

國學基  
本叢書  
數理精蘊

一

# 數理精蘊目錄

## 上編

卷一	一一一
數理本原	一
河圖	二
洛書	五
周髀經解	八
卷二	一七
幾何原本一	一七
幾何原本二	二七
幾何原本三	三四
幾何原本四	四二
幾何原本五	五九
幾何原本六	七七
幾何原本七	一四〇
幾何原本八	一七七

幾何原本七.....九〇

幾何原本八.....一〇一

幾何原本九.....一一六

幾何原本十.....一二五

卷四.....一四一——一八一

幾何原本十一.....一四一

幾何原本十二.....一六一

卷五.....一八三——二二八

算法原本一.....一八三

算法原本二.....一九九

下編

卷一.....二二九——二六〇

首部一.....二二九

度量權衡.....二二九

命位.....二三二

加減乘除	二三四
加法	二三五
減法	二四一
因乘	二四六
歸除	二五四
卷二	二六一—二九二
首部二	二六一
命分	二六一
約分	二六三
通分	二六五
卷三	二九三—三二七
線部一	二九三
比例	二九三
正比例	二九五
轉比例	三〇〇
合率比例	三〇六

正比例帶分	三二〇
轉比例帶分	三二五
卷四	三二九—三五八
線部二	三二九
按分遞折比例	三二九
卷五	三五九—三八六
線部三	三五九
按數加減比例	三五九
卷六	三八七—四一九
線部四	三八七
和數比例	三八七
較數比例	四〇五
卷七	四二一—四六二
線部五	四二一
和較比例	四二一
卷八	四六三—四九四

線部六	四六三
盈朒	四六三
卷九	四九五—五三三
線部七	四九五
借衰互徵	四九五
疊借互徵	五一〇
卷十	五三五—五七三
線部八	五三五
方程	五三五
卷十一	五七五—六〇八
面部一	五七五
平方	五七五
帶縱平方	五九一
卷十二	六〇九—六四五
面部二	六〇九
勾股	六〇九

卷十三	六四七—六七八
面部三	六四七
勾股	六四七
卷十四	六七九—六九三
面部四	六七九
三角形	六七九
卷十五	六九五—七一三
面部五	六九五
割圓	六九五
卷十六	七一五—七五三
面部六	七一五
割圓八線	七一五
卷十七	七五五—七九二
面部七	七五五
三角形邊線角度相求	七五五
卷十八	七九三—八三二

面部八	七九三
測量	七九三
卷十九	八三三—八七一
面部九	八三三
各面形總論	八三三
直線形	八三五
卷二十	八七三—九〇二
面部十	八七三
曲線形	八七三
卷二十一	九〇三—九四九
面部十一	九〇三
圓內容各等邊形	九〇三
圓外切各等邊形	九二八
卷二十二	九五—九九二
面部十二	九五—
各等邊形	九五—



更面形.....九八七

卷二十三.....九九三—一〇一六

體部一.....九九三

立方.....九九三

卷二十四.....一〇一七—一〇六六

體部二.....一〇一七

帶縱較數立方.....一〇一七

帶縱和數立方.....一〇四六

卷二十五.....一〇六七—一〇九〇

體部三.....一〇六七

各體形總論.....一〇六七

直線體.....一〇六九

卷二十六.....一〇九一—一二二

體部四.....一〇九一

曲線體.....一〇九一

卷二十七.....一一三—一四〇



借根方比例	.....	一二三三
卷三十二	.....	一二六五
末部二	.....	一二六五
借根方比例	.....	一二六五
開諸乘方法	.....	一二六五
卷三十三	.....	一三二七
末部三	.....	一三二七
借根方比例	.....	一三二七
帶縱平方	.....	一三二七
卷三十四	.....	一三五五
末部四	.....	一三五五
借根方比例	.....	一三五五
線類	.....	一三五五
卷三十五	.....	一四一一
末部五	.....	一四一一
借根方比例	.....	一四一一
面類	.....	一四一一
卷三十六	.....	一四四五
末部六	.....	一四四五
借根方比例	.....	一四四五
體類	.....	一四四五

卷三十七.....一四七九—一五二六

末部七.....一四七九

難題.....一四七九

卷三十八.....一五二七—一五九三

末部八.....一五二七

對數比例.....一五二七

卷三十九.....一五九五—一六二五

末部九.....一五九五

比例規解.....一五九五

卷四十.....一六二七—一六五九

末部十.....一六二七

比例規解.....一六二七

下編四十卷之後，尚有八線表，對數闡微，對數表，八線對數表四種，共八卷，刪去，

未印。

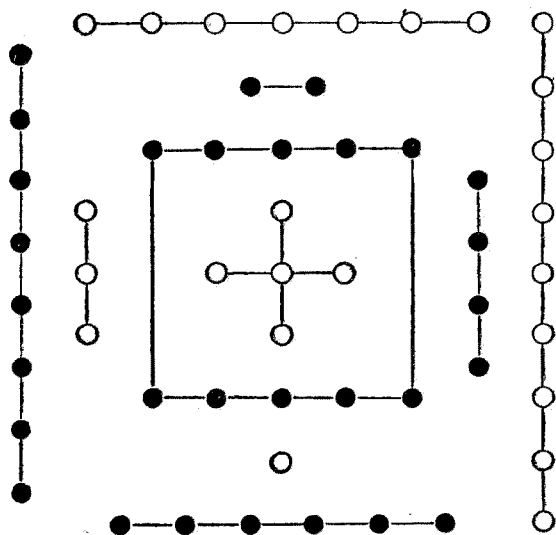
編者識

# 數理精蘊上編卷一

數理本原

粵稽上古。河出圖。洛出書。八卦是生。九疇是敍。數學亦於是乎肇焉。蓋圖書應天地之瑞。因聖人而始出。數學窮萬物之理。自聖人而得明也。昔黃帝命隸首作算。九章之義已啓。堯命羲和治曆。敬授人時。而歲功以成。周官以六藝教士。數居其一。周髀商高之說可考也。秦漢而後。代不乏人。如洛下閎。張衡。劉焯。祖冲之之徒。各有著述。唐宋設明經算學科。其書頒在學宮。令博士弟子肄習。是知算數之學。實格物致知之要務也。故論其數。設爲幾何之分。而立相求之法。加減乘除。凡多寡輕重貴賤盈朒。無遺數也。論其理。設爲幾何之形。而明所以立算之故。比例分合。凡方圓大小遠近高深。無遺理也。溯其本原。加減實出於河圖。乘除殆出於洛書。一奇一偶。對待相資。遞加遞減。而繁衍不窮焉。奇偶各分。縱橫相配。互乘互除。而變通不滯焉。徵其實用。測天地之高深。審日月之交會。察四時之節候。較晝夜之短長。以至協律度。同量衡。通食貨。便營作。皆賴之以爲統紀焉。今匯集成編。以類相從。提點線面體。以爲綱。分和較順逆。以爲目。法無論巨細。惟擇其善者。由淺以及深。執簡以御繁。使理與數協。務有裨於天下國家。以傳於億萬世云爾。

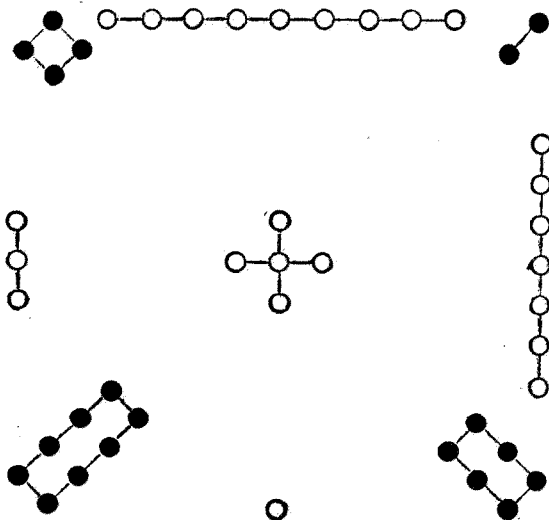
河圖



易繫辭曰。天一、地二、天三、地四、天五、地六、天七、地八、天九、地十。天數五、地數五。五位相得而各有合。朱子曰。河圖以五生數。統五成數。而同處其方。蓋揭其全以示人。而道其常。數之體也。考其數。始於一。中於五。終於十。陽奇陰偶。而數之加減。由是生焉。自一而二。自二而三。自三而四。自四而五。皆遞加一以相生。自五復加一而成六。六加一而七。七加一而八。八加一而九。九加一而十。十則仍歸於一。故至十而天地之數全矣。天數陽也。地數陰也。言天地。卽所以言陰陽也。五位相得而各有合。以五行之序而定位也。邵子曰。天之陽在南而陰在北。地之陰在南而陽在北。故河圖之數。一陽位於北。二陰位於南。其卽五行質具於地之義而言之歟。今以陰陽相生之數論之。一爲陽。天一生水而位北。一加一爲二爲陰。地二生火而位南。二加一爲三爲陽。天三生木而位東。三加一爲四爲陰。地四生金而位西。四加一爲五爲陽。天五生土而位中。至五而五行之數已周。此生數之極也。自一至五。則五又爲一體矣。於是以五爲中數。而復加一。則爲六。六陰也。因五中數與一相加。故與一同位而屬之水焉。六加一爲七。以中數五計之。實加二。故與二同位而屬之火焉。七加一爲八。以中數五計之。實加三。故與三同位而屬之木焉。八加一爲九。以中數五計之。實加四。故與四同位而屬之金焉。九加一爲十。以中數五計之。復加五。故與五同位而屬之土焉。至十而五行之數再周。天地之數已備。此成數之極也。以陰陽運行之序論之。以五生數。統十成數位。居於中。而奇數則始於北。一次東。三次南。七次西。九偶數則始於南。二次西。四次北。六次東。八此數之陰。與陰陽與陽各從其類者也。以奇偶相得之數論之。一與六合。二與七合。三與八合。四與九合。五與十合。此又奇偶相得而各有合者也。邵子謂圓者河圖之數。又曰。歷紀之數。其肇於此。然則所謂數者。卽一陰。

一陽一奇一偶循環無間。表裏相維。百千萬億。總由此推之。以成其變化。河圖者。豈非天地自然生成之數也哉。





洛書之數戴九履一左三右七二四爲肩八六爲足五居其中朱子謂以五奇數統四偶數而各居其所蓋主於陽以統陰而肇其變數之用也邵子曰數學雖多乘除盡之矣夫洛書者數之源也乘除之所以生也易說卦傳曰參天兩地而倚數三天數也二地數也天地相合而萬物育焉一者太極之體其數不行故數行於二三起於三以三參之則三九七一之數生焉起於二以二兩之則二四八六之數生焉其序列之位則天居四正取以陽統陰之義地居四維取以陰從陽之義其三九七一乘數則旋而左除數則返而右也其二四八六乘數則旋而右除數則返而左也二三相合而爲五五則無對居中者立其體也二五相合而爲十仍歸一洛書不用者藏其用也是故三始於東方發生之地而位於左自東而南三而三之是爲九故戴九自南而西九而三之爲二十七去成數餘七故右七自西而北七而三之爲二十一去成數餘一故履一奇數左旋以三參之即天道左行之說也如轉而右行以三除之仍復其原數焉二立於西南二陰始生之地而位於右肩自西南而東南二而二之是爲四位於左肩自東南而東北四而二之爲八位於左足自東北而西北八而二之爲十六去十餘六位於右足偶數右旋以二兩之即地道右行之說也如轉而左行以二除之仍復其原數焉此乘除之數見於運行者如此若以對待者觀之一與九對一爲數之始九爲數之終互乘互除其數不變也二與八對二八互乘俱得十六二除十六得八八除十六仍得二此二與八之相倚也三與七對三七互乘皆二十一三除二十一得七七除二十一仍得三此三與七之相倚也四與六對四六互乘皆二十四四除二十四得六六除二十四仍得四此四與六之相倚也至五爲二三之合天地之交陰陽之會位於洛書之中以建人極配上下而爲三才故

斜直四圍。皆得十五。合之得四十有五。爲九五之數。要之運行者其序也。對待者其位也。進退循環縱橫交錯。總不外於乘除。故曰乘除之本原。自洛書生也。

周髀經解

數學之失傳久矣。漢晉以來。所存幾如一綫。其後祖冲之郭守敬輩。殫心象數。立密率消長之法。以爲習算入門之規。然其法以有盡度無盡。止言天行未及地體。是以測之有變更。度之多盈縮。蓋有未盡之餘蘊也。明萬曆間。西洋人始入中土。其中一二習算數者。如利瑪竇穆尼閣等。著爲幾何原本同文算指諸書。大體雖具。實未闡明理數之精微。及我朝定鼎以來。遠人慕化。至者漸多。有湯若望南懷仁安多閔明我。相繼治理曆法。間明算學。而度數之理。漸加詳備。然詢其所自。皆云本中土所流傳。粵稽古聖。堯之欽明。舜之濬哲。曆象授時。閏餘定歲。璿璣玉衡。以齊七政。推步之學。孰大於是。至於三代盛時。聲教四訖。重譯向風。則書籍流傳於海外者。殆不一矣。周末疇人子弟。失官分散。嗣經秦火。中原之典章。旣多缺佚。而海外之支流。反得真傳。此西學之所以有本也。古算書存者。獨有周髀。周公商高問答。其本文也。榮方陳子以下所推行也。而漢張衡蔡邕以爲術數雖存。考驗天狀多所違失。按榮方陳子始言晷度。衡邕所疑。或在於是。若周髀本文。辭簡而意該。理精而用博。實言數者所不能外。其圓方矩度之規。推測分合之用。莫不與西法相爲表裏。然則商高一篇。誠成周六藝之遺文。而非後人所能假託也。舊註義多舛訛。今悉詳正。弁於算書之首。以明數學之宗。使學者知中外本無二理焉爾。

昔者周公問於商高曰。竊聞乎大夫善數也。請問古者包犧立周天曆度。

周天曆度者。分周天三百六十度。爲推求曆日之用也。按通鑑載包犧作甲曆。天干地支相配。六甲一

轉天度一周。年以是紀而歲功成。月以是紀而朔望定。晝夜以是紀而時日分。易大傳言包犧仰以觀於天文。俯以察於地理。其觀察之時。必有度數。以紀其法象。則曆度始於包犧無疑矣。

夫天不可階而升。地不可將尺寸而度。請問數從安出。

天之高明。地之博厚。非人力所能及。其曆度之數。不知從何而得也。

商高曰。數之法出於圓方。

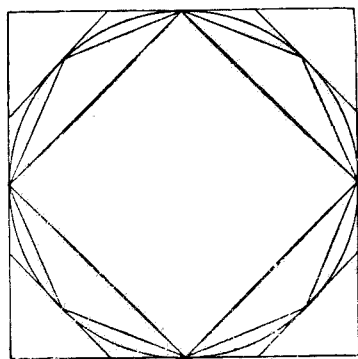
萬物之象。不出圓方。萬象之數。不離圓方。河圖者。方之象也。洛書者。圓之象也。太極者。圓之體。奇也。四象者。方之體。偶也。奇數。天也。偶數。地也。有天地而萬物於是乎生。有圓方而萬象於是乎定。有奇偶而萬數於是乎立矣。

圓出於方。

以數而論。出於圓方。以圓方而論。則圓出於方。蓋方易度而圓難測。方有盡而圓無盡。故推圓者以方度之。以有盡而度無盡也。是以圓周內弦外切。屢求勾股。爲無數多邊形。以切近圓界。將合而爲一。而圓周始得。故曰圓出於方也。

方出於矩。

孟子曰。不以規矩。不能成方圓。夫規所以成圓。而矩所以成方也。故凡方形必出於二矩相合。如矩之二股均者。合之卽爲正。





四四一十六之奇，不得成正方，亦不得成長方，故不入九九之數也。是以九九之數，爲方之本，而方之形必合以矩，故曰矩出於九九八十一也。

.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

故折矩以爲勾廣三、股修四、徑隅五。

前言圓方之形。此言勾股生成之正數也。以二矩合之。既爲方形。今以一矩折之。則爲一方之兩邊。是以折矩之橫者爲勾之廣。折矩之縱者爲股之長。於勾股之末。以斜弦連之。是爲徑隅。徑直也。隅角也。言自兩角相對直連之也。勾之廣必三。股之修必四。而徑隅始得五。此乃自然生成之正分也。易曰。參天兩地而倚數。天數一參之則爲三。地數二兩之則爲四。三二合之則爲五。此又勾三股四弦五之正義也。

既方其外。半其一矩。

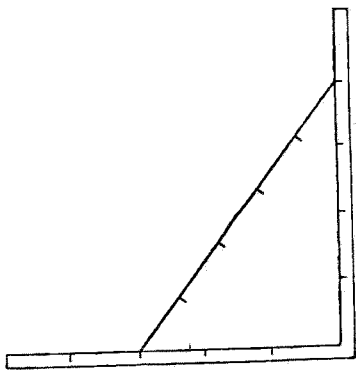
此言勾股之面積也。勾股以弦連之。不得爲方形。必再合一

矩。乃爲一長方。所謂方其外者。言弦之外。復加一矩以成方也。勾三股四相乘。得一十有二。卽爲兩矩合成之數。半之得六。乃勾股之面積。所謂半其一矩者也。

環而共盤。得成三四五。

此言勾股弦相和之數也。環而共盤者。環繞盤旋於勾股弦之周圍。得成三四五。共之爲一十有二。乃三數相和之總數也。

兩矩共長二十有五。是爲積矩。





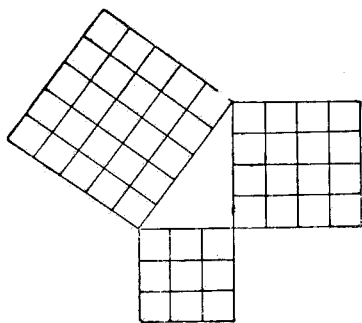
此言勾股相求之法也。兩矩者，勾與股也。其所以相求者，以勾股弦各面積，彼此加減以立法也。勾三自乘爲九，股四自乘爲一十有六，合而計之爲二十有五，是勾股各自乘之積相併，而與弦自乘之積等，故曰積矩也。弦之自乘積內減勾自乘之積，得股自乘之積。弦之自乘積內減股自乘之積，得勾自乘之積。故爲勾股弦相求之法也。

故禹之所以治天下者，此數之所由生也。

言禹之平成之功，昭垂萬古，揆厥所以奏績者，必藉勾股以審高下，始得順水之性，而告厥成功也。然則禹之所以治水者，非此勾股之數所由生乎。

周公曰：大哉言數，請問用矩之道。商高曰：平矩以正繩。

此言用矩立法，必以正且直也。平矩以正繩，有兩義。平置其矩，使矩之角直，以此直角之一股，或橫或平，橫以度遠，平以度高。復自一股引繩以度其分，則此分爲我所知，故以所知推所不知。此繩引長時，必使與直角對正，不論其分之幾，何引之又必令直，方能得測度之準，故爲平矩以正繩。又平者均平，整齊之謂，用矩之道，矩之角正，卽直角之說也。然後二股得直，以之測高測遠，乃得度其大小之分。此



矩既正而所測之度亦正矣。孟子曰：規矩準繩，以爲方圓平直。繩者，卽準之之意。規矩所以度圓方，而準繩所以考平直。故準之以平繩，之以直，始得立法之精微。故曰：平矩以正繩也。

偃矩以望高。

此用矩測高之法也。偃者，仰也。仰矩方可測高。矩之一股植立在前，一股定平在下。然後比例推之，蓋平股與立股之比，卽所知之遠與所測之高之比也。故仰測之而得高。

覆矩以測深。

此用矩測深之法也。覆者，俯也。俯矩方可測深。矩之一股立者在前，一股平者在上。平股與立股之比，卽所知之遠與所測之深之比也。故俯測之而得深。

臥矩以知遠。

此用矩測遠之法也。臥者，平也。平矩方可測遠。以矩之一股爲橫向內，一股爲縱向前。是以橫與縱之比，卽所知之度與所求之遠之比也。故平測之而得遠。

環矩以爲圓。

此用矩爲圓之法也。以矩之一端爲樞，一端旋轉爲圓，則成一圓。環矩者，卽旋規之說也。合矩以爲方。

此用矩爲方之法也。矩，二股也。兩矩相合，乃成一方。卽前方出於矩之說也。方屬地，圓屬天。天圓地方。

前言用矩以測高深廣遠。復用矩以爲圓方。此以圓方屬之天地者。非以形體言。蓋以陰陽動靜之理言也。樂記云。著不息者天也。著不動者地也。不息故運而不積。圓之象也。不動故靜而有常。方之理也。且圓之數無盡。而方之數有盡。天不可階而升。測天者恆於地上度之。是仍以方度圓也。凡數之不盡者。必奇數之可盡者。必偶。是以陽爲奇。陰爲偶。此方圓之理數。所以屬乎天地也。

方數爲典。以方出圓。

典則也。言圓之數奇零不盡。不可爲則。故惟方數可爲典。則以方出圓者。以方之形度圓之分。從方數中生出圓數。卽前圓出於方之說也。如圓徑求積。則以徑自乘之。爲正方形。而以方率圓率比例推之。卽得圓積。是皆以方出圓之理也。

笠以寫天。天青黑。地黃赤。天數之爲笠也。青黑爲表。丹黃爲裏。以象天地之位。

此卽儀象以表天地之形色也。笠形圓。故以象天。寫象也。青黑天之色。黃赤地之色。天數之爲笠形。則以青黑爲表。丹黃爲裏。以象天地之位。蓋取天包地之象也。

是故知地者智。知天者聖。智出於勾。勾出於矩。夫矩之於數。其裁制萬物。惟所爲耳。

天地之高深廣遠。非聖智不能知。然聖智非由理之自然。亦不能無所憑藉而知也。故明勾股之數。卽可以知地而爲智。知地之數。卽可因地以知天而爲聖矣。故曰。智出於勾也。然勾股之形。又賴矩以成。故矩爲勾股之本。而天地之高深廣遠。皆賴矩以測。况萬物之大小巨細。豈能外於矩之度分乎。故矩之於數。其裁制萬物。惟其所爲而無不可也。

周公曰善哉。

以周公之聖而與之曰善哉。則其得數之本。立法之妙。可謂至矣。至是而周髀之義盡矣。

# 數理精蘊上編卷二

## 幾何原本一

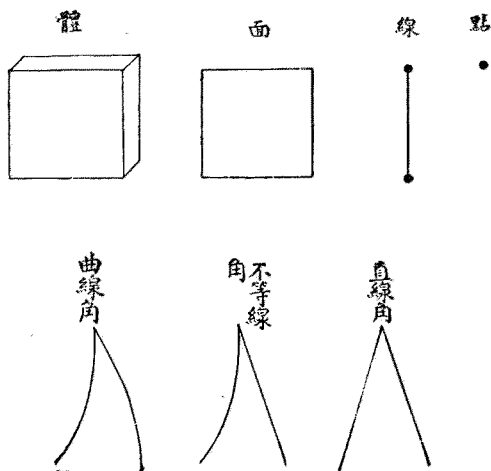
### 第一

凡論數度必始於一點。自點引之而爲線。自線廣之而爲面。自面積之而爲體。是名三大綱。是以有長而無闊者謂之線。有長與闊而無厚者謂之面。長與闊厚俱全者謂之體。惟點無長闊厚薄。其間不能容分。不可以數度。然線之兩端卽點。而線面體皆由此生。點雖不入於數。實爲衆數之本。

### 第二

線有直曲兩種。其二線之一端相合。一端漸離。必成一角。二線若俱直者。謂之直線角。一線直一線曲者。謂之不等線角。二線俱曲者。謂之曲線角。

### 第三



凡角之大小。皆在於角空之寬狹。出角之二線。即如規之兩股。漸漸張去。自然開寬。是以命角不論線之長短。止看角之大小。如丙角兩線雖長。其開股之空狹。遂為小角。若丁角兩線雖短。其開股之空寬。遂成大角矣。

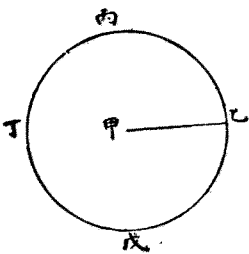
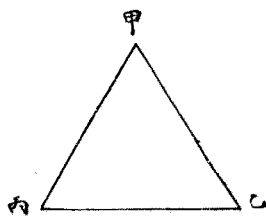
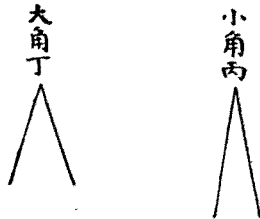
第四

凡命角必用三字為記。如甲乙丙三角形。指甲角。則云乙甲丙角。指乙角。則云甲乙丙角。指丙角。則云甲丙乙角是也。亦有單舉一字者。則其所舉之一字。即是所指之角也。如單言甲角乙角丙角之類。

第五

凡有一線。以此線之一端為樞。復以此線之一端為界。旋轉一周。即成一圓。如甲乙一線。以甲端為樞。乙端為界。旋轉復至乙處。即成乙丙丁戊之圓。此圓線謂之圓界。圓界內所積之面度謂之圓面。

第六



凡圓界不拘長短。其分界之所。即爲弧線。如乙丙丁戊之圓。丙至丁。丁至戊。俱爲弧線。因其形似弧。故名之。

第七

凡圓自一界過圓心。至相對之界。畫一直線。將一圓爲兩平分。則爲圓徑。如乙丙丁戊之圓。以甲爲心。自圓界乙處。過甲心。至丁。或自圓界丙處。過甲心。至戊。畫乙甲丁及丙甲戊線。皆爲圓徑也。

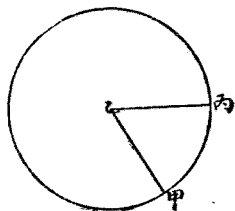
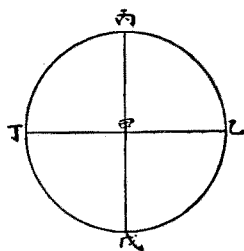
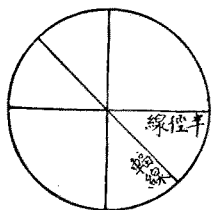
第八

凡自圓心至圓界。作幾何線。皆謂之輻線。其度俱相等。因平分全徑之半。故又謂之半徑線。

第九

凡圓界。皆以所對之角。而命其弧。而角又以所對之弧。而命其度。蓋角度俱在圓界。而圓界爲角度之規也。如乙角爲心。甲丙爲界。則乙角相對之界。即甲丙弧。而甲丙弧。即乙角之度也。

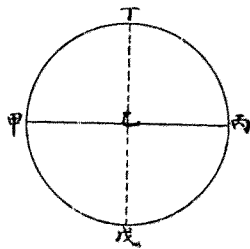
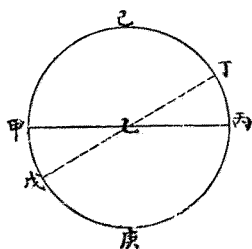
第十



凡角相對之弧。得圓界四分之一者。此角必直。故謂之直角。如甲丁丙戊之圓。甲乙丙之徑。自中心乙。至圓界丁。畫一半徑。將半圓界又分為兩平分。則成甲乙丁。丙乙丁之二角。此二角各得圓界四分之一。則此二角為直角也。若自丁界過乙心至圓界戊處。畫一直線。又成丁乙戊之徑。復得甲乙戊。丙乙戊。兩相等之直角矣。故凡畫一直線。交於別線。其所成之角若直。此線謂之垂線。蓋因平分圓界為四。其四弧相對之四角。必相等而皆為直角。則其二徑相交。必互為垂線可知矣。

第十一

凡角相對之弧。不足圓界四分之一者。謂之銳角。若過四分之一者。謂之鈍角。故自圓徑中心。復畫一幅線。而不平分半圓之界。則成一銳角。一鈍角。如甲己丙庚之圓。於甲乙丙之徑。自乙心至甲己丙之半圓界。不兩平分。於丁處畫一幅線。遂成丙乙丁一銳角。甲乙丁一鈍角。再將丁乙線引於相對圓界戊處。畫一丁乙戊徑線。復成甲乙戊一銳角。丙乙戊一鈍角。合前二角。總為四角矣。故凡二角兩尖相對。謂之對角。二角兩尖相並。謂之並角。如甲乙戊。丙乙丁。二角之兩尖相對。即謂之對角。丙乙戊。甲乙丁。二角之兩尖亦相對。故亦謂之對角也。如丙乙戊。甲乙戊之二角。兩尖相並。而同一線。則謂





之並角矣。

第十二

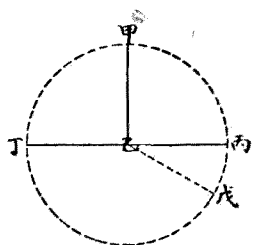
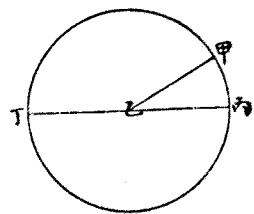
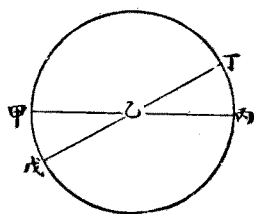
凡一圓內設兩角。此一角相對之弧。與彼一角相對之弧。其限若等。則此二角之度亦必相等。如甲丁丙戊之圓。丙乙丁角相對之丙丁弧。甲乙戊角相對之甲戊弧。其限相等。故丙乙丁角。甲乙戊角。其度亦相等也。

第十三

凡有一圓。其徑線之中心。作相並之二角。此二角之度必與二直角等。如甲丙丁之圓。自丁乙丙徑線之中心。作甲乙丙。甲乙丁之相並二角。此二角之度。必與二直角相等也。

第十四

凡一直線。交於他直線。其所成之二角。或為二直角。或與二直角等。如丙乙丁直線上。畫一甲乙直線。至於乙處。即成甲乙丙。甲乙丁之二直角也。又或於丙乙丁直線上。畫一戊乙直線。亦至乙處。復成丙乙戊一銳角。丁乙戊一鈍角。此二角必與二直角相等也。再申明之。以乙為心。丙為界。旋轉畫一圓。則丙乙丁線為圓之徑線。必將圓界平分為兩平分矣。此丙乙丁徑線之中心所畫之甲



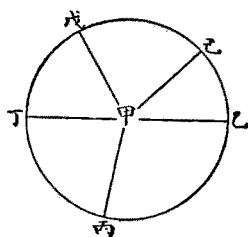
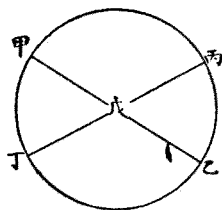
乙線。又將半圓界平分爲兩平分。則此二角各相對之弧。皆爲一圓界四分之一。而各爲一直角可知矣。又如戊乙線。將半圓界雖不兩平分而成一銳角一鈍角。然所成二角。仍在丙乙丁徑線所限半圓界度。爲全圓界四分之一。故與二直角相等也。

第十五

凡自一心畫爲衆線。其所成之角雖多。止與四直角相等。如自甲心至乙、至丙、至丁、至戊、至己。畫衆輻線。雖成衆角。其各角所函之度。必與四直角等。蓋因甲點爲心。衆輻線皆立一圓之界。故衆角所對之弧。總不越一圓之全度。前言一圓之界。僅有四直角之弧線。茲角雖多。亦未嘗出一圓之界。故曰衆角雖多。止與四直角等也。

第十六

凡兩直線相交所成二對角之度。必俱相等。如甲乙、丙丁、二線。交於戊處。成甲戊丁、丙戊乙之二對角。斯二角之度。必俱相等。今以二線相交之處爲心。旋轉畫一全圓。則甲乙、丙丁、二線。俱爲此圓之徑線矣。惟其俱爲徑線。故將一圓爲兩平分。而甲戊乙之徑線。爲甲丙乙之半圓界。丙戊丁之徑線。爲丙甲丁之半圓界。因兩半圓界。俱係全圓徑線。故相交成對角。其度必等。茲將甲丙乙之半圓界。減去甲丙弧。卽餘丙乙弧。丙甲丁之半圓界。亦減去丙甲弧。又餘甲丁弧。



凡兩相等之弧。減去一段相等之弧。所餘之弧必相等。今甲丙乙、丙甲丁、二半圓之界內。減去甲丙、丙甲、同體之弧。則所餘丙乙、甲丁、相對之弧。亦必相等矣。此二弧之度既俱相等。則所對之甲戊丁、丙戊乙、二角之度。亦必相等可知矣。其餘甲戊丙、丁戊乙、亦與甲戊丁、丙戊乙同理。故其所對之角度。亦必相等也。

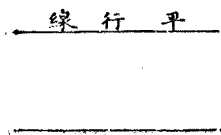
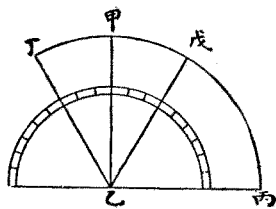
### 第十七

凡大小圓界。俱定為三百六十度。而一度定為六十分。一分定為六十秒。一秒定為六十微。一微定為六十纖。夫圓界定為三百六十度者。取其數無奇零。便於布算。即微之經傳。亦皆符合也。易曰。凡三百有六十當期之日。邵子曰。三百六十。中分之得一百八十。為二至二分相去之數。度下皆以六十起數者。以三百六十。乃六六所成。以六十度之。可得整數也。凡有度之圓界。可度角分之大小。如甲乙丙角。欲求其度。則以有度之圓心。置於乙角。察乙丙、乙甲之相離。可以容圓界之幾度。如容九十度。即是甲乙丙直角。何以知為直角。因九十度為全圓三百六十度之四分之一。前言凡角得圓界四分之一者為直角。故知其為直角也。若過九十度者。為丁乙丙鈍角。不足九十度者。為丙乙戊銳角。觀此三角之度。其餘可類推矣。

### 第十八

凡二線之間。寬狹相離之分俱等。則此二線謂之平行線也。

### 第十九



欲求平行線之間相距幾何。則自上一線不拘何處至下一線。畫二縱線。則此二線為相距度分也。如甲乙丙丁二線平行。自上線甲乙二處。至下線丙丁二處。畫二縱線。則此二線為相等線。其度必等。然則甲乙丙丁相對之間。其相距之遠近。不已見耶。

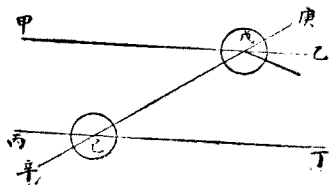
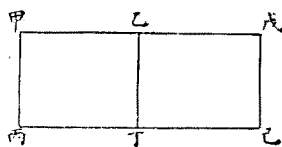
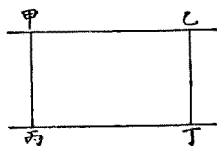
第二十

平行二線。雖引至於無窮。其端必不能相合。蓋二線相離之度。各處遠近俱為相等故也。如甲乙丙丁平行二線。隨意引於戊己。又自戊至己。畫一縱線。其度亦等於甲丙乙丁二縱線。故曰平行線。雖引至於無窮。其端終不能相合也。

第二十一

凡平行二線。或縱或斜。畫一直線。交加於上。則平行線上所成之二角。必俱相等。如甲乙丙丁二平行線上。畫一庚辛斜線。其甲乙線之庚戊乙角。丙丁線之戊己丁角。皆相等。假使庚戊乙角。大於戊己丁角。則戊乙線必離於庚戊線。而向丙丁線。甲乙丙丁二線不平行矣。若甲乙丙丁二線。豪無偏斜。又得庚辛直線。相交成二角。則此二角必然相等矣。

第二十二

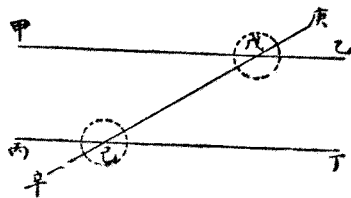


凡平行二線上。畫一斜線。則成八角。此八角度有相等者。必是對角。或內外角。如庚戌乙甲。戊己二角。其度相等。因其兩尖相對。謂之對角。庚戌乙戊己丁二角。其度亦相等。因其在平行二線之內。故謂之內角。甲戊己戊己丁二角。其度亦相等。因其俱在平行二線之內。而立斜線之左右。故又謂之相對錯角。又如甲戌庚庚戌乙二角。其度不等。因其立一線之界。謂之並角。庚戌甲丁己辛二角。其度亦相等。因其俱在平行二線之外。故謂之外角。乙戊己丙己戊二角。其度亦相等。因其又俱在平行二線之內。故又謂之內角。總之二平行線上。交以斜線。所成八角。必兩兩相等也。

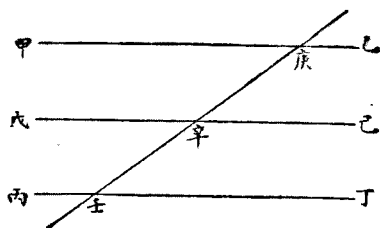
### 第二十三

平行線上一邊之二內角。或一邊之二外角。與二直角相等。如丁己戊角。與丙己戊角為並角。則此二並角。與二直角等。前第十四節云。凡一直線。交於他直線。所成二角。必與二直角相等。則此二角同出於一直線。為並角。故亦與二直角等矣。又如甲戌庚庚戌乙。雖為外角。而亦為並角。此二並角。亦與二直角等也。他如甲戊己乙戊己二並角。丙己辛丁己辛二並角。亦與二直角等也。

### 第二十四



有平行二線。復與一線相平行者。此三線互相爲平行線也。如甲乙、丙丁、二線之間。有戊己線與之平行。則甲乙、丙丁、戊己、三線互相爲平行線也。照前第二十一節。在此三線上。畫一庚辛壬斜線。則所成之庚辛二角必相等。而辛壬二角亦必等也。三線之與斜線相交所成之角。既各相等。則三線互爲平行可知矣。



# 幾何原本二

## 第一

凡各種界所成。俱謂之形。其直界所成者爲直界形。曲界所成者爲曲界形。凡直界所成各形。未有少於三角形界者。故三角形爲諸形之首。

## 第二

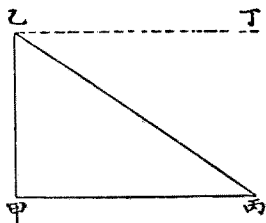
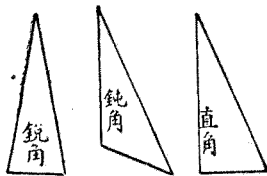
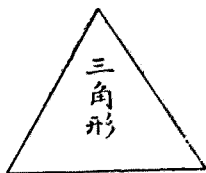
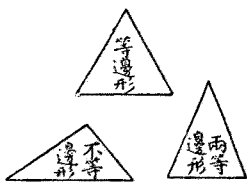
凡三角形。一角直者爲直角三角形。一角鈍者爲鈍角三角形。三角俱銳者爲銳角三角形。

## 第三

凡三角形。其三邊線度等者。爲等邊三角形。兩邊線度等者。爲兩等邊三角形。三邊線度俱不等者。爲不等邊三角形。

## 第四

凡三角形之三角度相併。必與二直角度等。如甲乙丙三角形。自乙角與甲丙線平行畫一乙丁線。則成丙乙丁角。與丙角爲二尖交錯之二角。其度必相等。見首卷第二十二節。而甲角與甲



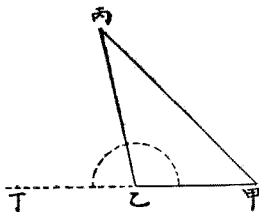
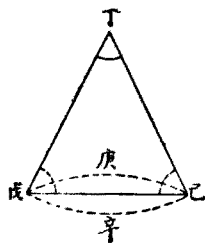
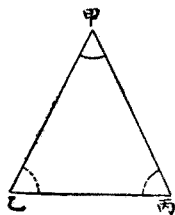
乙丁角爲甲丙、乙丁、二平行線內一邊之二內角。與二直角等。見首卷第二十三節。今於甲乙丁直角內減丙乙丁角。所餘爲甲乙丙角。丙乙丁角。既與丙角度等。則甲乙丙、丙乙丁、合成之一直角。與甲角之一直角。非二直角之度耶。

第五

凡三角形。自一界線引長成一外角。此外角度。與三角形內所有之二銳角等。如甲乙丙三角形。自甲乙線引長至丁。所成之丙乙丁角。卽爲外角。其度與三角形內甲丙二銳角之度等。蓋甲乙丙三角形之三角度。併之原與二直角等。如本卷第四節云。而甲丁直線。與丙乙直線相交所成之甲乙丙、丁乙丙、丙外角。亦與二直角等。如首卷第十四節云。則此內外二角所併之度。與三角形內三角所併之度。亦必相等。今於內外角所併之二直角內。減去甲乙丙角。則所餘之丙乙丁一外角度。與甲角丙角所併之度。爲相等可知矣。

第六

凡兩三角形。其兩邊線之度相等。二線所合之角又等。則二形底線之度必等。二形之式亦等。其底線之二角亦皆等也。如甲乙丙一三角形。丁戊己一三角形。此二形之甲角丁角若等。甲丙、丁戊、二線。甲乙、丁己、二線。又互相等。則





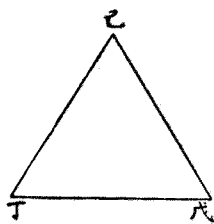
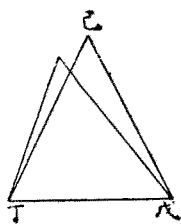
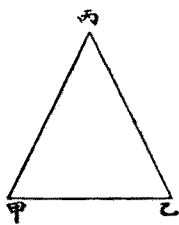
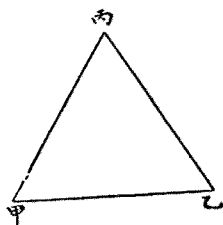
乙丙、戊己之二底線必等。其二形之三角式亦必等。而乙角己角相等。丙角戊角亦相等。若將二形之甲角丁角相合。則甲丙、丁戊、二線。甲乙、丁己、二線。各度必等。因其俱等。故丙乙線之二角。與戊己線之二角。俱恰相符。而無偏側矣。若謂乙丙底與戊己底不符。必是戊己線上斜於庚。或下斜於辛。不成直線形矣。

第七

兩三角形。其三邊線之度若等。則三角之度亦必相等。而此形內所函之分亦俱等也。如甲乙丙、丁戊己。兩三角形之甲乙線、丁戊線、甲丙線、丁己線、乙丙線、戊己線。兩兩相等。則甲角與丁角、乙角與戊角、丙角與己角。必各相等。而甲乙丙、丁戊己。三界所函之分。丁戊己。三界所函之分。亦俱相等。蓋因此兩三角形之各線。俱恰相符。故所函之分。亦俱恰相符也。

第八

凡兩三角形。有一線相等。其相等線左右所生之二角又相等。則其他線他角俱相等。而二形之分亦相等也。如甲乙丙、丁戊己。兩三角形之甲乙線、丁戊線若等。而此二線左邊所成之甲角丁角、右邊所成之



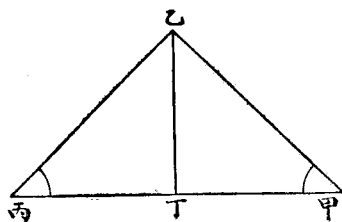
乙角戊角亦相等。則甲丙線度與丁己線度等。丙乙線度與己戊線度等。而丙角與己角亦等。甲丙乙形所函之分。與丁己戊形所函之分。自然相等矣。若將甲乙線與丁戊線相較。再將甲角與丁角。乙角與戊角相較。此二線二角之度。必俱相符。此二線二角既俱相符。其他線他角亦必各相符矣。若謂一線不符。則相等之角。亦必不符。必其一線斜出。或一線偏入。以致各角俱不相等。角既不相等。而形式亦必不同矣。

第九

三角形之兩邊線若等。其底線之兩角度亦必等。如甲乙丙三角形。其甲乙、丙乙兩邊線之度等。則其甲丙底線之甲角丙角之度。亦俱等也。若以甲丙底平分於丁處。自丁至乙角畫一直線。遂成甲乙丁、丙乙丁兩三角形。此兩形之甲乙線與丙乙線既相等。而甲丙底線平分之甲丁、丙丁線度亦等。則乙丁為兩三角形所共用之各一邊線。然則此兩三角形之各三邊線度。必俱相等。可知矣。三角形之三線既各相等。則其各角之度亦必相等。因其各角之度相等。故甲角丙角之度亦必等也。

第十

有兩邊相等之三角形。自上角至底線畫一直線。將底線為兩平分。則此線為上角之平分線。又為底線之垂線也。如甲乙丙乙兩邊線度相等之甲乙丙三



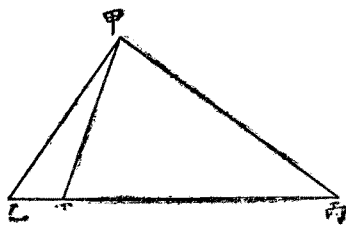
角形。自上角乙、至底線丁、畫一直線將甲丙底線爲兩平分。則爲乙角之平分線。又爲甲丙底線之垂線也。蓋乙丁線將乙甲丙三角形平分爲甲乙丁、丙乙丁兩三角形。此兩三角形之各界線度必各相等。而各角之度又俱相等。則甲乙丁角、丙乙丁角、將乙角爲兩平分矣。而甲丁乙角、丙丁乙角又爲相等之兩直角。因其爲兩直角。故乙丁線爲平分甲丙底線之垂線也。

### 第十一

凡三角形內、長界所對之角必大。短界所對之角必小。如甲乙丙三角形之乙丙界、長於甲丙界。故其相對之甲角、大於乙角。而甲乙界、短於甲丙界。故其所對之丙角小於乙角也。試依甲丙界度、截乙丙於丁、復自甲至丁、作甲丁線。卽成甲丙丁兩界相等之三角形。夫甲丙、丁丙、兩界度既相等。則甲丁丙、丁甲丙、兩角亦相等。今甲丁丙角相等之丁甲丙角、原自乙甲丙角所分。則乙甲丙角必大於甲丁丙角矣。然此甲丁丙角、爲甲乙丁小三角形之外角。與小三角形內之甲乙二角相併之度等。見本卷第五節。既與甲乙二角之度等。則大於乙角可知矣。夫甲丁丙角、既大於乙角。則乙甲丙角必更大於乙角矣。丙角之小於乙角。其理亦同。

### 第十二

凡三角形內、必有二銳角。蓋三角形之三角、併之與二直角等。見本卷第四節。如甲乙丙三角形之乙角

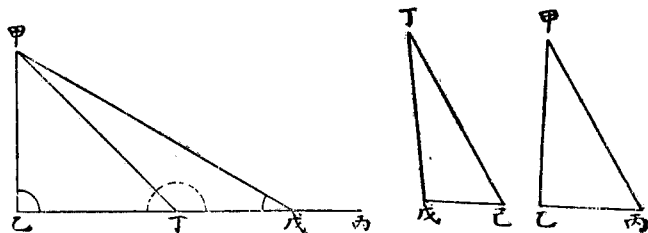


爲直角。則所餘甲角丙角併之始與乙角相等。二角併之僅與一直角等。則此二角獨較之必小於直角矣。故此甲丙二角爲銳角也。又如丁戊己三角形之戊角爲鈍角。則所餘之丁角己角愈小於直角而爲銳角矣。

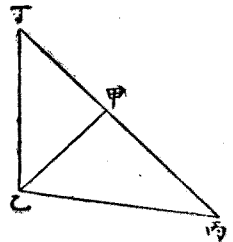
第十三

凡自一點至一橫線畫衆線。而衆線內有一垂線。必短於他線。而他線與垂線相離愈遠則愈長也。如自甲點至乙丙線畫甲乙、甲丁、甲戊幾線。此內甲乙爲垂線。較之甲丁、甲戊線。則其度最短。而甲戊線與甲乙線相離。既遠於甲丁。故更長於甲丁線也。蓋甲乙爲垂線。則乙角必爲直角。見首卷第十節。而甲乙丁三角形內。丁角甲角必俱爲銳角。而小於乙角矣。因乙角大於丁角。故此乙角相對之甲丁線。必長於丁角相對之甲乙線。又甲丁戊外角。原與甲乙丁、乙甲丁、二內角相併之度等。見本卷第五節。則此甲丁戊一外角。必大於甲乙丁一內角矣。甲丁戊之外角。既大於甲乙丁之內角。則甲丁戊角相對之甲戊線。必長於甲乙丁角相對之甲丁線可知矣。

第十四



凡三角形，將二界線相併，必長於所餘之一界線。如甲乙丙三角形，將甲乙、甲丙、二界線併之，則長於所餘之乙丙界線也。試以丙甲線引之至丁，作丁甲線與甲乙等，則丁丙線爲甲丙、甲乙、二界線之共度矣。復自丁至乙，作丁乙線，成乙甲丁兩界相等之三角形。其丁乙甲角與丁角等。見本卷第九節。則丁乙丙角必大於丁角。夫丁乙丙角既大於丁角，則其所對之丁丙線必長於丁角相對之乙丙線可知矣。見本卷第十一節。



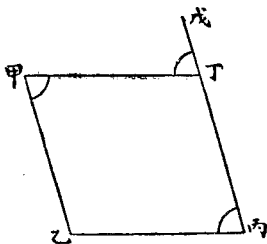
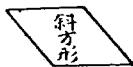
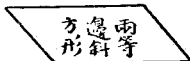
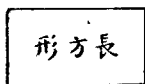
# 幾何原本三

## 第一

凡四邊線函四角者。其形有五。四邊線度等。而角度亦等者。爲正方形。四角直。而兩邊線短。兩邊線長者。爲長方形。四邊線度等。而角度不等者。爲等邊斜方形。兩邊線長。兩邊線短。而角度又不等者。爲兩等邊斜方形。以上四形。俱自平行線出。如四邊線不等。亦不平行。而四角度又不等者。爲不等邊斜方形。

## 第二

凡四平行線所成方形。其所函之角。成兩對角。必兩兩相等。如甲乙丙丁平行線方形。其甲角度丙角度等。而乙角度丁角度亦等。若以丙丁線引長至戊。作一線。成一丁外角。與甲角爲二尖交錯之角。其度相等。見首卷第二十二節。而丁外角與丙角。又爲一邊之內外角。其度亦等。見首卷第二十二節。夫甲丁二角既等。丁丙二角又等。則甲角與丙



角必自相等。而丁乙兩對角之相等。不言可知矣。

### 第三

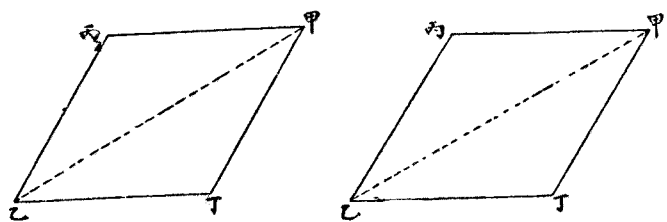
凡平行四邊形。自一角至相對之角。作一對角線。必平分四邊形為兩三角形。如甲丙乙丁四邊形。作甲乙對角線。即成丙甲乙、丁甲乙兩相等三角形。蓋此四邊形之丙丁二角為對角。其度必等。見本卷第二節。而對角線所分之丙甲乙、丁甲乙二角。俱為二尖交錯之角。其度又兩兩相等。見首卷第二十二節。夫此兩三角形。原自一四邊形而分。各角又俱相等。則其所函之分必等。而四邊形平分為兩平分無疑矣。

### 第四

凡平行線所成方形。其兩兩平行線度俱相等。如甲丙乙丁四邊形之丙甲線。與乙丁線度等。丙乙線。與甲丁線度等。此即如前節作一對角線。成兩三角形。而兩形之各角。必俱相等。則丙甲、乙丁二線。丙乙、甲丁二線。俱為各相等角所對之線。其度亦必相等矣。見二卷第八節。

### 第五

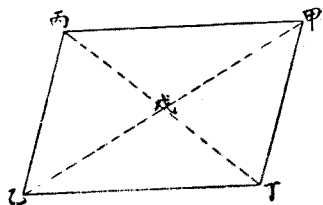
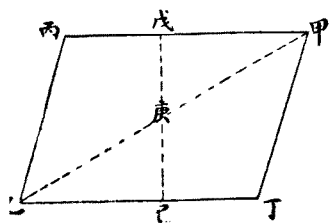
平行線方形內兩對角線。其相交處必平分二線之正中。如甲乙、丙丁、二



線相交於戊。則所成甲戊、戊乙、二線。丙戊、戊丁、二線俱等。蓋因丙戊乙、甲戊丁、兩三角形之丙乙、甲丁、二線爲平行線其度等。見本卷第四節。而丙乙戊、丁甲戊、二角乙丙戊、甲丁戊、二角皆爲平行線內相對之錯角。其度俱等。見首卷第十二節。夫丙乙、甲丁、二線既等。各相對之錯角又等。則丙乙戊、丁甲戊、二角相對之戊丙、戊丁、二線度與甲丁戊、乙丙戊、二角相對之戊甲、戊乙二線度必皆相等可知矣。見二卷第八節。

第六

凡平行線方形內。於對角線上。或縱或橫。正中截開。卽將此形爲兩平分。如甲丙乙丁之方形。其甲乙對角線上。畫一戊己線。於庚處截開。則平分甲丙乙丁方形爲丙戊己乙一段。甲戊己丁一段。此二段內之戊甲庚、己乙庚、兩三角形之甲庚、乙庚、二線相等。而戊甲庚、己乙庚之兩角。又爲平行線內二尖交錯之角。其度相等。而甲庚戊、乙庚己、二尖相對之角。其度又等。則此兩三角形度亦必相等。又如甲乙對角線。將甲丙乙丁方形爲兩平分。則其甲丙乙、甲丁乙、兩三角形度必等。將此兩相等之三角形。以戊己線截開。於甲丙乙形內。減甲戊庚。於甲丁乙形內。減乙己庚。則所餘之甲庚己丁、乙庚戊丙、二形度必等。今所分各形。既俱兩兩相等。則甲丙乙丁之方形。爲戊己線所截。自爲兩平分可知。



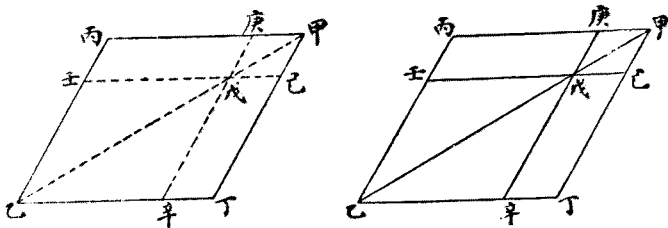


矣。

第七

凡四邊形於對角線不拘何處復作相交二平行線即成四四邊形設如甲丙乙丁四邊形於對角線之戊處復作一壬戌己一辛戊庚相交之二平行線即成甲戊戌乙丙戊戊丁四四邊形此四形中之甲戊戊乙二形為對角線上所成之形丙戊戊丁二形為對角線旁所成之形此對角線旁所成兩形必俱相等如丙壬戊庚戊辛丁己兩形之分是已蓋甲丙乙丁之全形因甲乙對角線平分為兩平分所成之甲丙乙甲丁乙兩大三角形之分必等其對角線上所成之一小方形復為甲戊對角線平分為兩平分成甲庚戊甲己戊兩小三角形此兩小三角形之分亦必等而對角線上所成之一大方形又為戊乙對角線平分為兩平分成戊壬乙戊辛乙兩中三角形此兩中三角形之分亦必等今將甲丙乙甲丁乙兩大二角形內減去甲庚戊甲己戊之兩相等小三角形再減去戊壬乙戊辛乙之兩相等中三角形所餘對角線旁所成之丙壬戊庚戊辛丁己兩四邊形此兩四邊形自然相等矣

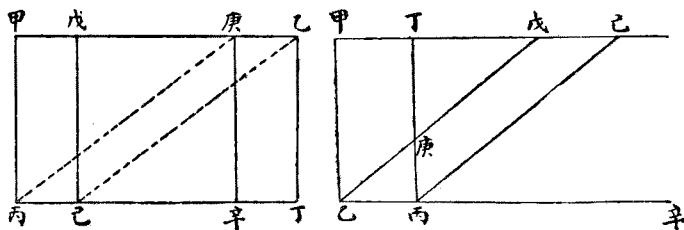
第八



凡兩平行線內同底所成之四邊形其面積必等。如甲己、乙辛兩平行線內於乙丙底作甲乙丙丁一長方四邊形。戊乙丙己一斜方四邊形。此兩形雖不同而所容之分必相等。何也。試以兩三角形考之。如甲乙戊一三角形。丁丙己一三角形。此兩三角形之甲乙、丁丙、二線等。甲戊、丁己、二線亦等。甲丁、戊己、二線俱與乙丙平行。而度分相等。若於甲丁、戊己、二線各加一丁戊線。即成甲戊、丁己線。其度自然相等。而戊甲乙、己丁丙、二角為甲乙、丁丙、平行線一邊之內角。其度又等。則此兩三角形自然相等可知矣。今於兩三角形內各減去丁戊庚。則所餘之甲乙庚丁、戊庚丙己、二形之分必等。復於此二形內每加一庚乙丙形。則成甲乙丙丁、戊乙丙己之兩四邊形。其面積必然相等也。

第九

兩平行線內無論作幾四邊形其底度若等則面積必俱等。如甲乙、丙丁、二平行線內作甲丙己戊、庚辛丁乙、兩平行線四邊形。其丙己、辛丁、兩底度相等。則其積亦等。試自丙己底至庚乙、畫二直線。即成一庚丙己乙斜四邊形。此斜四邊形既與甲丙己戊四邊形同出於丙己之底。即同前節兩形面積俱等矣。至於庚辛丁乙與庚丙己乙又同出於庚乙之底。故此兩形面積亦俱等。觀此兩兩相等。則甲丙己戊、庚辛丁乙、兩形之面積相等明矣。

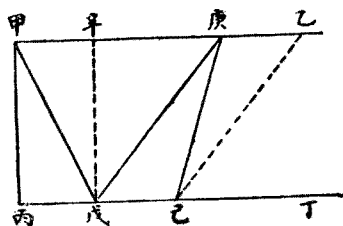
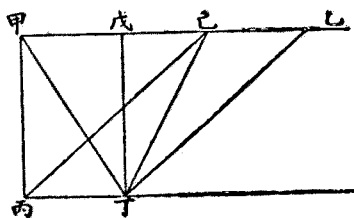


第十

凡兩平行線內同底所成之各種三角形其面積俱等。如甲乙丙丁兩平行線內於丙丁底作甲丙丁一三角形已丙丁一三角形此兩三角形之面積必等何也。自丁至戊作一直線與甲丙平行再自丁至乙作一直線與己丙平行即成甲丙丁戊己丙丁乙兩四邊形此二形既同出於丙丁底其面積相等而甲丙丁己丙丁兩三角形為平分兩四邊形之一半其面積亦必相等矣。

第十一

兩平行線內無論作幾三角形其底度若等其面積亦俱等。如甲乙丙丁二平行線內作甲丙戊庚戊己兩三角形其丙戊戊己兩底度相等故其面積亦等。今自戊至辛作一直線與甲丙平行又自己至乙作一直線與庚戊平行即同前節成面積相等之兩四邊形而此甲丙戊庚戊己兩三角形為面積相等兩四邊形之各一半則此兩三角形之面積必等可知矣。



第十二

凡有幾三角形。其底若俱在一直線。而各底相對之角。又共遇於一處。則其衆三角形。必在二平行線之間。如甲乙丙、甲丙丁、甲丁戊、甲戊己、四三角形。其乙丙、丙丁、丁戊、戊己各底。俱在一庚辛直線上。而各底相對之角。又皆遇於甲處。則此四三角形。俱同在庚辛壬癸二平行線之間矣。

第十三

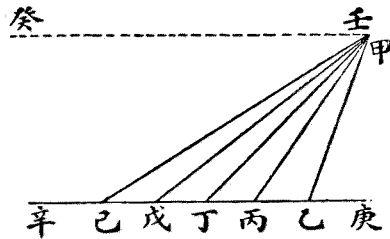
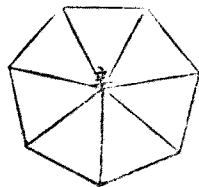
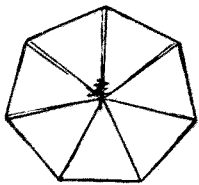
凡等邊等角各形內。五邊者爲五角形。六邊者爲六角形。邊愈多。角愈多者。俱隨其邊與角。而名之焉。

第十四

多邊多角形。自角至心作線。凡有幾界。卽成幾三角形。設如辛七邊形。自心至邊七角作七線。卽成七三角形。而此各三角形之分。俱相等也。

第十五

欲知衆邊形各邊角之度。將邊數加一倍。得數減四。其所餘之數。卽爲各邊角度也。如辛七邊形。以七邊數加一倍。共爲十四。



十四內減四。所餘之十。卽爲十直角數。爲此七邊形之各邊角之總度也。何也。假如辛形自心至七角作七線。成七三角形。凡三角形之三角。與二直角等。見二卷第四節。則此七三角形之各三角度。共與十四直角等。其七三角形之辛心所有之七角。又與四直角等。見首卷第十五節。若將十四直角內減四直角。乃餘十直角。則此十直角。與衆邊形之各邊角之總度相等可知矣。

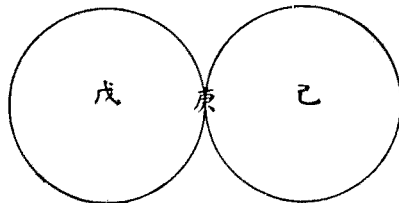
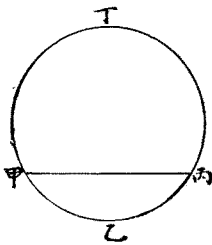
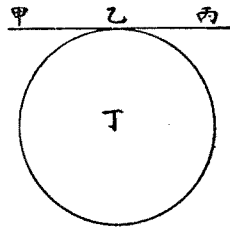
# 幾何原本四

## 第一

凡有直線切於圓界而不與圓界相交者。謂之切線。如甲乙丙線切於丁圓乙界。其線雖自甲過乙至丙。而與圓界不出入相交。此甲乙丙線。即為圓之切線也。又如一圓與一圓界相切而不相交。則謂之切圓。假如戊圓與己圓於庚界相切。二界總未相交。故又謂之切圓也。

## 第二

凡一直線橫分圓之兩界。謂之弦線。其所分圓界之一段。謂之弧。此弧與弦相交所成之二角。謂之弧分角。如甲丙線橫分甲乙丙丁圓界於甲丙。則甲丙線為弦。其所分之甲丁丙一段。甲乙丙一段。皆謂之弧。而甲丙弦與甲乙丙弧相交所成之甲丙乙。丙甲乙二角。即謂之弧分角焉。



第三

凡自一圓弦線之兩頭復作二直線相遇於圓界之一處其所成之角謂之圓分內角又謂之弧分相對之界角也如甲乙丁丙圓之甲乙丙一段自乙丙弦線之兩頭各作一直線於甲處相遇其所成之乙甲丙角即圓分內角然此甲角與乙丁丙弧相對故又為弧分相對之界角也

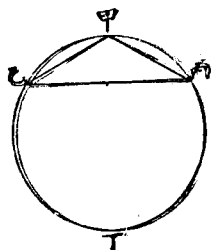
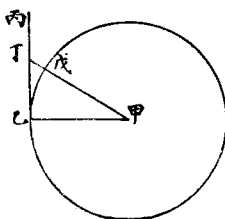
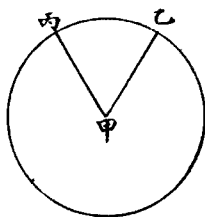
第四

凡一圓有二幅線截弧之一段所成之三角形謂之分圓面形如甲圓自甲心至圓界乙丙二處作甲乙甲丙二幅線所成之甲丙乙三角形即為分圓面形也

第五

凡自圓之幅線之末與圓界相切作一垂線則此垂線與幅線之末在圓界僅一點相切其他全在圓外即如甲圓之甲乙幅線於乙末作一丙乙垂線則此丙乙垂線與甲乙幅線俱在圓界乙處之一點相切而此垂線之丁等處俱在圓外也若自圓之甲心至丁作一甲戊丁線此線必長於甲乙幅線如二卷第十三節云因其長於幅線必出於圓界之外此甲戊丁線既出於圓界之外則丙乙線全在圓外可知矣

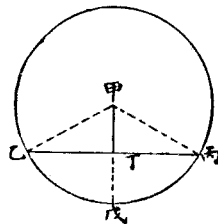
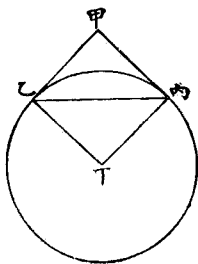
第六



圓弦線上。自圓心作一垂線。則將弦線爲兩平分。如乙丙弦。自圓心甲至弦線丁作一垂線。必將乙丙弦爲兩平分。成乙丁、丁丙二段。若自甲心至弦線乙丙二末作二幅線。成一甲乙丙三角形。此三角形之甲乙、甲丙二線。爲一圓之幅線。其度必等。此二幅線既等。則甲乙丙三角形內。甲丁垂線所分之乙丁、丁丙二段。亦必等矣。若將垂線引長至弧界戊作線。則又將乙丙弧界爲兩平分矣。

第七

凡自圓外一處。至圓界兩邊。作二切線。此二線之度必等。如自圓外甲至圓界乙丙兩邊。作甲乙、甲丙二切線。此二線之度相等。今於圓心丁至圓界乙丙二切線之末。作二幅線。則此二幅線。爲甲乙甲丙之垂線矣。如本卷第五節云。因其爲垂線。則甲乙丁、甲丙丁之二角。必同爲直角。見首卷第十節。再自丙至乙作一弦線。即成丁乙丙、甲乙丙、兩三角形。丁乙丙三角形之丁乙、丁丙二線。同爲圓之幅線。其度必等。因其相等。故丁乙丙丁丙乙二角亦必等。夫甲乙丁、甲丙丁二角原相等。此二角內減去丁乙丙、丁丙乙二角。則所餘之甲乙丙、甲丙乙二角。亦自相等。此二角既俱相等。則甲乙、甲丙二切線。爲等角傍之兩界線。自然相等無疑矣。



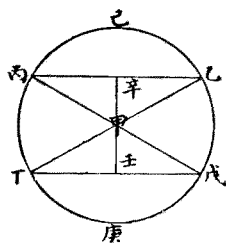
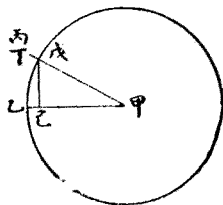
爲等角傍之兩界線。自然相



凡圓內兩弦線若等，其分圓弧面之積必等。自心至兩弦所作垂線亦必等。如甲圓之丙乙、丁戊、二弦之度若等，則所分丙己乙辛、丁庚戊壬、二弧面積必等。自此圓之甲心至丙乙、丁戊、二弦，各作甲壬、甲辛、垂線，其度亦必等。何也？如自甲心至丙乙、丁戊、二弦之末，各作輻線，即成甲丙乙、甲丁戊、兩三角形。此兩三角形之各界線，必兩兩相等。則此兩三角形內相等線所對之角，亦必相等。見二卷第七節。角既相等，則等角相對弧界之丙己乙、丁庚戊、二段，亦必相等。見首卷第十二節。丙己乙、丁庚戊、二弧線既等，丙乙、丁戊、二弦線又等。則丁庚戊、壬之弧面積，與丙己乙辛之弧面積，自然相符矣。又甲辛、甲壬、二垂線將丙乙、丁戊、二弦為兩平分，則丙辛、乙辛、丁壬、戊壬之四線亦俱等。三角形之各界線，既兩兩相等，而三角形內各角，又兩兩相等，則平分丙乙、丁戊、二弦之甲辛、甲壬之度，自然相等矣。

第九

凡弦線之所屬，有三種。一為弧之切線，一為弧之割線，一為弧之弦線。欲取弧界各角之度，用此三線求之，必得也。如甲圓之甲乙、輻線於乙，未作丙乙垂線，復自圓心甲至圓界戊，割出，至丙乙垂線丁分，作甲丁線，又從圓界戊至甲乙輻線，作戊己垂線，則成三種線。此三線內，丁乙線為乙戊弧之切線，甲丁線為



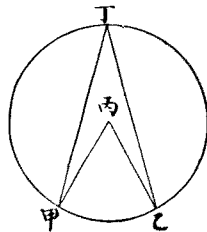
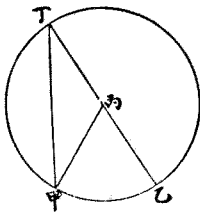
乙戊弧之割線、戊己線爲乙戊弧之正弦。凡欲得各角弧界之度。必於此三種線取之。如欲取乙甲戊角相對弧度則自與甲角相對乙戊弧之丁乙切線取之。或自乙戊弧之甲丁割線取之。或自乙戊弧之戊己正弦取之。皆得乙戊弧之度數焉。

第十

一圓界內。在於圓界一段至圓心作二線。至圓界作二線。即成二角。在圓心者爲心角。在圓界者爲界角。設如甲乙丁圓。自甲乙一段至丙心。作甲丙乙丙二線。仍自甲乙至丁界。作甲丁乙丁二線。成甲丙乙甲丁乙二角。其甲丙乙角爲心角。甲丁乙角爲界角也。

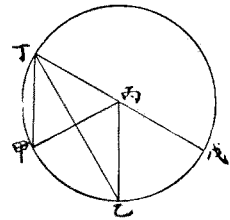
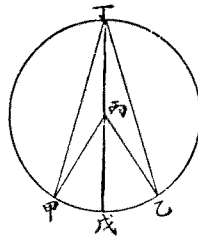
第十一

圓內之心角界角。同立圓界之一段。而各角之二線所成之式。又分爲三種。有界角心角。同用一線者。有界角心角。不同用一線者。有界角二線跨心角二線者。總之此三種心角。皆大於界角一倍。如有三圖。圓心之甲丙乙角。皆自圓界甲乙一段。作甲丙乙丙。二線。圓界之甲丁乙角。亦自圓界甲乙一段。作甲丁乙丁。二線。則第一圖之甲丁乙界角之乙丁線。同立於甲丙乙心角之乙丙線上。而甲丙乙心角。爲甲丙丁三角形之外角。與甲丁丙丙甲丁二內角等。見二卷第五節。其甲丙丙丁二線。又爲一圓之輻線。其度亦等。此二



線既等，則甲丁丙、丙甲丁、二角亦必等。見二卷第九節。今甲丙乙之外角，既與甲丁丙、丙甲丁、二內角等，則甲丙乙心角，大於甲丁乙界角一倍可知矣。如第二圖，甲丁乙界角之乙丁線，不同立於甲丙乙心角之乙丙線上，而甲丙乙心角，在甲丁乙界角甲丁、丁乙、二直線之外，則自丁角過圓之丙心至對界，作一丁丙戊全徑線，即成甲丙戊一大心角，乙丙戊一小心角，甲丁戊一大界角，乙丁戊一小界角，其甲丙戊大心角，即如第一圖，必倍於甲丁戊大界角，而乙丙戊小心角，亦必倍於乙丁戊小界角。於甲丙戊大心角內，減去乙丙戊小心角，甲丁戊大界角內，減去乙丁戊小界角，則所餘之甲丙乙心角，必大於所餘之甲丁乙界角一倍矣。如第三圖，甲丁乙界角之二線，正跨於甲丙乙心角二線之上，而甲丙乙心角，在甲丁乙界角甲丁、丁乙、二直線之間，則自丁角過圓之丙心至對界，作丁丙戊全徑線，即成甲丙戊、乙丙戊、二心角，甲丁戊、乙丁戊、二界角。此甲丙戊心角，必倍於甲丁戊界角，乙丙戊心角，亦必倍於乙丁戊界角。以甲丙戊、乙丙戊、二心角併之，乃甲丙乙一心角。以甲丁戊、乙丁戊、二界角併之，乃甲丁乙一界角。今所分之二心角，既各倍於所分之界角，則此所併之甲丙乙心角，必倍於所併之甲丁乙界角矣。

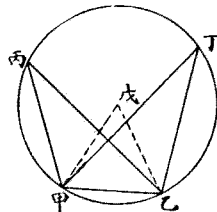
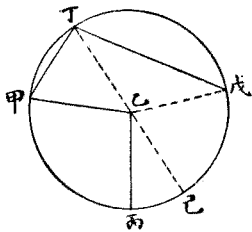
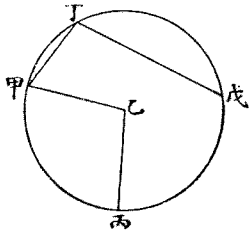
第十二



凡自圓之弧線一段。任作相切界角幾何。其度必俱相等。如甲乙丙之圓。自甲乙弧線一段。至圓界丙丁。作相切之甲丙乙。乙丁甲。二界角。此二角之度必俱相等。試自圓之戊心至圓界甲乙。作二幅線。即成甲戊乙一心角。此甲戊乙之心角。與甲丙乙。乙丁甲。界角。俱同一圓弧線之一段。則心角必倍於界角。然則甲丙乙。乙丁甲。二界角。既俱為甲戊乙心角之一半。則此二角之度必等可知矣。

第十三

凡圓內心角所對弧線之度。比界角所對弧線之度少一半。則二角之度必等。如甲丙戊丁圓內。有甲乙丙一心角。甲丁戊一界角。而甲乙丙心角相對甲丙弧線之度。比甲丁戊界角相對甲丙弧線之度少一半。則甲乙丙心角之度。必與甲丁戊界角之度相等。試自丁角過圓之乙心至對界。作丁乙己全徑線。復自乙心至戊界。作乙戊半徑線。即成甲乙己己乙戊。二心角。甲丁己己丁戊。二界角。其甲乙己己心角。必倍於甲丁己己界角。而已乙戊心角。亦必倍於己丁戊界角。今以甲乙己己乙戊。二心角相併。甲丁己己丁戊。二界角亦相併。則甲乙己己乙戊。二心角所併之度。



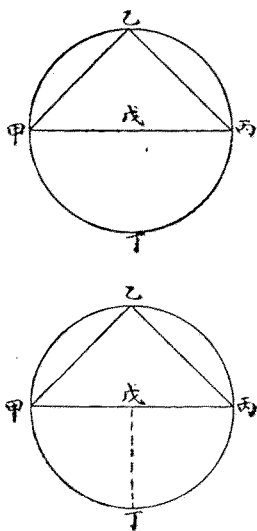
必倍於甲丁己己丁戊二界角所併之度矣。是以甲丁戊一界角必得甲乙己己乙戊二心角所併之一半。夫甲丙弧線既爲甲戊弧線之一半。而甲乙丙角又爲甲乙己己乙戊二心角所併之一半。則甲乙丙心角度必與甲丁戊界角之度相等矣。

第十四

凡圓內界角立於圓界之半者必爲直角。如甲乙丙丁圓內之甲乙丙界角立於甲丁丙圓界之正一半。則此甲乙丙角必然爲直角也。自甲丁丙之半圓於丁界爲兩平分。復自丁界至圓心戊作了戊輻線。卽成甲戊丁角。其相對之甲丁弧爲圓界四分之一。既爲圓界四分之一。則必爲直角。如首卷第十節云。夫心角相對弧線若爲界角相對弧線之一半。其二角之度相等矣。如本卷第十三節云。今甲戊丁心角相對之甲丁弧線既爲甲乙丙界角相對之甲丁丙弧線之一半。則甲戊丁心角度必與甲乙丙界角度相等。且甲丁弧線既爲圓界四分之一。而甲丁丙弧線又爲圓界之正一半。則甲戊丁心角爲直角。而甲乙丙界角亦必爲直角矣。

第十五

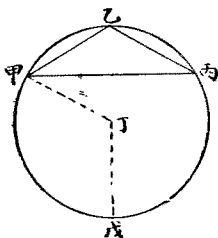
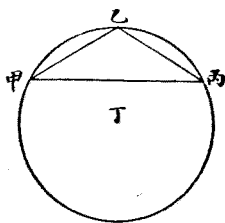
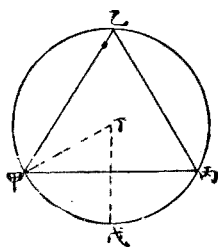
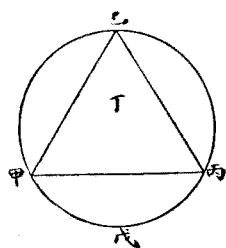
凡圓內界角其所對之弧過於圓界之半者必爲鈍角。如甲乙丙戊圓內之甲乙丙界角其相對之甲戊



丙弧大於圓界之一半。故其相對之甲乙丙角爲鈍角也。試將甲戊丙弧平分於戊。爲甲戊、戊丙兩段。復自圓心丁至甲、戊作二輻線。卽成甲丁、戊丁二心角。其甲戊丙弧分。既大於半圓。則此甲戊弧線一段。亦大於圓之四分之一矣。故此甲戊弧線相對之甲丁、戊心角。必爲鈍角。見首卷第十一節。夫心角相對之弧線。比界角相對之弧線少一半。則二角之度必相等。如本卷第十三節云。今甲丁、戊心角相對之甲戊弧線。正爲甲乙丙界角相對甲戊丙弧線之一半。則甲乙丙界角。自然與甲丁、戊心角等矣。夫甲丁、戊心角。既爲鈍角。則甲乙丙界角。亦必爲鈍角矣。

第十六

凡圓內界角。其所對之弧。不及圓界之半者。必爲銳角。如甲乙丙戊圓內之甲乙丙界角。其相對之甲戊丙弧。小於圓界之一半。故其相對之甲乙丙角爲銳角也。試將甲戊丙弧平分於戊。爲甲戊、戊丙兩段。復自圓心丁至甲、戊作二輻線。卽成甲丁、戊丁二心角。此心角所對之甲戊弧線。既不足圓界四分之一。則此



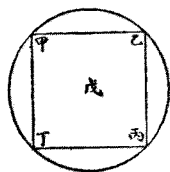
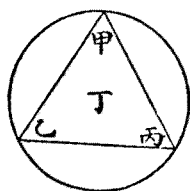
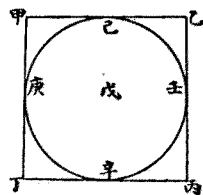
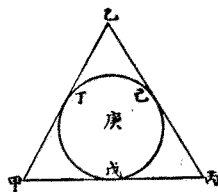
甲丁戊心角必爲銳角矣。見首卷第十一節。此甲丁戊心角所對之弧比之甲乙丙界角所對之弧爲一半。則此二角之度必等。夫甲丁戊心角既爲銳角。則甲乙丙界角亦必爲銳角矣。

第十七

凡函圓各界形之各線與圓界相切而不相交。則謂之函圓切界形。如甲乙丙三角形之甲乙乙丙丙甲三線俱在庚圓界之丁己戊三處相切而不相交。故謂之函圓切界三角形。又若甲乙丙丁四方形之甲乙乙丙丙丁丁甲四界線俱在戊圓界之己庚辛壬四處相切而不相交。則謂之函圓切界四邊形。觀此二圖。則知函圓各界形必大於所函圓界形之分矣。

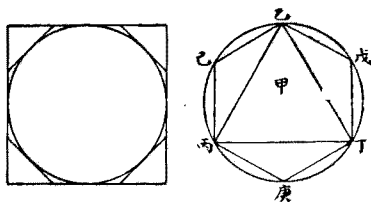
第十八

凡圓內直界形之各角止抵圓界而不割出。則謂之圓內所函各邊形。如甲乙丙三角形之甲角乙角丙角俱與丁圓界相抵。而不會割出。即謂之圓內所函三角形。又如甲乙丙丁四方形之甲角乙角丙角丁角俱與戊圓界相抵。而不會割出。則謂之圓內所函四邊形。觀此二圖。則知函於圓界各界形必小於圓界形之分矣。



第十九

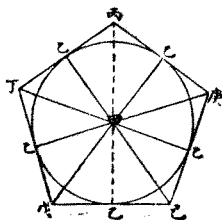
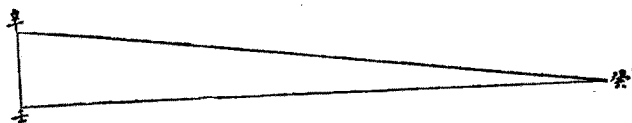
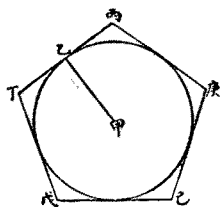
凡等邊衆界形或函圓或函於圓其界數愈多愈與圓界相近如甲圓形函乙丙丁等邊三角形又函乙己丙庚丁戊等邊六角形以三角形之三邊比之六角形之六邊則六角形之六邊與圓界相近矣設有十二角形之十二邊比此六角形之六邊則十二角之十二邊又與圓界爲近若有二十四角之二十四邊則又更近於十二角之十二邊矣蓋函衆界形之度必大於所函之衆界形度見本卷第十七十八兩節今甲圓既函等邊六角形自大於六角形而此六角形又函等邊三角形亦必大於三角形由此推之十二角函六角二十四角函十二角其邊愈多者其度愈大故與圓界愈近也又如復有一函圓等邊四角形內又作一函圓等邊八角形此四角形既函八角形必大於八角形可知矣若於八角形內復作十六角形十六角形內又作三十二角形其所函形愈小邊數愈多則與所函之圓界度愈近矣苟設一函於圓界之多邊形爲幾十萬邊設函於圓界之多邊形一自六邊起算一自四邊起算復設一函圓界之多邊形亦爲幾十萬邊設函圓界之多邊形一自六邊起算一自四邊起算使此函圓之多邊形自外與圓界相比而函於圓界之多邊形自內與圓界相比則此二多邊形之每邊直界線將與圓界曲線合而爲一故圓界曲線可得直線之度而多邊形之直線亦可得爲圓界度也





函圍切界等邊形。其所函圍之幅線度。與一直角三角形之小邊之度等。而等邊形之衆界共度。又與三角形之大邊之度等。則三角形之面積。與等邊形之面積等。如丙丁戊己庚等邊五角形。其所函甲圓之甲乙幅線。與辛壬癸直角三角形之辛壬

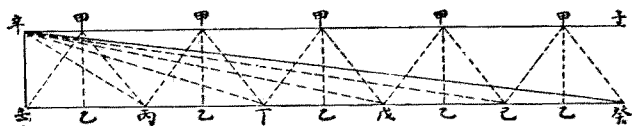
小邊線度等。而五角形之丙丁戊己庚五邊線共度。又與三角形之壬癸大邊線度等。則此辛壬癸三角形面積。必與丙丁戊己庚等邊五角形面積等也。何以見之。若自五邊形之甲心。至丙丁戊己庚之五角。作甲丙甲丁甲戊甲己甲庚五線。卽分成甲丙丁類五三角形。夫辛壬癸三角形之壬癸線度。既與五角形之五邊共度等。今將壬癸線平分五分。以所分之每分爲底。依前所分五三角形形式。作甲壬丙類五正式三角形。復自所分



丙丁戊己四處俱至三角形之辛角。作丙辛、丁辛、戊辛、己辛、四線。遂分辛壬癸一三角形。爲辛壬丙類五斜式三角形。再自甲壬丙類五三角形之甲角至底。各作一甲乙垂線。俱與圓之輻線等。則甲壬丙相等之五三角形之高度亦自相等矣。於是復自辛壬癸三角形之辛角。與五甲角相切。作一辛子線。與壬癸爲平行線。則此平行線內同底所成之各種三角形之面積。必俱相等矣。見三卷第十節。蓋辛壬丙、甲壬丙、兩三角形爲同底。辛丙丁、甲丙丁、兩三角形爲同底。辛丁戊、甲丁戊、兩三角形爲同底。辛戊己、甲戊己、兩三角形爲同底。辛己癸、甲己癸、兩三角形爲同底。故其面積俱相等也。且辛壬丙三角形與甲壬丙三角形。既俱相等。則辛壬丙之類五斜式三角形之面積。卽如甲壬丙之類五正式三角形之面積矣。其所分各形之面積俱等。則其全形之面積。自然相等。此所以辛壬癸直角三角形之面積。與丙丁戊己庚等邊五三角形之面積相等也。

第二十一

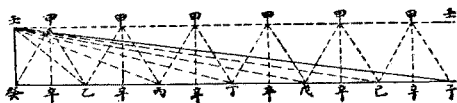
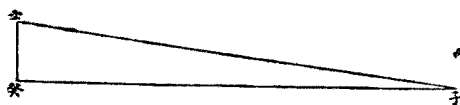
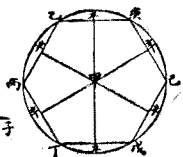
圓界內函等邊衆界形。其圓心至衆界所作中垂線。與一直角三角形之小邊之度等。而等邊衆界形之衆界共度。又與直角三角形之大邊之度等。則此三角形之面積。與等邊衆界形之面積等。如甲圓所函乙丙丁戊己庚等邊六角形。其圓之甲心至衆界所作甲辛垂線。與壬癸子直角三角形之壬癸小邊線度等。而六角形之乙



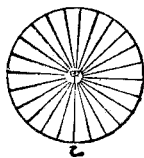
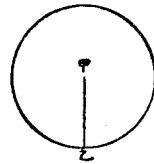
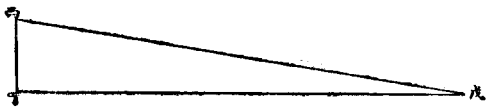
丙丁戊己庚六邊線其度。又與三角形之癸子大邊線度等。則此壬子癸三角形面積。必與乙丙丁戊己庚等邊六角形面積等也。若依前節法。將六邊形分爲六三角形。復以三角形之癸子界。照六邊形度。分爲六分。又照六邊形所分六三角形。作六正式三角形。復自壬子癸三角形之壬角。至乙丙丁戊己五處。作五斜線。成六斜式三角形。此兩式三角形同底。又同在二平行線內。則其面積必兩兩相等。此兩式六三角形之垂線。既與壬子癸子直角三角形之壬子癸子小邊線度等。而兩式六三角形之底線共度。又與壬子癸子癸子大邊線度等。則壬子癸子直角三角形之面積。必與乙丙丁戊己庚等邊六角形之面積相等矣。

第二十二

凡圓形之輻線。與一直角三角形之小邊線度等。而圓之周界。與三角形之大邊線度等。則此直角三角形之面積。與圓形之面積相等。如有一甲圓形。其甲乙輻線。與丙丁戊直角三角形之丙丁小邊線度等。而甲圓形之乙周界。又與丙丁戊三角形



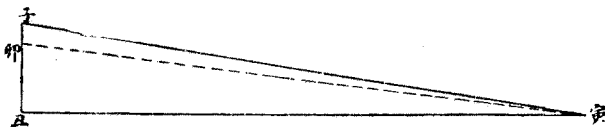
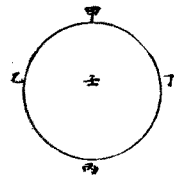
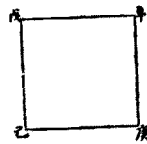
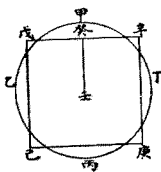
之丁戊大邊線度等。則此丙丁戊三角形之面積。即與甲圓形之面積相等也。何以見之。甲圓之輻線。與三角形之小邊等者。即如等邊衆界形之中垂線。與三角形之小邊等也。甲圓之周界。與三角形之大邊等者。即如等邊衆界形之各界共度。與三角形之大邊等也。若夫函圓衆界形相等之三角形。其小邊雖與圓之輻線等。其大邊則長於圓之周線。故其積分亦大於圓之積分。而函於圓衆界形相等之三角形。其小邊既短於圓之輻線。而大邊亦短於圓之周線。故其積分亦小於圓之積分。今此甲圓形相等之丙丁戊三角形。其小邊既與圓之輻線等。而三角形之大邊。又與圓之周線等。則其積分與圓形之積分相等無疑矣。然圓周界。曲線也。等邊衆界形之界度。直線也。觀之似難於相通者。如以圓之內外。各設多邊衆界形。分爲千萬邊。如本卷第十九節云。則逼圓界最近。將合而爲一。乃依所分之段。爲千萬正式三角形。此千萬正式三角形之中垂線。亦將與圓之輻線合而爲一。而千萬邊共界度。既與圓周合而爲一。則圓周之曲線。亦變而爲直線矣。夫千萬邊正式三角形之中垂線。既成圓之輻線。則與丙丁戊三角形之小邊等。而千萬邊正式三角形之底界共度。



又成圓之周度。則又與丙丁戊三角形之大邊度等矣。復自丙丁戊三角形之丙角至千萬正式三角形之底界。各作千萬斜式三角形。以比正式三角形。因其底同。其分自相等。故千萬斜式三角形之面積。比之千萬正式三角形之面積。千萬正式三角形之面積。比之丙丁戊一直角三角形之面積。丙丁戊直角三角形之面積。比之甲圓形之面積。俱相等也。

第二十三

有一圓形。又一衆界形。此圓界度。若與彼衆界總度等。則圓形之面積。必大於衆界形之面積也。如甲乙丙丁圓形之周界。與戊己庚辛等邊四角形之四邊總度等。則圓形之面積。必大於等邊四角形之面積矣。前言凡圓形之輻線。與一直角三角形之小邊線度等。而圓之周界。與三角形之大邊線度等。則三角形之面積。與圓形之面積相等矣。今試以甲乙丙丁圓形周界。爲三角形之大邊。以甲乙丙丁圓形之甲壬輻線。爲三角形之小邊。作一子丑寅直角三角形。則三角形之丑寅大邊線度。亦與戊己庚辛四角形之四邊總度等。而三角形之子丑小邊線度。雖與圓形甲壬輻線等。却比四角形之自壬心至癸邊所作垂線爲長。若將三角形之子丑小邊線。照四角形之



壬癸垂線度截開。則分子丑線於卯。復自卯至寅。作一斜弦。卽成卯丑寅一直角三角形。而此卯丑寅三角形之分。與戊己庚辛四角形相等也。此卯丑寅三角形。自子丑寅三角形分之。則卯丑寅形必小於子丑寅形。今甲乙丙丁圓形之面積。既與子丑寅三角形之面積等。而戊己庚辛四角形之面積。又與卯丑寅三角形之面積等。則戊己庚辛四角形之面積。必小於甲乙丙丁圓形之面積。可知矣。觀此凡界度相等之形。圓界所函之分。比衆界所函之分必大。而衆界所函之分。與圓界所函之分同者。則衆界之總度。復比圓界度大也。

# 幾何原本五

## 第一

平面上所立直線。無少偏倚。其面上所生之角必俱直。則謂之平面上所立垂線也。如甲乙之平面。正立一丙丁線。不偏不倚。此即爲平面上所立之垂線矣。

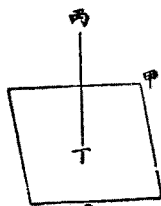
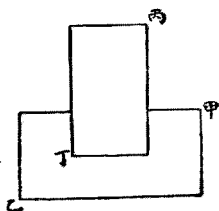
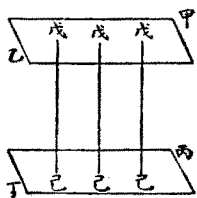
## 第二

凡兩平面相對。其所立衆垂線度。俱各相等。則此相對之平面。謂之平行面也。如甲乙丙丁二平面間。所有戊己衆垂線之度俱相等。此甲乙丙丁二平面。卽爲平行面矣。

## 第三

平面上復立一平面。無少偏倚。其兩邊所成之角。必皆爲直角。則謂之平面上所立直面也。如甲乙平面上所立之丙丁平面。無偏無倚。兩邊亦俱成直角。此卽爲平面上所立之直面矣。

## 第四



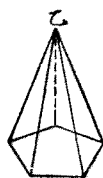
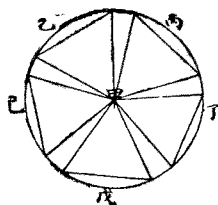
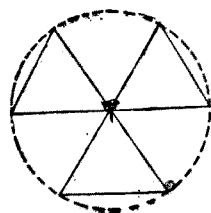
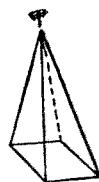
凡各面相合其每面之角所合處復成一種體角則謂之厚角。夫厚角必自三面合之乃成其面多者為各瓣相併而成之厚角也。如甲圖四面為四瓣相併所生之厚角乙圖五面為五瓣相併所生之厚角是已。

第五

凡各面相併所成之厚角如將各面計之則其衆角所合之分必不足於四直角度也。如甲圖五面合成之厚角若將其五面展開使平作乙丙丁戊己之五瓣復以甲為心作一甲圓其乙丙丁戊己之五瓣相離處不能滿甲圓之周界矣。因其不滿於圓之周界故比四直角為不足也。或以四直角度分強欲作一厚角則其瓣過於大必不能成平面所合之厚角矣。

第六

凡等邊三面所合厚角其三面內之兩面角併之必大於一直角度也。如甲丙乙丁之等邊三面所合之甲厚角將乙甲丙丙甲丁二面併之必大於一直角度矣。依前節法將甲厚





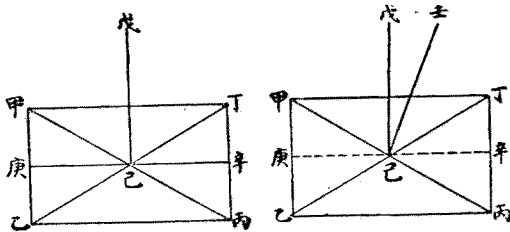
角展開使平。雖不足四直角之度。而乙甲丙、丙甲丁之二面併之。則較之一直角度爲大焉。何以見之。夫三面展開。其所離之虛分。仍有二面之分。以三面之實分。合二面之虛分。則爲六角之全形。此六角之全形。得四直角度矣。六角而得四直角。則三角必得二直角。三角既得二直角。則二角相併。必大於一直角。可知矣。

第七

凡平面二線交處。作一垂線。正立而無偏倚。此線任在平面各處。俱爲垂線。如甲乙丙丁平面上。甲丙、丁乙二線相交。已處。作一戊己垂線。正立而不偏倚。則此戊己線。任在甲乙丙丁平面上。某一處。俱爲垂線也。假使戊己垂線。不能正立。而有所偏倚。則如壬己線。近於辛而離於庚矣。壬己線既近於辛而離於庚。則偏向於丁丙而遠於甲乙。而壬己丁、壬己丙之二角爲銳角。壬己甲、壬己乙之二角爲鈍角矣。戊己既如壬己。則不得謂之甲丙、丁乙二線相交處。正立之垂線矣。

第八

衆線交處。立一垂線。其各角若俱直。此所交各線。必在一平面也。如甲丙、乙丁、庚辛之三線相交處。立一戊己垂線。其與衆線相接各角若俱直。則此相交之三線。必在一平面也。夫衆線之相交。固在平面。而垂線之所立。正所以考面。或



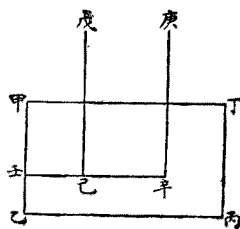
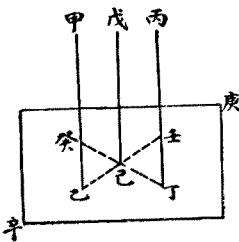
一角不直，則不得謂之平面矣。

第九

平面上若立二垂線，必互為平行線。如甲乙丙丁之平面上，立戊己庚辛、二垂線，則此二線互為平行線也。試自辛過己至壬，作一辛壬線，則戊己庚辛、二垂線所立之分必正。其在甲乙丙丁平面上，任指何處所生之角，俱是直角。見本卷首節。故戊己壬庚辛己、二角俱為直角而相等也。且此二角又為二線與一線相交所成之內外角，其度既等，則戊己庚辛、二線必為平行線矣。如首卷第二十一節。

第十

有二線與一垂線平行，雖不在平面之一界，此三線亦互相為平行線也。如甲乙丙丁二線，俱與戊己一垂線平行，不立於一直線上，雖不居平面之一界，此三線亦必互為平行線也。試於甲乙丙丁戊己三線之末，作一庚辛平面，此平面上之戊己線為垂線，其四圍平面所生之各角，俱是直角矣。復自乙過己，自丁過己，作相交二線，則成甲乙己戊己壬二角，丙丁己戊己癸二角，此各二角，俱為平行線一邊之內外角，俱為相等角矣。見首卷第二十一節。而甲乙己丙丁己二角，亦俱為直角。夫甲乙丙丁二線，在庚辛平面上所生



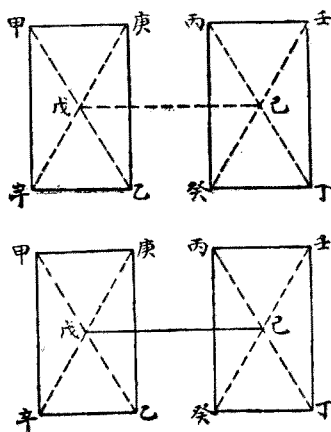
之角皆直。又皆與戊己垂線所生之角等。則甲乙、丙丁、二線亦皆得爲垂線。其與戊己線爲互相平行之三線可知矣。

### 第十一

相對二平面之間。橫一直線。此線在二平面上所生角若俱直。則此相對二面互相爲平行面也。如甲辛乙庚、丙癸丁壬、二平面之間。橫一戊己直線。此戊己線末所抵處。其四圍俱成直角。則此二平面互相爲平行面矣。試將此二平面之戊己橫線所抵之處作甲乙、庚辛、相交二線。丙丁、壬癸、相交二線。則戊己橫線於二平面各界所生之角俱爲直角。如甲乙、丙丁、二線與戊己橫線相抵所生之甲戊己、戊己癸、二尖交錯之角相等。故甲乙、丙丁、相當之二線爲平行矣。又如辛戊己、戊己丙、二尖交錯之角亦相等。故庚辛、壬癸、相當二線亦爲平行矣。相對二平面上。所有之相當各二線。既俱同爲平行線。則相對之二平面。自然互爲平行面矣。

### 第十二

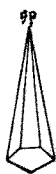
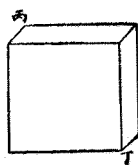
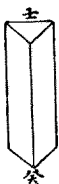
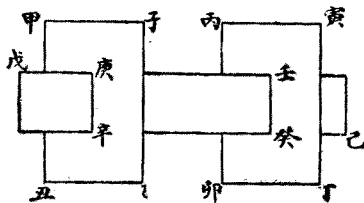
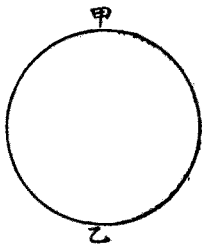
有二平行面橫交一面。其相交處所生二線必平行。如甲乙、丙丁、平行二面上。橫交一戊己平面。其庚辛、



壬癸之相交處所生二線亦俱平行也。何以言之。庚辛壬癸平面相交處所生二縫。既在甲乙丙丁二平面上。自然與甲乙丙丁二面之甲丑子乙丙卯寅丁之各線同為平行線。且又在戊己一平面內。其分自然相對。故此二平面與一平面相交之縫線亦得為平行也。

第十三

凡各種面內所積之實為體。而皆因其面以名之焉。如全體不成角度。止現圓之圓面。則謂之圓體。甲乙圖是也。全體各面俱平。各邊相等。所成各角又等。則謂之平面。正方形。丙丁圖是也。全體各面雖平。體長而面成兩式。其相對各面仍兩兩相等。相對各邊。則又平行。角又相等。此謂之平行。長方體。戊己圖是也。體有曲平兩面相雜。



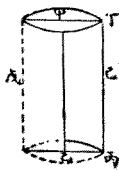
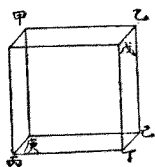
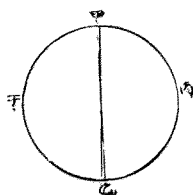
而不成等邊等面。則謂之底平半圖體。庚辛圖是也。全體相對之各面不平行。上下兩面平行。則謂之上下面平行體。壬癸圖是也。體圓而上下面俱平。則謂之長圓體。子圖是也。底為平面。其各面俱合於一角而成厚角。則謂之尖瓣體。底三角者謂之三瓣尖體。底四角者謂之四瓣尖體。底衆角者謂之衆瓣尖體。如丑寅卯三圖是也。又或底面圓而漸銳成形。則謂之尖圓體。辰圖是也。

#### 第十四

凡圓體、長圓體、尖圓體、俱生於圓面。故其外皮面積。亦生於圓界一旋轉之度分耳。如取甲乙丙丁之圓形。則以甲乙徑線為樞心。將甲丙乙半圓作轉式。旋轉復還於原處。即成甲丙乙丁一圓形體。如取甲乙戊己平行面之長圓形。則以甲乙中線為樞心。將丙丁線界作轉式。旋轉復還於原處。即成甲乙戊己一長圓體。如取甲丙丁平底尖圓形。則以甲乙中線為樞心。將甲丁邊線作轉式。旋轉復還於原處。即成甲乙丙丁一尖圓體矣。

#### 第十五

凡各體形。其各面平行相當。則相對兩邊面積俱相等。如甲乙丙丁之正方體。其甲戊庚丁。甲己戊丙。甲丙乙丁。六面俱各平行。故相對二面之積。俱兩兩相等也。



第十六

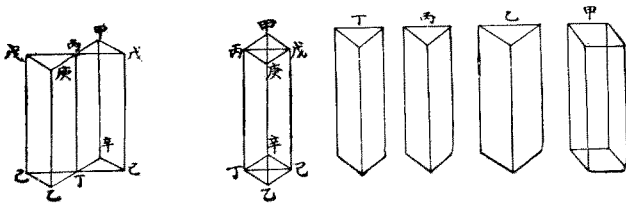
凡體面式不一而積等者為積數相等之體。面式既同而體積又等者為面式體積全等之體。如甲、乙、二體為積數相等之體也。丙、丁、二體為面式體積全等之體也。

第十七

凡平行面之長方體。自一面之對角線。平分為兩三稜體。此兩三稜體必為面式體積全等之體矣。如甲、乙平行面長方體。自丙、丁二角。至相對戊、己二角。分為兩段。成戊、丙、乙、丁、己、甲、兩三稜體。為面式體積全等體也。試以甲、丙、庚、戊、辛、丁、乙、己、兩平面形。自戊、丙、丁、己兩對角線。均分為兩三角形面。則所分之戊、庚、丙、己、乙、丁、丙、甲、戊、丁、辛、己、四三角形。面積俱相等。而丙、乙、甲、己、甲、丁、戊、乙、各面。又互為平行。必兩兩相等。再對角線分成之丙、丁、己、戊、戊、己、丁、丙、二面。原在一界所分。必各相等。今所分二形之各面。既各相等。則其積必等。而為面式體積全等體無疑矣。

第十八

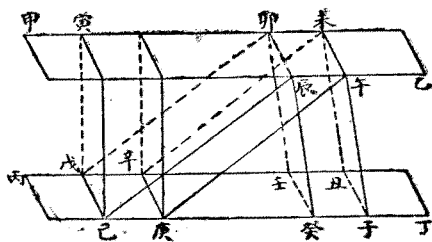
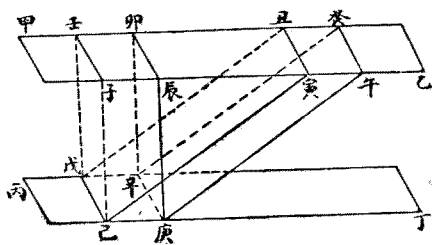
凡平行二平面之間。若同底。立各平行體。其積必相等。設甲、乙、丙、丁、平行二平面之間。於戊、己、庚、辛、底。立壬、庚、癸、己、二平行體。其積俱相等。何也。蓋因壬、戊、己



子丑寅平面三角形之壬戌己子面與卯辛庚辰癸午平面三角形之卯庚辛辰面平行而壬戌己子丑寅平面三角形之丑戌己寅面與卯辛庚辰癸午平面三角形之癸辛庚午面平行故其各面之度相等其壬子辰卯之面與丑寅午癸一面俱與戊己庚辛一面平行其度亦必相等此二面之度既等則壬子寅丑卯辰午癸二面之度亦必俱等其上下各面度既等而平面兩三角形之各面各邊度又俱等則此壬庚癸己二平行體之積必然相等也可知矣

第十九

凡平行平面之間所有立於等積底之各平行體其積必俱相等設如甲乙丙丁平行二平面之間有戊己庚辛壬癸子丑二等積之底立一寅庚正面平行體一卯子斜面平行體此二體之積必相等試自寅庚正面平行體之戊己庚辛底至卯子斜面平行體之卯辰午未面復作一卯庚斜面平行體則寅庚卯庚二體立於戊己庚辛之一底其積相等矣如前節所云而卯子卯庚二體又同立於卯辰午未之面其積亦必相等是以寅庚正面平行體卯子斜面平行體俱與卯庚平行體相等故云凡平行平面之間所



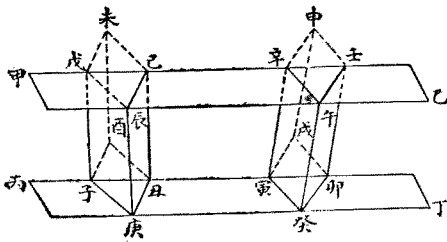
有立於等積底之各平行體。其積必俱相等也。

第二十

平行平面之間。有立於等積三角底之各三面體。其積必俱等。如甲乙丙丁。平行二平面之間。有子庚丑寅癸卯等積三角底。立戊庚己辛癸壬之兩三面體。此二體積必相等。何以見之。若以此二體之上邊二面之戊辰辰己二界平行作戊未己未二線。辛午壬午二界平行作辛申壬申二線。又於此二體之下邊二面之子庚庚丑二界平行作子酉酉丑二線。寅癸癸卯二界平行作寅戌戌卯二線。則二體所生酉子庚丑戌寅癸卯四邊平行二底。俱在子丑寅卯二對角線。其度相等。見三卷第三節。其分比三角面各大一倍矣。復於所作二底邊酉戌二處。作酉未一縱線。戌申一縱線。即成未庚申癸。平行面二方體矣。其酉子庚丑戌寅癸卯二底既俱相等。則所生之未庚申癸。平行面之二方體。亦自相等。見本卷第十九節。此未庚申癸。平行面二方體。既各相等。則戊庚己辛癸壬之三面體。為未庚申癸二方體之正一半。其積必等無疑矣。

第二十一

凡各種體形。難以圖顯。蓋以圖止一面故也。必用木石製之始能相

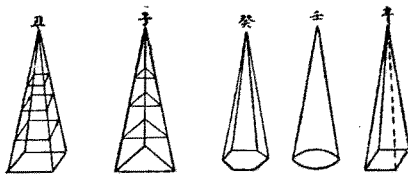
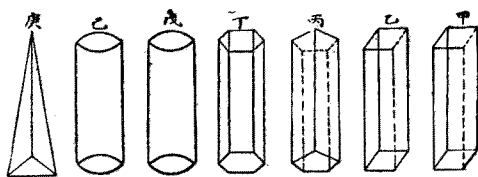
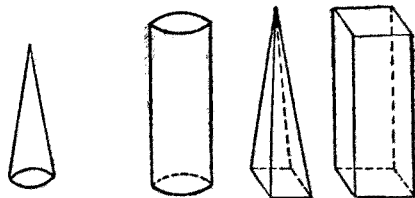




肖。况此各種形體。又或有外實而內空者。必按其形以求其理。始可發明其精蘊矣。

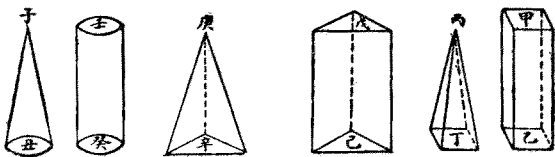
第二十二

凡各面所成體形內。其各面俱平行。或上下面為平行。而立於等積之底。其體之高又等。則其體之積亦相等。如甲乙體。其各面俱平行。又如丙丁體。其上下面平行。立於等積之底。其高又等。或又如戊己體。其上下面平行。圓面積又等高又等。則其兩體積必相等矣。又如庚辛壬癸之類。尖體形。苟立於等積之底。其體之高若等。則其體之積亦相等。何以見之。若將衆尖體。分為平行底之衆小體。其所分衆小體之底度高度。必俱相等。如子丑圖。其所分小體之積俱等。故其全體之積亦相等也。



第二十三

凡上下面平行各體。與平底尖體。同底同高者。不論平面圓面。其平底尖體。皆得上下面平行體三分之一。如甲乙上下面平行之長方體。與丙丁四瓣尖體。其乙丁兩底積等。甲乙丙丁兩高度又等。則甲乙長方體。與丙丁尖體三形等。如戊己上下面平行之三稜體。與庚辛三瓣尖體。其己辛兩底積等。戊己庚辛兩高度又等。則戊己三稜體。與庚辛尖體三形等。又如壬癸上下面平行之長圓體。與子丑尖圓體。其癸丑兩底積等。壬癸子丑兩高度又等。則壬癸長圓體。與子丑尖圓體三形等。又如壬癸長圓體。與甲乙戊己類體同底同高。則壬癸長圓體。亦與丙丁庚辛類尖體三倍所合之數等。又或子丑尖圓體。與丙丁庚辛類尖體同底同高。則子丑尖圓體三倍之。乃與甲乙一體。戊己一體等也。夫同底同高上下面平行體。既俱為尖體之三倍。則尖體為上下面平行體三分之一可知矣。蓋甲乙。戊己。壬癸。各體。其式雖不同。荷底積高度相等。其積必等。而丙丁。庚辛。子丑。各體式雖不同。荷底積高度相等。其積亦必等。故知丙丁。庚辛。子丑。平底尖體。互為甲乙。戊己。壬癸。上下面平行各體三分之一也。如將上下面平行各體。以木石為之。分作同底同高之各平底尖體。用權衡以較其分量。則各體之積分。自昭然可見矣。

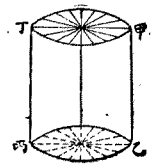
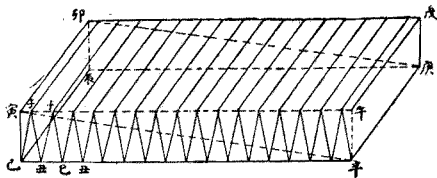


第二十四

凡長圓體外面積與長方體底面積相等。而長圓體半徑。又與長方體高度相等。則長圓體積。必得長方體積之半也。如甲乙丙丁長圓體。其周圍外面積。與戊己長方體之庚己底面積等。而長圓體之壬丁半徑。又與長方體之戊庚高度等。則此甲乙丙丁長圓體積。必得戊己長方體積之一半也。試將甲乙丙丁長圓體。從壬癸中線。至周圍外面。分爲千萬分。則成子丑己類千萬長尖體。此千萬長尖體之高。與長圓體之壬子半徑等。而千萬長尖體之共底。卽長圓體之周圍外面積。則此千萬長尖體。必爲戊己長方體之一半矣。蓋寅己辛三角面。爲午己長方面之一半。見三卷第三節。而此子丑己類衆三角面。與寅己辛三角面等。見四卷第二十節。子丑己類衆三角面。既與寅己辛三角面等。則子丑己類衆長尖體。亦必與卯辰庚辛己寅三角體等。此卯辰庚辛己寅三角體。固爲戊己長方體之一半。今長圓體所分之衆長尖體。既與卯辰庚辛己寅三角體等。則亦必爲戊己長方體之一半。故甲乙丙丁長圓體。爲戊己長方體之一半也。

第二十五

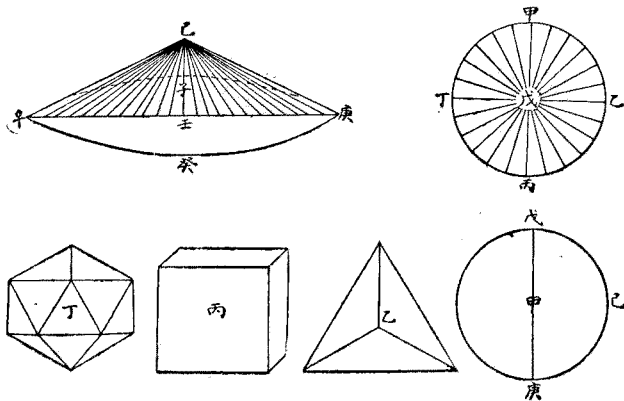
凡球體外面積。與尖圓體之底積等。而球體之半徑。與尖圓體之高度等。則此球體之積。與尖圓體之積



等也。如甲乙丙丁球體之外面積。與己庚辛尖圓體之庚子辛癸底積等。球體之甲戊半徑與尖圓體之己壬高度等。則此球體之積。為與尖圓體之積等也。試將球體從中心分為千萬尖體。復將尖圓體亦分為千萬尖體。則球體所分尖體每一分。必皆與尖圓體所分尖體一分等。何也。蓋球體所分尖體。皆以球體之外面為底。而以球體之甲戊半徑為高。其尖圓體所分尖體。皆以尖圓體之底為底。而以尖圓體之己壬高為高。夫尖圓體之底積。原與球體之外面積等。而尖圓體之高度。又與球體甲戊半徑等。故此兩種千萬尖體。皆為同底同高。其積相等無疑矣。見本卷第十八節。然此兩種千萬尖體。即球體尖圓體之所分。其所分之體既等。則原體亦必相等可知。故曰球體與尖圓體俱相等也。

第二十六

凡各形外皮面積相等之體。惟圓體所函之積數。大於他種各體所函之積。如甲乙丙丁外皮面積相等各形內。甲圓體所函之積。必大於乙丙丁直界體所函之積也。何也。大凡圓形。其半圓周一旋轉間。即成圓體。此戊己庚半圓周。一次旋轉。即成甲圓體。見本



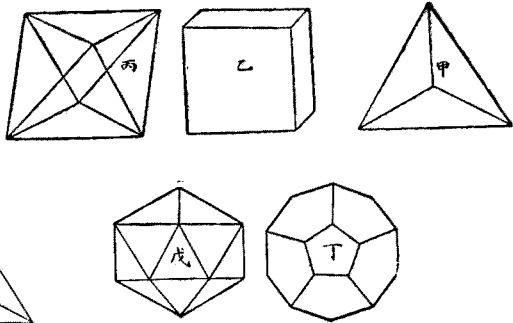
卷第十四節·又凡平面圓界所函之積必大於等邊各形所函之積。見四卷第二十三節·平面圓界所函猶大於各等邊所函之積。則圓體所函必大於各直界體所函之積可知矣。

第二十七

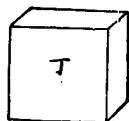
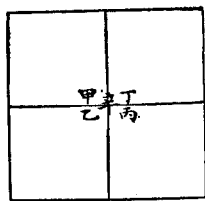
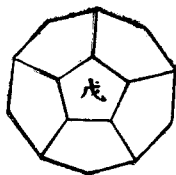
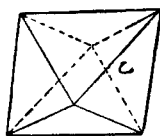
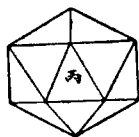
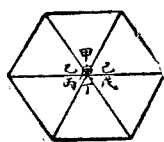
厚角所成等面體形有五種。各以面數而名之。其一為四面體。每面有三角。各三角之各三角度俱等。如甲圖是也。二為六面體。每面俱為正方。其方面之四角俱為直角。而各界互等。故又為正方形。如乙圖是也。三為八面體。每面有三角。各三角之各三角度俱等。如丙圖是也。四為十二面體。每面有五角。各五角之五角度俱等。如丁圖是也。五為二十面體。每面有三角。各三角之各三角度俱等。如戊圖是也。

第二十八

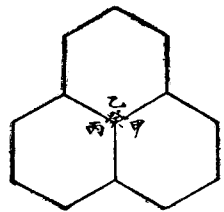
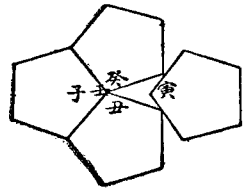
前節發明五種厚角所成等面體形之外。不能復生他形。蓋此五種厚角體。俱是等邊三角四角五角之平面相合所成也。凡平面自三界以下不能成面。見二卷首節。而厚角自三面以下亦不能成角。故厚角自三面始。如甲四面體。其四厚角。皆三平面三角形所合而成也。乙八面體。其六厚角。皆四平面三角形所



合而成也。丙二十面體。其十二厚角。皆五平面三角形所合而成也。然平面三角形所合。過於五形。則不能成厚角。故平面六三角形。合於一處。即成庚形。其甲乙丙丁戊己六角相合。與四直角等。見首卷第十五節。既與四直角等。則爲平面不成厚角矣。如本卷第五節。六形相合。尙不能成厚角。况多形乎。是故平面三角形所生厚角體。僅得四面八面二十面三種而已。若夫平面正方形。合於一處。即成辛形。其無他形。若將四平面四角形。合於一處。即成辛形。其甲乙丙丁四角。既俱爲直角。必不能成厚角矣。故四角形所生厚角。僅有一六面正方形而已。至於平面五角形所成厚角。如戊十二面體。其二十厚角。皆三平面五角形所合而成。此外更無他形也。或將四平面五角形。如癸子丑寅之四角。合於壬。此四角俱爲鈍角。必大於四直角。既大於四直角。在平面尙不能



相合。厚角豈能成耶。是以平面五角形所成之厚角。僅有一十二面體而已。或將平面六角形之三形。合於一處爲癸。其甲乙丙三角度。與四直角等。故不成厚角。六角平面相合。既不成厚角。其七角八角等形。愈不能成厚角矣。故曰四面六面八面十二面二十面五種體。只在三角四角五角三種平面形所生。此外不能復成他形也。







# 數理精蘊上編卷三

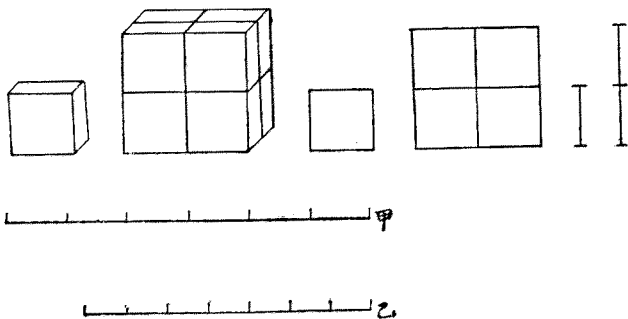
## 幾何原本六

### 第一

大凡欲論諸物之不齊，必借同類之物以比之。始可以得其不齊之度。數如一線與他線相比，其度之或長或短，其數之或多或少，自能見之。如一面與他面相比，其面度之或大或小，其積數之或多或少，自能見之。又如一體與他體相比，其體度之或厚或薄，其積數之或多或少，亦自能見之。若將一線與一面相比，或一面與一體相比，既不同類，又不同形，則線之長短，面之大小，體之厚薄，俱不可辯矣。故曰欲論諸物之不齊，必借同類之物以比之也。

### 第二

將兩數相比，其度互為大小，則謂之比例。其比者，與所比者，俱謂之率。率者，法也。矩也。以數互相準之謂也。其比之數為前率，其所比之數為後率。如甲乙二數，互相為比，其相較之分，甲數之度為長，其分為多。



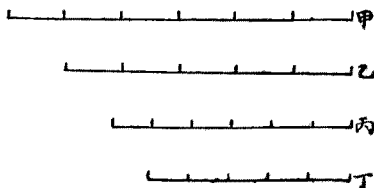
乙數之度爲短。其分爲少。如是以比之。故謂之二率。甲爲比之之數。故謂之前率。乙爲所比之數。故謂之後率焉。

第三

有四率兩兩相比。其一率與二率之比。同於三率與四率之比。則謂之同理比。例也。如甲、乙、丙、丁四數。甲與乙比。丙與丁比。苟乙爲甲六分之五。丁爲丙六分之五。則甲與乙之比例。丙與丁之比例。此兩比例相同。而乙有甲幾分之數。即可知丁有丙幾分之數矣。故凡四率內。將一率與三率分數。定爲相等。二率與四率分數。亦定爲相等。其度之長短。雖有不同。苟分數定準。則一率與二率之比。卽如三率與四率之比也。夫甲、乙、丙、丁四線內。甲第一線。與丙第三線。俱各定爲六分。乙第二線。與丁第四線。俱各定爲五分。則甲度之長。雖大於丙度之長。其分數則俱爲六。而乙度之長。雖大於丁度之長。其分數亦俱爲五。故知乙第二線度。與甲第一線度之六分之五分相等。丁第四線度。亦與丙第三線度之六分之五分相等。所以甲線之比乙線。卽如丙線之比丁線。而謂之同理比例也。

第四

凡四率兩兩相比。其一率與二率相比之分。若大於三率與四率相比之分。則爲不同理之比例。而比例



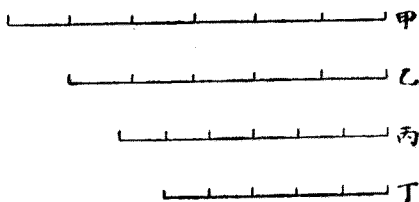
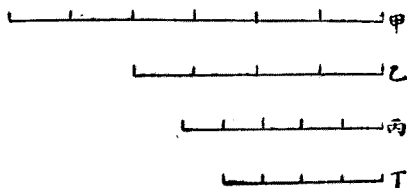
不得行也。如有甲、乙、丙、丁、四數。甲與乙、丙與丁、各互相爲比。苟甲第一數與乙第二數相比之分爲六與四。其丙第三數與丁第四數相比之分爲五與四。則此甲與乙之比大於彼丙與丁之比矣。故凡如此例者。以一率二率相比之分爲準。則三率四率相比之分爲小。若依三率四率相比之分爲準。則一率二率相比之分又大。故謂之不同理之比例。而比例四率不能行也。

### 第五

凡有四率。一率之度與二率之度相比分數。若同於三率之度與四率之度相比分數。則此四率。又謂之相當比例四率焉。如甲、乙、丙、丁、四線。苟甲線與乙線相比之度。與丙線與丁線相比之度。其分數同。則此四線謂之各相當線。而每兩率相比。其每度之分數同。故又謂之相當比例四率也。

### 第六

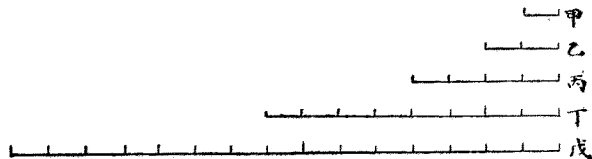
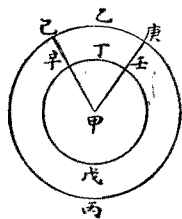
凡三率互相爲比。其一率與二率之比。同於二率與三率之比。則謂之相連比例率也。如甲、乙、丙、三數互



相爲比。苟甲數與乙數之比。同於乙數與丙數之比。則此甲、乙、丙三數。謂之相連比例率矣。若相連比例率內。將一率與三率比之。則爲隔一位加一倍之比例。或有相連比例四率。將一率與四率比之。則爲隔二位加二倍之比例。大凡有幾率。隔幾位以比者。皆以隔幾位而爲加幾倍之比例也。如甲、乙、丙相連比例率內。其甲與丙之比。爲隔一位加一倍之比例。又或甲、乙、丙、丁、戊五數。俱爲相連比例率。其甲與丁之比。卽爲隔二位加二倍之比例。而甲與戊之比例。又爲隔三位加三倍之比例矣。

第七

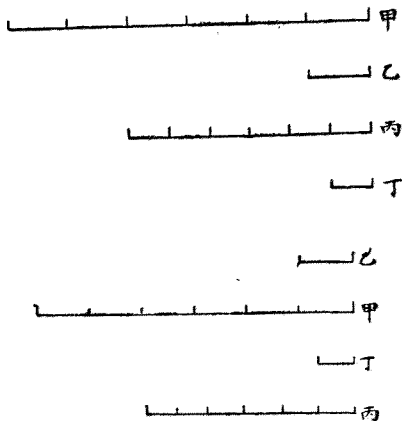
相當比例四率。爲數學之要。因其理之所該最廣。故設爲雙圓圖。以申明之。立甲點爲心。作乙、丙一大圓。丁、戊一小圓。此二圓界。各具三百六十度。故皆可以爲三百六十分。首卷第十七節云。凡圓無論大小。俱定爲三百六十度。於是自圓之甲心。過小圓界之辛、壬二處。至大圓己、庚二處。作二線。則大圓之己、甲、庚。小圓之辛、甲、壬。俱同一甲角。此甲角相對之己、庚弧界。設爲六十度。則爲乙、丙大圓三百六十分中之六十分矣。乙、丙大圓之己、庚弧界度。既爲六十分。則丁、戊小圓之辛、壬弧界度。亦爲六十分矣。大凡角度。俱定於相對之



圓界。見首卷第九節。今此大圓之己庚弧界。小圓之辛壬弧界。俱與一甲角相對。其度雖依圓之大小不同。而分數則等。分數既等。則大圓小圓大弧小弧兩兩互相爲比。卽如四率之兩兩相比。爲同理比例矣。是以大圓之三百六十分爲一率。自大圓所分之己庚弧之六十分爲二率。小圓之三百六十分爲三率。自小圓所分之辛壬弧之六十分爲四率。其乙丙大全圓與本圓己庚分之比。卽同於丁戊小全圓與本圓辛壬分之比也。故凡各率各度雖異。相當之分數若同。則一率與二率之比。必同於三率與四率之比。而俱謂之順推比例矣。要之分合加減各率之法。總不越此圖之互轉相較之理也。

第八

一種反推比例。將一率與二率之比。同於三率與四率之比者。反推之。以二率與一率爲比。四率與三率爲比。其所比之例仍同。故亦謂之相當比例率也。如甲、乙、丙、丁四數。將甲與乙之比。同於丙與丁之比。反推之。以乙與甲爲比。丁與丙爲比。則所比之例。仍同於相當比例率焉。以前雙圓圖解之。蓋甲數與乙數之比例。卽乙丙大圓全界與所分己庚弧界之比例。丙數與丁數之比例。卽丁戊小圓全界與所分辛壬弧界之比例也。今反以乙與甲爲比。丁與丙爲比。卽如以乙丙大圓所分之己庚弧界與乙丙大圓全界爲比。丁戊小圓所



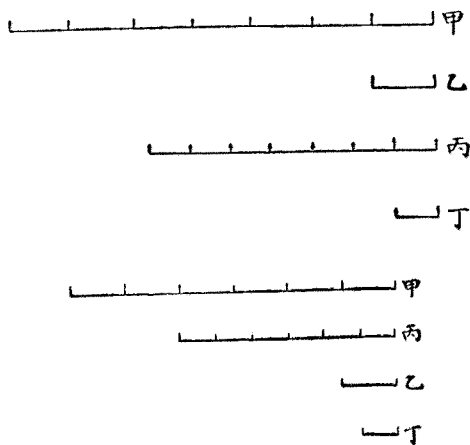
分之辛壬弧界與丁戊小圓全界爲比也。因其以二率爲一率，以三率爲四率，前後互移，故謂之反推比例。然名雖爲反推比例，而相當比例之率，仍與順推比例相同也。

第九

一種遞轉比例。將一率與二率之比，同於三率與四率之比者，轉較之，以一率與三率爲比，二率與四率爲比。其所比之例，仍爲相當比例率也。如甲、乙、丙、丁、四數，將甲與乙之比，同於丙與丁之比，轉較之，以甲與丙爲比，乙與丁爲比，則所比之例，仍同於相當比例率也。如前雙圓圖



乙丙大圓全界一率，與所分己庚弧界二率之比，同於丁戊小圓全界三率，與所分辛壬弧界四率之比。若轉較之，以乙丙大圓之一率，與丁戊小圓之三率爲比，大圓所分之己庚弧界二率，與小圓所分之辛壬弧界四率爲比，其度雖依圓之大小有異，而分數則同，其比例仍同於原比例。故甲、乙、丙、丁之四數，亦如大小二圓爲互相比例之率，而甲一率與丙三率之比，即大圓與小圓之比，乙二率與丁四率之比，即大圓所分弧界與小圓所分弧界之比也。蓋以



三率爲二率，以二率爲三率，遞轉相較，故謂之遞轉比例。其相當比例之四率，雖遞轉以較之，亦仍爲相當比例之四率也。

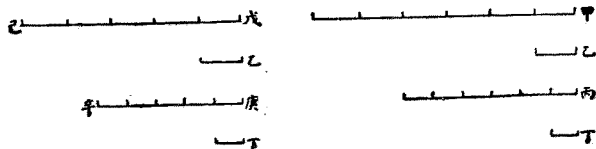
第十

一種分數比例，彼四率之中，以一率與二率之比，同於三率與四率之比矣。若將此相比之率所較之分截開，以一率與二率之較爲一率，與二率爲比，以三率與四率之較爲三率，與四率爲比，則其所比之例，仍爲相當比例率也。如甲、乙、丙、丁四數，於甲數內減去乙數之分爲戊己，丙數內減去丁數之分爲庚辛，乃以戊己易甲與乙線爲比，以庚辛易丙與丁線爲比，則所比之例，仍同於相當比例率。於乙丙大圓全界內，減去所分己庚弧界一段，仍與也。如前雙乙丁庚壬甲戊丙己庚弧界爲比，丁戊小圓全界內，減去所分辛壬弧界一段，仍與辛壬弧界爲比，亦與大圓全界與大圓所分弧界、小圓全界與小圓所分弧界相比之理同。故此甲線內，截去乙所成戊己，仍與乙相比，卽如乙丙大圓全分，截去己庚弧界一段，仍與己庚弧界相比，而丙線內，截去丁所成庚辛，仍與丁相比，卽如丁戊小圓全分，截去辛壬弧界一段，仍與辛壬弧界相比也。其比例仍同於相當比例四率，但因其各分內有分開相減之故，所以謂之分數比例也。

當比例率



於乙丙大圓全界內，減去所分己庚弧界一段，仍與也。如前雙乙丁庚壬甲戊丙己庚弧界爲比，丁戊小圓全界內，減去所分辛壬弧界一段，仍與辛壬弧界爲比，亦與大圓全界與大圓



第十一

一種合數比例。有四率。以一率與二率之比。同於三率與四率之比矣。若將此相比之率併之。以一率與二率相加爲一率。仍與二率爲比。以三率與四率相加爲三率。仍與四率爲比。其所比之例。亦仍同於相當比例之四率也。如甲、乙、丙、丁、四數。以甲數與乙數相加。共爲一率。與乙數爲比。丙數與丁數相加。共爲三率。與丁數爲比。則所比之例。仍同於相當比例四率也。此合數比例。與分數比例之理。互相對待。彼分數比例。以

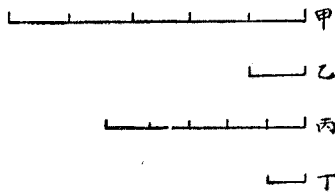


二圓全界內。減去所分弧界一段。仍與所分弧界一段爲比。今此合數比例。卽如二圓全界內所分大段。加入所分弧界一小段。卽是全界。而與所分

弧界一段爲比也。其所比之理。仍同於相當比例四率。但因有相加之分。故謂之合數比例焉。

第十二

一種更數比例。以一率與二率之比。同於三率與四率之比者。更之。將一率與二率相減。用其餘分爲二率。仍與一率爲比。又將三率與四率相減。用其餘分爲四率。仍與三率爲比。則其比例之理。仍同於相當比例四率也。如甲、乙、丙、丁、四數。於甲第一率內。減去乙第二率。所餘爲戊己。乃以戊己立乙第二率之位。而以甲與戊己爲比。復於丙第三率內。減去丁第四率。所餘爲庚辛。乃以庚辛立丁第四率之位。而以丙





與庚辛爲比。其所比之理。仍同於四率之比例。故亦爲相

當比例之四 乙丙大圓

率也。今以雙 三百六十 乙

圓圖解之。 度之全界 丙



仍爲一率。全界內減去所分之己庚弧界六十度一段。餘

己丙庚 爲二率。丁戊 仍爲三

三百度 小圓三百六 丁 率全界

一大段 十度之全界 丙 內減去



所分之辛壬弧界六十度一段。餘辛戊壬三百度一大段

爲四率。則乙丙大圓三百六十度之全界如

甲所更之己丙庚三百度如戊己。而丁戊小



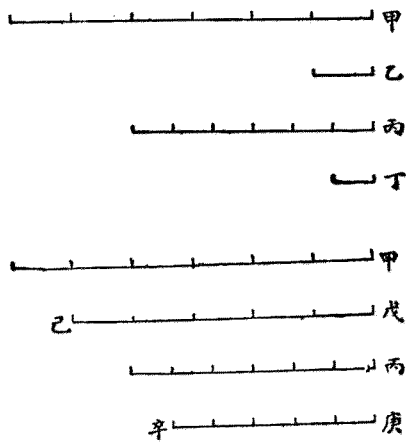
圓三百六十度之全界如丙。所更之辛戊壬三百度如庚

辛。故其四率之兩相比例。亦同爲相當比例率也。凡四率

之內前後之相差。雖更入比之。仍與相當比例之理同。但

以其數有更入之故。所以謂之更數比例也。

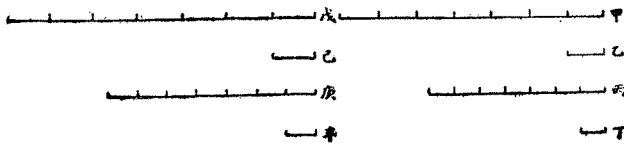
第十三



一種隔位比例。有兩相比例四率。將此一邊四率內。一率與末率爲比。彼一邊四率內。一率與末率爲比。則其所比之例。仍同於相當比例四率也。如此一邊有甲、乙、丙、丁四數。彼一邊有戊、己、庚、辛四數。此甲與乙之比。同於彼戊與己之比。此乙與丙之比。同於彼己與庚之比。此丙與丁之比。同於彼庚與辛之比。若將此四率隔位比之。使此一邊之甲與丁爲比。以彼一邊之戊與辛爲比。則其比例。仍同於相當比例四率也。試以雙圓圖之大小圓所分各弧界之兩線引長。



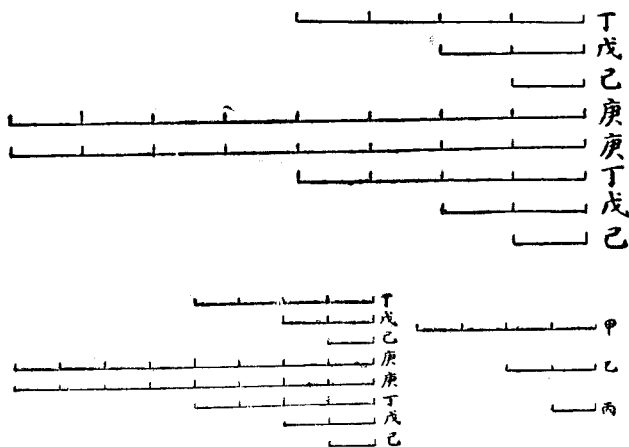
復自己辛過甲至子寅作一全徑線。則分大圓爲庚己己丑丑寅寅寅四段。分小圓爲壬辛辛癸癸子子壬四段。其大圓之庚己己丑丑寅寅寅四段。爲相當四率。而小圓之壬辛辛癸癸子子壬四段。亦爲相當四率。此二圓之所分四段。既俱爲相當四率。則其各相比例度之大小雖異。而分數相同。故大圓之庚己一段。與己丑一段之比。同於小圓之壬辛一段。與辛癸一段之比。大圓之己丑一段。與丑寅一段之比。同於小圓之辛癸一段。與癸子一段之比。大圓之丑寅一段。與寅寅一段之比。同於小圓之癸子一段。與子壬一段之比也。若以此各相當四率隔位以比之。其大圓之庚己一段。與寅寅一段爲比。而小圓之壬辛一段。與子壬一段爲比。其比例仍同於相當比例四率。但以其兩邊



各相比例四率內。各取兩率隔位以比之。故謂之隔位比例耳。

第十四

一種錯綜比例。有兩連比例三率。此一邊三率內中率與末率之比。同於彼一邊三率內中率與末率之比。則爲相當比例之四率。苟錯綜其位分。以此一邊首率與末率隔位爲比。復取另一數與彼一邊中率爲比。而成同理之四率。則此另一數。必與彼邊三率。爲連比例四率矣。如此一邊有甲、乙、丙連比例三數。彼一邊有丁、戊、己。連比例三數。將此一邊中率乙數。與末率丙數之比。同於彼一邊中率戊數與彼一邊末率己數之比。則其比例爲同理比例矣。今錯綜其位分。使此一邊所有之首率甲數。與所有之末率丙數隔位爲比。復另取一庚數。與彼一邊所有之中率戊數爲比。則其比例亦同於相當比例四率。而此庚數與彼邊丁、戊、己三率。爲連比例之數矣。何也。試以庚數置於彼一邊丁首率之上。則庚爲首率。而丁移而爲中率。戊又易而爲末率。是故此一邊甲首率



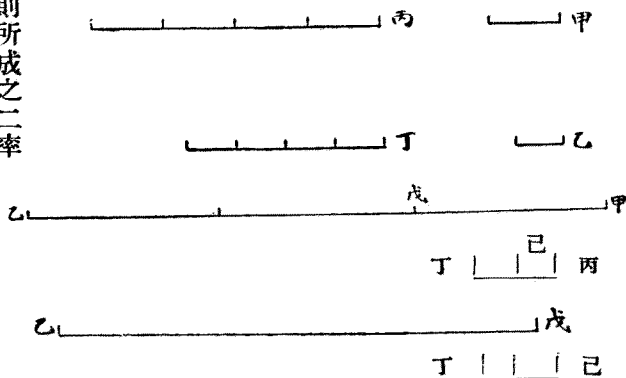
與丙末率之比。同於彼一邊所取庚首率與所易戊末率之比。但以兩連比例率互相易位增八比之之不同。故名之爲錯綜比例耳。

第十五

一種加分比例。凡有二率。依本度各加幾倍。所加之分數若等。則所成之二率互相爲比。仍同於原二率之互相爲比。謂之等倍相加之比例也。如甲、乙、二數。於甲數依本度加三倍爲丙。於乙數依本度加三倍爲丁。則此丙、丁、二數互相爲比。仍同於甲、乙、二數之互相爲比也。假若甲度爲一大分。乙度爲一小分。則甲加三倍成四大分之丙。乙加三倍成四小分之丁。以四大分之丙。比四小分之丁。以一大分之甲。比一小分之乙。其相當之分數既等。固爲同理。比例可知矣。見本卷第三節。故凡二率依本度各加幾倍。其所加之分數若等。其加分之率互相爲比。必同於原率之互相爲比。因於原數有相加之分。故謂之加分比例也。

第十六

一種減分比例。凡有二率。依本度各減幾倍。所減之分數若俱等。則所成之二率

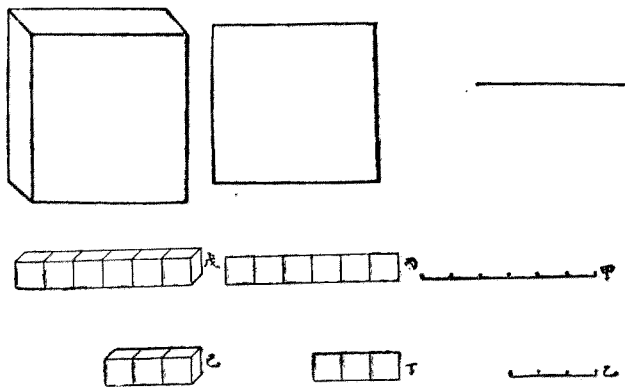


互相爲比。仍同於原二率之互相爲比。謂之等分相減之比例也。如有甲乙、丙丁、二數。其甲乙之三分內、減去甲戊一分、丙丁之三分內、減去丙己一分。則戊乙、己丁、互相爲比。仍同於原甲乙、丙丁、全數之互相爲比也。何也。夫甲乙度爲三尺、丙丁度爲三寸。自甲乙度內減去一尺、則爲戊乙。自丙丁度內減去一寸、則爲己丁。以所餘之戊乙二尺、與所餘之己丁二寸爲比。以甲乙之全三尺、與丙丁之全三寸爲比。其相度之分數必等。故亦爲同理比例矣。凡二率之內、無論減幾分。其所減之分數若等。則相比之理。必同於原數之比例。因於原數內減之。故又謂之減分比例也。

# 幾何原本七

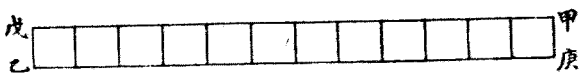
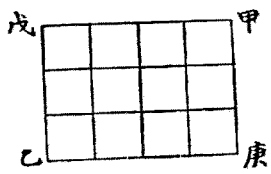
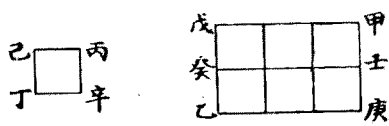
## 第一

前卷所論比例之法。凡一十有二。相當比例一種。相連比例一種。正比例一種。反比例一種。遞轉比例一種。分數比例一種。合數比例一種。更數比例一種。隔位比例一種。錯綜比例一種。加分比例一種。減分比例一種。雖種種變化不窮。其每相當分數所成之率。依然一理。故其相比之例俱同。而皆為相當比例四率也。是故線與線為比。面與面為比。體與體為比。依前各種比例之法。線之比例若同。則為相當比例線。面之比例若同。則為相當比例面。體之比例若同。則為相當比例體矣。夫線面體為類不同。雖不能互相為比。假使線面體之每相當分數若等。則按其各類相當分數比之。亦為同理比例率也。如甲之六分線。與乙之三分線相比。丙之六分面。與丁之三分面相比。戊之六分體。與己之三分體相比。此三種每相當分數既俱相等。故其比例亦俱相等。而六率互為同理比例可知矣。



第二

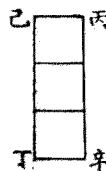
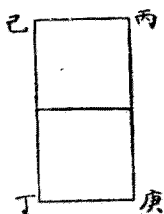
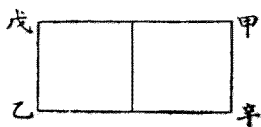
大凡直角平方面積，皆生於二線之度。故欲知方面所生比例之分。將其二形之縱橫線分考之。即可得而知矣。如甲乙丙丁直角平方之二面。欲知其所生比例之分。則視甲乙大形之甲戊橫線長度。得彼丙丁小形之丙己橫線長度為三倍。而甲乙大形之甲庚縱線寬度。得彼丙丁小形之丙辛縱線寬度為二倍。假若將甲乙大形。自中線平分為甲癸壬乙二形。其甲癸形之甲壬寬度。丙丁形之丙辛寬度。必俱相等。其甲戊橫線長度。既仍與丙己橫線長度為三倍。其所分之甲癸形。必與丙丁三形相等。再彼壬乙形。亦與丙丁三形相等。則此二形相合之甲乙一全形。比之丙丁小形為六分可知矣。又或甲乙大形之甲戊橫線長度。得丙丁小形之丙己橫線長度為四倍。甲乙大形之甲庚縱線寬度。得丙丁小形之丙辛縱線寬度為三倍。則大形與小形四倍者有三。而大形比小形為十二分可知矣。再或甲乙大形之甲戊橫線。比丙丁小形之丙己橫線為十二倍。丙丁小形之丙辛縱線。反比甲乙大形之甲庚縱線為三倍。則甲乙大



形之甲戊橫線之長。雖比丙丁小形之丙己橫線之長多十一倍。而甲乙大形之甲庚縱線之寬。又比丙丁小形之丙辛縱線之寬少二倍矣。將此縱橫二線之多少較之。甲乙大形比丙丁小形爲四倍。而丙丁小形爲甲乙大形之四分之一。於是二形之縱橫多少互相較對。以比例之。始得知此形與彼形之比例焉。故凡直角平方方面形與他一形相比。其比例有二。以此形之長與他形之長比之。爲一比例。以此形之寬與他形之寬比之。爲一比例。兩形相比之間。而兼兩比例者。正以平面之積。自二線之度生之之故也。

第三

有兩直角方面形。若將此方面橫界與他方面橫界爲比。又將他方面縱界與此方面縱界爲比。其比例若同。則此兩方面必相等也。如甲乙、丙丁、兩方面形。甲乙形之甲戊橫界。比丙丁形之丙己橫界大一倍。而丙丁形之丙庚縱界。比甲乙形之甲辛縱界亦大一倍。則甲乙、丙丁、兩形之分必相等。是知兩方面形縱橫之分。互相較對。則兩方面之積可知矣。

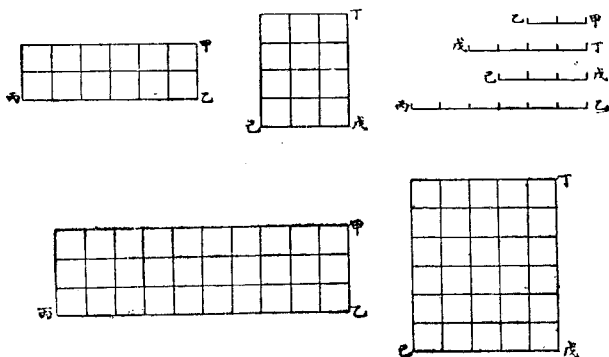


第四

凡有相比例四率。其二率與三率相乘。一率與四率相乘。則所得之分數俱相等也。如甲乙、丁戊、戊己、乙



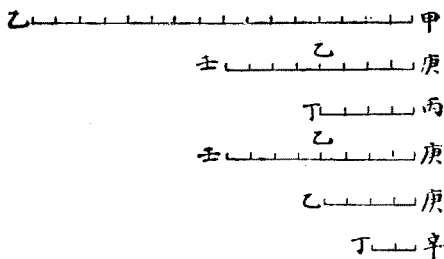
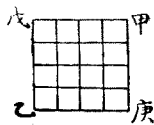
丙、相比例四率。甲乙一率爲二分。丁戊二率爲四分。戊己三率爲三分。乙丙四率爲六分。將丁戊二率爲縱線。戊己三率爲橫線。以之相乘。又將甲乙一率爲縱線。乙丙四率爲橫線。以之相乘。其所得之丁己一方面形。甲丙一方面形。其分數俱是十二。互相等矣。然則丁己形之丁戊縱度。雖比甲丙形之甲乙縱度大一半。而丁己形之戊己橫度。復比甲丙形之乙丙橫度少一半。故其縱橫互較之分相等。而其積亦等也。是故四率中凡有三率。欲求其不知之一率。將兩率之分相乘。所得之數。以一率之分除之。卽得其一率矣。設如甲乙三分爲一率。丁戊六分爲二率。戊己五分爲三率。乙丙十分爲四率。今只知一率二率三率之分。欲推四率。則以丁戊六分二率。與戊己五分三率相乘。爲丁己三十分。乃以甲乙三分一率除之。卽得乙丙十分四率矣。此以小分爲首率者也。或知乙丙、戊己、丁戊之三率。而推甲乙之一率。則以乙丙十分爲一率。戊己五分爲二率。丁戊六分爲三率。二率與三率相乘。一率除之。卽得甲乙之四率矣。此以大分爲首率者也。又或知甲乙、丁戊、乙丙之三率。而推戊己之一率。則以丁戊爲一率。甲乙爲二率。乙丙



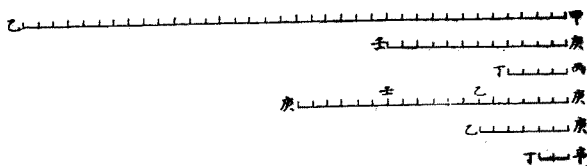
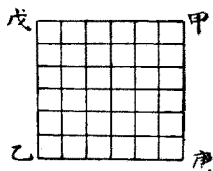
爲三率。二率與三率相乘。一率除之。卽得戊己之四率矣。此卽反推比例之理也。又或知戊己乙丙甲乙之三率。而推丁戊之一率。則以戊己爲一率。甲乙爲二率。乙丙爲三率。二率與三率相乘。一率除之。卽得丁戊之四率矣。此卽遞轉比例之理也。

第五

凡有兩直角方面形。此一方面之橫界。與他一方面橫界爲比。此一方面之縱界。與他一方面縱界爲比。其比例若等。則此兩方面之比例。比之兩界之比例。爲連比例隔一位相加之比例也。如甲乙丙丁同式二方面形。其甲乙形之甲戊橫界。爲丙丁形丙己橫界之二倍。而甲乙形之甲庚縱界。亦爲丙丁形丙辛縱界之二倍。則甲乙形面積。與丙丁形面積之比。比之甲乙形之一界。與丙丁形之一界之比者。卽如連比例三率隔一位相加之比例矣。蓋甲乙方面之縱橫界。旣爲丙丁方面縱橫界之二倍。則甲乙方面內。如丙丁方面之二倍者有二。二其二爲四。故甲乙方面積。比丙丁方面積爲四倍。今甲乙方面積爲一十六分。與丙丁方面積之四分相比。較之甲乙方面積之四分。與丙丁方面積之二分相比者不同。蓋



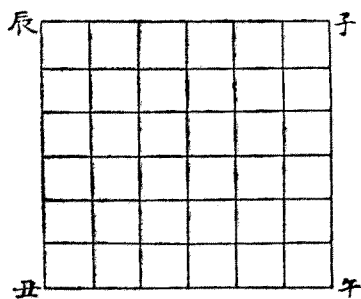
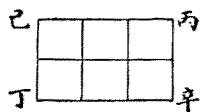
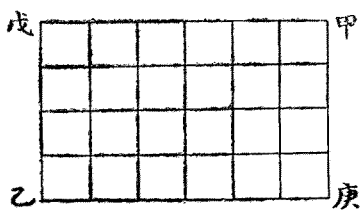
丙丁四、得甲乙十六之四分之一。而辛丁二、得庚乙四之二分之一。以四分比一分。較之二分比一分。不為二倍乎。故欲求其比例相連之率。則於甲乙形之界二倍之。得八分。與丙丁方界二分為比。即如甲乙方面積十六。與丙丁方面積四分之比矣。夫八與十六。四與八。二與四。皆二分之一之比例。而十六隔八與四比。八隔四與二比。則皆成四分之一之比例。故十六與四。較之四與二。為兩界上連比例隔一位相加之比例也。又如甲乙方面之縱橫界。為丙丁方面縱橫界之三倍。則甲乙方面內。如丙丁方面之三倍者有三。三其三為九。故甲乙之面積。比丙丁面積為九倍。今甲乙之積為三十六。與丙丁方面積四分相比。較之甲乙方界之六分。與丙丁方界之二分相比者不同。蓋丙丁四、得甲乙三十六之九分之一。而辛丁二、得庚乙六之三分之一。以九分比一分。較之三分比一分。不為三倍乎。故欲求其比例相連之率。則於甲乙形之界三倍之。得十八。與丙丁方界二分為比。即如甲乙方面積三十六。與丙丁方面積四之比例矣。蓋十八與六。



六與二皆三分之一之比例。而三十六隔十二與四比。十八隔六與二比。則皆爲九分之一之比例。故三十六與四較之六與二亦爲兩界上連比例隔一位相加之比例也。

第六

凡直角方面形有二種。一爲長方。一爲正方。因其縱橫界之比例各異。故其所生之形不同。而積不得互相爲比也。如欲比之。必以長方與長方爲比。正方與正方爲比。其比例始行。如甲乙、丙丁、兩長方面形。其甲乙形之甲戊橫界與丙丁形之丙己橫界爲大一倍。甲乙形之甲庚縱界與丙丁形之丙辛縱界亦爲大一倍。其比例相同。若以甲乙形之甲戊橫界與丙丁形之丙辛縱界爲比。則大三倍。而甲乙形之甲庚縱界與丙丁形之丙己橫界爲比。止大一分。猶不得大一倍。其比例則異。故甲乙形所生之積爲二十四。而丙丁形所生之積爲六。俱爲長方形焉。又如子丑、寅卯、兩正方形。其子丑形之子辰橫界與寅卯形之寅己橫界之比。子丑形之



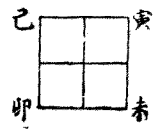
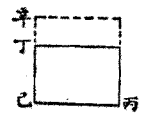
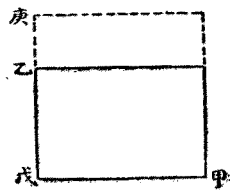
子午縱界與寅卯形之寅未縱界之比俱爲大三倍。而比例相同。復以子丑形之子辰橫界與寅卯形之寅未縱界爲比。子丑形之子午縱界與寅卯形之寅未縱界爲比。亦各大三倍。而比例相同。故子丑形所生之積爲三十六。而寅卯形所生之積爲四。俱爲正方形焉。以此四形兩兩相比。則甲乙長方形與丙丁長方形爲比。而子丑正方形與寅卯正方形爲比。各爲相當比例之四方面也。

第七

有兩同式長方面。於兩形相當之二界。各作兩正方面。互相爲比。即同原兩長方面之互相爲比也。如甲乙、丙丁、兩直角長方面。在甲戊、丙己、相當二橫界。各作甲庚、丙辛、兩正方面。則所作甲庚、丙辛、兩正方面互相爲比。即同於原有之甲乙、丙丁、相同之兩長方面之互相爲比也。夫甲乙、丙丁、同式之兩長方面積。既爲隔一位相加之比例。則所作甲庚、丙辛、同式之正方面積。亦必爲隔一位相加之比例。然則甲乙、丙丁、原有之兩面互相爲比。與所作甲庚、丙辛之正方面之互相爲比。其爲同理之比例無疑矣。

第八

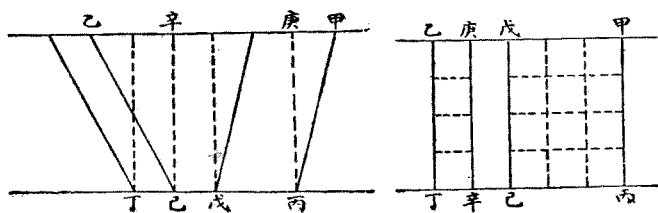
大凡二平行線內。所有直角方面互相爲比。同於其底之互相爲比也。如甲乙、丙丁、二平行線內。有甲己、



庚丁、兩直角方面。其甲己面與庚丁面之比。即同於甲己面之丙己底線。與庚丁面之辛丁底線之比也。蓋甲己面之丙己底線。與庚丁面之辛丁底線。為三倍。而甲己面之甲丙縱線。與庚丁面之庚辛縱線。因同在二平行線內。其度固同。今以二面縱線。俱依庚丁面之庚辛分數分之。皆為四倍。則甲己面為一十二分。而庚丁面為四分矣。以甲己面之十二分。與庚丁面之四分。為比。即如甲己面之丙己底三分。與庚丁面之辛丁底一分之比。故其比例相同也。

第九

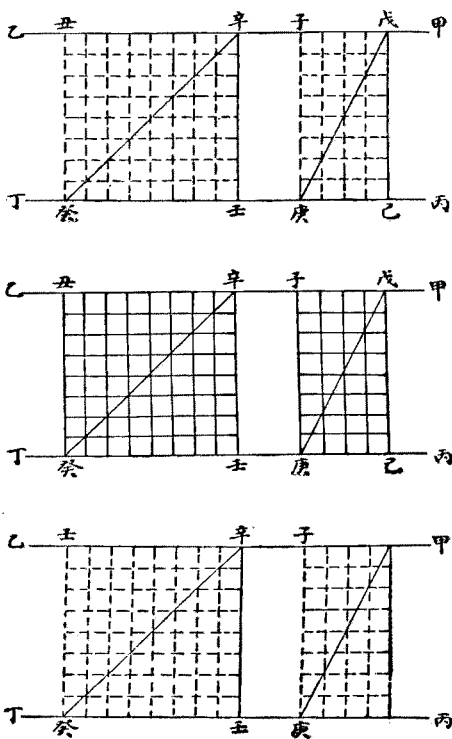
凡二平行線內。所有二界平行斜方面。互相為比。同於其底界度之互相為比也。如甲乙丙丁。二平行線內。有甲戊乙丁。兩斜方面積。互相為比。即同於丙戊己丁。兩底界之互相為比也。試將甲戊乙丁。兩斜方面之丙戊己丁。兩底界上。立庚戊辛丁。兩直角面。則此兩直角面。因與兩斜方面同底同高。其積必等。見三卷第八節。前節言凡二平行線內。所有直角方面。互相為比。同於其底之互相為比。此甲戊乙丁。兩斜方面。既與同底所立庚戊辛丁。兩直角面相等。則甲戊乙丁。兩斜方面。互相為比。必同於丙戊己丁。兩底界之互相為比。可知矣。故凡二平行線內。所有面積相比之分數。必與底界相比之



分數同也

第十

凡二平行線內，所有三角形面積互相爲比，亦同於其底界度之互相爲比也。如甲乙、丙丁、二平行線內，有戊己庚、辛壬癸、兩三角形，其內所函面積互相爲比，即同於己庚、壬癸、兩底界之互相爲比也。何也。凡二平行線內所有三角形，得其同底所立四邊形之一半，今以甲乙、丙丁、二平行線內之戊己庚三角形，同底立一戊己庚子四邊形，辛壬癸三角形，同底立一辛壬癸丑四邊形，則戊己庚三角形爲戊己庚子四邊形之一半，而辛壬癸三角形爲辛壬癸丑四邊形之一半，如以兩三角形面積互相爲比，即同於兩四邊形面積之互相爲比，而爲相當比例四率矣。其面積既互



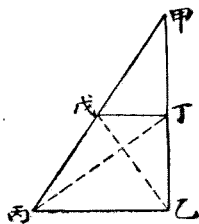
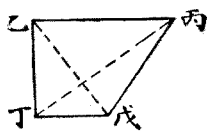
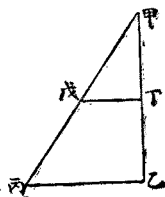
相爲比。則其兩三角形面積相比。同於兩三角形底之相比者。亦如兩四邊形相比。同於兩四邊形底之相比矣。然則戊己庚辛壬癸兩三角形面積互相爲比。必同於己庚壬癸兩底界互相爲比者。可知也。今壬癸底界既比己庚底界大一倍。故辛壬癸三角形面積。必比戊己庚三角形面積亦大一倍也。



# 幾何原本八

## 第一

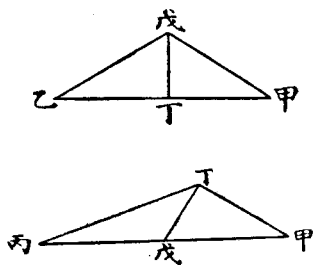
凡三角形內，與其底線平行，作一直線，則所截三角形之兩邊線，互相為比例線，其兩邊線所分各二段，互相為比，為相當比例四率，而每邊所截之一段，與本全線比之，亦為相當比例四率也。如甲乙丙三角形內，與乙丙底線平行，作一丁戊線，則分甲乙一邊為甲丁、丁乙、二段，分甲丙一邊為甲戊、戊丙、二段，其甲乙一邊之甲丁、丁乙、二段，互相為比，甲丙一邊之甲戊、戊丙、二段，互相為比，其比例俱同為相當比例四率矣。又如甲乙一邊之甲丁一段，與本邊甲乙全線為比，甲丙一邊之甲戊一段，與本邊甲丙全線為比，其比例亦俱同為相當比例四率矣。今以三角形按所截分，分為各式，以各式面積互相比者考之，自丁戊線之丁戊二端，作丁丙、戊乙、二線，則甲乙丙一三角形，分為四三角形，此四三角形內所有之乙戊丁、丙丁戊、兩三角形，既在乙丙、丁戊、二平行線之間，又共立於一丁戊之底，其二



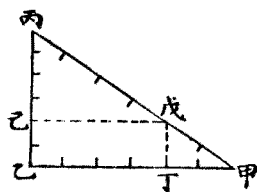
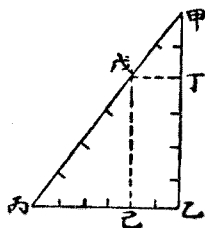
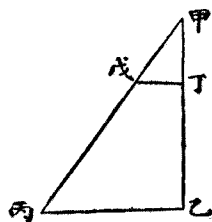
形之積必等。見三卷第十節。於此二形各加一截甲丁戊小三角形，即成甲戊乙、甲丁丙、兩三角形。其積亦必相等。又如甲丁戊、乙丁戊、兩三角形之底，俱在甲乙一直線上，而兩三角形之戊角，又共在一處。其兩形必在二平行線之間，而甲丁戊、丙丁戊、兩三角形之底，俱在甲丙一直線上，而兩三角形之丁角，又共在一丁處。其兩形亦在二平行線之間。見三卷第十二節。因各三角形，兩兩俱為二平行線所限，故其面積互相為比。必同於其底界之互相為比也。見七卷第十節。此所以甲丁戊、丙丁戊、兩三角形積互相為比，與其甲戊、戊丙、兩底線之互相為比同。其甲丁戊、乙丁戊、兩三角形積互相為比，與其甲丁、丁乙、兩底線之互相為比亦同也。再甲乙戊三角形之積，既與甲丙丁三角形之積相等，則以甲乙丙之全形，與所分之甲乙戊三角形，或與所分之甲丙丁三角形相比，其比例必俱相同。而甲丙丁三角形之甲丁底與甲丙乙全形之甲乙底，互相為比。甲乙戊三角形之甲戊底與甲乙丙全形之甲丙底，互相為比。亦必俱相同矣。因其各三角形，得互相為比例，故其所截兩邊線，兩兩為相當比例率也。

第二

凡三角形內，與底平行作一直線，其所截兩邊線之每一段，與各邊全線之比，即同於所作線與底線之比。如甲乙丙三角形內，與乙丙底平行作一丁戊線，此丁戊線所截甲丁一段，與甲乙全線之比，甲戊

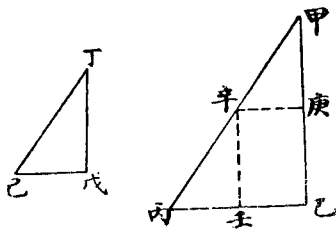


一段與甲丙全線之比。皆如丁戊線與乙丙底線之相比也。假若將甲乙丙三角形之甲乙邊線爲底。而與甲乙底線平行。作一戊己線。卽成戊己乙丁四邊長方形。其兩兩平行線之度。俱各相等。然三角形之兩邊。與所截之每段。既互相爲比。如前節所云。則此乙丙邊之乙己一段。與乙丙邊全線之比。卽同於彼甲丙邊之甲戊一段。與甲丙邊全線之比。而丁戊之平行線。既與乙己平行線度相等。則此丁戊平行線。與原底乙丙線之比。亦必同於彼甲丙邊之甲戊一段。與甲丙邊全線之比矣。故甲戊段爲一率。甲丙邊全線爲二率。丁戊平行線爲三率。乙丙底線爲四率。爲相當比例四率也。又如甲乙邊之甲丁一段。與甲乙邊全線之比。既同於丁戊平行線與乙丙底線之比。則甲丁段爲一率。甲乙邊全線爲二率。丁戊平行線爲三率。乙丙底線爲四率。亦爲相當比例四率也。苟甲乙邊全線爲六分。則甲丁段得其六分之二分。乙丙邊全線爲六分。則甲丁段得其六分之二分。乙丙邊全線爲六分。則甲丁段得其六分之二分。所以成兩兩相當比例之率也。



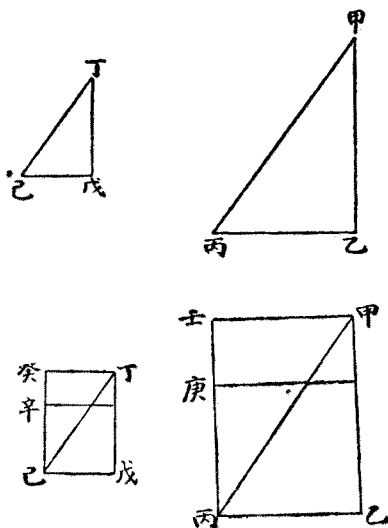
第三

凡大小兩三角形其相當之二角度若兩兩相等則其餘一角亦必相等如此類兩三角形謂之同式三角形也。雖其內容積分不同而其相當各界互相為比俱為相當比例之率焉。如甲乙丙丁戊己大小兩三角形其甲角與丁角等乙角與戊角等則所餘丙角必與己角等而為同式三角形也。二卷第三節言凡三角形之三角相併與二直角等則此大小兩三角形之各三角相併亦俱為二直角於二直角中減去大形之甲角乙角餘為丙角減去小形之丁角戊角餘為己角其所減之數既等則所餘之數亦必等矣。若於大形內與乙丙平行作庚辛線與甲乙平行作辛壬線則成甲庚辛辛壬丙兩小三角形此兩小形之相當角度與大形之相當角度亦必俱等故皆謂之同式形也。凡同式之形其容積雖不一而其各界互相為比皆為相當比例之四率是故以大三角形之甲乙全線與所截甲庚一段之比即如大三角形之甲乙一邊與小三角形之甲乙全線與所截甲辛一段之比即如大三角形之甲丙一邊與小三角形之甲丙全線與所截甲辛一段之比即如大三角形之甲丙一邊與小三角形之甲丙全線與所截甲辛一段之比也。大三角形之乙丙底線與所截庚辛底線之比即如大三角形之乙丙底線與小三角形之乙丙底線與所截庚辛底線之比也。至於甲乙丙大三角形與所截辛壬丙小三角形相當各界之比亦如甲乙丙大三角形與丁戊己小三角形相當各界之比也。由此推之凡同式之形其相當各界互相為比皆為相當比例之率可知矣。



第四

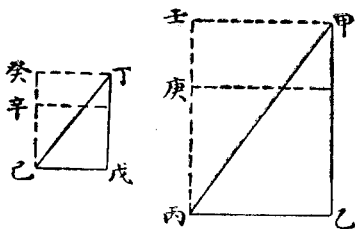
同式直角三角形面積，互相爲比。同於三角形各相當界所作方形之互相爲比，而同式三角形面積互相爲比者，比之各相當界互相爲比，則爲連比例內隔一位相加之比例也。如甲乙丙、丁戊己、兩同式直角三角形，其面積互相爲比，即同於此兩三角形之乙丙、戊己，相當二界所作庚乙、辛戊，兩方形互相爲比之比例。而此兩三角形之面積互相爲比之乙丙、戊己，相當二界互相爲比之比例，則爲連比例內隔一位相加之比例矣。蓋兩三角形之乙戊二角，俱爲直角，若與乙丙、戊己，二線平行，作甲壬、丁癸，二線，即成又與甲乙、丁戊，二線平行，作壬丙、癸己，二線，即成壬乙、癸戊，兩直角長方形。此甲乙丙、丁戊己，兩三角形，因與所作壬乙、癸戊，兩直角長方形，在二平行線內，同爲一底，其積爲一半，將半與半相比者，即同於全與全之相比，故甲乙丙、丁戊己，兩三角形互相爲比，必同於壬乙、癸戊，兩直角長方形互相爲比之比例矣。夫依乙丙、戊己，甲乙、丁戊，各相當二界所作壬乙、癸戊，兩長方形互相爲比之比例，既與甲乙丙、丁戊己，兩三角形互相爲比之比例同，則依乙丙、戊己，相當二界所作庚乙、辛戊，兩



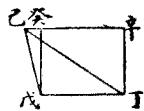
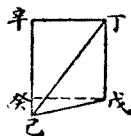
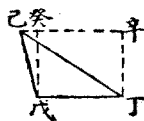
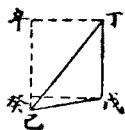
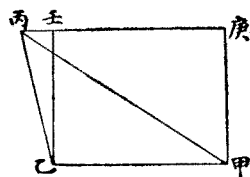
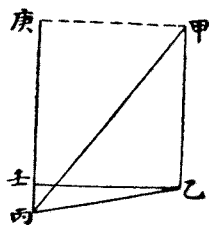
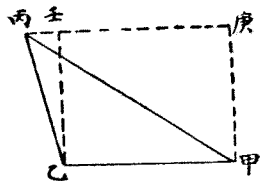
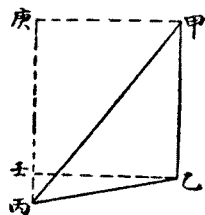
正方形互相爲比之比例。亦與壬乙、癸戊、兩長方形、與甲乙丙、丁戊己、兩三角形互相爲比之比例同矣。又凡直角兩方形、其兩界互相爲比之比例。若俱同、則兩形面積互相爲比之比例。較之兩界互相爲比之比例。爲隔一位相加之比例。見七卷第五節。今甲乙丙丁戊己、兩三角形之各依底線所作正方形互相爲比。較之二底線互相爲比之比例。卽爲隔一位相加之比例。夫甲乙丙、丁戊己、兩三角形之面積互相爲比者。旣與所作庚乙、辛戊、兩正方形面積互相爲比之比例同。則此所作兩正方形面積相比。較之兩底相比。爲隔一位相加之比例。而甲乙丙、丁戊己、兩三角形面積互相爲比。較之乙丙戊己、相當二界互相爲比之比例。亦爲隔一位相加之比例可知矣。

第五

同式無直角三角形面積互相爲比。同於三角形各相當界所作方形之互相爲比。而三角形面積互相爲比者。比之各相當界互相爲比。則爲連比例內隔一位相加之比例也。如甲乙丙、丁戊己、兩同式三角形。雖無直角。然其相當各角俱等。則此兩形面積互相爲比。同於在此兩形之甲乙、丁戊、相當二界所作方形互相爲比之比例。而兩形之面積互相爲比者。比之甲乙、丁戊、相當二界互相爲比之比例。則爲連比例內隔一位相加之比例矣。試自兩形之丙己二角。與甲乙、丁戊、二界平行。作丙庚、己辛、各一線。又自甲丁二角。至庚辛二線之末。作甲庚、丁辛、二線。又與此二線平行。自乙戊二角。至壬癸二處。作乙壬、戊癸、

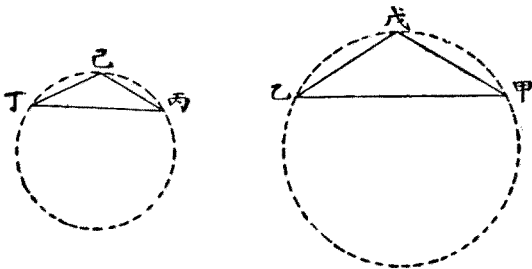
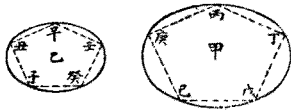
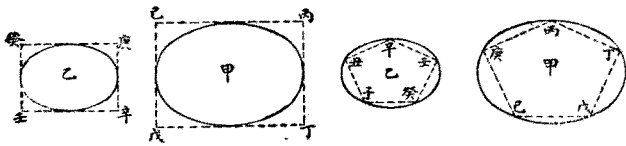
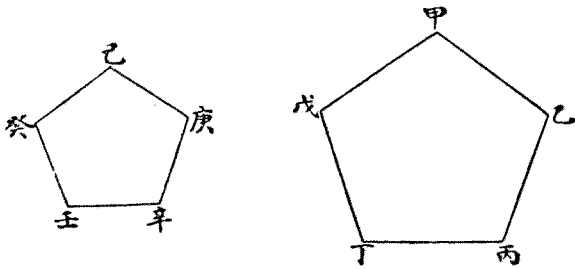


二線成庚乙辛戊兩直角長方形。此兩長方形與甲乙丙、丁戊己兩三角形俱在兩平行線內，又同爲一底。則此兩三角形面積爲彼庚乙辛戊兩長方形之半。將半與半相比者同於全與全之相比。故甲乙丙、丁戊己兩三角形面積之比例必同於庚乙辛戊兩長方形之比例矣。夫同式兩長方形之比例，同於相當界所立正方形之比例。而同式正方形之比例，比之各相當界之比例。爲連比例隔一位相加之比例。今此兩三角形面積之比例，既同於庚乙辛戊兩長方形之比例，亦必同於兩正方形之比例。則兩三角形面積之比例，比之兩界之比例，爲連比例隔一位相加之比例可知矣。



第六

有衆多邊形。其邊數同相當各角俱等。而相當界之比例又同。則謂之同式形也。如有甲乙丙丁戊己庚辛壬癸。大小兩多邊形。其邊數俱爲五。其相當甲己二角。乙庚二角。丙辛二角。丁壬二角。戊癸二角。各度俱等。而甲乙邊與己庚邊之比。卽同於乙丙邊與庚辛邊之比。其相當邊互相比之俱同者。卽謂之同式多邊形也。又如衆曲線形。於其內外作各種直界形。其式若同。則謂之同式曲線形也。假如有甲乙大小兩曲線形。在甲大形內。作一丙丁戊己庚五邊形。在

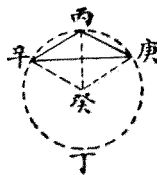
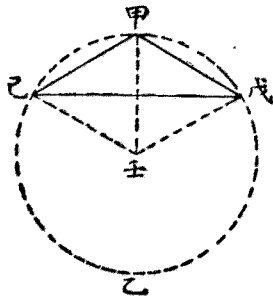




乙小形內，作一辛壬癸子丑五邊形。此所作兩五邊形之式若同，則曲線形之式必同。又如甲乙大小兩曲線形，在甲大形外，作一丙丁戊己四邊形。在乙小形外，作一庚辛壬癸四邊形。此所作兩四邊形之式若同，其曲線形之式亦必同。故皆謂之同式曲線形也。或如甲乙丙丁大小兩圓分，於大圓分內，作一戊甲乙三角形。於小圓分內，作一己丙丁三角形。此所作兩三角形之式若同，則圓分之式亦必同。故謂之同式圓分也。

第七

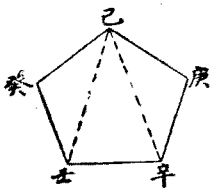
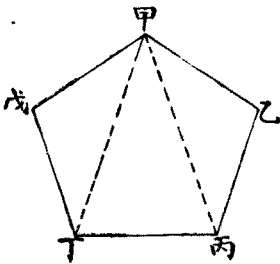
大小各圓分之式若同，則其相對之圓心角度必俱等也。如甲乙丙丁大小兩圓之戊甲己庚丙辛兩分，其各段所對二圓之壬癸心角度亦等矣。夫戊甲己與庚丙辛兩段式既同，則此內所函甲戊己丙庚辛兩三角形之甲丙相當兩角之度必等。若自甲丙二角，過二圓心壬癸，至對界乙丁，作甲壬乙丙癸丁二線，則成兩界角與兩心角。蓋心角大於界角一倍，故甲乙大圓之戊壬乙心角，比戊甲乙界角大一倍。乙壬己心角，比乙甲己界角大一倍。今將戊壬乙、乙壬己兩心角併之，戊甲乙、乙甲己兩界角併



之。則所併之心角。亦必比所併之界角大一倍矣。而丙丁小圓之庚癸丁、丁癸辛、兩心角併之。亦必比庚丙丁、丁丙辛、所併之兩界角大一倍。夫兩圓之兩界角度既等。而兩圓之所併之心角度又等。則兩界角相對之戊乙己、庚丁辛、兩弧段之分數亦必相等。界角所對之弧分既等。則心角所對之弧分亦必相等。心角所對之弧分。即為甲丙二界角相對之壬癸二心角之度也。

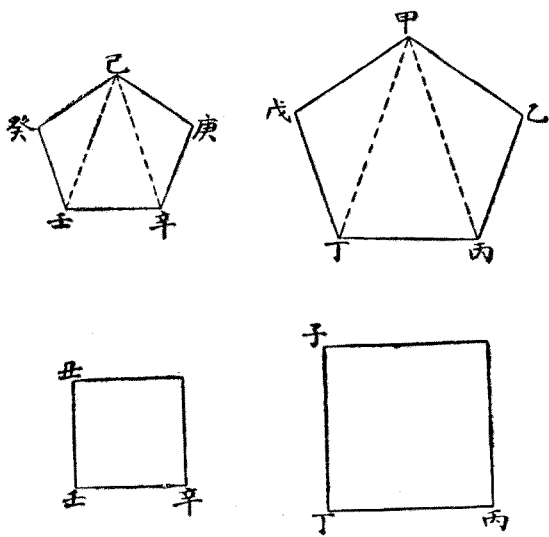
第八

凡大小同式多邊形。分為衆三角形。其相當三角形之式俱相同也。如甲乙丙丁戊、己庚辛壬癸、兩同式五邊形。自大形甲角至丙丁二角。自小形己角至辛壬二角。各作二線。則大形分為甲乙丙、甲丙丁、甲丁戊、三三角形。小形分為己庚辛、己辛壬、己壬癸、三三角形。而甲乙丙之形。與相當己庚辛之形同式。甲丙丁之形。與相當己辛壬之形同式。甲丁戊之形。與相當己壬癸之形同式。因其所分各三角形。俱為同式。故相當各角度必等。相當各角度既等。則其相當各界之比例。亦必俱同。自五邊形所分之各三角形之相當界互相為比之比例既同。則五邊形之相當各界互相為比之比例亦必同。相當各界之比例相同。則兩形之式相同可知矣。



第九

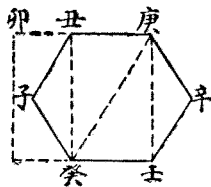
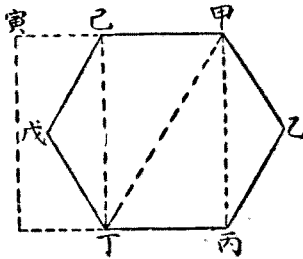
凡大小同式多邊形互相爲比。同於各形相當界所作方形之互相爲比。而比之各面相當界互相爲比。之比例。爲連比例。隔一位相加之比例也。如甲乙丙丁戊己庚辛壬癸。兩同式五邊形。於大形之丙丁界。小形之辛壬界。各作子丙。丑辛。大小兩方形。其大小五邊形互相爲比。必同於所作子丙。丑辛。大小二方形之互相爲比。大小五邊形。既同於大小兩方形之互相爲比。則比之丙丁。辛壬。相當二界互相爲比之比例。爲連比例。隔一位相加之比。例矣。若將甲乙丙丁戊己庚辛壬癸。兩形。分爲衆三角形。則相當各三角形之式必同。相當各三角形之式既同。則相當各三角形互相爲比。即同於在三角形各相當界所作方形之互相爲比。而各三角形面積之互相爲比。較之各相當界互相爲比之比例。亦爲連比例。隔一位相加之比例。夫所分衆三角形互相爲比。既同於所作方形之互相



爲比。則衆三角形所合甲乙丙丁戊己庚辛壬癸之大小五邊形互相爲比。亦必同於丙丁辛壬相當界所作子丙丑辛大小兩方形之互相爲比。而比之丙丁辛壬相當界互相爲比之比例爲連比例隔一位相加之比例可知矣。

第十

凡大小同式直界形互相爲比。同於在所比各形內外所有同式形之各相當界所作正方形之互相爲比也。如甲乙丙丁戊己庚辛壬癸子丑大小兩直界形於此二形內所函之甲丙丁己庚壬癸丑二同式四邊形之甲丙庚壬相當二界作寅丙卯壬正方形則兩直界形互相爲比。即同於兩正方形之互相爲比也。若將甲乙丙丁戊己庚辛壬癸子丑兩六邊形俱分爲三角形。則其相當各三角形之式俱相同。而相當各三角形互相爲比。必同於甲丙庚壬相當二界所作寅丙卯壬正方形之互相爲比矣。此所分三角形之比例。既同於所作正方形之比例。則大小兩形內各三角形之甲丙庚壬界。又爲兩四邊形之共界。而甲乙丙丁戊己庚辛壬癸子丑兩同式形互相爲比。亦必同於其所函之甲丙丁己庚壬癸丑兩四邊形之甲丙庚壬兩相當界所作寅丙卯壬正方形

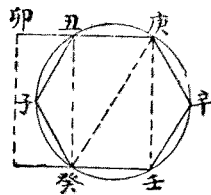
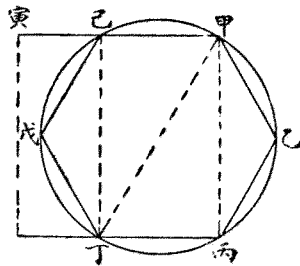


形之互相爲比可知矣。

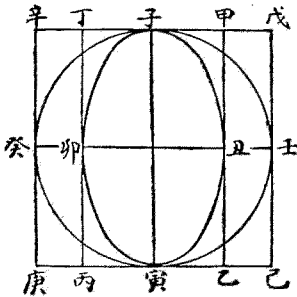
第十一

凡大小同式曲界形互相爲比。同於在所比各形內外所有同式形之各相當界所作正方形之互相爲比也。如甲乙丙丁戊己庚辛壬癸子丑。大小二圓。此二圓之中。雖各函一同式六邊形。各函一同式四邊形。又各函衆同式三角形。此大小二圓之積。互相爲比。必同於在圓內所函同式形之甲丙庚壬。相當二界所作寅丙卯壬。正方形之互相爲比也。大凡衆界形。或函圓。或函於圓。其界數愈多。愈與圓界相近。而圓界分爲千萬段。卽成千萬直界形。見四卷第十九二十等節。則大小兩圓之比例。固與內函相當直界形之比例等矣。夫相當直界形之比例。原同於兩形之相當界所作方形之比例。而圓界形之比例。又同於相當直界形之比例。則此大小二圓互相爲比之比例。同於此二圓之輻線或徑線所作正方形互相爲比之比例可知矣。

第十二



凡圓面徑與橢圓面一名鴨蛋形。高度等者其面積互相爲比之比例。即同於函兩形各作切方形互相爲比之比例。而圓形面積與橢圓形面積互相爲比之比例。又同於圓形徑與橢圓形小徑互相爲比之比例也。如子壬寅癸之圓面。子丑寅卯之橢圓面。其子寅高度俱同。圓徑即橢圓大徑。其面積互相爲比之比例。必同於圓面外所作切圓戊己庚辛正方形與橢圓面外所作切圓甲乙丙丁長方形互相爲比之比例。而子壬寅癸圓面與子丑寅卯橢圓面互相爲比之比例。又同於圓面之壬癸徑與橢圓面之丑卯小徑互相爲比之比例也。蓋平行線內兩面形互相爲比之比例。同於其底界互相爲比之比例。見七卷第八節。今戊己庚辛正方形與甲乙丙丁長方形皆在戊辛己庚平行線內。故戊己庚辛正方形與甲乙丙丁長方形互相爲比之比例。同於己庚底與乙丙底互相爲比之比例。而子壬寅癸圓面與子丑寅卯橢圓面亦在戊辛己庚平行線內。則子壬寅癸圓面與子丑寅卯橢圓面互相爲比之比例。必同於戊己庚辛正方形與甲乙丙丁長方形互相爲比之比例矣。然戊己庚辛正方形之己庚底。即圓面壬癸徑度。而甲乙丙丁長方形之乙丙底。又即橢圓面之丑卯徑度也。夫平圓與橢圓之比例。既同於正方形與長方形之比例。而正方形與長方形之比例。又同於

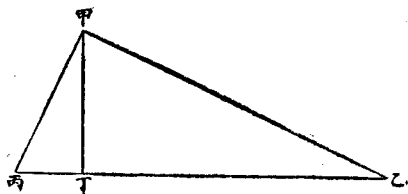


己庚底與乙丙底之比例。則圓面與橢圓面之比例。同於圓面之壬癸徑、與橢圓面之丑卯徑之比例可知矣。

## 幾何原本九

### 第一

凡直角三角形。自直角至相對界。作一垂線。則一形分爲兩形。與原形共爲三同式直角三角形。而其比例俱相同也。如甲乙丙直角三角形。自甲直角至相對乙丙界。作一甲丁垂線。則甲乙丙一形。分爲甲丁乙、甲丁丙兩形。此所分兩形。與原有甲乙丙形之式俱相同。而皆爲直角三角形。其三形每相當各界之比例。亦俱相同也。蓋甲丁線既爲垂線。則兩傍所分甲丁乙、甲丁丙二角。必俱爲直角。見首卷第十節。是故甲乙丙三角形之甲角。甲丁乙三角形之丁角。其度相等。而兩三角形。又共一乙角。其相當二角度既等。則所餘各一角度自等。見八卷第三節。故甲乙丙之丙角。與甲丁乙之甲角。其度相等也。而甲乙丙之甲角。亦與甲丁丙之丁角相等。此兩三角形。又共一丙角。故所餘之甲乙丙之乙角。與甲丁丙之甲角。其度亦等。三三角形之每相當各角之度既等。則三三角形之式必同。三三角形之式既同。則其每相當各界之比例亦俱相同可知矣。

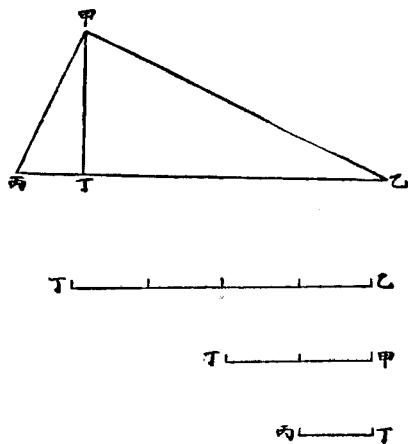




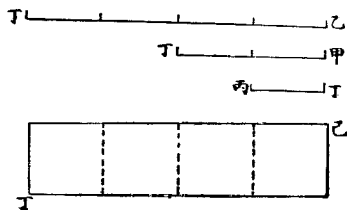
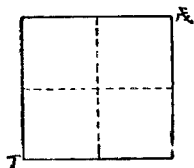
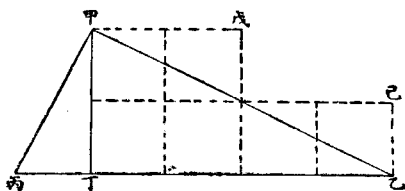
凡直角三角形。自直角至相對界。作一垂線。則所截之兩段。一爲一率。一爲三率。而所作之垂線爲中率。此三率卽爲相連比例率也。如甲乙丙直角三角形。自甲直角至相對乙丙界。作一甲丁垂線。則截乙丙界爲兩段。其所截之乙丁段爲一率。則丁丙段爲三率。若丁丙段爲一率。則乙丁段爲三率。而所作甲丁垂線總爲中率。故此乙丁、甲丁、丁丙、三線互爲相連比例三率也。蓋甲乙丁、甲丁丙、兩三角形爲同式。故其相當之乙丁、甲丁、二界互相爲比。卽同於甲丁、丁丙、二界之互相爲比也。今以乙丁線爲四分。丁丙線爲一分。則甲丁線必得二分。因四分與二分之比。必同於二分與一分之比。故爲相連比例三率也。

### 第三

直角三角形。自直角至相對界所作垂線。與所分二段。固爲相連比例三率。如依垂線度作一方形。則與所分二段一爲寬度一爲長度所作長方形之積相等也。如甲乙丙直角三角形。自甲直角至相對乙丙界。作一甲丁垂線。截乙丙界爲兩段。遂成乙丁、甲丁、丁丙之連比例三率。今依甲丁垂線度。作一戊丁正



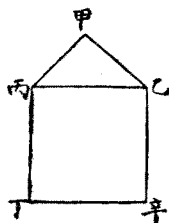
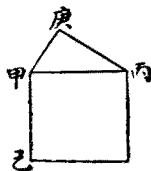
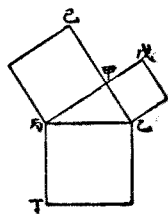
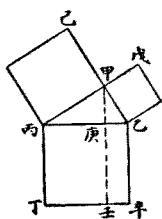
方形。即爲中率自乘之數。以甲丁垂線所截丁丙一段爲寬度。乙丁一段爲長度。作一己丁長方形。即爲首率末率相乘之數。其戊丁正方形之積。必與己丁長方形之積相等也。何也。蓋同式兩三角之相當界互相爲比之比例同。故此乙丁界與甲丁界之比。即同於甲丁界與丙丁界之比。乙丁線既爲一率。則甲丁線爲二率。甲丁線復爲三率。則丙丁線爲四率。然則此相連比例三率。又爲相當比例四率矣。因其可爲相當比例四率。故二率與三率相乘。一率與四率相乘。所得之分數相同。見七卷第四節。今既以甲丁爲二率。又爲三率。則甲丁自乘之數。即是二率三率相乘之數。而乙丁一率。與丙丁三率相乘。所得己丁長方形。即與甲丁二率三率自乘之正方形相等可知矣。此乃首率末率求中率之法也。要之首率末率相乘。中率相乘。中率相乘者。中率自乘。或二率三率相乘。俱在首率末率之中。故云。其所成之二式雖異。因俱自相連比例四率而生。故其積相等而得以爲準。



也。

第四

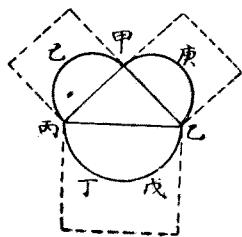
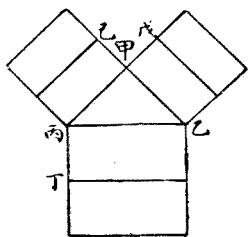
凡有直角三角形，其直角相對界所作方形之積，必與兩傍界所作兩方形之積相等也。如甲乙丙直角三角形，其甲直角相對乙丙界，作一乙丁方形，其積必與甲乙、甲丙之兩傍線所作戊乙、己丙兩方形之積相等也。試自甲直角過相對乙丙界至方形辛丁界，作一甲庚壬垂線，則甲乙丙三角形，分爲甲乙庚、甲庚丙兩三角形，而乙丁正方形，分爲乙壬庚丁兩長方形，此所分甲乙庚、甲庚丙兩三角形，與甲乙丙原三角形爲同式，則其每相當界之互相比例必同矣。是以甲庚丙小三角形之庚丙小界，與丙甲大界之比，卽同於甲乙丙大三角形之甲丙小界，與乙丙大界之比，而爲相當比例四率也。然丙甲、甲丙之二率三率，原爲一線，則庚丙、丙甲、乙丙，又爲相連比例三率矣。故丙甲中率所作己丙方形之積，與庚丙一率爲寬乙丙三率爲長所作庚丁長



方形之積相等也。乙丁既爲正方形，則庚壬度必與方界乙丙各度等。故庚丁長方，卽同庚丙爲寬乙丙爲長所作之長方也。又如甲乙庚、甲乙丙、兩三角之乙庚、甲乙、乙甲、乙丙、四界爲相當比例四率，又爲相連比例三率。故甲乙中率所作戊乙方形之積，亦與乙庚一率爲寬乙丙三率爲長所作乙壬長方形之積相等也。今庚丁、乙壬之兩長方形，既與己丙、戊乙、兩正方形等，則兩形相合之乙丁正方形，亦必與己丙、戊乙、兩正方形相等可知矣。

第五

凡直角三角形之三界，所作同式三形，其一大界所作一形之積，必與二小界所作二形之積等也。如在甲乙丙直角三角形之乙丙、甲乙、甲丙、三界，作乙丁、戊乙、己丙、三同式長方形，則乙丙大界所作乙丁一形之積，必與甲乙、甲丙、二小界所作戊乙、己丙、二形之積等也。又或如甲乙丙直角三角形，於乙丙大界，作乙戊、丁丙、一半圓，於甲乙、甲丙、二小界，作甲庚、乙甲、己丙、二半圓，則乙丙大界所作乙戊、丁丙、一半圓之積，必與甲乙、甲丙、二小界所作甲庚、乙甲、己丙、二半圓之積等也。蓋依三界所作三形之式既同，故同式衆形互相爲比，卽同於相當界所作正方形之互相爲比也。要之一大界所作一大形內，減一小界所



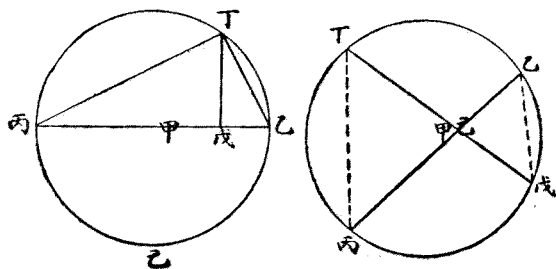
作一小形，即餘一小界所作一小形，而一小界所作一小形內，再加八一小界所作一小形，則為一大界所作一大形矣。

第六

一圓之內，二絃線相交，所截之段，遞轉比之，其比例俱同，而為相當比例四率也。如甲圓內乙丙、丁戊、二絃線，相交於己，其所截之戊己一段，與己丙一段之比例，即同於乙己一段，與己丁一段之比例，故戊己、己丙、乙己、己丁四段，為相當比例之四率也。何以見之？若自乙至戊，自丁至丙，復作二絃線，即成乙己戊、丁己丙兩三角形，此兩三角形之乙角、丁角，俱切於甲圓之戊丙弧段，其度相等。見四卷第十三節。再乙己戊之己角、丁己丙之己角，又為二尖相對之角，其度亦相等。今乙丁二角之度既等，而兩己角之度又等，則所餘戊丙二角亦自等。兩三角形之相當各角既等，則其式必同。其式既同，則每相當各二線互為比之比例俱同，而戊己、己丙、乙己、己丁四段，互相為比例四率可知矣。

第七

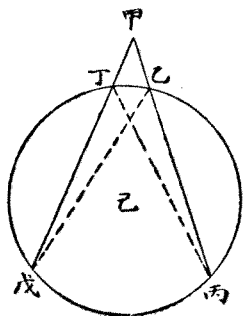
圓之徑線，不拘何處，作一垂線，則所截之兩段，一為一率，一為三率，而垂線為中率，即為相連比例三率也。如甲圓自丁界至乙丙徑線戊處，作一丁戊垂線，將乙丙徑線截為兩段，其所截乙戊一段為一率，戊丙一段為三率，而



丁戊垂線爲中率。此乙戊、丁戊、戊丙、三線爲相連比例三率也。試自圓界丁至乙、丙、二處、作丁乙、丁丙、二線。則成一乙丙丁三角形。其丁角既立於圓之乙己丙半界。故爲直角。見四卷第十四節。而丁戊垂線。乃自直角至相對乙丙底界所作之垂線。故所截乙戊一段爲一率。戊丙一段爲三率。而丁戊垂線爲中率。爲相連比例三率也。

第八

自圓外一點、過圓界二處至相對界作二線。以此兩全線互相爲比。卽同於圓界外所截之二段遞轉爲比之比例而爲相當比例四率也。如己圖、自圓外甲點、過圓界乙、丁二處、至相對界丙、戊、二處作二線。則甲丙、甲戊、兩全線互相爲比。必同於圓界外所截甲乙、甲丁、二段之遞轉相比。而爲相當比例四率也。試自圓界乙、丁二處、至相對界丙、戊、二處作乙戊、丁丙、二線。則成甲丙丁、甲戊乙兩三角形。此兩三角形之丙戊、二角既切於一圓之乙丁弧界。其二角之度必等。見四卷第十二節。再甲丙丁之甲角、甲戊乙之甲角。既共爲一角。其度自等。兩三角形各二角度俱等。則兩三角形必爲同式矣。故甲丙、甲戊、相當二界互相爲比之比例。卽同於甲丁、甲乙、相當二界互相爲比之比例。是以甲丙與甲戊之比。同於甲丁與甲乙之比。將甲丙全線爲一率。甲戊全線爲二率。甲乙、甲



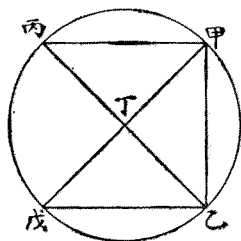
丁、遞轉移之、而以甲丁一段爲三率、甲乙一段爲四率、爲相當比例之四率也。

第九

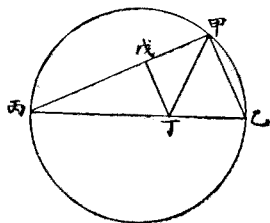
凡函於圓內之三角形、以其一角平分爲二、過相對底界至相對界、作一直線、則所分角之小邊線、與所作線之在三角形內一段之比、卽同於所作線之全分、與所分角之大邊線之比也。如函於圓內有甲乙丙三角形、以甲角平分爲二分、過所對乙丙底界至相對界、作一直線、卽成甲丁戊一全線、以三角形之甲乙小邊、與所作甲丁戊線之甲丁一段之比、卽同於所作甲丁戊全線、與三角形之甲丙大邊之比也。何以言之、若自圓界乙至戊、作乙戊弦線、卽成甲乙戊、甲丁丙、兩三角形、此兩三角形之戊丙二角、俱切於圓界甲乙弧之一段、其度必等、而甲乙戊三角形之甲角、甲丁丙三角形之甲角、又爲一角所平分之兩角、其度亦必等、因此兩三角形各二角之度等、故兩形爲同式、兩三角形之式既同、則兩形之相當二界、互相爲比之比例俱同、是以甲乙小分、與甲丁小分之比、卽同於甲戊大分、與甲丙大分之比也。

第十

凡函於圓內之三角形、以其一角爲兩平分、自角至底作一線、則所分底線兩段互相爲比、卽同於所分角之兩傍兩邊線之互相爲比也。如函於圓內有甲乙丙三角形、以甲角平分爲二分、至乙丙底、作甲丁



一線。則分乙丙底線爲乙丁、丁丙、兩段。以乙丁與丁丙之比。卽同於以甲乙小邊線與甲丙大邊線之比。試自所分底線之丁至甲丙線。與甲乙平行作丁戊一線。卽成戊丁丙一小三角形。蓋甲乙丙大三角形之乙角。戊丁丙小三角形之丁角。旣爲乙甲、丁戊、平行線一邊之內外角。其度必等。見首卷第二十三節。而甲乙丙、戊丁丙、兩三角形。又共一丙角。故此兩三角形之各二角度等。爲同式兩三角形也。再甲丁戊之丁角。乙甲丁之甲角。因爲平行線內二尖交錯之角。其度亦等。然則乙甲丁之甲角。旣爲甲乙丙之甲角之兩平分。則甲丁戊之丁角。亦與甲丁戊之甲角度等矣。甲丁戊三角形之丁角。甲角旣等。則二角所對之丁戊、甲戊、二線。亦必等矣。甲乙丙戊丁丙、兩三角形。旣爲同式而三角之度又俱等。則其甲乙丙大三角形之甲乙、甲丙、二線。互相爲比。卽同於戊丁丙小三角形之戊丁、戊丙、二線。互相爲比之比例也。今戊丁、甲戊、二線。其度旣等。則甲乙線與甲丙線之比。又同於以甲戊線與戊丙線之比。至於丁戊平行線所截乙丁一段與丁丙一段之比。則又同於甲戊一段與戊丙一段之比矣。是故甲乙線與甲丙線之比。爲同於乙丁線與丁丙線之比也。



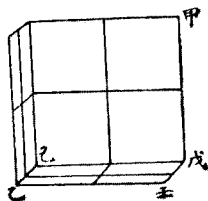
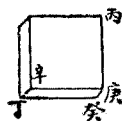


# 幾何原本十

## 第一

大凡直角立方體積。皆生於面線互乘之度。故欲知方體所生比例之分。將所比形之長寬與厚。詳較之。即可得而知矣。如甲乙丙丁直角立方二體。其甲乙大形之戊己長。比丙丁小形之庚辛長。甲乙大形之戊壬寬。比丙丁小形之庚癸寬。甲乙大形之甲戊厚。比丙丁小形之丙庚厚。俱爲大一倍。其甲乙大形之戊乙底面積。與丙丁小形之庚丁底面積之比例。將縱橫二線之長寬度分考之。即得。見七卷第二節。既得二體底積之比例。乃以二形之厚度。復與底積比之。即可知甲乙丙丁二體之比例矣。蓋甲乙大體之戊己戊壬長寬之度。既比丙丁小體之庚辛庚癸長寬之度大一倍。則戊乙平面底形之內。如庚丁平面底形二倍者有二矣。然則甲乙大形甲戊之厚度。既比丙丁小形丙庚之厚度大一倍。則甲乙體形之內。如丙丁體形四倍者有二可知矣。是故欲知直角方體之比例。以本體之長寬與厚。互相比例以較之。即得直角方體互相爲比之比例也。

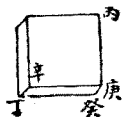
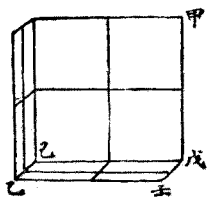
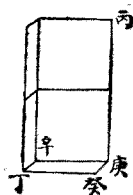
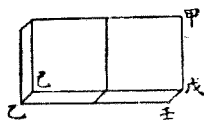
## 第二



有兩直角長方體。若將此一體之底度、與他一體之底度、又將他一體之厚度、與此一體之厚度爲比。其比例若同。則此二體之積必等也。如甲乙、丙丁、兩直角長方體。甲乙體之戊乙底度。比丙丁體之庚丁底度大一倍。而丙丁體之丙庚厚度。比甲乙體之甲戊厚度亦大一倍。則甲乙、丙丁、二體之積必相等。是故兩體之底積與厚度相較。則兩體之積可知矣。蓋體積之比例。視其面線。今兩體之底面厚度交互相等如此。其體積不得不等也。

第三

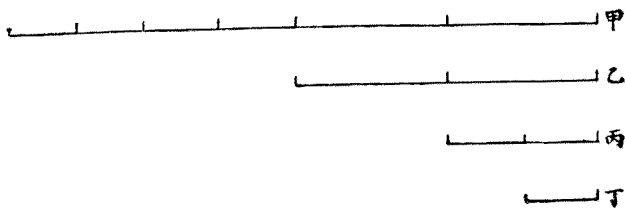
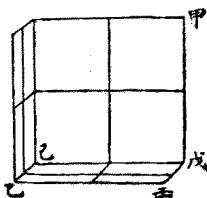
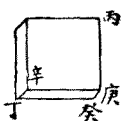
有兩直角方體。其底面積之縱橫二界相比之比例。與厚度面積之縱橫二界相比之比例若俱同。則此兩體爲直角正方同式體也。如甲乙、丙丁、兩直角方體。其甲乙體之戊乙底面之戊己橫界。比丙丁體之庚丁底面之庚辛橫界大一倍。甲乙體之戊乙底面之戊壬縱界。比丙丁體之庚丁底面之庚癸縱界大一倍。甲乙體之甲己厚面之甲戊直界。比丙丁體之丙辛厚面之丙庚直界亦大一倍。則甲乙、丙丁之兩體。俱爲直角正方同式體也。至於兩體所有之戊己、庚辛、二界。戊壬、庚癸、二界。甲戊、丙庚、二界。俱爲相當之界。而可互相爲比。



例矣。

第四

凡同式直角正方體，其體積之比例比之兩界線之比例，爲連比例隔二位相加之比例也。如甲乙丙丁兩同式直角正方體，其相當之戊己庚辛二界，戊壬庚癸二界，甲戊丙庚二界，互相爲比之比例，俱各大一倍，則此甲乙體積與丙丁體積之比，比之甲乙體之界線，與丙丁體之界線之比者，卽如連比例四率內隔二位相加之比例矣。蓋甲乙體之各界，既爲丙丁體之各界之二倍，則甲乙體內如丙丁體之二倍者，有四，二其四爲八，故甲乙體積，比丙丁體積大八倍。夫以甲乙體積八，與丙丁體積一相比，爲八分之一，甲乙體界二，與丙丁體界一相比，爲二分之一，其比例不同。蓋以八分比一分，較之二分比一分，爲四倍也。如欲求其相連比例之率，則於甲乙體之界四倍之，得八分，與丙丁體界一分爲比，卽如甲乙體積與丙丁體積之比例矣。夫八與四、四與二、二與一，皆爲連比例二分之一之比例，今以八與一爲比，其間隔四



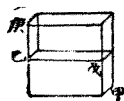
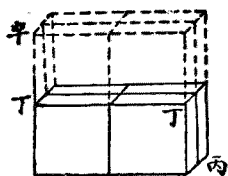
與二之兩位。故曰同式兩體積之比例。爲兩界上連比例隔二位相加之比例也。若邊爲三倍。則面爲九倍。體爲二十七倍。亦爲隔二位相加之比例也。

第五

有兩同式直角長方體。於兩體相當之二界。各作兩正方體。互相爲比。卽同於原兩長方體之互相爲比也。如甲乙、丙丁、兩直角長方體。在戊乙、己丁、相當二橫界。各作甲庚、丙辛、二正方體。則所作之甲庚、丙辛、兩正方體互相爲比之比例。仍同於原有之甲乙、丙丁、兩長方體互相爲比之比例也。夫甲乙、丙丁、同式之兩長方體。既爲隔二位相加之比例。則所作甲庚、丙辛、同式之兩正方體。亦必爲隔二位相加之比例矣。然則原有之甲乙長方體。爲原有之丙丁長方體之八分之一。其所作甲庚正方體。亦爲所作丙辛正方體之八分之一。可知矣。

第六

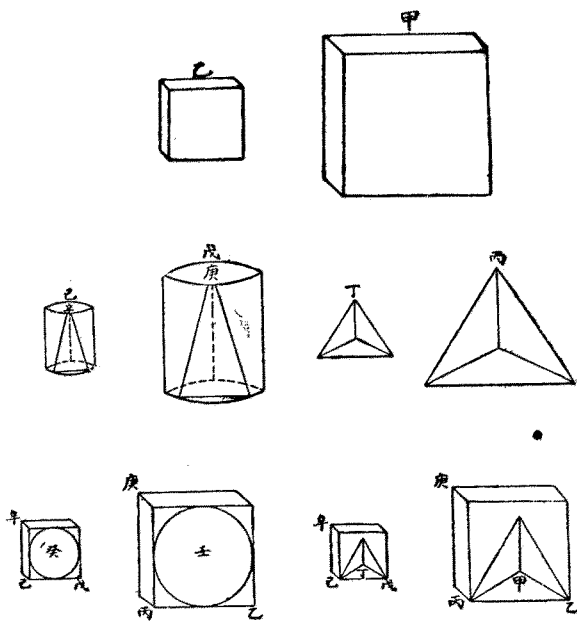
凡有大小平面體。其相當角度俱等。而相當界之比例又同。則謂之同式體也。如甲乙、大小兩平面體。其相當各角之度俱等。而相當各界之比例又同。則甲乙、二體。謂之同式平面正方體也。如丙丁、大小兩四瓣



體。其相當各角之度俱等。而相當各界之比例又同。則丙、丁二體謂之同式四瓣體也。又如大小圓面體。於其內外作各種平面體。其平面體之式若同。則圓面體亦謂之同式體。如戊、己、大小兩圓體所函之庚、辛、尖瓣等體是也。

第七

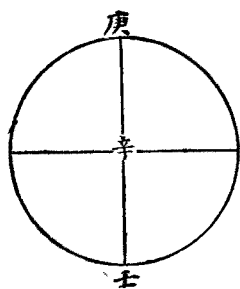
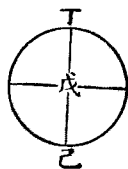
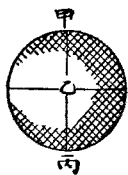
同式各種體之比例。同於在各體相當界所作正方體之比例也。如甲乙丙丁戊己大小兩三角尖瓣體。互相為比。即同於乙丙戊己相當二界所作庚乙辛戊兩正方體之互相為比。又如壬癸兩圓球體。其互相為比之比例。亦同於圓球徑相當之乙丙戊己二界所作庚乙辛戊兩正方體互相為比之比例也。蓋同式平面形互相為比之比例。同於各相當二界所作正方面形互相為比之比例矣。今各種體之式既同。故其相當面互相



爲比之比例必同。相當面互相爲比之比例同者。緣相當面之各相當界互相爲比之比例同也。故凡同類兩體。知此一體之度。而不知彼一體之度。欲求知之。則在同式兩體相當二界。各作一正方體。此所作之二體。一爲一率。一爲二率。所知之體爲三率。推得四率。即其未知之體矣。或有同類兩體。知此一體之界。而不知彼一體之界。則依所知一體之界。作一正方體。其兩體一爲一率。一爲二率。所作正方體爲三率。推得四率。即是彼一體界數所作之正方體矣。故曰同式兩體之比例。與相當界所作正方體之比例相同也。

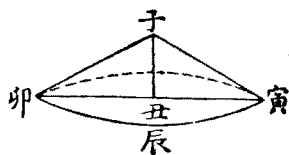
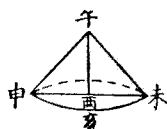
第八

凡圓面半徑與球體半徑等者。其圓面積爲球體外面積之四分之一。而圓面半徑與球體全徑等者。其圓面積與球體外面積等也。如丁己圓面之丁戊半徑。與甲丙球體之甲乙半徑等。則丁己圓面積爲甲丙球體外面積之四分之一。又如庚壬圓面之庚辛半徑。與甲丙球體之甲丙全徑等。則庚壬圓面積與甲丙球體外面積等也。試作子寅卯一尖圓體。使其寅辰卯之底面積與甲丙球體外面積等。其



子丑高度與甲丙球體之甲乙半徑等。則此尖圓體積與球體積相等。見五卷第二十五節。又作午未申一小尖圓體。使其未申底徑與甲丙球體之全徑等。亦與大尖圓體之寅丑半徑等。其午酉高度與甲丙球體之甲乙半徑等。亦與大尖圓體之子丑高度等。則此小尖圓體積為球體積之四分之一。亦即為大尖圓體積之四分之一。何以見之。蓋大小兩面之比例。同於相當界所生連比例隔一位加一倍之比例。今大尖圓體之寅卯底徑比小尖圓體之未申底徑大一倍。則大尖圓體底積比小尖圓體底積必又大一倍。而小尖圓體底積為大尖圓體底積之四分之一矣。又兩體同高者。其體積之比例。同於其底面之比例。今小尖圓體底積既為大尖圓體底積之四分之一。則其體積必為大尖圓體積之四分之一。而亦為球體之四分之一矣。球體原與大尖圓相等。夫大尖圓體之底積原與球體之外面積等。小尖圓體底積既為大尖圓體底積之四分之一。亦必為球體外面積之四分之一。而丁己圓面固與小尖圓之底積等。則為球體外面積之四分之一。無疑矣。至於庚壬圓面之徑原比丁己圓面之徑大一倍。則其面積必大四倍。今丁己圓面既為甲丙球體外面積之四分之一。則庚壬圓面積比丁己圓面積大四倍者。安得不與球體外面積相等乎。

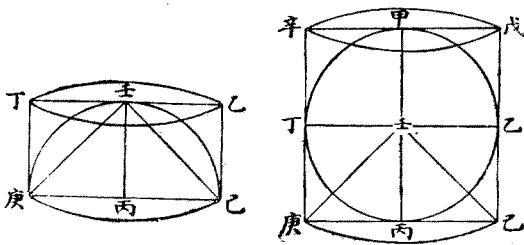
第九



凡球體全徑與上下面平行長圓體底徑高度相等。則球體為長圓體之三分之二也。如甲乙丙丁一球體。戊己庚辛一長圓體。此球體之乙丁全徑與長圓體之己庚底徑度等。而球體之甲丙全徑與長圓體之戊己高度等。則球體積為長圓體積之三分之二也。蓋長圓體與尖圓體同底同高。則其比例為三分之一。五卷第二十三節。言平底尖圓體與上下面平行體同底同高。則尖圓體為平行體三分之一。尖圓體之底徑與球之全徑等。高與球之半徑等者。尖圓體積為球體積之四分之一。而尖圓體又為半球體之二分之一矣。說見前節。今於乙己庚丁半長圓體內。作己壬庚半球體。又作一壬己庚尖圓體。則此尖圓體為半球體之二分之一。尖圓體既為半球體之二分之一。又為半長圓體之三分之一。則半球體豈非長圓體之三分之一乎。夫全與全之比例。即若半與半之比例。今半長圓與半球之比例。為三分之一。則全長圓體與全球體之比例。亦為三分之一可知矣。

第十

凡球體全徑與長圓體底徑高度相等者。其球體外面積與長圓體周圍面積等也。如甲乙丙丁一球體。戊己庚辛一長圓體。其球體之乙丁全徑與長圓體之己庚底徑等。而球體之甲丙全徑與長圓體之戊

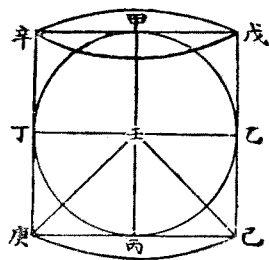




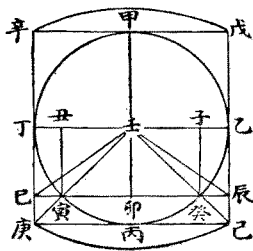
己高度等。則此球體外面積。必與長圓體之周圍面積等也。大凡體之面積相等者。其體積之比例。同於其高之比例。而體積之比例。與高之比例同者。其面積必相等。試將球體乙壬半徑分爲六分。取其三分爲高。以長圓周圍面積爲底。所成之體積。必與長圓體積等。取半徑之二分爲高。以球體外面積爲底。所成之體積。必與球體之積等。蓋長圓體與球體之比例。原爲三與二之比例。此所成之二體。亦必爲三與二之比例。一體之高爲三分。一體之高爲二分。是積之比例。與高之比例同矣。非因其面積相等之故乎。由是觀之。球體外面積。與長圓體周圍面積相等也。明矣。

第十一

凡球體全徑。與上下面平行長圓體底徑高度相等者。其相當每段之外面積皆相等也。如甲乙丙丁一球體。戊己庚辛一長圓體。此球體之乙丁全徑。與長圓體之己庚底徑等。球體之甲丙全徑。與長圓體之戊己高度等。則球體之癸丙寅一段凸面積。必與相當長圓體之辰己庚巳一段周圍外面積等也。夫乙辰巳丁一段長圓體內。分出子癸寅丑一小長圓體。餘癸子乙辰巳丁丑寅空心體。此空心體與子癸寅丑長圓體之積必等。何以知之。蓋壬癸爲大圓面之半徑。而所截卯癸。又爲小圓面之半徑。其壬卯與卯癸之度又等。故壬癸壬卯卯癸三線。成一壬癸卯直角三角形。而壬癸半徑所作圓面。必與壬卯卯癸兩



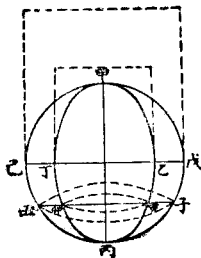
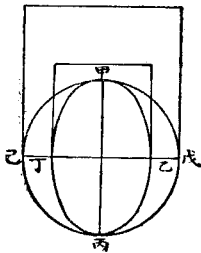
線爲半徑所作兩圓面等。見九卷第六節。又壬癸與壬乙皆一圓之輻線。其度必等。而卯辰原與壬乙相等。故卯辰爲半徑所作之圓面。卽壬癸爲半徑所作之圓面。於卯辰爲半徑所作圓面內。減去卯癸爲半徑所作圓面。卽餘辰癸環面。與壬卯爲半徑所作之圓面等。而壬卯與卯癸原相等。然則辰癸環面。既與壬卯半徑所作之圓面等。亦必與卯癸爲半徑所作之圓面等矣。夫卯癸卽小長圓底之半徑。而辰癸又爲空心體底之環徑。其兩面積既等。則其兩體積必等無疑矣。又壬癸寅小尖圓體。原與癸乙辰巳丁寅曲凹體等。乙丙丁半球體。爲半長圓體三分之一。二。則癸乙巳丙庚丁寅曲凹體。爲長圓體三分之一。與壬巳庚尖圓體相等。故壬癸寅一段尖圓體。與相當癸乙辰巳丁寅一段曲凹體。亦必相等也。而壬癸寅小尖圓體。爲子癸寅丑小長圓體三分之一。則癸乙辰巳丁寅曲凹體。亦爲辰癸空心體之三分之一矣。於乙辰巳丁長圓體內。減去壬癸寅小尖圓體。又減去癸乙辰巳丁寅曲凹體。則餘乙癸壬寅丁一段空心球體。必與乙辰壬巳丁一段空心長圓體等。如以乙辰巳丁一段長圓體作六分。則子癸寅丑小長圓體爲三分。壬癸寅小尖圓體爲一分。與小尖圓體相等之癸乙辰巳丁寅曲凹體亦爲一分。今既減去小尖圓體及曲凹體。是於六分內減去二分。而存一段空心球體爲四分也。而壬辰巳大尖圓體。亦爲乙辰巳丁長圓體三分之一。於長圓體內減去大尖圓體。則餘乙辰壬巳丁空心長圓體爲三分之二也。三分之二之比例。而同於六分之四之比例。則此一段空心長圓體。與一段空心球體。相等無疑。若將此兩空心體。從壬心至外面剖爲千萬尖體。俱以乙壬半徑爲高。以兩



空心體外面爲底。則空心球體所分之各尖體與空心長圓體所分之各尖體其積既等其高又等則其底不得相等。同底同高者其積既等則同高同積者其底必等。此各尖體之底既等則兩空心體之外面積相等可知矣。千萬尖體之底。卽兩空心體之面也。夫乙丙丁半球體外面積原與乙己庚丁半長圓體周圍外面積等。於半球體內減去乙癸寅丁一段。餘癸丙寅一段球體。於半長圓體內減去乙辰己丁一段。餘辰己庚己一段長圓體。其減去之各段外面積既相等。則所餘之球體癸丙寅一段凸面與長圓體辰己庚己一段周圍外面積相等也明矣。

第十二

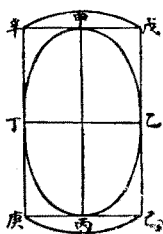
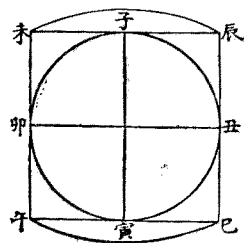
凡橢圓體大徑與圓球體徑相等者其二體積之比例卽同於橢圓體小徑所作方面與圓球體徑所作方面之比例也。如甲乙丙丁橢圓體之甲丙大徑與甲戊丙己圓球徑等。則橢圓體積與球體積之比例卽同於橢圓乙丁小徑所作方面與球體戊己徑所作方面之比例也。試將橢圓體與球體任意依徑線平行分之其所分之大小平圓面如子丑乃球體大圓面之徑寅卯乃橢圓體小圓面之徑此大小兩平圓面之比例同於其相當子丑寅卯二徑所作二方面之比例。見八卷第十一節。而子丑徑與寅卯徑之比例又同於戊己徑與乙丁徑之比例。故此所分之大小圓面之比例亦必同於戊己方



面與乙丁方面之比例矣。若將此兩體與戊己徑平行任意分爲幾何面。其相當大小兩面之比例。皆如戊己方面與乙丁方面之比例。此所分各面之比例。既皆同於乙丁與戊己所作方面之比例。則橢圓體與圓球體之比例。必同於乙丁所作方面與戊己所作方面之比例可知矣。即所分之寅丙卯橢圓體之一段。與子丙丑圓球體之一段。其比例亦必同於乙丁所作方面與戊己所作方面之比例矣。

第十三

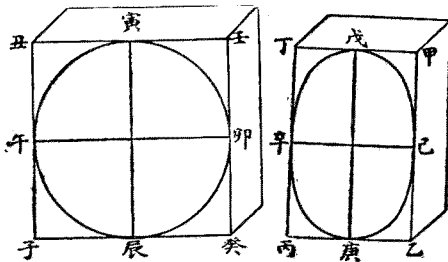
凡橢圓體大徑與長圓體高度等。而橢圓體小徑與長圓體底徑等。則橢圓體爲長圓體之三分之二。亦如圓球體與同徑同高長圓體之比例也。如甲乙丙丁一橢圓體。戊己庚辛一長圓體。其橢圓體之甲丙大徑與長圓體之戊己高度等。而橢圓體之乙丁小徑亦與長圓體之己庚底徑等。則橢圓體爲長圓體之三分之二。其比例即如子寅卯球體與辰巳午未長圓體之比例也。蓋戊己庚辛長圓體之戊己高度與辰巳午未長圓體之辰巳高度等。故兩長圓體之比例。即同於己庚底積與巳午底積之比例。至於戊己庚辛長圓體之己庚底積。與橢圓體之乙丁小徑所作圓面積等。而辰巳午未長圓體之巳午底積。又與球體丑卯全徑所作圓面積等。則戊己庚辛長圓體積與辰巳午未長圓體積之比例。即同於橢圓體之乙丁小徑所作圓面與球體丑卯全徑所作圓面之比例矣。夫橢圓體與球體之比例。原同於橢圓體小徑所作圓面與球體



全徑所作圓面之比例。故橢圓體與球體之比例。亦同於橢圓體同徑同高之長圓體。與球體同徑同高之長圓體之比例也。若轉比之。即戊己庚辛長圓體與甲乙丙丁橢圓體之比例。亦同於辰巳午未長圓體。與子丑寅卯球體之比例矣。夫球體既為同徑同高長圓體之三分之二。則橢圓體亦必為同徑同高長圓體之三分之二可知矣。

第十四

凡函橢圓之長方體。與所函橢圓體之比例。同於函球之正方體。與所函球體之比例也。如甲乙丙丁長方體。函一戊己庚辛橢圓體。其長方體之甲乙高度。與橢圓體之戊庚大徑等。長方體之乙丙底度。與橢圓體之己辛小徑等。則此甲乙丙丁長方體。與所函戊己庚辛橢圓體之比例。同於壬癸子丑正方體。與所函寅卯辰午球體之比例也。蓋甲乙丙丁長方體之甲乙高度。與壬癸子丑正方體之壬癸高度等。故長方體與正方體之比例。同於兩體底積之比例。今此長方體之底積。與所函橢圓體之己辛小徑所作方面等。而正方體之底積。與所函球體之卯午全徑所作方面等矣。然則此長方體與正方體之比例。不同於橢圓體小徑所作方面。與球體全徑所作方面之比例乎。夫橢圓體與球體之比例。原同於橢圓體小徑所作方面。與球體全徑所作方面之比例。則橢圓體與球體之比例。同於函橢圓體之長方體。與函球體之正方體之比例可。

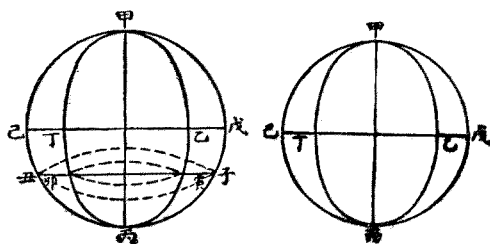


知矣。若轉比之，則長方體與所函橢圓體之比例，亦必同於正方體與所函球體之比例矣。

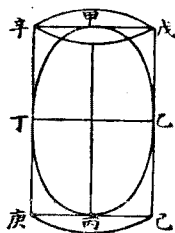
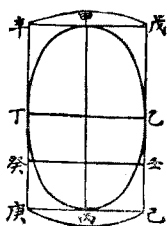
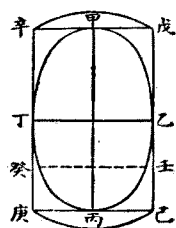
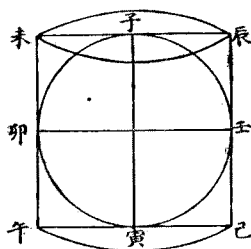
第十五

凡橢圓體大徑、與圓球體之徑等者，其橢圓體外面積、與球體外面積之比例，即同於橢圓體小徑、與球體全徑之比例。即任分一段，其相當一段外面積之比例，亦無不同也。如甲乙丙丁橢圓體之甲丙大徑、與甲戊丙己球體全徑等，則此橢圓體外面積、與球體外面積之比例，必同於橢圓體之乙丁小徑、與球體之戊己全徑之比例也。即任分寅丙卯一段橢圓體外面積、與子丙丑一段球體外面積之比例，亦仍同於乙丁小徑、與戊己全徑之比例也。蓋兩體所分寅卯、子丑、平圓面，皆與乙丁、戊己、徑線平行，故寅卯圓界、與子丑圓界之比，同於寅卯圓徑、與子丑圓徑之比，而寅卯徑與子丑徑之比，又同於乙丁徑與戊己徑之比也。然此兩體依徑平分，可為無數平圓界，其相當各圓界之比例，既皆同於乙丁徑與戊己徑之比例，則全體外面積之比例，豈不同於乙丁徑與戊己徑之比例乎。至於所分之寅丙卯一段橢圓體、與子丙丑一段球體，俱可分為平圓以比之，則一段與一段之比例，無異於全體與全體之比例也。明矣。

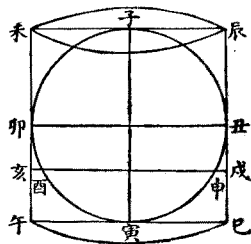
第十六



凡橢圓體大徑、與長圓體高度等、而橢圓體小徑與長圓體底徑等、則橢圓體外面積、與長圓體周圍外面積等、即任分一段、其相當一段之外面積、亦無不等也。如甲乙丙丁一橢圓體、戊己庚辛一長圓體、其橢圓體之甲丙大徑、與長圓體之戊己高度等、而橢圓體之乙丁小徑、與長圓體之己庚底徑等、則橢圓體之外面積、與長圓體周圍之面積等、即任分壬丙癸一段橢圓體外面積、亦與相當壬己庚癸一段長圓體之外面積等也。試依橢圓體甲丙大徑度、作子丑寅卯一球體、并作與球體同高同徑辰巳午未一長圓體、則此兩長圓體之高度等、其二體周圍面積之比例、必同於二體底徑之比例、二長圓體底徑之比例、即是橢圓體之乙丁小徑、與球體之丑卯全徑之比例也。橢圓體外面積、與球體外面積之比例、原同於橢圓體乙丁徑、與球體丑卯徑之比例、則戊己庚辛長圓



體外面積、與橢圓體外面積之比例、亦同於辰巳午未長圓體外面積、與球體外面積之比例也。夫球體外面積、原與辰巳午未長圓體外面積等、而橢圓體外面積、與戊己庚辛長圓體外面積之比例、既與球體外面積與辰巳午未長圓體外面積之比例相同、則此橢圓體外面積、與戊己庚辛長圓體外面積相等無疑矣。至於橢圓體所分一段、與球體所分一段之比例、與其全體之比例亦相同。今橢圓體外面全積、與戊己庚辛長圓體周圍外面全積之比例、既同於球體外面全積、與辰巳午未長圓體周圍外面全積之比例、則所分橢圓體之壬丙癸一段外面積、與長圓體之壬己庚癸一段外面積之比例、亦必同於所分球體之申寅酉一段外面積、與長圓體之戊己午亥一段外面積之比例矣。彼球體之申寅酉一段外面積、既與長圓體之戊己午亥一段外面積相等、則此橢圓體之壬丙癸一段外面積、與長圓體之壬己庚癸一段外面積相等也明矣。





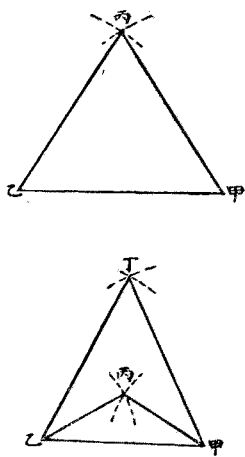
# 數理精蘊上編卷四

## 幾何原本十一

### 第一

作三界度等之三角形及兩界度等之三角形法。如欲作三界度等之三角形。則作一甲乙線。取甲乙之度爲準。以甲爲心。自甲至丙作弧一段。又以乙爲心。自乙至丙作弧一段。兩弧相交處至甲乙作二線。卽成三界度等之甲丙乙三角形矣。蓋甲乙丙三角形之甲乙、甲丙、丙乙三界。原係一圓之輻線。其度必等。度既等而線未有不等者也。若欲作兩界度等之三角形。仍作一甲乙線。比甲乙線之度。或大或小取一度。以甲乙二處爲圓心。皆至丙作弧兩段。仍於兩弧相交處作二線。卽成兩界度等之甲丙乙三角形矣。蓋甲丙、丙乙二線。雖比甲乙線或大或小。然二線俱同爲一圓之輻線。其度自等。兩度既等。則兩界線亦必等也。

### 第二



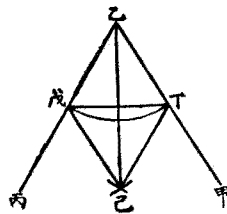
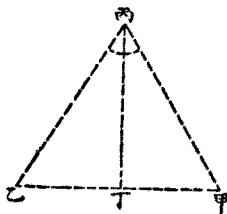
平分直線角爲兩分法。如甲乙丙角。欲平分爲兩分。乃以乙角爲心。任意作弧線一段。則乙甲、乙丙、二線。截於丁戊。卽成乙丁、乙戊、等度二線。自弧兩端。復作一丁戊線。照丁戊線度。依前節法。作一三界度等之丁己戊三角形。則己角與乙角正相對。乃自乙角至己角。作一乙己直線。卽分甲乙丙角爲兩平分矣。何也。其乙丁己、乙戊己兩三角形之乙丁、乙戊二界。是一圓之輻線。其度等。而丁己、戊己二界。是三界度等三角形之兩傍界。其度亦等。而乙己線既爲兩形之共界。其等無疑。此兩三角形之各角度。既各相等。則與丁己、戊己界相對之丁乙己、戊乙己二角。亦必相等可知矣。見二卷第七節。

第三

平分一直線爲兩分法。如有甲乙一直線。欲平分爲兩段。乃如第一節法。於甲乙線上。作一甲丙乙三界度等之三角形。又如第二節法。平分甲丙乙角爲二分。自丙角作垂線至甲乙線。卽平分甲乙線於丁。而甲丁、丁乙兩段必等也。蓋甲丙乙原爲三界度等之三角形。今作丙丁垂線。平分爲兩三角形。則兩三角形之相當各角各界必俱等。而甲丁、丁乙爲兩形相當之底界。其度安得不等乎。

第四

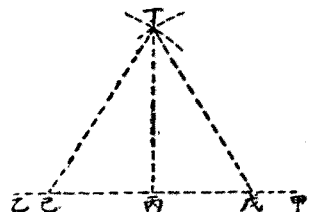
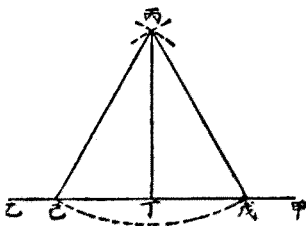
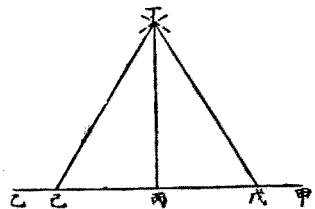
橫線上立縱線法。如有甲乙一橫線。欲於丙處立一縱線。則於丙之兩傍。任意取等度二分爲戊丙、己丙、



以戊爲心。於橫線上作弧一段。又以己爲心。於橫線上作弧一段。兩弧相交於丁。此丁處正與丙相對。自丁至丙作一直線。即甲乙線上正立之縱線也。試自戊己至丁作二線。成一戊丁己三角形。此形之丁戊丁己兩線。俱同一圓之輻線。其度必等。而丁丙線既將戊己底線爲兩平分。則丁丙線必爲甲乙線之垂線矣。見二卷第十節。

第五

有一橫線。自此線上不拘何處立縱線法。如有甲乙一橫線。自此線上丙處至甲乙線。欲作一縱線。則以丙爲心。作弧線一段。截甲乙線於戊己。乃自戊己至丙作二線。成一戊丙己三角形。又照第二節分角法。平分丙角爲二分。自丙至甲乙線上作丙丁線。則此丙丁線。即爲自丙至甲乙線之縱線也。蓋戊丙己三角形之丙戊丙己兩角度等。故戊角與己角必等。而丙丁線又平分丙角爲二。則所分之戊丙丁己丙丁兩角度亦等。而丙丁戊丙丁己兩並角亦必等。此兩並角既等。則成兩直角。既成兩直角。則丙丁線必爲甲乙橫線之垂線矣。見一卷第十節。

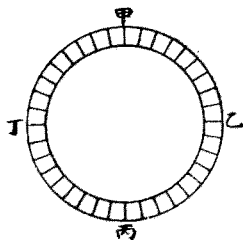
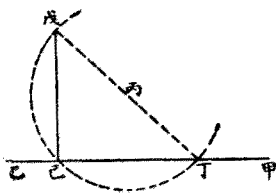
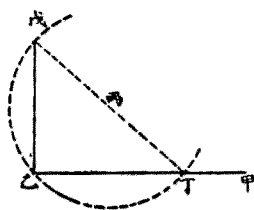


第六

在橫線一邊立縱線法。如有甲乙橫線。在乙邊欲立一縱線。則於甲乙線上不拘何處立為圓心。如以丙為圓心。自丙至乙為圓界。旋轉作一圓。則於甲乙線丁處相交。即自丁處過丙心至相對界。作一直線。交圓界於戊。乃自戊至乙作一戊乙直線。即是乙邊所立之縱線也。蓋丁乙戊角。因在半圓。必為直角。見四卷第十四節。既為直角。則戊乙線必為甲乙線之垂線。既為垂線。故為橫線一邊所立之縱線也。若甲乙線一邊之上。有一戊點。欲自戊至甲乙線一邊作一垂線。則自戊至甲乙線。任意作一戊丁斜線。遂將戊丁斜線平分於丙。於是以前為心。自戊旋轉作一圓。則截甲乙線於己。自戊至己作一直線。即是欲作之垂線也。蓋戊己丁角。既在半圓。必為直角。既為直角。則戊己必為垂線矣。

第七

一圓分為三百六十度法。如甲乙丙丁一圓界。欲分為三百六十度。則取圓之輻線度。緣圓界比之。即分圓界為六段。將六段各平分為二。則為十二段。十二段各平分為三。則為三十六段。三十六段各平分為十。即成三百六十度矣。

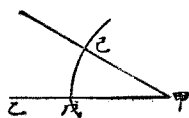
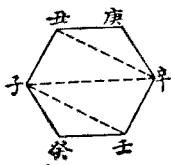
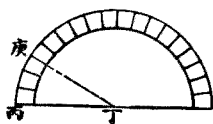
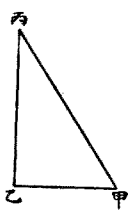
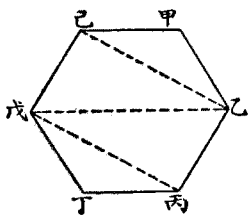


第八

一直線上作角度法。如甲乙線上，欲作三十度之角，則用有度之圓，依圓之丙丁輻線度，截甲乙線於戊，於是以甲為心，自戊作弧一段，復依圓界之丙庚三十度之分，自戊截弧於己，乃自己至甲作一直線，即成己甲戊三十度之角矣。

第九

各種多界形。做已有之形，或大或小，另作一同式形法。如有甲乙丙一三角形，欲做此式另作一形，則考甲乙界度有幾分，如甲乙界度為三分，今取其二分作一丁戊線，又以甲丙界度亦作三分，而取其二分，以丁為圓心，作弧一段，又以乙丙界度亦作三分，而取其二分，以戊為圓心，作弧一段，兩弧相交於己，乃自己至丁戊作二線，即成丁戊己一小三角形，與原有甲乙丙大三角形為同式也。蓋丁戊己三角形之三界，雖與甲乙丙三角形之三界不等，而其相當各角之度俱等，因其相當各角之度俱等，故其相當各界之比例皆同，相當各界之比例既同，則其二形之式不得不同也。若有一甲乙丙丁戊己六界形，欲做



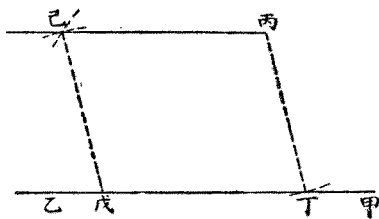
此式另作一形。則在此六界形作分角線。分爲四三角形。照前法做作四三角形。卽成一庚辛壬癸子丑小六界形。其式與原有之甲乙丙丁戊己大六界形同也。

第十

有一直線。或上或下一點。作與此線平行一線法。如甲乙線上有一丙點。欲自丙點作與甲乙線平行一線。則以丙爲圓心。任意取甲乙線之近甲邊一處作弧一段如丁。又取甲乙線之近乙邊一處爲心如戊。乃照丙丁原度。於丙點相對處作弧一段如己。復照丁戊度。以丙爲心。於丙點相對處作弧一段。則二弧相交於己。乃自丙至己交處作一丙己直線。卽爲甲乙線之平行線也。何則。試自丁戊二處至丙己二處作二線。卽成丙丁戊己一四界形。此四界形之丙丁己戊相對之兩縱線丙己丁戊。相對之兩橫線。因依各度所取。必兩兩相等。既兩兩相等。則必爲平行線之四邊形。然則丙己甲乙。爲平行線四邊形之二線。豈有不平行之理哉。

第十一

有一直線。上作一正方形法。如甲乙一直線。欲作一正方形。則以甲爲心。取甲乙度。自乙至丙作一弧線。又以乙爲心。依甲乙度。自甲至丁作一弧線。又於甲乙線之兩端。照本卷第六節。立甲丙乙丁二縱線。則乙丙弧截於丙。甲丁弧截於丁。乃自丙至丁作一直線。卽成甲乙丁丙一正方形也。何則。丙甲甲乙乙丁



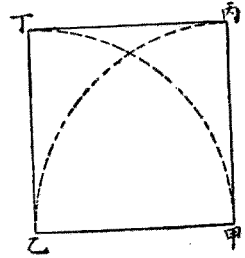
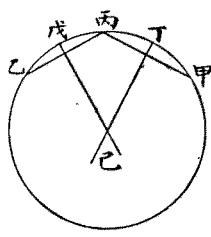
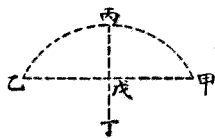
三線俱同爲一圓之輻線其度必等而丁丙丙甲二線又俱切一圓界爲兩尖相合其度亦必等。見四卷第七節。則四界俱等矣。且甲乙二角又爲垂線所立之角必成直角則丙丁二角亦必爲直角而四角又等矣。四角皆等故甲乙丁丙形爲甲乙線上所立之正方形也。

第十二

平分一弧爲兩段法。如有甲乙弧欲平分爲兩段則自甲至乙作一甲乙弦。將此弦線照本卷第三節平分直線爲兩分法作一戊丁縱線復自戊引至弧界截甲乙弧於丙。即平分甲乙弧爲甲丙丙乙兩段矣。蓋丙丁縱線既平分甲乙弦線則亦必平分甲乙弧之全圓。既平分甲乙弧之全圓則必平分甲乙弧爲兩段可知矣。見四卷第六節。

第十三

有一段弧欲繼此弧作一全圓法。如有甲乙一段弧繼此弧欲作一全圓則在此弧界任意指三處如甲丙乙自甲乙二處至丙作甲丙丙乙二線照前節作平分甲丙丙乙兩弦之丁己戊己二線引長則相交於己乃以己爲心繼甲乙弧界作一全圓即成甲乙弧之全圓也。蓋丁己戊己二線既平分甲丙丙乙二弦則必平分甲丙丙乙二弧。見四卷第六節。既平分甲丙丙乙二弧則其相交之處必爲圓心故己爲繼



甲丙乙弧界所作全圓之圓心也。

第十四

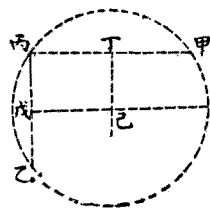
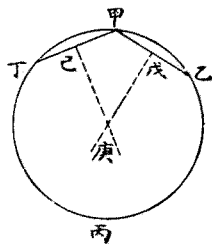
不拘何處有三點。求緣此三點作一圓法。如甲、乙、丙三點不在一直線上。欲緣此三點作一圓。則依前節作甲丙、丙乙二線。又平分此二線正中作丁、己。戊己二垂線。引長至己處相交。遂以己爲心。以甲乙丙爲界作一圓。則甲、乙、丙三點俱在一圓之界矣。此節之理。與前節同。

第十五

有圓不知中心。求知中心之法。如有一甲乙丙丁圓。不知其中心。欲求知之。則於此圓界隨便取甲、乙、丁三處。從甲至乙至丁作二弦線。將此二線平分正中爲戊己二處。自戊己作戊庚己庚兩垂線。則相交於庚。此庚卽是甲乙丙丁圓之中心也。此節之理。亦與前同。

第十六

有圓外一點。將此點至圓界作切線法。如乙圓之外有一甲點。欲將此甲點與圓界相切。作一切線。則以此甲點至圓心作一甲乙直線。又以乙爲心。以甲爲界。作一甲丙圓界。又自甲乙線所截圓之丁處。作一丁己垂線。則此垂線卽截甲丙圓界於丙。乃自丙至乙心。作一丙乙直線。復自丙乙所截圓界戊處。作一戊甲線。卽是自甲點至圓



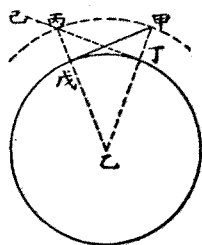
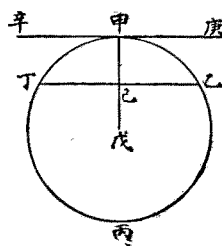


界所作之切線也。何則。此乙丁乙戊。既同爲一圓之輻線。其乙甲乙丙亦同爲一圓之輻線。則甲乙戊與丙乙丁兩三角形之各兩邊線必等。而兩三角形又同一乙角。然則兩三角形之每相當各角必俱等矣。見二卷第六節。夫丁丙線原爲甲乙輻線之垂線。則丁角必爲直角。而相當之戊角亦必爲直角矣。戊角既爲直角。則甲戊線亦必爲乙丙輻線之垂線。故甲戊與丙丁皆爲圓界之切線也。見四卷第九節。

第十七

有圓內弦線。欲與此弦線平行。作圓外切線法。如有一甲乙丙丁圓之乙丁弦。欲與此乙丁弦線平行。作切圓之切線。則從圓心戊至乙丁弦。作戊己垂線。平分乙丁弦線於己。引長截圓界於甲。爲甲戊線。又切甲處作庚辛線。爲甲戊之垂線。卽是所求之切線也。何則。此庚辛線既爲甲戊線之垂線。其戊甲庚角必爲直角。又己戊線既爲乙丁線之垂線。其戊己乙角亦必爲直角。然則戊甲庚角與戊己乙角。既俱爲直角。其度必等。因其度等。故乙丁庚辛兩線爲兩平行線也。又戊甲線爲圓之輻線。而庚辛既爲甲戊之垂線。則必爲甲乙丙丁圓之切線可知矣。見四卷第九節。

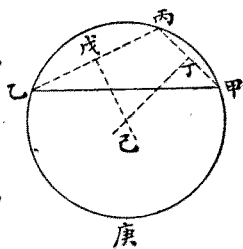
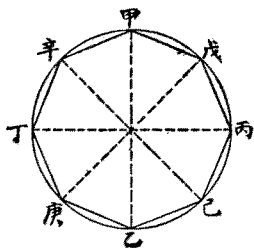
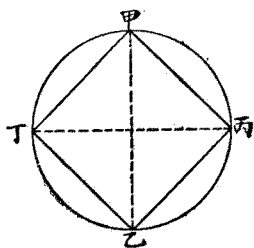
第十八



作函三角形之圖法。如甲乙丙三角形。欲作函此三角形之一圓。則平分甲丙邊於丁。平分丙乙邊於戊。自丁戊作二垂線。引長至己相交。即以己爲心。任以甲丙乙三角形之一角爲界。作一甲丙乙庚圓。卽是函甲丙乙三角形之圓也。此節之理。與本卷第十三節同。

第十九

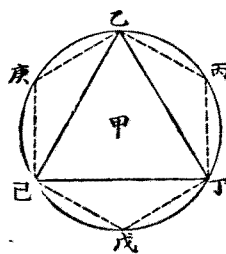
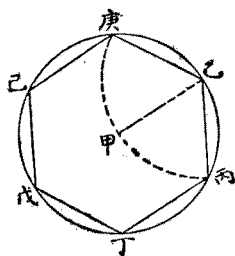
圓內作等度四角形。及等度八角形法。如甲丙乙丁圓內。欲作一等度四角形。則以甲乙丙丁二徑線交於圓心。皆作直角。復自甲丙乙丁四處。作甲丙丙乙乙丁丁甲四弦線。卽成平分圓界爲四分。則甲丙丙乙乙丁丁甲四弦線。度必等。而甲丙乙丁四角。既俱立在一圓之半界。亦必俱爲直角。見四卷第十四節。既俱爲直角。必爲正方形可知矣。苟欲作等度八角形。則照前平分圓界爲四分。將所分之每分。又各平分爲二分。卽平分圓界爲八分。乃作八弦線。卽成甲戊丙己乙庚丁辛一形。爲圓內等度八角形也。



圓內作等度六角形三角形十二角形法。如甲圓內欲作等度六角形。則以圓之甲乙輻線爲度。將圓界分爲乙丙丙丁丁戊戊己己庚庚乙六段。作六弦線。卽成一乙丙丁戊己庚等度之六角形也。何則。苟以乙爲心。以甲爲界。作一丙甲庚弧線。則乙丙乙甲二線。俱爲丙甲庚圓之輻線。而度必等。夫乙丙丁戊己庚六界形之諸界。因俱照甲乙輻線度所作。故此形之六界俱相等也。若欲作三角形。則照前法。將圓界分爲六段。以所分六段。兩兩相合爲三段。作乙丁丁己己乙三弦線。卽成一乙丁己等度三角形也。若欲作十二角形。亦照前法。將圓界分爲六段。以所分六段。各平分爲二分。作十二弦線。卽成一乙辛丙壬丁癸戊子己丑庚寅等度之十二角形也。

第二十一

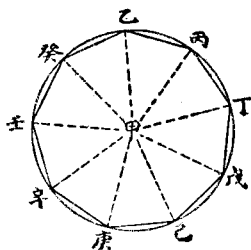
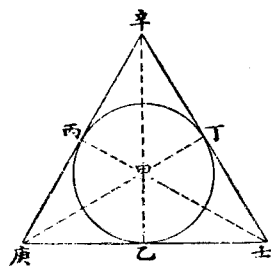
圓內作各種等度多界形總法。苟甲圓內。欲作等度多界各種形。則察各種形之各角度。見三卷第十七節。如等度三角形之三角。俱六十度。四角形之四角。俱九十度。五角形之五角。俱一百零八度。六角形之六角。俱一百二十度。七角形之七角。俱一百二十八度。三十四分一十七秒。八角形之八角。俱一百三十五



度九角形之九角、俱一百四十度。十角形之十角、俱一百四十四度。十一角形之十一角、俱一百四十七度。一十六分二十二秒。十二角形之十二角、俱一百五十度。今甲圓內若欲作一等度九角形、則以九角形之每角一百四十度、與一百八十度相減、餘四十度、復以別有度之圓、取四十度之分、以分甲圓界、即平分爲乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸之九分、再照平分度、作乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸、九弦線、即成甲圓內等度之九角形也。何也、從圓心甲作線至各角、分九角形爲九三角形、其每三角形之三角、共一百八十度內減去二界角一百四十度、餘心角四十度、即每界所對之角、此九角形之每界、即九心角之弦線、故以心角度分圓界度、即得九角形之分也。凡圓內欲作等邊多界形、皆依此法作之。

第二十二

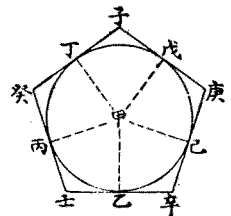
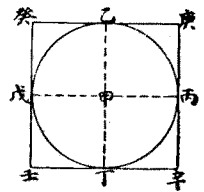
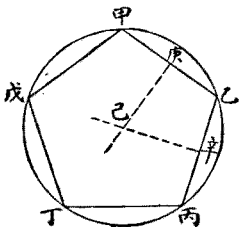
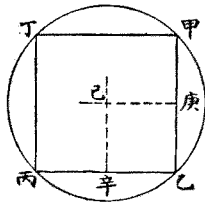
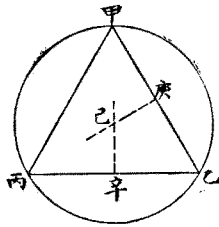
作函圓等度多界形法。如欲作函圓之等度三角形、四角形、五角形、或多界形、則將圓界照欲作之幾界、平分爲幾段、乃自圓心至所分各界、作幾輻線、於輻線之末、各作切界線、俱引長至合角、即成函圓之等度多界形也。如第一圖、自甲心至庚、辛、壬、三角、作甲庚、甲辛、甲壬、三線、即成六三角形、其庚甲乙、庚甲丙、兩三角形之庚乙、庚丙、二線、爲合尖切圓之線、其度必等。見四卷第七節。而庚甲乙、辛甲丁、兩形之庚甲乙、辛甲丁、二角爲對角、其度又等。庚



乙甲、辛丁甲之二角。爲輻線切線所成之角。其度又皆爲直角相等。見四卷第五節。則其餘一角亦必等。而其乙甲、甲丁、二界。又同爲一圓之輻線。其度必等。則其他界亦必俱等可知。再辛丙、辛丁、二線。壬丁、壬乙、二線。俱爲合尖切圓之線。其度相等。而辛甲丙與壬甲乙兩三角形。壬甲丁與庚甲丙兩三角形。必俱與前每相當之角等。則此六三角形俱相等矣。六三角形俱相等。則其庚乙、乙壬、壬丁、丁辛、辛丙、丙庚、相等之六界。兩兩相合。卽成庚壬、庚辛、辛壬之三界。其度安得不等乎。故庚辛壬三角形。爲函圓等界形也。其第二圖函圓四角形。第三圖函圓五角形。或更欲作多界形。其理皆同。

第二十三

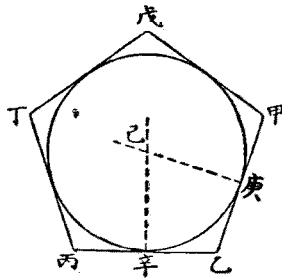
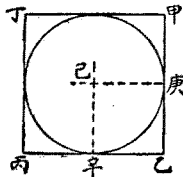
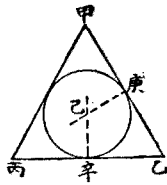
作函等度多界形之圖法。如甲乙丙三角形。或甲乙丙丁四角形。或甲乙丙丁戊五角形。欲作函此三形之圖。則任用此三形之甲乙、乙丙、二界。平分於庚、辛、二處。乃自庚、辛、二處。各作垂線。至各形中心相



交爲己。卽以己爲心。以各形之角爲界作圓。卽成函。此三形之圓也。何也。各形之界。皆爲圓之弦線。而弦線上所作之垂線。必皆交於圓心。今甲乙、乙丙、二界上所作之庚己、辛己、二線。既平分二界而相交於己。則己必爲圓心。故以己爲心作圓。卽成函。各等界形之圓也。

第二十四

作函於等度多界形之圓法。如甲乙丙三角形。或甲乙丙丁四角形。或甲乙丙丁戊五角形。欲在此三形內各作一圓。則照前節平分甲乙、乙丙、二界。作己庚、己辛、二垂線。引長相交於己。卽以己爲心。以庚辛爲界作圓。卽成多界形內所函之圓也。何也。己庚、己辛、二線。是平分甲乙、乙丙、二線之垂線。引長之。必相交於各形之中心。今既相交於己。則己必爲各形之心。凡形心作垂線至各界。其度必等。卽如圓之輻線。故以己爲心。庚辛爲界所作之圓。卽爲各等界形所函之圓也。

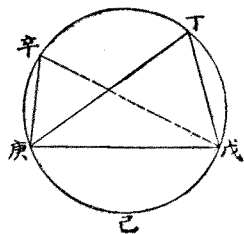
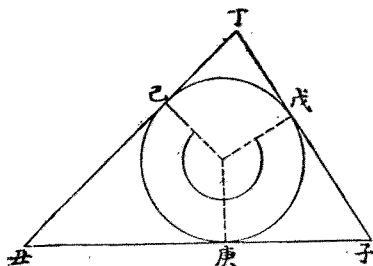
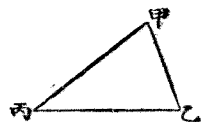
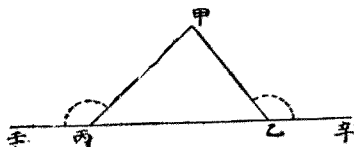


第二十五  
有一三角形。一圓形。於此圓內作切圓界三角形。與原有之三角形同式法。如有甲乙丙一三角形。丁戊

己庚辛一圓形。欲於此圓內作一切界三角形。與原有之甲乙丙三角形同式。則於圓界任意作與甲角相等之辛角。將此角之兩邊線。俱引至圓界。作辛庚辛戊二線。再自戊至庚作一戊庚線。又於戊處作與乙角相等之庚戊丁角。爰自戊至丁作一丁戊線。復自庚至丁作一庚丁線。成一丁戊庚三角形。卽是所求之圓內切界三角形。與原有之甲乙丙三角形爲同式也。何則。其庚辛戊三角形之辛角。與庚丁戊三角形之丁角。其尖既俱與圓界相切。而共立於戊己庚一段弧分。其度必等。見四卷第十二節。此辛角原與甲角等。則丁角亦必與甲角等。又庚戊丁之戊角。原係依甲乙丙之乙角之度而作者。固相等。夫丁角與甲角。戊角與乙角。既等。則所餘之庚角與丙角亦必等。其三角既俱等。其兩形必爲同式。可知矣。

第二十六

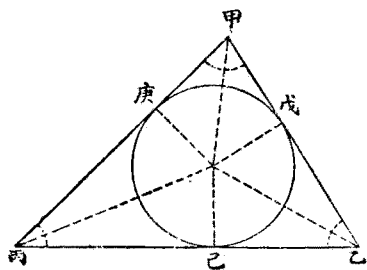
有一三角形。一圓形。於此圓外作切界三角形。與原有之三角形同式法。如有甲乙丙一三角形。戊己庚一圓形。欲於此圓外作一切界三角形。與原有之甲乙丙三角形同式。則將



原有之甲乙丙三角形之乙丙底線引長至辛壬二處。此兩傍即成辛乙甲、壬丙甲二外角。乃於圓心丁處作與辛乙甲角相等之戊丁庚角。又作與壬丙甲角相等之己丁庚角。則成了戊、丁、己、丁庚之三幅線。於三幅線之末作三垂線引長相交成一癸子丑三角形。即是所求之圓外切界三角形。與原有之甲乙丙三角形爲同式也。何則。凡三角形之三角相併必與二直角等。見二卷第四節。今戊丁庚子一四邊形。可分爲兩三角形。則此四邊形之四角相併必與四直角等矣。四直角內減去子戊丁、子庚丁之兩直角。所餘戊丁庚、戊子庚兩角相併亦必與兩直角等也。又辛乙甲外角與甲乙丙內角相併亦與二直角等。見一卷第十四節。其戊丁庚角既係依辛乙甲角之度而作者。則戊子庚角必與甲乙丙角相等。其庚丑己角亦必與甲丙乙角相等。而已癸戊角又必與乙甲丙角相等。三角俱等。則兩形之式必相同也。

第二十七

三角形內作切三界之圓法。如有一甲乙丙三角形。欲於此形內切三界作一圓。則依此卷第二節之法。將甲乙丙三角俱平分爲兩分。所分三角之三線俱引長使相交於丁。自丁至甲乙丙三線作丁戊、丁己、丁庚三垂線。乃以丁爲心以戊己庚爲界作一圓。即是三角形內之切界圓也。何則。戊甲丁與庚甲丁兩小三角形之甲角。因自一角爲兩平分。其度必等。又丁戊、丁庚既係兩垂線。則甲戊丁、甲庚丁二角俱爲直角而相等。此戊甲丁、庚





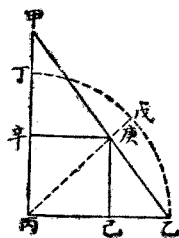
甲丁、兩小三角形內之二角既等。其各三角必俱相等。而又共用一甲丁線爲邊。則此兩三角形之各相當邊亦必俱等。故丁戊線與丁庚線等者。卽是丁己線與丁戊線丁庚線等也。此三線既等。以爲輻線。作戊己庚圓。則必與三角形之甲乙、乙丙、丙甲、三界相切矣。

第二十八

勾股形內作正方法。如有一甲乙丙勾股形。欲於此形內作一正方形。則以丙爲心。以乙爲界。作一乙丁弧線。將此弧線平分於戊。自戊至丙作一戊丙線。卽平分丙角爲兩分。而截甲乙線於庚矣。乃自庚與甲丙線平行作庚己線。又自庚與乙丙線平行作庚辛線。卽成庚己丙辛一正方形。爲所求甲乙丙勾股形內之正方法也。何則。甲丙乙勾股形之丙角。原是直角。今庚辛、庚己二線。各與甲丙、乙丙平行。則庚己丙辛之四角。必俱爲直角矣。而庚己丙三角形內。己庚丙角與己丙庚角。又俱是直角之一半。其度必等。則己丙線與庚己線相等。而庚辛線與己丙線。庚己線與辛丙線。皆爲平行線內之垂線。其度亦等。故庚己、己丙、丙辛、辛庚、四線相等。而庚己丙辛、四角俱爲直角。是爲甲乙丙勾股形內之正方形也。

第二十九

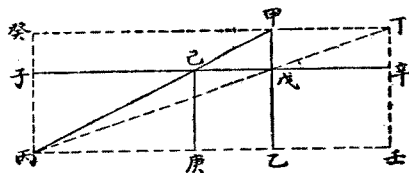
勾股形內作正方法第二法。如有一甲乙丙勾股形。欲於此形內作一正方形。則將乙丙線引長。照甲乙線度。增於乙丙。作一壬丙線。自此壬丙之兩末。與甲乙線平行。作丁壬、癸丙兩垂線。使其度俱與甲乙線等。又



自丁至癸與壬丙線平行。作一丁癸線。自丁至丙作一對角線。截甲乙線於戊。乃自戊與乙丙線平行。作戊己線。截甲丙線於己。又自己與戊乙線平行。作己庚垂線。成一戊乙庚己正方形。即為甲乙丙勾股形內欲作之正方也。何則。試將戊己線引長。成辛戊己子線。則此辛戊己子線。與甲乙線分丁壬丙癸為四長方形。其甲戊子癸長方。與辛壬乙戊長方。既為丁壬丙癸大長方對角線傍所成兩形。其分必等。見三卷第七節。故子戊線與戊辛線之比例。同於乙戊線與戊甲線之比例也。然此子戊線與丙乙線等。而戊辛線又與甲乙線等。則丙乙線與甲乙線之比例。亦同於乙戊線與戊甲線之比例也。又甲乙丙與甲戊己兩三角形為同式。故丙乙線與乙甲線之比例。同於己戊線與戊甲線之比例。而乙戊線與戊甲線之比例。又同於己戊線與戊甲線之比例也。乙戊線既與己戊線相等。而乙庚線與戊己線。己庚線與戊乙線。又為兩平行線內之垂線。其度相等。故戊乙庚己四角。俱為直角。戊乙庚己四角。既俱為直角。則戊乙庚己之方形。即是甲乙丙勾股形內之正方矣。

第三十

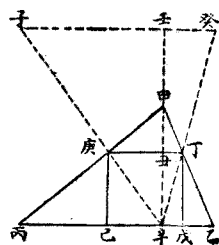
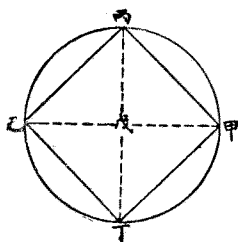
三角形內作正方法。如有甲乙丙三角形。欲於此形內作一正方。則自甲角至乙丙底線。作一甲辛垂線。將此垂線引長出甲角。如乙丙底線度。作一壬辛線。又自壬兩分。如乙丙線度。與乙丙線平行作一子癸線。又自癸至辛作癸辛線。截甲乙線於丁。自子至辛作子辛線。截甲丙線於庚。乃自丁至庚作一庚丁線。



此線必與乙丙平行。又自庚丁二處作庚己、丁戊二垂線，即成丁戊己庚一正方形。即爲甲乙丙三角形內欲作之正方也。何則？壬辛線與壬子線之比，同於辛丑線與丑庚線之比，而辛壬線與壬癸線之比，又同於辛丑線與丑丁線之比。故辛壬線與癸子線之比，亦必同於辛丑線與丁庚線之比也。然辛壬與癸子原相等，則辛丑與丁庚亦必相等矣。辛丑與丁庚既等，則丁戊、戊己、己庚、庚丁、四邊亦必俱等。丁戊、戊己、己庚、庚丁、四邊既俱等，則爲甲乙丙三角形內之正方無疑矣。

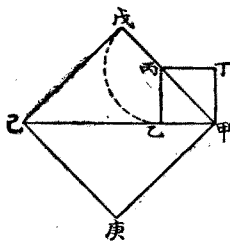
### 第三十一

有一直線，將此線爲正方對角線，作正方法。如有一甲乙直線，欲以此線爲對角線，作一正方，則將甲乙線平分爲戊，以戊爲心，以甲乙爲界作一圓，即於此圓內作一丙丁徑線，爲甲乙線之垂線，乃自甲至丙、自丙至乙、自乙至丁、自丁至甲，作四直線，即成甲丁乙丙一正方形，爲所求之正方也。蓋甲丙乙角、丙乙丁角、乙丁甲角、丁甲丙角，既俱在半圓內，必俱爲直角，而甲戊丙、丙戊乙、乙戊丁、丁戊甲，四三角形之兩傍線，俱是半徑線，必相等。又此四三角形之兩傍線所合之角，俱爲直角，亦必相等。則甲丙、丙乙、乙丁、丁甲，四直線，必俱相等可知矣。甲丙乙丁四邊形內四角，既俱爲直角，而四邊線又俱相等，則必爲正方形，而甲乙線爲其對角線矣。



第三十二

有一直線爲正方邊與對角線相較之餘。於此線求作其原正方法。如有一甲乙線爲正方邊與對角線相較之餘。求作一正方。則先將此甲乙線爲一邊。作甲乙丙丁一小正方形。次自甲至丙作一小對角線。於是以丙爲心以乙爲界作一圓。乃引甲丙線至圓界戊處作一甲戊線。將此甲戊線爲度。作一甲戊己庚大正方形。卽是所求之正方也。試引甲乙線至己作甲己一對角線。此對角線之乙己一段。必與戊己邊線相等。何也。其丙乙丙戊爲一圓之二輻線既等。則丙乙戊丙戊乙二角亦等。若於丙乙己直角內減去丙乙戊角。又於所作丙戊己直角內減去丙戊乙角。所餘戊乙己乙戊己二角亦必相等。此二角既等。則乙己戊己兩線必等矣。因其相等。則所作甲戊己庚一大正方形之甲己對角線與戊己一邊線相較。則原有之甲乙線爲其相較之餘可知矣。



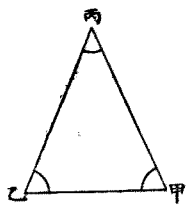
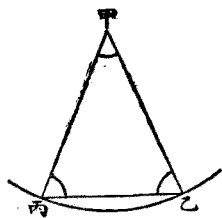
# 幾何原本十二

## 第一

有一直線。將此線爲底。作一兩邊度等三角形。使底之兩邊各一角。俱比上一角爲大一倍之三角形法。如有一甲乙直線。將此線爲底。欲作兩邊度等之三角形。而底之兩邊各一角。俱比上一角爲大一倍。則用十一卷第八節之法。於甲乙線之兩頭。各作一七十二度之角。將兩邊線俱引長相交於丙。卽成一甲乙丙三角形。爲所求之形也。何則。凡三角形之三角相併。爲一百八十度。與二直角等。今此所作甲乙丙三角形之甲乙兩角。既俱係七十二度。則於一百八十度內。減去甲乙二角。共一百四十四度。餘三十六度。卽爲丙角之度。三十六度者。七十二度之半。故甲乙兩底角。比丙角各大一倍也。

## 第二

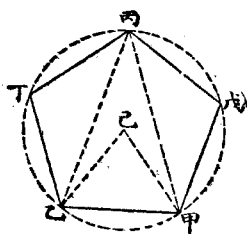
有一直線。依此線度作兩邊度等三角形。使上一角小於兩底角一倍之三角形法。如有甲乙一直線。以此線爲一邊。復依此線度作一邊。使此兩邊線所合之上。一角小於兩底角一倍之三角形。則用十一卷第八節之法。以甲乙甲丙二線之甲末相合。作一乙甲丙角爲三十六度。再自丙至乙作一乙丙直線爲底。卽得一甲乙丙三角形。爲所求之形也。何則。將甲角三十六度。與全形三角之共數一百



八十度相減。餘一百四十四度。爲乙、丙、兩底角之共數。今甲丙線與甲乙線既等。則乙角與丙角必等。因其相等。將兩底角共數一百四十四度。折半得七十二度。卽爲每一底角之數。七十二度者。三十六度之倍數。故甲角比乙、丙、兩底角俱爲小一倍也。

第三

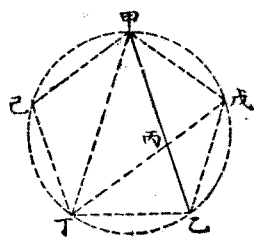
有一直線。以此直線爲一邊。作等邊等角之五界形法。如有甲乙一直線。以此直線爲一邊。作一等邊等角之五界形。則將此甲乙直線爲底。用此卷第一節法。作一兩邊度等甲丙乙三角形。其甲丙乙角。爲丙乙甲、丙甲乙、二角之各一半。又用十一卷第十五節法。於此三角形之週圍作一圓。此甲丙、丙乙、兩直線原係相等。其相對之兩弧。亦必相等。乃以此兩弧自戊丁二處爲兩平分。又自甲至戊、自戊至丙、自丙至丁、自丁至乙作四直線。卽成甲乙丁丙戊五邊五角等度之五界形也。何則。其甲丙乙角。原爲丙乙甲角之一半。則甲丙乙角爲三十六度。試自甲乙二處至圓心。作甲己乙己二線。成甲己乙一三角形。則此甲己乙角。比甲丙乙角亦爲大一倍。見四卷第十一節。故甲己乙角爲七十二度。而甲乙弧線亦爲七十二度矣。以七十二度於全圓界三百六十度內減之。餘二百八十八度。折半得一百四十四度。卽爲甲戊丙一段弧線之數也。再將一百四十四度。折半得七十二度。卽爲甲戊一段弧線之數也。既得甲戊弧線之數。則戊丙、丙丁、丁乙、各弧線度。俱各爲七十二度矣。甲乙、乙丁、丁丙、丙戊、戊甲五線。既俱係相等弧之弦線。則五線之度必俱等。五



線之度既等。則此形又在圓之內。而五角之度。豈有不相等者哉。

第四

有一直線。分大小兩分。爲相連比例線法。如甲乙直線爲全分。甲丙一段爲大分。丙乙一段爲小分。以甲乙全分與甲丙大分之比。同於甲丙大分與丙乙小分之比。則用此甲乙線爲一邊線。依此卷第二節法。作兩邊等度之兩底角。比上一角各大一倍之甲乙丁三角形。又依此卷第三節法。取乙丁線度。作邊角俱等之甲戊乙丁己五邊形。又自戊至丁作一直線。截甲乙線於丙。乃得甲丙一大段爲大分。丙乙一小段爲小分。即是所欲作之相連比例線也。何則。甲戊乙丁兩弧線度等。則甲乙戊乙戊丁兩角度必等。又乙戊丁角與乙甲丁角。共立於乙丁弧。其度必等。再甲戊丁與甲乙丁二角。亦同立於甲己丁弧。其度亦必等也。至於甲乙丁角。原比乙甲丁角大一倍。故甲戊丁角。比丙戊乙角。丙乙戊角。俱大一倍。其甲丙戊角。因爲戊丙乙三角形之外角。與丙乙戊丙戊乙兩內角等。故甲丙戊與甲戊丙兩角相等。此二角既等。則甲丙甲戊兩線必等矣。又甲戊戊乙兩線度原相等。其戊甲乙角。必與戊乙甲角等。而甲乙戊一大三角形。必與戊乙丙一小三角形爲同式形矣。蓋小三角形之丙戊乙角。與大三角形之戊甲乙角等。而小三角形之丙乙戊角。與大三角形之甲乙戊角。爲共角而等。則小三角形之戊丙乙角。與大三角形之甲戊乙角。不得不等。三角俱等。非同式形而何。是故甲乙線與甲戊線之比。必同於乙戊線與丙乙線之比也。夫甲戊原與甲丙相等。



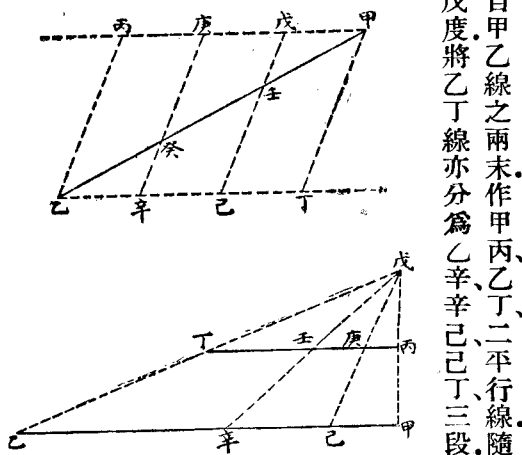
而乙戊原與甲戊相等，故乙戊亦與甲丙相等。然則甲乙全線與所分甲丙大分之比，必同於甲丙大分與丙乙小分之比可知矣。故曰甲乙與甲丙、甲丙與丙乙，為相連比例之線也。

第五

平分一直線為數段法。如有甲乙一直線，欲平分為三分，則自甲乙線之兩末，作甲丙、乙丁，二平行線。隨意取一甲戊度，將甲丙線分為甲戊、戊庚、庚丙，三段。又依甲戊度，將乙丁線亦分為乙辛、辛己、己丁，三段。乃自二平行線之三段處，復作甲丁、戊己、庚辛、丙乙，四平行線。即平分甲乙直線為甲壬、壬癸、癸乙之三分矣。試觀甲乙三角形之甲乙乙丁，兩傍線，為與甲丁線平行之壬己、癸辛、二線所分，故俱為相當率。今以甲乙全線與乙丁全線之比，同於丁己段與甲壬段之比，而己辛段與壬癸段之比，辛乙段與癸乙段之比，亦皆與甲乙全線與乙丁全線之比相同也。因其比例俱同，故丁乙線之丁己、己辛、辛乙，三段為平分，而甲乙線之甲壬、壬癸、癸乙，三段亦為平分也。

第六

有分數之直線，將別一直線，依此線分，分為相當比例率法。如有甲乙一直線，原分為甲己、己辛、辛乙，三段。又有一丙丁

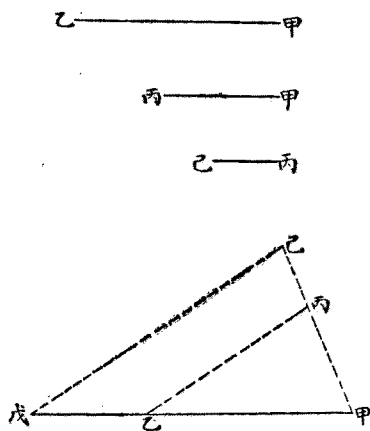




直線。欲依此甲乙線分，分作三分，為相當比例之率。則齊二線之一端，以為平行線。自甲乙線之甲端，過丙丁線之丙端，作一縱線。復自甲乙線之乙端，過丙丁線之丁端，作一斜線。則二線相交於戊。乃自戊至所分己辛二處，作戊己、戊辛二線。則丙丁線即分為丙庚、庚壬、壬丁三段。與甲乙線之甲己、己辛、辛乙三段，為相當比例率也。試審戊甲乙全形內戊丙庚、戊甲己、戊庚壬、戊己辛、戊壬丁、戊辛乙之大小六三角形，其相當各式皆同。如戊丙庚與戊甲己為同式，戊庚壬與戊己辛為同式，戊壬丁與戊辛乙為同式。故丙庚與甲己為相當二界，庚壬與己辛為相當二界，壬丁與辛乙為相當二界。此六線既各為相當界，故各為相當比例率也。

第七

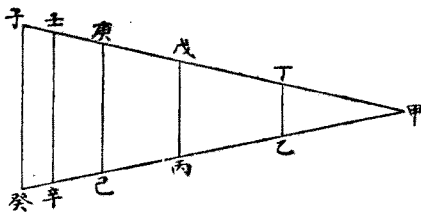
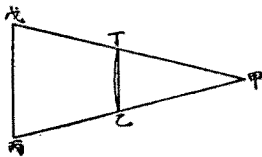
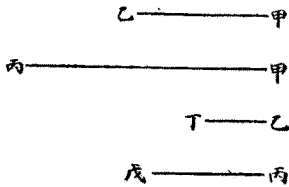
有二直線，作與此二線相連比例之第三線法。如有甲乙、甲丙、二直線，欲作與此二線相連比例之第三線，則將甲乙、甲丙、二線之甲末，合成一角。照甲丙線度，增於甲乙線，為甲戊線。自乙末至丙末，作一乙丙線。又與乙丙線平行，自戊末作一戊己線。將甲丙線引至己處，乃成一甲己線。其自丙末所分之丙己線，即為與甲乙、甲丙、二線相連比例之第三線也。蓋己戊線既與丙乙線平行，故甲乙、丙三角形，與甲戊己三角形為同式。而甲乙、甲丙、乙戊、丙己、四段，必為相當比例之



四率。是以甲乙第一率與甲丙第二率之比。即同於乙戊第三率與丙己第四率之比也。夫乙戊之度。原與甲丙等。故甲乙與甲丙之比。即甲乙與乙戊之比。而甲丙與丙己之比。即乙戊與丙己之比。然則甲乙與甲丙。甲丙與丙己。豈非相連比例之三線乎。

第八

有三直線。作與此三線相當比例之第四線法。如有甲乙、甲丙、乙丁、三線。欲作與此三線相當比例之第四線。則取甲丙線度。另作一甲丙線。將此所作甲丙線。照甲乙線度紀於乙。於是以甲爲心。自乙作弧一段。又取原有之乙丁線度。自乙截弧線於丁。即自乙至丁作一乙丁線。再依甲丙線度。自甲過丁作一甲戊線。又與乙丁線平行。作一戊丙線。此戊丙線。即爲原三線相當比例之第四線也。蓋甲丙戊三角形與甲乙丁三角形爲同式。故甲乙線與甲丙線之比。即同於丁乙線與戊丙線之比。因其比例相同。故戊丙線爲原有之甲乙、甲丙、乙丁、三線相當比

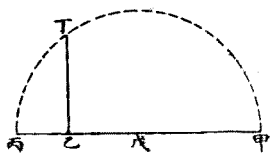
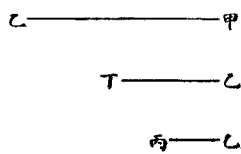


例之第四線也。或欲作相當比例之數線。則將甲角上下二線引長爲甲癸、甲子。凡相當各二處。任意截爲幾段。作幾平行線。即得相當比例之數線矣。如以甲角之甲子、甲癸二線截爲丁乙、戊丙、庚己、壬辛、子癸五段。於所截五處作五平行線。即得相當比例之十率矣。蓋以甲乙與甲丙之比。同於丁乙與戊丙之比。以甲丙與甲己之比。同於戊丙與庚己之比。以甲己與甲辛之比。同於庚己與壬辛之比。以甲辛與甲癸之比。同與壬辛與子癸之比。故將甲子、甲癸二線。雖分爲無數段。作無數平行線。其比例亦無不相同也。

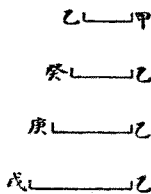
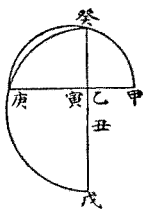
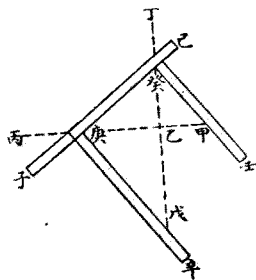
第九

有二直線。欲另作一線。爲此二線之中率法。如有甲乙、乙丙二線。欲另作一線。爲此二線之中率。則將甲乙、乙丙二線相連爲一甲丙全線。乃平分全線於戊。以戊爲心。以甲丙兩末爲界。作一半圓。自二線相連乙處至圓界。作一丁乙垂線。即爲原有甲乙、乙丙二線之中率線也。何也。丁乙線既爲圓徑上之垂線。則甲乙、丁乙、乙丙爲相連比例之三率。見九卷第七節。故甲乙線與乙丁線之比。同於乙丁線與乙丙線之比也。比例既同。則所作乙丁線。爲原有甲乙、乙丙二線之中率可知矣。

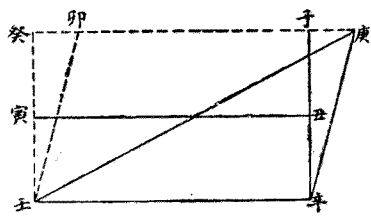
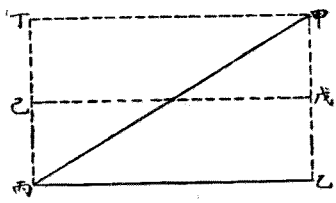
第十



有二直線。欲另作二線。爲此二線間之兩率法。如有甲乙、乙戊、二直線。欲另作二線。爲此二線間之兩率。則將甲乙、乙戊、二線之乙末。相合爲直角。又自此二線所合乙角。引長爲甲乙丙、戊乙丁、二線。次將二矩尺之二角。正置於丁戊、甲丙、二線上。如一矩尺爲己庚辛。一矩尺爲壬癸子。乃以己庚辛矩尺之一股。切於丁戊線之戊末。又以壬癸子矩尺之一股。切於甲丙線之甲末。仍使二矩尺之己庚、癸子、二股相合。則癸、庚、二角亦爲直角。而不離於所跨之線。其二矩尺之壬、辛二股。亦使不離於所切之線末。乃自甲至癸、自戊至庚、自庚至癸。作三線。即截丁乙線於癸、截乙丙線於庚。成乙癸、乙庚、二線。即爲原有之甲乙、乙戊、二線間之兩率也。何也。如平分戊癸線於丑。則丑爲心。戊爲界。成一戊庚癸半圓。若平分甲庚線於寅。則寅爲心。甲爲界。成一甲癸庚半圓。今乙癸線爲甲癸庚半圓徑線上之垂線。故乙癸爲甲乙、乙庚、二線之中率。而乙庚線爲戊庚癸半圓徑線上之垂線。故乙庚又爲癸乙、乙戊、二線之中率。是以甲乙線與乙癸線之比。同於乙癸線與乙庚線之比。而乙癸線與乙庚線之比。亦同於乙庚線與乙戊線之比。因其比例相同。故乙癸、乙庚、二線爲甲乙、乙戊、二線間之兩率也。



有三角形。依一界作等積之直角四界形法。如有甲乙丙一直角三角形。欲依其乙丙界作一直角四界形。與原三角形積等。則與乙丙平行。作一甲丁線。又與甲乙平行。作一丁丙線。即成一甲乙丙丁直角四界形。於是平分甲乙線於戊。平分丙丁線於己。作一戊己線。則平分甲乙丙丁四界形為兩形。此所分甲戊己丁與戊己丙己兩直角四界形之積。俱與甲乙丙三角形之積相等也。蓋甲乙丙三角形。為甲乙丙丁四界形之一半。今所分甲戊己丁。與戊乙丙己。兩四界形。既俱為甲乙丙丁四界形之一半。則必與甲乙丙三角形之積俱相等可知矣。又如庚辛壬無直角之三角形。依辛壬界作一直角四界形。與原三角形積等。則與辛壬平行作一庚癸線。又自辛壬至庚癸線。作子辛。癸壬。二垂線。即成一子辛壬癸直四界形。於是平分分子辛線於丑。平分癸壬線於寅。作一丑寅線。則平分分子辛壬癸四界形為兩形。其所分子丑寅癸與丑辛壬寅兩直角四界形之積。俱與庚辛壬三角形之積相等也。試與庚辛線平行作一卯壬線。即成庚辛壬卯一斜方形。為與子辛壬癸方形同底同高。故其積必等。見三卷第八節。今庚辛壬三角形。為庚辛壬卯形之一半。則亦必為子辛壬癸方形



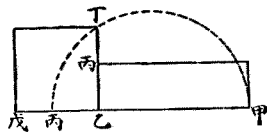
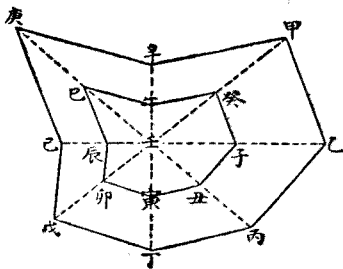
之一半矣。既爲一半，則所分子丑寅癸與丑辛壬寅直角四界形，必與庚辛壬三角形之積相等可知矣。

第十二

有一長方形，作與此積相等之正方形法。如有甲丙一長方形，欲作與此長方形相等之正方形，則將甲丙形之甲乙縱線，合於甲乙橫線，照此卷第九節法，求得甲乙丙乙，二線之中率爲丁乙線，卽以丁乙線爲一邊，作一丁戊正方形，卽與甲丙長方形之積相等也。何則，大凡相連比例三率內，中率所作之正方形積，與首率末率所作之長方形積相等。今丁乙線既爲甲乙丙乙、二線之中率，則丁乙線所作之丁戊正方形積，焉得不與甲乙丙乙二線相合所作之甲丙長方形之積相等乎。

第十三

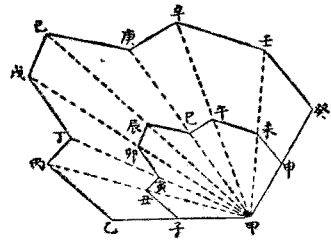
凡多界形，作與本形同式或大或小之形法。如有甲乙丙丁戊己庚辛之多界形，欲作比此形小一半之同式形，則目此形中心壬處，至各角作衆線，又取甲乙、乙丙、丙丁、丁戊、戊己、己庚、庚辛、辛甲，各界度之一半，與各界平行，置於對角各線之間，爲癸子、子丑、丑寅、寅卯、卯辰、辰巳、巳午、午癸之八線，卽成癸子丑寅卯辰巳午之形，爲原形每界減半之同式形也。何也，如對角線間



所成之甲乙壬、癸子壬、大小兩三角形之甲乙、癸子、線既平行。而又同一壬角。則其相當各角俱等。而兩形之式相同。倣此推之。其乙丙壬、子丑壬、二形。丙丁壬、丑寅壬、二形。丁戊壬、寅卯壬、二形。戊己壬、卯辰壬、二形。己庚壬、辰巳壬、二形。庚辛壬、巳午壬、二形。辛甲壬、午癸壬、二形。必俱爲同式形。此各相當大小兩形既俱同式。則所作癸子丑寅卯辰巳午小形之各邊。爲甲乙丙丁戊己庚辛大形之各邊之一半。而爲同式形可知矣。又如甲乙丙丁戊己庚辛壬癸形。從甲角作線至各角。取乙丙度之一半。置於甲乙、甲丙、二線之間。與乙丙平行。如子丑。照此於諸對角線間作諸界之平行線。卽成甲子丑寅卯辰巳午未申小形。爲原形每界減半之同式形。其理亦與前同。若欲作比原形大幾倍之形。則以所作諸對角線。按分引長。而於本形外作諸界之平行線。卽成所欲作之大形也。

#### 第十四

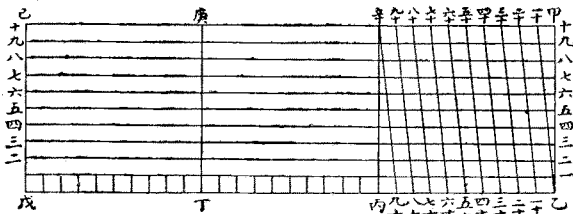
作分釐尺法。如甲戊尺三寸。每寸欲分爲百釐。則將甲乙邊平分作十分。將戊己邊亦平分爲十分。對所分之分作諸橫線。與乙戊平行。次將一寸之甲辛、乙丙、兩邊俱分爲十分。再於甲辛邊之第一分作斜線。至乙丙邊之乙處。如此作十斜線。俱與第一分斜線平行。卽分乙丙之一寸爲一百釐也。何也。甲辛乙丙皆爲一寸之度。俱平分爲十分矣。若將每分又分爲十釐。卽每寸亦得百釐。然度狹線多。必致相淆。今作斜線橫線各十。其橫斜相交處。共有百分。此百分卽百釐也。如第一斜線與第一橫線相交之點。卽爲一



釐與第二橫線相交之點。卽爲二釐。以至第十橫線相交之點爲十釐卽甲辛邊所分之第一分之十釐也。一斜線有十釐。則十斜線豈非百釐乎。由此推之。若作二十橫線。則一斜線得二十釐。每寸卽分爲二百釐。作百橫線。則一斜線得百釐。每寸卽分爲千釐。其法甚簡。而其用尤甚便也。

第十五

凡有三角形。知其一角之度。及此一角之兩傍界。或知其二角之度。及此二角之間一界。或不知角度。但知三界欲求其餘角餘界法。如有一甲乙丙三角形。知丙角爲三十八度四十四分。及丙角兩傍之丙甲界長十四丈。丙乙界長十三丈。而欲知其餘角餘界。則依十一卷第八節法。作與丙角相等之三十八度四十四分之丁角。將丁角兩傍之丁戊界作十四分。丁己界作十三分。乃自戊至己作一戊己線。成一丁戊己小三角形。與甲乙丙大三角形同式。量其戊己邊得九分。卽大形之甲乙邊爲九丈也。再用有度之圓。量取小形戊己角得六十四度三十七分。卽大形甲角之度也。小形己角得七十六度三十九分。卽大形乙角之度也。何也。夫甲乙丙。戊己丁。兩三角形之式既同。其相當各角各界必俱相等。小形之丁角。卽與大形之丙角等。其餘兩角亦必等。小形之丁己邊。卽以十三分當大形丙乙邊之十三丈。則小形戊己邊之九分。必當大形甲乙邊

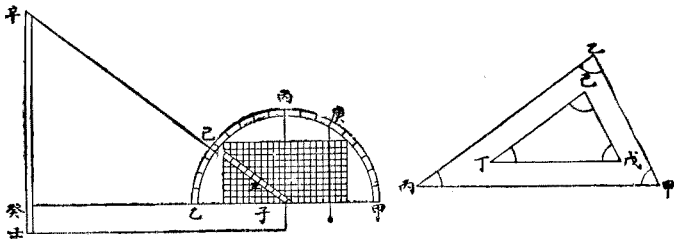




之九丈矣。又或知甲乙丙三角形之乙角爲七十六度三十九分，丙角爲三十八度四十四分，及乙丙界長十三丈，而欲知其餘角餘界，則作己丁界爲十三分，照乙角丙角度作己角丁角，於是畫己戊丁戊，二界相交於戊，即成戊己丁同式之小三角形。此小形之戊角必與甲角等，而小形之丁戊界十四分，與大形之甲丙界十四丈相當。小形之戊己界九分，與大形之甲乙界九丈相當矣。若知甲乙丙三角形之甲乙、甲丙、乙丙三界而不知其角，則照前將三界之度作同式之小形，量其三角之度，即知大形之角度矣。

第十六

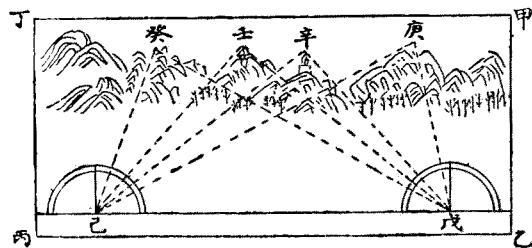
作分數比例測量儀器法。以甲丙乙半圓界，分爲一百八十度，每度作六十分。將此半圓之丁甲、丁乙、丁丙，三半徑線，照所容方界分截開，分爲一百分。於每分上，俱與三半徑半行作縱橫線。於甲乙徑線之甲乙兩末，作兩定表，以圓丁心爲樞，作一遊表如丁己，將此遊表亦如前所分一百分度，作二百分。復於此儀器後面作一垂線，記號以掛墜線如庚，即成一全儀器，用以測高深廣遠，可知其各角各界之度矣。如有一辛壬旗杆，欲測其高，則將儀器按墜線立準，看甲乙徑線兩末之定表，與旗杆癸處相對，乃爲地平。再將丁己遊表，與旗杆頂尖辛處相對，次量儀器中心所對處，至旗杆癸處得幾何，如有四十丈，則看儀



器丁乙線上自丁心至子得四十分。以當地平四十丈。即視與子相對垂線至遊表相交處有幾何。如丑子三十分。即爲旗杆自辛至癸相當數爲三十丈也。再加癸壬高。即得旗杆辛壬之共高度矣。蓋儀器上之丁子丑小三角形。與所測得丁癸辛大三角形。原爲同式。其相當各界之比例必俱相同。故以丁子四十分。與子丑三十分之比。即同於丁癸四十丈。與癸辛三十丈之比也。若欲知丁辛弦線數。即視遊表自丁至丑相交之處得幾何。如有五十分。其相當數即爲五十丈也。若欲知丁癸辛三角形之各角度。則視圓界與遊表相交處如己。其乙己弧度。即丁角三十五度一十三分。其餘己丙弧五十五度四十七分。即辛角度。而癸辛線原與子丑垂線平行。爲平行線。故癸角必是直角而爲九十度也。

第十七

做各種地形畫圖法。如有甲乙丙丁地形。欲畫一圖。則選能見各地之二處。立儀器爲戊爲己。將戊與己對准定表。先自戊以遊表視庚辛壬癸等處。得諸角之度。皆細記之。如庚戊己角得八十一度。辛戊己角得五十五度三十分。壬戊己角得四十五度八分。癸戊己角得三十三度二十分。次自己以遊表照前視庚辛壬癸等處。得諸角之度。亦細記之。如庚己戊角得三十五度四十分。辛己戊角得四十度十分。壬己戊角得四十七度二十五分。癸己戊角得七十度。於是

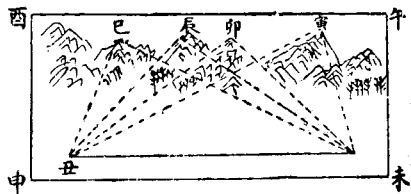
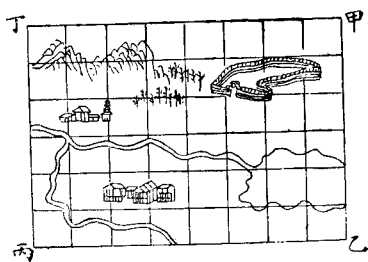


任意作一子丑線。爲戊己相當線。於此子丑線之兩末作諸角。與所記諸角相等。將所作諸角之各線。俱引長。使相交於寅卯辰巳等處。乃以庚辛壬癸所有之諸地形。並其餘各處。凡目之所見。俱畫於圖之相當各界。卽成一午未申酉之圖。卽甲乙丙丁地形之圖也。蓋午未申酉圖內所作寅子丑卯子丑類諸三角形之角度。皆與甲乙丙丁地形之庚戊己辛戊己類諸三角形之角度相等。而作。故其相當各三角形。俱爲同式。此所以全圖與全地形爲同式也。

第十八

畫地理圖。欲約爲小圖。或欲廣爲大圖法。如有甲乙丙丁一地理圖。欲約爲小圖。爲原圖四分之一。則用甲乙丙丁形界之四分之一。畫一戊己庚辛形。將甲乙丙丁原形。任意分爲數正方形。而將小形亦分爲數正方形。視原圖中所有山川城郭村墅林園。函於大圖之某正方分者。約而畫入小圖某正方形內。則此所畫之戊己庚辛小圖。卽與原有甲乙丙丁大圖爲同式矣。

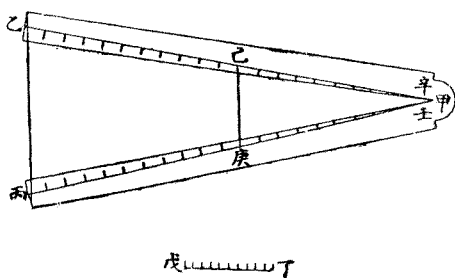
第十九



作比例尺平分線法。如於比例尺欲作平分線。則自甲樞心至乙、丙、二末。作甲乙、甲丙、二線。用本卷第五節法分之。各平分爲二百分。卽爲比例尺之平分線也。以用法明之。如有丁戊一直線。欲平分爲十分。則將比例尺一百分之己、庚、二點。照丁戊線度展開。勿令移動。次取比例尺之第十分之辛、壬、二點。相離之度。卽是丁戊線之十分之一分也。何則。自乙至丙作一線。自己至庚作一線。自辛至壬復作一線。其甲乙丙三角形。與甲己庚三角形爲同式。而甲己庚三角形。又與甲辛壬三角形爲同式。是以所分之比。亦同於辛壬線與己庚線之比也。然則十分之甲辛線。既爲百分之甲己線之十分之一。其辛壬線亦必爲己庚線之十分之一矣。丁戊線原與己庚線同度。則辛壬線亦爲丁戊線之十分之一。可知矣。

第二十

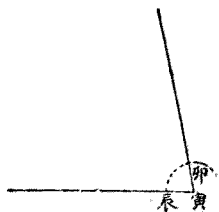
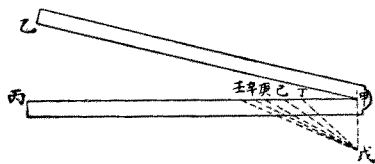
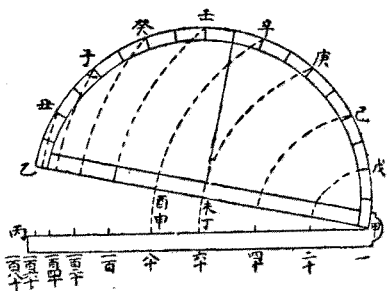
作比例尺分圓線法。如於比例尺欲作分圓線。則自甲樞心至乙、丙二末。作甲乙、甲丙、二線。乃平分甲乙線於未。以未爲心。以甲乙二末爲界。作一半圓。於是分圓界爲一百八十度。復以甲爲圓心。至所分圓界戊己庚辛壬癸子丑等處。作各弦線。又將諸弦線度。移於尺之甲乙、甲丙、二線。則此二線。卽成一圓之諸弦之總線也。以用法明之。如寅卯、寅辰二線所合寅角。欲知其度。則以寅爲心。作一辰卯弧。將比例尺六



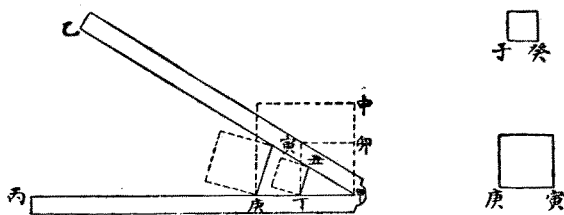
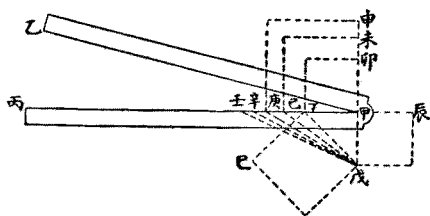
十度之丁、未、兩點相距之度。照寅辰或寅卯度展開。勿令移動。次取卯、辰、相距之度。於比例尺上尋至八十度之申、酉、處恰符。即是寅角爲八十度也。何則。若自丁至未。自申至酉。作二線。成甲申酉、甲丁未。兩同式三角形。其相當各角各界。俱爲相當比例之率。故甲未線與甲酉線之比。同於丁未線與申酉線之比也。夫甲未線既爲比例尺所作甲庚六十度之弦線。而甲酉線又爲甲辛八十度之弦線。其丁未線既與小圓寅卯輻線等。而輻線原與六十度之弦線等。然則丁未線即小圓六十度之弦線。而申酉線亦爲小圓八十度之弦線也。以此得知寅角之卯辰度爲八十度也。

第二十一

作比例尺分面線法。如於比例尺欲作分面線。則以甲樞心處至乙、丙、二末。作甲乙、甲丙、二線。自甲截甲丙線於丁。照所截甲丁度。於甲心作一甲戊垂線。自戊至丁作一戊丁線。又照戊丁線度。自甲截甲丙線於己。自戊至己作一戊己線。又照戊己線度。自甲截甲丙線於庚。自戊至庚作一戊庚線。又照戊庚線度。自甲截甲丙線於辛。自戊至辛



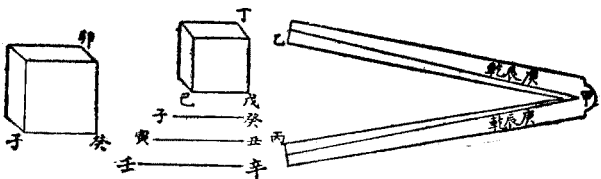
作一戊辛線。又照戊辛線度。自甲截甲丙線於壬。自戊至壬作一戊壬線。照此累累截之。至丙末。又將甲丙線所截各度。移置甲乙線。即成比例尺之分面線也。何則。於甲丁戊直角三角形之三界。作卯丁、辰戊、戊己。三正方形。其甲丁、甲戊、二線。因為相等度所作。故卯丁、辰戊二形必等。再於戊甲丁直角相對之戊丁界所作之戊己一方形。亦必與直角兩旁界所作卯丁、辰戊、二方形相等也。見九卷第四節。次於甲己界作未己正方形。甲己界原與戊丁等。則甲己界所作未己方形。即與戊丁界所作之戊己方形相等矣。未己方形。既與戊己方形等。則必與卯丁、辰戊、二形相等。而亦與卯丁之倍數相等矣。夫甲己界。即大於卯丁形一倍。為未己形之一界也。倣此論之。則甲庚界。即為比卯丁形大二倍形之界。而甲辛、甲壬、等界。即為比卯丁形大三倍、四倍形之界可知矣。以用法明之。如有一癸子正方形。欲作大二倍之正方形。則將比例尺展開。使其丁、丑、相距之度。與癸子界度等。次取比例尺寅、庚、相距之度。即是比癸子方形大二倍之方形之一面界度也。何則。自丁至丑。自庚至寅。作

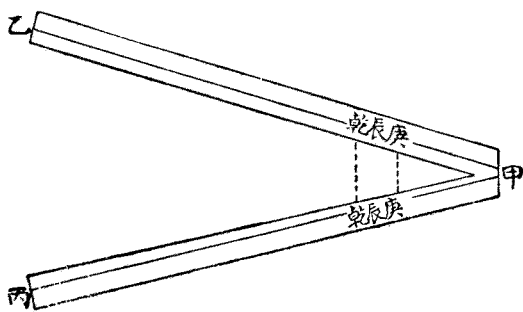
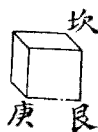
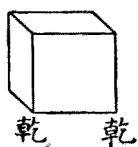
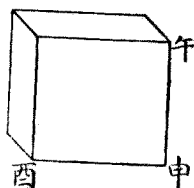
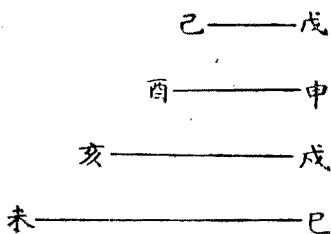


丁丑、庚寅、二線成甲丁丑、甲庚寅、同式兩三角形。則甲丁線與甲庚線之比，即同於丁丑線與庚寅線之比也。夫甲庚線所作方形，原比甲丁線所作方形大二倍。則庚寅線所作方形，必比丁丑線所作方形亦大二倍矣。丁丑之度，原與子癸等，則寅庚線豈非比子癸方形大二倍方形之一界乎。

第二十二

作比例尺分體線法。如於比例尺欲作分體線，則以甲樞心之甲乙、甲丙、二線，任作丁己一正方體，取其戊己一界之度，置於尺上，自甲截甲乙線於庚，次作比戊己界大一倍之辛壬線，又於戊己、辛壬、二線間，照本卷第十節法，作相連比例之癸子、丑寅、二率，乃取癸子線度置於尺上，仍自甲截甲乙線於辰，則甲辰所作卯子正方體，必比甲庚所作丁己正方體大一倍矣。何則？試將癸子線作卯子正方體，則與丁己正方體為同式，其二體相比之比例，必同於戊己、癸子、二界所生連比例加二倍之比例。今辛壬線既為戊己相連比例之第四率，則丁己、卯子、二體之比例，必同於戊己、辛壬二線之比例矣。辛壬線既比戊己線大一倍，則卯子體亦比丁己體大一倍可知矣。又作比戊己界大二倍之己未線，仍照本卷第十節法，作戊己、己未、二線間相連比例之申酉、戌亥、二率，乃取申酉線度置於尺上，自甲截甲乙線於乾，則甲乾所作午酉正方體，即比甲庚所作丁己體大二倍矣。照此屢倍戊己界求相連比例





之四線。取其第二線度。置於尺之甲乙線上。又按甲乙線所截各度。移置甲丙線。即成比例尺之分體線也。以用法明之。如有一坎庚正方體。欲作大二倍之體。則將比例尺展開。使其庚與庚第一次所截之點。相距之度。與艮庚界度等。次取比例尺乾與乾第三次所截之點。相距之度。即是比坎庚正方體大二倍之正



方體之一界度也。何則。自比例尺之庚乾二處。作庚庚、乾乾、二線。卽成甲庚庚、甲乾乾、同式兩三角形。則甲庚線與甲乾線之比。同於庚庚線與乾乾線之比例矣。夫甲乾線所作方體。原大於甲庚線所作方體之二倍。則乾乾線所作方體。必大於庚庚線所作方體之二倍可知矣。又捷法。設正方體界一百釐。其積數一百萬釐。以二因之。成二百萬釐。立方開之。得界一百二十五釐。又以三因之。成三百萬釐。立方開之。得界一百四十四釐。照此屢倍積數開立方。將所得之數。於分釐尺上取其度。截比例尺之甲乙、甲丙、二線。卽成分體線。與前求連比例之法無異也。



# 數理精蘊上編卷五

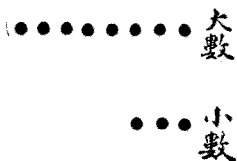
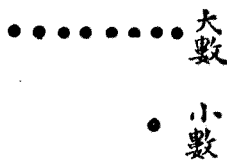
## 算法原本一

### 第一

一者數之原也。衆一相合而數繁焉。不能無大小多寡之不齊。而欲知其所以分合之故。必有一定之法。始可以得其準。若夫累積小數與大數等者。此小數即度盡大數之準也。如大數有八。小數有二。四倍其二。與八必等。則二即爲度盡八之準。苟累積小數不能與大數等者。此小數即非度盡大數之準也。如大數有八。小數有三。二倍其三爲六。小於八矣。三倍其三爲九。又大於八矣。若此者即爲非度盡大數之準。要之小數爲大數之平分者。即能度盡大數。而小數非大數之平分者。即不能度盡大數。是故以小度大。以寡御多。求其恰符而毫無舛者。惟在得其平分之法而已。

### 第二

數之目雖廣。總不出奇偶二端。何謂偶。兩整平分數是也。何謂奇。不

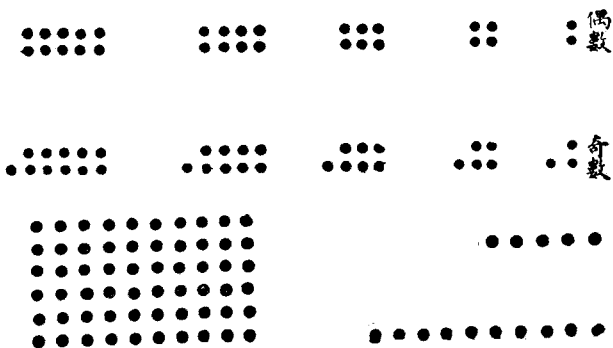


能兩整平分數是也。如二、四、六、八、十之類。平分之。俱爲整數。斯謂之偶數矣。若三、五、七、九、十一之類。平分之。俱不能爲整數。斯謂之奇數矣。又如小偶數分大偶數得偶分。則謂之偶分之偶數。如小偶數四。分大偶數三十二得八平分。是爲偶分。其三十二。卽爲偶分之偶數。小偶數分大偶數得奇分。則謂之奇分之偶數。如小偶數六分。大偶數三十。得五平分。是爲奇分。其三十。卽爲奇分之偶數。又如小奇數分大奇數得奇分。則謂之奇分之奇數矣。如小奇數五。分大奇數十五。得三分。是爲奇分。其十五。卽爲奇分之奇數。

第三

乘者。兩數相因而成也。蓋有兩數。視此一數有幾何。彼一數有幾何。將此一數照彼一數加幾倍。則兩數積而復成一數。故謂之相因而成。然不用加而用乘者何也。蓋加須層累而得。乘則一因卽得。此立法之精而理則實相通也。如有六與十兩數。以十爲主。而加六次得六十。以六爲主而加十次亦得六十。今以十爲主。而以六乘之。或以六爲主。而以十乘之。皆得六十。其數無異。而比加捷矣。

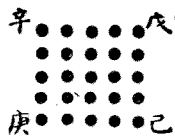
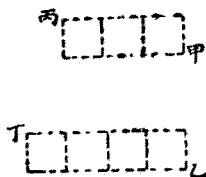
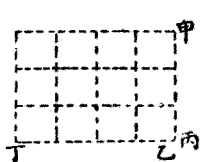
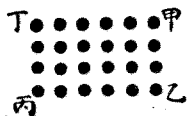
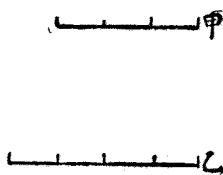
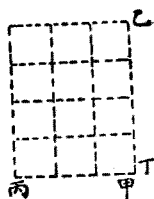
第四



凡兩數相乘，爲平方數。如四與六相乘得二十四是也。試將四六兩數作點排之。縱立四點爲甲乙，橫列六點爲甲丁。將此六點累四次，卽成甲乙丙丁平方數矣。又若相等兩數相乘，得數則爲正方數。如五與五乘得二十五是也。苟將五數縱橫各列五點，或依縱數，或依橫數，累五次，卽成戊己庚辛正方數矣。

第五

凡數之相乘，可用線以表之。然線雖無廣分，如依一線之長分廣爲小方面，看此線所有方面若干，將彼線所有方面加作幾倍，或看彼線所有方面若干，將此線所有方面加作幾倍，則二線相積而成面矣。設如有甲乙二線，甲線之分爲三，乙線之分爲四，將此二線相乘，則依甲線三分之一分作廣分爲甲丙，依乙線四分之一分作廣分爲乙丁。其甲丙有三小方形，乙丁有四小方形。若依甲丙所有之數，將乙丁加爲三倍，或依乙丁所有之數，將甲丙加爲四倍，俱成函十二小方形之乙丙，甲丁之二直角形矣。蓋面爲線之積，以一線爲



橫。一線爲縱。縱橫相因而成。故測面者必於線。知線卽可以知面也。

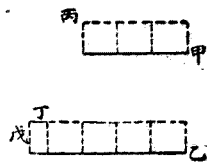
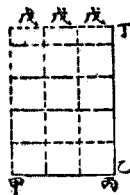
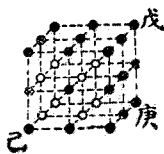
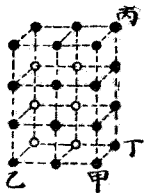
第六

凡二線彼此各分不均而有零分者。其相乘所成方面。亦有零分也。設有甲乙二線。甲線爲三分。今將甲線依三分之一分作廣分爲三小方形。並無餘積。而乙線照甲線分。則爲四分有零。亦將乙線依甲線一分作廣分。則爲四小方形。而餘戊一小形。以所作甲丙爲橫。乙丁爲縱。則成一丁甲四方形。而此形之內。必有十二小方形。仍有三小戊形。附於十二方形。乃爲二線相乘之總積也。又如此類。一線有零分者。其餘分在一邊。若二線俱有零分者。則其餘分亦在二邊矣。

第七

凡三數遞乘爲立方數。如二與三相乘得六。又以四乘之得二十四是也。試將二三四之三數作點排之。縱列二點爲甲。丁。橫列三點爲甲乙。將此三點累二次成丁乙平方數。又直立四點爲丙。丁。依丙丁數將丁乙平方數累四次。卽成丙乙立方數矣。

又若相等三數遞乘得數。則爲正立方數。如三與三乘得九。再以三乘得二十七是也。試將三數縱橫各排三點。平列三次。成庚己平方數。又直立三點。將庚己平方數累三次。卽成戊己正立方數矣。

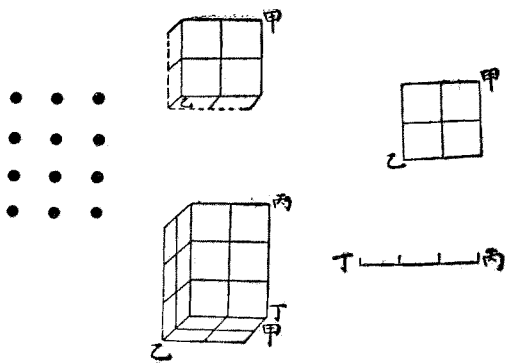


第八

凡數之遞乘爲體，可用面以表之。蓋面雖無厚分，如依一面之積分，廣爲小方體，看面所有積分，得線之長分若干。將面所有小方體，加作幾倍，則線面因之而成體矣。設如有甲乙面之分爲四，丙丁線之分爲三，將此面線相乘，則依甲乙面四分之一作厚分，爲四小方體，乃依丙丁線分數，將甲乙加爲三倍，即成函十二小方體之丙乙直角立方體矣。蓋體爲面之積，而面爲線之積，故線可以測面，并可以測體也。

第九

除者，兩數相較而分也。蓋視大數內有小數之幾倍，將大數照小數減幾次，則大數分而復爲一小數，故謂之相較而分。然不用減而用除者何也？蓋減必遞消其分，除則一歸而即得。除之與減，即猶乘之與加，正相對待者也。如有大數十二，小數四，若用十二以四減之，三次而盡，即知十二爲四之三倍。若用除法，則三倍，其四與十二較，其數適等，即知十二爲四之三倍矣。此除之與減理相通而用較捷也。

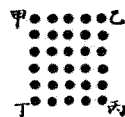
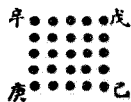
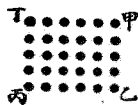
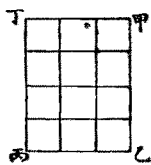
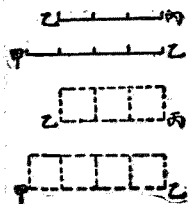


第十

凡兩數相乘之平方數。以一數除之。必得其又一數也。設如甲乙五。乙丙六。兩數相乘之甲乙丙丁平方數三十。若以甲乙五除之。即得乙丙六。或以乙丙六除之。即得甲乙五。蓋此三十中有五之六倍。六之五倍。如作點排之。五點爲橫。則縱排六次。六點爲橫。則縱排五次。皆成方數。故兩數不等。平方面。知其一數。或知兩數相差之較。始能得其兩邊線也。又若正方形。則其縱橫皆同。如戊己庚辛之正方形二十五。其縱橫皆五是已。故凡正方面有積數。即可得其每邊者。蓋因其縱橫兩邊皆等故也。

第十一

凡以線乘線即成面。而以線除面。亦復得線。故數之乘者。可用線以表之。而除者。亦可用線以表之也。設如有甲乙丙丁一方面積一十二。以甲乙線四分除之。得乙丙線之三分。或以乙丙線三分除之。亦得甲乙線之四分。試將甲乙乙丙二線作廣分。則甲乙線成四小方形。乙丙線成三小方形。若依甲乙線所有數。以分甲乙丙丁面。即每分得三小方形。如乙丙線。依乙丙線所有數。以分甲乙丙丁面。即每分得四小方形。如甲乙線。蓋除之與乘。猶分合之相對。以線合者。仍以線而分。返本還原之義。有不爽矣。



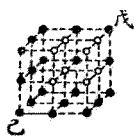
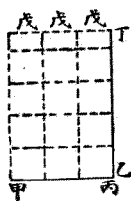
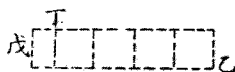
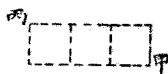
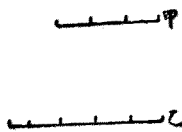


第十二

凡有零分不均二線相乘之方面。以整分線除之。必得零分線。以零分線除之。必得整分線也。設如甲線三分。乙線四分有零。相乘成丁甲面。若以甲線三分除之。即得乙線四分有零。或以乙線四分有零除之。亦得甲線三分。試將甲線作廣分。成三小方形。為甲丙。乙線作廣分。則成四小方形。為乙丁。餘戊一小形。若依甲丙線所有數。以分丁甲面。即每分得四小方形。一戊小形。如乙丁線。或依乙丁線所有數。以分丁甲面。即每分得三小方形。如甲丙線矣。此為二線一整一零相乘之總積。故以整線除之得零。以零線除之得整。若二線俱有零分者。彼此除之。必俱得零分也。

第十三

凡三數遞乘之立方數。以兩數遞除之。始得其又一數也。設如甲乙四。乙丙二。丙丁三。遞乘得甲丁立方數二十四。若以甲乙四除之。得乙丁平方數六。再以乙丙二除之。始得丙丁三。蓋乙丁平方中有三之二倍。而甲丁立方中有六之四倍。如作點排



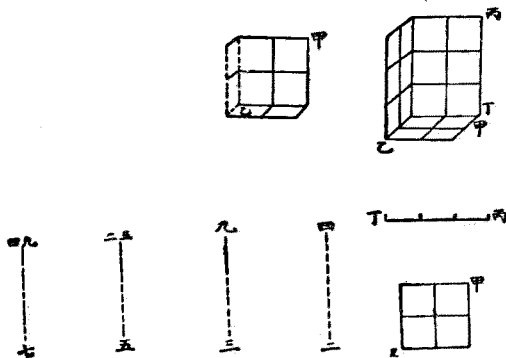
之二點爲縱橫排三次直累四次卽成方體故三數不等立方體知其兩數或知其三數相差之較始能得各邊也又若正立方體其縱橫厚度皆爲一數卽以一數遞除二次則其原數自得如戊己正立方體二十七其縱橫厚皆三已故凡正立方體有積數卽可得其每邊者正爲其縱橫厚度皆等故也

第十四

凡以線除體卽得面而以面除體亦復得線故線可以除面而面亦可以除體也設如有丙乙體積一十二以丙丁線三分除之得甲乙面之四分或以甲乙面四分除之亦得丙丁線之三分試將甲乙面作厚分則成四小方體若依丙丁線所有數以分丙乙體卽每分得四小方體如甲乙面依甲乙面所有數以分丙乙體卽每分得三分如丙丁線蓋體本以線面相乘而得故可以線面相除也

第十五

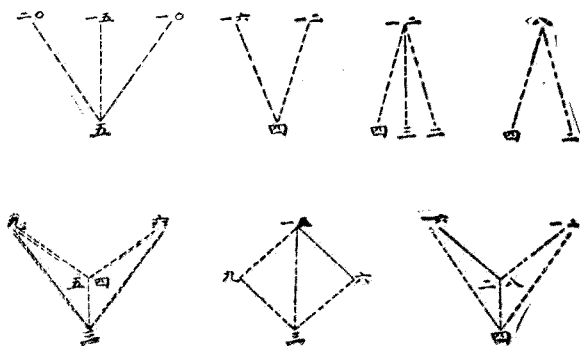
凡大數用小數可以度盡者此大數必爲此小數之所積也然所謂小數可以度盡大數者復有幾種有大數惟一數可以度盡者如四九二十五四十九之類惟用二可以度四三可以度九五可以度二十五七可以度四十九是也有大數用兩數三數俱可以



度盡者。如八與十二之兩數。用二用四。俱可以度盡。八用二用三。用四。俱可以度盡。十二是也。有兩大數。或三大數。用一小數。俱可以度盡者。如十二、十六之兩數。或一十、十五、二十之三數。用四可以度盡。十二、十六之兩數。用五可以度盡。一十、十五、二十之三數是也。又有一小數。可以度盡幾大數。將此幾大數相加為一總數。此小數亦可以度盡此總數。如四可以度盡十二、十六兩數。若將十二、十六相加為二十八。則此四亦可以度盡此二十八也。又或一小數。可以度盡幾大數。將此大數不拘幾分之。此小數可以度盡一分。亦必可以度盡其餘幾分也。如三可以度盡十五。將十五分爲六、九兩數。此三可以度盡六。亦必可以度盡九也。又如六與九兩數。用三俱可以度盡。若將六與九相乘得五十四。此小數三仍可以度盡此五十四也。凡此類者。皆爲彼此有度盡之數也。

第十六

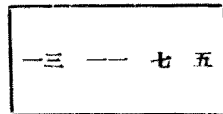
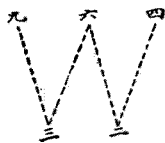
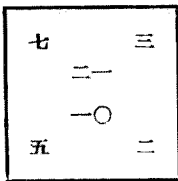
凡大數用小數不可以度盡者。此大數必非此小數之所積也。然用一以度之。無不可以度盡者。蓋一爲數之根。諸數皆自一而積之故也。所謂度不盡者。亦復有幾種。有大數無小數可以度盡者。



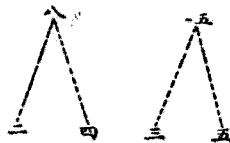
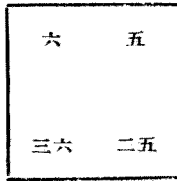
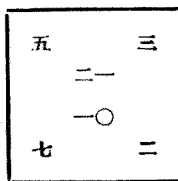
如五、七、十一、十三之類。任用二用三用四。俱不能度盡也。有兩大數。或三大數。用小數彼此不可以度盡者。如十五與八之兩數。用二用四。可以度盡八。而不能度盡十五。用三用五。可以度盡十五。而不能度盡八。又如四、六、九之三數。用二可以度盡四、六。而不能度盡九。用三可以度盡六、九。而不能度盡四也。又有彼此不能度盡之數。或將一數自乘。或將兩數俱自乘。彼此仍俱不可以度盡也。如五與六之兩數。彼此不能度盡。亦無一小數可以度盡此兩數。即將五自乘為二十五。或將六自乘為三十六。則六仍不能度盡二十五。而五仍不能度盡三十六。即二十五亦不能度盡三十六也。又如三、七兩數與二、五兩數。俱為彼此不能度盡之數。或將三與七相乘得二十一。將二與五相乘得一十。此一十與二十一之兩數。仍為彼此不能度盡之數也。凡此類者。皆為彼此無度盡之數也。

第十七

凡兩數互轉相減。未至於一而即可以減盡者。此減盡之最小數。即可以度盡此兩數也。設如有甲乙十六、丙丁六之兩數。將



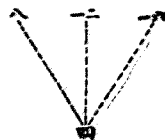
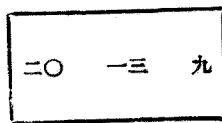
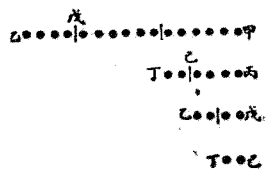
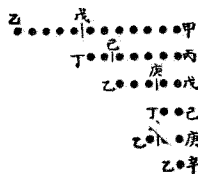
一九二



丙丁六與甲乙十六減二次。餘戊乙四。將此戊乙四轉與丙丁六相減。餘己丁二。又將此己丁二轉與戊乙四相減二次。即無餘。則此己丁二。即可以度盡甲乙十六及丙丁六矣。蓋八倍其二與十六等。三倍其二與六等也。又如十六與十二與八。此三數亦爲彼此有度盡之數。何也。蓋十六與十二相減餘四。以四轉與十二相減。三次而盡。則四可以度盡十六與十二矣。又二倍其四。即與八等。則四又可以度盡八。然則十六、十二、與八之三數。爲彼此有度盡之數可知矣。

第十八

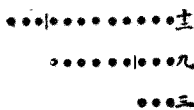
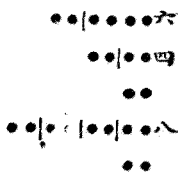
凡兩數互轉相減。至於一始可以減盡者。一之外別無他小數。可以度盡此兩數也。設如有甲乙十二。丙丁七之兩數。將丙丁七與甲乙十二相減。餘戊乙五。將此戊乙五轉與丙丁七相減。餘己丁二。將此己丁二。又轉與戊乙五相減。餘庚乙三。又將庚乙三轉與己丁二相減。餘辛乙一。既至於一。始可以度盡甲乙丙丁兩數。而一之外如二、三、四。雖可以度盡十二。而不能度盡七也。又如九與十三及二十之三數。亦爲彼此無度盡之數。何



也。蓋將九與十三互轉相減，必至於一。即用十三與二十轉減，或用九與二十轉減，亦皆至於一。則除此一之外，皆無可以彼此度盡此三數之小數矣。

第十九

凡有大數約為相當比例之最小數，以從簡易，則為約分法也。然數有可約不可約之分。可約者度盡之數，不可約者度不盡之數也。設如有九與十二之兩數，欲約為相當比例之最小數，乃用求小數度盡大數法，以九與十二互轉相減，得減盡之數為三，則三為度盡九與十二之數矣。以三除九得三，以三除十二得四，此三、四兩數，即為九與十二相當比例之最小數也。又如，有六、四、八之三數，欲約為相當比例之最小數，乃以六與四互轉相減，得減盡之數為二，又以二與八相減，四次而盡，則二為度盡六、四、八之小數矣。以二除六得三，以二除四得二，以二除八得四，此三、二、四三數，即六、四、八相當比例之最小數也。此皆數之可約者也。若夫數之不可約者，互轉相減，必至於一而



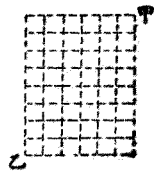
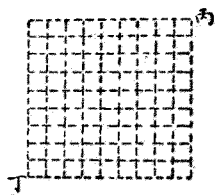
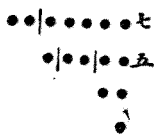
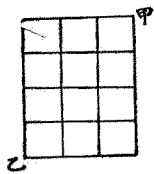
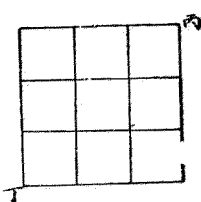
八	四	六
	二	
四	二	三

一二	九
	三
四	三

不可以度盡也。如有五、七兩數。以五減七餘二。復以二減五。二次餘一。既餘一。則自一之外。必無可以度盡之數。而不可約矣。

第二十

凡有大分。以分母乘之。通爲小分。則爲通分法也。然不曰乘而曰通者何也。蓋乘則積少成多。其得數溢於原數之外。通則變大爲小。其得數仍函於原數之中也。如有大分十二。其分母爲四。欲得其小分。則以分母四乘大分十二。得小分四十八。是已。試作甲乙方形以明之。其中所函方形十二。卽大分也。若將中函之方形。每分俱分爲四小方。則十二方形。共分爲四十八小方形矣。其數雖比原大數加四倍。然其每分之分。只得原數之四分之一。故仍函於甲乙方形之內。而未嘗溢出原數之外也。又有大分九。其分母爲九。欲得其小分。則以分母九乘大分九。得小分八十一。是已。試作丙丁方形以明之。其中所函方形九。卽大分也。若將其中函之方形。每分俱分爲九小方。則九方



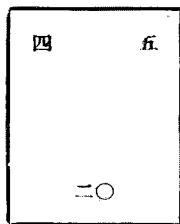
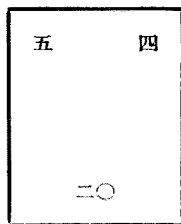
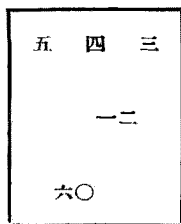
形共分爲八十一小方形矣。其數雖比原大數加九倍。而仍函於丙丁方形之內者。以其每分之分。只得原數之九分之一也。由此推之。其每分之母。或爲八。或爲十二。或爲數十。亦皆倣此通之。其所通之數。雖至千萬。而要皆未有溢於所通原分之外者矣。

第二十一

凡有幾小數。欲求俱可以度盡之大數。則以此幾小數連乘之。得數始爲此幾小數度盡之一大數也。設如有四、五兩小數。欲求用四用五俱可以度盡之一數。則以四與五相乘得二十。卽爲四、五兩數俱可度盡之一大數矣。又如有三、四、五之三小數。欲求用三用四用五俱可以度盡之一數。則以三與四相乘得十二。又以五乘十二得六十。卽爲三、四、五俱可度盡之一大數矣。蓋小數爲大數之根。始能度盡大數。如四、五可以度盡二十者。二十乃四之五倍。亦卽五之四倍也。三、四、五可以度盡六十者。六十乃十二之五倍。而十二乃三之四倍也。

第二十二

凡有兩數。彼此互乘所得之數。與原數比例必同也。蓋數有多寡。





而分又有大小。則紛紜難御。故必依此數之分。將彼數加爲幾倍。又依彼數之分。將此數加爲幾倍。則兩分數既同。而比例亦同矣。如甲乙二數。甲爲三分之二。乙爲四分之三。欲辨其孰大。則依甲數。將乙數加三倍。爲十二分之九。依乙數。將甲數加四倍。爲十二分之八。如是則所加之兩大分。同爲十二。而所生之兩小分相比。卽同於原甲數與乙數之相比矣。何也。甲數本三分之二。而爲十二分之八者。乃加四倍之比例。十二爲三之四倍。八爲二之四倍。而十二分之八之比例。仍同於三分之二之比例也。乙數本四分之三。而爲十二分之九者。乃加三倍之比例。十二爲四之三倍。九爲三之三倍。而十二分之九之比例。仍同於四分之三之比例也。此卽互乘同母之法。如甲爲三分之二。乙爲四分之三者。四卽母數。三卽子數也。因兩母數不同。故用互乘以同之。

### 第二十三

凡子母分有幾數。而子數同爲一者。先以各母求俱能度盡之一數。次以各母除之。則爲各子數也。如甲乙丙三數。甲爲二分之一。乙爲三分之一。丙爲四分之一。則先以三母數連乘得二十四。爲甲乙丙之共母數。又以二除共母數。得十二。爲甲之子數。以三除共母數。得八。爲乙之子數。以四除共母數。得六。爲丙之子數。蓋甲本二分之一。子母各加十二倍。卽爲二十四分之十二。而二十四與十二之比例。仍同於二與一之比例也。乙本三分之一。子母各加八倍。卽爲

甲 二 之 一	乙 三 之 一	丙 四 之 一
二	四	
八	六	

甲 三 之 二	乙 四 之 二
二	三
八	九

二十四分之八。而二十四與八之比例。仍同於三與一之比例也。丙本四分之  
 一。子母各加六倍。即爲二十四分之六。而二十四與六之比例。仍同於四與一  
 之比例也。

第二十四

凡子母分有幾數。而子母數俱不等者。亦先以各母求俱能度盡之一數。次以  
 各母除之。得數復以各子數乘之。即爲各子數也。如有甲、乙、丙三數。甲爲三分  
 之二。乙爲四分之三。丙爲五分之四。則先以三母數連乘得六十。爲甲、乙、丙之共母數。次以三除共母數。  
 得二十。以乘子數二。得四十。爲甲之子數。又以四除共母數。得十五。以乘子數三。得四十五。爲乙之子數。  
 又以五除共母數。得十二。以乘子數四。得四十八。爲丙之子數。蓋甲本三分之一。子母各加二十倍。即爲  
 六十分之四十。而六十與四十之比例。仍同於三與二之比例也。乙本四分之一。子母各加十五倍。即爲  
 六十分之四十五。而六十與四十五之比例。仍同於四與三之比例也。丙本五分之四。子母各加十二倍  
 即爲六十分之四十八。而六十與四十八之比例。仍同於五與四之比例也。

丙 五 之 四	乙 四 之 三	甲 三 之 二
六〇		
四八	四五	四〇

# 算法原本二

## 第一

凡有幾小數與幾大數相比其比例若同則小數相加所得之總數與大數相加所得之總數相比仍同於原數之比例也。設如有一小數六一小數四一大數十八一大數十二其小數六爲大數十八之三分之一而小數四亦爲大數十二之三分之一將兩小數六四相加得一十將兩大數十八十二相加得三十此一十與三十之比卽如六與十八四與十二之比皆爲三分之一之比例也。又如三小數二三四與三大數六九十二相比皆爲三分之一將二三四相加得九將六九十二相加得二十七其比例亦爲三分之一也。又或四小數四大數相加其總數之比例亦皆同如三與十二四與十六五與二十六與二十四俱爲四分之一將三四五六四小數相加得十八將十二十六二十二二十四四大數相加得七十二其比例仍爲四分之一矣。

## 第二

凡有幾小數與幾大數之比例若同則小數相減所得之餘數與大數相

一二	三四	一八	六
一六	四五		
二〇	五六	一二	四
二四	六		
<hr/>		<hr/>	
七二	一八	二七	九

減所得之餘數相比。仍同於原數之比例也。設如有一小數十一小數六。一大數三十一。一大數十八。其小數十。爲大數三十之三分之一。而小數六。亦爲大數十八之三分之一。將兩小數十與六相減餘四。將兩大數三十與十八相減餘十二。此四與十二之比。卽如十與三十。六與十八之比。皆爲三分之一之比例也。又如三小數八。四。三。與三大數二十四。十二。九。相比。皆爲三分之一。將四。三。與八。遞相減。餘一。將十二。九。與二十四。遞相減。餘三。其比例亦爲三分之一也。又或四小數四大數相減。其餘數之比例亦皆同。如十八與七十二。爲四分之一。而三與十二。四與十六。五與二十。俱爲四分之一。將小數三。四。五。與十八。遞相減。餘六。將大數十二。十六。二十。與七十二。遞相減。餘二十四。其比例仍爲四分之一矣。

第三

凡有一數乘兩數。其所得兩數相比。仍同於原兩數之相比也。設如一數六。與八。與一十兩數相乘。以六乘八得四十八。以六乘一十得六十。此四十八與六十相比。卽同於原數八

七二	一八
一二	三
六〇	一五
一六	四
四四	一一
二〇	五
二四	六

三〇	一〇
一八	六
一二	四

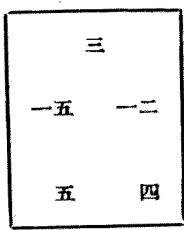
一〇	八
六	
六〇	四八

二四	八
一二	四
一二	四
九	三
三	一

與一十之相比矣。夫八與四十八，一十與六十，皆爲六分之一。故一與六之比，同於八與四十八之比。而一與六之比，亦同於十與六十之比也。然則八與四十八之比例，必同於十與六十之比例。而四十八與六十之比例，亦必同於八與一十之比例可知矣。

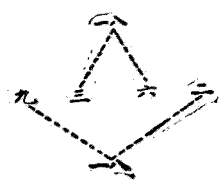
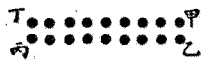
第四

凡有一數除兩數，其所得兩數相比，仍同於原兩數之相比也。設如一數三，除十二與十五之兩數，以三除十二得四，以三除十五得五，則此四與五相比，即同於原數十二與十五之相比矣。夫十二與四，十五與五，皆爲三分之一。故一與三之比，同於四與十二之比。而一與三之比，亦同於五與十五之比也。然則四與十二之比例，必同於五與十五之比例。而四與五之比例，亦必同於十二與十五之比例可知矣。



第五

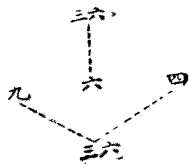
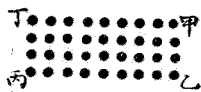
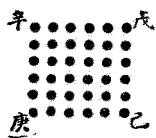
凡相當比例四數，其第一數與第四數相乘，第二數與第三數相乘，所得之數等者何也。蓋兩方面以其縱橫界互相爲比之比例若等，則兩方積必等。見幾何原本七卷第三節。今以第一數與第四數相乘，即如以第一數爲縱，第四數爲橫，成一方數。而



第二數與第三數相乘。即如以第二數爲縱，第三數爲橫，成一方數。其積必相等也。設如有二與六、三與九，相當比例四數。將第一數二爲縱，第四數九爲橫，相乘得十八。爲甲丙一方數。將第二數六爲縱，第三數三爲橫，相乘亦得十八。爲戊庚一方數。夫甲丙方之甲丁橫界比戊庚方之戊辛橫界，大三分之二，而戊庚方之戊己縱界比甲丙方之甲乙縱界，亦大三分之二，其比例相等。故兩方數亦等。此兩方數既等，則相當比例四數，其第一數與第四數相乘，第二數與第三數相乘，所得之數相等無疑矣。

第六

凡相連比例三數，其首數與末數相乘，與中一數自乘所得之數等者何也。蓋兩方面相等者，其縱橫界之互相比例必等。見幾何原本七卷第三節。今將首數與末數相乘，即如以首數爲縱，末數爲橫，成一方數。而中數自乘，即是以中數爲縱，復以中數爲橫，成一方數。其積必相等也。設如有四、六、九，相連比例三數。將首數四爲縱，末數九爲橫，相乘得三十六。爲甲丙一方數。將中數六爲縱，仍復爲橫，相乘即是自乘，亦得三十六。爲戊庚一方數。夫甲丙方之甲丁橫界比戊庚方之戊辛橫界，大三分之一，而戊庚方之戊己縱界比甲丙方之甲乙縱界，亦大三分之一，其比例相等。故兩方數亦等。此兩方數既等，則相連比例三數，其首末兩數相等，其中數自乘所得之



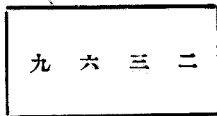
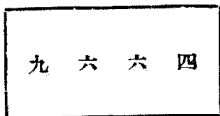
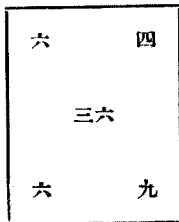
數相等無疑矣。

第七

凡有兩數除一數。其所得兩數之比例。即同於原兩數之轉相比例也。設如有一數十八。以二、三兩數除之。二除十八得九。三除十八得六。以此九與六兩數相比。即同於原兩數三與二之相比也。蓋二與三、六與九。為相當比例之四數。以第一數二與第四數九相乘。第二數三與第三數六相乘。皆得十八。故二除十八得九。即如以第一數除第二數與第三數相乘之數而得第四數也。以三除十八得六。即如以第二數除第一數與第四數相乘之數而得第三數也。夫相當比例數。其第二數與第四數之比。原同於第一數與第三數之比。故第一數二除十八所得之九。與第二數三除十八所得之六相比。即同於第二數三與第一數二之相比也。

第八

凡有兩數除一數。其所得之兩數內有一數與原兩數內一數相等者。則所得之兩數與原兩數互轉相比。即成相連比例之數也。設如有一數三十六。以四、六兩數除之。四除三十六得九。六除三十六得六。與原數六相等。則此九與六兩數之比。即同於原數六與四之比也。蓋四與六、六與九。為相連比例之四



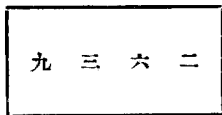
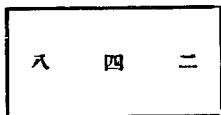
數以四爲首數。九爲末數相乘。以六爲中數自乘。皆得三十六。今以四除三十六得九。卽如以首數除中數。自乘之數而得末數也。以六除三十六復得六。卽如以中數除首末兩數相乘之數而仍得中數也。夫相連比例數。其末數與中數之比。原同於中數與首數之比。則首數四除三十六所得九。與中數六除三十六所得六相比。卽同於中數六與首數四之相比也。

第九

凡相當比例四數。其第一數度盡第二數。則第三數亦必度盡第四數也。如有二、六、三、九。相當比例四數。其第一數二。可以度盡第二數六。則第三數三。亦可以度盡第四數九矣。夫相當比例四數。第一與第二之比。必同於第三與第四之比。今第一爲二。第二爲六。乃加三倍之比例。則第四與第三。亦必爲加三倍之比例。故三倍其二。可以度盡六者。三倍其三。卽可以度盡九也。

第十

凡相連比例三數。其第一數度盡第二數。亦必度盡第三數也。如有二、四、八。相連比例三數。其第一數二。可以度盡第二數四。亦必可以度盡第三數八矣。夫相連比例三數。第一與第二之比。同於第二與第三之比。今第一數爲二。第二數爲四。乃加倍之比例。則第二與第三。亦必爲加倍之比例。而第一與第三。則爲再加一倍之比例。故一倍其二。可以度盡四者。再倍其二。卽可以度盡八也。



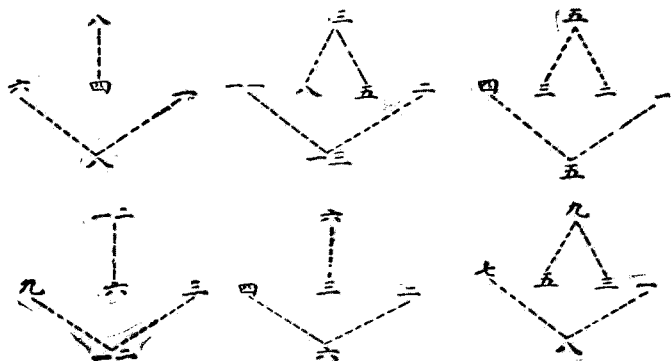


第十一

凡依次遞加取四數。其第一第四兩數相加。與第二第三兩數相加之數等也。如一、二、三、四遞加之四數。將第一數一與第四數四相加。得五。以第二數二與第三數三相加。亦得五。又如一、三、五、七遞加之四數。一、三、五、七爲隔數以遞加者也。將第一數一與第四數七相加。得八。以第二數三與第三數五相加。亦得八也。又如二、五、八、十一遞加之四數。二、五、八、十一爲隔二數以遞加者也。將第一數二與第四數十一相加。得十三。以第二數五與第三數八相加。亦得十三。由此推之。或隔三數。或隔四數。或隔五六數。以至極多數。但依次遞加取四數。無有不如此也。

第十二

凡依次遞加取三數。其首末兩數相加。與中數加倍之數等也。如二、三、四遞加之三數。將首末二四相加。得六。以中數三倍之。亦得六。又如二、四、六遞加之三數。二、四、六隔一數以遞加者也。將首末二六相加。得八。以中數四倍之。亦得八也。又如三、六、九遞加之三數。三、六、九隔二數以遞加者也。將首末三九相加。得十二。以中數



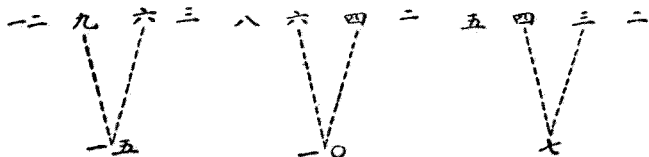
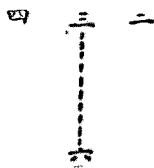
六倍之、亦得十二、由此推之、或隔三數、或隔四數、或隔五六數、以至極多數、但依次遞加取三數、無有不合者也。

第十三

凡依次遞加三數、以第二第三兩數相加、減去第一數、即得挨次之第四數也。如二、三、四之三數、以第二數第三數四相加、得七、內減去第一數二、得五、即是第四數。又如二、四、六隔一數遞加之三數、以第二數四第三數六相加、得一十、內減去第一數二、得八、即是第四數。亦為隔一數。又如三、六、九隔二數遞加之三數、以第二數六第三數九相加、得十五、內減去第一數三、得十二、即是第四數。亦為隔二數矣。蓋此即四率相當比例之理、四率中兩率相乘、與首末兩率相乘之數等、故中兩率相乘、以首率除之、即得末率、而此則中兩數相加、與首末兩數相加之數等、故以首一數減之、即得末一數、其義一也。

第十四

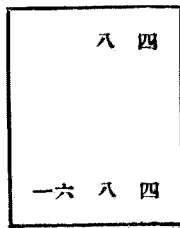
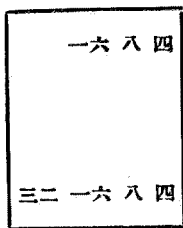
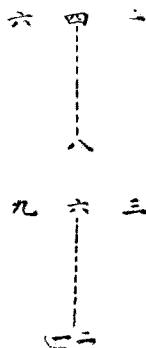
凡依次遞加兩數、以第二數倍之、減去第一數、即得挨次之第三數也。如二、三兩數、將第二數三倍之、得六、內減去第一數二、餘四、即是第三數。又如二、四隔一數之兩數、將第二數四倍之、得八、內減去第一數二、餘六、即是第三數。四與六亦



爲隔一數也。又如三、六隔二數之兩數。將第二數六倍之。得十二。內減去第一數三。餘九。卽是第三數。九與六亦爲隔二數也。蓋此卽三率相連比例之理。三率以中率自乘。與首末兩率相乘之數等。故中率自乘。以首率除之。卽得末率。而此則中數倍之。與首末兩數相加之數等。故以首數減之。卽得末數。於此見加減乘除之相對待。而加減可以代乘除之理。亦可從此推矣。

第十五

凡有彼此可以度盡兩數。欲求相連比例之數。則以一數自乘。以一數除之。卽得相連比例之第三數也。如有四、八兩數。欲求第三數。如四與八之相連比例。乃以八自乘得六十四。以四除之。得十六。此十六卽爲四與八相連比例之第三數。蓋八者四之二倍。而十六又爲八之二倍。則八與十六之比例。必同於四與八之比例矣。如有三數。求第四數。仍如四與八之比例。則以第三數十六自乘。得二百五十六。以第二數八除之。得三十二。卽爲四、八、十六相連比例之第四數。蓋十六者四之四倍。而三十二者八之四倍。則十六與三十二之比例。必同於四與八、八與十六之比例矣。如欲求連比例之第五數。或第六數。卽以相近兩數依前法算之。由此遞生。可至於無窮焉。然此皆四與八之比例。或四與



十六、或三與六、五與十之類。凡有彼此度盡之數。欲求相連比例幾數者。亦皆如此求之。無不可得矣。

第十六

凡有彼此不可以度盡之兩數。欲依此兩數比例。求相連比例之數。則以一數自乘爲第一率。而以又一數自乘爲第三率。以兩數互乘爲第二率。卽爲相連比例之三數也。如有三、五兩數。欲求相連比例三數。皆如三與五之比例。乃以三自乘得九。以五自乘得二十五。以三與五相乘得十五。此九與十五、十五與二十五之三數。卽如三與五之相連比例三數。蓋九爲三之三倍。而十五爲五之三倍。則九與十五爲三與五之比例矣。而十五爲三之五倍。二十五爲五之五倍。則十五與二十五亦爲三與五之比例矣。又或已有三數。欲求第四數。皆如三與五之連比例。則以三乘九得二十七。以三乘十五得四十五。以三乘二十五得七十五。復以五乘九得四十五。五乘十五得七十五。五乘二十五得一百二十五。此所得六數內。四十五、七十五。各得二。今止用其一。故二十七、四十五、七十五。一百二十五之四數。卽如三與五之相連比例數也。蓋二十七者三之九倍。而四十五者五之九倍。則二十七與四十五之比例。同於三與五之比例矣。又四十五者三之十五倍。而七十五者五之十五倍。則四十五與七十五

	五	三	
二五	一五	九	
一二五	七五	四五	二七

	五	三
二五	一五	九

之比例。同於三與五之比例矣。又七十五者三之二十五倍。而一百二十五者五之二十五倍。則七十五與一百二十五之比例。亦同於三與五之比例矣。如欲求連比例之第五數或第六數。以原一數遞乘先得之幾數。復以又一數遞乘先得之幾數。去其相同者。所餘即成相連比例之數。由此求之。亦可至於無窮也。然此皆三與五之比例。或三與七、四與九、五與八之類。凡彼此不可以度盡之數。欲求相連比例幾數者。亦皆做此求之而即得矣。

### 第十七

凡相當比例四數。其前兩數之間。有相連比例二數。其後兩數之間。亦必有相連比例二數也。設如有甲二十四、乙八十一、丙三十二、丁一百零八。相當比例之四數。甲數二十四與乙數八十一之間。有戊三十六、己五十四之相連比例兩數。則丙數三十二與丁數一百零八之間。亦必有庚四十八、辛七十二之相連比例兩數也。試將甲、戊、己、乙四數。求其相當比例之至小數。則得壬八、癸十二、子十八、丑二十七之四數。其甲與乙之比即同於壬與丑之比。而丙與丁之比。原同於甲與乙之比。則丙與丁之比。亦必同於壬與丑之比矣。其比例既同。則壬可以度盡丙。丑亦可以度盡丁。而癸與子亦必可以度盡庚與辛。壬、癸、子、丑各四倍之。即與丙、庚、辛、丁等。是四次可以度盡也。是丙、庚、辛、丁四數之比。皆與壬、癸、子、丑四數之比相同也。夫壬、癸、子、丑。原為甲、戊、己、乙連比例相當

甲 二四	乙 八一	戊 三六	己 五四
壬 八	丑 二七	癸 一二	子 一八
丙 三二	丁 一〇八	庚 四八	辛 七二

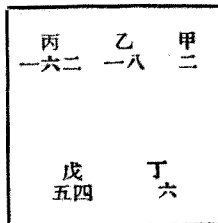
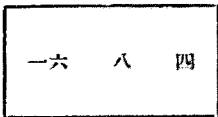
之小數。今丙、庚、辛、丁之比。既與之相同。則丙、庚、辛、丁、亦為相連比例之四數矣。既俱為相連比例數。則戊、己為甲、乙、兩數間之連比例數。庚、辛為丙、丁、兩數間之連比例數無疑矣。

第十八

凡相連比例三數。其第一數與第二數之間。有相連比例一數。則第二數與第三數之間。亦必有相連比例一數也。設如有甲二、乙十八、丙一百六十二。相連比例之三數。其甲數二與乙數十八之間。有相連比例之丁數六。則乙數十八與丙數一百六十二之間。亦必有相連比例之戊數五十四也。蓋甲與乙之比。同於乙與丙之比。今丁六為甲二之三倍。戊五十四亦為乙十八之三倍。則甲與丁之比。同於乙與戊之比。而丁六為乙十八之三分之一。戊五十四亦為丙一百六十二之三分之一。則丁與乙之比。亦同於戊與丙之比。因其比例皆同。故甲、丁、乙、戊、丙、為相連比例之五數。而丁、戊、兩數為甲與乙、乙與丙、三數間之相連比例數可知矣。

第十九

凡相連比例三數。其首數與末數。有用一數可以度盡者。有用一數不可以度盡者。如四、八、十六相連比例之三數。其首數四與末數十六。為彼此有一數可以度盡之數也。如四、六、九相連比例之三數。其首數四與末數九。為彼此無一數可以度盡之數也。然此兩種相連比例。雖有度盡度不盡之分。因其首數與

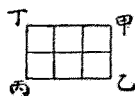


中數之比。同於中數與末數之比。故總謂之相連比例之數矣。蓋末數可用首數平分。即爲有度盡之連比例數。末數不可用首數平分。即爲無度盡之連比例數也。且首末兩數彼此有一數可以度盡者。此三數非相當比例之至小數。若首末兩數彼此無一數可以度盡者。此三數即爲相當比例之至小數也。如四、八、十六之三數。其首末兩數爲彼此有一數可以度盡之數。而中數亦必爲此。一數可以度盡之數。試用二以度之。則得二、四、八之連比例三數。或用四以度之。則得一、二、四之連比例三數。皆與四、八、十六之比例相同。而比四、八、十六之數爲小。故四、八、十六非相當比例之至小數也。如四、六、九之三數。其首末兩數爲彼此無一數可以度盡之數。故中數亦爲無一數可以度盡之數。既無一數可以彼此度盡。則爲相當比例數內之至小數也。明矣。

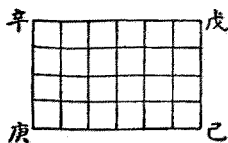
第二十

凡同式兩平方數。其間必有相連比例一數也。如有甲乙丙丁六。戊己庚辛二十四。同式兩平方數。此兩數之間。必有壬十二爲相連比例之一數焉。蓋甲乙丙丁。戊己庚辛。既爲同式平方數。則其每邊皆可爲比例。如甲乙二與甲丁三之比。同於戊己四與戊辛六之比。而甲乙二與戊己四之比。亦同於甲丁三與戊辛六之比也。今以甲丁三與甲乙二相因得六。甲丁三與戊己四相因得十

一六	八	四
八	四	二
四	二	一



壬二

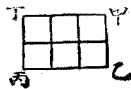


二、則六與十二之比，同於甲乙二與戊己四之比矣。又戊己四與甲丁三  
 相因得十二，戊辛六與戊己四相因得二十四，則十二與二十四之比，同  
 於甲丁三與戊辛六之比矣。夫甲丁三與戊辛六之比，原同於甲乙二與  
 戊己四之比，則六與十二之比，亦必同於十二與二十四之比矣。又若兩  
 正方數之間，亦必有相連比例之一數也。如有甲四、丙九兩正方數，此四  
 與九兩數之間，必有乙六為相連比例之一數焉。蓋兩正方數，其式既同，  
 故必有相連比例一數，且兩正方數之比例，同於其兩邊所作連比例隔  
 一位之比例。見幾何原本七卷第五節。今甲方邊為二，丙方邊為三，求其與  
 二、三相當連比例之第三數，則以二自乘得四，以三自乘得九，以二乘三  
 得六，此四與六、六與九之三數，即為與二、三相當之連比例數，而其首數  
 四與末數九，既與甲丙兩方數等，則中數六亦必為甲丙兩方數間之連  
 比例數矣。

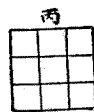
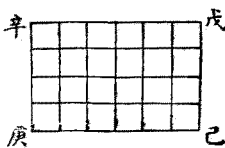
第二十一

凡同式兩平方數相乘，得數為正方數也。如有甲乙丙丁六，戊己庚辛二  
 十四，為同式兩平方數相乘，得一百四十四，即為正方數矣。蓋同式兩平  
 方數之間，原有相連比例一數，今此六與二十四之間，必有十二之一數，

二二二



乙六



一四四

一一



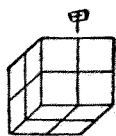
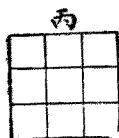
且連比例三率。以首末兩率相乘。與中率自乘之數等。則此六與二十四兩平方數相乘所得之一百四十四。即爲中率十二自乘之數矣。又若兩正方數相乘。得數亦仍爲正方數。其方根即原兩方根相乘之數也。如有甲四、丙九兩正方數。此兩數相乘得三十六。仍爲正方數。其方根爲六。亦即甲方根二與丙方根三相乘之數也。蓋此兩方數俱爲正方。即爲同式兩平方數矣。因其式同。故相乘亦仍得正方數也。凡數有先各自乘而後相乘者。有先相乘而後自乘者。其理無異。故其得數皆等。今以二自乘得四。以三自乘得九。復以四九相乘得三十六。此先各自乘而後相乘也。以二與三相乘得六。復以六自乘得三十六。此先相乘而後自乘也。且四與九積也。積與積乘仍得積。二與三根也。根與根乘仍得根。此亦理之必然者也。

第二十二

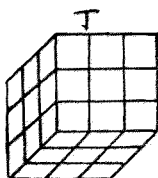
凡兩正立方數之間。必有相連比例之兩數也。如有甲八、丁二十七。兩正立方數。此八與二十七之間。必有乙十二、丙十八。爲相連比例之兩數焉。蓋兩正立方之比例。同於其兩邊所作連比例隔二位之比例。見幾何原本十卷第四節。今甲方邊爲二。丁方邊爲三。求其與二、三相當連



三六  
六



乙

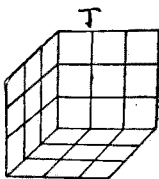


丙

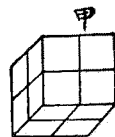
比例之第三、第四數。則以二自乘得四。以三自乘得九。以二與三相乘得六。此四、六、九爲連比例三數。又以二遞乘此四、六、九三數得八、十二、十八之三連比例數。復以三遞乘四、六、九三數得十二、十八、二十七之三連比例數。除相同者不計。其二十七卽連比例之第四數。則八與十二、十二與十八、十八與二十七。皆爲與二、三相當之連比例數。而其首數八與末數二十七。旣與甲、丁兩立方數等。則其中數之十二、十八。爲甲、丁兩立方數間連比例之兩數可知矣。

第二十三

凡兩正立方數相乘。得數仍爲正方數。而其方根卽原兩立方根相乘之數也。如有甲八、丁二十七。兩正立方數。此兩數相乘得二百一十六。仍爲正立方數。而其方根爲六。亦卽甲立方根二與丁立方根三相乘之數也。蓋此兩立方數俱爲正方。卽爲同式兩立方數矣。因其式同。故相乘亦仍得正立方也。凡數有先自乘再乘。而後以所得之數相乘者。有先以兩數相乘。而後以所得之數自乘再乘者。其得數皆等。故二自乘再乘得八。三自乘再乘得二十七。復以八與二十七相乘得二百一十六。此先各自乘再乘。而後以所得之數相乘也。以二與三相乘得六。復以六自乘再乘亦得二百一十六。此先以兩數相乘。而後以所得之數自乘再乘也。且八與二十七積也。以積乘積仍得積。二與三根也。以



二一六  
二一六



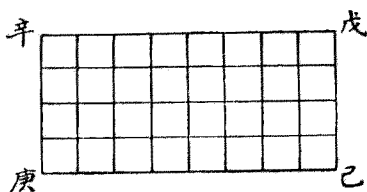
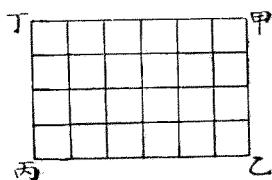
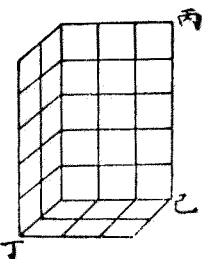
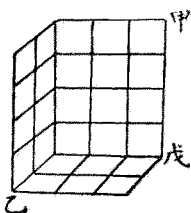
根乘根仍得根此又理之自然者也。

第二十四

凡兩平方數若一邊相等。則此兩平方之比例。同於其不等邊之比例也。如有甲丙、戊庚兩平方數。其甲丙平方之甲乙邊爲四。而戊庚平方之戊己邊亦爲四。甲丙平方之乙丙邊爲六。而戊庚平方之己庚邊爲八。則此兩平方數二十四與三十二之比。即同於其不等邊六與八之比也。蓋甲乙平方數二十四者。四之六倍。而戊庚平方數三十二者。四之八倍也。然則二十四與三十二之比。即同於六與八之比矣。二十四與三十二之比。既同於六與八之比。則兩平方數之比例。同於其不等邊之比例可知矣。

第二十五

凡兩立方數。其底積相等。則此兩立方之比例。同於其高之比例也。如有甲乙、丙丁兩立方數。其甲乙立方之戊乙底爲六。而丙丁立方之己丁底亦爲六。甲乙立方之甲戊高爲四。而丙丁立方之丙己高爲五。則此兩立方數二十四與三十之比。即同於其兩立

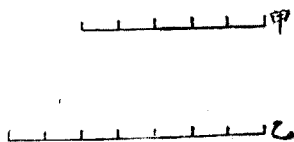
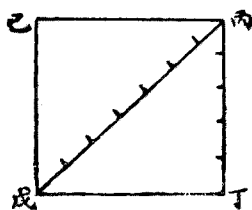


方之高四與五之比也。蓋甲乙立方數二十四者，六之四倍，而丙丁立方數三十者，六之五倍也。然則二十四與三十之比，即同於四與五之比矣。二十四與三十之比，既同於四與五之比，則兩立方數之比例，同於其高之比例可知矣。

第二十六

凡兩線、兩面、兩體用一度，如尺寸之屬，可以度盡者，此類之線、面、體，皆為有整分，可以度盡者也。設如有甲、乙兩線，甲線分為五分，乙線如甲線度分之，得七分無餘，則此二線即為一度彼此可以度盡者矣。若將此二線各為正方形，各為立方體，則其兩面、兩體亦皆為整分彼此可以度盡者也。至如兩線、兩面、兩體，不可以一度度盡者，此類之線、面、體，皆為無整分，可以度盡者也。如丙丁戊己方面，其丙丁邊線為五分，而丙戊對角線則為七分有餘，乃為彼此無度盡之數矣。蓋以丙丁邊之五分為度，則丙戊線得七分以得，或將丙戊線為七分整，而以其分為度，則丙丁線得五分不足。凡此類之線、面、體，皆為無整分彼此可以度盡之數也。

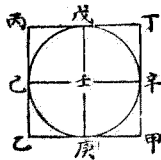
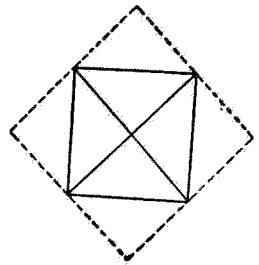
第二十七



凡正方形一邊線與對角線無一度可以彼此度盡者。蓋以本方積與對角線所成方積比之。必有一數非正方形數也。夫對角線自乘所作之方數。爲本方積之二倍。如本方積一。則對角線所作之方爲二。本方積四。則對角線所作之方爲八。此一與二、四與八之間無相連比例之整數。故一爲正方形數。則二非正方形數。四爲正方形數。而八亦非正方形數。二與八既非正方形數。則邊必有零餘而不能盡矣。或對角線所作方積爲四。則本方積爲二。對角線所作方積爲十六。則本方積爲八。此四與二、十六與八之間亦無相連比例之整數。故四爲正方形數。而二非正方形數。十六爲正方形數。而八又非正方形數。然則對角線所作方積固爲正方形數。而本方積復不能成正方形數。其邊必有零餘而不能盡矣。故凡正方形邊線與對角線斷無一度可以彼此度盡之理也。

### 第二十八

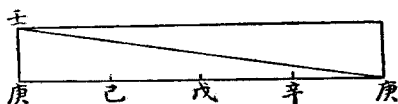
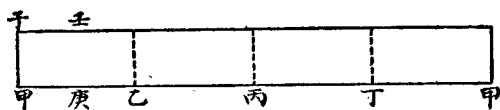
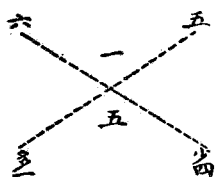
凡正方面與平圓面同徑者。其積之比例。同於其周圍邊線之比例也。如甲乙丙丁正方面。戊己庚辛平圓面。其戊壬庚之徑相等。則此方積與圓積之比例。同於方周於圓周之比例也。何以見之。以正方面之壬庚半徑爲高。甲乙、乙丙、丙丁、丁甲之全周爲底。作一子甲直角長方形。則此長方



形之積。比正方形之積。必大一倍。又以壬庚半徑爲高。庚己、己戊、戊辛、辛庚。全周爲底。作一壬庚直角長方形。則此長方形之積。比平圓形之積。亦必大一倍。凡直角三角形之小邊與圓形之半徑等。而三角形之大邊與圓形之全周等者。三角形之積與圓形之積等也。今此長方形與三角形同底同高。其積比三角形必大一倍。然則壬庚長方形。比圓形大一倍可知也。夫壬庚、子甲、兩長方形。既同以壬庚爲高。則一邊相等。一邊不等。則其積之比例。必同於其不等邊之比例。而全與全之比例。原同於半與半之比例。故兩長方形之比例。必同於庚庚與甲甲之比例。而方與圓之比例。亦必同於庚庚與甲甲之比例矣。甲甲卽方周。而庚庚卽圓周。然則方周與圓周之比例。豈非方積與圓積之比例乎。

第二十九

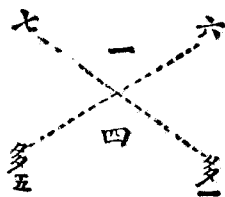
凡有不知之一大數。用兩小數度之不盡。而一有餘一不足者。其一多一少之數相併。以兩小數之較度之。卽得其度戊次之分。與大數之幾何也。如有一大數。用小數五度之多一數。用小數六度之。又少四數。則以多一與少四相加得五。以六與五



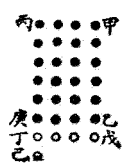
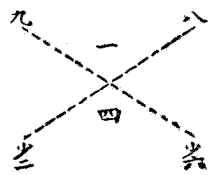
兩小數相減，餘一，爲較數除之，仍得五，卽知兩小數各度五次也。試排點以明之。其甲乙五卽小數五，丙丁六卽小數六，以甲乙五累五次，則爲甲乙己丙正方形二十五，多一爲丁，以丙丁六累五次，則爲甲戊丁丙長方三十，少四爲戊庚，於甲戊丁丙長方三十內，減去少數戊庚四爲二十六，於甲乙己丙正方形二十五，加入多數丁一，亦爲二十六，是知大數有二十六，用此五六兩小數各度五次之分也。以一除丁戊，一與戊庚四相加三丁戊五，以小數甲乙五與丙丁六相減餘一，以一除丁戊，五仍得五，與甲丙相等，故甲丙爲甲庚數二十六之五次數也。若以比例言之，其小數五與六相減所餘一者，乃度一次之較，而一多一少相併之戊丁五者，又爲度五次之較，故以所餘一與度一次之比，卽同於戊丁五與度五次之比，其比例既同，故其數亦相等也。

### 第三十

凡有不知之一大數，用兩小數度之不盡，而俱有餘，或俱不足者，其兩有餘，或兩不足之數俱相減，以兩小數之較度之，卽得其度幾次之分，與大數之幾何也。如有一大數，用小數六度之多五數，用小數七度之仍多一數，則以兩多數相減，餘四，以六與七兩小數相減，餘一，爲較數除之，仍得四，卽知兩小數各度四次也。試排點以明之。其甲乙六卽小數六，丙丁七卽小數七，以甲乙六累四次，則爲甲乙



庚丙方二十四，多五爲戊丁己。以丙丁七累四次，則爲甲戊丁丙方二十八，多一爲己。於甲乙庚丙方二十四，加入多數戊丁己五得二十九。於甲戊丁丙方二十八，加入多數己一，亦得二十九。是知大數有二十九。用此六七兩小數各度四次之分也。以己一與戊丁己五相減，餘戊丁四。以小數甲乙六與丙丁七相減，餘一。以一除戊丁四，仍得四。與甲丙相等。故甲丙爲度大數二十九之四次數也。若以比例言之，其兩小數相減所餘之一，乃度一次之較。兩多數相減所餘之戊丁四，乃度四次之較。故以一與度一次之比，卽同於戊丁四與度四次之比也。又如有不知之一大數，用小數八度之少二數，用小數九度之少六數，則以兩小數相減，餘四。以八與九兩小數相減，餘一，爲較數除之，仍得四。卽知兩小數各度四次也。今作點排之，其甲乙八卽小數八，丙丁九卽小數九。以甲乙八累四次，則爲甲乙己丙方三十二。丙丁九累四次，爲甲戊丁丙方三十六。丙少六數爲乙庚丁戊。於甲乙己丙方三十二內，減去少數乙庚丁戊爲三十。於甲戊丁丙方三十六內，減去少數乙庚丁戊六，亦爲三十。是知大數有三十。用此八九兩小數各度四次之分也。以乙庚二，與乙庚丁戊六相減，餘戊丁四。以小數甲乙八與丙丁九相減，餘一。以一除戊丁四，仍得四。與甲丙爲相等。故甲丙爲度大數三十之四次數也。其比例亦以兩小數相減所餘之較，比度一次之分，卽同於兩少





數相減所餘之較。比度幾次之分也。復有不知之一大數。用兩小數度之。一小數度之而盡。一小數度之而不盡。或有餘。或不足。卽以不盡之數。或有餘之數。或不足之數。用兩小數之較度之。卽得其度幾次之分。與大數之幾何。其理皆相同也。

### 第三十一

凡數自少至多。遞加之而各有定率者。謂之平加比例數也。夫平加之數。有每次遞加一者。爲挨次遞加之數。如一、二、三、四之類是也。有每次遞加二者。爲超位平加之數。如一、三、五、七之類是也。或遞加三。或遞加四。或遞加五六。皆是一理。有每次增一加者。爲按位相加之數。如一、三、六、十之類。其第二次加二。第三次加三。第四次加四是也。有每次增二加者。爲按位自乘之數。如一、四、九、十六之類。其第二次加三。第三次加五。第四次加七是也。復有一種倍加者。爲挨次倍加之數。如一、二、四、八之類。每次皆加二倍。又如一、三、九、二十七之類。每次皆加三倍是也。遞加之數雖多。按其條理求之。大抵不出此數端。今各列數分析於後。

### 第三十二

凡挨次遞加之數。將首數與末數相加。以位數乘之。所得之數折半。卽爲總數。

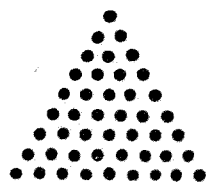
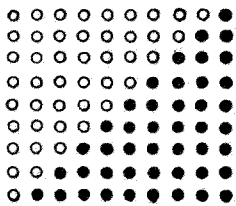
一	二	四	八
一	三	九	二七

一	三	六	一〇
一	四	九	一六

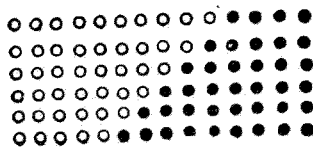
一	二	三	四
一	三	五	七

也。如一、二、三、四、五、六、七、八、九之九數。其每次所加之數爲一。將首數一與末數九相加得十。以位數九乘之得九十。折半得四十五。卽是此九數之總數也。何也。夫挨次遞加之數。爲等邊三角平面形。而兩數相乘。卽成四方形。今以位數九爲高。末數九爲底。相乘所得之正方形。其數八十一。較之總數則多。較之總數加倍之數又少。此所少卽一行之數。爰知位數與底數相乘所得之數。比總數加倍之數。少一行之數矣。既知挨次遞加之數爲三角形。而位數與底數相乘之數爲正方形。又知位數與底數相乘之數。幾等於總積加一倍之數。則合兩三角形之數。適當總積加一倍之方數矣。兩三角形所合。其底數必比高數大一數。故末數九爲底數者。加首數一。與高相乘。始成兩三角形所合之一方形焉。試將此九數作點排之。自上而下。上一下九。作爲直角三角形。復將此九數另作一直角三角形。合於原三角形之側。則成一長方形。其高卽位數。其底卽末數與首數相加之數。其積卽爲總數加一倍之數也。

一 二 三 四 五 六 七 八 九



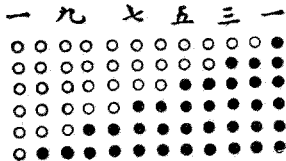
四 五 六 七 八 九



然則首數末數相加與位數相乘，為總數之倍數可知矣。又如四、五、六、七、八、九之六數，欲知其總數，亦以首數四與末數九相加得十三為底，以位數六乘之，得七十八為長方形，折半得三十九為總數。其理與前同。若但知首數為四，末數為九，不知位數，則視首數四以上至一虛幾位，今虛三位，故以三與末數九相減，餘六即位數也。何也？凡自一遞加之數，其末數即位數，今首數為四，計自一是少三位矣，故用三即為所少之位數，於末數內減去所少之位，即為今之所有之位數也。

### 第三十三

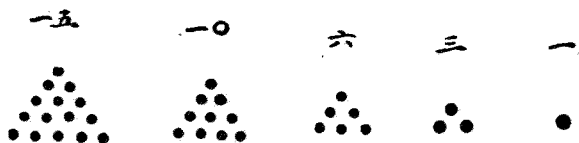
凡超位平加之數，亦將首數與末數相加，以位數乘之，得數折半為總數也。如一、三、五、七、九、十一之六數，每次皆加二數，將首數一與末數十一相加得十二，以位數六乘之，得七十二，折半得三十六，為此六位之總數也。蓋此超位平加之數，與挨次平加之理無異，其以首末兩數相加，與位數相乘者，總欲得此總數之倍數，以便折半取之也。試將此六位之數作六層排之，上一下十一，以首末數相加得十二，而以位數乘之，則六層皆為十二矣。上層本首數一加末數十一而成十二，下層本末數十一加首數一而成十二，是首數末數俱加倍矣。二層本第二數三加第五數九而成十二，五層本第五數九加第二數三而成十二，是第二數第五數俱加倍矣。三層本第三數五加第四數七而成十二，四層本第四數七加第三數五而成十二，是第三數第四數亦俱加倍矣。其每位之數皆倍，則相乘所得之數，豈非此總數之倍數乎？由此推之，每次加三



加四或加五加六以至加七加八加九之類。凡係超位平加之數。其理無不相同也。

### 第三十四

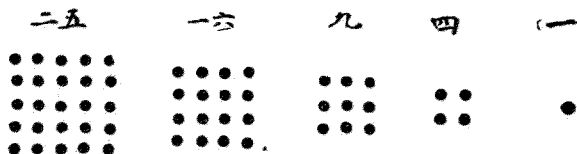
凡每次按位相加之數。將位數加二與末數相乘。取其三分之一。即為總數也。如一、三、六、一十、十五之五數。其每次皆按位加之。如第二位於第一位一上加二為三。第三位於第二位三上加三為六是也。將位數五加二與末數十五相乘。得一百零五。以三除之。得三十五。即是此五數之總數也。如或止有位數。或止有每一邊數。求總數。則以位數加一與位數相乘。得數。復以位數加二乘之。取其六分之一。即得總數也。若止有每一邊數。即以每一邊數加一與每邊數相乘。得數。復以邊數加以得之。取其六分之一。得數亦同。蓋每次按位相加之數。層疊排之。其式成等邊三角體。其末一數即三角體底面數。而位數即每一邊之數。今以位數加二為高。末數為底。相乘即成平行面之三稜體。凡同底同高之平行面體。為尖體之三倍。則此平行面三稜體內。必有等邊三角體之三倍。故以三除之。即得也。然必以位數加二為高者何也。以三三角體相湊。乃成上下相等之平行面體。其高必比原有之位數多二層。兩三角面相合。比原位數多一層。今三三角體相合。故必比原位數多二得也。如止以位數為高。即少二層之數。而不足三角體之分。故必以位數加二乘之也。其止有位數。或每一邊數。求總數。以位數加一與位數相乘。復以位數加二乘之。而用六除者何也。蓋位數即底面之每邊數。而



底面又爲等邊之三角面。今以邊數加一與邊數相乘。成長方面。爲三角體底面之倍數。卽如前挨次遞加數之兩三角面相合所成之長方形也。凡等高之體。底數倍者。積數亦倍。彼以位數加二乘三角體之底。所成之平行面三棱體。既爲等邊三角體之三倍矣。今以位數加二乘三角體之倍底。所成之平行面長方體。又必爲等邊三角體之六倍矣。以兩三棱體相合。卽成長方體。一三棱體。爲三角體之三倍。則兩三棱體。必爲三角體之六倍矣。故以六除平行面長方體之數。而得等邊三角體之數也。又或但知首數末數。而不知位數。則以末數倍之用一爲較數。開帶縱平方。卽得位數焉。蓋末數倍之者。卽兩三角面所合之長方也。其闊卽三角每邊數。其長比闊多一數。故用一爲較。開帶縱平方。則得三角每邊之數。既得每邊數。卽得位數矣。

### 第三十五

凡每次按位自乘相加之數。將位數折半。與末數相加。復以位數加一乘之。取其三分之一。卽爲總數也。如一、四、九、十六、二十五之五數。其每位之數。皆按位自乘之數。如第二位之四。卽二自乘數。第三位之九。卽三自乘數也。將位數五折半爲兩個半。與末數二十五相加。得二十七個半。復以位數五加一爲六乘之。得一百六十五。以三除之。得五十五。卽爲此五數之總數也。如止有位數。或止有每一邊數。求總數。則以位數加半個。與位數相乘。得數。復以位數加一乘之。取其三分之一。卽得總數也。若只



有每一邊數。則以每一邊數加半個。以每一邊數相乘。得數。復以每邊數加一乘之。取其三分之一。得數亦同。蓋按位自乘相加之數。層疊排之。其式成方底四角尖體。其末一數即四角尖體底面數。而位數即每一邊之數。今以位數折半與末數相加。則成長方面為底。再以位數加一為高乘之。即成平行面之長方體。凡同底同高之平行面體。為尖體之三倍。則此平行面長方體內。必有四角尖體之三倍。故以三除之。即得也。然必以位數折半與末數相加為底。復以位數加一為高者何也。蓋三四角尖體相湊。乃成上下相等之長方體。其底比正方面必多半行。其高必比原有之位數多一層。三等邊三角體相合。比三角體原位數多二層。今三方底四角尖體相合。比原位數止多一層。蓋因方底比三角底式大一倍。故四角體高。比三角體高所加之數減一半也。如止以末數為底。則底必少半行之數。止以位數為高。則高復少一層之數。必不足三四角尖體之分。故以末數加位數之半。而以位數加一乘之。適足三四角尖體之分也。其止有位數。或每一邊。求總數。以位數加半個。與位數相乘。復以位數加一乘之。而用三除之者何也。蓋位數即底面之每邊數。而底面又為正方面。今以邊數加半個。與邊數相乘。成長方面。比正方止多半行之分。其理即如求三角體總數。以邊數加一與邊數相乘。為三角體底之倍數也。以位數加一與底面相乘。成長方體。比方底四角尖體大三倍。即如求三角體總數。以位數加二與倍底相乘。為三角體之六倍也。彼三角體底倍之為長方。此四角體底數加半行。即為長方。彼三角體總數六倍。為同邊長方體。此四角體總數三倍。為同邊長方體。故三角體以邊數加一與邊數相乘者。今四角體以邊數加半與邊數相乘。而三角體以位數加二為高與倍底相乘者。今四角體以位數加一與本底加半行相乘。總之四角體底式。比三角體底式大一倍。故立法

時三角體加數幾何。而此四角體皆用其半也。又或但知首數末數而不知位數。則以末數開平方。即得位數焉。蓋末數本爲正方數。故開方即得每邊數。既得每邊數。則得位數矣。

### 第三十六

凡每次倍加之數。將末數與加倍之數相乘。減去首數。復以所加之分數除之。即得總數也。如二、四、八、十六、四數。爲每次以二倍之之數。欲求其總數。則以末數十六用二乘之。因以二倍之。故用二乘。得三十二。減去首數二。爲三十。復以其所加分數一除之。仍得三十。即此四數之總數也。蓋以二加倍之數。其末一數。比前幾位之總數。止多一首數。故二乘末數。則比末數多一分。仍多一首數。故減去首數二。而以一除之。即得總數也。又如三、九、二十七、八十一、四數。爲每次以三倍之之數。欲求其總數。則以末數八十一用三乘之。以三倍之。故用三。得二百四十三。減去首數三。爲二百四十。復以其所加分數二除之。得一百二十。即爲此四數之總數也。蓋以三加倍之數。其末一數。爲前幾數之倍數。而仍多一首數。今三乘末數。則比末數多二分。仍多一首數。三乘末數八十一。則爲八十一者有三。除本數八十一。仍爲多二分也。故必減去首數三。而以二除之。即得總數也。又如四、十六、六十四、二百五十六、四數。爲每次以四倍之之數。欲求總

二五六 六四 一六 四

八一 二七 九 三

一六 八 四 二

數。則以末數二百五十六用四乘之。以四倍之。故用四。得一千零二十四。減去首數四。爲一千零二十。復以其所加分數三除之。得三百四十。爲此四數之總數也。蓋以四加倍之數。其末一數爲前幾數之三。而仍多一首數。今四乘末數。則比末數多三分。仍多一首數。四乘末數二百五十六。則爲二百五十六者有四。除本數二百五十六。仍爲多三分也。故必減去首數四。而以三除之。卽得總數也。凡此倍加之數。不論加倍幾何。皆爲相連比例之數。故其比例皆同。如遞加二倍之數。其四與八之比。同於二與四之比。卽八與十六之比。亦皆同於二與四之比也。又如遞加三倍之數。其九與二十七之比。同於三與九之比。卽二十七與八十一之比。亦皆同於三與九之比也。卽遞加四倍之數。其十六與六十四之比。同於四與十六之比。卽六十四與二百五十六之比。亦皆同於一與四之比也。總之以二倍加者。皆一與二之連比例。以三倍加者。皆一與三之連比例。以四倍加者。皆一與四之連比例。卽推之以五倍加六倍加者。其理亦無不相同也。

一六		四	二
八一	二七	九	三
二五六	六四	一六	四



# 數理精蘊下編卷一

## 首部一

### 度量權衡

虞書同律度量衡。蓋度量衡皆本於律。而律爲萬事之本也。漢志曰。度者分寸尺丈引。所以度長短也。本起於黃鐘之長。以子穀秬黍中者一黍之廣度之。九十分黃鐘之長。一爲一分。十分爲寸。十寸爲尺。十尺爲丈。十丈爲引。而五度審矣。量者侖合升斗斛。所以量多少也。本起於黃鐘之侖。以子穀秬黍中者千二百實其侖。合侖爲合。十合爲升。十升爲斗。十斗爲斛。而五量嘉矣。權者銖兩斤鈞石。所以權輕重也。本起於黃鐘之重。一侖容千二百黍。重十二銖。兩之爲兩。十六兩爲斤。三十斤爲鈞。四鈞爲石。而五權謹矣。通考曰。律度量衡。並因秬黍散爲諸法。其率可通。外此則代不一名。度之異名者。如左傳注。方丈曰堵。三堵曰雉。長三丈。高一丈。易緯通卦驗。十馬尾爲一分。孫子算術曰。蠶所吐絲爲忽。十忽爲絲。十絲爲豪。十豪爲釐。十釐爲分。十分爲寸。十寸爲尺。十尺爲丈。小爾雅曰。跬。一舉足也。倍跬謂之步。四尺謂之仞。倍仞謂之尋。倍尋謂之常。五尺謂之墨。倍墨謂之丈。倍丈謂之端。倍端謂之兩。倍兩謂之疋。疋百謂之束。孔安國又以八尺爲仞。說文曰。人手却十分動脈爲寸口。十寸爲尺。周制寸咫尺尋常仞。皆以人體爲法。又曰。婦人手八寸謂之咫。周尺也。又曰。丈。丈夫也。周制以八寸爲尺。十尺爲丈。人長八尺。故曰丈夫。量之異名者。

如左傳齊舊四量。豆區鬴鍾。四升曰豆。各自其四以登於鬴。六斗四升。鬴十則鍾。六十四斗。論語注。十六斗曰庾。十六斛曰秉。孫子算術曰。六粟爲圭。十圭爲抄。十抄爲撮。十撮爲勺。十勺爲合。漢應劭又以四圭爲撮。孟康以六十四黍爲圭。小爾雅。一手之盛謂之溢。兩手謂之掬。掬四謂之豆。豆四謂之區。區四謂之釜。釜二有半謂之數。數二有半謂之缶。缶二謂之鍾。鍾二謂之秉。秉十六斛。衡之異名者。如漢志注。應劭曰。十黍爲壘。十壘爲銖。小爾雅。二十四銖曰兩。兩有半曰捷。倍捷曰舉。倍舉曰銖。銖謂之錢。二錢四兩謂之斤。斤十謂之衡。衡有半謂之秤。秤二謂之鈞。鈞四謂之石。石四謂之鼓。通考。唐劉承珪以忽萬爲分。絲則千。豪則百。釐則十。轉以十倍倍之。則爲一錢。黍以二千四百枚爲一兩。壘以二百四十銖以二十四。是則度量衡之名不一。故其爲制不同。而紛雜難用。然時易世殊。古今沿革。有必不可比而同者。故入算之際。不過取其大同者。以審不齊之物耳。要之度定於丈。量定於石。衡定於兩。大之而遞進於無窮。小之而遞析於不可測。爰悉其名目於左。以爲數學之所資焉。

度法丈以下曰尺。十寸。寸。十分。分。十釐。釐。十豪。豪。十絲。絲。十忽。忽。十微。微。十纖。纖。十沙。沙。十塵。塵。十埃。埃。十渺。渺。十漠。漠。以下皆以十析。模糊逡巡。須臾瞬息。彈指剎那。六德虛空。清淨。

量法石以下曰斗。十升。升。十合。合。十勺。勺。十撮。撮。十抄。抄。十圭。圭。六粟。粟。

衡法兩以下曰錢。十分。分。十釐。釐。十豪。豪。十絲。絲。十忽。忽。以下並與度法同。

凡度量衡自單位以上則曰十百千萬億兆京垓秭穰溝澗正載極恆河沙阿僧祇那由他。不可思議。無

量數。

自億以上有以十進者。如十萬曰億。十億曰兆之類。有以萬進者。如萬萬曰億。萬億曰兆之類。有以自乘之數進者。如萬萬曰億。億億曰兆之類。今立法從中數。

曆法則曰宮。三十度。度。六十分。分。六十秒。秒。六十微。微。六十纖。纖。六十忽。忽。六十芒。芒。六十塵。塵。

又有日。十二時。又爲二十四小時。時。八刻。又以小時爲四刻。刻。十五分。分以下與前同。

田法則曰頃。百畝。畝。積二百四十步。步。積二十四步。

里法則三百六十步。計一百八十丈。爲一里。古稱在天一度。在地二百五十里。今尺驗之。在天一度。在地二百里。蓋古尺得今尺之十分之八。實緣縱黍橫黍之分也。

石法二千五百寸。按漢志曰。斛重二鈞。又曰四鈞爲石。是二斛爲一石也。古尺斛積一千六百二十寸。爲今尺之八百六十寸有奇。倍之。得古尺石積三千二百四十寸。爲今尺之一千七百二十寸有奇。以權法準之。石重一百二十斤。求

其積。古尺應得三千一百一十寸。爲今尺之一千六百五十寸有奇。今之權法又加古一倍。則今尺石積應得三千三百寸

有奇。今現行斛積爲一千五百八十寸。石積爲三千一百六十寸。舊算書所載。數各不同。而多以二千五百寸爲率。總

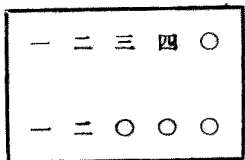
之古今尺度不同。古今量法亦不一。須先求其斗斛之積數。然後用其積數以比例之。方得密合。今設例從舊數。

### 命位

凡數視所命單位爲本。如度法命丈爲單位。則尺寸分釐皆爲奇零。命尺爲單位。則寸以下爲奇零。而丈則進而爲十。若命寸爲單位。則分以下爲奇零。而尺則進而爲十。丈則進而爲百。量法命石爲單位。則斗升合勺皆爲奇零。命斗爲單位。則升以下爲奇零。而石則進而爲十。若命升爲單位。則合以下爲奇零。而斗則進而爲十。石則進而爲百。衡法命兩爲單位。則錢分釐豪皆爲奇零。命錢爲單位。則分以下爲奇零。而兩則進而爲十。若命分爲單位。則釐以下爲奇零。而錢則進而爲十。兩則進而爲百。故凡列數。單爲一位。十爲二位。百爲三位。千爲四位。萬爲五位。如有數一萬二千三百四十五。則以單位爲末。向前列之。共有五位。即知此數首位是萬矣。至於曆法宮度分秒日時刻分之定位。則每項命兩位。如宮曰幾十幾宮。度曰幾十幾度。分曰幾十幾分之類。蓋因秒以六十而進。分以六十而進度。以三十而進宮。故常例一位即命一者。宮度時刻。則兩位命爲一等。而每一等有十單之別焉。此又命位之最要者也。

凡數未至單位者。必須作○以存其位。如有數一萬二千三百四十丈。則補作○以存單位。如下式。又如有一萬二千丈。則補作○○○以存百十單之位。如下式。

凡數單位後有奇零者。必作點於單位上以誌之。如有金三百四十五兩六錢七



分命兩爲單位。則於五上作點誌之。如下式。 又如有米六石五斗四升三合。命石爲單位。則於六上作點誌之。如下式。

凡列衆數幾多位。中有空者。必作○以存其位。如有數二萬零四百五十六。此中千位無數。故必作○於萬後百前以存其位。如下式。 又如有一萬零三十四。此中千位百位俱無數。故補作兩○於萬後十前以存其位。如下式。

凡宮度分秒。皆兩位列之。如有一十一宮二十度三十二分四十五秒。列位如下式。 又如日時刻分列位。日時分則兩位。刻止一位列之。如二十一日一十八時三刻零二分。列位如下式。

十	宮	十	度	十	分	十	秒
一	一	二	○	三	二	四	五

三	四	五	六	七
		六	五	四
				三

十	日	十	時	刻	十	分
二	一	一	八	三	○	二

二	○	四	五	六
一	○	○	三	四

加減乘除

算法以加減乘除爲八門。然究其終。雖至於千變萬化。總不出乎此。但用法不同耳。或應取其相和之數。則用加。或應取其相較之數。則用減。或應聚而總其積。則用乘。或應散而取其分。則用除。又有先加而後減者。或先減而後加者。有先乘而後除者。或先除而後乘者。又有加減與乘除先後互用者。古稱九章命算。自方田以至勾股。數有繁簡。理有顯晦。法有淺深。算有難易。然何一不從加減乘除而得。故淺言之則算法之八門。究言之實算法之全體也。

# 加法

加者合衆數而成總也。蓋數始於二，終於九，至十又復爲一，等而上之，十百千萬，以至億兆京垓，皆得名之爲一，即皆自一而加者也。今自一位言之，有自一至九之數，合前後之位言之，有單十百千萬之等，先自單數加起，成十則進前一位，仍爲一，以單數紀本位下，按次併之，即得總數。若夫宮度時刻斤兩之類，則不以十進，必足其所命之分，始進一位。如宮度足六十分進一度，足三十度進一宮，如時刻足十五分進一刻，足四刻進一時，足二十四時進一日。如斤兩足十六兩進一斤之類。至於定位，則以原數列於上，加數列於下，或大數列於上，小數列於下，按法依次對位列之，加畢所得之數，依原列之位定之。

設如有數一萬二千三百四十五，與六千七百八十九相加。法以原數橫列於上，加數橫列於下，按位相對加之。如九與五相對，單從單，八與四相對，十從十，百千萬數，俱各從其類，單位之五九相加得十四，進十於前位爲一，誌之。作一點於前位爲誌，如進二十則作二點，如進三十則作三點。本位紀四，書於橫格下。次十位之四八相加得十二，併所進之一爲十三，復進十於前位爲一，誌之。本位紀三，次百位之三七相加得十，併所進之一爲十一，復進十於前位爲一，誌之。本位紀一，次千位之二六相加得八，併所進之一爲九，於是本位紀九，至於萬位，獨有原數，無可加，則仍紀一，所加之數，共得一萬九千一百三十四，即總數也。

一	二	三	四	五
	六	七	八	九
一	九	一	三	四

設如有數一萬四千五百四十五與一萬七千三百五十相加。

法以原數橫列於上。加數橫列於下。加數內單位無數。故作○以存其位。仍按位相對加之。單位之五對○無可加。仍紀五。次十位之四五相加得九。本位紀九。次百位之五三相加得八。本位紀八。次千位之四七相加得十一。進十於前位爲一誌之。本位紀一。次萬位之一與一相加得二。併所進之一爲三。於是本位紀三。所加之數。共得三萬一千八百九十五。卽總數也。

設如有二十三丈零五寸六分與二丈八尺六寸二分相加。

法以原數橫列於上。加數橫列於下。原數內尺位無數。故作○以存其位。仍按位相對加之。分位之六二相加得八。本位紀八。次寸位之五六相加得十一。進十於前位爲一誌之。本位紀一。次尺位之八對○無可加。乃併所進之一爲九。本位紀九。次丈位之三二相加得五。本位紀五。至於十位獨有原數。無可加。則仍紀二。所加之數。共得二十五丈九尺一寸八分。卽總數也。

設如有糧四萬五千零三十一石與三千零九十石相加。

法以原數橫列於上。加數橫列於下。原數內百位無數。加數內百位單位俱無數。故各作○以存其位。仍按位相對加之。石位

十	丈	尺	寸	分
二	三	○	五	六
	二	八	六	二
二	五	九	一	八

萬	千	百	十	石
四	五	○	三	一
○	三	○	九	○
四	八	一	二	一

一	四	五	四	五
一	七	三	五	○
三	一	八	九	五



之一對○無可加仍紀一次十位之三九相加得十二進十於前位爲一誌之本位紀二次百位○與○無可加則以所進之一爲本位數故下紀一次千位之五三相加得八本位紀八至於萬位獨有原數無可加則仍紀四所加之數共得四萬八千一百二十一石即總數也。

設如有銀八兩六錢五分四釐與四兩零六分二釐相加。

法以原數橫列於上加數橫列於下加數內錢位無數故作○以存其位仍按位相對加之釐位之四二相加得六本位紀六次分位之五六相加得十一進十於前位爲一誌之本位紀一次錢位之六對○無可加乃併所進之一爲七本位紀七次兩位之八四相加得十二進十於前位爲一誌之本位紀二至於十位無數則紀所進之一爲一所加之數共得十二兩七錢一分六釐即總數也。

設如有田三區一區五百九十二畝三分一區八百五十五畝九分一區七百八十二畝五分相加。

法以田三區按位橫列相對加之分位之三九五相加得十七進十於前位爲一誌之本位紀七次畝位之二五二相加得九併所進之一爲十進十於前位爲一誌之本位紀○次十位之九五八相加得二十二併所進之一爲二十三進二十於前位爲二誌之本位紀三次百位之五八七相加得二十併所進之二爲二十二進二十

千	百	十	畝	分
	五	九	二	三
	八	五	五	九
	七	八	二	五
	二	三	〇	七
二	二	三	〇	七

十	兩	錢	分	釐
	八	六	五	四
	四	〇	六	二
一	二	七	一	六

於前位爲二誌之。本位紀二。至於千位無數。則紀所進之二爲二。所加之數。共得二千二百三十畝零七分。卽總數也。

設如有銀九宗。一宗八千八百五十二兩。一宗三千二百一十一兩。一宗五百二十兩。一宗九百三十八兩。一宗二千五百九十兩。一宗一千二百一十五兩。一宗二千五百一十八兩。一宗五千三百六十六兩。一宗四千三百七十二兩。相加。

法因九宗數繁難加。故分爲三次。三次復併爲一次。則得共數。其八千八百五十二兩。三千二百一十一兩。五百二十兩。相併則得一萬二千五百八十三兩。其九百三十八兩。二千五百九十兩。一千二百一十五兩。相併則得四千七百四十三兩。其二千五百一十八兩。五千三百六十六兩。四千三百七十二兩。相併則得一萬二千二百五十六兩。既得三總數。又將三數併之。得二萬九千五百八十二兩。卽九宗共數也。

設如九宮二十度三十分二十六秒。與六宮一十八度二十分五十秒相加。

法以原數橫列於上。加數橫列於下。其每項各命兩位。仍按各

八	六	二	一	五	二
六	七	三	三	三	二
二	五	二	二	四	一

二	一	一	五	八	三
一	二	〇	二	八	三
三	五	〇	五	八	三

三	三	六	八	二	一
四	五	五	五	二	一
二	八	二	五	二	一

八	〇	五	九	三	一
五	一	五	二	二	一
三	四	七	二	九	一

位相對加之。秒之單位六對。○無可加。仍紀六。秒之十位二五相加得七十。乃以六十秒進一分。誌於分之本位。秒之十位紀一。次分之單位○與○無可加。則以所進之一為本位數。故下紀一次分之十位三二相加得五。故下紀五。次度之單位八對。○無可加。仍紀八。次度之十位二一相加得三十。乃以三十度進一宮。誌於宮之本位。度之十位紀○。次宮之本位九六相加得十五。併所進之一為十六。因十二宮滿一周天。故逢十二去之。餘四。故下紀四。所加之數共得四宮八度五十一分一十六秒。即總數也。

設如一日一十五時二刻八分。與一日一十二時三刻九分相加。法以原數橫列於上。加數橫列於下。日時分則合兩位共加。刻則仍命以單位。蓋以四刻進一小時故也。分位之八與九相加得十七。十五分進一刻。故於刻之本位下誌一。餘二。故單位下紀二十位下紀○。次刻位之二與三相加得五。併所進之一為六。四刻進一時。故於時之本位下誌一。餘二。故本位紀二。次時之單位五二相加得七。併所進之一得八。時之十位一與一相加得二。共為二十八。二十四時進一日。故於日之本位下誌一。餘四。故時之單位下紀四十位下紀○。次日之單位一與一相加得二。併所進之一為三。故下紀三。所加之數共得三日四時二刻二分。即總數也。設如有物重三十四斤十五兩五錢。與二十一斤十四兩三錢相加。

日	十	時	刻	十	分
一	一	五	二	○	八
一	一	二	三	○	九
三	○	四	二	○	二

宮	十	度	十	分	十	秒
九	二	○	三	○	二	六
六	一	八	二	○	五	○
四	○	八	五	一	一	六

法以原數橫列於上。加數橫列於下。其錢位斤位與斤之十位。仍皆按位相對加之。兩位與兩之十位。則合其數共加之。兩以十六方進一斤。故合而加之。如列數有兩數無十數者。仍作〇以存十兩之位。錢位之五。三相加得八。本位紀八。兩位之原數十五。相加十四。相加。共得二十九。則進十六兩於前斤位。爲一誌之。其餘十三兩。則於兩位紀三十位紀一次。斤位之四。一相加得五。併所進之一。爲六。本位紀六。次十位之三。二相加得五。本位紀五。所加之數。共得五十六斤十三兩八錢。卽總數也。

減法

減者較衆數而得餘也。凡以少減多，以小減大，原有之數書於上，應減之數書於下，橫列必對其位，相減必從其類。如千減千百，減百之類。如或下數大於上數，不足減，則借前位之一以減本位。加法由後而進前，減法則借前而退後。其理一也。詳見設如中。前位作一點以誌之，既得本位，則前位所借之一，併於前數而為減數。然兩數相減，必先辨其多寡，首位必大於減數始可，其定位亦照原列之次為減餘位。

設如有數五萬六千七百八十九，內減四萬三千六百四十二。法自單位減起，單位之九減二餘七，故下紀七十位之八減四餘四，故下紀四百位之七減六餘一，故下紀一千位之六減三餘三，故下紀三萬位之五減四餘一，故下紀一。所減之數得一萬三千一百四十七，即餘數也。

設如有數二萬三千六百七十二，內減一萬六千四百八十一。法自單位減起，單位之二減一餘一，故下紀一十位之七減八，為下大於上，則借前位之一。前位下作一點為誌。作本位之十共十七減八餘九，故下紀九百位之六減四，併十位所借之一，則為六減五餘一，故下紀一千位之三減六，為下大於上，則借前位之一。前位亦作一點為誌。作本位之十共十三減六餘七，故下紀七萬位之

五	六	七	八	九
四	三	六	四	二
一	三	一	四	七

二	三	六	七	二
一	六	四	八	一
○	七	一	九	一

二減一併千位所借之一。則爲二減二恰盡。故下紀○。所減之數得七千一百九十一。即餘數也。

設如有六丈七尺八寸九分一釐。內減三丈四尺五寸九分九釐。

法自釐位減起。釐位之一減九。爲下大於上。則借前位之一。前位下作一點爲誌。作本位之十。共十一減九餘二。故下紀二分位之九減九併釐位所借之一。則爲九減十。亦爲下大於上。故復借前位之一。前位下作一點爲誌。作本位之十。共十九減十餘九。故下紀九寸位之八減五併所借之一。則爲八減六餘二。故下紀二尺位之七減四餘三。故下紀三丈位之六減三餘三。故下紀三。所減之數得三丈三尺二寸九分二釐。即餘數也。

設如有米六十五石四斗三升二合。內減四十六石二斗七升三合。

法自合位減起。合位之二減三。爲下大於上。則借前位之一。前位下作一點爲誌。作本位之十。共十二減三餘九。故下紀九升位之三減七併合位所借之一。則爲三減八。爲下大於上。則借前位之一。前位下作一點爲誌。作本位之十。共十三減八餘五。故下紀五斗位之四減二併升位所借之一。則爲四減三餘一。故下紀一石位之五減六。爲下大於上。則借前位之一。前位下作一點爲誌。作本位之十。共十五減六餘九。故下紀九十位之六減四併所借之一。則爲六減五餘一。故下紀一。所減之數得十九石

十	石	斗	升	合
六	五	四	三	二
四	六	二	七	三
一	九	一	五	九

丈	尺	寸	分	釐
六	七	八	九	一
三	四	五	九	九
三	三	二	九	二

一斗五升九合。即餘數也。

設如有銀十五兩三錢六分七釐。內減九兩二錢三分四釐。

法自釐位減起。釐位之七減四餘三。故下紀三分位之六減三餘三。故下紀三錢位之三減二餘一。故下紀一兩位之五減九。爲下大於上。則借前位之一。前位下作一點爲誌。作本位之十。共十五減九餘六。故下紀六十位之一減兩位所借之一。恰盡。

故下紀○。所減之數得六兩一錢三分三釐。即餘數也。

設如七宮一十八度二十七分五十二秒。內減九宮二十一度三十五分四十三秒。法自秒位減起。秒之單位二減三。爲下大於上。則借前位之一。前位下作一點爲誌。作本位之十。共十二減三餘九。故下紀九。秒之十位五減四。併所借之一。則爲五減五。恰盡。故下紀○。分之單位七減五。餘二。故下紀二。分之十位二減三。爲下大於上。則借度位之一。爲六十分。度位下作一點爲誌。六十分與原二十分。共爲八十分。內減三十分。餘五十分。故下紀五。度之單位八減一。併所借之一。則爲八減二。餘六。故下紀六。度之十位一減二。爲下大於上。則借宮位之一。爲三十度。宮位下作一點爲誌。三十度與原十度。共爲四十度。內減二十度。餘二十度。故下紀二。宮之單位七減九。併所借之一。則爲七減十。爲下大於上。則外借一周天爲十二宮。十二宮與原七宮。共爲十九宮。內減十宮。餘九宮。故下紀九。所減之數得九宮二十六度五十二分九秒。即

十	宮	十	度	十	分	十	秒
七	九	一	八	二	七	五	二
九	二	一	一	三	五	四	三
九	二	六	五	二	〇	九	

十	兩	錢	分	釐
一	五	三	六	七
〇	九	二	三	四
〇	六	一	三	三

餘數也。

設如一十二日二十二時三刻零九分內減一十一日二十三時三刻十分。

法自分位減起。日位刻位俱各按單位相減。其分位時位則合兩位減之。分位之九減十爲下大於上。則借刻位之一爲十五分。刻之本位下作一點爲誌。十五分與原九分共爲二十四分。內減十分。餘十四分。故分之單位紀四分。分之十位紀一刻。之本位三減三。併所借之一。則爲三減四。爲下大於上。則借時位之一爲四刻。時之單位下作一點爲誌。四刻與原三刻共爲七刻。內減四刻。餘三刻。故本位下紀三。時位之二十二減二十三。併所借之一。則爲二十二減二十四。爲下大於上。則借日位之一爲二十四時。日之本位下作一點爲誌。二十四時與原二十二時共爲四十六時。內減二十四時。餘二十二時。故時之單位下紀二。時之十位下亦紀二。日位之二減二。併所借之一。則爲二減二。恰盡。故下紀〇。日之十位之一減一。恰盡。故亦紀〇。所減之數得二十二時三刻一十四分。卽餘數也。

設如有物十五斤零四兩八錢內減十二斤十二兩三錢。

法自錢位減起。錢位之八減三餘五。故下紀五。兩位之四減二。似非下大於上。然原數兩之十位爲〇。十六兩爲一斤。故作〇於斤後兩前。以存十兩之位。而減數兩之十位爲一。則爲四兩減十二兩。亦爲下大於上。故借斤位之一爲十六兩。斤位下作一點爲

十	兩	十	兩	錢
一	五	〇	四	八
一	二	一	二	三
〇	二	〇	八	五

十	日	十	時	刻	十	分
一	二	二	二	三	〇	九
一	一	二	三	三	一	〇
〇	〇	二	二	三	一	四



誌·十六兩與原四兩共爲二十兩內減十二兩餘八兩故兩之單位紀八十位紀○斤位之五減二併所借之一則爲五減三餘二故下紀二十位之一減一恰盡故下紀○所減之數得二斤零八兩五錢卽餘數也。

### 因乘

因乘者生數也。以數生數。有生不已之義焉。凡有幾數。彼此按次加之。爲得總數。然所加之次數多。則必至於煩而無統。此因乘之所以立也。因者一位相因而得。如二因三而成六。四因二而成八也。乘者多位相乘而得。如兩位以上。則各以每位所因之數。而又層累以積之也。其法以原數爲實。乘數爲法。實列於上。法列於下。必使法實相當。如千對千百對百十對十單對單之類。按法乘實。合而加之。爲所得數。定位之法。視其法實所命之單位。後有奇零與否。如無奇零。則實中所命之單位相對。卽法尾之數。若有奇零。則法實相乘者。法實之一位。統得數之二位。如單位後奇零有一位。則截得數之二位。奇零有二位。則截得數之四位。向前爲單位計之。法實相乘。再以法乘者。卽自乘再乘也。法實之一位。統得數之三位。如單位後奇零有一位。則截得數之三位。奇零有二位。則截得數之六位。向前爲單位計之。是故得數以一位論者。則爲單千百千之類。以兩位論者。則爲自乘之類。以三位論者。則爲自乘再乘之類。錯綜交互。用法不一。必須臨題詳審。求其無誤。始爲得之。具見設如於左。

設如有三人。每人賞緞二疋。問共得幾疋。

法以三人爲實。列於上。二疋爲法。列於下。以二因三。得六。卽書於本位下。定位以實之三人卽是單位。而法又止一位爲疋。今得數之六與實之單位相對。故知六是疋位。得共數爲六疋也。

設如有八人。每人賞米六石。問共得幾石。

法以八人爲實列於上。六石爲法列於下。以六因八得四十八。將四書於前位下。前位爲十位。故十數紀前位下。八書於本位下。本位爲單位。故單數紀本位下。定位以實之八人。卽是單位。而法亦止一位爲石。今得數之八。與實之單位相對。卽知八是石位。而四在石之前一位。故知四是十位。得共數爲四十八石也。

設如有一十二人。每人賞銀五兩。問共得幾兩。

法以一十二人爲實列於上。五兩爲法列於下。命兩位與人之單位相齊。先以五乘二得一十。將十進前一位作一點誌之。紀○於本位下。此數無單。故下紀○。次以五乘一仍得五。併所進之一爲六。故書六於本位下。一雖爲十位。而以五乘一。則一下爲本位矣。共得六○。定位因實之單位。對法之兩位。而得數之○。與實之單位相對。故知○爲兩位。而六爲十位。得共數爲六十兩也。

設如有二十四人。每人賞銀三兩六錢。問共得幾兩。

法以二十四人爲實列於上。三兩六錢爲法列於下。命錢位與人之單位相齊。乃以法之六。遍乘實之二四。其所得之單位數。卽對本法位下書之。六乘四得二十四。將二十進前一位作二點誌之。四書於本位下。次以六乘二得一十二。將十進前一位爲一書之。二併所進之二爲四。故書四於本位下。二雖爲十位。而以六乘二。則二下卽爲

$$\begin{array}{r} 八 \\ \hline 六 \\ \hline 四八 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 一 \\ \hline 二 \\ \hline 五 \\ \hline 六〇 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 二 \\ \hline 四 \\ \hline 三 \\ \hline 六 \\ \hline 一 \\ \hline 四 \\ \hline 四 \\ \hline 七 \\ \hline 二 \\ \hline 八 \\ \hline 六 \\ \hline 四 \end{array}$$

本位矣。法之六既與實乘畢，次以法之三遍乘實之二四，其所得之單位數，即對本法位下書之。三乘四得一十二，將十進前一位作一點誌之。二書於本位下，次以三乘二得六，併所進之一為七，故書七於本位下。法之三又與實乘畢，乃用加法併之，共得八六四。總書於下，定位以實尾之四係四人為單位，而法尾為錢，今得數末位之四與實之單位相對，即知四是錢位，二位為兩，三位為十兩，得共數為八十六兩四錢也。

設如有田三百六十畝，每畝納糧三升五合，問共得若干。

法以三百六十畝為實，列於上，三升五合為法，列於下，實之單位無數，則補○以存其位，命合位與畝之

單位相齊，乃以法之五遍乘實之三六○，其所得之單位數，即對本法位下書之。五乘○仍為○，故下紀

○五乘六得三十，將三十進前一位作三點誌之。本位紀○五乘三得一十五，將十

進前一位為一書之。五併所進之三為八，故書八於本位下。又以法之三遍乘實之

三六○，其所得之單位數，即對本法位下書之。三乘○仍為○，故下紀○三乘六得

一十八，將十進前一位作一點誌之。八書於本位下。三乘三得九，併所進之一為十

故進前一位為一書之。本位紀○乘畢用加法併之，共得一二六○。總書於下，定

位以實尾之○係單位，法尾是合，今得數末位之○與實之單位相對，即知末位之

○是合，前一位是升，向前數至首位得十石，因知共數為一十二石六斗也。

設如有田三頃五十畝，每頃納糧一石二斗三升，問共得若干。

○	五	○	○
六	三	○	○
三	八	八	六
—	一	○	○
—	一	○	二



乘〇〇仍得〇〇故下紀〇〇次以八乘六得四十八將四十進前一位作四點誌之八書於本位下次以八乘三得二十四將二十進前一位爲二書之四併所進之四爲八故書八於本位下又以法之九遍乘實之三六〇〇先以九乘〇〇仍得〇〇故下紀〇〇次以九乘六得五十四將五十進前一位作五點誌之四書於本位下次以九乘三得二十七將二十進前一位作二點誌之七併所進之五爲十二又進前一位爲一併所誌之二爲三故前位書三本位書二又以法之九遍乘實之三六〇〇先以九乘〇〇仍得〇〇故下紀〇〇次以九乘六得五十四將五十進前一位作五點誌之四書於本位下次以九乘三得二十七將二十進前一位作二點誌之七併所進之五爲十二又進前一位爲一併所誌之二爲三故前位書三本位書二乘畢用加法併之共得三五九二八〇〇定位因題言每兩價銀九兩九錢八分爰以兩爲單位其後二位則爲奇零奇零既有二位則統得數之四位故從後截去四位而第五位定爲兩第六位爲十第七位爲百因知共數爲三百五十九兩二錢八分也

設如有物二十六斤求兩數

法以二十六斤爲實列於上以每斤十六兩爲法列於下乃以法之六遍乘實之二六其所得之單位數卽對本法位下書之六乘六得三十六將三十進前一位作三點誌之六書於本位下次以六乘二得一十二將十進前一位爲一書之二併所進之三爲五故書五於本位下又以法之一遍乘實之二六其所得之單位數卽對本法位下書之一乘六仍得六故下書六次以一乘二仍得二故下書二乘畢用加法併之得四一六定位

六	六	六
二	一	一
一	二	四
<hr/>		
四	一	六
<hr/>		
二	五	六
<hr/>		
一	二	四

因實尾是單位。而法尾又是兩位。故得數末位之六。即為單位為兩。而前一位為十。又前一位為百。因知得數為四百一十六兩也。

又法斤求兩身加六。名為定身加法。蓋以十六兩之十為一。乘之仍得原數。故以本身加六。即得。如二十六斤。則從首位加起。二六加一十二。將一對實之十位二對實之單位下書之。又六六加三十六。則三對實之單位而六對實之單位後一位書之。用加法相併得四一六。定位以原斤數之後一位為兩。今得數末位之六。在原斤數之後一位。即知是兩。因知得數為四百一十六兩也。

設如周天三百六十度。每度六十分。問共得若干分。

法以三百六十度為實列於上。以六十分為法列於下。因單位俱無數。故各作○以存其位。乘實之三六○。仍皆得○。故各紀○於各位下。又以法之六。遍乘實之三六○。其所得之單位數。即對本法位下書之。六乘○。仍得○。故本位下紀○。次以六乘六得三十六。將三十進前一位作三點誌之。六書於本位下。次以六乘三得一十八。將十進前一位作一點誌之。八併所進之三為十一。十又進前一位為一。併所誌之一為二。故前位書二。本位書一。乘畢用加法併之。共得二一六○。定位以實之末位是單位。法之末位是分。今求分數。故得數末位之○。即是分之單位。向前數至首位得萬。因知其數為二萬一千六百分也。

乃以法之○。遍

二	六	六
一	三	六
四		
一	六	六

三	六	○	○
六	六	○	○
○	○	○	○
○	○	○	○
○	○	○	○
二	一	六	六
二	一	六	六

設如有驗時儀墜子來一秒往一秒今十五分間共得來往幾秒。

法以十五分爲實列於上以每分六十秒爲法列於下乃以法之○遍乘實之一五仍皆得○故各紀○於本位下又以法之六遍乘實之一五其所得之單位數即對本法位下書之六乘五得三十將三十進前一位作三點誌之本位紀○次以六乘一仍得六併所進之三爲九故書九於本位下定位以實之末位是單位法之末位是秒今求秒數故得數末位之○即是秒之單位其前一位爲十又前一位爲百因知其數爲九百秒也。

設如一尺二寸自乘求積以本數乘本數故爲自乘。

法以一尺二寸互爲法實列於上下乃以法之二遍乘實之一二其所得之單位數即對本法位下書之。二乘二得四故下書四次以二乘一仍得二故下書二又以法之一遍乘實之一二其所得之單位數即對本法位下書之一乘二仍得二故下書二次以一乘一仍得一故下書一乘畢用加法併之共得一四四定位因自乘數成平方面其每一尺正方面容積一百寸故百寸爲尺百尺爲丈俱以兩位命之今實之末位爲寸即命爲單位法之末位是寸得數末位之四與實之單位相對即知爲寸位向前第二位爲十寸第三位爲百寸既以百寸爲尺即知得數爲一尺四十四寸也若命尺爲單位則於尺上命位其後一位爲奇零故於得數內從末截去二位以第三位爲尺蓋自乘乃兩數相乘兩數既各有一位零數故截去兩

$$\begin{array}{r}
 \text{一五} \\
 \text{一六} \quad \text{〇〇} \\
 \hline
 \text{〇〇} \\
 \text{九〇} \\
 \hline
 \text{九〇} \quad \text{〇〇}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{一二} \\
 \text{一一} \quad \text{二四} \\
 \hline
 \text{一一} \\
 \text{一一} \quad \text{二四} \\
 \hline
 \text{一一} \quad \text{二四} \quad \text{二四}
 \end{array}$$



位算也。今得數有三位。即知首位爲一尺。首位既爲尺。末位又既爲寸。則中一位爲十寸可知矣。設如一尺二寸自乘再乘求積。以本數乘本數。所得之數。又以本數乘之。故謂之自乘再乘。

法先以一尺二寸互爲法實。按法自乘得一尺四十四寸。又以一尺四十四寸爲實。復以一尺二寸爲法。按法乘之。共得一七二八。定位因自乘再乘數成立方體。其每一尺正方體容積一千寸。故以千寸爲尺。千尺爲丈。俱以三位命之。今實之末位爲寸。即命爲單位。法之末位是寸。得數末位之八與實之單位相對。即知爲寸位。向前第二位爲十寸。第三位爲百寸。第四位爲千寸。既以千寸爲一尺。即知得數爲一尺七百二十八寸也。若命尺爲單位。則於尺上命位。其後一位爲奇零。故於得數內從未截去三位。以第四位爲尺。蓋自乘再乘。乃以三數相乘。三數既各有一位零數。故截去三位算也。今得數有四位。即知首位爲一尺。首位既爲尺。末位又既爲寸。則中二位爲十寸百寸可知矣。

		二二四	四二八	八
	一一	二二四	四二八	八
	一一	二二四	四二八	八
	一一	二二四	四二八	八
	一一	二二四	四二八	八
	一一	二二四	四二八	八
	一一	二二四	四二八	八
	一一	二二四	四二八	八

歸除

歸除者分數也。以數分數。有各得均齊之義焉。凡有兩數。以此數減彼數。減得幾次。卽爲所得。然所減之次數多。則益至於紛而難紀。此歸除之所以立也。歸者一位歸之而得。如歸作幾分而均分之也。除者多位除之而得。蓋以所得之數與法相因。而於實內除去也。其法以原數爲實。橫列於下。除數爲法。橫列於上。法之小於實者。法之首位與實之首位列齊。法之大於實者。則法比實退一位。看實足法幾倍。卽爲得數。自法之末位上紀所得之數。既得數。乃以所得與法相因。書於實下。與實相減。餘者卽爲次商實。依次按法歸除。以恰盡爲度。減餘者。乃所得與法相因之數。在實中所減者。其數每與法位相對。卽初商之餘實也。至於實位所餘之數。則每次取下一位。續於減餘之末。以爲每商之實。若實無餘位而歸除仍未盡者。則按位添○以紀之。如

實不足法之一倍者。則得數爲○。定位之法。以法中所命單位。與原實相對之數。爲所得之首位數。若實之位數少於法者。則作幾○位以補足法。然後位數一覽卽明。至於一位歸除捷法。則竟以原數書於上。就身用幾分分之。得數書於下。其定位仍照原列之位定之。具見設如於左。

設如有緞六疋。令三人分之。問每人得幾疋。

法以六疋爲實。列於下。三人爲法。列於上。今法與實俱爲單位。而法比實小。故列法與實相齊。爰看實足法幾倍。今足二倍。故書二於法上。乃以得數之二與法之三。相因得六。書於實下。與實相減恰盡。卽得數爲二疋也。定位因法之三人。卽爲單位。而

$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 3 \overline{) 6} \\ \underline{6} \\ 0 \end{array}$
-----------------------------------------------------------------------------------

實亦止一位爲正。是法之單位與實之正位相對。故得數爲二正也。

設如有米六十四石。令八人分之。問每人得幾石。

法以六十四石爲實。列於下。八人爲法。列於上。因法之八。大於實之首位之六。故將法退一位書之。爰看實足法幾倍。今足八倍。故書八於法上。乃以得數之八。與法之八相。因得六十四書於實下。其所得單位數。卽對得數之本位下書之。與實相減恰盡。卽得數爲八石也。定位因法之八人。卽爲單位。而與實之石位相對。故得數爲八石也。

設如有銀三百四十三兩。令七人分之。問每人得幾兩。

法以三百四十三兩爲實。列於下。七人爲法。列於上。因法之七。大於實之首位之三。故將法退一位書之。爰看實足法幾倍。今實前兩位爲三四。足法之四倍。何以知其足法之四倍。蓋實之三十四內。足法之七之四倍。爲二十八。如法之七之五倍。則爲三十五。比實則大矣。故書四於法上。乃以得數之

四。與法之七相。因得二十八。書於實下。其所得單位數。卽對得數之本位下書之。後做此。與實相減餘六。次取實數所餘之三。書於減餘之後。共六三爲次商實。爰看實之六三。足法幾倍。今足九倍。故書九於得數之次。乃以得數之九。與法之七相。因得六十三。書於次商實之下。與實相減恰盡。卽得數爲四十九兩也。定位因法之七人。卽爲單位。而與實中之兩之十位相對。故得數首位卽爲十。而次位爲兩。是知每人得四十九兩也。

$$\begin{array}{r} \hline 88 \\ 66 \overline{) 8840} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline 9 \\ 32 \overline{) 343} \\ \hline \end{array}$$

設如有絲四十五斤。共織得緞九十二丈二尺五寸。問每斤織得若干。

法以九十二丈二尺五寸爲實列於下。四十五斤爲法列於上。因法之首位四。小於實之首位九。故列法與實相齊。爰看實之九二。足法之二倍。故書二於法上。乃以得數之二。與法之四五相因得九。書於實下。與實相減餘二。次取實數所餘之二。書於減餘之後。共二二爲次商實。今實之二二。不足法之四五之一分。故得數爲〇。乃紀〇於上。復取實數所餘之五。書於二二之後。共二二五爲三商實。次

商實之二二。不足法之四五。故再取實之一位續書於下。謂之三商實者。〇位爲次商故也。爰看實之二二五。足法之五倍。故書五於上。乃以得數之五與法之四五相因得二二五。書於實下。與實相減恰盡。即得數爲二丈零五寸也。定位因法之五斤爲單位。而與實之丈位相對。故得數首位卽爲丈。等而下之爲尺爲寸。是知每斤織得二丈零五寸也。

設如有田四十五畝六分。共納穀五十七石。問每畝納穀若干。  
法以五十七石爲實列於下。四十五畝六分爲法列於上。因法之首位四。小於實之首位五。故列法與實相齊。又因實之位數少於法。故補作〇。以足其位。爰看實之五七。〇足法之一倍。故書一於法上。乃以得數之一。與法之四五六相因。仍得四五六。書於實下。與實相減餘一一四。此後實無餘位。故添書一。〇於減餘之末。爲次商實。爰看一一四。〇足法之二倍。故

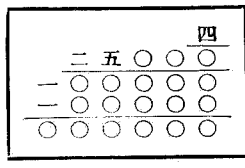
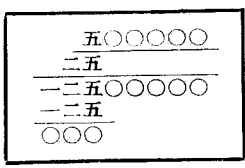
二	〇	五
四	五	五
九	二	五
九	〇	五
〇	二	五
〇	二	〇
〇	二	〇

一	二	五
四	五	〇
五	七	〇
五	五	〇
四	一	〇
一	九	〇
〇	二	〇
〇	二	〇
〇	二	〇

書二於上。乃以得數之二與法之四五六相因得九一二。書於實下。與實相減。餘二二八。又添書一〇於減餘之末。爲三商實。爰看二二八〇。足法之五倍。故書五於上。乃以得數之五與法之四五六相因得二二八〇。書於實下。與實相減。恰盡。卽得數爲一石二斗五升也。定位因法之五畝爲單位。而與實之石位相對。故得數首位爲石。是知每畝納穀一石二斗五升也。

設如有丹砂一兩。價值錢二萬五千文。問每錢一文該得丹砂幾何。  
 法以丹砂一兩爲實。列於下。錢二萬五千爲法。列於上。因法之首位二。大於實之首位一。故將法退一位。列之。又因法之百位十位單位俱無數。故各作〇以存其位。而實亦作五〇位。以補足法。爰看實足法之四倍。故書四於法上。乃以得數之四與法之二五〇〇〇相因得一〇〇〇〇。書於實下。與實相減。恰盡。卽得數爲四絲也。  
 定位因法之末位〇係單位。故從實之首位一兩。數至法之單位相對之位爲絲。是知每錢一文得丹砂四絲也。

設如有銀一千二百五十兩。買果賞人。每果一枚。價二釐五豪。問買果若干。  
 法以一千二百五十兩補五〇位爲實。列於下。因法之單位是豪。故補五〇位與法相對。蓋命實爲一千二百五十萬豪也。二釐五豪爲法。列於上。爰看實之一二五。足法之五倍。故書五於法上。乃以得數之五與法之二五相因得一二五。書於實下。與實相減。恰盡。然實後尚有五〇位。故得數後亦添五〇位爲五十萬也。定位因法實俱至豪位。



止。卽命豪爲單位。爰從實之末位。數至法之單位相對之位爲十萬。是知得果爲五十萬枚也。設如有物重三百八十四兩。問得斤數若干。

法以三百八十四兩爲實列於下。每斤一十六兩爲法列於上。爰看實之三。八。足法之二倍。故書二於法上。乃以得數之二。與法之一。六。相因得三十二。書於實下。與實相減餘六。次取實數之四。書於減餘之後。共爲六四。因足法之四倍。故書四於上。乃以得數之四。與法之一。六。相因得六十四。書於實下。與實相減恰盡。卽得數爲二十四斤也。定位因法之兩數爲單位。而與實之十位相對。故知得數爲二十四斤也。

又法名爲斤稱流法。其法曰一退六二五。如一萬兩則爲六百二十五斤。一千兩則爲

六十二斤半。一百兩則爲六斤二分半。皆以十遞析。退者退一位命之也。二一二二五。如二萬兩則爲

一千二百五十斤。二千兩則爲一百二十五斤。二百兩則爲十二斤半。不言退者。對位命之也。餘做

此。三一八七五。四二五。五三一。二五。六三七五。七四三七五。八五。九五六二五。如三

百八十四兩。則列於上。先以三之一八七五通之。爰將一對三之本位以下依次向後

書之。次以八之五通之。將五對八之本位書之。次以四之二五通之。將二對四之本位

書之。五則列於次位。三數書畢。乃以加法併之。得數爲二十四斤。定位因兩之前一位

爲斤。今得數之四在兩之前一位。故四卽爲斤位。而又前一位則爲十位。是知得數爲二十四斤也。

設如周天三百六十度。分十二宮。問每宮得若干度。

四	四	四	四
二	六	八	二
一	三	三	〇
〇	〇	〇	〇

五	〇	五	〇
四	七	〇	二
八	八	五	〇
二	一	四	〇
〇	〇	〇	〇

法以三百六十度爲實列於下。一十二宮爲法列於上。爰看實之三十六。足法之三倍。故書三於法上。乃以得數之三。與法之一二相因得三六。書於實下。與實相減恰盡。然實後尚有○位。故得數後亦添一○位。卽得數爲三十度也。定位因法之二爲單位而與實之十位相對。故得數首位爲十。而每宮爲三十度也。

設如一日之中。得一千四百四十分。以九十六刻分之。問每刻得若干分。

法以一千四百四十分爲實列於下。以九十六刻爲法列於上。爰看實之一四四。僅足法之一倍。故書一於法上。乃以得數之一。與法之九六相因。仍得九六。書於實下。與實相減。餘四八。次取實之○位。書於減餘之後。共爲四八○。因足法之五倍。故書五於上。乃以得數之五。與法之九六相因。得四八○。書於實下。與實相減恰盡。卽得數爲一十五分也。定位因法之六爲單位。而與實之十位相對。故得數首位爲十。而每刻爲一十五分也。

一位歸除捷法

設如有銀三十四萬五千六百七十八兩。作二分之。問每分若干。

法以三十四萬五千六百七十八兩爲實列於上。視首位之三。足二分之幾何。

今足一倍。故下書一。一二除二餘一。乃移於下位爲十。下位作點爲誌。併下位

之四。共爲十四。足二分之七倍。故下書七。二七除一十四恰盡。次五足二分之二倍。故下書二。二二除四

		一	五	
		九	六	
—		四	四	○
		九	六	
	○	四	八	○
		四	八	○
		四	八	○
		○	○	○

		三	○
—		三	六
		三	六
		三	六
		○	○

餘一移於下位爲十併下位之六共爲十六足二分之八倍故下書八二八除一十六恰盡次七足二分之三倍故下書三二三除六餘一移於下位爲十併下位之八共爲十八足二分之九倍故下書九二九除一十八恰盡定位因得數仍原數之位故知每分得一十七萬二千八百三十九兩也

設如有銀一十二萬三千四百五十三兩作九分之間每分若干

法以一十二萬三千四百五十三兩爲實列於上因首位之一小於九分故移於下位爲十併下位之二共爲十二足九分之一倍故下書一九九除九餘三移於下位爲三十併下位之三共爲三十三足九分之三倍故下書三三九除二十七餘六移於下位爲六十併下位之四共爲六十四足九分之七倍故下書七七九除六十三餘一移於下位爲十併下位之五共爲十五足九分之一倍故下書一一九除九餘六移於下位爲六十併下位之三共爲六十三足九分之七倍故下書七七九除六十三恰盡定位因得數比原數退一位故知每分得一萬三千七百一十七兩也

三	四	五	六	七	八
一	七	二	八	三	九

一	二	三	四	五	三
一	三	七	一	七	



# 數理精蘊下編卷二

## 首部二

### 命分

凡歸除分至最細而可以恰盡無餘者。謂之無奇零數。若分至最細而屢除不盡者。謂之有奇零數。其奇零若略去之。則不能復還原數。此命分之所以立也。其法命爲分母分子。分母者卽除數也。分子者卽除不盡之數也。凡不盡之數。得分母中之幾分者。卽命爲幾分之幾。是以命分之一法。正所以濟歸除之所不逮也。

設如有銀十一兩。命三人分之。問每人得若干。

法以三人分銀十一兩。每人得銀三兩。仍餘二兩。再以三人分之。每人得六錢六分六釐六豪。如是每得六而仍餘二數不盡。故立命分法。以三人爲分母。所餘二兩爲分子。命爲每人得三兩又三分兩之二。蓋將每兩剖作三分。其所餘二兩則共剖作六分。三人分之。每人得二分。故命爲三分兩之二也。如因三分兩之二。求知原銀數。則以三人與分子二分相乘得六分。蓋每人得二分。則三人共得六分也。以六分用分母三分歸之。得二兩。蓋初分一兩爲三分。故終收三分爲一兩也。再加入三人所得整數共九兩。一人三兩。三人共得九兩。則得十一兩以合原數也。

設如有銀一百八十七兩。命十八人分之。問每人得若干。

法以十八人分銀一百八十七兩。每人得銀十兩。仍餘七兩。分之不盡。則以十八人爲分母。所餘七兩爲分子。命爲每人得一十兩。又十八分兩之七。蓋將每兩剖作十八分。其所餘七兩。則共剖作一百二十六分。十八人分之。每人得七分。故命爲十八分兩之七也。如因十八分兩之七。求知原銀數。則以十八人與分子七分相乘。得一百二十六分。蓋每人得七分。則十八人共得一百二十六分也。以一百二十六分。用分母十八分歸之。得七兩。蓋初分一兩爲十八分。故終收十八分爲一兩也。再加入十八人所得整數共一百八十兩。一人十兩。十八人共得一百八十兩。則得一百八十七兩。以合原數也。

## 約分

約分者。以所命之分。約之以就整分也。蓋命分是隨其數之多寡。全而紀之。而約分則即其多寡之數。從而約之。以求簡易焉。其法以分子分母兩數輾轉相減。務期減餘兩數相同。是爲度盡兩數之一數。乃以此數爲一分。以除分母得幾分者。即約分母爲幾分。又除分子得幾分者。即約爲分母幾分中之幾。凡諸法中有帶分者。皆由約法而得。故設例於此。所以明帶分之根也。

設如古曆歲實命爲三百六十五日。又一百分日之二十五。今以法約之。求相當最小數。

法置日分一百。以餘分二十五減之。餘七十五分。再以二十五減之。餘五十分。再以二十五減之。亦餘二十五分。兩數齊等。即以相等之數二十五。轉除日分一百。得四。即爲四分。又以二十五除餘分二十五。得一。即爲一分。乃百分日之二十五。約爲四分之一。是歲實共得三百六十五日。又四分日之一也。蓋將一日剖作四分。而得其四分之一也。凡約分法。以分母分子相減。必得相等之數。然後用之。蓋因此數可以度盡分母。又可以度盡分子。故也。今以相等之數二十五爲一分。則日分一百有四倍二十五。故爲四分。而餘分二十五。又恰足一分之數。故爲一分。一百與二十五之比。即同於四與一之比。是四與一。即一百與二十五之相當最小數也。凡分母分子輾轉相減。不得相等之數。終減至於一。是分母分子俱無一數。可以度盡之數。即不用約分。用命分誌之可也。

設如有銀二百一十兩。命一百四十七人分之。每人得銀一兩。仍餘六十三兩。不盡。以法約之。求相當最

小數。

法置一百四十七人。以餘銀六十三減之。餘八十四。再以六十三減之。餘二十一。又置六十三。轉以二十一減之。因減數大於原數。又不得兩數齊等。故以二十一轉減之。餘四十二。再以二十一減之。亦餘二十一。則兩數齊等。卽以相等之數二十一。轉除一百四十七人。得七。卽爲七分。又以二十一除銀六十三兩。得三。卽爲三分。乃一百四十七人分餘銀六十三兩。約爲七分之三。是每人得銀一兩又七分兩之三也。蓋將每兩剖作七分。而得其七分之三也。此法以一百四十七人與六十三兩。輾轉相減。得相等之數二十一。是二十一可以度盡一百四十七人。又可以度盡六十三兩。故也。旣以二十一爲一分。則一百四十七有七倍二十一。故爲七分。六十三有三倍二十一。故爲三分。一百四十七與六十三之比。卽同於七與三之比。是七與三卽一百四十七與六十三之相當最小數也。

通分

凡奇零數目不以十遞析者難以立算則用通分如斤通為兩宮通為度度通為分之類是也又有整數而帶零分者則必通之以從其類如化整為零收零作整之類是也或有零分而分母不同者則必通之以同其母如互乘之類是也通分之法立然後奇零數目得以歸有餘齊不足而帶分之法皆根於此故為另設加減乘除之法以明其義焉

加法

凡奇零數相加兩分母同者即併兩分子為得數若相加之數大於母數則於所得數內減去母數為一整數紀其餘為零數  
設如有九分丈之七 一丈分為九分而得其七分也 與九分丈之五 一丈分為九分而得其五分也 相加求總數

法以九分之七與九分之五左右列之將兩分子七與五相加得一十二因子數大於母數乃於一十二內減去母數九為一整數餘三為零數即得整數一丈零九分丈之三為相加之數也此法因兩分母同為九分而兩分子亦同為九分中之零分故徑併兩零分之七與五得一十二又以母數九分收為一丈蓋初以一丈分為九分今滿九分即收為一丈也其所餘三亦仍為九分

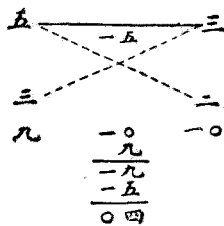
九 五	七 五 — 二 · 九 — 〇 三	九 七
--------	-------------------------------------------	--------

中之三分。故得一丈零九分丈之三。爲兩零分之共數。此分母相同之加法也。如以真數明之。九分丈之七。是將一丈分爲九分。得其九分中之七分。一丈分爲九分。則每一分得一尺一寸一分一釐有餘。九分中之七分。則爲七尺七寸七分七釐有餘也。九分中之五分。則爲五尺五寸五分五釐有餘也。兩數相加。共得一丈三尺三寸三分三釐有餘。卽一丈零九分丈之三也。蓋一尺一寸一分一釐有餘。既爲九分中之一分。則三尺三寸三分三釐有餘。卽九分中之三分也。如以九分除三分。卽得三尺三寸三分三釐不盡之數。是九分與一丈之比。卽同於三分與三尺三寸三分有餘之比也。

凡奇零數相加。兩分母不同者。則用互乘法。以兩分母相乘爲共母數。再以前分母乘後分子。又以後分母乘前分子。以所得兩子數相加爲共子數。紀於共母數之下。爲共零數。

設如有三分丈之二。一丈分爲三分。而得其二分也。與五分丈之三。二丈分爲五分。而得其三分也。相加求總數。

法以兩分母三五相乘得一十五。爲共母數。再以前分母三乘後分子三。得九。又以後分母五乘前分子二。得十。將兩得數相加得十九。爲共子數。因子數大於母數。乃於十九內減去共母數十五。爲一整數。餘四爲零數。卽得整數一丈零十五分丈之四。爲相加之數也。此法用互乘者。本爲齊其分母也。夫以兩分母相乘得十五者。乃以兩分母俱變爲十五分也。因分母不同。難以相加。故變爲同等。以前分母三乘後分子三。得九者。乃以後分子變爲十五分之九也。又以後分母五乘前分子二。得十者。是又以前分子亦變爲十





共得三錢七分五釐。即八分兩之三也。蓋一錢二分五釐。為八分中之一分。今三錢七分五釐。即八分中之三分也。如以八分除三分。即得三錢七分五釐。是八分與一兩之比。即同於三分與三錢七分五釐之比也。

設如有六分石之五。與三分石之二。相加求總數。

如依前法。將六分之五折半為三分之二。則兩分母雖同。而分子卻有奇零。若將三分之二加一倍。作六分之四。變少從多。則與六分之五兩分母相同。乃徑併兩分子五與四得九。因子數大於母數。乃於九內減去母數六。為一整數。餘三為零數。即得整數一石零六分石之三。為相加之數也。此法三分之二變為六分之四者。乃分母分子各加一倍之比例也。凡變分母分子。或加或減。務期所變之分數。與原分數比例相同。使其兩分母同。而兩分子可併也。此條與上條用加減雖各異。而齊其分母以加之則同也。如以真數明之。六分石之五。是將一石分為六分。則每一分得一斗六升六合六勺六抄六撮有餘。今得五分。即八斗三升三合三勺三抄三撮有餘也。又三分石之二。是將一石分為三分。其二分為六斗六升六合六勺六抄六撮有餘。今變為六分石之四。是將一石分為六分。其四分亦為六斗六升六合六勺六抄六撮有餘也。兩數相加共得一石四斗九升九合九勺九抄九撮有餘。收為五斗即一石零六分石之三也。蓋六分為一石。則三分即五斗也。

凡子母數有三四種相加者。其分母分子俱不同。則用互乘以齊其分母。按前法加之。三種者。以第一數與第二數依前互乘法相加得數。又與第三數依前互乘法相加。四種者。以第一數第二數互乘相加得數。與第三數互乘相加

六	四
四五	九六
六	五
	三

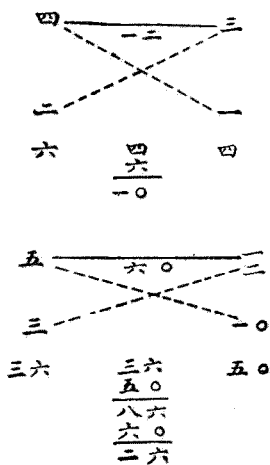


得數。復與第四數互乘相加。如兩分母相同者。即併其兩分子。而與所餘之分母不同者。用互乘以加之。又或有兩分母相乘後所得之數。與所餘之分母相同者。則直以所得之分子。與所餘之分子相加為得數。即不用互乘矣。

設如有三分斤之一。又四分之二。又五分之三。相加求總數。

法以前兩分子分母。按互乘法相加。得十二分之十。以兩分母三與四相乘得十二為共母數。以前分母三乘後分子二得六。又以後分母四乘前分子一得四。相加得十為共子數。是為十二分之十。乃以十二分之十。與第三子母分用互乘法相加。得六十分斤之八十六。以第三分母五。與前兩分母互乘所得之十二相乘。得六十為共母數。以前兩分母所得十二。乘第三分子三。得三十六。又以第三分母五。乘前兩分子所得十。得五十。相加得八十六。為共子數。是為六十分斤之八十六。因子數大於母數。

乃於共子數八十六內減去共母數六十為一整數。餘二十六為零數。即得一斤零六十分斤之二十六為總數也。凡子母分有凶種五種相加者俱做此。如以真數明之。三分斤之一。是將一斤分為三分。其一分即五兩三錢三分三釐有餘也。四分之二。是將一斤分為四分。則每一分為四兩。今得二分。即八兩也。五分之三。是將一斤分為五分。則每一分為三兩二錢。今得三分。即九兩六錢也。三數相加。共



得二十二兩九錢三分三釐有餘。內收十六兩爲一斤。餘六兩九錢三分三釐有餘。即六十分斤之二十六也。蓋以十六兩分爲六十分。每分得二錢六分六釐有餘。今六兩九錢三分三釐有餘。有二十六倍二錢六分六釐有餘。即爲二十六分也。

設如有五分丈之三。又四分丈之一。又五分丈之一。相加求總數。

法因五分丈之三與五分丈之一。兩分母相同。故直併其兩分子三與一爲五分丈之四。再以五分丈之四與四分丈之一。依互乘法相加。得二十分丈之二十一。以前分母五與後分母四

相乘。得二十爲共母數。以前分母五乘後分子一得五。又以後分母四乘前分子四得十六。

相加得二十一。是爲二十分丈之二十一。因子數大於母數。乃於其子數二十一內

減去其母數二十爲一整數。餘一爲零數。即得一丈零二十分丈之一爲總數也。如以真數明之。其五分丈之三。即六尺也。其四分丈之一。即二尺五寸也。其五分丈之一。即二尺也。三數相加得一丈零五寸。即一丈零二十分丈之一。蓋一丈分爲二十分。每

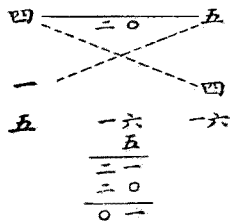
分得五寸也。

設如有三分兩之二。又四分兩之三。又十二分兩之四。相加求總數。

法以三分之二與四分之三。用互乘法相加。得十二分兩之十七。以前分母三與後分母四相乘。得十二爲共母數。以前分母三乘後分子三得九。又以後分母四乘前分子二得八。相加得十七。是爲十二分兩之十七。此所得之十二

分兩之十七。與第三分母相同。即以前兩分所得共子十七。與後一分子四相加得二十一。是爲十二

分兩之二十一。因子數大於母數。乃於其子數二十一內減去其母數十二爲一整數。餘九爲零數。即得



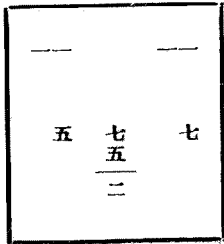
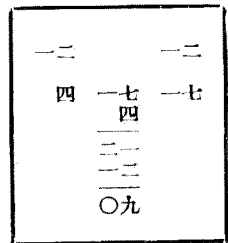
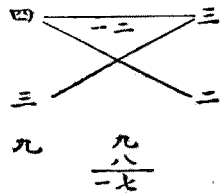
一兩零十二分兩之九爲總數也。如以真數明之。其三分兩之二。即六錢六分六釐有餘也。其四分兩之三。即七錢五分也。其十二分兩之四。即三錢三分三釐有餘也。三數相加得一兩七錢四分九釐有餘。收作七錢五分。即一兩零十二分兩之九。蓋十二分兩之九。即七錢五分也。

減法

凡奇零數相減兩分母同者。即將兩分子相減爲餘數。

設如有十一分丈之七。減十一分丈之五。求餘數。

法以十一分丈之七。與十一分丈之五。左右列之。將兩分子五與七相減。餘二。即得十一分丈之二爲餘數也。蓋因兩分母同爲十一分。則兩分子亦同爲十一分中之零分。故徑將兩分子相減。餘二。亦仍爲十一分中之二分。是以定爲十一分丈之二。此分母相同之減法也。如以真數明之。十一分丈之七。是將一丈分爲十一分。則每一分得九寸零九釐零九絲有餘。其中之七分。即六尺三寸六分三釐六豪三絲有餘也。其中之五分。即四尺五寸四分五釐四豪五絲有餘也。相減餘一尺八寸一分八釐一豪八絲有餘。即十一分中之二分也。蓋九寸零九釐零九絲有餘爲一



分。則一尺八寸一分八釐一豪八絲有餘即爲二分也。如以十一分除二分。亦得一尺八寸一分八釐一豪八絲不盡之數。是十一分與一丈之比。即同於二分與一尺八寸一分八釐一豪八絲有餘之比也。

凡奇零數相減兩分母不同者。則用互乘法。以兩分母相乘爲共母數。再以前分母乘後分子。又以後分母乘前分子。以所得兩子數相減爲餘數。

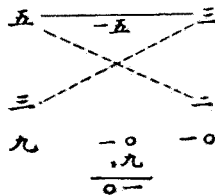
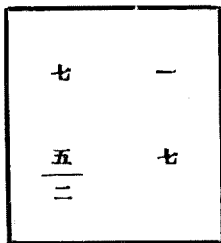
設如有三分丈之二。減五分丈之三。求餘數。

法以兩分母三五相乘得一十五爲共母數。再以前分母三乘後分子三。得九。又以後分母五乘前分子二。得一十。將所得兩分子相減餘一。即得十五分丈之一爲餘數也。此法用互乘齊其分母。將三分丈之二變爲十五分丈之十。將五分丈之三變爲十五分丈之九。兩分母既同爲十五分。故兩分子十與九相減餘一。爲十五分丈之一也。此分母不同之減法也。如兩分母不同。可以加減之使其相同者。減之亦如加法中例。故不重設。如以真數明之。其三分丈之二。即六尺六寸六分六釐有餘也。其五分丈之三。即六尺也。相減餘六寸六分六釐有餘。即十五分丈之一也。蓋一丈分爲十五分。每一分得六寸六分六釐不盡也。

凡零數與整數相減者。即以分子與分母相減爲餘數。

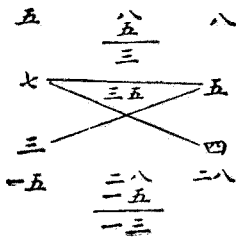
設如有米一石。內減七分石之五。求餘數。

法以整數一石變爲七分爲分母。與分子五相減餘二。即得七分石之二爲



餘數也。蓋將一石分爲七分。而於此七分內減去五分。則所餘卽七分石之二。此整數中減零數法也。如以真數明之。將一石分爲七分。則每一分得一斗四升二合八勺五抄七撮有餘。其五分卽七斗一升四合二勺八抄五撮有餘也。與一石相減。餘二斗八升五合七勺一抄四撮有餘。卽七分石之二也。蓋一斗四升一合八勺五抄七撮有餘爲一分。則二斗八升五合七勺一抄四撮有餘自爲二分也。

凡整數帶零分相減者。將兩零分用互乘法變爲同母。然後減之。設如有銀八兩零五分兩之四。內減五兩零七分兩之三。求餘數。法以八兩之零數五分之二。與五兩之零數七分之三。用互乘法。兩分母七五相乘得三十五爲共母數。再以五兩之分母七乘八兩之分子四。得二十八。爲八兩所變之子數。又以八兩之分母五乘五兩之分子三。得十五。爲五兩所變之子數。乃以八兩五兩二整數相減餘三兩。以兩子數二十八與十五相減餘十三。卽得三兩又三十五分兩之十三。爲餘數也。蓋既將兩子數變爲同母。則八兩者爲八兩零三十五分兩之二十八。五兩者爲五兩零三十五分兩之十五。分母既同。故以子數相減而得餘數。此整數帶零分相減之法也。如以真數明之。其八兩零五分兩之四。卽八兩八錢也。其五兩零七分兩之三。卽五兩四錢二分八釐五豪七絲有餘也。相減餘三兩三錢七分一釐四豪二絲有餘。其三兩爲整數。其三錢七分一釐四豪二絲有餘。卽三十五分中之六三分也。蓋將一兩分爲三十五分。則每一分得二分八釐五豪七絲有餘。其十三分卽三錢七分一釐四豪二絲有餘也。



凡子母數三四種相減者。其分母分子俱不同。則用互乘以齊其分母。按前法減之。如兩分母相同者。即將其兩分子相減。而與所餘之分母不同者。用互乘以減之。又或有兩分母相乘後所得之數與所餘之分母相同者。則直以所得之分子與所餘之分子相減。即得餘數。其理與加法同。設如有銅九斤零八分斤之七。內減二斤零四分斤之一。又減八分斤之三。

求餘數。

法以九斤內減去二斤餘七斤爲整數。乃以八分斤之七與四分斤之一。用互乘法。將八分斤之七變爲三十二分斤之二十八。將四分斤之一變爲三十二分斤之八。兩數相減。餘三十二分斤之二十。又以三十二分斤之二十與第三零數八分斤之三。用互乘法。將三十二分斤之二十變爲二百五十六分斤之一百六十。將八分斤之三變爲二百五十六分斤之九十六。兩數相減。餘二百五十六分斤之六十四。合前整數共得七斤又二百五十六分斤之六十四。爲餘數也。如用約法。則爲七斤零四分斤之一。蓋二百五十六爲四倍六十四。今以六十四爲一分。則二百五十六自得四分也。其餘幾種零分內有兩分母相同。或兩分母乘出之數與餘一分母相同。俱照同分母之例減之。故不再設。或零分有四種五種者。亦俱倣此。此幾種零分相減之法也。如以真數明之。其九斤零八分斤之七。即九斤十四兩也。內減二斤零四分斤之

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc}
 八 & & 三 \\
 \hline
 & 二五六 & \\
 \hline
 三 & & 二〇 \\
 \hline
 九六 & & 一六〇 \\
 \hline
 & 九六 & \\
 \hline
 & 〇六四 & 
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc}
 二 & & 九 \\
 \hline
 & 九二七 & \\
 \hline
 四 & & 八 \\
 \hline
 & 三二 & \\
 \hline
 一 & & 七 \\
 \hline
 八 & & 二八 \\
 \hline
 & 二八八 & \\
 \hline
 & 二〇 & 
 \end{array}
 \end{array}$$

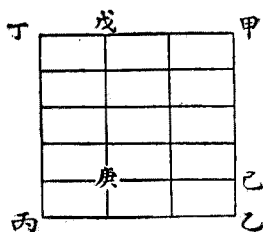
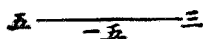
一。是減去二斤四兩。又減去八分斤之三。是又減去六兩也。餘七斤零四兩。即七斤零四分斤之一也。蓋一斤分爲四分。則每一分得四兩。今七斤零四兩。故謂七斤零四分斤之一也。

### 乘法

零分與零分相乘者。兩分母兩分子各相乘。所得之數。即乘出之分也。

設如有三分丈之二。與五分丈之四相乘。問得幾何。

法以兩分母三五相乘得十五分。爲乘出之分母。又以兩分子二四相乘得八分。爲乘出之分子。即定爲十五分丈之八。爲所得之數也。今以圖明之。如甲乙爲一丈。而甲丁亦爲一丈。作一甲乙丙丁正方形。將甲丁分爲三分。甲乙分爲五分。內共容十五分。即共母數。乃兩分母三與五乘出之數也。其甲丁之三分之二。爲甲戊。甲乙之五分之四。爲甲己。二數相乘。得甲己庚戊長方形。內容八分。即共子數。乃兩分子二與四乘出之數也。甲乙丙丁正方與甲己庚戊長方形相較。即知甲己庚戊長方爲甲乙丙丁正方中之十五分之八矣。此零分乘零分之法也。如以真數明之。其三分丈之二。即六尺六寸六分六釐有餘也。其五分丈之四。即八尺也。相乘得五十三尺三十三寸三十三分三十三釐有餘。即十五分丈之八也。蓋一丈正方。內容百尺。分爲十五分。則每一分得六尺六寸六分六釐六



釐有餘。今得其八分。即五十三尺三十三寸三十三分三十三釐有餘也。

零分與整數相乘者。分子乘整數而以分母歸之。即所得之數也。

設如有七人。每人賞銀五分兩之二。問共得若干。

法以分子二與七人相乘得十四。以分母五歸之。得二兩八錢。即七人共得之數也。蓋五分兩之二。是一兩分爲五分而得其二分也。一人得二分。則七人必共得十四分。既以一兩分爲五分。今滿五分收爲一兩。故以五歸十四得二兩八錢爲共數。此零分與整數相乘之法也。

整數帶零分與整數乘者。先將整數俱通爲零分。相乘得數。以分母自乘之數除之。即得。

設如有整數二丈又四分丈之一。與八丈相乘。問得幾何。

法以整數二丈。用分母四通爲八分。加入分子

一。共得九分。又以整數八丈。用分母四通爲三

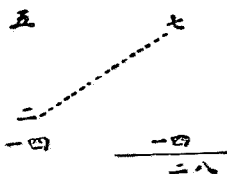
十二分。乃與九分相乘得二百八十八分。以分

母四自乘之一十六除之。得一十八。即定爲一

丈正方形一十八。爲所得之數也。此法蓋以一丈

二丈	四	一
八丈	〇	〇
三二		
九		

三	二
九	
二八八	





通爲四分。是四四自乘之數。始合一丈自乘之數。故一十六者。卽分母四自乘之數。未乘之先。旣以四通之。故相乘之後。必以四四自乘之數收之。乃得眞數。此整數帶零分與整數相乘之法也。如以眞數明之。其二丈又四分丈之一。卽二丈二尺五寸。與八丈相乘。卽得一十八丈也。

整數帶零分與零分乘者。先將整數通爲零分。相乘得數。以分母自乘之數除之。卽得。

設如有整數二丈又五分丈之四。與零分五分丈之三。相乘。問得幾何。  
 法以整數二丈。用分母五通爲十分。加入分子四。得十四分。乃與零分分子三。相乘得四十二。以分母五自乘之。二十五除之。得一六八。卽定爲一丈正方一。又一尺正方六十八。爲所得之數也。此法蓋以一丈通爲五分。是五五自乘之數。始合一丈自乘之數。故以二十五除之。又二丈之零分五分之四。與所乘之零分五分之三。爲同母。故用此法。如兩零分分母不同。則先將兩零分用互乘法變爲同母。然後用所變之分母化

$$\begin{array}{r} \text{二丈五} \\ \text{四} \\ \hline \text{一四} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{一四三} \\ \hline \text{四二} \end{array}$$

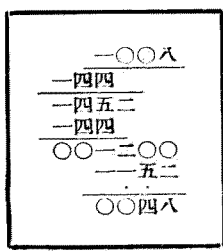
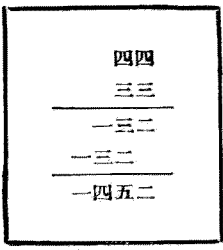
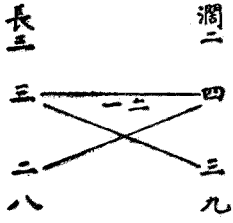
$$\begin{array}{r} \text{一六八} \\ \hline \text{二五} \\ \text{四二五} \\ \hline \text{一七〇} \\ \text{一五〇} \\ \hline \text{〇二〇〇} \\ \text{二〇〇} \\ \hline \text{〇〇〇} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{八} \\ \hline \text{一六八} \\ \text{八} \\ \hline \text{一六六} \\ \text{八} \\ \hline \text{一六二} \\ \text{八} \\ \hline \text{一五八} \\ \text{八} \\ \hline \text{〇〇〇} \end{array}$$

整爲零。再與彼一零分相乘得數。以所變之分母自乘之數除之。卽得乘出之數。法見下節。此整數帶零分與零分相乘之法也。如以眞數明之。其二丈又五分丈之四。卽二丈八尺也。其五分丈之三。卽六尺也。以六尺與二丈八尺相乘。卽得一丈六十八尺也。

整數帶零分與整數帶零分相乘而零分之分母不同者。則以兩零分之分母。用互乘法齊其數。然後各以相同之分母。化整爲零。兩數相乘。再以同母自乘之數除之。卽得。如所帶零分本爲同母者。可省互乘。設如有長方田闊二丈又四分丈之三。長三丈又三分丈之二。求積。

法以兩分母四三相乘得一十二。爲共母數。以前分母四。乘後分子二。得八。以後分母三。乘前分子三。得九。爲兩分子數。乃以其母數十二化闊二丈爲二十四分。加入分子九。得三十三分。爲闊邊所變之分數。又以其母數十二化長三丈爲三十六分。加入分子八。得四十四分。爲長邊所變之分數。爰以闊三十三分。與長四十四分相乘。得一千四百五十二。乃以其母數十二自乘之一百四十四除之。得一〇〇八。餘四八不盡。卽定爲一丈正方十一尺正方八零一百四十四分尺之四十八。約爲三分尺之一。爲所得之數也。此整



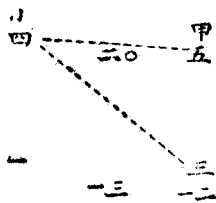
數帶零分與整數帶零分相乘之法也。如以真數明之。其闊二丈又四分丈之三。即二丈七尺五寸也。其長三丈又三分丈之二。即三丈六尺六寸六分六釐有餘也。以二丈七尺五寸與三丈六尺六寸六分六釐有餘相乘。即得一十丈零八尺有餘也。

大分下又帶小分相乘者其例有四。所謂大分下帶小分者。是將大分之一分。又分爲幾分。如大分五分之三。又帶小分四分之一。是將大分五分之三之一分。又分爲四分而得其一分也。有大小分母俱同者。有大小分母俱不同者。有大分母同而小分母不同者。有大分母不同而小分母同者。今以一法駁之。總以小分母通大分母爲母數。又以小分母通大分子。加入小分子爲子數。然後以所變之兩母數兩子數對乘即得。總以小分母通之者。蓋小分母又爲大分母之每一分之幾分。小分不能使大大分可以變小。使大分母大分子俱變爲小分母一體。然後可以相乘。乘之即所以通之也。設法中以度數明之。其理自顯。

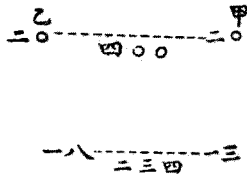
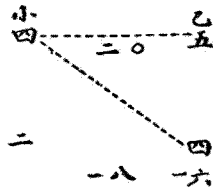
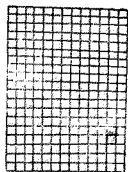
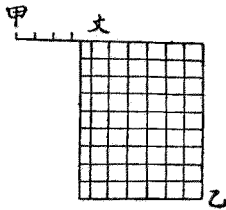
設如有甲數五分丈之三。又帶此一分之四分之一。與乙數五分丈之四。又帶

此一分之四分之一之相乘。問得幾何。此大小分母俱同者也。

法以甲數小分母四。通大分母五。得二十。仍以小分母四。通大分子三。得一十二。再加入小分子一。得一十三。共得二十分之十三。爲甲大小分所變之數。又以乙數小分母四。通大分母五。得二十。仍以小分母四。通大分子四。得一十六。再加入小分子二。得一十八。共得二十分之十八。爲乙大小分所變之數。然後以甲所變之分母二十。與乙所變之分母二十相乘。得四百分爲乘出之分母。



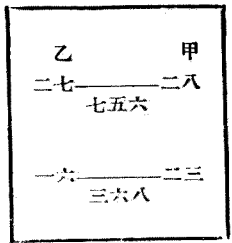
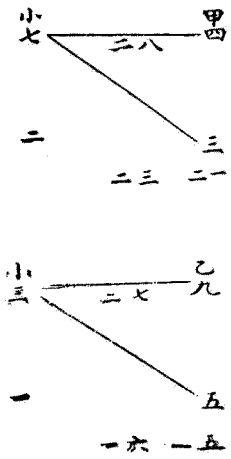
又以甲所變之分子十三與乙所變之分子十八相乘得二百三十四分爲乘出之分子即定爲四百分丈之二百三十四爲所得之數也此法甲乙之小分母俱爲四故將其大分母之每分亦俱化爲四分又將大分子之每分亦俱化爲四分使大分與小分之子母一體然後乘之今以度數明之甲之五分丈之三乃一丈內之六尺其所帶小分之四分之一乃二尺內之五寸是甲數共爲六尺五寸乙之五分丈之四乃一丈內之八尺其所帶小分之四分之一乃二尺內之一尺是乙數共爲九尺六尺五寸與九尺相乘得五十八尺五十寸是一丈正方面爲一百尺而得其五十八尺又小餘五十寸若以分母四乘一百尺得四百分又乘得數五十八尺五十寸得二百三十四分故爲四百分之二百三十四也若以尺隨寸命之則五十八尺五十寸又爲五千八百五十寸以大分每一分通爲小分四分則每一千寸分爲四分每分得二百五十寸以二百五十寸歸五千八百五十寸得二十三寸四十分乃四十分中之二十三又小零分之四分進而命爲丈則爲四百分丈之二百三十四也



得二十三寸四十分。乃四十分中之二十三。又小零分之

設如有甲數四分丈之三，又帶此一分之七分之二，與乙數九分丈之五，又帶此一分之三分之一相乘，問得幾何？此大小分母俱不同者也。

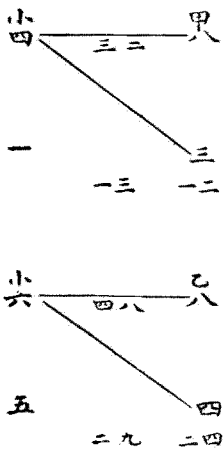
法以甲數小分母七，通大分母四，得二十八，仍以小分母七，通大分子三，得二十一，再加入小分子二，得二十三，共得二十八分之二十三，為甲大小分所變之數，又以乙數小分母三，通大分母九，得二十七，仍以小分母三，通大分子五，得一十五，再加入小分子一，得一十六，共得二十七分之一十六，為乙大小分所變之數，然後以甲所變之分母二十八，與乙所變之分母二十七相乘，得七百五十六分，為乘出之分子，又以甲所變之分子二十三，與乙所變之分子一十六相乘，得三百六十八分，為乘出之分子，即定為七百五十六分之三百六十八，為所得之數也。如以真數明之：甲四分丈之三，即一丈內之七尺五寸，又帶小分七分之二，即二尺五寸內之七寸一分四釐二豪有餘，是甲數共為八尺二寸一分四釐二豪有餘也。乙九分丈之五，即一



丈內之五尺五寸五分五釐五豪有餘。又帶小分三分之一。即一尺一寸一分一釐一豪有餘內之三寸七分零三豪有餘。是乙共爲五尺九寸二分五釐九豪有餘也。兩數相乘。得四十八尺六十七寸六十五分有餘。即七百五十六分丈之三百六十八也。如以七百五十六分。除三百六十八分。亦得四十八尺六十七寸六十五分不盡之數。蓋七百五十六分。爲一百尺。則三百六十八分。自得四十八尺六十七寸六十五分有餘也。

設如有甲數八分丈之三。又帶此一分之四分之一。與乙數八分丈之四。又帶此一分之六分之五相乘。問得幾何。此大分母同。而小分母不同者也。

法以甲數小分母四。通大分母八。得三十二。仍以小分母四。通大分子三。得一十二。再加入小分子一。得一十三。共得三十二分之一十三。爲甲大小分所變之數。又以乙數小分母六。通大分母八。得四十八。仍以小分母六。通大分子四。得二十四。再加入小分子五。得二十九。共得四十八分之二十九。爲乙大小分所變之數。然後以甲所變之分母三十二。與乙所變之分母四十八相乘。得一千五百三十六分。爲乘出之分母。又以甲所變之分子十三。與乙所變之分子二十九相乘。得三百七十七分。爲乘出之分子。即定爲一千五百三十六分丈之三百七十七。爲所得之數也。如以真數明之。甲八分丈之三。即三尺七寸五分。又帶此一分之四分之一。即三寸一分二釐五豪。是甲數共爲四

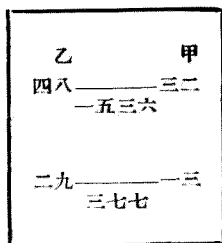
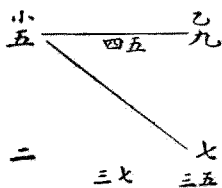
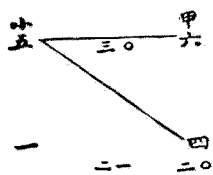


尺零六分二釐五豪也。乙八分丈之四。即五尺。又帶此一分之六分之五。即一尺零四分一釐六豪有餘。是乙數共爲六尺零四分一釐六豪有餘也。兩數相乘。得二十四尺五十四寸四十二分有餘。即一千五百三十六分丈之三百七十七也。如以一千五百三十六分。除三百七十七分。亦得二十四尺五十四寸四十二分不盡之數。蓋一千五百三十六分。爲一百尺。則三百七十七分。自得二十四尺五十四寸四十二分有餘也。

設如有甲數六分丈之四。又帶此一分之五分之一。與乙數九分丈之七。又

帶此一分之五分之二相乘。問得幾何。此大分母不同。而小分母同者也。

法以甲數小分母五。通大分母六。得三十。仍以小分母五。通大分子四。得二十。再加入小分子一。得二十一。共得三十分丈之二十一。爲甲大小分所變之數。又以乙數小分母五。通大分母九。得四十五。仍以小分母五。通大分子七。得三十五。再加入小分子二。得三十七。共得四十五分之三十七。爲乙大小分所變之數。然後以甲所變之分母三十。與乙所變之分母四十五相乘。得一千三百五十分。爲乘出之分母。又以甲所變之分子二十一。與乙所變之分子三十七相乘。得七百七十七分。爲乘出之分子。即定爲一千三百五十分之七百七十七。爲所得之數也。如以真數



明之。甲六分丈之四。即六尺六寸六分六釐六豪有餘。又帶此一分之五分之一。即三寸三分三釐三豪有餘。是甲數共爲六尺九寸九分九釐九豪有餘也。乙九分丈之七。即七尺七寸七分七釐七豪有餘。又帶此一分之五分之二。即四寸四分四釐四豪有餘。是乙數共爲八尺二寸二分二釐二豪有餘也。兩數相乘。得五十七尺五寸五十五分有餘。即一千三百五十分丈之七百七十七也。如以一千三百五十分。除七百七十七分。亦得五十七尺五寸五十五分不盡之數。蓋一千三百五十分。爲一百尺。則七百七十七分。自得五十七尺五寸五十五分有餘也。

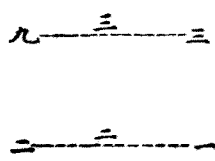
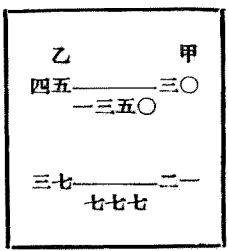
除法

零分歸除零分者。兩分母兩分子各自除之。所得之數。即除出之分也。如有奇零不盡者。用互乘法齊之。即得分數。其比例與除出之法同。

設如有九分丈之二。以三分丈之一除之。求得幾何。

法以九分丈之二爲實。三分丈之一爲法。以法分母三。除實分母九。得三。爲除出之分母。又以法分子一。除實分子二。仍得二。爲除出之分子。即定爲三分丈之二爲所得之數也。此法即乘法內兩分母兩分子各相乘爲所得之數者轉用之耳。此零分除零分之法也。

又法以互乘法除。以實分母九。乘法分子一。得九。爲除出之分母。又以法分母三。乘

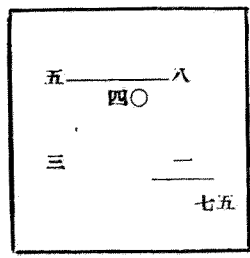
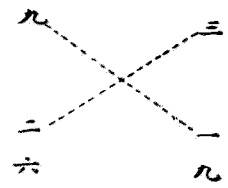




實分子二得六爲除出之分子。共得九分丈之六。卽所求之數也。此法與前法所得之分子分子之數雖不同。而理則一。前法之三分之二。與此法之九分之六。其比例實同。蓋前法以法除實。其得數爲減分之比例。此法以兩數互乘其得數爲加分之比例。故九分之六。卽三分之二也。但法中不用兩分母相乘之數。省去一層耳。如欲明晰其故。則以兩分母九與三相乘。得二十七。法分母三與實分子二相乘。得六。實分母九與法分子一相乘。得九。是將三分之一變爲二十七分之九。將九分之二變爲二十七分之六。其兩分母既等。則其兩分子自成比例。故九與六之比。卽同於三與二之比。九分之六。以三約之。非三分之二耶。如以眞數明之。實九分丈之二爲面積。卽二十二尺二十二寸二十二分二十二釐有餘也。法三分丈之一爲邊線。卽三尺三寸三分三釐有餘也。除之得六尺六寸六分六釐有餘。卽三分丈之二也。如以三分除二分。亦得六尺六寸六分六釐不盡之數。蓋三分爲一丈。其二分自得六尺六寸六分六釐有餘也。

整數歸除零分者。分母通整數。以除分子。卽得所求之數。  
 設如有五分丈之三。以八丈除之。求得幾何。

法以分子三爲實。以分母五通整數八丈。得四十爲法除之。得七寸五分。卽所求之數也。此法以五分乘八丈者。是分母通整數。將每丈俱通爲五分也。八丈既通爲四十分。則五分之三之每一分。卽與四十分中之每一分同等。然而零



數三分以四十分除之。而得七寸五分者。則又爲變分爲尺寸之比例矣。四十分與一丈之比。卽同於三分與七寸五分之比。此整數除零分之法也。

零分歸除整數者。分母通整數。而以分子除之。卽得所求之數。

設如有六丈以三分丈之二除之。求得幾何。

法以分母三。通整數六丈。得一十八爲實。以分子二爲法除之。得九丈。卽所求之數也。此法以三分乘六丈者。是將每丈俱通爲三分也。六丈旣通爲十八分。則十八分中之每一分。與三分之二之每一分同等。故以分子二除十八。得九丈。此零分除整數之法也。

整數帶零分歸除整數者。先將法實之兩整數。俱通爲零分。而於法中加入分子除之。卽得。設如有二十四丈。以二丈零三分丈之二除之。求得幾何。

法以分母三。通二十四丈。得七十二爲實。又以分母三。通二丈得六。加入分子二。得八爲法除之。得九丈。卽所求之數也。此法以分母三。通實二十四丈。是將實之每丈俱化爲三分也。又以分母三。通法二丈。是將法之每丈亦俱化爲三分也。兩整數俱化爲同等。則法實一體。故法除實而得所求之數也。此整數帶零分除整數之法也。

整數歸除整數帶零分者。先將法實之兩整數。俱通爲零分。而於實中加入分子。以法除之。卽得。

設如有二丈零三分丈之二。以二十四丈除之。求得幾何。卽以前法數目作題者。取其易明也。

法以分母三。通二丈得六。加入分子二。得八爲實。又以分母三。通二十四丈得七十二爲法除之。得一尺

一寸一分不盡，約爲九分丈之一，即所求之數也。此法以分母三，通法實之兩整數者，是將兩整數之每丈俱通爲三分也。一得七十二分，一得八分，以七十二與八之比，即同於九與一之比，故約爲九分之一。且以七十二除八，得一，一不盡之數，定爲一尺一寸一分有餘者。蓋七十二分與一丈之比，即同於八分與一尺一寸一分有餘之比也。此整數除整數帶零分之法也。

整數帶零分歸除零分者，先將整數通爲零分，加入分子，除之即得。

設如有五分丈之四，以三丈零八分丈之一，除之，求得幾何。

法以五分丈之四爲實，以法之分母八通三丈，得二十四，加入分子一，得二十五，共得八分丈之二十五爲法。用兩分母兩分子各自歸除之法，以法分母八，除實分母五，得六二五，爲除出之分母，以法分子二五，除實分子四，得一六〇，爲除出之分子，乃以所得之分母，除所得之分子，得二尺五寸六分，即所求之數也。蓋法之三丈又八分丈之一，乃三丈一尺二寸五分也。實之五分丈之四，乃八尺也。以三丈一尺二寸五分，歸除八尺，每丈得二尺五寸六分，是三丈一

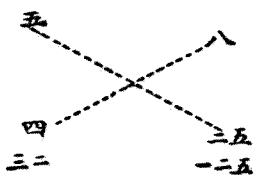
二丈	三	二	八
四丈	三	〇	七二

七二	〇八〇	〇八〇	〇八〇
八〇	七二	七二	七二
七二	〇八〇	〇八〇	〇八

〇	五	四
三丈	八	一
		二五

尺二寸五分與一丈之比，即同於八尺與二尺五寸六分之比也。今以分母六二五除分子一六〇，亦得二尺五寸六分，是六二五與一丈之比，即同於一六〇與二尺五寸六分之比也。然六二五與三丈一尺二寸五分之比，又即同於一六〇與八尺之比，而皆為加倍之比例也。此整數帶零分除零分之法也。又或整數通為零分，加入分子之後，以法除實而數有奇零不盡者，則用互乘代除之法。如前數已將整數通為八分丈之二十五為法，乃以實分母五乘法分子二十五，得一百二十五為除出之分子。又以法分母八乘實分子四，得三十二為除出之分子。乃以所得之分子除所得之分子，亦得二尺五寸六分。蓋一百二十五分與一丈之比，即同於三十二分與二尺五寸六分之比也。後法之有奇零數，而用互乘代除者，皆同此例。

零分歸除整數帶零分者，先將整數通為零分，加入分子，以法除之，即得。



$$\begin{array}{r} \text{六二五} \\ \text{五} \overline{) \text{一六〇}} \text{八} \\ \text{一六〇} \\ \text{四} \overline{) \text{二五}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{二五六} \\ \text{一二五} \\ \hline \text{三二〇} \\ \text{二五〇} \\ \hline \text{〇七〇〇} \\ \text{六二五} \\ \hline \text{〇七五〇} \\ \text{七五〇} \\ \hline \text{〇〇〇} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{二五六} \\ \text{六二五} \\ \hline \text{一六〇〇} \\ \text{一二五〇} \\ \hline \text{〇三五〇〇} \\ \text{三一二五} \\ \hline \text{〇三七五〇} \\ \text{三七五〇} \\ \hline \text{〇〇〇〇} \end{array}$$

設如有四丈又三分丈之二，以七分丈之四除之，求得幾何。

法以實之分母三，通四丈，得十二，加入分子二，得十四，共得三分丈之十四爲實，以七分丈之四爲法，用互乘代除之法，以實分母三，乘法分子四，得十二，爲除出之分母，以法分母七，乘實

分子一十四，得九十八，爲除出之分子，乃以所得之分母，除所得之分子，得八尺，仍餘二不盡，命爲十二分尺之二，以法約之，爲六分尺之一，共得八尺零六分尺之一，卽所求之數也。蓋十二與一尺之比，卽同於九十八與八尺有餘之比也。此零分除整數帶零分之法也。

整數帶零分歸除整數帶零分者，先各以整數通爲零分，加入分子，而以法除實卽得。

設如有田五畝又三分畝之二，共租銀五兩又二十七分兩之一，求每畝得租銀幾何。

法以銀分母二十七，通五兩，得一百三十五，加入分子一，得一百三十六，共得二十七分兩之一百三十六爲實，又以田分母三，通五畝，得十五，加入分子二，

○	七
四	四
三	
二	
—	
一	
四	

三	七
—	—
一四	四
九八	一一

八
—
一二
—
九八六
—
〇二

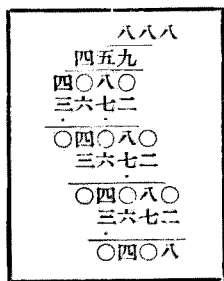
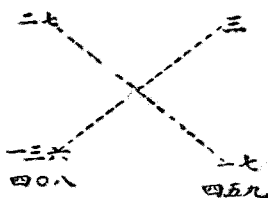
田五畝	三
—	—
二七	二七
—	—
一	一
—	—
二	二
三六	一七

得十七。共得三分畝之十七爲法。用互乘代除之法。以銀分母二十七。乘田分子一十七。得四百五十九。爲除出之分母。以田分母三。乘銀分子一百三十六。得四百零八。爲除出之分子。乃以所得之分母。除所得之分子。得八錢八分八釐零四百五十九分釐之四百零八。卽每畝所租之銀數也。蓋四五九與一兩之比。卽同於四〇八與八錢八分八釐有餘之比也。此整數帶零分除整數帶零分之法也。

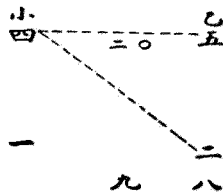
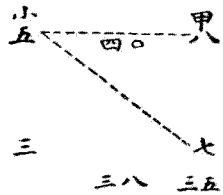
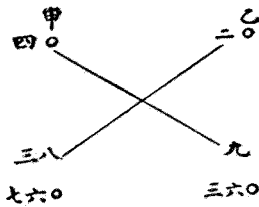
大零分下又帶小零分相除者。其例有四。有大小分母俱同者。有大小分母俱不同者。有大分母同而小分母不同者。有大分母不同而小分母同者。今以一法馭之。總以小分母通大分母爲母數。又以小分母通大分子。加入小分子爲子數。然後以所變之子母數。用互乘代除之法歸之卽得。如用子母各自對除亦得。但恐數有奇零。故用此法。

設如有甲八分丈之七。又帶此一分之五分之三。以乙五分丈之二。又帶此一分之四分之一。除之。求得幾何。

法以甲小分母五。通大分母八。得四十。仍以小分母五。通大分子七。得三十五。再加入小分子三。得三十



八。共得四十分丈之三十八。爲甲大小分所變之數。以之爲實。又以乙小分母四。通大分母五。得二十。仍以小分母四。通大分子二。得八。再加入小分子一。得九。共得二十分丈之九。爲乙大小分所變之數。以之爲法。然後用互乘代除法。以甲所變之分母四十。乘乙所變之分子九。得三百六十。爲除出之分母。又以乙所變之分子二十。乘甲所變之分子三十八。得七百六十。爲除出之分子。乃以所得之分母三百六十。除所得之分子七百六十。得二尺一寸一分一釐零三百六十分釐之四十。約爲九分釐之一。卽所求之數也。蓋三六〇與一尺之比。卽同於七六〇與二尺一寸一分一釐有餘之比也。此大零分下帶小零分相除之法也。其分母分子俱同。及分母同而分子不同。分母不同而



二
三六〇
七六〇
七二〇
〇四〇〇
三六〇
〇四〇〇
三六〇
〇四〇〇
三六〇
〇四〇

數理精蘊 下編 卷二

分子同者・皆用此例・故不重設。



# 數理精蘊下編卷三

## 線部一

### 比例

凡物彼此相形。並之而用加。較之而用減。聚之而用乘。散之而用除。觀之不過兩率。然乘除之間四率之理。已默寓其中。如因乘法曰。人幾何。每人得物幾何。求總物幾何。則是每一人得物幾何。與幾何人共得物幾何。相比而成四率。乃自小而得大者也。如歸除法曰。有物幾何。命幾何人分之。每人得物幾何。則是共人幾何。共物幾何。與每一人得物幾何。相比而成四率。乃自大而得小者也。蓋因命數以一人爲法。故乘與除各省其率耳。是雖名爲乘除。而實爲相比之四率也。至於比例正法。則所該甚廣。大而推步七政天行。測量高深廣遠。小而量功命事。度大移小。無一非由比例而得。蓋以兩數爲比例。用今有之數。卽可以得未有之數也。比例之理。雖分相連相當二種。而相當比例之中。實又兼相連比例相當比例。一率比二率。如三率比四率。而相連比例首率比中率。若中率比末率者。卽是中率爲二率。而又爲三率也。盡人皆知。祿有線之比例。面有面之比例。體有體之比例。殊不知差分盈朒。方程借衰疊借之類。正皆比例之屬也。然此類中有合數之比例。分數之比例。均數之比例。借數之比例。非條分縷析。各項專論。則不備。故仍舊各自爲類。而獨於比例中最切者。詳明其理。以列法焉。其法一名異乘同除。或名爲準測。或名爲

順單。以原有之兩件相除。故爲同除。以今有之一件乘之。故爲異乘。如先乘而後除亦同。而今則實言之曰正比例。蓋以原有之兩件爲一率二率。以今有之一件爲三率。而所求之一件則爲四率也。一名爲同乘異除。或名爲變測。或名爲互視。或名爲逆單。以原有之兩件相乘。故爲同乘。以今有之一件除之。故爲異除。而今則實言之曰轉比例。蓋以原有之兩件爲二率三率。以今有之一件爲一率。而所求之一件則爲四率也。然論其乘除之名雖異。究其比例之理則一而已。今以數明之。如原有之兩數爲二與四。今有之一數爲八。以原有之二作一率。原有之四作二率。今有之八作三率。即得今所求之四率爲十六。而一率二與二率四之比。即三率八與四率十六之比。爲相當之比例也。如原有之兩數爲八與四。今有之一數爲十六。以原有之八作二率。原有之四作三率。今有之十六作一率。即得今所求之四率爲二。而一率十六與二率八之比。即三率四與四率二之比。或以一率十六與三率四之比。即同於二率八與四率二之比。皆爲相當之比例也。總之乘除之名有異同。四率之列有更換。而既成比例之後。其理無不歸於大同。由此引伸觸類。推而廣之。有合幾四率而爲一四率者。則名爲同乘同除。或名爲重測。或名爲順較逆較。而今則實言之曰合率比例。蓋其理亦不過合幾乘而爲一乘。合幾除而爲一除。各按四率。參互錯綜。豈能出於比例之外哉。凡此各種比例。俱設數例於後。以明立法之根。加之解說。以廣用法之意。

正比例

設如有銀買米。每米一石。銀八錢。今買米二百四十石。問共該銀若干。

法以米一石爲一率。銀八錢爲二率。今買米二百四十石爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率一百九十二兩。卽共銀數也。蓋一石與二百四十石。爲加二百四十倍。而八錢與一百九十二兩。亦爲加二百四十倍。見幾何原本六卷第十五節。故一石與八錢之比。卽同於二百四十石與一百九十二兩之比也。此法一率是一。止用八錢乘二百四十石亦得。但爲明正比例之理。

故首設一二易法。使人好推尋也。

設如有銀買米。每銀一兩。買米一石三斗。今有銀三百二十兩。問

共買米若干。

法以銀一兩爲一率。米一石三斗爲二率。今銀三百二十兩爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率四百一十六石。卽共米數也。蓋一兩與一石三斗之比。卽同於三百二十兩與四百一十六石之比也。

設如有銀賞人。每三人賞銀一兩八錢。今有二百四十人。問共該銀若干。

一率	一石
二率	八錢
三率	二百四十石
四率	一百九十二兩

一率	一兩
二率	一石三斗
三率	三百二十兩
四率	四百一十六石

法以三人爲一率。一兩八錢爲二率。今有二百四十人爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率一百四十四兩。卽共銀數也。蓋三人與一兩八錢之比。卽同於二百四十人與一百四十四兩之比也。

設如有穀換米。每穀一石四斗。換米八斗四升。今有穀三十二石六斗八升。問換米若干。

法以穀一石四斗爲一率。米八斗四升爲二率。今有穀三十二石六斗八升爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率一十九石六斗零八合。卽所換其米數也。蓋穀一石四斗與米八斗四升之比。卽同於穀三十二石六斗八升與米一十九石六斗零八合之比也。

設如天上二度。當地面四百里。今七度。該里數若干。  
法以原有之二度爲一率。四百里爲二率。今有之七度爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率一千四百里。卽七度之里數也。蓋一率二與二率四之比。爲加一倍。而三率七與四率十四之比。亦爲加一倍。故二率得一率中之幾分之幾。則四率亦得三率中之幾分之幾。而爲相當比例四率也。

一率	三人
二率	一兩八錢
三率	二百四十人
四率	一百四十四兩

一率	穀一石四斗
二率	米八斗四升
三率	穀三十二石六斗八升
四率	米一十九石六斗零八合

一率	二度
二率	四百里
三率	七度
四率	一千四百里

設如一星一日內行一度三十分今問八刻內應行若干

法以原數一日變作九十六刻爲一率。一度三十分變作九十分。一度作六十分。加入三十分。共九十分。爲二率。今星行八刻爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率七分半。卽八刻內所行之數。蓋九十六刻與九十分之比。卽同於八刻與七分半之比也。然將日變爲刻者。因每日九十六刻。不以十進位。又今所有者爲八刻。故以刻數與刻數相比也。度變爲分者。因每度六十分。亦不以十進位。而今八刻內所行者必爲分。故以分數與分數相比也。

設如驗時儀算砲聲。自烟起至聞聲。計七秒。得五里。今得十四秒。問里數若干。

法以七秒爲一率。五里爲二率。今得十四秒爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率十里。卽十四秒之里數也。蓋七秒與五里之比。卽同於十四秒與十里之比也。

設如有羊四百六十隻。共賣銀八十二兩八錢。問每羊一隻。價銀幾何。法以羊四百六十隻爲一率。銀八十二兩八錢爲二率。羊一隻爲三率。推得四率一錢八分。卽每羊一隻之價也。此法三率是一。止用羊四百六十

一率	九十六刻
二率	九十分
三率	八刻
四率	七分半

一率	七秒
二率	五里
三率	十四秒
四率	十里

一率	四百六十隻
二率	八十二兩八錢
三率	一隻
四率	一錢八分

隻歸除八十二兩八錢亦得。但列四率法中。不得不備其一體也。

設如有羊一羣。共二百四十隻。又生羔七十二隻。問加羊羣內十分之幾。

法以羊二百四十隻為一率。十分為二率。今生羔七十二隻為三率。推得四率三分。即為加羊羣內十分之三也。蓋二百四十與十分之比。即同於七十二與三分之比。若將二百四十作十分。每分得二十四。將羊羔七十二作三分。每分亦得二十四。總而約之。故為十分之三也。

設如有田科糧。每三畝科糧八斗四升。今有四千六百三十五畝。問得糧若干。

法以三畝為一率。八斗四升為二率。今有四千六百三十五畝為三率。推得四率一千二百九十七石八斗。即所得其糧數也。蓋三畝與八斗四升之比。即同於四千六百三十五畝與一千二百九十七石八斗之比也。

設如用古量法。豆區釜皆以四進。有八十豆。當二十區。有二十區。當釜若干。

法以八十豆為一率。二十區為二率。又為三率。推得四率五釜。即二十

一率	二百四十隻
二率	十分
三率	七十二隻
四率	三分

一率	三畝
二率	八斗四升
三率	四千六百三十五畝
四率	一千二百九十七石八斗

一率	八十豆
二率	二十區
三率	二十區
四率	五釜

區所當釜數也。此正比例中相連比例法也。蓋因二十區與二十區相乘得四百區，而八十豆與五釜相乘亦得四百區。二十區既爲二率，又爲三率，故謂相連比例。是以八十豆與二十區之比，卽同於二十區與五釜之比也。

設如一商原有本銀三千兩，一年得利銀九百兩，今復將九百兩爲本。

問一年得利若干。

法以三千兩爲一率，九百兩爲二率，又爲三率，推得四率二百七十兩，卽九百兩所得之利也。此法以九百兩爲二率，又爲三率，蓋三千兩與九百兩之比爲三與九之比例，而九百兩與二百七十兩之比亦爲三與九之比例也。

一率	三千兩
二率	九百兩
三率	九百兩
四率	二百七十兩

轉比例

設如有田一畝。原闊八步。長三十步。今闊要十二步。問長得幾何。

法以今闊十二步爲一率。原長三十步爲二率。原闊八步爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率二十步。

卽今闊十二步之長也。此法以原有之兩數相乘。以今有之一數除之。

而得今所求之數者。因乘出兩數相同故也。在正比例。原有之兩件爲

一率二率。今有之一件爲三率。而今所求之一件爲四率。俱以原有之

一件與今有之一件相乘。其積相同。在轉比例。則原有之兩件爲二率

三率。今有之一件爲一率。而今所求之一件爲四率。是原有之兩件相

乘。今有之兩件相乘。其積相同。此兩法異同之故也。雖今闊比原闊多。

而今長卻比原長少。故原有之闊八步。與長三十步。相乘得二百四十步。而今有之闊十二步。與長二

十步。相乘亦得二百四十步。其積既同。是以轉而比之。自成比例。蓋今闊比原闊多三分之一。今長比原

長少三分之一。其比例相同。見幾何原本七卷第三節。故今闊十二步與原闊八步之比。卽同於原長三十

步與今長二十步之比也。若借正比例論之。以原闊八步爲一率。原長三十步爲二率。今闊十二步爲三

率。二三率相乘。一率除之。得四率四十五步。則是今闊比原闊多。今長亦比原長多。所容積數亦多。而與

一畝之數不合矣。故轉以今闊十二步爲一率。原長三十步爲二率。原闊八步爲三率。而得四率二十步。

一率	今闊十二步
二率	原長三十步
三率	原闊八步
四率	今長二十步



是爲一率與三率之比。同於二率與四率之比也。

設如有地寬二十丈。長一百二十丈。今換地寬三十丈。問長得幾何。

法以今寬三十丈爲一率。原長一百二十丈爲二率。原寬二十丈爲三率。二三率相乘。一率除之。得八十丈。即今寬三十丈之長也。此法原有之寬與長相乘。得二千四百丈。今有之寬與長相乘。亦得二千四百丈。其積既同。故轉而比之。自成比例。以今寬比原寬。以原長比今長。俱三與二之比例。是以今寬三十丈與原寬二十丈之比。即同於原長一百二十丈與今長八十丈之比也。設如傭工開渠。八人開之。二十日完。今加倍用十六人開之。問得幾日完。

法以今十六人爲一率。原二十日爲二率。原八人爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率十日。即十六人完工之日也。此法因工少而用日多。故加人使工多而用日少。蓋今十六人與原八人之比。即今之工加一倍。而原二十日與今十日之比。則今所得之日。亦必減一倍。故一率十六人與三率八人之比。即同於二率二十日與四率十日之比也。設如有地四百八十畝。八人耕之。十二日完。今用六人耕之。問得幾日完。法以今六人爲一率。原十二日爲二率。原八人爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率十六日。即六人耕

一率	今寬三十丈
二率	原長一百二十丈
三率	原寬二十丈
四率	今長八十丈

一率	今十六人
二率	原二十日
三率	原八人
四率	今十日

完之日也。此法人數日數不同。而所耕之田。則同為四百八十畝。而所用之工。又同為九十六。故以八人論。一日八工。十二日則用九十六工。以六人論。一日六工。十六日亦用九十六工也。故轉用四率自成比例。以一率六人與三率八人之比。即同於二率十二日與四率十六日之比也。

設如衆軍支米。足用四年。則每人每月支米三斗。今欲將四年之米。足用十二年。問每人每月應支幾何。法以今欲用十二年為一率。原支米三斗為二率。足用四年為三率。二率三率相乘。一率除之。得四率一斗。即足用十二年每人每月應支之數也。此法支米多則足用年數少。今支米少則足用年數多。蓋四年與十二年之比。在年為加三分之二。而三斗與一斗之比。在米又為減三分之二。其比例固同也。

設如木星十二年一周天。每年行三十度。土星則二十八年一周天。問每年行幾度。

法以土星所行一周二十八為一率。木星每年所行三十度為二率。木星所行一周十二年為三率。二三率相乘。一率除之。得四率十二度五十一分二十五秒有餘。即土星每年所行之度數也。蓋木星

一率	今六人
二率	原十二日
三率	原八人
四率	今十六日

一率	今十二年
二率	原三斗
三率	原四年
四率	今一斗

一率	土一周二十八
二率	木每年行三十度
三率	木一周十二年
四率	土每年行十二度餘

周天比土星年數少而行度卻多。土星周天比木星年數多而行度卻少。多得少而少反得多。故轉而比之。以二十八年與十二年之比。即同於三十度與十二度有餘之比也。

設如一人借人之絹。寬三尺。長二十四丈。今還絹寬四尺。問長該若干。

法以今絹寬四尺爲一率。原絹長二十四丈爲二率。原絹寬三尺爲三

率。二三率相乘。一率除之。得四率十八丈。即爲今所還寬四尺絹之長

也。蓋原絹寬三尺。長二十四丈。相乘得七百二十尺。今絹寬四尺。長十

八丈。相乘亦得七百二十尺。因其積數相同。故今絹寬四尺。與原絹寬

三尺之比。即同於原絹長二十四丈與今絹長十八丈之比也。

設如驗時儀墜子。其繩長四尺四寸八分一釐二毫八絲。四刻內來往共三千次。今造一墜。欲使來一秒

往一秒。問繩長若干。

法以四刻化三千六百秒。爲今墜子往來次數。自乘得一千二百九十六萬次爲一率。原墜繩長四尺四

寸八分一釐二毫八絲爲二率。以原墜往來三千次自乘得

九百萬次爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率三尺一寸

一分二釐。即今所求墜繩之長也。夫以四刻化秒者。蓋以所

求之墜子。欲其來一秒。往一秒也。故秒數即次數。四刻所化

之秒。即今墜子在四刻內往來之次數也。其比例以次數自

一率 今寬四尺

二率 原長二十四丈

三率 原寬三尺

四率 今長一十八丈

一率 今一千二百九十六萬次

二率 原四尺四寸八分一釐二毫八絲

三率 原九百萬次

四率 今三尺一寸一分二釐

乘者。因墜子往來之際。已成平面形。故以往來之方數相比為面比。而原墜與今墜之長數相比為線比。務使其類相當。而後可以相比也。是以今墜往來次數自乘與原墜往來次數自乘之比。即同於原墜長數與今墜長數之比也。然原墜於四刻內往來之次數少。而墜卻長。今墜於四刻內往來之次數多。而墜卻短。故以今墜之往來次數與原墜之往來次數為比。即同於原墜之長與今墜之長為比。所以為轉比例也。

設如有正方形池一面。每邊十二丈。今欲作寬八丈之池。使其池面積數與方池等。問長得幾何。法以今池寬八丈為一率。原池長十二丈為二率。原池寬十二丈為三率。推得四率十八丈。即今欲作池之長也。此轉比例中相連比例法也。蓋原池方面每邊十二丈。其積一百四十四丈。即二率三率相乘之數。今所得四率長十八丈。與一率寬八丈相乘。亦得一百四十四丈。兩數相等。故以一率今池寬八丈與三率原池寬十二丈之比。即同於二率原池長十二丈與四率今池長十八丈之比也。

設如原用金九兩。係九成。今用八成金折還。當加幾兩。

法以今金八成為一率。原金九兩為二率。原金九成為三率。推得四率十兩零一錢二分五釐。內減九兩。餘一兩一錢二分五釐。即八成金當加之數也。此法二率三率為體。雖不同而數則一。故亦為相連

一率	今寬八丈
二率	原長十二丈
三率	原寬十二丈
四率	今長十八丈

一率	今八成
二率	原九兩
三率	原九成
四率	今十兩零一錢二分五釐

比例蓋以原金九兩。又係九成。相乘得十成金八兩一錢。以今之八成與所得十兩零一錢二分五釐相乘。亦得十成金八兩一錢。是八成與九成之比。卽同於九兩與十兩零一錢二分五釐之比也。

合率比例

設如以夏布換棉布。但知每夏布三丈。價銀二錢。每棉布七丈。價銀七錢五分。今有夏布四十五丈。問換棉布若干。

法以夏布三丈。與棉布價銀七錢五分相乘。得二兩二錢五分爲一率。夏布價銀二錢。與棉布七丈相乘。得一兩四錢爲二率。夏布四十五丈爲三率。推得四率二十八丈。卽夏布四十五丈所換之棉布數也。此法乃兩比例合爲一比例也。如分作兩比例明之。每夏布三丈價銀二錢。今夏布四十五丈。則價銀應得三兩。此一比例也。

棉布價銀七錢五分。得棉布七丈。今夏布四十五丈之價三兩。則應得棉布二十八丈。此又一比例也。

一率	二兩二錢五分
二率	一兩四錢
三率	夏布四十五丈
四率	棉布二十八丈

一率	夏布三丈
二率	銀二錢
三率	夏布四十五丈
四率	銀三兩

一率	銀七錢五分
二率	棉布七丈
三率	銀三兩
四率	棉布二十八丈

一比例也。夫銀三兩原爲夏布四十五丈之價。則夏布四十五丈所換之棉布二十八丈。價銀亦應三兩可知矣。蓋兩比例中。一以三丈作一率。一以七錢五分作一率。故三丈與七錢五分相乘。得二兩二錢五分。而爲一率。是合兩一率而爲一率也。一以二錢作二率。一以七丈作二率。故二錢與七丈相乘。得一

兩四錢而爲二率。是合兩二率而爲一二率也。而後比例之三率。卽前比例之四率。如以兩三率相乘爲三率。則所得四率。亦爲兩四率相乘之數。必須以前比例之四率除之。方得後比例之四率。故卽以夏布之四十五丈爲三率。而得棉布之二十八丈爲四率也。

設如以芝麻換黃米。但知每芝麻三石換菘豆五石。每菘豆四石換黃米三石。今有芝麻五十四石。問換黃米若干。

法以芝麻三石與菘豆四石相乘。得十二石爲一率。又以菘豆五石與黃米三石相乘。得十五石爲二率。芝麻五十四石爲三率。推得四率六十七石五斗。卽芝麻五十四石所換之黃米數也。此法亦兩比例合爲一比例也。如

一率	十二石
二率	十五石
三率	芝麻五十四石
四率	黃米六十七石五斗

一率	芝麻三石
二率	菘豆五石
三率	芝麻五十四石
四率	菘豆九十石

一率	菘豆四石
二率	黃米三石
三率	菘豆九十石
四率	黃米六十七石五斗

分作兩比例明之。每芝麻三石換菘豆五石。則芝麻五十四石必換菘豆九十石。此一比例也。菘豆四石換黃米三石。則菘豆九十石必換黃米六十七石五斗。此又一比例也。夫菘豆九十石原爲芝麻五十四石所換。則菘豆九十石所換之黃米。卽芝麻五十四石所換之黃米可知矣。蓋以兩比例之各一率相乘爲一率。兩比例之各二率相乘爲二率者。卽合兩次乘除爲一次乘除也。

設如養兵七百名。每年額餉一萬二千六百兩。內有新著伍兵三百名。已應役七個月。問該餉銀若干。  
 法以原養兵七百名。與十二個月相乘。得八千四百為一率。額餉一萬二千六百兩為二率。新兵三百名。  
 與七個月相乘。得二千一百為三率。推得四率三千一百五十兩。即兵三百名七個月應得之餉銀數也。  
 此法亦兩比例合為一比例也。如分作兩比例明之。兵七百名。得一萬二千六百兩。則兵三百名。應得五  
 千四百兩。乃兵三百名十二個月應得之數。此一比例也。兵三百名十二個月應得五千四百兩。則七個月應

得三千一百五十  
 兩。此又一比例也。

今以兩比例之各

一率相乘為一率。

兩比例之各三率

相乘為三率。亦

如兩比例之各一率二率相乘合為一一率二率也。

設如原有鵝八隻。換雞二十隻。又雞三十隻。換鴨九十隻。又鴨六十隻。換羊二隻。今有羊五隻。問換鵝幾  
 何。

法以所換羊二隻。與所換鴨九十隻相乘。得一百八十隻。再以所換雞二十隻乘之。得三千六百隻為一  
 率。又以原鴨六十隻。與原雞三十隻相乘。得一千八百隻。又以原鵝八隻乘之。得一萬四千四百隻為二

一率	八千四百
二率	一萬二千六百兩
三率	二千一百
四率	三千一百五十兩
總	

一率	七百兵
二率	一萬二千六百兩
三率	三百兵
四率	五千四百兩

一率	十二個月
二率	五千四百兩
三率	七個月
四率	三千一百五十兩



率。今羊五隻爲三率。推得四率二十隻。卽羊五隻所換之鵝數也。此法乃三比例合爲一比例也。如分作三比例明之。羊二隻換鴨六十隻。則羊五隻必換鴨一百五十隻。此一比例也。鴨九十隻換雞三十隻。則鴨一百五十隻必換雞五十隻。此二比例也。雞二十隻換鵝八隻。則雞五十隻必換鵝二十隻。此三比例也。夫雞五十隻。原爲鴨一百五十隻之所換。而鴨一百五十隻。又原爲羊五隻之所換。則雞五十隻所換之鵝二十隻。卽爲羊五隻之所換可知矣。今以三比例之各一率連乘之爲一率。又以三比例之各二率連乘之爲二率者。正合三比例爲一比例也。設如原有菽三斗。換黍二斗。又黍四斗。換稷三斗。又稷五斗。換稻四斗。又稻六斗。換麥五斗。今有麥七斗。問換菽幾何。

法以所換麥五斗。與所換稻四斗相乘得二石。復以所換稷三斗乘之得六石。再以所換黍二斗乘之得一十二石爲一率。又以原有稻六斗。與原有稷五斗相乘得三石。復以原有黍四斗乘之得一十二石。再

一率	三千六百隻
二率	一萬四千四百隻
三率	羊五隻
四率	鵝二十隻
總	

一率	鴨九十隻
二率	雞三十隻
三率	鴨一百五十隻
四率	雞五十隻

一率	羊二隻
二率	鴨六十隻
三率	羊五隻
四率	鴨一百五十隻

一率	雞二十隻
二率	鵝八隻
三率	雞五十隻
四率	鵝二十隻

以原有菽三斗乘之得三十六石爲二率。今有麥七斗爲三率。推得四率二石一斗。卽麥七斗所換之菽數也。此合四比例爲一比例也。

如分作四比例

明之。麥五斗換

稻六斗。則麥七

斗必換稻八斗

四升。此一比例也。

稻四斗換稷五斗。則稻八

斗四升必換稷一石零五升。此二比例也。

稷三斗換黍四斗。則稷一石零五升必換黍一

石四斗。此三比例也。

黍二斗換菽三斗。則黍

一石四斗必換菽二石一斗。此四比例也。夫

黍一石四斗原爲稷一石零五升之所換。而稷一石零五升。又爲稻八斗四升之所換。而稻八斗四升。又

爲麥七斗之所換。則黍一石四斗所換之菽二石一斗。卽爲麥七斗之所換。可知矣。今以四比例之各一

率連乘之爲一率。又以四比例之各二率連乘之爲二率者。正合四比例爲一比例也。

設如原有工人一百。開河四十丈。二十日工完。今有工人一千。開河八十丈。問得日數幾何。

一率	一十二石
二率	三十六石
三率	麥七斗
四率	菽二石一斗
總	

一率	麥五斗
二率	稻六斗
三率	麥七斗
四率	稻八斗四升

一率	稷三斗
二率	黍四斗
三率	稷一石零五升
四率	黍一石四斗

一率	稻四斗
二率	稷五斗
三率	稻八斗四升
四率	稷一石零五升

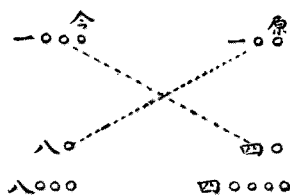
一率	黍二斗
二率	菽三斗
三率	黍一石四斗
四率	菽二石一斗

法以今有工人一千與原開河四十丈相乘得四萬丈爲一率。二十日爲二率。以原有工人一百與今開河八十丈相乘得八千丈爲三率。推得四率四日。卽一千人開河八十丈之日數也。此法以原有今有兩數互乘以比例者。所以齊其分也。試將兩首位一千工與一百工互乘得十萬工。然後互乘丈數。原有一邊得四萬丈。今有一邊得八千丈。是原一百工開四十丈。則十萬工開四萬丈。其比例相同。今一千工開八十丈。則十萬工開八千丈。其比例亦同也。因兩工數相同。故以四萬丈與二十日之比。卽同於八千丈與四日之比。蓋原有十萬工開河四萬丈。二十日可完。今亦有十萬工開河八千丈。則四日可完。爲比例四率也。然此法實係兩比例合爲一比例也。如分作兩比例明之。則先以人工爲比例原

一率	四萬丈
二率	二十日
三率	八千丈
四率	四日

一率	今一千工
二率	原二十日
三率	原一百工
四率	今二日

一率	原四十丈
二率	原二日
三率	今八十丈
四率	今四日

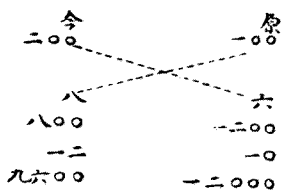


一百工開二十日。今一千工卽應開二日。爲今一千工開河四十丈之日數。此一轉比例也。次用丈數爲比例。原四十丈應開二日。今八十丈則應開四日。爲今一千工開河八十丈之日數。此一正比例也。法以

兩比例之一率相乘爲一率。兩比例之三率相乘爲三率者。正合兩比例爲一比例也。設如原有書一百篇。六人寫之。十日完。每篇三百字。今有書二百篇。八人寫之。十二日完。問每篇得字若干。

千。

法以今有二百篇。與原有六人相乘。得一千二百。又以原有十日乘之。得一萬二千爲一率。每篇三百字爲二率。以原有一百篇。與今有八人相乘。得八百。又



以今有十二日乘之。得九千六百爲三率。推得四率二百四十字。即今八人寫十二日。每篇之字數也。試將兩首位一百篇。與二百篇互乘。得二萬篇。然後互乘人工與日。原有一邊得一萬二千工。今有一邊得九千六百工。蓋原有二萬篇。用一萬二千工。每篇三百字。今亦有二萬篇。用九千六百工。其每篇必二百四十字。爲比例四率也。然此法實係三比例合爲一比例也。如分作三比例明之。則先以篇數爲比例。原一百篇。每篇三百字。今勻

一率	原六人
二率	原一百五十字
三率	今八人
四率	今二百字

總	
一率	一萬二千工
二率	三百字
三率	九千六百工
四率	二百四十字

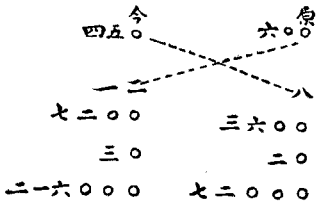
一率	原十日
二率	原二百字
三率	今十二日
四率	今二百四十字

一率	今二百篇
二率	原三百字
三率	原一百篇
四率	今一百五十字

爲二百篇。則每篇只應一百五十字。此一轉比例也。然人數不同。故次以人數爲比例。原六人寫之。每篇應一百五十字。今八人寫之。則每篇應二百字。此一正比例也。然日數又不同。故次以日數爲比例。原寫十日。每篇應二百字。今寫十二日。則每篇應二百四十字。此又一正比例也。法以三比例之各一率連乘之。爲一率。三比例之各三率連乘之。爲三率者。正合三比例爲一比例也。

設如原雇人寫書。每篇六百字。八人寫二十日。得一百二十篇。今寫書每篇四百五十字。卻用十二人寫三十日。問得篇數幾何。

法以今有四百五十字。與原有八人相乘。得三千六百。又以原有二十日乘之。得七萬二千爲一率。一百二十篇爲二率。以原有六百字。與今有十二人相乘。得七千二百。又以今有三十日乘之。得二十一萬六千爲三率。推得四率三百六十篇。即今十二人寫三十日之篇數也。試將兩首位六百字與四百五十字互乘。得二十七萬字。然後互乘人工與日。原有一邊得七萬二千工。今有一邊得二十一萬六千工。蓋原有一邊二十七萬字。用七萬二千工。得一百二十篇。今一邊亦二十七萬字。用二十一



一率	七萬二千工
二率	一百二十篇
三率	二十一萬六千工
四率	三百六十篇
總	

萬六千工。則得三百六十篇。為比例四率也。然此法亦係三比例合為一比例也。如分作三比例明之。則

先以字數為比例。

原每篇六百字。為

一百二十篇。今每

篇四百五十字。則

必勻為一百六十

篇。此一轉比例也。

然人數不同。故次以人數為比例。原八人寫之。應得一百六十篇。今十二人寫之。則應得二百四十篇。此

一正比例也。然日數又不同。故次以日數為比例。原寫二十日。應得二百四十篇。今寫三十日。則應得三

百六十篇。此又一正比例也。法以三比例之各一率連乘之為一率。三比例之各三率連乘之為三率者。

正合三比例為一比例也。

設如海船內原有甜水二萬零一百六十斤。每人每日用二斤。足用四個月。今又添四千零三十二斤。合

前數共二萬四千一百九十二斤。欲用六個月。問每日每人應用幾何。

法以原有二萬零一百六十斤。與今六個月相乘。得一十二萬零九百六十個月。為一率。每人每日用水

二斤。通為三十二兩。為二率。以今有二萬四千一百九十二斤。與原四個月相乘。得九萬六千七百六十

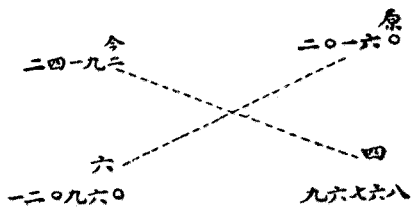
八個月。為三率。推得四率二十五兩六錢。即今每人每日應用之數也。試將兩首位數互乘。得四億八千

一率	今四百五十字
二率	原一百二十篇
三率	原六百字
四率	今一百六十篇

一率	原八人
二率	原一百六十篇
三率	今十二人
四率	今二百四十篇

一率	原二十日
二率	原二百四十篇
三率	今三十日
四率	今三百六十篇

七百七十一萬零七百斤。然後互乘月數。原有一邊得九萬六千七百六十八個月。今有一邊得一十二萬零九百六十個月。蓋原有水四億八千七百七十一萬零七百斤。足用九萬六千七百六十八個月。每人得三十二兩。今有水亦四億八千七百七十一萬零七百斤。欲用十二萬零九百六十個月。則每人得二十五兩六錢。爲轉比例四率也。然此法亦係兩比例合爲一比例也。如分作兩比例明之。則先以水數爲比例。原有水二萬零一百六十斤。每人每日用三十二兩。今水二萬四千一百九十二斤。則每人每日應用三十八兩四錢。此一正比例也。然月數不同。故次以月數爲比例。原用四個月。每日應用三十八兩四錢。今欲用六個月。則每日應用二十五兩六錢。此一轉比例也。法以



一率	今 一十二萬零九百六十月
二率	原 三十二兩
三率	原 九萬六千七百六十八月
四率	今 二十五兩六錢

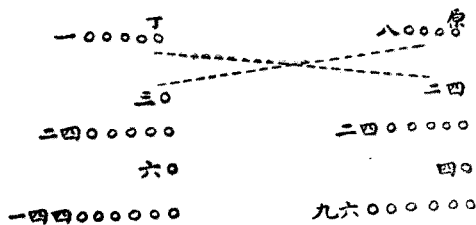
一率	原 二萬零一百六十斤
二率	原 三十二兩
三率	今 二萬四千一百九十二斤
四率	今 三十八兩四錢

一率	今 六個月
二率	原 三十八兩四錢
三率	原 四個月
四率	今 二十五兩六錢

兩一率相乘爲一率。兩三率相乘爲三率者。正合兩比例爲一比例也。設如原有米八萬石。用車二十四輛。日行四十里。二十日運完。今有米十萬石。用車三十輛。日行六十里。

問運完日數幾何。

法以原有八萬石。與今用車三十輛相乘。得二百四十萬輛。又以今行六十里乘之。得一億四千四百萬里爲一率。二十日爲二率。以今有十萬石與原用車二十四輛相乘。亦得二百四十萬輛。又以原行四十里乘之。得九千六百萬里爲三率。推得四率。十三日又三分日之一。卽今米十萬石運完之日數也。試將兩首位數互乘。得八十億石。然後互乘車數里數。原有一邊得九千六百萬里。今有一邊得一億四千四百萬里。蓋原有米八十



一率	原八萬石
二率	原二十日
三率	今十萬石
四率	今二十五日

總	
一率	今一億四千四百萬里
二率	原二十日
三率	原九千六百萬里
四率	今十三日又三分日之一



億石用車二百四十萬輛。行九千六百萬里。得二十日運完。今有米亦八十億石。亦用車二百四十萬輛。行一億四千四百萬里。故十三日又三分日之一運完。爲轉比例四率也。然比法亦係三比例合爲一比例也。如分作三比例明之。則先以米數爲比例。原米八萬石運二十日。今米十萬石則應運二十五日。此一正比例也。然車數不同。故次以車

數爲比例。原車二十四輛應運二十日。今車三十輛則應運二十日。此一轉比例也。然日行里數又不同。故次以里數爲比例。原行四十里應運二十日。今行六十里。則應運十三日

又三分日之一。此又一轉比例也。法以三比例之各一率連乘之爲一率。三比例之各三率連乘之爲三率者。正合三比例爲一比例也。

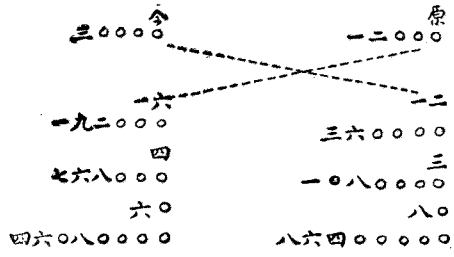
設如原有麥子一萬二千石。車十二輛。每車載三石。日行八十里。四十日運完。今有麥三萬石。車十六輛。每車載四石。日行六十里。問運完日數幾何。

法以原有麥子一萬二千石。與今車十六輛相乘。得一十九萬二千輛。又以今每車載麥四石乘之。得七十六萬八千石。又以今行六十里乘之。得四千六百零八萬里爲一率。四十日爲二率。以今有麥子三萬石。與原有車十二輛相乘。得三十六萬輛。又以原每車載麥三石乘之。得一百零八萬石。又以原行八十

一率	今三十車
二率	原二十五日
三率	原二十四車
四率	今二十日

一率	今六十里
二率	原二十日
三率	原四十里
四率	今十三日又三分日之一

里乘之得八千六百四十萬里爲三率。推得四率七十五日。即今麥三萬石運完之日數也。試將兩首位數互乘得三億六千萬石。然後互乘車數石數里數。原有一邊得八千六百四十萬里。今有一邊得四千六百零八萬里。蓋原有麥三億六千萬石。用車三十六萬輛。載一百零八萬石。行八千六百四十萬里。得四十日運完。今有麥亦三億六千萬石。用車一十九萬二千輛。載七十六萬八千石。行四千百零八萬里。得七十五日運完。爲轉比例四率也。然此法係四比例合爲一比例也。如分作四比例明之。則先以麥數爲比例。原麥一萬二千石運四十日。今麥三萬石則應運一百日。此一正比例也。然車數不同。故次以車數爲比例。原車十二輛應運一百日。今



總	
一率	今四千六百零八萬里
二率	原四十日
三率	原八千六百四十萬里
四率	今七十五日
一	
一率	原一萬二千石
二率	原四十日
三率	今三萬石
四率	今一百日
二	
一率	今十六車
二率	原一百日
三率	原十二車
四率	今七十五日

車十六輛則應運七十五日。此一轉比例也。然每車所載石數不同。故次以石數爲比例。原每車載三石。應運七十五日。今每車載四石。則應運五十六日二五。即四分日之一。此又一轉比例也。然日行里數又不同。故次以里數爲比例。原日行八十里。應運五十六日二五。今日行六十里。則應運七十五日。此又一轉比例也。法以四比例之各一率連乘之爲一率。四比例之各三率連乘之爲三率者。正合四比例爲一比例也。

一率	今四石
二率	原七十五日
三率	原三石
四率	今五十六日二五

一率	今六十里
二率	原五十六日二五
三率	原八十里
四率	今七十五日

正比例帶分

設如有銀買米。每米一石。價銀八錢四分。今買米三分石之二。問該銀若干。

法以米一石。用分母三通為三分為一率。銀八錢四分為二率。分子二分為三率。二三率相乘。一率除之。得四率五錢六分。即銀數也。蓋米一石通為三分。以三分與八錢四分之比。即同於二分與五錢六分之比。皆為三分之二之比例也。

設如有人行路。行過五分之二係八十里。問總里數幾何。

法以分子二分為一率。分母五分為二率。行過八十里為三率。二三率相乘。一率除之。得四率二百里。即總里數也。蓋總里數之五分之二為八十里。以二分與五分之比。即同於八十里與二百里之比。皆為五分之二之比例也。

設如有銀買米。每米三分石之二。價銀七分兩之五。今買米四分石之三。問該銀若干。

法以三分石之二為一率。七分兩之五為二率。四分石之三為三率。用通分乘法以二率分母七。與三率分母四相乘。得二十八。為乘出之分母。又以二率分子五。與三率分子三相乘。得一十五。為乘出之分子。

一率	三分
二率	八錢四分
三率	二分
四率	五錢六分

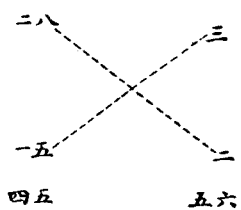
一率	二分
二率	五分
三率	八十里
四率	二百里

是爲二十八分之十五。爲二率三率相乘之數。以一率三分石之二除之。因分母除不盡。乃用通分互乘代除之法除之。以乘出之。分母二十八。與一率之分子二相乘。得五十六。爲除出之。分母。又以一率之分母三。與乘出之。分子十五相乘。得四十五。爲除出之。分子。即得四率五十六分兩之四十五。爲所求之數也。如求真數則變零分爲兩。以分母五十六爲一率。一兩爲二率。分子四十五爲三率。推得四率八錢餘二不盡。命爲五十六分錢之二。約爲二十八分錢之一。即所求之真數也。

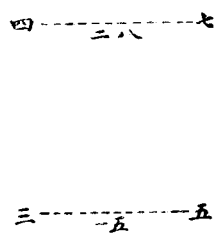
設如有銀買蠟。每銀二兩六錢。買蠟十斤零五分斤之二。又七兩零二分兩之一。今有銀九錢。問買蠟幾何。

法以銀二兩六錢爲一率。以蠟十斤通爲一百六十兩。又五分斤之二通爲六兩四錢。又七兩零二分兩

一率	三分石之二
二率	七分兩之五
三率	四分石之三
四率	五十六分兩之四十五



一率	五十六分
二率	一兩
三率	四十五分
四率	八錢又二十八分錢之一



之一通為七兩五錢。共得一百七十三兩九錢為二率。今有銀九錢為三率。推得四率六十兩零一錢九分。收為三斤零十三兩一錢九分。即所求之蠟數也。此法雖有零分。而分兩實可相通。故各相通以為比例四率也。

設如有銀買羽絨。每三分丈之一。價銀四分兩之三。今欲買八分丈之七。問該銀若干。

法以原羽絨三分丈之一為一率。原銀四分兩之三為二率。今羽絨八分丈之七為三率。用通分乘法。以

二率分母四與

三率分母八相

乘。得三十二為

乘出之分母。又

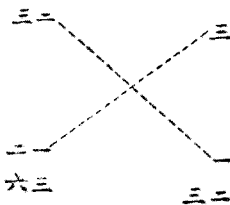
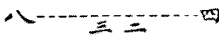
以二率分子三

與三率分子七

相乘。得二十一

為乘出之分子。是為三十二分之二十一為二率。三率相乘之數。乃以一率三分丈之一除之。因分母除不盡。乃用通分互乘代除之法除之。以乘出之分母三十二與一率之分子一相乘。仍得三十二為除出

一率	三分丈之一
二率	四分兩之三
三率	八分丈之七
四率	一兩又三十二分兩之三十一



一率	二兩六錢
二率	一百七十三兩九錢
三率	九錢
四率	六十兩零一錢九分

之分母。又以一率之分母三與乘出之分子二十一相乘得六十三。爲除出之分子。即得四率三十二分兩之六十三。爲所求之數也。滿分母三十二分收爲一兩。餘三十一。六十三分內減去三十二分。仍餘三十一。爲一兩又三十二分兩之三十一。如求真數。則以分母三十二爲一率。一兩爲二率。分子三十一爲三率。推得四率九錢六分八釐七毫五絲。與整數一兩相加。得一兩九錢六分八釐七毫五絲。即真數也。

設如有銀買緞。每緞二疋。共價八兩又五分兩之四。今欲買三十六疋。問共價若干。法以二疋爲一率。共價八兩用分母五通爲四十分。加分子四得四十四分爲二率。今買三十六疋爲三率。推得四率

一率	二疋
二率	四十四分
三率	三十六疋
四率	七百九十二分

一率	五分
二率	一兩
三率	七百九十二分
四率	一百五十八兩又五分兩之二

一率	二疋
二率	八兩八錢
三率	三十六疋
四率	一百五十八兩四錢

一率	三十二分
二率	一兩
三率	三十一分
四率	九錢六分八釐七毫五絲

十七兩又五十八兩又五分兩之二。以五分爲一率。一兩爲二率。七百九十二分爲三率。推得四率一百五十八兩。餘二分。即命爲五分兩之二。

卽所求之數也。如以五分兩之二收爲四錢。五分爲一兩。則二分爲四錢。則得一百五十八兩四錢。卽緞三十六疋之共價也。如以子母分變爲眞數求之。二疋共價八兩又五分兩之四。則五分爲一兩。四分爲八錢。是二疋共價爲八兩八錢。卽以二疋爲一率。八兩八錢爲二率。三十六疋爲三率。亦得四率一百五十八兩四錢。爲緞三十六疋之共價也。



轉比例帶分

設如一案長九尺寬一尺六寸今欲將原長減三分之一其面積仍與原案等問寬幾何

法以原長九尺用分母三歸之得每分三尺於原長九尺內減去一分之三尺餘六尺爲今長爲一率原寬一尺六寸爲二率原長九尺爲三率二三率相乘一率除之得四率二尺四寸即今所求之寬也此法因分母三可以度盡原長故變今長爲真數與他率爲比例也

設如營造原每日用五十六人歷一月又九分月之三可以完工今每日用六十四人問完工之日得幾何

法以今用六十四人爲一率以分母九通一月爲九分加入分子三共爲九分月之十二爲二率原用五十六人爲三率推得四率九分月之十分半滿分母九分收爲一月餘一分半十分半內減去九分餘一分半約爲六分月之一即得一月又六分月之一爲今用六十四人完工之日也蓋六十四人與一月又九分月之三之比即同於五十六人與一月又六分月之一之比也

一率	今長六尺
二率	原寬一尺六寸
三率	原長九尺
四率	今寬二尺四寸

一率	今六十四人
二率	原九分月之十二
三率	原五十六人
四率	今九分月之十分五

設如原有一門簾用綾一丈二尺其綾寬一尺五寸今欲作一新簾其綾比原綾寬七分尺之三問應用長數幾何

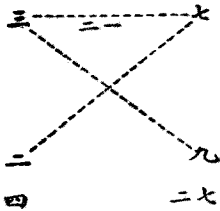
法以原寬一尺五寸用分母七通爲十分半加入分子三得今寬一十三分半爲一率原長一丈二尺爲二率原寬十分半爲三率推得四率九尺又一百三十五分尺之四十五約爲三分尺之一即得九尺又三分尺之一爲今應用之長數也蓋今寬十三分半與原寬十分半之比即同於原長一丈二尺與今長九尺又三分尺之一之比也

一率	今寬十三分五
二率	原長一丈二尺
三率	原寬十分五
四率	今長九尺又三分尺之一

設如城守兵一營其糧可支一年又七分年之二今汰去三分之一問應支年數幾何

法先以年分母七通一年爲七分加入分子二得七分年之九又以兵分子一減分母三得二爲三分之二爲現存兵數汰去三分之一則存者爲三分之二

因兩分母不同故用互乘以齊之以兩分母三七相乘得二十一爲其母分即原兵分以年分母七互乘兵分子二得十四爲今存兵分以兵分母三互乘年分子九得二十七爲原年分即以所通今存兵十四分爲一率原年數二十七分爲二率原



一率	今存兵十四分
二率	原年數二十七分
三率	原兵二十一分
四率	今年數四十分五

兵二十一分爲三率。推得四率二十一分年之四十分半。滿分母二十一分收爲一年。餘十九分半。四十分半內減二十一分。餘十九分半。約爲七分年之六分半。卽得一年又七分年之六分半。爲今應支之年數也。蓋今存兵比原兵少三分之一。則支糧年數必多三分之一。故今存兵十四分與原兵二十一分之比。卽同於原年數二十七分與今年數四十分半之比也。