6

三角數理卷十一

英國海麻士輯　英國　傅蘭雅　口譯

金匱　華蘅芳　筆述

論數種特設之事以求弧三角形之法

第五十三款　茲設數種弧三角之題能將以上之密式用更簡之略式代解之于算學中大有裨益

即如求作地面各處員形之圖因其面積甚大不可仿作平面算又不必用弧三角形之密式算故可用略法以求之

第五十四款　令地球面上所有弧三角形各邊之弧度

三角數理卷十一

英國海麻士輯　英國　傅蘭雅　口譯
金匱　華蘅芳　筆述

論數種特設之事以求弧三角形之法

第五十三款　玆設數種弧三角之題能將以上之密式用更簡之略式代解之于算學中大有裨益。即如求作地面各處眞形之圖因其面積甚大不可仍作平面算。又不必用弧三角形之密式算故可用略法以求之。

第五十四款　令地球面上所有弧三角形各邊之弧爲

角亢氐以未爲地球之半徑雖其角亢氐三弧長至數里然與未相比則爲甚小故其弧所對地心之角亦爲甚小每不能滿一度以如此之小角而檢對數表以求其比例數往往不能眞確則難推得密合之數所以此種弧三角形之解法若仿平三角形之法推之則事易而數亦不至有大差茲論其立法之理如下

第五十五款　凡弧三角形各邊之弧若比球之半徑爲甚小則其弧三角形之各角大于以弧線作直線所成之平三角形之各角爲弧餘數三分之一弧餘數見第十四款

令呷吃呐爲有邊爲角亢氐三弧之弧三角形之角之

眞弧度令呷叱哂爲有邊與角亢氐三弧等長之平三角形之角之眞弧度則

$$\text{餘弦呷}=\frac{\text{正弦}\frac{\text{未}}{\text{亢}}\;\text{正弦}\frac{\text{未}}{\text{氐}}}{\text{餘弦}\frac{\text{未}}{\text{角}}\,\text{丅}\,\text{餘弦}\frac{\text{未}}{\text{亢}}\;\text{餘弦}\frac{\text{未}}{\text{氐}}}$$

呷 惟因

$$\text{餘弦}\frac{\text{未}}{\text{角}}=\text{一}\,\text{丅}\,\frac{\text{二}\,\text{未}^{\text{二}}}{\text{角}^{\text{二}}}\,\text{丄}\,\frac{\text{二·三·四}\,\text{未}^{\text{四}}}{\text{角}^{\text{四}}}$$

$$\text{正弦}\frac{\text{未}}{\text{角}}=\frac{\text{未}}{\text{角}}\,\text{丅}\,\frac{\text{二·三}\,\text{未}^{\text{三}}}{\text{角}^{\text{三}}}$$

若將呷式內之正弦餘弦以角之眞弧度爲主詳之爲級數而不計其大于自乘之方又以同法作 $\frac{\text{未}}{\text{亢}}$、$\frac{\text{未}}{\text{氐}}$ 則得式如左

$$\text{餘弦呷}=\frac{\frac{\text{末}^{二}}{\text{亢氐}}\left(\text{一}\top\frac{\text{六末}^{二}}{\text{亢}^{二}\perp\text{氐}^{二}}\right)}{\frac{\text{二末}^{二}}{\text{一}}(\text{亢}^{二}\perp\text{氐}^{二}\top\text{角}^{二})\perp\frac{\text{二四末}^{四}}{\text{一}}(\text{角}^{四}\top\text{亢}^{四}\top\text{氐}^{四}\top\text{六亢}^{二}\text{氐}^{二})}=$$

$$\frac{\text{二亢氐}}{\text{一}}\left[\text{亢}^{二}\perp\text{氐}^{二}\top\text{角}^{二}\perp\frac{\text{二末}^{二}}{\text{二}}(\text{角}^{四}\top\text{氐}^{四}\top\text{六亢}^{二}\text{氐}^{二})\right]\left(\text{一}\perp\frac{\text{六末}^{二}}{\text{亢}^{二}\perp\text{氐}^{二}}\right)=$$

$$\frac{\text{二亢氐}}{\text{亢}^{二}\perp\text{氐}^{二}\top\text{角}^{二}}\perp\frac{\text{二四亢氐末}^{二}}{\text{角}^{四}\perp\text{亢}^{四}\perp\text{氐}^{四}\top\text{二角}^{二}\text{亢}^{二}\top\text{二角}^{二}\text{氐}^{二}\top\text{二亢}^{二}\text{氐}^{二}}=\text{餘弦呷}\top\frac{\text{六末}^{二}}{\text{亢氐}}\text{正弦}^{二}\text{呷}'.$$

觀平三角第一百十五款令

$$\text{呷}=\text{呷}'\perp\text{斗}.$$

則

$$\text{餘弦呷}=\text{餘弦呷}'\top\text{斗正弦呷}'.$$

所以得

$$\text{斗}=\frac{\text{六末}^{二}}{\text{亢氐正弦呷}'}=\frac{\text{三末}^{二}}{\text{呷}'}.$$

即 $\text{呷}=\text{呷}'\bot\frac{\text{三未}^{\text{二}}}{\text{呻}}$。其呻為平三角形之面積因呷與吃呬可任意更換而呻不變則得

$\text{吃}=\text{吃}'\bot\frac{\text{三未}^{\text{二}}}{\text{呻}}$。

$\text{呬}=\text{呬}'\bot\frac{\text{三未}^{\text{二}}}{\text{呻}}$。所以得

$\text{呷}\bot\text{吃}\bot\text{呬}=\text{周}\frac{\text{未}^{\text{二}}}{\text{呻}}=\text{周}\bot\text{戊}$。而 $\frac{\text{未}^{\text{二}}}{\text{呻}}=\text{戊}$。即得

$\text{呷}=\text{呷}'\bot\frac{\text{三}}{\text{一}}\text{戊}$。

$\text{吃}=\text{吃}'\bot\frac{\text{三}}{\text{一}}\text{戊}$。

$\text{呬}=\text{呬}'\bot\frac{\text{三}}{\text{一}}\text{戊}$。

第五十六款　所以弧三角形之三事已知則能得其平三角形三事之略數而從此能得弧三角形之其餘各事.

設其角亢氐三弧俱爲已知之數則徑能求得平三角之面積呻所以其應加之弧餘數爲 $㖊=\frac{未^{2}正弦丄''}{呻}$. 所以呷吃哂三角若已從角亢氐推得其度分秒可將㖊之三分之一加入即得呷吃哂各角之同數如此則所得小弧三角形之各角與用密式推得者幾無所異.

若呷亢氐爲已知之數則

$呻=\frac{二}{一}亢氐正弦呷'$

$=\frac{二}{一}亢氐正弦呷$。

爲略數而弧餘數

$戊=\frac{末^{二}正弦一〃}{呻}$。

爲已知之數所以其平三角形之亢氐與

$呷'=呷丅\frac{二}{一}戊$

俱爲已知。

故其餘各事並其弧三角形之各事。亦能求得。

若呷角亢爲已知之數則

$正弦吃'=\frac{角}{亢正弦呷'}$

$=\frac{角}{亢正弦呷}$

爲略數所以

$呐=一八〇^{\circ}丅呷丅吃$

爲

略數而 $\text{呷}=\frac{三}{二}\text{角九正弦丙}$ 其應加之弧餘數爲 $\text{戊}=\frac{\text{未}^{二}\text{正弦}〃}{\text{呷}}$

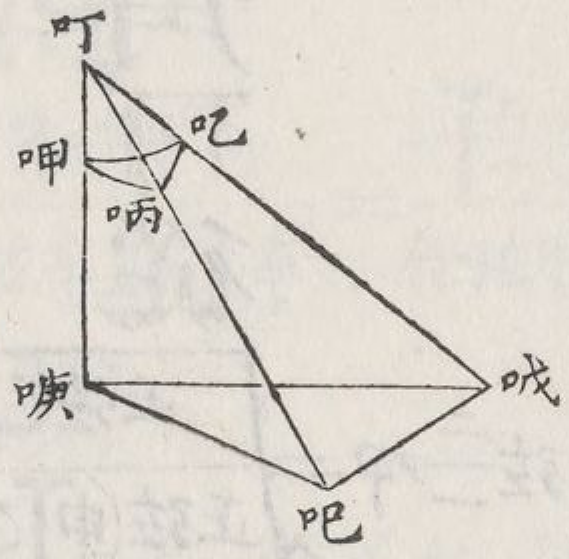
若呷吃氐爲已知之數則 $\text{呷}=\frac{\text{二正弦}(\text{呷}\perp\text{吃})}{\text{氐}^{二}\text{正弦呷正弦吃}}$ 爲略數而 $\text{戊}=\frac{\text{未}^{二}\text{正弦}〃}{\text{呷}}$

若呷吃角爲已知之數則 $\text{呍}=\text{呍}=一八〇\,\text{丅呷丅吃}$ 爲略數可依前法推得其

㕯𠮙角各數．

第五十七款　改斜面之角，爲地平面之角，

如圖𠮙叮㕯爲斜平面上之角，與垂線呷叮成體角叮．



試作一地平面，遇見𠮙叮㕯叮呷叮，引長之線，在𠯈𠮙㖪三點，則𠯈㖪吧角爲𠮙叮㕯角在地平面上之影圖，卽爲𠮙叮㕯角變爲地面之角，假如其𠮙叮㕯𠮙叮呷㕯叮呷三箇角已用器測得，而欲求其𠯈㖪吧角，法以叮爲心，以任何長爲半徑，作球，而令𠯈叮吧吧叮㖪㖪叮𠯈三箇平面，遇球面于𠮙㕯㕯呷呷𠮙三弧，成弧三角

形呷吃呐則其三邊之弧爲已知而其吃呷呐角＝戊庚己角爲所求之

角可從

$$\text{正弦}\,\frac{\text{二}}{\text{一}}\,\text{呷}=\sqrt{\frac{\text{正弦乙正弦丙}}{\text{正弦}(\text{申丅乙})\,\text{正弦}(\text{申丅丙})}}$$

式推得之其吃叮呐角＝甲．吃叮呻角＝丙．呐叮呷角＝乙．而

$$\text{申}=\frac{\text{二}}{\text{一}}(\text{甲丄乙丄丙}).$$

第五十八款

平常測量地面之時其乙與丙略近于正角所以可用

略式求之．

令

$$\text{乙}=\frac{\text{二}}{\text{一}}\text{周丅辛}.$$

$$\text{丙}=\frac{\text{二}}{\text{一}}\text{周丅辛}'.$$

再令

$$\text{正弦辛}=\text{辛}.$$

$$\text{餘弦辛}=\text{一丅}\frac{\text{二}}{\text{一}}\text{辛}^{\text{二}}.$$

又令

$$\text{呷}=\text{甲丄斗}.$$

其斗爲甚小之數則可

得

$$\text{餘弦}(\text{甲丄斗})=\frac{\text{餘弦辛餘弦辛}'}{\text{餘弦甲丅正弦辛正弦辛}'}=\frac{\text{一丅}\frac{\text{二}}{\text{一}}(\text{辛丄辛}')^{\text{二}}}{\text{餘弦甲丅辛辛}'}.$$

故

$$\text{餘弦甲丅斗正弦甲}=(\text{餘弦甲丅辛辛}')\left(\text{一丄}\frac{\text{二}}{\text{一}}\text{辛}^{\text{二}}\text{丄}\frac{\text{二}}{\text{一}}\text{辛}'^{\text{二}}\right)$$

$$=\text{餘弦甲丄}\frac{\text{二}}{\text{一}}\text{餘弦甲}(\text{辛}^{\text{二}}\text{丄辛}'^{\text{二}})\text{丅辛辛}'.$$

而

$$\text{斗}=\text{辛辛}'\text{餘割甲丅}\frac{\text{二}}{\text{一}}(\text{辛}^{\text{二}}\text{丄辛}'^{\text{二}})\text{餘切甲}.$$

令

$$\text{巳}=\frac{\text{二}}{\text{一}}(\text{辛丄辛}').$$

$$\text{午}=\frac{\text{二}}{\text{一}}(\text{辛丅辛}').$$

則

$$\text{巳}^{\text{二}}\text{丅午}^{\text{二}}=\text{辛辛}'.$$

$$\text{巳}^{\text{二}}\text{丄午}^{\text{二}}=\frac{\text{二}}{\text{一}}(\text{辛}^{\text{二}}\text{丄辛}'^{\text{二}}).$$

所以

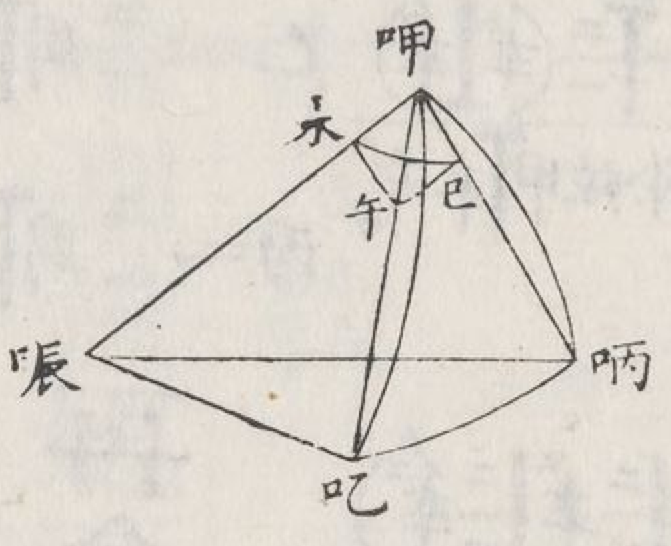
$$\text{斗}=(\text{巳}^{\text{二}}\text{丅午}^{\text{二}})\text{餘割甲丅}(\text{巳}^{\text{二}}\text{丄午}^{\text{二}})\text{餘切甲}=\text{巳}^{\text{二}}\text{正切}\frac{\text{二}}{\text{一}}\text{甲丅午}^{\text{二}}\text{餘切}\frac{\text{二}}{\text{一}}\text{甲}.$$

若測

量之時用地平經緯儀則能徑得呷之平面角所以不必用上式改正之

第五十九款

有弧三角形之兩弧與所成之角求其兩弧之通弦所成之角



如圖呷吃哂為弧三角形㖘為球心呷吃直線為呷吃弧之通弦呷哂直線為呷哂弧之通弦兩通弦所成之角以角字代之令巳午未為以呷為心以任何長為球半徑所作之弧三角形則有式

為餘弦巳午＝餘弦巳未餘弦午未⊥正弦巳未正弦午未餘弦巳未惟因巳未午角為呷㖘吃呷㖘呐兩平面相斜之

度而等于呷角又其巳未＝吃呷㖘角＝九〇丅三呷㖘吃角＝九〇丅三丙午未＝呐呷㖘角＝九〇丅三呷㖘呐角＝九〇丅三乙所以餘弦角＝正弦三乙正弦三丙⊥餘弦三乙餘弦三丙餘弦呷合角＝呷丅斗其斗恆為

甚小之數則

呷.弦正斗丄呷弦餘=角弦餘

此式之右邊同于

呷.弦餘$\left[(丙丅乙)\frac{四}{二}弦^{二}正丅(丙丄乙)\frac{四}{二}弦^{二}餘\right]$丄$(丙丅乙)\frac{四}{二}弦^{二}正$丅$(丙丄乙)\frac{四}{二}弦^{二}正$

故可將其同數

作相等之式而化之得

呷三二切餘(丙丁)(乙)四二弦二正丁呷三二切正(丙丄)(乙)四二弦二正二＝斗

爲略數

第六十款上天文算學中每遇數種弧三角形有數事改變極小有數事不改變所以若能定其小變數之相關則大有益于推算即如弧三角形之一事因他箇

三角形稍爲改變求本三角形所有之事。

第六十款下

設有弧三角形。其丙角與對角之弧丙爲常數。求其任兩事變數相配之式。

此式中其餘兩邊之改變。必有比例。其他兩角之改變。亦有比例。而其任一箇他角改變之數。必與其對邊改變之數。並其倚邊改變之數。相比。其四箇比例式可用下法得之。

先令其甲乙兩邊改變之數。爲甲房與乙房相比。則必寫出其有兩箇常數之式。並其所有相比之兩箇改變之數

如此則得

餘弦丙＝餘弦甲餘弦乙⊥正弦甲正弦乙餘弦吶

所以

餘弦丙＝餘弦(甲⊥房甲)餘弦(乙⊥房乙)⊥正弦(甲⊥房甲)正弦(乙⊥房乙)餘弦吶

惟因房甲為甚小之數所以

正弦房甲＝房甲

餘弦房甲＝一

其房乙之各數亦然則餘弦丙＝

(餘弦甲T正弦甲房甲)(餘弦乙T正弦乙房乙)(正弦甲⊥餘弦甲房甲)(正弦乙⊥餘弦乙房乙)餘弦丙.

所以減之而除去其有房甲房乙之

項得

$$\text{○＝房甲（正弦甲餘弦乙丅餘弦甲正弦乙餘弦呐）丄房乙（正弦乙餘弦甲丅餘弦乙正弦甲餘弦呐）}$$

或以 正弦甲正弦乙 約之則依第二十二款得

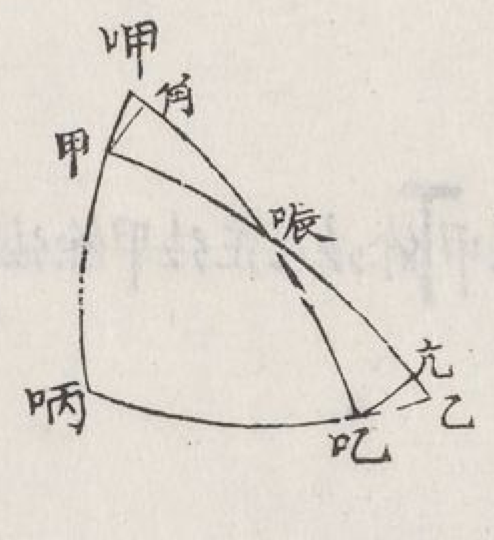
$$\text{○＝}\frac{\text{正弦甲}}{\text{房甲}}\text{餘切叱正弦呐丄}\frac{\text{正弦乙}}{\text{房乙}}\text{餘切呷正弦呐}$$

所以

$$\text{房甲餘弦叱丄房乙餘弦呷＝○}$$

所以從極三角形之理若房呷房吃為其角之變數而呐與丙不變則房呷餘弦乙⊥房吃餘弦甲=○。此式亦可從幾何之法得之如下。

如圖呷吃呐為弧三角形。令呐甲呐乙為邊所變之數其甲乙=呷吃。作甲角。吃亢兩弧與呷唇乙唇為垂弧。則甲亢=吃角。為略數。所以呷角=乙亢。因其呷甲角與吃



乙亢兩箇小弧三角形可作平三角形則

呷甲餘弦呷＝吒乙餘弦吒乙亢.

即

房甲餘弦吒乙丄房乙餘弦呷＝〇.

爲

略數再將呷與甲之變數相比或呷與乙之變數相比

必同法用

正弦呷正弦丙＝正弦呐正弦甲.

餘切呐正弦呷＝餘切丙正弦乙

丅餘弦呷餘弦乙.

則得

餘切呷房呷＝餘切甲房甲.

餘弦吒房呷＝丅餘切甲正弦呷房乙.

第六十一款

設弧三角形之𠮙吶二角為常數,求其餘任兩事之小變數,或設弧三角形之乙丙二弧為常數,求其餘任兩事之小變數.

先令所設之弧三角形,其𠮙吶二角為常角(不變之角也)則其又一箇角(即呷角也)改變之數,必與其所對之邊之變數相比,又必與其所倚之邊之變數相比,而其常角所接之邊之變數,必與其餘任一邊之變數相比,又其常角所對之邊之變數,亦必相比,所以其四箇相比之式,可依前款之法求之.

用

餘弦呷＝丅餘弦叱餘弦呐丄正弦叱正弦呐餘弦甲

餘弦叱＝丅餘弦呷餘弦呐丄正弦呷正弦呐餘弦乙

餘切叱正弦呐＝餘切乙正弦甲丅餘弦呐餘弦甲

正弦乙正弦呐＝正弦丙正弦叱

即得

房呷＝正弦乙正弦呐房甲

正弦呷房乙＝餘切丙房甲

正弦呷房乙＝正弦叱餘弦丙房甲

餘切乙房乙＝餘切丙房丙

所以依極三角形之理設乙丙兩邊爲常數即得

房甲＝正弦叱正弦丙房呷

正弦甲房叱＝丅餘切呐房甲

正弦甲房叱

＝丅正弦乙餘弦呐房呷

餘切叱房叱＝餘切呐房呐

第六十二款　設任何弧三角形之一角並其所倚之邊如呷與丙為常數求其他任兩事相配之變數

因他兩邊之變數必彼此相比故其他兩角之變數亦必彼此相比而其他邊之變數必與其各他角之變數相比從此得六箇相等式

房甲＝餘弦呥房乙

房呥＝丅餘弦甲房呎

正弦甲房呎＝正弦呥房乙

正切甲房呥＝丅正弦呥房乙

正弦甲房呎＝正切呥房甲

正切甲房呥＝丅正切呥房甲

論弧三角形之面積並其形內形外所切之圈之角半徑及多等面形長方體形四等面形

第六十三款　已知弧三角形之兩邊並其所成之角求弧三角形之面積

因

$$\text{戊}=\text{甲丄乙丄丙丅一八〇}$$

$$\text{丅餘切}\tfrac{一}{二}\text{戊}=\text{正切}\left[\tfrac{一}{二}(\text{甲丄乙})\text{丄}\tfrac{一}{二}\text{丙}\right]=\frac{\text{一丅正切}\tfrac{一}{二}(\text{甲丄乙})\text{正切}\tfrac{一}{二}\text{丙}}{\text{正切}\tfrac{一}{二}(\text{甲丄乙})\text{正切}\tfrac{一}{二}\text{丙}}$$

$$=\frac{\text{一丅}\dfrac{\text{餘弦}\tfrac{一}{二}(\text{甲丄乙})}{\text{餘弦}\tfrac{一}{二}(\text{甲丅乙})}}{\dfrac{\text{餘弦}\tfrac{一}{二}(\text{甲丄乙})}{\text{餘弦}\tfrac{一}{二}(\text{甲丅乙})}\text{餘切}\tfrac{一}{二}\text{丙丄正切}\tfrac{一}{二}\text{丙}}$$

觀第二十四款

$$=\frac{\text{餘弦}\tfrac{一}{二}(\text{甲丄乙})\text{丅餘弦}\tfrac{一}{二}(\text{甲丅乙})}{\text{餘弦}\tfrac{一}{二}(\text{甲丅乙})\dfrac{\text{正弦丙}}{\text{一丄餘弦丙}}\text{丄餘弦}\tfrac{一}{二}(\text{甲丄乙})\dfrac{\text{正弦丙}}{\text{一丅餘弦丙}}}$$

$$=\frac{\text{正弦丙}}{\text{一}}\times\frac{\text{丅正弦}\tfrac{一}{二}\text{甲正弦}\tfrac{一}{二}\text{乙}}{\text{餘弦}\tfrac{一}{二}\text{甲餘弦}\tfrac{一}{二}\text{乙丄正弦}\tfrac{一}{二}\text{甲正弦}\tfrac{一}{二}\text{乙餘弦丙}}$$

所以

$$\text{餘切}\tfrac{一}{二}\text{戊}=\text{餘切}\tfrac{一}{二}\text{甲餘切}\tfrac{一}{二}\text{乙餘割丙丄餘切丙}$$

故知

弧三角形之面積為

$$周末^{\frac{二}{一}}\times\frac{一八〇}{戌}$$

第六十四款　有弧三角形之三邊求其弧餘數

$$正切\frac{四}{一}戌=正切\frac{二}{一}\left[\frac{二}{一}(呷丄吃)丅\frac{二}{一}(一八〇丅昞)\right]=$$

$$\frac{餘弦\frac{二}{一}(呷丄吃)丄餘弦\frac{二}{一}(一八〇丅昞)}{正弦\frac{二}{一}(呷丄吃)丅正弦\frac{二}{一}(一八〇丅昞)}=$$

觀平三角第五十三款

$$\frac{餘弦\frac{二}{一}(甲丄乙)丄餘弦\frac{二}{一}丙}{餘弦\frac{二}{一}(甲丅乙)丅餘弦\frac{二}{一}丙}\times\frac{正弦\frac{二}{一}昞}{餘弦\frac{二}{一}昞}=$$

觀第二十五款

$$\frac{餘弦\frac{四}{一}(甲丄乙丄丙)餘弦\frac{四}{一}(甲丄乙丅丙)}{正弦\frac{四}{一}(甲丄乙丅丙)正弦\frac{四}{一}(乙丄丙丅甲)}\sqrt{\frac{正弦(申丅甲)正弦(申丅乙)}{正弦申正弦(申丅丙)}}$$

$$=\sqrt{正切\frac{二}{一}申正切\frac{二}{一}(申丅甲)正切\frac{二}{一}(申丅乙)正切\frac{二}{一}(申丅丙)}.$$

第六十五款　求過弧三角形各角點之圈之角半徑以弧三角形之角與弧爲主而明之

先設其圈過本弧三角形之各角點以咮代其角半徑如圖從吃呐呷呐之中點作垂弧甲嗁乙嗁乃從嗁點向呷吃作垂弧嗁丙又作嗁呷嗁吃嗁呐各弧則易知嗁爲過各角點之圈之極丙爲呷吃之中點所以知

嗁呷吃角⊥呐角＝$\frac{一}{二}$(呷⊥吃⊥呐)。

則呷丁㖠 = 㖘呷叱角。從其㖘呷丙正弧三角形。得

餘弦㖘呷丙 = 餘切㖘呷弧正切呷丙弧。所以求得其

圈之角半徑之式為

正切味 = 餘弦(呷丁㖠) / 正切三丙。

此式中之丙與呷丁㖠。若並為不變之數。則味亦為不變之數。

由此可知在所設之底弧上。另作一弧三角形。若其對底弧之角。與三角和之較為常數者。則其各角之點。必切于同大小之圈。

又其

餘弦(呷丅呐)＝餘弦三(呷丄吃)餘弦三呐丄正弦三(呷丄吃)正弦三呐＝

[餘弦三(甲丄乙)丄餘弦三(甲丅乙)]$\dfrac{\text{餘弦三丙}}{\text{正弦三呐餘弦三呐}}$＝$\dfrac{\text{餘弦三丙}}{\text{餘弦三甲餘弦三乙正弦呐}}$。

所以

正切味＝$\dfrac{\text{餘弦三甲餘弦三乙正弦呐}}{\text{正弦三丙}}$。

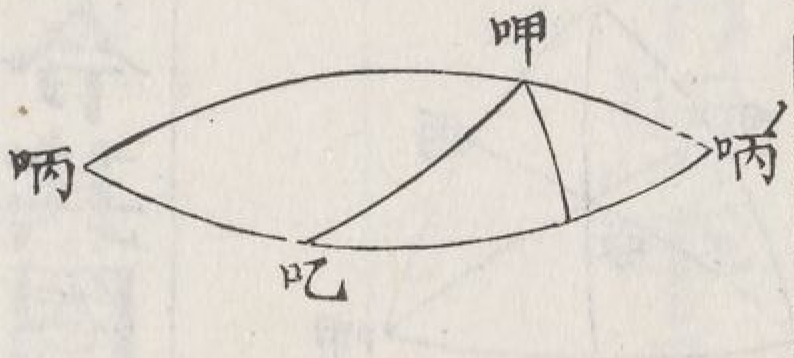
惟其圈若過呷吃二點並其呐

呻呐吃二弧再相交之點呐則因此圜必切于有角與邊爲呐丙並呻吃甲乙之外三角形故可令其角半徑爲味而得

$$\text{正切味}=\frac{\text{丅餘弦呻}}{\text{正切三丙}}=\frac{\text{正弦三甲正弦三乙正弦呐}}{\text{正弦三丙}}$$

從此式可知其丙與呻若爲不變之數則味亦爲不變

之數所以若圜呷吃呐三角形作一圈其呷吃呐三角



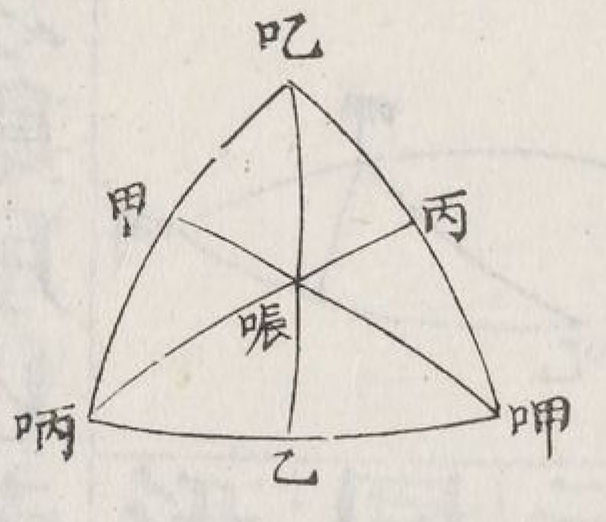
形之任方位合于其角之和或其面積恆相同者則交點呐必恆在圈界因呐在球面上行一圈則其球徑之彼端呐亦能成一相等之圈而此圈爲有弧三角形其底已知其面積爲常數之頂角點界線其角半徑從 餘切味＝丁餘弦呷餘切三呐 式得之

如此則各式內將正切三丙與正弦呐依第四十八三十六兩款之

所有之同數代之卽得 正切味 與 正切味' 以所設弧三角形之弧與角爲主而明之之式.

第六十六款 求與所設弧三角形各弧相切之圜之角半徑,以本弧三角形之弧與角爲主而明之.

先令其圜切于弧三角形之內,而以未代其角半徑,如



圖,作呷唇吃唇兩弧,平分其呷吃兩角,從交點唇作呐唇弧,又作唇甲唇乙唇丙,與各邊爲垂弧,則易知各垂弧彼此相等,所以唇爲所求之圜之極,而其呐角亦必爲

㫰呐所平分。又其呷丙＝呷乙，吃甲＝吃丙，呐甲＝呐乙。所以呷吃丄呐乙＝$\frac{二}{一}$(甲丄乙丄丙)。即呐乙＝申丅丙。從其正

弧三角形呐乙㫰，得

正弦呐乙＝正切㫰乙餘切$\frac{二}{一}$呐。

所以

正切未＝正弦(申丅丙)正切$\frac{二}{一}$呐。

此式中之甲丄乙丅丙與呐，若

爲不變之數，則未亦爲不變之數。

由此可知凡同頂角之弧三角形，若其三邊和與底邊

之較為常數者其形內之圈角半徑必同、

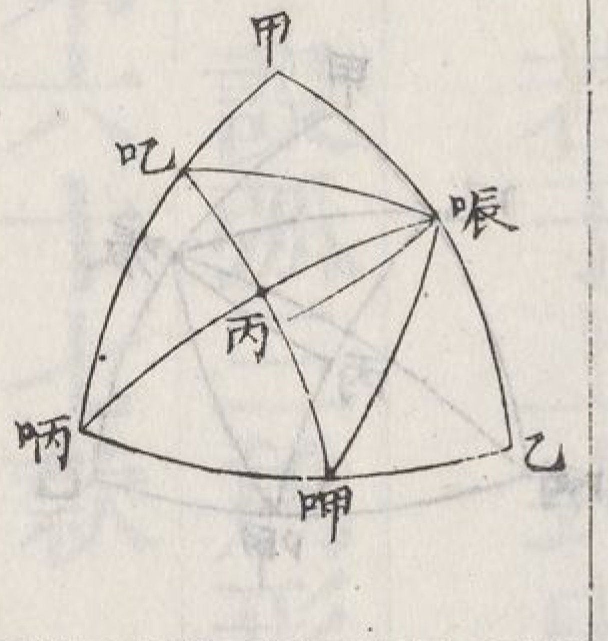
又因

$$正切末=\left[正弦\frac{一}{二}(甲上乙)餘弦\frac{一}{二}丙下餘弦\frac{一}{二}(甲上乙)正弦\frac{一}{二}丙\right]正切\frac{一}{二}呐$$

$$=\left[餘弦\frac{一}{二}(呷下叺)下餘弦\frac{一}{二}(呷上叺)\right]\frac{餘弦\frac{一}{二}呐}{正弦\frac{一}{二}丙餘弦\frac{一}{二}丙}。$$

觀平三角第二十五款所以

$$正切末=\frac{餘弦\frac{一}{二}呐}{正弦\frac{一}{二}呷正弦\frac{一}{二}叺}正弦丙。$$



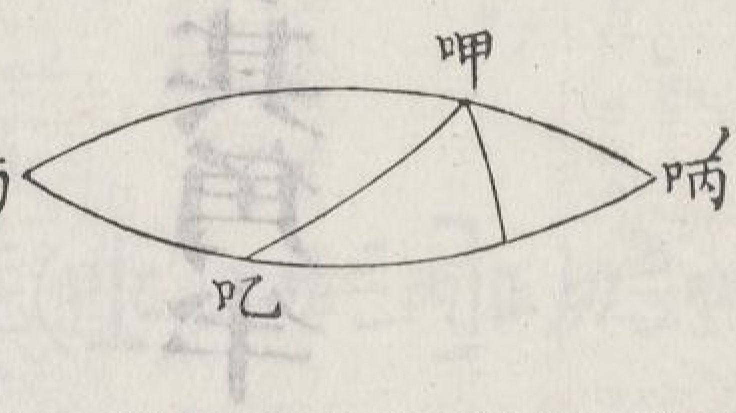
惟其圈若切于弧三角形之丙邊並其引長之兩邊者即宛如在有邊與角爲㔷丙並呷𠮟申乙之外角之弧三角形内所作之切于各邊之圈

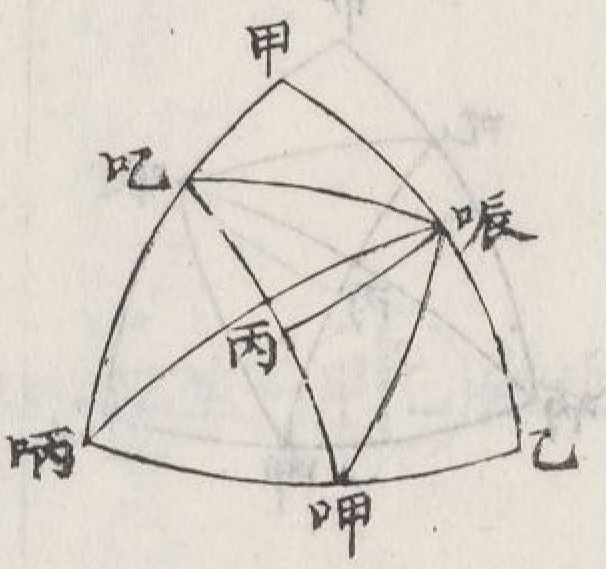
令其角半徑爲未則得

$$\text{正切未}=\text{正弦申}\times\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{㔷}=\frac{\text{餘弦}\tfrac{1}{2}\text{㔷}}{\text{餘弦}\tfrac{1}{2}\text{呷}\ \text{餘弦}\tfrac{1}{2}\text{𠮟}}\text{正弦丙}$$

此式中之申與㔷若爲不

變之數則未亦爲不變之數所以如于呷吃呥弧三角形內作切于各邊之圈其呷吃呥弧三角形之周三變弧之和也不變則其圈之極移至㖃必仍與呷吃弧相切即凡有同頂角而不變其周數之弧三角形其底弧必切于有角半徑從





呥三切正申弦正一未切正

式而得之圈

若于上式中將$正切\frac{1}{2}呐$與$正弦丙$以同數代之卽得$正切未$與$正切米$以所設弧三角形之弧與角爲主而明之之式

第六十七款　若以呻代多等面形之體角之數以吧代其面數以哦代其邊數〈邊卽稜也〉則$呻丄吧＝哦丄二$試以體內之任一點爲心以一爲半徑作球而從球心至多面形之各角點作線乃將各線遇球面之點以大圈之弧連之則其所成之多邊弧形之數必等于其面數所以若用申代其任一箇多邊弧形之角之和而以卯

代其邊弧之數因能分而成有公頂之各弧三角形之數必與其邊數相同則多邊弧形之面積爲申丄二周丅卯周.所以將各多邊弧形之面積相加.因其各面之數爲吧故得全球之面積等于四周＝昂(申)丄二吧周丅周昂(卯).惟因昂(申)等于各多邊弧形之角之和.等于二周乘體角之數等于二周呻.

又因(卯)昴等于各多邊弧形之弧數等于邊數之倍即等于戌二因各邊約其弧數得二爲各多邊弧形之公弧數

所以得

四周＝二周呻⊥二周吧⊤二周戌

即

呻⊥吧＝戌⊥二

第六十八款　多等面之體只能有五種

凡多等面形之體各面之邊必爲卯數而其體必有寅面其各面之平角全數常以吧卯或呻寅或戌二明之所以其

$卯吧=寅呻=二哦$，其

$呻+吧=哦+二$，而

$$呻=\frac{四卯}{二(寅+卯)-寅卯}$$

此必為整數，所以 $\frac{一}{寅}+\frac{一}{卯}>\frac{一}{二}$，惟因 $\frac{一}{寅}$ $\frac{一}{卯}$ 之極大同數為 $\frac{一}{三}$，又因 $\frac{一}{卯}$ 與 $\frac{一}{寅}$ 俱不能小至 $\frac{一}{六}$，所以寅與卯所能有之同數，不外乎三四五，則必得呻吧哦為整數。

如其面為三等邊形，即 $卯=三$，則多面形之各體角可用其三等邊形之三面、四面、五面而成之，如此則成四等面體、八等面體與二十等面體。

若其面爲正方形。即卯一四。則各體角皆用三箇平面成之。

是爲立方體。

又如其面爲五等邊形。即卯一五。則各體角皆用三箇平面

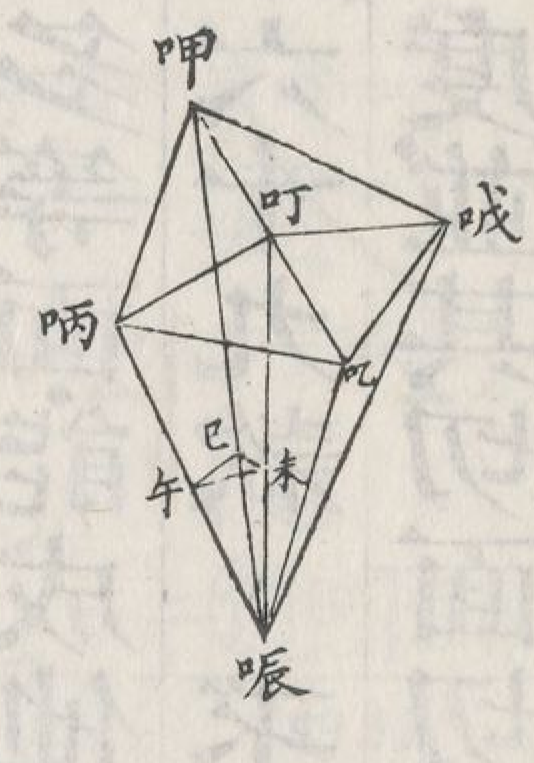
合成。而爲十二面形之體。

除以上五種多等面體之外。再不能有他種多等邊之

多等面。能成他種多等面之體。

第六十九款　求任何多等面體之兩箇倚面所成之斜

度。並其切面切邊切角之球半徑。



如圖令$\frac{\text{呷}}{\text{吃}}=\text{甲}$為多等面體之一邊即為有心為呐與吙之兩箇倚面之公邊又令$\frac{\text{呐}}{\text{呢}}=\text{未}$為切于各面之球之半徑$\frac{\text{呷}}{\text{呢}}=\text{味}$為切角圓球之半徑作呢叮為呷吃之垂線又令呷呢呐呐呢叮呷呢叮各平面遇見以呢為心以任何長為半徑所作之球面處成巳午午未未巳各弧則其巳午未弧三角形

$$\frac{\text{午}}{\text{角}}=\frac{\text{二}}{\text{一}}\times\frac{\text{卯}}{\text{二周}}$$

$$\frac{\text{巳}}{\text{角}}=\frac{\text{二寅}}{\text{二周}}$$

$未角＝\frac{二}{一}周$。

所以

餘弦巳＝餘弦午未正弦午。

惟因

$餘弦午未＝餘弦\begin{matrix}呐\\唇\\叮\end{matrix}＝正弦\begin{matrix}呐\\叮\\唇\end{matrix}＝正弦吐$。

其

$吐＝\begin{matrix}呐\\叮\\咸\\角\end{matrix}$。

所以

$正弦\frac{三}{二}吐＝\frac{正弦\frac{卯}{周}}{餘弦\frac{寅}{周}}$。

合

餘弦巳午＝餘切巳餘切午。

卽得

$\frac{未}{味}＝正切\frac{寅}{周}正切\frac{卯}{周}$。

$味^{二}＝未^{二}\perp\frac{四}{二}甲^{二}餘割^{二}\frac{卯}{周}$。

從此兩式能得味未二同數。

因每面之面積等于 $\frac{卯}{周}\,切\,餘\,甲^{二}\,\frac{四}{卯}$ 觀平三角第一百二十九款所以多等面

體之皮積等于 $\frac{卯}{周}\,切\,餘\,甲^{二}\,\frac{四}{卯吧}$ 而其體積等于面積三分之一．與

切面圓球之半徑相乘之數．

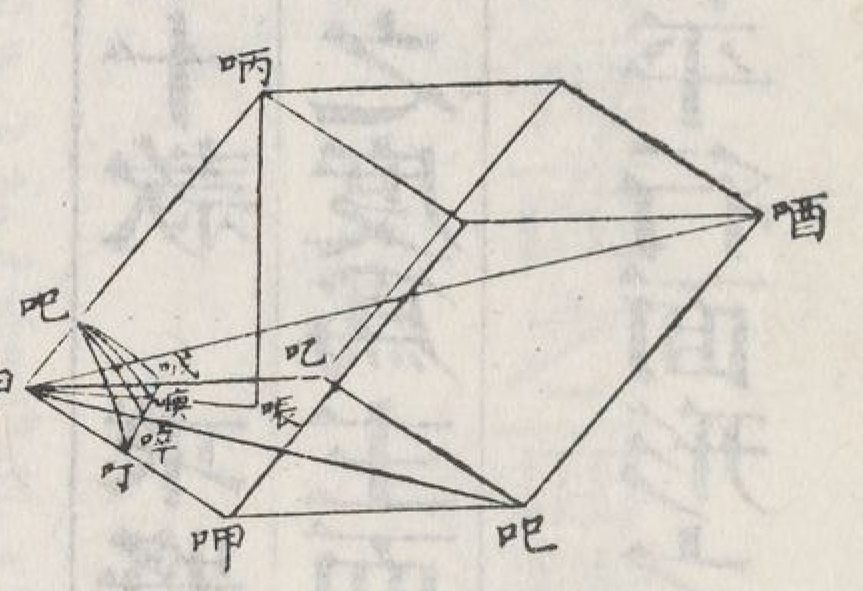
又其與各邊相切之球之半徑爲 $\sqrt{甲^{二}\,\frac{四}{一}\,丅\,味^{二}}\;\text{一}\;\frac{唇}{叮}$ 其切于一面又

與其各倚面引長之面相切之球之半徑等于

壬三一切餘$\frac{卯}{周}$切餘甲三一＝壬三一切餘$\frac{丙}{叮}$

第七十款　求將平行面形之體積以其各邊之長與所斜之度爲主而明之。

令平行面形之各邊＝甲呻呷＝乙呻吃＝丙呻呐每兩邊所成之各角爲



吧呻呐＝角，呷呻呐＝亢，呷呻吃＝氐。從呐點作直線呐唇，與呷呻吃平面為垂線，令吧哽為呐呻唇平面與有心為呻之球面相交之處所成之弧，又令叮哎哎吧吧叮為平行面形之面與球相交處所成之弧，則平行面形之體積，等于其底呷吃面之積，與高呐唇相乘之數，即等于

甲乙正弦氐×丙正弦吧庚

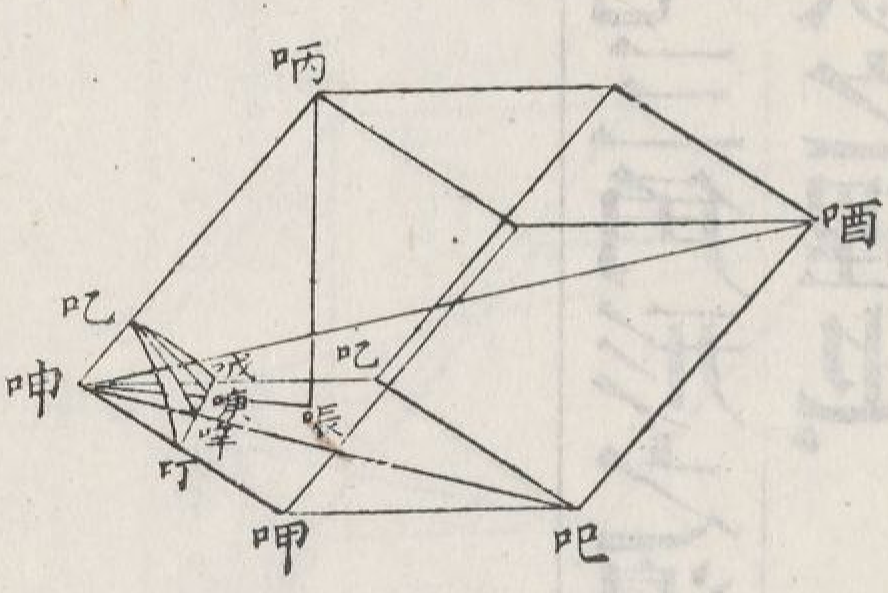
甲乙丙正弦氐×正弦角正弦哎。

因其吧哎噢為正角故等于

$$\text{甲乙丙}\sqrt{\text{一}\;\top\;\text{餘弦}^{\text{二}}\text{角}\;\top\;\text{餘弦}^{\text{二}}\text{亢}\;\top\;\text{餘弦}^{\text{二}}\text{氐}\;\bot\;\text{二餘弦角餘弦亢餘弦氐}}$$

其正弦哎之同數以哎叮吧三角形之邊為主而明之之同數代之此依第二十款之理也

如命呷吃吃呥兩面相交于 呷吃 = 乙 線處其兩面所成之扁角爲哦呷吃吃呥二面爲呻呻則其平行面形之體積等于



$$甲乙正弦氐 \times 乙丙正弦角 \frac{乙}{正弦哦}$$

$$= \frac{乙}{呻呻正弦哦}.$$

第七十一款　求將平行面形之對角線以各邊之長與面之斜度爲主而明之

令吧哱爲呻吧哂平面與有以呻爲心之球面相交之弧則

$$\text{呻哂}^{二}=\text{呻吧}^{二}丄\text{吧哂}^{二}丄二\,\text{呻吧}\times\text{吧哂}\,\text{餘弦}\,\text{吧哱}。$$

其$\text{呻吧}^{二}$與吧哱餘弦以同數代之。觀第一題則得

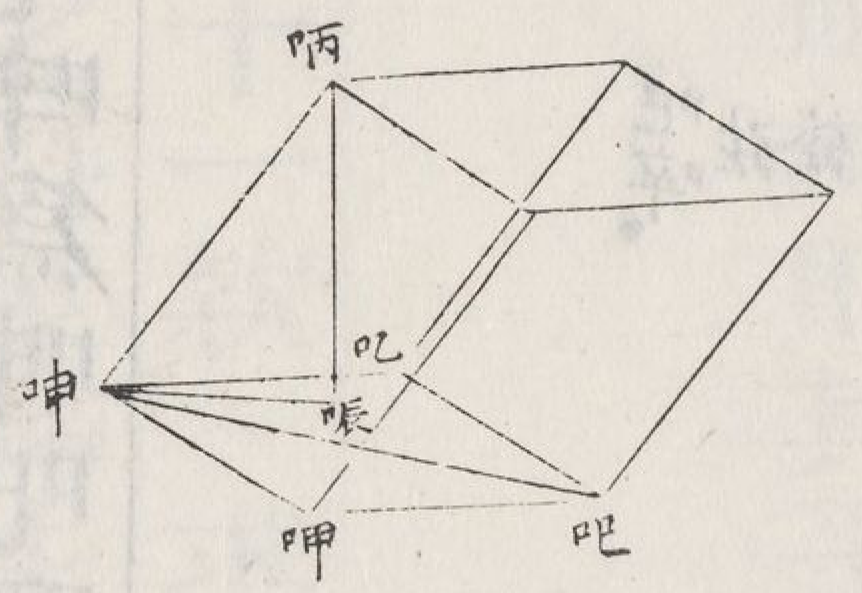
$$\text{呻哂}^{二}=\text{甲}^{二}丄\text{乙}^{二}丄二\text{甲乙餘弦氐}丄\text{丙}^{二}丄二\text{丙}\frac{\text{正弦氐}}{\text{呻吧}}\left[\text{餘弦角正弦}\,\text{哱叮}丄\text{餘弦亢正弦}\,\text{哱哎}\right]$$

$$=\text{甲}^{二}丄\text{乙}^{二}丄\text{丙}^{二}丄二\text{甲乙餘弦氐}丄二\text{丙}\left(\text{乙餘弦角}丄\text{甲餘弦亢}\right)。$$

因

從其呷呻吧吃呻吧三角形得呻吧正弦啐叮＝乙正弦氐及呻吧正弦啐戊＝甲正弦氐之故也

第七十二款　有任何四面形求將已知之六邊明其體積



如圖呻呷吧呐為任何四面形則可知其體積必為有底為呷呻吃高為呐唇之三稜柱形之體積之三分之一則亦必為有邊為呻呷呻吃呻呐之平行面形之積之六分之一所以其體積必為

$\frac{六}{一}甲乙丙\sqrt{一丅餘弦角^{二}丅餘弦亢^{二}丅餘弦氐^{二}\perp二餘弦角餘弦亢餘弦氐}$

若令

$\frac{呷}{吃}＝丙$

$\frac{呷}{呐}＝乙$

$\frac{吃}{呐}＝甲$

則

$二甲乙餘弦氐＝甲^{二}\perp乙^{二}丅丙^{二}$

$二甲丙餘弦亢＝甲^{二}\perp丙^{二}丅乙^{二}$

$二乙丙餘弦角＝乙^{二}\perp丙^{二}丅甲^{二}$

將餘弦之同數代入

其式則四面形之體積為

二三／一 申〔（甲甲⊥乙乙⊥丙丙）丅二甲甲（甲⊥甲）丅二乙乙（乙⊥乙）丅二丙丙（丙⊥丙）丅（甲乙丙）丅（乙丙甲）丅（甲丙乙）丅（甲乙丙）〕三

此式中之申為六邊之

平方之和。

由此可見四面形之體積亦能以任兩面之面積呻呷與其兩面相交之角戊及交邊之長乙以明之因其體積必等于平行面形之積之六分之一即

$$\frac{1}{6}\text{甲乙丙正弦角正弦氐正弦戊}=$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{\text{甲乙正弦氐}}{2}\times\frac{\text{乙丙正弦角}}{2}\times\frac{\text{正弦戊}}{\text{乙}}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{\text{呻呷正弦戊}}{\text{乙}}。$$

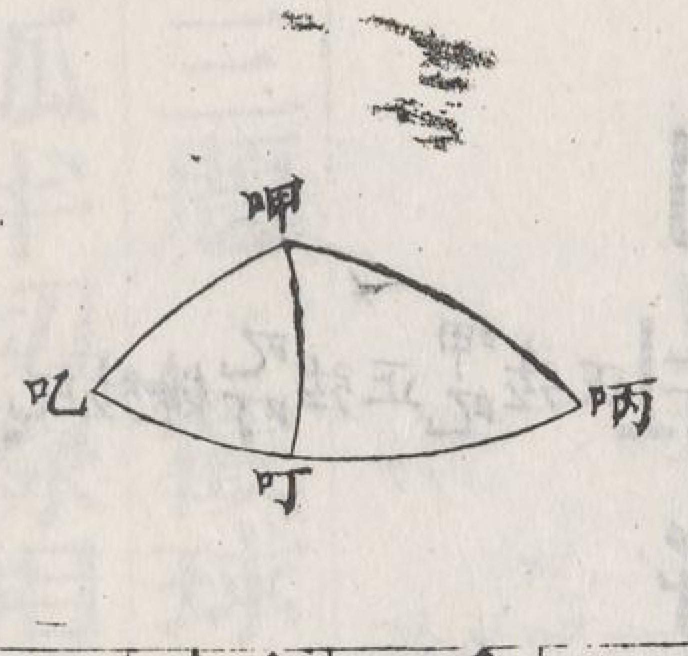
興化劉彝程校算
上海曹擷亭繪圖

三角數理卷十二

英國海麻士輯　英國　傅蘭雅　口譯
金匱　華蘅芳　筆述

弧三角各理設題

第一題　有任何弧三角形。求從任一邊之弧上已知之點向對角所作之弧。



如圖。呷吃呡爲任何弧三角形。叮爲吃呡弧上已知之任一點。呷叮爲從叮點向對角呷所作之弧。

因

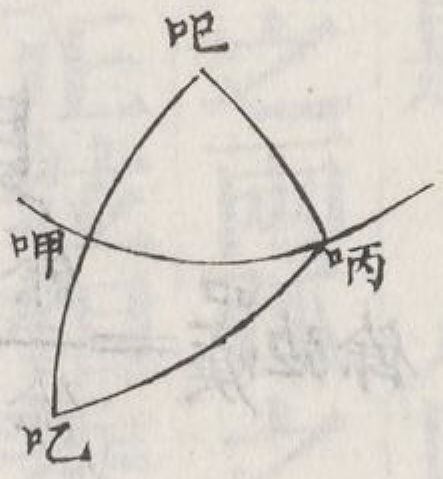
$$餘弦吃＝餘弦甲叮＝餘弦甲吃\,餘弦吃叮\,丄\,正弦甲吃\,正弦吃叮\,餘弦吃$$

將餘弦吃以三邊明之之數代入則得

$$餘弦甲叮\,正弦吃丙＝餘弦甲吃\,正弦叮丙\,丄\,餘弦甲丙\,正弦吃叮$$

第二題　求于球面作大圈過任設之點而與所設之小圈相切。

如圖吃為球面上所設之點呷哂為小圈之界吧為小圈之極若吃哂弧果為與呷哂小圈相切則從切點哂向吧作吧哂弧其吧哂吃必為正角

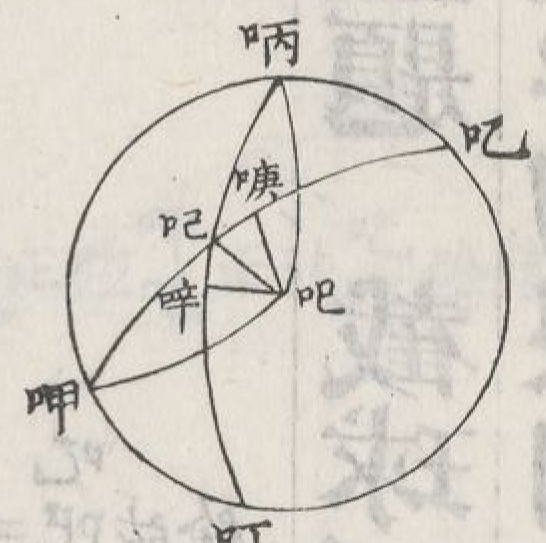


所以得

餘弦吃吧哂＝正切吧哂餘切吧吃。

如此則哂點定而吃哂亦得矣

第三題　截球面內若有兩大圈之弧彼此相交則其分弧半切線相乘之積必彼此相等



如圖呷𠮙呐叮兩弧相交于吧點。吧爲呷呐𠮙叮小圈之極。從吧點作吧呐、吧呷、吧吧各弧。又作吧啐、吧㖡爲呷𠮙呐叮之垂弧。

則

$$\text{餘弦吧㖡} = \frac{\text{餘弦吧㖡}}{\text{餘弦吧吧}} = \frac{\text{餘弦呷㖡}}{\text{餘弦吧呷}}$$

$$\text{餘弦吧啐} = \frac{\text{餘弦吧啐}}{\text{餘弦吧吧}} = \frac{\text{餘弦呐啐}}{\text{餘弦吧呐}}$$

所以

$$\frac{\text{餘弦吧啐}}{\text{餘弦呐啐}} = \frac{\text{餘弦吧㖡}}{\text{餘弦呷㖡}}$$

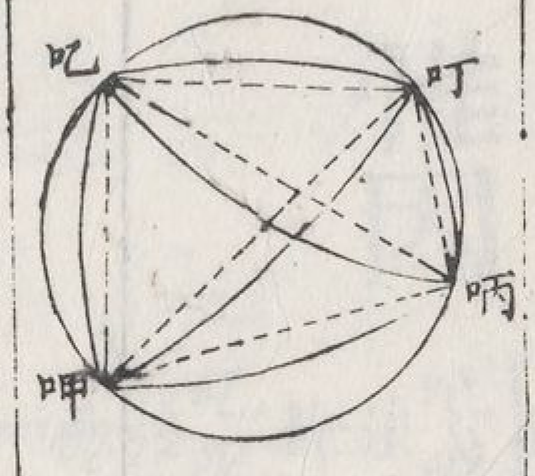
$$\frac{\text{餘弦呐啐} \perp \text{餘弦吧啐}}{\text{餘弦呐啐} \top \text{餘弦吧啐}} = \frac{\text{餘弦呷㖡} \perp \text{餘弦吧㖡}}{\text{餘弦呷㖡} \top \text{餘弦吧㖡}}$$

卽

$$\text{正切}\frac{二}{一}\text{呷吧}\ \text{正切}\frac{二}{一}\text{吧𠮙} = \text{正切}\frac{二}{一}\text{呐𠮙}\ \text{正切}\frac{二}{一}\text{吧叮}$$

第四題　凡四邊弧形若有一圈能切其四角者則其對角之兩弧之半之正弦相乘之數必等于其對邊之半之正弦相乘之數之和

如圖中之虛線爲各弧之通弦則其各通弦必在平四邊形外切平圓之平面內



因

呷叮×𠮙𠰱＝呷𠮙×𠰱叮丄呷𠰱×𠮙叮

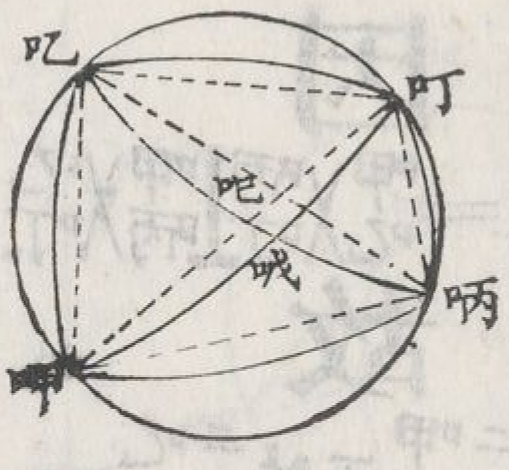
故

正弦二一呷叮正弦二一𠮙𠰱＝

正弦二一呷𠮙正弦二一𠰱叮丄正弦二一呷𠰱正弦二一𠮙叮

則易知四邊形兩相對之和必相等

第五題　如㖂與吧爲呷吃哂叮四邊弧形對角之弧之中點，則其邊弧餘弦之和數，必等于



四餘弦呷㖂餘弦吃吧餘弦吧㖂.

從兩箇三角形呷吃叮呷哂叮依第一題得

二餘弦呷㖂餘弦吃㖂＝餘弦呷吃丄餘弦吃叮.

二餘弦呷㖂餘弦哂㖂＝餘弦呷哂丄餘弦哂叮.

惟因

𠮙吧哎餘弦 吧哎正弦 𠮙吧正弦 ⊥ 吧哎餘弦 𠮙吧餘弦 ═ 𠮙哎餘弦。

𠮙吧哎餘弦 吧哎正弦 呐吧正弦 丅 吧哎餘弦 呐吧餘弦 ═ 呐哎餘弦。

所以其邊弧餘弦之和等于

吧哎餘弦 𠮙吧餘弦 呷哎餘弦四。

第六題 有 弧餘數$\frac{1}{2}$正弦。 等于

正弦呐 $\dfrac{\text{丙}\frac{1}{2}\text{餘弦}}{\text{乙}\frac{1}{2}\text{正弦 甲}\frac{1}{2}\text{正弦}}$。

求其證

正弦½哎＝正弦[½(呷⊥吆)⊤½(一八〇⊤呐)]＝

正弦½(呷⊥吆)正弦½呐⊤餘弦½(呷⊥吆)餘弦½呐＝

[餘弦½(甲⊤乙)⊤餘弦½(甲⊥乙)] $\dfrac{餘弦½丙}{正弦½呐餘弦½呐}$＝

觀第二十五款

$\dfrac{餘弦½丙}{正弦½甲正弦½乙}$正弦呐。

所以依第六十三款

餘弦½哎＝[餘弦½甲餘弦½乙⊥正弦½甲正弦½乙餘弦呐]正割½丙。

又

因

$$\text{餘切}\tfrac{\text{一}}{\text{二}}\text{甲}\,\text{餘切}\tfrac{\text{一}}{\text{二}}\text{乙}=\frac{\text{正弦甲}}{\text{一丄餘弦甲}}\times\frac{\text{正弦乙}}{\text{一丄餘弦乙}}.$$

$$\text{餘弦呩}=\frac{\text{正弦甲正弦乙}}{\text{餘弦丙丅餘弦甲餘弦乙}}.$$

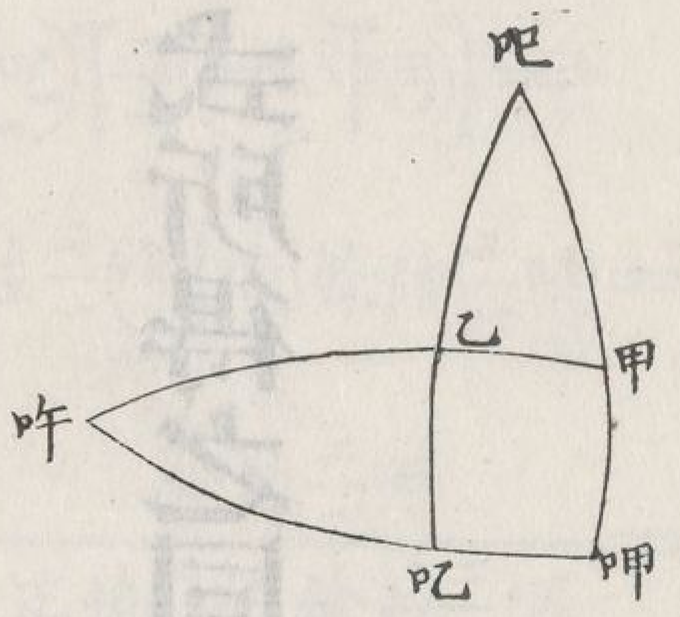
所以

$$\text{餘切}\tfrac{\text{一}}{\text{二}}\text{吃}=\frac{\text{正弦甲正弦乙正弦呩}}{\text{一丄餘弦甲丄餘弦乙丄餘弦丙}}.$$

其分母可用第三十六款之式所得之同數代之。又依第六十四款能證

$$\text{正切}\left[\text{四五}^{\circ}\text{丄}\tfrac{\text{一}}{\text{四}}(\text{呷丄吃丅呩})\right]=\sqrt{\frac{\text{正切}\tfrac{\text{一}}{\text{二}}\text{申正切}\tfrac{\text{一}}{\text{二}}(\text{申丅甲})}{\text{正切}\tfrac{\text{一}}{\text{二}}(\text{申丅乙})\text{正切}\tfrac{\text{一}}{\text{二}}(\text{申丅丙})}}.$$

第七題　若有兩弧吘𠮙呷、吘乙甲、與他兩弧吧甲呷、吧乙𠮙、相交于呷𠮙甲乙各點、則



$$\frac{\text{正弦𠮙吘}}{\text{正弦呷吘}}=\frac{\text{正弦吧甲}}{\text{正弦呷甲}}\times\frac{\text{正弦𠮙乙}}{\text{正弦吧乙}}。$$

此因

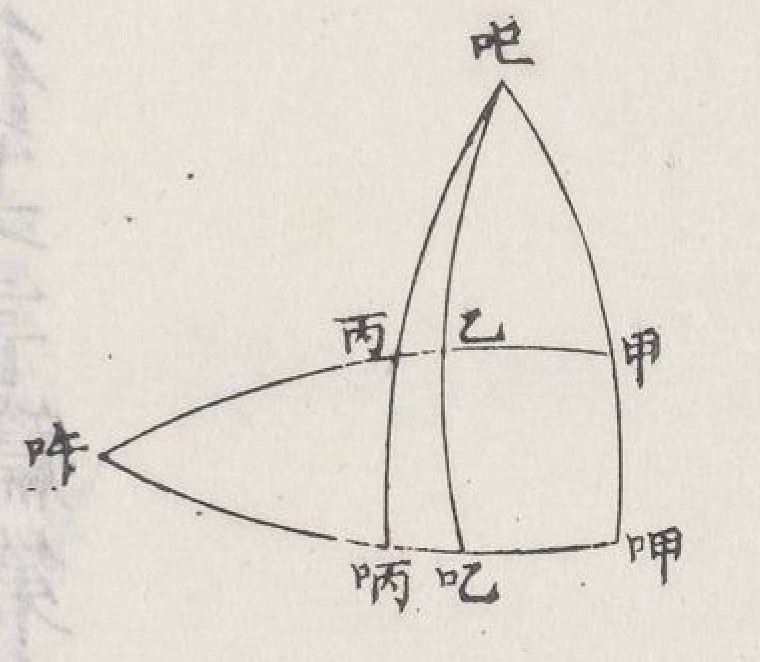
$$\frac{\text{正弦𠮙吘}}{\text{正弦呷吘}}=\frac{\text{正弦呷甲}}{\text{正弦呷吘}}\times\frac{\text{正弦𠮙乙}}{\text{正弦呷甲}}\times\frac{\text{正弦𠮙吘}}{\text{正弦𠮙乙}}。$$

$$=\frac{\text{正弦吘}}{\text{正弦甲}}\times\frac{\text{正弦𠮙乙}}{\text{正弦呷甲}}\times\frac{\text{正弦乙}}{\text{正弦吘}}=$$

$$\frac{\text{正弦𠮙乙}}{\text{正弦呷甲}}\times\frac{\text{正弦乙}}{\text{正弦甲}}=\frac{\text{正弦𠮙乙}}{\text{正弦呷甲}}\times\frac{\text{正弦吧甲}}{\text{正弦吧乙}}$$

之故也。

第八題　若有兩弧呷吃呐甲乙丙與同過吧點之三弧吧呷吧吃吧呐在呷吃呐甲乙丙各點相交則



$$\text{正弦呷吃}\,\frac{\text{正弦吧丙}}{\text{正弦呐丙}}\ \text{丄}\ \text{正弦吃呐}\,\frac{\text{正弦吧甲}}{\text{正弦呷甲}}=\text{正弦呷呐}\,\frac{\text{正弦吧乙}}{\text{正弦吃乙}}$$

從某書第一百四十二篇第十八題得

$$\text{正弦呷呐}\ \text{正弦𠮙吘} = \text{正弦呷吘}\ \text{正弦𠮙呐} \perp \text{正弦呷𠮙}\ \text{正弦呐吘}.$$

惟因

$$\frac{\text{正弦呐吘}}{\text{正弦呷吘}} = \frac{\text{正弦呐丙}}{\text{正弦吧丙}} \times \frac{\text{正弦吧甲}}{\text{正弦呷甲}}.$$

$$\frac{\text{正弦呐吘}}{\text{正弦𠮙吘}} = \frac{\text{正弦呐丙}}{\text{正弦吧丙}} \times \frac{\text{正弦吧乙}}{\text{正弦𠮙乙}}.$$

從上式

消去其正弦吃吘與正弦呷吘。即得

$$\frac{\text{正弦吧乙}}{\text{正弦吃乙}}\,\text{正弦呷呐} = \frac{\text{正弦吧甲}}{\text{正弦呷甲}}\,\text{正弦吃呐} \perp \frac{\text{正弦吧丙}}{\text{正弦呐丙}}\,\text{正弦呷吃}$$

此式可入

$$\left(\frac{\text{正弦吧乙}}{\text{正弦吧吃}} \top \text{餘弦吧吃}\right)\text{正弦呷呐} = \left(\frac{\text{正切吧甲}}{\text{正弦吧呷}} \top \text{餘弦吧呷}\right)\text{正弦吃呐} \perp \left(\frac{\text{正切吧丙}}{\text{正弦吧呐}} \top \text{餘弦吧呐}\right)\text{正弦呷吃}$$

惟依第

一題

$$\text{餘弦}{}^{\text{吧}}_{\text{吃}}\ \text{正弦}{}^{\text{呷}}_{\text{呐}} = \text{餘弦}{}^{\text{吧}}_{\text{呷}}\ \text{正弦}{}^{\text{吃}}_{\text{呐}} \perp \text{餘弦}{}^{\text{吧}}_{\text{呐}}\ \text{正弦}{}^{\text{呷}}_{\text{吃}}.$$

所以

$$\frac{\text{正切}{}^{\text{吧}}_{\text{乙}}}{\text{正弦}{}^{\text{吧}}_{\text{吃}}}\ \text{正弦}{}^{\text{呷}}_{\text{呐}} = \frac{\text{正切}{}^{\text{吧}}_{\text{甲}}}{\text{正弦}{}^{\text{吧}}_{\text{呷}}}\ \text{正弦}{}^{\text{吃}}_{\text{呐}} \perp \frac{\text{正切}{}^{\text{吧}}_{\text{丙}}}{\text{正弦}{}^{\text{吧}}_{\text{呐}}}\ \text{正弦}{}^{\text{呷}}_{\text{吃}}.$$

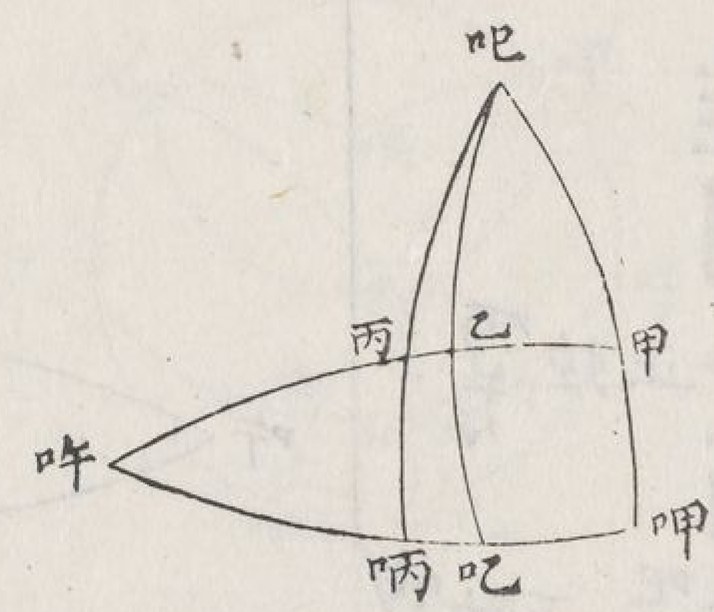
若吧為呷呐之極則

$$\text{正切}{}^{\text{吃}}_{\text{乙}}\ \text{正弦}{}^{\text{呷}}_{\text{呐}} = \text{正切}{}^{\text{呷}}_{\text{甲}}\ \text{正弦}{}^{\text{吃}}_{\text{呐}} \perp \text{正切}{}^{\text{呐}}_{\text{丙}}\ \text{正弦}{}^{\text{呷}}_{\text{吃}}.$$

此式能明

在地球之上大圜上三處經緯度相比之法

第九題　凡弧三角形若過兩邊之中點作弧必遇底弧引長之弧在一定之點此點距底弧之中點為一象限



因

$$\frac{正弦\,呐吘}{正弦\,呷吘}=\frac{正弦\,吧甲}{正弦\,呷甲}\times\frac{正弦\,呐丙}{正弦\,吧丙}.$$

觀第七題其甲與丙若為呷吧呐吧之中點則式變為

$$正弦\,呷吘=正弦\,呐吘.$$

故

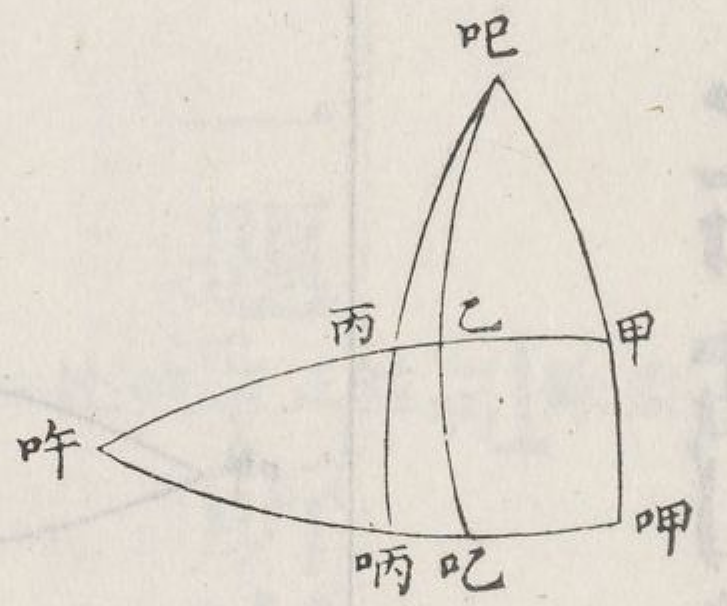
$$呷吘 \perp 呐吘=一八〇.$$

若吔為呷呐之中點則

$$吘吔=\frac{二}{一}(呷吘 \perp 呐吘)=九〇.$$

第十題　凡弧三角形其一邊之弧若爲過平分其底弧之大圈之極之大圈所平分者則其又一邊之弧亦必爲此圈所平分。

如令圖中之吘點爲與底弧成正角平分其底弧之大圈之極點則 吘吃$=$九〇 而 呷吘$+$吘昞$=$一八〇



惟因 $\text{正弦呷吘}=\text{正弦昞吘}$。

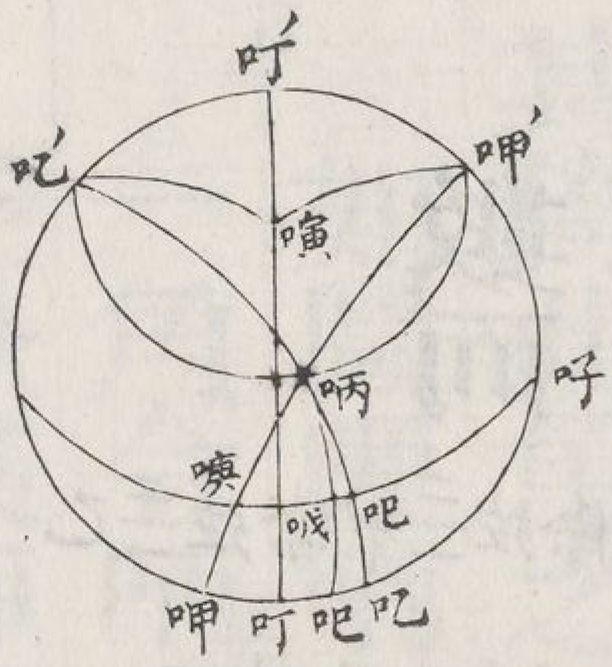
而 $\dfrac{\text{正弦昞吘}}{\text{正弦呷吘}}=\dfrac{\text{正弦吧甲}}{\text{正弦呷甲}}\times\dfrac{\text{正弦昞丙}}{\text{正弦吧丙}}$。

所以 $\dfrac{\text{正弦吧甲}}{\text{正弦呷甲}}=\dfrac{\text{正弦吧丙}}{\text{正弦昞丙}}$。

若 呷甲$=$吧甲。

則 昞丙$=$吧丙。

第十一題　凡同在一段底弧上之弧三角形若其他兩邊之弧之中點同在一箇大圈上則其面積必相等



如圖呷吃爲所設之底弧叮爲中點叮呼爲九〇°呼吃咦爲過呼點之任一大圈則呷呐吃三角形若爲有其一邊呷呐在咦點平分者則他邊亦必在吃點平分觀第十題若令哦代其弧餘數則

餘切三哦＝正弦吃／餘弦吃⊥餘切三丙餘切三甲

餘割三丙餘切呼＝

從呼吃吧

三角形其 呼吃＝九〇丅三丙。及 呼吃吧角＝一八〇丅吃。

餘切三甲餘弦三丙＝餘切呼正弦吃丅正弦三丙餘弦吃。

觀第二十二款所以其吠為不變之數而

餘弦吃喚＝餘弦三甲餘弦三乙

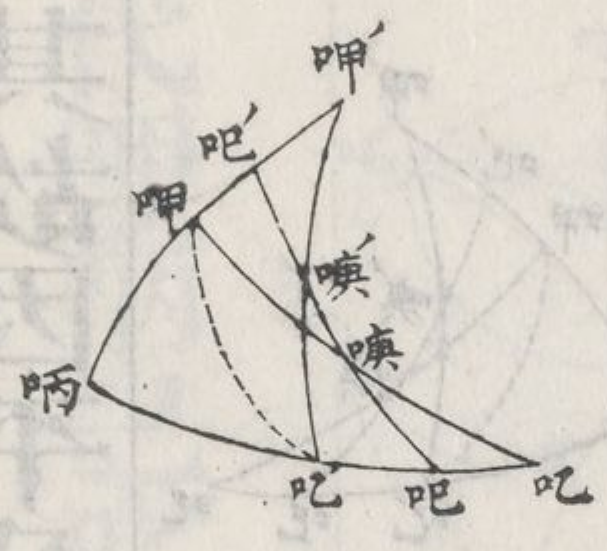
⊥正弦三甲正弦三乙餘弦呐＝

餘弦三吠餘弦三丙。

觀第六題所以各弧之中點其相距必同

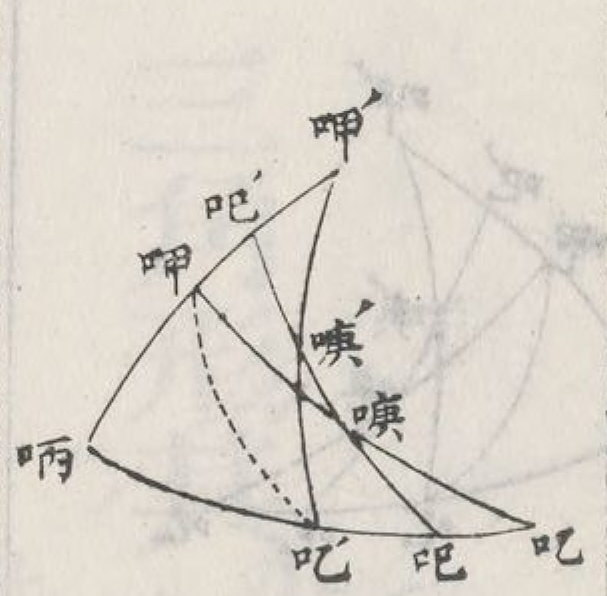
第十二題　求另作一弧三角形其面積與所設之弧三角形相等又有一角與所設之弧三角形之角相同而其倚此角之一弧與另設之弧相等

如圖呷呐𠮙爲所設之弧三角形呐爲弧三角形之一角令呐𠮙′爲另設之弧乃將𠮙𠮙′平分之于吧又平分其呷𠮙弧于噢從吧噢兩點作吧噢弧引長其



弧至遇呐呷引長之弧于吧′取吧′呷′等于吧′呷從呷′點作呷′𠮙弧則呷′呐𠮙′爲所求之三角形若將呷′𠮙′吧′噢′各引長之則其相交之點距呷′𠮙′之中點爲九〇

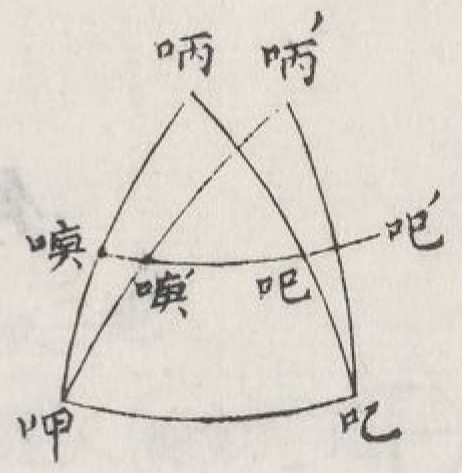
其故因平分呷呷之圈亦必平分呷吃所以呷呷吃



呷吃吃兩箇弧三角形之面積彼此相等因同一底弧而有他邊之中點同在一大圈上所以呷呞吃呷呞吃兩箇弧三角形之面積必相等

第十三題　求在所設弧三角形之底弧上另作弧三角形與其底成所設之角而面積與所設弧三角形之面積相等

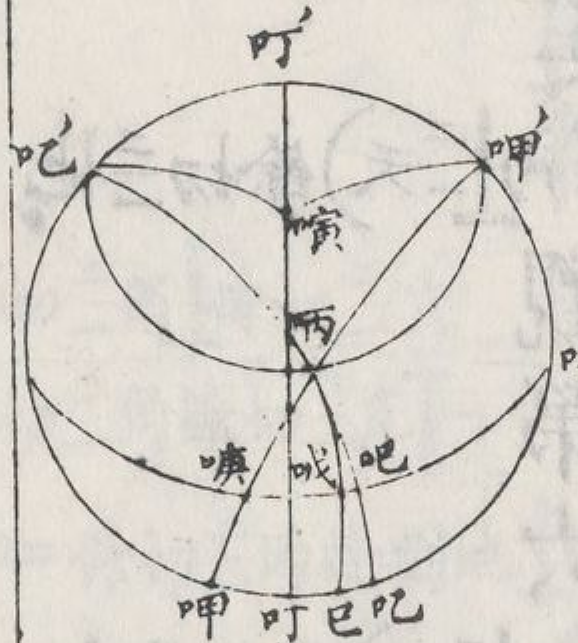
如圖呷呞吃為所設之弧三角形呷吃為其底弧嗼吃為過其兩邊之弧之中點之弧作吃呷嗼等于所



設之角在㖈吔引長之弧上取㖈吔等于㖈吔乃引長吔吔呷㖈遇于呐則呷呐吔即所求之弧三角形觀第十一題自明

第十四題　有弧三角形之底弧及面積求頂點之界

如圖呷吔爲所設之底弧叮爲底弧之中點呐巳爲



從頂點所作之垂弧令叮巳＝天巳呐＝地爲頂點之縱橫弧以戊代其弧餘數令角亢

代呷呐巳吔呐巳兩正弧三角之弧餘數即得亢上角＝戊則

其

$$\text{餘切三角} = \text{餘切}\left(\text{四二丙} \perp \text{二三天}\right)\text{餘切三地}$$

觀第六十三款

$$\text{餘切二六} = \text{餘切}\left(\text{四二丙} \perp \text{二三天}\right)\text{餘切三地}$$

所以其

$$\text{餘切三角}\,\text{餘切三六} = \frac{\text{餘弦天} \top \text{餘弦三丙}}{\text{餘弦天} \perp \text{餘弦三丙}}\,\text{餘切三地}$$

觀平三角形第十三款而

$$\text{餘切三角} \perp \text{餘切三六} = \frac{\text{餘弦天} \top \text{餘弦三丙}}{\text{二正弦三丙}}\,\text{餘切三地}$$

所

以得

$$\text{餘切}^{二}\text{戊} = \frac{\text{餘切}^{二}\text{角} \perp \text{餘切}^{二}\text{亢}}{\text{餘切}^{二}\text{角}\,\text{餘切}^{二}\text{亢} \top 一} = \frac{二\,\text{正弦}^{二}\text{丙}\,\text{餘切}^{二}\text{地}}{\text{餘弦}^{二}\text{丙}\,\text{餘割}^{二}\text{地} \perp \text{餘弦天}\,(\text{餘切}^{二}\text{地} \top 一)}$$

$$= \text{餘切}^{二}\text{丙}\,\text{餘割地} \perp \text{餘弦天}\,\text{餘割}^{二}\text{丙}\,\text{餘切地}.$$

卽

$$\text{餘弦}^{二}\text{丙} = \text{正弦}^{二}\text{丙}\,\text{餘切}^{二}\text{戊}\,\text{正弦地} \top \text{餘弦天}\,\text{餘弦地}.$$

此爲所求弧三角形頂點之界。

惟若以天′地′爲在球面從𠻝點爲極之圈之縱橫弧。以未代其角半徑。則頂點之界。易知其爲

餘弦未＝正弦地′正弦地丄餘弦地′餘弦地餘弦(天′丅天)。

若其天′＝〇。而

丅正切地′＝正弦$\frac{一}{二}$丙餘切$\frac{一}{二}$戌。

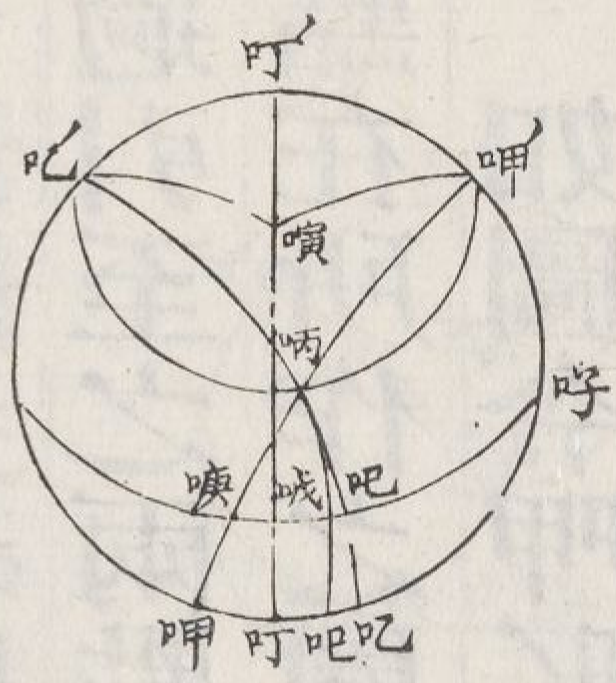
丅$\frac{餘弦地′}{餘弦未}$＝餘弦$\frac{一}{二}$丙。

則與前式相同。從此三式。能定其天′地′未′

從一式可知從頂界之圈之心嗩過底之中點成大圈叮吖從二式可知

地＝呼角⊥九〇＝叮哦⊥九〇

其噢哦吧爲過



呷呐吃呐兩弧中點之弧此理可觀第十一題所證

餘切呼＝⊤正切(九〇⊥呼)
＝正弦二丙餘切二戊

自明從三式可知若將呷呐吃呐引長至遇呷叮吃圈于呷吃則呷吃亦爲其界上之

點此因

餘弦嗔叮＝丅餘弦地

呷叮＝二丙

所以

餘弦未＝餘弦嗔叮餘弦呷叮

而

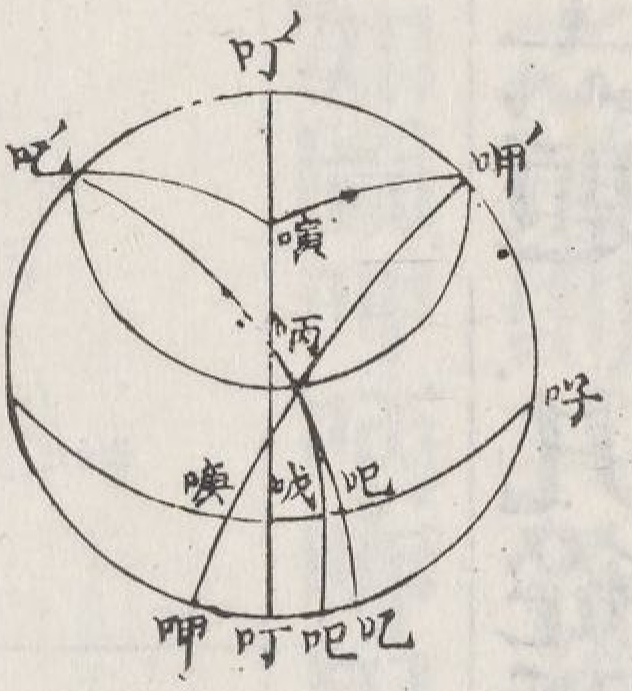
未＝嗔呷＝嗔吃

此題爲雷克雖里所設其理頗深而繁茲用更易之法證其相反之理

第十五題　若將底弧向左右各引長至俱等于半周乃過引至之兩點任作一圈則凡有以本底爲底而其頂點在所作之圈界之任何弧三角形其面積必同

如圖令呷吃爲所設底弧而引長至呷吃令嗔爲過呷吃二點之小圈之極哂爲小圈上之任一點作呷

呐吃呐兩弧而引長之則必過呷吃二點而嗊吃呷丄嗊呷吃=呷呐吃丄吃吃呷丄呷呷吃=呷吃呐因嗊呷呐=嗊呐呷嗊吃呐=嗊呐吃



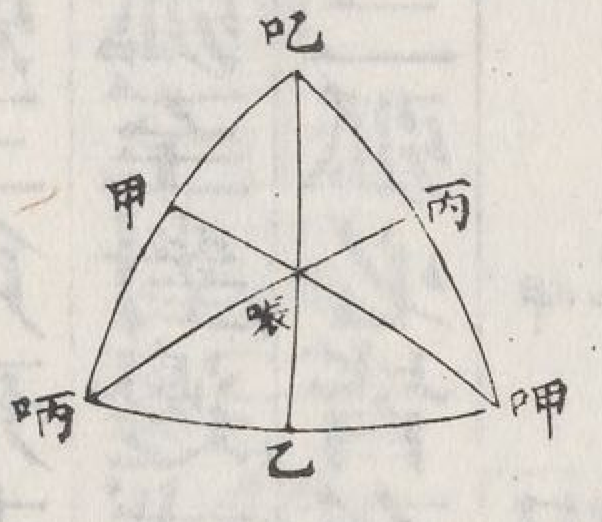
所以從小圈呷呐吃所有以任點呐爲頂之呷呐吃弧三角形其各角之和與其形之面積必恆不變而其小圈之角半徑易從所設之底與面積而定之

若其呷叮=呷叮則因呷呷二點各爲徑之一端又因其嗊呷吃角等于呷吃呐弧三角形各角之和之半所以

其嗊′呷′叮′角＝一八〇°丅呻＝九〇°丅$\frac{一}{二}$戊．所以從其嗊′呷′叮′正弧三角形得嗊′呷′叮′＝正切呷′叮′餘切呷′嗊′．卽依第六十五款得正切$\frac{一}{二}$丙餘切未＝丅餘弦呻＝正弦$\frac{一}{二}$戊．

第十六題　凡從弧三角形之各角過任一點作弧至對

邊之弧則其各截弧之正弦依類相乘之積必相等如圖呷⿰口丙呷甲二弧與⿰口乙⿰口丙⿰口乙乙二弧相交則依第



七題得

$$\frac{\text{正弦}⿰口辰乙}{\text{正弦}⿰口乙⿰口辰}\times\frac{\text{正弦}⿰口乙甲}{\text{正弦}⿰口丙甲}=\frac{\text{正弦}呷乙}{\text{正弦}呷⿰口丙}$$

又因⿰口丙呷⿰口丙丙與⿰口乙呷⿰口乙乙相交故得

$$\frac{\text{正弦}⿰口辰乙}{\text{正弦}⿰口乙⿰口辰}\times\frac{\text{正弦}⿰口乙丙}{\text{正弦}呷丙}=\frac{\text{正弦}⿰口丙乙}{\text{正弦}⿰口丙呷}$$

以此約前式得

$$\frac{\text{正弦}呷丙}{\text{正弦}⿰口乙丙}\times\frac{\text{正弦}⿰口乙甲}{\text{正弦}⿰口丙甲}=\frac{\text{正弦}呷乙}{\text{正弦}⿰口丙乙}$$

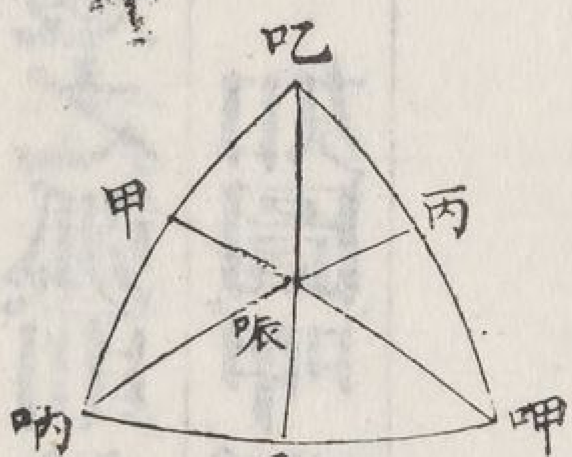
即

$$\frac{\text{正弦}⿰口乙甲\ \text{正弦}呷丙\ \text{正弦}⿰口丙乙}{\text{正弦}⿰口乙丙\ \text{正弦}⿰口丙甲\ \text{正弦}呷乙}$$

反言之凡弧三角形之三箇邊弧上若取三點合于此題之式則從各點作弧至對角其所作之各弧必在㖘點相交此理與平三角形眞爲相同下題明之

第十七題

凡弧三角形若從各角向對邊作垂弧或平分其各角作弧至對邊或從各角至內圈在對邊所切之點作弧其三弧必皆在一點相交



如圖呷吃呐爲弧三角形甲乙丙爲從角至對邊所作垂弧之端則可合于題之第一例得交點㖘

從正弧三角形之理

$$\frac{\text{餘弦}_{\text{㖠乙}}}{\text{餘弦}_{\text{呷乙}}}=\frac{\text{餘弦甲}}{\text{餘弦丙}}$$。

$$\frac{\text{正切}_{\text{呷丙}}}{\text{正切}_{\text{呷乙}}}=\frac{\text{正切乙}}{\text{正切丙}}$$。

得

$$\text{餘弦}_{\text{呷丙}}\,\text{餘弦}_{\text{㖠乙}}\,\text{餘弦}_{\text{𠮙甲}}=\text{餘弦}_{\text{𠮙丙}}\,\text{餘弦}_{\text{呷乙}}\,\text{餘弦}_{\text{㖠甲}}$$。

$$\text{正切}_{\text{呷丙}}\,\text{正切}_{\text{㖠乙}}\,\text{正切}_{\text{𠮙甲}}=\text{正切}_{\text{𠮙丙}}\,\text{正切}_{\text{呷乙}}\,\text{正切}_{\text{㖠甲}}$$。

所以

$$\text{正弦}_{\text{呷丙}}\,\text{正弦}_{\text{㖠乙}}\,\text{正弦}_{\text{𠮙甲}}=\text{正弦}_{\text{𠮙丙}}\,\text{正弦}_{\text{呷乙}}\,\text{正弦}_{\text{㖠甲}}$$。

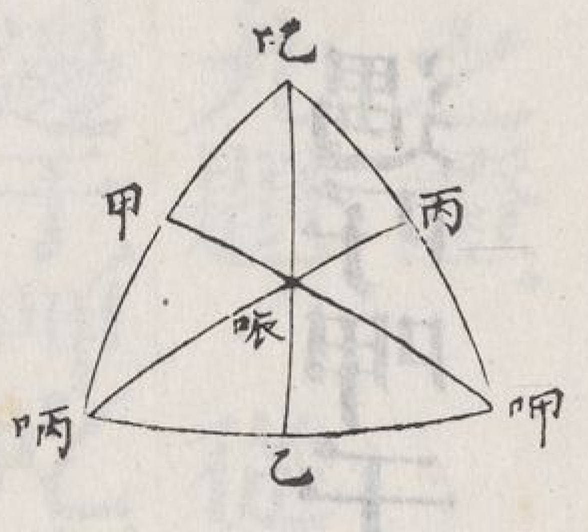
若其甲乙丙三點爲分角之弧之端則依第六十六款之理其各弧相交之點必爲內切之圈之極所以

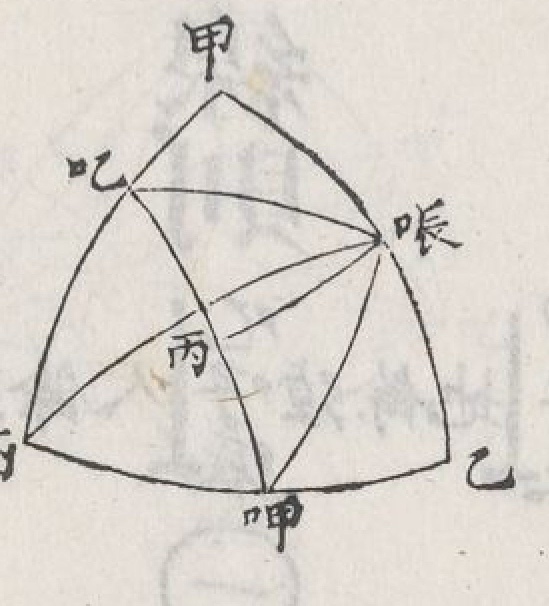
從 $\frac{\text{甲弦正}}{\text{丙弦正}}=\frac{\text{吶乙弦正}}{\text{呷乙弦正}}$ 可見其合于第十六題之說亦合于題之第三例

若甲乙丙為邊之中點亦必合于第十六題之說其甲乙丙或為內切之圈之切點或為切于一邊及引長兩邊之圈之切點因 吶乙＝吶甲　吃丙＝吃甲　呷丙＝呷乙 又 申丙＝吃甲＝呷乙　申乙＝吶甲＝呷丙　申甲＝吶乙＝吃丙

其二申為弧三角形之周即三邊之弧之和也

第十八題　若從任何弧三角形之三箇角點呷吃吶過任點㖘作三弧與所對之弧遇于甲乙丙三點則有式





如

$$一=\text{哏呐餘弦}\,\frac{\text{呐丙正弦}}{\text{哏丙正弦}}+\text{哏吃餘弦}\,\frac{\text{吃乙正弦}}{\text{哏乙正弦}}+\text{哏呷餘弦}\,\frac{\text{呷甲正弦}}{\text{哏甲正弦}}$$

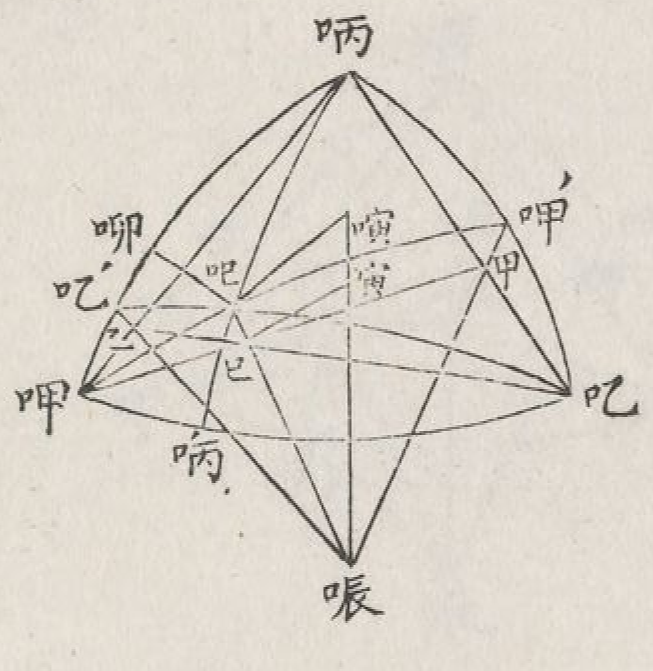
因若令吁爲球心而以天地入三字代其以呼呷吁吃吁呐爲軸之哏點之縱橫

線則天餘弦呷吇㖘丄地餘弦𠮠吇㖘丄人餘弦㖠吇㖘＝㖘吇(一)惟若從㖘點作一直線與吇呷平行而

遇吇呷于吘則其㖘吇/天＝正弦吇吘㖘/正弦吇㖘吘＝正弦呷甲/正弦㖘甲從他點作線亦如之所以

若將㊀式依代數之法變之。卽可得本題所設之例之證。

第十九題　從任何弧三角形之各角過任點吧作弧。遇對邊于呷′吃′呐′。又嗊爲切角之圈之極。味爲其角半徑。



則

$$\frac{\text{正弦呷呷}'}{\text{正弦吧呷}'} \perp \frac{\text{正弦吃吃}'}{\text{正弦吧吃}'} \perp \frac{\text{正弦呐呐}'}{\text{正弦吧呐}'} = \frac{\text{餘弦味}}{\text{餘弦吧嗊}}$$

如圖。喉爲球心。令半徑喉吧。

㖘嗔㖘吃㖘呷遇見切于弧三角形各角點之圈之平面于巳寅乙申則 $\text{㖘寅巳}=\text{九〇}$。而

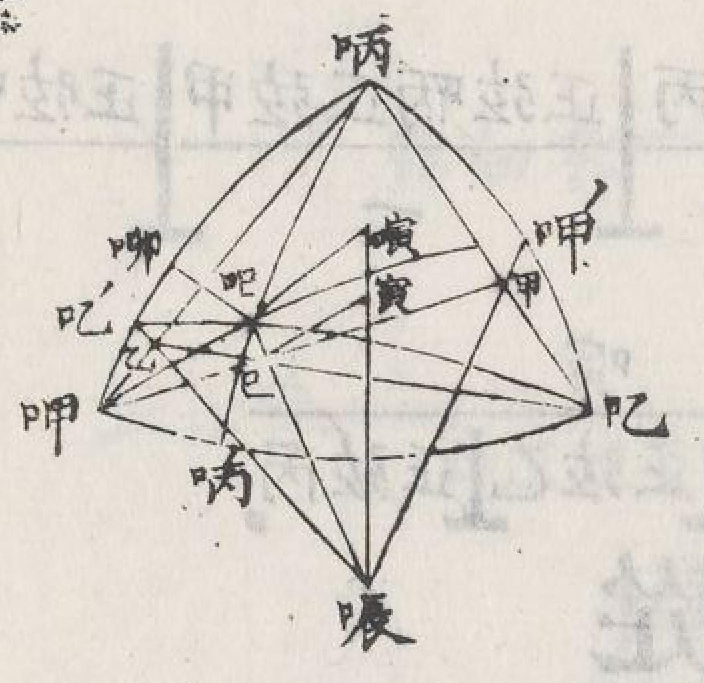
$$\frac{\text{吃乙}}{\text{巳乙}}=\frac{\text{㖘吃}\ \text{正弦吃吃}'}{\text{㖘巳}\ \text{正弦吧吃}'}=\frac{\text{㖘寅}}{\text{㖘巳}}\times\frac{\text{㖘吃}}{\text{㖘寅}}\times\frac{\text{正弦吃吃}'}{\text{正弦吧吃}'}=\frac{\text{餘弦吧嗔}}{\text{餘弦吃嗔}}\times\frac{\text{正弦吃吃}'}{\text{正弦吧吃}'}$$

所以得

$$\frac{\text{呷甲}}{\text{巳甲}}\perp\frac{\text{吃乙}}{\text{巳乙}}\perp\frac{\text{呐丙}}{\text{巳丙}}=\text{一}=\left[\frac{\text{正弦呷呷}'}{\text{正弦吧呷}'}\perp\frac{\text{正弦吃吃}'}{\text{正弦吧吃}'}\perp\frac{\text{正弦呐呐}'}{\text{正弦吧呐}'}\right]\frac{\text{餘弦吧嗔}}{\text{餘弦吃嗔}}$$

第二十題　求任何弧三角形切角之圈與切邊之圈極點相距之角吖

如圖呷㕩吃弧三角形吧爲切邊之圈之極則從其



正弧三角形吧咿吃得

$$\text{正弦未}=\text{正弦}\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{吧}}{\text{吃}}\,\text{正弦吃}=\frac{\text{正弦}\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{吃}}{\text{吃}}}{\text{正弦}\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{吧}}{\text{吃}}}\,\text{正弦㕩正弦甲}$$

所以其

$$\frac{\text{餘弦味正弦未}}{\text{餘弦叮}}=\frac{\text{正弦叱正弦丙}}{\text{一}}\perp\frac{\text{正弦昞正弦甲}}{\text{一}}\perp\frac{\text{正弦呷正弦乙}}{\text{一}}$$

$$=\frac{\text{嗔}}{\text{正弦甲}\perp\text{正弦乙}\perp\text{正弦丙}}$$

從第十九題其

$$\text{嗔}=\text{正弦乙正弦丙正弦呷}=\sqrt{\text{一}\top\text{餘弦甲}^{\text{二}}\top\text{餘弦乙}^{\text{二}}\top\text{餘弦丙}^{\text{二}}\perp\text{二餘弦甲餘弦乙餘弦丙}}$$

故依第六十五款得

$$\text{餘切未} = \frac{\text{嗔}}{\text{二正弦申}}$$

$$\text{正切味} = \frac{\text{嗔}}{\text{四正弦}^{二}\text{甲正弦}^{二}\text{乙正弦}^{二}\text{丙}}$$

所以

$$\left(\frac{\text{餘弦味正弦未}}{\text{餘弦叮}}\right)^{二} \text{丅} \text{一} =$$

$$\frac{\text{嗔}^{二}}{二}\left(\text{一} \text{丄} \text{正弦甲正弦乙} \text{丄} \text{正弦甲正弦丙} \text{丄} \text{正弦乙正弦丙} \text{丅} \text{餘弦甲餘弦乙餘弦丙}\right) =$$

$$\frac{\text{嗔}^{二}}{二}\left[\text{二正弦}^{二}(\text{甲} \text{丄} \text{乙})\text{餘弦}^{二}\text{丙} \text{丄} \text{二餘弦}^{二}(\text{甲} \text{丅} \text{乙})\text{正弦}^{二}\text{丙}\right]^{二} =$$

觀第一百四十二款

$$\frac{\text{嗔}^{二}}{一}\left[\text{二正弦申} \text{丄} \text{四正弦}^{二}\text{甲正弦}^{二}\text{乙正弦}^{二}\text{丙}\right]^{二} = \left(\text{餘切未} \text{丄} \text{正切味}\right)^{二}$$

所以

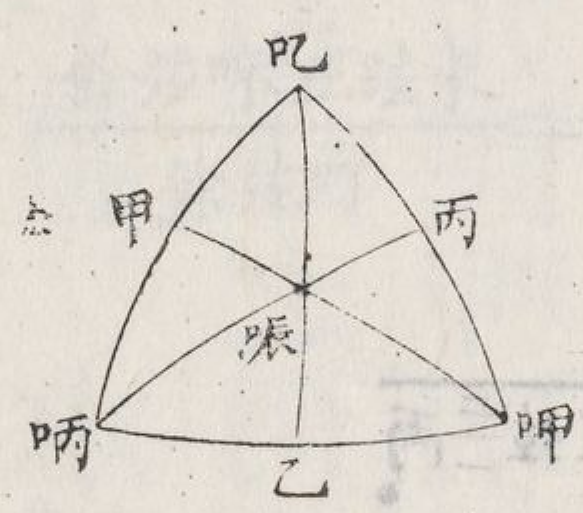
$$\text{正弦}^{二}\text{叮} = \text{正弦}^{二}(\text{味} \text{丅} \text{未}) \text{丅} \text{餘弦}^{二}\text{味正弦}^{二}\text{未}$$

若其一圈之所切爲丙弧並又兩邊引長之弧以未

未正弦^{二}味餘弦^{二}丅（未丄味）正弦^{二}＝叮正弦^{二}

代其角半徑依同理得

第二十一題　如帳爲切于呷吃呐弧三角形各角之圈



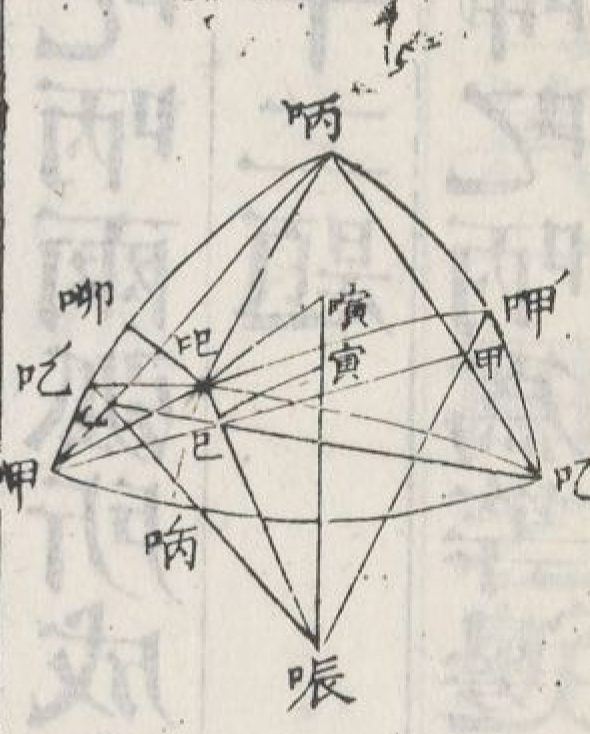
之極則

$\frac{乙}{二}正弦\,\frac{甲}{二}正弦\perp丙餘弦\,\frac{乙}{二}餘弦\,\frac{甲}{二}餘弦=\frac{呷㫰吃}{二}餘弦$

此從第五十六款而得之。易明其呷呐吃呐兩弧所成之角為呷㫰吃角之半。

第二十二題

若呷吃呐為等邊之弧三角形，㖖為其切角之圈之極。



吧為球上之任一點則

餘弦吧呷┴餘弦吧吃┴餘弦吧呐＝三餘弦味餘弦吧嚷

因

餘弦吧呷＝餘弦味餘弦叮┴正弦味正弦叮餘弦呷嚷吧

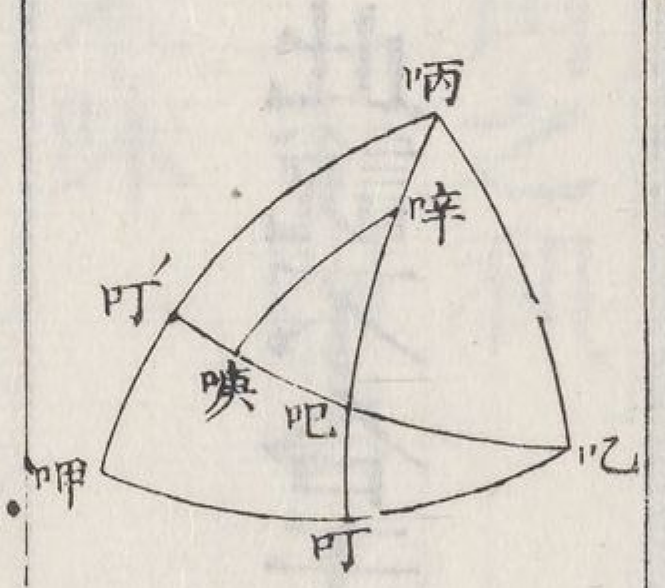
餘弦吧吃＝餘弦味餘弦叮┴正弦味正弦叮餘弦(一二〇┴呷嚷吧)

餘弦吧呐＝餘弦味餘弦叮┴正弦味正弦叮餘弦(一二〇┴呷嚷吧)

所以

餘弦吧呷┴餘弦吧吃┴餘弦吧呐＝三餘弦味餘弦叮

第二十三題　凡弧三角形若平分兩角各作弧至對邊而其所作之兩弧相等者則所分之兩角其和必小于兩箇正角而兩角亦必相等



如圖從呷叱哂弧三角形之哂叱兩角作哂叮叱′叮弧平分其角若哂叮＝叱′叮．則叱角＝哂角．

如云不然而謂叱大于哂則因吧為哂叮與叱′叮相交之點其哂吧＞叱吧．吧′叮＞吧叮．故哂′叮＞叮叱．試在吧哂吧′叮兩弧上取吧咗＝吧叱．吧唊＝吧叮．作唊咗弧則吧唊咗三角形在吧′叮哂之內其吧唊咗各角之和必小于吧′叮哂各角之和所以

唊丄咗＝叮丄三叱，

唊丄咗＜叮丄三哂．

而叮′＞叮．

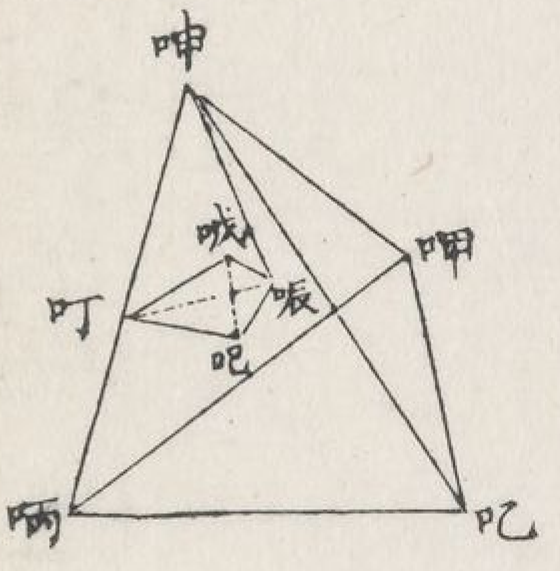
設想于呥吃之他邊作一弧三角形其邊吃戊呥戊等于呥叮吃叮而其角等于呥叮吃三角形之各角作叮戊弧則 吃戊＝吃叮，吃叮戊角＝吃戊叮角，而 吃叮呥角＝吃戊呥角，卽大于叮角此圖原闕

所以其 呥叮戊角＞呥戊叮角，呥戊＞呥叮，卽 吃叮＞呥叮，惟吃叮弧已證其小于呥叮則此說不合于理所以若 吃＝呥，則可見 叮呥戊角＝呷呥吃⊥呷吃呥，必小于兩箇正

角之和.

第二十四題　求任何四面形之體內容外切之球半徑未味.

其內球之式爲 $\frac{一}{三}$未×面積＝體積. 外球之心易明其爲過外切平圓之心之兩面之正角方向之兩線相交之點.



如圖令𠯢叮𠯆爲平分呷𠰳邊成正角之平面所以用呷𠰳呻𠮙呻𠰳之垂線𠯢㖶𠯆㖶其線過各切角平圓之心所

以必過外切球之心哏則

$$\frac{\overset{二}{呷}}{哏}=\frac{\overset{二}{呷}}{叮}丄\frac{\overset{二}{叮}}{哏}=\frac{\overset{二}{呷}}{叮}丄\left(\frac{正弦叮}{\begin{matrix}吧\\戊\end{matrix}}\right)^{二}=\frac{\overset{二}{呷}}{叮}丄\frac{正\overset{二}{弦}叮}{一}\left(\frac{\overset{二}{戊}}{叮}丄\frac{\overset{二}{叮}}{吧}丅二\frac{戊}{叮}\frac{叮}{吧}餘弦叮\right)$$

其

$$\frac{呷}{叮}=\overset{二}{三}丙$$

$$\frac{戊}{叮}=\frac{二正弦亢}{甲丅丙餘弦亢}$$

$$\frac{叮}{吧}=\frac{二正弦角}{乙丅丙餘弦角}$$

$$餘弦叮=\frac{正弦角正弦亢}{餘弦氐丅餘弦角餘弦亢}$$

將此各同數以代法變之得

(二昧正弦角正弦亢正弦门)^{二} ══

(甲正弦角)^{二} ⊥ (乙正弦亢)^{二} ⊥ (丙正弦氐)^{二} ⊥ 二甲乙(餘弦角餘弦亢丅餘弦氐)

⊥ 二甲丙(餘弦角餘弦氐丅餘弦亢) ⊥ 二乙丙(餘弦亢餘弦氐丅餘弦角)。

將其

餘弦角、
餘弦亢、
餘弦氐、

從

二乙丙餘弦角＝$乙^{二}$丄$丙^{二}$丅$甲′^{二}$

二甲丙餘弦亢＝$甲^{二}$丄$丙^{二}$丅$乙′^{二}$

二甲乙餘弦氐＝$甲^{二}$丄$乙^{二}$丅$丙′^{二}$

式所得之同數代之化得

$(四味甲乙丙正弦角正弦亢正弦氐)^{二}$＝

二$(甲甲′乙乙′)^{二}$丄二$(甲甲′丙丙′)^{二}$丄二$(乙乙′丙丙′)^{二}$丅$(甲甲′)^{四}$丅$(乙乙′)^{四}$丅$(丙丙′)^{四}$

＝一六申(申丅甲甲′)(申丅乙乙′)(申丅丙丙′)

其

二申＝甲甲′丄乙乙′丄丙丙′

因四

面形之體積咳等于

$\frac{六}{一}$甲乙丙正弦角正弦亢正弦叮。

所以得

$味=\frac{六咳}{\sqrt{申(申丅甲甲)(申丅乙乙)(申丅丙丙)}}$。

即為外切之球半徑以四面形之體積並其兩箇倚面乘得之積數而明之。

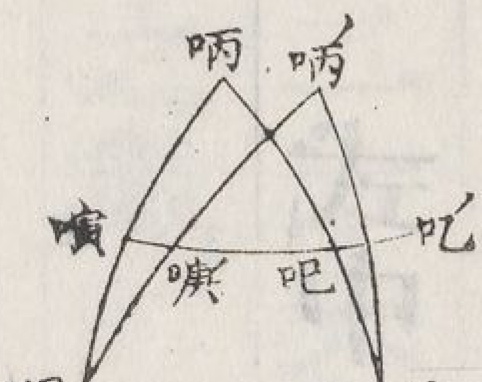
或其一邊之長並其交面之斜度及其在體之他頂

點所對之角俱爲已知之數則

$$\substack{\text{⿰口丙}^{二}\\\text{⿰口辰}} = \substack{\text{⿰口丙}^{二}\\\text{叮}}\ \text{丄}\ \frac{\text{正弦}^{二}\text{叮}}{\substack{\text{⿰口丙}^{二}\\\text{叮}}}\left(\text{餘切}^{二}\text{呷}\ \text{丄}\ \text{餘切}^{二}\text{⿰口乙}\ \text{丅}\ \text{二餘切呷餘切⿰口乙餘切叮}\right).$$

第二十五題　求連其同底兩箇弧三角形之弧.

如圖設底弧在㖘點平分則依第一題之



式得

二餘弦三丙餘弦呐㖘＝餘弦甲⊥餘弦乙

令巳爲從呐向呷𠮙所作之垂弧

則

正弦丙正弦巳＝正弦甲正弦乙正弦呐

其呷呐𠮙三角形亦然所以

餘弦呐′呐＝餘弦呐㖘餘弦呐′㖘⊥正弦呐㖘正弦呐′㖘餘弦(呷㖘呐丅呷㖘呐′)

惟因

正弦呐㖘正弦三丙餘弦呷㖘呐＝

餘弦乙丅餘弦三丙餘弦呐㖘＝三(餘弦乙丅餘弦甲)

則

正弦丙辰　正弦甲辰丙　＝　正弦巳。

所以得

正弦^{二}丙餘弦丙/丙′　＝　(餘弦甲丄餘弦乙)(餘弦甲丄餘弦乙)正弦^{二}三丙

丄(餘弦乙丅餘弦甲)(餘弦乙丅餘弦甲)餘弦^{二}三丙

丄正弦甲正弦乙正弦丙正弦甲′正弦乙′正弦丙′。

若將其

正弦丙′
正弦丙

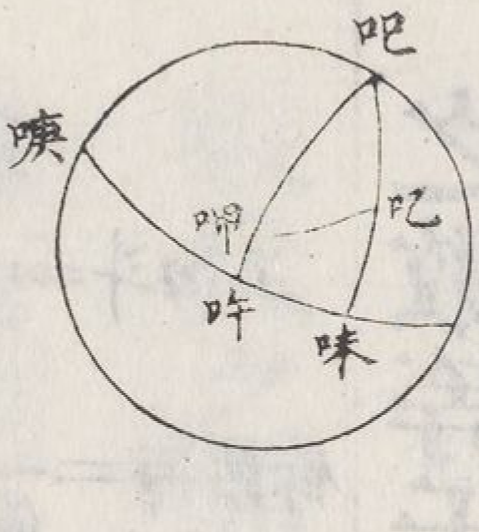
以同數代之則

式中只有其邊之各數而已。

此題爲航海者從兩處測得太陽之高弧並其間所

歷之時、而求緯度之法、

第二十六題　已知地面上任兩處之經緯度求其相距之數、



如圖、吧爲地球之極、咦吀味爲赤道、呷吃爲在吧吀吧味、兩箇經線上之兩處、吧咦爲過格令囬次之經線、則其經度之較等

于 呷吧吃角＝吀味＝咦吀丅咦味＝丙、

而其相配之餘緯 吧呷＝乙、吧吃＝甲、亦爲已知之數則

呷吧吃弧三角形已知其兩邊並其所夾之角今欲求其第三邊呷吃（即丙邊）則可依第四十三款之式而得

$$正切斗＝正切甲餘弦丙$$

$$餘弦丙＝\frac{餘弦斗}{餘弦甲餘弦(乙丅斗)}$$

若以叮爲一象限之海里數則兩處相距之數等于 $叮\times\frac{九〇}{丙}$

第二十七題　有弧三角形之任何式式內有其當知之各事而內有一數爲邊求平三角形相配之式

設已知之事爲體角之面與邊之斜度以眞弧度明

之則令角亢氐爲各面與其以底角之頂爲心而求其任半徑未所成之球之面之平面之弧之長即得其未甲＝角、未乙＝亢、未丙＝氐。如將其甲乙丙以所設之式內之各同數代之而令未爲極大即得未角、未亢、未氐爲極小所以正弦未角、餘弦未角……之數可用所詳得級數之一二項代之即得其有半徑爲未之球面之弧之長並其弧三角形平面之角之略數比例

如令未爲無窮即得平三角形邊與角之眞比例

依第五十五款得

$$\text{餘弦甲}=\frac{\text{正弦乙正弦丙}}{\text{餘弦甲}\,丅\,\text{餘弦乙餘弦丙}}=\frac{\text{正弦}\frac{未}{亢}\,\text{正弦}\frac{未}{氐}}{\text{餘弦}\frac{未}{角}\,丅\,\text{餘弦}\frac{未}{亢}\,\text{餘弦}\frac{未}{氐}}$$

$$=\frac{\frac{未}{亢}〤\frac{未}{氐}}{\left(一丅\frac{二}{一}〤\frac{未^{二}}{角^{二}}丄\frac{二四}{一}〤\frac{未^{四}}{角^{四}}\right)丅\left(一丅\frac{二}{一}〤\frac{未^{二}}{亢^{二}}\right)\left(一丅\frac{二}{一}〤\frac{未^{二}}{氐^{二}}\right)}=\frac{二亢氐}{亢^{二}丄氐^{二}丅角^{二}}丄\frac{二四亢氐未^{二}}{角^{四}}丄\cdots\cdots$$

爲略數此以未爲極

大之數．

若令味為無窮卽得平三角形有邊為角亢氐之式

為

$$餘弦呷=\frac{二亢氐}{亢^{二}丄氐^{二}丅角^{二}}．$$

興化劉彝程校算

上海曹𢳆亭繪圖

上海曹楨亭繪圖
興化劉彝程校算

爲 $\frac{\text{戊太之}}{\text{兩丁爲弦}}$

若令球爲無窮大則得平三角形有邊爲直角之弦
大之數