算学小叢書

平面几何学
比例及相似形

山地哲太郎　林鶴一著
崔朝慶譯

商务印書館

8137號註冊證

定價 ¥0.75

算学小叢書

平面几何学

比例及相似形

山地哲太郎　林鶴一著
崔　朝　慶　譯

算學小叢書

平面幾何學—比例及相似形

崔朝慶譯

商　務　印　書　館　出　版
上海河南中路二一一號
〔上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號〕
新　華　書　店　總　經　售
商務印書館上海廠印刷
(51120)

1934年4月第1版　　開本 787×1092 1/32
1956年3月第6版　　印張 6 2/16
1956年3月上海第1次印刷　　印數 6,501—16,500
定價(8)￥0.75

目　　次

第二節 關於複比及二乘比之面積………… 78

平面幾何學—比例及相似形

第　一　章

關於比及比例之說明及定理

說比，有須豫述之事項，述之於次：

1. **定義**. 某量 A 爲同種類之量 B 之若干倍，則 A 爲 B 之**倍量**，B 爲 A 之**約量**.

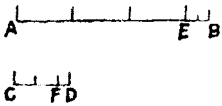
例如一丈爲一尺之倍量，而一尺爲一丈之約量.

2. **定義**. 二量 A, B, 同爲量 C 之倍量，則 C 爲 A 及 B 之**公約量**，或謂之**公度量**.

例如一升爲一斗及一斛之公約量.

3. **定義**. 有公約量之二量，謂之**可通約量**，無公約量之二量，謂之**不可通約量**.

4. **求二直線 AB, CD 之最大公約量.**



解. $AB>CD$, 以 CD 之長爲度, 從 AB 之 A 端起, 依 CD 之長截 AB 爲若干段, 生次之二種情形.

(1) AB 等於 CD 之若干倍之情形.

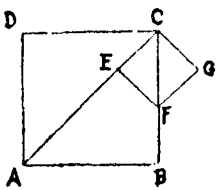
例如 $AB=4CD$, 則 CD 爲所求之最大公約量.

(2) AB 含 CD 之若干倍與殘餘之情形.

例如 $AB=3CD+EB$. 又以 EB 之長爲度, 從 CD 之 C 端起, 截 CD, 得 $CD=2EB+FD$, 再以 FD 之長爲度, 從 EB 之 E 端起, 截 EB, 設 $EB=2FD$, 則 $CD=5FD$, $AB=17FD$, 所求之最大公約量, 卽 FD 也.

此方法, 與算術及代數學中之求最大公約數, 其理相同.

設二直線爲正方形之一邊 BC 及其對角線 AC, 用前之方法, 求最大公約量.



正方形之對角線, 不能恰等於其一邊之若干倍, 故以 BC 爲度, 從 AC 之 A 端起, 截 AC 於 E, 殘餘爲 CE, 作垂線至 AC 上之 E 點, 此垂線與 BC 相交於 F, 則 $CE=EF=BF$, 故從 BC 減 CE, 其殘餘爲 CF, 由此知 CE, CF 乃第二正方形 CEFG 之一邊及對角線也.

卽求第一正方形 ABCD 之一邊及對角線之最大公約量, 變爲求第二正方形 CEFG 之一邊及對角線之最大公約量, 如是輾轉相求.

恆爲求正方形之一邊及對角線之最大公約量，而無終局之時，故此情形不能有公約量.

5. **定義.** **計算某量**，須先定同種類之量爲單位，而後檢定其量含此單位之若干倍，或爲此單位之若干分之一之幾倍.

某量之測度乃以單位計其量所得之數也. **整數**及**分數**，通稱爲**有理數**，或謂之**盡數**，奇零數謂之**無理數**，或謂之**不盡數**.

6. **定理 1.** 某量能以單位通約，其測度爲有理數.

證明. 以 A 表某量. U 爲單位，P 爲公約量.

假設 $A=mP$, $U=nP$. (m, n 爲正整數.)

因 $P=\frac{1}{n}U$. $\therefore$ $A=m\left(\frac{1}{n}U\right)=\frac{m}{n}U$.

卽 A 之測度爲有理數 $\frac{m}{n}$.

此定理之對偶亦眞，故得次之系 1.

系 1. 量之測度，非有理數，其量與單位不能通約.

系 2. 量之測度爲有理數，其量與單位能通約.

證明. 單位爲 U，量 A 之測度爲 $\frac{m}{n}$. (m, n 爲正整數.)

因 $A=\frac{m}{n}U=m\left(\frac{1}{n}U\right)$.

以 P 代 $\frac{1}{n}U$, 則 $A=m\left(\frac{1}{n}U\right)=mP,\ U=nP$.

∴ P 爲 A 及 U 之公約量.

由此知 A 與 U 爲可通約之量.

卽系 2 之對偶亦眞, 故得次之系 3.

系 3. 某量與其單位不可通約, 則其測度非有理數, 必爲無理數.

以正方形之一邊爲單位, 其對角線與單位不可通約, (見第 4 節) 故其測度爲無理數, 說明於次.

以 A 代正方形之一邊, P 代其對角線, 知 $2A>P>A$.

用 A 之十分之一, 則 $1.5A>P>1.4A$.

又用 A 之百分之一, 則 $1.52A>P>1.51A$.

又用 A 之千分之一, 則 $1.515A>P>1.514A$.

觀前之各式, P 之測度, 乃介於兩箇小數之間, 卽更用 A 之萬分之一, A 之十萬分之一, 其結果亦同, 故可決定 P 之測度, 不能爲分數.

換言之, 卽能決定 P 之測度, 不能爲有理數.

非有理數, 則不盡數也. 此不盡數, 乃 2 之平方根也.

如此之不盡數, 在實地計算時, 無法能求得眞正密合之數.

如以 1.415A 代 P, 則失之稍多, 而以 1.414A 代 P, 則失之微少, 考其誤差之略數爲 0.001A, 實不足 A 之千分之一也.

因不盡數無法能求得眞正密合之數，故運算時，卽用不盡數之近似數，失之稍多者，名曰過剩近似數，失之微少者，名曰不足近似數 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 皆不盡數 $\sqrt{2}$ 之過剩近似數, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 皆不盡數 $\sqrt{2}$ 之不足近似數也.

7. 定義. 量 A 對於與之同種類之量 B 之比，卽乘 B 可得 A 之數也.

換言之，則 A 之對於 B 之比，卽用 B 爲單位計 A 時，A 之測度也.

記 A 之對於 B 之比爲 A : B, 或用分數式 $\frac{A}{B}$.

A 爲比之**前項**，B 爲比之**後項**.

注意. A 之對於 B 之比，通稱爲 A 與 B 之比.

8. 定義. 某比與交換其前後項而成之比，謂之互爲**反比**.

如 A : B 與 B : A, 卽互爲反比.

9. 定理 2. 某比與其反比之積，等於 1.

設 $\frac{A}{B}=m$ 則 $\frac{B}{A}=\frac{1}{m}$. $\therefore$ $\frac{A}{B}\times\frac{B}{A}=m\times\frac{1}{m}=1$.

10. 定義. 量 A 與 B 之比，等於量 C 與 D 之比，則 A, B, C, D **成比例**，或謂之**比例量**.

記比例之法，有次之三式.

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

$$A:B=C:D$$

$$A:B::C:D$$

A 與 D 爲比例之**外項**，B 與 C 爲比例之**內項**，D 爲 A, B, C 之**第四比例項**. 又 A 與 C, B 與 D **爲相對應之項**.

注意. A, B, C, D, 皆爲同種類之量，則比例成立. 又 A, B 爲同種類之量，而 C, D 爲與 A, B 異種類者，比例亦能成立.

例如 A, B, C, D 皆爲線分，能成比例，A, B 爲線分，C, D 爲面積，亦無妨.

11. 定義. 有同種類之量 A, B, C, 若 A 與 B 之比，等於 B 與 C 之比，則此三量成比例，其 C 爲 A, B 之**第三比例項**，B 爲 A, C 之**比例中項**.

注意. 第四比例項與第三比例項之意義有區別，不可誤解.

12. 定理 3. 量 A 與 B 之比，A 及 B 能以同一之單位計之，其比等於以 B 之測度除 A 之測度之商.

證明. 假設 $A=aP$, $B=bP$.

因 $P=\frac{1}{b}B$ $\therefore$ $A=a\left(\frac{1}{b}B\right)=\frac{a}{b}B$.

故依比之定義 $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$.

系. 若 A, B, C, D 爲比例量, A, B 以同一之單位計之測度爲 a, b. C, D 以同一之單位計之測度爲 c, d, 必有次之關係.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

證明. 比例式爲 $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, 因 $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$, $\frac{C}{D}=\frac{c}{d}$, $\therefore$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

此最後之式, 乃代數學中所常用之比例式也.

故量之比之研究, 得歸於測度之比 (卽數之比) 之研究.

卽代數學中關於數之比之事項, 亦得視爲關於量之比之事項.

今以代數學中最重要之定理, 述之於次.

13. **定理 4**. a, b, c, d, …… 表任意之數, 有 I 至 IX 之九種變化如次.

I. 化 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 爲 $ad=bc$.

證明. 假設之式之兩邊, 同以 bd 乘之, 卽得終結之式.

II. 從 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 知 $a\gtreqless b$ 則 $c\gtreqless d$.

證明. $a>b$, 因 $\frac{a}{b}>1$, 則 $\frac{c}{d}>1$. $\therefore\ c>d$.

餘可依同法證明.

III. 化 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 爲 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.

此名曰反轉之理.

證明. 以假設之式之兩邊各除 1, 卽得終結之式.

IV. 化 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 爲 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

此名曰更迭之理.

證明. 假設之式之兩邊, 同以 $\frac{b}{c}$ 乘之, 卽得終結之式.

V. 化 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 爲 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

此名曰合比之理.

VI. 化 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 爲 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

此名曰分比之理.

VII. 化 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 爲 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

上之三定理, 讀者試自證明.

VIII. 設 $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}$, 則 $\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''}=\frac{a}{b}$.

此名曰加比之理.

證明. 以 r 代假設之比之值.

從 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a'}{b'}=\dfrac{a''}{b''}=r.$

得 $a=br,\quad a'=b'r,\quad a''=b''r.$

三式相加. $a+a'+a''=br+b'r+b''r=(b+b'+b'')r.$

$\therefore\ \dfrac{a+a'+a''}{b+b'+b''}=r=\dfrac{a}{b}.$

IX. k 爲任意之數, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{ka}{kb}.$

此易證明.

注意. I 至 IX 之變化, 乃此後屢應用者, 必須請記.

例 題 I.

1. 設 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, 求證 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{ma-nc}{mb-nd}$, ($m$, n 爲任意之數.)

*2. 設 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 之 a 爲最大, 求證 $a+d>b+c.$

(初學幾何學之人, 遇有符號 * 之題可省略.)

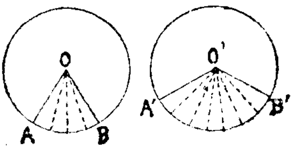
3. 設 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$, 求證 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{a^2}{b^2}$ 及 $\dfrac{a}{d}=\dfrac{a^3}{b^3}.$

4. 設 $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\dfrac{a}{b}$, 求證 $\mathrm{A}\times b=\mathrm{B}\times a.$ (A, B 爲量而 a, b 爲數也.)

第二章

中心角

14. 定理 5. 在等圓（或同圓）之兩箇中心角之比，等於其夾弧之比．



題意. $\angle AOB$, $\angle A'O'B'$ 為在等圓 O, O' 之中心角，AB, A'B' 為二角所夾之弧．

$$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{弧\ AB}{弧\ A'B'}$$

證明 I. $\angle AOB$, $\angle A'O'B'$ 為可通約之情形．

假定 $\angle AOB$ 等於公約量之四倍，$\angle A'O'B'$ 等於公約量之七倍．

$$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{4}{7}$$

因 $\angle AOB$ 之四等分之角，及 $\angle A'O'B'$ 之七等分之角，等於其公約量，而等圓（或同圓）之兩中心角相等，其對中心角之弧必相等，故弧 AB, A'B' 所分之一部分皆相等．

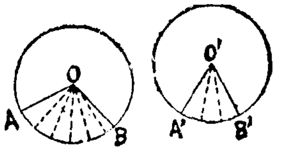
$$\therefore\ \frac{弧\ AB}{弧\ A'B'}=\frac{4}{7}$$

從上之二等式，依普通公理 $\dfrac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\dfrac{弧\ AB}{弧\ A'B'}$

*證明 II. $\angle AOB$, $\angle A'O'B'$ 爲不可通約之情形.

(初學幾何學之人, 遇有符號 * 之證明, 可省略.)

假如以 $\angle A'O'B'$ 之三分之一爲單位, 計 $\angle AOB$, 比其五倍大, 而比其六倍小, 則弧 AB 亦比其單位角之弧之五倍大, 而比其單位角之弧之六倍小.



即 $\frac{5}{3}<\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}<\frac{6}{3}$.

$\frac{5}{3}<\frac{弧\ AB}{弧\ A'B'}<\frac{6}{3}$.

次分 $\angle A'O'B'$ 爲四等分五等分十等分, 如前之方法行之, 得次之諸結果, 而其夾弧亦得相同之結果.

以 $\angle A'O'B'$ 之四分之一爲單位.

即 $\frac{6}{4}<\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}<\frac{7}{4}$, $\frac{6}{4}<\frac{弧\ AB}{弧\ A'B'}<\frac{7}{4}$.

又以 $\angle A'O'B'$ 之五分之一爲單位.

即 $\frac{8}{5}<\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}<\frac{9}{5}$, $\frac{8}{5}<\frac{弧\ AB}{弧\ A'B'}<\frac{9}{5}$.

又以 $\angle A'O'B'$ 之十分之一爲單位.

即 $\frac{17}{10}<\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}<\frac{18}{10}$, $\frac{17}{10}<\frac{弧\ AB}{弧\ A'B'}<\frac{18}{10}$,

上之諸結果，知能以次之代數式表之.

$$\frac{m}{n}<\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}<\frac{m+1}{n},\quad \frac{m}{n}<\frac{\text{弧 }AB}{\text{弧 }A'B'}<\frac{m+1}{n}.$$ (m, n 爲正整數)

由是觀之，則兩角之比及兩弧之比，同在分數 $\frac{m}{n}$，$\frac{m+1}{n}$ 之間，而其差爲 $\frac{1}{n}$.

故 $\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}\sim\frac{\text{弧 }AB}{\text{弧 }A'B'}<\frac{1}{n}$.

設 n 之值極大，則 $\frac{1}{n}$ 之值極小而近於零.

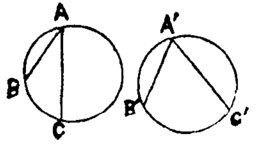
因 $\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}$ 及 $\frac{\text{弧 }AB}{\text{弧 }A'B'}$ 同爲一定之數，故 $\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}\sim\frac{\text{弧 }AB}{\text{弧 }A'B'}$ 亦爲一定之數，$\frac{1}{n}$ 近於零，而 $\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}\sim\frac{\text{弧 }AB}{\text{弧 }A'B'}$ 小於 $\frac{1}{n}$，則其一定數爲零可知也.

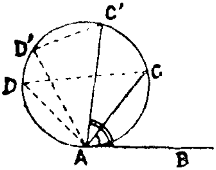
$$\therefore\quad \frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}\sim\frac{\text{弧 }AB}{\text{弧 }A'B'}=0,\ \text{卽}\ \frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{\text{弧 }AB}{\text{弧 }A'B'}.$$

注意. 弦之大小，雖關於對弦之劣角及劣弧之大小，而不能成比例.

例題 II.

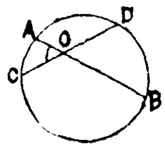
1. 等圓或同圓之兩圓周角，與其夾弧能成比例.

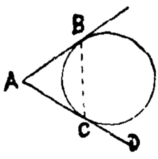




2. 切線與從切點引出之弦所夾之角，與其角內之弧能成比例.

3. 頂點在圓內之角，與此角及對頂角之二邊所夾之弧之和，能成比例，又角之頂點在於圓外則如何.



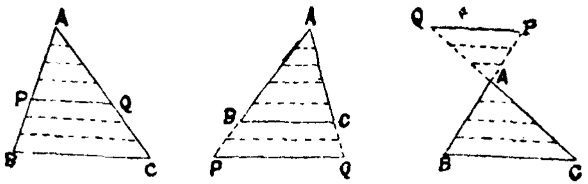


4. 從圓外之一點引二切線所夾之角，與依切點所分圓之共軛弧之差，能成比例.

第三章

比例線

15. 定理 6. 與三角形之底邊平行之直線，分他二邊為等比.



題意. 依 $\triangle ABC$ 之底邊 BC, 引平行之直線, 與他二邊 AB, AC (或延長線) 相交於 P, Q, 則 $\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{CQ}$.

證明. 設 AP, BP 為其公約量之 m, n 倍, 則 $\frac{AP}{BP}=\frac{m}{n}$, 分 AP, BP 為 m, n 等分, 過各分點引與底邊 BC 平行之直線, 知亦分 AQ, CQ 為 m, n 等分, 則 $\frac{AQ}{CQ}=\frac{m}{n}$, 故 $\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{CQ}$.

注意. 若 AP, BP 無公約量, 可依定理 5 證明之, 今省略.

系. 從此定理, 得次之比例式.

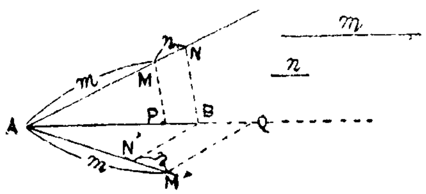
[I]　BP : AP=CQ : AQ　(反轉)

[II]　AP : AQ=BP : CQ　(更迭)

[III]　AB : BP=AC : CQ　(合比)

[IV]　AB : AP=AC : AQ　(I 之合比)

16.　直線 AB, 得依定比 $m:n$ 內分或外分.

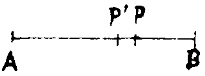


從 AB 之 A 端, 任意引一直線, 在此直線上 取 M, N 二點, 令 $AM=m$, $MN=n$, 連結 BN, 依 NB 平行, 從 M 引直線, 與 AB 相交於 P, 得比例式爲 $AP:PB=m:n$.

又從 AB 之 A 端, 任意引一直線, 在此直線上, 取 M', N' 二點, 令 $AM'=m$, $M'N'=n$, 連結 BN', 依 N'B 平行, 從 M' 引直線, 與 AB 相交於 Q, 得比例式爲 $AQ:BQ=m:n$.

故 P 爲內分點, Q 爲外分點.

17.　定理 7.　依某比內分或外分定直線, 惟有



題意. 依定比 $m:n$ 內分或外分 AB 直線，不能有兩箇內分點，亦不能有兩箇外分點.

證明. I. 內分之情形.

假設 P, P′ 爲依 $m:n$ 內分 AB 之二點.

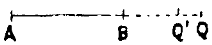
則 $\frac{AP}{BP}=\frac{m}{n}$, $\frac{AP'}{BP'}=\frac{m}{n}$.

依合比之理 $\frac{AP+BP}{BP}=\frac{m+n}{n}$, $\frac{AP'+BP'}{BP'}=\frac{m+n}{n}$.

即 $\frac{AB}{BP}=\frac{m+n}{n}$, $\frac{AB}{BP'}=\frac{m+n}{n}$, 依普通公理 $\frac{AB}{BP}=\frac{AB}{BP'}$.

故 $BP=BP'$, P 與 P′ 不能不相合.

由此知依 $m:n$ 內分 AB, 僅有一箇內分點.



II. 外分之情形.

假設 Q, Q′ 爲依 $m:n$ 外分 AB 之二點.

則 $\frac{AQ}{BQ}=\frac{m}{n}$, $\frac{AQ'}{BQ'}=\frac{m}{n}$.

依分比之理, $\frac{AQ-BQ}{BQ}=\frac{m-n}{n}$, $\frac{AQ'-BQ'}{BQ'}=\frac{m-n}{n}$.

即 $\frac{AB}{BQ}=\frac{m-n}{n}$, $\frac{AB}{BQ'}=\frac{m-n}{n}$, 依普通公理 $\frac{AB}{BQ}=\frac{AB}{BQ'}$.

故 $BQ=BQ'$. Q 與 Q′ 不能不相合.

由此知依 $m:n$ 外分 AB, 僅有一箇外分點.

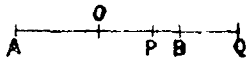
18. 定義. P, Q 爲直線 AB 之同比內分點及外分點，則此直線合內分外分而言之，名曰**調和分割**，P, Q 二點，名曰**調和共軛點**，A, P, B, Q 四點，名曰**調和列點**.

注意 1. 記調和列點 A, P, B, Q, 通例爲 ABPQ, 或爲 APBQ, 或爲 AB; PQ.

注意 2. 設直線 AB 依定比調和分割，內分點爲 P, 外分點爲 Q, AB 之中點爲 O, 則 P 及 Q 之位置如次.

$AP : BP = AQ : BQ$

$= m : n$

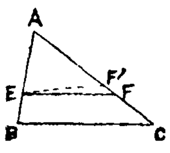


(1) $m > n$, 則 P, Q 同在從 O 向 B 之一方.

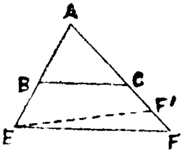
(2) $m < n$, 則 P, Q 同在從 O 向 A 之一方.

(3) $m = n$, 則 P 合於 O, 而 Q 在兩方之無限遠.

19. 定理 8. 依某比內分或外分三角形之二邊，連結內分之二點或外分之二點之直線，與他一邊平行



題意. 依調和分割 $\triangle ABC$ 之二邊 AB, AC 於 E, F, 則 $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{AF}{CF}$ 而 $EF \parallel BC$.



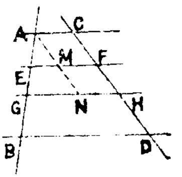
證明. 設依 BC 平行, 從 AB 邊(或延長線)上之 E 點引直線, 與 AC 邊(或延長線)相交之點爲 F', 則 $\frac{AE}{BE}=\frac{AF'}{CF'}$.

因 $\frac{AE}{BE}=\frac{AF}{CF}$, $\therefore$ $\frac{AF}{CF}=\frac{AF'}{CF'}$.

F' 與 F 不能不相合. (定理 7)

故 EF∥BC.

系. 任意作若干平行線, 截二定直線爲許多部分, 則其相對之二部分之比, 皆爲同比.



題意. AC, EF, GH, BD 四平行線, 截二定直線 AB, CD 於 A, E, G, B 及 C, F, H, D, 則 $\frac{AE}{CF}=\frac{EG}{FH}=\frac{GB}{HD}$.

證明. 依 CD 平行, 從 A 引直線與 EF, GH 交於 M, N, 則 AM=CF, MN=FH.

因 AG, AN 爲 △AGN 之二邊, EM 與底邊 GN 平行.

依定理 6 $\frac{AE}{EG}=\frac{AM}{MN}=\frac{CF}{FH}$, 又依更迭之理 $\frac{AE}{CF}=\frac{EG}{FH}$.

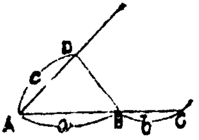
用同法得 $\frac{EG}{FH}=\frac{GB}{HD}$, $\therefore$ $\frac{AE}{CF}=\frac{EG}{FH}=\frac{GB}{HD}$.

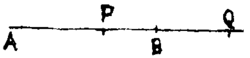
注意.

$\frac{AE}{CF}=\frac{EG}{FH}=\frac{GB}{HD}$, 或記爲 AE : EG : GB=CF : FH : HD.

例　題　III.

1. 有三直線 a, b, c, 求其第四比例項.



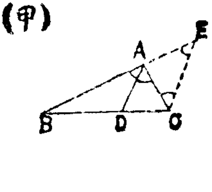


2. 有二直線 a, b, 求其第三比例項.

3. 設直線 AB 調和分割於 P, Q, 求證直線 PQ 亦調和分割於 A, B.

20. 定理 9. 三角形之一箇內角及外角之二等分線與其對邊之交點, 即其對邊依他二邊之比之內分點及外分點.

題意. AD, AD′ 爲 △ABC 之 A 角及其外角之二等分線.



則 $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}$. (甲圖)

$\dfrac{BD'}{CD'}=\dfrac{AB}{AC}$. (乙圖)

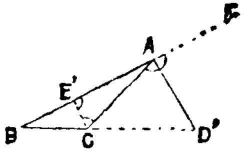
證明. I. 內分之情形.

依 DA 平行, 從 C 引直線, 與延長 BA 交於 E, 依定理 6

$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AE}$.

因 $\angle E=\angle BAD=\angle DAC=\angle ACE$, 知 $AE=AC$.

$\therefore\ \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.



II. 外分之情形.

依 D'A 平行, 從 C 引直線, 與 BA 交於 E', 依定理 6 $\dfrac{BD'}{CD'}=\dfrac{AB}{AE'}$.

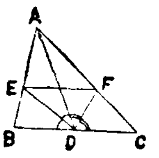
因 $\angle AE'C=\angle FAD'=\angle CAD'=\angle ACE'$, 知 $AE'=AC$.

$\therefore\ \dfrac{BD'}{CD'}=\dfrac{AB}{AC}$.

系. 定理 9 之逆亦眞.

讀者試依定理 7 定理 8 之方法自證明之.

主要問題 1. 三角形 ABC 之底邊 BC 之中點爲 D, $\angle ADB$, $\angle ADC$ 之二等分線, 與他二邊之交點爲 E, F, 求證 EF 與 BC 平行.



證明. $\angle ADE=\angle EDB$.

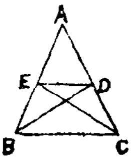
$\angle ADF=\angle FDC$.

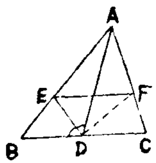
依定理 9 $\begin{cases}\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{AD}{BD}.\\[2ex]\dfrac{AF}{FC}=\dfrac{AD}{DC}.\end{cases}$

因 $BD=DC$, 故 $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{AF}{FC}$, 由定理 8, 知 $EF \mathbin{/\!/} BC$.

例　題　IV.

1. 三角形 ABC 之 B, C 二角之二等分線，與其對邊 AC, AB 相交於 D, E, 若 ED 與 BC 平行，則 △ABC 爲二等邊三角形.

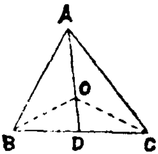


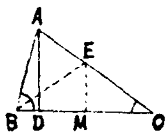


2. 依三角形 ABC 之底邊 BC 平行，引直線與他二邊 AB, AC 相交於 E, F, 底邊 BC 之中點爲 D, 連結 DE, DF, 若 DE 爲 ∠ADB之二等分線，則 DF 必爲 ∠ADC 之二等分線.

3. 延長主要問題 I 之 ED, FD, 與延長 AC, AB 相交於 E′, F′, 求證 F′ E′ 與 BC 平行.

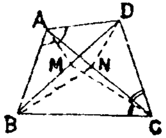
4. 三角形 ABC 之頂角 A 之二等分線爲 AD, 內心爲 O, 則底邊與他二邊之和之比，等於 OD 與 OA 之比.



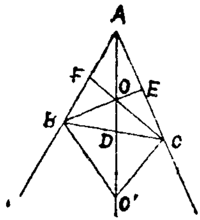


*5. 三角形 ABC 之底角 B 爲底角 C 之二倍，求證底邊之中點 M 與高之趾 D 之距離，等於 AB 邊之半.

6. 四邊形ABCD 之 A, C 二角之二等分線, 相交於對角線 BD 之上, 則 B, D 二角之二等分線, 亦必相交於對角線 AC 之上.

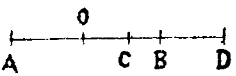


*7. 用定理 9, 證明三角形之各角之二等分線相交於一點.



*8. 用定理 9, 證明三角形之一內角之二等分線, 與他二角之外角之二等分線相交於一點.

主要問題 2. AB; CD 爲調和列點, O 爲 AB 之中點, 則 OC : OB = OB : OD.



證明. 因 ABCD 爲調和列點.

$\therefore\ \dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AD}{BD}$, 依合比分比之理, $\dfrac{AC+BC}{AC-BC}=\dfrac{AD+BD}{AD-BD}$.

又因 $AC+BC=(BO+OC)+(BO-OC)=2\cdot OB.$

$AC-BC=(BO+OC)-(BO-OC)=2\cdot OC.$

$AD+BD=(OD+OB)+(OD-OB)=2\cdot OD.$

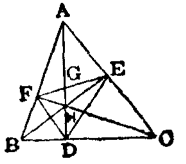
$AD-BD=(OD+OB)-(OD-OB)=2\cdot OB.$

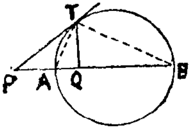
$\therefore\ \frac{2\cdot OB}{2\cdot OC}=\frac{2\cdot OD}{2\cdot OB}$, 兩邊之分子分母同以 2 約之, $\frac{OB}{OC}=\frac{OD}{OB}$.

依反轉之理, $\frac{OC}{OB}=\frac{OB}{OD}$, 卽 $OC:OB=OB:OD$.

例 題 V.

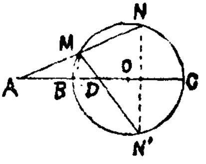
1\. 從 △ABC 之頂角 A 至 BC 邊引垂線 AD, 與垂足三角形 DEF 之邊 EF 相交於 G, 求證 A, D, G 與垂心 H 爲調和列點.

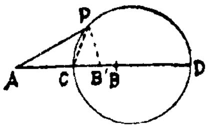




2\. 圓之直徑 AB, 延長 A 端至圓外, 與任意之切線交於 P, 從切點 T 向 AB 引垂線 TQ, 則 P, A, Q, B 爲調和列點.

3\. 從圓 O 外之 A 點引割線, 與圓周交於 M, N, 又從 A 引通過圓心 O 之直線, 與圓周交於 B, C, (BC 卽圓之直徑) 關於直徑, N 之對稱點爲 N′, 連結 MN′, 與 BC 交於 D, 求證 A, B, D, C 爲調和列點.





*4. C, D 爲直線 AB 之內分點及外分點，以 CD 爲直徑，畫圓，在圓周上任意取一點 P，則 AP 與 BP 之比，等於 AC 與 BC 之比.

解法注意 宜證明從 P 引 PB'，若 $\angle CPB'=\angle APC$，則 B 合於 B'.

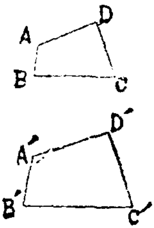
第 四 章

相 似 多 角 形

21. 定義. 一箇多角形之各角，順次與同邊數之他多角形之各角相等，則此兩箇多角形謂之**互爲等角**，其兩箇多角形彼此相等之角，名曰**對應角**，在對應角之間之邊，名曰**對應邊**.

互爲等角之多角形之對應邊之比，皆相等者，謂之**相似多角形**，表相似形之符號爲∽.

例如兩箇四角形 ABCD, A'B'C'D.'



$\angle A = \angle A'$,　$\angle B = \angle B'$.

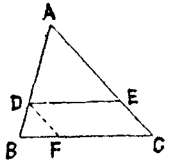
$\angle C = \angle C'$,　$\angle D = \angle D'$.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}.$$

則　$ABCD \backsim A'B'C'D'$.

注意. 若相似多角形之對應邊之比等於 1，則兩形爲全等形.

22. 定理 10. 依三角形之一邊平行，從他二邊之一邊上引直線至又一邊上，所成之三角形，與原三角形互相似.



題意. 依三角形 ABC 之 BC 邊平行,引直線與他二邊 AB, AC 相交於 D, E, 成三角形 ADE.

則 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

證明. $DE /\!/ BC$, $\therefore$ $\triangle ADE$ 之各角與 $\triangle ABC$ 之各角互相等.

依定理 6, $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{CE}$, 化得 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$……(1)

又依 AC 平行, 從 D 引直線, 與 BC 交於 F, 則 $DE=FC$.

$\therefore$ $\frac{AD}{AB}=\frac{FC}{BC}=\frac{DE}{BC}$……(2)

合 (1), (2) 兩式, 得 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$, 兩三角形之對應邊之比相等.

故 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

注意. 述於次之三定理, 爲相似多角形之基本定理, 其應用甚廣, 必須諳記.

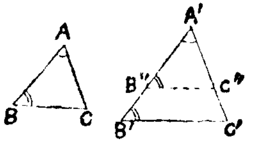
23. 定理 11. 兩三角形之角, 順次互相等, 則兩形爲相似形.

題意. 兩三角形 ABC, A'B'C'.

若 $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$

則 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

證明 在 AB 之對應邊 A′B′ 上取 B″ 點，令 A′B″=AB，依 B′C′ 平行，從 B″ 引直線，與 A′C′ 交於 C″，則 A′C″=AC，B″C″=BC.



∴ △ABC=△A′B″C″.

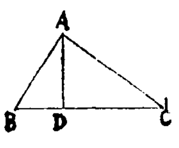
依定理 10. △A′B′C′∽△A′B″C″. 故 △ABC∽△A′B′C′.

系 1. 直角三角形，知有一箇銳角，與他直角三角形之一箇銳角相等，則兩形為相似形.

系 2. 二等邊三角形之頂角，(或一箇底角) 與他二等邊三角形之頂角 (或一箇底角) 相等，則兩形為相似形.

此系 1 系 2，讀者試自證明之.

主要問題 3. 從直角三角形之直角頂，向斜邊引垂線，分斜邊為大小二分，其垂線為斜邊之大小二分之比例中項.



題意. 從直角三角形 ABC 之直角頂 A，至斜邊 BC 上，引垂線 AD，則 BD : AD=AD : DC.

證明. AD 分 $\triangle ABC$ 爲 $\triangle ADB$, $\triangle CDA$, $\angle ADB$, $\angle CAB$ 同爲直角, $\therefore$ $\angle ABD$, $\angle CAD$ 同爲 $\angle BAD$ 之餘角.

由此知 $\angle ABD=\angle CAD$, $\angle BAD=\angle ACD$.

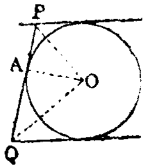
依定理 11 之系 1, $\triangle ADB \backsim \triangle CDA$.

故 $BD:AD=AD:DC$.

注意 1. $\triangle DBA \backsim \triangle DAC \backsim \triangle ABC$.

注意 2. 本題如先證明其比例式，宜檢定此等之直線，能否成相似之兩三角形，若證明兩三角形爲相似形，得記其對應邊爲比例式.

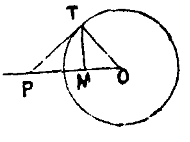
例　題　VI.



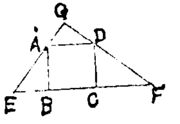
1. 圓 O 之二平行切線，與切於圓周之 A 點之第三切線相交於 P, Q, 則圓之半徑爲 AP, AQ 之比例中項.

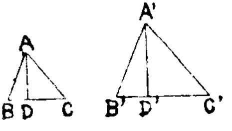
2. 直角三角形之一邊，爲投於斜邊上之正射影與斜邊之比例中項.

3. 從圓 O 外之一點 P, 引 PT 切線，T 爲切點，連結 PO, OT, 又從切點, T 至 PO 上，引垂線 TM, 求證圓之半徑爲 OM, OP 之比例中項.



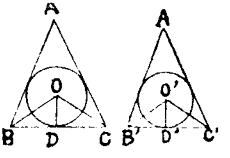
4. 正方形 ABCD 內接於直角三角形 GEF，正方形之一邊 BC，在直角三角形之斜邊 EF 之上，求證 EB 與 BC 之比等於 BC 與 CF 之比.

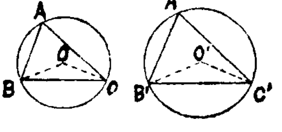




5. 從相似三角形之對應角頂至對邊之垂線之比，等於對應邊之比.

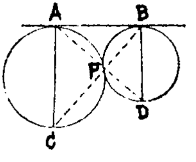
6. 相似三角形之內切圓之半徑之比，等於對應邊之比.

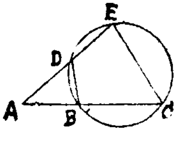




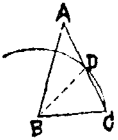
7. 相似三角形之外接圓之半徑之比，等於對應邊之比.

8. 外切兩圓之公切線 AB，(A 及 B 爲切點) 爲兩圓之直徑之比例中項.

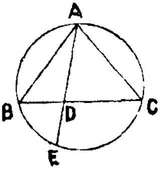




9. 從圓外之一點 A，引二割線，一與圓周交於 B, C，一與圓周交於 D, E，連結 BD, CE，求證 △ABD∽△AEC.



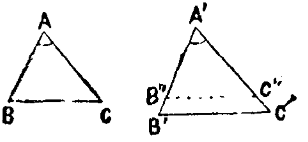
10. 以二等邊三角形 ABC 之底 BC 爲半徑, B 爲中心, 畫圓, 其圓周與 AC 邊交於 D, 求證 BC, 爲 AC, CD 之比例中項.



11. 從二等邊三角形之頂點 A 引直線, 與底邊及外接圓之周交於 D, E, 則 AB 爲 AD, AE 之比例中項.

24. 定理 12. 兩三角形知有一角相等, 又知夾此角之對應邊之比相等, 則兩形爲相似形.

題意. 兩三角形 ABC, A′B′C′.



$\angle A=\angle A'$, $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

則 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

證明. 在 $\triangle A'B'C'$ 之邊 $A'B'$, $A'C'$ 上, 取 B'', C'' 二點.

令 $A'B''=AB$, $A'C''=AC$, 則 $B''C''=BC$.

∴ $\triangle A'B''C''=\triangle ABC$.

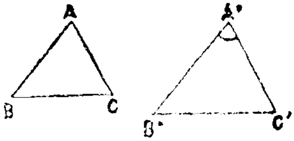
從 $AB : A'B'=AC : A'C'$, 化得 $A'B' : A'C'=AB : AC$.

即 $A'B' : A'C'=A'B'' : A'C''$, 由此知 $B''C'' \parallel B'C'$.

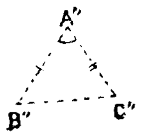
依定理 10. $\triangle A'B''C'' \backsim \triangle A'B'C'$, 故 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

25. 定理 13. 三角形之三邊，與他三角形之對應邊之比相等；則兩形爲相似形．

題意．兩三角形 ABC, A′B′C′.



假設 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$.



則 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

證明．作 $\triangle A''B''C''$ 令 $\angle A''=\angle A'$,

$A''B''=AB$, $A''C''=AC$.

從 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$ 知 $\frac{A''B''}{A'B'}=\frac{A''C''}{A'C'}$, 且 $\angle A''=\angle A'$.

依定理 12,

$\triangle A''B''C'' \backsim \triangle A'B'C'$, $\therefore \frac{A''B''}{A'B'}=\frac{B''C''}{B'C'}=\frac{C''A''}{C'A'}$.

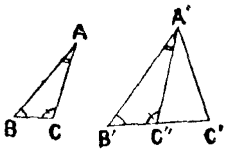
與假設之比例式對照，則 $A''B''=AB$, $B''C''=BC$, $C''A''=CA$.

知 $\triangle A''B''C''\equiv\triangle ABC$, 故 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

以上所述之定理 11, 12, 13, 總括於次．

[I]	兩三角形之角，順次互相等．	兩形爲相似形
[II]	兩三角形知有一角相等，又知夾此角之對應邊之比相等．	兩形爲相似形
[III]	兩三角形之對應邊之比相等．	兩形爲相似形

主要問題 4. 知 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 之 $\angle B = \angle B'$, 又 $AB : A'B' = AC : A'C'$, 則 $\angle C$, $\angle C'$ 相等, 或互爲補角, 若 $\angle C = \angle C'$, 則兩形爲相似形.



證明. 兩三角形 ABC, $A'B'C'$.

設 $\angle B = \angle B'$,

$AB : A'B' = AC : A'C'$.

又 $\angle A = \angle A'$, 則 $\angle C = \angle C'$.

$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

若 $\angle A \neq \angle A'$, 從 A' 引直線, 與 $B'C'$ 相交於 C'', 令 $\angle B'A'C'' = \angle A$.

則 $\angle A'C''B' = \angle C$, $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C''$.

$\therefore$ $AB : A'B' = AC : A'C''$.

與假設之比例式 $AB : A'B' = AC : A'C'$ 對照.

知 $A'C'' = A'C'$, 故 $\angle A'C''C' = \angle A'C'C''$.

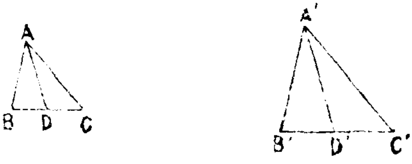
因 $\angle A'C''B' + \angle A'C''C' = 2R\angle$.

故 $\angle C + \angle C' = 2R\angle$.

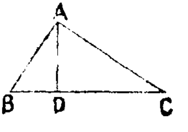
例 題 VII.

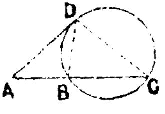
1. 兩直角三角形之斜邊與他一邊之比相等，求證兩形爲相似形.

2. 相似三角形之對應邊上之中線之比，等於對應邊之比.



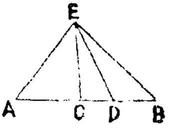
3. 從三角形之一角頂至對邊之垂線，分對邊爲二部分，若垂線爲邊之二部分之比例中項，則此三角形爲直角三角形.



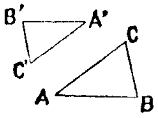


4. 從一直線 ABC 之 A 端，引直線 AD，若 AD 爲 AB，AC 之比例中項，則 AD 切於過 B，C，D 三點之圓.

5. 在直線 AB 上，取 C，D 二點，令 AB : AD = AD : AC，又從 A 不拘何方向引直線 AE，令等於 AD，則 ED 爲 ∠BEC 之二等分線.



主要問題 5. 三角形之邊，與他三角形之邊俱平行，或俱互爲垂直，則兩形爲相似形。

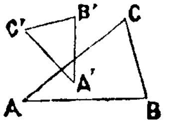


題意. 兩三角形 ABC, A′B′C′.

$$\left.\begin{array}{l}AB \parallel A'B' \\ BC \parallel B'C' \\ AC \parallel A'C'\end{array}\right\} \text{或} \left.\begin{array}{l}AB \perp A'B' \\ BC \perp B'C' \\ AC \perp A'C'\end{array}\right\}$$

則 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

證明. 一角之二邊，與他一角之二邊俱平行，或俱互爲垂直，則此二角或相等，或互爲補角.（參觀平面幾何教科書平行線及三角形之部）



∴ $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 之各角，生次之關係.

$\angle A = \angle A'$，或 $\angle A + \angle A' = 2R\angle$.

$\angle B = \angle B'$，或 $\angle B + \angle B' = 2R\angle$.

$\angle C = \angle C'$，或 $\angle C + \angle C' = 2R\angle$.

由此知 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 之關係如次.

(1) $\triangle ABC$ 之三角與 $\triangle A'B'C'$ 之三角皆互爲補角之情形.

即 $\angle A + \angle A' = 2R\angle$.

$\angle B + \angle B' = 2R\angle$.

$\angle C + \angle C' = 2R\angle$.

此情形，兩三角形之內角之和爲六直角，不合於理.

(2) $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 有一角相等二角互爲補角之情形.

即 $\angle A=\angle A'$.

$\angle B+\angle B'=2R\angle$.

$\angle C+\angle C'=2R\angle$.

此情形, 兩三角形之內角之和超過四直角, 不合於理.

(3) $\triangle ABC$ 之各角等於 $\triangle A'B'C'$ 之各角之情形.

即 $\angle A=\angle A'$.

$\angle B=\angle B'$.

$\angle C=\angle C'$.

此情形, 能合於理, 即 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

注意. 此兩三角形之對應邊, 或俱平行, 或互爲垂直.

解關於相似三角形之雜題, 有須注意之事, 特揭載於次.

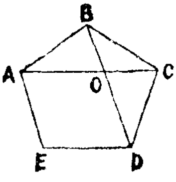
(1) 平行線與他直線相交, 作成相似三角形, 能誘導比例, 故試添引平行線, 爲解題時最緊要之事實.

(2) 欲明瞭角之關係, 須畫圓周.

(3) 關於直線之和及差之問題, 應用合比分比及加比之理, 必須熟記.

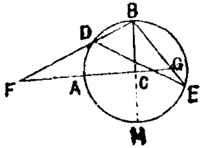
雜 題 I.

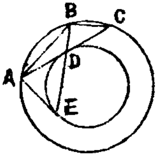
1. 相似三角形之周之比，等於對應邊之比.



2. 正五角形 ABCDE 之對角線 AC, BD 相交於 O, 則 BC 爲 AC, CO 之比例中項.

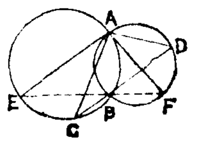
3. 圓之半徑 CA, CB 互爲垂直, DE 爲任意之弦, 延長 AC 之 A 端, 與 BD 之延長交於 F, 延長 AC 之 C 端, 與 BE 交於 G, 則兩三角形 BFG, BED 爲相似形。



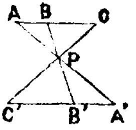


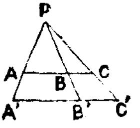
4. 從兩同心圓之外圓周上任意之點 A 引切內圓之二切線 AD, AE, (D 與 E 爲切點) 延長 ED, AD 與外圓周交於 B 及 C, 則兩三角形 ABE, BCD 爲相似形.

5. 兩圓相交於 A, B, 又引通過 B 點之直線 CBD, 與兩圓相交於 C, D, 則 AC, AD 之比, 等於兩圓之直徑之比.



6. 從任意之一點 P 引出三直線，截平行線於 A, B, C 及 A′, B′, C′, 則 AB, BC 之比，等於 A′B′, B′C′ 之比.





注意. 問題 6 之逆之證明法，最爲重要，示之於次.

主要問題 6. 平行線 AB, CD, 依相等之比內分或外分於 E, F, 則 EF 與 AC, BD 平行，或同交於一點.

證明. AE : CF = EB : FD, 有 AB = CD 或 AB ≠ CD 之兩種情形.

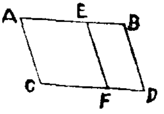
I. 若 AB = CD.

則 AE = CF, EB = FD.

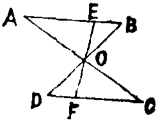
故 AC∥EF∥BD.　(甲圖)

或 AC, BD, EE 各分他二線爲二等分，卽各線之中點爲各線之交點.　(乙圖)

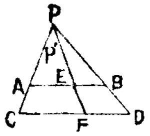
(甲)

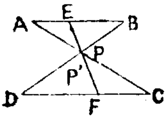


(乙)



II. 若 $AB \neq CD$.





假設 AC, EF 之交點爲 P.

EF, BD 之交點爲 P′.

則 $PE : PF = AE : CF$,

$P'E : P'F = EB : FD$.

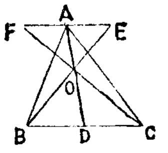
因 $AE : CF = EB : FD$.

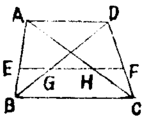
故 $PE : PF = P'E : P'F$.

知 P′ 不得不合於 P.

故 AC, EF, BD 同交於 P 點.

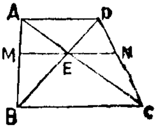
7. 在三角形 ABC 之中線 AD 上, 任意取一點 O, 從 B, C 引通過 O 點之直線, 與依 BC 平行過頂點 A 之直線相交於 E, F, 則 AE 等於 AF.



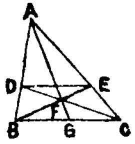


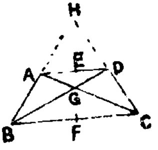
8. 依梯形 ABCD 之平行邊 AD, BC 平行, 任意引一直線, 與梯形之他二邊 AB, DC 相交於 E, F, 與梯形之對角線 BD, CA 相交於 G, H, 則 $EG = FH$.

9. 過梯形 ABCD 之對角線之交點 E, 依平行邊平行, 作直線, 與梯形之他二邊 AB, DC 相交於 M, N, 則 ME 等於 EN.



10. 依三角形 ABC 之底邊 BC 平行，任意引一直線，與他二邊 AB, AC 相交於 D, E，從頂點 A 引通過 BE, CD 之交點 F 之直線，分底邊 BC 爲二等分。

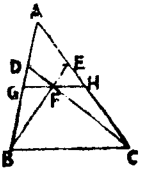




11. 梯形 ABCD 之平行二邊 AD, BC 之中點 E, F，與對角線 AC, BD 之交點 G，及延長他二邊 BA, CD 之交點 H，同在一直線上。

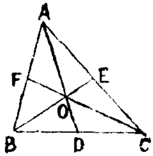
(應用主要問題 6 證明之.)

12. 從 △ABC 之 AB 邊上之 D 點，引直線至 AC 邊上之 E 點，令 AD 等於 DB 之半，AE 等於 EC 之半，連結 BE, CD 交於 F. 又依底邊 BC 平行，作通過 F 點之直線，與 AB, AC 交於 G, H，則有次之關係.



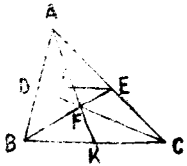
(甲) GF=FH. (乙) G, H 爲 AB, AC 之中點.

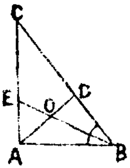
13. 內分三角形 ABC 之二邊 AB, AC 於 D, E, 令 DB 等於 AD 之 $\frac{2}{3}$, EC 等於 AE 之 $\frac{2}{3}$, 連結 BE, CD 交於 F, 則 $\frac{FE}{BE}=\frac{FD}{CD}=\frac{2}{5}$.



14. 三角形之三中線相交於一點, 其交點與各角之頂點之距離, 各等於其中線之三分之二, 試以比例證明之.

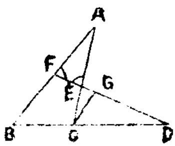
15. 依三角形 ABC 之底邊 BC 平行, 任意引直線, 與他二邊 AB, AC 交於 D, E, 連結 BE, CD 交於 F, 從頂點 A 引通過 F 點之直線, 與 DE, BC 交於 H, K, 則 A, H, F, K 為調和列點.



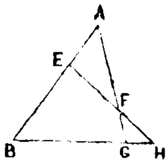


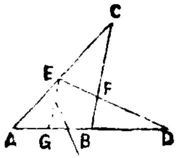
16. 從直角三角形 BAC 之直角頂 A, 至斜邊 BC 上, 引垂線 AD. 又引 ∠B 之二等分線, 與 AD, AC 相交於 O, E, 則 DO : OA = AE : EC.

17. 三角形 ABC 之底邊 BC 延長至 D, 從 D 引一直線, 與他二邊 AC, AB 相交於 E, F, 若 ∠AEF = ∠AFE, 則 BD : CD = BF : CE.



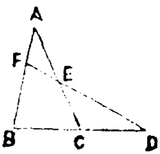
18. 在三角形 ABC 之邊 AB, AC 上，取 E, F 二點，令 BE 等於 EA 之二倍，AF 等於 FC 之二倍，延長 EF, BC 交於 H, 問 BH 與 CH 之比如何.

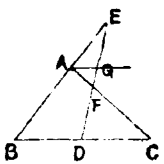




19. △ABC 之 AB 邊小於 AC 邊，延長 AB 至 D, 令 BD=AB, 在 AC 上取 E 點，令 CE=BD, 連結 DE、與 BC 交於 F, 則 AB : AC=EF : FD.

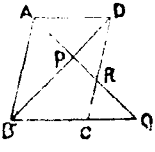
20. 延長三角形 ABC 之 BC 邊至 D, 令 CD 等於 BC, 從 D 點引直線，通過 AC 邊之中點 E, 與 AB 邊相交於 F, 問 FE : ED 之比如何.

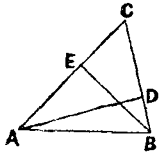




21. 從三角形 ABC 之底邊 BC 之中點 D 引直線，與依 BC 平行從頂點 A 引出之直線交於 G, 而與延長 BA 邊交於 E, 又與 AC 邊交於 F, 則 D, F, G, E 爲調和列點.

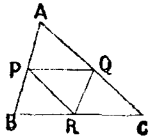
22. 從平行四邊形 ABCD 之 A 引一直線，與 BD 對角線交於 P, 與 CD 邊交於 R, 又與 BC 邊之延長線交於 Q, 則 AP 爲 PQ, PR 之比例中項.

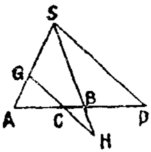




*23. 從三角形 ABC 之 A, B, 向對邊 BC, AC, 引垂線 AD, BE, 若 AC 大於 BC, 則 $AC+BE>BC+AD$.

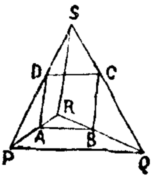
24. 從三角形 ABC 之邊 AB 上取一點 P, 依底邊 BC 平行引直線, 與他一邊 AC 交於 Q, 從 Q 依 AB 平行引直線, 與 BC 交於 R, 若從 R 依 CA 平行引直線貫 P 點, 則 P 爲 AB 之中點, 用比例證明之.





25. S 爲含調和列點 AB;CD 之直線外之一點, 通過 C 點依 SD 平行引直線, 與 SA, SB 相交於 G, H, 則 GC 等於 CH.

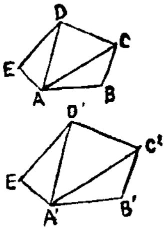
26. 平行四邊形 ABCD 之 AB 邊外之平行直線上, 取 P, Q 二點, 延長 PA, QB 之交點爲 R, 延長 PD, QC 之交點爲 S, 求證 $RS \parallel AD$.



26. **定義.** 相似多角形之對應邊之順序, 或俱自左而右, 或俱自右而左, 此相似多角形, 謂之**直接相似**, 若對應邊之順序, 一自左而右, 一自右而左, 則謂之**反對相似**.

27. 定理 14. 兩箇多角形,從同數互相似之三角形依對應邊之次序相合而成,則兩形爲相似多角形.

題意. 三箇三角形 ABC, ACD, ADE, 與三箇三角形 A′B′C′, A′C′D′, A′D′E′ 相似.



以 △ABC 之 AC 邊,與 △ACD 之 AC 邊相合,又以 △ADE 之 AD 邊,與 △ACD 之 AD 邊相合,成多角形 ABCDE.

以 △A′B′C′ 之 A′C′ 邊,與 △A′C′D′ 之 A′C′ 邊相合,又以 △A′D′E′ 之 A′D′ 邊,與 △A′C′D′ 之 A′D′ 邊相合,成多角形 A′B′C′D′E′.

此兩多角形 ABCDE, A′B′C′D′E′ 爲相似多角形.

證明. 兩多角形之各角,乃相似三角形之對應角,或爲若干對應角之和,故兩多角形之對應角俱相等.

兩多角形之各邊,乃相似三角形之對應邊.

從 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}\left(=\frac{AC}{A'C'}\right)=\frac{CD}{C'D'}\left(=\frac{AD}{A'D'}\right)=\frac{ED}{E'D'}=\frac{AE}{A'E'}$, 知兩多角形之對應邊之比俱相等.

故 多角形 ABCDE∽多角形 A′B′C′D′E′.

系. 從相似多角形之一箇對應角頂,至其他之角頂,引若干對角線,則分兩形爲同數之相似三角形.

此卽定理 14 之逆,讀者試自證明之.

注意. 兩箇三角形之角相等,卽爲相似形,或兩形之對應邊之比全相等,卽爲相似形,至三角形以外之多角形,則不然.

兩箇多角形之角相等,有爲相似形者,亦有非相似形者,例如矩形之四角,與正方形之四角,皆全爲直角,而矩形與正方形,非相似形也. 又兩箇多角形之二邊之比全相等,有爲相似形者,亦有非相似形者,例如菱形之邊與正方形之邊之比全相等,而菱形與正方形,非相似形也.

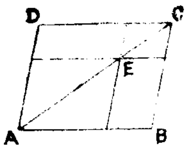
故決定兩箇多角形爲相似形,宜如次之證明.

(1) 證明兩形之角相等,其對應邊之比又相等.

(2) 證明兩形,爲從同數之相似三角形,依對應邊之次序,相合而成.

上之二證明法,擇便用之.

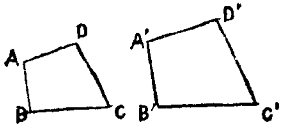
例題 VIII.



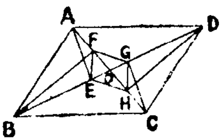
1. 邊數相同之兩正多角形爲相似多角形.

2. 任意於平行四邊形之對角線上取一點,過此點引與相鄰之二邊平行之直線,所成之平行四邊形,與原有之平行四邊形爲相似形.

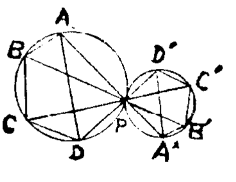
3. 兩箇四角形之角相等，一箇四角形之相鄰二邊，與他四角形夾角相等之相鄰二邊爲比例，則兩形爲相似形.

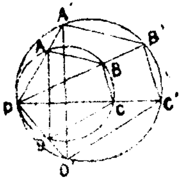


4. 兩箇四角形 ABCD, A′B′C′D′, $\angle A=\angle A'$, $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}$, 則兩形爲相似形.



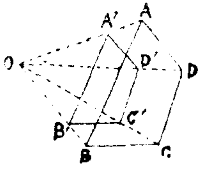
5. 從平行四邊形 ABCD 之頂點 A, B, C, D. 向對角線 AC, BD, 引四垂線 AE, BF, CG, DH, 連結垂趾 E, F, G, H,成四邊形 EFGH, 與四邊形 ABCD 互爲相似形.





6. 從兩個圓相切之切點 P，引直線多條，與二圓之周交於 A, A'; B, B'; C, C';…，則多角形 ABCD…, A'B'C'D'… 互爲相似形.

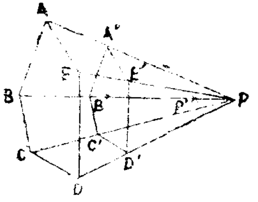
7. 從多角形外之一點，引直線至多角形之各頂點，依某比內分或外分所引之諸直線，順次連結其分點所成之多角形，與原形相似.



主要問題 7. 相似多角形，得移置其對應邊令俱平行，而連結其對應之頂點之諸直線，相交於一點，或全爲平行線.

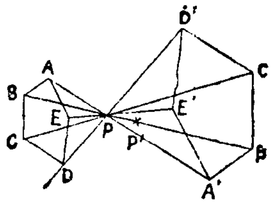
題意. 設移置相似多角形 ABCDE, A'B'C'D'E' 之對應邊.

令 AB∥A'B', BC∥B'C'….



則 AA', BB', CC',…諸直線同相交於一點 P，或全平行.

證明. I. 相交於 P 之情形，以夾等角 A, A' 之對應邊 AB AE 與 A'B', A'E'，置於相同之方向，或反對之方向.



則　AB$\mathbin{/\!/}$A'B', AE$\mathbin{/\!/}$A'E', 其他之對應邊, 俱從之而平行.

命　AA', BB' 之交點爲 P.

因　$\triangle ABP \backsim \triangle A'B'P$,

$\therefore\ \dfrac{BP}{BP'}=\dfrac{AB}{A'B'}$……………(1)

假設　BB', CC' 之交點爲 P', 則 $\triangle BCP' \backsim \triangle B'C'P'$.

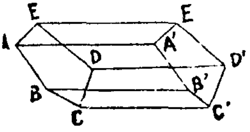
$\therefore\ \dfrac{BP'}{B'P'}=\dfrac{BC}{B'C'}$……………(2)

又因　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ 知 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$.

從 (1) 式及 (2) 式依普通公理, 得 $\dfrac{BP}{B'P}=\dfrac{BP'}{B'P'}$, 故 P' 合於 P.

即　AA', BB', CC' 同交於 P, 依同法, 知 DD', EE' 亦同交於 P.

II. 連結之諸直線全平行之情形.



相似多角形之對應邊之比爲1,卽對應邊相等，故以對應邊置於相同之方向,則對應邊平行且相等.

因　AB卄A'B', ∴ AA'∥BB', 依同理, 知 CC', DD', EE'. 皆與 AA' 平行.

主要問題 8.　二圓之公切線之交點, 卽二圓之中心之連結線依二半徑之比之外分及內分點.

此證明甚易, 讀者試自爲之.

28. 定義.　移置相似多角形之對應邊，令俱平行, 連結其對應頂點之諸直線之交點, 名曰兩相似形之**相似中心**, 又二圓之公切線之交點, 名曰二圓之**相似中心**, 在二圓之間, 謂之**內心**, 在二圓之同側, 謂之**外心**.

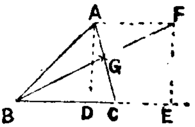
注意.　用主要問題 7 及主要問題 8 之理, 能解某種作圖題, 其作圖法, 名曰相似法.

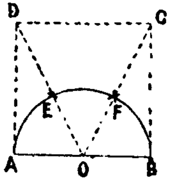
揭載二三例題於次.

例 題 IX.

1. 有三角形 ABC, 畫內接之正方形, 令正方形之一邊, 在 BC 邊上. (以 B 爲相似之中心.)

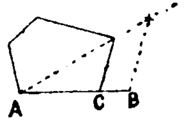
2. 在半圓內畫內接之正方形.





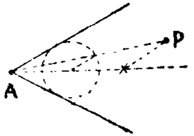
3. 在扇形內畫內接之正方形.

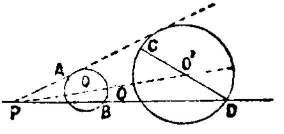
4. 在定直線 AB 上, 畫與所設之多角形相似之多角形.

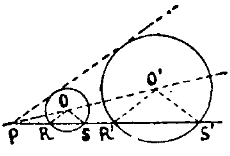


5. ∠A 內有定點 P, 畫圓令通過 P 點, 且切於 ∠A 之二邊.

6. 二圓之直徑平行, 連結直徑之端之直線, 延長之, 必貫二圓之相似中心.

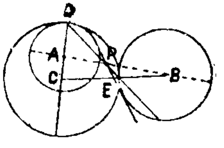




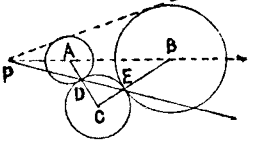


7. 從二圓 O, O′ 之相似中心 P, 引直線, 與圓 O 之交點為 R, S, 與圓 O′ 之交點為 R′, S′, (P, R 之距離, 小於 P, S 之距離, P, R′ 之距離, 小於 P, S′ 之距離) PR : PR′ 及 PS : PS′ 之比為定比。

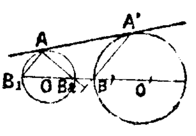
8. 二圓之中心, 與其相似之中心為調和列點.



9. 二圓 A, B 與圓 C 相切於 D, E, 通過 D, E 二點之直線, 亦通過二圓之相似中心.



10. 一直線與二圓 O, O′ 相切於 A, A′, 通過 O, O′ 之直線與二圓周之交點為 B, B′, 則 AB 與 A′B′ 平行, 或互為垂線.



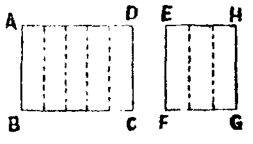
第五章

面積

第一節

成比例之直線之面積及從比例線誘導而成矩形之面積

29. 定理 15. 高相等之矩形之比，等於其底邊之比.



題意. 設兩矩形 ABCD, EFGH 之高 AB=EF,

則 $\dfrac{\square AC}{\square EG}=\dfrac{BC}{FG}$.

證明. 若底邊 BC, FG 爲可通約量，以其公約量分之，假定 BC 爲公約量之 m 倍，FG 爲公約量之 n 倍.

則 $\dfrac{BC}{FG}=\dfrac{m}{n}$……………(1)

又從底邊之分點上，引垂線，分 □AC 爲 m 箇等分，□EG 爲 n 箇等分，其各部分之矩形皆相等。

$$\therefore \quad \frac{\square AC}{\square EG}=\frac{m}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從 (1), (2) 兩式，得 $\dfrac{\square AC}{\square EG}=\dfrac{BC}{FG}$.

注意. 底邊 BC, FG 爲不可通約量，此理亦眞，其證明與定理 5 之方法同.

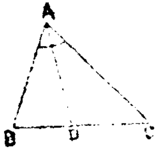
系 1. 底邊相等之矩形之比，等於其高之比.

視前圖之 AB, EF 爲底邊，CB, GF 爲高，卽可用前之證明之方法證明之.

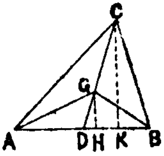
系 2. 高（或底邊）相等之兩三角形之比，等於其底邊（或高）之比.

三角形之二倍，卽矩形，故三角形之比，等於矩形之比.

例題 X.

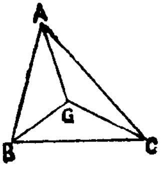


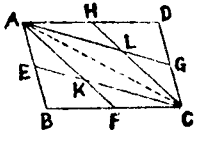
1. 三角形 ABC 之 ∠A 之二等分線，與底邊 BC 相交於 D，則 △ABD 與 △ACD 之比，等於 AB 與 AC 之比.



2. 三角形 ABC 之重心爲 G，則三角形 ABG 與三角形 ABC 之比，等於 1 與 3 之比．

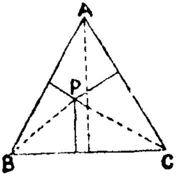
3. 三角形 ABC 之重心爲 G，問三箇三角形 BGC，CGA，AGB 之連比如何．



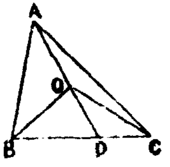


4. 平行四邊形 ABCD 之邊 AB，BC，CD，DA 之中點爲 E，F，G，H，AG 與 CH 之交點爲 L，AF 與 CE 之交點爲 K，則 □AKCL 爲 □ABCD 之三分之一．

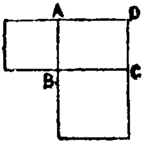
5. 從正三角形內之任意一點，引垂線至三邊之上，其垂線之和不變．（此問題用比例證明）

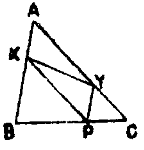


6. 從三角形 ABC 之頂點 A，任意引直線，與底邊 BC 交於 D，在 AD 上取 O 點，則 △ABO : △ACO＝BD : CD.



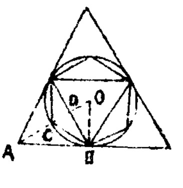
7. 二直線 AB, BC 所包之矩形，爲 AB, BC 上之二正方形之比例中項.





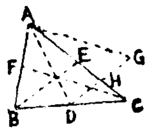
8. 從三角形 ABC 之底邊 BC 上之 P 點依他二邊 CA, BA 平行，引二直線，與 BA, CA 交於 X, Y，則 △AXY 爲 △BPX, △CPY 之比例中項.

9. 內接於圓之正六角形，爲內接於同圓之正三角形及外切之正三角形之比例中項.

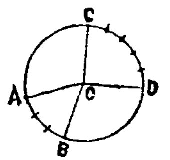


注意．△BCO, △BDO, △ABO, 爲各形之六分之一．

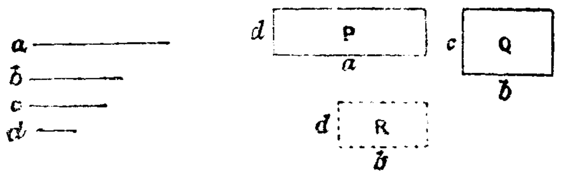
10．三角形 ABC 與其三中線爲邊之三角形 ADG 之比，等於 4 : 3.



11．在同圓之兩扇形之面積之比，等於其兩弧之比．



30．定理 16．四直線成比例，其外項所包之矩形，等於內項所包之矩形．



題意．設四直線爲 a, b, c, d, a 與 d 所包之矩形爲 P, b 與 c 所包之矩形爲 Q.

若 $a:b=c:d$, 則 $\square P=\square Q$.

證明. 添作 b 與 d 所包之矩形 R.

因 $\square P$ 與 $\square R$ 之高同爲 d, 依定理 15, $\frac{\square P}{\square R}=\frac{a}{b}$.

又 $\square Q$ 與 $\square R$ 之底邊同爲 b, 依定理 15 之系 1, $\frac{\square Q}{\square R}=\frac{c}{d}$.

從 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 知 $\frac{\square P}{\square R}=\frac{\square Q}{\square R}$.

故 $\square P=\square Q$.

系 1. 此定理之逆亦眞.

證明. 從前圖得比例式, $\frac{\square P}{\square R}=\frac{a}{b}$, $\frac{\square Q}{\square R}=\frac{c}{d}$.

假設 $\square P=\square Q$, 則 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 卽 $a:b=c:d$.

注意. 書等積之兩矩形之邊爲比例式, 以一箇矩形之二邊爲外項, 他矩形之二邊爲內項.

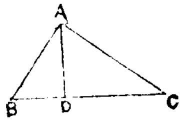
系 2. 若三直線成比例, 其爲比例中項之一直線上之正方形,等於他二直線所包之矩形. 此逆亦眞.

設上之證明中之 $c=b$, 卽爲此系之證明.

注意. 從此定理, 能誘求得種種面積之定理.

主要問題 9. 直角三角形之二邊上正方形之比, 等於投於斜邊上各正射影之比.

題意. 從直角三角形 ABC 之直角頂 A, 至斜邊 BC 上, 引垂線 AD, 則 $\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BD}{CD}$.



證明. △DBA 之 ∠BDA, △ABC 之 ∠BAC, 同爲直角, 又 ∠B 爲兩形公共之角, ∴ △DBA∽△ABC.

從 $\frac{BD}{AB}=\frac{AB}{BC}$, 得 $AB^2=BD\cdot BC$…………………(1)

用同法知 △DCA∽△ACB.

從 $\frac{CD}{AC}=\frac{AC}{BC}$, 得 $AC^2=CD\cdot BC$…………………(2)

以(2)式除(1)式, $\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BD\cdot BC}{CD\cdot BC}=\frac{BD}{CD}$.　　[illegible]

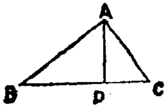
系. $\frac{AB^2}{BC^2}=\frac{BD}{BC}$,　$\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{CD}{BC}$.

此證明, 讀者試自爲之.

上之結果, 括爲一式, 則 $AB^2:AC^2:BC^2=BD:CD:BC$.

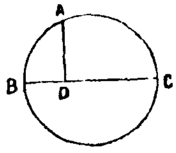
例　題　XI.

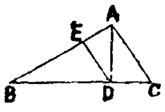
1. 直角三角形之二邊上之正方形之和, 等於斜邊上之正方形. 用比例證明之.



2. 從直角三角形之直角頂，引垂線至斜邊之上，垂趾分斜邊爲二部分，其垂線上之正方形，等於斜邊之二分所包之矩形.

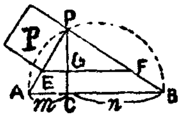
3. 從圓周上任意之一點 A，引垂線，與直徑 BC 交於 D，分 BC 爲 BD, DC，其垂線 AD 上之正方形，等於 BD, DC 所包之矩形.

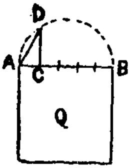




4. 從直角三角形之直角頂 A，引垂線，與斜邊 BC 交於 D，又從 D 引垂線，與 AB 邊交於 E，則 $AB^2 : AC^2 = BE : EA$.

5. 求作一正方形，令所設之正方形 P 與所作之正方形之比，等於所設之二直線 m, n 之比.

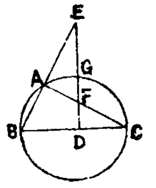




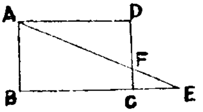
6. 求作一正方形，令等於所設之正方形 Q 之五分之一.

又求作一正方形，令等於正方形 Q 之 n 分之一.

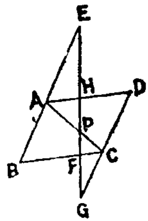
(n 爲任意之整數.)



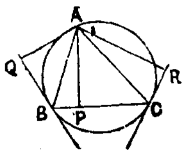
7. A 爲圓周上任意之一點, D 爲直徑 BC 上任意之一點, 作 D 點上之垂線, 與延長 BA 交於 E, 又與 AC 及圓周交於 F, G, 則 DG 爲 DE, DF 之比例中項.



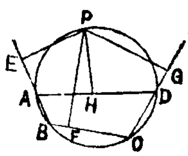
8. 從矩形 ABCD 之頂點 A, 任意引直線, 通過 CD 邊上之 F 點, 而與延長 BC 邊交於 E 點, 則 BE 與 DF 所包之矩形, 恆等於矩形 ABCD.



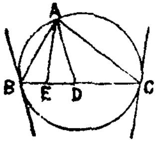
9. 平行四邊形 ABCD 之對角線 AC 上, 有任意之一點 P, 通過 P 點作一直線, 與延長 BA, DC 二邊相交於 E, G, 又與 BC, AD 二邊相交於 F, H, 則 PE, PF 爲二邊之矩形, 等於 PG, PH 爲二邊之矩形.



10. 從內接於圓之三角形 ABC 之頂點 A, 向底邊 BC 及切於頂點 B, C 之二切線, 引垂線 AP, AQ, AR, 則 AP^2 等於 AQ, AR.

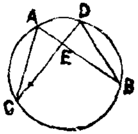


11. 四邊形 ABCD 內接於圓, 從弧 AD 上之任意一點 P, 向四邊 AB, BC, CD, DA, 引四垂線 PE, PF, PG, PH, 則 $PE \cdot PG = PF \cdot PH$.



*12. 從內接於圓之三角形 ABC 之頂點 A，依切於頂點 B, C 之二切線平行，引二直線，與底邊 BC 交於 D, E，則 AB^2 與 AC^2 之比等於 BD 與 CE 之比.

31. 定理 17. 圓之二弦相交，互分爲二部分，各弦之二部分所包之矩形相等.



題意. 圓之二弦 AB, CD，相交於 E.

$AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

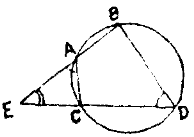
證明. I. AB, CD 之交點在圓內.

連結 AC, BD 成 $\triangle ACE$, $\triangle BDE$.

因 $\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle B$, $\therefore \triangle ACE \backsim \triangle BDE$.

從 $\dfrac{AE}{DE} = \dfrac{CE}{BE}$，化得 $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

II. AB, CD 之交點在圓外.

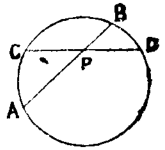


連結 AC, BD, 成 $\triangle ACE$, $\triangle BDE$.

因 ACDB 爲內接於圓之四邊形，知 $\angle EAC = \angle EDB$，而 $\angle E$ 爲兩形公共之角，$\therefore \triangle ACE \backsim \triangle BDE$.

從 $\dfrac{AE}{DE} = \dfrac{CE}{BE}$，化得 $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

系 1. 過圓內之任意一點,不拘何方向,作圓之弦,其點爲弦之內分點,弦之二部分所包之矩形,等於過其點之最小弦之半分上之正方形.



題意. AB 爲過定點 P 之任意之弦, CD 爲過定點 P 之最小之弦.

$$AP \cdot BP = \left(\frac{1}{2}CD\right)^2.$$

證明. P 爲最小弦 CD 之二等分點.

$\therefore\ CP = DP.$

依定理 $AP \cdot BP = CP \cdot DP.$

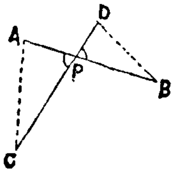
故 $AP \cdot BP = CP^2.$

系 2. 二直線 AB, CD 相交於 P, 若 AP 與 BP 所包之矩形,等於 CP 與 DP 所包之矩形,則 A, B, C, D 四點,同在一箇圓周之上.

證明. 添作 AC, BD 二直線.

因 $AP \cdot BP = CP \cdot DP.$ (假設)

$\therefore\ \dfrac{AP}{DP} = \dfrac{CP}{BP}$ ……………………(1)



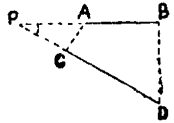
又 $\triangle ACP$ 之 $\angle APC$ 與 $\triangle BDP$ 之 $\angle BPD$ 爲對頂角.

$\therefore \angle APC = \angle BPD$ ……………(2)

從 (1), (2) 兩式知 $\triangle ACP \backsim \triangle BDP$.

故 $\angle CAP = \angle BDP$,

$\angle ACP = \angle DBP$.

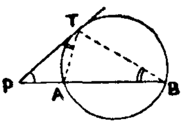


依圓之定理, 能畫圓過 A, B, C, D 四點.

注意. 此系之證明, 可用次之方法.

先畫過 A, B, C 三點之圓, 假設圓周與 CD 之交點爲 D′, 依本定理, D′ 必合於 D.

32. 定理 18. 從弦之一端, 延長至圓外, 在延長線上之任意一點, 引圓之切線, 其切線上之正方形, 等於從其點與弦之兩端之距離所包之矩形.



題意. P 爲 AB 弦之延長線上之一點, PT 爲圓之切線.

$PT^2 = PA \cdot PB$.

證明. 連結 AT, BT 二直線, 成 $\triangle PAT$ 與 $\triangle PTB$, $\angle P$ 爲兩形公共之角.

AT 弦與 PT 切線會於切點, 其弦與切線所夾之角, 等於對所夾之弧之圓周角, $\therefore \angle PTA = \angle PBT$.

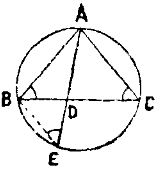
知　$\triangle PAT \backsim \triangle PTB$，從 $\frac{PA}{PT}=\frac{PT}{PB}$ 化得 $PT^2=PA\cdot PB$.

系. 從圓外之一點，引直線至圓周上，此直線上之正方形，若等於從其點引出之割線之二分所包之矩形，則其直線爲圓之切線.

讀者試自證明之.

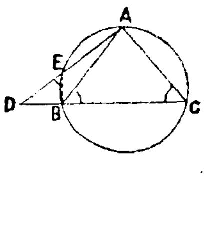
主要問題 10. 從圓之內接二等邊三角形 ABC 之頂點 A，任意引直線，通過底邊 BC 上之 D 點，與圓周相交於 E，或通過圓周上之 E 點，與延長 BC 相交於 D，其 AD，AE 所包之矩形，恆爲一定.

證明. 添作 BE 直線.



因　$\angle ABC=\angle ACB=\angle BED$.

（下圖之 $\angle DEB$，等於 $\angle ABC$ 之對頂角.）

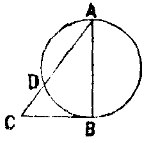


畫外接於 $\triangle BDE$ 之圓，則 AB 爲此圓之切線，而 AD，AE 爲割線之二分.

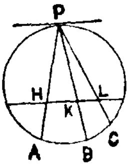
$\therefore\quad AD\cdot AE=AB^2$.

AB 爲一定，故 $AD\cdot AE$ 亦爲一定.

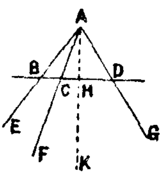
例題 XII.



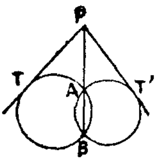
1. 作切於圓之直徑 AB 之 B 端之切線, 從 A 端任意引直線, 通過圓周上之 D 點, 與所作之切線相交於 C, 則 AC·AD 恆爲一定.



2. 從圓周上之一點 P, 引弦 PA, PB, PC, 作切於 P 點之切線平行, 作一直線, 與所引之三弦相交於 H, K, L, 求證 PA·PH=PB·PK=PC·PL.



3. 從一直線外之一點 A, 引三直線至一直線上之 B, C, D 三點, 又延長 AB 至 E, 延長 AC 至 F, 延長 AD 至 G, 令 AB·AE=AC·AF=AD·AG, 則 E, F, G, A 同在一箇圓周之上.

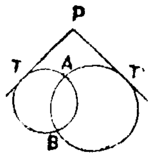


4. 二圓相交, 從公共弦之延長線上之任意一點, 引二圓之切線, 其二切線相等.

5. 從一點引相交之二圓之切線, 若二切線相等, 則其一點在公共弦之延長線上.

注意. 從問題 4 及 5, 知相交二圓之等長切線之交點之軌跡, 爲通過二圓之交點之直線. (除其公共弦之部分.)

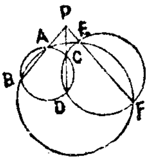
此直線，名曰兩圓之根軸.



6. 二圓相切，其根軸如何.

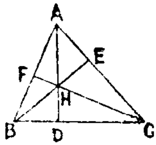
7. 二圓不相交，其根軸爲中心連結線上之垂線.

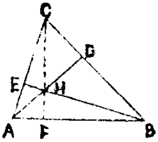
8. 有三箇圓，其兩箇圓之各根軸，相交於同一之點，特別之情形如何.



注意. 此點，名曰三圓之根心.

9. 從三角形 ABC 之各頂點，至對邊上之垂線 AD, BE, CF 之交點爲 H，求證 $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$.



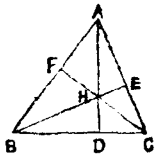


10. 設 H 爲三角形 ABC 之垂心，求證 $AB \cdot AF = AD \cdot AH = AC \cdot AE$.

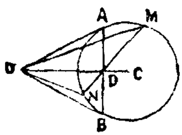
若 $\angle BAC$ 爲鈍角，此結果及問題 9 之結果之關係如何.

11. 從三角形 ABC 之頂點 A, B 至對邊, 引垂線 AD, BE, 則有次之關係.

$AB^2 = AC \cdot AE + BC \cdot BD.$

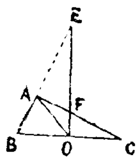


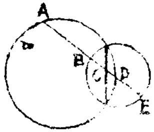
12. 從三角形之各頂點, 引垂線至對邊 三垂線同交於一點, 互分各垂線爲二分, 則各垂線之二分所包之矩形皆相等.



13. 圓 C 內有弦 AB, 添作過 AB 中點之弦 MN, 及切於 A, B 二點之二切線, 其切線之交點爲 P, 連結 PM, PN 二直線, 則 P 至圓之中心 C 之直線, 爲 ∠MPN 之二等分線.

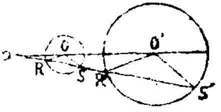
14. 作垂直於直角三角形 ABC 之斜邊 BC 之中點 O 之垂線, 與 BA 邊之延長線及 AC 邊交於 E, F, 則 $AO^2 = OE \cdot OF$.



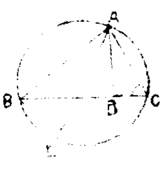


15. 通過相交之二圓之公共弦上之 C 點, 引一直線, 與一圓之交點爲 A, D, 與又一圓之交點爲 B, E, 則 AB 與 BC 之比, 等於 ED 與 CD 之比.

16　從二圓 O, O′ 之相似中心 P 引直線，與圓 O 之交點為 R, S, 與圓 O′ 之交點為 R′, S′ (P, R 之距離，小於 P, S 之距離，P, R′ 之距離小於 P, S′ 之距離), PR·PS′ 及 PR′·PS 為一定.



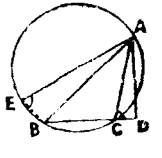
33　**定理 19.**　三角形之二邊所包之矩形，等於從二邊所夾之角之頂點至第三邊上之垂線，與外接圓之直徑所包之矩形.



題意.　AD 為 △ABC 之垂線，AE 為外接圓之直徑.　AB·AC=AD·AE.

證明.　添作 BE 直線.

因 △ABE 之 ∠ABE 與 △ADC 之 ∠ADC, 同為直角.



又　∠AEB 與 ∠ACD, 同對 AB 弧.

故　∠AEB=∠ACD

∴　△ABE∽△ADC.

從　$\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}$, 得 AB·AC=AD·AE.

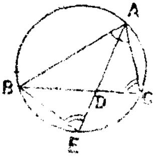
主要問題 11. 三角形之頂角之二等分線上之正方形，等於二邊所包之矩形，與底邊之二分（即頂角之二等分線，分底邊爲大小二分），所包之矩形之差.

題意. 三角形 ABC 之頂角 A 之二等分線，與底邊 BC 相交於 D，分 BC 爲 BD, DC. $AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$.

證明. 延長 AD，與外接圓之周相交於 E，連結 BE 直線.

因 $\widehat{BE}=\widehat{CE}$, $\therefore \angle BAE=\angle DAC$.

又 $\angle E=\angle C$, $\therefore \triangle ABE\backsim\triangle ADC$.



從 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AE}{AC}$，化得 $AB\cdot AC=AD\cdot AE$

$$=AD(AD+DE)$$

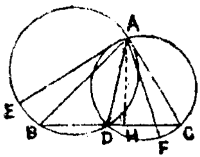
$$=AD^2+AD\cdot DE$$

$$=AD^2+BD\cdot CD.$$ （定理 17）

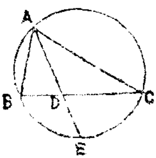
即 $AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$.

例　題　XIII.

1. 從 △ABC 之底邊 BC (或延長)上，任意取 D 點，畫外接於 △ABD, △ACD 之圓，其二直徑之比，等於 AB 與 AC 之比.

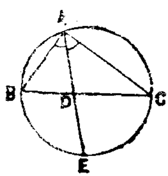


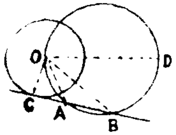
2. 前題之 △ABC，若爲二等邊三角形，則二圓相等.



3. 三角形 ABC 之頂角 A 之二等分線，與底邊 BC 及外接圓之周相交於 D, E，其 AB, AC 所包之矩形等於 AD, AE 所包之矩形.

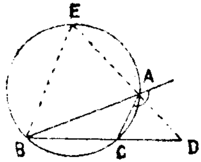
4. 直角三角形 ABC 之直角 A 之二等分線，與底邊 BC 及外接圓之周相交於 D, E，其 AD, AE 所包之矩形，等於三角形 ABC 之二倍.

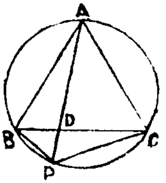




5. 引切線切於圓 O 之周之 C 點，從圓之中心 O，引二直線，與切線相交於 A，B，若 O，A，B 三點，同在他一圓周上，則 OA，OB 所包之矩形爲一定.

6. 三角形 ABC 之頂角 A 之外角之二等分線，與延長底邊 BC 相交於 D 點，其 AB，AC 所包之矩形，等於 BD，CD 所包之矩形與 AD 上之正方形之差.

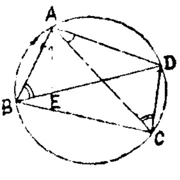




7. 正三角形 ABC 之外接圓之 BC 弧上，任意取一點 P，從 P 引 PA，PB，PC 三直線，其 PA 上之正方形，等於 BC 上之正方形與 PB，PC 所包之矩形之和.

34. 定理 20. 內接於圓之四邊形，其相對邊所包之二矩形之和，等於二對角線所包之矩形.

此爲多祿某 (Ptolemy) 發明之定理.



題意. ABCD 爲內接於圓之四邊形.

$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$

證明. 從 A 至 BD 上引直線 AE.

令 $\angle BAE = \angle CAD.$

因　$\angle ABE$, $\angle ACD$ 同對 AD 弧.

知　$\angle ABE=\angle ACD$.

$\therefore$　$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$.

從　$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{CD}$, 化得 $AB \cdot CD = AC \cdot BE$ ……(1)

又由　$\angle BAE=\angle CAD$.

知　$\angle EAD=\angle BAC$.

因　$\angle ADE$, $\angle ACB$ 同對 AB 弧, 知 $\angle ADE=\angle ACB$.

$\therefore$　$\triangle AED \backsim \triangle ABC$.

從　$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{ED}{BC}$, 化得 $AD \cdot BC = AC \cdot ED$ ……(2)

以 (1) 式與 (2) 式之兩邊各相加.

則　$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BE + AC \cdot ED$

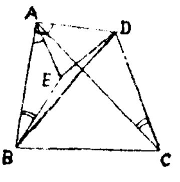
$$= AC(BE+ED)$$

$$= AC \cdot BD.$$

系 1.　不內接於圓之四邊形之對角線所包之矩形, 小於相對邊所包之二矩形之和.

題意　ABCD 為不內接於圓之四邊形.

$AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot BD$.



證明.　因四邊形 ABCD 不內接於圓.

則　$\angle ABD \neq \angle ACD$.

從 A, B 各引一直線，相交於 E.

令 $\angle BAE=\angle CAD$,

$\angle ABE=\angle ACD$.

則 $\triangle ABE\backsim\triangle ACD$.

由 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{CD}$, 化得 $AB\cdot CD=AC\cdot BE$…………(1)

又從 $\triangle ABE\backsim\triangle ACD$, 知 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AE}{AD}$.

依更迭之理，得 $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AC}{AD}$.

從 $\angle BAE=\angle CAD$, 得 $\angle BAC=\angle EAD$.

$\therefore$ $\triangle ABC\backsim\triangle EAD$. (定理 12)

由 $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{BC}{DE}$, 化得 $AD\cdot BC=AC\cdot DE$…………(2)

以 (1) 式與 (2) 式之兩邊各相加.

則 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BE+AC\cdot DE$

$=AC(BE+DE)$.

因 $BE+DE>BD$.

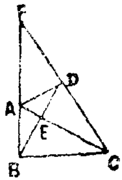
故 $AB\cdot CD+AD\cdot BC>AC\cdot BD$.

系 1 為本定理之裏，凡定理之裏眞確，其定理之逆（即裏定理之對偶）亦眞確.

系 2. 四邊形之相對邊所包之二矩形之和，若等於對角線所包之矩形，即能決定此四邊形內接於圓.

注意. 次之事項，最爲重要，宜熟記於心.

設下圖之 A, B, C, D 四點，同在一箇圓周之上，槪擧其必要之條件於次.



(1) $\angle BAC = \angle BDC$

(2) $\angle BAD + \angle BCD = 2R\angle$

(3) $\angle FAD = \angle BCD$

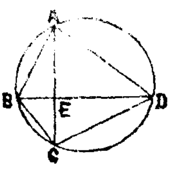
(4) $AE \cdot CE = BE \cdot DE$

(5) $AF \cdot BF = CF \cdot DF$

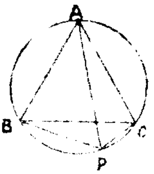
(6) $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$

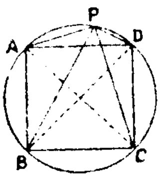
例 題 XIV.

1. 設內接於圓之四邊形之對角線，互爲垂直，則相對邊所包之二矩形之和，等於其四邊形之二倍.



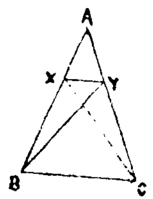
2. 從正三角形 ABC 之外接圓之 BC 弧上任意之點 P, 引 PA, PB, PC 三直線, 其 PA 恆等於 PB 與 PC 之和.



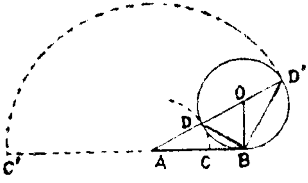


3. 從正方形 ABCD 之外接圓之 AD 弧上任意之點 P, 引 PA, PB, PC, PD 四直線, 以 a, b, c, d 表之, 求證 $\frac{c+a}{b}$ 及 $\frac{c-a}{d}$ 之比爲一定.

4. 依二等邊三角形 ABC 之底邊 BC 平行引直線, 與 AB, AC 二邊相交於 X, Y, 連結 BY, CX 二直線, 求證 BY 上之正方形, 等於 CY 上之正方形與 BC, XY 所包之矩形之和.



35. 作圖題. 求分定直線 AB 於 C, 令 AC 爲全線 AB 與他一分 BC 之比例中項.



解法. 作垂線 OB 於 AB 之 B 端, 令等於 AB 之半, 以 O 爲中心, OB 爲半徑, 畫圓切於 AB, 從 A 引通過中心 O 之直線與圓周相交於 D, D', 又以 A 爲中心, AD 及 AD' 各爲半徑, 畫圓弧, 一與 AB 相交於 C, 一與延長 BA 相交於 C', 其 C, C' 二點, 即所求之分點.

證明. 連結 BD, BD' 二直線, 因 $\triangle ABD$ 之 $\angle DBA$ 所夾之弧, 等於 $\triangle AD'B$ 之 $\angle AD'B$ 所對之弧, 知 $\angle DBA = \angle AD'B$.

又 $\angle A$ 爲兩形公共之角.

$\therefore$ $\triangle ABD \backsim \triangle AD'B$.

從 $\dfrac{AD'}{AB} = \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AB}{AC}$, 依分比之理, 得 $\dfrac{AD'-AB}{AB}$

$$= \frac{AB-AC}{AC}.$$

$\because$ $AB = DD'$, $\therefore$ $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BC}{AC}$.

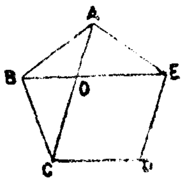
依反轉之理, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{BC}$.

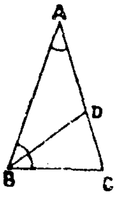
外分之情形 $\frac{AB}{AC'}=\frac{AC'}{BC'}$，讀者試自證明之.

86. 定義. 直線 AB 內分又外分於 C 及 C′，令 AB, AC 之比，等於 AC, BC 之比，AB, AC′ 之比，等於 AC′, BC′ 之比，其 C 點爲分 AB 爲中末比，C′ 點爲分 AB 爲外中比. 此爲比例之重要方法，故有黃金分割之名.

例題 XV.

1. 正五邊形 ABCDE 之對角線 AC, BE, 相交於O，其交點 O 互分 AC, BE 爲中末比.





2. 設二等邊三角形之底角爲頂角之二倍，其底角之二等分線，分對邊爲中末比.

3. 設分直線 AB 爲中末比於 C，則有次之關係.

(1) $AB \cdot BC = AC^2$

(2) $AB^2+BC^2=3(AC)^2$

(3) $(AB+BC)^2=5(AC)^2$

4. 設二等邊三角形 ABC 之底角 B 及 C，爲頂角 A 之二倍，則 $AB^2=BC^2+AB\cdot BC$.

第二節

關於複比二乘比之面積

37. 定義. 比之前項爲兩比（或多比）之前項之乘積，後項爲兩比（或多比）之後項之乘積，名其比曰**複比**，或呼爲**相乘比**.

設二比爲 $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, 則 $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ 即 $\frac{ac}{bd}$ 爲複比.

（a, b 爲任意之同類二量，c, d 或與 a, b 爲同類之量，或爲他同類之量.）

相等之二比之複比，名曰**二乘比**，相等之三比之複比，名曰**三乘比**.

例如 $\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$ 即 $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ 爲 $\frac{a}{b}$ 之二乘比.

$\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$ 即 $\left(\frac{a}{b}\right)^3$ 爲 $\frac{a}{b}$ 之三乘比.

38. 定理 21. 設 A, B, C 爲同種類之三量，A 與 C 之比，等於 A 與 B 之比及 B 與 C 之比之**複比**.

證明. 設 $\frac{A}{B}=m$, $\frac{B}{C}=n$, 則 $A=B\times m$, $B=C\times n$.

$\therefore\ A=(C\times n)\times m=C\times m\times n$.

首末二節同以 C 除之.

得 $\frac{A}{C}=m\times n=\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}$.

系 1. 設 $\frac{A}{B}=\frac{B}{C}$, 則 $\frac{A}{C}=\left(\frac{A}{B}\right)^2$.

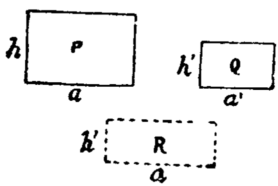
系 2. 凡比與其反比之複比, 皆等於 1.

系 3. 設 A, B, C, D 爲同種類之四量, A : D 等於 A : B, B : C, C : D 三比之複比.

此證明與前之方法同.

注意. 系 2 可從反比之定義而得.

39. 定理 22. 矩形之比, 等於其高之比與底邊之比之複比.



題意. 設 □P 之高爲 h, 底邊爲 a, □Q 之高爲 h', 底邊爲 a'.

則 $\dfrac{\square P}{\square Q}=\dfrac{h}{h'}\times\dfrac{a}{a'}$.

證明. 誘作高爲 h' 底邊爲 a 之 $\square R$.

因 $\square P$ 與 $\square R$ 之底邊同爲 a.

依定理 15 之系 1, $\dfrac{\square P}{\square R}=\dfrac{h}{h'}$ ……………(1)

又 $\square R$ 與 $\square Q$ 之高同爲 h'.

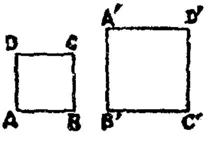
依定理 15, $\dfrac{\square R}{\square Q}=\dfrac{a}{a'}$ ……………(2)

以 (1) 式與 (2) 式之兩邊各相乘.

得 $\dfrac{\square P}{\square R}\times\dfrac{\square R}{\square Q}=\dfrac{h}{h'}\times\dfrac{a}{a'}$, 即 $\dfrac{\square P}{\square Q}=\dfrac{h}{h'}\times\dfrac{a}{a'}$.

注意. $\dfrac{ah}{a'h'}=\dfrac{h}{h'}\times\dfrac{a}{a'}$.

系. 正方形之比, 等於邊之比之二乘比.



證明. 兩正方形爲 ABCD, A'B'C'D'.

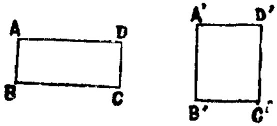
$\dfrac{AB^2}{A'B'^2}=\dfrac{AD}{A'D'}\times\dfrac{AB}{A'B'}=\left(\dfrac{AB}{A'B'}\right)^2$.

($\because$ AD$=$AB, A'D'$=$A'B'.)

注意. 從上之證明, 設 A, B, C, D 爲四直線, 則 $\dfrac{A\cdot C}{B\cdot D}$ 即 $\dfrac{A}{B}$ 與 $\dfrac{C}{D}$ 之相乘比, 可視爲矩形 A·C 與矩形 B·D 之比, 又 $\dfrac{A^2}{B^2}$ 爲兩正方形 A^2 與 B^2 之比, 亦可視爲 $\dfrac{A}{B}$ 之二乘比.

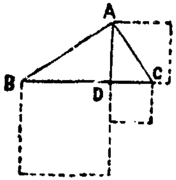
例　題　XVI.

1. 設四直線成比例，其四直線上之各正方形亦成比例.



2. 問題 1 之逆亦眞，試證明之.

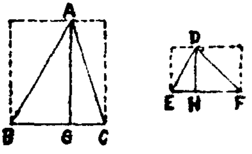
3. 從直角三角形之直角頂，引垂線至斜邊之上，分斜邊爲二部分，其垂線上之正方形，爲斜邊之二部分上之二正方形之比例中項.



4. 問題 3 之逆如何.

5. 面積相等之矩形之高之比，等於底邊之反比.

40. 定理 23. 兩三角形之比，等於底邊之比與高之比之複比.



題意. $\triangle ABC$ 之底邊為 BC, 高為 AG, $\triangle DEF$ 之底邊為 EF, 高為 DH.

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{BC}{EF}\times\frac{AG}{DH}.$$

證明. 因 $\triangle ABC=\frac{1}{2}AG\cdot BC$, $\triangle DEF=\frac{1}{2}DH\cdot EF$.

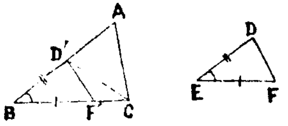
$$\therefore\quad \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{AG\cdot BC}{DH\cdot EF}$$

$$=\frac{AG}{DH}\times\frac{BC}{EF}. \qquad \text{(定理 22)}$$

系. 平行四邊形之比, 等於高之比與底之比之複比.

因平行四邊形, 等於同底等高之矩形, 故與定理 22 之證明同.

41. 定理 24. 一角相等之兩三角形之比, 等於夾其角之邊所包之矩形之比.



題意. 設 $\triangle ABC$ 之 $\angle B$, 等於 $\triangle DEF$ 之 $\angle E$.

則 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\dfrac{AB\cdot BC}{DE\cdot EF}$.

證明. 先於 AB 邊取 D' 點, 令 $BD'=ED$, 又於 BC 邊取 F' 點, 令 $BF'=EF$, 連結 $D'F'$.

則 $\triangle D'BF'\equiv\triangle DEF$.

又連結 CD', 成 $\triangle D'BC$, 與 $\triangle ABC$ 等高.

依定理 15 之系 2, $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle D'BC}=\dfrac{AB}{BD'}$ ……………(1)

$\triangle D'BC$ 又與 $\triangle D'BF'$ 等高.

依同理, $\dfrac{\triangle D'BC}{\triangle D'BF'}=\dfrac{BC}{BF'}$ ……………(2)

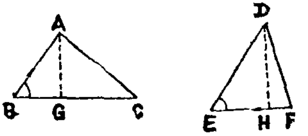
以 (1) 式與 (2) 式之兩邊各相乘.

得 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle D'BC}\times\dfrac{\triangle D'BC}{\triangle D'BF'}=\dfrac{AB}{BD'}\times\dfrac{BC}{BF'}$,

即 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle D'BF'}=\dfrac{AB}{BD'}\times\dfrac{BC}{BF'}$.

故 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle DBF}=\dfrac{AB\cdot BC}{DE\cdot EF}$.

此定理，亦可如次之證明.



別證. 設 $\triangle ABC$ 之高為 AG, $\triangle DEF$ 之高為 DH.

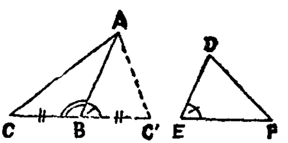
因 $\angle AGB$, $\angle DHE$ 同為直角, $\angle ABG$ 等於 $\angle DEH$.

$\therefore$ $\triangle ABG \backsim \triangle DEH$, 知 $\dfrac{AG}{DH}=\dfrac{AB}{DE}$.

依定理 23, $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\dfrac{AG}{DH}\times\dfrac{BC}{EF}$.

故 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\dfrac{AB}{DE}\times\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{AB\cdot BC}{DE\cdot EF}$.

系 1. 設三角形之一角，與他三角形之一角互為補角，其兩三角形之比，等於夾互為補角之二邊所包之矩形之比.



題意. $\triangle ABC$ 之 $\angle B$ 與 $\triangle DEF$ 之 $\angle E$ 之和，等於二直角.

則 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\dfrac{AB\cdot BC}{DE\cdot EF}$.

證明. 延長 CB 至 C′, 令 BC′=BC, 連結 AC′, 成 $\triangle ABC'$.

因 $\triangle ABC'$ 與 $\triangle ABC$ 等底同高.

$\therefore\ \triangle ABC'=\triangle ABC.$

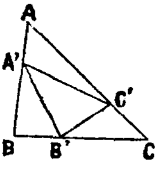
由 $\angle ABC=\angle DEF.$

依本定理, $\dfrac{\triangle ABC'}{\triangle DEF}=\dfrac{AB}{DE}\times\dfrac{BC'}{EF}.$

故 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\dfrac{AB}{DE}\times\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{AB\cdot BC}{DE\cdot EF}.$

系 2. 一角相等之平行四邊形, 有相同之性質.

主要問題 12. 從三角形 ABC 之邊 AB, BC, CA 上, 取 A′, B′, C′ 三點, 設 $AA':AB=BB':BC=CC':CA=1:3$, 問 $\triangle A'B'C'$ 與 $\triangle ABC$ 之比如何.



證明. $\triangle AA'C'$, $\triangle ABC$ 之 $\angle A$, 爲兩形公共之角.

依定理 24, $\dfrac{\triangle AA'C'}{\triangle ABC}=\dfrac{AA'\cdot AC'}{AB\cdot AC}$

$$=\frac{AA'}{AB}\times\frac{AC'}{AC}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}.$$

$$\therefore \qquad \triangle AA'C'=\frac{2}{9}\triangle ABC\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

依同理, $\triangle BB'A'=\frac{2}{9}\triangle ABC\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$$\triangle CC'B'=\frac{2}{9}\triangle ABC\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以 (1), (2), (3) 三式之兩邊各相加.

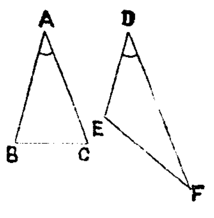
$$\triangle AA'C'+\triangle BB'A'+\triangle CC'B'=\frac{6}{9}\triangle ABC.$$

由此知 $\triangle A'B'C'=\frac{1}{3}\triangle ABC$, 故 $\frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}=\frac{1}{3}$.

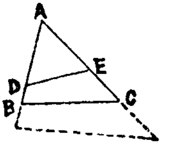
例　題　XVII.

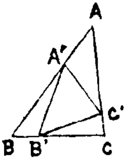
1. 面積相等, 問兩三角形之高與底邊之關係如何.

2. 二等邊三角形 ABC 之項角 A, 等於他三角形 DEF 之項角 D, 若 AB 邊為 DE, DF 二邊之比例中項, 則兩三角形之面積相等.



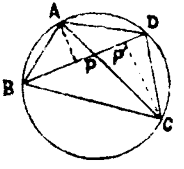
3. 從三角形 ABC 之 AB 邊上取 D 點，令 BD 等於 AB 之四分之一，又於 AC 邊上取 E 點，令 CE 等於 AC 之五分之二，連結 DE，成四邊形 BCED，問三角形 ABC 與四邊形 BCED 之面積之比如何．若於 AB, AC 之延長線上取 D, E，問兩形之面積之比如何．





4. 從三角形 ABC 之 AB 邊上取 A′ 點，令 AA′ 等於 AB 之三分之一，次於 BC 邊上取 B′ 點，令 BB′ 等於 BC 之四分之一，又於 CA 邊上取 C′ 點，令 CC′ 等於 CA 之五分之一，作三角形 A′B′C′，問 △A′B′C′ 與 △ABC 之面積之比如何．

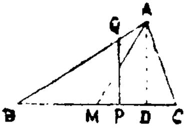
5. 內接於圓之四角形 ABCD 之對角線 AC, BD 交於 P，求證次之二式．



(1) $\dfrac{\triangle ABD}{\triangle CBD}=\dfrac{AB\cdot AD}{BC\cdot CD}$.

(2) $\dfrac{AB\cdot AD}{BC\cdot CD}=\dfrac{AP}{CP}$.

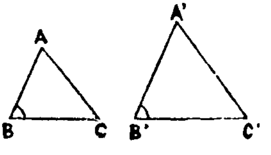
6. 銳角三角形 ABC 之 AB 大於 AC, 立於底邊 BC 上之垂線爲 AD, 底邊之中點爲 M, 從 BC 上取 P 點, 令 BP 爲 BM, BD 之比例中項, 又於 P 點上作直立線, 與 AB 交於 Q, 則三角形 BPQ 與四邊形 AQPC 之面積相等.



42. 定理 25. 相似三角形之面積之比, 等於對應邊之二乘比. (卽對應邊上之正方形之比.)

題意. $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$, 而 $A'B'$ 爲 AB 之對應邊.

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2=\frac{AB^2}{A'B'^2}.$$



證明. 因 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

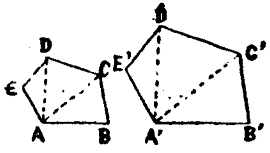
$$\therefore \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

依定理 24.

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB\cdot BC}{A'B'\cdot B'C'}=\frac{AB}{A'B'}\times\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{A'B'}\times\frac{AB}{A'B'}$$

$$=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2=\frac{AB^2}{A'B'^2}.$$

系. 相似多角形之面積之比，等於對應邊上之正方形之比.



題意. 多角形 ABCDE 與多角形 A'B'C'D'E' 相似.

則 $\dfrac{\text{多角形 } ABCDE}{\text{多角形 } A'B'C'D'E'}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$.

證明. 因多角形 ABCDE$\backsim$多角形 A'B'C'D'E'.

依相似多角形之定義，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\cdots\cdots$

從對應之角頂 A, A'，引對角綫 AC, AD, A'C', A'D'.

則 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$, $\triangle ACD\backsim\triangle A'C'D'$,

$\triangle ADE\backsim\triangle A'D'E'$.

依本定理 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$, $\dfrac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'}=\dfrac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2}$,

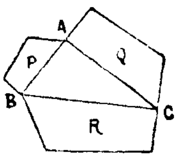
$\dfrac{\triangle ADE}{\triangle A'D'E'}=\dfrac{\overline{DE}^2}{\overline{D'E'}^2}$.

由 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'}=\dfrac{\triangle ADE}{\triangle A'D'E'}$

$=\dfrac{\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADE}{\triangle A'B'C'+\triangle A'C'D'+\triangle A'D'E'}$. (加比之理)

故 $\frac{\text{多角形 } ABCDE}{\text{多角形 } A'B'C'D'E'}=\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}$.

主要問題 13. 以直角三角形之各邊爲對應邊，畫相似多角形於各邊之上，其斜邊上之多角形，等於他二邊上之多角形之和.



注意. 希臘數學家畢達哥拉 (Pythagoras) 發明直角三角形之斜邊上之正方形，等於他二邊上之正方形之和，正方形皆互相似，故三邊上之任何相似形，皆包括於畢達哥拉之定理之中，此不過爲一種相似形耳.

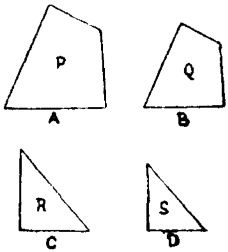
例如三邊之上各作半圓，此定理亦眞.

例 題 XVIII.

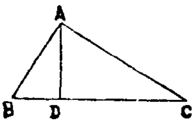
1. 設三角形 ABC 之中線 AD, BE 之交點爲 G, 問三角形 ABG 與三角形 DEG 之比如何.

2. 設三箇相似多角形之對應邊之比爲 1 : 2 : 3, 問多角形之面積之比如何.

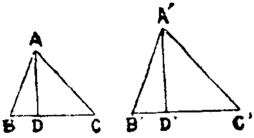
3. 四直線 A, B, C, D 成比例, 以 A 與 B 爲對應邊, 在 A, B 上作相似形, 又以 C 與 D 爲對應邊, 在 C, D 上作他相似形, 此四形之面積, 亦成比例.



4. 從直角三角形 ABC 之直角頂點 A 引垂線, 與斜邊 BC 相交於 D, 則 △ABD, △ACD, △ABC 之比, 若 BD, CD, BC 之比.

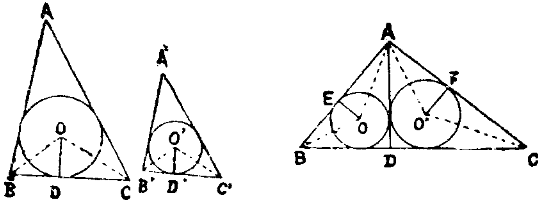


5. 相似三角形之面積之比, 等於立於對應邊之垂線上之正方形之比.



6. 相似三角形之面積之比，等於內切圓（或外接圓）之半徑上之正方形之比.

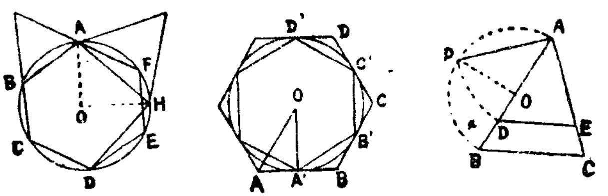
7. 從直角三角形 ABC 之直角頂點 A 引垂線，與底邊 BC 相交於 D，其 △ABD, △AOD 之內切圓半徑上之正方形之比，等於 BD 與 CD 之比.



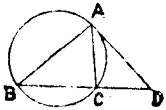
8. 內接於同圓之正方形及正六角形之邊上，各作正三角形，求正三角形之面積之比.

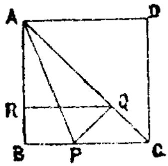
9. 內接及外切之正六角形之面積之比，等於 3 與 4 之比.

10. 依三角形之一邊平行引直線，求分其面積爲二等分.



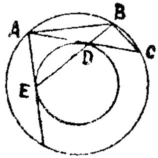
11. 引切線切於圓內接之三角形 ABC 之頂點 A，與延長底邊 BC 相交於 D，則 $AB^2 : AC^2 = BD : CD$.

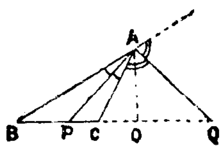




12. 正方形 ABCD 之邊 AB 與對角線 AC 所夾之角之二等分線，與邊 BC 相交於 P，從 P 引垂線，至 AC 上之 Q 點，又從 Q 引垂線，與 AB 相交於 R，問 QR 上之正方形與原正方形之比如何.

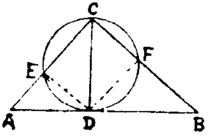
13. 從同心圓之外圓周上之一點 A，引切於內圓周之二切線，連結二切點 E，D 爲一直線，延長與外圓周交於 B，又延長切線 AD 與外圓周交於 C，則 $AB^2 : BC^2 = BE : BD$.





14. 三角形 ABC 之頂角 A 之二等分線，與底邊 BC 相交於 P，又 A 之外角之二等分線，與延長 BC 相交於 Q，PQ 之中點爲 O，求證次之二式.

(1) $OB \cdot OC = OA^2$.　(2) $OB : OC = AB^2 : AC^2$.



15. 從直角三角形 ABC 之直角頂點 C，引垂線與斜邊 AB 相交於 D，以 CD 爲直徑，畫圓，其圓周與他二邊 AC，BC 相交於 E，F，求證 $BF:AE=BC^3:AC^3$。

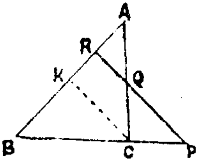
第　六　章

雜　定　理

43. 定理 26. 一直線與三角形 ABC 之三邊 BC, CA, AB (或延長) 交於 P, Q, R, 則 $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1.$

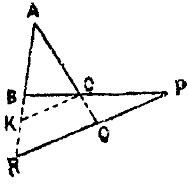
此爲梅乃勞司 (Menelaus) 發明之定理.

證明. 依 PR 平行, 從 C 引直線與 AB (或延長) 相交於 K.



則 $\triangle BPR \backsim \triangle BCK.$

$\triangle AKC \backsim \triangle ARQ.$



$$\therefore\quad \frac{BP}{PC}=\frac{RB}{KR}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{CQ}{QA}=\frac{KR}{AR}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以 (1) 式與 (2) 式之兩邊各相乘.

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=\frac{RB}{KR}\cdot\frac{KR}{AR}$$

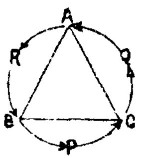
$$=\frac{RB}{AR}.\quad(\text{定理 }21)$$

故 $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{RB}{AR}\cdot\frac{AR}{RB}=1.$

注意 1. 或記上式如次.

$BP\cdot CQ\cdot AR=PC\cdot QA\cdot RB.$

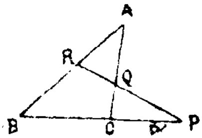
注意 2. 書此三比之相乘比，其各比之前項後項，有簡便之分別法.



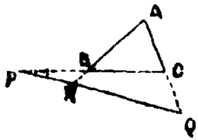
先如左圖畫 $\triangle ABC$, 次記截線 PQR 之 P 點於 B 與 C 之間, Q 點居 C 與 A 之間, R 點居 A 與 B 之間, 令 B, P, C, Q, A, R 同在一個圓周之上, 以箭鏃指明其順次迴轉, 然後從 B 起, 遞取相連二文字, BP, PC, CQ, QA, AR, RB 爲各比之前項後項, (前後項相間) 其次序秩然不紊.

系. 在三角形 ABC 之三邊 BC, CA, AB 上, 取 P, Q, R 三點, (二點在邊之上, 他一點在邊之延長上, 或三點全在各邊之延長上.) 若 $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$, 則 P, Q, R, 同在一直線上.

注意　一點在邊之上，他二點在邊之延長上．或三點皆在三邊之上．此系不能成立．



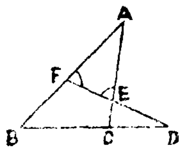
證明．先從 BC 之延長上取 P 點次從 AC, AB (或延長) 上取 Q, R 二點，連結 QR 直線，設其延長與 BC 之交點為 P′.



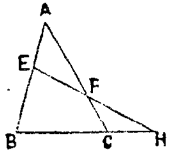
依本定理 $\frac{BP'}{P'C}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$，與系所設之式 $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ 對照，得 $\frac{BP'}{P'C}=\frac{BP}{PC}$，知 P′ 必與 P 合，即 P, Q, R 皆在一直線上．

例　題　XIX.

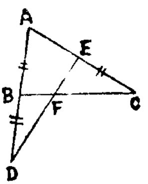
1. 從三角形 ABC 之底邊 BC 之延長上之 D 點，引一直線，與他二邊 AC, AB 相交於 E, F, 若 ∠AEF 等於 ∠AFE, 則 BD : CD = BF : CE.



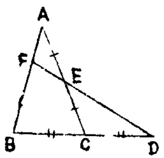
2. 在三角形 ABC 之二邊 AB, AC 上取 E, F 二點, 令 BE 爲 AE 之二倍, AF 爲 CF 之二倍, 連結 EF, 延長 BC, EF 相交於 H, 問 BH 與 CH 之比如何.



3. 三角形 ABC 之邊 AB 小於 AC, 延長 AB 至 D, 從 D 引一直線, 與 AC, BC 相交於 E, F, 令 BD=CE=AB, 求證 AB : AC =EF : FD.



(解法注意. 可視直線 BFC 爲三角形 ADE 之截線.)

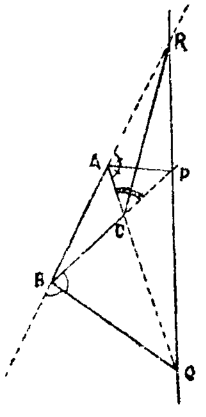


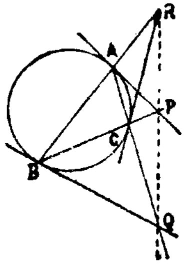
4. 三角形 ABC 之邊 BC 延長至 D, 令 CD 等於 BC, 從 D 引直線, 通過 AC 之中點 E, 與 AB 相交於 F, 問 FE, ED 之比如何.

(解法注意. 宜視直線 AFB 爲三角形 DCE 之截線.)

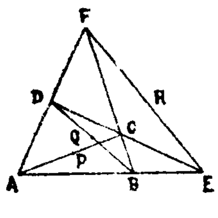
5. 三角形之各外角之二等分線，與延長對邊之三箇交點，同在一直線之上.

6. 切於圓內接三角形之各頂點之切線，與延長對邊之三箇交點，同在一直線之上.





**7. 完全四邊形 ABCDEF 之對角線 AC, BD, EF 之中點 P, Q, R, 同在一直線之上.

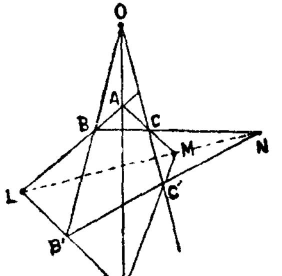


定義. 四直線相交於 A, B, C, D, E, F 六點, 名曰完全四邊形, EF 爲其 **第三對角線.**

附印 ** 之問題較深, 證明可緩.

**8. 連結 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 之頂點之直線 AA', BB', CC', 延長相交於同一之點 O, 又延長二邊 AB, A'B' 相交於 L, 延長二邊 AC, A'C' 相交於 M, 延長 BC, B'C' 相交於 N, 此三交點, 同在一直線之上.

此爲<u>德撒戈</u> (Desargue) 發明之定理.



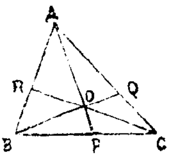
44. 定理 27. 從三角形 ABC 之各頂點引直線, 通過形內 (或形外) 之一點 O, 與三邊 BC, CA, AB (或延長) 相交於 P, Q, R, 則 $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1.$

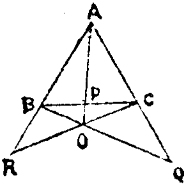
此爲__會佛__ (Ceva) 發明之定理.

證明. 因 $\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{\triangle APB}{\triangle APC}=\dfrac{\triangle BPO}{\triangle CPO}$

$$=\frac{\triangle APB\mp\triangle BPO}{\triangle APC\mp\triangle CPO}$$

$$=\frac{\triangle ABO}{\triangle ACO}\cdots\cdots\cdots(1)$$





依同理 $\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{\triangle BCO}{\triangle ABO}\cdots\cdots\cdots(2)$

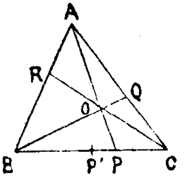
$$\frac{AR}{RB}=\frac{\triangle ACO}{\triangle BCO}\cdots\cdots\cdots(3)$$

以 (1), (2), (3) 三式之兩邊各連乘.

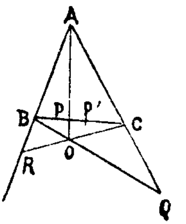
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{\triangle ABO}{\triangle ACO}\cdot\frac{\triangle BCO}{\triangle ABO}\cdot\frac{\triangle ACO}{\triangle BCO}=1.$$

系. 在三角形 ABC 之三邊 BC, CA, AB 上, 取 P, Q, R 三點. (三點在三邊之上, 或一點在邊之上, 他二點在邊之延長上.) 若 $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$, 則 AP, BQ, CR 相交於同一之點 O.

證明. 先從 BC 上取 P 點, 次從 AC, AB (或延長) 上, 取 Q, R 二點, 連結 BQ, CR 二直線, 相交於 O, 設連結 AO (或延長) 與 BC 之交點為 P′.



依本定理 $\frac{BP'}{P'C}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$, 與系所設之式 $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ 對照, 得 $\frac{BP'}{P'C}=\frac{BP}{PC}$, 知 P′ 必與 P 合, 故 AP, BQ, CR 同相交於 O 點.



注意. 以定理 26, 27 之系, 總括於次.

在三角形 ABC 之三邊 BC, CA, AB 上, 取 P, Q, R 三點.

若 $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$, 則 P, Q, R 同在一直線上, 又 AP, BQ, CR 相交於同一之點.

例　題　XX.

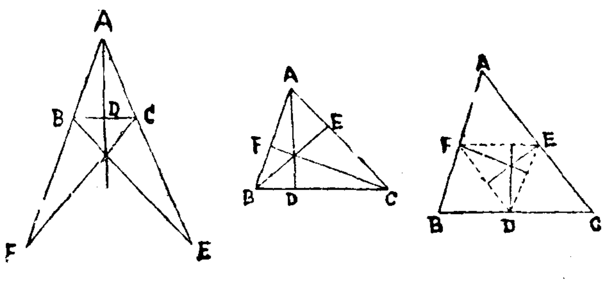
1. 三角形之三中線，相交於同一之點.

2. 三角形之各角之二等分線，相交於同一之點.

3. 三角形之一角及他二角之外角之二等分線，相交於同一之點.

4. 三角形之各角頂至對邊之垂線，相交於同一之點.

5. 立於三角形 ABC 之邊 BC, CA, AB 之中點上之垂線，相交於同一之點.

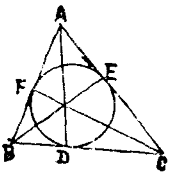


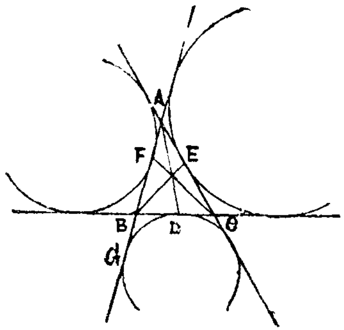
6. 從三角形之各頂點, 至內切圓之切點之直線, 相交於同一之點.

注意. 此交點, 名曰三角形之席耳剛 (Gergonne) 之點.

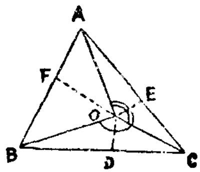
7. 從三角形之各頂點, 至各傍切圓之切點之直線, 相交於同一之點.

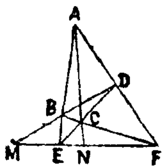
注意. 此交點, 名曰三角形之奈吉耳 (Nagel) 之點.





8. 從三角形 ABC 之各頂點, 引直線至形內之一點 O, $\angle BOC$, $\angle COA$, $\angle AOB$ 之二等分線, 與對邊 BC, CA, AB 相交於 D, E, F, 求證 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$.



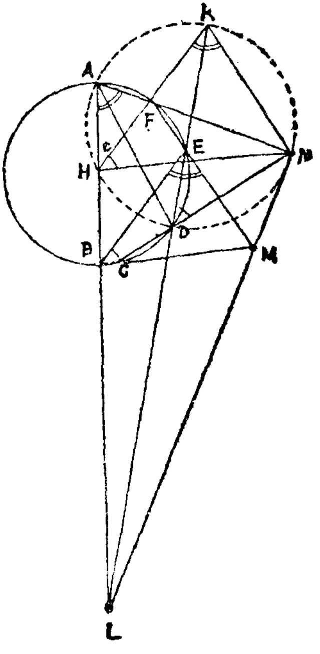


**9. 延長完全四邊形 ABCDEF 之對角線 AC, DB, 與第三對角線 FE 及其延長相交於 N, M, 則 M, E, N, F 為調和列點.

45. 定理 28. 內接於圓之六角形之相對邊延長之三箇交點，同在一直線上.

此爲巴斯果 (Pascal) 發明之定理.

題意. ABCDEF 爲內接於圓之六角形，延長 AB, DE 二邊相交於 L, 延長 BC, FE 二邊相交於 M, 延長 CD, AF 二邊相交於 N. 其交點 L, M, N, 同在一直線上.



證明. 畫過 A, D, N 三點之圓，其圓周與 AB 及延長 DE 相交於 H, K, 則 ∠KHN 與 ∠KDN 同對 KN 弧, 又 BCDE 爲內接於圓之四角形.

知 $\angle KHN=\angle KDN$.

$\angle KDN=\angle EBC$.

$\therefore\ \angle KHN=\angle EBC$……………(1)

又 ∠HKN 與 ∠HAN 同對 HN 弧. ABEF 爲內接於圓之四角形.

知 $\angle HKN=\angle HAN$, $\angle HAN=\angle BEM$.

$\therefore\ \angle HKN=\angle BEM$……………(2)

從 (1) 式及 (2) 式, 知 $\triangle KHN \backsim \triangle EBM$.

因 ∠AHK, ∠ADK 同對 AK 弧, 而 ∠ADK, ∠ABE 同對 AE 弧.

知 $\angle AHK=\angle ADK=\angle ABE$.

(∠AHK, ∠ABE 爲同位角.)

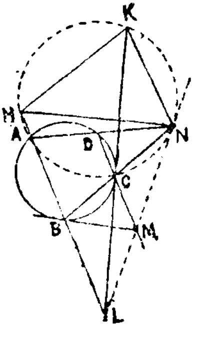
$\therefore$ KH∥EB. 從同法, 知 HN∥BM, KN∥EM.

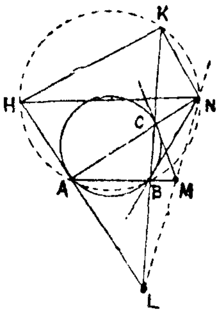
△KHN 與 △EBM 爲相似形, 其對應邊又平行, 故依主要問題 7, 連結對應角之頂點之三直線 HB, KE, NM, 延長同交於 L 點, 即 L, M, N 三點同在一直線上.

例題 XXI.

1. 延長內接於圓之四角形 ABCD 之 AB 邊，與切於 C 點之切線相交於 L，延長其 DC 邊，與切於 B 點之切線相交於 M，延長其 AD，BC 二邊相交於 N，求證 L，M，N 三點同在一直線上.

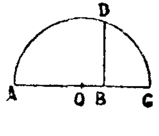
2. 切於內接於圓之三角形之各項點之切線，與延長其對邊之交點，同在一直線上.





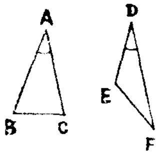
雜題 II.

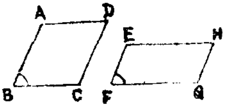
1. 二直線之和之半，大於其二直線之比例中項.

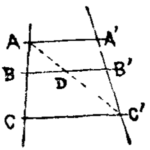


2. 已知頂角及夾頂角之二邊之和，求證以二等邊三角形之面積爲最大.

3. 等角等周之平行四邊形，以菱形之面積爲最大.



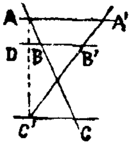


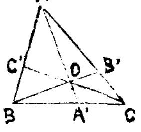


4. 一直線上取 A, B, C 三點，令 $AB : BC = m : n$，從各點引平行線 AA′, BB′, CC′，其 A′, B′, C′ 三點，亦同在一直線上，則有次之關係.

$$(m+n)BB' = nAA' + mCC'.$$

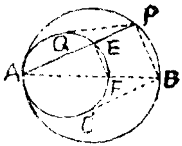
5. 二直線相交，一直線上有 A, B, C 三點，他直線上有 A′, B′, C′ 三點，連結 AA′, BB′, CC′ 三直線，互爲平行，設 $AB : BC = m : n$，問與前題有相同之關係否.

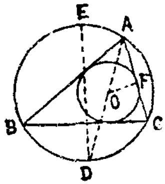




6. 從三角形 ABC 之各頂點，引直線至形內之一點 O，延長 AO, BO, CO，與對邊相交於 A′, B′, C′，求證 $\frac{A'O}{AA'} + \frac{B'O}{BB'} + \frac{C'O}{CC'} = 1$

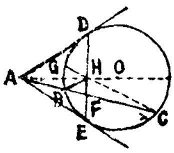
*7. 二圓內切於 A 點, 從 A 引大圓之任意之弦 AP, 從 P 引小圓之切線, 切於小圓周之 Q 點, 求證 AP 與 PQ 之比爲一定.

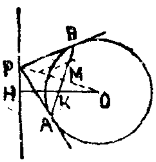




8. 從三角形 ABC 之頂點 A 引直線, 通過內切圓之中心 O, 與外接圓之周交於 D, 求證 AO 與 OD 所包之矩形, 等於內切圓之半徑與外接圓之直徑所包之矩形.

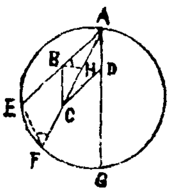
9. 從圓 O 外任意之一點 A, 引二切線, 切於圓周上之 D, E 二點, 又從 A 引任意之割線, 與圓周相交於 B, C, 連結 DE, 與割線相交於 F, 則 A, B, F, C 爲調和列點.

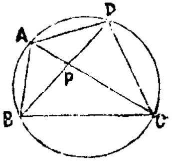




10. 從定圓 O 外之定直線上任意之一點 P, 引二切線, 切於圓周上之 A, B 二點, 連結 A, B 二切點之直線, 恆通過從圓之中心 O 至定直線之垂線上之定點 K.

*11. 過平行四邊形 ABCD 之頂點 A, 畫任意之圓, 延長 AB, AC, AD, 與圓周相交於 E, F, G, 求證 AB·AE+AD·AG 等於 AC·AF.

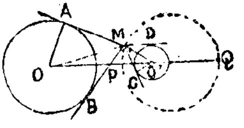




*12. ABCD 爲內接於圓之四角形，則有次之關係.

$$\frac{AD\cdot AB+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DC\cdot DA}=\frac{AC}{BD}.$$

13. 設 P, Q 爲二圓 O, O′ 之相似中心，以 PQ 爲直徑畫圓，其圓周上任意之點 M，視二圓 O, O′，恆爲等角.



注意. 視爲等角者，從 M 引二圓 O, O′ 之切線 MA, MB, MC, MD, 其 ∠AMB 等於 ∠CMD 也.

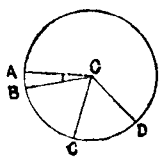
第七章

計算應用問題

前已述凡量皆得以一定之單位計之，以單位計得之數，爲其量之測度，故本章表線及面積等之文字，卽表其測度者也.

46. 定理 29. 設以在圓之中心之單位角所夾之弧爲單位弧，則中心角與其夾弧之測度同.

題意. 設以 $\angle AOB$ 爲中心角之單位，其所夾之弧 AB 爲弧之單位，則任意之中心角 COD 之測度，等於其所夾之弧 CD 之測度.



證明. 假定 $\dfrac{\angle COD}{\angle AOB}=m,\ \dfrac{\text{弧 CD}}{\text{弧 AB}}=m'.$

依定理 5　$\dfrac{\angle COD}{\angle AOB}=\dfrac{\text{弧 CD}}{\text{弧 AB}}.$

故　$m=m'.$

此理由，基於以圓周之三百六十分之一爲度，度之六十分之一爲分，分之六十分之一爲秒，與角之度分秒同.

例題 XXII.

1. 求圓周角 60° 之所夾之弧之度數.

2. 從測 40° 之弧之弦之一端引切線，求弦與切線所夾之角之度數.

3. 從圓外之一點引二切線，其所夾之角為 40°，連結二切點之直線，分圓周為二弧，問劣弧優弧之度數各幾何.

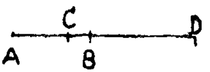
4. 立於 n 分圓周之一之弧上之中心角及圓周角，試以公式表其角之度數.

5. 設以 57°17′45″ 之中心角為角之單位，問半圓周之測度如何.

注意. 此單位弧，(即等於半徑之弧) 在理論數學中，用為測角之單位，其單位之名曰拉第恩，(Radian) 此測角法，名曰弧度法.

6. 問 n 度之角為幾拉第恩.

主要問題 14. 有長為 a 之直線，依 $m:n$ 之比調和分割，問各部分之長幾何.



解法. 設直線 AB 之長為 a，依 $m:n$ 之比，內分於 C，外分於 D.

則 $AC : BC = m : n$.

依合比之理, $AC + BC : BC = m + n : n$.

即 $a : BC = m + n : n$.

$$\therefore \quad BC = \frac{n}{m+n}a \cdots\cdots\cdots(1)$$

依同法, 得 $AC = \dfrac{m}{m+n}a \cdots\cdots\cdots(2)$

又 $AD : BD = m : n$.

依分比之理, $AD \sim BD : BD = m \sim n : n$.

即 $a : BD = m \sim n : n$.

$$\therefore \quad BD = \frac{n}{m \sim n}a \cdots\cdots\cdots(3)$$

依同法, 得 $AD = \dfrac{m}{m \sim n}a \cdots\cdots\cdots(4)$

前之 (1), (2), (3), (4) 四式, 即所求之答.

若 $m = n$, 則 $AC = BC = \dfrac{1}{2}a$, $AD = BD = \infty$.

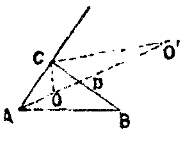
例 題 XXIII.

1. 有長六尺之直線, 依 $7 : 5 : 3$ 之比分之.

2. 有長五尺之直線, 依 $5 : 3$ 之比, 調和分之, 問各部分之長如何.

3. 設三角形之三邊爲 3 尺, 4 尺, 6 尺, 而最大角及其外角之二等分線, 分其對邊, 問各部分之長如何.

4. 設三角形 ABC 之三邊 AB, BC, CA 之長爲 12 寸, 7 寸, 9 寸, $\angle A$ 及其外角之二等分線與對邊 BC 及延長之交點爲 P, Q, 問 PQ 之長幾何.



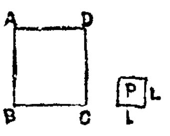
5. 設三角形 ABC 之 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $\angle A$ 之二等分線 $AD=m$, 求 $\angle A$ 內傍心與內心之距離.

6. 設 AB, CD 爲調和列點, 求證 $\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$.

7. 一直線上順次取 A, C, B, D 四點, 令 $AC=a$, $AB=b$, $AD=c$, 若 a, b, c 爲調和級數, 則此四點爲調和列點.

47. 定理 30. 矩形之面積之測度, 等於其底邊與高之測度之乘積.

題意. 設 L 爲線之單位, L 之上之正方形 P 爲面積之單位, S 爲矩形 ABCD 之測度, a, b 爲底邊 BC 與高 AB 之測度.



則　　$S=ab$.

證明. 因 $\frac{\square AC}{\square P}=S$, $\frac{BC}{L}=a$, $\frac{AB}{L}=b$.

依定理 22, $\frac{\square AC}{\square P}=\frac{BC}{L}\times\frac{AB}{L}$, $\therefore S=ab$.

系 1. 設四直線為比例量, 其測度以 a, b, c, d 表之, 則有次之關係.

$$ad=bc,\quad a=\frac{bc}{d}.$$

系 2. 設 a, b 為二直線之測度, m 為二直線之比例中項之測度, 則有次之關係.

$$m^2=ab,\quad m=\sqrt{ab}.$$

系 3. 設 a, b, c 為直角三角形之二邊及其斜邊之測度, 則有次之關係.

$$c^2=a^2+b^2,\quad c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{(c+b)(c-b)}.$$

系 4. 設 S 為面積之測度, a, h 為底邊及高之測度, 其關係從次之各形而異.

正方形 $S=a^2$.

平行四邊形 $S=ah$.

梯形 $S=\frac{1}{2}(a+a')h$. (a, a' 為平行二邊之測度.)

三角形 $S=\frac{1}{2}ah.$

又設 a, b, c 爲三角形之三邊之測度，以 s 代 a, b, c 之和之半.

則 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

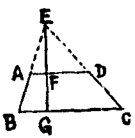
例 題 XXIV.

1. 頂角爲直角之二等邊三角形，與等邊三角形等積，問二等邊三角形之底邊與等邊三角形之一邊之比如何.

2. 正方形與正三角形之周圍，同爲 12 公尺，問面積之比如何.

3. 設面積爲 20 平方寸之正三角形之一邊，與正六角形之一邊之比爲 5 : 2，問正六角形之面積幾何.

主要問題 15. 設 a, b 爲梯形之平行二邊之長，h 爲高，從他二邊之延長之交點，引垂線至底邊 b 之上，求垂線之長.



解. ABCD 爲梯形，$AD=a$, $BC=b$, $(a<b)$ 延長 BA, CD 二邊，相交於 E，以 x 表從 E 至 BC 上之垂線 EG.

因 $\triangle EBC \backsim \triangle EAD.$

$\therefore$ EG : EF = BC : AD, 即 $x : x-h = b : a$.

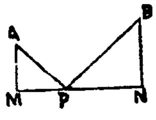
化得 $x : x-(x-h) = b : b-a$, 即 $x : h = b : b-a$.

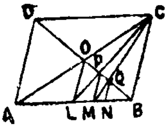
$\therefore$ $x = \dfrac{b}{b-a}h$.

例 題 XXV.

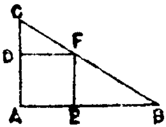
1. 以長五尺之竿直立於地上，其影長三尺五寸，同時有塔影長三丈，問塔高幾何.

2. 從一直線之同側之 A, B 二點，各引垂線，至直線上之 M, N 二點，設 AM = 4 寸，BN = 5 寸，MN = 40 寸，求於 MN 上取 P 點，令 AP + PB 最小.



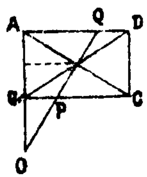


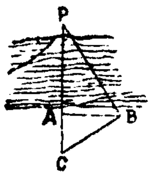
3. 從平行四邊形 ABCD 之對角線 AC, BD 之交點 O, 依 DA 平行，引直線，與 AB 邊相交於 L, 連結 CL, 與 BD 相交於 P, 從 P 依 OL 平行，引直線，與 AB 相交於 M, 連結 CM, 與 BD 相交於 Q, 從 Q 依 PM 平行，引直線，與 AB 相交於 N, 設 AB 之長 1 尺，求 LB, MB, NB 之長.



4. 夾直角三角形之直角之二邊之長爲 3.6 寸，6.4 寸，以直角之頂點 A，爲正方形之頂點，又從斜邊 BC 上取一頂點 F，就 AB，AC 二邊上，作正方形 AEFD，求正方形之一邊之長。

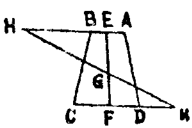
5. 延長矩形 ABCD 之邊 AB 至 O，從 O 引直線，與 BC，AD 二邊相交於 P，Q，分矩形之面積爲二等分，設 AB=8 尺，BC=15 尺，BO=6 尺，問 BP，AQ 之長各幾何。



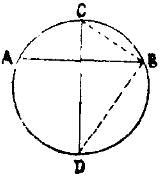


6. 在河岸之一點 P 有一樹，人立於其正對岸之 A 點，沿岸行 30 公尺至 B 點，從 B 依與 PB 成垂直之方向，行 37.5 公尺至 C 點，P，A，C 三點同在一直線之上，求此河之闊。

7. 延長梯形 ABCD 之平行二邊 AB，CD 至 H，K，令 BH 等於 CD，DK 等於 BA，梯形之中線爲 EF，連結HK，與 EF 相交於 G，設 AB=7，CD=9，EF=8，求 EG 之長。

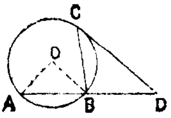


8. 弓形之高二寸五分，弦之長八寸，問此弧之半徑幾何.



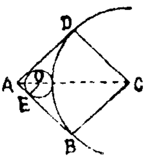
定義. 弓形之弦之中點與弧之中點之距離，爲弓形之高.

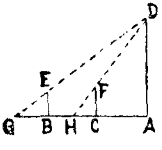
9. 設圓之半徑 6 寸，弓形之高二寸五分，問弦之長幾何.



10. 圓周上有 A, B, C 三點，延長 AB 至 D，設 AB=BC=BD，求證此圓之半徑等於 $\frac{AB^2}{CD}$.

11. 以正方形 ABCD 之一頂點 C 爲中心，CB 爲半徑，畫圓，又於此圓之外，畫切於此圓及正方形之二邊 AB，AD 之小圓，設 AB=1 尺，求小圓之半徑.

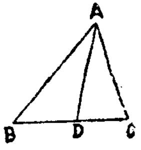




12. 在平面上之 A 點，有直立之燈臺，身長 m 尺之人，立於其平面上之 B 點，影之長爲 b 尺，此人向 A 進行 d 尺至 C 點，其影之長爲 c 尺，問燈火之高如何.

主要問題 16. 從三角形 ABC 之各頂點 A, B, C，引各角之二等分線，與三邊 BC，CA，AB 相交

於 D, E, F 設三邊之測度爲 a, b, c, 求 AD, BE, CF 之測度.



解. 因 $BD : CD = AB : AC$

$$= c : b.$$

依主要問題 14 $BD = \frac{c}{b+c}a.$

$$CD = \frac{b}{b+c}a.$$

依主要問題 11 $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$

$$= c \times b - \frac{ac}{b+c} \times \frac{ab}{b+c}$$

$$= bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc\{(b+c)^2 - a^2\}}{(b+c)^2}.$$

∴ $AD = \frac{2}{b+c}\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}$

$$= \frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}. \quad \left(s = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

依同法得 $BE = \frac{2}{c+a}\sqrt{cas(s-b)}.$

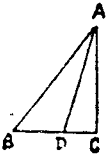
$$CF = \frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}.$$

例 題 XXVI.

1. 設三角形之三邊之長爲 6 寸, 10 寸, 14 寸, 從各頂點引各角之二等分線至對邊之上, 問其長各幾何

2. C 爲直角之直角三角形 ABC 之面積 6 平方寸, AC 長 4 寸, 求 ∠A 之二等分線 AD 之長.

3. 從三角形 ABC 之頂點 A, 引 ∠A 之二等分線, 與對邊 BC 交於 D, 設 AB, BC, CA 之長爲十二寸, 十六寸, 十三寸, 求 AD 之長計算至分位止.



4. 從三角形之各頂點, 引各外角之二等分線, 至對邊之延長線上, 設三角形之三邊爲 a, b, c, 求作公式表各外角之二等分線之長.

5. 設三角形之三邊爲 a, b, c, 求作公式表各角之頂點與內切圓心之距離.

6. 設三角形之二邊之長爲 12 寸及 15 寸, 從此二邊所夾之角之頂點, 引垂線至第三邊之上, 其長爲 10 寸, 求外接圓之半徑之長.

7. 設三角形之三邊之長爲 26 尺, 28 尺, 30 尺, 求外接圓之半徑之長.

8. 設三角形 ABC 之 AB=10 呎, AC=17 呎, BC=21 呎, 從頂點 A, 引 ∠A 之二等分線, 與對邊 BC 交於 E, 問 △ABC, △ACE 之面積各幾何.

9. 設三角形之三邊爲 a, b, c, 外接圓之半徑爲 R, 求證三角形之面積等於 $\frac{abc}{4R}$.

主要問題 17. 有多角形 ABC…, 作與之相似之多角形 A′B′C′…, 而面積爲 n 倍, 問 AB 之對應邊 A′B′ 之長如何.

解. 以 S 代多角形 ABC… 之面積, S′ 代多角形 A′B′C′… 之面積, a 代 AB 邊, a' 代 A′B′ 邊.

因 $S' \backsim S$, $S'=nS$, 依定理 25 之系, $S : S'=a^2 : a'^2$.

即 $S : nS=a^2 : a'^2$.

左邊之比, 同以 S 約之, $1 : n=a^2 : a'^2$, $\therefore a'^2=na^2$.

兩邊各開平方, 得 $a'=a\sqrt{n}$.

例 題 XXVII.

1. 設三角形 ABC 之 AB=12 寸, AC=15 寸, 在 AB 上取 D 點, 令 AD=9 寸, 從 D 引直線, 與 AC 相交於 E, 分三角形之面積爲二等分, 問 AE 之長幾寸.

2. 設三角形 ABC 之 AB=7 寸, BC=8 寸, 從 BC 上之中點 M, 引直線至 AB 上之一點 N, 令 △BMN 等於本形之七分之一, 問 AN 之長幾何.

3. 設三角形 ABC 之 AB=25 寸, BC=39 寸, CA=56 寸, AB 上取 D 點, BC 上取 E 點, CA 上取 F 點, 令 AD=5 寸, BE=6 寸, CF=7 寸, 問三角形 DEF 之面積幾平方寸.

4. 設三角形之三邊爲 10, 12, 15, 在三角形內, 依一邊平行, 引直線, 分面積爲二等分, 求平行線之長.

5. 設大小兩相似多角形之對應邊之比爲 25 : 3, 大多角形之面積一平方尺, 問小多角形之面積幾何.

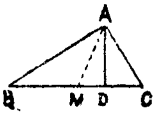
6. 設三角形 ABC 之 BC, CA, AB 之長, 爲 20 寸, 13 寸, 21 寸, 依 BC 平行引直線, 與他二邊之交點爲 D, E, 知 DE 之長 8 寸, 求三角形 ADE 之面積.

7. 三角形之底邊 a 公尺, 高 h 公尺, 在三角形內, 作與底邊平行之直線, 分面積爲二等分, 求平行之直線之長.

8. 設三角形之底邊爲 a, 依底邊平行, 引二直線, 分面積爲三等分, 求二平行線之長.

9. 有三箇相似形, 其對應邊之長爲三尺, 四尺, 十二尺, 又有一相似形, 其面積等於三箇相似形之面積之和, 問其對應邊之長幾何.

主要問題 18. 設直角三角形 ABC 之斜邊 BC 等於 a, 從直角頂 A 至 BC 上之垂線 AD 等於 h, 求 BD, DC 之長.



解. 以 x, y 代 BD, DC 之長.

因 $x : h = h : y$.

從 $\left.\begin{array}{r} xy = h^2 \\ x+y=a \end{array}\right\}$ 求 x, y.

圖中 BC 之中點爲 M, $AM = BM = CM = \frac{a}{2}$,

$$MD = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - h^2}.$$

$$\therefore \quad x = BM + MD = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - h^2} = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 - 4h^2}\right).$$

$$y = CM - MD = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - h^2} = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - 4h^2}\right).$$

此 x, y 之值, 與二次方程式 $z^2 - az + h^2 = 0$ 之二根無異, 因此方程式之二根之和爲 a, 而其積爲 h^2 也.

又此 x, y 之值, 與二元聯立方程式 $x+y=a$, $xy=h^2$ 之根亦同.

幾何學之應用問題, 能以適應其條件之方程式之根, 爲問題之解答者甚多.

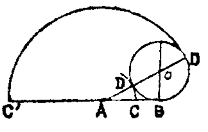
例　題　XXVIII.

1. 設矩形之面積 64 平方寸，二邊之和 2 尺．問二邊之長各幾何．

2. 求二次方程式 $x^2-10x+16=0$ 之根，以圖解之．

3. 從直徑爲 a 之圓周上之一點 A，引等於 b 之切線 AP，又從 P 引直線，通過圓之中心 O，與圓周相交於 R，Q，求 PQ，PR 之長，又問其値等於如何之二次方程式之根．

4. 設直線 AB 之長爲 a，分爲中末比於 C 及 C′，求 AC 及 AC′ 之長．



5. 長一尺之直線，分爲二直線．以一直線爲一邊之正方形之面積，等於全線與他一直線爲二邊之矩形之面積，求二直線之長．

6. 矩形之面積 144 平方寸，二邊之差 7 寸，問二邊之長各幾何．

7. 圓之半徑一公尺，圓之弦所對之弧爲圓周之十分之一，求弦之長．

8. 長 25 尺之直線，分爲二直線，其二直線上之正方形之差爲 25 平方尺，問二直線之長各幾何.

9. 二弦 AB, CD 相交於 E 點，設 CE : ED=2 : 3, AB=22 寸，AE=6 寸，問 CD 之長幾寸.

10. 圓之半徑 5 公尺，弓形之高 0.4 公尺，以此弓形之弧之半爲弓形之弧，問其高幾何.

11. 直角三角形 ABC 之斜邊 BC 長 25 寸，而 AB : AC =4 : 3，問斜邊上 AB, AC 之正射影之長各幾何.

12. 作內接於三角形之正方形，其正方形之一邊，在三角形之底邊之上，只云三角形之底邊 6 尺，高 4 尺，問正方形之一邊幾何.

13. 內接於圓之四邊形 ABCD 之 AB 邊長 3.5 寸，CD 邊長 5 寸，AD : BC=1 : 2，延長 BA, CD 相交於 E，從 E 引切於此圓之切線，問切線之長幾何.

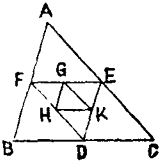
14. 設三角形 ABC 之 CA, AB, BC 之長爲 51 寸，52 寸，53 寸，今以 BC 爲直徑畫圓，其圓周與 AB, CA 相交於 D, E，問 DE 之長幾何.

15. 設三角形之三邊之比爲 25 : 52 : 63，其面積爲 2520 平方尺，求各邊之長.

16. 設梯形之上底爲 a, 下底爲 b, 在梯形內作與兩底平行之直線, 分面積爲二等分, 問此平行線之長如何.

17. 有梯形之地, 上底三步, 下底四步, 中長五步, 依兩底平行作直線, 分面積爲二等分, 問平行線與下底之距離幾何.

18. 連結三角形 ABC 之各邊之中點, 作三角形 DEF, 又連結此三角形之各邊之中點, 作三角形 GHK, 依同法遞作三角形, 至無窮小而止, 問 $\triangle ABC+\triangle DEF+\triangle GHK+\cdots$ 與 $\triangle ABC$ 之比如何.



主要問題 19. 矩形之相鄰二邊之和 (或其周圍) 爲一定之長, 以正方形之面積爲最大.

此問題, 可用雜題 II 之問題 2 之方法證明.

注意. 此與代數學中設 $x+y$ 爲一定數, xy 之値以 $x=y$ 爲最大, 完全相同.

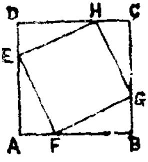
例 題 XXIX.

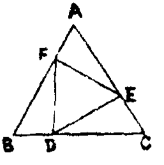
1. 設三角形之一角爲 60°, 夾此角之二邊之和爲 8 尺, 問面積最大幾何.

2. 設有平行四邊形, 其一角爲 30 度, 周圍 40 公尺, 問其面積最大幾何.

3. 設有一邊 30 尺之正方形，作內接於此正方形之最小正方形，問最小之正方形之面積幾何.

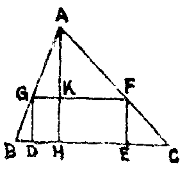
4. 設有面積 20 平方寸之正三角形，作內接於此正三角形之最小正三角形，問最小之正三角形之面積幾何.

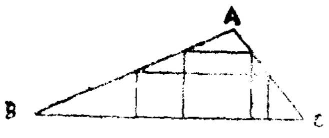




5. 設有底邊 10 尺高 7 尺之三角形，作內接於此三角形之矩形，其矩形之一邊，在三角形之底邊之上，問矩形之面積最大幾何.

6. 設三角形 ABC 之 BC 長 63 尺，AC 長 25 尺，AB 長 52 尺，作內接於此三角形之正方形與最大之矩形，其正方形之一邊與矩形之一邊，同在三角形之 BC 邊上，問矩形之面積與正方形之面積之差幾何.

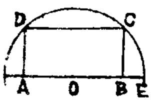


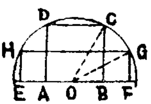


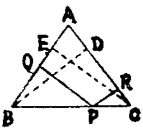
7. 作內接於半圓之矩形, 只云半圓之半徑 4 尺, 問矩形之面積最大幾何.

8. 設內接於半圓之最大矩形之面積為 25 平方寸, 問內接於此半圓之正方形之面積幾何.

*9. 從三角形 ABC 之 BC 邊上之一點 P, 引垂線 PQ, PR, 至他二邊 AB, AC 之上, 令 PQ, PR 所包之矩形之面積最大, 以 a, b, c 代 BC, CA, AB 之長, 求最大之矩形之面積.







附　　　錄

問題解法指南及答

例題 I.

1. 用第 13 節之比例變化 IX 及 VI.

2. 依分比之理，$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$，若 $b<d$，則左邊大於右邊，不能相等，由此知 b 必大於 d，$\therefore a-b>c-d$，移項，得 $a+d>b+c$.

3. 以 $\frac{a}{b}$ 乘 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ 之兩比，則 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{ab}{bc}=\frac{a}{c}$，又以 $\frac{a}{b}$ 乘 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a}{c}$ 之兩比，則 $\frac{a^3}{b^3}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{c}=\frac{c}{d}\times\frac{a}{c}=\frac{a}{d}$.

4. 以 Bb 乘 $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$ 之兩邊，則 $A\times b=B\times a$.

例題 II.

1. 設 $\angle BAC$，$\angle B'A'C'$ 爲圓周角，因圓周角即中心角之半.

依定理 5，$\frac{1}{2}\angle BAC:\frac{1}{2}\angle B'A'C'=$弧 BC : 弧 $B'C'$.

$\therefore$ $\angle BAC:\angle B'A'C'=$弧 BC : 弧 $B'C'$.

2. 設 $\angle BAC$，$\angle BAC'$ 爲切線與弦所夾之角.

因 $\angle BAC=\angle ADC$，$\angle BAC'=\angle AD'C'$.

依定理 5, $\frac{1}{2}\angle ADC : \frac{1}{2}\angle AD'C'$ = 弧 AC : 弧 AC'.

$\therefore$ $\angle BAC : \angle BAC'$ = 弧 AC : 弧 AC'.

3. 設角之頂點為 O, 任意作 $\angle AOD$, 延長 AO, DO, 與圓周相交於 B, C, 成 $\angle BOC$, 為 $\angle AOD$ 之對頂角, 因立於 $\angle AOD$ 所夾之弧 AD 上之中心角, 與立於 $\angle BOC$ 所夾之弧 BC 上之中心角之和之半, 等於 $\angle AOD$, (或 $\angle BOC$) $\therefore$ 頂點在圓內之角, 與此角及對頂角之二邊所夾之弧, 能成比例, 又角之頂點在圓外, 則此角與所夾二弧之差, 能成比例.

4. 用 $\angle A = \angle BCD - \angle ABC$.

例題 III.

1. 從 C 點依 BD 平行, 引直線至 AD 之延長線上.

2. 令前題之 $c=b$, 如前法求之.

3. 用更迭之理.

例題 IV.

1. 因 ED∥BC, 則 $\angle EDB = \angle DBC = \angle EBD$.

由此知 EB＝ED, 用同法得 DC＝ED, $\therefore$ EB＝DC.

依定理 6, $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$, EB 等於 DC, 則 AE 必等於 AD.

$\therefore$ AE＋EB＝AD＋DC, 即 AB＝AC.

2. 卽主要問題 1 之逆.

3. 用主要問題 1 之方法及定理 9 外分之情形.

4. 從 $\triangle ABC$ 用定理 9 與合比之理, 得 $\dfrac{BC}{AB+AC}=\dfrac{CD}{AC}$.

又從 $\triangle ACD$ 依定理 9, 得 $\dfrac{OD}{OA}=\dfrac{CD}{AC}$.

由上之二式, 得 $\dfrac{BC}{AB+AC}=\dfrac{OD}{OA}$.

5. 從 B 引 $\angle ABC$ 之二等分線, 與 AC 相交於 E, 又從 E 引垂線至 BC 之上, 其垂趾必合於 BC 之中點 M, 知此垂線 EM, 與 $\triangle ABC$ 之高 AD 平行.

從 $\triangle ACD$, 依定理 6, $\dfrac{CE}{AE}=\dfrac{CM}{DM}$, 從 $\triangle ABC$,

依定理 9, $\dfrac{CE}{AE}=\dfrac{BC}{AB}$.

由上之二式, 得 $\dfrac{CM}{DM}=\dfrac{BC}{AB}$, 因 $CM=\dfrac{1}{2}BC$, $\therefore$ $DM=\dfrac{1}{2}AB$.

6. 從 $\triangle ABD$, $\triangle BCD$, $\triangle ADC$, 依定理 9, 得次之三式.

$\dfrac{BM}{DM}=\dfrac{AB}{AD}\cdots(1)$ $\quad \dfrac{BM}{DM}=\dfrac{BC}{CD}\cdots(2)$ $\quad \dfrac{AN}{CN}=\dfrac{AD}{CD}$ (3)

由 (1), (2) 兩式, 得 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{CD}$, 用更迭之理, $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{CD}$.

$\therefore$ $\dfrac{AN}{CN}=\dfrac{AB}{BC}$.

7\
8} 第三角之二等分線，通過第一第二兩角之二等分線之交點 C，可倣前題之方法證明之.

例題 V.

1. 從垂趾三角形之性質，知 FH，FA 爲 △DFG 之 ∠DFG 及其外角之二等分線，∴ D, H, G, A 爲調和列點.

2. 因 ∠PTA＝∠ATQ，∠ATB＝R∠，知 TA，TB 爲三角形 PTQ 之 ∠PTQ 及其外角之二等分線，∴ P, A, Q, B 爲調和列點.

3. 添作 MC 直線，因 ∠NMC＝∠CMN，∠BMC＝R∠，知 MB，MC 爲 △AMD 之 ∠AMD 及其外角之二等分線，∴ A, B, D, C 爲調和列點.

4. 從 P 引 PB′，令 ∠CPB′＝∠APC，則 PC 爲 ∠APB′ 之二等分線，得比例式 AP : B′P＝AC : B′C，以與 AP : BP＝AC : BC 對照，知 B 須合於 B′.

例題 VI.

1. 宜注意於 ∠POQ＝R∠.

2. 依主要問題 3 之注意 1，△ABD∽△ACD∽△ABC.

∴ BD : AB＝AB · BC，CD : AC＝AC : BC.

3. 因 $\triangle TOM \backsim \triangle OPT$, $\therefore OM : OT = OT : OP$.

4. 因 $\triangle AEB \backsim \triangle FDC$, $AB = BC = CD$.

$\therefore$ $EB : BC = BC : CF$.

5. 因 $\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$ $\therefore AD : A'D' = AB : A'B'$.

又因 $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$.

$\therefore$ $AD : A'D' = AC : A'C' = BC : B'C'$.

6. 因 $\triangle OBC \backsim \triangle O'B'C'$.

依問題 5, $OD : O'D' = BC : B'C' = AB : A'B' = AC : A'C'$.

7. 從 $\angle BOC = 2\angle BAC$, $\angle B'O'C' = 2\angle B'A'C'$.

知 $\triangle BOC \backsim \triangle B'O'C'$, $\therefore OB : O'B' = BC : B'C'$.

因 $BC : B'C' = AB : A'B' = AC : A'C'$.

$\therefore$ $OB : O'B' = AB : A'B' = AC : A'C'$.

8. 作直徑 AC, BD, 連結 AD, BC, 相交於兩圓之切點 P, 卽易證明 $\triangle ABC \backsim \triangle BDA$.

9. 因 BCED 爲圓內接四邊形, 知 $\angle ABD = \angle AEC$, $\angle ADB = \angle ACE$, $\therefore \triangle ABD \backsim \triangle AEC$.

10. $\triangle BCD$ 與 $\triangle ABC$, 同爲二等邊三角形, $\angle C$ 爲兩形公共之底角, 知 $\triangle BCD \backsim \triangle ABC$, $\therefore AC : BC = BC : CD$.

11. 添作直線 BE, 因 $\angle BAD=\angle EAB$, 又 $\angle AEB=\angle ABC$, 知 $\triangle ABD\backsim\triangle AEB$, $\therefore$ $AD:AB=AB:AE$.

例題 VII.

1. 以 a, b, a', b' 代兩直角三角形之斜邊與他一邊.

因 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a'}{b'}$.

依合比之理及分比之理, $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{a'+b'}{b'}\cdots(1)$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{a'-b'}{b'}\cdots(2)$$

以 (1), (2) 兩式之兩邊各相乘. 得 $\dfrac{a^2-b^2}{b^2}=\dfrac{a'^2-b'^2}{b'^2}$.

兩邊各開平方, $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}=\dfrac{\sqrt{a'^2-b'^2}}{b'}$, 由此知夾直角之二邊之比亦相等, 依定理 12, 兩形爲相似形.

2. 從定理 12, 誘導得 $\triangle ABD\backsim\triangle A'B'C'$.

3. 從定理 12, 證明垂線所分之兩三角形爲相似形, 可得角之關係.

4. 從定理 12, 證得 $\angle ADB=\angle ACD$, 卽 $\angle ADB$ 等於對 AD, DB 所夾之弧 BD 之圓周角 BCD, $\therefore$ AD 爲切線.

5. 用定理 12 證得 $\triangle AEC\backsim\triangle ABE$, 卽可知各角之關係.

雜題 I.

1. 用加比之理.

注意. 此定理,凡相似多角形皆同.

2. 須證明 $\triangle ABC \backsim \triangle BOC$.

3. 因 $\triangle BFG$ 之 $\angle FBG$, 與 $\triangle BED$ 之 $\angle EBD$ 爲公共之角, 延長 FG 至圓周之上, 又知 $\angle BGF = \angle BDE$, $\therefore$ $\triangle BFG \backsim \triangle BED$.

4. 因 $\angle AED = \angle ADE = \angle BDC$, 延長 BE 至外圓周之上, 又知 $\angle ABE = \angle BCD$, $\therefore$ $\triangle ABE \backsim \triangle BCD$.

5. 從交點 A, 引二圓之直徑 AE, AF. E, F 二點與交點 B 同在一直線之上.

因 $\angle ACB$ 與 $\angle AEB$, 同對大圓之弧 AB, 知 $\angle ACD = \angle AEF$, 又 $\angle ADB$ 與 $\angle AFB$, 同對小圓之弧 AB, 知 $\angle ADC = \angle AFE$.

$\therefore$ $\triangle CAD \backsim \triangle EAF$.

6. 因 $\triangle APB \backsim \triangle A'PB'$, $\triangle BPC \backsim \triangle B'PC'$.

$\therefore$ $PB : PB' = AB : A'B'$, 又 $PB : PB' = BC : B'C'$.

從上之二式, 得 $AB : A'B' = BC : B'C'$.

依更迭之理, $AB : BC = A'B' : B'C'$.

7. 解法與前題同.

8. 因 $\triangle BEG$ 與 $\triangle CFH$ 之高相等, 又與同底等高之 $\triangle BAD$ 與 $\triangle CDA$ 爲相似形, 證得 $EG : AD$ 及 $HF : AD$ 之二比相等.

9. 解法與前題同.

10. 通過 F 點, 依 BC 平行, 引直線, 與 AB, DC 相交於 K, H, 從前題知 $KF = FH$, 因 $KF : FH = BG : GC$, $\therefore BG = GC$.

11. 連結 AD 之中點 E, BC 之中點 F.

因 $AE : BF = ED : FC$, 知延長 FE 必過 H 點.

又 $AE : FC = ED : BF$, 知 EF 必過 G 點.

12. 甲之情形, 與問題 9 同.

乙之情形, 從 $DE : BC = DF : FC = 1 : 3$.

得 $DF : DC = GF : BC = 1 : 4$.

又 $EF : EB = FH : BC = 1 : 4$.

$\therefore GH : BC = 1 : 2$.

13. 與前題乙之情形之解法, 同一徑路.

14. 先從 B 及 C 引中線 BE, CF, 相交於 O 點, 連結 EF, 知與 BC 平行, 由問題 10, 知 AD 中線, 亦通過 O 點.

次用前題之方法, 得證明 AO, BO, CO, 各等於其中線之三分之二.

15. 因 DH=HE, 則 KF : FH 及 KA : HA, 皆等於 BK : HE, ∴ F, A 爲 HK 之內分點及外分點.

16. 因 BD : AB=AB : BC.

DO : OA=BD : AB.

AE : EC=AB : BC.

∴ DO : OA=AE : EC.

17. 依 BA 平行, 從 C 引直線, 與 DF 相交於 G.

因 ∠AFE=∠AEF=∠CEG, 又 ∠AFE=∠CGE.

知 ∠CGE=∠CEG, ∴ CG=CE.

從 △DBF∽△DCG, 得 BD : CD=BF : CE.

18. 依 BA 平行, 從 C 引直線, 與 EH 相交於 K.

從 AE : CK=FA : FC=2 : 1, 及 BE : EA=2 : 1.

得 BE×EA : EA×CK=2×2 : 1×1.

卽 BE : CK=4 : 1, ∴ BH : CH=4 : 1.

19. 依 CB 平行, 從 E 引直線, 與 AD 相交於 G.

因 AB : AC=GB : EC.

又 FD : EF=DB : BG, 依反轉之理, EF : FD=BG : DB.

∴ AB : AC=EF : FD.

20. 從 E 引直線, 至 BC 之中點 G, 因 E, G 爲 △ABC 之二邊之中點, 知 EG∥AB, 又 GD=3BG, ∴ FE : ED=BG : GD =1 : 3.

21. 與問題 15 之解法同.

22. 從 $\triangle ABD \backsim \triangle QPB$, 得 $PQ : AP = BP : PD$.

又從 $\triangle APB \backsim \triangle RPD$, 得 $AP : PR = BP : PD$.

$\therefore$ $PQ : AP = AP : PR$.

23. 因 $\triangle ACD \backsim \triangle BCE$, 知 $AC : AD = BC : BE$.

依分比之理, $AC - AD : AD = BC - BE : BE$.

又依更迭之理, $AC - AD : BC - BE = AD : BE$.

若 $AC > BC$, 則 $AD > BE$.

$\therefore$ $AC - AD > BC - BE$, 移項, 得 $AC + BE > BC + AD$.

24. 因 $AP : BP = AQ : CQ = BR : CR = BP : AP$.

$\therefore$ $AP = BP$.

25. 從 $\triangle ACG \backsim \triangle ADS$, 知 $AC : CD = CG : DS$.

又從 $\triangle BCH \backsim \triangle BDS$, 知 $CB : BD = CH : DS$.

因 AB ; CD 爲調和列點, $CB : BD = AC : CD$.

$\therefore$ $CG : DS = CH : DS$, 由此知 $GC = CH$.

26. 因 $AB = DC$.

從 $PR : AR = PQ : AB$, 及 $PS : DS = PQ : DC$.

得 $PR : AR = PS : DS$, 由此知 $RS \parallel AD$

例題 VIII.

1. 定義以對應邊之比全相等者爲相似形，同邊數之兩箇正多角形．一形之任何一角與他一形之任何一角，皆爲對應角，一形之任何一邊與他一形之何任一邊之比皆相等，故兩形爲相似形．

2. 從平行四邊形 ABCD 之對角線 AD 上之任意一點 E，依二邊 DC，BC（或 BA，DA）平行，引二直線至 BC，CD（或 AD，AB）上，所成之四邊形 EC，（或 AE）有二邊在原四邊形之二邊上，他二邊與原四邊形之二邊平行，故同爲平行四邊形，又其四邊形用原四邊形之一角，他三角各與原四邊形之他三角爲同位角，故各角皆順次相等，因兩形爲等角之平行四邊形，故爲相似形．

3. 引對角線，用定理 12 及定理 14．

4. 引對角線 BD，B′D′，用定理 12 及定理 13，14．

5. 兩對角線 AC，BD 之交點爲 O，從 OE＝OG，OF＝OH，知四邊形 EFGH，亦爲平行四邊形．

因 A，B，E，F 四點，同在一箇圓周之上，B，F，G，C 四點，同在一箇圓周之上，$\angle ABE=\angle EFO$，$\angle CBG=\angle CFG$，$\therefore \angle ABC=\angle EFG$，由此知四邊形 EFGH 與四邊形 ABCD，爲等角之平行四邊形．

又因 $\triangle OAB \backsim \triangle OEF$，$\triangle OBC \backsim \triangle OFG$．

知 $AB : EF = OB : OF$，$BC : FG = OB : OF$．

由上之二式得 AP　 F＝BC：FG.

∴ □ABCD∽□EFGH.

6. 從兩圓之切點 P，引公切線，可得角之關係.

因 AB∥A′B′，BC∥B′C′，…

知對應邊之比，皆等於 PA：PB 之比.

7. 用定理 12，幷參考前題之解法.

例題 IX.

1. 以垂線 AD 爲一邊，作正方形 ADEF，連結 BF，與 AC 相交於 G，依 AD 平行，從 G 引垂線，至 BC 之上，卽所求正方形之一邊.

2. 圓之中心 O，爲直徑 AB 上之正方形 ABCD 與所求之正方形之相似中心.

3. 連結弧之兩端，其上作正方形，連結之直線之中點，爲所作之正方形與所求之正方形之相似中心.

4. 置所設之多角形之對應邊 AC 於 AB 之上，則 AB 之 A 端，卽所設之多角形與所求之多角形之相似中心.

5. 先任意作一圓，切 ∠A 之二邊，則 A 點卽此圓與所求之圓之相似中心.

6. AB, CD 爲二圓之平行直徑，通過中心 O, O′ 之直線，與通過 B, D 二端之直線，及連結 B, C 二端之直線，相交於 P, Q.

因 $\triangle BQO \backsim \triangle CQO'$，知 $OQ : O'Q = OB : O'C$.

又 $\triangle OPB \backsim \triangle O'PC$，知 $PO : PO' = OB : O'C$.

$\therefore$ Q 爲內分點，P 爲外分點.

7. 從圓之中心 O, O′，至交點 R, S 及 R′, S′ 引半徑 OR, OS, O′R′, O′S′.

由前題知 $OS \mathbin{/\!\!/} O'S'$，$\therefore PS : PS' = OS : O'S \cdots(1)$

因 $\triangle ROS$，$\triangle R'O'S'$，同爲二等邊三角形，知 $\angle ORS = \angle O'R'S'$.

從 $\triangle PRO \backsim \triangle PR'O'$，得 $PR : PR' = OR : O'R' \cdots(2)$

由 (1), (2) 兩式 $PS : PS'$ 及 $PR : PR'$ 之比，同等於二圓之半徑之比，故爲定比.

8. 宜參照問題 6 之解法.

9. 延長 DE，與圓 B 相交於 F，知 $AD \mathbin{/\!\!/} BF$，與問題 6 同.

10. 因 $AO \mathbin{/\!\!/} A'O'$，$\triangle AOB_1$，$\triangle A'O'B'$ 同爲二等邊三角形.

知 $\angle AB_1O = \angle A'B'O'$，故 $AB_1 \mathbin{/\!\!/} A'B'$.

又因 $\angle B_1AB_2 = R\angle$，則 $AB_1 \perp AB_2$.

已證明 $AB_1 \mathbin{/\!\!/} A'B'$，$\therefore AB_2 \perp A'B'$.

例題 X.

1. 用定理 15 之系 2 及定理 9.

2. $\triangle ABG : \triangle ABC = GH : CK = GD : CD = \frac{1}{3} : 1 = 1 : 3$

3. 從問題 2 知三箇三角形各與原三角形之比, 皆爲 1 與 3 之比, 故三箇三角形之積相等.

4. 因 K, L 爲 $\triangle ABC$, $\triangle CDA$ 之重心.

依問題 2, $\triangle ABC : \triangle AKC = 3 : 1.$

$\triangle CDA : \triangle CLA = 3 : 1.$

$\therefore \quad \square ABCD : \square AKCL = 3 : 1.$

5. 設從 A 至 BC 上之垂線爲 AD, 從 P 至 BC, CA, AB 上之垂線爲 PL, PM, PN.

則 $\triangle ABC \quad \triangle PBC = AD \cdot PL.$

$\triangle ABC \quad \triangle PCA = AD \cdot PM.$

$\triangle ABC : \triangle PAB = AD \cdot PN.$

由上之三式, 得 $\dfrac{\triangle ABC}{AD} = \dfrac{\triangle PBC}{PL} = \dfrac{\triangle PCA}{PM} = \dfrac{\triangle PAB}{PN}$

依加比之理, $\dfrac{\triangle ABC}{AD} = \dfrac{\triangle PBC + \triangle PCA + \triangle PAB}{PL + PM + PN}$

$$= \frac{\triangle ABC}{PL + PM + PN}.$$

$\therefore\quad AD=PL+PM+PN.$

6. 因 $\triangle ABD:\triangle ACD=BD:CD.$

$\triangle OBD:\triangle OCD=BD:CD.$

由上之二式，得 $\triangle ABD:\triangle ACD=\triangle OBD:\triangle OCD.$

依更迭之理，$\triangle ABD:\triangle OBD=\triangle ACD:\triangle OCD.$ 又依分比之理，$\triangle ABD-\triangle OBD:\triangle OBD=\triangle ACD-\triangle OCD:\triangle OCD$，即 $\triangle ABO:\triangle OBD=\triangle ACO:\triangle OCD.$

又依更迭之理，$\triangle ABO:\triangle ACO=\triangle OBD:\triangle OCD.$

$$\therefore\qquad \triangle ABO:\triangle ACO=BD:CD.$$

7. 因 $AB^2:AB\cdot BC=AB:BC.$

$AB\cdot BC:BC=AB:BC.$

從上之二式，得 $AB^2:AB\cdot BC=AB\cdot BC:BC^2.$

8. 因 AXPY 爲平行四邊形，知 $\triangle AXY=\triangle PYX.$

又從 $\triangle BPX:\triangle PYX=BP:CP.$

$\triangle PYX:\triangle CPY=AY:CY.$

$BP:CP=AY:CY.$

得 $\triangle BPX:\triangle PYX=\triangle PYX:\triangle CPY.$

即 $\triangle BPX:\triangle AXY=\triangle AXY:\triangle CPY.$

9. 以 AO, CO, DO 爲 $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle BDO$ 之底邊，則此三箇三角形同高.

因 $AO=2CO=4DO$.

$\therefore$ $\triangle ABO:\triangle BCO=\triangle BCO:\triangle BDO$.

由此知內接於圓之正六角形，爲內接及外切於同圓之正三角形之比例中項.

10. 因 DG 與 BE 平行相等，知 EDCG 爲平行四邊形，H 爲 DG 之二等分點，$\therefore$ $\triangle ADC:\triangle ADH=AC:AH=4:3$.

由此知 $\triangle ABC:\triangle ADG=4:3$.

11. 因扇形之面積，等於半徑與弧相乘之積之半.

依定理 15, $\triangledown AOB:\triangledown COD=\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{CD}$.

例題 XI.

1. 以主要問題 9 之系之二式相加，得

$$\frac{AB^2}{BC^2}+\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{BD}{BC}+\frac{CD}{BC}.$$

卽 $\dfrac{AB^2+AC^2}{BC^2}=\dfrac{BD+CD}{BC}=\dfrac{BC}{BC}=1$.

首末二節同以 BC^2 乘之，則 $AB^2+AC^2=BC^2$.

2. 用主要問題 3 及定理 16.

3. A 爲圓周上之一點，BC 爲直徑，AD 爲垂線，竝作 AB.

注意．此問題之用，能解次之作圖題．

(1)　求二直線之比例中項．

(2)　求作等於所設之矩形之正方形．

(3)　知相鄰二邊之和及面積，求作矩形．

4．用主要問題 9 及定理 6．

5．從主要問題 9，知 $P:DE^2=EG:FG=AC:BC=m:n$．

6．從主要問題 9 之系，得 $AD^2:Q=AC:AB=1:5$．

依此方法，可求 n 分之一（或 m 分之 n）之正方形．

7．因 $DG^2=BD\cdot CD\cdots(1)$

又因 $\angle CDF$，$\angle BDE$ 同為直角，$\angle DCF$ 所對之弧，等於 $\angle DEB$ 所夾之二弧之差，知 $\angle DCF=\angle DEB$．

由 $\triangle CDF\backsim\triangle EDB$，得 $BD:DE=DF:CD$．

$\therefore$ $BD\cdot CD=DE\cdot DF\cdots(2)$

從 (1)，(2) 兩式，得 $DG^2=DE\cdot DF$，即 $DE:DG=DG:DF$．

8．從 $\triangle AEB\backsim\triangle AFD$，得 $AB:BE=DF:AD$．

$\therefore$ $BE\cdot DF=AB\cdot AD$．

9．從 $PE:PG=AP:PC$，$PH:PF=AP:PC$．

得 $PE:PG=PH:PF$，$\therefore$ $PE\cdot PF=PG\cdot PH$．

10．因 $\triangle AQB\backsim\triangle APC$，$\triangle ABB\backsim\triangle ACR$．

知四邊形 AQBP∽四邊形 APCR.

從 $AQ : AP = AP : AR$, 得 $AP^2 = AQ \cdot AR$.

11. 因 ∠PEB, ∠PFB, ∠PHD, ∠PGD, 同爲直角, 又 ∠EBF 等於 ∠ADC 之外角, 知 ∠EBF=∠HDG.

∴ 四邊形 PEBF∽四邊形 PHDG.

從 $PE : PF = PH : PG$, 得 $PE \cdot PG = PF \cdot PH$.

12. 因 △ABC 與 △DBA 之 ∠B 爲兩形公共之角, 又 ∠ACB 等於 B 點之切線與 BA 弦所夾之角, 由此知 ∠ACB =∠BAD.

∴ △ABC∽△BAD.

從 $BD : AB = AB : BC$, 得 $\frac{AB^2}{BD} = BC$.

依同法知 △ABC∽△EAC.

從 $CE : AC = AC : BC$, 得 $\frac{AC^2}{CE} = BC$.

∴ $\frac{AB^2}{BD} = \frac{AC^2}{CE}$, 依更迭之理, $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD}{CE}$.

例題 XII.

1. 添作 BD 弦, 因 △BDC 之 ∠CBD, 等於 △ABC 之 ∠CAB, 又 ∠C 爲兩形公共之角, ∴ △BDC∽△ABC, 由此知

$\angle CDB$ 爲直角，以 CB 爲直徑畫圓，其圓周必通過 D 點，則 AB 爲切線，ADC 爲割線，故 $AC\cdot AD=AB^2$.

2. 添作 AB 弦，因 $\angle ABK$ 所對之弧，與 P 點之切線及 PA 弦所夾之弧爲共軛弧，知 $\angle ABK$ 與 $\angle AHK$，互爲補角，故能畫圓通過 A, B, K, H 四點．則 PHA, PKB 爲同圓之二割線，所以 $PA\cdot PH=PB\cdot PK$，又添作 BC 弦，用同法得 $PB\cdot PK=PC\cdot PL$.

3. 作 AH 直線，令與 BC 成垂直，延長至 K，令 $AH\cdot AK=AB\cdot AE$.

因 $\angle BAH=\angle EAK$, $AB:AK=AH:AE$.

從定理 12，知 $\triangle AHB\backsim\triangle AEK$.

依同理，知 $\triangle AHC\backsim\triangle AFK$, $\triangle AHD\backsim\triangle AGK$.

由 $\angle AHB$, $\angle AHC$, $\angle AHD$ 同爲直角.

知 $\angle AEK$, $\angle AFK$, $\angle AGK$ 同爲直角.

$\therefore$ E, F, G, A 四點，同在 AK 爲直徑之圓周上.

4 用定理 18.

5. 從切線之交點 P，與二圓之一箇交點 A，連結爲一直線，設延長此直線，與二圓一交於 B，一交於 B'.

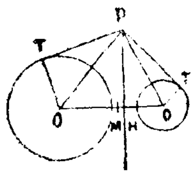
依定理 18, $PT^2=PA\cdot PB$, $PT'^2=PA\cdot PB'$.

因 $PT=PT'$, $\therefore PB=PB'$，則 B' 必合於 B.

AB 爲二圓公共之弦，故 P 點在公共弦之延長線上.

6. 通過切點之公切線爲二圓之根軸.

7. PT, PT′ 爲切於二圓 O, O′ 之相等二切線, 連結二圓之中心 O, O′ 爲一直線, M 爲 OO′ 之中點, 從二切線之交點 P, 引垂線至 OO′ 上之 H 點, 以 r, r' 代圓之半徑 OT, O′T′, 因 △PTO, △PT′O′ 爲直角三角形, 得次之二式.



$PO^2-r^2=PT^2\cdots(1)\quad PO'^2-r'^2=PT'^2\cdots(2)$

從 (1), (2) 兩式, 得 $PO^2-r^2=PO'^2-r'^2$, 移項, $PO^2-PO'^2=r^2-r'^2$.

二圓之半徑一定, 知 $PO^2-PO'^2$ 亦爲一定.

又因 △PHO, △PHO′ 爲直角三角形, 得次之二式.

$$PO^2=PH^2+(OM+MH)^2=PH^2+OM^2+2\cdot OM\cdot MH+MH^2\cdots(3)$$

$$PO'^2=PH^2+(O'M-MH)^2=PH^2+O'M^2-2\cdot O'M\cdot MH+MH^2\cdots(4)$$

從 (3) 式減去 (4) 式, 得 $PO^2-PO'^2=2(OM+O'M)MH=2\cdot OO'\cdot MH$.

此式右邊二圓心之連結線 OO′ 一定, 上已證明 $PO^2-PO'^2$ 爲一定, 故 MH 亦爲一定.

由此知 H 點之位置，卽 OO' 上 P 點之正射影也.

逆推之，可以證明 PH 上之任意一點，能引切於二圓之相等二切線.

故　PH 及其延長爲二圓之根軸.

8. 須用問題 5 之解法誘導解之.

若三箇圓之中心，同在一直線上，則根軸或同一直線，或平行.

9. 因 $\angle ADB$, $\angle AEB$ 同爲直角，故畫 AB 爲直徑之圓，必通過 D, E 二點，從 $\angle AHE$, $\angle BHD$ 爲對頂角，$\angle HAE$, $\angle HBD$ 同對 DE 弧，知 $\triangle AHE \backsim \triangle BHD$.

$\therefore$　$AH : BH = HE : HD$，依定理 16, $AH \cdot HD = BH \cdot HE$.

又畫 BC 爲直徑之圓，卽能證明 $BH \cdot HE = CH \cdot HF$.

10. 以 BH 爲直徑，畫圓，必通過 D, F 二點，則 AFB, AHD 爲同圓之二割線，$\therefore$ $AB \cdot AF = AD \cdot AH$，又以 CH 爲直徑，畫圓，必通過 D, E 二點，則 AHD, AEC 爲同圓之二割線，$\therefore$ $AD \cdot AH = AC \cdot AE$.

若　$\angle BAC$ 爲鈍角，則三垂線之延長之交點 H，在 AD 之反對方向，其 A, H 二點之位置，與問題 9 之二點位置互易，以 AB 爲直徑，畫圓，結果爲 $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$，與問題 9 同.

11. 以 BC 爲直徑，畫圓，必通過 E, F 二點，則 AFB, AEC 爲同圓之二割線，得 $AB \cdot AF = AC \cdot AE$，又以 AC 爲直徑，畫圓

必通過 D, F 二點, 則 BFA, BDC 爲同圓之二割線, 得 $AB \cdot BF = BC \cdot BD$, 以上所得之二式相加, 得 $AB(AF+BF)=AC \cdot AE + BC \cdot BD$.

$\therefore\ AB^2=AC \cdot AE+BC \cdot BD.$

12. 以三邊 AB, BC, CA 各爲直徑, 畫圓, 用定理 17 解之.

13. 從 C 引半徑 CA, CB, OM, ON, 因 $\angle PAC$, $\angle PBC$ 爲直角, 故以 PC 爲直徑, 畫圓, 必通過 A, B 二點, 則 AB, PC 爲同圓之相交二弦, 又 MN 亦爲同圓之相交二弦, $\therefore\ PD \cdot DC = AD \cdot DB = MD \cdot DN$, 由此知 MN, PC 爲同圓之相交二弦, 畫通過 P, N, C, M 四點之圓, 因 CM 弧等於 CN 弧, 故 $\angle MPC$ 等於 $\angle NPC$

14. 因 BC 爲直徑之圓, 必通過 A 點, 知 $AO=CO$.

$\therefore\ \angle FAO=\angle FCO \cdots\cdots(1)$

又因 $\triangle EOB$, $\triangle CAB$ 同爲直角三角形, 其 $\angle B$ 爲公共之角.

$\therefore\ \angle AEF=\angle FCO \cdots\cdots(2)$

從 (1), (2) 兩式, 得 $\angle FAO=\angle AEF$.

由此知畫通過 A, E, F 三點之圓, 則 AO 爲切線, OFE 爲割線.

故 $AO^2=OE \cdot OF$.

15. 兩圓之公共弦爲 PQ.

從 $AC \cdot CD=PC \cdot CQ$, $BC \cdot CE=PC \cdot CQ$.

得 $AC\cdot CD=BC\cdot CE$.

兩邊同以 $BC\cdot CD$ 除之, $\frac{AC}{BC}=\frac{CE}{CD}$.

依分比之理, $\frac{AC-BC}{BC}=\frac{CE-CD}{CD}$, 卽 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{CD}$.

16 從例題 IX 第 7 題, $PR:PR'=OR:O'R'$, $PS:PS'=OS:OS'$, 得 $\frac{PR}{PR'}=\frac{PO}{PO'}$, $\frac{PS'}{PS}=\frac{PO'}{PO}$, 此二式兩邊各相乘 $\frac{PR\cdot PS'}{PR'\cdot PS}=\frac{PO\cdot PO'}{PO'\cdot PO}$.

例題 XIII.

1. 從頂點 A 引垂線, 至 BC 上之 H 點.

依定理 19, $AB\cdot AD=AE\cdot AH$, $AC\cdot AD=AF\cdot AH$.

第一式之兩邊, 同以 $AD\cdot AE$ 除之, 第二式之兩邊, 同以 $AD\cdot AF$ 除之.

得 $\frac{AB}{AE}=\frac{AH}{AD}$, $\frac{AC}{AF}=\frac{AH}{AD}$, $\therefore$ $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}$, 依更迭之理, $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AF}$.

2. 因前題之 $AB=AC$, $\therefore$ $AE=AF$.

3. 添作 CE 直線, 因 $\angle BAD=\angle EAC$, $\angle ABD=\angle AEC$.

知 $\triangle ABD \backsim \triangle AEC$, $\therefore AB : AE = AD : AC$.

依定理 16, $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

4. 添作從頂點 A 至 BC 上之垂線 AF, 又從 E 依 FA 平行引直徑 EG, 又連結 AG, 因 $\angle FAD = \angle AEG$, $\angle AFD = \angle EAG$.

知 $\triangle AFD \backsim \triangle EAG$, $\therefore AF : AE = AD : EG$.

依定理 16, $AD \cdot AE = AF \cdot EG$.

又因 $AF \cdot EG = AF \cdot BC = 2\triangle ABC$, 故 $AD \cdot AE = 2\triangle ABC$.

5. 因 O, A, B 三點, 在 OD 爲直徑之圓周上, 連結 BD, 則 OABD 爲內接於圓之四邊形, 從 $\angle OCA = \angle OBD$, $\angle OAC = \angle ODB$.

知 $\triangle OAC \backsim \triangle ODB$, $\therefore OC : OA = OB : OD$.

依定理 16, $OA \cdot OB = OC \cdot OD$.

6. 延長 DA 與圓周相交於 E, 連結 BE, 成 $\triangle ABE$.

因 $\angle BAE = \angle CAD$, $\angle BEA = \angle ACD$.

知 $\triangle ABE \backsim \triangle ADC$, $\therefore AB : AD = AE : AC$.

依定理 16, $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

又因 $AE = DE - AD$, $AD \cdot DE = BD \cdot CD$.

$\therefore$ $AB \cdot AC = AD \cdot DE - AD^2 = BD \cdot CD - AD^2$.

7. 從主要問題 10, 得 $AP \cdot AD = AB^2 \cdots\cdots(1)$

因 $\angle APC$, $\angle BPD$ 同對 AB 弧 知二角相等, 又 $\angle PAC$, $\angle PBD$ 同對 CP 弧, 知二角相等, $\therefore$ $\triangle PAC \backsim \triangle PBD$.

從 $AP : BP = CP : PD$, 得 $AP \cdot PD = BP \cdot CP \cdots\cdots(2)$

以 (1) 式 (2) 式之兩邊各相加, 得 $AP \cdot AD + AP \cdot PD = AP^2 + BP \cdot CP$.

即 $AP^2 = BC^2 + BP \cdot CP$.

例題 XIV.

1. 卽定理 20 之特別情形.

2. 依多祿某之定理, $AP \cdot BC = AC \cdot BP + AB \cdot CP$.

因 $AB = AC = BC$, $\therefore$ $AP \cdot BC = BC \cdot BP + BC \cdot CP$.

兩邊同以 BC 除之, 得 $AP = BP + CP$.

3. PABC 爲內接於圓之四邊形.

依定理 20, $PB \cdot AC = PA \cdot BC + PC \cdot AB = (PA + PC)BC$.

兩邊同以 $AC \cdot PB$ 除之, 得 $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{PC + PA}{PB}$, 卽 $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{c+a}{b}$.

又 PACD 爲內接於圓之四邊形.

依定理 20, $PC \cdot AD = PD \cdot AC + PA \cdot CD$.

兩邊同以 PD·AD 除之，得 $\frac{AC}{AD}=\frac{PC-PA}{PD}$，卽 $\frac{AC}{AD}=\frac{c-a}{d}$。

因 $\frac{AC}{BC}$，$\frac{AC}{AD}$ 同爲正方形之對角線與一邊之比，故 $\frac{c+a}{b}$ 及 $\frac{c-a}{d}$ 之比爲一定.

4. 因 $\angle XBC=\angle YCB$，$\angle BXY=\angle CYX$，知相對之二角，互爲補角，故 XBCY 爲內接於圓之四邊形，用多祿某之定理解之.

例題 XV.

1. 因 $AC \parallel ED$，$BE \parallel CD$，$\therefore OC=OE=AB$，$OA=OB$，由此知 $\triangle OAB$ 爲二等邊三角形.

又因 $\triangle OAB$ 與 $\triangle BCA$ 同 A 角，與 $\triangle ABE$ 同 B 角.

從 $\triangle OAB \backsim \triangle BCA \backsim \triangle ABE$.

得 $OA:AB=AB:AC$，$OB:AB=AB:BE$.

卽 $OA:OC=OC:AC$，$OB:OE=OE:BE$.

2. 因 $\angle ABC=2\angle BAC$，$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC=\angle BAC$.

$\therefore$ $\triangle BCD \backsim \triangle ABC$，$BD=BC$.

又因 $\angle BDC=\angle ABD+\angle BAD$.

卽 $2\angle BAC=\angle ABC+\angle BAD$，由此知 $\angle ABD=\angle BAD$.

$\therefore$ $AD=BD=BC$.

從 $\triangle BCD \backsim \triangle ABC$, 得 $AB : BC = BC : CD$.

即 $AC : AD = AD : CD$.

3. (1) 詳於第35節.

(2) 從 $AC^2 = (AB - BC)^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC$.

得 $AB^2 + BC^2 = AC^2 + 2AB \cdot BC$

$= AC^2 + 2(AC)^2$

$= 3(AC)^2$.

(3) 以2乘(1)式之兩邊, 得 $2AB \cdot BC = 2(AC)^2$, 與(2)式之兩邊各相加, 得 $AB^2 + 2AB \cdot BC + BC^2 = 3(AC)^2 + 2(AC)^2$, 即 $(AB + BC)^2 = 5(AC)^2$.

4. 依問題2之圖, 分AC為中末比於D, 知 $AD^2 = AC \cdot CD$.

因 $AD = BC$, $AC = AB$, $\therefore BC^2 = AB \cdot CD$.

兩邊各加 $AB \cdot BC$, 得 $BC^2 + AB \cdot BC = AB \cdot CD + AB \cdot BC$

$= AB(CD + BC)$

$= AB(CD + AD) = AB^2$.

例題 XVI.

1. 以 a, b, c, d 代四直線, 設 $a : b = c : d$.

依定理16, $ad = bc$, 兩邊各自乘, 得 $a^2d^2 = b^2c^2$, 視各正方形為直線, 依定理16之系1, 即 $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$.

2. 以 a^2, b^2, c^2, d^2 代四直線上之正方形，設 $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$.

視各正方形為直線，依定理 16，$a^2d^2 = b^2c^2$.

兩邊各開平方，得 $ad = bc$，依定理 16 之系 1，$a : b = c : d$.

3. 依例題 XI 之問題 2，$BD \cdot CD = AD^2$，兩邊同以 $AD \cdot CD$ 除之，得 $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$，兩邊各自乘，$\frac{BD^2}{AD^2} = \frac{AD^2}{CD^2}$，即 $BD^2 : AD^2 = AD^2 : CD^2$.

4. 問題 3 之逆，有次之二種情形.

(1) 從 $\triangle ABC$ 之頂點 A，至 BC 邊上，引垂線 AD，若垂線在形內，AD^2 為 BD^2 與 DC^2 之比例中項，則 $\angle BAC$ 為直角.

此證明，以 $\frac{BD^2}{AD^2} = \frac{AD^2}{DC^2}$ 之兩邊各開平方，用例題 VII 第 3 題之方法.

注意　若垂線在形外，此理不真確.

(2) 從直角三角形 ABC 之 BC 邊上取 D 點，若 AD^2 為 BD^2 與 DC^2 之比例中項，則 AD 垂直於 BC.

此情形亦不真確，因 D 點為 BC 之中點，AD 不垂直於BC，而 AD^2 為 BD^2 與 DC^2 之比例中項也.

5. 因 $AB \cdot BC = A'B' \cdot B'C'$，依定理 16 系 1，$AB : A'B' = B'C' : BC$.

例題 XVII.

1. 高之比，等於底邊之反比.

2. 用定理 24.

3. 依定理 24，$\triangle ABC : \triangle ADE = AB \cdot AC : AD \cdot AE$.

因 $AD \cdot AE = \frac{3}{4} AB \cdot \frac{3}{5} AC = \frac{9}{20} AB \cdot AC$.

$\therefore \quad \triangle ABC : \triangle ADE = 1 : \frac{9}{20} = 20 : 9$.

由此知三角形 ABC : 四角形 DBCE = 20 : 11.

若 D, E 在 AB, AC 之延長上.

則 $AD \cdot AE = \frac{5}{4} AB \cdot \frac{7}{5} AC = \frac{7}{4} AB \cdot AC$.

$\therefore \quad \triangle ABC : \triangle ADE = 1 : \frac{7}{4} = 4 : 7$.

由此知三角形 ABC : 四角形 BDEC = 4 : 3.

4. 與主要問題 12 之解法同，答 5 : 12.

5. (1) 用定理 24 之系 1.

   (2) 用定理 24 之系 1，及定理 15 之系 1.

6. 因 $PQ \parallel AD$，知 $BP : BD = BQ : BA$.

又因 BP 為 BM, BD 之比例中項，即 $BM : BP = BP : BD$.

由上之二式，得 $BM : BP = BQ : BA$.

從定理 16，得 $BP \cdot BQ = BM \cdot BA$.

依定理 24，$\triangle BPQ : \triangle ABM = BP \cdot BQ : BM \cdot BA$.

今兩矩形 $BP \cdot BQ$，$BM \cdot BA$ 相等，$\therefore$ $\triangle BPQ$，$\triangle ABM$ 亦相等.

M 爲 BC 之中點，故 $\triangle ABM = \frac{1}{2}\triangle ABC$.

由此知 $\triangle BPQ = \frac{1}{2}\triangle ABC =$ 四邊形 AQPC.

例題 XVIII.

1. 因 $ED \mathbin{/\!\!/} AB$，知 $\triangle ABG \backsim \triangle DEG$.

依定理 25，$\triangle ABG : \triangle DEG = AG^2 : DG^2$.

又依中線之性質，$AG = 2DG$，$\therefore$ $\triangle ABG : \triangle DEG = 4 : 1$.

2. 從定理 25 之系，得相似多角形之面積之比爲 $1 : 4 : 9$.

3. 用例題 XVI 之問題 1，及定理 25 之系.

4. 用定理 15 之系 2.

5. 用定理 25，及例題 VI 之問題 5，例題 XVI 之問題 1.

6. 用定理 25，及例題 VI 之問題 6, 7，例題 XVI 之問題 1.

7. 用問題 6，及定理 15 之系 2.

8. 先求兩正三角形之邊之比，然後用定理 25.

9. 內接之正六角形之一邊，等於圓之半徑，外切之正六角形之一邊，等於其頂點與圓心之距離，由此關係，用定理 25 之系.

10. DE 為所求之平行線.

依定理 25, $\triangle ABC : \triangle ADE = AB^2 : AD^2$.

因 $\triangle ADE = \frac{1}{2}\triangle ABC$, $\therefore AB^2 : AD^2 = 2 : 1$.

由此知此問題，即求作等於 AB 上之正方形之半之正方形也.

11. 因 $\angle ABD = \angle CAD$, $\angle ADB = \angle ADC$.

知 $\triangle ABD \backsim \triangle CAD$.

依定理 25, $\triangle ABD : \triangle CAD = AB^2 : AC^2$.

又因 $\triangle ABD$, $\triangle CAD$ 同高.

依定理 16 之系 2, $\triangle ABD : \triangle CAD = BD : CD$.

$\therefore AB^2 : AC^2 = BD : CD$.

12. 因 $\triangle ABP$, $\triangle AQP$ 為同斜邊之直角三角形，又 $\angle PAB$ 等於 $\angle PAQ$, 知 $AB = AQ$, $\therefore QR^2 : BC^2 = 1 : 2$.

13. 雜題 I 之問題 4 之解法中，證明 $\triangle ABE \backsim \triangle BCD$.

依定理 25, $\triangle ABE : \triangle BCD = AB^2 : BC^2$.

因 $\triangle BCD$ 與 $\triangle ABD$ 等底同高，其面積相等.

$\therefore \triangle ABE : \triangle ABD = AB^2 : BC^2$……………(1)

又因 $\triangle ABE$ 與 $\triangle ABD$ 同高.

依定理 15 之系 2, $\triangle ABE : \triangle ABD = BE : BD$ ··············(2)

從 (1), (2) 兩式, 得 $AB^2 : BC^2 = BE : BD$.

14. (1) 因 $\angle PAQ$ 為直角, O 為 PQ 之中點, ∴ $\triangle AOP$ 為二等邊三角形, 從 $\angle APO = \angle ABC + \angle BAP$, 知 $\angle ABC = \angle CAO$, 畫通過 A, B, C 三點之圓, 則 OA 為切線, OCB 為割線, 故 $OB \cdot OC = OA^2$.

(2) 因 $\angle ABO = \angle CAO$, $\angle AOB = \angle COA$, 知 $\triangle ABO \backsim \triangle CAO$, 與問題 11 之解法同.

15. 因 $\dfrac{BF}{DF} = \dfrac{BC}{AC}$, $\dfrac{DF}{CF} = \dfrac{BC}{AC}$, $\dfrac{ED}{AE} = \dfrac{BC}{AC}$.

以三式之兩邊各連乘, 得

$$\frac{BF \cdot DF \cdot ED}{DF \cdot CF \cdot AE} = \frac{BC^3}{AC^3}, \text{ 即 } \frac{BF \cdot ED}{CF \cdot AE} = \frac{BC^3}{AC^3}.$$

又因 $\triangle CED$, $\triangle CFD$ 為同斜邊之直角三角形, $\angle ECD$, $\angle FDC$ 同等於 $\angle ABC$, 知 $ED = CF$, ∴ $\dfrac{BF}{AF} = \dfrac{BC^3}{AC^3}$.

例題 XIX.

1. DEF 一直線截 $\triangle ABC$.

依梅乃勞司之定理, $\dfrac{BD}{CD} \cdot \dfrac{CE}{AE} \cdot \dfrac{AF}{BF} = 1$.

從 $\angle AEF=\angle AFE$, 知 $AE=AF$, $\therefore \frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{BF}=1.$

去分母, $BD\cdot CE=CD\cdot BF.$

依定理 15 之系 1, 得 $BD:CD=BF:CE.$

2. HFE 爲 $\triangle ABC$ 之截線.

依梅乃勞司之定理, $\frac{BH}{CH}\cdot\frac{CF}{AF}\cdot\frac{AE}{BF}=1.$

因 $BE=2AE$, $AF=2CF$, $\therefore \frac{BH}{4CH}=1.$

兩邊同以 4 乘之, 得 $\frac{BH}{CH}=\frac{4}{1}.$

3. 以 BFC 爲 $\triangle ADE$ 之截線.

依梅乃勞司之定理, $\frac{AC}{CE}\cdot\frac{EF}{FD}\cdot\frac{BD}{AB}=1.$

因 $BD=CE$, $\therefore \frac{AC}{AB}\cdot\frac{EF}{FD}=1.$

兩邊同以 $AB\cdot FD$ 乘之, 得 $AC\cdot EF=AB\cdot FD.$

依定理 15 之系 1, 得 $AB:AC=EF:FD.$

4. 選定 AFB 爲 $\triangle DCE$ 之截線.

依梅乃勞司之定理, $\frac{CA}{AE}\cdot\frac{EF}{FD}\cdot\frac{DB}{BC}=1.$

因 $AE=\frac{1}{2}CA$, $BC=\frac{1}{2}DB$, $\therefore \frac{4EF}{FD}=1.$

兩邊同以 4 除之得 $\frac{EF}{FD}=\frac{1}{4}$.

依反轉之理及分比之理, $\frac{FD-EF}{EF}=\frac{4-1}{1}$, 即 $\frac{ED}{EF}=\frac{3}{1}$.

又依反轉之理, 得 $\frac{EF}{ED}=\frac{1}{3}$.

5. 從定理 9 之外分之情形.

得 $BP:PC=AB:AC$, $BR:RA=AC:BC$, $AQ:QC=BC:AB$.

上三式之左邊之比之複比, 等於 1, 依定理 26 之系, 知 P, Q, R 三點, 同在一直線之上.

6. 依例題 XVIII 之問題 11, 得次之三式.

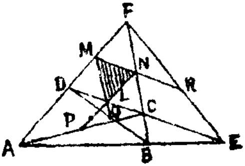
$$BP:PC=AB^2:AC^2,$$

$$BR:RA=AC^2:BC^2,$$

$$AQ:QC=BC^2:AB^2,$$

三式之左邊之比之複比等於 1, 依定理 26 之系, 知 P, Q, R 三點, 同在一直線上.

7. 此問題稍深, 可俟初等幾何學習熟之後解之, 解此題之途徑, 乃延長 △LMN 之各邊, 同至一直線上, 與定理 26 之系, 有密切之關係, 宜如次分爲數段證明.



(1) $\triangle LMN$, 乃連結 $\triangle CDF$ 之各邊之中點而成之三角形也.

(2) 因 LN 與 AF 平行, N 為 CF 之中點, ∴ 延長 NL, 必貫 AC 之中點 P, 依同理, 知延長 ML, MN, 必貫 BD, EF 之中點 Q, R.

(3) 因 PN 與 AF 平行, QM 與 BF 平行, MR 與 DE 平行, 依雜題 I 之問題 6, 得 $\frac{NP}{PL}=\frac{FA}{AD}$, $\frac{LQ}{QM}=\frac{CB}{BF}$, $\frac{MR}{RN}=\frac{DE}{EC}$, 此三式之兩邊各連乘, $\frac{NP}{PL}\cdot\frac{LQ}{QM}\cdot\frac{MR}{RN}=\frac{FA}{AD}\cdot\frac{CB}{BF}\cdot\frac{DE}{EC}$.

依定理 26, 知 $\frac{FA}{AD}\cdot\frac{DE}{EC}\cdot\frac{CB}{BF}=1$.

(以 ABE 為 $\triangle CDF$ 之截線.)

∴ $\frac{NP}{PL}\cdot\frac{LQ}{QM}\cdot\frac{MR}{RN}=1$, 依定理 26 之系, P, Q, R 三點, 在一直線上.

8. 依梅乃臘司之定理.

因 LB′A′ 為 $\triangle OBA$ 之截線.

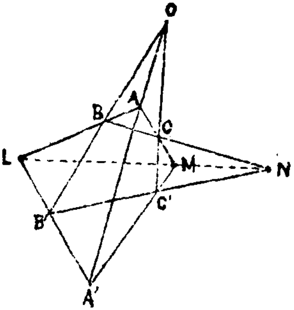
則 $\frac{AL}{LB}\cdot\frac{BB'}{B'O}\cdot\frac{OA'}{A'A}=1$.

又 B′C′N 為 $\triangle OBC$ 之截線.

則 $\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CC'}{C'O}\cdot\frac{OB'}{B'B}=1$.

又 A′C′M 爲 △OAC 之截線.

則 $\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AA'}{A'O}\cdot\frac{OC'}{C'C}=1.$



以上之三式兩邊各連乘.

$$\frac{AL}{LB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\left(\frac{BB'}{B'O}\cdot\frac{OA'}{A'A}\cdot\frac{CC'}{C'O}\cdot\frac{OB'}{B'B}\cdot\frac{AA'}{A'O}\cdot\frac{OC'}{C'C}\right)=1.$$

卽 $\frac{AL}{LB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$, 以此式與梅乃勞司之定理之公式比較, 知 LMN 爲 △ABC 之截線, 故 L, M, N 同在一直線上.

例題 XX.

1. 用定理 27 之系.

2. 用定理 9 及定理 27 之系.

3. 用定理 9 及定理 27 之系.

4. 從 $\triangle ABC$ 之各角頂至對邊，引垂線 AD, BE, CF,

因 $\triangle ABD \backsim \triangle CBF$, 得 $\frac{BD}{BF}=\frac{AB}{BC}$.

又 $\triangle BCE \backsim \triangle ACD$, 得 $\frac{CE}{CD}=\frac{BC}{CA}$.

又 $\triangle CAF \backsim \triangle BAE$, 得 $\frac{AF}{AE}=\frac{CA}{AB}$.

以三式之兩邊各連乘, $\frac{BD}{BF}\cdot\frac{CE}{CD}\cdot\frac{AF}{AE}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{BC}{CA}\cdot\frac{CA}{AB}$.

從 $\frac{AB}{BC}\cdot\frac{BC}{CA}\cdot\frac{CA}{AB}=1$, 知 $\frac{BD}{BF}\cdot\frac{CE}{CD}\cdot\frac{AF}{AE}=1$.

依定理 27 之系, AD, BE, CF 三直線，同交於一點.

5. 連結三邊之中點爲 $\triangle DEF$, 用前題之解法.

6. D, E, F 爲內切圓與 $\triangle ABC$ 之三邊 BC, CA, AB 之切點.

因 BF=BD, CD=CE, AE=AF, $\therefore \frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1$,

依定理 27 之系，知 AD, BE, CF 同交於一點.

7. D, E, F 爲 $\triangle ABC$ 之三邊 BC, CA, AB 與傍切圓之切點, G 爲 AB 之延長與切於 BC 邊外之圓之切點, 因 AG 爲三邊 BC, CA, AB 之和之半, $\therefore BD=BG=AG-AB=S-c$, (S 代三邊和之半, c 代 AB) 依同法知 AE 等於 BD, 及 CD, AF 同

等於 $s-b$, (b 代 CA)CE, BF 同等於 $s-a$, (a 代 BC) 故 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$, 依定理 27 之系, AD, BE, CF 三直線同交於一點,

8. 用定理 9.

9. MBD 爲 △AEF 之截線.

依梅乃勞司之定理, $\frac{AB}{BE}\cdot\frac{EM}{MF}\cdot\frac{FD}{DA}=1$..............($a$)

又 C 爲 △AEF 內之一點, AN, ED, FB 爲通過 O 點之三直線.

依舍佛之定理, $\frac{AB}{BE}\cdot\frac{EN}{NF}\cdot\frac{FD}{DA}=1$..............($b$)

從 (a), (b) 二式 得

$$\frac{AB}{BE}\cdot\frac{EN}{NF}\cdot\frac{FD}{DA}=\frac{AB}{BE}\cdot\frac{EM}{MF}\cdot\frac{FD}{DA},\ \therefore \frac{EN}{NF}=\frac{EM}{MF}.$$

由此知 M, E, N, F 爲調和列點.

例題 XXI.

1. 畫通過 A, C, N 三點之圓, 與 BA, LC 之延長相交於 H, K.

從 $\angle HAN=\angle BCD$, 知 $\angle HKN=\angle BCM$.

又　$\angle KHN=\angle KCN=\angle BCL=\angle CBM$.

$\therefore$　$\triangle HKN \backsim \triangle BCM$.

添作 AC 對角線，則 $\angle MCL=\angle DCK=\angle DAC=\angle NKL$.

知　$CM \parallel KN$.

依主要問題 7, L, M, N 三點同在一直線上.

2.　畫通過 A, B, N 三點之圓；與 LA, BC 之延長相交於 H, K.

證 $\triangle HKN$ 與 $\triangle ACM$ 爲相似形，及對應邊平行，從主要問題 7, 知 L, M, N 同在一直線上.

雜題 II.

1.　BD 爲 AB, BC 之比例中項，OD 爲 AB, BC 之和之半；凡直角三角形之斜邊，必大於夾直角之二邊中之一邊．故 $OD>BD$.

2.　設二邊之和爲 $2m$，則 $\triangle ABC$ 之邊 AB, AC 同爲 m，$\triangle DEF$ 之邊 DE, DF 爲 $m-n$ 及 $m+n$.

依定理 24, $\triangle ABC : \triangle DEF=m\times m : (m-n)(m+n)$

$$=m^2 : m^2-n^2.$$

3.　與前題之解法同.

4. 從 A 至 C′ 引直線 AC′, 與 BB′ 相交於 D.

因 $\triangle ABD \backsim \triangle ACC'$, $\triangle C'DB' \backsim \triangle C'AA'$.

$$\therefore\ \frac{BD}{CC'}=\frac{AD}{AC'}=\frac{AB}{AC}=\frac{m}{m+n},\ \frac{DB'}{AA'}=\frac{DC'}{AC'}=\frac{BC}{AC}=\frac{n}{m+n}.$$

從上之二式, 得 $(m+n)BD=mCC'$, $(m+n)DB'=nAA'$.

兩邊各相加, 得 $(m+n)BB'=nAA'+mCC'$.

5. 解法與前題同, 惟前以二式相加, 此以二式相減, 微異.

6. 依定理 15 之系 2.

$$\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}=\frac{A'O}{AA'},\ \frac{\triangle OCA}{\triangle ABC}=\frac{B'O}{BB'},\ \frac{\triangle OAB}{\triangle ABC}=\frac{C'O}{CC'}.$$

三式之兩邊各相加, 得 $\frac{A'O}{AA'}+\frac{B'O}{BB'}+\frac{C'O}{CC'}=1$.

7. AB 為外圓之直徑, 從 B 引內圓之切線 BC, 內圓周截 AP, AB 於 E, F, 因 EF∥PB, ∴ $AE:EP=AF:FB$.

依合比之理, $AP:EP=AB:FB$, 左邊之二項, 同以 AP 乘之, 右邊之二項, 同以 AB 乘之, 則 $AP^2:AP\cdot EP=AB^2:AB\cdot FB$.

依定理 18, $AP\cdot EP=PQ^2$, $AB\cdot FB=BC^2$.

∴ $AP^2:PQ^2=AB^2:BC^2$.

又依例題 XVI 之問題 2, 得 $AP:PQ=AB:BC$.

8. 從 D 引外接圓之直徑 DE, 從 O 引內切圓之半徑 OF.

因 $\angle AFO=\angle ECD$, $\angle OAF=\angle DEC$.

知 $\triangle AOF\backsim\triangle EDC$, $\therefore AO:DE=OF:DC$..............(1)

又從 $\angle ODC=\angle ABC$.

$$\angle DCO=\angle DCB+\angle BCO=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ACB.$$

知 $\angle DOC=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ACB$, $\therefore OD=CD$.

以 OD 代 (1) 式之 DC, 得 $AO:DE=OF:OD$.

依定理 16, $AO\cdot OD=DE\cdot OF$.

9. AO 與 DE 相交於 H, 添作半徑 OD, OE, 則 $\angle ADO$, $\angle AEO$ 同爲直角, 故能畫通過 A, D, O, E 四點之圓, AO, DE 爲此圓之二弦, 依定理 17, $DH\cdot HE=OH\cdot HA$, 因 DE, GC 二弦, 亦相交於 H, 依上之定理, $DH\cdot HE=GH\cdot HC$, $\therefore OH\cdot HA=GH\cdot HC$, 依定理 17 之系 2, 能作通過 O, C, A, G 四點之圓, OG 弧=OC 弧, $\therefore \angle GAO=\angle CAO$, 此由知 AO 爲 $\angle GAC$ 之二等分線, 即 GB 弧之平分線, 故 HA 爲 $\angle GHB$ (此角乃 $\angle BHC$ 之外角) 之二等分線, 從 $HA\perp HE$, 知 HF 爲 $\angle BHC$ 之二等分線, 依定理 9, $BF:FC=AB:AC$.

10. 從中心 O 向圓外之定直線上, 引垂線 OH, 與 AB 相交於 K 點, 即所求之定點也.

因 $\angle PHK$, $\angle PMK$ 同爲直角，知能畫過 P, H, K, M 四點之圓，OKH, OMP 同爲此圓之割線，$\therefore OH\cdot OK=OM\cdot OP$，又因 $\triangle PBO$ 爲直角三角形，BM 爲垂線，依主要問題 9 之證明中之 (1) 式，$OM\cdot OP=OB^2$，故 $OH\cdot OK=OB^2$，由此式知 K 點爲一定點.

11. 從 B 至對角線 AC 上，引直線 BH，令 $\angle ABH=\angle AFE$.

則 $\triangle ABH\backsim\triangle AFE$, $\therefore AB:AF=AH:AE$.

依定理 16, $AB\cdot AE=AH\cdot AF\cdots(1)$

$\angle BCH$ 與 $\angle FAG$ 爲錯角相等.

又 $\angle AFG=R\angle$，從 $\angle ABH+\angle CBH+\angle EBC=2R\angle$

得 $\angle CBH=2R\angle-(\angle ABH+\angle EBC)$

$$=2R\angle-(\angle AFE+\angle EAG)=\angle R.$$

知 $\triangle BCH\backsim\triangle FAG$, $\therefore BC:AF=CH:AG$.

即 $AD:AF=CH:AG$，依定理 16, $AD\cdot AG=CH\cdot AF\cdots(2)$

以 (1) 式 (2) 式之兩邊各相加，得 $AB\cdot AE+AD\cdot AG=AC\cdot AF$.

12. 依例題 XVII 問題 5 之 2, $\dfrac{AD\cdot AB}{CB\cdot CD}=\dfrac{AP}{PC}$.

用合比之理，$\dfrac{AD\cdot AB+CB\cdot CD}{CB\cdot CD}=\dfrac{AC}{PC}\cdots(1)$

依同法，得 $\dfrac{BA\cdot BC+DC\cdot DA}{DC\cdot DA}=\dfrac{BD}{PD}\cdots(2)$

以 (2) 式除 (1) 式，

$$\frac{AD\cdot AB+CB\cdot CD}{CB\cdot CD}\cdot\frac{DC\cdot DA}{BA\cdot BC+DC\cdot DA}=\frac{AC}{PC}\cdot\frac{PD}{BD}.$$

兩邊同以 $\dfrac{CB}{DA}$ 乘之，得

$$\frac{AD\cdot AB+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DC\cdot DA}=\frac{CB}{DA}\cdot\frac{PD}{PC}\cdot\frac{AC}{BD}.$$

又因 $\triangle PAD\backsim\triangle PBC$，知 $\dfrac{DA}{CB}=\dfrac{PD}{PC}$.

$$\therefore\ \frac{AD\cdot AB+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DC\cdot DA}=\frac{AC}{BD}.$$

13. 依例題 IX 之問題 8，$OP:O'P=OQ:O'Q$.

依例題 V 之問題 4，$OM:O'M=OP:O'P$.

由上之二式，得 $OM:O'M=OQ:O'Q$.

因 $OQ:O'Q=OA:O'C$，$\therefore OM:O'M=OA:OC$.

用更迭之理，$OM:OA=O'M:O'C$.

又因 $\triangle OAM$，$\triangle O'CM$ 同爲直角三角形.

依例題 VII 之問題 1，$\triangle OAM\backsim\triangle O'CM$.

故 $\angle OMA=\angle O'MC$，由此知 $\angle AMB=\angle O'MD$.

例題 XXII.

1. 120°.

2. 20°.

3. 140°, 220°.

4. $\frac{360^\circ}{n}$, $\frac{180^\circ}{n}$.

5. 3.14159. (近似值)

6. $\frac{n\pi}{180}$ 拉第恩.

例題 XXIII.

1. 28 寸, 20 寸, 12 寸.

2. 3.125 尺, 1.875 尺, 12.5 尺, 7.5 尺.

3. 對邊爲 6 尺之角最大.

   各部分之長 $\frac{24}{7}$ 尺, $\frac{18}{7}$ 尺, 24 尺, 18 尺.

4. $PQ=PC+CQ=24$ 寸.

5. 因 CO, CO' 爲 $\angle ACD$ 及其外角之二等分線.

知 $AC:CD=AO:OD$, $AC:CD=AO':DO'$.

第一式用合比之理, $AC+CD:CD=AD:OD$ ....(1)

第二式用分比之理, $AC-CD:CD=AD:DO'$..............(2)

從 (1), (2) 兩式. 得 $OO'=OD+DO'=\frac{CD\cdot AD}{AC+CD}+\frac{CD\cdot AD}{AC-CD}$.

依主要問題 16 之解, $CD=\frac{b}{b+c}a$.

$$\therefore\quad AC+CD=b+\frac{ab}{b+c}=\frac{b^2+bc+ab}{b+c}=\frac{b(b+c+a)}{b+c}.$$

$$AC-CD=b-\frac{ab}{b+c}=\frac{b^2+bc-ab}{b+c}=\frac{b(b+c-a)}{b+c}.$$

以 $2s$ 代 $b+c+a$, 以 $2(s-a)$ 代 $b+c-a$.

則 $AC+CD=\frac{2bs}{b+c}$, $AC-CD=\frac{2b(s-a)}{b+c}$.

由此知 $OO'=\frac{am}{2s}+\frac{am}{2(s-a)}=\frac{\{(s-a)+s\}am}{2s(s-a)}=\frac{a(b+c)}{2s(s-a)}m.$

6. 因 $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}=\frac{m}{n}$.

從 $\frac{AC}{BC}=\frac{m}{n}$, 用反轉之理及合比之理, 得 $\frac{AB}{AC}=\frac{m+n}{m}\cdots(1)$

又從 $\frac{AD}{BD}=\frac{m}{n}$, 用分比之理, 得 $\frac{AB}{BD}=\frac{m-n}{n}\cdots(2)$

以 $\frac{AD}{BD}=\frac{m}{n}$ 之兩邊, 除 (2) 式之兩邊, 得 $\frac{AB}{AD}=\frac{m-n}{m}\cdots(3)$

(1), (3) 二式之兩邊各相加, $\frac{AB}{AC}+\frac{AB}{AD}=\frac{m+n}{m}+\frac{m-n}{m}=2.$

兩邊同以 AB 除之, 得 $\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$.

7. 因 a, b, c 爲調和級數，則

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}，\text{即}\ \frac{b-a}{ab}=\frac{c-b}{bc}.$$

兩邊同以 b 乘之，$\dfrac{b-a}{a}=\dfrac{c-b}{c}$，依反轉之理，$\dfrac{a}{b-a}=\dfrac{c}{c-b}$.

即　$AC:CB=AD:DB$.

例題 XXIV.

1. $\sqrt[4]{3}:1$.　　　　2. $9:4\sqrt{3}$.

3. 19.2 平方寸.

例題 XXV.

1. $4\frac{2}{7}$ 丈.

2. $AP+PB$ 最小爲 $\angle APM=\angle BPN$ 之時.

   即 $\triangle APM \backsim \triangle BPN$ 之時也.

由此知 $AP+PB=\sqrt{40^2+(4+5)^2}=\sqrt{1681}=41$ 寸.

3. 分 BD 爲二等分之點爲 O，分 BD 爲三等分之一點爲 P，分 BD 爲四等分之一點爲 Q，$\therefore\ LB=\frac{1}{2}$ 尺，$MB=\frac{1}{3}$ 尺，$NB=\frac{1}{4}$ 尺.

4. 2.304 寸.

6. 因直線 OPQ 分矩形 ABCD 爲二等分，知 OPQ 必通過矩形之對角線 AC, BD 之交點.

$\therefore$ $BP=\frac{6}{10}\times 7.5=4.5$ 尺，$AQ=\frac{14}{10}\times 7.5=10.5$ 尺.

6 40 公尺.　　　　7. $4\frac{1}{6}$.

8. 4.45 寸.　　　　9. 9.747 寸弱.

10. 添作半徑 OC, 則 $\triangle OAB$, $\triangle OBC$ 爲全相等之二等邊三角形, $\therefore \angle OBA=\angle OBC$.

因 $\angle ABC$ 卽 $\angle OBA$ 與 $\angle OBC$ 之和, 爲 $\angle CBD$ 之外角, 必等於 $\angle BCD$ 與 $\angle BDC$ 之和, $\therefore \angle CBD=\angle AOB$.

又因 $\triangle BCD$, $\triangle OAB$ 同爲二等邊三角形.

知 $\triangle BCD \backsim \triangle OAB$, 故 $CD:AB=BD:OA$.

卽 $CD:AB=AB:OA$, 依定理 16 之系 2, $CD\cdot OA=AB^2$.

兩邊同以 CD 除之, 得 $OA=\frac{AB^2}{CD}$.

11. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}=.1716$ 尺弱.

12. $AC=\frac{CH\cdot CB}{BG-CH}=\frac{cd}{b-c}$.

$$AD=\frac{AH\cdot CF}{CH}=\frac{c+\frac{cd}{b-c}}{c}m=\left(1+\frac{d}{b-c}\right)m \text{ 尺}.$$

例題 XXVI.

1. 從主要問題 16 之公式，得 $\frac{5}{2}\sqrt{21}$ 寸，$3\sqrt{7}$ 寸，$3\frac{3}{4}$ 寸.

2. $\frac{4}{3}\sqrt{10}$ 寸.

3. 9 寸 6 分弱.

4. 以 s 代 $\frac{1}{2}(a+b+c)$，從例題 XIII 問題 6 及主要問題 14 誘導.

得 $\frac{2}{b-c}\sqrt{bc(s-b)(s-c)}$，$\frac{2}{c-a}\sqrt{ca(s-c)(s-a)}$，

$\frac{2}{a-b}\sqrt{ab(s-a)(s-b)}$.

5. $\sqrt{\frac{bc(s-a)}{s}}$，$\sqrt{\frac{ca(s-b)}{s}}$，$\sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}}$.

6. 依定理 19，得外接圓半徑 9 寸.

7. 先求三角形之面積，次求三角形之高，依前題之方法，得外接圓半徑 16.25 尺.

8. $\triangle ABC=84$ 平方呎，$\triangle ACE=59\frac{1}{9}$ 平方呎.

9. 用定理 19，求三角形之高，與底邊相乘，2 除之，即得 $\frac{abc}{4R}$.

例題 XXVII.

1. $AE=\frac{12\times15}{2\times9}=10$ 寸.

2. $BN=\frac{7\times8}{7\times4}=2$ 寸, $AN=7-2=5$ 寸.

3. 依主要問題 12 $\triangle ADF=\frac{7}{40}\triangle ABC$,

$\triangle BDE=\frac{8}{65}\triangle ABC$, $\triangle CEF=\frac{11}{104}\triangle ABC$.

$\therefore\ \triangle DEF=\left(1-\frac{7}{40}-\frac{8}{65}-\frac{11}{104}\right)\triangle ABC$

$=\frac{31}{52}\times420$ 平方尺 $=250\frac{5}{13}$ 平方尺.

4. 依主要問題 17, 得 $10\times\frac{\sqrt{2}}{2}=7.071$ 強,

$12\times\frac{\sqrt{2}}{2}=8.485$ 強, $15\times\frac{\sqrt{2}}{2}=10.606$ 強.

5. $\frac{3^2}{25^2}\times1$ 平方尺, 即 .0144 平方尺.

6. $\frac{8^2}{20^2}\times126$ 平方寸, 即 20.16 平方寸.

7. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ 公尺. (注意　求平行線之長, 與高爲 h 公尺無關係.)

8. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

9. $\sqrt{169}$ 平方尺 $=13$ 尺.

例題 XXVIII.

1. 矩形之二邊之較 $=1$ 尺 2 寸, 和較相加, 2 除之, 得 1 尺 6 寸爲長, 和較相減, 2 除之, 得 4 寸爲闊.

2. 畫直徑 BC 爲 10 之半圓, 以 4 爲距離, 依 BC 平行, 作直線, 與圓弧相交於 A, 從 A 引垂線, 與 BC 相交於 D, 則 BD, CD 卽方程式之二根.

3. $PO=\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$, $OQ=OR=\frac{a}{2}$.

$\therefore$ $PQ=PO+OQ=\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}+\frac{a}{2}$.

$PR=PO-OR=\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}-\frac{a}{2}$.

其值爲二次方程式 $x^2-\sqrt{a^2+4b^2}x+b^2=0$ 之根.

4. 依第 35 節作圖題之解法, $BO=\frac{1}{2}a$, $AO=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

$\therefore$ $AC=AD=AO-DO=\frac{\sqrt{5}}{2}a-\frac{1}{2}a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a.$

$AC'=AD'=AO+OD'=\frac{\sqrt{5}}{2}a+\frac{1}{2}a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a.$

5. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 尺 $=.619$ 尺弱，$\left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ 尺 $=.381$ 尺強.

6. 矩形之二邊之和 $=2$ 尺 5 寸，和較相加折半，得 1 尺 6 寸爲長邊，和較相減折半，得 9 寸爲闊邊.

7. 此弦與兩半徑所成之三角形，卽例題 XV 問題 2 之三角形，故所求之弦，卽分半徑 1 公尺爲中末比之中項也．答 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 公尺.

8. 因兩正方形之面積之差 $=$ 二部分之和 $\times$ 二部分之差，由此知二部分之差爲 1 尺，$\therefore$ 大正方形之一邊 13 尺，小正方形之一邊 12 尺.

9. 因 $CE\cdot ED=AE\cdot EB=96$ 平方寸.

$CE=\sqrt{\frac{2}{3}\times 96 \text{ 平方寸}}=8$ 寸，

$ED=\sqrt{\frac{3}{2}\times 96 \text{ 平方寸}}=12$ 寸.

$\therefore$ $CD=20$ 寸.

10. 2 公尺.

11. 因 $\frac{AB}{AC}=\frac{4}{3}$, 兩邊各自乘, $\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{16}{9}$.

依主要問題 9 得 $\frac{BD}{CD}=\frac{16}{9}$, BC 即 BD 與 CD 之和為 25 寸.

$\therefore$ BD=16 寸, CD=9 寸.

12. 正方形之一邊 $=\frac{4\times6}{4+6}$ 尺, 即 2.4 尺.

13. 先求 AE, 因 AE : CE=AD : BC=1 : 2⋯⋯⋯(i)

DE : BE=AD : BC=1 : 2⋯⋯⋯(ii)

從 (i) 式得 2AE=DE+5 寸⋯⋯⋯⋯⋯⋯(iii)

從 (ii) 式得 AE+3.5 寸 =2DE⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(iv)

2 乘 (iii) 式 4AE=2DE+10 寸⋯⋯⋯⋯⋯(v)

從 (v) 式減 (iv) 式, 3AE−3.5 寸 =10 寸.

兩邊各加 3.5 寸, 以 3 約之, 得 AE=4.5 寸.

又因切線上之正方形, 等於 AE, BE 所包之矩形.

故切線 $=\sqrt{4.5\text{寸}\times8\text{寸}}=6$ 寸.

14. 因 DE : BC=AE : AB, 故須先求 AE.

又因 △BEA, △BEC 兩為直角三角形.

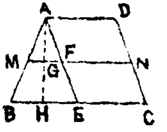
從 $BC^2=BE^2+CE^2=AB^2-AE^2+AC^2-2AC\cdot AE+AE^2$.

得 $2AC\cdot AE=AB^2+AC^2-BC^2$.

卽 $AE \times 102$ 寸 $= 2496$ 平方寸, $\therefore AE = 24.5$ 寸弱.

依比例式得 $DE = 25$ 寸弱.

15. 50 尺, 104 尺, 126 尺.



16. 解法大意 ABCD 爲梯形, $AD=a$, $BC=b$, 平行線 $MN=x$, AG 爲梯形 AMND 之高, GH 爲梯形 MBCN 之高.

因 $\frac{1}{2}(a+x)AG=\frac{1}{2}(x+b)GH$.

$\therefore \frac{AG}{GH}=\frac{x+b}{a+x}$, 知須從 AG, GH 之比求 x 之值.

從 A 依 DC 平行引直線, 與 BC, MN 相交於 E, F.

由 $\frac{AG}{AH}=\frac{MF}{BE}=\frac{x-a}{b-a}$, 得 $\frac{AG}{GH}=\frac{x-a}{b-x}$, 化 $\frac{x-a}{b-x}=\frac{x+b}{a+x}$ 爲二次方程式解之. 得 $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

17. 以 x 代平行線與下底之距離.

從二次方程式 $2x^2-80x-175=0$ 解之得 $x=2.099$ 非?

例題 XXIX.

1. 從雜題 II 之問題 2, 知夾 60° 之角之二邊同爲 4 尺, 其面積最大. 故所求之面積爲 $(4\sqrt{3})$ 平方尺.

2. 從雜題 II 之問題 2, 知此平行四邊形之四邊, 同爲 10 公尺, 面積最大, 故所求之面積爲 50 平方公尺.

3. 內接正方形 EFGH 之面積最小, 則四隅之 $\triangle EAF$, $\triangle FBG$, $\triangle GCH$, $\triangle HDE$ 之面積最大, 依雜題 II 之問題 2, 知四隅之三角形, 同爲二等邊直角三角形, 故所求之正方形之面積爲 450 平方尺.

4. 解法與前法同, 知 $\triangle DEF$ 爲 $\triangle ABC$ 之 $\frac{1}{4}$, 故所求之面積爲 5 平方寸.

5. 以 x 代內接矩形之一邊 GF, y 代他一邊 GD, a 代三角形之底邊 BC, h 代三角形之高 AH, 從 $x:a=h-y:h$, 得 $x=\frac{a}{h}(h-y)$, 兩邊同以 y 乘之, $xy=\frac{a}{h}(h-y)y$, 因 xy 極大, 則 $\frac{a}{h}(h-y)y$ 亦極大, $\frac{a}{h}$ 爲定數, 知 $(h-y)y$ 極大, 卽矩形極大, 依雜題 II 之問題 1, 知 $y=\frac{h}{2}$ 時, $(h-y)y$ 極大, $\therefore$ K 爲 AH 之中點.

由此得 $GD=\frac{1}{2}AH=3.5$ 尺, $GF=\frac{1}{2}BC=5$ 尺.

$$\square DEFG=17.5 \text{ 平方尺}.$$

6. 先求三角形之高得 20 尺.

依前題之解法, 得內接最大矩形之面積爲 $157\frac{1}{2}$ 平方尺, 又依例題 XXVIII 問題 12 之解法, 得內接正方形之面積爲 $230\frac{1}{2}$ 平方尺弱, 故二形之面積之差爲 73 平方尺弱.

7. 內接於半圓之矩形之最大者, 卽全圓內接之最大矩形之半, 因全圓內接之正方形, 大於內接之各矩形, 由此知 ABCD 矩形, 乃長邊爲闊邊之二倍之矩形也.

又以次之方法求之.

O 爲圓心, 命 $OB=x$, $BC=y$, 半徑 $OC=R$, 所求之面積爲 $2xy$, 從 $x^2+y^2=R^2$ 化得 $(x-y)^2+2xy=R^2$, $\therefore\ 2xy=R^2-(x-y)^2$, 因 $2xy$ 極大, 須令 $(x-y)^2$ 極小, $x=y$, 則 $(x-y)^2$ 極小, 卽 $2xy$ 極大, 故 $2xy=R^2=16$ 平方尺.

8. 內接於半圓之最大矩形, 等於半徑上之正方形, 又內接正方形與其四分之一之和, 等於半徑上之正方形, 由此知內接正方形等於內接之最大矩形之五分之四, 卽 20 平方寸.

9. m 代從 C 至 AB 上之垂線 CE, n 代從 B 至 AC 上之垂線 BD.

因 $PQ : m = BP : a$, $PR : n = PC : a$.

從 $PQ \cdot PR : mn = BP \cdot PC : a^2$, 得 $PQ \cdot PR = \frac{mn}{a^2}(BP \cdot PC)$.

括弧內之 BP·PC 最大, 則 PQ·PR 最大, 依雜題 II 問題 1, P 為 BC 之中點, BP·PC 最大.

$$\therefore \quad PQ \cdot PR = \frac{CE}{2} \times \frac{BD}{2} = \frac{1}{bc} s(s-a)(s-b)(s-c).$$