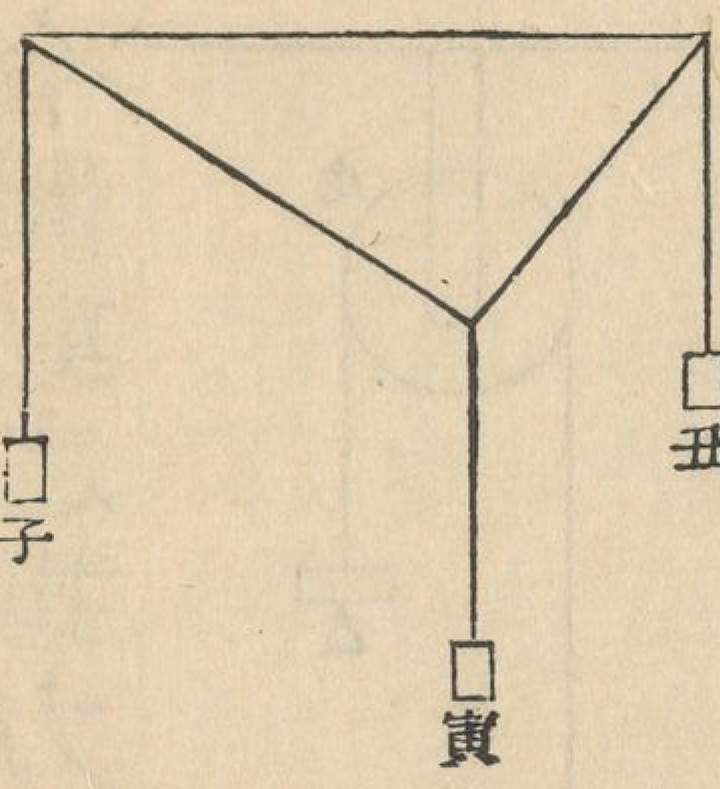
自八
至十

重學卷八 此下十卷論動重學

英國艾約瑟口譯
海甯李善蘭筆述

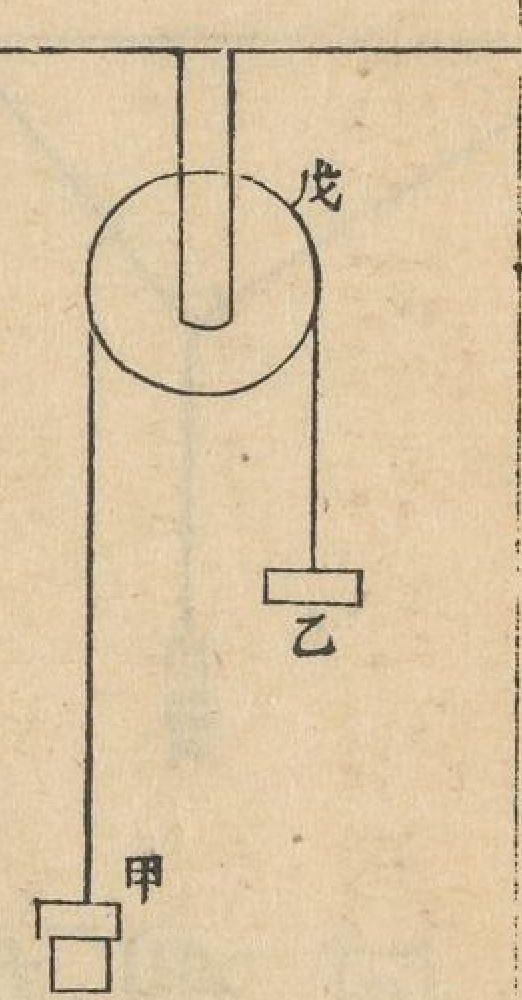
論質體動之理

一動重學之理以能力加質體令生動爲主前卷所論助力器上諸力相加纖不合相定之理卽生動是也



如圖子丑寅三力比例不合相定之理卽不定於定點而生動其動法如何視體之大小而異本卷所論者測驗體動之理而以算術推之

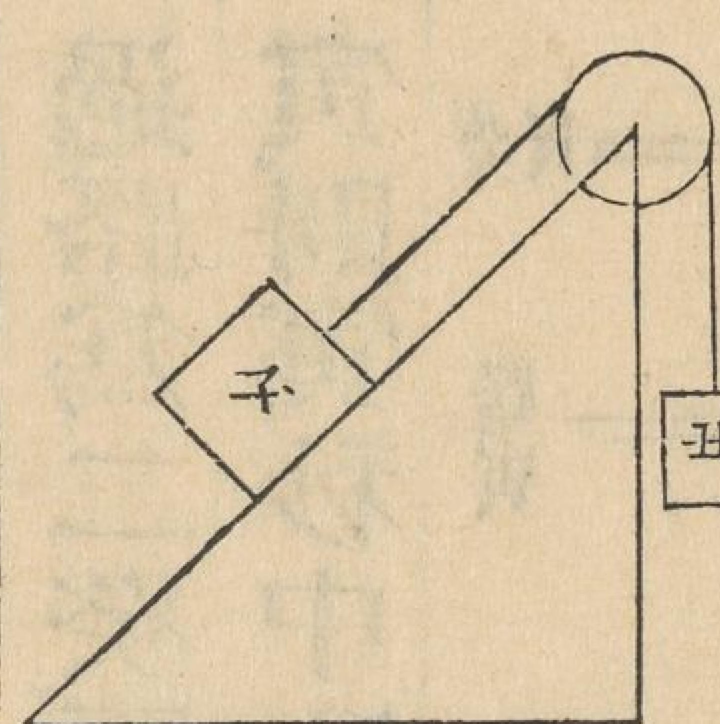
一令體動之抵力，與令體定之抵力無異。



如圖，甲乙等重懸於滑車，相抵而定，必生相等對力於甲戊乙聯綫上。故不動，甲重一邊加子重，則乙上甲下，而索力之加於甲乙者必等，且方向必對面。子加甲有二能力，一索力爲向上力，一子甲重和爲向下力，二力之較令之下行，乙亦有二能力，一索力爲向上力，一乙重爲向下力，二力之較，令之上行，如是二重之動，皆生於能力之方向。

設有一重，其動勢不得已而行於斜交能力方向之綫。

當以分力并力、推其生動之抵力。



如圖、子丑二重之聯綫經過滑車、動時子行於斜面、則抵力必斜加、當先推子重之分力、而後可求生動之抵力。欲推抵力生動之能、當先知動理、有三例、詳見後。

一動必論時刻、而必以最小之時分度之、凡推算或以日、或以時、惟重學恆以一秒爲時率、適用故也。

一動必有遲速、今統命爲速、如有二體動、所用之時等、所過之路不等、即謂一速較大、一速較小、或所過之路等、所用之時不等、亦謂一速較大、一速較小。

設有體動，用相等若干時，過相等若干路，則為平速動，即以一秒中所過路為速率，若非平速動，則其速率以時率中當過之路為準，

第一款　凡平速動，任若干時，其所過路，必等於速乘時，命一秒中所過路為癸，即速率　惟動係平速，故二秒中所過路為二癸，三秒中所過路為三癸，命所用若干秒為寅，則寅秒中所過路為寅乘癸，故有等數，

$$\text{癸寅} = \text{路}$$

若所用之時為奇零分，或秒下帶奇零分，則以通分入之，

$$\frac{\text{路}}{\text{寅}} = \text{癸}$$

假如有船，一時平行六十里，求速率若干，　等數如左，

$$癸=\frac{六〇\times一八〇〇〇}{一二〇\times六〇}$$

$$癸=\frac{一〇八〇〇〇}{七二〇〇}$$

$$=一五$$

求得一丈五尺，即速率也。

若增速減速動，不能以路爲實時爲法而得速率，因時刻不平，故所得數不能合也。如前圖滑車上甲乙二重，加子重令甲下行，初四秒中下十六尺，英尺爲中尺七分之六，次四秒中必下四十八尺，則非平速，乃漸增速也。細測之，次四秒中之前三秒，下三十三尺，前二秒，下二十尺，前一秒，下九尺，前半秒，下四尺又四分尺之一，前四分秒之一，下二尺又十六分尺之一，乃從五秒初推得各衰

如左、

速衰	路衰	時衰
一二	四八	四
一一	三三	三
一○	二○	二
○九	○九	一
○八五	○四二五	○五
○八二五	○二○六二五	○二五

以時衰除路衰、得速衰　從五秒起、時愈大、得數亦愈大、增速動必如此、蓋凡推路、任從第幾秒起、必以本速及後所增之速爲主、時愈小、增速所生路亦愈小、若漸近初秒、亦漸近初秒之速、　欲推動體在某點之速率、以路爲實、時爲法、法除實得限數、即速率也、限者、路時俱從某點起、路時漸小而永不至之數、謂之限數、　如前設用甚小時爲八分秒之一或十六分秒之一測之

覺路爲實時爲法所得之數必恆大於八若從五秒起此數卽八則八爲路實時法得數之限數故八尺爲動體當五秒初之速　加上俱論五秒以後設推五秒以前理同

第二款　凡推速率不論何動法以時率（卽一秒）中平速當過之路爲準

速爲漸增速設從已知點起用甲時命甲時中平速當過之路爲辛增速所生路爲壬辛加壬爲實時爲法除得限數爲速率此實數中壬爲動體離已知點後增速所生甲時愈小壬亦愈小至限數則壬爲〇故辛加壬

爲實時爲法之限與辛爲實時爲法之限同設甲爲一秒速爲平速辛爲一秒中速所過之路則路即爲速率若漸減速亦同以微分術明之如左

$\frac{⿰彳辛}{⿰彳甲}=$速　因微分例中微辛以甲言之微辛爲實微甲爲法所得爲分數之限故有等數

$\frac{⿰彳路}{⿰彳時}=$速　此等數如前之等數

論動理

事有本有末故凡變動俱有根源設無根源必無發生故發生爲根源之率

如動及動勢之根源爲能力能力在重學中可作抵力論凡抵力與對力必等有抵力在一點必另生相等對力於本點以阻之然非測驗不能明也

物動速及方向皆以所加之力爲準此理分爲三例

動理第一例　凡動無他力加之則方向必直遲速必平無他力加之則無變方向及變遲速之根源故也或曰時刻即足以變遲速歷時既久速者必遲曰古人初亦思歷時幾何必漸遲以至於不動因見諸動物恆如此故也後細思之知其不然歷時幾何必漸遲者其故由於有阻滯或他力加之或面阻力阻之但他力阻

力。必加在所歷時中。故人誤以所歷時爲漸遲之根。如將小球走於平面。爲面阻力并風氣所阻滯。故令漸遲而停。又如將擺搖動空中。不以法令之長動。亦必漸遲而停。因風氣阻滯故也。又令輪轉於軸。必漸遲而停。因軸上面阻力并風氣阻滯故也。如此阻滯物動之力。皆爲可知。然則漸遲而停。非因時刻之故明矣。試將二物。一輕者爲羽毛。一重者爲銀。在風氣中下墜。則一遲一速。在無風氣空中下墜。用法取盡器中風氣。則其速同。無少參差也。又試將球走於平面冰上。良久不停。因冰甚滑。面阻力少也。又試將擺動於無風氣空中。良久不停。然亦必

漸遲而停者因架上有面阻力也所以遲速不關於時刻若物動無他力阻滯則永不停亦不變也

前條之理既明乃可言變動之理若物行於曲綫或雖行於直綫而遲速不平必有他能力加之令物離直綫角度或令速變由於他能力方向及大小所謂他能力方向者即他能力令靜物動所行之直綫是也此力若加於動體則兩動必并而爲一設與本動方向同則不變方向但加減本速設與本動方向異必令動體變方向而行於曲綫曲綫向內處近於他能力向前之路其力大小以發生之數爲率此發生數即速也故以同時

內生速之大小爲能力之率

論漸加力

所知時中以所生速爲率之力即漸加力也若漸加力依動物方向加於動物令生速依時平加名曰平漸加力設有抵力恆加於動物或動物恆爲他物牽引所加之速必愈久愈大如一石下墜歷一秒一石下墜歷二秒二秒之石必速於一秒之石因地球攝力歷時愈長則生速愈大也又如輪加於軸以手轉之歷時愈久輪行愈速設止手不復加力則輪必依止手之速自轉設再加力力與動之方向同則更加速由此觀之凡力加於

靜物則生動，加於動物則增速，故力恆加於動物，歷若干時，必另生若干速，末後之速爲諸速之總，設所加之速依時平加，則其力謂之平漸加力。地心力，平漸加力也，意大里亞伽離略用斜面測之，阿德符突另造器測之，無不合者。凡平漸加力之率，爲所知時中或加或減之速，假如測物向地心下墜，每一秒必加速二十七尺六寸，此數爲地心力之率，設別有平漸加力，每一秒加速一尺，此數爲別力之率，則別力與地心力之比，同於一〇與二七六之比。

第三款　平漸加力若干秒中所生之速，等於力率乘秒

設甲爲漸加力率、則甲卽爲一秒中所生之速、因其力爲平漸加、故二秒之末速爲倍甲、三秒之末速爲三甲、命若干秒爲寅、則寅秒末之全速爲寅乘甲、　若以一秒分爲若干分、而以一分中所加之速爲漸加力率、得數亦同、

$$時\ 率力 = 速$$

$$\frac{速}{時} = 率力$$

故速爲實、時爲法、得數、爲平漸加力定率、假如四秒中生速八尺、以八爲實、四爲法、得二、爲漸加力率、因地心力一秒中生速二十七尺六寸、故二七六爲地心漸加

力率

欲知物動至某點時平漸加力若干、當從某點起以某點後所生之速爲實、生速之時爲法、除得限數爲力率、

設漸加力不平、則除得之率、爲所用時中共變之數、如前所言路爲實時爲法除得數、亦爲共變之數推之速實時法有限數、一如前之路實時法有限數前之限數爲速之率、今之限數爲漸加力加在某點之率、先求得速實時法之數、次從某點起再求全時漸減之數、必漸近於某點漸加力之率、至無窮小處之限數、必恰爲初點漸加力之率矣、 設所加之力、與原動方向對面

令原速漸減名漸減力理亦同

第四款　凡物動能力恆平故時率中當生之速爲能力之率

設能力爲漸加力則從某點起若干時中所加之速有幾分生於某點之能力有幾分生於某點後所加之能力今不論某點後所加之速但論某點生速之理則所推能力之率當以某點後爲恆加故時率中所生之速爲能力之率

以微分術言之力等於速之微分爲實時之微分爲法蓋速微分爲實時微分爲法所得數乃諸速微分爲實

諸時微分爲法之限數故等於力也.

前款中有路微分爲實時微分爲法等於速之式以兩等數相乘如左.

$$\frac{\text{彳路}}{\text{彳時}}\,\text{力} = \frac{\text{彳速}}{\text{彳時}}\,\text{速}$$

$$\frac{\text{彳路}}{\text{彳時}}\,\frac{\text{彳速}}{\text{彳路}} = \frac{\text{彳速}}{\text{彳時}}$$

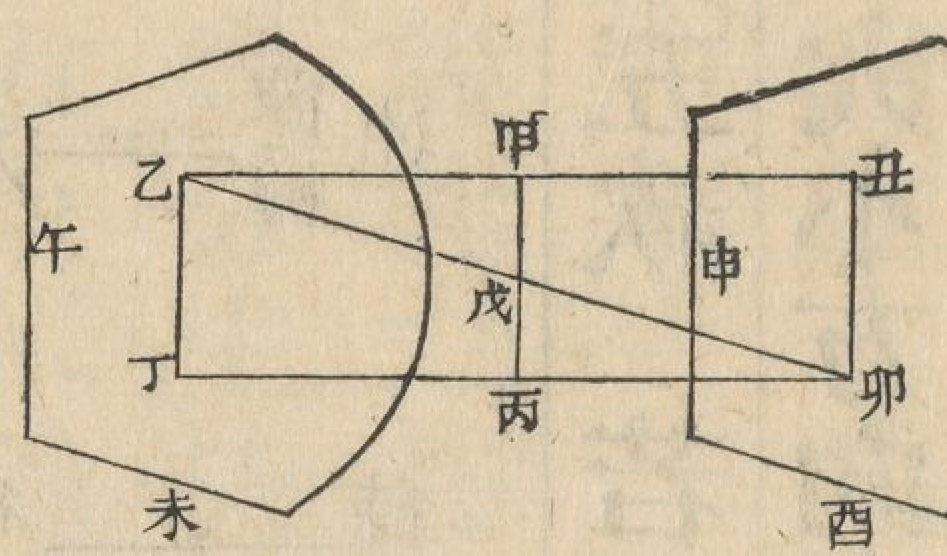
$$\text{力} = \frac{\text{彳速}}{\text{彳路}}\,\text{速}$$

$$\frac{\text{彳路}}{\text{彳時}^{二}} = \frac{\text{彳路}}{\text{彳時}\,\text{彳時}} = \frac{\text{彳速}}{\text{彳時}} = \text{力}$$

第五款 若有二速相合以平行四邊形之二邊爲分速大小方向率則對角綫必爲并速大小方向率.

如圖午未爲平面船板以平速行於乙丑方向自午未

至申酉有物在此面上以平速行於乙丁方向，與乙點同時動，乙點至丑時，物恰至丁，乃補成乙丁卯丑平行四邊形，又作乙卯對角綫，則物必以二速之并行於乙卯方向，蓋乙點至丑時，乙丁綫行至丑卯，所以物本行至丁而行至卯也，任取中間之



時如乙點行至甲時，乙丁綫行至甲丙，物行至戊，則有比例，

一率　甲戊

二率　甲丙

三率　乙甲時刻　乙甲

四率　乙丑時刻　乙丑

三率爲乙甲四率爲乙丑者因二分速皆爲平速故也

惟爲平速則乙戊卯爲直綫故又有比例

一率　乙戊

二率　乙卯

三率　乙甲　乙甲時刻

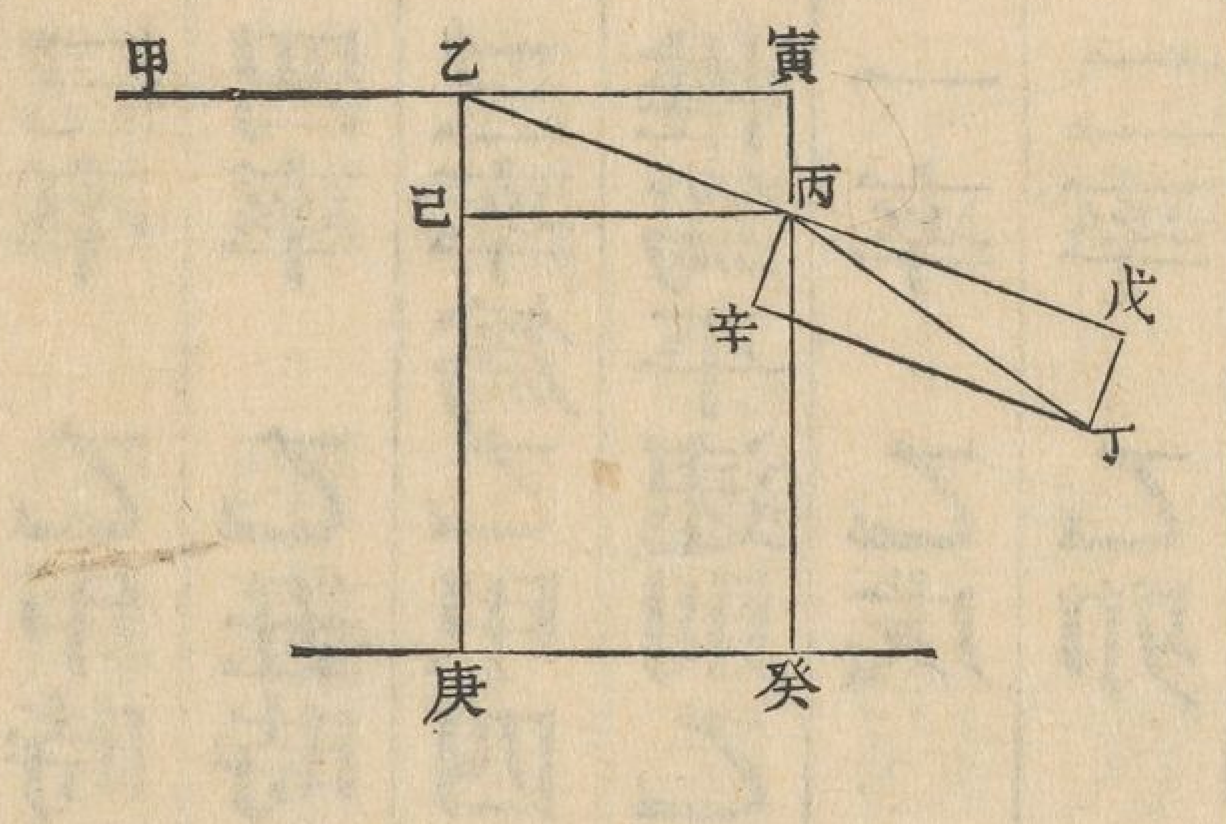
四率　乙丑　乙丑時刻

所以物自乙至卯爲平速動凡如此動者恆有二速一

平面速乙丑一物本速乙丁

動理第二例　有力加於動物上，動物必生新方向及新速，新方向即力方向，新速與力之大小率比例恆同。

凡有他力加於動物，則他力所生之動，必合於物之原動，而令所生二動并行於平行二本方向之方向綫上，



如圖，物在甲點，第一秒中以平速自甲至乙，依第一例第二秒中當自乙至寅，乙寅與甲乙等，遲速必平故且甲乙寅爲直綫，方向必直故若至乙時有他平力加之以乙己爲方向，其力大小，一秒中能令靜物自乙至己，則第二秒中物必自乙至

丙令乙己與寅丙等亦平行乙寅與己丙等亦平行設能力不加第三秒中當自丙至戊丙戊與乙丙等且乙丙戊爲直綫設又有他平力加之以丙辛爲方向其力大小一秒中能令靜物自丙至辛則第三秒中物必自丙至丁令丙辛與戊丁等且平行丙戊與辛丁等且平行設逐秒遞加平力俱可類推 設在一秒中所加力非恒同大小方向改變則任取小於秒能力未變之時分爲準 設能力逐時變無不變之時分則須用限數法推乙己乙寅等之限數 如前款圖動物行於乙丑綫上有乙丑速設在乙點時別加乙丁速則物以乙卯

為速、且方向必自乙至卯、若自午未動面言之、仍以乙丁為動率、然則物動於動面上、一如生速於靜面上、故水手在動面、木工在靜面、其用力無異也、又如將球走於船上平面、或向船頭、或向船尾、或向兩旁、若力等、路亦等也、又如物動於陸地、無論東西南北、能力與方向之率並同、不因地球動而異也、故地動與能力方向無涉、能力方向與地動亦無涉、所以鐘擺東西動與南北動無二也、又如前款圖、午未船行於午申綫上、有球置於船板乙點、設船板行而令乙丁移至丑卯、船在午未時、球在乙點、受擊而行於乙丁綫、則乙點至丑時、球必

在丑卯綫上然球始終行於乙丁方向未嘗變也故球同時有二動有乙丁動有乙丑動各生於本方向而兩不相涉然則球無他速當行至丑行至卯者爲他力所激也故乙卯之動爲乙丑丑卯二動之并又如本圖乙庚爲船桅一秒中行至寅癸在乙庚時有物自乙下墜一秒中當至己乃在寅癸測之則一秒中自寅至丙寅丙與乙己等蓋物在乙點時以乙寅爲本速因加他力當行至己合乙寅乙己二速而成乙丙并速必令乙己丙寅爲平行四邊形此可見同時二動之理二速并爲一速而各不相亂也不然地有東西動使地面之物南

北動將不南北而東西矣無是理也且地球不獨自轉又有繞日之行諸行星皆繞日又隨日繞昴宿大星更增一動法而不相亂理與此同

論質與動相涉之理

欲知質與動有何相涉當先明重速積及動力率質與速相乘為重速積所歷時中正加抵力所生重速積為動力率加力之方向經過重心謂之正加

動理第三例　凡抵力正加生動動力與抵力比例恆同此抵力對力相等之理也

如所動之物為定數則抵力愈大所生之速亦愈大抵

力愈小、所生之速亦愈小、如抵力爲定數、則所動之物愈大、所生之速愈小、所動之物愈小、所生之速愈大、皆試而知之、 凡物生抵力加於他物、必受他物所生對面抵力、等於本抵力、蓋對力與原力、必相等也、設丙丁二物、丙加速於丁、丁減速於丙、二力必等、如丙在平几上、丁以繩聯丙、懸於几邊、丁欲與丙同下、則丁加速於丙、丙減速於丁、加減二力、與索力等、設几無面阻力、所歷時中重速積所加所減等、則丙丁之重速積所加所減亦等、假如丙重三斤、丁重一斤、一秒所生之速爲八尺、惟丁重懸空、索力引下、本當三十二尺強、英尺則有等

數。

丙加重速積＝三斤八尺

丁減重速積＝一斤(三十二尺丅八尺)

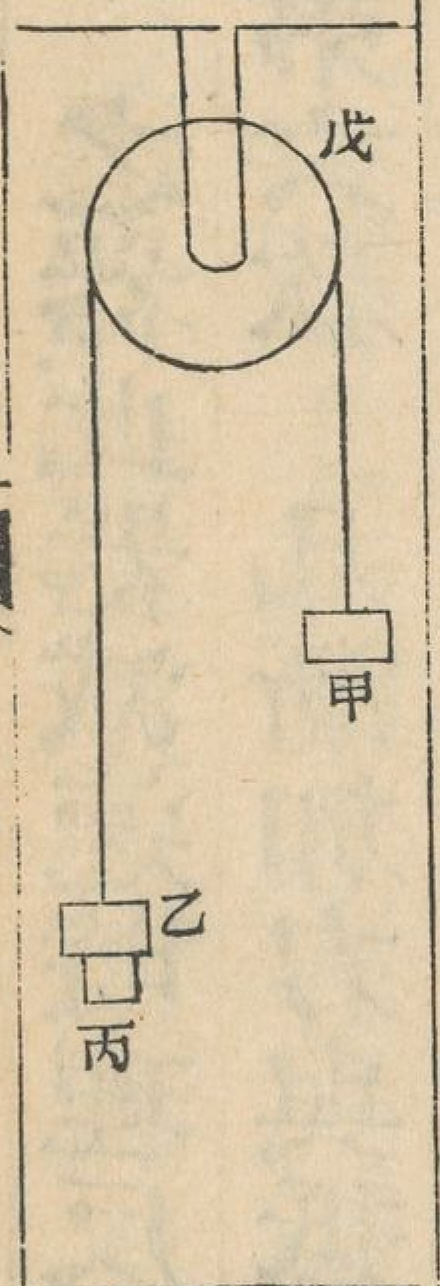
三斤八尺＝一斤(三十二尺丅八尺)

設丁丙俱重三斤，速十六尺，以重速積相加減，有等數。

三斤十六尺＝三斤(三十二尺丅十六尺)

然則丁動力，重增三倍，速增二倍，蓋丁重半用於本體，半用於丁丙間，因重速積所加所減在同時刻中，故加速於丙之動力，等於減速於丁之動力也，惟抵力加速

於丙、減速於丁、為原力之對力、故抵力若同、動力亦同、
凡兩相等抵力、同時加於兩相等之物、能令以同速動、
故兩物一如并為一物、兩力一如并為一力、即二抵力
能生一倍重速積、任抵力幾倍、皆同、設抵力有漸加定
率、則所歷時中、所加之重速積、大數恆準此率、動力亦
然、故動力抵力之比例恆同、 因所加重速積、恆等於
所減重速積、即謂本力等於對力亦可、所以生動時、原
力與生力相等、且對面、此與動理第三例說異而理同、



如圖、甲乙二重懸於滑車戊、生
動之力、乙大於甲、可借為測速

之器.此器減速時.理反不變.便於測速之多少也.

第六款　凡漸加力與抵力.恆成正比例.與體質恆成反比例.

因漸加力於所歷時中所生之速.比例恆同.故也.

假如有甲重在空中.爲地心力所引.求動力.一秒中地心力所生之速.爲地心速率.設命爲子.則子爲加於動體之漸加力.凡漸加力與重相乘.爲動力.故甲乘子爲動力.

假如有甲乙兩等體.加於滑車兩邊.爲丙力所引.求漸加力若干.　物下於空中.地心漸加力命爲子.則生動之

力爲物之重所引動者本物之質體今丙生動於甲乙惟丙爲生動之抵力甲乙二重相對即相消也所引動者爲甲乙丙三體全質動時遲速相同所以三體一如合爲一體所動之合質爲丙加二甲即有比例

一率　丙重爲實丙加二甲爲法乘漸加力即乘子

二率　丙重空中向下漸加力即子

三率　生動抵力爲實所動合質爲法丙爲實丙加二甲爲法

四率　丙重空中抵力爲實丙全質爲法丙爲實丙爲法

故所求漸加力等於丙子相乘爲實丙加二甲爲法

假如有鉛球重一兩銃中發出一秒中行一千尺經過銃

管之時爲十分秒之一求動力若干　能力加於球歷時十分秒之一生速一千尺設能力爲平加力則一秒中生速爲一萬尺卽有比例及等數

一率　地心引力二十七尺六寸

二率　能力生速一萬尺

三率　球重一兩

四率　動力三百六十二兩三錢

$$動力 = \frac{一〇〇〇〇}{二七六} \times 一兩$$

$$= 三六二三$$

靜重學中但論體質動重學中兼論地心引力

論物有不肯動之性

凡質體有不肯動之性以其能阻生動之力者爲率如前

圖丙乘子爲生動力以動甲則漸加力乃丙乘子爲實甲爲法所歷時中所生之速與此數恆有比例故甲愈大所生之速愈小甲愈小所生之速愈大則甲可作不肯動之性率此本謂物性之一今謂物動理之一更確

論擊力

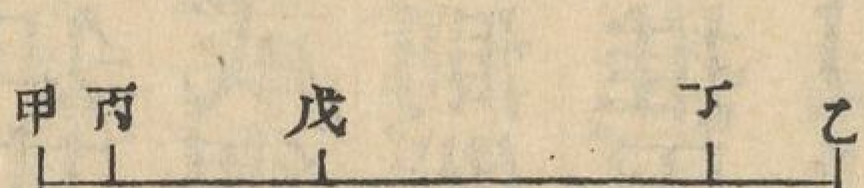
抵力之外有擊力亦可以動理第三例明之何謂擊力乃一霎時中之抵力不論何物相擊時必變形狀或可見或不可見有凸力即不可見凡物爲他物所擊變速之時即變形狀之時但其時極微而不可見如以象球象牙球也擊象球一遇即分一霎時中受擊之球增有限速又設二球或鉛或瓦

擊後不分，無凸力故也。凡相擊所生變速，在一霎時中。若非極微而可見，必知所生之動，以漸而生。靜球動時，亦必知以速漸加而漸生動。此漸加力漸加速皆在一霎時中。故雖震動之時甚小，然非無限小也。凡二球相擊時，兩小凸面必變爲平。動球以抵力生動於靜球，靜球生速，動球反減速。相擊後二球若俱無凸力，卽相隨同行。若有凸力，則分行而異速。何謂凸力。兩小凸面平而復凸，其復凸有力，名爲凸力。凸力能另生速，其速恰當二球面相抵時生也。若疑平而復凸之理，可試而知。設兩體並耎，相擊必變形狀，平而不凸，則人人知之。今置有凸力之兩球，以墨塗於此球，擊時

墨必染於彼球，驗之不作微點，而作可量度之小圓面，以是知其平而復凸也，相擊之力愈大，小圓面亦愈大，用豕脬或綢球，滿貯風氣擊時平凸之形易見，所歷之時亦爲易測，然則凡有凸力之球，擊時亦必平而復凸，其歷時亦可推，因相擊之勢無異也，

以動理第三例明之，凡抵力與所生之動力，恆有比例，相擊之理亦然，蓋相擊爲極微時之抵力，自無漸大，以至於有可測，復自有可測漸小，以至於無，設二球相擊，方向在一綫上，能生速，則於對面方向亦必減速，惟二球面上所生之二抵力必等，亦必爲相對方向之對力，

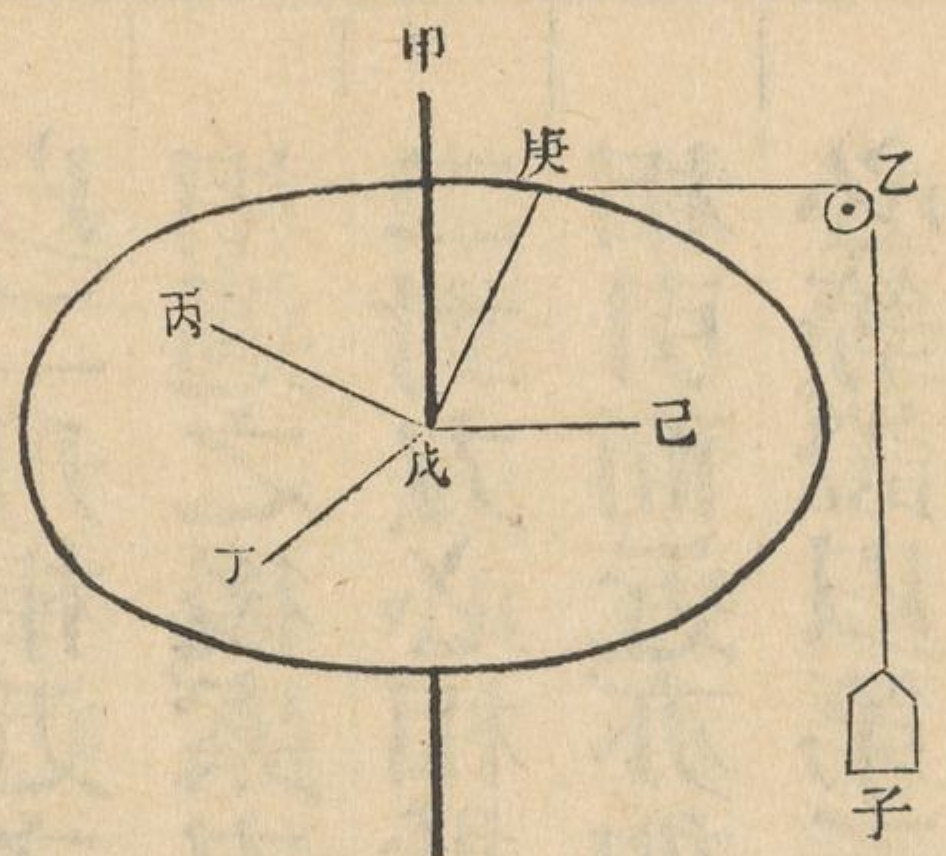
則以動理第三例證之，相擊所生之重速積，在兩面亦必等。設有無凸力之二質體，以對面方向相擊，擊後不復分行，且重速積相等，則相擊時二速俱消盡，二質體即靜。



如圖，甲乙為無凸力二球，相擊於甲乙方向綫上，設二球之速與質有反比例，則於甲乙綫上取戊點，令甲與乙比，如乙戊與甲戊比，是戊為重心，設己知時中，甲至丙，乙至丁，則甲與乙比，如乙丁與甲丙比，因速與質有反比例故也，又甲與乙比，如丁戊與丙戊比，故戊點仍為重心，然則二

球行漸近時重心不動若二速相消不盡相擊後隨行於一箇方向則重心能動不合理矣 以長加力言之設甲乙為二舟人在甲舟以索引乙舟二舟所加之力等即索力也二舟所生速之比如甲乙質積之反比所以二舟相近之時重心不動所遇之點即重心也若謂相遇之後索力仍未消去重心亦必不動因索力所生二對力必相抵而定故也 又設甲為磁石乙為鐵能相引而近亦如甲乙以索對引二抵力為相引所生故必等證以第三例二速之比必如二質積之反比二物漸近重心重心不動即二物之遇點此以實測知之

前所論者皆正加能力也今論旁加能力之理如圖子重以乙庚索運動丙丁己此索不正加丙丁己但以能力令諸體環繞甲戊定軸丙丁己動時如合為一體所生運動能力自曲桿庚端遞至戊至丙曲桿之兩端為庚戊丙戊丁己理同



廣動理第三例 凡有抵力由合質體加他物而生動動力與抵力比例恆同

前所論者動力正加與抵力比例恆同今論動力任何加法與抵力比例亦同故仍以所歷時或一秒中所生

速與質重相乘得重速積爲動力之率.

第一證有兩箇相等抵力用一箇法加於質體若所生重速積非加倍則第二抵力獨加與共加不同必另有推法今測兩个抵力加於質體恰生倍重速積無餘無欠則共加與獨加無異不必另推此理至爲易見.

第二證以助力器試之如二人加力於輪周較一人加力增速二倍若不及二倍必因手足不捷之故.輪愈速手足當愈捷.又如在一器上一邊之重微大生速甚小重略增速亦略大增至多重則速極大漸近於空中下墜.

設已知質積所生之速在一秒中與生速比例恆同不論何

器何術。試之皆合。或疑此理不眞可用分釐尺度之卽
得其實也。

第三證。依廣第三例。算術所得之數。恆與實測相符。

已上三例。半由用器。測而知之。半由憑理。思而得之此卽所謂有發生。必有根源。有本力。必有對力。然測驗所得。其理亦出于自然若本無其理。雖測驗亦不能知也今以生知學知諸理。分列于左。使讀者一覽了然。

自然而知之理

一。速無當變之理。不能變。

二。漸加力之率。爲所生漸加速。

三對力卽所生力與本力等

測驗而知之理

一物動所歷之時不得爲變速之根源

二物增動變速與物之本速本方向無涉

三或合體之幾分或一體之幾分以重力相連相加以及原加於體之力俱不能改變另加能力所生速及方向

自知之理三與測知之理三兩兩相配

重學卷八終

重學卷九

英國艾約瑟口譯
海寧李善蘭筆述

論平動相擊

凡二物相擊、無他力加之、擊後或隨行、或分行、其前後動法、必準動理第一例、以平速行於直綫、擊後變速、已見動理第三例下、今論相擊前後遲速方向之理、其變速既非曲行、亦非承變、乃在一霎時中、細究之、此一霎時中、其加速減速、亦必漸加漸減、因其時甚微、故不論、但論相擊前後二時、依動理第三例、或生

速或減速。

設物體非甚小，可以重心為準，路為重心所經之路，體之全質環繞重心，周圍質重相配俱等，面為球面，令二物相遇時，僅在一點，此一點所有相加抵力，其方向綫必直交於二面，此點即交點，此方向綫即經過二物重心，設欲令二體相遇時，不論何方向，二力綫經過二重心，必令體之面為球面，若相遇用所知方向，則非球面亦可，必正遇也。設二體相擊而力方向綫不過重心，則一體必旋轉不已，此理今未暇論，凡二體相擊，若所行方向與所擊方向合一綫，為正相擊，所行方向與所擊方向

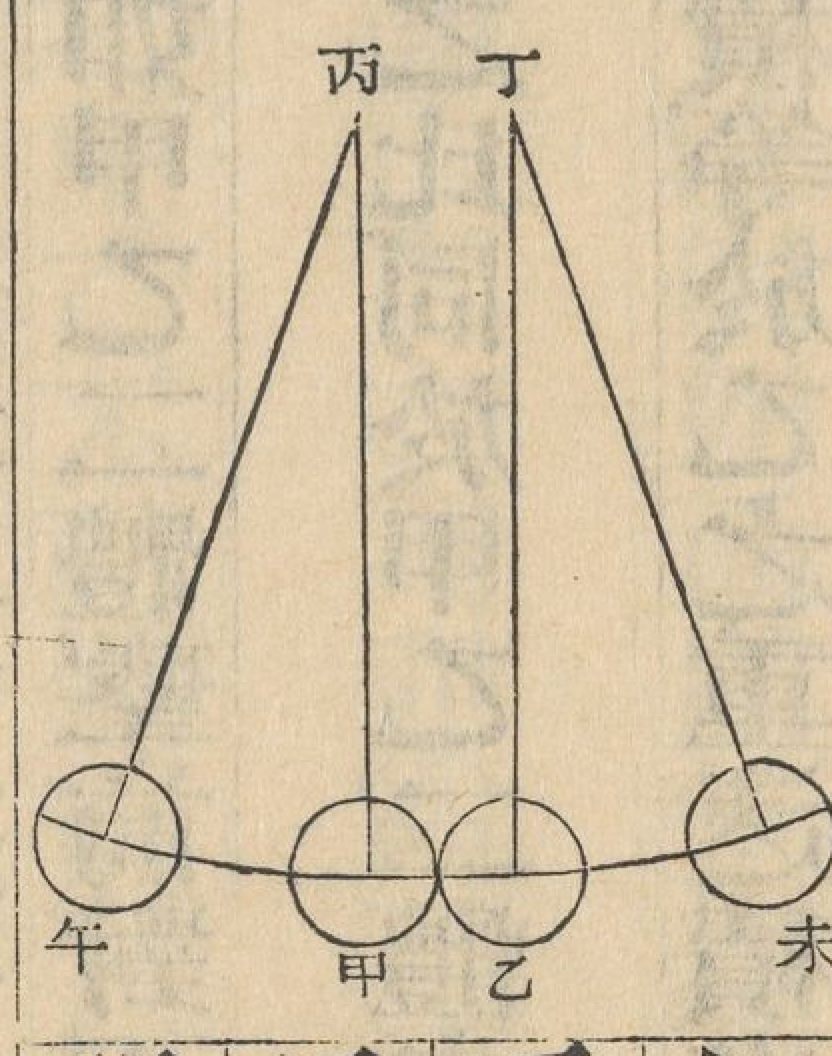
非一綫爲斜相擊。設二物相擊方向對面重速積等
擊時二凸面變平二速相消復凸時另生二速所消速
與所生速之比同於二面變平力與復凸力之比。二
體或漸近或漸遠若欲論其合速同方向則用二速較
對方向則用二速和。
第一款　設二體對面行於一直綫上相擊二重速積等
則平凸二力消而復生之新速二重速積亦等且方向
必對面。
準動理第三例二體無凸力在一綫上對面相擊且重
速積等則二凸面平時二速消盡二體俱止不行若有

凸力.相擊後必對面分行.所生之速以二體質性爲準.此有二理.一相擊而平.一平而復凸.當凸面平時.與無凸力之理同.蓋未凸之前.形狀改變.爲相擊抵力所生.初凸時前速消盡.故與無凸力同.至復凸而分行.其二重速積.生於相抵.以動理第三例證之.必等.二速大小.生於凸力大小.此理由測驗而知.

第二款　有凸力體正相擊.若質性同.則凸力與平力有定比例.

體不論大小.行不論遲速.但質性不變.前後二速之比恆同.惟前後二速有定比例.故分速合速亦當有定比

例、分二速言之爲分速、合二速言之爲合速、合速或用二速之較、或用二速之和、



如圖甲乙二球、懸於甲丙乙丁二垂綫、將此二球分而復合、在弧綫最下點一擊、卽復分行、至午至未、視弧綫若干、卽知相擊前後二速

比例定率　若二速與合質積不成反比例、相擊後所當有之速、亦無不可推、測驗最易、莫如以一動球擊一靜球、　平凸二力有相等、有不相等、凸力有全者、有不全者、凸力全、則等於平力、凸力不全、則小於平力、是謂朒凸力也、凡朒凸力之物、以凸力爲實、平力爲法、得

凸力定率、呢紗等球、擊前擊後二速、若九與五、九爲平力、五爲凸力、下倣此、鋼球畧同、樹皮球又畧小、象牙球前後二速若九與八、玻璃球若十六與十五、皆以測驗知之、

第三款　有二體無凸力、大小不等、正相擊、已知擊前二速、求擊後二體共速、

如甲乙二體擊前對面行、以子丑爲二速、取子丑二速之比同於甲乙二體之反比、則有等數、甲子=乙丑是甲之重速積等於乙之重速積也、準動理第三例、擊時二速必相消、而二體無凸力、無復分之勢、故擊後必定、

設載二體之面，亦平動於某方向，二體遲速與面動不相涉，假如面以午速動，與甲行方向同，則甲乙對行，以面上言之寅卯爲二速，令等數爲

寅甲——乙卯

則擊後以面上言之甲乙不動，然面有午速與甲行方向同，則相擊之前，甲有本速寅，又有面速午，面速加本速爲全速，乙有本速卯，又有面速午，面速少本速爲全速，相擊之後甲乙二本速俱消盡，各餘午速，設甲以等於寅加午之子速前行，及乙，乙有等於午少卯之丑速，則相擊之後，必俱以午速前行，有等數如左，

子＝寅丄午

丑＝午丅卯

寅＝子丅午

卯＝午丅丑

前式

甲子＝乙丑

變爲

甲(子丅午)＝乙(午丅丑)

甲子丄乙丑＝甲午丄乙午

$$\text{午} = \frac{\text{甲子丄乙丑}}{\text{甲丄乙}}$$

若面速小於乙本速，則相擊之前乙全速爲卯少午，且方向與甲爲對面，仍命爲丑速，則有等數，

卯＝丑丄午

甲(子丅午)＝乙(丑丄午)

甲子丅乙丑＝甲午丄乙午

$$\text{午} = \frac{\text{甲子丅乙丑}}{\text{甲丄乙}}$$

與前丑速諸等數正負不同。設子丑二速方向同，而對面之速爲負速，則前所得等數，正負俱可用。設所得午之等數爲負，則相擊後二體必行於前速之對面方向。設丑爲○，則乙爲靜體，甲動擊之，擊後面速等數如下。

$$午＝\frac{甲子}{甲丄乙}$$

欲知甲所減速，有等數如左。

$$午丁丑＝\frac{甲子丄乙丑}{甲丄乙}丁丑＝\frac{甲(子丁丑)}{甲丄乙}$$

乙加速在甲行方向，有等數如下。

$$子丁午＝子丁\frac{甲子丄乙丑}{甲丄乙}＝\frac{乙(子丁丑)}{甲丄乙}$$

子少丑。爲甲漸近乙之速。即合速 設相擊之前。甲乙對行。則乙所加之速在甲方向綫上非後速大於前速乃對面綫上所消之速。加於甲方向所生之速以甲言之擊後減速行於對面方向理亦同。

甲所減之重速積等數如下。

$$甲子丁甲午=\frac{甲乙(子丁丑)}{甲丄乙}$$

乙所加之重速積等數如下。

$$乙午丁乙丑=\frac{甲乙(子丁丑)}{甲丄乙}$$

所以乙所加之重速積等於甲所減之重速積。即本力與對力等之理也。

第四款 有二體凸力等正相擊。已知擊前二速求擊後

二速、

如甲乙二質體對面相擊、與子丑二速有反比例、擊時二速消盡凸力復生後速令二體各行於對面方向、綫上準第二款後速與前速之比、同於凸力率與一之比命凸力率爲申、則有等數、

甲子══乙丑

甲後速══申子

乙後速══申丑

擊後甲乙各以此二速返行、設甲乙行於動面上、面動與甲行方向同、命其速爲未、假如相擊之前、甲乙有寅

卯二速令等數爲甲寅＝乙卯則相擊之後以在本面上言之二速之等數爲甲後速＝申寅乙後速＝申卯乃命擊前之全速（本速加減面速）爲子丑擊後之全速爲氐房因甲全速爲本速與面速之和乙全速爲本速與面速之較故有等數

子＝寅丄未

丑＝未丅卯

寅＝子丅未

卯＝未丅丑

甲寅＝乙未

甲(子丅未)＝乙(未丅丑)

$未＝\frac{甲子丄乙丑}{甲丄乙}$

$寅＝子丅未＝\frac{乙(子丅丑)}{甲丄乙}$

$卯＝未丅丑＝\frac{甲(子丅丑)}{甲丄乙}$

因相擊之後甲以未速前行又以申乘寅返行乙以未速前行又加申乘卯返行故有等數

$$\text{氐}=\text{未丁申寅}$$

$$\text{房}=\text{未丄申卯}$$

設二體擊前非同方向明其正負理亦同

$$\text{氐}=\frac{\text{甲子丄乙丑丁申乙(子丁丑)}}{\text{甲丄乙}}$$

$$\text{房}=\frac{\text{甲子丄乙丑丄申甲(子丁丑)}}{\text{甲丄乙}}$$

甲減速等數

$$\text{子丁氐}=\text{寅丄未丁(未丁申寅)}$$

$$=\text{寅丄申寅}=\frac{\text{(一丄申)乙(子丁丑)}}{\text{甲丄乙}}$$

乙加速等數

$$\text{房丁丑}=\text{未丄申卯丁(未丁卯)}$$

$$=\text{卯丄申卯}=\frac{\text{(一丄申)甲(子丁丑)}}{\text{甲丄乙}}$$

此加減二速大於無凸力之加減以一加申與申之比為較大率

甲體所減重速積乙體所加重速積相等其等數如左

$$重速積 = \frac{(一丄申)甲乙(子丅丑)}{甲丄乙}$$

故相擊前後甲乙重速積之和相等等數如下

$$甲子丄乙丑 = 甲氐丄乙房$$

由此而知擊前之速與擊後合速有定比例

欲知擊後合速有等數如下

$$房丅氐 = 未丄申卯丅(未丅申寅)$$

$$= 申(寅丄卯)$$

$$= 申\frac{乙(子丅丑)丄甲(子丄丑)}{甲丄乙}$$

$$= 申(子丅丑)$$

設甲乙相等，則相擊之後，二全速等數如下，

$$氐＝三\left((一丅申)子丄(一丄申)丑\right)$$

$$房＝三\left((一丄申)子丄(一丅申)丑\right)$$

設擊前乙爲靜體則等數如下，

$$氐＝\frac{(甲丅申乙)子}{甲丄乙}$$

$$房＝\frac{(甲丄申甲)子}{甲丄乙}$$

第五款　設二體平力與凸力等，求諸速，

如此前款等數內之凸力率申即必爲一，則有等數，

$$甲減速＝\frac{二乙(子丅丑)}{甲丄乙}$$

$$乙加速＝\frac{二甲(子丅丑)}{甲丄乙}$$

$$後合速＝子丅丑＝前合速$$

$$甲＝乙$$

$$甲減速＝子丅丑$$

$$乙加速＝子丅丑$$

$$氐＝子丅(子丅丑)＝丑$$

$$房＝丑丄(子丅丑)＝子$$

觀此等數，知甲乙二體之速交相易，

設乙體不動丑等於〇則其等數如左

$$\text{甲減速}=\frac{\text{二乙子}}{\text{甲丄乙}}$$

$$\text{氐}=\text{子丅}\frac{\text{二乙子}}{\text{甲丄乙}}$$

$$=\frac{(\text{甲丅一})\text{子}}{\text{甲丄乙}}$$

$$\text{房}=\frac{\text{二甲子}}{\text{甲丄乙}}$$

然則甲乙若相等擊後甲不動而乙用甲速前行若甲小於乙則甲必返行而乙前行之速必小於甲之前速若甲大於乙則乙前行之速必大於甲之前速而甲必隨行其速小於前速　設有甲乙丙丁戊諸體平力與凸力等在一綫上俱不動甲以某速擊乙即傳速於乙乙以甲速擊丙丙擊丁丁擊戊若各體大小俱等則擊

後各體俱定惟戊以甲速前行若各體俱前大於後乙大於甲丙大於乙則擊後各體所生之速必各小於前速乙速小於甲速丙速小於乙速而甲擊乙後甲必返行乙必前行乙擊丙亦然以下俱倣此若各體後大於前則擊後各體所生之速必各大於前速而各體相隨前行

第六款　甲球直傳速於丙球或由乙球傳速於丙球求較速　設命甲速爲子準前款甲傳速於丙理有等數

命此速

$$甲傳丙速=\frac{二甲子}{甲丄丙}$$

爲丑則

$$甲傳乙速=\frac{二甲子}{甲丄乙}$$

有等數

$$乙傳丙速=\frac{二乙丑}{乙丄丙}$$

$$=\frac{四甲乙子}{(甲丄乙)(乙丄丙)}$$

乃列諸式於後若有一合於此則甲由乙傳速於丙必大於直傳速於丙

$$\frac{\text{二甲子}}{\text{甲丄丙}} < \frac{\text{四甲乙子}}{(\text{甲丄乙})(\text{乙丄丙})}$$

$$(\text{甲丄乙})(\text{乙丄丙}) < \text{二乙}(\text{甲丄丙})$$

$$\text{乙}^{\text{二}}\text{丄甲乙丄丙乙丄甲丙} < \text{二甲乙丄二乙丙}$$

$$\text{乙}^{\text{二}}\text{丅甲乙丅丙乙丄甲丙} < \text{○}$$

$$(\text{乙丅甲})(\text{乙丅丙}) < \text{○}$$

設乙少甲及乙少丙二數一正一負則有此式設乙體大於甲小於丙或小於甲大於丙則有此式如此則甲由乙傳速於丙大於甲直傳速於丙設乙爲甲丙之中率則由乙傳丙之速爲最大可推算知之設又有

中率之體或置甲乙間為甲乙中率或置乙丙間為乙丙中率則傳速於丙必更大多置中率體可令傳速至極大之限其限可推算知之

第七款 設有全凸力之三體正相擊二質積各乘速方之數擊前與擊後必等 準前款有等數

$$甲子丄乙丑=甲氐丄乙房$$

$$甲(子丅氐)=乙(房丅丑)$$

$$子丅丑=房丅氐$$

$$子丄氐=房丄丑$$

二等數相乘得等數如下

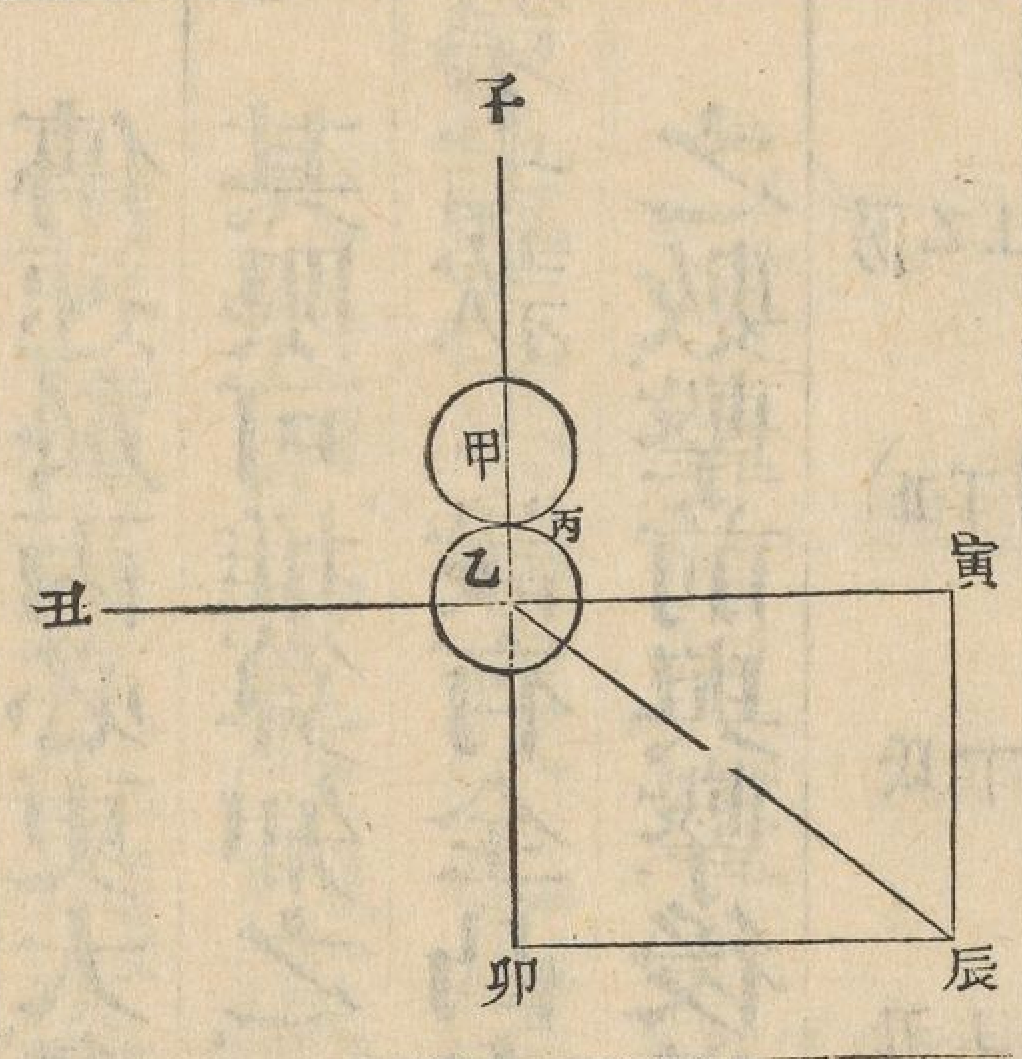
$$甲(子^{二}丅氐^{二})=乙(房^{二}丅丑^{二})$$

$$甲子^{二}丄乙丑^{二}=甲氐^{二}丄乙房^{二}$$

設非全凸力則擊前後二質積乘速方不等其較數可

推算知之。今不贅。

第八款 設二體斜相擊。其相抵二力之方向。必直交二球面。擊點即交點。速之加減。生於方向綫上。與他綫無涉。

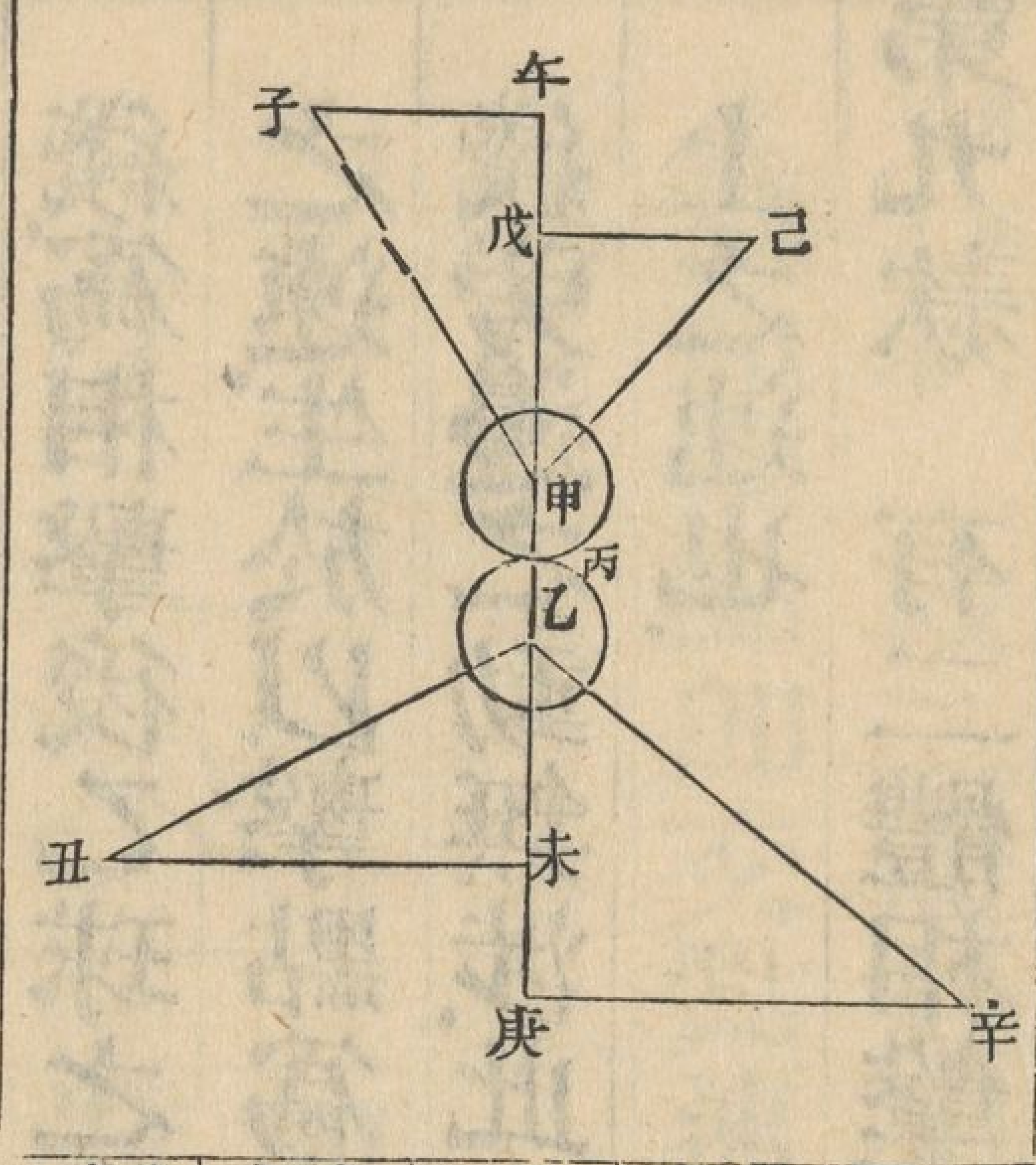


如圖。乙球。平動於丑寅綫上。至乙點時。遇甲球從子甲綫上來擊之。子甲直交丑寅。相擊時子甲綫經過乙球心。且直交二球面。擊點即交點。若面阻力不論。二體所生加速減速。俱在此綫上。乙球丑寅綫上之速。不能令凸面變平。所以子

甲綫上生加速時，一如乙球不動，甲球擊之，與丑寅綫上之速無涉，準動理第二例，甲所生於乙之速，必并於乙本速（即丑寅綫上之速），乃取乙卯，爲乙受甲擊之速，取乙寅，爲乙本速，補成乙寅辰卯平行四邊形，次作乙辰對角綫，爲相擊後乙球之并速，然則相擊時二體互相加減之速，生於以擊點爲交點，直交二球面之綫上，而于此綫旁邊之動無涉，此綫上之動理，一如乙球無丑寅綫上之速也，

第九款　有二體相擊，已知方向，亦知凸力及擊前速，若干，求擊後速，

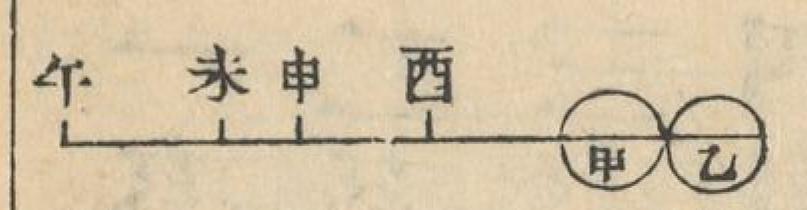
準前論兩球相擊時二重心聯綫經過擊點且直交於二球面如圖子甲丑乙爲甲乙擊前二速辛作甲乙聯綫直交二球面丙爲擊點即爲交點甲乙引長之成午庚綫作子午丑未二綫直交於午庚則子甲丑乙二速分



爲子午午甲丑未未乙四速準前論子午丑未二速與相擊無涉故擊後與擊前同甲乙綫上加速減速一如二球僅有午甲未乙二速設二體擊前僅有此二速則擊後當取乙庚甲戊爲速因擊前尚有子午丑未二速

故又作戊己庚辛二綫、直交於午庚、且與子午丑未等、次作甲己乙辛二綫、卽爲甲乙二體擊後之速率、因甲己乙辛二速中、有戊己庚辛二分速、與相擊無涉、惟甲戊乙庚二分速、爲甲乙綫上速、乃相涉耳、故已知相擊處、則其理一言可明也、

第十款　二球隨行於一直綫上求相擊在何處、



如圖、甲在午、乙在未、取午申未酉爲速率、擊時甲乙二點爲球心、二半徑并爲甲乙綫、爲已知之數、因午甲未乙爲二球同時所過之路、故有比例及等數、

一率　午甲　午申少未酉

二率　未乙　午申

三率　午申　午甲少未乙

四率　未酉　午甲

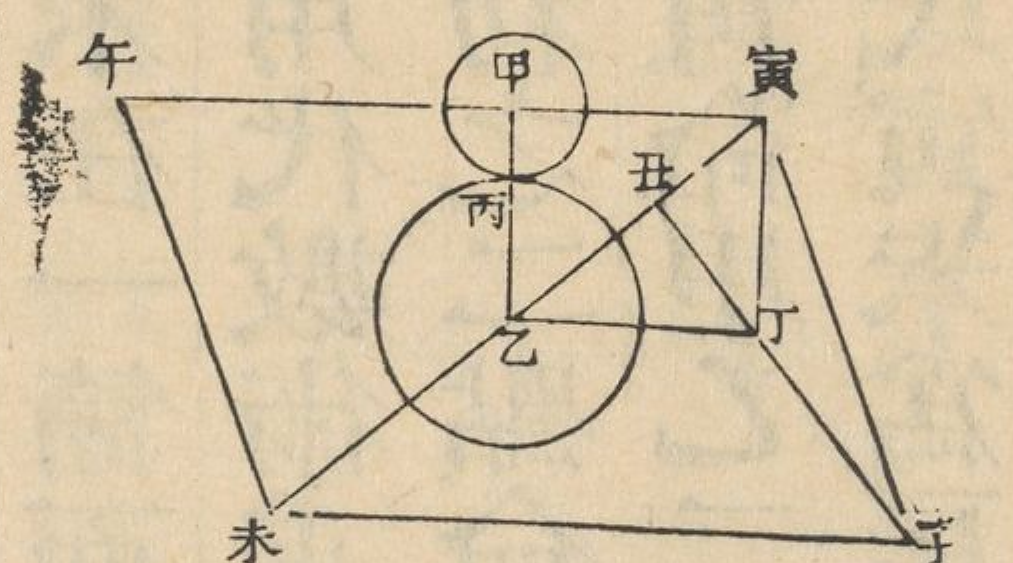
午甲丁未乙══午未丄未甲丁(未甲丄甲乙)

══午未丁甲乙

己知三率，可推午甲，知甲點，卽知乙點，爲二球相擊之處，

第十一款　二球在一个平面，用二速平動於二直綫上，求相擊之處，

如圖，午寅未寅爲甲乙方向，午寅爲甲速率，未丑爲乙



速率。作午未子寅平行四邊形。作子丑綫。取甲乙半徑和爲界。寅爲心。旋規作圓綫。交子丑於丁。乃作寅丁綫。次作丁乙綫。平行於寅午。次作甲乙綫。平行於寅丁。則甲乙二點爲相擊時之二球心。

故有比例。

一率	未子	午寅	午寅	午甲	
二率	乙丁	甲寅	午甲	未乙	
三率	未丑	未丑	未丑	午寅	甲速
四率	乙丑	乙丑	未乙	未丑	乙速

所以乙球心至乙點時甲球心必至甲點甲乙等於寅丁為兩心距所以相擊點必在丙設分甲乙於丙則甲丙乙丙為擊面離二心之綫擊面直交甲乙綫擊時必切二球面於丙以寅為心所作圓綫與子丑綫相交有二點當以近子之點為丁點 設二球所行方向不在一箇面上擊點亦可推法略同

用代數術求相擊點如午寅未寅為二方向午未為動初之二點命二速午甲未乙為角亢命午寅未角為寅角命甲乙二半徑和為壬二球俱向寅點行命寅午為氐寅未為房寅甲寅乙為心尾等數如左

心＝氐丁時角

尾＝房丁時亢

壬^{二}＝心^{二}丄尾^{二}丁二心尾寅餘弦

則在擊點時等數如下.

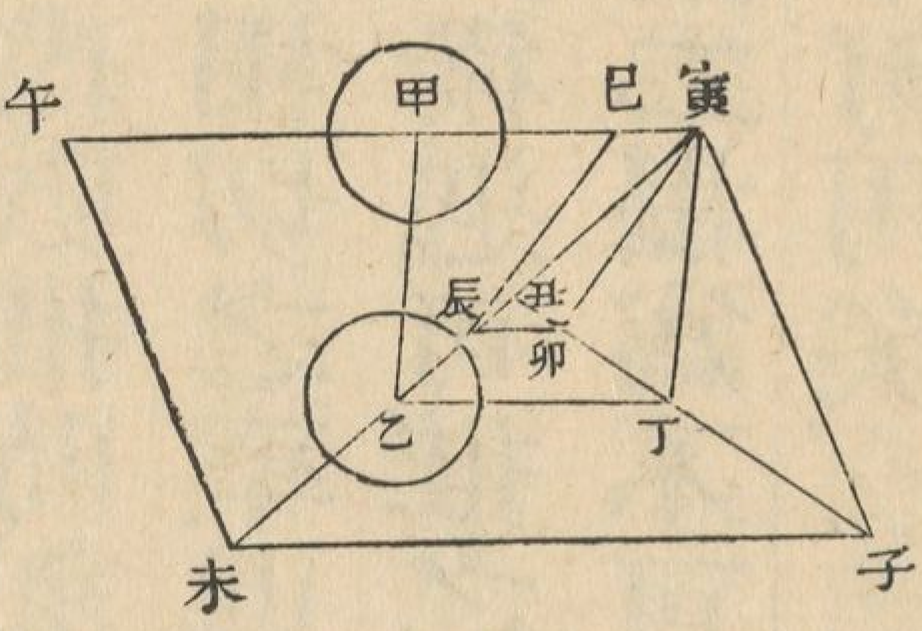
壬^{二}＝(氐丁時角)^{二}丄(房丁時亢)^{二}

丁二(氐丁時角)(房丁時亢)寅餘弦

用代數推時刻.開方必得二根.當用根之小者.卽二球初相切之率.此後二球必易方向.故第二根不可用.此術遇可推之題用之.若二球方向不能漸近而相切.則二根爲不可求之數.而圓綫永不能交子丑綫.此術不可用矣.

第十二款　設二球用二速平動於二直綫.不能相切.求

二球最近距綫

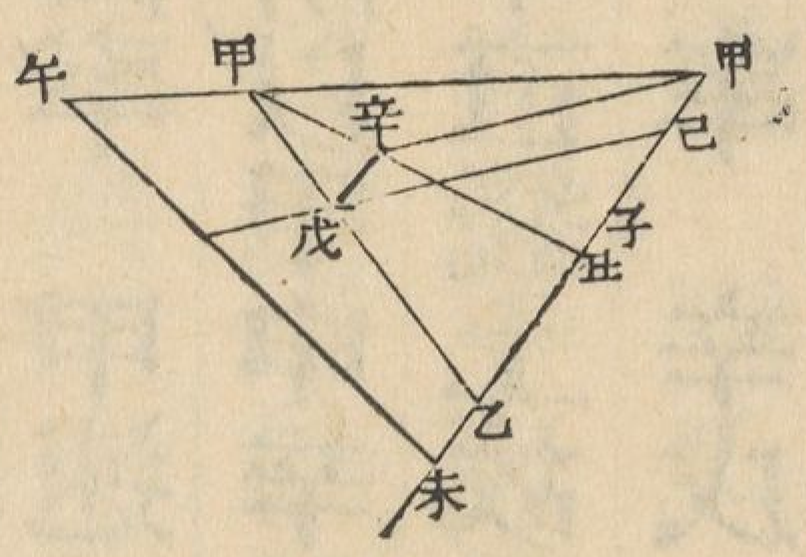


如前作子丑綫又任作寅丁次作丁乙平行於寅午作甲乙平行於寅丁則二球心相距等於寅丁時甲乙二點必爲二球心寅丁愈小相距綫亦愈小乃作寅卯直交於子丑次作卯辰辰巳平行於午寅寅卯則辰巳爲最近距綫卽寅卯

二體動時無他能力加之但自生互相加減之速更有重心要理下款詳之

第十三款　設二體平動於二直綫重心亦必平動於一

直綫



如圖午申未申爲二直綫二體在甲乙重心在戊設乙體行至子甲體行至申重心行至己取乙丑等於子申則丑申等於乙子即有比例

一率　申甲

二率　申丑

三率　申甲　甲速

四率　子乙　乙速

惟甲速乙速二率爲定數故甲乙二體不論在何處甲

申丑恆爲相似三角形，兩腰之比例恆等，乃取辛點，令有比例如左，

一率　甲辛

二率　丑辛

三率　乙速　甲戊

四率　甲速　乙戊

所以甲申辛三角變大變小，恆爲等勢形，辛點恆在辛申直綫上，故戊辛平行於乙丑，卽有比例，

一率　辛戊　辛戊

二率　乙丑　申子

三率 甲戊 乙 申己
四率 甲乙 甲加乙 申子

故戊辛等於申己且平行而申辛戊己爲平行四邊形戊己亦等於申辛且平行故戊點所行必爲一直綫而戊己與申甲恆有定比例戊己或平加漸大或平減漸小一如申甲所以戊點之行爲平速 設二體不在一个面上法略同

別有法明本款之理 設甲乙二球行於一直綫在已知時中距申點命爲角亢重心必在此綫上其距申點命爲氐甲乙俱平速命爲心尾初時距申點爲午未等

數如左。

$$氐=\frac{甲角丄乙亢}{甲丄乙}$$

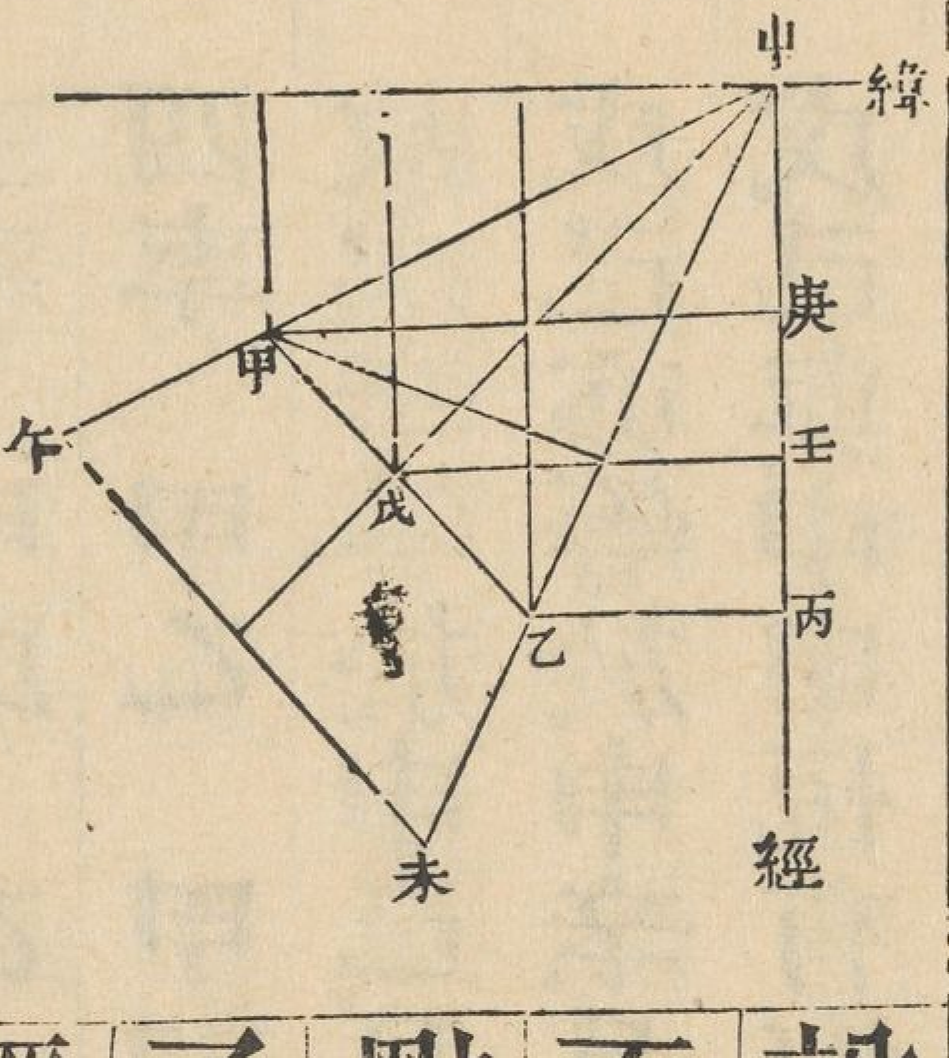
$$角=午丄時心$$

$$亢=未丄時尾$$

$$氐=\frac{甲午丄甲時心丄乙未丄乙時尾}{甲丄乙}$$

$$=\frac{甲午丄乙未}{甲丄乙}丄時\left(\frac{甲心丄乙尾}{甲丄乙}\right)$$

然則初時重心距申之等數爲 $\frac{甲午丄乙未}{甲丄乙}$ 重心速之等數爲 $\frac{甲心丄乙尾}{甲丄乙}$



設甲乙分行，則不論何直綫在一个面上，仍以心尾爲速法於面上過申點作經緯二軸，甲綫交緯軸之角爲子角，乙綫交緯軸之角爲丑角，其交經軸之角爲寅角卯角，則有等數。

$\text{寅}=\frac{\text{半周}}{\text{二}}\text{丅子}$

$\text{卯}=\frac{\text{半周}}{\text{二}}\text{丅丑}$

乃以甲之距軸綫甲庚甲辛命爲天地乙之距軸綫乙丙乙丁命爲人物重心距軸綫戊壬戊癸命爲角亢分甲速爲

天地二速二速恆平行於經緯軸則有等數

$\text{天速}=\text{心子餘弦}$

$\text{地速}=\text{心子正弦}$

設初時甲距經緯軸爲寅卯乙距經緯軸爲辰巳等數如下

$\text{天}=\text{寅丄時心子餘弦}$

$\text{地}=\text{卯丄時心子正弦}$

$\text{人}=\text{辰丄時尾丑餘弦}$

$\text{物}=\text{巳丄時尾丑正弦}$

$\text{角}=\frac{\text{甲寅丄乙辰}}{\text{甲丄乙}}\text{丄時}\frac{(\text{甲心子餘弦丄乙尾丑餘弦})}{\text{甲丄乙}}$

$\text{亢}=\frac{\text{甲卯丄乙巳}}{\text{甲丄乙}}\text{丄時}\frac{(\text{甲心子正弦丄乙尾丑正弦})}{\text{甲丄乙}}$

角亢二綫上有平速等數如左

是重心速分爲經緯二速.所以重心并速亦爲平速.且方向必爲一直綫.

$$角平速 = \frac{弦餘丑尾乙丄弦餘子心甲}{乙丄甲}$$

$$亢平速 = \frac{弦正丑尾乙丄弦正子心甲}{乙丄甲}$$

設甲乙分行.不在一箇面上.法當取經緯及垂綫三軸.分體合體各有三軸.以爲重心及甲乙諸動之分速綫.則諸動既平.全動亦必平也.

第十四款　重心所行方向及速.與二體相擊無涉.

如甲乙二體在一直綫則相擊之前相擊之後重心恆行於此綫上設擊前甲乙二速爲角亢擊後二速爲氐房準前款擊前重心速等數如左

$$\text{重心速}=\frac{\text{甲角丄乙角}}{\text{甲丄乙}}$$

擊後重心速等數如下

$$\text{重心速}=\frac{\text{甲氐丄乙房}}{\text{甲丄乙}}$$

$$\text{甲角丄乙亢}=\text{甲氐丄乙房}$$

前等數亦等於後等數所以重心所行方向及速與相擊無涉設二體分行於二直綫在一个面上如前取經緯二軸令緯軸與相擊之切面平行則緯速與相擊

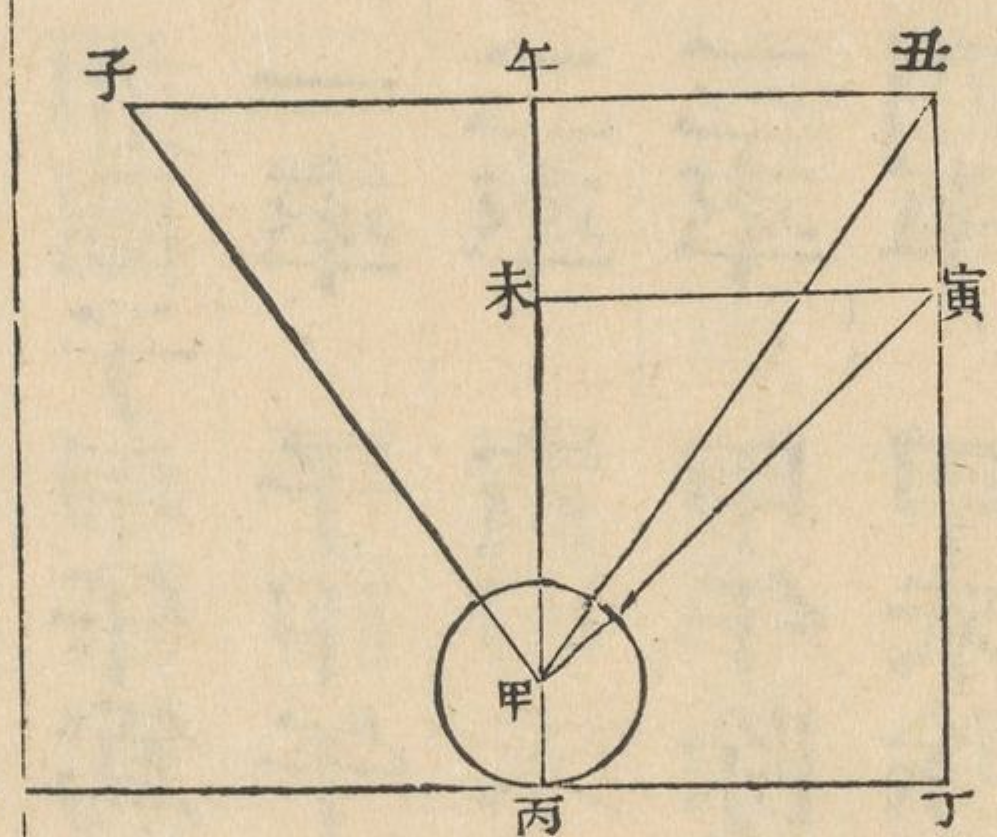
無涉而諸經速一似無別速所以重心速亦不變因重心速在經緯綫上仍不變故重心亦行於舊直綫與擊前之速同也

論體面相擊

相擊之條有三第一曰正相擊第二曰斜相擊前款已言之矣今論第三條爲體面相擊凡有凸力之體直擊於不動之面擊後反行凸力之理與前同擊前擊後二動以前速後速爲定率此定率與物之大小及本速無涉故斜擊於面亦可推

第一款 有凸力體擊於面上已知凸力及擊前方向求

擊後反行方向抵力方向仍直交本面擊點即交點亦必經過體之重心



如圖丙丁為面子甲為前速率甲丙直交於丙丁丙為交點即為擊點作子午綫直交於甲丙則分子甲速為子午午甲二速子午速不用因相擊時面阻力甚微故也回速率為甲未甲未與甲午之比如凸力率與一之比設取未寅與子午等直交甲未則後速之分率為甲未未寅并率為甲寅即為後速大小方向率　設前後速等則引子午綫

至丑令午丑等於子午而後速率爲甲丑 體行方向綫與面所成之角前爲原角後爲回角若全凸力其前後速等則原角與回角亦等 設非全凸力二角不等如圖子甲午爲原角寅甲未爲回角則有此例

一率 子甲午正切
二率 寅甲未正切
三率 甲午除子午 甲未
四率 甲未除寅未 甲午

因寅未與子午等故又有此例

一率 子甲午正切

二率　寅甲未正切
三率　凸力　一
四率　一
試作寅丑聯綫必平行於甲午．則有比例．
一率　丑甲
二率　甲寅
三率　丑寅甲正弦　寅甲午正弦
四率　甲丑寅正弦　丑甲午正弦
若後速率爲丑甲．等於子甲．丑甲午角又等於子甲午
角．則有比例．

一率　前速
二率　後速
三率　丑甲午正弦
四率　子甲午正弦

設體無凸力，且擊面甚平，則擊後必以橫速行於面上，亦有比例

一率　前速
二率　後速
三率　子甲　一
四率　子午　甲子午餘弦卽原角正弦

假如有甲乙大小二體凸力等甲正擊乙擊後甲不行求二體大小之比

$$\text{擊後甲速}=\frac{(\text{甲}-\text{凸}\times\text{乙})\text{甲速}}{\text{甲}+\text{乙}}$$

欲令此數等於無必有下式

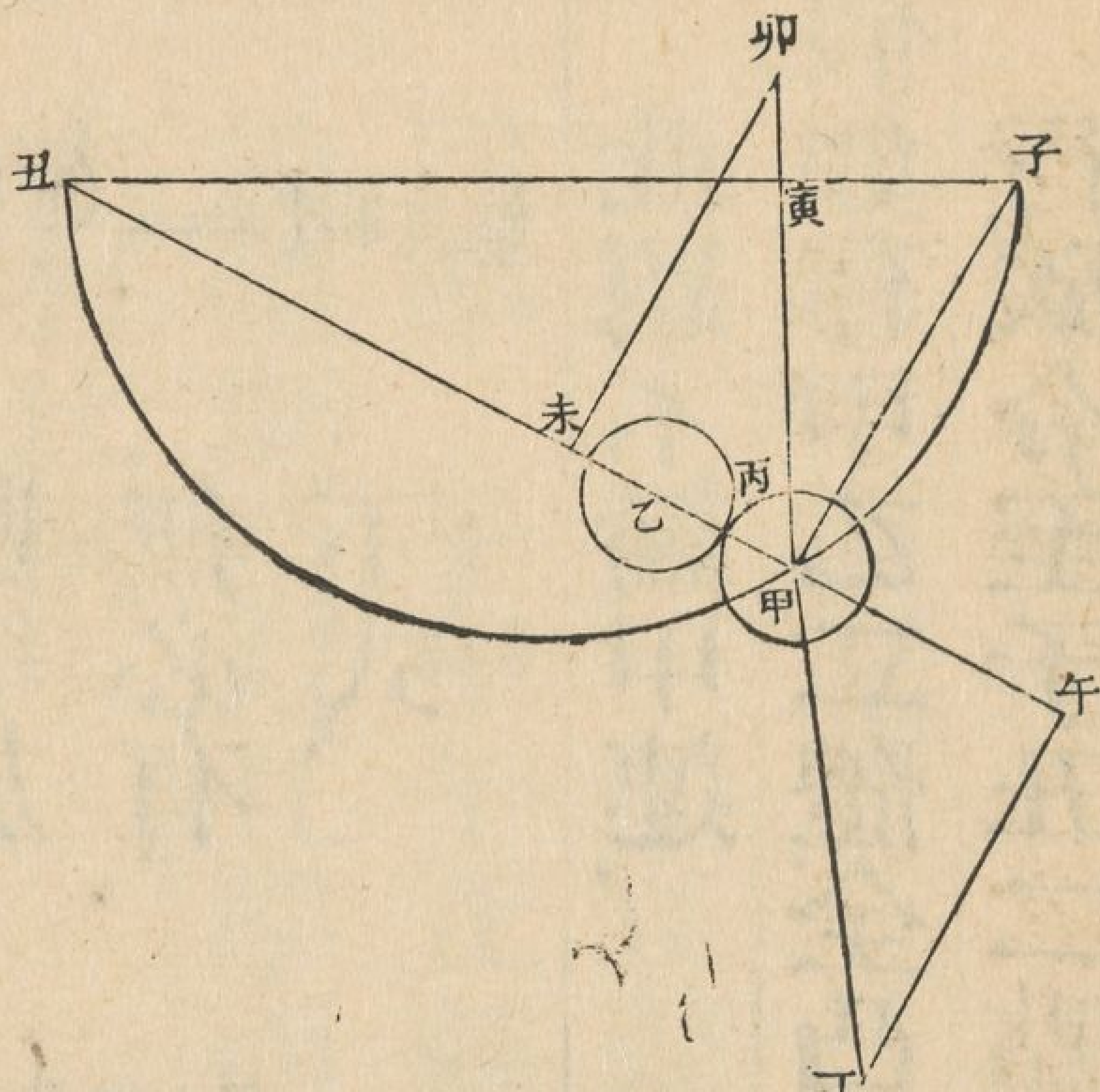
$$\text{甲}=\text{凸}\times\text{乙}$$

即有比例如下

一率 甲
二率 乙
三率 凸力
四率 一

此題不論甲速

假如有甲乙二體全凸力等甲斜擊乙乙無前速擊後反行欲令至子丑二點試求其理



如圖自丑點至乙球心作丑乙聯綫引長之過擊面丙點至午若擊後欲令乙行於乙丑綫則相擊必在丙點故擊時甲球心亦必在丑乙引長綫上丁甲爲甲球前速率作丁午綫直交於丑午因甲乙全凸力相等擊時甲球之午甲分速消盡故擊後止存丁午分速若甲子直交於甲丑則擊後甲球必行於甲子綫因子甲丑爲直角二球能至之處必在丑甲子半平圓界上故也　設二球俱極小則乙球未動時其所在

幾近於半圓界.

假如有甲乙二球相等凸力不全.甲斜擊乙.擊後欲令甲乙至寅丑二點.試求其理. 如前圖.丁甲爲甲前速率.擊時甲球心在丑午綫上.已知午甲爲丑午綫上前分速.卽可推甲未爲丑午綫上後分速.等數如左.

$$\text{乙前速} = \text{〇}$$

$$\text{甲未} = \frac{\text{一}}{\text{二}}(\text{一}\ \text{丅}\ \text{凸})\,\text{甲午}$$

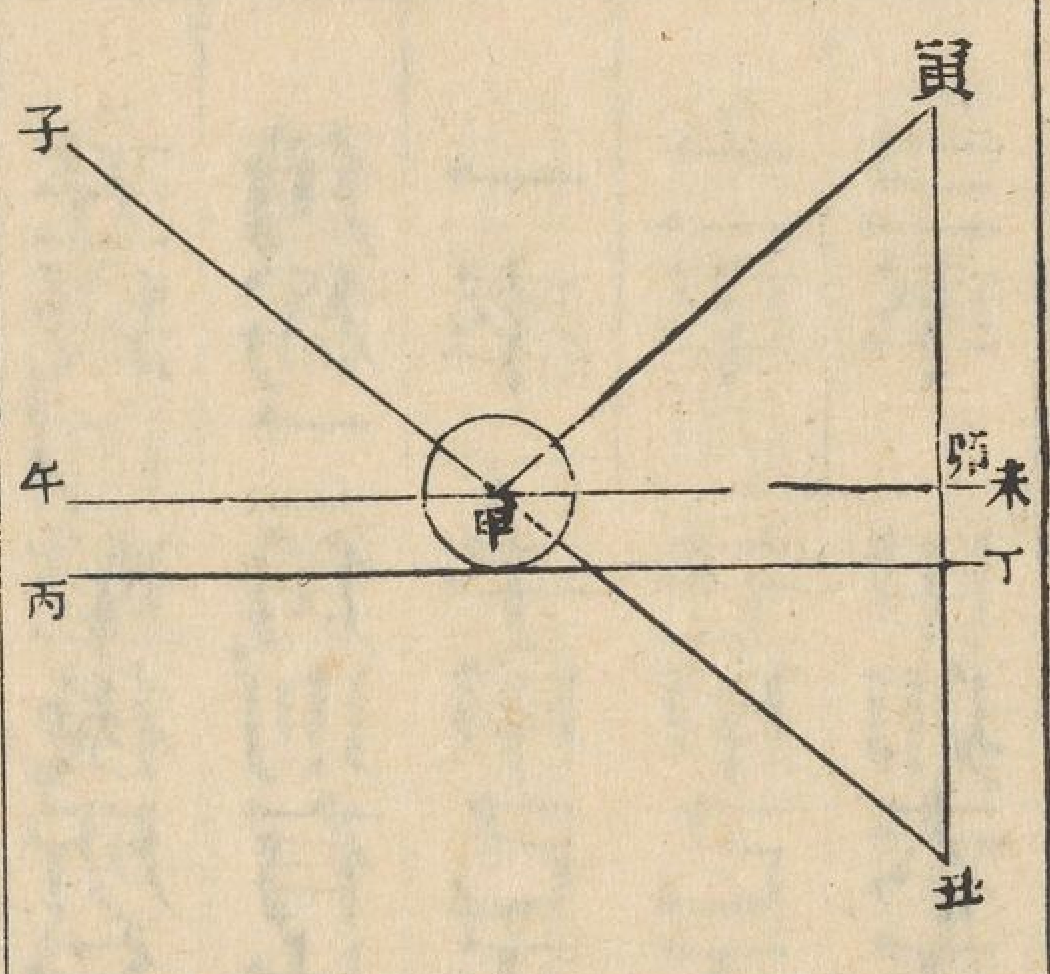
作未卯.與丁午等.直交於甲未.次作甲卯聯綫.卽甲球擊後方向. 若欲求甲丁方向.令甲經過寅點.則先作

甲寅綫於此綫上取卯點作卯未綫直交於甲丑次取甲午令有等數未凸甲丁二一 二甲午 乃作午丁等於未卯且直交於甲午次作丁甲綫即甲球擊前當行之綫甲球擊時必在丑寅爲徑所作半平圓周之外不然則不能也

假如有全凸力體從子點斜擊午未面令回至寅點擊前當行何綫

如圖午未爲面作寅卯直交午未引長至丑令卯丑等於寅卯作丑子交午未於甲則子甲即擊前當行之綫

作甲寅聯綫則寅卯甲與丑卯甲爲相等兩三角形故



子甲午角等於丑甲卯角亦等於寅甲卯角蓋原角等於回角甲球擊前行於子甲綫擊後必回行於甲寅綫而至寅點也此題球即如點若非甚小則取丙丁爲面作午未平行綫二綫相距爲球之半徑則午未一如爲球心所擊而回行之面

假如有球非全凸力從子斜擊於面回至丑點行於何綫

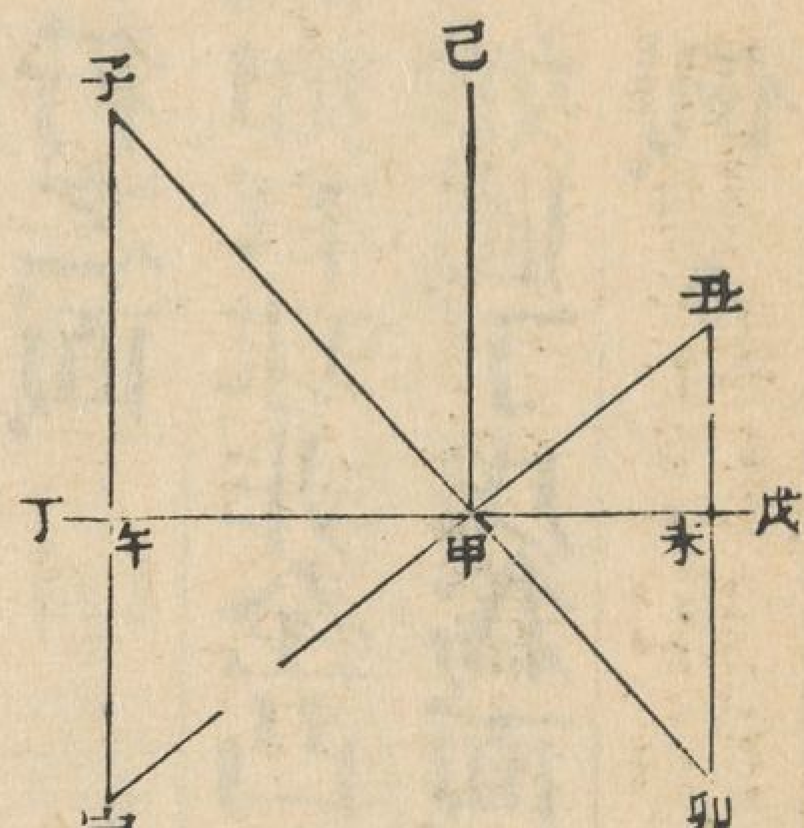
如圖丁戊爲面作丑未直交於丁戊引長至卯令有比例

一率　未卯

二率　未丑

三率　一

四率　凸力



乃作子卯綫交丁戊於甲，則子甲爲擊前所行綫，作甲丑綫，即擊後所行綫，又作甲己綫直交於面，分子甲丑角爲二角，則有比例，

一率　子甲己正切

二率　丑甲己正切

三率　甲卯未正切　未卯除甲未　未丑　凸力

四率　甲丑未正切　未丑除甲未　未卯　一

故擊前行於子甲，擊後行於甲丑，若作子午直交丁戊引長之，亦引長丑甲交於寅，則有此比例

一率　子午

二率　午寅

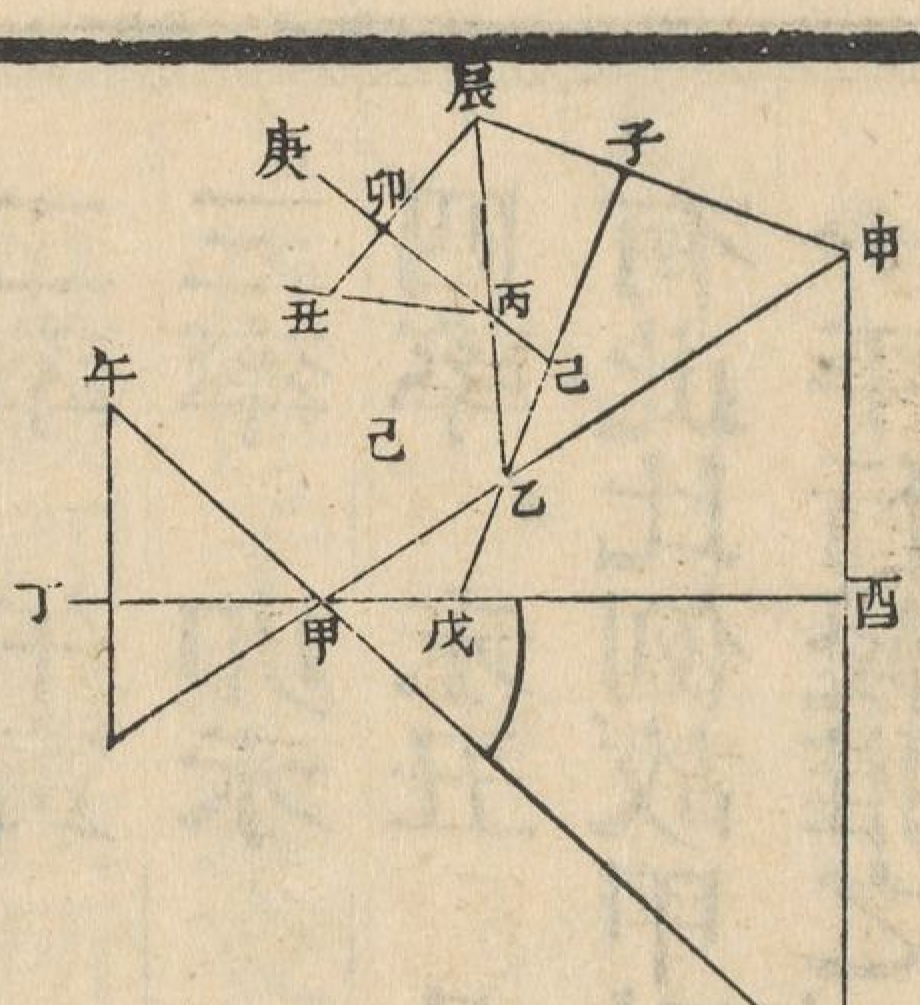
三率　卯未　一

四率　未丑　凸力

有此比例，故甲點所在可推。若球非甚小，如前圖作一平行綫推之

假如有球已知凸力率，斜擊於面，回行時依次遞擊多面

亦已知多面之方向末行至丑點欲求其初行綫



如圖丁戊戊己己庚爲諸面球從午擊於丁戊面甲回行擊於戊己面乙又回行擊於己庚面丙又回行至丑乃作丑卯綫直交於己庚面引長至辰令有比例

一率　丑卯
二率　卯辰
三率　凸力
四率　一

次作辰子綫直交於戊己面引長至申令有比例

一率　辰子　　　次作申酉綫　一率　申酉
二率　子申　　　直交於丁戊　二率　酉戊
三率　凸力　　　面引長至戊　三率　凸力
四率　一　　　　令有比例　　四率　一

末作午戌聯綫卽球初行方向綫午戌交初面丁戊於甲作甲申交二面戊己於乙作乙辰交三面己庚於丙作丙丑準前論球行午甲綫擊於初面必回行於甲申球行甲申綫擊於二面必回行於乙辰球行乙辰綫擊於三面必回行於丙丑卽求得子甲乙丙丑爲球所行之綫

若爲全凸力，則丑卯與卯辰等，辰子與子申等，申酉與酉戌等。此題任有若干面，理俱同。

重學卷九終

重學卷十

英國艾約瑟口譯
海甯李善蘭筆述

論平加速及互相攝引之理

凡動體行於直綫，平加能力，則漸加速，其加速之比，同於初動後所歷時刻之比。此與入卷三款論漸加力，可互相證明。速與時雖變大變小，而比例不變，恆以時率中所生速爲力率，故有等數。

力時＝速　此時乃初動以後所積之時。

長加力之理。最易明者。是令物行於直綫之平長加力。推之有二事。一物如何動。一所推之理。何者合。何者不合。下論平漸加速。乃物行於直綫。平加能力而增速。

第一款　動體行於直綫。平加能力。所過之路與所歷之時自乘方。恆有比例。

若干時中。初動之速爲〇。以漸而大。至末速而最大。設用末速而動。仍行若干時。所過之路。必大於本款之路。

設將全時分爲寅數相等時分。令寅數時分等於全時。則知各時末之速。設此諸小速各時分中初至末不

變則以各時乘各速卽當過之路也。

設時分爲秒。欲知初秒二秒三秒四秒各末速乃至寅秒末速卽以力乘秒爲初秒末速。二力乘秒三力乘秒四力乘秒乃至寅力乘秒。爲二秒三秒四秒至寅秒之末速。

設各秒中速俱爲平速。則力乘秒方爲初秒中所過路。二力三力四力乃至寅力各乘秒方。爲二秒三秒四秒及寅秒中所過路。而各路之和有等數。

$$\text{各路和} = \text{力秒}(一 + 二 + 三 + 川 + 寅)$$

$$= \frac{\text{力秒寅}(寅 + 一)}{二}$$

$$= \frac{\text{力秒}寅^{二}}{二} + \frac{\text{力秒}寅^{二}}{二寅}$$

$$= \frac{力(\text{全時})^{二}}{二} + \frac{力(\text{全時})^{二}}{二寅}$$

因秒乘寅等於全時故也。

各秒中實所過路。必小於今求得之路。因今所用速。爲各秒之末速故也。所以眞全路必小於今求得諸小路之和。故有下式。

$$\text{全路} < \frac{力(\text{全時})^{二}}{二} + \frac{力(\text{全時})^{二}}{二寅}$$

時分愈小。則分數愈多。依各時分平速求得所過路。與

實所過路必愈近時分小至無窮分數多至無窮則逐秒平速各小路和必漸近於眞全路故有左式

$$\text{全路} \approx \frac{\text{力}(\text{全時})^{\text{二}}}{\text{二}} \text{丄} \frac{\text{力}(\text{全時})^{\text{二}}}{\text{二寅}}$$

＝＝者幾相等也

分數多至無窮則寅爲甚大之數$\frac{\text{力}(\text{全時})^{\text{二}}}{\text{二寅}}$已等於無故有左式

$$\text{全路} = \frac{\text{力}(\text{全時})^{\text{二}}}{\text{二}}$$

所以平加速路與時方比例恆同此款有二等數

$\text{速} = \text{力時}$

$\text{路} = \frac{\text{力時}^2}{\text{二}}$

故路速時力四者，已知其二，則餘二亦可知，各有等數。

$\text{路} = \frac{\text{力時}^2}{\text{二}} = \frac{\text{時速}}{\text{二}} = \frac{\text{速}^2}{\text{二力}}$

$\text{速} = \text{力時} = \frac{\text{二路}}{\text{時}} = \sqrt{\text{二力路}}$

$\text{時} = \frac{\text{速}}{\text{力}} = \frac{\text{二路}}{\text{速}} = \sqrt{\frac{\text{二路}}{\text{力}}}$

$\text{力} = \frac{\text{速}}{\text{時}} = \frac{\text{速}}{\text{二路}} = \frac{\text{二路}}{\text{時}^2}$

因路等於時速相乘積之半，又因時乘速為時中用本速所過之路，所以初動以後漸加速所過之路，等於同時中用末速為平速所過路之半。謂自始至終恆用末速。有如力

爲初秒中所得之速、則初秒中路等於半力。寅數秒中所過之路、及寅數少一秒中所過之路、等數如左。

$$\text{寅秒路}=\frac{\text{力}(\text{寅})^{\text{二}}}{\text{二}}$$

$$\text{寅丅一秒路}=\frac{\text{力}(\text{寅丅一})^{\text{二}}}{\text{二}}$$

$$=\frac{\text{力}(\text{寅}^{\text{二}}\text{丅二寅丄一})}{\text{二}}$$

兩數相減、得末秒中所過路、

$$\text{末秒路}=\frac{\text{力}(\text{二寅丅一})}{\text{二}}$$

$$=\text{半力}(\text{二寅丅一})$$

卽可推諸秒路差率、列表如下、

$$\text{一秒}=\text{半力一}$$

$$\text{二秒}=\text{半力三}$$

$$\text{三秒}=\text{半力五}$$

$$\text{四秒}=\text{半力七}$$

故諸秒之路率、爲一三五七諸奇數、

第二款 有質體以某速拋於空中別有能力長加於同方向綫上求路時速諸率

凡物任在何點以某速行此點後速必等設本無拋速而此速爲長加力所生亦同如物於亢秒中因長加力生角速於氐路角速乃氐路之末速即同拋速而長加力復令於房秒過心路統計之是物於亢房秒中共過氐心路以前款證之亦即某力以某時生某速於某路也但令後時加前時故後路加前路有等數

$\text{速}=\text{力時}$

$\text{氐丄心}=\frac{\text{力}}{\text{二}}(\text{亢丄房})^{\text{二}}=\frac{\text{力}}{\text{二}}(\text{亢}^{\text{二}}\text{丄二亢房丄房}^{\text{二}})$

$\text{氐}=\frac{\text{力}}{\text{二}}\text{亢}^{\text{二}}$

$\text{心}=\frac{\text{力}}{\text{二}}(\text{二亢房丄房}^{\text{二}})=\text{力亢房丄}\frac{\text{力}}{\text{二}}\text{房}^{\text{二}}$

$\text{角}=\text{力亢}$

$\text{心}=\text{房角丄}\frac{\text{力}}{\text{二}}\text{房}^{\text{二}}$

房乘角、為物用平速即同拋速角在房秒中當過之路、半力乘房方、乃同時中物為長加力所生當過之路、兩數相併、即物用二速在房秒中所過之路也。設房秒末速為尾、則有等數、

$尾=力(亢\perp房)$

$=力亢\perp力房$

$=角\perp力房$

故凡幾秒以後之速等於拋速并長加力所生之速也因速方等於二力乘路故又有等數

$尾^{二}=二力(氐\perp心)$

$角^{二}=二力氐$

$尾^{二}\top角^{二}=二力心$

$尾^{二}=角^{二}\perp二力心$

第三款　物以某速拋於空中別有能力加於對面方向綫上則路時速諸等數與前款同但正變爲負如此則長加力必令動體減速所歷之時等所減之速亦等因長加力爲平加故也歷若干時速減盡物必定

定以前漸減之速、與前款漸加之速同、所過之路、從時末起算、與前款從時初起算同、　如物用角速行於亢秒中、當過倍氐路、爲對面長加力所消、僅得氐路、且速適消盡而定、設未滿亢秒、當房秒末、應過若干路、命其路爲心、從動末推之、則亢少房時中、必經過氐少心路有等數、

$$\text{氐}=\frac{\text{力}}{\text{二}}\text{亢}^{\text{二}}$$

$$\text{氐丁心}=\frac{\text{力}}{\text{二}}(\text{亢丁房})^{\text{二}}$$

$$=\frac{\text{力}}{\text{二}}(\text{亢}^{\text{二}}\text{丁二亢房丄房}^{\text{二}})$$

$$\text{心}=\frac{\text{力}}{\text{二}}(\text{二亢房丁房}^{\text{二}})$$

$$=\text{力亢房丁}\frac{\text{力}}{\text{二}}\text{房}^{\text{二}}$$

$$\text{角}=\text{力亢}$$

$$\text{心}=\text{房角丁}\frac{\text{力}}{\text{二}}\text{房}^{\text{二}}$$

則若干秒中所過之路、等於拋速當過之路少同時長加力所生當過之路、故幾秒末之速、等於拋速少長加力所生之速、

論地心攝引、物依垂綫下墜之動、

近地諸物、為地心所攝引而下墜、為平加力、漸近地心則漸加速、此由測驗而知、故空中若無風氣等阻力、則物下墜時、無論體之大小、質之輕重、地心攝引力、必以漸而加、時分為率、地力為定力、此理自伽離略發之、今則人人皆知、測驗之法、或用輪軸、或用大重下墜、令小重上行、或令物下於斜面、或用擺、而用擺尤妙、因其動緩、便於測驗也、用諸法測

之知攝力之漸加率爲定數

擺之時刻由於物行弧綫之速物行弧綫之速由於物空中下墜之速詳下卷因測驗擺速合於地力爲定力當生之速知所論地力爲定力乃確不可易

論物向地心之理

凡物不論大小輕重向地心而下遲速必同羽毛微塵向下遲者爲風氣所阻也若無風氣當與金石同速故將一大體分爲十小體各小體下墜速必同即以小體與大體同墜速亦同

物下墜一秒中過若干尺寸須測驗而知其法莫妙於

用擺設一秒中擺適往回一次，知擺之長短便知一秒中物之下墜當有若干尺寸，如倫頓北極出地五十一度半，物於無風氣空中下墜，一秒中過一百三十七寸又千分寸之九百五十七，一秒中所生之速能令物於每秒中徑過二百七十五寸又千分寸之九百十四，此一秒中地力生速之率，以長加力言之亦同，故地力爲長加力。

假如物下墜歷二秒半，當過若干路，生若干速，前論中所言速率，卽力也有等數，

路 $=\frac{力時^{二}}{二}$

$=\frac{二七五九一四\times六二五}{二}$

$=八六二二三一二五$

速 $=力時$

$=二七五九一四\times二五$

$=六八九七八五$

求得八百六十二寸又十萬分寸之二萬三千一百二十五即路也六百八十九寸又千分寸之七百八十五即速也

假如物以一百尺之速上行當過若干路而定至最高當歴若干時　準前物下墜過若干路所生之速等於今上行之速而上行之路即等於下墜生此速時當過之

路有等數、上行與下墜時刻亦同故有等數如下、

$$路=\frac{速^2}{二力}=\frac{一〇〇〇〇〇〇}{五五一八二八}=一八一二一五八九$$

$$時=\frac{速}{力}=\frac{一〇〇〇}{二七五九一四}=三六二四三一八$$

求得一千八百一十二寸又萬分寸之一千五百八十九卽路也、三秒又百萬分秒之六十二萬四千三百十八卽時也、

假如物以一百尺之速上行、歷二秒、過若干路、等數如左、

$\text{路}=\text{時速}\,丅\,\frac{\text{力}}{\text{二}}\,\text{時}^{\text{二}}$

$=\text{二}\times\text{一〇〇〇}\,丅\,\frac{\text{二七五·九一四}}{\text{二}}\times\text{二}^{\text{二}}$

$=\text{二〇〇〇}\,丅\,\text{五五一·八二八}$

$=\text{一四四八·一七二}$

求得一千四百四十八寸又千分寸之一百七十二．卽路也．

假如將石下墜井中．歷若干秒聞水聲．求水面離井口若干．聲之行爲平速．不論風氣阻力．一秒中行一千一十七尺或言一千十四尺．或言一千十八尺八寸．須考準用之方得密合．命聲速爲午．井口離水面爲未．則有等數．

$$石過未時 = \sqrt{\frac{二未}{地力}}$$

$$聲過未時 = \frac{未}{午}$$

$$\frac{未}{午} 丄 \sqrt{\frac{二未}{地力}} = 時$$

$$\frac{二未}{地力} = 時^{二} 丅 \frac{二時未}{午} 丄 \frac{未^{二}}{午^{二}}$$

$$未^{二} 丅 二\left(時午 丄 \frac{午^{二}}{地力}\right)未 = 丅 時^{二}午^{二}$$

$$未 = 時午 丄 \frac{午^{二}}{地力} \frac{丄}{丅} \sqrt{\left(\frac{二時午^{三}}{地力} 丄 \frac{午^{四}}{地力}\right)}$$

因正不合，當用負數。

地力除聲速得三十七弱，故有等數。

$$未 = 午\left(時 丄 \frac{午}{地力} 丅 \sqrt{\frac{二時午}{地力} 丄 \frac{午^{二}}{地力^{二}}}\right)$$

$$= 午\left(時丄三七丅\sqrt{七四時丄一三六九}\right)$$

設時為三秒，則其等數如下。

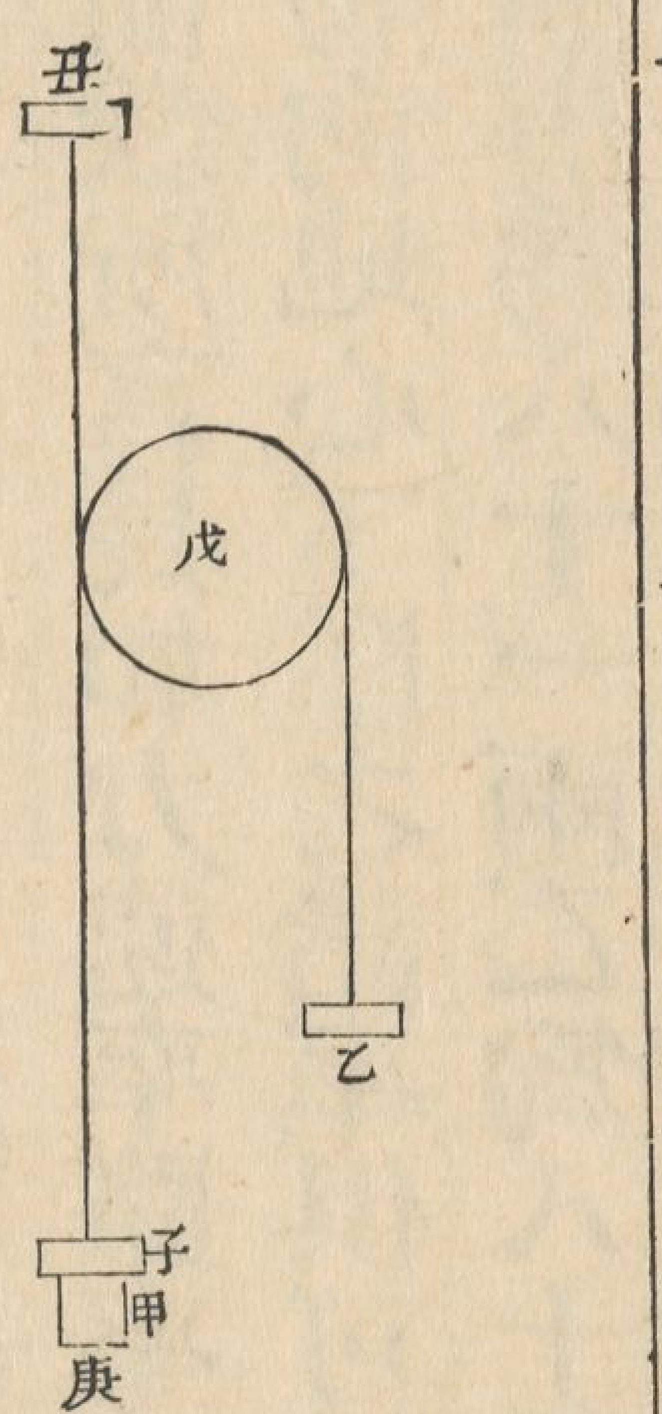
$$未 = 午\left(四〇丅\sqrt{一五九一}\right)$$

$$= 午\left(四〇丅三九·八九\right)$$

$$= 一一午 = 一一一八七$$

求得一百十一尺又百分尺之八十七。卽井口至水面深也。

第一款　有大小二重懸於定滑車。欲求一邊下行長加力。　滑車及索之阻動率不論。



如圖。戊爲滑車。甲加子爲庚重。設庚重等於乙重。則二重適定。若庚重大於乙重。則庚乙之較爲速之根。二重之動。其速同。故庚加於乙爲全動質。有等數。

$$\text{長加力}=\frac{\text{庚乙較}}{\text{庚乙和}}\text{定數}$$

$$\text{長加力}=\frac{\text{庚乙較}}{\text{庚乙和}}\text{地力}$$

設無乙重則長加力即地力，地力即定數，故他題可以下式代上式。

前款所言長加力速率路率時率，以長加力爲地力，則物向地心下墜之諸率俱可推也。

假如庚爲八十一兩，乙爲八十兩，求一秒中所過之路及所生之速各若干。等數如左。

$$\text{路}=\frac{\text{地力庚丅乙}}{\text{二庚丄乙}}\text{時}^{\text{二}}$$

$$=\text{一三七九五七}\frac{\text{一}}{\text{一六一}}\text{一}^{\text{二}}$$

$$=\frac{\text{一三七九五七}}{\text{一六一〇〇〇}}$$

$$=\text{〇八五六八七六}$$

$$\text{速}=\text{地力}\frac{\text{庚丅乙}}{\text{庚丄乙}}$$

$$=\text{二七五九一四}\frac{\text{一}}{\text{一六一}}\text{一}$$

$$=\frac{\text{二七五九一四}}{\text{一六一〇〇〇}}$$

$$=\text{一七一三七五}$$

求得百萬分寸之八十五萬六千八百七十六即路也

一寸又十萬分寸之七萬一千三百七十五即速也

設將乙置於地平几上以索聯庚庚懸几邊則生動者爲庚全重而非庚乙之較二體同速一如一箇質體其長加力之等數如左

$$\frac{\text{庚地力}}{\text{庚}+\text{乙}} = \text{長加力}$$

論物動於斜面

物行於斜面之理兩面必俱係純光故物動時相切而行

非旋轉而下。雖球體亦然。若面阻力令球體轉下。則長加力亦略變矣。詳見後。

第一款　有質體行於斜面。求長加力。

有比例如左。

一率　平行斜面能力

二率　所載質重

三率　斜面股

四率　斜面弦

設物斜行空中。亦以重乘股爲實。如弦而一。爲令物行於斜面之抵力。　凡物下墜。所動之全質。卽本重也。準

前款有等數。

加入地力。則等數如下。

$$\text{長加力率}=\frac{\text{力}}{\text{重}}=\frac{\text{股}}{\text{弦}}$$

$$\text{長加力}=\frac{\text{股地力}}{\text{弦}}$$

前款中路時速諸等數。易以此數。則斜面上之路時速俱可推矣。如物下於全斜面。則弦可代路。有等數。

$$\text{弦}=\frac{一}{二}\,\frac{\text{股地力}}{\text{弦}}\,\text{時}^{二}$$

$$\text{時}^{二}=\frac{二\text{弦}^{二}}{\text{地力股}}$$

$$\text{時}=\sqrt{\frac{二\text{弦}^{二}}{\text{地力股}}}$$

$$\text{速}^{二}=二\text{力路}=二\text{地力股}$$

$$\text{速}=\sqrt{二\text{地力股}}$$

速之等數用股與弦無涉故不論在何面或斜或垂若股之長短等垂面股與弦合則下行之速亦等也伽離略初悟此理尚未得其證

設交於地平之角命爲甲角有等數

$$\text{甲正弦} = \frac{\text{股}}{\text{弦}}$$

$$\text{斜長加力} = \text{地力甲正弦}$$

前路時速諸等數中長加力可以此數代之

假如有斜面弦長十尺股一尺求物下行時刻及速等數如左

$時^{二}=\frac{二弦^{二}}{地力股}=\frac{二〇〇}{二七五九一四}$

$=七二四八六三五$

$時=二六九二$

$速^{二}=二地力股=五五一八二八$

$速=七四二八五$

求得二秒又千分秒之六百九十二、即時也、七十四寸又千分寸之二百八十五、即速也、

假如有句股形、股為垂綫、句為地平、物自股下墜、復以未速行於句、欲令時刻與弦上斜行之時刻等、句股當有何比例、等數如左、

$$\text{弦}^{二}=\text{股}^{二}\perp\text{句}^{二}$$

$$\text{股時}^{二}=\frac{\text{二股}}{\text{地力}}$$

$$\text{股速}^{二}=\text{二地力股}$$

$$\text{句時}=\frac{\text{句}}{\sqrt{\text{二地力股}}}$$

$$\text{弦時}=\sqrt{\frac{\text{二}(\text{股}^{二}\perp\text{句}^{二})}{\text{地力股}}}$$

$$\sqrt{\frac{\text{二}(\text{股}^{二}\perp\text{句}^{二})}{\text{地力股}}}=\sqrt{\frac{\text{二股}}{\text{地力}}}\perp\frac{\text{句}}{\sqrt{\text{二地力股}}}$$

$$\frac{\text{二}(\text{股}^{二}\perp\text{句}^{二})}{\text{地力股}}=\frac{\text{二股}}{\text{地力}}\perp\frac{\text{二句}}{\text{地力}}\perp\frac{\text{句}^{二}}{\text{二地力股}}$$

$$\text{四股}^{二}\perp\text{四句}^{二}=\text{四股}^{二}\perp\text{四股句}\perp\text{句}^{二}$$

$$\text{三句}=\text{四股}$$

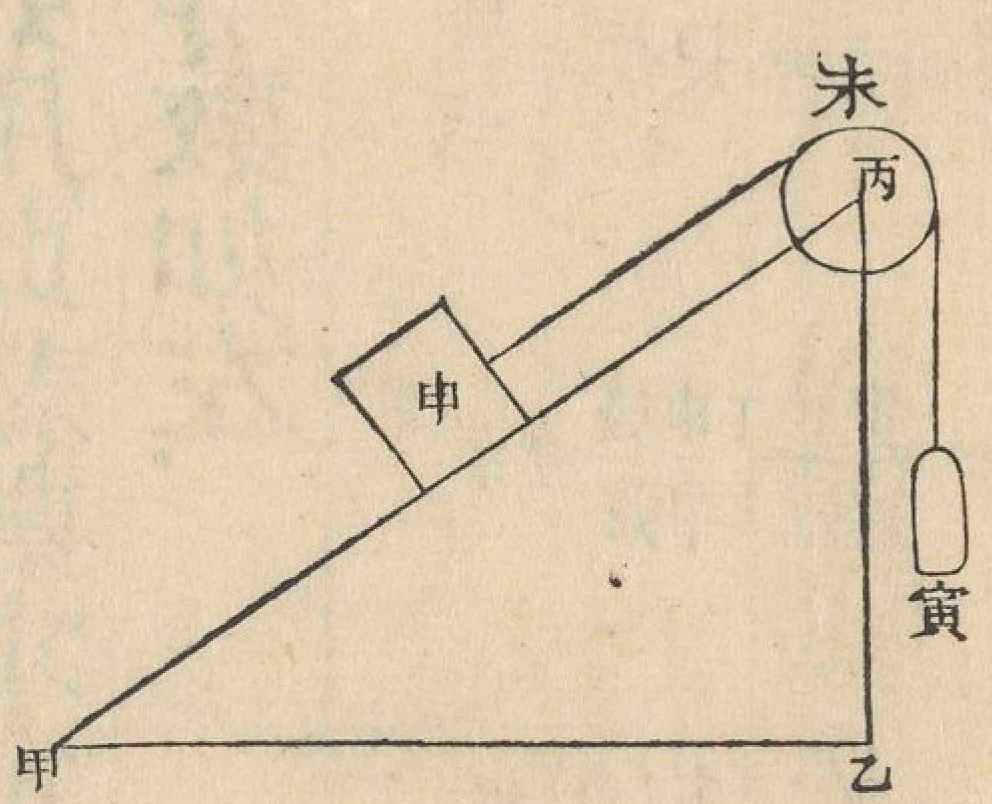
一率　股　句

二率　句　句幕加股冪平方開之　求得句股形三邊

三率　三　四　之比例爲三四五.

四率　四　五

第二款　以重引重,令行於斜面,求長加力.



如圖甲丙爲斜面有申重在其上申未索平行於斜面過滑車丙有寅重在丙下垂設有等數$\frac{申股}{弦}=寅$則申寅皆不動設寅重略大於此數則必引申重上行於斜面設寅重略小於此數則寅重必上行而申重下行於斜面無論上下行長加力恆爲定數若寅引申上行則寅定申之能力即$\frac{申股}{弦}$令寅申動之能力爲$\frac{申股}{弦}$丁寅因二重之速同故長加力可以此數代之有等數如左

$$\text{長加力} = \frac{\text{寅丁}\frac{\text{申股}}{\text{弦}}}{\text{申丄寅}}\,\text{地力}$$

$$= \frac{\text{寅弦丁申股}}{\text{寅弦丄申弦}}\,\text{地力}$$

假如用此款數求寅引申上全斜面當歷若干時。

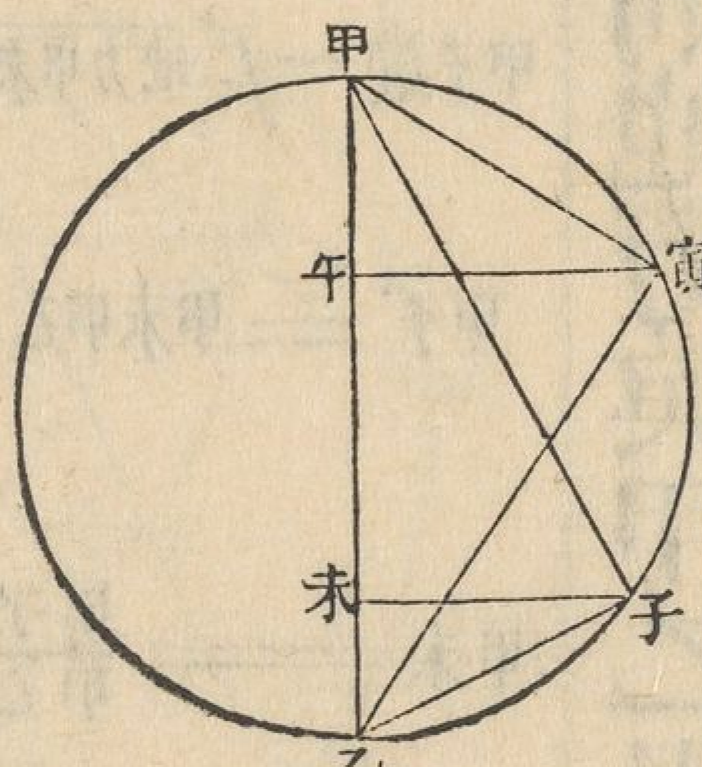
等數如左。

$$\text{弦} = \text{長加力}\,\frac{\text{時}^{二}}{二}$$

$$\text{弦} = \frac{\text{寅弦丁申股}}{\text{寅弦丄申弦}}\,\text{地力}\,\frac{\text{時}^{二}}{二}$$

$$\text{時} = \sqrt{\frac{二(\text{寅丄申})\,\text{弦}^{二}}{\text{地力}(\text{寅弦丁申股})}}$$

第三款　設平圓面直交地平，自頂點至圓界作諸通弦，則物任於何通弦下行，自頂點至末點時刻俱等。



如圖，甲子乙爲圓面，甲乙爲垂徑，甲子甲寅皆爲通弦，有各數，

$$\text{甲子時}=\sqrt{\frac{\text{二}(\text{甲子})^{\text{二}}}{\text{地力甲未}}}$$

$$\frac{\text{甲子}}{\text{甲未}}=\frac{\text{甲乙}}{\text{甲子}}$$

$$\frac{\text{甲子}^{\text{二}}}{\text{甲未}}=\text{甲乙}$$

$$\text{甲子時}=\sqrt{\frac{\text{二甲乙}}{\text{地力}}}$$

然則過甲子時刻與甲子長短無涉，故不論何通弦時

刻俱等也。甲子時刻等於各通弦時刻。亦等於甲乙時刻。蓋甲乙亦通弦也。若自底點乙作乙子乙寅諸通弦。理亦同。

準此款之理。又有等數。

$$甲子速 = \sqrt{二地力甲未}$$

$$甲子^2 = 甲未甲乙$$

$$甲未 = \frac{甲子^2}{甲乙}$$

$$速 = \sqrt{\frac{二地力甲子^2}{甲乙}}$$

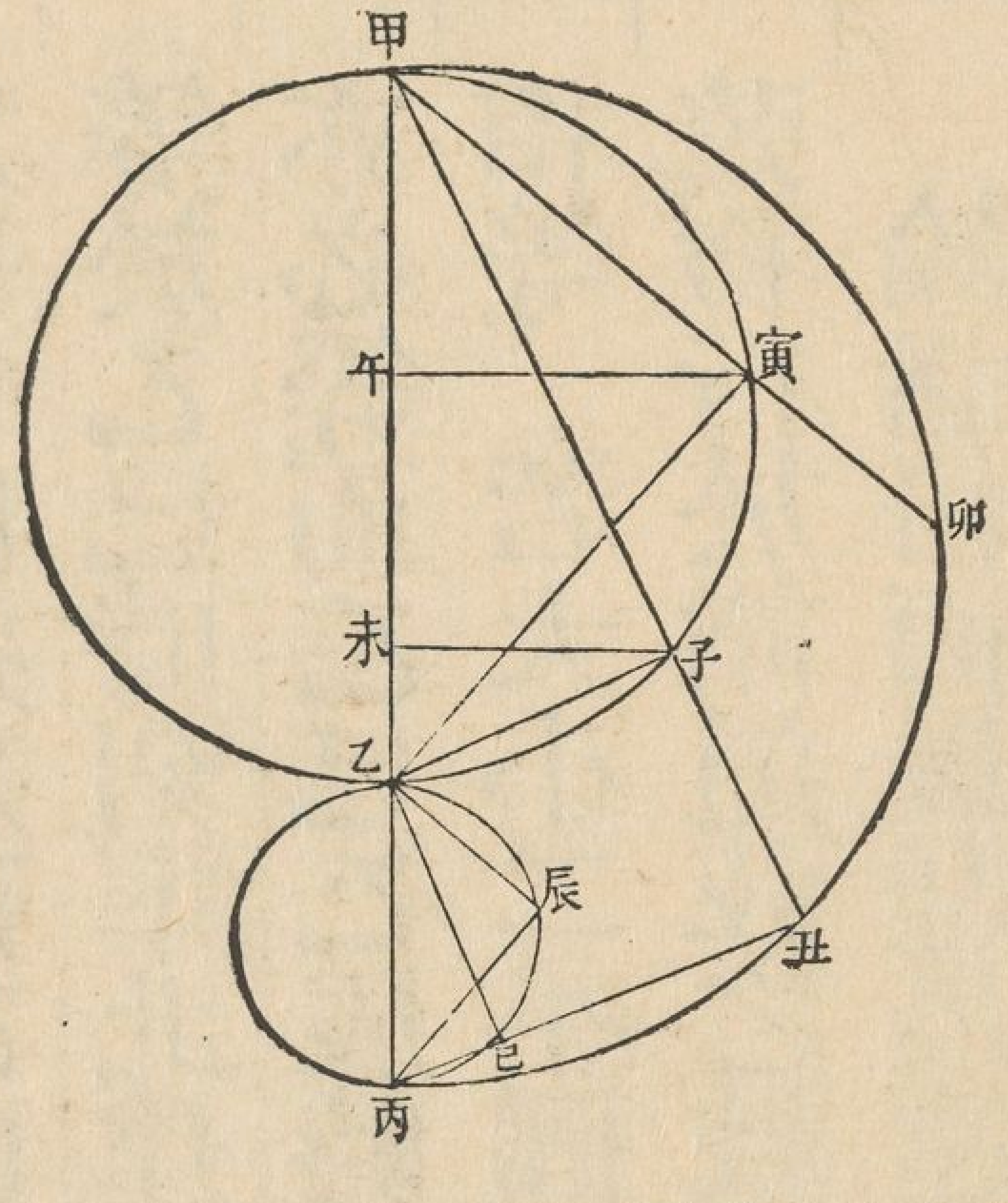
$$= 甲子\sqrt{\frac{二地力}{甲乙}}$$

$$= \sqrt{二地力甲未}$$

則地力與甲乙俱為定數。所以甲子甲寅諸斜面上所得之速。與通弦恆有比例。

第四款　設有大小二平圓垂面。頂點合一。兩全徑在一

垂綫上自頂點過小圓界至大圓界作二大通弦中函二小通弦物自二小通弦末點行至二大通弦末點時刻俱等



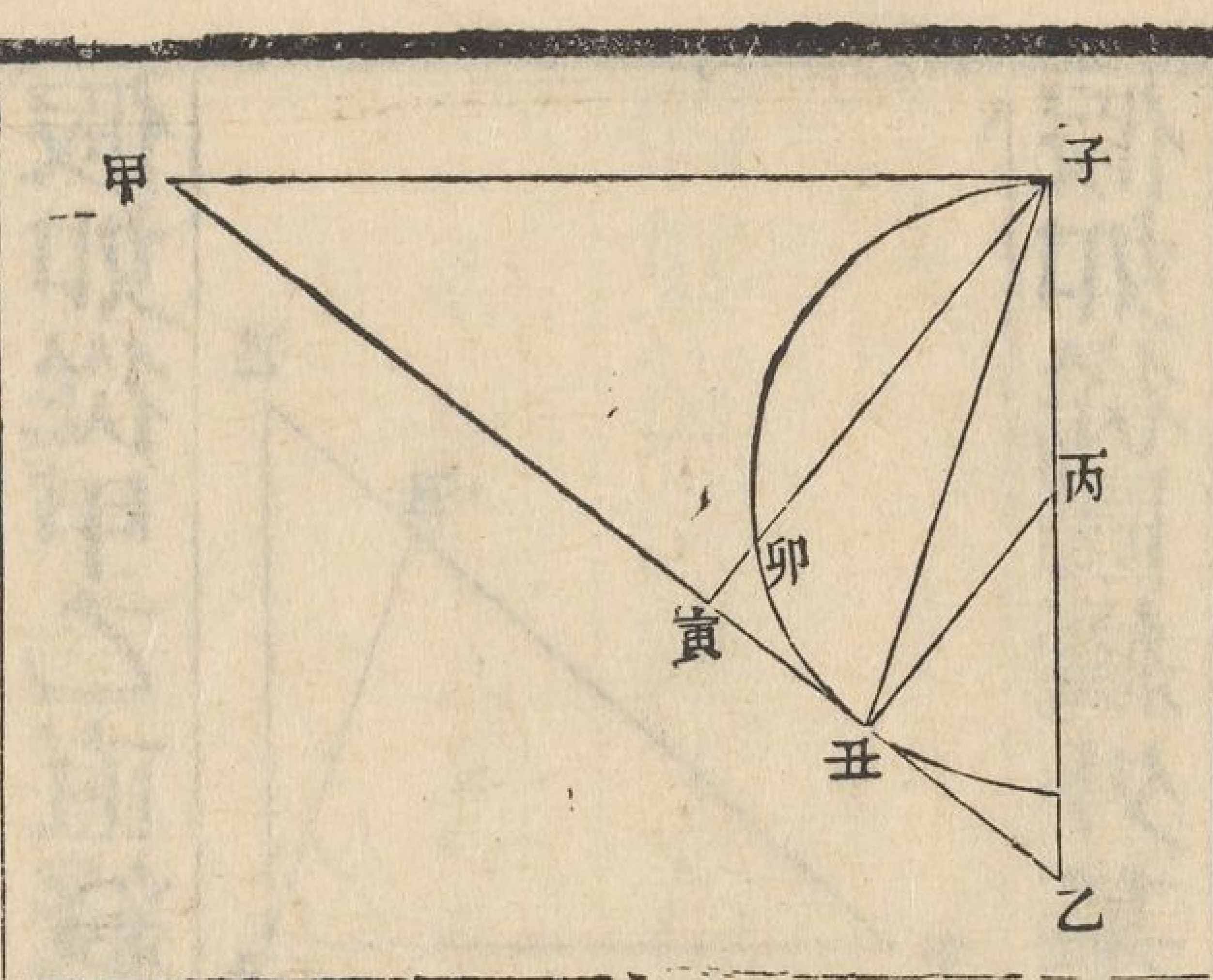
如圖甲子乙甲丑丙為二平圓甲乙甲丙為二全徑甲丑甲卯為二大通弦中有甲子甲寅二小通弦物自寅子二點至卯丑二點時刻必等試於乙丙綫上作乙辰丙圓又作丙丑綫交圓綫於巳作乙巳綫則有甲子乙甲丑丙乙巳丙三句股

形子乙與丑丙平行甲丑與乙巳平行所以子乙巳丑爲平行四邊形而乙巳與子丑等故物行於子丑時刻等於乙巳時刻準此作乙辰綫平行於寅卯兩綫時刻亦必等而乙巳乙辰時刻本相等故子丑寅卯時刻亦相等 若大小二平圓底點合一自底點作大小諸通弦物行於諸通弦之較時刻亦俱等

論諸斜面最遲最速之理

設有諸物俱自一點起或俱自直綫起或俱自圓綫起行至一點或行至直綫或行至圓綫諸面遲速不同各求其最遲最速面

假如從子點起行。至甲乙直綫上何面最速。

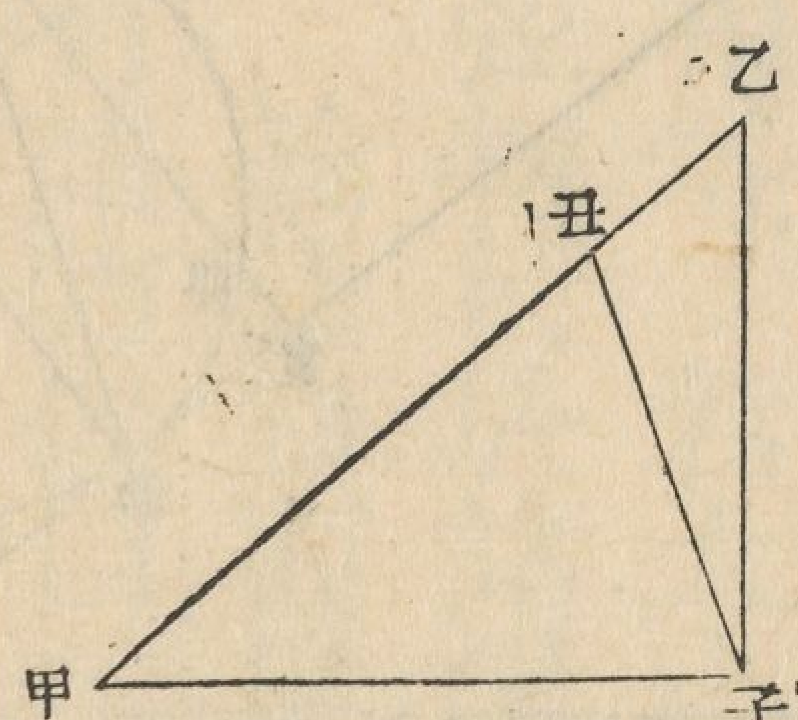


如圖。從子點作子甲綫平於地平。又於甲乙綫上取甲丑等於甲子。作子丑綫。即最速面也。

解曰。試作子丙垂綫。次作丙丑綫直交甲乙。因甲丑等於甲子。故甲丑子。甲子丑。二角等。而甲子丙。甲丑丙。同爲直角。則丙子丑。丙丑子。二角亦等。丙丑丙子二綫亦等。以丙爲心。子爲界。作圓半周。必經過丑點。丑爲圓綫切於甲乙之點。子爲最高點。作子寅綫交圓綫於卯。準前款子

卯時刻等於子丑時刻、而子寅時刻大於子卯時刻、亦必大於子丑時刻、然則從子點任作他綫至甲乙綫上、其時刻必大於子丑、故子丑爲最速面、

假如從甲乙直綫上行至子點、何面最速、



如圖作子甲綫平於地平、次於甲乙綫上取甲丑等於子甲、作丑子綫、即最速面也、

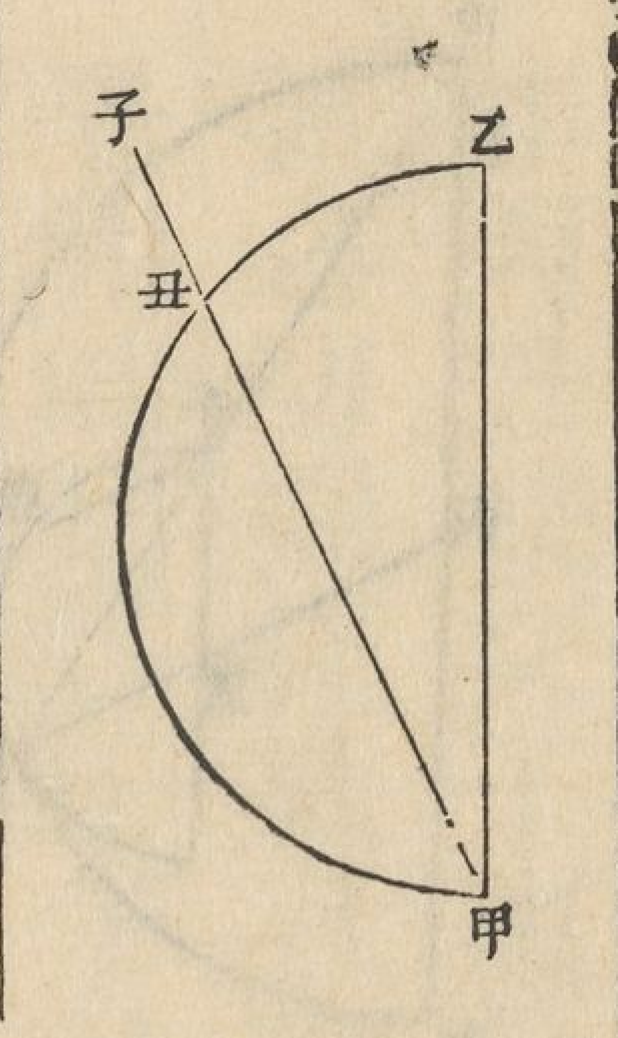
解同前題、

假如從圓綫外某點起行至圓綫上、何面最速、

如圖、從圓綫底點甲至某點子、作甲子聯綫、此綫在圓

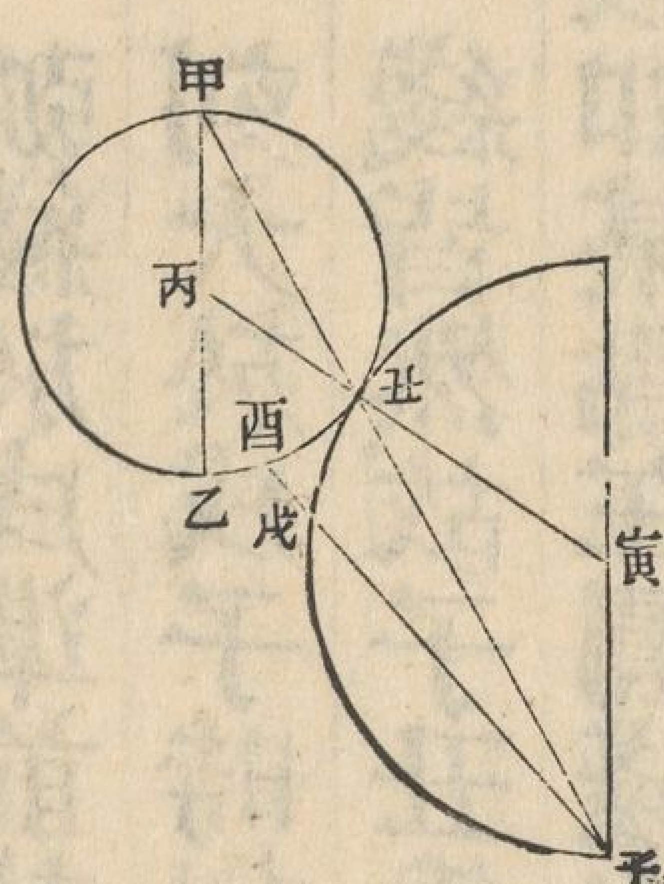
外之子丑一段即最速面也

解見下題



假如從圓綫上行至圓綫外某點何面最速

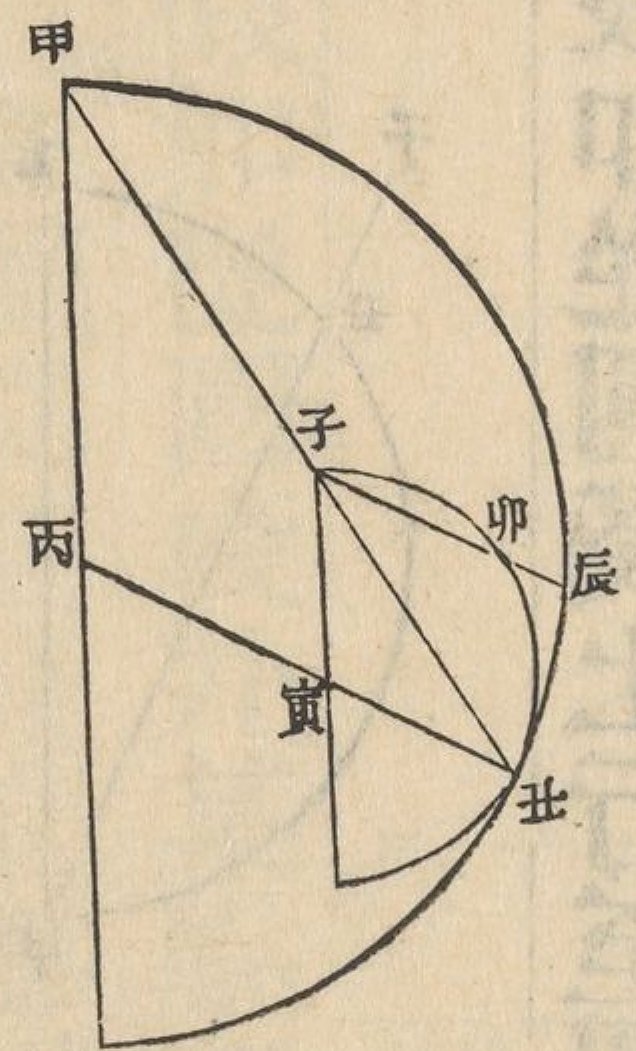
如圖從圓綫頂點甲至某點子作甲子聯綫此綫在圓外子丑一段即最速面



解曰甲乙爲圓垂徑丙爲圓心試作子寅垂綫次作丙丑綫引長之交子寅於寅則寅子丑丑甲丙丙丑甲寅

丑子.四角俱等.寅子寅丑二綫亦等.以寅爲心.子爲界.作子丑弧.必與甲丑乙圓綫相切於丑點.作子酉綫交弧綫於戌.準前款.丑子時刻.等於戌子時刻.而酉子時刻大於戌子時刻.則亦大於丑子時刻.從子點任作他綫.皆然.故子丑爲最速面.

假如某點在圓綫內.行至圓綫.何面最速.



如圖.從圓綫頂點甲至某點子.作聯綫.引長之至圓綫丑.子丑一段卽最速面.

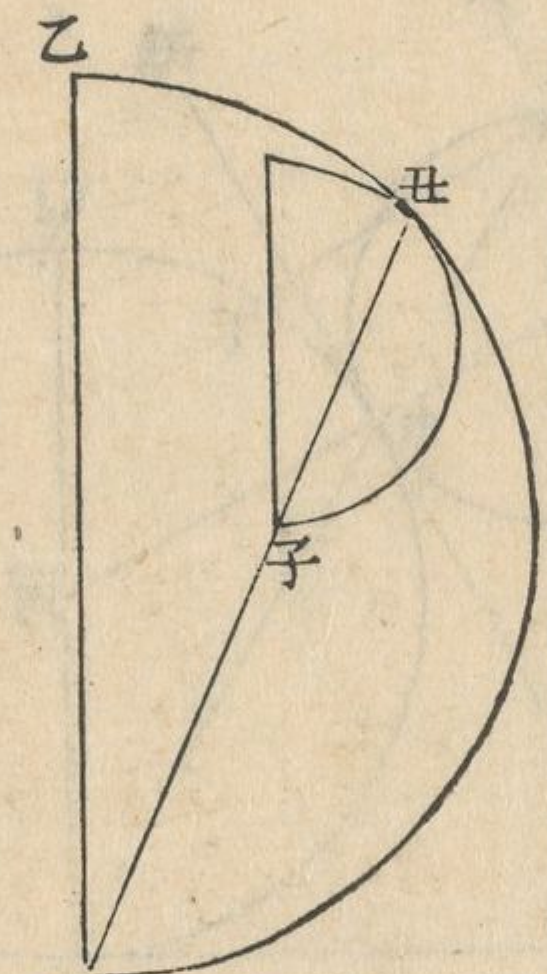
解曰.試作子寅垂綫.次自圓心丙

作丙丑綫交子寅於寅乃以寅爲心子爲界作子卯丑弧必切圓綫於丑點任作子辰綫交弧綫於卯準前款子卯時刻等于子丑而子辰時刻大於子卯亦必大於子丑故子丑面最速

假如從圓綫上行至圓內某點何面最速

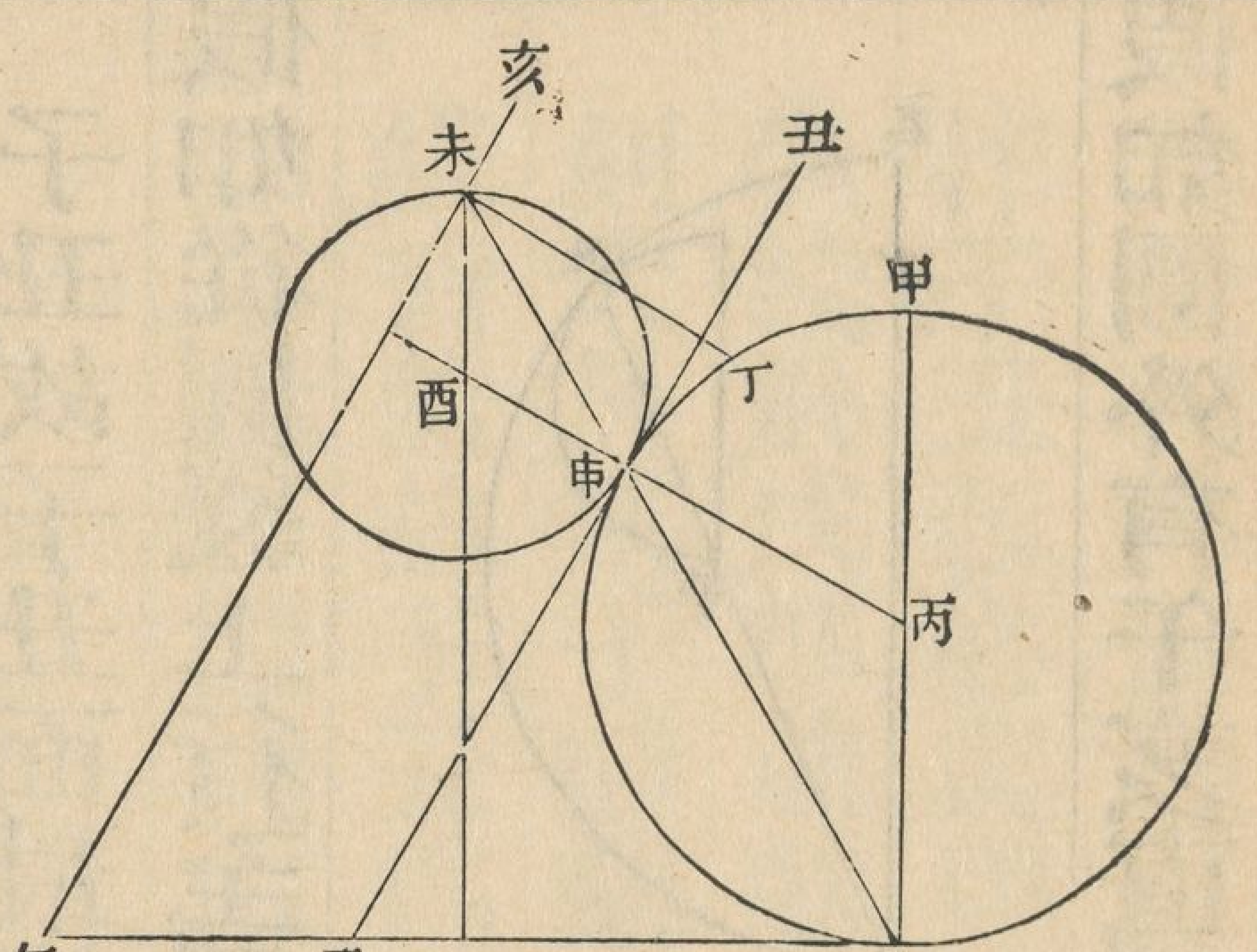
如圖從圓綫底點甲至某點子作聯綫引長之至圓綫丑丑子一段卽最速面

解同上題



假如圓外有午亥直綫從直綫上行至圓綫上何面最速

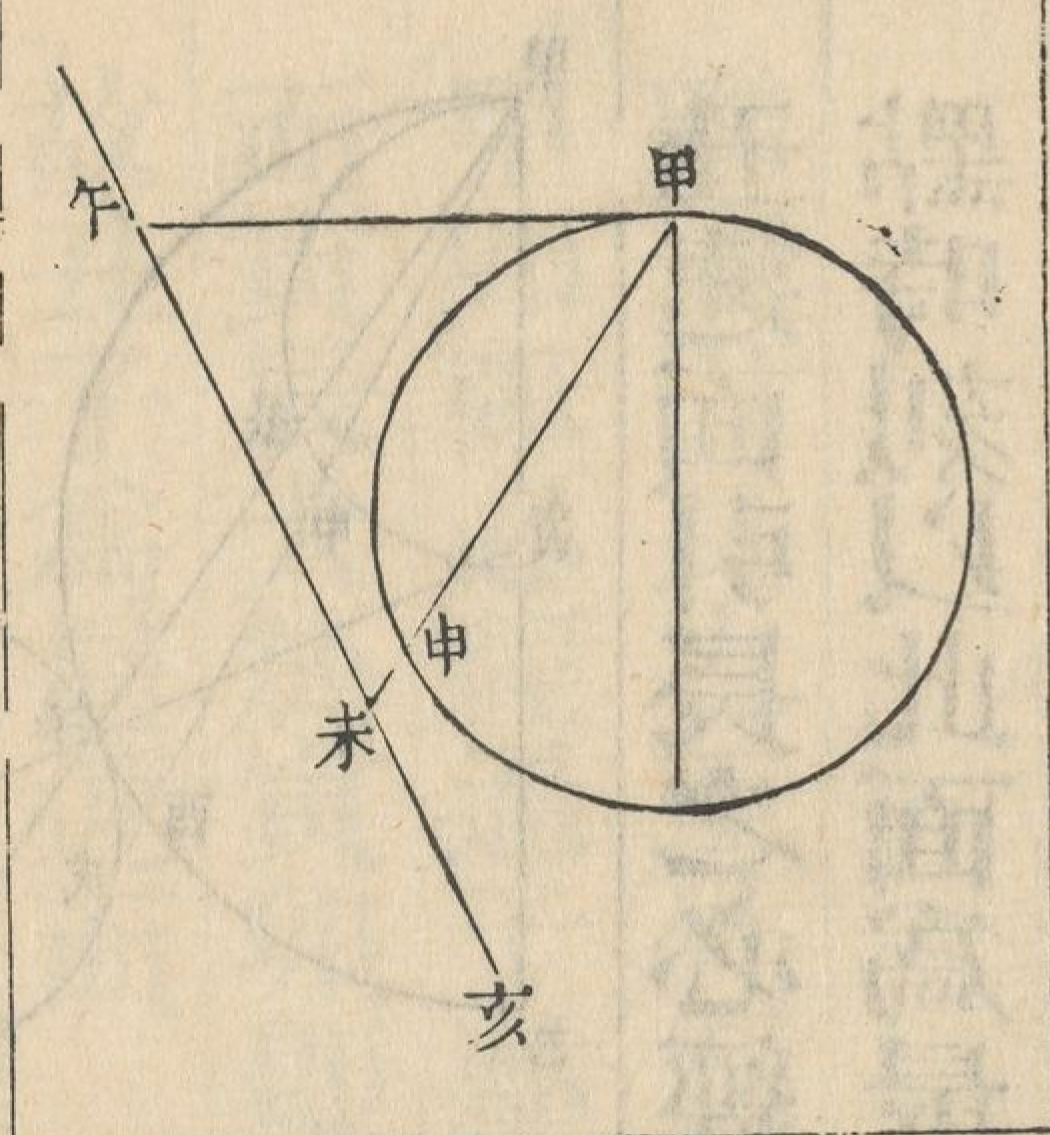
如圖從圓綫底點乙至直綫作乙午地平綫次於直綫上取午未等於乙午作未乙聯綫圓外未申一段即最速面也



解曰試自未點作未酉垂綫次自圓心丙作丙申綫引長之交垂綫於酉乃以酉為心未為界作申未弧必與圓綫相切於申點未酉申申丙乙為等勢兩三角形丙申等於丙乙故酉未等於酉申凡頂點在午亥綫上作弧與圓綫相切其半徑以未酉為最小試過申點作子丑綫平行於午亥即顯頂

點若不在未。未申弧卽與圓綫相離。必展大其半徑。作弧方能相切。故未酉爲最小半徑。又準前款任作未丁綫。時刻必大於未申。故未申面最速。

假如圓外有午亥直綫。從圓綫上行至直綫上何面最速。

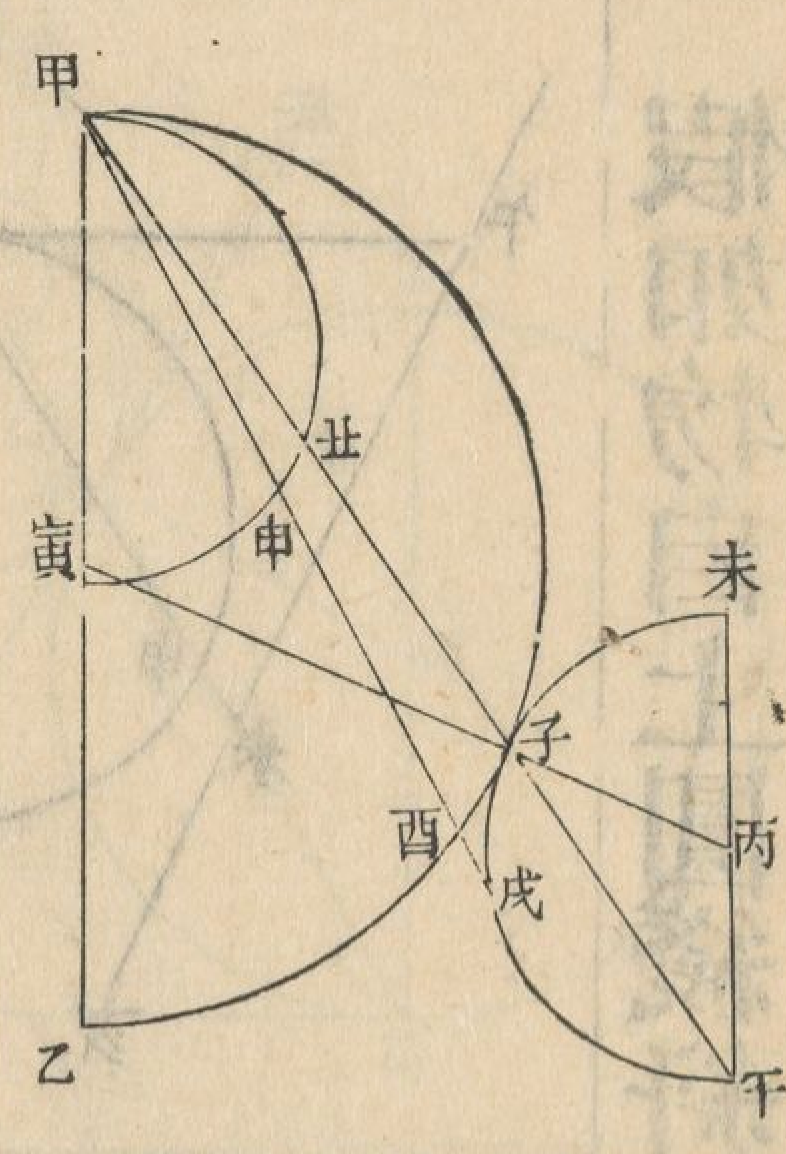


如圖。從圓綫頂點甲至直綫作甲午綫。平於地平。次於直綫上取午未。等於甲午。作甲未聯綫。圓外申未一段卽最速面也。

解同上題。

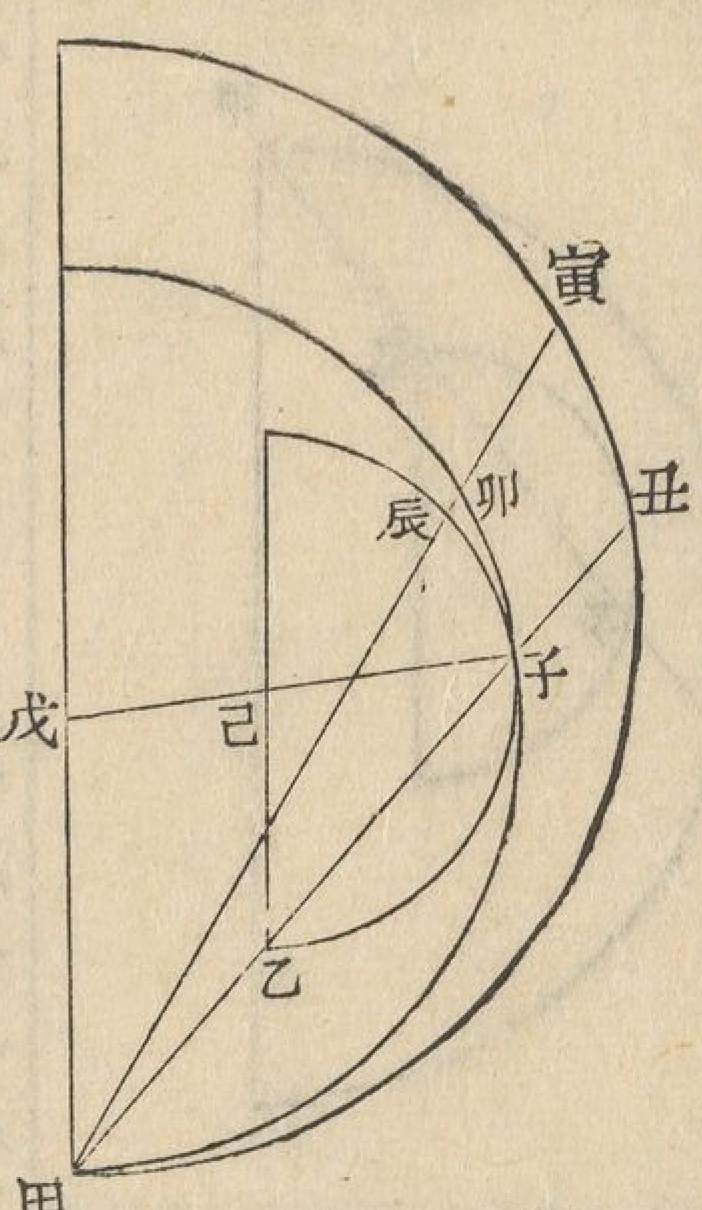
假如物自上圓綫斜行至下圓綫。何面最速。

如圖從上圓頂點甲至下圓底點午作聯綫中間子丑一段卽最速面、



解曰準本款第四題從子點作子丑速面、引長之必經過圓綫最高點甲、圓綫各點至子點時刻、以此面爲最小、試自午子未圓心丙點作丙子綫、引長之交甲乙於寅、寅甲等於寅子、以寅爲心、甲爲界、作甲子乙半圓周、又準前款、任作甲申酉戌綫、則丑子時刻等於申酉、必小於申戌、故丑子面最速、

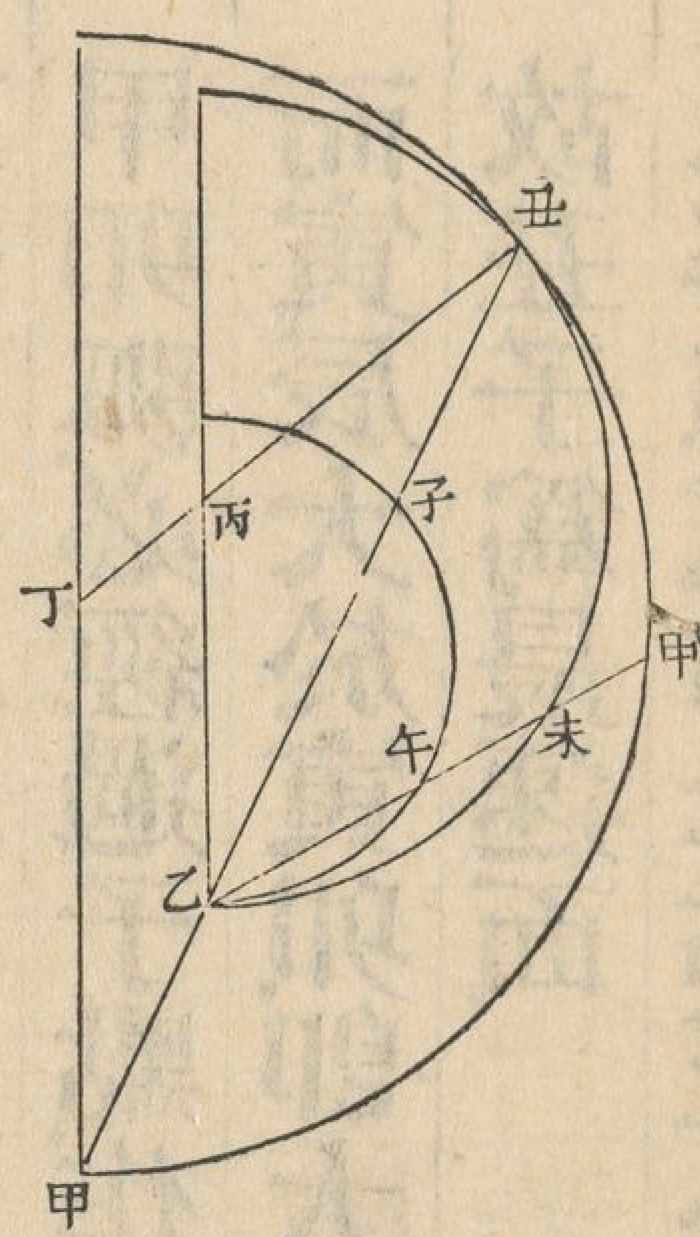
假如物自外圓綫行至內圓綫何面最速、



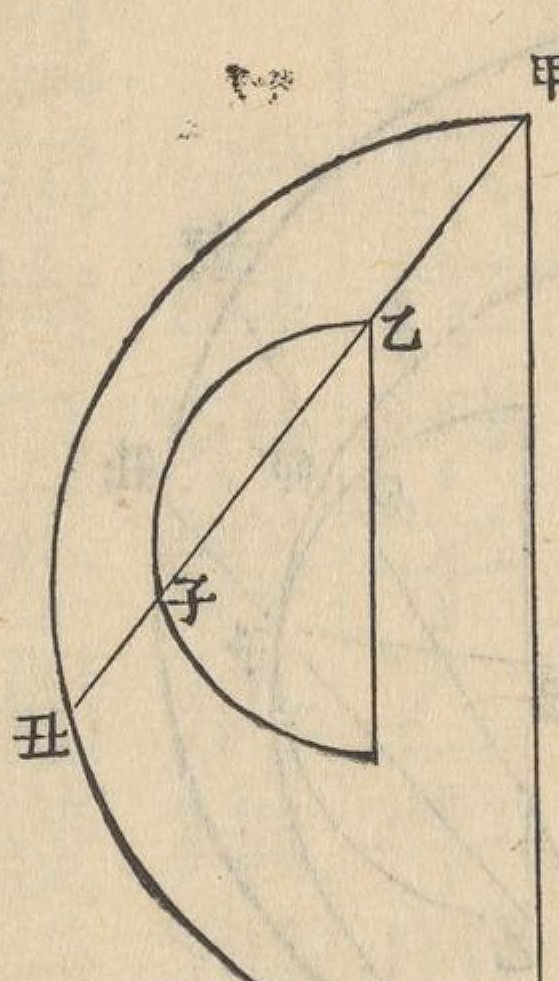
如圖自外圓底點甲至內圓底點乙作聯綫引長之至外圓界丑則內圓外丑子一段即最速面

解曰試自子點至內圓心己作聯綫引長之至外圓垂徑戊點乃以戊爲心甲爲界作甲卯弧必經過子點作甲寅綫則丑子與寅卯時刻等而寅辰大於寅卯即大於丑子自甲點任作他綫皆然故丑子爲最速面

又解曰試自丑點至外圓心丁作聯綫交內圓垂徑於



丙乃以丙爲心乙爲界作乙丑弧必經過丑點作乙申綫則未午與丑子時刻等而申午大於未午卽大於丑子自乙點任作他綫皆然故丑子爲最速面

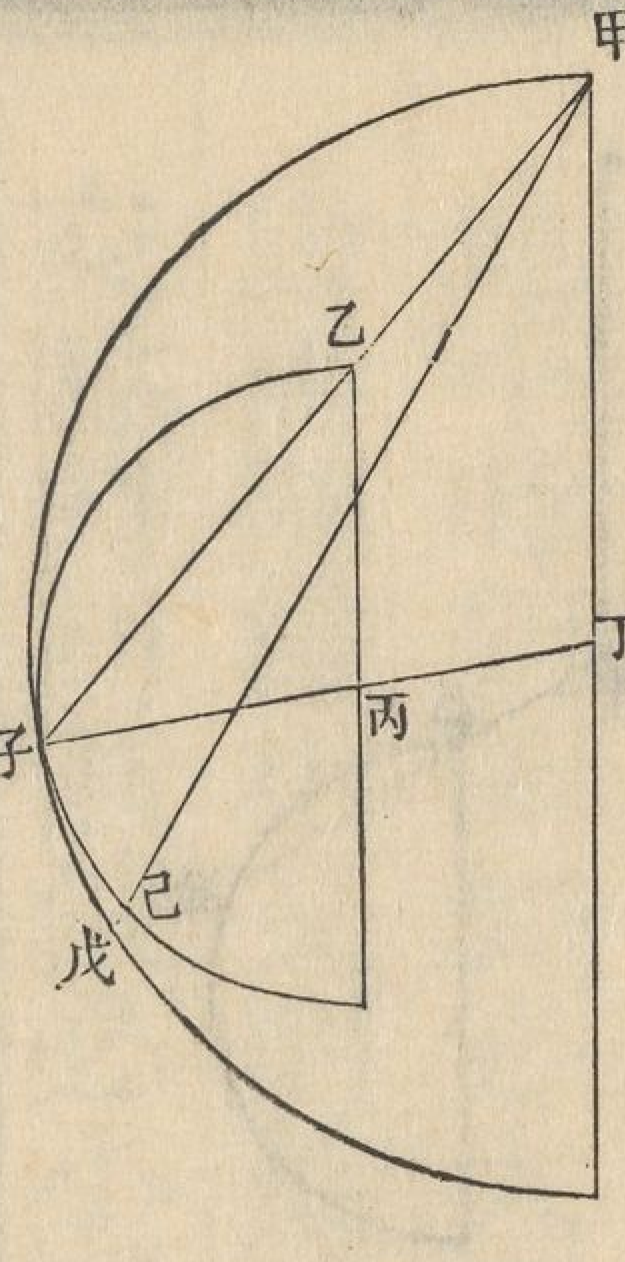


假如從內圓綫行至外圓綫何面最速

如圖自外圓頂點甲至內圓頂點乙作聯綫引長之至外圓界丑則內圓外子丑一段卽最速面

解見上題

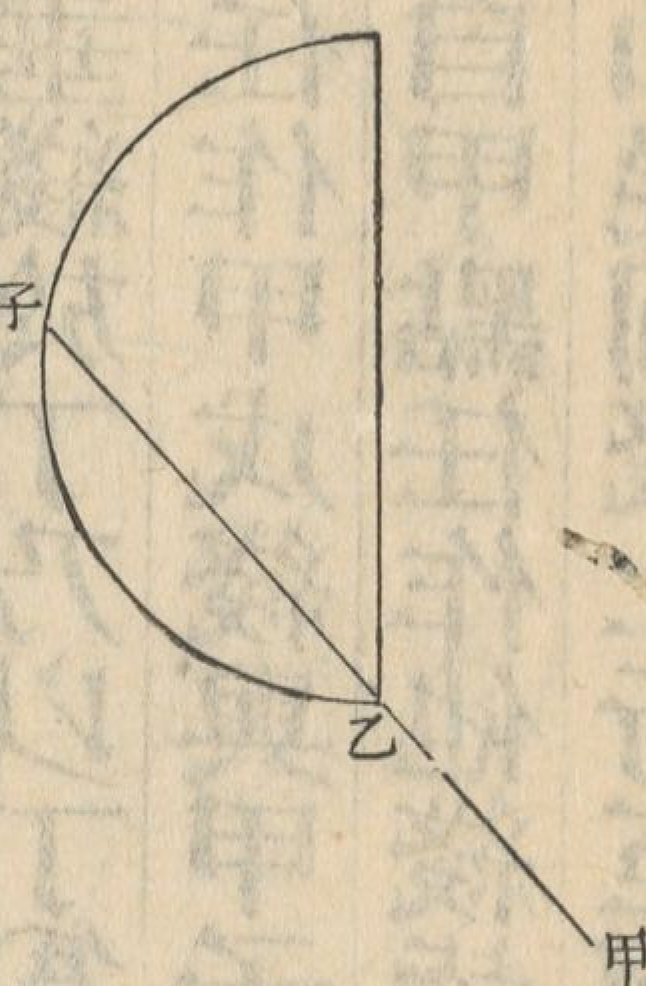
假如從圓綫外某點行至圓綫何面最遲.



如圖.自某點甲至圓頂乙作聯綫引長之至圓界子.甲子卽最遲面.

解曰.試自甲點作垂綫.次自子點至圓心丙作聯綫引長之遇垂綫於丁.乃以丁爲心.甲爲界.作甲戊弧.必經過子點.任作甲戊綫.與甲子時刻等.則甲己時刻必小於甲子.自甲點任作他綫.皆然.故甲子爲最遲面.

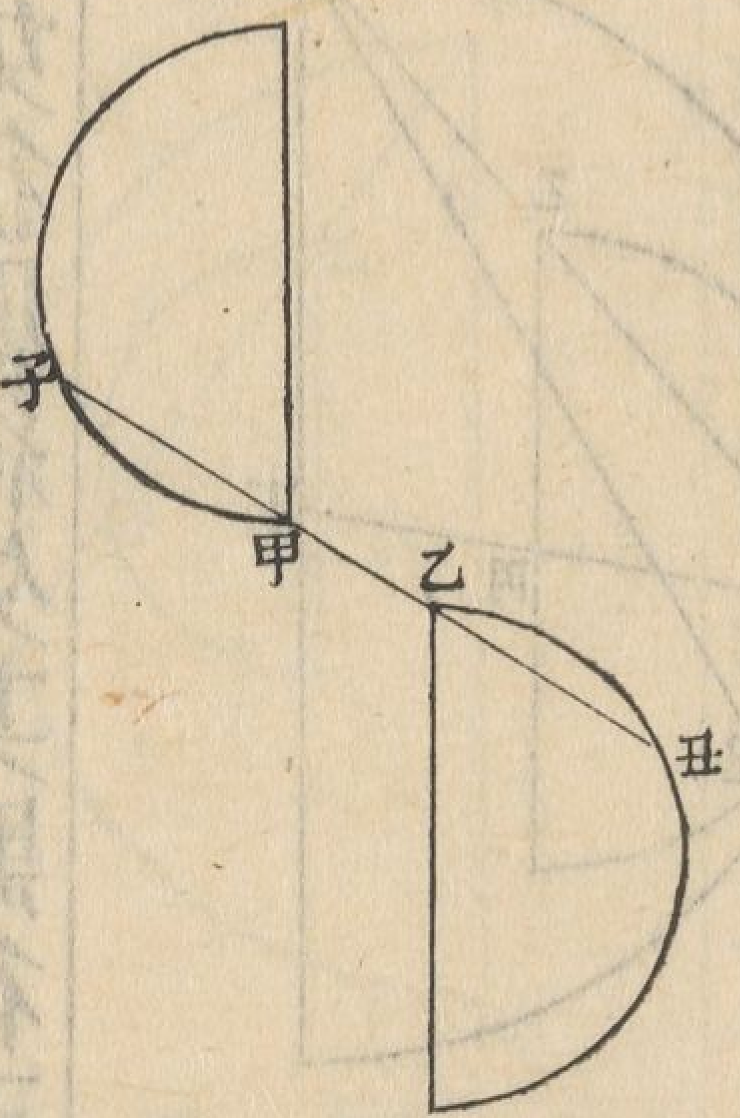
假如從圓綫上行至圓外某點何面最遲.



如圖自圓底乙至某點甲作聯綫引長之至圓界子子甲即最遲面

解同上題

假如彼圓綫在此圓綫外從此圓綫行至彼圓綫何面最遲



如圖從此圓綫底點甲至彼圓綫頂點乙作聯綫兩端俱引長之至圓界子丑二點子丑即最遲面

解曰合上二題觀之理自明。
設有兩點可作地平面，則最遲面不能求，因遲面漸近地平，時刻漸加，必大至無窮，故不可求。
設兩圓綫相交，則最速面不能求，因速面之兩端漸近交點，時刻漸減，必小至無窮，故不可求。

重學卷十終