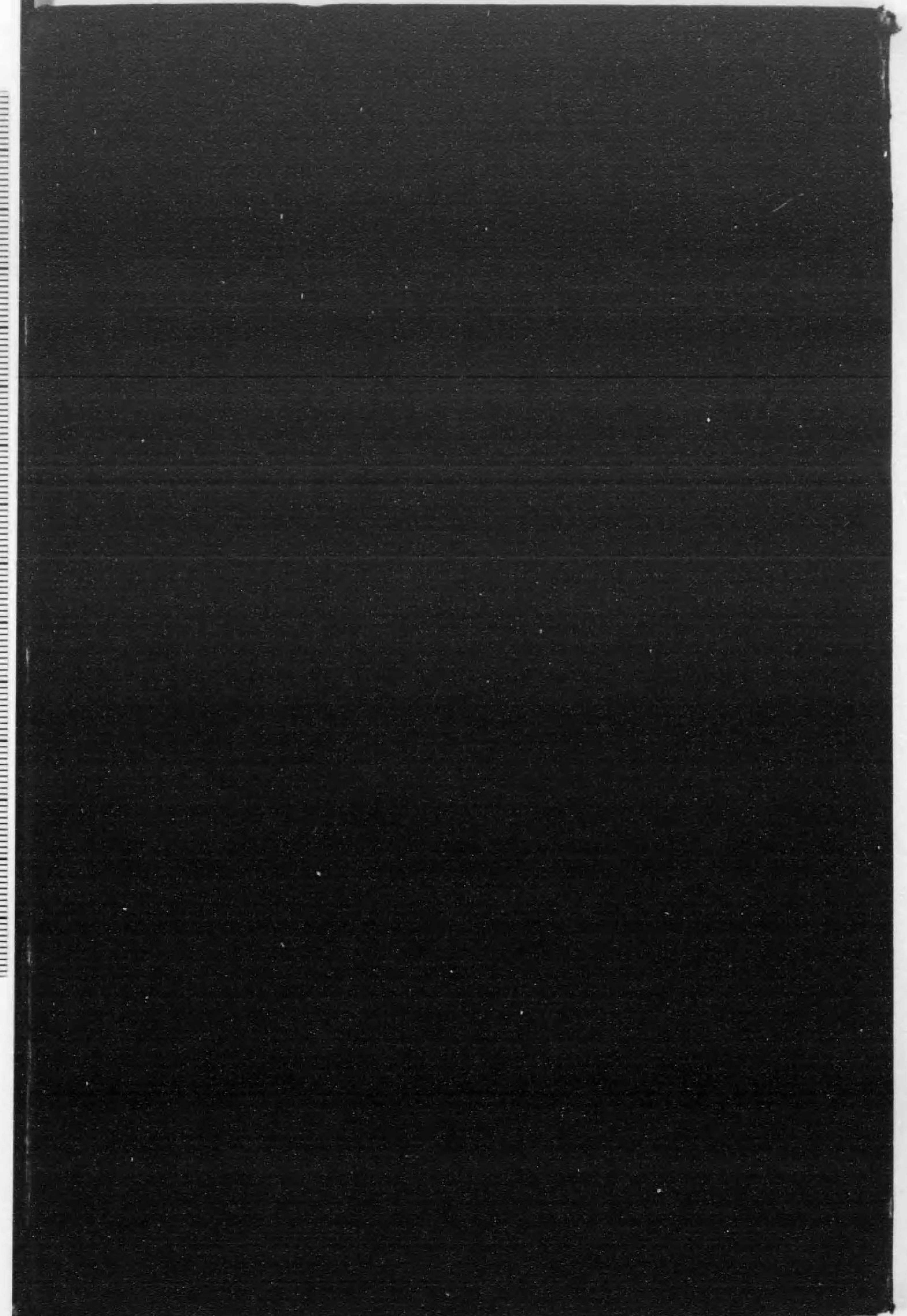
始



米國　オスグート氏原著
樺　正　董譯

微分積分學

全

東　京
有　朋　堂　發　行

緒　言

予ガ明治三十三年ニ於テ獨國 Oskar Schlömilch 氏著 Compendium der Höheren Analysis ヲ譯シタル時ニハ長澤龜之助氏ノ「トッドハンター」ノ英譯アリシノミニシテ,他ニコレアリトスルモ比肩スルニ足ルモノナカリキ.

其後比較的高尚ナル數學書ハ世ニ出デタレドモ微分積分學ノ書ニシテ今日世ノ學生ノ必要ニ適應スルモノ少ナシ,是レ本書 First Course in the Differential and Integral Calculus ヲ譯述セシ所以ナリ. 但シ著者 William F. Osgood ハ米國ニ於ケル有名ナル函數論學者ニシテ佛獨共同ニナル有名ナル數學ノ類從 Encyclopédie des Sciences Mathematiques ノ內ノ一文ヲ草セシ人ナリ.

同氏ノ本書ガ出版後版ヲ重タルコト數回ナリシハ頗ル學界ノ必要ニ迫マラレタルニ依ル,其後ハ新ニ版ヲ改メテ Introduction to the Calculus ヲ公ニセシト雖ドモ予ハ現下日本學生ノ必要ニ應ズルハ寧ロ前者ナリトシ,之ヲ用ヒタリキ.

今日我邦學生ニ好適シ特ニ中等教員ノ受驗用,工科,理科ノ學生及ビ,大學豫科ノ學生等ニ最モ適シタルモノナリ.

本書ヲ公ニスルニ際シ,予ハ大患ヲ受ケ校正ニ困難ヲ感

ズルニ當リ慶應義塾大學教授森吉太郎，加藤幸重郎及ビ幸野省三ノ三氏ノ丁寧ナル忠言校閲ヲ受ケ，校正上遺漏ナキヲ得タルコトハ感謝ノ至リニ堪ヘズ.

大正十四年八月

樺 正 董

微分積分學

目 次

第 一 編

緒 論

第 二 編

代數函數ノ微分法. 一般ノ定理

第三編

應用

第四編

超越函數ノ微分法

第五編

無限少及ビ微分

第六編

積分

第 七 編

曲率. 縮閉線

頁數

第 八 編

擺 線

頁數

第 九 編

定 積 分

頁數

第十編

平均ノ法則. 不定形狀

第十一編

無限級數ノ收斂

第十二編

「テーラー」ノ定理

第十三編

偏微分法

第十四編

立體幾何學ニ於ケル應用

第十五編

多クノ變數ヲ有スル函數ノ「テーラー」ノ定理

第十六編

包圍線

第十七編

一重積分

附錄第一

微分方程式

附錄第二

積分演習及ビ表

微分積分學

第一編

緒論

微積分學ハ第十七世紀ニ於テ數學者,天文學者,物理學者ナル英國ノ「ニュートン」(Isaac Newton) ト哲學者ナル獨逸ノ「ライプニツ」(Leipnitz) トニ依テ發明セラレタ. 此發明ガ幾何學ト物理學トノ上ニ呈シタ反應ハ甚大デ,現在ノ數學ト物理學トノ大半ノ存在ハ此發見ニ負フノデアル.

1. 函數. 學生ハ既ニ製圖シタ「グラフ」デ函數ノ觀念ヲ得タ,而シテ代數學ヤ解析幾何學ニ用ヒタ. 例ヘバ

$$y = 2x+3$$

デアルトキハ「グラフ」ハ直線デアリ,又

$$y^2=2mx,\quad y=\pm\sqrt{2mx}$$

ダト拋物線デアリ,又

$$y = \sin x$$

ダト週期的ニ循環スル弓狀ノ連續デアル. カヤウニ次ノヤウニ函數ハ本來ハ x ヲ含ム式デ, x ニ特別ノ値ヲ與ヘルト一定ノ値ヲ有スルヤウナモノデアルト考ヘラレル:

$$f(x)=2x+3,$$

$$f(x)=\pm\sqrt{2mx},$$

$$f(x)=\sin x.$$

他ノ文字デ函數ヲ表ハスコトモアル，ソレハ $\phi(x)$, $\psi(x)$, $F(x)$ 等デアル．$f(x)$ ハ x ノ f ト讀ム．

函數ノ其外ノ例ハ次ノヤウナモノデアル．

(a) 球ノ體積 V ハ半徑ノ長サ r ノ長サノ函數デアル：

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

(b) 石ヲ靜止ヨリ落シタトキ落チタ距離 s ハソレニ要シタ時 t ノ函數デアル：

$$s=16t^2.$$

(c) 等比級數ノ初メノ n 項ノ和：

$$S_n=a+ar+ar^2+\dots\dots\dots\dots+ar^{n-1}$$

ハ n ノ函數トシテ

$$S_n=\frac{a-ar^n}{1-r}$$

デ表ハサレル．

高等數學デハ函數ノ觀念ハ擴張セラレテ，y ガ實際數學公式トシテ x ノ項デ表ハサレナクトモ x ガ與ヘラレルトキ y ガ定メラレルトキニハ，ドンナ場合デモ此用語ヲ用ヒル，此觀念ヲ函數ノ形式的定義ト云フ．

函數ノ定義． x ガ與ヘラレルトキ y ガ定マルトキニ，y ヲ x ノ函數ト云フ．

例ヘバ自記溫度計ノペン先ハ一日ニ一廻轉スル直立セル太キ管狀ノ周圍ニ卷キタル紙ノ上ニペン先キガ壓迫シテ溫度ノ昇降ニ從ヒ上下ニ運動シテ曲線ヲ書ク．カラシテ其管ガ其上リ，下リハ時ノ函數デアル．又或容器ニ密閉シタ瓦斯ノ一平方「メートル」ニ於ケル壓力ハ溫度ノ函數ト見做サル．又彈丸ノ運動ニ於ケル大氣ノ抵抗ハ速度ノ函數デアル．

函數ハ一ツ或ハ多クノ常數ヲ含ム，例ヘバ；

$$f(x)=ax+b,\quad \phi(x)=\tan ax$$

ニ於テ常數 a, b ヲ含ム．其研究中ハ其値ハ固持サレ，ソウシテ x ト共ニ變化シナイモノデアル．

若シ y ガ x ノ函數デアルトキハ x ハ自變數ト云ハレ，y ハ屬變數ト云ハレル．自變數トスルモノハ任意ニ選ブコトガ出來ルモノデ或ハ問題ノ條件デ定マツテヲル場合モアル．斯ク自變數ヲ定メタ以上ハ其函數卽チ屬變數モ定メラレル．

例ヘバ：

$$s=16t^2$$

ニ於テ t ヲ自變數ト考ヘ，s ヲ屬變數ト考ヘル．然シ t ニ就テ解クトキハ：

$$t=\frac{\sqrt{s}}{4},$$

但シ s, t ヲ何レモ正量ニ限ルコト、シ s ヲ自變數トシ t ヲ屬變數ト考ヘルコトガ出來ル. 一般ニ二ツノ變數ガ一ツノ方程式デ結付キタルトキ例ヘバ c ガ常數デアル所ノ

$$pv = c$$

ニ於テ v, p ノ何レカヲ自變數トナセバ他ノモノハ函數デアル.

函數ハ一ツヨリ多イ自變數ニ屬スルコトガアル, 例ヘバ矩形ノ樣ニ二ツノ相隣ル二邊ノ積ニ等シイ場合ハソレデアル. 又他ノ例ガアル:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \log (x^2 + y^2),$$

$$\phi(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2.$$

又 x ノ一ツノ値ニ y ノ多クノ値ガ對應スルコトガアル:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}.$$

斯樣ナトキニハ y ハ x ノ衆値函數ト云フ. 然シ普通此ヤウナ場合ニハ單値的函數ヲ作リ得ラレルヤウニ幾ツカノ群ニ分ツヤウナコトガ自然デアル, 即チ次ノ如シ:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$

本書ニテハ函數ハ他ガ言明セラレヌ以上ハ單値デアルト理解セラレル.

函數ハ自變數ニ少許ノ變化ヲ與ヘルトキ函數ニ少許ノ變化ヲ生ズルトキ連續的デアルト云フ, 例ヘバ

$$y = \frac{1}{x}$$

ト云フ函數(双曲線)ハ一般ニ連續的デアル. 然シ x ガ 0 ニ近ヅクトキ y ノ數値ハ無限ニ増加シ $x=0$ ナル點ニテハ不連續デアル.

一量ノ數値即チ絶對値ヲ用ヒタイコトガ度々アル, ソウシテソレニ一ツノ記法ヲ要スルコトガアル. 其記法ハ $|x|$ デアル, コレヲ x ノ絶對値ト讀ム, 例ヘバ $|-3| = 3$, $|3| = 3$ ナルヤウナモノデアル. 又 a ガ正量デモ, 負量デモ

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

---

2. **曲線ノ傾斜.** 解析幾何學ニ於テ簡單ナ曲線ノ傾斜ヲ求メルコトヲ知ツタ. 其法ハ微積分デ基礎的必要ナモノデアル. 今ソレヲ再出シヤウ.

例ヘバ次ノ抛物線アリトシヤウ:

(1) $$y = x^2.$$

其上ノ點 P ガ坐標 (x_0, y_0) ヲ有シ, 此曲線上ノ任意ノ點 $P'(x', y')$ ヲ取リ, P ト P′ トヲ過ル割線ヲ引キ

$$x' = x_0 + h, \quad y' = y_0 + k$$

トセバ割線ノ傾斜ハ

$$\tan \tau' = \frac{y' - y_0}{x' - x_0} = \frac{k}{h}.$$

P′ ガ P ニ近ヅクニ從ヒ割線ハ P ノ周リニ廻轉シ, 切線ニ近

迫シ，其傾斜ハ切線ノ傾斜ニ近ヅク：

$$\lim_{P' \doteq P} \tan\tau' = \tan\tau.$$

今此極限ノ値ヲ求メタイノデアル.

P ハ (1,1) デアルトシ，h ノ小キ値ニ對シテ k ノ値ヲ計算スルトシヤウ．玆ニ $x_0=1$, $y_0=1$ デアル，$h=0.1$ デアルト

$$x'=x_0+h=1.1,\quad y'=y_0+k=1.21,$$

ソウシテ

$$k=y'-y_0=0.21,$$

$$\tan\tau'=\frac{k}{h}=2.1$$

次ノ表ハ h, k ノ其他ノ値ヲ表ハシ且同時ニ $\tan\tau'$ ヲ表ハス

h	k	$\tan\tau'$
0.1	0.21	2.1
0.01	0.0201	2.01
0.001	0.002001	2.001

コノ終リノ行ハ注目スベキモノデアル．$\tan\tau$ ガ段々ト極限トシテ 2 ニ近迫スルヤウニ見ユル．コレガ實際ソウデアル.

證明ハ簡單デアルカラ，一般ニ任意ノ點 P ニツイテ說明シヤウ.

P ト P' トハ曲線 (1) ノ上ニアルカラ：

(2) $$y_0=x_0^2,$$

(3) $$y_0+k=(x_0+h)^2=x_0^2+2x_0h+h^2.$$

(3) カラ (2) ヲ減ズルト

(4) $$k=2x_0h+h^2,$$

終ニ $$\tan\tau'=\frac{k}{h}=2x_0+h,$$

P' ガ P ナル極限ニ近ヅクト h ハ 0 ニ近ヅクカラ

$$\lim_{P' \doteq P} \tan\tau' = \lim_{h \doteq 0} \frac{k}{h} = \lim_{h \doteq 0} (2x_0+h),$$

(5) $$\tan\tau=2x_0.$$

特ニ $x_0=1$ デアルト，$\tan\tau=2$．是レハ證明シヤウトシタモノデアル.

演　習

1. $f(x)=x^3-3x+2$ デアルト $f(1)=0$ デアルコトヲ證明セヨ，又 $f(0)$, $f(-1)$, $f\left(1\frac{1}{3}\right)$ ヲ計算セヨ.

2. $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+7}$ デアルト $f(\sqrt{2})$ ヲ計算セヨ．(三ツノ有效數字ヲ有スルヤウニ)

3. $F(x)=(x-x^2)\sin x$ ヲ $F(x)=0$ トナルスベテノ x ヲ求メヨ.

4. $\phi(x)=2^x$ ダトスルト $\phi(0)$, $\phi(-3)$, $\phi\left(\frac{1}{3}\right)$ ノ値ハ如何.

5. $f(x)=x-\sqrt{a^2-x^2}$ ダトシテ $f(a), f(0)$ ヲ求メヨ.

6. 上ノ問題デ, $a=\cos\frac{5\pi}{6}$ ダトシテ $f(0)$ ヲ三ツノ有效數字ヲ有スルマデ計算セヨ.

7. $\psi(x)=x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}$ ニ於テ $\psi(8)$ ヲ計算セヨ.

8. $f(x)=x\log_{10}(12-x^2)$ ニ於テ $f(-2)$, $f\left(3\frac{1}{3}\right)$ ヲ計算セヨ. (但シ $\log_{10}2=0.30103$, $\log_{10}3=0.47712$)

9. $x^3-xy+3=5y$ ニ於テ y ニツイテ方程式ヲ解ケ, 即チ y ヲ x ノ函數トシテ表ハセ.

10. $f(x)=a^x$ デアルト

$$f(x)f(y)=f(x+y)$$

デアルコトヲ證明セヨ.

11. 第 2 款ノ表ヲ更ニ 2 行續ケヨ ($h=0.0001$ 及ビ $h=0.00001$ トシテ).

12. 點 $(2, 3)$ ニ於テ曲線

$$8y=3x^2$$

ノ傾斜ヲ見出セ, 且第 2 條ノ表ト同樣ナルモノヲ作リ, 外見的ノ極限ガ實際極限デアルコトヲ證明セヨ.

13. (x_0, y_0) ナル點ニ於テ曲線

$$y=x^3-x^2$$

ノ傾斜ヲ求メヨ.

14. (x_0, y_0) ナル點ニ於テ曲線

$$y=ax^2+bx+c$$

ノ傾斜ヲ求メヨ.

15. (x_0, y_0) ナル點ニ於テ曲線

$$y=\frac{1}{x}$$

ノ傾斜ヲ求メヨ.

第二編

代數函數ノ微分法

一般ノ定理

1. 微係數ノ定義. 微積分法ハ變量ヲ取扱フモノデ, y ガ x ノ函數デアルト x ハ一ツ或ハ他ノ特別ノ値ヲ有セザルモノ, 流走スルモノ或ハ成長スルモノナルコト, 丁度時ニ就テ或ハ靜カナル池中ニ石ヲ落下シクルトキ擴ガル波紋ノヤウナモノデアル. ソウシテ y ハ x ト共ニ時トシテ增加シ, 時トシテ減少スル. x ガ x_0 カラ $x=x'$ マデ或範圍內ノ總ベテノ値ヲ取ルトキ y ガ相當シテ y_0 カラ y' ニ變ジ其量ハ一般ニ x ノ變化ニ略ボ比例スルコトハ函數ノ「グラフ」ニ就テ見ルデアラウ. 何トナレバ其變化ノ比ハ

$$\frac{y'-y_0}{x'-x_0}=\tan\tau',$$

ニシテ此 $\tan\tau'$ ハ極限 $\tan\tau$ ニ近ヅク, 之ヲ再言セバ切線ノ傾斜 $\tan\tau$ ニ近ヅクカラデアル.

此比ノ極限卽チ

$$\lim_{x'\doteq x_0}\frac{y'-y_0}{x'-x_0}=\tan\tau$$

ノ定メルノハ必要ナ問題デアルカラ既知ノ函數ニツイテ之ヲ

解キ其結果ノ種々ノ應用ヲ與ヘルコトニ次ノ僅少ノ編ヲ費スデアラウ.

定義トシテ前ニ說明シタ觀念ヲ形式化シヤウ. x ノ函數ヲ

(1) $$y=f(x)$$

x ノ x_0 ナル値ニ對シテハ

(2) $$y_0=f(x_0)$$

今 x_0 ニ $\triangle x$ ナル變化ヲ與ヘルト, 卽チ x' ナル x ノ第二ノ値ニ對シテ $x'-x_0$ ナル差ヲ $\triangle x$ トスルト,

$$x'=x_0+\triangle x.$$

函數 y ハ y_0 ヨリ變ジテ

(3) $$y'=f(x')$$

トナリ,

$$y'-y^0=\triangle y,\qquad y'=y_0+\triangle y$$

ナル增加ヲ受ク. (3) ヨリ

(4) $$y_0+\triangle y=f(x_0+\triangle x),$$

此レト (2) トカラ減法ニヨリ:

$$\triangle y=f(x_0+\triangle x)-f(x_0),$$

ソレヨリ

(5) $$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$$

微係數ノ定義　$\triangle x$ ガ 0 ニ近ヅクトキ (5) ナル比ノ極限

$$(6)\qquad \lim_{\triangle x \doteq 0}\frac{\triangle y}{\triangle x} \quad \text{或ハ} \quad \lim_{\triangle x \doteq 0}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$$

ヲ x ニ關スル y ノ微係數ト云ヒ D_xy ニテ表ハス (之ヲ y ノ D_x ト讀ム)

$$(7)\qquad \lim_{\triangle x \doteq 0}\frac{\triangle y}{\triangle x} = D_xy.$$

上ノ定義デ $\triangle x$ ハ負或ハ正デアル $\triangle x$ ガ負ノ側カラ 0 ニ近ヅイテモ, 正ノ側カラ 0 ニ近ヅイテモ (6) ナル極限ガ同ジ値ヲ有スルコトガ必要デアル.

然ルトキハ問題ハ種々ノ函數ノ微係數ヲ計算スルコトデアル.

函數ヲ微分スルト云フノハ其微係數ヲ求メルコトデアル.

微分法ノ解析的手段ノ幾何學的説明ハ函數ノ「グラフ」ノ傾斜ヲ求メルノデアル,

---

2. x^n ノ微分法　n ハ正ノ整數ナルトキ

$$(8)\qquad y = x^n$$

ナル函數ヲ微分スルニハ先 $x = x_0$ ナル任意ノ値ヲ入レ, 函數ノ相當スル値 y_0 ヲ計算スルノデアル:

$$(9)\qquad y_0 = x_0^n.$$

次ニ x ニ增加 $\triangle x$ ヲ與ヘルト y ノ相當スル增加 $\triangle y$:

$$(10)\qquad y_0+\triangle y = (x_0+\triangle x)^n.$$

此右邊ヲ二項定理デ展開スルト

$$(11)\qquad y_0+\triangle y = x_0^n + nx_0^{n-1}\triangle x + \frac{n(n-1)}{1.2}x_0^{n-2}\triangle x^2 + \ldots\ldots + \triangle x^n$$

(11) カラ (9) ヲ減ジ $\triangle x$ ニテ除スルト

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = n\,x_0^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}x_0^{n-2}\triangle x + \ldots\ldots + \triangle x^{n-1}$$

$\triangle x$ ガ 0 ニ近ヅクト第二項以下ハ各項ハ 0 ニ近ヅキ從テ其和モ 0 ニ近ヅク, ソウシテ右邊ノ初項ハ常數デアル從テ:

$$\lim_{\triangle x \doteq 0}\frac{\triangle y}{\triangle x} = n\,x_0^{n-1}.$$

x_0 ノ下ノ記號ハ x_0 ハ $\triangle x$ ト共ニ變ゼシコトヲ注意セシメルタメデアッテ終局ノ結果ニハソレヲ除去スルコトガ出來ル, 何トナレバ x_0 ハ x ノ或値デアルカラデアル. ソウシテ公式ニヨリ或ハ定理ヲ得, 之ヲ添數ト云フ:

$$(12)\qquad D_xx^n = n\,x^{n-1}.$$

特ニ $n=1$ ナルトキハ

$$(13)\qquad D_xx = 1$$

演　習

√1. c ガ常數ナルトキハ

$$D_x(c\,x^n) = n\,c\,x^{n-1}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

2. 次ノ函數ノ微係數ヲ求メヨ：

$$x^2,\quad x^3,\quad x^{49},\quad 7x,\quad -9x^4.$$

3. $y=\dfrac{1}{x^2}$ ヲ微分セヨ. 答 $-\dfrac{2}{x^3}$.

4. $u=t^2-t$ ヲ微分セヨ.

2t-1

3. 常數ノ微係數 $f(x)$ ガ常數：

$$y=f(x)=c$$

デアルト函數ノ圖ハ x ノ軸ニ平行デ, 傾傾ハ 0 デアル. 故ニ

$$\text{(14)}\qquad D_x c=0.$$

此結果ヲ解析的ニ導クコトガ利益ニナル.

$$y_0=f(x_0)=c$$

カラ

$$y_0+\triangle y=f(x_0+\triangle x)=c,$$

ソレヨリ

$$\triangle y=0\quad 及ビ\quad \frac{\triangle y}{\triangle x}=0$$

$\triangle x$ ガ其極限トシテ 0 ニ近ヅクトセバ $\triangle y/\triangle x$ ナル變量ノ値ハ常ニ 0 デアルカラ極限モ 0 デアル.

$$\lim_{\triangle x\doteq 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=0\quad 或ハ\quad D_x c=0.$$

4. 微分法ノ一般ノ公式.

[定理 I] 常數ト一函數トノ積ノ微係數ハ其函數ノ微係數ト其常數ノ積ニ等シ.

$$\text{(I)}\qquad D_x(cu)=c\,D_x u.$$

何トナレバ

$$y=cu$$

トセバ

$$y_0=c\,u_0,$$

$$y_0+\triangle y=c(u_0+\triangle u)$$

デアルカラ

$$\triangle y=c\,\triangle u$$

從テ

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=c\,\frac{\triangle u}{\triangle x}$$

ソウシテ

$$\lim_{\triangle x\doteq 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\doteq 0}\left(c\,\frac{\triangle u}{\triangle x}\right).$$

左邊ノ極限ハ $D_x y$ デ右邊ノ極限ハ $c\,D_x u$ ナリ (此點ノ嚴密ナル證明ハ第5款ニアリ).

[定理 II] 二ツノ函數ノ和ノ微係數ハ各微係數ノ和ニ等シ.

$$\text{(II)}\qquad D_x(u+v)=D_x u+D_x v$$

ナリ何トナレバ

$$y = u + v$$

トセヨ．然ルトキハ

$$y_0 = u_0 + v_0$$

$$y_0 + \triangle y = u_0 + \triangle u + v_0 + \triangle v,$$

即チ

$$\triangle y = \triangle u + \triangle v$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle u}{\triangle x} + \frac{\triangle v}{\triangle x}.$$

$\triangle x$ ガ 0 ニ近ヅクニ從ヒ右邊ノ第一項ハ $D_x u$, 第二項ハ $D_x v$ ニ近ヅクカラ右邊ノ全部ハ $D_x u + D_x v$ ニ近ヅク．(注意シタル嚴密ナル證明ハ第5款ニアリ)

$$\lim_{\triangle x \doteq 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \doteq 0}\left(\frac{\triangle u}{\triangle x} + \frac{\triangle v}{\triangle x}\right) = \lim_{\triangle x \doteq 0}\frac{\triangle u}{\triangle x} + \lim_{\triangle x \doteq 0}\frac{\triangle v}{\triangle x}$$

故ニ

$$D_x y = D_x u + D_x v.$$

[系] 三ツノ函數ノ和ヲ有スルトキハ

$$u + v + w = u + (v + w)$$

$$D_x(u + v + w) = D_x u + D_x(v + w)$$

$$= D_x u + D_x v + D_x w$$

次ニ同樣ニ四項ノ和，次ニ五項ノ ………和ノ場合ヲ論ズルコトガ出來ル．定理ノ證明ヲ直チニ n 個ノ函數ノ場合ニ

擴張スルコトガ出來ル．

多項式　多項式ヲ微分スルコトガ出來ル．例ヘバ

$$D_x(7x^4 - 5x^3 + x + 2)$$

$$= D_x(7x^4) + D_x(-5x^3) + D_x x + D_x 2$$

$$= 7\,D_x x^4 - 5\,D_x x^3 + 1 = 28\,x^3 - 15\,x^2 + 1.$$

演　　習

次ノ函數ヲ微分セヨ：

1. $5x^5 - 8x^4 + 7x^3 - x + 1.$
   $25x^4 - 32x^3 + 21x^2 - 1$
2. $\dfrac{8x^7 - 6x + 5}{9}$
3. $\pi x^3 - 4\dfrac{3}{4}x^2 - \sqrt{2}$
   $3\pi x^2 - 6x$
4. $\dfrac{ax^2 + 2hx + b}{2c}$
5. 微分セヨ．

   (a) $v_0 t - 16t^2$,　t ニ關シテ．

   (b) $a + ls + cs^2$,　s ニ關シテ．

   (c) $0.01\,ly^4 - 8.15\,my^2 - 0.9\,lm$,　y ニ關シテ．

6. 曲線

$$4y = x^4 - 8x - 1$$

ノ點 (1, −2) ニ於テ傾度ヲ求メヨ．

7. 二ツノ曲線 $y = x^2$ ト $y = x^3$ トガ如何ナル角ヲナスカ．

(x_1, y_1)

答　0° 及 $8^\circ 7'$.

$Y - y_1 = 2x(X - x_1)$
$Y - Y_1 = 3x(X - x_1)$

5. 極限ニ就テノ三ツノ定理.

[定理 A] 二ツノ變數ノ和ノ極限ハ各極限ノ和ニ等シ.

$$\lim(x+y) = \lim x + \lim y.$$

今 $\lim x = \mathrm{A}$, $\lim y = \mathrm{B}$ トセヨ. 又 $x - \mathrm{A} = \varepsilon$ 卽チ $x = \mathrm{A} + \varepsilon$ トセヨ.

(x ガ A ヨリ小ナルトキハ ε ハ負ノ數). $\lim \varepsilon = 0$ デアラウ.

同様ニ

$y - \mathrm{B} = \eta$, 卽チ $y = \mathrm{B} + \eta$, $\lim \eta = 0$ デアラウ.

今

$$x + y = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \varepsilon + \eta.$$

此右邊ノ極限ハ A+B ナルカラ

$$\lim(x+y) = \mathrm{A} + \mathrm{B} \qquad q.e.d.$$

[系] n 個ノ變數ノ和ノ極限ハ各變數ノ極限ノ和ニ等シ, 但シ n ハ有限デアル.

$$\lim(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n) = \lim x_1 + \lim x_2 + \ldots\ldots + \lim x_n$$

[定理 B] 積ノ極限ハ各數ノ極限ノ積ニ等シ.

$$\lim(xy) = (\lim x)(\lim y),$$

何トナレバ

$$xy = (\mathrm{A}+\varepsilon)(\mathrm{B}+\eta)$$
$$= \mathrm{AB} + \varepsilon\mathrm{B} + \mathrm{A}\eta + \varepsilon\eta,$$

定理 A ノ系ニ依リテ左邊ノ極限ハ

$$\mathrm{AB} + \lim(\mathrm{A}\eta) + \lim(\mathrm{B}\varepsilon) + \lim(\varepsilon\eta)$$

ニ等シイ. 此最後ノ項ハ 0 デアル. 其前ノ二ツノ項ハ 0 ニ近ヅク變數 (例ヘバ η) ト常數 (例ヘバ A) ノ積デアルカラ), 0 ニ近ヅクモシ都合悪ルク常數ガ非常ニ大デ, 10000000 デアルナラバ, 變數ガ非常ニ減少シ $10^{-7} = \frac{1}{10000000}$ ヨリ小サキ數値ヲ持タセルト積ハ 1 ヨリ小サクナリ, 變數ヲ十分小サクスルト積ハ $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ……ヨリ小サクナル, 故ニ此等ノ積ノ極限ハ 0 ナリ.

前ノ式ニ於ケル第二項以下ノ各極限ハ 0 デアルカラ

$$\lim(xy) = \mathrm{AB}. \qquad q.e.d.$$

特ニ變數ト常數トノ積ノ極限ハ變數ノ極限ニ常數ヲ乘ジタルモノニ等シ.

何トナレバ常數ハ變數ノ特別ノ場合デアルカラデアル.

[定理 C] 二ツノ變數ノ商ノ極限ハ二ツノ變數ノ極限ノ商ニ等シ, 但シ分母トナル變數ノ極限ハ 0 ナラザルモノト假定ス:

$$\lim \frac{\mathrm{X}}{y} = \frac{\lim \mathrm{X}}{\lim y} \qquad 但シ \lim y \neq 0.$$

何トナレバ $\dfrac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}} - \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \dfrac{\mathrm{A}+\varepsilon}{\mathrm{B}+\eta} - \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \dfrac{\mathrm{B}\varepsilon - \mathrm{A}\eta}{\mathrm{B}(\mathrm{B}+\eta)}$

デアルカラ

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} + \frac{\mathrm{B}\varepsilon - \mathrm{A}\eta}{\mathrm{B}^2}\,\frac{1}{1+\frac{\eta}{\mathrm{B}}}.$$

此最後ノ項ノ第一ノ分數ノ極限ハ定理 A, B ニ依ツテ

0 デアル，第二ノ分數ハ η ガ負數デアツテモ結局正デ，2 ヨリモ小サイ．何トナレバ $lim\,\eta=0$，デアルカラ η/B ハ結局 $-\frac{1}{2}$ ヨリ大イカラデアル：

$$-\frac{1}{2}<\frac{\eta}{B},\quad \frac{1}{2}<1+\frac{\eta}{B},\quad \frac{1}{1+\frac{\eta}{B}}<2.$$

ソレカラシテ最後ノ項ノ絶對値　ハ第一ノ因數ノ 2 倍ヨリハ小サイ，ソウシテ其項ノ極限ハ 0 ナリ．

$$\therefore\ lim\frac{X}{Y}=\frac{A}{B}.$$

特別ニ一變數ガ極限トシテ 1 ヲ有スルトキニハ其逆數ノ極限ハ又 1 デアル：

$$lim\,X=1 \quad ナルトキ \quad lim\frac{1}{X}=1.$$

[注意] y ナル分母ガ其極限トシテ 0 ニ近ヅクトキニハ分母ノ極限ニ就テ一般ノ推論ハ出來ナイコトハ次ノ例デワカル．y ハ次ノ値ヲ取ルトセヨ：

$$y=\frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ldots\ldots,\ \frac{1}{10^n},\ldots\ldots$$

(1) X ノ相當スル値ガ次ノヤウデアルトセヨ：

$$X=\frac{1}{10^2},\ \frac{1}{100^2},\ \frac{1}{1000^2},\ldots\ldots,\ \frac{1}{10^{2n}},\ldots\ldots$$

ソノトキニハ $lim\frac{X}{Y}=lim\frac{1}{10^n}=0.$

(2) 若シ $X=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \frac{1}{\sqrt{100}},\ \frac{1}{\sqrt{1000}},\ldots\ldots,\ \frac{1}{10^{\frac{n}{2}}},\ldots\ldots$

デアルトキハ $X/Y=10^{n/2}$ ハ一ツノ極限ヲ有シナイデ，スベテノ數ヨリモ大キクナル．

(3) 若シ $X=\frac{c}{10},\ \frac{c}{100},\ \frac{c}{1000},\ldots\ldots,\ \frac{c}{10^n},\ldots\ldots$ デアルトセヨ，モシ c ガ任意ニ選バレタ一定ノ數デアルトセバ

$$lim\frac{X}{Y}=c$$

(4) 若シ $X=\frac{1}{10},\ -\frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ -\frac{1}{10000},\ldots\ldots$

ダトスルト X/Y ハ交リ々々 $+1$ ト -1 ナル値ヲ取ル，從テ有限デアルケレドモ一ツノ極限ヲ有シナイ．

之ヲ結論スルト X, Y ガ二ツトモ其極限ガ 0 デアルト，其比ハドンナカノ或極限ニ近ヅキ得ルコトアリ，絶對値ハ如何ナル數ヨリモ大トナルコトアリ，又有限デハアルガ一ツノ極限ニ近ヅクコトガ出來ナイコトガアル．

無限大 $lim\,X=A\neq0,\ lim\,Y=0$ デアルトキ X/Y ハ絶對値ガスベテノ數ヨリモ大ナルコトアリ即チ無限大トナル．z ナル變數ガドンナニ大キナ數ヨリモ尚大キクナルナラバ Z ハ無限大トナルト云フ．若シ Z ノ取ル値ガ唯正量ノミナラバ正ナル無限大ト云ヒ，負量ノミナラバ負ナル無限大ト云フ．此後次ノ記法ヲ用ウ：

$$lim\,Z=\infty \quad 或ハ \quad lim\,Z=+\infty,\quad lim\,Z=-\infty$$

シカシ此記法ハ無限大ガ極限デアルノ意ヲ含マナイ. 實ニ此場合ニハ變數ハ極限ヲ有シナイノデアル. コレヲ Z ハ無限大ニ近ヅクトカ, 無限大ニ等シト讀ンデハナラナイ, Z ハ無限大トナルト讀ムノガヨロシイ.

例ヘバ函數ノ「グラフ」ガ或點ニ於テ縱軸ニ平行ナル切線ヲ有スルトキニハ其點ニ於テ

$$\lim_{\triangle x \doteq 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \infty,$$

之ヲ $\triangle x$ ガ 0 ニ近ヅクトキ $\triangle y/\triangle x$ ハ無限大トナルト讀ム.

或著者ハ變數ハ一ツノ極限ニ近ヅクト云フ語ヲ用ヒルヲ便利デアルトシタ, ソウシテ變數ガ無限大トナル場合ヲ含マセタ. 今此イフ語ヲ用ヒナイデ極限ニ近ヅクト云フ語ハ嚴格ナ意味デ用ヒタ.

若シ x ガ或値 a ニ近ヅクトキ函數 $f(x)$ ガ無限大トナルトキ 例ヘバ.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ニ於テ上述ノ a ガ 0 デアルトキハ

$$f(a) = \infty$$

ト書イテ之ヲ表ハス (或ハ事實ニ注意ヲスル必要ガアルトキニハ $f(a)=+\infty$ 或ハ $f(a)=-\infty$ ト書ク).

連續函數ノ定義 第一編ニ與ヘタ定義ヲ比較的明了ニ表ハスト $x=a$ ノ點デ

$$\lim_{x \doteq a} f(x) = f(a)$$

デアルト $f(x)$ ハ連續的デアルトイフ.

次ノ演習 1—3 デ多項式ハ x ノスベテノ點デ連續デアリ分數モ分母ガ消失スルホカ連續デアルコトガワカル.

演習

1. n ガ正ノ整數デアルト

$$\lim (X^n) = (\lim X)^n.$$

デアルコトヲ證明セヨ.

2. $G(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots\ldots + C_nx^n$ デアルト

$$\lim_{x \doteq a} G(x) = G(a) = C_0 + C_1a + C_2a^2 + \ldots\ldots + C_na^n.$$

3. $G(x)$ ト $F(x)$ トガ二ツトモ多項式デアッテ $F(a) \neq 0$ ナラバ

$$\lim_{x \doteq a} \frac{G(x)}{F(x)} = \frac{G(a)}{F(a)}$$

4. X ガ有限デ, Y ガ其極限 0 ニ近ヅクト

$$\lim (XY) = 0.$$

5.

$$\lim_{x = \infty} \frac{x^2+1}{3x^2+2x-1} = \frac{1}{3}$$

デアルコトヲ證明セヨ.

[暗示] x^2 デ分母分子ヲ除セ.

6. 次ノ極限ヲ算セヨ.

(a) $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{x+1}{x^3-7x+3}$.　　(d) $\lim\limits_{x\doteq 0} \dfrac{ax+b^{-1}x}{cx+dx^{-1}}$.

(b) $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{12x^6+5}{4x^6+3x^4+7x^2-1}$.　　(e) $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^3}}{2}$.

(c) $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{ax+bx^{-1}}{cx+dx^{-1}}$.　　(f) $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^4}}$.

---

6. 微分法ノ一般ノ公式, 終リ.

[定理 III] 積ノ微係數ハ次ノ公式デ與ヘラレル:

(III)　$D_x(uv)=uD_xv+vD_xu.$

何トナレバ

$$y = uv$$

トセバ

$$y_0 = u_0v_0,$$

$$y_0+\triangle y = (u_0+\triangle u)(v_0+\triangle v),$$

$$\triangle y = u_0\triangle v+v_0\triangle u+\triangle u\triangle v,$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = u_0\frac{\triangle v}{\triangle x}+v_0\frac{\triangle u}{\triangle x}+\triangle u\frac{\triangle v}{\triangle x}.$$

第 5 款ノ定理 A ニ依リ

$$\lim_{\triangle x\doteq 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\doteq 0}u_0\frac{\triangle v}{\triangle x}+\lim_{\triangle x\doteq 0}v_0\frac{\triangle u}{\triangle x}+\lim_{\triangle x\doteq 0}\left(\triangle u\frac{\triangle v}{\triangle x}\right).$$

同款ノ定理 B ニ依リテ

最後ノ極限ハ, $\lim \triangle u=0$, $\lim(\triangle v/\triangle x)=D_xv$ デアルカラ, 0

デアル. 初メノ二ツノ極限ハ夫々 u_0D_xv, v_0D_xu デアル. ソレカラ下ニ記シタル記號ヲ取リテ:

$$D_xy = uD_xv+vD_xu. \qquad q.e.d.$$

但シ嚴格ニ云フト下ニ記シタル記號ヲ取ルマヘニ一度 $[D_xv]_{x=x_0}$ トスルノガヨロシイ, 定理 I, II モ同樣デアル.

上ノ定理ヲ繰リ返ヘシテ用フルト若干個ノ函數ノ積ニ擴張スルコトガ出來ル. 二ツ以上ノ函數ガアルト. 次ノヤウニ書クノガ便利デアル, 卽チ

$$\frac{D_x(uvw)}{uvw}=\frac{D_xu}{u}+\frac{D_xv}{v}+\frac{D_xw}{w}. \tag{15}$$

之レヲ uvw ノ對數微係數ト云フ其理由ハ後ニ說ク.

[定理 IV] 商ノ微係數ハ次ノ公式デ與ヘラレル:

(IV)　$D_x\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vD_xu-uD_xv}{v^2}$. (之レヲ分母ト分子ノ微係數トヲ乘ジ, ソレカラ分子ト分母ノ微係數トヲ乘ジタルモノヲ減ジ, ソレヲ分母ノ平方ニテ除スト云フ語ニテ云ヒ表ストセバ此定理ヲ記憶スルニ便利デアル).

何トナレバ　$y=\dfrac{u}{v}$ トセバ

$$y_0=\frac{u_0}{v_0},\qquad y_0+\triangle y=\frac{u_0+\triangle u}{v_0+\triangle v},$$

$$\triangle y=\frac{u_0+\triangle u}{v_0+\triangle v}-\frac{u_0}{v_0}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{v_0\dfrac{\triangle u}{\triangle x}-u_0\dfrac{\triangle v}{\triangle x}}{v_0(v_0+\triangle v)}.$$

第 5 條ノ定理 C カラ

$$\lim_{\triangle x\doteq 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{\displaystyle\lim_{\triangle x\doteq 0}\left(v_0\frac{\triangle u}{\triangle x}-u_0\frac{\triangle v}{\triangle x}\right)}{\displaystyle\lim_{\triangle x\doteq 0}[v_0(v_0+\triangle v)]}$$

第 5 條ノ定理 A, B ヲ適用シ, 最後ニ下ノ記號ヲ取ルト

$$D_x y=\frac{vD_x u-uD_x v}{v^2}$$

[例]

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

トセバ $$D_x y=\frac{(cx+d)a-(ax+b)c}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

[定理 V] u ガ y ノ函數デアリ, ソウシテ y ハ x ノ函數デアルナラバ:

即 $u=f(y)$, $y=\phi(x)$ ナルトキ

(V) $$D_x f(y)=D_y f(y)\, D_x y$$

或ハ

(V′) $$D_x u=D_y u\,.\,D_x y$$

何トナレバ

$$y_0=\phi(x_0),\qquad u_0=f(y_0),$$

$$y_0+\triangle y=\phi(x_0+\triangle x),\quad u_0+\triangle u=f(y_0+\triangle y),$$

$$\triangle u=f(y_0+\triangle y)-f(y_0),$$

$$\frac{\triangle u}{\triangle x}=\frac{f(y_0+\triangle y)-f(y_0)}{\triangle y}\cdot\frac{\triangle y}{\triangle x}$$

$\triangle x$ ガ 0 ニ近ヅクトキハ $\triangle y$ モ亦 0 ニ近ヅクカラ, 右邊ノ極限ハ

$$\left(\lim_{\triangle x\doteq 0}\frac{f(y_0+\triangle y)-f(y_0)}{\triangle y}\right)\left(\lim_{\triangle x\doteq 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)=D_y f(y)\, D_x y,$$

左邊ノ極限ハ $D_x u$ デアルカラ

$$D_x u=D_y u\,.\,D_x y. \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots q.\ e.\ d.$$

上ノ定理ノ眞ナコトハ變數ノ表ハサレル特別ノ文字ニハ關係シナイ. 例ヘハ x ヲ t ニ置キ換ヘ, y ヲ x ニ置キ換ヘテモヨロシイ. コノヤウニ置キ換ヘタ後右邊ノ第二ノ因數デ除スルト次ノ公式ガ出來ル:

(V′) $$D_x u=\frac{D_t u}{D_t x}$$

[例] $u=(ax+b)^n$ トセヨ, 但シ n ハ正ノ整數ナリ.

今 $y=ax+b$ トスレバ $u=f(y)=y^n$,

$$D_x u=D_x y^n=D_y y^n.\,D_x y=ny^{n-1}.\,a=na(ax+b)^{n-1}.$$

演　習

次ノ函數ヲ微分セヨ.

1. $y=\dfrac{x}{1-x^2}$.　　答 $D_x y=\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$.

2. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.　　3. $y=\dfrac{x^3}{1-x}$.

4. $s=\dfrac{1-t}{1+t}$.　　5. $y=\dfrac{x^2}{(1-x)^2}$.

6. $y=x(a+bx)^n$　　答 $D_xy=[a+(n+1)bx](a+bx)^{n-1}$.

7. $y=\dfrac{1}{x^m}$, 但シ m ハ正ノ整數トス.

8. $y=\dfrac{1+x+x^2}{x}$.　　9. $y=\dfrac{5-x^3+5x^6}{x^3}$.

10. 公式 (12) ハ n ガ負ノ整數デアルトキ用キラルルコトヲ證明セヨ.

次ノモノヲ微分セヨ:

11. $(t+3)(2-t)$.　　15. $\dfrac{z^2+a}{z+a}$.

12. $(a-x)^3$.　　16. $(a+bx+cx^2)^n$.

13. $y=\dfrac{1-3x-x^3}{9}$.　　17. $\dfrac{1}{(1-x^2)^3}$.

14. $\dfrac{s}{(2s+3)^2}$.　　18. $x=\dfrac{3y-1}{y}$.

19. (1, 1) ニ於テ $y=\dfrac{1}{x}$ ナル曲線ノ傾度ヲ求メヨ.

20. $x=0$, $y=\dfrac{1}{10}$ ナル點ニ於テ

$$240\,y=(1-x)(2-x)(3-x)(4-x)$$

ナル曲線ノ傾度ヲ求メヨ.　　答 $-\dfrac{5}{24}$.

---

7. 根式ノ微分. 今

$$y=\sqrt{x}$$

ヲ微分スルトセヨ.

$$y_0=\sqrt{x_0},\qquad y_0+\triangle y=\sqrt{x_0+\triangle x},$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{\sqrt{x_0+\triangle x}-\sqrt{x_0}}{\triangle x}.$$

$\triangle x$ ガ 0 ニ近ヅクトキ右邊ガ如何ナル極限ニ近ヅクカヲ知ルコトガ出來ナイ, 何トナレバ分母, 分子ガ何レモ 0 ニ近ヅキ $\dfrac{0}{0}$ ハ一ツノ意味ヲ有セヌカラデアル, (第5款ヲ比較セヨ). 然レドモ代數學ノ初步ニ依リ分子ヲ有理化スレバ:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{\sqrt{x_0+\triangle x}-\sqrt{x_0}}{\triangle x}\cdot\frac{\sqrt{x_0+\triangle x}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+\triangle x}+\sqrt{x_0}}$$

$$=\frac{1}{\triangle x}\cdot\frac{\triangle x}{\sqrt{x_0+\triangle x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\triangle x}+\sqrt{x_0}}$$

ソレカラ

$$\lim_{\triangle x\doteq 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\doteq 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+\triangle x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

x ノ下ノ指數ヲ取リテ

(16)　$D_x\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

今種々ノ函數ヲ微分スルデアラウ.

[例]　$y=\sqrt{a^2-x^2}$ ヲ微分スルコト.

新變數ヲ入レヨ

$$z=a^2-x^2$$

定理 V ヲ用ヒヨ

$$y = \sqrt{z}$$

$$D_x y = D_x\sqrt{z} = D_z\sqrt{z}\,.\,D_x Z = \frac{1}{2\sqrt{z}}.(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\therefore\quad D_x\sqrt{a^2-x^2} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

演　習

次ノ函數ヲ微分セヨ.

1. $y=\sqrt{a^2+x^2}$
2. $u=\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}$
3. $y=x\sqrt{1-x}$
4. $u=x^3\sqrt{a^2+x^2}$
5. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$　答 $\dfrac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$
6. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$　答 $-\dfrac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$
7. $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$
8. $y=\sqrt{2mx}$
9. $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$.
10. $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

---

8. 續キ: n ガ分數デアル x^n.

分數指數ノ法則. $n=p/q$ ニ於テ p ト q トハ互ニ素ナリトシ, n ノ正量ニ於テ

$$y = x^n = x^{\frac{p}{q}} \tag{17}$$

ナル函數ヲ論ズルコトトシヤウ. q ガ奇數テアルト函數ハ唯一ツノ値ヲ表ハシ, 偶數デアルト (17) ノ函數ハ $\pm(\sqrt[q]{x})^p$ ノヤ

ウニ二重ノ根ヲ有ス. シカシコレハ無益デアッテ習慣上 (17) ナル記法ハ正根ヲ意味スルモノト定メラレル,:

$$x^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{x})^p.$$

モシ n ガ負ノ分數テアルト卽チ $n=-m$ デアルト

$$x^n = \frac{1}{x^m}.\quad マタ\quad a^0 = 1.$$

代數學初步ニ於テ

$$\text{(A)}\qquad \begin{cases} \text{I.} & a^m.a^n = a^{m+n}, \\ \text{II.} & (a^m)^n = a^{mn}, \\ \text{III.} & a^n.b^n = (ab)^n. \end{cases}$$

此法則ハ a ト b トガ二ツトモ正數ナルトキ, m ト n トガ正或ハ負ノ整或ハ分數デアルトキ除外ナシニ用ヒラレル, ソウシテ 0 ノ場合ヲ含ム.

函數 x^n ノ「グラフ」 n ガ整數デアルトキ $n=1, 2, 3, \ldots\ldots 10, \ldots\ldots$ デアルトキハ次圖ニ示サレルトホリデアル. (17) ナル曲線ノ傾度:

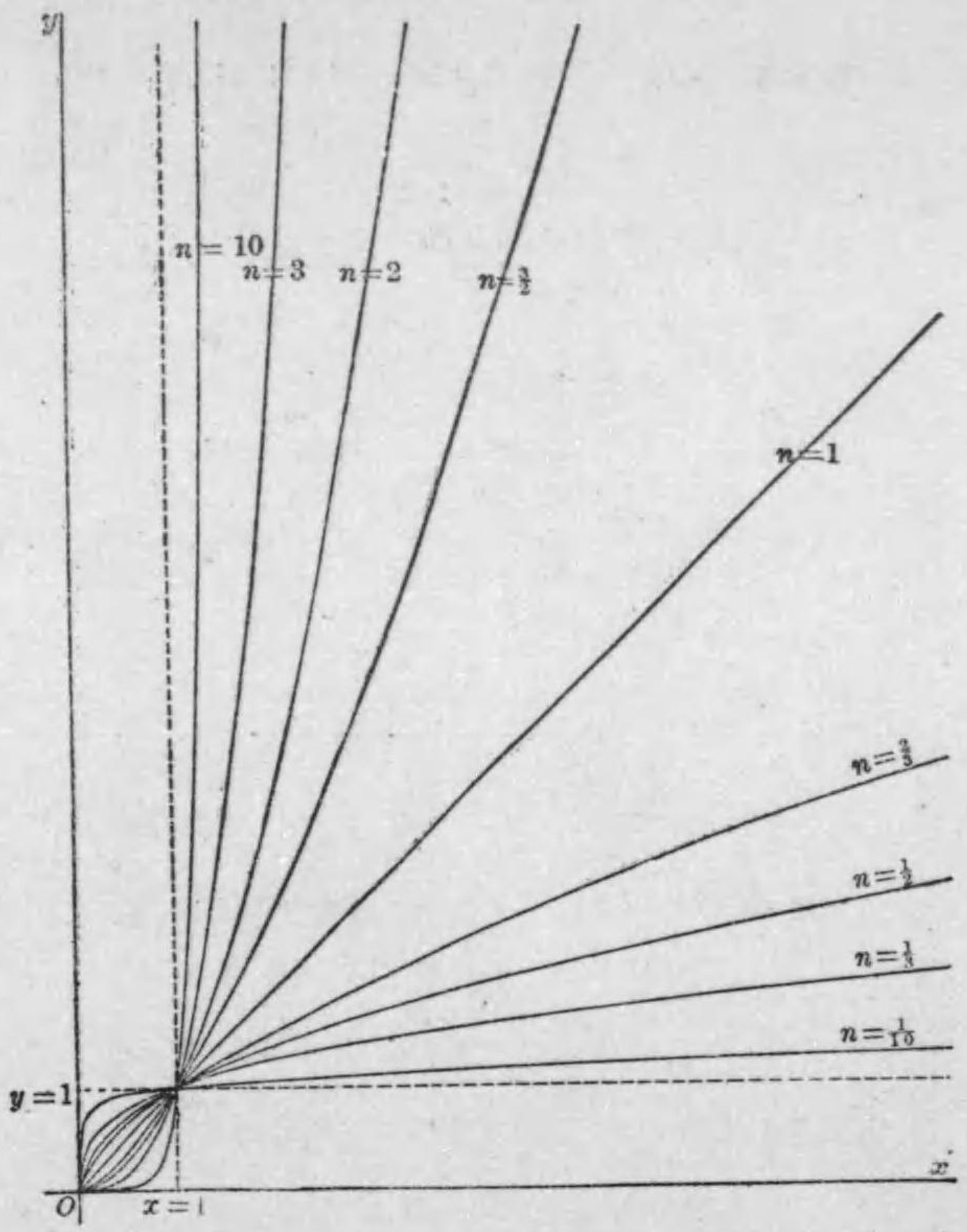
$$\tan\tau = D_x y = n\,x^{n-1}.$$

ソウシテコレハ正ノ量デ $n>1$ デアルトキ x ガ增加スルニ從ヒ確カニ增加スル.

次ニ $p=1$, $q>1$ ナル場合ニ

$$y = x^{\frac{1}{q}}\quad 或ハ\quad x = y^q \tag{18}$$

$(q=2, 3, \ldots\ldots 10, \ldots\ldots)$ ノヤウナ圖ヲ得.



n ガ整數デアルト同ジ圖形デアツテ上ノ圖デ y ヲ横線, x ヲ縦線トスルマデノコトデアル. 例ヘバ $y=x^{\frac{1}{3}}$ ノヤウナ曲線ハ $y=x^3$ ノヤウナ曲線カラ得ラレル.

此二ツノ曲線ハ縦横二軸ガ正ノ方向ニ於テ成ス角ノ二等分線ニ就キテ對稱トデアル.

$n=p/q$ ナル一般ノ場合ハ本款ノ終リニ示ス.

x^n ノ微係數　先ヅ(18)ナル曲線ノ傾度ヲ見出ソウ. σ ガ切線ト y 軸トノ間ノ角ヲ表ハセバ

$$\tan\sigma = \mathrm{D}_y x = q\,y^{q-1}.$$

今 σ ガ τ ノ餘角デアルカラ

$$\tan\tau = \frac{1}{\tan\sigma},$$

ソレカラ

$$\mathrm{D}_x y = \frac{1}{q\,y^{q-1}} = \frac{1}{q}\,y^{1-q},$$

コレハ

$$\mathrm{D}_x y = \frac{1}{\mathrm{D}_y x}$$

ナル關係ト等値ナリ. 次ノヤウニ此關係ノ證明ヲ與ヘルコトガ出來ル:

$$y=f(x)$$

ノ逆函數

$$x=\varphi(y)$$

ガ微係數ヲ論ジツヽアル (x_0, y_0) ナル點ノ近所デ單値的ナルトキ, $\varphi(x)$ ハ x ノ連續函數デアルトキ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$$

デアルカラ, $\lim \Delta x/\Delta y \neq 0$ ナラバ

$$\lim_{\triangle x \doteq 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{\lim\limits_{\triangle x \doteq 0} \frac{\triangle x}{\triangle y}} \quad 或ハ \quad D_x y = \frac{1}{D_y x}$$

y ヲ其値 $x^{\frac{1}{q}}$ ニ買キ替ヘルトキハ

$$y^{1-q} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{1-q} = x^{\frac{1-q}{q}} = x^{\frac{1}{q}-1}.$$

從ツテ

$$(19) \qquad D_x x^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}$$

コレハ $n=1/q$ ナルトキデモ (12) ハ正シキコトヲ示ス.

今一般ノ場合ニ移ル：

$$y = x^{\frac{p}{q}},$$

$z=x^{\frac{1}{q}}$, $y=z^p$ トスルト第5款定理 V ト上ノ (19) トラカ

$$D_x y = D_x z^p = D_z z^p . D_x z = p z^{p-1} . \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1},$$

$$z^{p-1} = (x^{\frac{1}{q}})^{p-1} = x^{\frac{p-1}{q}},$$

ソレカラ

$$D_x y = \frac{p}{q} x^{\frac{p-1}{q}} x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1},$$

從テ n ガ正ノ整數, 分數ナルトキ

$$D_x x^n = n x^{n-1}.$$

n ガ負數ノ整數或ハ分數ナルトキ： $n=-m$ ナルトキ

$$x^n = \frac{1}{x^m}$$

ナリ. 從テ x^n ハ第5款ノ定理 IV ノ助ケデ

$$D_x \frac{1}{x^m} = \frac{x^m . 0 - m x^{m-1}}{x^{2m}} = -m x^{-m-1},$$

或ハ $\qquad D_x x^n = n x^{n-1}.$

從テ公式 (12) ハ n ガ有理數ナルトキ正シキコトヲ知ル. 然ルトキハ n ガ無理數ナルトキ正シキコトヲ後ニ示ソウ.

$n=\frac{1}{2}$ ナルトキ (16) ト一致スル次ノ公式ヲ得：

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, \quad D_x x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

[例]

$$y = \sqrt[3]{a^2-x^2}$$

ヲ微分スルトセヨ.

$$z = a^2 - x^2$$

トセバ

$$y = z^{\frac{1}{3}}$$

$$D_x y = D_x z^{\frac{1}{3}} = D_z z^{\frac{1}{3}} D_x z = \frac{1}{3} z^{-\frac{1}{3}} (-2x) = \frac{-2x}{3(\sqrt[3]{a^2-x^2})^2}.$$

<u>x^n ノ不等式</u> n ガ正ノ整數デアルト

$$\mathrm{I} \begin{cases} x > 1 & ナルトキハ \quad x^n > 1, \\ 0 \leqq x < 1 & ナルトキハ \quad x^n < 1. \end{cases}$$

$n=\frac{1}{q}$ ガ正ノ分數デアルトキ正シ, 何トナレバ $x>1$ デアルトキ

$$y = x^{\frac{1}{q}} < 1$$

トセバ, I ニ依ッテ $y^q<1$

然ルニ $y^q=x$, $x<1$ ハ假定ニ反スルカラデアル. 同樣ニ $n=\dfrac{1}{q}$ ナルトキ I ノ第二關係モ亦眞ナリ.

終リニ $n=p/q$ ガ或正ノ分數デアルトキニモ眞デアルコトヲ證明セン.

何トナレバ

$$x^{\frac{p}{q}}=(x^{\frac{1}{q}})^p,$$

モシ $x>1$ デアルトキハ

$$x^{\frac{1}{q}}>1,\quad \text{ソレカラ}\quad (x^{\frac{1}{q}})^p>1.$$

$x<1$ デアルトキデモ同樣デアル.

シカシ $n<0$ デアルトI ノ各行ノ不等式ハ記號ガ逆トナル, 但シ $x=0$ ナル場合ヲ除ク. シカシ x^n ナル函數ハ $x>0$ ナルトキ常ニ正ナリ.

[定理] $n'>n$ ナルトキ

$x^{n'}>x^n$ $x>1$ ナルトキ

$x^{n'}<x^n$ $x<1$ ナルトキ

$n'=n+h$ トセバ

$$x^{n'}-x^n=x^{n+h}-x^n=x^n(x^h-1),$$

$h>0$ デアルカラ I ナル關係カラ, $x>1$ デアルトキ上ノ最後ノ式ハ正ノ數デアルコト, $x<1$ デアルト負ノ數デアルコトガワカル. 從テ定理ノ正シキコトガワカル.

x^n ナル函數ノ「グラフ」上ニ定メタ定理カラ n ノ種々ノ正ナル分數値ニ對シテ x^n ノ圖ハ前圖ニ示シタ樣デアル.

何レモ原點ト (1, 1) ナル點ヲスギ, 其他ニ交點ヲ有セナイコトガワカル. 其傾度ハ常ニ正ノ數デ, n ト $n'>n$ ニ相應スル二ツノ圖ノ内 $x<1$ ノ場合ニハ後者ハ前者ノ下ニアリテ, $x>1$ ノ場合ニハ位置相反スルコトガワカル.

學生ハ $n<0$ ナル場合ニハ同ジ樣ニ陳述ヲナシ, 同ジ樣ニ「グラフ」ヲ引クコトヲ要求セラル. シカシ最後ノ圖ト前ノ圖トヲ混同サセテハナラヌ. ケレドモ何カ必要ガアッタトキ前ノ圖カラ導クヲ要スル. ソウスルト混亂ハ避ケラレ, 前ノ圖ハ永ク目標的ノモノトスルコトガ出來ル. 學生ハ精密ニ自分デ此ノ如キ圖ヲ方眼紙ノ上ニ作ルノガヨロシイ (平方, 立方ノ表ヲ用ヒテ).

演　　習

次ノ函數ヲ微分セヨ.

1. $y=10x^{\frac{2}{3}}-4x^{-\frac{1}{2}}-1.$

2. $y=x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{5}}+\pi.$

3. $\dfrac{1+x^2}{\sqrt[3]{x}}.$

4. $y=\sqrt[3]{ax^2}.$

5. $y=\dfrac{1-x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{5}}}.$

6. $y=x\sqrt{2x}.$

7. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2-x^2}}.\quad D_xy=\dfrac{2x}{3(a^2-x^2)^{\frac{4}{3}}}.$

8. $y = x(1-x^2)^{\frac{3}{7}}$.　　9. $4\sqrt[3]{t^2}+\frac{3}{\sqrt{t}}-\frac{1}{t}$.

10. $(y^2+1)\sqrt{y^3-y}$.　　答 $\frac{7y^4-2y^2-1}{2(y^3-y)^{\frac{1}{2}}}$.

11. $\sqrt[3]{\frac{1-x}{(1+x)^2}}$.　　13. $\frac{x^c+x^d}{cd}$.

12. x^a-ax+a.　　14. $x^{a+b}-x^{a-b}$.

15. $\frac{(s^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{s^3}$　　答 $\frac{3a^2\sqrt{s^2-a^2}}{s^4}$.

16. $\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}$.　　17. $r=\sqrt{a\theta}$.

18. $\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{a+x}}$.　　答 $\frac{a^2+a\sqrt{a^2-x^2}}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$.

19. $x=2$ デアル點ニ於テ $y=x^{\frac{1}{5}}$ ナル曲線ノ傾度ヲ求メヨ.（三ツノ有效數字ヲ有スルマデ）　答 $\tan\tau=0.115$.

20. $pv^{1.4}=C$ デアリトシ $D_v y$ ヲ求メヨ.

21. $y\sqrt{x}=1+x$ デアリトシ $D_x p$ ヲ求メヨ.

答 $\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$.

---

9. 代數函數ノ微分法 x ト y トガ

$$x^2+y^2=a^2$$

或ハ

$$x^3-xy+y^5=0$$

或ハ

$$xy\sin y = x+y\log x$$

ノヤウナ關係デ結付イテヲルトキハ，委シクイヘバ

$$F(x,y)=0 \quad 或ハ \quad \Phi(x,y)=\Psi(x,y)$$

ナル關係デ結付イテヲルトキ後ノ場合ニハ Φ, Ψ ガ y，他ガ y ヲ含マザルトキニ y ハ x ノ陰函數デアルト云フ. y ニ就テ解クトキ

$$y=f(x)$$

トナルトキニハ y ハ x ノ陽函數デアルト云フ. 例ノ第一ノ方程式ニ於テ x ニ關シテ解セラレタトシテ

$$D_x x^2+D_x y^2=D_x a^2,$$

從テ

$$2x+2yD_x y=0$$

$$\therefore \quad D_x y=-\frac{x}{y}.$$

次ニ第二ノ方程式ヲ微分スルト：

$$3x^2-xD_x y-y+5y^4D_x y=0$$

$$\therefore \quad D_x y=-\frac{3x^2-y}{5y^4-x}$$

$F(x,y)$ ガ x ト y トニ關シテ多項式デアルト

$$F(x,y)=0$$

ニテ定メラレタ y ハ x ノ代數函數ト唱ヘラレル. 多項式ヤ分數式ハ代數函數デアル. 又次ノヤウニ表ハサレタル根式：

$$y=\sqrt{a^2-x^2} \quad 或ハ \quad y=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}-\sqrt[5]{4-\sqrt{x}}$$

ハ代數函數デアル，何トナレバ根號ハ除去セラレ，其結果ハ上

ノ形式ニ移サレルカラデアル．其反對ハ眞ナラズ，何トナレバスベテノ代數方程式ヲ根式ニテ解クコトハ不能デアル．

一般ニ代數函數ハ連續デアルコトヲ示スコトガ出來ル．

函數ガ乘値的デアルト分枝ノ若干ヨリ成リ各分枝ハ單値デアルト見做サレル．此定理ヲ假定シテ前ノ微分法ニ示セル通リ代數函數ノ微係數ヲ求メルコトガ出來ル．

上ノ假定ニ依ツテ第2款ノ公式(12)ノ短キ證明ハ $n=p/q$ ノ場合ニ與ヘラレル．

$$y=x^{\frac{p}{q}},\quad \text{卽チ}\quad y^q=x^p$$

x ニ關シテ兩邊ヲ微分スルト

$$D_x y^q = D_x x^p = p\,x^{p-1},$$

今

$$D_x y^q = D_y y^q\, D_x y = q\,y^{q-1} D_x y$$

$$\therefore\quad D_x y = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{p}{q}\,\frac{x^{p-1}}{x^{\frac{p}{q}(q-1)}} = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1}.$$

第8款ニ與ヘタ此公式ノ證明ハ上ノ假定ニ屬シナイ完全ノ證明デアル．

演　習

1. 二ツノ仕方デ次ノ式ノ y ヲ微分シテ，結果ガ一致スルコトヲ示セ，

$$xy+4y=3x.$$

2. 次ノ函數ニ就テ上ノヤウニセヨ：

$$y^2=2mx.$$

3. 次ノ曲線ニ於テ $(2,1)$ ノ傾度ヲ示セ：

$$x^4-2xy^2+y^5=13.$$　　答 10.

4. $3y=2x+x^4y^3,\quad 2y+3x+y^5=x^3y$ ナル曲線ハ原點ニテ直交スルコトヲ示セ．

第三編

應用

1. 切線及ビ法線　點 (x_0, y_0) ヲスギテ傾斜 λ ヲ有スル直線ノ方程式ハ

$$y-y_0=\lambda(x-x_0).$$

同ジ點ヲスギ前ノ直線ニ垂直線ノ方程式ハ

$$y-y_0=-\frac{1}{\lambda}(x-x_0)\quad \text{或ハ}\quad x-x_0+\lambda(y-y_0)=0.$$

(x_0, y_0) ヲ過ギル曲線

$$y=f(x)\quad \text{或ハ}\quad F(x,y)=0$$

ノ傾斜ハ $[D_x y]_{x=x_0}$ デアルカラ其點ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$(1)\qquad y-y_0=[D_x y]_{x=x_0}(x-x_0)$$

同様ニ法線（卽チ切線ニ垂直ナル線）ノ方程式ハ

$$(2)\quad y-y_0=-\frac{1}{[D_x y]_{x=x_0}}(x-x_0)\quad \text{或ハ}\quad x-x_0+[D_x y]_{x=x_0}(y-y_0)=0.$$

[例 I]　$x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{1}{8}$ ナル點ニ於テ　$y=x^3$ ナル曲線ノ切線ノ方程式ヲ作ルコト．

コヽニ

$$D_x y=3x^2,\ [D_x y]_{x=x_0}=[3x^2]_{x=\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}.$$

從テ切線ノ方程式ハ

$$y-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)\ \text{式ハ}\ 3x-4y-1=0.$$

[例 II]　曲線ガ楕圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ナリトセヨ．

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}D_x y=0,\quad \text{從テ}\quad D_x y=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

從テ切線ノ方程式ハ

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0).$$

コレハ次ノヤウニ變形サレル．

$$a^2y_0y-a^2y_0^2=-b^2x_0x+b^2x_0^2,$$

$$b^2x_0x+a^2y_0y=a^2y_0^2+b^2x_0^2=a^2b^2,$$

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

演習

1. 曲線 $y=x^3-x$ ノ原點ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メ，次ニ曲線ガ x ノ正軸ヲ截ル點ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メヨ．

答　$x+y=0,\ 2x-y-2=0.$

2. 圓

$$x^2+y^2=4$$

ニ於テ $(1, \sqrt{3})$ ノ切線ト法線トノ方程式ヲ求メ，ソウシテタダセ.

3. (x_0, y_0) ナル點ニ於テ双曲線ノ切線ノ方程式ハ

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

デアルコトヲ示セ.

4. 原點ニ於テ曲線

$$x^3 + y^3 = a^2(x-y)$$

ニ切線ノ方程式ヲ求メヨ. 答 $x=y$.

5. 双曲線

$$xy = a^2$$

ニ於ケル，任意ノ點ノ切線ト坐標二軸トデ作ツタ三角形ノ面積ハ常數ナルコトヲ示セ.

6. 曲線

$$x^5 = a^3 y^2$$

ト坐標ノ兩軸ガ正ノ方向ニ於テ成ス角ノ二等分線トノ交點ニ於ケル切線ト法線ノ方程式ヲ求メヨ. (原點ニ於ケルモノハ取除ク).

7. 曲線

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

ノ何レノ點ニテモ切線ノ坐標軸ノ間ノ部分ガ常數ナルコトヲ表ハセ.

8. 拋物線 $y^2=2ax$ ガ曲線

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

ヲ原點ト他ノ一點トデ截ル. 此第二ノ點ニ於ケル各曲線ノ切線ノ方程式ヲ書キ下セ.

9. 上問ノ二ツノ曲線ハ $32^0 12'$ ノ角デ第二ノ點デ交ルコトヲ證明セヨ.

---

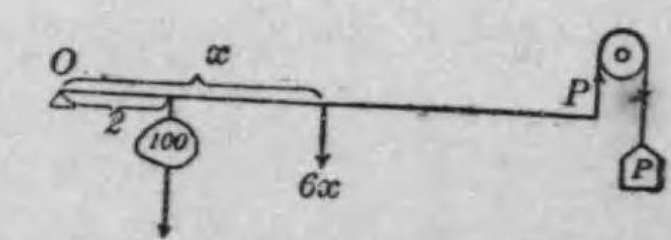
2. 極大，極小.

[問題] 槓杆アリ 100「ポンド」ノ重量ヲ持上グルニ支點カラ重點マデノ距離ハ 2 尺デ，槓杆ノ重サハ一尺デ 3「ポンド」デアル. 槓杆ニテ動スニ有益ナル長サハ幾何ナルカ.

槓杆ヲ長クスルト其目方ノ增加ノタメニ槓杆ノ利益ヲ減少セラレ，持上グルタメニ要スル力ハ增大スル.

一方ニハ非常ニ槓杆ヲ短クスルト例ヘバ支點ヨリ2尺離レルコトヽスルト槓杆ノミヲ持上ゲル力ハ少ナクナレドモ槓杆ヨリ僅少ノ利益ヲ受ケルコトヽナリ力Pハ大キクナル. 從テ中間ノ長サハ最モ少ナキPヲ與ヘル最有利ナル結果ヲ與ヘル.

x ハ槓杆ノ長サノ半ヲ表ハストセバ P ハ x ノ函數デアル.



然ルトキハ「グラフ」ヲ想像スルコトガ出來ル，ソウシテドコニ x ノ軸ニ最近ク來ル

カヲ見ルコトガ出來ル. 今支點 O ノ周リニ槓杆ヲ廻轉サセル力ノ能率ハ時針ノ運動ト同ジ方向ニ對シテ

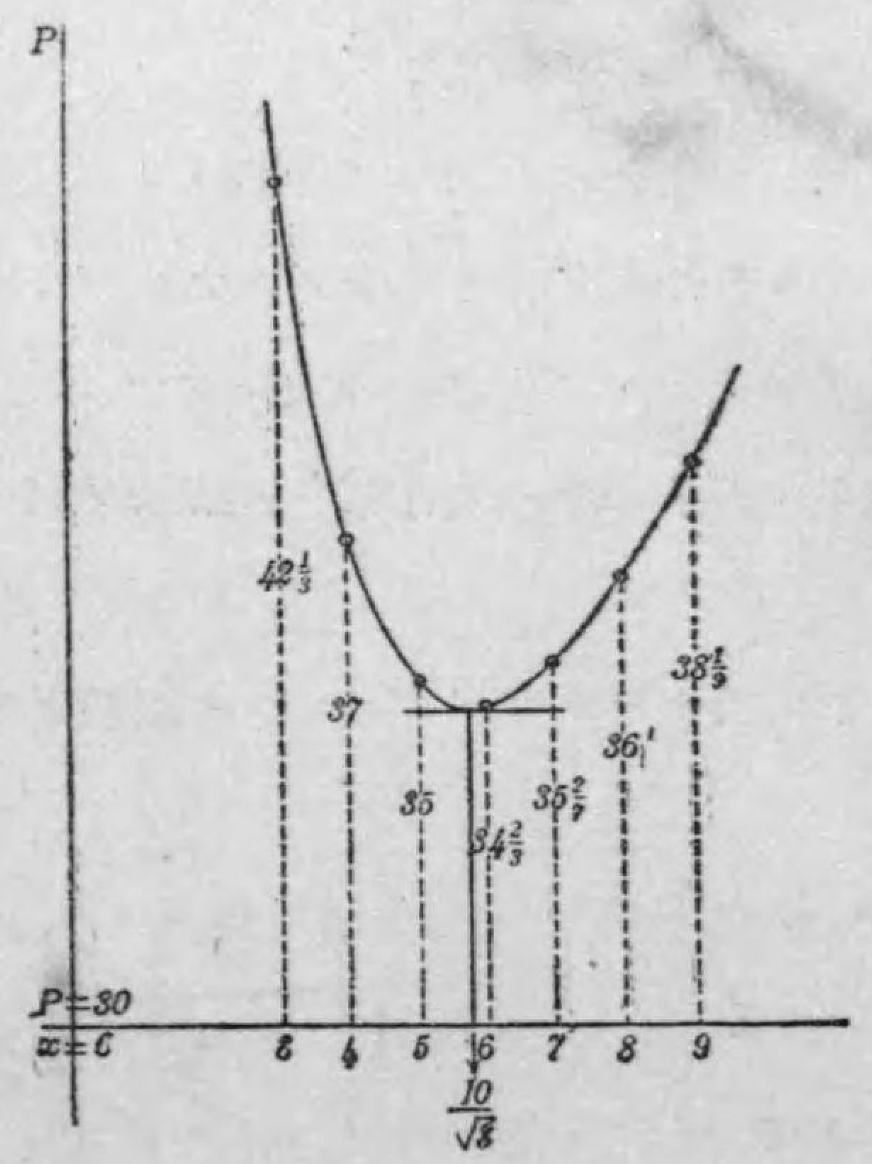
(a)　100×2…… 100「ポンド」ノ目方ニ拂フモノ,

(b)　$3 \times 2x \times x$…. 槓杆ノ目方ニ拂フモノ.

ソレニ依リ其和ハ反對ノ方向ニ於テ P ノ能率ニ等シ, 即チ $P \times 2x$ ニ等シ. 故ニ

$$200 + 6x^2 = 2Px \qquad P = \frac{100 + 3x^2}{x}.$$

x ノ僅少ノ値ヲ試ミルコト丶シ P ノ相當スル値ハ何デアルカヲ求ムルトセン.



x	P
3	$42\frac{1}{3}$
4	37
5	35
6	$34\frac{2}{3}$
7	$35\frac{2}{7}$
8	$36\frac{1}{2}$
9	$38\frac{1}{9}$

此圖カラ最モヨキ長サハ 5 ト 7 トノ間ノ x ノ値ニ相當スルコトガワカル. 此二ツノ數ノ間ニアル x ノ十分多クノ値ニ對シテ P ヲ計算スルト欲スル所ノ最モ都合ヨキ値ヲ見出スコトガ出來ルデアラウ. シカシ微分法ノ助ケデ計算ノ煩シサヲ除去シ能ハヌカ. 函數ノ「グラフ」ヲ見ルト x ノ値ハ最小サイ縱線ヲ有スル點ヲ求メルノニ歸着シ, 而カモ此點ハ切線ガ x ノ軸ニ平行ナルモノデ, 即チ曲線ノ傾度ガ 0 デアル場合デアル:

$$\tan\tau = D_x P = 0.$$

今 $D_x P$ ヲ計算シ 0 ニ等シト置ケバ

$$D_x P = -\frac{100}{x^2} + 3 = 0$$

$$x^2 = \frac{100}{3}, \qquad x = \frac{10}{\sqrt{3}} = 5.77.$$

從テ槓杆ノ最良ナル長サハ $2x = 11.4$ 尺デ, 相當スル P ノ値ハ 34.6「ポンド」デアル.

[例]　平方形ノ板紙アリ其一邊ハ 4 寸ナリ, 其四隅カラ小サイ同大ノ平方形ヲ切リ取リ其殘リノ部分ヲ折リ曲ゲテ箱ヲ作クラウトスル. 此仕方デ最大ナル箱ヲ作ルトキハ何程大キイモノガ出來ルカ.

先切取ル平方形ノ一邊ノ長サヲ x トシ, 箱ノ體積ヲ V トシ V ノ「グラフ」ヲ作レバ近似的ニ x ノ最都合ヨキ値ヲ定メルコトガ出來ル. シカシ微分法ニテ其勞ヲ省クコトガ出來ル.

上ノ例ハ極大極小ノ簡單ナル試ヲ暗示スル.

極大ノ試ミ. 函數

$$y=f(x)$$

ガ $a<x<b$ ナル間隙ニ連續的デアッテ, 此各端或ハ近クニ於テ有スル値ヨリハ中間ノ一點ニ於テ比較的大キイ値ヲ有スルトキニハ其間隙中ノ一點ニ於テ極大ノ値ヲ有スル

上ノ條件ノ下ニ $x=x_0$ ノトキ

$$D_x y=0,$$

モシ方程式ガ上ノ間隙ニ於テ唯一ツノ根ヲ有スルトキニハ此根ハ $x=x_0$ デアルデアラウ.

極小ニツイテノ試ミモ同樣デアル, 上ノ比較的大, 極大ト云フ語ヲ比較的小, 極小ニ變スルマデノコトデアル.

演習

1. $y=x^2+6x+10$ ノ極小値ヲ問フ. 答 1.

2. x ノ正値ニ對シテ $y=3x-x^3$ ノ極大ナル場合ヲ問フ.

3. x ノ如何ナル値ニ對シテ

$$\frac{12\sqrt{x}}{1+4x}$$

ガ最モ大ナル値ヲ有スルカ. 答 $x=\frac{1}{4}$.

4. $a<x<b$ ナル間隙ノ如何ナル點ニ於テ (a ハ正ナリトス) 函數

$$\frac{x}{(x-a)(b-x)}$$

ガ最小ナル値ヲ有スルカ 答 $x=\sqrt{ab}$

5. 二等邊三角形ノ等邊ノ長サ6寸デアル. 面積ガ極大ナルタメニ底邊ヲ何程トナスベキカ. 答 $6\sqrt{2}=8\frac{1}{2}$ 寸.

6. 2町歩ノ矩形狀ノ牧場ヲ直線的河岸ニ沿ヒテ取ルニ河ノアル側ニハ柵ヲ要セザルモノトス. 出來ル限リ柵ヲ短ク作ルニハ其形ヲ如何ニシテヨロシイカ.

答 長サヲ幅ノ2倍ニ取ル.

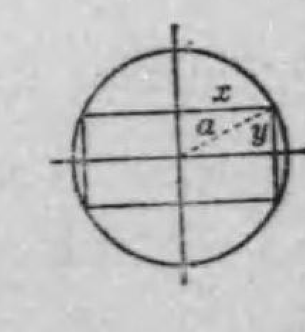
---

3. 續キ, 補助變數 極大極小ノ問題ヲ公式的ニ表ハストシ極大, 極小ヲ求メル其函數ヲ二ツノ變數(一ツノ關係ガアル)ニテ表ハストガ利益ナルコトガ度々アル. 次ノ例ハ之ヲ說明スル.

圓ニ內接スル最大ナル矩形ヲ求メルコト.

矩形ノ面積ハ, 高サガ小サクナルトキ, 小サクナリ, 底ガ小サクナルトキ小サクナル.

故ニ面積ハ中間ノ形ヲ有スルトキニ最大デアル.



$$u=4xy,\qquad x^2+y^2=a^2.$$

ト云フ方程式カラ y ヲ驅逐シテ u ヲ x ノ函數トシテ表ハセバヨロシ.

シカシ普通ハ驅逐スルノハヨクナイ此マヽデ微分スルノガヨロシ.

$$D_x u = 4(y + xD_x y) = 0, \qquad 2x + 2yD_x y = 0,$$

故ニ
$$D_x y = -\frac{x}{y}.$$

此値ヲ第一ノモノニ代入スルト

$$y - \frac{x^2}{y} = 0 \quad 或ハ \quad y = x,$$

即チ正方形デアル

演　習

1. 100ガロン入リノ容器ヲ作ルニ底ハ正方形ヲナシ, 側ハ垂直デアル. 内方ハ銅ヲ以テ蓋フニ經濟的ノ容器ノ作リ方如何.　　答　長サト幅トハ高サノ2倍ニスル.

2. 圓柱體ノ最大ナルモノヲ, 與ヘラレタ圓錐體ニ內容セヨ.

3. 圓柱體ヲ與ヘラレタル圓錐體ニ內容センニ, 其曲面積ノ最大ナルモノ如何.

4. 與ヘラレタル球ニ內容セラレル圓錐體ノ最大ナルモノヲ求メヨ.

5. 1「パイント」ヲ容ル圓柱體狀ノ「ブリキ」ノ柄杓ヲ經濟的ニ作ル法如何.　　答　$h = r$.

6. アカ茄子ノ1「クォート」ヲ容レル器ノ製作ニ出來得ルヽダケ小サキ「ブリキ」ヲ要スル器ノ作リ方如何.

7. 正六邊形ノ錫板ヨリ圓形ノカンノ底ト上部トヲ取ラントス. 其殘リハ全ク不用ニシテ損失ナリ. 最良ノ比例(即チ經濟的)ノ切リ方ハドウスルカ.

8. 「ノルマン」風ノ窓ハ上部ハ半圓形, 下部ハ矩形デアル. 窓ノ周圍ガ與ヘラレテオルト光線ヲ成可ク多ク入レルニハドンナ割合デ作ルベキカ.　　答　幅ト高サトヲ等シクス.

9. 梁ノ强サハ幅ニ比例シ, 厚サノ立方ニ比例スル. 直徑ガ1尺ノ丸太カラ强イ梁ヲ作ルニハ如何ニスルカ.

10. 靜水デ汽船ヲ走ラス一時間ノ費用ハ速度ノ立方ニ比例スル. 4「マイル」ノ流レニ逆ッテ汽船ヲ走ラス經濟的速度ヲ問フ.　　答　一時間ニ6「マイル」

11. 或人ノ家ノ前ニアル門ハ車道カラ20「ヤード」離レテヲル. 其人ハ毎時4「マイル」ノ速サデ步行スル. 毎時12「マイル」ノ速サデ歸リ來ル車ヲドコデ降ルト最早ク家門ニ達シ得ラレルカ.

10.√2 yard

12. 與ヘラレタ汽船ガ行クニ要スル石炭ノ費用ハ毎時速度ノ立方ニ比例シ10「ノット」ノ速度ニ對シ毎時20「ダラ」ナリ. 他ノ費用ヲ入レテ合算スルト毎時135「ダラ」デアルト—

時間ニ走ラス經濟的ノ速度如何.　答　每時15「ノット」.

13. 電柱ガ少シ曲ガリタルヲ支ヘタルニ 20 尺ノツッカヒヲシテ柱ト地上ノ棒トヲ, シツカリ結ビ付ケントスル. 柱カラ何程離レタ所ニ棒ヲウツベキカ.

14. 圓柱體ノ錫ノ容器ニ何程ノ深サマデ水ヲ入レルト重心ガ出來ルダケ下ニアルカ.

15. 直線的ノ河岸ニ最モ近イ A 點カラ 3「マイル」離レタ處ニアルボウトニ乘ツテ居ル. A カラ 5「マイル」離レタ點ニ最モ短キ時間ニ行カウト思フ. 其人ハ一時間ニ 4「マイル」ノ割合デ步ルキ, 一時間ニ 3「マイル」ノ割ニテ漕ク. 河岸ノドコノ點マデ漕クベキカ.

---

4. **速度**　t 時デ與ヘラレタ長サ s ヲ行ク平均速度トハ, 時ヲ以テ路程ヲ除シタモノデアル, 卽チ

$$\text{平均速度} = \frac{s}{t}.$$

汽車ガ半時間ニ二ツノ停車場ノ間ノ距離 15「マイル」ヲ行ク平均速度ハ $15/\frac{1}{2} = 30$「マイル」デアル.

シカシ今考ヘテキル速度ガ時トシテハ速ク, 時トシテハ遲キトキニハ或ル與ヘラレタ時ニ於テ近似的ニ其速度ヲ表ハスコトヲ得ルニハ問題上ノ時ニ續ク短少時ヲ取リ其平均速度ヲ論ズルノデアル.

例ヘバ靜止カラ石ヲ落ストキハ t 秒時ニ s 呎落チ

$$s = 16\,t^2$$

ト云フ法則ニ從フ. t_0 時經過ノ後何程落チルカヲ求メルニハ

$$(1) \qquad s_0 = 16\,t_0^2,$$

此レヨリ少シオクレテ初メヨリ t' 時ノ後デ

$$(2) \qquad s' = 16\,t'^2$$

$t'-t_0$ ナル間ノ平均速度ハ每秒

$$(3) \qquad \frac{s'-s_0}{t'-t_0}\ \text{「フィート」.}$$

特ニ 1 秒時ノ後ノ平均速度ハ

$$t_0 = 1, \qquad s_0 = 16.$$

$t'-t_0$ ト云フ瞬間ヲ 0.1 秒トスルト

$$s' = 16 \times 1.1^2 = 19.36,$$

$$\frac{s'-s_0}{t'-t_0} = \frac{3.36}{0.1} = 33.6^{\text{呎}} \ldots \text{每秒}$$

次ニ $\frac{1}{100}$ 秒ト云フ時ノ瞬間ニハ同樣ナ計算ヲ三個ノ有效數字マデナスト每秒

$$\frac{s'-s}{t'-t_0} = 32.2^{\text{呎}}$$

デアル. $\frac{1}{1000}$ 秒ノ瞬間ニハ平均速度ハ $32.0^{\text{呎}}$ デアル.

カヤウニ任意ノ時ニ石ノ速サヲ何程ニテモ直接ノ計算デ精密ニ得ルコトガ出來ルガ畢竟問題ノ時ニ後レタ十分短キ時

ニ於ケル平均速度ヲ得ルノデアル.

同ジ仕方デ或法則ニ從テ動ク點ニ就テ取扱フコトガ出來ル. シカシ微分法ノ助ケデ計算ノ勞ヲ避ケルコトハ出來ナイ. 又同時ニ與ヘラレタ瞬間ノ點ノ速度トハ何ヲ意味スルカヲ精密ニ定メルコトハ出來ナイ. $t'-t_0$ ナル時ノ間際ヲ t ナル變數ノ增加ト見テ $t'-t_0=\triangle t$ ト記シ, $s'-s_0=\triangle s$ ハ函數ノ相當スル增加ヲ表ハスナラバ

$$平均速度=\frac{\triangle s}{\triangle t}.$$

今 $\triangle t$ ハ 0 ニ近ヅクトキハ平均速度ハ一般ニ極限ニ近ヅク.

此時 t_0 時ニ於ケル速度ノ定義トシテ此極限ヲ採ル.

故ニ點ノ速度

$$\lim(t=t_0, ヨリ\ t=t'\ マデノ平均速度)$$

$$=(t=t_0)\ 時ノ實際ノ速度,$$

或ハ $$v=\lim_{\triangle t \doteq 0}\frac{\triangle s}{\triangle t}=D_t s.$$

故ニ一點ノ速度ハ其レカ運動シタル路程ノ時間的微係數デアル.

同樣ニ二點(一ツダケ或ハ二ツトモ)ガ動クトキ相互ノ距離ガ變ズル割合ハ相離レタ距離ノ時ニ關スル微係數デアル. ソウシテ如何ナル量ニテモ變シツヽアル割合ハ例3ノヤウニ

其時間的微係數デアル.

演習

1. 垂直ニ上ノ方ニ投ゲタ石ノ高サ(s 呎)ハ次ノ公式デ與ヘラレル(但シ t ハ投ゲテカラノ秒數):

$$s=48t-16t^2.$$

ソレガ一秒間上リツヽアツタトキ(a)次ノ $\frac{1}{10}$ 秒ノ間ニ平均速度, (b) 次ノ $\frac{1}{100}$ 秒ノ平均速度, (c) 初メノ1秒ノ終リニ於ケル實際ノ速度, (d) 何程高ク上ルカヲ計算セヨ.

答 (a)一秒時＝14.4呎, (b) 15.84呎, (c) 16呎, (d) 36呎

2. 身長6呎高キ人ガ一時間ニ4「マイル」ノ速サデ10呎高キ「ランプ」臺カラ眞直ニ立チテ離レルト, 敷石ニ於ケル其影ノ一端ハドンナ速サデアルカ.

3. 上問ノ影ガドンナ割合デ長クナリツヽアルカ.

4. 太陽ノ光線ガ地平面ト30°ノ傾ヲナス,球ガ垂直ニ上方ニ64尺ノ高サニ投ゼラル. 地上ニ於ケル影ガ地面ニ到着スルマデニドンナ速サデ動クカ.

5. 同時ニ同港ヲ出發シタ二船ガアル,一ツハ9「ノット」ノ速サデ東方ニ, 一ツハ12「ノット」ノ速サデ南方ニ行ッタ, 2時間ノ後ニドンナ速サデ離レツヽアルカ.

6. 上問ニ於テ第一ノ船ガ第二ノ船ヨリ一時間前ニ出港ス

ルト第二ノ船ガ港ヲ離レルトキドンナ速サデ離レルカ.

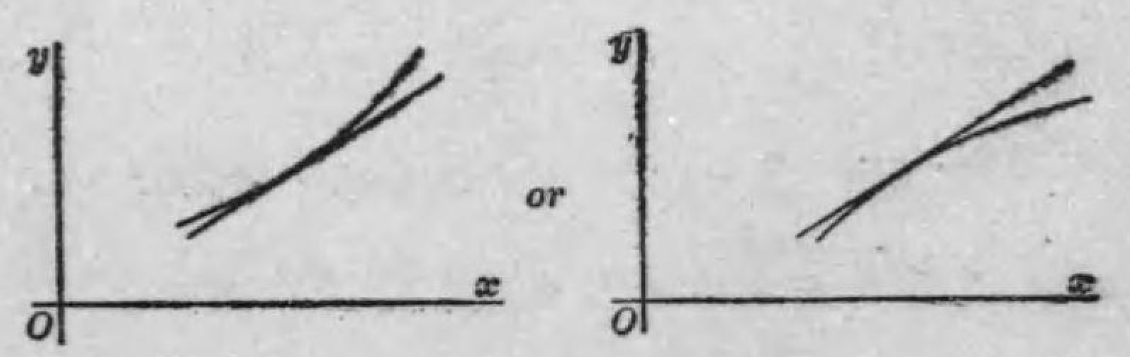
7. 一船ハ正午ニ他船ノ 20「マイル」北方ニアリテ一時間ニ 10「ノット」ノ割合デ南方ニ向ヒ進行シテヲリ, 第二船ハ一時間ニ 12「ノット」ノ割合デ西方ニ向ヒ進行シテヲル. 互ニ相近ヅクコトガ何程長ク續クカ.

8. 石ガ池ニ投ゼラレ同心圓, 波紋ヲ送ル, 波紋ノ半徑ガ一秒間ニ 6 尺ノ割ニテ增加スルトキ其ノ面積ハ第 2 秒ノ終リニ何程ヅヽ增加スルカ.

9. 人ガ一時間ニ 4「マイル」ノ割ニテ橋ノ上ニ行キ, 船ハ其直下ヲ一時間ニ 8「マイル」ノ割合デ漕ギツヽアツタ. 橋ハ船ノ上ニ 20 尺アリ. 3 分後船ト人トガドンナ速サデ離レツヽアルカ.

---

5. 增加或ハ減少スル函數 微分法ハ函數ハ獨立變數ガ增加スルトキ, 增加スルカ減少スルカヲ定メル簡單ナル手段ヲ與ヘル,「グラフ」ノ傾度ハ $D_x y$ ニテ與ラレルカラ, $D_x y$ ガ正デアルト x ノ增加ト共ニ y ハ增加ス, $D_x y$ ガ負デアルト y



ハ x ノ增加ト共ニ減少ス. 前ノ圖ハ一般ニ $D_x y$ ノ正ナルトキデアル.

定理 x ガ增加スルトキ

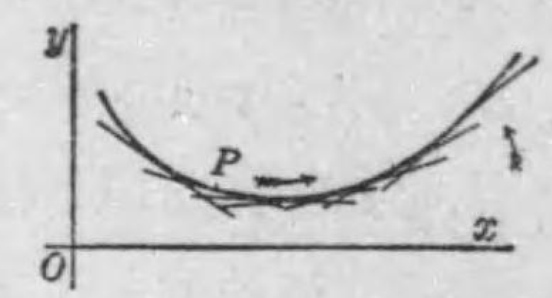
(a) $D_x y > 0$ ナラバ y ハ增加ス,

(b) $D_x y < 0$ ナラバ y ハ減少ス.

$y = f(x)$ ナル曲線ハ次ノ圖ノヤウニ凹ナル側ヲ上方ニ向ケル條件ヲ論ゼンニ, 曲線ノ傾度ガ x ノ函數デアル:

$$\tan\tau = \phi(x)$$

變化スル點 P ニ於テ切線ヲ論ゼン.



P ガ曲線ヲ畫キ同時ニ切線ガソレニ沿ヒテ動クトセバ切線ハ時針ノ反對方向ニ廻轉シ傾度ハ x ノ增加ト共ニ代數的ニ增加シ曲線ハ上方ニ向ツテ凹ム. 逆ニ傾度ガ x ノ增加ト共ニ減ズルトキ切線ハ時針ノ反對方向ニ廻轉シ, 曲線ノ凹方ハ下ノ方ニ向フ.

上ノ定理ニ依ツテ

$$D_x \tan\tau > 0$$

デアルトキ x ノ增加ト共ニ $\tan\tau$ ハ增加スルカラ曲線ハ凹方ヲ上ニ向ケル.

然ルニ微係數 $D_x \tan\tau$ ハ y ノ微係數ノ微係數デアル, コレヲ y ノ第二次微係數ト云ヒ之ヲ次ノヤウニ書ク.

$$D_x(D_x y) = D_x^2 y$$

曲線ガ下ノ方ニ凹ヲ受クルトキノ驗メシハ同樣ニ得ラレル，カクシテ次ノ必要ナル定理ニ達スル．

曲線ガ上方ニ凹ヲ受クル驗メシ．

曲線 (63 頁ノ圖ヲ見ヨ)

$$y = f(x)$$

ハ　$D_x^2 y > 0$　ナラバ　凹ヲ上方ニ向ケル，

　　$D_x^2 y < 0$　ナラバ　凹ヲ下方ニ向ケル．

曲線ガ或點マデ凹ヲ上方ニ向ケテオルモ其點ニ至テ下方ニ向ケルトキニハ其點ヲ「インフレクション」ノ點ト云フ，即チ $D_x^2 y$ ガ其點デ記號ヲ變ズル．シカルニ函數ガ連續性ヲ有スルカラ其點デ $D_x^2 y$ ハ 0 トナル．

「インフレクション」ノ點トナル必要ノ條件ハ

$$D_x^2 y = 0$$

デアルコトデアル．

6．**曲線ヲ畫クコト**　其方程式カラ曲線ヲ畫クコトハ最初ニ於テハ多クノ點ノ坐標ヲ計算シ函數ノ「グラフ」ニ似タモノヲ作ルコトニ歸着ス．今「グラフ」ノ性質ヲ定メル僅カノ計算デ出來ル有力ナ方法ヲ有スル，何トナレバ最初ニ或點ニ於ケル曲線ノ傾度ヲ見出シ，次ニドンナ間隙ニ凹ヲ上方ニ向ケテオルカ下方ニ向ケテオルカヲ定メルコトガ出來ルカラデアル．

例ヘバ次ノ函數ヲ作圖スルトシヤウ：

(1)
$$y = x^3 + px + q$$

最初ニ $q = 0$ トセバ

(2)
$$y = x^3 + px$$

$$D_x y = 3x^2 + p$$

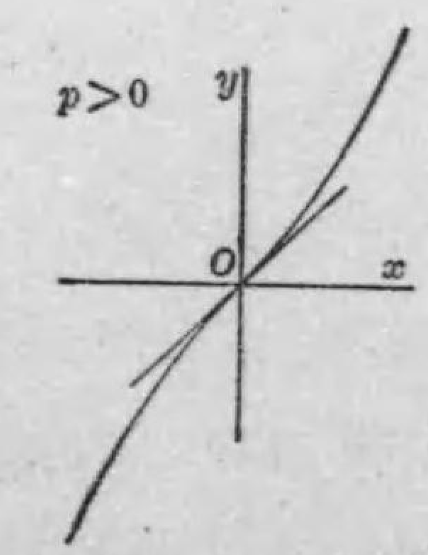
$$D_x^2 y = 6x.$$

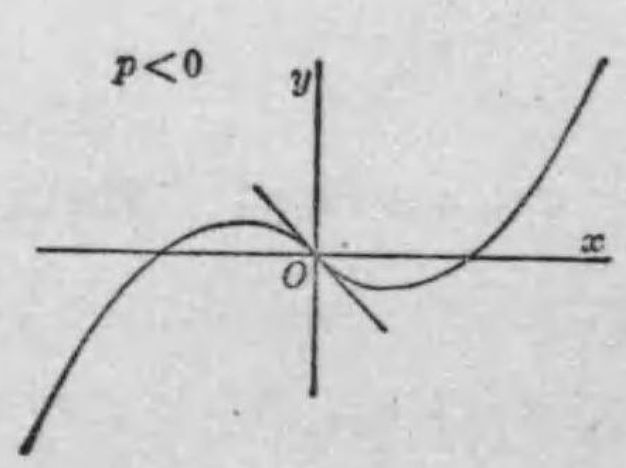
最後ノ方程式カラ曲線ハ x ノ正値ニ對シテ凹ヲ上方ニ向ケテオル，又 x ガ正デ無限大ナルトキ $D_x y$ ハ正デ無限大トナル (p ノ如何ニ拘ラズ)．

故ニ曲線ハ原點ヲスギ其傾度ハ

$$[D_x y]_{x=0} = p.$$

從テ圖形ハ x ノ正値ニ對シテ次ノ圖ノヤウナ性質ヲモツ．





x ノ負ナル場合ニ於ケル「グラフ」ヲ得ルニハ曲線ハ原點ニ關シテ對稱ナルコトヲ見ルニアリ，何トナレバ (x, y) ガ曲線上ノ點デアルナラ $x' = -x$, $y' = -y$ モ曲線ノ點デアルカラ

デアル. 故ニ一度 x ノ正ナル場合ニ就テ圖ヲ作ルナラバ 180° ダケ圖ヲ廻轉スレバ圖ノ殘部ヲ得ル.

終リニ x ノ軸ヲ平行ナル軸ニ移セバ (1) ノ「グラフ」ヲ (2) ノ「グラフ」カラ得ラレル, 其ノタメニハ變形ハ

$$x = x', \qquad y = y'-q$$

デアル卽チ (2) ハ

$$y'-q = x'^3+px'$$

トナル q ヲ移項シアクセントヲ取レバ (1) ナル方程式ヲ得ル. 此曲線ハ $x=0$, $y=q$ ナル點ニ關シ對稱デアル,

演　習

此演習ヲナスニハ方眼紙ヲ用意スルノガヨロシイ.

1. 曲線

$$y = \frac{3}{3+x^2}$$

ハ $-1<x<1$ ナル間隙ニ於テ凹ヲ下方ニ向ケル, x ノ他ノ値デハ上方ニ向ケル. インフレクションノ點ニ於テ傾度ヲ求メ, 又此等ノ點ニ於テ傾度ヲ求メ, ソウシテ曲線ヲ作圖セヨ.

2. 次ノ事項ヲ定メテ $4y = x^4-6x^2+8$ ナル曲線ヲ作圖セヨ.

(a) 坐標軸トノ交點.

(b) 凹ヲ上方ニ向ケタ間隙, 凹ヲ下方ニ向ケタ間隙.

(c) 「インフレクション」ノ點.

(d) 其切線ガ x 軸ニ平行ナル點.

精密ニ (a), (c), (d) ヲ作圖シ(單位トシテ 2「センチメートルヲ用ヒテ), 又此等ノ點ニ於テ精密ニ切線ヲ引キテ曲線ヲ作レ.

次ノ曲線ヲ作圖セヨ:

3. $10y = x^3-12x+9$.

(曲線ハ $x=3$ ナル點デ x 軸ヲ截ルコトヲ注意セヨ).

4. $y = x^3+2x^2-13x+10$.

5. $y = x-x^5$.

6. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

7. $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

8. $y = \dfrac{1}{1-x}$.

9. $y^2 = x^2+x^3$.

10. $y^2 = x(x-1)(x-2)$.

11. $y = \dfrac{1}{1-x^2}$.

12. $y^2 = \dfrac{x}{1-x}$.

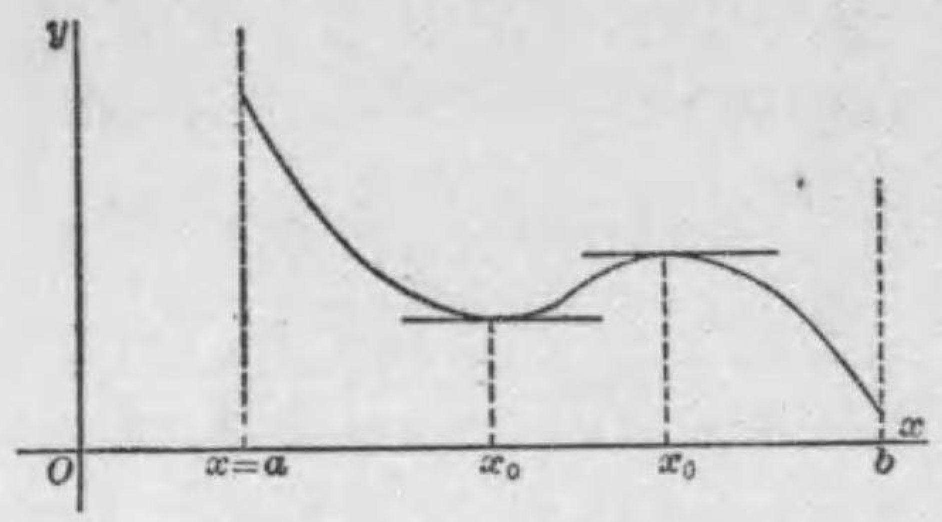
13. $y^2 = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

---

7. 比較的極大, 極小「インフレクション」ノ點, 函數

(1) $$y=f(x)$$

ガ $x=x_0$ ニ於ケル値ガ x_0 ノ近隣ニアル點ニ於ケル値ヨリ大ナルトキハ $x=x_0$ ニ於テ極大ナリト云フ. シカシ此樣ナ極大ハ $a \leqq x \leqq b$ ナル完全ノ間隙ニ於テ函數ノ最大値トハ異ッテオル. (次ノ圖ノ如シ)



此ワケデ比較的極大トイワレル,極大或ハ絶對極大トハ異ツテキル. 同樣ニ極小ニ就テイワレル (最大ヲ最小ナル語デ云ヒ替ヘテ)

極大特異性ハ切線ガ x 軸ニ平行スルコトデアル. ソウシテ曲線ハ凹ヲ下ノ方ニ向ケル. 同樣ニ極小ニ就テハ曲線ハ凹ヲ上ノ方ニ向ケル. 故ニ

極大,極小ノタメシ.

(a) $[D_x y]_{x=x_0}=0,\ [D_x^2 y]_{x=x_0}<0$ ナラバ $x=x_0$ ニ於テ極大デ,

$[D_x y]_{x=x_0}=0,\ [D_x^2 y]_{x=x_0}>0$ ナラバ $x=x_0$ ニ於テ極小ナリ.

此條件ハ十分ナル條件ナレドモ必要ナル條件ニアラズ.

例ヘバ

(2) $y=x^4$ ナル函數ニ於テ $x=0$ ニ於テ極小デアルケレドモ $D_x^2 y$ ハ正デナイ,0デアル. 尙上ノタメシハ實際ニ起ル場合ノ大半デアル. 此後ニ廣イ一般ノ場合ヲ得ルデアラウ.

[例]

$$y=x^6-3x^2+1$$

ト云フ函數ヲ取レ.

$$D_x y=6x^5-6x=6x(x^2-1)(x^2+1)$$

夫レヨリ $x=-1,0,1$ ニ於テ $D_x y=0$.

尙 $D_x^2 y=30x^4-6$

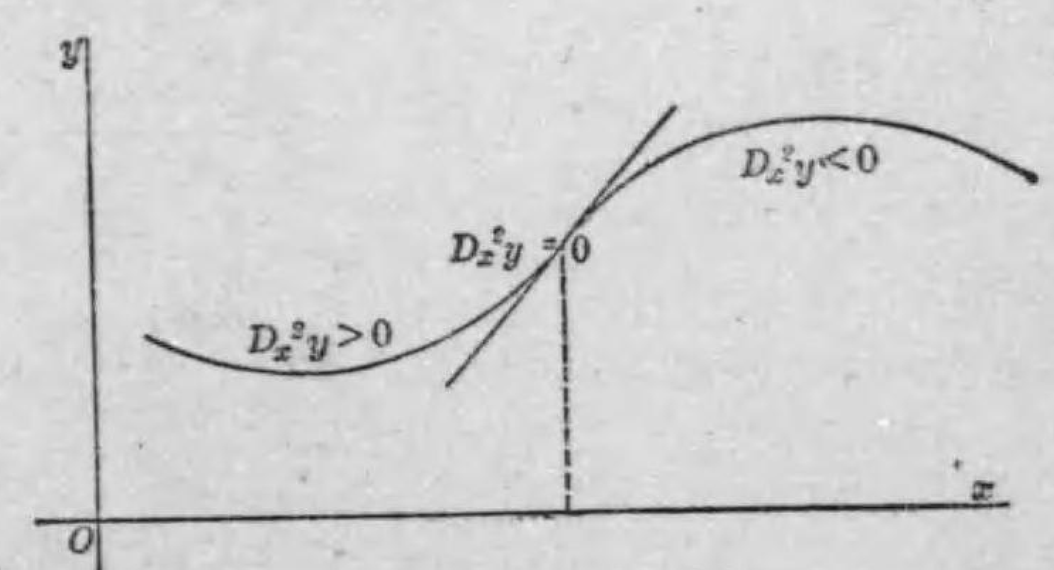
カラ

$[D_x^2 y]_{x=-1}=24>0,\ \therefore\ x=-1$ ハ極小,

$[D_x^2 y]_{x=0}=-6<0,\ \therefore\ x=0$ ハ極大,

$[D_x^2 y]_{x=1}=24>0,\ \therefore\ x=1$ ハ極小ナル場合ニ相當ス.

丁度見出シタ驗メシノ應用トシテ「インフレクション」ノ點ノタメニ十分ナル條件ヲ與ヘル. 必要ナル條件トシテ $D_x^2 y=0$ ヲ得タ,シカシ「インフレクション」ノ點ハ幾何學的



ニ,P點ガ曲線ヲ作成スル間ニPニ於ケル切線ガ一ツノ方向ニ廻轉スルコトヲ止メ,反對方向ニ廻轉スルヤウニ始メタ場合ノ現象デ性質ヅケラル. 從テ $\tan\tau$ ナル曲線ノ傾度ガ「インフレクション」ノ點デ極大,極小ノ何レカヲ有ス.

逆ニ $\tan\tau$ ガ極大或ハ極小トナル點ニ於テ曲線ハ「インフレクション」ヲ有ス, 何トナレバ $x=x_0$ ニ於テ $\tan\tau$ ガ極大ナリトセン. 然ルトキハ x_0 デ出發シ增加スルトキハ $\tan\tau$ 卽チ曲線ノ傾斜ハ代數的ニ減少シ, 曲線ハ x_0 ノ右方ニ凹ヲ下ニ向ケル. 一方ニ x ガ減少スルトキ $\tan\tau$ ハ減少シ, 曲線ハ x_0 ノ左ニ凹ヲ上ニ向ケル

上ノ定理ニ依リ $\tan\tau$ ハ極大, 極小ノ何レカヲ有ス:

$$D_x \tan\tau = 0, \qquad D_x^2 \tan\tau \neq 0.$$

ソレカラシテ $\tan\tau = D_x y$ ナルコトヲ記憶シテ次ノ定理ヲ有スル.

「インフレクション」ノ點ノタメシ.

$$\left[D_x^2 y\right]_{x=x_0} = 0, \qquad \left[D_x^3 y\right]_{x=x_0} \neq 0.$$

デアルト曲線ハ $x=x_0$ ナル點ニ於テ「インフレクション」ノ點ヲ有ス.

此レハ前ノヤウニ極大, 極小ノタメノタメシハ十分ナル條件デアル, シカシ必要ナル條件デハナイ.

[例] $12y = x^4+2x^3-12x^2+14x-1.$

然ルトキハ

$$12\,D_x y = 4x^3+6x^2-24x+14$$

$$12\,D_x^2 y = 12x^2+12x-24 = 12(x-1)(x+2)$$

$$12\,D_x^3 y = 12(2x+1).$$

$D_x^2 y = 0$ ト置キテ $x=1$, $x=-2$ ナル點ヲ得. ソウシテ

$$12\left[D_x^3 y\right]_{x=1} = 36 \neq 0,$$

$$12\left[x_x^3 y\right]_{x=-2} = -36 \neq 0,$$

故ニ此二ツトモ「インフレクション」ノ點デアル.

此等ノ點ニ於テ曲線ノ傾度ハ

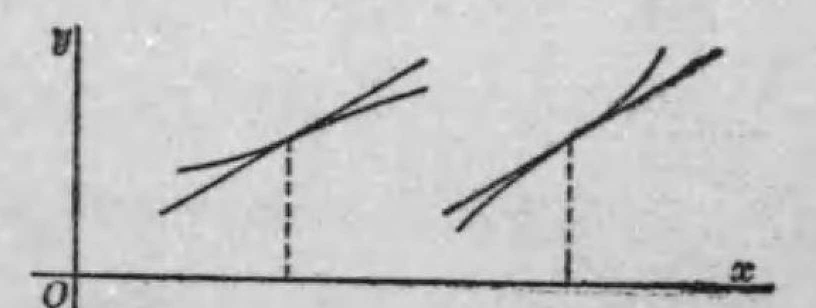
$$12\left[D_x y\right]_{x=1} = 0, \qquad 12\left[D_x y\right]_{x=-2} = 54,$$

故ニ曲線ハ二點ノ内ノ第一ノモノニ於テハ x ノ軸ニ平行シ第二ノモノニ於テ傾度ハ $4\frac{1}{2}$ ナリ.

演 習

次ノ曲線ニ極大, 極小,「インフレクション」ノ點ヲ檢シ,「インフレクション」ノ點ニ於テ曲線ノ傾度ヲ求メヨ.

1. $y = 4x^3-15x^2+12x+1.$
2. $y = x^3+x^4+x^5.$
3. $6y = x^6-3x^4+3x^2-1.$
4. $y = (x-1)^3(x+2)^2.$
5. $y = \dfrac{x}{2+3x^2}.$
6. $y = (1-x^2)^3.$
7. 次ノ圖ニ示スヤウナ「インフレクション」ノ二種ニ就テ區別ノアルコトヲタメセ.



8. 方程式ノ根ニ就テ. 方程式

$$f(x)=0$$

ヲ解クコトノ問題ハ幾何學的ニ次ノヤウニ形式ヅケラレル. x軸ト曲線トノ交點ヲ求ムルコトニ歸ス, 卽チ

$$y=f(x),\qquad y=0.$$

十分精密ニx軸ニ近キ部分ヲ表ハストキハ根ニ近キ値ヲ得.

度々與ヘラレタ間隙ノ中ニ何程ノ根ヲ有スルカヲ知ル重要ノ事實ガ起ル, 例ヘバ方程式ガ有スル正根ノ數ヲ求ムル場合ノ如シ, 此問題ニ答ヘル一手段ハ曲線ヲ畫クコトデアル.

例ヘバ方程式

$$x^6-3x^2+1=0$$

ナル方程式ニ於テハ

$$y=x^6-3x^2+1$$

ナル函數ハ十分大キイxノ値ノタメニ正デアル, 何トナレバ

$$y=x^6\left(1-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^6}\right)$$

ナル函數ノ括弧ノ中ハxノ增加ト共ニ正數トナリ, 第一函數ハ無限ニ大キクナルヲ以テ積ハ無限ニ大キクナル.

再ビ函數ハ $x=0$ (第7款) ノトキハ其値ハ正デ極大ヲ有ス. (其値ハ1). $x=1$ ニ於テ其値ハ負デ極小デアル.

從ッテ $x=0$ ト $x=1$ トノ間デxノ正軸ヲ截ルデアラウ.

再ビ上ノ方程式ハ$x>1$ニ於テ同樣デアルカラ二ツノ正ナル實根ヲ有ス. 更ニ多ク有スルカ否カ.

$0<x<1$ ナル間隙ニ於テ

$$D_x y = 6x(x^2-1)(x^2+1)$$

ハ負デアッテ, 函數ハ減少スルカラ「グラフ」ハx軸ヲ截ルベク, ソウシテ唯一回ナルベシ. ソウシテ $x>1$ デアルトキ $D_x y$ ハ正デアルカラ函數ハ增加スルカラ「グラフ」ハxノ軸ヲ截ル, シカシ唯一回デアル.

カヤウニ方程式ハ二ツノ正根ヲ有ス, 且ツ各正根ニ各負根ガ相應スルカラ二ツノ負根ト二ツノ正根トガアル, 從ッテ四個ノ實根ガアルコトガワカル.

一般ノ原則ハ此例ノヤウニ次ノ樣ニイワレル.

[定理] $f(x)$ ナル連續函數ガ $a<x<b$ ニ於テ記號ガ變ハリ其微係數ガ正デアルト(或ハ常ニ負デアルト)其間隙ニ於テ丁度一點ニ於テ函數ハ0トナル.

三次方程式

(1) $$x^3+px+q=0$$

ハ上ト同樣ニ取扱ハレル. 第6款デ示シタ函數

(2) $$y=x^3+px$$

ハ特ニ簡單デアル. 此曲線ガ

(3) $$y=-q$$

ナル線デ截ラレタ點ノ横線ハ (1) ナル三次方程式ノ根デアル.

今 $p \geqq 0$ デアルナラバ第59頁ノ二ツノ圖ノ初メノモノニ相當ス. (3) ナル線ハ曲線 (2) ヲ一點ニテ截ルカラ (1) ハ一實根ヲ有ス. 然レドモ $p<0$ ハ第59頁ノ第二ニ相當スルカラ三個ノ交點アルカ或ハソレヨリ少ナキカハ p ト q トノ大小ノ關係ニヨル.

(2) ナル函數ノ極大ト極小トハ

$$D_x y = 3x^2+p = 0, \qquad x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

カラ得ラレル. 極小ハ

$$x = \sqrt{-\frac{p}{3}}, \qquad y = \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

極大ハ

$$x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}, \qquad y = -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

故ニ q ノ絕對値ガ y ノ絕對値ヨリ大ナルトキ, 卽チ $q^2 > -\frac{4p^3}{27}$ デアルトキ (1) ハ一實根ヲ有ス. シカシ q ノ數値ガ $q^2 < -\frac{4p^3}{27}$ ナルトキハ三ツノ實根ヲ有ス. モシ $q^2 = -\frac{4p^3}{27}$ ナラバ二實根ヲ有シ, 其一ツハ二回ト算ス, 但シ $p=q=0$ デアルト三重根トシ, ソレヲ算ス.

スベテノ場合ヲ集メルト:

$$x^3+px+q=0$$

ナル三次方程式ハ

(a) $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$ ナラバ 一實根,

(b) 〃 <0 ナラバ 3實根,

(c_1) 〃 $=0$ ナラバ 2實根, (但シ p, q トハ二ツトモ0ナラズ)

(c_2) 〃 $=0$ ナラバ 1實根, ($p=q=0$)

(c_1) ノ場合ニハ一根ヲ二ツト算シ, (c_2) ノ場合ニハ根ヲ三ツト算ス.

演 習

1. 次ノ方程式ハ何程ノ實根ヲ有スルカ.

(a) $x^5-5x-1=0.$ (c) $3x^4-4x^3+12x^2+7=0.$

(b) $3x^4+4x^3+6x^2-1=0.$ (d) $x^{2n+1}+px+q=0.$

答 (a) 三ツ, (b) 二ツ, (c) 何モナシ.

2. 次ノ三次方程式ハ何程ノ實根ヲ有スルカ.

(a) $x^3+7x-1=0.$ (c) $x^3-3x-2=0.$

(b) $x^3-4x+1=0.$ (d) $x^3-x+3=0.$

3. 次ノ方程式ハ何程ノ正根ヲ有スルカ.

$6x^4+8x^3-12x^2-24x-1=0.$ 答 一ツ

4. 函數

$$f(x) = \frac{3}{(x-1)^8} + \frac{7}{(x-2)^9}$$

ハ $1<x<2$ ナル間隙ニ唯一根ヲ有スルコトヲ表ハセ.

5. 次ノ方程式ハ何程ノ實根ヲ有スルカ:

$$4x^3-15x^2+12x+1=0. \qquad \text{答 三ツ}$$

6. 平行ニ軸ヲ適當ニ變化シテ(新原點ハ x 軸ニアラシム),

即チ

$$x=x'+h, \qquad y=y'$$

トスレバ方程式

$$y=x^3+p_1x^2+p_2x+p_3$$

ハ新方程式

$$y=x^3+px+q$$

トナリ元ノ三次方程式ガ三ツノ實根ヲ有スル條件ヲ得ルコトヲ示セ.

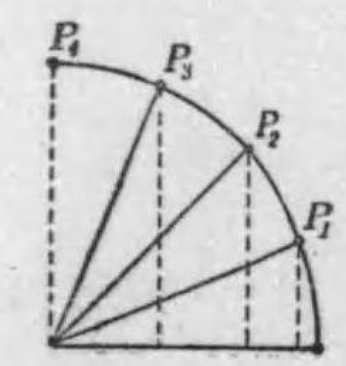
第 四 編

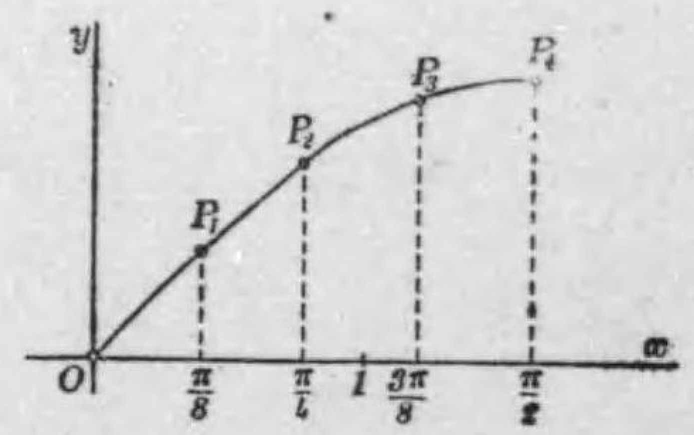
超 越 函 數 ノ 微 分 法

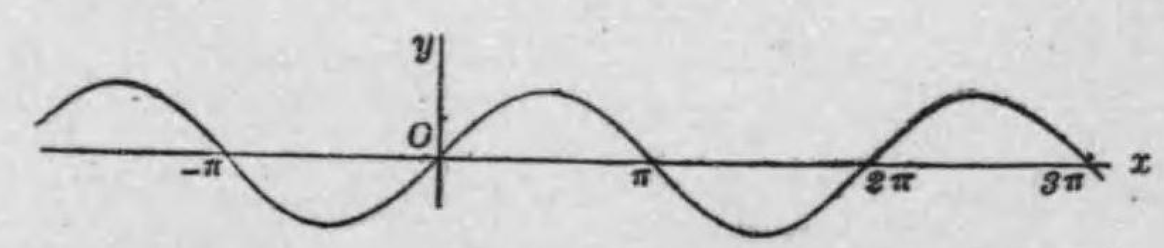
1. $sin\,x$ ノ微分法. 第一法.

(1) $$y=sin\,x$$

ノ「グラフ」ヲ幾何學的ニ作ルニハ單位ノ半徑ノ圓ヲ引キ種々ノ角ニ相應スル縱線ヲ作リ,角ハ「ラジアン」ニテ計リ之レデ横線ヲ作ルニアリ.







$sin\,x$ ヲ微分スルタメ x ニ任意ノ値 x_0 ヲ與ヘ,ソレニ相應スル y ノ値ヲ計算ス.

$$y_0=sin\,x_0$$

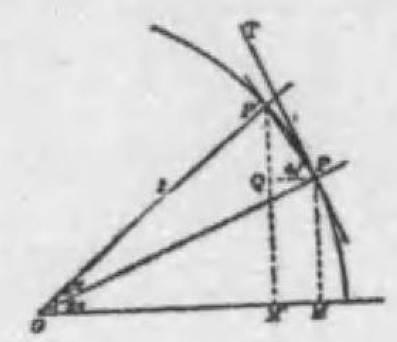
x ニ $\triangle x$ ナル増加ヲ與ヘ再ビ y ノ相當スル値ヲ計算ス

$$y_0+\triangle y=sin(x+\triangle x)$$

ソレヨリ　　$\triangle y = \sin(x+\triangle x)-\sin x$

(2)
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\sin(x_0+\triangle x_0)-\sin x_0}{\triangle x}$$

續ク大キサヲ作リテ幾何學的ニ此歩ミヲ取ラシムレバ次ノ圖ハ此圓ノ半徑ハ1デアルカラ



$$MP = \sin x_0,$$

$$M'P = \sin(x_0+\triangle x)$$

$$QP' = \sin(x_0+\triangle x)-\sin x_0 = \triangle y,\quad \breve{PP'} = \triangle x.$$

夫レカラ

(3)
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{QP'}{\breve{PP'}}.$$

此終リノ比ハ P′ ガ P ニ近ヅクニ從ヒ如何ナル極限ニ近ヅクカヲ見ルコト容易ナリ. 分母ハ弦PP′ニ近ヅク

$$\frac{QP'}{\overline{PP'}} = \sin\phi.$$

然ルニ
$$\lim_{P'\doteq P}\phi = \angle QPT = \frac{\pi}{2}-x_0,$$

$$\lim_{P'\doteq P}\frac{QP'}{PP'} = \cos x_0$$

シカシ小ナル角ノ弦ト弧トノ差ハ甚小ナリ. 從テ容易ニ

(4)
$$\lim_{P'\doteq P}\frac{\overline{PP'}}{\breve{PP'}} = 1.$$

ナルコトガワカル. 學生ハ 30^0 ノ角及ビ從テ 15^0 ノ弧ト弦ト

ヲ表ハス所ノ精密ノ圖ヲ引クコトヲ要求セラレル

(3)ナル比ニ還リテ且ツ

$$\frac{QP'}{\breve{PP'}} = \frac{QP'}{\overline{PP'}}\cdot\frac{\overline{PP'}}{\breve{PP'}}$$

ナル形ニソレヲ書キテ P′ ハ極限トシテ P ニ近ヅクトキ

$$\lim_{\triangle x\doteq 0}\frac{\triangle y}{\triangle x} = \left(\lim_{P'\doteq P}\frac{QP'}{\overline{PP'}}\right)\left(\lim_{P'\doteq P}\frac{\overline{PP'}}{\breve{PP'}}\right) = \cos x_0$$

下ノ記號ヲ取ルトキハ

(5)
$$\mathbf{D}_x \sin x = \cos x.$$

演　　習

同ジヤウニシテ

(6)
$$D_x \cos x = -\sin x$$

ヲ證明セヨ.

第二法　前法ハ容易ニ記憶ガ出來ルノデ利益ガアル. シカシ,解析的步度ハ幾何學的作法ニ反照セラレン,從テ不完全ナルコトノ不利益ヲ有ス,何トナレバ最初 $\triangle x$ ハ正ノ數デ 0 ニ近ヅクトシタ, 又 x_0 ハ 0 ト $\pi/2$ トノ間ニアリトシタ,ソレカラ全體トシテ又七ツノ論ズベキ場合ガアルカラデアル.

解析方法ハ次ノヤウニ簡單デ同時ニ一般デアル. sin ノ加法定理:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

ソレヨリ

$$\sin(a+b - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b,$$

$$a+b = x_0 + \triangle x, \quad a-b = x_0$$

トセヨ，a ト b トニ就テ此方程式ヲ解ケバ

$$a = x_0 + \frac{\triangle x}{2}, \quad b = \frac{\triangle x}{2}.$$

從テ $\sin(x_0+\triangle x) - \sin x_0 = 2 \operatorname{ccs}\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right) \sin \frac{\triangle x}{2},$

之ヲ微分レバ

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \cos\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}}.$$

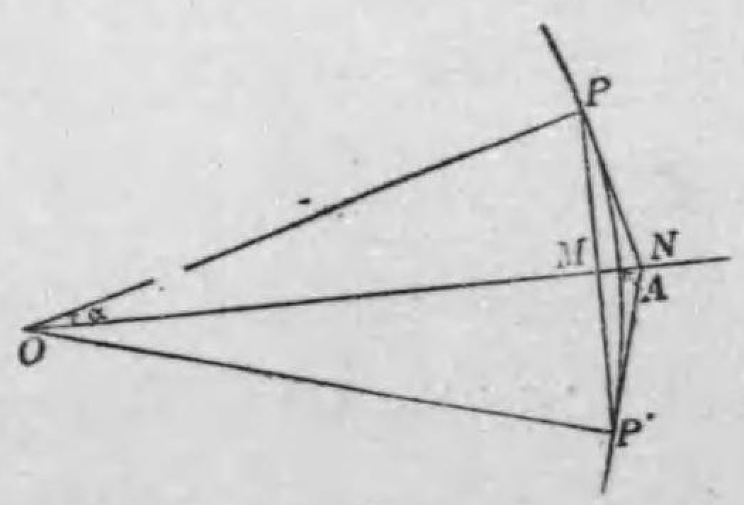
右邊ノ第一因數ハ $\cos x_0$，第二因數ハ

$$\lim_{a \doteq 0} \frac{\sin a}{a}$$

ナル形トナリ，再ビ弧ト弦トノ比ノ極限ヲ論ズルコトヽナル.

$\overline{PP'} = 2 \sin a, \quad \breve{PP'} = 2a,$

然ルニ (4) ナル極限ハ圖ノ直接ノ觀察ヨリ1ナルコトガワカル.



正式ノ證明ハ次ノヤウ

ニ幾何學的公理ニ基礎ヲ置ク卽チ第一ハ二點ノ間ノ最短距離ハ直線ナリト云フ公理卽チ

$$\overline{PP'} < \breve{PP'}$$

ト，第二ハ N ニ會スル P ト P' トノ切線ハ，凹狀線ハ之ヲ含ム同ジ端ヲ有スル凹狀線ヨリ小ナリト云フ公理卽チ

$$\breve{PP'} < PN + NP' = 2\,PN$$

從テ $\overline{PP'} < \breve{PP'} < 2\,PN$

$$PP' = 2\,PM$$

ニテ除スルニ

$$\frac{PN}{PM} = \frac{1}{\cos a}$$

ナルコトヲ注意スルト

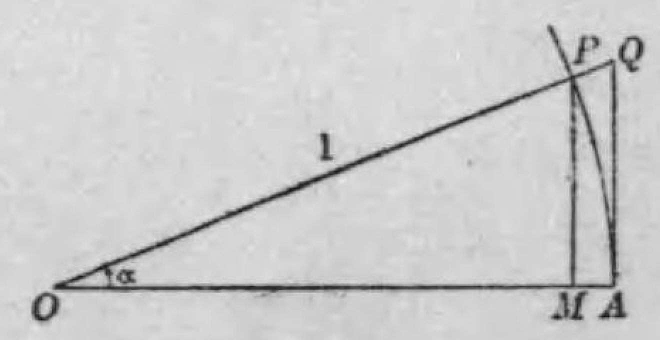
$$1 < \frac{\breve{PP'}}{\overline{PP'}} < \frac{1}{\cos a}.$$

a ガ 0 ニ近ヅクトキ $1/\cos a$ ハ 1 ニ近ヅク，從テ $\breve{PP'}/\overline{PP'}$ ハ定マリタル數 1 ト極限トシテ 1 ニ近ヅク變數トノ間ニアルヲ以テ

$$\lim_{\overline{PP'}=0} \frac{\breve{PP'}}{\overline{PP'}} = 1. \qquad q, e, d.$$

第二編第5款ニ示サレタ通リ此反數モ極限 1 ヲ有ス.

(4) ノ他ノ證明. 分圓 OAP ノ面積ハ $\frac{1}{2}a$ デアル.



ソレガ三角形 OMP ト OAQ トノ間ニアリ，ソレカラ

$$\frac{1}{2}\sin a\cos a < \frac{1}{2}a < \frac{1}{2}\tan a,$$

或ハ
$$\cos a < \frac{a}{\sin a} < \frac{1}{\cos a},$$

a ガ 0 ニ近ヅクトキ兩端ノ項ハ 1 ニ近ヅクカラ中央ノ項モ亦然ラザルヲ得ヌカラデアル, q. e. d.

表カラ $\sin 4^\circ 40' = 0.814$,「ラジアン」ニテ計リタル a ハ 0.814 ナル故ニ $\sin a$ ハ a トハ三ツノ有效數字相等シク 1/800 ヨリ小ナル誤差ヲ有スルノミデアル.

[注意] 上ニハ「ラジアン」法ヲ用ヒタ,一般ニカヤウニスルニハ理由ガアル. モシ度數ヲ用ヒルト

$$\frac{\Delta x}{360} = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{PP'}}}{2\pi}, \quad 或ハ \quad \Delta x = \frac{180}{\pi}\overset{\frown}{\mathrm{PP'}},$$

依ッテ (3) ハ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\pi}{180}\cdot\frac{\mathrm{QP'}}{\overset{\frown}{\mathrm{PP'}}}$$

微分法ノ公式ハ

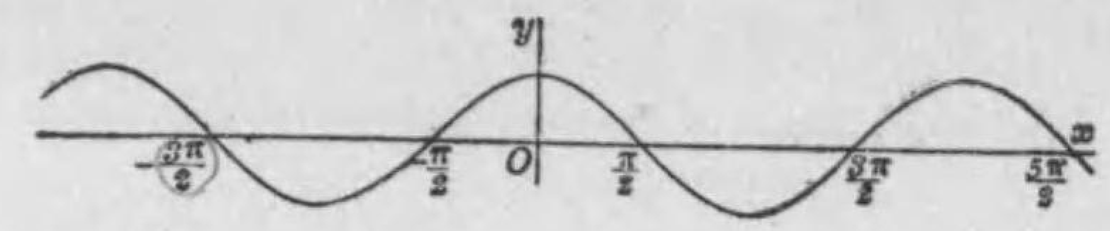
$$\mathrm{D}_x \sin x = \frac{\pi}{180}\cos x$$

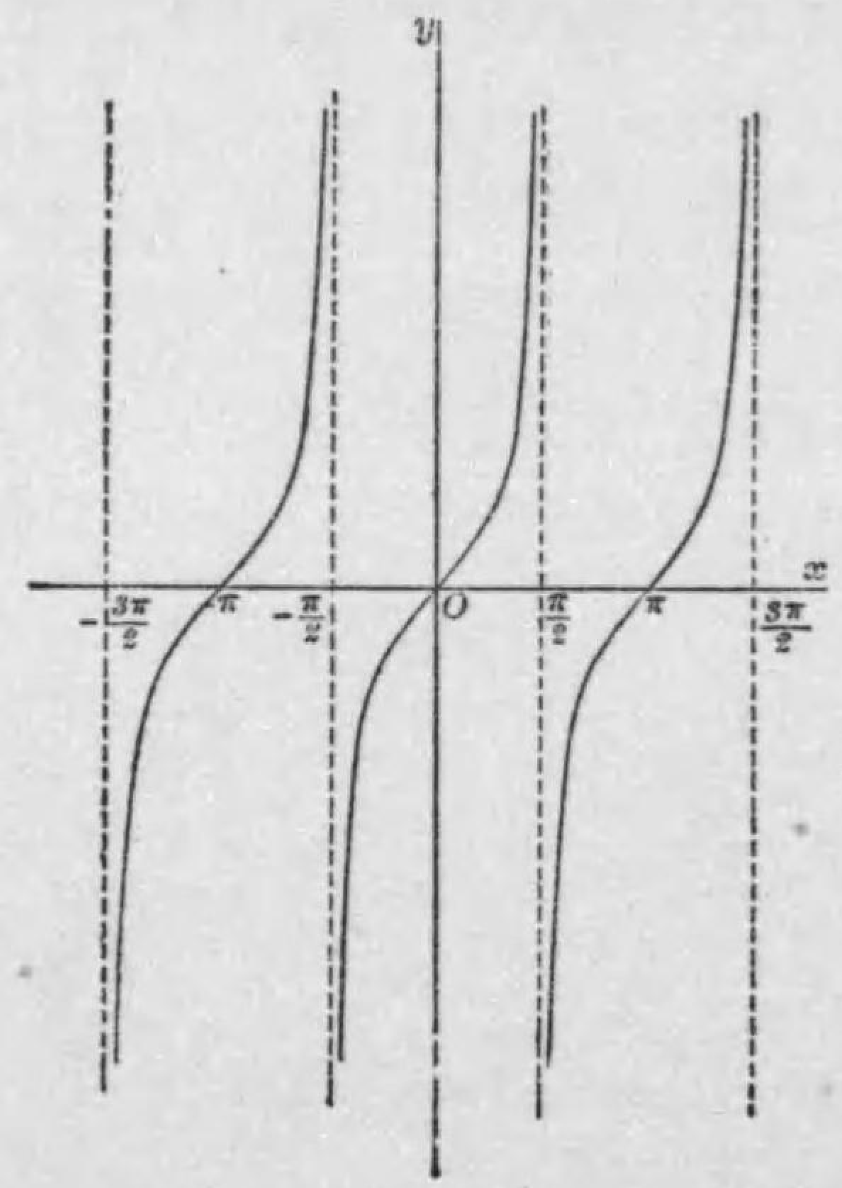
トナル. 微分スル毎ニ此常數ヲ乘ズルノ勞ヲ避クルタメニ「ラジアン」法ヲ用フル.

2. $\cos x$, $\tan x$ 等ノ微分法 $\cos x$ ヲ微分スルニハ

$$x = \frac{\pi}{2} - y$$

ト置ク





ソレデアルト

$$\cos x = \sin y$$

$$\mathrm{D}_x \cos x = \mathrm{D}_x \sin y = \mathrm{D}_y \sin y\, \mathrm{D}_x y = -\cos y$$

(7) $$\therefore\ \mathrm{D}_x \cos x = -\cos y.$$

$\tan x$ ヲ微分スルニハ

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

トスル. 從テ

$$D_x \tan x = \frac{\cos^2 x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(8) \qquad \therefore\ D_x \tan x = \sec^2 x$$

演　　習

1. 次ノコトヲ證明セヨ：

(a) $D_x \cot x = -\csc^2 x.$

(b) $D_x \sec x = \sin x \sec^2 x.$

(c) $D_x \csc x = -\cos x \csc^2 x.$

(d) $D_x \operatorname{vers} x = \sin x.$ $(\operatorname{vers} x = 1 - \cos x)$

次ノ函數ヲ微分セヨ.

2. $\sin 2x.$	6. $1-\sin x.$	10. $\cos^2 x.$
3. $\cos 2x.$	7. $x-\tan x.$	11. $\sec^2 x.$
4. $\tan \frac{x}{2}.$	8. $x \sin x.$	12. $\sin x \cos x.$
5. $\frac{\sin x}{a+b\cos x}.$	9. $\frac{1}{a\sin x+b\cos x}$	13. $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$

14. 74頁ノ圖ニ於テ直線デ分子, 分母ヲ表ハシ, 次ニ三角法變化デ $1-\cos\alpha$ ヲ半角 $\alpha/2$ ノ項デ表ハシ

$$\lim_{\alpha \doteq 0} \frac{1-\cos\alpha}{\alpha} = 0$$

ナルコトヲ證明セヨ.

---

3. 反函數　與ヘラレタ函數

$$y = f(x)$$

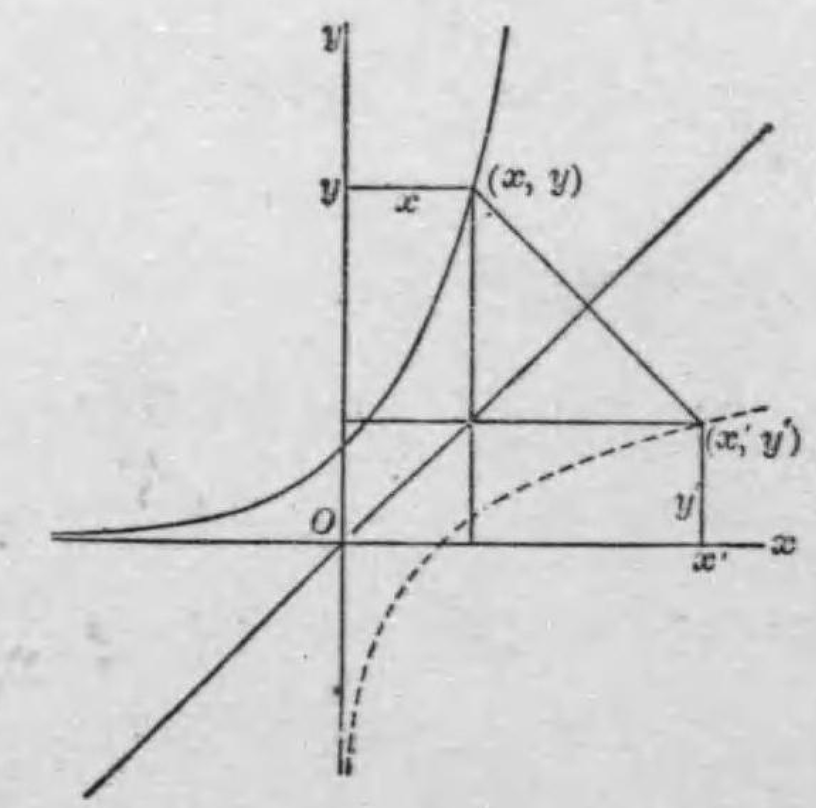
ヲ x ニ就テ解ヒテ得タ

$$x = \phi(y)$$

ヲ $f(x)$ ナル函數ノ反函數ト云フ. 前ノ函數ノ「グラフ」ハ後ノ函數ノ「グラフ」ヲ作ルタメノ用ニ供セラル (y ヲ獨立變數, x ヲ屬變數トシテ). x ヲ獨立變數トシテ反函數ヲ作ルニハ x, y ナル平面ヲ變形シ, 次ノヤウナ圖ヲ作ルノデアル.

$$x = y', \quad y = x'.$$

コレハ正ナル軸ノナス角ノ二等分線ノ周リニ 180^0 ダケ廻轉セシメルノデアル, 之ヲ他ノ語デ云ヘバ二等分線ニ平面ヲ反射セシメルノデアル.



反函數ノ例ハ既ニ第二編ノ第8款デ $x^{\frac{1}{q}}$ ナル根數ノ例デ出合ッタモノデアル.

x ノ増加ノタメニ常ニ y ガ増加(或ハ常ニ減少) スルノナラバ反函數ハ單値デアル.

此場合ニ於テ反函數ノ微係數ハ反函數ノ定義カラ得ラレル, 即チ

$$x = f(y) \quad ナラバ \quad y = \phi(x)$$

ト

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{\dfrac{\triangle x}{\triangle y}}$$

ナル關係カラ得ラレル.

ソレカラ $D_y x \neq 0$ ナレバ,

$$\lim_{\triangle x \doteq 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle y \doteq 0} \frac{1}{\dfrac{\triangle x}{\triangle y}}, \quad D_x y = \frac{1}{D_y x}$$

4. 反三角函數. (a) $\sin^{-1}x$

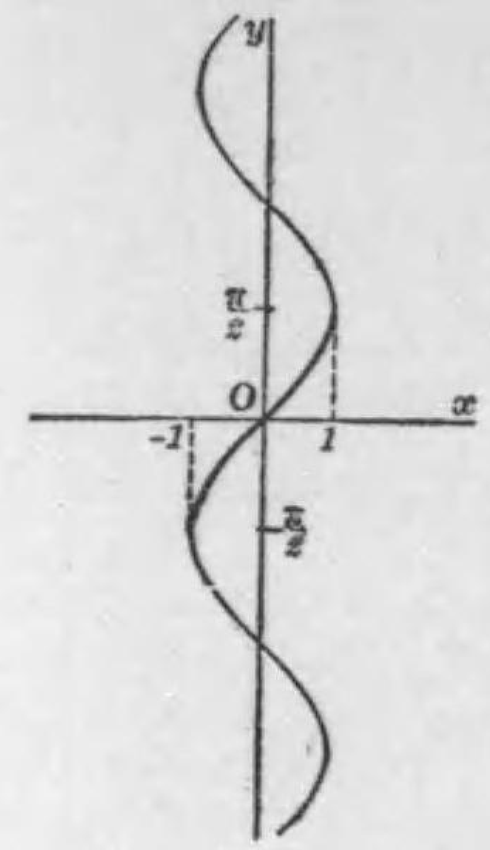
コレハ

(1) $$y = \sin x$$

ノ反函數デアルカラ第 3 欵デ說明シタヤウニ,此方程式ヲ解イテ x ヲ y ノ函數カラ得ラレル,卽チ

(1′) $$x = \sin^{-1} y \text{ (之レヲ } y \text{ ノアンチサイント讀ム)}$$

此圖ヲ作ルニハ $y = \sin x$ ノ圖ヲ正軸ノ二等分線ノ周リニ廻轉シテ出來ル. $x = x' \, (-1 < x' \leqq 1)$ ナル線ハ一點ヨリ多クノ點(無限ノ點)ニ於テ曲線ニ交ル. シカシ微分法ノ多クノ目的ノタメニ (2) ナル函數ノ一値ヲ有スルモノヲ取リ來リテ論ズルノヲ承認セラレ且ツ有益デアルカラ簡單ニ $-\pi/2$ ト $\pi/2$ トノ間ニアル値ヲ取リ來リ, $\sin^{-}x$ ハ單値函數トシテ取扱フ. 次ノ圖ノ部分ノフトキ線デ示サル, 此後何等ノ說明ナキ



トキハ之ヲ指示スルモノト約束ス.

卽チ

(3) $$y = \sin^{-1} x \quad ハ$$

(3′) $$x = \sin y. \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$$

ニ同値ナリ

特別ニ

$$\sin^{-1} 0 = 0, \quad \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

(3) ナル函數ヲ微分スルニハ陰函數狀ニ書イタ (3′) ヲ微分スルニアリ,卽チ

$$D_x x = D_x \sin y = D_y \sin y \, D_x y,$$

$$1 = \cos y \, D_x y \qquad \therefore \quad D_x y = \frac{1}{\cos y}.$$

今 $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ 或ハ $\cos^2 y = 1 - x^2$

(3′) ノ如ク制限セラレタ y ノ値ニ對シテ $\cos y \geqq 0$ デアルカラ

$$D_x \sin^{-1} x = \sqrt{1-x^2} \quad ノ$$

代リニ (4) $$D_x \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(b) $\cos^{-1}x$ ハ同ジ樣ニ微分セラレル.

(5) $y = \cos^{-1}x$ 卽チ $x = \cos y$ トス.

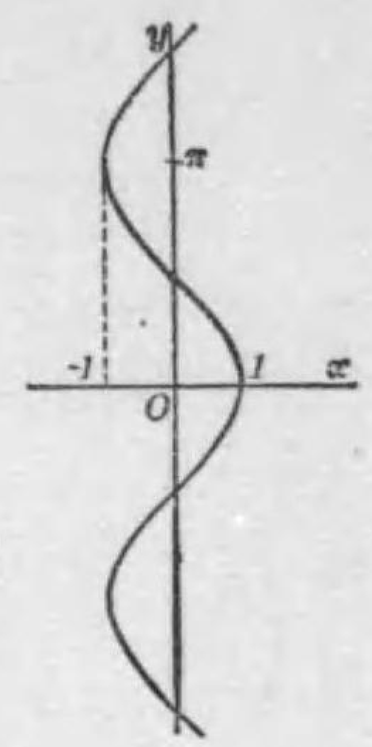
(6) $0 \leqq y \leqq \pi$ ト云フ關係ヲ滿足スル y ノ値ヲ選ミテ單値的ノ反函數ヲ作リ $\cos^{-1}x$ ヲ微分スルト

$$D_x x = D_x \cos y = D_y \cos y \, D_x y,$$

$$1 = -\sin y \, D_x y$$

(7) $$D_x \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ヲ得.



(3'), (6) ナル制限ノ下ニ $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ ハ

(8) $$\cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x$$

ソレカラ直接ニ (8) ヲ微分シテ (7) ヲ得ル.

(c) $\tan^{-1}x$ ヲ微分スルニハ

(9) $$y = \tan^{-1}x, \quad 卽チ \quad x = \tan y$$

ニ於テ

(10) $$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

ナル制限ニテ y ヲ取ル.

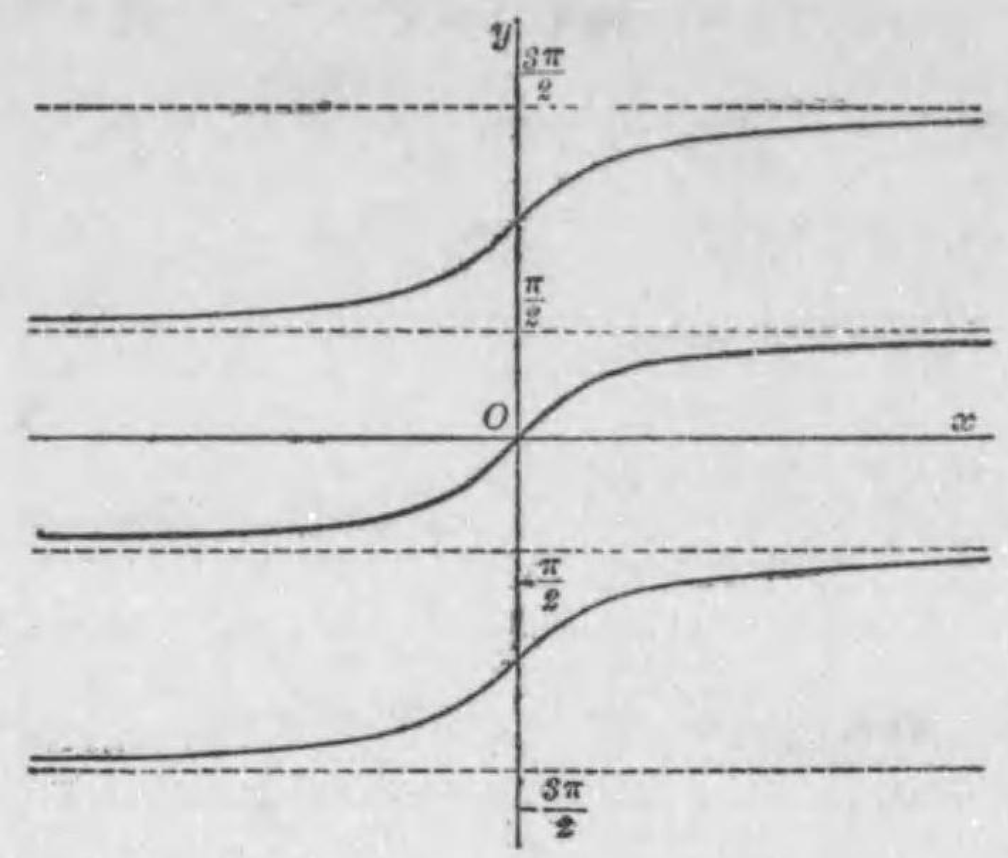
$\tan^{-1}x$ ヲ微分スルニハ陰函數狀ヲ用フ:

$$D_x x = D_x \tan y = D_y \tan y \, D_x y$$

$$1 = \sec^2 y \, D_x y,$$

(11) $$D_x \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

他ノ反三角函數ハ同ジ仕方デ取扱ハレル.大陸デハ



$\sin^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ ..... ハ $\arcsin x$, $\arctan x$...... ト書カレル.

［注意］ 反三角函數ハ乘價函數ナレドモ其內 $\sin^{-1}x$ ハ $-\frac{\pi}{2}$ ト $+\frac{\pi}{2}$ トノ間ニ取リ, $\cos^{-1}x$ ハ 0 ト π トノ間ニ取リ, $\tan^{-1}x$ ハ $-\frac{\pi}{2}$ ト $\frac{\pi}{2}$ トノ間ニ取リタルモノヲ主要値ト云フ.

加法定理ニ相當シテ反函數ノ基礎ノ關係ガアル, 例ヘバ $\tan^{-1}x$ ニ就テ

$$\tan^{-1}u + \tan^{-1}v = \tan^{-1}\frac{u+v}{1-uv}.$$

シカシ此關係ハ函數ノ主要値ヲ取ルトキ必シモ眞デナイカラソレヲ用ヒナイノガヨロシイ. シカシ u ト v トガ何レモ1ヨリ小デアルト主要値ハ上ノ公式ニ用ヒラレル.

演　　習

1. (a) $\cot^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$, (b) $\cot^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x$. ヲ證明セヨ.

2. 次ノ公式ヲ證明セヨ

(a) $D_x\cot^{-1}x=-\dfrac{1}{1+x^2}$,

(b) $D_x\sec^{-1}x=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, 但シ $0<\sec^{-1}x<\pi$.

(c) $D_x\csc^{-1}x=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$, 但シ $-\dfrac{\pi}{2}<\csc^{-1}x<\dfrac{\pi}{2}$.

d) $D_x\,\mathrm{vers}^{-1}x=\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$, 但シ $0\leqq\mathrm{vers}^{-1}x\leqq\pi$.

各場合ニ於テザツト函數ノ「グラフ」ヲ書ケ.

3. 次ノ函數ヲ微分セヨ.

(a) $\sin^{-1}\dfrac{x}{2}$.　(b) $\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$.　(c) $\cos^{-1}2x$.

---

5. 對數及指數. 第二編第8款ニ於テnノ一般ノ値ヲ有スルxガ變數ナル函數

$$y=x^n$$

ヲ論ジタ. 縦線ニ平行ナル直線デ其圖ノ曲線ノ群ヲ切ツタトセン, 卽チ

$$x=a,\qquad a>1$$

トセバ交點ノ或一ツノ縦線:

(1) $$y=a^n$$

ニシテnガ定マルトキ其値ハ定マルカラnノ函數デアル. 32頁ノ定理カラnガ増加スルトyモ増加ス. 又yハ常ニ正ニシテ$n=+\infty$デアルト限リナク大キクナリ, $n=-\infty$デアト0ニ近ヅク.

尙nガ可度量デアルトキノミ(1)ナル函數ハ定メラレテアル. 例ヘバ$n=\sqrt{2}$デアルト, ドンナ値ヲ有スルデアラウカ. nガ有理數ヲ通過スルトモ極根トシテ$\sqrt{2}$ニ近ヅクデアラウ, 從テa^nモ一定ノ極限ニ近ヅク, $a^{\sqrt{2}}$ハ此極限トシテ定ム.

$$\lim_{n\doteq\sqrt{2}}a^n=a^{\sqrt{2}}.$$

指數ガ他ノ不可度量ナルトキ同樣ニ取扱ハル.

カヤウニ定メラレタ函數

(2) $$y=a^x$$

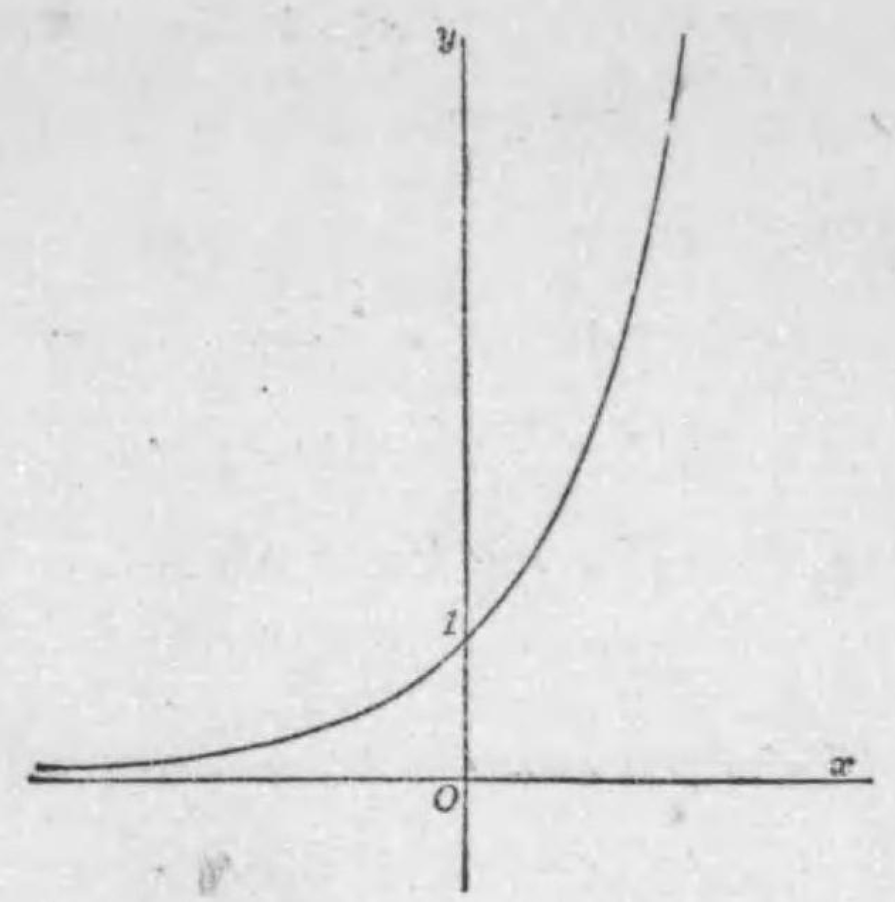
ハ連續ナリ. $a=2.72$ナル特別ノ場合ニ於ケル圖ハ次圖ニ示サル.

指數函數ノ重ナル性質ハ<u>加法定理</u>

(I) $$a^{u+v}=a^u\,a^v$$

デアル且ツ

(II) $$(a^u)^v=a^{uv}.$$

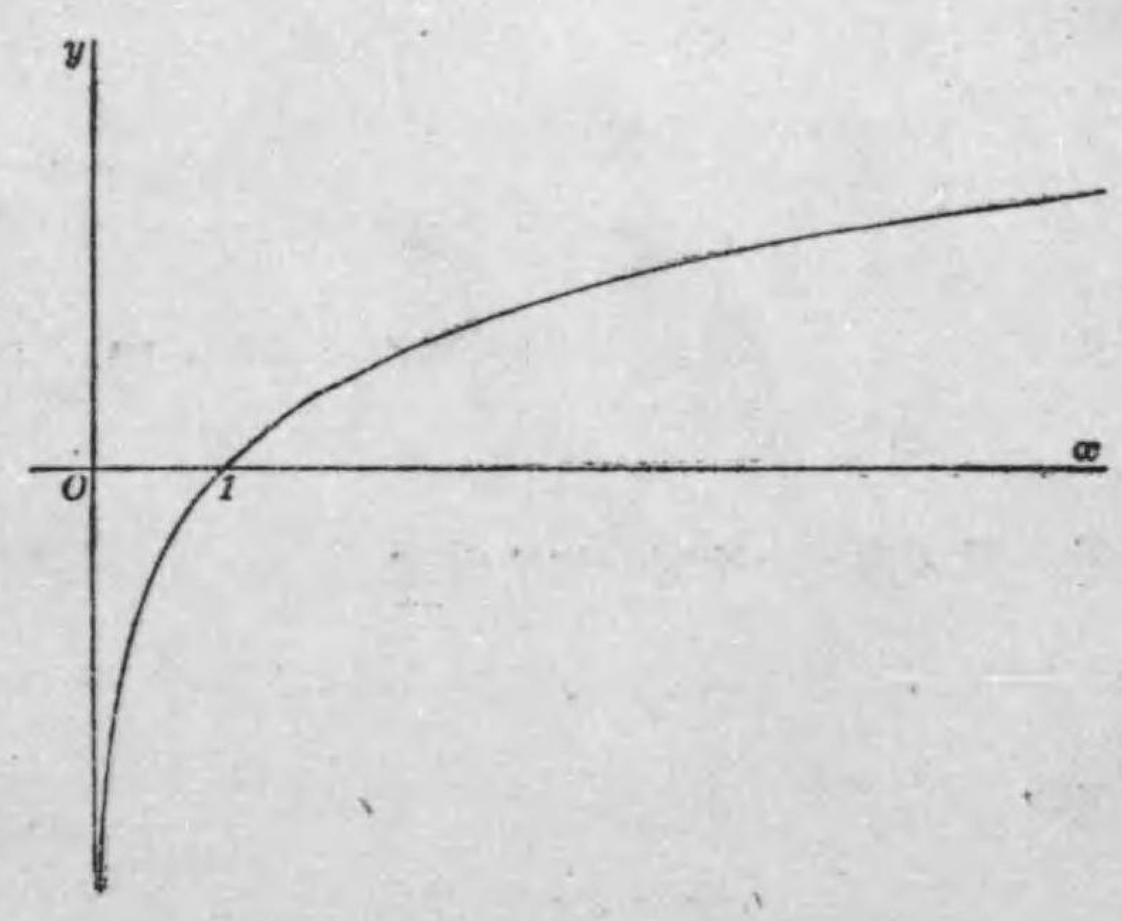


指數函數ノ逆ハ對數デアル, $x = a^y$ ナルトキハ

(3) $$y = \log_a x$$

x ノ正ナル値ニ就ノ單値デ, 連續デアル. 又

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad \log_a 0 = -\infty, \quad \log_a(+\infty) = +\infty$$



「グラフ」ハ正軸ノ二等分線ニ反射シテ次ニ反轉シテ $y=a^x$, ノ圖カラ作ルコトガ出來ル.

對數ノ性質ハ I ト II トカラ出テ來ル, 卽チ

(A) $$\log_a x + \log_a y = \log_a xy,$$

(B) $$\log_a x^n = n \log_a x,$$

(C) $$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

コレハ初等代數學デ證明セラルコトデアルカラ略スルコトヽスル, 但シ (c) ハ底ガチガツテヰル對數ヲ比較スルノニ用ヒルノデアル. 此 (c) ハ第二編ノ (V″) ノ公式ト似テヰルカラ記憶スルノニ困難ハナイ. 今此 (c) ダケ證明シヤウ

(α) $u = \log_a x$ 或ハ $x = a^u$

(β) $v = \log_b x$ 或ハ $x = b^v$

(γ) $c = \log_b a$ 或ハ $a = b^c$

トシ

$$u = \frac{v}{c}$$

ナルコトヲ證明スレバヨロシ.

(γ) カラ

$$b = a^{\frac{1}{c}},$$

(β) ノ b ノ代リニ此値ヲ用フレバ

$$x = a^{\frac{v}{c}}$$

(a) ノ x ノ代リニ此値ヲ用フルト

$$a^u = a^{\frac{v}{c}}.$$

今各對數ヲ取ルト,

$$u = \frac{v}{c} \text{ .... } q.e.d.$$

特ニ $x=b$ ト置クトキハ (c) ハ

$$(4) \qquad log_a b = \frac{1}{log_b a}$$

トナル.

次ノ恒等式ハ度々用ヒラレル, 即チ (3) y ノ値ヲ $x=a^2$ ノ y ニ置キ換ヘルノデアル.

(5)

$$x = a^{log_a x}$$

又　(6)　$$x^n = a^{n\,log_a x}$$

今迄ハ a ガ 1 ヨリ大ナリトシタ. $0<a<1$ ノ場合ニハ $y=a^x$ ノ「グラフ」ヲ縦線ニツキ反轉セシメ, $y=log_a x$ ノ「グラフ」ヲ横線ニツキ反轉セシメルト得ラレル.

演　　習

此演習題ハ初等代數學デスルコトデアルカラ略ス. 例ヘバ

$(a)^{x^x}$ ト $(a^x)^x$ トハ同ジキカ否カ.

6. $log\, x$ **ノ微分法.** 函數

$$y = log\, x$$

ヲ微分スルコトヲ示ソウ

微分商ヲ作ランニ:

$$(7) \qquad \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{log_a(x_0+\triangle x) - log_a x_0}{\triangle x} = \frac{log_a\left(1+\dfrac{\triangle x}{x_0}\right)}{\triangle x},$$

$\triangle x$ ガ 0 ニ近ヅクトキ如何ナル極限ヲ有スルカヲ見ンニ,

$$\frac{x_0}{\triangle x} = \mu$$

トスルト, 上ノ式ハ

$$(8) \qquad \frac{1}{x_0}\cdot\frac{x_0}{\triangle x}\, log_a\left(1+\frac{\triangle x}{x_0}\right) = \frac{1}{x_0}\,\mu\, log_a\left(1+\frac{1}{\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{x_0}\, log_a\left[\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right],$$

$\triangle x$ ガ 0 ニ近ヅクトキ μ ハ無限大トナルカラ, 問題ハ

$$\lim_{\mu=\infty}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)$$

ヲ求ムルコトヽナル. μ ガ唯正ナル整數ヲ通過スルモノトシ, 即チ

$$\mu = n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

トシ

$$\phi(\mu) = \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}$$

トセバ, 計算ニテ

$$\phi(1) = 2,$$

$$\phi(2) = 2.25,$$

$$\phi(3) = 2.37,$$

$$\phi(10) = 2.59,$$

$$\phi(100) = 2.70,$$

$$\phi(1000) = 2.72,$$

$$\phi(10000) = 2.72,$$

n ガ増加スルトキ $\phi(n)$ ハ増加スレドモ, 3 ヨリ小ナル或數ヨリ大ナルコトハナイ. コレハ如何ホド n ヲ大キクシテモ,ソウダト云フコトガワカル. 二項定理:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots$$

ニ依ツテ

$$\phi(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots\ldots \quad +(n+1)\text{ 項マデ}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{n}}{1.\ 2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.\ 2.\ 3} + \ldots\ldots$$

此等ノ項ハスベテ正ニシテ n ノ増加ト共ニ増加シ,又加フベキ項ノ數モ増ス. コノ二ツノ理由ノタメニ

$$\phi(n+1) > \phi(n).$$

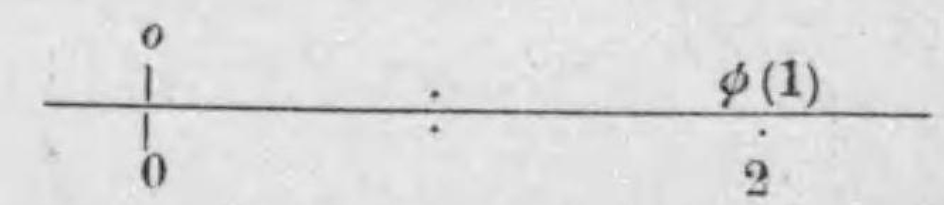
次ニ $\phi(n)$ ハ 3 ヨリ小ナリ,何トナレバ第二項以後ハ

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

ヨリ小ナリ,而シテ此等比級數ノ總和ヲ求ムレバ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

カヤウニ $\phi(n)$ ハ n ノ増大シテモ $3-\frac{1}{2^{n-1}}$ ヨリ小サイカラ無論 3 ヨリ小サイ.



n ノ増大ト共ニ増大スル n ナル正整數ノ函數ガ或定マリタル A ヲ超過セヌナラバ $n=\infty$ ノトキ A ヨリ大デナイ或極限ガアル筈ナリ (第十二編第二款ヲ見ヨ). ソレカラシテ $\phi(n)$ ハ e ト云フ或極限ニ近ヅク (3 ヨリ大キクナイ)

$$(9) \qquad \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

此後

$$e = 2.718$$

ナルコトヲ示スデアラウ.

μ ガ無理數デ負數デアルトキハ μ ガ連續的ニ變化シテ正ノ無限大ニナルトキ $\phi(\mu)$ ハ極限 e ニ近ヅクコトヲ示ソウ.

今 μ ハ

$$n<\mu<n+1$$

トシヤウ.

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{\mu}<1+\frac{1}{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\mu}<\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu}$$

此不等式ノ左邊ノ μ ヲ n トシ, 右邊ノ μ ヲ $n+1$ トスレバ不等式ハ愈强サヲ增ス, 卽チ

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}<\phi(\mu)<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

μ ト n トガ共ニ無限ニ大キクナルト複不等式ノ兩端ノ式ハ極限 e ニ近ヅクカラ中央ノ式モ e ニ近ヅク

$$\lim_{\mu=0+\infty}\phi(\mu)=e.$$

終リニ $\mu=-r$ トセバ

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}=\left(1-\frac{1}{r}\right)^{-r}=\left(\frac{r-1}{r}\right)^{-r}=\left(\frac{r}{r-1}\right)^{r}$$

$$=\left(1+\frac{1}{r-1}\right)^{r}=\left(1+\frac{1}{r-1}\right)^{r-1}\left(1+\frac{1}{r-1}\right).$$

$\mu=-\infty,\ \ r=\infty$ デアルト

$$\lim_{\mu=-\infty}\phi(\mu)=e.$$

今 (7) ト (8) ナル方程式ニ歸リ且ツ $\log_a x$ ハ連續函數デアルコトヲ記憶スルト

$$\lim_{\triangle x=0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{\mu=\pm\infty}\left[\frac{1}{x_0}\log\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right]$$

$$=\frac{1}{x_0}\log\left[\lim_{\mu=\pm\infty}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right]=\frac{1}{x_0}\log_a e$$

下ノ記號ヲ取レバ

(10) $$D_x\log_a x=\frac{\log_a e}{x}.$$

對數ノ底 a ハ隨意デアルカラ常數因數ヲ

$$\log_a e=1$$

トス, 卽チ $a=e$ トスレバ

(11) $$D_x\log_e x=\frac{1}{x}.$$

此底ノ e ハ自然底トイハレル, 又ソレヨリ出來タ對數ヲ自然對數又ハ「ナピーリアン」對數ト云フ, 底ガ 10 デアル場合ノ常用對數ト區別スルタメニ時ニ此名ガアルノデアル.

微分ヤ積分ニハ自然對數ヲ用ヒルノハ公式ノ上ニ簡單デアルカラデアル, ソレハ丁度角ヲ「ラジアン」法デ測ルノト能ク似テヲル.

微積分法ニハ e ヲ書カヌコトニシテアル, 卽チ $\log x$ ト書イテ $\log_e x$ ヲ表ハシ, 普通ノモノハ $\log_{10} x$ ト書ク.

7. **複利ノ法則.** 上ノ (9) ナル公式ハ複利法ニ用フルコトガ出來ル. 例ヘバ 1000 圓ノ 6 分利ヲ半年毎ニ計算スルト, 一年ノ終リニハ

$$1000\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^2$$

同様ニ一年ニ3回, 4回,…… ニ利息ヲ計算スルト一年ノ終リニハ

$$1000\left(1+\frac{0.06}{3}\right)^3, \quad 1000\left(1+\frac{0.06}{4}\right)^4, \ldots\ldots$$

デアルカラ n 回計算スルト一年ノ終リニハ

$$1000\left(1+\frac{0.06}{n}\right)^n.$$

n ガ無限ニ大キクナルト

$$\phi(\mu)=\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu.$$

ハ μ ノ無限大トナルトキ e ニ近ヅクカラ

$$1000\left[\left(1+\frac{0.06}{n}\right)^{\frac{n}{0.06}}\right]^{0.06}$$

トスレバ

$$1000\,e^{0.06}=1061.84$$

トナル, 卽チ複利息ヲ何等損毛ナク計算シタモノデアル.

演　習

1000圓ヲ年4分ニテ10年間貸借スルトキ毎年利息ヲ計算シタルモノト, 連續的ニ利息ヲ計算シタルモノトノ差ヲ求メヨ.　　答 5.88圓ノ差

8. **e^x, a^x ノ微分法.** a^x, $log_a x$ ハ互ニ反スル函數デアル:

(12) $\quad x=log_a y$ デアルナラバ $y=a^x$

特ニ

(13) $\quad x=log\,y$ デアルナラバ $y=e^x$

x ニ關シテ第一ノモノヲ微分スルト

$$D_x x = D_x log\,y = D_y log\,y\,D_x y, \qquad 1=\frac{1}{y}D_x y$$

(14) $$\therefore\ D_x e^x = e^x,$$

同様ニ (12) ヲ取扱ヘバ

$$1=\frac{log_a e}{y}D_x y,$$

第5款ノ (4) ニ依ッテ

$$log_a e = \frac{1}{log_e a}$$

デアルカラ

(15) $$D_x a^x = a^x\,log\,a.$$

<u>n ガ無理數ナル x^n ノ微分法</u>. 第5款 (6) ニ依ッテ

$$x^n = e^{n\,log\,x}.$$

今 $z=n\,log\,x$ ト置ケバ

$$D_x x^n = D_x e^z = D_z e^z . D_x z = e^z n . \frac{1}{x} = nx^{n-1}$$

今ハ新ラシ極限ヲ値付ケルコトナシニ初歩ノ函數ノ或モノヲ微分スルコトガ出來ルヤウニ成ッタ, 何トナレバ第二編

ノ I――V ノ定理ノ助ケデ已ニ我々ノ所領ノ特別ノ公式ニ歸着セシメ得ルヤウニ成ツタカラデアル. シカシ微分法ノ腕前デ要用ナル助力ガ微分法デ供給セラレルコトハ次ノ編デ示スデアラウ. 此編ニ於ケル練習題モ其方法ガ示サレルマデ延期シヤウ.

演　習

次ノ函數ヲ微分セヨ:

1. $y = log_{10} x$. 答 $D_x y = \dfrac{0.4343}{x}$.

2. $y = 10^x$. 答 $D_x y = 2.303 \times 10^x$.

3. $y = log\, sin\, x$.

4. $y = e^{cos\, x}$.

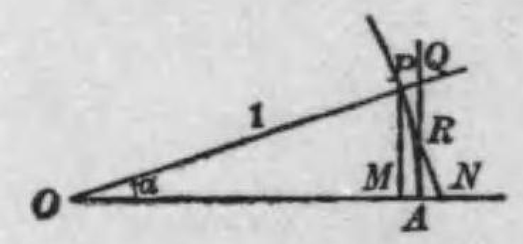
5. $y = log\, tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$. 答 $D_x y = \dfrac{1}{cos\, x}$.

第五編

無限小及ビ微分

1. 無限小. 無限小トハ數値的ニ小サイ値ノタメニ論ズル變量デアル, 而カモ從事シテヲル問題ノ形式ガ或行程ニ進行シタトキ極限トシテ 0 ニ近ヅクコトヲ許容セラルヽモノデアル.

微分法ノ問題ニ於テ $\triangle x$, $\triangle y$ ハ無限小デアル, 何トナレバ $\triangle x$ ハ其極限トシテ 0 ニ近ヅキ, $\triangle y$ モ一般ニ 0 ニ近ヅクカラデアル. 又第四編ニ於テ $\lim\limits_{\alpha \doteq 0} \dfrac{sin\, \alpha}{\alpha}$ ヲ論ジタトキノ α $sin\, \alpha$ ハ無限小デアル.



無限小ノ他ノ例ハ次ノ圖ヨリ見ルコトガ出來ル.

(1) $\alpha = \breve{AP}$, $\beta = AQ = tan\, \alpha$,

$\gamma = MA = 1 - cos\, \alpha$, $s = AN$,

$\varepsilon = PQ$, $\zeta = AQ + QP$, 等

獨立變量トシテ選バレタ無限小ヲ主要無限小ト云フ.

二ツノ無限小 α, β ノ比ガ主要無限小ガ 0 ニ近ヅクトキ 0 デナイ値ニ近ヅクト同級デアルトイハレル:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = K \neq 0.$$

若シ其比ガ０ナル極限ニ近ヅクトキニハβハαヨリ高級ナリトイハレ，無限大デアルト低級ナリトイハレル．

例ヘバ　$\beta=\tan\alpha$　デアルト

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

$$\therefore\ \lim_{\alpha\doteq 0}\frac{\beta}{\alpha}=1\neq 0,$$

故ニ $\tan\alpha$ ハ α ト同級デアル．

又 $\gamma=1-\cos\alpha$ トスルト

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha}=\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}},$$

然ルニ最後ノ分數ノ極限ハ１デアルカラ

$$\lim_{\alpha\doteq 0}\frac{\gamma}{\alpha}=0,$$

其故 $1-\cos\alpha$ ハ α ヨリ高級デアル．

低級ノ無限小ノ例ハ $\sqrt{\alpha}$ デアル，何トナレバ

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}},\qquad \lim_{\alpha\doteq 0}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=\infty.$$

(之ヲ α ガ０ニ近ヅクト $1/\sqrt{\alpha}$ ハ無限大トナルト讀ム)

β ト γ トガ同級デアルトキ或ハ γ ガ β ヨリ高級デアツテ且 β ガ α ヨリモ高級デアルト，γ ハ α ヨリ高級デアルコトガワカル．何トナレバ

$$\lim_{\alpha\doteq 0}\frac{\gamma}{\beta}=\mathrm{K},$$

デアルカラ $\frac{\gamma}{\beta}=\mathrm{K}+\varepsilon$，$\gamma=\mathrm{K}\beta+\varepsilon\beta$，但シ ε ハ無限小デアル．

故ニ

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}(\mathrm{K}+\varepsilon),$$

$\beta/\alpha=0$ ト云フ假定デアルカラ $\lim\gamma/\alpha=0$.

同樣ニ β ト γ トガ同級デアリ，γ ガ β ヨリ低級デアツテ且 β ガ α ヨリ低級デアルナラバ γ ハ α ヨリ低級デアル．

β/α^n ナル比ガ０デナイ極限ニ近ヅクト，α ガ主要無限小デアルナラ β ハ n 級ノ無限小デアルトイハレル：

$$\lim_{\alpha\doteq 0}\frac{\beta}{\alpha^n}=\mathrm{K}\neq 0.$$

例ヘバ α ガ主要無限小デアルト $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ ハ一級ノ無限小，$\sqrt{\alpha}$ ハ $\frac{1}{2}$ 級ノ無限小，α^n ハ n 級ノ無限小，$1-\cos\alpha$ ハ二級ノ無限小デアル．何トナレバ

$$\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}=\frac{2\sin\frac{2\alpha}{2}}{\alpha^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right]^2,$$

且
$$\lim_{\alpha\doteq 0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{2}$$

[定理] 二ツノ無限小 α ト β トノ差ガ何レヨリモ高級ノ無限小ノ差デアルト

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

逆ニ $\lim \beta/\alpha = 1$ デアルトαトβトハ何レヨリモ高級ノ無限小ノ差ヲ有スル，即チ

$$\beta - \alpha = \varepsilon, \quad \lim \frac{\varepsilon}{\alpha} = 0.$$

初メノ假定デ

$$\beta - \alpha = \varepsilon, \quad \lim \frac{\varepsilon}{\alpha} = \sigma.$$

デアルコトヲ證明スルタメ，初メノモノヲαデ除スルト

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

デアルカラ

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) = 1, \ldots\ldots\ldots q.e.d.$$

逆ヲ證明スルタメ，ηヲ無限小トスルト，

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \eta.$$

αデ乘ズルト

$$\beta = \alpha + \eta\alpha, \text{ 卽チ } \beta - \alpha = \eta\alpha = \varepsilon.$$

此εハαヨリハ高級ノ無限小デアル，ソレノミデナクβヨリハ高級デアル．

[定義] αガ主要無限小デアリ且

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\beta}{\alpha} = \mathrm{K}$$

デアルト，卽チ

$$\frac{\beta}{\alpha} = \mathrm{K} + \varepsilon$$

ト書クト $\beta = \mathrm{K}\alpha + \varepsilon\alpha,$

トナルカラ $\mathrm{K}\alpha$ ハβノ主要部分トイハレル．

演　習

1. $\alpha - 2\alpha^2$ ト $3\alpha + \alpha^3$ トハ同級ノ無限小デアルコトヲ證明セヨ．

2. $\alpha - \sin\alpha$ ハαヨリ高級デアルコトヲ證明セヨ．

3. $\alpha \sin\alpha$ ハ第二級ノ無限小デアルコトヲ證明セヨ．

4. 97頁ノ圖ノ PQ ト MA トハ同級ノ無限小デアルコトヲ證明セヨ．

5. αニ關シテ AR ノ階級ヲ定メヨ．

6. AN ハ PQ ヨリ高級デアルコトヲ證明セヨ．

7. AQ ト MP ハ同級デアルコトヲ證明セヨ．

8. αニ關シテ PQ ハ第二級デアルコトヲ證明セヨ．

9. 次ノ無限小ノ階級ヲ定メヨ：

(a) $\alpha + \sin\alpha$. (b) $\sqrt{\sin\alpha}$. (c) $\sqrt[3]{1 - \cos\alpha}$.

10. 二ツノ正ナル無限小ノ和(各第一級デアル)ハ第一級デアル，シカシ差ハ決シテ低級デナイコトヲ證明セヨ．差ガ高級デアルコトヲ示スタメノ例ヲ擧ゲヨ．

11. 二ツノ無限小ガ同ジ主要部分ヲ有スルナラ,其差ハ何レカノ値ノ小サキ歩合デアル,ソウシテ其歩合ハ無限小デアル(主要部分ガ0デナケレバ)コトヲ證明セヨ.

---

2. 基礎ノ定理. 多クノ無限小ヲ其差ガ夫レ々々高級ノ無限小ナル他ノ無限小デ置キ換ヘルコトニ關スル基礎ノ定理二ツアリ,其中一ツハ本款ニ屬スルモノデ,他ハ第九編第6款ニ屬スルモノデアル.

[定理] 二ツノ無限小ノ比ノ極限ヲ取ルトキニ各々ヲ高級ノ無限小ダケ異ル他ノモノデ置キ換ヘ得ル,即チ

$$\lim\frac{\beta'}{\beta}=1 \quad 及ビ \quad \lim\frac{\gamma'}{\gamma}=1$$

ナラバ $\qquad \lim\dfrac{\beta}{\gamma}=\lim\dfrac{\beta'}{\gamma'}$

トスルコトガ出來ル.

何トナレバ

$$\frac{\beta'}{\beta}=1+\varepsilon \qquad 即チ \qquad \beta'=\beta(1+\varepsilon)$$

及ビ $\qquad \dfrac{\gamma'}{\gamma}=1+\eta \qquad 即チ \qquad \gamma'=\gamma(1+\eta),$

但シ ε ト η トハ無限小デアル. 然ルトキハ

$$\frac{\beta'}{\gamma'}=\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{1+\varepsilon}{1+\eta}$$

デアルカラ

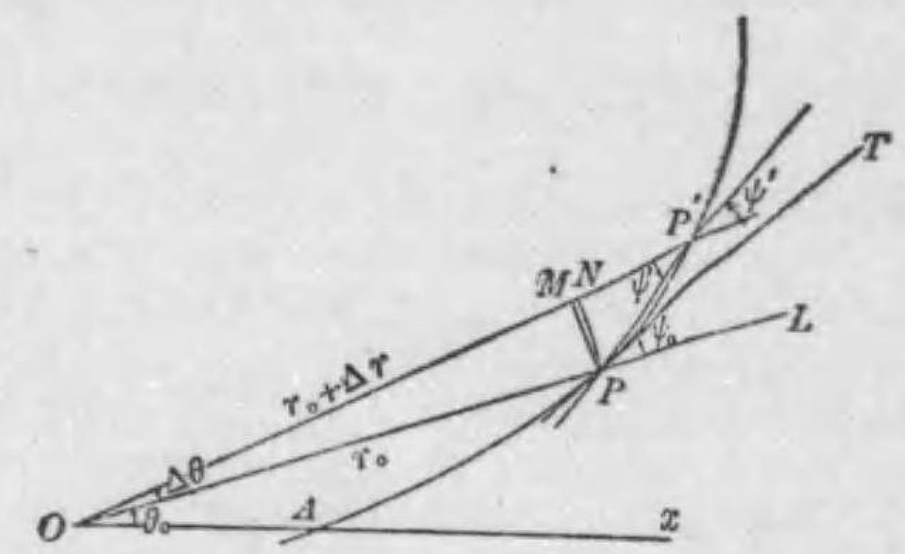
$$\lim\frac{\beta'}{\gamma'}=\left(\lim\frac{\beta}{\gamma}\right)\left(\lim\frac{1+\varepsilon}{1+\eta}\right)=\lim\frac{\beta}{\gamma}, \text{......} q.\ e.\ d.$$

3. 極座標ニ於ケル切線

極座標デ曲線ノ方程式ガ

$$r=f(\theta)$$

デアルトシヤウ.



切線ノ方向ヲ見出シタイト思ヘバ又ハ其延長「ブェクター」ト切線トノナス角 Ψ ヲ定メルコガ出來タラヨロシイノデアル. 曲線ノ任意ノ點 P ノ極座標ヲ (r_0, θ_0) トシ,曲線ノ近隣ノ點ヲ P′ トシ其座標ヲ $(r_0+\triangle r, \theta_0+\triangle\theta)$ トシテ弦 PP′ ヲ引キ $\angle$OP′P ヲ Ψ' デ表ハス. 然ルトキハ

$$\lim_{P'\doteq P}\Psi'=\Psi_0 \quad .$$

Ψ_0 ヲ定メルタメニ P カラ OP′ ナル「ブェクター」ノ上ニ垂線 PM ヲ引キ,0 ヲ中心トシテ PN ナル弧ヲ引ケバ直三角形 MP′P ニ於テ

$$\tan\Psi'=\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{P'M}}.$$

ソレカラ $\quad \tan\Psi_0=\lim\limits_{P'\doteq P}\tan\Psi'=\lim\limits_{P'\doteq P}\dfrac{\mathrm{PM}}{\mathrm{P'M}}.$

此最後ノ比ヲ,第2款ノ基礎ノ定理ニ依ッテ MP, P′M ヲ

便利ナル無限小ニ置キ換ヘ得ル.

$$\mathrm{MP} = r_0 \sin \triangle\theta, \qquad \therefore \lim_{\triangle\theta \doteq 0} \frac{\mathrm{MP}}{r_0 \triangle\theta} = 1.$$

又

$$\mathrm{P'N} = \triangle r \qquad \therefore \lim_{\triangle\theta \doteq 0} \frac{\mathrm{P'M}}{\triangle r} = 1$$

ソレカラシテ

$$\lim_{\mathrm{P'}=\mathrm{P}} \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{P'M}} = \lim_{\triangle\theta \doteq 0} \frac{r_0 \triangle\theta}{\triangle r} = [r\,\mathrm{D}_r\,\theta]\,\theta=\theta_0$$

或ハ下ノ記號ヲ取リテ

(2) $$\tan \Psi = r\,\mathrm{D}_r\,\theta.$$

［例］ 曲線

(3) $$r = a e^{\lambda\theta} \qquad a > 0$$

アリトシヤウ, コレハ $\lambda = 0$ ナル場合ノ外ハ原點ノ周リニ非常ニ度々捲付キタル螺旋デアル. コヽニ

$$\mathrm{D}_\theta\, r = a\lambda e^{\lambda\theta}, \quad \mathrm{D}_r\,\theta = \frac{1}{\mathrm{D}_\theta r} = \frac{1}{a\lambda e^{\lambda\theta}}, \quad \tan \Psi = \frac{1}{\lambda},$$

或ハ $\cot \Psi = \lambda.$

故ニ正切ハ常ニ延長シタ動徑ト同ジ角 $\cot^{-1}\lambda$ ヲナス. 此ワケデ曲線ヲ等角螺旋ト云フ.

演習

1. 曲線

$$r = \theta$$

ヲ作圖セヨ, 又 $r = 2\pi$ デアルトキ第一ノ動徑ヲ截ル角ヲ定メヨ.

答 $\Psi = 81^\circ$ 約

2. 極トシテ焦點ヲ取ル拋物線ノ方程式ハ

$$r(1 + \cos\theta) = m$$

デアル, $\theta = 0$ ナルトキ $\theta = \pi/2$ デアルトキ Ψ ノ値ヲ求メヨ.

3. 「カルジオイド」ノ方程式ハ

$$r = a(1 - \cos\theta)$$

デアル, Ψ ヲ求メヨ.

---

4. 微分. x ノ函數ヲ

$$y = f(x) \quad \text{- - - - -} \quad (1)$$

トシ, $\mathrm{D}_x y$ ヲ微係數トセヨ, 卽チ

$$\lim_{\triangle x \doteq 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \mathrm{D}_x y$$

ナリ. 今 ε ヲ無限小トスレバ

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \mathrm{D}_x y + \varepsilon,$$

從テ

$$\triangle y = \mathrm{D}_x y \,\triangle x + \varepsilon \triangle x.$$

x ハ獨立變數デアルカラ $\triangle x$ ハ主要無限小トシテ取ルコトガ出來ル, 上ノ關係ハ $\triangle y$ ハ其主要部分 $\mathrm{D}_x y \triangle x$ ト高次ノ無限小 $\varepsilon \triangle x$ トノ和ニ等シキコトヲ表ハス.

［定義］ (1) ナル函數ノ增加 $\triangle y$ ノ主要部分ハ y ノ微分ト稱セラレ, 之ヲ dy デ表ハス.

(2) $$dy = \mathrm{D}_x y \triangle x.$$

特別ニ $f(x)$ ヲ x トスレバ (2) ハ

(3) $$dx = \mathrm{D}_x x \triangle x = \triangle x.$$

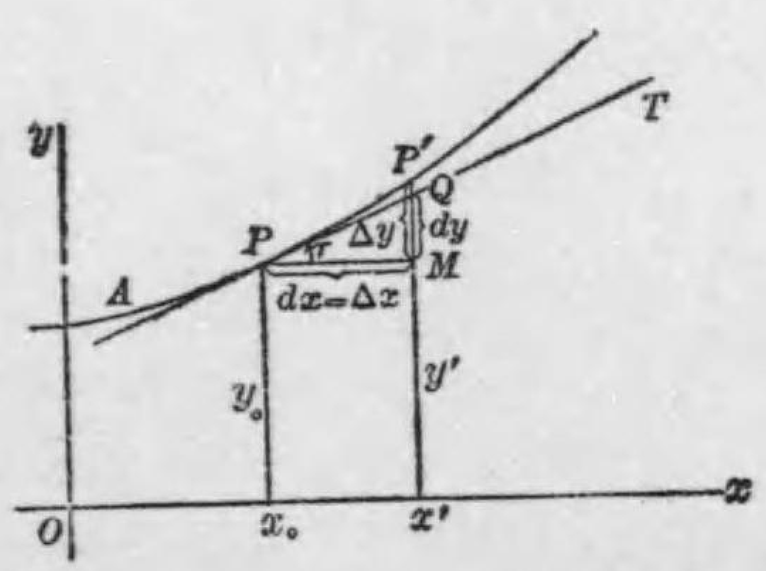
即チ獨立變數 x ノ微分ハ其變數ノ增加ニ同ジ. シカシコレハ一般ニ屬變數ニ就テハ眞ナラズ, 何トナレバ ε ハ一般ニ 0 デナイカラデアル.

(3) ナル意味カラ (2) ハ次ノ形ニ書カレル:

(4) $$dy = \mathrm{D}_x y\, dx.$$

夫レカラシテ

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{D}_x y$$



幾何學的ニイフト, 函數ノ增加 $\triangle y$ ハ MP′ デ表ハサレルガ dy ナル微分ハ MQ ニ等シイ, ソウシテ $\triangle y$ ト dy トノ差即チ QP′ ハ PM $= \triangle x$ ヨリモ高級ノモノデアル. 三角形 PMQ ハ T ニ關スルモノデアッテ

$$\tan \tau = \frac{dy}{dx}.$$

上ノ定義ニ於テ x ハ獨立變數トシテ採ラレ, $\triangle x$ ハ主要無限小ト採ラレテアツタ.

次ノ定理ハ微分ノ理論ノ基礎デアル.

[定理] (4)ナル關係ハ x ト y トヲ第三ノ變數 t ノ函數トシテモ同樣デアル.

今 x ト y トヲ第三變數 t ノ函數トセン:

$$x = \phi(t), \qquad y = \Psi(t)$$

此二ツノ方程式ノ間ニ t ヲ驅逐スルト (1) ナル函數ヲ得ル. 然ルトキハ上ノ定義ト一致シテ dx, dy ノ値ヲ得ル.

t ハ獨立變數 (x デハナイ) デアルカラ $\triangle t$ ハ主要無限小デアル.

$$dy = \mathrm{D}_t y \triangle t, \qquad dx = \mathrm{D}_t x \triangle t.$$

今

$$dy = \mathrm{D}_x y dx$$

デアルコトヲ證明シヤウト思フ. シカルニ

$$\mathrm{D}_t y = \mathrm{D}_x y \,\mathrm{D}_t x,$$

$\triangle t$ ヲ乘ズルト

$$\mathrm{D}_t y \triangle t = \mathrm{D}_x y \,.\, \mathrm{D}_t x \triangle t$$

$$\therefore \; dy = \mathrm{D}_x y dx, \;\ldots\ldots\ldots\ldots q.e.d.$$

此定理ヲ以テ第二編ノ定理 V ノ用ヒハ全ク見エナクナル, ソレハ代數學的恒等式ノ形ヲ取ルカラデアル:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

此事實カラ微分法ノ言句ノ上ニ微分ヲ用ヒル重キ利益ガアル.

高次ノ微分. 同様ナ定義デ高次ノ微分ヲ導入スルコトガ出來ル.

$$d^2y = D_x^2 y \triangle x^2, \qquad d^3 y = D_x^3 y \triangle x^3,$$

シカシ第一級ノ微分ニ對シテ上ト類似ノ定理ガアルケレドモ, コヽニハ其レガ眞デナイカラ第一級ノ微分ノ重モナル利益ハ損失デアル. 故ニ高級ノ微分ヲ導入スルコトヲ止メル, ソウシテ

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \cdots\cdots$$

ハ比トシテハナク, 微係數ノ他ノ記法トシテ採用スル.

[注意] D_x ハ運算記號ハ $\frac{d}{dx}$ トシテ微分形狀ニ書カレル, 即チ

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{x}{1-x}} \quad ハ \quad D_x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

ヲ意味ス, 他ノモノニ於テモ同様デアル.

5. **微分法ノ技術**. 第二編ノ I—IV ナル定理ヲ微分ヲ用ヒテ書クト次ノヤウデアル:

微分法ノ一般ノ公式

I. $d(cu) = c\,du.$

II. $d(u+v) = du + dv.$

III. $d(uv) = u\,dv + v\,du.$

例トシテ

$$D_x(cu) = cD_x u, \quad 即チ \quad \frac{d(cu)}{dx} = c\frac{du}{dx}$$

尚唯之ヲ dx デ乘ズルノミデアル. 又已ニ定理 V ノ消失ヲ注意シタ.

上ノモノニ第二編ノ特種ノ公式ト定理 IV ヲ加ヘネバナラヌ. 初メヨリ作成シタ微係數ノ外ニ僅少ノモノヲ含マセルコトガ必要デアル.

微分ノ特種ノ公式

1. $dc = 0.$
2. $dx^n = nx^{n-1}\,dx.$
3. $d\sin x = \cos x\,dx.$
4. $d\cos x = -\sin x\,dx.$
5. $d\tan x = \sec^2 x\,dx.$
6. $d\log x = \frac{dx}{x}.$
7. $de^x = e^x\,dx.$
8. $d\sin^{-1} x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
9. $d\tan^{-1} x = \frac{dx}{1+x^2},$

此後ノモノハ多少容易デアル. 或學生ハ之ヲ公式中ニ含

マセタイト思フデアラウ:

10. $d\cos^{-1}x = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. $d\,vers^{-1}x = \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

12. $da^x = a^x \log a\,dx$.

然レドモ簡單ナルタメニ却テ誤リ易イノデアル.

上述ノモノヽ結合カラ出來タ所謂初歩ノ函數ハ公式ノ二組ノ助ケデ微分スルコトガ出來ル. 今例ヲ以テ微分ノ用ヲ説明シヤウ.

[例 I] $y = \sqrt[3]{a^2-x^2}$ ヲ微分スルコト.

今 $z = a^2-x^2$ トセヨ.

$$y = z^{\frac{1}{3}},$$

トナルカラ

$$dy = dz^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}dz = \frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}(-2x\,dx)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{(a^2-x^2)^2}}.$$

シカシ手ヲ省キ且簡明スルコトガ出來ル, ソレハ z ナル新文字ヲ用ヒナイコトデアル.

$$y = (a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$dy = \frac{1}{3}(a^2-x^2)^{-\frac{2}{3}}d(a^2-x^2) = -\frac{2}{3}x(a^2-x^2)^{-\frac{2}{3}}dx,$$

[例 II] $y = \log\sin x$ ヲ微分スルコト.

$$z = \sin x, \quad y = \log z$$

トスルトキハ

$$dy = d\log z = \frac{dz}{z} = \frac{\cos x\,dx}{z},$$

或ハ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.$

尙簡明ニスルニハ

$$dy = d\log\sin x = \frac{d\sin x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

[例 III] $u = e^{at}\cos bt$ ヲ微分スルコト.

$$du = \cos bt\,de^{at} + e^{at}d\cos bt$$

$$= \cos bt\,e^{at}d(at) - e^{at}\sin bt\,d(bt)$$

$$= e^{at}(a\cos bt - b\sin bt)\,dt$$

$$\frac{du}{dt} = e^{at}(a\cos bt - b\sin bt)$$

此例ニ於テ實際微分ヲ用ヒントセバ上記ノ初メ二ツノ行ヲ省略スルコトガ出來ル.

[例 IV] y ヲ微分スルコト, 但シ

$$x^3-3xy+y^4 = 1$$

ソノトキニハ

$$dx^3-3d(xy)+dy^4 = d1,$$

$$3x^2dx-3x\,dy-3y\,dx+4y^3dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-3y}{3x-4y^3}.$$

學生ハ一方程式ノ一項ガ微分ヲ含ムトキハ他ノ總ベテノ項モ亦同數ノ微分ヲ含マナケレバナラヌコトヲ注意スルト誤ヲ避ケルコトガ出來ル, 例ヘバ $dy=x^2-3x$ トスルコトハ出來ナイ.

演習

次ノ微分ヲナスニハ前記微分ノ法ヲ用ヒヨ.

1. $u=\sqrt{a+bx+cx^2}$. $\qquad du=\dfrac{(b+2cx)\,dx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}$.

2. $y=\dfrac{1-2x+x^2}{x}$. $\qquad dy=\dfrac{x^2-1}{x^2}\,dx$.

3. $s=\dfrac{1-t}{1+2t}$. $\qquad \dfrac{ds}{dt}=\dfrac{-3}{(1+2t)^2}$.

4. $y=(1-x)(2-3x)(5-2x)$.

二ツノ仕方デナシ, 其結果ヲ照査セヨ.

5. $r=ae^{\lambda\theta}$.

6. $y=e^{-t}(2t^3+6t^2-3t-3)$,

7. $u=\sqrt{a^2-x^2}\,\sqrt{a-x}$.

8. $y=\log\dfrac{a+x}{a-x}$.

9. $y=\log\cos x$.

10. $y=\log(e^x-e^{-x})$.

11. $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{e^x}$.

12. $u=\log\sqrt{1-\cos x}$

13. $x=\sqrt{1+\sin y}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$.

14. $y=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{1+x^2}$.

15. $y=\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{3}$.

16. $y=\sin^{-1}(n\sin x)$.

17. $y=\cot^{-1}\dfrac{x}{a}$.

18. $u=\cos^{-1}\dfrac{\theta}{2}$.

19. $y=\log\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$. $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\sec x$.

20. $y=xe^{mx}$ ニ於テ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ ヲ求メヨ.

21. $y=x^2e^{mx}$ ニ於テ上ト同ジ.

22. x^2a^x ヲ微分セヨ. $\dfrac{d}{dx}x^2a^x=2xa^x+x^2a^x\log a$.

23. 次ノモノヲ微分セヨ.

(a) $x\,10^x$, (b) 10^{x^2}, (c) $x^n n^x$.

24. $y=\log_{10}x$ ナル曲線ニ就テ $x=1$, $y=0$ ナル點ニ於ケル傾度ヲ求メヨ. 答 $\tan\tau=0.4343$.

25. $y=10^x$ ナル曲線ガ坐標軸ヲ截ル點ニ於テ切線及法線ノ方程式ヲ求メヨ.

[注意] $y=[f(x)]^{\phi(x)}$ ナル形ノ函數ヲ微分スルニハ先ヅ方程式ノ兩邊ノ對數ヲ取リ

$$\log y=\phi(x)\log f(x)$$

トス或ハ

$$f(x)=e^{\log f(x)},\qquad [f(x)]^{\phi(x)}=e^{\phi(x)\log f(x)}.$$

ヲ用フ. 例ヘバ $y = x^x$ ヲ微分スルニハ

$$\log y = x \log^x \quad 或ハ \quad y = e^{x \log x}$$

トスルト

$$\frac{dy}{y} = d(x \log x) = \ldots\ldots \quad 或ハ \quad dy = e^{x \log x} d(x \log x) = \ldots\ldots$$

$$\frac{dx^x}{dx} = x^x (1 + \log x).$$

次ノ函數ヲ微分セヨ.

26. $y = x^{\frac{1}{n}}$.

27. $y = x^{\sin x}$,

28. $y = (\cos x)^{\tan x}$.

29. $y = (\sin x)^{\sin x}$.

---

6. **弧ノ微分.** s ハ定點 A カラ測ツタ $y = f(x)$ ナル曲線ノ弧ノ長サデ $\mathrm{PP'}$ ナル弧ノ長サガ $\triangle s$ ダトスルト

$$\overline{\mathrm{PP'}}^2 = \triangle x^2 + \triangle y^2,$$

$$\lim_{\triangle x \doteq 0} \left(\frac{\overline{\mathrm{PP'}}}{\triangle x} \right)^2 = 1 + \lim_{\triangle x \doteq 0} \left(\frac{\triangle y}{\triangle x} \right)^2.$$

第一ノ極限ヲ取リテ $\mathrm{PP'}$ ナル弦ヲ弧 $\triangle s$ デ置換ヘルコトガ出來ルソレハ

$$\lim_{\mathrm{P'} \doteq \mathrm{P}} \frac{\mathrm{PP'}}{\mathrm{PP'}} = 1$$

デアルカラデアル. ソレガタメニ

(I) $\quad (\mathrm{D}_x s)^2 = 1 + (\mathrm{D}_x y)^2 \quad 或ハ \quad ds^2 = dx^2 + dy^2$

ト云フ關係ヲ得ル.

幾何學的ニ云フト ds ハ PMQ ナル直三角形ノ斜邊 PQ デ表ハサレル. 尙

$$(2) \quad \begin{cases} \sin \tau = \dfrac{dy}{ds} = \dfrac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \dfrac{\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}}}, \\[2ex] \cos \tau = \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}}} \end{cases}$$

此等ノ公式ハ PI ナル切線ハ s ガ增加スル方向ニ引カレテアルト云フ假定ノ下ニ書カレテアル, サウシテ τ ハ其正方向ト x ノ正方向トナス角デアル. s ガ增加スルトキ x ガ減少スルナラバ各根數ノ前ニ負號ヲ置クヲ要スル,

<u>極座標</u> 同ジ論法デ $r = f(\theta)$ ノ場合ニ對シ次ノ公式ニ導ク. (103 頁ノ圖ヲ參考セヨ).

$$\overline{\mathrm{PP'}}^2 = \mathrm{P'M}^2 + \mathrm{MP}^2, \quad \lim_{\triangle r \doteq 0} \left(\frac{\overline{\mathrm{PP'}}}{\triangle r} \right)^2 = \lim_{\triangle r \doteq 0} \left(\frac{\mathrm{P'M}}{\triangle r} \right)^2$$

$$+ \lim_{\triangle r \doteq 0} \left(\frac{\mathrm{MP}}{\triangle r} \right)^2,$$

(3) $\quad (\mathrm{D}_r \mathrm{S})^2 = 1 + r^2 (\mathrm{D}_r \theta)^2 \quad 或ハ \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$

尙切線 PT ハ增加スル s ノ方向ニ引カレタモノデアルカラ

(4) $\quad \sin \Psi = \dfrac{r d\theta}{ds}, \qquad \cos \Psi = \dfrac{dr}{ds}.$

コレカラト第2款ノ公式カラ

(5) $$\tan\Psi=\frac{rd\theta}{dr}$$

---

7. **比ト速度**. 速度ト比トノ原則ハ既ニ第二編ニ說イタ. 今稍進ンダ問題ヲ出ス位置ニナツタ.

[例] 汽車ガ30哩ノ速サデ拋物線狀ヲナセル曲線ニ沿フテ走ルトセン, 其曲線ノ方程式ヲ

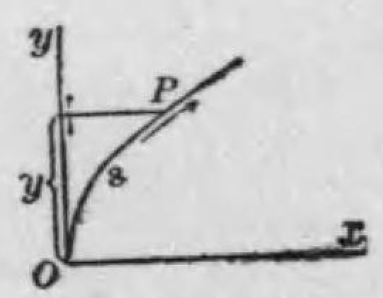
(A) $$y^2=500x$$

トシ拋物線ノ軸ハ東西デ, 一呎ヲ長サノ單位トセン. 太陽ハ丁度東方ニ上リツヽアリテ機關車ノ影ハ南北ノ方向ヲナス壁ニ沿フテ動キツヽアリ. コノ影ノ速サヲ求メヨ.

一時間ニ30哩ノ速サハ一秒ニ44呎デアルカラ問題ハ

$$\frac{ds}{dt}=44$$

ヲ與ヘテ $\frac{dy}{dt}$ ヲ求メルコトニ歸着スル.



(A) カラ $2y\,dy=500\,dx$ $\quad dx=\frac{ydy}{250}$

第6款ノ(1)ニ dx ノ此値ヲ入レルト,

$$ds^2=dx^2+dy^2=\frac{y^2dy^2}{250^2}+dy^2 \quad dy=\frac{250\,ds}{\sqrt{250^2+y^2}}.$$

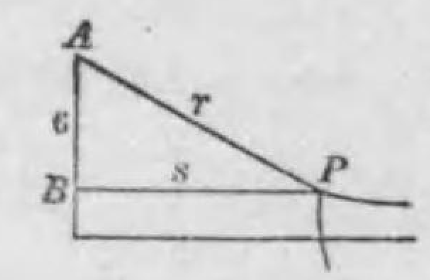
ソレカラシテ, dt ニテ除シ ds/dt ニ其値ヲ代入スルト,

$$\frac{dy}{dt}=\frac{250\times44}{\sqrt{250^2+y^2}}$$

特別ニ

$$\left[\frac{dy}{dt}\right]_{y=250}=\frac{44}{\sqrt{2}}\text{呎} \qquad \text{或ハ一時間ニ}21.2\text{哩}$$

[例 II] 波止場ノ上ニ靜止セル人ガ一秒ニ2呎ノ速サデ一端ヲ船首ニ結ンデアル綱ヲ引イテヲル. 手ハ船首ヨリ6呎高クアル. 綱ノ長サガ10呎ニナツタトキハ「ボート」ガ速サハ何程カ.



小舟ガ或時ニ動ク呎ノ數ヲ r デ表ハスト,

$$\frac{dr}{dt}=-2$$

デアル, r ガ時ト共ニ增スト正デ, 時ト共ニ減少スルト負デアル.

P ガ海上デ動キツヽアル割合ヲ見出ストシヤウ. s ハ小舟ガ波止場カラノ距離ヲ表ハストセバ ds/dt ハ數的ノ割合ヲ表ハス, シカシ代數的ニハ負數デ $-ds/dt$ ノ値ヲ求メヤウ. s ト r トハ

$$s^2=r^2-36$$

ナル關係デ結合シテヲル. 從テ

$$2s\,ds=2r\,dr$$

$$-\frac{ds}{dt}=-\frac{r}{s}\frac{dr}{dt}=\frac{2r}{\sqrt{r^2-36}},$$

依ッテ $\left[-\dfrac{ds}{dt}\right]_{r=10}=\left[\dfrac{2r}{\sqrt{r^2-36}}\right]_{r=10}=2\dfrac{1}{2}$ 呎……每秒

學生ハ初メ任意ノ瞬間時ノ速度ヲ求メ特別ノ値 10 ヲ得タ結果ニ代入スルノデアルコトヲ知ルガヨイ.

演習

1. 街燈ガ十字狀ノ道ノ角カラ 10 呎ハナレテヲリ, 向フ側ノ町ノ家ヨリ 60 呎ハナレテヲル. 每時 4 哩ノ速サデ街燈ノアル側ニ向テ其交截路ニ沿ヒテ町ヲ横ギル, 向フ側ノ家ノ壁ニ其人ノ影ガ動ク. 其町幅 (60 呎) ノ三分ノ二マデ來ルト其影ノ速サガドンナ割合デアルカ, 家カラ 55 呎ハナレタ處デハ如何.

答 夫々每時 6 哩, 96 哩.

2. 150 尺高ク上ッタ凧ガアル, 其絲ノ長サハ 250 尺デアル, 凧ガ水平線上ニ每時ニ 4 哩動クニハ其絲ハドンナ速サデ延バスベキカ.

3. 一人ガ圓道ヲ常速ヲ以テ行ク, 其射影ガ與ヘラレタ直徑ニ沿ヒテ行ク速サハ其直徑カラ其點マデノ距離ニ比例スルコトヲ證明セヨ.

4. 廻轉光ガ近似的ニ平行セル光線ノ一束ヲ送ル海岸ヨリノ距離ハ半哩デアル, ソウシテ一分間ニ一廻轉ヲナス. 海岸ニ沿ヒテ其光ガ, 海岸ノ最近點カラ 1 哩ノ距離ノ點ニ於テハドンナ速サデ動イテヲルカ.

5. 大陽ガ瀉シツヽアルトキ眞上ニ球ヲナゲタ. 球ノ影ガ或家ノ最高點ハ測者ノ圓ルイ屋上ニウッツタ. 圓ルイ家ノ直徑 50 尺デアル. 球ノ影ハ落下後一秒時ニ何程ノ速サデアルカ, 丁度落下ヲ始メシ時ハ如何.

演習

次ノ函數ノ極大極小ヲ定メヨ:

1. $x\log x$.

2. $x\cos x$.

答 $x=0.3679$ ノトキ極小,

$0<x<\dfrac{1}{2}$ ナルトキ $x=\cot x$ ナル場合ガ極大,

$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ ナルトキ $x=\cot x$ ナル場合ガ極小.

3. xe^{-x}

4. $x^n e^{-x}$.

5. $x^2\log\dfrac{1}{x}$.

6. $\dfrac{x}{\log x}$.

7. $\sin x+\cos x$.

8. $x+\sin x$.

9. $\sin 2x-x$.

10. $\sin x\cos^3 x$.

11. $\dfrac{\cos x}{1+\cot x}$.

12. $\dfrac{x}{1+x\tan x}$.

13. x,

14. $e^x\cos 2x$.

15. $e^{-Kt}\cos(nt+\gamma)$.

16. $x-\tan x$.

17. $x+\tan x$.

18. $x^{\frac{1}{x}}$.

19. $\left(\log\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

20. $\tan x-2\sin x$.

21. $|\sin x+\cos x|\leqq 2$ ナルコトヲ證明セヨ.

22. $\left(\frac{5}{9}, 0\right)$ ナル點ヨリ曲線 $y=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}$ ニ出來ルダケ最短キ線ヲ引ケ.

23. 一定ノ面積ヲ有スル矩形ノ地ヲ石垣デ圍ミ. 邊ノ一ツニ平行ナル石垣デ區分シテ三等分シヤウト思フ. 石垣ノ全長ガ出來ルダケ小サイ矩形ノ形ヲ問フ.

24. 圓錐狀ノ「テント」ノ經濟的ノ形ヲ示セ.

25. 「フードホール」ノ地面ガアル長サガ $2a$ 呎デ, 幅ガ $2b$ 呎デアル, 此矩形ノ地面ヲ圍ミテ徒步競爭ノ路ヲ作ラントス路ノ全長ハ $4c$ 呎ナリ. 路ハ二ツ平行ナル等長ナル部分 (此部分ハ前記地面ノ長サノ方向ニ平行ス) ト兩端ハ半圓周狀ヲナス. 今前記地面ト競爭路トノ間 (其最短矩離) ヲ出來ル丈大ナラシメントス. 如何ニ路ヲ附クベキカ.

第六編

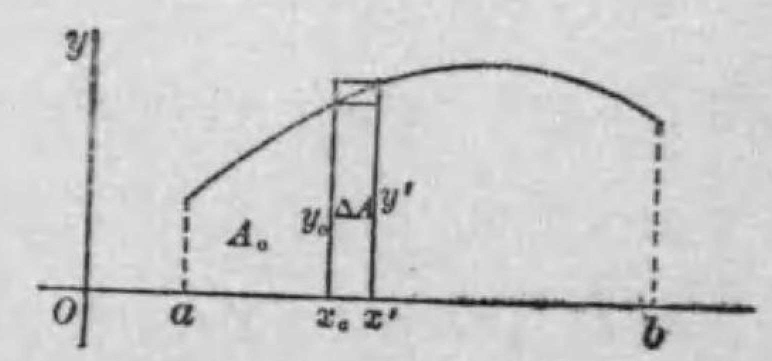
積　分

1. 曲線ノ下ノ面積. 今曲線

$$y=f(x) \tag{1}$$

ト x 軸ト $x=a,\ x=b\ (a<b)$ ナル縦線トニ圍マレタモノヽ面積ヲ求メルトシヤウ. 今上記ノ四ツノ線ノ內一ツノ縦線ハ動クモノト見ルト其面積 A ハ x ノ函數デアル, 何トナレバ x ヲ限界 a, b ノ間ニ定メルト其面積ハ全ク定マリ, 方眼紙上ニ作ツテ切レ切レニナシテ別ニ測ル等ノ手段ヲ取リテ精密ニ計算スルコトガ出來ルカラデアル.

若シ x ノ此函數ニ對シテ a カラ b ニ至ル間ニ正シキ所ノ解析的式ヲ有スルナラ $x=b$ ト置クコトガ出來ル, ソウシテ問題ハ解決セラレル.



ソウスルニハ x ニ任意ノ値 $x=x_0$ ヲ與ヘ, 相當スル面積ヲ A_0 デ表ハシ, x ニ $\triangle x$ ナル增加ヲ與ヘ, 面積ノ增加ヲ $\triangle A$ トスル.

$\triangle A$ ハ二ツノ近似スル矩形デ表ハサレル

$$y_0 \triangle x < \triangle A < (y_0+\triangle y)\triangle x,$$

$$y_0 < \frac{\triangle A}{\triangle x} < y_0+\triangle y,$$

(モシ $f(x)$ ガ x ノ増加ノタメニ減少スルトキニハ不等記號ハ反對ニナル), $\triangle x$ ガ 0 ニ近ヅクト $\frac{\triangle A}{\triangle x}$ ハ定量 y_0 ト變量 $y_0+\triangle y$ トノ間ニアリ, 且 $y_0+\triangle y$ ハ y_0 ニ近ヅク. 從ツテ

$$\lim_{\triangle x \doteq 0} \frac{\triangle A}{\triangle x} = y_0$$

或ハ下ノ記號ヲ取レバ

(2) $$D_x A = y,$$

例ヘバ曲線ハ

$$y = x^2$$

ナリトシ且 $a=1$, $b=4$ トスレバ

(3) $$D_x A = x^2.$$

然ラバ問題ハ如何ナル函數ノ微係數ガ x^2 トナルカヲ求ムルコトヽナル, コレハ $\frac{x^3}{3}$ デアルコトハ容易ニワカル, シカシコレハ唯一ツデハナイ, 何トナレバ $x^3/3+C$ ノヤウニ常數 C ヲ加ヘタモノモ同樣デアル. シカシコレハ微係數ガ x^2 デアル最モ一般ノモノデアルコトハ後ニ證明スル.

實際ノ事實ニ就テ A ハ左端ノ縱線 $x=1$ ヨリ右ニアル部分ノ面積デアルカラ x ガ僅カニ 1 ヨリ大デアルトキニハ A ハタシカニ小デアツテ, x ガ 1 ニ近ヅクトキノ極限ハ 0 ナリ.

(4) $$0 = \frac{1}{3} + C \qquad \therefore\ C = -\frac{1}{3}.$$

依テ (5) $$A = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}.$$

カヤウニ變量ヲ見出シタル故ニ $x=4$ ト置キテ求ムル所ノ面積ヲ得ル:

$$[A]_{x=4} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21.$$

曲線 $y=f(x)$ ノ下ノ面積ヲ求ムル仕方ハ次ノ如クスルコトガワカツタ. 初メ微分シテ $f(x)$ ヲ得ルヤウナ函數ヲ求メ, 之レニ不定ナル常數ヲ加ヘル, 次ニ $x=a$ ノタメニ A ガ 0 トナルヤウニシテ常數ヲ定メル. ソウスルト A ハ x ノミノ函數トナルカラ $x=b$ トシテ A ハ全ク定マル.

演 習

1. 前ノ例ニ於テ面積ヲ $x=2$ ヨリ測ルナラバ c ナル常數ハ $-2\frac{2}{3}$ デアルコトヲ證明セヨ.

$$A = \frac{x^3}{3} - 2\frac{2}{3}.$$

モシ原點カラ測ラバ c ハ 0 ナルコトヲ證明セヨ

$$A = \frac{x^3}{3}.$$

2. (1) ニ於テ $y=f(x)=x$ デアルト曲線ハ直線デアル.

$a=6,\ b=20$ デアル圖ハ梯形デアル，之ヲ上法ニテ其面積ヲ計算シ初等幾何學ニ依テ驗メセ.

3. $x=10,\ \ x=20$ ノ間ニアル曲線

$$y=x^4$$

ノ下ノ面積ヲ求メヨ.　　　　答 620.000

4. 曲線

$$y=\sin x$$

ノ一弓形ノ面積ヲ求メヨ.

5. 曲線

$$y=1-x^2$$

ノ x 軸上ニアル部分ノ面積ヲ求メヨ.

6. 河ガ略ボ拋物線

$$y=x-4x^2$$

ノ形ヲナシテ牧場ノ周リニ曲ツテヲル. (但シ x 軸トシテ河ヲ横切ツテヲル路ニ就テ). 上ノ式ハ一哩ヲ單立トスレバ河ト路トノ間ノ面積如何.

---

2. **積分.** 上ノ各編ニ於テハ函數ヲ與ヘテ微係數ヲ求ムルノデアツタ. 前款ノ例ハ逆ノ問題ヲ取扱ヒ函數ノ微係數ヲ知ツテ元函數ヲ求メルノデアツタ. 之ヲ方程式ニ書表ハスト

$$D_x U=u \qquad \text{或ハ} \qquad dU=u\,dx,$$

ソウシテ u ヲ與ヘテ U ヲ求メルノデアル.

積分ノ定義 U ヲ x ニ關スル u ノ積分ト云フ，之ヲ次ノヤウニ表ハス:

$$U=\int u\,dx$$

與ヘラレタル函數ヲ「インテグランド」ト云フ.

尚精密ニ云フト，U ハ u ノ一積分デアルト云フコトガ出來ル，何トナレバ c ガ常數ナル $U+c$ ハ又積分デアルカラデアル. 例ヘバ

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c. \tag{6}$$

何トナレバ

$$U=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$$

ヲ x ニ就テ微分スレバ

$$D_x U=x^n$$

ヲ得ルカラデアル. 故ニ所求ノ積分元子ハ x^n デアル.

次ノ定理ハ積分ノ定理ノ基礎デアル.

[定理 A] 二ツノ函數ガ同ジ微係數ヲ有スルトキ，即チ

$$D_x f(x)=D_x \phi(x)$$

ナルトキハ二ツノ函數ハ常數ノ差ヲ有ス.

差ノ微係數ハ 0 デアルカラ，即チ

[定理 B]　$D_x[f(x)-\phi(x)]=0$

デアルカラ一函數ノ微係數ガ0デアルトキハ其函數ハ常數デアル.

幾何學的ニ此定理ノ眞ナルコトハ明カデアル.

$$y = \phi(x) = c$$

ナル函數ノ「グラフ」ハ x ノ軸ニ平行ナル直線デアル, 逆ニ曲線ノ傾度ガ0デアルナラバ x 軸ニ平行ナルモノ以外ニ如何ナル曲線ガアルデアラウカ. 此等ノ定理ノ解析的證明ニハ平均ノ法則ニ於ケル定理ヲ比較セヨ.

定理 A カラ與ヘラレタ函數ノ積分ハ加ヘル常數ニ依テ異ル, 何トナレバ U ト U′ ハ $f(x)$ ノ積分デアルト, 即チ

$$D_x U = f(x), \qquad D_x U' = f(x)$$

デアルト U ト U′ トハ同ジ微係數ヲ有スル.

積分ト微分トハ互ニ逆デアルカラ:

$$D_x\int u\,dx = u \quad \text{或ハ} \quad d\int u\,dx = u\,dx,$$

$$\int D_x U\,dx = U+c \quad \text{或ハ} \quad \int dU = U+c.$$

[定理 I.] 常數因數ハ之ヲ積分ノ記號ノ外ニ出サレル:

(I) $$\int cu\,du = c\int u\,dx$$

(I) ニ入リタル二ツノ函數ヲ論ジヤウ.

$$D_x\int cu\,dx = cu$$

$$D_x\left[c\int u\,dx\right] = cD_x\int u\,dx = cu,$$

二ツノ函數ノ微係數ハ等シイカラ二ツノモノハ常數ノ差ヲ有スル. 故ニ

$$\int cu\,dx = c\int u\,dx+k$$

故ニ左邊ノ積分常數ヲ適當ニ選ンデ $k=0$ トナスコトガ出來ル.

[定理 II.] 二ツノ函數ノ和ノ積分ハ各積分ノ和ニ等シ.

(II) $$\int(u+v)\,dx = \int u\,dx+\int a\,dx.$$

其證明ハ定理 (I) ノ證明ニ同ジ.

$$D_x\int(u+v)\,dx = u+v$$

$$D_x\left[\int u\,dx+\int v\,dx\right] = D_x\int u\,dx + D_x\int v\,dx = u+v.$$

(II) ノ兩邊ノ 函數ハ k ナル常數ニ依テ異ルバカリデアル. ソウシテ或二ツノ積分ノ常數ハ隨意ニ選ブコトガ出來ルカラ第三ノ積分ノ常數ハ $k=0$ トナスコトガ出來ル.

多項式ノ積分 上ノ定理ニ依ツテ多項式ヲ積分スルコトガ出來ル. 例ヘバ

$$\int(a+bx+cx^2)\,dx = \int a\,dx+\int bx\,dx+\int cx^2dx$$

$$= a\int dx+b\int x\,dx+c\int x^2dx$$

$$= ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^2}{3} + C.$$

曲線ノ下ノ面積　第一款ニ研究シタル面積ハ次ノ形ニ置クコトガ出來ル：

(7) $$A = \int y\,dx \quad \text{或ハ} \quad A = \int f(x)\,dx.$$

演　　習

次ノ積分ヲ算セヨ.

1. $\int (3-4x-9x^8)\,dx.$　　答 $3x-2x^2-x^9+c.$

2. $\int \sqrt{x}\,dx.$　　答 $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c.$

3. $\int \frac{d^2}{x^2}.$　　4. $\int \frac{1+x+x^2}{3}\,dx.$

5. $\int \frac{dc}{\sqrt{x}}.$　　6. $\int (x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}})\,dx.$

7. 次ノ $y=(x^2-1)(4-x^2)$ 曲線ニテ圍マレテアル x 軸ノ正ノ部分上ニアル面積ヲ求ム.

8. 次ノ $y=x^2$, $y^2=4$ ナル二ツノ拋物線ノ間ニ含マレタル面積ヲ見出セ.

---

3. **積分ノ特別ノ公式**　第四編ノ微分法ノ特別ノ公式ニ相當シテ積分ノ特別ノ公式ノ表ヲ書下スコトガ出來ル.

此編ニ記シタ一般ノ方法ト共ニスベテノ積分ハ計算シ得ラレル. 各公式ハ方程式ノ兩邊ヲ微分シテ證明セラレル.

積分ノ特別ノ公式

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$　　$n \neq -1$

2. $\int \sin x\,dx = -\cos x.$

3. $\int \cos x\,dx = \sin x.$

4. $\int \frac{dx}{x} = \log x.$

5. $\int e^x dx = e^x.$

6. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x.$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x.$

8. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x.$

9. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x.$　cosec

コレ等ノモノニ次ノモノヲ公式トシテ加ヘテモヨロシイ：

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \text{vers}^{-1}x.$

11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}.$

簡單ノタメニ加フ可キ積分ノ常數ヲ捨テタケレドモ此公式ヲ用フルトキ之ヲ挿入スルコトヲ忘レテハナラヌ. マタ次ノ公式ヲ上ニハ入レナカツタ.

$$\int o dx = c.$$

---

4. 代入法 多クノ積分ハ新變數ヲ導入シテ第3款カラ得ラレル.

[例 1] $\int \sqrt{a+bx}\,dx$ ヲ求メヨ.

$a+bx=y$ トセバ $bdx=dy$ トナリ

$$\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{1}{b}\,y^{\frac{1}{2}}\,dy.$$

此方程式ノ各邊ヲ積分スレバ

$$\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{1}{b}\int y^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{1}{b}\;\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c.$$

其レカラシテ

$$\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2\sqrt{(a+bx)^3}}{3b}+c.$$

[例 2] $\int \cos ax\,dx$ ヲ見出セ.

$ax=y$ トセバ $a\,dx=dy$,

$$\cos ax\,dx = \frac{1}{a}\cos y\,dy,$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\int \cos y\,dy = \frac{1}{a}\sin y+c = \frac{1}{a}\sin ax+c.$$

[例 3] $\int x\sqrt{a^2+x^2}\,dx$ ヲ求メヨ.

$x^2=y$ トオケバ $2x\,dx=dy$,

$$x\sqrt{a^2+x^2}\,dx = x\sqrt{a^2+y}\,\frac{dy}{2x} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+y}\,dy,$$

$$\int x\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{a^2+y}\,dy.$$

此最後ノモノハ例一ノ特種ノモノデ, a ヲ a^2 ニ, b ヲ 1 ニ, x ヲ y ニオキカヘタモノデアル. 故ニ

$$\int x\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}+c.$$

但シ $a^2+x^2=y$ トシテモヨロシイ.

[例 4] $\int \tan x\,dx$ ヲ見出セ.

コヽニ

$$\int \tan x\,dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int\frac{-d\cos x}{\cos x} = -\log\cos x+c.$$

本來 $\cos x=y$ ヲ代入シタノデアルガ, シカシ實際ノ場合ニハ可成新ラシキ文字ヲ用ヒナイ法ガヨイノデアル.

[注意] 上ノ例ニテハ暗ニ x ト y トガ何レカヽ他ノ函數デアルコトトシタ, モシ $f(x)$ ト $\phi(y)$ トガ

$$f(x)\,dx = \phi(y)\,dy$$

ノヤウナ二ツノ函數デアルト

$$\int f(x)dx = \int\phi(y)\,dy.$$

何等ノ困難ナク此假定ヲ確メ得ル. 何トナレバ

$$D_x\int f(x)dx=f(x),$$

$$D_x\int \phi(y)\,dy=D_y\int \phi(y)\,dy\,D_x y=\phi(y)\,D_x y,$$

マタ
$$f(x)=\phi(y)\frac{dy}{dx}$$

デアル, 即チ $\int f(x)\,dx$, $\int \phi(y)\,dy$ ノ二ツヲ微分シテ同ジモノヲ得タカラ二ツノ積分ハ同ジ, 但シ常數 k ヲ加ヘネバナラヌ. 元來二ツノ積分常數ノ内前者ヲ任意ニ選ビ後者ノ常數ヲ $k=0$ トスルコトガ出來ル.

此定理ハ微分法ニ於ケル第二編ノ定理 V ニ相當ス. 前ノ定理ノ場合ニ於テ微小數ノ用ヒハ形式上ノ定理ヲ代數的恒等式ニ變ズルコトデアッテ, ソコニ必要モアルノデアル:

$$\int u\,dx=\int\left[u\frac{dx}{dy}\right]dy$$

演習

次ノ積分ヲ計算セヨ.

1. $\int \sqrt{1-x}\,dx$. 答 $-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+c$.

2. $\int \sqrt[3]{1+2x}\,dx$. 答 $\frac{3}{8}(1+2x)^{\frac{4}{3}}+c$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{a+bx}}$.

5. $\int (a+bx)^n dx$.

6. $\int \sin ax\,dx$.

7. $\int \cos\frac{x}{2}\,dx$.

8. $\int \sin(\pi x+\gamma)\,dx$.

9. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$. 答 $\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 答 $\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$.

11. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 答 $-\sqrt{a^2-x^2}+c$.

12. $\int x^2\sqrt{a^3+x^3}\,dx$.

13. $\int xe^{-x^2}\,dx$.

14. $\int \frac{dx}{a+bx}$.

15. $\int \frac{x\,dx}{a+bx^2}$.

16. $\int x\sin x^2 dx$.

17. $\int \frac{dx}{(1-x)^2}$.

18. $\int \cot x\,dx$. 答 $\log\sin x+c$.

---

5. 巧妙ナ工夫デ出來ル積分法.

[例 1] $\int \cos^2\theta\,d\theta$ ヲ見出セ.

$$\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta),$$

$$\int \cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta+c,$$

$$(8)\qquad \therefore\ \int \cos^2\theta d\theta=\frac{1}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)+c.$$

同樣ニシテ $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ ヲ求ムルコトガ出來ル.

$$x=a\sin\theta,\qquad dx=a\cos\theta\,d\theta$$

$$\therefore\quad \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int\cos^2\theta\,d\theta=\frac{a^2}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)+c,$$

(9) $$\therefore\quad \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)+c.$$

[例 2] $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2-x^2}$ ヲ求メヨ.

積分元子ハ次ノヤウニ書カレル.

$$\frac{1}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x-a}\right].$$

故ニ $$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a}-\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a}$$

$$=\frac{1}{2a}\Big[\log(x+a)-\log(x-a)\Big]+c$$

(10) $$\therefore\quad \int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\log\frac{x+a}{x-a}+c.$$

但シ $-a<x<a$ ノ場合ニハ (10) ノ中ニ負量ノ對數ヲ生ズルカラ此場合ニハ括弧内ニ $1/(a-x)$ ノ項ヲ用フレバヨシ.

[例 3] $\displaystyle\int\frac{d\theta}{\sin\theta}$ ヲ求メヨ.

第一法 $\displaystyle\int\frac{d\theta}{\sin\theta}=\int\frac{d\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$ トシ, 次ニ $\dfrac{\theta}{2}=\phi$

トスレバ

$$\int\frac{d\phi}{\sin\phi\cos\phi}=\int\frac{\sec^2\phi\,d\phi}{\tan\phi}=\int\frac{d\tan\phi}{\tan\phi}=\log\tan\phi+c.$$

(11) $$\therefore\quad \int\frac{d\theta}{\sin\theta}=\log\tan\frac{\theta}{2}+c.$$

第二法

$$\int\frac{d\theta}{\sin\theta}=\int\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta=-\int\frac{d\cos\theta}{1-\cos^2\theta}=-\frac{1}{2}\log\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}+c.$$

但シ

$$\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}}.$$

(11') $$\therefore\quad \int\frac{d\theta}{\sin\theta}=\log\tan\frac{\theta}{2}+c.$$

演習

1. $\displaystyle\int\sin^2\theta\,d\theta.$ 答 $\dfrac{1}{2}(\theta-\sin\theta\cos\theta)+c.$

2. $\displaystyle\int\frac{d\theta}{1+\cos\theta}.$ 3. $\displaystyle\int\frac{d\theta}{1-\cos\theta}.$

4. $\displaystyle\int\frac{d\theta}{\cos\theta}.$ 答 $\log\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)+c.$

或ハ $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}+c,$ 或ハ $\log(\sec\theta+\tan\theta)+c.$

5. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$ 答 $\log(x+\sqrt{x^2+a^2})+c.$

暗示 $x=a\tan\theta$ トセヨ.

6. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$. 答 $\log(x+\sqrt{x^2-a^2})+c.$

---

6. 部分積分法 微分法ノ公式

$$d(uv)=udv+vdu$$

ハ積分ノ公式

$$\int udv=uv-\int vdu$$

ヲ導入ス, 之ヲ部分積分法ト云フ.

[例 1] $\int xe^x dx$ ヲ求メヨ.

$u=x,\quad dv=e^x dx$ トスレバ

$du=dx,\quad v=\int e^x dx=e^x$ トナル, 從テ

$$\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=(x-1)e^x+c.$$

[例 2] $\int \log x\,dx$ ヲ求メヨ.

$u=\log x,\quad dv=dx$ トスレバ

$du=\dfrac{dx}{x},\quad v=x$ トナル從テ

$$\int\log x\,dx=x\log x-\int x\frac{dx}{x}=x(\log x-1)+c.$$

[例 3] $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$ ヲ求メヨ.

$u=\sqrt{a^2+x^2},\quad dv=dx$ トスレバ

$du=\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},\quad v=x$ トナル, 從テ

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=x\sqrt{a^2+x^2}-\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

再ビ $\sqrt{a^2+x^2}=\dfrac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$ デアルカラ

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}+\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

此等ノ二ツノ方程式ヲ邊々相加ヘルト, 前ノ演習ノ分ヲ用ヒテ次ノ結果ヲ得ル:

$$(12)\qquad \int\sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\log(x+\sqrt{a^2+x^2})\right]+c.$$

演 習

次ノ積分ヲ求メヨ.

1. $\int xe^{ax}dx.$
2. $\int x^2e^{ax}dx.$
3. $\int x^3e^{ax}dx.$
4. $\int x\sin x\,dx.$
5. $\int x\cos ax\,dx.$
6. $\int \sin^{-1}x\,dx.$
7. $\int \tan^{-1}x\,dx.$
8. $\int x\sin^{-1}x\,dx.$
9. $\int x\tan^{-1}x\,dx.$
10. $\int x\log x\,dx.$

11. $\int e^{ax}\sin x\,dx.$ 12. $\int e^{ax}\cos x\,dx.$

13. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx.$

答 $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\log(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]+c.$

---

7. 表ノ用法 通例實際ニ起ル問題デ初步ノ函數ヲ用ヒテ計算セラレル積分ハ「パアス」ノヤウナ積分ノ表デ出來ル. 此ワケデ本書ニハ餘リ深ク積分ノ理論ニハ立至ル要ガナイ. 初步函數ヲ微分スル方法ヲ論ジタガアラユル初步函數ヲ積分スルコトガ出來ルトハ限ラナイ. 例ヘバ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \quad 或ハ \quad \int\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \quad 0<k^2<1$$

ハ積分楕圓函數ト云フ超越函數ノ新階級ヲ誘導ス, コレハ代數函數トカ sine トカ cosine トカ云フ初步函數ヲ用ヒテハ出來ナイモノデアル. シカシ初步函數ヲ用ヒテ積分シテ得ラルヽ函數ノ大ナル種類ガアル, ソウシテ實際ニ必要ナモノハ表ニ作ラレテアル, 學生ハソノ表ノ分類ニ就テ大ナル注意ヲ拂ハネバナラヌ.

[例 1] $\int\frac{x\,dx}{(1-x)^3}$ ヲ發見セヨ.

積分因子ハ x ノ有理函數デアル.

$$\frac{x}{(1-x)^3}=\frac{A}{(1-x)^3}+\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{C}{(1-x)}$$

トシ所謂不定係數法ニテ A. B, C ヲ求メ, 積分スルノデアル, 然ルトキハ

$$\int\frac{xdx}{(1-x)^3}=-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2(1-x)^2}+c.$$

[例 2] $\int\frac{dx}{1+x+x^2}$ ヲ求メヨ.

$$\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

コレカラ

$$\int\frac{dx}{1+x+x^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$$

[例 3] $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$ ヲ計算セヨ.

135 頁演習 5 ニ導クノデアル.

[例 4] $\int\sin^6x\,dx$ ヲ求メヨ.

先ヅ

$$\int\sin^n x\,dx=-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx$$

ナル公式ヲ作レ, コレハ兩邊ヲ微分スルト正シイコトハワカル. 依ツテ $\int\sin^6x\,dx$ ヲ求メルコトハ此公式デ $\int\sin^4x\,dx$ ヲ有スルモノニ變ズルヤウニセヨ.

[例 5] $\int\frac{dx}{5-4\cos x}$ ヲ求メヨ.

$\tan\frac{x}{2}$ ヲ代用スレバ

$$\int\frac{dx}{5-4\cos x}=\frac{2}{3}\tan^{-1}\left[3\tan\frac{x}{2}\right]+c$$

演　習

次ノ積分ヲ算セヨ.

1. $\int\frac{x\,dx}{(4-5x)^2}$.　答 $\frac{1}{25}\left[\log(4-5x)+\frac{4}{4-5x}\right]+c.$

2. $\int\frac{dx}{x^2(1-x)}$.　答 $-\frac{1}{x}+\log\frac{x}{1-x}+c.$

3. $\int\frac{dx}{5+3x^2}$.　答 $\frac{1}{\sqrt{15}}\tan^{-1}\left(x\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+c.$

4. $\int\frac{dx}{x+x^2+x^3}$.

　答 $\frac{1}{2}\log\frac{x^2}{1+x+x^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$

5. $\int\frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx$.　答 $2\sqrt{1-x}+\log\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}+c.$

6. $\int\sqrt{-1+4x-x^2}\,dx$.

　答 $\left(\frac{1}{2}x-1\right)\sqrt{-1+4x-x^2}+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{x-2}{\sqrt{3}}+c.$

---

8. 曲線ノ弧ノ長サ. 第五編第6款ニ於テ曲線ノ弧ノ微小數ハ

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\,dx$$

デ與ヘラレルコトヲ示シタ. 故ニ弧ノ長サハ

$$s=\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \tag{13}$$

デ求メラレル.

[例 1] 拋物線

$$y=x^2$$

ノ弧ノ長サヲ求ムベシ.

$$dy=2x\,dx,\qquad \sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$s=\int\sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

此積分ハ第6款(12)ニ歸着シ次ノ結果ヲ得ル:

$$s=2\int\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\,dx=x\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}+\frac{1}{4}\log\left(x+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\right)+c.$$

今頂點カラ弧ノ長サヲ計ルト, $x=0$ ノトキ $s=0$ デアルカラ c ヲ定メルコトガ出來ル.

$$0=\frac{1}{4}\log\frac{1}{2}+c,\qquad c=\frac{1}{4}\log 2$$

故ニ

$$s=\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{4}\log(2x+\sqrt{1+4x^2}),$$

特ニ (1, 1) ナル點ニ至ル弧ノ長サハ

$$[s]_{x=1}=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5})=1.45.$$

シカルニ弦ノ長サハ $\sqrt{2}=1.41$ デ,一方ニハ横線ト縱線トノ長サノ和ハ2デアル. 從テ問題ニ於ケル弧ノ長サハ1.41ト2トノ間ニアリ.

[例 2] 等角螺旋ノ弧ノ長サヲ求ムベシ.

$$r=ae^{\lambda\theta}. \qquad \lambda=\cot\alpha$$

第五編ノ第6款ニ依リ

$$ds=\sqrt{dr^2+r^2\,d\theta^2}, \qquad dr=a\lambda e^{\lambda\theta}\,d\theta$$

$$\therefore\quad ds=\sqrt{1+\lambda^2}\;ae^{\lambda\theta}\,d\theta=\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda}\,dr=dr\sec\alpha,$$

$$s=\sec\alpha\int dr=r\sec\alpha+k$$

$r=a,\ \theta=0$ デアル點カラ弧ヲ測ルトキハ $r=a$ ナルトキ $s=0$ デアルカラ

$$0=a\sec\alpha+k \qquad \therefore\quad s=(r-a)\sec\alpha$$

$\theta=-\infty$ ナルトキハ $r=0$ ナル極ノ周リニ螺旋ガ無限ニ卷キ付キ r ハ其極限トシテ0ヲ有ス. s ノ數値ハ $r<a$ デアルト

$$|s|=-s=(a-r)\sec\alpha.$$

カヤウニ螺旋ノ長サハ $\theta=-\infty$ ノトキ,スベテノ極限外ニ増加シナイデ

$$\lim_{\theta=-\infty}|s|=a\sec\alpha$$

トナル.

演習

1. 心臟線 $r=a(1-\cos\theta)$ ノ長サヲ求ム. 答 $8a$.

2. 極ヨリ $\theta=2\pi$ 即チ初メノ動經ヲ切ル點マデノ螺旋 $r=\theta$ ノ長サヲ求ム. 答 21.3

3. 曲線 $27y^2=x^3$ デ原點ト其横線ガ15デアル點マデノ弧ノ長サヲ求メヨ. 答 19.

4. 螺旋 $r=1/\theta$ デ $\theta=1,\ r=1$ ナル點カラ計ッタ弧ノ長サヲ求メヨ.

5. 懸鏈線

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

ノ弧ノ長サヲ $x=0$ ナル頂點カラ計ッタモノハ

$s=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$ デアルコトヲ證明セヨ.

6. 焦點ヲ極トシテ拋物線ノ方程式ハ

$$r=\frac{m}{1-\cos\phi}$$

デアルコトヲ假定シ通徑(焦點ヲスギテ横軸ニ垂直ナル線)デ切トッタ部分ノ周圍ヲ求ム.

演　　習

次ノ積分ヲ求メヨ.

1. $\int\sqrt{2mx}\,dx.$

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$

3. $\int(a-x)^2\,dx.$

4. $\int\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx.$

5. $\int\frac{x\,dx}{1-x^2}.$

6. $\int\frac{x^2\,dx}{1+x}.$

7. $\int\frac{x-1}{x+1}\,dx.$

8. $\int\frac{x^{n-1}}{a+bx^n}\,dx.$

9. $\int\frac{\log x\,dx}{x}.$

10. $\int\frac{t^2+1}{t-1}\,dt.$

11. $\int\frac{dx}{x\log x}.$

12. $\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx.$

13. $\int 10^x\,dx.$

14. $\int(e^z-e^{-z})^2\,dz.$

15. $\int\frac{(r^2-1)^2}{r^3}\,dr.$

16. $\int x\cos x^2\,dx.$

17. $\int\frac{\sin x\,dx}{a+b\cos x}.$

18. $\int e^{\cos x}\sin x\,dx.$

19. $\int\sin^3 x\,dx.$

20. $\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}}.$

21. $\int\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta.$

22. $\int\frac{dx}{1+\sin x}.$

23. $\int\sec^4 x\,dx.$

24. $\int\cos^3 x\,dx.$

25. A ガ曲線

$$r=f(\theta)$$

ニ於テ定動徑 $\theta=\theta_0$ ト變動徑 θ トノ間ニ含マレタ面積デアルト

$$(14)\qquad D_\theta A=\frac{1}{2}r^2,\quad 從テ\quad A=\frac{1}{2}\int r^2\,d\theta$$

ナルコトヲ證明セヨ.

26. 心臟線 $r=a(1-\cos\phi)$ ノ面積ヲ求メヨ.

27. 等角螺旋 $r=ae^{\lambda\theta}$ ニ於テ 0 ト $\frac{1}{2}\pi$ トノ間ノ θ ニ相當スル弧ニ含マレタ第一象限ノ面積ヲ求メヨ.

28. 「レムニスケート」$r^2=a^2\cos 2\theta$ ノ一葉ノ面積ヲ求ム.

29. $r=a\sin 3\theta$ ニ就テ上ト同ジコトヲ求ム.

30. $r=a\cos n\theta$ ニ同上.

31. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ナル楕圓ノ面積ヲ求ム.　答 $\pi ab.$

32. 原點カラ計ツタ $y=a\log\frac{a^2}{a^2-x^2}$ ノ弧長ハ

$s=a\log\frac{a+x}{a-x}-x$ デアルコトヲ證明セヨ.

33. 曲線 $8a^2y^2=x^2(a^2-x^2)$ ノ弧ノ長サハ

$s=y+\frac{a}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{x}{a}$ デアルコトヲ證明セロ.

34. $\left(y-\frac{x^2}{a}\right)^2=a^2-x^2$ ナル曲線ノ面積ハ πa^2 デアルコトヲ證明セヨ.

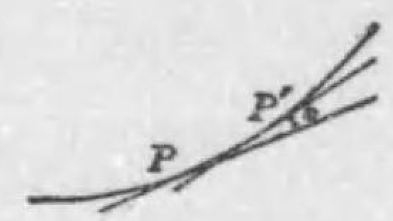
35. 曲線 $y^2=x^2+x^3$ ノ自閉線ノ面積ヲ定メヨ.　答 $\frac{8}{15}.$

第七編

曲率　縮閉線

1. 曲率. 鐵道ノ曲ガリカタニ就テ即チ性質ニ就テ論ズルコトガアル. 一般ニ曲線ノ曲ガリカタニ就テ量的定メカタヲ得ルコトガ出來ナイカヲ論ジヤウ.

一點ガPカラP'ニ,曲線ヲ畫クトキ曲線ノ切線ガ方向ヲ變ズル所ノ角ハ曲線ノ曲リ方ニ關スルバカリデナク,PトP'トノ距離ニ關係ス. シカシ此後者ハP'ガPニ極メテ近ヅクトキ弧ノ一單位毎ノ角ノ變化ノ平均變化ヲ取ルトソレヲ論外ニ措クコトガ出來ル.



$$\frac{\phi}{\overset{\frown}{PP'}} = PP' \text{ 弧ノ平均曲率.}$$

此平均變化ガ近ヅク所ノ極限ハPニ於ケル曲率ト稱セラレルモノデアル. 之ヲκニテ示スト

$$(1)\qquad K = \lim_{P'\doteq P} \frac{\phi}{\overset{\frown}{PP'}} = P \text{ ニ於ケル實際ノ曲率.}$$

例ヘバaナル半經ノ圓ニ於テ

$$\overset{\frown}{PP'} = a\phi,\quad \frac{\phi}{\overset{\frown}{PP'}} = \frac{1}{a},\quad \lim_{P'\doteq P} \frac{\phi}{\overset{\frown}{PP'}} = \frac{1}{a} = K,$$

即チ平均曲率ハP'ト共ニ變ジナイ. 圓ノ曲率ハスベテノ點

ニ同ジコトデアル, 即チ半徑ノ反數ニ等シイ. 又直線ノ曲率ハ0デアル.

$y=f(x)$ ナル曲線ニ於テ(1)ノ極限ヲ計算スルニハ

$$\overset{\frown}{PP'} = \triangle s,\qquad \phi = \triangle\tau$$

デアルコトヲ見ルナラバ

$$K = \lim_{\triangle s\doteq 0} \frac{\triangle\tau}{\triangle s} = D_s\tau,$$

但シτハ普通切線ガx軸トナス角ヲ表ハス. モット精密ニ云フト要スルモノハ$D_s\tau$ノ絶對値デアル,何トナレバKハ本來正量デアルカラデアル. ソレカラシテ

$$(2)\qquad K = \pm\frac{d\tau}{ds}\quad \text{或ハ}\quad K = \left|\frac{d\tau}{ds}\right|.$$

上ノ定義カラ曲率ハ一點ガ單位速度デ曲線ヲ畫クトキ切線ガ回轉スル比デアル.

$d\tau/ds$ ヲ計算スルタメ微係數ニ關スル最簡ノ記法ヲ導入スルノガ便利デアル:

$$(3)\qquad \tan\tau = \frac{dy}{dx},\quad \text{或ハ}\quad \tau = \tan^{-1}\frac{dy}{dx}$$

$$y = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x),\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x),\ \cdots\cdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x).$$

故ニ

$$dy' = \frac{dy'}{dx}\,dx = \frac{d^2y}{dx^2}\,dx = y''\,dx$$

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

3(ニ歸リ且ツ微分シテ

$$\tau = tan^{-1}\,y', \quad d\tau = \frac{dy'}{1+y'^2} = \frac{y''\,dx}{1+y'^2},$$

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{K} = \frac{(y'')}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]}{\left[1+\frac{dy^2}{dx^2}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

曲率ノ反數ハ曲率半徑ト名ヅケ ρ ニテ表ハス.

$$\text{(5)} \qquad \rho = \frac{1}{\mathrm{K}} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{\left[1+\frac{dy^2}{dx'}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|},$$

圓ノ曲率半徑ハ其半徑デアッテ「インフレクション」ノ點ニ於テハ 0 デアル何トナレバ y'' ガ連續デアルト,カヤウナ點ニ於テ $y''=0$ デアルカラデアル.

[例] 次ノ拋物線ノ曲率ヲ求メヨ.

$$y^2 = 2mx.$$

然ルトキハ

$$2y\,dy = 2m\,dx, \qquad y' = \frac{m}{y},$$

$$dy' = -\frac{m}{y^2}\,dy, \qquad y'' = -\frac{m^2}{y^3}$$

$$\mathrm{K} = \frac{m^2\,|\,y\,|^{-3}}{\left|1+\frac{m^2}{y^2}\right|^{\frac{3}{2}}} = \frac{m^2}{(m^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \rho = \frac{(m^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{m^2}$$

演　　習

次ノ曲線ノ曲率ヲ求メヨ.

1. $y = x^2$. 答 $\mathrm{K} = \dfrac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

2. $y = x^3$. (但シ原點ニ於テ).

3. $y = log\,cos\,x$. 答 $\mathrm{K} = |\,sin\,x\,|$.

4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. 答 $\mathrm{K} = \dfrac{a^4\,b^4}{(b^4\,x^2+a^4\,y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

5. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. 答 $\mathrm{K} = \dfrac{a^4\,b^4}{(b^4\,x^2+a^4\,y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

6. 等邊双曲線 $xy = \dfrac{a^2}{2}$. 答 $\mathrm{K} = \dfrac{a^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

7. $y = x^{\frac{3}{2}}$ ナル曲線ノ曲率半徑ハ P ガ尖頭ニ近迫スルトキ 0 ニ近迫スルコトヲ證明セヨ.

8. 曲線

$$54\,y = 10\,x^5 - 19\,x^4 + 11\,x^3 + x^2 - 72\,x$$

ノ原點ニ於ケル曲率半徑ヲ求メヨ.　　　答　$P=125$

9.　懸鏈線

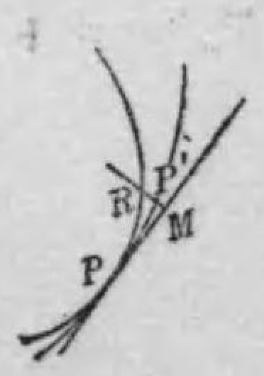
$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

ノ頂點ニ於ケル曲率半徑ヲ求メヨ.

10.　$y=x^3$ ナル曲線ノドンナ點ニ於テ曲率半徑ガ最モ大ナルカ.

11.　$y=x^n$, $x>0$, $n>0$ ナルトキ, 曲率半徑ガ最大ナル點ハ何デアルカ.　答　$x=\left[\frac{n-2}{(2n-1)n^2}\right]^{\frac{1}{2n-2}}$　$y=\left[\frac{n-2}{(2n-1)n^2}\right]^{\frac{n}{2n-2}}$.

2.　切觸圓.　曲線上ノ任意ノ點Pニ於テ法線ヲ曲線ノ凹ナル側ニ引キ曲率半徑 ρ ニ等シキ長サヲ取リタル點ヲQトシテ其點ヲ曲率ノ中心ト名ヅケヤウ.　Qヲ中心トシ曲率半徑 ρ ヲ以テ半徑トシテ書イタ圓ハ曲線ニ關シテ重要ナ關係ヲモツテヲル.　此圓ヲ切觸圓ト稱スル, 而カモカヤウナ圓ハ他ノ圓ヨリモ精密ニ曲線ヲ表ハス.　今曲線上ノ點ヲスギテ凹ナル側ニ中心ヲ有スル切圓ヲ引クトセバ其半徑ガ小サクナルホド曲ガリカタ大キナリ終リニ曲線ヨリモ曲ガリカタ甚シクナル.　無論中間ノ圓ハ其兩極端ノモノヽ間ニアル.　其内ノ一ツヲ他ノモノヨリモ能ク其性質ヲ明確ニスルコトノ出來ルヤウナ標準ガアル.　P ニ於テ切線ヲ引キ, P′ カラ垂直線ヲ下シ, ソレニ M ニ於テ交ラシ, 任意ノ圓ニ R′ ニテ交ラシメルトシヤウ.　PP′



ヲ一級ノ主要ナル微小量トセバ P′R ハ二級ノ微小量デアル.　シカシ P′R ガ第三級ノ微小量トナルヤウニ任意ノ圓ヲ見出スコトガ出來ル, ソウシテコレハ切觸圓デアルコトハ後ニ證明スル.

切觸圓ハ一般ニ切點ニ於テ曲線ヲ切ル.　シカシ除外セラルヽモノモアル, カヤウナ點デハ P′R ガ第三級ヨリモ高キ(一般ニ四級)ノ微小數デアル.

演　習

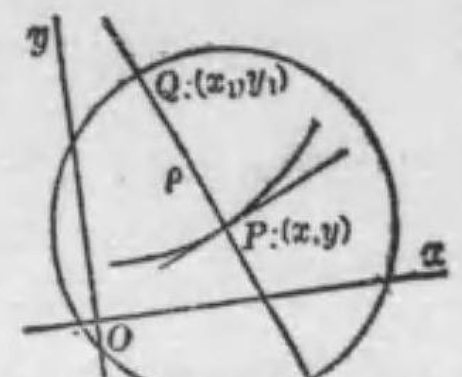
$-\frac{3}{4}<x<\frac{3}{4}$ ナル x ノ値ニ於テ $y=x^2$ ナル抛物線ヲ作レ(10「センチメートル」ヲ單位トシテ).　$x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{4}$ ナル點或ハ頂點ニ於テ切觸圓ヲ作レ.

3.　縮閉線.　上述ノP點ガ曲線ヲ畫クト, Q點ガ第二ノ曲線ヲ畫ク.　此ヤウナ Q 點ノ軌跡ヲ與ヘラレタ曲線ノ縮閉線ト名ヅケル.

Q點ハ P ニ於ケル法線, 中心 P, 半徑 ρ ナル圓トノ交點トシテ定ムルコトヲ得, コノヤウナQ點ハ次ノヤウニシテ解析的ニ求メルコトガ出來ル.　然ルニ法線ノ方程式ハ

$$X-x+y'(Y-y)=0 \tag{6}$$

デアル, 但シ X, Y ハ其線上ノ動座標デアル, 即チ法線上ニ變ズル點ノ座標デアル, 但シ x, y ハ P 點ノ座標ニシテ次ノ研究中一定ノ値ヲ有スベキモノデアル.



圓ノ方程式ハ

$$(7)\qquad (X-x)^2+(Y-y)^2=\rho^2=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

(6) ト (7) トガ何處デ相交ハルカヲ見出スタメニ X ヲ驅逐スル:

$$(1+y'^2)(Y-y)^2=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}\qquad Y-y=\pm\frac{1+y'^2}{y''}$$

此正負ノ何レヲ採用スルカト云フニ, モシ曲線ガ上ノ方ニ凹デアルナラバ圖ヲ見テワカルヤウニ

$$Y-y>o \quad 及ビ \quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}>o,$$

故ニ此場合デハ上ノ記號ヲ用ヒテ

$$(8)\qquad Y-y=\frac{1+y'^2}{y''}$$

トスル, シカシ下ノ方ニ凹ヲ向ケルト

$$Y-y<o \quad 及ビ \quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}<o$$

デアルカラ, 矢張リ上ノ正號ヲ用ヒル. 即チ

$$Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}.$$

(6) ト (8) トカラ

$$X=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}$$

カヤウニ定メタ X, Y ハ Q 點ノ座標 (x_1, y_1) デアル:

$$(9)\qquad x_1=x-\frac{\dfrac{dy}{dx}\left(1+\dfrac{dy^2}{dx^2}\right)}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},\quad y_1=y+\frac{1+\dfrac{dy^2}{dx^2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},$$

此等ノ公式ハ根號ヲ有セズ.

(9) ノ方程式ト $y=f(x)$ ナル原方程式トノ間ニ x, y ヲ除去スルト

$$F(x_1, y_1)=o$$

ト云フ形ノ縮閉線ノ方程式ヲ得ル. シカシ必ズシモ驅逐セズトモ與ヘラレタ曲線ノ多クノ點ニ相應スル x, y, y', y'' ノ値ヲ求メ, ソレヲ (9) ニ代入スルト縮閉線上ノ任意ノ多クノ點ヲ作圖スルコトガ出來ル.

[例 1] 拋物線 (10) $y^2=2mx$ ノ縮閉線ヲ見出セ.

コヽニ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{m}{y},\quad 1+\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{m^2+y^2}{y^2},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{m^2}{y^3},$$

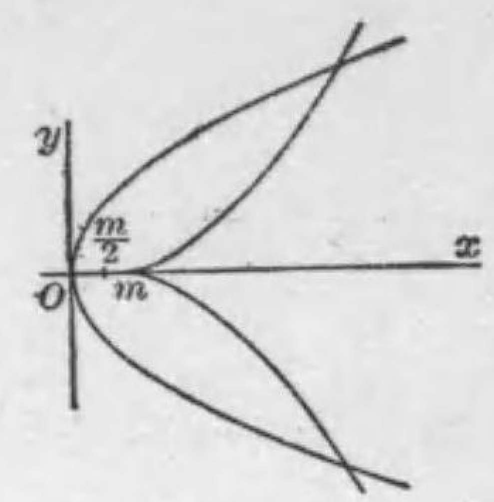
從テ

$$x_1=x-\frac{m(m^2+y^2)}{y^3}\bigg/-\frac{m^2}{y^3}=x+\frac{m^2+y^2}{m},$$

$$y_1=y+\frac{m^2+y^2}{y^2}\bigg/-\frac{m^2}{y^3}=-\frac{y^3}{m^2}.$$

之レカラx, yヲ驅逐スルト

$$x_1 = \frac{y^2}{2m} + \frac{m^2+y^2}{m} = m + \frac{3y^2}{2m}$$



$$\frac{2m}{3}(x_1 - m) = y^2.$$

此第二ノ方程式カラ

$$-m^2 y_1 = y^3.$$

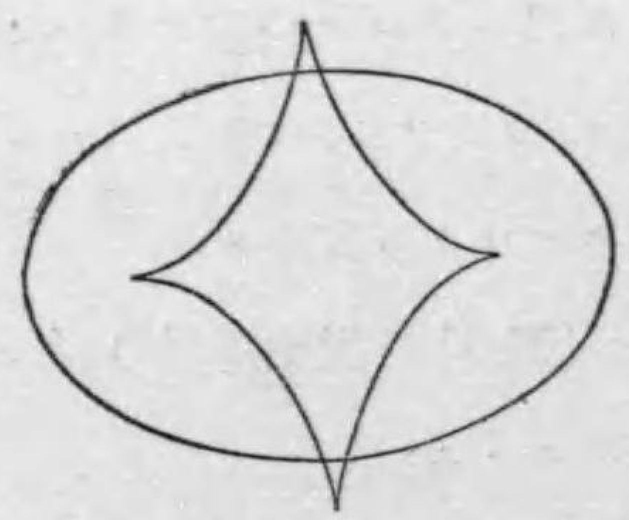
最終ノ方程式カラyヲ除去セバ

$$m^4 y_1^{\,2} = \frac{8m^3}{27}(x_1 - m)^3$$

下ノ記號ヲ除去シテ拋物線ノ縮閉線ノ方程式ヲ得:

$$y^2 = \frac{8}{27m}(x-m)^3, \tag{11}$$

此曲線ヲ半立方拋物線ト云フ.



[例 2] 楕圓

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{12}$$

ノ縮閉線ヲ求メヨ.

コレカラ容易ニ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^2}$$

$$x_1 = x - \frac{x(b^4x^2 + a^4y^2)}{a^4 b^2}, \qquad y_1 = y - \frac{y(b^4x^2 + a^4y^2)}{a^2 b^4}.$$

此等ノ方程式ト(12)トカラx, yヲ驅逐スルニハ少シク巧

ミナ方法ガ入ル.

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad a^4y^2 = a^2b^2(a^2 - x^2)$$

$$b^4x^2 + a^4y^2 = b^2(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2).$$

夫レカラ $$x_1 = x - \frac{b^2x(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)}{a^4b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^4}x^3,$$

同様ニ $$y_1 = y - \frac{a^2y(b^4 - b^2y^2 + a^2y^2)}{a^2b^4} = -\frac{a^2-b^2}{b^4}y^3.$$

コレカラx^2, y^2ヲ求メテ(12)ニ入レルト

$$\left(\frac{ax_1}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by_1}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

$x, y,$ ノ下ノ記號ヲ取ルト楕圓ノ縮閉線ノ方程式ヲ得:

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}. \tag{13}$$

演 習

次ノ曲線ノ縮閉線ノ方程式ヲ見出セ.

1. 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$ 答 $(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}.$

2. 双曲線 $2xy = a^2.$ 答 $(x+y)^{\frac{2}{3}} - (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}.$

3. 懸鏈線 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$ 答 $x_1 = x - \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x}),\ y_1 = 2y,$

$$x = log\left[\frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}\right] \mp \frac{y}{2}\sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}.$$

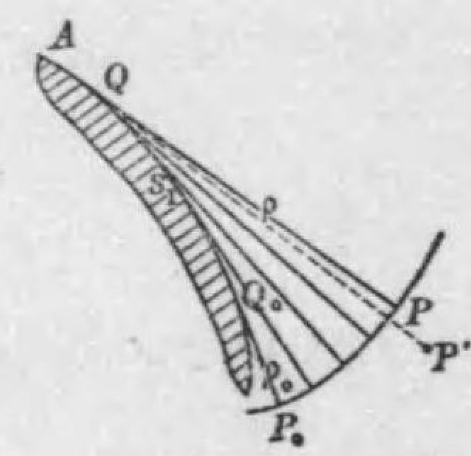
4. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$ 答 $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}.$

5. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$,
   $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$. 答 $x^2+y^2=a^2$.

6. $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$. 答 $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.

---

4. 縮閉線ノ性質. 縮閉線ト名付ヅクワケハ其性質カラデアル. 縮閉線ノ凹ナル方ニ金屬ノ圓柱體ヲ作リ, ソレヲ絲デシツカリト卷キ付ケルトセヨ.



絲ノ終リニ鉛筆ヲ附ケ, ハヅレヌ樣ニ絲ノ他ノ端ヲ A ニ附ケルトセヨ. 鉛筆ノ縮閉線ヲ卷キタル絲ヲ卷キモドスヤウニスルト鉛筆ノ尖端ハ與ヘラレ曲線ヲ書ク.

コレヲ證明スルニハ P ガ與ヘラレタ曲線ノ任意ノ點デアツテ Q ハ縮閉線ノ相當ノ點デアルトスルト, 絲ガ Q ヲ離レルトキ鉛筆ノ位置 P′ ガソノ P ト一致スルコトヲ示セバヨロシイノデアル. 之レヲ證明スルニハ, (a) QP ハ縮閉線ニ切スルコト從ツテ P′ ハ QP ノ上ニアルコトト, (b) QP′=QP=ρ ナルコト、ヲ證スルニアリ

(a) 方程式(9)ハ

$$x_1 = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \qquad y_1 = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

ノヤウニ書キ x ニ就テ微分スルト

$$\frac{dx_1}{dx} = x_1' = \frac{y'(1+y'^2)y'''}{y''^2} - 3y'^2 = \frac{y'(1+y'^2)y''' - 3y'^2y''^2}{y''^2},$$

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1' = 3y' - (1+y'^2)\frac{y'''}{y''^2} = \frac{3y'y''^2 - (1+y'^2)y'''}{y''^2},$$

$$\therefore\quad \frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{1}{y'} = -\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}.$$

カヤウニ Q ニ於ケル縮閉線ノ傾斜ハ P ニ於ケル原曲線ノ傾斜ノ反數ノ記號ヲ變ジタモノニ等シイコトカラ QP ハ縮閉線ニ切スルコトガワカル.

(b) S_1 ガ Q_0Q ノ弧ノ長サヲ表ハスト, QP′=$S_1+\rho_0$ ナリ, 今此量ハ ρ ニ等シイコトヲ證明センニ

$$\frac{dS_1}{dx} = \frac{d\rho}{dx}$$

デアルコトヲ證明スレバヨイノデアル.

今 $$dS_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2,$$

今 $$\frac{dS_1^2}{dx^2} = x_1'^2 + y_1'^2 = y_1'^2\left(1+\frac{x_1'^2}{y_1'^2}\right) = y_1'^2(1+y'^2)$$

又 $$\frac{d\rho}{dx} = \pm\frac{3y'y''^2-(1+y'^2)y'''}{y''^2}\sqrt{1+y'^2} = \pm y_1'\sqrt{1+y'^2},$$

故ニ $$\frac{dS_1}{dx} = \pm\frac{d\rho}{dx},$$

ρ ガ大キクナルトキ S_1 ハ大キクナル樣ニ取ツタカラ上ノ記號ヲ採用スル, 卽チ

$$dS_1 = d\rho, \qquad S_1 = \rho + C,$$

然ルニ Q_0 ニ於テ $S_1 = o,\ \rho = \rho_0$ デアルカラ $o = \rho_0 + C$,

故ニ
$$\rho = S_1 + \rho_0.$$

上ニハ與ヘラレタ曲線ノ法線ハ縮閉線ノ切線デアルコトヲ偶然ニ得タ, 卽チ縮閉線ハ與ヘラレタ曲線ノ包圍線デアルコトガワカツタ. コノ性質ハ縮閉線ノ定義トシテ用ヒラレルソウシテ第十七編ノ方法デ其方程式ヲ作ルコトガ出來ル.

演　　習

1. 曲線ノ方程式ガ極坐標デ與ヘラレ $r = f(\theta)$ デアルト

$$\triangle\tau = \triangle\Psi + \triangle\theta$$

$$\frac{d\tau}{dS} = \frac{d\Psi}{dS} + \frac{d\theta}{dS}.$$

$$r' = dr/d\theta \text{ トスレバ } \tan\Psi = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{r}{r'}$$

ナルコトヲ記憶スルト次ノ方程式ガ出來ル.

$$\rho = \pm\frac{\left[r^2 + \dfrac{dr^2}{d\theta^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 - r\dfrac{d^2r}{d\theta^2} + 2\dfrac{dr^2}{d\theta^2}}. \tag{14}$$

次ノ各曲線ノ曲率半徑ヲ求メヨ.

2. 「アーキメデス」ノ螺旋 $r = a\theta$.　　答 $\rho = \dfrac{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2a^2}$.

3. 心臟線 $r = 2a(1-\cos\phi)$.　　答 $\rho = \dfrac{4}{3}\sqrt{ar}$.

4. 「レムニスケート」$r^2 = a^2\cos 2\theta$.　　答 $\rho = \dfrac{a^2}{3r}$.

5. 等邊双曲線 $r^2\cos 2\theta = a^2$.　　答 $\rho = \dfrac{r^2}{a^2}$.

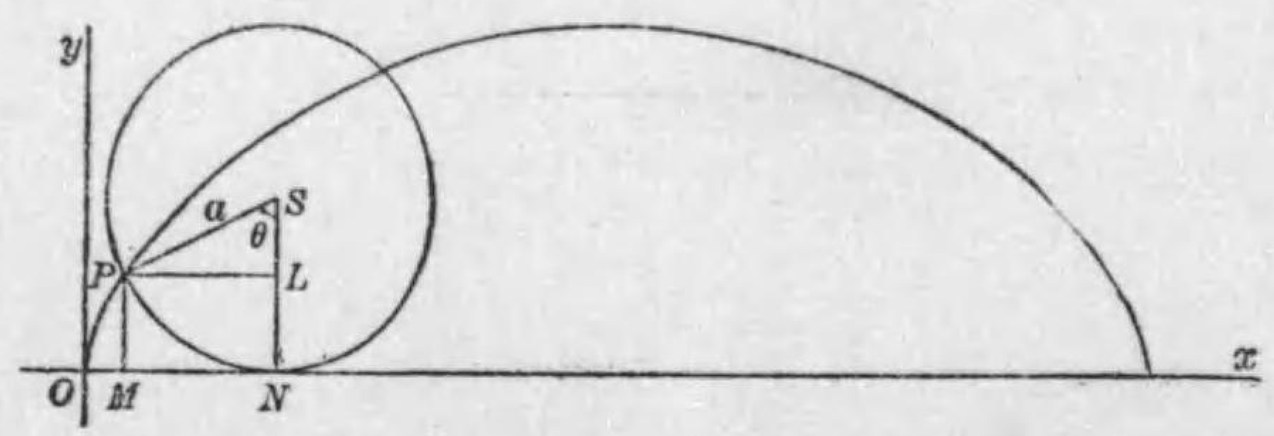
6. 等角螺旋 $r = ae^{\lambda\theta}$.

7. 三等分曲線 $r = 2a\cos\theta - a$.　　答 $\rho = \dfrac{a(5-4\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{9-6\cos\theta}$.

第八編

擺線

1. 擺線ノ方程式. 擺線ト云フノハ車輪ガ廻轉スルトキ其線ノ上ノ點ガ畫ク路デアル,卽チ圓周ガ滑ベルコトナク直線ノ上ヲ同平面上ニ廻轉スルトキ其上ノ點ガ畫ク路デアル其直線ヲ x 軸トナシ,P 點ガ最終ニ O 點デ直線ニ接シタ後圓ガ廻轉シタ角ヲ θ トス.



P ニ於ケル坐標ハ $x=\mathrm{OM}$, $y=\mathrm{MP}$ ハ θ ヲ用ヒテ表ハサレル,卽チ圓周ノ弧 $\mathrm{NP}=a\theta$ ハ圓ハ滑ベルコトガナイカラ直線ノ部分 ON ト等シイ,故ニ

$$\mathrm{OM}=\mathrm{ON}-\mathrm{MN}=a\theta-a\sin\theta,$$

$$\mathrm{MP}=\mathrm{NS}-\mathrm{LS}=a-a\cos\theta,$$

故ニ擺線ノ方程式ハ

$$(1)\qquad \begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta), \\ y=a(1-\cos\theta). \end{cases}$$

此等ノ方程式ノ内カラ θ ヲ除去シテ單ニ x, y ノ關係式ヲ

作ルコトガ出來ル. シカシ此儘ニ置クコトガ簡單デアルバカリデナク,曲線ノ性質ヲ研究スルノニ都合ガヨロシイ.

演習

1. 擺線ノ方程式ヲ頂點卽チ最高キ點ヲ新原點トシ平行軸ニ關係セシムルトキハ

$$(2)\qquad \begin{cases} x=a\theta+a\sin\theta, \\ y=-a+a\cos\theta, \end{cases}$$

但シ θ ハ P 點ガ頂點ニアリタル後廻轉シタル角デアル.

初メ作圖シテ幾何學的ニ此等ノ方程式ヲ作レ,又 (1) ニ變形シテ解析的ニ結果ヲタメセ:

$$x=x'+\pi a,\qquad y=y'+2a,\qquad \theta=\theta'+\pi.$$

2. 頂點ヲ原點トシ,裏返ヘシニシタ擺線ノ方程式ハ:

$$(3)\qquad \begin{cases} x=a\theta+a\sin\theta, \\ y=a-a\cos\theta. \end{cases}$$

圖ヲ引キ θ ヲ說明セヨ.

---

2. 擺線ノ性質. 曲線ノ傾度ハ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin\theta\,d\theta}{a\,d\theta-a\cos\theta\,d\theta}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}=\cot\frac{1}{2}\theta,$$

或ハ $\tan\tau = \cot\frac{1}{2}\theta.$

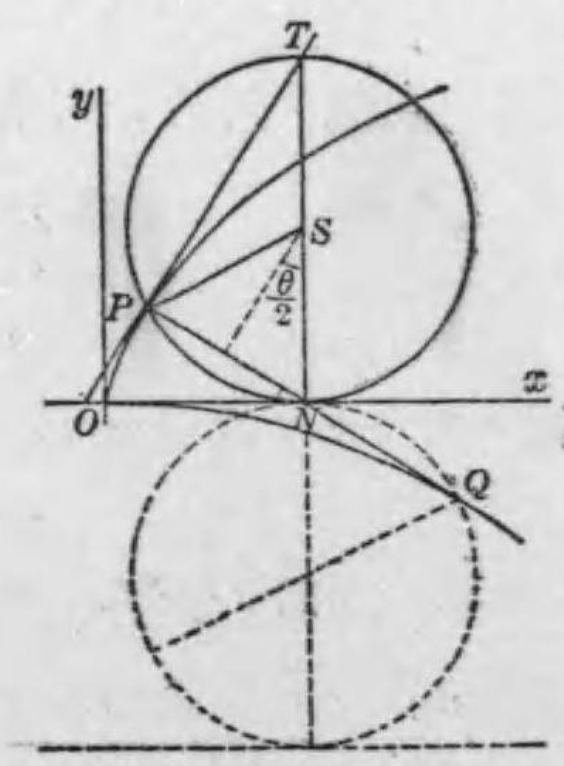
此結果カラ P ニ於ケル切線ハ弦 PN ニ垂直デアルコトガワカル，何トナレバ弦PN ハ x 軸ノ負方向ト $\frac{1}{2}\theta$ ナル角ヲナス．カラ其傾斜ハ $-\tan\frac{1}{2}\theta$ デアル，即チ切線ノ傾斜ノ記號ヲ變ジタモノヲ加ヘタモノデアルカラデアル．カヤウニ P ニ於ケル法線ハ母圓ノ最低點ヲスギルコトガワカツタ，從テ切線ハ最高點ヲスギルコトモワカル．

(x_0, y_0) ナル點ニ於ケル切線ノ方程式ハ $\theta = \theta_0$ ト

$$y-y_0 = \cot\frac{1}{2}\theta_0(x-x_0), \tag{4}$$

デ法線ノ方程式ハ

$$x-x_0+\cot\frac{1}{2}\theta_0(y-y_0) = o \tag{5}$$



縮閉線ハ

$$\frac{dy}{dx} = \cot\frac{1}{2}\theta.$$ 從テ

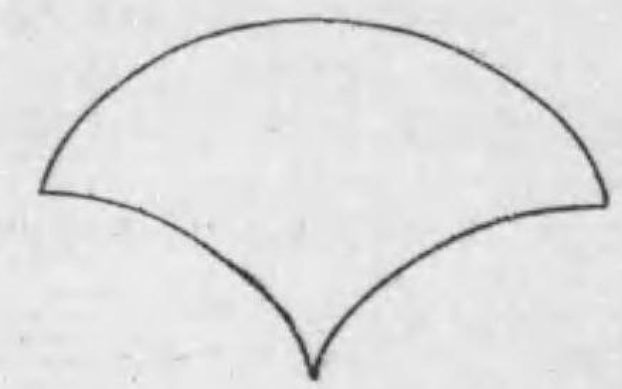
$$1+\frac{dy^2}{dx^2} = \csc^2\frac{1}{2}\theta$$

及ビ
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\csc^2\frac{1}{2}\theta\, d\theta}{a\,d\theta-a\cos\theta\, d\theta} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{1}{2}\theta},$$

$$\rho = \frac{4a\sin^4\frac{1}{2}\theta}{\sin^3\frac{1}{2}\theta} = 4a\sin\frac{1}{2}\theta. \tag{6}$$

曲率ノ中心ヲ作ルコトハ容易デアル，從テ縮閉線ヲ見出スコトモ容易デアル．第一ノモノニ對シテハ PN ナル法線ノ上ニ $PQ=4a\sin\frac{1}{2}\theta$ ヲ作レバヨロシイ即チ PN ノ二倍ヲ作レバヨロシイ，從テ第二ノモノ即チ縮閉線ハ o ヲ頂トスル等シキ擺線デアルコトハ容易ニ證明ガ出來ル．



弧ハ

$$ds^2 = dx^2+dy^2 = a^2[(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta]d\theta^2$$

$$= 4a^2\sin^2\frac{1}{2}\theta\, d\theta^2$$

$$s = 2a\int\sin\frac{1}{2}\theta\, d\theta = 4a\int\sin\frac{1}{2}\theta\, d\left(\frac{1}{2}\theta\right)$$

$$= -4a\cos\frac{1}{2}\theta+c.$$

原點カラ弧ヲ測ルト

$$o = -4a+c, \qquad c = 4a$$

$$\therefore\ s = 4a\left(1-\cos\frac{1}{2}\theta\right) = 8a\sin^2\frac{1}{4}\theta. \tag{7}$$

故ニ擺線ノ一切リノ全長ハ $8a$ デアル．

一切ノ面積ハ最初「ガリレオ」ニ見出サレタモノデアッテ,ソレハ其レダケノ部分ヲ切リ其目方ヲ計ッテ得タモノデアッタ. 今積分法ニテ求メルコトガ出來ル.

$$A = \int y dx = \int [a - a\cos\theta]\,[a d\theta - a\cos\theta\, d\theta]$$

$$= a^2 \int (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= a^2 \left[\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta)\right] + c$$

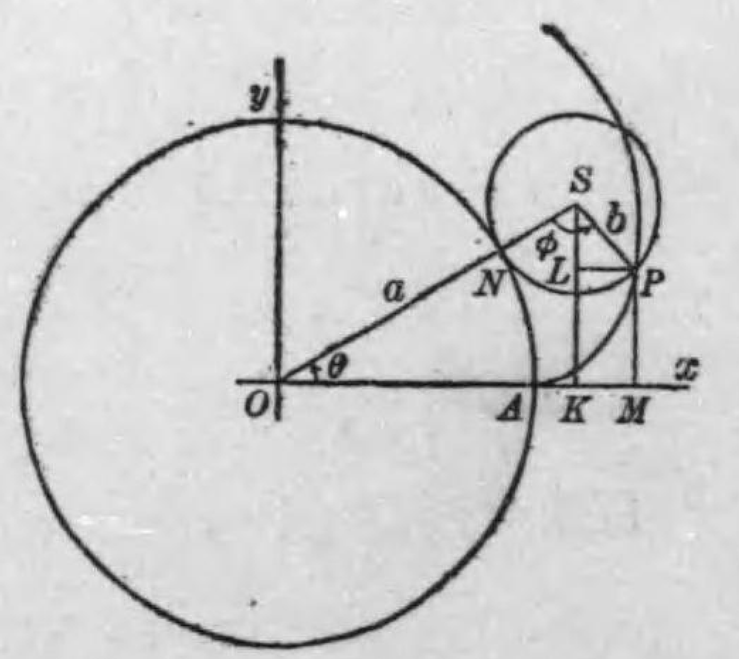
$$o = o + c$$

(8) $$\therefore\ A = a^2\left(\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right).$$

故ニ完全ナル擺線ノ一切リノ面積ハ $3\pi a^2$ デ,母圓ノ 3 倍ニ等シイ.

3. 外擺線,内擺線.

一ツノ圓ガ定メラレテアル第二ノ平面上ニアリテ滑ベルコトナク,切シナガラ廻轉スルトキ第一圓ノ周上ノ一點ハ外擺線ト名ヅケル曲線ヲ畫ク,上圖カラ



$$x = \mathrm{OK} + \mathrm{KM} = (a+b)\cos\theta + b\sin\left[\phi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right],$$

$$y = \mathrm{KS} - \mathrm{LS} = (a+b)\sin\theta - b\cos\left[\phi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right].$$

尙 $\overset{\frown}{\mathrm{AN}} = a\theta$, $\overset{\frown}{\mathrm{NP}} = b\phi$ ハ等シク,卽チ $a\theta = b\phi$ デアルカラ外擺線ノ方程式トシテ

(9) $$\begin{cases} x = (a+b)\cos\theta - b\cos\dfrac{a+b}{b}\theta, \\ y = (a+b)\sin\theta - b\sin\dfrac{a+b}{b}\theta \end{cases}$$

動圓ガ定圓ニ内接スルトキ内擺線ト稱スルモノガ出來ル其方程式ハ上ト同樣ニシテ作リ得ラレル.

(10) $$x = (a-b)\cos\theta + b\cos\frac{a-b}{b}\theta,$$

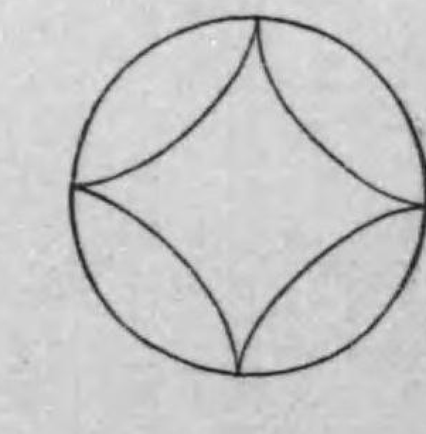
$$y = (a-b)\sin\theta - b\sin\frac{a-b}{b}\theta.$$

次ノ特別ノ場合ハ興味アルモノデアル.

(1) $a = 2b$ デアルト,内擺線ハ直線ノ部分トナル,卽チ $y = o$ トナリ,圓ノ直徑トナル. 卽チ圓運動ガ直線運動トナル.

(2) $a = 4b$ デアルトキハ内擺線ハ次ノモノトナル:

$$\begin{cases} x = 3b\cos\theta + b\cos 3\theta = a\cos^3\theta, \\ y = 3b\sin b - b\sin 3\theta = a\sin^3\theta. \end{cases}$$



ソレカラシテ

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

コレハ四尖頭内擺線ト稱セラレルモノデアル.

諸擺線ハ應用重學デ要用ナル部分ヲ有ス，卽チ齒車ノ齒ガ切ラレル形ノ理論ニ於テ必要ナモノデアル．

演習

1. (5) ナル擺線ノ法線ノ方程式ヲ用ヒテ法線ハ母圓ノ最低點ヲスグルコトヲ證明セヨ．

2. 擺線ヲ生ズル點ノ速度ヲ見出セ

答 $v=2a\omega\sin\frac{1}{2}\theta=2V\sin\frac{1}{2}\theta$. 但シ ω ハ車輪ノ角速度，V ハ轂ノ直線速度ナリ．頂點ニ於テハ $v=2V$，卽チ車輪ノ最高點ノ速度ハ轂ノ速度ノ 2 倍ナリ．

3. 擺線ノ弓狀ト縮閉線トノ間ニ含マレタ面積ヲ見出セ．

4. (3) ナル反擺線ノ弧ノ長サヲ頂點カラ計レバ

$S=4a\sin\tau$ ナルコトヲ證明セヨ．

5. 擺線ノ縮閉線ノ方程式ヲ (第七編ノ (9) ヲ用ヒテ) 解析的ニ作レ．

6. 餘擺線

$$x=a\theta-b\sin\theta,\qquad y=a-b\cos\theta$$

ハ如何ナル點デ嶮シクナルカ．

7. 上問ノ餘擺線ノ弓狀間ノ面積ヲ求ム．

8. $b=a$ ナル外擺線ハ心臟線トナル：

$$r=2a(1-\cos\phi)$$

但シ尖頭ヲ極トシタルモノデアル．此結果ヲ (9) ナル方程式カラ得ヨ．

9. 上問ヲ直接ニ幾何學的ニ得ヨ．

10. 外擺線デ $b=\frac{1}{2}a$ デアルト直線デアルコトヲ證明セヨ．

11. 廻轉スル圓ガ心臟線ヲ畫クニハ何程ノ廻轉ヲナスカ．四個ノ尖頭ヲ有スル外擺線ハ如何．月ハ一月 (舊暦ノ) 中ニ何程ノ廻轉ヲナスカ．

12. a ト b トガ可度デアルトキ內擺線ガ何程ノ尖頭ヲ有スルカ．a ト b トガ不可度デアルトキ其曲線ヲ何ト云フカ．

第九編
定積分

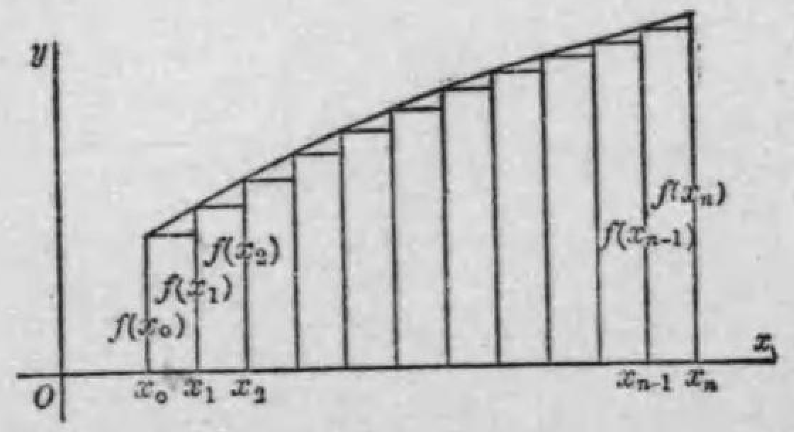
1. 曲線ノ下ノ面積ノ新ラシキ式. 第六編ニ於テ連續曲線ノ下ノ面積 A ヲ積分法ニテ計算スルコトヲ説イタ. ソウシテ

$$D_x A = y, \qquad A = \int y\,dx + c,$$

從テ

$$(1) \qquad A = \left[\int y\,dx\right]_{x=b} - \left[\int y\,dx\right]_{x=a} = \left[\int y\,dx\right]_{x=a}^{x=b}$$

今同ジ面積ヲ計算スル新法ヲ説コウ. x 軸ノ間隙 (a, b) $(a \leqq x \leqq b)$ ヲ n 個ニ等分シ其分點ヲスギテ縱線ヲ引クトシヤウ. 各小間隙ノ上ニ其左端ノ縱線ヲ高サトスル矩形ヲ作ルトセバ此等矩形ノ和ハ問題ノ A 面積ノ近似値デアル, ソウシテ n ガ極限ナク増加スレバスル程 A ニ近迫ス. 其證明ハ此編ノ終リニ説クデアラウ.



解析的ニ上ノ和ヲ説明シヤウ. 此第一ノ矩形ノ面積ハ

$$f(a)\triangle x \qquad 或ハ \qquad f(x_0)\triangle x$$

ナリ, 但シ $\triangle x$ ハ底ノ長サヲ表ハシ $x_1 - x_0 = (b-a)/n$ ナリト

ス. 第二ノ矩形ハ $f(x_1)\triangle x$ デアルヤウニ以下同法ヲ繰返ヘストキハ其面積ノ和ハ

$$(2) \qquad f(x_0)\triangle x + f(x_1)\triangle x + f(x_2)\triangle x + \ldots\ldots + f(x_{n-1})\triangle x,$$

n ガ無限ニ増大スレバ

$$(3) \qquad A = \lim_{n=\infty}[f(x_0)\triangle x + f(x_1)\triangle x + \ldots\ldots + f(x_{n-1})\triangle x]$$

[例] $y = f(x) = \sin x$ ニ於テ間隙 (a,b) ハ $0 \leqq x \leqq \pi/2$ デアルトセバ $n=10$ ナルトキ $\triangle x = 3.14/20 = 0.157$ デアル. 今

$$\sin 0\,\triangle x + \sin 9^\circ\,\triangle x + \ldots\ldots\ldots + \sin 81^\circ\,\triangle x$$

ヲ計算シヤウ. コヽニ

$\sin 0^\circ = 0.000$	$\sin 45^\circ = 0.707$
$\sin 9^\circ = 0.156$	$\sin 54^\circ = 0.809$
$\sin 18^\circ = 0.309$	$\sin 63^\circ = 0.891$
$\sin 27^\circ = 0.454$	$\sin 72^\circ = 0.851$
$\sin 36^\circ = 0.588$	$\sin 81^\circ = 0.988$
1.507	4.346

$$(1.507 + 4.346) \times 0.157 = 0.92$$

2. 第1款ニ見出シタ A ノ二ツノ値ヲ等シトオケバ

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty}\left[f(x_0)\triangle x + f(x_1)\triangle x + \ldots\ldots + f(x_{n-1})\triangle x\right]$$

$$= \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=a}^{x=b}.$$

(1) ト (3) トノ公式ハ幾何學的觀察ヨリ導カレタモノデア

ルケレドモ性質ニ於テハ純粹ナ解析的ノモノデアル.

積分法ノ基礎ノ定理. $f(x)$ ハ $a \leqq x \leqq b$ ナル間隙ニ於テ x ノ連續函數デアルトシヤウ. 此間隙ヲ n 個ニ等分シタ點ヲ $x_0=a,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ldots, x_{n-1},\ x_n=b$ トセヨ, ソウシテ

$$f(x_0)\triangle x+f(x_1)\triangle x+\ldots\ldots+f(x_{n-1})\triangle x$$

ヲ作リ n ヲ無限ニ増大ナラシムレバ其和ハ極限ニ近ヅク. 此極限ハ $f(x)$ ヲ積分シ, 而カモ $x=a$ ト $x=b$ トノ間ニ取リタルモノニ等シ:

$$\Big[\int f(x)\,dx\Big]_{x=a}^{x=b}$$

之ヲ公式トシテ記スルト

$$(5)\quad \lim_{n=\infty}\Big[f(x_0)\triangle x+f(x_1)\triangle x+\ldots\ldots+f(x_{n-1})\triangle x\Big] = \Big[\int f(x)\,dx\Big]_{x=a}^{x=b}.$$

第1款ニ於テ矩形ノ高サヲ左リノ縦線トシナイデ, 右ノ縦線ヲ用ヒテ(3)ノ代リニ

$$A=\lim_{n=\infty}\Big[f(x_1)\triangle x+f(x_2)\triangle x+\ldots\ldots+f(x_n)\triangle x\Big]$$

トシテモヨロシイ. 從テ(4)ハ

$$(6)\quad \lim_{n=\infty}\Big[f(x_1)\triangle x+f(x_2)\triangle x+\ldots\ldots+f(x_n)\triangle x\Big] = \Big[\int f(x)\,dx\Big]_{x=a}^{x=b}.$$

又此等ノ高サトシテ其中間ノ縦線ヲ選ビ來ルモ隨意ナリ.

又各間隙ノ $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots\ldots$ ハ等シクナクトモヨロシイ, 唯其長サ $\triangle x_0, \triangle x_1, \ldots\ldots$ ノ最大ナルモノデモ n ガ無限ニ大ナルトキニ0ニ近ヅクコトガ必要デアル,

[定義] (3)或ハ(5)ナル和ノ極限ヲ $f(x)$ ノ定積分ト云ヒ次ノヤウニ表ハサレル,

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

和ノ極限デアル定積分カラ區別シテ微係數ノ逆デアルモノヲ不定積分ト云フ.

積分ノ記號ハ古ルイ字形ノ長イ s ノ字カラ出來タモノデ, 卽チ和(Summa)ノ首字デアル, 畢竟和ノ極限カラ起ツタモノデアル.

此樣ナ(2)或ハ(5)ニ入ツタヤウナ和ハ度々次ノ樣ニ表ハサレル.

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\triangle x, \qquad \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\triangle x.$$

演 習

1. $0\leqq x\leqq 1$ ニ於テ

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}, \quad \triangle x=1$$

デアルトキ(2)ナル和ヲ書ケ, (2)ナル和ノ極限ヲ不定積分デ表ハセ.

2. $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ トシ,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \triangle x = 0.05$$

トシテ

$$\sum_{k=0}^{9} \frac{\triangle x}{\sqrt{1-x_k^2}}, \quad \sum_{k=1}^{10} \frac{\triangle x}{\sqrt{1-x_k^2}}$$

ヲ計算シ次ニ $\triangle x$ ガ 0 ニ近ヅクトキ和ノ極限ヲ定メヨ. 又此極限ハ前ノ二ツノ和ノ間ニアルコトヲ證明セヨ.

---

3. 廻轉體ノ體積 平面曲線ガ其平面ノ上ニアル軸ノ周リニ廻轉スルト廻轉體ト云フ立體ガ出來ル.

軸ニ垂直ナル平面ヲ各底トシテ立體ノ體積ヲ定メルトシヤウ.

廻轉ノ軸ヲ横線トシ $x_0=a_1, x_1, x_2, \ldots, x_n=b$ デ底ト底トノ間ニアル軸ヲ n 等分シ, 各分點ヲスギテ軸ニ垂直ナル平面ヲ作リテ廻轉體ヲ n 個ノ薄片トナセバ k 番目ノ圓柱體ノ體積ハ

$$\pi y_k^2 \, dx.$$

デアッテ所題ノ立體ノ體積ハ此等薄片ノ圓柱體ノ體積ノ和ノ極限デアル:

$$V = \lim_{n=\infty}\left[\pi y_0^2 \triangle x + \pi y_1^2 \triangle x + \ldots\ldots \pi y_{n-1}^2 \triangle x\right],$$

即チ

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx, \tag{7}$$

但シ $y = \phi(x)$ ハ母線ノ方程式ナリ.

例ヘバ球ノ一平面ニテ截テ生ズル饅頭形ニ於テ

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ナル母線デアル. h ハ部分ノ高サヲ表ハストセバ, 底ノ縦線ハ $r-h$ 及ビ r デアル.

$$V = \pi \int_{r-h}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{r-h}^{r} = \frac{\pi}{3}(3r-h)h^2.$$

特ニ $h=-r$ デアルトキハ全球トナリ何人モ知ッテオル $\frac{4}{3}\pi r^3$ ヲ得.

演習

1. 廻轉ノ橢圓體ノ體積ハ a ガ軸ノ半分ヲ表ハストシテ $\frac{4}{3}\pi ab^2$ デアル, コトヲ示セ.

2. 「スピンドル」トハ

$$y = \sin x$$

ガ其底ノ周リニ廻轉シタモノデアル, 體積ヲ求メヨ.

答 4.93480

3. 圓錐體ノ體積ハ $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ デアル, 又截頭圓錐體ノ體積ハ

$$\frac{\pi}{3}h(r^2+rR+R^2)$$

デアルコトヲ示セ.

4. 任意ノ高サヲ持ツテキル廻轉ノ抛物體ノ體積ハ外接圓柱體ノ半ニ等シキコトヲ示セ.

5. 擺線ガ底ノ周リニ廻轉スル其體積如何.

6. 四ツノ尖頭ヲ有スル内擺線

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

ガ x 軸ノ周リニ廻轉スルト體積何程デアルカ. 答 $\dfrac{32\pi a^3}{105}$.

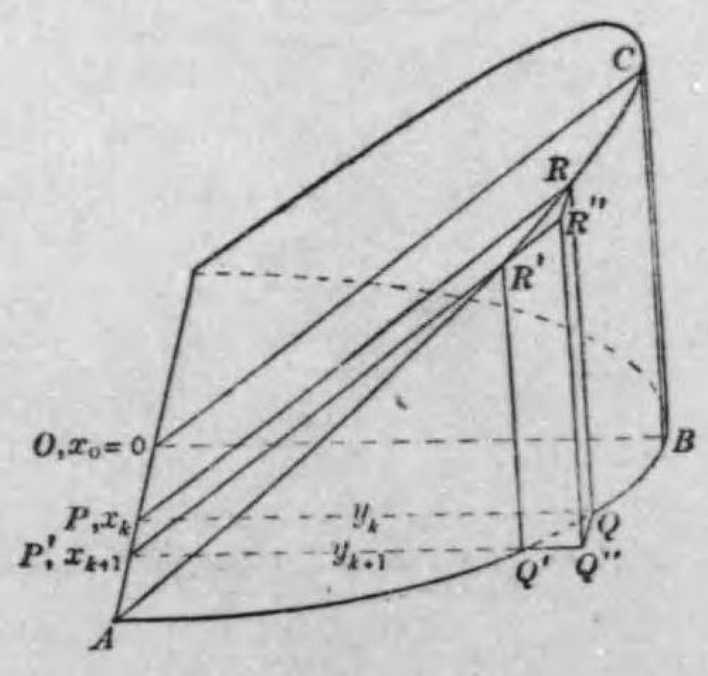
7. 懸鏈線 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ ノ x 軸ノ周リニ生ズル廻轉カラ生ズル體積ノ内一底ハ $x=0$ ナルトキノ體積ヲ求ム.

答 $\dfrac{\pi}{8}(e^{2h}-e^{-2h}+4h)$.

---

4. 他ノ體積 次ノ例ヲ始メヤウ.

伐木者ガアル. 直徑4尺ノ木ヲ伐ラウトシテ半分ダケ伐ツタ, 截リ口ノ半面ハ水平デ, 他ノ一面ノ傾斜ハ45度ナリ, 木ノ碎片何程ヲ損スルカ.



計算シヤウトスル立體

ハ對稱デアルカラ OABC ダケ計算スレバヨロシ. OA ナル稜ヲ n 等分シ各分點ヲスギテソレニ垂直ナ平面ヲ作リ殆ンド柱體ニ近イ薄片ニ分ツトシヤウ. QRR'Q' ハ曲ツタ面デアルカラ困難ガアルヤウデアルガ PQR ヲ底トシ PP' ヲ高サトシタ柱體ト見ルト其困難ヲ除去スルコトガ出來ル. ソウシタ柱體ノ和ハ實際ノ薄片ノ和ヨリハ輕微ノ差ガアル.

各柱體ノ體積ヲ解析的ニ求メヤウ. 底 PQR ハ 45° ノ直三角形デアルカラ $OP=x_k$, $PQ=y_k$ トセバ「ピタゴラス」ノ定理ニ依リ

$$x_k^2+y_k^2=4.$$

ソレカラ此柱體ノ體積ハ

$$\frac{1}{2}y_k^2\triangle x=\frac{1}{2}(4-x_k^2)\triangle x,$$

從テ計算シヤウトスル立體ノ體積ノ和ハ

$$(8)\qquad \lim_{k=\infty}\left[\frac{1}{2}(4-x_0^2)\triangle x+\frac{1}{2}(4-x_1^2)\triangle x+\cdots\cdots+\frac{1}{2}(4-x_{k-1}^2)\triangle x\right].$$

今(8)ナル極限ヲ求ムルコトニ歸着スル. 然ルニ此極限ヲ視察シテ第1款ノ(3)ナル極限ト同ジ形式ヲナス, 即チ

$$f(x)=\frac{1}{2}(4-x^2)$$

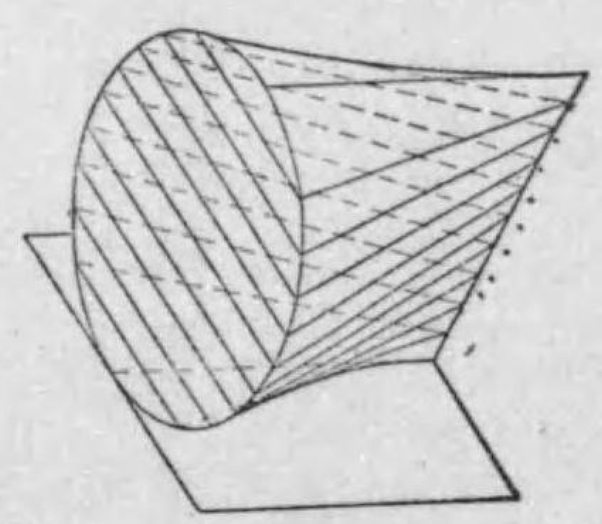
トシタモノデアル. 故ニ $x=a=0$ ト $x=b=2$ トノ間ニ積分シタモノデアル, 即チ

$$\int_0^2 \frac{1}{2}(4-x^2)\,dx = 2\frac{2}{3}$$

依テ全體積ハ其2倍ニ當ル $5\frac{1}{3}$ 立方尺ナリ.

演習

1. 「コノイド」ト云フ錐體ハ一平面ニ垂直ナ平面上ニアル圓ノ周上ノ一點ト垂直ナ直線上ノ一點トヲ結ビ付ケタル直線ガ常ニ前ニイッタ平面ニ平行トナッテ曲稜面ヲ形成スルモノヲ云フ. 其體積ヲ求メヨ.



答 $\frac{1}{2}\pi a^2 h.$

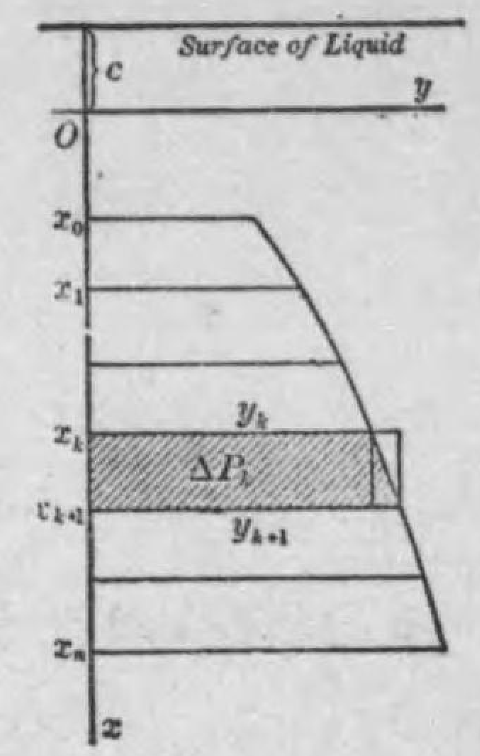
2. 其半軸ガ a, b, c ナル橢圓體ノ體積ヲ求メヨ.

答 $\frac{4}{3}\pi abc.$

---

5. 水壓 鉛直ナ壁面ニ於ケル水ノ壓力ノ問題ヲ論ジヤウ. 面ヲ圖ニ表ハシタヤウニ界セラレタモノト見テ, コレヲ等シク距タッタ縱線デ n 個ノ長片ニ分ッタモノトシ其 k 番目ノ長片ノ壓力ヲ $\triangle P_k$ トセヨ. 次ノヤウニ $\triangle P_k$ ニ近キモノヲ得ル. (x_k, y_k) ナル點ヲスギテ x 軸ニ平行ナ直線ヲ引キ其小長片カラ矩形ヲ作ルトセバ其壓力ハ與ヘラレタ小長片ニ於

ケルモノヨリハ小サイモノヲ得ル. シカシ其差ガ何程デアルカヲ知ラナイ. シカシ上ノ邊卽チ y_k ニ沿ヒテ 90° ダケ其矩形ヲ廻轉サセルト明カニ壓力ハ一層減ズルデアラウ. 此新位置ニ於ケル矩形ノ上ニ及ボス壓力ハ容易ニ計算ガ出來ル.



精密ニ此矩形ヲ底トシテ立ツ所ノ液體ノ柱體ノ重サデアル. カヤウナ柱體ノ體積ハ $(x_k+c)y_k\triangle x$ デアル, 然ルニ1立方單位ノ液體ノ重サガ w デアルト, 其問題ノ柱體ノ重サハ

$$w(x_k+c)y_k\triangle x.$$

此レハ $\triangle P_k$ ヨリモ小サイ.

同樣ニ與ヘラレタ小長片ヲ取圍ンダ高サガ y_{k+1} デアル矩形ヲ論ズルコトガ出來ル. 此新位置ニ於ケル壓力ハ

$$w(x_{k+1}+c)y_{k+1}\triangle x$$

デ, 而カモコレハ $\triangle P_k$ ヨリモ大キイ. カヤウニシテ

$$(9)\qquad w(x_k+c)y_k\triangle x < \triangle P_k < w(x_{k+1}+c)y_{k+1}\triangle x$$

$k=0, 1, \ldots\ldots, n-1$ トシテ (9) ナル關係ヲ書キ上ゲルト

$$w(x_0+c)y_0\triangle x < \triangle P_0 < w(x_1+c)y_1\triangle x$$

$$w(x_1+c)y_1\triangle x < \triangle P_1 < w(x_2+c)y_2\triangle x,$$

....

$$w(x_{n-1}+c)\,y_{n-1}\,\Delta x < \Delta P_{n-1} < w(x_n+c)y_n\,\Delta x.$$

之ヲ加ヘルト壓力Pハ

$$(10)\qquad w(x_0+c)y_0\Delta x+w(x_1+c)y_1\Delta x+\dots\dots+w(x_{n-1}+c)y_{n-1}\Delta x,$$

ト

$$(11)\qquad w(x_1+c)y_1\Delta x+w(x_2+c)y_2\Delta x+\dots\dots+w(x_n+c)y_n\Delta x$$

トノ間ニアルコトガワカル.

n ヲ無限ニ増加サセルト (10) ト (11) トハ定積分

$$w\int_a^b (x+c)y\,dx$$

ニ近ヅク, 從テ壓力Pハ共通ノ此極限ト一致スルカラ

$$(12)\qquad P = w\int_a^b (x+c)\,y\,dx.$$

此結果ハ x ガ増加スルトキ之ヲ界スル曲線ノ縦線ハ決シテ減少シナイト云フコトノ假設カラ導イタモノデアル, シカシ此條件ガ滿足セラレナイトキデモ第6款ニ示スヤウニ此公式ハ眞デアル.

[例 1] 滿シタ直方體ノ水槽ノ一側面ノ受ケル壓力ヲ求メヨ.

水面ニ y ノ軸ヲ取ルコトガ便利デアル. 其境ノ曲線ノ方程式ハ $y=k$ デアル, ソウシテ

$$P = w\int_0^h xk\,dx = wk\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^h = \frac{wh^2k}{2}.$$

矩形ノ面積ハ hk デアルカラ此結果ヲ

$$P = w\,.\,hk\,.\,\frac{h}{2}$$

ト云フ形ニ書クナラバ

全壓力ハ其矩形ノ重心ヲスギ且其面上ニアル水平線ノ周リニ 90° ダケ廻轉シテ側面ヲ持チ來タシテ受ケル壓力卽チ此側面ヲ底面トシテ $\frac{1}{2}h$ ノ高サノ液體ノ柱ノ壓力ト同ジモノデアル.

[例 2] 直徑6呎デ半分水ヲ滿タシタ大管ガアル. 其管ヲ閉デタ水門ノ壓力ヲ問フ.

水門ノ半分ノ上ノ壓力ハ

$$w\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx,$$

ナリ但シ w ハ水ノ一呎立方ノ重サデ $62\frac{1}{4}$「ポンド」アリ. 今

$$\int x\sqrt{9-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

デアルカラ

$$\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^3 = 9,$$

從テ $2\times 62\frac{1}{4}\times 9=1120$「ポンド」デアル.

---

6. 「ヅウハメル」ノ定理 第一ノ級數

$$a_1+a_2+\dots\dots+a_n$$

ハ n ガ無限大トナルトキ一ツノ極限ニ近ヅクモノデ, 第二ノ級數

$$\beta_1+\beta_2+\dots\dots\dots+\beta_n$$

ノ β_k ハ α_k トハ高次ノ無限小ノ差ヲ有スルモノ：即チ

$$\lim_{n=\infty}\frac{\beta_k}{\alpha_k}=1,\quad \frac{\beta_k}{\alpha_k}=1+\varepsilon_k,\quad \beta_k=\alpha_k+\varepsilon_k\alpha_k,$$

但シ ε_k ハ無限小ナリ．然ルトキハ

$$\lim_{n=\infty}[\beta_1+\beta_2+\dots\dots+\beta_n]=\lim_{n=\infty}[\alpha_1+\alpha_2+\dots\dots+\alpha_n].$$

定理ノ假設ニ依ツテ

$$\beta_1+\beta_2+\dots\dots+\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\dots\dots+\alpha_n$$
$$+\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_1\alpha_2+\dots\dots+\varepsilon_n\alpha_n,$$

從テ此方程式ノ最後ノ行ノ數ノ和ガ $n=\infty$ ナルトキ 0 ニ近ヅクコトヲ證明スレバヨロシイ．η ガ ε_k ノ内ノ最大キイモノヲ表ハストキハ

$$\left.\begin{array}{l}-\eta\leqq\varepsilon_1\leqq\eta,\\ -\eta\leqq\varepsilon_2\leqq\eta,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ -\eta\leqq\varepsilon_n\leqq\eta,\end{array}\right\}\quad\therefore\quad\left.\begin{array}{l}-\eta\alpha_1\leqq\varepsilon_1\alpha_1\leqq\eta\alpha_1\\ -\eta\alpha_2\leqq\varepsilon_2\alpha_2\leqq\eta\alpha_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ -\eta\alpha_n\leqq\varepsilon_n\alpha_n\leqq\eta\alpha_n,\end{array}\right\}$$

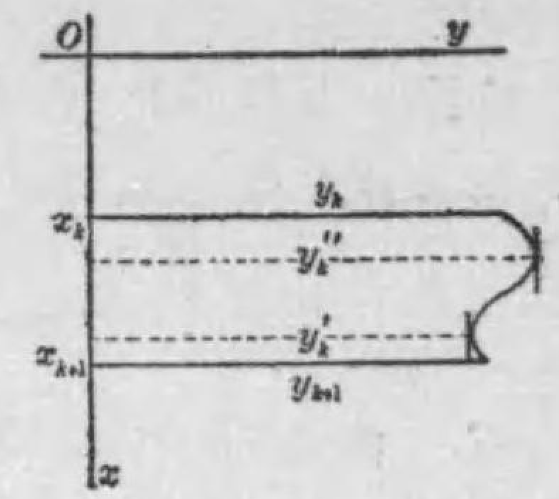
故ニ

$$-(\alpha_1+\alpha_2+\dots\dots+\alpha_n)\eta\leqq\varepsilon_1\alpha_1+\dots\dots$$
$$+\varepsilon_n\alpha_n\leqq(\alpha_1+\alpha_2+\dots\dots+\alpha_n)\eta$$

然ルニ η ハ 0 ニ近ヅキ $\alpha_1+\alpha_2+\dots\dots+\alpha_n$ ハ有限デアルカラ證明ノ目的ハ達セラレタ．

〔應用〕「ヅウハメル」ノ定理ノ應用トシテ(12)ナル公式

ノ證明ノ完全ナモノヲ與ヘル．y'_k ハ k 番目ノ薄片ノ最小縦線デ，y_k'' ハ最大縦線ナリトセヨ．



第5款ノ理論ト同樣ニ

$$w(x_k+c)y'_k\Delta x<\Delta P_k$$
$$<w(x_{k+1}+c)y''_k\Delta x,$$

故ニ P ハ二ツノ變數ノ間ニアリ．

(13)　$w(x_0+c)y'_0\Delta x+w(x_1+c)y'_1\Delta x+\dots\dots$
$$+w(x_{n+1}+c)y'_{n-1}\Delta x.$$

(14)　$w(x_1+c)y_0''\Delta x+w(x_2+c)y_1''\Delta x+\dots\dots$
$$+w(x_n+c)y''_{n-1}\Delta x.$$

此等變數ノ何レモ第2款ノ基礎ノ定理ガ適用セラルヽ形式ヲ有シナイガ

(15)　$w(x_0+c)y_0\Delta x+w(x_1+c)y_1\Delta x+\dots\dots$
$$+w(x_{n-1}+c)y_{n-1}\Delta x$$

ノヤウナ變數ノ極限ガ(12)ナル定積分デアリ且(13),(14)ノ極限モ同ジ定積分デアルコトヲ知ルコトガ出來ル．

$$\alpha_k=w(x_k+c)y_k\Delta x,\qquad \beta_k=w(x_k+c)y'_k\Delta x$$

$$\lim_{n=\infty}(\alpha_1+\alpha_3+\dots\dots+\alpha_n)=\int^b w(x+c)y\,dx$$

然ルニ $\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}=\dfrac{w(x_k+c)y'_k\Delta x}{w(x_k+c)y_k\Delta x}=\dfrac{y'_k}{y_k},\ \lim\limits_{n=\infty}\dfrac{y'_k}{y_k}=1.$

故ニ $\beta_1+\beta_2+\dots\dots+\beta_n$ 即チ(13)ナル變數ハ上ノ積分ヲ極限