+ 7051

復興初級中學教科書

幾ㄐㄧ 何ㄏㄜˊ

上　冊

余介石 徐子豪編著
段育華校訂

國民政府教育部審定

改照新課程
標準編輯

商務印書館發行

復興初級中學教科書

幾ㄐㄧ　何ㄏㄜˊ

上　册

余介石　徐子豪編著
段育華校訂

商務印書館發行

編輯大意

(一) 這册幾何,完全是按照最近部頒課程標準編輯,適合初級中學第二三學年之用.

(二) 按部頒課程標準,初中第二三學年,代數和幾何并授,并略及數值三角,本書與復興初中教科書代數及數值三角二書聯絡密切,同時採用,可收互相啓發之效.

(三) 本書分八編,第一二兩編爲實驗幾何學,第三至第八編爲理解幾何學,其中第四五兩編論直線形,但軌跡與三角形內共點線部分,初學每感難解,故移入第六編圓內合併講授(此種編制,係依據段師育華著混合算學). 正多角形性質,則分配於圓,比例內相當部分,其與圓的關係,則與面積合爲第八編幾何計算.故本書篇幅雖不多,對重要教材,已無缺漏.

(四) 書末附有總習題一百四十則,供學生於習完本書時之複習,藉收融會貫通之效,教師可視時間之多少,及學生程度之高下,酌量分配選習.

(五) 本書遵照部頒課程標準,詳於直線形,而略於圓及以後各部分,軌跡及作圖題,僅言大要,對於不可通

約的理,則未能提及.

(六) 舊時幾何教本,往往拘泥於理論的嚴謹,不特初學習之,絕不能感受必要,且其所謂嚴謹亦甚多可議之點.蓋完備的嚴謹,決非初中程度所能談到,本書求於初學所能了解之範圍中,達於適當嚴謹的程度.

(七) 英美新著幾何每混合實驗理論二方面,自是引導初學循序漸進之良法.對於作圖題,這點區別,尤爲重要,本書對此特加注意,以救新派幾何之弊.

(八) 幾何定理的證法,本應從解析入手,但教本體裁,自只能以綜合法爲主.本書特於每定理證法前,加列解析一項,以引起學生自動研究的習慣,而養成其解題的能力.

(九) 本書習題與正文關係密切,尤其是在實驗幾何中,習題簡直就是正文的一部分.教師學子,對此宜特加注意.其尤重要者,并加星號 * 爲記.

(十) 這書純用簡潔的白話講解,使學生不至生文字上困難,致阻其學習的興趣.

(十一) 本書所用名詞,於初見處,附註英文原名.

(十二) 編者承吾師段育華教授特允,從混合算學教科書中,採用許多教材,並定理名稱,證題格式等等,本書因此增色不少.謹此附誌,以表謝忱.

(十三) 本書另編教員準備書,詳載(1)教材摘要(2)時間支配(3)教法要點(4)問題略解等項,專供教師參考.

(十四) 此次部頒課程標準,初中算學部分,以幾何特色最多,與舊案頗多出入;編者雖係該標準案起草之一人,祇以學校需要甚急.且奉段師令囑編,期限至迫,以數月之力,倉卒成書,疵謬在所難免,深望海內專家及教師嚴加指正,俾得隨時修訂.

民國二十二年元月編者自識

幾何學

目　次

上冊

初級中學教科書

幾何學上册

第一編　基本圖形及其作圖

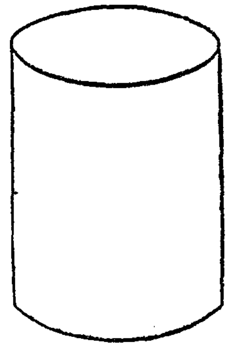
基本圖形

1. 幾何學目的. 幾何學目的卽在研究空間內點,線,面,體的性質. 點,線,面,體,便是幾何中基本圖形. 只論及同一平面上的圖形的叫平面幾何學(Plane Geometry), 論到空間圖形的稱爲立體幾何學(Solid Geometry). 本書大概只談平面幾何學, 對於立體幾何學, 不過略述及其基本觀念,和量法的應用.

2. 立體(Solid). 任取一種實物,如鉛筆, 書, 足球等等, 只論他的形狀,而不顧他的實質, 都成爲幾何學中的立體.

3. 面(Surface). 立體和空間接界的地方,

叫做面. 我們通常都說立體由幾面包成. 例如一枝未削過的圓鉛筆,四周是一面捲成,兩端是二個平坦的圓面. 看一個中空的圓洋鐵筒,更可明白. 所以我們說



立體以面爲界.

4. 平面(Plane). 靜止的水面,就是平面的一個最好例子. 黑板,棹面,書面等等也都是平面.

一面是否平面,很容易試出. 用一根直尺,無論如何排法,處處都貼合在那面上的,便是平面,否則爲曲面(Curved surface). 拿一根尺靠在一個圓洋鐵筒,或是圓柱上試試看. 雖然有時候能貼合,但是有時卻辦不到. 再用一個皮球試試看,那就無論如何,都不能貼合了.

5. 面與實物. 我們切勿誤會一頁書是面,他實在是立體,和一本書一樣,不過因爲很薄,使我們不注意. 幾何學所說的面,只是指立

體的界,無厚薄可言;所以不但一頁書不是面,任何實物都不是面.要勉強想一個例子來說,就是牆上的影.所以

面只有長寬,而無厚薄.

習題一

1.有一本書和一塊磚,大小相同,我們能說這二件實物完全一樣麼? 他們所表示的立體同不同?

2.就教室中舉出幾件簡單的立體來,并說明周界的面,那些是平面? 那些是曲面?

3.一張紙放在書棹上,可表示那一種面,捲起來可表示那一種面?

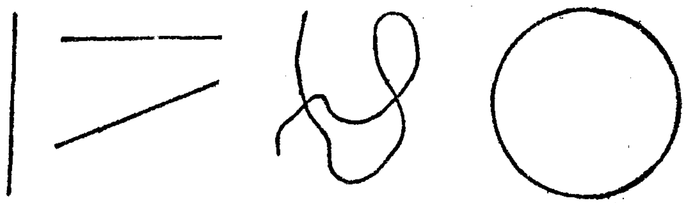
4.捲紙成筒,放開來,能不能合在棹面上? 把紙球剪開後,能不能平鋪在棹面上?

6. 線(Line).二面相遇的地方爲線.例如教室中二面牆相接的地方是線,書脊和書面相界處也是線,所以

面以線爲界.

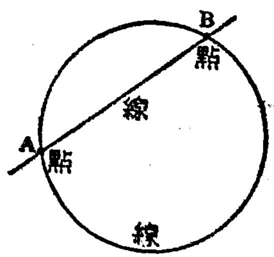
7. 直線(Straight line).一條懸掛重物的

細線,樂器上張緊了的弦,所表的線叫直線. 若將那細線隨便放在棹上, 或是把弦放鬆, 形狀改變,不復成直線時,便叫曲線 (Curved line 或 Curve).初等幾何學中最重要的曲線是圓(Circle), 如碗口,如車輪的邊緣,都可代表.



直線 曲線 圓

8. 點 (Point). 教室中地板和一橫一直的兩面牆, 相接成三條線, 在牆角相遇,那角上的尖處稱爲一點. 一條細線的兩端也是點. 換句話講,



線以點爲界.

也可以說

線相交成點.

註. 點可用大寫英文字母來記,如上圖.

9. 幾何元素(Geometrical elements). 點,線,面,體是幾何基本元素,由他們構成的圖形,叫做幾何圖形(Geometrical figure).

在§5裏說過,實物都不是面,在上面幾節裏,又講到線爲面的界,點爲線的界,可知實物更不能爲線,爲點. 一根頭髮細極了,我們不去注意他有多粗,便可以代表線;一粒灰塵微細了,我們不去注意他的大小,便可代表點. 其實

線只有長而無寬,

點只有位置,而無大小.

只是幾何中抽象觀念,而非實物. 幾何圖形既由元素合成,所以只可說代表實物,而不是實物本身.

習題二

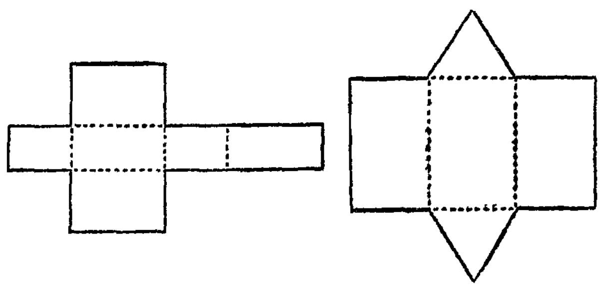
1. 點和線的關係,可用二句話說出(見§8);線和面,面和體的關係,可以換一句話說出麼?

*2. 如以雨點表點,則雨點下降成雨絲時,可以代表點線間的什麼關係? 和§8所說的相同麼?

*3. 精於武術的人,舞起棍子來,可以潑水不入,勝如銅牆鐵壁. 今以棍表線,這例可以表示線與面間的何種關係? 和§6所說的同不同?

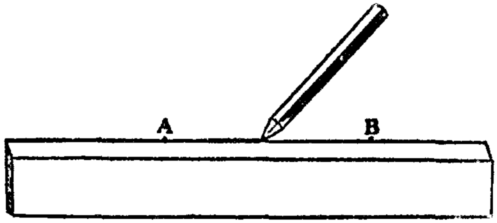
*4. 用銅元直立棹面上,用力旋轉. 這例可以表示體與面間的何種關係? 和§3所說的同不同?

§5. 用硬紙板或厚紙,照下面圖形剪摺成立體. 指出其中的點,線,面,并注意各元素間關係.



10. 幾何作圖(Geometrical construction)和所用儀器. 幾何學目的既在研究圖形性質,必須先作出所需要的圖形, 但非用儀器不能準確. 基本儀器只有二件: (一)無度尺或稱直尺(Ruler) (二)圓規(Compasses). 尚有他種儀器,或可使作圖便利(如三角板 Set squares),或可量出度數(如分角器 Proctractor). 但前者并非理論

所必需,後者更爲理論所不許,待後文再說.

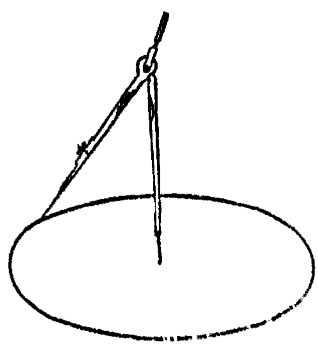


11. 直線畫法. 將直尺平放紙上,用鉛筆沿邊一畫,就成直線如上圖. 如要作一直線經過二點,必先移尺相靠,此時尺的位置不能再推轉. 所以

二點決定唯一的直線.

註. 因此故直線常以二點記出如AB.

12. 圓規用法. 將圓規一脚的針尖,釘在紙上,而旋轉他脚上的鉛條或鴨嘴筆,便可畫成一圓如右圖.針尖所在的點,叫做圓心 (Center),兩脚間的距離,叫做半徑 (Radius). 注意轉動圓規時,勿使二脚間距離改變,則作成的圓,起訖處自然

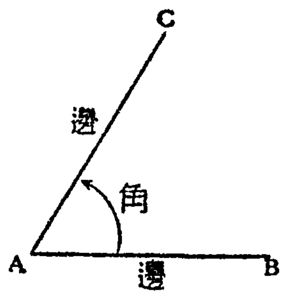


相合. 此法可驗圓規是否準確. 由圓的作法,可知

(一)圓上任何點,皆距圓心等遠.

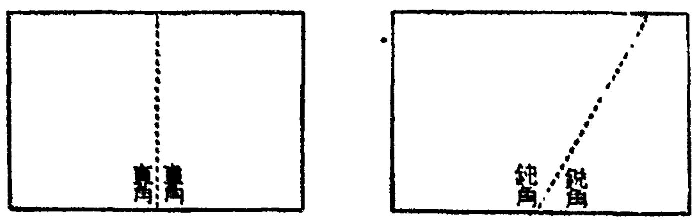
(二)已知圓心和半徑,即可作一圓.

13. 角(Angle). 把圓規二脚張開,即成一角. 如用運動的觀念表說, 卽自一點A,引直線AB,再將AB繞A點旋轉至於AC, 卽成一角,記爲∠BAC. A點叫角的頂點(Vertex)AB, AC爲角的二邊(Sides).



註. 在記法裏,必須將頂點寫在中間.

14. 直角(Right angle), 銳角(Acute angle),鈍角(Obtuse angle). 把一張紙對摺,摺痕和紙一邊,



成功二個大小相同的角，叫做直角；否則成大小二角，大者稱鈍角，小者稱銳角．直角二邊的關係彼此互稱爲垂線(Perpendicular)．

如欲使摺痕經過一點，則依一邊只有一種摺法．又不論怎樣對摺，所成的角，大小總是一樣．所以

(一)經過線上一點，或線外一點，對於本線，只有一條垂線．

(二)凡是直角都相等．

習　題　三

1. 作一直線經過A，B二點，將尺移到二點上面再畫，所成的直線，是否應和已作的相合？何故？

註．此法可驗一條尺是否平直．

*2. 在紙上只取一點，能作多少直線經過他？

*3. 在紙上任意取三點，能不能作一直線經過他們？

*4. 用1市寸(後文簡稱寸)做半徑，在二張紙上，各作一圓，再將二紙相重，使圓心合在一處，看二圓是不是也疊合？再作幾個試試看．由此可推出什麼結論來？

註．1市寸＝$\frac{1}{3}$公寸＝1.0417寸(營造尺庫平制)．

5. 凡是鈍角都相等麼? 凡是銳角呢?

*6. 鈍角銳角,直角的大小比較如何?

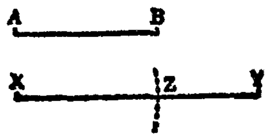
*7. 任意作幾個圓,每二圓至多能交於幾點? 有不相交的時候麼? 再任意作幾條直線,看直線和圓至多有幾交點?

基本作圖題

15. 線段(Line-segment). 直線上二點,雖能定其位置,卻不能定其長短,因為幾何中所說的直線,是假設可以無限延長的.換句話說,就是直線無長短可言.若是要比長較短,必須取有限的一段,或是說以二點為起訖的一段,這就叫做線段如AB.

這A,B二點稱為端(Extremities),直線上在二端外的部分,叫延線(Prolongation).

16. 基本作圖題一: 取等長線段.



[已知]　AB,XY二線段,而XY長於AB.

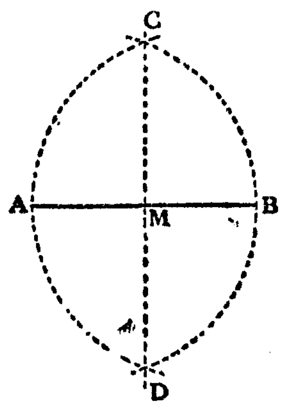
[求作]　在XY上截取一條和AB等長的線段XZ.

[作法]　以X爲心,AB爲半徑作一弧(Arc,即圓上的一段),和XY相截於Z. XZ就是所求的線段.

[理由]　看§12. 學生可自行舉出來.

註. 圖中虛線,是表示作圖所需的輔助線.

17. 基本作圖題二: 平分已知線段.



[已知]　線段AB.

[求作]　線上一點(中點Midpoint)將其平分爲二.

[作法]　先後以A,B爲中心,取適宜同樣的半徑(最好即爲AB),交換作二弧. 設二弧交於C和D

連CD直線,與AB交於M,即爲所求的點.

[理由]　須學到後面,方能明白(以後各作圖題

同).

註. 如作弧時,所用半徑過短,則二弧不能相交,故必須取稍長者,原不必與AB相等.

習題四

1. 已知AB與CD二線段,有何法能定孰長孰短?

*2. 已知AB,CD二線段,求作其和及差(AB長於CD.)

3. 求將一已知線段,分爲4等分,8等分,16等分.

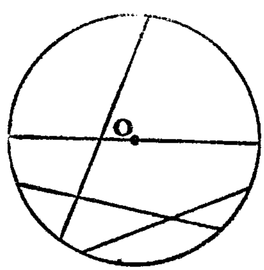
*4. 平分AB最簡便法如下:摺紙使A,B合爲一點,則摺痕過AB處,即中點M. 這摺痕是§17的圖中那根線?

*5. 基本作圖題中的CD是否和AB垂直?

註. CD叫做AB的垂直平分線(Perpendicular bisector). 一條線段,能不能有二條垂直平分線.

6. 自AB的垂直平分線上,任取一點P,連PA,PB而比較二者的長短. 多試幾次,而推出一條結論來.

7. 在已知的一圓內,過圓心作一線段,又作不過圓心的幾條線段,各線段的端點,都在圓上. 前者稱爲直徑(Diameter)後者稱爲弦(Chord.)

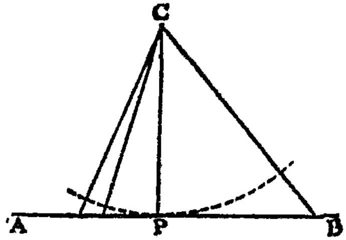


試比較直徑和弦的長短,而寫出一條結論來.

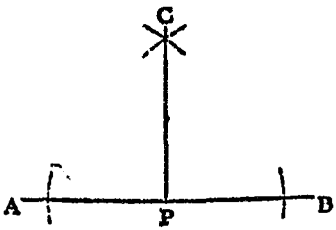
註. 直徑分圓爲二,叫做半圓(Semicircle).

8. 同一圓內的直徑與半徑,有什麼關係?

*9. 已知 CP 垂直於 AB. 其他各線,叫做斜線. 設法比較各線段的長短,而推出一條結論.



18. 基本作圖題三: 過已知線上一點,作其垂線.



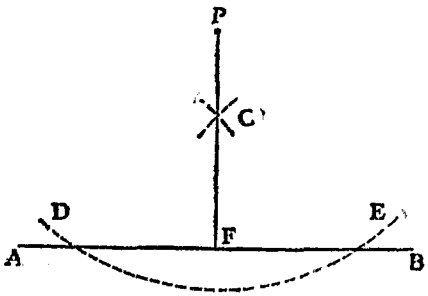
[已知] 直線AB,和線上一點P.

[求作] 過P點而與AB垂直的直線.

[作法] 以P為心,用任意半徑作弧,交AB於D,E.

先後以D,E為心,取適宜的同樣半徑(只要比PD大的都可用),交換作二弧. 取其一交點C,連CP即得.

19. 基本作圖題四: 過已知線外一點,作其垂線.



[已知] 直線AB和線外一點P.

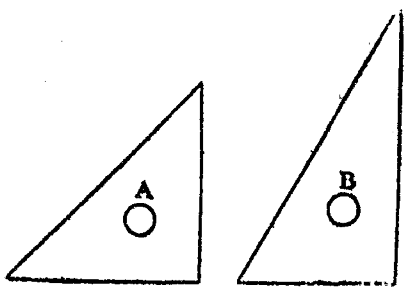
[求作] 過P點而與AB垂直的直線.

[作法] 在AB上取一點D,以P爲圓心,PD爲半徑作弧,交AB於另一點E.

先後以D,E爲心,適宜的等半徑(大於DE的一半)交換作弧.

取二弧的一交點C,連PC至F,即得所求的垂線.

20. 三角板. 三角板每付有二塊,如下圖.每塊各有一直角.一塊中夾直角的二邊等長,他一塊中,最長的一邊(即對直角的邊)是最

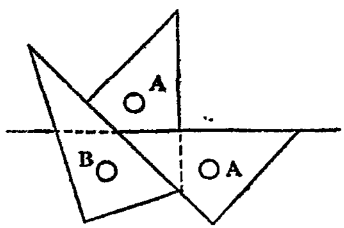


短邊的二倍.

凡用三角板能作的圖，都可單藉直尺和圓規作出，不過手續不能像用三角板的簡便罷了.

習　題　五

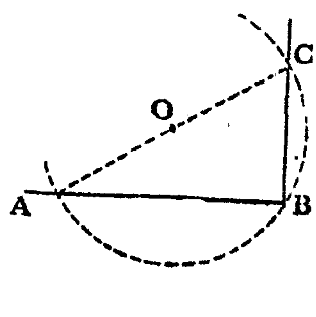
*1. 說明下列二種的用三角板作垂線法.



註. 圖中含有虛線的A,是表示那塊三角板移動後的位置. 注意此法對基本作圖題三和四都可用.

2. 試述一個摺紙作垂線的方法,這垂線所要經過的點,或在線上,或在線外(參看習題四的第5題).

*3. 在一直線上任意取二點,作這線的二垂線. 將這二垂線儘量延長,看他們能不能相交.



*4. 如在線段端點求作

其垂線,往往要將這線段延長,再依基本作圖題三的方法去求. 右圖表示不必延長,亦可作出,試說明其作法步驟.

註. O是一任意適當點,AC是一直徑.

*5. 任意作一圓,和其中一半徑,就圓上的端點,作這半徑的垂線. 這垂線和這圓有幾個交點?

註. 這線叫做圓的切線(Tangent).

*6. 任意取不在一直線的三點A,B,C. 連接AB,BC,CA三線段,所成的圖叫做三角形(Triangle). A,B,C叫做頂點(Vertex)各線段叫做邊.

試自三頂點作到對邊的垂線,看這三垂線能不能在一點相交? 多畫幾個圖試試看.

*7. 作三角形各邊的垂直平分線(見習題四第6題);看能否交於一點? 多畫幾個圖試試看.

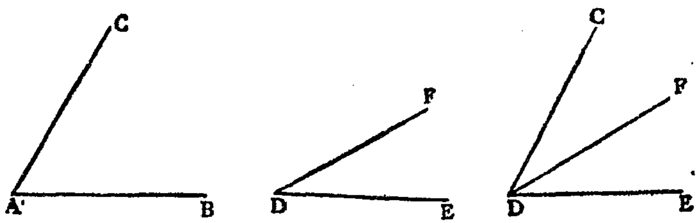
*8. 用上題的交點做圓心,并以自這點到任一頂點的距離為半徑作一圓. 這圓是否經過其他頂點?(參看習題四第7題).

註. 這圓叫做那三角形的外接圓(Circumscribed circle).

21. 疊合法(Method of supposition). 就上

文§§12,16等處,便知二線段的長短,可藉圓規來比較. 此種間接的方法,無異將二線段移合一處,以定其孰長孰短. 移合二圖,以較大小,叫做疊合法,是幾何學中的基本方法,不僅在線段上可應用.

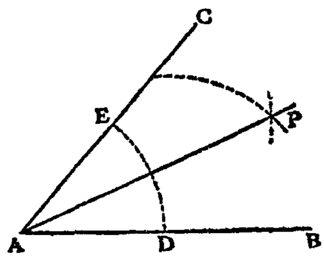
二個角的大小,也可用疊合法比較. 如下圖,將∠BAC移至∠DEF上,使A,D二頂點相合,



且AB落在DE上,如AC落於DF外,則∠BAC大於∠EDF. 同理,在二邊相合時,二角相等,AC落於DF內時,則∠BAC較小.

注意二邊的相合與否,與邊長無關,就是說角的大小,只看他開張的程度,而與二邊的長短不相干涉.

22. 基本作圖題五: 平分已知角.



[已知] ∠BAC.

[求作] 過頂點A的一直線,平分∠BAC為二等分.

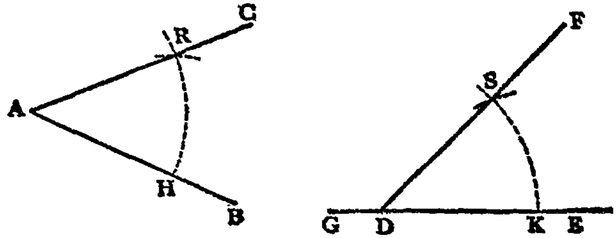
[作法] 以A為圓心,取適宜半徑作弧,交AB, AC二邊於D,E二點.

先後以D,E為心,適宜長度(例如自D至AC邊上任一點的長)為半徑,交換作二弧.

取二弧的一交點P,連AP卽得所求的線.

註. 這線叫做分角線(Bisector).

23. 基本作圖題六: 就一已知直線上作一角,使等於已知角.



[已知] ∠BAC和已知直線GE上一點D.

[求作] 以D爲頂點,作一角等於∠BAC.

[作法] 以A爲心,任意長爲半徑作弧,交二邊於H和R. 再就D爲心,以同樣半徑作弧,交GE於K.

用圓規就第一次所作弧上,取得和HR等長的半徑,再以K爲圓心作弧,與過K點的弧交於S.

連接DS,得∠EDF,即爲所求的角.

註. 學生可用疊合法,試驗二角果否相等.

習題六

1. 將一已知角分爲4等分,再分爲8等分.

2. 試用摺紙法平分一角.

*3. 三角形三邊所成的角叫內角(Interior angle),一邊和他邊延長線所成的角,叫外角(Exterior angle).

作三角形三內角的分角線,看是否交於一點! 各外角的分角線呢! 二內角分角線,和第三外角的分角線呢!

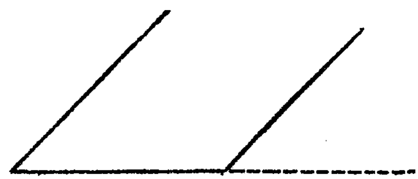
*4. 自上題的交點,作到各邊的垂線看看他們長短是否相等! 如以這點爲中心,一邊上的垂線做半徑作圓,則這邊爲圓的切線(看習題五第5題),其餘兩邊是否也是這圓的切線!

註. 這圓稱爲那三角形的內切圓(Inscribed circle).

5.在一線段二端,作相等的銳角,并比較二對邊.

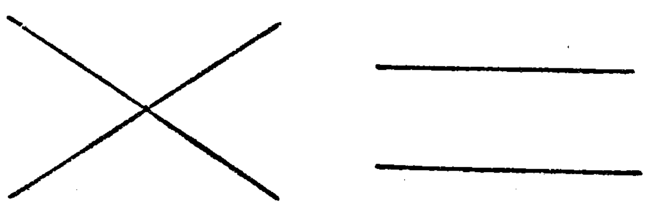
註. 所成的三角形,對等角的二邊必等,叫等腰三角形(Isosceles triangle).

*6.在一線段二端各作一角,使其一的他一邊,和這



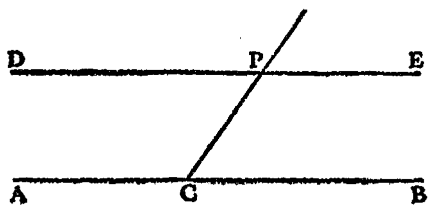
線段延長線所成的角,與另一角相等. 試將這二邊儘量延長,看他們能不能相交!(此題可與習題五中第3題比較).

24. 平行線(Parallels). 在普通情形,二直線常可相交於一點. 你們曾遇着過二條直線



無論如何延長都不相交的情形麼!看長方棹的二對邊,或是黑板的上下沿邊. 這種總不相交的二直線,叫平行線.

25. 基本作圖題七：過一已知直線外一點,作一直線,與前直線平行.



[已知]　直線AB和線外一點P.

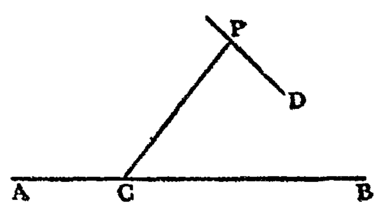
[求作]　一直線過P,而與AB平行.

[作法]　在AB上任取一點C,而聯PC.

在P點作∠CPD等於∠BCP(按基本作圖題六).

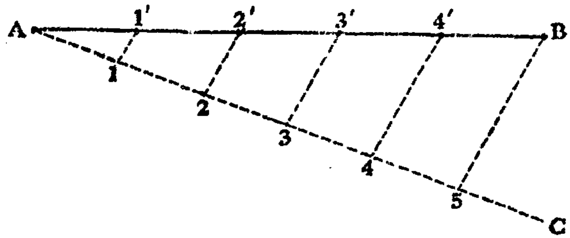
DP,或其延長線DE,即所求的平行線.

註.　注意務必使PD和CB方向相反.如係同一方向,



還能得平行線麼!

26. 基本作圖題八：分已知線段爲任意幾等分.



[已知] 線段AB.

[求作] 平分AB爲5等分.

[作法] 過A點另引一直線AC.

在AC上取任意的長度A1,再向前繼續截取等長線段12,23,34,45(按基本作圖題一).

連接B5.

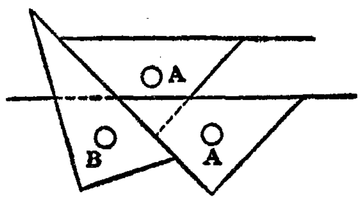
過1,2,3,4各點,依B5的平行線,與AB交於1',2',3',4'諸點.

1',2',3',4'卽爲所求的等分點.

註. 我們或者要聯想到一已知角,也可分爲任意幾等分. 這問題雖和上題類似,但是性質卻截然不同. 因爲用理論的方法(這方法在初等幾何學中還不能講到),已經證明單用直尺圓規,不能解決此事. 這種問題叫做作圖不能問題(Impossible construction). 但在實際上,儘可作出差近的分法,并使和眞值相差甚微,達於我們所需要的程度,而使其不害於致用.

習題七

*1. 說明下圖所表的用三角板作平行線法.



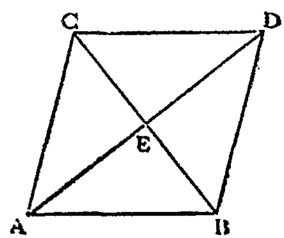
*2. 已知一角,要另作一角,使二邊與前角的邊依同向平行. 疊合這二角,看他們是否相等.

*3. 有二平行線,要作其中一線的垂線,問這垂線是不是也和他一線垂直!

4. 說出一種用摺紙驗明二直線平行的方法來.

5. 平分一任意三角形二邊,連接二中點,試用上題方法核驗這線是否和三角形的第三邊平行!

6. 分一條已知線段成三部分,使成1:2:3的比.



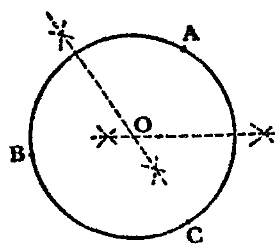
*7. 平分三角形ABC的BC邊於E點. 連接AE而延長至D,使ED=AE. 連接DC和DB,試核驗DC平行於BA,且DB平行於CA.

註. 四線段首尾相接連成的圖形,叫做四邊形(Quadrilateral). 如其中兩兩對邊

都平行,便叫做平行四邊形(Parallelogram). 只有一對平行邊,而他二邊不平行的,叫做梯形(Trapezoid).

8. 平分梯形中不平行二邊,連成一線段. 這線段是否和他二邊平行?

27. 基本作圖題九: 作一圓經過不在一直線上的三點.



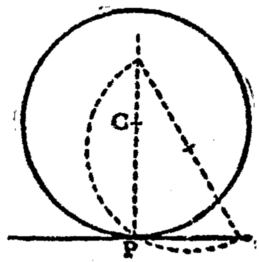
[已知] A,B,C三點,不在一直線上.

[求作] 一圓經過這三點.

[作法] 學生自己寫出來(看習題五第8題)

註. 如果A,B,C三點在一直線上,試依同法作圖,看看爲何作不出(參考習題五第5題).

28. 基本作圖題十: 作一圓上已知點的切線.



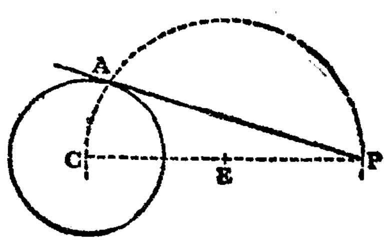
[已知]　C圓和其上一點P.

[求作]　過P點的切線.

[作法]　學生自己寫出來(看習題五第4,5二題).

註. C圓卽以C爲中心的圓,P點叫切點(Point of contact).

29. 基本作圖題十一: 從已知的圓外面一點要作這圓的切線.



[已知]　C圓和圓外一點P.

[求作]　自P點至圓上的切線.

[作法]　連接線段CP,并平分他於E點.

以E為圓心,CE為半徑作弧,交已知圓於A.

連PA,即得一切線.

30. 花紋圖形(Geometrical design). 許多的美麗花紋,都是由簡單的幾何圖形,集合而成的. 學生應照習題八中各圖,放大畫出.

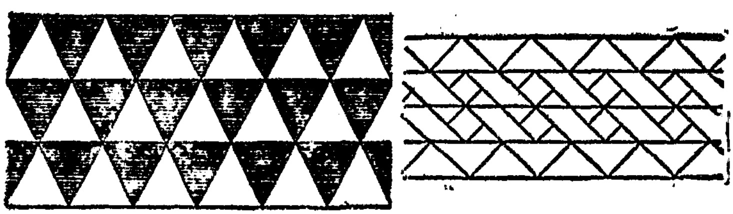
習 題 八

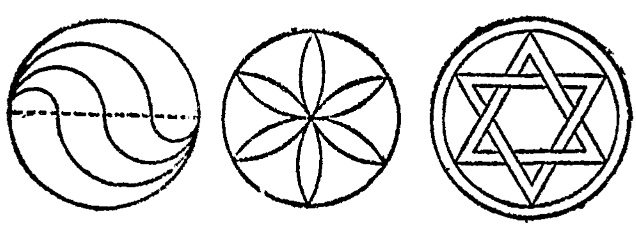
*1. 自已知圓外一點,可作這圓的幾條切線?

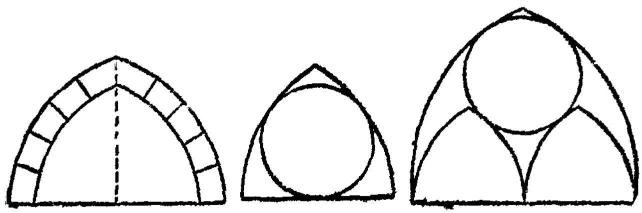
*2. 自已知圓內一點,能作出切線來麼? 照§29的方法做做看.

3. 甲,乙,丙三家,不在一直路上,求掘一井,到三家的距離要一樣遠近,問有什麼方法?

4. 畫下面的各種花紋圖形.







第二編 量法

圖形和度量

31. 量法 (Measurement). 量法就是求一量中所含標準量的倍數. 譬如我們用尺去量這教室的長,得到結果2丈4尺.那就是說這教室的長,是所用標準尺的24倍. 這標準量叫單位(Unit),所以

量法必先定單位.

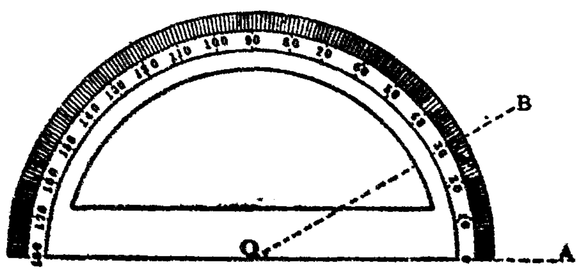
32. 量法的原理. 就上節所述的例子看來,量法不過只是疊合法的應用. 但是人類的官能和所用的器械,都不能絕對的正確,以致量得的結果,也決不能毫無差誤(Error). 我們只須用一根尺去量書棹的邊,結果讀到公釐,接連量幾次,比較各結果,便知必不有出入. 所以

量法所得結果,僅為近似的.

只要結果準確到所需程度便够了.

33. 直接量法. 應用疊合法的理,直接去求一圖形的度量,叫做直接量法(Direct measurement). 長短的直接量法,用有度尺. 下圖是條3寸長的尺. 量角度的大小須用分角器. 分

角器是個半圓,分成180等分,每等分叫做一度



(Degree). 度還可分成分(Minute),秒(Second),但在分角器上看不出. 角度即因所對弧而定.

要量 ∠AOB 的大小,可將這器的底線和OA邊相合,并使圓心(即底邊上所刻細痕處)合於角頂O. 再就OB邊,讀出∠AOB的度數來.

如圖$\angle AOB=30^\circ$(卽30度).

34. 實際上作圖. 在第一編 §§16,23 所述作等線段和等角的方法, 是求所作的量和題設的已知量相等; 就是說, 要二者能相疊合. 至於原來已知量大小度數如何, 我們并不去過問. 這種理論的作圖題,只許用直尺和圓規來作 (有時爲方便起見, 也可用三角板等爲輔助). 實際上作圖題, 乃作一圖形, 使其度量爲已知, 例如說, 作一條 2 市寸的線段, 或是一隻 10° 的角度. 這兩種問題, 看去似無不同, 實則性質大異. 我們如不用分角器,而只單用直尺和圓規,便作不出 10° 的角(要證明這理,須用很高深的理論,在高初中程度,卻還講不到). 學幾何的人, 對於這種差別所在, 不能不注意(參看§26 註).

本書第一二兩編中, 側重實際問題, 俾能應實用上的需要, 第三編以後, 只講理論上的作圖法.

習 題 九

*1. 將一條長4市寸的線段,等分爲6(用§26方法).再用一有度尺法量各部分的長,看看對不對.

*2. 用量法核驗(1)習題四第七題的結論,(2)習題五第10題的結論,(3)習題六第4,5二題的結論.

*3. 照§33所說量角的方法,推出一種用分角器作已知度數的角的作法. 隨便說幾種度數,畫出角來.

4. 畫幾個直角,量量看是幾度.

*5. 量二塊三角板各角的度數(結果頗有用,宜記憶)

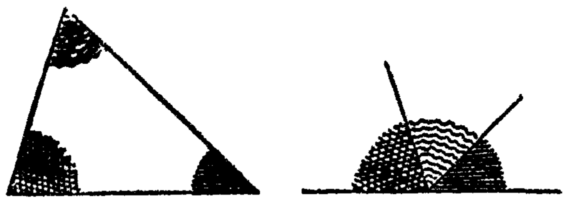
*6. 取直線上一點,將分成二部分,當做角的二邊,這角有幾度?

註. 這角叫做平角(Straight angle).

*7. 任意畫四個三角形(每邊宜在$1\frac{1}{2}$市寸以上),量各角的度數,而求其和.

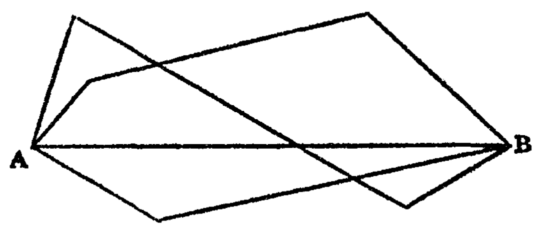
三角形	一	二	三	四
第一角				
第二角				
第三角				
總和				

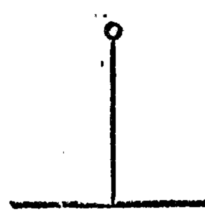
*8. 在紙板或硬紙上畫幾個三角形. 剪下每三角形諸角,各集於一處如下圖,看下面二邊是否成一直線.



由本題和上題,可推得什麼結論!

35. 距離. 連續銜接卻不同在一條直線上的線段,叫折線(Broken line). 折線的長,即各線段長的總和. 有A,B二點,用一直達線段和





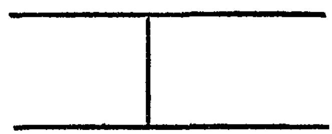
幾條折線去連接起來. 試量各折線的長,和直達線段的長來比較.

連接二點線段的長,叫做二點間距離. 這理實是量法的起點. 再依習題五第10題,習題九第2題(2)結論的指示,可令

自一點到一直線上垂線的長爲這點與這直線間的距離.

又二平行線中一線的垂線, 也必和他線垂直(習題七第3題), 且介於平行線間,垂線上一段的長爲一定. 所以

二平行線間公共垂線的長, 叫做這二平行線的距離.

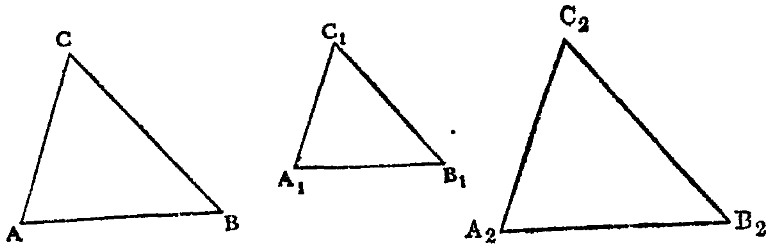


註. 二相交直線間,無距離可言,爲什麼緣故!

36. 相似形(Similar figures) 書本上圖畫,雖和實物相像,大小卻很不同. 5尺長的人,畫圖上只有1寸長,2分長的蒼蠅,在紙上倒放大成2寸或3寸. 但是二者爲何不失爲相像!

現在就簡單的圖形來研究放大或縮小的道理.

畫三個三角形,各相當的邊, 彼此平行,但長短都不同,如下圖. 試量各角的大小看各組相當的角(如$\angle BAC$,$\angle B_1A_1C_1$,$\angle A_2B_2C_2$)是否相



等. 再量各三角形的邊長,算出每二邊所成的比,看是否相同.

	∠BAC	∠CBA	∠ACB	AB	BC	CA	$\frac{AB}{BC}$	$\frac{BC}{CA}$	$\frac{CA}{AB}$
(一)									
(二)									
(三)									

兩三角形相當角相等,相當邊的比也相等叫做相似三角形.

這種說法,並且可推廣到多角形 (Polygon 卽三條以上線段,連續相接,圍成的圖形).

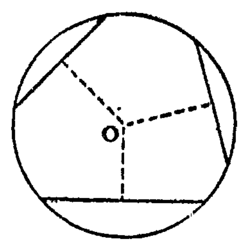
註. 上面的說法,是多角形所必需的條件,在三角

形時,條件還可減少,讀到本書後面,便可明白. 今爲初學易解,及說理普遍計,故從廣義.

37. 間接量法. 有許多情形,直接度量,不易辦到,就得先對有關係的量,直接度量,再按幾何的理,推算所求結果. 這法叫做間接量法(Indirect measurement). 看下面的第3題到第6題.

習 題 十

*1. 在一圓內,作三條弦線,二條相等,一條較長(或較短). 比較自圓心到各弦線上距離的長短.

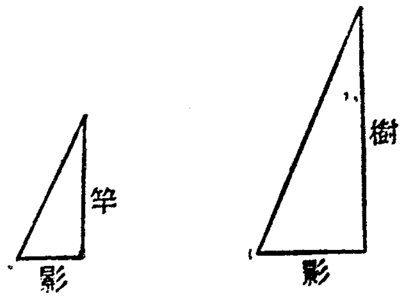


*2. 畫二個五角形,使各相當角互等,但相當邊的比不等,這二個圖形是否還相像!

再畫一個,使各邊二倍於第一形中相當邊,但相當角不等,看這二圖形,是否相像!

註. 最後一頂點,可用適當圓弧求交點法求得.

3. 5尺長的竹竿,直立地上,竿影恰好是8尺. 若同時樹影是6尺4寸,求樹高.

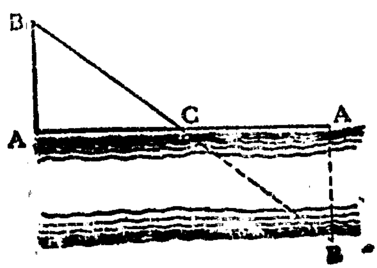


註. 樹高：樹影=竿長：竿影.

4. 臨窗遠眺,直持5寸長的鉛筆,使下端與目齊. 眼望上端,和山頂在一直線上. 已知人距鉛筆1尺2

寸,距山脚約77丈,求山高.

5. 欲求一河的闊,可沿河岸,量一段適宜的長 AA′

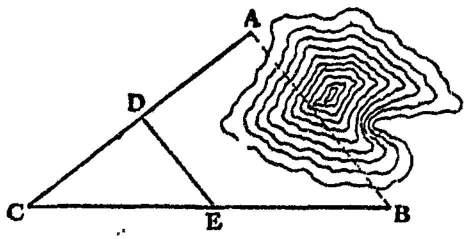


與河闊AB垂直,并在其中,取一適宜的C點.自A_1向後行至B_1,望見和C,B在一直線上.

則
$$AB : AC = A_1B_1 : A_1C.$$

設$A_1A=6$丈,$A_1C=3$丈2尺,$A_1B_1=2$丈4尺,求河闊.

6. A,B二地爲山所阻不能直達.今取一可直達A,B二地之一處C,并取AC的中點D,BC的中點E.量



得DE的距離,就可推求A,B二地的距離.試寫出AB和DE的關係式來(AC,BC的長,都不必知道).

設DE=100丈,求A和B相隔距離.

38. 三角形的作圖題. 一個三角形有三邊和三角,稱爲三角形的元素(Elements).

這六元素中,除三個角有一定的關係外(見習題九第7,8二題),只要知三件獨立元素(換句話說,卽至少要知一邊),其他三件便可確定.這個問題的推算法,須在數值三角學(Numerical

Trigonometry)內講.此處只講幾何的作圖法,並藉量法,求近似解.

三角形作圖題,可分四類:

(一)已知三邊.

(二)已知二邊和夾角.

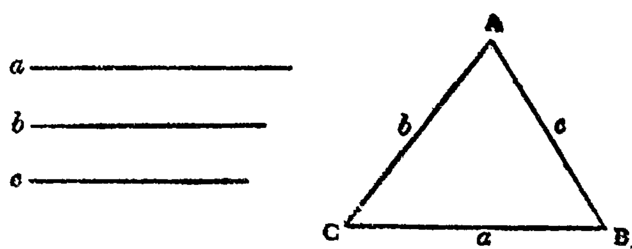
(三)已知二角一邊.

(四)已知二邊和與一邊相對的角.

本章只論前三種,第四種情形太複雜,留在第六編§139裏研究.

39. 三角形的確定. 如兩三角形,各元素都相等,則可完全疊合.由上可知只須定獨立的三元素,則三角形完全確定.理論上證明,在後再講,下文先就作圖核驗.

40. 已知三邊的三角形.



［已知］ 三角形的三邊a,b,c.

［求作］ 這三角形.

［作法］ 取一線段BC=a(基本作圖題一)

以B,C爲圓心,b,c爲半徑,交換作二弧.

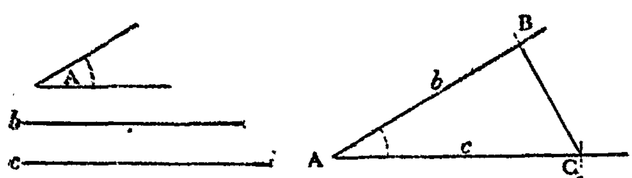
取二弧的一交點A,連成三角形ABC卽得.

［討論］ 欲二弧相交,必須任何二邊和大於第三邊.

註. 三角形的邊,常用小寫字母記出,且以同字母的大小寫,記相對的角和邊. 又三角形常簡記爲△.

如另取一交點,可再得一三角形. 又交換半徑,尙可再得兩個. 但是這四個三角形,能完全相合,不難用疊合法驗明.

41. 已知二邊和夾角的三角形.



［已知］ 三角形的b,c二邊和夾角∠A.

［求作］ 這三角形.

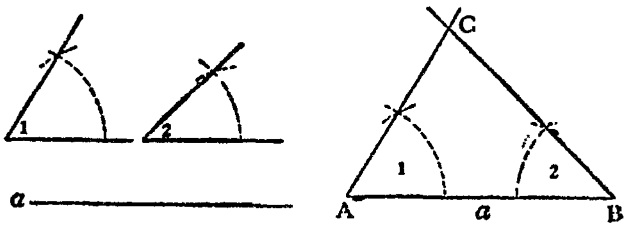
［作法］ 作一角等於已知角∠A. (基本作圖題六).

在所作角二邊上,各截取等長b,c(基本作圖題一)

連接BC,卽得$\triangle ABC$.

註. 角也可用一個字母或一數碼記出.

42. 已知二角和一邊的三角形.



[已知] 三角形的$\angle 1$, $\angle 2$二角和一邊a.

[求作] 這三角形.

[作法] (一)二已知角,在已知邊兩端的時候.

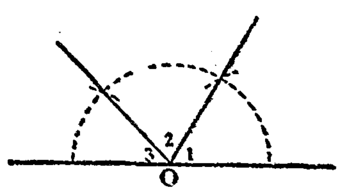
取一線段$AB=a$(應用何法?)

在二端,作$\angle A=\angle 1$, $\angle B=\angle 2$(應用何法?)

設所作二邊延長後交於C,卽得所求的$\triangle ABC$.

(二)一已知角與已知邊相對,例如$\angle 1$與a相對.

先求第三角$\angle 3$,再依上法去作.



註. 三角和旣有定値,故已知二角不能大於這値.

注意上述作法,都是理論作圖. 在實際問題,卻重在量的決定(參看§34).

習 題 十 一

求作下列各三角形.(1至7題),并量其他各元素.

	AB	BC	CA	∠BAC	∠CBA	∠ACB
1.	6公分	10公分	8公分			
2.	5公分	7公分	10公分			
3.	2.55寸		3.15寸	42°		
4.	4.05寸	2.90寸			135°	
5.		3.55寸			90°	53°
6.			8.4公分	60°		36°
7.	6.2公分			35°		34°

下列五題何故不能作圖. 依作法試試看.

8. AB=1.4寸, BC=3.8寸, CA=2.2寸.

9. AB=2.5寸, BC=2.4寸, CA=4.9寸.

10. BC=3.2寸, ∠CBA=94°, ∠ACB=88°.

11. AB=2.9寸, ∠BAC=122°, ∠CBA=78°.

12. BC=4寸, ∠BAC=108°, ∠CBA=89°.

*13. 試作一三邊都等的三角形. 量各角看是否

也相等,并且是多少度!

註. 這種三角形叫做等邊三角形(Equilateral triangle).

*14.作等邊三角形的任一分角線,分他成二個三角形,并量各角的度數.

*15.已知一三角形有一直角,而其夾邊相等,求作此三角形,并量出各角的度數.

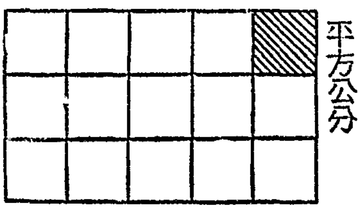
註. 本題和上題,宜與習題九第5題參看.

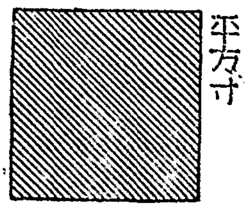
16.照上題條件,作二個完全相同的三角形,并使其對直角的一邊相合,二直角的頂點相對.

註. 這樣成功的四邊形中,四邊相等,四個角都是直角,叫做正方形(Square).

量法公式

43. 面積(Area). 平面大小,可與面積單位比較而得. 面積單位是正方形,每邊長一公





分的,叫做平方公分,長一寸的,叫平方寸,或略

稱方寸. 面積雖也可直接度量,如上面左圖內含15個平方公分, 所以面積卽是15平方公分. 但對於稍爲複雜一些的圖形, 就很不便, 且難準確, 所以普通都須從長度間接推求, 也是一種間接量法.

44. 長方形(Rectangle)面積. 四邊形,相鄰各邊都互爲垂直, 但不相等, 叫做長方形, 如上節中左圖卽是. 如一長方形垂直兩邊,一含 h 個長度單位, 一含b個長度單位. 今過各邊等分點作垂線, 卽將這形分成b條, 每條含h個面積單位,一共含hb個面積單位. 普通以A表面積,卽得長方形面積公式如下:

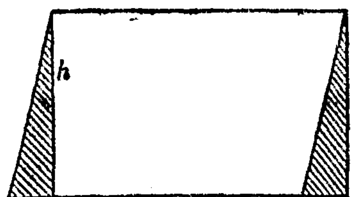
$$A=hb.$$

各邊長不恰好含整倍數的單位, 可將餘剩不足一單位的部份, 按十進法的低級單位再行如上法分劃, 便可見上面公式對h與b非整數時仍舊能成立.

註　因爲記數法是十進,所以要用十進法的低級

單位,否則須按複名數乘法計算.

45. 平行四邊形面積. 平行四邊形(見習題七第7題),不能用上法分割成許多正方形.但是我們設法把他改成長方形,即可依上節公式求積.

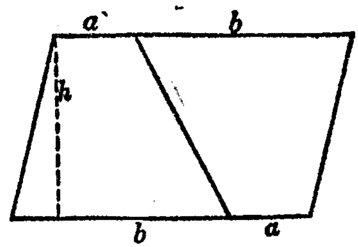


自平行四邊形一頂點,作對邊垂線,割去所成三角形,補入對方,就化成長方形. 設平行四邊形底邊長爲b(即含b倍單位的意思),上下二平行線間距離(看§35)爲h,

即得 $A=hb.$

註. 上下二底邊間距離叫做高(Altitude).

46. 梯形面積. 梯形(見習題七第7題)二平行邊間公共垂線,也稱爲高. 將同樣另一梯形平行二邊上下倒置,配到原梯形上,成一平行四邊形如次圖. 設上下二底長,各爲a,b,高



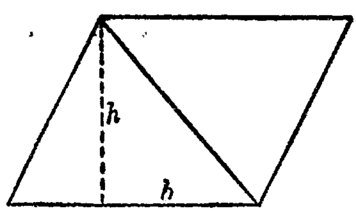
爲h,即得 $$2A=h(a+b)$$

$$A=\frac{h(a+b)}{2}.$$

47. 三角形面積. 如梯形中一平行邊,漸漸縮短,以至於無,即成一三角形. 這時$a=o$,故得三角形面積公式爲

$$A=\frac{1}{2}hb,$$

式中b爲底邊長, h 爲自對頂至這底邊的距離(即稱爲三角形的高). 如將二個同樣三角形,



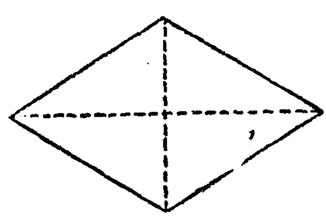
依梯形法顚倒配成四邊形,也可證明此理.

習 題 十 二

求下列各題中用?號記出的各項:

	圖形＼量	A	h	b	a
1.	長方形	567.1方寸	?	10.7寸	——
2.	平行四邊形	?	36.2公分	60.3公分	——
3.	平行四邊形	2871平方公分	26.1公分	?	——
4.	三角形	?	10.1公分	36公分	——
5.	三角形	1平方呎	?	.4吋	——
6.	梯形	?	2寸2分	1尺3寸1分	3寸2分
7.	梯形	17250方尺	?	250尺	350尺
8.	梯形	22000方吋	$7\frac{1}{3}$呎	18.75呎	?

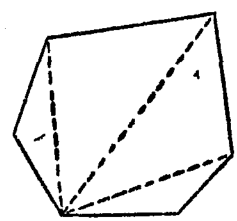
9. 各邊都等的四邊形,叫做菱形(Rhombus). 試畫一菱形如右圖,幷連接對頂的線(叫對角線 Diagonals),看這二線段是否垂直. 試求出用二對角線的長表示面積的公式來.



10. 在細方格紙(每格長闊約為1公釐的)上,作幾個平行四邊形,梯形和三角形. 以每格的邊做長度單位,

每方格,做面積單位. 讀出求積公式中需用各量的數,并點出圖形內所含方格的數目(凡被圖形中斜線所割部份,估計大於半方格的,算做一格,不到半方格者不計).就結果來核驗§§45-47中各求積公式.

48. 任意多角形的面積. 多角形(參看§36)各邊各角無一定關係的,叫做任意多角形.二不相鄰頂點聯成的線段,都稱對角線. 要求任意多角形面積,可自一頂點,作各對角線,分成許多三角形. 分求各三角形面積,再將結果相加,即得所求面積,所以此種圖形,並無求積公式.



49. 多角形內角和. 照上節所說,任何多角形,都可分成許多三角形,且易看出三角形個數是原多角形邊數減2. 又如將各三角形諸角加起來,便得多角形內角和. 我們已知三角形內角和是多少度(習題九第7,8二題),便不難知多角形的內角和了. 試將下表填明:

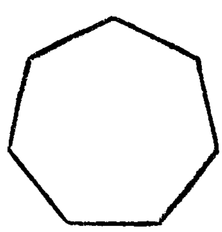
多角形邊數	4	5	6	7	8	9	10	11	12
內角和度數									

並寫出一條公式來.

50. 正多角形(Regular polygon). 各邊等長各角也都等的多角形,叫做正多角形. 多角形各角既等,故以邊數除內角和,即得各內角的度數. 試將下表填明:

邊 數	4	5	6	7	8	9	10	11	12
內角度數									

正多角形的作圖,除若干特例(如 4, 5, 6, 8, 10,12 等)外,多不能單用直尺圓規求作(其理非本書所能論),今述實際作法如下.



a

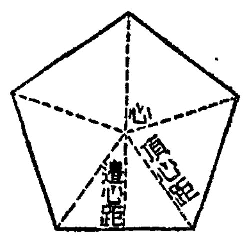
[已知] 正七角形的一邊 a.

[求作] 這正七角形.

[作法] 用分角器,在線段 a 一端,作其一內角(度數見上表). 并使所作的邊長亦爲 a.

照此繼續作去,至最後一邊,自和第一邊他端相合.

51. 正多角形特性. 作正多角形各內角分角線,則諸線必在一點相交,而分全形爲若干等腰三角形(習題六第 5 題),且各三角形都能疊合. 這公共點叫做心(Center). 心到各邊的距離(都是相等),叫邊心距 (apothem). 邊數已定的正多角形,邊心距與邊長的比也是定數,如次表:



邊數	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
邊心距/邊長	0.289	0.500	0.688	0.866	1.038	1.207	1.374	1.539	1.702	1.866

註. 這些比值,係用數值三角術求出.

52. 正多角形面積. 已知正多角形邊長

由上列比值,卽得邊心距. 再求等腰三角形面積,以邊數倍起來,卽得面積.

例. 已知正七角形邊長 3 寸,求面積.

[解] 邊心距 $=3\times1.038$ 寸 $=3.114$ 寸.

等腰△面積 $=\frac{1}{2}\times3(\text{寸})\times3.114(\text{寸})=4.671$ 方寸.

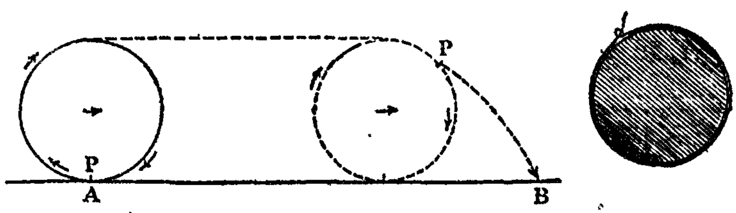
正七角形面積 $=7\times4.671$ 方寸 $=32.697$ 方寸.

習題十三

1. 作邊長 3 公分的正 3,4(卽正方形), 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 角形. 用量法核驗 §51 表中各比值.

2. 求上題各正多角形的面積.

53. 圓周率. 圓的全長,叫做圓周(Circumference). 圓周同直徑的比,叫圓周率.

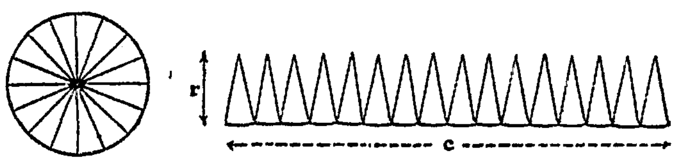


用一圓形物(如銀元或車輪)在圓周上記一點令沿直線上滚轉一周,便可在直線上量圓周. 或以細線繞此物,放開再量. 照此多試

幾次,結果總得圓周率約爲 $3\frac{1}{7}$. 用理論方法,可證明這比值是一定數,確值爲3.14159….這定比常以希臘字母 π 表示. 故如設 c 爲圓周, d 爲直徑, r 爲半徑,則

$$c=\pi d=2\pi r.$$

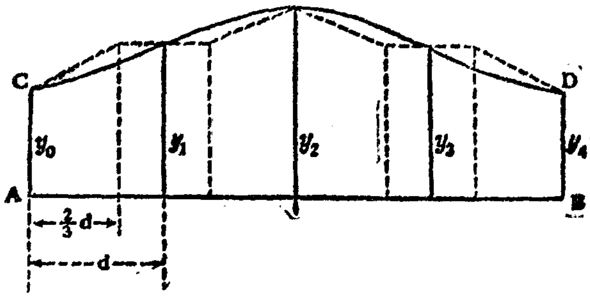
54. 圓面積. 圓中二半徑和所截弧圍成之形, 叫扇形(Sector), 將一圓分成很微細的扇



形, 則各扇形幾於與等腰三角形一樣. 又這些三角形高卽爲半徑 r, 底邊和卽圓周 c. 故面積 A 爲

$$A=\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r=\pi r^2.$$

55. 平面積一般求法. 曲線形所圍面積須用高等算學,方可求出. 現在舉一種很切實用的差近求法,叫做辛普孫(Simpson)法則.如下:



上圖CA,AB,BD三線段垂直,CD是曲線,可分AB爲偶數的等分,例如4等分. 在等分點上作垂線到曲線上,長爲y_0(即AC),y_1,y_2,y_3,y_4(即BD).再將每二份,等分爲三,分作二梯形,和居中的長方形. 如此得辛普孫氏差近公式爲

$$\frac{2}{3}d\,\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{2}{3}dy_1+\frac{2}{3}d\,\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{2}{3}d\,\frac{y_2+y_3}{2}$$

$$+\frac{2}{3}dy_3+\frac{2}{3}d\,\frac{y_3+y_4}{2}$$

$$=\frac{1}{3}d(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4), \qquad d=\frac{AB}{4}$$

如欲得值較精, 可多分幾等份 (但須爲偶數)再求. 公式中首末項係數是 1, 中間各項相間爲 4 和 2.

習題十四

1. 取長約1寸的半徑在方格紙上作圓. 依習題十二第10題計圓面積略值,而核驗§54中公式.

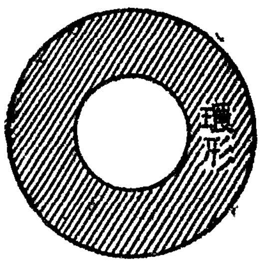
2. 作半徑長4公分,5公分的圓. 分一直徑爲10等份,再用辛氏法求面積. 結果和依公式求得的比較.

3. 就地圖上黑龍江,江西,福建三省地形,用辛氏法求面積,幷和地理書上所載者比較(注意圖中比例尺).

4. 如圓面積爲100平方公分,求其半徑.

5. 求以直徑d表圓面積的公式.

6. 有同一圓心的大小二圓,大的半徑爲R,小的爲r. 求二圓間的面積(這形叫環形 Ring).

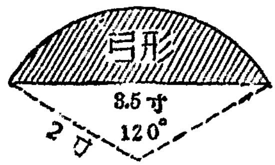


7. 已知扇形弧長爲s,半徑爲r,求其面積公式.

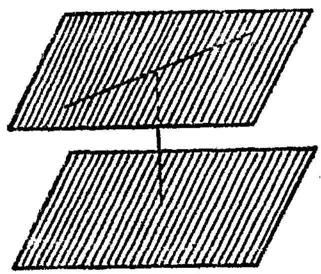
8. 扇形二半徑夾角與360°的比,等於弧長與圓周的比. 設已知半徑爲r,夾角爲A,求所對弧長.

9. 已知扇形的半徑爲5,夾角爲80度,求弧長.

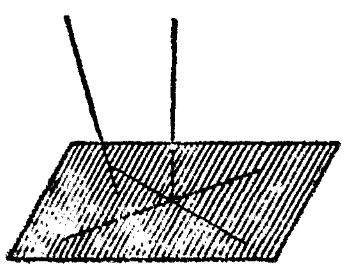
10. 一弧和其附弦圍成的圖形,稱爲弓形 (Segment of a circle). 試求下圖弓形的面積.



56. 空間的平面與直線. 看教室中的地板和牆,便知二平面常交於一直線. 但是像天花板和地板, 或是對面二牆, 那就無論怎樣延

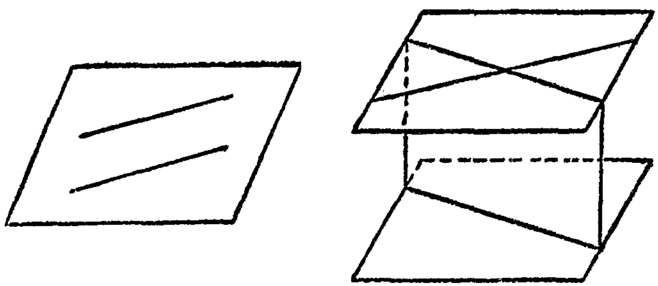


長,總不會相交. 這二平面稱爲平行面. 平面上的直線, 自然不會和他的平行面相交, 但和不



平行的面,相交於一點. 如過交點,在這平面上作任何直線,都和那交線垂直, 則這交線稱爲這平面垂線.

倣§35的理,可稱自一點到平面上垂線爲自這點到平面上距離, 二平行面間公共垂線,爲這二面間的距離.



相交二直線或二平行線, 可以確定一平面. 若在二平面上, 各作一直線, 使他們不在一平面內,則這二直線,既不相交,也不平行.

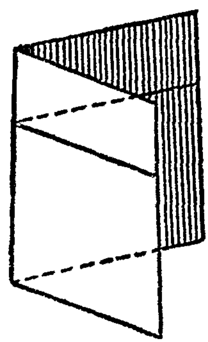
今將空間平面與直線的關係, 列成一表如下:

(一)二平面的關係 $\begin{cases} \text{(1)平行} \\ \text{(2)相交(交於直線)} \end{cases}$

(二)平面與直線關係
- (1)平行
- (2)相交(交於一點)

(三)二直線的關係
- (1)平行 } (定一平面)
- (2)相交 } (定一平面)
- (3)不平行亦不相交.

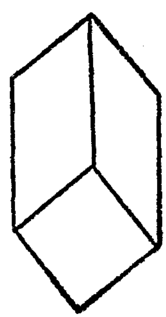
57. 二面角(Dihedral angle). 二平面相交於一直線,成功一個二面角. 過交線上一點,在二平面內各作一線,與交線正垂,所成的角卽爲這二面角的大小.



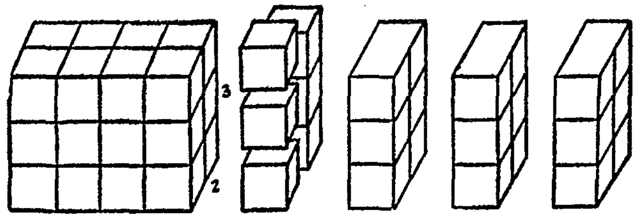
假若那二線垂直,則稱二面互相垂直.

註. 這二線所成的角,叫做面角(Face angle).

58. 體積(Volume). 各面垂直,長,濶,高都相等的六面體,叫做立方體(Cube). 各面垂直,而長,濶,高不相等的叫長立方體(Rectangle solid). 體積的單位,便



是立方體(邊爲單位長度),如立方公分,立方寸.



如上圖,可見若立方體的長,濶,高各爲a,b,c,則可先割爲a片,每片分成b條,每條再切爲c塊,如是共得abc個體積單位.

今以V表體積,即得

$$V=abc.$$

59. 表面積 (Area of surface). 包圍立體各面面積的總和,叫做表面積. 長立方體,是由六個長方形包成,且每相對二者大小相等.今以S記表面積,即得

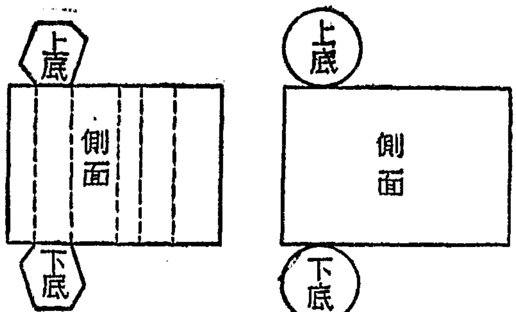
$$S=2(ab+bc+ca).$$

習題十五

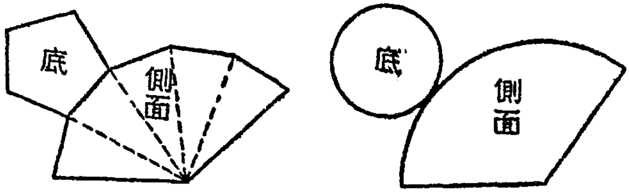
1.在教室中舉出實物的例,來說明(一)平面的垂線,(二)二垂直平面,(三)不平行也不相交的直線.

用硬紙或洋鐵依下列各法做立體模型(Model).

*2. 圖中上下底是二個完全相等的多角形或圓,中間長方形的闊與底的周界等長. 試將二底屈折,與側面垂直,幷將後面繞立周界上.



*3. 下圖中左邊是一個正多角形的底,幾個完全相等的等腰三角形合成側面,且三角形底邊,和多角形的邊相等,個數和邊數相等. 右邊中底的圓周和側面的扇形弧相等. 試圍成適當的立體.



60. **簡單立體.** 立體的種類很多,本書只講簡單立體的體積與表面積求法.

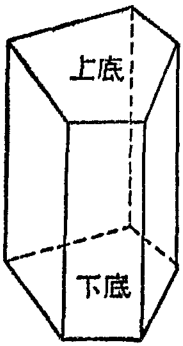
在§4裏說過，有些曲面上，可容直線貼合，有些不能夠。前者稱爲線織面 (Ruled surface)。有二種簡單的線織面如下：

(一)柱面(Cylindrical surface)。面上的直線都與一已知直線平行。

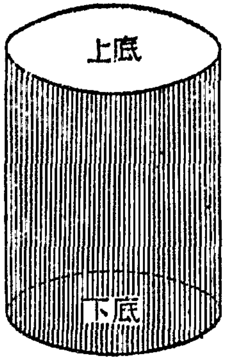
(二)錐面(Conical surface)。面上的直線，過一已知點，這點叫做頂點。

用平行面割柱面和平面割錐面，便成柱體 (Cylinder) 和錐體 (Cone)。本書只講簡單的柱體及錐體，柱體截面和柱面上各直線都垂直，便叫做直柱(Right cylinder)，截面爲多角形的，叫直角柱(Right prism)，是圓的叫做直圓柱(Right circular cylinder)。錐體截面是正多角形或圓，且自其心至頂點聯線和截面垂直的，叫做直錐體(Right cone)，前者稱直角錐 (Right pyramid)，後者稱直圓錐(Right circular cone)。

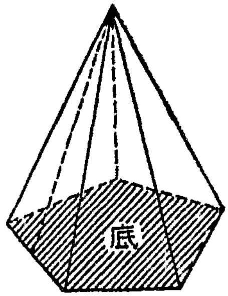
上述各立體圖如下，都可依習題十五中第2,3二題法作出。



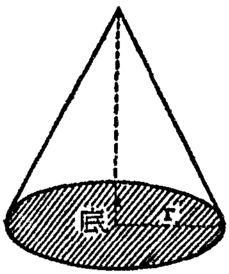
直角柱



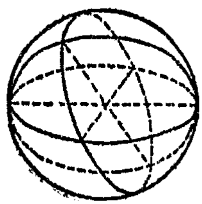
直圓柱



直角錐



直圓錐


球

至於非線織面,本書只講球 (Sphere), 卽自其中一點,至面上任何點都等遠的曲面. 這定點叫做球心 (Center), 距離叫半徑 (Radius), 過球心而兩端在球面的線段叫直徑(Diameter),卽半徑的二倍.

61. 各簡單立體表面積. 按習題十五第

2,3二題,卽知柱體錐體表面積求法:

(一)柱體. 設底面積爲A, 周界爲p, 高(卽二底間距離)爲h,圓柱底面半徑爲r. 則

$$S=2A+ph(\text{直角柱}).$$

$$S=2\pi r^2+2\pi rh(\text{直圓柱}).$$

(二)錐體. 設錐體斜高 (Slant height, 卽自頂點到底面邊上距離或半徑)爲 l, 則

$$S=A+\frac{1}{2}pl(\text{直角錐}).$$

$$S=\pi r^2+\pi rl(\text{直圓錐}).$$

球體表面積求法的理, 須有相當立體幾何知識,方能明白. 我們刻下只能用實驗方法去核驗由理論得到的公式.

在半徑1寸的木球上,薄塗膠水,用銅箔貼上去,看要用去多少平方寸,便可驗明

$$S=4\pi r^2.$$

62. 各簡單立體體積. 柱體體積求法,很易明白, 錐體和球的, 須用及許多立體幾何知識,所以刻下也只能用實驗方法核驗.

(一)柱體. 作底面平行面,剖柱面爲單位高的薄片,則各薄片體積都相同. 設底面面積爲A,則每片必含A個體積單位.

$$\therefore \quad V=hA(\text{直角柱})$$

$$V=\pi hr^2(\text{直圓柱}).$$

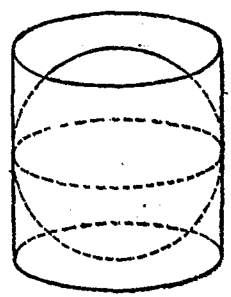
(二)錐體. 用硬紙或洋鐵做同底且等高的柱體和錐體. 將錐體中盛水,傾入柱體內,卽知前者容體是後者的三分之一.

$$\therefore \quad V=\frac{1}{3}hA(\text{直角錐})$$

$$V=\frac{1}{3}\pi hr^2(\text{直圓錐}).$$

式中h是自錐頂到底面的高.

(三)球. 將一木球放在空圓柱內,這柱底半徑,卽球半徑,柱高卽球直徑. 再將柱中空隙注水使滿,注入的水所佔地位爲柱體積的三分之一. 故球體積爲圓柱三分之二.



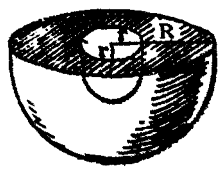
$$\therefore \quad V=\frac{2}{3}\pi\cdot 2r\cdot r^2=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

習 題 十 六

求下列各題中用?號記出的各項.

	圖形＼量	V	S	A	p	h	r	l
1.	方柱體	——	?	81方寸	——	9寸	——	——
2.	五角柱體	——	?	110方尺	25寸	32寸	——	——
3.	圓柱體	?	?	——	——	3寸	$1\frac{1}{2}$寸	——
4.	直圓錐	?	——	——	——	48寸	14寸	——
5.	正方錐體	40.5立方公尺	——	?	?	4.5公尺	——	——
6.	球	?	153.86平方公尺	——	——	——	?	——
7.	直圓錐體	?	?	——	——	8尺	6尺	10尺
8.	球	?	?	——	——	——	2尺3寸	——
9.	正方錐體	?	?	——	32寸	3寸	——	5寸

10. 有一個中空的半球形鐵鉢如右圖,外半徑是R,裏半徑是r,試證這鐵鉢的表面積是$\pi(3R^2+r^2)$.



11. 地球直徑,長 7920 哩,求地球的體積和面積. 若地球的比重爲5.6,求地球的重量.

12. 六吋徑的球,鍍以半吋厚的銅,若每立方吋的銅,值銀一角六分,問鍍費若干?

第三編　理解幾何引論

證法基本事件

63. 證法的需要. 在前二編裏,我們已經遇着好多種的幾何性質,例如由§§38——42知道三角形,可由含有一邊的三元素確定. 又如習題九中第7,8二題所示,三角形的內角和,總是180°. 這些道理,都是普遍的真確,并非偶然巧合. 但是我們憑什麼理由,可以對於這些道理深信不疑呢?

或者可以回答道,我們試了許多的特例,結果均如此. 這種解釋,有二重缺點. 第一,量法只是近似的(§32),不能由此得絕對正確的結果. 第二,試過特例,無論有多少,不能因之便樹立普遍性. 所以還得另想辦法,來奠立更堅固的基礎.這便成了理解幾何學(Demonstrative Geometry),而爲本編以後所研究的問題.

64. 證法的基礎. 理解幾何的基礎,建立在少數非常明白的事理上,這些事理,叫做公理(Axiom). 其餘需要證明的事理,便叫定理(Theorem). 關於作圖方面,我們假設能作的幾種基本手續,叫做公法(Postulate),而為一切作圖題的根據. 用前二章已經說到的問題為例,那麼二點間直線線段最短(§35)可算做公理,二點只能定一條直線(§11)也是公理,三角形內角和為180°便是定理. 又如用尺可畫過二點直線,并且可以任意延長,用規可畫已知圓心和半徑的圓,便是公法,其餘的基本作圖題,都只應根據這種手續作出(參照§§10,34).

65. 普通公理. 有許多不證自明的理,不但在幾何學中用得着的,叫做普通公理(General axiom),大率都是論量的等與不等. 這一類的事項,在代數學中,應用極大,我們遇着的機會很多,不待細說. 在此只須注意,那些道理,用在幾何裏,一樣的適合.

今爲簡括而便於比較起見,提出一條

代換公理:　在一式中的量都可用等量來替換,而不改其結果.

由此可推出許多重要的結果如下:

設 $a=b$　爲二同類量或數,則

(一)代入　$b=c$ 中得 $a=c$.

$\therefore$　如有 $a=b$, $b=c$ 必有 $a=c$.

(二)代入 $a+c$ 中得 $b+c$; 代入 $a-c$ 中,得 $b-c$; 代入 ac 中得 bc; 代入 $\frac{a}{c}$ 中,得 $\frac{b}{c}$.

$\therefore$　如 $a=b$ 則

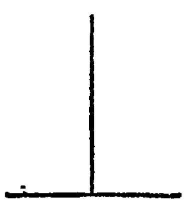
$a+c=b+c$,　　$a-c=b-c$,

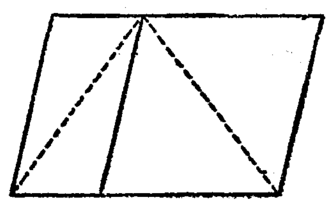
$ac=bc$,　　$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.

其餘關於量的公理,待用着時再提出.

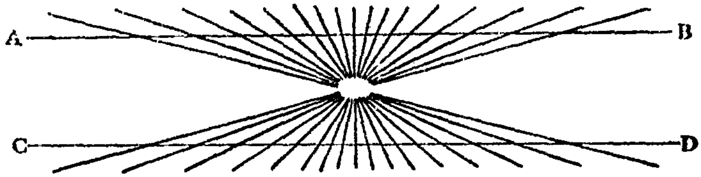
習 題 十 七

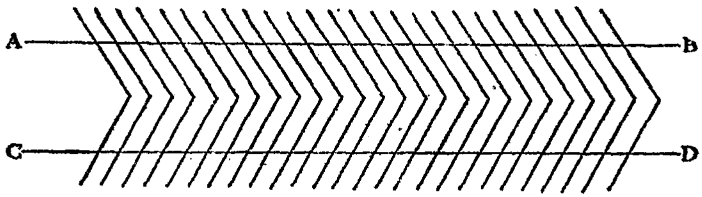
1. 下列左圖中二條直線,那一條長些? 右圖中二條對角線,那一條長些? 先估計,再用尺量.



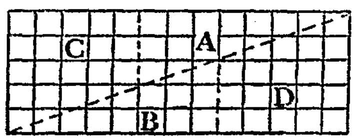


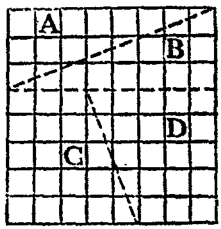
2.估計下列二圖中的AB,CD二線是不是處處相隔一樣遠近? 再用三角板核驗.



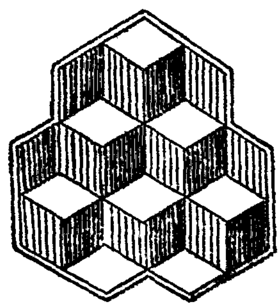


3.將下面左圖中方格紙依虛線剪開配成右圖,再比較二圖中方格子數目的多少.





4.右圖內有多少小立方體? 倒轉過來看看有幾個?

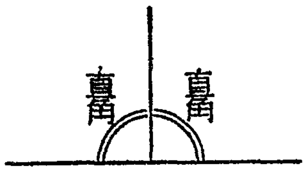


5.分一段長約一尺的線段爲13等分. 量準一份的長用13乘,再把全長來比較.

6.代數裏解一次方程時移項,是根據什麼道理? 去係數時,用什麼道理?

*7. 如a=b,將二邊自乘,結果還相等麼? 二邊同樣的多自乘幾次,結果怎樣? 這是那條公理特例?

66. 定義. 一種幾何圖形,說出其中幾條特性,即知為何形. 為記述簡便計,往往用一個簡單名詞,來代替很長的說明. 這種說明,叫做定義(Definition),但必須舉出形中主要性質以示與他種圖形有別. 例如直角的定義如下:將一角的一邊延長,所成另一角,如和原來的角相等,則這角叫做直角(可與§14所說的比較).本書前兩章曾說過許多幾何名詞的定義,後文用着的時候,當再為提明.



名詞的定義,必須簡明. 有幾個基本名詞,如點,線,直線,面,平面等,意義已極簡明,不必再加定義,就像公理的不必證一樣.

註. 凡書裏有"稱為"或"叫做"一類字句的,都是定義.

67. 幾何公理. 只與幾何學有關的公理叫做幾何公理. 本書前二章中,曾說過好幾條,現在再臚列於後,以當複習.

(一)直線公理. 通過二點,有一直線,但只有一直線(§10).

(二)二點距離公理. 二點中間,直線段最短(§35).

(三)直角公理. 凡直角皆相等(§14).

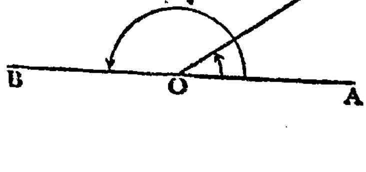
(四)垂線公理. 過已知直線上一點,可作一垂線,但只可作一垂線(§14).

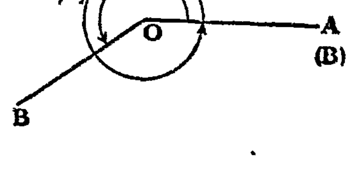
又§21所說的疊合法,必須依據.

(五)移形公理. 凡圖形得移其位置,而不變其形狀大小.

此外的幾何公理,待需用時再說.

68. 平角,周角. 複習習題九第5題.





將∠AOB中OA邊固定,OB邊旋轉,則角漸大,到OB與OA連成一直線時,所成的角叫做平角.再依同向旋轉,到OB邊和OA邊相合,這時雖只有一邊,我們依舊視爲一角,叫做周角(Perigon).　由上所述,可知

1周角=2平角=4直角,　1平角=2直角.

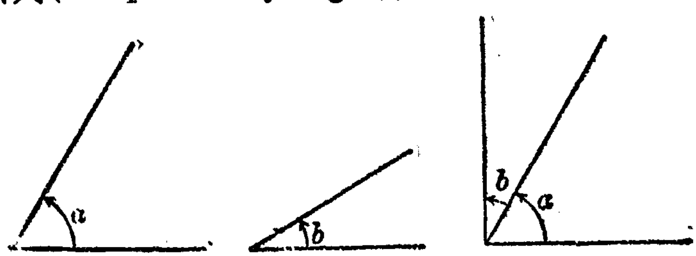
又平分1周角爲360等分,每份叫做一度(試與§33比較),則

$$1\text{平角}=180^\circ,\quad 1\text{直角}=90^\circ.$$

註.　平角的記號是 st.∠,直角的記號是 rt.∠.

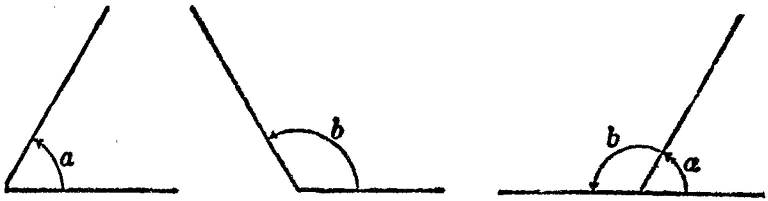
69.　餘角,補角,共軛角.二角因數量關係,而成下述各種的名稱.

(一)餘角.　二角的和爲一直角的,互稱爲餘角(Complementary angles).

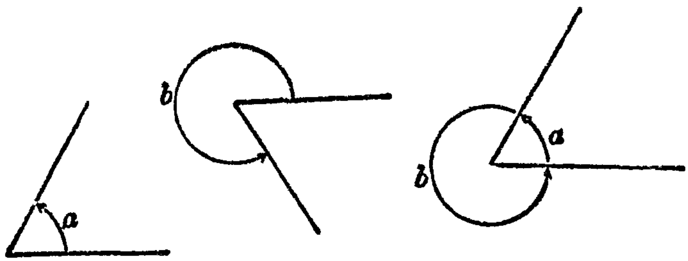


註. 角也可用一個小寫字母記出,以表其度數.

(二)補角. 二角的和爲一平角的,互稱爲補角(Supplementary angles).



(三)共軛角. 二角的和爲一周角的,互稱爲共軛角(Conjugate angles).



註. 共軛二角中必有一角爲平角(則他角亦爲平角),或大於平角. 大於平角的角叫做反角(Reflex angle).

習題十八

*1. 下列各名詞的定義在本書前二章均曾講過,試查明逐條寫出來.

兩直線相交於已知直線的一點 所成的二角均為90°此兩線為垂直

(1)圓　(2)幾何圖形　(3)幾何元素

(4)半徑　(5)鈍角　(6)銳角

(7)垂直　(8)平分垂直線　(9)直徑

(10)弦　(11)三角形　(12)三角形外接圓

(13)三角形內切圓　(14)等腰三角形

(15)平行線　(16)平行四邊形　(17)對角線

(18)梯形　(19)切線　(20)切點

(21)自點到一直線上距離　(22)多角形

(23)二平行線間距離　(24)等邊三角形

(25)正方形　(26)長方形　(27)相似形

(28)正多角形,心,半徑,邊心距　(29)圓周

(30)圓周率.

2.如二角互為餘角,能不能有一角為鈍角? 這二角一定是何種角?

3.如二角互為補角,這二角的大小如何? 能不能二個都是銳角,或二個都是鈍角?

4.如二角互為共軛角,這二角的大小如何?

5.何種角與他的餘角相等? 與他的補角相等?

6.鐘表上長針走3周角時,短針走過幾直角? 又長針轉幾平角時,方使短針走半直角?

7.$\angle a$的餘角是什麼? 補角呢? 共軛角呢?

8. 互為餘角的二角,是 $2a^\circ$ 和 $3a^\circ$,求 a°.

9. 互為補角的二角為 $\left(\frac{3x}{2}\right)^\circ$ 和 $(x+30)^\circ$,求 x°.

10. 共軛的二角,相差 100°,求這二角.

*11. 證明平角定理:凡平角皆相等.

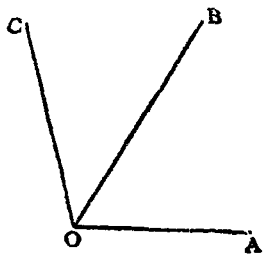
註. 用直角公理同 § 65(二).

12. 二相補隣角的平行線成功什麼角!

證法步驟

70. 隣角,對頂角. 二角因數量關係,而成相餘,相補,共軛,已如上述. 現在再說二角因相關位置情形所定的名稱.

(一)隣角. 同一頂點并共有一公共邊的二角,互稱為隣角 (Adjacent angles). 如右圖∠AOB, ∠BOC二角即是. 其中不公共的邊,如 OA,OC 叫外邊(Exterior sides). 任意

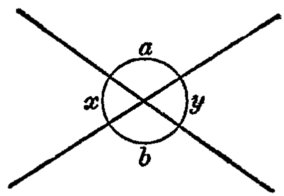


二角,總可移攏,配成隣角,隣角不必有數量關係. 如二隣角并且相餘,叫做餘隣角 (Complementary adjacent angles). 二隣角并且相補,叫做

補隣角(Supplementary adjacent angles).

(二)對頂角.　二直線相交,成四個角,那不相隣二角,叫做對頂角(Vertical angles)

如右圖中∠x,∠y是對頂角,∠a,∠b也是對頂角.對頂角雖因位置關係而生,但結果可得出一種數量關係.看§73.



71.　等角的餘角,補角.

(一)等角餘角定理.　同角或等角的餘角必定相等.

假設　∠a=∠b,∠a的餘角爲∠c,∠b的爲∠d.

證明　∠a+∠c.

=∠b+∠d=rt.∠(餘角定義,直角公理)

但　∠a=∠b　(假設)

∴　∠c=∠d　(普通公理)

(二)等角補角定理.　同角或等角的補角必定相等.

學生試做上面格式自證(須用習題十八第11題).

72. 定理的形式. 一條定理都可分成已知和未知兩部份. 已知部份是定理中的假設,叫做前提(Hypothesis),未知部份,是定理中求證的事項,叫做結論(Conclusion),看上節的定理便悉.

要證明定理的結論,必須逐層作有根據的推理. 每一步的推理,只能用

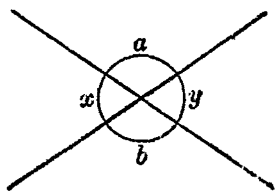
(1)公理(普通公理或幾何公理),公法,

(2)業已證明的定理,或已提出的定義,

(3)題中的假設.

這種根據,應該在各陳述語後註明.

73. 對頂角定理. 二直線相交,所成的對頂角相等.



假設 $\angle a$ 與 $\angle b$, 又 $\angle x$ 與 $\angle y$ 都是對頂角.

求證 $\angle a=\angle b, \angle x=\angle y$.

在未寫出證明以先,試想如何着手去證.

先查本書以前說過各理,看那些能應用到本題上.

(1) 二角均與另一角相等的,必互相等(普通公理一).

(2) 同角或等角的餘角必相等(等角餘角定理).

(3) 同角或等角的補角必相等(等角補角定理).

這幾條中,應當用那一條呢! 欲決定這問題,可就題中假設察看.

(一) $\angle a$是$\angle x$的補隣角,

(二) $\angle b$也是~~$\angle y$~~ $\angle x$的補隣角.

所以當用第 3 條.

將前面的理解,順着適宜層次寫出,即得

證明. $\angle a$和$\angle x$是補隣角　　(假設)

$\angle b$和$\angle x$也是補隣角　　(假設)

所以$\angle a$,$\angle b$是$\angle x$的補角,故

$$\angle a=\angle b.\qquad\text{(等角補角定理)}$$

用同樣的方法,很易證明

$$\angle x=\angle y$$

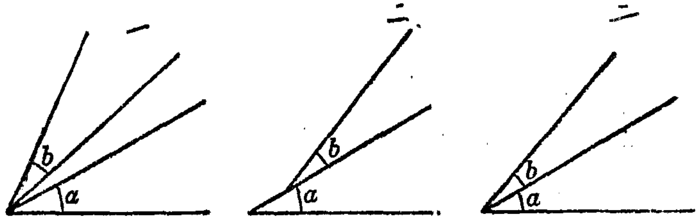
學生試自行寫出來.

註. 證題以前的一段說明,叫做解析(Analysis),對於證法,非常重要. 學生要想養成推理的能力,必須注

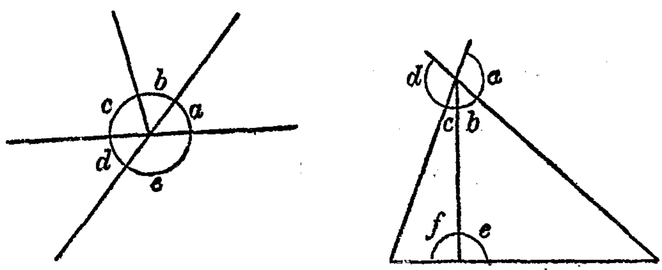
意自行練習,不可徒然以聽講了事. 本書以後對於每一定理的解析,都將要點編成問題或大綱,供學生自行研究. 教師對這等問題,必須令學生在上課以前預備好,到堂上來問答,萬勿遽行講解,致失解析的用意.

習題十九

1. 下列三圖中,那一組 $\angle a, \angle b$ 是隣角?那一組不是隣角? 爲什麼緣故?



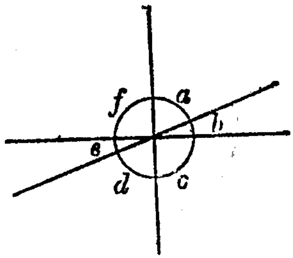
2. 讀出下面左圖裏的各組隣角來. 讀出各組對頂角來.

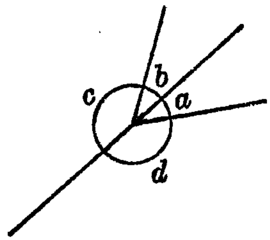


3. 二直線相交,成二組對頂角中有一直角,求他角.

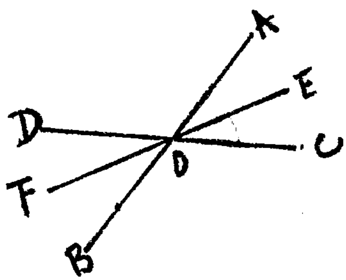
*4. 試證: 等角或同角的共軛角必定相等.

5. 下面左圖內，$\angle a+\angle b=85^\circ$，$\angle b+\angle c=120^\circ$，求各角。





6. 上面右圖內，$\angle a=\angle b$，試證 $\angle c=\angle d$。



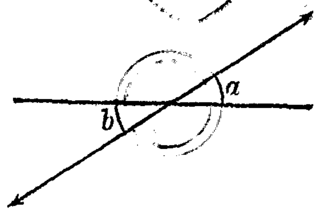
7. 試證：一角的平分線，必平分他的對頂角(上圖)。

8. 二直線相交，一組對頂角比他組對頂角和要大16°，求各角。

9. 二直線相交，一組對頂角爲 $(5x+7)^\circ$ 與 $(3x+37)^\circ$ 求各角度數。

*10. 二對頂角的分角線，成功什麼角？這二條分角線成功一條直線麼？

*11.在一直線上一點,向上下各引一直線,使∠a=∠b 如右圖　證明他們成爲一條直線.



74.　中點,分角線.　平分一線段的點叫線段中點,平分一角的直線,叫角的平分線.

(一)中點定理.　一線段只有一中點.

假設　有線段AB,和他的中點O.

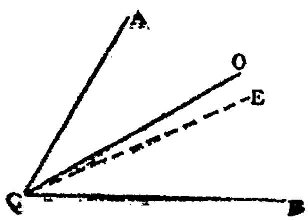
求證　AB只有O一點爲中點.

解析　如有另有一點E,也是AB的中點,則AE與AB有什麼關係?　AO與AB有同樣的關係麽?

AE與AO有什麼關係?　我們能斷E與O相合麽?

證明　學生自己寫出來.

(二)分角線定理.　一角只有一分角線.



假設,求證,證明都由學生自己寫出來.

75. 間接證法.

甲乙二人出外踏青. 甲見大路旁邊,有李樹一棵,上面滿結李子都已成熟,就叫乙一同去摘食. 乙說這是苦李,不必去. 甲不信摘了兩個一試,果然不錯,就很佩服乙有先見之明. 乙說"這是很不難預料的. 這樹生在大路旁邊,一天不知有多少人來往. 如果不是苦李,還有不被行人摘光的道理麼!"

乙的推理方法,步驟如下:

(1) 先假設那李子是甜的,不是苦的.

(2) 那麼就該早已先被他人摘光.

(3) 現在樹上還是滿結,與上面合理的預測不符,可見前提(即李子不苦的假設)必定不對.

(4) 甜李假設既不成立,所以必是苦的.

假設題中結論不真，而得證明因此必生矛盾，因而推斷結論必眞的一種證法，叫做間接證法(Indirect method). 上節的定理，就是用間接法去證的.

76. 圓的特性. 前面已經說過,凡曲線上任何點到另一定點距離總相等的叫做圓，那

定點叫做圓心,或簡稱爲心,定距離叫半徑.過心而兩端在圓上的線段叫直徑.

凡半徑相等的圓,必能疊合,就稱爲等圓(Equal circles). 由此可知

(一)等圓半徑定理. 同圓或等圓的半徑必定相等.

直徑與半徑有什麼關係?所以有

等圓直徑系. 同圓或等圓的直徑必定相等.

系(Collorary)就是能由一定理很容易推出的理.

圓心與直徑有什麼關係? 再看上節的中點定理就得

(二)圓心定理. 一圓只有一心.

習題二十

*1. 線段AB上有一點C,使AC : CB=2 : 3. 試證只有這一點能如此.

*2. 在上題中,如AB線段上,有一點D,使BD : DA=

2∶3,那麼D點是否與C點相合? 如 BD∶DA=3∶2 則如何?

*3. 在線段AB的過B端延長線上,有一點C,使AC∶BC=3∶2. 試證只有這一點能如此.

*4. 我們能不能在線段AB過B端的延長線上,得一點C,使AC∶BC=2∶3?

5. 某犯人欲避法官的審問,故意裝聾,弄得法官無法審判. 後來想出一法,令人在犯人背後,故意放一空鎗,把犯人嚇了一跳. 我們能不能就此斷定那犯人是不聾麼? 什麼緣故?

*6. 試證: 二直線相交,只能定一點.

*7. 試證: 二等圓相疊合時,圓心必定相合.

*8. 試證: 二等圓圓心相合時,二圓必定疊合.

9. 半徑不等的二圓能完全疊合麼? 什麼緣故?

10. 二圓不等,他們的直徑能相等麼?

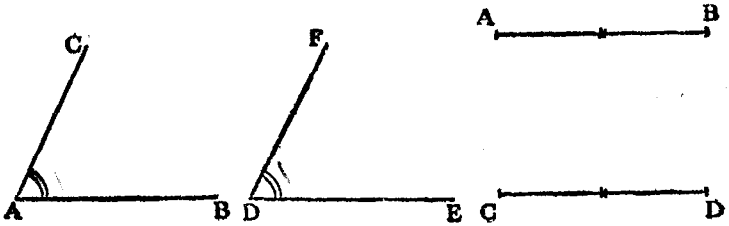
11. 將大小二圓圓心相合,則小圓必定完全落在大圓之內.

註. 注意一點如在圓外,則自這點到圓心的距離必定比半徑大.

第四編 三角形

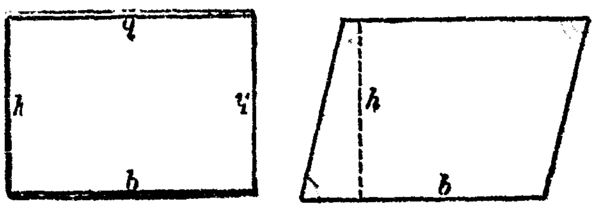
疊合法

77. 全等形. 二個幾何圖形相疊後,可使處處密合的,叫做全等形(Congruent figures). 例如有二個等角是全等形, 二條等長線段, 也是



全等形.

全等形既能疊合, 度量 (卽一圖形所含某單位的倍數) 當然是一樣, 但是度量相等的圖形,未必都爲全等. 二個等高等底的長方形和



平行四邊形面積相等(何故?),但是我們不能使他們疊合.

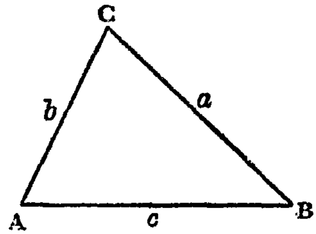
註. 全等的記號是≡.

78. 全等形基本證法. 前面說過的普通公理,能用來證二量相等. 在角和線段的情形,等量也就是全等，所以由此便可間接證得二形全等. 若是須直接去證,只有用疊合法. 這法實是證全等形的基本方法，但運用頗爲不便. 在幾何學中,我們先用這基本方法,證明幾種基本全等形的定理，以後便可用這些定理,去證其他的全等形.

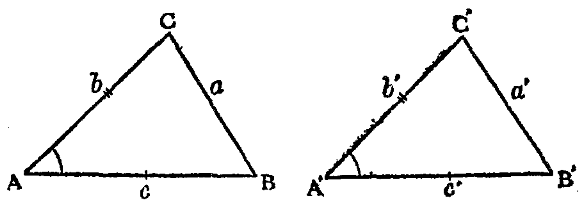
在第二編中曾講過三角形的如何確定,換句話說,二個三角形中,有一部份元素,彼此對應相等的,即爲全等形. 這就是上面所說的基本定理,以前僅就作圖核驗,今在下文更加正式的證明.

79. 三角形的記法. 聯不在一直線上三點的三條線段即成三角形,記號爲△. 三點叫

做頂,三線段稱爲邊. 相對的頂同邊,用大小寫的同字母記出,如右圖.



80. 全等三角形定理一 (s.a.s.). 兩三角形有二邊夾一角對應相等,則二三角形必全等.



[假設] 在 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 裏,

$$b=b',\ c=c',\ \angle BAC=\angle B'A'C'$$

[求證] $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$.

[解析] 要證二形全等,必須證出其餘二角和一邊都對應相等. 我們如將題設已知的相等部分疊合起來,即可逐步證明如下:

[證明] 將 $\triangle ABC$ 放在 $\triangle A'B'C'$ 上,使 A 與 A' 相合,且 c 與 c' 二線段相合.

因 $c=c'$ 故 B 與 B' 相合 (等線段定義)

又　$\angle BAC=\angle B'A'C'$,故b與b′相合.　(等角定義)

且　$b=b'$,故C與C′相合　(等線段定義)

所以a與a′二線段相合　(直線公理)

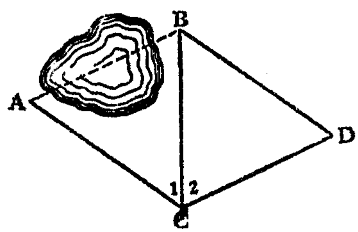
$\therefore$　$a=a'$　(等線段定義)

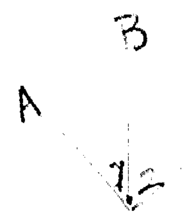
且　$\angle CBA=\angle C'B'A'$, $\angle ACB=\angle A'C'B'$(等角定義)

習 題 二 一

1.等圓是不是全等形? 什麼緣故?

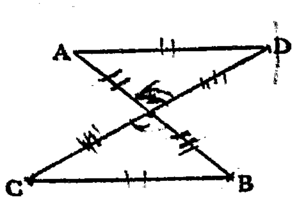
2.如右圖,A,B二點被一塘分隔. 要量AB的距量,

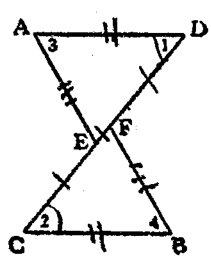


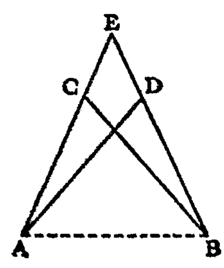


自一適宜的點C使聯CA,CB二線段,不爲塘所阻. 另用測量儀器測得$\angle 2=\angle 1$,并取$CD=CA$,證$BD=BA$.

3.在下左圖內,AB和CD二線段,彼此在交點E平







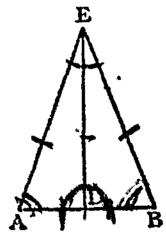
分,證明 $\triangle ADE \equiv \triangle BCE$.

4. 在上中圖內,已知 CD 是直線, $DF = CE$, $AD = BC$, $\angle 1 = \angle 2$. 證明 $\angle 3 = \angle 4$ 且 $AE = BF$.

*5. 在上右圖內,已知 $AE = BE$, $AC = BD$, 證明 $AD = BC$, 又 $\angle ACB = \angle BDA$.

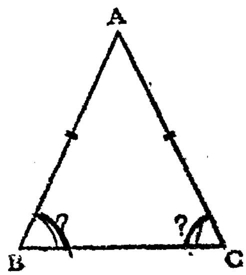
*6. 聯接上題圖中 AB,證明 $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$.

7. 右圖中 $AE = BE$,又 ED 是 $\angle AEB$ 的平分線,證明 $\angle EAB = \angle EBA$.



*8. 證明右圖中 ED 是 AB 的垂直平分線.

81. 等腰三角形. 有二邊相等的△,叫等腰三角形. 第三邊叫做底(Base).



82. 等腰三角形定理一. 三角形二邊如相等,對二邊的角也必相等.

[假設] $\triangle ABC$ 中 $AB = AC$.

[求證] $\angle ABC = \angle ACB$.

[解析] 將 $\triangle ABC$ 翻轉來疊合,使 $\angle BAC$ 仍舊落於

原位置上,但 AB,AC 二邊位置互換. 翻轉後 B,C 二點位置,如何改動? 怎樣能斷定題中求證的結論?

[證明] 使圖中 A 點不動,翻轉 $\triangle ABC$,使 AC 落於 AB 的原位置上. 則因 $\angle BAC$ 不變.

故 AB 落在 AC 原位置上.　(等角定義)

又 AB=AC,故 C 落於 B 原位置上.　(等線段定義)

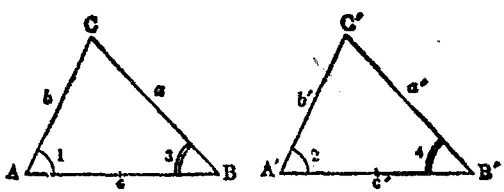
B 落於 C 原位置上.　(等線段定義)

故 CB 落在 BC 的原位置上.　(直線公理)

$\therefore\ \angle ABC = \angle ACB.$　(等角定義)

註. 這定理也可利用 § 80 的定理,間接去證;看習題二十一中第6題或第 7 題.

83. 全等三角形定理二(a.s.a.). 兩三角形有二角一聯邊彼此對應相等, 則這兩三角形必全等.



[假設] 在 $\triangle ABC$,$\triangle A'B'C'$ 裏

$$\angle 1=\angle 2, \angle 3=\angle 4,\ c=c'$$

［求證］　$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

［解析］　將$\triangle ABC$放在$\triangle A'B'C'$上,使c與c'疊合.則a,b二線將與$\triangle A'B'C'$中那些線相合! 再複習習題二十裏第6題.

［證明］　疊合$\triangle ABC$及$\triangle A'B'C'$,使c全落在c'上.

則A與A'合,B與B'合.　　(等線段定義)

因$\angle 1=\angle 2$,故AC與A'C'合.　　(等角定義)

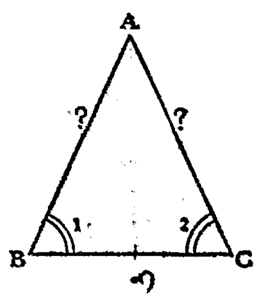
同理　BC與B'C'合.　　(等角定義)

故AC與BC的交點C,也必定和A'C'與B'C'的交點C'相合.　　(二交線只定一點)

故　$a=a', b=b' \angle ACB=\angle A'C'B'$.　　(定義)

註.　兩三角形,只須二角和任意一邊(不限定聯邊)對應相等,即為全等形,待後再補證(§116中系三)

84.　等腰三角形定理二.　三角形中若有二角相等,對二角的邊也必相等.



［假設］　$\triangle ABC$中$\angle 1=\angle 2$.

［求證］　　　AB=AC.

［解析］ 將△ABC翻轉來疊合,使BC仍舊落於原位置上,但B,C二點位置互換. 翻轉後BA,BC二邊位置如何改動? 怎樣能斷定題中求證的結論.

［證明］ 可依§82定理相同的疊合法證明. 步驟卻和§81定理證法相類. 學生試自行補出.

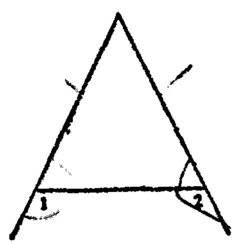
85. 逆定理. 等腰三角形定理一的假設,是定理二的結論,定理二的假設卻是定理一的結論. 將一定理中假設和結論對換,可成另一新定理. 對於原來的定理,二者互稱爲逆定理(Converse theorem).

雖然上例中互逆二定理同時爲真,但他例每不如此. 試取對頂角定理的逆理,看他是否能成立?

習題二二

1. 延長一等腰三角形的二等邊如右圖,則二外角$\angle 1$,$\angle 2$必等.

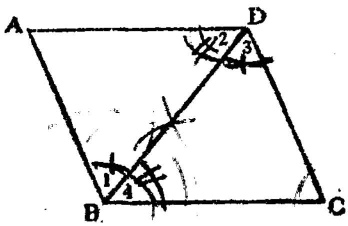
2. 如$\angle 1=\angle 2$,試證必爲一等腰三角形.

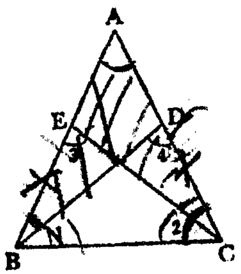


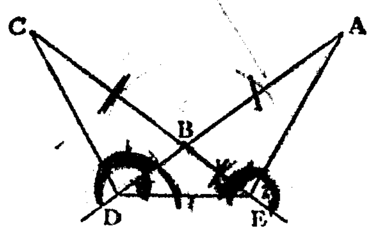
3. 三角形中各邊都等,試證各角必等.

4. 上題的逆定理也能成立麼!

5. 下圖內,$\angle 1=\angle 3$,$\angle 2=\angle 4$,證明$\triangle ABD\equiv\triangle CDB$.







6. 上右圖內,$BD=BE$,$\angle 1=\angle 2$證明$AB=CB$.

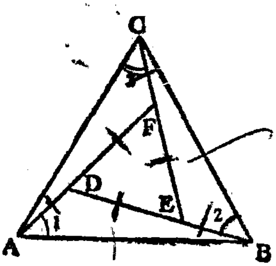
*7. 上左圖內,$\angle ABC=\angle ACB$,且$\angle 1=\angle 2$,證明$BE=CD$,又$\angle 3=\angle 4$.

*8. 證明上題圖中$\triangle AEC\equiv\triangle ADB$.

*9. 由上二題,證明等腰三角形定理二.

10. 下圖中$AB=BC=CA$,又$\angle 1=\angle 2=\angle 3$. 證明$DE=EF=FD$.

11. 如$DE=EF=FD$,且$DA=EB=FC$. 證明$AB=BC$



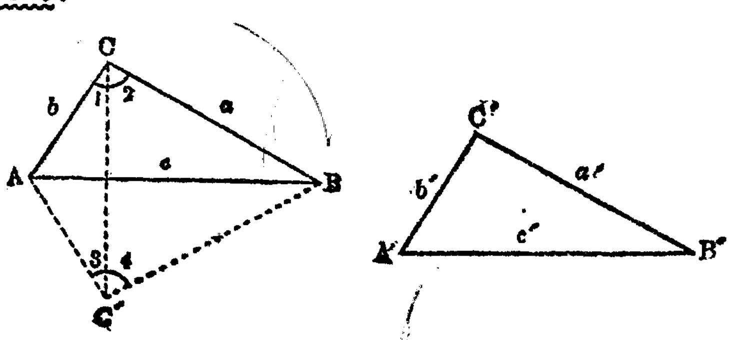
=CA.

*12. 用間接法證明等腰△底上中點垂線必過對頂.

13. 在等腰△ABC中AC,BC等邊上各取中點D,E,聯AD和BE,證明這二線相交,成功另一等腰△.

14. 等腰△ ABC中,等角∠BAC, ∠ABC的分角線成另一等腰△.

86. 全等三角形定理三 (s.s.s.). 兩三角形中, 如三邊彼此對應相等, 則這兩三角形必全等.



[假設] $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ 中 $a=a', b=b', c=c'$.

[求證] $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

[解析] 先證明另一對應角相等,則可應用§80.

[證明] 將 $A'B'$ 疊合 AB 上,使兩三角形分居在 AB 兩邊,而聯 CC'.

因 $\triangle ACC'$ 是等腰 $\triangle$,故 $\angle 1=\angle 3$. (等腰 $\triangle$ 定理一)

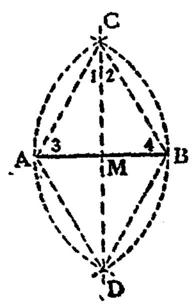
同理 $\angle 2=\angle 4$.

$\therefore$ $\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$. (普通公理)

即 $\angle ACB=\angle A'C'B'$

$\therefore$ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. (s. a. s.)

87. 全等三角形定理三的應用. 第一編中所述的基本作圖題二到六，都可用上述各定理去證，其中尤以全等三角形定理三應用最多。今將分條證明如下,但各題中"已知""求作""作法"各部分,概行略去,學生最好能自己逐條填出.



88. 平分已知線段作法的證明.

[證明] $\triangle ACD$,$\triangle BCD$ 共有 AB 邊,且

$AC=BC, AD=BD$. (等圓半徑定理)

$\therefore$ $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$. (s. s. s.)

即 $\angle 1=\angle 2$ (全等形定義)

又因 $AC=BC$ (全等形定義)

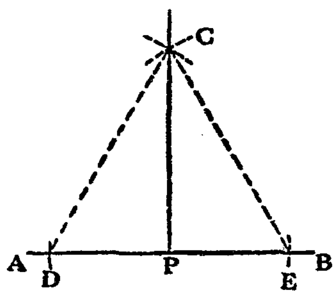
故 $\angle 3=\angle 4$ (等腰△定理一)

所以在 $\triangle ACM$,$\triangle BCM$ 中有二角一聯邊對應相等.

$\therefore$ $\triangle ACM \equiv \triangle BCM$. (a. s. a.)

即 $AM=BM$.

89. 過線上一點作垂線法的證明.



[證明] 在 $\triangle CPD$, $\triangle CPE$ 中,有公共邊 PC,且

$PD=PE, CD=CE$. (等邊半徑定理)

$\therefore$ $\triangle CPD \equiv \triangle CPE$. (s. s. s.)

即 $\angle CPD=\angle CPE$. (全等形定義)

但 $\angle CPD+\angle CPE=St.\angle$. (平角定義)

$$\angle CPD+\angle CPD=2\angle CPD=St.\angle \text{(普通公理)}$$

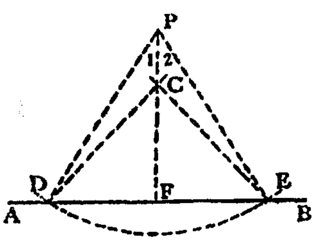
$\therefore$ $\angle CPD=\frac{1}{2}St.\angle=rt.\angle$(普通公理)

即 CP與AB在P點垂直 (垂直定義)

註. 垂直和垂線的記號都是⊥.

90. 垂直平分線. 將此證法應用於上節的圖, 卽可證明CD不但平分AB, 并且與他垂直. CD就叫做線段AB的垂直平分線. 而上節作法，也就是求一線段垂直平分線的作圖法.

91. 過線外一點作垂線法的證明.



[證明] 在$\triangle PCD$,$\triangle PCE$中有公共邊PC,且

PD=PE, CD=CE. (等圓半徑定理)

$\therefore$ $\triangle PCD\cong\triangle PCE$. (s. s. s.)

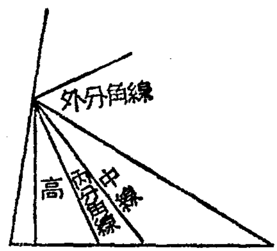
即 $\angle 1=\angle 2$,且PD=PE. (全等形定義)

故在$\triangle PFD$,$\triangle PFE$中有二元素對應相等,此外還

有一公共邊PE,所以是全等形.　(s. s. s.)

照§89的證法,卽可知道PF⊥AB,學生試自補出.

92. 三角形中間接元素. 三角形中自頂點到對邊中點的線,叫中線(Median),到對邊的垂線叫高或頂垂線(Altitude). 各角的補隣角叫外角(Exterior angle). 內外角的平分線,叫做內外分角線(Interior and exterior bisectors),這些元素,叫做間接元素(Indirect elements).



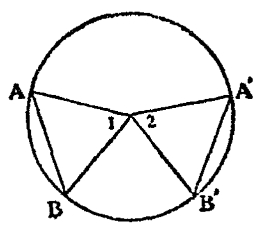
習題二三

1. 有三根棒,用釘拼合各端,成一三角形. 這個三角形還能改變式樣麼? 何故?

2. 四根棒釘成的四邊形,式樣是固定的麼? 何故?

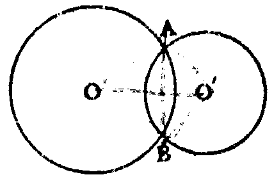
*3. 如右圖中的圓,O是圓心,又AB=A'B',證明∠1=∠2.

*4. 如右圖中的圓,已知∠1=∠2,證明AB=A'B'.



*5. 以O和O'爲圓心的二圓,

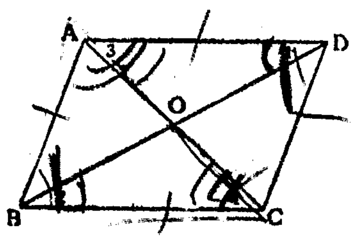
相交於A,B二點. 證明OO′是AB的垂直平分線.



*6. 作一等腰△底邊上中線,由此證明等腰△定理一,并證明這中線即對底邊那角的內分角線.

7. 證明一三角形中,如一邊上的高和中線相合,則必爲一等腰△,以這邊爲底.

*8. 下圖中 AB=CD,AD=BC, 證明 ∠BAD=∠DCB, ∠ADC=∠CBA.



*9. 證明上圖中∠1=∠2,∠3=∠4.

再證明AC,BD互相平分.

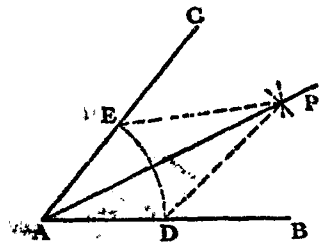
*10. 試證一線段的垂直平分線上任一點,距二端等遠.

11. 如兩三角形全等,則對應的中線必各相等.

93. 垂線公理二. 過已知線外一點,可作

這線的一垂線,但只可作一垂線.

94. 已知角的分角線作法的證明.



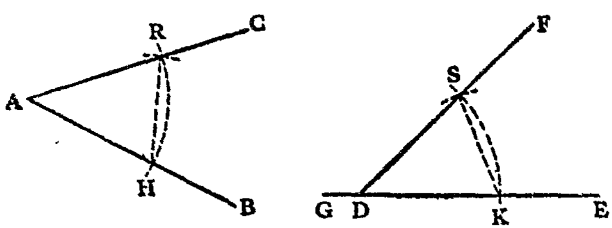
[證明]　在△ADP,△AEP中有一公共邊AP,且

AD=AE, DP=EP.　(等圓半徑定理)

∴　△ADP≡△AEP.　(s. s. s.)

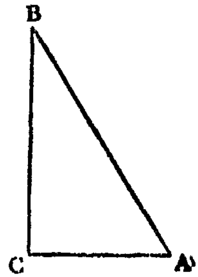
即　∠PAD=∠PAE.　(全等形定義)

95. 作已知角的等角法的證明.



[證明]　用s. s. s.可證明△HAR≡△KDS,因而∠EDF=∠BAC.　學生試自行補出證法中各步驟

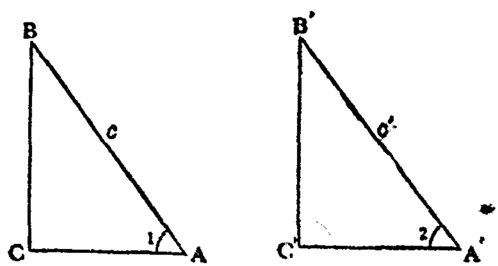
96. 直角三角形. 含一直角的三角形，叫做直角三角形(Right triangle). 對直角的邊叫斜邊(Hypotenuse).



直角三角形中，除直角以外的二角必是銳角,待後文再證.

註. 直角三角形,常簡記爲 rt, △. 又其中直角在通例常記爲 C(當然并非必須如此).

97. 全等直角三角形定理一. 二個直角三角形,有斜邊及一銳角,對應相等,則必爲全等形.



[假設] 在 rt. △ACB, rt. △A'C'B' 裏,

$$c=c', \qquad \angle 1=\angle 2$$

[求證] rt. △ACB≡rt. △A'C'B'.

［解析］　疊合這二△,使已知對應相等部份相合.再看垂線公理二(§93).

［證明］　將△ACB同△A'C'B'相合,因c=c',故可使c'完全落在c上.　又因∠1=∠2.　　(假設)

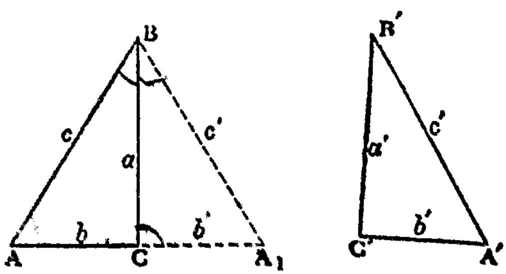
故　　A'C'與AC在一直線上.　　(等角定義)

這時B'與B合,而BC同B'C'都是從已經相合的點B和B',到已經相合的直線A'C'和AC上,故必相合.

(垂線公理二)

即　　rt.△ACB≡rt.△A'C'B'.(全等形定義)

98.　全等直角三角形定理二.　二個直角三角形中,有一斜邊及他一邊,對應相等,則必爲全等形.



［假設］　在rt.△ACB,rt.△A'C'B'裏

$c=c'$　　$a=a'$.

［求證］　rt.△ACB≡rt.△A'C'B'

[解析] 將這兩三角形 a, a' 二邊相合，b 與 b' 二邊分置於C點二側，則成一等腰△. 再應用 rt.△定理一.

[證明] 因 $a=a'$ 故可將 a 與 a' 二邊完全疊合，但使A與A'二點被C點隔開，這時A'所在位置，記爲 A_1.

因 $\angle ACB=\text{rt.}\angle$, $\angle A_1CB=\angle A'C'B'=\text{rt.}\angle$ (假設)

$\angle ACA_1=\angle ACB+\angle A_1CB=\text{rt.}\angle+\text{rt.}\angle$ (普通公理)

$=2\text{rt.}\angle=\text{St.}\angle$ (§68)

故 b, b' 在一直線上. (平角定義)

在 $\triangle AA_1B$ 中 $c=c'$ (假設)

$\therefore$ $\angle BAA_1=\angle BA_1A$ (等腰△定理一)

$\therefore$ $\text{rt.}\triangle ACB\equiv\text{rt.}\triangle A_1CB$ (rt.△定理一)

卽 $\text{rt.}\triangle ACB\equiv\text{rt.}\triangle A'C'B'$.

習題二四

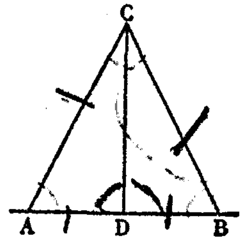
1. 一竿直立在地平面上，竿頂繫一長度固定但較竿更長的繩. 拉直這繩，則無論如何在地面移動，繩的他端隔竿脚的距離必爲定長. 何故？

2. 二個等長梯子，分別靠在二牆頭上，如二梯與平地所成的角(卽這梯與自梯脚到牆垂線二者所成角)相等. 試證二牆必等高.

*3. 直角三角形內，除直角外，還要知道幾件其他元

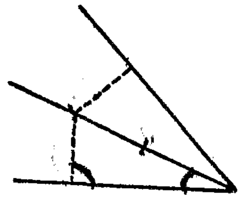
素,方能決定其形! 試分條列出,并註明所根據的理.

*4. 如右圖中$CD \perp AB$,且$CA=CB$,試證$AD=BD$. 他的逆理是否成立!



*5. 由上題證明:一圓與一直線至多只能交於二點.

6. 證明二全等△中相當的高必相等.



*7. 自一角的分角線任取一點,向二邊作垂線,試證這二垂線的長相等.

8. 一個三角形中有二個高相等,必爲等腰△.

9. 自一等腰△底上二頂點,作到對邊的高,則這二個高必等. 且二個高相交時必成另一等腰三角形.

10. 一個三角形中有一邊和邊上的高與中線,和另一三角形中相當件對應相等,則必爲全等.

不等量

99. 不等量公理. 下面所列不等量公理,也是普通公理.

(一)如a與b是二同類量,則這二量的關係,必合於$a=b$, $a>b$, $a<b$三式之一,并且不能同

時合於二式.

註. 式中$>$是"大於"的記號,$<$是"小於"的記號. 注意如$a>b$,則必$b<a$. 這二條不等式,意義相同.

(二)如 $a>b$, $b\geqslant c$ 或 $a\geqslant b$, $b>c$, 則必有

$$a>c$$

註. 式中$\geqslant$是"大於或等於"的記號.

(三)如 $a>b$, $c\geqslant d$,則 $a+c>b+d$.

(四)如 $a>b$, $c=d$,則 $a-c>b-d$.

(五)如 $a>b$, $c\geqslant d$,則 $ac>bd$.

(六)如 $a>b$, $c=d$,則 $a/c>b/d$,

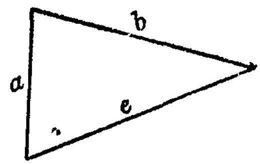
$$c/a<d/b.$$

注意初等幾何學中,只講正量,故各式中字母,只表正量或正數. 在相減時,總是假設從大量減去小量(見第四條).

100. 幾何方面不等量的基本諸理. 前面已講過一條二點距離公理(§67),現在再說一條.

全分公理. 全量必大於分量.

由二點距離公理,立卽可推出



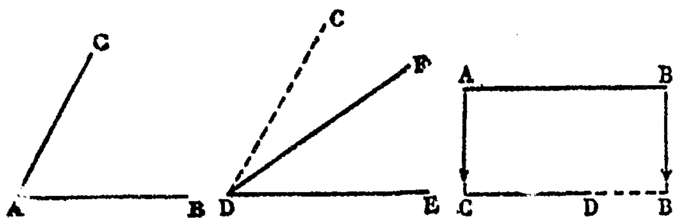
三邊關係定理. 三角形中,無論那二邊的和,必大於第三邊.

如上圖必有　$a+b>c$.

系. 三角形中從大邊減去小邊的較,必小於第三邊.

這系只須用不等量公理卽明.

101. 不等量證法. 欲證幾何中不等量,就直接的講法,也只有用疊合法.例如疊合∠BAC,∠EDF二角時,使A合於D,AB邊合於DE邊,再



看AC是在DF之外,還是在內,就可斷定二角的大小.

AB,CD二線段比較法,也和上相做.

但是這種直接比較法,總是不便運用.幾何中不等量的證明,也和證等量的情形一樣,是根據上節各理,證出幾條應用頗廣的三角形不等量定理來做間接的證示的基礎,學生不可不注意.

習 題 二 五

*1. 在不等量公理第三到第六諸條中,令 $c=d=m$,寫出這種特例的式子來.

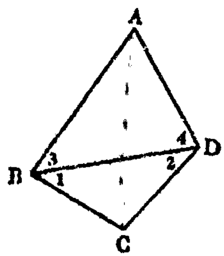
2. 說明不等式中移項,去係數(設為正數)的法則.

*3. 證明如 $a>b$,則 $a^n>b^n$(a,b 都是正量).

*4. 按三邊關係定理,說明§§17,18,19,40各作圖題作法內限制的必要.

*5. 大小二角相隣,試證其和的分角線,必在大角內.

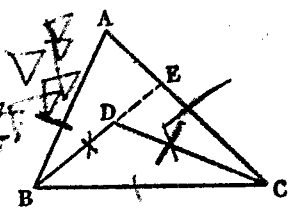
*6. 如下圖中,$\angle ABC$,$\angle ADC=$ rt.$\angle$,而$\angle 1>\angle 2$,試證$\angle 3<\angle 4$.



7. 如上題圖中,各角大小均不加限制,聯AC,試證

$$AB+BC+CD+DA>AC+BD.$$

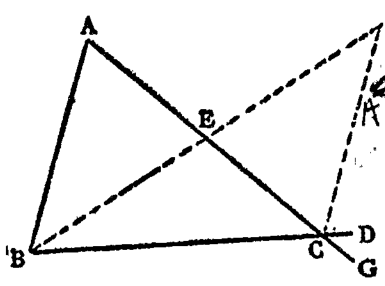
*8. 證明右圖中 $AB+AC$ 必大於 $DB+DC$.



9. 從三角形內任一點,作到三頂點的線段,試證諸線段的和必大於三邊和的一半,而小於三邊和.

10. 試證三角形一邊的中線必小於餘二邊的半和.

102. 外角定理. 將三角形一邊延長,所成外角,必大於不相隣的任一內角.



[假設]　$\angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的一個外角.

[求證]　$\angle ACD>\angle BAC$ 且 $\angle ACD>\angle ABC$.

[解析]　將 $\triangle ABC$ 倒置,湊成一個平行四邊形,響

∠BAC是否落於∠ACD內. 按習題二三第8第9二題,即知有兩對角線互相平分.

[證明] 平分AC於E,聯BE并延長至F,使 EF=BE. 則在△ABE,△CFE中,依作法有

AE=CE, ∵BE=EF; 且∠AEB=∠CEF (何故!)

∴ △ABE≡△CFE 而∠ECF=∠EAB (s. a. s.)

但 ∠ACD>∠ACE (全分公理)

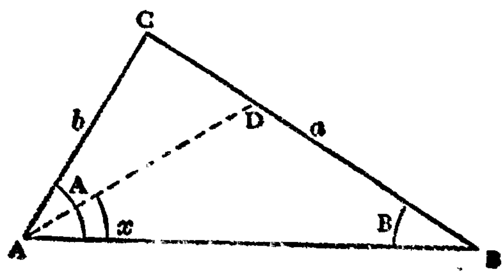
∴ ∠ACD>∠BAC (不等量公理)

依同法可證 ∠ACD>∠ABC.

若∠ACB是鈍角或直角,則∠ACD必爲銳角或直角,而大於其他二角,故此二角皆爲銳角. 故得一

系. 一個三角形中,只能有一鈍角或一直角.

103. 邊角關係定理—(大角的對邊也大). 一個三角形中若一角大於他角,則這角所對的邊,也大於他角所對的邊.



[假設]　$\triangle ABC$ 中 $\angle A > \angle B$.

[求證]　$a > b$

[解析]　要利用三邊關係定理,須先將 a 折成二段,使與 b 成一 △,如 ACD. 如此則 AD=BD,而 $\angle x = \angle B$.

[證法]　因 $\angle A > \angle B$,故可在 ∠A 內作一角 ∠x 等於 ∠B,成一 △ABD. 則

$AD = BD$　　(等腰 △ 定理二)

在 △ADC 中 $AD + DC > AC$　　(三邊關係定理)

$\therefore$　$BD + DC > AC$　　(不等量公理)

卽　$BC > AC$　或　$a > b$.

系. 從直線外一點到這線上的一切線段,以垂線爲最短.

因 △ 如有一 rt. ∠,則餘兩角必爲銳角而較小(見上節註).

註. 按不等公理一的註,可知上面定理的假設和結論,可改爲"如 $\angle B < \angle A$"同"則 $b < a$". 所以這定理也可寫做:一個三角形中,如一角小於他角,則這角的對邊,也小於他角的對邊.

104. 又一種間接證法. 在 §75 中說過一

種間接證法，即欲立一理的是，先破這理的非，是非不兩存則非破即是立。但比較二量，有大於，等於，小於三種情形。按不等公理一，知這三種只有一種成立，但一種成立後，不能同時更有他種並立。故任一種情形的非，都含有其他二種情形，例如

$$\begin{cases}\text{不等}(\neq)\text{即大於或小於}(\gtrless)\\ \text{不大}(\ngtr)\text{即小於或等於}(\leqq)\\ \text{不小}(\nless)\text{即大於或等於}(\geqq)\end{cases}$$

在下節即用此法來證上理的逆定理。

註。前述(§75)的間接證法，叫做歸謬證法(Reduction to absurdity)，本節所說的一種，叫做轉換法(Rule of conversion)。

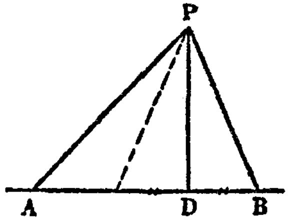
習題二六

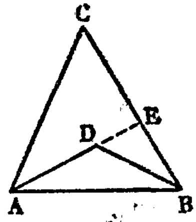
1. 含有鈍角的△中，那一邊最長？

2. 證明任一△中的內分角線，必較夾那角的較長一邊為短。

3. 證明等腰△底邊上任一點到對頂的聯線，必小於那等邊。

4. 如下左圖 PD⊥AB，而 AD＞BD，試證 PA＞PB。



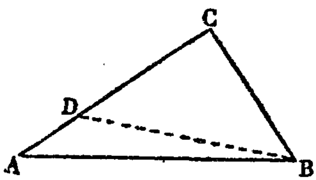


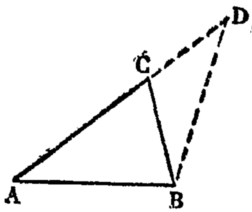
*5. 看上面右圖,試證 $\angle ADB > \angle ACB$.

*6. 看下面左圖,$CD = CB$,試證 $\angle CBA > \angle CAB$.

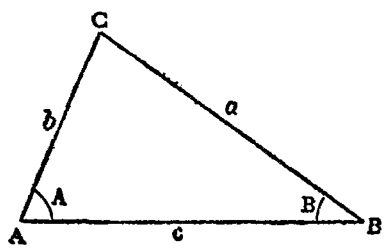
*7. 由上題直接證明邊角關係定理的逆定理.

*8. 下右圖中 $BC = DC$,不要直接用三邊關係定理,試證明 AD 大於 AB.





105. 邊角關係定理二(大邊的對角也大). 一個三角形中,若一邊大於他邊,則這邊的對角,也大於他邊的對角.



[假設] $\triangle ABC$ 中 $a>b$.

[求證] $\angle A>\angle B$.

[解析] 看結論的反面,卽 $\angle A=\angle B$ 或 $\angle A<\angle B$,會引出什麼矛盾來.

[證明] 如 $\angle A=\angle B$,則 $a=b$ (等腰$\triangle$定理二)

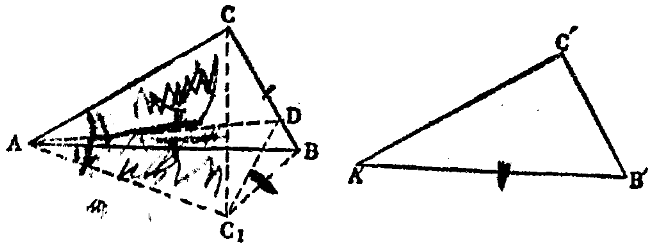
如 $\angle A<\angle B$,則 $a<b$ (邊角關係定理一)

但這二層結論,都和 $a>b$ 的假設衝突,故歸於矛盾.旣不能有 $\angle A=\angle B$ 或 $\angle A<\angle B$ 故 $\angle A>\angle B$.

(不等量公理一)

106. 三邊關係定理的又一證法. 先按習題二六中第 7 題證明上節定理. 次用轉換法證明邊角關係定理一. 最後便可據習題二六中第 8 題證明三邊關係定理. 證法的詳細步驟,學生試自行補出. 注意在這個證法裏,始終未用二點距離公理,以及根據此理證明的定理.

107. 非全等三角形定理一(腰間角大底也大). 兩三角形,有兩邊彼此對應相等,則這兩邊夾角大的所對邊也大.



[假設] 在$\triangle ABC$,$\triangle A'B'C'$中

$$AB=A'B',\quad AC=A'C',\quad \angle BAC>\angle B'A'C'$$

[求證] $BC>B'C'$.

[解析] 做全等△定理三的證法,將二△裏的等邊(如取較長者,即得上圖)相合.再作二個全等△如ACD, AC_1D,即可證得$\angle CC_1B>\angle C_1CB$,因而$BC>B'C'$

[證明] 作$\triangle ABC_1$與$\triangle A'B'C'$全等,而聯CC_1

作$\angle CAC_1$的分角線AE,則

$$\angle CAE=\frac{1}{2}\angle CAC_1=\frac{1}{2}(\angle CAB+\angle BAC_1) \quad (\text{定義})$$

但 $\angle CAB>\angle BAC_1(=\angle B'A'C')$ (假設)

∴ $\angle CAB>\angle CAE$,而AE在$\angle CAB$內.

延長AE,與CB交於D,聯C_1D.

則在$\triangle CAD$,$\triangle C_1AD$中,有一公共邊AD,且

$AC=AC_1(=A'C')$, $\angle CAD=\angle C_1AD$ (作法)

∴ $\triangle CAD\cong\triangle C_1AD$

即　　　　$CD=C_1D$

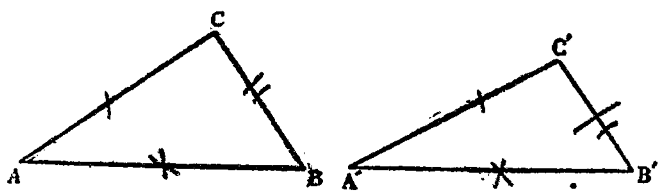
故在 $\triangle CDC_1$ 中，$\angle DCC_1=\angle DC_1C$　(等腰△定理一)

但 $\angle DC_1C<\angle BC_1C$，故 $\angle DCC_1<\angle BC_1C$ (不等量公理)

就 $\triangle CC_1B$ 來看，即可見

$BC>BC_1$　即　$BC>B'C'$　　　(邊角關係定理一)

108. 非全等三角形定理二（底大腰間角也大）. 兩三角形有二邊彼此對應相等，則底邊大的對角也大.



[假設]　$\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$ 中

$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$BC>B'C'$

[求證]　$\angle BAC>\angle B'A'C'$.

[解析]　可用轉換證法.

[證明]　如 $\angle BAC=\angle B'A'C'$，

$\triangle BAC\equiv\triangle B'A'C'$，而　$BC=B'C'$　　　(s. a. s)

如 $\angle BAC<\angle B'A'C'$，則 $BC<B'C'$ (非全等△定理一)

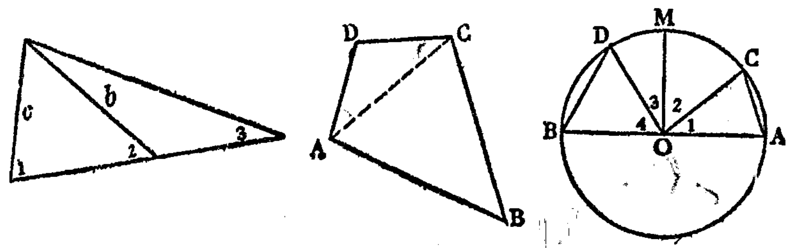
但這二層結論，都和 $BC>B'C'$ 的假設冲突，故歸於

矛盾. 既不能有$\angle BAC=\angle B'A'C'$或$\angle BAC<\angle B'A'C'$

$\therefore\ \angle BAC>\angle B'A'C'$ (不等量公理一)

習題二七

1. 下面左圖中$b>c$,比較$\angle 1$和$\angle 3$的大小.

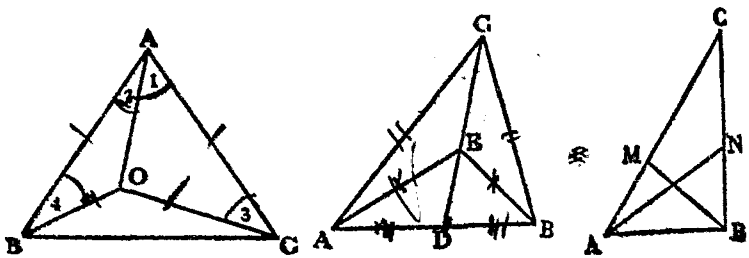


2. 上面中圖內 $AD\perp AB$; $CD\perp CB$; $AD>CD$, 試證$BC>BA$.

*3. 上面右圖內, O是圓心, $MO\perp AB$; $\angle 2>\angle 3$, 試證$BD>AC$.

4. 下面左圖內, $AB=AC$; $\angle 1>\angle 2$,試證$\angle 3>\angle 4$.

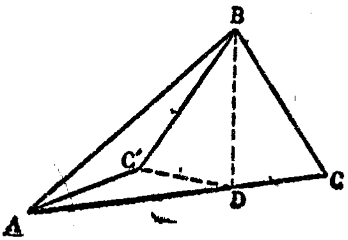
5. 下面中圖內,CD是中線$AC>BC$,試證$AE>BE$.

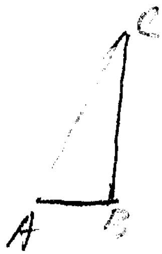


6. 上面右圖內,AC>BC; AM=BN,試證 AN>BM.

*7. 試用§107的圖直接證明非全等三角形定理二.

*8. 如右圖中 BC′=BC,BD是∠CBC′的分角線,試由此直接證明非全等三角形定理一.





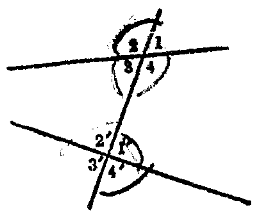
Shanghai

Shanghai

第五編　平行論

平　行　論

109. 三線八角. 二條直線,被另一直線所截,成功八個角. 這八個角,有特別名稱如下:



(甲)單獨關係

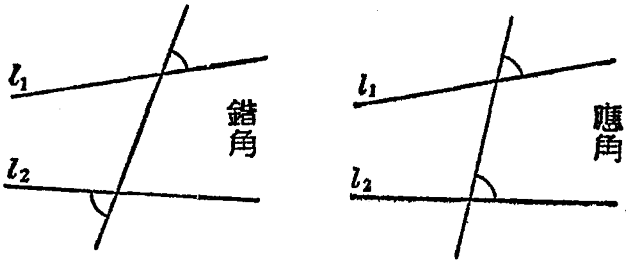
(1)內角　如∠3,∠4,∠1′,∠2′諸角.

(2)外角　如∠1,∠2,∠3′,∠4′諸角.

(乙)相對關係

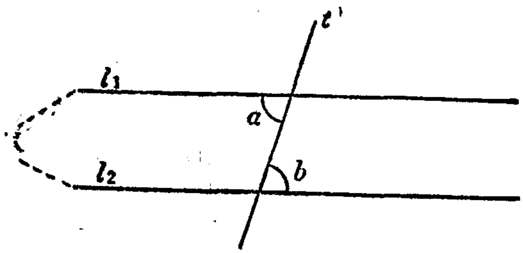
(1)錯角(Alternate angles)　如∠3對於∠1′;∠2對於∠4′都是.

(2)應角(Corresponding angles)　如∠1對於∠1′;∠4對於∠4′都是.



註. 小寫字母不特可表線段的長,也可表直線.

110. 平行判別定理一. 二條直線被另一直線所截,如果有一對錯角相等,則這二線無論如何延長,總不會相交.



[假設] l_1, l_2 二直線被另一直線 t 所截,而

$$\angle a=\angle b.$$

[求證] l_1, l_2 無論如何延長,決不相交.

[解析] 用歸謬證法. 設這二線相交,與截線成一△. 就外角定理看與原假設有無矛盾!

[證明] 假設 l_1 和 l_2 二直線延長後相交,則 l_1, l_2,和 t

成一三角形.

原設二錯角$\angle a$, $\angle b$,必有一爲這Δ的外角,他一爲內角,在上圖中$\angle b$爲外角,$\angle a$爲內角.

$\therefore$　　$\angle b>\angle a$.　　(外角定理)

但原設　　$\angle b=\angle a$

二式矛盾,可見l_1,l_2無論如何延長,決不相交.

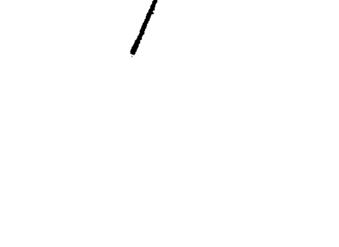
111.　平行線. 二條直線,不論怎樣延長,決不相交的叫平行線(Parallels).

上節的定理,可以改述如下:

二條直線被另一直線所截如果有一對錯角相等,則這二直線必定平行.

註.　平行的記號是//,如上理中$l_1//l_2$.

112.　平行判別定理二(應角則平行). 二條直線被另一直線所截，如果有一對應角相



等,則這二直線必定平行.

[假設] 上圖中 $a=\angle b$.

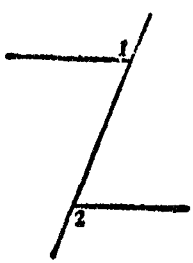
[求證] $l_1//l_2$.

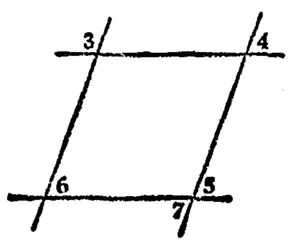
[解析] $\angle a$的對頂角是什麼? 與$\angle a$有何關係? 與$\angle b$又有何關係? 由這關係,可推出$l_1//l_2$麼?

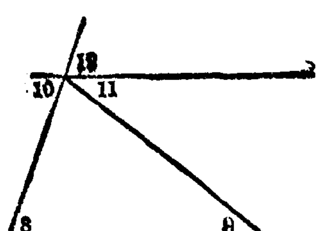
[證明]	$\angle a'=\angle a$.	(對頂角定理)
但	$\angle a=\angle b$.	(假設)
∴	$\angle a'=\angle b$.	(普通公理)
∴	$l_1//l_2$.	(//判別定理一)

系. 二直線被另一線所截, 如同在截線一側的二內(或外)角相補,則二直線平行.

習 題 二 八



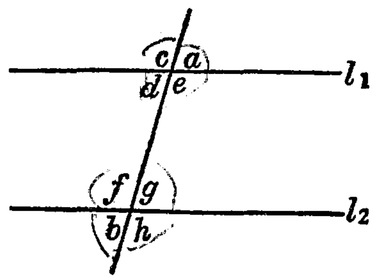




1.說出上列各圖中各種關係角的名稱.

2.若右圖中$\angle a$,$\angle b$如下列各關係.

(一)$\angle a=60^\circ$, $\angle b=50^\circ$,



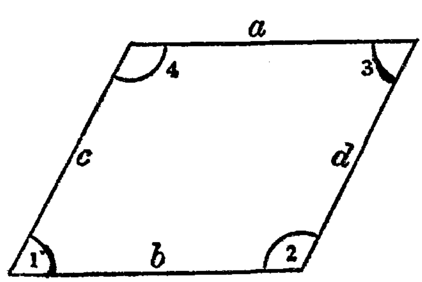
(二)$\angle a=60^\circ$, $\angle b=70^\circ$,

(三)$\angle a=60^\circ$, $\angle b=60^\circ$.

討論各情形中這二直線延長時能否相交! 如相交,交點是在截線右邊,還是在左邊!

3.舉出上圖中各組等角,能使$l_1//l_2$.

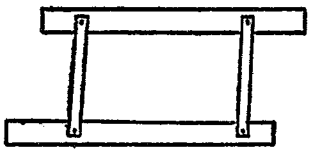
*4.二線段相交,互相平分. 證明連接各端點所成四直線是兩對平行線.

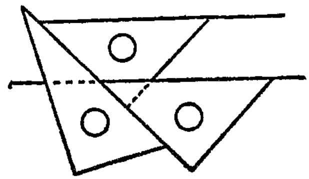


*5. 如前圖中 $a=b$, $c=d$, 證明. $a//b$, $c//d$. 且 $\angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 4$.

*6. 證明 § 25 的作圖題.

7. 證明用平行尺作平行線的方法(下左圖).





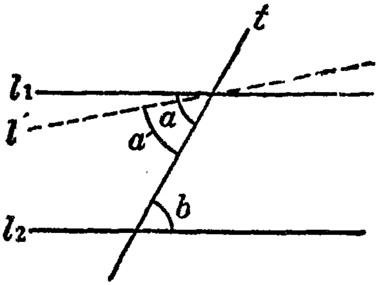
*8. 證明用三角板作平行線的方法(上右圖).

113. 平行公理. 爲得要證明上述二條平行判別定理的逆定理起見,必須用及下面的.

平行公理. 過一條已知直線的外面一點,只能作一直線與他平行.

這條公理卽是我們所學的幾何, 和他種幾何學的分野. 有了這公理,纔產生了這種簡單,美麗,幷且易於應用的幾何系統.

114. 平行性質定理一(平行則錯角等). 兩平行線被一線所截,所成錯角必等.



[假設]　$l_1 // l_2$.

[求證]　$\angle a = \angle b$.

[解析]　假設 $\angle a \neq \angle b$,而證其與平行公理不合.

[證明]　設 $\angle a \neq \angle b$,即可換做 $\angle a' = \angle b$.

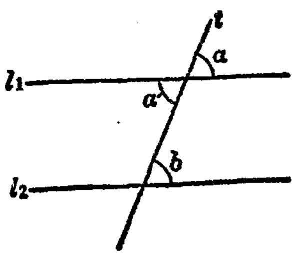
如此則　$l' // l_2$　(//判別定理一)

但　$l_1 // l_2$　(假設)

過 l_1, l' 二線交點有二直線 $// l_2$,而與平行公理不合.

∴　$\angle a = \angle b$.

115. 平行性質定理二(平行則應角等). 兩平行線被一線所截,所成應角必等.



[假設]　$l_1 // l_2$.

[求證]　$\angle a = \angle b$.

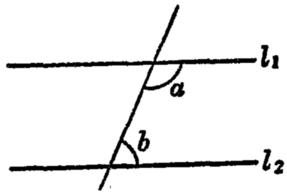
[解析] ∠a的對頂角是什麼? 這角對 ∠a,∠b 有什麼關係? 所得結果合於§114中的假設麼?

[證明] 因 $\angle a'=\angle a$ (對頂角定理)

又 $\angle a'=\angle b$ (平行判別定理一)

∴ $\angle a=\angle b$ (普通公理)

系. 兩平行線,被另一線所截,所成同在一側的二內(或外)角必相補.

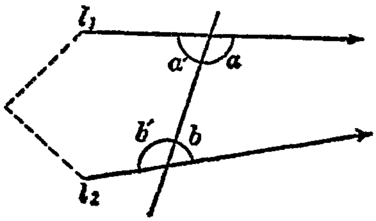


在右圖中,如

$$l_1 // l_2, \text{則} \angle a+\angle b=180°$$

116. 相交線的判別. 二直線如不平行,則必相交,由此可得

交線判別定理. 兩直線被另一直線所截,如所成同側的二內角的和小於180°,則向這側



延長時必至相遇.

［假設］ $\angle a+\angle b<180^\circ$.

［求證］ l_1, l_2 向右延長,必可相交於一點.

［解析］ 假設 $l_1//l_2$, 看推出結論和假設能否相符!

［證明］ 如 $l_1//l_2$, 則

$$\angle a+\angle b=180^\circ \quad \text{(平行判別定理二的系)}$$

與原來假設 $\angle a+\angle b<180^\circ$ 冲突,故 l_1, l_2 非平行.

再如 l_1, l_2 在左側相交,則

$$\angle a>\angle b',\ \angle b>\angle a' \qquad \text{(外角定理)}$$

$$\therefore \qquad \angle a+\angle b>\angle a'+\angle b' \qquad \text{(不等量公理)}$$

但原設 $\angle a+\angle b<180^\circ$,因而

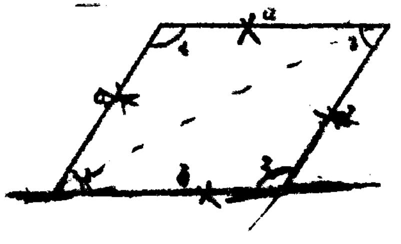
$$\angle a'+\angle b'=2\text{st.}\angle-(\angle a+\angle b)>180.$$

又生矛盾. 故 l_1, l_2 必在右相交.

註. 對我們所學幾何系統,首集大成的歐几里得(Euclid),就用這條理做平行公理.

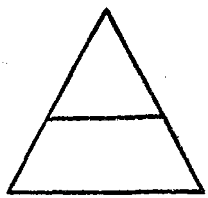
習題二九

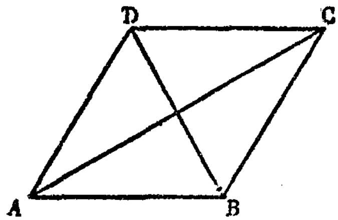
*1. 如下圖中 $a=b$, $c=d$,證明 $\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4=180^\circ$



*2. 在上圖中,如有一直角,則他三角必均爲直角(長方形或正方形).

3. 在等腰△中,作一線與底平行,試證仍成一等腰△.



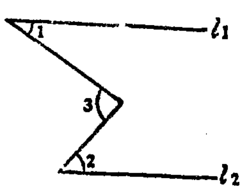


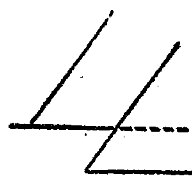
*4. 上右圖中如 AB=CD, AD=BC, 試證 AB//CD, AD//BC.

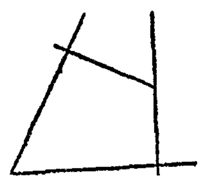
*5. 上右圖中如 AB=CD,又互相平行,則 AD=BC, 也互相平行.

6. 上圖中如 AB=BC=CD=DA,則 AC⊥BD.

7. 如下左圖內,$\angle 3=\angle 1+\angle 2$,證明 $l_1//l_2$.







*8. 試證: 一角二邊與他角二邊對應平行,二角必等.

*9. 試證: 一角二邊與他角二邊對應垂直二角必

等.

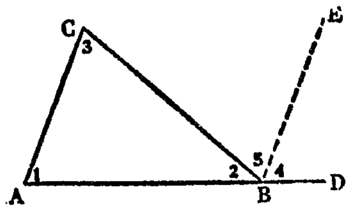
*10. 證明三角形內任意二內分角線,必定相交.

*11. 證明三角形內任意二中線必定相交.

*12. 證明三角形任意二邊上垂直平分線必相交.

*13. 證明三角形內任意二高必定相交.

117. 三角形內角和定理. 凡三角形裏三個角的和必等於兩直角(即180°).



[假設] $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ 是 $\triangle ABC$ 三個內角.

[求證] $\angle 1+\angle 2+\angle 3=2rt.\angle$.

[解析] 作一外角,在其內引一直線,和其對邊平行.所分成兩角,與二個對角有什麼關係!

[證明] 過任一頂點,如B,作 $BE//AC$.

則 $\angle 4=\angle 1$, $\angle 5=\angle 3$(//判別定理一二)

$\therefore$ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle 4+\angle 2+\angle 5$(普通公理)

$=st.\angle=2rt.\angle$ (平角定義)

系一. 凡三角形任一外角均等於二內對

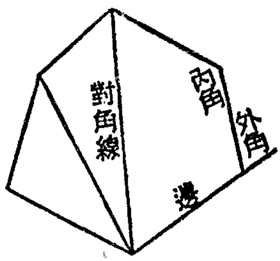
角的和.

系二. 兩三角形中,如有二角對應相等,則第三角亦必相等.

系三. 兩三角形有二角一邊對應相等,則爲全等形(a.a.s.).

系四. 直角三角形中直角外,餘二角必爲相餘的銳角.

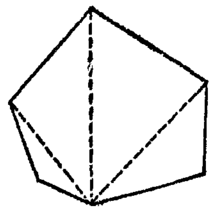
118. 多角形. 三條以上的線段,首尾繼續相接,圍成的圖形,叫多角形,邊數是n的叫n角形.



各端點叫做頂點,各線段叫做邊. 邊長的總和叫周或周界(Perimeter). 有公共頂點的二邊叫做隣邊(Adjacent side). 二隣邊所夾角,而在形內的叫內角,一邊與隣邊延長線所成角叫外角. 聯二不相隣頂點的線段叫對角線(Diagonal).

註. 各內角無一反角的叫凸多角形(Convex polygon). 初等幾何學中所說多角形皆指這種.

119. 多角形的內角和. 從一頂點，引到二隣頂點以外的對角線，即分n角形爲n－2個△. 且各三角形內角和的總和適爲這n角形的內角和.



$\therefore$ n角形內角和$=(n-2)180^\circ$.

又每一外角與內角和爲180°,故

n角形內角和＋n角形外角和$=n\times180^\circ$.

且 $n\times180^\circ-(n-2)180^\circ=2\times180^\circ=360^\circ$.

$\therefore$ n角形外角和$=360^\circ$.

習題三十

*1. 證明§42的作圖題第二部份.

*2. 等腰直角三角形的三內角各爲幾度?

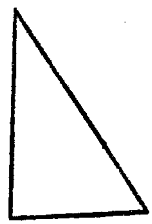
*3. 一等邊△內角爲幾度? 分爲二個全等的直角三角形後,諸角各爲幾度? 又夾直角二邊,有何關係?

*4. 試作右列各角: 45°, 60°, 30°, 75°.

*5. 證明: rt.△斜邊中點,距三頂點等遠.

*6. 證明: 如rt.△中的二銳角,一爲30°,一爲60°,則

其斜邊爲最短邊二倍.



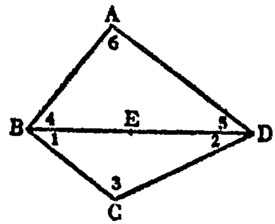
*7. 證明: 如rt.△中斜邊爲最短邊二倍,則其二銳角必一爲30°,一爲60°.

*8. 各角都等的 n 角形,每內角有幾度?

9. 求5角形,7角形,15角形,100角形等各內角和.

10. 內角和爲540°,720°,24rt.∠的多角形,各有幾邊?

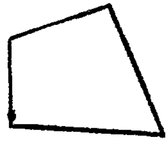
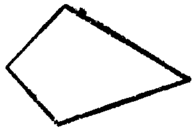
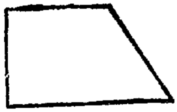
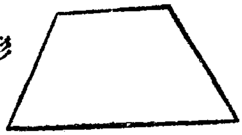
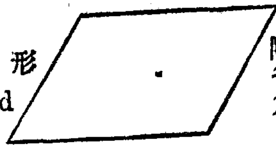
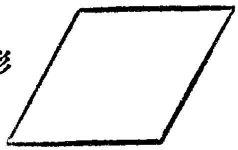
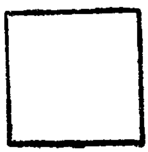
11. 自n角形內一點,引至各頂點聯線,分他爲n個△,因此證明n角形內角和公式. 又順次作和各邊平行的直線,由此證明n角形外角和公式.



12. 右圖∠1+∠2+∠3=∠4+∠5+∠6,試證B,E,D三點在一直線上.

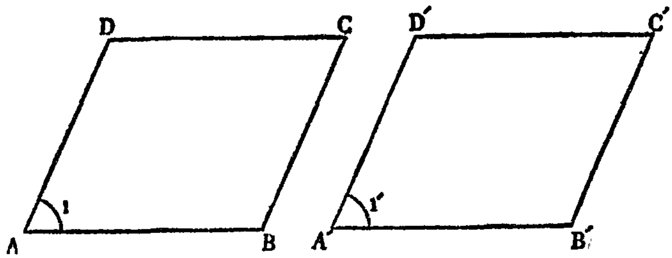
四邊形

120. 四邊形. 四角形常稱爲四邊形(Quadrilateral),其分類如下表:

四邊形	不平行四邊形 無平行對邊	不平行四邊形		任二對邊，都不平行。
		箏形 (Kite)		二對不同的相等隣邊
	梯形 Trapezoid 但有一組平行對邊	梯形 Trapezoid		不平行邊不等
		等腰梯形 Isosceles Trapezoid		不平行邊相等
	平行四邊形 Parallelograms 二組對邊皆平行	斜長方形 Rhomboid		隣邊不等，各角非直角。
		長方形 Rectangle		隣邊不等，各角皆直角。
		斜方形 Rhombus		隣邊亦等，但無直角。
		正方形 Square		隣邊亦等，角皆直角。

註. 平行四邊形的記號是▱.

121. 全等平行四邊形定理. 二個平行四邊形,有二隣邊和夾角,對應相等,則爲全等形.



[假設] ▱ABCD, ▱A'B'C'D' 中

$AB=A'B'$, $AD=A'D'$, 且 $\angle BAD=\angle B'A'D'$.

[求證] ▱ABCD≡▱A'B'C'D'.

[解析] 用疊合法,先使二等角相合.

[證明] 將這二▱疊合,使∠1與∠1'二等角相合,且各等邊也相合,則B與B'合,D與D'合. (何故?)

但 $D'C'//A'B'$, $DC//AB$ (假設)

今D'與D合,AB與A'B'合,故D'C'與DC合.

同理, B'C'與BC合. (平行公理)

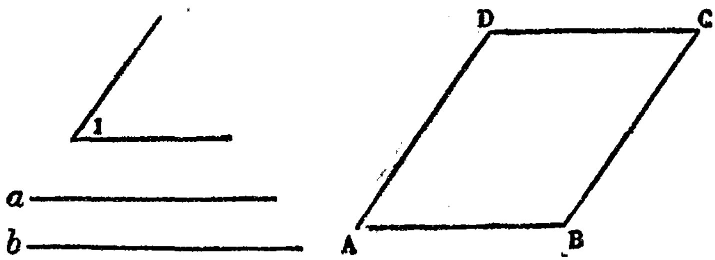
∴ ▱A'B'C'D'≡▱ABCD.

系. 二長方形有二隣邊對應相等,則爲全等形. 二正方形有一邊對應相等,則爲全等形.

註. 這是面積論中的基本要理.

122. 平行四邊形的作圖. 由上述定理,可知平行四邊形,須由二隣角及一夾角決定. 如知這些要件,即可作圖如下:

作圖題. 已知平行四邊形二隣邊及其夾角,求作這平行四邊形.



[已知] a,b 二線段和∠1.

[求作] 一▱,使 AB=a, AD=b, ∠BAD=∠1.

[作法] 先作線段 AB=a　　(作等線段法)

次作 ∠BAD=∠1, 并取　　(等角作法)

AD=b　　(作等線段法)

過D作一直線與AB平行,又過B作另一直線,與AD平行.　　(作//線法)

所作二線交於C即得▱ABCD.

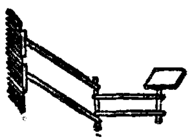
[證明] 學生試自行補出. 注意最後所作二線,何

以一定相交！假若不相交,則BC,BA同爲過B而與CD平行的線,所成的∠CBA角應該怎樣！這角與∠1有什麽關係！因此∠1應該怎樣！

習題三一

1. 平行四邊形四邊固定,這圖形是否固定！

2. 說明牙醫用守平臺,店鋪面收展鐵門的理.



3. 作一▱,已知二邊爲3寸,4.5寸,夾角是60°

4. 作一長方形,已知二邊爲2.5寸和5寸.

5. 作一正方形,已知一邊長4寸.

6. 試證二鄰邊及一對角線對應相等的二平行四邊形,必爲全等形.

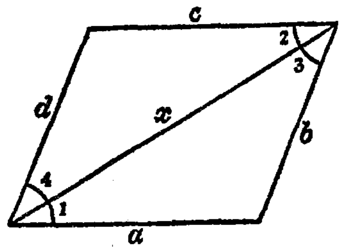
123. 決定平行四邊形的他種條件. 上面所說的平行四邊形條件是

(一)二對對邊都是平行線.

現在再證明二種條件如下:

(二)二對相等的對邊.

(三)一對平行而又相等的對邊.



[假設] 在abcd的四邊形內.

(1) $a=c,\ b=d$ 或是 (2) $a=c,\ a//c$.

[求證] abcd 是▱.

[解析] 作一對角線 x,證明此 x 分原形爲二全等△. 由此歸到第一條件(即二對對邊平行).

[證明] (1)作對角線 x,分爲 △abx,△cdx,則除公共邊 x 外,另有 $a=c,\ b=d.$ (假設)

∴ $\triangle abx \equiv \triangle cdx$ (s. s. s.)

即 $\angle 1=\angle 2$ $\therefore c//a$ (// 判別定理一)

又 $\angle 3=\angle 4$ $\therefore b//d$ (// 判別定理一)

∴ abcd 是平行四邊形.

(2)在 △abx, △cdx 中除公共邊 x 外,更設 $c=a$.

又因 $c//a$　故 $\angle 1=\angle 2$　　(//性質定理一)

$\therefore$　$\triangle abx \cong \triangle cdx$　　(s. a. s.)

即 $\angle 3=\angle 4$　$\therefore$ $b//d$　　(//判別定理一)

$\therefore$　abcd 是平行四邊形.

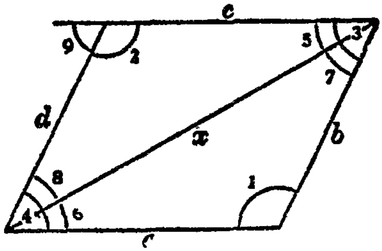
124. 平行四邊形性質. 平行四邊形重要特性如下:

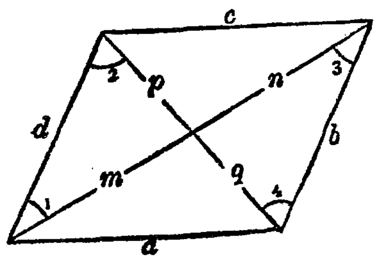
(一)被對角線分爲二個全等三角形.

(二)對邊都相等,對角也都相等.

(三)鄰角互補.

(四)二對角線互相平分.





[假設] abcd是▱,即 $a//c$, $b//d$.

[求證] (一)對角線x,分成的$\triangle abx$, $\triangle cdx$是全等形.

(二) $a=c$, $b=d$; 又$\angle 1=\angle 2$, $\angle 5=\angle 6$.

(三) $\angle 1+\angle 3=\angle 3+\angle 2=\angle 2+\angle 4=\angle 4+\angle 1=180$ 等,(均左圖)

(四)　$p=q$,　$m=n$　(上圖)

[解析]　(一)用 a. s. a. 注意對角和//邊所成角.

(二)由性質一立卽推得.

(三)先證一角與隣角的外角相等.

(四)與(一)法相似,由 a. s. a. 證明 $\triangle pmd \equiv \triangle qnb$.

[證明]　學生試自行補出.

系. 平行四邊形若有一角是直角,則其餘三角,也必均爲直角.

故有一直角的▱是長方形,如隣邊又等,則成正方.

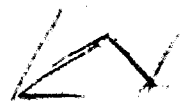
習 題 三 二

1. 證明正方形的對角線相等,而分全形爲四個全等等腰直角三角形.

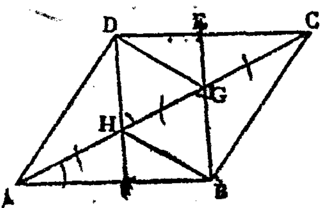
*2. 證明:二條平行線間一切公共垂線都等長.

3. 如平行四邊形對角線相等則爲一長方形,相等幷且互相垂直,則成一正方形.

4. 試證▱二隣角分角線必互相垂直.



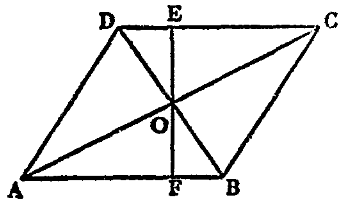
5. 右圖中 E,F 是▱ABCD 對邊中點,試證 BEDF, BGDH 都是▱.



6. 證明上圖中 AH=HG

=GC.

*7. 如下圖 ABCD 是▱,EF 是過 O 點任一線,試證 OE=OF.



8. 如上圖中 DE=BF,試證 EF 必過 O 點.

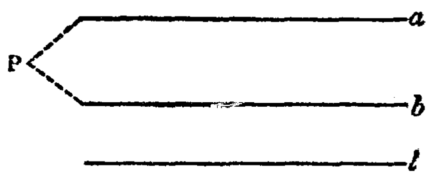
9. 證明梯形底端二角如相等,則爲等腰梯形.

125. 三線平行定理. 兩線都和另一直線平行,則必互相平行.

[假設] a//l

b//l

[求證] a//b



[解析] 用間接證法. 如a,b相交,便和什麼冲突?

[證明] 如a,b相交於一點P. 則過P點有 a,b 均與 l 平行,而與平行公理相犯. 故 a//b.

註. 由這理可知我們能作三條以上的直線,互相平行,成功一組平行線.

126. 平行線內等線段定理. 一組平行線在另一線上截取等長線段，則這組平行線，在任何直線上都截取等長線段.

2

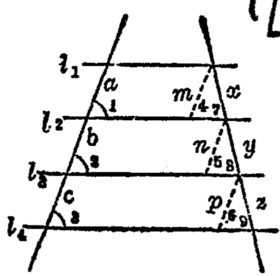
[假設]

$l_1//l_2//l_3//l_4$

且 $a=b=c$.

[求證] $x=y=z$.

[解析] 將 a,b,c. 平行移到 m,n,p 的位置，而證明如此可成三個全等△.



[證明] 作 $m//a, n//b, p//c$，成三個▱，三個△ (作//法)

故有 $m=a,\ n=b,\ p=c$ (▱性質二)

且 $\angle 1=\angle 4, \angle 2=\angle 5, \angle 3=\angle 6$ (//性質定理二)

又因 $l_2//l_3//l_4$ (假設)

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2=\angle 3,\ \angle 4=\angle 5=\angle 6,$

$\angle 7=\angle 8=\angle 9$ (//性質定理二)

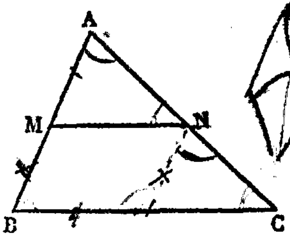
此外 $a=b=c$ (假設)

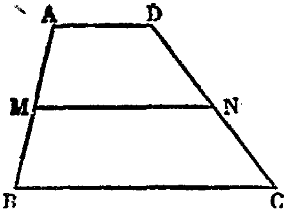
$\therefore$ $m=n=p$ (普通公理)

故所成三個△爲全等形， (a. a. s.)

卽 $x=y=z$

系一. 過三角一邊中點而與他邊平行的直線,必經過第三邊中點. 2





系二. 平分梯形一不平行邊而與二平行邊平行的線,必平分他一不平行邊. 2

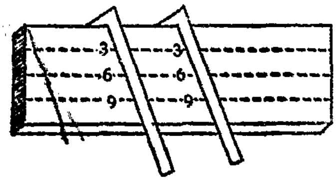
註. 梯形平行二邊叫上下底,不平行二邊叫腰,系二中所說平分二腰的直線,叫中線.

習 題 三 三

1. 證明一線與同二平行線之一相交,必和他一線相交.

2. 證明§26的等分已知線段作法.

3. 木匠要四等分木板,就用曲尺記下3, 6, 9等點,再照樣在別處記點,依連線分割卽得. 爲什麼緣故!



本書於二十四年二月經
國民政府教育部審定
領到教字第四十九號執照

中華民國二十二年七月初版
中華民國二十四年五月圖版

(57321A滬)

初級中學用
復興教科書 幾何 二冊
上冊定價大洋伍角伍分
外埠酌加運費匯費

版權所有
翻印必究

編著者 余介石 徐子豪
校訂者 段育華
主編兼發行人 王雲五 上海河南路
印刷所 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

*D三四九〇(七五)

(本書校對者王養吾)

復初中幾何上冊　定價伍角伍分