Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 4

Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1. Zeige, dass die Verknüpfung auf einer Geraden, die zwei Punkten ihren Mittelpunkt zuordnet, kommutativ, aber nicht assoziativ ist. Gibt es ein neutrales Element?

Aufgabe 4.2. Es sei D die Menge aller weiblichen Doppelvornamen (Bindestrichvornamen, wobei die einzelnen Teile einfache Vornamen sind). Wir betrachten die Verknüpfung

$$D \times D \longrightarrow D,$$

die einem Doppelvornamenpaar $(A-B, C-D)$ den Doppelvornamen $A-D$ zuordnet.

(1) Was ist der Wert von (Lea-Marie, Klara-Sophie) unter dieser Verknüpfung?
(2) Ist die Verknüpfung kommutativ?
(3) Ist die Verknüpfung assoziativ?
(4) Besitzt die Verknüpfung ein neutrales Element?
(5) Ist die Verknüpfung surjektiv?
(6) Ist die Verknüpfung injektiv?

Aufgabe 4.3.*

Zeige, dass in einem Körper K zu jedem Element $x \neq 0$ das Element z mit $xz = 1$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 4.4. Es sei K ein Körper und seien a, b Elemente aus K. Zeige, dass die folgenden Vorzeichenregeln gelten.

(1)
$$(-a)b = -ab = a(-b).$$
(2)
$$(-a)(-b) = ab.$$
(3)
$$a(b-c) = ab - ac.$$

Aufgabe 4.5. Beschreibe und beweise Regeln für die Addition und die Multiplikation von geraden und ungeraden ganzen Zahlen. Man definiere auf der zweielementigen Menge

$$\{G, U\}$$

eine „Addition“ und eine „Multiplikation“, die diese Regeln „repräsentieren“.

Aufgabe 4.6. Es sei K ein Körper. Zeige, dass man jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Körperelement n_K zuordnen kann, so dass 0_K das Nullelement in K und 1_K das Einselement in K ist und so dass

$$(n+1)_K = n_K + 1_K$$

gilt. Zeige, dass diese Zuordnung die Eigenschaften

$$(n+m)_K = n_K + m_K \text{ und } (nm)_K = n_K \cdot m_K$$

besitzt.

Erweitere diese Zuordnung auf die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und zeige, dass die angeführten strukturellen Eigenschaften ebenfalls gelten.

Aufgabe 4.7. Es sei K ein Körper mit $2 \neq 0$. Zeige, dass für $f, g \in K$ die Beziehung

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$$

gilt.

Aufgabe 4.8. Es seien x, y, z, w Elemente in einem Körper, wobei z und w nicht null seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

(1)
$$\frac{x}{1} = x,$$

(2)
$$\frac{1}{z} = z^{-1},$$

(3)
$$\frac{1}{-1} = -1,$$

(4)
$$\frac{0}{z} = 0,$$

(5)
$$\frac{z}{z} = 1,$$

(6)
$$\frac{x}{z} = \frac{xw}{zw},$$

(7)
$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw},$$
(8)
$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw + yz}{zw}.$$
Gilt die zu (8) analoge Formel, die entsteht, wenn man die Addition mit der Multiplikation vertauscht, also
$$(x - z) \cdot (y - w) = (x + w)(y + z) - (z + w)?$$
Zeige, dass die „beliebte Formel“
$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x + y}{z + w}$$
nicht gilt.

Aufgabe 4.9. Es sei K ein Körper und seien $a, b \neq 0$ Elemente aus K. Beweise die folgenden Potenzgesetze für natürliche Exponenten $m, n \in \mathbb{N}$.

(1)
$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$
(2)
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$
(3)
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Aufgabe 4.10.*

Es sei K ein Körper und seien $a, b \neq 0$ Elemente aus K. Beweise die folgenden Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten $m, n \in \mathbb{Z}$. Dabei darf man die entsprechenden Gesetze für Exponenten aus $\mathbb{N}$ sowie die Tatsachen, dass das Inverse des Inversen wieder das Ausgangselement ist und dass das Inverse von u^k gleich $(u^{-1})^k$ ist, verwenden.

(1)
$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$
(2)
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$
(3)
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Aufgabe 4.11. Berechne das Matrizenprodukt
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.12.*

a) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in \,]0, 1[$ mit
$$a^2 + b^2 = c^2 \,.$$

b) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in \,]0, 1[$ mit
$$a^2 + b^2 \neq c^2 \,.$$

c) Man gebe ein Beispiel für irrationale Zahlen $a, b \in \,]0, 1[$ und eine rationale Zahl $c \in \,]0, 1[$ mit
$$a^2 + b^2 = c^2 \,.$$

Aufgabe 4.13.*

Zeige, dass die Binomialkoeffizienten die rekursive Beziehung
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$
erfüllen.

Aufgabe 4.14. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten natürliche Zahlen sind.

Aufgabe 4.15. Beweise die Formel
$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Aufgabe 4.16.*

Beweise durch Induktion, dass für
$$n \geq 10$$
die Abschätzung
$$3^n \geq n^4$$
gilt.

Aufgabe 4.17.*

Franziska möchte mit ihrem Freund Heinz Schluss machen. Sie erwägt die folgenden drei Begründungen.

(1) „Du hast dich schon am ersten Tag voll daneben benommen. Seitdem ist es von jedem Tag zum nächsten Tag nur noch schlimmer geworden. Du wirst Dich also immer völlig daneben benehmen“.

(2) „Wenn ich mit Dir zusammenbleiben würde, so würde ich irgendwann als eine traurige, gelangweilte, vom Leben enttäuschte Person enden, das möchte ich aber auf gar keinen Fall“.
(3) „Also, wenn Du mich nicht liebst, will ich Dich sowieso nicht. Wenn Du mich aber liebst, so komme ich zu dem Schluss, dass Du dein Verhalten mit Deinen Gefühlen nicht zur Deckung bringen kannst. Dann bist Du also unreif und dann will ich Dich auch nicht“.

Welche mathematischen Beweisprinzipien spiegeln sich in den drei Begründungen wieder?

Aufgabe 4.18.*

(1) Löse das folgende Minisudoku

$$\begin{pmatrix} - & - & 2 & - \\ 3 & - & - & 4 \\ - & - & - & - \\ - & 4 & - & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Begründe, dass das Minisudoku aus (1) nur eine Lösung besitzt.
(3) Welche mathematischen Beweisverfahren finden sich als typische Argumentationsschemata beim Lösen eines Sudokus wieder?

Aufgabe 4.19. Nehmen Sie Stellung zur folgenden Aussage: „Das Prinzip „Beweis durch Widerspruch“ ist offenbar absurd. Wenn man alles annehmen darf, so kann man immer einen Widerspruch erzielen und somit alles beweisen“.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.20. (2 Punkte)

Zeige, dass das Potenzieren auf den positiven natürlichen Zahlen, also die Zuordnung

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ (a,b) \longmapsto a^b,$$

weder kommutativ noch assoziativ ist. Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element?

Aufgabe 4.21. (2 Punkte)

Es sei a ein von 0 verschiedenes Element in einem Körper. Zeige, wie man a^{10} mit vier Multiplikationen berechnen kann.

AUFGABE 4.22. (5 Punkte)

Beweise das allgemeine Distributivgesetz für einen Körper.

AUFGABE 4.23. (3 Punkte)

Zeige, dass die „Rechenregel“

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

bei $a, c \in \mathbb{N}_+$ (und $b, d, b+d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) niemals gilt. Man gebe ein Beispiel mit $a, b, c, d, b+d \neq 0$, wo diese Regel gilt.

AUFGABE 4.24. (2 (1+1) Punkte)

Es sei $u \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{Q}$.

(1) Zeige, dass u genau dann irrational ist, wenn $u + v$ irrational ist.
(2) Sei zusätzlich $v \neq 0$. Zeige, dass u genau dann irrational ist, wenn $u \cdot v$ irrational ist.

AUFGABE 4.25. (3 Punkte)

Beweise die Formel

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

Abbildungsverzeichnis