Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 54

Übungsaufgaben

AUFGABE 54.1. Betrachte die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^3 - x^2 - 2x + 2.$$

Für welche Punkte $P \in \mathbb{R}$ ist φ regulär? Was besagt der Satz über implizite Abbildungen in dieser Situation? Wie sieht lokal die Faser in einem regulären Punkt aus? Kann es leere Fasern geben? Bestimme die Faser über 0.

AUFGABE 54.2. Was besagt der Satz über implizite Abbildungen für den Fall einer stetig differenzierbaren Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Für welche Punkte $P \in \mathbb{R}$ sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt? Wie sieht es aus, wenn φ ein Polynom ist?

AUFGABE 54.3. Was besagt der Satz über implizite Abbildungen für den Fall einer stetig differenzierbaren Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$? Für welche Punkte $P \in \mathbb{R}^n$ sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt?

AUFGABE 54.4. Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen f' und g' stets positiv seien. Zeige, dass die Funktion

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto f(x) + g(y),$$

stetig differenzierbar und in jedem Punkt regulär ist. Man gebe explizit eine Beschreibung der Fasern von φ als Graph an.

AUFGABE 54.5. Beschreibe die Fasern der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto xy.$$

Man gebe, falls dies möglich ist, Diffeomorphismen zwischen $\mathbb{R}$ und den Fasern von φ an.

AUFGABE 54.6. Beschreibe den Tangentialraum an die Faser in jedem regulären Punkt der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto xy.$$

AUFGABE 54.7. Beschreibe die Fasern der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

Man gebe, falls dies möglich ist, Diffeomorphismen zwischen offenen Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$ und (möglichst großen) offenen Teilmengen der Fasern von φ an.

AUFGABE 54.8. Beschreibe den Tangentialraum an die Faser in jedem regulären Punkt der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2+y^2.$$

AUFGABE 54.9. Finde für die folgenden Kurven $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derart, dass das Bild von γ genau die Faser von φ über 0 ist.

(1) $\gamma(t) = (t, t^3)$.
(2) $\gamma(t) = (t^3, t^3+1)$.
(3) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

AUFGABE 54.10.*

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) Realisiere den Graphen von f als Faser zu einer Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ über 0.

b) Sei f stetig differenzierbar. Zeige, dass die Punkte auf dem Graphen von f regulär sind.

AUFGABE 54.11. Sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto x^2+y^2+z^2.$$

Man fertige eine Skizze an, die die Fasern, die Tangentialräume und lokale Diffeomorphismen zwischen Tangentialraum und Faser sichtbar macht.

AUFGABE 54.12. Sei

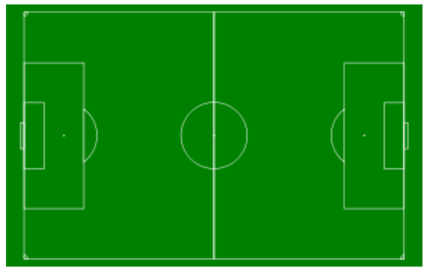
$$\varphi\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^y.$$

Man fertige Skizzen für den (1) Graph und (2) die Fasern und die Tangentialräume dieser Abbildung an.

AUFGABE 54.13. Es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung und $F \subseteq \mathbb{R}^n$ die Faser über $P \in \mathbb{R}^m$. Zeige, dass es auch eine stetige Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derart gibt, dass F die Faser von ψ über einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ ist.

AUFGABE 54.14. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass es eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ in einen weiteren reellen endlichdimensionalen Vektorraum W derart gibt, dass U die Faser über $0 \in W$ ist und dass φ in jedem Punkt $v \in V$ regulär ist.

AUFGABE 54.15. Ein Fußballfeld soll in einen Park mit Erhebungen und mit Senken umgewandelt werden. Dabei sollen die Linien unverändert bleiben und alle anderen Punkte sollen ihre Höhe ändern. Ist dabei jede Vorgabe, welche umrandeten Gebiete erhöht oder gesenkt werden sollen, möglich? Ist jedes solche Vorhaben durch eine stetige oder eine differenzierbare Höhenfunktion durchführbar? Können im differenzierbaren Fall alle Punkte regulär sein?



Aufgabe 54.16. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi\colon\ G \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung, die im Punkt $P \in G$ ein surjektives totales Differential besitze. Es sei $\psi\colon\ U \to \mathbb{R}^n$ (mit $U \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ offen) ein lokaler Diffeomorphismus auf die Faser durch P, bei dem $Q \in U$ auf P abgebildet wird. Zeige, dass man den Tangentialraum an die Faser durch P auch als

$$\left\{ P + (D\psi)_Q(u) \mid u \in \mathbb{R}^{n-m} \right\}$$

beschreiben kann.

Die nächste Aufgabe knüpft an Aufgabe 36.25 an.

Aufgabe 54.17. Im Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^3$ befinde sich die Pupille eines Auges (oder eine Linse) und die durch $x = -1$ bestimmte Ebene sei die Netzhaut $N \cong \mathbb{R}^2$ (oder eine Fotoplatte). Bestimme die Abbildung $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, die das Sehen (oder Fotografieren) beschreibt (d.h. einem Punkt des Halbraumes wird durch den Lichtstrahl ein Punkt der Netzhaut zugeordnet). Ist diese Abbildung differenzierbar? Für welche Punkte ist diese Abbildung regulär, wie sehen die Fasern aus?

Aufgabe 54.18. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, x, y) \longmapsto -t^2 + x^2 + y^2.$$

Bestimme die regulären Punkte und die Fasern dieser Abbildung.

Aufgabe 54.19. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (xy, yz).$$

Bestimme die regulären Punkte, die Fasern, das Bild und das Bild aller regulären Punkte dieser Abbildung.

Aufgabe 54.20. Beschreibe den Tangentialraum an die Faser in jedem regulären Punkt der Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

Aufgabe 54.21.*

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto \left(x^2 + y^2 + z^2,\ 2x + 3y + 4z\right).$$

a) Bestimme die regulären Punkte der Abbildung φ. Zeige, dass

$$P = (1, -2, 1)$$

regulär ist.

b) Beschreibe für den Punkt $P = (1, -2, 1)$ den Tangentialraum an die Faser F von φ durch P.

c) Man gebe für $P = (1, -2, 1)$ einen lokalen Diffeomorphismus zwischen einem offenen Intervall und einer offenen Umgebung von P in der Faser F durch P an.

Aufgabe 54.22.*

Der $\mathbb{R}^4$ sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen.

(1) Beschreibe den Lichtkegel in $\mathbb{R}^4$ als Faser $Y = f^{-1}(0)$ einer geeigneten Funktion $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ über $0 \in \mathbb{R}$.
(2) Zeige, dass der Nullpunkt der einzige kritische Punkt des Lichtkegels ist.
(3) Es sei $P \in Y$ ein Punkt $\neq 0$ des Lichtkegels und $v \in T_P Y \subseteq \mathbb{R}^4$ ein Tangentenvektor in P an der Faser, der zugleich selbst lichtartig sei. Zeige, dass $P + v$ ebenfalls lichtartig ist.
(4) Zeige, dass man in (3) nicht auf die Bedingung verzichten kann, dass v selbst lichtartig ist.

Aufgabe 54.23.*

Der $\mathbb{R}^4$ sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen.

(1) Beschreibe die Menge der Beobachtervektoren in $\mathbb{R}^4$ als Faser $Z = f^{-1}(s)$ einer geeigneten Funktion $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ über einer reellen Zahl $s \in \mathbb{R}$.
(2) Zeige, dass die Menge der Beobachtervektoren keine kritischen Punkte enthält.
(3) Es sei $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ein Beobachtervektor. Beschreibe eine explizite stetige Bijektion zwischen dem $\mathbb{R}^3$ und einer geeigneten Teilmenge der Beobachtermenge Z, zu der P gehören muss.

Aufgabe 54.24. Es seien L und M Mengen und $L \times M$ ihre Produktmenge. Beschreibe die Faser der Projektion

$$L \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto y,$$

über einem Punkt $y \in M$. Kann die Faser leer sein?

Aufgabe 54.25. Seien $L_1, \ldots, L_n$ und $M_1, \ldots, M_n$ Mengen und seien $\varphi_i\colon L_i \to M_i$ Abbildungen. Zu einem Punkt $P_i \in M_i$ sei $F_i \subseteq L_i$ die Faser von φ_i über P_i. Zeige, dass die Faser der Produktabbildung $\varphi = \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n$ über $P = (P_1, \ldots, P_n)$ gleich $F_1 \times \cdots \times F_n$ ist.

Aufgabe 54.26.*

Es sei
$$U = (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \setminus \{(2,4),(4,2)\}.$$
Begründe, ob die Abbildung
$$\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, (x,y) \longmapsto (x+y, xy, x^y) = (u,v,w).$$
injektiv ist oder nicht.

Aufgabe 54.27.*

Betrachte die Abbildung
$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, (s,t) \longmapsto (s, -s-t^2, t^3) = (x,y,z).$$

a) Erstelle die Jacobi-Matrix von φ.

b) Bestimme die regulären Punkte (s,t) von φ.

c) Zeige, dass $\varphi(s,t)$ die Bedingung
$$(x+y)^3 + z^2 = 0$$
erfüllt.

d) Zeige, dass die Abbildung injektiv ist.

Aufgabe 54.28. Formuliere und beweise den „Satz über die surjektive Abbildung“.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 54.29. (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion
$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2 \cdot \sin y - y \cdot \cos(xy).$$
Zeige, dass die Faser durch den Punkt $P = (2,3)$ sich lokal durch eine differenzierbare Kurve
$$\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto \gamma(t),$$
mit $\gamma(0) = P$ parametrisieren lässt, und bestimme die möglichen Werte der Ableitung $\gamma'(0)$.

Aufgabe 54.30. (4 Punkte)

Bestimme den Tangentialraum an die Faser im Punkt $(2,-1,3)$ der Abbildung
$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x,y,z) \longmapsto \left(x^2e^z - y^3,\, \frac{x}{e^{yz}}\right),$$
und zwar sowohl durch lineare Gleichungen als auch durch eine parametrisierte Gerade.

Aufgabe 54.31. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto x^2+y^2+z^2,$$

im Punkt $P=(1,-1,2)$. Man gebe eine differenzierbare Abbildung $\psi\colon U \to \mathbb{R}^3$ an, wobei U eine möglichst große offene Teilmenge des Tangentialraumes T_PF an die Faser F_P von φ durch P ist, die eine Bijektion zwischen U und $V \cap F_P$ stiftet ($P \in V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen).

Aufgabe 54.32. (4 Punkte)

Es seien $\varphi_1, \varphi_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetige Abbildungen und seien F_1 und F_2 Fasern dieser Abbildungen, d.h. es sei $F_1 = \varphi_1^{-1}(b_1)$ und $F_2 = \varphi_2^{-1}(b_2)$ (für gewisse $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$). Zeige, dass es eine stetige Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und ein $a \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass $F_1 \cup F_2 = \varphi^{-1}(a)$ ist.

Aufgabe 54.33. (4 Punkte)

Man gebe explizit eine stetige Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ derart, dass die Faser von φ über 0 gleich $I = \{(x,0) \mid x \in [0,1]\}$ ist.

Aufgabe 54.34. (5 Punkte)

Zeige, dass die Fasern der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2-y^3,$$

in jedem Punkt $P=(x,y)$ lokal homöomorph zu einem offenen reellen Intervall sind. D.h. dass es zu jedem Punkt $P=(x,y)$ eine offene Umgebung $(x,y) \in U$, ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und eine stetige Bijektion $I \to U \cap F_P$, gibt (wobei F_P die Faser von φ durch P bezeichnet), deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 54.35. (5 Punkte)

Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve. Zeige, dass die Faser über jedem Punkt $c \in \mathbb{R}^n$ endlich ist.

Aufgabe 54.36. (6 Punkte)

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ eine in $P \in G$ total differenzierbare Abbildung mit injektivem totalen Differential. Zeige, dass es eine offene Umgebung U von P mit $\varphi^{-1}(\varphi(P)) \cap U = \{P\}$ gibt.

Tipp: Betrachte das totale Differential auf der Einheitssphäre. Der Satz über die injektive Abbildung ist hier nicht anwendbar.

Abbildungsverzeichnis