初中數學補習用書

幾何

許蒓舫編著
秦　沅校訂

中華書局印行

民國三十年一月發行
民國三十四年十一月再版

初中數學補習用書 幾何（全一冊）

◎定價國幣三元九角
（郵運匯費另加）

編著者 許莼舫
校訂者 余沅
發行人 中華書局有限公司代表 姚戟楣
印刷者 中華書局永寧印刷廠 上海澳門路四六九號
發行處 各埠中華書局

（二三六一〇）

初中數學補

幾

編輯大意

著者因鑒於近年投考高中學生數學程度的低落,各地補習學校,補習夜校以及暑期學校的日見增多,而所用數學教材,全係普通教科書,不論教者,學者都感覺種種困難,所以特地編了這套初中數學補習用書,以應各學校的需要.

本書分算術,代數,幾何,三角四册,這是幾何的一册,內容有下列的幾個特點:

(一) 取材雖與普通教科書大略相同,然而去其繁蕪,擷其精華,把在一年之內才能修完的功課,縮短在三個月裏面讀畢.

(二) 敍述定義及證明定理等等,都用極淺顯易曉的方法,不但可由教師講授,並可自己修習;不但可作補習用書,並可作投考指南用.

(三) 編制方面,務求有條不紊;排印方面,力求醒眉豁目.總之,本書全部恪守紀律化,使學者可以一目瞭然,以免東翻西檢的麻煩.

(四) 本書篇幅雖仍冗長,然教師所應講述的,書中已詳備無遺,不必另加補充,所以費時不多.平均每

小時可授四頁至五頁,假使每天授一小時,在十二個星期之內可以全部授畢.但實際可伸可縮,如時間寬裕,把習題全部講解,另加黑板練習同測驗,可授一學期;如時間不足,可把做 * 號的部分略去不教,這樣僅須九個星期.

(五) 本書所選習題,都細加斟酌,嚴格取捨,且爲量特多,初中學生得此,足以應付裕如.所定選題的標準,有下面的三種: (*A*)富於興趣, (*B*)深淺合度, (*C*)各校入學試題中常易遇見.

(六) 習題中除極簡易者外,都加以提示或解析,俾教師可以節省講解的時間,由學生自行練習.不過學生最好能先用一番腦力試做一下,非到萬不得已,不去看提示或解析,藉此仍可得一鍛鍊思想的機會.

(七) 幾何定理證明的方式同應行注意各點,本書在未講定理之前先行提出,使學生於習定理時,不致感覺突兀;於解習題時,不致茫無頭緒.

(八) 本書於最初的幾條定理中,特插入實驗一項,先用實驗方法,說明定理的眞確,然後仿實驗的過程,用理論的方式寫成證明.這樣寓實驗幾何於理論幾何之中,使學者更易澈底明瞭.

(九) 學生於解幾何題時,往往因作圖的不準確而演成謬誤,所以本書在各章未講定理之前,先述簡

易幾何畫法,單講圖形的作法,而把證明留在第六章,使學者於解題時能依法畫圖,不致有何困難.

(十) 幾何命題為解題時必需的根據,學者每因凌亂無序,不易全部記憶純熟,故本書於每章的末後,把他們歸納起來,依結論的種類,分為若干門,用極簡短的言詞分別記載.學者於證某種結論時,把他檢查一下,看有何種命題可以依據,這就異常便利.且於記憶時可分節熟讀,亦能事半功倍.

(十一) 本書遇特種的問題,另節詳述他的證法,並舉例以明.

(十二) 證比較繁複的幾何題,本書特舉例詳述解析的方法,學者必須仔細揣摩,證題時可以依法探究,使題中祕奧,宣洩無遺,於是解一切幾何難題,都不至感覺困難了.

(十三) 本書於第三章詳述幾何定理證法的種類,使學者得些應有的常識.

(十四) 證幾何問題時,作補助線的方法最使學者感覺困難,本書不惜犧牲不少篇幅,詳述各種變化及入手方法,以便初學者摹仿.

(十五) 本書於定理的證明,格式力求整齊清楚,學者應盡力仿效.

(十六) 作圖題的解析法,本書敘述特詳,所述各

法,剝繭抽蕉,條分縷析,盡變化的能事,此係著者本歷年經驗所得,學者如能細心觀摩,定能獲益不少.

(十七) 關於軌跡的定理,可散置各處,故本書並不特立一章,而於作圖題的解析法內重行歸納一處,俾便應用.

(十八) 本書附錄計算題答案於後,以備參考.

本書係著者本二十餘年的教授經驗,同歷年積存的講義稿,經數月的整理修正,始克告成;又蒙老師秦沅先生加以校訂,內容或較匆促出版的稍稍完備.惟萬一掛漏,終難倖免,尚請用此書者賜函指正,實爲萬幸!

著者識

初中數學補習用書

幾　何

目　錄

初中數學補習用書

幾　何

第一章　緒論

第一節　幾何學的目的同分類

幾何學是研究物體所占空間部分的形狀,大小同位置的科學.雖是數學的一個分科,却只言形而不當言數.因爲形同數有密切的關係,不知道各種形的特性,有時就不能解決關於數的各種問題.例如算術中的求積,三角術中的解三角形,都以幾何學爲基礎;代數中的許多關係,可用幾何方法證明;其他高深的數學同物理學,都靠着幾何學的幫助,才有今日的進步;幾何學的重要,於此可以想見了.

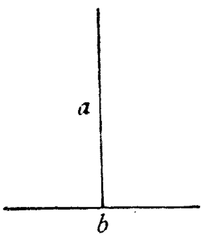
初等的幾何學分平面幾何學同立體幾何學二種,本書僅論平面幾何學中淺近的一部分.

關於各種形的特性,通常可用實驗的方法約略測得,這是實驗幾何學.但是這樣專靠直覺的方法,結果往往謬誤,不可據爲定論,看

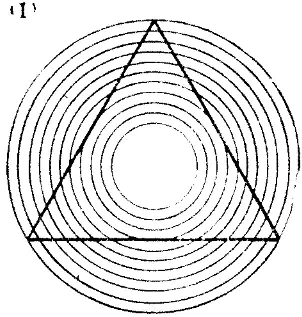
下面的實例自會明瞭:

試看下圖(1),(2)中的 a 同 b 兩條線那一條長,普通人一定都說 a 比 b 長;看下圖(3)中的一個三角形,他的邊是直的還是曲的,普通

(1)



(2)



(3)

人一定都說是曲的.但是你若用尺去量一量,這時一定使你很驚奇,原來你的推測都錯了.既然你的視覺是不可靠,那末用尺量過之後,就可認爲可靠了嗎?事實上却還是一個疑問,因爲你用的尺固然能量出幾寸幾分,却不能量出幾釐幾毫幾絲;你認爲他是直的,却或許還有一些兒的彎曲;這樣說來,不是終究還不能算是可靠嗎?

實驗幾何學既不可靠,那末研究圖形的特性,就祇能憑理論去推測.紙上雖仍可畫出圖形,却祇能作爲推理的幫助,不能當作是實在的圖形.他的形狀,大小同位置,都不能用實驗的方法來判斷他,要用理論的方式,探本窮源,去找出一個絕無可疑的結論.推論的每一句話,都要有絕對的理由,絲毫不容含糊.這就是理論幾何學.

第二節 普通名詞

1. 定義 用言語表明某種名詞的特性,叫做定義.

2. 公理 理的眞確,不待證明而人人都承認的,叫做公理.

3. 公法 人所共知的作圖方法,叫做公法.

4. 定理 理的眞確,必待證明而後可以承認的,叫做定理.

5. 系 可從定理直接推定的理叫做系.

6. 證明題 要叫我們把他證明的定理,叫做證明題.

7. 作圖題 依所定的條件,求作幾何圖形,叫做作圖題.

8. 命題 上述的七種名詞,總稱做命題.

9. 假設,結論 每一個定理,都可以分爲兩部分,一部分是假定的,或已知的,叫做假設;一部分是從假設斷定而須加以證明的,叫做結論.

10. 證明 根據假設同已知的命題,來敘明這結論是眞確的,叫做證明.

11. 逆定理 一條定理,若是從其他一定理的假設同結論對調成的,這二條定理互相稱做逆定理.

第三節 幾何基礎名詞的定義

1. 立體 凡物體在空間占有的地位,叫做立體. 立體有長,廣,厚三個向度.

【注意】 立體是指空間的一定部分,不必實有其物,所以是理想的東西.

2. 面 立體的界,叫做面. 面有長,廣二個向度.

【注意】 紙和空氣的交界是一個面,這樣的界限,很明顯的是沒有厚.

3. 線 面的界,叫做線. 線祇有一個向度,就是長.

【注意】 用鉛筆在白紙上畫一黑線,因爲他有

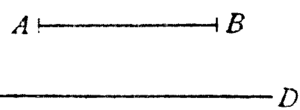
廣,所以不能算是幾何學上的線;那黑白中間的界,才能算眞正幾何學上的線.

4. 點　線的界或端,叫做點.點沒有向度,祇有位置.

【注意】　面可以認爲離開他所圍的立體,而獨立存在於空間.線同點也是一樣.

5. 幾何圖形　點,線,面或立體,或其中任意幾種集合而成的,叫做幾何圖形.

6. 直線線段　取出線中的任何部分,向任何方向放到別的任何部分上,能使完全相合的,叫做直線.直線的一部分,叫做線段.



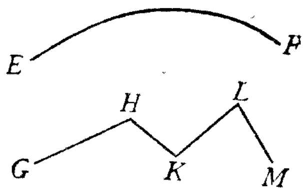
【注意一】　直線的兩端有記號表示的是線段,如圖中的 AB; 沒有記號表示的,是無限直線,如圖中的 CD.

【注意二】　上圖的 AB, 可以說是 A, B 二點間的距離.

【注意三】　直線可以任意延長,假使說延長 AB, 就是從 B 點起向外延長;延長 BA, 就是從 A 點起向外延長.

7. 曲線　各部分都不成直線的線,叫做曲線.如下面圖中的 EF.

8. 折線 幾條方向不同的直線連接所成的線,叫做折線. 如圖中的 $GHKLM$.



9. 平面 取面中的任何二點,用直線連結起來,若直線的全部都貼合在這面上,這面稱爲平面.

10. 平面形,直線形 在一平面上的點同線集合而成的圖形,叫平面形. 平面形中的線是直線的,叫直線形.

11. 圓周,半徑,中心,弧 用曲線做界,包圍平面的一部,若界上的各點同界內的一個定點等距離,這曲線叫做圓周,或略稱圓. 圓內的定點叫中心. 中心同圓周上任意一點的距離,叫半徑. 圓周的任何一部分,叫做弧.

第四節 普通公理同公法

(I) 等量公理

1. 等於同量的量相等;等於等量的量相等.

2. 等量加等量(或同量),其和相等.

3. 等量減等量(或同量),其差相等.

4. 等量的同倍量相等.

【特例】 等量的二倍相等,是幾何學上常用的.

5. 等量的同分量相等.

【特例】 等量的半分相等,是幾何學上常用的.

6. 全量等於各部分的和.

7. 一個等式中的某量,可以用他的等量代入.

(II) 不等量公理

8. 全量大於他的任何部分.

9. 在不等量上加等量(或同量),大者仍大.

10. 從不等量減去等量(或同量),大者仍大.

11. 從等量減去不等量,減去大量的,所餘反小.

12. 不等量的同倍量,大者仍大.

13. 不等量的同分量,大者仍大.

14. 若三量中的第一量大於第二量,第二量大於第三量,則第一量必大於第三量.

15. 若有幾組不等量,則諸大量的和必大於諸小量的和.

16. 一個不等式中的某量,可以用他的等量代入.

17.比較 a, b 二量的大小,僅有 $a>b$, $a=b$ 同 $a<b$ 三種.

(III) 公法

18.從任意的一點到其他任意的一點,可以引一條直線.

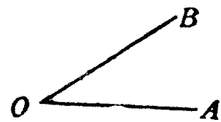
19.一直線可以任意延長.

20.以任意點做中心,任意線段做半徑,可以畫一個圓,或一段弧.

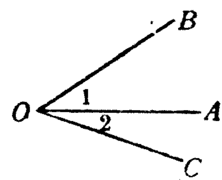
第二章　角,垂線,平行線

第一節　重要定義

1. 角,邊,頂點　從一點引兩條直線,所成的圖形叫做角,如圖中的 AOB. 兩條直線都叫做角的邊,如 OA 同 OB. 而 O 點叫做頂點.



【注意一】　角的記號是 $\angle$,圖中的角可記作 $\angle AOB$,或 $\angle BOA$,把頂點的一個字母放在中間.



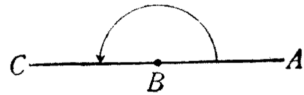
【注意二】　單獨的一個角,可以祇記頂點的文字,如 $\angle O$. 但是如右圖中的 $\angle AOB$ 同 $\angle AOC$,不能記作 $\angle O$, 要求簡略,可在角的裏面記一小數字來表示,如 $\angle 1$ 同 $\angle 2$. 若單記 $\angle O$, 通常是指以 O 做頂點的最大角,卽 $\angle BOC$.

【注意三】　角的大小,由二邊所開的口的大小而定,同邊的長短無關.通常用度做角的單位,凡二直線相交,可成四個角,若這四角都相等,則取每個角的九十分之一叫做一度;一度的六十分之一叫做一分;一分的六十分之一叫做一秒.度,分,秒常用記號表示.如十五度二十七分三十秒,可記作 $15°27'30''$.

2. 平角　角的二邊若是接成一直線的,

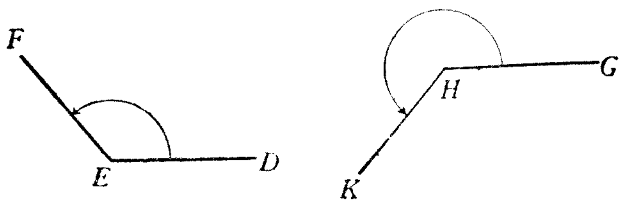
這角叫做平角,如圖中的$\angle ABC$.

【注意】 平角就是180°的角.



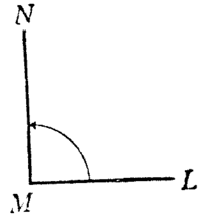
3. 劣角,優角 小於平角的角叫劣角,如圖中的$\angle DEF$. 大於平角的角叫優角,如圖中的$\angle GHK$.

【注意】 通常所稱的角,都指劣角.

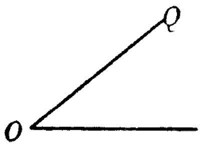


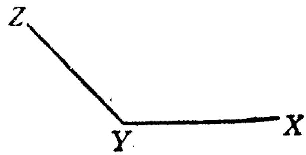
4. 直角 一個角等於半個平角的,叫做直角,如圖中的$\angle LMN$.

【注意】 直角就是90°的角;通常幾何學上研究的角,凡是要度量的,都是直角的整數倍或簡單分數倍,所以不用度做單位,而用直角做單位,記作$\angle R$.

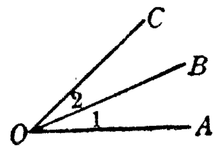


5. 銳角,鈍角 小於直角的角叫銳角,如圖中的$\angle POQ$. 大於直角的角叫鈍角,如圖中的$\angle XYZ$.



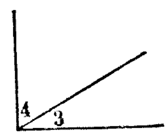


6. 鄰角,外邊　兩個角的頂點公用,一條邊也公用,而且這兩角各不相含時,這兩角稱爲鄰角,如圖中的$\angle 1$同$\angle 2$. 兩條不公用的邊,叫做外邊,如圖中的OA同OC.

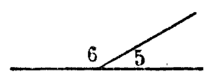


【注意】　兩外邊所夾的角,如$\angle AOC$,就是兩鄰角的和.

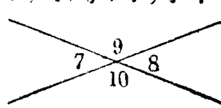
7. 餘角　兩角的和等於一直角時,這兩角互稱爲餘角. 如圖,$\angle 3$是$\angle 4$的餘角;$\angle 4$是$\angle 3$的餘角.



8. 補角　兩角的和等於二直角(即一平角)時,這二角互稱爲補角. 如圖,$\angle 5$是$\angle 6$的補角;$\angle 6$是$\angle 5$的補角.

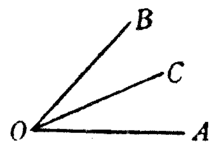


9. 對頂角　兩直線相交,所成的四角中,不爲鄰角的兩個角,叫做對頂角. 如圖,$\angle 7$同$\angle 8$是對頂角;



$\angle 9$同$\angle 10$也是對項角.

10.角的二等分線 用直線把一個角平分成相等的兩部分,這直線稱做這角的二等分線,如圖中的OC是$\angle AOB$的二等分線.

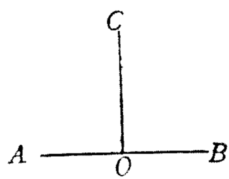


【注意】 如說OC是$\angle AOB$的二等分線,他的意思是$\angle AOC=\angle COB$, 或是 $\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOB$, $\angle COB=\frac{1}{2}\angle AOB$.

11.線段的中點 在線段上取一個點,平分這線段成相等的兩部分,這點稱做這線段的中點,如圖中的O點是線段AB的中點.

【注意】 如說O點是AB的中點,他的意思是$AO=OB$, 或$AO=\frac{1}{2}AB$, $OB=\frac{1}{2}AB$.

12.垂直,垂線,垂足 若兩直線相交而成直角,這兩直線叫做互相垂直,或互爲垂線,如圖中的AB同CO. 兩垂線的交點叫垂足,如圖中的O.

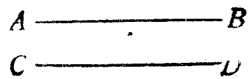


【注意】 垂直的記號是$\perp$,若CO垂直於AB,可記作$CO\perp AB$,但亦可記作$AB\perp CO$.

13.點同直線的距離 從一點到一直線

的距離,就是從這點所引這直線的垂線的長.

14.平行線　在一平面上的二直線,若向任何方向延長到任何遠永不相交的,叫做平行線.如圖,AB和CD表示二平行線.

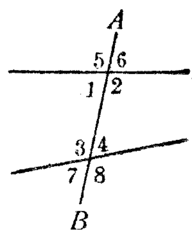


【注意一】　圖中的AB同CD,未必畫得眞正平行,不過用他來代表罷了.

【注意二】　平行的記號是$\parallel$,AB平行於CD,可記作$AB \parallel CD$,或$CD \parallel AB$.

15.截線　與二直線(或二直線以上)相交的一直線,叫做截線,如下條圖中的AB.

16.內角,外角,錯角,同位角,同側內角　二直線與一截線所成諸角的名稱如下:



如圖,1, 2, 3, 4是四個內角;

5, 6, 7, 8是四個外角;

1同4, 2同3是二對錯角;

1同7, 2同8, 3同5, 4同6是四對同位角;

1同3, 2同4是二對同側內角.

【注意】　上述的錯角,又稱內錯角.另外還有5同8,6同7兩對外錯角,但不很重要.

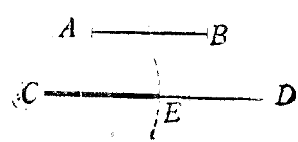
第二節　簡易幾何畫法

要解決幾何問題,必先畫幾何圖形,若畫圖不準確,則解題時每易發生誤會.然眞正的幾何圖形是目不能見,全憑理想的東西,決不能用平常的器械畫出來,所以本節所論的畫法,不過是合理的作法,所得的尙非眞正的幾何圖形.但雖如此,在事實上已相去無幾,學者倘能依據下面的方法畫圖,在實用方面,已經很足夠了.

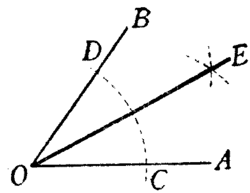
畫平面幾何圖形所用的器械,限於直線尺同圓規二種.有了這二種器械同上章第四節的三條公法,差不多各種圖形都能夠畫.照例畫法是否合理,應加證明;惟因限於程序,這裏祇能先講畫法,以備應用;至於證明的方法應列入第六章討論.

1. 在直線上截取一部使等於已知線段

若在CD上欲截取一部使等於AB,可以C爲中心,AB爲半徑畫一弧,截CD於E,那末CE就是所求的線段.

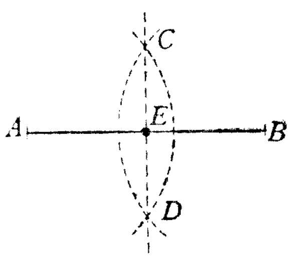


2. 作角的二等分線　若欲平分 $\angle AOB$ 爲二個等分,可以 O 爲中心,任意長爲半徑作一弧,同兩邊 OA, OB 相交於 C, D. 再以 C, D 爲中心,同以適當的長爲半徑,各作一弧,使相交於 E. 用直線連結 O, E 二點,即得所求的二等分線.



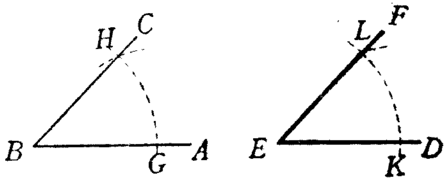
【注意】　以 C, D 爲中心所作的弧,半徑不能過短,否則不相交;又這二弧的半徑應該相同,否則 E 點不在正中.

3. 取線段的中點　若欲求線段 AB 的中點,可以 A, B 爲中心,同以大於 $\frac{1}{2}AB$ 的長爲半徑,各作一弧,相交於 C, D. 用直線連結 C, D 二點,截 AB 於 E, 這 E 點就是 AB 的中點.

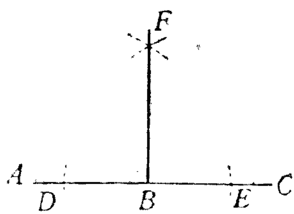


4. 作等角法　若欲從 E 點作一直線,使與 ED 成角等於已知的 $\angle ABC$, 可先以 B 爲中心,任意長爲半徑作一弧,與二邊交於 G, H. 更以 E 爲中心,用同樣半徑再作一弧,交 ED 於 K.

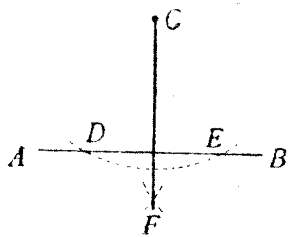
以 K 爲中心,用等於 G, H 間直線的長爲半徑作一弧,交前弧於 L. 從 E 過 L 作直線 EF,則 $\angle DEF$ 就是所求的角.



5. 從直線上一點作這線的垂線　若欲於 AC 上的 B 點作 AC 的垂線,可以 B 爲中心,任意長爲半徑作二弧,交 AC 於 D, E. 以 D, E 爲中心,大於 DB 的長爲半徑,各作一弧,二弧相交於 F. 連結 BF,卽爲所求的垂線.

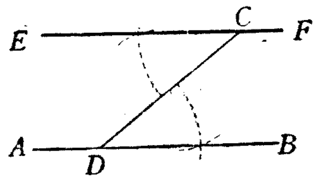


6. 從直線外一點作這線的垂線　若欲於 AB 外的一點 C 作 AB 的垂線,可以 C 爲中心,適當的長爲半徑作一弧,交 AB 於 D, E. 以 D, E 爲中心,適當的長爲半徑,各作一弧,使相交於 F. 過 C, F 畫一直線,卽是所求的垂線.

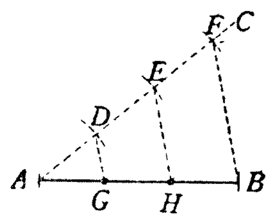


7. 過直線外一點作這線的平行線　若

欲過直線AB外的一點C作AB的平行線,可在AB上任取一D點,與C連結.過C作直線EF,使$\angle ECD$等於$\angle CDB$,則EF爲所求的直線.



8. 分線段爲若干等分　若欲分AB爲三等分,可從A點作任意直線AC,以A爲中心,任意長爲半徑作弧,截AC於D,順次以截得的點爲中心,依同樣半徑作弧,在AC上截得等長的三線段AD, DE, EF.連結BF,過D, E各作BF的平行線,交AB於G, H,則G, H二點分AB爲三等分.若欲分AB爲四,五,六,……等分,可仿此法.



第三節　幾何公理

1. 過兩點的直線祇有一條.

2. 二直線祇能相交於一點.

3. 若二直線的一部分重合在一起,那末全部都能重合.

4. 兩點間最短的線是直線.

5. 一個幾何圖形,可以不變他的形狀,大

小,而移動他的位置.

6. 角的二等分線祇有一條.

7. 線段的中點祇有一個.

8. 從直線上的一點,引這線的垂線祇有一條.

9. 從直線外的一點,引這線的垂線祇有一條.

10. 兩直線相交,若兩鄰角相等,這兩線必垂直.

11. 相交的二直線,不能同時平行於第三直線.

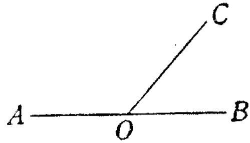
12. 過直線外的一點,引這線的平行線祇有一條.

【注意】 11,12兩條公理,似二而實一.

13. 凡直角都相等.

14. 凡平角都相等.

15. 若二鄰角的外邊成一直線,這二角必互爲補角.

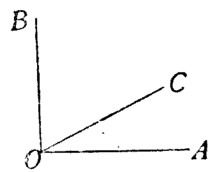


16. 若二鄰角互爲補角,這二角的外邊必成一直線.

【注意】 15同16若須證明,祇須應用平角同補

角的定義就得.這二條也可以說是定理.並且互成逆定理.17同18亦然.

17.若二鄰角的外邊垂直,這二角必互爲餘角.



18.若二鄰角互爲餘角,這二角的外邊必互相垂直.

19.如把兩線段疊在一起,其兩端都能相合時,兩線段就相等.

20.如把兩個角疊在一起,其頂點及兩邊都能相合時,兩角就相等.

21.銳角的補角是鈍角,直角的補角是直角,鈍角的補角是銳角.

第四節　證明定理的方式同應注意各點

幾何學上證明定理,有一定的方式,通常分下列的四個步驟:

1. 照定理中所說的關係,畫出圖形,列在右邊.

2. 把定理中的「假設」部分,依照所畫圖形上面所註的文字,記述下來,前面冠一「設」字.

3. 把定理中的「結論」部分,也依照所畫

圖形上面的文字記述下來,前面冠以「求證」二字.

4. 根據題中的假設,同已知的命題,逐步用語言或式子來證明結論的眞確.這一段的前面冠一「證」字.

證明定理時應注意的各點如下:

1. 畫圖時必須依照本章第二節的方法,畫得準確一些.

2. 畫圖必須普遍,除題中規定外,應避免特殊的情形,否則極易發生誤會.

【例一】 若題中單說有一個角,那末我們最好畫一個銳角,因爲銳角最普通.假使你畫了一個直角就不很妥當.

【例二】 若題中說有兩直線相交,我們決不要畫成垂線.

3. 題中所有直線兩端同交點等,都要用大寫的英文字母註明,以便寫「假設」,「求證」同「證明」時,可以按圖指出.

4. 定理中的假設同結論,有時含蓄在詞意之間,並不明晰的寫出來.我們應該仔細把他分做「若……」同「則……」兩段;第一段是假設,第二段是結論.

【例】 設使有定理:「等角的餘角亦等」,我們可以把他分做「若有二角相等,且這二角各有一個餘角」,同「則這二個餘角亦等」兩段.

5. 證明中的各句言語或式子,如係根據題中假設,應在後面附註「所設」二字;如係根據已知的命題,應把該命題用簡短的言詞附註在後面,用來表明各句的來歷或理由.

6. 證明中的某句,若就是前面一句而稍加變換的,可以不必註明他的理由.

7. 有時證明了某一種關係後,若另有一種關係可以用同法證明時,可不必另加證明,逕將這個關係寫出,前面冠以「倣此」二字,後面不再註明理由.

8. 有時在可能範圍內,可在圖中添引補助線,用來作證明的幫助.因爲這是題中所沒有的線,所以通常都畫成虛線.補助線的畫法同種類,在證明的開始時,先行記述下來.

9. 證明一個定理,雖沒有一定的方法,然普通都可用「實驗」或「解析」來找尋證題的線索.

實驗法是用任意的數字代表角的度數或線段的長,實驗結論的是否眞確,然後研究

如何可用幾何命題做代表,來證明結論的眞確.

解析法是從結論逆推,看這結論的成立,應先知何種關係,這樣逐步推測,使與已知的假設符合.此法比實驗法重要得多,本書當在下章詳細討論.

10. 幾何的證明題,實際就是定理,證明的方式等等,完全同定理一樣.但本書有時在定理未證明前,插入「實驗」或「解析」一項,目的在使學者得些證題的入手方法,在證問題時,這一項當然略去.

11. 幾何問題的性質,同算術或代數中的截然不同,他是在假設同結論的中間插入說明,以示結論的眞確.定理的結論好比是一個答案,解幾何問題,實際是有了答案而設法敍明這答案的無誤,所以證明的最後一句,就是題中的結論,這是一定不移的.

第五節　重要定理

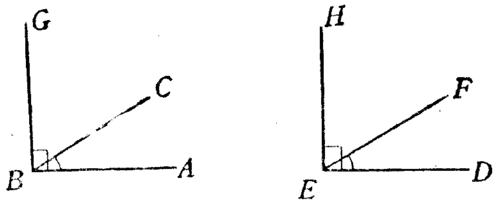
定理 1.　等角(或同角)的餘角亦等.

〔設〕　$\angle ABC=\angle DEF$,

$\angle CBG$ 爲 $\angle ABC$ 的餘角,

$\angle FEH$ 爲 $\angle DEF$ 的餘角.

［求證］　$\angle CBG=\angle FEH$.



【實驗】　互為餘角的二角,和是90°.假定 $\angle ABC=30°$,那末 $\angle CBG=90°-30°=60°$;由假設, $\angle ABC=\angle DEF$,所以 $\angle DEF=30°$, $\angle FEH=90°-30°=60°$.於是知欲證 $\angle CBG=\angle FEH$, 利用餘角的定義同等量減等量的公理就得.

［證］　因 $\left.\begin{array}{l}\angle ABC+\angle CBG=\angle R\\ \angle DEF+\angle FEH=\angle R\end{array}\right\}$ (互為餘角的二角,和是一直角).

$\therefore\quad \angle ABC+\angle CBG=\angle DEF+\angle FEH$

(凡直角必相等).

但　$\angle ABC\quad=\angle DEF$　(所設).

$\therefore\quad \angle CBG=\quad\angle FEH$

(等量減等量).

【注意一】　已知的等角,可在圖中做相同的記號,推求證法時比較便利.若有相等的線段,亦仿此法.

【注意二】　寫證明時,必須力求整齊清楚.

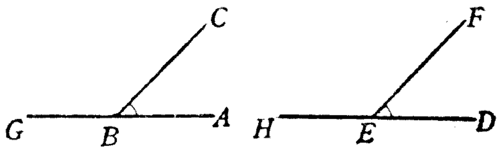
定理 2.　**等角(或同角)的補角亦等.**

[設] $\angle ABC=\angle DEF$.

$\angle CBG$ 是 $\angle ABC$ 的補角,

$\angle FEH$ 是 $\angle DEF$ 的補角.

[求證] $\angle CBG=\angle FEH$.



【實驗】 仿定理 1.

[證] 因 $\left.\begin{array}{l}\angle ABC+\angle CBG=2\angle R\\ \angle DEF+\angle FEH=2\angle R\end{array}\right\}$ (互爲補角的二角,和是二直角).

$\therefore$ $\angle ABC+\angle CBG=\angle DEF+\angle FEH$

(凡平角必相等).

但 $\angle ABC=\angle DEF$ (所設).

$\therefore$ $\angle CBG=\angle FEH$

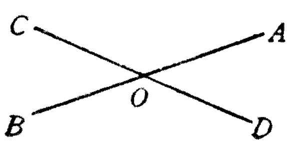
(等量減等量).

定理 3. 對頂角相等.

[設] 二直線 AB,CD 相交於 O 點.

$\angle AOD$ 同 $\angle BOC$ 是對頂角,

$\angle AOC$ 同 $\angle BOD$ 是對頂角.



［求證］　$\angle AOD=\angle BOC$, $\angle AOC=\angle BOD$.

【實驗】　因爲 COD 是直線,所以 $\angle AOD$ 同 $\angle AOC$ 的和是 180°. 同樣, $\angle BOC$ 同 $\angle AOC$ 的和也是 180°. 若假定 $\angle AOC=120^\circ$, 則 $\angle AOD=180^\circ-120^\circ=60^\circ$, $\angle BOC=180^\circ-120^\circ=60^\circ$,所以二角相等.

［證］　$\left.\begin{aligned}\angle AOD+\angle AOC=2\angle R\\ \angle BOC+\angle AOC=2\angle R\end{aligned}\right\}$

（二鄰角的外邊成一直線,則二角互爲補角).

$\therefore\quad \angle AOD+\angle AOC=\angle BOC+\angle AOC$

（凡平角必等).

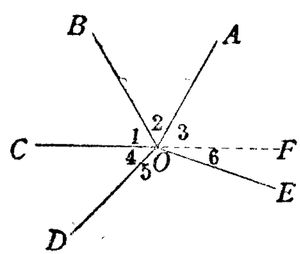
$\therefore\quad \angle AOD=\angle BOC$　（等量減去同量).

仿此　$\angle AOC=\angle BOD$.

【注意】　本定理亦可用「同角的補角相等」來證明.

習　題　一

(1)　從一點向周圍引若干直線,所成諸角的和必等於四直角.



【提示】　延長 CO 到 F,

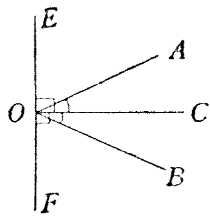
則　$\angle 1+\angle 2+\angle 3=2\angle R$,

$\angle 4+\angle 5+\angle 6=2\angle R$.

(2) 二直線相交,所成的四角中,若有一角已知是直角,試證其他三角都是直角.

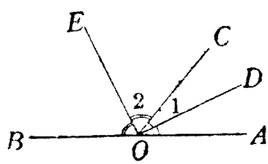
(3) 從一點向四周引四直線,若各線都同他的鄰線夾直角,則這四直線必合成二直線.

(4) OC 是 $\angle AOB$ 的二等分線,過 O 引 OC 的垂線 EF, 則 $\angle AOE=\angle BOF$.



【提示】 $\angle AOE$ 是 $\angle AOC$ 的餘角, $\angle BOF$ 是 $\angle BOC$ 的餘角.

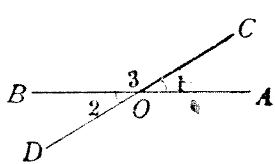
(5) 二鄰角的外邊成一直線,則這二角的二等分線必互相垂直.



【解析】 欲證 $OE\perp OD$, 必先知 $\angle EOD=\angle R$, 即 $\angle 1+\angle 2=\angle R$. 已知 $\angle AOC+\angle BOC=2\angle R$, 故等量的半分必相等.

(6) 二鄰角的外邊互為垂線,則這二角的二等分線所夾的角等於半直角.

(7) 從一直線上的一點向兩側各引一直線,若不為鄰角的二角相等,則

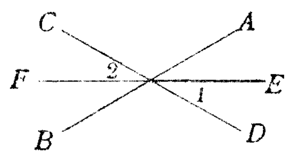


所引的二線必合成一直線.

【提示】 已知 $\angle 1+\angle 3=2\angle R$, $\angle 1=\angle 2$, 代入得 $\angle 2+\angle 3=2\angle R$,因此 CO同OD是一直線.

【注意】 在 CO 同 OD 還沒有知道是一直線的時候,$\angle 1$ 同 $\angle 2$ 不能稱為對頂角.又 CO 同 OD 應畫成粗細不同,以免誤作已知的一直線.下題亦然.

(8) 兩個對頂角的二等分線,必合爲一直線.

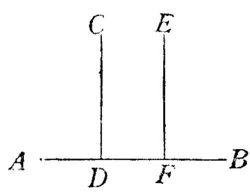


【提示】 利用「對頂角相等」,「等量之半亦等」,可證 $\angle 1=\angle 2$,再仿上題即得.

定理 4. 在一平面內的兩直線,若同爲一線的垂線,則此二線必平行.

[設] $CD\perp AB$, $EF\perp AB$.

[求證] $CD \parallel EF$.



【注意】 這定理不易用實驗方法發見他的證明,并且不能用直接的方法證,應該假定結論不眞確,然後推測他是否合理,這是反證的方法.

［證］　若 CD 同 EF 不平行,則必相交於一點.

假定這點是 O,那末 CD 同 EF 都是從 O 點所引 AB 的垂線.

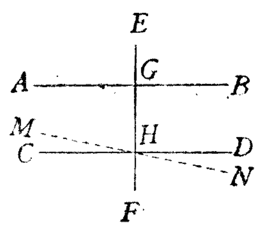
但據公理,知從 O 點引 AB 的垂線祇有一條.

可見前面的假定不能合理.

於是 CD 同 EF 決不能相交於 O 點.

即　$CD \parallel EF$ (任何延長不相交的二線,是平行線).

定理 5.　一直線垂直於二平行線中的一線,亦必垂直於其他一線.



［設］　$AB \parallel CD$,

$EF \perp AB$.

［求證］　$EF \perp CD$.

［證］　若 EF 不為 CD 的垂線,則過交點 H 必可另引一線 MN 同 EF 互相垂直.

於是　$MN \perp EF$　(假定),

$AB \perp EF$　(所設)

$\therefore$　$MN \parallel AB$ (同為一線的二垂線,必相平行).

但　$CD \parallel AB$　(所設).

且　MN 與 CD 同過 H,不能同與 AB 平行

(相交的二直線,不能同與第三直線平行).

$\therefore$　MN 必與 CD 相合.

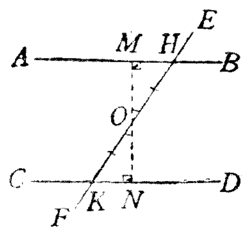
又因　$MN \perp EF$　(假定).

$\therefore$　$CD \perp EF$.

即　$EF \perp CD$.

【注意】　事實上 MN 合於 CD, 但在圖中爲便於觀察起見,須另行用虛線畫出,不過要知道實際並不在圖中的位置.

定理 6.　**兩平行線爲一截線所截,所成的錯角必等.**



[設]　$AB \parallel CD$.

EF 截 AB, CD 於 H, K.

[求證]　$\angle AHK = \angle DKH$.

[證]　取 HK 的中點 O, 從 O 引 $OM \perp AB$, 延長交 CD 於 N.

則　$ON \perp CD$

(二平行線中一線的垂線亦爲他線的垂線).

即　AB, CD 同爲 MN 的垂線.

固定 O 點,將 OHM 旋轉一平角,使 OM 落於 ON.

則　OH 必落於 OK

(因 $\angle HOM, \angle KON$ 爲對頂角而相等).

且　H 點必落於 K 點　(因 $OH = OK$).

於是 HM 落於 KN

(因由同一點引同一線的垂線唯一).

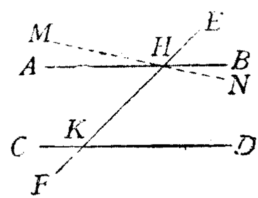
$\therefore$ $\angle MHO$ 與 $\angle NKO$ 因重合而相等

(因頂點與二邊都合).

即 $\angle AHK = \angle DKH$.

【注意】 其他一對錯角 $\angle BHK$ 同 $\angle CKH$ 亦相等,可用同法證明.

定理 7. **兩直線爲一截線所截,若錯角相等,則二線必平行.**



[設] AB, CD 二直線被 EF 截於 H, K, 而 $\angle AHK = \angle DKH$.

[求證] $AB \parallel CD$.

[證] 若 AB 不平行於 CD, 則過 H 必能另引一直線 MN,使與 CD 平行.

於是 $\angle MHK = \angle DKH$(兩平行線間錯角必等).

但 $\angle AHK = \angle DKH$ (所設).

$\therefore$ $\angle MHK = \angle AHK$ (等於同量的量相等).

$\therefore$ MH 必與 AH 重合

(兩角的二邊同頂點都相合,則兩角相等).

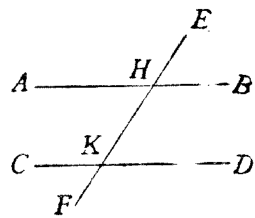
$\therefore$ MN 必與 AB 重合

(兩直線的一部重合,則全部重合).

但 $MN \parallel CD$ (假定).

$\therefore$ $AB \parallel CD$.

定理 8. 兩平行線爲一截線所截,所成的同位角必等.



［設］ $AB \parallel CD$,

EF截AB,CD於H,K.

［求證］ $\angle EHB = \angle HKD$.

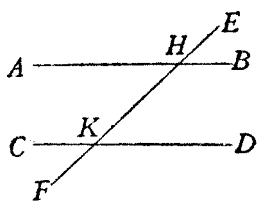
［證］ $\angle EHB = \angle AHK$ (對頂角).

$\angle HKD = \angle AHK$ (平行線間的錯角).

$\therefore$ $\angle EHB = \angle HKD$ (等於同量的量相等).

【注意】 其他三對同位角都能相等,可用同法證明.

定理 9. 兩直線爲一截線所截,若同位角相等,則兩直線必平行.



［設］ AB, CD 二直線被EF截於H,K,

$\angle EHB = \angle HKD$.

［求證］ $AB \parallel CD$.

［證］ $\angle EHB = \angle AHK$ (對頂角).

$\angle EHB = \angle HKD$ (所設).

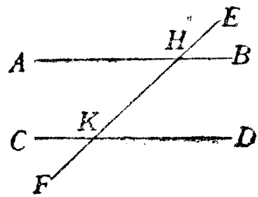
$\therefore$ $\angle AHK = \angle HKD$ (等於同量的量相等).

$\therefore$ $AB \parallel CD$ (錯角等者,二線平行).

定理10. 兩平行線為一截線所截,所成的同側內角必互為補角.

［設］ $AB \parallel CD$.

EF 截 AB,CD 於 H,K.



［求證］ $\angle BHK+\angle HKD=2\angle R$.

［證］ $\angle BHK+\angle AHK=2\angle R$

(兩鄰角外邊成一直線,則二角互為補角).

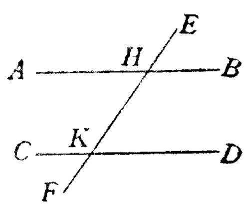
但 $\angle AHK=\angle HKD$ (平行線間的錯角).

$\therefore$ $\angle BHK+\angle HKD=2\angle R$ (等量代入).

【注意】 其他一對同側內角亦必互補,證法同上.

定理11. 兩直線為一截線所截,若同側內角互為補角,則兩線必平行.

［設］ AB、CD 二直線被 EF 截於 H,K,又 $\angle BHK+\angle HKD=2\angle R$.



［求證］ $AB \parallel CD$.

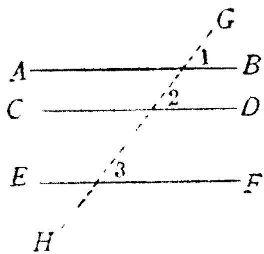
［證］ $\angle AHK$ 為 $\angle BHK$ 的補角 (外邊成一直線).

$\angle HKD$ 為 $\angle BHK$ 的補角 (所設).

$\therefore$　$\angle AHK=\angle HKD$　(同角的補角必等).

$\therefore$　$AB \parallel CD$　(錯角等者,二線平行).

定理12. 兩直線同與第三直線平行,則此二線亦必平行.



[設]　$AB \parallel EF$,

$CD \parallel EF$,

[求證]　$AB \parallel CD$.

[證]　任意作一截線GH,

則　$\angle 1=\angle 3$

(因$AB \parallel EF$,故同位角相等).

$\angle 2=\angle 3$　(因$CD \parallel EF$,故同位角相等).

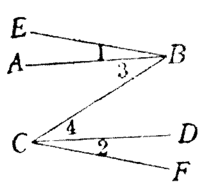
$\therefore$　$\angle 1=\angle 2$　(等於同量).

$\therefore$　$AB \parallel CD$　(同位角等者,二線平行).

習題二

(1)　若$\angle 1=\angle 2$; $AB \parallel CD$,

試證$BE \parallel CF$.

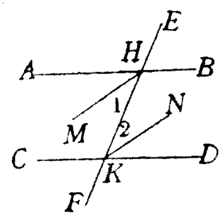


【注意】　有時兩平行線同截線不完全畫出,所成的諸角須仔細認清.

(2)　兩平行線爲一截線所截,所成的一對錯角的二等分線必平行.

【提示】 $\angle AHK=\angle DKH$,

$\therefore \quad \angle 1=\angle 2$ (等量之半).

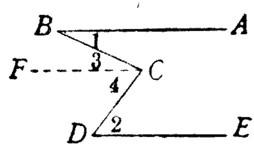


(3) 兩平行線為一截線所截,所成的一對同位角的二等分線必平行.

(4) 若 $AB \parallel ED$,

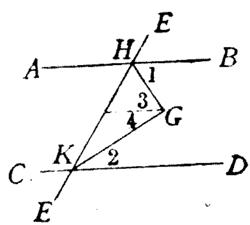
試證 $\angle 1+\angle 2=\angle C$.

【提示】 過 C 引 AB 的平行線 CF, 則 $CF \parallel DE$(何故?). 於是 $\angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 4$, 相加卽得.



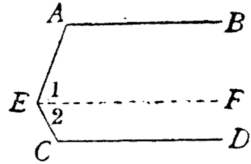
(5) 兩平行線為一截線所截,所成的一對同側內角的二等分線必互為垂線.

【提示】 因同側內角互補, 故 $\angle 1+\angle 2=\angle R$, 以下仿上題.



(6) 設 $AB \parallel CD$,

試證 $\angle A+\angle E+\angle C=4\angle R$.



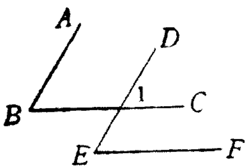
(7) 兩角的邊各各平行,這兩角或相等,或互為補角.

【提示】 (一) 注目 $AB \parallel DE$, 則 $\angle B = \angle 1$,

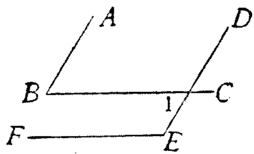
注目 $BC \parallel EF$, 則 $\angle E = \angle 1$.

(二) 注目 $AB \parallel DE$, 則 $\angle B = \angle 1$,

注目 $BC \parallel EF$, 則 $\angle E + \angle 1 = 2\angle R$.



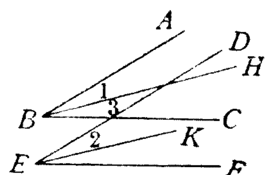
(一)



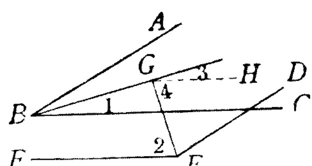
(二)

【注意】 學者試另用其他定理證明之.

(8) 兩角的邊各各平行,這兩角的二等分線或平行,或互爲垂線.



(一)



(二)

【提示】 (一) 據上題,

$\angle B = \angle E$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

又 $\angle 1 = \angle 3$,

$\therefore \angle 2 = \angle 3$.

(二) 若從 G 引 $GH \parallel BC$, 則 $GH \parallel EF$(何故?), 於是 $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$.

據上題, $\angle B + \angle E = 2\angle R$, 折半, $\angle 1 + \angle 2 = \angle R$, 以前式代入即得.

第六節　證題根據的重要條件

現在把已習的重要命題,依結論的種類分為九門,用極簡短的言詞,記錄在下面.學者應把他讀得爛熟,以後凡遇欲證二角相等,祇須就「二角相等的條件」一門選擇適宜的命題,把他應用;其他都是一樣.

1. 二角相等的條件　(1)等於同(或等)量的量.　(2)等量加等(或同)量.　(3)等量減等(或同)量.　(4)等量的同倍.　(5)等量的同分.　(6)用等量代入.　(7)直角.　(8)平角.　(9)等(或同)角的餘角.　(10)等(或同)角的補角.　(11)對頂角.　(12)二平行線間的錯角.　(13)二平行線間的同位角.　(14)二角的邊各各平行.　(15)可使頂點及二邊完全重合的.

2. 二角互為餘角的條件　(1)和是一直角的.　(2)外邊垂直的兩鄰角.

3. 二角互為補角的條件.　(1)和是二直角的.　(2)外邊成一直線的兩鄰角.　(3)二平行線間的同側內角.

4. 二直線垂直的條件　(1)夾直角的二線.　(2)二線相交,若二鄰角相等,則二線垂直.　(3)互為餘角的兩鄰角的外邊.　(4)二平行

線中一線的垂線,必為他線的垂線. (5)一直線為外邊的二鄰角的二等分線.

5. 二直線平行的條件 (1)任何延長不相交的. (2)同為一線的垂線. (3)同為一線的平行線. (4)為截線所截而錯角等的. (5)為截線所截而同位角等的. (6)為截線所截而同側內角互補的.

6. 二直線合一的條件 (1)互為補角的兩鄰角的外邊. (2)從直線上一點向兩側引二直線,若不相鄰的二角相等,則二線合一. (3)過一點的二線,若同與第三線平行時,二線必合一. (4)兩對頂角的二等分線.

7. 直線唯一的條件 (1)從直線上一點所引這線的垂線. (2)從直線外一點所引這線的垂線. (3)從直線外一點所引這線的平行線. (4)過二點的直線. (5)角的二等分線.

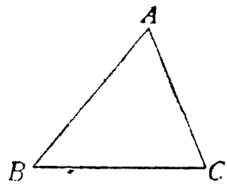
8. 點的唯一的條件 (1)二直線的交點. (2)線段的中點.

9. 其他條件 圍繞一點的諸角的和為四直角.

第三章 三角形

第一節 重要定義

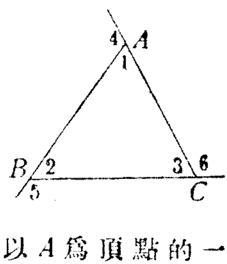
1. 三角形,邊,頂點 三直線圍成的平面形叫做三角形,如圖中的 ABC.



所成的三個角的頂點,就是三角形的頂點,如圖中的 A, B, C. 頂點間的線段,叫做三角形的邊,如圖中的 AB, BC, CA.

【注意】 三角形的記號是 $\triangle$,圖中的三角形記作 $\triangle ABC$.

2. 內角,外角 三角形相鄰的二邊所成的角,叫做三角形的內角,或簡稱角,如圖中的 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$. 一邊同鄰邊的延長線所成的角,叫做三角形的外角,如圖中的 $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$.

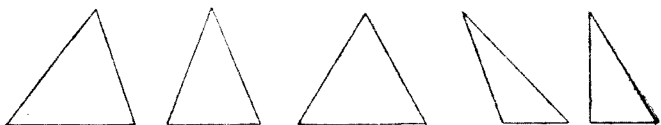


【注意】 如把 BA 延長,更可得以 A 為頂點的一個外角,但通常每一個頂點,祇論一個外角.

3. 周圍 三角形三邊的和,叫做周圍.

4. 不等邊三角形,等腰三角形,等邊三角形 三角形的三邊的長都不相等的,叫不等

邊三角形,如圖(1),(4),(5). 有二邊相等的,叫等腰三角形,如圖(2). 三邊都相等的,叫等邊三角形,如圖(3).

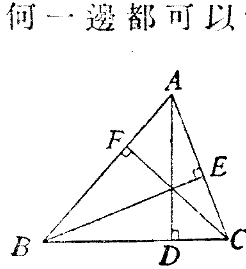


(1) (2) (3) (4) (5)

5. 銳角三角形,鈍角三角形,直角三角形,等角三角形 三角形的三個角都是銳角的,叫做銳角三角形,如圖(1). 有一個角是鈍角的,叫鈍角三角形,如圖(4). 有一個角是直角的,叫直角三角形,如圖(5). 三個角都相等的,叫等角三角形,如圖(3).

【注意】 根據後面的定理,等角三角形就是等邊三角形,可以簡稱做正三角形.

6. 底,高 三角形的任何一邊都可以當作是底,從相對的頂點所引底的垂線,叫做三角形的高,如圖,以 BC 爲底,那末 AD 是高;以 CA 爲底,那末 BE 是高;以 AB 爲底,那末 CF 是高.



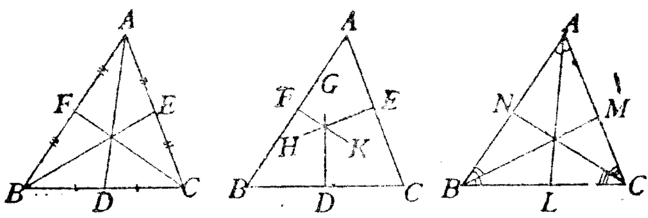
【注意】 每個三角形有三個高,鈍角三角形的二個高,須引到底的延長線上;直角三角形的二個高,就是夾直角的兩條邊.

7.腰,底邊,頂角,底角 等腰三角形的相等的二邊,都叫腰. 其餘的一邊,叫做底邊. 二腰的夾角叫頂角. 其餘的二角都叫底角.

8.斜邊,直角邊 直角三角形中對直角的邊叫斜邊. 其餘二邊都叫直角邊.

9.頂垂線 三角形的三個高,又叫頂垂線.

10.中線 從三角形的任一頂點到對邊中點的線,叫做中線,如圖(1)中的 AD, BE, CF.



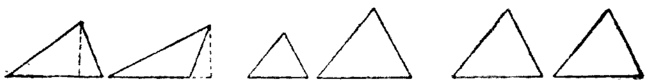
(1) (2) (3)

11.中垂線 從三角形一邊的中點,引這邊的垂線,叫做邊的中垂線,又叫垂直二等分線,如圖(2)中的 DG, EH, FK.

12.角二等分線 從三角形的一頂點,引直線等分這頂點的角到對邊爲止,稱做角二

等分線,如圖(3)中的 AL, BM, CN.

13.相等相似全同 兩三角形的面積相等,而形狀不相同,稱做相等,如圖(1). 若面積不等而形狀相同,叫做相似,如圖(2). 若面積相等,形狀又相同,叫做全同,如圖(3).

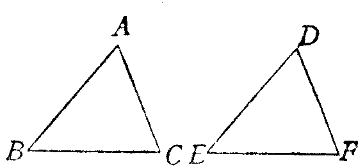


(1) (2) (3)

【注意一】 根據第七章的定理,兩三角形的底同高都等的就相等;根據第八章的定理,兩三角形的三個角一一互等的就相似;又若把兩形疊置起來,處處都能相合的就全同.

【注意二】 相等的記號是 =,相似的記號是 ∽,全同的記號是 ≌ 或 ≡.

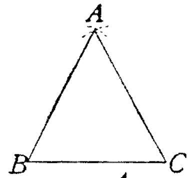
14.對應邊,對應角 全同的兩三角形中,已知的等角所對的邊,叫對應邊(或相當邊);已知的等邊所對的角叫對應角(或相當角).



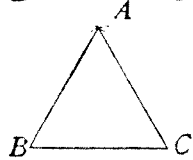
如圖,已知 $\angle A=\angle D$, 則 BC 同 EF 是對應邊;已知 $AB=DE$, 則 $\angle C$ 同 $\angle F$ 是對應角.

第二節 簡易幾何畫法

1. 作等腰三角形 畫底邊 BC, 以 BC 的兩端爲中心,腰的長爲半徑,各作一弧,二弧相交於 A,連結 AB, AC,即得等腰三角形.



2. 作等邊三角形 先假定一邊的長 BC,以 B 及 C 爲中心, BC 的長爲半徑,各作一弧,兩弧相交於 A, 連 AB, AC,即得一等邊三角形,也就是正三角形.



3. 作等於 $\frac{2}{3}\angle R$ (即 60°) 的角 照上法作正三角形,他的角就是 $\frac{2}{3}\angle R$.

第三節 重要定理

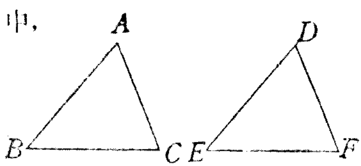
定理 1. 一三角形的二邊及其夾角各與他三角形的二邊及其夾角互等,則兩三角形全同.

[設] $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,

$AB=DE$,

$BC=EF$,

$\angle B=\angle E$.



[求證] $\triangle ABC\cong\triangle DEF$.

〔證〕 把 $\triangle ABC$ 放到 $\triangle DEF$ 的上面,必可使 BC 與 EF 完全重合 (因 $BC=EF$).

因 $\angle B=\angle E$ (所設),

$\therefore$ BA 沿 ED 落下.

又因 $AB=DE$ (所設),

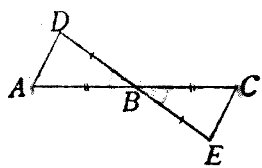
$\therefore$ A 點必落於 D 點.

於是 AC 落於 DF (過二點的直線唯一,今 A 與 D 合, C 與 F 合,故 AC 與 DF 必合).

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (兩形全合,故全同).

系 全同三角形的對應邊及對應角都相等.

習 題 三



(1) 設 AC, DE 二直線相交於 B, $DB=BE$, $AB=BC$, 試證 $\triangle ABD \cong \triangle CBE$.

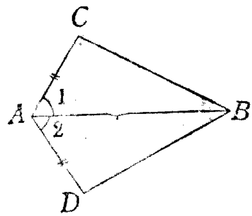
【注意】 證兩三角形全同時,必先敍明有三個等量,以本題舉例於下:

〔證〕 在 $\triangle ABD$, $\triangle CBE$ 中,

$$\left.\begin{array}{l} DB=BE \\ AB=BC \end{array}\right\} \quad \text{(所設)},$$

$\angle ABD=\angle CBE$ (對頂角),

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle CBE$ (二邊夾一角互等).



(2) 設 $AC=AD$,

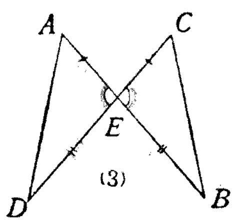
$\angle 1=\angle 2$.

試證 $\triangle ABC \cong \triangle ABD$.

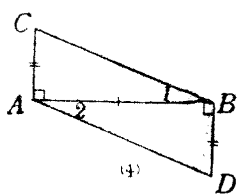
【提示】 AB爲兩三角形的公共邊,可以認爲是兩三角形中等長的邊合在一起,故亦是一個等量,可寫成 $AB=AB$.

(3) 設 AB, CD 二直線相交於 E, $AE=CE$, $DE=BE$,

試證 $AD=CB$.



(3)



(4)

(4) 設 $CA\perp AB, DB\perp AB$, $CA=DB$, 試證 $CB \parallel AD$.

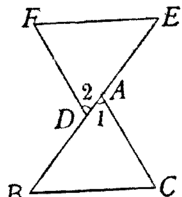
【提示】 由全同三角形可得 $\angle 1=\angle 2$.

(5) 設 BE 爲直線, $AC \parallel DF$, $AC=DF$, $DB=AE$,

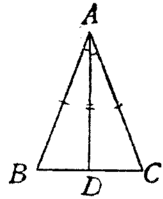
試證 $EF \parallel BC$.

【提示】 $AB=DE$(等量加同量).

(6) 等腰三角形的頂角二等分線,必等分底邊爲二,且與底邊垂直.



(5)



(6)

【提示】 由全同三角形可得 $\angle ADB=\angle ADC$,於是 $AD\perp BC$.

(7) 等腰三角形頂角二等分線上的點,同底邊的兩端距離相等.

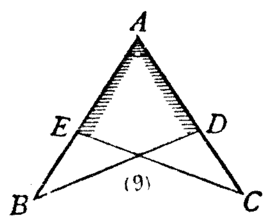
(8) 三角形的頂垂線若等分底邊,這三角形是等腰三角形.

(9) 設 $AB=AC$, $AD=AE$,

試證 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$.

【提示】 $\angle BAD=\angle CAE$

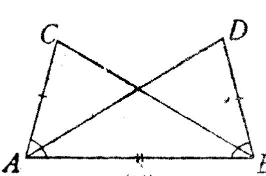
(公共角).



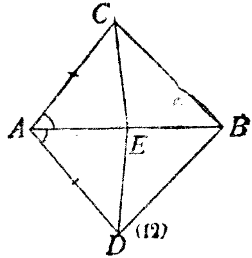
(9)

(10) 等腰三角形兩腰上的中線必等.

【提示】 等腰的半分亦等.



(11)



(12)

(11) 設 $AC=BD$, $\angle CAB=\angle DBA$, 試證 $\angle C=\angle D$.

(12) 設 $\angle CAB=\angle DAB$, $AC=AD$, 試證 $\angle ECB=\angle EDB$.

【提示】 先證 $\triangle ABC\cong\triangle ABD$, 於是 $\angle C=\angle D$.

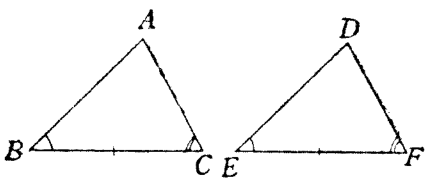
次證 $\triangle AEC\cong\triangle AED$, 於是 $\angle ACE=\angle ADE$.

定理 2. 一三角形的兩角及其所夾的邊各與他三角形的兩角及其所夾的邊互等, 則兩三角形全同.

［設］ $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ 中,

$\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$, $BC=EF$.

［求證］ $\triangle ABC\cong\triangle DEF$.



［證］ 把 $\triangle ABC$ 放到 $\triangle DEF$ 的上面, 必可使 BC 與 EF 完全重合 (因 $BC=EF$).

因 $\angle B=\angle E$ (所設),

∴ BA 沿 ED 落下.

又因 $\angle C=\angle F$ (所設),

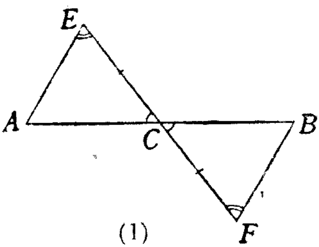
∴ CA 沿 FD 落下.

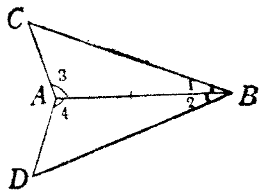
於是 A 點必合於 D 點 (二直線的交點唯一).

∴ $\triangle ABC\cong\triangle DEF$ (二形可使全合, 故必全同).

習　題　四

(1)　設AB, EF二直線相交於C, $EC=CF$, $AE \parallel BF$, 試證$\triangle ACE \cong \triangle BCF$.


(1)

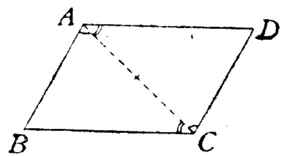

(2)

(2)　設$\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, 試證$BC=BD$.

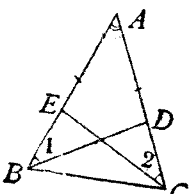
(3)　三角形一角的二等分線若與對邊垂直,這三角形是等腰三角形.

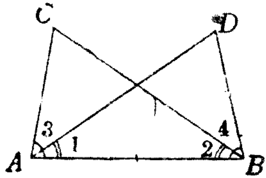
(4)　設　$AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, 試證$AB=CD$, $AD=BC$.

【提示】　看圖中的記號自明.


(4)

(5)　設$\triangle ABC$中,$AB=AC$, $\angle 1=\angle 2$, 試證$BD=CE$.


(5)

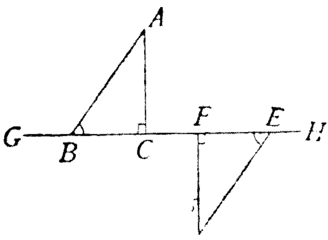

(6)

(6)　設$\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$. 試證$AD=BC$

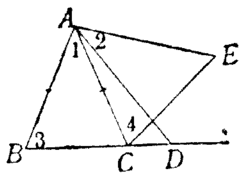
(7) 若三角形的兩角相等,則這兩角的角二等分線必等.

(8) 設 $AC \perp GH$, $DF \perp GH$, $BF = EC$, $AB = DE$. 試證 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

【提示】 $BC = EF$(等量減去同量).



(8)

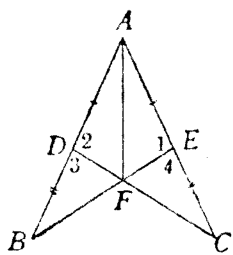


(9)

(9) 設 $AB = AC$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. 試證 $AD = AE$.

(10) 設 $AD = AE$, $DB = EC$, AB, AC 各爲直線,BE,CD 二直線交於 F,試證 $\angle BAF = \angle CAF$.

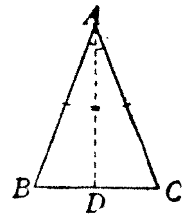
【提示】 先證 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$, 於是 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle B = \angle C$. 次由 $\angle 3 = \angle 4$, 證 $\triangle BDF \cong \triangle CEF$, 於是 $DF = EF$. 最後證 $\triangle ADF \cong \triangle AEF$.



定理 3. 等腰三角形的底角相等.

［設］ $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$.

［求證］ $\angle B=\angle C$.



［證］ 引 $\angle A$ 的二等分線 AD, 則在 $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ 中,

$AB=AC$ (所設),

$\angle BAD=\angle CAD$ (所作),

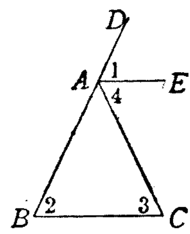
$AD=AD$ (公共邊),

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (二邊夾一角互等).

$\therefore$ $\angle B=\angle C$ (全同三角形的對應角).

系. 等邊三角形就是等角三角形.

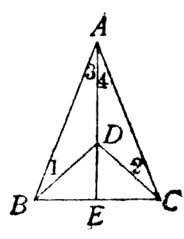
習 題 五



(1) 等腰三角形底邊上的中線必等分頂角,且與底邊垂直.

(2) 從等腰三角形頂角的頂點引底邊的平行線,必等分頂角的外角.

【提示】 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, 且 $\angle 2=\angle 3$.

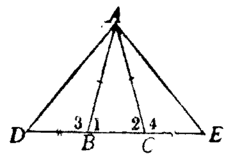


(3) $\triangle ABC$, $\triangle DBC$ 是同底的二個等腰三角形,則 AD 的延長線必垂直等分 BC.

【提示】　先證 $\angle 1=\angle 2$, 再證 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, 於是根據習題三(5)即得.

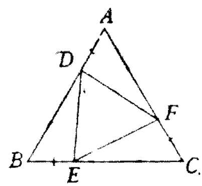
(4)　從等腰三角形兩腰的中點到底邊中點的兩線必等.

(5)　延長等腰三角形 ABC 的底邊 BC,使 $BD=CE$,則 $\triangle ADE$ 也是等腰三角形.



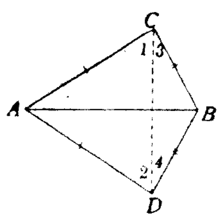
【提示】　$\angle 1=\angle 2$, $\therefore \angle 3=\angle 4$.

(6)　在等邊三角形的邊 AB, BC, CA 上,順次取 D, E, F 三點,使 $AD=BE=CF$, 則 $\triangle DEF$ 也是等邊三角形.



【提示】　由等量減等量,得 $AF=BD=CE$,由上面的系,得 $\angle A=\angle B=\angle C$,故可證三個三角形全同.

(7)　設 $AC=AD, BC=BD$, 求證 $\triangle ABC \cong \triangle ABD$.



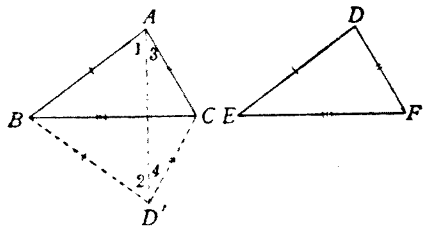
【提示】　連結 CD,則 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, 於是 $\angle C=\angle D$.

定理 4.　一三角形的三邊各與他三角形的三邊互等,則兩三角形全同.

〔設〕 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 中，

$AB=DE, BC=EF, CA=FD.$

〔求證〕 $\triangle ABC \cong \triangle DEF.$



〔證〕 把 $\triangle DEF$ 依反對方向放到 $\triangle ABC$ 上，必可使 EF 與 BC 完全重合 (因 $EF=BC$).

設 D 點落在 D'，連結 AD'，

則 $BA=BD'$ (因 BD' 卽 ED，由假設 $BA=ED$);

$CA=CD'$ (因 CD' 卽 FD，由假設 $CA=FD$).

$\therefore$ $\left.\begin{array}{l}\angle 1=\angle 2\\ \angle 3=\angle 4\end{array}\right\}$ (等腰三角形的底角相等).

$\angle A=\angle D'$ (等量相加).

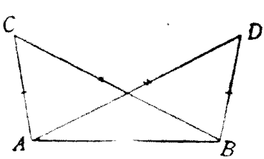
$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle D'BC$ (二邊夾一角互等).

卽 $\triangle ABC \cong \triangle DEF.$

習 題 六

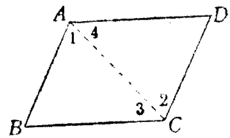
(1) 設 $AC=BD$, $BC=AD$,

試證 $\angle C=\angle D$.



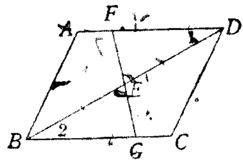
(2) 設 $AB=CD, BC=AD$. 試證 $AB \parallel CD, BC \parallel AD$.

【提示】 連 AC,由全同三角形,可得 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$.



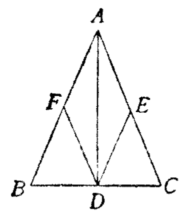
(3) 設 $AB=CD$, $BC=AD$, 過 BD 的中點 E 引 FG,試證 $FE=EG$.

【提示】 仿上題得證 $\angle 1=\angle 2$.



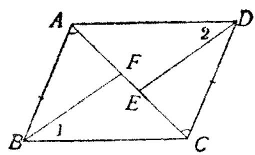
(4) 設 $AB=AC, D, E, F$ 是 $\triangle ABC$ 各邊中點,試證 $\triangle AFD \cong \triangle AED$.

【提示】 證全同三角形二次,方法有二,學者自己試驗.



(5) 設 $AB=CD, AB \parallel CD$, 於 AC 上取 E, F 二點,使 $AE=CF$, 試證 $\angle 1=\angle 2$.

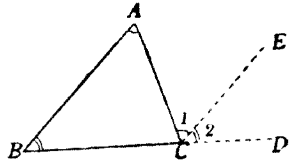
【提示】 先證 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, $\triangle ABF \cong \triangle CDE$, 再利用二組對應邊,證 $\triangle BCF \cong \triangle ADE$. 尚有簡法,學者可自試之.



定理 5. 三角形三內角的和等於二直角.

［設］　$\triangle ABC$.

［求證］　$\angle A+\angle B+\angle C=2\angle R$.



［證］　延長 BC 至 D, 從 C 引 AB 的平行線 CE,

則　$\angle 1=\angle A$　（平行線間的錯角）.

　　$\angle 2=\angle B$　（平行線間的同位角）.

但　$\angle 1+\angle 2+\angle C=2\angle R$　（外邊成一直線）.

$\therefore$　$\angle A+\angle B+\angle C=2\angle R$　（等量代入）.

【注意】　若通過 A 點引 BC 的平行線,純用錯角證,或從 A 向一方引 BC 的平行線,兼用同側內角證都可以.

系 1.　三角形的任意一外角,等於不相鄰二內角的和.

【說明】　如上圖, $\angle 1+\angle 2=\angle A+\angle B$, 即 $\angle ACD=\angle A+\angle B$.

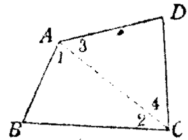
系 2.　三角形的外角大於不相鄰的任一內角.

【說明】　根據系 1 及全量大於部分的公理即得.

習題七

(1)　四邊形四內角的和等於四直角.

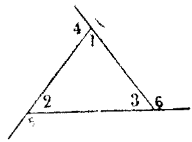
【註】　四條直線圍成的平面圖形,叫四邊形.



【提示】　連結AC,則 $\angle B+\angle 1+\angle 2=2\angle R$,

$\angle D+\angle 3+\angle 4=2\angle R$.

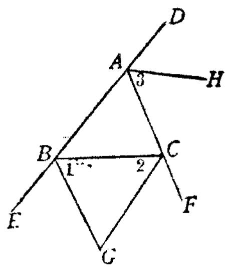
(2)　三角形三外角的和等於四直角.



【提示】　$\angle 1+\angle 4=2\angle R$,

$\angle 2+\angle 5=2\angle R$, $\angle 3+\angle 6=2\angle R$,相加,去三內角.

(3)　三角形兩個外角的二等分線相交所成的角,等於第三個外角的一半.

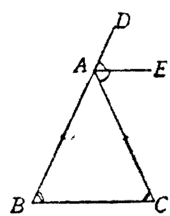


【提示】　$\angle 1+\angle 2+\angle 3=2\angle R$

(三外角和之半),

$\angle 1+\angle 2+\angle G=2\angle R$(何故?).

(4)　等腰三角形頂角的外角二等分線,必與底邊平行.

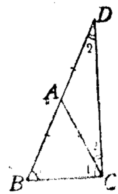


【提示】　$\angle DAC=\angle B+\angle C$,

即 $2\angle DAE=2\angle B$.

(5)　延長等腰三角形的一腰過頂角的頂點,使延長部與腰相等,則連這延長線

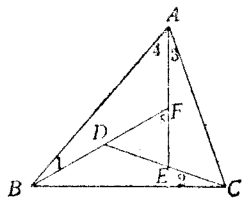
的端同底邊他一端的線,必與底邊垂直.



【提示】 $\angle B+\angle C+\angle D=2\angle R$,

即 $2\angle 1+2\angle 2=2\angle R$.

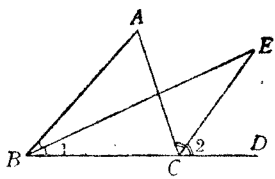
(6) 在 $\triangle ABC$ 的形內,順次作直線 CD, AE, BF, 使 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$,則 $\triangle DEF$ 與$\triangle ABC$ 的三角互等.



【提示】 $\angle 5=\angle 4+\angle 1$

$=\angle 4+\angle 3=\angle A$.

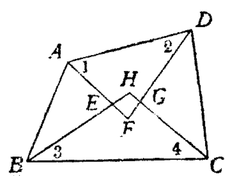
(7) 三角形一外角的二等分線同一內角的二等分線相交,所成的角必等於其他一內角的一半.



【提示】 $\angle ACD-\angle B=\angle A$, 折半得

$\angle 2-\angle 1=\frac{1}{2}\angle A$. 又 $\angle 2-\angle 1=\angle E$.

(8) 四邊形四個內角的二等分線組成一四邊形,他的對角必互為補角.



【提示】 $(\angle 1+\angle 2+\angle F)$

$+(\angle 3+\angle 4+\angle H)=4\angle R, \angle 1+\angle 2+\angle 3$

$+\angle 4=2\angle R$〔根據(1)題〕.

系 3.　一三角形中至多祇能有一個鈍角或一個直角.

系 4.　直角三角形的兩銳角互爲餘角.

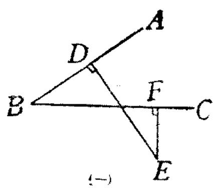
系 5.　三角形的兩角若互爲餘角,則第三角必爲直角

系 6.　一三角形的兩角若各與他三角形的兩角互等,則第三角亦必互等.

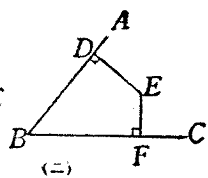
【注意】　這兩三角形就是相似三角形.

習　題　八

(1)　一角的二邊,若各爲他角的二邊的垂線,則這二角或相等,或互爲補角.



(一)

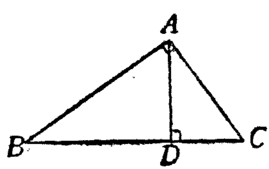


(二)

【提示】(一)　應用對頂角定理及系 6.

(二)　應用習題七(1).

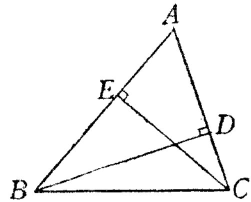
(2)　$\triangle ABC$ 是直角三角形,從直角頂 A 引斜邊的垂線 AD,則 $\angle B=\angle CAD$, $\angle C=\angle BAD$.



【提示】　在 $\triangle ABC$, 及 $\triangle ACD$ 中,

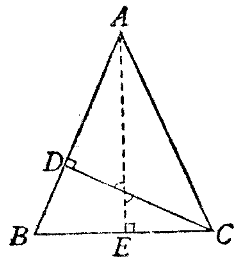
$\angle A=\angle D$, $\angle C=\angle C$.

(3) BD, CE 是 $\triangle ABC$ 的頂垂線,試證 $\angle ABD=\angle ACE$.



【提示】 這二角同是 $\angle A$ 的餘角.若仿上題證亦可.

(4) 從等腰三角形底邊的一端,引所對腰的垂線,則這垂線同底邊所夾的角等於頂角的一半.



(5) 二平行線為一截線所截,所成的同側內角的二等分線必互為垂線.

【提示】 卽習題二(5),學者試改用上列的系 5 證.

系 7. **一三角形的兩角及其中一角的對邊,各與他一三角形的兩角及一對應邊互等,則兩三角形全同.**

【說明】 因兩組角已知互等,則第三組角亦等,於是有二角夾一邊互等,必能全同.

系 8. **等邊三角形的每個內角是 $\frac{2}{3}\angle R$.**

系 9. **兩個等腰三角形的頂角互等,則底角亦等.**

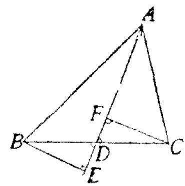
習題九

(1) 等腰三角形兩腰上的頂垂線必等.

(2) 從等腰三角形底邊的中點到兩腰的距離必等.

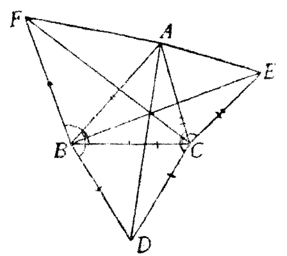
(3) 從等腰三角形的頂角頂點引底邊的垂線,必等分頂角,且等分底邊.

(4) 三角形一邊的兩端,必與這邊上的中線距離相等.

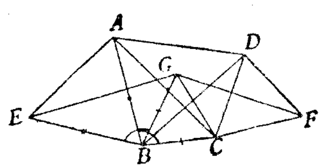


(5) 於 $\triangle ABC$ 的各邊上向形外作正三角形 BCD, CAE, ABF 則 $AD=BE=CF$.

【提示】 $BA=BF$, $BC=BD$, $\angle FBC=\frac{2}{3}\angle R+\angle ABC=\angle ABD$.

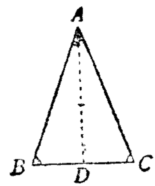


(6) 於四邊形 $ABCD$ 的 AB, CD 上向形外作正三角形 ABE, CDF; 於 BC 上向形內作正三角形 BCG, 則 $GE=AC$, $GF=BD$.



定理 6. 三角形的二角相等,則爲等腰三角形.

[設] $\triangle ABC$ 中, $\angle B=\angle C$.



[求證] $AB=AC$.

[證] 從 A 引 $\angle A$ 的二等分線 AD.

則在 $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ 中,

$\angle B=\angle C$ (所設),

$\angle BAD=\angle CAD$ (所作),

$AD=AD$ (公用),

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (二角一對邊互等).

$\therefore$ $AB=AC$ (全同三角形的對應邊)

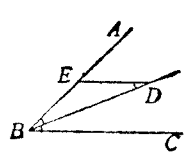
系. 等角三角形就是等邊三角形.

習題十

(1) 三角形一角的外角二等分線若與對邊平行,則這三角形必等腰.

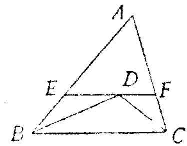
(2) 等腰三角形 ABC 兩底角的二等分線 BD, CD 相交於 D,則 $\triangle DBC$ 也是等腰三角形.

(3) 從一角的二等分線上的一點,引一邊的平行線,必組成一等腰三角形.



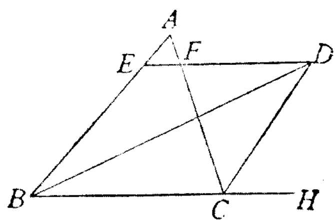
(4) $\triangle ABC$ 的 $\angle B$, $\angle C$ 的二等分線交於 D, 過 D 引 BC 的平行線,交二邊於 E, F, 則

$EF=BE+CF$.

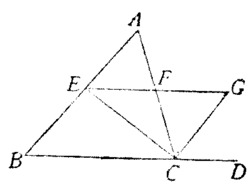


【提示】 仿上題可證 $DE=BE$, $DF=CF$.

(5) $\triangle ABC$的$\angle B$的二等分線同$\angle C$的外角二等分線交於D,過D引BC的平行線,交他二邊於E, F,則EF等於BE, CF的差.

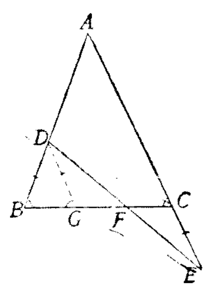


(6) $\triangle ABC$的$\angle C$的二等分線交AB於E,從E引BC的平行線,交AC於F,交$\angle C$的外角二等分線於G,則$EF=FG$.



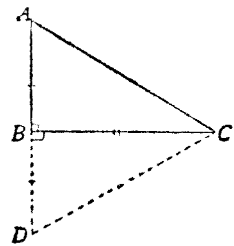
【提示】 仍仿(3)題證 $EF=CF$, $FG=CF$.

(7) 在等腰三角形的一腰AB上截取BD,他腰AC的延長線上截取CE,使$BD=CE$,則DE必被BC等分爲二.



【提示】　從 D 引 $DG \parallel AC$，得證 $DG=DB$，再利用全同三角形卽得.

(8)　直角三角形的一銳角爲他銳角的二倍，則斜邊爲小角所對的邊的二倍.

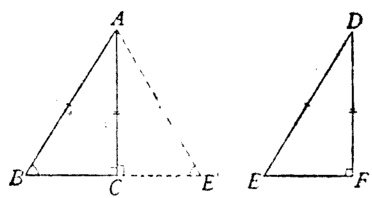


【提示】　$\angle A+\angle C=\angle R$，卽 $2\angle C+\angle C=\angle R$，

$\therefore\ \angle C=\frac{1}{3}\angle R$，$\angle A=\frac{2}{3}\angle R$. 延長 AB，使 $BD=AB$，由全同三角形得 $\angle D=\angle A$，$\angle ACD=2\angle C$，而 $\triangle ADC$ 爲等角三角形.

定理 7.　兩個直角三角形的斜邊同一條直角邊若彼此各各相等，則兩三角形全同.

［設］　$\triangle ABC$，$\triangle DEF$ 中，$\angle C$，$\angle F$ 都是直角，$AB=DE$，$AC=DF$.



［求證］　$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

［證］　把 $\triangle DEF$ 依反對方向放到 $\triangle ABC$ 上，必可使 DF 與 AC 完全重合　　(因 $DF=AC$)

設　E點落在E',

則　$\angle ACE'=\angle F=\angle R$　　(所設及作圖).

$\angle ACB=\angle R$　　(所設).

∴　$\angle ACE'+\angle ACB=2\angle R$　　(等加等).

∴　BC與CE'合成一直線

(二鄰角的和是二直角).

又因$AB=DE$　(所設),　$AE'=DE$　(所作),

∴　在$\triangle ABC$, $\triangle AE'C$中,

$AB=AE'$　　(等於同量),

$\angle B=\angle E'$　　(等腰△的底角),

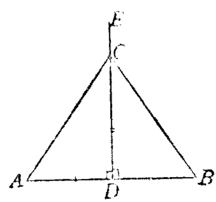
$\angle ACB=\angle ACE'$　　(直角),

∴　$\triangle ACB\cong\triangle ACE'$　　(兩角一對邊互等).

卽　$\triangle ABC\cong\triangle DEF$.

定理 8.　線段的中垂線上的點,必與線段的兩端等距離.

[設]　AB的中垂線爲ED,C爲ED上的任意點.



[求證]　$CA=CB$.

[證]　在$\triangle CAD$, $\triangle CBD$中,

$AD=DB$　　(所設),

$\angle CDA=\angle CDB$　　(直角),

$CD=CD$　　(公用),

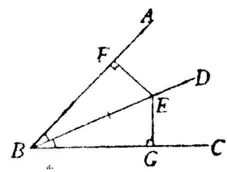
$\therefore$ $\triangle CAD \cong \triangle CBD$ (二邊夾一角).

$\therefore$ $CA = CB$ (全同△的對應邊).

系. 與線段的兩端等距離的點,必在這線段的中垂線上.

【說明】 可將該點與AB的中點連結,由全同三角形可證這連結線同AB垂直.

定理 9. 角的二等分線上的點,必與這角的二邊等距離.



[設] $\angle ABC$的二等分線為BD,

E為BD上的任意點,

$EF \perp AB, EG \perp BC$.

[求證] $EF = EG$.

[證] 在$\triangle EFB, \triangle EGB$中,

$\angle EFB = \angle EGB$ (垂線所夾的直角).

$\angle EBF = \angle EBG$ (所設),

$EB = EB$ (公用),

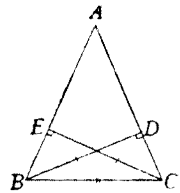
$\therefore$ $\triangle EFB \cong \triangle EGB$ (二角一對邊互等).

$\therefore$ $EF = EG$ (全同△的對應邊).

系. 角的二邊的等距離點,必在這角的二等分線上.

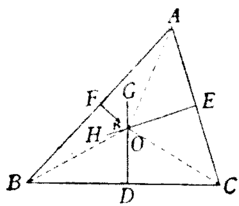
【說明】 可將該點與B連結,由全同三角形可證這連結線等分$\angle ABC$.

習題十一



(1)　從三角形一邊的兩端各引對邊的垂線,若兩垂線相等,則原三角形爲一等腰三角形.

(2)　三角形三邊的中垂線必會於一點.

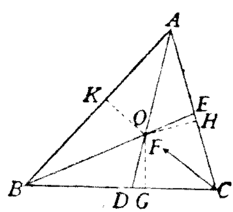


【提示】　若 BC, CA 的中垂線 DG, EH 交於 O, 則 $OB=OC$, $OC=OA$ (定理 8).

$\therefore$　$OB=OA$, 於是 O 必在 AB 的中垂線 FK 上(定理 8 系).

【註】　以 O 爲中心,可過 A,B,C 三點畫一圓,故稱 O 點爲 $\triangle ABC$ 的外心.

(3)　三角形三內角的二等分線必會於一點.



【提示】　若 $\angle A$, $\angle B$ 的二等分線 AD, BE 交於 O, O 與三邊的距離爲 OG,OH,OK, 則 $OK=OH$, $OK=OG$ (定理 9).

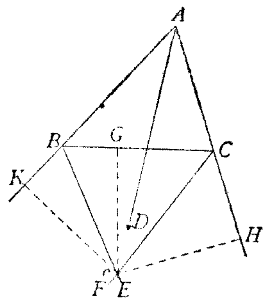
$\therefore\ OH=OG$,於是 O 必在 $\angle C$ 的二等分線上(定理 9 系).

【註】 以 O 爲中心,可畫一圓接於三角形內,故稱 O 點爲 $\triangle ABC$ 的內心.

(4) 三角形一內角的二等分線與其他二角的外角二等分線會於一點.

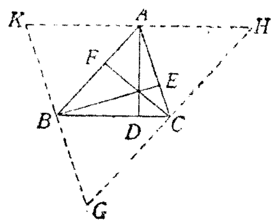
【提示】 證法仿(3)題.

【註】 以相會點爲中心,可畫一圓接於三角形傍,故其點稱爲△的傍心.



(5) 三角形三邊上的頂垂線會於一點.

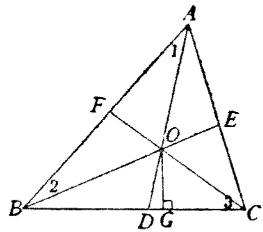
【提示】 過 A,B,C 三點各引對邊的平行線,由習題四(4),知 $AH=BC=KA$,且 $AD\perp KH$,故 AD 爲 KH 的中垂線,於是 $\triangle GHK$ 三邊的中垂線必會於一點.



【註】 這相會點叫垂心.

(6) $\triangle ABC$ 的角二等分線會於 O, $\angle A$ 的二等分線交

BC於D,從O引BC的垂線OG,則$\angle BOD=\angle COG$.



【提示】　$\angle BOD+\angle 3$

$=\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle R$（內角和之半）,

$\angle COG+\angle 3=\angle R$.

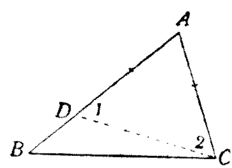
定理10.　三角形的二邊不等,則大邊所對的角亦大.

［設］　$\triangle ABC$中, $AB>AC$.

［求證］　$\angle C>\angle B$.

［證］　因$AB>AC$　（所設）,

故在AB上必可截取一部AD使與AC相等,再連結DC,



則　$\angle 1=\angle 2$　（等腰△的底角）.

又　$\angle 1>\angle B$　（△的外角大於不相鄰的內角）.

∴　$\angle 2>\angle B$　（代入）.

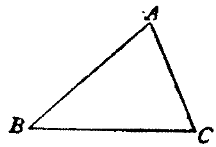
又　$\angle C>\angle 2$　（全量大於部分）

∴　$\angle C>\angle B$（甲大於乙乙大於丙,則甲大於丙）.

定理11.　三角形的二角不等,則大角所對的邊亦大.

［設］　$\triangle ABC$中, $\angle C>\angle B$.

［求證］ $AB > AC$.



［證］ AB 同 AC 的關係,僅有 $AB < AC$, $AB = AC$,及 $AB > AC$ 三種.

若 $AB < AC$,

則 $\angle C < \angle B$ （△的大邊對大角,小邊對小角）

若 $AB = AC$,

則 $\angle C = \angle B$ （等腰△的底角）

都同假設衝突.

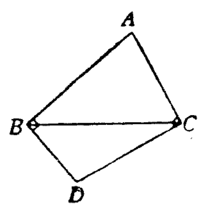
$\therefore$ $AB > AC$.

系 1. 直角三角形的三邊,以斜邊爲最長.

系 2. 從直線外一點引到這線的許多直線中,以垂線爲最短.

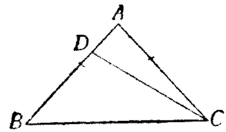
習題十二

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, 作 $BD \perp AB$, $CD \perp AC$, 試證 $DB < DC$.

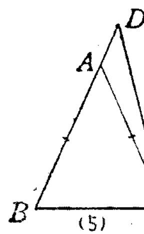


(2) 從等腰三角形的頂角頂點到底邊的線,必比腰短.

(3) 從等腰三角形的頂角頂點到底邊的延長線上的線,必比腰長.



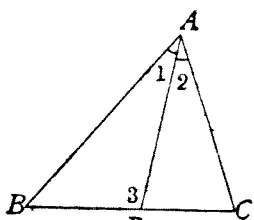
(4) 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D是AB上的任意點.
試證$DC>DB$.



(5)

(5) 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，延長BA到D，
試證$DB>DC$.

(6) 在$\triangle ABC$中，$AB>AC$. $\angle B$，$\angle C$的二等分線相交於D，
試證$DB>DC$.

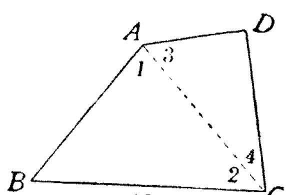


(7)

(7) $\triangle ABC$中，二等分$\angle A$的線交BC於D，
試證$AB>BD$，$AC>CD$.

【提示】 $\angle 3>\angle 2$，

$\therefore \angle 3>\angle 1$.



(8)

(8) 四邊形$ABCD$中，若BC邊最長，AD邊最短，則$\angle A>\angle C$，$\angle D>\angle B$.

【提示】 由$\triangle ABC$

得$\angle 1>\angle 2$，

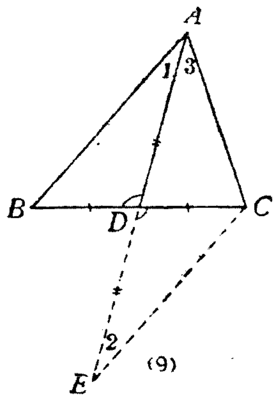
由$\triangle ADC$

得$\angle 3>\angle 4$.

(9) 在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，D

是 BC 的中點,

試證 $\angle CAD > \angle BAD$.



(9)

【提示】 延長 AD 到 E, 使 $DE = AD$,可證 $\triangle ABD \cong \triangle ECD$, $AB = CE$, $\angle 1 = \angle 2$, 再由 $\angle 3 > \angle 2$, 得 $\angle 3 > \angle 1$.

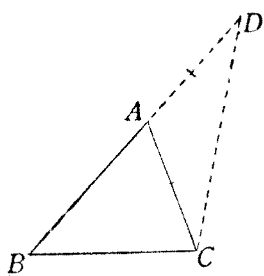
(10) 三角形三頂垂線的和小於三角形的周圍.

【提示】 應用定理 11 系 1,得三個不等式,相加即得.

定理 12. 三角形任意二邊的和,必大於第三邊.

［設］ $\triangle ABC$.

［求證］ $AB + AC > BC$.



［證］ 延長 BA 到 D,使 $AD = AC$,

則 $\angle ACD = \angle D$

(等腰 △ 的底角).

但 $\angle BCD > \angle ACD$

(全量大於部分).

∴ $\angle BCD > \angle D$ (代入).

$\therefore \quad BD > BC$ (△大角對大邊).

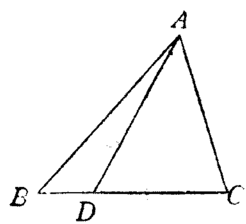
即 $\quad BA + AC > BC$ (代入).

系 三角形任意二邊的差小於第三邊.

【說明】 $AB + AC > BC$, 兩邊各減去 AC, 得 $AB > BC - AC$.

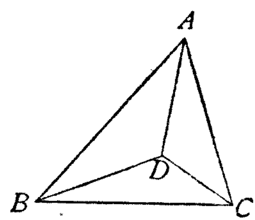
習 題 十 三

(1) D 為 $\triangle ABC$ 的 BC 邊上的任意點,試證 $AB + BC > AD + DC$.



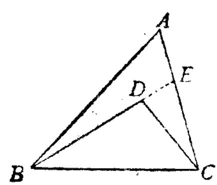
【提示】 $AB + BD > AD$, 各加 DC 即得.

(2) 從三角形三頂點到形內任意一點引三直線,這三直線的和大於三角形周圍的一半.



【提示】 $AD + BD > AB$, $BD + CD > BC$, $CD + AD > CA$, 相加折半即得.

(3) 從三角形一邊的兩端,到形內任意一點引兩直線,這兩直線的和小於其他二邊的和.



【提示】 延長 BD 到 E, 則 $AB + AE > DB + DE$, DE

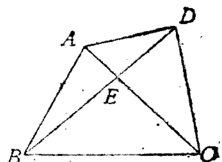
$+EC>CD$,相加,兩邊各減去DE,卽得.

(4)　從三角形三頂點到形內任意一點引三直線,這三直線的和小於三角形的周圍.

【提示】　圖與(2)同,應用(3)得三個不等式,仿(2)做.

(5)　四邊形的周圍大於二對角線的和.

【提示】　$AB+BC>AC$, $BC+CD>BD$, ……,四式相加折半卽得.



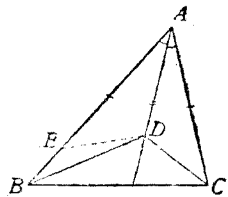
(5) (6)

(6)　四邊形的周圍小於二對角線和的二倍.

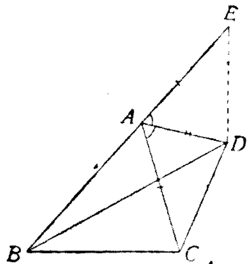
【提示】　$AB<AE+BE$, $BC<BE+CE$, ……,四式相加卽得.

(7)　在$\triangle ABC$的$\angle A$二等分線上任取一點D,則D與B, C距離的差,小於AB, AC的差.

【提示】　若$AB>AC$,在AB上截取$AE=AC$,由全同三角形得$DE=DC$,又$DB-DE<BE$,代入卽得.

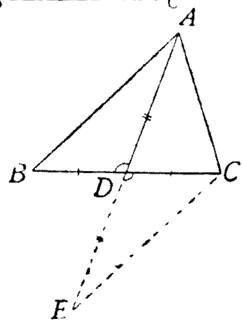


(8)　在$\triangle ABC$的$\angle A$外角二等分線上任取D點,試證$DB+DC>AB+AC$.



【提示】 在 BA 延長線上取 E 點使 $AE=AC$，由全同三角形得 $DE=DC$，又 $DB+DE>BE$，代入卽得.

(9) 三角形一邊上的中線小於其他二邊和的一半.



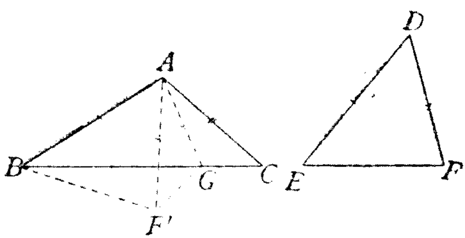
【提示】 延長 AD 到 E，使 $DE=AD$，由全同三角形得 $CE=AB$，又 $AE<AC+CE$， 代入卽得.

定理 13. 兩三角形的兩邊彼此各各相等，則夾角大的，第三邊亦大.

［設］ 在 $\triangle ABC$，$\triangle DEF$ 中，

$AB=DE, AC=DF, \angle A>\angle D.$

［求證］ $BC>EF$.



[證] 把 $\triangle DEF$ 依同方向放到 $\triangle ABC$ 的上面,必可使 DE 與 AB 完全重合 (因 $DE=AB$).

因 $\angle A>\angle D$,故 DF 必落於 AB, AC 之間,設其位置爲 AF'.引 $\angle CAF'$ 的二等分線交 BC 於 G,連 $F'G$,

則在 $\triangle AF'G$, $\triangle ACG$ 中,

$AF'=AC$ (因 $AF'=DF, AC=DF$).

$\angle F'AG=\angle CAG$ (所作).

$AG=AG$ (公用).

$\therefore$ $\triangle AF'G\cong\triangle ACG$ (二邊夾一角互等).

$\therefore$ $F'G=GC$ (全同三角形的對應邊).

又 $BG+GF'>BF'$ (△二邊和大於第三邊).

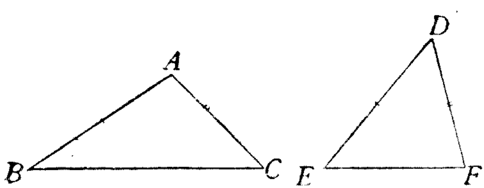
即 $BC>EF$ (等量代入).

定理14. 兩三角形的兩邊彼此各各相等,則第三邊大的,所對角亦大.

[設] 在 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ 中,

$AB=DE, AC=DF, BC>EF$.

[求證] $\angle A>\angle D$



[證] $\angle A$, $\angle D$ 的關係,僅有 $\angle A<\angle D$, $\angle A=\angle D$, 及 $\angle A>\angle D$ 三種

若 $\angle A<\angle D$,

則 $BC<EF$

(兩三角形二邊互等,夾角小者對小邊).

若 $\angle A=\angle D$,

則 $BC=EF$

(兩△二邊夾一角互等者全同,故對應邊等).

都同假設衝突.

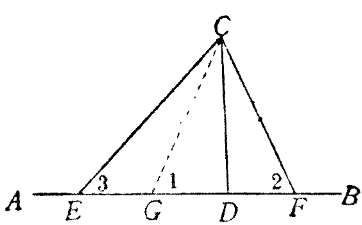
$\therefore$ $\angle A>\angle D$.

定理15. 從已知直線的垂線上一點到這線引二直線,其交點與垂足的距離較大的,其線必較長.

[設] $CD\perp AB$,

$ED>DF$.

[求證] $CE>CF$.



[證] 因 $ED>DF$,

故可在 ED 上截取一部 DG,使等於 DF,再連結 CG,

則 $CG=CF$ (線段中垂線上的點距兩端必等).

$\angle 1=\angle 2$ (等腰△的底角).

但 $\angle 1>\angle 3$ (△外角大於不相鄰內角).

$\therefore \quad \angle 2 > \angle 3$ (代入).

$\therefore \quad CE > CF$ (△大角對大邊).

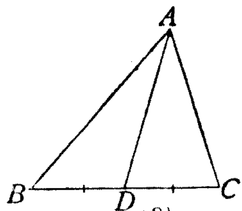
系 從已知直線的垂線上一點,到這線引二直線,其與垂線夾角較大的,其線必較長.

習題十四

(1) AD 為 $\triangle ABC$ 的中線,

$AB > AC$,

試證 $\angle ADB > \angle ADC$.



(1) (2)

(2) AD 為 $\triangle ABC$ 的中線,

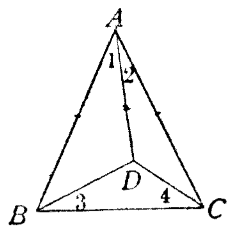
$\angle ADB > \angle ADC$,

試證 $AB > AC$.

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$,

$\angle 1 > \angle 2$,

試證 $\angle 3 < \angle 4$.

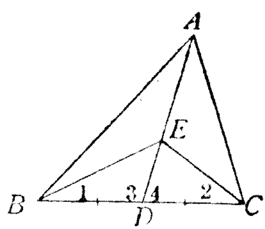


(3)

(4) AD 為 $\triangle ABC$ 的中線,

$AB > AC$, E 是 AD 上的任意點,試證 $EB > EC$.

【提示】 注目 $\triangle ABD$ 同 $\triangle ACD$, 得證 $\angle 3 > \angle 4$, 再注目 $\triangle EBD$ 同 $\triangle ECD$ 即得.

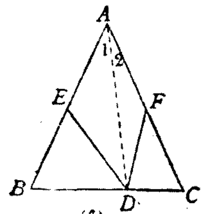


(4) (5)

(5) AD 爲 $\triangle ABC$ 的中線，$\angle B<\angle C$，E 是 AD 上的任意點，試證 $\angle 1<\angle 2$.

(6) 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$BD>DC$，E，F 各是 AB，AC 的中點，試證 $DE>DF$.

【提示】 連 AD，先證 $\angle 1>\angle 2$.

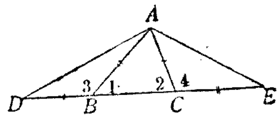


(6)

(7) 在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，將 BC 邊向兩端延長，使 $BD=AC$，$CE=AB$，則 $AD>AE$.

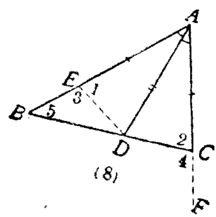
【提示】 $\angle 1<\angle 2$，

$\therefore \angle 3>\angle 4$.



(7)

(8) $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 二等分線交 BC 於 D，若 $AB>AC$，則 $BD>DC$.



(8)

【提示】 在 AB 上截取 $AE=AC$，延長 AC，由全同三角形得證 $ED=DC$，$\angle 1=\angle 2$，故 $\angle 4=\angle 3$. 但 $\angle 4>\angle 5$，$\therefore \angle 3>\angle 5$，

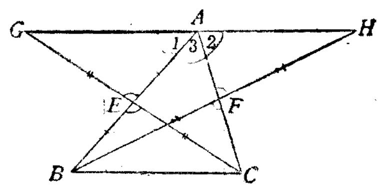
*第四節　特種問題的證法

問題的結論，若是本章第七節所舉重要條件中所沒有的，當用特殊的證法處理.舉例

如下:

1. 證三點在一直線上　可把兩旁的二點各與中間一點連結,證這兩條連結線合爲一直線.

〔例題〕 設$\triangle ABC$的二邊AB, AC的中點爲E, F,延長CE到G,使$EG=CE$;延長BF到H,使$FH=BF$.求證G, A, H三點在一直線上.



〔證〕 以直線連結G, A二點,再連結A, H二點,則在$\triangle AEG$,$\triangle BEC$中,

$\left.\begin{array}{l}AE=EB\\GE=EC\end{array}\right\}$　(所設).

$\angle AEG=\angle BEC$　(對頂角).

$\therefore$ $\triangle AEG \cong \triangle BEC$　(二邊夾一角互等)

$\therefore$ $\angle 1=\angle B$　(全同三角形的對應角).

倣此 $\angle 2=\angle C$.

又 $\angle B+\angle C+\angle 3=2\angle R$　(△的三內角).

$\therefore$ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=2\angle R$　(等量代入).

$\therefore$ GA, AH合爲一直線

(平角的二邊爲一直線).

即 G, A, H三點在一直線上.

2. 證三直線會於一點　可使二線相交，證這交點在第三線上。

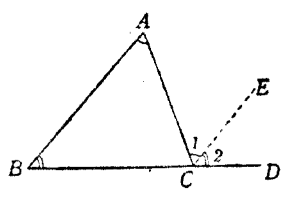
例題見習題十一。

3. 證一角等於二角的和　至少有二種證法：

(I)　把一角分成二部，證這二部各與二角中的一角相等。

(II)　把二角合成一角，證這一角與題中的一角相等。

［例題］　三角形的外角等於不相鄰的二內角的和。



［證法一］　從 C 引 AB 的平行線 CE，

則　$\angle 1=\angle A$

(平行線間的錯角)，

$\angle 2=\angle B$

(平行線間的同位角)，

$\therefore$　$\angle 1+\angle 2=\angle A+\angle B$　(等量加等量)，

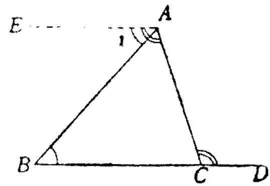
即　$\angle ACD=\angle A+\angle B$.

［證法二］　從 A 引 $AE \parallel BC$，

則　$\angle 1=\angle B$　(平行線間的錯角)，

$\angle EAC = \angle A + \angle 1 =$

$\angle A + \angle B$　(代入).



但　$\angle EAC = \angle ACD$

(平行線間的錯角).

∴　$\angle ACD = \angle A + \angle B$

(等於同量).

【注意】　證一角等於二角的差,仿此法.

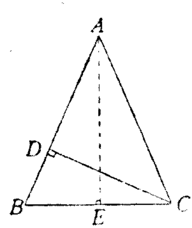
4. 證一角爲他角的二倍　至少有二種證法:

(I)　把一角等分爲二,證他的半分同他角相等.

(II)　把他角加倍起來,證這二倍的角同一角相等.

〔例題〕　設在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $CD \perp AB$, 求證 $\angle A = 2\angle DCB$.

〔證法一〕　引 $\angle A$ 的二等分線,交 BC 於 E,



則　$AE \perp BC$　(等腰△頂角的二等分線⊥底邊).

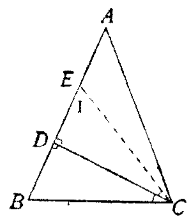
$\left.\begin{array}{l}\angle AEB = \angle R \\ \angle CDB = \angle R\end{array}\right\}$　(垂線夾直角).

$\therefore$ $\angle BAE$ 是 $\angle B$ 的餘角，$\angle DCB$ 是 $\angle B$ 的餘角 (直角△兩銳角互為餘角)

於是 $\angle BAE=\angle DCB$ (同一角的餘角必等).

$\angle A=2\angle DCB$ (等量的同倍).

[證法二] 從 C 引 CE,使 $\angle ECD$ $=\angle BCD$,



則在 $\triangle ECD$, $\triangle BCD$ 中,

$\angle ECD=\angle BCD$ (所作),

$\angle CDE=\angle CDB$ (直角),

$CD=CD$ (公用),

$\therefore$ $\triangle ECD\cong\triangle BCD$ (二角夾一邊互等).

$\angle B=\angle 1$ (全同三角形的對應角).

又 $\angle C=\angle B$ (等腰三角形的底角).

$\therefore$ $\angle A=\angle ECB$ (兩△兩組角互等,第三角亦等).

即 $\angle A=2\angle DCB$

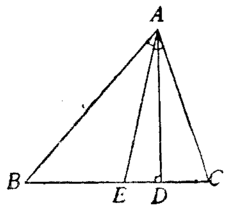
【注意】 證一角為他角的一半,仿此法.

5. 證諸角間比較複雜的等式 不外下列的二種證法:

(I) 看等式左邊的一角同何角有關係,這些有關係的角能否同等式右邊的角有連帶的關係,然後用連等式逐步由左邊的角化成右邊的諸角,但式中有分數的,當先證明去

掉分母後的等式.

［例題］ 從三角形一角頂所引頂垂線同角二等分線的夾角,等於其他二角差的一半.



［設］ 在$\triangle ABC$中,AE等分$\angle A$,

$AD\perp BC$.

［求證］ $\angle EAD=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$.

［證］ $2\angle EAD=2(\angle R-\angle AED)$

(直角三角形兩銳角互餘)

$=2\angle R-2\angle AED$

$=2\angle R-2(\angle B+\angle BAE)$

(△外角等於不相鄰二內角的和)

$=2\angle R-2\angle B-\angle A$

$=(2\angle R-\angle B-\angle A)-\angle B$

$=\angle C-\angle B$

(三角形三內角的和爲二直角).

$\therefore\quad \angle EAD=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$ (等量的半分).

(II) 有時須經移項的手續,才得所求的等式.

［例題］ 延長等腰三角形的一腰AC到D,連結BD,求證$\angle CBD=\frac{1}{2}(\angle ABD-\angle D)$.

［證］ $\angle CBD=\angle ACB-\angle D$

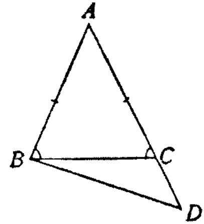
(△外角＝不相鄰二內角和)

$= \angle ABC - \angle D$

(等腰△底角等)

$= \angle ABD - \angle CBD$

$- \angle D.$



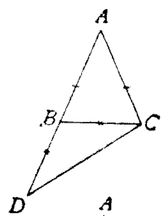
$\therefore \quad 2\angle CBD = \angle ABD - \angle D$

(等量加等量).

$\therefore \quad \angle CBD = \frac{1}{2}(\angle ABD - \angle D)$ (等量的半分).

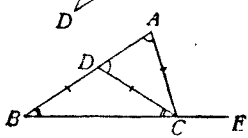
*習 題 十 五

(1) 延長等腰三角形 ABC 的一腰 AB 到 D,使 $BD = BC$,則 $\angle A = 2\angle R - 4\angle D$.

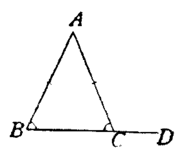


【提示】 $\angle A = 2\angle R - \angle ABC - \angle ACB = \cdots\cdots$.

(2) 若 $AC = CD = DB$, AB, BE 都是直線,試證 $\angle ACE = 3\angle B$.

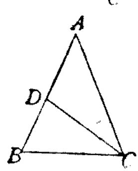


(3) 等腰三角形底角的外角,等於頂角的半加一直角.



【提示】 $2\angle ACD = 2\ (2\angle R - \angle ACB) = 2\angle R + (2\angle R - \angle ACB - \angle B) = \cdots\cdots$.

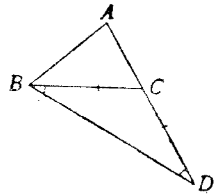
(4) 在 $\triangle ABC$ 中,$AB = AC$,在 AB 上



任取一點 D, 則 $\angle B=\frac{1}{2}(\angle ADC+\angle ACD)$.

【提示】 $2\angle B=\angle B+\angle C=2\angle R-\angle A=\cdots\cdots$.

(5) 延長 $\triangle ABC$ 的 AC 邊到 D, 使 $CD=BC$, 則 $\angle ABD=\angle R+\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle A)$.



【提示】 $\angle ABD=2\angle R-\angle A$
$-\angle D=2\angle R-\angle A$
$-\angle CBD=2\angle R-\angle A-(\angle ABD-\angle ABC)$
$=\cdots\cdots$.

第五節　證題的解析法

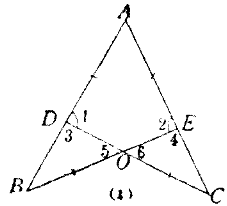
比較複雜的定理,往往可用解析法發見他的證明.所謂解析法,就是考察這個定理的結論若能成立,須有何種條件;再研究這個條件當用何種方法才能證明他具備.如此繼續進行,把原有的命題逐次化做簡單的命題,直到同已知的條件符合爲止.這時只須把剛才推論的程序倒過來,就是一個普通的證明.舉例於下:

〔例題一〕 設 AB, AC, BE, CD 都是直線, $AD=AE$, $\angle 1=\angle 2$.

求證　$BO=CO$.

【解析】 欲證 $BO=CO$,

從圖(1)觀察,知有下列的二法:



(一) 設法證$\triangle DBO \cong \triangle ECO$.

(二) 設法證$BE=CD, OE=OD$,相減即得.

就(一)推測,知$\triangle DBO$, $\triangle ECO$中,已知

$\angle 3=\angle 4$ (等角的補角),

$\angle 5=\angle 6$ (對頂角).

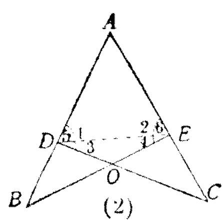
必須再有一組等邊,才能全同.

(A) 若欲得$DB=EC$,當用何法?

則知從$AB=AC$減去$AD=AE$即得,然則$AB=AC$如何可以成立?

則知在$\triangle ABE$, $\triangle ACD$中,有題中已知的二個等量同公用的$\angle A$,故可全同,AB, AC恰是他們的對應邊,於是本題迎刃而解.

(B) 若欲得$DO=EO$,當用何法?



從圖(2),知若$\angle 3=\angle 4$即得.

然則$\angle 3=\angle 4$如何可以成立?

則知若$\angle 5=\angle 6$,則從$\angle 1=\angle 2$減去即得.

然則$\angle 5=\angle 6$是否成立?

從圖一看,知是等腰三角形的底角,於是本題就

解決了.

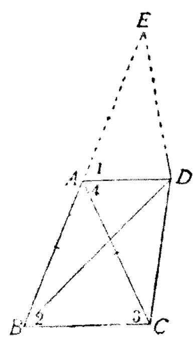
從(二)推測,知欲證 $BE=CD$, 當證

$\triangle ABE\cong\triangle ACD$, 證法見上.

欲證 $OE=OD$, 當證 $\angle 3=\angle 4$[圖(2)], 證法上面已經有了.

從上面的解析,已得三種相異的證法,學者試把這逆的推論用最簡明的方法寫成普通的證明.再試作 AO 直線或 BC 直線,仿上法解析,一定更可得幾個相異的證法.

〔例題二〕 一個等腰三角形同一個不等邊三角形的底邊公用,且兩頂點的連結線與底平行,則不等邊三角形的周圍大於等腰三角形的周圍(本題若換簡單的話說,就是:同底等高的諸三角形中,以等腰三角形的周圍為最小).



〔設〕 $AB=AC, AD\parallel BC$.

〔求證〕 $DB+DC+BC>AB+AC+BC$.

【解析】 欲證 $DB+DC+BC>AB+AC+BC$,

只須先證 $DB+DC>AB+AC$, 兩邊各加 BC 即得,這樣已比原題

簡單一些.

欲證 $DB+DC>AB+AC$, 可在圖中畫出等於 $AB+AC$ 的一條線段,於是證二線的和大於一線,也許可用三角形二邊和大於第三邊的定理.

把 BA 延長到 E,使 $AE=AC$, 那末 BE 就是 $AB+AC$, 設法證 $DB+DC>BE$,比較更是簡單.

但從圖一看,明明 $DB+DE>BE$.

把二式對照一下,知道若 $DC=DE$,則本題即迎刃而解,這不是化做極簡單的問題了嗎?

欲得 $DC=DE$, 非 $\triangle ADC \cong \triangle ADE$ 不可.

在 $\triangle ADC$, $\triangle ADE$ 中,已知

$AC=AE$(所作).

$AD=AD$(公用).

$\angle 1=\angle 2$(同位角)$=\angle 3$(等腰△底角)

$=\angle 4$(錯角).

當然可以全同,於是本題的證法已不勞而獲了.

本書以下各章的問題,大多可用解析法找到證明,學者如能把已習的重要命題,記憶純熟,再把上述的方法多加摩練,自能融會貫通,求解一切的幾何證明題,都不至感覺困難了.

*第六節　證法的種類

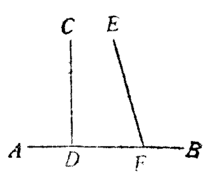
幾何證明題的證法,大別爲七類,分述於下:

1. 疊置證法　移置一形,重疊於第二形的上面,若第一形中的各要素,能一一與第二形中相同的各要素相合,則兩形相等或全同.凡用此法證兩形的相等或全同的,叫做疊置證法.　例如第二章的定理 6, 同本章的定理 1, 2 等都是.

有時使兩形的一部分重合,使顯出其他部分的關係,也是疊置證法.　例如本章定理 4, 7, 13 等是.

2. 歸謬證法　欲證一定理的眞確,先假定他的結論謬誤,就這假定推測,若所得的結果同已知的事理相背,那末可斷定我們的假定是錯的,而題中的結論並無謬誤,這叫做歸謬證法.　例如第二章的定理 4 及下例便是.

[例題]　一直線的垂線同非垂線一定相交.



[設]　CD 爲 AB 的垂線,

EF 不爲 AB 的垂線.

[求證]　CD 同 EF 必相交.

[證]　若 CD 同 EF 不相交,

則　$CD \parallel EF$

(任何延長不相交的二直線是平行線).

於是 $\angle CDB = \angle EFB$　(平行線間的同位角).

但　$\angle CDB = \angle R$　(垂線夾直角).

於是 $\angle EFB = \angle R$　(等於同量的量相等).

$EF \perp AB$　(夾直角的二線,必互爲垂線).

這同假設發生衝突.

$\therefore$　CD 同 EF 必定相交.

3. 同一證法　欲證一形有某種特性,另外作一有這種特性的形,而去證所作的同欲證的同是一形,藉此達到證題的目的,這叫做同一證法. 例如第二章的定理 5, 7 同本章第四節 1 的例題都是.

4. 窮舉證法　欲證一定理的結論眞確,把與這結論同類的各種變化完全舉出,證這另舉的一一不能與假設符合,因此可定題中的結論眞確,這叫做窮舉證法. 例如本章定理 11 同 14.

【註】　歸謬證法,同一證法及窮舉證法總稱爲間接證法.

5. 綜合證法　由假設逐步推闡而得結論的,叫做綜合證法. 此法的敍述,最爲簡潔

明淨證幾何題時總是儘量用此法,非萬不得已,不去用上述的四種證法. 例如上章定理 1, 2, 3, 8, 9, 10,11,12 同本章定理 3, 5, 6, 8, 9, 10,12,15 等都是.

【註】 綜合證法係對解析證法而言;若對間接證法而言,則這種證法稱爲直接證法.

6. 解析證法　由結論逐步逆推而得假設的,叫做解析證法. 此法敍述繁冗,然實際是思索探究的路徑,結果仍須用綜合證法寫成證明,凡證繁複的問題,這是必經的手續,在上節已經詳述.

第七節　證題根據的重要條件

1. 兩線段相等的條件　(1)至(6)與上章第六節中兩角相等的條件同. (7)全同的兩三角形的對應邊. (8)三角形等角的對邊. (9)等腰三角形頂角的二等分線截底邊爲二等分. (10)三角形等腰上的高相等. (11)線段的中垂線上的點距兩端相等. (12)角的二等分線上的點距兩邊相等. (13)自直線外一點引與垂線成等角的線必等.

2. 兩角相等的條件　(1)全同的兩三角形的對應角. (2)等腰三角形的底角. (3)兩

三角形的兩組角互等,則第三組角亦等. (4)三角形外角等於不相鄰二內角的和.

3. 兩三角形全同的條件 (1)兩邊夾一角互等. (2)兩角夾一邊互等. (3)三邊互等. (4)兩角一對邊互等. (5)兩邊一對角互等,而這對角是直角的.

4. 兩直線互為垂線的條件 等腰三角形頂角的二等分線同底邊.

5. 兩角互為餘角的條件 直角三角形的兩銳角.

6. 兩線段不等的條件 (1)不等量加等(或同)量,大者仍大. (2)不等量減去等(或同)量,大者仍大. (3)不等量的同倍,大者仍大. (4)不等量的同分,大者仍大. (5)等量減去不等量,減去大者的一方反小. (6)全量大於部分. (7)甲大於乙,乙大於丙,則甲大於丙. (8)有幾組不等量時,諸大量的和大於諸小量的和. (9)不等量中用等量代入,大者仍大. (10)三角形的大角對大邊. (11)三角形二邊的和大於第三邊. (12)三角形二邊的差小於第三邊. (13)直角三角形的斜邊大於任一直角邊. (14)兩三角形的兩組邊互等,夾角大的,第三

邊也大. (15)從三角形一邊的兩端到形內一點的二線,其和小於其他二邊的和. (16)從直線的垂線上一點到這線引二直線,距垂足遠的較長. (17)從直線的垂線上一點,到這線引二直線,與垂線夾大角的較長.

7. 兩角不等的條件 (1)至(9)同上. (10)三角形的大邊對大角. (11)兩三角形的兩組邊互等,第三邊大的,對角也大. (12)三角形的外角,大於不相鄰的任一內角.

8. 點在直線上的條件 (1)線段兩端的等距離點,在該線段的中垂線上. (2)角的二邊的等距離點,在該角的二等分線上.

9. 其他條件 (1)三角形三內角的和是二直角. (2)三角形三外角的和是四直角. (3)正三角形的內角都是$\frac{2}{3}$直角. (4)三角形二角互爲餘角,則第三角必是直角. (5)從一點到一直線所引諸線,以垂線爲最短. (6)三角形中有一角爲直角或鈍角,則其他二角都是銳角.

附 四邊形四內角的和是四直角.

第四章 平行四邊形梯形多邊形

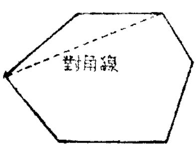
第一節 重要定義

1. 多邊形,四邊形 三直線以上圍成的平面形總稱多邊形,如圖(1). 多邊形中各部的名稱,如邊,頂點,內角,外角,周圍等,都同三角形一樣. 有四條邊的多邊形,叫四邊形,如圖(2). 其餘有五條邊或五邊以上的,名稱可以類推.

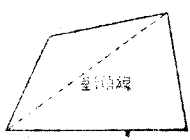
2. 對角線 連結多邊形中不在同一邊上的兩頂點所成的直線,叫做對角線. 四邊形的對角線,是連結相對兩頂點的線,共有二條.

3. 平行四邊形 四邊形的兩組對邊各各平行的,叫做平行四邊形,如圖(3).

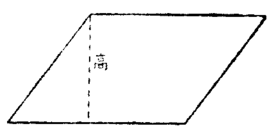
【注意】 平行四邊形的記號是▱.



(1)



(2)



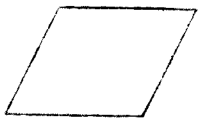
(3)

4. 矩形,菱形,正方形 平行四邊形的角都是直角的,叫做矩形,如圖(4). 四條邊都相

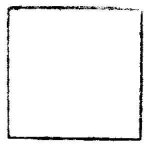
等的,叫做菱形,如圖(5). 角都是直角,而邊又都相等的,叫做正方形,如圖(6).

【注意】 矩形的記號是▭,正方形的記號是□.在第七章講面積時常用.

(4)

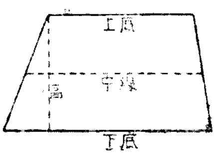


(5)

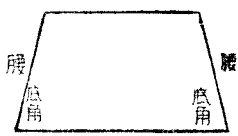


(6)

5. 梯形,等腰梯形 四邊形中祇有二邊平行的,叫做梯形,如圖(7). 梯形的不平行二邊相等的,叫做等腰梯形,如圖(8).



(7)



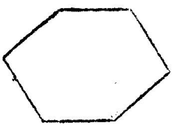
(8)

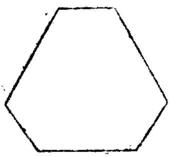
6. 平行四邊形同梯形的高 兩平行邊的垂直距離叫做該形的高.

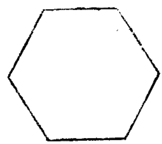
7. 梯形的上底下底中線 梯形的平行二邊都叫底.通常依放的位置,分別稱做上底和下底. 梯形的不平行二邊的中點連結線,叫做梯形的中線.

8. 等腰梯形的腰.底角 等腰梯形的二條等邊,都叫做腰. 底的兩端的二角,叫做底角,底角共有二對.

9. 等邊多邊形,等角多邊形.正多邊形 多邊形的諸邊都相等的,叫做等邊多邊形,如圖(9). 諸角都相等的,叫做等角多邊形,如圖(10). 諸邊相等而又諸角相等的,叫做正多邊形,如圖(11).

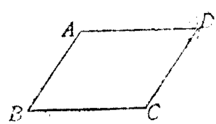

(9)

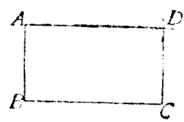

(10)


(11)

第二節 簡易幾何畫法

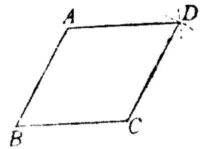
1. 作平行四邊形 依所需的平行四邊形的邊長及角作$\angle ABC$,以A爲中心,BC的長爲半徑作弧;C爲中心,AB的長爲半徑作弧兩弧交於D.連結AD,CD,即得所求的$\square ABCD$.



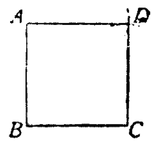


2. 作矩形 作直角ABC,使AB, BC的長等於所需的矩

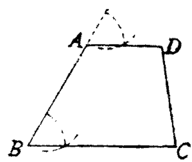
形的邊長.仿上法作二弧,得交點 D,則 $ABCD$ 爲矩形.



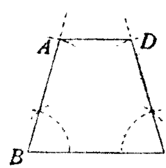
3. 作菱形 作 $\angle ABC$,使二邊 $AB=BC$,仿上法即得菱形 $ABCD$.



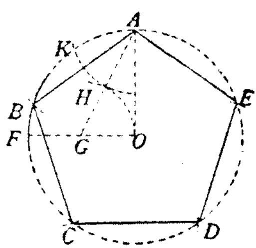
4. 作正方形 作成直角 ABC,使二邊 $AB=BC$,仿上法即得正方形 $ABCD$.



5. 作梯形 先作下底 BC,再作一邊 AB,從 A 引 BC 的平行線 AD,連 DC 即得.



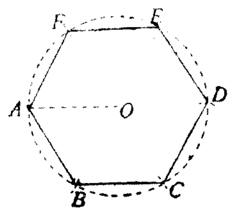
6. 作等腰梯形 先作下底 BC,於 B, C 二點各作直線 BA, CD,使 $\angle B=\angle C$,再截取 $BA=CD$,連 AD 即得.



7. 作正五邊形 先以 O 爲中心畫一圓,並畫互相垂直的二半徑 OA, OF.取 OF 的中點 G.連 AG.以 G 爲中心,GO 爲半徑畫弧,交 AG 於 H.以 A 爲中心,AH 爲半徑畫弧,交原圓於 K.以 K 爲中心,仍以

AH爲半徑畫弧,在原圓上截得B點,連結AB.順次以截得的點爲中心,AB爲半徑畫弧,恰巧把原圓截作五等分.連各截點,得正五邊形$ABCDE$.

8. 作正六邊形 以O爲中心,OA爲半徑作一圓.以A爲中心,仍以原半徑作弧,截原圓於B.順次以截得的點爲中心,依原半徑作弧,恰把原圓截作六等分,連各截點,得正六邊形$ABCDEF$.



第三節 重要定理

定理 1. 凡平行四邊形,有下列的幾個特性:

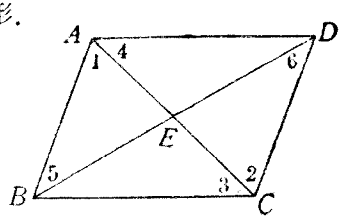
(A) 對邊各相等.

(B) 對角各相等.

(C) 對角線互相等分.

(D) 相鄰的二角互爲補角.

[設] $ABCD$爲平行四邊形.



[求證] (A) $AB=CD$,

$AD=BC$.

(B) $\angle A=\angle C$,

$\angle B=\angle D$.

(C) $AE=EC, BE=ED$.

(D) $\angle A+\angle B=2\angle R, \angle B+\angle C=2\angle R,$ ………

［證］(A) 在 $\triangle ABC, \triangle ADC$ 中,

$$\left.\begin{array}{l}\angle 1=\angle 2\\ \angle 3=\angle 4\end{array}\right\}$$ (平行線間的錯角),

$AC=AC$ (公用),

∴ $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (二角夾一邊互等),

∴ $AB=CD, AD=BC$ (全同三角形的對應邊).

(B) $\angle B=\angle D$ (全同三角形的對應角).

仿此 $\angle A=\angle C$.

(C) 在 $\triangle ABE, \triangle CDE$ 中,

$AB=CD$ (上面已經證明),

$$\left.\begin{array}{l}\angle 1=\angle 2\\ \angle 5=\angle 6\end{array}\right\}$$ (平行線間的錯角),

∴ $\triangle ABE \cong \triangle CDE$ (二角夾一邊互等).

∴ $AE=EC, BE=ED$ (全同三角形的對應邊).

(D) $\angle A+\angle B=2\angle R, \angle B+\angle C=2\angle R,$ ……… .

(平行線間的同側內角互補).

【注意】 凡矩形,菱形,正方形,都是平行四邊形,所以都有上面定理中的四個特性.

系 1. 平行四邊形的對角線,分原形為二個全同的三角形.

系 2.　兩平行線間的距離處處相等.

系 3.　若平行四邊形的一角爲直角,則其他三角都是直角,這形就是矩形.

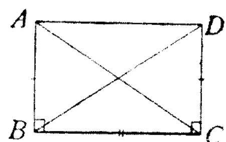
系 4.　若平行四邊形的相鄰二邊相等,則諸邊都等,這形就是菱形.

系 5.　若平行四邊形的一角爲直角,且相鄰二邊相等,則這形是正方形

習題十六

(1)　矩形的對角線必相等.

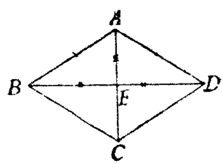
【提示】　$\triangle ABC \cong \triangle DBC$.



(2)　平行四邊形的對角線若相等,則爲矩形.

(3)　菱形的對角線,必互爲垂線.

【提示】　$\triangle ABE \cong \triangle ADE$.



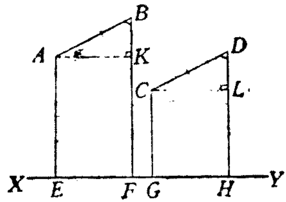
(4)　平行四邊形的對角線若互爲垂線,則爲菱形.

(5)　菱形的對角線必等分內角.

【注意】　矩形同菱形所有的特性,在正方形中也都具備.

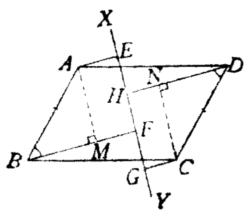
(6)　若 $AB \mathrel{\underline{\parallel}} CD$, 自 A, B, C, D 各引 XY 的垂線 AE, BF, CG, DH, 則 $EF = GH$.

【註】 $\underline{\underline{//}}$ 是既平行而又相等的記號. 又 EF, GH 稱爲 AB, CD 在 XY 上的正射影.



【解析】 作 AK, CL 平行於 XY,則 $EF=AK, GH=CL$. 能證明 $AK=CL$ 就得.

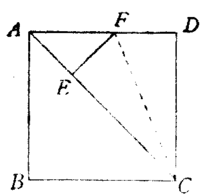
(7) 一直線與 $\square ABCD$ 的 AD, BC 二邊相交,從平行四邊形的各頂點引這直線的垂線 AE, BF, CG, DH, 則 AE, BF 的差等於 CG, DH 的差.



【解析】 作 $AM \perp BF$, $CN \perp DH$. 能證明 $BM=DN$ 就得.

(8) 從等腰三角形底邊上的一點,引兩腰的平行線,所成平行四邊形的周圍,等於等腰三角形兩腰的和.

(9) 在正方形 $ABCD$ 的對角線 AC 上截取 $CE=CD$, 作 $EF \perp AC$, 則 $AE=EF=FD$.

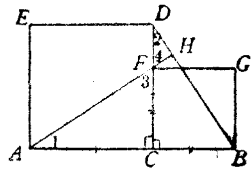


【提示】 據(5)題得證 $\triangle AEF$ 爲等腰三角形,又 $\triangle EFC \cong \triangle DFC$.

(10) 兩平行線爲一截線所截,所成的四內角的二等分線,必圍成一矩形.

【提示】 先證該形爲▱,再證一角爲直角.

(11) 在 AB 上取一點 C,在 AC, CB 上向同側作正方形 $ACDE$, $BCFG$, 則 $AF\perp BD$.



【解析】 已知 $\angle 3=\angle 4$,

若 $\angle 1=\angle 2$,則 $\angle DHF=\angle FCA=\angle R$. 然 $\angle 1=\angle 2$, 可由全同三角形證明.

定理 2. 凡四邊形具有下列條件之一的,必是平行四邊形.

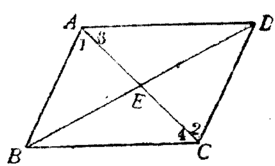
(A) 兩組對邊各相等的.

(B) 兩組對角各相等的.

(C) 一組對邊平行且相等的.

(D) 對角線互相等分的.

[設](A) $AB=CD$, $AD=BC$.



(B) $\angle A=\angle C$,

$\angle B=\angle D$.

(C) $AB \underline{\parallel} CD$.

(D) $AE=EC$, $BE=ED$.

[求證] $ABCD$ 爲平行四邊形.

[證](*A*) 在 $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ 中,

$AB=CD$, $AD=BC$ (所 設), $AC=AC$ (公 用),

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (三 邊 互 等).

$\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$ (全 同 三 角 形 的 對 應 角).

$\therefore$ $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ (錯 角 等 者,二 線 平 行).

(*B*) $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$ (所 設).

$\therefore$ $\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$ (等 量 加 等 量).

但 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4\angle R$

(四 邊 形 四 內 角 和 爲 $4\angle R$).

$\therefore$ $\angle A+\angle B=2\angle R$ (等 量 之 半).

$\therefore$ $AD \parallel BC$ (同 側 內 角 互 補 者,二 線 平 行).

仿此 $AB \parallel CD$.

(*C*) 在 $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ 中,

$\angle 1=\angle 2$ (平 行 線 間 的 錯 角),

$AB=CD$ (所 設),

$AC=AC$ (公 用),

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (二 邊 夾 一 角 互 等).

$\angle 3=\angle 4$ (全 同 三 角 形 的 對 應 角).

$\therefore$ $AD \parallel BC$ (錯 角 等 者,二 線 平 行).

(*D*) 在 $\triangle AED$, $\triangle BEC$ 中,

$AE=EC$, $BE=ED$ (所 設),

$\angle AED=\angle BEC$ (對 頂 角),

$\therefore\quad \triangle AED \cong \triangle BEC$ (二邊夾一角互等).

$\angle 3 = \angle 4$ (全同三角形的對應角).

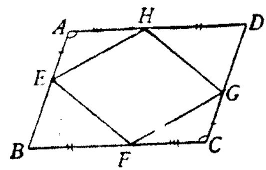
$\therefore\quad AD \parallel BC$ (錯角等者,二線平行).

仿此 $AB \parallel CD$.

由上述的四個證明,都可得$ABCD$是平行四邊形 (四邊形的對邊各各平行的是平行四邊形).

習題十七

(1) 在$\square ABCD$中,若$AE=CG$, $BF=DH$,則$EFGH$亦為平行四邊形.



【提示】 $\triangle AEH \cong \triangle CGF$.

(2) 在AB上作$\square ABCD$及$\square ABEF$,則$CDFE$亦為平行四邊形.

(3) 在$\square ABCD$的對角線AC上截取$AE=CF$,則$EBFD$亦為平行四邊形.

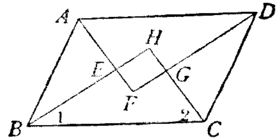
(4) $\square ABCD$的對角線交於E,取AE, BE, CE, DE的中點F, G, H, K,則$FGHK$亦為平行四邊形.

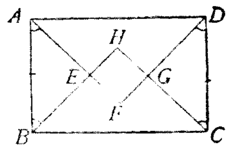
(5) $\square ABCD$的邊AB, CD的中點為E, F,則$AF \parallel CE$.

(6) 平行四邊形的兩對角的二等分線必平行(菱形同正方形則合為一直線).

(7) 平行四邊形各角的二等分線,必圍成一矩形.

【提示】 由上題知道 $EFGH$ 爲▱, 由 $\angle B+\angle C=2\angle R$, 得 $\angle 1+\angle 2=\angle R$, 於是 $\angle H=\angle R$.

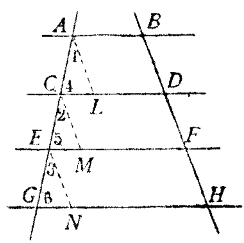




(8) 矩形的各角的二等分線,必圍成一正方形.

【提示】 仿上題得 $EFGH$ 爲矩形,再證 $BH=CH$, $BE=CG$.

定理 3. 若干平行線截一線成等分,則截任何線都成等分.



[設] $AB \parallel CD \parallel EF \parallel GH$,

$AC=CE=EG$.

[求證] $BD=DF=FH$.

[證] 從 A, C, E 各引 BH 的平行線 AL, CM, EN.

則 $AL \parallel CM \parallel EN$

(同爲一線的平行線,必互相平行).

在 $\triangle ACL$, $\triangle CEM$, $\triangle EGN$ 中,

$AC=CE=EG$ (所設),

$$\left.\begin{array}{l}\angle 1=\angle 2=\angle 3\\ \angle 4=\angle 5=\angle 6\end{array}\right\}$$ (平行線間的同位角).

$\therefore$ $\triangle ACL\cong\triangle CEM\cong\triangle EGN$ (二角夾一邊互等).

$AL=CM=EN$ (全同三角形的對應邊).

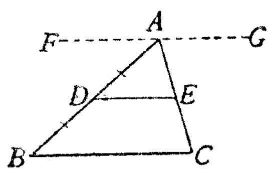
但 $ALDB, CMFD, ENHF$ 都是平行四邊形 (對邊都平行),

$AL=BD, CM=DF, EN=FH$ (▱的對邊),

$\therefore$ $BD=DF=FH$ (等量代入).

系 1. 三角形一邊的平行線若等分他邊,則必等分第三邊.

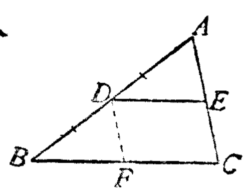
【說明】 已知 $AD=DB$, $DE\parallel BC$, 若過 A 引 BC 的平行線 FG,則三平行線截 AB 成等分,亦必截 AC 成等分.



系 2. 梯形的底的平行線,若等分不平行的一邊,則必等分其他不平行的一邊.

【註】 這線就是梯形的中線.

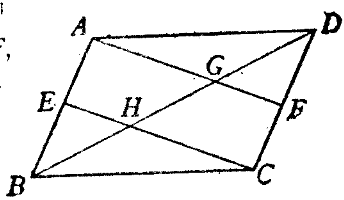
習 題 十 八



(1) 試直接證明定理 3 系 1.

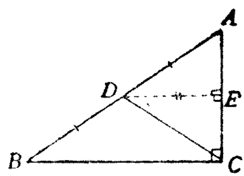
【提示】 作 $DF\parallel AC$, 證 $\triangle ADE\cong\triangle DBF$.

(2) 在▱$ABCD$中,AB的中點爲E,CD的中點爲F,AF,CE截BD於G,H,則$BH=HG=GD$.



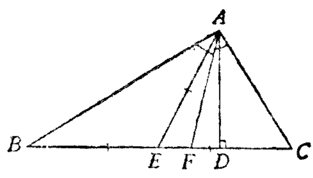
【提示】 據習題十七(5),$AF \parallel CE$,就$\triangle DCH$看,已知$DF=FC$,$FG \parallel CH$,$\therefore DG=GH$.

(3) 直角三角形斜邊的中點,爲各頂點的等距離點.



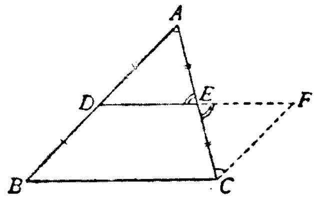
【提示】 作$DE \parallel BC$,則$AE=EC$(何故?),$\angle AED=\angle C=\angle R$,$\triangle ADE \cong \triangle CDE$.

(4) 從直角三角形的直角頂,引斜邊上的中線同頂垂線,則這二線的夾角必被直角的二等分線所等分.



【提示】 據上題知$EA=EB$,故$\angle BAE=\angle B=\angle R-\angle C=\angle CAD$.

定理 4. 三角形二邊中點的連結線,必與第三邊平行,且等於第三邊的一半.



[設]　在$\triangle ABC$中，
$AD=DB$、$AE=EC$.

[求證](A)　$DE \parallel BC$.

(B)　$DE=\frac{1}{2}BC$.

[證](A)　從C引AB的平行線，與DE的延長線交於F，

則在$\triangle ADE$，$\triangle CFE$中，

$AE=EC$　(所設)，

$\angle A=\angle ECF$　(平行線間的錯角)，

$\angle AED=\angle CEF$　(對頂角)，

$\therefore$　$\triangle ADE \cong CFE$　(二角夾一邊互等)，

$AD=CF$　(全同三角形的對應邊)，

但　$AD=DB$　(所設)，

$\therefore$　$CF=DB$　(等於同量)，

又　$CF \parallel DB$　(所作)，

$\therefore$　$DBCF$為▱　(一組對邊平行且相等)，

$\therefore$　$DF \parallel BC$　(▱的對邊)，

即　$DE \parallel BC$.

(B)　$DE=EF$　(全同三角形的對應邊)，

$\therefore$　$DE=\frac{1}{2}DF$.

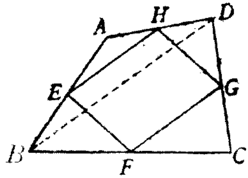
但　$DF=BC$　(▱的對邊)，

$\therefore$　$DE=\frac{1}{2}BC$　(等量代入).

習題十九

(1) 順次連結三角形三邊的中點,則成四個全同三角形.

(2) 順次連結四邊形各邊的中點,則成一平行四邊形.



【提示】 連結 BD, 則 $EH \parallel BD, FG \parallel BD$.

(3) 順次連結四邊形相對二邊的中點及兩對角線的中點,則成一平行四邊形.

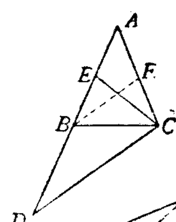
(4) 順次連結矩形各邊的中點,則成一菱形.

【提示】 先據(2)證所成的是▱,再證相鄰二邊相等.

(5) 順次連結菱形各邊的中點,則成一矩形.

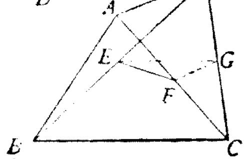
(6) 順次連結正方形各邊的中點,亦成一正方形.

(7) 延長等腰三角形 ABC 的一腰 AB 過底角頂點到 D, 使 $BD=AB$, E 爲 AB 的中點,則 $CD=2CE$.



【提示】 取 AC 的中點 F, 則 $CE=BF=\frac{1}{2}CD$.

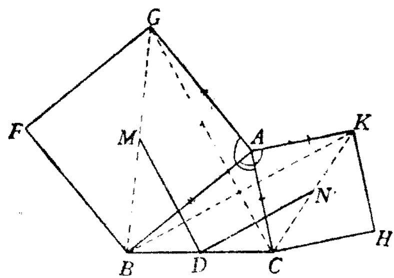
(8) 四邊形 $ABCD$ 的對角線 BD, AC 的中點爲 E, F, 則 $EF>\frac{1}{2}(BC\sim AD)$.



【註】　$\sim$是差的記號.

【提示】　取CD的中點G,連EG, FG,則$EG=\frac{1}{2}BC$, $FG=\frac{1}{2}AD$,又$EF>EG\sim FG$.

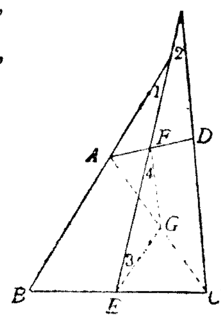
(9)　在$\triangle ABC$的二邊AB, AC上向形外各作正方形$ABFG$, $ACHK$,則此二正方形的中心與BC的中點等距離.



【註】　正方形的中心是兩對角線的交點.

【提示】　$DM=\frac{1}{2}CG, DN=\frac{1}{2}BK$,又$\triangle ACG\cong\triangle ABK$.

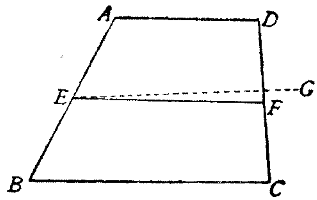
(10)　在四邊形$ABCD$中,$AB=CD$,BC, AD的中點是E, F,延長BA, EF, CD,則三直線相交所成的二角必等.



【提示】　取AC的中點G,則$GE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}CD=GF$,於是$\angle 3=\angle 4$,又$GE\parallel AB, GF\parallel CD$, $\therefore \angle 3=\angle 1$, $\angle 4=\angle 2$.

定理 5.　梯形的中線必與底平行,且等於二底和的一半.

［設］ 在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$, $AE=EB$, $DF=FC$.



［求證］(A)　$AD \parallel EF \parallel BC$.

(B)　$EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$.

［證］(A)　若 EF 不與 BC 平行，則從 E 另引 EG，使與 BC 平行．於是 EG 必過 CD 的中點 F

(平行於梯形的底，而等分一邊的線，必等分對邊).

故 EG 必合於 EF

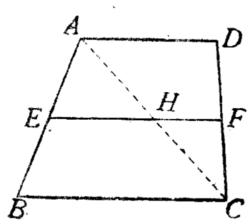
(線段的中點唯一，過二點的直線唯一).

即　$EF \parallel BC$　(因 $EG \parallel BC$).

$\therefore$　$AD \parallel EF \parallel BC$

(二線同與一線平行，故都相平行)

【註】　上面的就是同一證法.



(B)　連結 AC，在 $\triangle ABC$ 中，

因　$EF \parallel BC$ (上已證明).

$\therefore$　$AH=HC$

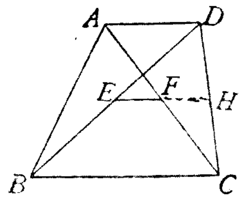
(過 $\triangle$ 一邊中點而平行於他邊的線，必過第三邊中點).

$$\therefore \left.\begin{aligned} EH &= \frac{1}{2}BC \\ HF &= \frac{1}{2}AD \end{aligned}\right\}$$ (△二邊中點連結線等於第三邊之半).

$\therefore$　$EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$　(等量加等量).

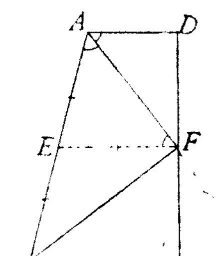
習題二十

(1) 梯形兩對角線的中點連結線平行於底,且等於二底差的一半.



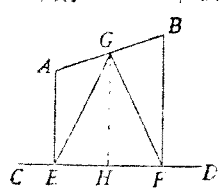
【提示】 仿定理5直接應用定理3,可以證 $EF \parallel BC$, 延長 EF, 必等分 CD 於 H,於是 $EH=\frac{1}{2}BC$, $FH=\frac{1}{2}AD$.

(2) 梯形 $ABCD$ 的不平行邊 AB 若等於二底的和,則 $\angle A$, $\angle B$ 的二等分線必都過 CD 的中點.



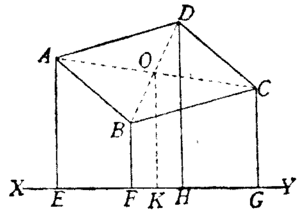
【提示】 作中線 EF,則 $EF=\frac{1}{2}(AD+BC)=\frac{1}{2}AB=AE=BE$, 由此可證 AF 等分 $\angle A$, BF 等分 $\angle B$,此係同一證法.

(3) 從 AB 的兩端引 CD 的垂線 AE, BF, 則 AB 的中點 G 距 E, F 相等.



【提示】 作 $GH \perp CD$, 則 GH 為梯形 $AEFB$ 的中線.

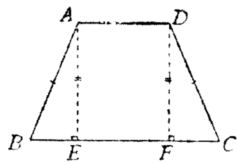
(4) 從▱$ABCD$的各頂點引形外一直線的垂線AE, BF, CG, DH,則$AE+CG=BF+DH$.



【提示】 從對角線的交點O作OK使與XY垂直,則$AEGC$, $BFHD$都是以OK爲中線的梯形.

(5) 等腰梯形的底角相等.

【提示】 作高AE, DF,必等.



(5)

(6) 等腰梯形的對角線相等.

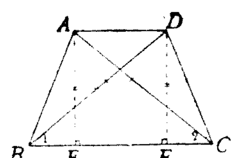
(7) 等腰梯形的對角互爲補角.

(8) 梯形的底角等的,是等腰梯形.

【提示】 仿(5)題作補助線.

(9) 梯形的對角線等的,是等腰梯形.

【提示】 先由全同三角形證$\angle 1=\angle 2$.



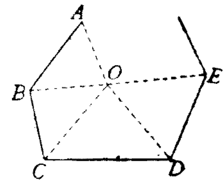
(9)

(10) 梯形的對角互補的,是等腰梯形.

【提示】 先證底角等.

定理 6. n邊多邊形的諸角的和,等於$(2n-4)$直角.

［設］ $ABCDE\cdots\cdots$ 是 n 邊的多邊形.



［求證］ $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\cdots\cdots=(2n-4)\angle R$.

［證］ 在形內任取一點 O,同各頂點連結,則成 n 個三角形,各以多邊形的邊爲底.

多邊形諸角的和,就是諸三角形的諸底角的和.

但諸三角形諸角的和是 $2n\angle R$

(一三角形三角的和是 $2\angle R$).

且諸三角形的諸頂角的和是 $4\angle R$

(圍繞 O 點的諸角的和是 $4\angle R$).

$\therefore$ 諸三角形的諸底角的和是 $(2n-4)\angle R$

(等量相減).

即　多邊形諸角的和是 $(2n-4)\angle R$.

系 1. 多邊形諸外角的和等於 4 直角.

【說明】 仿習題七(2)證.

系 2. 等角 n 邊形的各角都是 $\frac{2n-4}{n}$ 直角.

習題二十一

(計算題)

(1) 等角五邊形的每一個內角等於幾直角?六邊形呢?七邊形呢?

(2)　等角五邊形的每一個外角等於幾直角?六邊形呢?七邊形呢?

(3)　等角多邊形的每一個內角等於 $\angle R$,這是幾邊形? $1\frac{1}{2}\angle R$ 呢? $1\frac{7}{11}\angle R$ 呢?

(4)　等角多邊形的每一個外角等於 $\angle R$,這是幾邊形? $\frac{2}{3}\angle R$ 呢? $\frac{1}{5}\angle R$ 呢?

(5)　多邊形的諸內角的和等於諸外角的和,這是幾邊形?

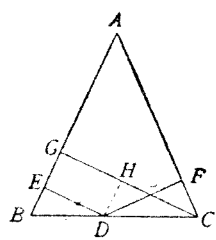
(6)　多邊形的諸內角的和等於諸外角和的 3 倍,這是幾邊形?

(7)　等角多邊形的一個外角等於正三角形的一個內角,這是幾邊形?

*第四節　特種問題的證法

1. 證一線等於二線的和　同第三章第四節所述關於角的一樣,至少有二種證法.

〔例題〕 等腰三角形底邊上的點同兩腰距離的和,等於從底邊一端所引的頂垂線.



〔設〕 在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,

$DE\perp AB$, $DF\perp AC$, $CG\perp AB$.

〔求證〕 $DE+DF=CG$.

〔證法一〕 從 D 引 AB 的平行線交 CG 於 H

因 $CG \perp AB$ (所設),

$\therefore$ $CG \perp DH$

(二平行線中一線的垂線,必垂直於他線).

即 $\angle CHD = \angle R$ (垂線夾直角).

又 $\angle DFC = \angle R$ (同上).

$\therefore$ $\angle CHD = \angle DFC$ (直角).

又 $\angle HDC = \angle B$ (平行線間的同位角)

$= \angle C$ (等腰三角形的底角).

$DC = DC$ (公用).

$\therefore$ $\triangle CHD \cong \triangle DFC$ (二角一對邊互等).

$DF = CH$ (全同三角形的對應邊).

又因 $DE \parallel CG$ (同為一線的垂線).

$\therefore$ $GEDH$ 為 ▱ (對邊各平行).

$DE = HG$ (▱的對邊).

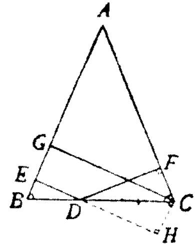
$\therefore$ $DE + DF = CG$ (等量加等量).

[證法二] 從 C 引 AB 的平行線,交 ED 的延長線於 H.

則仿上法得證

$\triangle CHD \cong \triangle DFC$,

$DH = DF$.



再仿上法證 $EH = CG$,

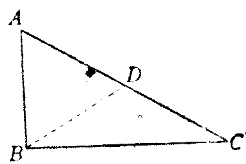
即 $DE + DH = CG$.

$\therefore \quad DE+DF=CG$ （等量代入）.

【注意】　證一線等於二線的差,仿上法.

2. 證一線等於他線的二倍　同第三章第四節所述關於角的一樣,至少有二種證法.

〔例題〕　直角三角形的一銳角爲他銳角的二倍,則斜邊爲短的直角邊的二倍.



〔設〕　在 $\triangle ABC$ 中,

$\angle B=\angle R$, $\angle A=2\angle C$.

〔求證〕　$AC=2AB$.

〔證法一〕　見習題十的(8)題.

〔證法二〕　取 AC 的中點 D, 連結 BD.

因　$\angle A+\angle C=\angle R$ （直角△兩銳角互餘）.

$\therefore \quad 2\angle C+\angle C=\angle R$ （等量代入）,

$3\angle C=\angle R$, $\angle C=\frac{1}{3}\angle R$ （等量的同分）,

$\angle A=\frac{2}{3}\angle R$ （等量的同倍）.

但　$DA=DB$

（直角三角形斜邊中點與各頂點等距）,

$\therefore \quad \angle ABD=\angle A=\frac{2}{3}\angle R$ （等腰△的底角）,

$\angle ADB=2\angle R-\frac{2}{3}\angle R-\frac{2}{3}\angle R=\frac{2}{3}\angle R$

（△三內角和爲 $2\angle R$）.

$\therefore \quad \triangle ABD$ 爲等角三角形.

$AD=AB$ (等角三角形必等邊).

$\therefore$ $AC=2AB$ (等量的同倍).

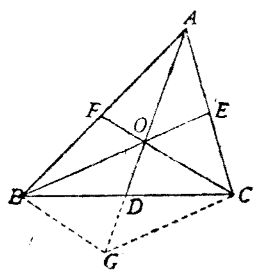
【注意】 證一線等於他線的一半,仿上法.

3. 證三線會於一點 在第三章第四節已述及關於三線會於一點的證法,現在再舉一例.

〔例題〕 三角形的三中線會於一點,且此點分各中線爲二部,其一部爲他部的二倍.

【註】 這點稱爲此三角形的重心.

〔證法一〕 設中線 BE,CF 相交於 O,連結 AO,延長到 G,使 $OG=AO$,且交 BC 於 D.



則 在 $\triangle ABG$ 中,

$AF=FB$ (所設),

$AO=OG$ (所作),

$\therefore$ $BG \parallel CF$

(△二邊中點連結線與第三邊平行).

仿此 $CG \parallel BE$.

$\therefore$ $BGCO$ 爲 ▱ (對邊各平行).

$\therefore$ $BD=DC$ (▱對角線互相等分).

於是 AD 爲 $\triangle ABC$ 的中線.

故三中線會於 O 點.

又 $OD=DG$ (▱對角線互相等分).

∴ $AO=OG=2OD$ (代入).

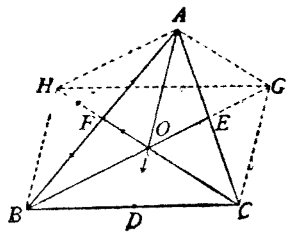
又 $BO=GC$ (▱的對邊)

$=2OE$

(△二邊中點連結線等於第三邊之半).

仿此 $CO=2OF$.

[證法二] 設中線 BE,CF 相交於 O, BC 的中點是 D, 連結 AO,延長 BE 到 G, CF 到 H, 使 $EG=OE$, $FH=OF$.



則 $HBOA$ 爲▱

(因對角線互相等分).

∴ $BH \mathrel{\underline{\parallel}} AO$ (▱的對邊).

仿此 $CG \mathrel{\underline{\parallel}} AO$.

∴ $BH \mathrel{\underline{\parallel}} CG$ (同與一線平行,且等於同量).

於是 $HBCG$ 亦爲▱ (一組對邊平行且相等).

在△CHB中, $HO=OC$ (▱對角線互相等分),

$AO \parallel BH$ (已證),

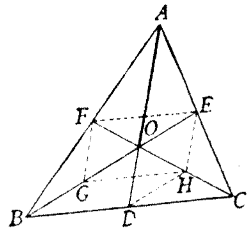
∴ 延長 AO,必過 BC 的中點 D

(過△一邊中點而與他邊平行的線,必過第三邊中點).

於是中線 AD 亦過 O, 卽三中線會於 O 點.

$$\text{又}\quad \left.\begin{array}{l} AO=BH=2OD \\ BO=OG=2OE \\ CO=OH=2OF \end{array}\right\}\qquad \text{(理由與證法一同)}$$

［證法三］　設中線BE,CF相交於O，BC的中點是D，連結AO，再連結OD，取CO的中點H，與D,E各連結；取BO的中點G，與F連結，



則　$FG \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}AO$

(△二邊中點連結線 ∥ 且 = 第三邊之半).

$EH \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}AO$　(同上).

∴　$FG \underline{\underline{/\!/}} EH$　(同與一線平行，且等於同量).

∴　$FGHE$ 爲 ▱　(一組對邊平行且相等).

$GO=OE$　(▱ 對角線互相等分).

又　$DH \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}BO \underline{\underline{/\!/}} GO \underline{\underline{/\!/}} OE$　(理由與前同).

∴　$ODHE$ 爲 ▱　(理由與前同).

∴　$OD \parallel EH$　(▱ 的對邊).

但　$AO \parallel EH$　(已證).

∴　AO,OD 必合成一直線

(過 O 引 EH 的平行線唯一).

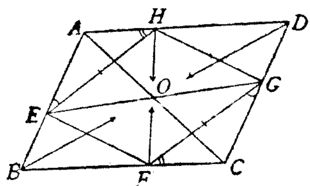
於是中線AD過O，即三中線會於O.

又　$AO=2EH=2OD$　(因EH同OD爲 ▱ 的對邊).

$$\left.\begin{aligned} BO&=2GO=2OE \\ CO&=2HO=2OF \end{aligned}\right\}$$ (因▱FGHE的對角線互相等分)

4. 證四線會於一點 欲證四線會於一點,且互相等分,可利用平行四邊形的對角線證.舉例如下:

[例題] 一平行四邊形的各頂點,在他一平行四邊形的各邊上,則兩平行四邊形的四條對角線會於一點.



[設] ▱$EFGH$的各頂點在▱$ABCD$的各邊上.

[求證] AC, BD, EG, FH會於一點.

[證] 在$\triangle AEH$, $\triangle CGF$中,

$EH=GF$ (▱的對邊).

$\left.\begin{aligned} \angle AEH&=\angle CGF \\ \angle AHE&=\angle CFG \end{aligned}\right\}$ (兩角的邊各各平行).

∴ $\triangle AEH \cong \triangle CGF$ (二角夾一邊互等).

∴ $AE=CG$ (全同三角形的對應邊).

又 $AE \parallel CG$ (▱對邊的部分亦必平行).

∴ $AECG$為▱(註) (一組對邊平行且相等).

AC, EG必互相等分於O點 (▱的對角線).

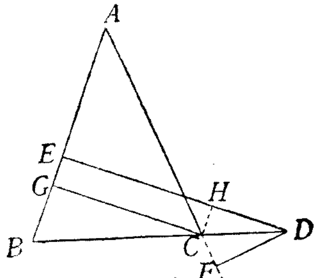
即 O點為AC, EG公共的中點.

但　BD 必過 AC 的中點 O
　　FH 必過 EG 的中點 O } (▱對角線互相等分).

∴　AC, BD, EG, FH 會於 O 點.

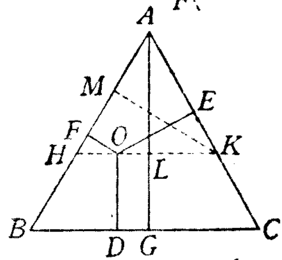
【註】圖中為求清楚起見,EC 同 AG 二線沒有畫出.

*習題二十二

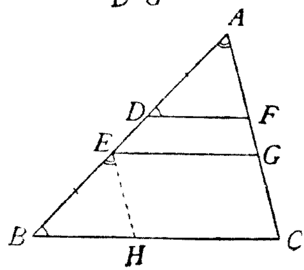


(1)　等腰三角形底邊延長線上的點,同兩腰距離的差,等於從底邊一端所引的頂垂線.

(2)　從正三角形內任意一點,到三邊距離的和,等於頂垂線.



【提示】　過 O 引 $HK \parallel BC$,則 $OD = LG$. 且 $\triangle AHK$ 亦為正△,頂垂線 $KM = AL$,由本節 1 的例題,得 $OE + OF = KM$.

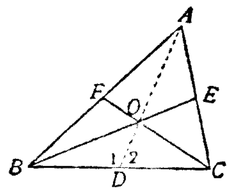


(3)　在 $\triangle ABC$ 中,若 $AD = EB$,

且 $DF \parallel EG \parallel BC$,則 $DF+EG=BC$.

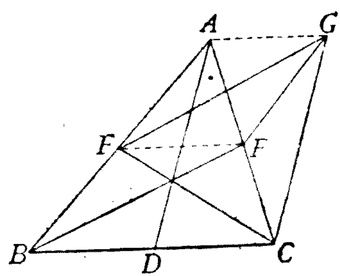
【提示】 作 $EH \parallel AC$.

(4) 三角形大邊上的中線,小於小邊上的中線.



【提示】 若 $AB>AC$,則可證 $\angle 1>\angle 2$,於是 $BO>CO$,即 $\frac{2}{3}BE>\frac{2}{3}CF$.

(5) AD, BE, CF 爲 $\triangle ABC$ 的三中線,作 $FG \parallel BE$, $EG \parallel AB$,則 $\triangle CFG$ 的三邊各等於 $\triangle ABC$ 的三中線.



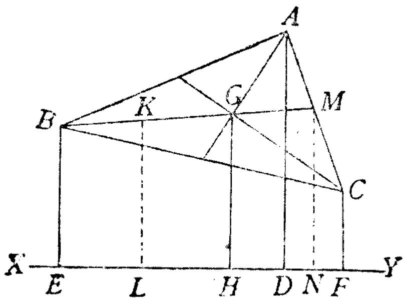
【解析】 $FG=BE, CF=CF$,可不待證而明,只須證 $AD=GC$ 就得.

欲證 $AD=GC$,須知 $ADCG$ 爲▱,即須 $AG \underline{\underline{\parallel}} DC$. 然 $FE \underline{\underline{\parallel}} DC$,故須證 $AG \underline{\underline{\parallel}} FE$. 欲達此目的,須知 $AFEG$ 爲▱.然 $GE \underline{\underline{\parallel}} FB \underline{\underline{\parallel}} AF$,故本題迎刃而解.

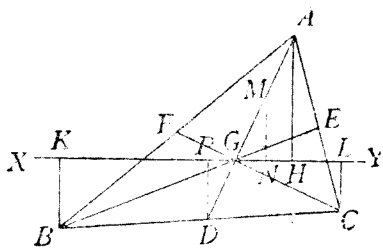
(6) 從三角形的三頂點引形外一直線的垂線,則三垂線的和等於從重心所引這線的垂線的三倍.

【提示】 取 EG 的中點 K,作 $KL, MN \perp XY$,則 $BK=KG=GM$, $AM=MC$, $2GH=KL+MN$

(梯形中線定理). $\therefore 4GH = 2KL + 2MN$
$= BE + GH + AD + CF$.

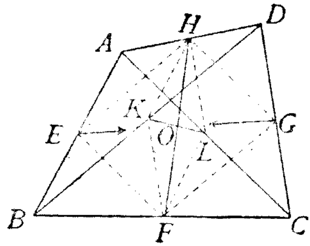


(7) 過三角形的重心,作任意直線,從同側的兩頂點到這線的距離的和,等於從異側的一頂點到這線的距離.



【解析】 利用梯形中線定理,知 $BK + CL$ 等於從 D 所引 XY 的垂線 DP 的二倍,故能證 $AH = 2DP$ 就得.從 AG 中點 M 作 $MN \perp XY$,則 $AH = 2MN$,故只須證 $DP = MN$,本題就可解決.

(8) 四邊形二組對邊中點的連結線,同兩對角線中點的連結線會於一點.



【提示】 據習題十九(2)(3)兩題,知 $EFGH$, $KFLH$ 都是▱.

＊第五節 作補助線法

凡幾何證明題,除最簡易者外,大多不能直接應用定理,應加補助線以作引導.作補助線的方法,最要而又最難,學者如能得其三昧,則證題時可以目無全牛,迎刃而解,否則必至望而却步,束手無策,可見非常重要.考普通幾何書中,能詳述他的方法的,殊不常見,這並非是著書者居奇自祕,不肯告人,實因沒有普遍的方法可以遵循,要說也無從說起的緣故.假使學者必須尋根究底,提出這問題,著書者只能用不着邊際的話回答說:「你看應作何線最爲相宜,就作何線.」這樣的話,對初學者實毫無益處;然一落邊際,就有掛一漏萬的弊病,所以著書者寧可不說,而不肯妄說,於是更使學者感覺着萬分的困難了.

現在為便於初學者計,不得不略示端倪.下面所述的話,雖不敢說十分詳盡,然潛心的學者也許能從一隅而反三,使能力潛滋而突長,於是幾何學中的祕藏,不難探索無遺了.

作補助線的標準,最普通的有下列三種:

1. 使欲證的同已知的發生密切的關係.

2. 使已知的聚在一處,以便着手證明.

3. 使欲證的聚在一處,易於顯出相互間的關係.

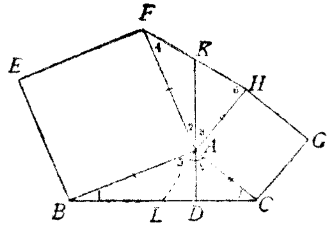
作補助線的方法,最普通的有下列的十餘種:

1. **造全同三角形法** 欲證二角相等或二線段相等,可作連結線,頂垂線,中線,平行線或平行線間的垂直距離,使造成兩個三角形,證明他們全同就得. 如第二章定理 6,第三章定理 3, 6,第四章定理 4,習題六(2),習題十六(9),習題十八(5),習題十九(7),習題二十(5),(8),(9)等都是.

下面再舉一個特種的例,以示一斑:

〔例題〕 在$\triangle ABC$的邊 AB, AC 上各向形外作正方形 $ABEF$, $ACGH$,從 A 引頂垂線 AD,延長交 FH 於 K,則 $FK=KH$, $AK=\frac{1}{2}BC$.

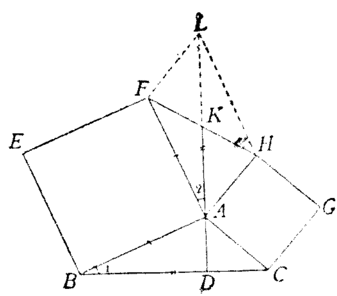
假設,求證從略.



【解析一】 已知$\angle 2$為$\angle BAD$的餘角(因$\angle KAD=2\angle R$, $\angle FAB=\angle R$), $\angle 1$亦為$\angle BAD$的餘角(因$\angle ADB=\angle R$). $\therefore \angle 2=\angle 1$. 又$AF=AB$, 故若作$AL$, 使$\angle 3=\angle 4$, 則造成$\triangle ABL \cong \triangle FAK$, 於是$AK=BL$, $FK=AL$. 若能再證$AK=CL$, $KH=AL$, 則本題結論,即全部證明.

又$(\angle 3+\angle 5)$為$(\angle 2+\angle 8)$的補角(因$\angle FAB=\angle HAC=\angle R$), $(\angle 4+\angle 6)$亦為$(\angle 2+\angle 8)$的補角(因$\triangle$三內角的和為$2\angle R$), $\therefore \angle 3+\angle 5=\angle 4+\angle 6$. 因$\angle 3=\angle 4$, $\therefore \angle 5=\angle 6$; 又$\angle 7=\angle 8$, $AC=AH$; $\therefore \triangle ACL \cong \triangle HAK$, 於是目的達到.

學者試自己寫出證明.



【解析二】 仿上法,知$\angle 2=\angle 1$, $AF=AB$, 延長AK到L, 使$AL=BC$, 造成$\triangle FAL \cong \triangle ABC$, 若能證明$AHLF$為▱,則由▱對角線互相等分的定理,即得所求的二個結論.

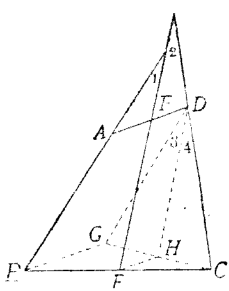
由全同三角形及▱對邊相等的定理,得 $FL=AC=AH$, 仿此 $HL=AB=AF$, 於是目的達到.

學者自己寫成證明.

2. 平行移動法　欲證二線段相等,可使此二線段爲兩個平行四邊形的邊,而證他們的二條對邊相等,也就是把這兩線段各移到平行的位置,而證他們相等. 如本章定理 3 同習題十六(6)就是.

用平行移動法可在圖中作出兩線段的差. 如習題十六(7)同本章第四節 1 的證法一.

又如習題十九.(10), 可把欲證的角利用平行線移到同位角或錯角的位置,而證他們相等.移動的方法,若加以變化,又可得不同的四種證法.現在爲求節省篇幅,用簡略的詞句,證明於下,學者可自行設法補足.

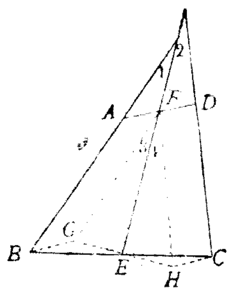


[設] 在四邊形 $ABCD$ 中, $AB=CD$, E 是 BC 的中點, F 是 AD 的中點, 延長 BA, EF, CD, 相交成 $\angle 1$, $\angle 2$.

[求證] $\angle 1=\angle 2$.

[證法一] 見習題十九(10).

[證法二] 造成▱$ABGD$, 取 GC

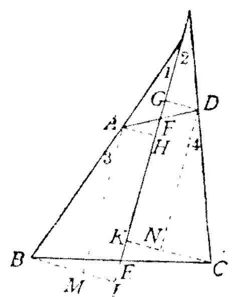


的中點 H, 則 $EH \underline{\parallel} \frac{1}{2} BG \underline{\parallel} \frac{1}{2} AD \underline{\parallel} FD$, ∴ $FEHD$ 為 ▱, $FE \parallel DH$. 於是 $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$.

又　$DG = AB = DC$, $GH = HC$, ∴ $\angle 3 = \angle 4$.

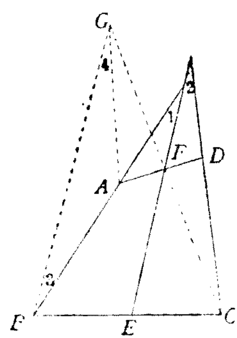
[證法三]　造成 ▱$ABGF$, 及 ▱$FHCD$, 則 $BG \underline{\parallel} AF \underline{\parallel} FD \underline{\parallel} HC$, 於是 $BHCG$ 為 ▱, GH 與 BC 必互相等分於 E, 即 $GE = EH$.

又 $FG = AB = CD = FH$, 於是 $\angle 3 = \angle 4$.



[證法四]　從 A, B, C, D 各引 EF 的垂線 AH, BL, CK, DG, 可證 $\triangle AHF \cong \triangle DGF$, $\triangle BLE \cong \triangle CKE$, 於是 $AH = DG$, $BL = CK$.

引 AM, DN 平行於 EF, 則 $ML (= AH = DG) = NK$, ∴ $BM = CN$, 乃證 $\triangle ABM \cong \triangle DCN$, $\angle 3 = \angle 4$.



[證法五]　作 $AG \underline{\parallel} CD$, 則 $ACDG$ 為 ▱, CG 與 AD 必互相等分於 F, 即 $CF = FG$, 於是 $EF \parallel BG$, $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$. 又 $AG = CD = AB$, ∴ $\angle 3 = \angle 4$.

3. 對稱移動法 兩形的一邊公用,固定這公共邊而把平面對摺,若兩形可以重合,則稱兩形爲對稱形.證題時往往作一形的對稱形,使題中已知的同欲證的聚在一處,於是相互間的關係可以立卽顯出.

如第三章定理4同7,可移兩形到對稱地位而證明他們全同.

如第三章定理13,15,習題二十二(1),作對稱三角形而移他的一邊.

如習題十三(7),(8),習題十四(8),作對稱三角形而移他的二邊.

4. 旋轉移動法 如習題十(7),把DB旋轉到DG,可造成全同三角形而證兩線段相等.

如習題十二(9),把$\triangle ABD$的頂點D固定,旋轉一平角,成$\triangle ECD$,使已知的不等線同欲證的不等角移到一個三角形裏面.

5. 折半或加倍移動法 若欲證的線可以做三角形的一邊,可把他移作其他二邊的中點連結線,使他的長折半,或反過來使他的長加倍. 如習題十九(8),(9),第四章定理5(B),習題二十(1)都是.

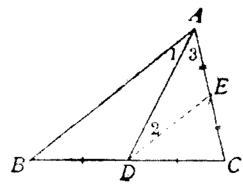
下面再舉一個特例:

〔例題〕 設在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，D是 BC的中點.

求證 $\angle 3>\angle 1$.

〔證法一〕 見習題十二(9)，用旋轉移動法證.

〔證法二〕 取AC的中點E，連DE，



則 $DE=\frac{1}{2}AB$ （△二邊中點連結線，等於第三邊之半），

$AE=\frac{1}{2}AC$ （所作）.

因 $AB>AC$ （所設），

$\therefore$ $DE>AE$ （不等量之半，大者仍大）.

$\therefore$ $\angle 3>\angle 2$ （△大邊對大角）.

但 $DE \parallel AB$

（△二邊中點的連結線與第三邊平行），

$\therefore$ $\angle 2=\angle 1$ （平行線間的錯角）.

$\therefore$ $\angle 3>\angle 1$ （等量代入）.

6. 合成法 欲證二量的和等於第三量，可把二量合成一量，證明他等於第三量. 如第三章第四節3的證法二同本章第四節1的證法二都是.

有時證不等量時亦用此法. 如第三章定理12.

7. 分解法 欲證二量的和等於第三量,可把第三量分解爲二部,使各等於二量中的一量. 如習題二(4),(5),習題二十二(2),(3),第三章第四節3證法一,本章第四節1證法一都是.

有時證諸角間的關係,亦須把其中的一角或幾角分爲二部,以便證明. 如習題二(6),(8),習題七(1),習題十二(8),第四章定理6等都是.

8. 加倍法 欲證甲量爲乙量的二倍,或乙量爲甲量的一半,可作出乙量的二倍量,證他同甲量相等. 如習題十(8),第三章第四節4的證法二都是.

有時證不等量時,亦用此法. 如習題十三(9).

9. 折半法 欲證甲量爲乙量的二倍,或乙量爲甲量的一半,可把甲量等分爲二,證他的一半同乙量相等. 如習題八(4),同本章第四節2就是.

10. 同線異名法 凡用同一證法證明問題時,必須另作一線使合某性質,然後證這線就是題中原有的線,於是題中原有的線也合

某性質.這另作的線通常都不畫在實際的地位.因爲若作圖準確,這線必須與題中的線重合,反覺模糊不清的緣故. 如第二章定理5, 7,本章定理5(A)等都是.

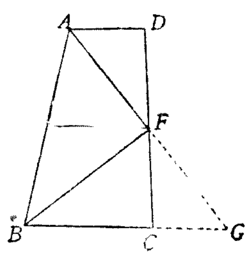
有時證三點在一直線上,或三直線會於一點,須利用二線合一的定理,這也是同一證法,此時應把一直線的二部畫成粗細不同,以免誤會 如第二章第四節1,本章第四節3等都是.

下面再舉一個特例,可用五種方法證明,除最後的一法外,其餘都是同一證法.下面是簡略的證明,學者應自行補足他:

〔例題〕 設在梯形$ABCD$中, $AD \parallel BC$, $AD+BC=AB$, CD的中點是F.

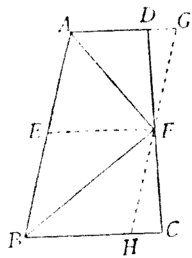
求證$\angle A$, $\angle B$的二等分線都過F點.

〔證法一〕 見習題二十(2).

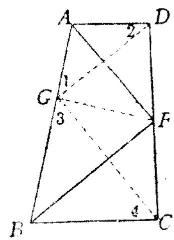


〔證法二〕 延長BC到G,使$CG=AD$,則$ACGD$是▱,AG與DC必互相等分於F,且$BG=BA$,於是$\angle DAF=\angle G=\angle BAF$,即$AG$是$\angle A$的二等分線.又$\angle B$的二等分線必過$AG$的中點$F$.

[證法三]　過F引AB的平行線,與BC交於H,與AD的延長線交於G,取AB的中點E,與F連結,則可證$\triangle FGD \cong \triangle FHC$, $DG=HC$, 於是$AG+BH=AD+BC=AB$, $AG=BH=\frac{1}{2}AB=AE=EB$. $\square AEFG$及$\square EBHF$都是菱形,∴AF等分$\angle A$,BF等分$\angle B$.

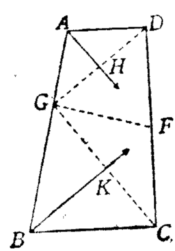


[證法四]　在AB上取G點,使$AG=AD$,則$GB=BC$,於是$\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, 但$(\angle 1+\angle 2+\angle A)+(\angle 3+\angle 4+\angle B)=4\angle R$, $\angle A+\angle B=2\angle R$, ∴$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=2\angle R$, $\angle 1+\angle 3=\angle R$, $\angle DGC=\angle R$, ∴$GF=DF=CF$.



因$\triangle AGF \cong \triangle ADF$,知$AF$等分$\angle A$,仿此$BF$等分$\angle B$

[證法五]　仿上法得$\angle DGC=\angle R$,因$\angle A$為等腰$\triangle AGD$的頂角,∴二等分線AH垂直等分GD,即過DG中點而與GC平行,故必過CD中點F.仿此$\angle B$的二等分線BK亦必過F.

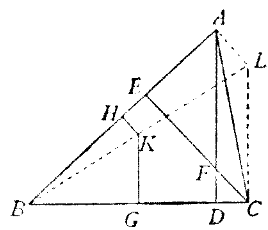


11.另求媒介法 欲證諸線間的關係,可另作一線以為媒介而證明之. 如習題十三(3),習題十九(2),(3)等都是.

下面另舉一個特例,寫出解析的方法,由學者自行改寫做證明:

〔例題〕 設在 $\triangle ABC$ 中,三頂垂線 AD, CE, ……會於 F(即垂心),三邊的中垂線 GK, HK, ……會於 K(即外心).

求證 $AF=2KG$, $CF=2KH$, …….



【解析】 因 AF 同 KG 並無密切關係,故須設法另作一線以為媒介.已知 G 為 BC 的中點,若 K 能為另一直線的中點,則 KG 為 $\triangle$ 二邊中點的連結線.因 $\triangle$ 的一邊為其他二邊中點連結線的 2 倍,故須作一 $\triangle$,使以 K,G 為二邊的中點,若其第三邊能與 AF 相等,則本題即迎刃而解.

試連結 BK,延長之,再從 C 引 BC 的垂線,使相交於 L,則 $KG \parallel LC$, K 為 BL 的中點, $LC=2KG$.

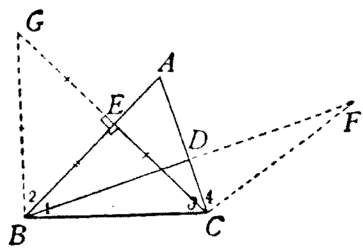
於是設法證 $AF=LC$. 欲達此目的,須 $AFCL$ 為 $\square$. 因 AD,LC 同為 BC 的垂線,故可平行,只須再證 $CE \parallel LA$ 就得.

就$\triangle ABL$看，$KH \parallel LA$，$\therefore CE \parallel LA$，於是$AF=2KG$不難成立了.其他二式可以同樣證明.

12.造二邊互等的兩△法　欲證二線段不等,或二角不等,可造成兩組邊互等的兩三角形,由其所對的角或邊的不等,而證明他們不等.　如習題十四(6)就是.

下面再舉一個特例:

〔例題〕三角形小邊上的項垂線,大於大邊上的項垂線



〔設〕在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，$BD\perp AC$，$CE\perp AB$.

〔求證〕$BD>CE$.

〔證〕延長BD到F,使$DF=BD$,延長CE到G,使$EG=CE$,連BG,CF,

則　在$\triangle BCE$，$\triangle BGE$中，

$CE=EG$(所作)，$BE=BE$　(公用)，

$\angle BEC=\angle BEG$　(直角).

$\therefore$　$\triangle BCE \cong \triangle BGE$　(二邊夾一角互等).

$BC=BG$，$\angle 1=\angle 2$(全同三角形的對應部分).

仿此$CF=BC$，$\angle 3=\angle 4$.

因 $\angle 3 > \angle 1$ (△大邊對大角),

$\therefore$ $\angle BCF > \angle GBC$ (不等量的同倍,大者仍大).

於是在 $\triangle BCF$, $\triangle GBC$ 中,

$BF > CG$(兩△二組邊互等,夾角大者對大邊),

$\therefore$ $BD > CE$ (不等量之半,大者仍大).

13.利用梯形中線法 欲證平行二線的和同他線的關係,往往應用梯形中線的定理. 如習題二十(2),(3),(4),習題二十二(6),(7)等是.

14.利用▱對角線法 欲證諸線會於一點且互相平分,可利用▱的對角線的定理. 如本章第四節4,同習題二十二(8)就是.

15.轉換目標法 欲證一個形內的某部分有某項性質,可另作一形,加以注目,使原形的某部分在這另作的形內,恰能具有該項性質,藉此達到證題的目的. 如習題十一(5),同本章定理3系1就是

下面另舉一個特例:

〔例題〕 設在△ABC的邊 AB, AC 上各向形外作正方形 $ABEF$, $ACGH$,從 A 引頂垂線AD.

求證 AD, BG, CE 三直線會於一點.

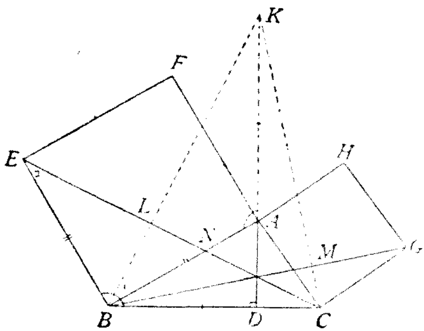
〔證〕 延長 DA 到 K,使 $AK = BC$,連結 BK, CK.

則 $\angle BAK = 2\angle R - \angle BAD$ (外邊成一直線),

$\angle EBC = \angle R + \angle ABD = \angle R + (\angle R - \angle BAD)$

$= 2\angle R - \angle BAD$ (直角△兩銳角互為餘角).

$\therefore \quad \angle BAK = \angle EBC$ (等於同量).



又 $AB = BE$ (正方形的邊).

$\therefore \quad \triangle BAK \cong \triangle EBC$ (二邊夾一角互等).

在 $\triangle BLN$, $\triangle EBN$ 中,

$\angle 1 = \angle 2$ (全同三角形的對應角).

$\angle LNB = \angle BNE$ (同一角),

$\therefore \quad \angle BLN = \angle EBN = \angle R$

(兩△二組角互等第三角亦等).

即 $CE \perp BK$ (夾直角的二線).

仿此 $BG \perp CK$.

故就 $\triangle KBC$ 看,三頂垂線必會於一點.

即 AD, BG, CE 三直線會於一點.

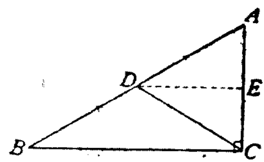
作補助線法的大要,已如上述,這裏再有

應注意的兩點,分述於下:

(一)沒有標準的線不宜亂作,否則圖中紛如亂絲,必致眼花繚亂,證法難於發現.

(二)作線時應依幾何畫法,又應依適當的條件,如條件過苛,即為不合理.舉例如下:

〔例題〕 直角三角形斜邊的中點,為三頂點的等距離點.



〔設〕 在 $\triangle ABC$ 中,

$\angle C=\angle R,\ AD=DB.$

〔求證〕 $DA=DB=DC.$

〔證法一〕 從 D 引 AC 的垂線 DE,

則 $\angle AED=\angle R$ (垂線夾直角).

但 $\angle C=\angle R$ (所設),

$\therefore$ $\angle AED=\angle C$ (直角必等).

$\therefore$ $DE \parallel BC$ (同 角等者二線平行),

$AE=EC$

(等分△一邊而 ∥ 他邊的線,必等分第三邊).

在 $\triangle ADE,\ \triangle CDE$ 中,

$\angle AED=\angle CED$ (直角),

$AE=EC$ (已證),

$DE=DE$ (公用),

$\therefore$ $\triangle ADE \cong \triangle CDE$ (二邊夾一角互等),

$\therefore$ $DC = DA = DB$ (全同三角形的對應邊,所設).

[證法二] 從D引BC的平行線DE.

因 $AC \perp BC$ (所設),

$\therefore$ $AC \perp DE$

(二平行線中一線的垂線,必⊥另一線).

且 $AE = EC$

(等分△一邊而∥他邊的線,必等分第三邊).

以下與證法一同.

[證法三] 取AC的中點E,連結DE,

則 $DE \parallel BC$ (△二邊中點連結線∥第三邊).

$\therefore$ $\angle AED = \angle C = \angle R$(平行線間的同位角,所設).

以下與證法一同.

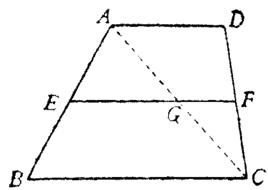
從上例,知所引的補助線雖同為一線,而作法卻有三種.作線時所依據的條件,每種祇有一個.如證法一是從一點作一線的垂線;證法二是從一點作一線的平行線;證法三是用直線連結二點,在幾何畫法上都能合法.依上法作線後,此線已具有一種特性,再須用定理證明他的其餘二個特性,然後可證三角形全同.初學者往往不明此理,常見有「取AC的中點E,與D連結,使$DE \perp AC$」,「從D引AC中點的垂線,使與BC平行」等語,如此乃依二個條件或三個條件作線,實

際都不可能.學者務須注意.

最後,再舉兩個例題,可用各種作補助線的方法加以證明,藉以開發學者的思路.惟因限於篇幅,證明極略,學者應自行補足:

〔例題一〕 梯形的中線,等於二底和的一半.

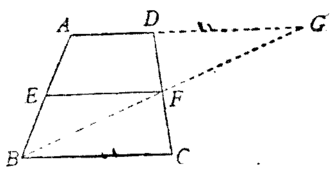
[證法一](分解法)



作 AC, 分 EF 為二部,因 $AG=GC$, $\therefore GF=\frac{1}{2}AD$, $EG=\frac{1}{2}BC$.

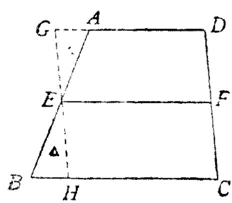
【註】 即本章定理 5 (*B*) 的證法.

[證法二](合成法)



作 BF, 延長與 AD 的延長線交於 G, 則可證 $\triangle FBC \cong \triangle FGD$, 於是 $BF=FG$, $BC=DG$. $\therefore EF=\frac{1}{2}AG=\frac{1}{2}(AD+DG)=\cdots\cdots$.

[證法三](截長補短法)

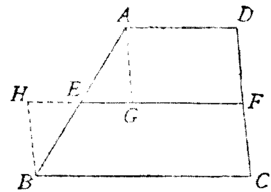


過 E 引 CD 的平行線,交 BC 於 H, 交 AD 的延長線於 G, 則可證 $\triangle EAG \cong \triangle EBH$, 於

是 $AG=BH$. $\therefore$ $AD+BC=(GD-AG)+(BH+HC)=GD+HC=2EF$.

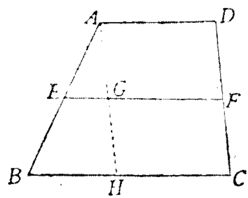
［證法四］(截補中線法)

作 $AG, BH \parallel CD$, 延長 FE, 則可證 $\triangle AGE \cong \triangle BHE$, 於是 $EG=HE$. $\therefore AD+BC=GF+HF=(EF-EG)+(EF+HE)=2EF$.



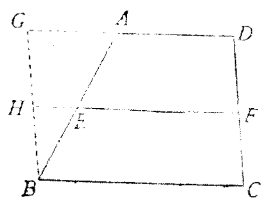
［證法五］(截長就短法)

作 $AH \parallel CD$, 則 $AG=GH$, 於是 $EG=\frac{1}{2}BH$; 又因 $AD=GF=HC$, $\therefore GF=\frac{1}{2}(AD+HC)$.



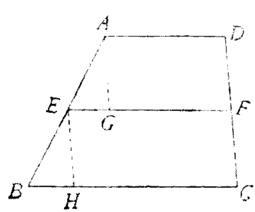
［證法六］(補短就長法)

作 $BG \parallel CD$, 延長 DA, FE, 則 $GH=HB$, 於是 $HE=\frac{1}{2}GA$; 又因 $GD=HF=BC$, $\therefore HF=\frac{1}{2}(GD+BC)$.

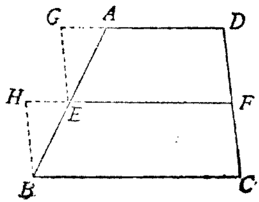


［證法七］(遞次截長法)

作 $AG, EH \parallel CD$, 則 $\triangle AIG \cong \triangle ELH$, 於是 $EG=BH$. $\therefore$ $AD+BC=GF+(BH+HC)=GF+EG+EF=2EF$.

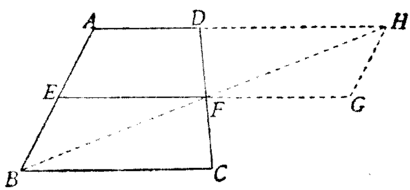


[證法八](遞次補短法)



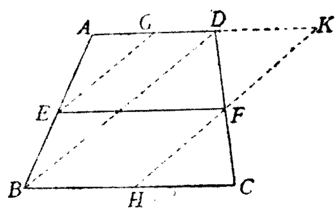
作 $EG, BH \parallel CD$, 延長 DA, FE,則可證 $\triangle EAG \cong \triangle BEH$,於是 $GA=HE$. $\therefore AD+BC=(GD-GA)+(HE+EF)=EF-HE+HE+EF$.

[證法九](加倍合成法)



延長 EF 到 G,使 $FG=EF$,延長 BF, AD 交於 H,連 GH,則仿證法二,知 $BF=FH$, $\therefore HG \underline{\parallel} EB \underline{\parallel} AE$, $AEGH$ 為 ▱, $\therefore AD+BC=AH=EG=2EF$.

[證法十](折半合成法)

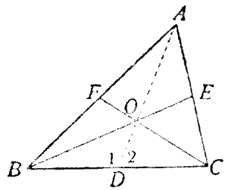


取 AD, BC 的中點 G,H,延長 HF, AD 交於 K,連 EG, BD,則 $EG \parallel BD \parallel HK$, $GEFK$ 為 ▱, $\therefore EF=GK=GD+DK=GD+HC$.

[例題二]　設在 $\triangle ABC$ 中, $AB>AC$, BE, CF 為中線。

求證　$BE>CF$

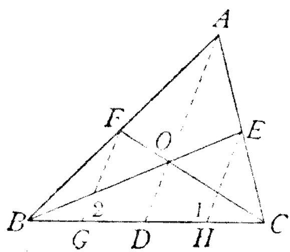
[證法一](造二邊互等的兩三角形法一)



因$BD=DC$,可證$\angle 1>\angle 2$,再證$BO>CO$,即$\frac{2}{3}BE>\frac{2}{3}CF$.

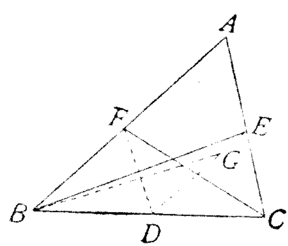
【註】 即習題二十二(4)提示的證法.

[證法二](造二邊互等的兩三角形法二)



作$BG=GD=DH=HC$,則$FG \parallel AD \parallel EH$. 因$AB>AC$, ∴ $\angle ADB>\angle ADC$,於是$\angle 1>\angle 2$. 在$\triangle EHB$, $\triangle FGC$中,又知$EH=\frac{1}{2}AD=FG$, $BH=\frac{3}{4}BC=GC$, ∴$BE>CF$.

[證法三](造二邊互等的兩三角形法三)

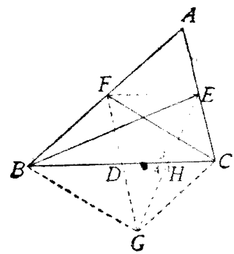


取BC的中點D,則$DE\left(=\frac{1}{2}AB\right)>DF\left(=\frac{1}{2}AC\right)$.在$DE$上截取$DG$,使等於$DF$,在$\triangle BDG$, $\triangle CDF$中,$\angle BDG(=2\angle R-\angle B)>\angle CDF(=2\angle R-\angle C)$, ∴ $BG>CF$.

又因$\angle B<\angle C$,故$\angle B$為銳角,$\angle BDG$為鈍角,$\angle BGE$為更大的鈍角, ∴ $BE>BG$.

[證法四](平行移動法一)

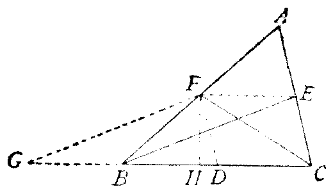
作 $\square FBGC$, 則 FG, BC 必互相等分於 D. 因 $FE \parallel BC$, $\therefore$ BC 等分 EG 於 H.



又因 $CG(=FB=\frac{1}{2}AB) > EC\ (=\frac{1}{2}AC)$, $\therefore \angle 1 > \angle 2$, $\angle 3 > \angle 4$, 於是 $BE > BG$.

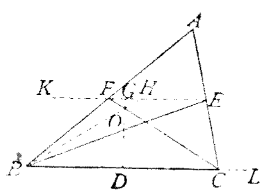
[證法五](平行移動法二)

作 $\square FGBE$, $FH \perp BC$, D 為 BC 的中點, 則 $GB \parallel FE \parallel BC$, 故 GBC 為直線. 又 $FB(=\frac{1}{2}AB) > FD\ (=\frac{1}{2}AC)$, $\therefore BH > HD$. 因 $GB=FE=DC$, $\therefore GH > HC$, 於是 $FG > FC$.



[證法六](對稱移動法)

從 BC 的中點 D 作 $DG \perp BC$, 交 CF 於 O, 延長 BO 交 FE 於 H, 再延長 EF, BC, 則 $BH = CF$. 又 $\angle BHE\ (= \angle CFK = \angle FCL) > \angle HEB(= \angle EBC)$, $\therefore$ $BE > BH$.



第六節 證題根據的重要條件

1. 兩線段相等的條件 (1) $\square$ 的對邊.

(2)▱的對角線互相等分.　(3)矩形或正方形的對角線相等.　(4)諸平行線截一線爲等分,則截任何線都成等分.　(5)等分△一邊而∥他邊的線,必等分第三邊.　(6)等分梯形的一邊而∥底的線,必等分對邊.　(7)兩平行線間的距離處處相等.　(8)直角三角形斜邊的中點,距各頂點相等.　(9)等腰梯形的對角線相等.

2. 一線段爲他線段之半的條件　(1)△二邊中點連結線,等於第三邊之半.　(2)梯形中線等於二底和之半.　(3)△三中線相會點與一邊中點的距離,等於與對角頂的距離之半.

3. 兩角相等的條件　(1)▱的對角.　(2)菱形或正方形的對角線等分內角.　(3)等腰梯形的底角.

4. 兩角互爲補角的條件　(1)▱的鄰角.　(2)梯形不平行邊兩端的二鄰角.　(3)等腰梯形的對角.

5. 四邊形成爲▱的條件　(1)對邊各平行的.　(2)對邊各相等的.　(3)對角各相等的.　(4)一組對邊平行且相等的.　(5)對角線互

相等分的．(6)四邊形各邊中點順次連結所成的．

6.口成爲矩形的條件 (1)有一角是直角的．(2)對角線相等的．

7.口成爲菱形的條件 (1)相鄰二邊相等的．(2)對角線互相垂直的．

8.口成爲正方形的條件 有一角爲直角，而相鄰二邊又相等的．

9.兩直線平行的條件 (1)口的對邊．(2)△二邊中點連結線與第三邊平行．(3)梯形的中線與底平行．

10.兩直線垂直的條件 菱形或正方形的對角線．

11.三直線會於一點的條件 (1)△三邊的中垂線(相會點稱外心)．(2)△三內角的二等分線(相會點稱內心)．(3)△二外角及不相鄰一內角的二等分線(相會點稱傍心)．(4)△的三頂垂線(相會點稱垂心)．(5)△的三中線(相會點稱重心)．

12.其他條件 (1) n 邊形的諸角的和是 $(2n-4)\angle R$．(2)多邊形諸外角的和是 $4\angle R$．(3)等角 n 邊形的各角都是 $\frac{2n-4}{n}\angle R$．

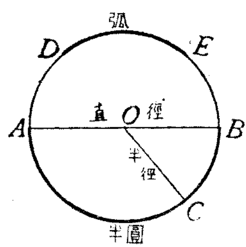
第五章　圓

第一節　重要定義

1. 圓,圓周,中心　用曲線做界,圍成一平面形,若界上的各點同界內的一定點等距離,這平面形叫做圓.圍成一圓的曲線叫做圓周,但通常圓周也可稱做圓.同圓周上各點等距離的一個定點,叫做中心.

【注意】　圓的記號是⊙,通常可以中心表出,例如中心是O的可以記做⊙O;又可依圓周上的三點表出,例如圓周上有A, B, C三點的,可記作⊙ABC.

2. 半徑,直徑　中心同圓周上任意一點的距離,叫做半徑.通過中心而兩端各到圓周上為止的直線,叫做直徑.



【注意】　通常直徑可用三個文字記載,例如圖中的直徑可記作AOB,這樣可把中間的O順便表出中心.

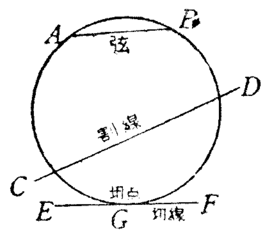
3. 弧,半圓,優弧,劣弧　圓周的任意一部分,叫做弧,如圖中的DE.等於圓周的一半的弧,叫做半圓,如圖中的AB.大於半圓的弧叫

優弧;小於半圓的弧叫劣弧.

【注意一】　弧的記號是⌒,弧DE可記作$\overset{\frown}{DE}$.

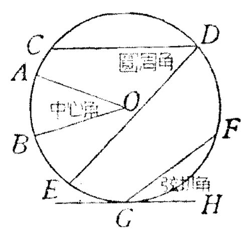
【注意二】　通常所說的弧,都指劣弧.如指優弧,應該用三個文字記出,例如劣弧DE記作$\overset{\frown}{DE}$,優弧DE記作$\overset{\frown}{DCE}$.

4. 弦,割線,切線,切點　連結圓周上任意二點的線段,叫做弦,如圖中的AB. 交圓周於二點的一直線,叫做割線,如圖中的CD. 同圓周衹相遇於一點的直線,叫做切線,如圖中的EF; 這唯一的相遇點叫做切點,如圖中的G.



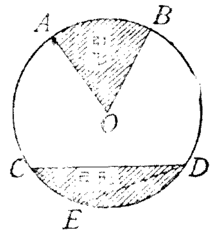
5. 中心角,圓周角,弦切角　以中心為頂點,兩半徑為邊的角,叫做中心角,如圖中的$\angle AOB$.

以圓周上的任意點為頂點,兩弦為邊的角,叫做圓周角,如圖中的$\angle CDE$.



以切點為頂點,過切點的弦同切線為二邊的角,叫做弦切角,如圖中的$\angle FGH$.

6. 扇形,扇形角　兩半徑同弧圍成的平



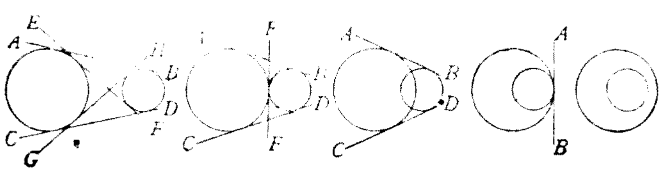
面形,叫做扇形,如圖中的 ABO. 扇形中以中心為頂點的角,叫做扇形角,如圖中的 $\angle AOB$, 實際就是中心角.

7. 弓形,弓形角　弧同弦圍成的平面形,叫做弓形,如圖中的 CED. 從弧上的一點到弦的兩端所引二直線的夾角,叫做弓形角,如圖中的 $\angle CED$, 實際就是圓周角.

8. 同心圓　同中心的諸圓,叫做同心圓.

9. 兩圓相交,相切,外切,內切　兩圓周相遇於二點時,叫做兩圓相交. 兩圓周相遇於一點時,叫做兩圓相切. 相切有二種:一圓在他圓的外面的,叫外切;一圓在他圓的裏面的,叫內切.

10. 公切線,外公切線,內公切線　一直線同時切於二圓,叫做二圓的公切線. 公切線有二種: 二圓的中心在他的同側的,叫外公切



線，如圖中的AB，CD；二圓的中心在他的兩側的，叫內公切線，如圖中的EF，GH。

【注意】　公切線的條數，依兩圓的關係而定：

(1)　二圓不相遇時，有外公切線二，內公切線二.

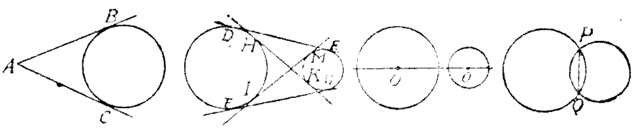
(2)　二圓外切時，有外公切線二，內公切線一.

(3)　二圓相交時，有外公切線二，無內公切線.

(4)　二圓內切時，有外公切線一，無內公切線.

(5)　一圓全在他圓的裏面時，無公切線.

11.切線的長　從一點引一圓的切線，從這點到切點的距離稱爲切線的長，如圖中的AB及AC.　公切線的兩切點間的距離，稱爲公切線的長，如圖中的DE，FG，HK，LM.

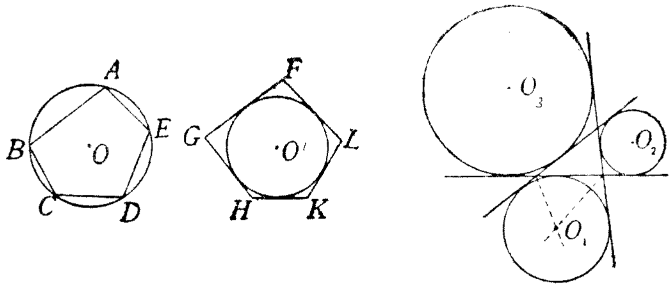


12.聯心線，公共弦　通過二圓中心的一直線，叫做聯心線，如圖中的OO'　連結相交二圓的兩交點的線段，是兩圓的公共弦，如圖中的PQ.

13.外接圓，內接形，外心　一圓通過多邊形的各頂點，這圓叫做多邊形的外接圓，如圖中的$\odot O$.　多邊形的各頂點都在一圓周上，

這多邊形叫做圓的內接形,如圖中的 $ABCDE$.

外接圓的中心,叫做多邊形的外心,如圖中的 O.



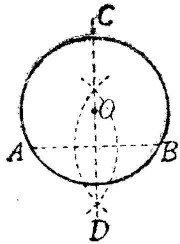
14.內切圓,外切形,內心 一圓切於多邊形的各邊,這圓叫做多邊形的內切圓,如圖中的 $\odot O'$. 多邊形的各邊同切於一圓,這多邊形叫做圓的外切形,如圖中的 $FGHKL$. 內切圓的中心,叫做多邊形的內心,如圖中的 O'.

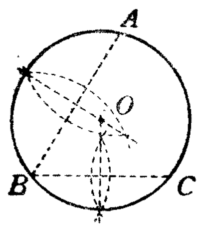
15.傍切圓,傍心 一圓切於三角形的一邊及其他二邊的延長線,這圓叫做三角形的傍切圓,如圖中的 $\odot O_1$, $\odot O_2$, $\odot O_3$. 傍切圓的中心,叫做三角形的傍心,如圖中的 O_1, O_2, O_3.

第二節　簡易幾何畫法

1.通過二定點畫圓 連結二定點 A, B, 作中垂線 CD, 以 CD 上的任意點 O 為中心, O 與 A 的距離為半徑作圓,必能通過 B 點.

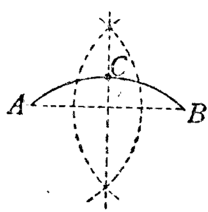
2. 通過三定點畫圓　順次連結三定點 A, B, C，得 AB, BC 二線段.作這二線段的中垂線,相交於 O，以 O 爲中心, O 與 A 的距離爲半徑作圓,必能通過 B, C.



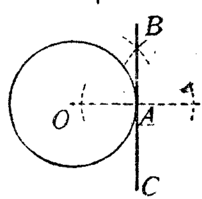


3. 求已知圓的中心　在已知圓上任取三點 A, B, C，連結 AB, BC，各作中垂線,相交於 O，則 O 爲所求的中心(圖同上).

4. 等分已知弧　連結已知弧的兩端 A, B,作 AB 的中垂線,交 $\overset{\frown}{AB}$ 於 C，則 C 爲 $\overset{\frown}{AB}$ 的中點.

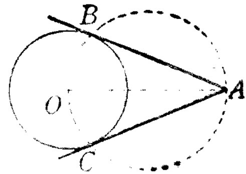


5. 過已知圓周上的定點作切線　中心 O 與圓周上的定點 A 連結,過 A 作 OA 的垂線 BC,則 BC 爲所求的切線.

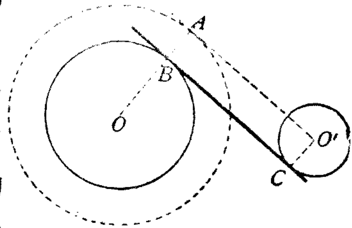


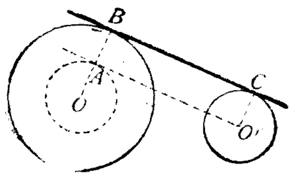
6. 從已知圓外的定點作

切線　中心O與圓外的定點A連結,以OA的中點為中心,OA的一半為半徑作圓,與原圓交於B, C.連結AB, AC,都是所求的切線.



7. 作已知兩圓的公切線　以已知一圓的中心O為中心,二圓半徑的和或差為半徑作一圓.從另一已知圓的中心O'引所作圓的切線$O'A$,連結OA或再延長交原圓O於B.從O'引OA的平行線交原圓O'於C.連結BC,即得.

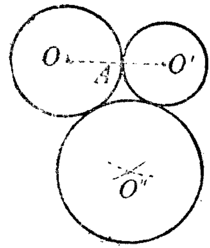




【注意】　作相交二圓或外切二圓的外公切線仿上法;作外切二圓的內公切線,或內切二圓的外公切線時,可過二圓的切點作一圓的切線,自會做另一圓的切線;作相等二圓的內公切線仿上法,作外公切線可在二圓中各作一直徑,使與聯心線垂直,連結直徑的端即得.

8. 作相切的二圓或三圓　先作一圓O,

畫半徑 OA,延長到 O',使 AO' 等於所需的第二圓的半徑.以 O' 爲中心, $O'A$ 爲半徑作圓,即得相切的二圓. 作相切的二圓 O, O' 後,以 O, O' 各爲中心,⊙O, ⊙O' 的半徑同所需的第三圓的半徑的和爲半徑各作一弧,二弧交於 O'',即可得相切的第三圓.

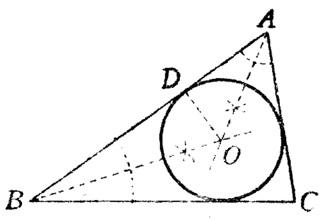


9. 作△的外接圓　即過△的三項點畫圓,故可仿 2 條的方法.

【注意】　凡正多邊形各邊的中垂線,必會於一點,故欲作正多邊形的外接圓,可即以這相會點爲中心.

10.作△的內切圓

作已知 △ABC 二內角 ∠A, ∠B 的二等分線,以這二線的交點 O 爲中心, O 同一邊的距離爲半徑作圓,即得.



【注意】　凡正多邊形各角的二等分線必會於一點,故欲作正多邊形的內切圓,可即以這相會點爲中心.

11.作$\triangle$的傍切圓 作$\triangle$二外角的二等分線,以這二線的交點O_1爲中心,O_1同一邊的距離爲半徑作圓,即得(圖見上節15).

12.作⊙的內接正多邊形 仿第四章第二節作正六邊形法,截圓周爲六等分,順次連各分點得內接正六邊形;相間連各分點得內接正三角形;等分全圓周$\frac{1}{6}$的弧,再等分全圓周$\frac{1}{12}$的弧,可得內接正十二,二十四,……邊形.

作垂直的二直徑,截圓周爲四等分,順次連各分點,得內接正方形;逐次將弧等分,可得內接正八,十六,……邊形. 仿第四章第二節作正五邊形法,可作內接正五邊形,正十邊形,正二十邊形,……等. 其餘如正七邊形,正九邊形等,或不易作,或無法作,可約略將弧等分求之.

13.作⊙的外切正多邊形 仿上條將圓周等分爲若干弧,過各分點作切線即得.

第三節 初步定理

本節所舉的初步定理,一部可認爲是公理;一部可用最簡易的疊置證法證明,故證法都從略.

1.同圓或等圓的半徑相等.

2.同圓或等圓的直徑相等.

3.兩圓的半徑相等,則兩圓相等.

4.兩圓的直徑相等,則兩圓相等.

5.直徑分圓爲二等分.

6.分圓爲二等分的弦是直徑.

7.垂直的二直徑,分圓爲四等分.

8.一圓的中心唯一.

9.直線同圓的交點不能多於二

10.兩圓的交點不能多於二.

11.兩個等圓的中心相合,則兩圓全合

12.重合的兩圓,若固定中心,將一圓旋轉,則任至何處,兩圓常能相合.

13.半徑不等的兩個同心圓,不能相交.

14.相交的二圓,不能爲同心圓.

15.過二點的圓無限.

16.過在一直線上的三點,不能畫圓.

17.過不在一直線上三點的圓唯一.

【說明】 三點的等距離點爲三條連結線的中垂線的相會點,因這相會點唯一,故過三點的圓唯一.

18.過四點或多於四點,不一定可以畫圓.

19.在圓內的點,與中心的距離小於半徑;

在圓周上的點,與中心的距離等於半徑;在圓外的點,與中心的距離大於半徑.

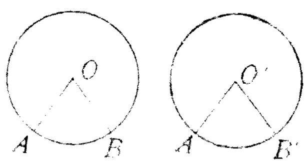
20. 與中心距離小於半徑的點在圓內;等於半徑的點在圓周上;大於半徑的點在圓外.

21. 弦上的點,恆在圓內;弦的延長線上的點,恆在圓外.

第四節　重要定理

(I)　關於中心角,弧,弦的

定理 1.　在同圓或等圓中,等中心角所對的弧相等.



[設]　在等圓 O 同 O' 中,

$\angle AOB=\angle A'O'B'$.

[求證]　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$.

[證]　把 $\odot O$ 放到 $\odot O'$ 上,

必可使 OA 與 $O'A'$ 重合　　(因等圓的半徑相等)

因　$\angle O=\angle O'$　　(所設),

$\therefore$　OB 沿 $O'B'$ 落下,且 B 落於 B'　　(因 $OB=O'B'$).

於是 $\overset{\frown}{AB}$ 與 $\overset{\frown}{A'B'}$ 重合.

即　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$.

系 1.　在同圓或等圓中,等弧所對的中心角相等.

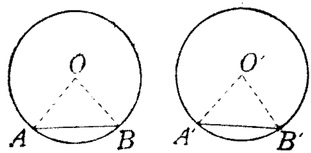
【說明】　可仿上法用疊置證法證明.下列的二

系亦然.

系 2. 在同圓或等圓中,大中心角所對的弧亦大.

系 3. 在同圓或等圓中,大弧所對的中心角亦大.

定理 2. 在同圓或等圓中,等弧所對的弦相等.



[設] 在等圓 O 同 O' 中,
$\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$.

[求證] $AB=A'B'$.

[證] 連結 $OA, OB, O'A'$, $O'B'$,

因 $\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$, (所設),

$\therefore$ $\angle O=\angle O'$ (等圓中,等弧對等中心角).

又 $OA=O'A', OB=O'B'$ (等圓的半徑相等),

$\therefore$ $\triangle OAB\cong\triangle O'A'B'$ (二邊夾一角互等).

$\therefore$ $AB=A'B'$ (全同三角形的對應邊).

系 1. 在同圓或等圓中,等弦所對的弧相等.

系 2. 在同圓或等圓中,大弧所對的弦亦大.

系 3. 在同圓或等圓中,大弦所對的弧

亦大.

【註】　系 2, 系 3 的弧,必須是劣弧.

習題二十三

(1)　在同圓或等圓中,一中心角為他中心角的二倍,則所對的弧亦為他中心角所對弧的二倍.

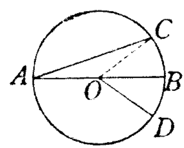
【提示】　作一半徑,使分大中心角為二等分.

(2)　在同圓或等圓中,一弧為他弧的二倍,則所對的弦小於他弧所對弦的二倍.

【提示】　等分大弧,作半弧上的弦.

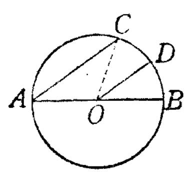
(3)　AOB 為直徑, AC 為弦, OD 為半徑,已知 $\angle BOD=2\angle A$,試證 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$.

【提示】　連 CO, 則 $\angle COB=\angle A+\angle C=2\angle A$.



(4)　從 A 引二弦 AC, AD, 使與直徑 AOB 成等角,則 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$.

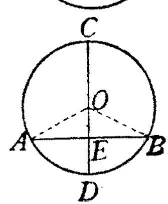
(5)　AOB 為直徑,半徑 OD 與 AC 平行,則 D 點等分 $\overset{\frown}{CB}$.



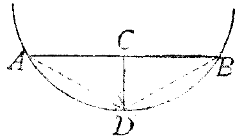
(6)　一弦分圓周為優劣二弧,這二弧的中點連結線必為直徑,且為弦的中垂線.

【提示】　$\overset{\frown}{CAD}=\overset{\frown}{CBD}$.

又 $\triangle OAE\cong\triangle OBE$.

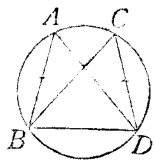


(7) 連結弦的中點同所對弧的中點的線,必垂直於弦.



(8) 若 AB, CD 為不相交的二等弦,連結 AD, BC, BD, 則 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.

【提示】 $\overparen{AB}=\overparen{CD}$、$\overparen{ABD}=\overparen{CDB}$.

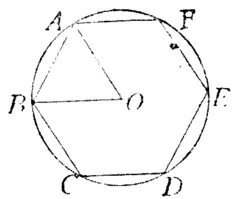


(9) 圓的內接正五邊形的對角線相等.

(10) 圓的內接正六邊形的邊等於半徑.

【提示】 先證 $\angle AOB$ 為 $4\angle R$ 的 $\frac{1}{6}$, 即 $\frac{2}{3}\angle R$,

再證 $\angle OAB=\angle OBA=\frac{2}{3}\angle R$.

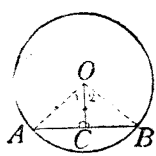


定理 3. 從中心引弦的垂線,必等分該弦.

[設] AB 為 $\odot O$ 的弦, $OC \perp AB$.

[求證] $AC=CB$.

[證] 連結 OA, OB,



則 $OA=OB$ (同圓的半徑),

$OC=OC$ (兩三角形的公用邊),

$\angle OCA=\angle OCB$ (直角),

∴ $\angle OCA \cong \angle OCB$ (二邊一直角互等).

$\therefore \quad AC=CB$ (全同三角形的對應邊

【註】 本定理實際就是:「等腰△底邊上的頂垂線,必等分底邊.」

系 1. **從中心引弦的垂線,延長必等分優劣二弧.**

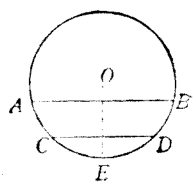
【說明】 因 $\angle 1=\angle 2$.

系 2. **從弦的中點到中心的線,必垂直於弦.**

系 3. **弦的中垂線必過中心.**

系 4. **在平行的兩弦間的兩弧必相等.**

【說明】 從中心引半徑 OE, 使垂直於 AB, 則必垂直於 CD. 於是 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$, $\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{DE}$, $\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

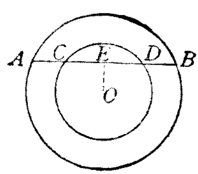


習題二十四

(1) 從中心到內接正多邊形各邊的距離必等.

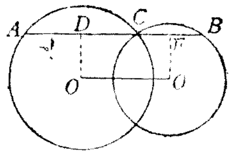
(2) 一直徑二等分不過中心的二弦,則此二弦必平行.

(3) 一直線與兩個同心圓相交,則在兩圓周間所夾的兩部分必等.



【提示】 作 $OE\perp AB$, 則 $AE=EB$, $CE=ED$

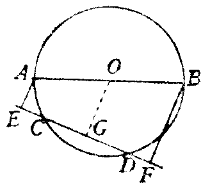
(4)　通過相交二圓的交點 C, 作聯心線 OO' 的平行線,交兩圓周於 A, B, 則 $AB=2OO'$.



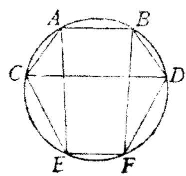
【提示】　作 OD, $O'E$ 各 $\perp AB$.

則 $AB=AC+CB=2DC+2CE=2DE$.

(5)　AOB 爲直徑,從 A, B 引弦 CD 的延長線上的垂線 AE, BF, 則 $EC=DF$.



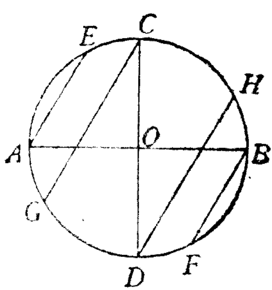
【提示】　作 $OG\perp CD$,則 $EG=GF$, $CG=GD$.



(6)　圓的內接梯形必等腰.

(7)　若 AB, CD, EF 爲平行的三弦,則 $\triangle ACE\cong\triangle BDF$.

(8)　若直徑 AOB, COD 互相垂直,從 A,B,C,D 作平行的四弦 AE, BF, CG, DH, 則 E,F,G,H 四點分圓周爲四等分.

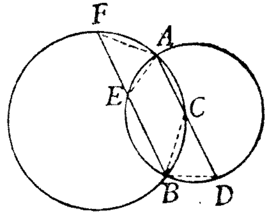


【提示】　$\overset{\frown}{EG}=\overset{\frown}{EA}+\overset{\frown}{AG}$

$=\overset{\frown}{EA}+\overset{\frown}{EC}$.

(9)　兩圓相交於 A, B. 作平行線 ACD, BEF, 截兩圓周於 C,D,E,F, 則 $CD \fallingdotseq EF$.

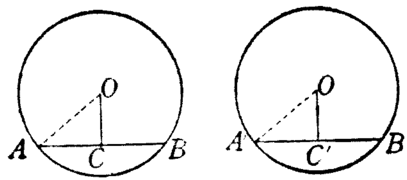
【提示】 $AFBC$, $BDAE$ 各爲等腰梯形, $\therefore \angle A = \angle ACB$, $\angle EAD = \angle D$, 相減得 $\angle FAE = \angle CBD$. 又 $AF = BC$, $AE = BD$.



定理 4. 在同圓或等圓中,等弦距中心相等.

[設] 在等圓 O 同 O' 中, $AB = A'B'$, $OC \perp AB$, $O'C' \perp A'B'$.

[求證] $OC = O'C'$.



[證] 連結 OA, $O'A'$,

因 $AC = CB$, $A'C' = C'B'$ (從中心引弦的垂線,必等分弦),

$\therefore$ $AC = A'C'$ (等弦之半).

又 $OA = O'A'$ (等圓的半徑相等),

$\angle OCA = \angle O'C'A'$ (直角),

$\therefore$ $\triangle OCA \cong \triangle O'C'A'$ (二邊一直角互等).

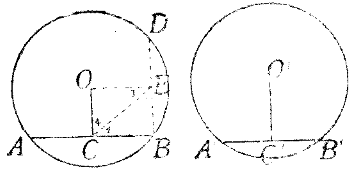
$\therefore$ $OC = O'C'$ (全同三角形的對應邊).

系 在同圓或等圓中距中心等的弦亦等.

定理 5. 在同圓或等圓中,大弦距中心較近.

［設］ 在等圓 O 同 O' 中, $AB>A'B'$, $OC\perp AB$, $O'C'\perp A'B'$.

［求證］ $OC<O'C'$.



［證］ 把 $\odot O'$ 放到 $\odot O$ 上,使 O' 落於 O, 旋轉 $\odot O'$, 使 A' 落於 B. 若 B' 落於 D. $O'C'$ 落於 OE,

則因 $AC=CB$, $A'C'=C'B'$

(從中心引弦的垂線,必等分弦),

$\therefore\quad CB>A'C'$　　(不等量之半,大者仍大).

即　$CB>BE$.

$\therefore\quad \angle 1>\angle 2$　　($\triangle$大邊對大角).

又因 $\angle BEO=\angle BCO$　　(直角).

$\therefore\quad \angle 3<\angle 4$　　(從等量減去不等量,大者反小).

$\therefore\quad OC<OE$　　($\triangle$小角對小邊).

即　$OC<O'C'$.

系 1. 在同圓或等圓中,距中心近的弦較大.

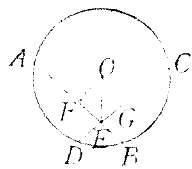
系 2. 直徑爲最長的弦.

【說明】 直徑與中心的距離爲 0.

習題二十五

(1) 在同圓中,諸等弦的中點在和原圓同心的一圓周上.

(2) $\odot O$ 的兩等弦 AB, CD 相交於 E, 則 $\angle AEO=\angle CEO$.

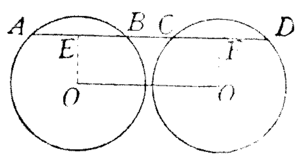


(3) $\odot O$ 的兩弦 AB, CD 相交於 E, 若 $\angle AEO=\angle CEO$, 則 $AB=CD$.

(4) 兩弦 AB, CD 相交於 E, 若 $AE=CE$,則 $AB=CD$.

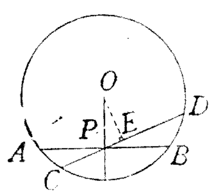
【提示】 由 $\triangle OAE\cong\triangle OCE$, 得 $\angle OEA=\angle OEC$.

(5) 一直線與兩等圓的聯心線平行,則此線被兩圓截得的兩弦必等.



【提示】 作 OE, $O'F$ 各 $\perp AD$, 則 $OE=O'F$.

(6) 在圓內過一點的諸弦,以垂直於過這點的半徑的弦爲最短.

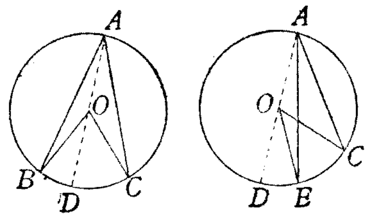


【提示】 作 $OE\perp CD$,則 $OP>OE$.

(II) 關於圓周角的

定理 6. 圓周角等於同弧所對的中心角的一半.

〔設〕 在$\odot O$中，$\overset{\frown}{BC}$所對的圓周角為$\angle BAC$，又$\overset{\frown}{BC}$所對的中心角為$\angle BOC$.



〔求證〕 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

〔證〕 從A作直徑AOD，連結BO，CO，

則 $\angle BOD=\angle BAO+\angle B$

(△外角等於不相鄰二內角和).

又因$OA=OB$ (同圓的半徑).

$\therefore$ $\angle BAO=\angle B$ (等腰△的底角).

$\therefore$ $\angle BOD=2\angle BAO$ (等量代入).

即 $\angle BAO=\frac{1}{2}\angle BOD$ (等量之半).

仿此 $\angle CAO=\frac{1}{2}\angle COD$.

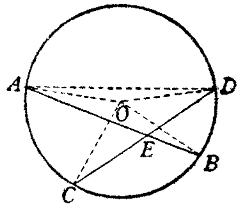
$\therefore$ $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$ (等量加等量或減等量).

【註】 $\angle BAC$是$\overset{\frown}{BC}$所對的圓周角，但又可稱做$\overset{\frown}{BAC}$所函的圓周角.

系 在同圓或等圓中，一弧為他弧的二倍，則一弧所對的圓周角，等於他弧所對的中心角.

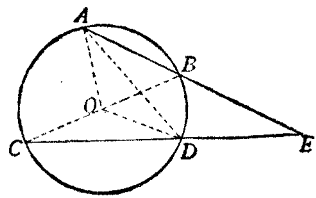
習 題 二 十 六

(1) 若二弦 AB, CD 相交於圓內 E 點,則 $\angle AEC$ 等於 $\overset{\frown}{AC}$ 與 $\overset{\frown}{BD}$ 所對中心角和的一半。



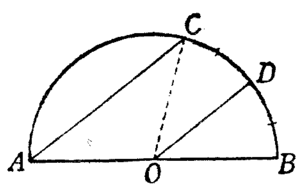
【提示】 $\angle AEC = \angle ADC + \angle DAB.$

(2) 若二弦 AB, CD 延長相交於圓外 E 點,則 $\angle E$ 等於 $\overset{\frown}{AC}$ 與 $\overset{\frown}{BD}$ 所對中心角差的一半.



【提示】 $\angle E = \angle ADC - \angle DAB.$

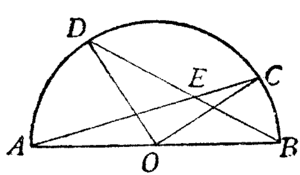
(3) 若 AOB 為直徑, $\overset{\frown}{BC}$ 的中點為 D,則半徑 OD 與弦 AC 平行.



【提示】 $\angle A = \frac{1}{2} \angle COB,$

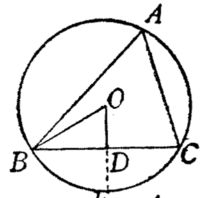
$$\angle DOB = \frac{1}{2} \angle COB.$$

(4) 從直徑 AOB 的兩端引二弦 AC, BD 交於 E,若 $\angle AED = \frac{1}{2} \angle R$,則 $\angle DOC = \angle R.$

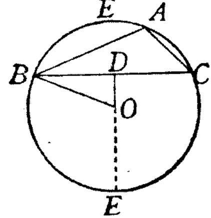


【提示】 $\angle AED = \angle A + \angle B = \frac{1}{2}(\angle COB + \angle AOD).$

(5) 從 $\triangle ABC$ 的外接圓的中心 O 引一邊 BC 的垂線 OD,則 $\angle BOD=\angle A$;或 $\angle BOD+\angle A=2\angle R$.



【提示】 延長 OD 交圓周於 E,則 $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{EC}$, 即 $\overset{\frown}{BC}=2\overset{\frown}{BE}$. $\therefore$ $\angle BOE=\angle A$.



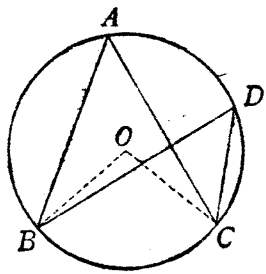
定理 7. 同弧所對的圓周角相等.

[設] 在 $\odot O$ 中,$\overset{\frown}{BC}$ 所對的圓周角爲 $\angle BAC$, $\angle BDC$.

[求證] $\angle BAC=\angle BDC$.

[證] 作半徑 OB, OC,

則 $\left.\begin{aligned}\angle BAC&=\frac{1}{2}\angle BOC\\ \angle BDC&=\frac{1}{2}\angle BOC\end{aligned}\right\}$



(圓周角等於同弧所對中心角之半).

$\therefore$ $\angle BAC=\angle BDC$ (等於同量的量相等).

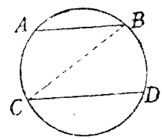
系 1. 在同圓或等圓中,等弧所對的圓周角相等.

系 2. 在同圓或等圓中,圓周角相等,則所對的弧亦等.

系 3. 同底且在同側的兩三角形,若頂角相等,則四頂點在同一圓周上

習題二十七

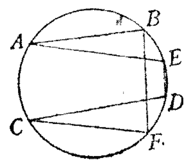
(1) 若 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$,試證 $AB \parallel CD$.



【提示】 $\angle B=\angle C$.

(2) 若弦 $AB \parallel CD$, $AE \parallel CF$,

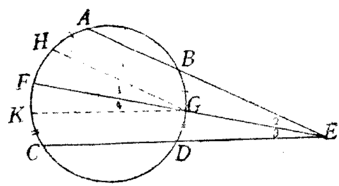
則弦 $ED \parallel BF$.



【提示】 $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{EF}$,

$\therefore \overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{DF}$.

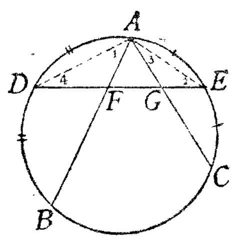
(3) 延長二弦 AB, CD 交於圓外的 E 點,作 $\angle E$ 的二等分線交圓周於 F, G, 則 $\overset{\frown}{AF}-\overset{\frown}{BG}=\overset{\frown}{CF}-\overset{\frown}{DG}$.



【提示】 作 $HG \parallel AB$,

$KG \parallel CD$,則 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$, $\overset{\frown}{HF}=\overset{\frown}{FK}$.

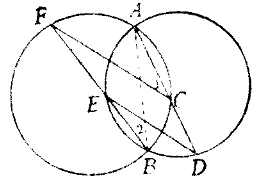
(4) $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ 的中點為 D, E,而 DE 與這二弧所對的弦交於 F, G,則 $AF=AG$.



【提示】 $\angle 1=\angle 2$,

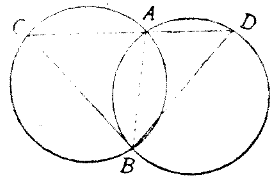
$\angle 3=\angle 4$.

(5) 兩圓交於 A, B,作直線 ACD, BEF 截兩圓於 C, D, E, F,則 $CF \parallel DE$.



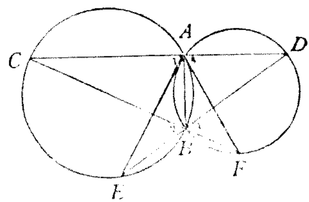
【提示】 連 AB, 則 $\angle 1 = \angle 2 = \angle D$.

(6) 過相交二等圓的一交點,作任意直線,與兩圓周各交於一點,這兩點各與兩圓的第二交點連結,則成一等腰三角形.



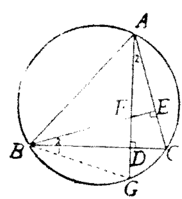
【提示】 $AB = AB$, ∴ $\angle C = \angle D$.

(7) 作直線 CAD 與兩圓的公共弦 AB 垂直,延長 CB, DB, 與圓周相交於 F, E, 則 AB 等分 $\angle EAF$.



【提示】 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$.

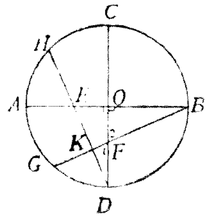
(8) 從三角形的垂心引一邊的垂線,延長到外接圓周,則這線段被邊所二等分.



【提示】 $\angle 1 = \angle 2 = \angle R - \angle C = \angle 3$.

(9) 直徑 $AOB \perp COD$, 於 OA, OD 上取 E, F, 使 $OE = OF$, 又延長 BF, DE 各交圓周於 G, H, 則 $BG \perp DH$,

$\widehat{GH}=\frac{1}{4}$ 圓周.

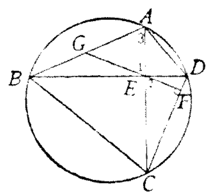


【提示】　$\triangle BOF \cong \triangle DOE$.

$\angle 1=\angle 2$, $\angle D=\angle B$, $\therefore \angle DKF=\angle BOF=\angle R$.

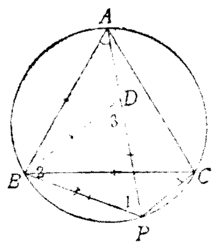
又 $\widehat{CH}=\widehat{AG}$, $\therefore \widehat{HG}=\widehat{AC}$.

(10)　若圓的內接四邊形的對角線互為垂線,則過對角線交點而垂直於一邊的線,必等分對邊.



【提示】　$\angle 1=\angle 2=\angle R-\angle ECD=\angle BDC=\angle 3$.

(11)　$\triangle ABC$ 為圓的　接正三角形,P 為 $\widehat{BC}$ 上的任意點,則 $PA=PB+PC$.



【提示】　取 $PD=PB$,則 $\angle 1=\angle ACB=\frac{2}{3}\angle R$, $\angle 2=\angle 3=\frac{2}{3}\angle R$.於是 $\triangle ABD \cong \triangle CBP$.

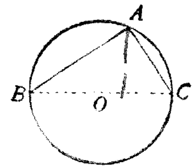
定理 8　半圓周所對的(或函的)圓周角是直角.

〔設〕　$\widehat{BC}$ 為半圓周,其所對的圓周角為 $\angle BAC$.

〔求證〕　$\angle BAC=\angle R$.

[證] 連結 BC，則 BC 爲直徑

(等分圓周的弦是直徑).



$\therefore$ $\angle BOC = 2\angle R$

(外邊爲一直線).

但 $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$

(圓周角等於同弧所對中心角之半).

$\therefore$ $\angle BAC = \angle R$ (等量代入).

系 1. 圓周角是直角的，所對的(或函他的)弧是半圓.

系 2. 圓周角是直角的，所對的弦是直徑.

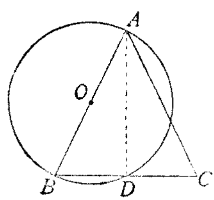
系 3. 以直角三角形的斜邊爲直徑的圓，必過直角的頂點.

習 題 二 十 八

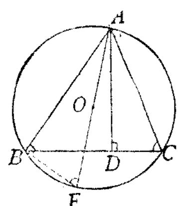
(1) 以等腰三角形的腰爲直徑作圓，必等分底邊.

【提示】 $\angle ADB = \angle R$.

(2) 從 $\triangle ABC$ 的頂點 A 作頂垂線 AD，外接圓的直徑 AE，則 $\angle CAD = \angle BAE$.



(1)

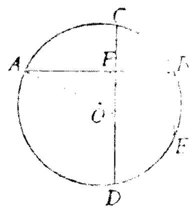


(2)

【提示】 $\angle ABE = \angle R = \angle ADC$, $\angle E = \angle C$.

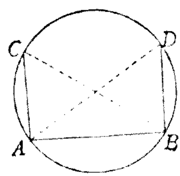
(3)　垂直的兩弦,截圓周爲四弧,相對兩弧的和,必等於半圓.

【解析】　從 A 引直徑 AOE,得半圓 $\overset{\frown}{ADE}$.於是設法證 $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{ADE}$.
從圖可見能證 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DE}$ 就得.欲達此目的,須 $CD \parallel BE$.



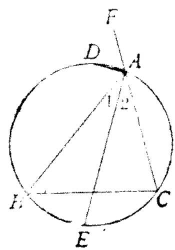
(4)　從弦的兩端作垂直於這弦的兩弦,則這兩弦必相等.

【提示】　CB, DA 都是直徑.

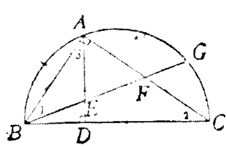


(5)　$\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的二等分線及其外角的二等分線分別交外接圓於 E,D,則 D,E 爲優劣兩 $\overset{\frown}{BC}$ 的中點.

【提示】　因 $\angle 1=\angle 2$,故 $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{EC}$. 又因 $\angle DAE=\angle R$,故 $\overset{\frown}{DE}$ 爲半圓.

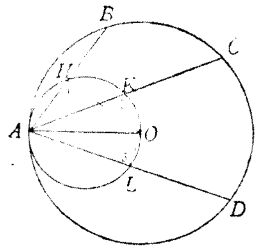


(6)　於 BC 爲直徑的半圓周上取 G 點, $\overset{\frown}{BG}$ 的中點爲 A, 作 $AD \perp BC$, 連結 BG 交 AD, AC 於 E, F, 則 $AE=BE=FE$.



【提示】　$\angle 1=\angle 2=\angle R-\angle ABC=\angle 3$.

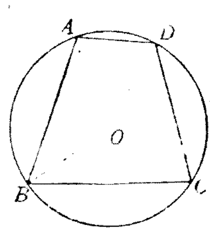
(7) 從圓周上一點引諸弦，則諸弦的中點同在以過這點的半徑爲直徑的圓周上.



【提示】 弦 $AB, AC, AD,$ ………的中點 $H, K, L,$…… 各與中心 O 連結，則 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \cdots\cdots = \angle R.$

(III) 關於內接四邊形的

定理 9. 圓的內接四邊形的對角互爲補角.



[設] $ABCD$ 爲 $\odot O$ 的內接四邊形.

[求證] $\angle A + \angle C = 2\angle R,$

$\angle B + \angle D = 2\angle R.$

[證] 連結 $BO, DO,$

則 $\left.\begin{array}{l}\angle A = \frac{1}{2}\angle BOD(\text{優 角})\\ \angle C = \frac{1}{2}\angle BOD(\text{劣 角})\end{array}\right\}$ (圓周角等於同弧所對中心角之半).

$\therefore\quad \angle A + \angle C = \frac{1}{2} \times 4\angle R$

(圍繞一點的諸角的和爲 $4\angle R$).

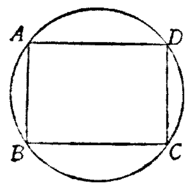
即 $\angle A + \angle C = 2\angle R.$

彷此 $\angle B + \angle D = 2\angle R.$

系 圓的內接四邊形的外角,等於他的內角的對角.

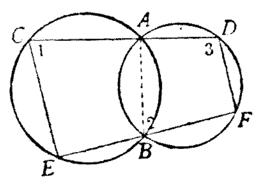
習 題 二 十 九

(1) 圓的內接平行四邊形必爲矩形.



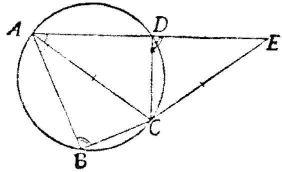
【提示】 因 $ABCD$ 爲圓的內接四邊形,故 $\angle A+\angle C=2\angle R$. 又因 $ABCD$ 爲▱,故 $\angle A=\angle C$.

(2) 兩圓相交,過二交點各作直線,以兩圓周爲界,則連這兩直線的端的兩弦必平行.

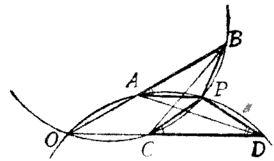


【提示】 $\angle 2+\angle 3=2\angle R$, $\therefore \angle 1+\angle 3=2\angle R$.

(3) 圓的內接四邊形的對角線 AC 等分 $\angle A$, 延長 AD 到 E, 使 $AC=CE$, 則 $AB=DE$.

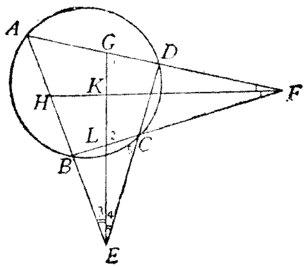


(4) 兩線段 AB, CD 延長相交於 O,若 P 爲 $\triangle AOD$, $\triangle BOC$ 的外接圓的交點,則



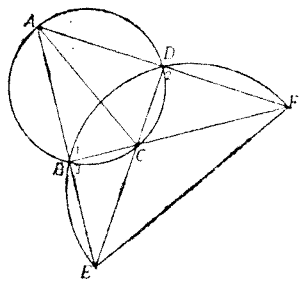
$\triangle PAB$ 與 $\triangle PCD$ 的三組角互等.

(5) 延長圓的內接四邊形 $ABCD$ 的對邊 AB, DC 交於 E, AD, BC 交於 F, 則 $\angle E$, $\angle F$ 的二等分線必互為垂線.



【提示】 $\angle 1 = \angle A +$
$\angle 3 = \angle 5 +$
$\angle 4 = \angle 2$.

(6) 延長圓的內接四邊形 $ABCD$ 的對邊 AB, DC 交於 E, AD, BC 交於 F. 若 B, E, F, D 同在其他一圓周上, 則 AC 為 $\odot ABC$ 的直徑, EF 為 $\odot BEF$ 的直徑.



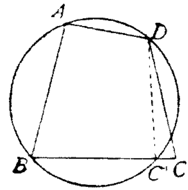
【提示】 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, $\therefore$ $\angle 1 = \angle R$, $\angle 3 = \angle R$.

定理10. **若四邊形的對角互為補角,則四頂點在同一圓周上.**

[設] 在四邊形 $ABCD$ 中, $\angle A + \angle C = 2\angle R$.

[求證] A, B, C, D 四點在同一圓周上.

［證］ 過 A,B,D 三點作一圓,若不過 C 點,則必與 BC 或其延長線相交於一點.設其點爲 C'.



則 $\angle A+\angle BC'D=2\angle R$

(圓的內接四邊形的對角互補).

但 $\angle A+\angle BCD=2\angle R$ (所設),

$\therefore$ $\angle BC'D=\angle BCD$ (等角的補角亦等).

但三角形的外角同不相鄰的內角不能相等,

故 C' 必合於 C.

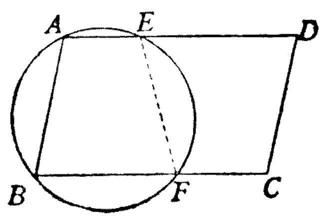
即 A,B,C,D 四點同在一圓周上.

系. 四邊形的外角,若等於他的內角的對角,則四頂點同在一圓周上.

習題三十

(1) 矩形或正方形,都可作外接圓

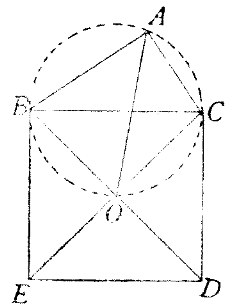
(2) 過 ▱$ABCD$ 的二頂點 A, B 作圓使與 AD,BC 交於 E, F, 則 E,F,C,D 四點同在一圓周上.



【提示】 $\angle EFB$ 爲 $\angle A$ 的補角, $\angle D$ 亦然.

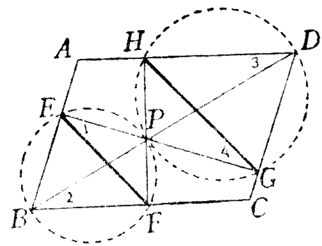
(3) 於直角三角形的斜邊上向形外作正方形,則連

結正方形的中心同三角形的直角頂的線,必等分這直角.



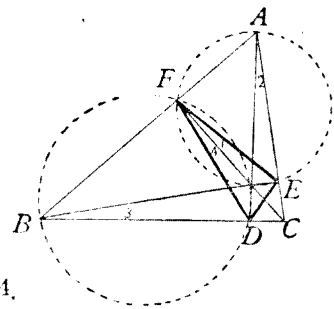
【提示】 因 $\angle BAC + \angle BOC = \angle R + \angle R = 2\angle R$, $\therefore$ 過 A, B, O, C 可作一圓.又因 $OB = OC$, $\therefore \overset{\frown}{OB} = \overset{\frown}{OC}$.

(4) 通過▱$ABCD$對角線BD上的P點,引AB, CD的公垂線EPG; AD, BC的公垂線HPF,則$EF \parallel HG$.



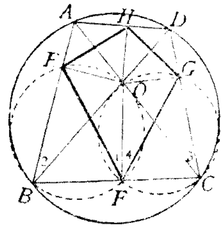
【提示】 仿上題,可作過四點的圓二個,於是 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$.

(5) 三角形的三頂垂線,必等分三垂足所成的三角形的三個內角.



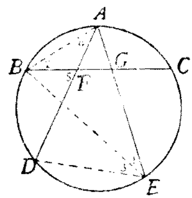
【提示】 仿上題,過四點作圓, $\angle 1 = \angle 2 = \angle R - \angle C = \angle 3 = \angle 4$.

(6)　從圓的內接四邊形的對角線的交點作各邊的垂線,則必等分四垂足所成的四邊形的四個內角.



【提示】　仿上題可證 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$.

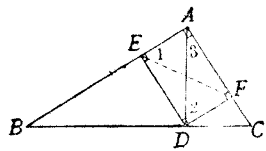
(7)　從 $\overset{\frown}{BC}$ 的中點 A 作任意的兩弦 AD, AE, 各交 BC 於 F, G, 則 D, F, G, E 四點同在一圓周上.



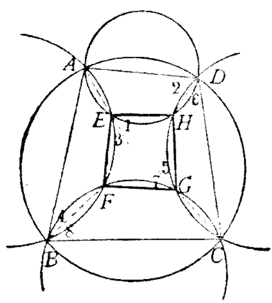
【提示】　$\angle 1=\angle 2,\ \angle 3=\angle 4,$

$\therefore\ \angle E=\angle 5.$

(8)　直角三角形的斜邊為 BC, 引 $AD\perp BC$, $DE\perp AB$, $DF\perp AC$, 則 B, E, F, C 四點同在一圓周.



【提示】　矩形 $AEDF$ 可作外接圓, 於是 $\angle 1=\angle 2$ $=\angle R-\angle 3$ $=\angle C$.



(9)　以圓的內接四邊形的

各邊爲弦,各作一圓,則連四交點所成的四邊形亦爲圓的內接四邊形.

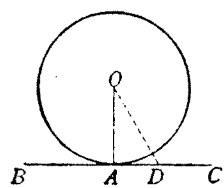
【提示】 $\angle 1=\angle 2,\ \angle 3=\angle 4,\ \angle 5=\angle 6,\ \angle 7=\angle 8,$

$$\therefore \angle E+\angle G=\angle B+\angle D=2\angle R.$$

(IV) 關於切線的

定理11. 過半徑的外端所引這半徑的垂線是切線.

［設］ $\odot O$ 的半徑爲 OA,過 A 引 OA 的垂線 BC.



［求證］ BC 是切線.

［證］ 從 O 到 BC 上的任意點 D 連結,

則 $OD>OA$

(從線外一點到這線引諸線,垂線爲最短).

$\therefore$ D 點在圓外

(點與中心距離大於半徑,則在圓外).

於是知 BC 上的點除 A 外,都在圓外.

故 BC 與圓祇相遇於一點,即 BC 爲圓的切線.

系 1. 切線必垂直於過切點的半徑.

系 2. 切線必垂直於過切點的直徑.

系 3. 從切點作切線的垂線,必過中心.

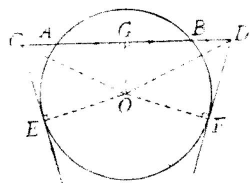
系 4. 從中心作切線的垂線,必過切點.

系 5. 過圓周上一點作這圓的切線,祇有一條.

系 6. 過半徑的外端而與半徑不相垂直的線,必是割線.

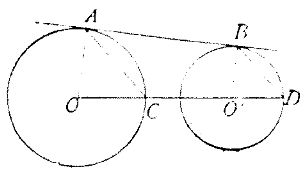
習題三十一

(1) 將弦AB向兩端延長,使$AC=BD$,從C,D引切線CE,DF,則$CE=DF$.



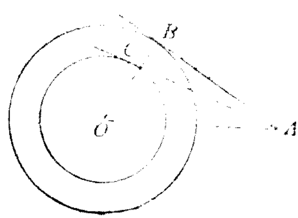
【提示】 先證$\triangle CGO\cong\triangle DGO$,次證$\triangle CEO\cong\triangle DFO$.

(2) 一直線切二圓於A,B,二圓的聯心線交一圓於C,延長交他圓於D.則$AC\parallel BD$.



【提示】 $OA\parallel O'B$, $\angle O=\angle BO'D$,因兩等腰三角形頂角等者底角亦等,故$\angle ACO=\angle D$.

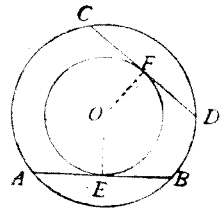
(3) 從一定點向諸同心圓作切線,則諸切點在同一圓周上.



【提示】 $\angle ABO=\angle ACO=\cdots\cdots=\angle R$, $\therefore B, C,\cdots\cdots$ 都在以 AO 為直徑的圓上.

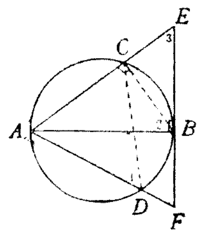
(4) 在兩同心圓中,若大圓的兩弦切於小圓,則這二弦相等.

【提示】 從切點作半徑 OE, OF.

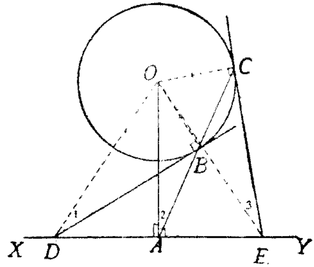


(5) 從直徑的一端 A 到他端 B 的切線上作二直線 AE, AF, 在直徑的兩側,截圓周於 C, D, 則 E, C, D, F 四點同在一圓周.

【提示】 $\angle 1=\angle 2=\angle R-\angle CAB=\angle 3$.

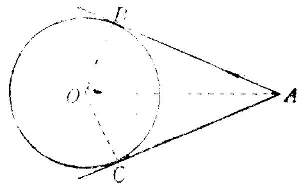


(6) 從中心 O 作圓外任意直線 XY 的垂線 OA, 從 A 引割線截圓周於 B, C, 則過 B, C 的兩切線所截 XY 上的兩點,必距 A 相等.



【提示】 過 O, D, A, B 四點及 O, A, E, C 四點,可各作一圓,於是 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$, 可證 $\triangle ODB\cong\triangle OEC$.

定理12. 從圓外一點所引圓的兩切線相等.



［設］ 從 ⊙O 外一點 A, 引切線 AB, AC,

［求證］ $AB=AC$.

［證］ 連結 OA, OB, OC,

則 $\left.\begin{array}{l}\angle OBA=\angle R\\ \angle OCA=\angle R\end{array}\right\}$ (切線⊥過切點的半徑).

∴ $\angle OBA=\angle OCA$ (直角).

又 $OB=OC$ (同圓的半徑).

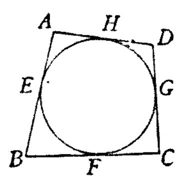
$OA=OA$ (兩三角形公用).

∴ $\triangle OBA\cong\triangle OCA$ (二邊一直角互等).

∴ $AB=AC$ (全同三角形的對應邊).

習題三十二

(1) 圓的外切四邊形相對兩邊的和相等.



【提示】 $AE=AH$, $BE=BF$,

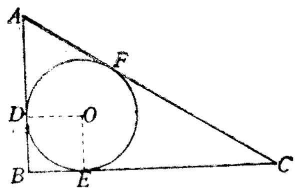
$CG=CF$, $DG=DH$,

相加卽得.

(2) 圓的外切平行四邊形,必是菱形.

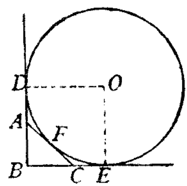
【提示】 因是▱,故對邊相等;因是外切四邊形,故對邊的和相等.

(3) 直角三角形內切圓的直徑,等於兩直角邊的和減去斜邊.

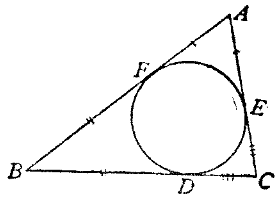


【提示】 作半徑 OD, OE,則 $DBEO$ 爲正方形.又因 $AD=AF$, $CE=CF$,故 $AB+BC-AC=BD+BE=OE+OD$.

(4) 直角三角形斜邊上的傍切圓的直徑,等於三角形的周圍.

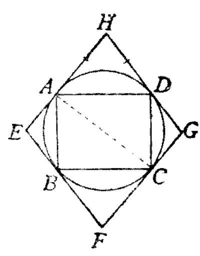


(5) 從圓的外切三角形一頂點到鄰近的切點的線段,等於從三角形周圍的一半減去對邊.



【提示】 $AF+BD+CD$ = 半周.

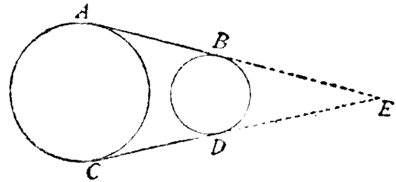
(6) 過圓的內接矩形的各頂點,作切線,必組成一菱形.



【提示】 連結 AC,則必爲直徑,故 EH, FG 各 $\perp AC$,可證 $EFGH$ 爲 ▱.又 $\triangle AEB$, $\triangle CGD$.

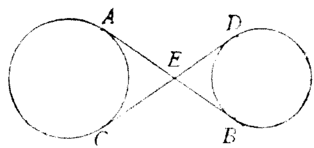
$\triangle AHD$ 都是等腰 $\triangle$，且 $\triangle AEB \cong \triangle CGD$，故 $EH = HG$.

(7)　兩圓的兩外公切線必相等.



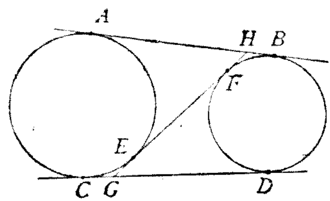
【提示】　延長兩外公切線交於 E，則 $AE = CE$，$BE = DE$.

(8)　兩圓的兩內公切線必相等.



【提示】　$AE = CE$，
$EB = ED$.

(9)　兩圓的一內公切線 EF 延長與兩外公切線 AB，CD 交於 G，H，則 $GH = AB$.



【提示】　$AH = EH$，
$CG = GE$，$HB = FH$，$GD = GF$，相加得 $AB + CD = 2GH$.

系 1.　兩切線的交角被從中心到交點的線等分.

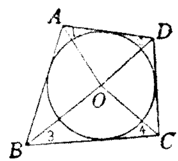
系 2.　兩切線的交角二等分線必過中

心.

系 3. 兩切線相交,過切點的兩半徑的夾角,被從中心到交點的線等分.

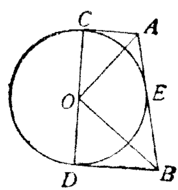
系 4. 同圓的兩切線,必與連兩切點的弦成等角.

習 題 三 十 三



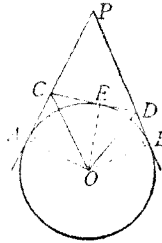
(1) 圓的外切四邊形相對兩邊所對的中心角,必互爲補角.

【提示】 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ 各爲四邊形四內角之半,故其和爲 $2\angle R$.



(2) 過 $\odot O$ 直徑的兩端引二切線,與任意的第三切線交於 A, B, 則 $\angle AOB = \angle R$.

【提示】 AO, BO 等分 $\angle A$, $\angle B$, 又因 $CA \parallel DB$, $\therefore \angle A + \angle B = 2\angle R$.



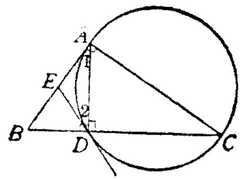
(3) 從 $\odot O$ 外的 P 點作切線 PA, PB, 更引任意的切線切於劣弧 AB, 與 PA, PB 交於 C, D, 則

(一) $\triangle PCD$ 的周圍 $= PA + PB$,

(二) $\angle COD = \angle R - \frac{1}{2}\angle P$.

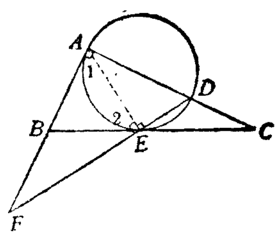
【提示】 仿習題三十二(4)得證(一); 又 $\angle COD = \angle COE + \angle DOE = \frac{1}{2}\angle AOE + \frac{1}{2}\angle DOE = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}(2\angle R - P)$.

(4) 以直角三角形的一直角邊為直徑作圓,則圓周與斜邊交點上的切線,必等分另一直角邊.



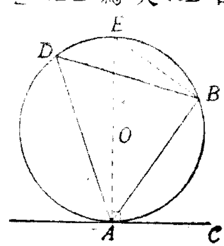
【提示】 因 $AB \perp AC$, 故 AB 為切線, $\angle 1 = \angle 2$, 又 $\angle ADC = \angle R$, $\angle ADB = \angle R$.

(5) 直角三角形 ABC 的 $\angle A$ 為直角,以 AC 的一部 AD 為直徑作圓,使切於 BC, 連結切點 E 與 D, 延長交 AB 的延長線於 F,則 $AB = BF$.



定理13. 弦切角等於夾同弧的圓周角.

[設] $\angle BAC$ 為夾 $\overset{\frown}{AB}$ 的弦切角, $\angle ADB$ 為夾 $\overset{\frown}{AB}$ 的圓周角.



[求證] $\angle BAC = \angle ADB$.

[證] 從 A 作直徑 AOE,連結 EB,

則 $\angle ABE = \angle R$

(半圓對的圓周角),

$\angle EAC=\angle R$ (切線⊥過切點的直徑).

∴ $\angle E$ 爲 $\angle EAB$ 的餘角 (直角△兩銳角互餘),

$\angle BAC$ 爲 $\angle EAB$ 的餘角

(和是 $\angle R$ 的二角互餘).

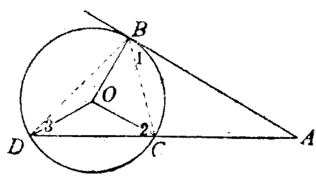
∴ $\angle E=\angle BAC$ (同一角的餘角必等).

但 $\angle E=\angle D$ (同弧所對的圓周角),

∴ $\angle BAC=\angle D$ (等於同量的量相等).

習 題 三 十 四

1) 切線 AB 同割線 ACD 的交角 A, 等於 $\widehat{BD}, \widehat{BC}$ 所對中心角差的一半.

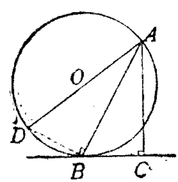


【提示】 $\angle A=\angle 2-\angle 1$

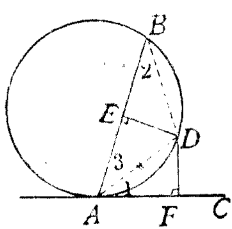
$=\angle 2-\angle 3.$

2) 從弦 AB 的一端 B 作切線, 他端 A 作切線的垂線 AC 及直徑 AD, 則

$\angle DAB=\angle CAB.$

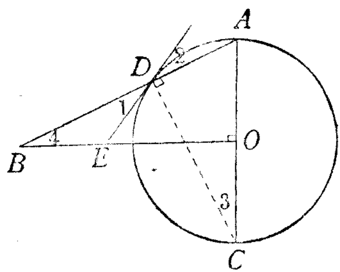


3) 從圓周上任意點作一弦及一切線, 則此弦所對弧的中點, 距弦及切線相等.



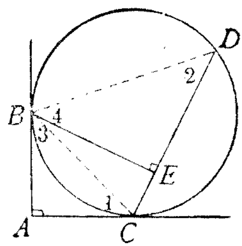
【提示】 $\angle 1=\angle 2=\angle 3.$

(4) 從中心引直徑 AOC 的垂線,交切於 D 的切線於 E, 交 AD 於 B, 則 $BE=DE$.



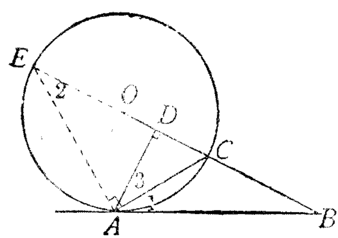
【提示】 $\angle ADC=\angle R$, $\therefore \angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle R-\angle A=\angle 4$.

(5) AB, AC 爲垂直的兩切線,從 C 作任意的弦 CD, 從 B 引 CD 的垂線 BE, 則 $BE=DE$.



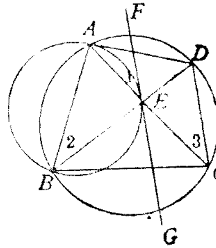
【提示】 $\angle A=\angle BED$, $\angle 1=\angle 2$, $\therefore \angle 3=\angle 4$. 但 $\angle 1=\angle 3$, $\therefore \angle 2=\angle 4$.

(6) AB 切 $\odot O$ 於 A, 半徑 OC 延長交 AB 於 B, 又從 A 引 $AD\perp OB$, 則 AC 等分 $\angle DAB$.



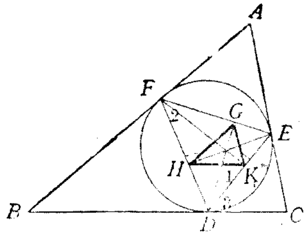
【提示】 延長 CO 到 E, 則 $\angle 1=\angle 2=\angle R-\angle DCA=\angle 3$.

(7) 圓的內接四邊形$ABCD$的對角線交於E,則在$\triangle AEB$外接圓上E點的切線,必與CD平行.



【提示】 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$.

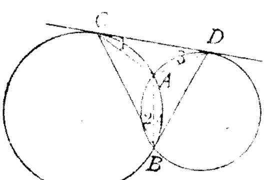
(8) 連結圓的外切三角形的三切點,成一三角形,作此三角形的三頂垂線,則三垂足所成的三角形的邊必與外切三角形的邊平行.



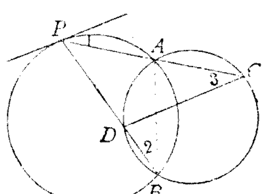
【提示】 過F, H, K, E四點得作一圓,於是$\angle 1=\angle 2=\angle 3$.

(9) 兩圓相交於A, B,作公切線切此兩圓於C, D,則$\angle CAD$與$\angle CBD$互為補角.

【提示】 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, 又$\angle 1+\angle 3+\angle CAD=2\angle R$.



(9)



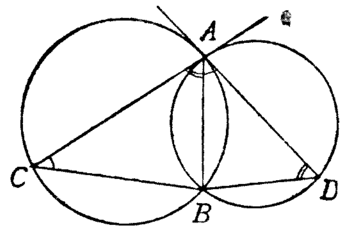
(10)

(10) 兩圓相交於A, B,從一圓上的任意點P作直線

PAC, PDB, 截他圓周於 C,D, 則 CD 必平行於過 P 的切線.

【提示】 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$.

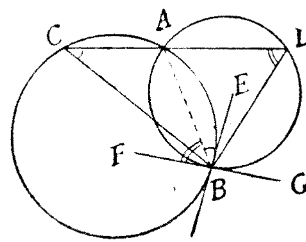
(11) 兩圓相交於 A, B, 過 A 引兩圓的切線 AC, AD, 則 $\angle CBA=\angle DBA$.



【提示】 $\angle C=\angle DAB$,

$\angle D=\angle CAB$.

(12) 兩圓相交於 A, B, 過 A 引任意直線 CAD, 交兩圓於 C,D, 則 $\angle CBD$ 恆等於過 B 的兩切線夾角.



【提示】 $\angle C=\angle ABE$,

$\angle D=\angle ABF$,

又 $\angle EBG$ 爲 $\angle EBF$ 的補角,故亦爲 $(\angle C+\angle D)$ 的補角.

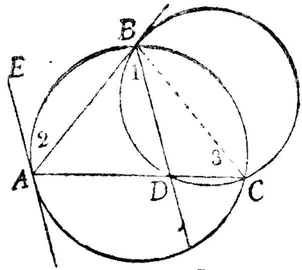
系 1. 在同圓或等圓中,夾等弧的弦切角必等.

【說明】 因所夾等弧對的圓周角相等.

系 2. 過弦的一端的線,若與弦的夾角等於此弦的弧所對的圓周角,則這線是切線.

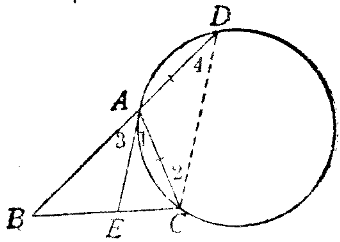
習 題 三 十 五

(1) AB, AC 爲過圓周上 A 點的二弦，BD 與切於 A 的切線平行，而與 AC 交於 D，則 $\odot BCD$ 與 AB 相切.



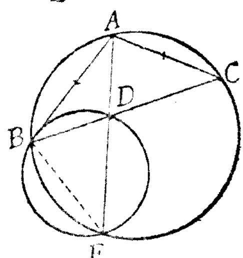
【提示】 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$.

(2) 延長 $\triangle ABC$ 的邊 BA 到 D，使 $AD=AC$，則 $\angle BAC$ 的二等分線 AE 必切於 $\odot CAD$.

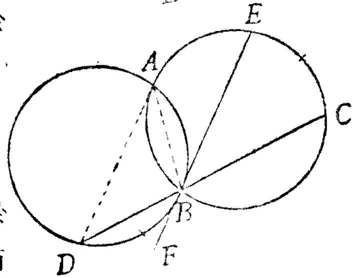


【提示】 $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$，折半得 $\angle 1=\angle 4$.

(3) 從等腰三角形 ABC 的頂角頂點 A 到底邊作直線 AD，延長之截外接圓於 E，則 AB 必切於 $\odot BDE$.



【提示】 $\angle ABC=\angle C=\angle E$.



(4) 兩等圓相交於 A, B、於圓周間作直線 DBC，而

在 $\overset{\frown}{AC}$ 上取 $\overset{\frown}{CE}$ 使等於 $\overset{\frown}{BD}$,則 BE 爲 $\odot ABD$ 的切線.

【提示】 $\angle DBF=\angle EBC=\angle A$.

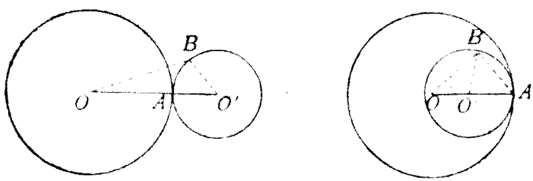
V 關於的兩圓的關係的

定理 14. 兩圓相遇的點若在聯心線上,則兩圓相切.

[設] $\odot O$, $\odot O'$ 的相遇點 A 在 OO' 上.

[求證] $\odot O$ 與 $\odot O'$ 相切.

[證] 在 $\odot O'$ 的圓周上任取一點 B,與 O,O' 各連結.



如左圖,則 $OB+BO'>OO'$ (△二邊和大於第三邊).

但 $BO'=AO'$ (同圓的半徑).

∴ $OB>OA$ (不等量減去等量,大者仍大).

∴ B 點在 $\odot O$ 的外面(因 B 點距中心大於半徑).

於是知 $\odot O'$ 上的點,除 A 外,都在 $\odot O$ 的外面,卽兩圓外切.

如右圖,則 $OB<OO'+O'B$ (△二邊和大於第三邊).

但 $O'B=O'A$ (同圓的半徑).

∴ $OB<OA$ (等量代入).

∴ B 點在 $\odot O$ 的裏面(因 B 點距中心小於半徑).

於是知$\odot O'$上的點除A外,都在$\odot O$的裏面,即兩圓內切.

系 1. **兩圓相切,則切點必在聯心線上.**

系 2. **兩圓相切,則過切點必有一公切線.**

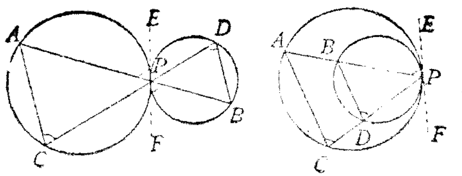
【說明】 過切點作聯心線的垂線,就是兩圓的公切線,因聯心線的兩部分,就是兩圓的半徑.

系 3. **兩圓同切於一直線上的同點,則兩圓相切.**

習題三十六

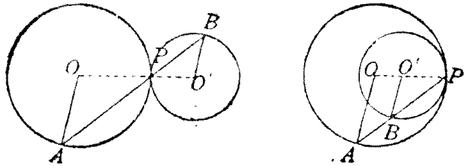
(1) 兩圓相切,於過切點的公切線上任取一點,從這點所引兩圓的切線必等.

(2) 兩圓相切,過切點引兩直線,則此二直線所截兩圓的弧上的弦必平行.



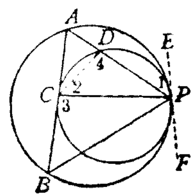
【提示】 過切點作公切線EF,則外切時,$\angle C=\angle APE$, $\angle D=\angle BPF$;內切時,$\angle C=\angle EPA$, $\angle BDP=\angle EPB$.

(3)　兩圓相切,過切點引一直線,從這線所截兩圓上的點引半徑,則這兩半徑必平行.



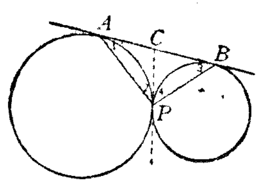
【提示】　聯心線 OO' 必過切點 P, 因 $\angle OPA = \angle O'PB$, $\therefore \angle OAP = \angle O'BP$.

(4)　兩圓內切於 P, 外圓的弦 AB 切內圓於 C, 連結 PA, PB, PC, 則 PC 必等分 $\angle APB$.



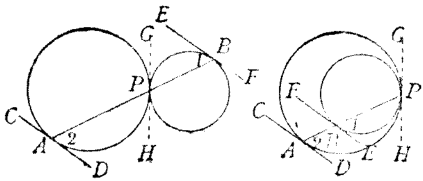
【提示】　$\angle B = \angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

(5)　兩圓外切於 P, 公切線切兩圓於 A, B, 則 $\angle APB = \angle R$.



【提示】　作公切線 CP, 則 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle R$

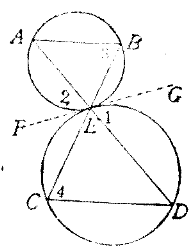
(6)　過兩圓的切點引一直線,與二圓周相交,則過此二交點的切線必平行.



【提示】　$\angle 1 = \angle GPB$(或 $\angle HPB$), $\angle 2 = \angle HPA$.

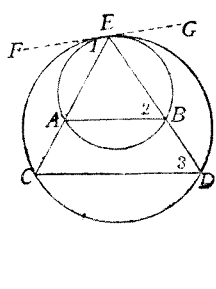
(7)　二平行的線段 AB, CD,若 AD, BC 的交點爲 E,則兩圓 AEB, CED 外切於 E.

【提示】　若過 E 引 FG 切於 ⊙AEB, 則 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$.

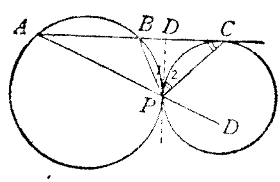


(8)　二平行的線段AB, CD, 若 AC, BD的交點爲 E, 則兩圓 AEB, CED內切於 E.

【提示】　若過 E 引 FG 切於 ⊙AEB, 則 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$.



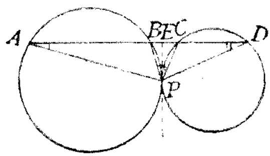
(9)　兩圓外切於 P,延長一圓的弦 AB, 使切另一圓於 C, 則 PC 等分 $\angle APB$ 的外角.



【提示】 作內公切線PD,則 $\angle A=\angle 1$, $\angle C=\angle 2$.
又 $\angle A+\angle C=\angle CPD$.

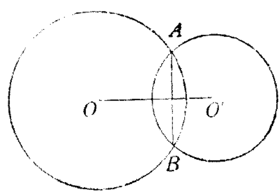
(10) 外切於 P 的兩圓周截一直線於 A, B, C, D, 則 $\angle APD+\angle BPC=2\angle R$.

【提示】 作內公切線 PE, 則 $\angle A=\angle BPE$, $\angle D=\angle CPE$, 又 $\angle A+\angle D+\angle APD=2\angle R$.



定理15. **兩圓相交,則聯心線必爲公共弦的中垂線.**

[設] $\odot O$ 與 $\odot O'$ 相交於 A, B.



[求證] OO' 垂直等分AB.

[證] $OA=OB$

(同圓的半徑),

$\therefore$ O 在 AB 的中垂線上

(線段兩端的等距離點,在線段的中垂線上).

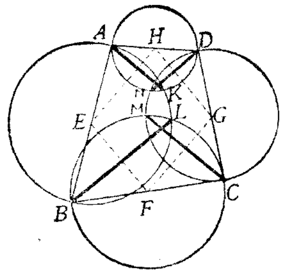
倣此 O' 亦在 AB 的中垂線上.

但過 O, O' 二點的直線唯一,

$\therefore$ OO' 垂直等分 AB.

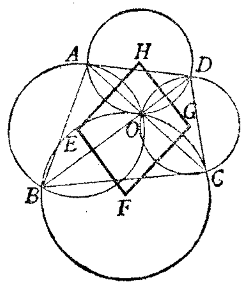
習 題 三 十 七

(1) 以四邊形的各邊為直徑各作一圓,則每相鄰兩邊上兩圓的公共弦必兩兩平行.



【提示】 順次連中心 E, F, G, H, 則 $EFGH$ 為▱, 因 $AK \perp EH$, $CM \perp FG$, $\therefore AK \parallel CM$.

(2) 四邊形 $ABCD$ 的對角線交於 O, 則四個三角形 AOB, BOC, COD, DOA 的外接圓的中心順次連結,必組成一平行四邊形.



【提示】 $EF \perp BD$, $HG \perp BD$, $\therefore EF \parallel HG$.

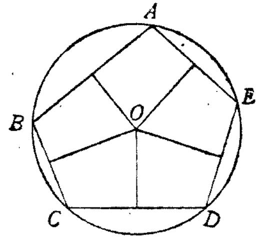
(VI) 關於內接及外切多邊形的

定理16. 圓的內接多邊形各邊的中垂線必會於一點,這點就是外心.

[設] ⊙O 的內接多邊形為 $ABCD$……。

[求證] AB, BC, CD,……的中垂線必會於中心 O.

[證] AB, BC, CD……都是多邊形外接圓的弦.



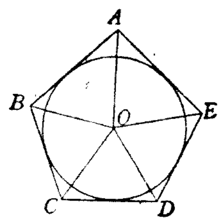
∴ $AB, BC, CD,$ ……的中垂線都能通過中心 O

(弦的中垂線必過中心).

即 $AB, BC, CD,$ ……的中垂線會於中心 O.

系. 若多邊形各邊的中垂線會於一點,則可作一外接圓.

定理17. 圓的外切多邊形各角的二等分線必會於一點,這點就是內心.



[設] ⊙ O 的外切多邊形爲 $ABCD$…….

[求證] $\angle A, \angle B, \angle C,$……的二等分線必會於中心 O.

[證] $\angle A, \angle B, \angle C,$……都是兩切線的交角.

∴ $\angle A, \angle B, \angle C,$……的二等分線都能通過中心 O (二切線交角的二等分線必過中心).

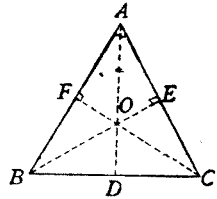
即 $\angle A, \angle B, \angle C,$……的二等分線會於中心 O.

系. 若多邊形各角的二等分線會於一點,則可作一內切圓.

習題三十八

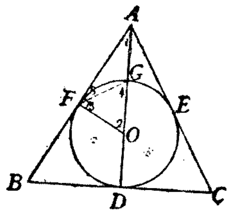
(1) 三角形的外心同內心合爲一點,則這三角形是

正三角形.



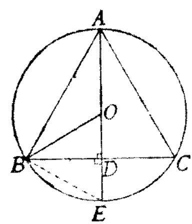
【提示】 O 爲外心,則邊的垂線OD, OE, OF必等分邊;O 爲內心,則 OA, OB, OC 等分$\angle A, \angle B$, $\angle C$.

(2) 正三角形內切圓的半徑,等於高的三分之一.



【提示】 作 $\angle A$ 的二等分線,必過中心 O,且$\perp BC$,故必過切點D. 因$\angle 1=\frac{1}{3}\angle R$, $\therefore \angle 2=\frac{2}{3}\angle R, \angle 3=\angle 4=\frac{2}{3}\angle R, \angle 5=\frac{1}{3}\angle R$, 於是 $AG=GF=FO=GO=OD$.

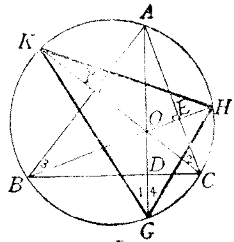
(3) 正三角形外接圓的半徑等於高的三分之二.



【提示】 作BC的中垂線,必過中心O,且過$\widehat{BAC}$的中點A.因 $\angle E=\angle C=\frac{2}{3}\angle R$, $\therefore \angle OBE=\frac{2}{3}\angle R$, $\angle BOE=\frac{2}{3}\angle R$,於是 $BO=BE$, $\triangle OBD \cong \triangle EBD$, OD

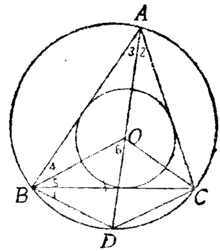
$$=DE=\frac{1}{2}OE=\frac{1}{2}OA.$$

(4) $\triangle ABC$的三頂垂線AD, BE, CF延長交外接圓於G, H, K,則$\triangle ABC$的垂心O為$\triangle GHK$的內心.



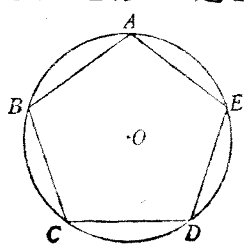
【提示】 $\angle 1=\angle 2=\angle R-\angle A=\angle 3=\angle 4.$

(5) $\triangle ABC$的內心為O,連結AO,延長交外接圓於D,則$DO=DB=DC$.



【提示】 O為內心,故OA,OB,OC等分$\triangle ABC$的各內角.於是得$\angle 6=\angle 3+\angle 4=\angle 2+\angle 5=\angle 1+\angle 5.$

定理18. 圓的內接等邊多邊形,必是正多邊形.



[設] $ABCD$……是圓O的內接等邊多邊形.

[求證] $ABCD$……是正多邊形.

[證] 因 $AB=BC=CD=DE=\cdots\cdots$ (所設),

∴ $\overparen{AB}=\overparen{BC}=\overparen{CD}=\overparen{DE}=\cdots\cdots$ (等弦對等弧).

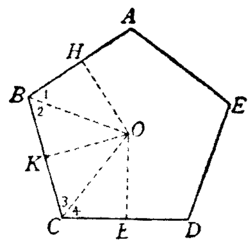
於是 $\overparen{AC}=\overparen{BD}=\overparen{CE}=\cdots\cdots$ (等量的二倍).

∴ $\angle B=\angle C=\angle D=\cdots\cdots$(等弧兩的圓周角亦等).

∴ $ABCD\cdots\cdots$是正多邊形.

定理19. 凡正多邊形都可作一外接圓.

[設] $ABCD\cdots\cdots$是正多邊形.



[求證] $ABCD\cdots\cdots$可作一外接圓.

[證] 作AB, BC的中垂線HO,KO交於O,取CD的中點L與O連結,再連OB, OC.

則 $BH=BK$ (等邊之半).

$\angle OHB=\angle OKB$ (直角).

$BO=BO$ (兩三角形公用),

∴ $\triangle OHB\cong\triangle OKB$ (二邊一直角互等).

∴ $\angle 1=\angle 2$ (全同三角形的對應角).

又 $OB=OC$ (線段的中垂線上的點距兩端等),

∴ $\angle 2=\angle 3$ (等腰△的底角).

但 $\angle 2=\frac{1}{2}\angle B$ (因$\angle 1=\angle 2$),

$\angle B=\angle C$ (正多邊形的內角),

$\therefore\quad \angle 3=\frac{1}{2}\angle C$　　(等量代入).

於是 $\angle 3=\angle 4$　　(因 $\angle 4$ 亦必等於 $\frac{1}{2}\angle C$).

又因 $CK=CL$　　(等邊之半),

$CO=CO$　　(兩三角形公用),

$\therefore\quad \triangle OKC\cong\triangle OLC$　　(二邊夾一角互等).

$\therefore\quad \angle OLC=\angle OKC=\angle R$

(全同三角形的對應角).

即　OL 爲 CD 的中垂線.

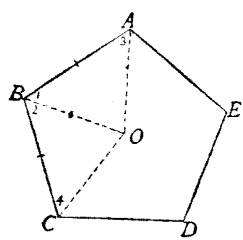
仿此從 O 到其餘各邊中點的線,都是邊的中垂線.

即　各邊的中垂線會於 O.

$\therefore$　正多邊形 $ABCD$……可作一外接圓

(多邊形各邊的中垂線會於一點的,可作外接圓).

定理20.　凡正多邊形都可作一內切圓.



[設]　$ABCD$……是正多邊形.

[求證]　$ABCD$……可作一內切圓.

[證]　作 $\angle A,\angle B$ 的二等分線交於 O, 連結 OC.

則　$\angle 1=\angle 2$　　(所作),

$AB=BC$　　(正多邊形的邊),

$BO=BO$　(兩三角形公用),

$\therefore$　$\triangle ABO \cong \triangle BCO$　(二邊夾一角互等).

$\therefore$　$\angle 3=\angle 4$　(全同三角形的對應角).

但　$\angle 3=\frac{1}{2}\angle A$　(所作),

$\angle A=\angle C$　(正多邊形的角),

$\therefore$　$\angle 4=\frac{1}{2}\angle C$　(等量代入).

卽　OC 爲 $\angle C$ 的二等分線.

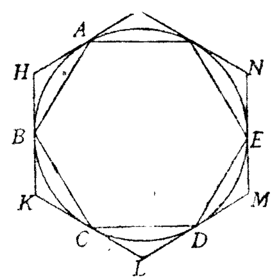
仿此 $OD, OE,$……是 $\angle D, \angle E,$……的二等分線.

卽　各角的二等分線會於 O.

$\therefore$　正多邊形 $ABCD$……可作一內切圓

(多邊形各角的二等分線會於一點,可作內切圓).

定理21.　等分圓周爲若干分,則順次連各分點所成的是內接正多邊形;在各分點作切線所成的是外切正多邊形.



[設]　等分圓周爲若干分,得分點 $A, B, C, D,$……. $AB, BC, CD,$……爲弦; $HK, KL, LM,$…… 爲過分點的切線.

[求證](一) 多邊形 $ABCD$……是內接正多邊形.

(二) 多邊形 $HKLM$……是外切正多邊形.

[證](一)　因 $AB=BC=CD$……　(等弧對等弦)

$\therefore$ 多邊形$ABCD$……是等邊多邊形.

於是多邊形$ABCD$……是正多邊形

(圓的內接等邊多邊 ,必是正多邊形).

(二) $\left.\begin{array}{l}\angle HAB=\angle KBC=\angle LCD=\cdots\cdots\\ \angle HBA=\angle KCB=\angle LDC=\cdots\cdots\end{array}\right\}$

(夾等弧的弦切角必等).

$\therefore$ $\angle H=\angle K=\angle L=\cdots\cdots$

(諸三角形兩組角都互等,則第三組角亦互等).

於是多邊形$HKLM$……的各角相等.

又因$\triangle ABH\cong\triangle BCK\cong\triangle CDL\cong\cdots\cdots$

(二角夾一邊互等).

$\therefore$ $\left.\begin{array}{l}HB=KC=LD=\cdots\cdots\\ BK=CL=DM=\cdots\cdots\end{array}\right\}$ (全同三角形的對應邊).

$\therefore$ $HK=KL=LM=\cdots\cdots$ (等量加等量)

於是多邊形$HKLM$……的各邊相等.

$\therefore$ 多邊形$HKLM$……是正多邊形.

*第五節 特種問題的證法

1. 證點在線上 欲證一點在一直線上,或一直線過一點,可把這點同線的兩端各連結,證這兩條連結線合一.

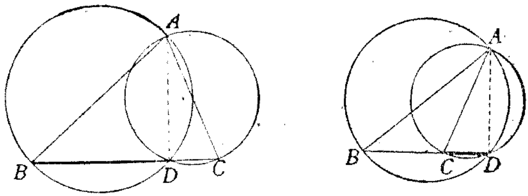
〔例題〕 以三角形的二邊爲直徑,各畫一圓,則二圓的交點在第三邊或第三邊的延長

線上.

［設］ 以$\triangle ABC$的邊AB,AC為直徑,各畫一圓,相交於D.

［求證］ D在BC邊或BC的延長線上.

［證］ 連結AD, BD, CD三直線.



則 $\left.\begin{array}{l}\angle ADB=\angle R\\ \angle ADC=\angle R\end{array}\right\}$ (半圓所對的圓周角).

如左圖, $\angle ADB+\angle ADC=2\angle R$ (等加等),

∴ BD,DC必合為一直線

(兩鄰角互補者,外邊為一直線).

卽 D點在BC邊上.

如右圖, $\angle ADB=\angle ADC$ (直角).

∴ BD, CD必合為一直線

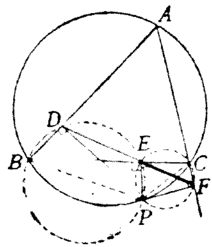
(二等角的頂點及一邊相合,他邊亦合).

卽 D點在BC邊的延長線上.

2. 證三點在一直線上 與第三章第四節 1 同.

〔例題〕 從三角形外接圓周上的任意點,作三邊的垂線,則三垂足在一直線上(這直線稱做 Simson 線).

〔設〕 從 $\triangle ABC$ 的外接圓周上的一點 P, 引 AB, BC, CA 的垂線 PD, PE, PF.



〔求證〕 D,E,F 三點在一直線上.

〔證〕 連結 DE, EF, BP, PC 四線段.

因 $\angle BDP = \angle BEP = \angle R$ (所設),

$\therefore$ 過 D, B, P, E 得作一圓

(兩 $\triangle$ 同底等頂角,過四頂點得作一圓).

又因 $\angle CEP + \angle CFP = \angle R + \angle R = 2\angle R$

(所設,等量加等量),

$\therefore$ 過 E, P, F, C 得作一圓

(四邊形對角互補,過四頂點得作一圓).

由是 $\angle PEF = \angle PCF$ (同弧所對的圓周角),

$= \angle ABP$ (內接四邊形外角等於內對角).

但 $\angle ABP + \angle DEP = 2\angle R$

(內接四邊形對角互補).

$\therefore$ $\angle PEF + \angle DEP = 2\angle R$ (等量代入).

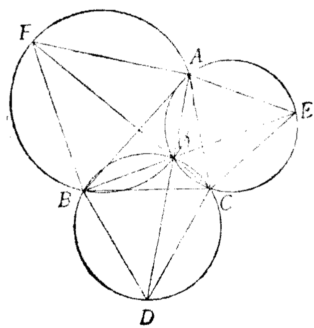
∴ DE, EF 合為一直線

(二鄰角互補,外邊成一直線).

即 D, E, F 三點在一直線上.

3. 證諸圓會於一點 欲證三圓或四圓會於一點,可先使二圓相交於一點,再證這交點在其他各圓周上.

[例題] 於△ABC的各邊上向形外各作正三角形BCD, CAE, ABF,則三正三角形的外接圓會於一點.且AD, BE, CF亦會於該點.



假設,求證從略.

[證](一) 若⊙ABF,⊙ACE交於O點,連結OA, OB, OC.

則 $\angle AOB+\angle F=2\angle R$

(內接四邊形對角互補).

因 $\angle F=\frac{2}{3}\angle R$

(正△的內角),

∴ $\angle AOB=\frac{4}{3}\angle R$ (等量減等量),

仿此 $\angle AOC=\frac{4}{3}\angle R$.

於是 $\angle BOC=\frac{4}{3}\angle R$

(因圍繞O點諸角的和是$4\angle R$).

又 $\angle D=\frac{2}{3}\angle R$ (正△的內角),

$\therefore$ $\angle BOC+\angle D=2\angle R$ (等量加等量).

$\therefore$ O,B,D,C 四點同在一圓周

(因四邊形對角互補).

即 $\odot BCD$ 亦過 O 點.

$\therefore$ $\odot ABF$, $\odot ACE$, $\odot BCD$ 會於 O 點.

(二) 再連結 DO, EO, FO.

則 $\angle BCD=\angle BOD$ (同弧所對的圓周角).

但 $\angle BCD=\frac{2}{3}\angle R$ (正三角形的內角).

$\therefore$ $\angle BOD=\frac{2}{3}\angle R$ (等量代入).

又 $\angle AOB=\frac{4}{3}\angle R$ (已證),

$\therefore$ $\angle BOD+\angle AOB=2\angle R$ (等量加等量).

$\therefore$ AO, OD 合為一直線

(二鄰角互補,外邊成直線).

即 AD 亦過 O 點.

仿此 BE, CF 都過 O 點.

4. 證諸點同在一圓周 欲證五點或五點以上同在一圓周,可先過三點作圓,證其餘各點都在這圓周上.

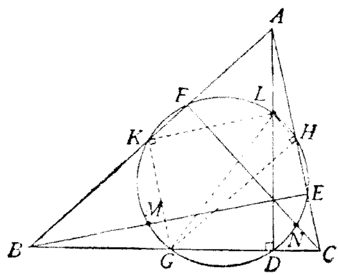
〔例題〕 一三角形中下列的九點同在一圓周(這圓稱做九點圓):

(a) 各邊的中點.

(b) 三頂垂線的垂足.

(c) 各頂點與垂心間的中點.

假設,求證從略.



[證] 連結 GL, GK, KL, GH, HL 諸線.

則 $KG \parallel AC, KL \parallel BE$ (△二邊中點連結線 ∥ 第三邊).

因 $AC \perp BE$ (所設),

$\therefore$ $KG \perp KL$ (垂線的平行線亦必垂直).

即 $\angle GKL = \angle R$ (垂線夾直角).

仿此 $\angle GHL = \angle R$.

又 $\angle GDL = \angle R$ (所設垂線的夾角).

$\therefore$ G, D, H, L, K 同在以 GL 爲直徑的圓周上

(直角△的直角頂,在以斜邊爲直徑的圓周上).

即過三邊中點 G, H, K 的圓,必過 AD 的垂足 D 及垂心,頂點間的中點 L.

仿此,以 MH 爲直徑作圓,知過 G, H, K 的圓必過 BE 的垂足 E 及垂心,頂點間的中點 M;

以 NK 爲直徑作圓,知過 G, H, K 的圓必過 CF 的垂足 F 及垂心,頂點間的中點 N.

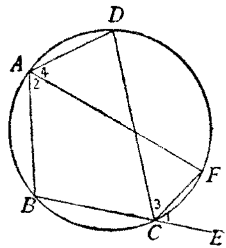
因過 G, H, K 三點的圓唯一,

∴ G,H,K,D,E,F,L,M,N 九點同在一圓周上.

【註】 本題證法極多,茲僅舉一例.

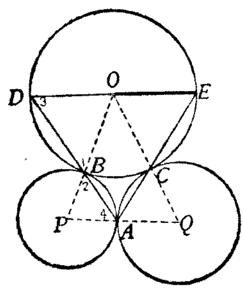
*習題三十九

(1) 圓的內接四邊形一外角的二等分線,與其內對角的二等分線的交點,在圓周上.



【提示】 作 $\angle DCE$ 的二等分線,交圓周於 F,連結 AF,則 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$,可證 AF 等分 $\angle A$.

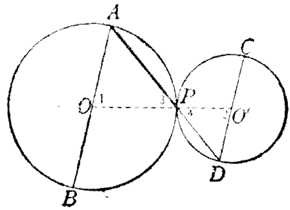
(2) 三圓互相外切,延長切點連結線 AB, AC,交一圓於 D,E,則 DE 為該圓的直徑.



【提示】 聯心線 PQ, OP, OQ 必過切點 A, B, C,連結 DO 及 OE,因 $\angle 1=\angle 2$, ∴ $\angle 3=\angle 4$, $DO \parallel PQ$. 仿此 $OE \parallel PQ$.

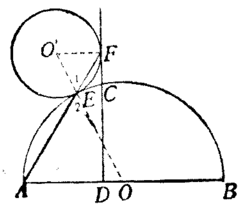
(3) 二圓外切於 P,平行線 AB, CD 各為一圓的直徑,則 AD, BC 交於 P 點.

【提示】 聯心線 OO' 必過 P,連結 AP,及 PD,因 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$



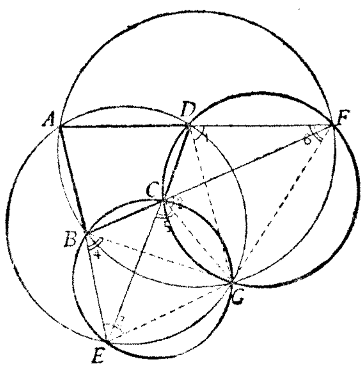
(因兩等腰△的頂角等).

(4) 過半圓周上任意點引直徑的垂線,作圓切於半圓周同這垂線,則二切點同直徑的一端在一直線上.



【提示】 聯心線 OO' 必過切點 E,連結 EF 及 EA,因 $O'F \parallel AB$,故 $\angle O'=\angle EOA$,於是 $\angle 1=\angle 2$.

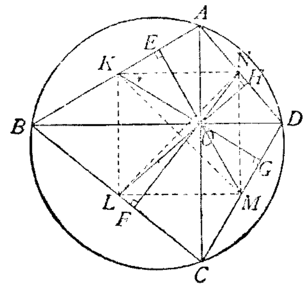
(5) 四邊形兩組對邊各延長相交,所得的四個三角形的外接圓,必會於一點.



【提示】 若 ⊙BEC, ⊙DCF 交於 G, 因

$\angle 1=\angle 2=\angle 3$, $\therefore$ ⊙AED 亦過 G; 因
$\angle 4=\angle 5=\angle 6$, $\therefore$ ⊙ABF 亦過 G.

(6) 圓的內接四邊形的對角線若互爲垂線,從交點引各邊的垂線,則四垂足及各邊的中點同在一圓周.



【提示】 據習題二十七(10),知從 O 引各邊的垂線延長必過對邊中點,又順次連結各中點,必組成一矩形,以矩形對角線交點爲中心作圓,必過八點.

第六節 證題根據的重要條件

1. 兩角相等的條件 (1)等弧對等中心角. (2)等弧(或同弧)所對的圓周角相等. (3)內接四邊形外角等於內對角. (4)弦切角等於夾同弧的圓周角. (5)夾等弧的弦切角相等. (6)二切線交角被從中心到交點的線等分. (7)過相交二切線的切點的兩半徑夾角,被從中心到交點的線等分. (8)兩切線與連切點的弦夾等角. (9)一弧所對的圓周角等於半弧所對的中心角.

2. 兩角成簡單關係的條件 (1) 圓周角等於同弧所對中心角的一半. (2) 內接四邊形的對角互補.

3. 兩角不等的條件 大弧對大中心角.

4. 一角為直角的條件 半圓所對或函的圓周角.

5. 兩線段相等的條件 (1) 同圓或等圓的半徑相等. (2) 等弧對等弦. (3) 距中心等的弦亦等. (4) 等弦距中心相等. (5) 從圓外一點所引的兩切線相等. (6) 從中心引弦的垂線,必等分弦. (7) 相交兩圓的聯心線,必等分公共弦.

6. 兩線段不等的條件 (1) 大弧對大弦. (2) 距中心近的弦較大. (3) 小弦與中心的距離較大.

7. 兩直線垂直的條件 (1) 中心與弦的中點連結線,與弦垂直. (2) 切線垂直於過切點的半徑(或直徑). (3) 相交兩圓的聯心線垂直於公共弦.

8. 直線過中心的條件 (1) 弦的中垂線. (2) 從切點引切線的垂線. (3) 兩切線交角的二等分線.

9.兩弧相等的條件 (1)等中心角對等弧. (2)等弦對等弧. (3)等圓周角對等弧. (4) 平行弦截等弧. (5)垂直於弦的直徑等分優劣二弧.

10.兩弧不等的條件 (1)大中心角對大弧. (2)大弦對大弧.

11.四點同在一圓周的條件 (1)對角互補的四邊形的項點. (2)外角等於內對角的四邊形的項點. (3)同底等項角的兩三角形的項點.

12.直線為切線的條件 (1)過半徑外端而垂直於這半徑的線. (2)過圓周上一點,而與過這點的弦成角等於夾同弧的圓周角的線.

13.兩圓相切的條件 (1)相遇點在聯心線上的. (2)同切於一直線上的同點的.

14.直線過一點的條件 (1)從中心引切線的垂線,必過切點. (2)相切兩圓的聯心線必過切點.

15.圓周過一點的條件 (1)以直角三角形斜邊為直徑的圓,必過直角項. (2)點與中心的距離等於半徑,則圓周過這點.

16.弧是半圓的條件 (1)直徑對的弧是半圓. (2)圓周角是$\angle R$的,對的弧是半圓.

17.弦是直徑的條件 (1)半圓對的弦是直徑. (2)圓周角是$\angle R$的,對的弦是直徑.

第六章 作圖

第一節 作圖題解法的方式

解幾何作圖題,同解證明題的方式略有不同,普通有下列的六步手續:

1. 預定題中已知的形,附以文字,畫在右邊。

2. 依所附文字,記出已知的形,前面冠一「設」字.

3. 記出題中欲作的是須合何種條件的形,前面冠一「求」字,或「求作」二字.

4. 設法作出所需的圖形,並記出作的方法,前面冠「作法」二字.

5. 證明所作的圖形合於所給的條件,記在「證」字的後面.

6. 討論這合於條件的圖形,在何種情形下,無法可作;在何種情形下,可作一個;在何種情形下,可作數個.但這步手續,在初等幾何學中不妨略去.

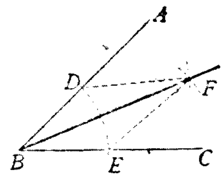
第二節 基礎作圖題

作圖題 1. 作已知角的二等分線.

〔設〕 $\angle ABC$.

[求作] $\angle ABC$ 的二等分線.

[作法] 以 B 爲中心,任意長爲半徑作一弧,與二邊 BA, BC 交於 D, E. 以 D, E 各爲中心,相等的長爲半徑各作一弧,相交於 F. 連結 BF, 即爲所求的二等分線.



[證] 連結 DF, EF,

則 $BD=BE, DF=EF$(所作), $BF=BF$,

$\therefore$ $\triangle DBF \cong \triangle EBF$ (三邊互等).

$\therefore$ $\angle DBF=\angle EBF$ (全同三角形的對應角).

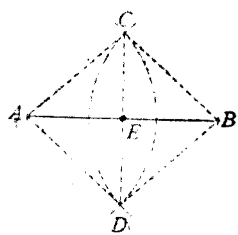
【注意】 以 D, E 爲中心所作弧的半徑,須大於 DE 之半,否則沒有交點.

作圖題 2 分已知的線段爲二等分.

[設] 線段 AB.

[求] 等分 AB 爲二.

[作法] 見第二章第二節,此處從略.



[證] 連結 AC, BC, AD, BD,

則 $AC=DB, AD=CB$ (所作),

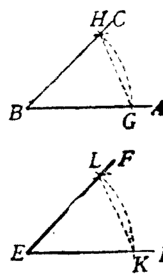
$\therefore$ $\square DBC$ 爲 $\square$ (對邊各相等).

$\therefore$ $AE=EB$ ($\square$ 對角線互相等分).

系 作已知線段的中垂線.

【說明】 作法同上,因可證 $ADBC$ 爲菱形,故 CD 爲 AB 的中垂線.

作圖題 3. 於已知直線的一端,求作一直線,使與已知直線成角等於已知角.



[設] 直線 ED, $\angle CBA$.

[求] 從 E 作一直線,使與 ED 成角等於 $\angle CBA$.

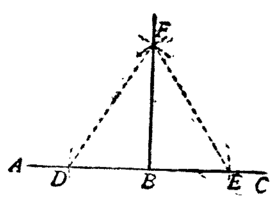
[作法] 見第二章第二節.

[證] 連結 HG, LK,則 $BH=EL$, $BG=EK$, $HG=LK$ (所作).

$\therefore \quad \triangle HBG \cong \triangle LEK$ (三邊互等).

$\therefore \quad \angle B=\angle E$ (全同三角形的對應角).

作圖題 4. 從已知直線上的已知點,求作這線的垂線.



[設] B 爲 AC 直線上的一點.

[求] 從 B 作 AC 的垂線.

[作法] 見第二章第二節.

[證] 連結 DF, EF,

則 $BD=BE$, $DF=EF$ (所作),

$BF=BF$.

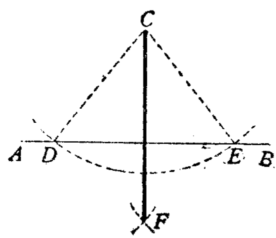
$\therefore\quad \triangle DBF \cong \triangle EBF$　(三邊互等).

$\angle DBF = \angle EBF$　(全同三角形的對應角).

$\therefore\quad FB \perp AC$

(相交二線所成的兩鄰角等的,二線垂直).

作圖題 5.　從已知直線外的已知點,作這線的垂線.



[設]　C 為直線 AB 外的一點.

[求]　從 C 作 AB 的垂線.

[作法]　見第二章第二節.

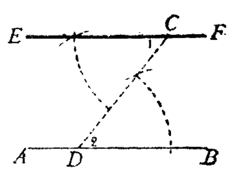
[證]　連結 CD, CE,

則　$CD = CE$, 即 $\triangle CDE$ 等腰　(所作).

但　CF 等分 $\angle C$ (因作圖法與等分已知角相同),

$\therefore\quad CF \perp AB$　(等腰 $\triangle$ 頂角二等分線 $\perp$ 底邊).

作圖題 6.　過已知直線外的已知點,作這線的平行線.



[設]　C 為直線 AB 外的一點.

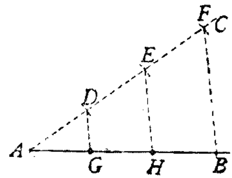
[求]　過 C 作 AB 的平行線.

[作法]　見第二章第二節.

[證]　因 $\angle 1 = \angle 2$　(所作),

$\therefore\quad EF \parallel AB$　(錯角等者,二線平行).

作圖題 7.　等分已知線段爲若干等分.



[設]　線段 AB.

[求]　分 AB 爲若干等分.

[作法]　見第二章第二節.

[證]　因 $AD=\cdots\cdots=EF$ (所作).

$\therefore$　　$AG=\cdots\cdots=HB$

(諸平行線截一線爲等分,則截任何線都成等分

習題四十

(1)　分已知角爲四等分.

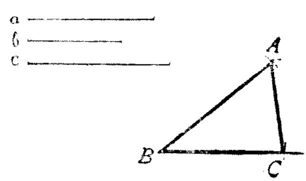
【提示】　等分已知角爲二,再等分他的半分.

(2)　於已知的一邊上作正方形.

(3)　已知二邊的長,求作一矩形.

(4)　已知三邊的長,求作三角形.

【提示】　於任意直線上截 BC 等於定長 a, 以 B, C 各爲中心,定長 b, c 各爲半徑作弧交於 A.



【注意】　若 a, b, c 中二線的和小於第三線,作圖不可能.

(5)　於已知一邊上作正三角形.

(6)　已知正三角形周圍的長,求作這形.

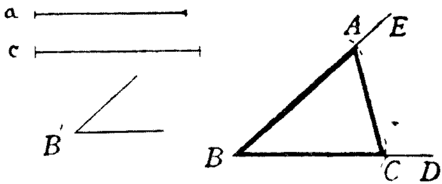
(7) 分直角爲三等分.

【提示】 從頂點起,截邊上的一部爲邊,作正三角形.

(8) 已知四邊及一對角線的長,求作四邊形.

(9) 已知二邊的長及夾角的大小,求作三角形.

【提示】 作 $\angle EBD$ 等於定角 B',以 B 爲中心,a 爲半徑作弧,截 BD 於 C; c 爲半徑作弧截 BE 於 A.

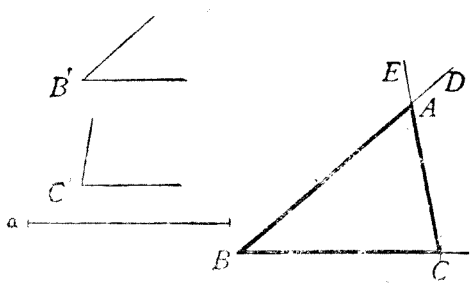


(10) 已知二邊的長及夾角的大小,求作平行四邊形.

(11) 已知四邊的長及一角的大小,求作四邊形.

(12) 已知周圍的長及一角的大小,求作菱形.

(13) 已知二角大小及角頂間一邊的長,求作三角形



【提示】 於任意直線上截BC使等於定長a，作BD使$\angle B$等於定角B'；作CE使$\angle C$等於定角C'，二線交於A.

(14) 已知斜邊的長，求作等腰直角三角形.

【提示】 從兩端各作垂線，等分直角為二.

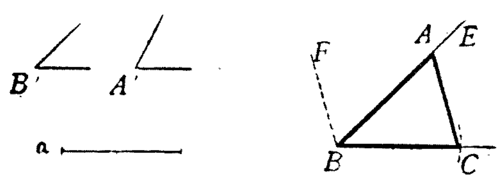
(15) 已知對角線的長，求作正方形.

(16) 已知正三角形的高，求作這形.

【提示】 作直線等於已知高，於一端向兩側各作角等於$\frac{1}{3}\angle R$，他端作垂線.

(17) 已知二角的大小及一角對邊的長，求作一三角形.

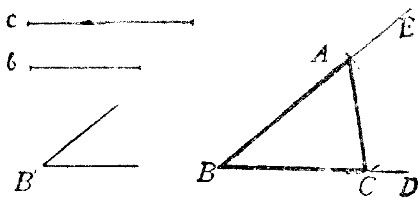
【提示】 於任意直線上截BC使等於定長a. 從B作BE，使$\angle EBC$等於定角B'，作BF使$\angle FBE$等於定角A'，從C作BF的平行線CA.



【注意】 若A', B'的和大於$2\angle R$，則作圖不可能.

(18) 已知二邊的長及一邊對角的大小，求作一三角形.

【提示】 作 $\angle EBD$ 使等於定角 B';以 B 爲中心,定長 c 爲半徑作弧,交 BE 於 A;以 A 爲中心,定長 b 爲半徑作弧,交 BD 於 C.



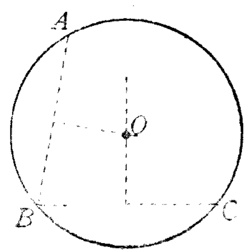
【注意】 若 b 過短,致不能與 BD 相遇,則作圖不可能.

作圖題 8. 求已知圓的中心.

[設] $\odot ABC$.

[求] $\odot ABC$ 的中心.

[作法] 見第五章第二節.



[證] AB 的中垂線必過中心, BC 的中垂線必過中心. (因 AB, BC 都是弦).

而兩直線的交點唯一.

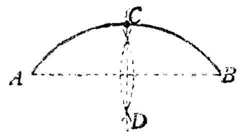
$\therefore$ 交點 O 爲 $\odot ABC$ 的中心.

作圖題 9. 分已知弧爲二等分.

[設] AB 爲弧.

[求] 等分$\overset{\frown}{AB}$爲二.

[作法] 見第五章第二節.



[證] CD必過中心

(弦的中垂線必過中心).

∴ CD等分$\overset{\frown}{AB}$

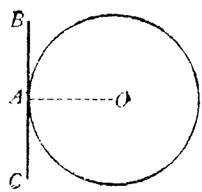
(垂直於弦的直徑,必等分此弦所對的弧).

作圖題10. **過已知圓上的已知點,作這圓的切線.**

[設] A爲$\odot O$上的一點.

[求] 過A作$\odot O$的切線.

[作法] 見第五章第二節.



[證] 因$BC\perp AO$ (所作),

∴ BC爲$\odot O$的切線

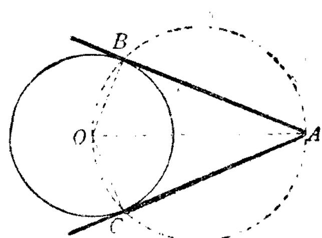
(過半徑外端,而⊥半徑的線是切線).

作圖題11. **從已知圓外的已知點,作這圓的切線.**

[設] A爲$\odot O$外的一點.

[求] 從A作$\odot O$的切線.

[作法] 見第五章第二節.



[證] 作半徑BO, CO,

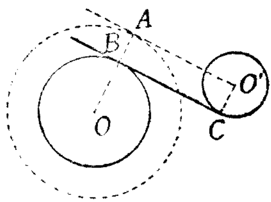
則 $\angle OBA = \angle R$ (半圓對的圓周角爲$\angle R$).

$\therefore$ AB 為 $\odot O$ 的切線

(過半徑外端而$\perp$半徑的線是切線).

仿此 AC 亦為 $\odot O$ 的切線.

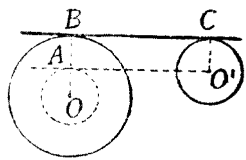
作圖題 12. 作已知兩圓的公切線.



[設] $\odot O$, $\odot O'$.

[求作] $\odot O$, $\odot O'$ 的公切線.

[作法] 見第五章第二節.



[證] 因 $O'A$ 為切線,

$\therefore$ $OA \perp O'A$

(切線$\perp$過切點的半徑).

即 $\angle OAO' = \angle R$ (垂線夾直角).

又因 $OA = OB \pm O'C$ (所作),

$\therefore$ $AB = O'C$ (等量減等量).

又 $AB \parallel O'C$ (所作),

$\therefore$ $ABCO'$ 為 ▱ (對邊各平行).

且 $ABCO'$ 為矩形 (▱有一角為直角的).

$\therefore$ $\angle OBC = \angle R$, $\angle O'CB = \angle R$

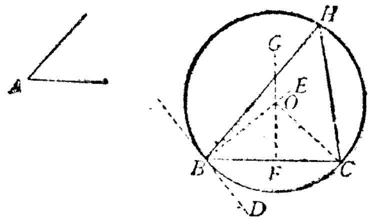
(矩形的內角或外角).

$\therefore$ BC 切於 $\odot O$ 及 $\odot O'$

(過半徑外端而$\perp$半徑的線是切線).

作圖題13. 以已知線段爲弦,求作一弧,使其所函的圓周角等於已知角.

［設］ $\angle A$ 爲已知角,BC 爲已知線段.



［求］ 以 BC 爲弦作一弧,使其所函的圓周角等於 $\angle A$.

［作法］ 過 B 作 BD,使 $\angle DBC=\angle A$,從 B 作 BD 的垂線 BE,再作 BC 的中垂線 GF,相交於 O.以 O 爲中心,OB 爲半徑作圓,則 $\overset{\frown}{BHC}$ 爲所求的弧.

［證］ 因 $OB=OC$ (線段中垂線上的點,距兩端等).

$\therefore$ 所作的圓必過 B, C

(點距中心等於半徑,則點在圓周).

即 BC 爲弦.

又因 $BD\perp BO$ (所作),

$\therefore$ BD 爲切線

(過半徑外端而 $\perp$ 半徑的線是切線).

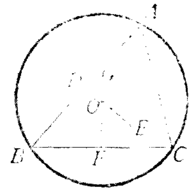
作 $\overset{\frown}{BHC}$ 所函的圓周角 BHC.

則 $\angle BHC=\angle DBC$(圓周角等於夾同弧的弦切角)

$=\angle A$ (所作).

作圖題14. 作已知三角形的外接圓.

［設］ $\triangle ABC$.



［求作］ $\triangle ABC$ 的外接圓.

［作法］ 見第五章第二節.

［證］ DE 上的點距 A,B 相等

(線段的中垂線上的點距兩端必等).

FG 上的點距 B,C 相等 (同上).

∴ DE, FG 的交點 O 必距 A, B, C 三點相等.

(因 $OA=OB$, $OB=OC$, ∴ $OA=OB=OC$).

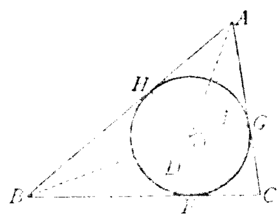
於是以 O 爲中心,OA 爲半徑作圓,必過 A,B,C 三點

(點與中心距離等於半徑,則點在圓周上).

即 $\odot O$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓.

作圖題 15. 作已知三角形的內切圓.

［設］ $\triangle ABC$.



［求作］ $\triangle ABC$ 的內切圓.

［作法］ 見第五章第二節.

［證］ 從 O 引邊 BC, CA, AB 的垂線 OF, OG, OH.

則 $OG=OH$, $OH=OF$

(角的二等分線上的點距兩邊相等).

∴ $OG=OH=OF$.

於是以 O 爲中心,OF 爲半徑作圓,必過 F,G,H 三點

(點與中心距離等於半徑,則點在圓周上).

又因 $BC\perp OF, CA\perp OG, AB\perp OH$ (所作),

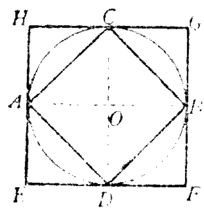
$\therefore$ BC, CA, AB 爲 $\odot O$ 的切線

(過半徑外端而⊥半徑的線是切線).

即 $\odot O$ 爲 $\triangle ABC$ 的內切圓.

作圖題16. 作已知圓的內接及外切 2^n 邊的正多邊形.

[設] $\odot O$.



[求作] $\odot O$ 的內接及外切4, 8,16,32,……邊的正多邊形.

[作法] 作垂直的兩直徑 AOB, COD. 順次連結 A, D, B, C, 得內接正四邊形 $ADBC$. 過 A, D, B, C 各作圓的切線,得外切正四邊形 $EFGH$.

等分 $\overset{\frown}{AD}, \overset{\frown}{DB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$, 仿上法得內接及外切正八邊形.

以下類推.

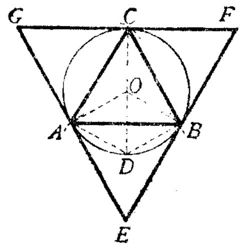
[證] $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CA}$

(垂直的二直徑,分圓周爲四等分).

$\therefore$ $ADBC$ 爲內接正四邊形, $EFGH$ 爲外切正四邊形 (等分圓周爲若干分,連各分點所成的是內接正多邊形;過分點作切線所成的是外切正多邊形).

其餘類推.

作圖題17. 作一已知圓的內接及外切 3×2^n 邊的正多邊形.



［設］ $\odot O$.

［求作］ $\odot O$ 的內接及外切 3,6,12,24,……邊的正多邊形.

［作法］ 以圓周上任意點 D 爲中心,半徑 DO 爲半徑作弧,交原圓於 A, B.以 A 爲中心,AB 爲半徑作弧,交原圓於 C,則 $\triangle ABC$ 爲內接正三角形;過 A, B, C 各作切線,所成的 $\triangle EFG$ 爲外切正三角形.

等分 $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$,仿上法即得內接及外切正六邊形.

以下類推.

［證］ 連結 OA, OB, OC, OD, AD, BD.

則 $\triangle OAD$, $\triangle OBD$ 都是正三角形 （三邊相等）.

$\therefore$ $\angle AOD=\frac{2}{3}\angle R$, $\angle BOD=\frac{2}{3}\angle R$ （正△的內角）.

$\therefore$ $\angle AOB=\frac{4}{3}\angle R$ （等加等）.

但 $AC=AB$ （所作）,

$\therefore$ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$ （等弦對等弧）.

於是 $\angle AOC=\angle AOB=\frac{4}{3}\angle R$ （等弧對等中心角）.

$\therefore$ $\angle BOC=4\angle R-(\angle AOB+\angle AOC)=\frac{4}{3}\angle R$

（圍繞一點的諸角的和爲 $4\angle R$）,

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CA}$ (等中心角對等弧).

∴ $\triangle ABC$為內接正三角形,$\triangle EFG$為外切正三角形 (理由與作圖題16同).

其餘類推.

習題四十一

(1) 作已知三角形的三個傍切圓.

【提示】 仿作圖題15.

(2) 作已知正多邊形的外接圓及內切圓.

【提示】 仿作圖題14,15.

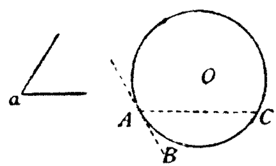
(3) 作已知兩等圓的外公切線.

【提示】 參閱第五章第二節7.

(4) 作一圓切於已知圓上的已知點,且使其半徑等於定長.

【提示】 參閱第五章第二節8.

(5) 在已知圓上截取一弧,使其所對的圓周角等於已知角.

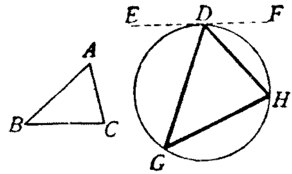


【提示】 在已知圓上任意點A作切線AB,從A作AC,使$\angle BAC$等於已知角a.

(6) 作已知圓的內接三角形,使其各角等於已知三

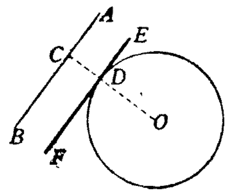
角形的角.

【提示】 在已知圓上任意點作切線 EF,再作 DG, DH,使 $\angle EDG$, $\angle FDH$ 各等於已知 $\triangle ABC$ 的 $\angle C$, $\angle B$.



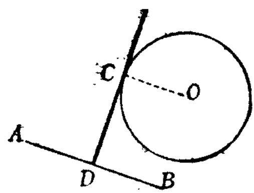
(7) 作已知圓的切線,使平行於已知直線.

【提示】 從中心 O 作已知線 AB 的垂線,交圓周於 D,過 D 作切線.



(8) 作已知圓的切線,使垂直於已知直線.

【提示】 作半徑 OC 平行於已知線 AB.



第三節 作圖題的解析法

複雜的作圖題,往往可由解析找到他的作法.雖然沒有定則可以應用於一切作圖題,但通常總不外下列的幾個步驟:

1. 作一個與所求的形近似的圖,大小形狀不一定要準確.

2. 在圖中找出已知長的線段,描成粗筆;或已知大小的角,用記號標明.

3. 細察圖中的那一部分可以先行作出.

4. 把可以先行作出的一部分圖形做基礎,繼續決定所求的圖中的其他部分.

5. 假使找不到可以先行作出的一部分圖形,應設法添加補助線.

現在把他分類詳述於下:

1. 先作可能三角形法 凡已知一三角形中下列各項的三要素,要作這三角形,都是可能.

(*a*) 已知三邊的長.

(*b*) 已知二邊的長及夾角的大小.

(*c*) 已知二角的大小及角頂間的邊長.

(*d*) 已知二角的大小及一角對邊的長.

(*e*) 已知二邊的長及一邊對角的大小.

若欲作三角形或平行四邊形,而其中的部分三角形已知上列五項之一的,可以把他先行作出,然後繼續作成所求的形.

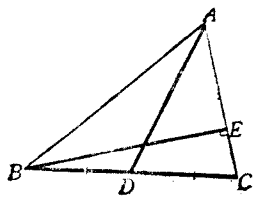
習題四十的(8),(10),(11),(12),(15),(16)等,就是最簡易的例.下面再舉一個例題:

[例題] 已知一邊,這邊上的中線及另一邊上的高,求作三角形.

[設] a 爲三角形的一邊, m_a 爲這邊上的中線, h_b 爲另一邊上的高.

[求作] 三角形.

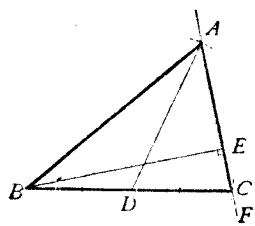
【解析】 若 $\triangle ABC$ 爲所求的三角形,$BC=a$, $AD=m_a$, $BE=h_b$, 且 $\angle BEC=\angle R$, $BD=DC$.



則在 $\triangle EBC$ 中,已知二邊及一邊的對角,故可先行作出.

再在 $\triangle ADC$ 中, $\angle C$ 可由 $\triangle EBC$ 而定,再知 AD, DC 的長,故亦可作出.

[作法] 作 $BE=h_b$,過 E 作 BE 的垂線 EF. 以 B 爲中心, a 爲半徑作弧,截 EF 於 C,作 BC. 等分 BC 於 D,以 D 爲中心, m_a 爲半徑作弧,截 FE 的延長線於 A,作 AB,則 $\triangle ABC$ 爲所求的三角形.



[證] $BC=a$, $AD=m_a$, $BE=h_b$ (所作).

又因 $\angle BEC=\angle R$, $\therefore BE$ 是高.

$BD=DC$, $\therefore AD$ 是中線.

【註】　本書常用 A', B', C' 表所求的 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的大小; a, b, c 表 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的對邊的長; m_a, m_b, m_c 表在 a, b, c 三邊上的中線的長, h_a, h_b, h_c 表三邊上的高; t_a, t_b, t_c 表三邊上的角二等分線的長.

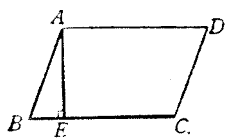
習題四十二

(1)　已知相鄰二邊及一對角線,求作平行四邊形.

(2)　已知一邊,一角及不過這角頂的一對角線,求作平行四邊形.

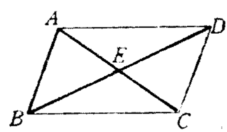
(3)　已知相鄰二邊及一高,求作平行四邊形.

【提示】　先作 $\triangle ABE$.



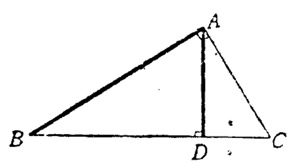
(4)　已知二對角線及一邊,求作平行四邊形.

【解析】　AE, BE 各爲對角線之半,故亦爲已知.



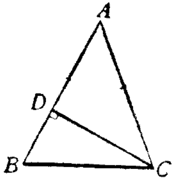
(5)　已知一直角邊及斜邊上的高,求作直角三角形.

【提示】　先作 $\triangle ABD$.

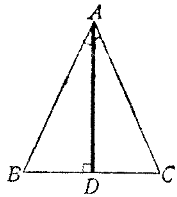


(6)　已知底邊及一腰上的高,求作等腰三角形.

【提示】 先作$\triangle DBC$,再作$\angle ACB=\angle B$.



(6)



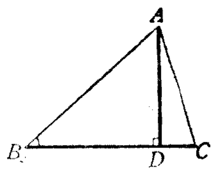
(7)

(7) 已知底邊上的高及頂角,求作等腰三角形.

【解析】 $\angle BAD$為頂角之半,亦爲已知.

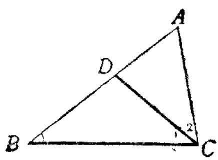
(8) 已知底邊,底邊上的高及一底角,求作三角形.

【提示】 先作$\triangle ABD$.

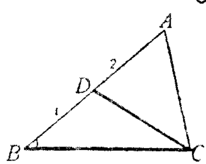


(9) 已知底邊,一底角及他底角的二等分線,求作三角形.

【提示】 先作$\triangle DBC$,再作$\angle 2=\angle 1$.



(10) 已知底邊,一底角及他底角頂所引的中線,求作三角形.



(11) 已知二邊及其中一邊上的中線,求作三角形.

(12) 已知二邊及其中一邊上的高,求作三角形.

(13) 已知頂角,底邊上的高及頂角的一邊,求作三角形.

(14) 已知一角,他角的二等分線及二角頂點間的邊,求作三角形.

(15) 已知一邊上的高及其他二邊,求作三角形.

(16) 已知一角,這角的二等分線及一邊,求作三角形.

(17) 已知二角及其中一角頂的高,求作三角形.

(18) 已知底邊,底邊上的中線及高,求作三角形.

(19) 已知頂角的一邊,及這角頂的高同中線,求作三角形.

(20) 已知二邊上的中線及其中一邊,求作三角形.

【提示】 二中線的交點,分各中線爲二部,一部爲$\frac{1}{3}$,他部爲$\frac{2}{3}$.

(21) 已知一邊及其他二邊上的高,求作三角形.

(22) 已知頂角,頂角二等分線及底邊上的高,求作三角形.

2. 等腰折合法 已知三角形二邊的和或差時,常利用等腰三角形底角相等的定理,將和,差折合而成兩邊.

[例題一] 已知頂角,底邊及其他二邊的和,求作三角形.

[設] A'爲頂角,a爲底邊,$(b+c)$爲其他二邊的和.

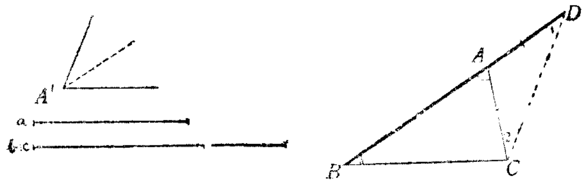
[求作] 三角形.

【解析】 若$\triangle ABC$爲所求的三角形,$BC=a$,

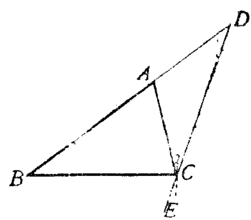
$\angle BAC=\angle A'$, $AB+AC=b+c$, 且 $BD=b+c$, 則 $AD=AC$,
$\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\angle A'$, 故 $\angle 1$ 爲已知.

在 $\triangle BDC$ 中,已知二邊及一對角,故作圖可能.

再作 CA 使 $\angle 2=\frac{1}{2}\angle A'$, 卽得.



[作法] 作 $BD=b+c$, 等分 $\angle A'$, 於 D 作 $\angle 1=\frac{1}{2}\angle A'$. 以 B 爲中心, a 爲半徑作弧,截 DE 於 C. 於 C 作 $\angle 2=\frac{1}{2}\angle A'$, 交 BD 於 A, 則 $\triangle ABC$ 爲所求的三角形.



[證] 因 $\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle A'$ (所作),

$\therefore$ $AC=AD$ (△等角對等邊).

$\therefore$ $AB+AC=AB+AD=BD=b+c$ (等加等).

又 $\angle BAC=\angle 1+\angle 2=\angle A'$

(△外角等於不相鄰二內角和).

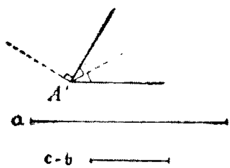
$BC=a$ (所作).

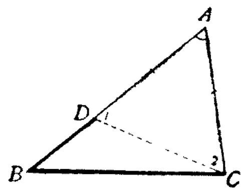
[例題二] 已知頂角,底邊及其他二邊的差,求作三角形.

［設］ A' 爲頂角，a 爲底邊，$c-b$ 爲其他二邊的差．

［求作］ 三角形．

【解析】 若 $\triangle ABC$ 爲所求的三角形，$\angle A=\angle A'$，$BC=a$，$AB-AC=c-b$，且 $BD=c-b$，則 $AD=AC$，$\angle 1=\angle 2$，$\therefore \angle BDC=\angle A+\angle 2=\angle A+\frac{1}{2}(2\angle R-\angle A)=\angle R+\frac{1}{2}\angle A=\angle R+\frac{1}{2}\angle A'$，故 $\angle BDC$ 爲已知．

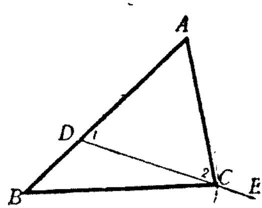




在 $\triangle DBC$ 中，已知二邊及一對角，故作圖可能．

延長 BD，從 C 作 $\angle 2=\angle 1$，卽得．

［作法］ 作 $BD=c-b$，於 D 作 $\angle BDE=\angle R+\frac{1}{2}\angle A'$．以 B 爲中心．a 爲半徑作弧，截 DE 於 C．作 DC，延長 BD．於 C 作 $\angle 2=\angle 1$，得交點 A，則 $\triangle ABC$ 爲所求的三角形．



［證］ 因 $\angle 1=\angle 2$ （所作），

$\therefore$ $AC=AD$ （$\triangle$ 等角對等邊）．

$\therefore$ $AB-AC=AB-AD=BD=c-b$ （等減等）．

又 $\angle A=2\angle R-(\angle 1+\angle 2)$ （$\triangle$ 三內角和爲 $2\angle R$）

$=2\angle R-2\angle 1=\angle 2\angle R-2(2\angle R-\angle BDC)$

$=2\angle R-4\angle R+2\angle BDC=2(\angle R+\frac{1}{2}\angle A')$

$-2\angle R=\angle A'$.

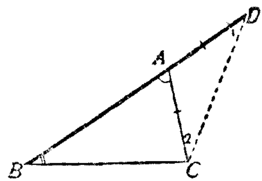
$BC=a$ (所作).

習題四十三

(1) 已知底邊,一底角及其他二邊的和,求作三角形

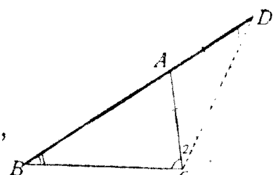
(2) 已知底邊,一底角及其他二邊的差,求作三角形.

(3) 已知二邊的和,夾角及另一角,求作三角形.



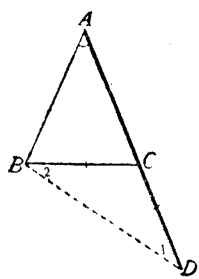
【解析】 $\angle 1=\frac{1}{2}\angle A$,故為已知.

(4) 已知二角及二對邊的和,求作三角形.



【解析】 $\angle 1=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}(2\angle R-\angle B-\angle C)$,故為已知.

(5) 已知頂角及腰與底的和,求作等腰三角形.



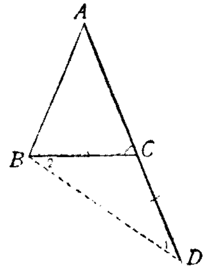
【解析】 $\angle 1=\frac{1}{2}\angle ACB$

$=\frac{1}{4}(\angle ACB+\angle B)$

$=\frac{1}{4}(2\angle R-\angle A)$,

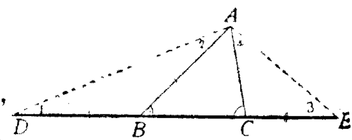
故為已知.

(6) 已知底角及腰與底的和,求作等腰三角形.



【解析】 $\angle 1=\frac{1}{2}\angle ACB$, $\angle A=2\angle R-\angle B-\angle ACB=2\angle R-2\angle ACB$,故為已知.

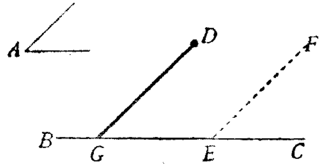
(7) 已知周圍及兩角,求作三角形.



【解析】 $\angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle 3=\frac{1}{2}\angle ACB$, 故都是已知.

3. 平行移動法 (I)欲作一線合於二個條件,往往先作一線,使合於第一條件,然後平行移動,使再合於第二條件.

[例題] 從已知直線外的一定點,作一直線,使與已知直線成角等於已知角.



[設] $\angle A$ 為已知角, D 為直線 BC 外的一點.

[求] 從 D 作直線與 BC 夾角等於 $\angle A$.

[作法] 在 BC 上任取一點 E,作 EF,使 $\angle FEC=\angle A$.從 D 作 EF 的平行線,交 BC 於

G,則 DG 爲所求的直線.

[證] $\angle DGC = \angle FEC$ (平行線間的同位角).

又因 $\angle FEC = \angle A$ (所作),

$\therefore$ $\angle DGC = \angle A$ (等於同量).

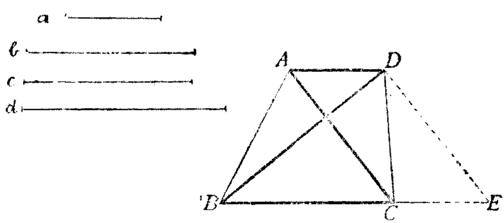
(II) 作三角形或梯形時,往往把已知的線段平行移動,使他的一端與另一已知線段的一端相合,造成作圖可能的三角形,然後仿1的方法解.

[例題] 已知兩底及兩對角線,求作梯形.

[設] a, b 爲二底, c, d 爲二對角線.

[求作] 梯形.

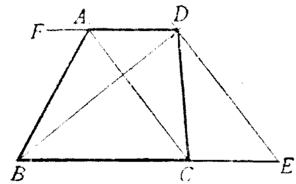
[解析] 若 $ABCD$ 爲所求的梯形, $AD=a$, $BC=b$, $AC=c$, $BD=d$.



延長 BC, 使 $CE=AD$, 因 $CE \parallel AD$, 故 $ACED$ 爲▱, $AC=DE$,即 DE 爲已知.又 $BE=BC+CE=b+a$,亦爲已知,故 $\triangle DBE$ 作圖可能.

[作法] 作 $BE=a+b$, 以 B 爲中心, d 爲半徑作弧;

E 爲中心,c 爲半徑作弧,二弧交於 D.從 D 作 $DF \parallel BE$,截 $DA=a$,從 A 作 $AC \parallel DE$,交 BE 於 C.作 AB,DC,則 $ABCD$ 爲所求的梯形.



[證] 因 $ACED$ 爲▱ (對邊各平行),

∴ $AC=DE=c$ (▱的對邊).

因 $CE=AD$ (同上),

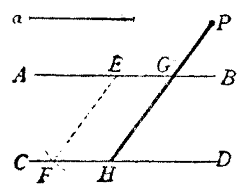
∴ $BE-CE=BE-AD=(a+b)-a=b$ (等減等).

卽 $BC=b$.

又 $BD=d$.

習 題 四 十 四

(1) 過已知點求作一直線,使其線在已知二平行線間的部分等於定長.

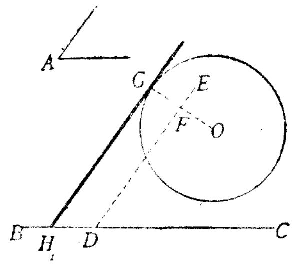


【提示】 以一平行線上任意點 E 爲中心,定長 a 爲半徑作弧,截他平行線於 F.

(2) 作已知圓的切線,使與已知直線成角等於已知角.

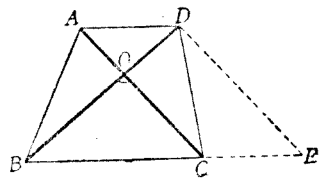
【提示】 於已知直線上任取 D 點,作 $\angle EDC=\angle A$.

從中心O作$OF\perp DE$,交圓周於G.



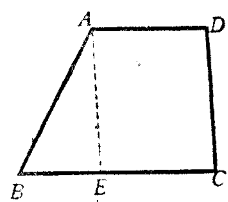
(3) 作已知圓的外切三角形,使其各角等於已知三角形的各角.

(4) 已知一底邊,二對角線及二對角線的夾角,求作梯形.



【解析】 仿照例題,因爲$\angle BDE=\angle BOC, DE=AC$,故都是已知,$\triangle DBE$作圖可能.

(5) 已知四邊,求作梯形.



【解析】 作$AE\parallel DC$,則$BE=BC-EC=BC-AD$, $AE=DC$,故都是已知,$\triangle ABE$作圖可能.

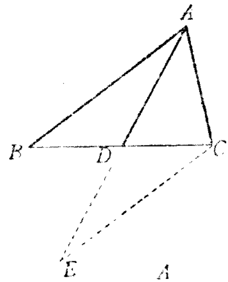
(6) 已知二底邊及二下底角,求作梯形.

(7) 已知二底邊,一不平行邊及一底角,求作梯形.

(8) 已知二邊及第三邊上的中線,求作三角形.

【解析】 把AB平行移動到CE,則BC,AD互相等

分於D, $AE=2AD$,故$\triangle AEC$的三邊已知,作圖可能.

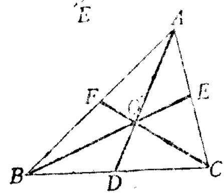


(9)　已知三中線,求作三角形.

【解析】　$OB=\frac{2}{3}BE$,

$OC=\frac{2}{3}CF$,

$OD=\frac{1}{3}AD$,



都是已知,據上題可作$\triangle OBC$.

4.軌跡相交法　有一條線或幾條線,若

(a)　在這線上的點,都能適合於某條件;

(b)　所有適合於某條件的點,都在這線上;

則稱這線是合於某條件的點的軌跡.

關於軌跡的定理,實際一部早已學過;那未學過的,也可以一望就知道他準確.現在把重要的列舉於下:

〔定理一〕　與已知線段的兩端等距離的點的軌跡,是這線段的中垂線(參閱第三章定理8及系).

〔系〕　過已知線段兩端的諸圓的中心的軌跡,是這線段的中垂線(參閱第五章定理3的系2, 3).

〔定理二〕　與已知相交二直線等距離的點的軌跡,這是二直線交角的兩條二等分線(參閱第三章定理9`及系).

〔定理三〕　與已知二平行線等距離的點的軌跡,是平行於已知二平行線而在正中的一直線(參閱第四章定理1系2).

〔定理四〕　與已知點距離等於已知長的點的軌跡,是以已知點爲中心,已知長爲半徑的圓(參閱第五章初步定理18及19).

〔定理五〕　與已知直線距離等於已知長的點的軌跡,是和已知直線平行而距離等於已知長的二直線(參閱第四章定理1系2).

〔定理六〕　切於已知直線上定點的諸圓的中心的軌跡,是在已知線上過定點的垂線(參閱第五章定理11及系3).

〔定理七〕　同底等頂角的諸三角形的頂角頂點的軌跡,是以底爲弦的弧(參閱第五章定理7及系3).

〔系〕　同斜邊(且在同側)的諸直角三角

形的直角頂點的軌跡,是以斜邊爲直徑的半圓(參閱第五章定理8及系3).

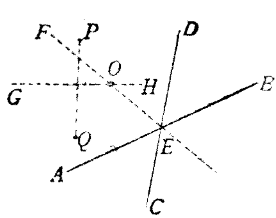
其餘如習題二十五(1),習題二十八(7),習題三十一(3)等,都可改寫成軌跡定理.

凡欲求適合於二個條件的點的位置,可作出適合於第一條件的點的軌跡,再作出適合於第二條件的點的軌跡,所得二種軌跡的交點,必能同時適合於二個條件.

在作圖法中,凡欲求獨立的一點,圓的中心,三角形的某一頂點,或角的頂點的位置,往往用上述的方法.現在分別舉例如下:

(I) 求獨立的一點:

〔例題〕 求一點,與兩已知相交直線等距離,且與兩定點等距離.



〔設〕 AB, CD 爲相交於 E 的兩直線,P, Q 爲二定點.

〔求〕 一點距 AB, CD 相等,且距 P, Q 二點相等.

〔作法〕 作 $\angle AED$ 的二等分線 EF;P, Q 連結線的中垂線 GH,二線相交於 O,則 O 爲所求的點.

〔證〕 在 EF 上的點,必與 AB, CD 距離相等 (二線

的交角的二等分線,是二線的等距離點的軌跡)

在 GH 上的點,必與 P, Q 距離相等

(線段的中垂線,是兩端的等距離點的軌跡)

$\therefore$ EF, GH 的交點 O,必距 AB, CD 等,且距 P, Q 等.

【註】 $\angle DEB$ 的二等分線,亦爲 AB, CD 二線等距離點的軌跡,所以這線同 GH 的交點,亦爲合於條件的一點.

習題四十五

(1) 在已知直線上求一點,與兩定點等距離.

(2) 在已知直線上求一點,與兩已知相交直線等距離.

(3) 在已知直線上求一點,與兩已知平行直線等距離.

(4) 在已知直線上求一點,與一已知直線距離等於已知長.

(5) 求一點,與二已知相交直線等距離,且與一定點距離等於已知長.

(6) 求一點,與二已知相交直線等距離,且與另一已知直線距離等於已知長.

(7) 求一點,與二定點等距離,且與一定點距離等於已知長.

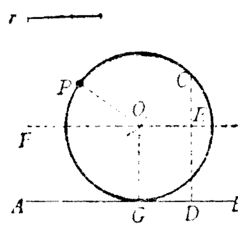
(8) 求一點,與二定點等距離,且與一已知直線距離等於已知長.

(9) 求一點,與已知二平行線等距離,且與二已知相交直線等距離.

(10) 求一點,與已知二平行線等距離,且與二定點等距離.

(II) 求圓的中心(作圖題 8, 13,14,15 等都是):

[例題] 求以已知長爲半徑作圓,使過一定點,且切於一已知直線.



[設] P 爲 AB 直線外的一點, r 爲定長.

[求] 以 r 爲半徑,過 P 作圓切於 AB.

[作法] 於 AB 上的任意點作垂線 CD, 截 $DE=r$, 過 E 作 $FE \parallel AB$. 以 P 爲中心, r 爲半徑作弧,交 FE 於 O.以 O 爲中心,r 爲半徑作圓,即爲所求的圓.

[證] 從 O 作 $OG \perp AB$, 作 OP.

則 $OE \parallel GD$ (所作),

$OG \parallel ED$ (同爲一線的垂線),

$\therefore$ $OGDE$ 爲 ▱ (對邊各平行).

$\therefore$ $OG=ED=r$ (▱ 的對邊),

$OP=r$ (所作).

於是所作的圓必過 P, G

(因 P, G 距中心 O 都等於半徑 r).

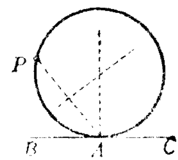
又因 $AB \perp OG$ (所作),

$\therefore$ AB 爲切線 (垂直於半徑外端的線是切線).

習題四十六

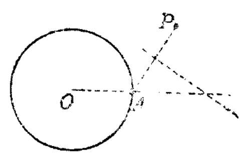
(1) 求過二定點作圓,使其中心在已知直線上.

(2) 求過一定點作圓,使切於已知直線上的定點.



【解析】 所求圓須過定點 A, P, 故中心必在 AP 的中垂線上;又須切於 BC,故中心必在從 A 所引 BC 的垂線上.

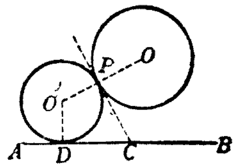
(3) 求過一定點作圓,使切於已知圓上的定點.



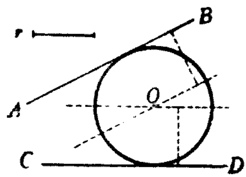
【解析】 所求的圓須過定點 A, P, 故中心必在 AP 的中垂線上;又須切 $\odot O$ 於 A, 故中心必在 OA 或其延長線上.

(4) 求作一圓,切於已知圓上一定點,且切於已知直線.

【解析】 若$\odot O'$為所求的圓,則OO'必過P,$O'D\perp AB$,作內公切線PC,則$CP=CD$.

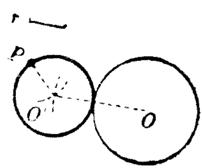


(5) 求以已知長為半徑作一圓,切於二已知直線.



【解析】 所求圓須切於AB,故中心在距離AB為r的平行線上;同樣,又須在距CD為r的平行線上.

(6) 求以已知長為半徑作圓,使過一定點,且切於一已知圓.



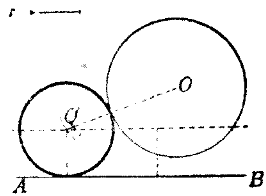
【解析】 若所求圓為O',因須切於$\odot O$,故$O'O$等於$\odot O$半徑同r的和.又$O'P$等於r,故都已知.

(7) 求以已知長為半徑作圓,使切於二已知圓.

【提示】 仿上題,已見第五章第二節8.

(8) 求以已知長為半徑作圓,使切於一已知圓及一已知直線.

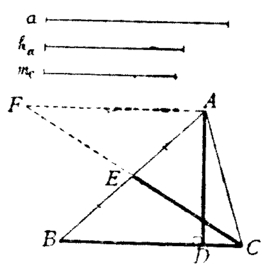
【解析】 若所求圓為$\odot O'$,則中心必在距AB為



r 的平行線上,又必在以 O 爲中心,$\odot O$ 半徑與 r 的和爲半徑的圓周上.

(III) 求三角形的某一頂點:

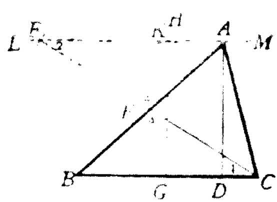
〔例題〕 已知底邊,底邊上的高及他邊上的中線,求作三角形.



〔設〕 a 爲底邊,h_a 爲底邊上的高,m_c 爲他邊上的中線.

〔求作〕 三角形.

【解析】 若 $\triangle ABC$ 爲所求的三角形,$BC=a$, $AD=h_a$, $CE=m_c$,則 A 與 BC 的距離已知,A 點必在距 BC 爲 h_a 的平行線 AF 上.延長 CE,交 AF 於 F,則 CF 爲 CE 的二倍,亦爲已知.



〔作法〕 作 $BC=a$,於 BC 上的任意點 G,作垂線 GH,截 $GK=h_a$,過 K 作 $LM \parallel BC$.以 C 爲中心,$2m_c$ 爲半徑作弧,

交 LM 於 F,作 CF,取中點 E,作 BE,延長交 LM 於 A,聯 AC,則 $\triangle ABC$ 爲所求的三角形.

[證] $CE=EF$ (所作).

$\angle 1=\angle 2$ (所作平行線間的錯角).

$\angle 3=\angle 4$ (對頂角).

∴ $\triangle EBC\cong\triangle EAF$ (二角夾一邊互等).

∴ $AE=EB$ (全同三角形的對應邊).

即 CE 爲中線.

又 $CE=\frac{1}{2}CF=m_c$.

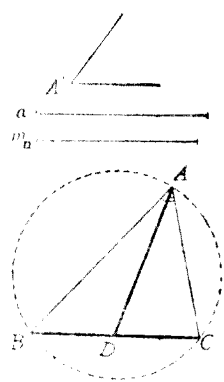
$AD=KG=h_a$

(因 AD,KG 同 $\perp BC$,故▱的對邊相等).

$BC=a$.

(IV) 求三角形,已知頂角的頂點:

[例題] 已知頂角,底邊及底邊上的中線,求作三角形.



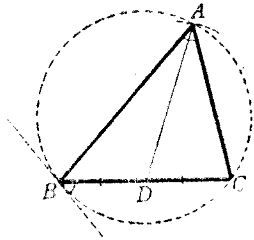
[設] $\angle A'$ 爲頂角,a 爲底邊,m_a 爲底邊上的中線.

[求作] 三角形.

【解析】 若 $\triangle ABC$ 爲所求的三角形, $\angle A=\angle A'$, $BC=a$, $AD=m_a$, $BD=DC$,則 $\angle A$ 爲外接圓的 $\overset{\frown}{BAC}$ 所函

的圓周角. $\angle A$ 爲已知,故據作圖題13,可先作外接圓.

[作法] 作 $BC=a$, 以 BC 爲弦作一圓,使 $\overset{\frown}{BAC}$ 所函的圓周角等於 $\angle A'$. 取 BC 的中點 D 爲中心, m_a 爲半徑作弧,截前圓於 A, 則 $\triangle ABC$ 爲所求的三角形.



[證] $\angle A=\angle A', BC=a, AD=m_a$ (所作),

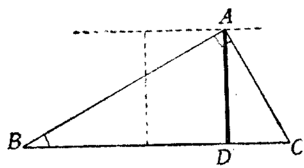
又因 $BD=DC$ (所作),

$\therefore$ AD 爲中線.

習題四十七

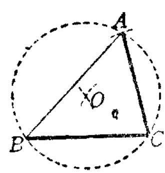
(1) 已知一銳角及斜邊上的高,求作直角三角形.

【解析】 若 $\triangle ABC$ 爲所求的△,則直角頂點 A 必在距 BC 等於已知高的平行線上.

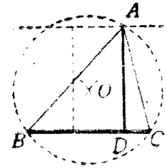


(2) 已知二邊及外接圓的半徑,求作三角形.

【解析】 外接圓的中心,距已知一邊的兩端 B, C 等於已知半徑,故可先行求得.



(3) 已知底邊,底邊上的高,及外接圓的半徑,求作三角形.



【解析】 若 $\triangle ABC$ 爲所求的△,則頂點 A 必在距 BC 等於已知高的平行線上;但又在外接圓周上.

(4) 已知頂角,底邊及底邊上的高,求作三角形.

【提示】 仿IV的例題及本習題(3).

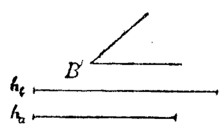
(5) 已知底邊及頂角,求作三角形,使其頂角頂點在一已知直線上.

【提示】 仿IV的例題作圓,交已知直線的點,即頂角頂點.

(V) 求直角的頂點(作圖題11就是):

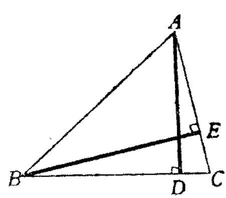
〔例題〕 已知一角,對邊上的高及其他一邊上的高,求作三角形.

〔設〕 B' 爲一角,h_b 爲對邊上的高,h_a 爲其他一邊上的高.



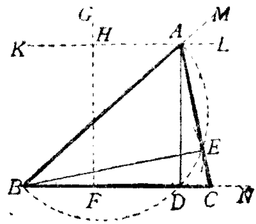
〔求作〕 三角形.

【解析】 若 $\triangle ABC$ 爲所求的△, $\angle B=\angle B'$, $BE=h_b$, $AD=h_a$, $BE\perp AC$,$AD\perp BC$,則仿習題四十七(1),可作 $\triangle ABD$, 於是利用半圓所



函圓周角是直角的定理,可定直角頂 E 的位置.

[作法] 作 $\angle MBN=\angle B'$, 於一邊 BN 上的任意點作垂線 FG, 截 $FH=h_a$, 過 H 作 $KL \parallel BN$, 交 BM 於 A. 以 AB 爲直徑作半圓,以 B 爲中心, h_b 爲半徑作弧,交半圓於 E, 作 AE, 延長之交 BN 於 C, 則 $\triangle ABC$ 爲所求的三角形.



[證] 因 $AD \perp BC$, $HF \perp BC$, $KL \parallel BC$ (所作),

$\therefore$ $AD=HF$ (平行線間的距離)

$=h_a$ (所作),

又 $BE=h_b$, $\angle B=\angle B'$ (所作),

$AD \perp BC$ (所作),

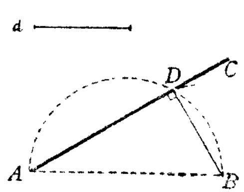
$BE \perp AC$ (半圓所函的圓周角是直角).

習題四十八

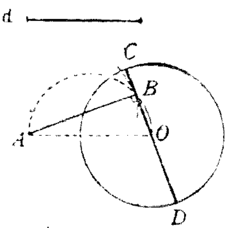
(1) 已知斜邊及一直角邊,求作直角三角形.

【提示】 與例題中作 $\triangle ABE$ 法同.

(2) 從一定點求作一直線,使與另一定點的距離等於已知長.

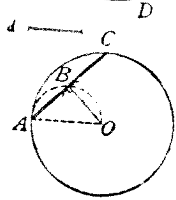


【解析】 若二定點爲 A, B, 所求線爲 AC,則 AB, BD 都是已知.



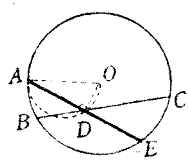
(3)　求作已知圓的直徑,使與一定點的距離等於已知長.

【解析】　AO, AB 都是已知.



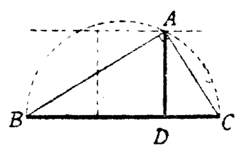
(4)　從已知圓周上一定點求作一弦,使與中心距離等於已知長.

【解析】　AO, OB 都是已知.



(5)　從已知圓周上一定點求作一弦使被一已知弦所等分.

【解析】　AO 爲已知.



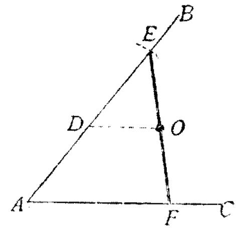
(6)　已知斜邊及斜邊上的高,求作直角三角形.

【解析】　直角頂 A 在 BC 爲直徑的半圓周上,且在距 BC 爲已知高的平行線上.

5. 雜法　應用上述各法,已可解大部的作圖題.至於其他雜法頗難分類,現在擇要略舉數種於下:

〔例題〕　過已知角內一定點,求作一線段,止於角的二邊,使這線段被定點所等分.

〔設〕　O 爲 $\angle BAC$ 內的一點.



［求］ 過 O 作一線段止於二邊,使被 O 所等分.

［作法］ 從 O 作 AC 的平行線,交 AB 於 D,以 D 爲中心,DA 爲半徑作弧,截 AB 於 E. 作 EO, 延長交 AC 於 F,則 EF 爲所求的線段.

［證］ 因 $ED=DA$, $DO \parallel AF$ (所作).

$\therefore$ $EO=OF$

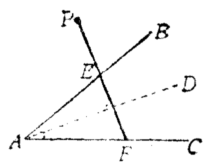
(等分△一邊,而 ∥ 他邊的線,必等分第三邊)

習 題 四 十 九

(1) 過已知角一邊外的一定點,求作一線段,止於另一邊,使這線段被一邊所等分.

(2) 過一定點作一直線,使與已知相交二直線成等角.

【提示】 作 AD 等分 $\angle A$, 作 $PEF \perp AD$.

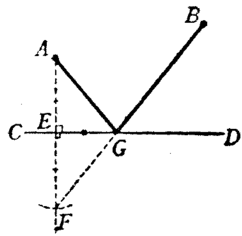


(3) 已知底邊及頂角,求作等腰三角形.

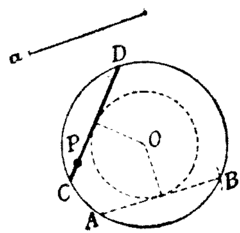
【提示】 等腰三角形底角是頂角的補角之半,亦爲已知.

(4) 在已知直線上求一點,與二定點各連結,使兩連結線與已知直線成等角.

【提示】　從一定點作定直線CD的垂線 AE, 延長使$EF=AE$, 作 FB, 得所求的點G.

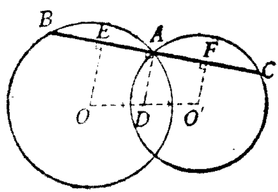


(5)　在已知圓中過一定點求作一弦,使等於已知長.



【提示】　先作 $AB=a$, 據習題三十一(4),可得所求的弦CD.

(6)　過二已知圓的一交點,求作一直線,使兩圓截得的弦相等.



【解析】　若BC爲所求的線,$OE,O'F$各$\perp BC$,則$EA=AF$. 若$DA\perp BC$,則$OD=DO'$.

第七章 面積

第一節 重要定義

1. 面的單位 各邊等於單位長的正方形,叫做面的單位.

【例】 各邊是1寸的正方形,是1平方寸;各邊是1尺的正方形,是1平方尺.

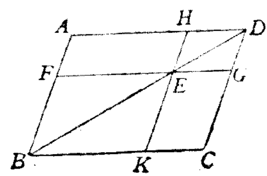
2. 面積 平面形所包含的面的單位數,叫做面積.

【例】 平面形中可含每邊1寸的正方形5個時,這平面形的面積是5平方寸.

3. 相等或等積 兩平面形的面積相等時,稱這兩形相等或等積.

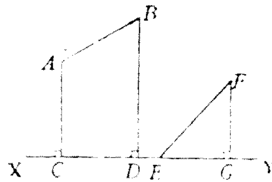
【注意】 全同的兩形,面積當然相等.

4. 餘形 過平行四邊形對角線上的一點,作兩鄰邊的平行線,分原形爲四個平行四邊形,其中不在對角線上的兩形,叫做餘形,如圖中的$\square AE$同$\square EC$.



【註】 凡平行四邊形,矩形或正方形,在證明面積定理時,只須記出兩對角頂的二文字.

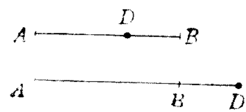
5. 正射影 從一線段的兩端到一直線各引一垂線,兩垂足間的距離叫做原線段在這直線上的正射影.如圖中的CD是AB在XY上的正射形,EG是EF在XY上的正射影.



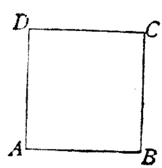
【註】 正射影的名稱,已見習題十六(6)的註.

6. 線分,分點,內分,外分 從線段的兩端,到線上或延長線上一點的兩個距離,叫做兩個線分.這點叫做分點.分點在線上時叫內分,在延長線上時叫外分.

【注意】 如右圖上,稱線段AB內分於D點,AD,BD是兩個線分;如右圖下,稱線段AB外分於D點,AD,BD是兩個線分.

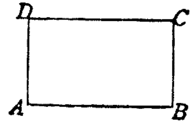


7. 某線上的正方形 以某線爲邊的正方形可以稱做某線上的正方形.如右圖可稱做是AB上的正方形.



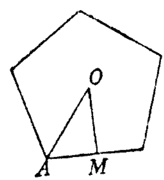
【注意】 AB上的正方形可記作$\overline{AB}^2$,因爲他的面積等於AB線段的平方數的緣故.

8. 某二線所包的矩形 以某二線爲兩鄰邊的矩形,可以稱做某二線所包的矩形. 如右圖可稱做是 AB, AD 所包的矩形.



【注意】 AB, AD 所包的矩形,可記作 $\overline{AB}\,\overline{AD}$ 或 $AB\cdot AD$,因爲他的面積等於 AB, AD 兩線段的積的緣故. 又 $\overline{AB}\,\overline{CD}$ 是表兩鄰邊的長等於 AB, CD 的矩形的面積.

9. 正多邊形的心,邊心距,頂心距 正多邊形的內心同外心必合於一點,這點叫做正多邊形的心,如圖中的 O. 心與各邊的距離,叫做邊心距,實即內切圓的半徑,如圖中的 OM. 心與各頂點的距離,叫做頂心距,實即外接圓的半徑,如圖中的 OA.



第二節 幾何學上所應用的代數公式

代數中幾個重要的二次同次恆等式,在幾何學上證明面積問題時,必須應用這些代數公式,可用幾何方法證明,列舉如下:

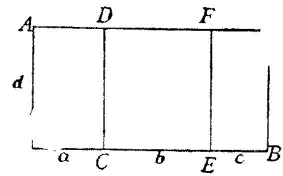
1. $(a+b+c)d=ad+bd+cd.$

〔證〕 $(a+b+c)d=\square AB$,(註)

$ad = ▭AC,$

$bd = ▭DE,$

$cd = ▭FB,$



但 $▭AB = ▭AC + ▭DE + ▭FB,$

$\therefore \quad (a+b+c)d = ad + bd + cd.$

【註】 矩形的面積等於底同高的積,俟下節證明.

2. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

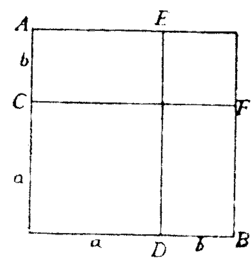
[證] $(a+b)^2 = □AB,$(註)

$a^2 = □CD,$

$ab = ▭CE,$

$ab = ▭DF,$

$b^2 = □EF,$



但 $□AB = □CD + ▭CE + ▭DF + □EF,$

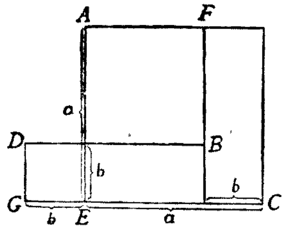
$\therefore \quad (a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

【註】 正方形的面積等於邊線的平方,俟下節證明.

3. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

[證] $(a-b)^2 = □AB,$

$a^2 = □AC,$



$$b^2 = \square DE,$$

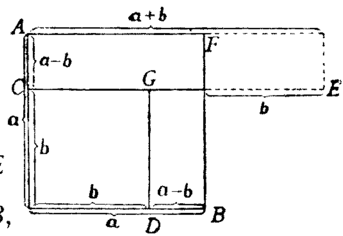
$$ab = \square FC,$$

$$ab = \square GB,$$

但 $\square AB = \square AC + \square DE - \square FC - \square GB,$

$\therefore \quad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - ab - ab = a^2 - 2ab + b^2.$

4. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$



[證] $a^2 = \square AB,$

$b^2 = \square CD,$

$(a+b)(a-b) = \square AE$

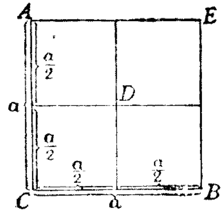
$= \square CF + \square FE$

$= \square CF + \square GB,$

但 $\square AB - \square CD = \square CF + \square GB,$

$\therefore \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$

5. $a^2 = 4\left(\frac{a}{2}\right)^2.$



[證] $a^2 = \square AB,$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \square AD = \square DB$

$= \square CD = \square DE,$

但 $\square AB = \square AD + \square DB + \square CD + \square DE,$

$\therefore \quad a^2 = 4\left(\frac{a}{2}\right)^2.$

上列所舉的五個公式,如用幾何學上的

言語表出,就是下面的五條定理:

1. 諸線段的和同一線所包的矩形,等於諸線各與一線所包各矩形的和.

2. 兩線段和上的正方形,等於兩線上正方形的和加上兩線所包矩形的二倍.

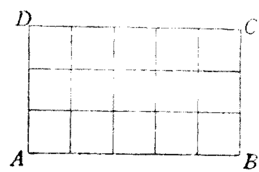
3. 兩線段差上的正方形,等於兩線上正方形的和減去兩線所包矩形的二倍.

4. 兩線段上正方形的差,等於兩線的和同兩線的差所包的矩形.

5. 全線上的正方形,等於半線上正方形的四倍.

第三節 重要定理

定理 1. 矩形的面積,等於底同高的積.



[設] $ABCD$ 爲矩形,用同一單位長的線段量兩邊,若 AB 含單位長的 a 倍, AD 含單位長的 b 倍.

[求證] 矩形面積$S=ab$.

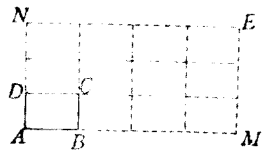
[證](一) 若 AB,AD 都是單位線段的整倍量,即 a,b 爲整數,則可等分 AB 爲 a 分,AD 爲 b 分,每分的長都等於單位線段.

從各分點作鄰邊的平行線,可把矩形分做ab個

每邊爲單位長的小正方形,於是知矩形$ABCD$含ab個面的單位.

$$\therefore \qquad S=ab.$$

(二) 若AB, AD不是單位線段的整倍量,即a, b不是整數.



則設 $a=\dfrac{p}{m}$, $b=\dfrac{q}{n}$.

即 $m\cdot AB=p$, $n\cdot AD=q$.

延長AB到M,AD到N,使

$$AM=m\cdot AB, \quad AN=n\cdot AD,$$

於是▭$AMEN$爲▭$ABCD$的mn倍,即等於mnS

從(一),知▭$AMEN$的面積是pq.

$$\therefore \qquad mnS=pq.$$

$$\therefore \qquad S=\frac{pq}{mn}=\frac{p}{m}\cdot\frac{q}{n}=ab.$$

由(一),(二)知AB,AD不論是單位線段的整數 分數倍,所包矩形的面積,必等於底同高的積.

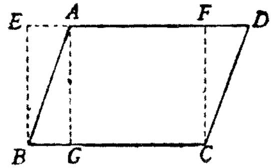
【註】 矩形的底同高,往往不能是同一單位線段的整數倍或分數倍,幾何學上稱做不可通約量,實際同代數中的無理數類似,這時須用極限論證本定理,本書從略.

系 正方形的面積等於一邊的平方.

定理 2 平行四邊形等於等底等高的

矩形.

[設] $\square AC$ 以 BC 爲底,AG 爲高.



[求證] $\square AC$ 等於等底,等高的矩形.

[證] 從 C, B 各作 BC 的垂線,交 AD 或其延長線於 F, E.

則 $EF \parallel BC$(所設), $EB \parallel FC$(同爲一線的垂線),

$\angle EBC = \angle R$ (垂線夾直角),

$\therefore$ $EBCF$ 爲矩形 (對邊各平行而一角爲直角).

又因 $FC = EB, DC = AB$ ($\square$ 的對邊),

$\angle DFC = \angle AEB$ (直角),

$\therefore$ $\triangle FCD \cong \triangle EBA$ (二邊一直角互等).

$\therefore$ $\triangle FCD +$ 四邊形 $ABCF$

$= \triangle EBA +$ 四邊形 $ABCF$ (等加等).

即 $\square AC = \square EC$.

又因 $AG = EB$ (平行線間的距離處處相等),

$\therefore$ $\square AC$ 與 $\square EC$ 同底等高.

$\therefore$ $\square AC$ 等於等底等高的矩形.

系 1. 平行四邊形的面積,等於底同高的積.

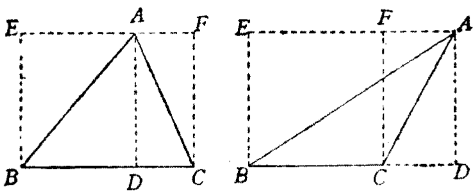
系 2. 等底等高的兩平行四邊形相等.

系 3. 等底的兩平行四邊形,高大的面積亦大;等高的兩平行四邊形,底大的面積亦大.

定理 3. 三角形等於等底等高矩形的一半.

［設］ $\triangle ABC$ 以 BC 為底,AD 為高.

［求證］ $\triangle ABC$ 等於等底等高的矩形之半.



［證］ 過 A 作 BC 的平行線 EF,從 B,C 各作 BC 的垂線,交 EF 於 E,F.

則 $EB \parallel AD \parallel FC$ (同為 BC 的垂線),

$\angle EBC = \angle R$,

$\therefore$ $EBDA$, $ADCF$ 都是矩形

(對邊各平行,且一角為直角).

於是 $\triangle ABD \cong \triangle ABE$, $\triangle ACD \cong \triangle ACF$

(▭對角線分原形為二個全同三角形).

即 $\triangle ABD = \frac{1}{2}▭ED$, $\triangle ACD = \frac{1}{2}▭FD$.

$\therefore$ $\triangle ABC = \frac{1}{2}▭EC$ (等量加等量,或減等量).

因 $AD=EB$ (平行線間的距離,處處相等),

∴ $\triangle ABC$ 與 ▱EC 同底等高.

∴ $\triangle ABC$ 等於等底等高的矩形之半.

系 1. 三角形的面積,等於底同高的積的一半.

系 2. 三角形等於等底等高平行四邊形的一半.

系 3. 等底等高的兩三角形相等.

系 4. 等積的兩三角形,若底等,則高亦等;若高等,則底亦等.

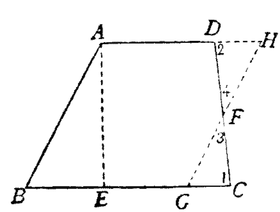
系 5. 同底等積的兩三角形,若在底的同側,則兩頂點的連結線必與底平行.

系 6. 三角形的中線,分原形為二個相等的三角形.

定理 4. 梯形等於以二底和為底,而等高的矩形的一半.

[設] 梯形 $ABCD$ 的二底為 AD,BC,高為 AE.

[求證] 梯形 $ABCD$ 等於以 $(AD+BC)$ 為底,AE 為高的矩形之半.



［證］ 取 CD 的中點 F，過 F 作 AB 的平行線，交 BC 於 G，AD 的延長線於 H，則 $ABGH$ 爲 $\square$.

在 $\triangle FGC$，$\triangle FHD$ 中，

$CF = FD$（所作），$\angle 1 = \angle 2$（錯角），$\angle 3 = \angle 4$（對頂角）.

$\therefore \quad \triangle FGC \cong \triangle FHD$ （二角夾一邊互等）.

$\therefore \quad \triangle FGC +$ 五邊形 $ABGFD$

$= \triangle FHD +$ 五邊形 $ABGFD$.

卽 梯形 $ABCD = \square AG$.

又 $GC = DH$ （全同三角形的對應邊）.

$\therefore \quad BC + AD = BG + GC + AD = BG + DH + AD$

$= BG + AH$.

又 $BG = AH$ （$\square$ 的對邊），

$\therefore \quad BG = \frac{1}{2}(BC + AD)$ （等量之半）.

$\therefore \quad \square AG = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot AE$

（$\square$ 面積等於底，高積之半）.

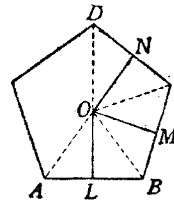
於是梯形 $ABCD = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot AE$ （等量代入）.

卽 梯形 $ABCD$ 等於以 $(BC + AD)$ 爲底，AE 爲高的矩形的一半.

系. 梯形面積等於二底和與高的積的一半.

定理 5. 正多邊形的面積，等於周圍與邊心距的積的一半.

［設］ $ABCD$……是 n 邊的正多邊形,以 S 表其面積,P 表其周圍.又 $ABCD$……的心是 O,邊心距爲 OL,OM,ON,……,以 r 表之.



［求證］ $S=\frac{1}{2}rP$.

［證］ 作 $OA,OB,OC,\cdots\cdots$,

則
$$\left.\begin{aligned}\triangle OAB&=\frac{1}{2}r\cdot AB\\ \triangle OBC&=\frac{1}{2}r\cdot BC\\ \triangle OCD&=\frac{1}{2}r\cdot CD\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}$$
(三角形的面積,等於底乘高的一半).

∴ 正多邊形 $ABCD$……

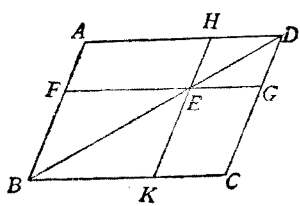
$$=\frac{1}{2}r\cdot AB+\frac{1}{2}r\cdot BC+\frac{1}{2}r\cdot CD+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}r(AB+BC+CD+\cdots\cdots)$$

$$=\frac{1}{2}rP$$ (等量加等量).

定理 6.　平行四邊形的兩餘形相等.

［設］ ▱AC 的兩餘形爲 ▱AE, ▱EC.



［求證］ ▱AE=▱EC.

［證］ $\triangle ABD\cong\triangle CBD$,

$\triangle FBE\cong\triangle KBE$,

$\triangle HED \cong \triangle GED$

(▱的對角線,分原形為二個全同三角形).

$\therefore$ $\triangle ABD - \triangle FBE - \triangle HED$

$= \triangle CBD - \triangle KBE - \triangle GED$.

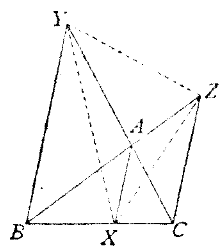
即 $\square AE = \square EC$ (等量減等量).

習 題 五 十

(1) 延長梯形 $ABCD$ 的不平行邊 BA, CD 交於 E,則 $\triangle BDE = \triangle ACE$.

【提示】 $\triangle ABD = \triangle ACD$.

(2) 從 $\triangle ABC$ 的各角頂,到對邊或其延長線上各作平行線 AX, BY, CZ,則 $\triangle AYZ$, $\triangle BXZ$, $\triangle CXY$都同原三角形相等.



【提示】 先證$\triangle BYZ = \triangle BYC$,

次證$\triangle XAY = \triangle XAB$,

餘仿此.

(3) 若四邊形的對角線互為垂線,則兩對角線所包的矩形等於四邊形的二倍.

(4) 同底等積的兩三角形,在底邊的兩側,則兩頂點的連結線必被底邊等分.

【提示】 應用定理 3 系 4.

(5) 四點 A, B, C, D順列於一直線上,則AC, BD所包矩

形,等於AB,CD所包矩形與BC,AD所包矩形的和

【提示】 $\overline{AC}\,\overline{BD}=(AB+BC)\cdot BD=\overline{AB}\,\overline{BD}+\overline{BC}\,\overline{BD}$

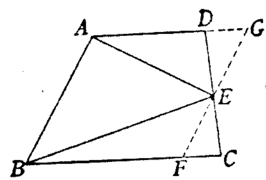
$=AB\cdot(BC+CD)+BC\cdot(BC+CD)=$

$=\overline{AB}\,\overline{CD}+BC\cdot(AB+BC+CD)=$

(6) 直角三角形斜邊上的頂垂線與斜邊所包的矩形,等於直角的兩邊所包的矩形.

(7) 梯形等於二底和做底的等高三角形.

(8) 以梯形不平行的一邊爲底,對邊中點爲頂點的三角形,等於梯形的一半.

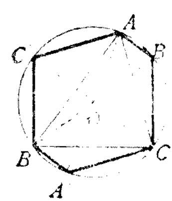


【提示】 過E作$FG \parallel AB$,則梯形$ABCD=\square AF$.

(9) 從四邊形一對角線的中點到其他兩對角頂作二線,則分四邊形爲二等分.

(10) 從平行四邊形的一角頂到對邊中點的線,截得一三角形,其面積爲平行四邊形的四分之一.

(11) 過圓的內接三角形的各角頂,各作一直徑,順次連結其端,所成的六邊形的面積,等於三角形面積的二倍.



【提示】 $\triangle ABO=\triangle A'BO$,

$\triangle BCO=\triangle B'CO$, $\triangle ACO=\triangle A'CO$,

$\therefore$ $\triangle ABC=$四邊形$A'BB'C$.

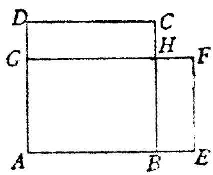
倣此 $\triangle ABC=$四邊形$AB'BC'$.

(12) 從▱$ABCD$的頂點A,作一線與BC交於E,DC的延長線交於F,則$\triangle ABF=\triangle ADE$.

【提示】　同爲▱$ABCD$之半.

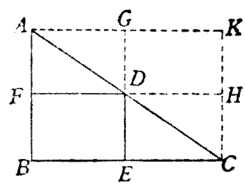
(13) 從▱$ABCD$的頂點A,作一線與BC交於E,DC的延長線交於F,則$\triangle ECD=\triangle BEF$.

(14) 等周的諸矩形中,以正方形的面積爲最大.



【提示】　已知$AB+BC+CD+DA=AE+EF+FG+GA$,兩邊各減去AB,BH(或EF),CD(或HG),AG四線的和,得$CH+DG=BE+FH$,$\therefore CH=BE$.但$CD>EF$,$\therefore$ ▭$DH>$▭HE.

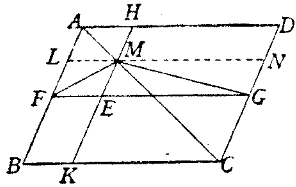
(15) 直角三角形ABC的內接矩形爲$BEDF$,則▭$BEDF=\overline{AF}\cdot\overline{CE}$.



【提示】　▱的兩餘形相等.

(16) 設▱$ABCD$,過$\triangle ABC$內一點E,作$FG\parallel BC$, $HK\parallel$

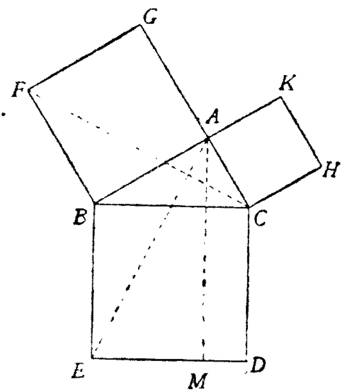
AB, HK 交 AC 於 M, 則 $\square HG - \square FK = 2\triangle MFG$.



【提示】 作 $LMN \parallel BC$, 則 $\square HN = \square LK$, 即 $\square HG - \square MG = \square LE + \square FK$, $\therefore \square HG - \square FK = \square LE + \square MG = \square LG = 2\triangle MFG$.

定理 7. 直角三角形斜邊上的正方形,等於兩直角邊上正方形的和.

【註】 上列定理由畢達哥拉斯 (Pythagoras) 首先證明,故稱畢氏定理.



[設] $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 爲直角.

[求證] $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

[證] 於三邊上各作正方形 BD, AF, AH. 從 A 作 BC 的垂線并延長交 ED 於 M, 連結 AE, CF.

則在 $\triangle ABE$, $\triangle FBC$ 中,

$BA = BF$, $BE = BC$

(正方形的邊),

$\angle ABE = \angle R + \angle ABC = \angle FBC$,

$\therefore\quad \triangle ABE \cong \triangle FBC$　(二邊夾一角互等).

又　$\left.\begin{array}{l}\square BM = 2\triangle ABE \\ \square AF = 2\triangle FBC\end{array}\right\}$ (△等於等底等高□之半),

$\therefore\quad \square BM = \square AF$　(等於等量的量相等).

仿此 $\square CM = \square AH$.

$\therefore\quad \square BD = \square AF + \square AH$　(等量加等量).

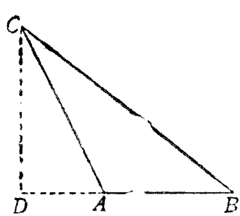
即　$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

系 1.　正方形對角線上的正方形,等於原正方形的二倍.

系 2.　直角三角形斜邊上的項垂線,分斜邊爲二分,其一分與斜邊所包的矩形,等於鄰接的一直角邊上的正方形.

定理 8.　三角形鈍角對邊上的正方形,等於其他二邊上正方形的和,加上兩邊中的一邊與他邊在這邊上的正射影所包矩形的二倍.

[設]　$\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 爲鈍角.AC 邊在 AB 邊上的正射影爲 AD.



[求證]　$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{AB}\,\overline{AD}$.

[證]　$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2$　(畢氏定理).

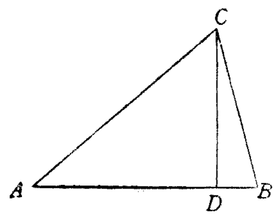
$= \overline{CD}^2 + (AD + AB)^2$

$= \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 + 2\overline{AB}\,\overline{AD} + \overline{AB}^2$ (代數公式).

但 $\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2$ (畢氏定理),

$\therefore \quad \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{AB}\,\overline{AD}$ (等量代入).

定理 9. 三角形銳角對邊上的正方形，等於其他二邊上正方形的和,減去二邊中的一邊與他邊在這邊上的正射影所包矩形的二倍.



[設] $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 為銳角, AC 邊在 AB 邊上的正射影為 AD.

[求證] $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\,\overline{AD}$.

[證] $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$ (畢氏定理).

$= \overline{CD}^2 + (AB - AD)^2$

$= \overline{CD}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AB}\,\overline{AD} + \overline{AD}^2$ (代數公式).

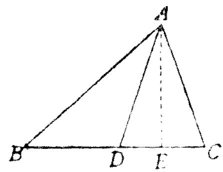
但 $\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2$ (畢氏定理),

$\therefore \quad \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\,\overline{AD}$ (等量代入).

定理 10. 三角形二邊上正方形的和,等於第三邊半分上正方形與第三邊中線上正方形和的二倍.

[設] $\triangle ABC$ 的 BC 邊上的中線為 AD.

[求證] $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{BD}^2+\overline{AD}^2)$.



[證](1) 若$\triangle ABC$爲等腰三角形,即$AB=AC$.

則 $AD\perp BC$

(等腰△底邊中線⊥底邊).

$$\left.\begin{aligned}\overline{AB}^2&=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2\\ \overline{AC}^2&=\overline{CD}^2+\overline{AD}^2\end{aligned}\right\}$$ (畢氏定理).

但 $\overline{BD}^2=\overline{CD}^2$ (等線段上的正方形亦等),

$\therefore$ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{BD}^2+\overline{AD}^2)$ (等量加等量).

(2) 若$\triangle ABC$的兩腰不等,設$AB>AC$,作頂垂線AE,

則$\angle ADB$爲鈍角,$\angle ADC$爲銳角

($\triangle ABD$,$\triangle ACD$中,二組邊互等,則第三邊大者對大角),

$$\left.\begin{aligned}\overline{AB}^2&=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2+2\overline{BD}\,\overline{DE}\\ \overline{AC}^2&=\overline{CD}^2+\overline{AD}^2-2\overline{CD}\,\overline{DE}\end{aligned}\right\}$$

(三角形鈍角或銳角對邊方,等於其他二邊方和,加或減一邊與他邊在這邊上的正射影所包矩形的二倍).

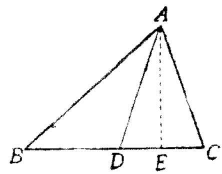
但 $\overline{BD}^2=\overline{CD}^2$, $\overline{BD}\,\overline{DE}=\overline{CD}\,\overline{DE}$ (因$BD=CD$),

$\therefore$ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{BD}^2+\overline{AD}^2)$ (等量加等量).

習 題 五 十 一

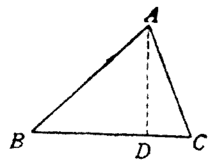
(1) 三角形二邊上正方形的差,等於第三邊中線在

第三邊上的正射影與第三邊所包矩形的二倍.



【解析】 欲證 $\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=2\,\overline{BC}\,\overline{DE}$, 只須證 $\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=2\overline{BD}\,\overline{DE}+2\overline{CD}\,\overline{DE}$.

(2) 三角形二邊上正方形的差,等於這二邊在第三邊上的正射影上的正方形的差.

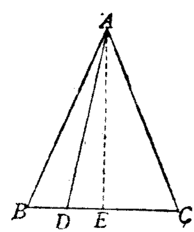


【提示】 $\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2$,

$\overline{AC}^2=CD^2+\overline{AD}^2$,

相減卽得.

(3) 在等腰三角形 ABC 的底邊 BC 上,任取一點 D,則 $\overline{AB}^2-\overline{AD}^2=\overline{BD}\,\overline{CD}$.



【提示】 若 $AE\perp BC$,則 $BE=CE$, $\therefore\ \overline{AB}^2-\overline{AD}^2=\overline{BE}^2-\overline{DE}^2=(BE+DE)(BE-DE)=\cdots\cdots$.

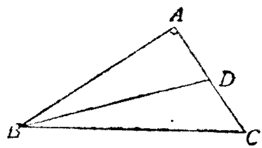
(4) 正三角形頂垂線上的正方形,等於邊上正方形的四分之三.

【提示】 全線上的正方形,爲半線上正方形的四倍.

(5)　$\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 爲直角,從 B 到對邊作直線 BD,則 $\overline{BC}^2+\overline{AD}^2=\overline{BD}^2+\overline{AC}^2$.

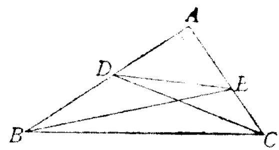
【提示】　先證 $\overline{BC}^2-\overline{AC}^2=\overline{BD}^2-\overline{AD}^2$.

(6)　$\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 爲直角,從 B 到對邊中點作直線 BD,則 $\overline{BD}^2=\overline{BC}^2-3\overline{AD}^2$.



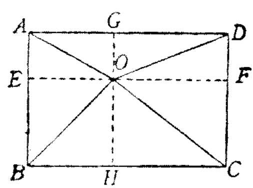
【提示】　$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=\overline{BC}^2-\overline{AC}^2+\overline{AD}^2$.

(7)　$\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 爲直角,一直線交 AB, AC 於 D, E,則 $\overline{CD}^2+\overline{BE}^2=\overline{DE}^2+\overline{BC}^2$.



【提示】　$\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{AC}^2$,　$\overline{BE}^2=\overline{AB}^2+\overline{AE}^2$.

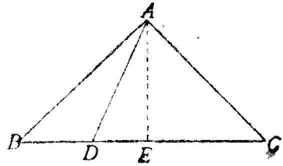
(8)　從 ▭$ABCD$ 的各角頂到形內的一點作直線,則 $\overline{AO}^2+\overline{CO}^2=\overline{BO}^2+\overline{DO}^2$.



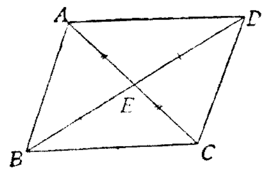
【提示】　$\overline{AO}^2=\overline{AE}^2+\overline{EO}^2=\overline{GO}^2+\overline{EO}^2$, $\overline{CO}^2=\overline{CF}^2+\overline{FO}^2=\overline{HO}^2+\overline{FO}^2$, $\therefore$ $\overline{AO}^2+\overline{CO}^2=\overline{EO}^2+\overline{FO}^2+\overline{GO}^2+\overline{HO}^2$.

(9)　於等腰直角三角形 ABC 的斜邊 BC 上任取一點 D,則 $2\overline{AD}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2$.

【提示】 若$AE \perp BC$,則 $AE=BE=CE$, $\therefore \overline{BD}^2+\overline{CD}^2 =(BE-DE)^2+(CE+DE)^2 =(AE-DE)^2+(AE+DE)^2=\cdots\cdots$.



(10) 平行四邊形各邊上正方形的和,等於兩對角線上正方形的和.

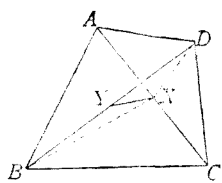


【提示】 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AE}^2+\overline{BE}^2)$.

(11) 三角形各邊上正方形和的三倍,等於各中線上正方形和的四倍.

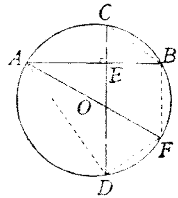
【提示】 仿上題得三式,相加,以 2 乘,再移項卽得.

(12) 四邊形 $ABCD$ 的對角線 AC, BD 的中點爲 X, Y, 則 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{XY}^2$.



【提示】 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{BX}^2+2\overline{CX}^2$, $\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=2\overline{DX}^2+2\overline{CX}^2$, $2\overline{BX}^2+2\overline{DX}^2=4\overline{BY}^2+4\overline{XY}^2$.

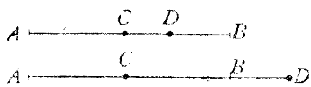
(13) 垂直的兩弦,被垂足所分,則四線段上正方形的和,等於直徑上的正方形.



【提示】 由習題二十八(3),知 $CB=DF$.

定理11. 一線段以任意點內分或外分,則二線分上正方形的和,等於半線上正方形與分點,中點間部分上正方形和的二倍.

[設] 線段 AB 內分或外分於 D, C 為 AB 的中點.



[求證] $\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=2(\overline{AC}^2+\overline{CD}^2)$.

[證] $AD=AC+CD$,

$BD=CB\sim CD$(註) $=AC\sim CD$.

$\therefore\quad \overline{AD}^2+\overline{BD}^2=(AC+CD)^2+(AC\sim CD)^2$

$=\overline{AC}^2+2\overline{AC}\,\overline{CD}+\overline{CD}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AC}\,\overline{CD}+\overline{CD}^2$

$=2(\overline{AC}^2+\overline{CD}^2)$.

【註】 $\sim$ 為差的記號.

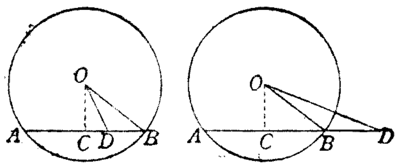
系. 兩直線和上正方形與差上正方形的和,等於兩直線上正方形和的二倍.

【說明】 由定理的證明,得

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2).$$

定理12. 圓的弦內分或外分,則二線分所包的矩形,等於半徑上正方形與分點到中心距離上正方形的差.

[設] ⊙O的弦 AB 內分或外分於 D.



[求證] $\overline{AD}\,\overline{BD}=\overline{OB}^2\sim\overline{OD}^2$.

[證] 從中心 O 作 AB 的垂線 OC,

則 $AC=BC$ (從中心引弦的垂線,必等分弦),

$AD=AC+CD=BC+CD$,

$BD=BC\sim CD$.

$\therefore\quad \overline{AD}\,\overline{BD}=(BC+CD)(BC\sim CD)$

$=\overline{BC}^2\sim\overline{CD}^2$ [因 $(a+b)(a\sim b)=a^2\sim b^2$].

但 $\left.\begin{aligned}\overline{BC}^2&=\overline{OB}^2-\overline{OC}^2\\ \overline{CD}^2&=\overline{OD}^2-\overline{OC}^2\end{aligned}\right\}$ (畢氏定理),

$\therefore\quad \overline{BC}^2\sim\overline{CD}^2=\overline{OB}^2\sim\overline{OD}^2$ (等量減等量).

$\therefore\quad \overline{AD}\,\overline{BD}=\overline{OB}^2\sim\overline{OD}^2$ (等於同量).

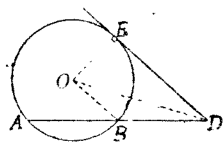
【註】 內分時, $\overline{AD}\,\overline{BD}=\overline{OB}^2-\overline{OD}^2$;

外分時, $\overline{AD}\,\overline{BD}=\overline{OD}^2-\overline{OB}^2$.

系 1. 兩弦相交於圓內或圓外,各被交點內分或外分,則兩線分所包的矩形相等.

【說明】 因各弦上兩線分所包的矩形,都等於半徑上正方形與分點到中心距離上正方形的差.

系 2. 一弦外分,則兩線分所包的矩形,等於從分點所引切線上的正方形.

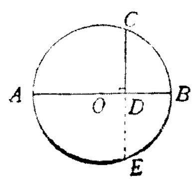


【說明】 $\overline{AD}\,\overline{BD}=\overline{OD}^2-\overline{OB}^2$

$=\overline{OD}^2-\overline{OE}^2=\overline{DE}^2.$

系 3. 一弦外分,若兩線分所包的矩形等於從分點到圓周上一點所引直線上的正方形,則所引的直線是切線.

系 4. 從圓周上一點作直徑的垂線,內分直徑爲二,則兩線分所包的矩形等於垂線上的正方形.



【說明】 $OD\perp CE$, $\therefore CD=DE$,

$\therefore$ $\overline{AD}\,\overline{BD}=\overline{CD}\,\overline{DE}$(系 1)

$=\overline{CD}^2.$

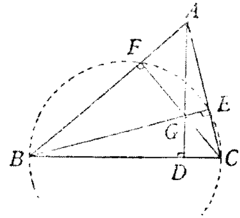
習 題 五 十 二

(1) 二直線和上正方形減去差上正方形,等於二直線所包矩形的四倍.

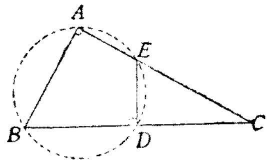
【提示】 仿定理11系.

(2) 三角形的垂心,分各垂線爲二,其二線分所包的矩形相等.

【提示】 以BC為直徑作圓,必過F, E, 故$\overline{BG}\,\overline{GE}=\overline{CG}\,\overline{GF}$, 餘仿此.



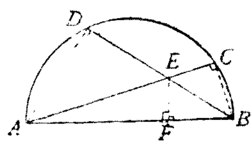
(3) 從直角三角形斜邊BC的中點D作垂線DE,截AC邊於E,則$\overline{CE}\,\overline{CA}=\frac{1}{2}\overline{BC}^2$.



【提示】 A, B, D, E四點在一圓周,

$\therefore \overline{CE}\,\overline{CA}=\overline{CD}\,\overline{CB}=\frac{1}{2}\overline{CB}\,\overline{CB}$.

(4) 從半圓的直徑AB的兩端作二弦AC, BD,交於E,則$\overline{AC}\,\overline{AE}+\overline{BD}\,\overline{BE}=\overline{AB}^2$.

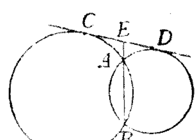


【提示】 作$EF\perp AB$,則E,F,B,C在一圓周,

$\therefore\quad \overline{AC}\,\overline{AE}=\overline{AB}\,\overline{AF}$.

仿此　$\overline{BD}\,\overline{BE}=\overline{AB}\,\overline{FB}$.

(5) 兩圓相交,延長公共弦則必等分公切線為二.



【提示】 $\overline{CE}^2=\overline{EA}\,\overline{EB}$,

$\overline{ED}^2=\overline{EA}\,\overline{EB}$.

(6) 過二定點作諸圓及一直線,在這直線上任取一點,從這點作諸圓的切線必相等.

(7) 兩圓外切,在內公切線上任取一點,在兩圓各作一弦,使延長過這點,則兩弦被這點外分所成二線分所包的矩形必等.

(8) 從等腰三角形ABC的頂點A作直線與底邊BC交於D,與外接圓交於E,則$\overline{AD}\,\overline{AE}=\overline{AB}^2$.

【提示】 參閱習題三十五.(3).

第四節 證題根據的重要條件

1. 兩平行四邊形(不論何種)相等的條件

(1)等底等高的相等. (2)平行四邊形的兩餘形相等.

2. 兩平行四邊形不等的條件 (1)等底而高大的亦大. (2)等高而底大的亦大.

3. 兩三角形相等的條件 等底等高的相等.

4. 兩線段相等的條件 (1)等積的兩三角形若高等則底亦等. (2)等積的兩三角形若底等則高亦等.

5. 平行四邊形與三角形的關係 三角形等於等底等高平行四邊形的一半.

6. 平行四邊形與梯形的關係　梯形等於以二底和爲底而同高的平行四邊形之半.

7. 矩形等於矩形的條件　(1) 諸線和與一線所包的矩形,等於諸線與一線所包各矩形的和.　(2) 二弦被交點所分,各二線分所包的矩形相等.

8. 正方形等於正方形的條件　(1) 全線上的正方形,等於半線上正方形的四倍.　(2) 直角三角形斜邊上的正方形,等於其他二邊上正方形的和.　(3) 三角形二邊上正方形的和,等於第三邊半分及其中線上正方形和的二倍.　(4) 正方形對角線上的正方形爲原形的二倍.　(5) 一線的二線分上正方形的和,等於半線及分點中點間部分上正方形和的二倍.

9. 正方形等於矩形的條件　(1) 二線和上的正方形,等於二線上正方形和,加上二線所包矩形的二倍.　(2) 二線差上的正方形,等於二線上正方形和,減去二線所包矩形的二倍.　(3) 二線上正方形的差,等於二線和與差所包的矩形.　(4) 三角形鈍角對邊上正方形,等於其他二邊上正方形和,加上二邊中一邊

與另一邊在這邊上的正射影所包矩形的二倍. (5)三角形銳角對邊上正方形,等於其他二邊上正方形和,減去二邊中一邊與另一邊在這邊上的正射影所包矩形的二倍. (6)直角三角形的一直角邊上的正方形,等於這邊在斜邊上的正射影與斜邊所包的矩形. (7)弦的二線分所包的矩形,等於半徑上正方形與中心,分點間距離上正方形的差. (8)弦外分,二線分所包矩形等於從分點所引切線上的正方形. (9)從圓周上一點作直徑的垂線,在直徑上分得的二線分所包的矩形,等於垂線上正方形.

10.直線為切線的條件 弦外分,二線分所包的矩形若等於從分點到圓周上一點所引直線上的正方形,則所引的線是切線.

*第五節 作圖題

作圖題 1. 作等於已知三角形而一角等於已知角的平行四邊形.

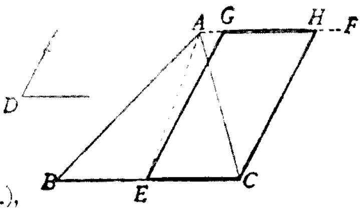
[設] $\triangle ABC$, $\angle D$.

[求作] 平行四邊形等於$\triangle ABC$,而一角等於$\angle D$.

[作法] 從A作$AF \parallel BC$,取BC的中點E,從E作EG,交AF於G,使$\angle GEC=\angle D$.從C作$CH \parallel EG$,交AF於H,

則 $\square GC$ 爲所求的平行四邊形.

[證] 連結 AE. 則



$\square GC=2\triangle AEC$ ($\triangle$等於等底等高$\square$之半).

但 $\triangle ABC=2\triangle AEC$

($\triangle$的中線等分原形爲二),

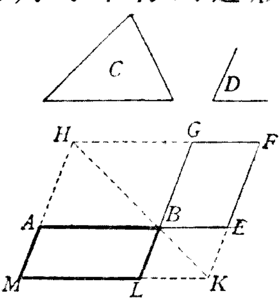
$\therefore\quad \square GC=\triangle ABC$ (等於同量).

又 $\angle GEC=\angle D$ (所作).

作圖題 2. 於已知的一邊上,作等於已知三角形而一角等於已知角的平行四邊形.

[設] 線段 AB, $\triangle C$, $\angle D$.

[求] 於AB上作平行四邊形等於 $\triangle C$, 而一角等於 $\angle D$.

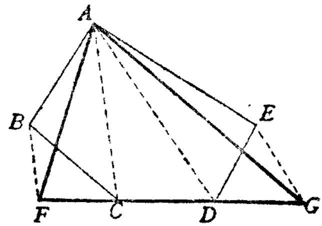


[作法] 作$\square BEFG$使等於 $\triangle C$ 而一角等於$\angle D$(仿作圖題 1), 過 A 作 BG 的平行線,交 FG 的延長線於 H. 作 HB 延長交 FE 的延長線於 K,從 K 作 FG 的平行線,交 GB, HA 的延長線於 L, M, 則 $\square ABLM$ 爲所求的平行四邊形.

[證] $\square AL=\square GE=\triangle C$ ($\square$的餘形相等).

$\angle ABL=\angle GBE=\angle D$ (對頂角).

作圖題 3. 作等於已知多邊形的三角形.



［設］ 多邊形 $ABCDE$.

［求作］ 三角形等於多邊形 $ABCDE$.

［作法］ 作 AC, 從 B 作 $BF \parallel AC$, 交 DC 的延長線於 F,再作 AF,則多邊形 $ABCDE$ 減少一邊而變成多邊形 $AFDE$. 照同法進行,可以逐次減少一邊而得所求的 $\triangle AFG$.

［證］ 因 $BF \parallel AC$ (所作),

$\therefore$ $\triangle AFC = \triangle ABC$ (同底等高的兩三角形相等).

仿此 $\triangle AGD = \triangle AED$.

$\therefore$ $\triangle AFC + \triangle ACD + \triangle AGD$

$= \triangle ABC + \triangle ACD + \triangle AED$,

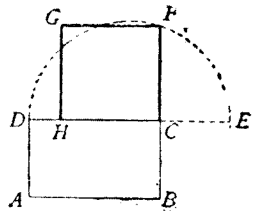
即 $\triangle AFG =$ 多邊形 $ABCDE$ (等量加等量)

作圖題 4. 作等於已知矩形的正方形.

［設］ $\square ABCD$.

［求作］ 等於 $\square ABCD$ 的正方形.

［作法］ 延長 DC 到 E,使 $CE = CB$. 以 DE 爲直徑作半圓,延長 BC 交半圓周於 F. 於 CF 上作正方形 $CFGH$, 即爲所求的正方形.



[證] 因$FC \perp DE$

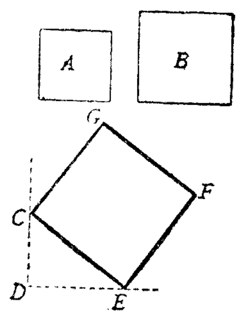
(矩形的角是直角),

$\therefore \quad \overline{FC}^2 = \overline{DC}\ \overline{CE}$

(從圓周上一點作直徑的垂線,在直徑上分得的二線分所包的矩形,等於垂線上的正方形).

即 $\square CFGH = \square ABCD$.

作圖題 5. 作一正方形,使等於已知兩正方形的和.



[設] A, B 爲兩個正方形.

[求作] 等於 A, B 的和的正方形.

[作法] 作直角CDE,於二邊上截DC, DE使各等於$\square A$, $\square B$的邊.連結CE,作CE上的正方形$CEFG$,即爲所求的正方形.

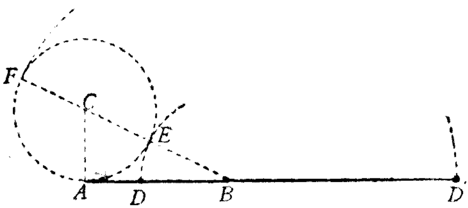
[證] $\overline{CE}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{DE}^2$ (畢氏定理).

即 $\square CEFG = \square A + \square B$.

作圖題 6. 內分或外分已知線段爲二線分,使一線分與全線所包的矩形等於其他一線分上的正方形.

〔設〕 線段 AB.

〔求〕 內分或外分 AB, 使一線分與全線所包矩形等於他一線分上的正方形.



〔作法〕 從 A 作 AB 的垂線,截取 AC, 使等於 AB 的一半.以 C 爲中心,CA 爲半徑作圓,過 B, C 作直線交圓周於 E, F. 又以 B 爲中心, BE 及 BF 各爲半徑作弧,交 AB 及其延長線於 D 及 D',則 D, D' 卽爲所求的兩個分點.

〔證〕 $\overline{AB}^2 = \overline{BE}\,\overline{BF}$ (弦外分,二線分所包矩形等於從分點所引切線上的正方形)

$= BD(BE+EF)$ (同圓的半徑相等)

$= BD(BD+AB)$ (因 $EF=2CA$)

$= \overline{BD}^2 + \overline{BD}\,\overline{AB}$.

$\therefore\quad \overline{AB}^2 - \overline{BD}\,\overline{AB} = \overline{BD}^2$.

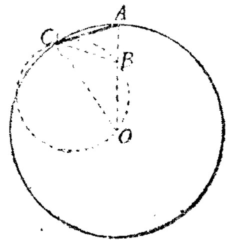
卽 $\quad AB(AB-BD) = \overline{BD}^2$.

$\therefore\quad \overline{AB}\,\overline{AD} = \overline{BD}^2$.

倣此 $\overline{AB}\,\overline{AD'} = \overline{BD'}^2$.

作圖題 7. 作一已知圓的內接及外切 5×2^n 邊的正多邊形.

[設] ⊙O.



[求作] ⊙O的內接及外切 5, 10, 20, 40, ……邊的正多邊形.

[作法] 作任意半徑 OA, 內分 OA 於 B, 使 $\overline{AO}\,\overline{AB}=\overline{BO}^2$(作圖題 6). 以 A 為中心, BO 為半徑作弧, 截原圓於 C, 逐次以截點為中心, BO 為半徑作弧, 得截原圓周為十等分. 連各分點, 再過各分點作切線, 得內接及外切正十邊形.

若間一分點連結及作切線, 則得內接及外切正五邊形.

若等分各弧為二, 用同法可得內接及外切正二十邊形.

其餘類推.

【註】 第四章第二節 7, 作正五邊形法, 同上述的方法實際一樣, 不過內分 AO 的方向相反罷了.

[證] 過 C, B, O 三點作一圓.

因 $\overline{AO}\,\overline{AB}=\overline{BO}^2$, $BO=AC$ (所作)

$\therefore$ $\overline{AO}\,\overline{AB}=\overline{AC}^2$ (代入)

$\therefore$ AC 為 ⊙CBO 的切線

(弦外分,若二線分所包矩形等於從分點到圓周上一點的直線上正方形,則其線為切線).

於是 $\angle ACB=\angle COA$

(弦切角等於夾同弧的圓周角).

$\angle ACO=\angle ACB+\angle BCO=\angle COA+\angle BCO$

(代入).

$=\angle ABC$

(△外角等於不相鄰二內角和).

但 $AO=CO$(半徑), $\angle ACO=\angle CAO$ (等腰△底角),

$\therefore$ $\angle ABC=\angle CAO$ (等於同量),

$BC=AC$(△等角對等邊)$=BO$ (所作),

$\angle BCO=\angle AOC$ (等腰△底角).

於是 $\angle ACO=2\angle AOC$, $\angle CAO=2\angle AOC$.

$\therefore$ $\angle ACO+\angle CAO+\angle AOC=5\angle AOC$

(等量加等量).

但 $\angle ACO+\angle CAO+\angle AOC=2\angle R$ (△三內角和),

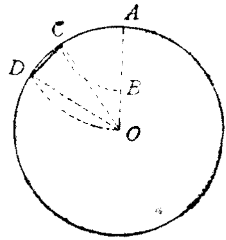
$\therefore$ $5\angle AOC=2\angle R$ (等於同量),

$\angle AOC=\frac{2}{5}\angle R=\frac{1}{10}(4\angle R)$ (等量的同分).

$\therefore$ $\overset{\frown}{AC}$ 為全圓周的$\frac{1}{10}$,即 AC 為內接正十邊形的一邊.

作圖題 8. 作一已知圓的內接及外切 15×2^n 邊的正多邊形.

［設］ ⊙O.



［求作］ ⊙O的內接及外切15,30,60,120,……邊的正多邊形.

［作法］ 作任意半徑OA,內分OA於B,使$\overline{AO}\ \overline{BO}=\overline{AB}^2$.以$A$爲中心,$AB$,$AO$各爲半徑作弧,截原圓於$C$,$D$,則$CD$爲內接正十五邊形的一邊.

［證］ $\angle AOD$爲$4\angle R$的$\frac{1}{6}$　(第六章作圖題17).

$\angle AOC$爲$4\angle R$的$\frac{1}{10}$　(本章作圖題 7).

∴ $\angle COD$爲$4\angle R$的$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$　(等量減等量)

∴ $\overset{\frown}{CD}$爲全圓周的$\frac{1}{15}$.

即 CD爲內接正十五邊形的一邊.

作外切正十五邊形及內接,外切正30,60,……邊形仿作圖題 7.

*習題五十三

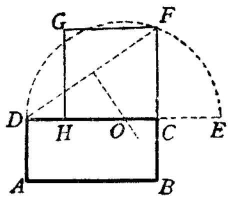
(1) 作正方形等於已知三正方形的和.

(2) 作正方形等於已知正方形的二倍.

(3) 作正方形等於已知正方形的一半.

(4) 作正方形等於已知二正方形的差.

(5) 於已知的一邊上作矩形,使等於已知正方形.



【提示】 使DC等於已知的一邊,作DF的中垂線,交DC於O.以O為中心,OD為半徑作半圓,交DC的延長線於E,使$BC=CE$.

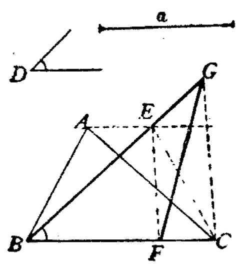
(6) 於已知的一邊上求作一矩形,等於已知的矩形.

【提示】 利用▱的餘形相等,或以正方形介紹.

(7) 等分直角為五.

【提示】 應用內接正十邊形所對的中心角為$\frac{2}{5}\angle R$.

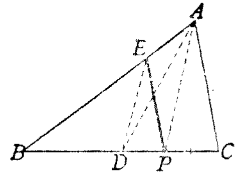
(8) 於已知的一邊上求作三角形,等於已知三角形,且使一角等於已知角.



【提示】 設$\triangle ABC$, $\angle D$,底a.

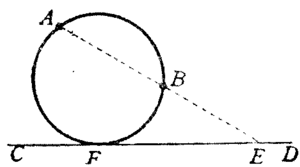
作法:過A作$AE \parallel BC$,作$\angle EBC=\angle D$, $BF=a$, $CG \parallel EF$.

(9) 於已知三角形的一邊上一定點,求作一線,等分三角形為二.



【提示】 中線分原形為二等分.

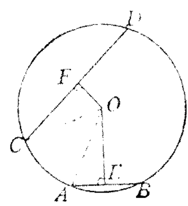
(10) 求過二定點作圓,使切於一已知直線.



【提示】 連二定點 A, B, 延長交已知直線於 E, 作正方形等於 AE BE,取 EF 使等於正方形的一邊.

*第六節 計算題

〔例題一〕 長10尺的弦,距中心為12尺.求長24尺的弦與中心的距離.



【解】 設弦 AB 長10尺,距中心 OE 為12尺;弦 CD 長24尺,距中心 OF 為 x 尺.又半徑 OA,OC 為 r 尺.

則 $\triangle OAE$ 為直角三角形,

$$AE=\frac{1}{2}AB=5\text{尺}.$$

據畢氏定理,知 $\overline{OA}^2=\overline{AE}^2+\overline{OE}^2$,

以已知數代入,得 $r^2=5^2+12^2=169$. $\therefore$ $r=13$.

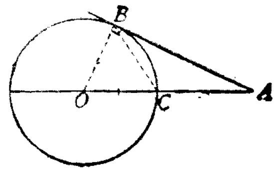
同樣, $CF=\frac{1}{2}CD=12$ 尺,由直角三角形 OCF,得

$$13^2=x^2+12^2,$$

$\therefore$ $x=\sqrt{169-144}=\sqrt{25}=5$. 即距中心5尺.

〔例題二〕 從長20寸的切線的端,作通過中心的割線,這割線在圓外的部分長8寸.求圓的半徑.

【解】 設切線 $AB=20$ 寸,割線 ACO 的圓外部 $AC=8$ 寸,半徑 $OB=OC=x$ 寸.



則 $\angle OBA=\angle R$.

據畢氏定理,知

$$\overline{OB}^2+\overline{AB}^2=\overline{OA}^2.$$

即 $x^2+20^2=(x+8)^2$.

解得 $x=21$. 故半徑為21寸.

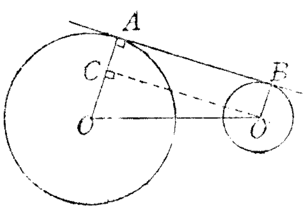
〔例題三〕 兩圓的半徑為8寸及3寸,聯心線長15寸.求公切線的長.

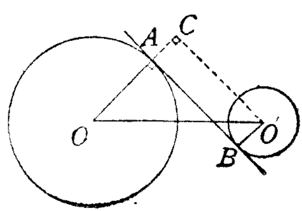
【解】 設⊙O的半徑 $OA=8$ 寸,

⊙O'的半徑 $O'B=3$ 寸,

聯心線 $OO'=15$ 寸.

則從 O' 作公切線 AB 的平行線,交 OA 或其延長線





於 C,$\triangle OCO'$ 爲直角三角形,$O'C=AB$, $OC=5(=8-3)$ 寸或 $11(=8+3)$ 寸.

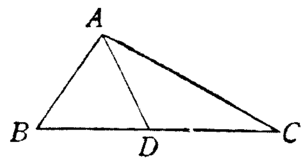
$\therefore \quad O'C=\sqrt{15^2-5^2}=14.14\cdots\cdots$,

或 $\quad O'C=\sqrt{15^2-11^2}=10.19\cdots\cdots$.

故外公切線長約 14.14 寸,內公切線長約 10.19 寸.

〔例題四〕 三角形三邊的長是21寸,17寸,10寸.求各邊上的中線的長.

【解】 設在 $\triangle ABC$ 中,$BC=21$ 寸,$CA=17$ 寸,$AB=10$ 寸,$BD=CD=10.5$ 寸,$AD=x$ 寸.



則據定理

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2),$$

得 $\quad 10^2+17^2=2(x^2+10.5^2)$.

解得 $x=9.17\cdots\cdots$.

故最短邊上的中線長約 9.17 寸.

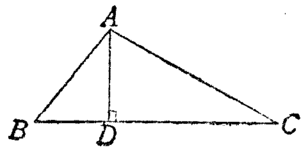
其餘二邊上的中線的長,仿此法求之.

〔例題五〕 三角形三邊的長是10寸,17寸,21寸.求各邊上的頂垂線分成的兩線分的長,及頂垂線的長.

【解】 設在 $\triangle ABC$ 中,$BC=21$ 寸,$AC=17$ 寸,$AB=10$ 寸,$AD\perp BC$.

據習題五十一(2),知 $\overline{CD}^2-\overline{BD}^2=\overline{AC}^2-\overline{AB}^2$.

設 $CD=x$ 寸, $BD=y$ 寸,則



得聯立方程式

$$\begin{cases} x^2-y^2=17^2-10^2 \\ x+y=21. \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} x^2-y^2=189 \\ x+y=21. \end{cases}$$

解得　$x=15,\quad y=6.$

故 BC 邊上的兩線分 CD 爲 15 寸, BD 爲 6 寸.

又設 $AD=h$ 寸,則據畢氏定理,得

$$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2.$$

即　$h^2+6^2=10^2.$

解得　$h=8.$

故 BC 上的頂垂線 AD 爲 8 寸.

其餘仿此.

*習題五十四

(1)　正三角形的邊長 10 寸,求其高.

(2)　正三角形的高 6 寸,求邊長.

(3)　正方形的對角線長 10 寸,求邊長.

(4)　菱形的對角線長 10 寸及 24 寸,求邊長.

(5)　窗口高 24 尺,欲用一梯抵窗口,若梯足距牆邊 10 尺,問梯長多少?

(6)　圓的半徑長 10 寸,過距中心 6 寸的點作弦,問最

短的弦長多少?又過這點的弦被這點分成的二線分的積多少?

【提示】 最短弦必與過該點的直徑垂直.又應用定理11.

(7) 圓的半徑長6寸,從距中心10寸的一點作切線,求這切線的長.

(8) 長8寸的弦,距中心3寸,求這圓的半徑. 又過這弦的中點作直徑,求這弦的一端與直徑兩端的距離.

(9) 圓的半徑長9寸,從長12寸的切線的端到中心作線,求這線的長.

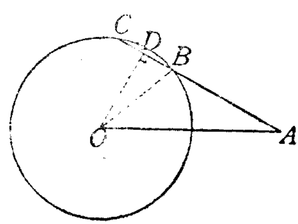
(10) 圓的直徑長30寸,等分爲五,過諸分點作垂直於這直徑的弦.求這諸弦的長.

(11) 矩形的對角線長17寸,周圍爲46寸,求各邊.

(12) 三角形三邊的長爲5寸,6寸,7寸.求重心與各頂點的距離.

【提示】 先求三中線的長,然後各取其$\frac{2}{3}$.

(13) 圓的半徑爲2寸,從距中心4寸的一點作一割線,這割線在圓內的一部長1寸.求這割線的長.



【提示】 作 $OD\perp AC$,則 $BD=\frac{1}{2}$ 寸,可先求 OD 的長.

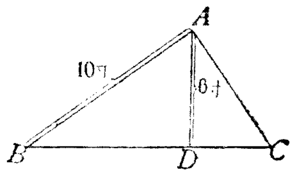
(14) 直角三角形的斜邊長17寸,直角的一邊長8寸,求面積.

(15) 等腰三角形的底邊長18寸,腰長15寸,求面積.

(16) 正三角形的一邊長9寸,求面積.

(17) 正三角形的高8寸,求面積.

(18) 直角三角形斜邊上的高6寸,直角的一邊10寸,求面積.



【提示】 據定理7系2,知 $\overline{BD}\cdot\overline{BC}=\overline{AB}^2$,故 $BC=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BD}}$,先由 $\triangle ABD$ 求 BD,再由上式求 BC.

(19) 直角三角形的斜邊長20寸,一直角邊在斜邊上的正射影長4寸,求面積.

(20) 等腰梯形的腰長13寸,腰在長邊上的正射影長5寸,又長邊是17寸.求面積.

第八章　比例,相似形

第一節　重要定義

1. 比,前項,後項　a 量含 b 量的幾倍,這倍數就稱做 a 量對於 b 量的比.記作 $a:b$ 或 $\frac{a}{b}$. a 是前項, b 是後項.

2. 比例,外項,內項　a, b 二量的比等於 c, d 二量的比,叫做 a, b, c, d 四量成比例.記作 $a:b=c:d$.第一比叫前比,第二比叫後比.第一,第四兩項叫外項,第二,第三兩項叫內項.

3. 連比例　諸項相連而成比例,叫做連比例.如 $a:b=b:c=c:d=\cdots\cdots$,或寫做 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\cdots\cdots$.

4. 比例中項,比例第三項　若三量成比例,如 $a:b=b:c$,則稱 b 是 a, c 的比例中項; c 是 a, b 的比例第三項.

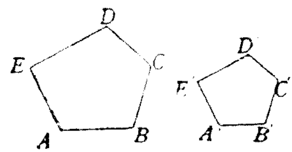
5. 外中比　內分或外分一線段,使其一線分是另一線分同全線的比例中項,就說分這線段成外中比.

【註】　第七章作圖題 6,分一線段 AB 為 AD, DB 二線分,使 $\overline{AD}\,\overline{AB}=\overline{BD}^2$,實際就是分 AB 成外中比;因由比例的等積定理,知 $\overline{AD}\,\overline{AB}=\overline{BD}^2$ 同 $AB:BD=BD:AD$

一樣.

6. 相似形 兩多邊形的諸角一一對應相等,而諸對應邊又都成比例,則兩多邊形叫做相似形.

【例】 如圖的兩多邊形 $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$, 若 $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$, $\angle E = \angle E'$; 又 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$,則這兩形是相似形.



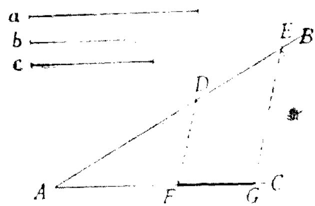
【注意一】 兩三角形的三組角若互等,則對應邊自會成比例(見本章第四節定理 4),但這是特殊的例,其他如四邊形,五邊形等等,就必須同時知道有上述的兩種性質,才能稱做相似.

【注意二】 相似的記號是$\backsim$,前已述及.

7. 相似位置 所設的二直線,若是兩個相似形的對應邊,就稱這兩形在所設直線上的相似位置.

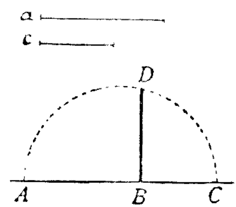
第二節 簡易幾何畫法

1. 求三線段的比例第四項 已知三線段 a, b, c,若欲另作一線段 d,使 $a:b=c:d$,可任意作二相交直線 AB, AC,截 $AD=a$, $DE=b$,



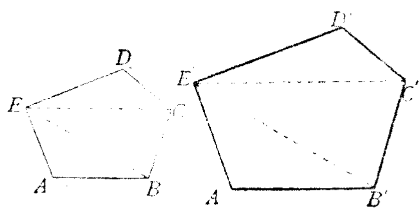
$AF=c$，作 DF，從 E 作 DF 的平行線，交 AC 於 G，則 FG 爲所求的比例第四項.

2. 求二線段的比例中項 已知二線段 a，c，欲另作一線段 b，使 $a:b=b:c$，可於任意直線上截 $AB=a$，$BC=c$，以 AC 爲直徑作半圓，從 B 作 AC 的垂線，交半圓於 D，則 DB 爲所求的比例中項.



3. 作相似三角形 只須作二組角互等的兩三角形就是.

4. 作相似多邊形 先作多邊形 $ABCDE$，分成 $\triangle ABE$，$\triangle BCE$，$\triangle CDE$. 於另一直線 $A'B'$ 上作 $\triangle A'B'E'$，與 $\triangle ABE$ 相似；於 $B'E'$ 上作 $\triangle B'C'E'$，與 $\triangle BCE$ 相似；於 $C'E'$ 上作 $\triangle C'D'E'$，與 $\triangle CDE$ 相似；則 $A'B'C'D'E'$ 必與 $ABCDE$ 相似.



第三節　初步定理

關於比例的基礎定理,在代數中差不多已完全學過,並且都已證明.現在爲便於應用起見,把他們重行彙集在一起,但證明從略.

1. 定比定理　若 $a:b=r$,

則 $ma:mb=r, \frac{a}{m}:\frac{b}{m}=r$.

2. 連比定理　若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\cdots\cdots=r$,

則 $\frac{a+c+e+g+\cdots\cdots}{b+d+f+h+\cdots\cdots}=r$.

3. 等積定理　若 $a:b=c:d$,則 $ad=bc$.

4. 逆等積定理　若 $ad=bc$,則 $a:b=c:d$.

5. 相乘定理　若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \frac{e}{f}=\frac{g}{h}, \frac{k}{l}=\frac{m}{n}, \cdots\cdots$,

則 $\frac{aek\cdots\cdots}{bfl\cdots\cdots}=\frac{cgm\cdots\cdots}{dhn\cdots\cdots}$.

6. 自乘定理　若 $a:b=c:d$,則 $a^n:b^n=c^n:d^n$.

7. 反比定理　若 $a:b=c:d$,則 $b:a=d:c$.

8. 更迭定理　若 $a:b=c:d$,

則 $d:b=c:a, a:c=b:d$.

9. 合比定理　若 $a:b=c:d$,

則 $a+b:b=c+d:d$.

10. 分比定理　若 $a:b=c:d$,

則 $a-b:b=c-d:d$.

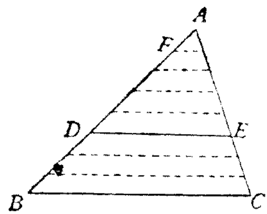
11.分合定理 若 $a:b=c:d$,
則 $a+b:a-b=c+d:c-d$.

12.等項定理 若 $a:b=c:d$, $a:b=c:d'$,
則 $d=d'$.

【理由】 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d'}$, $\therefore \frac{c}{d}=\frac{c}{d'}$. 交叉乘,得 $cd=cd'$, 以 c 除,得 $d=d'$.

第四節 重要定理

定理 1. 三角形一邊的平行線,分其他二邊成比例.



〔設〕 在 $\triangle ABC$ 中,
$DE \parallel BC$.

〔求證〕 $AD:DB=AE:EC$.

〔證〕(一) 若 AD 與 DB 有公約量,即有一量,用以量 AD 可盡,量 DB 也盡.設這公約量是 AF, AD 是 AF 的 m 倍, DB 是 AF 的 n 倍(既可以量盡,這 m,n 當然是整數).

於是 $AD:DB=m:n$.

把 AD 照 AF 的長截成 m 分,把 DB 同樣可截成 n 分.從分點作 BC 的平行線,這些線一定把 AC 分做$(m+n)$個等分,AE 是 m 等分, EC 是 n 等分.

(若干平行線截一線爲等分,則截任何線都成等分)

$\therefore$ $AE:EC=m:n$. 於是 $AD:DB=AE:EC$.

【註】 上述的 AD 與 DB 的公約量 AF,好比算術中的最大公約數.但兩線段不一定有公約量,譬如正方形的邊同對角線,圓的直徑同圓周等就是.所以遇沒有公約量的二線段時,當再加下面的證明.

(二) 若 AD 與 DB 沒有公約量,則 $AD:DB$ 的值是無限的小數,設 $AD:DB=\sqrt{2}=1.4142\cdots\cdots$,據證(一),知道

若 $AD:DB=1.4$, 則 $AE:EC=1.4$;

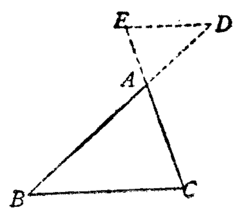
若 $AD:DB=1.41$, 則 $AE:EC=1.41$;

若 $AD:DB=1.414$,則 $AE:EC=1.414$;

…………………………………………………….

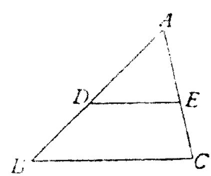
可見 $AD:DB$ 的各近似值,總等於 $AE:EC$ 的各近似值.

$\therefore\quad AD:DB=AE:EC.$



【注意】 如右圖,D, E 二點若在延長線上時,則 AB, AC 二邊各被 D, E 外分,二線分的比仍相等,即 $AD:BD=AE:CE$.

系 1. 三角形一邊的平行線,截兩邊所成的對應線段都成比例.



【說明】 因 $AD:DB=AE:EC$,

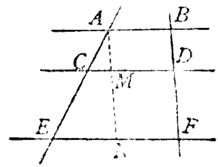
$\therefore\quad AD+DB:DB=AE+EC:EC$

(合比定理).

即　$AB:DB=AC:EC$.

仿此 $AB:AD=AC:AE$.

系 2.　諸平行線截兩線所得的對應線分都成比例.



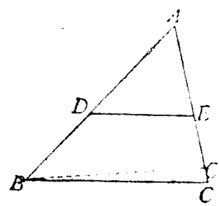
【說明】　若作　$AMN \parallel BDF$.

則　$AM=BD,\ MN=DF,\ AN=BF$.

$\therefore$ $AC:CE=BD:DF$;　$AE:AC=BF:BD$;

$AE:CE=BF:DF$.

定理 2.　一直線若分三角形的二邊成比例,則必與第三邊平行.



[設]　DE 分 $\triangle ABC$ 的二邊 AB, AC,而 $AD:DB=AE:EC$.

[求證]　$DE \parallel BC$.

[證]　從 B 作 $BC' \parallel DE$,交 AC 或其延長線於 C'.

則 $AD:DB=AE:EC'$

(△一邊的平行線,分其他二邊成比例).

但　$AD:DB=AE:EC$　(所設),

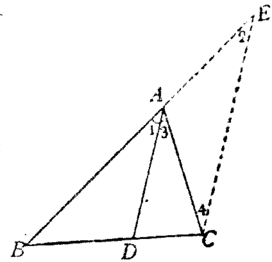
$\therefore$　$EC'=EC$　(等項定理).

於是 C' 必合於 C, BC' 必合於 BC.

但　$DE \parallel BC'$　(所作),

$\therefore$　$DE \parallel BC$.

定理 3. 三角形一角的二等分線,內分對邊爲二線分,這二線分與其他二邊成比例.



[設] AD 爲 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的二等分線.

[求證] $DB:DC=AB:AC$.

[證] 從 C 作 AD 的平行線,交 BA 的延長線於 E.

則 $\angle 1=\angle 2$ (平行線間的同位角),

$\angle 3=\angle 4$ (平行線間的錯角).

但 $\angle 1=\angle 3$ (所設),

$\therefore$ $\angle 2=\angle 4$ (等於同量).

$\therefore$ $AC=AE$ ($\triangle$ 等角對等邊).

又在 $\triangle BCE$ 中,$DA \parallel CE$,

$\therefore$ $BD:DC=BA:AE$

($\triangle$ 一邊的平行線,分其他二邊成比例).

$\therefore$ $BD:DC=AB:AC$ (等量代入).

系 1. 三角形一外角的二等分線,外分對邊爲二線分,這二線分與其他二邊成比例.

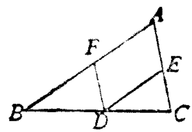
【說明】 仿定理,從 C 作外角二等分線的平行線.

系 2. 三角形一角的二等分線,內分對

邊所得二線分的比,等於他的外角二等分線外分對邊所得二線分的比.

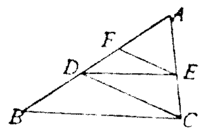
習題五十五

(1) 在$\triangle ABC$的BC邊上任取D點,作$DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$,則$BF:FA = AE:EC$.

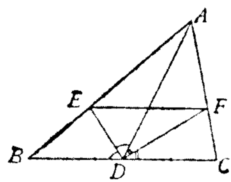


【提示】 同等於$BD:DC$.

(2) $\triangle ABC$中,若$DE \parallel BC$, $FE \parallel DC$,則AD為AF,AB的比例中項.



(3) $\triangle ABC$的BC邊上中線為AD,作$\angle ADB$, $\angle ADC$的二等分線DE,DF,則$EF \parallel BC$.

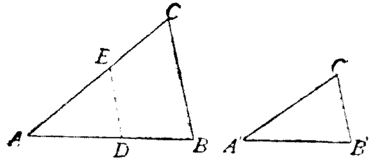


【提示】 $AE:EB = AD:DB$,

$AF:FC = AD:DC$.

定理 4. 兩三角形的各角對應相等,則兩形相似.

[設] $\triangle ABC$,$\triangle A'B'C'$中,$\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$.



[求證] $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

[證] 把$\triangle A'B'C'$放到$\triangle ABC$上,

因 $\angle A=\angle A'$ (所設),

$\therefore$ $\angle A'$可完全合於$\angle A$;設$B'C'$落於DE的位置.

則因 $\angle ADE=\angle B'=\angle B$ (所作及所設),

$\therefore$ $ED \parallel CB$ (因同位角等).

$\therefore$ $AB:AD=AC:AE$

(△一邊的平行線,分二邊所成的對應線段成比例).

但 $AD=A'B'$, $AE=A'C'$ (所作),

$\therefore$ $AB:A'B'=AC:A'C'$ (代入).

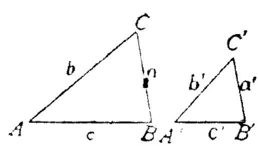
仿上法,若使$\angle B'$合於$\angle B$,則可證

$AB:A'B'=BC:B'C'$.

$\therefore$ $AB:A'B'=BC:B'C'=AC:A'C'$.

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ (對應角等,對應邊成比例).

【注意一】 凡證四線段成比例,往往利用相似三角形.只須在圖中選擇兩個三角形,使每三角形以四線段中的二線為邊,於是證這兩形相似就得.但這四線段成比例的順序有二種,如圖,若$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$,



$\angle C=\angle C'$,則兩形相似,據相似形的定義,可得比例式$a:a'=b:b'$.但亦可使一形中二邊的比等於他形中對應二邊的比,即$a:b=a':b'$,這式實際就是從上式更迭而得.

【注意二】 凡證兩矩形相等,或矩形與正方形相等,往往利用相似三角形,得一比例式,再根據等積定理即得.

系 1. 兩三角形的兩角對應相等,則兩形相似.

系 2. 兩直角三角形的一銳角互等,則兩形相似.

系 3. 兩等腰三角形的頂角相等,則兩形相似.

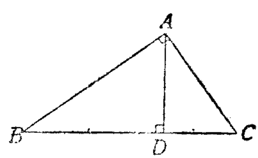
系 4. 同邊數的兩正多邊形,相鄰二頂心距與一邊所成的三角形彼此相似.

系 5. 平行於三角形一邊的線,截成一三角形,與原三角形必相似.

系 6. 若兩三角形各與另一三角形相似,則兩三角形亦相似.

習題五十六

(1) 直角三角形斜邊上的頂垂線,分原形為兩個相似三角形,且兩形各與原形相似.



(2) $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 為直角,又 $AD \perp BC$,試證 $\overline{BD}\cdot\overline{DC}=\overline{AD}^2$.

【提示】 $\triangle ABD \backsim \triangle ACD$, $\therefore BD:AD=AD:DC$.

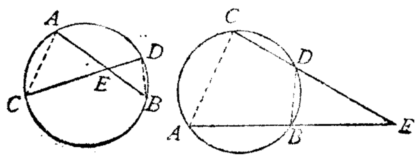
(3) 同上,試證 $\overline{AD}\,\overline{BC}=\overline{AB}\,\overline{AC}$.

【提示】 利用 $\triangle ABC \backsim \triangle ADC$.

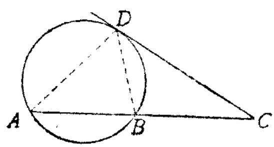
(4) 同上,試證 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$.

【提示】 先證 $\overline{AB}^2=\overline{BC}\,\overline{BD}$, $\overline{AC}^2=\overline{BC}\,\overline{DC}$.

(5) 如圖,試利用相似三角形,證明 $\overline{AE}\,\overline{BE}=\overline{CE}\,\overline{DE}$



(6) 如圖,試利用相似三角形,證明 $\overline{AC}\,\overline{BC}=\overline{CD}^2$.



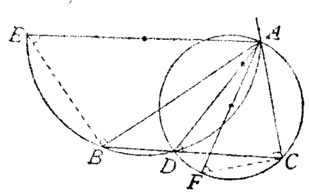
【註】 以上(2)到(6)五題係第七章定理.

(7) 二等分直角三角形直角的線,交斜邊 BC 於 D,交外接圓於 E,則 $\overline{AD}\,\overline{AE}=2\triangle ABC$.

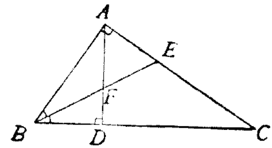
【提示】 $2\triangle ABC=\overline{AB}\,\overline{AC}$.

(8) 三角形一邊上的頂垂線,同外接圓直徑所包的矩形,等於其他二邊所包的矩形.

(9) D 爲 $\triangle ABC$ 的 BC 邊上的一點,則 $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ 的外接圓直徑的比等於 $AB:AC$.

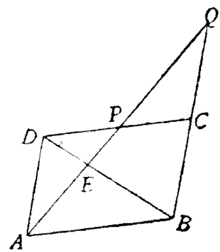


(10) 從直角三角形的直角頂A,作斜邊的垂線AD,$\angle B$的二等分線交AC於E,交AD於F,則$DF:FA=AE:EC$.



【提示】 $DF:FA=BD:BA$, $AE:EC=AB:BC$.

(11) 延長▱$ABCD$的一邊BC到Q,作AQ,交BD於E,交CD於P,則$\overline{AE}^2=\overline{PE}\ \overline{QE}$.



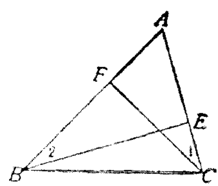
【提示】 $\triangle DAE \backsim \triangle BQE$,

$AE:QE=DE:BE$;

$\triangle DPE \backsim \triangle ABE$,

$PE:AE=DE:BE$.

(12) BE,CF為$\triangle ABC$的頂垂線,則$AB:AC=BE:CF$.



【提示】 B, C, E, F同在一圓周, $\angle 1=\angle 2$,

$\triangle ABE \backsim \triangle ACF$.

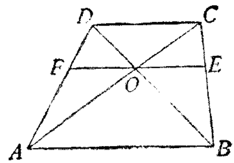
(13) 過梯形對角線的交點,作一線與底平行,則在兩不平行邊間的部分,被對角線的交點所等分.

【提示】 因 $\triangle DFO \backsim \triangle DAB$,

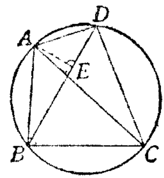
$\therefore$ $DF:DA=FO:AB$.

同樣, $CE:CB=OE:AB$.

已知 $DF:DA=CE:CB$.



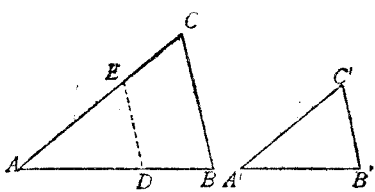
(14) 圓的內接四邊形兩對角線所包的矩形,等於兩組對邊所包兩矩形的和.



【提示】 作 AE, 使 $\angle AED=\angle ABC$, 則 $\angle AEB=\angle ADC$. 乃證 $\triangle AED \backsim \triangle ABC$, $\overline{AD}\,\overline{BC}=\overline{AC}\,\overline{DE}$, 仿此 $\overline{AB}\,\overline{CD}=\overline{AC}\,\overline{BE}$.

定理 5. 兩三角形的一組角相等,夾這等角的邊成比例,則兩形相似.

[設] $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 中, $\angle A=\angle A'$, $AB:A'B'=AC:A'C'$.



[求證] $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

[證] 把 $\triangle A'B'C'$ 放到 $\triangle ABC$ 上,

因 $\angle A=\angle A'$ (所設),

$\therefore$ 可使 $\angle A'$ 與 $\angle A$ 全合;設 $B'C'$ 落於 DE,

因 $AB:A'B'=AC:A'C'$ (所設),

$A'B'=AD,\ A'C'=AE$　(所作)

∴　$AB:AD=AC:AE$　(代入)

∴　$DE \parallel BC$

(一線分△二邊成比例,則與第三邊平行)

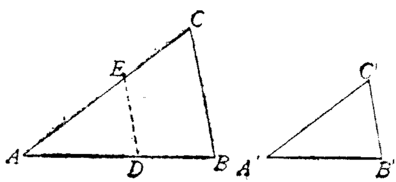
$\angle B=\angle ADE,\ \angle C=\angle AED$　(同位角)

即　$\angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C'$

∴　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$　(三組角互等)

定理 6.　兩三角形諸邊成比例,則兩形相似.

[設]　$\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ 中, $AB:A'B'=BC:B'C'=AC:A'C'$.



[求證]

$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

[證]　在 AB 上取 D 點,使 $AD=A'B'$,

在 AC 上取 E 點,使 $AE=A'C'$.

因　$AB:A'B'=AC:A'C'$　(所設)

∴　$AB:AD=AC:AE$　(等量代入)

∴　$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$

(兩△二邊成比例,且夾角相等)

於是 $AB:AD=BC:DE$　(相似△的對應邊)

即　$AB:A'B'=BC:DE$　(等量代入)

但 $AB:A'B'=BC:B'C'$ (所設),

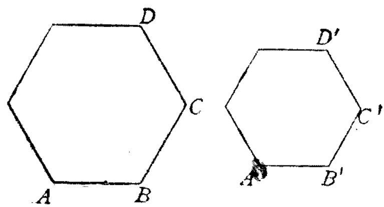
$\therefore$ $DE=B'C'$ (等項定理).

$\therefore$ $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ (三邊互等).

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ (因 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$).

定理 7. 同邊數的兩正多邊形必相似.

[設] $ABCD\cdots\cdots$,及 $A'B'C'D'\cdots\cdots$都是 n 邊的正多邊形.



[求證] $ABCD\cdots\cdots \backsim A'B'C'D'\cdots\cdots$.

[證] $\left.\begin{array}{l} \angle A=\dfrac{2n-4}{n}\angle R \\ \angle A'=\dfrac{2n-4}{n}\angle R \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{l}\text{正 } n \text{ 邊形的內角} \\ \text{等於 } \dfrac{2n-4}{n}\angle R\end{array}\right)$.

$\therefore$ $\angle A=\angle A'$ (等於同量).

仿此 $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$, $\cdots\cdots$.

又 $AB=BC, A'B'=B'C'$ (正多邊形的邊都相等),

$\therefore$ $AB:BC=1$, $A'B':B'C'=1$.

$\therefore$ $AB:BC=A'B':B'C'$ (等於同量).

即 $AB:A'B'=BC:B'C'$ (更迭定理).

仿此 $BC:B'C'=CD:C'D'$, $\cdots\cdots$.

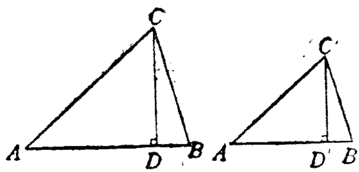
$\therefore$ $AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'=\cdots\cdots$.

$\therefore$ 正多邊形$ABCD\cdots\cdots \backsim$正多邊形$A'B'C'D'\cdots\cdots$

(兩形的角彼此都等,且對應邊成比例,則兩形相似).

定理 8. 相似三角形對應邊上高的比,等於對應邊的比.

［設］ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$, $CD, C'D'$ 爲對應邊 $AB, A'B'$ 上的高.



［求證］ $CD:C'D' = AB:A'B' = \cdots\cdots$.

［證］ 在 $\triangle ACD$, $\triangle A'C'D'$ 中,

$\angle A = \angle A'$　　(所設),

$\therefore\quad \triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$

(兩直角△一銳角互等,則必相似).

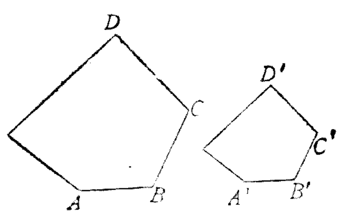
$\therefore\quad CD:C'D' = AC:A'C'$　　(相似△的對應邊).

但在原三角形中, $AC:A'C' = AB:A'B' = \cdots\cdots$,

$\therefore\quad CD:C'D' = AB:A'B' = \cdots\cdots$.

系. 同邊數的兩正多邊形,邊的比等於邊心距的比.

定理 9. 兩相似多邊形周圍的比,等於對應邊的比.



［設］ $ABCD\cdots\cdots$, 及 $A'B'C'D'\cdots\cdots$ 爲相似的兩多邊形,以 P 及 P' 表他們的周圍

[求證] $P:P'=AB:A'B'$.

[證] 因 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\cdots\cdots$

(相似形對應邊成比例),

$\therefore\quad \dfrac{AB+BC+CD+\cdots\cdots}{A'B'+B'C'+C'D'+\cdots\cdots}=\dfrac{AB}{A'B'}$ (連比定理).

即 $P:P'=AB:A'B'$.

系 同邊數的兩正多邊形周圍的比,等於邊的比.

定理10. 兩個相似多邊形,可分做同數的相似三角形,一一相似,且在相似位置.

[設]

多邊形 $ABCD\cdots\backsim$

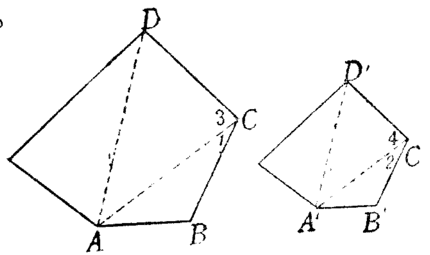
多邊形 $A'B'C'D'\cdots$.

[求證]

$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$,

$\triangle ACD\backsim\triangle A'C'D'$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$.



[證] $AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'=\cdots\cdots$,

$\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$, $\cdots\cdots$

(相似多邊形的對應邊成比例,對應角相等).

$\therefore\quad \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$ (二邊成比例,且夾角相等).

$\angle 1=\angle 2$ (相似△的對應角).

$\therefore\quad \angle 3=\angle 4$ (等量減等量).

又　$BC:B'C'=CD:C'D'$　(已證),

$BC:B'C'=AC:A'C'$　(因 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$),

$\therefore$　$CD:C'D'=AC:A'C'$　(等於同量).

$\therefore$　$\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$　(二邊成比例,且夾角相等).

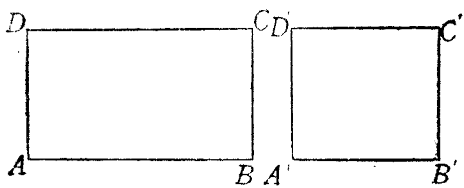
其餘仿此.

系. 若兩多邊形各由同數的相似三角形組成,一一相似,且在相似位置,則兩多邊形亦相似.

定理11. 等高矩形的比,等於底的比.

[設] 兩矩形 $ABCD$, $A'B'C'D'$ 的高 $AD=A'D'$, 底爲 AB, $A'B'$.

[求證] $\square AC:\square A'C'=AB:A'B'$.



[證] $\left.\begin{array}{l}\square AC=\overline{AB}\ \overline{AD}\\ \square A'C'=\overline{A'B'}\ \overline{A'D'}\end{array}\right\}$　(矩形面積等於底、高的積).

$=\overline{A'B'}\ \overline{AD}$.

$\therefore$　$\square AC:\square A'C'=\overline{AB}\ \overline{AD}:\overline{A'B'}\ \overline{AD}$

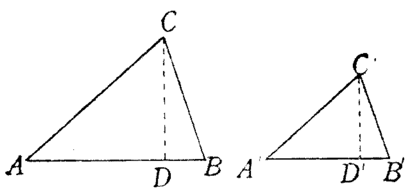
$=AB:A'B'$　(定比定理).

系 1. 等底矩形的比,等於高的比.

系 2. 等高平行四邊形的比,等於底的比;等底平行四邊形的比,等於高的比.

系 3. 等高三角形的比,等於底的比;等底三角形的比,等於高的比.

定理 12. 兩相似三角形的比,等於對應邊上正方形的比.



[設] $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

[求證] $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2$.

[證] 作兩對應邊上的高 $CD, C'D'$.

則
$$\left.\begin{aligned}\triangle ABC &= \tfrac{1}{2}\overline{AB}\ \overline{CD}\\ \triangle A'B'C' &= \tfrac{1}{2}\overline{A'B'}\ \overline{C'D'}\end{aligned}\right\}$$
(△等於等底等高矩形之半).

$\therefore\quad \triangle ABC : \triangle A'B'C' = \frac{1}{2}\overline{AB}\ \overline{CD} : \frac{1}{2}\overline{A'B'}\ \overline{C'D'}$

$= \overline{AB}\ \overline{CD} : \overline{A'B'}\ \overline{C'D'}$ (定比定理).

但 $AB : A'B' = CD : C'D'$

(相似△高的比等於底的比),

$AB : A'B' = AB : A'B'$ (恆等),

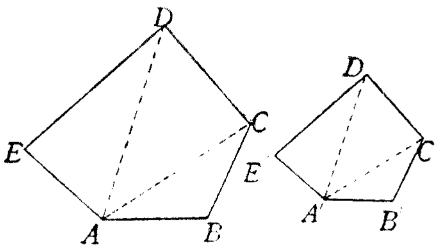
$\therefore\quad \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 = \overline{AB}\ \overline{CD} : \overline{A'B'}\ \overline{C'D'}$ (相乘定理),

$\therefore\quad \triangle ABC : \triangle A'B'C' = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2$ (等於同量).

系 兩相似三角形的比,等於對應高上正方形的比.

定理13 兩相似多邊形的比,等於對應邊上正方形的比.

[設] 多邊形 $ABCD$……與多邊形 $A'B'C'D'$……相似,以 S 及 S' 表其面積.



[求證]

$$S:S'=\overline{AB}^2:\overline{A'B'}^2.$$

[證] 從 A, A' 作對角線,可分兩多邊形為諸相似三角形.

$\therefore\quad \triangle ABC:\triangle A'B'C'=\overline{AB}^2:\overline{A'B'}^2,$

$\quad\quad \triangle ACD:\triangle A'C'D'=\overline{CD}^2:\overline{C'D'}^2,$

$\quad\quad$………………………………

(相似△的比等於對應邊上正方形的比).

但 $\quad AB:A'B'=CD:C'D'=\cdots\cdots$

(相似多邊形的對應邊),

$\therefore\quad \overline{AB}^2:\overline{A'B'}^2=\overline{CD}^2:\overline{C'D'}^2=\cdots\cdots$ (自乘定理).

$\therefore\quad \dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'}=\cdots\cdots=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$ (等於同量).

$\therefore\quad \dfrac{\triangle ABC+\triangle ACD+\cdots\cdots}{\triangle A'B'C'+\triangle A'C'D'+\cdots\cdots}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$ (連比定理).

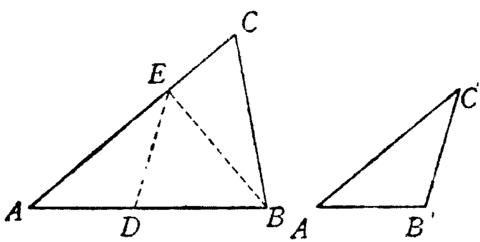
即　$S:S'=\overline{AB}^2:\overline{A'B'}^2$.

系　同邊數的兩正多邊形的比,等於邊上的正方形的比.

定理 14.　一角相等的兩三角形的比,等於夾等角的邊所包矩形的比.

[設]　在 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 中, $\angle A=\angle A'$.

[求證]　$\triangle ABC:\triangle A'B'C'=\overline{AB}\cdot\overline{AC}:\overline{A'B'}\cdot\overline{A'C'}$.



[證]　把 $\triangle A'B'C'$ 放到 $\triangle ABC$ 上,

因　$\angle A=\angle A'$

$\therefore$　$\angle A'$ 可合於 $\angle A$;設 $B'C'$ 落於 DE,作 EB,

則　$\left.\begin{aligned}\dfrac{\triangle ABE}{\triangle ADE}&=\dfrac{AB}{AD}\\ \dfrac{\triangle ABC}{\triangle ABE}&=\dfrac{AC}{AE}\end{aligned}\right\}$ (等高△的比等於底的比).

$\therefore\quad \dfrac{\triangle ABE}{\triangle ADE}\cdot\dfrac{\triangle ABC}{\triangle ABE}=\dfrac{AB}{AD}\cdot\dfrac{AC}{AE}$ (相乘定理).

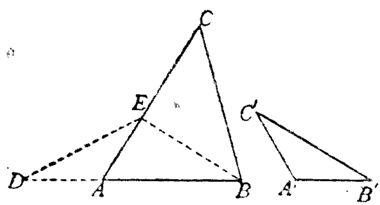
即　$\dfrac{\triangle ABC}{\triangle ADE}=\dfrac{\overline{AB}\ \overline{AC}}{\overline{AD}\ \overline{AE}}$　(定比定理).

但　$\triangle ADE=\triangle A'B'C'$, $AD=A'B'$, $AE=A'C'$　(所作).

∴　$\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{ABAC}{A'B'A'C'}$　(代入).

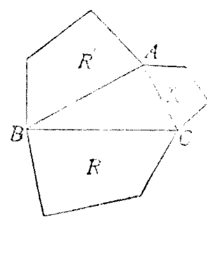
習題五十七

(1)　一角互補的兩三角形的比,等於夾這組角的兩邊所包矩形的比.



【提示】　置$\triangle A'B'C'$於$\triangle ABC$的外側,使$A'C'$落於AE, $A'B'$落於AD,則DA,AB成一直線,連EB,仿定理14證.

(2)　於直角三角形的各邊上作相似多邊形,則斜邊上的多邊形等於其他二邊上多邊形的和.



【提示】　$\dfrac{R'}{R}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}$, $\dfrac{R''}{R}=\dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}$,

$$\therefore \frac{R'+R''}{R}=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{BC}^2}=1.$$

(3)　一角相等的兩三角形,若面積相等,則夾等角的一邊的比,等於其他一邊的反比.

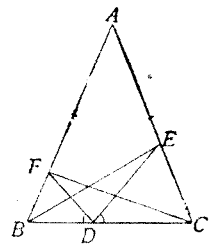
【提示】　據定理14. $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{\overline{AB}\,\overline{AC}}{\overline{A'B'}\,\overline{A'C'}}$.

因$\triangle ABC=\triangle A'B'C'$, $\therefore$ $\overline{AB}\,\overline{AC}=\overline{A'B'}\,\overline{A'C'}$.

應用逆等積定理即得.

(4)　同底的$\triangle ABC$, $\triangle DBC$,若一角ACB, DCB相等,則兩三角形的比等於$AC:CD$.

(5)　從等腰三角形的底邊BC上的D點作DE, DF使與BC成等角,則$\triangle BED=\triangle CFD$.

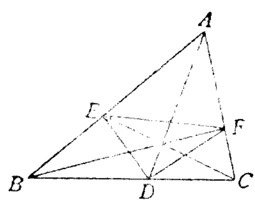


【提示】　$\triangle DBF \backsim \triangle DCE$.

$\overline{BD}\,\overline{ED}=\overline{CD}\,\overline{FD}$.

$\triangle BED:\triangle CFD=\overline{BDED}:\overline{CDFD}$.

(6)　在$\triangle ABC$中,AD等分$\angle A$, DE, DF各等分$\angle ADB$, $\angle ADC$,則$\triangle BEF:\triangle CEF=AB:AC$.

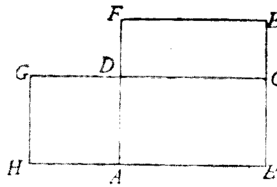


【提示】　$\triangle BEF:\triangle AEF$

$=BE:AE=BD:AD$,

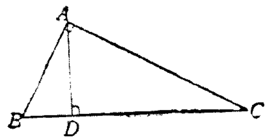
$\triangle AEF:\triangle CEF=AE:EC=AD:CD$.

(7)　二直線所包矩形,爲二直線上正方形的比例中項.



【提示】 $\square AE:\square AC=AB:AD$, $\square AC:\square AG=AB:AD$.

(8) 直角三角形斜邊 BC 上的高爲 AD,若 $AC=2AB$,則 $BD:CD=1:4$.



【提示】 $BD:CD=\triangle ABD:\triangle ACD=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2=1:4$.

第五節　證題根據的重要條件

1. 四線段成比例的條件　(1)三角形一邊的平行線,所截二邊上對應的線段成比例.(2)二直線被諸平行線所截的對應線段成比例.(3)相似的兩三角形(或多邊形)的對應邊成比例.(4)三角形一角(或其外角)的二等分線,分對邊所成二線分的比,等於其他二邊的比.(5)兩相似三角形對應高的比等於對應邊的比.(6)兩相似多邊形周圍的比等於對應邊的比.

2. 二直線平行的條件　一線分三角形的二邊成比例,則必與第三邊平行.

3. 兩三角形相似的條件　(1)三組角互

等. (2)一組角相等,且夾這角的邊成比例. (3)諸邊順次成比例.

4. 兩形的比等於兩線段的比的條件

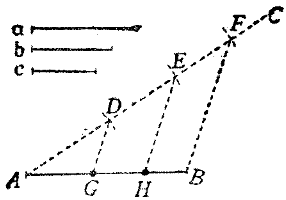
(1)等高平行四邊形的比等於底的比. (2)等底平行四邊形的比等於高的比. (3)等高三角形的比等於底的比. (4)等底三角形的比等於高的比.

5. 四形成比例的條件 (1)兩相似三角形的比,等於對應邊上正方形的比. (2)兩相似多邊形的比,等於對應邊上正方形的比. (3)一角相等的兩三角形的比,等於夾這角的二邊所包矩形的比.

*第六節　作圖題

作圖題 1.　求分已知一線段爲若干分,使與已知諸線段成比例.

［設］ 線段 AB 及 a, b, c.



［求］ 分 AB 成諸分,與 a, b, c 成比例.

［作法］ 從 A 作任意直線 AC,截 $AD=a$, $DE=b$, $EF=c$, 連結 BF.

從 E, D 作 BF 的平行線 EH, DG,則 G, H 爲所求的

分點.

［證］ 因 $DG \parallel EH \parallel FB$ (所作),

$\therefore$ $AG:GH = AD:DE = a:b$,

$GH:HB = DE:EF = b:c$

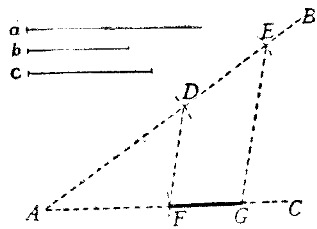
(△一邊的平行線截其他二邊成比例).

作圖題 2. 求已知三線段的比例第四項.

［設］ 線段 a, b, c.

［求］ a,b,c 的比例第四項.

［作法］ 見本章第二節 1.



［證］ 因 $DF \parallel EG$ (所作),

$\therefore$ $AD:DE = AF:FG$

(△一邊的平行線分其他二邊成比例).

卽 $a:b = c:FG$.

$\therefore$ FG 爲所求的比例第四項.

作圖題 3. 求已知線段的比例中項.

［設］ 線段 a, c.

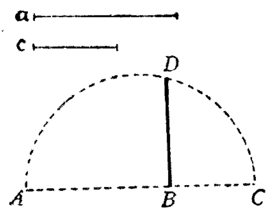
［求］ a, c 的比例中項.

［作法］ 見本章第二節 2.

［證］ 因 AC 爲直徑, $DB \perp AC$

$\therefore \quad \overline{AB}\,\overline{BC} = \overline{DB}^2$

(從圓周上一點作線⊥直徑,則直徑上二分所包矩形等於垂線上正方形).



$\therefore \quad AB:DB = DB:BC$

(逆等積定理).

即 $\quad a:DB = DB:c$,

$\therefore \quad DB$ 爲所求的比例中項.

作圖題 4. 於已知的一邊上求作多邊形,使與已知多邊形相似,且在相似位置.

作法見本章第二節 4,證明根據第四節定理 10 系.

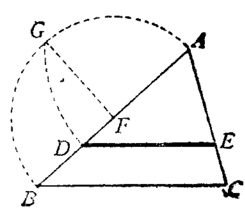
※習 題 五 十 八

(1) 求作一直線,過定點 A,與已知直線 OX, OY 交於 P, Q,使 OP, OQ 的比等於已知二線段的比.

(2) 求作已知兩線段的比例第三項.

【提示】 仿習題五十三(5)或本節作圖題 2.

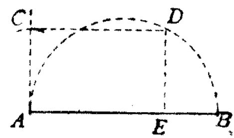
(3) 求作一線,與已知三角形的一邊平行,分這三角形爲二等分.



【解析】 若DE爲所求的線,則$\triangle ABC$

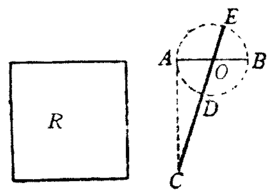
$\backsim\triangle ADE$, 且$\triangle ABC:\triangle ADE=2:1$, 但$\triangle ABC:\triangle ADE=\overline{AB}^2:\overline{AD}^2$, $\therefore \overline{AB}^2:\overline{AD}^2=2:1$. 於是知令 AB 爲正方形的對角線,則 AD 必等於正方形的邊.

(4) 求作矩形等於已知正方形,且使其底,高的和等於已知線段.



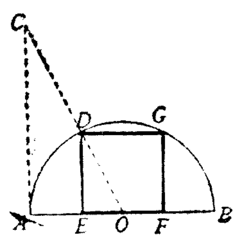
【提示】 仿作圖題 3, 得 $\overline{AE}$ $\overline{EB}$.

(5) 求作矩形等於已知正方形,且使其底,高的差等於已知線段.



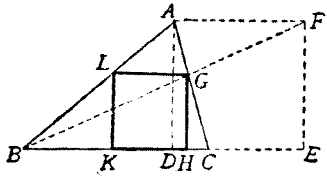
【提示】 以已知線段 AB 爲直徑作圓,作切線 AC 等於已知正方形 R 的邊. 通過中心作割線 CDE, 則 CD, CE 爲所求矩形的二邊.

(6) 求在已知半圓內作內接正方形.



【提示】 作 CA 等於直徑 AB, 且與直徑垂直,則 $DE:EO=CA:AO=2:1$.

(7) 求 已知三角形內作內接正方形.



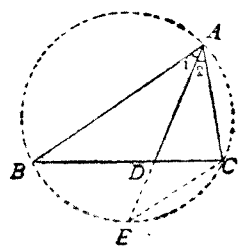
【提示】 作頂垂線上的正方形 $ADEF$,

則 $GH:FE=BG:BF$, $LG:AF=BG:BF$.

因 $FE=AF$, $\therefore GH=LG$.

*第七節 計算題

[例題一] 三角形的三邊為 9 寸,12 寸,15 寸.求各角的二等分線所分對邊上的線分的長,及二等分線的長.



【解】 設 $AC=9$ 寸, $BC=12$ 寸, $AB=15$ 寸, AD 為 $\angle A$ 的二等分線.

則 $AB:AC=BD:DC$,

即 $15:9=BD:DC$.

$\therefore$ $15\times DC=9\times BD$.

設 BD 為 x 寸,則 DC 為 $(12-x)$ 寸,

代入,得 $15(12-x)=9x$.

解得 $x=7.5$, $12-x=4.5$.

即 BD 長 7.5 寸, DC 長 4.5 寸.

又設延長AD交外接圓於E,

則　$\angle 1=\angle 2$, $\angle B=\angle E$, $\therefore \triangle ABD \backsim \triangle AEC$,

$AB:AD=AE:AC$.

$\therefore$　$\overline{AB}\,\overline{AC}=\overline{AD}\,\overline{AE}=AD(AD+DE)=\overline{AD}^2+\overline{AD}\,\overline{DE}$

$=\overline{AD}^2+\overline{BD}\,\overline{DC}$.

設　$AD=y$寸,以已知數代入,得

$15\times 9=y^2+7.5\times 4.5$.

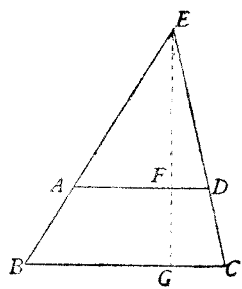
解得　$y=10.06\cdots\cdots$.

故二等分線AD長約10.06寸.

其餘仿此.

〔例題二〕　梯形二底的長為14寸及21寸,高為8寸.若延長不平行二邊,相交於一點,求所成的兩個三角形的高.

【解】　設梯形$ABCD$,延長BA,CD交於E,作$EFG\perp BC$.已知$AD=14$寸,$BC=21$寸,$FG=8$寸.



因　$\triangle EAD \backsim \triangle EBC$.

$\therefore$　$EF:EG=AD:BC$.

設　$EF=x$寸,

則　$EG=(x+8)$寸,

代入前式,得　$x:x+8=14:21$.

即 $21x=14(x+8)$.

解得 $x=16,\quad x+8=24$.

故$\triangle EAD$高16寸,$\triangle EBC$高24寸.

*習 題 五 十 九

(1) 作一線與$\triangle ABC$的BC邊平行,截AB於D,截AC於E,已知$AD:DB=3:2$, $BC=20$寸,求DE.

(2) 三角形三邊的長爲6寸,7寸,8寸.他的相似形中與8寸的邊對應的長40寸.求其他二邊.

(3) 一樹影長90尺,同時有高6尺的竹竿,影長4尺.求樹的高.

(4) 兩相似多邊形的周圍是200尺及300尺.第一形的一邊長24尺,求第二形的對應的一邊.

(5) 長10寸的線,內分或外分,使兩線分的比爲5:3.求兩線分的長.

(6) 三角形三邊的長爲13寸,14寸,15寸.在14寸的一邊上的高是12寸,求其他二邊上的高.

(7) 延長梯形不平行的二邊BA,CD使交於E.若AB長7寸,底邊BC長5寸,AD長3寸,求AE及BE.

(8) 梯形的二底爲8寸及12寸,高爲3寸.若離12寸的底2寸作線平行於底,求這線在不平行二邊間的長.

【提示】　作 $AK \parallel CD$，則 $BK = BC - AD = 12$ 寸 $- 8$ 寸 $= 4$ 寸．又 $AH = 1$ 寸，$AG = 3$ 寸，可求 EL 的長．

*第九章 圓的度量

第一節 重要定義

1. 圓周的長 若在一圓中作一內接正五邊形,次作一正十邊形,次作一正二十邊形,……,這樣,所作多邊形的邊數愈多,他的周圍愈接近於圓周.於是可假定圓周長的定義如下:

若圓內接正多邊形的邊數增加到無限時,他的周圍就等於圓周的長.

【注意】 若圓外切正多邊形的邊數增加到無限時,他的周圍也就等於圓周的長.但通常以利用內接正多邊形爲便.

【註】 在理論上,圓周長的定義應記作「若圓內接正多邊形(或外切正多邊形)的邊數增加到無限時,他的周圍的極限是圓周的長.」但對初學者尚不便言極限的原理,所以這裏僅舉假定的定義.至於利用極限的定義,應留待學高中幾何時再講.下面關於圓面積的定義,也是一樣.

2. 圓周率 根據下節定理 1 系 2,知道在任意的圓中,圓周的長同直徑的比是一個常數,通常用 π 表他,叫做圓周率.

3. 圓的面積 若圓外切正多邊形的邊數增加到無限時,他的面積就等於圓的面積.

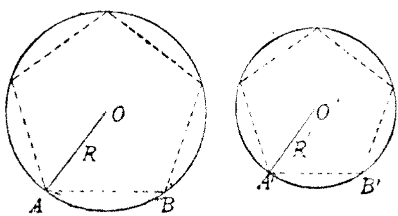
【注意】 若圓內接正多邊形的邊數增加到無限時,他的面積也就等於圓的面積.但通常以利用外切正多邊形為便.

第二節 重要定理

定理 1. 二圓的圓周的比等於半徑的比.

[設] $\odot O, \odot O'$ 的半徑為 R, R',圓周為 C, C'.

[求證] $C:C'=R:R'$.



[證] 在兩圓各作一內接正五邊形,設其周圍為 P, P'.

因 $\triangle OAB \backsim \triangle O'A'B'$ (同邊數的兩正多邊形,相鄰二頂心距與一邊所成的三角形彼此相似),

$\therefore$ $R:R'=AB:A'B'$ (相似△的對應邊).

但 $P:P'=AB:A'B'$

(同邊數的兩正多邊形周圍的比等於邊的比),

$\therefore \quad P:P'=R:R'$ (等於同量).

若在兩圓中各作一內接正十邊形,或正二十邊形,正四十邊形,……,仍設其周圍爲P, P',

則所得的結果,仍是 $P:P'=R:R'$.

故兩個正多邊形的邊數增加到無限時,仍得

$$P:P'=R:R'.$$

但此時 $P=C$, $P'=C'$ (圓周長的定義),

$\therefore \quad C:C'=R:R'$ (代入).

系 1. 二圓的圓周的比等於直徑的比.

【說明】 由定比定理,知二圓直徑的比等於半徑的比.

系 2. 任意的一圓,其圓周與直徑的比是一個常數(這常數即圓周率π).

【說明】 作一定圓,設其圓周爲C,直徑爲d,則$C:d$是一個常數.又設任意圓的圓周爲C',直徑爲d',則據系1,得$C:C'=d:d'$,更迭得$C:d=C':d'$,故$C':d'$也是一個常數.

系 3. 設一圓的半徑爲r,直徑爲d,圓周的長爲C,則 $C=\pi d$,或$C=2\pi r$.

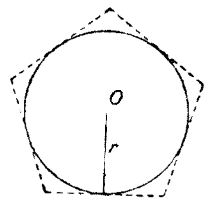
【說明】 因$\frac{C}{d}=\pi$,故$C=\pi d$;因$d=2r$,故$C=2\pi r$.

系 4 同上,再設一弧所對的中心角爲n°,則 弧長$=\frac{n}{360}\pi d=\frac{n}{180}\pi r$

【說明】　若中心角爲周角(即360°)的$\frac{n}{360}$,則所對的弧長亦爲圓周長的$\frac{n}{360}$.

定理 2.　圓的面積等於半徑同圓周的積的一半.

[設]　⊙O的半徑爲r,圓周爲C,面積爲S.



[求證]　$S=\frac{1}{2}rC$.

[證]　在⊙O外作一外切正五邊形,設其周圍爲P,面積爲A.

則　　$A=\frac{1}{2}rP$

(正多邊形的面積,等於周圍與邊心距的積的一半).

若在⊙O外作一外切正十邊形,或正二十邊形,正四十邊形,……,仍設其周圍爲P,面積爲A,

則所得的結果仍是　$A=\frac{1}{2}rP$.

故⊙O的外切正多邊形的邊數增加到無限時,仍得　$A=\frac{1}{2}rP$

但此時$A=S, P=C$　　(圓面積同圓周長的定義),

∴　　$S=\frac{1}{2}rC$　　(代入).

系 1.　圓的面積等於π乘半徑的平方.

【說明】　因　$S=\frac{1}{2}rC$, 即 $S=\frac{1}{2}r(2\pi r)=\pi r^2$.

系 2.　二圓的面積的比等於半徑的平

方的比.

【說明】　設$\odot O$,$\odot O'$的面積為S, S',半徑為r, r',

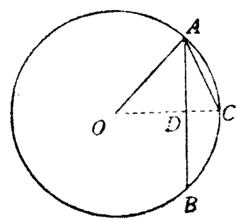
則　$S=\pi r^2$, $S'=\pi r'^2$.

$\therefore$　$S:S'=\pi r^2:\pi r'^2=r^2:r'^2$　(定比定理)

系 3.　二圓的面積的比等於直徑的平方的比.

系 4.　中心角為n°的扇形的面積等於$\frac{n}{360}\times\pi r^2$.

定理 3.　若圓的半徑為R,內接正n邊形一邊的長為S,則同圓的內接正$2n$邊形的一邊為　$\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-S^2}}$.



[設]　$\odot O$的內接正n邊形的一邊$AB=S$,半徑$OA=R$.

[求證]　$\odot O$的內接正$2n$邊形的一邊

$$AC=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-S^2}}.$$

[證]　因AC為內接正$2n$邊形的一邊,AB為內接正n邊形的一邊,

$\therefore$　$\widehat{AC}=\frac{1}{2}\widehat{AB}$.

即C為$\widehat{AB}$的中點.

作OC交AB於D,

則　$OC \perp AB, AD = DB$

(弦的中垂線過中心及所對弧的中點).

且　$\angle O$爲銳角　(因$\widehat{AB} < \frac{1}{2}$圓周,$\widehat{AC} < \frac{1}{4}$圓周).

$\therefore$　$\overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - 2\overline{OC}\,\overline{OD}$

(△銳角對邊方,等於其他二邊方和,減去二邊中的一邊與他邊在這邊上的正射影所包矩形的二倍).

即　$\overline{AC}^2 = 2R^2 - 2R \cdot OD$　(代入).

又　$\overline{OD}^2 = R^2 - \left(\frac{S}{2}\right)^2$　(畢氏定理).

開方得　$OD = \sqrt{R^2 - \left(\frac{S}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4R^2 - S^2}{4}}$.

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - S^2}.$$

代入前式,得　$\overline{AC}^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - S^2}$.

$\therefore$　$AC = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - S^2}}$.

系　設$R=1$,正n邊形的一邊爲S_n,正$2n$邊形的一邊爲S_{2n},則

$$S_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_n^2}}.$$

【注意】　由上列的系,可求得圓周率π的近似值如下:

設　$R = 1$,

則　$S_6 = 1$　(內接正六邊形的邊等於半徑).

故得	一邊的長	周圍的長
$S_{12}=\sqrt{2-\sqrt{4-1^2}}$	$=0.51764$	6.21166
$S_{24}=\sqrt{2-\sqrt{4-(.51764)^2}}$	$=0.26105$	6.26526
$S_{48}=\sqrt{2-\sqrt{4-(.26105)^2}}$	$=0.13081$	6.27870
$S_{96}=\sqrt{2-\sqrt{4-(.13081)^2}}$	$=0.06544$	6.28206
$S_{192}=\sqrt{2-\sqrt{4-(.06544)^2}}$	$=0.03272$	6.28291
$S_{384}=\sqrt{2-\sqrt{4-(.03272)^2}}$	$=0.01636$	6.28312
$S_{768}=\sqrt{2-\sqrt{4-(.01636)^2}}$	$=0.00818$	6.28317

取內接正 768 邊形的周圍,作圓周的近似值,得

$$\pi=\frac{C}{2R}=\frac{6.28317}{2}=3.14159.$$

*習 題 六 十

(1) 作一圓,使其圓周等於二已知圓的圓周的和.

【提示】 設 a, b 為二已知圓的半徑, x 為所求圓的半徑,則 $2\pi x=2\pi a+2\pi b=2\pi(a+b)$, $\therefore x=a+b$.

(2) 作一圓,使其圓周等於二已知圓的圓周的差.

(3) 作一圓,使其圓周二倍於一已知圓的圓周.

(4) 作一圓,使其圓周為一已知圓的圓周之半.

(5) 作一圓,使其面積等於二已知圓之面積的和.

【提示】 設 a, b 為二已知圓的半徑, x 為所求圓的半徑,則 $\pi x^2=\pi a^2+\pi b^2=\pi(a^2+b^2)$, $\therefore x^2=a^2+b^2$. 可用畢氏定理求 x.

(6) 作一圓,使其面積等於二已知圓的面積的差.

(7) 作一圓,使其面積二倍於一已知圓的面積.

(8) 作一圓,使其面積爲一已知圓的面積之半.

(9) 一圓的半徑爲 5 寸,求其圓周($\pi=3.1416$,以下各題同).

(10) 圓周長 17 寸,求其直徑.

(11) 圓的半徑爲 9 寸,求 30°的弧長.

(12) 圓的半徑爲 12 寸,求其面積.

(13) 圓的面積爲 40 方寸,求其直徑.

(14) 圓周長 35 寸,求其面積.

(15) 圓的半徑爲 10 寸,求中心角爲 72°的扇形面積.

(16) 正方形的邊長 2 寸,求外接圓與正方形間的面積.

(17) 正方形的邊長 2 寸,求內切圓與正方形間的面積.

(18) 正方形的邊長 2 寸,求內切圓與外接圓間的環形面積.

(19) 一圓的半徑爲 10 寸,以四個同心圓周分面積爲五等分,求這四圓的半徑.

【提示】 原圓的面積是($3.1416\times10^2=$)314.16 方寸.他的 $\frac{1}{5}$ 是62.832方寸.故所作四個同心圓的面積,從小到大順次是62.832方

寸,125.664方寸,188.496方寸, 251.328方寸.

(20) 半徑5寸的三個等圓,彼此互相外切.求三切點間的三個弧所圍的面積.

【提示】 因相切二圓的聯心線必過切點,故順次連三中心,得一每邊10寸的正三角形.這正三角形裏面,含三個中心角60°的扇形及一所求的面積.

附　　錄

計算題答案

習題二十一

(1) $1\frac{1}{5}\angle R$, $1\frac{1}{3}\angle R$; $1\frac{3}{7}\angle R$.　(2) $\frac{4}{5}\angle R$, $\frac{2}{3}\angle R$, $\frac{4}{7}\angle R$.

(3) 四邊形,八邊形,十一邊形.　(4) 四邊形,六邊形,二十邊形.

(5) 四邊形.　(6) 八邊形.　(7) 六邊形.

習題五十四

(1) 8.66 寸.　(2) 3.46 寸.　(3) 7.07 寸.

(4) 13 寸.　(5) 26 尺.　(6) 16 寸,64 方寸.

(7) 8 寸.　(8) 5寸,8.94寸,4.47寸.　(9) 15寸.

(10) 二弦各長 14.69 寸,其他二弦各長 12 寸.

(11) 8寸,15寸　(12) 3.52寸,4.01寸,2.82寸.　(13) 4寸.

(14) 60 方寸.　(15) 54 方寸.　(16) 12.72 方寸.

(17) 18.44 方寸.　(18) 3.75 方寸.　(19) 80 方寸.　(20) 144方寸.

習題五十九

(1) 12 寸.　(2) 30 寸,35 寸.　(3) 135 尺.　(4) 36 尺.

(5) 內分的二線分為 6.25寸,3.75寸;外分的二線分為25寸,15寸.

(6) 11.5寸, 12.92寸.　(7) 10.5寸, 17.5寸　(8) $9\frac{1}{3}$ 寸.

習題六十

(1)——(8)係作圖題.　(9) 31.42 寸　(10) 5.41 寸.

(11) 4.71 寸.　(12) 452.39 寸.　(13) 7.14 寸.

(14) 97.48 方寸.　(15) 62.832 方寸　(16) 2.28 方寸.

(17) 0.86 方寸.　(18) 3.14 方寸.

(19) 4.47 寸, 6.32 寸, 7.75寸, 8.94寸.　(20) 4.03 方寸.　(完)