0$ 及ビ $x=\sqrt[3]{4}a$ ヲ除クノ他 x ノ連續函數ニシテ微分可能ナルコトヲ知ルベシ。然レドモ，今 y ヲ z ノ陰函數ノママニテ微分スレバ，(2), (3) ニヨリ



第三十九圖

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-ay}{ax-y^2}, \tag{5}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2a^3xy}{(ax-y^2)^3} \tag{6}$$

ヲ得。

陰函數 y ノ極値ヲ求ムルタメニ (5) ヲ 0 ニ等シト置ケバ

$$x^2-ay=0$$

ヲ得，之ト (4) トヲ聯立方程式トシテ解ケバ次ノ二組ノ根ヲ得：

(i) $x=0,\ \ y=0,$　　(ii) $x=\sqrt[3]{2}a,\ \ y=\sqrt[3]{4}a.$

然レドモ (i) ノ根ハ $\dfrac{dy}{dx}$ ノ分子, 分母ヲ共ニ 0 ナラシムルニヨリ之ニ就イテハ特別ノ吟味ヲ要ス(第 68, 69 節參照)。(ii) ノ根ヲ (6) ニ代入スレバ $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ トナルガ故ニ $x=\sqrt[3]{2}\,a$ ナルトキニ y ハ極大トナリ, ソノ極大値ハ $\sqrt[3]{4}\,a$ ナリ。

注意. 陰函數 y ノ極値ヲ求ムルトキニハ常ニ

$$\frac{dy}{dx}=0 \qquad 從ツテ \qquad \mathrm{F}_x=0$$

ナラシムル如キ x 及ビ y ノ値ニツイテ考フルニヨリ, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ノ符號ヲ調ブルニ際シテハ必ズシモ (3) ヲ用キルヲ要セズ, (3) ノ中ニテ $\mathrm{F}_x=0$ ト置キテ得ル

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\mathrm{F}_{xx}}{\mathrm{F}_y}$$

ヲ代用スルコトヲ得。

或場合ニハ一ツヨリ多クノ陰函數ガ聯立方程式ニヨリテ定義セラルルコトアリ。例ヘバ

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{F}_1(x, y_1, y_2)&=0,\\ \mathrm{F}_2(x, y_1, y_2)&=0\end{aligned}\right\}$$

ナルトキハ, y_1 及ビ y_2 ハ何レモ x ノ陰函數ナリ。コレラノ x ニ關スル導函數ヲ求メンニハ, 先ヅコノ二式ヲ微分シテ,

$$\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx}+\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx}=0,$$

$$\frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx}+\frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx}=0$$

ヲ得, 之ヲ解キテ $\dfrac{dy_1}{dx}$ 及ビ $\dfrac{dy_2}{dx}$ ヲ求ムベシ。即チ

$$\frac{dy_1}{dx}=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}},\qquad \frac{dy_2}{dx}=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}}.$$

59. 多クノ變數ノ陰函數

n 個ノ變數 $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ノ陰函數 y ハ一般ニ

$$\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, y)=0$$

ナル形ノ方程式ニヨリテ與ヘラル。之ヲ $x_i\,(i=1, 2, \ldots\ldots, n)$ ニ關シテ微分スレバ

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_i}=0, \tag{1}$$

從ツテ

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}}$$

ナリ。高次ノ導函數ヲ求ムルニハ前節ニ於ケルガ如ク (1) ヲ更ニ微分シテ之ヲ得ベシ。

一ツヨリ多クノ陰函數ガ聯立方程式ニヨリテ與ヘラルル場合ニモ前節ニ於ケルト同樣ニシテ之ヲ微分スルコトヲ得。例ヘバ

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{F}_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, y_1, y_2)&=0,\\ \mathrm{F}_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, y_1, y_2)&=0\end{aligned}\right\}$$

ナルトキハ,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i}=0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_i}+\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ニシテ, 之ヲ解ケバ $\frac{\partial y_1}{\partial x_i}$ 及ビ $\frac{\partial y_2}{\partial x_i}$ ヲ得。

第七章ノ問題

1. 次ノ各函数ヲ $F(x, y)$ トスルトキ, F_{xx}, F_{xy}, F_{yy} ヲ計算セヨ：

(1) $\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,　　(2) $\sin^{-1}\frac{x}{y}$.

2. $z=\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ ナルトキ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ヲ求メ, 其 $x\to 0$, $y\to 0$ ナルトキノ極限値ハ x ト y トノ相互ノ關係ニヨリテ一定セザルコトヲ示セ。

3. $z=f_1(y+ax)+f_2(y-ax)$ ナルトキハ, f_1 及ビ f_2 ノ如何ニ關ハラズ,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

附言. カクノ如キ場合ニハ與ヘラレタル函数 z ハ此 **偏微分方程式** ヲ **滿足セシム** ト稱ス。或ハ原式ヨリ f_1 及ビ f_2 ナル函数ヲ **消去** シテ此偏微分方程式ヲ得トモ稱セラル。

4. $u=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ハ次ノ偏微分方程式ヲ滿足セシムルコトヲ示セ：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

附言. 之ヲ **Laplace ノ方程式** ト稱ス。

5. $u=f(x^2-y^2)$ ヨリ f ナル函数ヲ消去スレバ

$$y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

ヲ得ルコトヲ示セ。

6. $u=\frac{1}{x}f\left(\frac{y}{x}\right)$ ヨリ f ナル函数ヲ消去セヨ。

7. $z=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ ヨリ $\tan^{-1}$ ナル函数ヲ消去スレバ, 二ツノ變數ノ場合ニ於ケル Laplace ノ方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

ヲ得ルコトヲ示セ。

8. $z=(x-y)\log\frac{x}{y}$ ヨリ $\log$ ナル函数ヲ消去セヨ。

9. 先ヅ $F(x+h, y+k)$ ヲ h ノ冪級數ニ展開シ得ルモノトシ, 次ニ其展開式ノ

各項ヲ更ニ k ノ羃級數ニ展開シ得ルモノトシ，最後ニ其結果ノ級數ニ於テ項ノ順序ヲ任意ニ變更シ得ルモノト考ヘテ，Taylor ノ定理ノ擴張ヲ證明セヨ。

10. $F(x, y)$ ガ n 次ノ同次函數ナルトキハ，任意ノ常數 a ニ對シテ

$$F(x+ax, y+ay) = (1+a)^n F(x, y)$$

ナル關係アリ。今 $|a|<1$ トシテ，コノ兩邊ヲ a ノ羃級數ニ展開シ，兩邊ニ於ケル a ノ同ジ羃ノ係數ヲ比較スルコトニ依ツテ Euler ノ定理(第 54 節)ヲ證明セヨ。(Lagrange ノ證明法)

11. 次ノ函數ノ極値ヲ求メヨ：

(1) $x^3-3axy+y^3$, $a>0$, (2) $x^2+xy+y^2+\dfrac{3(x+y)}{xy}$,

(3) $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$,

(4) $e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)$, $a>0$, $b>0$.

12. 四邊形ノ各邊ノ長サガ夫夫一定ナルトキ，其面積ヲ最大ナラシメヨ。

13. 周圍ノ長サガ一定ナル三角形ノ中ニテ其面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ。

14. 定圓ニ內接スル最大面積ノ三角形ヲ求メヨ。

15. 一定ノ體積ヲ有シ表面積ノ最小ナル直六面體ヲ求メヨ。

16. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ナルトキ，xyz ノ極値ヲ求メヨ。

17. 三角形ノ內部ノ一點ヨリ三邊ニ下セル垂線ノ積ガ最大ナル樣ニ其點ノ位置ヲ定メヨ。

18. 空間ニ於ケル直交軸ニ關シ，平面 $lx+my+nz=p$ 上ニ於テ原點ヨリノ距離ガ最小ナル點ノ座標如何，但シ l, m, n ハ此平面ノ方向餘弦トス。

19. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ナルトキ，y' 及ビ y'' ヲ求メヨ。

20. 聯立方程式

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \qquad lx+my+nz=p$$

ヨリ，$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$ ヲ求メヨ。

21. 聯立方程式

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \qquad x^2+y^2=2ax$$

ヨリ，y_x, z_x, y_{xx}, z_{xx} ヲ求メヨ。

22. 次ノ陰函數 y ノ極値ヲ求メヨ：

(1) $x^3y^3+y-x=0$, (2) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

23. $y=x^y$ ナルトキハ，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x(1-y\log x)}$$

ナルコトヲ示セ。

24. $\dfrac{y}{x}=\log\dfrac{y}{a+bx}$ ナルトキハ，

$$x(y-x)(a+bx)\frac{dy}{dx}=y\{(a+bx)y-bx^2\}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

25. $z=f(x, y)$ ガ $ax+by$ ノミノ函數ナルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ

$$b\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial y}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

第八章

平面曲線

60. 直角座標ニ於ケル平面曲線ノ方程式

本章ニ於テハ微分法ヲ應用シテ平面曲線ノ種種ノ性質ヲ論ゼントス。先ヅ最初ハ直角座標ヲ用キテ平面曲線ノ方程式ヲ作ルコトトシ，其方程式ハ次ノ三種ノ中ノ何レカヲ用キルモノトス：

$$y=f(x), \qquad (1)$$

$$F(x, y)=0, \qquad (2)$$

$$x=\phi(t), \quad y=\psi(t). \qquad (3)$$

注意. 以下特ニ斷リナキ限リ f, F, ϕ, ψ 等ノ函數ハ考フル所ノ變域ニ於テ一價ニシテ且必要ナル度數ダケ微分可能ナリトシ，又ソノ逐次導函數モ連續ナルモノト假定スベシ。(從ツテ原函數自身ハ勿論連續ナルコトトナル。)

(1) ハ (2) ノ特別ノ場合ナリ，又 (3) ヨリ媒介變數 t ヲ消去スレバ (2) 又ハ (1) ノ形ノ式ヲ得ベシ。

例. 圓ノ方程式

$$x^2+y^2-r^2=0$$

ハ (2) ノ形ニシテ，之ヲ (1) ノ形ニ直セバ

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

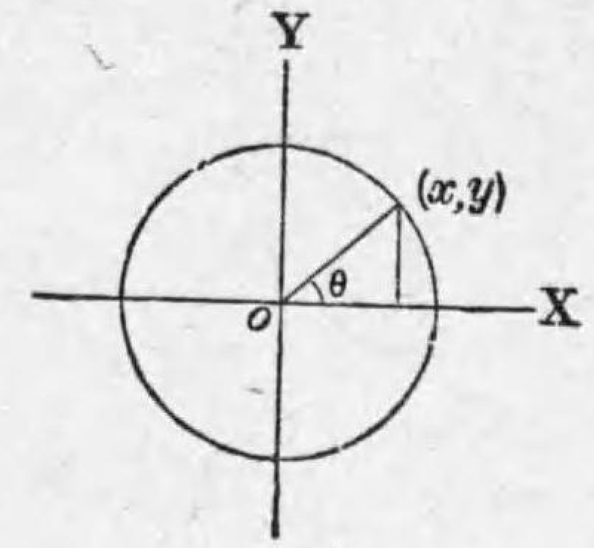
トナル。モシ之ヲ (3) ノ形ニ書キ直セバ

$$x=r\cos\theta,$$
$$y=r\sin\theta$$

又ハ

$$x=r\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y=r\frac{2t}{1+t^2} \qquad \left(t=\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

等トスルコトヲ得。



第四十圖

或場合ニハ (1) 又ハ (2) ノ形ヲ以テ與ヘラレタル式ヲ殊更ニ (3) ノ形ニ直ス方ガ便利ナルコトアリ。(第 73 節例 2 ヲ見ヨ。)

例. 曲線 $x^3-3axy+y^3=0$ ヲ媒介變數ヲ用キタル方程式ニテ表セ。

今 $y=xt$ ナル如キ媒介變數 t ヲ用キルコトトシ，之ヲ上ノ式ニ代入スレバ

$$x^3-3ax(xt)+(xt)^3=0,$$

從ツテ

$$x-3at+xt^3=0$$

トナル。之ヨリ

$$x=\frac{3at}{1+t^3} \quad \text{從ツテ} \quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}$$

ヲ得。

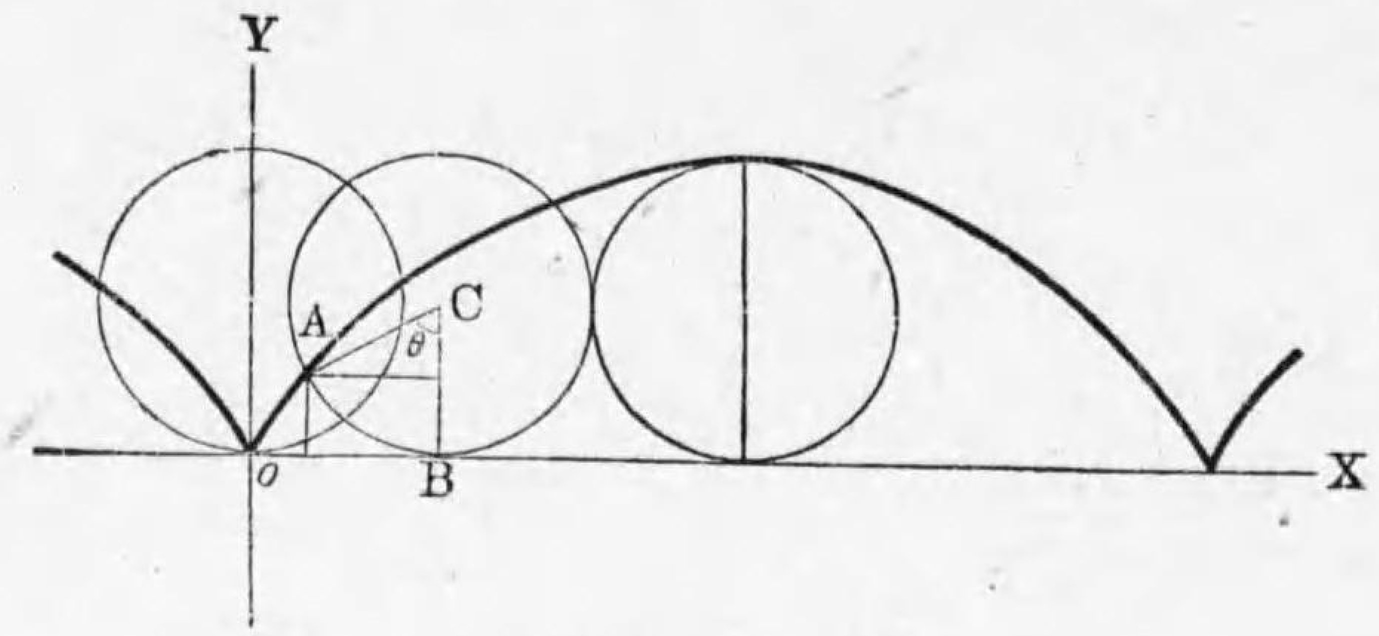
又或場合ニハ或曲線ノ方程式ヲ求ムルトキ自然ニ媒介變數ノ入リ來ルコトアリ。

例. 半徑 a ナル圓ガ一定直線上ヲ滑ルコトナクシテ轉走スルトキ，其圓周上ノ一定點ノ軌跡ヲ求ム。

圓周上ノ定點ガ定直線ニ觸ルルトキ其點ヲ原點トシ，定直線ヲ x 軸，之ニ垂直ナル直線ヲ y 軸トス。

定點ガ原點ヨリ發シテ A ナル位置ニ來リシトキ，圓ノ中心ヲ C，圓ト x 軸トノ切點ヲ B トシ，$\angle ACB=\theta$ トスレバ，

$$\text{線分 } \overline{OB}=\text{弧 } \widehat{AB}=a\theta$$



第四十一圖

ナリ。故ニ A ノ座標ヲ (x, y) トスレバ

$$x = \mathrm{OB}-\mathrm{AC}\sin\theta = a\theta - a\sin\theta = a(\theta-\sin\theta),$$

$$y = \mathrm{BC}-\mathrm{AC}\cos\theta = a - a\cos\theta = a(1-\cos\theta).$$

卽チ求ムル軌跡ノ方程式ハ

$$x = a(\theta-\sin\theta),\qquad y = a(1-\cos\theta)$$

ニシテ，ココニ θ ハ媒介變數ナリ。

モシ θ ヲ消去セント欲セバ，第二式ヨリ

$$\theta = \cos^{-1}\frac{a-y}{a}$$

ヲ出シ，之ヲ第一式ニ入ルレバ

$$x = a\cos^{-1}\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay-y^2}$$

ヲ得。然レドモ多クノ場合ニ於テハ媒介變數ヲ用キタルママニナシ置クヲ便トス。

此曲線ヲ **擺線** トイフ。

例題． 一ツノ圓ガ一定直線上ヲ滑ルコトナクシテ轉走スルトキ，其圓周上ニアラザル一定點(其圓ニ對シテ固定セル一點)ノ軌跡如何。

此曲線ヲ **餘擺線** トイフ。

61. 切線及ビ法線

曲線上ニアル二ツノ相異リタル點ヲ P, Q トシ，直線 PQ ヲ引キ，次ニ P ヲ固定シ置キテ Q ヲ此曲線ニ沿ヒテ限リナク P

ニ近ヅカシムルトキ，直線 PQ ガ或一定ノ直線ニ限リナク近ヅクトキハ，其一定ノ直線ヲ稱シテ點 P ニ於ケル此曲線ノ **切線** トイヒ，P ヲ其 **切點** トイフ。

曲線ノ方程式ガ $y=f(x)$ ナルトキハ，其上ノ一點 (x, y) ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\mathrm{Y}-y = f'(x)(\mathrm{X}-x).$$

卽チ
$$\boldsymbol{\mathrm{Y}-y = \frac{dy}{dx}(\mathrm{X}-x)} \tag{1}$$

ナリ(第 16 節 (III))，但シ X, Y ハ流通座標トス。

モシ曲線ノ方程式ガ $\mathrm{F}(x, y)=0$ ナルトキハ，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}}{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}} \tag{A}$$

ナルヲ以テ(第 58 節)，切線ノ方程式ハ

$$\boldsymbol{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(\mathrm{X}-x)+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}(\mathrm{Y}-y)=0} \tag{2}$$

トナル。

モシマタ曲線ノ方程式ガ $x=\phi(t),\ y=\psi(t)$ ナルトキハ，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \tag{B}$$

ナルヲ以テ(第 18 節 (VI))，切線ノ方程式ハ

$$\frac{\mathrm{X}-x}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\mathrm{Y}-y}{\dfrac{dy}{dt}} \tag{3}$$

トナル。

注意. 上ノ諸式ニ於テ x, y, t 等ハ何レモ既知常數, 從ツテ又 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dx}{dt}$ 等モ既知常數ナリ。若シ x, y, t 等ガ他ノ文字又ハ數字ヲ以テ與ヘラレタルトキニハ, X, Y 等ノ代リニ通常ノ如ク x, y ヲ用キルモ差支ナシ。

曲線上ノ一點ヲ過リ, 其點ニ於ケル切線ニ垂直ナル直線ヲ其點ニ於ケル **法線** トイヒ, 其點ヲ法線ノ **足** トイフ。

曲線上ノ一點 (x, y) ニ於ケル法線ノ方程式ハ次ノ如シ:

$$\mathrm{Y}-y=-\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}(\mathrm{X}-x), \tag{1'}$$

$$\frac{\mathrm{X}-x}{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}}=\frac{\mathrm{Y}-y}{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}}, \tag{2'}$$

$$\frac{dx}{dt}(\mathrm{X}-x)+\frac{dy}{dt}(\mathrm{Y}-y)=0. \tag{3'}$$

注意. 一般ニ曲線ノ方程式 $y=f(x)$ ニツイテ或公式ヲ得タルトキハ, 常ニ上記 (A), (B) ノ二式ニヨリテ同ジ曲線ノ他ノ形ノ方程式ニツイテノ公式ヲ求ムルコトヲ得。依ツテ以下ノ諸節ニ於テハ主トシテ $y=f(x)$ ナル形ノ方程式ニ關スル公式ノミヲ擧グルコトトスベシ。(ナホ公式ノ變換ニツイテハ第九章ニ詳論スベシ。)

曲線上ノ一點 $\mathrm{P}(x, y)$ ニ於ケル切線及ビ法線ガ x 軸ト交ル點ヲ夫夫 T 及ビ N トシ, 又 P ヨリ x 軸ニ下セル垂線ノ足ヲ M トスルトキ,

$\mathrm{TM}=\left|\dfrac{y}{y'}\right|$ ヲ**切線影,**

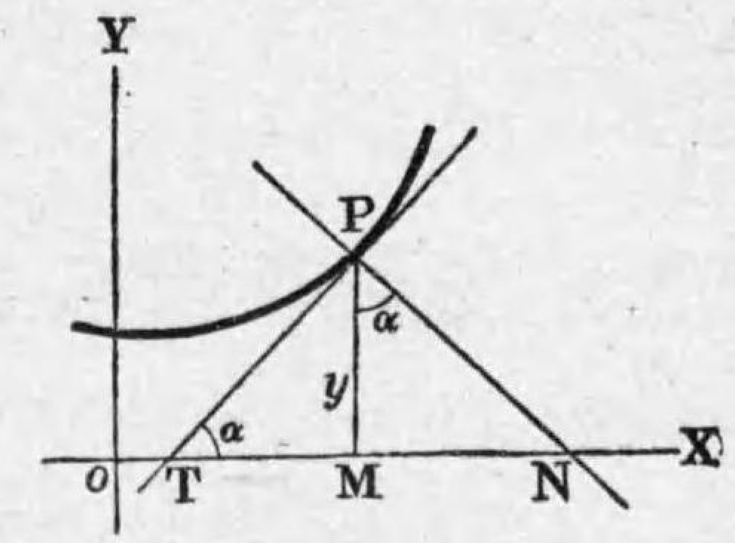
$\mathrm{MN}=|yy'|$ ヲ**法線影,**

$\mathrm{PT}=\left|\dfrac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|$

ヲ**切線ノ長サ,**

$\mathrm{PN}=|y\sqrt{1+y'^2}|$

ヲ**法線ノ長サ**



第四十二圖

ト名付ク。

例. 二次曲線

$$\mathrm{F}(x, y)=\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

上ノ一點 (x, y) ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求ム。

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}=\frac{2x}{a^2}, \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}=\pm\frac{2y}{b^2}.$$

故ニ切線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a^2}(\mathrm{X}-x)\pm\frac{y}{b^2}(\mathrm{Y}-y)=0.$$

之ヲ書キ直セバ

$$\frac{x\mathrm{X}}{a^2}\pm\frac{y\mathrm{Y}}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2},$$

即チ

$$\frac{x\mathrm{X}}{a^2}\pm\frac{y\mathrm{Y}}{b^2}=1$$

トナル。

又法線ノ方程式ハ

$$\frac{\mathrm{X}-x}{\dfrac{x}{a^2}}=\frac{\mathrm{Y}-y}{\pm\dfrac{y}{b^2}},$$

之ヲ書キ直セバ

$$\frac{a^2\mathrm{X}}{x}\mp\frac{b^2\mathrm{Y}}{y}=a^2\mp b^2$$

トナル。

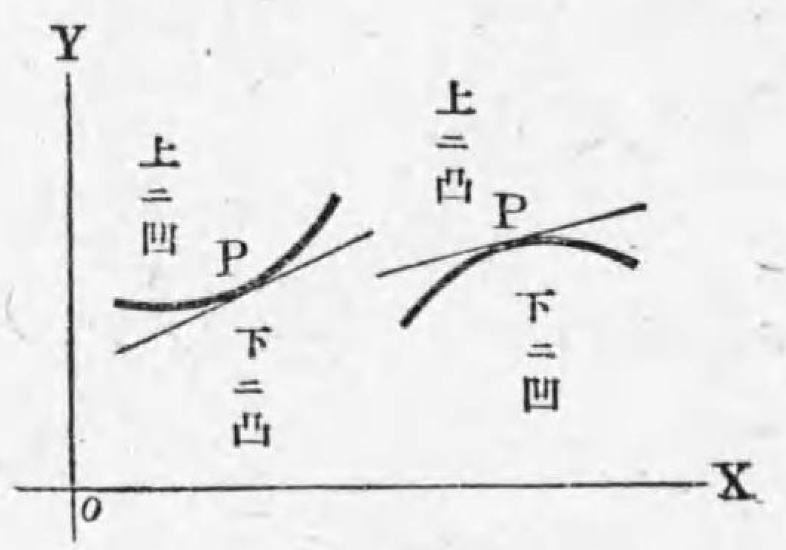
例題. 切線影, 法線影及ビ切線ノ長サヲ表ス式ニ於テ, 絶對値ノ記號ヲ省クトキ

ハ, 曲線ガ x 軸ヨリ遠ザカルトキ(即チ x 軸ヨリ上ニアリテ上昇スルカ又ハ下ニアリテ下降スルトキ)コレラノ長サハ正トナリ, 曲線ガ x 軸ニ近ヅクトキ負トナルコトヲ證明セヨ。

62. 曲線ノ凹凸及ビ彎曲點

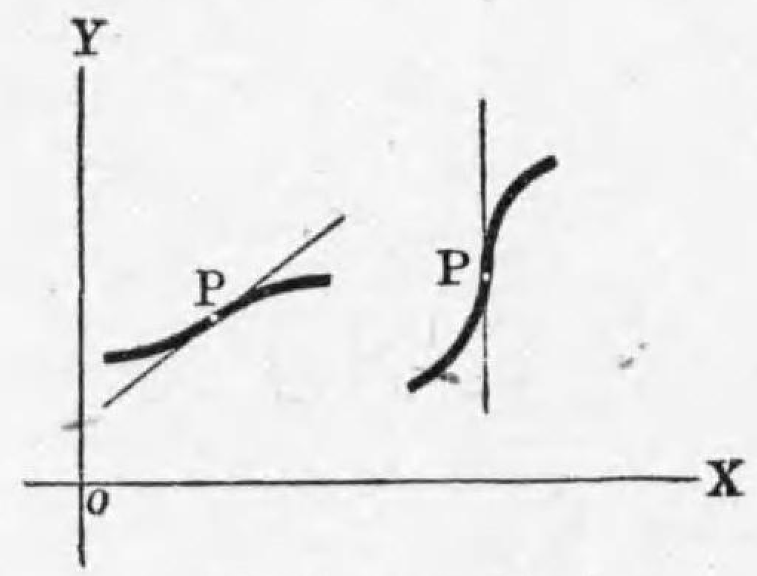
曲線上ノ一點 P ニ於テ切線ヲ引キタリトシ, 今ソノ切點ノ近傍ニ於ケル曲線ト切線トノ關係ヲ考ヘントス。

P ニ於ケル切線ハ y 軸ニ平行ナラザルモノトシ, P ノ近傍ニ於テ P ノ左右*兩側ニ於テ常ニ曲線ガ切線ヨリ上* ニアルトキハ曲線ハ P ニ於テ **上ニ凹** 又ハ **下ニ凸** ナリトイヒ, 之ニ反シテ P ノ兩側ニ於テ常ニ曲線ガ切線ヨリ下ニアルトキハ曲線ハ P ニ於テ **上ニ凸** 又ハ **下ニ凹** ナリトイフ。



第四十三圖

又或場合ニハ P ノ近傍ニ於テ, P ノ左右何レカ一方ニ於テハ曲線ガ切線ヨリ上ニアリ, 他方ニ於テハ下ニアルコトアルベシ。斯クノ如キ點 P ヲ **彎曲點** トイフ。彎曲點ハ

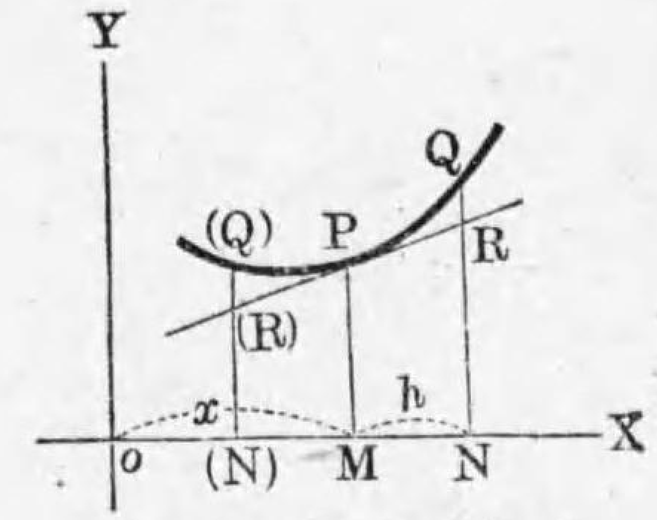


第四十四圖

* x 座標ノ大ナル方ヲ右, 小ナル方ヲ左トシ; 又 y 座標ノ大ナル方ヲ上, 小ナル方ヲ下トス。

曲線ノ凹凸ノ移リ變ル點ナリ。

P ニ於ケル切線ガ y 軸ニ平行ナルトキハ, P ニ於テハ上又ハ下ニ向ツテ凹凸何レトモ稱スルコト能ハザレドモ, 若シ P ヲ境トシテ其左方ト右方トニ於テ上又ハ下ニ對スル凹凸ノ狀態ガ相反スルトキハ矢張 P ヲ彎曲點ト稱ス。



第四十五圖

今曲線ノ方程式ヲ $y=f(x)$ トシ, 其上ノ一點 P(x, y) ニ於ケル凹凸ノ狀態ヲ吟味セントス。

P ノ縱線ヲ PM, 横線ヲ OM トシ, OM ト少シク異ル横線 ON ニ對スル曲線上ノ點ヲ Q, 切線上ノ點ヲ R トス。但シ N ハ M ノ左右何レニアリトスルモ可ナリトシ, 從ツテ MN $=h$ ト置ケバ, h ハ正又ハ負ナリトス。

サテ P ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$Y-y=f'(x)(X-x)$$

即チ

$$Y=f(x)+f'(x)(X-x)$$

ナルヲ以テ, ココニ

$$X=x+h$$

ト置ケバ, Y ハ RN ノ長サヲ表スベシ, 即チ

$$NR=f(x)+f'(x)h$$

ナリ。又一方ニ於テ

$$\mathrm{NQ} = f(x+h)$$
$$= f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x+\theta h)h^2, \quad 0<\theta<1. \qquad (2)$$

故ニ

$$\mathrm{NQ}-\mathrm{NR} = \frac{1}{2!}f''(x+\theta h)h^2 \qquad (3)$$

ナリ。

今考フル點 P ニ於テ $f''(x)>0$ ナルトキハ, h ノ絶對値ガ十分小ナルトキハ $f''(x+\theta h)>0$ ナルヲ以テ (第 9 節定理 1), h ノ正負ニ關ハラズ常ニ $\mathrm{NQ}>\mathrm{NR}$ ナリ, 卽チ曲線ハ P ニ於テ上ニ凹ナリ。

モシ $f''(x)<0$ ナルトキハ, 同樣ノ推理ニヨリ, P ニ於テ上ニ凸ナリ。

モシ又 P ニ於テ $f''(x)=0$, $f'''(x)\neq 0$ ナルトキハ, (2) ノ代リニ更ニ一項先キマデ取リタル展開式ヲ用キレバ,

$$\mathrm{NQ}-\mathrm{NR} = \frac{1}{3!}f'''(x+\theta h)h^3, \quad 0<\theta<1 \qquad (4)$$

ヲ得。然ルニ此式ノ右邊ニ於テ h ノ絶對値ガ十分小ナルトキハ $f'''(x+\theta h)$ ハ $f'''(x)$ ト同一ナル一定ノ符號ヲ有スレドモ, h^3 ハ h ノ正負ニヨリテソノ符號ヲ變ズ。故ニ結局 h ノ正負ニヨリテ NQ ト NR トハソノ大小ノ關係ガ反對トナル, 卽チ曲線ハ P ノ一方ノ側ニ於テハ切線ヨリ上ニアリ, 他方ノ側ニ於テハ切線ヨリ下ニアルベシ。故ニ此場合ニハ P ハ彎曲點ナリ。

モシ $f''(x)=0$ ニシテ且 $f'''(x)=0$ ナルトキハ, (4) ノ右

邊ニ於テ $f'''(x+\theta h)$ ガ必ズシモ一定ノ符號ヲ有セザルニヨリ上ノ理論ハ成立セズ。此場合ニハ更ニ展開式ノ今一項先キマデ進ミテ吟味セザルベカラズ。

今一般ニ P ニ於テ

$$f''(x) = f'''(x) = \cdots\cdots = f^{(n-1)}(x) = 0, \quad f^{(n)}(x) \neq 0$$

ナリトスレバ, (3) 又ハ (4) ノ代リニ

$$\mathrm{NQ}-\mathrm{NR} = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)h^n, \quad 0<\theta<1$$

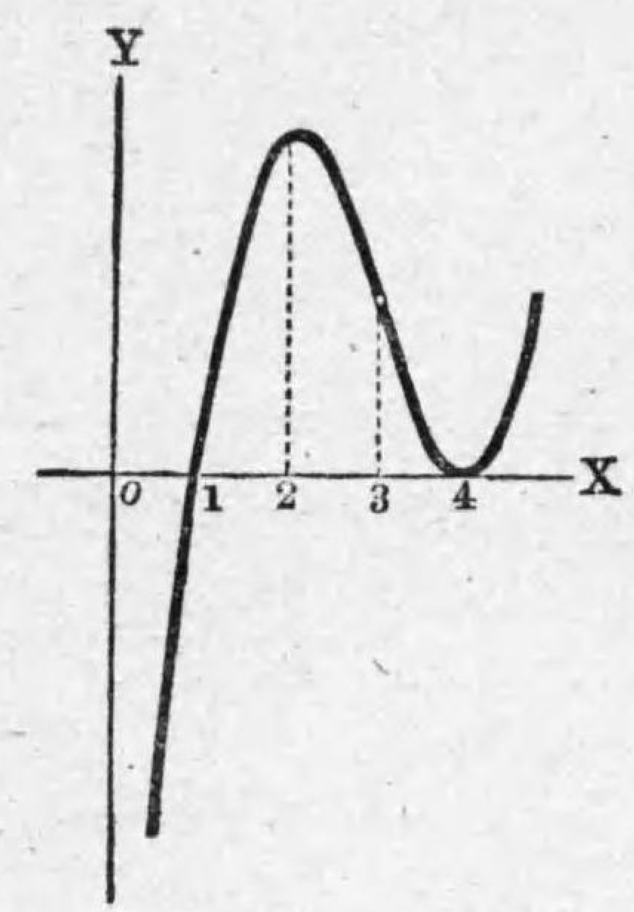
ヲ得。之ニツイテ上ト同樣ニ考フレバ次ノ結果ヲ得。

n ガ偶數ニシテ $f^{(n)}(x)>0$ ナルトキハ, 上ニ凹ナリ,

$f^{(n)}(x)<0$ ナルトキハ, 上ニ凸ナリ,

n ガ奇數ナルトキハ, 彎曲點ナリ。

故ニ曲線 $y=f(x)$ 上ノ彎曲點ヲ求ムルニハ, 先ヅ $f''(x)$ ヲ 0 ナラシムル x ノ値ヲ求メ, ソノ値ヲ通過スルトキ $f''(x)$ ガ符號ヲ變ズルカ, 又ハソノ値ヲ代入スルトキ $f'''(x)$, $f''''(x)$, …… 等ノ中初メテ 0 ナラザルモノガ奇數ノ n ニ對スル $f^{(n)}(x)$ ナラバ其 x ハ彎曲點ノ横座標ナリト斷定スベシ。



第四十六圖

但シ上ノ方法ハ $f^{(n)}(x)$ ガ有限ニシテ連續ナリト假定シテノコトナルヲ忘ル可カラズ。モシ $f^{(n)}(x)$

ガ不連續點ヲ有スレバ其點ハ別ニ吟味スルヲ要ス。

例 1. 曲線 $y=x^3-9x^2+24x-16$ ニ於テハ

$$y'=3x^2-18x+24,$$

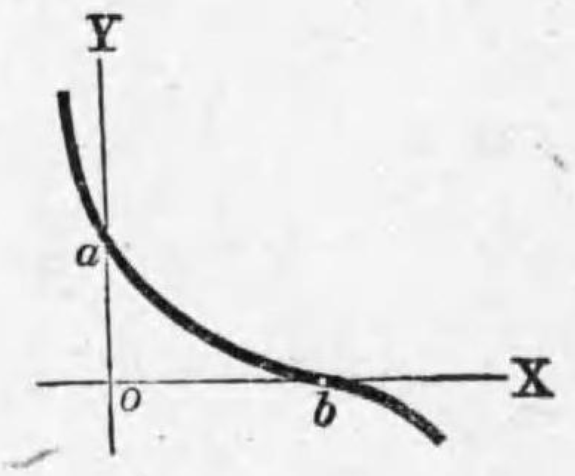
$$y''=6x-18=6(x-3).$$

故ニ　$x<3$ ナルトキハ上ニ凸, $x>3$ ナルトキハ上ニ凹ニシテ, $x=3$ ナル點ハ彎曲點ナリ。(第四十六圖)

例 2. 曲線 $y=a\left(1-\dfrac{x}{b}\right)^{\frac{5}{3}}$, $a>0,\ b>0$

ニ於テハ,　$$y'=-\frac{5a}{3b}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$y''=\frac{10a}{9b^2}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$



第四十七圖

故ニ $x<b$ ナルトキハ上ニ凹, $x>b$ ナルトキハ上ニ凸ナリ。又 $x=b$ ナルトキハ y'' ハ不連續ナレドモ, トニカク其點ニ於テ y'' ガ符號ヲ變ズルヲ以テ彎曲點ナリ。

例 3. 楕圓 $f(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ ニ於テハ, コノ方程式ヲ書キ直セバ

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad (1)$$

トナリ, 從ツテ　$$y''=\mp\frac{ab}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$$

ヲ得。故ニ (1). ニ於テ正號ヲトルトキ (卽チ楕圓ノ上半) ハ常ニ上ニ凸ニシテ, 負號ヲトルトキ (卽チ楕圓ノ下半) ハ常ニ上ニ凹ナリ。

モシ y ヲ x ノ陰函數ノママニテ微分スレバ (第 58 節 (3)),

$$f_x=\frac{2x}{a^2},\quad f_y=\frac{2y}{b^2},\quad f_{xx}=\frac{2}{a^2},\quad f_{xy}=0,\quad f_{yy}=\frac{2}{b^2},$$

$$y''=-\frac{\dfrac{2}{a^2}\cdot\dfrac{4y^2}{b^4}+\dfrac{2}{b^2}\cdot\dfrac{4x^2}{a^4}}{\dfrac{8y^3}{b^6}}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

故ニ $y>0$ ナルトキハ上ニ凸, $y<0$ ナルトキハ上ニ凹ナルコトヲ知ル。

例題 1. 凹凸ノ判定法ト第 50 節ニ述ベタル極値ノ判定法トノ關係ヲ考ヘヨ。

例題 2. 曲線 $y=\sin x$ ノ凹凸及ビ彎曲點ヲ吟味セヨ。

63. 切觸圓

切線ハ曲線上ノ限リナク相接近スル二點ヲ過ル直線ノ極限ノ位置ナリ, コノコトヲ略言シテ切線ハ曲線上ノ二ツノ **隣接點** ヲ過ルト稱ス。コノ考ヲ一步進メテ曲線上ノ三ツノ隣接點ヲ過ル圓ヲ考フルコトヲ得。卽チ, 曲線上ニ相異ナレル三點 P, Q, R ヲトレバ一般ニ之ヲ過ル一ツノ圓アリ, ココニ於テ P ヲ固定シ, Q ト R トヲ共ニ曲線ニ沿ヒテ限リナク P ニ接近セシムルトキ圓 PQR ガ或ル一定ノ圓ニ限リナク接近スルトキハ, 其一定ノ圓ヲ稱シテ點 P ニ於ケル此曲線ノ **切觸圓** トイフ。

今曲線ノ方程式ヲ $y=f(x)$ トシ, ソノ上ノ一點 $P(x_0,y_0)$ ニ於ケル切觸圓ノ中心及ビ半徑ヲ求メントス。

曲線上ニ P ノ他ニ二點 $Q(x_1,y_1)$, $R(x_2,y_2)$ ヲトリタリトシ, ココニ便宜上

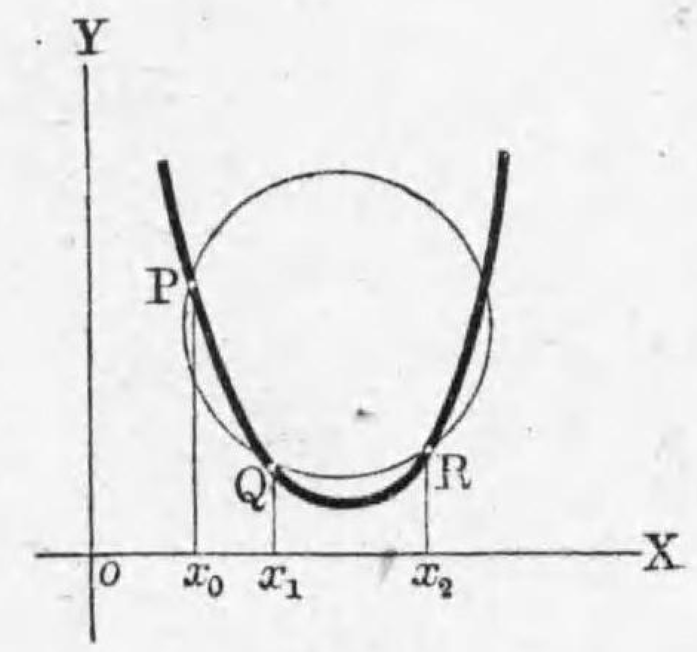
$$x_0<x_1<x_2$$

ト考フベシ (其他ノ場合モ同理ナリ)。三點 P, Q, R ヲ過ル圓ノ方程式ヲ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

トス。之ヲ書キ直セバ

$$y=b\pm\sqrt{r^2-(x-a)^2}$$



第四十八圖

トナル。此右邊ハ二價函數ナレドモ今ソノ中ニテ點 P ノ座標ニヨリテ滿足セシメラルル方ノ値ヲトリ，之ヲ $\phi(x)$ ニテ表スコトトスベシ。

然ルトキハ此圓ト曲線トハ三點 P, Q, R ヲ共有スルガ故ニ

$$\phi(x_0)=f(x_0),\quad \phi(x_1)=f(x_1),\quad \phi(x_2)=f(x_2) \qquad (1)$$

ナル關係アリ。依ツテ Rolle ノ定理ニヨリ

$$\left.\begin{aligned}&\phi'(x_3)=f'(x_3), && x_0<x_3<x_1,\\ \text{及ビ}\quad &\phi'(x_4)=f'(x_4), && x_1<x_4<x_2\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ナル如キ x_3 及ビ x_4 ノ値ガ存在セザル可カラズ。依ツテ再ビ同定理ニヨリ更ニ

$$\phi''(x_5)=f''(x_5),\qquad x_3<x_5<x_4 \qquad (3)$$

ナル如キ x_5 ノ値ガ存在セザル可カラズ。

ココニ於テ Q, R ガ共ニ曲線ニ沿ヒテ P ニ限リナク接近スルトキハ，x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ハ悉ク x_0 ニ限リナク接近スルニヨリ，極限ニ於テハ (1), (2), (3) ハ夫夫次ノ如クニナルベシ。

$$\phi(x_0)=f(x_0), \qquad (1')$$

$$\phi'(x_0)=f'(x_0), \qquad (2')$$

$$\phi''(x_0)=f''(x_0). \qquad (3')$$

コレ即チ圓 $y=\phi(x)$ ガ點 (x_0, y_0) ニ於ケル切觸圓ナルタメノ必要ナル條件ナリ。(之ガマタ十分ナル條件ナルコトハ第66節ニ至ツテ明カナリ。)

詳シクイヘバ (1′) ハ此圓ガ點 P ヲ過ルタメノ條件，(2′) ハ

此圓ト曲線トガ P ニ於テ相切スル (卽チ共通切線ヲ有スル) タメノ條件ニシテ，(3′) アルガタメニ此圓ト曲線トハ單ニ相切スル以上ニ更ニ密接ナル關係ヲ有スルコトトナルナリ。

サテ
$$\phi(x)=b\pm\sqrt{r^2-(x-a)^2}$$

ナルヲ以テ，之ヨリ

$$\phi(x_0)=b\pm\sqrt{r^2-(x_0-a)^2},$$

$$\phi'(x_0)=\mp\frac{x_0-a}{\sqrt{r^2-(x_0-a)^2}}=-\frac{x_0-a}{\phi(x_0)-b},$$

$$\phi''(x_0)=-\frac{\phi(x_0)-b-(x_0-a)\phi'(x_0)}{\{\phi(x_0)-b\}^2}=-\frac{1+\phi'(x_0)^2}{\phi(x_0)-b}$$

ヲ得。ココニ於テ (1′), (2′), (3′) ニヨリ，

$$f(x_0)=b\pm\sqrt{r^2-(x_0-a)^2}, \qquad (4)$$

$$f'(x_0)=-\frac{x_0-a}{f(x_0)-b}, \qquad (5)$$

$$f''(x_0)=-\frac{1+f'(x_0)^2}{f(x_0)-b} \qquad (6)$$

ナル關係ヲ得。

(6) ヨリ
$$b=f(x_0)+\frac{1+f'(x_0)^2}{f''(x_0)},$$

從ツテ (5) ヨリ

$$a=x_0-\frac{\{1+f'(x_0)^2\}f'(x_0)}{f''(x_0)}$$

ヲ得。コレラヲ (4) ニ代入スレバ

$$r^2=\{f(x_0)-b\}^2+(x_0-a)^2=\frac{\{1+f'(x_0)^2\}^3}{f''(x_0)^2}$$

ヲ得。

依ツテ簡單ノタメニ x_0 ヲ單ニ x ト書キ，又 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ ノ代リニ夫夫 y, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ト書クコトトスレバ，切觸圓ノ中心ノ座標 (a, b) 及ビ半徑 r ハ次ノ公式ニヨリテ與ヘラル：

$$a = x - \frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}, \qquad b = y + \frac{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},$$

$$r = \left|\frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\right|.$$

例. 楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ一點ニ於ケル切觸圓ノ半徑ヲ求ム。(第四十九圖)

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

之ヲ微分スレバ

$$y' = \mp\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \qquad y'' = \mp\frac{ab}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}.$$

依ツテ

$$r = \frac{\left\{1+\dfrac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\left\{a^2-\left(1-\dfrac{b^2}{a^2}\right)x^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

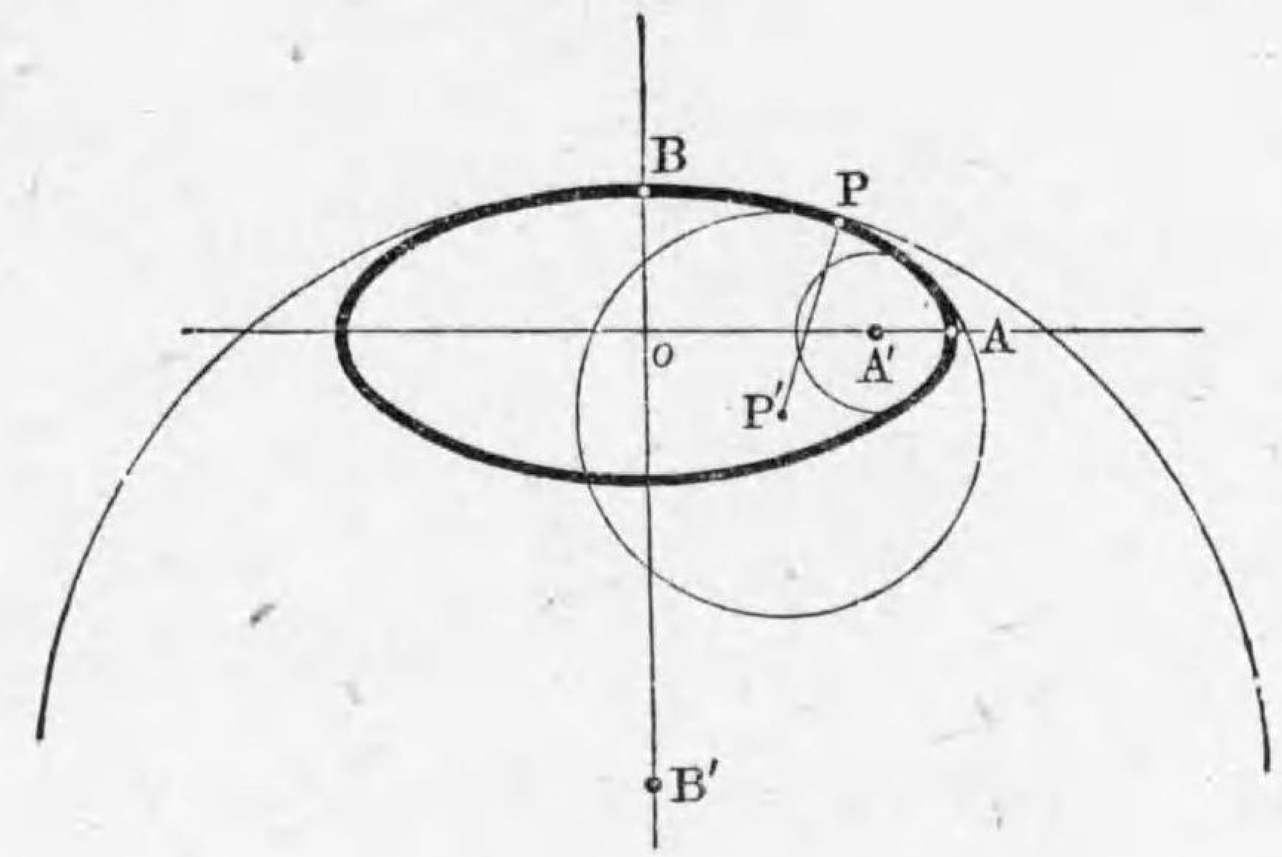
離心率ヲ e トスレバ

$$r = \frac{(a^2-e^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

故ニ今考フル點ト二ツノ焦點トノ間ノ距離ヲ r_1, r_2 トスレバ次ノ關係アリ，

$$r = \frac{(r_1r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

注意. 切觸圓ト曲線トハ三ツノ隣接點ニ於テ相交ルモノナルガ故ニ，切觸圓ハ曲線ノ一方ノ側ヨリ他ノ側ニ之ヲ横切ルモノナリ(第四十九圖ノ P ニ於ケル切觸圓ノ如シ)。然レドモ或ル特別ノ點ニ於テハ之ヲ横切ラザルコトモアリ(同圖ノ A, B ニ於ケル切觸圓ノ如シ)。斯クノ如キ場合ニハ切觸圓ト曲線トハ實ハ三ツヨリ多クノ隣接點ニ於テ相交ルモノナリ。(第 66 節參照)



第四十九圖

例題. 抛物線 $y^2=4px$ 上ノ一點ト焦點トノ間ノ距離ヲ r_1 トスルトキハ，其點ニ於ケル切觸圓ノ半徑ハ

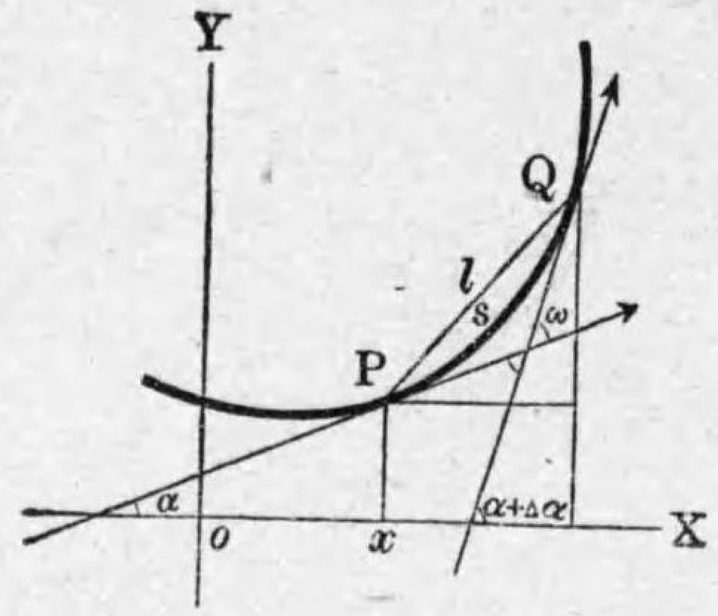
$$r = \frac{2r_1^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

64. 曲度

或曲線ノ切觸圓ハ之ト三ツノ隣接點ヲ共有スルガ故ニ，其點ニ於テ曲線ニ切スルスベテノ圓ノ中ニテ其屈曲ノ狀ガ最ヨク元ノ曲線ニ似タルモノナリト考ヘラル。コノコトヲ更ニ嚴密ニ考察センガタメニ先ヅ一般ニ曲線ノ屈曲ノ度ヲ計ルコトヲ次ニ述ベントス。

曲線上ノ一點 P ニ於ケル切線ノ方向*ヲ以テ其點ニ於ケル曲線ノ方向ト定ム。同シ曲線上ノ二點 P, Q ニ於ケル二ツノ切線ノナス角ヲ ω トスレバ, ω ハ即チ P ヨリ Q ニ至ル間ニ於ケル此曲線ノ方向ノ變リヲ表ス角ナリ。今 PQ 間ノ曲線ノ長サヲ s トスレバ, $\frac{\omega}{s}$ ナルモノハ此曲線ニ沿ヒテ P ヨリ Q マデ行ク間ニ進行距離一單位ニツイテ平均何程ノ方向ノ變リガアル割合ナルカヲ示スモノナリ。モシ特ニ一點 P ノ所ニ於ケル此割合ヲ知ラント欲セバ



第五十圖

$$\lim_{s\to 0}\frac{\omega}{s}$$

ナル極限値ヲ考フベシ, 之ヲ P ニ於ケル此曲線ノ **曲度** 又ハ **曲率** トイフ。

例. 半徑 a ナル圓ノ中心ヲ O, 圓周上ノ二點ヲ P, Q トシ, $\angle \mathrm{POQ}=\theta$ トスレバ, P 及ビ Q ニ於ケル切線ノナス角ハ θ ニ等シク, 又弧 PQ ノ長サハ $a\theta$ ニ等シ。故ニ

$$\frac{\omega}{s}=\frac{\theta}{a\theta}=\frac{1}{a}$$

ニシテ, 圓ハ其周上ノ何レノ點ニ於テモ同一ノ曲度ヲ有シ, 其値ハ半徑ノ逆數ニ等シ。

一般ニ任意ノ曲線ニ於テハ其上ノ各點ニ於テ夫夫相異ル曲度ヲ有ス。今之ヲ計算セントスルニ當リ, 「曲線ノ一小部分ノ長サ

* 一ツノ直線ノ方向ハ二通リニ考ヘラルレドモ今ソノ一ツヲトルモノトス, 圖ニ矢ヲ以テ示ス。

s ト其兩端ヲ結ブ線分ノ長サ l トノ比ハ s ガ小ナルニ從ツテ限リナク 1 ニ接近ス, 即チ

$$\lim_{s\to 0}\frac{s}{l}=1$$

ナリ」トイフ事實ヲ既知ナルモノト假定スベシ。*

曲線上ノ二點 $\mathrm{P}(x,y)$ 及ビ $\mathrm{Q}(x+\Delta x, y+\Delta y)$ ニ於ケル切線ガ x 軸トナス角ヲ夫夫 α 及ビ $\alpha+\Delta\alpha$ トス, $\Delta\alpha$ ハ即チ上記ノ ω ニ相當ス。然ルトキハ P ニ於ケル曲度ハ

$$\lim_{s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{s}\right|=\lim_{s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{l}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}\frac{\Delta x}{l}\right|$$
$$=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}\right|\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta x}{l}\right|\right).$$

サテ α ハ x ノ函數ニシテ

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{dy}{dx}$$

ナルコトヲ知ル: 故ニ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}\right|=\left|\frac{d\alpha}{dx}\right|=\left|\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\right|.$$

又 $l=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ ナルヲ以テ,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta x}{l}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

* 高等積分學, 第 25 節

$\frac{\Delta x}{l}$

故ニ結局 P ニ於ケル曲度ハ

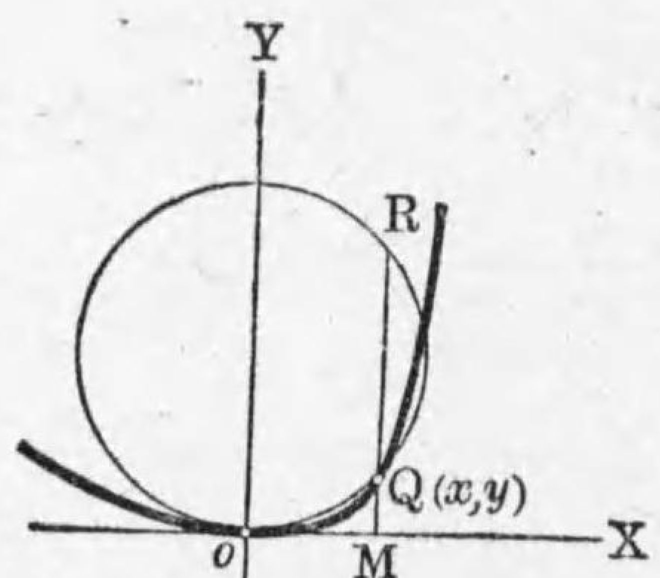
$$\left|\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\right|$$

ナリ。卽チ **曲線上ノ一點ニ於ケル曲度ハ其點ニ於ケル切觸圓ノ半徑ノ逆數ニ等シ。** 然ルニ切觸圓自身ノ曲度ヲ考フレバ上ノ例ニ示セル如ク其半徑ノ逆數ナルヲ以テ，ツマリ **曲線上ノ一點ニ於ケル切觸圓ハ其點ニ於テ元ノ曲線ト同一ノ曲度ヲ有ス** トイフコトヲ得。

依ツテ切觸圓ノコトヲ **曲度圓**（又ハ **曲率圓**）トモイヒ，ソノ中心及ビ半徑ヲソレゾレ **曲度中心**（又ハ **曲率中心**）及ビ **曲度半徑**（又ハ **曲率半徑**）トモイフ。

曲度半徑 r ヲ求ムルニハ前節ノ公式ニヨリテ計算スルヲ得ベシト雖，次ノ公式モ亦屢使用セラル。

曲線上ノ今考フル點ヲ原點トシ，其點ニ於ケル切線ヲ x 軸，法線ヲ y 軸トス。原點ノ近傍ニ曲線上ニ他ノ一點 Q(x, y) ヲトリ，Q ヲ過リ且原點ニ於テ x 軸ニ切スル（從ツテ曲線ニモ切スル）圓ヲ畫キ，次ニ O ヲ過リ x 軸ニ垂線ヲ引キ其足ヲ M トシ，又此垂線ガ圓ト再ビ交ル點ヲ R トス。然ル



第五十一圖

トキハ

$$\mathrm{MR} = \frac{\mathrm{OM}^2}{\mathrm{MQ}} = \frac{x^2}{y}$$

ナリ。ココニ於テ Q ガ曲線ニ沿ヒテ O ニ限リナク接近スト考フレバ，其極限ニ於テ此圓ハ O ニ於ケル切觸圓トナリ，MR ハ切觸圓ノ直徑トナルベシ。故ニ O ニ於ケル曲度半徑ヲ r トスレバ

$$r = \lim_{x \to 0}\left|\frac{x^2}{2y}\right|$$

ナリ，之ヲ **Newton ノ公式** トイフ。

例題 1. 不定形ノ極限値ヲ求ムル方法（第 25 節）ニヨリ，又ハ $f(x)$ ヲ Maclaurin ノ定理ニヨリテ展開スルコトニヨリ，$f(0) = 0,\ f'(0) = 0$ ナルトキハ

$$\lim_{x \to 0}\frac{x^2}{2f(x)} = \frac{1}{f''(0)}$$

ナルコトヲ示シ，依ツテ Newton ノ公式ヲ解析的ニ證明セヨ。

例題 2. 曲線 $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ 上ノ $x = 0$ ナル點ニ於ケル曲度半徑ヲ求メヨ。

附言. 此曲線ヲ **懸垂線** トイフ。彈性ナキ絲ノ兩端ヲ持チテ自由ニ垂下セシムルトキ，其絲ノ形ヲ示ス曲線ナリ。

65. 縮閉線及ビ伸開線

一ツノ曲線上ノ各點ニ對應スル曲度中心ノ軌跡ヲ其曲線ノ **縮閉線** トイフ。縮閉線ニ對シテ原曲線ヲ呼ブトキハソノ **伸開線** トイフ。

曲線上ノ一點 P(x, y) ニ對應スル曲度中心ヲ P$'$(X, Y) トスレバ，第 63 節ニヨリ

$$\left.\begin{aligned} X &= x-\frac{(1+y'^2)y'}{y''},\\ Y &= y+\frac{1+y'^2}{y''}. \end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

ココニ y, y', y'' ハ何レモ x ノ函數ナリ。今 X, Y ヲ流通座標トシ, x ヲ媒介變數ト見レバ上式ハ卽チ縮閉線ノ方程式ナリ。

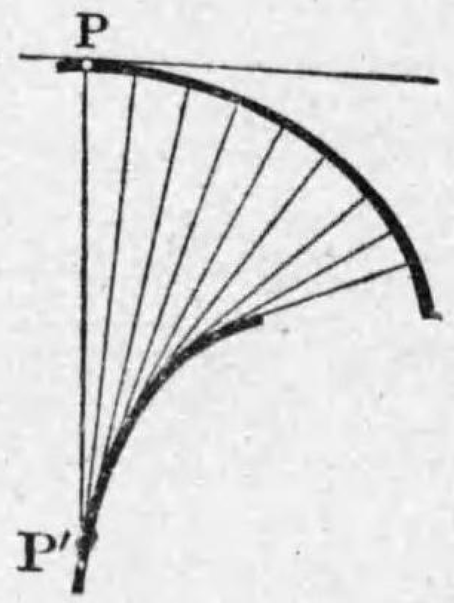
(1) ノ各式ヲ x ニ關シテ微分スレバ

$$\frac{dX}{dx}=1-\frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right).y'-\frac{1+y'^2}{y''}y''$$

$$=-\left\{y'+\frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)\right\}y',$$

$$\frac{dY}{dx}=y'+\frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right),$$

從ツテ $$\frac{dY}{dX}=-\frac{1}{y'}.$$



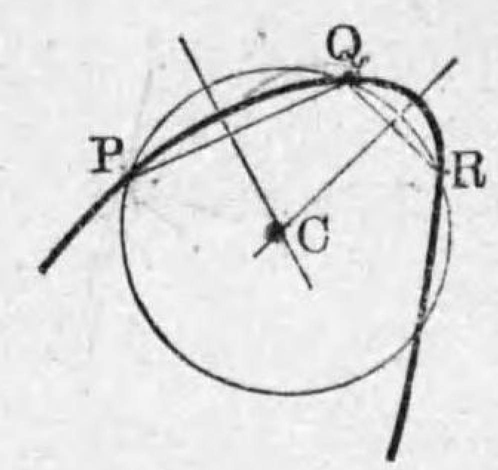
第五十二圖

故ニ P ニ於ケル原曲線ノ切線ト P' ニ於ケル縮閉線ノ切線トハ互ニ垂直ナリ。從ツテ P ニ於ケル原曲線ノ法線ハ P' ニ於ケル縮閉線ノ切線ト同一ノ方向ヲ有スベク, 而シテ P' ハ P ニ於ケル法線上ニアルヲ以テ, 結局 P ニ於ケル原曲線ノ法線ハ P' ニ於テ縮閉線ニ切ス。

ナホ縮閉線ニ關スル種種ノ性質ヲ簡單ニ了解センニハ次ノ事實ニ注目スルヲ要ス。

今曲線上ニ三點 P, Q, R ヲトレバ, 之ヲ過ル圓ノ中心 C ハ弦 PQ 及ビ QR ノ垂直二等分線ノ交點ナリ。ココニ於テ Q, P ガ曲線ニ沿ヒテ限リナク P ニ接近シタル極限ヲ考フレバ, 直

線 PQ ハ P ニ於ケル切線トナルヲ以テ其垂直二等分線ハ P ニ於ケル法線トナルベク, 同樣ニ QR ノ垂直二等分線ハ Q ニ於ケル法線トナルベシ; 然ルニ Q ハマタ限リナク P ニ接近スルニヨリ, 結局二ツノ垂直二等分線ハ P 及ビ其隣接點ニ於ケル法線トナル。而シテ一方ニ於テ其極限ニ於テハ C ハ卽チ P ニ於ケル切觸圓ノ中心卽チ曲度中心トナル。故ニ**曲度中心ハ二ツノ相隣接セル法線ノ交點ナリ**ト略言スルコトヲ得。



第五十三圖

ナホ之ヲ解析的ニ證明スレバ次ノ如シ。

曲線 $y=f(x)$ 上ノ一點 $P(x, y)$ ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$Y-y=-\frac{1}{f'(x)}(X-x),\qquad(2)$$

又曲線上ニテ P ニ近キ他ノ一點 $Q(x+h, y+k)$ ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$Y-(y+k)=-\frac{1}{f'(x+h)}\{X-(x+h)\}\qquad(3)$$

ナリ。(2) ヨリ (3) ヲ邊邊相減ジ, 兩邊ヲ h ニテ割レバ

$$\frac{k}{h}=\frac{1}{h}\left\{\frac{X-(x+h)}{f'(x+h)}-\frac{X-x}{f'(x)}\right\}.\qquad(4)$$

(2) ト (3) トノ交點ハ (4) ヲ滿足セシムベシ。故ニ P ト其隣接點トニ於ケル法線ノ交點ハ (4) ニ於テ $h\to0$ トセル極限ノ式卽チ

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{X-x}{f'(x)}\right\}=\frac{-f'(x)-(X-x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

ヲ滿足セシムベシ。之ヨリ

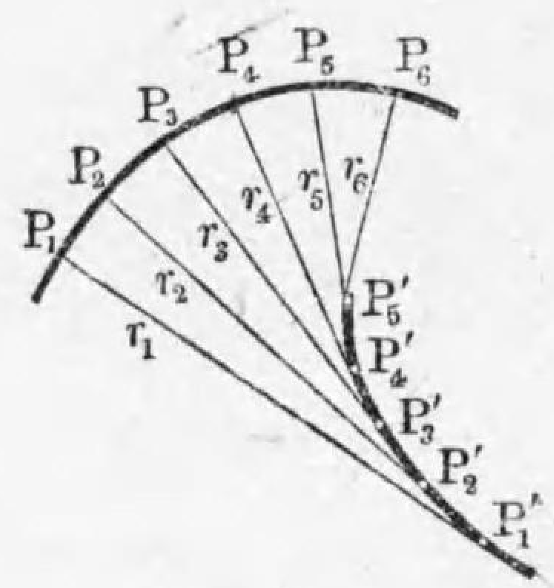
$$X=x-\frac{\{1+f'(x)^2\}f'(x)}{f''(x)}$$

ヲ得，之ヲ (2) ニ代入スレバ

$$Y=f(x)+\frac{1+f'(x)^2}{f''(x)}$$

トナル。コレ卽チ二ツノ隣接點ニ於ケル法線ノ交點ノ座標ニシテ，既ニ知レル曲度中心ノ座標ト一致ス。依ツテ上述ノ事實ハ解析的ニ證明セラレタリ。

今 $P_1, P_2, \cdots\cdots$ ヲ曲線上ノ諸點トシ，ソノ各點ニ於ケル法線ヲ夫夫 $P_1P_1', P_2P_2', \cdots\cdots$ トシ，ソレラノ逐次ノ交點ヲ $P_1', P_2', \cdots\cdots$ トス。ココニ於テ $P_1, P_2, \cdots\cdots$ 等ノ諸點ガ曲線ニ沿ヒテ限リナク相接近スルトキハ，極限ニ於テ $P_1', P_2', \cdots\cdots$ ハ夫夫 $P_1, P_2, \cdots\cdots$ ニ對應スル曲度中心トナリ，從ツテ多角形 $P_1'P_2'\cdots\cdots$ ハ極限ニ於テ曲線 $P_1P_2\cdots\cdots$ ノ縮閉線トナル。之ニ依ツテ縮閉線ニ關スル次ノ諸性質ヲ推知スルコトヲ得。



第五十四圖

(I) 或曲線ノ法線ハ其縮閉線ノ切線ナリ。或曲線ノ切線ハ其伸開線ノ法線ナリ。

(II) $P_1, P_2, \cdots\cdots$ ニ於ケル曲度半徑ヲ夫夫 $r_1, r_2, \cdots\cdots$ トスレバ，コレラノ諸點ガ十分相接近セル場合ニハ殆ンド

$$P_1P_1'=P_2P_1'=r_1,\quad P_2P_2'=r_2,$$

故ニ
$$P_1'P_2'=r_1-r_2.$$

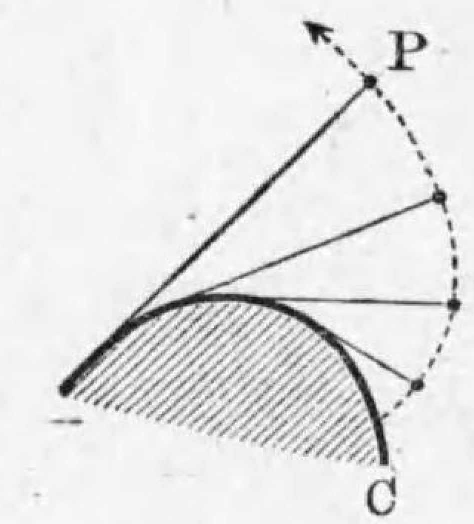
同樣ニシテ
$$P_2'P_3'=r_2-r_3,$$
$$P_3'P_4'=r_3-r_4,\quad 等。$$

コレラヲ相加フレバ一般ニ

$$P_1'P_2'P_3'\cdots\cdots P_n'=r_1-r_n$$

トナル。卽チ **縮閉線ノ弧ノ長サハ其兩端ニ對スル原曲線上ノ點ニ於ケル曲度半徑ノ差ニ等シ。***

故ニ例ヘバ第五十五圖ノ C ノ如キ凸曲線形ノ糸卷ニ糸ヲ卷キ付ケ置キ，コノ糸ヲ緊張シツツ糸卷ヨリ離シユクトキハ糸ノ端 P ハ曲線 C ニ對スル伸開線ヲ畫クベシ。伸開線ノ名ハ之ニ基因ス。



第五十五圖

(III) 一ツノ曲線ノ縮閉線ハ唯一ツナリ，然レドモ伸開線ハ無數ニ多クアリ。同一ノ曲線ニ對スル伸開線ハスベテ共通ナル法線ヲ有シ，而シテ二ツノ伸開線ノ間ニ挾マレタル法線ノ部分ノ長サハ到ル所同一ナリ。

例 1. 拋物線 $y^2=4px$ ノ縮閉線ヲ求ム。

$$y=\pm2\sqrt{p}\sqrt{x},$$

* 嚴密ナル證明ハ高等積分學 第 25 節ニ讓ル。

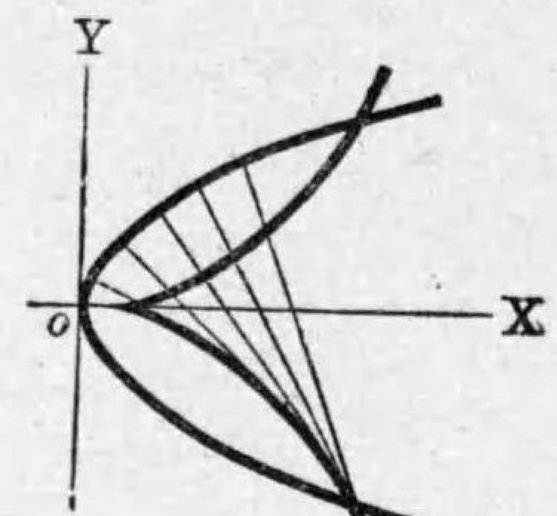
之ヲ微分スレバ

$$y' = \pm\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{x}}, \quad y'' = \mp\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x^3}}.$$

故ニ拋物線上ノ一點 (x, y) ニ對應スル曲度中心ヲ X, Y トスレバ,

$$X = x - \frac{(1+y'^2)y'}{y''} = 3x+2p,$$

$$Y = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \mp\frac{2\sqrt{x^3}}{\sqrt{p}}.$$



第五十六圖

コレヨリ x ヲ消去スレバ

$$27pY^2 = 4(X-2p)^3$$

ヲ得, コレ即チ求ムル縮閉線ノ方程式ナリ。

例 2. 圓 $x^2+y^2=a^2$ ノ伸開線ヲ求ム。

圓周ト x 軸トノ交點ヲ A トシ, 又圓周上ノ一點 P ニ於テ切線 PQ ヲ引キ,

$$\angle POX = \phi,$$

$$PQ = \text{弧 } PA = a\phi$$

ナラシメ, Q ノ座標ヲ (X, Y) トスレバ,

$$X = a\cos\phi + a\phi\sin\phi,$$

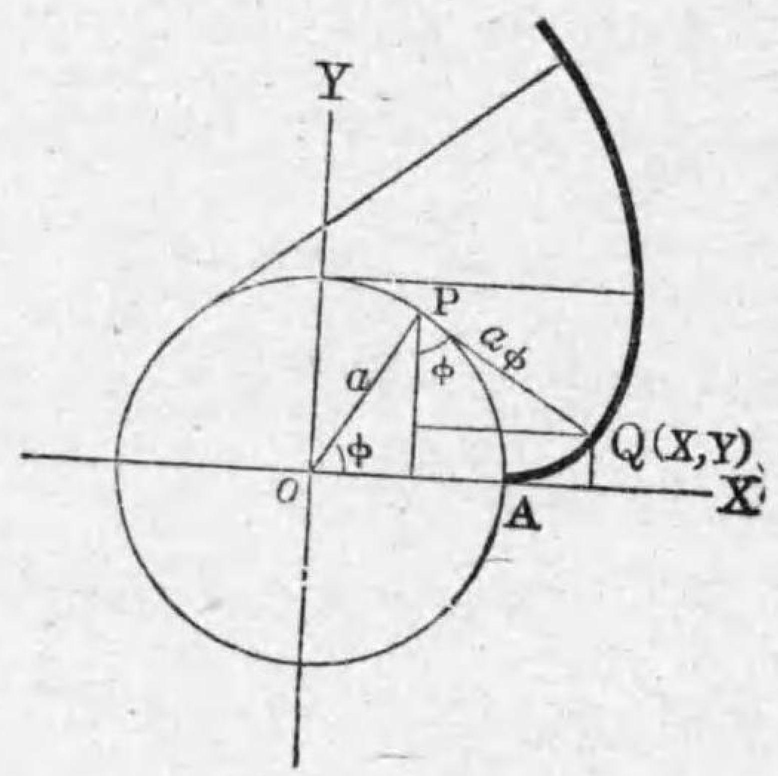
$$Y = a\sin\phi - a\phi\cos\phi.$$

故ニ ϕ ヲ媒介變數トスレバ, 一ツノ伸開線ノ方程式ハ

$$X = a(\cos\phi+\phi\sin\phi),$$

$$X = a(\sin\phi-\phi\cos\phi)$$

ナリ。



第五十七圖

或ハマタコレヨリ

$$X^2+Y^2 = a^2(1+\phi^2), \qquad X\cos\phi + Y\sin\phi = a$$

ヲ得。ココニ於テ

$$X = r\cos\theta, \qquad Y = r\sin\theta$$

ト置キテ極座標ニ直セバ

$$r^2 = a^2(1+\phi^2), \qquad r\cos(\phi-\theta) = a$$

トナル。之ヨリ ϕ ヲ消去スレバ次ノ方程式ヲ得:

$$\theta \pm \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a} + \cos^{-1}\frac{a}{r} = 0.$$

最一般ナル伸開線ハ之ヲ原點ノ廻リニ任意ノ角ダケ回轉シタルモノナリ, 卽チ

$$\theta \pm \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a} + \cos^{-1}\frac{a}{r} = c,$$

ココニ c ハ任意ノ常數ナリトス。

66. 二ツノ曲線ノ切觸

一ツノ曲線ノ方程式ヲ

$$y = \phi(x, c_1, c_2, \cdots\cdots, c_m) \qquad (1)$$

トス, ココニ $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_m$ ハ此式中ニ含マルル(例ヘバ係數ノ如キ)常數ニシテ其値ヲ任意ニ選定シ得ルモノトス(カクノ如キ常數ヲ **任意常數** トイフ)。此曲線ヲシテ與ヘラレタル一點 (x_0, y_0) ヲ過ラシムルタメニハ

$$y_0 = \phi(x_0, c_1, c_2, \cdots\cdots, c_m)$$

ナル樣ニ $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_m$ ヲ決定スルコトガ必要ニシテ且十分ナリ。而シテ一般ニハ m 個ノ未知數ハ m 個ヨリ多カラザル與ヘラレタル方程式ヲ滿足セシムル樣ニ決定セラルルニヨリ, 吾人ハ任意常數ノ値ヲ適當ニ選ブコトニヨリ曲線 (1) ヲシテ一般ニ m 個ヨリ多カラザル與ヘラレタル點ヲ過ラシムルコトヲ得ベシ。

今別ニ與ヘラレタル曲線

$$y = f(x) \qquad (2)$$

アルトキ, 其上ニ $(n+1)$ 個ノ點 $P, P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ ヲトリ其

横線ヲ夫夫 $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ トス。ココニモシ $m \geqq n+1$ ナラバ, 曲線 (1) ヲシテコレラノ $(n+1)$ 個ノ點ヲ悉ク過ラシムルコトヲ得ベク, 而シテ其場合ニハ次ノ $(n+1)$ 個ノ關係式ガ成立セザル可カラズ。

$$f(x_0)=\phi(x_0),\quad f(x_1)=\phi(x_1),\quad f(x_2)=\phi(x_2),$$
$$\cdots\cdots,\qquad f(x_n)=\phi(x_n).$$

コレラノ式ニツイテ第 63 節ニ於ケルト同樣ニ Rolle ノ定理ヲ反復適用シ, 然ル後 $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ ナル n 個ノ點ガ悉ク曲線 (2) ニ沿ヒテ限リナク P ニ接近シタル極限ヲ考フレバ,

$$f(x_0)=\phi(x_0),\quad f'(x_0)=\phi'(x_0),\quad f''(x_0)=\phi''(x_0),$$
$$\cdots\cdots,\qquad f^{(n)}(x_0)=\phi^{(n)}(x_0)$$

ナル結果ヲ得。

故ニ二ツノ曲線 (1) 及ビ (2) ガ $(n+1)$ 個ノ隣接點ヲ共有スルトキハ, 其點ニ於テ二ツノ函數 $f(x)$ 及ビ $\phi(x)$ ハ第 n 次微係數マデ相一致スルモノナリ。此場合ニモシ $f^{(n+1)}(x_0) \neq \phi^{(n+1)}(x_0)$ ナラバ兩曲線ハ P ニ於テ **第 n 位ノ切觸** ヲナスト稱セラル。

例ヘバ任意ノ曲線ノ切線ハ一般ニ之ト第一位ノ切觸ヲナシ, 曲率圓ハ一般ニ第二位ノ切觸ヲナスモノナリ。

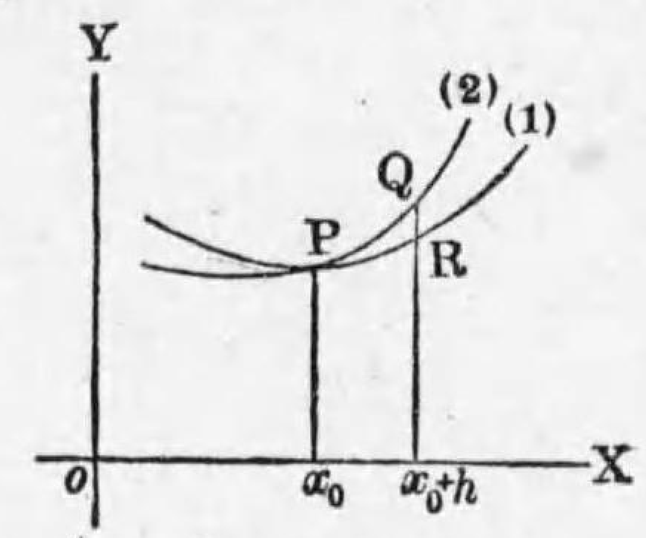
二ツノ曲線 (1), (2) ガ $P(x_0, y_0)$ ニ於テ第 n 位ノ切觸ヲナストキ, $x=x_0+h$ ナル横線ヲ有スル (1) 及ビ (2) ノ上ノ點ヲ夫夫 R 及ビ Q トシ, Q ガ R ヨリ上ニアルカ又ハ下ニアルカニ從ツテ線分 RQ ノ長サヲ夫夫正又ハ負トスルコトト定ムレバ

$$RQ = f(x_0+h) - \phi(x_0+h)$$

此右邊ヲ Taylor ノ定理ニヨリテ h ノ冪級數ニ展開スレバ, 假定ニヨリ h^n ノ項マデハ其係數ガ悉ク 0 トナルニヨリ, 結局

$$RQ = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\{f^{(n+1)}(x+\theta h) - \phi^{(n+1)}(x+\theta h)\},\qquad 0<\theta<1$$

トナル。依ツテ次ノ結論ヲ得:



第五十八圖

h ヲ第一位ノ無限小トスルトキ, RQ ハ第 $(n+1)$ 位ノ無限小ナリ。

切觸ノ位數 n ガ偶數ナルトキハ兩曲線ハ其切點ニ於テ互ニ横切リ, n ガ奇數ナルトキハ横切ラズ。

奇數位ノ切觸　　偶數位ノ切觸

第五十九圖

サテ曲線 (1) ガ他ノ與ヘラレタル曲線ト第 n 位ノ切觸ヲナスタメニハ $m \geqq n+1$ ナルコトヲ要スルヲ以テ, (1) ハ一般ニハ他ノ曲線ト $(m-1)$ ヨリ高キ位數ノ切觸ヲナスコトハ不可能ナリ。卽チ一般ニ任意常數ヲ有スル或曲線ガ他ノ定曲線ト切觸スルトキ, 其切觸位數ノ最大値ハ其曲線ノ方程式中ニ含マルル任意常數ノ個數ヨリ 1 ヲ減ジタルモノナリ。一ツノ曲線ガ其最大ノ位數ニ於テ他ノ曲線ト切觸スルトキハ之ヲ稱シテ **最大切觸** ヲナストイフ。

例ヘバ直線ノ方程式ハ

$$y = mx+b$$

ニシテ二ツノ任意常數ヲ有ス，故ニ直線ハ定曲線ト一般ニ第一位ヨリ高キ切觸ヲナスコト能ハズ。故ニ切線ハ最大切觸ヲナス直線ナリ。

又圓ノ方程式ハ

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

ニシテ三ツノ任意常數ヲ有ス。故ニ定曲線ト第二位ノ切觸ヲナス圓卽チ曲度圓ハ最大切觸ヲナスモノナリ。

一般ナル二次曲線ノ方程式ハ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c = 0$$

ニシテ見掛ケ上六ツノ任意常數ヲ含メドモ，實ハ其比ダケニテ二次曲線ハ決定セラルルニヨリ，一般ナル二次曲線ノ最大切觸ノ位數ハ四ナリ。

例. y 軸ニ平行ナル主軸ヲ有スル拋物線ニシテ，定曲線

$$y = f(x) = x^3-9x^2+24x-16$$

上ノ $x=2$ ナル一點ニ於テ之ト最大切觸ヲナスモノヲ求ム。

主軸ガ y 軸ニ平行ナル拋物線ノ一般ナル方程式ハ

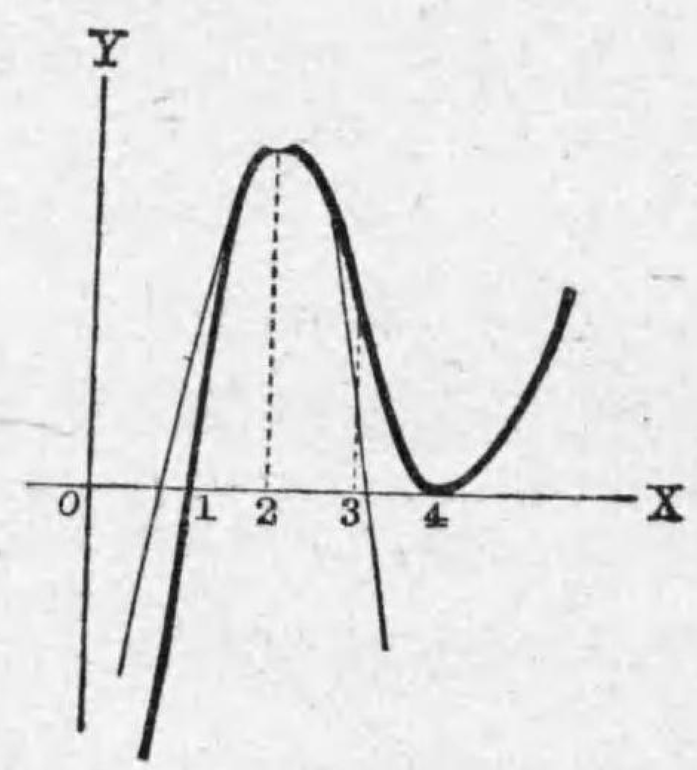
$$y = \phi(x) = ax^2+bx+c$$

ナル形ヲ有ス。$\phi(x)$ ハ三ツノ任意常數ヲ有スルニヨリ最大切觸ノ位數ハ 2 ナル可キコトガ推定セラル。實際 $\phi(x)$ 及ビ $f(x)$ ヲ微分スレバ

$$f(x) = x^3-9x^2+24x-16, \qquad \phi(x) = ax^2+bx+c,$$
$$f'(x) = 3x^2-18x+24, \qquad \phi'(x) = 2ax+b,$$
$$f''(x) = 6x-18, \qquad \phi''(x) = 2a,$$
$$f'''(x) = 6, \qquad \phi'''(x) = 0$$

ニシテ $\phi'''(x) \neq f'''(x)$ ナルヲ以テ，兩曲線ハ第三位ノ切觸ヲナスコトナシ。サテ $x=2$ ナル點ニ於テ兩曲線ガ第二位ノ切觸ヲナスタメノ條件ハ

$$\left.\begin{aligned} \phi(2) &= f(2) \quad \text{卽チ} \quad 4a+2b+c = 4, \\ \phi'(2) &= f'(2) \quad \text{卽チ} \quad 4a+b = 0, \\ \phi''(2) &= f''(2) \quad \text{卽チ} \quad 2a = -6. \end{aligned}\right\}$$



第六十圖

之ヲ解ケバ

$$a = -3, \quad b = 12, \quad c = -8$$

ヲ得。故ニ求ムル拋物線ノ方程式ハ

$$y = -3x^2+12x-8$$

ナリ。

然レドモ特別ナル場合ニ於テハ m 個ダケノ任意常數ヲ有スル曲線ガ他ノ定曲線ニ對シテ第 $(m-1)$ 位ヨリ高位ノ切觸ヲナスコトアリ。斯クノ如キ場合ニハ之ヲ稱シテ **超過切觸** ヲナストイフ。

例. 懸垂線

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right) = f(x)$$

上ノ一點 $(0, a)$ ニ於ケル切觸圓ノ方程式ハ，切觸スル點ヲ含ム方ノ下半圓ノミヲトルモノトスレバ（第 64 節ノ例題 2 參照）

$$y = 2a-\sqrt{a^2-x^2} = \phi(x)$$

ナリ。然ルニココニ

$$f(0) = a, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = \frac{1}{a}, \quad f'''(0) = 0, \quad f''''(0) = \frac{1}{a^3},$$

$$\phi(0) = a, \quad \phi'(0) = 0, \quad \phi''(0) = \frac{1}{a}, \quad \phi'''(0) = 0, \quad \phi''''(0) = \frac{3}{a^3}$$

ナルヲ以テ，此切觸圓ハ點 $(0, a)$ ニ於テ原曲線ト第三位ノ切觸ヲナスコトヲ知ル。前ニ述ベタル如ク圓ニ於テハ一般ニ切觸位數ノ最大値ハ 3 ナル筈ナレバ，今ノ場合ニ於ケル切觸圓ハ超過切觸ヲナスモノナリ。

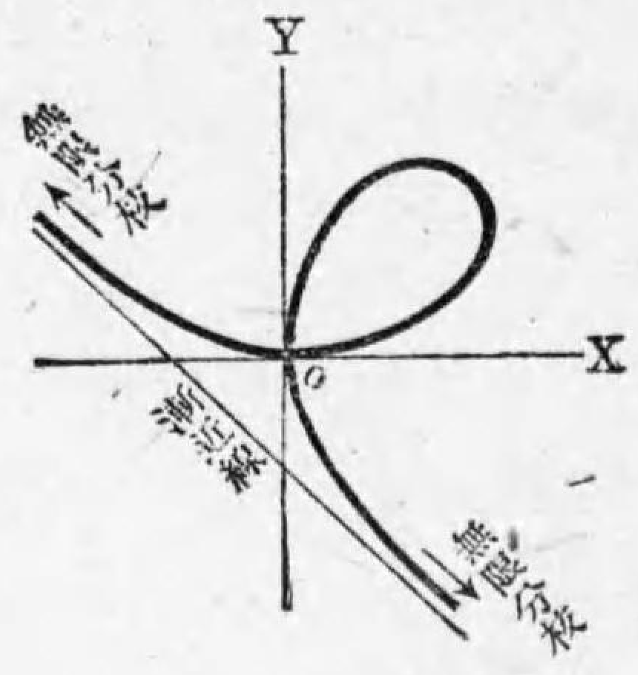
例題. 彎曲點ニ於ケル切線ハ其曲線ト超過切觸ヲナスコトヲ示セ。逆ニ曲線上ノ一點ニ於ケル切線ガ超過切觸ヲナストキハ，其點ハ彎曲點ナリトイヒ得ルカ。

67. 漸近線

一ツノ動點ガ曲線ノ一分枝ニ沿ヒテ動クトキ，ソノ原點ヨリノ距離ガ無限大トナリ得ルトキハ，其分枝ヲ稱シテ **無限分枝** ト

イフ。

動點ガ無限分枝ニ沿ヒテ原點ヨリ無限大ノ距離ニ進ムトキ，其點ヨリ或一定直線ニ下シタル垂線ノ長サガ無限小トナル如キ定直線アルトキハ，其直線ヲ其無限分枝ノ(或ハ其分枝ヲ有スル原曲線ノ) **漸近線** トイフ。



第六十一圖

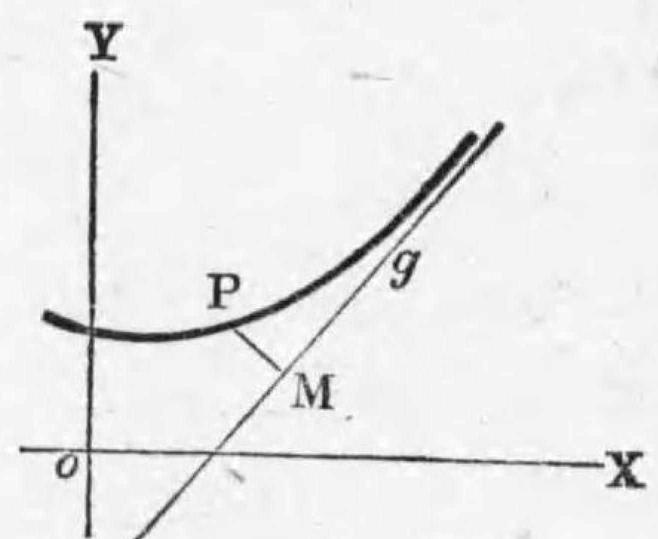
注意. 任意ノ無限分枝ハ必ズシモ漸近線ヲ有スト限ラズ，例ヘバ抛物線ノ如キハ漸近線ヲ有セズ。(本節例題 2.)

曲線上ノ一點 $P(x, y)$ ヨリ一直線 g ニ下シタル垂線ヲ PM トス。ココニ g ハ y 軸ニ平行ナラザルモノト考ヘ，ソノ方程式ヲ

$$Y = \alpha X + \beta \qquad (1)$$

トス。然ルトキハ

$$PM = \frac{|y - \alpha x - \beta|}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$



第六十二圖

ナリ。今曲線ガ g ノ方向ニ延ビタル無限分枝ヲ有シ，g ガ其漸近線ナリトスレバ，P ノ原點ヨリノ距離ガ無限大トナルトキ，PM→0 ナラザル可カラズ，即チ

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y - \alpha x - \beta) = 0. \qquad (2)$$

但シ一點ノ原點ヨリノ距離ガ無限大トナルニハ x ガ有限ニシ

テ $y\to\pm\infty$ トナル場合モアリ得レドモ，今考フル無限分枝ハ y 軸ニ平行ナラザル直線 g ノ方向ニ延ビタルモノトスルガ故ニ，x ノ極限ハ有限ニアラズ，依ツテココニ $x\to\pm\infty$ トスルナリ。

サテ (2) ヨリ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{y}{x} - \alpha - \frac{\beta}{x}\right) = 0,$$

從ツテ

$$\boldsymbol{\alpha} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}. \qquad (3)$$

之ニヨリテ定メラレタル α ヲ (2) ニ代入スレバ

$$\boldsymbol{\beta} = \lim_{x\to\pm\infty}(y - \alpha x) \qquad (4)$$

ヲ得。斯クノ如キ α, β ヲ (1) ニ入ルレバ，コレ即チ一ツノ漸近線ノ方程式トナル。

注意. 無限分枝ガ x ノ正又ハ負ノ何レカ一方ニノミ延長スルコト明白ナル場合ニハ，(3), (4) ニ於テモ夫夫 $x\to+\infty$ 又ハ $x\to-\infty$ ノ一方ニ對スル極限値ノミヲ計算スレバヨシ。又 y ガ x ノ多價函數ナル場合ニハ其各ノ價ニツイテ別別ニ α 及ビ β ヲ計算スベク，從ツテ一ツヨリ多クノ漸近線ヲ生ズルコトアルベシ。

以上論ジタル所ニテハ漸近線ガ y 軸ニ平行ナラザルモノト考ヘタルガ，モシ y 軸ニ平行ナルモノヲ求メンニハ前以テ先ヅ兩軸ヲ交換シ置キテ上ノ方法ニヨレバヨシ。或ハマタ次ノ如ク考フルモ可ナリ。曲線ガ $x = a$ ナル漸近線ヲ有スルトキハ，之ニ沿ヒテ走ル無限分枝上ニテハ $y = \pm\infty$ ナルトキ $x\to a$ ナリ。故ニ先ヅ曲線ノ方程式ニ於テ x ガ或ル有限確定値ニ近ヅクトキ y ノ極限値ガ正又ハ負ノ無限大トナルコト有リヤ否ヤヲ考

ヘ，モシ有ラバ其 x ノ有限確定値ヲ a トスベシ，然ルトキハ一般ニ $x=a$ ハ漸近線ナルベシ。

例 1. 曲線 $y^2(x+a)=x^2(x-a)$ ノ漸近線ヲ求ム。

與ヘラレタル方程式ヲ書キ直セバ $\qquad y=\pm x\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}.$

今右邊ニ於テ正號ヲトルコトトシ，且 x ノ絶對値ガ十分大ナル所ニツイテ考フレバ

$$y=x\left(1-\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=x\left(1-\frac{1}{2}\frac{a}{x}-\frac{1}{8}\frac{a^2}{x^2}-\cdots\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{a}{x}+\frac{3}{8}\frac{a^2}{x^2}-\cdots\cdots\right)$$

$$=x\left(1-\frac{a}{x}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2}-\cdots\cdots\right).$$

故ニ
$$\alpha=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=1.$$

從ツテ
$$\beta=\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=-a.$$

故ニ漸近線ハ

$$y=x-a \qquad \text{(i)}$$

ナリ。同様ニシテ始メノ式ニ於テ右邊ノ負號ヲトレハ，漸近線トシテ

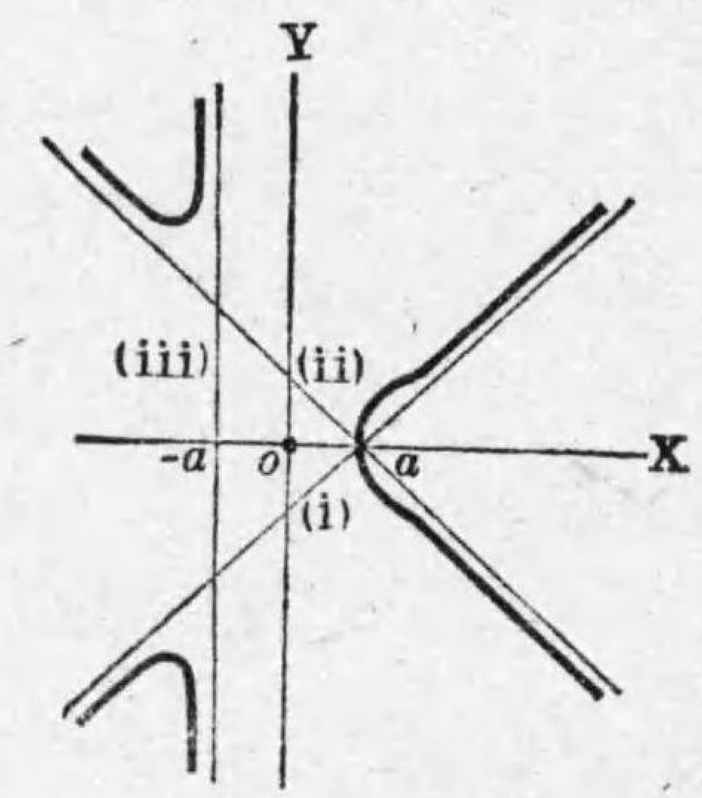
$$y=-x+a \qquad \text{(ii)}$$

ヲ得。

又曲線ノ方程式ニ於テ $x\to -a$ ナルトキニ限リ，$y\to\pm\infty$ ナルヲ以テ，y 軸ニ平行ナル漸近線ハ

$$x=-a \qquad \text{(iii)}$$

唯一ツナリ。



第六十三圖

ナホ進ンデ曲線ガ漸近線ノ何レノ側ニアルカヲ調ブルニハ次ノ如クスベシ。例ヘバ (i) ヲ取リテ，同ジ x ノ値ニ對スル曲線及ビ漸近線上ノ點ノ縦線ヲ夫夫 y_1 及ビ y_2 トスレバ x ノ絶對値ガ十分大ナルトキハ，

$$y_1-y_2=x\left(1-\frac{a}{x}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2}-\cdots\cdots\right)-(x-a)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{a^2}{x}-\cdots\cdots$$

故ニ x ガ正ニシテ十分大ナルトキニハ $y_1>y_2$，即チ曲線ノ無限分枝ハ漸近線ヨリ上ニアリ；同様ニシテ x ガ負ニシテ其絶對値ガ十分大ナルトキニハ，無限分枝ハ漸近線ヨリ下ニアルコトヲ知ル。

(ii) ニツイテモ同様ノ方法ガ適用セラル。

(iii) ニツイテハ，曲線ハ勿論漸近線ノ左側（y 軸ニ遠キ方ノ側）ニアリ，何トナレバ y ハ $x<-a$ ナルトキニハ實數トナレドモ $-a<x<0$ ナルトキニハ實數トナラザレバナリ。

例 2. 曲線 $x^3-3axy+y^3=0,\ a>0$ ノ漸近線ヲ求ム。

此曲線ノ方程式ヲ書キ直セバ

$$\frac{x^3}{y^3}-\frac{3ax}{y^2}+1=0$$

トナル。故ニモシ x ガ或ル有限値ニ接近スルトキ y ガ無限大トナルナラバ，極限ニ於テ $1=0$ ナル不合理ヲ生ズ。故ニ此曲線ハ y 軸ニ平行ナル漸近線ヲ有セズ。

次ニ y 軸ニ平行ナラザルモノヲ求メンニ，原式ノ兩邊ヲ x^3 ニテ割レバ

$$1-\frac{3a}{x}\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^3=0$$

トナル；ココニ於テ $x\to\pm\infty$ ナル極限ヲ考フレバ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3a}{x}=0,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\alpha$$

ニシテ，假定ニヨリ α ハ有限ナルニヨリ

$$1+\alpha^3=0$$

トナリ，之ヨリ
$$\alpha=-1$$

ヲ得。次ニ

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y+x)=\beta$$

ナル β ノ値ヲ求ムルニハ，

$$y+x=\delta$$

ト置キ，之ヨリ y ヲ出シテ原式ニ代入スレバ

$$x^3-3ax(\delta-x)+(\delta-x)^3=0,$$

從ツテ

$$3(a+\delta)-\frac{3\delta(a+\delta)}{x}+\frac{\delta^3}{x^2}=0$$

ヲ得。今 $x\to\pm\infty$ ナル極限ニ於テハ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\delta=\lim_{x\to\pm\infty}(y+x)=\beta$$

ニシテ, β ハ有限ナリト假定スルニヨリ 上式ヨリ

$$3(a+\beta)=0 \quad 從ツテ \quad \beta=-a$$

ヲ得。故ニ求ムル漸近線ハ

$$y=-x-a$$

卽チ

$$x+y+a=0 \qquad ナリ。$$

曲線ガ漸近線ノ何レノ側ニアルカヲ見ルタメニ, 前例ニ於ケル如ク同シ x ニ對スル無限分枝及ビ漸近線上ノ點ノ縱線ヲ夫夫 y_1 及ビ y_2 トシ,

$$y_1-y_2=y_1+x+a=\varepsilon$$

ト置キ, 之ヨリ y_1 ヲ出シテ曲線ノ方程式ニ代入スレバ

$$x^3-3ax(\varepsilon-x-a)+(\varepsilon-x-a)^3=0$$

卽チ　$3\varepsilon x\{x-(\varepsilon-a)\}+(\varepsilon-a)^3=0.$

之ヨリ

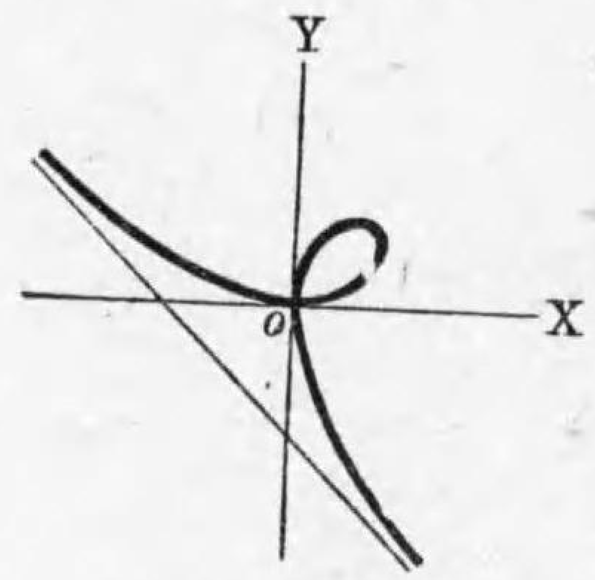
$$3\varepsilon x^2=\frac{x(\varepsilon-a)^3}{(\varepsilon-a)-x}$$

ヲ得。ココニ $x\to\pm\infty$ ナルトキ $\varepsilon\to 0$ ナルコトヲ考フレバ,

$$\lim_{x\to\pm\infty}3\varepsilon x^2=a^3$$

トナル。故ニ $|x|$ ガ十分大ナルトキニハ

$$\varepsilon=\frac{a^3}{3x^2}>0$$



第六十四圖

ナリ。之ニ依ツテ無限分枝ハ x ノ正負何レノ方向ニ於テモ漸近線ヨリ上ニアルコトヲ知ル。

例 3. 曲線 $xy=x^3+1$ ノ漸近線ヲ求ム。

此場合ニハ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\infty$$

ナルコト明カナリ。故ニ y 軸ニ平行ナラザル漸近線ハ存在セズ。

モシ y 軸ニ平行ナルモノヲ求ムレバ, 方程式

$$y=x^2+\frac{1}{x} \qquad \text{(A)}$$

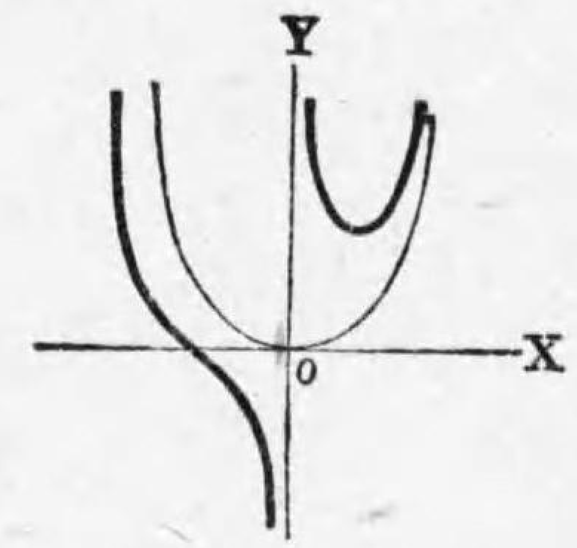
ヨリシテ直チニ其漸近線ハ $x=0$ ナルコトヲ知ルベシ。

(A) ナル式ニヨリテ見レバ, $x\to+0$ ナルトキハ $y\to\infty$ ニシテ $x\to-0$ ナルトキハ $y\to-\infty$ ナリ。故ニ無限分枝ガ漸近線ニ接近スルニハ y 軸ノ上方ニ於テハ右ヨリ近ヅキ, 下方ニ於テハ左ヨリ近ヅクモノナリ。

ナホ (A) ニヨレバ, x ノ絕對値ガ十分大ナルトキニハ原曲線ハ

$$y=x^2 \qquad \text{(B)}$$

ナル抛物線ニ限リナク接近スル* コトヲ知ルベシ。(B) ヲ原曲線ノ **漸近抛物線** トイフ。



第六十五圖

$x>0$ ナルトキハ曲線ハ (B) ヨリ上ニアリ, $x<0$ ナルトキハ (B) ヨリ下ニアルコトハ容易ニ證明セラル。

一般ニ或曲線ノ無限分枝ニ限リナク接近シ來ル第二ノ曲線ヲ稱シテ其 **漸近曲線** トイフ。

漸近線ナルモノハ本節ノ始メニ述ベタル他ニマタ次ノ如ク定義セラルルコトアリ。

曲線ノ無限分枝上ノ一點ニ於ケル切線アリ, 其切點ガ無限分枝ニ沿ヒテ原點ヨリ無限大ノ距離ニ進ムトキ其切線ガ一定ナル極限ノ位置ヲ有スルトキハ, 其極限ノ位置ニ於ケル直線ヲ稱シテ其無限分枝又ハ其曲線ノ漸近線トイフ。

---

* 二ツノ曲線ガ限リナク接近ストイフハ, 同シ x (又ハ y) ニ對スル y (又ハ x) ノ差ガ限リナク 0 ニ接近スルコトナリトス。

此定義＝從ヘバ，漸近線トハ無限遠＝於テ曲線＝切スル切線ナリトイフコトヲ得。

此第二ノ定義＝ヨリテ漸近線ノ方程式ヲ求ムレバ次ノ如シ。

曲線上ノ一點 (x, y) ＝於ケル切線ノ方程式ハ

$$\mathrm{Y}-y=\frac{dy}{dx}(\mathrm{X}-x)$$

卽チ
$$\mathrm{Y}=\frac{dy}{dx}\mathrm{X}+\left(y-\frac{dy}{dx}x\right)$$

ナリ。故＝

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{dy}{dx}=\mathrm{A},\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(y-\frac{dy}{dx}x\right)=\mathrm{B}$$

ナル有限確定値 A, B ガ存在スルトキハ，直線

$$\mathrm{Y}=\mathrm{AX}+\mathrm{B}$$

ハ y 軸＝平行ナラザル漸近線ナリ。モシ A, B ノ一方又ハ兩方ガ有限確定ナラザルトキハ y 軸＝平行ナラザル漸近線ガ存在セザルナリ。モシ y 軸＝平行ナルモノヲ求メント欲セバ，豫メ x 軸ト y 軸トヲ交換シ置キテ上記ノ手續ヲナスベシ。

次＝漸近線ノ二種ノ定義ガ果シテ相一致スルヤ否ヤヲ吟味スル＝，一般＝ $x\to\pm\infty$ ナルトキ＝ハ $y\to\pm\infty$ ナルヲ以テ（漸近線ガ x 軸又ハ y 軸＝平行ナル場合＝ハ兩軸ヲ適當＝回轉シ置ケバヨシ），

$$\alpha=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{dy}{dx}}{1}=\mathrm{A}.\qquad\text{(第 25 節)}$$

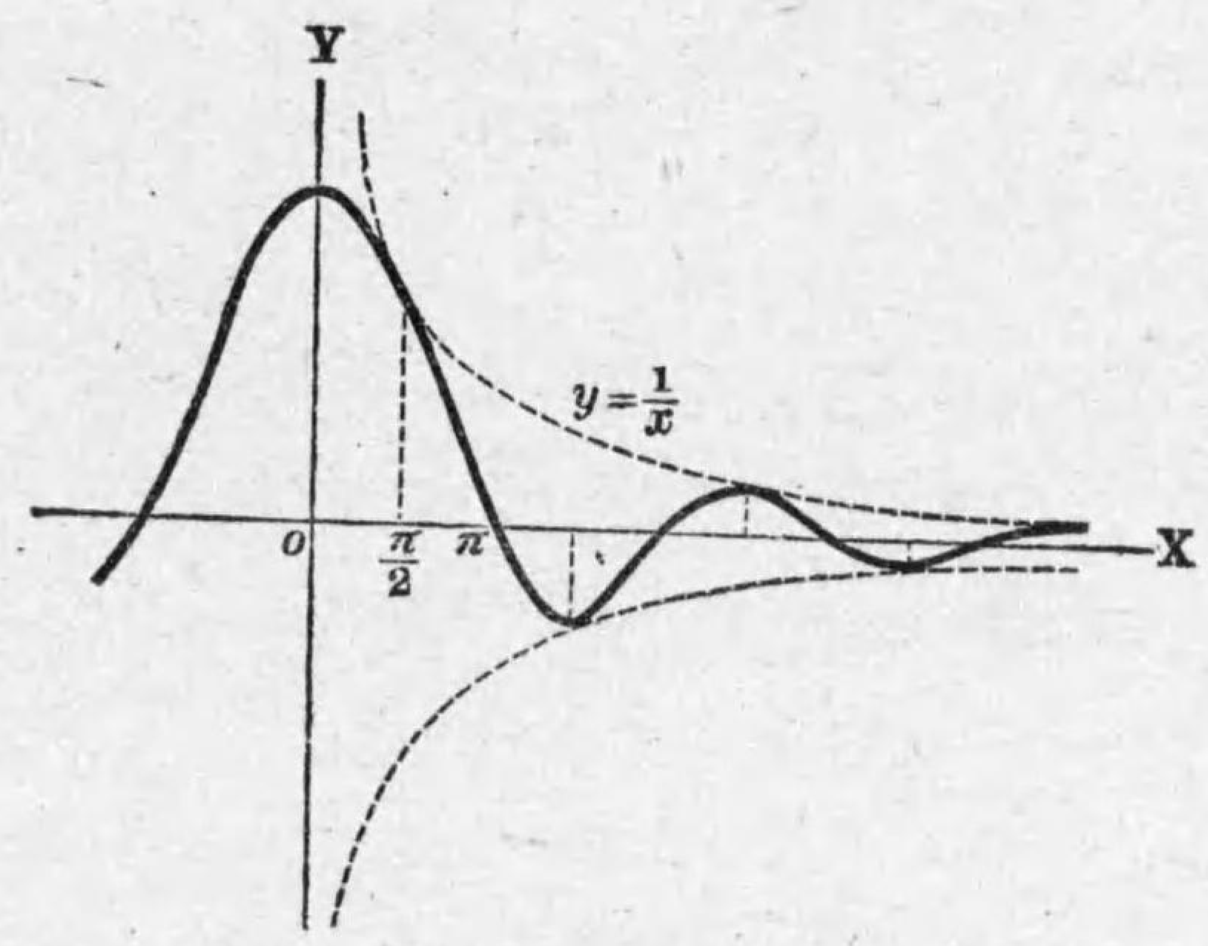
從ツテ
$$\beta=\lim_{x\to\pm\infty}(y-\alpha x)=\lim_{x\to\pm\infty}(y-\mathrm{A}x)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left\{y-\left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{dy}{dx}\right)x\right\}.$$

然ル＝此結果ハ必ズシモ常＝

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(y-\frac{dy}{dx}x\right)$$

トハ一致スルモノ＝アラズ。故＝漸近線ノ兩種ノ定義ハ必ズシモ常＝同一ノ內容ヲ有スルモノ＝ハアラザルナリ。

例. 曲線 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ ハ第一ノ定義＝ヨレバ $y=0$ ナル漸近線ヲ有スルコトハ容易＝證明セラル（第六十六圖）。然ル＝第二ノ定義＝從ヘバ



第 六 十 六 圖

$$\mathrm{A}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{dy}{dx}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right)=0,$$

$$\mathrm{B}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y-\frac{dy}{dx}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=-\lim_{x\to\pm\infty}\cos x$$

＝シテ B ハ不定ナリ。故＝此曲線ハ第二ノ定義＝ヨル漸近線ヲ有セズ。

例題 1. 双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ漸近線ヲ求メヨ。

例題 2. 拋物線 $y^2=4px$ ハ漸近線ヲ有セザルコトヲ示セ。

68. 重複點

曲線上ノ一點ニ於テハ一般ニ一ツノ切線アリ，而シテ唯一ツニ限リ，又ソノ切線ノ方向ハ切點ノ位置ニ伴ヒテ連續的ニ變ズルヲ常トス。然レドモ特別ノ場合ニ於テハ曲線上ノ一點ニ於テ切線ガ一ツヨリ多ク存在スルコトアリ，又ハ一ツモ存在セザルコトアリ，或ハ切線ノ方向ガ切點ノ位置ニ伴ヒテ不連續的ニ變ズルコトモアリ。スベテ斯クノ如キ異狀ヲ呈スル點ヲ稱シテ**特異點**トイヒ，然ラザル普通ノ點ヲ **通常點** トイフ。

今曲線ノ方程式ヲ

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

トシ，ソノ上ノ一點 $P(a,b)$ ガ通常點ナルカ特異點ナルカ，若シ後者ナラバ如何ナル異狀ヲ呈スルカ等ヲ吟味セントス。

座標軸ノ平行移動ニヨリ原點ヲ P ニ移セバ，曲線ノ方程式ハ

$$F(x+a,\ y+b)=0$$

トナル。ココニ於テ F ナル函數ガ Taylor ノ定理(第 55 節)ニヨリテ x 及ビ y ノ冪級數(有限級數又ハ收歛無限級數)ニ展開セラルルモノトスレバ

$$F(a,b)+\{F_x(a,b)x+F_y(a,b)y\}$$
$$+\frac{1}{2!}\{F_{xx}(a,b)x^2+2F_{xy}(a,b)xy+F_{yy}(a,b)y^2\}+\cdots\cdots=0.$$

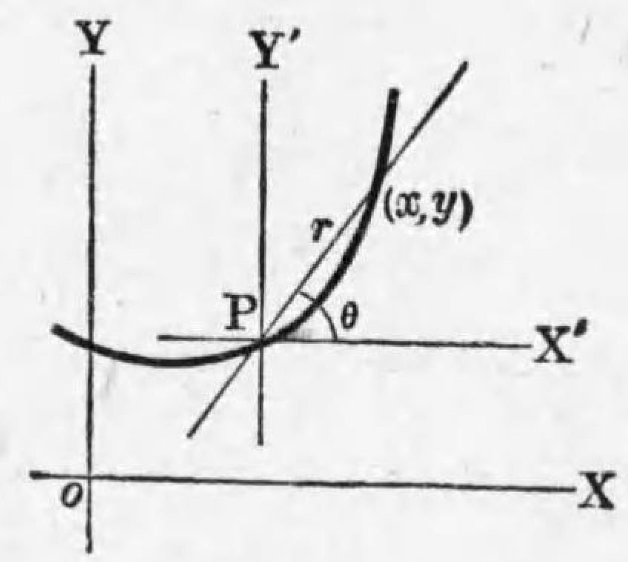
然ルニ P ハ曲線上ノ點ナルガ故ニ $F(a,b)=0$ ナリ，又 $F_x(a,b)$ 等ヲ單ニ F_x 等ト略記スルコトトスレバ，曲線ノ方程式ハ

$$(F_x x+F_y y)+\frac{1}{2!}(F_{xx}x^2+2F_{xy}xy+F_{yy}y^2)$$
$$+\frac{1}{3!}(F_{xxx}x^3+\cdots\cdots)+\cdots\cdots=0 \tag{2}$$

トナル。今 P ヲ過リ x 軸ト θ ナル角ヲナス直線ヲ引キタリトシ，之ト曲線トノ交點ノ P ヨリノ距離ヲ r トスレバ，r ヲ求ムルニハ (2) ニ於テ

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

ト置キテ得ル所ノ次ノ方程式ヲ解クベシ：



第六十七圖

$$(F_x\cos\theta+F_y\sin\theta)r+\frac{1}{2!}(F_{xx}\cos^2\theta+2F_{xy}\cos\theta\sin\theta+F_{yy}\sin^2\theta)r^2$$
$$+\frac{1}{3!}(F_{xxx}\cos^3\theta+\cdots\cdots)r^3+\cdots\cdots=0. \tag{3}$$

此方程式ノ一根ハ明カニ $r=0$ ナリ，蓋シ P 自身ガ今引キタル直線ト曲線トノ一ツノ交點ナレバナリ。

モシ F_x, F_y ノ中少クモ一ツガ 0 ナラザルトキハ (3) ハ一般ニハ $r=0$ ナル根ヲ唯一ツダケ有ス。然レドモモシ特ニ

$$F_x\cos\theta+F_y\sin\theta=0 \tag{4}$$

ナル様ニ θ ヲトレバ (3) ハ $r=0$ ナル根ヲ少クモ二ツ有スルコトトナル。換言スレバ P ヲ過ルアラユル直線ノ中ニテ特

＝ (4) ノ如キ方向ヲ有スルモノノミガ曲線ノ切線トナルナリ，從ツテ P ハ通常點ナルコトヲ知ル。故＝曲線 (1) 上ノ點＝シテ F_x, F_y ノ中少クモ一方ヲ 0 ナラシメザル如キ點ハ通常點ナリ。而シテ其點＝於ケル切線ノ方程式ハ (4) 及ビ

$$\frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\sin\theta} \qquad (5)$$

ヨリ θ ヲ消去スレバ之ヲ得ベシ，卽チ

$$F_x x + F_y y = 0$$

ナリ。故＝曲線上ノ通常點ヲ原點トセルトキ，ソノ點＝於ケル切線ノ方程式ヲ求ムル＝ハ曲線ノ方程式 (卽チ (2)) 中ノ一次ノ項ヲ 0 ＝等シト置ケバヨシ。

次＝ F_x, F_y 共＝ 0 ＝シテ，F_{xx}, F_{xy}, F_{yy} ノ中少クモ一ツハ 0 ナラズトスルトキハ，(3) ハ θ ノ如何＝關ハラズ常＝ $r=0$ ナル根ヲ二ツダケ有ス。卽チコノ場合＝ハ P ヲ過リテ如何ナル方向＝直線ヲ引クモ常＝曲線ト P ＝於テ二點＝テ交ルコトトナル，カクノ如キ點ヲ **二重點** トイフ。

二重點ヲ過リ，特＝

$$F_{xx}\cos^2\theta + 2F_{xy}\cos\theta\sin\theta + F_{yy}\sin^2\theta = 0 \qquad (6)$$

ナル θ ＝相當スル方向＝直線ヲ引クトキハ，(3) ナル方程式ハ $r=0$ ナル根ヲ少クモ三ツ有スルコトトナル，コレ卽チ其直線ガ二重點＝於ケル切線ナルコトヲ示スモノナリ。

今 $\sin\theta : \cos\theta = m$ ト置クトキハ，(6) ハ

$$F_{xx} + 2F_{xy}m + F_{yy}m^2 = 0 \qquad (7)$$

トナリ，之ヨリ m ノ値ガ一般＝二ツ決定セラルル＝ヨリ，一般＝二重點＝於テハ二ツノ切線ガ存在スベシ。ソノ切線ノ方程式ハ (6) ト (5) ヨリ θ ヲ消去スルカ，或ハ (7) ト $y = mx$ ヨリ m ヲ消去スレバ之ヲ得，卽チ

$$F_{xx}x^2 + 2F_{xy}xy + F_{yy}y^2 = 0. \qquad (8)$$

故＝原點ガ二重點ナルトキハ，其點＝於ケル二本ノ切線ノ方程式ハ曲線ノ方程式中ノ二次ノ項ダケヲ 0 ＝等シト置キタルモノナリ。

サテ (7) ハ二重點＝於ケル二本ノ切線ノ方向係數ヲ與フルモノナレドモ，之＝ヨリテ決定セラルル m ハ必ズシモ實數ナリトハ限ラズ，從ツテ二重點＝於ケル切線ハ必ズシモ實在スル直線＝アラズ，次＝之ヲ吟味セントス。

(i) $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} > 0$ ナルトキハ，m ノ二ツノ値ハ共＝實＝シテ相異ル，從ツテ切線ハ二本實在ス。此場合＝ハ曲線ハ P ヲ二度相異ル方向＝過ルモノ＝シテ，* カクノ如キ二重點ヲ **結節點** トイフ。

例. 曲線 $F(x, y) = x^3 - 3axy + y^3 = 0$, $a>0$ ＝於テハ

$$F_x = 3x^2 - 3ay, \quad F_y = -3ax + 3y^2,$$

$$F_{xx} = 6x, \quad F_{xy} = -3a, \quad F_{xy} = 6y.$$

---

* 切線ガ實在スル場合ト雖之＝對スル曲線ガ實在セリトハ限ラズ (258 頁例 4 ヲ見ヨ)，故＝今ノ場合＝實際曲線ガ P ヲ二度過ルコトハ實ハ別＝證明ヲ要スルコトナレドモ此所＝ハ之ヲ略ス。

サテ此曲線上ノ二重點ヲ見出サンニハ，先ヅ $F_x=0$, $F_y=0$ ニシテ且原式 $F=0$ ヲ滿足セシムル (x, y) ヲ求ムベシ。

依ツテ聯立方程式　$3x^2-3ay=0$,　$-3ax+3y^2=0$

ヲ解ケバ，次ノ二組ノ根ヲ得：

$$x=0,\quad y=0;\quad x=a,\quad y=a.$$

前者ハ原式 $F=0$ ヲ滿足セシムレドモ，後者ハ之ヲ滿足セシメザルガ故ニトラズ。

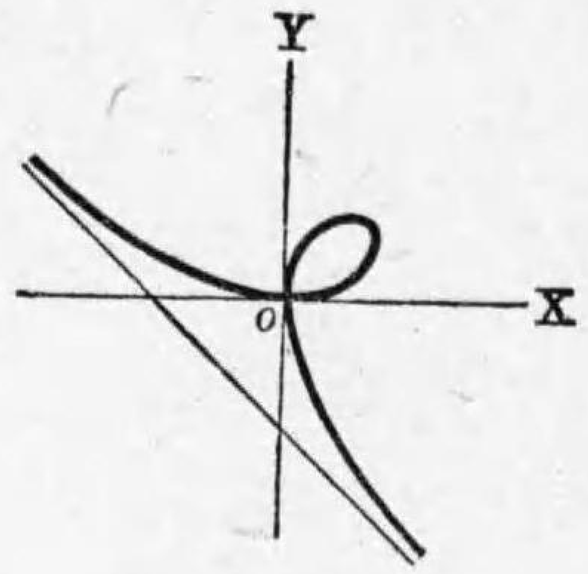
サテ $x=0$, $y=0$ ナルトキハ

$$F_{xx}=0,\quad F_{xy}=3a\neq 0,\quad F_{yy}=0,$$

故ニ原點 $(0, 0)$ ハタシカニ二重點ナリ。

而シテ　$F^2_{xy}-F_{xx}F_{yy}=9a^2>0$

ナルヲ以テ原點ハ結節點ニシテ，其點ニ於ケル切線ハ $xy=0$，即チ兩軸自身ナリ。



第六十八圖

(ii)　$F^2_{xy}-F_{xx}F_{yy}<0$ ナルトキハ，m ノ二ツノ値ハ共ニ虛ナリ，從ツテ此點ニ於ケル切線ハ實在セズ。此場合ニハ其二重點自身ハ $F=0$ ヲ滿足セシムレドモ其附近ニハ之ヲ滿足セシムル點ナク，卽チ曲線ノ他ノ部分トハ離レテ唯一點ダケ孤立スルモノナリ。* カクノ如キ點ヲ **孤立點** トイフ。

例. 曲線 $F=x^2+y^2-x^3=0$ ニ於テ，原點 $(0, 0)$ ガ二重點ナルコトハ容易ニ證明セラル。而シテ原點ニ於テハ　$F_{xy}{}^2-F_{xx}F_{yy}=-4<0$,

故ニ原點ハ孤立點ナリ。

試ミニ原式ヲ書キ直シテ

---

* 實際此場合ニハ　$F_{xx}\cos^2\theta+2F_{xy}\cos\theta\sin\theta+F_{yy}\sin^2\theta$

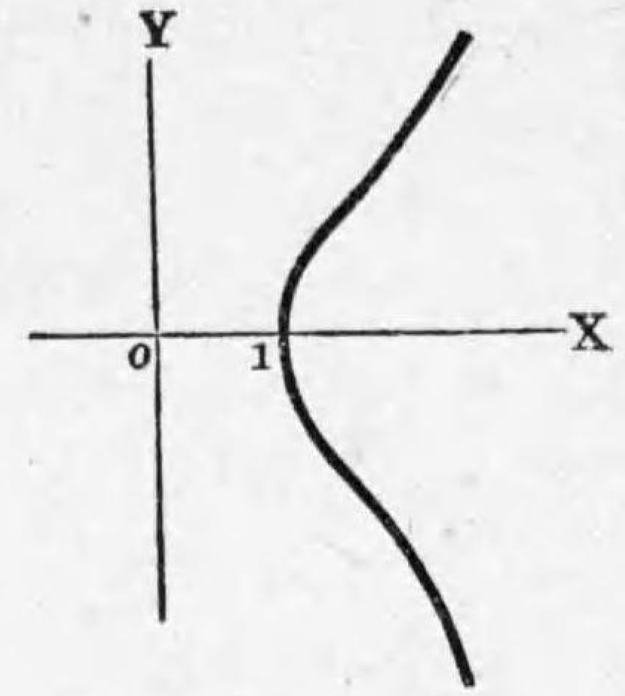
$$=\frac{1}{F_{xx}}\{(F_{xx}\cos\theta+F_{xy}\sin\theta)^2-(F^2_{xy}-F_{xx}F_{yy})\sin^2\theta\}>0$$

ニシテ如何ナル θ ノ値ニ對シテモ此式ハ 0 トナルコトナキヲ以テ，253 頁 (3) ハ $r=0$ ナル二重根ノ他ニハ 0 ニ近キ根ヲ有セザルナリ。

$$y=\pm x\sqrt{x-1}$$

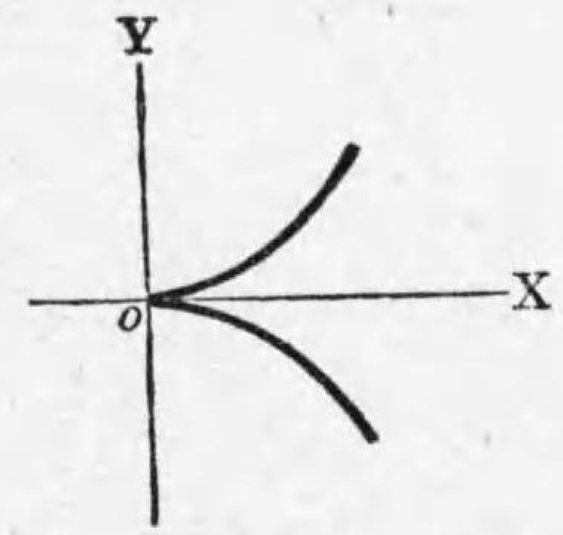
トスレバ，此曲線ハ原點ヲ除クノ他平面上ノ $x<1$ ナル部分ニハ存在セザルコト明カナリ。

强イテ $x<1$ ナル如キ x ノ値ヲ代入スレバ y ノ値ハ二ツノ互ニ共軛ナル虛數トナリ，$x=0$ ナルトキニ此二ツノ値ハ共ニ 0 トナル。故ニ原點ハ此曲線ノ互ニ共軛ナル虛分枝ノ交點ト考フルコトヲ得。斯クノ如キ意味ニ於テ一般ニ孤立點ノコトヲ **共軛點** トモイフ。



第六十九圖

(iii)　$F^2_{xy}-F_{xx}F_{yy}=0$ ナルトキハ，m ノ二ツノ値ハ實數ニシテ相等シ，從ツテ二本ノ切線ハ實在スレドモ合シテ一ツトナル。此場合ニハ其點ノ附近ニ於ケル曲線ノ形狀ニ種種アリ。次ニソノ例ヲ擧ゲン。



第七十圖

例 1. 曲線 $y^2=x^3$ ニ於テ原點ハ二重點ニシテ，ココニ於ケル切線ハ $y^2=0$ ナリ。而シテ曲線ハ y 軸ノ右方ニノミアリ，x 軸ニ關シテ對稱ナリ。

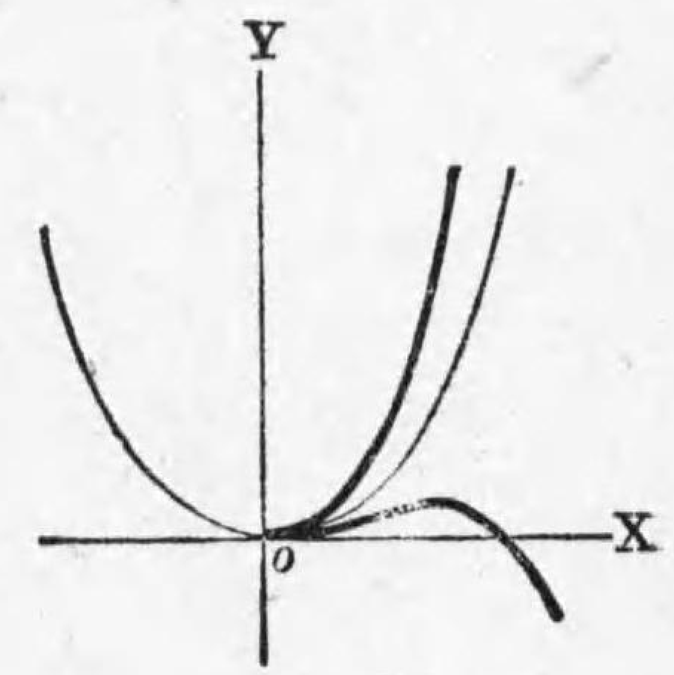
例 2. 曲線 $(y-x^2)^2=x^5$ ニ於テモ原點ハ二重點ニシテ，ココニ於ケル切線ハ

$$y^2=0$$

ナリ。此曲線ノ原點ノ附近ニ於ケル形狀ヲ知ランニハ，與ヘラレタル方程式ヲ書キ直シテ

$$y=x^2(1\pm\sqrt{x})$$

トスベシ。之ニ依ツテ見レバ，原曲線ハ y 軸ノ右方ニノミアリテ拋物線 $y=x^2$ ノ上及ビ下ニ一ツヅツ分枝ヲ有シ，何レモ原點ニ於テ上方ヨリ x 軸ニ切スルコトヲ知ル。



第七十一圖

例 1 ノ如クーツノ二重點ヨリ同方向ニ發スル曲線ノ二分枝ガ共通切線ノ反對ノ側ニアルトキハ其二重點ヲ **第一種ノ尖點** トイヒ，例 2 ノ如ク共通切線ノ同シ側ニアルトキハ **第二種ノ尖點** トイフ。兩者ヲ總稱シテ單ニ **尖點** トイフ。

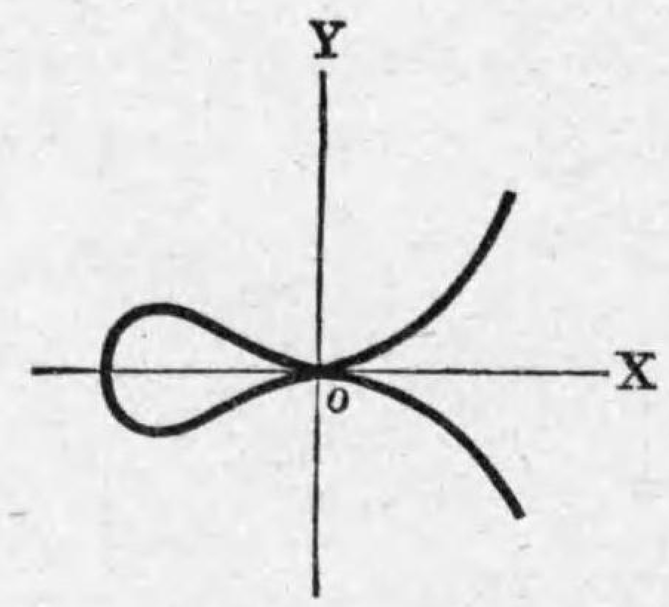
例 3. 曲線 $y^2=x^4+x^5$ モ亦原點ヲ二重點トシテ有シ，其點ニ於ケル切線ハ $y^2=0$ ナリ。此曲線ノ方程式ヲ書キ直セバ

$$y=\pm x^2\sqrt{1+x}$$

トナル，故ニ原點ノ附近ニ於ケル形狀ハ殆ンドニツノ拋物線

$$y=\pm x^2$$

ノ如ク，x 軸ノ兩側ニアリテ之ニ切スルモノナリ。



第七十二圖

斯クノ如ク同一曲線ノ二分枝ガ相切スル點ヲ **自切點** トイフ。

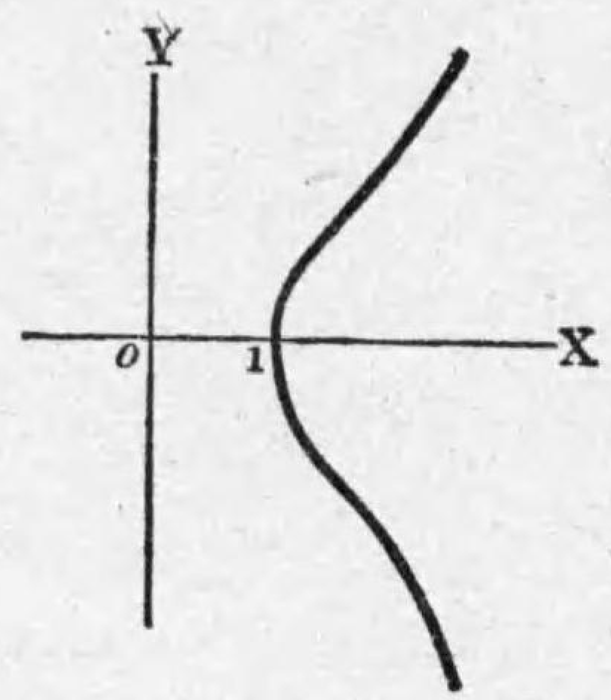
例 4. 曲線 $y^2+x^4=x^5$ モ亦原點ヲ二重點トシテ有シ，其點ニ於ケル切線ハ

$$y^2=0$$

ナリ。然レドモ此曲線ノ方程式ヲ書キ直シテ見レバ

$$y=\pm x^2\sqrt{x-1}$$

ニシテ，原點以外ニ $x<1$ ナル如キ實點ヲ有セザルコト明カナリ。故ニ原點ハ孤立點ナリ。



第七十三圖

此例ノ如ク，或點ニ於ケル切線ガ實在スルモ其點ハ孤立點ナルコトアリ，此場合ニ於ケル切線トイフ語ノ意味ハ第 61 節ニ述ベタル定義ヲ擴張シタルモノニシテ同節ニ Q ト名付ケタル點ガ曲線ノ虛ナル分枝ニ沿ヒテ P ニ近ヅクモノト考フベシ。

以上論ジ來レル諸種ノ二重點ハ何レモ $F_x=0,\ F_y=0$ ニシテ，$F_{xx},\ F_{xy},\ F_{yy}$ ノ中少クモ一ツハ 0 ナラザルコトヲ其特徵トスルモノナルガ，モシ更ニ進ンデ曲線上ノ一點 $P(a,b)$ ニ於テ

$$F_x,\ F_y,\ F_{xx},\ F_{xy},\ F_{yy}$$

ガ悉ク 0 ニシテ，$F_{xxx},\ F_{xxy},\ F_{xyy},\ F_{yyy}$ ノ中少クモ一ツハ 0 ナラズトスレバ，其點ニ於テハ θ ノ如何ニ關ハラズ (2) ナル方程式ノ三根ガ $r=0$ トナル。即チ P ヲ過ル任意ノ直線ハ一般ニ曲線ト三點ニテ交ルコトトナル，斯クノ如キ點 P ヲ稱シテ **三重點** トイフ。

三重點ヲ原點トセルトキ其點ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求ムルニハ原曲線ノ方程式中ノ三次ノ項ノミヲ 0 ニ等シト置ケバヨシ，即チ

$$F_{xxx}x^3+3F_{xxy}x^2y+3F_{xyy}xy^2+F_{yyy}y^3=0$$

ナリ。其理ハ二重點ノ場合ト同樣ナリ。

一般ニ曲線 (1) ノ上ノ一點 $P(a,b)$ ニ於テ，$F_x,\ F_y,\ F_{xx},\ \ldots\ldots$ 等第 $(n-1)$ 次ノ偏微係數マデ悉ク 0 トナリ，第 n 次ノ偏微係數ノ中ニハ少クモ一ツ 0 ナラザルモノガ存在スルトキハ，點 P ヲ此曲線ノ **n 重點** トイフ。

n 重點ヲ過ル任意ノ直線ハ一般ニ曲線ト n 個ノ點ニテ交ルモノナリ。モシ此點ヲ原點トスルトキ，ココニ於ケル切線ノ方程式ヲ求ムルニハ原曲線ノ方程式中ノ n 次ノ項ノミヲ取リテ之ヲ

0 ニ等シト置クベシ。

二重點，三重點，……，n 重點等ヲ總稱シテ **重複點** トイフ。重複點ヲ求ムルニハ先ヅ $F=0$ ニシテ且 $F_x=0,\ F_y=0$ ナル點ヲ求メ，其座標ヲ更ニ F_{xx} 等ノ高次ノ偏導函數ニ代入シ上記ノ定義ニヨリテ其重複ノ度ヲ判定スベシ。

重複點ハスベテ特異點ナレドモ，逆ニ特異點ハ必ズ重複點ナリトハ限ラズ。代數曲線ニ於テハ上ノ理論ニ於ケル (2) ナル式ハ常ニ有限級數ナリ，從ツテ重複點以外ニ特異點ヲ有セズ。超越曲線ニテモ今考フル特異點ニ於テ (2) ナル收斂級數ノ展開ガ成立スルトキハ矢張重複點ナレドモ，斯クノ如キ展開ガ出來ザル場合ニハ更ニ別種ノ特異點ナルコトアリ，之ニツイテハ第 70 節ニ論ズベシ。

例題 1. 代數曲線ノ方程式ガ常數項ヲ有セザルトキハ，其最低次ノ項ヲ悉クトリテ 0 ニ等シト置ケバ原點ニ於ケル切線ノ方程式トナルコトヲ示セ。

例題 2. a ノ種種ノ値ニ對シテ曲線 $y^2=x^2(x-a)$ ノ特異點ノ有無及ビソノ種類ヲ吟味セヨ。

例題 3. 重複點ニ於テハ x ノ一ツノ値ニ對シテ y ノ二ツ以上ノ値ガ相一致シ，又 y ノ一ツノ値ニ對シテ x ノ二ツ以上ノ値ガ相一致ス。此ノ見地ヨリシテ重複點ニ於テハ $F_x=0,\ F_y=0$ ナルコトヲ推論セヨ。(第 26 節 (1))

69. 重複點ノ近傍ニ於ケル代數曲線ノ形狀

重複點ノ近傍ニ於ケル代數曲線ノ形狀ヲ調ブルニハ先ヅ次ノ原理ヲ會得スルヲ要ス。

(i) 同位ノ無限小ノ代數和ハソレト同位又ハソレヨリ高位ノ無限小ナリ。

何トナレバ

$$\lim_{x\to0}\frac{u_1}{x^n},\qquad \lim_{x\to0}\frac{u_2}{x^n}$$

ガ共ニ 0 ニアラザル有限値ナルトキハ，

$$\lim_{x\to0}\frac{u_1+u_2}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{u_1}{x^n}+\lim_{x\to0}\frac{u_2}{x^n}$$

ハ 0 又ハ 0 ニアラザル有限値ナレバナリ。

(ii) 若干ノ無限小ノ和ガ 0 ナルトキハ，其中ニ最低位ノ無限小ハ少クモニツアリ。

何トナレバ，今 $u_1,\ u_2,\ \cdots\cdots,\ u_k$ ガ無限小ニシテ

$$u_1+u_2+\cdots\cdots+u_k=0$$

ナリトシ，若シコノ左邊ノ各無限小ノ中ニテ最低位ノモノハ例ヘバ u_1 一ツダケニシテ他ハ皆之ヨリ高位ナリトスレバ，

$$u_1=-(u_2+u_3+\cdots\cdots+u_k)$$

ナル等式ニ於テ，(i) ニヨリ右邊ハ左邊ヨリモ高位トナル，コレ不合理ナリ。

今代數曲線上ノ重複點ノ附近ニ於ケル曲線ノ形狀ヲ調ベンニ，先ヅ其點ニ原點ヲ移シタリトスレバ，其附近ニテハ曲線ノ方程式ノ各項ハ皆無限小トナル，之ニ就テ上ノ原理ヲ適用スベシ。次ニ例ニツイテ之ヲ說明セントス。

ココニ記述ヲ簡單ニスルタメニ u_1 ト u_2 トガ同位ノ無限小ナ

ルコトヲ表スニ $u_1 \sim u_2$ ト書クコトトス。

例 1. 曲線 $x^3-3axy+y^3=0,\ a>0$ ニ於テ原點ハ結節點ナリ。今原點ノ近傍ヲ考フレバ x^3, xy, y^3 ハ何レモ無限小ナルガ, (ii) ニヨリコノ三ツノ中少クモ二ツハ同位ナラザル可カラズ。

今試ミニ第一項ト第二項トヲ同位トシ $x^3 \sim xy$ 即チ $x^2 \sim y$ ト考フレバ, $y^3 \sim x^6$ トナル。故ニ原式ノ第三項ハ他ノ二項ヨリモ高位ナリ。依ツテ第三項ヲ捨テテ考フレバ, 原點附近ニ於ケル原曲線ノ一ツノ分枝ノ形狀ハ大略

$$x^3-3axy=0, \tag{A}$$

即チ

$$x^2=3ay \tag{B}$$

ナル抛物線ノ如クナルヲ知ル。但シココニ (A) ノ兩邊ヨリ x ナル因數ヲ約シタルハ $x=0$ ナル直線ニ沿ヒテハ今考フル如キ $x^2 \sim y$ ナル關係ガ成立セザレバナリ。

次ニ又第二項ト第三項トヲ同位トシ $xy \sim y^3$ 即チ $x \sim y^2$ ト考フレバ, $x^3 \sim y^6$ トナリ, 第一項ハ他ノ二項ヨリモ高位トナル。故ニ原點附近ニ於テハ

$$-3axy+y^3=0$$

即チ

$$3ax=y^2 \tag{C}$$

ナル抛物線ニ似タル分枝モ存在スルコトヲ知ル　ココニ $y=0$ ヲ捨ツル理由ハ前ト同樣ニ考フベシ。

最後ニ第一項ト第三項トヲ同位トシ $x^3 \sim y^3$ 即チ $x \sim y$ ト考フレバ, $xy \sim x^2$ ニシテ第二項ハ却ツテ第一項ヨリモ低位トナリ　而シテ最低位ノ項ガ唯一ツトナル, コレ不可能ナリ。

故ニ與ヘラレタル曲線ハ原點ニ於テ (B), (C) ニ似タル二ツノ分枝ヲ有シ此他ニ分枝ナシ。之ヲ綜合スレバ第六十八圖ノ如クナルベシ。

例 2. 曲線 $x^4+axy^2-y^4=0,\ a>0$ ハ原點ニ於テ三重點ヲ有ス。

今 $x^4 \sim xy^2$ 即チ $x^3 \sim y^2$ ト考フレバ, $y^4 \sim x^6$ ニシテ第三項ハ前二項ヨリモ高位ナリ。故ニ此曲線ハ原點ニ於テ $x^4+axy^2=0$ 即チ $x^3+ay^2=0$ ニ似タル分枝ヲ有ス。此分枝ハ y 軸ノ左側ニアリテ x 軸ニ切シ, 原點ヲ第一種ノ尖點トシテ有スルモノナリ。

次ニ $xy^2 \sim y^4$ 即チ $x \sim y^2$ ト考フレバ, $x^4 \sim y^8$ トナリ, 第一項ハ他ノ二項ヨリ

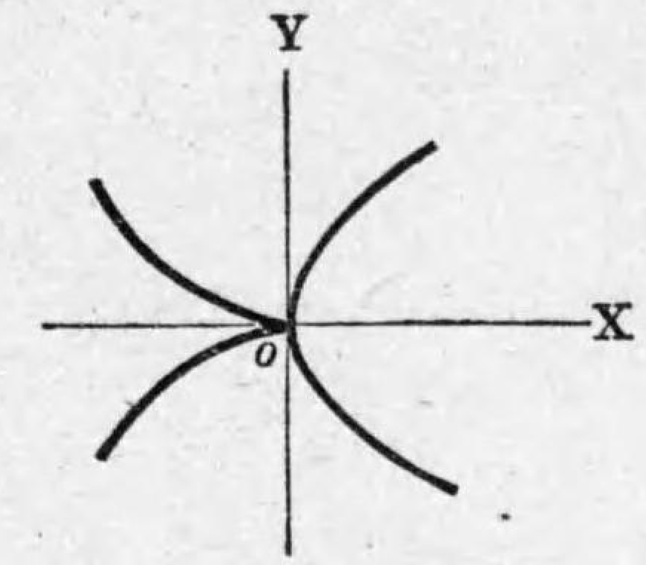
モ高位ナリ。故ニ原點ニ於テマタ

$$axy^2-y^4=0 \quad 即チ \quad ax=y^2$$

ニ似タル分枝モ存在スルコトヲ知ル。

最後ニ $x^4 \sim y^4$ ト考フレバ, xy^2 ハ之ヨリモ低位トナルコト明カニシテ, 斯クノ如キ場合ハ存在シ得ズ。

故ニ與ヘラレタル曲線ノ原點ニ於ケル形狀ハ第七十四圖ノ如クナリト斷定ス。



第七十四圖

例題. 曲線 $x^4-x^2y+y^3=0$ ノ原點ノ附近ニ於ケル形狀如何。

70. 超越曲線ノ特異點

超越曲線ノ特異點ハ種種雜多ニシテ之ヲ吟味スベキ一定ノ方法ナシ。次ニソノ二三ノ例ヲ擧ゲン。

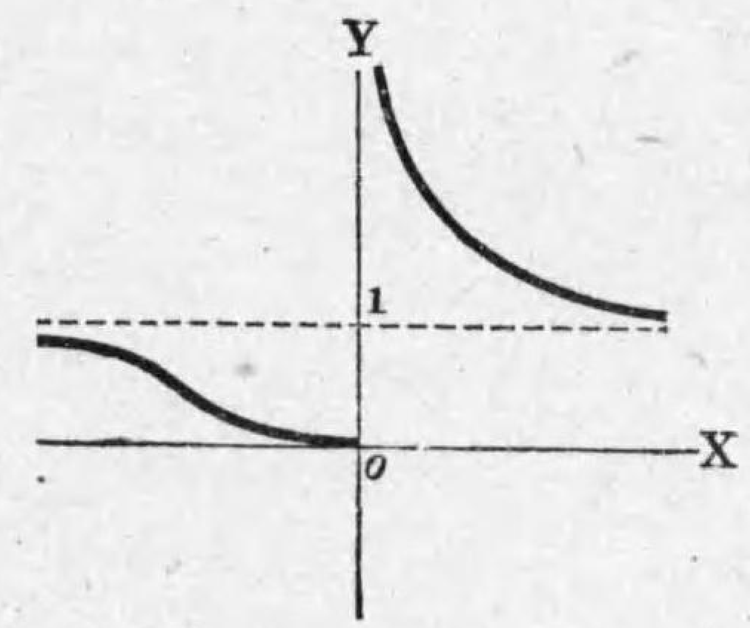
例 1. 曲線 $y=e^{\frac{1}{x}}$ ニ於テハ

$$\lim_{x\to+0} y=\infty, \quad \lim_{x\to-0} y=0.$$

又　$y'=-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ ナルヲ以テ,

$$\lim_{x\to+0} y'=-\infty, \quad \lim_{x\to-0} y'=0.^*$$

$x=0$ ナルトキニハ y ノ値ハ存在セザレドモ, 今ココニ $y=0$ ナル値ヲ附加スルコトトスレバ, 原點ハ曲線上ノ一點トナル。而シテ曲線ノ一分枝ハ



第七十五圖

---

* $x\to-0$ ナルトキハ, 第 25 節ニヨリ

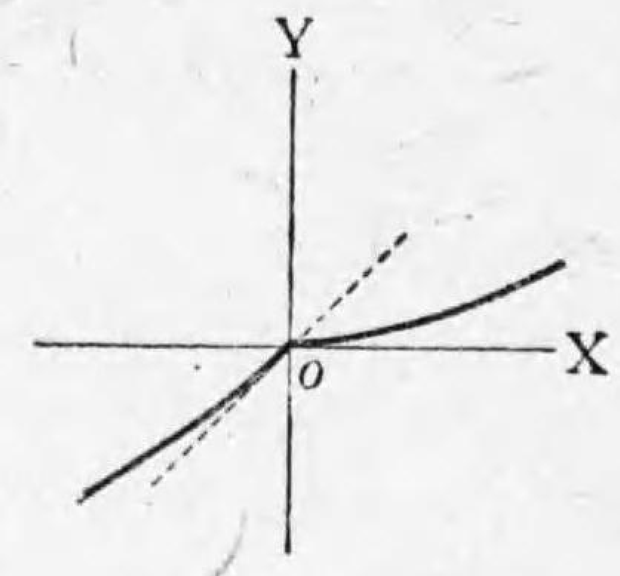
$$\lim\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)=\lim\frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{-\frac{1}{x}}}=\lim\frac{\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}=\lim\frac{\frac{2}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}}=\lim\frac{-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}=\lim\frac{-2}{e^{-\frac{1}{x}}}=0.$$

突然原點ニテ終止スルコトトナル。斯クノ如キ點ヲ **終止點** トイフ。

例 2. 曲線 $y=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ ハ $x=0$ ナルトキ $y=0$ ト定ムレバ原點ニ於テ連續トナル (第 20 節, 例 3)。然ルニ

$$\lim_{x\to+0}\frac{y}{x}=0,$$

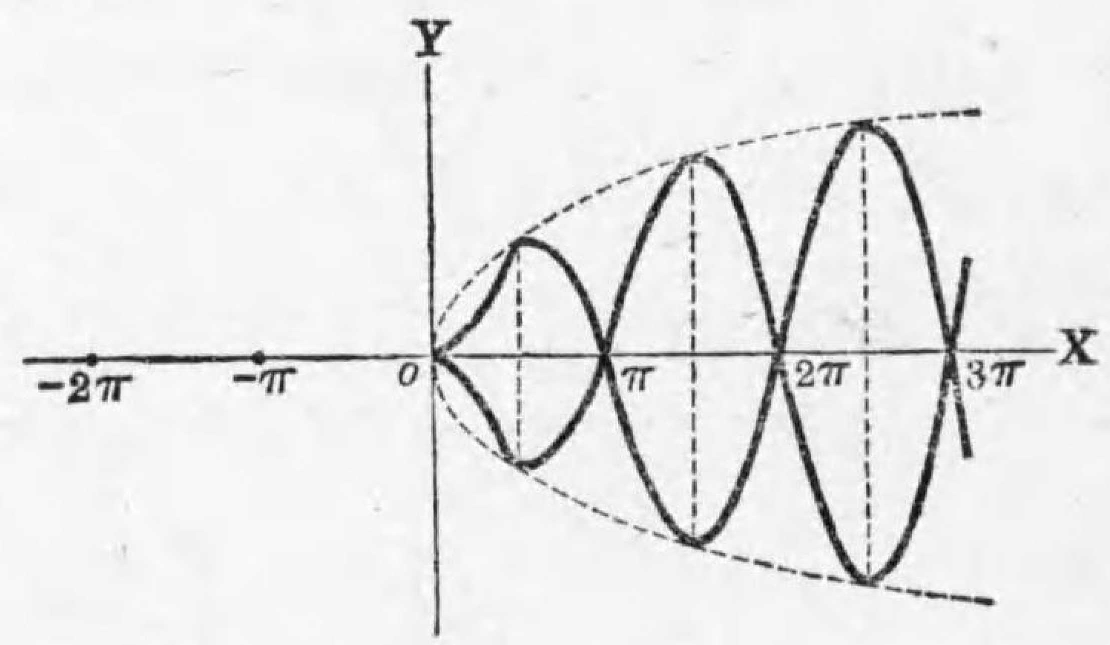
$$\lim_{x\to-0}\frac{y}{x}=1.$$



第七十六圖

故ニ此曲線ハ原點ニ於テ不連續的ニ方向ヲ變ズ。斯クノ如キ點ヲ **角點** トイフ。

例 3. 曲線 $y^2=x\sin^2 x$ ニ於テ, コノ方程式ヲ書キ直シテ $y=\pm\sqrt{x}\sin x$ トシテ考フレバ, $x\geqq 0$ ナルトキハ拋物線 $y^2=x$ ニ内接スル圖ノ如キ曲線ニシテ, 此曲線ハ $x=n\pi\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ ニ於テ結節點ヲ, 又 $x=0$ ニ於テ第一種ノ尖點ヲ有ス。



第七十七圖

$x<0$ ナルトキハ, $x=-n\pi\ (n=1, 2, \cdots\cdots)$ ナル値ニ對シテノミ $y=0$ ナル實數値ヲ得, ソノ他ノ x ノ値ニ對シテハ y ハ常ニ虚トナル。故ニ連續セル曲線ヲ得ズシテ無數ニ多クノ孤立點ノ一列ヲ得。斯クノ如キ點ノ列ヲ稱シテ曲線ノ **點分枝** トイフ。

例題. 例 2 ノ曲線ニツイテ $\dfrac{y}{x}$ ノ代リニ y' ヲ用キテ原點ノ近傍ニ於ケル曲線ノ形狀ヲ吟味セヨ。

71. 極座標ニ於ケル曲線及ビ直線ノ方程式

一點ノ極座標ヲ (r, θ) トス。曲線ヲ表スニハ直角座標ニ於ケルガ如ク

$$r=f(\theta)$$

$$F(r, \theta)=0,$$

$$r=\phi(t),\quad \theta=\psi(t)$$

等ノ方程式ヲ用キル。

次ニ極座標ニ於ケル直線ノ方程式ヲ考ヘントス。

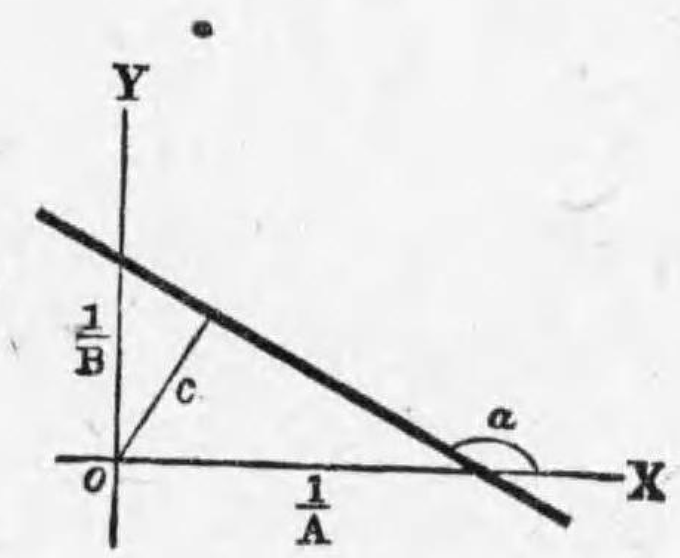
直角座標ニ於ケル原點ヲ過ラザル直線ノ方程式

$$Ax+By=1$$

ヲ極座標ニ直セバ

$$\frac{1}{r}=A\cos\theta+B\sin\theta \quad (1)$$

ヲ得。

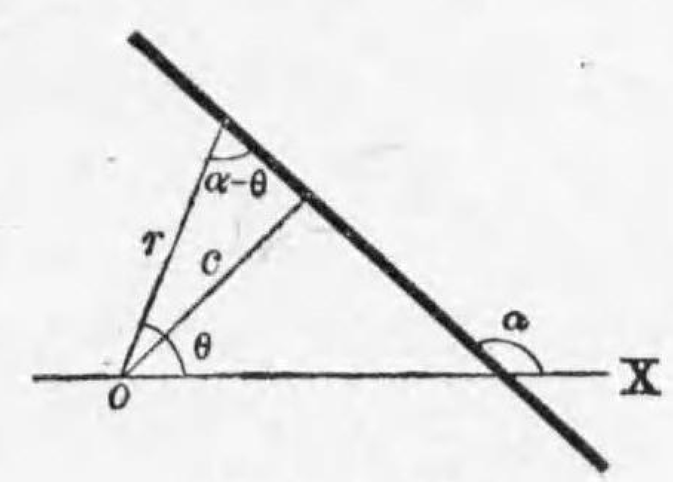


第七十八圖

此直線ガ原線 (x 軸) トナス角ヲ α トスレバ

$$\tan\alpha=-\frac{A}{B}, \quad (2)$$

又極(原點)ヨリ此直線マデノ距離ヲ c トスレバ



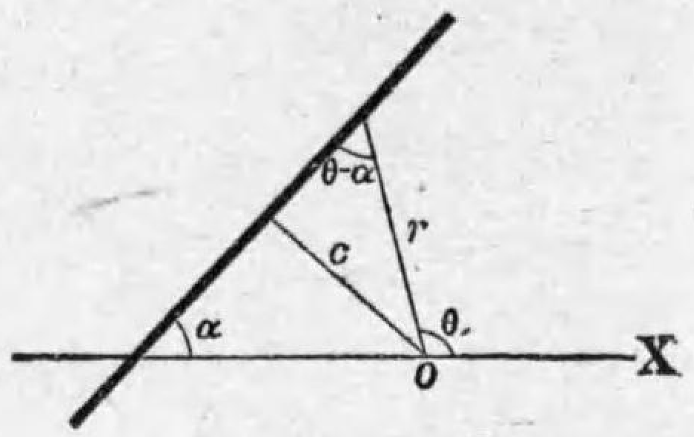
第七十九圖

$$c=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (3)$$

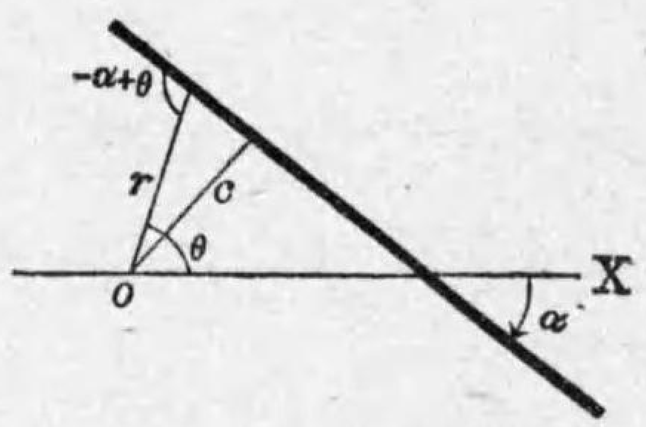
モシ α ト c トヲ用ヰテ同シ直線ノ方程式ヲ作レバ

$$r\sin(\alpha-\theta)=c \qquad (4)$$

ナルコトハ圖ニヨリテ明カナリ。但シ α ヲ第一，第二象限ノ角トスレバ直線ガ原線ヲ極ヨリ正ノ方向ニテ截ルトキハ $c>0$，負ノ方向ニテ截ルトキハ $c<0$ トスベク；α ガ第三，第四象限ノ角ナルトキハ之ニ反ス。



第八十圖



第八十一圖

例題. (2), (3) ヨリ A, B ヲ求メ，之ヲ (1) ニ代入スルコトニヨリ解析的ニ (4) ヲ誘導セヨ。

72. 極座標ニ於ケル諸公式

本節ニ於テハ既ニ得タル直角座標ノ諸公式ニ對應スル極座標ノ公式ヲ求メントス。但シ切線，切觸圓，漸近線等ノ定義及ビ證明ノ論法等ニシテ直角座標ノ場合ト全然同一ナルモノハ之ヲ省略シテ直チニ其結果ノミヲ記スベシ。

(I) 切線及ビ法線

曲線上ノ二點ヲ $P(r,\theta)$ 及ビ $Q(r+\Delta r,\theta+\Delta\theta)$ トス。今一ツノ直線

$$\frac{1}{R}=A\cos\Theta+B\sin\Theta \qquad (1)$$

$(R,\Theta$ ヲ流通座標トス) ガ P 及ビ Q ヲ過ルトスレバ，

$$\frac{1}{r}=A\cos\theta+B\sin\theta, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{r+\Delta r}=A\cos(\theta+\Delta\theta)+B\sin(\theta+\Delta\theta) \qquad (3)$$

ナル關係アリ。(1), (2), (3) ヨリ A, B ヲ消去スレバ直線 PQ ノ方程式ヲ得ベシ。

今 (3) ヨリ (2) ヲ邊邊相減ジ，兩邊ヲ $\Delta\theta$ ニテ割レバ

$$\frac{1}{\Delta\theta}\left(\frac{1}{r+\Delta r}-\frac{1}{r}\right)$$

$$=A\frac{\cos(\theta+\Delta\theta)-\cos\theta}{\Delta\theta}+B\frac{\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta}{\Delta\theta}.$$

ココニ於テ $\Delta\theta\to0$ ナル極限ヲ考フレバ

$$\left(\frac{1}{r}\right)'=-A\sin\theta+B\cos\theta \qquad (4)$$

ヲ得，但シ左邊ノ微分記號ハ θ ニ關シテ微分スルコトヲ示ス。(1), (2), (4) ヨリ A, B ヲ消去スレバ P ニ於ケル切線ノ方程式ヲ得ベシ。

先ヅ (2), (4) ヨリ A, B ヲ求ムレバ

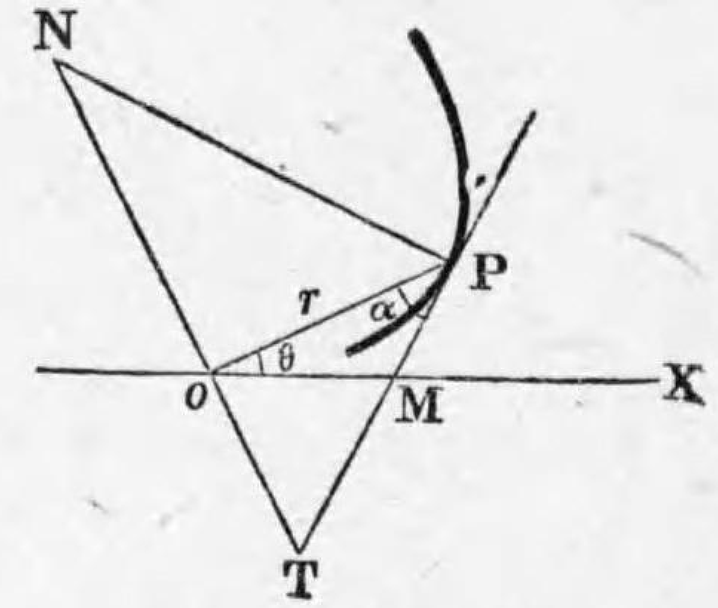
$$A=\frac{1}{r}\cos\theta-\left(\frac{1}{r}\right)'\sin\theta,$$

$$B=\frac{1}{r}\sin\theta+\left(\frac{1}{r}\right)'\cos\theta$$

ヲ得，之ヲ (1) ニ代入シテ整頓スレバ

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}\cos(\Theta-\theta)+\left(\frac{1}{r}\right)'\sin(\Theta-\theta) \qquad (5)$$

トナル, コレ卽チ切線ノ方程式ナリ。



第八十二圖

此切線ガ原線 OX ト交ル點ヲ M トスレバ, 前節 (2) ニヨリ

$$\tan\angle PMX=-\frac{A}{B}.$$

從ツテ, $\angle OPM=\alpha$ トスレバ,

$$\tan\alpha=\tan(\angle PMX-\theta)$$

$$=\frac{-\dfrac{A}{B}-\tan\theta}{1-\dfrac{A}{B}\tan\theta}=\frac{A\cos\theta+B\sin\theta}{A\sin\theta-B\cos\theta}.$$

ココニ上ニ得タル A, B ノ値ヲ代入スレバ

$$\tan\alpha=\frac{\dfrac{1}{r}}{-\left(\dfrac{1}{r}\right)'}=\frac{\dfrac{1}{r}}{\dfrac{r'}{r^2}}=\frac{r}{r'}.$$

故ニ

$$\tan\alpha=\frac{r}{r'}. \qquad (6)$$

今 O ヲ過リ OP ニ垂線ヲ引キ, P ニ於ケル切線及ビ法線ト交ル點ヲ夫夫 T, N トスレバ

$$ON=r\cot\alpha=r'.$$

故ニ N ノ座標ハ $\left(r',\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$ ナリ。

P ニ於ケル法線ハ P ト N トヲ過ル直線ナルヲ以テ, 次ノ三

式ヨリ A, B ヲ消去スレバ其方程式ヲ得ベシ。

$$\begin{cases}\dfrac{1}{R}=A\cos\Theta+B\sin\Theta\\[2mm]\dfrac{1}{r}=A\cos\theta+B\sin\theta\\[2mm]\dfrac{1}{r'}=-A\sin\theta+B\cos\theta\end{cases}$$

消去ノ結果ハ次ノ如シ:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}\cos(\Theta-\theta)+\frac{1}{r'}\sin(\Theta-\theta), \qquad (7)$$

コレ卽チ法線ノ方程式ナリ。

OT ヲ **切線影**, ON ヲ **法線影** トイヒ, 又 PT, PN ヲ夫夫 **切線** 及ビ **法線ノ長サ** トイフ。

$$OT=\left|\frac{r^2}{r'}\right|, \qquad ON=|r'|,$$

$$PT=\left|\frac{r}{r'}\sqrt{r^2+r'^2}\right|, \qquad PN=\sqrt{r^2+r'^2}.$$

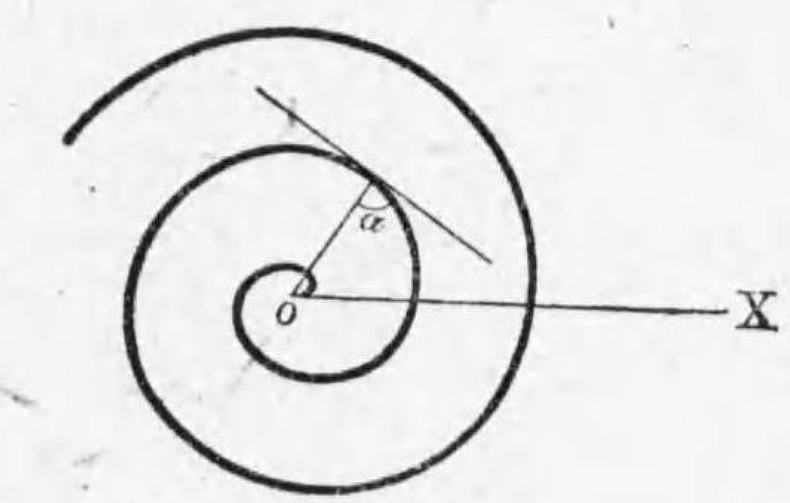
例. 曲線 $r=a\theta$ ヲ **正匝線** トイフ。其上ノ一點 (r,θ) ニ於ケル切線及ビ法線ノ方程式ハ次ノ如シ。

切線:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{a\theta}\cos(\Theta-\theta)-\frac{1}{a\theta^2}\sin(\Theta-\theta),$$

法線:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{a\theta}\cos(\Theta-\theta)+\frac{1}{a}\sin(\Theta-\theta).$$



第八十三圖

又動徑ト其端ニ於ケル切線トノナス角ヲ α トスレバ

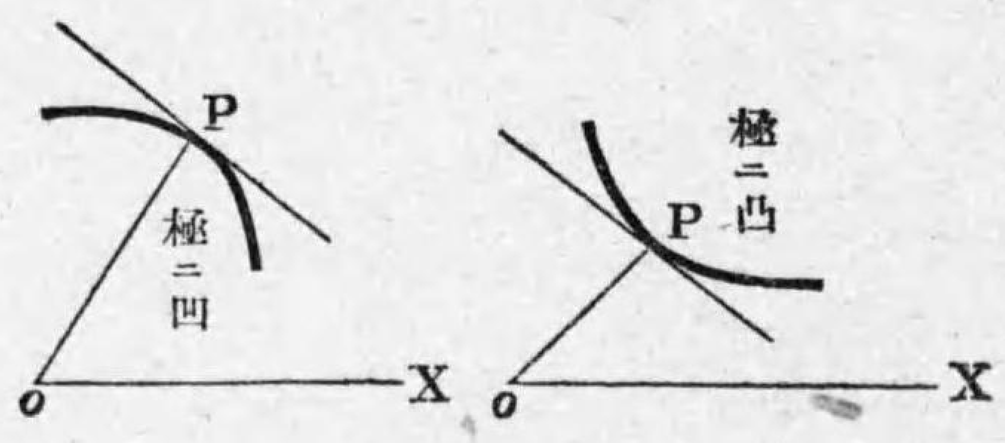
$$\tan\alpha=\frac{r}{r'}=\theta,$$

故ニ $\theta\to\infty$ ナルトキ, $a\to\frac{\pi}{2}$ ナリ。

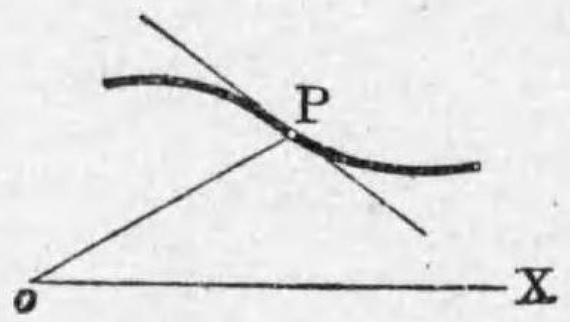
例題. 正匝線 $r=a\theta$ ニ於テハ法線影ノ長サハ一定ナルコトヲ示セ。

(II) 凹凸及ビ彎曲點

曲線上ノ一點ノ近傍ノ部分ガ其點ニ於ケル切線ニ對シテ常ニ極ト同シ側ニアルトキハ, 曲線ハ其點ニ於テ **極ニ凹** ナリトイヒ, 之ニ反シテ曲線ガ切線ニ對シテ極ト反對ノ側ニアルトキハ **極ニ凸** ナリトイフ。モシ曲線ガ今考フル點ノ一方ニ於テハ切線ニ對シテ極ト同シ側ニアリ, 他方ニ於テハ極ト反對ノ側ニアルトキハ, 其點ヲ **彎曲點** トイフ。

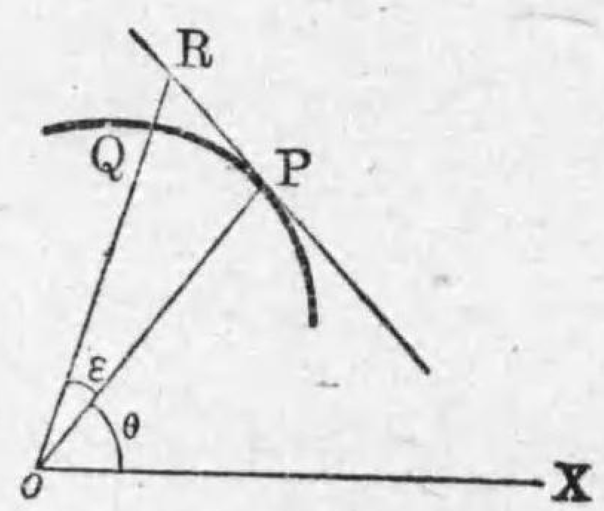


第八十四圖



第八十五圖

今曲線ノ方程式ヲ $r=f(\theta)$, 其上ノ一點ヲ $P(r,\theta)$ トシ, ε ヲ 0 ニ近キ正又ハ負ヲ任意ノ數トシ $\theta+\varepsilon$ ナル傾角ニ對スル曲線上ノ點ヲ Q トス。然ルトキハ



第八十六圖

$$OQ=f(\theta+\varepsilon),$$

又 P ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{f(\theta)}\cos(\Theta-\theta)+\left(\frac{1}{f(\theta)}\right)'\sin(\Theta-\theta)$$

ナルヲ以テ, 此切線ト OQ トノ交點ヲ R トスレバ,

$$\frac{1}{OR}=\frac{1}{f(\theta)}\cos\varepsilon+\left(\frac{1}{f(\theta)}\right)'\sin\varepsilon.$$

サテ P ニ於ケル曲線ノ凹凸(極ニ向ツテノ)ヲ考フルコトハツマリ OR ト OQ トノ大小ヲ比較スルコトニ歸ス。今

$$\frac{1}{OQ}-\frac{1}{OR}=\frac{1}{f(\theta+\varepsilon)}-\frac{1}{f(\theta)}\cos\varepsilon-\left(\frac{1}{f(\theta)}\right)'\sin\varepsilon=F(\varepsilon)$$

ト置ケバ, $F(0)=0$ ナルコト明カナリ。而シテ ε ガ連續的ニ 0 ノ近傍ノ値ニ變動スルトキ OQ, OR 等ノ長サハスベテ正ナルモノトスレバ, $F(\varepsilon)$ ガ正ヨリ 0 ヲ經テ又正トナルトキ, 即チ $F(0)$ ガ極小ナルトキハ曲線ハ P ニ於テ極ニ凹ニシテ, 之ニ反シテ $F(0)$ ガ極大ナルトキハ曲線ハ極ニ凸ナリ。故ニ結局 P ニ於ケル凹凸ノ問題ハ $F(0)$ ガ極小ナルカ極大ナルカヲ決定スルコトニ歸ス。然ルニ $F(\varepsilon)$ ヲ ε ニ關シテ微分スレバ

$$F'(\varepsilon)=\left(\frac{1}{f(\theta+\varepsilon)}\right)'+\frac{1}{f(\theta)}\sin\varepsilon-\left(\frac{1}{f(\theta)}\right)'\cos\varepsilon,$$

從ツテ確カニ　　$F'(0)=0.$

又　　$F''(\varepsilon)=\left(\frac{1}{f(\theta+\varepsilon)}\right)''+\frac{1}{f(\theta)}\cos\varepsilon+\left(\frac{1}{f(\theta)}\right)'\sin\varepsilon,$

從ツテ　　$F''(0)=\left(\frac{1}{f(\theta)}\right)''+\frac{1}{f(\theta)}=\left(\frac{1}{r}\right)''+\frac{1}{r}.$

然ルニ $F''(0)>0$ ナラバ $F(0)$ ハ極小，$F''(0)<0$ ナラバ $F(0)$ ハ極大ナリ。故ニ曲線上ノ一點ニ於テ

$$\left(\frac{1}{r}\right)''+\frac{1}{r}>0 \quad ナラバ，\quad 極ニ凹,$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)''+\frac{1}{r}<0 \quad ナラバ，\quad 極ニ凸$$

ニシテ，又 $\left(\frac{1}{r}\right)''+\frac{1}{r}$ ガ符號ヲ變ズルトキハ，其點ハ彎曲點ナリ。

サテ

$$\left(\frac{1}{r}\right)''=\left(-\frac{r'}{r^2}\right)'=\frac{2r'^2-rr''}{r^3}$$

ナルヲ以テ，

$$\left(\frac{1}{r}\right)''+\frac{1}{r}=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{r^3}. \qquad (1)$$

コノ右邊ノ式ヲ上記ノ判定法ニ用ヰルモ可ナリ。

以上ハ OQ, OR ノ長サヲ正ナリトシテ考ヘタルガ，モシ負ナルトキハ其大小ノ關係ガスベテ反對トナルヲ以テ，$\left(\frac{1}{r}\right)''+\frac{1}{r}$ ガ正ナルトキハ極ニ凸，負ナルトキハ極ニ凹トナルベシ。然ルニ (1) ニ於テ右邊ノ分母ハ r ト共ニ符號ヲ變ズルモノナルガ故ニ，モシ $\left(\frac{1}{r}\right)''+\frac{1}{r}$ ノ代リニ $r^2+2r'^2-rr''$ ヲ用ヰルコトトスレバ，r ノ正負ニ關ハラズ常ニ次ノ如ク斷定スルコトヲ得：

$$r^2+2r'^2-rr''>0 \quad \textbf{ナルトキハ，} \quad \textbf{極ニ凹,}$$

$$r^2+2r'^2-rr''<0 \quad \textbf{ナルトキハ，} \quad \textbf{極ニ凸,}$$

又 $r^2+2r'^2-rr''$ **ガ符號ヲ變ズル點ハ彎曲點ナリ。**

モシ又 $\frac{1}{r}=u$ トスレバ，$u(u''+u)$ ナルモノヲ用ヰテ之ト同様ノ判定法ヲ得。

例 1. 正匝線 $r=a\theta$ ニ於テハ，

$$r^2+\quad -rr''=a^2(\theta^2+2)>0,$$

故ニ常ニ極ニ凹ナリ。(第八十三圖ヲ見ヨ。)

例 2. 曲線 $r=\frac{a\theta}{\theta-1}$，$a>0$ ノ凹凸及ビ彎曲點ヲ決定セヨ。

$$r^2+2r'^2-rr''=\frac{a^2(\theta^3-\theta^2-2)}{(\theta-1)^3}=\Delta$$

トスレバ，此分子ヲ 0 ニ等シト置キテ得ル三次方程式ハ $\theta=1.6\cdots\cdots$ ナル唯一ツノ實根ヲ有ス。

依ツテ　$\theta<1$ ナルトキハ，$\Delta>0$ 故ニ極ニ凹,

$1<\theta<1.6\cdots\cdots$ ナルトキハ，$\Delta<0$ 故ニ極ニ凸,

$\theta>1.6\cdots\cdots$ ナルトキハ，$\Delta>0$ 故ニ極ニ凹,

而シテ $\theta=1.6\cdots\cdots$ ナルトキハ彎曲點ナリ。$\theta=1$ ナルトキニモ Δ ハ符號ヲ變ズレドモ，此時ニハ r ノ有限値ガ存在セザルニヨリ彎曲點ヲ得ズ。

(此曲線ノ圖ハ第八十九圖ニアリ。)

例題. 第 62 節ニ於テ直角座標ヲ用ヰテ定義シタル彎曲點ト，本節ニ定義シタル彎曲點トハツマリ同一ノモノナルコトヲ示セ。

(III) 切觸圓及ビ曲度

曲線ノ方程式ヲ $r=f(\theta)$ トシ，其上ノ一點 $P(r,\theta)$ ニ於ケル切觸圓ノ方程式ヲ $R=\phi(\Theta)$ トスレバ

$$\phi(\theta)=f(\theta), \qquad (1)$$

$$\phi'(\theta)=f'(\theta), \qquad (2)$$

$$\phi''(\theta)=f''(\theta) \qquad (3)$$

ナル關係ガ成立スベキコトハ直角座標ノ場合ト全ク同様ニ證明セラル。

今此切觸圓ノ中心ヲ (ρ, ω)，半徑ヲ a トスレバ，其方程式ハ

$$R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\Theta-\omega)=a^2$$

ナリ。之ヲ Θ ニ關シテ微分スレバ

$$RR'-R'\rho\cos(\Theta-\omega)+R\rho\sin(\Theta-\omega)=0,$$

$$R'^2+RR''-(R''-R)\rho\cos(\Theta-\omega)+2R'\rho\sin(\Theta-\omega)=0.$$

コレラノ式ニ於テ $\Theta=\theta$ ト置キ，(1), (2), (3) ニヨリテ R, R′, R″ ヲ夫夫 r, r', r'' ト書キ直セバ，

$$r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\omega)=a^2, \tag{4}$$

$$rr'-r'\rho\cos(\theta-\omega)+r\rho\sin(\theta-\omega)=0, \tag{5}$$

$$r'^2+rr''-(r''-r)\rho\cos(\theta-\omega)+2r'\rho\sin(\theta-\omega)=0. \tag{6}$$

(5) 及ビ (6) ヨリ

$$\rho\cos(\theta-\omega)=\frac{r(r'^2-rr'')}{r^2+2r'^2-rr''},$$

$$\rho\sin(\theta-\omega)=-\frac{r'(r^2+r'^2)}{r^2+2r'^2-rr''}$$

ヲ得，コノ二式ヲ平方シテ相加フレバ ρ^2 ヲ得。コレラノ値ヲ (4) ニ代入シテ a ヲ求ムレバ

$$a=\left|\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''}\right| \tag{7}$$

トナル。

若シ $\dfrac{1}{r}=u$ ト置ケバ，

$$r'=-\frac{u'}{u^2},\qquad r''=\frac{2u'^2-uu''}{u^3}.$$

故ニ又

$$a=\left|\frac{\left\{1+\left(\frac{u'}{u}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{u+u''}\right| \tag{8}$$

ナル式ヲ得。

切觸圓，曲度等ノ定義ハ座標系ノ如何ニハ無關係ニシテ，曲線自身ニノミ關スルモノナリ。故ニ切觸圓ノ半徑 a ノ逆數ガ曲線ノ曲度ニ等シキコト，其他縮閉線，伸開線ニ關スル諸性質等ハ極座標ニ於テモ直角座標ノ場合ト同樣ニ成立スルモノナリ。

例. 圓錐曲線 $r=\dfrac{l}{1-e\cos\theta}$ ノ曲度半徑ヲ求ム。

$\dfrac{1}{r}=u$ ト置ケバ，

$$u=\frac{1-e\cos\theta}{l},\qquad u'=\frac{e\sin\theta}{l},\qquad u''=\frac{e\cos\theta}{l}.$$

故ニ

$$a=\frac{\left\{1+\left(\frac{e\sin\theta}{1-e\cos\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{1-e\cos\theta}{l}+\frac{e\cos\theta}{l}}=\frac{l(1+e^2-2e\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{(1-e\cos\theta)^3}.$$

例題. 曲線上ノ一點 $P(r, \theta)$ ニ於ケル切線ト動徑トノナス角ヲ α，又コノ切線ガ原線ノ正ノ方向トナス角ヲ ϕ トスレバ，

$$\phi=\alpha+\theta=\tan^{-1}\left(\frac{r}{r'}\right)+\theta$$

ナル關係アリ，之ヲ利用シテ第 64 節ニ於ケルガ如ク，P ニ於ケル曲線ノ曲度ヲ計算セヨ。

(IV) 二ツノ曲線ノ切觸

二ツノ曲線 $r=f(\theta)$, $r=\phi(\theta)$ ガ點 P ヲ共有シ，P ニ於テ，

$$f^{(k)}(\theta)=\phi^{(k)}(\theta),\qquad k=1, 2, \cdots\cdots, n$$

ニシテ

$$f^{(n+1)}(\theta)\neq\phi^{(n+1)}(\theta)$$

ナルトキハ兩曲線ハ P ニ於テ **第 n 位ノ切觸** ヲナストイフ。

此場合ニハ兩曲線ハ $(n+1)$ 個ノ限リナク相接近セル點ヲ共有スト考ヘラル。

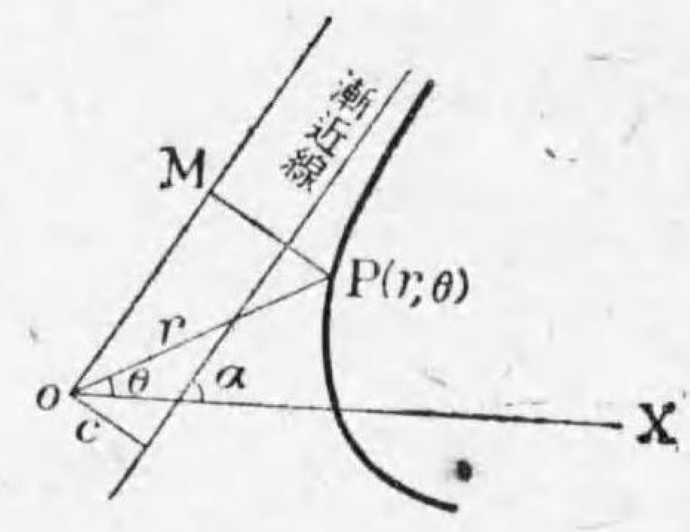
其他ノ諸性質モ第 66 節ノ所論ニヨリテ之ヲ類推スルコトヲ得ベシ。

(V) 漸近線

ココニ漸近線ノ定義トシテ第 67 節ニ述ベタル第一ノ定義ヲ採用スベシ。今與ヘラレタル曲線ノ漸近線ノ方程式ヲ

$$\mathrm{R}\sin(\alpha-\Theta)=c$$

トス，但シ α ハ漸近線ガ原線 OX トナス角，c ハ極 O ヨリ漸近線ニ下セル垂線ノ長サニシテ，第 71 節ノ終リニ述ベタル如キ符號ヲ有スルモノトス。コノ α 及ビ c ヲ決定スルコト次ノ如シ。



第八十七圖

曲線上ノ一點 $P(r,\theta)$ ガ其無限分枝ニ沿ヒテ動クトキ，OP ノ距離ガ無限大トナル極限ノ位置ニ於テ直線 OP ハ漸近線ニ平行トナルベシ，之ヲ OM トス。然ルトキハココニ角 MOX ハ α ニ等シ。故ニ α ヲ求ムルニハ曲線ノ方程式ニ於テ $r\to\pm\infty$ ナルトキノ θ ノ値ヲ求ムレバヨシ。

次ニ P ヨリ OM ニ下セル垂線ヲ PM トスレバ，

$$\mathrm{PM}=r\sin(\alpha-\theta).$$

故ニ
$$c=\lim_{\theta\to\alpha} r\sin(\alpha-\theta).$$

之ニヨリテ c ガ定マル，但シ此式ハ第 71 節ニ於ケル如キ意味ノ符號マデ考ニ入レテ正シキモノナリ。

例 1. 曲線 $r\theta=a,\ a>0$ ノ漸近線ヲ求ム。

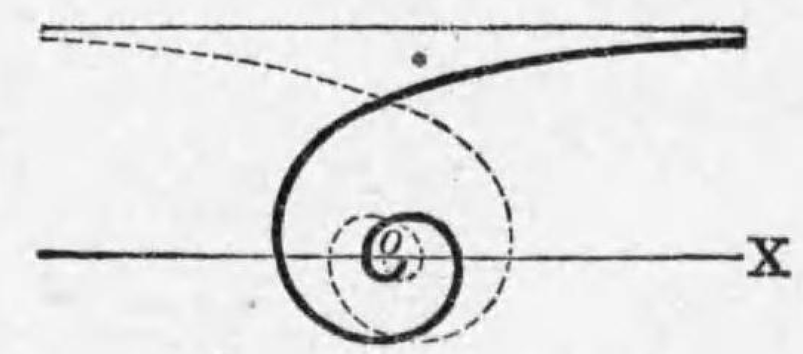
$$\alpha=\lim_{r\to\pm\infty}\theta=\lim_{r\to\pm\infty}\frac{a}{r}=0,$$

$$c=\lim_{\theta\to0} r\sin(-\theta)=\lim_{\theta\to0}\frac{a}{\theta}\sin(-\theta)=-a.$$

故ニ漸近線ハ

$$\mathrm{R}\sin(-\Theta)=-a,$$

即チ　$\mathrm{R}\sin\Theta=a$ ナリ。



第八十八圖

之ハ直角座標ニ直セバ $y=a$ ニシテ原線ニ平行ナル直線ヲアラハス。曲線ガ漸近線ノ何レノ側ニアルカヲ見ルニハ θ 及ビ Θ ノ同一ノ値ニ對シテ曲線ノ r ト漸近線ノ R トノ大小ヲ比較スレバヨシ。然ルニ

$$r=\frac{a}{\theta}\qquad \mathrm{R}=\frac{a}{\sin\Theta}$$

ナルヲ以テ，$\theta=\Theta$ ナルトキハ明カニ $r<\mathrm{R}$ ナリ。故ニ曲線ハ常ニ漸近線ニ對シテ極ニ近キ側ニアリ。

注意. 此曲線ニ於テハ $\theta\to\pm\infty$ ナルトキ $r\to0$ ナリ。故ニ曲線ハ限リナク極ニ接近スレドモツヒニ之ニ達スルコトナシ。斯クノ如キ場合ニ其點（コノ例ニテハ極）ヲ **漸近點** トイフ。

例 2. 曲線 $r=\dfrac{a\theta}{\theta-\alpha},\ a>0,\ \alpha>0$ ノ漸近線ヲ求ム。

$\theta\to\alpha\pm0$ ナルトキニ限リ，$r\to\pm\infty$ ナルコト明カナリ。又

$$\lim_{\theta\to\alpha}\frac{a\theta}{\theta-\alpha}\sin(\alpha-\theta)=-a\alpha.$$

故ニ漸近線ハ

$$\mathrm{R}\sin(\alpha-\Theta)=-a\alpha$$

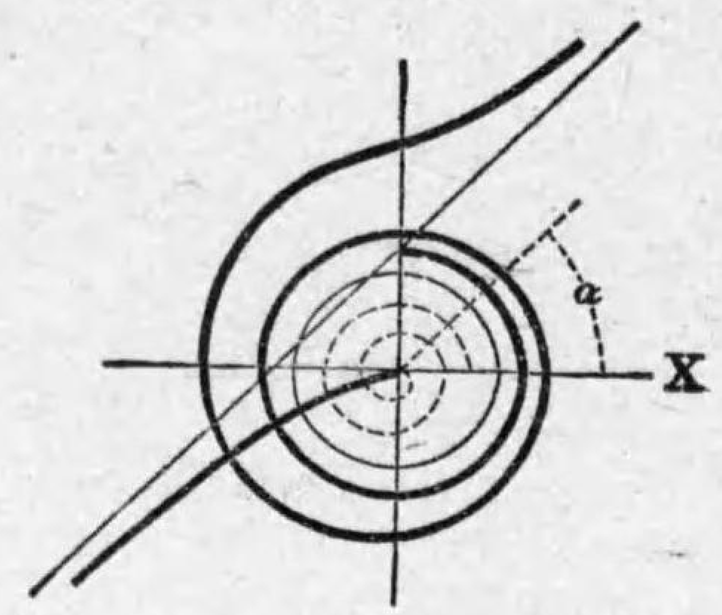
ナリ。

曲線ガ漸近線ノ何レノ側ヨリ之ニ接近スルカヲ見ルタメニ $\Theta=\theta$ ト置キテ r ト R トヲ比較スレバ,

$$r=\frac{a\theta}{\theta-\alpha},\quad \mathrm{R}=\frac{-a\alpha}{\sin(\alpha-\Theta)}=\frac{a\alpha}{\sin(\theta-\alpha)},$$

故ニ

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{\mathrm{R}}=\frac{1}{a}\left\{\frac{\theta-\alpha}{\theta}-\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\alpha}\right\}.$$



第八十九圖

今 $\theta-\alpha=h$ ト置キ, $|h|$ ヲ十分小ナリトスレバ,

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{\mathrm{R}}=\frac{1}{a}\left\{\frac{h}{\alpha+h}-\frac{\sin h}{\alpha}\right\}$$

$$=\frac{h}{a\alpha}\left\{\left(1+\frac{h}{\alpha}\right)^{-1}-\frac{\sin h}{h}\right\}$$

$$=\frac{h}{a\alpha}\left\{\left(1-\frac{h}{\alpha}+\frac{h^2}{\alpha^2}-\cdots\cdots\right)-\left(1-\frac{h^2}{3!}+\cdots\cdots\right)\right\}$$

$$=\frac{h^2}{a\alpha}\left\{-\frac{1}{\alpha}+\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{6}\right)h-\cdots\cdots\right\}.$$

故ニ $|h|$ ガ小ナルトキ, 即チ θ ガ α ニ近キ値ニテハ常ニ

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{\mathrm{R}}<0\quad 即チ\quad \frac{1}{r}<\frac{1}{\mathrm{R}}$$

ナリ。然ルニ θ ガ α ニ近クシテ $\theta<\alpha$ ナルトキハ r, R ハ共ニ負, $\theta>\alpha$ ナルトキハ共ニ正ナルヲ以テ; 前者ノ場合ニハ $|r|<|\mathrm{R}|$, 即チ曲線ハ漸近線ヨリモ極ニ近シ; 又後者ノ場合ニハ $r>\mathrm{R}$, 即チ曲線ハ漸近線ヨリモ極ニ遠シ。

注意. 此曲線ニ於テ $\theta\to\pm\infty$ ナルトキハ $r\to a$ ナリ。依ツテ $r=a$ ナル圓ヲ此曲線ノ **漸近圓** トイフ。

例題. 漸近線ノ第二ノ定義ニヨリテ其方程式ヲ求ムルコトヲ考ヘヨ。(先ヅ與ヘラレタル曲線ノ方程式ヨリ $r\to\pm\infty$ ナルトキノ θ ノ値ヲ求メ, 次ニ (I) ニ得タル切線ノ方程式ニ於テ $\theta\to\alpha$, $r\to\pm\infty$ ト置クベシ。ココニ $\left(\frac{1}{r}\right)'$ ノ絶對値ハ丁度切線影ノ逆數ナルコトニ注意セヨ。)

(VI) 特異點

極座標ニヨリテ表サレタル曲線 $\mathrm{F}(r,\theta)=0$ ノ特異點ヲ求ム

ルコトハ一般ニ容易ナラズ。例ヘバ重複點ヲ求メントスルニ, 直角座標ノ場合ニ倣ヒテ曲線上ノ

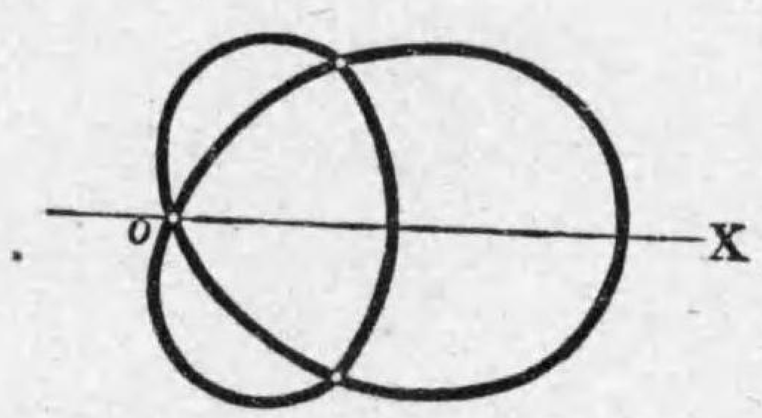
$$\mathrm{F}_r(r,\theta)=0,\quad \mathrm{F}_\theta(r,\theta)=0\qquad(1)$$

ナル點ヲ求メタルノミニテハ十分ナラザルナリ。何トナレバ, 極座標ニ於テハ二點 (r_1,θ_1), (r_2,θ_2) ガ相一致スルタメニハ必ズシモ $r_1=r_2$, $\theta_1=\theta_2$ ナルヲ要セズ, $r_1=r_2$, $\theta_1=\theta_2+2n\pi$ ニテモ可ナリ, 又ハ $r_1=-r_2$, $\theta_1=\theta_2+(2n+1)\pi$ ニテモ可ナリ, 又特ニ $r_1=r_2=0$ ナル場合ニハ θ_1 ト θ_2 トハ全然任意ニテモ可ナリ。サレバ曲線上ノ或點ガ重複點ナリトモ必ズシモ上記 (1) ノ條件ヲ滿足セシムルヲ要セザルナリ。

例. 曲線 $\mathrm{F}(r,\theta)=r-a(3\cos\theta+\cos2\theta)=0$, $-\pi<\theta\leqq\pi$ ニ於テハ

$$\mathrm{F}_r=1,\qquad \mathrm{F}_\theta=a(3\sin\theta+2\sin2\theta).$$

故ニ $\mathrm{F}_r=0$, $\mathrm{F}_\theta=0$ ナル如キ點ナシ。



第九十圖

然レドモ

$$3\cos\theta+\cos2\theta=0$$

ト置ケバ,

$$\cos\theta=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$$

ナルガ故ニ,

$$\mathrm{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{17}-3}{4}=\alpha$$

トスレバ二點 $(0,\alpha)$, $(0,-\alpha)$ ハ共ニ極ニ一致ス, 故ニ極ハ一ツノ二重點ナリ。

又 $$3\cos(\theta+\pi)+\cos2(\theta+\pi)=-(3\cos\theta+\cos2\theta)$$

ト置キテ見レバ $$\cos2\theta=-\cos2\theta,$$

之ヨリ $$\theta=\pm\frac{\pi}{4},\qquad \pm\frac{3\pi}{4}$$

ヲ得。故ニ二點 $\left(\frac{3a}{\sqrt{2}},\pm\frac{\pi}{4}\right)$ 又ハ $\left(-\frac{3a}{\sqrt{2}},\pm\frac{3\pi}{4}\right)$ モ各二重點ナリ。

73. 曲線ノ追跡

曲線ノ方程式(直角座標及ビ極座標ヲ併セ考フ)ヲ知リテ其圖形ヲ畫クコトヲ稱シテ **追跡** トイフ。之ヲナスニハ先ヅ上來說キ來レル所ニヨリテ其曲線ノ種種ノ性質ヲ十分ニ吟味スルコトヲ要ス。ソノ要點ヲ列擧スレバ次ノ如シ。

(1) 與ヘラレタル方程式ヲ追跡ニ **便利ナル形** ニ直スコト。例ヘバ $F(x,y)=0$ 又ハ $F(r,\theta)=0$ ナル方程式ヲ解キテ夫夫

$$y=f(x) \quad 又ハ \quad r=f(\theta)$$

トスルガ如キ，或ハ媒介變數ヲ用キルガ如キ，或ハ座標軸又ハ原線ヲ變位スルガ如キ，或ハ直角座標ヨリ極座標ニ又ハ極座標ヨリ直角座標ニ變換スルガ如キ，是ナリ。

(2) 座標軸，原線，其他特別ナル直線ニ關スル **線對稱**，及ビ原點，極，其他特別ナル點ニ關スル **點對稱** ノ有無ヲ調ブルコト。

(3) 座標軸，原線，其他特別ナル直線又ハ曲線トノ **交點** ヲ求メ，又其他曲線上ノ容易ニ見出シ得ル點ヲ求ムルコト。

(4) 曲線ノ **存在スル區域** ヲ定ムルコト，卽チ平面ヲ若干ノ直線又ハ曲線ニヨリテ區分シ，其中ニ就キテ曲線ノ存在スル區域ト存在セザル區域トヲ判別スルコト。

(5) 直角座標ニ於テハ y' ヲ求メテ **曲線ノ方向** ヲ調べ，又 x ノ變動ニ對スル y ノ **極値** ヲ求ムベク，極座標ニ於テハ $\dfrac{r}{r'}$ 及ビ r' ヲ求メテ同樣ノ吟味ヲナスコト。

(6) 直角座標ニ於テハ y''，極座標ニ於テハ $r^2+2r'^2-rr''$ ヲ計算シテ曲線ノ **凹凸及ビ彎曲點** ヲ調ブルコト。

(7) **特異點** ノ位置，及ビ其附近ニ於ケル曲線ノ形狀ヲ調ブルコト。

(8) **漸近線** ヲ求メ，之ニ對スル曲線ノ無限分枝ノ位置ヲ決定スルコト。又場合ニヨリテハ漸近曲線，漸近點等ヲモ求ムルコト。

(9) **曲度** ヲ求ムルコト。

注意. 以上ハタダ一般ニ注意スベキ要點ヲ示セルニ過ギズ，特殊ノ問題ニツイテハ上記ノ要點ノ中ヲ省略スルコトアリ，又或ル場合ニハコレ以外ノ要件ヲ調ブルコトモアルベシ。

例 1. $y^3=ax^2+x^3, \quad a>0.$

(i) 對稱ノ有無

モシ y 軸ニ關シテ線對稱ナラバ x ヲ $-x$ ニ變ズルモ y ハ不變ナラザル可カラズ，然ルニ此曲線ニ於テハ然ラズ，故ニ y 軸ニ關シテ對稱ナラズ。同樣ニシテ x 軸ニ關シテモ線對稱ナラズ。又原點ニ關シテ點對稱ナラバ x, y ノ各符號ヲ變ズルモ原方程式ハ不變ナラザル可カラズ，然ルニ此曲線ニ於テハ然ラズ，故ニ原點ニ關シテ點對稱ニモアラズ。

(ii) 座標軸トノ交點

$x=0$ ト置ケバ $y=0$ (三重根) ヲ得，$y=0$ ト置ケバ $x=0$ (二重根) 及ビ $x=-a$ ヲ得。故ニ軸トノ交點ハ $(0, 0)$ 及ビ $(-a, 0)$ ナリ。

(iii) 存在區域

原方程式ヲ $y^3=x^2(a+x)$ ト書キ直シテ見レバ，

$$x>-a \text{ ナルトキ } y>0,$$
$$x<-a \text{ ナルトキ } y<0$$

ナルコトヲ知ル。故ニ $x=-a$ ナル直線ノ右方ニ於テハ x 軸ノ上，左方ニ於テハ

x 軸ノ下ニノミ曲線ハ存在スベシ。(存在セザル部分ハ圖ニ横線ヲ以テ之ヲ抹殺ス。) 又原方程式ヲ

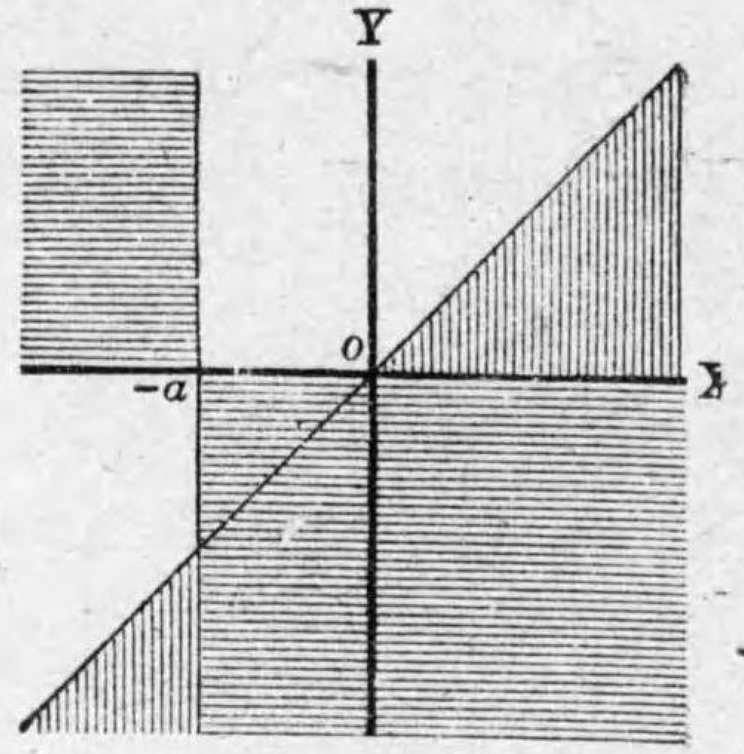
$$y = x\sqrt[3]{1+\frac{a}{x}}$$

ト書キテ見レバ,

$x>0$ ナルトキ, $y>x$,

$x<-a$ ナルトキ, $|y|<|x|$.

故ニ $y=x$ ナル直線ヲ引ケバ, 曲線ハ $x>0$ 及ビ $x<-a$ ナル部分ニテハ其直線ノ上方ニアリ。(存在セザル部分ハ圖ニ縦線ヲ以テ之ヲ抹殺ス。)



第九十一圖

(iv) y' ノ吟味

原方程式ヨリ $y=\sqrt[3]{x^2(a+x)}$ ヲ得, 之ヲ微分スレバ

$$y' = \frac{2a+3x}{3\sqrt[3]{x(a+x)^2}} \tag{1}$$

トナル。故ニ

$x<-\frac{2}{3}a$ ナルトキ, $y'>0$ …… 上昇,

$x=-\frac{2}{3}a$ ナルトキ, $y'=0$ …… 極大 $\left(y=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}a\right)$,

$-\frac{2}{3}a<x<0$ ナルトキ, $y'<0$ …… 下降,

$x\to\mp0$ ナルトキ, $y'=\mp\infty$ …… $x=0$ ニテ極小 $(y=0)$

$x>0$ ナルトキ, $y'>0$ …… 上昇.

又 $x\to-a$ ナルトキハ, $y'\to\infty$ ニシテ曲線ハ x 軸ヲ垂直ニ截ル。

(v) y'' ノ吟味

(1) ヲ更ニ微分スレバ

$$y'' = \frac{-2a^2}{9(a+x)\sqrt[3]{x^4(a+x)^2}} \tag{2}$$

ヲ得。故ニ

$x<-a$ ナルトキハ, $y''>0$ …… 上ニ凹,

$x>-a$ ナルトキハ, $y''<0$ …… 上ニ凸,

$x\to-a$ ナルトキノ, $y''\to\pm\infty$…… $x=-a$ ニテ彎曲點。

(vi) 特異點

今考フル曲線ハ代數曲線ナルガ故ニ重複點ノ他ニ特異點ヲ有スルコトナシ。重複點ヲ求ムルニハ

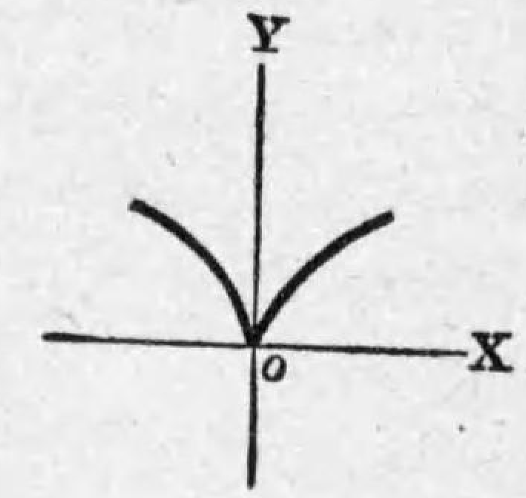
$$F = y^3-ax^2-x^3 = 0,$$
$$F_x = -2ax-3x^2 = 0,$$
$$F_y = 3y^2 = 0$$

ヲ同時ニ滿足セシムル點ヲ求ムレバヨシ; 依ツテ (0, 0) ナル一點ヲ得, コレ即チ原點ナリ。原點ニ於テハ

$$F_{xx} = -2a-6x = -2a \neq 0,$$

故ニ原點ハ二重點ナリ。

原點ニ於ケル切線ノ方程式ハ $x^2=0$, 即チ二本ノ切線ハ y 軸ト一致ス。而シテ原點ノ附近ニ於ケル曲線ノ形ハ $y^3=ax^2$ ニ似タリ, 即チ第九十二圖ノ如シ。故ニ原點ハ第一種ノ尖點ナリ。



第九十二圖

(vii) 漸近線

$|x|$ ガ十分大ナルトキニハ

$$y = x\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= x\left(1+\frac{1}{3}\frac{a}{x}-\frac{1}{9}\frac{a^2}{x^2}+\cdots\cdot\right),$$

故ニ與ヘラレタル曲線ハ

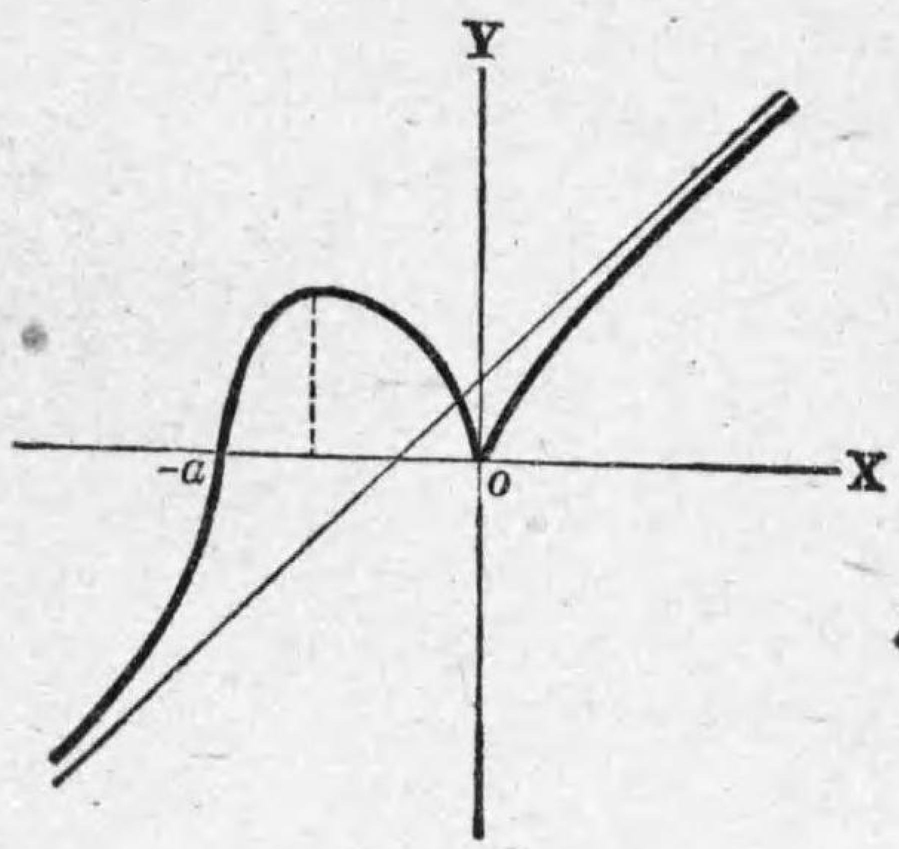
$$y = x+\frac{a}{3}$$

ナル漸近線ヲ有ス。

而シテ

$$y = \left(x+\frac{a}{3}\right)-\frac{1}{9}\frac{a^2}{x}+\cdots\cdots$$

ナルヲ以テ, $x\to\infty$ ナルトキハ曲線ハ漸近線ヨリ下ニアリ,



第九十三圖

$x \to -\infty$ ナルトキハ曲線ハ漸近線ヨリ上ニアリ。此漸近線ト原曲線トノ交點ハ $\left(-\dfrac{a}{9},\ \dfrac{2a}{9}\right)$ ナリ。

又原式ニ於テ x ガ有限ナルトキハ y モ亦有限ナルヲ以テ，原曲線ハ y 軸ニ平行ナル漸近線ヲ有セズ。

(viii) 曲度

(1) 及ビ (2) ヲ用ヰテ曲度半徑 r ヲ計算スレバ次ノ如シ。

$$r = \frac{\sqrt[3]{x}\left\{9\sqrt[3]{x^2(a+x)^4}+(2a+3x)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{6a^2\sqrt[3]{a+x}}.$$

(ix) 總括

以上ノ結果ニヨリ曲線ノ圖ヲ得ルコト第九十三圖ノ如シ。

例 2. $\qquad x^5-2a^2x^2y+y^5=0, \qquad a>0.$

(i) 對稱ノ有無

原方程式ニ於テ x, y ヲ夫夫 $-x, -y$ トスルモ式ノ内容ヲ變ゼズ，故ニ此曲線ハ原點ニ關シテ點對稱ヲ有ス。

(ii) 曲線上ノ點

座標軸トノ交點ハ原點 $(0, 0)$ ノ他ニナシ。又直線 $y=x$ トノ交點ヲ求ムレバ (a, a) 及ビ $(-a, -a)$ ノ二點ヲ得。

(iii) 存在區域

原方程式ヲ移項スレバ

$$x^5+y^5 = 2a^2x^2y.$$

故ニ第二象限ニ於テハ $x^5+y^5>0$，從ツテ $y>|x|$ ナラザル可カラズ。

又第四象限ニ於テハ同樣ニシテ

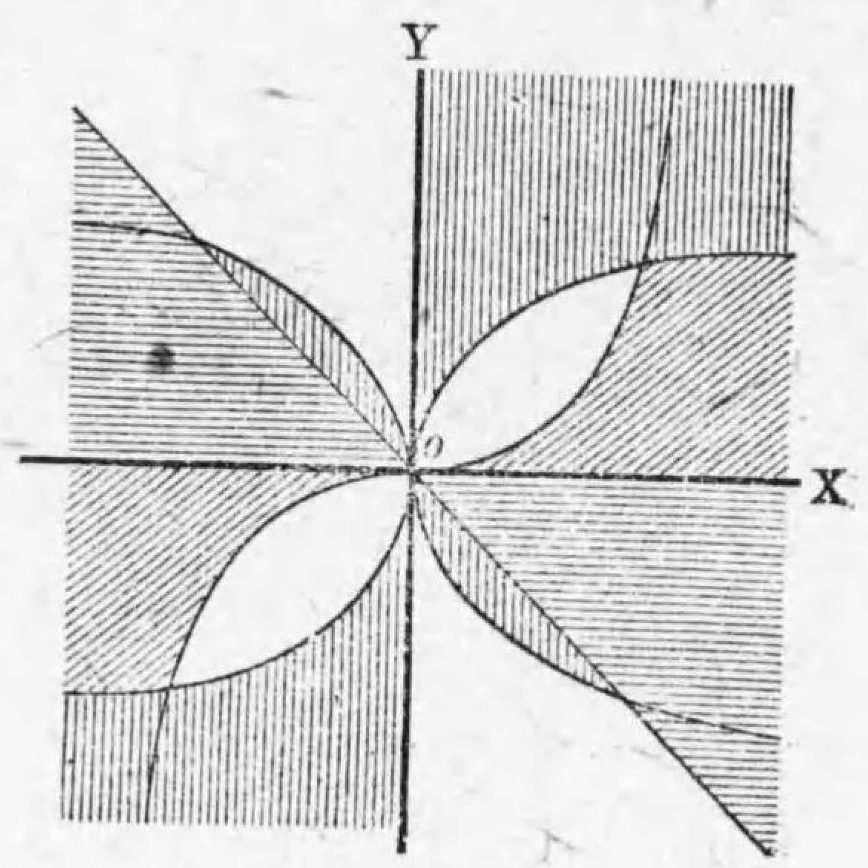
$$|y|>x$$

ナラザル可カラズ。(存在セザル部分ハ圖ニ横線ヲ以テ之ヲ抹殺ス。)

又原式ヲ變形スレバ

$$x^5 = y(2a^2x^2-y^4).$$

故ニ $x>0, y>0$ ナラバ，$2a^2x^2>y^4$



第九十四圖

即チ $\qquad \sqrt{2}\,ax>y^2.$

故ニ第一象限ニ於テハ原曲線ハ $\sqrt{2}\,ax=y^2$ ナル拋物線ノ内部ニアリ。同樣ニシテ第四象限ニ於テハ同シ拋物線ノ外部ニアリ。第二，第三象限ニツイテハ原點ニ關スル點對稱ニヨリテ類推スベシ。(存在セザル部分ハ圖ニ縱線ヲ以テ之ヲ抹殺ス。)

又更ニ原式ヲ變形スレバ $\quad y^5=x^2(2a^2y-x^3).$

故ニ $x>0, y>0$ ナラバ，$2a^2y>x^3$．故ニ第一象限ニ於テハ原曲線ハ三次曲線 $2a^2y=x^3$ ヨリ上ニアリ。從ツテ原點ニ關スル點對稱ニヨリ第三象限ニ於テハ同三次曲線ヨリ下ニアリ。(存在セザル部分ハ圖ニ斜線ヲ以テ之ヲ抹殺ス。)

(iv) 方程式ノ變形

$y=xt$ ト置キ，原方程式ニ代入シ，t ヲ媒介變數トシテ x 及ビ y ヲ表セバ次ノ如シ。

$$x=\pm\sqrt{2}\,a\sqrt{\frac{t}{1+t^5}}, \quad y=\pm\sqrt{2}\,at\sqrt{\frac{t}{1+t^5}}. \qquad (1)$$

x 及ビ y ヲ實數ナラシムルタメニハ

$$t>0 \quad 又ハ \quad t<-1$$

ナラザル可カラズ。

(v) y' ノ吟味

(1) ニ於テ x 及ビ y ノ式ノ正號ヲトリテ，之ヲ t ニ關シテ微分スレバ

$$\frac{dx}{dt}=\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{1-4t^5}{\sqrt{t(1+t^5)^3}}, \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{t(3-2t^5)}{\sqrt{t(1+t^5)^3}}. \qquad (2)$$

從ツテ
$$\frac{dy}{dx}=\frac{t(3-2t^5)}{1-4t^5}. \qquad (3)$$

故ニ t ノ變動ニ對スル x, y 及ビ $\dfrac{dy}{dx}$ ノ變動ハ次ノ如シ。

t	$-\infty \cdots\cdots -1$	$0 \cdots\cdots \sqrt[5]{\frac{1}{4}} \cdots\cdots$	$\sqrt[5]{\frac{3}{2}} \cdots\cdots \infty$
x	$0 \cdots + \cdots \infty$	$0 \cdots + \cdots$ (極大) $\cdots\cdots$	$+ \cdots\cdots 0$
y	$0 \cdots - \cdots -\infty$	$0 \cdots\cdots + \cdots\cdots$	(極大) $\cdots + \cdots 0$
$\dfrac{dy}{dx}$	$-\infty \cdots - \cdots -1$	$0 \cdots + \cdots \infty$	$-\infty \cdots - \cdots 0 \cdots + \cdots \infty$

但シ x ノ極大値ハ $2^{\frac{13}{10}}.5^{-\frac{1}{2}}a$ ニシテ，y ノ極大値ハ $2^{\frac{7}{10}}.3^{\frac{3}{10}}.5^{-\frac{1}{2}}a$ ナリ。

(vi) y' ノ吟味

(2) 及ビ (3) ニヨリ

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{3+36t^5+8t^{10}}{(1-4t^5)^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{a}\,\frac{\sqrt{t(1+t^5)^3}}{1-4t^5}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{a}\,\frac{8(\mathrm{A}-t^5)(\mathrm{B}-t^5)\sqrt{t(1+t^5)^3}}{(1-4t^5)^3},$$

但シココニ

$$\mathrm{A} = \frac{-9+5\sqrt{3}}{4} = -0.084\cdots\cdots, \qquad \mathrm{B} = \frac{-9-5\sqrt{3}}{4} = -4.415\cdots\cdots.$$

ナリトス。

故ニ

$0<t<\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$　ナルトキハ，$y''>0$…………上ニ凹，

$t>\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$　ナルトキハ，$y''<0$…………上ニ凸，

$\sqrt[5]{\mathrm{B}}<t<-1$　ナルトキハ，$y''<0$…………上ニ凸，

$t<\sqrt[5]{\mathrm{B}}$　ナルトキハ，$y''>0$…………上ニ凹，

而シテ $t=\sqrt[5]{\mathrm{B}}$ ナル點ハ彎曲點ナリ。

以上ハ曲線ノ y 軸ヨリ右ニアル部分ダケニ關スル吟味ナリ。他ノ半分ハ原點ニ關スル點對稱ニヨリテ推知スベシ。

(vii) 重複點

重複點ハ原點ノミニシテ，原點ハ三重點ナリ。第 69 節ノ方法ニヨリテ原點附近ノ曲線ノ形狀ヲ調ブレバ，二ツノ拋物線 $y^2=\pm\sqrt{2}ax$ 及ビ三次曲線 $2a^2y=x^3$ ニ似タルモノナルコトヲ知ル。

(viii) 漸近線

第 67 節例 2 ノ方法ニ倣ヒテ漸近線ノ方程式ヲ求ムレバ

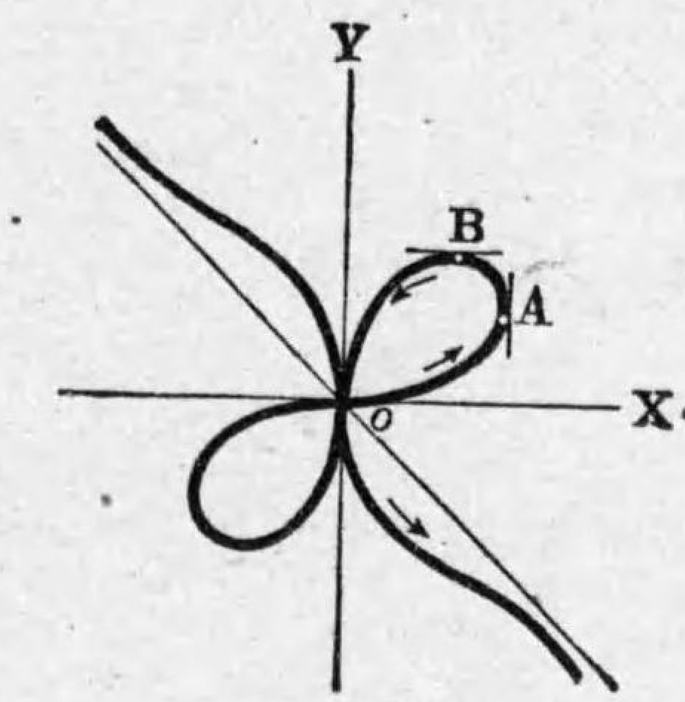
$$x+y=0$$

ヲ得。曲線ガ其何レノ側ニアルカハ存在區域ノ吟味 (iii) ニヨリテ明白ナリ。

(ix) 總括

以上ノ結果ニヨリ第九十五圖ヲ得。

(1) ニ於テ x, y 共ニ正號ヲトリ，t ノ値ヲ 0 ヨリ ∞ ニ，又 $-\infty$ ヨリ -1 ニ變動セシムレバ，曲線ハ原點ヨリ矢ノ方向ニ從ヒテ畫カル。A ハ x ノ極大，B ハ y ノ極大トナル點ナリ。



第九十五圖

注意. 圖ノ OAB ノ如ク，一ツノ曲線ガ一點ヨリ發シテ再ビ同ジ點ニ復歸スルマデノ間ヲ稱シテ **輪線** 又ハ **自閉線** トイフ。

例 3.　$r=a+b\cos\theta,\ \ a>0,\ \ b>0.$

(i) 一般ノ性質

θ ヲ $-\theta$ ニ變ズルモ r ノ値ハ不變ナリ，故ニ曲線ハ原線ニ關シテ線對稱ナリ。

又 $|\cos\theta|\leqq 1$ ナルヲ以テ，$r\leqq a+b$ ナリ。故ニ曲線ハ $r=a+b$ ナル圓ノ外ニ出ヅルコトナシ。從ツテ漸近線ヲ有セズ。

θ ノ變動ニ伴フ r ノ變動ハ下表ノ如シ。

θ	0	……	$\frac{\pi}{2}$	……	π	……	$\frac{3\pi}{2}$	……	2π
r	$a+b$	(減)	a	(減)	$a-b$	(增)	a	(增)	$a+b$

又　$r'=-b\sin\theta,\qquad r''=-b\cos\theta;$

故ニ

$$\tan\alpha=\frac{r}{r'}=-\frac{a+b\cos\theta}{b\sin\theta}. \tag{1}$$

$$\Delta=r^2+2r'^2-rr''=a^2+3ab\cos\theta+2b^2 \tag{2}$$

ニシテ，又曲度半徑ハ

$$\left|\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''}\right|=\left|\frac{(a^2+2ab\cos\theta+b^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2+3ab\cos\theta+2b^2}\right|$$

ナリ。

(ii) $a>b$ ナル場合

此場合ニハ r ハ常ニ正ナリ。又 (1) ニヨリ θ ガ第一，第二象限ニアルトキハ切線ト動徑トノナス角 α ハ鈍角ニシテ，θ ガ第三，第四象限ニアルトキハ α ハ鋭角ナ

リ。特ニ $\theta=0$ 又ハ π ナルトキニハ $\alpha=\frac{\pi}{2}$ トナル。

(2) ニヨリ

$$\Delta=3ab\left(\cos\theta+\frac{a^2+2b^2}{3ab}\right),$$

故ニ Δ ノ正負ヲ調ブルニハ先ヅ a^2+2b^2 ト $3ab$ トノ大小ヲ比較スルヲ要ス。

然ルニ $$a^2+2b^2-3ab=(a-b)(a-2b)$$

ナルヲ以テ,

[A] $a>2b$ ナラバ, $a^2+2b^2>3ab$; 故ニ常ニ $\Delta>0$, 從ツテ曲線ハ常ニ極ニ凹ナリ。

[B] $a=2b$ ナラバ, $a^2+2b^2=3ab$; 故ニ一般ニ $\Delta>0$ ニシテ特ニ $\theta=\pi$ ノトキニ限リ $\Delta=0$ トナル, 從ツテ曲線ハ矢張常ニ極ニ凹ナリ。

[C] $a<2b$ ナラバ, $a^2+2b^2<3ab$; 故ニ

$$\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\frac{a^2+2b^2}{3ab}\right)=\beta$$

トスレバ,

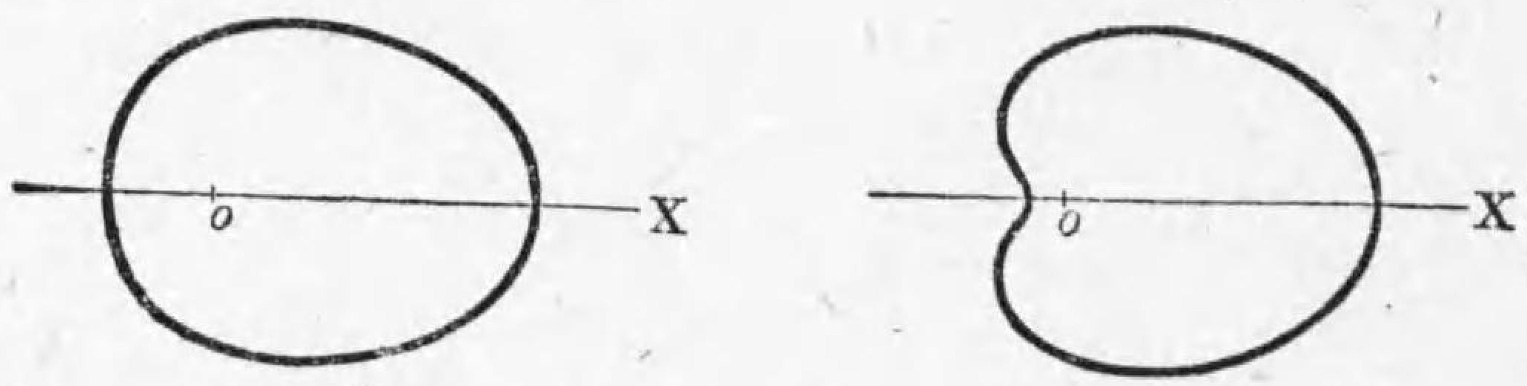
$0\leqq\theta<\beta$ ナルトキハ, $\Delta>0$ 從ツテ極ニ凹,

$\beta<\theta\leqq\pi$ ナルトキハ, $\Delta<0$ 從ツテ極ニ凸,

$\theta=\beta$ ナルトキハ彎曲點ナリ。

θ ガ π ヨリ 2π ニ至ル間ノコトハ對稱ノ考ニヨリテ推知スベシ。

以上ノ結果ニヨリ次ノ圖ヲ得。



$a\geqq2b$ $a<2b$

第九十六圖

(iii) $a=b$ ナル場合

此場合ニハ原方程式ハ

$$r=a(1+\cos\theta)$$

トナリ, $\theta=\pi$ ノトキ $r=0$ トナル。

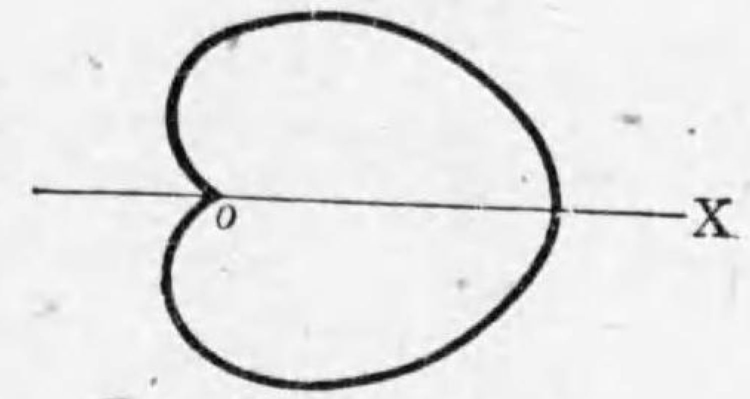
又 $\tan\alpha=-\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=-\cot\frac{\theta}{2}$,

故ニ $\theta=\pi$ ノトキハ曲線ハ原線ニ切シ, ココニ第一種ノ尖點ヲ有ス。

又 $$\Delta=3a^2(\cos\theta+1)$$

ナルヲ以テ一般ニ $\Delta>0$ ニシテ, タダ $\theta=-\pi$ ニ於テノミ $\Delta=0$ ナリ。故ニ曲線ハ常ニ極ニ凹ナリ。

依ツテ第九十七圖ヲ得。



第九十七圖

(iv) $a<b$ ナル場合

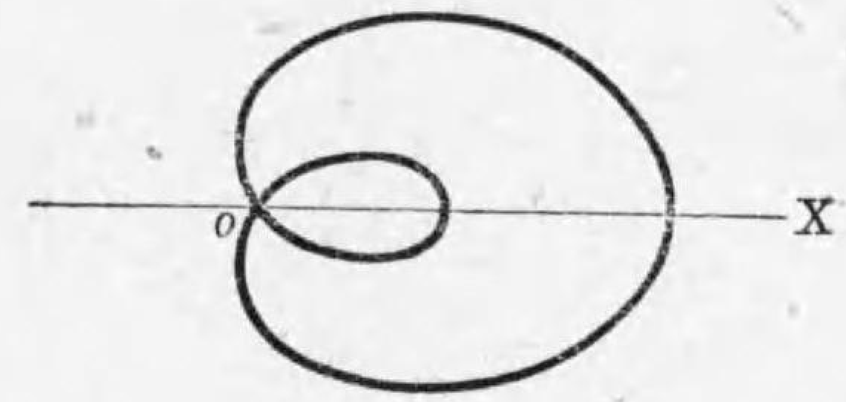
θ ガ 0 ヨリ π マデ變動スルトキ, 始メハ $r>0$ ナレドモ途中ニテ

$$\cos\theta=-\frac{a}{b}$$

ナル如キ鈍角 θ ニ至レバ $r=0$ トナリ, ソレヨリ後ハ $r<0$ トナル。

又此場合ニハ常ニ $a^2+2b^2>3ab$ ナルヲ以テ, $\Delta>0$ ナリ。故ニ曲線ハ常ニ極ニ凹ナリ。

依ツテ第九十八圖ヲ得。



第九十八圖

附言. 本例ノ曲線ヲ **蝸牛形** トイヒ, 特ニ $a=b$ ナル場合ヲ **心臟形** トイフ。

74. 曲線群ノ性質

曲線ノ方程式中ニ文字ニテ表サレタル常數ヲ含ムトキハ一般ニ其常數ノ數値ニヨリテ其曲線ノ形, 位置等ハ種種ニ變ルベシ, カクシテ生ズル一群ノ曲線ヲ總稱シテ **曲線群** トイヒ, 其文字常數ヲ **母數** トイフ。但シココニ曲線ト稱スルモノハ其特別ノ場合トシテ直線ヲモ含ムモノト考フベシ。曲線群ニ關スル一二

ノ性質ヲ次ニ論ゼントス。

(I)　包絡線

一ツノ曲線ノ方程式ヲ

$$F(x, y, \alpha)=0 \qquad (1)$$

トシ，ココニ α ハ母數ニシテ之ニ種種ノ値ヲ與フルコトニヨリテ (1) ハ一ツノ曲線群ヲ作ルモノトス。

今 (1) ニ於テ α ノ値ヲ $\alpha+\Delta\alpha$ ニ變ジタルトキ，其曲線ガ前ノ曲線 (1) ト相交ルナラバ其交點ノ座標ハ

$$F(x, y, \alpha+\Delta\alpha)-F(x, y, \alpha)=0,$$

即チ　$$F_\alpha(x, y, \alpha+\theta\Delta\alpha)=0, \qquad 0<\theta<1$$

ヲ滿足セシムベシ。$\Delta\alpha\to0$ ナル極限ヲ考フレバ

$$F_\alpha(x, y, \alpha)=0 \qquad (2)$$

トナル。

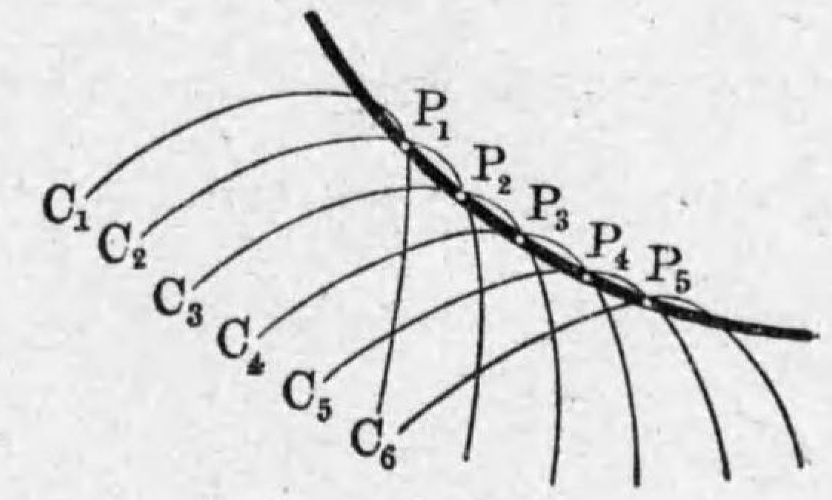
(1) 及ビ (2) ヲ x, y ニツイテ解ケバ

$$x=\phi(\alpha), \qquad y=\psi(\alpha)$$

ナル形ノ解ヲ得ベク，コレ即チ母數 α ニ相當スル曲線ト其同ジ曲線群中ニテ之ニ限リナク接近セル第二ノ曲線トノ交點ノ極限ノ位置ヲ示ス座標ナリ。モシ此二式ノ間ニ α ヲ消去スレバ斯クノ如キ極限點ノ軌跡ノ方程式ヲ得ベシ，其軌跡ヲ稱シテ (1) ナル曲線群ノ **包絡線** トイフ。

故ニ包絡線ノ方程式ヲ求ムルニハ直接ニ (1), (2) ヨリ α ヲ消去スレバヨシ。

今母數 α ガ $\alpha+\Delta\alpha$, $\alpha+2\Delta\alpha$, …… 等少シヅツ其値ヲ變ズルトキ，(1) ノ表ス曲線ヲ順次ニ C_1, C_2, …… トシ，C_1 ト C_2, C_2 ト C_3, …… ノ交點ヲ夫夫 P_1, P_2, …… トス。C_1, C_2, ……等ガ限リナク相接近セル極限ニ於テハ



第九十九圖

P_1, P_2, …… 等ノ點ハ包絡線上ノ限リナク相接近セル點トナル。故ニ例ヘバ直線 P_1P_2 ヲ考フレバ，上記ノ極限ニ於テハ此直線ハ曲線 C_2 ノ切線トモナリ，又包絡線ノ切線トモナルベシ，即チ曲線 C_2 ハ包絡線ト相切スルコトヲ知ル。他ノ各曲線ニツイテモ同様ナルヲ以テ結局 **包絡線ハ曲線群ノ各曲線ト相切スルモノナリ。**

此性質ハマタ解析的ニ次ノ如クニモ證明セラル。

包絡線ノ方程式ハ (1), (2) ヨリ α ヲ消去シタルモノナルガ故ニ，之ヲ求ムルニハ先ヅ (2) ヨリ α ヲ出シテ，例ヘバ

$$\alpha=\phi(x, y)$$

トシ，之ヲ (1) ニ代入スレバヨシ。サテカク代入シタル式ヲ x ニ關シテ全微分 (y, α ヲモスベテ x ニ關シテ微分スル意) スレバ

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0 \qquad (3)$$

トナル。然ルニ (2) ニヨリ $\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}=0$ ナルヲ以テ，(3) ハ

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \qquad (4)$$

トナル。之ヨリ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求ムレバコレ即チ包絡線上ノ一點 (x, y) ニ於ケル曲線ノ方向係數ナリ。

然ルニ又一方ニ於テ曲線 (1) 上ノ同ジ點ニ於ケル切線ノ方向係數ヲ求ムベキ式ハ, (1) ヲ x ニ關シテ微分スレバ之ヲ得ベク, 從ツテ矢張 (4) ト同一ノモノナリ。故ニ原曲線 (1) ト包絡線トハ其共有點ニ於テハ同一ノ切線ヲ有ス, 卽チ兩曲線ハ相切ス。

以上ノ理論ハスベテ曲線群中ノ相接近セル曲線ガ互ニ相交ルモノトシテ考ヘタルガ, 實際ニ相交ラザル場合ト雖モ, 若シ虛ナル交點ガ存在スルナラバ, 解析的ニハ上記ノスベテノ結果ガソノママ成立スベシ。

又上ニハ專ラ直角座標ニツイテノミ論ジタレドモ, 極座標ニツイテモ全ク同樣ノ結果ヲ得ベシ, 繁ヲ避クルタメ一一繰リ返サズ。

例 1. α ヲ母數トスルトキ圓群

$$(x-\alpha)^2+y^2=c^2$$

ノ包絡線ヲ求ム。

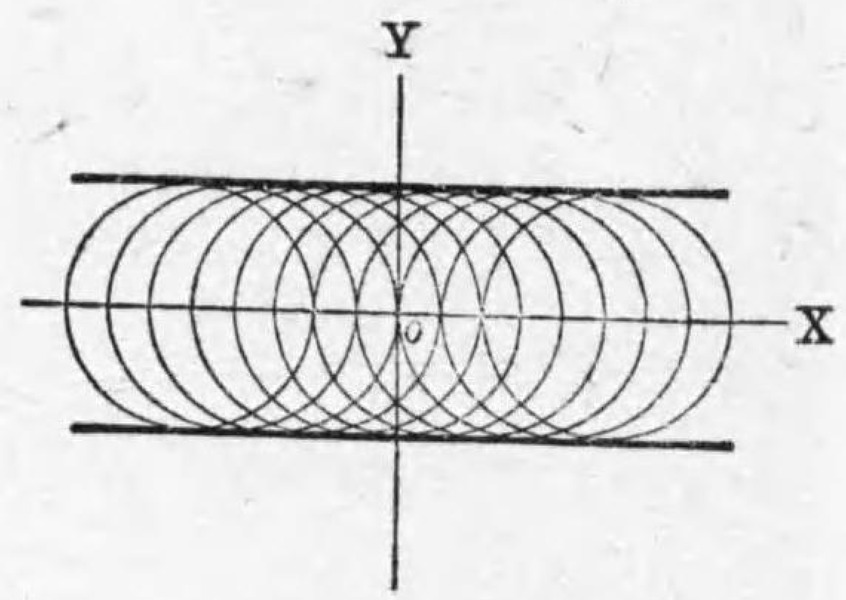
$$\mathrm{F}=(x-\alpha)^2+y^2-c^2=0,$$

$$\mathrm{F}_\alpha=-2(x-\alpha)=0.$$

コノ二式ヨリ α ヲ消去スレバ

$$y^2-c^2=0$$

ヲ得, 故ニ包絡線ハ x 軸ニ平行ナル二直線ナリ。



第 百 圖

例 2. 一定ノ長サ a ヲ有スル線分ガ其兩端ヲ各直角座標軸上ニ置キテ滑走スルトキ, 其線分ノ包絡線ヲ求ム。

其線分ト x 軸ノ負ノ方向トノナス角ヲ α トスレバ, 其線分ヲ含ム直線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}=a$$

ナリ。之ヲ α ニ關シテ微分スレバ

$$\frac{x\sin\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{y\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=0.$$

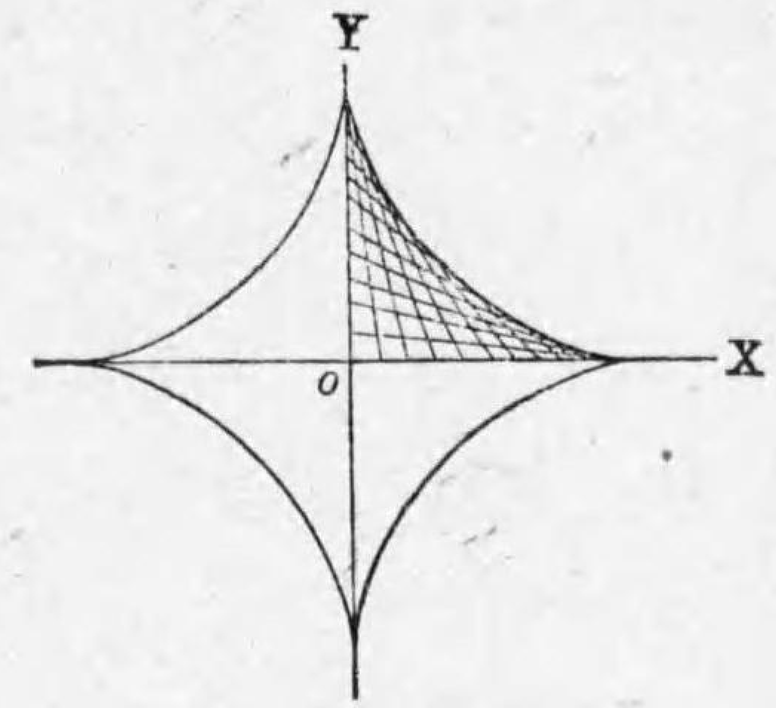
コノ二式ヨリ x, y ヲ求ムレバ

$$x=a\cos^3\alpha,\quad y=a\sin^3\alpha$$

ヲ得。之ヨリ α ヲ消去スレバ次ノ如キ包絡線ノ方程式ヲ得,

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},$$

コレ卽チ **星芒形** ト稱スル曲線ナリ。



第 百 一 圖

例 3. α ヲ母數トスルトキ, 極座標ニ於ケル直線群

$$r\cos(\theta-\alpha)=c$$

ノ包絡線ヲ求ム。

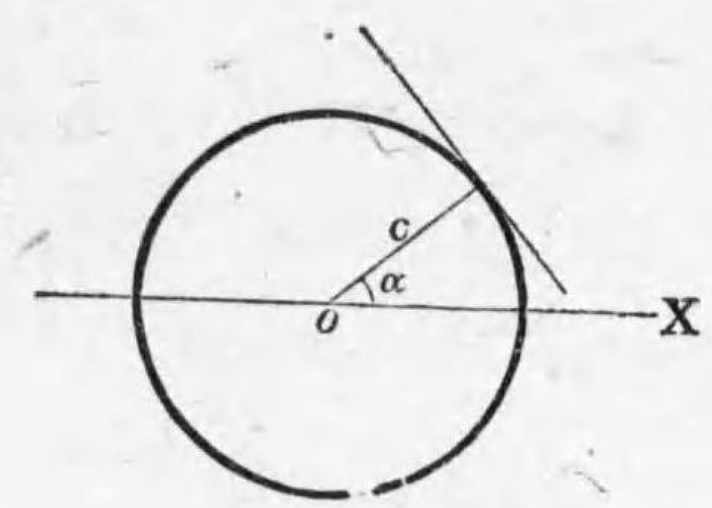
與ヘラレタル方程式ヲ α ニ關シテ微分スレバ

$$r\sin(\theta-\alpha)=0$$

トナリ, 兩式ヲ平方シテ相加フレバ

$$r^2=c^2$$

ヲ得。故ニ包絡線ハ極ヲ中心トシ, 半徑 c ナル圓ナリ。



第 百 二 圖

(II) 包絡線トシテノ縮閉線

第 65 節ニ示セル如ク, 一ツノ曲線ニ於ケル二ツノ限リナク相接近セル法線ノ交點ノ極限ハ曲度中心ニシテ, ソノ軌跡ガ卽チ

縮閉線ナリ。之ニ依ツテ見レバ **縮閉線ハ原曲線ノ法線ノ包絡線ナルコト** 明カナリ。之ヲ解析的ニ證明スルコト次ノ如シ。

曲線上ノ一點 (x, y) ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x) \tag{1}$$

ナリ。今此中ノ y, y' ヲスベテ x ノ函數トシ, x ヲ母數トシテ (1) ノ包絡線ヲ求メントス。先ヅ (1) ヲ x ニ關シテ微分スレバ

$$-y'=\frac{y''}{y'^2}(X-x)+\frac{1}{y'}. \tag{2}$$

(2) ヨリ $$X=x-\frac{(1+y'^2)y'}{y''},$$

從ツテ (1) ヨリ $$Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}$$

ヲ得, x ヲ媒介變數ト見レバコレ卽チ縮閉線ノ方程式ナリ。**原曲線ノ法線ガスベテ縮閉線ニ切スルコト** ハ之ヨリ直チニ出ヅ。

例題. 法線ノ包絡線トシテ, 抛物線 $y^2=4px$ ノ縮閉線ヲ求メヨ。(第 65 節, 例 1 參照)

(III) 重複點ノ軌跡

曲線群ヲナス曲線

$$F(x, y, \alpha)=0$$

ガ重複點ヲ有スルトキ, 其座標ヲ (x_0, y_0) トスレバ, コレラハ一般ニ母數 α ノ函數ナリ。例ヘバ

$$x_0=\phi(\alpha),\quad y_0=\psi(\alpha)$$

トス。此點ハ曲線上ニアルヲ以テ

$$F\{\phi(\alpha),\ \psi(\alpha),\ \alpha\}=0,$$

而シテ此ハ α ニ關シテ恒等式ナルベキモノナリ。今之ヲ α ニ關シテ微分スレバ

$$F_x\phi'(\alpha)+F_y\psi'(\alpha)+F_\alpha=0$$

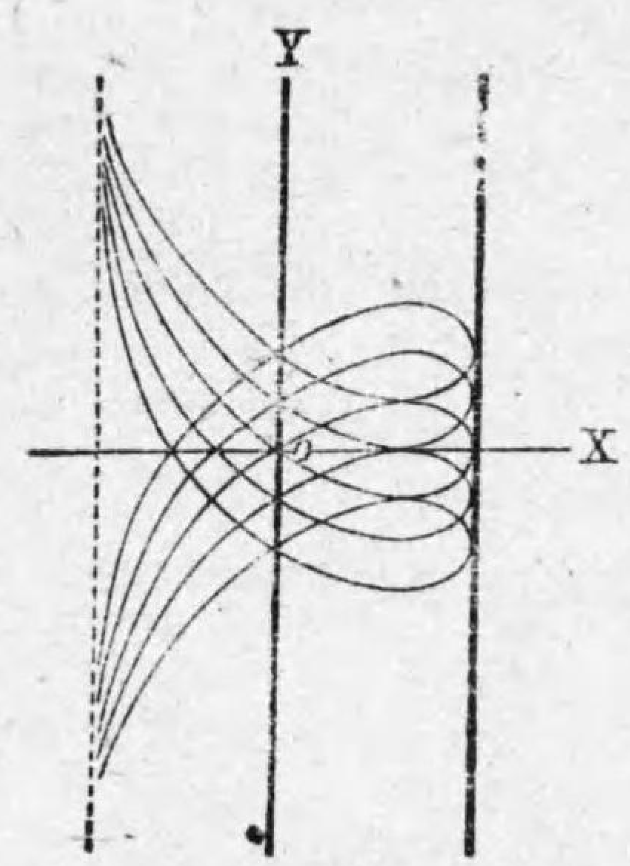
トナル。然ルニ重複點ニ於テハ

$$F_x=0,\qquad F_y=0$$

ナルヲ以テ, 結局 $$F_\alpha=0$$

ヲ得。卽チ重複點ノ座標ハ $F=0$ 及ビ $F_\alpha=0$ ヲ共ニ滿足セシムルモノナリ。

之ニ依ツテ見レバ, $F=0$ 及ビ $F_\alpha=0$ ヨリ α ヲ消去スルトキ得ルモノハ必ズシモ原曲線群ノ包絡線ノミト限ラズ, 或ハ其群ノ各曲線ノ重複點ノ軌跡ナルヤモ知ル可カラズ。其何レナルカハ一一別ニ判定スルヲ要ス。但シ上ノ例 1, 2, 3 ニ示セル如キ場合ニハ原曲線ガ直線又ハ圓ニシテ重複點ヲ有セザルガ故ニ, 其得タル結果ハ當然包絡線ナリ。



第百三圖

例. α ヲ母數トスルトキ曲線群

$$F=x^3+(x+c)(y-\alpha)^2-cx^2=0$$

ニ於テ,

$$F_\alpha=-2(x+c)(y-\alpha)=0$$

トシテ, 兩式ヨリ α ヲ消去スレバ

$$x^2(x-c)=0$$

ヲ得。ココニ $x-c=0$ ハ包絡線ナレドモ, $x=0$ ハ結節點ノ軌跡ナリ。

$c>0$ トシテ圖ヲ畫ケバ第百三圖ノ如シ。

第八章ノ問題

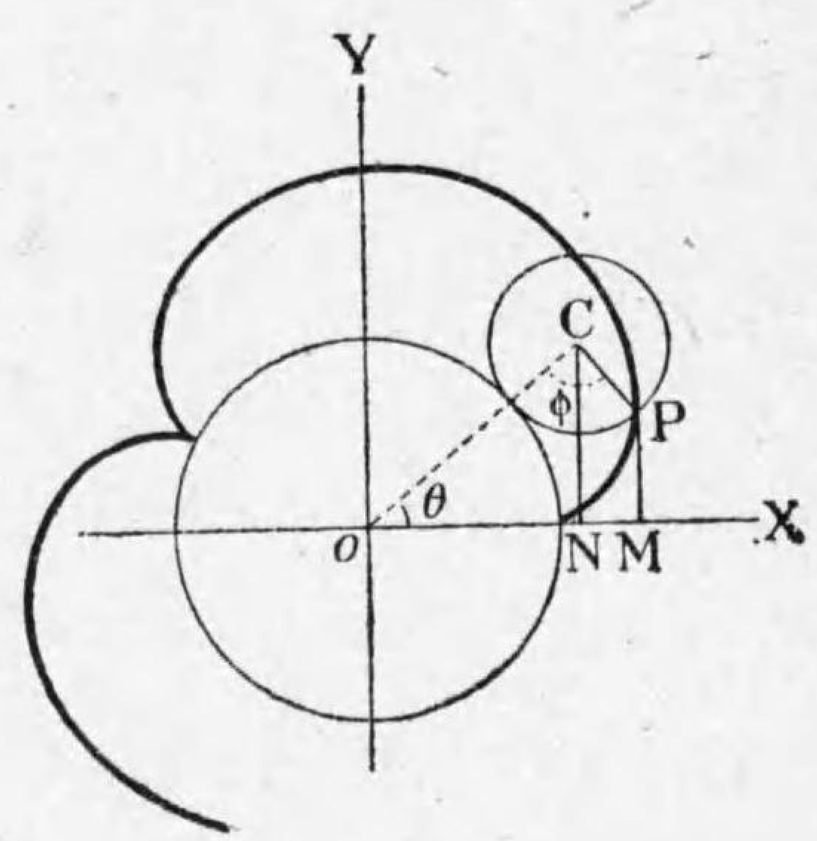
1. 半徑 b ナル圓ガ半徑 a ナル一定圓ノ外部ニアリテ，其周上ヲ滑ルコトナクシテ轉走スルトキ，前者ノ周上ノ一定點ノ軌跡如何。

附言. 圖ノ如ク座標軸ヲトリ，θ ヲ媒介變數トスレバ求ムル軌跡ノ方程式ハ次ノ如シ。

$$x = (a+b)\cos\theta - b\cos\frac{a+b}{b}\theta,$$

$$y = (a+b)\sin\theta - b\sin\frac{a+b}{b}\theta.$$

此曲線ヲ **外擺線** トイフ。



第百四圖

2. 前題ニ於テ，轉走スル圓ガ一定圓ノ内部ニアリトセバ如何。

附言. 此場合ノ軌跡ヲ **内擺線** トイフ。

3. 問題1ノ外擺線ニ於テ $a=b$ ナルトキハ，其曲線ハ心臟形トナルコトヲ示セ。

4. 次ノ長サハ各一定ナルコトヲ證明セヨ。

（1） 曲線 $y = a^x$ 上ノ一點ニ於ケル切線影ノ長サ，

（2） 曲線 $x = a\log\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$ 上ノ一點ニ於ケル切線ノ長サ，

（3） 星芒形 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 上ノ一點ニ於ケル切線ノ座標軸ノ間ニ挾マレタル部分ノ長サ，

（4） 拋物線 $y^2 = 4dx$ ノ法線影ノ長サ。

5. 曲線 $xy^2 = a^2(a-x)$，$a>0$ 上ニ於テ切線影ノ極大ナル點ヲ求メヨ。

6. 曲線 $x^m y^n = a^{m+n}$ ノ切線ノ兩軸ノ間ニ挾マレタル部分ハ切點ニ於テ一定ノ比ニ分タルルコトヲ證明セヨ。

7. 一定點 P ヨリ一定曲線 C ノ切線ニ下シタル垂線ノ足ノ軌跡ヲ稱シテ點 P ニ關スル曲線 C ノ **垂足曲線** トイフ。原點ニ關スル次ノ各曲線ノ垂足曲線ノ方程式ヲ求メヨ。

（1） $\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$　　　（2） $y^2+4ax = 0.$

8. 一定點ニ關スル一定圓ノ垂足曲線ハ蝸牛形ナルコトヲ示セ。

9. 一定點 P ヲ過ル任意ノ直線ガ一定曲線 C ト交ル點ヲ Q トシ，同ジ直線上ニ PQ ト同方向ニ線分 PR ヲトリ，PQ.PR ヲ一定ナラシムルトキ，R ノ軌跡ヲ稱シテ點 P ニ關スル曲線 C ノ **相反曲線** トイフ。任意ノ一定點ニ關スル圓ノ相反曲線ハ何カ。

10. 焦點ニ關スル圓錐曲線ノ相反曲線ハ蝸牛形ナルコトヲ示セ。

11. 特別ナル蝸牛形 $r = a(1+2\cos\theta)$，$a>0$ ニ於テ，其内部ノ輪線ガ原線ト交ル點ヲ A，又極ヲ O トシ，任意ノ角 AOB ヲ作リ，OA = OB ナラシメテ AB ヲ結ビ，AB ト内部ノ輪線トノ交點ヲ P トスレバ

$$\angle \mathrm{AOP} = \frac{1}{3}\angle \mathrm{AOB}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

附言. 之ニヨリテ任意ノ角ヲ三等分スルコトヲ得，依ツテ此曲線（蝸牛形ノ特別ナル場合）ヲ **三等分線** トイフ。

12. 曲線 $y(x^2+a^2) = a^2(a-x)$ ハ一直線上ニアル三ツノ彎曲點ヲ有スルコトヲ證明セヨ。

13. 二次曲線ハ彎曲點ヲ有セザルコトヲ示セ。

14. 曲線上ノ一點ヲ極トシ，其點ニ於ケル切線ヲ原線トスルトキハ，其點ニ於ケル曲度半徑ハ $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{r}{2\theta}$ ナルコトヲ證明セヨ。之ヲ應用シテ曲線 $r = a\sin n\theta$ ノ極ニ於ケル曲度半徑ヲ求メヨ。

15. 次ノ曲線ノ縮閉線ヲ求メヨ。

（1） $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1,$　　　（2） $xy = k^2,$

（3） $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$　　　（4） $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$

16. 拋物線ヲ P，其縮閉線ヲ E ト名付ケ，P ト E トノ一ツノ交點ニ於テ E ニ引キタル切線ガ再ビ P ト交ル點ヲ A トシ，又 E ガ P ノ主軸ト交ル點ヲ B トスレバ，AB ハ主軸ニ垂直ナルコトヲ證明セヨ。

17. 曲線 C 上ノ任意ノ一點 P ニ於テ切線 PP' ヲ引キ其長サヲ一定ナラシムルトキハ, P' ノ軌跡ハ一般ニマタ一ツノ曲線トナルベシ, 之ヲ C' トス。P' ニ於ケル C' ノ法線ハ, P ニ於ケル C ノ曲度中心ヲ過ルコトヲ證明セヨ。

18. 擺線ニ於テ, 轉走スル圓周上ノ定點(軌跡ヲ畫ク點)ヲ P, 又其圓ガ定直線ニ切スル點ヲ A トスレバ, 此擺線ノ P ニ於ケル法線ハ A ヲ過ルコト, 及ビ P ニ於ケル曲度半徑ハ 2.PA ニ等シキコトヲ證明セヨ。

19. 擺線ノ縮閉線ハ原曲線ト同形同大ノ擺線ナルコトヲ證明セヨ。

20. 原點ニ於テ x 軸ニ切スル曲線ノ方程式ヲ $y=f(x)$ トシ, ココニ $f''(0)=p$, $f'''(0)=q$, $f''''(0)=r$ トス。然ルトキハ二次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ガ此曲線ト原點ニ於テ第四位ノ切觸ヲナスタメノ條件如何。

21. 與ヘラレタル曲線上ノ一定點ニ於テ之ト第三位ノ切觸ヲナス二次曲線ノ中心ノ軌跡ハ直線ナルコトヲ證明セヨ。

22. 二次曲線 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ハ如何ナル場合ニ重複點ヲ有スルカ。

23. 曲線 $r=f(\theta)$ 上ノ一點 $P(r,\theta)$ ニ於ケル切線ニ極ヨリ下シタル垂線ノ長サヲ p トスレバ, 點 P ニ於ケル曲度半徑ハ $r\dfrac{dr}{dp}$ ナルコトヲ證明セヨ。

24. 曲線 $r=a^{m\theta}$ ノ縮閉線ヲ求メヨ。

25. 次ノ曲線ヲ追跡セヨ。

(1) $x^3-3bx^2+a^2y=0$,

(2) $y(x^2+a^2)=a^2(a-x)$,

(3) $y^2(a-x)=x^3$, (卷末雜題 93 參照)

(4) $xy^2=a^2(a-x)$, (卷末雜題 94 參照)

(5) $y^2=(x-a)^2(x-c)$,

(6) $(by-cx)^2=a(x-a)^3$,

(7) $x(x^2+y^2)=a(x^2-y^2)$,

(8) $x^3+y^3=a^3$,

(9) $x^3-3axy+y^3=0$, **(正葉線)**

(10) $y^2(x+a)=x^3-a^3$,

(11) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, **(連珠形)**

(12) $x^2y^2=a^2(x^2-y^2)$,

(13) $x^2y^2=a^2y^2+b^2x^2$,

(14) $x^5-ax^2y^2+y^5=0$,

(15) $a(by-x^2)^2=x^5$,

(16) $x^4+y^4-2a^2y^2-2b^2x^2+b^4=0$,

(17) $x^4+y^4=2ax(x^2-y^2)$,

(18) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 又ハ $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, **(星芒形)**

(19) $a^3y^2=b^2x^3-x^5$,

(20) $x^2y^2=a^2(a^2-x^2)$,

(21) $x^2y^2=(y+a)^2(b^2-y^2)$, (卷末雜題 95 參照)

(22) $x=a\log\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$, **(追跡線)**

(23) $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, **(懸垂線)**

(24) $r=ka^{\theta}$, **(等角匝線)**

(25) $r\theta=a$, **(逆匝線)**

(26) $r=a\cot\theta$,

(27) $r^n=a^n\sin n\theta$.

(28) $r=a+b\cos 2\theta$,

(29) $r=a\cos\theta+b\cos 2\theta$,

(30) $r=\dfrac{a\theta^2}{\theta^2+1}$.

26. 種種ノ場合ニ於ケル三次曲線

$$y^2=ax^3+bx^2+cx+d$$

ヲ追跡セヨ。

27. 曲線 $x=a\cos ut+b\cos vt$, $y=a\sin ut+b\sin vt$ ハ點ノ如何ナル運動ニヨリテ畫カルルモノナルカヲ考ヘ, 依ツテ之ヲ追跡セヨ。

附言. 此曲線ヲ **輪轉曲線** トイフ。太陽ニ對スル月ノ軌道ハ大約輪轉曲線ト見做スコトヲ得。

28. 次ノ各直線又ハ曲線ノ包絡線ヲ求メヨ。

(1) 一定點ト一定圓周上ノ一點トヲ結ブ線分ヲ垂直ニ二等分スル直線,

(2) 三角形ノ一ツノ頂角ノ大サ及ビ位置ガ一定ニシテ, 且其面積ガ一定ナルトキ, ソノ定頂角ニ對スル邊,

(3) 定楕圓ノ長軸ニ垂直ナル弦ヲ直徑トスル圓,

(4) 二定點ヨリノ距離ノ積ガ一定ナル直線,

(5) 二定點ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ一定ナル直線,

(6) 定等邊双曲線上ニ中心ヲ有シ, 且其双曲線ノ中心ヲ過ル圓

(7) 一定ノ面積ヲ有シ, 同心ニシテ且一定ノ方向ノ主軸ヲ有スル楕圓,

(8) 定圓周上ノ一定點ヨリ引ケル弦ヲ直徑トスル圓,

(9) 曲線 $r^n\cos n\theta = a^n$ ノ動徑ノ端ヲ過リ且之ニ垂直ナル直線,

(10) 平行ナル光線ガ球面凹鏡ニヨリテ反射セラルルトキ, 其球面ノ中心ヲ過ル光線ヲ含ミテ引キタル一ツノ平面内ニアル反射光線,

附言. 此曲線ヲ **火線** トイフ。

第九章

微分變數ノ變更

75. 陰函數ノ微分法

前章第 62 乃至 66 節ニ於テハ與ヘラレタル曲線ノ方程式ヲ $y=f(x)$ ト考ヘテ種種ノ結果ヲ求メタルガ, モシ與ヘラレタル曲線ノ方程式ガ $\mathrm{F}(x,y)=0$ ナル形ヲ有スルトキハ, 第 58 節ニ述ベタル陰函數ノ微分法ニヨリテ y ノ x ニ關スル導函數ヲ求メ, 上記ノ諸結果ヲ書キ換フルコトヲ得ベシ。

x ニ關スル y ノ導函數ハ次ノ如シ。

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\mathrm{F}_x}{\mathrm{F}_y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\mathrm{F}_{yy}\mathrm{F}_x^2-2\mathrm{F}_{xy}\mathrm{F}_x\mathrm{F}_y+\mathrm{F}_{xx}\mathrm{F}_y^2}{\mathrm{F}_y^3}.$$

例ヘバ曲線 $\mathrm{F}(x,y)=0$ 上ノ一點 (x,y) ニ於ケル曲度半徑ハ

$$\left|\frac{(\mathrm{F}_x^2+\mathrm{F}_y^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{F}_{xx}\mathrm{F}_y^2-2\mathrm{F}_{xy}\mathrm{F}_x\mathrm{F}_y+\mathrm{F}_{yy}\mathrm{F}_x^2}\right|$$

ナリ。

76. 媒介變數ニヨル微分法

曲線ノ方程式ガ $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ ナル場合ニ, y ノ x ニ關スル導函數ヲ求ムルコトハ第 18 節 (VI) 及ビ第四章ノ問題 8 ニヨリテ之ヲ知レリ。即チ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{dy}{dt}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3}.$$

例ヘバ曲線 $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ 上ノ一點ニ於ケル曲度半徑ハ

$$\left|\frac{\left\{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{dy}{dt}}\right|$$

ナリ。

77. 逆函數ノ微分法

或場合ニハ曲線ノ方程式ガ $x=f(y)$ ナル形ニテ與ヘラルルコトアリ。コノトキ y ノ x ニ關スル導函數ヲ求メンニハ，先ヅ第 18 節 (V) ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}.$$

次ニ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\right)\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=-\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3}.$$

例題. 次ノ式ヲ證明シ，且ソノ幾何學的意味ヲ説明セヨ：

$$\frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|}=\frac{\left\{1+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left|\dfrac{d^2x}{dy^2}\right|}.$$

78. 直角座標ト極座標トノ關係(其一)

前章第 72 節ニ於テハ極座標ニ於ケル平面曲線ノ諸公式ヲ一一幾何學的ニ求メタレドモ，コレラハ實ハ座標ノ變換ニヨリテ直角座標ノ場合ニ於ケル公式ヨリ解析的ニ誘導シ得ベキモノナリ。之ヲナスニハ $\dfrac{dy}{dx}$ 等ヲ $\dfrac{dr}{d\theta}$ 等ニテ表スコトヲ考フルヲ要ス。

今曲線ノ方程式ヲ

$$y=f(x)$$

トシ，ココニ

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

ト置ケバ，

$$r\sin\theta=f(r\cos\theta)$$

ニシテ，即チ r ハ θ ノ函數ナリ。故ニ結局 x 及ビ y ハ共ニ θ ノミノ函數ナリト考ヘラル。依ツテ

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{dr}{d\theta}+\frac{\partial x}{\partial\theta}=\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\sin\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{\partial y}{\partial r}\frac{dr}{d\theta}+\frac{\partial y}{\partial\theta}=\sin\theta\frac{dr}{d\theta}+r\cos\theta.$$

故ニ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta\dfrac{dr}{d\theta}+r\cos\theta}{\cos\theta\dfrac{dr}{d\theta}-r\sin\theta}.\qquad(1)$$

之ヲ更ニ x ニ關シテ微分スレバ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

$$=\left(\frac{d}{d\theta}\,\frac{\sin\theta\dfrac{dr}{d\theta}+r\cos\theta}{\cos\theta\dfrac{dr}{d\theta}-r\sin\theta}\right)\frac{1}{\dfrac{dx}{d\theta}}$$

$$=\frac{r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\cos\theta\dfrac{dr}{d\theta}-r\sin\theta\right)^3}. \qquad (2)$$

例ヘバ極座標ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メンニハ，直角座標ニ於ケル公式

$$\mathrm{Y}-y=\frac{dy}{dx}(\mathrm{X}-x)$$

ニ於テ，

$$\mathrm{X}=\mathrm{R}\cos\Theta,\qquad \mathrm{Y}=\mathrm{R}\sin\Theta,$$

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

ト置キ，又 $\dfrac{dy}{dx}$ ノ代リニ (1) ノ右邊ヲ代入スベシ。其結果ヲ簡約スレバ第 72 節 (I) ノ (5) ヲ得。

例題． 直角座標ニ於ケル曲度半徑ノ公式ヨリ極座標ニ於ケル公式ヲ導ケ。

79. 直角座標ト極座標トノ關係(其二)

直角座標 x, y ノ函數 V アリ，今

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

ト置キテ書キ直セバ V ハ r, θ ノ函數トナル，即チ

$$\mathrm{V}=\mathrm{F}(x, y)=\Phi(r, \theta)$$

ナリトス。ココニ $\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}, \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}$ ト $\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial r}, \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta}$ トノ關係ヲ求メントス。

第 54 節ニヨリ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial r}&=\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},\\ \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta}&=\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

然ルニ

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta=\frac{x}{r},\qquad \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta=\frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}=-r\sin\theta=-y,\qquad \frac{\partial y}{\partial \theta}=r\cos\theta=x$$

ナルヲ以テ，

$$\left.\begin{aligned}r\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial r}&=\quad x\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}+y\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y},\\ \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta}&=-y\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}+x\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

又一方ヨリ考フレバ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}&=\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x},\\ \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}&=\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

然ルニ

$$r=\pm\sqrt{x^2+y^2},\qquad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

ナルヲ以テ，

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\pm\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}=\cos\theta,\qquad \frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\theta}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\pm\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{r}=\sin\theta,\qquad \frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\cos\theta}{r}.$$

注意. $\dfrac{\partial r}{\partial x}\times\dfrac{\partial x}{\partial r}=1$ ニアラズ。

故ニ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x}&=\cos\theta\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta},\\ \frac{\partial V}{\partial y}&=\sin\theta\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

(4) ヲ反復ニ用スレバ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

$$=\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\theta}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\theta}\right)$$

$$-\frac{\sin\theta}{r}\left(-\sin\theta\frac{\partial V}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\theta}-\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\right)$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}-\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\theta}\right)$$

$$+\frac{\sin^2\theta}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\right).$$

$\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ 等ヲモ同様ニシテ求ムルコトヲ得。

例題. 次ノ式ヲ證明セヨ。

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}.$$

第九章ノ問題

1. $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ ナルトキ, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ ヲ t ノ函數トシテ表セ。

2. $x=f(y)$ ナルトキ, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ ヲ y ノ函數トシテ表セ。

3. $F(x,y)=0$ ナルトキ, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ ヲ求メヨ。

4. $r^2=x^2+y^2$ ニシテ $z=f(r)$ ナルトキ, $z_{xx}+z_{yy}$ ヲ r ノ函數トシテ表セ。

5. $z=F(u,v)$ ニシテ

$$u=x\cos\alpha-y\sin\alpha,\qquad v=x\sin\alpha+y\cos\alpha$$

ナルトキ, 次ノ式ヲ證明セヨ：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

6. $F(x,y,z)=0$ ナルトキ, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ヲ求ムル方法如何。

7. $F_1(x,y,z)=0$, $F_2(x,y,z)=0$ ナルトキ, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2z}{dx^2}$ ヲ求ムル方法如何。

8. $y=f(x)$, $x=\phi(t)$ ナルトキ, $\dfrac{dy}{dx}$ 及ビ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ヲ $\phi'(t)$, $\phi''(t)$ 及ビ $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ ニテ表セ。

9. $u=f(r)$, $r^2=x^2+y^2+z^2$ ナルトキ, 次ノ式ヲ證明セヨ：

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{r}\dfrac{du}{dr}$,

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{r}\left(1-\dfrac{x^2}{r^2}\right)\dfrac{du}{dr}+\dfrac{x^2}{r^2}\dfrac{d^2u}{dr^2}$

(3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}\dfrac{du}{dr}+\dfrac{d^2u}{dr^2}$.

10. $u=f(x,y,z)$ ニシテ, ココニ

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\qquad y=r\sin\theta\sin\phi,\qquad z=r\cos\theta$$

ナルトキ, 次ノ式ヲ證明セヨ：

(1) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial\phi}\right)^2$,

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\dfrac{1}{r^2}\left(\cot\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\right)$,

(3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{1}{r^2}\left\{\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\right\}$.

第十章

空間曲線及ビ曲面

80. 曲面及ビ空間曲線ノ方程式

立體解析幾何學ニ於テモ微分法ハ種種ノ應用ヲ有ス。本章ニ於テハ其一斑ヲ示サンガ爲メニ空間曲線及ビ曲面ニ關スル簡單ナル一二ノ公式ヲ求メントス。

以下スベテ直角座標 (x, y, z) ヲ用ヰルコトトシ，曲面ヲ表スニハ

$$F(x, y, z) = 0$$

ナル方程式ヲ用ヰ，又空間曲線ヲ表スニハ聯立方程式

$$F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0$$

又ハ $\qquad x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$

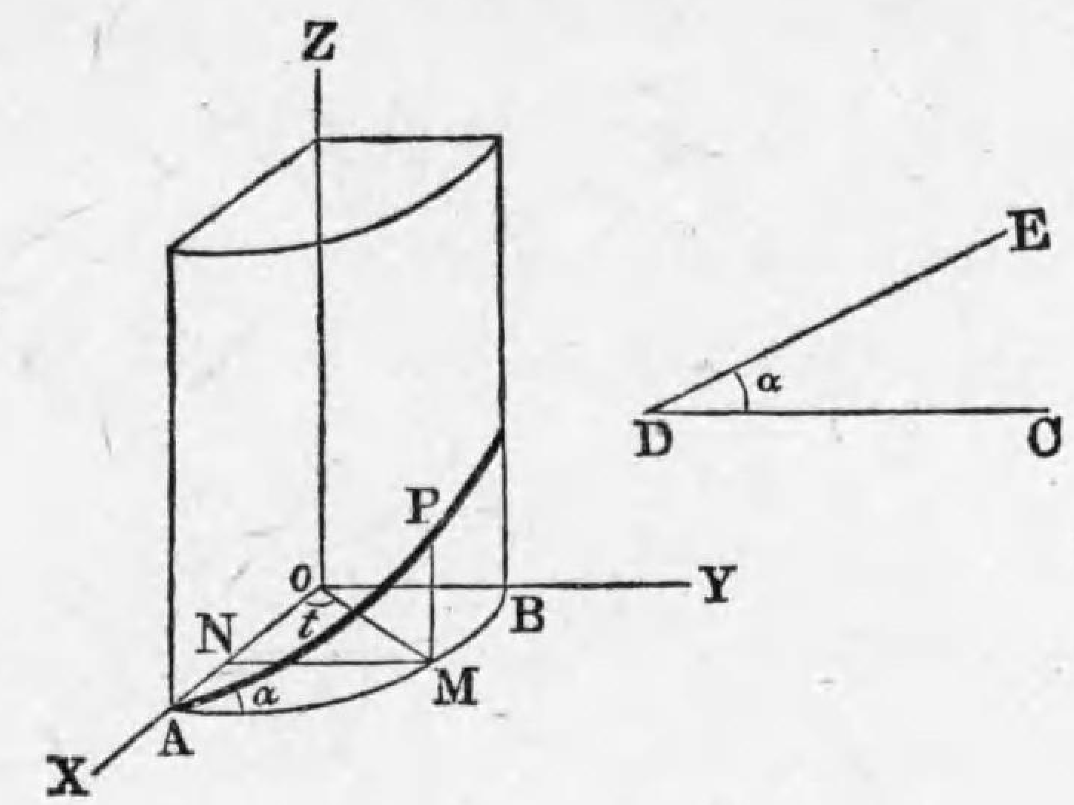
ヲ用ヰルベシ，ココニ t ハ媒介變數ナリ。

F, f 等ノ函數ハスベテ一價ニシテ，必要ナル度數ダケ微分可能ナリトシ，又其導函數ハスベテ連續ナリト假定ス。

例. 方程式 $x^2+y^2=a^2$ ハ z 軸ヲ軸トスル圓柱ヲ表シ，其圓柱ト xy 面トノ交リハ半徑 a ナル圓ナリ。此圓ト x 軸及ビ y 軸ノ正ノ方向トノ交點ヲ A, B トス。

今一ツノ角 CDE ヲ α トシ，此角ノ平面ヲ上記ノ圓柱ニ巻キ付クルニ，頂點 D ハ A ニ，邊 DC ハ圓 AB ニ重ナル様ニシ，且 DE ハ xy 面ヨリ上ニアル様ニスレバ，DE ハ圓柱面上ニ於テ一種ノ空間曲線ヲ畫クベシ。其方程式ヲ求ムルコト次ノ如シ。

其曲線上ニ任意ノ一點 P ヲトリ，P ヨリ xy 面ニ下シタル垂線ヲ PM, M ヨリ OX



第百五圖

ニ下シタル垂線ヲ MN トス。P ノ座標ヲ (x, y, z) トシ，$\angle AOM = t$ トスレバ

$$x = ON = a\cos t, \qquad y = NM = a\sin t,$$
$$z = MP = \widehat{AM}\tan\alpha = at\tan\alpha.$$

故ニ求ムル方程式ハ

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = bt$$

ナリ，但シココニ $b = a\sin\alpha$ ナリトス。

此曲線ヲ **螺線** トイフ。

例題 1. 次ノ聯立方程式ハ各何ヲ表スカ：

$$(1) \begin{cases} y = f_1(x), \\ z = f_2(x). \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x = f_1(u, v), \\ y = f_2(u, v), \\ z = f_3(u, v). \end{cases}$$

例題 2. 次ノ聯立方程式ハ如何ナル空間曲線ヲ表スカ。

$$x^2+y^2+z^2 = a^2, \qquad x^2+y^2 = ax.$$

81. 空間曲線ノ切線及ビ法平面

空間曲線

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

ノ上ノ二點 P 及ビ Q ノ座標ヲ夫夫

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t),$$

$$x+\Delta x=f_1(t+\Delta t),\quad y+\Delta y=f_2(t+\Delta t),\quad z+\Delta z=f_3(t+\Delta t)$$

トシ，直線 PQ ノ方向餘弦ヲ l, m, n トスレバ

$$\begin{aligned} l:m:n &= \Delta x:\Delta y:\Delta z \\ &= f_1(t+\Delta t)-f_1(t):f_2(t+\Delta t)-f_2(t):f_3(t+\Delta t)-f_3(t) \\ &= f_1'(t+\theta_1\Delta t):f_2'(t+\theta_2\Delta t):f_3'(t+\theta_3\Delta t), \\ &\quad 0<\theta_1<1,\quad 0<\theta_2<1,\quad 0<\theta_3<1. \end{aligned}$$

故ニ Q ガ曲線ニ沿ヒテ限リナク P ニ接近シタル極限ニ於テハ，直線 PQ ノ方向餘弦ノ比ハ

$$f_1'(t):f_2'(t):f_3'(t)$$

トナル。故ニ流通座標ヲ X, Y, Z トスレバ P ニ於ケル**切線***ノ方程式ハ次ノ如シ。

$$\frac{X-x}{f_1'(t)}=\frac{Y-y}{f_2'(t)}=\frac{Z-z}{f_3'(t)}$$

即チ
$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'}. \qquad (1)$$

P ヲ過リ，P ニ於ケル切線ニ垂直ナル平面ヲ其點ニ於ケル曲線ノ **法平面** トイフ。其方程式ハ

$$x'(X-x)+y'(Y-y)+z'(Y-z)=0 \qquad (2)$$

ナリ。

* 切線ノ定義ハ平面曲線ニ於ケルモノ(第 61 節)ト同一ナリトス。

曲線ノ方程式ガ

$$F_1(x,y,z)=0,\quad F_2(x,y,z)=0$$

ナルトキハ，x, y, z ヲ或ル共通ノ變數(例ヘバ t)ノ函數ト考ヘテ此二式ヲ微分スレバ

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}x'+\frac{\partial F_1}{\partial y}y'+\frac{\partial F_1}{\partial z}z'=0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}x'+\frac{\partial F_2}{\partial y}y'+\frac{\partial F_2}{\partial z}z'=0.$$

之ヨリ $x':y':z'$ ノ比ヲ得ルコト次ノ如シ。

$$\frac{x'}{\dfrac{\partial F_1}{\partial y}\dfrac{\partial F_2}{\partial z}-\dfrac{\partial F_1}{\partial z}\dfrac{\partial F_2}{\partial y}}=\frac{y'}{\dfrac{\partial F_1}{\partial z}\dfrac{\partial F_2}{\partial x}-\dfrac{\partial F_1}{\partial x}\dfrac{\partial F_2}{\partial z}}$$

$$=\frac{z'}{\dfrac{\partial F_1}{\partial x}\dfrac{\partial F_2}{\partial y}-\dfrac{\partial F_1}{\partial y}\dfrac{\partial F_2}{\partial x}}. \qquad (3)$$

之ヲ (1) 又ハ (2) ニ代入スレバ夫夫切線又ハ法平面ノ方程式ヲ得ベシ。

例. 螺線 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$ 上ノ一點ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{X-a\cos t}{-a\sin t}=\frac{Y-a\sin t}{a\cos t}=\frac{Z-bt}{b}$$

即チ
$$\frac{X-x}{-y}=\frac{Y-y}{x}=\frac{Z-z}{b}.$$

法平面ノ方程式ハ

$$-y(X-x)+x(Y-y)+b(Z-z)=0$$

即チ
$$-yX+xY+b(Z-z)=0.$$

例題. 曲線 $x=f_1(z),\ y=f_2(z)$ 上ノ一點 (x, y, z) ニ於ケル切線及ビ法平面ノ方程式ヲ作レ。

82. 曲面ノ法線及ビ切平面

一ツノ曲面ノ方程式ヲ

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

トシ，其上ノ一點 $P(x, y, z)$ ヲ過ル第二ノ曲面ノ方程式ヲ

$$\Phi(x, y, z) = 0 \qquad (2)$$

トス。

(1), (2) ノ交リナル曲線ヲ考フレバ，其曲線ノ P ニ於ケル切線ノ方向餘弦ノ比ハ前節 (3) ニヨリ

$$F_y\Phi_z - F_z\Phi_y : F_z\Phi_x - F_x\Phi_z : F_x\Phi_y - F_y\Phi_x \qquad (3)$$

ナリ。此比ハ Φ ニ關係ス；F ヲ一定ナラシメ置キテ Φ ヲ變ズレバ交リナル曲線ハ (1) ナル曲面上ニ於テ P ヲ過ル種種ノ曲線トナリ，(3) ハソレニ對スル切線ノ方向餘弦ノ比ヲ與フベシ。コレラノ切線ヲスベテ P ニ於ケル曲面 (1) ノ **切線** トイフ。故ニ曲面上ノ一點ニ於テハ無數ニ多クノ切線ガ存在ス。

今 P ヲ過リ，方向餘弦ノ比ガ

$$F_x : F_y : F_z$$

ナル如キ直線ヲ引クトキハ，此直線ハ (2) ニハ全然關係ナク一般ニ (1) ノミニヨリテ定マルモノニシテ，且此直線ハ P ニ於ケル曲面 (1) ノスベテノ切線ニ垂直ナリ，何トナレバ

$$F_x(F_y\Phi_z - F_z\Phi_y) + F_y(F_z\Phi_x - F_x\Phi_z) + F_z(F_x\Phi_y - F_y\Phi_x) = 0$$

ナレバナリ。此直線ヲ P ニ於ケル (1) ノ **法線** トイフ，其方程式ハ次ノ如シ：

$$\frac{X-x}{F_x} = \frac{Y-y}{F_y} = \frac{Z-z}{F_z}.$$

曲面 (1) 上ノ一點 P ニ於ケルスベテノ切線ハ皆法線ニ垂直ナルヲ以テ一ツノ平面ヲ定ム，之ヲ P ニ於ケル (1) ノ **切平面** トイフ，其方程式ハ次ノ如シ：

$$F_x(X-x) + F_y(Y-y) + F_z(Z-z) = 0.$$

注意. 曲面上ノ一點ニ於テ $F_x : F_y : F_z$ ナル比ノ値ガ不定トナルトキハ法線モマタ不定トナル。從ツテ斯クノ如キ點ニ於テハスベテノ切線ハ必ズシモ同一平面上ニアラズ。

例 1. 楕圓面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上ノ一點 (x, y, z) ニ於ケル

法線ハ $$\frac{a^2(X-x)}{x} = \frac{b^2(Y-y)}{y} = \frac{c^2(Z-z)}{z}$$

切平面ハ $$\frac{x(X-x)}{a^2} + \frac{y(Y-y)}{b^2} + \frac{z(Z-z)}{c^2} = 0$$

即チ $$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1.$$

例 2. 曲面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ニ於テハ

$$F_x : F_y : F_z = x^{-\frac{1}{3}} : y^{-\frac{1}{3}} : z^{-\frac{1}{3}}.$$

故ニ法線ノ方程式ハ

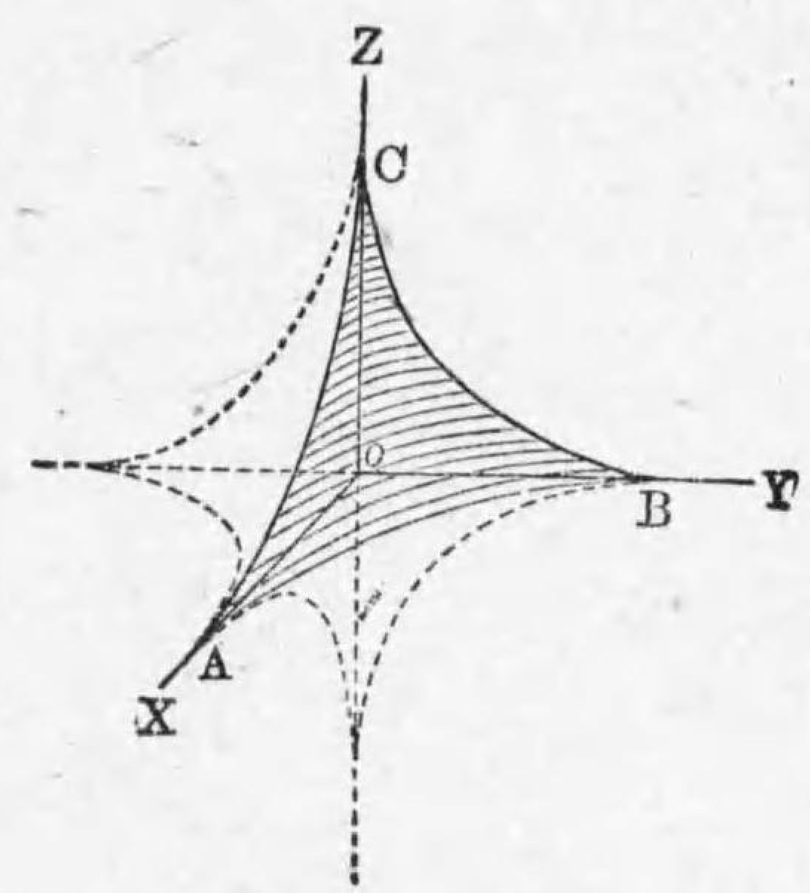
$$x^{\frac{1}{3}}(X-x) = y^{\frac{1}{3}}(Y-y) = z^{\frac{1}{3}}(Z-z), \qquad \text{(i)}$$

切平面ノ方程式ハ

$$\frac{X-x}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{Y-y}{y^{\frac{1}{3}}} + \frac{Z-z}{z^{\frac{1}{3}}} = 0$$

即チ

$$\frac{X}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{Y}{y^{\frac{1}{3}}} + \frac{Z}{z^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{2}{3}}. \qquad \text{(ii)}$$



第百六圖

特ニ $A(a, 0, 0)$ ナル點ニ於テハ，(i) ハ單ニ $X-a=0$ ナル一式トナルガ故ニ法線ハ不定ニシテ，カクノ如キ軸ニ垂直ナル平面內ニアリトイフニ止マル。又 $x=a,\ y=z=0$ ト置ケバ (ii) ハ其儘ニテハ無意味トナレドモ，此平面ノ各座標軸上ニ作ル截片ヲ考フレバ $a, 0, 0$ トナルヲ見ルベシ。故ニ (ii) ハ x 軸ヲ含ム平面トナル。然レドモ斯クノ如キ特殊ノ點ニ於テハ本節ノ一般ナル所論ハ必ズシモ通用セザルヲ以テ，該平面上ノ A ヲ過ル直線ガスベテ原曲面ノ切線ナリト斷定スベカラズ。實際第百六圖ニヨリテ明カナル如ク，此場合ニハ A ニ於ケル切線ハ切平面ヲ作ラズシテスベテ x 軸ト相合ス，而シテ A ヲ過リ x 軸ニ垂直ナル直線ハスベテ A ニ於ケル法線ト考ヘラルルモノナリ。

第十章ノ問題

1. 次ノ空間曲線ノ切線及ビ法平面ノ方程式ヲ求メヨ：

(1) $\begin{cases} x^3 = 3a^2y \\ 2xz = a^2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2 = a^2 \\ y^2+z^2 = b^2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} xz = y^2 \\ x^2+yz = 3ay \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2 \\ x^2+y^2 = ax \end{cases}$

2. 次ノ曲面ノ法線及ビ切平面ノ方程式ヲ求メヨ：

(1) $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=2z$　　(2) $xy = cz$

(3) $z = k\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$　　(4) $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

3. 曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ ノ原點ニ於ケル法線及ビ切平面ヲ吟味セヨ。

4. 原點ヨリ楕圓面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ノ切平面ニ下シタル垂線ノ足ノ軌跡如何。

5. 曲面 $xyz=a^3$ ノ切平面ト三ツノ座標面トニテ作ラルル三角錐ノ體積ハ一定ナルコトヲ證明セヨ。

6. 一ツノ曲線ガ一定直線ヲ軸トシテ空間ニ回轉スルトキ生ズル曲面ヲ稱シテ **回轉面** トイヒ，其一定直線ヲ回轉面ノ **軸** トイフ。z 軸ヲ軸トスル回轉面ノ方程式ハ $z=f(x^2+y^2)$ ナル形ヲ有スルコトヲ證明シ 依ツテ回轉面ノ法線ハスベテ其軸ト交ルコトヲ示セ。

7. 曲面 $F(y-mx,\ z-nx)=0$ ノ切平面ハスベテ一定直線ニ平行ナルコトヲ證明セヨ。(コレ卽チ一般ナル **柱面** ノ方程式ナリ。)

8. 曲面 $F\left(\dfrac{y-b}{x-a}, \dfrac{z-c}{x-a}\right)=0$ ノ切平面ハスベテ一定點ヲ過ルコトヲ證明セヨ。(コレ卽チ一般ナル **錐面** ノ方程式ナリ。)

9. 曲面上ノ一點ノ附近ガ其點ニ於ケル切平面ヨリモ上 (卽チ z 軸ノ正ノ方向) ニアルトキハ曲面ハ其點ニ於テ **上ニ凹** 又ハ **下ニ凸** ナリトイヒ，之ニ反シテ切平面ヨリモ下ニアルトキハ **上ニ凸** 又ハ **下ニ凹** ナリトイフ。今曲面ノ方程式ヲ

$z=\mathrm{F}(x,y)$ トスルトキハ，其上ノ一點ニ於テ

$$\mathrm{F}_{xx}\mathrm{F}_{yy}-\mathrm{F}_{xy}{}^2>0,\quad \mathrm{F}_{xx}>0 \text{ ナラバ上ニ凹,}$$

$$\text{〃} \quad \text{〃} \quad \mathrm{F}_{xx}<0 \text{ ナラバ上ニ凸,}$$

又 $\mathrm{F}_{xx}\mathrm{F}_{yy}-\mathrm{F}^2{}_{xy}<0$ ナラバ上ニ凹ニモ凸ニモアラザルコトヲ示セ。（第 62 節及ビ第 56 節ヲ參考セヨ。）

10. 曲面 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=2z$ 上ノ一點ニ於ケル凹凸ヲ吟味セヨ。

雜 題

1. 圓周上ノ一定點 A ヨリ弦 AP 及ビ切線 AT ヲ引キ AT = AP ナラシメ直線 TP ト A ヲ端トスル直徑又ハ其延長トノ交點ヲ Q トス，$\mathrm{AP}\to 0$ ナルトキ AQ ノ極限値ヲ求メヨ。

***2.** 一ツノ圓ニ於テ弓形ノ弧ノ長サガ第一位ノ無限小ナルトキ，其弓形ノ面積ハ第三位ノ無限小ナルコトヲ證明セヨ。

3. 代數函數ノ代數函數ハ矢張一ツノ代數函數ナルコトヲ證明セヨ。

4. 代數函數ノ超越函數，又ハ超越函數ノ代數函數ハ一ツノ超越函數ナルコトヲ證明セヨ。

5. 次ノ如クニ定義セラレタル六ツノ函數 $\sinh x$ 等ヲ**双曲函數**トイフ

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\qquad \coth x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},$$

$$\operatorname{sech} x=\frac{2}{e^x+e^{-x}},\qquad \operatorname{cosech} x=\frac{2}{e^x-e^{-x}}.$$

双曲函數ノ導函數ハ次ノ如クナルコトヲ證明セヨ。

$$\frac{d}{dx}\sinh x=\cosh x,\qquad \frac{d}{dx}\cosh x=\sinh x,$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x=\operatorname{sech}^2 x,\qquad \frac{d}{dx}\coth x=-\operatorname{cosech}^2 x,$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x=-\operatorname{sech} x\tanh x,\qquad \frac{d}{dx}\operatorname{cosech} x=-\operatorname{cosech} x\coth x.$$

6. 次ノ函數ヲ微分セヨ。

(1) $\dfrac{(x+a)(x+b)(x+c)}{x+k}$,　　(2) x^{x^x},

(3) $\dfrac{e^x\cos x}{1+e^x\sin x}$,　　(4) $\dfrac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}+\log\sqrt{1-x^2}$.

7. $$1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

ナルコトヲ既知トシ，微分法ヲ應用シテ次ノ級數ノ和ヲ求メヨ：

$$x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots+nx^n.$$

8. 運動スル一點ノ經過セル路ノ長サヲ x，運動ノ勢力(エネルギー)ヲ y トシテ曲線ヲ畫クトキハ，其曲線ノ勾配(切線ガ x 軸トナス角ノ正切)ハ動點ニ働ク力ノ大キサヲ表スコトヲ證明セヨ。

9. 三角形 ABC ガ同一ノ圓ニ內接シツツ微小ナル變動ヲナストキ，高位ノ無限小ヲ省略スレバ，

$$\frac{\Delta a}{\cos A}+\frac{\Delta b}{\cos B}+\frac{\Delta c}{\cos C}=0$$

ナルコトヲ證明セヨ，但シ Δa ハ角 A ニ對スル邊ノ增分ナリ，其他之ニ準ズ。

10. 二ツノ線分 OP, PQ ガ P ニ於テ連結セラレ，O ハ固定シ，Q ハ O ヲ過ル直線 OX 上ニ運動スルモノトス。O ヲ過リ OX ニ垂直ナル直線ト直線 PQ トノ交點ヲ R トシ，O ノ周リニ OP ノ回轉スル角速度ヲ ω トスレバ，Q ノ OX 上ニ於ケル運動ノ速サハ $\omega.\overline{\mathrm{OR}}$ ナルコトヲ證明セヨ。

11. 運動スル點ノ座標ガ，時間ヲ t トシテ

$$x=a\cosh nt,\qquad y=b\sinh nt$$

ナル方程式ニテ與ヘラルルトキハ　其經過スル路ハ双曲線ニシテ，其一點ニ於ケル速サハ之ニ對スル共軛ナル直徑ニ比例スルコトヲ示セ。

12. 多價函數 $f(x)=x\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$ ニ於テ $f(0)=0$ ナリトシ，$x=0$ ナルトキノ此函數ノ各ノ價ニツイテ其微係數ヲ求メヨ。

13. 函數 $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ ニ於テ $f(0)=0$ ナリトスレバ，$f'(x)$ ハ $x=0$ ニ於テ有限確定値ヲ有スレドモ連續ナラザルコトヲ示セ。

14. 三次方程式 $x^3-ax^2-2a=0$ ハ a ヨリ大ナル唯一ツノ正根ヲ有スルコトヲ證明セヨ，但シ $a>0$ トス。

15. 三角形ノ二邊ヲ a, b，其夾角ヲ C トシ，$a-b$ ガ a 及ビ b ニ比シテ微小ナルトキハ，第三邊ハ大略 $(a+b)\sin\dfrac{\mathrm{C}}{2}$ ニ等シキコトヲ證明セヨ。

16. 主軸ガ座標軸ト一致スルスベテノ有心二次曲線ハ微分方程式

$$xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0$$

ヲ滿足セシムルコトヲ證明セヨ。

17. 次ノ式ヲ證明セヨ：

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix},\qquad a<\xi<b.$$

18. $a\leqq x\leqq b$ ナル變域ニ於テ $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 及ビ其導函數ガ連續ナルトキ，

$$\begin{vmatrix} f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \\ f_1'(c) & f_2'(c) & f_3'(c) \end{vmatrix}=0$$

ナルコトヲ證明セヨ，ココニ c ハ a ト b トノ間ノ一數ナリトス。

19. $x=a\cos\theta+b\sin\theta,\ \ y=a\sin\theta-b\cos\theta$ ナルトキハ，$\dfrac{d^mx}{d\theta^m}\dfrac{d^ny}{d\theta^n}-\dfrac{d^nx}{d\theta^n}\dfrac{d^my}{d\theta^m}$ ハ θ ニ無關係ナルコトヲ證明セヨ。

20. 次ノ式ヲ證明セヨ。

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)=(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}.$$

21. $\dfrac{y}{a}=\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$ ナルトキ，

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{(n-1)!}{a^{n-1}}\cos\left\{\frac{ny}{a}+(n-1)\frac{\pi}{2}\right\}\cos^n\frac{y}{a}$$

ナルニヨリ，ココニ

$$\tan^{-1}\frac{x}{a}=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{a}{x}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

ト置ケバ

$$\frac{d^ny}{dx^n}=a(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(a^2+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin n\theta$$

ナルコトヲ證明セヨ。

22. 正項級數

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$$

ニ於テ　　$u_n\geqq u_{n+1}\qquad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

ナルトキハ，原級數ト

$$2u_2+4u_4+8u_8+\cdots\cdots+2^nu_{2^n}+\cdots\cdots$$

トハ共ニ收斂ナルカ又ハ共ニ發散ナルコトヲ證明セヨ。

23. 次ノ級數ハ x ノ或ル特別ノ値ヲ除クノ他ハ常ニ收斂ナルコトヲ證明セヨ：

(1) $\dfrac{1}{1^2-x}+\dfrac{1}{2^2-x}+\dfrac{1}{3^2-x}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2-x}+\cdots\cdots,$

(2) $\dfrac{x}{1(1+x)}+\dfrac{x}{(1+x)(1+2x)}+\dfrac{x}{(1+2x)(1+3x)}+\cdots\cdots$

$$+\frac{x}{(1+nx)\{1+(n+1)x\}}+\cdots\cdots$$

(3) $1+\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{1+x^4}+\cdots\cdots+\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}+\cdots\cdots.$

24. 次ノ級數ノ收斂, 發散ヲ判定セヨ：

$$\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{1}\right)+\frac{1}{3}\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\log\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{n+1}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots\cdots.$$

25. $$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$$

$$\log y=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots+b_nx^n+\cdots\cdots$$

ナルトキハ

$$na_n=b_1a_{n-1}+2b_2a_{n-2}+\cdots\cdots+nb_na_0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

26. 次ノ式ヲ證明セヨ：

$$\pi=2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.3^2}-\frac{1}{7.3^3}+\cdots\cdots\right).$$

27. 次ノ式ヲ證明セヨ：

$$f(0)=f(x)-\frac{x}{1!}f'(x)+\frac{x^2}{2!}f''(x)-\frac{x^3}{3!}f'''(x)+\cdots\cdots.$$

但シ $f(x)$ ノスベテノ逐次導函數ノ絕對値ハ有限ナル一定數ヲ越エザルモノトス。

28. $$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\mathrm{B}_2\frac{x^2}{2!}-\mathrm{B}_4\frac{x^4}{4!}+\mathrm{B}_6\frac{x^6}{6!}-\cdots\cdots$$

ト置クトキハ,

$$\frac{xe^x}{e^x-1}=1+\frac{x}{2}+\mathrm{B}_2\frac{x^2}{2!}-\mathrm{B}_4\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots$$

ニシテ, ココニ

$$\mathrm{B}_2=\frac{1}{6},\quad \mathrm{B}_4=\frac{1}{30},\quad \mathrm{B}_6=\frac{1}{42},$$

$$\mathrm{B}_8=\frac{1}{30},\quad \mathrm{B}_{10}=\frac{5}{66},\quad \mathrm{B}_{12}=\frac{691}{2730}\quad 等$$

ナルコトヲ示セ。(コレラヲ Bernoulli ノ數トイフ。)

29. 問題 21 ニヨリ次ノ展開式ヲ證明セヨ：

$$\tan^{-1}(x+h)=\tan^{-1}x+h\sin^2\theta-\frac{h^2}{2}\sin^2\theta\sin 2\theta+\frac{h^3}{3}\sin^3\theta\sin 3\theta$$

$$-\frac{h^4}{4}\sin^4\theta\sin 4\theta+\cdots\cdots$$

但シ $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x$ ナリ。

30. 前問ノ結果ヨリ, 次ノ各式ヲ導ケ；

(1) $\dfrac{\pi}{2}-\theta=\sin\theta\cos\theta+\dfrac{\cos^2\theta\sin 2\theta}{2}+\dfrac{\cos^3\theta\sin 3\theta}{3}+\dfrac{\cos^4\theta\sin 4\theta}{4}+\cdots\cdots,$

(2) $\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\sin 2\theta}{2\cos^2\theta}+\dfrac{\sin 3\theta}{3\cos^3\theta}+\dfrac{\sin 4\theta}{4\cos^4\theta}+\cdots\cdots,$

(3) $\dfrac{1}{2}(\pi-\theta)=\sin\theta+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\dfrac{1}{3}\sin 3\theta+\dfrac{1}{4}\sin 4\theta+\cdots\cdots.$

31. 平均値ノ定理

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h),\qquad 0<\theta<1$$

ニ於テ, $h\to 0$ ナルトキハ $\theta\to\dfrac{1}{2}$ ナルコトヲ證明シ, 且此意味ヲ幾何學的ニ解釋セヨ。

32. $f(x)$ ヲ Maclaurin ノ定理ニヨリテ x ノ冪級數ニ展開シタルトキ, 第 n 項ノ後ノ剩餘ヲ $\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$ トスレバ,

$$\lim_{x\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

33. 次ノ極限値ヲ求メヨ：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^{nx}.$$

34. x ヲ第一位ノ無限小トスルトキ, 次ノ式ハ第何位ノ無限小トナルカ

$$(1+x)^{\frac{1}{1-x}}-\frac{1}{1-x}.$$

***35.** $f(x)$ ハ x ノ或變域ニ於テ第三次導函數マデ連續ニシテ, a, b ハ其變域中ノ x ノ任意ノ二ツノ値, 又 ξ ハ a ト b トノ中間ノ或値トスレバ

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)\{f'(a)+f'(b)\}-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi)$$

ナル關係アルコトヲ證明セヨ。

36. 前問ト同シ條件ノ下ニ

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f'''(\xi)$$

ナルコトヲ證明セヨ。

37. $x=c\cosh\xi\cos\eta,\ \ y=c\sinh\xi\sin\eta$ ナルトキ，次式ヲ證明セヨ：

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=\frac{1}{2}c^2(\cosh 2\xi-\cos 2\eta)\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right).$$

38. 一般ニ $\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2F}{\partial z^2}$ ヲ ∇^2F ト書クコトトスレバ，

$$\nabla^2u=0,\qquad \nabla^2v=0,\qquad \nabla^2w=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

ナルトキ，$\nabla^2(xu+yv+zw)$ ノ値如何。

***39.** $y=z+x\phi(y)$ ニ於テ，x ト z トガ互ニ無關係ナルトキ，次ノ三式ヲ證明セヨ：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\phi(y)\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{F(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right\}=\frac{\partial}{\partial z}\left\{F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right\},$$

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\left\{\phi(y)^n\frac{\partial u}{\partial z}\right\},$$

但シ u ハ y ノミノ函數ナリトス。

40. 函數 $ax^3+3bx^2+3cx+d$ ノ極値ハ方程式

$$a^2y^2-2Gy-H=0$$

ノ根ナルコトヲ證明セヨ，但シ

$$G=a^2d-3abc+2b^3,$$

$$H=a^2d^2+4ac^3+4db^3-3b^2c^2-6abcd.$$

41. 變域 $0\leqq x\leqq 1$ ニ於ケル $x(x-a)(x-b)$ ノ最大値及ビ最小値ヲ求ム，但シ $0<a<1<b$ トス。

42. x^3+ax^2+bx+c ガ極値ヲ有セザルタメノ條件ヲ求メヨ。

43. x^3-3a^2x-6a ノ極大値ヲ極小ナラシムル樣ニ a ノ値ヲ定メヨ。

44. $x^3+y^3=3xy$ ナルトキ，x^2+y^2 ノ極値ヲ求メヨ。

45. 一直線ヲナセル海岸ヨリ三粁ヲ距ル海上ニ島アリ，又此島ニ最近キ海岸上ノ地點ヨリ海岸ニ沿ヒテ五粁ノ所ニ村アリ，此島ノ住人ニシテ一時間ニ五粁ヲ走リ得，又舟ヲ漕ゲバ一時間ニ四粁ヲ漕ギ得ル人ガ成ル可ク早ク此村ニ赴カンニハ，何所ノ地點ニ上陸スベキカ。

46. 四邊形 ABCD ニ於テ AB = BC = CD = a ナルトキ，其面積ヲ最大ナラシムルニハ邊 DA ヲ何程トナスベキカ。

47. 定球ニ外接スル直圓錐體ノ中ニテ其體積ノ最小ナルモノヲ求メヨ。

48. 全表面積ノ一定ナル直圓錐體ノ中ニテ其體積ノ最大ナルモノヲ求ム。

49. 定直線ノ一方ノ側ニ二定點 A, B アリ，今其直線上ニ一點 P ヲトリテ角 APB ヲ最大ナラシメトス，P ノ位置如何。

50. 直角 AOB ノ內部ニ一定點 P アリ，P ヲ過ル直線ガ邊 OA, OB ト交ル點ヲ A, B トスルトキ，AB ヲ極小ナラシメヨ。又其場合ニ於テ O ヨリ直線 AB ニ垂線 OQ ヲ下ストキ，PA, QB ノ關係如何。

51. 與ヘラレタル圓周上ニ中心ヲ有スル第二ノ圓ヲ畫キ，其最初ノ圓內ニアル部分ノ弧ヲ極大ナラシメントスル問題ハ $x=\cot x$ ナル方程式ノ解法ニ歸著セシメラルルコトヲ示シ，且此方程式ノ根ノ近似値ヲ求ムル方法ヲ示セ。

52. 弧ノ長サガ一定ニシテ面積ノ極大ナル弓形ヲ求ム。

53. 楕圓ノ一ツノ焦點 S ヲ過ル弦ノ兩端ヲ A, B トシ，又他ノ焦點ヲ C トスルトキ，三角形 ABC ノ面積ノ極大値如何。

54. 三角形ノ周圍ヲ一定ナリトシ 其一邊ヲ軸トシテ之ヲ回轉スルトキ生ズル立體(同一ノ底ヲ共有スル二ツノ直圓錐ヨリナル立體)ノ體積ヲ最大ナラシメヨ。

55. $z^2+xyz-xy^2-x^2=9$ ナルトキ，z ノ極値如何。

56. 與ヘラレタル數 a ヲ三ツノ部分 x, y, z ニ分チ

$$\frac{xy}{2}+\frac{yz}{3}+\frac{zx}{4}$$

ヲ極値ナラシメヨ。

57. x 及ビ y ヲ獨立變數トシテ $(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2$ ノ極値ヲ求メヨ。

58. 定楕圓ニ内接スル三角形ノ面積ノ極大値ヲ求ム。

59. 三角形ノ内部ニ一點ヲ取リ，三頂點ヨリノ距離ノ和ヲ最小ナラシメヨ。

60. 三角形ノ内部ニ一點ヲ取リ，コレヲ過リテ各邊ニ平行線ヲ引ケバモトノ三角形ハ三ツノ三角形及ビ三ツノ平行四邊形ニ分タル；其三ツノ三角形ノ和ヲ極小ナラシムル様ニ最初ノ點ヲトレ。

61. 任意ノ閉曲線ニ内接スル三角形ノ面積ガ極大ナルトキニハ，其各頂點ニ於ケル切線ハ夫夫ソノ對邊ニ平行ナルコトヲ證明セヨ。

62. 任意ノ閉曲線ニ外接スル三角形ノ面積ガ極小ナルトキニハ，其各邊ハ切點ニ於テ二等分セラルルコトヲ證明セヨ。

63. $u=f(x,y,z)$ ニシテ，ココニ $\phi(x,y,z)=0$ ナル條件ガ與ヘラルルトキハ u ヲ極値ナラシムル x,y,z ヲ決定スルニハ次ノ四ツノ方程式ヨリ λ ヲ消去シタルモノヲ解ケバヨキコトヲ示セ；

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \phi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \phi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z}+\lambda\frac{\partial \phi}{\partial z}=0,\quad \phi(x,y,z)=0.$$

64. 運動スル一點ノ速サヲ y，經過セル路ノ長サヲ x トシテ曲線ヲ畫クトキハ，其點ノ加速度ノ大サハ法線影ノ長サニヨリテ表サルルコトヲ示セ。

65. 懸垂線 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ 上ノ任意ノ一點 P ヨリ x 軸ニ下セル垂線ヲ PM トスレバ，P ニ於ケル法線ノ長サハ $\overline{\mathrm{PM}}^2$ ニ比例スルコトヲ證明セヨ。

66. 前問ニ於テ，P ニ於ケル切線ニ M ヨリ垂線ヲ下ストキハ，其足ノ軌跡如何。

67. 一點 O 及ビ定曲線 C アリ，O ニ關スル C ノ垂足線ヲ C' トシ，又 O ヲ相似ノ中心トシテ C' ヲ其二倍ノ大キサニ擴大シテ得ル曲線ヲ C'' トス。今 O ヨリ發スル光ガ C ニ當リテ反射スルトキハ其反射光線ハ悉ク C'' ノ法線ナルコトヲ示セ。

68. 抛物線ノ **法弦** (法線ニヨリテ作ラルル弦) ノ極小値如何，且ソノ法弦ハ他ノイヅレノ法弦ヨリモ頂點ニ近ク曲線ヲ截ルコトヲ證明セヨ。

69. 楕圓又ハ双曲線ノ主軸ヲ座標軸トスルトキハ，其曲線上ノ一點ニ於ケル曲度半徑ハ同シ點ニ於ケル法線ノ長サノ三乘ニ比例スルコトヲ示セ。

70. 曲線 $y^4+x^3+a(x^2+y^2)+a^2y=0$ ノ原點ニ於ケル曲度ヲ求メヨ。

71. 與ヘラレタル曲線上ノ一定點ニ於テ之ト第二位ノ切觸ヲナス等邊双曲線ノ

中心ノ軌跡ハ，其點ニ於ケル曲度半徑ノ半分ヲ半徑トスル圓ナルコトヲ證明セヨ。

72. 與ヘラレタル曲線上ノ一定點ニ於テ之ト第二位ノ切觸ヲナス抛物線ノ焦點ノ軌跡ヲ求メヨ。

73. 三次曲線ノ一般ナル方程式ヲ

$$(a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3)$$
$$+3(b_0x^2+2b_1xy+b_2y^2)+3(c_0x+c_1y)+d_0=0$$

トスレバ，ソノ三ツノ漸近線(實又ハ虚)ノ方程式ハ

$$y=mx-\frac{b_0+2b_1m+b_2m^2}{a_1+2a_2m+a_3m^2}$$

ナルコトヲ示セ。但シ m ハ次ノ方程式ニヨリテ定メラルル數トス

$$a_3m^3+3a_2m^2+3a_1m+a_0=0.$$

74. 前問ニ於ケル三ツノ漸近線ガ一點ニ會スルタメノ條件ハ

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

75. 曲線ガ彎曲點ヲ有スルトキハ其縮閉線ハ漸近線ヲ有スルコトヲ證明セヨ。

76. 極座標ニ於テ，曲線上ノ一點ノ動徑ガ極値ヲトルトキ其動徑ハ一般ニハ曲線ノ法線ナルコトヲ示セ。

77. 極座標ニ於テ極 O ヨリ曲線上ノ一點 P ニ引キタル動徑ト其點ニ於ケル法線トノナス角ガ極大又ハ極小トナルトキハ，極 O ハ直線 OP ガ P ニ於ケル曲度圓ヨリ截リ取ラルル弦ノ中點ナルコトヲ示セ。

78. 曲線 $r^m=a^m\cos m\theta$ 上ノ一點ニ於ケル曲度半徑ヲ ρ トスレバ，

$$\rho=\frac{r^2}{(m+1)p}=\frac{a^m}{(m+1)r^{m-1}}$$

ナルコトヲ示セ，但シ p ハ極ヨリ其點ニ於ケル切線ニ下セル垂線ノ長サナリ。

79. 極座標ニ於テ一ツノ曲線アリ，其極ヲ焦點トシ且其曲線上ノ一點 (r,θ) ニ於テコレト第二位ノ切觸ヲナス圓錐曲線ノ方程式ハ次ノ如クナルコトヲ證明セヨ；

$$\mathrm{U}+\cos^2(\Theta-\theta)\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{\frac{du}{d\theta}}{\cos(\Theta-\theta)}\right\}=u+\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

但シ流通座標ヲ R, Θ トシ, v, U ハ夫夫動徑 r, R ノ逆數ナリトス。

80. 極座標ニ於テ曲線上ノ一點ノ動徑ヲ r トシ 其點ニ於ケル切線ニ極ヨリ下シタル垂線ヲ p トスレバ,

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

モシ又 $\frac{1}{r}=u$ ト置ケバ

$$\frac{1}{p^2}=u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$$

ナルコトヲ證明セヨ。

81. p 及ビ r ノ意味ヲ前題ノ如シトセバ楕圓ニ於テハ, 中心ヲ極トスルトキハ

$$\frac{a^2b^2}{p^2}=b^2+a^2-r^2,$$

焦點ヲ極トスルトキハ

$$\frac{l}{p^2}=\frac{2}{r}-\frac{1}{a}$$

ナルコトヲ證明セヨ, 但シ a, b ハ夫夫長軸及ビ短軸ノ半分, l ハ通徑ノ半分トス。

82. 再ビ p 及ビ r ノ意味ヲ前ノ如シトセバ, 半徑 a ナル圓ノ伸開線ニ於テハ

$$p^2=r^2-a^2$$

ナルコトヲ證明セヨ。

83. 次ノ曲線ヲ追跡セヨ:

(1) $y^2(x-4a)=ax(x-3a)$,

(2) $xy^2-x^2y=a^2(x+y)+b^3$,

(3) $(x+a)y^2=(y+b)x^2$,

(4) $y^4-x^4+2ax^2y=b^2x^2$,

(5) $2y^5-5a^2xy^2+x^5=0$,

(6) $a^3y^2=b^2x^3-x^5$,

(7) $x^5+a^3xy-y^5=0$,

(8) $r=\frac{a}{\sqrt{\theta}}$,

(9) $r=a\frac{\sin\theta}{\theta}$.

84. 次ノ曲線ノ存在區域ヲ吟味シ, 依ツテ之ヲ追跡セヨ:

$$(x^2+y^2-ax-by)(bx-ay)+c^2(x-a)(x-b)=0.$$

85. 內擺線 $x=(a-b)\cos\theta+b\cos\frac{a-b}{b}\theta$, $y=(a-b)\sin\theta-b\sin\frac{a-b}{b}\theta$ ニ於テ $b>a$ トスレバ, 此ハ半徑 a ナル定圓ノ外側ヲ半徑 $b-a$ ナル圓ガ轉走スルトキ生ズル外擺線ニ他ナラザルコトヲ示セ。

86. 半徑 a ナル定圓ノ外側ヲ半徑 b ナル圓ガ轉走シ其周上ノ一點 P ガ外擺線ヲ畫クトキ, 一ツノ位置ニ於テ兩圓ノ切點ヲ A トスレバ P ニ於ケル外擺線ノ曲度半徑ハ $\frac{2(a+b)}{a+2b}\overline{\mathrm{AP}}$ ナルコトヲ證明セヨ。

87. 擺線ノ一ツノ尖點ヨリ次ノ尖點マデノ間ノ長サ(曲線ニ沿ヒテノ長サ)ヲ求メヨ。(第八章ノ問題 19 ヲ利用セヨ。)

88. 內擺線ニ於テ定圓ノ半徑ヲ a, 轉走圓ノ半徑ヲ b トスルトキハ, 次ノ各場合ニ於テ其內擺線ハ如何ナル線トナルカ(其名ヲ擧ゲヨ)。

(1) $a=2b$, (2) $a=4b$.

89. 一定圓ノ外側(又ハ內側)ヲ他ノ一定圓ガ轉走スルトキ, 其轉走圓ノ周上ニアラザル一點(轉走圓ニ對シテ固定セル)ノ軌跡ヲ **外餘擺線** (又ハ**內餘擺線**)トイフ。其方程式ヲ作レ。

90. 內餘擺線ニ於テ, 轉走圓ノ半徑ガ定圓ノ半徑ノ半分ナルトキハ其曲線ハ楕圓トナルコトヲ示セ。

91. 輪轉曲線

$$x=a_1\cos n_1t+a_2\cos n_2t,\qquad y=a_1\sin n_1t+a_2\sin n_2t$$

ノ原點ニ最遠キ點及ビ最近キ點ニ於ケル曲度半徑ハ夫夫

$$\left|\frac{(n_1a_1\pm n_2a_2)^2}{n_1{}^2a_1\pm n_2{}^2a_2}\right|$$

ナルコトヲ證明セヨ。

92. 前問ノ輪轉曲線ガ常ニ原點ニ對シテ凹ナルタメノ條件ヲ求メヨ。

附言. 月ノ軌道ハ太陽ニ對シテ常ニ凹ナリ。

93. 圓ノ一ツノ直徑ヲ AB トシ, 圓周上ノ任意ノ一點ヲ P トス。AP ノ延長ガ B ニ於ケル切線ト交ル點ヲ Q トシ AQ 上ニ AP = RQ ナル如キ點 R ヲトルトキハ R ノ軌跡ハ第八章 25 (3) ノ問題ノ曲線ナルコトヲ示セ。

94. 前問ニ於テ P ヨリ AB ニ下シタル垂線ト, Q ニ於テ QB ニ引キタル垂線

トノ交點ヲ S トスルトキハ, S ノ軌跡ハ第八章ノ問題 25 (4) ノ曲線ナルコトヲ示セ。

95. 一定點 A ヲ過ル任意ノ直線ガ一定直線ト交ル點ヲ P トシ, 直線 AP 上ニ定長ニ等シキ線分 PQ ヲ作ルトキ, Q ノ軌跡ハ第八章ノ問題 25 (21) ノ曲線ナルコトヲ示セ。

96. 圓周上ノ一定點 A ヨリ弦 AB ヲ引キ, 之ヲ延長シテ其上ニ定長 BC ヲトルトキ C ノ軌跡ハ蝸牛形ナルコトヲ示セ。

***97.** 前問ノ性質ヲ利用シテ, 二定圓ニ一ツヅツ切シ且相互ニ定角ヲナス二直線ノ交點ノ軌跡ハ蝸牛形ナルコトヲ證明セヨ。

98. 心臟形ノ尖點ヲ過ル直線ノ形內ニアル部分ノ長サハ一定ナルコトヲ示セ, 又一般ノ蝸牛形ニ於テハ如何。

99. 二定點 S, S′ ヨリ一點 P マデノ距離ヲ r, r' トスルトキ, $rr' = k^2$ (k ハ常數)ナル方程式ヲ滿足セシムル點 P ノ軌跡ヲ **双眼形** ト稱ス。直角座標及ビ極座標ニ於ケル其方程式ヲ求メ, 其曲線ヲ追跡セヨ。又 $2k = \mathrm{SS}'$ ナルトキハ連珠形トナルコトヲ示セ。

100. 双眼形ニ於テ, SS′ ノ中點ヲ O, 又 P ニ於ケル法線ヲ PM トスレバ, $\angle \mathrm{OPS}' = \angle \mathrm{SPM}$ ナルコトヲ證明セヨ。

101. 双眼形ニ於テ, PS, PS′ 上ニ夫夫點 Q, Q′ ヲトリ $\mathrm{PQ} = \mathrm{PS}'$, $\mathrm{PQ}' = \mathrm{PS}$ ナラシメ, QQ′ ノ中點ヲ R トスレバ, 直線 PR ハ P ニ於ケル此曲線ノ法線ナルコトヲ證明セヨ。

102. r, r' ノ意味ヲ第 99 問ノ如シトシ, m, m', n ヲ正ノ常數トスルトキ

$$mr \pm m'r' = n$$

ナル點ノ軌跡ヲ追跡セヨ。マタ S 又ハ S′ ノ何レカ一方ヲ極トシテ極座標ニテ之ヲ表ストキハ

$$r^2 - 2(a + b\cos\theta)r + c^2 = 0$$

ナル形ノ方程式ヲ得ルコトヲ示セ。

103. 直角三角形ノ斜邊ノ上ノ一點ヨリ他ノ二邊ニ垂線ヲ下ストキ, 其足ヲ結ブ直線ノ包絡線ヲ求メヨ。

104. 與ヘラレタル拋物線ノ軸ニ垂直ナル弦ヲ直徑トスル圓ノ包絡線ヲ求メヨ。

105. α, β ハ二ツノ任意常數ニシテ其間ニ $\alpha^n + \beta^n = b^n$ ナル關係アルトキ, 直線 $\alpha^m x + \beta^m y = a^{m+1}$ ノ包絡線ヲ求メヨ。

106. 圓周上ノ一定點 A ヨリ任意ノ弦 AP ヲ引キコレヲ H ニ於テ二等分スルトキ, HP ヲ直徑トスル圓ノ包絡線ヲ求メヨ。

107. 半圓ガ一直線上ヲ滑ルコトナクシテ轉走スルトキ, 其直徑ノ包絡線ハ何カ。

108. 地上ノ一點ヨリ其點ヲ過ル一ツノ鉛直面內ニ於テ一定ノ速サヲ以テ各方向ニ發射セラレタル彈丸ノ彈道ノ包絡線ヲ求メヨ。

109. 直角ノ頂點ガ一定直線上ヲ動キ, 其一邊ガ一定點ヲ過ルトキ, 他ノ一邊ノ包絡線ヲ求メヨ。

110. 一點ニ關スル或曲線ノ垂足曲線ガ圓ナルトキ, モトノ曲線ハ何カ。

111. 或曲線ノ原點ニ關スル垂足曲線ガ $y^2 = 4ax$ ナリトイフ, モトノ曲線ヲ求メヨ。

112. 水面ヲ平面ナリトスレバ, 水中ノ一點ヨリ發スル光ガ空氣中ニ出ヅルトキ其屈折光線ハ悉ク或ル一ツノ曲面ニ切スベシ, 其曲面ヲ **火面** ト稱ス。今發光點ヲ過リ水面ニ垂直ナル平面ニテ火面ヲ截リタルトキ生ズル截リ口 (之ヲ **火線** トイフ) ノ方程式ヲ求メヨ。

113. 一點 O ヲ過リ一定曲線 C 上ニ中心ヲ有スル圓ノ包絡線ヲ C′ トスレバ O ヨリ發スル光ガ C ニ當リテ反射スルトキ生ズル火線ハ C′ ノ縮閉線ナルコトヲ證明セヨ。

114. 圓內ノ一點ヨリ發スル光ガ圓周ニ當リテ反射スルトキ生ズル火線ハ蝸牛形ノ縮閉線ナルコトヲ證明セヨ。特ニ發光點ガ圓周上ニアルトキハ如何。

115. α ヲ母數トスルトキ, 曲線群

$$\alpha^2 \mathrm{F}_1(x, y) + 2\alpha \mathrm{F}_2(x, y) + \mathrm{F}_3(x, y) = 0$$

ノ包絡線ハ

$$\mathrm{F}_2{}^2(x, y) - \mathrm{F}_1(x, y)\mathrm{F}_3(x, y) = 0$$

ナルコトヲ示セ。

116. 曲線ノ方程式ガ $f(x, y, a, b) = 0$ ニシテ, ココニ, a, b ハ $\phi(a, b) = 0$ ナル關係ヲ滿足セシメツツ變動スル二ツノ母數ナリトスレバ, 其曲線群ノ包絡線ノ方程式ハ次ノ四式ヨリ a, b, λ ヲ消去シテ之ヲ得ラルルコトヲ證明セヨ:

$$f(x, y, a, b) = 0, \qquad \phi(a, b) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial a}, \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial b}.$$

117. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{2x}{1+x^2}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{(1+x^2)^2}=0$ ニ於テ，$x=\tan\theta$ ト置キテ，之ヲ θ ヲ獨立變數トスル微分方程式ニ直セ。

118. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{y}{(e^x+e^{-x})^2}$ ニシテ，$x=\log\dfrac{t}{\sqrt{(1-t^2)}}$ ナルトキ，次ノ式ヲ證明セヨ：

$$(t-t^3)\frac{d^2y}{dt^2}+(1-3t^2)\frac{dy}{dt}=ty.$$

119. $a+\sqrt{a^2-y^2}=ye^u$, $u=\dfrac{x+\sqrt{a^2-y^2}}{a}$ ナルトキ，$\dfrac{dy}{dx}$ 及ビ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ヲ求メヨ。

120. 二組ノ直角座標軸ニ關スル同一點ノ座標ヲ x, y, z 及ビ ξ, η, ζ トスルトキハ，x, y, z ノ任意ノ函數 ϕ ニツイテ

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial \zeta^2}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

121. $u=\phi(x, y)$ ニ於テ，$x=a_1\mathrm{X}+b_1\mathrm{Y}+c_1$, $y=a_2\mathrm{X}+b_2\mathrm{Y}+c_2$ ナル變換ヲ行フトキ，モシ

$$a_1{}^2+b_1{}^2=1, \quad a_2{}^2+b_2{}^2=1, \quad a_1a_2+b_1b_2=0$$

ナラバ，

(i) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial \mathrm{X}}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial \mathrm{Y}}\right)^2,$

(ii) $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial \mathrm{X}^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial \mathrm{Y}^2}\right)u$

ナルコトヲ證明セヨ。

122. 空間曲線上ノ二點 P, Q ニ於ケル切線（一般ニハ相交ラズ）ノナス角ヲ ω トシ，又コノ二點間ノ曲線ノ長サヲ s トスルトキハ，$\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\omega}{s}$ ヲ稱シテ其點（二點 P, Q ガ一致セル位置）ニ於ケル空間曲線ノ **曲度** トイフ。今

$$\lim_{s\to 0}\frac{\omega}{s}=\lim_{\mathrm{PQ}\to 0}\frac{\sin\omega}{\mathrm{PQ}}$$

ナルコトヲ假定スレバ，曲度ヲ表ハス式ノ

$$\frac{\{(y'z''-y''z')^2+(z'x''-z''x')^2+(x'y''-x''y')^2\}^{\frac{1}{2}}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

123. 曲面上ノ一點ニ於ケル法線ヲ z 軸トシ，其點ニ於ケル切線ノ中互ニ垂直ナル二本ヲ任意ニトリテ之ヲ x 軸及ビ y 軸トシ，其曲面ノ方程式ヲ $z=\mathrm{F}(x, y)$ トス。今 z 軸ヲ含ム一ツノ平面ニテ此曲面ヲ截ルトキハ其截リ口ナル曲線ノ原點ニ於ケル曲度ハ

$$\mathrm{F}_{xx}(0, 0)\cos^2\theta+2\mathrm{F}_{xy}(0, 0)\cos\theta\sin\theta+\mathrm{F}_{yy}(0, 0)\sin^2\theta$$

ナルコトヲ證明セヨ，但シ θ ハ今考フル平面ト xz 面トノナス角ナリトス。

124. 前問ニ於ケル曲度ノ式ヲ $f(\theta)$ ト名ヅケ，z 軸ヲ含ム平面ヲ回轉セシムレトキハ曲度 $f(\theta)$ ガ極値ヲトル方向二ツアリ，而シテ其二方向ハ互ニ垂直ナルコトヲ示セ。

125. 前問ニ於ケル二ツノ特別ナル方向ノ平面ヲ夫夫 xz 面及ビ yz 面ニトルコトトスレバ，z 軸ヲ含ム任意ノ平面ニヨリテノ截リ口ノ原點ニ於ケル曲度ハ

$$\mathrm{K}_1\cos^2\phi+\mathrm{K}_2\sin^2\phi$$

ナルコトヲ示セ，但シ K_1, K_2 ハ夫夫 xz 面及ビ yz 面内ニ於ケル截リ口ノ原點ニ於ケル曲度ニシテ，又 ϕ ハ今考フル平面ト xz 面トノナス角ナリ。

126. 曲面上ノ一點 P ニ於ケル法線ヲ含ミ且互ニ垂直ナル任意ノ一双ノ平面ヲ以テ其曲面ヲ截ルトキハ 其二ツノ截リ口ナル曲線ノ P ニ於ケル曲度ノ和ハ一定ナルコトヲ證明セヨ。（之ヲ **Euler ノ定理** トイフ。）

127. 楕圓面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上ノ一點 $(0, 0, c)$ ニ於テ前問ニ云フニイフ所ノ一定ナル値ヲ計算セヨ。

附　　録

附錄　第一

問題ノ答

第一章ノ問題

1. (i) $x\to 0$ ナルトキ 0, $x\to\pm\infty$ ナルトキ $\frac{1}{4}$; (ii) $x\to\pm 0$ ナルトキ $\pm\infty$, $x\to\pm\infty$ ナルトキ $\mp\infty$. **2.** $x\to 0$ ナルトキ $\frac{a_n}{b_m}$; $x\to\pm\infty$ ナルトキニハ, $n>m$ ナラバ $(\pm 1)^{n-m}\frac{a_0}{b_0}$ ト同符號ナル無限大, $n=m$ ナラバ $\frac{a_0}{b_0}$, $n<m$ ナラバ 0. **3.** (i) 1; (ii) $\frac{1}{2}$; (iii) $\frac{1}{3}$. **4.** (i) $\frac{1}{\sqrt{a}}$, (ii) $\frac{1}{2}$. **5.** (i) 1; (ii) 1; (iii) $\frac{a}{b}$. **6.** (i) $\frac{2}{5}$ 位; (ii) 1 位; (iii) 3 位; (iv) 1 位. **9.** uv ハ $(m+n)$ 位ノ無限小; $\frac{u}{v}$ ハ $m>n$ ナルトキハ $(m-n)$ 位ノ無限小; $m<n$ ナルトキハ $(n-m)$ 位ノ無限大. **10.** AC ハ 1 位; BC ハ 2 位. **12.** (i) 第七十五圖ヲ見ヨ, (ii) 第十六圖ヲ見ヨ, (iii) 此級數ハ $x>0$ 又ハ $x<-2$ ナルトキハ $1+x$, $x=0$ ナルトキハ 0 ニ等シク, $-2\leqq x<0$ ナルトキハ和ヲ有セズ。

第二章ノ問題

1. $3x^2+2(a+b)x+ab.$　　**2.** $x^2(18x^3-25x^2+12x-15).$

3. $\frac{4x}{(x^2+1)^2}.$　　**4.** $\frac{bc-ca-ab+2ax-x^2}{(x-b)^2(x-c)^2}.$

5. $\frac{x^{m-1}}{(1-x)^{n+1}}\{m(1-x)+nx\}.$　　**6.** $\frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}.$　　**7.** $\frac{a+b+2x}{2\sqrt{(a+x)(b+x)}}.$

8. $-\frac{a^3}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}.$　　**9.** $\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}\,(x+\sqrt{x^2+a^2})^2}.$

10. $\frac{ac-b^2}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)^3}}.$　　**11.** $-\frac{1}{4x\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$

12. $-\frac{2a^2}{x^3}\left(1+\frac{a^2}{\sqrt{a^4-x^4}}\right).$　**13.** $x^{m-2}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}\left\{(m-1)a+\left(m+n\frac{p}{q}-1\right)bx^n\right\}.$

14. $\frac{\log a}{x^2}a^{-\frac{1}{x}}$　　**15.** $(m-2x^2)x^{m-1}e^{-x^2}$

16. $e^{\sin x}\cos x.$　　**17.** $\frac{1-\log x}{x^2}\sqrt[x]{x}$

18. $\left\{\log(ax^2+2bx+c)+\frac{2x(ax+b)}{ax^2+2bx+c}\right\}(ax^2+2bx+c)^x.$

19. $e^{x^x}x^x(1+\log x).$　　**20.** $\frac{1}{x(1+x)}.$　　**21.** $\frac{1}{(1-x)\sqrt{x}},$

22. $\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}.$　　**23.** $(\log ax)^2.$　　**24.** $2\sin 4x.$

25. $\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}.$　　**26.** $\sec^4 x.$　　**27.** $e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx).$

28. $(\tan x)^{\sin x}(\cos x\log\tan x+\sec x.$　　**29.** $\frac{a^2\cos x}{\sqrt{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^3}}.$

30. $\frac{n\sin x(\cos x)^{n-1}}{1-(\cos x)^{2n}}.$　　**31.** $-\frac{1}{1+x^2}.$　　**32.** $\mp 1.$

33. $\pm\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}.$　　**34.** $\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}.$

35. $\pm\frac{1}{1+x^2}.$　　**36.** $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}\frac{1}{a+b\cos x}.$

第三章ノ問題

4. (1) $x=-2$ ナルトキ極大ニシテ其値 54, $x=3$ ナルトキ極小ニシテ其値 -71; (2) $x=\frac{3}{4}a$ ナルトキ極大ニシテ其値 $\frac{2\sqrt{3}}{16}a^2$; (3) $a>0$. $b>0$ トスレバ $x=\sqrt{ab}$ ナルトキ極大ニシテ其値 $\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$, $x=-\sqrt{ab}$ ナルトキ極小ニシテ其値 $\frac{1}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}$; (4) $x=1$ ナルトキ極大ニシテ其値 2, $x=-1$ ナルトキ極小ニシテ其値 -2; (5) $x=1$ ナルトキ極大ニシテ其値 $\frac{1}{e}$; (6) $x=\frac{1}{e}$ ナルトキ極小ニシテ其値 $-\frac{1}{e}$; (7) $x=\frac{3\pi}{4}+2n\pi$ ナルトキ極大ニシテ其値 $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}+2n\pi}$, $x=\frac{3\pi}{4}+(2n+1)\pi$ ナルトキ極小ニシテ其値 $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}+(2n+1)\pi}$. (8) $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ トスルトキ, $x=(4n+1)\frac{\pi}{2}-\alpha$ ナルトキ極大ニシテ其値 $\sqrt{a^2+b^2}$, $x=(4n-1)\frac{\pi}{2}-\alpha$ ナルトキ極小ニシテ其値 $-\sqrt{a^2+b^2}$.
5. 正方形。 **6.** 正方形。 **7.** 正方形。 **8.** A, B ノ中點ヨリ定直線ニ下セル

垂線ノ足ヲ C トスベシ。 **9.** 線分 AB ガ P ニ於テ二等分セラルル様ニ引クベシ。 **10.** g ト 45° ノ角ヲナス方向ヲトルベシ。 **11.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$ 米. **12.** 離心角ガ 45° ナル點ヲ切點トスベシ。 **13.** 三角形ヲ ABC トシ 其面積ヲ二等分スル線分ヲ DE トス；今 D ガ邊 AB 上ニ，E ガ邊 AC 上ニアリトシ，$AB=c$, $AC=b$, $AD=x$ トスレバ，$x=\sqrt{\frac{bc}{2}}$ ナルトキ DE ハ極小ナリ；然レドモ此時 b, c ノ中ノ大ナル方ガ小ナル方ノ 2 倍ヨリモ大ナルトキハ D 又ハ E ガ邊 AB 又ハ AC ノ延長上ニ出ヅルヲ以テ線分 DE ハ本題ノ要求ニ合セズ(此場合ニハ D 又ハ E ヲ一ツノ頂點ト合セシムベシ，第 22 節例 5 ヲ參照セヨ)，カクシテ D, E ヲ種種ノ邊上ニアリト考ヘタル中ニテ最小ナル DE ヲトリテ本題ノ答トス。 **14.** 定邊ヲ底トスル二等邊三角形。 **15.** 角材ノ切口ナル矩形ノ一邊ヲ圓柱ノ半徑ノ $\sqrt{3}$ 倍トスベシ。 **17.** 圓錐ノ高サヲ球ノ半徑ノ $\frac{4}{3}$ トスベシ。 **18.** 圓錐ノ底ノ半徑ヲ a, 高サヲ b トスルトキ，$2a<b$ ナラバ求ムル圓柱ノ半徑ハ $\frac{ab}{2(b-a)}$ ナリ；其他ノ場合ニハ圓柱ノ半徑ガ a ニ近キ程其全表面積ガ大トナル。

19. 圓筒ノ半徑ト高サトヲ相等シクスベシ。 **20.** $\frac{1}{\log 2}-1$.

21. $\theta=\frac{1}{b-a}\left\{\sqrt[n-1]{\frac{b^n-a^n}{n(b-a)}}-a\right\}$, 特ニ $n=2$ ナラバ $\theta=\frac{1}{2}$.

23. $\log_{10}(a+h)=\log_{10}a+\frac{h}{a}\log_{10}e$. **24.** $\frac{ab\sin C}{c}h$. **25.** $\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{8S}h$, 但シ S ハ三角形ノ面積ナリ。 **26.** (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$; (3) $\log a$; (4) 1; (5) $\frac{1}{2}$; (6) $\frac{1}{3}$; (7) $\frac{1}{e}$; (8) 1; (9) -1; (10) 0. **27.** $\frac{va}{\overline{PA}^2}$, **28.** $\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}$ ヲ求メヨ；0° ニテ $-\frac{1}{18002}$, 20° ニテ $\frac{1}{4508}$, **29.** 毎秒 40π 平方糎。 **31.** $\frac{ab\omega}{a^2\sin^2\phi+b^2\cos^2\phi}$, 但シ ϕ ハQノ離心角ナリ。 **32.** 毎秒 $\frac{m}{\pi h^2\tan^2\alpha}$ 糎。

第四章ノ問題

1. (1) $6\sec^4x-4\sec^2x$; (2) $\frac{4a^3}{(x^2+a^2)^2}$; (3) $\frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$.

2. $4(4x^4-12x^2+3)e^{-x^2}$. **5.** (1) $(-1)^n\frac{n!(a-b)}{(x+b)^{n+1}}$;

(2) $\frac{(-1)^n n!}{a-b}\left\{\frac{a}{(x+a)^{n+1}}-\frac{b}{(x+b)^{n+1}}\right\}$; (3) $\frac{(-1)^n n!}{2}\left\{\frac{a+b}{(x-c)^{n+1}}+\frac{a-b}{(x+c)^{n+1}}\right\}$.

(4) $n!\left\{(1-x)^n-\frac{n^2}{1^2}(1+x)(1-x)^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{1^2.2^2}(1+x)^2(1-x)^{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^n(1+x)^n\right\}$; (5) $2^{n-2}\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+2^{2n-3}\sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$;

(6) $y=x^4\log\frac{x}{a}$ トスレバ，$y'=\left(4\log\frac{x}{a}+1\right)x^3$, $y''=\left(12\log\frac{x}{a}+7\right)x^2$,

$y'''=\left(24\log\frac{x}{a}+26\right)x$, $y''''=\left(24\log\frac{x}{a}+50\right)$, $n\geqq 5$ ナルトキハ

$y^{(n)}=(-1)^{n-5}\frac{(n-5)!24}{x^{n-4}}$. **6.** (1) $f^{(2m)}(0)=0$, $f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!$;

(2) $f^{(2m)}(0)=2^{2m-1}\{(m-1)!\}^2$, $f^{(2m+1)}(0)=0$; (3) $f^{(2m)}(0)=0$, $f^{(2m+1)}(0)=k(1^2-k^2)(3^2-k^2)\cdots\cdots\{(2m-1)^2-k^2\}$.

7. $f'(0)=-\frac{1}{2}$, $f''(0)=\frac{1}{6}$, $f'''(0)=0$, $f''''(0)=-\frac{1}{30}$, $f^{\mathrm{V}}(0)=0$.

8. $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'}{\phi'}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''\phi'-\psi'\phi''}{\phi'^3}$, $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{(\psi'''\phi'-\psi'\phi''')\phi'-3(\psi''\phi'-\psi'\phi'')\phi''}{\phi'^5}$.

11. $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0$. **12.** $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0$.

16. (1) $x=\frac{1}{2}$ ナルトキ極大ニシテ其値 $\frac{7}{4}$, $x=2$ ナルトキ極小ニシテ其値 -5; (2) $x=(-1+\sqrt{2})a$ ナルトキ極小ニシテ其値 $\frac{1+\sqrt{2}}{2a}$, $x=(-1-\sqrt{2})a$ ナルトキ極小ニシテ其値 $\frac{1-\sqrt{2}}{2a}$; (3) $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}a$ ナルトキ極小ニシテ其値 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2a}$; (4) $x=\frac{\pi}{4}+2n\pi$ ナルトキ極小ニシテ其値 $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+2n\pi}$, $x=\frac{\pi}{4}+(2n+1)\pi$ ナルトキ極大ニシテ其値 $-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+(2n+1)\pi}$. **17.** 圓柱ノ母線ガ球ノ中心ニ於テ張ル角ヲ θ トスレバ $\sec\theta=\sqrt{5}$. **18.** 扇形ノ中心角ヲ $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi$ ナラシムベシ。 **19.** $\frac{3}{2}v$.

第五章ノ問題

3. (1) 發散； (2) 收斂； (3) 收斂； (4) 收斂； (5) 收斂； (6) 收斂； (7) 收斂； (8) 發散； (9) 發散. **4.** (1) $-1<x<1$; (2) $-1<x<1$; (3) $-1<x<1$; (4) $-1\leqq x<1$; (5) x ノスベテノ値。 **6.** $|x|>1$ ナラ

バ收斂, $|x| \leqq 1$ ナラバ發散。

第六章ノ問題

1. (1) $1-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\cdots$;

(2) $\frac{1}{4}\left\{\frac{3^3-3}{3!}x^3-\frac{3^5-3}{5!}x^5+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{3^{2n+1}-3}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots\cdots\right\}$;

(3) $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\cdots$;

(4) $x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1.3\cdots\cdots(2n-1)}{2.4\cdots\cdots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\cdots$.

(5) $1+\frac{\cos a}{1!}x+\frac{\cos 2a}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{\cos na}{n!}x^n+\cdots\cdots$.

2. (1) $1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}$;　(2) $1-\frac{n}{2}x^2+\frac{n(3n-2)}{24}x^4$;

(3) $1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}$;　(4) $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{7x^4}{24}$;

(5) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$;　(6) $-x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$.

5. $0.00010148\cdots\cdots$; $3.01708\cdots\cdots$

7. $A_{2n+1}=(-1)^n\frac{m(m^2-1^2)\cdots\cdots\{m^2-(2n-1)^2\}}{(2n+1)!}$, $A_{2n}=0$.

13. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{1}{3}$; (3) -1; (4) $-\frac{e}{2}$.　**14.** 共軛直徑ガ長軸及ビ短軸ト合スルトキ最小, 等長トナルトキ最大。　**15.** **16.** 16 ノ後ノ附言ヲ見ヨ。 **17.** 兩球ノ半徑ヲ夫夫 a, b トスレバ, 求ムル點ハ中心間ヲ $\sqrt{a^3}:\sqrt{b^3}$ ＝內分スル點ナリ; 但シ其內分點ガ何レカ一方ノ球ノ內部＝入ル場合＝ハ之ヲトラズシテ中心線ト其球面トノ交點ヲトルベシ。　**18.** 弧ガ半徑ノ二倍ナルトキ。　**19.** (1) $x=\frac{1}{e}$ ＝テ極小; (2) $x=2n\pi$ ＝テ極大, $x=(2n+1)\pi$ ＝テ $a<4b$ ナラバ極大, $a\geqq 4b$ ナラバ極小, 又 $a\leqq 4b$ ナルトキハ $\cos x=-\frac{a}{4b}$ ＝テ極小。

第七章ノ問題

1. (1) $\frac{y^2-a^2}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3}}$, $-\frac{xy}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3}}$ $\frac{x^2-a^2}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3}}$;

(2) $\frac{x}{\sqrt{(y^2-x^2)^3}}$, $-\frac{y}{\sqrt{(y^2-x^2)^3}}$, $\frac{x(2y^2-x^2)}{y^2\sqrt{(y^2-x^2)^3}}$.

2. $\frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}$.　**6.** $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+u=0$.

8. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.　**11.** (1) $x=y=a$ ナルトキ極小＝シテ其値 $-a^3$; (2) $x=y=1$ ナルトキ極小＝シテ其値 9; (3) $ab-h^2>0$ ナルトキ＝限リ極値アリ; $x=\frac{fh-bg}{ab-h^2}$, $y=\frac{gh-af}{ab-h^2}$ ナルトキ, $a>0$ ナラバ極小, $a<0$ ナラバ極大＝シテ, 何レ＝シテモ其値 $\frac{\Delta}{ab-h^2}$, 但シ Δ ハ判別式; (4) $a\neq b$ トスレバ, $x=y=0$ ナルトキ極小＝シテ其値 0, 又 $x=0$, $y=\pm 1$ ナルトキ $b>a$ ナラバ極大＝シテ其値 $\frac{b}{e}$; $x=\pm 1$, $y=0$ ナルトキモ之＝準ズ; モシ $a=b$ ナラバ $x=y=0$ ナルトキ極小＝シテ其値 0 ナリ。　**12.** 四邊形ガ圓＝內接スルトキ。　**13.** 正三角形。　**14.** 正三角形。　**15.** 立方體。　**16.** $\pm\frac{abc}{3\sqrt{3}}$.　**17.** 重心。　**18.** lp, mp, np.　**19.** $y'=-\frac{ax+hy+g}{hx+by+f}$, $y''=\frac{abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2}{(hx+by+f)^3}$.　**20.** $y_x=\frac{lz-nx}{ny-mz}$, $z_x=\frac{mx-ly}{ny-mz}$.　**21.** $y_x=\frac{a-x}{y}$, $z_x=-\frac{a}{z}$, $y_{xx}=-\frac{a^2}{y^3}$, $z_{xx}=-\frac{a^2}{z^3}$.　**22.** (1) $x=\sqrt[5]{\frac{9}{8}}$ ナルトキ極大＝シテ其値 $\sqrt[5]{\frac{4}{27}}$; (2) $a>0$ トスレバ, $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{a}{2}$ ナルトキ夫夫極大又ハ極小＝シテ其値 $\pm\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

第八章ノ問題

2. $x=(a-b)\cos\theta+b\cos\frac{a-b}{b}\theta$, $y=(a-b)\sin\theta-b\sin\frac{a-b}{b}\theta$.　**5.** $\left(\frac{a}{2}, a\right)$ ナル點＝於テ極大トナリ其値 $\frac{a}{2}$.　**7.** (1) $(x^2+y^2)^2=a^2x^2\pm b^2y^2$; (2) $x(x^2+y^2)=ay^2$.　**9.** 點ガ圓周上＝アルトキハ直線, 其他ノ場合＝ハ圓。

14. $\frac{na}{2}$.　**15.** (1) $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$; (2) $(x+y)^{\frac{2}{3}}-(x-y)^{\frac{2}{3}}=(4k)^{\frac{2}{3}}$; (3) $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$; (4) $x=a\log\frac{y\pm\sqrt{y^2-4a^2}}{2a}\mp\frac{y\sqrt{y^2-4a^2}}{4a}$.

20. $c=0$, $g=0$, $a+fp=0$, $3hp+fg=0$, $4hq+3bp^2+fr=0$.　**22.** 共通ナル點ヲ有スル二直線トナルトキ。　**24.** 原曲線ヲ極ノ回リ＝回轉シタルモノナリ。 **28.** (1) 定點ト定圓ノ中心トヲ焦點トスル楕圓又ハ双曲線; (2) 定頂角ノ邊ヲ漸近線トスル双曲線; (3) 同心且同方向ノ主軸ヲ有スル楕圓; (4) 其定點ヲ焦點ト

スル楕圓又ハ双曲線； (5) 前ノ場合ノヲ 90° 回轉セルモノ； (6) 連珠形； (7) 兩主軸ノ直線ヲ漸近線トスル二ツノ双曲線； (8) 心臟形； (9) n ノ代リ＝ $\frac{n}{n+1}$ ヲ入レタルモノ； (10) 球ノ中心ヲ原點, 之ヲ過ル光線ヲ x 軸トスル直角座標ヲ用キレバ $x^2+y^2=\frac{r^2}{4}\left\{1+3\left(\frac{y}{r}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}$, 但シ r ハ球ノ半徑ナリ。

第九章ノ問題

1. $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{x'(x'y'''-y'x''')-3x''(x'y''-x''y')}{x'^5}$. **2.** $y'''=\frac{3x''^2-x'x'''}{x'^5}$.

3. $(F_{xxx}+3F_{xxy}y'+3F_{xyy}y'^2+F_{yyy}y'^3)+3(F_{xy}+F_{yy}y')y''+F_y y'''=0$ ヨリ求ムベシ。 **4.** $f''(r)+\frac{f'(r)}{r}$. **6.** 次ノ聯立方程式ヨリ求ムベシ：

$$\begin{cases} F_{xx}+2F_{xz}z_x+F_{zz}z_x{}^2+F_z z_{xx}=0, \\ F_{xy}+F_{xz}z_y+F_{yz}z_x+F_{zz}z_x z_y+F_z z_{xy}=0, \\ F_{yy}+2F_{yz}z_y+F_{zz}z_y{}^2+F_z z_{yy}=0. \end{cases}$$

8. $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{\phi'(t)}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\phi'(t)}-\frac{dy}{dt}\frac{\phi''(t)}{\phi'(t)^2}\right\}\frac{1}{\phi'(t)}$.

第十章ノ問題

1. (1) 切線 $\frac{X-x}{x}=\frac{Y-y}{3y}=\frac{Z-z}{-z}$, 法平面 $x(X-x)+3y(Y-y)-z(Z-z)=0$; (2) 切線 $x(X-x)=-y(Y-y)=z(Z-z)$, 法平面 $\frac{X}{x}-\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}=1$; (3) 切線 $\frac{X-x}{x(a-z)}=\frac{Y-y}{y(2a-z)}=\frac{Z-z}{xy}$, 法平面 $x(a-z)(X-x)+y(2a-z)(Y-y)+xy(Z-z)=0$; (4) 切線 $\frac{X-x}{2yz}=\frac{Y-z}{z(a-2x)}=\frac{Z-z}{-ay}$, 法平面 $2yzX+z(a-2x)Y-ayZ=0$.

2. (1) 法線 $\frac{a(X-x)}{x}=\frac{b(Y-y)}{y}=\frac{Z-z}{-1}$, 切平面 $\frac{xX}{a}+\frac{yY}{b}=Z+z$;

(2) 法線 $\frac{X-x}{y}=\frac{Y-y}{x}=\frac{Z-z}{-c}$, 切平面 $yX+xY=c(Z+z)$;

(3) 法線 $\frac{X-x}{ky}=\frac{Y-y}{-kx}=\frac{Z-z}{x^2+y^2}$, 切平面 $kyX-kxY+(x^2+y^2)(Z-z)=0$:

(4) $x^2+y^2+z^2=r^2$ トスレバ, 法線 $\frac{X-x}{x(2r^2-a^2)}=\frac{Y-y}{y(2r^2-b^2)}=\frac{Z-z}{z(2r^2-c^2)}$,

切平面 $x(2r^2-a^2)X+y(2r^2-b^2)Y+z(2r^2-c^2)Z=r^4$.

4. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$. **10.** $a>0, b>0$ ナラバ上＝凹; $a<0, b<0$ ナラバ上＝凸; $ab<0$ ナラバ凹＝モ凸＝モアラズ。

雜 題

1. 直徑ノ 2 倍又ハ 0. **2.** 半徑ヲ 1, 弧ヲ x トスレバ, 弓形ノ面積ハ $\frac{1}{2}(x-\sin x)$ ナリ。之ガ x ＝對シテ第三位ナルコトヲイフ＝必ズシモ $\sin x$ ノ展開式ヲ要セズ, 卽チ

$$x-\sin x>2\sin\frac{x}{2}-\sin x=2\sin\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right),$$

$$x-\sin x<\tan x-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)$$

ナルコト＝注目スベシ。(第 23 頁ノ注意參照)

6. (1) $\frac{1}{(x+k)^2}\{2x^3+(a+b+c+3k)x^2+2(a+b+c)kx+(bc+ca+ab)k-abc\}$,

(2) $x^{x^x}x^x\left\{(1+\log x)\log x+\frac{1}{x}\right\}$, (3) $\frac{e^x(\cos x-\sin x-e^x)}{(1+e^x\sin x)^2}$,

(4) $\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. **7.** $\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$.

12. 逆正切ノ主値ヲトレバ微係數ハ $\pm\frac{\pi}{2}$; 主值＝ $n\pi$ ヲ加ヘタル値ヲトレバ $n\pi\pm\frac{\pi}{2}$. **24.** 收斂 (第三章ノ問題 3 參照)

33. $a_1a_2\cdots\cdots a_n$. **34.** 第三位。

35. 平均値ノ定理又ハ Taylor ノ定理ノ證明法＝ナラヘ, 但シ Rolle ノ定理ヲ二回使用スベシ. **38.** 0.

39. 第三式ノ證明ハ, 例ヘバ $n=2$ トスレバ ($n>2$ ノ場合モ之＝倣フ),

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\phi(y)\frac{\partial u}{\partial z}\right\}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\phi(y)\frac{du}{dy}\frac{\partial y}{\partial z}\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial z}\left\{\phi(y)\frac{du}{dy}\frac{\partial y}{\partial x}\right\}=\frac{\partial}{\partial z}\left\{\phi(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=\frac{\partial}{\partial z}\left\{\phi(y)^2\frac{\partial u}{\partial z}\right\}.$$

41. 最大値ハ $\frac{1}{27}\left\{2(a^2-ab+b^2)^{\frac{3}{2}}-(a+b)(2a-b)(a-2b)\right\}$;

最小値ハ, $a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}\leqq 3$ ナラバ

$$-\frac{1}{27}\left\{2(a^2-ab+b^2)^{\frac{3}{2}}+(a+b)(2a-b)(a-2b)\right\},$$

ソノ他ノ場合ニハ $(1-a)(1-b)$.

42. $a^2 \leqq 3b$. **43.** $a=1$.

44. $x=y=\frac{3}{2}$ ナルトキ極大ニシテ其値 $\frac{9}{2}$, $x=y=0$ ナルトキ極小ニシテ其値 0. **45.** 村ヨリ 1 粁ノ地點。 **46.** $2a$.

47. 高サヲ定球ノ直徑ノ 2 倍トスベシ。 **48.** 高サヲ底ノ直徑ノ $\sqrt{2}$ 倍トスベシ。 **49.** 直線 AB ト定直線トノ交點ヲ O トシ, $OA=a$, $OB=b$, $OP=x$ トスレバ, $x=\sqrt{ab}$. **50.** $PA=QB$. **52.** 半圓。 **53.** 長軸ヲ $2a$, 短軸ヲ $2b$, 離心率ヲ e トスレバ, $2e^2>1$ ナルトキハ極大値 ab, $2e^2 \leqq 1$ ナルトキハ極大値 $2b^2e$. **54.** 三角形ヲ二等邊トシ, 底邊ヲ斜邊ノ $\frac{2}{3}$ ナラシメ, 底邊ヲ回轉ノ軸トスベシ。

55. $x=1$, $y=\sqrt{2}$ ナルトキ極小ニシテ $z=2\sqrt{2}$;

$x=1$, $y=-\sqrt{2}$ ナルトキ極大ニシテ $z=-2\sqrt{2}$.

56. $\frac{x}{20}=\frac{y}{21}=\frac{z}{6}=\frac{a}{47}$. (極大) **57.** $x=y=0$ ナルトキ極大ニシテ其値 1.

58. 楕圓ノ面積ノ $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ 倍。 **59.** 各邊ニ對シ $120°$ ノ角ヲ張ル點。

60. 重心。 **66.** 追跡線。 **68.** 通徑ヲ $4a$ トスレバ, 極小値ハ $6\sqrt{3}a$.

70. $\left|\frac{2}{a}\right|$. **72.** 切點ニ於ケル曲度半徑ノ $\frac{1}{4}$ ヲ半徑トスル圓。 **87.** 轉走圓ノ半徑ノ 8 倍。 **88.** (1) 有限直線, (2) 星芒形。

89. 轉走圓ノ中心ヨリ定點マデノ距離ヲ c トスレバ,

外餘擺線 $x=(a+b)\cos\theta-c\cos\frac{a+b}{b}\theta$, $\quad y=(a+b)\sin\theta-c\sin\frac{a+b}{b}\theta$,

內餘擺線 $x=(a-b)\cos\theta+c\cos\frac{a-b}{b}\theta$, $\quad y=(a-b)\sin\theta-c\sin\frac{a-b}{b}\theta$.

92. $a_1n_1^2>a_2n_2^2$. **97.** 其二直線ノ交點ヲ P トシ, 又各圓ノ中心ヲ過リテ夫夫二直線ニ平行ナル直線ヲ引キ其交點ヲ Q トス。Q ノ軌跡ハ圓ナリ, 此圓ヲ前問ノ圓トシ, 直線 PQ ト此圓トノ交點ヲ前問ノ A トシテ考ヘヨ。 **98.** 一般ノ蝸牛形ニ於テハ內外兩輪線ノ間ニアル直線ノ部分ノ長サガ一定ナリ。

99. S, S′ ヲ $(a, 0)$, $(-a, 0)$ トスレバ,

$$(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2=k^4,$$

$$r^4-2a^2r^2\cos 2\theta+a^4-k^4=0.$$

103. 直角ノ二邊ヲ a, b トシ, 之ヲ夫夫 x 軸及ビ y 軸トスレバ, 包絡線ハ $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$. **104.** 拋物線。

105. $x^{\frac{n}{n-m}}+y^{\frac{n}{n-m}}=\left(\frac{a^{m+1}}{b^m}\right)^{\frac{n}{n-m}}$. **106.** A ヲ原點トシ, 與ヘラレタル圓ヲ $x^2+y^2=2ax$ トスレバ, 包絡線ハ $a^2(x^2+y^2)=(2x^2+2y^2-3ax)^2$.

107. 擺線。 **108.** 拋物線。 **109.** 拋物線。 **110.** 點ガ圓內ニアレバ楕圓, 圓外ニアレバ双曲線, 圓周上ニアレバ一點 (最初ノ點ヨリ引ケル直徑ノ他ノ端)。

111. $27ay^2=(x-4a)^3$. **112.** 光ガ水中ヨリ空氣中ニ出ルトキノ屈折率ヲ n $(n<1)$, 發光點ヨリ水面ニ下シタル垂線ノ長サヲ c トシ, 其垂線ヲ x 軸ニトリ, 又截リ口ノ平面ト水面トノ交リヲ y 軸ニトレバ, 火面ノ截リ口ノ方程式ハ $\left(\frac{x}{nc}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\sqrt{1-n^2}y}{nc}\right)^{\frac{2}{3}}=1$. (楕圓ノ縮閉線) **114.** 特別ナル場合ニハ心臟形ノ縮閉線。

117. $\frac{d^2y}{d\theta^2}+y=0$. **119.** $y'=-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$, $\quad y''=\frac{a^2y}{(a^2-y^2)^2}$.

127. $c\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$.

附錄　第二

學用語英譯及ビ獨譯

第　一　章

微分學	Differential calculus	Differentialrechnung
常　數	Constant	Unveränderliche
變　數	Variable	Veränderliche
變　域	Interval	Gebiet
獨立變數	Independent variable	Unabhängige Veränderliche
從屬變數	Dependent variable	Abhängige Veränderliche
函　數	Function	Funktion
一價函數	One-valued function	Eindeutige Funktion
多價函數	Many-valued function	Mehrdeutige Funktion
n 價函數	n-valued function	n-deutige Funktion
逆函數	Inverse function	Umgekehrte Funktion
陽函數	Explicit function	Entwickelte Funktion
陰函數	Implicit function	Unentwickelte Funktion
圖形表示	Graphical representation	Geometrische Darstellung
單　調	Monotone	Monoton
代數函數	Algebraic function	Algebraische Funktion
有理整函數	Rational integral function	Ganze rationale Funktion
有理分數 (函數)	Rational fraction	Rationaler Bruch
有理函數	Rational function	Rationale Funktion
無理函數	Irrational function	Irrationale Funktion
超越函數	Transcendental function	Transcendente Funktion
極限值	Limiting value	Grenzwert
無限大	Infinity	Unendlichgrosses
無限小「限小ノ)	Infinitesimal	Unendlichkleines
位 (無限大又ハ無	Order	Ordnung

連續性	Continuity	Stetigkeit
不連續性	Discontinuity	Unstetigkeit
指數函數	Exponential function	Exponentialfunktion
對數函數	Logarithmic function	Logarithmische Funktion
自然對數	Natural logarithm	Natürlicher Logarithmus

第　二　章

微分法	Differentiation	Differentiation
增　分	Increment	Zunahme
微分商	Differential quotient	Differentialquotient
導函數	Derived function, Derivative	Ableitung
微　分	Differential	Differential
微(分)係數	Differential coefficient	Differentialkoefficient
媒介變數	Parameter	Parameter
對數微分法	Logarithmic differentiation	Logarithmische Differentiation

第　三　章

極大值	Maximum value	Maximalwert
極小值	Minimum value	Minimalwert
極　值	Extreme value	Extremalwert
平均值ノ定理	Theorem of mean-value	Mittelwertsatz
不定形	Indeterminate form	Unbestimmte Form
切　線	Tangent	Tangente
法　線	Normal	Normale

第　四　章

逐次微分法	Successive differentiation	Successive Differentiation
高次導函數	Derivative of higher order	Ableitung höherer Ordnung
第 n 次導函數	n-th derivative	n-te Ableitung
微分方程式	Differential equation	Differentialgleichung

第 五 章

數 列	Sequence	Zahlenfolge
收 斂	Convergence	Konvergenz
發 散	Divergence	Divergenz
和	Sum	Summe
無限級數	Infinite series	Unendliche Reihe
正項級數	Positive series	Reihe mit lauter positiven Gliedern
交項級數	Alternate series	Alternirende Reihe
調和級數	Harmonic series	Harmonische Reihe
絶對收斂級數	Absolutely convergent series	Unbedingt konvergente Reihe
半收斂級數	Semiconvergent series	Bedingt konvergente Reihe
羃級數	Power series	Potenzreihe
收斂域	Interval of convergence	Konvergenzgebiet

第 六 章

展 開	Expansion	Entwicklung
剩 餘	Remainder	Restiglied
二項定理	Binomial theorem	Binomischer Lehrsatz

第 七 章

偏(部分)微分法	Partial Differentiation	Partielle Differentiation
全微分	Total Differential	Totales Differential
同次函數	Homogeneous function	Homogene Funktion

第 八 章

擺 線	Cycloid	Zykloide
餘擺線	Trochoid	Trochoide
切線影	Subtangent	Subtangente
法線影	Subnormal	Subnormale
凹	Concavity	Konkavität

凸	Convexity	Konvexität
上=, 下=	upwards, downwards	nach oben, nach unten
彎曲點	Point of inflexion	Wendepunkt
切觸圓	Osculating circle	Osculationskreis
隣接點	Consecutive points	Vereinigt liegende Punkte
曲度(曲率)	Curvature	Krümmung
曲度(曲率)圓	Circle of curvature	Krümmungskreis
曲度(曲率)中心	Centre of curvature	Krümmungsmittelpunkt
曲度(曲率)半徑	Radius of curvature	Krümmungshalbmesser
懸垂線	Catenary	Kettenlinie
縮閉線	Evolute	Evolute
伸開線	Involute	Evolvente
切 觸	Contact	Berührung
位(切觸ノ)	Order	Ordnung
最大切觸	Osculation	Osculation
超過切觸	Superosculation	Superosculation
漸近線	Asymptote	Asymptote
漸近曲線	Asymptotic curve	Asymptotische Kurve
重複點	Multiple point	Mehrfacher Punkt
通常點	Ordinary point	Gewöhnlicher Punkt
特異點	Singular point	Singulärer Punkt
二重點	Double point	Zweifacher Punkt
結節點	Node	Knotenpunkt
孤立點	Isolated point	Isolierter Punkt
共軛點	Conjugate point	Konjugirter Punkt
尖 點	Cusp	Spitze
自切點	Tac-node	Selbstberührungspunkt
三重點	Triple point	Dreifacher Punkt
n 重點	n-ple point	n-facher Punkt
終止點	End-point	Endpunkte
角 點	Salient point	Ecke
點分枝	Point branch	Punktzweig
正匝線	Spiral of Archimedes	Archimedische Spirale
漸近點	Asymptotic point	Asymptotischer Punkt
曲線追跡	Curve-tracing	Kurvenkonstruktion

蝸牛形	Limaçon	Limaçon
心臓形	Cardioid	Kardioide
曲線群	Family (system) of curves	Kurvenschar
母　數	Parameter	Parameter
包絡線	Envelope	Einhüllende Kurve
外擺線	Epicycloid	Epizykloide
內擺線	Hypocycloid	Hypozykloide
正葉線	Folium of Descartes	Cartesisches Blatt
連珠形	Lemniscate (of Bernoulli)	Lemniskate
星芒形	Astroid	Astroide
追跡線	Tractrix	Traktrix
等角匝線	Equiangular spiral	Logarithmische Spirale
逆匝線	Hyperbolic spiral	Hyperbolische Spirale
輪轉曲線	Epicyclic	Epizyklische Kurve
火　線	Caustic curve	Kautische Kurve

第 十 章

螺　線	Helix	Schraubenlinie
切　線	Tangent	Tangente
法平線	Normal plane	Normalebene
法　線	Normal	Normale
切平面	Tangent plane	Tangentialebene

附錄 第三

索 引

ア 行

カ 行

サ 行

タ 行

ナ　行

ハ　行

マ　行

ヤ　行

ラ 行

ワ 行

著作者 竹内端三
發行者 吉野兵作
印刷者 鹽原三郎

不許複製

著作者ノ印　發行元ノ印

高等微分學
Differential calculus

定價 金貳百圓也

發行元 東京都千代田區四番町八番地ノ一 振替口座東京一〇七番 電話九段(33)二八一一番 合名會社 裳華房

印刷所 東京都千代田區神田神保町一ノ三三 政弘社

自然科學書協會會員

弊社ハ貼紙並ニ捺印ニヨル定價變更ハ致シマセン

牛澤製本

大正十一年三月二十日第一版印刷 大正十一年三月二十五日第一版發行
昭和八年二月十日 增訂改版 第十六版發行
昭和二十一年九月十五日 修正 第三十二版發行
昭和二十二年九月十五日 修正 第三十三版發行
昭和二十三年四月十日 修正 第三十四版發行
昭和二十三年十月十日 修正 第三十五版發行

終