國立交通大學研究所

唐山分所叢刊

第五號

聯立一次方程式之圖解

國立交通大學唐山工程學院

（民國三十三年十二月）

聯立一次方程式之圖解

羅 河 著

導　言

關于聯立一次方程之圖解，作者已有兩文論之；一于六年前之唐大月刊，一于科學第十五卷第十一期。第一次為英文，因月刊中斷，登載一部，即無下文。在科學上發表者共有兩法（即本文中斜度及力量圖表之第一解法，及距離圖表之第一解法）。其後陸續求得三法；關于作圖原理及如何簡略亦有擴充。故前兩文所論，僅為本問題之一小部份。今將各法集為一篇，與前文雖不免稍有重複；但給個系統之介紹，因之可不見廢矣。著者附誌

民二十三年五月，唐山。

目　　錄

第一章　一次方程式之圖表

第一節　欲以單純作圖方法，求聯立一次方程式之解答，其先決問題，必為如何于圖中表示方程式所表之意義。換言之，即如何將代數式化為幾何上問題。

解析幾何中圖表一次方程式之法，以僅含三未知量者為限，故其法不能適用于普通情形。茲所論者，乃含任何數未知量方程式之圖表法。依作者所知，方程式中之常數可以距離表之；式中之未知量，可設為斜度，或距離，或力量；未知量之系數可設為距離，或斜度。若設未知量為斜度，則其係數，將為距離；若設未知量為距離，則其係數必為斜度；若設未知量為力量，則其係數即為距離，而式中常數則為力率(Moment of force)，惟亦以距離表之。此三種圖表法將于以下各節分別述之。

(1)　以斜度代表未知量法

第二節　在此法中將以X與Y軸為標準。所謂一線之斜度者乃指此線與X軸間角度之正切 (Tangent) 。至于正切及距離之符號，則與三角學或解析幾何中之規則相同。

設于X及Y軸之平面中有折線(Broken line)ABCDEF(見Fig.1)；設AB,BC,CD,DE,EF等各線之斜度為X_1,X_2,X_3,X_4,X_5；又設各線在X軸上之射影為d_1,d_2,d_3,d_4,d_5，因E在D之左故DE之射影為負d4.依解析幾何中原理，折線 ABCDEF在任何線上之射影等于AF之射影。設K為AF在Y軸上之射影，則

$$K=d_1X_1+d_2X_2+d_3X_3-d_4X_4+d_5X_5 \quad (1)$$

今設ABCDEF折線中B,C,D,F, 四點各自沿經過此四點之垂線上下移動，惟A與F兩點仍在原位， 此折線在Y軸上之射影必不變，而AB,BC,CD,DE,EF等各線之斜度則因B,C,D,E,等點之位置而改變。

反之 (1)式中各X之值可等于任何實數，因此式為含五未知量之方程式。依依此解說，第一圖中A及F兩點與經過其他四點之縱線可表示一含五未知量之方程式。反之任何一次式均可以相似之法表之，今以下列說明之

$$a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3-a_4X_4-a_5X_5=Ca \qquad (2)$$

(2.)式中各a均為正實數，Ca亦為實數。圖表此式之法，必先定一點N,然後于N之右作一縱線a/1使其離N之距為a1,于a/1之右作一縱線a/2使其離a/1之距為a_2于a/2之右作一縱線a/3使其離a/2之距為a_3于a/3之左作一縱線使其離a/3之距為a_4，于a/4之左定一點F使其離a/4之距為a_5,且其高于N點之長為Ca,則N,a/1,a/2,a/3,a/4,F（圖從略）即可表此式。此種圖表法，除式中各係數及常數必須為實數外，並無其他條件，故任何一次方程式均可以相似之法表之。

(2) 以距離代表未知量法。

第三節 設有互相垂直之縱橫二線，相交于O點(見Fig.2)。縱線上有一點P其距橫綫之遠為已與之長K。今有一人，由P點出發欲達到橫綫上某一點，惟其進行之方向並非依一直線而行，經過若干時後即將改變方向一次，改變五次之後始達到橫線上某一點R。今設每段直線行程在橫線上之射影為 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5；又設各直線之斜度為已與之數S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,。設由O向上之方向為負，向下之方向為正，向右之方向為正，向左之方向為負；則此人由P點行至R點之動作可以下式。

$$S_1X_1+S_2X_2+S_3X_3+S_4X_4+S_5X_5=K \qquad (1)$$

表之，(1)式中各S之值既為一定，各X之值又為可大可小之變數，則此式為一普通之一次方程式。

反之任何一次方程式之意義，均可于圖中以此法解釋，

(3)　以力量代表未知數法

第四節　在靜力學中，力之方向，位置，及大小均可以直線代表之：在一平面中，多數平行力之總和，可以圖解法作出，其作圖之法如下：設Fig,3中縱線 l_1, l_2, l_3, l_4, 位之置，方向，及長度表平行力P_1,P_2,P_3,P_4. 今欲以圖解法决定此四力之總和F 之位置，方向及大小。

于另一圖中（見Fig,4）作縱線PPd使其方向及長度表P_4，同樣作PdPc,PcPb,PbPa各表P_3,P_2,P_1。于經過P點之橫線上任取一點O；作OPa,OPb,OPc,OPd諸線(O點之位置可任意擇定，而不須必在經過A點之橫綫上)。自l_4中任一點作兩綫o/o,d/o各平行于OP,OPd；自d/o與l_3之交點作一線c/o平行于OPc；自c/o與l_2之交點作一線b/o平行于OPb;自b/o與l_1之交點作一線a/o平行于OPa,設a/o交o/o于R點則P_1,P_2,P_3,P_4之總和F必經過R點，而方向及長度則均等于PPa

設力之方向，向上者爲正，向下者爲負，距離之方向，向右者爲正，向左者爲負。設G爲此四力之平面中任一點，其距離l_1,l_2,l_3,l_4,及F之長爲d_1,d_2,d_3,d_4,D：則依靜力學中原理，此四力對于G點之力率(Moment of Force)等于其總和F對于G點之力率。若以方程式表之則爲

$$d_1 \cdot P_1 + d_2 \cdot P_2 + d_3 \cdot P_3 + d_4 \cdot P_4 = D \cdot F$$

上式爲普通定理，故無論及力量之符號不具有何等區別，得以其各自符號代入，其兩邊仍相等，

經G點作縱線交o/o，a/o，于A，E兩點，因三角形AER及PFa）彼此相似，故

$$AR : EA = PO : PaP = OP : PPa$$

即　$AR \cdot PPa = OP \cdot EA$

即　$D \cdot F = OP \cdot EA$

故　$d_1 \cdot P_1 + b_2 \cdot P_2 + d_3 \cdot P_3 + d_4 \cdot P_4 = OP \cdot EA$　(2)

今設P_1, P_2, P_3, P_4,諸力之方向，大小均爲不定。惟對于G點之力率爲已與數OP. EA，則(2)式可視爲含四未知量之方程式。OP之長度及方向既可任意選定，則AE之長度及方向亦爲一定。故于圖中(2)式可以縱綫d/1,d/2,d/3,d/4,及縱綫段EA（見Fig,5)表之。設A在d/4上之射影爲H,則d/4 及A 之位置均可以H點定之。故(2)式亦可以縱綫d/1,d/2,a/3,及H,E,兩點表之（見Fig,6）。以後作圖時用以表方程式者既爲此法。

在此法中OP之長名爲極距（Pole distance）。極距之符號由O點起算向右者爲正，向左者爲負。極距決定之後，EA 即表力率。力率之符號由E起算，向上者爲正，向下者爲負。

第二章　作圖之條件

第五節　在完全圖解法中，問題中之關係固須于圖中表之，未知量之數值于圖中作出。最要之點尤在所得之數值可依據幾何或其他圖形上原理証明爲合于該問題之數。漸近圖解法者，其目的只在所得之值與問題之正確解答相差之數不出一定範圍；至于作圖方法是否有理論上之証明，則非所計。本文所論者當屬于前種解法，故其一切作圖方法，必須合乎幾何上原理。因此于作圖之先不可不研究聯立方程式在圖表中彼此之關係以爲作圖之根據。

(1) 斜度圖表法

第六節　設有下列三式

$$a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3=Ka$$
$$b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3=Kb$$
$$c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3=Kc$$

于Fig,7中依斜度代表未知量法，各以Na,a/1,a/2,Pa ,Nb,b/1,b/Pb及Nc,c/1,c/2,Pc表之。設 S_1, S_2, S_3，爲由此三式算得之 X I,

X_2, X_3之值。若以S_1爲斜度作NaA_1, NbB_1, NcC_1三平行綫，又以S_2爲斜度作A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2三平行綫則A_2Pa，B_2Pb，C_2Pc，三綫亦必互爲平行且其斜度爲S_3。

故圖解此三式之法爲，自Na,Nb, Nc三点作三平行綫與 a/1,b/1,c/1 相遇；自其相遇之点作三平行綫與 a/2,b/2,c/2 相遇；又自其相遇之点作三平行綫疊過 Pa,Pb Pc三點。若諸平行綫之作法均有幾何上証明，則此解法即能成立，同樣任何一次聯立方程式之圖解，其必須滿足之條件均與此三式同似。

(2)距離圖表法

第七節 .設下列三式

$$a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3=Ka$$
$$b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3=Kb$$
$$c_1X_1+c_2X_1+c_3X_3=Kc$$

中X_1, X_2, X_3之值已求得爲d_1, d_2, d_3。設Fig.8中Vo上OP OPb,OPc表Ka,Kb,Kc三數；又設縱綫V_1距Vo爲d_1，V_2距V_1爲d_2，橫綫Ho上R点距V_2爲d_2。設自Pa,Pb,Pc以a_1, d_1, c_1爲斜度作三綫交V_1于A_1, B_1, C_1三點；自此三点以a_2, d_2, c_2爲斜度作三綫交V_2于$A_2B_2C_2$三点；再自此三点以a_3, b_3, c_3，爲斜度作三綫，則此三綫必同交于Ho上R点。

故圖解此三式之法爲：自Pa,Pb,Pc三点以斜度a_1, b_1, c_1作三綫遇某一縱綫V_1，自其相遇之三點以斜度a_2, b_2, c_2作三綫遇某另一縱綫V_2，再自其相遇之三點以a_3, b_3, c_3爲斜度作三綫使與橫綫Ho同交于一點R。若縱綫V_1, V_2，及R點之作法均有幾何上証明，則此法即能成立。同樣任何數未知量方程式之圖解，其必須滿足之條件均與此三式相似。

(3) 方程圖表法。

第八節 設以任一極距h除下列三式

$$a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3=Ka$$

$$b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3=Kb$$

$$c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3=Kc$$

中 Ka,Kb,Kc 而得 Qa,Qb,Qc.設依力量代表未知量法于 Fig,9 中以 Ea,Ha兩點及a/1,a/2 兩縱錢表第一式；同樣以Fb,Hb,b/1,b/2 Ec,Hc,c/1,c/2,表第二三兩式。

設F_1,F_2,F_3為由上三式算得之X_1,X_2,X_3之值，作橫錢 OP (見Fig10)以表極距h,自P點作縱錢PP_3以表F_3自P_3作 P_3P_2, 以表F_2。再自P_2作P_2P_1以表F_1。作OP_1 OP_2,OP_3三錢 。自Ea,Eb Ec三點作平行于OP_1之直錢交a/1,b/1,c/1 于 A_1,B_1,C_1三點；由此三點作平形于OP_2之直錢交a/2. b/2,c/2于A_2,B_2,C_2 三點；再自此三點作平行于OP_3 之直錢。則依前圖表中原理可証明最後所作之三錢必各經過Ha,Hb,Hc,

Fig10中OP既可設爲一定之長h,PP_3,P_3P_2,P_2,P_1之長又爲已知，故OP_1,OP_2,OP_3三線之斜度完全一定。反之若PP_3.P_3P_2.P_2P_1之長爲未知量 OP_1,OP_2,OP_3之斜度可用某種方法決定，則 PP_3.P_3P_2,P_2,P_1 亦可立即求得，故圖解此問題之法即在由此三式之圖表如Fig,9 所示，以決定 OP_1,OP_2,OP_3之斜度。但此三斜度必須滿足之條件爲：自Ea,Eb,Ec作三平行線交 a/1,b/1,c/1于 A_1, B_1C_1 三點；由此三點作三平行錢交a/2,b/2,c/2 于 A_2,B_2,C_2 三點：再自此三點作三平行錢使各經過 Ha,Hb,Hc三點，此爲三未知量方程式之圖解所必須滿足之條件，推而至于其他任何數未知量之方程式，其作圖條件亦莫不與此相似。

此圖表法之作圖條件與第一法完全相同，故其作圖方法亦必相似，惟其圖表法各異，其作圖之次序及其利弊因亦不同，故並述之以待閱後比較其優劣。

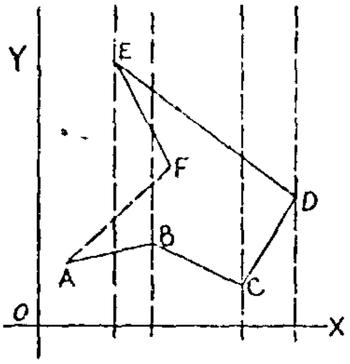


Fig. 1

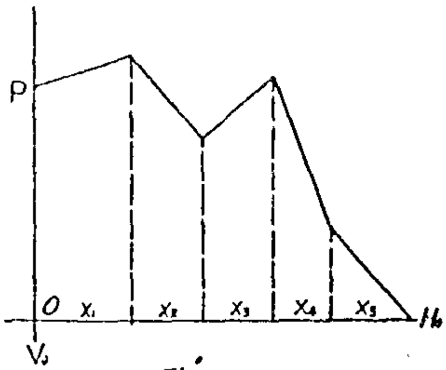


Fig. 2

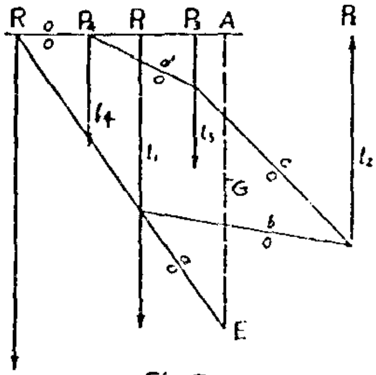


Fig. 3

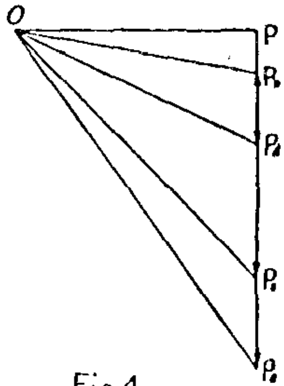


Fig. 4

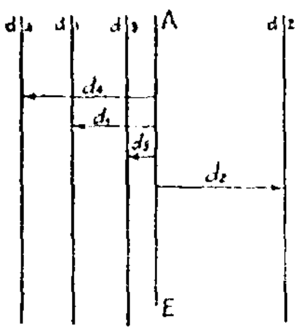


Fig. 5

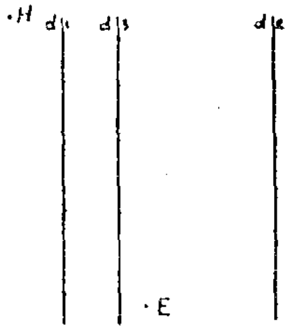


Fig. 6

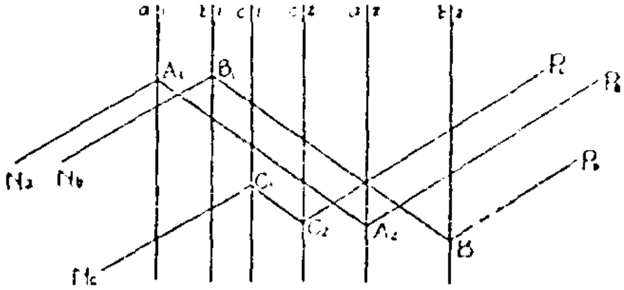


Fig. 7

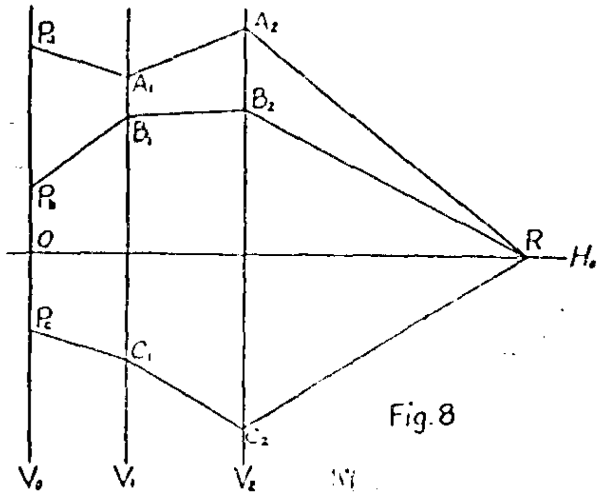


Fig. 8

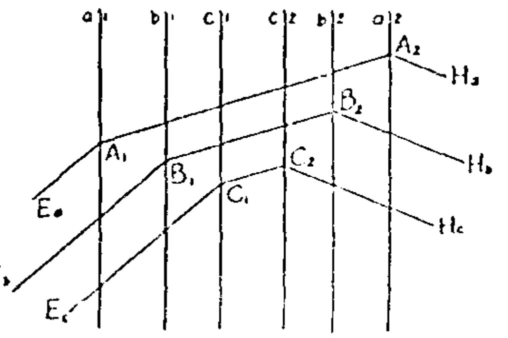


Fig 9

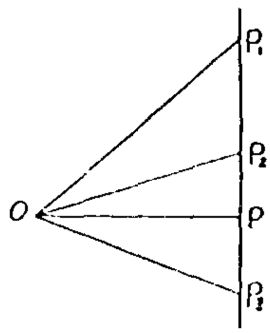


Fig. 10

(待續)

聯立一次方程式之圖解(續)

羅河著

第三章　作圖法

第九節　前兩章中已將代數上一次聯立方程式完全化為幾何之作圖題。茲所論者當為如何作圖之法，及圖解上不可能之情形。斜度及力量兩圖表之作圖條件既完全相似，其作圖法亦完全相同，故將合並論之。此兩圖表共有兩種不同之解法，而距離圖表則有三種不同之解法；將各以第一，第二，第一，第二，第三解法區別之。

作圖之難易每因方程式之多寡而異。為便于了解計，各種作圖法將依次以實例說明之，由含二未知量之方程式以至含四五未知量者；以說明普通作法，使讀者能用之于任何情形之下。

以下用以說明各法之方程式，將恒以下列各種形式表之。

二未知量之方程式

$$a_1X_1+a_2X_2=K_1 \qquad (1)$$

$$b_1X_1+b_2X_2=K_2 \qquad (2)$$

三未知量之方程式

$$a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3=K_1 \qquad (1)$$

$$b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3=K_2 \qquad (2)$$

$$c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3=K_3 \qquad (3)$$

四未知量之方程式

$$a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3+a_4X_4=K_1 \qquad (1)$$
$$b_1X_1+B_2X_2+b_3X_3+b_4X_4=K_2 \qquad (2)$$
$$c_1X_1+C_2X_2+c_3X_3+c_4X_4=K_3 \qquad (3)$$
$$d_1X_1+d_2X_2+d_3X_3+d_4X_4=K_4 \qquad (4)$$

五未知量之方程式

$$a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3+a_4X_4+a_5X_5=K_1 \qquad (1)$$
$$b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3+b_4X_4+b_5X_5=K_2 \qquad (2)$$
$$c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3+c_4X_4+c_5X_5=K_3 \qquad (3)$$
$$d_1X_1+d_2X_2+d_3X_3+d_4X_4+d_5X_5=K_4 \qquad (4)$$
$$e_1X_1+e_2X_2+e_3X_3+e_4X_4+e_5X_5=K_5 \qquad (5)$$

未知量數目如多時，各式之形式可由此類推。以後除特別須要外，各方程式將不全部寫出；凡言若干未知量之方程式，即指上列某組方程式。

又在以後作圖中，兩點(如 A 及 B)間之距離，概以 $\overline{AB}$ 表之。有方向之距離，如由 A 至 B 則以 AB 表之。由 A，B 所決定之直綫亦名曰 AB；如言某綫交 AB 於某点則指交經過 A.，B 兩点之直綫於某点。故 AB 有時表由 A 至 B 之距離，有時表經過 A，B 兩點之直綫。但在全句中，其義意爲何則不難判明。

(1) 應用定理之証明

第十節 本文所論各種圖解法，其目的既以純粹幾何方法，作一次聯立方程式之各根，則其作圖所依據者亦必爲幾何上正確之定理。但此種作圖之特殊性質爲前後連續，未知量可多可少而其所須滿足之條件又爲一般幾何作圖題所未見，故所用之定理雖極顯明易見，亦爲普通幾何書籍所不載。茲於作圖之始，先將各解法中所必須應用之重要定理逐一証明，以爲作圖之基礎。

第十一節　定理A。設有任意七縱綫 $a/_1$, $b/_1$, $c/_1$, $n/_1$, $a/_2$ $b/_2$, $c/_2$,(見Fg.II)其相互之距離爲已與。作任一綫 l 交 $a/_1$, $b/_1$, $n/_1$, 于 A_1, B_1, C_1, N_1, 四點，由 A_1, B_1, C_1, 任作相互平行之三直綫交 $a/_2$, $b/_2$, $c/_2$, 于 A_2, B_2, C_2, 三點。設經過 A_2, B_2, 兩點之直綫交經過 N_1, 而平行於 A_1A_2 之直綫于T點，交 N_1C_2 于R點，交 C_1C_2 于S點；則無論 l 及 A_1, A_2 之斜度若何，T, R, S, 三點必在位於一定之三縱綫上。

設由 $n/1$ 至 $a/1$, $b/1$, $c/1$, $a/2$, $b/2$, $c/2$ 之距離爲 a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2（此處所謂距離乃有方向之距，即向右者爲正，向左者爲負）。則由 $a/1$ 至 $b/1$ 之距離爲 $(-a1+b1)$，由 $b/1$ 至 $n/1$ 之距離爲 $(-b_1)$，由 $a/2$ 至 $b/2$ 之距離爲 $(-a_2+b_2)$。設由T,R,S至 $n/1$ 之距離爲 D_t, D_r, Ds 則由 $b/2$ 至T,R,S 三點之距離爲 $(-b_2-D_t)$，$(-b_2-Dr)$，$-(b_2-D_s)$；由R至 $c/2$ 之距離爲 (D_r+c_2)

因 A_1A_2, B_1B_2, N_1T 互爲平行，故

$$A_1B_1 : B_1N_1 = A_2B_2 : B_2T$$

但 $$A_1B_1 : B_1N_1 = (-a_1+b_1) : (-b_1),$$

$$A_2B_2 : B_2T = (-a_2+b_2) : (-b_2-D_t)$$

故 $$(-a_1+b_1) : (-b_1) = (-a_2+b_2) : (-b_2-bt)$$

故 $$-Dt = \frac{-(b_2-a_2)b_2}{b_1-a_1}+b_2$$

同樣 $$-Ds = \frac{(-d_1+c_1)(-a_2+b_2)}{-a_1+b_1}+b_2$$

故由 $n/1$ 至 T, S 兩點之距離均爲一定。

因三角形 RN_1T 及 RC_2S 彼此相似，故

$$N_1T : C_2S = N_1R : C_2R,$$

但 $$N_1T : C_2S = (-D_t) : (-c_2-D_s),$$

$$N_1R : C_2R = (-D_r) : (-c_2-D_r)$$

故 $$(-D_t) : (-c_2-D_s) = (-D_r) : (-c_2-D_r)$$

故 $$-D_r=\frac{-D_t(c_2+D_r)}{c_2+D_s}$$

以XXXD$_s$，D$_t$ 之值代入上式即得

$$-D_r=\frac{c_2(b_1a_2-b_2a_1)}{c_2(-a_1+b_1)-c_1(-a_2+b_2)}$$

故由 n/1 至 R 點之距離亦為一定。

由 T, R, S 至 n/1 之距離旣各為一定，則此三点必各在位置。一定之三經線上，而不受 l 及 A_1A_2 斜度之影響。

系 I. $$\frac{B_2R}{A_2B_2}=\frac{-ba-D_r}{-a_2+b_2}=\frac{-(b_1c_2-b_2c_1)}{c_2(-a_1+b_1)-c_1(-a_2+b_2)}$$

系 II. $$\frac{N_1C_2}{R_1C_2}=\frac{c_2}{c_2+D_r}=\frac{c_1(-a_2+b_2)-c_2(-a_1+b_1)}{a_1(c_2-b_2)+b_1(a_2-c_2)+c_1(b_2-c_2)}$$

第十二節 定理 B。設 O, A, B, C, D 為一經綫上五點而 OA OB:,OC:OD 等於已與之比 n_1：n_2：n_3：n_4；經過 A, B, C, D 四點以已與斜度 S_a, S_b, S_c, S_d，作 L_a, L_b, L_c, L_d, 四綫。設 L_a, 交 L_c 于 R，L_b 交 L_d 于 T ；則 RT 綫之斜度為一定，而不受 OA OB, OC, OD 長度之影響（見Fig.12)

設OA之長為 l，因 OA: OB: OC: OD 等於定比，故可設 OB, OC, OD之長為 r_1l, r_2l, r_3l, 則此處須所証明者為 RT 之斜度可以 S_a, S_b, S_c, S_d, 及 r_1, r_2, r_3之函數表之。

自 R 及 T 作 AD 之垂綫 RF，及ET,則

$$S_a=\frac{AF}{FR}, \quad S_b=\frac{BE}{ET}, \quad S_c\frac{CF}{FR}, \quad S_d=\frac{DE}{ET},$$

故 $$S_a-S_c=\frac{AF}{FR}-\frac{CF}{FR}=\frac{AF+FC}{FR}=\frac{AC}{FR}$$

由此得 $$FR=\frac{AC}{S_a-S_c}$$

但 $AC=AO+OC=-OA+OC=-l+r_2l$

故 $$FR=\frac{l(\Upsilon_2-1)}{S_a-S_c}$$

同樣 $$ET=\frac{l(\Upsilon_3-\Upsilon_1)}{S_b-S_d}$$

又 $$AF=FR\cdot S_a=\frac{S_a\,l(\Upsilon_2-1)}{S_a-S_c}$$

$$BE=ET\cdot S_b=\frac{S_b\,l(\Upsilon_3-\Upsilon_1)}{S_b-S_d}.$$

$$FE=FA+AB+BE=\frac{-S_a\,l(\Upsilon_2-1)}{S_a-S_c}+l(\Upsilon_1-1)+\frac{S_b\,l(\Upsilon_3-\Upsilon_1)}{S_b-S_d}$$

$$=\frac{l\{(S_a-S_c)(\Upsilon_3S_b-\Upsilon_1S_d)+(S_b-S_d)(S_c-\Upsilon_2S_d)\}}{(S_a-S_c)(S_b-S_d)}$$

自T作FR之垂綫TP，則

$$RP=RF+ET=-FR+ET=\frac{-l(\Upsilon_2-1)}{S_a-S_c}+\frac{l(\Upsilon_3-\Upsilon_1)}{S_b-S_d}$$

$$=\frac{l\{-(\Upsilon_2-1)(S_b-S_d)+(\Upsilon_3-\Upsilon_1)(S_a-S_c)\}}{(S_a-S_c)(S_b-S_d)}$$

設 S爲RT之斜度，則

$$S=\frac{FE}{RP}=\frac{(S_a-S_c)(\Upsilon_3S_b-\Upsilon_1S_d)+(S_b-S_d)(S_c+\Upsilon_2S_d)}{(\Upsilon_3-\Upsilon_1)(S_a-S_c)-(\Upsilon_2-1)(S_b-S_d)}$$

故 RT之斜度爲一定而不受 OA, OB, OC, OD 長度之影響。

第十三節 定理C。設 A,B爲縱綫上任意兩點。自A点以已與斜度S_1,S_2作AC,AD兩綫，自B点以已與斜度 S_3,S_4 作BC,BD兩綫，自AC, BC之交点C以已與斜度 S_5 作一綫交AB于E。設D 爲 AD，BD之交点，則DE之斜度可以 S_1,S_2,S_3,S_4,S_5 之函數表之而不受AB長度之影響 (見 Fig13)

設AB之長爲l，DE之斜度爲S_6；自C,D兩点作 AB 之垂綫CF,DG,

則 $S_1=\dfrac{AF}{FC}, S_2=\dfrac{AG}{GD}, S_3=\dfrac{BF}{FC}, S_4=\dfrac{BG}{GD}, S_5=\dfrac{EF}{FC}$.

故 $S_1-S_3=\dfrac{AF-BF}{FC}=\dfrac{l}{FC}, S_2-S_4=\dfrac{AG-BG}{GD}=\dfrac{l}{GD}$

因此 $FC=\dfrac{l}{S_1-S_3}$, $GD=\dfrac{l}{S_2-S_4}$

因 $EF=S_5\cdot FC, AF=S_1\cdot FC, AG=S_2\cdot GD$

故 $EF=\dfrac{S_5\cdot l}{S_1-S_3}$, $AF=\dfrac{S_1 l}{S_1-S_3}$, $AG=\dfrac{S_2 l}{S_2-S_4}$

$$AE=AF-EF=\frac{l(S_1-S_5)}{S_1-S_3}$$

$$EG=-AE+AG=\frac{-l(S_1-S_5)}{S_1-S_3}+\frac{S_2 l}{S_2-S_4}$$

$$=\frac{l\{S_2(S_5-S_3)+S_4(S_1-S_5)\}}{(S_1-S_3)(S_2-S_4)}$$

故 $$S_6=\frac{EG}{GD}=\frac{l\{S_2(S_5-S_3)+S_4(S_1-S_5)\}}{(S_1-S_3)(S_2-S_4)}\cdot\frac{(S_2-S_4)}{l}$$

$$=\frac{S_2(S_5-S_3)+S_4(S_1-S_5)}{(S_1-S_3)}$$

故以此法作ED，AB之長可任意擇定而所得之斜度則恆為一定。

系，設由經線AB中(見Fig.13)至C點之距離為d_1，至D点之距離為d_2，則此兩距離之比$d_1:d_2$可以S_1,S_2,S_3,S_4之函數表之而不受AB長度之影響。

由前定理中證明。

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{l}{S_1-S_3}\cdot\frac{S_2-S_4}{l}=\frac{S_2-S_4}{S_1-S_3}$$

第十四節 定理D 設A,B為經線上任意兩點，由A,B以已與斜度S_1,S_3作直線相交于C點，又由A,B以已與斜度S_2,S_4作直線相交于D點；則CD之斜度可以S_1,S_2,S_3,S_4，之函數表之而不受AB長度

之影響（見Fig.14）

設AB之長爲 l；由C,D作AD之垂線CF，DG，則由定理C中証明，

$$FC=\frac{l}{S_1-S_3},\ GD=\frac{l}{S_2-S_4}\quad BF=\frac{S_3l}{S_1-S_3},\ BG=\frac{S_4l}{S_2-S_4}$$

故 $$CF+GD=\frac{-l}{S_1-S_3}+\frac{l}{S_2-S_4}=l\left\{\frac{S_4-S_2+S_1-S_3}{(S_1-S_3)(S_2-S_4)}\right\}$$

$$FB+BG=\frac{-S_3l}{S_1-S_3}+\frac{S_4l}{S_2-S_4}=l\left\{\frac{S_4(S_1-S_3)-S_3(S_2-S_4)}{(S_1-S_3)(S_2-S_4)}\right\}$$

設 CD之斜度爲S_5，則

$$S_5=\frac{FB+BG}{CF+GD}=\frac{S_4(S_1-S_3)-S_3(S_2-S_4)}{S_4-S_2+S_1-S_3}$$

故 CD之斜度不受AB長度之影響。

第十五節 定理E。設 V,V_1,V_2，爲一平面中任意三直綫，惟由V至 V_1 及 V_2 兩距離之比爲定比γ；自 V 上任一點A以已與斜度 S_1，S_2 作兩綫交 V_1,V_2 于 P_1,P_2 兩點，則 P_1P_2 之斜度可以 S_1,S_2 及γ之函數表之。（見Fig.15）

設由V至 V_1 及 V_2 之距爲 d_1,d_2；由 P_1 及 P_2 作V之垂綫 P_1F，P_2G,則

$$AF=S_1\cdot FP_1=S_1d_1,\ AG=S_2\cdot GP_2=S_2d_2,$$

$$FG=-AF+AG=-S_1d_1+S_2d_2,$$

$$P_1F+GP_2=-d_1+d_2$$

設 P_1P_2 之斜度爲 S_3 則

$$S_3=\frac{FG}{P_1F+GP_2}=\frac{S_2d_2-S_1d_1}{d_2-d_1}=\frac{S_2-S_1\gamma}{1-\gamma}$$

（2） 斜度及力量圖表之第一解法

第十六節 二未知量之方程式（見第九節）

爲作圖便利計，在此法中將以 N 爲各式圖表中共通之點；因此

Fig. 16 中N,a/1,Pa 及 N,b/1,Pb 表二未知量之方程式

作圖。 經N點作縱綫n/1平行于a/1;由P_a,P_b作兩平行綫交a/1,b/1于A_1,B_1兩點;設A_1 B_1交n/1于N_1;由N_1作一綫平行于P_aA_1而交P_aP_b于R點。作NR綫;由P_a,P_b各作平行于NR之直綫而交a/1, b/1于A,B兩點。則NA 及 AP_a 之斜度即爲合于該兩式之X_1,X_2之値。

証。此處所須証明者僅爲N,A,B三點是否同在一直綫之上。

設NA交 b/1,P_bB 于 B', B''兩點,則

$$\frac{NA}{AB'}=\frac{N_1A_1}{A_1B_1}=\frac{R\ P_a}{P_aPb}=\frac{NA}{AB''}$$

故 $$AB'=AB''$$

即B, B', B''同在一點;亦即N, A, B同在一直綫之上。

第十七節 三未知量之方程式 (見第九節)

Fig.17中 N, $a/_1$, $a/_2$, P_a, N, $b/_1$, $b/_2$, P_a,N, $c/_1$, $c/_2$, P_c 表三未知量之方程式。今所須要者爲經N點作一線交$a/_1$, $b/_1$, $c/_1$ 于A_1, B_1, C_1三點;又由此三點作三平行線交 $a/_2$, $b/_2$, $c/_2$, 于 A_2, B_2, C_2,三點,再由此三點作平行線使經過P_a, P_b, P_c,三點。

分析。 此題之作圖方法,已較爲繁難,爲便于了解計,先假設所須要之平行線均已作成 (見Fig.17) 以視其關係如何。

設經過B_2,C_2兩點之直線交A_1A_2于D點,交NA_2 于E點;經過N而平行于A_1 A_2之直綫交 B_1 C_2 于H點;經過 E 點而平行于A_2Pa之直綫交 P_b P_c于F點;經過N而平行A_2 Pa之直綫交PaF于G點,則由定理A可知D,E,H各在位置一定之三縱綫上;此三縱綫之位置不受NA_1及A_1A_2斜度之影響。因

$$\frac{C_2E}{C_2B_2}=\frac{P_cF}{P_cP_b},$$

故PbPc綫上F點之位置亦爲一定。因

$$\frac{A_2E}{A_2N}=\frac{PaF}{PaG}$$

故PaF線上G點之位置亦為一定。

NG之斜度等於A_2P_a之斜度；故欲決定A_2Pa之斜度可先求G點；欲作G點必先決定 PaF 線；欲作 PaF 線必先定F點；欲決定F點必先決定經過E點之橫線，而此橫線可依定理A作出。故得下作圖法：

作圖。設Fig.18中N,$a/_1$,$a/_2$,P_a,N,$b/_1$, $b/_2$,P_b,N,$c/_1$,$c/_2$,P_c表三未知量之方程式。經過N點作縱線n/1；作一斜線交$a/_1$,$b/_1$,$c/_1$,$n/_1$,于a_1,b_1,c_1,N_1,諸點（此斜線之方向可任意選定，以便于隨後作圖為標準）；由a_1,b_1,c_1,作三平行線交 a/2,b/2,c/2,于a_2,b_2,c_2,三點。設b_2c_2交a_1a_2,N_1a_2,于E_1，H_1兩點；經過E_1,H_1作縱線e/1,h/1。由Pb,Pc作兩平行線交b/2,c/2于B_3,C_3兩點。設B_3C_3交h/1于H_2；由H_2作平行于B_3P_b之直線交PbPc于F。由P_a作平行于B_3P_b之直線交a/2于A_3。設A_3H_2交$n/_1$于N_2由N_2作平行于B_3P_b之直線交PaF于G點。由Pa,Pb,Pc作三線各平行于NG而與a/2,b/2,c/2相交于A_2.B_2,C_2三點；設B_2C_2交$e/_1$于D點，A_2D交a/1于A_1點，則NA_1,A_1A_2,A_2Pa三線之斜度則為滿足該三式之X_1,X_2，X_3之值。

設上三式之圖表係以力量代表未知量並設其極距為 l，則欲得其三未知量之值必須另作一圖其法如下：作橫線OA表極距l(見Fig.19)，自O點作三線各平行於 Fig.13 圖中之NA_1.A_1A_2,A_2P_a而交經過A點之縱線於A_1,A_2,A_3三點，則 A_2A_1,A_3A_2,AA_3 則為X_1,X_2,X_3三未知量之值。

證 由B_2，C_2作兩線均平行於 A_1A_2 交b/1,c/1於B_1，C_1兩點；則無論圖表時係以斜度或以力量表未知量，此處所須証明者僅為

N, A_1, B_1, C_1四點是否同在一直線之上。

由N_1作平行于a_1a_2之直線交b_2c_2于S_1；經S_1作縱線$S/_1$交B_3C_3于S_2；由S_2作平行于B_3P_b之直線交P_bP_c于L；由L作平行于NG之直線交$S/_1$于S_3；作NS_3線；又設NA_2交$b/_1$于H_3。因

$$\frac{A_2H_3}{H_3N}=\frac{A_3H_2}{H_2N_2}=\frac{PaF}{F\ G},$$

故FH_3必平行于P_bB_2因FH_2 P_bB_3, LS_2, PcC_3 四線互為平行，故

$$C_3S_2 : S_2B_3 : B_3H_2 = P_cL : LP_b : P_bF$$

且FH_3, P_bB_2, LS_3, P_cC_2四線互為平行，故S_3, H_3可証明在B_2C_2線上。因

$$A_2H_3 ; H_3N = a_2H_1 ; H_1N_1 = E_1H_1 : H_1S_1 = DH_3 : H_3S_3$$

故NS_3必平行于A_1A_2。因$A_1A_2, B_1B_2, NS_3, C_1C_2$互為平行，且

$$DB_2 : B_2S_3 : S_3C_2 = a_1b_1 : b_1N_1 : N_1C_1,$$

故A_1, B_1, N_1C_1四點可証明同在一直線之上。

第十八節 四未知量之方程式（見第九節）

設Fig,2）中 $N, a/_1, a/_2, a/_3 Pa, N, b/_1, b/_2, b/_3, P_b, N, c/_1, c/_2, c/_3, Pc, N, d/_1, d/_2, d/_3, P_d$ 代表四未知量之方程式。

作圖。過N作縱線 $n/1$ ；任作一直線交 $a/_1, b/_1, c/_1, d/_1, n/_1$ 于a_1, b_1, c_1, d_1, n_1；由 a_1, b_1, c_1, d_1 作四橫線（或任意四平行線）交$a/_2, b/_2, c/_2, d/_2, a/_3, b/_3, c/_3, d/_3$于$a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3, d_3$ 諸點。設 n_1 c_2, n_1d_2交a_2 b_2于S_1, T_1兩點；由S_1, T_1作兩橫線交a_3b_3于S_2, T_2兩點由n_1作一橫線交a_2b_2, S_2c_3, T_2d_3于R, E F三點；經過E, F, S_2, T_2作縱線$o/_1, f/_1, s/_1, t/_1$。由P_a, P_b, P_c, P_d

作四橫線交$a/_3$，$b/_3$，$c/_3$，$d/_3$于a_4，b_4，c_4，d_4，設a_4b_4交$s/_1$，$t/_1$于S_3，T_3；設c_4S_3，d_4T_3交$o/_1$，$f/_1$于E_1，F_1．由S_3，T_3作兩橫綫交P_aP_b于S_4，T_4；由E_1，F_1，作兩橫綫交P_cS_4，P_dT_4于S_5，T_5，設E_1F_1交$n/_1$于n_2；由n_2作一橫綫交S_5，T_5于K點。由S_5作平行于Nk之直綫交$o/_1$于E_2．由P_a，P_b，P_c，P_d作四綫各平行于NK，交$a/_3$，b_3，$c/_3$，$d/_3$于A_3，B_3，C_3，D_3；由此四點作四綫各平行于NE_2，交$R/_2$，$b/_2$，$c/_2$，$d/_2$于A_2，B_2，C_2，D_2。經R點作縱綫$r/1$，交A_2B_2于a_1；由A_2，B_2，C_2，D_2作四綫各平行于NR交$a/_1$，$b/_1$，$c/_1$，$d/_1$于A_1 B_1，C_1，D_1，則NA_1，A_1A_2，A_2A_3，A_3P_a四綫之斜度即為滿足該四式之X_1，X_2，X_3，$X4$之值。

證，此處所須證明者為N，A_1，B_1，C_1，D_1五點是否同在一直綫之上。

設經過C_1之橫綫交a_2b_2于H_1；經H_1，S_1作縱綫$h/_1$，$o/_1$；由S_4作平行于P_cC_3之直綫交$s/1$于M；由M作平行于NE_2之直綫交$l/1$于L，則可證明A_3，B_3，M三點同在一直綫之上；C_3，E_2，M三點同在一直綫之上；C_2，L，N三點同在一直綫之上；L，A_2，B_2三點同在一直綫之上。

設A_2B_2交$h/_1$于H_2，則

$$\frac{H_2L}{H_2R_1}=\frac{H_1S_1}{H_1R}=\frac{c_2S_1}{c_2N_1}=\frac{C_2L}{C_2N}$$

故平行于NR_1之C_1C2亦經過H_2，因

$$\frac{a_1b_1}{a_1n_1}=\frac{a_2b_2}{a_2R}=\frac{A_2B_2}{A_2R_1}$$

故N，A_1，B_1三点可證明同在一直線之上，因

$$\frac{a_1b_1}{b_1c_1}=\frac{a_2b_2}{b_2H_1}=\frac{A_2B_2}{B_2H_2}$$

故A_1，B_1，C_1，三點可證明同在一直線之上；同樣A_1，B_1，D_1三點亦可證明同在一直線之上。

第十九節　五未知量之方程式（見第九節）

設該五式均依前法于 Fig.21 中表之。惟此處將不述其完全作圖方法，僅用以說明普通作圖之步驟，如何由五未知量之方程式化而爲三未知量者。茲爲便于了解計，問題中所須要之各綫 $NA_1A_2A_3A_4P_a$, $NB_1B_2B_3B_4P_b$ 等均假設亦已作成。作 B_2D_2, B_3D_3, B_4D_4 P_bP_d 四綫；作 NA_2, NC_2, NE_2 三直綫交 B_2D_2 于 F, G, H 三點。則依定理A，F,G,H 各在位置一定之三縱綫上；又依定理A中系 II

$$\frac{NA_2}{A_2F},\ \frac{NC_2}{C_2G},\ \frac{NE_2}{E_2H}$$

三比例亦均爲一定。

由F,G,H作平行于 A_2A_3 之三直綫交 B_3D_3 于 F_1, G_1, H_1；由此三點作平行于 A_3A_4 之三直綫交 B_4D_4 于 F_2, G_2, H_2；再由此三點作平行于 A_4Pa 之三直綫交 P_bP_d 于 F_3, G_3, H_3. 則

$$\frac{B_2D_2}{D_2F}=\frac{B_3D_3}{D_3F_1}=\frac{B_4D_4}{D_4F_2}=\frac{PbPd}{PdF_3}$$

故 F_1, F_2 各在位置一定之縱綫上；同樣 G_1, G_2, H_1, H_2 各在位置一定之縱綫上；而 F_3, G_3, H_3 三點之位置則完全一定。

由N點作 A_2A_3 之平行綫交 A_3F_1, C_3G_1, E_3H_1 于 K_1, L_1, M_1 三點；由此三點作三綫各平行于 A_3A_4 交 A_4F_2, C_4G_2, E_4H_2 于 K_2, L_2, M_2 三點；再由此三點作三綫各平行于 A_4P_a 交 P_aF_3, P_cG_3, P_eH_3 於 P_a', P_c', P_e' 三點。則

$$\frac{NA_2}{A_2F}=\frac{K_1A_3}{A_3F_1}=\frac{K_2A_4}{A_4F_2}=\frac{Pa'Pa}{PaF_3}$$

故 K_1, K_2 各在位置一定之縱綫上而 P_a' 之位置則完全一定。同樣 L_1, L_2, M_1, M_2 各在位置一定之縱綫上；P_c', P_e' 之位置亦完全一定。

由以上之分析，可見經過 K_1, K_2 兩點之縱綫及 P_a' 點均以已有之綫，點及

$$\frac{B_2D_2}{D_2F}\ ,\ \frac{NA_2}{A_2F}$$

兩比率決定。但此兩比率可依定理A作出，其法如下：

經N點作縱綫 $n/_1$；作任一斜綫交 $a/_1,b/_1,d/_1,n/_1$ 于 a_1,b_1,d_1,n_1，諸點；經 $a_1 b_1,d_1$ 作三平行綫交 $a/_2,b/_2,d/_2$ 于 a_2,b_2,d_2 三點；又設 n_1a_2 交 b_2d_2 于 f 點，則

$$\frac{b_2d_2}{d_2f}=\frac{B_2D_2}{D_2F}\ ,\ \frac{na_2}{a_2f}=\frac{NA_2}{A_2F}$$

故經過 K_1,K_2 之兩縱綫及 P_a' 不難立即作出；同樣經過 L_1,L_2,M_1,M_2 之四縱綫及 P_c', P_e' 亦可以同法作出。

設經過 K_1,K_2,L_1,L_2,M_1,M_2 之縱綫爲 $k/_1$, $k/_2$, $l/_1$, $l/_2$, $M/_1$, $M/_2$，又在上分析中，NK_1 平行于 A_2A_3；K_1K_2, L_1L_2 M_1M_2 均平行于 A_3A_4；K_2P_a', L_2P_c', M_2P_e' 均平行於 A_4P_a 故 X_3,X_4,X_5 三未知量之值可由 N, P_a',P_c',P_e' 四點及 $k/_1$, $k/_2$, $l/_1$, $l/_2$, $m/_1$, $m/_2$ 等綫決定。

第二十節　在第十八節中，若求四知量方程式同解時，C_2C_3, C_3P_e 兩綫之斜度首先決定，而決定之法則由 N, S_5, T_5 三點及 $e/_1$, $f/_1$ 兩縱綫作 NE_2, E_2S_5. 故此作圖法首可分爲兩步：第一步決定 $e/_1$, $f/_1$, S_5, T_5；第二步決定 NE_2, E_2S_5 等綫.

由第十九節之分析，X_3,X_4,X_5 三未知量之值可由 N, $k/_1$, $k/_2$, $l/_1$, $l/_2$, $m/_1$, $m/_2$, P_a', P_c', P_e' 決定。故在實際作圖時亦必首先決定 $k/_1$, $k/_2$, $l/_1$, $l/_2$, $m/_1$, $m/_2$ 諸縱綫及 P_a', P_c', P_e' 等點。

若由代數立場論之，此兩例共通之點即在消去X_1, X_2兩未知量。第十八節已由作圖方法消去此兩未知量；由第十九節之分析可知五未知量方程式中 X_1, X_2兩未知量可用同樣作圖法消去。又由此兩例可見每次消去兩未知量之法甚為普通，可適用於任何數未知量之方程式。故若善運用此法，凡係數及常數中不含平方根以上之無理數及虛數之一次聯立方程式，苟可以代數法解者，均可以此圖解法解之。

(3)　　斜度及力量圖表之第二解法

第二十一節　此法中二未知量方程式之作圖與前法相同，故首論三未知量方程式之作法。(見第九節)

設 Fig.22 中N，$a/_1, a/_2, P_a, b/_1, b/_2, P_b, c/_1, c/_2, P_c$ 表三未知量之方程式。經 N 作縱線 $n/_1$。作斜線交$a/_1, b/_1, c/_1, n/_1$ 于 a_1, b_1, c_1, n_1 四點；經此四點作四橫線 H_a, H_b, H_c, H_n。設 H_a交$a/_2$ 于 a_2，H_b 交 $b/_2$ 于 b_2，H_c 交 $c/_2$ 于 c_2；作 a_2b_2，a_2c_2 交 H_n 于 d_1, e_1。經d_1, e_1作縱線 $d/_1, e/_1$。自 P_a, P_b, P_c 作三橫線交 $a/_2, b/_2, c/_2$ 于A，B，C三點，作AB，AC兩直線；設 $d/_1$ 交AB于D點，$e/_1$交AC于E點。作 P_aP_b, P_aP_c 兩直線；自D點作橫線交 P_aP_b 于 P_d，自E點作橫線交 P_aP_c 于P_e，設 DE交 $n/_1$ 于N_1；自N_1 作橫線交 P_dP_e 于K點。作直線NK。自P_d作平行于NK之直線交$d/_1$于D_1；作ND_1。自 P_a 作平行于NK之直線交$a/_2$于A_2；自 A_2作平行於 ND_1 之直線交$a/_1$于 A_1。作 NA_1。則由NA_1, A_1A_2, A_2P_a三直線之斜度即可得滿足該三式之X_1, X_2, X_3之值。

證：自P_b, P_c作平行於A_2P_a之直線交$b/_2, c/_2$于B_2, C_2；自此兩點作平行于A_1A_2之直線交$b/_1, c/_1$于B_1, C_1兩點，則此處所須

試明者為A_1, B_1, C_1, N 四點是否同在一直綫之上。

作直綫連接A_2與B_2，則可証明此綫必經過D_1。設直綫A_1N交$b/_1$于X，交B_2B_1于Y則

$$\frac{A_1N}{NX}=\frac{a_1n_1}{n_1b_1}=\frac{a_2d_1}{d_1b_2}=\frac{A_2D_1}{D_1B_2}=\frac{A_1N}{NY}$$

故X與Y同在一點，即B_1在A_1N直綫之上。同樣可証明C_1亦在A_1N之上。

第二十二節 四未知量之方程式（見第九節）

茲以此為例說明消滅未知量之法

設Fig23 中 $N_1, a/_1, a/_2, a/_3, b/_1, b/_2, b/_3, c/_1, c/_2, c/_3, d/_1$，$d/_2, d/_3$，$P_a, P_b, P_c, P_d$表該四式；並設所須要之折綫$NA_1A_2A_3P_a$，$NB_1B_2B_3P_b$等已作成如圖中所示。自$B_2$作三直綫經過$A_2, C_2$，$D_2$三點。自N作平行于$A_1A_2$之直綫交此三綫于$F_1, G_1, H_1$ 三點。自F_1作平行於A_2A_3之直綫交A_3B_3于F_2；自F_2作平行A_3P_a；之直綫交P_bP_a于P_a'。同樣作G_2，P_c'，H_2，P_d'，等點。因

$$\frac{B_2A_2}{B_2F_1}=\frac{B_3A_3}{B_3F_2}=\frac{P_bP_a}{P_aP_a'}=\frac{B_1A_1}{B_1N}$$

故依定理A，F_1，F_2 各在位置一定之縱綫上，而 P_a' 之位置亦為一定。同樣 G_1，G_2，H_1，H_2 各在位置一定之四縱綫上；P_c' P_d' 之位置，均為一定。設經過 F_1, F_2, G_1, G_2, H_1, H_2之縱綫為 $f/_1$, $f/_2$, $g/_1$, $g/_2$, $h/_1$, $h/_2$，則由圖形上關係，NF_1, F_1F_2, F_2P_a' 之斜度可由此六縱綫及N, P_a', P_c', P_d'等四點決定。但NF_1, F_1F_2, F_2P_a' 各平行於 A_1A_2, A_2A_3, A_3P_a；故 X_2，X_3, X_4之值可由 N, P_a' P_c', P_d', $f/_1$, $f/_2$, $g/_1$, $g/_2$, $h/_1$, $h/_2$,

決定。

由以上之分析可見四未知量之方程式可消去其一未知量而化為三未知量者。至消滅之法則以定理A為根據。故運用此定理任何數未知量之方程式均可逐漸消減至僅二三未知量者，而依第二十一節將其各根作出。

第二十三節　此兩法中各未知量之值既直接或間接以直綫之斜度表之，則未知量之能否求得，當視各斜度能否決定；斜度之能否決定，當視此斜度之直綫能否作出。在此兩法中各直綫均以兩點定之。設決定一直綫之兩點同在一點，則直綫之斜度為零除零。$0 \div 0$可為任何數。遇此種情形，式中之未知量可為任何數而不能決定。設決定一直綫之兩點同在一縱綫之上，則其斜度為無窮大。無窮大在算學中為不可測度之數。遇此種情形，式中未知量之關係必互相矛盾而無意義。

如Fig,20中N與K（或Fig,22中N與K）同在一點，則X_4之值可為任何數，因此其他各未知量之值亦可為任何數。此乃由于該四式中至少必有一式係由其他數式合並而成。故實際獨立方程式之數少于未知量之數；則條件不足，故不能決定。

又如N與K同在一縱綫之上，則X_4之值為無窮大；因此其他各未知量之值亦必為無窮大。此乃由于該四式中至少必有兩未知量間之相對關係始終未變；故此兩未知量可以一未知量代之。因此實際未知量之數少于方程式之數，即決定未知量之條件太多。條件太多則難同時滿足；故不得不以兩可辦法應付。在算學中無窮大為大無止境之不定數。無窮大減無窮大可為任何數。故凡不能同時滿足之聯立方程式，惟有以無窮大為各未知量之值始能適合。

(4) 距離圖表之第一解法

第二十四節　在此解法中將假有一橫綫H_0，縱綫V_0，其相交之

爲O；由O向上之方向爲負，向下之方向爲正。各式中之常數均以由O點起，V_o 上距離表之；各未知量之值則以 H_o 上距離表之。此法中通用之記號爲：由 V_o 至縱綫 V_n 之距爲 X_n 之值，由 V_n 至 V_{n-1} 之距爲 X_{n-1} 之值；由 V_2 至 H_o 上R點之距爲 X_1 之值。又在此法中每未知量之係數旣以直綫之斜度表之，則每一直綫必須標明屬于某未知量，某方程式及方程式之組數。此綫及其號數常以字母 L 及其右所記之數字記之；如第三組方程式內，第五方程式中 X_4 之係數即爲 L4·5·3之斜度。惟各組中之方程式設由第一組中某式求得，則其號數常恢爲某數。

各未知量之值旣由 $V_2, V_3, \cdots\cdots, V_n$ 等諸縱綫決定，故作圖之目的即在決定 $V_2, V_3, \cdots\cdots$，V_n 等諸縱線及R點之位置。

第二十五節　二未知量之方程式（見第九節

設 Fig.24 圖中 OP_1, OP_2 表 K_a，K_b；又設 V_2 亦已作成交 L2·1·1，L2·2·1 于 A_2，B_2 兩點。因由 V_o 至 V_2 之距爲滿足上兩式之 X_2 之值，故由 A_2，B_2 所作之L1·1·1，L1·2·1必同交 H_o 于 R_1 點。設L2·2·1交 H_o 于 R_2，則由定理C，A_2R_2 之斜度爲一定；故作圖之始即須決定此綫（即L2·1·2）之斜度。其作法如下：作 V_o，H_o 兩綫（見Fig.25），由 H_o 上任一點 R_1 作兩綫平行于 L1·1·1，L1·2·1交 V_o 于 P_a，P_b 兩點。由 P_b 作一線平行于L2·2·1交 H_o 于 R_2，則 P_aR_2 即平行于L2·1·2。

旣得L2·1·2，則于另一圖中（見Fig.26）作橫線 H_o 。縱線 V_o。于 V_o 上取 P_1，P_2 兩點使 OP_1，OP_2，表 K_a，K_b。自 P_1，P_2 以 a_2，b_2 爲斜度作L2·1·1，L2·2·1。設L2·2·1交 H_o 于 R_2，自 R_2

作一線平行于$L_{2\cdot1\cdot2}$交 $L_{2\cdot1\cdot1}$ 于A_2。經 A_2 作縱線V_2；由A_2以A_1爲斜度作 $L_{1\cdot1\cdot1}$交H_c于R_1。則由V_0至 V_2 ，由 V_2 至R_1之距離即爲滿足該兩式之X_2，X_1之值(証法從略)

第二十六節　三未知量之方程式(見第九節)

作圖．　作橫線H_o，縱綫 V_o (見Fig·27) 。自 H_o 上任一點R_1以 a_1,b_1,c_1 爲斜度作$L_{1\cdot1\cdot1}$,$L_{1\cdot2\cdot1}$,$L_{1\cdot3\cdot1}$ 三線交V_o 于P_a,P_b,P_c三點；自P_a以A_2,A_3爲斜度作$L_{2\cdot1\cdot1}$,$L_{3\cdot1\cdot1}$兩線；同樣自P_b作$L_{2\cdot2\cdot1}$, $L_{3\cdot2\cdot1}$，自P_c作$L_{2\cdot3\cdot1}$, $L_{3\cdot3\cdot1}$。設$L_{2\cdot2\cdot1}$交$L_{2\cdot3\cdot1}$于d_2,$L_{3\cdot2\cdot1}$交$L_{3\cdot3\cdot1}$于d_3,$L_{2\cdot1\cdot1}$交H_o于R_2,$L_{3\cdot1\cdot1}$交H_o 于R_3。設經過R_2及d_2之直綫交V_o于P_d。作R_2P_c, R_3P_d, d_3P_d 三直線。

于另一圖中(見Fig·28)作橫線 H_o, 縱綫V_o, 相交于O點。于V_o上取 P_1，P_2，P_3三點使OP_1,OP_2,OP_3表K_a, K_b, K_c 。經此三點作$L_{3\cdot1\cdot1}$,$L_{3\cdot2\cdot1}$,$L_{3\cdot3\cdot1}$。設$L_{3\cdot2\cdot1}$交$L_{3\cdot3\cdot1}$于D_3',$L_{3\cdot1\cdot1}$交H_o于R_3。經D_3' 作一線平行于 Fig.27 中之d_3P_d；自R_3作一線平行於 Fig.27 中之R_3P_d。設此兩綫相交于D_3；經 D_3 作縱線V_3交$L_{3\cdot1\cdot1}$,$L_{3\cdot2\cdot1}$,$L_{3\cdot3\cdot1}$于A_3,B_3,C_3三點。自C_3作$L_{2\cdot3\cdot1}$；自 A_3 作$L_{2\cdot1\cdot1}$交H_o 交R_2。自 R_2 作一綫平行于Fig.27中之R_2P_c 交$L_{2\cdot3\cdot1}$于C_2,經C_2作縱綫V_2；自C_2作$L_{1\cdot3\cdot1}$交 H_o于R_1 。則由V_o至V_3, 由 V_3 至 V_2, 由 V_2 至 R_1 三距離即爲滿足該三式之X_3, X_2, X_1之值。

証．自B_3 作$L_{2\cdot2\cdot1}$。設 V_2 交$L_{2\cdot1\cdot1}$, $L_{2\cdot2\cdot1}$ 于 A_2, B_2兩點，自 A_2 作$L_{1\cdot1\cdot1}$,自 B_2 作$L_{1\cdot2\cdot1}$ ；則此處所須証明者即爲

L1·2·1，L1·1·1兩線是否經過 R_1 點。

作直線連接 R_2 與 D_3，R_2 與 B_2；則依定理C，R_2D_3必平行于 Fig.27 中之 R_2d_2。設R_2D_3交L2·2·1，L2·3·1 于 D'，D'' 兩點，則

$$\frac{D_3D'}{d_2P_d}=\frac{D_3B_3}{P_dP_b},\quad \frac{D_3D''}{d_2P_d}=\frac{D_3C_3}{P_dP_c}$$

但 $$\frac{D_3B_3}{P_dP_b}=\frac{D_3C_3}{P_dP_c}$$

故 $$D_3D' = D_3D''$$

即 R_2P_3，L2·2·1，L2·3·1 同交於一點 D_2'。因 Fig.28 中 $R_2D_2'C_2$，$D'_2C_2B_2$ 兩三角形與Fig.27 中 $R_2d_2P_c$ 及 $d_2P_cP_b$ 兩三角形相似，故可證明 Fig.28中三角形 $R_2D_2'B_2$ 與Fig.27中三角形 $R_2d_2P_b$ 相似。故 R_2B_2 平行於R_2P_b。因三角形 $R_2B_2C_2$，$R_2P_bP_c$ 彼此相似，故可證明 Fig.23 中H_o.L1·3·1，L1·2·1必同交於一點 R_1，同樣可證明L1·1·1 亦經過R_1。

第二十七節　四未知量之方程式（見第九節）。

此例之完全作法，將不詳論；僅述其如何由四未知量之方程式減而為三未知量者；推而至于任何數未知量方程式之消減未知量之法。

設滿足該四式之X_1，X_2，X_3，X_4 之值已求得為 K_1，K_2，K_3，K_4。作橫線H_o，縱線V_o（見Fig.29）相交於O點。作縱線 V_4，V_3，V_2並於H_o上取一點 R_1 使由V_o至 V_4，由V_4至 V_3，由V_3至V_2，由 V_2 至 R_1 之距為 K_4，K_3，K_2，K_1。於 V_o上取P_1，P_2，P_3，P_4四點使 OP_1，OP_2，OP_3，OP_4 表 K_a，K_b，K_c，K_d。自 P_1 以 a_4 為斜度作 L4·1·1 交 V_4 於 A_4；自 A_4 以a_3 為斜度作L3·1·1

交 V_3 於 A_3；自A_3以a_2為斜度作L2·1·1 交V_2於A_2；自A_2 以a_1 為斜度作L1·1·1則L1·1·1必經過R_1。同樣作L4·2·1, L4·3·1 L4·4·1,……L1·2·1, L1·3·1, L1·4·1 等十二綫，則 L1·2·1, L1·3·1, L1·4·1亦必各經過R_1點。

。設L2·2·1交H_o於R_2： L2·3·1 交L2·1·1, L2·4·1，於 E_2', F_2'兩點；則依定理B, R_2E_2', R_2F_2' 兩綫之斜度均為一定。設此兩綫交V_3於E_3, F_3兩點；L3·3·1交L3·1·1, L3.4.1於E_3', F_3'兩點，則依定理C, E_3E_3' F_3F_3'兩綫之斜度均為一定，設此兩綫交V_4於E_4, F_4兩點，L4·3·1交L4·1·1, L4·4·1于E_4', F_4'則依定理C, E_4E_4', F_4F_4'兩綫之斜度均為一定。設此兩綫交V_o于P_5, P_6兩點，則此兩點之位置亦為一定。

設由 V_3至R_2之距為 Y_1，E_4E_4'，E_3E_3'，R_2E_2', F_4F_4', F_3F_3', R_2F_2' 之斜度為e_4，e_3，e_2，f_4，f_3，f_2。OP_5, OP_6之長為K_e, K_f, 則由圖形上關係

$$b_4X_4+b_3X_3+b_2Y_1=K_b$$

$$e_4X_4+e_3X_3+e_2Y_1=K_e$$

$$f_4X_4+f_3X_3+f_2Y_1=K_f\text{。}$$

此三式中Y_1為新生之未知量，今且不論；至X_3, X_4兩未知量則與原有式中相同。故X_3, X_4之值，除由原有四式外，可由此三式求得。此三式中，第一式內係數及常數均為已知；惟其他兩式中係數與常數猶待決定。但K_e為OP_5之長，P_5乃 E_4E_4'與V_o之交點；E_4'之位置既為一定，故苟E_4E_4'之斜度能決定，則P_5, 因而K_e亦可隨之決定。故此時之問題僅為如何決定 E_4E_4', E_3E_3', R_2E_2', F_4F_4'

F_3F_3'，R_2F_2' 之斜度。其作法如下：

作橫綫 H_o，縱綫 V_o（見 Fig. 30）相交於 O 點。於 V_o 上取 P_a，P_b，P_c，P_d 四點；使 $OP_a : OP_b : OP_c : OP_d = a_1 : b_1 : c_1 : d_1$。經 P_a 作 $L2\cdot1\cdot1$，$L3\cdot1\cdot1$，$L4\cdot1\cdot1$ 三綫；同樣經 P_b，P_c，P_d 作 $L2\cdot2\cdot1$，$L3\cdot2\cdot1$，$L4\cdot2\cdot1$，$L2\cdot3\cdot1$，$L3\cdot3\cdot1$，$L4\cdot3\cdot1$，$L2\cdot4\cdot1$，$L3\cdot4\cdot1$，$L4\cdot4\cdot1$。設 $L2\cdot2\cdot1$ 交 H_o 於 R_2；$L2\cdot3\cdot1$ 交 $L2\cdot1\cdot1$，$L2\cdot4\cdot1$ 於 e_2，f_2 兩點；$L3\cdot3\cdot1$ 交 $L3\cdot1\cdot1$，$L3\cdot4\cdot1$，於 e_3，f_3 兩點；$L4\cdot3\cdot1$ 交 $L4\cdot1\cdot1$，$L4\cdot4\cdot1$ 於 e_4，f_4 兩點。設 R_2e_2，R_2f_2 交 V_o 於 P_e，P_f 兩點；則由定理 B 及 C，R_2e_2，R_2f_2，e_3P_e，e_4P_e，f_3P_f，f_4P_f 各平行於 Fig. 29 中之 R_2E_2'，R_2F_2'，E_3E_3'，E_4E_4'，F_3F_3'，F_4F_4'。R_2E_2'，R_2F_2'，E_3E_3'，E_4E_4'，F_3F_3'，F_4F_4' 等綫之斜度既能決定，則 X_3，X_4 兩未知量如以代數方法，可由前二式算出，如以圖解法則可依第二十六節作出。換言之即此兩未知量可以作圖手續由四未知量方程式之根化為二未知量方程式之根。

此為由四未知量減為三未知量之法。苟欲再消去某一未知量，必須以 b_4，b_3，b_2，e_4，e_3，e_2，f_4，f_3，f_2 為斜度作一圖如 Fig. 27 者。但實際並不須此；蓋 Fig. 30 中 R_2P_e，R_2P_f，e_3P_e，e_4P_e，f_3P_f，f_4P_f，$L2\cdot2\cdot1$，$L3\cdot2\cdot1$，$L4\cdot2\cdot1$ 之位置已具有消減未知量時必要之條件：即以 b_2，e_2，f_2 為斜度自 R_2 點所作之三直綫經過 P_b，P_e，P_f。故苟欲再消去某一未知量可逕依前法由 Fig. 30 作出。由此可見依此解法各組方程式之係數可於同一圖中繼續作出而不須中途另作新圖或其他各補助綫。

(5) 距離圖表之第二解法

第二十八節 二未知量之方程式 (見第九節)

作圖。作橫綫 H_o，縱綫 V_o (見Fig.31)，相交于 O 點。自 H_o 上任一點 R_1 作 L1·1·1, L1·2·1 交 V_o 於 P_a，P_b 兩點。經 P_a，P_b 作 L2·1·1, L2·2·1 相交于 T 點。于另一圖 (見Fig.32) 中作橫綫 H_o，縱綫 V_o，相交於 O 點。于 V_o 上取 P_1，P_2 兩點使 OP_1，OP_2 表 K_a，K_b。經 P_1 作 L2·1·1，經 P_2 作 L2·2·1 交 L2·1·1 于 F 點。自 F 作一綫平行於 Fig.31 中 TR_1 交 H_o 於 G 點。自 G 點作 L1·1·1 交 L2·1·1 于 A_2；經 A_2 作縱綫 V_2。則由 V_o 至 V_2，由 V_2 至 G 點之距離即為滿足該兩式之 X_2，X_1 之值。

証。設 V_2 交 L2·2·1 于 B_2；自 B_2 作 L1·2·1，則此處所須証明者即為 L1·2·1 是否經過 G 點。

設 L1·2·1 交 FG 于 X 點；則 Fig.31 中 TP_bP_a, TP_aR_1, TP_bR_1 三三角形各與 Fig.32 中 FB_2A_2, FA_2G, FB_2X 相似。故

$$\frac{TP_a}{FA_2}=\frac{TR_1}{FG}=\frac{TP_b}{FB_2}=\frac{TR_1}{FX}$$

故 $FX=FG$

即 X 與 G 同在一點；即 L1·2·1, L1·1·1 與 H_o 同交於一點 G。

第二十九節 三未知量之方程式 (見第九節)

作圖。作橫綫 H_o，縱綫 V_o，相交於 O 點。自 H_o 上任一點 R_1 作 L1·1·1, L1·2·1, L1·3·1 交 V_o 於 P_a，P_b，P_c 三

點（見 Fig.33）。自 P_a 作 L2·1·1, L3·1·1 兩綫；同樣自 P_b 作 L2·2·1, L3·2·1，，自 P_c 作 L2·3·1, L3·3·1 。設 L2·3·1 交 L2·2·1 于 d_2；L3·3·1 交 L3·2·1 于 d_3。經此兩點作縱綫 V_2，V_3。設 V_2 交 L2·1·1 于 e_2，V_3 交 L3·1·1 于 e_3。作 $e_2 e_3$，$d_2 d_3$，$R_1 d_2$。設 $d_2 d_3$ 交 $e_2 e_3$ 於 T 點。作直綫 TR_1。

于另一圖中（見Fig.34）作橫綫 H_o，縱綫 V_o 相交于 O 點。于 V_o 上取 P_1，P_2，P_3 三點使 OP_1, OP_2, OP_3 表 K_a，K_b，K_c。自 P_1 作 L3·1·1，自 P_2 作 L3·2·1 自 P_3 作 L3·3·1。設 L3·2·1 交 L3·3·1 于 D_3；經 D_3 作縱綫 $V_{3\cdot2}$ 交 L3·1·1 于 E_3。自 D_3 作一綫平行于 Fig.33 中 Td_3；自 E_3 作一綫平行于 Fig.33 中 Te_3。設此兩綫相交于 F 點。自 F 點作一綫平行於 Fig.33 中 TR_1 交 H_o 於 R 點。自 R 作一綫平行於 Fig.33 中 $R_1 d_2$ 交 $D_3 F$ 于 D_2；自 D_2 作 L2·3·1 交 L3·3·1 于 C_3。自 R 作 L1·3·1 交 L2·3·1 于 C_2。經 C_3，C_2 作縱綫 V_3，V_2，則由 V_o 至 V_3，至 V_3 至 V_2，由 V_2 至 R 點之距離即為滿足該三式之 X_3，X_2，X_1 之值。

證。設 V_3 交 L3·2·1, L3·1·1 于 B_3, A_3；自此兩點作 L2·2·1, L2·1·1 交 V_2 于 B_2, A_2；自此兩點作 L1·2·1, L1·1·1, 則此處所須証明者為 L1·1·1, L1·2·1 兩綫是否均經過 R 點

設 L2·2·1 交 $D_3 F$ 于 B 點，則三角形 $D_3 B_3 B_1$, $D_3 C_3 D_2$, $B_3 D_3 C_3$ 各與 Fig.33 中 $d_3 P_b d_2$, $d_3 P_c d_2$, $P_b d_3 P_c$ 相似。故

$$\frac{D_3B}{d_3d_2}=\frac{D_3B_3}{P_bd_3}=\frac{D_3C_3}{d_3P_c}=\frac{D_3D_2}{d_3\ d_2}$$

故 $D_3\ B = D_3\ D_2$

即 B 與 D_2 同在一點。

經 D_2 作縱綫 $V_{2\cdot 2}$ 交 E_3F，$L2\cdot1\cdot1$ 于 E'，E'' 兩點，則依定理 E，三角形 E'' $A_3\ E_3$ 與 Fig.33 中 $e_2\ P_a\ e_3$ 相似，故 E_3E'' 平行于 e_2 T，因而平行于 E_3 F。故 E'，E'' 同在一點。即 $V_{2\cdot 2}$；E_3F，$L2\cdot1\cdot1$ 同交于一點 E_2。

設 $L1\cdot2\cdot1$ 交 D_2R 于 K 點，則三角形 $D_2\ B_2\ K$，$D_2\ C_2\ R$，$C_2\ D_2\ B_2$ 各與 Fig.33 中 $d_2\ P_b\ R_1$，$d_2\ P_c\ R_1$，$P_c\ d_2\ P_b$ 相似。故

$$\frac{D_2K}{d_2R_1}=\frac{D_2B_2}{P_bd_2}=\frac{D_2C_2}{d_2Pc}=\frac{D_2R}{d_2R_1}$$

故 $D_2K = D_2R$

即 $L1\cdot2\cdot1$ 經過 R 點。設自 R 点作一綫平行于 Fig.33 中 e_2R_1，則可証明此綫經過 $V_{2\cdot 2}$ 上 E_2。由此可証明 $L1\cdot1\cdot1$ 亦經過 R 點。

第三十節　四未知量之方程式（見第八節）。

今以該四式說明此法中消減未知量之法。設該四式中四未知量之值已求出為 K_1，K_2，K_3，K_4。作橫綫 H_o，縱綫 V_o（見 Fig 35）相交于O點。作縱綫 V_4，V_3，V_2 並于 H_o 上取一點 R_1 使由 V_o 至 V_4，V_4 至 V_3，V_3 至 V_2，V_2 至 R_1 之距離等於 K_4，K_3，K_2，K_1。于 V_o 上取 P_1，P_2，P_3，P_4 四點使

OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 表 K_a, K_b, K_c, K_d。自此四點作 L4·1·1, L4·2·1, L4·3·1, L4·4·1 交 V_4 于 A_4, B_4, C_4, D_4 四點；再自此四點作 L3·1·1 L3·2·1, L3·3·1 L3·4·1 交 V_3 于 A_3, B_3, C_3, D_3 四點；再自此四點作 L2·1·1, L2·2·1 L2·3·1, L2·4·1 交 V_2 于 A_2, B_2, C_2, D_2 四點；再自此四點作 L1·1·1, L1·2·1、L1·3·1, L1·4·1，則此四綫必同交于 R_1。設 L4·1·1 交 L4·2·1 于 P_5, L3·1·1 交 L3·2·1 于 E_3, L2·1·1 交 L2·2·1 于 E_2；則依定理 D, P_5E_3, E_3E_2, E_2R_1 三綫之斜度均爲一定。經 P_5 作縱綫 $V_{4\cdot2}$ 交 L4·3·1, L4·4·1 H_o 于 P_6, P_7, O_4；經 E_3 作縱綫 $V_{3\cdot2}$ 交 L3·3·1, L3·4·1 于 F_3, G_3；經 E_2 作縱綫 $V_{2\cdot2}$ 交 L2·3·1, L2·4·1 于 F_2 G_2；則依定理 C 及 E, P_6F_3, F_3F_2；F_2R_1, P_7G_3, G_3G_2, G_2R_1，等綫之斜度均爲一定。設由 $V_{4\cdot2}$ 至 $V_{3\cdot2}$, $V_{3\cdot2}$ 至 $V_{2\cdot2}$, $V_{2\cdot2}$ 至 R_1 之距離爲 Y_3, Y_2, Y_1；O_4P_5, O_4P_6, O_4P_7 之長爲 K_e, K_f, K_g；P_5E_3, E_3E_2, E_2R_1, P_6F_3, F_3F_2, F_2R_1, P_7G_3, G_3G_2, G_2R_1 之斜度爲 e_3, e_2, e_1, f_3, f_2, f_1, g_3, g_2, g_1；則依圖形上關係

$$e_1Y_1+e_2Y_2+e_3Y_3=K_e$$

$$f_1Y_1+f_2Y_2+f_3Y_3=K_f$$

$$g_1Y_1+g_2Y_2+g_3Y_3=K_g$$

故 Y_1, Y_2、Y_3 之值可由此三式求得。若此三未知量之值能求得則 $V_{4\cdot2}$, $V_{3\cdot2}$, $V_{2\cdot2}$ 及 R_1 均可作出，而 V_4, V_3, V_2 亦可隨之

作出，故該四式中 X_4，X_3，X_2，X_1 之值能否求得當視此三式中各係數及常數能否求得。K_e, K_f, K_g 爲 O_4P_5, O_4P_6, O_4P_7, 之長。但 P_5 之位置爲一定，故 K_e 不難决定。$V_{4\cdot 2}$ L4·3·1, L4·4·1 之位置均爲一定，故 K_f，K_g 均不難决定。故此時之問題僅爲如何决定此三式中之各係數。其作法如下：

作縱綫 V_0(見 Fig.36) 並于其上取任意四點 P_a, P_b, P_c, P_d。經 P_a 作 L4·1·1，L3·1·1，L2·1·1，L1·1·1 四綫；經 P_b、P_c、P_d 各作同樣四綫。設 L1·1·1 交 L1·2·1 于 e_1，L2·1·1 交 L2·2·1 于 e_2，L3·1·1 交 L3·2·1 于 e_3，L4·1·1 交 L4·2·1 于 e_4。經 e_1，e_2，e_3，e_4，作縱綫 V_1, V_2, V_3, V_4。設 V_1 交 L1·3·1，L1·4·1 于 f_1，g_1；V_2 交 L2·3·1，L2·4·1 于 f_2, g_2；V_3 交 L3·3·1，L3·4·1 于 f_3，g_3；V_4 交 L4·3·1，L4·4·1 于 f_4，g_4。則依定理 D, e_4e_3，e_3e_2，e_2e_1，各平行于 Fig.35 中 P_5E_3，E_3E_2，E_2R_1。又依定理 C 及 E、f_4f_3，f_3f_2，f_2f_1，g_4g_3，g_3g_2，g_2g_1 各平行于 Fig.34 中之 P_6F_3，F_3F_2，F_2R_1，P_7G_3，G_3G_2，G_2R_1。

Y_3，Y_2，Y_1，之係數既可作出，則其值不難依第二十九節由上三式作出，因而前四式中之 X_1、X_2，X_3，X_4，亦可立即作出。此爲由四未知量減爲三未知量之法。若欲再消去某一未知量，則可于 Fig. 36 中繼續作出。

(6) 詳論圖表之第三解法

第三十一節 此法中二未知量方程式之作圖與第二法相同，故首論三未知量之解法。(見第九節)

作圖：作橫綫 H_o，縱綫 V_o 相交于O点（見Fig.37）。自 H_o 上任一點 R 以 a_1，b_1，c_1 爲斜度作三綫交 V_o 于 P_a，P_b，P_c 三點。經 P_a 以 a_2，a_3 爲斜度作 L2·1·1，L3·1·1；同樣經 P_b 作 L2·2·1，L3·2·1，經 P_c 作 L2·3·1，L3·3·1。設 L2·1·1 交 L2·2·1，L2·3·1 于 d_2，e_2 兩點；L3·1·1 交 L3·2·1 L3·3·1 于 d_3，e_3 兩點，作直綫 Rd_2，Re_2，交 V_o 于 P_d，P_e 兩點。作直綫 d_3P_d，e_3P_e 相交于 f 點。作直綫 fR。

于另一圖中（見 Fig.38）作橫綫 H_o，縱綫 V_o 相交于O点。于 V_o 上取 P_1 P_2，P_3 三點使 OP_1，OP_2，OP_3 表 K_a，K_b，K_c。經 P_1 作 L3·1·1，經 P_2 作 L3·2·1，經 P_3 作 L3·3·1。設 L3·1·1 交 L3·2·1 L3·3·1，于 D_3'，E_3' 兩點。經 D_3' 作直綫平行于 d_3P_d，經 E_3' 作直綫平行于 e_3P_e；自此兩綫之交點 F 作平行于 fR 之直綫交 H_o 于 R_1。自 R_1 作平行于 RP_e 之直綫交 FE_3' 于 E_3。經 E_3 作縱綫 V_3 交 L3·3·1 于 C_3。自 C_3 作 L2·3·1 並自 R_1 作 L1·3·1。經此兩綫之交點 C_2 作縱綫 V_2。則由 V_o 至 V_3，V_3 至 V_2，V_2 至 R_1 之距離即爲滿足該三式之 X_3，X_2，X_1 之值。

證：設 V_3 交 L3·1·1，L3·2·1 于 A_3，B_3 兩點；自 A_3 作 L2·1·1，自 B_3 作 L2·2·1 交 V_2 于 A_2，B_2 兩點；再自 A_2 作 L1·1·1，自 B_2 作 L1·2·1；則此處所需證明者爲 L1·1·1，L1·2·1 是否經過 R_1。

設 V_3 交直線 FD_3' 于 D_3，自 D_3 作平行于 RP_d 之直

綫交 R_1E_3 于 X 點；則 Fig. 37 中四邊形 $fP_c RP_d$ 與 Fig.38 中四邊形 $FE_3 XD_3$ 彼此相似。故平行于 fR 之 FR_1，必經過X點。即 X 與 R_1 同在一點。

因 $E_3'E_3$，$E_3'C_3$，$E_3'A_3$ 各平行于 $e_3 P_c$，$e_3 P_e$，$e_3 P_a$ 故

$$\frac{P_cP_e}{P_eP_a} = \frac{C_3E_3}{E_3A_3}$$

又因 C_2C_3，R_1E_3，A_2A_3 各平行于 $e_2 P_c$，$e_2 P_e$，$e_2 P_a$，故前三綫必同交于一點 E'_2。設 R_1E_3 交 V_2 于 E_2，則

$$\frac{P_cP_e}{P_eP_a} = \frac{C_2E_2}{E_2A_2}$$

又因 L1·3·1，R_1E_2，L1·1·1 各平行于 RP_c，RP_e，RP_a，故前三綫必同交于一點；即經過 A_2 之 L1·1·1 亦經過 R_1。同樣可證明經過 B_2 之 L1·2·1 亦經過 R_1。

第三十二節　四未知量之方程式（見第九節）

茲用此例說明消減未知量之法。

設滿足該四式之 X_1，X_2，X_3，X_4，之值已求得為 l_1，l_2，l_3，l_4。作橫綫 H_o，縱綫 V_o 相交于O點（見 Fig.39）。作縱綫 V_4，V_3，V_2，並于 H_o 上取 R_o 點使由 V_o 至 V_4，V_4，至 V_3，V_3 至 V_2，V_2 至 R_o 之距離等于l_4，l_3，l_2，l_1。于 V_o 上取 P_1 P_2，P_3，P_4 四點，使OP_1，OP_2，OP_3，OP_4 表 K_a，K_b，K_c，K_d。自 P_1 以 a_4 為斜度作 L2·1·1 交 V_3 于A_3，自 A_4 以a_3 為斜度作 L3·1·1 交 V_3 于 A_3，自 A_3 以 a_2為斜度作 L2·1·1

交V_2于A_2，自A_2以a_1為斜度作L1·1·1則L1·1·1，必經過R_0。同樣作L4·2·1，L3·2·1，L2·2·1，L1·2·1，L4·3·1，L3·3·1，L2·3·1，L1·3·1，L4·4·1，L3·4·1，L2·4·1，L1·4·1，則L1·2·1 L1·3·1，L1·4·1必均經過R_0。

設L2·2·1，交L2·1·1，L2·3·1，L2·4·1于E_2'，F_2'，G_2'；L3·2·1交L3·1·1，L3·3·1 L3·4·1于E_3'，F_3'，G_3'；L4·2·1交L4·1·1，L4·3·1，L4·4·1于E_4'，F_4'，G_4'。作直綫R_0E_2'，R_0F_2'，R_0G_2'交V_3于E_3 F_3，G_3；作直綫$E_3E'_3$ F_3F_3'，$G_3G'_3$交V_4于E_4，F_4，G_4；作直綫E_4E_4'，F_4F_4'，G_4G_4'交V_0于P_5，P_6，P_7三點。則依定理D，R_0E_2'，R_0F_2'；$R_0G'_2$等三綫之斜度均為一定；依定理C，E_3E_3'，F_3F_3'，$G_3G'_3$，$E_4E'_4$，$F_4F'_4$，$G_4G'_4$等六綫之斜度均為一定。因E'_4、F'_4、G'_4三點之位置為一定，故P_5、P_6、P_7三點之位置亦為一定。

設R_0E_3，E_3E_4，E_4P_5之斜度為e_2，e_3，e_4，OP_5等于K_e；X_2'等于(X_1+X_2)，則依圖形上關係，

$$e_2X_2'+e_3X_3+e_4X_4=K_e$$

同樣得

$$f_2X_2'+f_3X_3+f_4X_4=K_f$$

$$g_2X_2'+g_3X_3+g_4X_4=K_g$$

此三式中X_2'係由X_1，X_2兩未知量合并而成，暫且不論。至X_3，X_4兩未知量則與原有式中相同。苟上三式中係數及常數均能求得

，則 X_3, X_4 之值，除由原有四式外可由此三式求得。K_e, K_f, K_g 之值决于 P_5, P_6, P_7 三點之位置，而此三點之位置則由 E_4E_4', F_4F_4', $G_4G'_4$ 三直綫决定。故此時之問題僅為如何决定 R_oE_3 E_3E_4, E_4P_5, R_oF_3, F_3F_4, F_4P_6, R_oG_3, G_3G_4, G_4G_7, 等綫之斜度。其法如下：

于另一圖中（見Fig.40）作横綫 H_o，縱綫 V_o 相交于O點。自 H_o 上任一點 R 作 L1·1·1、L1·2·1, L1·3·1, L1·4·1 交 V_o 于 P_a, P_b, P_c, P_d 四点。經 P_a 作 L2·1·1, L3·1·1 L4·1·1, 經 P_b 作 L2·2·1, L3·2·1, L4·2·1, 經 P_c 作 L2·3·1, L3·3·1, L4·3·1, 經 P_d 作 L2·4·1, L3·4·1, L4·4·1。設 L2·2·1 交 L2·1·1, L2·3·1 L2·4·1 于 e_2, f_2, g_2 三點；L3·2·1 交L3·1·1, L3·3·1, L3·4·1 于 e_3, f_3, g_3 三點；L4·2·1, 交 L4·1·1, L4·3·1, L4·4·1 于 e_4, f_4, g_4 三點。作直線 Re_2, Rf_2, Rg_2 交 V_o 于 P_e, P_f, P_g；則依定理 D 及 C, Re_2, Rf_2, Rg_2, e_3P_e, f_3P_f, g_3P_g, e_4P_e, f_4P_f, g_4P_g 各平行于 R_oE_3, R_oE_3, R_oG_3, E_3E_4, F_3F_4, G_3G_4, E_4P_5, F_4P_6, G_4P_7。

此為由四未知量減為三未知量之法，尚欲再消去某一未知量，則可于 Fig.40 中繼續作出而不須另作新圖。

第三十三節　由上數節可見距離圖表，雖有三種不同之解法，但各法原理仍為逐漸消減式中之未知量。惟消減之法，則各有不同。第一法中每次消去兩未知量，但同時亦產生一新未知量如第二十七節中之Y_1；故實際乃以一新未知量代替兩未知量。在第二解法中新方程式

中之未知量與原有式中之未知量各不相同，惟其數目則逐漸減少一個。故此法作圖原理乃以少數之新未知量代替原有之未知量；屏屏相代，其最後所得之值與原有之未知量已無直接關係。因此式中之未知量不能單獨先求出某一個；而必須至作圖終了時始各個同時作出。第三法中消滅未知量之法乃以兩未知量合併為一未知量。逐漸合併，新方程式中之未知量遂逐漸減少，至各未知量均合併成一未知量為止，故在此法中最初所得之數值乃各未知量之總和而非單獨某一個也。

此三法中各未知量之值既以縱綫間之距離表之，縱綫之位置又由兩綫之交点決定；故未知量之能否作出當視此兩相交直綫之位置如何。設此兩綫互為平行，則其交點當在無窮遠之外，故未知量之值必為無窮大。遇此種情形式中未知量之數必小于方程式之數。設此兩綫既相平行，又同經一點，則兩綫完全合併；其相交之点沿綫皆是，則未知量之值可為任何數。遇此種情形，則方程式之數必少于知量之數。（見第三十二節）

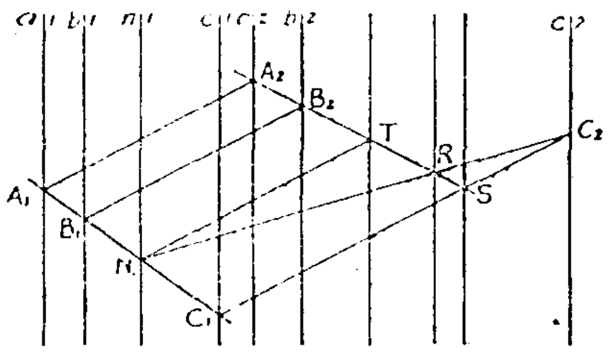


Fig. 11

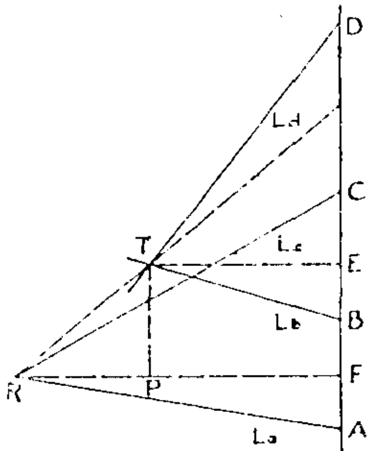


Fig. 12

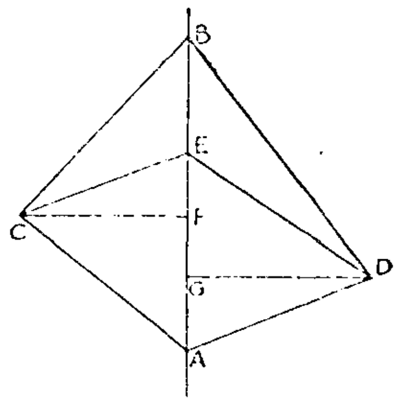


Fig. 13

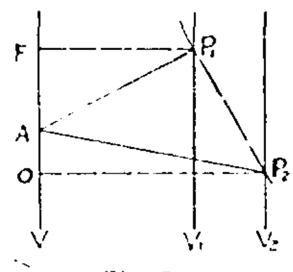


Fig. 15

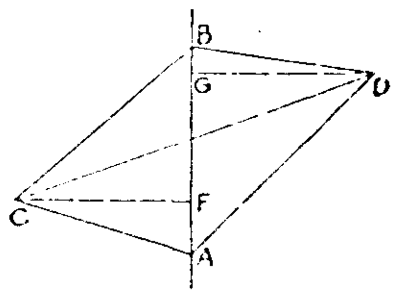


Fig. 14

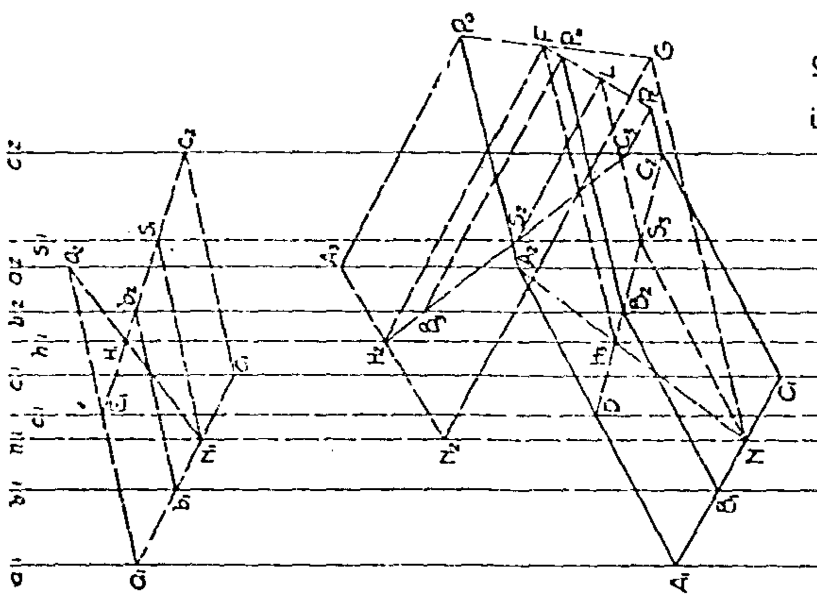


Fig.18

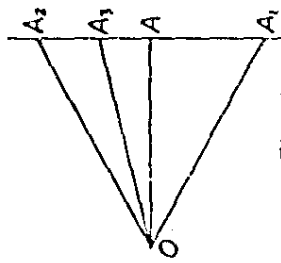


Fig.19

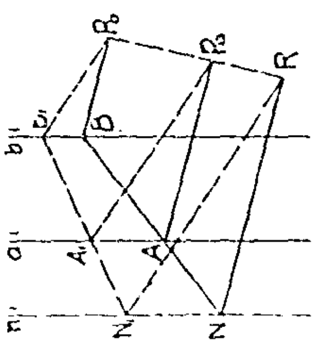


Fig.16

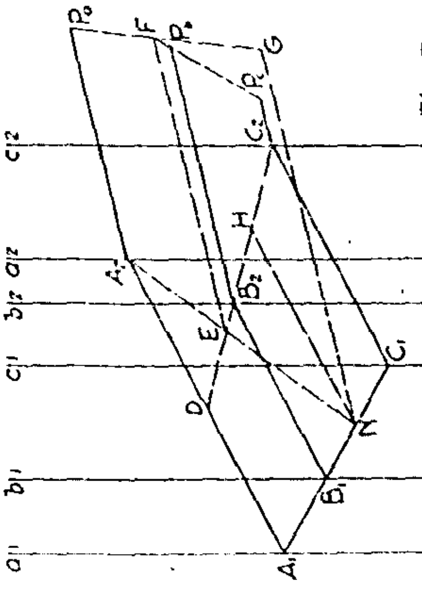


Fig.17

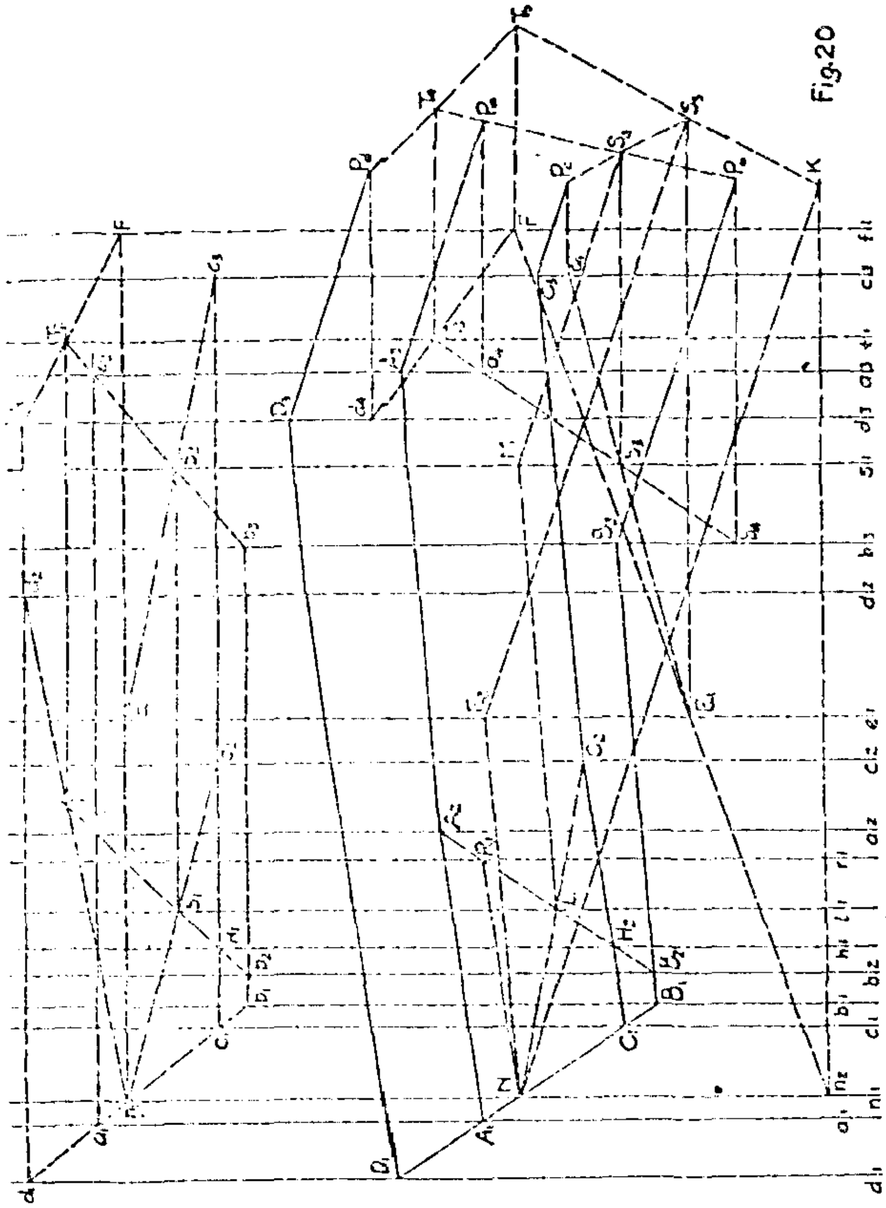


Fig.20

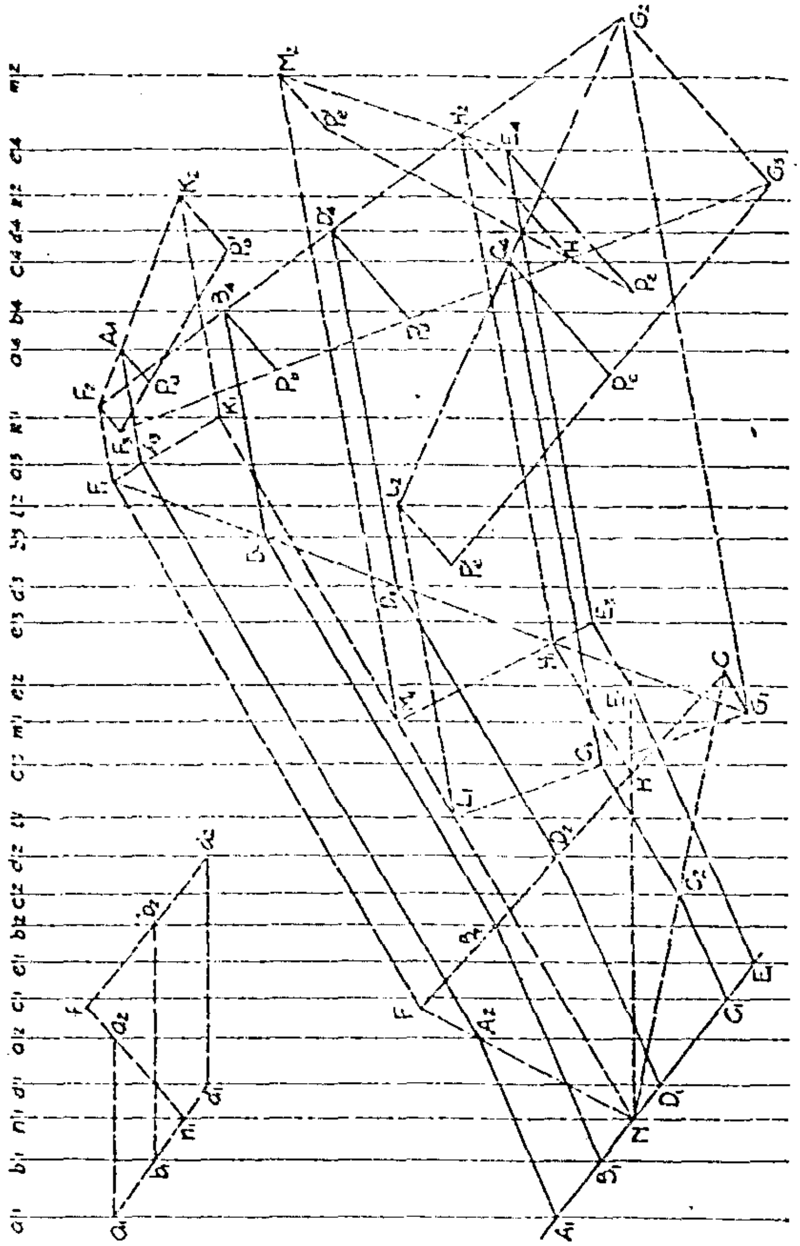


Fig.21

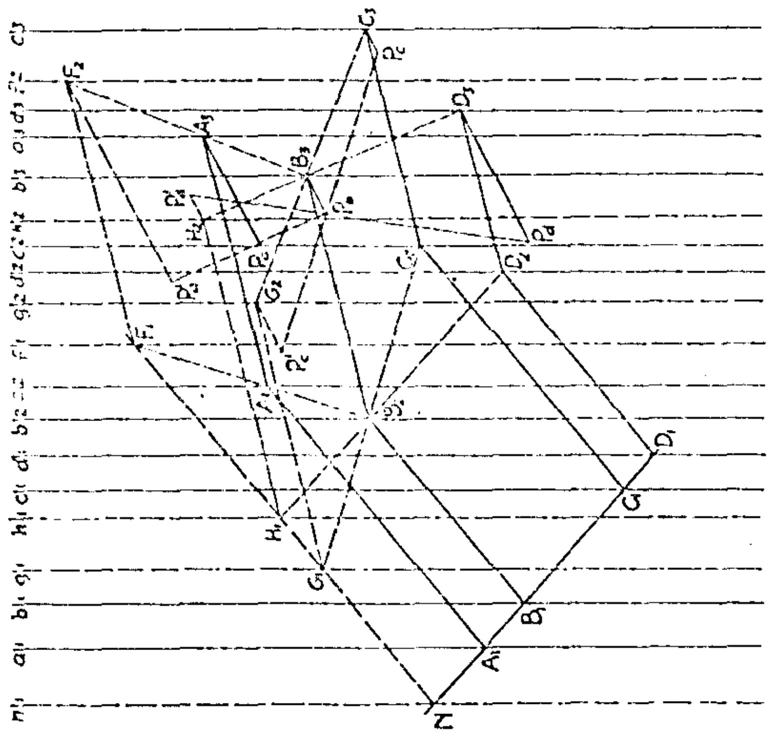


Fig.23

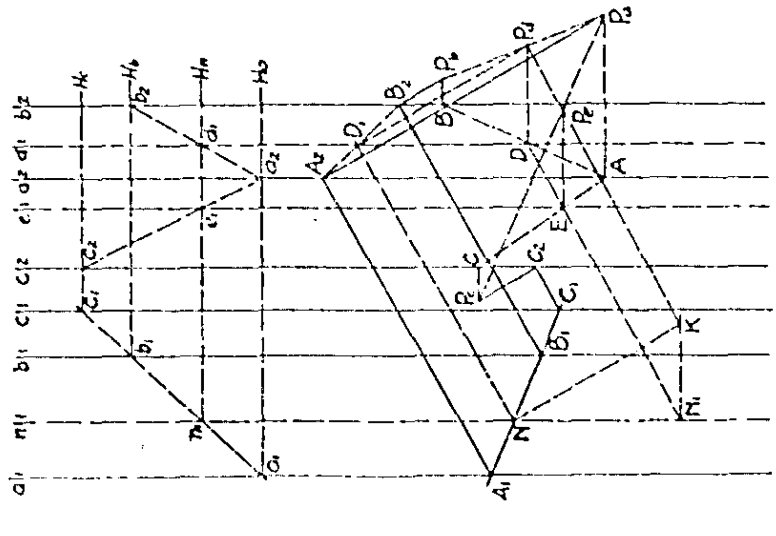


Fig.22

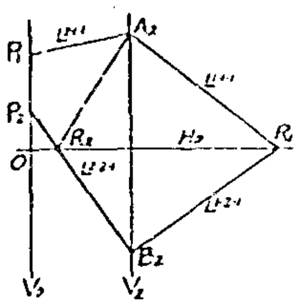


Fig.24

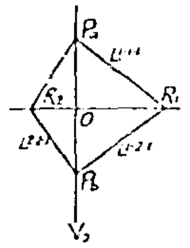


Fig.25

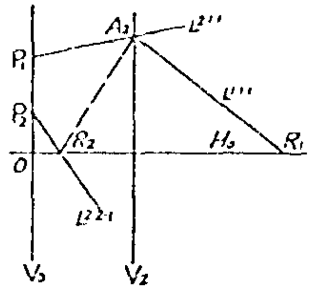


Fig.26

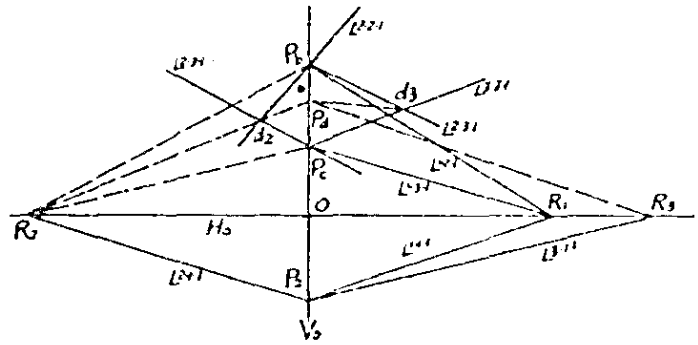


Fig.27

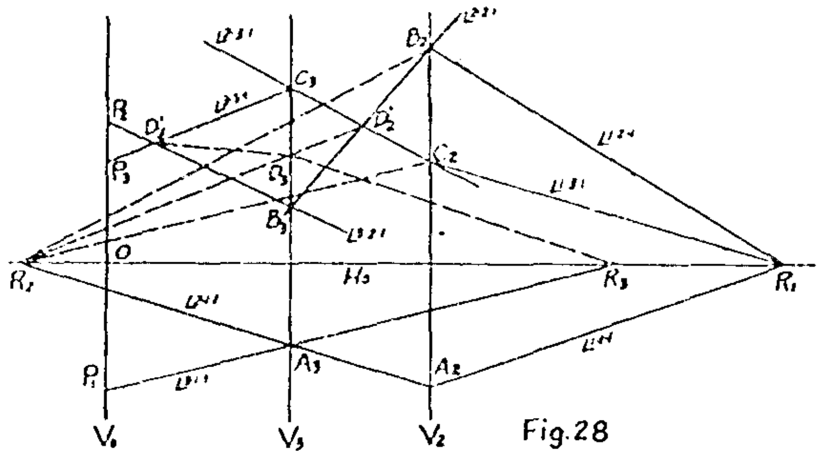


Fig.28

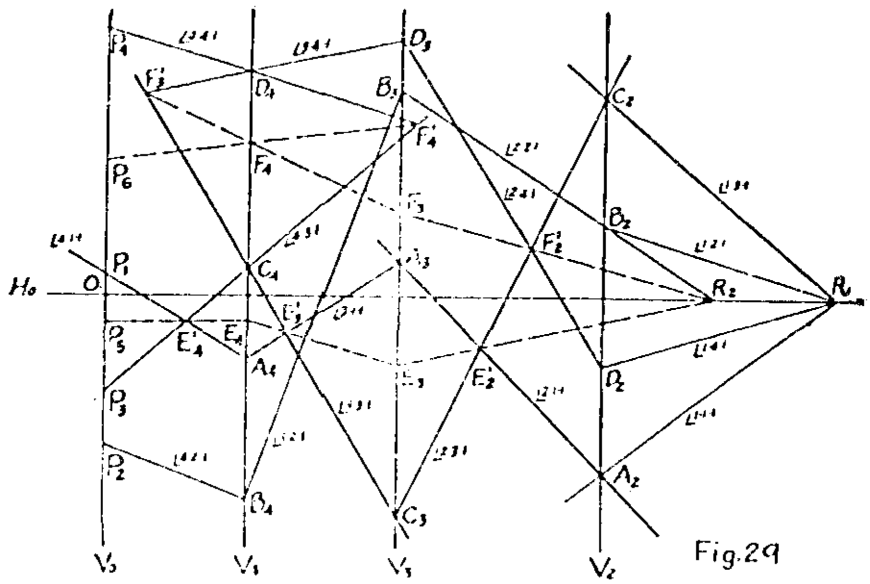

H₀
O
P₁
P₂
P₃
P₄
P₅
P₆
C₄
A₄
B₄
D₄
F₄
E₄
D₃
B₃
C₃
C₂
B₂
A₂
D₂
R₂
R₁
V₀
V₁
V₃
V₂

Fig.29

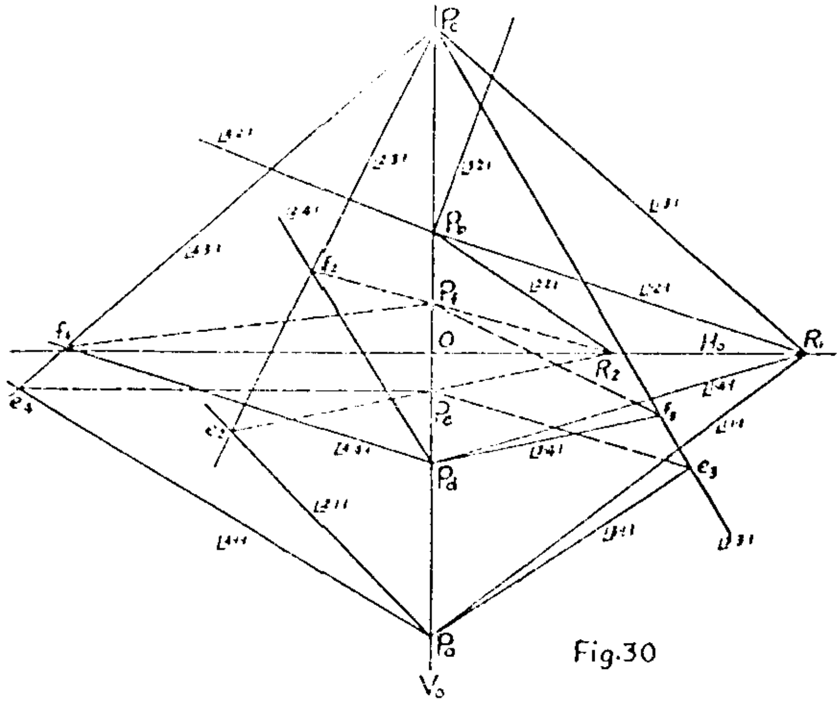

Pc
Pb
Pd
Pa
O
H₀
R₁
R₂
V₀

Fig.30

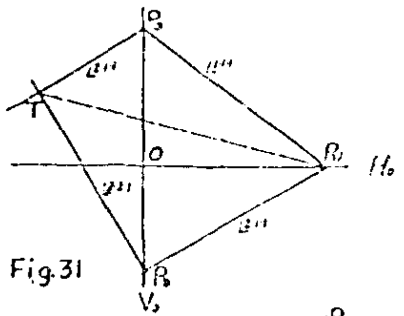


Fig.31

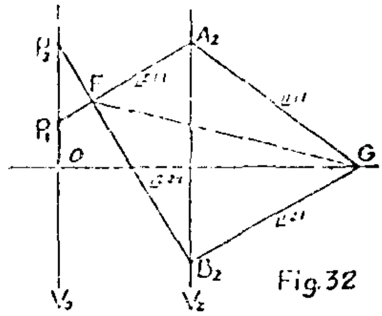


Fig.32

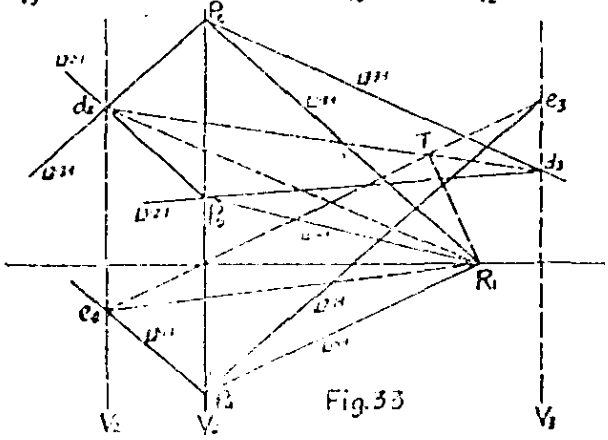


Fig.33

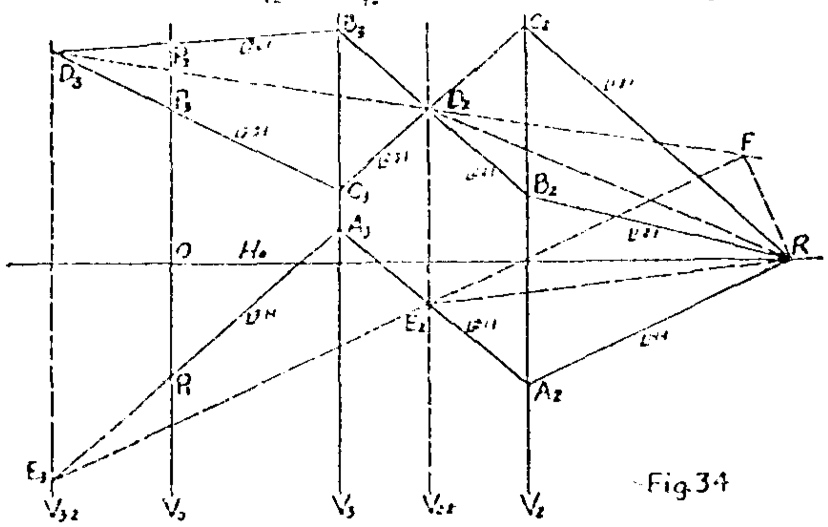


Fig.34

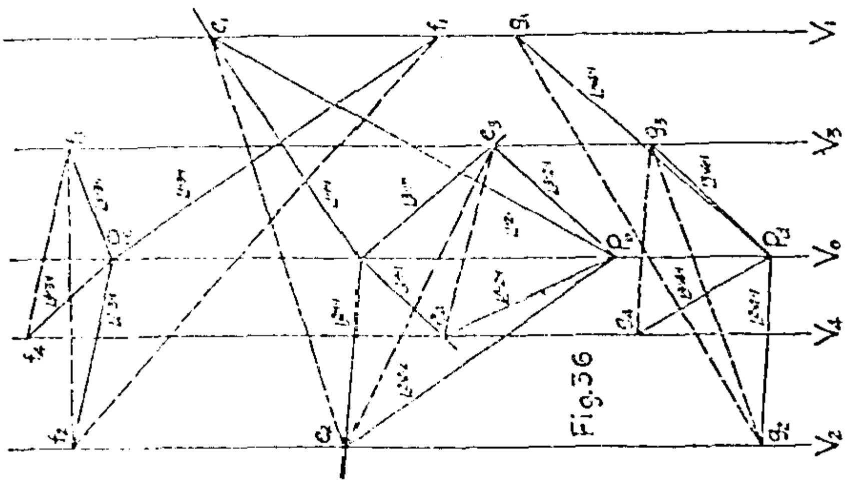


Fig.36

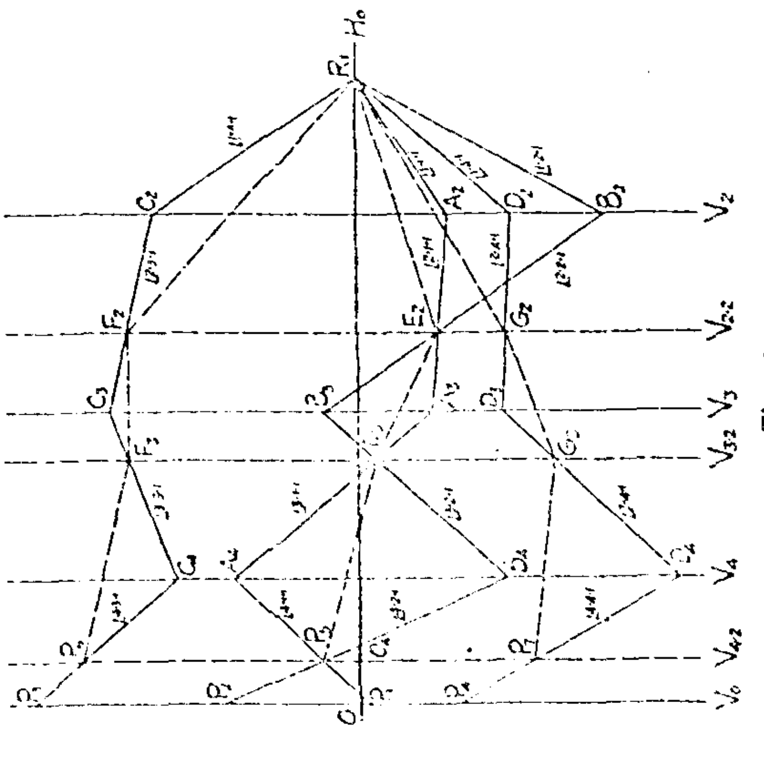


Fig.35

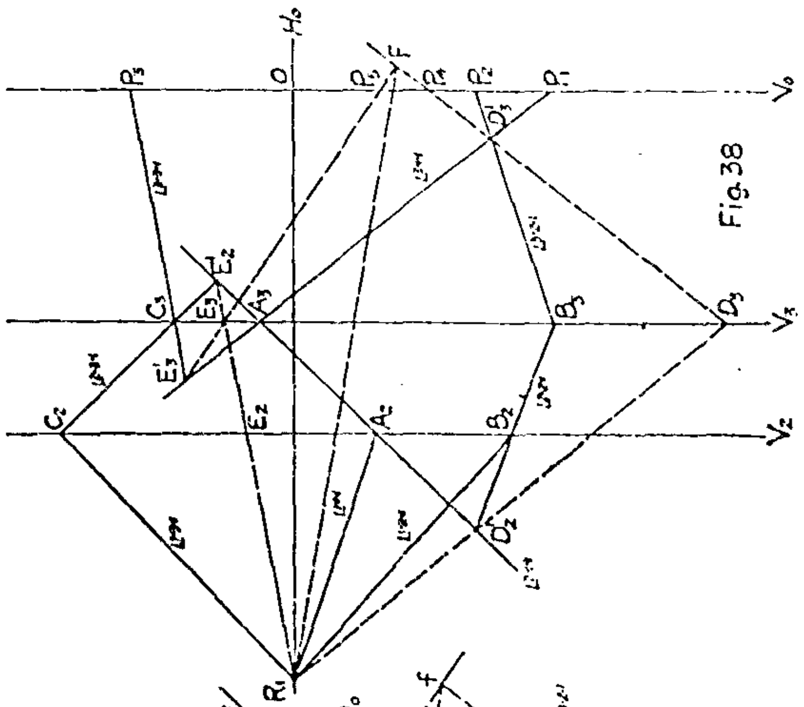


Fig. 38

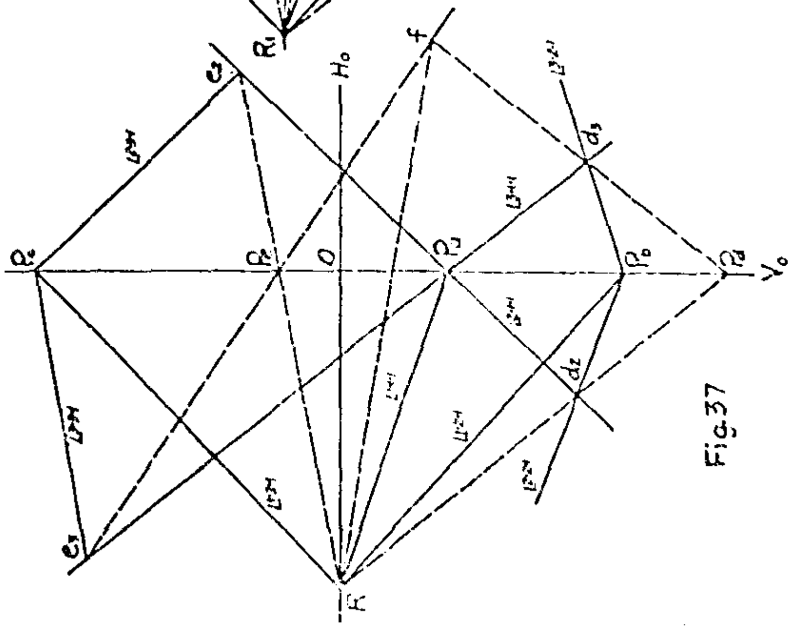


Fig. 37

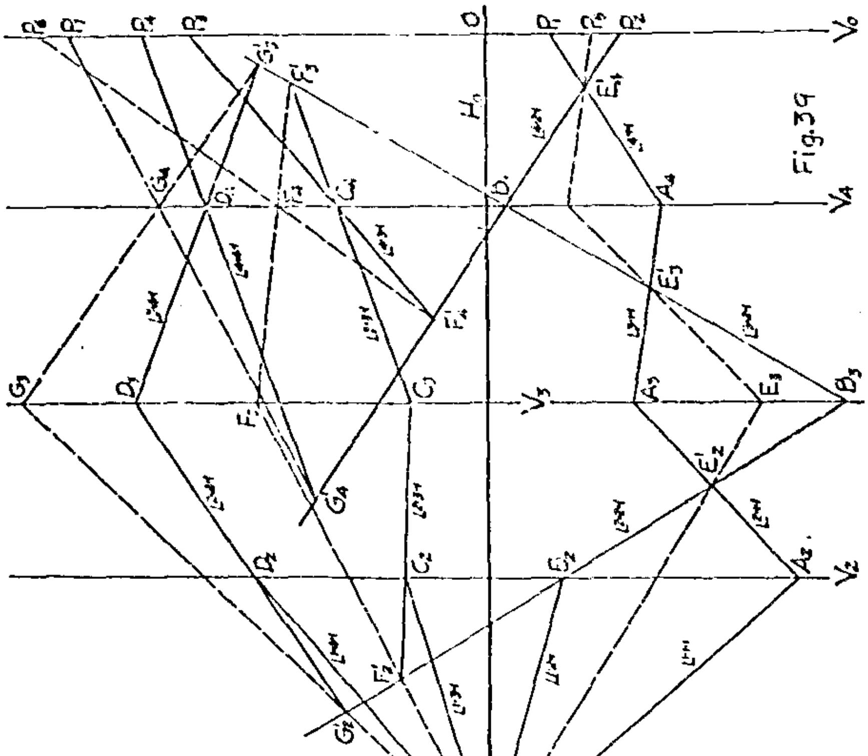


Fig.39

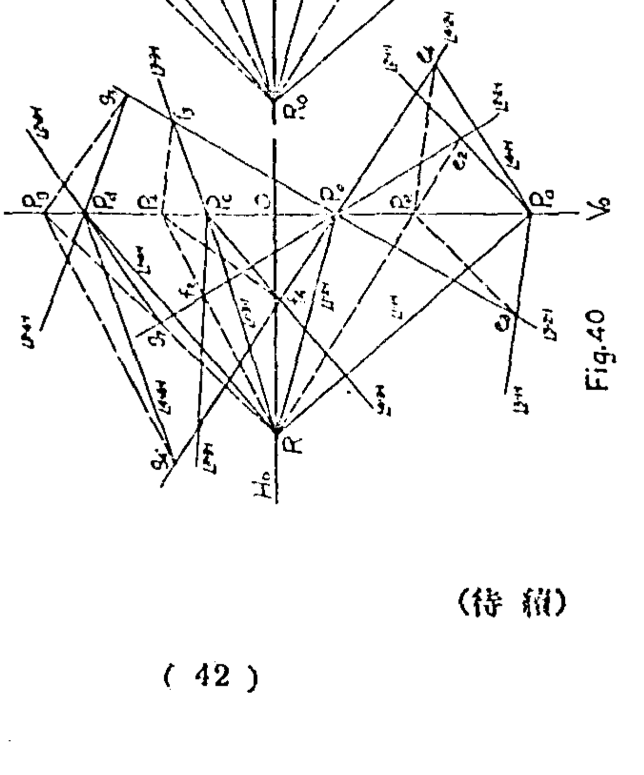


Fig.40

(待續)

聯立一次方程式之圖解（續）

羅　河　著

第四章　作圖之簡略法

第三十四節　以上所論作圖方法，均就理方面而言，若以之解實際數目問題，則作圖之次序，圖中點綫之如何略去，及記號之選擇均與方法之應用有直接關係。凡此諸點將于本章中擇要論之，並以數目例題說明作圖簡略之法。

（1）　圖解可能之變化

第三十五節　在聯立方程式之代數解法中，式中之未知量可任意先消去某一個；各方程式又可任意先消去某一個；式中未知量可用多種不同方法逐漸消去。此多數不同方法雖無理論上差別，但在實際應用時，每因式中數值之特殊關係而有便利與不便利之分。如一組方程式中，苟先以某式消去某一未知量則可使計算手續簡單並可得較精確之結果。故在代數解法中，此種次序之選擇亦非無關係也。

在幾何解法中，次序之選擇較代數法尤為重要。蓋用圖解法時，各點各綫之位置，為作圖上便利計，往往須在一定範圍內。又一點，一綫之決定，法有多種，但以結果精確者為上。故消減未知量時必須考慮用何式消去何未知量方可使圖中諸綫之位置不出一定範圍，且差誤微小。若在一法中，其消減未知量之次序必須于圖表各式時決定，而不可中途改變，設遇作圖上困難則將無法避免。故圖解法之是否合

于應用當視此法中各方程式及未知量可否依任意次序消去。

圖解法之作圖，完全以表示各係數之直綫間幾何上關係爲基礎。此種幾何的關係每因圖表時未知量排列次序之不同而各異。凡此種關係不因未知量之次序而變更，則作圖時，其未知量即可依任意次序消去。反之若各綫間之關係隨未知量之次序而改變，則一種圖表僅能表示未知量依某次序排列之方程式。故作圖時，其消減未知量之次序必須與圖表時相同，而不能中途因作圖上便利而改變。

在上述五種解法中，方程式之消去，均可任意選擇。惟未知量則不盡然。斜度圖表法僅能表示未知量依一定次序排列之方程式，而在力量圖表法中，無論式中未知量之次序如何，其圖表則恆相同，故由力量圖表法中作圖，各未知量可依任意次序消去；而由斜度圖表法，則消減未知量之次序必須于圖表時決定。

距離圖表法之作圖共有三種。在第一法中當消去某兩未知量時，及在第三法中當合併某兩未知量時，僅該兩未知量之係數與其他各個未知量之係數發生關係；且此種關係不受未知量次序之影響。故在此兩法中各個未知量可依任意次序消去。在第二法中，當消減式中未知量時，必先將各未知量依某一次序排列，然後由每兩相鄰未知量之係數以決定新未知量之係數。故此法中消減未知量時，必須於作圖之始，將各未知量依一定次第排列而不能中途變更。

于此可見，此數法中僅力量圖表之兩解法及距離圖表之第一，第三兩解法可適用于數目問題之計算。故以下所論作圖簡略之法以此四法爲限。

第三十六節　前所論力量圖表及斜度圖表之解法中，式中之常數，均以一點表之。但常數亦可設爲一種未知量之係數而以綫表之，則新方程式中之常數可與各未知量之係數以同一方法，同時決定。茲

以三未知量之方程式說明之。設 Fig. 41 中 $^1/_n$，$^1/_a$，$^2/_a$，$^3/_a$，$^1/_b$，$^2/_b$，$^3/_b$，$^1/_c$，$^2/_c$，$^3/_c$ 表三方程式之各係數。另作縱綫 $^4/_a$ 使由 $^1/n$ 至 $^4/_a$ 之距表 K_a；同樣作 $^4/_b$，$^4/_c$ 表 K_b，K_c。作任一斜綫交 $^1/n$，$^1/_a$，$^1/_b$，$^1/_c$ 于 N_1，a_1，b_1，c_1。經此四點作橫綫 H_n，H_a，H_b，H_c。設 H_a 交 $^2/_a$，$^3/_a$，$^4/_a$ 于 a_2. a_3，a_4；H_b 交 $^2/_b$，$^3/_b$，$^4/_b$ 于 b_2，b_3，b_4；H_c 交 $^2/_c$，$^3/_c$，$^4/_c$ 于 c_2，c_3，c_4。設 a_2b_2 交 N_1c_2 于 K_2；經 K_2 作橫綫 H_d 交 a_3 b_3，a_4 b_4 于 K_3，K_4。設 c_3 K_3 交 H_n 于 d_3；c_4 K_4 交 H_n 于 d_4。經 d_3 作縱綫 $^3/_d$。作橫綫 H_o 交 $^1/n$，$^3/_a$. $^3/_b$，$^3/_c$ $^3/_d$ 于 N_2，A，B，C，D 等點。于 $^3/_a$，$^3/_b$，$^3/_d$ 上取 P_a，P_b，P_d 三點使 DP_d，AP_a，BP_b 等于 N_1 d_4，K_a，K_b。自 P_a，P_b 作兩綫各平行于 N_2 P_d 交 $^2/_a$，$^2/_b$ 于 A_2，B_2。經 H_n 與 a_2 b_2 之交點 S 作縱綫 $^1/_s$ 交 A_2 B_2 于 S_1。自 B_2 作平行于 N_2 S_1 之直綫而交 $^1/_b$ 于 B_1。則由 N_2 B_1，B_1 B_2，B_2 P_b 之斜度即可得 X_1，X_2，X_3 之值。

此法與前法不同之點，僅爲P_d位置之決定，設依前法，則作 P_d 之法如下：于 $^3/_c$ 上取一點 P_c 使 CP_c 等于 K_c。自 P_a，P_b，P_c 作橫綫交 $^2/_a$，$^2/_b$，$^2/_c$ 于 A_2'，B_2'，C_2'。設 A_2' B_2' 交經過 K_2 之縱綫于 K_2'，自 K_2' 作橫綫交直綫 P_aP_b。于T點。設$C_2'K_2'$ 交 $^1/_n$ 于 N_3，自 N_3作橫綫交P_cT 于 Pd'。則P_d' 與 P_d 同在一點，可証之如下：

設$^1/_n$ 交 H_a，H_b，H_c，H_d 于 E_1，E_2，E_3，E_4；設 H_o

交經過T點之縱綫于F。因

$$P_a T : P_b T = a_4 K_4 : b_4 K_4$$

又 AP_a, BP_b 各等于$E_1 a_4$, $E_2 b_4$ 故T_1T等于E_4K_4。因

$$\frac{P_bP_a}{P_aT} = \frac{B_2'A_2'}{A_2'K_2'} = \frac{b_2 a_2}{a_2K_2} = \frac{b_3 a_3}{a_3K_3}$$

故經過T點之縱綫亦經過 K_3。因

$$\frac{P_c T}{TP_b'} = \frac{C_2'K_2'}{K_2'N_3} = \frac{c_2K_2}{K_2N_1} = \frac{c_3K_3}{K_3 d_3}$$

故 P_d' 在縱綫 $3/_d$ 上。因 CP_c,T_1T 等于 $E_3 c_4$, E_4K_4, 又

$$P_c T : T P_d' = c_4 K_4 : K_4 d_4$$

故DP_d' 等于 $N_1 d_4$, 即 P_d' 與 P_d同在一點。

第三十七節　在距離圖表之三解法中，式中之常數亦可設爲未知量之係數而以斜度表之。茲亦以三未知量之方程式說明之（本例係說明第一解法，他兩法可類推。）

作橫綫 H_o ，縱綫 V_o 相交于O點（見Fig.42）。于 V_o 上取 P_a, P_b, P_c 三點使 $OP_a : OP_b : OP_c$ 等于 $a_1 : b_1 : c_1$ 。自 P_a 作 L2·1·1, L3·1·1, L4·1·1, 使其斜度爲 a_2, a_3, K_a ；同樣經P_b 作 L2·2·1, L3·2·1, L4·2·1, 經 P_c 作 L2·3·1, L3·3·1, L4·3·1 。設 L2·3·1 交 H_o 于 R_2', L2·1·1 交 L2·2·1 于 d_2, L3·1·1 交 L3·2·1 于 d_3、L4·1·1 交 L4·2·1 于 d_4 。設 $R_2' d_2$ 交 V_o 于 P_d, $d_3 P_d$ 交 H_o 于 R_3' 。作 $d_4 P_d$, $R1_3 P_c$, $R_2' P_a$。

于另一圖中（見Fig.43）作橫綫 H_o ，縱綫 V_o 相交于O點。于 V_o 上取 P_1 使 OP_1 等于 K_a 。自 P_1 作 L4·1·1 交 H_o 于S

。自S作一綫平行于前圖中之 $d_4 P_d$ 而交 V_o 于 P_4，並自S作 L4·3·1交 V_o 于 P_3。自 P_4 作一綫平行于前圖中之 $d_3 P_d$ 而交 H_o 于 R_3。自 R_3 作一綫平行于前圖中之 $R_3' P_c$ 而交經過 P_3 之L3·3·1于 T_3，則由 V_o 至 T_3 之距離即為 X_3 之值。其他 X_2, X_1, 之值可依前法繼續作出。

如依前解法，則作圖之法如下：于 V_o 上取 E_1, E_2, E_3 三點使 OE_1, OE_2, OE_3 表 K_a, K_b, K_c，經 E_1 作 L3·1·1，經 E_2 作 L3·2·1；自此兩綫之交點 D_3 作一綫平行于前圖中之 $d_3 P_d$ 而交 H_o 于 R_3''。自 E_3 作 L3·3·1；自 R_3'' 作一綫平行于前圖中之 $P_c R_3'$ 而交 L3·3·1 于 T_3'。則由 V_o 至 T_3' 之距離即為 X_3 之值。今須証明者為 T_3，T_3' 同在一點。

因 OP_1，OE_1 依同一比例尺表 K_a，故 P_1，E_1 同在一點。因 L4·1·1，L4·3·1 兩綫斜度之比等于 $K_a : K_c$；故 OP_3 表 K_c，則 E_3 與 P_3 同在一點。因 OP_1：OE_2 等于 K_a：K_b，又 L4·1·1，L4·2·1 兩綫斜度之比等於 K_a：K_b，故經過 E_2 之 L4·2·1 亦經過S點。設 D_3R_3'' 交 V_o 于 P_4'，則

$$E_2 P_1 : P_1 P_4' = P_b P_a : P_a P_d = E_2 P_1 : P_1 P_4$$

故 P_4' 與 P_4 同在一點，因此 R_3'' 與 R_3 亦同在一點；則 T_3' 與 T_3 亦必同在一點。此兩節中將式中常數當為未知量之係數，于作圖工作未見減少。但常數之決定原為一部性質不同之作圖，茲將其與各係數以同一方法作出；則手續簡易而合于解多數方程式之用。

(2) 作圖之記號及例題

第三十八節 在以上所論各法中，無論以何者代表式中各係數，

作圖時基本要素均為直綫及其交點。圖解法中綫之為用有時表示斜度，有時表示距離，有時為決定與他直綫之交點。但無論其效用如何重要，在面積有限之圖中，作多數之直綫均為作圖中繁難之工作。其繁難之處，不在位置之決定，而由其數目衆多，聚於一處，縱橫交叉，難于辨別。圖解法首要之點厥為簡便與清楚。若圖中點綫太多，頭緒紛繁，作圖時固易錯誤，閱者尤難領會。故圖中直綫凡可簡省者均宜略去。簡略之法有二：(1) 凡一直綫之用僅為決定與他直綫之交點，則其交點之位置可用直邊作出而將此直綫省去，(2) 凡一直綫之用僅為表示斜度或與他直綫之距離，則此綫可以兩點表之。

但直綫之略去，僅為作圖上便利計，非謂略去之直綫絕對無用。實際上圖中各部均有連帶關係；作圖之進行莫不須根據前部已作成之圖。故圖中直綫雖可省去，同時必須以適當記號標明該直綫之意義以便隨時查考。按圖解聯立方程式之步驟亦與代數法相似，即逐漸減少方程式及式中未知量之數。故一組方程式之完全圖解必經過若干次相似之手續，由第一組式化為第二組式，更依次化為一未知量之方程式以求得其中一未知量之值。而圖中所作之點與綫，除一部份為輔助者外，均表示各新方程式中之係數與常數。此種直綫若欲省去，其標記必有三部，即所用記號必須表明該直綫所屬未知量之號數，方程式之號數與組數。標明此三者方可確定所省去直綫之性質。

因前所論各法中僅力量圖表之兩解法及距離圖表之第一，第三解法可適用于數目問題之計算(見第三十五節)，故以下所論作圖之記號及數目例題之說明僅以此四法為限。

第三十九節　力量圖表之第一作圖法。

力量圖表之解法以將式中常數設為未知量之係數較為便利。茲以下兩例說明此法應用記號時作圖之手續。以後將設C代表未知量之係

數，K 代表式中之常數。未知量之號數，方程式之號數與組數則于 C 後以所圖各數記之。K 後應記之數僅為方程式之號數與組數。

例1。 $3X_1+4X_2-2X_3-X_4=-4.5$ (1)

$7X_1+X_2+3X_3+2X_4=3$ (2)

$2X_1-5X_2-X_3+4X_4=1$ (3)

$X_1-2X_2+7X_3+3X_4=4.5$ (4)

圖表。 作橫綫 $H_{0\cdot 1}$，縱線 V_0 相交于O點（見Fig.44）。然後觀察此四式以先消去何未知量為合宜。本例係先消去 X_2。作四橫線 $H_{1\cdot 1}$，$H_{2\cdot 1}$，$H_{3\cdot 1}$，$H_{4\cdot 1}$ 使由 $H_{0\cdot 1}$ 至此四線距離之比等于此四式中 X_2 之係數4，1，-5，-2 之比。次擇定比例尺如圖中所示。依此比例尺于 $H_{1\cdot 1}$ 上取 1，2，3，4 四點使由 V_0 至此四點之距離等于 (1) 式中 X_1，X_2，X_3，X_4，之係數。同樣于 $H_{2\cdot 1}$，$H_{3\cdot 1}$，$H_{4\cdot 1}$ 上各取 1，2，3，4 四點以表各該式中未知量之係數。以原比例尺之半數為比例尺于 $H_{1\cdot 1}$，$H_{2\cdot 1}$，$H_{3\cdot 1}$，$H_{4\cdot 1}$ 上各取一點 5 使由 V_0 至各 5 點之距離表此四式中之常數 -4.5，3，1，4.5。故圖中 $H_{1\cdot 1}$，$H_{2\cdot 1}$，$H_{3\cdot 1}$，$H_{4\cdot 1}$ 四橫綫及其上諸點表此四式中係數及常數。

作圖。 各式既經圖表之後，作圖初步即為決定消去何式及何未知量。因方程式及未知量均可依任意次序消去，故選擇範圍甚廣。選擇方針以作圖上便利為標準，即圖中各綫及其交點既不突出相當範圍，又不密集一處。本例以先消去第二第四兩式為宜。

作直綫 L1·1 經過 $H_{2\cdot 1}$，$H_{4\cdot 1}$ 上1點；同樣作 L3·1 L4·1，L5·1 經過此兩綫上之 3，4，5 點。本法中未知量必須兩個同時消去

；圖表時已決定先消去 X_2 ，其他消去何未知量猶待決定。現定以 X_1 與 X_2 同時消去。

以直邊決定經過O點及 $H_{1\cdot1}$，$H_{3\cdot1}$ 上 1 點之直線與 $L1\cdot1$ 之交點；此兩點以 $T_{1\cdot1}$，$T_{1\cdot3}$ 記之。以直邊決定經過 $L1\cdot1$ 上 $T_{1\cdot1}$、$T_{1\cdot3}$ 兩點之橫綫與 $L3\cdot1$，$L4\cdot1$，$L5\cdot1$ 之交點；此六點分別以 $T_{3\cdot1}$，$T_{3\cdot3}$，$T_{4\cdot1}$，$T_{4\cdot3}$，$T_{5\cdot1}$，$T_{5\cdot3}$ 記之。以直邊決定經過 $H_{1\cdot1}$ 上 3 點及 $L3\cdot1$ 上 $T_{3\cdot1}$ 之直綫與 $H_{0\cdot1}$ 之交點；此點以 $^3/_1$ 記之。由 V_0 至此點之距離即爲新方程式中 X_3 之係數，亦即 $C_{3\cdot1\cdot2}$ 也。同樣決定 $H_{0\cdot1}$ 上 $^4/_1$，$^5/_1$，$^3/_3$，$^4/_3$ $^5/_3$ 等點。此六點表第二組內第一，第三兩式中係數及常數。（第二組內僅有兩方程式，其號數與第一組內之關係方程式相同。）

以下作圖，即須決定繼續消去之未知量。現決消去 X_4。作橫綫 $H_{0\cdot2}$，$H_{1\cdot2}$，$H_{3\cdot2}$ 使由 $H_{0\cdot2}$ 至後兩綫距離之比等于由 V_0 至 $H_{0\cdot1}$ 上 $^4/_1$，$^4/_3$ 兩點距離之比。于 $H_{1\cdot2}$ 上取 3，5 兩點使由 V_0 至此兩點之距離等于由 V_0 至 $H_{0\cdot1}$ 上 $^3/_1$，$^5/_1$ 之距離。同樣于 $H_{3\cdot2}$ 上取 3，5 兩點。

以直邊決定經過 $H_{1\cdot2}$，$H_{3\cdot2}$ 上 3 點之直綫與 $H_{0\cdot2}$ 之交點，此點以 $^3/_0$ 記之；同樣作 $H_{0\cdot2}$ 上 $^5/_0$ 點，則由 V_0 至此兩點之距離表最後一式中係數及常數。

本題之作圖至此已暫告一段落。此部作圖之目的完全爲消去各方程式及其中之未知量，至新方程式中僅含一未知量爲止。至各未知量之值，則于另一部圖作出，其法如下：

作橫綫 H_0 交 V_0 于O點。作 $P_{0\cdot3}$ 使由 H_0 至其點之距爲

$K_{0\cdot3}$（即由 V_o 至 $H_{0\cdot2}$ 上 $5/0$ 點之距離），由 V_o 至此點之距爲 $C_{3\cdot0\cdot3}$（即由 V_o 至 $H_{0\cdot2}$ 上 $3/0$ 之距離）。作 $P_{1\cdot2}$ 使由 H_o 至此點之距爲 $K_{1\cdot2}$，由 V_o 至此點之距爲 $C_{3\cdot1\cdot2}$。作縱綫 $V_{4\cdot1\cdot2}$ 表 $C_{4\cdot1\cdot2}$；作直綫 $OP_{0\cdot3}$ 並以直邊決定經過 $P_{1\cdot2}$ 而平行于 $OP_{0\cdot3}$ 之直綫與 $V_{4\cdot1\cdot2}$ 之交點；此點以 $T_{4\cdot1\cdot2}$ 記之，並作直綫 $OT_{4\cdot1\cdot2}$。

作 $P_{2\cdot1}$，$P_{4\cdot1}$ 使由 H_o 至此兩點之距表 $K_{2\cdot1}$，$K_{4\cdot1}$；由 V_o 至此兩點之距表 $C_{3\cdot2\cdot1}$，$C_{3\cdot4\cdot1}$。作縱綫 $V_{1\cdot2\cdot1}$，$V_{2\cdot2\cdot1}$，$V_{4\cdot2\cdot1}$，$V_{1\cdot4\cdot1}$，$V_{4\cdot4\cdot1}$ 表 $C_{1\cdot2\cdot1}$，$C_{2\cdot2\cdot1}$，$C_{4\cdot2\cdot1}$，$C_{1\cdot4\cdot1}$，$C_{4\cdot4\cdot1}$。作縱綫 $V_{1\cdot0\cdot1}$ 使由 V_o 至此之距離等于由 V_o 至 $L^{1\cdot1}$ 與 $H_{0\cdot1}$ 之交點之距離（此部所作各縱綫均經過上部圖中某一點，故可用射影法作出。若欲精確決定則可作一橫綫而于其上指定各點表各縱綫至 V_o 之距離；然後以直邊經過橫綫上某一點及上部圖中相當之點即可作該縱綫）。以直邊決定經過 $P_{2\cdot1}$，$P_{4\cdot1}$ 而平行于 $OP_{0\cdot3}$ 之兩直綫與 $V_{4\cdot2\cdot1}$，$V_{4\cdot4\cdot1}$ 之交點 $T_{4\cdot2\cdot1}$，$T_{4\cdot4\cdot1}$；以直邊決定經過此兩點而平行于 $OT_{4\cdot1\cdot2}$ 之兩直與 $V_{1\cdot2\cdot1}$，$V_{1\cdot4\cdot1}$ 之交點 $T_{1\cdot2\cdot1}$，$T_{1\cdot4\cdot1}$；以直邊決定經過此兩點之直綫與 $V_{1\cdot0\cdot1}$ 之交點 $T_{1\cdot0\cdot1}$。作直綫 $OT_{1\cdot0\cdot1}$。以直邊決定經過 $T_{1\cdot2\cdot1}$ 而平行于 $OT_{1\cdot0\cdot1}$ 之直綫與 $V_{2\cdot2\cdot1}$ 之交點，$T_{2\cdot2\cdot1}$。作直綫 $OT_{2\cdot2\cdot1}$。作縱綫 V_x 使由 V_o 至此綫之距爲 -2 設 V_x 交 $OP_{0\cdot3}$，$OT_{4\cdot1\cdot2}$，$OT_{1\cdot0\cdot1}$，$OT_{2\cdot2\cdot1}$，H_o 于 E_3，E_4，E_1，E_2，E_o 諸點，則由 E_o 至 E_3，E_3 至 E_4，E_4 至 E_1，E_1 至 E_2 之距離即爲滿足

上四式之 X_3, X_4, X_1, X_2 之值；其值爲 1, -2.5, 1, -2。

在此圖解中，內表式中係數及常數之比例尺，兩不相同；後者爲前者之半數。意即常數以二除之而後用同一比例尺圖表。以二除常數而後圖表之乃示極距之長爲二也。故由 V_0 至 V_{x} 之距離必需爲二。未知量之符號與極距之符號有直接關係。極距爲正者，則未知量向上者爲正，向下者爲負；反之則向下者爲正，向上者爲負，即如本例也。

聯立方程式中之未知量及方程式僅可依任意次序消去而作圖之手續又必以此次序爲根據，故消去之未知量及方程式均宜隨時註明以便參考。本例中第一組內(2)，(4)兩式首先消去，故于 $H_{2\cdot1}$，$H_{4\cdot1}$ 之一端各作短綫以誌之。至各次所消去之未知量，則隨時依次記于比例尺之下。

例二， Fig. 45a, Fig. 45b 爲下列

$$9X_1-7X_2+5X_3-5X_4+2X_5=-9.5 \qquad (1)$$

$$7X_1+9X_2+2X_3+5X_4+3X_5=-9 \qquad (2)$$

$$-9X_1-2X_2-3X_3+7X_4+5X_5=2.5 \qquad (3)$$

$$-5X_1+3X_2-7X_3+2X_4+7X_5=5.5 \qquad (4)$$

$$2X_1-5X_2-9X_3-9X_4+9X_5=4.5 \qquad (5)$$

五式之完全圖解。其中所用各種記號均與前例相同。惟普通用以決定未知量者均爲作圖時所消去之方程式，如此例中本應以第二組內 (3)，(4)兩式決定 X_1 之值，但爲作圖上便利計，則用第二第四兩式。故 Fig.45b 中縱綫 $V_{1\cdot0\ 2}$ 之位置乃由 Fig.45a 中經過 $H_{2\cdot2}$ $H_{4\cdot2}$ 上 1 点之直綫與 $H_{0\cdot2}$ 之交点而決定。爲避免某種困難或省

得比較精確之結果，苟不背幾何原理，作圖手術可任意變通，此其一例也。

第四十節　力量圖表之第二作圖法。

此法與前法相似，所用記號亦相同，故僅以下例說明之。

$$3X_1+4X_2-2X_3-X_4=4,5 \quad (1)$$

$$7X_1+X_2+[illegible]X_3+2X_4=3 \quad (2)$$

$$2X_1-5X_2-X_3+4X_4=[illegible] \quad (3)$$

$$X_1-2X_2+7X_3+3X_4=4,5 \quad (4)$$

圖表。　作橫綫 $H_{0\cdot1}$ ，縱綫 V_0 （見Fig.46），相交于 O_1 。視察此四式後決定先消去 X_2 。作橫綫 $H_{1\cdot1}$，$H_{2\cdot1}$，$H_{3\cdot1}$，$H_{4\cdot1}$ 使由 O_1 至此四綫距離之比等于此四式中 X_2 之係數 4，1，-5，-2 之比。次擇定比例尺如圖中所示。于 $H_{1\cdot1}$ 上取 1，2，3，4，5 五点使由 V_0 至此五點之距離表第一式中係數及常數。同樣于 $H_{2\cdot1}$，$H_{3\cdot1}$，$H_{4\cdot1}$ 上各取 1，2，3，4，5，五點以表各式中係數及常數。

作圖。　作圖之初，必須決定先消去何式。此例將先消去第一式。以直邊決定經過 $H_{1\cdot1}$ 及 $H_{2\cdot1}$ 上 1 點之直綫與 $H_{0\cdot1}$ 之交點；由 O_1 至此點之距離即爲新方程式中 X_1 之係數。此點將以未知量之號數及方程式之號數記之，即於其上記 1 ，其下記 2 。同樣以直邊決定經過 $H_{1\cdot1}$ 及 $H_{2\cdot1}$ 上 3，4，5，等點之三直綫與 $H_{0\cdot1}$ 之交點；此三點各于其上以 3，4，5 記之，而其下則均以 2 記之。由 O_1 至此三點之距離即爲第二組內第二式中 X_3，X_4 之係數及常數。同樣決定 $H_{0\cdot1}$ 上 $^1/_3$，$^3/_3$，$^4/_3$，$^5/_3$，$^1/_4$，$^3/_4$，

$^4/_4$，$^5/_4$ 等点。

第二步決定消去 X_3 。作橫綫 $H_{0\cdot2}$ 交 V_o 于 O_2，並作橫綫 $H_{2\cdot2}$，$H_{3\cdot2}$，$H_{4\cdot2}$ 使由 O_2 至此三綫距離之比等于第二組式內三式中 X_3 係數之比。于 $H_{2\cdot2}$ 上取1，4，5 三点使由 V_o 至此三點之距離等于由 V_o 至 $H_{0\cdot1}$ 上 $^1/_2$，$^4/_2$，$^5/_2$，三点之距。同樣于$H_{3\cdot2}$，$H_{4\cdot2}$ 上各取 1，4，5 三点。現決定消去第三式，以直邊決定經過 $H_{3\cdot2}$ 及 $H_{2\cdot2}$ 上1點之直綫與$H_{0\cdot2}$ 之交点；此点以$^1/_2$記之。同樣作$H_{0\cdot2}$ 上 $^4/_2$，$^5/_2$，$^1/_4$，$^4/_4$，$^5/_4$ 等点。

第三步決定消去 X_1 。作橫綫 $H_{0\cdot3}$ 交 V_o 于 O_3；另作橫綫 $H_{2\cdot3}$，$H_{4\cdot3}$ 使由 O_3 至此二綫距離之比等于由 V_o 至 $H_{0\cdot2}$ 上 $^1/_2$，$^1/_4$ 兩点距離之比。于 $H_{2\cdot3}$ 上取 4，5 兩点使由V_o至此兩點之距離等于由 V_o 至 $H_{0\cdot2}$ 上 $^4/_2$，$^5/_2$ 兩點之距 。同樣于 $H_{4\cdot3}$ 上取 4，5 兩点。以直邊決定經過$H_{2\cdot3}$，$H_{4\cdot3}$ 上 4点之直綫與$H_{0\cdot3}$ 之交点，此点以 $^4/_0$ 記之。同樣作$^5/_0$。

作橫綫 H 交 V_o 于 O 点。取 $P_{0\cdot4}$，$P_{4\cdot3}$，$P_{4\cdot2}$，$P_{2\cdot1}$ 四点使由 V_o 至此四点之距離表 $C_{4\cdot0\cdot4}$，$C_{4\cdot4\cdot3}$，$C_{4\cdot4\cdot2}$，$C_{4\cdot2\cdot1}$，由 H 至此四点之距離表 $K_{0\cdot4}$，$K_{4\cdot3}$，$K_{4\cdot2}$，$K_{2\cdot1}$。作縱綫 $V_{1\cdot4\cdot3}$，$V_{1\cdot4\cdot2}$，$V_{3\cdot4\cdot2}$，$V_{1\cdot2\cdot1}$，$V_{3\cdot2\cdot1}$，$V_{2\cdot2\cdot1}$ 表 $C_{1\cdot4\cdot3}$，$C_{1\cdot4\cdot2}$，$C_{3\cdot4\cdot2}$，$C_{1\cdot2\cdot1}$，$C_{3\cdot2\cdot1}$，$C_{2\cdot2\cdot1}$ 。作縱綫 V_x 使由 V_o 至此之距離爲 -1 。作直綫 $OP_{0\cdot4}$ 交 V_x 于 E_4 。以直邊決定經過 $P_{4\cdot3}$ 而平行於 OE_4 之直綫與 $V_{1\cdot4\cdot3}$ 之交点 $T_{1\cdot4\cdot3}$；作直綫 $OT_{1\cdot4\cdot3}$ 交 V_x 于 E_1。以直邊決定經過

$P_{4\cdot2}$ 而平行于 OE_4 之直線與 $V_{1\cdot4\cdot2}$ 之交点 $T_{1\cdot4\cdot2}$ 並決定經過 $T_{1\cdot4\cdot2}$ 而平行于 OE_1 之直線與 $V_{3\cdot4\cdot2}$ 之交点 $T_{3\cdot4\cdot2}$；作直線$OT_{3\cdot4\cdot2}$ 交 V_x 於 E_3。以直邊決定經過$P_{2\cdot1}$而平行於 OE_4 之直線與 $V_{1\cdot2\cdot1}$ 之交点 $T_{1\cdot2\cdot1}$；同樣決定 $V_{3\cdot2\cdot1}$ 上 $T_{3\cdot2\cdot1}$，$V_{2\cdot2\cdot1}$ 上 $T_{2\cdot2\cdot1}$ 並作直線 $OT_{2\cdot2\cdot1}$ 交 V_x 于 E_2。設V_x交H于 E_0 點，則 E_0E_4，E_4E_1，E_1E_3，E_3E_2 之方向及長度表 X_4，X_1，X_3，X_2，之值。因極距為負數，故向上之方向為負而向下者為正。

第四十一節　距離圖表之第一作圖法

距離圖表之作圖，亦如力量圖表之解法，可分為前後兩部。第一部作圖完全為決定新式中之係數及常數。因式中係數及常數均以斜度表之，故此部可名為斜度圖解。第二部乃決定各未知量之值，可名為未知量之圖解。

在斜度圖解中，若各綫之斜度甚小，其交點每突出圖紙範圍之外；若斜度太大，其交點又不免密集于一處，則由此所決定直綫之方向必難準確。此二者均宜避免。避免之法凡遇式中係數均大于或小于一時，式之兩邊可以適當數值乘之使其係數及常數均在一之左右。今仍以前法中所用之例題說明此法作圖之手續。

例 1。

$$3X_1+4X_2-2X_3-X_4=-4.5 \qquad (1)$$

$$7X_1+X_2+3X_3+2X_4=3 \qquad (2)$$

$$2X_1-5X_2-X_3+4X_4=1 \qquad (3)$$

$$X_1-2X_2+7X_3+3X_4=4.5 \qquad (4)$$

斜度之作法。 在此解法中式中之常數亦設爲未知量之係數。惟此四式中之係數及常數均大于一，故各式兩邊均以四除之。圖中所記分數 $1/4$ 即表此意。作橫綫 H_o，縱綫 V_o（見Fig.47a）。並擇定比例尺如圖中所示。于 V_o 左右距離四單位（此單位長度不必與比例尺中單位長度相同；此處所用者爲比例尺之半數）處作縱綫 V_l，V_r（因以四除各式，故由 V_o 至此兩縱綫之距離用四單位以便作圖。）然後視察此四式以先消去何未知量爲便利。此例中將先消去 X_4。于 H_o 上取一點 R_4 並于 V_o 上取四點 $P_{1\cdot1}$，$P_{2\cdot1}$，$P_{3\cdot1}$，$P_{4\cdot1}$ 使由 R_4 至此四點直綫之斜度爲 $-1/4$，$2/4$，$4/4$，$3/4$。

于 V_l 上擇定一點使由 H_o 至此點之距離等于至 $P_{1\cdot1}$ 之距離；于 V_l 上另取四點使由該臨時點至此四點之距離（此距離以比例尺上單位之半數爲單位）等于(1)式中 X_1，X_2，X_3 之係數及常數。此四點之記號分爲兩部；第一須表示其屬于第一式，第二須表示其所屬未知量之號數（式中常數則設爲 X_5 之係數）。標記之法，將 V_l 向 V_o 之一面均以方程式之號數 1 記之，其反面則以 X 之號數 1，2，3，4，5 記之。至各點之位置則以垂直于 V_l 之短綫定之（以下直綫上點之位置均以垂直于該綫之短綫定之）。由 $P_{1\cdot1}$ 至此四點直綫之斜度即表經四除後之（1）式中係數與常數。此四綫之記號將爲 L1·1·1，L2·1·1，L3·1·1，L5·1·1。其他 L1·2·1，L2·2·1，L3·2·1，L5·2·1，………，L5·4·1 等綫均以 V_o 上 $P_{2\cdot1}$，$P_{3\cdot1}$，$P_{4\cdot1}$ 與 V_l，V_r 上相當之點定之。V_l，V_r 上其他各點之記號均與記 L1·1·1，L2·1·1，L3·1·1，L5·1·1 之四點相似。

作圖之始即已決定消去X_4；現待決定者爲消去何式及何未知量。此種選擇均以作圖上便利爲標準。現擬以（2），（3）兩式消去（1）式，並同時消去X_3。

作 L1·1·1，L2·1·1，L3·1·1，L5·1·1 四綫。以直邊決定 L1·4·1 與 L1·1·1，L2·4·1 與 L2.1·1，L3·4·1 與 L3·1·1，L5·4·1 與 L5·1·1 之交點。此四點均以方程式之號數1記之；至未知量之號數則與各所在直綫之號數相同。同樣H_0與 L1·1·1，L2·1·1 L3·1·1，L5·1·1 之交點均以 O記之。在此法中，H_0 可視爲代表

$$0 X_1+0\cdot X_2+0\cdot X_3+0\cdot X_4=0$$

之直綫，故作圖時H_0之意義與 L1·1·1，L2·4·1 等綫相同。

作 L3·3·1，並以直邊決定 L3·2·1 與此綫之交點；此點以 $R_{3\cdot2\cdot1}$ 記之。作直綫 $P_{1\cdot1}$ $R_{3\cdot2\cdot1}$。以直邊決定經過 $R_{3\cdot2\cdot1}$ 及 L3·1·1 上 4，O 兩點之直綫與 V_0 之交點；此兩點以 $P_{4\cdot2}$，$P_{0\cdot2}$ 記之。則由 $P_{4\cdot2}$ 至 L1·1·1 上 4 点之直綫即爲 L1·4·2，至 L2·1·1 上 4 点之直綫即爲 L2·4·2，至 L5·1·1 上 4 點之直綫即爲 L5·4·2。同樣由 $P_{0\cdot2}$ 至 L1·1·1，L2·1·1，L5·1·1 上三O點之直綫爲 L1·0·2，L2·0·2，L5·0·2。

在此法中R點爲一切作圖之樞紐。消減未知量所用之兩式，消去之方程式，及消去之未知量均于R點以各種方法標記之。如$R_{3\cdot2\cdot1}$之位置係由（2），（3）兩式決定。第三式因 L3·3·1 已作出，無須另行標明；第二式則由 $R_{3\cdot2\cdot1}$ 旁第二數字2 記之。至消去之未知量則由 $R_{3\cdot2\cdot1}$旁第一數字3記之。以直綫連接$R_{3\cdot2\cdot1}$ 與 $P_{1\cdot1}$ 表示第

一式由此消去。而消去方程式之組數則由 $R_{3\cdot2\cdot1}$ 旁第三數字 1 記之。故R 旁所記三數字與 L2·4·2 內三數字性質相似，即第一表未知量之號數，第二表方程式之號數，第三則表其組數。因此R 點應有之記號必須隨時註明。閱圖者背尋出各 R點，則全部作圖之步驟即可瞭然。

用以消減未知量之方程式其本身並不消去。故在新方程式中此兩式仍然存在，其中係數及常數亦不變更。如本例中第一組內(2)，(3)兩式同為第二組內(2)，(3)兩式。因 $P_{2\cdot1}$，$P_{3\cdot1}$ 亦為 $P_{2\cdot2}$，$P_{3\cdot2}$，故以 $P_{2\cdot1-2}$，$P_{3\cdot1-2}$ 記之。

第二步以(0)，(3)兩式消去(4)式及 X_1。作 L1·4·2，L2·4·2 L5·4·2；並以直邊決定此三綫與 L1·2·2，L2·2·2，L5·2·2 相當之交點。此三點均以2 記之。作 L1·3·2，並以直邊決定 L1·0·2 與此綫之交點。此點以 $R_{1\cdot0\cdot2}$ 記之。作直綫 $P_{4\cdot2}R_{1\cdot0\cdot2}$。以直邊決定經過 $R_{1\cdot0\cdot2}$ 及 L1·4·2 上2 點之直綫與 V_0 之交點；此点以 $P_{2\cdot3}$ 記之。則由 $P_{2\cdot3}$ 至 L2·4·2，L5·4·2 上2點之兩直綫即為 L2·2·3，L5·2·3。

作 L2·3·3，並以直邊決定 L2·2·3 與此綫之交點 $R_{2\cdot2\cdot3}$。作直綫 $P_{0\cdot3}R_{2\cdot2\cdot3}$。

未知量之作法 作橫綫 H_0，縱綫 V_0（見 Fig. 47b）相交于 O 點。于 H_0 上取一點 S，使由 O 至 S 之距離為一。以直邊決定經過 S之 L5·3·1 與 V_0 之交點 $P_{3\cdot1}$。前圖中 $P_{3\cdot1}$，$P_{3\cdot2}$，$P_{3\cdot3}$ 同在一點，故此圖中 $P_{3\cdot1}$ 亦為 $P_{3\cdot1-2-3}$。同樣決定經過 S 之

$L5\cdot2\cdot3$ 與 V_o 之交點 $P_{2\cdot3}$ 。其他 $P_{1\cdot1}$, $P_{2\cdot1}$, $P_{4\cdot2}$, $P_{o\cdot3}$ 均以相似之法決定。

自 $P_{3\cdot3}$ 作 $L2\cdot3\cdot3$ ，並以直邊決定經過 $P_{2\cdot3}$ 之 $L2\cdot2\cdot3$ 與 $L2\cdot3\cdot3$ 之交點 $R_{2\cdot2\cdot3}$ 。自此點作平行于前圖中 $P_{0\cdot3}R_{2\cdot2\cdot3}$ 之直線；並以直邊決定經過 $P_{0\cdot3}$ 之 $L2\cdot0\cdot3$ 與此綫之交點 $T_{2\cdot0\cdot3}$ 。經 $T_{2\cdot0\cdot3}$ 作縱綫 V_2 。

以直邊決定經過 $P_{4\cdot2}$ 之 $L2\cdot4\cdot2$ 與 V_2 之交點 $T_{2\cdot4\cdot2}$ 。設 $L2\cdot3\cdot2$ （即 $L2\cdot3\cdot3$）交 V_2 于 $T_{2\cdot3\cdot2}$ ；自此點作 $L1\cdot3\cdot2$, 並以直邊決定經過 $T_{2\cdot0\cdot3}$ 之 $L1\cdot0\cdot2$ 與此綫之交點 $R_{1\cdot0\cdot2}$ 。自 $R_{1\cdot0\cdot2}$ 作平行于前圖中 $P_{4\cdot2}R_{1\cdot0\cdot2}$ 之直綫，並以直邊決定經過 $T_{2\cdot4\cdot2}$ 之 $L1\cdot4\cdot2$ 與此綫之交點 $T_{1\cdot4\cdot2}$ 。經 $T_{1\cdot4\cdot2}$ 作縱綫 V_1

以直邊決定經過 $P_{1\cdot1}$ 之 $L2\cdot1\cdot1$ 與 V_2 之交点 $T_{2\cdot1\cdot1}$ ，再決定經過 $T_{2\cdot1\cdot1}$ 之 $L1\cdot1\cdot1$ 與 V_1 之交點 $T_{1\cdot1\cdot1}$ 。同樣決定 V_1 上 $T_{1\cdot2\cdot1}$ 。設 V_1 交 $L1\cdot3\cdot1$ （即 $L1\cdot3\cdot2$）于 $T_{1\cdot3\cdot1}$ ；自 $T_{1\cdot3\cdot1}$ 作 $L3\cdot3\cdot1$ 。以直邊決定經過 $T_{1\cdot2\cdot1}$ 之 $L3\cdot2\cdot1$ 與 $L3\cdot3\cdot1$ 之交點 $R_{3\cdot2\cdot1}$ 。自此點作平行于前圖中 $P_{1\cdot1}R_{3\cdot2\cdot1}$ 之直綫，並以直邊決定經過 $T_{1\cdot1\cdot1}$ 之 $L3\cdot1\cdot1$ 與此綫之交點 $T_{3\cdot1\cdot1}$ 。經 $T_{3\cdot1\cdot1}$ 作縱綫 V_3，

以直邊決定經過 $T_{3\cdot1\cdot1}$ 之 $L4\cdot1\cdot1$ 與 H_o 之交點 $T_{4\cdot1\cdot1}$ 。經 $T_{4\cdot1\cdot1}$ 作縱線 V_4 。則由 V_o 至 V_2, V_2 至 V_1, V_1 至 V_3, V_3 至 V_4 之距離即爲滿足此四式之 X_2, X_1, X_3, X_4 之值

；其値爲$-2, 1, 1, -2.5$。

第四十二節　將常數設爲未知量之係數，由前節可見斜度圖解中直綫較多而未知量圖解則極爲簡單。苟斜度圖解中直綫太多，可仍依第三章中解法將作圖之一部歸入未知量圖解中以減輕斜度圖解之繁雜。又作斜度圖解時，苟無特殊困難而能每次均用 H_0 及其他一式以消減式中之未知量，則圖中必要之直綫亦可因此減少。關于此二點將以下例說明之。

例2.

$$9X_1-7X_2+5X_3-5X_4+2X_5=-9.5 \quad (1)$$

$$7X_1+9X_2+2X_3+5X_4+3X_5=-9 \quad (2)$$

$$-9X_1-2X_2-3X_3+7X_4+5X_5=2.5 \quad (3)$$

$$-5X_1+3X_2-7X_3+2X_4+7X_5=5.5 \quad (4)$$

$$2X_1-5X_2-9X_3-9X_4+9X_5=4.5 \quad (5)$$

Fig.48a、Fig. 48b 爲上五式之完全圖解。在此例中，作斜度圖解時消減未知量之各 R 點均在H_0上；至作圖原理及所用記號則均與前例相同。但各式中之常數因未于斜度圖解中作出，故未知量圖解中各 P 點須另行作出，其法如下。

于 Fig. 48b 中 V_0 上取 $P_{1\cdot1}$，$P_{2\cdot1}$，$P_{3\cdot1}$，$P_{4\cdot1}$ $P_{5\cdot1}$ 五點使表上五式中常數 $-9\cdot5/8$，$-9/8$，$2\cdot5/8$，$5\cdot5/8$ $4\cdot5/8$（因圖解時曾以八除各式兩邊也）。因第一次以(0)，(1)兩式消去 (3) 式，又因 X_1 爲最後消去之未知量，故 $P_{1\cdot2}$ 與 $P_{1\cdot1}$ 同在一點而其他 $P_{2\cdot2}$，$P_{4\cdot2}$，$P_{5\cdot2}$ 則均在 $L1\cdot3\cdot1$ 之上。故經 $P_{3\cdot1}$ 作 $L1\cdot3\cdot1$，並以直邊決定經過 $P_{2\cdot1}$ 之 $L1\cdot2\cdot1$ 與 $L1\cdot3\cdot1$ 之交；此點即爲 $P_{2\cdot2}$。同樣決定 $P_{4\cdot2}$，$P_{5\cdot2}$。

因第二次以(0),(5)兩式消去(1)式，故 $P_{5\cdot3}$ 與 $P_{5\cdot2}$同在一點而$P_{2\cdot3}$, $P_{4\cdot3}$ 則均在L1·1·2之上。經 $P_{1\cdot1-2}$ 作 L1·1·2，並以直邊決定經過$P_{2\cdot2}$ 之 L1·2·2 與 L1·1·2之交點；此點即為$P_{2\cdot3}$ 。同樣決定$P_{4\cdot3}$。

因第三次以(0),(4)兩式消去(5)式，故$P_{4\cdot4}$ 與 $P_{4\cdot3}$同在一點；而$P_{2\cdot4}$ 則在 L1·5·3 之上。經 $P_{5\cdot3}$ 作 L1·5·3, 並以直邊決定經過 $P_{2\cdot3}$ 之 L1·2·3 與 L1·5·3 之交點；此點即為 $P_{2\cdot4}$。

各P點既經決定，則其餘作圖即與前例相似，故不再述。

第四十三節　距離圖表之第三作圖法

此法與第一解法相似，故亦僅以一例說明其作法。

$$3X_1+4X_2-2X_3-X_4=-4.5 \qquad (1)$$

$$7X_1+X_2+3X_2+2X_4=3 \qquad (2)$$

$$2X_1-5X_2-X_3+4X_4=1 \qquad (3)$$

$$X_1-2X_2+7X_3+3X_4=4.5 \qquad (4)$$

斜度之作法。　此數式中係數及常數均大于一，故以四除之。作橫綫 H_o, 縱綫 V_o（見 Fig.49a），並擇定比例尺如圖中所示。于V_o 左右距離四單位(此單位長度非比例尺上之單位)處作縱綫V_l,V_r。然後擇定首先消去之未知量如本例中之 X_4。于H_o上取一點 R_4,並于 V_o 上取四點 $P_{1\cdot1}$, $P_{2\cdot1}$, $P_{3\cdot1}$, $P_{4\cdot1}$ 使由 R_4 至此四點直綫之斜度為 $-1/4$, $2/4$, $4/4$, $3/4$ 。其他 X_1,X_2,X_3 之係數及式中常數均以 V_l, V_r 上諸點表之。諸點之記號及其位置之決定均與前兩例相同。

現決定消去第四式。作L1·4·1,L2·4·1,L3·4·1, L5·4·1。以

直邊決定 L1·1·1, L1·2·1, L1·3·1 與 L1·4·1 之交點；此三點各以所屬方程式之號數記之。同樣決定 L2·4·1, L3·4·1, L5·4·1 上 1, 2, 3點。

次決定消去 X_3。以直邊決定經過 R_4 及 L3·4·1 上 1, 2, 3 三點之直綫與 V_o 之交點，此三點分別以 $P_{1\cdot 2}$, $P_{2\cdot 2}$, $P_{3\cdot 2}$ 記之。由 $P_{1\cdot 2}$ 至 L1·4·1, L2·4·1, L5·4·1 上各 1 点之直綫將爲 L1·1·2, L2·1·2, L5·1·2, 同樣由 $P_{2\cdot 2}$ 至 L1·4·1, L2·4·1, L5·4·1 上各2点之直綫將爲L1·2·2, L2·2·2, L5·2·2；由 $P_{3\cdot 2}$ 至各3点之直綫將爲L1·3·2, L2·3·2, L5·3·2。

次決定消去第二組內第一式。作 L1·1·2, L2·1·2, L5·1·2。以直邊決定 L1·2·2, L1·3·2與L1·1·2之交點；此兩點以2,3 兩數記之。同樣決定 L2·1·2 L5·1·2 上 2, 3 點。

次決定消去 X_1。以直邊決定經過 R_4 及 L1·1·2 上 2, 3 兩點之直綫與 V_o 之交点，此兩点以 $P_{2\cdot 3}$, $P_{3\cdot 3}$ 記之。由 $P_{2\cdot 3}$ 至 L2·1·2 上 2 点之直綫將爲 L2·2·3, 至 L5·1·2 上 2 點之直綫將爲 L5·2·3。同樣由 $P_{3\cdot 3}$ 至 L2·1·2, L5·1·2 上 3 點之兩直線將爲 L2·3·3, L5·3·3。

作 L2·2·3, L5·2·3。以直邊決定 L2·3·3 與 L2·2·3 之交點，L5·3·3 與 L5·2·3 之交點；此兩點均以 3 記之。以直邊決定經過 R_4 及 L2·2·3 上 3 點之直線與 V_o 之交點；此點以 $P_{3\cdot 4}$ 記之。由 $P_{3\cdot 4}$ 至 L5·2·3 上 3 點之直綫將爲 L5·3·4。

求知量之作法。另作橫綫 H_o，縱綫 V_o 相交于O點 (見Fig

49b）。于 H_0 上取一點 S 使 OS 等于一。以直邊決定經過 S 之 $L5\cdot3\cdot1$, $L5\cdot3\cdot2$, $L5\cdot2\cdot3$, $L5\cdot3\cdot4$ 與 V_0 之交點 $P_{3\cdot1}$ $P_{3\cdot2}$, $P_{2\cdot3}$, $P_{3\cdot4}$ 。自 $P_{3\cdot4}$ 作一綫平行于前圖中之 R_4 $P_{3\cdot4}$ 而交 H_0 于 R_4 。自 R_4 作 $L4\cdot2\cdot3$ 平行于前圖中之 R_4 $P_{2\cdot3}$，並以直邊決定經過 $P_{2\cdot3}$ 之 $L2\cdot2\cdot3$ 與 $L4\cdot2\cdot3$ 之交点 $T_{2\cdot2\cdot3}$ 。經 $T_{2\cdot2\cdot3}$ 作縱綫 V_2。

以直邊決定經過 $P_{3\cdot2}$ 之 $L2\cdot3\cdot2$ 與 V_2 之交點 $T_{2\cdot3\cdot2}$ 。自 R_4 作 $L4\cdot3\cdot2$ 平行於前圖中之 R_4 $P_{3\cdot2}$，並以直邊決定經過 $T_{2\cdot3\cdot2}$ 之 $L1\cdot3\cdot2$ 與 $L4\cdot3\cdot2$ 之交點 $T_{1\cdot3\cdot2}$ 。經 $T_{1\cdot3\cdot2}$ 作縱綫 V_1 。

以直邊決定經過 $P_{3\cdot1}$ 之 $L2\cdot3\cdot1$ 與 V_2 之交點 $T_{2\cdot3\cdot1}$，決定經過 $T_{2\cdot3\cdot1}$ 之 $L1\cdot3\cdot1$ 與 V_1 之交點 $T_{1\cdot3\cdot1}$ 。自 R_4 作 $L4\cdot3\cdot1$ 並以直邊決定經過 $T_{1\cdot3\cdot1}$ 之 $L3\cdot3\cdot1$ 與 $L4\cdot3\cdot1$ 之交點 $T_{3\cdot3\cdot1}$。經 $T_{3\cdot3\cdot1}$ 作縱綫 V_3；經 R_4 作縱綫 V_4 。則由 V_0 至 V_2, V_2, 至 V_1, V_1 至 V_3, V_3 至 V_4 之距離即為滿足上四式之 X_2, X_1, X_3, X_4 之值。

第四十四節　上述數種作圖法，孰優孰劣應以圖解之繁簡，所占面積之大小及其準確程度為斷。

所謂圖解之繁簡乃就圖中需要直綫之多寡而言。解同一問題時，上述數法中必要直綫之數約略相同。故以此点而論，各法實無重大分別。

圖解所佔面積之大小，視圖解之各部能否均在預定之範圍內。此点與作圖本身初無若何關係。惟因作圖紙之面積每有限度，若圖解之一部不能免于突出圖紙範圍之外則困難隨之而起。以此点而言，當以

力量圖表之兩解法，較易控制。

圖解之能否準確，視其中各綫之方向，各点之位置是否準確。各点之位置概由兩綫相交而得。設此兩綫間之角度甚小，則其交点之位置必難準確。直綫之方向多由兩点決定。設此兩点間之距離太近，則此直綫之方向必難準確。故作圖解時有必須避免者二事：（1）以近于平行兩直綫之交点決定一点之位置，（2）以距離甚近之兩点決定一直線之方向。在距離圖表之兩解法中，此兩困難較易發生，亦較難避免。故其解答不若力量圖解法之較易準確。若以距離圖表之第一第三解法相比較，則以後者便于應用。在力量圖表之兩解法中，似以第二法便于應用。

（3） 幾何法與代數法之比較

第四十五節　幾何法或圖解法往往因所用比例尺太小，所得結果不易準確；又以作圖紙及繪圖器齊備後始能作圖；更以慣于作圖者不多，故圖解法能推之實用者甚少。而一般意見遂以爲圖解法不能與代數法相提並論。實則未盡然也。

圖解法之理論，進行之手續，雖與代數法根本不同；但其原則仍爲逐漸消滅式中之未知量。此則與代數法不期然而吻合。惟代數法中，除用行列式計算外，式中之未知量，僅可每次消去一個，而圖解法則可每兩個同時消去(力量圖表之第一解法)；在代數法中，無論用何法消去式中之未知量，新方程式中所含者，雖數目減少，仍爲原有之未知量，而在幾何法中，消滅未知量之法則有以兩未知量合并爲一未知量(距離圖表之第三解法)，有以一新未知量代替兩未知量(距離圖表之第一解法)，有以若干少數新未知量代替各原有之未知量(距離圖表之第二解法)。方法不同，手續則各異；此則又與代數法稍有出入。苟將幾何法演爲分析，則可得數種不同之代數解法；故代數法可因幾何

法而益形充實。

若用普通圖紙及繪圖器並以較大之比例尺，以本書所論作圖法解數目問題，其結果中差誤不難小于百分之二三。而在代數解法中，除用對數計算外，如用計算尺計算，其準確程度亦不過如是。故以此點論之，圖解法未必遜于代數法也

用代數法者每以圖解法不若代數法之便利。此亦似是實非而非持平之論。蓋現今吾人之習慣，一切事物之關係均以代數法表之。旣經代數式表示之後，其計算即可開始；而普通圖解法，則必先將代數式中關係于圖中表之，然後方可開始作圖。將代數式翻譯為圖形上關係，其工作往往占全部圖解十分之三四。但在代數法中則無與此相當之工作，故其法似較為便利。反之，設已與之圖形代表若干聯立方程式，用代數法者必先根據圖形上關係以求得其方程式，然後方可計算；而用圖解法者可立即開始作圖，則圖解法將遠勝于代數法。已與圖表而令用代數法者由圖表求得方程式而後解之，其不公允正如已與代數式先圖表之而後作圖也。故若除開圖表之部分，圖解法之簡便固不下于代數法也。著者之為此論，非謂幾何法在應用方面能與代數法爭其地位；不過就方法本身作理論上之評判耳。

本章中六例為用幾何法解聯立方程式之普通方法。因為例題，故詳述作圖手續以便明瞭。初學者或以為繁複曲折，十倍于代數法。殊不知各種計算手續如加也，減也，乘也，除也，均須一一于圖中以作圖方法代之，雖欲簡而烏可得乎。所幸各法均以一定幾何原理為根據；苟熟習其原理，更用適宜之記號，則作圖時必能因圖形上需要，隨機應變，而不致如入重圍，苦不得脫。至閱覽他人已作成之圖形，則必須先注意其消減未知量及方程式之次序。此二者乃全部圖解之綱領，綱領旣得則不難一目了然。

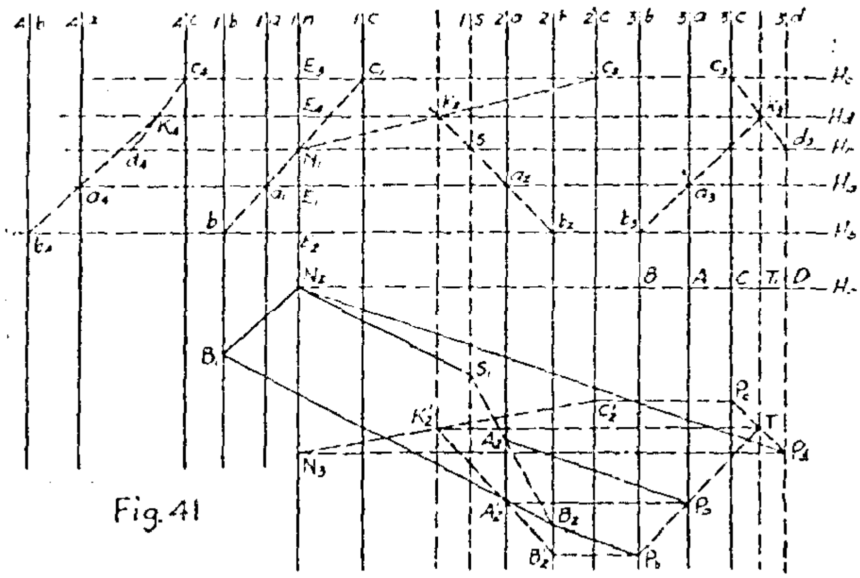


Fig.41

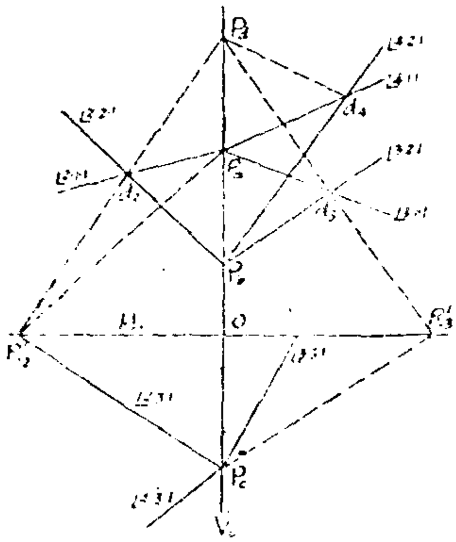


Fig.42

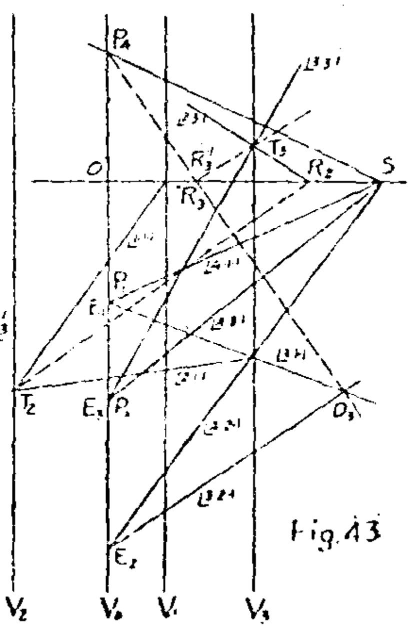


Fig.43

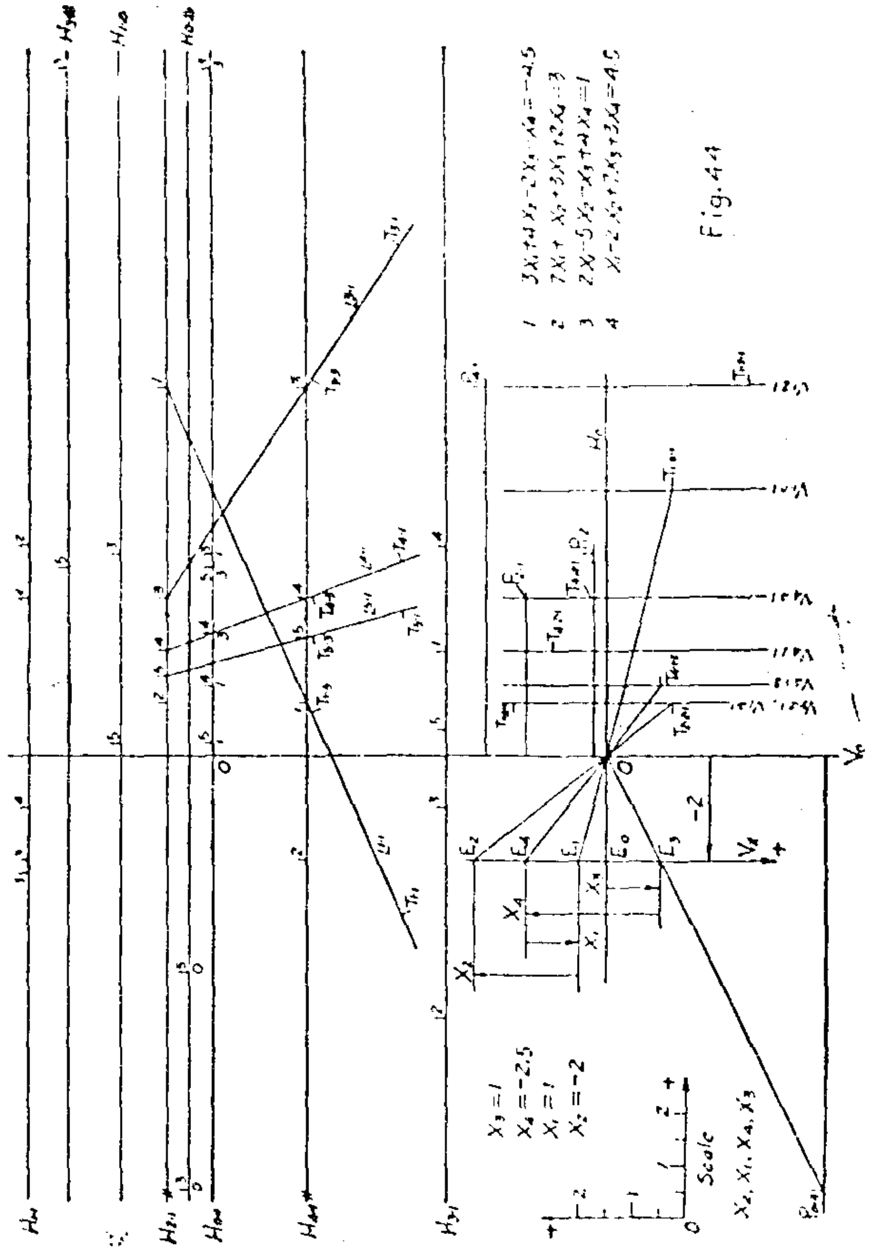
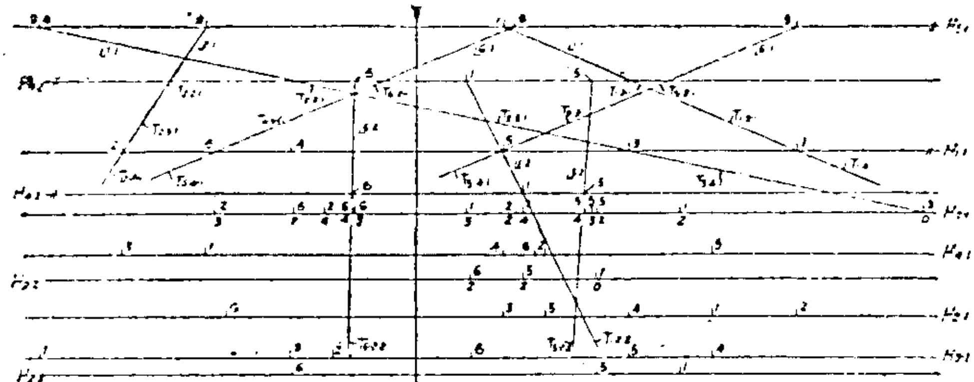


Fig. 44



1 $\quad 9X_1-7X_2+5X_3-3X_4+2X_5=-9.5$

2 $\quad 7X_1+4X_2+2X_3+5X_4+3X_5=-9$

3 $\quad -9X_1-2X_2-3X_3+7X_4+5X_5=2.5$

4 $\quad -5X_1+3X_2-7X_3+2X_4+7X_5=5.5$

5 $\quad 2X_1-5X_2-9X_3-9X_4+9X_5=4.5$

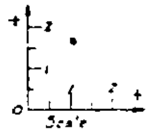
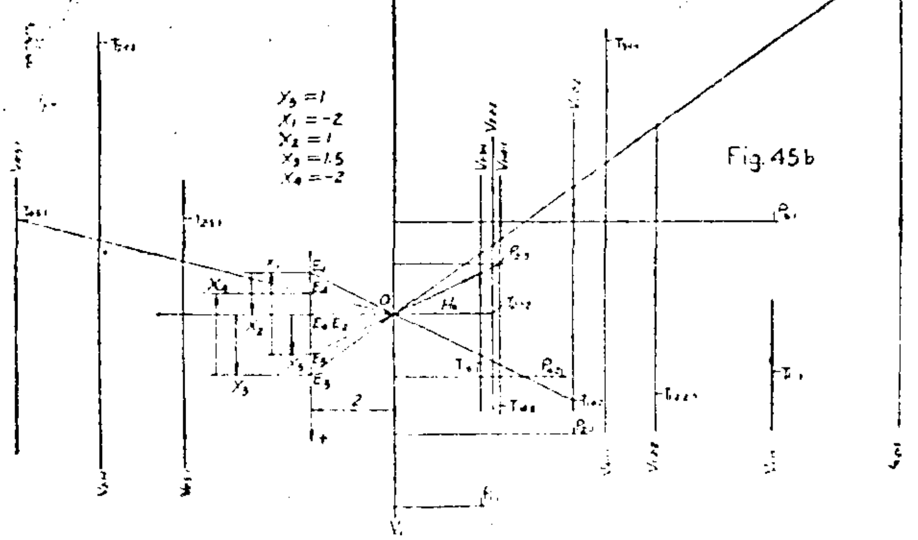


Fig. 45a



$X_5=1$
$X_1=-2$
$X_2=1$
$X_3=1.5$
$X_4=-2$

Fig. 45b

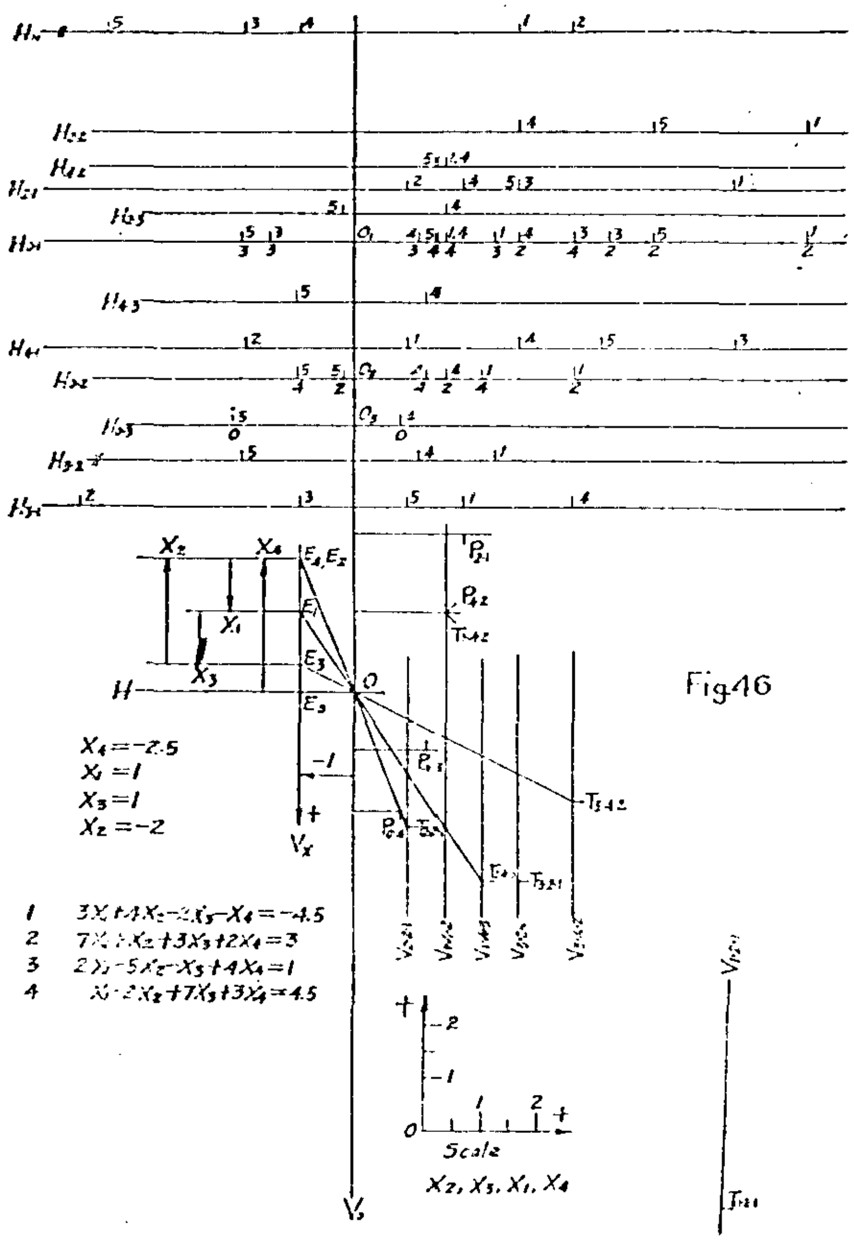

X₄ = −2.5
X₁ = 1
X₃ = 1
X₂ = −2
1 3X₁+4X₂−2X₃−X₄ = −4.5
2 7X₁+X₂+3X₃+2X₄ = 3
3 2X₁−5X₂−X₃+4X₄ = 1
4 X₁−2X₂+7X₃+3X₄ = 4.5
Scale
X₂, X₃, X₁, X₄

Fig 46

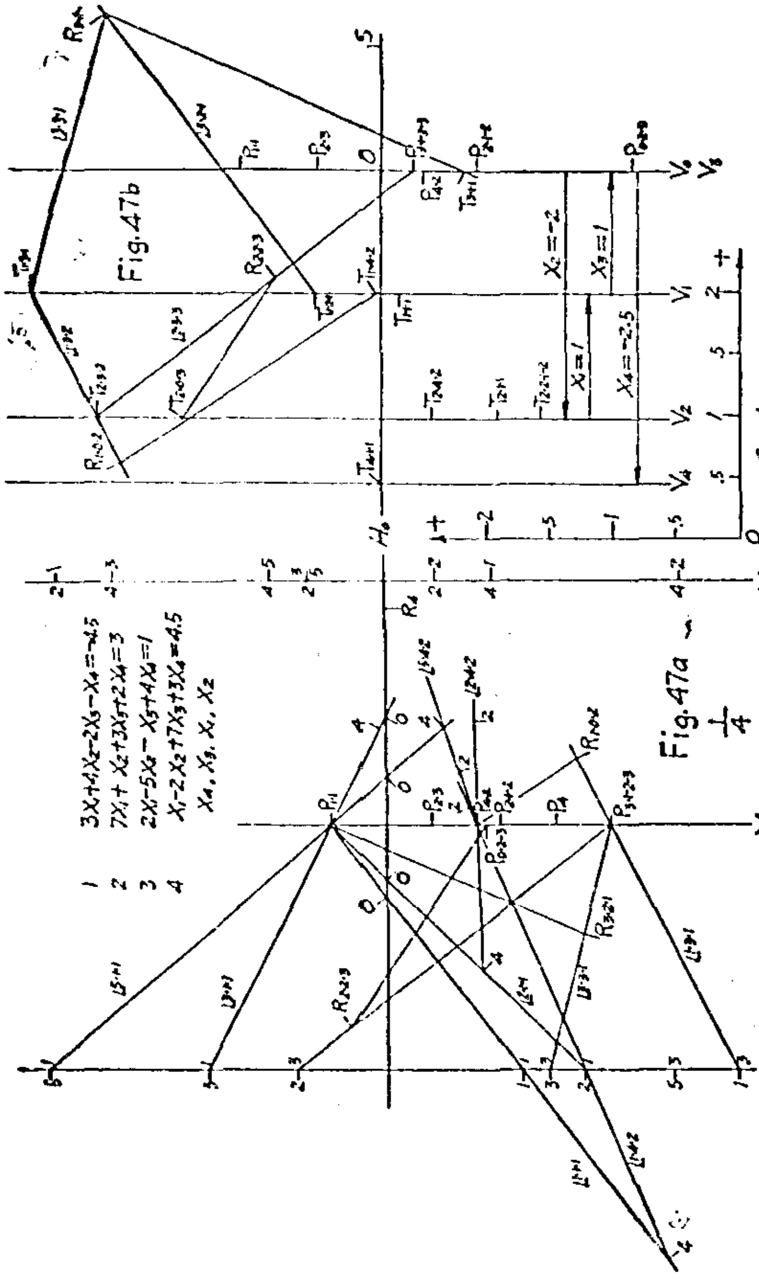
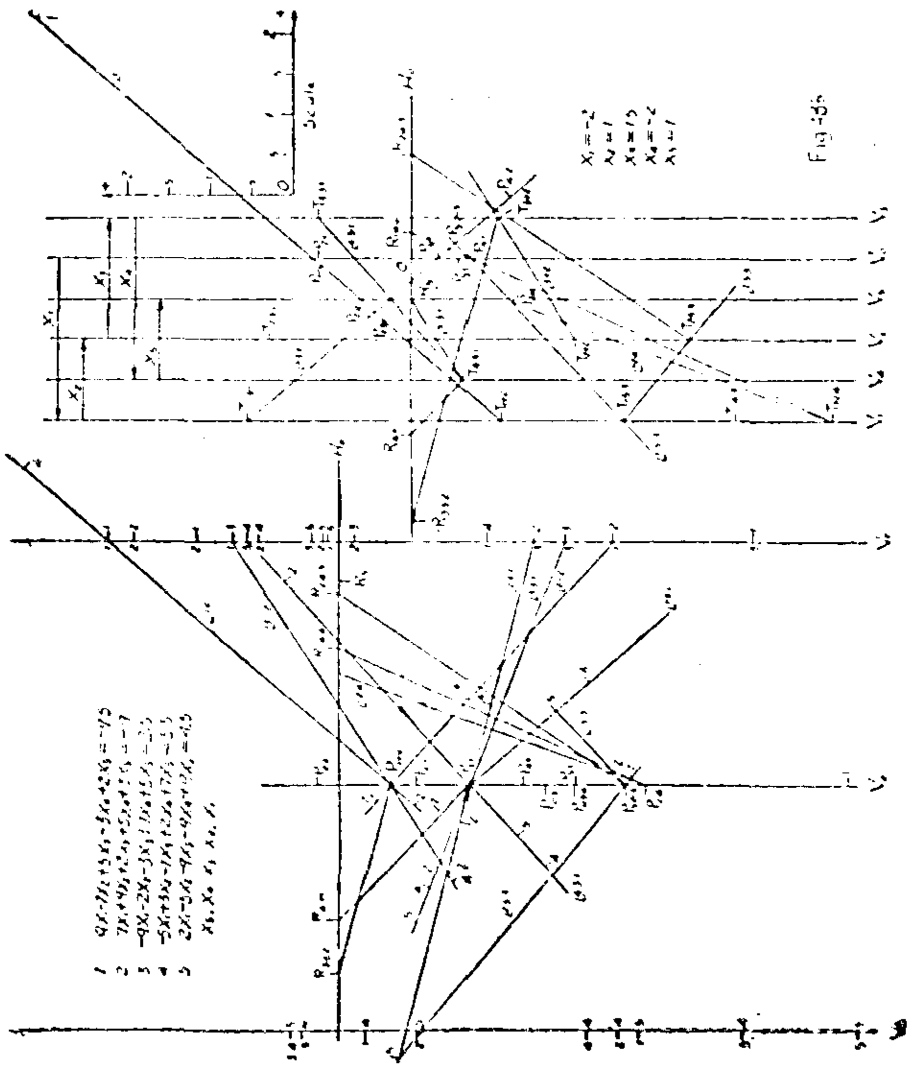


Fig. 47a

Fig. 47b



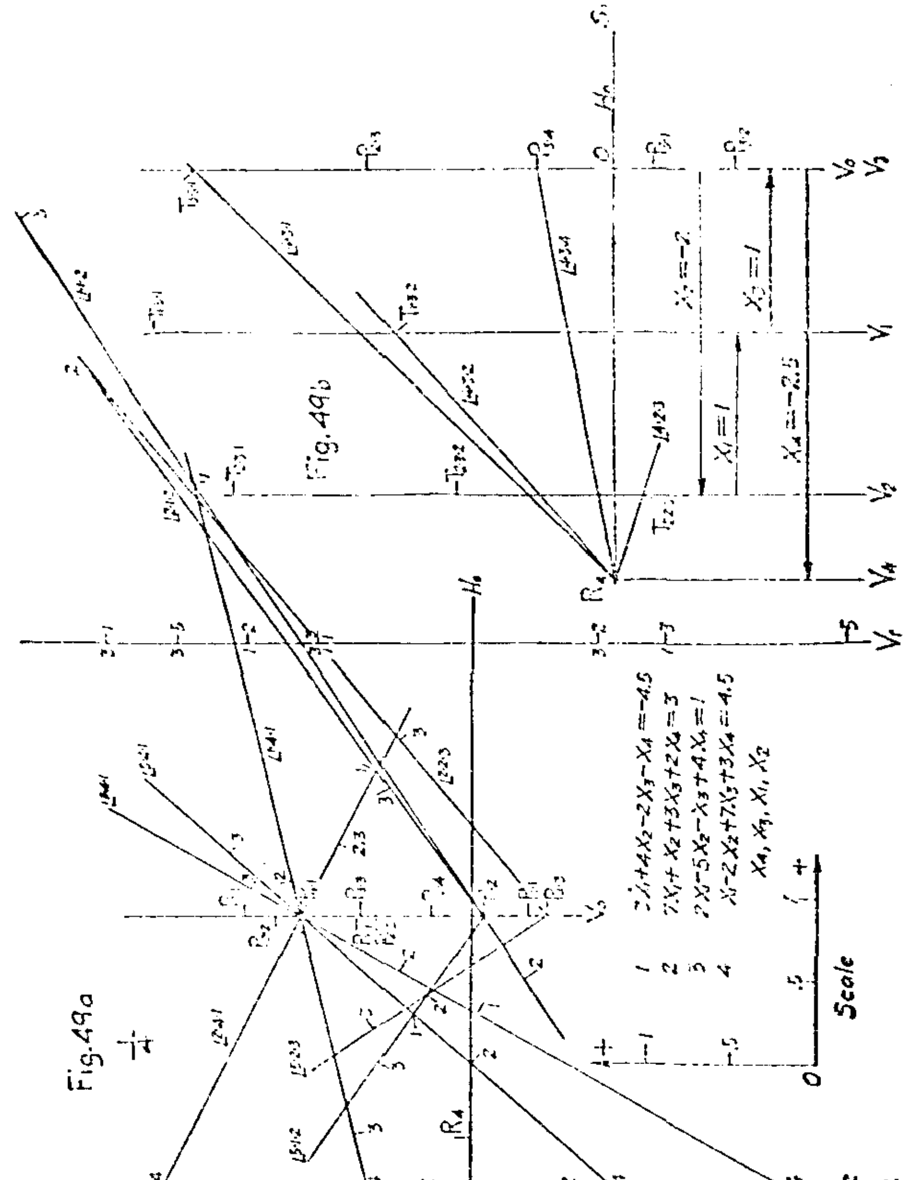


Fig. 49a
Fig. 49b
$2X_1+4X_2-2X_3-X_4=-4.5$
$7X_1+X_2+3X_3+2X_4=3$
$2X_1-5X_2-X_3+4X_4=1$
$X_1-2X_2+7X_3+3X_4=4.5$
X_4, X_3, X_1, X_2
Scale
$X_1=1$
$X_2=-2$
$X_3=1$
$X_4=-2.5$