Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 32

Übungsaufgaben

Aufgabe 32.1. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass für $u, v \in V$ die Gleichheit $|| v + u || = || v - u ||$ genau dann gilt, wenn $\langle v, u \rangle = 0$ ist.

Aufgabe 32.2. Bestimme, welche der folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ zueinander orthogonal bezüglich des Standardskalarproduktes sind.

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 32.3. Bestimme, welche der folgenden Vektoren im $\mathbb{C}^2$ zueinander orthogonal bezüglich des Standardskalarproduktes sind.

$$\begin{pmatrix} 6 - 3\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 - 7\mathrm{i} \\ -9 - 5\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\mathrm{i} \\ 2 + \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 - 2\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 + 2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 32.4.*

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Es sei $v \in V$ ein fixierter Vektor und $a \in \mathbb{K}$. Zeige, dass

$$\{u \in V | \langle u, v \rangle = a\}$$

ein affiner Unterraum von V ist.

Aufgabe 32.5. Diskutiere den Satz des Pythagoras im Sinne von Satz 32.3 im Vergleich zu der elementargeometrischen Version.

Aufgabe 32.6. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass das orthogonale Komplement ebenfalls ein Untervektorraum von V ist.

Aufgabe 32.7. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es sei u_i, $i \in I$, ein Erzeugendensystem von U. Zeige, dass ein Vektor $v \in V$ genau dann zum orthogonalen Komplement $U^\perp$ gehört, wenn

$$\langle v, u_i \rangle = 0$$

für alle $i \in I$ ist.

Aufgabe 32.8.*

Bestimme das orthogonale Komplement zu dem von $\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 32.9. Bestimme das orthogonale Komplement zu dem von $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum im $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 32.10. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei v_i, $i \in I$, eine Orthogonalbasis von V. Zu jeder Teilmenge $J \subseteq I$ sei der von v_i, $i \in J$, erzeugte Untervektorraum mit U_J bezeichnet. Zeige, dass das orthogonale Komplement von U_J gleich $U_{I \setminus J}$ ist.

Aufgabe 32.11. Betrachte eine Ecke in einem (rechtwinkligen) Zimmer. Bilden die drei Diagonalvektoren in den beiden anliegenden Wänden und dem Boden der Länge 1 eine Orthonormalbasis?

Aufgabe 32.12. Es sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Orthonormalbasis von V. Zeige, dass

$$u_1, \mathrm{i}u_1, u_2, \mathrm{i}u_2, \ldots, u_n, \mathrm{i}u_n$$

eine Orthonormalbasis des reellen Vektorraums V bezüglich des zugehörigen reellen Skalarprodukts ist.

Aufgabe 32.13. Es sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei u_i, $i \in I$, eine Orthonormalbasis von V. Zeige, dass für Vektoren $v = \sum_{i \in I} a_i u_i$ und $w = \sum_{i \in I} b_i u_i$ die Gleichheit

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i \in I} a_i b_i$$

gilt.

Die folgende Aufgabe ist die Grundlage der sogenannten *Fourier-Analysis*, bei der es darum geht, Schwingungen als Limes von trigonometrischen Schwingungen darzustellen.

Aufgabe 32.14.*

Zeige, dass die Funktionen

$$f_m\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$f_m(x) := e^{2\pi \mathrm{i} m x}$$

zu $m \in \mathbb{Z}$ im Raum der stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{C}$ ein Orthonormalsystem bezüglich des durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f \overline{g} dx$$

gegebenen Skalarproduktes bilden. Verwende dabei Grundtatsachen über die komplexe Exponentialfunktion.

Aufgabe 32.15.*

Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe 32.16.*

Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe 32.17. Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt, an.

Aufgabe 32.18. Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} 4 - \mathrm{i} \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 2 - \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{C}^2$ an.

AUFGABE 32.19. Erstelle eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, die ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält.

AUFGABE 32.20. Der $\mathbb{R}^3$ sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto 3x + y + 7z,$$

versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt. Man bestimme eine Orthonormalbasis für U.

AUFGABE 32.21. Der $\mathbb{R}^4$ sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z,w) \longmapsto 4x - 3y + 2z - 5w,$$

versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt. Man bestimme eine Orthonormalbasis für U.

AUFGABE 32.22. Formuliere und beweise den „orthonormalen Basisergänzungssatz“.

AUFGABE 32.23. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige, dass für die orthogonalen Komplemente die Gleichheit

$$(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$$

gilt.

AUFGABE 32.24. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Zu Untervektorräumen $U \subseteq U' \subseteq V$ ist
$$U^{\perp} \supseteq U'^{\perp}.$$
(2) Es ist $0^{\perp} = V$ und $V^{\perp} = 0$.
(3) Sei V endlichdimensional. Dann ist
$$\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U.$$
(4) Sei V endlichdimensional. Dann ist
$$\dim\left(U^{\perp}\right) = \dim(V) - \dim(U).$$

AUFGABE 32.25. Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeige, dass durch

$$V \longrightarrow V^*,\ v \longmapsto (w \mapsto \langle v, w \rangle),$$

eine Isomorphie zwischen V und seinem Dualraum V^* gestiftet wird.

Aufgabe 32.26. Beweise Korollar 32.13 mit Hilfe von Aufgabe 32.25 und Lemma 15.6.

Aufgabe 32.27. Bestimme den Wert des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ unter der orthogonalen Projektion auf die von $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ erzeugte Gerade.

Aufgabe 32.28. Bestimme den Wert des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ unter der orthogonalen Projektion auf den von $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum.

Aufgabe 32.29. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und es seien

$$U \subseteq W \subseteq V$$

Untervektorräume. Es bezeichne p_U^V die orthogonale Projektion von U auf V. Zeige

$$p_U^V = p_U^W \circ p_W^V.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 32.30. (3 Punkte)

Bestimme das orthogonale Komplement zu dem von $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum im $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 32.31. (3 (1+1+1) Punkte)

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ seien mit dem Standardskalarprodukt $\langle -, - \rangle$ versehen.

(1) Bestimme zu dem von $4+7\mathrm{i}$ erzeugten komplexen Untervektorraum von $\mathbb{C}$ das orthogonale Komplement bezüglich $\langle -, - \rangle$.
(2) Bestimme zu dem von $4+7\mathrm{i}$ erzeugten komplexen Untervektorraum von $\mathbb{C}$ das orthogonale Komplement bezüglich des Realteils zu $\langle -, - \rangle$ (also dem zugehörigen reellen Skalarprodukt).

(3) Bestimme zu dem von $4+7\mathrm{i}$ erzeugten reellen Untervektorraum von $\mathbb{C}$ das orthogonale Komplement bezüglich des Realteils zu $\langle -,-\rangle$.

Aufgabe 32.32. (5 Punkte)

Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die linear unabhängigen polynomialen Funktionen

$$1, x, x^2, x^3 \in V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} |\, f \text{ stetig}\}$$

mit dem in Beispiel 31.6 beschriebenen Skalarprodukt an.

Aufgabe 32.33. (2 Punkte)

Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} 5-2\mathrm{i} \\ 3-3\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6-\mathrm{i} \\ -2+4\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{C}^2$ an.

Aufgabe 32.34. (4 Punkte)

Bestimme den Wert des Vektors $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ unter der orthogonalen Projektion auf den von $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum.