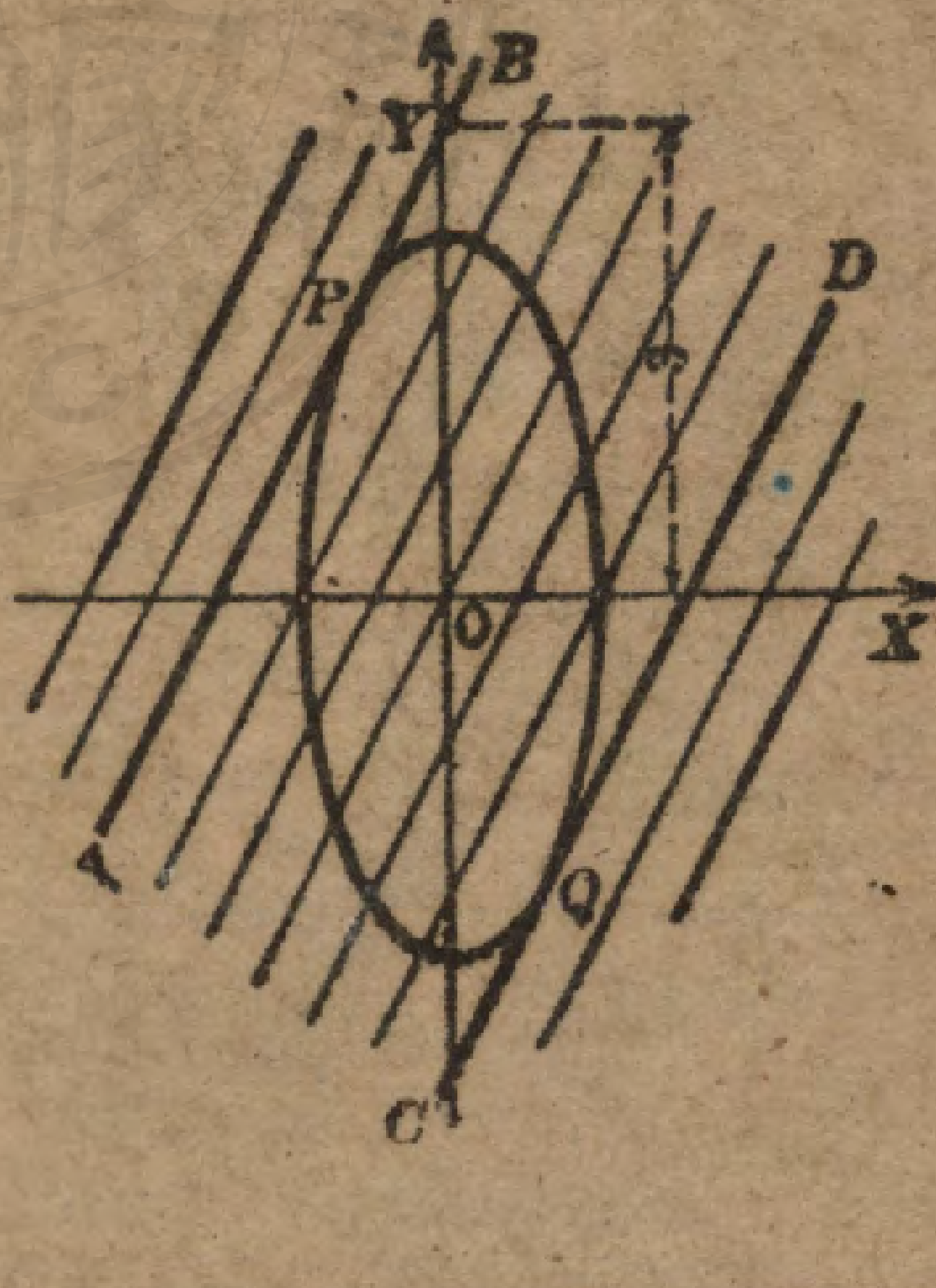
SMITH
GALE
NEELLEY

解析幾何學

邱調梅譯　馬地泰校訂



世界書局發行

解析幾何

解析幾何學之意義　解析幾何學爲法人笛卡兒 René Descartes 氏所首創。氏爲有名之哲學家兼科學家,其在數學上之貢獻頗多,而以解析幾何學爲最著。解析幾何者,一名代數幾何,即冶代數學與幾何學於一爐,乃用坐標法以研究幾何圖形之性質之學問也。

本書之特點　本書之內容,繁簡適中,深淺合度,採作教材,最爲相宜。其編制方法,對於論理程序及學習心理二方,均能兼籌並顧。書中習題,亦頗有伸縮性。教師可以因材施教,不必更事蒐羅。故樂爲譯出之。

學習解析幾何學之方法　學習一般數學之要點,爲方法,理論與思考,解析幾何學,亦然。方

學習要點

法爲技術上之問題,熟後方能生巧,此習題之所以不能不勤作也.理論爲數學之精華,凡一定律或一定理當前必須細究其理.是否全部明瞭?如若尙有疑點,必須時加應用.切不可徒事強記,以免食而不化.理論或應用題,須時加思考,務使觸類旁通,得心應手,方稱善讀.總之:天資雖有高下,成功端賴努力,更毋一暴十寒,則成績斐然,可預卜也.

須熟繪各種圖形 初等代數學中之坐標法,即爲解析幾何學之初步.應用此法,能使幾何圖形用方程式表出之.解析幾何學所涉及之圖形頗多除直線形與圓外,尙有圓錐曲線,高次曲線,超越曲線,及一次與二次之面.讀者應熟習此種圖形之性質及其畫法,則在繪圖時可得不少便利.

原　　序

著者於此改訂本中，凡諸教師所讚許各點，仍保留之．且依經驗所得更完成之．書中大旨，無甚變更．祇增添使學生發生興趣之幾個論題．此等重排之變更，其目的耑爲前後一貫之發展，而於適當時加入更新奇與艱難之論題．

須注意者，著者以初版之新材料爲本書之標準，此或爲讀者所諒解．解析幾何學之課程，現當包含超越曲線，通徑方程式，圖形，及經驗方程式諸章．

許多教師欲將立體解析幾何學之課程略爲縮短．現所編列，適合此要求．但更有教師希望此科爲微積分之充分預備．故凡此所需之材料，本書亦一概具備．

習題亦已全部改訂．有數組標明"個別研究或特設"者，大概施於一般指定，則屬太難，乃供優材生得一研討或互相詰難之機會焉．

目　　錄

第一章　供參考用之公式及表

第二章　笛卡兒坐標

第三章　曲線及方程式

第四章　直線

第七章 坐標之變換

第八章 切線

第九章 極坐標

第十章 超越曲線

第十四章　空間之平面與直線

第十五章　特種曲面

第十六章 空間幾何補編

第十七章 坐標之變換 各種坐標制

第一章

供參考用之公式及表

1. 茲將幾何學，代數學，三角學中已證明之公式與定理寫下，以便以後諸章之引用。

幾何學

(1) 下列諸公式中，r 表半徑，a 表高，B 表底面積，s 表斜高.

圓(Circle). 圓周 $=2\pi r$. 面積 $=\pi r^2$.

角柱體(Prism). 體積 $=Ba$.

角錐體 (Pyramid). 體積 $=\frac{1}{3}Ba$.

直圓柱體(Right circular cylinder). 體積 $=\pi r^2a$. 側面積 $=2\pi ra$. 總面積 $=2\pi r(r+a)$.

直圓錐體 (Right circular cone). 體積 $=\frac{1}{3}\pi r^2a$. 側面積 $=\pi rs$. 總面積 $=\pi r(r+s)$.

球 (Sphere). 體積 $=\frac{4}{3}\pi r^3$. 面積 $=4\pi r^2$.

代數學

(2)二次方程式 $Ax^2+Bx+C=0$.

[解] 1. 分解因子法: 分解 Ax^2+Bx+C，命各因子等於零而解 x.

2. 配方法: 移 C 於等號之右端，以 x^2 之係數除各項，加 x 係數之半之平方於等號之兩端，而求其平方根.

3. 用公式 $$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$$

根之性質. 根號內 B^2-4AC 式稱為判別式(Discriminant). 兩根之為不等實根，等實根，或虛根，全視判別式之為正，為零，或為負而定.

(3) **對數.**

$$\log ab = \log a + \log b.\quad \log a^n = n\log a \qquad \log 1 = 0.$$

$$\log\frac{a}{b} = \log a - \log b.\ \log\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log a.\ \log_a a = 1.$$

三　角　法

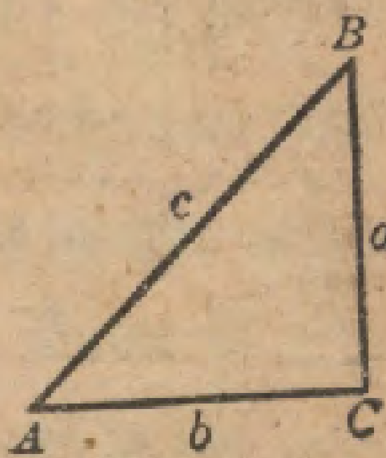
(4)**直角三角形**　銳角 A 之函數,其定義如下:

$\sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{弦}}$,　　$\csc A = \frac{\text{弦}}{\text{對邊}}$,

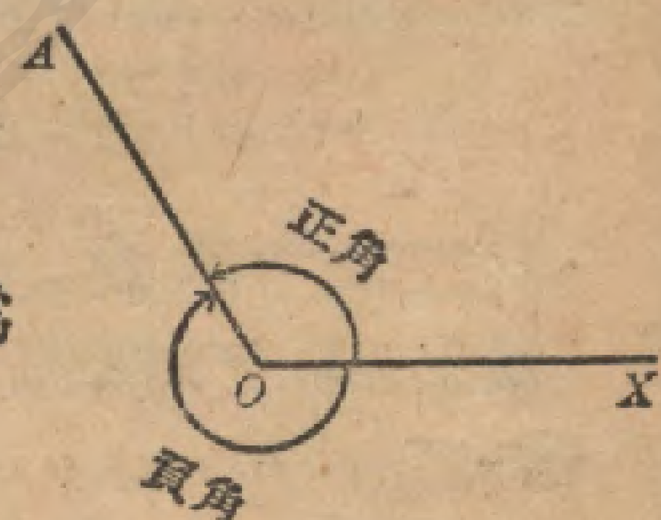
$\cos A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{弦}}$,　　$\sec A = \frac{\text{弦}}{\text{鄰邊}}$,

$\tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$,　　$\cot A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}$.

定理　直角三角形之一邊等於弦與此邊所對角之正弦之乘積,或弦與此邊相鄰角之餘弦之乘積.



(5)**普通角**　角 XOA 可視作一線自 OX 旋轉至 OA 所成.此線如依逆時針方向旋轉時,則所成之角爲正,而順時針方向旋轉時,則所成之角爲負.此定線 OX 謂之始線(Initial line),而 OA 稱謂終線(Terminal line).(見下圖).



(6)**角之量法**　量角之大小,常有二法;卽角之單位有兩種.

度制(Degree measure).　此單位角爲全周之 $\frac{1}{360}$,而稱之曰一度(Degree).

弧度 (Circular measure).　此單位角爲與半徑等長之弧所對之圓心角,而稱之曰一弧度(Radian).

兩種單位角之關係,可以方程式

$$180\text{ 度} = \pi\text{ 弧度}(\pi = 3.14159\cdots\cdots);$$

表之,又解此式,得

$$1\text{ 度} = \frac{\pi}{180} = 0.0174\cdots\cdots\text{弧度};\qquad 1\text{ 弧度} = \frac{180}{\pi} = 57.29\cdots\cdots\text{度}.$$

從上定義,得 $\text{一角之弧數}=\dfrac{\text{所張之弧}}{\text{半徑}}$.

此等方程式可將一種量法化成他種量法.

(7)三角函數間之關係.

$$\cot x=\frac{1}{\tan x};\quad \sec x=\frac{1}{\cos x};\quad \csc x=\frac{1}{\sin x};$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x};\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1;\quad 1+\tan^2 x=\sec^2 x;\quad 1+\cot^2 x=\csc^2 x.$$

(8) 化成正銳角諸公式

角	正弦	餘弦	正切	餘切	正割	餘割
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$
$90°-x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$\csc x$	$\sec x$
$90°+x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$-\csc x$	$\sec x$
$180°-x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$-\sec x$	$\csc x$
$180°+x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$-\sec x$	$-\csc x$
$270°-x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$-\csc x$	$-\sec x$
$270°+x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$\csc x$	$-\sec x$
$360°-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$

(9) $(x+y)$ 與 $(x-y)$ 之三角函數.

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y.$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y.$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$$

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}.\quad \tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}.$$

(10) $2x$ 與 $\frac{1}{2}x$ 之三角函數.

$$\sin 2x=2\sin x\cos x;\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x;$$

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}};\quad \cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}};$$

$$\tan\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

$$\sin^2 x=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2x;\quad \cos^2 x=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2x.$$

(11)任意三角形之關係　餘弦定律．在任意三角形內，一邊之平方等於其他兩邊之平方和減去此二邊與所夾角之餘弦乘積之兩倍；即

$$a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos A.$$

三角形之面積　任意三角形之面積等於其二邊與所夾角之正弦之乘積之半；即

$$\text{面積}=\tfrac{1}{2}\,ab\sin C=\tfrac{1}{2}\,bc\sin A=\tfrac{1}{2}\,ac\sin B.$$

2．特別角之三角函數眞數值．

角弧度	角度	sin	cos	tan	cot	sec	csc
0	0°	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	∞	0	∞	1
π	180°	0	−1	0	∞	−1	∞
$\frac{3}{2}\pi$	270°	−1	0	∞	0	∞	−1
2π	360°	0	1	0	∞	1	∞

角弧度	角度	sin	cos	tan	cot	sec	csc
0	0°	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{1}{6}\pi$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
$\frac{1}{4}\pi$	45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	∞	0	∞	1

3．三角函數符號之規則．

象限	sin	cos	tan	cot	sec	csc
第一象限	+	+	+	+	+	+
第二象限	+	−	−	−	−	+
第三象限	−	−	+	+	−	−
第四象限	−	+	−	−	+	−

4. 三角函數之眞數值.

角弧度	角度	sin	cos	tan	cot		
.000	0°	.000	1.000	.000	∞	90°	1.571
.017	1°	.017	1.000	.017	57.29	89°	1.553
.035	2°	.035	.999	.035	28.64	88°	1.536
.052	3°	.052	.999	.052	19.08	87°	1.518
.070	4°	.070	.998	.070	14.30	86°	1.501
.087	5°	.087	.996	.088	11.43	85°	1.484
.175	10°	.174	.985	.176	5.67	80°	1.396
.262	15°	.259	.966	.268	3.73	75°	1.309
.349	20°	.342	.940	.364	2.75	70°	1.222
.436	25°	.423	.906	.466	2.14	65°	1.134
.524	30°	.500	.866	.577	1.73	60°	1.047
.611	35°	.574	.819	.700	1.43	55°	.960
.698	40°	.643	.766	.839	1.19	50°	.873
.785	45°	.707	.707	1.000	1.00	45°	.785
		cos	sin	cot	tan	角度	角弧度

5. 希臘字母.

字母		名稱	字母		名稱	字母		名稱
Α	α	Alpha	Ι	ι	Iota	Ρ	ρ	Rho
Β	β	Beta	Κ	κ	Kappa	Σ	σς	Sigma
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	Τ	τ	Tau
Δ	δ	Delta	Μ	μ	Mu	Υ	υ	Upsilon
Ε	ε	Epsilon	Ν	ν	Nu	Φ	φ	Phi
Ζ	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	Χ	χ	Chi
Η	η	Eta	Ο	ο	Omicron	Ψ	ψ	Psi
Θ	ϑ	Theta	Π	π	Pi	Ω	ω	Omega

第 二 章

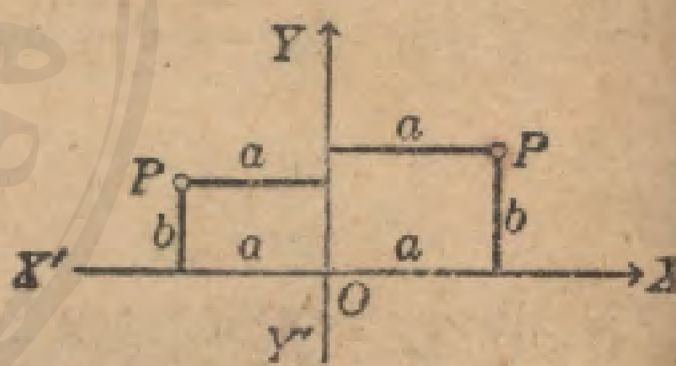
(橫坐標與縱坐標統名坐標)

笛卡兒坐標 (Cartesian coördinates)

6. 解析幾何學中之問題，須用坐標，方程式，與代數學中之方法以解之.

7. 笛卡兒 * 直坐標 (Rectangular Cartesian coördinates)

設 XX' 與 YY' 爲一平面中互相垂直之兩直線，其交點爲 O. 從 YY' 至此平面內一點之距離，稱謂此點之橫坐標 (Abscissa)；從 XX' 至此點之距離，稱謂縱坐標 (Ordinat). 平面內一點之位置可由此二距離，並依下述符號規則以決定之：



當一點 P 在 YY' 之右時，則其橫坐標爲正；在左則爲負，如 P 在 XX' 之上，則其縱坐標爲正；在下則爲負.

P 之橫坐標 a 與縱坐標 b 卽爲 P 之坐標而寫在括號中，如 (a,b) 橫坐標須置於縱坐標之前. 直線 XX' 與 YY' 爲坐標之軸 (Axes of coördinates)：XX' 爲 x 軸(或橫軸 Axis of abscissas)；YY' 爲 y 軸(或縱軸 Axis of ordinates). 點 O 爲原點 (Origin).

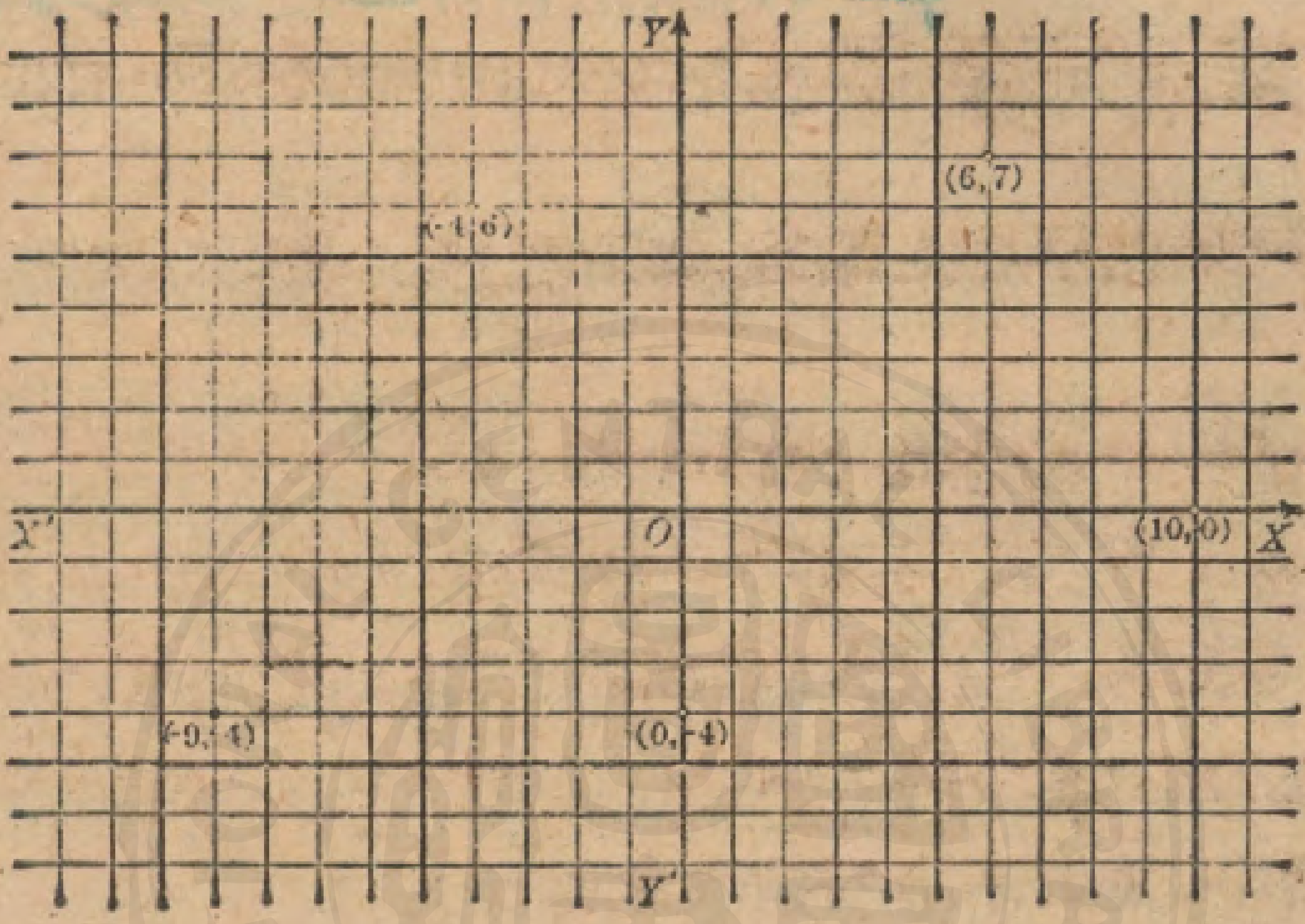
在直坐標系中作點，以用坐標紙或方格紙爲便. 此種紙須在平面中分成諸相等小方格，其邊各與軸平行.

圖中所作之諸點，其長之單位假定等於各軸上每一分段. 其法如下：

---

*笛卡兒 (Rene Descartes, 1596－1650) 首將坐標觀念引用於幾何學之硏究。故其後卽以其名稱此坐標。

從 O 沿 XX' 數出若干分段與已知橫坐標之數相等——如橫坐標爲正，則向右數；爲負則向左數．從此處決定之點再向上或向

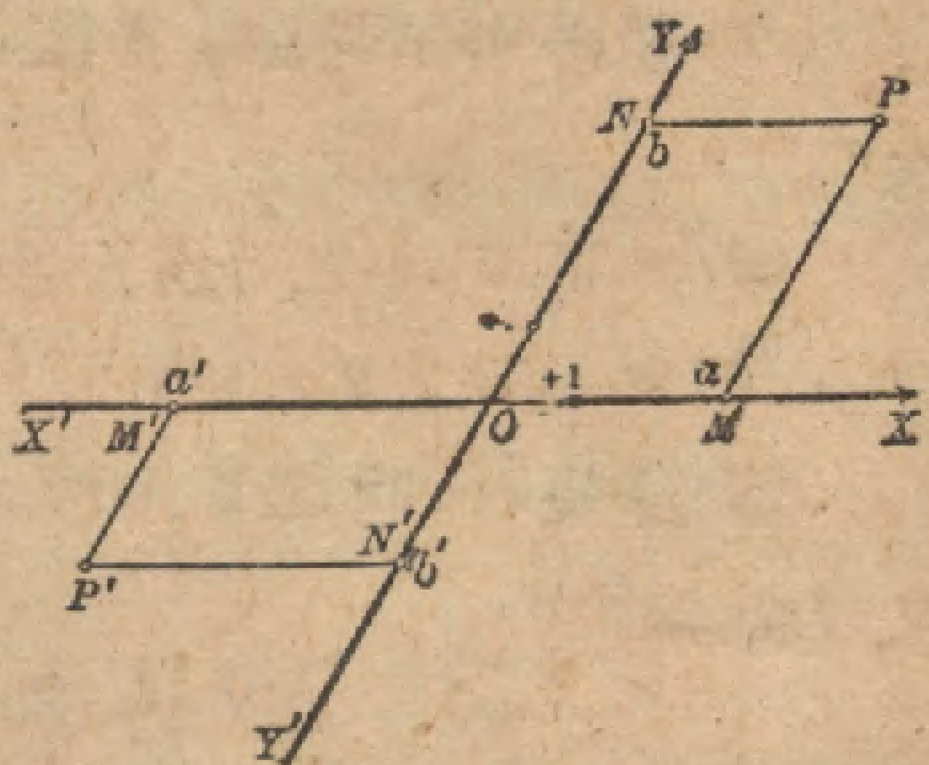


下，依其正號或負號，數取若干分段與縱坐標之數相等．

直坐標軸分平面成四部分，謂之象限(Quadrants)．其次序如圖，其中各坐標之符號亦已指明．

爲區別於直坐標起見，當二軸不相垂直時，稱之爲斜坐標 (Oblique coördinates)（見第 8 頁上之圖）．P 之坐標現爲平行於軸之兩線 MP 與 NP．其橫坐標爲 $NP(=OM)$，而其縱坐標爲 MP．上述之符號規則，在此情形中亦適用之．

下列諸習題除另有說明外，皆用直坐標.



平面內任一點 P 可決定二數，即 P 之坐標是也. 反之，已知二實數 a 與 b'，則常可決定在平面內一點 P'，其坐標為 (a',b'). 因截取 $OM'=a'$，$ON'=b'$，而過 M' 與 N' 畫平行於軸之兩線. 此兩線相交於 $P'(a',b')$. 故

每點決定一對實數，而反之，一對實數可決定一點.

代數學中之虛數，在此圖示法中無位置，因此初等解析幾何學僅與代數學之實數有關.

習　　題一

(1)試正確作 $(6,2)$，$(-2,6)$，$(3,-3)$，$(4,0)$，$(0,-2)$，$(-4,-3)$ 諸點.

(2)一點之軌跡為何，如此點移動時(1)其橫坐標常為 -3?(2)其縱坐標常為 4?

(3)作三角形，其頂點如下：

(a) $(8,4)$，$(0,-4)$，$(2,4)$.

(b) $(1,-1)$，$(-4,3)$，$(-6,-2)$.

(c) $(3,5)$，$(3,10)$，$(0,2.5)$.

(d) $(2,0)$，$(-1,\sqrt{3})$，$(-1,-\sqrt{3})$.

(e) (b,d)，(c,d)，$(a,0)$.

(4)求問題 3 之 (c)，(d)，(e) 諸三角形之面積. 答 (d) $3\sqrt{3}$.

(5)作四邊形，其頂點如下：

(a) $(0,-4)$，$(6,2)$，$(0,4)$，$(-6,2)$.

(b) $(0,0)$，$(4,5)$，$(8,0)$，$(7,3)$.

(c) (a,b)，$(-a,b)$，$(a,-b)$，$(-a,-b)$

(6)一點之軌迹為何，(1) 其橫坐標與其縱坐標相等?(2) 其橫坐標與縱坐標之負值相等?

(7)用幾何作圖法，正確作 $(\sqrt{2},3)$,$(\sqrt{3},2)$, $(\sqrt{5},\sqrt{6})$ 諸點.

(8)邊長 6 吋之等邊三角形，其底與 x 軸重合，而其中點在原點上.則其頂點之坐標爲何?(有二種情形)

(9)邊長 6 吋之正方形，其兩對角線在兩坐標軸上.則其頂點之坐標爲何?

答 $(3\sqrt{2},0)$, $(0,3\sqrt{2})$, $(-3\sqrt{2},0)$, $(0,-3\sqrt{2})$.

(10)何種四邊形其頂點在 $(2,4)$, $(0,4)$, $(0,-4)$, $(2,-4)$? 其面積爲何?

(11)設一長方形之兩邊各長 a 與 b，且各與 x 軸及 y 軸重合，則其頂點之坐標爲何?(有四種情形)

(12)設 $(0,0)$, $(0,b)$, (a,c) 爲一平行四邊形三頂點之坐標，則其第四頂點之坐標爲何?　答 $(a,b+c)$, $(a,c-b)$, $(-a,b-c)$.

(13)作諸點其斜坐標如下，而坐標軸間之角爲 45°:$(-3, 2)$, $(4,2)$, $(-4,-3)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $(4,2+\sqrt{2})$.

(14)作題 5 之諸四邊形，設坐標軸間之角爲 60°.

(15)設等邊三角形之一邊長爲 b，一頂點爲 $(0,0)$，而一邊在 y 軸上，則其餘頂點之坐標爲何?(有四種情形)

(16)對於 x 軸對稱於 (a,b) 之點，其坐標爲何?對於 y 軸?對於原點?

(17)邊長 $2a$ 之正方形，有一頂點在 $(0,0)$ 而一對角線在正 x 軸上.則其餘頂點之坐標爲何?

答 $(a\sqrt{2},a\sqrt{2})$, $(2a\sqrt{2},0)$, $(a\sqrt{2},-a\sqrt{2})$.

(18)邊長 b 之等邊三角形，其一頂點在原點上，而一高在 y 軸上.則其餘頂點之坐標爲何?(有兩種情形)

8. 方向線　當 OM 定爲正數時，則一點 M 應記在 x 軸上 O 點之右;當定爲負數時，則應記在左.是以指定 $X'X$ 自左至右爲正方向.於是 $X'X$ 成爲一方向線;意卽假定一有原點，長之單位，與正

方向之直線.一箭頭常置在方向線上以指示其正方向.

設 A 與 B 爲方向線上任兩點,而

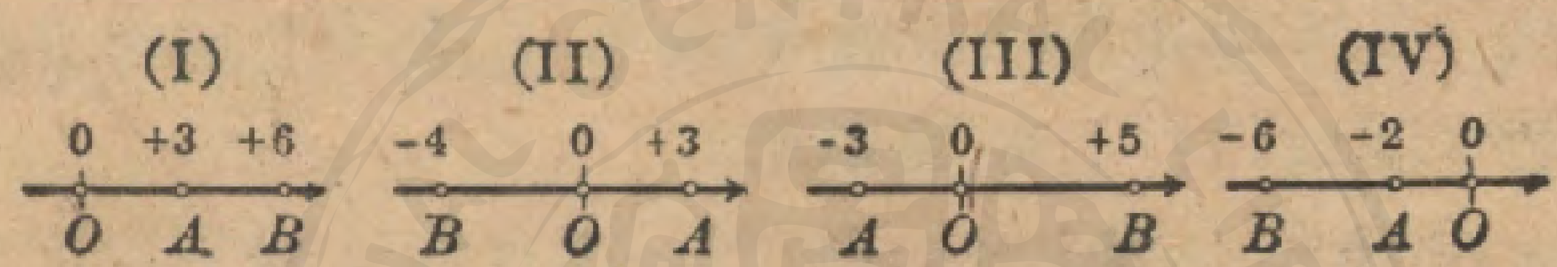
$$OA=a,\quad OB=b,$$

則 AB 線段之長常爲 $b-a$.

方向線上 A 與 B 二點之一切位置,其 AB 之長均以

(1) $$AB=OB-OA,$$

表之,而 O 爲原點.



在此四圖中,可說明上述定義.

I. $AB=OB-OA=6-3=+3.$

II. $AB=OB-OA=-4-3=-7.$

III. $AB=OB-OA=+5-(-3)=+8.$

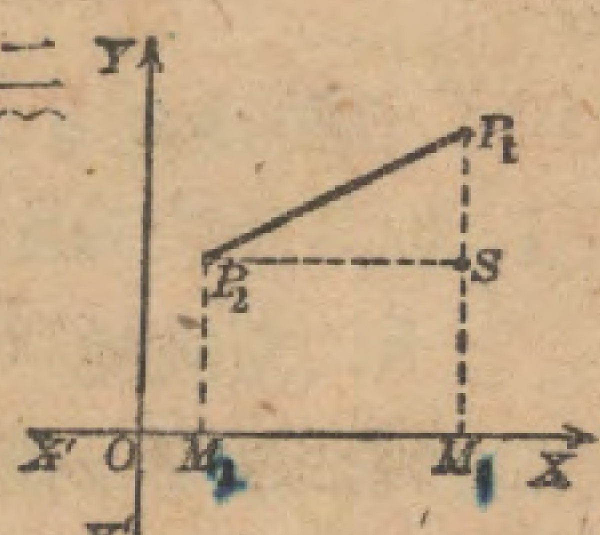
IV. $AB=OB-OA=-6-(-2)=-4.$

在一方向線上,顯然爲

(2) $$AB=-BA,$$

(3) 設自 A 至 B 之方向與線上之正方向相合,則 AB 爲正;否則爲負.

9. 長.定理 連 $P_1\ (x_1,y_1)$, $P_2\ (x_2,y_2)$ 二點之線長 l 可用下列公式表之



(I) $$l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

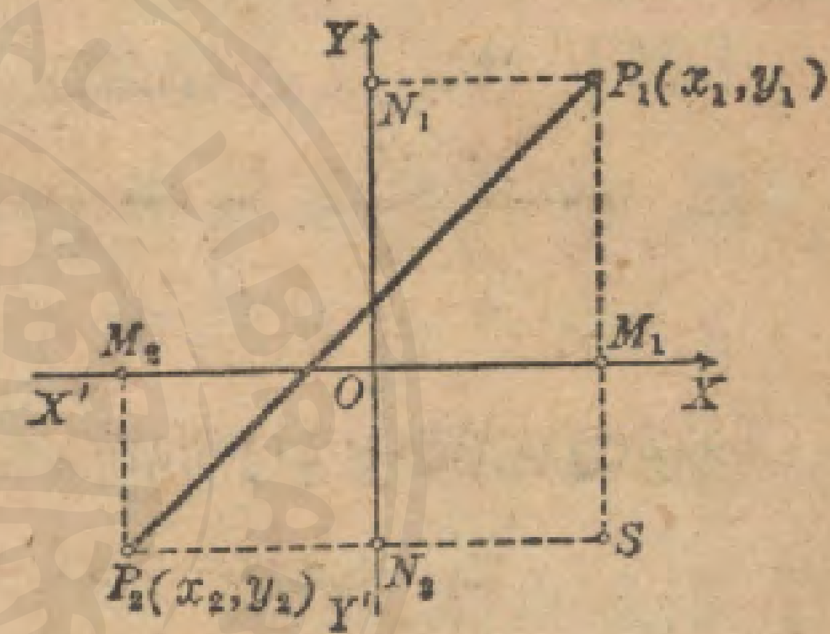
[證] 過 P_1 與 P_2 各作線平行坐標軸使成直角三角形 $P_1\ SP_2$.

一已知點與原點之長: $l=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

於是
$$P_2S=OM_1-OM_2=x_1-x_2,$$
$$SP_1=M_1P_1-M_2P_2=y_1-y_2,$$
$$P_1P_2=\sqrt{\overline{P_2S}^2+\overline{SP_1}^2};$$

故
$$l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y-y_2)^2}. \qquad Q.E.D.$$

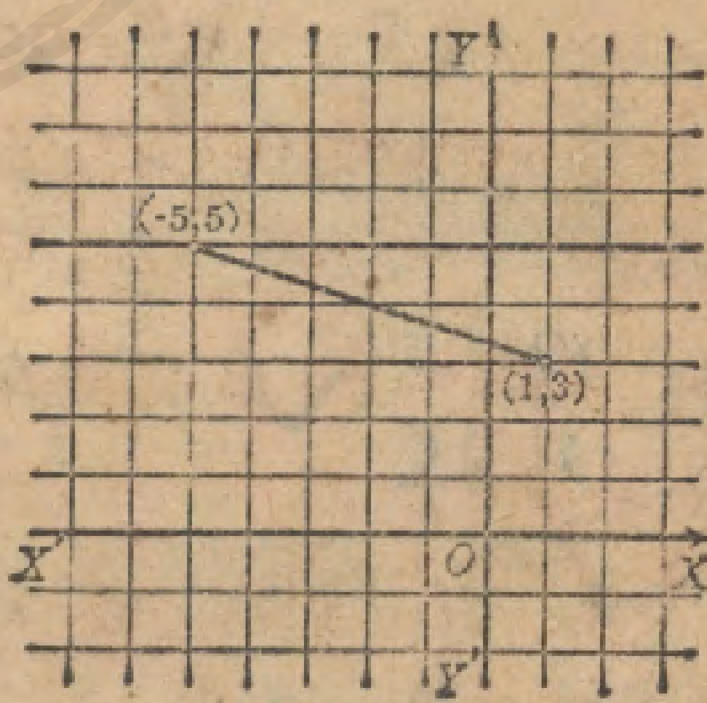
公式(I)可得 P_1 與 P_2 一切位置之長.例如在下圖中,定 P_2S 之正方向爲向右,定 SP_1 爲向上.則在圖中並用第 8 節(1),
$$P_2S=M_2M_1=OM_1-OM_2=x_1-x_2,$$
$$SP_1=N_2N_1=ON_1-ON_2=y_1-y_2,$$
而其證法仍如前.



不論 P_1 與 P_2 之位置如何,公式 (1) 總屬正確,此爲基本重要之事實.故此公式應用於問題中,祇須直接代入卽足. 在化成此種普遍公式時, 最便之法莫如作圖使一切假定爲已知之量均爲正值.

例　題

求連 (1,3) 與 (−5,5) 二點之線段之長.



[解] 設 (1,3) 爲 P_1,而 (−5,5) 爲 P_2.

則　　$x_1=1,\quad y_1=3,$

而　　$x_2=-5,\quad y_2=5;$

代入 (I), 得
$$l=\sqrt{(1+5)^2+(3-5)^2}$$
$$=\sqrt{40}=6.32.\quad 答.$$

須注意者,此祇求一直角三角形之弦,其邊長爲 6 與 2. 其結果可用橫截方格紙之紙條測量之以作驗算.

10. 分一線段成定比之點 設 P_1 與 P_2 爲方向線之二點，而 P 或 P' 爲第三點．則 P 分 P_1P_2 成比

$$\frac{P_1P}{PP_2}=r.$$

注意此式之左邊，在分子中，P 寫在後，而在分母中 P 寫在前．當 P 在線段 P_1P_2 間(內分)時，P_1P 與 PP_2 爲同向而 r 爲正．當 P 在 P_1P_2 之外如 P'(外分)時，P_1P' 與 $P'P_2$ 爲異向而 r 爲負．

［例］ 1. 設 P 平分 P_1P_2，則 $P_1P=PP_2$ 而 $r=1$.

2. 設 P 爲自 P_1 至 P_2 之三分之二處，則 $P_1P=2\,PP_2$ 而 $r=2$.

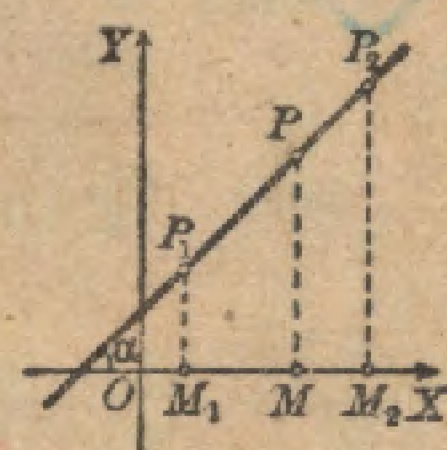
3. 設 P 在 P_1P_2 之外，而至 P_1 之距離適爲至 P_2 之距離之二倍，則 $P_1P=-2\,PP_2$ 而 $r=-2$.

引用坐標，次證

定比 **定理** 點 $P(x,y)$ 分連接 $P_1(x_1,y_1)$ 與 $P_2(x_2,y_2)$ 之線段成比

$$\frac{P_1P}{PP_2}=r$$

後，則其坐標之公式爲



内分点
外分点

$$\text{(II)} \qquad x=\frac{x_1\pm rx_2}{1\pm r}, \quad y=\frac{y_1\pm ry_2}{1\pm r}.$$

［證］ 縱坐標 M_1P_1，MP，與 M_2P_2 在截線 P_1P_2 與 OX 上截成諸比例線段；即*

$$(1) \qquad \frac{M_1M}{MM_2}=\frac{P_1P}{PP_2}=r.$$

* 讀截線上線段時應注意 因所討論者爲方向線 故皆爲正向.

但　　$M_1M = OM - OM_1 = x - x_1,$

　　　$MM_2 = OM_2 - OM = x_2 - x.$

代入 (1)，　$\dfrac{x-x_1}{x_2-x} = r.$

$x - x_1 = r(x_2 - x)$

$x - x_1 = rx_2 - rx$　　$x + rx = x_1 + rx$

$x(1+r) = x_1 + rx_2$　　$x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1+r}$

解此分式以求 x，得 x 如(II)式.

同理，在 y 軸上作 P_1, P，與 P_2 之橫坐標，可證得 y 之公式.

Q.E.D.

系.　中點　$P_1(x_1, y_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2)$ 之中點，其坐標爲已知之二橫坐標與縱坐標之平均值；即

(III)　　$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$

因若 P 爲 P_1P_2 之中點，則 $r = 1$ 而 (II) 變成 (III).

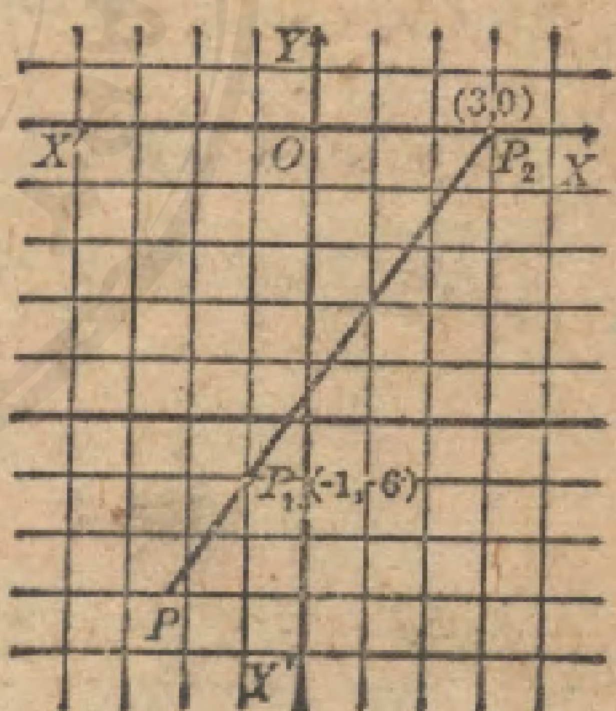
例　　題

連 $P_1(-1, -6)$ 與 $P_2(3, 0)$ 之線，向 P_1 點外延長至 P，使 P 至 P_2 爲至 P_1 之四倍. 求 P 之坐標.

［解］　由題意，得

負號不落

$$\frac{P_1P}{PP_2} = -\frac{1}{4} = r.$$



又　$x_1 = -1,\ y_1 = -6,\ x_2 = 3,\ y_2 = 0.$

故，應用 (II)，

$$x = \frac{-1 - \frac{1}{4}\cdot 3}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{-\frac{7}{4}}{\frac{3}{4}} = -2\frac{1}{3},$$

$$y = \frac{-6 - \frac{1}{4}\cdot 0}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{-6}{\frac{3}{4}} = -8.$$

故 P 爲 $(-2\frac{1}{3}, -8)$.　　答

結果可由作圖以驗之.

11. 幾何學定理之應用　引用坐標以證平面幾何學中之命題，其事甚易.

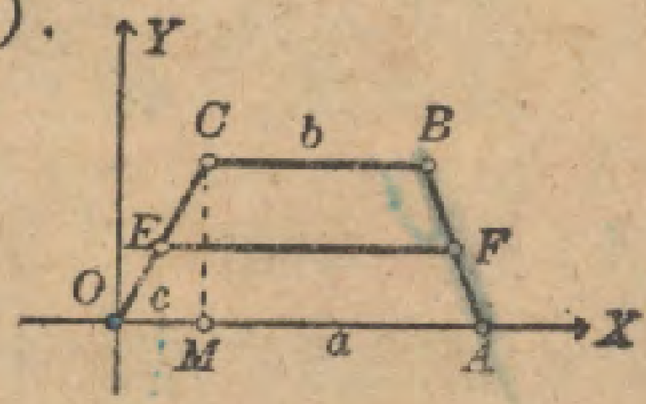
例　　　題

證明梯形之中線必與其底平行，且等於兩底和之半.

［證］ 圖中 x 軸在其一底上而 y 軸過其一頂點. 於是其諸頂點之坐標如下，設 $MC=h$;

$O(0,0)$, $A(a,0)$, $C(c,h)$, $B(b+c,h)$.

故，由(III)，中點 E,F 爲 $E(\frac{1}{2}c,\frac{1}{2}h)$, $F[\frac{1}{2}(a+b+c),\frac{1}{2}h]$. 因二者之縱坐標相等，$EF$ 平行 OA，而其長爲二橫坐標之差，卽 $\frac{1}{2}(a+b)$. 　　Q.E.D.



定中點: $E=\frac{0+c}{2}=\frac{c}{2}$

~~三角形兩腰中點的連線等於第三邊的一半~~

通常作坐標之一軸於圖形之一線上，而取 O 爲圖形在此線上之一點.

習　　　題

(1) 求下列三角形之周界:

(a) (3,0), (5,2), (7,6). 　　答 14.51.

(b) (2,1), (7,3), (5,−4).

(c) (3,3), (−3,4), (−4,−3). 　　答 22.38.

(d) (−1,4), (−4,−2), (3,−4).

(e) (2,−3), (−6,−3), (5,4). 　　答 28.66.

(2) 試決定下列諸三角形，何者爲不等邊，等腰，或等邊三角形:

(a) (2,6), (6,2), (−3,−3).

(b) (−3,−6), (−6,5), (−3,5).

(c) (3,0), (−3,0), $(0,-3\sqrt{3})$.

(d) (2,2), (−2,−2), $(2\sqrt{3},-2\sqrt{3})$.

(e) (3,0), (6,4), (−1,3).

不難 (3) 諸點(3,2), $(1,2\sqrt{3})$, (−2,3), $(-2\sqrt{2},-\sqrt{5})$是否在以原點爲中心之圓上? $l=\sqrt{x^2+y^2}$

(4) 設自(0,−2)至$(b,4)$之距離爲10單位，則 b 之值爲何? 　　答 $b=\pm8$.

(5) 求題1中諸三角形各邊之中點.

(6) 設一線段之一端爲(−1,2)而其中點爲(2,1)，則他端之坐標爲何? 　　答 (5,0).

(7) 設一點在下列各組中自第一點至第二點之距離之三分之二處,求各該點之坐標:

(a) $(-2,-1)$, $(3,2)$. 答 $(1\frac{1}{3},1)$. (b) $(3,-4)$, $(-1,5)$.

(c) $(0,0)$, $(-21,6)$. 答 $(-14,4)$. (d) $(2,6)$, $(8,9)$.

(8) 試以坐標證明直角三角形弦上之中點與三頂點等距.

(9) 試以解析法證明連接任意四邊形鄰邊中點之線段仍成一四邊形,其周界為原四邊形對角線之和.

(10) 設 $(1,1)$ 各與點 $(3,7)$ 及 $(5,-3)$ 連成直線,且各由此末二點延長至原長三倍處,求延長後諸端點之坐標.

答 $(7,19)$, $(13,-11)$.

(11) 有二點皆分 $(5,10)$ 與 $(-2,3)$ 之連線成 $3:4$, 則此二點之坐標為何?

(12) 頂點為 $(2,1)$, $(7,1)$, $(9,3)$ $(4,3)$ 之四邊形,其對角線互相平分否? (証其為平行四邊形)

(13) 證明 $(2,3)$, $(4,1)$, $(8,2)$, 與 $(6,4)$ 為一平行四邊形之四頂點.

(14) 試以解析法證

(a) 矩形之對角線相等;

(b) 任意平行四邊形之對角線互相平分;

(c) 連任意三角形二邊中點之線段等於第三邊之半.

(15) 設 $(-1,1)$, $(4,-1)$, 與 $(-2,-5)$ 為一三角形各邊之中點,求此三角形之各頂點. 答 $(5,5)$, $(-7,-3)$, $(3,-7)$.

(16) 點 $(-4,3)$ 分連接 $(1,-2)$ 與 $(-6,5)$ 之線段成何比?

(17) 表一點 (x,y) 至 $(3,-2)$ 之距離為 7 單位之代數方程式為何? 答 $x^2+y^2-6x+4y-36=0$.

(18) 以何代數方程式表

(a) 點 (x,y) 與 $(3,5)$ 及 $(-2,-4)$ 等距?

(b) 點 (x,y) 至 $(3,5)$ 之距離為至 $(-2,-4)$ 之二倍.

(19) 三角形三頂點各為 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), 求其三中線相交點之坐標. 此點為三角形之重心. (見圖). 答 $\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$, $\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$.

(20) 試用解析法證明.

(a) 連任意四邊形對邊中點之兩線段互相平分;

(b) 連任意四邊形二對邊中點之線段與連此四邊形兩對角線中點之線段,彼此互相平分.

(21) 試用解析法證明自一矩形之兩對角頂點至任意一點之距離之平方和,等於自其他二對角頂點至此點之距離之平方和.

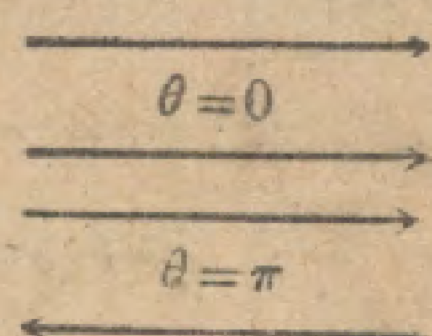
(22) 試用解析法證明自平行四邊形一頂點至一對邊中點之線與其相對之對角線交於一點,而此點分各線成 1:2 之比.

12. 傾角與斜率 兩方向線相交所成之角乃謂其正方向間所成之角.圖中此角以 θ 記之.θ 顯然可有自 $0°$ 至 $180°$ 內之任何值.

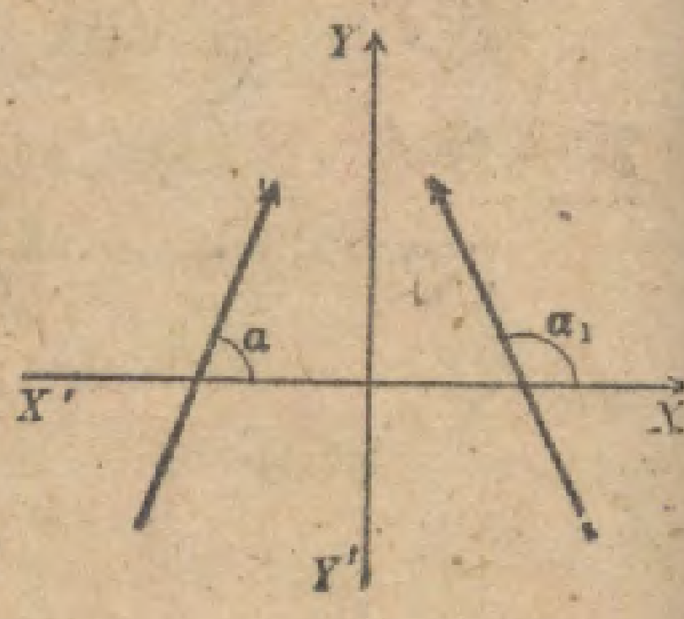
設二方向線互相平行,則其間之角爲 $0°$ 或爲 $180°$, 須視其正方向是否一致而定.

當一線與 $X'X$ 相交,而欲指定其正方向,則常以向上之方向爲正.

一線之傾角 (Inclination) 乃爲此線向上之方向與 x 軸所成之角也.



換言之, 傾角者其角在 x 軸之上且在已知線之右,如圖中所示.



$m = \tan\alpha$

一線之斜率 (Slope) 乃爲其傾角之正切,斜率可爲任意之實數, 因第一, 第二兩象限內角之正切可爲任意正數或負數. 平行於

$X'X$ 之線之斜率爲零,而平行於 $Y'Y$ 之線之斜率爲無限大.

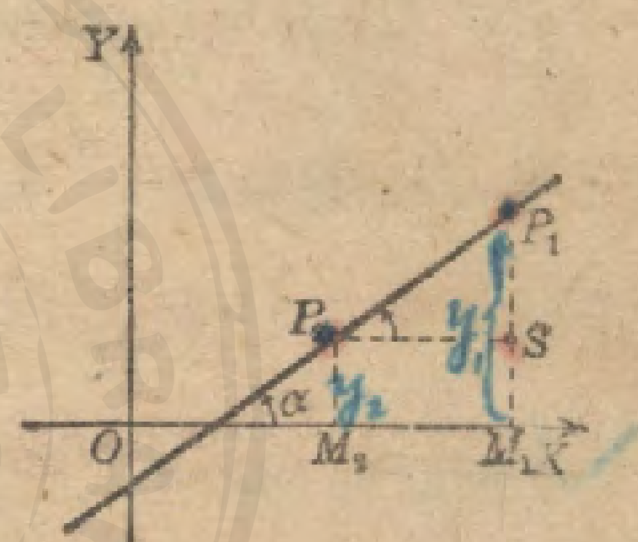
一線之傾角常以希臘字母 α, α_1 等表之;其斜率常以 m, m_1, 等表之,故 $m=\tan\alpha$, $m_1=\tan\alpha_1$,等.

定理　過二點 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ 之直線,其斜率 m 可得

(IV) $$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$

[證]　圖中 P_2S 平行於 OX. 但在直角 $\triangle P_2SP_1$ 內,因 $\angle P_1P_2S=\alpha$, 故得

(1) $$m=\tan\alpha=\frac{SP_1}{P_2S}.$$



但

$SP_1=M_1P_1-M_2P_2=y_1-y_2$;

而　$P_2S=OM_1-OM_2=x_1-x_2$.

將此等值代入(1)即得(IV).

學者試以 α 爲鈍角以求公式(IV).

作一線過一已知點 P_2,其斜率爲一正分數 $\frac{a}{b}$, 其法可在 P_2 之右取 b 單位得一點 S, 再在 S 之上 a 單位處得一點 P_1, 而作 P_2P_1. 如斜率爲一負分數 $-\frac{a}{b}$,則可在 P_2 之左 b 單位處得點 S.

13.　平行或垂直線之檢驗法

定理　若兩線平行,則其斜率相等;若互相垂直,則其斜率互爲負倒數;其逆定理亦眞.

[證]　設 α_1 與 α_2 爲兩線之傾角而 m_1 與 m_2 爲斜率,若兩線平行,

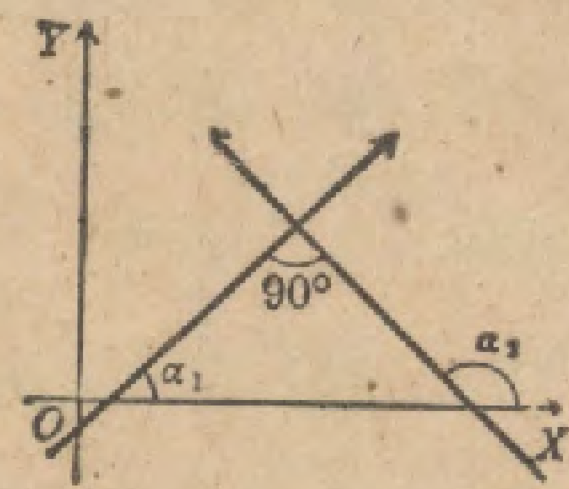
$$\alpha_1=\alpha_2\quad\therefore m_1=m_2.$$

若兩線互相垂直，如圖所示.

$$\alpha_2=90°+\alpha_1.$$

故　　　$m_2=\tan\alpha_2=\tan(90°+\alpha_1)$.

從三角法(第3頁之8)，得



$$\tan(90°+\alpha_1)=-\cot\alpha_1=-\frac{1}{\tan\alpha_1}.$$

$$\therefore\quad m_2=-\frac{1}{m_1}.\qquad Q.E.D.$$

其逆定理可將此證法步驟倒退而證之，並亦假設在第二部中，α_2 須大於 α_1.

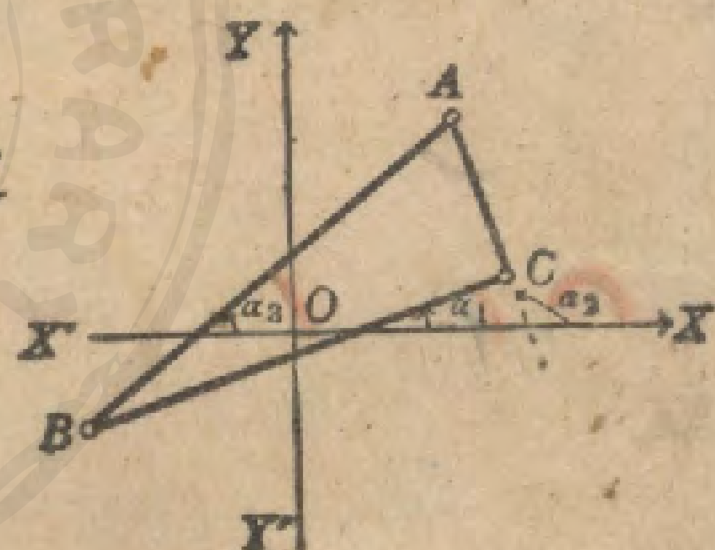
例　　題

作三角形使其頂點為 $A(3,4)$，$B(-2,-1)$，$C(4,1)$.

(1)　試證 $\triangle ABC$ 為一直角三角形.

［解］　設 $m_1=BC$ 之斜率.由(IV)，取 B 為 (x_1,y_1)，C 為 (x_2,y_2)，

$$m_1=\frac{-1-1}{-2-4}=\frac{1}{3}.$$



同理，如 $m_2=CA$ 之斜率與 $m_3=AB$ 之斜率，則得 $m_2=-3$，與 $m_3=1$. 因 m_1 與 m_2 互為負倒數，故 $\angle C$ 為 $90°$.

(2)　試求各邊之傾角.

［解］　從例 1，

$$\tan\alpha_1=\tfrac{1}{3},\ \tan\alpha_2=-3,\ \tan\alpha_3=1$$

故從表中查得，

$$\alpha_1=18°26',\ \alpha_2=108°26',\ \alpha_3=45°.\quad 答.$$

在求 α_2 時，可用

$$\tan(180°-\alpha_2)=-\tan\alpha_2=3.\qquad［用第3頁之8］.$$

故　　$180°-\alpha_2=71°34'$，與 $\alpha_2=180°-71°34'=108°26'$

14. 角之公式.

定理　兩方向線間之角 θ 可用下述公式決定之，卽

$$\text{(V)}\qquad \tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2},$$

例題，習題三第7題也是

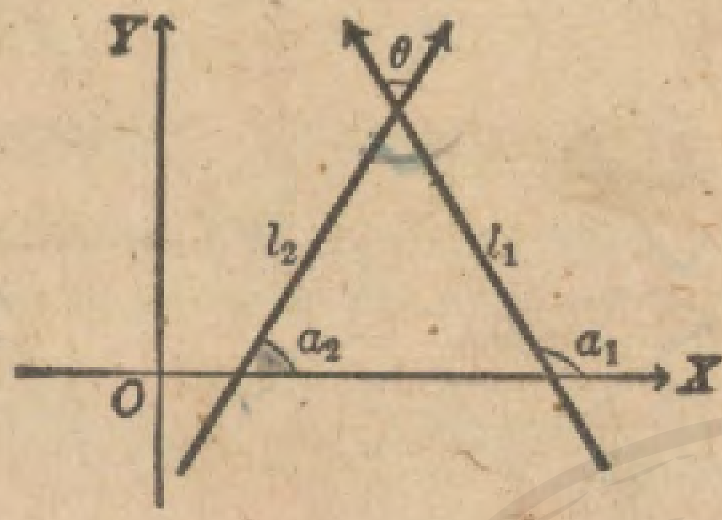
此處之 m_1 為具較大傾角之線之斜率.

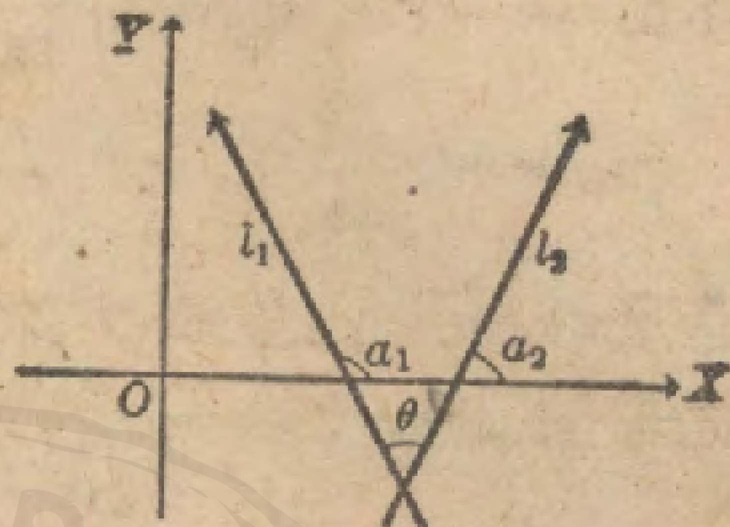
［證］　圖中 $a_1=\theta+a_2$;

故
$$\theta=a_1-a_2;$$

而
$$\tan\theta=\tan(a_1-a_2)=\frac{\tan a_1-\tan a_2}{1+\tan a_1\tan a_2}.$$

［用第 3 頁之 9］.





以 $\tan a_1=m_1$, $\tan a_2=m_2$ 代入，卽得(V).　　　　*Q.E.D.*

設其傾角爲已知，則可用方程式

(Va)　　　　$\theta=a_1-a_2$,

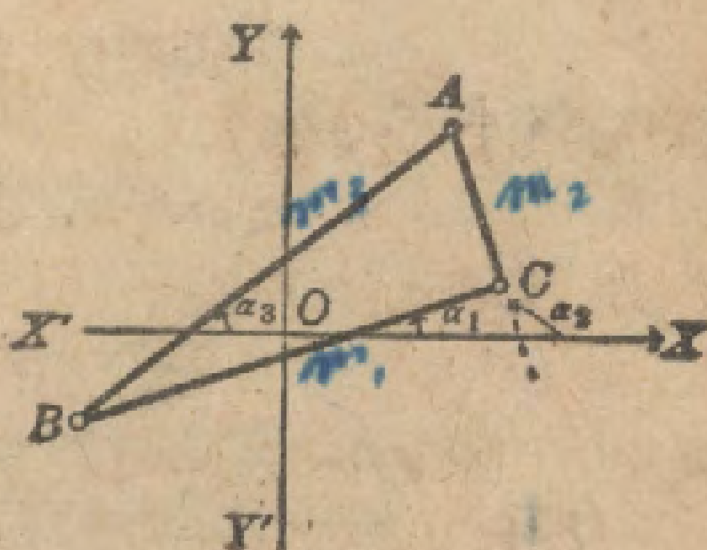
其中 a_1 爲較大之傾角.

例　　　題

(1)　求圖中直角三角形之 $\angle A$ 與 $\angle B$.

［解］　從第 13 節例 2, 得 $a_1=18°26'$, $a_2=108°26'$, $a_3=45°$. 故用(Va),

$$\angle B=a_3-a_1=26°34';$$
$$\angle A=a_2-a_3=63°26'.\quad 答.$$



(2)　用(V)求 $\angle B$.

［解］　從第 13 節例 1, 得 $m_3=1$, $m_1=\frac{1}{3}$. 於是

$$\tan B=\frac{m_3-m_1}{1+m_1m_3}=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

故 $\angle B=26°34'$ 與前同.　　　答.

習　　　題 三

(1)　求過下列諸點各線之斜率：

(a) (4,5), (7,8);　　　　(d) (a,b), $(c,-d)$;

(b) (4,7), (−3,−5),　　　(e) (−3,−7), (−5,4);

(c) (2.5,3.4), (−3,5.2);　　(f) (3,3), (5,5).

(2) 求過下列諸點各線之傾角：

(a) $(2,-2)$ $(4,2)$. 答 $m=2, \alpha=63°26'$.

(b) $(1,1)$, $(5,-5)$. 答 $m=-1.5, \alpha=123°41'$.

(c) $(5,8)$, $(3,-4)$. (d) $(4,8)$, $(-2,-2)$. (e) $(2,3)$, $(-6,7)$.

(3) 與 x 軸平行之任何直線，其斜率與傾角爲何？與 y 軸平行者？

(4) 一線垂直於過下列已知點之直線，求此線之斜率與傾角：

(a) $(1,2)$, $(-1,3)$. (c) $(3,7)$, $(-2,7)$.

(b) $(5,-2)$, $(5,4)$. (d) $(5,4)$, $(4,7)$.

(5) 具下列頂點之三角形，試用其斜率以決定何者爲直角三角形：

(a) $(-2,9)$, $(10,-7)$, $(12,-5)$. (c) $(0,-1)$, $(3,-4)$, $(2,1)$.

(b) $(2,1)$, $(3,-2)$, $(-4,-1)$. (d) $(6,11)$, $(-4,-9)$ $(11,-4)$.

(6) 下列何組中之三點在一直線上？

(a) $(6,6)$, $(4,7)$, $(2,8)$. (c) $(3,-2)$, $(5,1)$, $(10,0)$.

(b) $(1,5)$, $(0,2)$, $(2,8)$, (d) $(13,-2)$, $(5,5)$, $(-7,6)$.

(e) $(a,b+c)$, $(b,c+a)$, $(c,a+b)$.

(7) 求下列各三角形之角：

(a) $(0,1)$, $(3,4)$, $(2,-1)$, (c) $(6,-6)$, $(5,2)$, $(2,2)$.

(b) $(7,-4)$, $(1,1)$, $(-5,-7)$, (d) $(0,-2)$, $(4,2)$, $(0,6)$.

答 $39°6'$, $53°50'$, $87°4'$. 答 $45°$, $45°$, $90°$.

(8) 試證下列各組中諸點爲一平行四邊形之頂點：

(a) $(2,3)$, $(4,1)$, $(8,2)$, $(6,4)$. (b) $(-4,-2)$, $(2,0)$, $(8,6)$, $(2,4)$.

(9) 用解析法證明

(a) 任意正方形之對角線互相垂直.

(b) 設一矩形之對角線互相垂直，則此矩形必爲一正方形.

(c) 菱形之對角線，互相垂直平分.

15. 面積 本節所論者，乃解已知多邊形之頂點而求其面積諸問題也. 茲先述

定理 三角形之頂點爲原點，$P_1(x_1,y_1)$，與 $P_2(x_2,y_2)$，則其面積之公式爲

(VI) $\triangle OP_1P_2$ 之面積 $=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$.

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

［證］　圖中，四邊形 $OM_1P_1P_2$ 含有 $\triangle OP_1P_2$ 與 $\triangle OM_1P_1$，或含有 $\triangle OM_2P_2$ 與梯形 $M_2M_1P_1P_2$. 故面積，

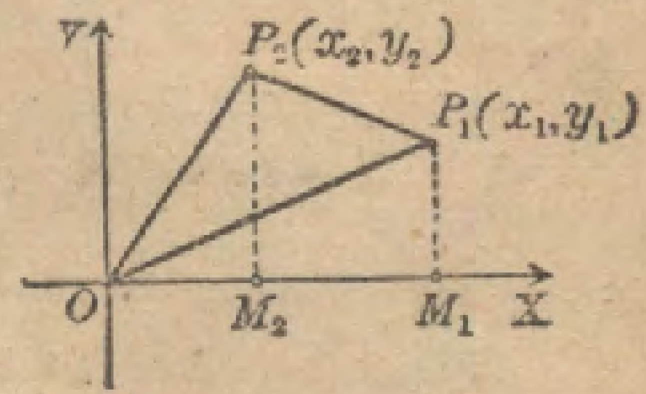
(1)　$\triangle OP_1P_2=\triangle OM_2P_2+$ 梯形 $M_2M_1P_1P_2-\triangle OM_1P_1$

但 $\triangle OM_2P_2=\frac{1}{2}OM_2\cdot M_2P_2=\frac{1}{2}x_2y_2$;

梯形　$M_2M_1P_1P_2=\frac{1}{2}(M_2P_2+M_1P_1)\cdot M_2M_1$

$=\frac{1}{2}(y_2+y_1)(x_1-x_2)$;

$\triangle OM_1P_1=\frac{1}{2}OM_1\cdot M_1P_1=\frac{1}{2}x_1y_1$.



代入(1)，

$$\triangle OP_1P_2=\frac{1}{2}x_2y_2+\frac{1}{2}(y_2+y_1)(x_1-x_2)-\frac{1}{2}x_1y_1$$

$$=\frac{1}{2}x_2y_2+\frac{1}{2}(x_1y_2+x_1y_1-x_2y_2-x_2y_1)-\frac{1}{2}x_1y_1$$

$$=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1).\qquad Q.E.D.$$

例　題

一三角形之頂點爲原點，$(-2,4)$，與 $(-5,-1)$，求其面積.

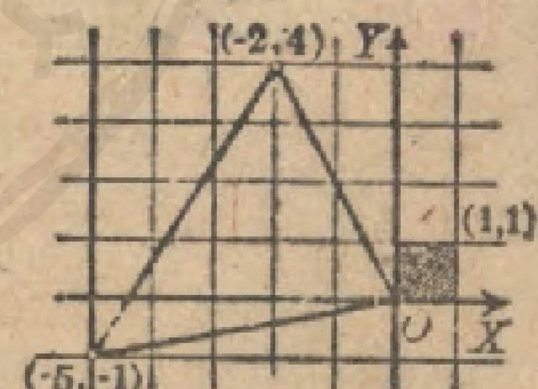
［解］　命 $(-2,4)$ 爲 P_1，$(-5,-1)$ 爲 P_2. 則

$x_1=-2,\ y_1=4,\ x_2=-5,\ y_2=-1.$

代入 (VI) 中，

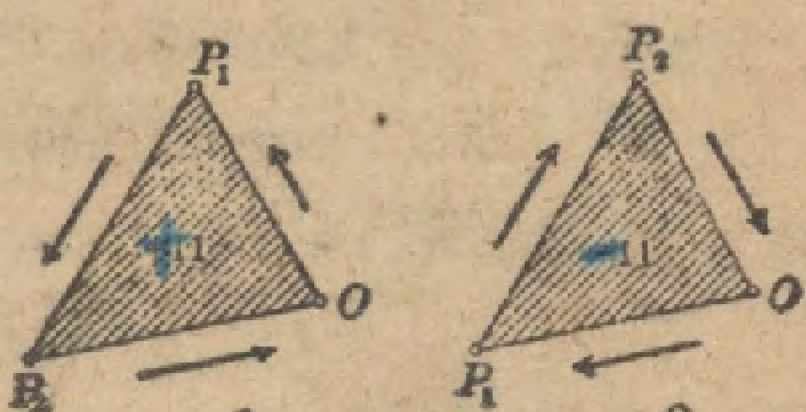
面積 $=\frac{1}{2}[-2\cdot-1-(-5)\cdot 4]=11.$

故面積 $=11$ 平方單位.　　答.



設命 $(-2,4)$ 爲 P_2，$(-5,-1)$ 爲 P_1 而用公式 (VI)，則結果將爲 -11.

以下爲本例之二圖，且說明其規則　依頂點 O，P_1，P_2 之次序繞周界，若面積在其左，如圖 1，則 (VI) 之結果爲正；若面積在其右，如圖 2，則 (VI) 之結果爲負.



1　　2

應用公式 (VI) 以求任意三角形之面積，可將此三角形視爲以原點爲公共頂點之幾個三角形所組成.

定理 一三角形之頂點爲 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, 則其面積爲

(VII) 面積 $\triangle P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3)$.

此公式所得結果之爲正或負須視其面積在依次序 $P_1P_2P_3$ 所繞周界之左或右而定.

［證］ $\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$, ［用(VI)］

(2) $\triangle OP_2P_3 = \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2)$, 而

$\triangle OP_3P_1 = \frac{1}{2}(x_3y_1 - x_1y_3)$.

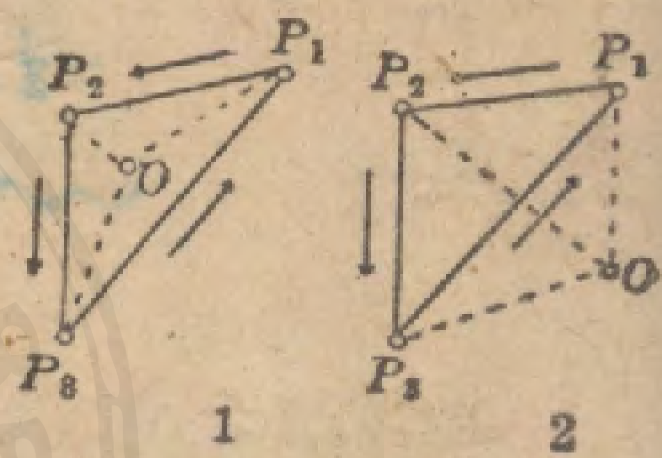


圖 1, 原點在△內 由視察卽知

面積 $\triangle P_1P_2P_3 = \triangle OP_1P_2 + \triangle OP_2P_3 + \triangle OP_3P_1$.

方程式(2)中所得之面積皆爲正號. 相加, 卽得(VII).

圖 2, 原點在△外 由視察卽知

面積 $\triangle P_1P_2P_3 = \triangle OP_1P_2 + \triangle OP_2P_3 - \triangle OP_1P_3$.

(2)中最後之方程式得 $\triangle OP_1P_3$ 之面積爲負號. 相加, 亦得 (VII). *Q.E.D.*

應用 (VII) 之便易法如下:

求三角形面積之規則.

$$\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{array}$$

第一步 將諸頂點之坐標寫成兩行, 橫坐標爲一行, 縱坐標爲一行, 末後將第一頂點之坐標重寫一遍.

第二步 每一橫坐標乘以下列之縱坐標. 而加其結果. 卽得 $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1$.

第三步 每一縱坐標乘以下列之橫坐標, 而加其結果, 卽得 $y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1$.

第四步　從第二步所得之結果，減去第三步之結果而除以 2，即得所求之面積，亦卽公式（VII）.

公式(VII) 之右邊若寫成一簡單之行列式，則更便於記憶，

卽，　　$$\text{面積}\ \triangle P_1P_2P_3=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$x_1\ y_1$ / $x_2\ y_2$ / $x_3\ y_3$ / $x_1\ y_1$　$\times\frac{1}{2}$

實則此行列式依普通規則展開而除以2時，卽爲公式(VII).

如在上述規則之第一步中作如下之審察，則此規則亦甚便於求任意多邊形之面積：

將多邊形各頂點之坐標沿其周界依次寫下，末後，將第一步重寫一遍.

例　　題

求四邊形之面積其頂點爲 (1,6)，(−3,−4)，(2,−2)，(−1,3).

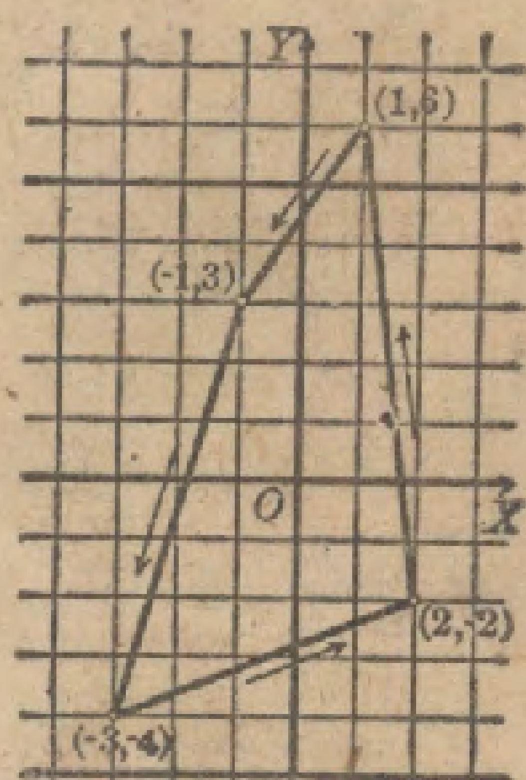
［解］ 作圖，從此圖形選取其頂點之次序而以箭頭表示之. 依照規則：

$$\frac{1}{2}\left|\begin{array}{rr} 1 & 6 \\ -1 & 3 \\ -3 & -4 \\ 2 & -2 \\ 1 & 6 \end{array}\right| \quad \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{array}$$

第一步　依次寫下各頂點.

第二步　每一橫坐標乘以下列之縱坐標而相加. 卽得 $1\times3+(-1\times-4)+(-3\times-2)+2\times6=25.$

第三步　每一縱坐標乘以下列之橫坐標而相加. 卽得 $6\times-1+3\times-3+(-4\times2)+(-2\times1)=-25.$



第四步　從第二步之結果減去第三步之結果而除以 2.

$$\therefore \text{面積}=\frac{25+25}{2}=25\ \text{平方單位}.\quad \text{答}.$$

因面積在左，故所得之結果爲正.

習　　題 四

(1) 求三角形之面積,其頂點如下:

(a) (2,3), (5,7), (4, −2).

(b) (1,3), (−5, −2), (7,1).

(c) (5,5), (−6,7), (−7, −2).　　答 50.5.

(d) (3,3), (6,2), (8, −2).

(e) (−6,7), (−7, −2), (2, −4).

(f) $(a,2)$, $(0,c)$, $(b,2)$.

(g) (3,0), $(0,3\sqrt{3})$, $(6,3\sqrt{3})$.　　答 $9\sqrt{3}$.

(2) 求四邊形之面積,其頂點如下:

(a) (2, −1), (5,6), (3,8), (−4,4).

(b) (0,2), (7,1), (12,4), (5,5).

(c) (−2,3), (−3, −4), (5, −1), (2,2).　　答 31.

(d) (0,0), (5,0), (9,11), (0,3).　　答 41.

(e) (7,0), (10,8), (0,5), (0,0).

(3) 試證連接題 2 中任一四邊形相鄰二邊中點所成之四邊形,其面積為原四邊形面積之半.

(4) 三角形之頂點為 (4,6), (2, −4), (−4,2). 試證其各邊中點之連線分原三角形為四個面積相等之三角形.

(5) 若一三角形之頂點為已知,其面積為零,則諸頂點必在一直線上. 試用此理以證下列各組中諸點均在一直線上:

(a) (−2, −4), (10,2), (4, −1).

(b) (−3,10), (7, −10), (5, −6).

(c) $(\frac{1}{4},0)$, $(2\frac{1}{2},3)$, (4,5).

(d) (2, −3), (14,6), (6,0).

(e) $(a,b+c)$, $(b,c+a)$, $(c,a+b)$.

(f) $(a,c+a)$, $(-c,0)$, $(-a,c-a)$.

(6) 將題 5 中諸數寫成行列式以驗其值為零.

(7) 一正六邊形之邊長為 b, 中心在原點上,而其一對角線在 x 軸上,試用坐標法以求其面積. 並求其所含諸三角形之面積以驗算之.

第三章

曲線及方程式

16. 曲線（點之軌跡）之方程式 在平面幾何學中，圓之定義爲至定點有等距之點之軌跡．在解析幾何學中，許多其他曲線 * 亦以軌跡定之．其說見後．

設想某曲線爲一點適合於某條件之軌跡，今欲求此曲線之"方程式"．可引用坐標軸，且假定點 $P(x,y)$ 在此軌跡上．於是從已知之條件得一含有變數 x 與 y 之方程式，此方程式稱謂此曲線之方程式．下例說明此意．

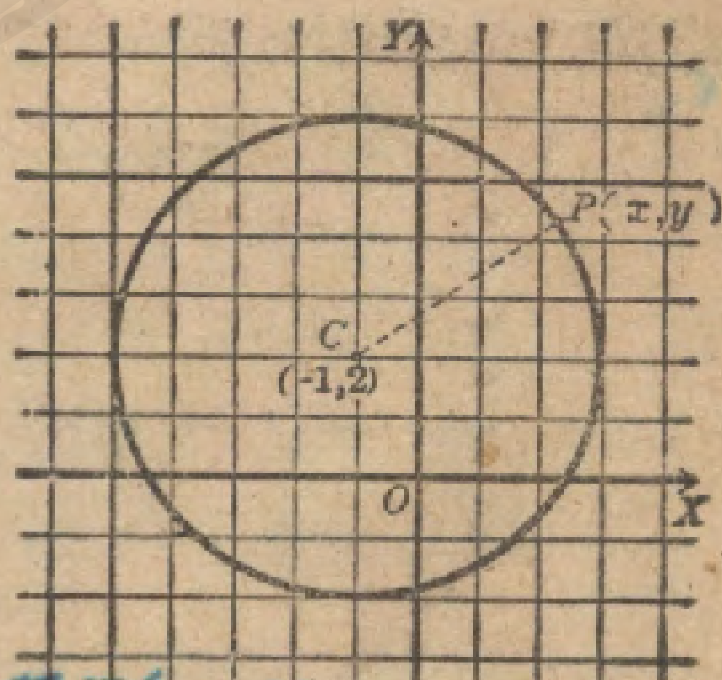
例　題

求至點 $(-1,2)$ 之距離常爲 4 之軌跡之方程式．

［解］ 假定 $P(x,y)$ 爲此軌跡上之任意點．

以 C 表 $(-1,2)$，其已知條件爲

(1) $PC=4.$



用第 10 頁，長之公式 (I)，

$$PC=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}.$$

代入 (1) 中

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=4.$$

平方並簡化之，

$$x^2+y^2+2x-4y-11=0.$$ x^2, y^2 的係數必等

此爲所求之方程式，即以 $(-1,2)$ 爲圓心，以 4 爲半徑之圓之方程式也．

---

* "曲線"一名字此後將表示任意連續線直線或曲線

定義　曲線上各點之坐標皆能適合於一方程式中之 x 與 y，此外更無他點能適合之者，則此方程式稱爲此曲線之方程式．

求一曲線之方程式，其步驟如下：

規則　第一步　假定 $P\ (x,y)$ 爲此曲線上一任意點：

第二步　寫出應用於 P 之已知條件．

第三步　用坐標表出此條件，並化簡之．最後含有 x,y 與題中已知之常數之方程式卽爲所求之方程式．

此規則適用於多種曲線．但當已知條件不能以含 P 之長度之式表出時，其解法無如此簡易．許多具有更普遍性之問題，將於第十一章中討論之．

點 $P(x,y)$ 所取之位置應具適合於條件之普遍性，——例如，勿在坐標軸上．

以上例言，顯然圓上各點之坐標，皆能適合於所得之方程式，因圓上各點皆爲 $PC=4$．反之，若一點 P 之坐標能適合此方程式，倒推其步驟，必能得 $PC=4$ 之結果，而 P 必在圓上．如此，上述定義所需之條件皆可證明矣．

習　　題 五

(1) 求一直線之方程式，此線平行於 y 軸，且

(a) 在其左 6 單位距離處；　　答 $x=-6$．

(b) 在其右 3 單位距離處；

(c) 在點 $(3,3)$ 之左 4 單位距離處；

(d) 在點 $(-2,2)$ 之右 5 單位距離處．

(2) 求一直線之方程式，此線平行於 x 軸，且

(a) 在其上 5 單位距離處；

(b) 在其下 3 單位距離處；

(c) 在點 $(3,-4)$ 之下 5 單位距離處；

(d) 在點 $(-6,4)$ 之上 7 單位距離處．

重要 (3) x 軸之方程式爲何？y 軸？

难 (4) 具下列條件之直線之方程式爲何？此直線平行於直線 $x=5$，且

(a) 在其左 4 單位處；
(b) 在其左 7 單位處；
(c) 在其右 3 單位處.

(5) 求一直線之方程式，此線垂直於 $y=3$，且 (1) 在 $(6,2)$ 之左 2 單位處；(2) 在 $(-6,1)$ 之右 4 單位處.

很重要 (6) 一點之軌跡之方程式爲何？若此點移動時 (1) 與直線 $y=-2$ 及 $y=8$ 等距；(2) 與直線 $x=2$ 及 $x=6$ 等距.

(7) (1) 若邊長 a 之正方形，其中心在原點上而一邊垂直於一坐標軸，則各邊之方程式爲何？

(2) 若邊長 a 之正方形，其一頂點在原點上而一邊在正 y 軸上，則各邊之方程式爲何？（兩種情形）.

(8) 求具下列條件之直線之方程式：

(a) 過 $(3,4)$ 而斜率爲 2；　答 $2x-y-2=0$.
(b) 過 $(-3,5)$ 而斜率爲 3；
(c) 過 $(0,5)$ 而斜率爲 $\frac{2}{3}$；　答 $2x-3y+15=0$.
(d) 過 (a,b) 而斜率爲 $-\frac{1}{4}$.

(9) 求具下列條件之直線之方程式：

(a) 過 $(0,3)$ 而傾角爲 $45°$；
(b) 過 $(-4,-2)$ 而傾角爲 $30°$；
(c) 過 $(-a,b)$ 而傾角爲 $135°$；　答 $x+y+a-b=0$.
(d) 過 $(2,3)$ 而傾角爲 $120°$；
(e) 過 $(-4,5)$ 而傾角爲 $150°$；　答 $x+\sqrt{3}y+4-5\sqrt{3}=0$.
(f) 過 $(-1,-3)$ 而傾角爲 $90°$.

(10) 求過下列諸點之直線方程式：

(a) $(4,5)$ 與 $(0,0)$；
(b) $(0,-3)$ 與 $(5,2)$；
(c) $(-1,6)$ 與 $(6,2)$；
(d) $(-4,8)$ 與 $(7,8)$；
(e) $(2,2)$ 與 $(-4,-4)$；　答 $x=y$.
(f) $(1,-5)$ 與 $(-3,1)$.　答 $3x+2y+7=0$.

(11) 一點之軌跡之方程式爲何？此點常

(a) 距 $(0,3)$ 4 單位；　答 $x^2+y^2-6y-7=0$.
(b) 距原點 6 單位；
(c) 距 $(3,2)$ 5 單位；　答 $x^2+y^2-6x-4y-12=0$.
(d) 距 $(a+c,a-c)$ c 單位.

(12) 求以下諸圓之方程式:

(a) 圓心$(6,-5)$而半徑 4.

(b) 圓心$(3,4)$而半徑 5.　　　答 $x^2+y^2-6x-8y=0$.

(c) 圓心$(-a,2a)$而半徑 $2a$.

(13) 求與下列諸點等距之點之軌跡之方程式:

(a) $(-3,-3)$與$(2,4)$;　(b) $(-4,3)$與$(3,2)$;　答 $7x-y+6=0$.

(c) $(0,4)$與$(5,0)$;　答 $10x-8y-9=0$.　(d) (a,b)與$(-a,-b)$.

(14) 用解析法證明題(13)所得之直線各爲連二已知點之線段之垂直平分線.

(15) 求以連接$(5,6)$與$(3,-4)$之線段爲直徑之圓之方程式.

答 $x^2+y^2-8x-2y-9=0$.

(16) 求以$(-3,4)$爲圓心而經過原點之圓之方程式.

17　方程式之軌跡　當一曲線之方程式已求得或已知時，常有二問題發生,卽.

1. 作此曲線.

2. 討論此方程式以決定此曲線之性質(見第 18 節).

定義　一曲線(或一羣曲線)所經過之一切點,其坐標皆適合一方程式之兩變數而不再經過此外諸點者稱謂此方程式之軌跡.

從此定義,卽得

定理 I　若用移項,或乘以常數等法以改變方程式之形式,其軌跡仍不變.

現述

作已知方程式軌跡之規則.

第一步　依 y 解已知方程式,而以 x 之值表之(如解 x 較易,則以 y 之值表 x).

第二步　用所得之式，先假定一變數之連續數值而算出其他一變數之對應數值.

$Ax+By+C=0$　$x^2+y^2+Dx+Ey+F=1$

$\pm Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$

第三步　依所得各對數值作點而連接之使成一平滑曲線.

由此法所算得之點,其數 * 無限;故祇須有相當之點數,則所作之軌跡可至任意之正確度.

注意: 對於諸點連接之次序如發生疑問, 可依所設變數之值之漸增次序連接之.

例　　題

(1) 作方程式 $2x-3y+6=0$ 之軌跡.

[解] 1. 依 y 解之, $y=\frac{2}{3}x+2$.

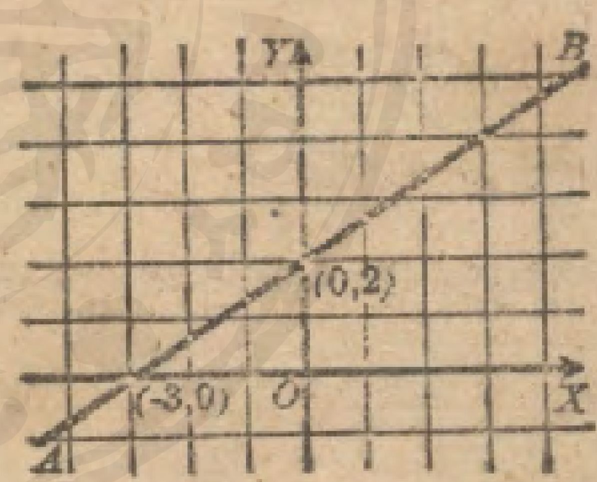
2. 假定 x 以各種數值而算出 y, 列成下表:

如,設　$x=1$, $y=\frac{2}{3}\cdot 1+2=2\frac{2}{3}$;

設　$x=2$, $y=\frac{2}{3}\cdot 2+2=3\frac{1}{3}$;

等.

x	y	x	y
0	2	0	2
1	$2\frac{2}{3}$	-1	$1\frac{1}{3}$
2	$3\frac{1}{3}$	-2	$\frac{2}{3}$
3	4	-3	0
4	$4\frac{2}{3}$	-4	$-\frac{2}{3}$
等	等	等	等



作諸點且連接之卽得其圖形,爲一直線.

---

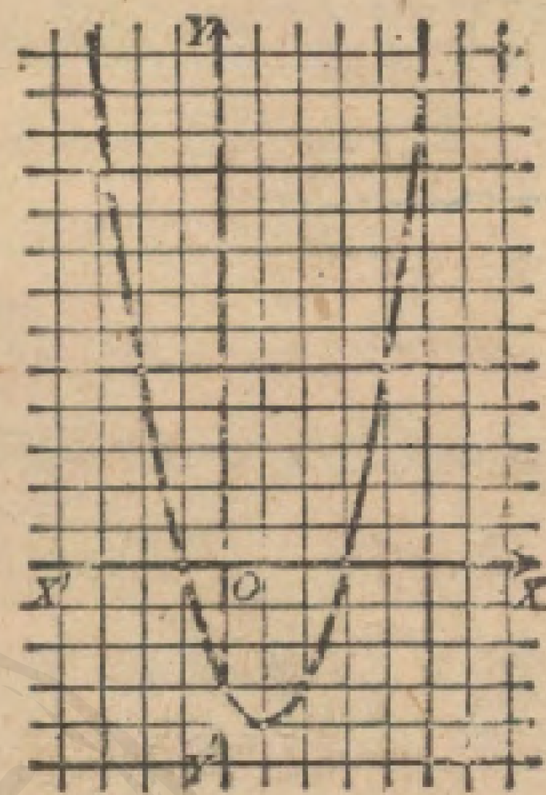
* 含變數 x 與 y 之方程式, 有時未必有任何點之坐標能適合之. 蓋坐標皆爲實數,而方程式有時無 x 與 y 之實數能適合之者. 例如,方程式 $x^2+y^2+1=0$, 卽屬此類,當 x 與 y 爲實數時,x^2 與 y^2 必爲正數(或零),而 x^2+y^2+1 永爲大於 1 或等於 1 之正數,決不等於零,故此等方程式無軌跡,或以"方程式之軌跡爲虛"表之.

有時一方程式僅爲有限數之點之坐標所適合. 例如, $x^2+y^2=0$ 僅爲 $x=0$, $y=0$ 所適合,此外更無其他實數. 在此情形中之一點或數點其坐標能適合此方程式者亦稱爲此方程式之軌跡.

(2) 作方程式 $y=x^2-2x-3$ 之軌跡.

［解］ 假定 x 之數值而計算 y，得下表之數值：

x	y	x	y
0	-3	0	-3
1	-4	-1	0
2	-3	-2	5
3	0	-3	12
4	5	-4	21
5	12	等	等
6	21		
等	等		



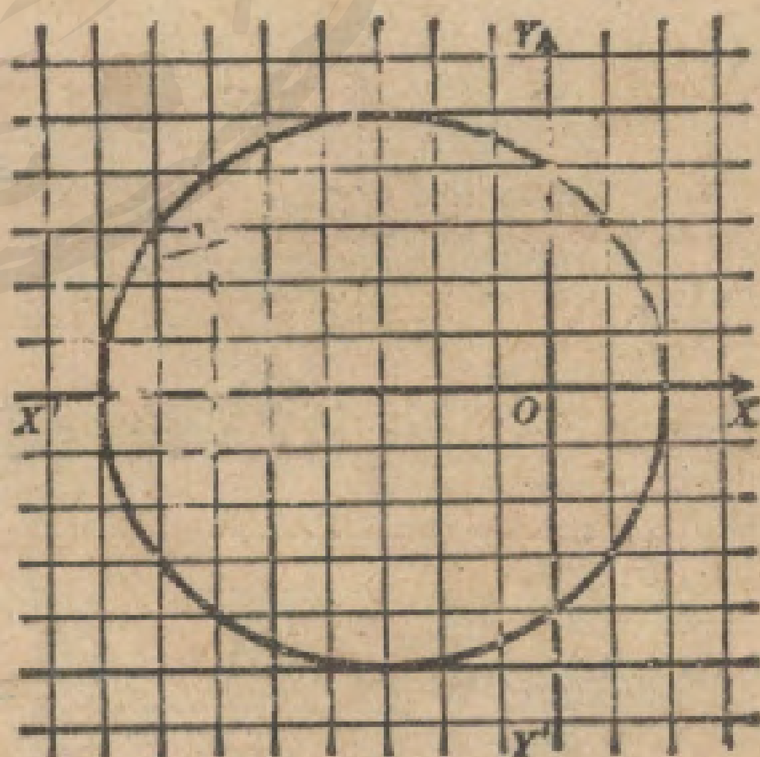
圖中所示，卽此曲線爲一拋物線．此軌跡爲一拋物線，其證見後。

(3) 作方程式 $x^2+y^2+6x-16=0$ 之軌跡

［解］ 求 y，$y=\pm\sqrt{16-6x-x^2}$，

假定 x 之數值而計算 y.

x	y	x	y
0	± 4	0	± 4
1	± 3	-1	± 4.6
2	0	-2	± 4.9
3	虛數	-3	± 5
4	虛數	-4	± 4.9
5	虛數	-5	± 4.6
6	虛數	-6	± 4
7	虛數	-7	± 3
		-8	0
		-9	虛數



例如，　設 $x=-1$，$y=\pm\sqrt{16+6-1}=\sqrt{21}=\pm 4.6$;

設　　$x=3$，　$y=\pm\sqrt{16-18-9}=\pm\sqrt{-11}$，爲一虛數.

圖中所示，卽此曲線，一圓．此軌跡爲一圓，容後證之.

習 題 六

次要 (1) 作下列各方程式之軌跡:

(a) $2y+5=0$.

(b) $x+y=0$.

(c) $x-3y+5=0$.

(d) $y=2x+3$.

(e) $y=4x^2+7$.

(f) $x \ -4y+2x-3=0$.

(g) $y=x+3$.

(h) $y=x^3$.

(i) $2x=y^3-3$.

(j) $x=y^3-3y$.

(k) $y=x^3-6x^2+11x-6$.

(l) $y=x^4-x^2-2$.

(m) $x^2+y^2-4x=0$.

(n) $x^2+y^2+6y+16=0$.

(o) $x^2+y^2=16$.

(p) $3y^2=x^3$.

(2) 用同一組坐標軸,作 $2x-3y-4=0$ 與 $3x+2y+2=0$ 之圖形,並求其交點之坐標.此交點之坐標,用代數學方法如何求得之?

(3) 用同一組坐標軸,作 $2y=x^2$ 與 $2y=x^2-4$ 之軌跡.二圖形有何不同?

(4) 用同一組坐標軸,作 $y=x^2$ 與 $y=4x^2$ 之圖形.二者有何不同?

(5) 題(1)中諸曲線,何者過原點?一代數方程式代表一過原點之曲線,其必要條件爲何? 常数项為0

(6)證明 $Ay^2+By+C=0$ 之軌跡爲一線或二線平行於 x 軸,全視 $\Delta=B^2-4AC$ 之爲零或爲正而定.設 $\Delta<0$,則其軌跡爲何?

难 (7) 證明 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=0$ 爲一對相交直線,或爲一直線或一點,全視 $\Delta=B^2-AC$ 之爲正,爲零,或爲負而定.

18. 方程式之討論 上述之作圖法,除將已定坐標諸點連成曲線使近似於眞軌跡外,其他一無所述.如此作圖,難免發生重大錯誤,因曲線上任意二點間之性質尙未知之故也.欲免除此種妨礙,可在作圖前先討論此方程式以決定其軌跡之性質.此等性質須依方程式之形式而定.

1. 坐標軸上之截部 (Intercepts on the axes).

一曲線在 x 軸上之截部為此線與 XX' 相交諸點之橫坐標也.

一曲線在 y 軸上之截部為此線與 YY' 相交諸點之縱坐標也.

求截部之規則.

以 $y=0$ 代入方程式以求 x 之實數值,即得 x 軸上之截部.

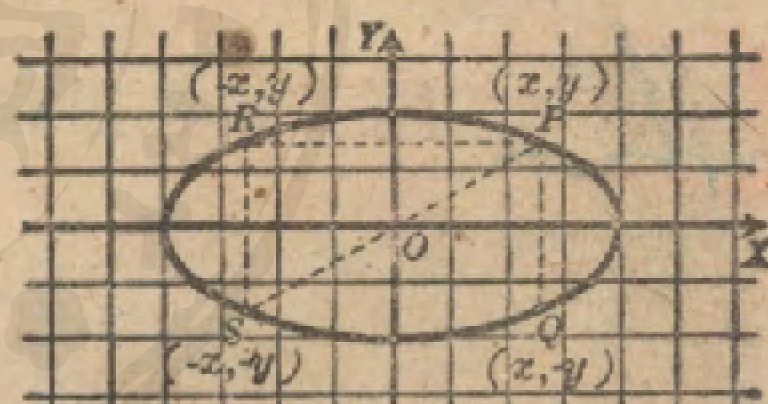
以 $x=0$ 代入方程式以求 y 之實數值,即得 y 軸上之截部.

此規則之眞確,顯然易見.

2. 對稱(Symmetry).

定義 P 與 Q 二點(1)當一軸垂直平分 PQ 線段時,則對於此軸為對稱;(2)當一點 O 為 PQ 之中點時,則對於 O 點為對稱.

圖中,P 與 Q 對於 OX 為對稱,



P 與 R 對於 OY 為對稱,P 與 S 對於 O 為對稱

茲討論如下

例　題

討論下方程式之軌跡之對稱

(1) $$x^2+4y^2=16.$$

[解] 此方程式不含 x 與 y 之奇次冪;故可寫成以下各式

(2) $(x)^2+4(-y)^2=16$, 以 $(x,-y)$ 代 (x,y);

(3) $(-x)^2+4(y)^2=16$, 以 $(-x,y)$ 代 (x,y);

(4) $(-x)^2+4(-y)^2=16$, 以 $(-x,-y)$ 代 (x,y).

(1) 之改爲 (2)，相當於圖中之以點 $Q(x,-y)$ 代曲線上每點 $P(x,y)$．但 P 與 Q 對於 XX' 爲對稱，而 (1) 與 (2) 之軌跡相同．故 (1) 中各點以其對於 XX' 之對稱點代替時，(1) 之軌跡不變．是以此軌跡對稱於 x 軸．同理，從 (3)，此軌跡對稱於 y 軸；而從 (4)，此軌跡對稱於原點，因 $OP=OS$，則點 $P(x,y)$ 與 $S(-x,-y)$ 對稱於原點也．

作此方程式之圖形時，可利用其對稱之性質，祇計算其第一象限內諸點，如表中所載者．作此諸點及其對於坐標軸與原點對稱諸點而後畫此曲線．此軌跡稱爲橢圓．

x	y
4	0
3.5	1
2.6	1.5
0	2

此例題導出以下之

定理 II．對稱　設方程式中之 y 以 $(-y)$ 代之而此方程式仍不變，則其軌跡對稱於 x 軸．

設以 $(-x)$ 代 x 而此方程式仍不變，則其軌跡對稱於 y 軸．

設以 $(-x)$ 與 $(-y)$ 代 x 與 y 而此方程式仍不變，則其軌跡對稱於原點．

注意：　上述之檢驗法，如已有二者成立，則第三者亦必成立．

定理 II 可稍異其形式，設此方程式爲含 x 與 y 之代數方程式．此時之曲線稱爲代數曲線(Algebraic curve)，而定理 II 可改爲

非代數曲線，即稱為超越曲線．

$y.y^3$

定理 III．代數曲線之對稱　設一方程式不含 y 之奇次冪，則其軌跡必對稱於 XX'；設不含 x 之奇次冪，則其軌跡必對稱於

YY'. 設各項皆爲偶* 次或各項皆爲奇次,則其軌跡必對稱於原點.

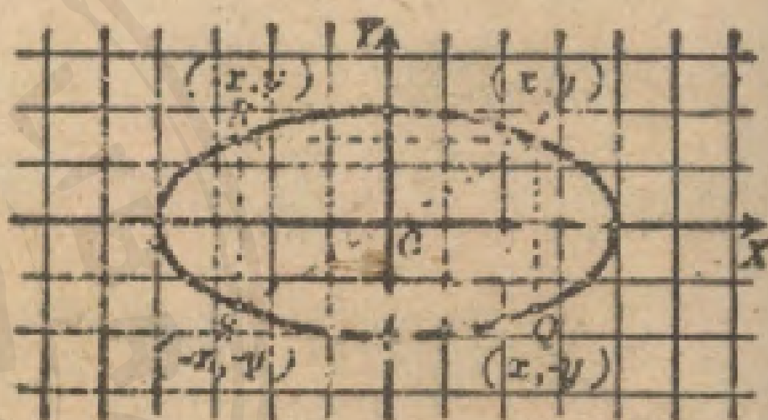
3. 曲線之範圍 (Extent of a curve)

坐標之數值皆爲實數,故凡 x 所有一切值之足使 y 爲虛數者,計算時應一概除外.同理,凡 y 所有一切值之足使 x 爲虛數者,亦應除外.此種數值之決定,可知曲線之範圍.

例　題

(1) 作 $x^2+4y^2=16$ 之軌跡時, x 或 y 之何種數值應除去之?

［解］ 求 x 以 y 表之,再求 y 以 x 表之,



(5) $$x=\pm\ 2\sqrt{4-y^2},$$

(6) $$y=\pm\ \tfrac{1}{2}\sqrt{16-x^2}.$$

從 (5) 中之根式,可知 y 之大於 2 之絕對值可使 $4-y^2$ 爲負而使 x 爲虛數.故大於 2 或於小 -2 之 y 之一切值均須除去.

同理,從 (6) 中之根式,可知大於 4 或小於 -4 之 x 之一切值均須除去.

此曲線全在.

$$x=4,\ x=-4,\ y=2,\ y=-2,$$

四直線所圍成之矩形內, 故爲一閉曲線 (Closed curve).

在求軌跡上諸點時,僅須假定在 0 與 2 間 y 之值,如第 33 頁上之表,或假定在 0 與 4 間 x 之值亦可.

(2) 決定 $y^2-4x+15=0$ 之軌跡時, x 或 y 之何種數值必須除外?

* 常數項常視作零 (偶)次,如第 32 頁上(1)中之16.

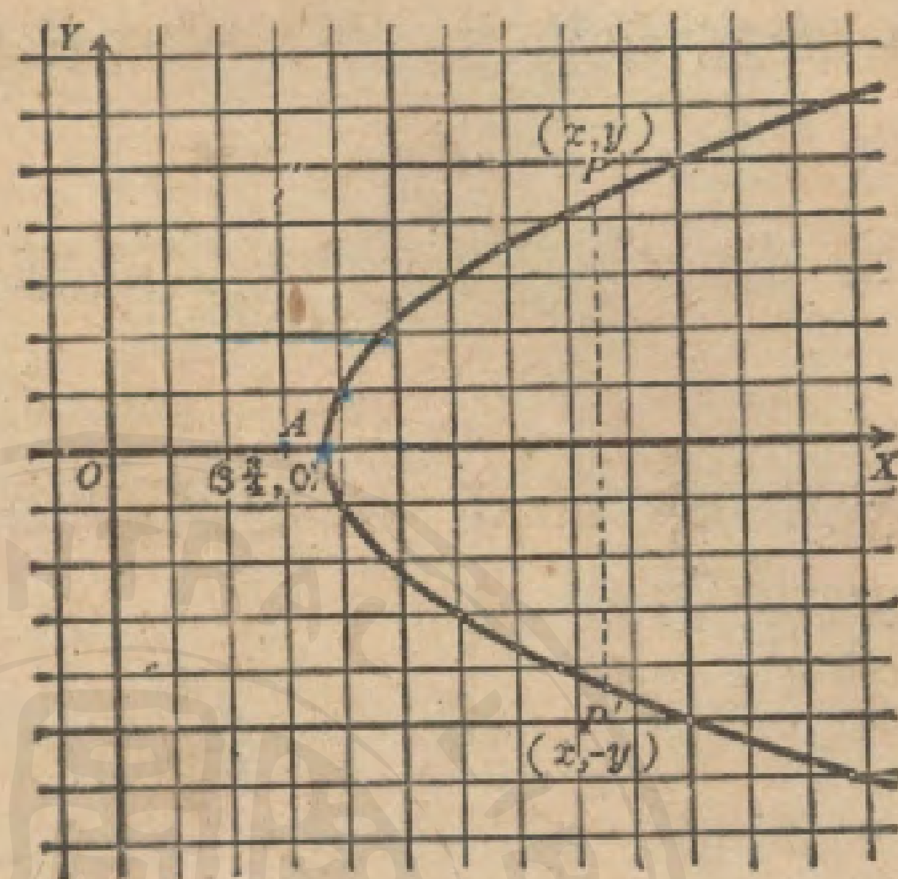
［解］　求 x 以 y 表之,再求 y 以 x 表之.

(7)　　$x=\frac{1}{4}(15+y^2)$.

(8)　　$y=\pm\sqrt{4x-15}$.

從(7) y 之任何值皆可得 x 之實數值.故 y 無除外之值.

x	y
$3\frac{3}{4}$	0
4	±1
$4\frac{3}{4}$	±2
6	±3
$7\frac{3}{4}$	±4
10	±5
$12\frac{3}{4}$	±6
等	等

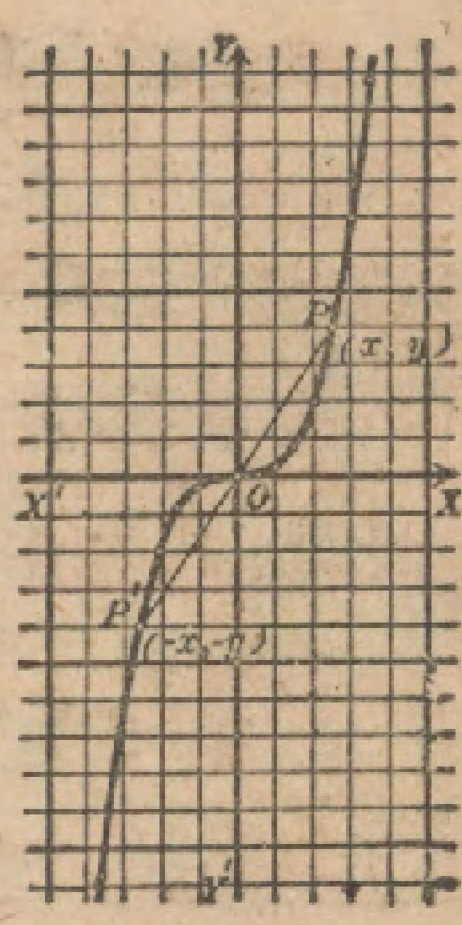


從 (8) 中之根式,凡使 $4x-15$ 爲負之 x 之一切值皆應除外;卽凡 x 小於 $3\frac{3}{4}$ 之一切值皆應除外.

故此軌跡全在直線 $x=3\frac{3}{4}$ 之右.更因 y 無除外之值,故此軌跡可伸展至無限,x 之值漸增時,y 之值亦隨之而增.

依定理 III,知此軌跡對稱於 x 軸,而稱爲拋物線(Parabola).

(3) 決定 $4y=x^3$ 之軌跡時,x 或 y 之何種數值必須除外?



［解］　求 x 以 y 表之,再求 y 以 x 表之.

$$x=\sqrt[3]{4y},$$

$$y=\frac{1}{4}x^3.$$

從此二方程式,可知各坐標值皆無除外者.

依定理 III,知此軌跡對稱於原點,兩坐標同時增加;此軌跡伸展至無限而稱爲立方拋物線(Cubical parabola).

以上諸例所說明之方法可總述於以下之規則中:

決定曲線範圍之規則.

求方程式中之 x 以 y 表之,並將 y 所有足使 x 成爲虛數之一切值除去之.

求方程式中之 y 以 x 表之,並將 x 所有足使 y 成爲虛數之一切值除去之.

從 x 與 y 所除去之值,決定此曲線爲閉曲線抑或伸展至無限.

19. 摘要 已知一方程式,應在作軌跡前,先答以下諸問題:

1. 其截部爲何?
2. 此軌跡對於坐標軸或原點對稱否?
3. x 與 y 之何種數值應除去之?此曲線爲閉曲線抑或伸展至無限遠?

綜諸問題之解答卽所謂此已知方程式之一般討論 (General discussion). 此逐步所得之結果應立卽運用於圖形. 例如,當截部已決定時,應卽在坐標軸上記出之. 指明何軸爲對稱軸. x 與 y 所除外之值能決定與坐標軸平行之直線而爲此軌跡所不趨過者. 作此等直線.

例 題

討論方程式

(1) $$x^2-4y^2+16\ y=0.$$

作其軌跡.

[解] 1. 截部 設 $y=0$, 則得 $x=0$, 是爲 x 軸上之截部. 設 $x=0$, 則得 $y=0$ 與 4, 是爲 y 軸上之截部. 在兩軸上各記出其截部.

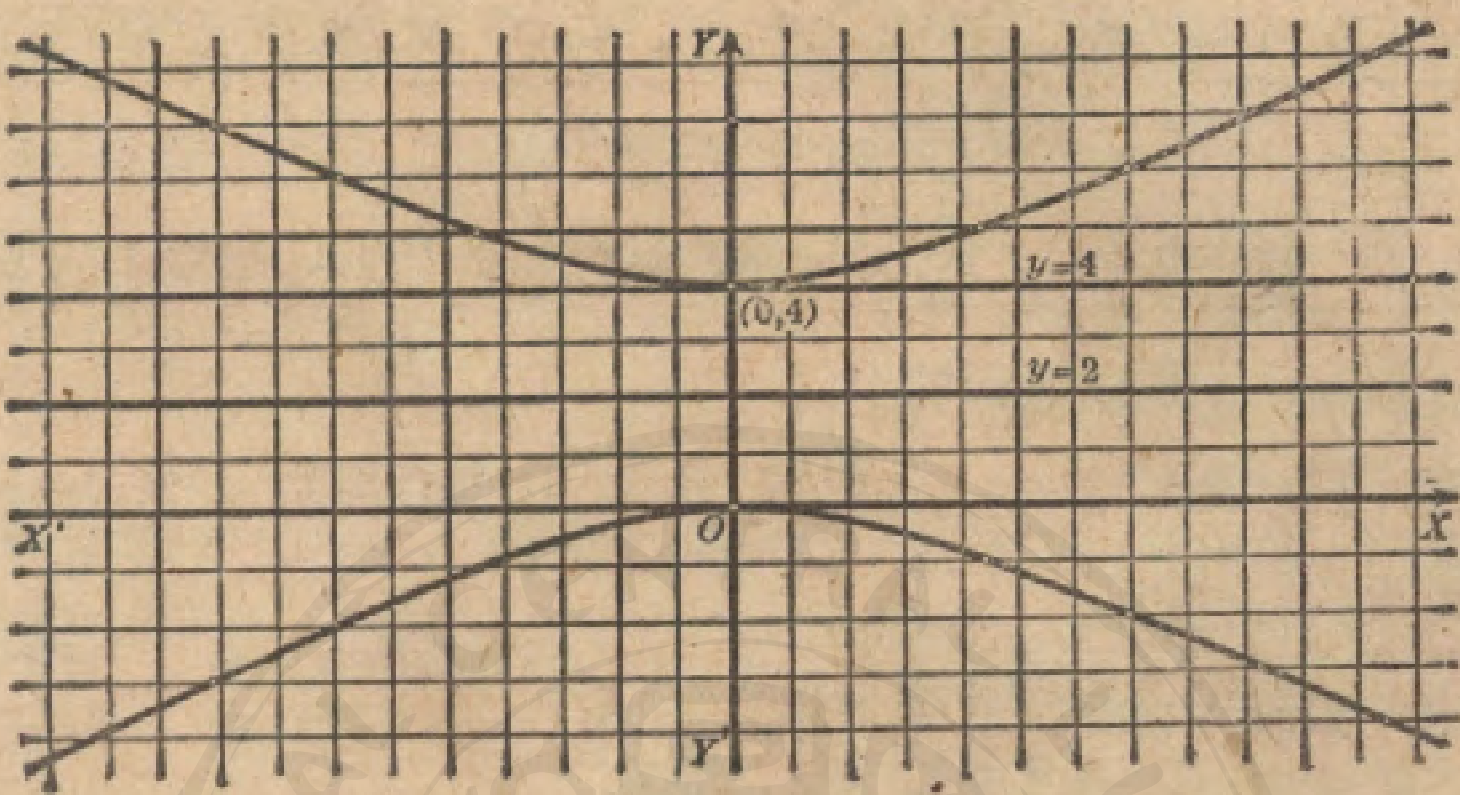
x	y
0	0,4
0	0

2. 對稱 此方程式不含 x 之奇次冪;故其軌跡與 YY' 爲對稱.

3. 範圍　求 x,

(2) $$x=\pm 2\sqrt{y^2-4\,y}.$$

$y^2-4\,y=0$ 之根為 $y=0$ 與 $y=4$. 在此二根間，y 之任何值皆使 $y^2-4\,y$ 為負. 例如，$y=2$ 得 $4-8=-4$，故在 0 與 4 間



y 之一切值皆須除外. 作直線 $y=0$ 與 $y=4$. 此軌跡必在第一線之下與第二線之上.

求 y,

(3) $$y=2\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+16}.$$

故 x 無除外之值，因不論 x 為何值，x^2+16 必為正也. 顯然，當 x 增加時，y 亦隨之而增，而此曲線離二軸向外伸展至無限遠.

用 (2) 作此軌跡，如圖，此曲線稱為雙曲線 (Hyperbola).

習　題 七

(1) 討論下列各方程式並作其軌跡. 所有討論須與圖形相符.

(a) $y^2=4\,x$.

(b) $y=8-x^2$.

(c) $x=y^2-2\,y$.

(d) $3y=x^2-9$.

(e) $x^2+y^2=25$.

(f) $x^2-y^2=25$.

(g) $x^2+4y^2=24$.

(h) $4x^2-y^2=-16$.

(i) $x^2+9y^2=18$.

(j) $x^2+y^2-4y=0$.

(k) $x^2+y^2+4x=0$.

(l) $x^2+6y^2+6y=0$.

(m) $4x^2+16x+y^2=0$.

(n) $y=3x^3-6x$.

(o) $y=x^4-4x^2$.

(p) $3x^3+y^2=0$.

(q) $9x^2-y^2+18x+6y=0$.

(r) $x^2+xy+y^2-4=0$.

(s) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$.

(2) 討論下列各方程式.作圖時,可假定幾個數值以代此中之任意常數,惟不可以特殊數值代之以致增加方程式之特性.*

(a) $y^2=2px$. 拋物線)

(b) $x^2+y^2=r^2$. 圓)

(c) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.(橢圓)

(d) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. 雙曲線)

(e $y=mx^3$.(立方拋物線)

(f $y^2=mx^3$.(半立方拋物線)

(g) $xy=a$.(等邊雙曲線)

(h) $x^2+my^2=16$.

(i) $x^2+y^2+2rx=0$. 圓)

(j) $y=ax^2+bx+c$.(拋物線)

(k) $x=ay^2+by+c$. 拋物線)

(l) $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.(圓)

題(2)中之軌跡,除(e),(f)外,其他均屬於圓錐曲線類(Conics or conic sections),——以簡便論,爲繼直線與圓之曲線.此類曲線可自直圓錐體之橫截面得之.種種定義與性質當論之於後.其常用之定義如下:

定義 一點至一定點與至一定線,其距離之比爲一常數,則此點之軌跡爲一圓錐曲線.

(3) 證明代表圓錐曲線之方程式爲含 x 與 y 之二次方程式.

提示 取 y 軸爲定線而作 x 軸過其定點.設定點爲 $(p,0)$ 而其常數比爲 e, 則其結果爲 $(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0$.

(4) 討論題 3 之方程式並作其軌跡而以

$$(1)\ e=1;\quad (2)\ e=\tfrac{1}{2};\quad (3)\ e=2.$$

(5) 一點移動時,其與 $(4,0)$ 及 $(-4,0)$ 之距離之和永爲 12.則其軌跡爲何? 答 橢圓 $5x^2+9y^2=180$.

(6) 一點移動時,其與 $(0,3)$ 與 $(0,-3)$ 之距離之差爲 6,則其軌跡爲何?

---

* 例如,(a) 中 $p=0$ 爲一特殊數值.實則,上述諸例中,除(j),(k),(l) 外,皆以零爲任一常數之特殊數值.

(7) 一點至 $(4,5)$ 之距離為至 $(-2,3)$ 之距離之兩倍，求其軌跡之方程式．討論並作此軌跡．

(8) 一點移動時，其縱坐標較此點至 $(3,3)$ 之距離少 2，求其軌跡之方程式．討論並作圖． 答 $x^2-6x-10y+14=0$.

(9) 一點移動時，其與 $(-2,3)$ 及 $(3,-2)$ 之距離，常成 $4:5$ 之比．求其軌跡之方程式，討論並作其圖形．

湾 (10) 一點至 $(2,-4)$ 之距離常較其縱坐標多 5，求其軌跡之方程式．討論並作圖． 答 $2y=x^2-4x-5$.

(11) 已知點 $A(3,1)$ 與點 $B(-1,-1)$．一點 P 移動時使 $\triangle PAB$ 之面積常為 8 平方單位．求 P 點軌跡之方程式並作圖．(有二種情形)．

(12) 一點移動時，其與 $(2,2)$ 連線之斜率適為與 $(-2,0)$ 連線斜率之二倍．求其軌跡之方程式，討論並作其圖形．

(13) 一點移動時，其與 $(2,4)$ 連線之斜率常較與 $(-2,4)$ 連線之斜率多 3．此其軌跡之方程式．討論並作圖． 答 $4y=3x^2+4$.

班 (14) 證下述命辭：設 x 與 y 互換而其方程式不變，則此軌跡常對稱於 $y=x$ 之直線．應用此理，作下列諸軌跡：(不懂)

(a) $x^2-xy+y^2-4=0$;

(b) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$;

(c) $x^2+y^2-4x-4y-1=0$.

(15) 試述對於直線 $x+y=0$ 為對稱之條件，且證之．

較

20. 水平與垂直漸近線 下例說明作一方程式之軌跡所常易引起之困難．玆述所遇直線之

定義 一曲線之漸近線為一直線，當曲線伸展至無限遠時，則此直線愈與之接近．

例　題

(1) 作方程式

(1) $xy-2y-4=0$ 之軌跡.

［解］ 求 y,

(2) $$y=\frac{4}{x-2}.$$

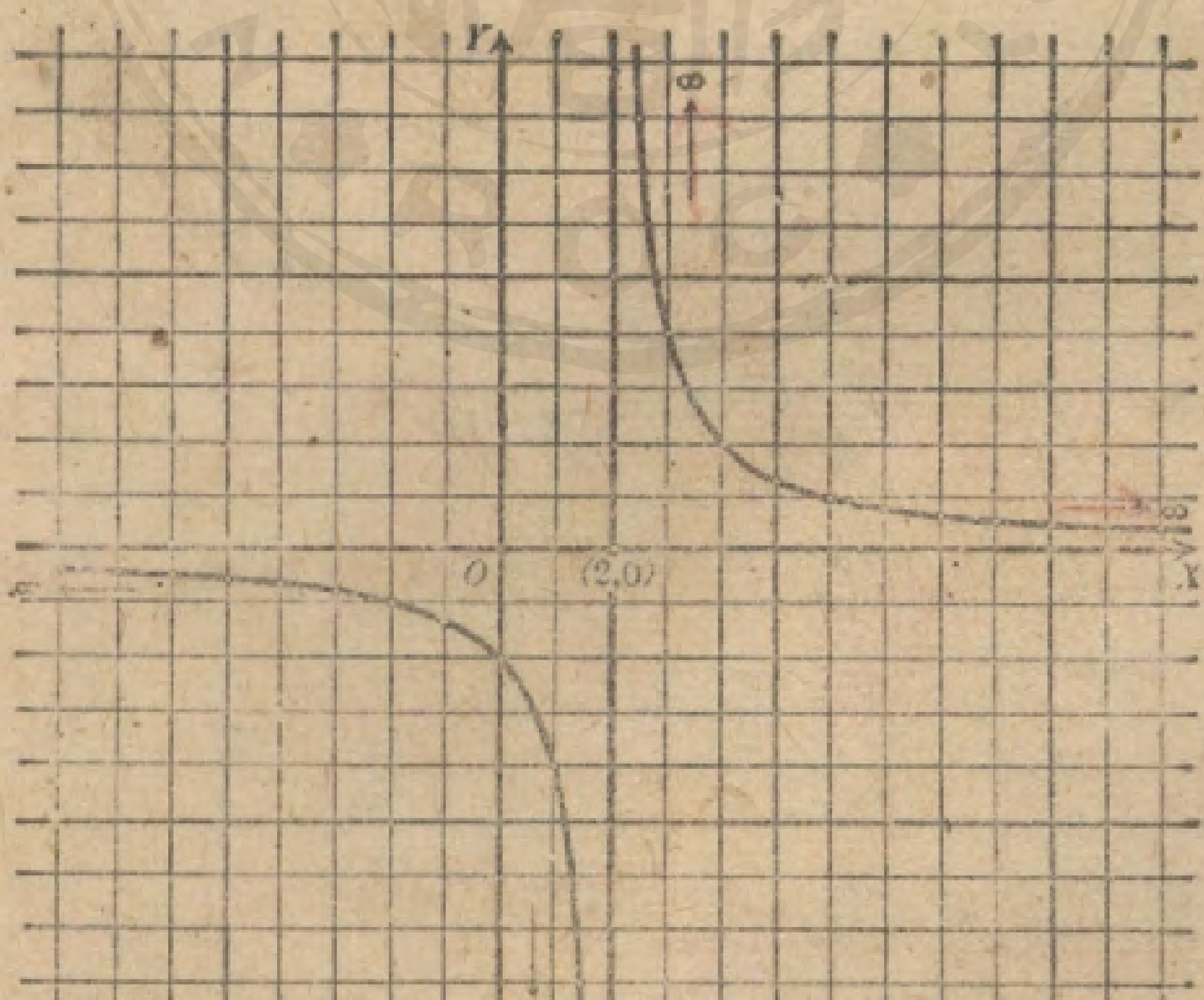
x	y	x	y
0	−2	0	−2
1	−4	−1	$-\frac{4}{3}$
$1\frac{1}{2}$	−8	−2	−1
$1\frac{3}{4}$	−16	−4	$-\frac{2}{3}$
2	∞	−5	$-\frac{4}{7}$
$2\frac{1}{4}$	16	⋮	⋮
$2\frac{1}{2}$	8	−10	$-\frac{1}{3}$
3	4	等	等
4	2		
5	$\frac{4}{3}$		
6	1		
⋮	⋮		
12	0.4		
等	等		

由此立見,設 x 漸近於 2, 則 y 漸近於 ∞. 此乃說明:當曲線伸展至無限遠時,則與直線 $x=2$ 無限接近. 設解

(1)以求 x 而寫其結果爲

(3) $$x=2+\frac{4}{y},$$

亦可見 y 之值無限增加時, x 漸近於 2. 故其軌跡向上與向下皆伸展至無限遠而漸近於直線 $x=2$. 此垂直線 $x=2$ 稱爲垂直漸近線 (Vertical asymptote).



又在 (3) 中,設 y 漸近於 0,則 x 漸近於 ∞, 而 $y=0$ 爲一水平漸近線 (Horizontal asymptote).

在作此雙曲線時，可將漸近線 $y=0$ 與 $x=2$ 視作指導線.

作圖時，x 所假定之數值須稍異於 2，較小或較大均可，如表中所載者.

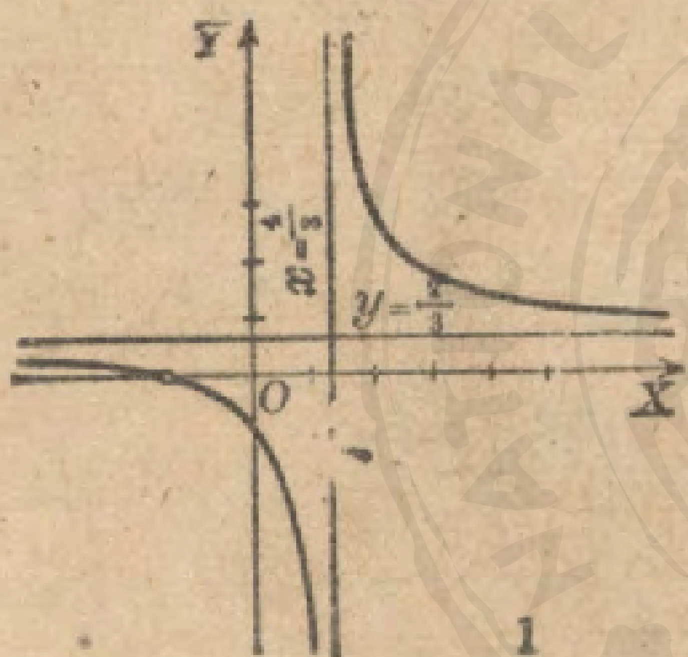
(2) 作 $$y=\frac{2x+3}{3x-4}$$之軌跡.

［解］ 此軌跡如圖 1 所示.

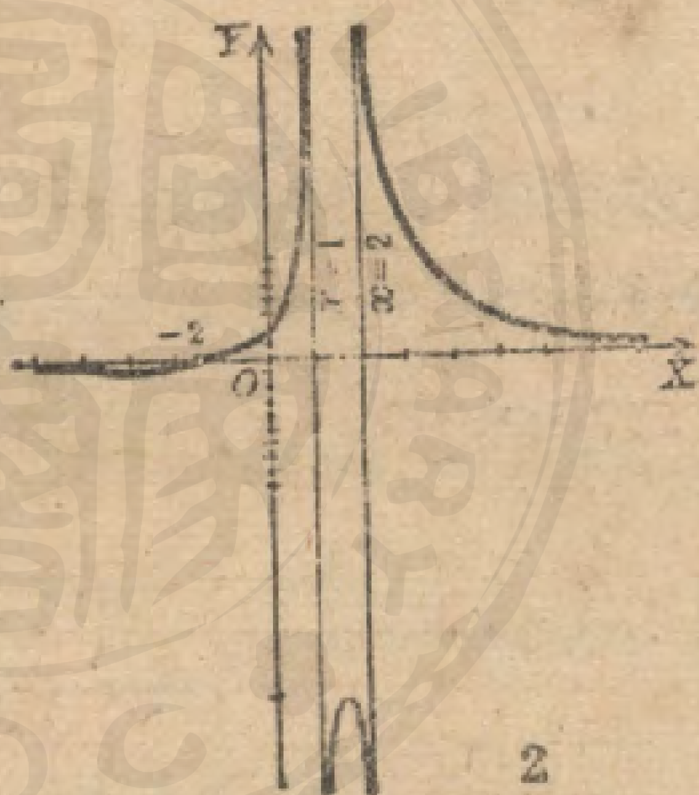
漸近線. 從此方程式，卽知 $3x-4=0$ 或 $x=\frac{4}{3}$ 爲一垂直漸近線.

求 x， $$x=\frac{4y+3}{3y-2}.$$

故 $3y-2=0$ 或 $y=\frac{2}{3}$ 爲一水平漸近線.



1



2

(3) 作 $$y=\frac{2x+3}{x^2-3x+2}$$之軌跡.

［解］ 此軌跡如圖 2 所示. 有二垂直漸近線，$x=1$ 與 $x=2$，因其分母 $$x^2-3x+2=(x-1)(x-2).$$

求 x，

$$x=\frac{3y+2\pm\sqrt{y^2+24y+4}}{2y}.$$

取根式之正號，卽知 $y=0$ 爲一水平漸近線.

曲線之一支在兩垂直漸近線之間. 表中載有軌跡上數點. 注意此處之橫坐標與縱坐標所用之單位不同.

x	y
0	$\frac{3}{2}$
$-\frac{3}{2}$	0
$\frac{3}{2}$	-24
5	$\frac{13}{12}$
-5	$-\frac{1}{6}$

求平行於坐標軸之漸近線之規則.

求方程式之 y（又求 x），而取分母中諸一次因子等於零卽得漸近線.

一曲線之垂直與水平漸近線之決定，應加入於第 19 節之討論綱要中而列爲第四款:

（4）其水平與垂直漸近線爲何?

習　　題

（1）決定下列各方程式之水平與垂直漸近線.討論並作圖.

(a) $xy=8$.　　(d) $x^2+2xy-4=0$.

(b) $xy-x-2=0$.　　(e) $x^2-xy-2x-y=0$.

(c) $2x+2xy-y=0$.　　(f) $xy=x^2+4$.

(g) $3xy-9y-2x+8=0$.　+5

（2） a) $xy^2=4(4-x)$.　　(h) $x=\dfrac{y}{y^2-9}$.

(b) $x^2y-y=2x$.　　(i) $y=\dfrac{(x-2)^2}{x+2}$.

(c) $x^2y+y=8$.　　(j) $y=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-6}$.

(d) $(x^4-4x^2)y=4$.　　(k) $y=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+5x-6}$.

(e) $3xy+6=x^2y$.　　(l) $4x=\dfrac{y^2}{y-2}$.

(f) $y(x^2-4)=12$.　　(m) $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$.

(g) $x=\dfrac{y+3}{y-1}$.

（3）求一點之軌跡之方程式，設其移動時至原點之距離常等於該點與原點連線之斜率.討論並作其軌跡.　答 $y^2-x^2\,y^2-x^4=0$.

（4）決定下列各方程式中平行於 OX 或 OY 之漸近線，討論並作圖.

(a) $y=\dfrac{ax+b}{x}$.　　(b) $y=\dfrac{x}{ax+b}$.

個別研究習題或特設習題

詳細討論下列各方程式並作其軌跡.

(1) $y^2-4xy+x^3=0$.　　(3) $y^2-x^2+x^4=0$.

(2) $y^2-2xy-2x+x^3=0$.　　(4) $(y-x)^2-(a^2-x^2)=0$.

(5) $(y-x)^2-x^2(a^2-x^2)=0$.
(6) $(y-x^2)^2-(a^2-x^2)=0$.
(7) $(y-x^2)^2-x^2(a^2-x^2)=0$.
(8) $y^2(a-x)-x^3=0$.(蔓葉線 Cissoid).
(9) $y^2(a-x)-x^2(a+x)=0$.(環索線 Strophoid).
(10) $x^4+2ax^2y-ay^3=0$.
(11) $x^4-axy^2+y^4=0$.
(12) $a^4y^2-a^2x^4+x^6=0$.
(13) $ay^2-bx^4-x^5=0$.
(14) $a^3y^2-2abx^2y-x^5=0$.
(15) $y^2-(a^2-x^2)(b^2-x^2)^2=0$.
(16) $x^3y^2-a^3x^2+ay^4=0$.
(17) $x(y-x)^2-b^2y=0$.
(18) $(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$.(雙紐線 Lemniscate).
(19) $(x^2-a^2)^2=ay^2(3a+2y)$.
(20) $(x^2+y^2-1)y-ax=0$.
(21) $y^2-x^2-x(x-4)^2=0$.
(22) $(x^2+y^2-2ay)^2=a^2(x^2+y^2)$.(蝸線 Limaçon).
(23) $(x^4+x^2y^2+y^4)=x(ax^2-4ay^2)$
(24) $(x^2+y^2+4ay+a^2)(x^2+a^2)+2a^2y^2=0$.
(25) $(y^2-x^2)(x-1)(x-\frac{3}{2})=2(y^2+x^2-2x)^2$.
(26) $(x^2+y^2+4ay-a^2)(x^2-a^2)+4a^2y^2=0$.(冠形線Cocked hat).
(27) $(x^2-1)^2y-x^3=0$.

21. 交點　設兩已知方程式之曲線相交，則每一交點之坐標必皆適合此兩方程式.在代數學中,已證明將此兩個二元方程式聯立解之,即得一切數值之能同時適合於此兩方程式者.故

求二曲線之交點其方程式爲已知者之規則.

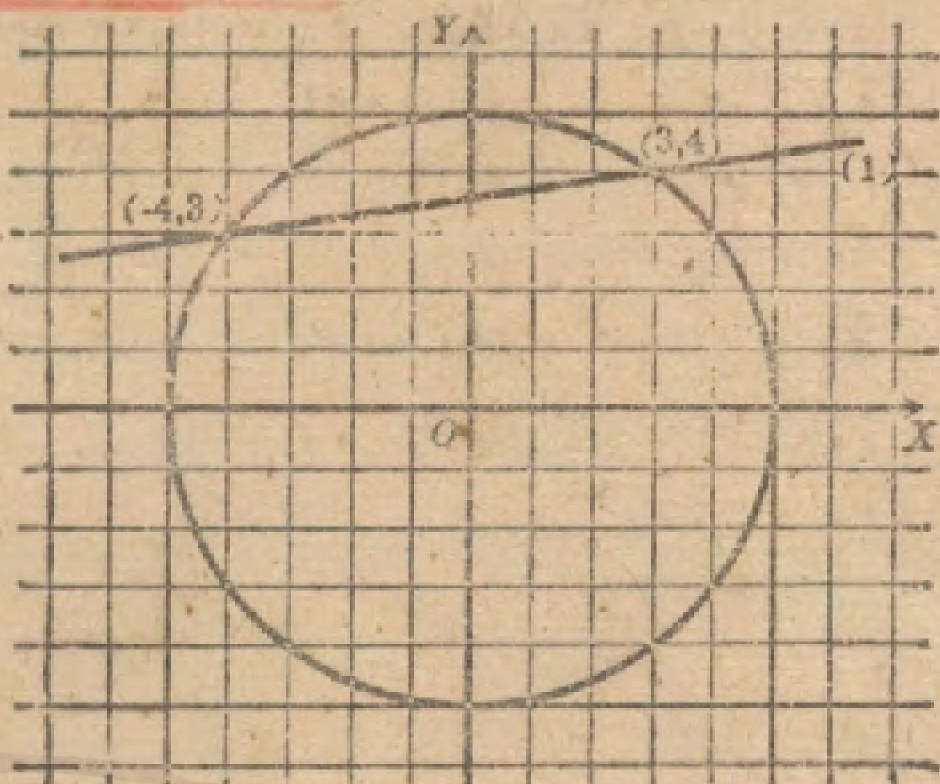
視作代數學中之兩個聯立方程式而解之.

將所得實根對應排列之,即得各交點之坐標.

［注意］　凡坐標皆爲實數,故僅實根相當於二曲線之公共點

例　題

(1) 求下列方程式之交點:



(1) $x-7y+25=0$,

(2) $x^2+y^2=25$.

[解] 求 (1) 之 x.

(3) $x=7y-25$.

代入 (2) 中,

$(7y-25)^2+y^2=25$.

化簡之, $y^2-7y+12=0$. $\therefore$ $y=3$ 與 4.

代入 (3) 中 [不可代入 (2) 中], $x=-4$, 與 $+3$.

排列之,其交點為 $(-4,3)$ 與 $(3,4)$.

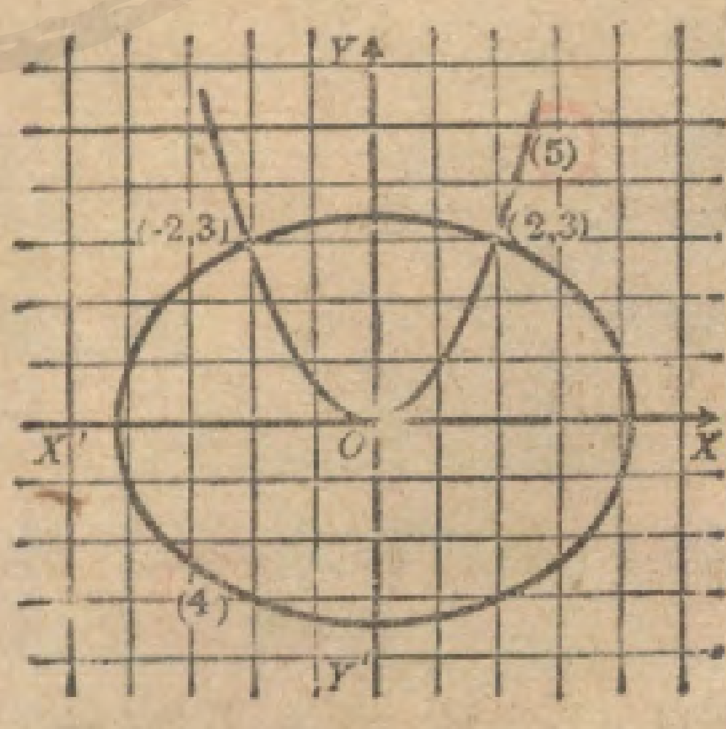
在圖中,直線(1)即方程式(1)之軌跡,而圓為(2)之軌跡. 答

y 之值代入(1)中而不代入(2)中者,因(1)為 x 與 y 之一次式而(2)為二次式也. 若將 $y=3$ 代入(2)中則得 $x=\pm4$. 但(4,3)並不在直線(1)上.

(2) 求下列軌跡之交點:

(4) $2x^2+3y^2=35$,

(5) $3x^2-4y=0$.



[解] 解(5)以求 x^2,

(6) $x^2=\frac{4}{3}y$.

代入(4)中而化簡之,

$9y^2+8y-105=0$.

$\therefore$ $y=3$ 與 $-\dfrac{35}{9}$.

代入(6)中而解之,

$x=\pm2$ 與 $\pm\frac{2}{9}\sqrt{-105}$.

將所得實根排列之,即得其交點為 $(+2,3)$, $(-2,3)$. 答.

在圖中,橢圓(4)為方程式(4)之軌跡而拋物線(5)為(5)之軌跡.

習　　題　(全解做) 九.

求下列諸曲線之交點並作圖：

(1) $3x+y-13=0$,
$x^2+y^2-25=0$.
答 $(3,4),(4.8,-1.4)$.

(2) $3x+4y=25$,
$x^2+y^2=25$.

(3) $xy=2$,
$x^2+y^2=5$.

(4) $2y=x^2$,
$x=y$.

(5) $y^2=2px$,
$x^2=2py$.
答 $(0,0),(2p,2p)$.

(6) $y=x^3$,
$y=x^2+2x$.

(7) $x+y=0$,
$x^3-6x-3y=0$.

(8) $x^2+y^2=5a^2$,
$x^2=4ay$.
答 $(2a,a),(-2a,a)$.

(9) $x^2-y^2=16$,
$x^2+y^2=25$.

(10) $x^2+y^2-6x=0$,
$y^2=x^3$.
答 $(0,0),(2,\pm 2.83)$.

(11) $x^2-4y^2=9$,
$xy=10$.

(12) 求兩圓 $x^2+y^2=16$ 與 $x^2+(y-6)^2=9$ 之公共弦之長.

(13) 求三角形各邊之長，其邊之方程式爲 $x+2y=5, 2x+y=7, x-y=-1$.　答 $\sqrt{5}, \sqrt{2}, \sqrt{5}$.

(14) 設三角形之邊爲 $x+y=a, x-2y=4a, y-x+7a=0$，則其面積爲何?　答 $12a^2$.

(15) 求 $x^2+y^2=13$ 與 $y^2=3x+3$ 之交點連線之斜率.

(16) 圓心爲 $(2,1)$，半徑爲 4 之圓在直線 $x+2y=4$ 上所截之弦長爲何?

(17) 求三角形三中線之長，其邊爲 $x+7y+11=0$, $3x+y-7=0, x-3y+1=0$.　答 $2\sqrt{5}, \frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{170}$.

(18) 求 $x^2+y^2=9$ 與 $3y-4x=15$ 之交點. 此結果之意義爲何?

(19) 求二點之坐標，此二點各與 $(2,1)$ 及 $(-2,-3)$ 相距 6 單位.

(20) 二圓之半徑皆爲 4，且皆過 $(2,1)$ 與 $(-2,-2)$，則二圓心連線之斜率與長各爲若干?

(21) 求直線 $x-2y=4$ 上與 $(1,-1)$ 相距 4 單位諸點之坐標.

(22) 求距 $(2,2)$ 4 單位而距 $(0,-1)$ 3 單位諸點之坐標.
答 $(-1.94, 1.29)$ 與 $(2.87, -1.91)$.

第四章

直線

22. 直線方程式之次數. 茲證明任一直線可以含變數坐標 x 與 y 之一次方程式表之.

定理. 過點 $B(0,b)$ 而斜率為 m 之直線,其方程式為

$$\text{(I)} \qquad \boldsymbol{y=mx+b.}$$

［證］ 設 $P(x,y)$ 為線上任一點.

$$PB\text{ 之斜率}=\frac{y-b}{x}. \qquad \text{［用第 17 頁之(IV)］}$$

於是 $$\frac{y-b}{x}=m,\text{ 或 } y=mx+b. \qquad Q.E.D.$$

在方程式(I)中,m 與 b 可為任何數值——正,負,或零皆可.

方程式(I)代表與 y 軸相交之任何直線.但平行於 y 軸之直線,其方程式之形狀為 $x=$一常數,因在此直線上各點之橫坐標皆相等也.$y=mx+b$ 與 $x=$一常數兩形狀可代表一切直線.各方程式皆為含 x 與 y 之一次方程式,故得

定理. 任何直線之方程式為含坐標 x 與 y 之一次方程式.

23. 任意一次方程式之軌跡. 茲發生一問題:即已知含坐標 x 與 y 之一次方程式,其軌跡皆為一直線否?

例如，設方程式

(1) $$3x-2y+8=0.$$

解之以求 y.得

(2) $$y=\tfrac{3}{2}x+4.$$

試比較(2)與第22節之公式(I)，則知若以 $m=\frac{3}{2}$，$b=4$ 卽得(2)式.故(2)或(1)爲過(0,4)而斜率爲 $\frac{3}{2}$ 之直線之方程式也.

方程式

(3) $$Ax+By+C=0,$$

其中 A,B,與 C 爲任意常數，稱爲含 x 與 y 之普遍一次方程式，因任何一次方程式均可化成此式也.故方程式(3)爲代表一切直線之方程式.

因方程式 $y=mx+b$ 可寫成 $mx-y+b=0$，設 $A=m$,$B=-1$，$C=b$，卽爲(3)式；而方程式 $x=$常數，可寫成 $x-$常數$=0$，設$A=1$，$B=0$，$C=-$常數，亦卽爲(3)式.

由此討論，得普遍定理如下：

定理. $Ax+By+C=0$ 之軌跡爲一直線.

[證] 解(3)以求 y，得

(4) $$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

與(I)比較之，卽知(4)之軌跡爲一直線.因 $m=-\dfrac{A}{B}$，$b=-\dfrac{C}{B}$.

如若 $B=0$，則上述理由失所依據.但設 $B=0$，則(3)爲

$$Ax+C=0,\ \text{或}\ x=-\frac{C}{A}.$$

而此方程式之軌跡爲一平行於 y 軸之直線.故(3)之軌跡不論在何種情形必爲一直線無疑. Q.E.D

系．直線 $Ax+By+C=0$ 之斜率爲 $m=-\dfrac{A}{B}$，即以 x 之係數被 y 之係數所除而改其符號．

24．**繪直線法**．設直線不過原點，則求其截部，標之於兩軸上而繪此直線．設直線通過原點，則求坐標適合於方程式之第二點而繪一直線通過此點與原點．

例　　題

繪 $3x-y+6=0$ 之軌跡，並求其斜率．

［解］先設 $y=0$ 以求 x，

$x=-2=$ x 軸上之截部

又設 $x=0$ 以求 y，

$y=6=$ y 軸上之截部．

故直線通過 $(-2,0)$ 與 $(0,6)$．

求斜率：與普遍方程式(3)比較之卽知 $A=3$，$B=-1$，$C=6$．

故
$$m=-\frac{A}{B}=3.$$

或用以下求法：化已知方程式爲 $y=mx+b$ 之形式．

得
$$y=3x+6.$$

故
$$m=3,\quad b=6,$$

結果與上相同．

習　　題　十

(1) 求下列各方程式之截部，斜率，與傾角，並作圖．

(a) $2x+3y=5$.

(b) $2x+y=0$.　　答 $0,0;m=-2$.

(c) $2y-3=0$.

(d) $3x-5y=4$.　　答 $\frac{4}{3},-\frac{4}{5};m=\frac{3}{5}$.

(e) $5x+2y=3$.

(f) $2x+5y=2$.

(g) $4x+7=0$.

(2) 依下列已知條件，求直線之方程式並作圖：

(a) $m=\frac{2}{3}$, $b=1$;

(b) $m=\frac{4}{3}$, $b=2$;　　答 $4x+3y=6$.

(c) $m=1$, $b=-3$;

(d) $\alpha=45^\circ$, $b=\frac{5}{3}$;　　答 $3x-3y+5=0$.

(e) $\alpha=60^\circ$, $b=0$;

(f) $\alpha=135^\circ$, $b=-\frac{4}{3}$.

(3) 求下列各直線之方程式：

(a) 平行於 $2x-y-5=0$ 而過$(0,0)$.　　答 $2x-y=0$.

(b) 平行於 $3x+4y-15=0$ 而過$(0,3)$.

(c) 平行於 $5y-5x+12=0$ 而過$(0,-3)$.　　答 $x-y-3=0$.

(d) 平行於 $2x+y+7=0$ 而過$(0,-4)$.

(4) 求下列各直線之方程式：

(a) 垂直於 $3x-4y-5=0$ 而過$(0,2)$.

(b) 垂直於 $6x+5y=2$ 而過$(0,4)$.　　答 $5x-6y+24=0$.

(c) 垂直於 $x-2y=6$ 而過$(0,-4)$.

(d) 垂直於 $y-3x=2$ 而過$(0,-7)$.

(5) 依下列已知條件，求直線之方程式：

(a) $m=-2$ 並過$x+y=3$ 與 $2x-3y+9=0$ 之交點.　　答 $2x+y=3$.

(b) $m=\frac{3}{2}$ 並過 $2x-y-2=0$ 與 $5y-5x+11=0$ 之交點.

(6) 證明以 $3x-y+2=0$, $x+y+1=0$, $6x-2y-1=0$, 與 $2x+2y=7$ 爲邊之四邊形爲一平行四邊形. 作其圖形.

(7) 證明以 $5x+2y+3=0$, $2x-5y+4=0$, $10x+4y=12$, 與 $6x-15y=8$ 爲邊之四邊形爲一矩形. 作諸線.

(8) 證明以 $5x+3y=30$, $3x-4y=16$, $10x+6y=4$, 與 $2x-y+4=0$ 爲邊之四邊形爲一梯形.

(9) 用解析法證明適合下列各種已知條件之點之軌跡爲一直線，並作其圖形：

(a) 與 x 軸及 y 軸之距離常成 4 與 5 之比.

(b) 與兩軸距離之差等於 8. (有兩種情形)

(c) 與兩軸等距.

(d) 與兩互相垂直之直線之距離，其和爲一常數.

下例說明

定理. 分解因子作圖法. 設一方程式能化成諸變數因子之積而等於零時,可使各因子等於零而分別作各方程式之圖形,卽得原方程式之軌跡.

例 題

繪 $4x^2-9y^2=0$ 之軌跡.

［解］ 分解因子, $(2x)^2-(3x)^2=0$

(1) $$(2x-3y)(2x+3y)=0.$$

然後用此定理,此軌跡爲二直線

(2) $$2x-3y=0,\ 與$$

(3) $$2x+3y=0.$$

［證］ (1) 任一點之坐標(x_1,y_1)之適合(1)者, 必能適合(2)或(3).

因若(x_1,y_1)適合(1),

(4) $$(2x_1-3y_1)(2x_1+3y_1)=0.$$

此乘積旣爲零則其中至少有一因子爲零.故或

$$2x_1-3y_1=0,$$

則(x_1,y_1)適合(2);或

$$2x_1+3y_1=0,$$

則(x_1,y_1)適合(3).

(2) 一點(x_1,y_1)若在(2)或(3)之直線上,亦必在(1)之軌跡上.

因若(x_1,y_1)在 $2x-3y=0$ 之直線上,則

(5) $$2x_1-3y_1=0.$$

故其積$(2x_1-3y_1)(2x_1+3y_1)$亦必爲零,因由(5)其第一因子爲零,故(x_1,y_1)適合(1).

所以(1)軌跡上各點同時必在(2)或(3)之軌跡上,反之亦然.此可證明上述定理.

習 題 11

(1) 證明下列各方程式之軌跡爲一對直線,並作其圖形.

(a) $xy=0$. (c) $9x^2-4y^2=0$. (e) $x^2-3xy=0$.
(b) $x^2-5x-6=0$. (d) $xy-2x=0$. (f) $xy-2x^2-3x=0$.
(g) $x^2-5xy+6x=0$. (i) $2x^2-3xy-4x+6y=0$.
(h) $4y^2-x^2-8y+4x=0$. (j) $x^2-4y^2+5x+10y=0$.

(k) $x^2+3xy+2y^2+x+y=0$.　　(m) $y^2-4xy-5x^2+2y-10x=0$.

(l) $3y^2+xy-2x^2+6y-4x=0$.　　(n) $xy-3x+5y-15=0$.

(2) 用上述定理,作下列各方程式之全部軌跡:

(a) $x^3+xy^2-4x=0$.　　(c) $x^4-y^4=0$.

(b) $x^3-6x^2+11x-6=0$.　　(d) $(x^2+y^2-8)(xy+4)=0$.

(3) 一點移動時,與$(-3,0)$及$(2,4)$之距離之平方差常爲 8,作其軌跡.　　答　$10x+8y=19$ 或 3.

(4) 一點移動時,與兩垂直線之距離之平方差爲零.當兩垂直線作爲坐標軸時,求其方程式並作其軌跡.

(5) 一點移動時,常與 $x-2=0$ 及 $y+4=0$ 兩線等距.求其方程式並作其軌跡.　　答　兩垂直線 $x+y+2=0$, $x-y-6=0$.

25. 點與斜率式.　**定理.**　過$P_1(x_1,y_1)$而斜率爲 m 之直線,其方程式爲

(II)
$$y-y_1=m(x-x_1).$$

［證］　設 $P(x,y)$ 爲線上其他任意一點.從假設,

$$斜率\ PP_1=m=\frac{y-y_1}{x-x_1}.\qquad［用第 17 頁(IV)］$$

化簡之,卽得此公式.　　*Q.E.D.*

26. 兩點式.　**定理.**　過 $P_1(x_1,y_1)$ 與$P_2(x_2,y_2)$兩點之直線,其方程式爲 以兩斜率相等.

(III)
$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$

［證］　此線之斜率爲

(1)
$$斜率\ P_1P_2=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$

設 $P(x,y)$爲 P_1P_2 線上任一點.則

$$斜率\ PP_1=\frac{y-y_1}{x-x_1}.$$

因 P,P_1 與 P_2 皆在一直線上,

$$斜率\ PP_1=斜率\ P_1P_2.$$

故得此公式.　　*Q.E.D.*

方程式(III)可寫成下列之行列式

(2) $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

因展開時，此行列式為 x 與 y 之一次式．故(2)為一直線方程式．但當 $x=x_1, y=y_1$ 時與當 $x=x_2, y=y_2$ 時均可適合(2)，因如此則兩列相同而行列式之值為零也．又或如此：將(2)與第 15 節末後之公式比較之，可知三角形 PP_1P_2 之面積為零．故此三點在一直線上．

截距式

27. ~~截部式~~． 一直線可以在二軸上之截部決定之，設此二截部，在 XX' 上為 a，而 YY' 上為 b，則此線通過 $(a,0)$ 與 $(0,b)$．從兩點式(III)得(寫作 $x_1=a, y_1=0, x_2=0, y_2=b$)

$$\frac{y-0}{x-a}=\frac{0-b}{a-0}=-\frac{b}{a}.$$

化簡，移項，並以 ab 除之，得

(IV) $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

共點

28. 三線相交於一點之條件． 在代數學中已證明含二未知數 x 與 y 之三個一次方程式，例如

(1) $Ax+By+C=0,\quad A_1x+B_1y+C_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2=0,$

如有一公解則必三方程式所有係數組成之行列式為零；即

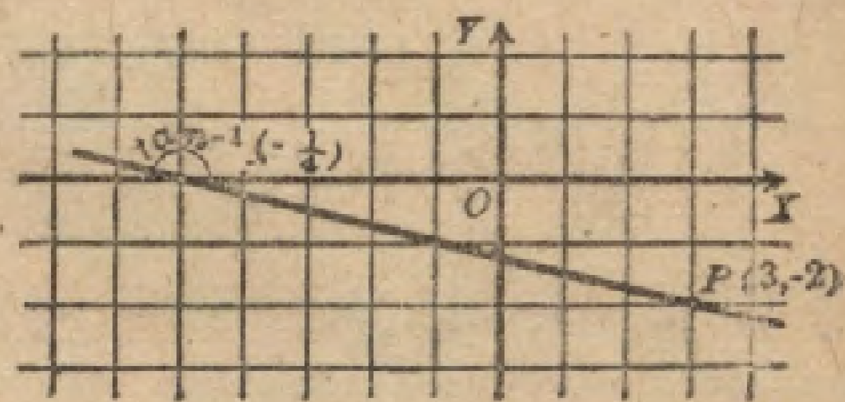
(2) $$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0.$$

故祇當(2)成立時，(1)之三直線相交於一點，但須規定三線不相平行．此事實常可視察方程式以決定之

例 題

(1) 一直線通過 $P_1(3,-2)$，其斜率為 $-\frac{1}{4}$，求其方程式.

［解］ 將 $x_1=3, y_1=-2, m=-\frac{1}{4}$ 代入點與斜率式(II). 則得

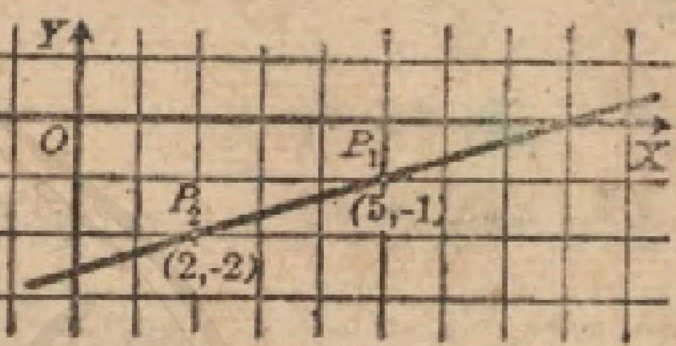


$$y+2=-\tfrac{1}{4}(x-3).$$

化簡之， $x+4y+5=0.$ 答.

(2) 求過 $P_1(5,-1)$ 與 $P_2(2,-2)$ 二點之直線之方程式.

［解］ 將 $x_1=5,\ y_1=-1,\ x_2=2,\ y_2=-2$ 代入二點式(III). 則得

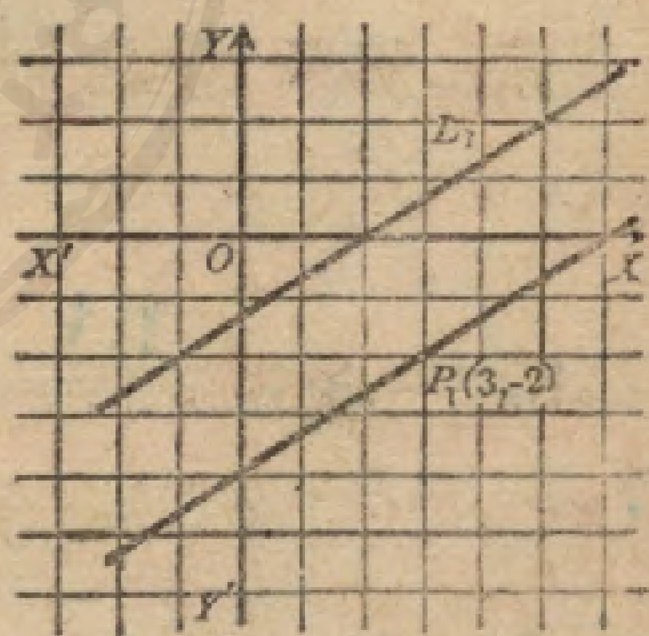


$$\frac{y+1}{x-5}=\frac{-1+2}{5-2}=\frac{1}{3}.$$

化簡之， $x-3y-8=0.$ 答.

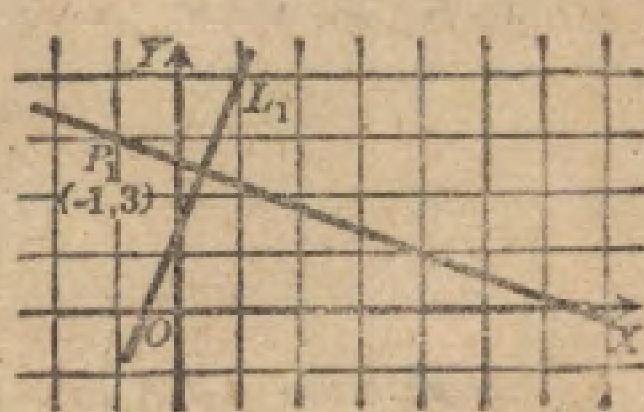
此答案應驗算之. 其法須證已知點之坐標適合此方程式. 例如以 P_1 驗之，將 $x=5,\ y=-1$ 代入此方程式中而答案成立. 同樣以 P_2 驗之. 學者應在例題 1,3, 與 4 中驗算之.

(3) 一線過點 $P_1(3,-2)$ 而與線 L_1: $2x-3y-4=0$ 平行. 求其方程式.



［解］ 已知線 L_1 之斜率為 $\frac{2}{3}$. 故所求線之斜率亦為 $\frac{2}{3}$（第 13 節定理），而通過 $P_1(3,-2)$. 用點與斜率式(II)，得 $y+2=\frac{2}{3}(x-3)$，或 $2x-3y-12=0$ 答.

(4) 一線過 $P_1(-1,3)$ 而垂直於線 L_1: $5x-2y+3=0$. 求其方程式.



［解］ 已知線 L_1 之斜率為 $\frac{5}{2}$. 故所求線之斜率為 $-\frac{2}{5}$（第 13 節定理）. 因已知點 $P_1(-1,3)$ 在此線上，故用點與斜率式(II) 而得 $y-3=-\frac{2}{5}(x+1)$. 或 $2x+5y-13=0$. 答.

習　　題

(1) 求以下列條件所決定之各直線之方程式,並作圖:

(a) 過 $(3,2)$ 而 $m=2$. 答 $2x-y=4$.

(b) 過 $(-4,-3)$ 而 $m=\frac{3}{5}$.

(c) 過 $(-7,0)$ 而 $m=-3$.

(d) 過 $(4,3)$ 與 $(-4,1)$. 答 $x-4y+8=0$.

(e) 過 $(2,5)$ 與 $(6,-5)$.

(f) 過 $(-3,4)$ 而 $a=-1$.

(g) 過 $(-5,-7)$ 而 $b=3$.

(h) $a=-5$, $b=-4$. 答 $4x+5y+20=0$.

(i) $m=-\frac{1}{3}$ $b=-3$.

(j) $m=\frac{2}{3}$, $a=5$.

(k) $a=10$, $b=-1\frac{1}{2}$.

(2) 求一線之方程式並作圖,若此線

(a) 過 $(4,4)$ 而與 $x=y$ 平行;

(b) 過 $(-2,-5)$ 而與 $x-2y=7$ 垂直;

(c) 過 $(0,5)$ 而與 $3x+4y=5$ 垂直; 答 $4x-3y+15=0$.

(d) 過 $(4,-7)$ 而與 $3x+y+6=0$ 平行;

(e) 其 $a=-3$ 而與 $4x+7y=1$ 平行; 答 $4x+7y+12=0$.

(f) 其 $b=6$ 而與 $x-7y=4$ 平行;

(g) 連 $(2,5)$ 至 $(-2,-3)$ 與 $(4,-6)$ 之中點.

(3) 一三角形之頂點爲 $A(3,3)$, $B(-1,-5)$, 與 $C(6,0)$. 求其

(a) 各邊之方程式; 答 $2x-y-3=0$, $x+y-6=0$, $5x-7y-30=0$.

(b) 各中線之方程式及其公共交點;

(c) 各高之方程式及其公共交點;

答 $7x+5y=36$, $x-y=4$, $x+2y=6$; $(4\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.

(d) 各邊上中垂線之方程式及其公共交點;

(e) 過頂點而平行於對邊諸線之方程式;

(f) 連接各邊中點諸直線之方程式;

(g) 連接分 AB 與 AC 各成1與3之比之二分點之直線之方程式;

答 $5x-7y=3$.

(h) 連接頂點 C 至分 AB 成 5 與 2 之比之分點之直線之方程式.

(4) 設 $A(-3,2)$, $B(3,-2)$, 與 $C(0,-1)$ 爲一三角形之頂點,求題 3 中所需之方程式.

(5) 三角形之頂點爲 $A(8,0)$, $B(6,4)$, 與 $C(-1,3)$. 求題 3 中所需之方程式.

(6) 求任一正方形之兩對角線之方程式,並證其互相垂直.

(7) 求任一菱形之兩對角線之方程式,並證其互相垂直.

(8) 一平行四邊形之兩邊, 其方程式爲 $2x+3y-7=0$, 與 $x-3y+4=0$. 一頂點爲 $(5,5)$. 求其餘二邊之方程式.

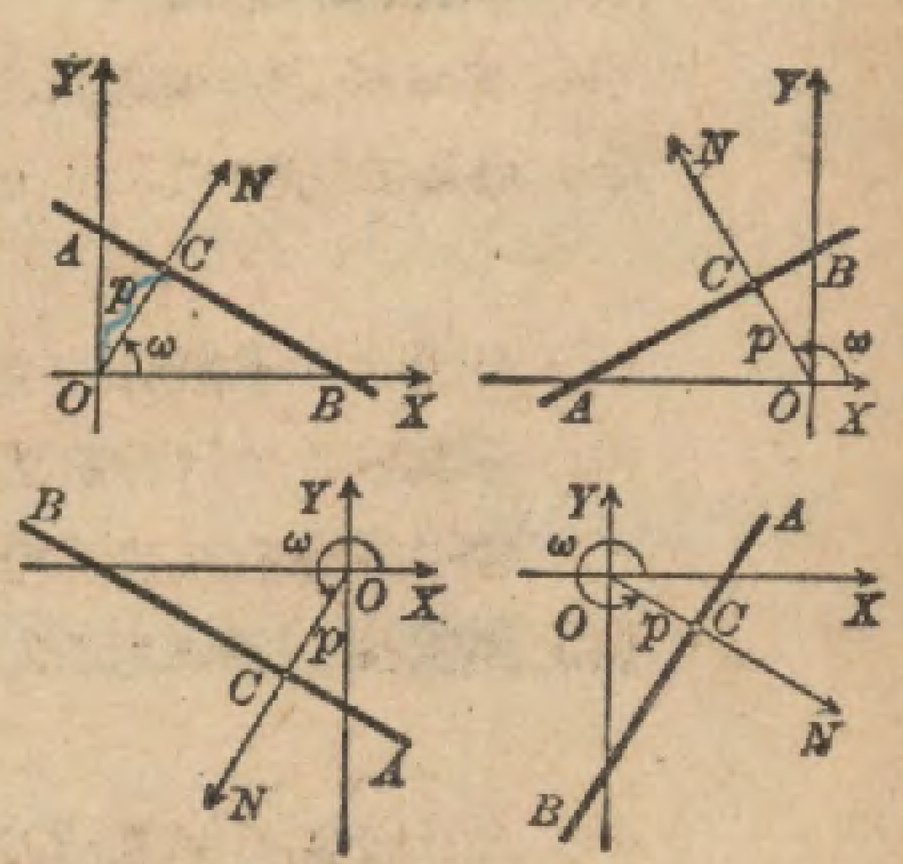
(9) 一平行四邊形之兩邊爲 $3x-y-2=0$ 與 $x-y-5=0$. 設一頂點爲(1) $(4,3)$;(2) $(-4,3)$;(3) $(6,-4)$;(4) $(-3,-8)$;求其餘二邊之方程式.　　答 (1) $3x-y-9=0$, $x-y-1=0$.

(10) 求從直線 $x-2y=8$ 至點 $(2,1)$ 之垂直距離.　　答 3.57.

提示. 先求過點 $(2,1)$ 而垂直於已知直線之直線方程式及二者之交點.

(11) 三角形之三邊爲 $8x+y+34=0$, $x-y+2=0$, $x+2y=7$, 求證其外接圓之圓心(外心),三中線之交點(重心),與三高之交點(垂心)在一直線上(諸點共線).

29. 直線之法線方程式. 設 AB 爲任一直線而自原點作 ON 垂直 AB 於 C. 設 ON 之正方向爲自 O 向 N. 以 p 表 OC 之長而以 ω 表正角 XON, 其量法與三角法中相同, 從 OX 之始線至 ON 之終線. 則 p 爲正而 $\omega<360°$. 當 p 與 ω 已知時, AB 顯然可決定之.



現此問題爲：已知自原點至圖中 AB 之垂直距離 $OC(=p)$ 與角 $XON(=\omega)$，求 AB 之方程式.

［解］ 設 $P(x,y)$ 爲 AB 上任一點，$C(x_1,y_1)$ 之坐標（在各圖中）爲 $x_1=p\cos\omega$, $y_1=p\sin\omega$. $\vec{ON}$ 之斜率 $=\tan\omega$. 故

$$AB\text{ 之斜率}=-\cot\omega=-\frac{\cos\omega}{\sin\omega}.$$

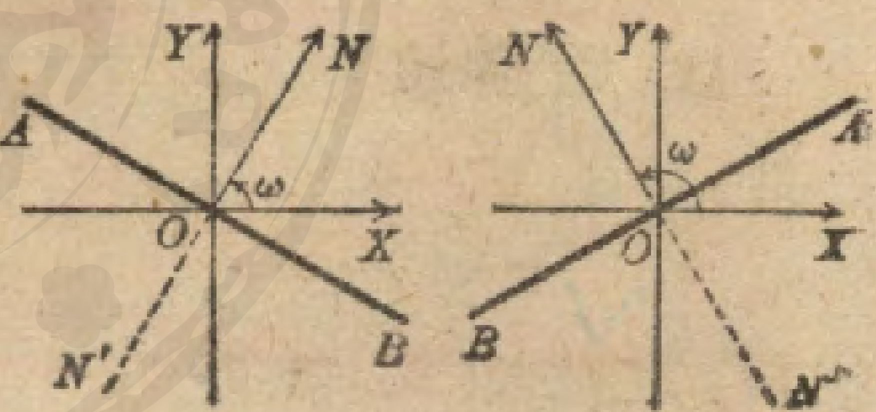
用點與斜率式，AB 之方程式爲

(1) $$y-p\sin\omega=-\frac{\cos\omega}{\sin\omega}(x-p\cos\omega).$$

化簡之，因 $\sin^2\omega+\cos^2\omega=1$，得

(V) $$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0.$$

此方程式稱爲法線方程式.



當 $p=0$ 時，則 AB 經過原點而上述 ON 正方向之規則遂無意義. 故當 $p=0$ 時，可假定 ON 向上之方向爲正方向.

30. 法線式之化法. 設一已知方程式

(1) $$Ax+By+C=0$$

爲法線式時，(1)之軌跡必與

(2) $$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$$

之軌跡相同.

當其對應係數成比例時，其情形如此. 故

$$\frac{\cos\omega}{A}=\frac{\sin\omega}{B}=-\frac{p}{C}.$$

以 r 表其比值;則

(3) $$\cos\omega = rA,$$

(4) $$\sin\omega = rB,\ 而$$

(5) $$-p = rC.$$

求 r 可將(3)與(4)平方之而後相加;卽得

$$\sin^2\omega+\cos^2\omega = r^2(A^2+B^2).$$

但 $$\sin^2\omega+\cos^2\omega=1;$$

故 $$r^2(A^2+B^2)=1;\ 或$$

(6) $$r=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

方程式(5)表示 r 與 C 之符號必相反,因 p 常爲正也.

將 r 之值代入(3),(4),與(5),

$$\cos\omega=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\ \sin\omega=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\ p=-\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

故(2)變爲

(7) $$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0,$$

卽(1)之法線式.故得

化 $Ax+By+C=0$ 爲法線式之規則.

求 $\sqrt{A^2+B^2}$ 之數值而取與 C 相反之符號.將此數除已知方程式,卽得所求之方程式.

例　　題

化方程式

(8) $$3x-y+10=0\ 爲法線式.$$

［解］ 以 $-\sqrt{10}$ 除此方程式,因 $A=3$, $B=-1$, $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{10}$ 而 $C(=10)$ 爲正,故此根式須取負號.(8)之法線式當爲

$$-\frac{3}{\sqrt{10}}x+\frac{1}{\sqrt{10}}y-\sqrt{10}=0.\qquad 答.$$

此處 $\cos\omega=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\omega=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $p=\sqrt{10}=3.1^{+}$.

而 $\omega=161°34'$.

設 $C=0$, 則 $p=0$, 故 $\omega<180°$(第 56 頁);於是 $\sin\omega$ 為正, 又從(4), r 與 B 必為同號.

直線之法線方程式有二便利處.其一,任一直線方程式可化成法線式.其二,如下節所述,從一直線至一點之垂直距離可用此以求得之.

習題 13

(1) ON (見第 55 頁上之圖)應在何象限內,若 $\sin\omega$ 與 $\cos\omega$ 皆為正?皆為負?若 $\sin\omega$ 為正而 $\cos\omega$ 為負?若 $\sin\omega$ 為負而 $\cos\omega$ 為正?

(2) 求方程式並作其直線,其條件為:

(a) $\omega=0$, $p=5$;

(b) $\omega=\frac{3\pi}{2}$, $p=3$;

(c) $\omega=\frac{\pi}{4}$, $p=3$; 答 $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-6=0$.

(d) $\omega=45°$, $p=4$;

(e) $\omega=120°$, $p=2$;

(f) $\omega=\frac{7\pi}{4}$, $p=4$. 答 $x-y-4\sqrt{2}=0$.

(3) 化下列方程式為法線式,求 p 與 ω,作其圖並於圖中驗之:

(a) $4x-3y+1=0$. 答 $p=0.2$, $\omega=143°8'$.

(b) $3x+y-5=0$.

(c) $2x-y+3=0$.

(d) $4x-y+2=0$. 答 $p=\frac{2\sqrt{17}}{17}=0.48$, $\omega=165°58'$.

(e) $x+y-3=0$.

(f) $4x-y=0$.

(g) $x+4y=0$.

(4) 用公式(V)求自原點至下列諸直線之距離:

(a) $3x+4y-5=0$; 答 1.

(b) $x+y-7=0$;

(c) $2x-y+4=0$.

(5) 用公式(V)求題 4 中諸線之傾角.

(6) 若自原點至直線 $kx+y+7=0$ 之垂直距離爲 6 單位，求 k. 　答 $k=\pm\frac{1}{6}\sqrt{13}$.

(7) ω 應爲何值則(V)之軌跡平行於 x 軸？y 軸？

(8) 求下列諸直線之方程式：

(a) 與原點相距 7 單位而過(7, 14)；　答 $x=7, 3x-4y+35=0$.

(b 與原點相距 10 單位而過(5, 10).

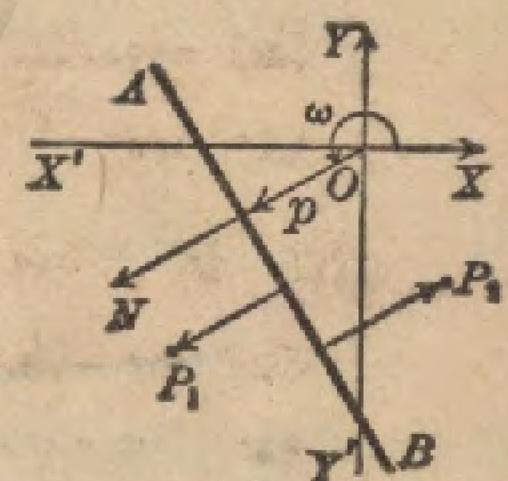
(9) 求下列諸直線之方程式：

(a) $m=-3,\ p=10$.　(c) $m=-2,\ p=5$.

(b) 過(2, 5), $p=1$.　答 $2x+y\pm5\sqrt{5}=0$.

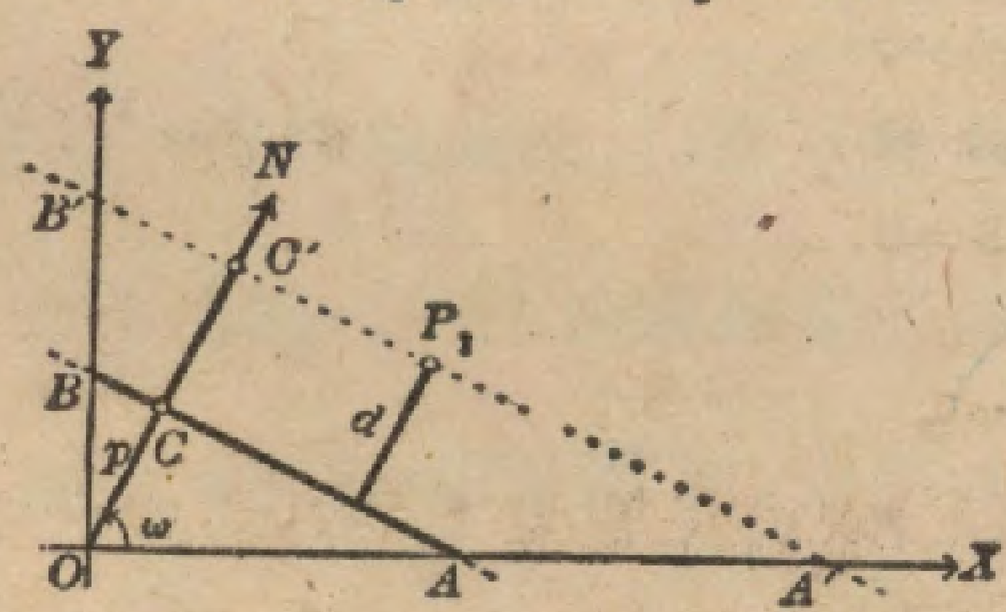
(10) 一圓以原點爲圓心而半徑爲 4，其一直徑之傾角爲150°. 求切此圓於此直徑兩端之切線之方程式. (五月33)　答 $\sqrt{3}x-y\pm8=0$.

31. 一線至一點之垂直距離. 自原點至 AB 之垂線 ON 之正方向（第 29 節）可用以定垂直於 AB 之一切直線之正方向. 如圖中從 AB 至 P_1 之距離爲正而從 AB 至 P_2 之距離爲負.



在下圖中，d 爲自 AB 至 $P_1(x_1,y_1)$之垂直距離. AB 之方程式爲

(1) $$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0.$$



$A'B'$ 爲過 P_1 平行於 AB 之直線，其法線方程式爲

(2) $$x\cos\omega+y\sin\omega-(p+d)=0.$$

P_1 之坐標適合(2).以 $x=x_1, y=y_1$ 代入而求 d,得

$$d = x_1 \cos\omega + y_1 \sin\omega - p. \tag{3}$$

總之:此垂直距離 d 卽在法線方程式左邊之 x 與 y 代以 P_1 之坐標後所得之結果也.故得

求自一線至一點之垂直距離 d 之規則.

化此直線方程式爲法線式,命 d 等於其左邊而以此點之坐標代其中之 x 與 y.

所得之結果,其符號可表示原點與已知點在此線之同側(d 爲負)或異側(d 爲正).

由此規則,自直線 $Ax+By+C=0$ 至點 (x_1, y_1) 之垂直距離爲

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{4}$$

其根式之符號恰與 C 之符號相反.

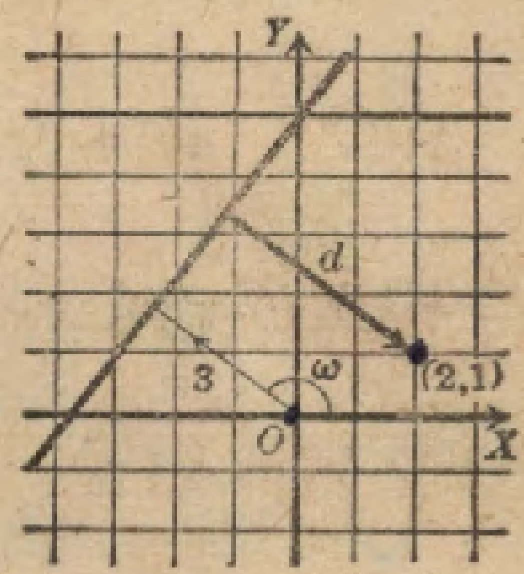
當已知線 AB 過原點時,則法線 ON 之正方向爲向上之方向.故自直線至一點所作之垂線向上時,則由上述定則所得之結果爲正,反之則爲負.如圖中,至 P_1 之距離爲正而至 P_2 之距離爲負.

公式(4)可用以求此垂直距離,但須應用此規則以得其結果之代數符號.

例　　題

(1) 求自直線 $4x-3y+15=0$ 至點 $(2,1)$ 之垂直距離.

［解］ 以 $-\sqrt{16+9}=-5$ 除方程式使化成法線式. 命 d 等於其左節，則



$$d=\frac{4x-3y+15}{-5}.$$

以 $x=2$, $y=1$ 代入，

$$d=\frac{8-3+15}{-5}=-4.$$

難

故其垂直距離之長爲 4 而該點與原點皆在直線之同側.　答.

(2) 求 L_1 與 L_2 二直線所成之角之平分線之方程式

不大懂

$$L_1:\ x+3y-6=0,$$
$$L_2:\ 3x+y+2=0.$$

［解］ 設 $P_1(x_1,y_1)$ 爲平分線 L_3 上之任一點. 則從幾何學定理，P_1 與二已知線等距. 例如

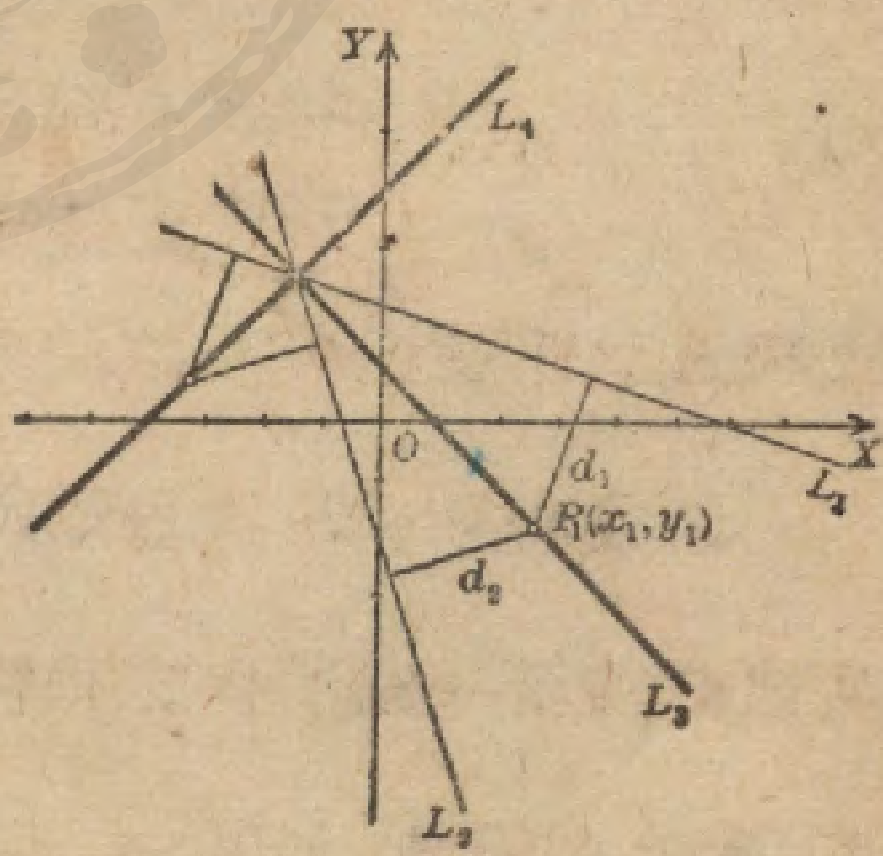
$d_1=$ 自 L_1 至 P_1 之距離，

而　$d_2=$ 自 L_2 至 P_1 之距離，

則 d_1 與 d_2 之絕對值相等. 因 P_1 與原點皆在各直線之同側，故 d_1 與 d_2 皆爲負. 故平分線上 L_3 上各點皆爲

垂直平分线之化简 以得

(5)　　$d_1=d_2.$



用上述規則以求 d，

$$d_1=\frac{x_1+3y_1-6}{\sqrt{10}},$$

$$d_2=\frac{3x_1+y_1+2}{-\sqrt{10}}.$$

代入(5)而化簡之，得 $x_1+y_1+1=0$.

棄 x_1 與 y_1 右下角所附之數字，而依通常習慣，以 (x, y) 表線上任一點，得 L_3 之方程式爲:

$$x+y-1=0.\qquad 答.$$

平分線 L_4 上任一點　距離 d_1 與 d_2 之絕對值相同而符號則異. 故依 L，則 $d_1=-d_2$.

解之如前，得 L_4 之方程式爲 $x-y+4=0$.　　答.

注意：L_3 與 L_4 互爲垂線.

習　　題 14

(1) 求從已知直線至已知點之垂直距離. 作圖並說明其結果之符號.

(a) $4x-y+2=0$ 至 $(3,2)$.　答 $-\frac{12}{17}\sqrt{17}$

(b) $4x+y=0$ 至 $(-1,3)$.

(c) $3x+4y-5=0$ 至 $(5,5)$.

(d) $x+y-4=0$ 至 $(-2,-3)$.

(e) $2x-y+4=0$ 至 $(5,-2)$.

(f) $3x+4y-2=0$ 至 $(2,7)$.　答 $6\frac{2}{5}$.

(g) $y-2x+1=0$ 至 $(-1,-3)$.

(2) 求下列三角形中三高之長，其

(a) 三邊爲 $4x-3y+8=0$, $12x-5y+8=0$, $2x-y=0$;

(b) 頂點爲 $(8,7)$, $(4,-8)$, $(2,10)$;

(c) 頂點爲 $(1,2)$, $(-2,0)$, $(6\ -1)$;　答 $-\frac{19}{\sqrt{13}}$, $-\frac{19}{\sqrt{65}}$, $-\frac{19}{\sqrt{34}}$.

(d) 三邊爲 $2x+3y=0$, $x+3y+3=0$, $x+y+1=0$.　答 $-\frac{3}{\sqrt{13}}$, $-\frac{6}{\sqrt{10}}$, $-\sqrt{2}$.

(3) 求題 2 諸三角形各內角之平分線之方程式. 證明在各情形中，三平分線皆遇於一點.

(4) 已知三角形之頂點，求其面積(底乘高折半)，並用第 15 節驗之.

(a) $(7,8)$, $(-8,4)$, $(-2,-10)$.

(b) $(8,0)$, $(0,-8)$, $(-3,-3)$.

(c) $(5,-4)$, $(-4,-5)$, $(0,8)$.

(d) $(3,1)$, $(2,3)$, $(1,2)$.　答 $1\frac{1}{2}$.

(5) 求以下各對平行線間之距離：

(a) $3x-y=10$, $3x-y=0$.　答 $\sqrt{10}$.

(b) $12x+5y-1=0$, $12x+5y+7=0$.

(c) $3x-4y+1=0$, $6x-8y-9=0$.

(d) $2x-7y+8=0$, $4x-14y-3=0$.

(e) $x-3y=0$, $3x-9y=7$.

(f) $y=mx+3$, $y=mx-3$.　答 $\frac{6}{\sqrt{1+m^2}}$

(6) 證三角形之內角平分線過於一點(共點),其所設三邊爲

(a) $4x-3y=12, 5x-12y-4=0, 12x-5y-13=0$.

平分線: $7x-9y=16, 7x+7y=9, 112x-64y=221$.

(b) $5x-12y=0, 5x+12y+60=0, 12x-5y=60$.

(c) $x+2y-5=0, 2x-y-5=0, 2x+y+5=0$.

(d) $3x+y-1=0, x-3y-3=0$ $x+3y+11=0$.

(7) 求一點之軌跡,此點

(a) 至線 $3x+4y-5=0$ 之距離爲至線 $4x+3y=6$ 之距離之二倍;

答　$5x+2y=7$.

(b) 至線 $12x+5y-1=0$ 之距離爲至 y 軸之距離之三倍.

(c) 至線 $5x-12y=0$ 之距離爲至線 $12x-5y=60$ 之四倍.

(d) 至線 $4x-3y+4=0$ 之距離爲至線 $5x+12y-8=0$ 之三分之二.

(e) 至線 $4x-3y+1=0$ 之距離爲至線 $5x-12y=0$ 之 n 倍.

答　$(52-25n)x-(39-60n)y+13=0$.

(8) 求下列三角形之內切圓之圓心及半徑而其

(a) 三邊爲 $2x+y=12, 2x-y=-4, x-2y-4=0$;

答　圓心 $(2,2)$, $r=\frac{6}{5}\sqrt{5}$.

(b) 頂點爲 $(8,1), (2,4), (-2,-4)$;

(c) 邊爲 $2x+5y-22=0, 5x-2y+32=0, 2x-5y+26=0$.

(9) 計算多邊形之面積,其頂點爲 $(6,1), (3,-10), (-3,-5), (-2,0)$.

提示. 分成二三角形(見題4).　　答　60.

(10) 三角形之邊爲 $x+4y-8=0, x-4y+10=0, 4x-y-15=0$. 試證其一內角平分線與其他二頂點之外角平分線遇於一點(共點).

(11) 求過題10中三角形內切圓之圓心而與三角形各邊平行諸直線之方程式.

(12) 求題11中三角形各邊上距他二邊等遠之一點.

32. 直線系. x 與 y 之一次方程式含一任意常數者可代表無限數之直線,蓋不論此常數爲何值,其方程式之軌跡總爲一直線而常數之値不同,軌跡之位置亦異.而此等直線可謂成一系(System). 此常數稱爲此系之通徑(Parameter). 参数(参加的变数), 参变数. 媒介变数.

$y=mx+k$

 $y-y_1=m(x-x_1)$

例如方程式 $y=2x+b$，其中 b 爲一任意常數，代表斜率爲 2 之平行線系．作此系之諸直線時，可假定 b 種種數値，如 $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$，等，而作直線 $y=2x, y=2x\pm 1, y=2x\pm 2, y=2x\pm 3$，等．方程式 $y-5=m(x-3)$，其中 m 爲一任意常數，代表通過 $(3,5)$ 一點之直線系．

前述方法足爲解直線題之用，但有時用直線系則解法更簡便．

重要

例　　題

一線過 $(-2,2)$ 而與二坐標軸成一單位面積之三角形．求其方程式．

［解］　過 $(-2,2)$ 點之直線系之方程式爲

(1) $$y-2=k(x+2).$$

設 A 與 B 爲與 XX' 及 YY 之交點，則△ OAB 之面積必爲 1． 求(1)內之截部而使其積之半等於 1．得

$x=0$　$y=2k+2$

$y=0$　$x=\frac{-2k-2}{k}$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{-2k-2}{k}\right)(2k+2)=1.$$

或 $$2k^2+5k+2=0.$$

解之， $$k=-2, -\tfrac{1}{2}.$$

將此等數値代入(1)中，得

$$2x+y+2=0,\quad x+2y-2=0.$$ 答．

二直線皆適合上述條件．

總之：一直線，已知其所具之二條件，而欲求其方程式時，可先寫出其直線系之方程式使適合於其中之一條件，然後用其他一條件以決定此方程式中通徑之値．

習 題 15

(1) 依下列條件,寫出其直線系之方程式:

(a) y 軸之截部爲 -3. $y=mx-3$

(b) 斜率爲 $-\frac{2}{3}$. $y=-\frac{2}{3}x+b$

(c) 通過 $(-2, -5)$.

(d) x 軸之截部爲 4.

(e) 與原點相距 5.

(f) 二截部之和爲 7.

(g) 二截部之差爲 2.

(h) 與二軸成一面積爲 10 之三角形.

(i) 與二軸成一周界爲 6 之三角形.

(j) 平行於 $5x-3y=6$.

(k) 垂直於 $x+2y=8$.

(l) 二截部之積爲 12.

(m) 原點至直線之垂直距離爲 3.

(n) 過 $x-y=6$ 與 $4x+3y=10$ 之交點.

(o) 過 $(2,2)$ 與 $(0,-6)$ 之中點.

(p) 平行於 $x\cos 45°+y\sin 45°=6$.

(q) 垂直於 $3x-7y=3$.

(r) 垂直於 $y=mx+6$.

(s) 垂直於 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

(t) 切於圓心在原點而半徑爲 7 之圓.

(u) x 軸上之截部爲 y 軸上之截部之三分之二.

(2) 用直線系方程式以求適合下列條件之直線之方程式:

(a) 過 $(4,5)$ 而平行於 $x+3y=4$.

(b) 過 $(-3,2)$ 而平行於 $3x-2y=7$.

(c) 過 $(5,-6)$ 而平行於 $2x-4y=3$.

(d) 過 $(-1,-2)$ 而垂直於 $x-4y=2$.

(e) 過 $(1,4)$ 而垂直於 $3x-5y+8=0$.

(f) 過 $(2,7)$ 而垂直於 $5x-y=4$.

(3) 決定通徑 k 之數值,其條件爲

(a) $x-2y+k=0$ 而過 $(4,5)$;

(b) $y=kx-3$ 而平行於 $4x+12y=7$; 答 $k=-\frac{1}{3}$

(c) $kx-y-2k=0$ 而過 $(5,-2)$;

(d) $4x+7y-2k=0$ 而與原點相距 7 單位;

(e) $3x+4ky=7$ 而在 y 軸上之截部爲 $\frac{1}{2}$;

(f) $kx+3y+8=0$ 而其斜率爲 $\frac{2}{3}$;

(g) $7x+2y+k=0$ 而其二截部之差爲 3;

(h) $2x+7y-k=0$ 而與二軸成一面積爲 3 之三角形. 答 $k=\pm2\sqrt{21}$.

(i) $4x-3y+6k=0$ 而與原點相距 3 單位. 答 $3k=\pm2\frac{1}{2}$.

(4) (1) 已知一平行四邊形之二邊爲 $3x-4y+6=0$ 與 $x+5y-10=0$ 及一頂點爲(4,9).求其他二邊之方程式.

答 $3x-4y+24=0, x+5y-49=0$.

(2) 已知一平行四邊形之二邊爲 $3x+y-7=0$ 與 $x-2y+5=0$ 及一頂點爲(4,5).求其餘二邊之方程式.

(5) 過點 (3,2) 之直線系方程式以求其中與二軸成一面積爲 $13\frac{1}{2}$ 之三角形之直線方程式. 答 $x+3y=9, 4x+3y-18=0$.

(6) 一直線與二軸成一面積爲 2 之三角形而其二截部差爲 3 求其方程式.

(7) 求垂直於 $3x-4y=7$ 而適合於下列條件之直線方程式:

(a) 過(7, −6).

(b) 與二軸成一面積爲 6 之三角形.

(c) 與二軸成一周界爲 10 之三角形.

(d) 自原點之距離爲 4 單位

(e) 自原點之垂直距離與自原點至已知直線者相同.

(f) x 軸之截部爲 −7.

(g) 二截部之和爲 14.

(h) 被二軸剪截線段之中點爲(3,4).

33. 過兩已知線交點之直線系. 已知兩線

(1) $$L_1:\ x+2y-5=0;$$ (1)

(2) $$L_2:\ 3x-y-1=0.$$ (2)

設此線系之方程式爲

(3) $$x^2+2y-5+k(3x-y-1)=0.$$ (3)

其中 k 爲一任意常數. (3)中各線必過已知線 L_1 與 L_2 之交點.實則解(1)與(2), 求其 x 與 y,即得 $x=1, y=2$. 此二值必適合於(3). 或不用此解法,而以(x_1, y_1)爲 L_1 與 L_2 之交點.當此等坐標

代入( )中，即得

$$0+k(0)=0.$$

須知方程式(3)為(1)與(2)之左端，以通徑 k 乘其中之一式後，相加而成.

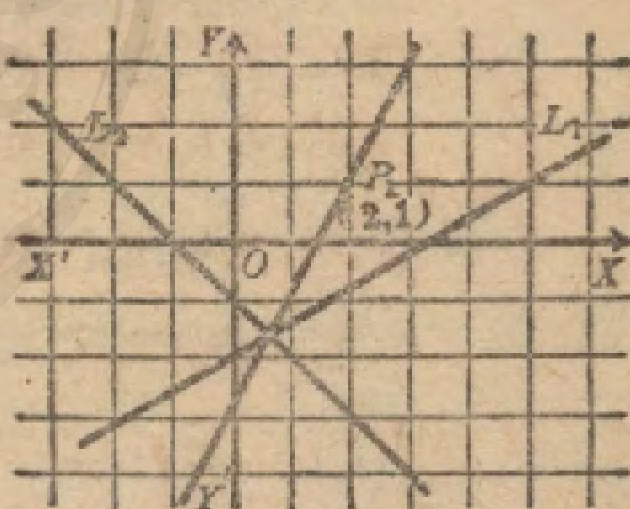
凡求過二已知線之交點之直線方程式，可先用如(3)式之直線系方程式，再依已知條件以決定 k 之值．此法之便利處為不需知 L_1 與 L_2 交點之坐標也.

例　　題

(1) 求過 $P_1(2,1)$ 及 L_1: $3x-5y-10=0$ 與 L_2: $x+y+1=0$ 之交點之直線方程式.

［解］ 過二已知線交點之直線系方程式為

$$3x-5y-10+k(x+y+1)=0.$$



設 P_1 在此線上，則 $x=2, y=1$ 必適合此方程式.

故　　$6-5-10+k(2+1+1)=0;$

而　　$k=\frac{9}{4}.$

將 k 之值代入而化簡之，即得所求之方程式，

$$21x-11y-31=0.$$　　答.

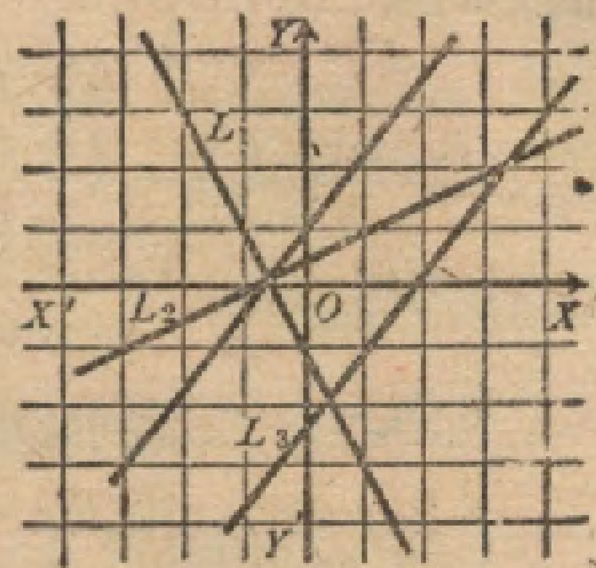
(2) 求過 L_1: $2x+y+1=0$ 與 L_2: $x-2y+1=0$ 之交點而與 L_3: $4x-3y-7=0$ 平行之直線方程式.

［解］ 過前兩線交點之直線系方程式為

$$2x+y+1+k(x-2y+1)=0,$$

或　　$(2+k)x+(1-2k)y+(1+k)=0.$

此線之斜率爲 $-\dfrac{2+k}{1-2k}$. 此必等於 L_3 之斜率，即 $\frac{4}{3}$.



$$\therefore -\frac{2+k}{1-2k}=\tfrac{4}{3},\ \text{或}\ k=2.$$

代入而化簡之，得

$$4x-3y+3=0. \qquad \text{答.}$$

解下列習題時，無需求二已知線之交點.

習 題 16.

重要 (1) 求過 $2x-3y+2=0$ 與 $3x-4y-2=0$ 之交點而適合於下列各條件之直線之方程式:

(a) 過原點; 答 $5x-7y=0$.

(b) 平行於 $5x-12y+6=0$; (c) 垂直於 $3x+2y-4=0$.

重要 (2) 一三角形爲直線 $2x-3y+1=0$, $x-y=0$, 與 $3x+4y-2=0$ 所成. 求過此三角形諸頂點而適合下列各條件之直線之方程式:

(a) 與對邊平行; 答 $3x+4y=7,\ 14x-21y+2=0,\ 17x-1\,y+5=0$.

(b) 與對邊垂直.

雜錄習題

(3) 四邊形之邊爲 $x+y-2=0$, $x-y+6=0$, $2x-y+3=0$, 與 $x-3y+2=0$. 求其對角線之方程式.

答 $19x+3y+26=0,\ 13x-23y+58=0$.

提示. 過相對兩頂點之直線系，其方程式爲

$$x+y-2+k(x-y+6)=0;$$

與

$$2x-y+3+k'(x-3y+2)=0.$$

設二式之係數成比例，則一系中之一線將與他系中之一線相重合；

即設

$$\frac{1+k}{2+k'}=\frac{1-k}{-1-3k'}=\frac{-2+6k}{3+2k'}.$$

命 r 爲諸比之公值，則得

$$1+k=2r+rk'$$

$$1-k=-r-3rk',$$

與

$$-2+6k=3r+2rk'.$$

從此等方程式中，能消去 r 與 k' 而得 k 之值，於是得第一系之直線而此直線同時亦屬於第二系.

(4) 求過 $2x+y=8$ 與 $3x+2y=0$ 之交點而適合下述情形之直線方程式:

(a) 垂直於 x 軸;　　答 $x-16=0$.

(b) 垂直於 y 軸.　　答 $y+24=0$.

(5) 平行四邊形邊之方程式為 $x+3y+2=0$, $x+3y-8=0$, $3x-2y=0$, 與 $3x-2y-16=0$. 求過一頂點而垂直於一對邊之直線之方程式.

(6) 求過 $x+3y=10$ 與 $3x-y=0$ 之交點而與原點相距一單位之直線之方程式. (五月玖)　　答 $x-1=0$, $4x-3y+5=0$.

(7) 求過 $7x+7y=24$ 與 $x-y=0$ 之交點而與 x 軸有下列關係之直線之方程式:

(a) 成一周界為 12 之三角形;　　答 $4x+3y=12$, $3x+4y=12$.

(b) 成一面積為 $7\frac{1}{2}$ 之三角形.

復習　三角形習題 17

(1) 已知三角形之頂點為

(a) (2,6),(7,1),(−1,−3).　(f) (4,3),(2,−2),(−3,4).

(b) (2,7),(5,−3),(−3,2).　(g) (4,0),(2,4),(−5,3).

(c) (−4,5),(−3,8),(4,1).　(h) (−3,−3),(−2,0),(5,−7).

(d) (3,5),(−1,−2),(6,−3).　(i) (5,3),(−3,1),(2,−6).

(e) (4,13),(16,5),(−1,−12).　(j) (−1,15),(11,7),(−6,10).

求其(1)三邊之方程式，(2)各邊之中垂線之方程式，(3)三中線之方式程，(4)三高之方程式，(5)過頂點而平行於對邊諸線之方程式，(6)三中線之長，(7)三高之長，(8)面積，(9)三內角，(10)外接圓之方程式.

(2) 已知三角形之頂點為

(a) (2,4),(8,4),(6,0).　(d) (3,−2),(3,−6),(0,−3).

(b) (0,−4),(6,−2),(5,−6).　(e) (8,1),(2,4),(−2,−4).

(c) (0,3),(6,0),(4,4).　(f) (−6,−30),(−36,10),(24,10).

(g) (5,5),(−5,8),(−7,−2).

求其(1)三邊之方程式，(2)各邊之中垂線之方程式，(3)三內角平分線之方程式，(4)外接圓之方程式，(5)內切圓之方程式.

(3) 已知三角形之三邊為 (做之丁)

(a) $x+4y-8=0, x-4y+10=0, 4x-y-15=0.$

(b) $4x-3y-4=0, 3x+4y-8=0, 5x-12y-60=0.$

(c) $3x+4y-10=0, 8x-6y+3=0, 12x+5y+15=0.$

(d) $5x+12y-24=0, 12x+5y+7=0, 5x-12y-48=0.$

(e) $5x-12y-42=0, 12x+5y-2=0, 5x+12y-66=0.$

(f) $7x+y-7=0, 5x-5y+19=0, x+7y+15=0.$

(g) $4x-3y+25=0, 5x-12y+1=0, 3x+4y-5=0.$

(h) $12x+5y+50=0, 5x+12y-16=0, 5x-12y-16=0.$

(i) $x+2y-5=0, 2x+y-7=0, x-2y-9=0.$

(j) $3x+y-7=0, x+3y-5=0, x-3y+1=0.$

求其(1)三內角，(2)三內角平分線之方程式，(3)三外角平分線之方程式，(4)內切圓之方程式.

第五章

圓

求圆心与半径. 如 $x^2+y^2=25$

$(x-0)^2+(y-0)^2=5^2$ ∴圆心为 $(0,0)$ $r=5$

34. 圓之方程式. 定理. 圓心爲 (h,k), 半徑爲 r 之圓之方程式爲

(I) $$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2.$$

〔證〕 設 $P(x,y)$ 爲圓上任一點.

則 $$r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}.$$ 〔用第 10 頁(I)〕

平方之, 卽得(I). *Q.E.D.*

系. 圓心爲原點 $(0,0)$, 半徑爲 r 之圓之方程式爲

$$x^2+y^2=r^2.$$

若(I)展開而移項, 則得

(1) $$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0.$$

此方程式之形式爲

$$x^2+y^2+\text{低次冪諸項}=0.$$

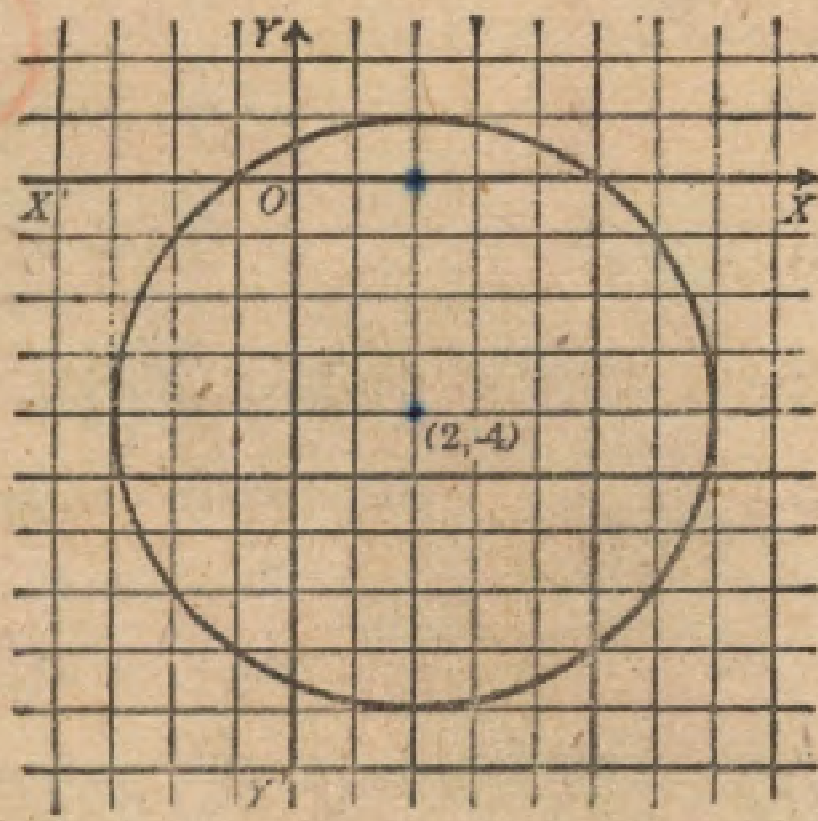
總之: 一圓可以含變數 x 與 y 之二次方程式表之, 其中之二次項爲 x 與 y 之平方和.

方程式(1)之形式爲

(2) $$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

如此形式之方程式之軌跡, 將於第 35 節論及之.

例 題



(1) 求方程式

$x^2+y^2-4x+8y-5=0$ 之軌跡.

[解] 集項,

$$(x^2-4x)+(y^2+8y)=5.$$

配方,

$$(x^2-4x+4)+(y^2+8y+16)=25.$$

或 $(x-2)^2+(y+4)^2=25.$

與(I)比較之,卽知其軌跡爲一圓而 $h=2, k=-4, r=5$. 答.

(2) 證明 $5x^2+5y^2-14x+7y-24=0$ 之軌跡爲一圓.

[解] 以5除各項,並配方.其結果爲

$$\left(x-\frac{7}{5}\right)^2+\left(y+\frac{7}{10}\right)^2=\frac{29}{4}.$$ $\left(\frac{725}{100}, \frac{25}{4}\right)$

與(I)比較之,卽知其軌跡爲一圓.其圓心爲$\left(\frac{7}{5}, -\frac{7}{10}\right)$,

而 $r=\frac{1}{2}\sqrt{29}$. 答.

35. 圓之檢驗法. 上節已證得圓之方程式之形式,則今可反推凡屬於上節(2)式之方程式之軌跡皆爲一圓否?欲解決此問題,可將(2)中 x 項與 y 項各自配方使成(I)之形式.於是(2)可寫成

(3) $$\left(x+\tfrac{1}{2}D\right)^2+\left(y+\tfrac{1}{2}E\right)^2=\tfrac{1}{4}(D^2+E^2-4F).$$

若 D^2+E^2-4F 爲正,則(3)爲(I)之形式而其軌跡爲一圓,其圓心爲$(-\frac{1}{2}D, -\frac{1}{2}E)$與半徑 $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$.

若 $D^2+E^2-4F=0$,則適合於(3)之惟一實數值爲 $x=-\frac{1}{2}D$, $y=-\frac{1}{2}E$,故其軌跡祇爲一點$(-\frac{1}{2}D, -\frac{1}{2}E)$,因稱之爲點圓 (Point circle) 或稱爲半徑爲零之圓(Circle whose radius is zero).

若 D^2+E^2-4F 爲負,則無實數值能適合於(3)而(2)無軌跡.

方程式

(4) $$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

稱爲含 x 與 y 之二次普遍方程式(General equation of the second degree) 因此式含有 x 與 y 之二次與低次之一切可能諸項也．此方程式能化成(2)式(用 A 除各項)祇在 $A=C$ 與 $B=0$ 時．

故一二次方程式其中 x^2 與 y^2 之係數相等且無 xy 一項，則其軌跡爲一圓，或一點圓，或無軌跡．

36．三條件決定之圓．任一圓之方程式可寫成下式之一

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

或 $$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

每一方程式有三個任意常數．欲定此三常數之值，須用三個方程式，而各方程式各表明此圓適合於某一種幾何條件．故一圓可從此三條件以決定之．

規則．求適合三條件之圓之方程式．

第一步．使所求之方程式爲

(1) $$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2,\text{ 或}$$

(2) $$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

以便演算．

第二步．求含常數 h,k, 與 r [或 D,E, 與 F] 三個方程式以表明圓(1)[或(2)]適合已知之三條件．

第三步．求 h,k, 與 r [或 D,E, 與 F], 而將其值代入(1)[或(2)]中．

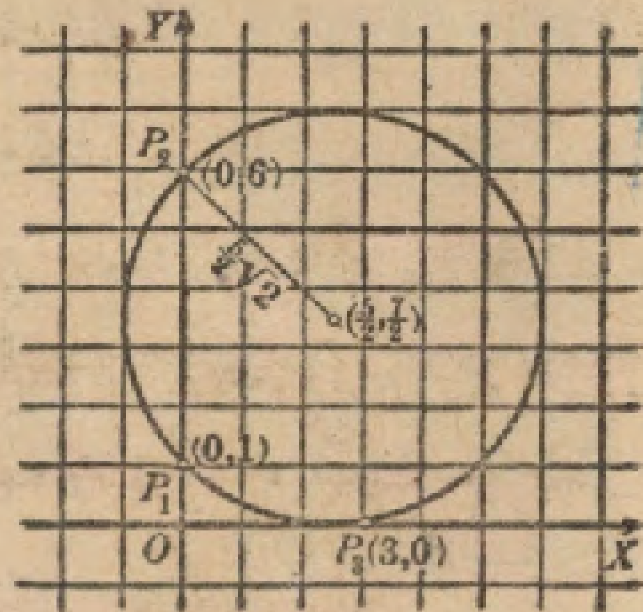
有時可用更直接之法，乃從已知條件先作所求圓之圓心．然後求其方程式以及圖中諸直線之交點(參閱以下例題3)．

若常數 點P(1,3)，則此常數必代入原方程式
時，xx

例　　題

(1) 求過 $P_1(0,1)$，$P_2(0,6)$，與 $P_3(3,0)$ 三點之圓之方程式.

［解］ 第一步. 設所求方程式為



(3) $$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

第二步. 因 P_1，P_2，與 P_3 在(3)上，故此等坐標必適合(3).

以 P_1 之坐標 $x=0$，$y=1$ 及 P_2 與 P_3 之坐標輪流代入，得

(4) $$1+E+F=0,$$

(5) $$36+6E+F=0,$$

(6) $$9+3D+F=0.$$

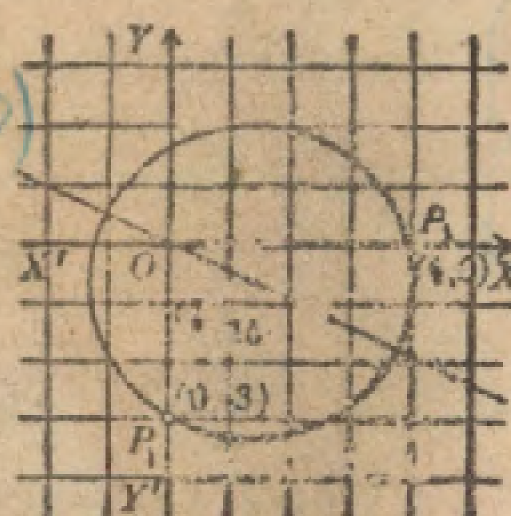
第三步. 解(4)，(5)與(6)，得 $E=-7$，$F=6$，$D=-5$.

代入(3)中而得此所求方程式為 $x^2+y^2-5x-7y+6=0$. 答.

其圓心為$(\frac{5}{2},\frac{7}{2})$而半徑為 $\frac{5}{2}\sqrt{2}=3.5$.

(2) 求過 $P_1(0,-3)$ 與 $P_2(4,0)$ 二點而其圓心在直線 $x+2y=0$ 上之圓之方程式.

［解］ 第一步. 設所求方程式為



(7) $$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2.$$ 以(0,-3),(4,0)代入(7)

第二步. 因 P_1 與 P_2 在(7)之軌跡上，故得

(8) $$h^2+(-3-k)^2=r^2.$$ 與

(9) $$(4-h)^2+k^2=r^2.$$

其圓心(h,k)在已知直線上. 故

(10) $$h+2k=0.$$ ——→還不懂

第三步. 解(8)，(9)，與(10)，得 $h=\frac{7}{5}$，$k=-\frac{7}{10}$，$r=\frac{1}{2}\sqrt{29}$.

代入(7)而化簡之，得所求方程式 $x^2+y^2-\frac{14}{5}x+\frac{7}{5}y-\frac{24}{5}=0$，

或 $$5x^2+5y^2-14x+7y-24=0.$$ 答.

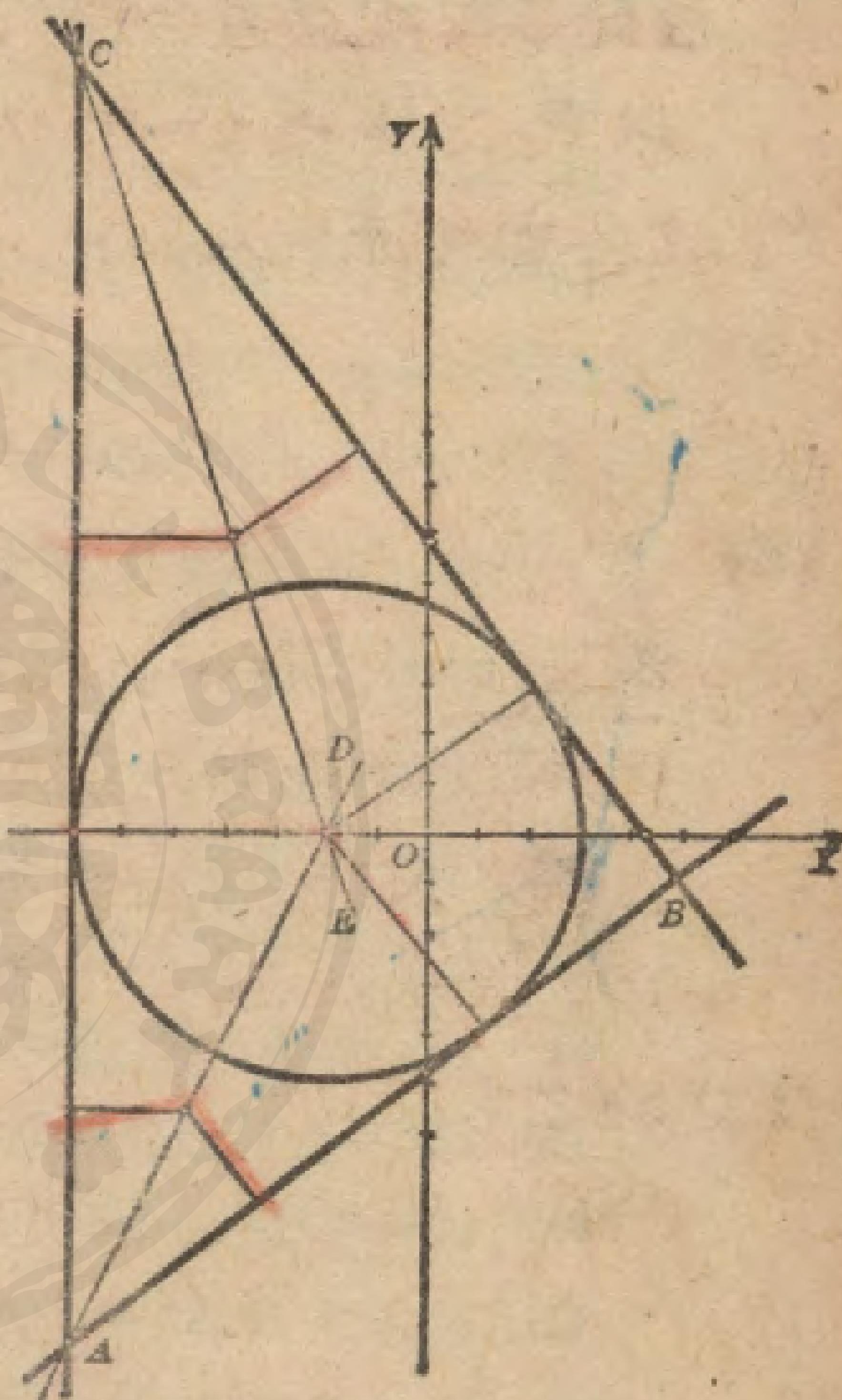
(3) 求三角形之內切圓之方程式，而此三角形之三邊為

$$AB:\ 3x-4y-19=0,$$

(11)
$$BC:\ 4x+3y-17=0,$$

$$CA:\ x+7=0.$$

［解］ 圓心既為三角形中三內角平分線之交點，可先求 A 與 C 二角之平分線之方程式.



化方程式(11)為法線式，

$$AB:\ \frac{3x-4y-19}{5}=0;$$

(12)
$$BC:\ \frac{4x+3y-17}{5}=0;$$

$$CA:\ \frac{x+7}{-1}=0.$$

於是(參閱第 31 節例題 2)其平分角線為

(13) $$AD:\ \frac{3x-4y-19}{5}=\frac{x+7}{-1},$$

或
$$2x-y+14=0,$$

$$CE:\ \frac{4x+3y-17}{5}=\frac{x+7}{-1},$$

或
$$3x+y+6=0.$$

AD 與 CE 之交點為$(-2,0)$即為此內切圓之圓心. 其半徑為(11)中任一直線至 $(-2,0)$ 之垂直距離. 茲取 AB 邊求半徑，則從(12)，

補充：圓心為(4，−6)而與(−6，4)所成圓之方程式

$$r=\frac{3(-2)-4(0)-19}{5}=-5.$$

解：求 $r^2=8$

方程式：$(x-4)^2+(y+6)^2=$

故，用(I)，得所求圓之方程式為

$$(x+2)^2+(y-0)^2=25,$$

或
$$x^2+y^2+4x-21=0.$$
答.

習題 18

(1) 求下列各圓之方程式：

大題都做

小題全做

(a) 圓心爲$(0,1)$而半徑爲3； 答 $x^2+y^2-2y-8=0$.

(b) 圓心爲$(7,2)$而半徑爲5； (c) 圓心爲$(-6,4)$而半徑爲7；

(d) 圓心爲$(-4,-8)$而半徑爲8.

(2) 決定下列各方程式之軌跡並作其圖形：

(a) $x^2+y^2-8x-9=0$. 答 圓 圓心$(4,0)$，$r=5$.

(b) $x^2+y^2+8y-9=0$.

(c) $x^2+y^2-2x+2y+2=0$. 答 點圓$(1,-1)$.

(d) $x^2+y^2-4x+6y=0$. (f) $5x^2+5y^2-10x+4y-1=0$.

(e) $2x^2+2y^2+24x-5y+2=0$. (g) $x^2+y^2=2rx$.

(3) 求由下列情形所定之圓之方程式：

(a) 過$(6,-6)$，$(-1,-5)$，$(7,-5)$ 答 $x^2+y^2-6x+4y-12=0$.

(b) 過$(2,1)$，$(3,-2)$，$(-4,0)$.

(c) 過$(-1,1)$與$(1,3)$而圓心在x軸上. (瓦月孩)

(d) 圓心爲$(1,3)$而切於$2x+y+5=0$.

(e) 圓心爲$(3,-5)$而切於$x-7y+2=0$. 答 $x^2+y^2-6x+10y+2=0$.

(f) 過$(-1,1)$而圓心爲$x+3y+7=0$與$3x-2y-12=0$之交點.

(g) 切於兩軸而半徑爲4.(有四解).

(h) 以$(4,7)$與$(2,-3)$之連線爲直徑.

(i) 過$(4,2)$與$(-6,-2)$而圓心在y軸上. 答 $x^2+y^2+5y-30=0$.

(j) 過頂點爲$(a,0)$，$(b,0)$與$(0,c)$之三角形三邊之中點

答 $x^2+y^2-\frac{a+b}{2}x+\frac{ab-c^2}{2c}y=0$

(4) 求由下列情形所定之圓之方程式：

(a) 外接於頂點爲$(4,3)$，$(3,-3)$，$(-1,2)$之三角形.

(b) 一三角形爲兩軸與$x+2y=4$所成，求其外接圓.

(c) 外接於三邊爲$x=y$，$2x-y=2$，$2x+3y-3=0$之三角形.

(d) 過$(5,-3)$與$(0,6)$而圓心在$2x-3y=6$上.

答 $3x^2+3y^2-114x-64y+276=0$

(e) 切於x軸，半徑爲5，而圓心在$x=6$上.

(f) 過(5,1)與(3, −2)而圓心在 $x+2y=3$ 上.

(g) 切於 $4x+7y=4$ 而圓心在原點. 五月3[illegible] 答 $65x^2+65y^2=16$.

(5) 證明下列軌跡為圓，並求其圓心與半徑.

(a) 一點移動時，其至(3,0)與(−3,0)之距離之平方和常為68.

答 $x^2+y^2=25$.

(b) 一點移動時，其至(4,5)與(−4,3)之距離常成3與2之比.

(c) 一點移動時，其至(2, −1)之距離常為至(0,4)之距離之半.

答 $3x^2+y^2-16x+16y+4=0$.

(d) 一點移動時，其至 y 軸之距離為至(1, −3)距離之平方之四倍

(e) 一點移動時，其至 $3x+y-1=0$ 之距離常等於至(2,3)距離之平方.

答 $x^2+5y^2-23x-34y+66=0$.

(f) 一點移動時，其至 $x+y=6$ 之距離之平方常等於由兩軸及該點至兩軸之垂線所成之矩形之面積. 答 $x^2+y^2-12x-12y+36=0$.

(g) 已知斜邊兩端點為(0, −4)與(6,3)之直角三角形，其直角頂之軌跡.

(h) 一點至兩線 $x-2y=7$ 與 $2x+y=3$ 之距離之平方和為7.

答 $5x^2+5y^2-26x+22y+23=0$.

(6) 求內切圓之方程式，其三角形之邊如下：

(a) $x+2y=5,\ 2x-y=5,\ 2x+y+5=0$.

(b) $3x+y=1,\ x-3y=3,\ x+3y+11=0$.

(c) $3x+4y=22,\ 4x-3y+29=0,\ y-5=0$.

(d) $x=0,\ y=0,\ x+y=7$.

特 設 習 題

(7) 求下列各圓之方程式：

(a) 切 $4x+3y-70=0$ 於 (10,10)而半徑為 10;

答 $x^2+y^2-4x-8y-80=0,\ x^2+y^2-36x-32y+480=0$;

(b) 切 $3x-4y=19$ 及 $4x+3y=17$ 而過(3,2);

(c) 切 $x+3y=26$ 於(8,6)而過(−2, −4).

(8) 用解析法證明半圓內圓周角為一直角.

(9 用解析法證明一直線與圓之交點不能多於二點.

(10 用解析法證明過三角形三邊中點之圓,必通過此三角形三高之足並等分各頂點至三高交點之連接線.(九點圓.)

(11) 設一點移動時,其至二定點之距離之平方和爲一常數.證其軌跡爲一圓.

(12 一點移動時,其與二固定垂線之距離之平方和爲一常數.證其軌跡爲一圓.

(13) 一點移動時,其至二定點之距離之比爲一常數,則其軌跡爲何?

(14) 一點移動時,其至一定點距離之平方,與至一定線之距離成比例,則其軌跡爲何?

(15) 已知一線段之長爲 $2a$, 移動時其兩端常在二垂線上,則其中點之軌跡爲何?

(16) 一三角形其底固定,若一中線至底之一端之長爲一常數,則其頂點之軌跡爲何?

(17) 用解析法證明圓周上一點至直徑之垂線,分直徑成兩線段,而此垂線爲兩線段之比例中項.

(18) 用解析法證明圓中一半徑垂直於一弦則平分此弦.

(19) 設$(3,-5)$爲圓 $x^2+y^2=277$ 之一弦之中點,則此弦之方程式與長爲何?

37. **根軸.** 當 x^2 與 y^2 在二圓之方程式

(1) $$C_1:\ x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,$$

(2) $$C_2:\ x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0,$$

(1)-(2)
中消去(用減法)時,則得

(3) $$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0.$$

此直線(3)稱爲 C_1 與 C_2 之根軸(Radical axis).

定理 1. 根軸垂直於 C_1 與 C_2 之連心線.　連心線是什么

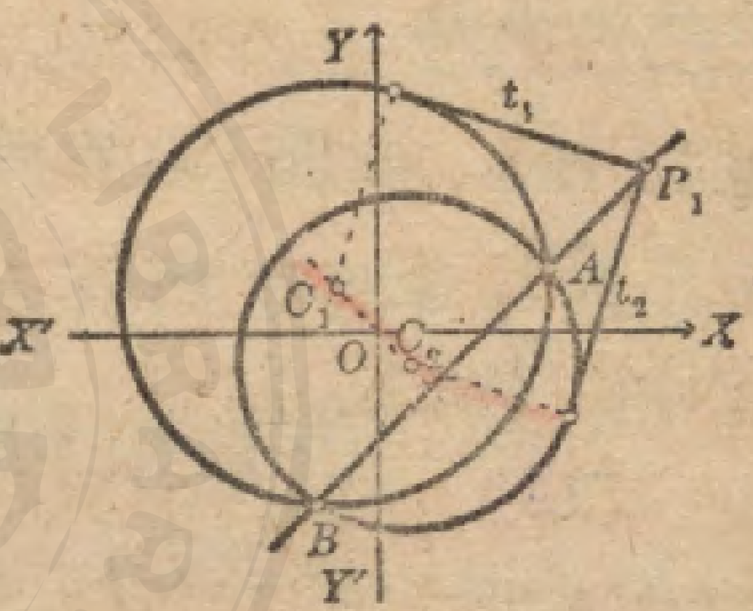
此證卽得,因 C_1 與 C_2 之圓心各爲 $(-\frac{1}{2}D_1; -\frac{1}{2}E_1)$ 與 $(-\frac{1}{2}D_2, -\frac{1}{2}E_2)$ 也.

定理 2. 設 C_1 與 C_2 相交(或相切),則根軸爲其公共弦(或其公切線).

〔證〕 解(1)與(2)以求 x 與 y,相減而得(3).再取(3)與(1),或(2),爲聯立方程式而解之.故 C_1 與 C_2 之交點(或切點)亦爲根軸上一點.

$Q.E.D.$

例　題



兩圓

(4) $$x^2+y^2+3x-3y-52=0,$$

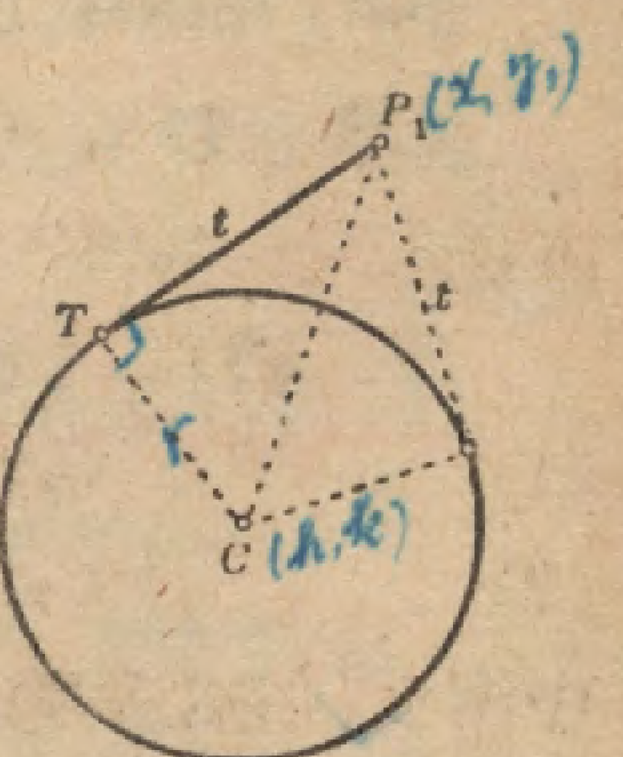
(5) $$x^2+y^2-2x+2y-32=0.$$

之根軸爲(用減法)

(6) $$x-y-4=0.$$

解(6)與(4),得(6,2)與(−2,−6)爲二圓之交點.而直線(6)爲其公共弦.

38. 切線之長. 欲得根軸之幾何性質對於 C_1 與 C_2 之一切相對位置均爲眞確者,需



定理 3. 設一圓之圓心爲 $C(h,k)$,半徑爲 r,則從 $P_1(x_1,y_1)$ 至此圓之切線之長 t 爲

(II) $$t^2=(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-r^2.$$

〔證〕 在直角三角形 P_1CT 中,

$t^2=\overline{P_1C}^2-r^2$.　$\overline{P_1C}^2=t^2+r^2$

用長之公式以求 P_1C,卽得(II).

$\overline{P_1C}^2=(x_1-h)^2+(y_1-k)^2$

$\therefore t^2=(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-r^2$

$Q.E.D.$

從(II)立得

定理 4.　從$P_1(x_1,y_1)$至圓

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

之切線，其長之平方爲此方程式以x_1與y_1代x與y後左邊之值.

此定理應與第31節垂直距離之規則比較之.

茲可證

定理 5.　一點至兩圓之切線，其長相等時，則此點之軌跡爲兩圓之根軸.

［證］　取圓C_1與C_2如第37節之(1)與(2),圓外一點$P_1(x_1,y_1)$,而t_1與t_2各爲從P_1至C_1與C_2二切線之長.於是從定理4,

$$t_1{}^2=x_1{}^2+y_1{}^2+D_1x_1+E_1y_1+F_1,$$
$$t_2{}^2=x_1{}^2+y_1{}^2+D_2x_1+E_2y_1+F_2,$$

因$t_1=t_2$，用減法,得

$$(D_1-D_2)x_1+(E_1-E_2\ y_1+F_1-F_2=0.$$

即P_1在根軸上,第37節之(3).　　　　*Q.E.D.*

參閱第79頁例之圖.

習　　題 19.

(1) 求下列各對圓之根軸之方程式,並作此圓與根軸.

(a) $x^2+y^2+2y-4=0$ 與 $x^2+y^2-2y-4=0$.

(b) x^2+y^2- [illegible] $=0$ 與 $x^2+y^2+2x-8=0$.

(c) $x^2+y^2-3x-5y-8=0$ 與 $x^2+y^2+8x=0$.

(d $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 與 $x^2+y^2+mx+ny+p=0$.

(2) 求題1中各對圓之公共弦之長.

(3) 求下列各組中每對圓之根軸，並證其遇於一點：

(a) $x^2+y^2+4x+7=0, 2x^2+2y^2+3x+5y+9=0, x^2+y^2+y=0.$

(b) $x^2+y^2-4x=0, x^2+y^2+6x-8y=0, x^2+y^2+6x-8=0.$

(c) $x^2+y^2-9=0, 3x^2+3y^2-6x+8y-1=0, x^2+y^2+8y=0.$

(d) $x^2+y^2+4x-3y+5=0,\ 2x^2+2y^2+5x-6y+1=0,$
$x^2+y^2+5x-4y+5=0.$

(4) 證明題 1 中各對圓之連心線垂直於其根軸.

(5) 證明題 1 中自每對圓之根軸上一定點至兩圓之切線，其長相等.

(6) 求下列切線之長：

(a) 從(7,2) 至圓 $x^2+y^2-4=0.$　　答 7.

(b) 從(−3,2) 至圓 $x^2+y^2-6x-2y=0.$

(c) 從(1,1) 至圓 $2x^2+2y^2+2x+4y-1=0.$

(d) 從(−4,0) 至圓 $x^2+y^2-6x+2y-3=0.$　　答 $\sqrt{37}$.

特　設　習　題

(7) 用解析法證任意三圓中其各對圓之根軸遇於一點.

(8) 求題 6 中，自已知點至已知圓之最長距離與最短距離.

(9) 一點至二同心圓切線之長，其比等於二圓半徑之比，求此點之軌跡.

(10) 一點移動時，其至一已知圓之切線之長與至一已知點之距離成一定之比，求此點之軌跡.

(11) 兩圓為 $(x-a)^2+(y-b)=c^2$ 與 $(x-b)^2+(y-a)=c^2$. 試就其公共弦之研討而求其相切之條件.　　答 $(a-b)^2=2c^2$.

39. 圓系.　若方程式

$$(1)\qquad x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

中之 D,E,F，常數有一個或數個為任意常數時，其軌跡為一圓系 (system of circles). 可指定此等任意常數以多組數值而作其圖形卽得此圓系.　如　$x^2+y^2-r^2=0$

代表一半徑各異之同心圓系.

如以類似第 33 節之法處理兩圓之方程式可得一簡單有趣之情形.即,已知兩圓為

(2) $$C_1:\ x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,$$

(3) $$C_2:\ x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0.$$

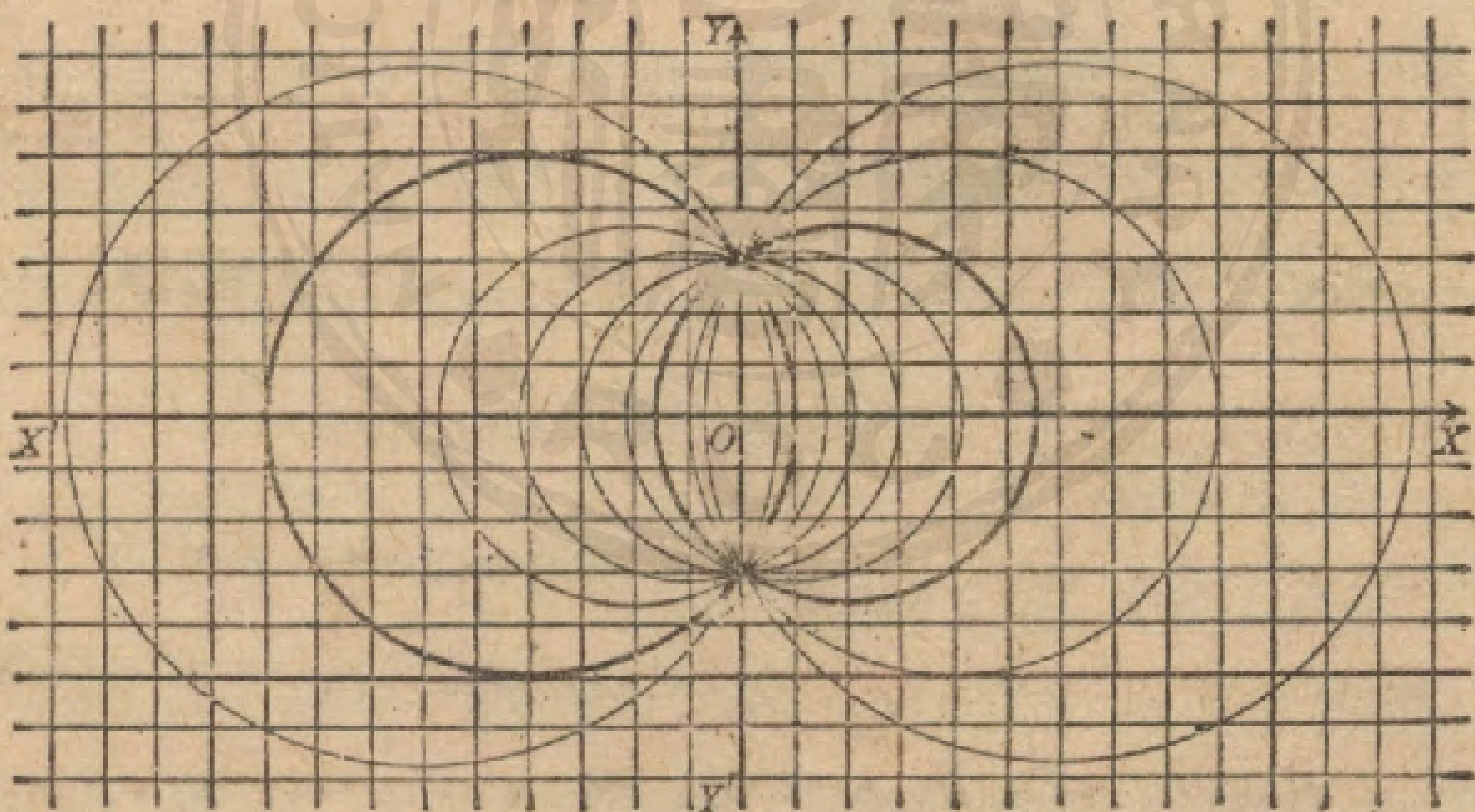
而觀察下列方程式之軌跡

(4) $$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+k(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

此中 k 為任意常數. x^2 與 y^2 之係數相等 $(=1+k)$ 當 $k=-1$時,(4)成為第 37 節(3),根軸之方程式.在其他情形中,此軌跡為一圓(第 35 節),而(4)表一圓系.

例 題

作方程式 $x^2+y^2+8x-9+k(x^2+y^2-4x-9)=0$ 所代表之圓系.



[解] 此圖表二圓

$$x^2+y^2+8x-9=0 \text{ 與 } x^2+y^2-4x-9=0,$$

以粗黑線畫出之,其餘諸弦相應於

$$k=2\ 5,\ ,\tfrac{1}{2},-4,-\tfrac{5}{2},\text{ 與 }-\tfrac{1}{4};$$

凡此諸圓皆經過前二圓之交點.

以粗黑線畫出之二圓,其根軸相應於 $k=-1$, 即為 y 軸.

下列關係圓系(4)之事實極易成立:

(1) 諸圓具一公共連心線(見以下題6).

(2) 設 C_1 與 C_2 相交於 A, B 兩點(或相切於 A),則諸圓(4)皆過 A 與 B(或皆切於 A).

因,顯然,若 x_1 與 y_1 適合於(2)與(3),則亦必適合於(4).

(3) (4)中任一對圓之根軸與 C_1 及 C_2 之根軸相同.

因命(4)中之 $k=k_1$,再命 $k=k_2$,消去此等方程式中之 x^2 與 y^2 即得第37節之(3).在上例中,y 軸爲任一對圓之根軸.

習　題 20

(1) 作下列各對圓 C_1 與 C_2.從此等方程式寫下其系之方程式相當於上述之(4)(第82頁),並依所給之 k 值作諸圓.

求其連心線與根軸之方程式,並作其圖形.

(a) C_1: $x^2+y^2+4y=0$; C_2: $x^2+y^2-4=0$; $k=3, 1, -\frac{1}{2}$.

(b) C_1: $x^2+y^2-2x+4y=0$; C_2: $x^2+y^2+2x-4y=0$; $k=1, -2, 3, -3$.

(c) C_1: $x^2+y^2-8x+4y-5=0$; C_2: $x^2+y^2+8x-4y-5=0$, $k=1, -2, 3, -3$.

(2) 求圓之方程式,此圓

(a) 過 $x^2+y^2=1$ 與 $x^2+y^2+2x=0$ 二圓之交點,並過(3, 2);

答　$7x^2+7y^2-24x-19=0$.

(b) 過 $x^2+y^2=4$ 與 $x^2+y^2-6x=0$ 二圓之交點,並過(2, −2);

(c) 屬於系 $x^2+y^2-4x-3+k(x^2+y^2-4y-3)=0$ 並過(0, 1).

(3) 求下列各圓之方程式 其系爲

(a) $x^2+y^2+6x-5+k(x^2+y^2+6y-7)=0$，其圓心在直線 $x-y=4$ 上；

(b) $x^2+y^2-4x+2y+k(x^2+y^2-2y-4)=0$ 其圓心在直線 $2x+4y=1$ 上．

答 $x^2+y^2-3x+y-1=0$.

(4) 作下列方程式所表之圓系：

(a) $x^2+y^2+kx+4y=0$.

(b) $x^2+y^2+kx+ky=0$.　　　答 諸圓心在 $x=y$ 上並過原點．

(c) $x^2+y^2+4x-2y=k^2$.

(d) $x^2+y^2-2kx-2ky+k^2=0$.

(e) $x^2+y^2+2kx=0$.

(5) 證明題 3 中圓系(a)內諸圓心與圓系(b)內諸圓心皆各在一直線上．

注意k

(6) 若 P_1 與 P_2 各爲第 39 節中(2)，與(3)兩圓之圓心，則(4)圓之圓心 P 分 P_1P_2 爲一比，其比值爲 k，試證之．

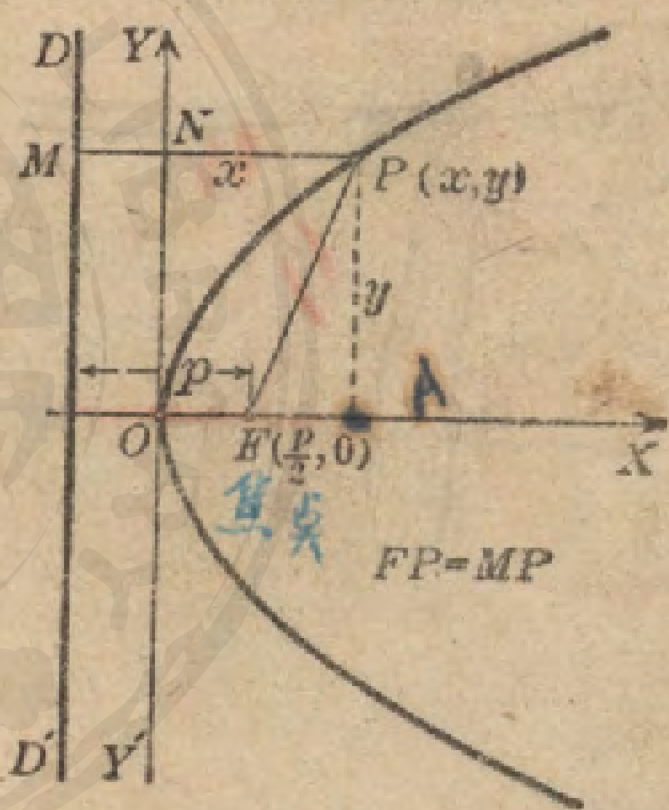
第 六 章

拋物線,橢圓與雙曲線

40. 拋物線 (Parabola) 茲將下列軌跡問題研討之.

一點移動時,其至一定線之距離與至一定點之距離相等.試定此軌跡之性質.

[解] 設 DD' 爲定線而 F 爲定點.過 F 作 x 軸垂直於 DD'. 取 F 與 DD' 間之中點爲原點.



又設

(1) 自 F 至 DD' 之距離 $=p$.

則若 $P(x,y)$ 爲軌跡上之任一點,

(2) $\qquad FP=MP.$

但 $\qquad FP=\sqrt{(x-\frac{1}{2}p)^2+y^2},\quad MP=MN+NP=\frac{1}{2}p+x.$

代入 (2),

$$\sqrt{(x-\tfrac{1}{2}p)^2+y^2}=\tfrac{1}{2}p+x.$$

平方並化簡之,得

(3) $$y^2=2px.$$

此軌跡稱爲拋物線.定線 DD' 稱爲準線 (Directrix),定點 F 稱爲焦點(Focus).從 (3) 知 x 軸爲對稱軸.因此 x 軸稱爲拋物線軸(Axis of the parabola).此外,原點在此曲線上.焦點與準線間之中點稱爲頂點 (Vertex).

討論: 1. 過原點. 2. 而又一軸對稱. 3. x之值與p相反者皆除去之
3. a. p>0 曲線在y-軸之右. b. p<0 曲線在y-軸之左.
y無可除去者.

定理 設原點為頂點與 x 軸為拋物線軸，則其方程式為

(I) $$y^2=2px.$$

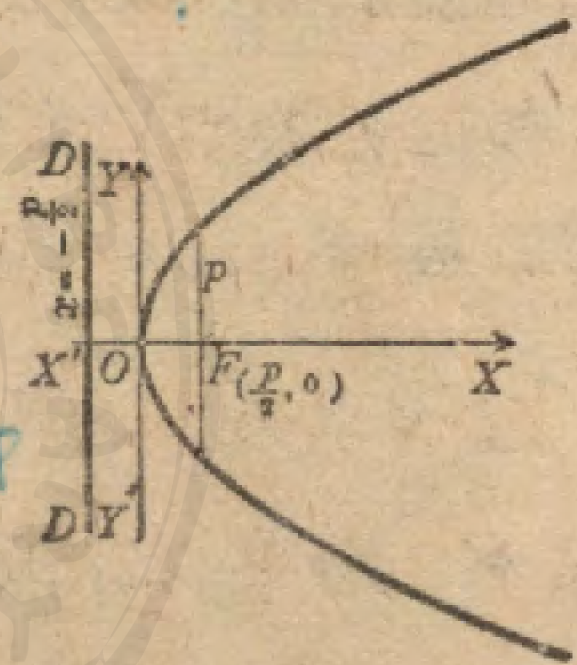
其焦點為 $(\frac{1}{2}p,0)$，而其準線之方程式為 $x=-\frac{1}{2}p$.

討論(I)，可在上述拋物線之性質外，更得下列諸性質.

(1) 凡 x 之值，其符號與 p 相反者概須除外，故當 p 為正時，此曲線在 yy 之右；而當 p 為負時，則此曲線在其左.

(2) y 無除外之值；故此曲線向上下二方伸展至無限遠.

焦弦
正焦弦



過焦點而平行於準線之弦稱為通~~徑~~ (Latus rectum). 欲求其長，可將 $x=\frac{1}{2}p$ 代入 (I) 中. 則 $y=\pm p$，而通徑之長二倍 $=2p$；即等於(I)中 x 之係數.

須知方程式(I)祇含二項，即一坐標之平方與其他一坐標之第一冪是也. 顯然方程式

$$x^2=2py.$$

之軌跡亦為一拋物線 (第 87 頁之圖). 由是得

定理 設一拋物線以原點為頂點與 y 軸為拋物線軸，則其方程式為

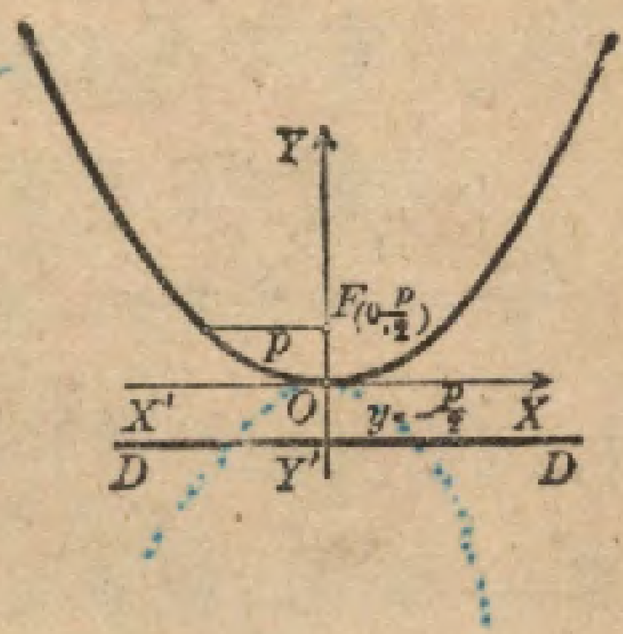
(II) $$x^2=2py.$$

其焦點為 $(0,\frac{1}{2}p)$，而其準線之方程式為 $y=-\frac{1}{2}p$.

方程式(I)與(II)稱為拋物線方程式之標準式(Typical form).

下列形狀之方程式

$$Ax^2+Ey=0 \text{ 與 } Cy^2+Dx=0,$$


圖a.

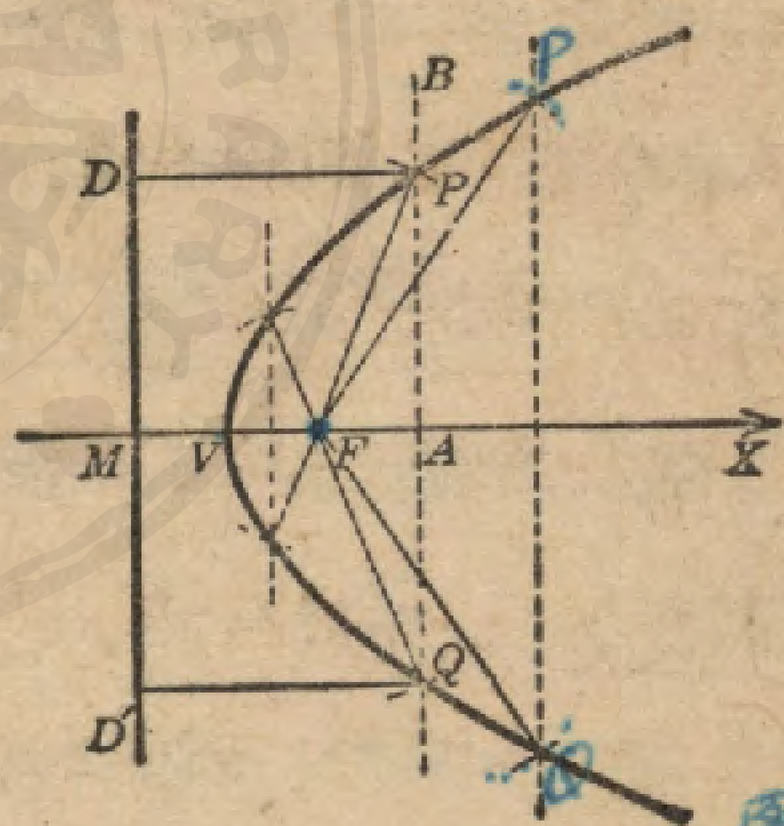
其 A, E, C, 與 D 不等於零,可用移項及除
$x^2=-\frac{E}{A}y$ $y^2=-\frac{D}{C}x$
法寫成 (I) 或 (II) 之形狀.

方程式 (I) 與 (II) 之形式爲二次方程式中之最簡單者. 至於

如何檢定一已知二次方程式之軌跡爲一抛物線

此問題將於第 63 節中解之.

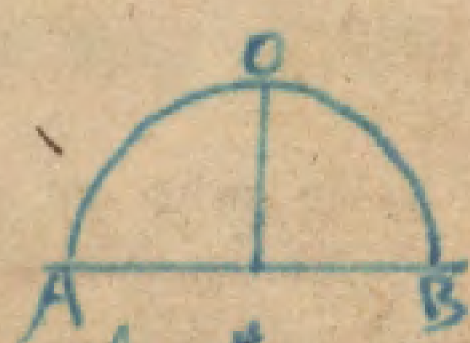
41. 抛物線之作圖法 一抛物線其焦點與準線爲已知,即可用直尺與圓規作之如下:


圖b.

晝 MX 軸,取 MF 之中點作爲頂點 V. 過 V 之右任一點 A 作 AB 平行於準線. 以 F 爲圓心, MA 之長爲半徑,作弧截 AB 於 P 與 Q. 則 P 與 Q 二點在此抛物線上. 因 $FP=MA$, 從作法, 故 P 至焦點之距離與至準線之距離相等.

祇須變更 A 之位置,即可作曲線上任意諸點.

42. 抛物線拱 當一抛物線拱之拱距 AB 及高 OH 爲已知時,拱上諸點可作之如下:


arch 拱.

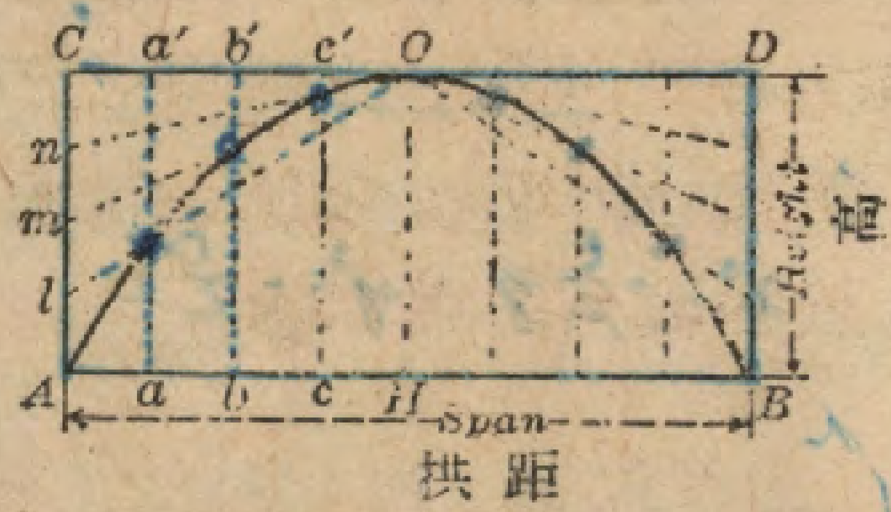
作矩形 $ABCD$ (第 88 頁上第一圖).

分 AH 與 AC 爲同數之等分.

從 A 起，命其連續分點

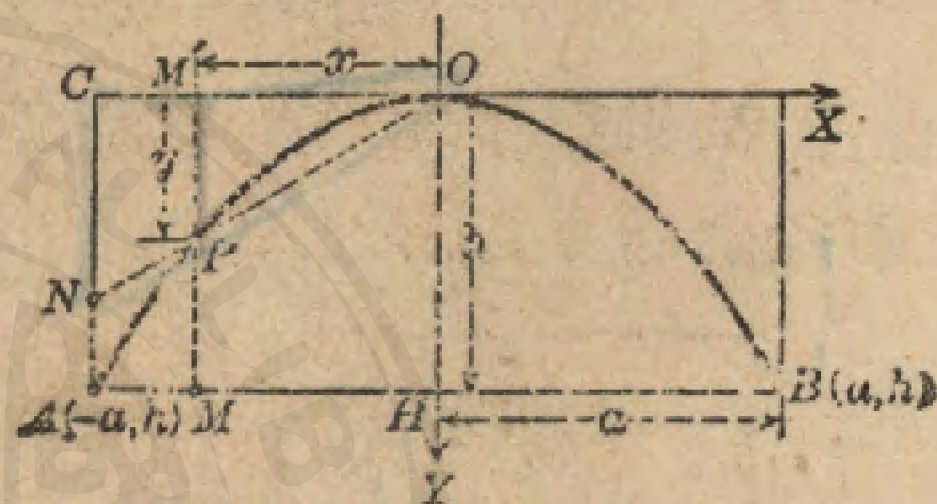
在 AH 上者為 a, b, c;

在 AC 上者為 l, m, n.



作 aa' 垂直於 AB，而連接 Ol. 記出其交點. 同樣從 b 與 m, c 與 n 各作二線並記其交點. 此等交點卽為所求之拋物線上諸點.

［證］ 如圖，取 OX 與 OY 二軸，命



(1) $$OM'=x,\ M'P=y,$$

$$AB=2a,\ OH=h.$$

從作法，CN 與 MH 各為 CA 與 AH 之相等部分.

(2) $$\therefore\ \frac{CN}{CA}=\frac{MH}{AH},\ \text{或}\ \frac{CN}{h}=\frac{-x}{a}.$$

從二相似 △ $OM'P$ 與 OCN,

(3) $$\frac{y}{x}=\frac{N}{OC}=\frac{CN}{-a}.$$

$\frac{y}{x}=\frac{-\frac{hx}{a}}{-a}=\frac{h}{a^2}x$

將(2)中 CN 之值代入 (3) 而化簡之，得

(4) $$x^2=\frac{a^2}{h}y.$$

(公式 $x^2=2py$)

此與標準式(II)相同；而其軌跡經過所需之 $O, A(-a,h)$，與 $B(a,h)$ 諸點.

解 (4) 以求 y，得

(5) $$y=\frac{h}{a^2}x^2.$$

x	$\frac{1}{4}a$	$\frac{1}{2}a$	$\frac{3}{4}a$	a
y	$\frac{1}{16}h$	$\frac{1}{4}h$	$\frac{9}{16}h$	h

故 y 與 x^2 成正比. 用 (5)，可算得如表中所載之 y 值.

$y^2=2px$ $(\frac{1}{2}p,0)$ $x=-\frac{1}{2}p$

43. 繪拋物線法　從拋物線之標準方程式繪其軌跡，可先討論其方程式以決定其軸與位置（在 XX' 之上或下，在 YY' 之右或左）．算出 x 與 y 之值數組而繪之．與 (I) 或 (II) 比較之以求得 $2p$，而繪其焦點與準線．

工補致：繪 $x^2=10y$ 之軌跡

例　　題

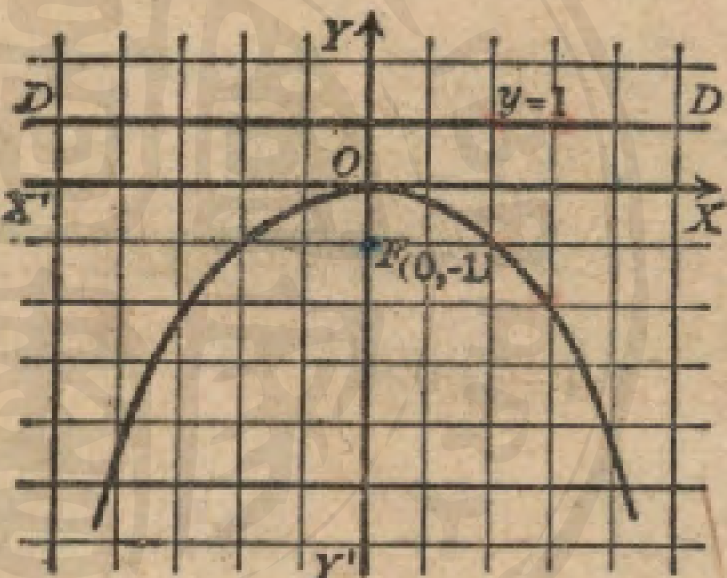
(1) 繪 $x^2+4y=0$ 之軌跡，並繪其焦點與準線．

［解］ 此已知方程式可寫成

$$x^2=-4y.$$

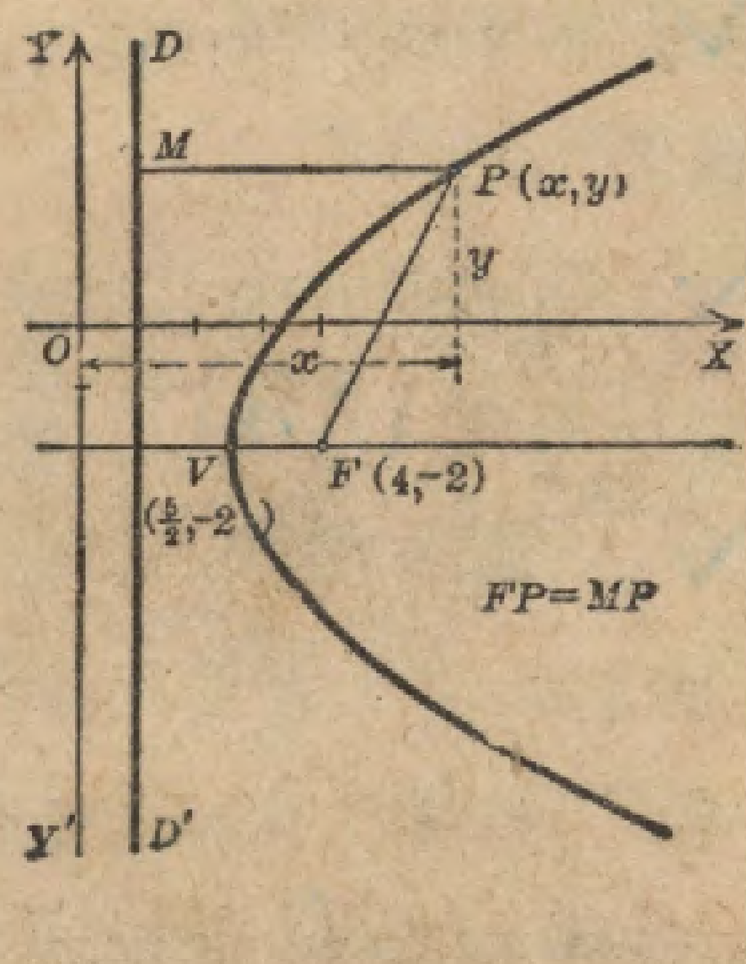
y 軸為對稱軸；y 之正值須除外，故此拋物線在 x 軸之下．下表載此曲線上數點之坐標．

x	y
0	0
± 2	-1
± 4	-4



與 (II) 比較之，$p=-2$．故焦點為 $(0,-1)$ 而準線為 $y=1$．其通徑之長為 4．軌跡上每點至 $(0,-1)$ 之距離與至 $y=1$ 之距離相等．

(2) 求焦點為 $(4,-2)$ 與準線為 $x=1$ 之拋物線之方程式．



［解］ 圖中，從定義，知

(1)　　$FP=MP.$

但　　$FP=\sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2},$

與 $MP=x-1.$

代入 (1) 而化簡之，得

(2)　$y^2-6x+4y+19=0.$ 答

習　　題 21

(1) 繪下列各方程式之軌跡並作其焦點與準線．又求其通徑之長並畫之．

(a) $y^2=12x$.　　(d) $3y=5x^2$.

(b) $x^2=10y$. (補放)　　(e) $7x+4y^2=0$.

(c) $2y^2=9x$.　　(f) $x^2+10y=0$.

(2) 用直尺與圓規作一拋物線，設其焦點爲

(a) 距準線 6 單位；　(b) 距準線 10 單位；　(c) 距準線 15 單位．

(3) 求拋物線之軌跡，其

(a) 頂點爲 (3,4) 而準線爲 y 軸；　答 $y^2-8y-12x+52=0$.

(b) 頂點爲 (4,2) 而焦點爲 (2,2)；

(c) 頂點爲 (0,0)，軸爲 y 軸，且過 $(-4,5)$.　答 $5x^2=16y$.

(d) 準線爲 $y+3=0$ 與焦點 $(1,-7)$；

(e) 準線爲 $x+2y=1$ 與焦點爲原點；

答 $4x^2+y^2-4xy+2x+4y=1$.

(f) 軸爲 $x-y=0$，頂點爲 (0,0)，而通徑 $=4$ (二種情形)；

(g) 頂點爲原點，軸爲 x 軸，而經過點 (h,k).

(4) 求一拋物線拱之方程式並作其圖形，設其

(a) 拱距爲 20 呎而高爲 10 呎；　(b) 拱距爲 15 呎而高爲 8 呎．

(5) 證明拋物線上任一點至其軸之垂線爲通徑及自垂足至頂點距離之比例中項．

(6) 拋物線通徑之兩端各與準線及其軸之交點連接．證此二連線互相垂直．(大弦)

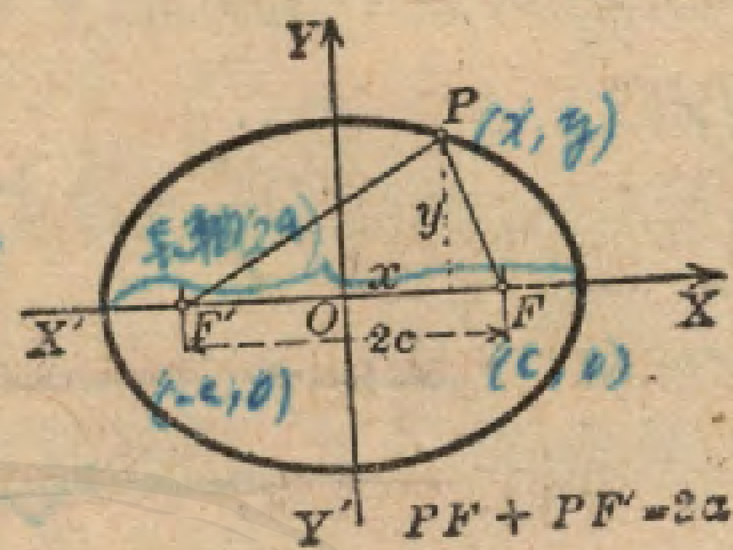
(7) 一點移動時，其至$(3,-4)$之距離較至線 $x+5=0$ 之距離少 4．求其軌跡之方程式並作圖．　答 $y^2+8y-8x+24=0$.

(8) 一點移動時，其至線 $x=3$ 之距離與其至圓 $x^2+y^2=16$ 所作切線之長相等，求其軌跡之方程式．

44 橢圓 (Ellipse)　玆解以下之軌跡題：

已知兩定點 F 與 F'. 一點 P 移動時，其至 F 與 F' 距離之和爲一定. 試決定此軌跡之性質.

［解］ 過 F 與 F' 作 x 軸，而以 $F\ F$ 之中點爲原點. 從定義，



(1)　　$PF+PF'=$ 一常數. $=2a$

命此常數爲 $2a$. 則(1)成爲

(2)　　$PF+PF=2a$.

命 $F'F=2c$. 則

$$PF=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\quad PF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

因 F 點之坐標爲 $(c,0)$ 而 F' 點之坐標爲 $(-c,0)$ 也.

故 (2) 成爲

(3)　　$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$.　$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

將任一根式移項，平方且化簡之，得

兩邊平方 $(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$

(4)　　$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$.

$cx-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2[(x-c)^2+y^2]$

爲簡便計，命 *

(5) 設 $a^2-c^2=b^2$.

於是 (4) 成爲簡單之方程式

(6)　　$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

討論　在 XX' 上之截部爲 $\pm a$; YY' 上之截部爲 $\pm b$. XX' 與 YY' 兩軸皆爲對稱軸，而 O 爲對稱中心.

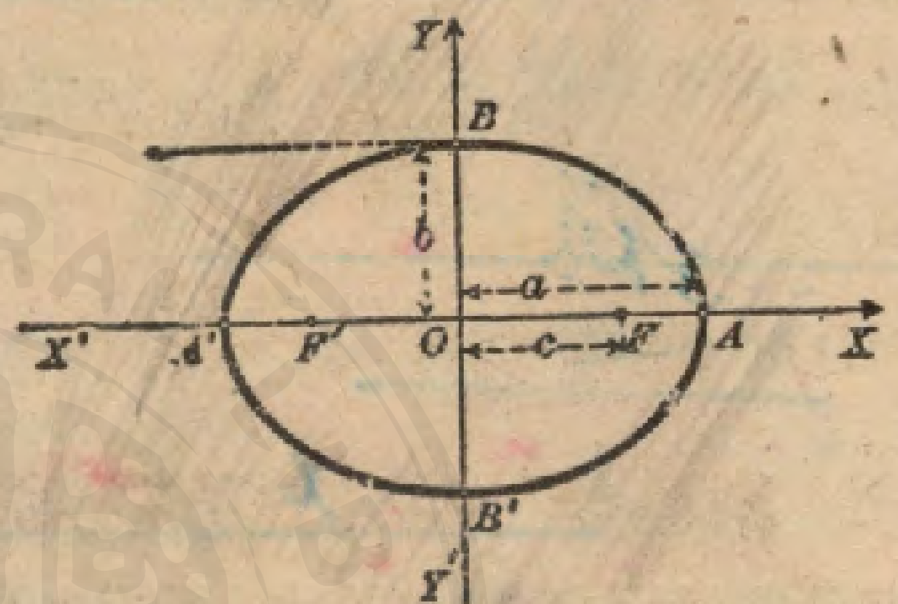
* 此式爲可能. 因 $PF+PF'>F'F$, 或 $2a>2c$; 即 $a>c$ 而 a^2-c^2 爲一正數.

解(6)以求 x 與 y,

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2},\qquad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

故 x 之絕對值不能大於 a 而 y 之絕對值不能大於 b. 此曲線爲一閉曲線.

其軌跡稱爲橢圓. 凡過 O 點之弦,皆爲 O 點所平分,故 O 點稱爲中心. 二定點 F 與 F' 稱爲焦點.



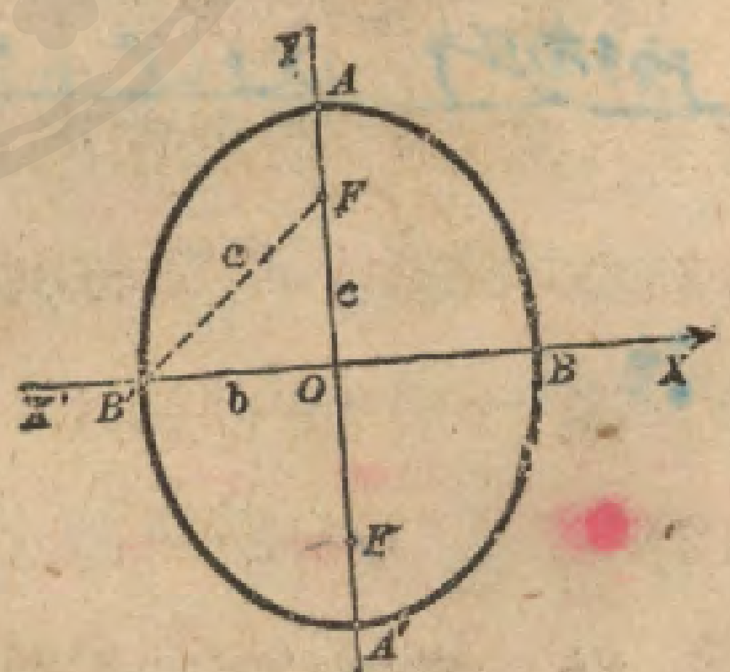
過 O 點之最長弦 AA' 稱爲長軸 (Major axis); 其最短弦 BB' 稱爲短軸 (Minor axis). 顯然

(7) 長軸 $=2a$, 短軸 $=2b$.

以 a^2b^2 除(6)之各項而總結之,得

定理 一橢圓之中心爲原點而其焦點在 x 軸上,則其方程式爲

(III) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$



其長軸爲 $2a$ 而短軸爲 $2b$. 如以 $c^2=a^2-b^2$, 則其焦點爲 $(\pm c, 0)$.

若其焦點在 y 軸上,而仍用以上之記號,則此橢圓之方程式顯然爲

(8) $$a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2 \text{ 或 } \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

方程式(6),(8),與(III)爲橢圓之標準方程式而皆屬於

(9) $$Ax^2+By^2=C$$

之形式,其中 A, B, 與 C 之符號皆相同.

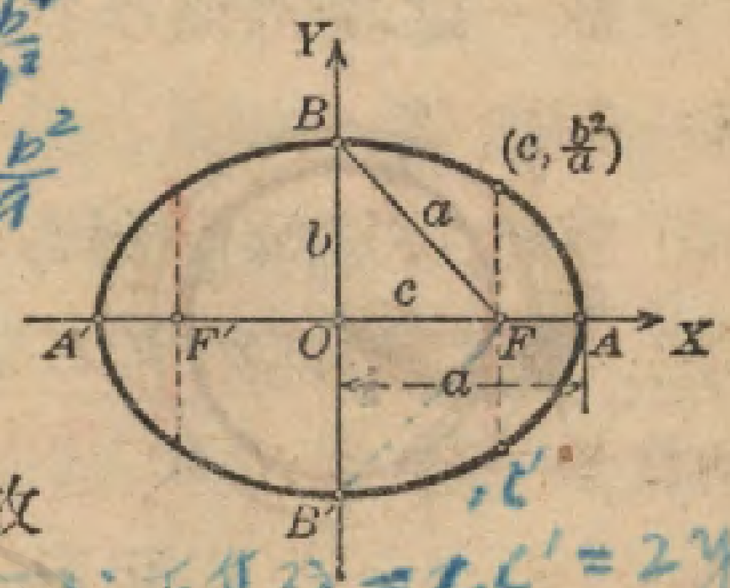
圖中 $\overline{BF}^2=b^2+c^2$. 將 (5) 式中 c^2 之值代入，則 $\overline{BF}^2=a^2$. 故得其性質：自任一焦點至短軸端點之距離等於其半長軸(Semi-major axis).

令 $x=c$　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,　$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}$

$y^2=\frac{b^4}{a^2}$

$\therefore y=\pm\frac{b^2}{a}$

經任一焦點所作垂直於長軸之弦稱爲通徑. 其長可由 (III) 中命 $x=c$ 然後解之以求 y 而決定之. 卽得



$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}=\frac{b^2}{a}.$$ 故

$\therefore$ 正焦弦 $=LL'=2y$

∴正焦弦

(10)　通徑之長 $=\frac{2b^2}{a}$.　(正焦弦的公式怎樣來不懂！)

離心率　當二焦點極爲接近時，此橢圓與圓之差別甚微. 故事實上 $OF:OA$ 之比值，可說用以決定橢圓從圓分歧之程度，而此比值稱爲橢圓之離心率(Eccentricity)，其記號爲 e. 故

(11)　$$e=\frac{OF}{OA}=\frac{c}{a}.$$　$e=0$，(即以 a 為半徑)

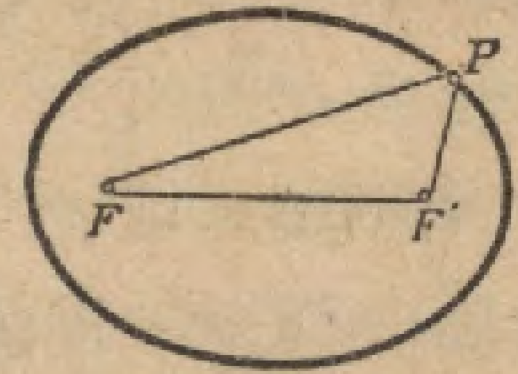
e 值之範圍乃自 0 至 1. 若長軸 AA' 之長爲一定，則當 e 自 0 增至 1 時，其"扁平程度 (Flatness)"亦隨之而增，其兩極限之形狀，最初爲一以 AA' 爲直徑之圓而最後爲一線段 AA'.

從 (11) 與 (5)，得

(12)　$$b^2=a^2-c^2=a^2(1-e^2).$$

45. 橢圓之作圖法　自上節定義 (2)，得作橢圓之簡單法.

在畫板上，揿二圖畫釘於焦點 F 及 F' 處而繞以一線如圖所示. 設一鉛筆置於 FPF' 內而移動之，務使線圈緊張，則 $PF+PF'$ 爲定長，而 P 畫成一橢圓. 設其長軸爲 $2a$，則圈 FPF' 之

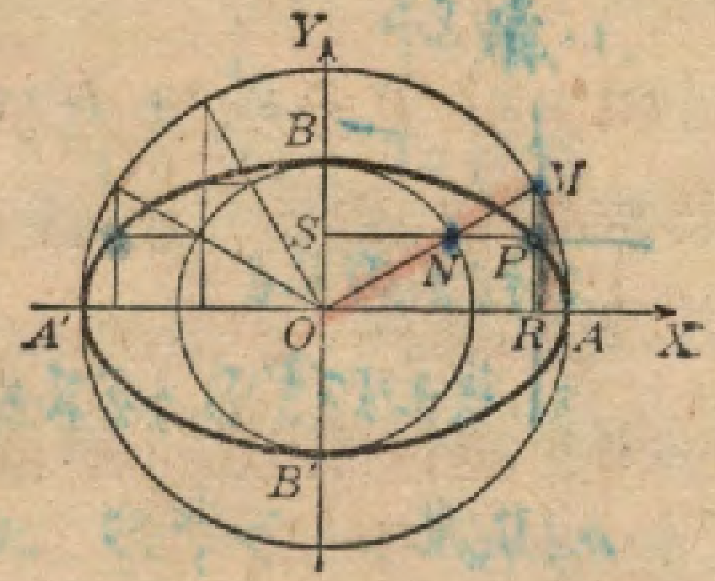


即 $PF+FF'+PF'=2a+2c$.

長必為$2a+2c$.

用直尺與圓規作橢圓之法如下：

以長軸AA'與短軸BB'為直徑各作一圓. 從中心O畫任一半徑交二圓於M及N. 從M作一線MR平行於短軸，而從N作一線NS平行於長軸. 此二線將相交於橢圓上一點P.



［證］ 如下圖所示，取坐標軸. 命$OA=x$, $AP=y=OD$, $\angle BOX=\phi$.

顯然，

$OB=$ 半長軸 $=a$, $OC=$ 半短軸 $=b$.

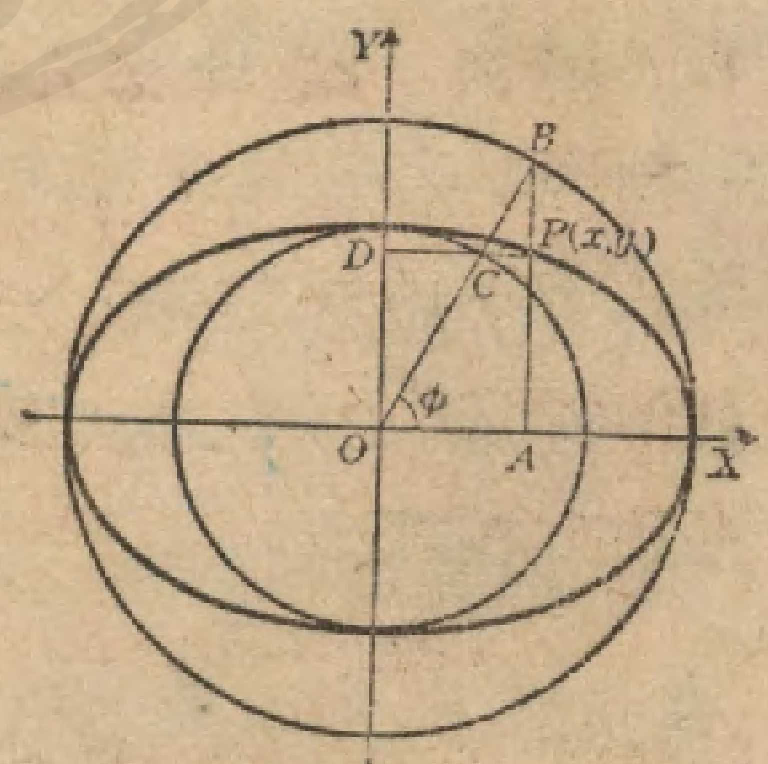
於是在直角$\triangle OAB$中，

(1) $$\cos\phi=\frac{OA}{OB}=\frac{x}{a}.$$

同理，在直角$\triangle ODC$中，$\angle OCD=\angle COA=\phi$，而

(2) $$\sin\phi=\frac{OD}{OC}=\frac{y}{b}.$$

但$\cos^2\phi+\sin^2\phi=1$. 故從(1)與(2)，



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

而$P(x,y)$在此橢圓上，其半軸為a與b. Q.E.D.

此角ϕ稱為P之離心角 (Eccentric angle).

題中所作之二圓各稱為大與小輔助圓 (Major and minor auxiliary circles).

46. 繪橢圓法　當橢圓之方程式為標準式時，其繪圖捷法如下：

1.截部

(1) 求其截部記之於坐標軸上，命其較長者為 a，較短者為 b. 長軸寫作 AA'，短軸 BB'.

2.記出兩焦點

(2) 從 $c^2=a^2-b^2$，求 c. 在長軸上，記出焦點 F 與 F'.

3.算出坐標值,繪其曲線

(3) 直接算出一組或數組坐標之值，而描寫其曲線.

4.準線：下冊33 Stong Loney: coordinate geo P.162. 根軸之作圖.

Coaxal circles 共軸圓系. P.166. $x^2+y^2+\lambda x+F=0$ λ參變數.

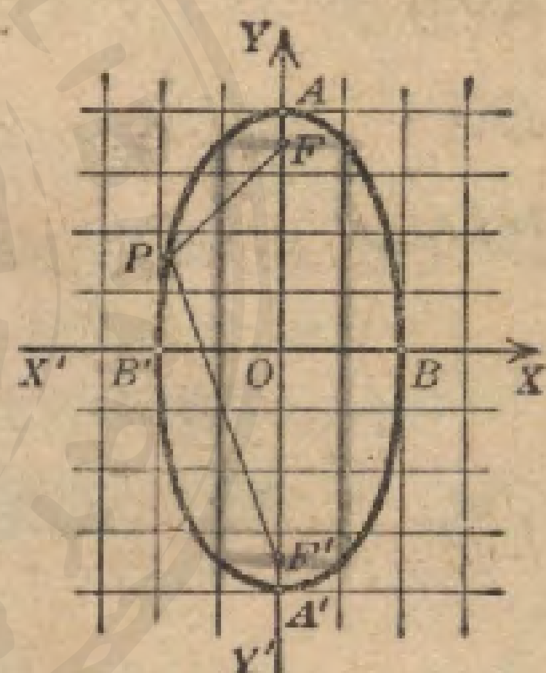
橢圓準線 p.225-p.

例　　題

畫橢圓 $4x^2+y^2=16$.

[解]　在 XX 上之截部為 ± 2；在 YY' 上者為 ± 4. 故長軸在 YY' 上，而 $a=4$，$b=2$，$c=\sqrt{12}=2\sqrt{3}=3.5$. 二焦點在 y 軸上. 通徑之長等於 $\frac{2b^2}{a}=2$. 離心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$. 表中所載者為通徑之兩端點. 設 P 為橢圓上任一點，$PF+PF'=2a=8$.

x	y
± 1	± 3.5



47. 特例　第 44 節方程式 (6) 與 (8) 為簡單之二次方程式. 茲有一問題，

欲決定一已知二次方程式之軌跡為一橢圓之檢驗法為何？

且留待以後解答之.（參閱第 63 節）.

現將方程式

$$Ax^2+By^2=C,$$

之兩個特例，其中 A 與 B 有同號，提出之.

$Ax^2+By^2=0$ 點$(0,0)$

(1) $C=0$. 則軌跡為一點橢圓 (Point ellipse)（二軸皆為零）.

(2) C 不為零但與 A 及 B 異號. 此方程式無軌跡，而有時以"虛橢圓 (Imaginary ellipse)"表之.

如 $4x^2+y^2=-16$. 則 半長軸 $=4i$，半短軸 $=2i$

習　　題 22.

(1) 作下列方程式之圖形，定其焦點，並求其離心率與通徑之長.

(a) $x^2+4y^2=16$.
(b) $4x^2+9y^2=36$.
(c) $x^2+2y^2=8$.
(d) $2x^2=1-y^2$.
(e) $25y^2+x^2=25$.
(f) $3x^2+5y^2=30$.
(g) $8x^2+3y^2=63$.
(h) $9x^2+49y^2=250$.

(2) 用下列條件，寫出以原點為中心之橢圓之方程式：

(a) $c=8, b=4$，焦點在 y 軸上.
(b) $a=10$，$c=6$，焦點在 x 軸上.
(c) $a=6$，通徑 $=3$，焦點在 x 軸上.
(d) $b=5$，通徑 $=7$，焦點在 y 軸上.
(e) $a=55$，而通過 $(7,2)$.

(3) 寫出下列橢圓之方程式，其中心在原點，兩軸在坐標軸上而

(a) 過 $(-3,0)$ 與 $(0,-2)$;
(b) 過 $(2,3)$ 與 $(-1,4)$;　　答 $7x^2+3y^2=55$.
(c) 過 $(5,1)$ 與 $(-4,-2)$;
(d) 其長軸三倍於短軸且過 $(6,2)$.　與(2) e 同.

(4) 一點平分圓 $x^2+y^2=16$ 上諸點之橫坐標，求其軌跡之方程式.

(5) 一點分圓 $x^2+y^2=25$ 上諸點之縱坐標成 $2:3$，求其軌跡之方程式.

(6) 求一點之軌跡，此點移動時，其

(a) 至線 $x=8$ 之距離為至 (2.0) 之距離之二倍.　　答 $3x^2+4y^2=48$,
(b) 至線 $y=6$ 之距離為至 $(0,3)$ 之距離之二倍.
(c) 至線 $x=-18$ 之距離為至 $(-2,0)$ 之距離之三倍.　　答 $8x^2+9y^2=288$.
(d) 至線 $2y=-15$ 之距離為至 $(0,-3\frac{1}{3})$ 之距離之 $1\frac{1}{2}$ 倍.

(7) 三角形底邊之兩端點為 $(0,6)$ 與 $(0,-6)$，設其他二邊斜率之乘積為 $-\frac{4}{9}$，求其頂點之軌跡.

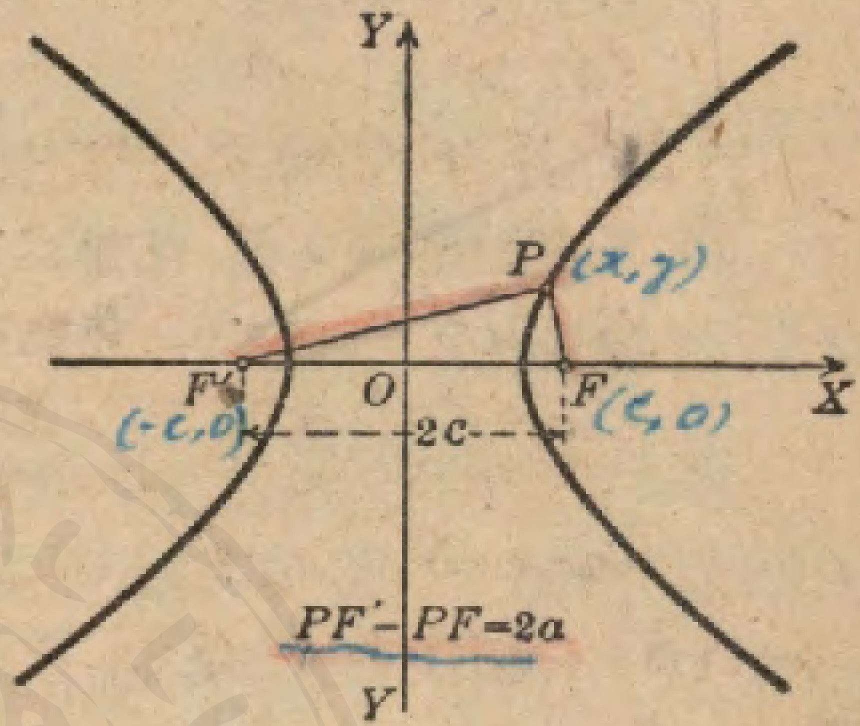
(8) 證明一橢圓之通徑為其兩軸之比例第三項 (Third proportional).

(9) 一定長直線其兩端常在兩垂直線上移動．求線上任一點之軌跡.

48. 雙曲線 (Hyperbola)　茲將一第三軌跡題討論之.

已知兩定點 F 與 F'. 一點 P 移動時，其至 F 與 F 之距離之差爲一定. 試決定此軌跡之性質.

［解］ 過兩定點畫 x 軸，而以 $F'F$ 之中點爲原點. 從定義，



(1)　$PF'-PF=$一常數. $=2a$

命此常數爲 $2a$. 則 (1) 成爲

(2)　$PF'-PF=2a.$

命 $F'F=2c$.　則

$$PF=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$PF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

因 F 點之坐標爲 $(c,0)$ 而 F' 點之坐標爲 $(-c,0)$ 也.

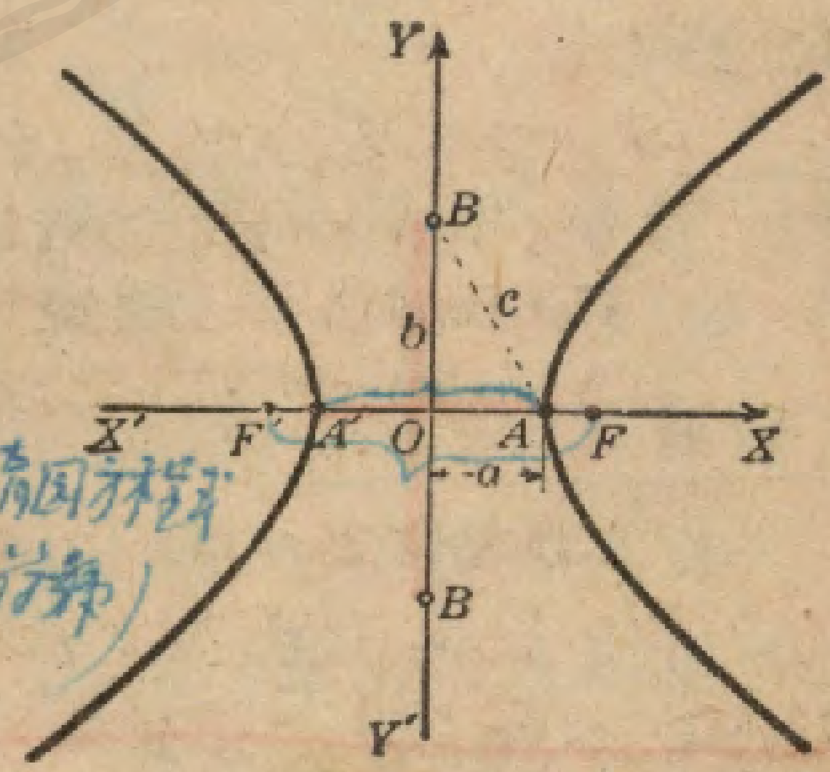
代入 (2)，得

(3)　$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

將任一根式移項，平方且化簡之，得

(4)　$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

爲簡便計，命 *



(5)　$a^2-c^2=-b^2.$

或　$c^2-a^2=b^2.$

於是 (4) 成爲簡單之方程式

(6)　$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$　(此即橢圓方程式差一符號)

討論　在 XX' 上之截部爲 $\pm a$; 在 YY' 上之截部爲 $\pm b\sqrt{-1}$; 卽，此軌跡並不與 y 軸相交. 但在 y 軸上雖爲虛截部而

* 此式爲可能. 因圖中所示，$PF'-PF<F'F$，或 $2a<2c$; 卽 $a<c$，而 a^2-c^2 爲一負數.

其$\sqrt{-1}$之係數仍爲b. XX'與YY'皆爲對稱軸而O爲對稱中心.

解(6)以求x與y,

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2+y^2},\quad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

故知凡x之値在$-a$與a之間者皆須除外,但y無除外之値.

當x漸增時,y亦隨之而增,故此曲線包含分離之兩枝*各伸展至無限遠.

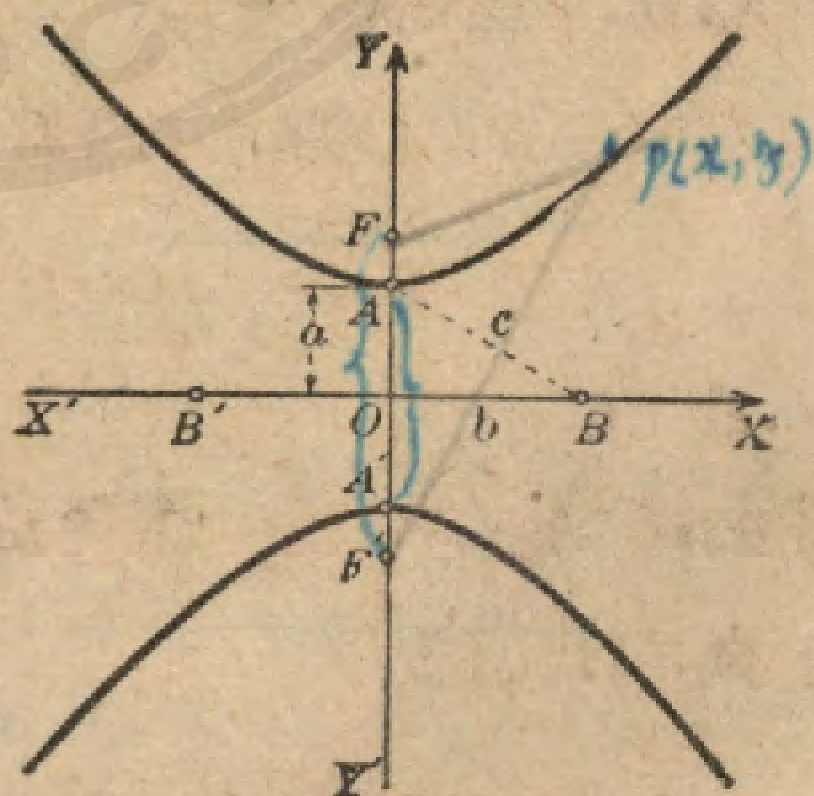
此軌跡稱爲雙曲線.點O平分所通過之一切弦,故稱爲中心.此已知二定點F與F'爲焦點.弦AA'稱爲貫軸(Transverse axis).在YY'上,自O截取$\pm b$長卽線BB'(第97頁之第二圖)稱爲共軛軸(Conjugate axis).如是

(7) 貫軸$=2a$. 共軛軸$=2b$.

以a^2b^2除(6)之各項而總結之,得

定理 一雙曲線之中心爲原點而焦點在x軸上,則其方程式爲

(IV) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$



其貫軸爲$2a$而共軛軸爲$2b$.如以$c^2=a^2+b^2$,則其焦點爲$(\pm c,0)$.

若其焦點在y軸上,而仍用以上之記號,則此雙曲線之方程式顯然爲

(8) $$a^2x^2-b^2y^2=-a^2b^2,\text{或}\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1.$$

* 在左邊之一枝曲線,(2)式可以$PF-PF'=2a$代之.

方程式 (6) 與 (8) 為雙曲線之標準方程式而皆屬於

(9) $$Ax^2+By^2=C$$

之形式，其中 A 與 B 之符號相異.

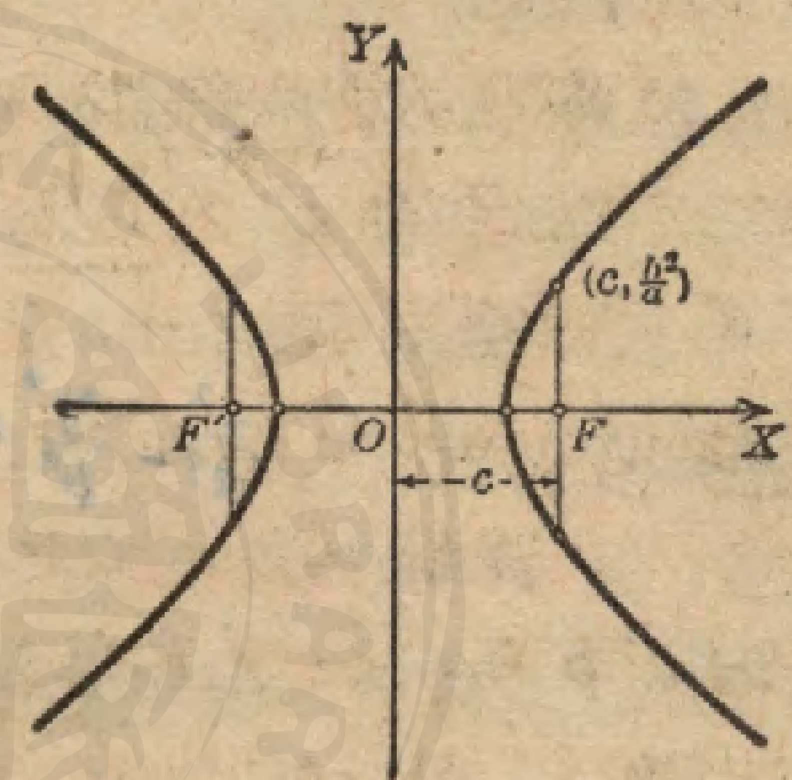
圖中 $\overline{AB}^2=a^2+b^2$. 將(5)式中 b^2 之值代入，則 $\overline{AB}^2=c^2$.

故得其性質：兩軸端點間之距離等於兩焦點間距離之半.

過一焦點而垂直於貫軸之弦稱為通徑. 於公式 (IV) 中，命 $x=c$ 而解之以求 y，可決定其長.

正焦弦

$\frac{y^2}{b^2}=\frac{c^2}{a^2}-1=\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}$



如，用 (5) 得 $\therefore y^2=\frac{b^4}{a^2}$

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{c^2-a^2}=\pm\frac{b^2}{a}.$$

故

(10) $$\text{通徑之長}=\frac{2b^2}{a}.$$

離心率 雙曲線中，其 $OF:OA$ 之比值稱為此曲線之離心率，與橢圓相同. 以 e 表離心率，則

(11) $$e=\frac{OF}{OA}=\frac{c}{a}. >1$$

雙曲線之 $e>1$. e 值與曲線形狀之關係，容後說明之.

從 (5) 與 (11)，得

$= a^2e^2-a^2$

(12) $$b^2=c^2-a^2=a^2(e^2-1).$$

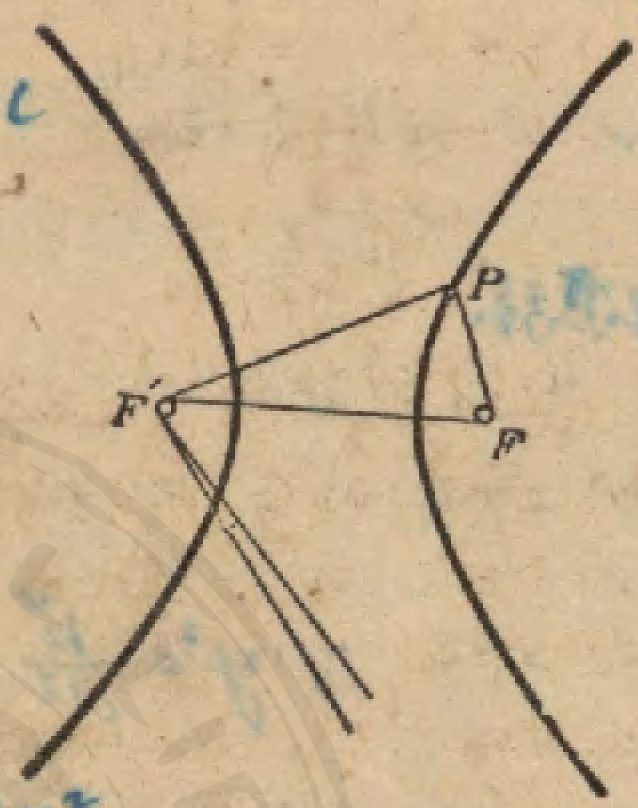
49. 雙曲線之作圖法 依第 48 節定義 (1) 有一機械作法如下：固定二圖書釘於焦點. 取一線執其兩端，使跨過 F' 而套於 F 上.（如第 100 頁之圖）.

設一鉛筆尖緊繞於線圈之 P 點處而移動，則該線圈在收進或放出之際，其兩股所生變化之長應相等．於是 $PF'-PF$ 爲一定而 P 畫出一雙曲線．設貫軸爲 $2a$ 則此線起始時卽當處理之，務使 PF' 與 PF 間之差爲 $2a$．

50．繪雙曲線法　當雙曲線之方程式爲標準式 (9) 時，其繪圖捷法如下：

$Ax^2+By^2=C$

AB異號．双曲線．



(1) 求其截部而記之於正當之軸上．命 a 等於其實截部而 b 等於其虛截部中 $\sqrt{-1}$ 之係數．作其　軛軸，寫作 BB'．其貫軸寫作 AA'．

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$　$c^2=a^2+b^2$

(2) 從 $c^2=a^2+b^2$，求 c．在貫軸上記出焦點 F 與 F'．

(3) 直接算出一組或數組坐標之值，而描寫其曲線．

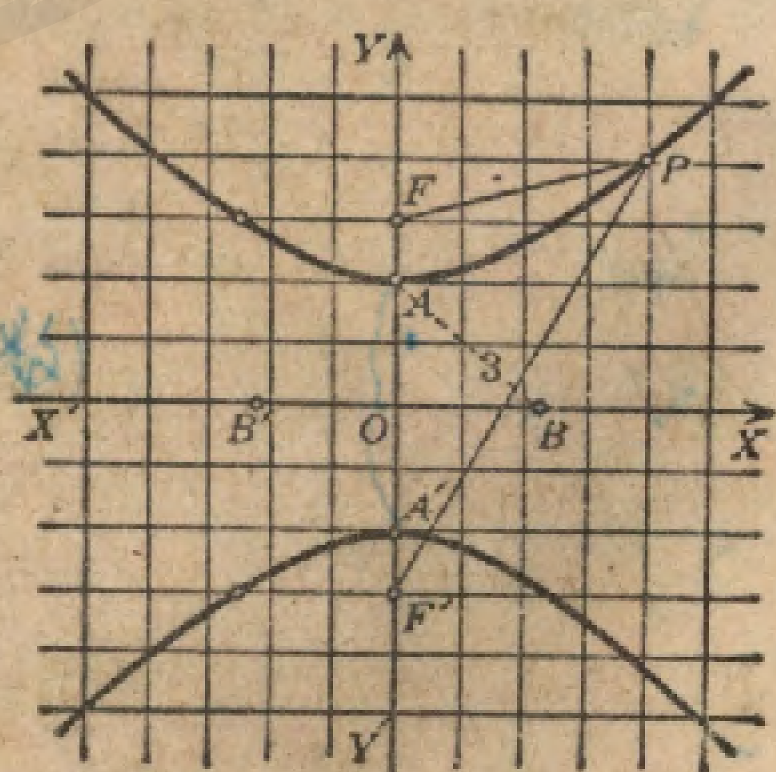
例　　　題

畫雙曲線

$$4x^2-5y^2+20=0.$$

［解］　在 XX' 上之截部爲 $\pm\sqrt{-5}=\pm\sqrt{5}\sqrt{-1}$；在 YY' 上之截部爲 ± 2．故 $b=\sqrt{5}, a=2$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=3$，而其貫軸與焦點在 YY' 上．其離心率爲 $\frac{3}{2}$．通徑之長爲

x	y
0	± 2
$\pm\frac{5}{2}$	± 3



$\frac{2b^2}{a}=5$．設 P 爲雙曲線上任一點，則，從第 48 節之定義，$PF'-PF=4$．

習　　題 23

(1) 繪下列方程式之軌跡並定其焦點．求其離心率與通徑之長並繪其通徑．

(a) $16x^2-9y^2=144$.
(b) $5x^2-4y^2=20$.
(c) $9x^2-16y^2=144$.
(d) $x^2-8y^2+8=0$.
(e) $x^2-y^2=4$.
(f) $9x^2-y^2+9=0$.
(g) $9x^2-16y^2+144=0$.
(h) $3x^2-y^2=12$.
(i) $x^2-3y^2+3=0$.
(j) $4x^2-9y^2=36$.
(k) $9x^2-7y^2=36$.
(l) $7x^2-2y^2+8=0$.

(2) 求以原點為中心之下列諸雙曲線之方程式：

(a) $a=4$　$b=5$，焦點在 y 軸上．
(b) $b=5$，$c=8$，焦點在 x 軸上．
(c) $a=6$，$c=2$，貫軸在 x 軸上．
(d) $a=\sqrt{6}$，$c=6$，共軛軸在 x 軸上．
(e) $a=7$，通徑 $=14$，共軛軸在 y 軸上．
(f) $c=\sqrt{15}$，通徑 $=4$，焦點在 y 軸上．

(3) 求以原點為中心而二軸在坐標軸上之下列諸雙曲線之方程式：

(a) 貫軸在 y 軸上而過 $(2,-4)$ 與 $(6,-7)$．
(b) 貫軸在 y 軸上而過 $(0,4)$ 與 $(6,5)$．
(c) 貫軸在 x 軸上而過 $(6,7)$ 與 $(-3,3)$．
(d) 焦點在 x 軸上而過 $(2,0)$ 與 $(\sqrt{11},-3)$．　　答　$9x^2-7y^2=36$.

(4) 求一點之軌跡之方程式，此點移動時，其

(a) 至點 $(3,0)$ 之距離為至線 $4x-3=0$ 之距離之二倍．
答　$12x^2-4y^2=27$.
(b) 至點 $(0,4)$ 之距離為至線 $9y-16=0$ 之距離之 $\frac{3}{2}$ 倍．
(c) 至點 $(0,-2)$ 之距離為至線 $9y+2=0$ 之距離之 3 倍．
(d) 至點 $(-5,0)$ 之距離為至線 $16x+5=0$ 之距離之 4 倍．

(5) 設一三角形之兩頂點為 $(0,5)$ 與 $(0,-5)$，而其兩變動邊斜率之乘積為 7，求其第三頂點之軌跡．　　答　$7x^2-y^2+25=0$.

(6) 設雙曲線之中心為原點，焦點在 y 軸上，貫軸為 10 而共軛軸為二焦點間距離之半，試求其方程式．(六33)

51. 共軛雙曲線及其漸近線 (Conjugate hyperbolas and asymptotes). 設二雙曲線之貫軸與共軛軸適互換其位置，則此二雙曲線稱爲共軛雙曲線.

設一雙曲線之方程式爲標準式則祇須改變其 x^2 與 y^2 係數前之符號卽得其共軛雙曲線之方程式.

如方程式

(1) $16x^2-y^2=16$ 與 $-16x^2+y^2=16$.

之軌跡爲共軛雙曲線. 此等方程式又可寫成

$$\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{16}=1 \text{ 與 } -\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{16}=1.$$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

前者之焦點在 x 軸上，後者在 y 軸上. 前者之貫軸與後者之共軛軸皆爲 2，而前者之共軛軸與後者之貫軸皆爲 8.

二共軛雙曲線諸焦點距原點等遠. 因c^2等半貫軸(Semitransverse axis)與半共軛軸(Semiconjugate axis)之平方和，而此和在二共軛雙曲線爲同値也.

如在上述之第一雙曲線中，$c^2=1+16$，而在第二雙曲線中 $c^2=16+1$

設在雙曲線標準方程式之一中，以零代其常數項，則此新方程式之軌跡爲一對直線(第 24 節定理)，稱爲此雙曲線之漸近線.

例如，雙曲線

(2) $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.

之漸近線爲直線.

(3) $b^2x^2-a^2y^2=0$ 或

(4) $bx+ay=0$ 與 $bx-ay=0$

又可寫成　　其漸近線 $\begin{cases}16x^2-y^2=0\\ 或\ -16x^2+y^2=0\end{cases}$ $\therefore (4x-y)(4x+y)=0$

(5)　　$y=-\dfrac{b}{a}x$ 與 $y=\dfrac{b}{a}x.$

二線皆過原點而其斜率各為 $-\dfrac{b}{a}$ 與 $\dfrac{b}{a}$.

此二漸近線與第 20 節之垂直或水平漸近線所有共通之性質可述之於

定理　雙曲線之跡點移向無限遠時，則雙曲線之二枝與漸近線無限接近.

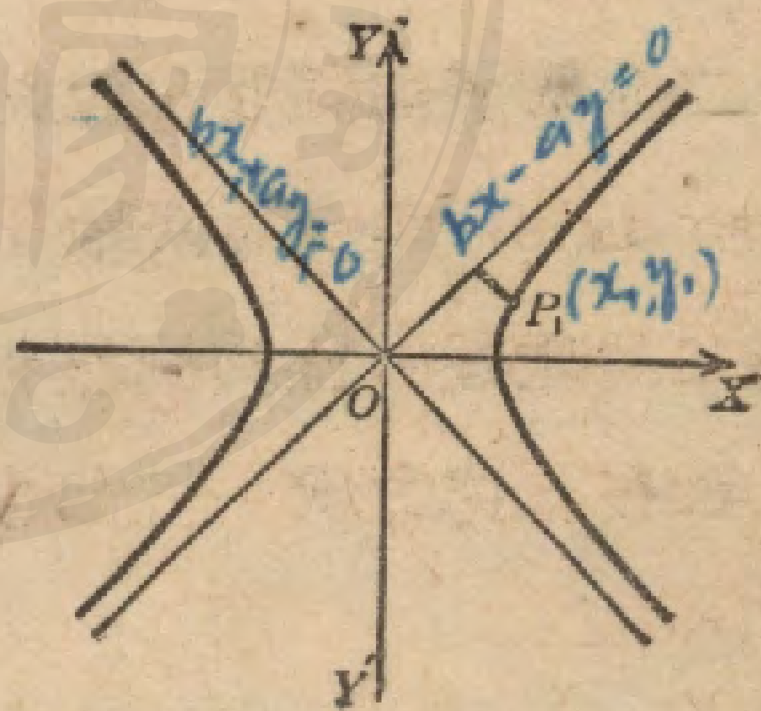
〔證〕　命 $P_1\ (x_1, y_1)$ 為在 (2) 之任一枝上而近於漸近線

$$bx-ay=0$$

之一點.

從此漸近線至 P_1 之垂直距離為

(6)　　$$d=\frac{bx_1-ay_1}{-\sqrt{b^2+a^2}}.$$



茲可求分子之值如下：

(x_1,y_1)在双曲線上

因 P_1 在 (2) 上，則

$$b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2.$$

$(bx_1-ay_1)(bx_1+ay_1)=a^2b^2$

分解因式而以 bx_1+ay_1 除之，

$$bx_1-ay_1=\frac{a^2b^2}{bx_1+ay_1}.$$

代入 (6) 中，

$$d=\frac{a^2b^2}{-\sqrt{b^2+a^2}\ (bx_1+ay_1)}.$$

當 P_1 在第一象限內移向無限遠時，x_1 與 y_1 變為無限大而 d 漸近於零.　$P_1\longrightarrow$ 無窮遠點.　$x_1\to\infty$.　$y\to\infty$　$\therefore d\to 0$

故此曲線漸漸趨近於其漸近線.　　Q.E.D.

二共軛雙曲線之漸近線相同

例如二共軛雙曲線 (1) 之漸近線各為

$$16x^2-y^2=0 \text{ 與 } -16x^2+y^2=0$$

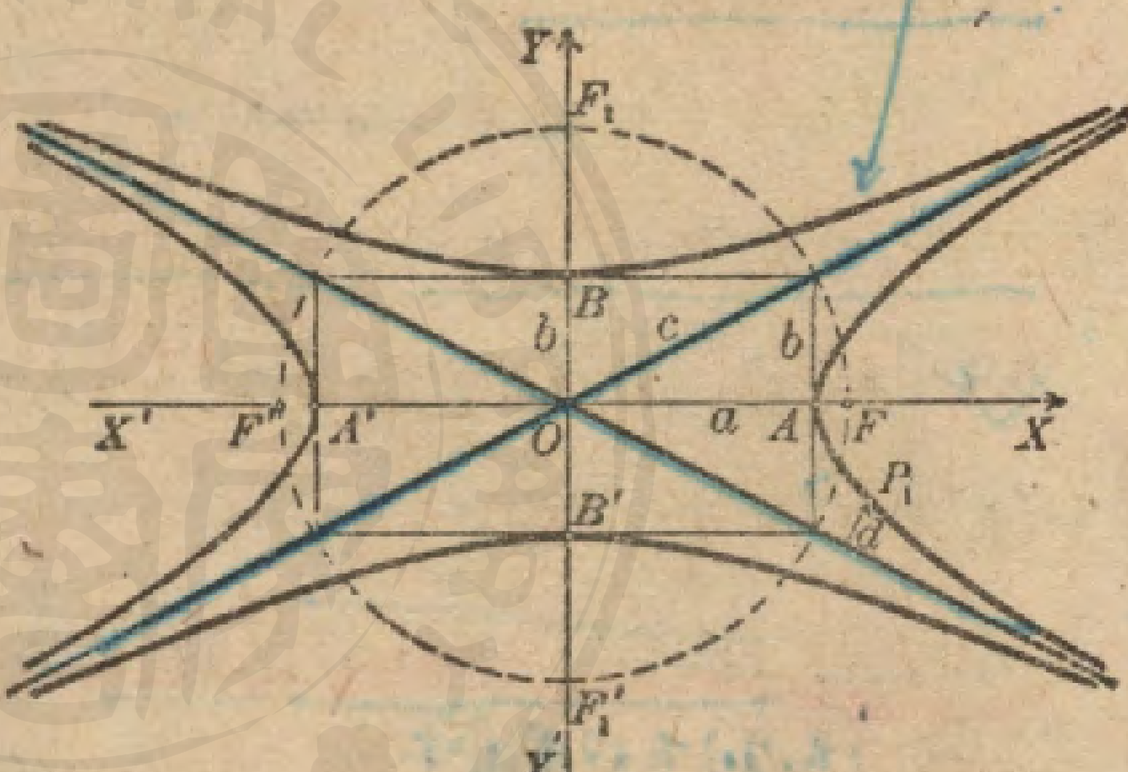
$(4x-y)(4x+y)=0$

若照 P102 (1)段之 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{1}=1$ 則圖如下

之軌迹，而二者相同.

一雙曲線可用下法精確作出之:

於焦點所在之軸上，截取 $OA=OA'=a$，而於他軸上，截取 $OB=OB'=b$. 過 A, A, B, B' 四點作線平行於軸使成一矩形. 畫矩形之對角線. 此對角線延長之卽為漸近線. 因二對角線之方程式顯然為 $bx-ay=0$ 與 $bx+ay=0$ 而與(4)相同也. 作雙曲線之二枝切矩形之邊於 A 及 A' 而漸漸趨近於對角線. 其共軛雙曲線切矩形之邊於 B 及 B' 而漸近於對角線. 各對角線之長為 $2c$ ($\because a^2+b^2=c^2$). 二雙曲線之焦點皆在此矩形之外接圓周上.



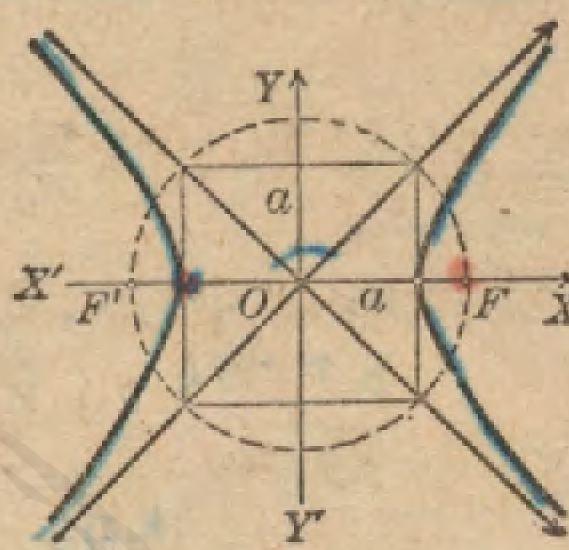
從此作法，則離心率之值對於雙曲線圖形之影響頗易討論之. 如圖中，命 AA' 為固定. 現從第 48 節 (12)，$b^2=a^2(e^2-1)$.

當 e 向 1 減小時，b 亦隨之而減小，而矩形之高 BB' 亦然. 於是漸近線轉向 x 軸而雙曲線化為狹長之形狀.

當 e 增加時,漸近線轉離 x 軸,而雙曲線化為廣闊之形狀.

52. 等邊或直角雙曲線(Equilateral or rectangular hyperbola). $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 當雙曲線之二軸相等 $(a=b)$, 此雙曲線稱為等邊雙曲線.設在方程式 (IV) 中,命 $a=b$,

則得 $a^2x^2-a^2y^2=a^4$



(1) $$x^2-y^2=a^2,$$

乃為一貫軸在 XX 上之等邊雙曲線之方程式也

其漸近線為直線

$$x-y=0 \text{ 與 } x+y=0.$$

二線互相垂直,故有"直角"雙曲線之稱.(觀第 65 節).

53. 摘要 檢驗雙曲線之一問題容後論之(第 63 節).此時可將上述之結果摘要錄下:

方程式 $Ax^2+By^2=C$ 之軌跡為

(1) 一橢圓, 當 A, B, 與 C 為同號; $C\neq 0$

(2) 一點橢圓, 當 A 與 B 為同號而 $C=0$;

(3) 一雙曲線, 當 A 與 B 異號而 C 不等於零;

(4) 一對相交直線, 當 A 與 B 異號而 $C=0$.

AB同號, 而 $C\neq 0$, 且 C 與 $A.B$ 異號 無軌跡.

(5) 如 C 不等於零且與 A 及 B 皆異號則無軌跡.

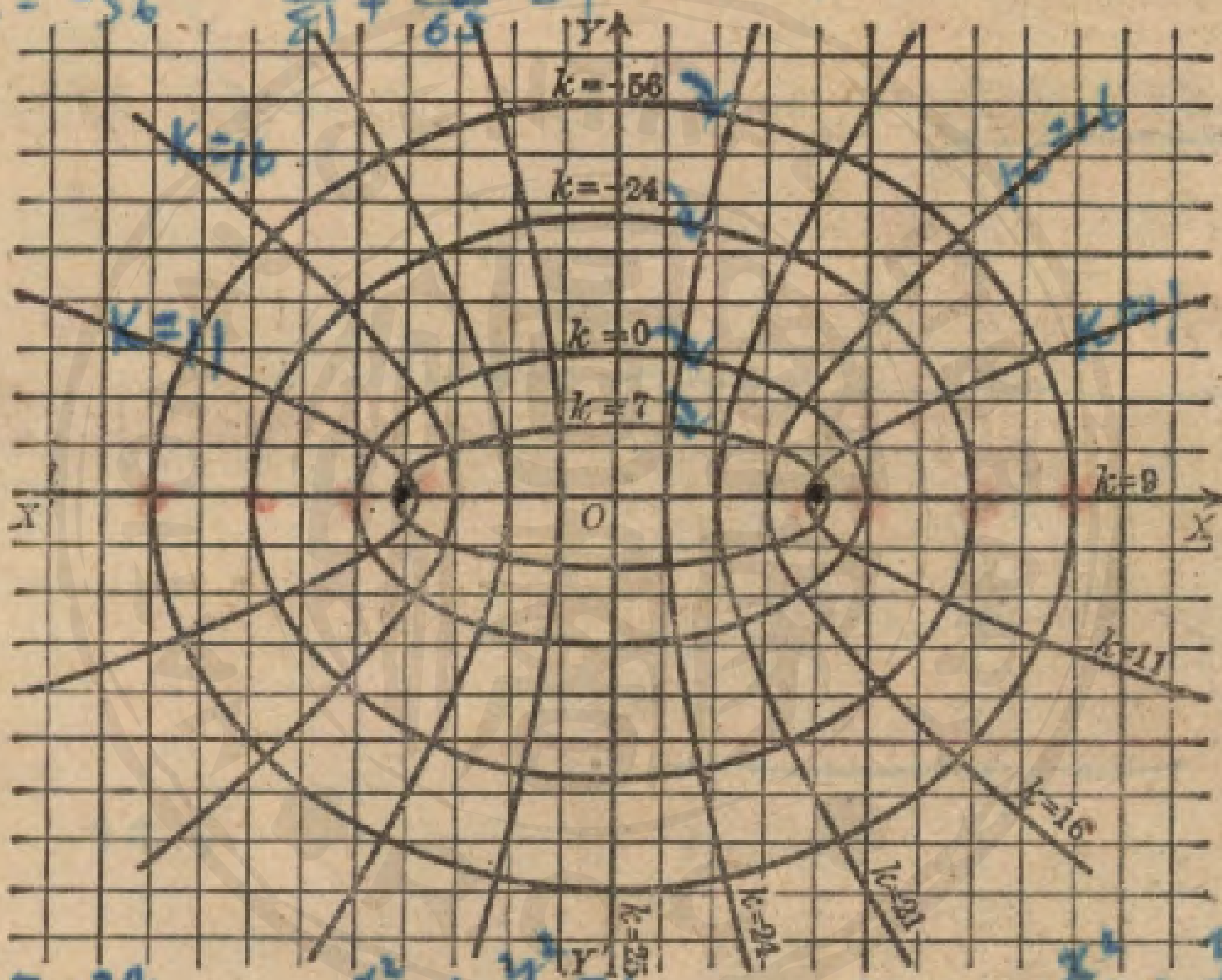
54. 圓錐曲線 拋物線,橢圓,及雙曲線,在歷史上,發現於直圓錐之截面.故總稱之為——圓錐曲線(Conic sections or conics).此意在第 155 節討論之.

55. 圓錐曲線系 當一圓錐曲線方程式包含一個或數個任意常數時,其軌跡為一圓錐曲線系(System of conics).

例　　題

討論 $\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{9-k}=1$ 所表之圓錐曲線系. K: 參數.

［解］ 當 $k<9$ 時，此軌跡爲一橢圓，其焦點爲 $(\pm c, 0)$，其中 $c^2=(25-k)-(9-k)=16$. 當 $9<k<25$ 時，此軌跡爲一雙曲線，其焦點爲 $(\pm c, 0)$，其中 $c^2=(25-k)-(9-k)=16$. 當 $k>25$ 時，此方程式無軌跡. 因此等橢圓與雙曲線有同一之焦點 $(\pm 4, 0)$，故稱爲共焦點 (Confocal).



圖中所繪諸軌跡乃命 $k=-56, -24, 0, 7, 9, 11, 16, 21, 24, 25$. 當 k 漸增而趨近於 9 時，此等橢圓逐漸扁平，終至與 x 軸相合，當 k 漸減而趨近於 9 時，此等雙曲線亦逐漸狹長而終至與 x 軸相合. 當 k 漸增而趨近於 25 時，此等雙曲線之兩枝漸與 y 軸相近，而其極限終至與 y 軸重合.

習　　題 24

(1) 求下列共軛雙曲線與其漸近線之方程式並作圖:

(a) $4x^2-y^2=16$.

(b) $9x^2-4y^2=36$.

(c) $9x^2-16y^2=144$.

(d) $16y^2-x^2+64=0$.

(e) $25x^2-16y^2+400=0$.

(f) $x^2-y^2=10$.

(g) $x^2-16y^2+16=0$.

(h) $x^2-9y^2+9=0$.

(2) 證自雙曲線之一漸近線至各焦點之垂直距離，其絕對值與其半共軛軸相等.

(3) 證自兩漸近線至雙曲線上任一點之二垂直距離之相乘積爲一定.

(4) 證明不論 k 爲何值，直線 $bx+ay=k$ 與 $bx-ay=\frac{1}{k}$ 之交點在一雙曲線上.

(5) 證明自一等邊雙曲線上一點至其兩焦點之距離之相乘積等於自此點至雙曲線中心距離之平方.

$a^2+b^2=16.$

(6) 設雙曲線之貫軸在 y 軸上，其一漸近線爲 $3y-2x=0$，而一焦點爲 $(0,-4)$. 求其方程式.　答　$117y^2-52x^2=576.$

(7) 證一等邊雙曲線之離心率爲 $\sqrt{2}$.

(8) 證明一直線被一雙曲線與其二漸近線所截，其間所截之線段相等.

(9) 依下列之已知值，作其圓錐曲線系：

(a) $9x^2+y^2=k$; $k=0,4,9,25.$

(b) $9x^2-4y^2=k$; $k=0,\pm4,\pm9,\pm36.$

(c) $x^2=4y-k$; $k=0,\pm4,\pm8.$

(d) $ky^2-16kx^2=64$; $k=\pm1,\pm2,\pm4.$

(e) $y^2=2kx$; $k=\pm1,\pm4.$

(10) 作下列諸圓錐曲線系，並證其每系之軌跡爲共焦點：

(a) $\frac{x^2}{4-k}+\frac{y^2}{9-k}=1$; $k=\pm1,\pm2,\pm10,\pm20.$

(b) $y^2=2kx+k^2$; $k=\pm1,\pm4,\pm6.$

(c) $\frac{x^2}{16-k}+\frac{y^2}{64-k}=1$; $k=0,\pm9,\pm20,\pm50.$

(11) 求一方程式以代表焦點爲 $(0,\pm3)$ 之一切橢圓.

(12) 欲使題 11 之結果代表同焦點之一切雙曲線，其必需之改變爲何？

(13) 求二共軛雙曲線之離心率 e_1 與 e_2 之關係式.

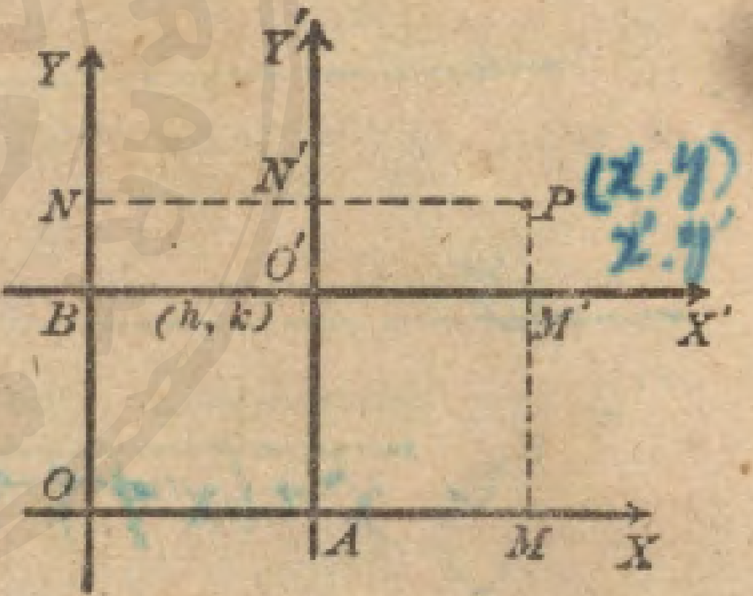
答　$e_1^2+e_2^2=e_1^2e_2^2.$

第七章

坐標之變換(Transformation of coördinates)

56. 當坐標可任吾人意志選擇時，吾人通常總取其能使所求之結果爲最簡單之形式者. 當坐標軸已知時，則當求一已知曲線關於別對坐標軸之方程式. 此種改一對坐標軸爲第二對坐標軸之方法，稱爲坐標之變換. 吾人視作此坐標軸自其已知之位置移至一新位置而求其以新坐標表舊坐標之公式.

57. **移軸法**(Translation) 設坐標軸自第一位置 OX 與 OY 移至一第二位置 $O'X'$ 與 $O'Y'$ 而 $O'X'$ 與 $O'Y'$ 各平行於 OX 與 OY，則此等坐標軸可稱爲自第一位置移軸至第二位置.



定理 設坐標軸移至一新原點 (h, k)，而設 (x, y)，與 (x', y') 各爲任一點 P 移軸前後之坐標，則

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} x = x' + h, \\ y = y' + k. \end{cases}$$

［證］ 圖中，

$$OM = x, \quad OA = h, \quad O'M' = x',$$

$$MP = y, \quad AO' = k, \quad M'P = y'.$$

$x^2+y^2=25$ 求圓心

但　$OM=OA+AM=OA+O'M'$;

$MP=MM'+M'P=AO'+M'P$.

代入,則得 (I). $\begin{cases} x=x'+h \\ y=y'+k \end{cases}$ 移軸方程式　　Q.E.D.

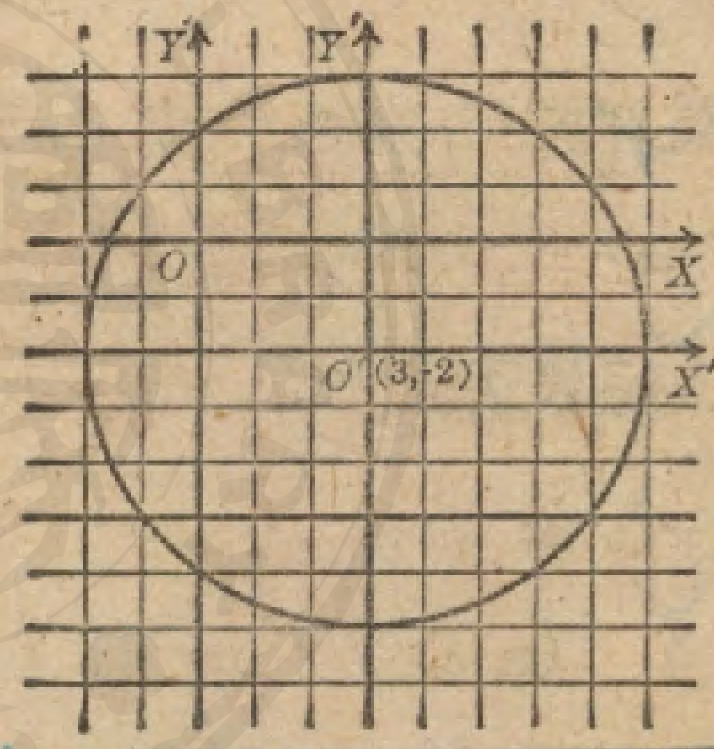
方程式 (I) 稱爲移軸方程式 (Equation for translating the axes). 一曲線之舊軸之方程式爲已知而欲求其新軸之方程式,可將 (I) 中 x 與 y 之值代入已知方程式中而化簡之即得.

例　　題

當坐標軸移至新原點 $(3,-2)$ 後,將方程式

$$x^2+y^2-6x+4y-12=0.$$

改變之.



［解］　此處 $h=3$ 而 $k=-2$;

故方程式 (I) 爲

$$x=x'+3, \quad y=y'-2.$$

代入於已知方程式,得

$$(x'+3)^2+(y'-2)^2-6(x'+3)$$
$$+4(y'-2)-12=0.$$

或,化簡之,　$x'^2+6x'+9+y'^2-4y'+4-6x'-18+4y'-8+12=0$

$$x'^2+y'^2=25.$$　答.

此結果易能預知. 因已知方程式之軌跡爲一圓,其圓心爲 $(3,-2)$ 而半徑爲 5. 當原點移至其圓心處則此圓之方程式必如所求得之形式也

剖法: $(x-3)^2+(y+2)^2=25$　設 $x-3=x'$　$y+2=y'$
$x'^2+y'^2=25$　　$x=x'+3$　$y=y'-2$.

習　　題 25

(1) 求點 $(3,-5)$, $(-4,3)$, 與 $(-2,-5)$ 之新坐標,設二軸移至新原點 (a) $(3,6)$; (b) $(-5,3)$; (c) $(-6,-7)$; (d) $(4,-3)$.

(2) 求點 $(3,0)$, $(0,0)$, $(0,3)$ 之新坐標,設二軸移至新原點 (a) $(2,-1)$; (b) (a,b); (c) $(-a,b)$; (d) $(a,-b)$.

(3) 設二軸移至下列所示之新原點，求各曲線之方程式.作各曲線並繪其新舊坐標軸.

(a) $3x-4y=6$; $(2,0)$. 答 $3x'-4y'=0$.

(b) $5x-y+2=0$; $(3,-2)$.

(c) $x^2+y^2-4x-2y=0$; $(2,1)$. 答 $x'^2+y'^2=5$.

(d) $x^2+y^2-6x+4y+12=0$; $(3,5)$.

(e) $y^2-4x+8=0$; $(2,0)$. 答 $y'^2=4x'$.

(f) $x^2+y^2-4x-6y=18$; $(-2,3)$.

(g) $y^2-2x^2-2y+6x=3$; $(\frac{3}{2},1)$.

(h) $x^2-2hx-4y+4k+h^2=0$; (h,k).

(i) $y=4+(x-3)^3$; $(3,4)$.

(j) $y^2-6x+9=0$; $(\frac{3}{2},0)$. 答 $y'^2=6x'$.

(k) $x^2-4y^2+8x+24y=20$; $(-4,3)$.

(l) $y^2=x^3$; $(-2,-3)$.

(4) 證明方程式 (I)，設新原點在 (1) 第二象限內；(2) 第三象限內；(3) 第四象限內.

(5) 當二平行軸之新原點在(1) $(h-r,k)$時,則方程式 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 將成何形式?新原點在 (2) $(h,k-r)$時?

(6) 設二平行軸通過點$\left(0,\ \dfrac{mn}{m-n}\right)$,則方程式$(m-n)(x^2+y^2)-2\,mny=0$ 成何形式?

58. 用移軸法化簡方程式 坐標變換之主要用途爲選取二適宜之新軸以化簡已知之方程式.其法在下列諸例中說明之.

例　　題

(1) 用移軸法化簡方程式

$$y^2-8x+6y+17=0.$$

[解] 重寫此已知方程式,集 y 諸項於其左.

(1) $$(y^2+6y)=8x-17.$$

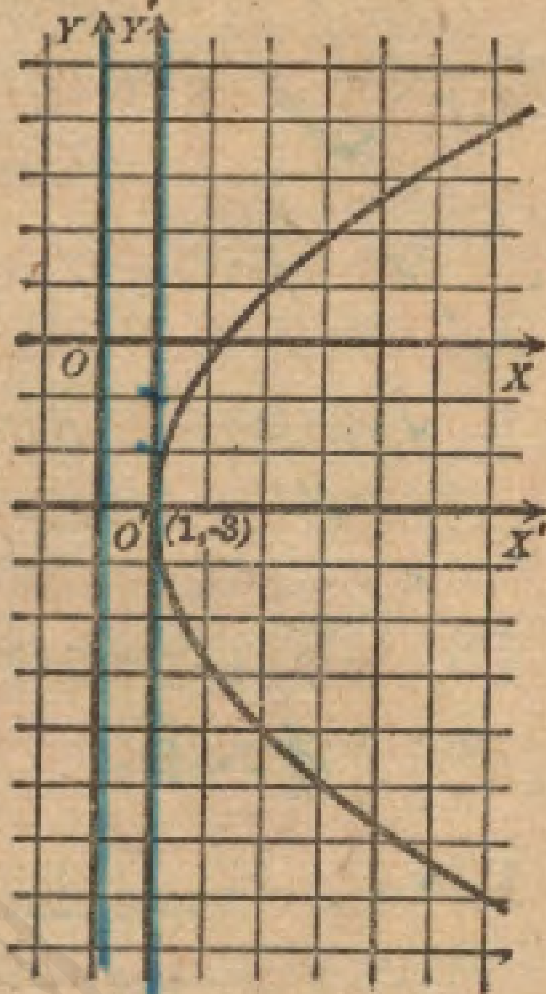
將左邊配成完全平方,即兩端各加以 9.

$$(y^2+6y+9)=8x-17+9=8x-8.$$

若將此方程式寫成

(2) $$(y+3)^2=8(x-1),$$

√ square root 平方根



從視察,顯然可知如於方程式中代入以

設 $x-1=x', y+3=y'$, 或

(3) ∴ $x=x'+1, y=y'-3$,

則變換後之方程式爲

$y'^2=8x'$. 答. P=4 焦點(2.0)新 (3,-3)舊.

方程式 (3) 移軸至新原點 $(1,-3)$, 因比較 (3) 與 (I), 得 $h=1$, $k=-3$.

在新軸 $O'X'$ 與 $O'Y'$ 上作 $y'^2=8x'$, 知其軌跡爲一拋物線具焦點 $x'=2$, $y'=0$, 與準線 $x'=-2$. (新) 故, 從 (3), (2) 之軌跡爲一拋物線具焦點 $x=3$, $y=-3$, 而準線 $x=-1$. (舊)

(2) 用移軸法化簡方程式 $x^2+4y^2-2x-16y+1=0$.

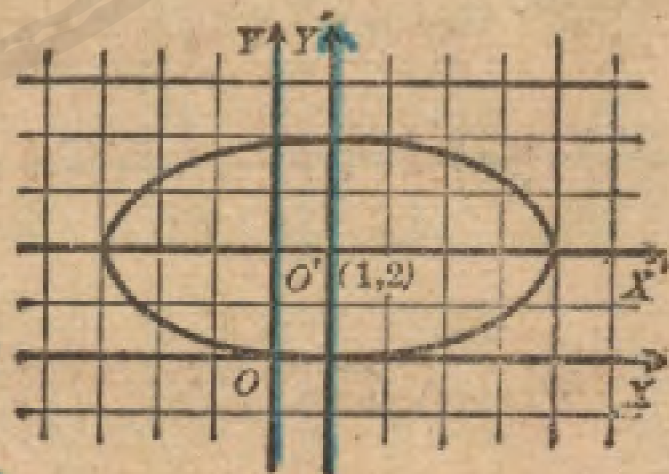
[解] 集 x 與 y 諸項於其左. 完成括號內之平方, 加此相當數於其右邊.

(4) $(x^2-2x+1)+4(y^2-4y+4)=-1+1+16=16.$

設將此式寫成

(5) $(x-1)^2+4(y-2)^2=16$

從視察,顯然可知如代入以



令 $x-1=x'$, $y-2=y'$, 或

(6) ∴ $x=x'+1$, $y=y'+2$,

即得其化簡之式

$x'^2+4y'^2=16$. 答. $\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{4}=1$

方程式 (6) 移軸至新原點 $(1,2)$.

作 $x'^2+4y'^2=16$ 於新軸上,

知其軌跡爲一橢圓具中心 $x'=y'=0$, 長軸 $a=4$, 短軸 $b=2$, 而焦點在 x' 軸上. 故 (5) 爲一橢圓具中心 $x=1$, $y=2$ 而其對稱軸爲 $x=1$ 與 $y=2$; 等.

$c=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

焦點坐標: $F(2\sqrt{3},0)$ (新) $F'(-2\sqrt{3},$

中心坐標 $(1,2)$ 舊

所用之法可總述如下:

第一法 將 x 與 y 諸項配方, 分解因子. 依其結果選其變換之坐標.

一更普遍之法可述之如下：

第二法 1. 以 $x=x'+h$, $y=y'+k$ 代入，將新方程式依 x' 與 y' 之降冪序排列之. (不見得簡便)

2. 命含有 h 或 k 之兩係數爲零，以求 h 與 k 之值.

3. 將所得 h 與 k 之值代入含 x' 與 y' 之方程式中而化簡之.

例 題

(3) 用移軸法化簡 $y^2-8x+6y+17=0$. (與第 111 頁例題 1 比較之). 第二法：

［解］ 1. 以 $x=x'+h$, $y=y'+k$ 代入. 得

(7) $$(y'+k)^2-8(x'+h)+6(y'+k)+17=0.$$

平方，相乘，而依 x' 與 y' 排列之，得

(8) $$y'^2-8x'+(2k+6)y'+k^2-8h+6k+17=0.$$

(2) 命 $2k+6=0$, $k^2-8h+6k+17=0$.

$9-18-8h+17=0$ $8h=8$

解之，得 $k=-3$, $h=1$.

(3) 將此等數值代入 (8) 中，卽得

$$y'^2-8x'=0. \quad 答.$$

故用移軸使 $x=x'+1$, $y=y'-3$, 化已知方程式爲 $y'^2-8x'=0$. 其結果與用他法者相同.

(4) 用移軸法化簡 $3xy-2x-4y-3=0$.

［解］ 1. 依上法，得

(9) $$3(x'+h)(y'+k)-2(x'+h)-4(y'+k)-3=0.$$

(10) $$3x'y'+(3k-2)x'+(3h-4)y'+3hk-2h-4k-3=0.$$

2. 命 x' 與 y' 之係數爲零. 得

$$3k-2=0, \quad 3h-4=0;$$

故 $h=\frac{4}{3}$, $k=\frac{2}{3}$.

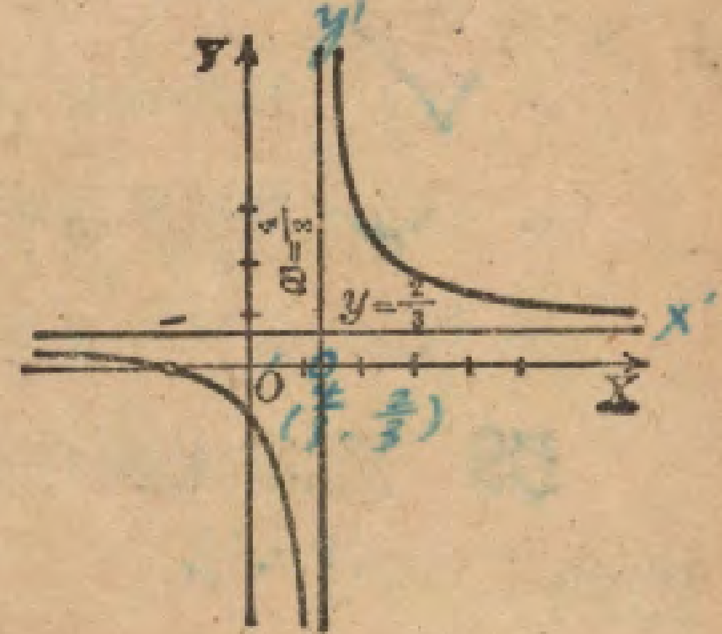
3. 代入 (10), 其結果爲 $3x'y'+\frac{8}{3}-\frac{8}{3}-\frac{8}{3}-3=0$

(11) $$3x'y'-\frac{17}{3}=0. \quad 答.$$

$9x'y'-17=0$

用移軸使 $x=x'+\frac{4}{3}$, $y=y'+\frac{2}{3}$ 化原方程式爲 (11).

在 (11) 中，$x'=0$ 與 $y'=0$ 爲兩漸近線．故已知曲線之兩漸近線爲 $x=\frac{4}{3}$ 與 $y=\frac{2}{3}$．此例有特別意義，因不能用配方法解之也．



新方程式中將以何種係數爲零？在例題 3 中，如命方程式 (8) 中 y' 之係數等於零，則式中將無 y' 之奇次項，而 $y'=0$ 成爲對稱軸．如命常數項爲零，則新原點置於曲線上．在例題 4 中，當 x' 與 y 之一次項在方程式 (10) 中消去時，其新原點成爲對稱中心．在此諸例中乃利用其對稱於新軸或新原點以得其化簡法也．

習　題 26

(1) 用移軸法化簡下列諸方程式；作其曲線與新舊軸：

(a) $x^2+6x+4y+8=0$.　答　$x'^2+4y'=0$.

(b) $4x^2-32x-4y-13=0$.

(c) $y^2-6x-10y+19=0$.　答　$y'^2-6x'=0$.

(d) $2x^2-6x+7y+15=0$.

(e) $x^2-y^2+32x+4y+40=0$.

(f) $3x^2+4y^2-12x-6y+7=0$.

(g) $x^2+4y^2+10x-12y+14=0$.

(h) $x^2-y^2+8x-14y-35=0$.

(2) 用移軸法使新方程式不含一次項：

(a) $x^2-4xy+6y=0$.　答　$4x'^2-16x'y'+9=0$.

(b) $x^2+xy+y^2+6x=0$.

(c) $2xy-8x+6y=0$.

(d) $3xy-4x+2=0$.

(3) 求下列諸軌跡之方程式，並用移軸法化簡之．作其圖形及新舊軸．

(a) 一點移動時，其至 $(3,-2)$ 之距離爲至線 $x+1=0$ 之四倍．

答　$225x'^2-15y'^2=256$.

(b) 一點移動時，其至線 $y-7=0$ 之距離常爲至點 $(-3,4)$ 之距離之半．

(c) 一點移動時，其與 $(-2,4)$ 及 $(6,4)$ 之兩連線斜率之乘積常爲 3．

(d) 一點移動時，其至 $(3,3)$ 與至線 $2x+5=0$ 之距離成 1 與 3 之比．

(e) 一圓切於 $y=2$，而過 $(3,6)$．其圓心之軌迹．

(f) 一圓切於 y 軸，又切於圓 $x^2+y^2-12x+4y+31=0$．其圓心之軌跡．

59. 應用上例中之配方，與分解因子之第一法（第 58 節）卽易證明．

定理　用移軸法，能改變方程式　(在黑板上证明)

$$(1)\qquad Ay^2+Bx+Cy+F=0 \text{ 爲}^* \ Ay'^2+Bx'=0;$$ 抛物线

$$(2)\qquad Ax^2+Cx+By+F=0 \text{ 爲 } Ax'^2+By'=0;$$ 抛物线

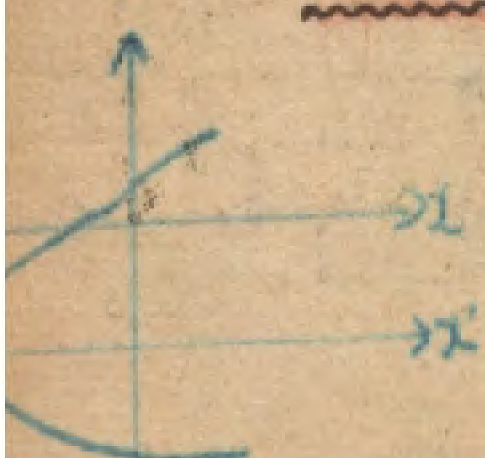
$$(3)\qquad Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0 \text{ 爲 } Ax'^2+By'^2+F'=0.$$ A,B同 椭圆　A,B异号

故 (1) 之軌跡爲一抛物線，其軸平行於 x 軸，(2) 之軌跡亦爲一抛物線，但其軸平行於 y 軸，而 (3) 之軌跡爲一橢圓（A 與 B 同號），或雙曲線（A 與 B 異號），其軸平行於二坐標軸．（見第 53 節）．

方程式 (1) 與 (2) 常寫作

$$(4)\qquad x=ay^2+by+c,\quad y=ax^2+bx+c.$$

60. 圓錐曲線之標準方程式　茲將第六章(I)－(IV)之標準式寫成更普遍方程式：



抛物線　1. $(y-k)^2=2p(x-h)$．　$y-k=y'$　$x-h=x'$　$y'^2=2px'$

頂點 (h,k)；對稱軸，$y=k$．

2. $(x-h)^2=2p(y-k)$．　$x-h=x'$　$y-k=y'$　$x'^2=2py'$

頂點 (h,k)；對稱軸 $x=h$．

* 假定 A 與 B 皆不等於零．

3. 橢圓 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1.$ $x-h=x',\ y-k=y'$

中心(h,k);對稱軸,$x=h$, $y=k$. $\dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}=1$

雙曲線 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1.$

中心(h,k);對稱軸,$x=h$, $y=k$.

欲證實上述各方程式,可將 $x=x'+h, y=y'+k$ 代入而移軸.則皆可化爲第六章中之相當標準式.

例 題

(1) 求焦點爲 $(3,-3)$, 準線爲 $x=-1$ 之拋物線之方程式.

$\frac{p}{2}=2$

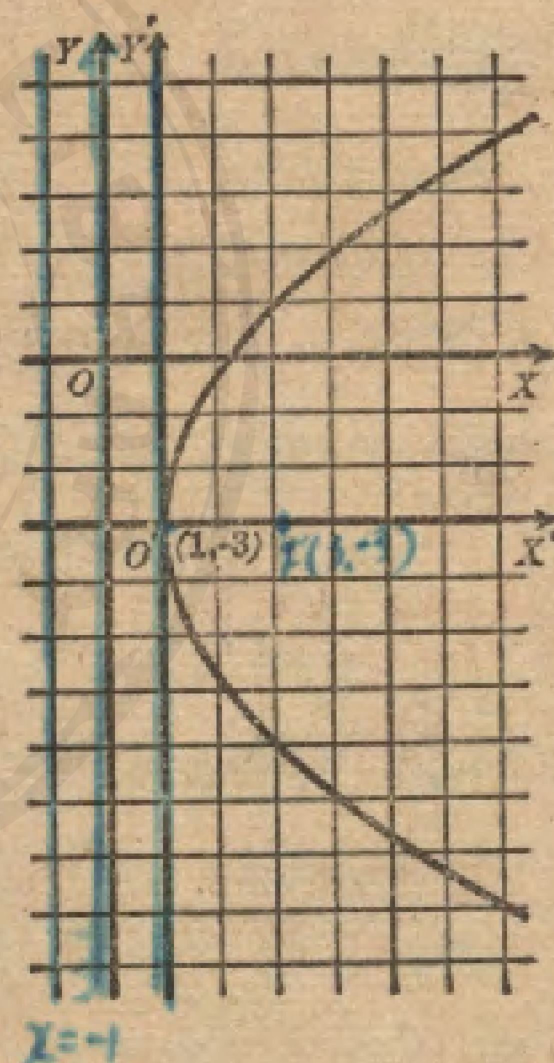
[解] 頂點爲 $(1,-3)$, 與 $p=4$. 拋物線軸平行於 x 軸.故,用本節之第一公式,

$$(y+3)^2=8(x-1).\quad 答.$$

以頂點 $(1,-3)$ 爲新原點,此方程式變爲

$$y'^2=8x'.$$

圖示兩組坐標軸.



(2) 設橢圓長軸之兩端點爲 $(-3,2)$ 與 $(5,2)$ 而短軸等於 4. 求其方程式.

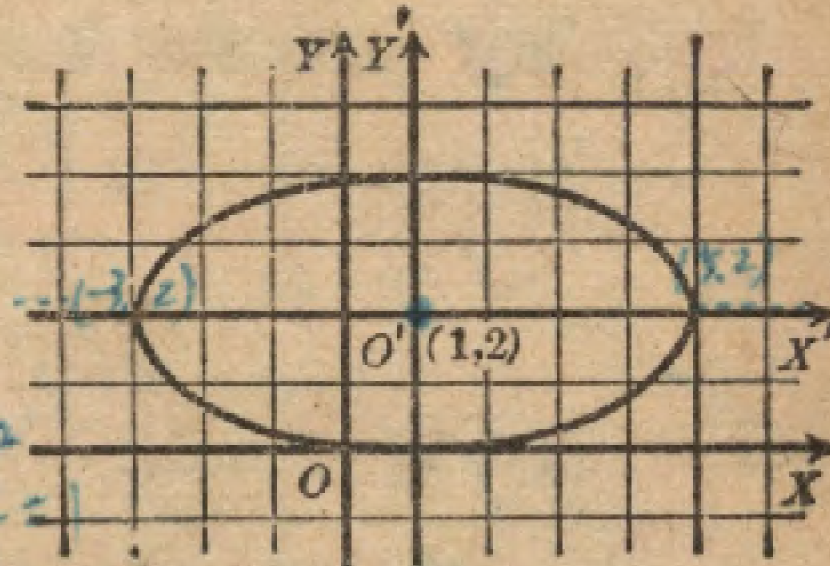
[解] 其中心爲 $(1,2)$. 又 $a=4$, $b=2$. 故其方程式爲

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{4}=1.\quad 答.$$

以中心爲新原點,而化簡之,即得 $\dfrac{x'^2}{16}+\dfrac{y'^2}{4}=1$

$$x'^2+4y'^2=16.$$

圖示兩組坐標軸.



習　　題 27

(1) 求下列諸拋物線之方程式，並用移軸法改為第 40 節之標準式；作圖並畫兩組坐標軸：

(a) 頂點為 $(3,4)$，準線為 y 軸.

(b) 焦點為 $(-2,3)$，頂點為 $(3,3)$.

(c) 焦點為 $(0,-3)$，頂點為 $(2,-3)$. 　　答 $y'^2+8x'=0$.

(d) 其軸為 y 軸，頂點為 $(0,-4)$，且過 $(6,0)$. 　　答 $x'^2-9y'=0$.

(e) 焦點為 $(0,0)$，準線 $y=4$.

(f) 其軸為 x 軸，頂點為 $(6,0)$，且過 $(0,4)$. 　　答 $3y'^2+8x'=0$.

(2) 求下列諸橢圓之方程式，而用移軸法化簡之；作圖並示其兩組坐標軸：

(a) $a=4$，焦點 $(5,2)$，與 $(-1,2)$. 　　答 $7x'^2+16y'^2=112$.

(b) $b=4$，焦點 $(1,0)$ 與 $(-4,0)$.

(c) $b=\sqrt{7}$，頂點 $(-2,0)$ 與 $(8,0)$. 　　答 $7x'^2+25y'^2=175$.

(d) $b=2$，焦點 $(0,2)$ 與 $(0,-4)$.

(3) 求下列諸雙曲線之方程式；化簡之，作圖，並示其二組軸：

(a) 貫軸 6，焦點 $(-2,0)$ 與 $(6,0)$. 　　答 $7x'^2-9y'^2=63$.

(b) 共軛軸 4，焦點 $(0,2)$ 與 $(0,-10)$.

(c) 共軛軸 6，頂點 $(1,2)$ 與 $(-5,2)$.

(d) 貫軸 $2\sqrt{3}$，焦點 $(0,0)$ 與 $(-4,0)$.

(4) 求下列諸軌跡之方程式，化簡之及作圖：

(a) 一點移動時，其至 $(3,4)$ 與 $(3,-2)$ 距離之和為 8.

(b) 一點移動時，其至 $(3,-3)$ 與 $(-1,-3)$ 距離之差為 3.

(5) 作圖並討論下列諸曲線系：

(a) $xy=k$. 　　(d) $(x-k)^2+9y^2=36$.

(b) $kx^2+y^2-4x=0$. 　　(e) $4(y-k)^2-9x^2=144$.

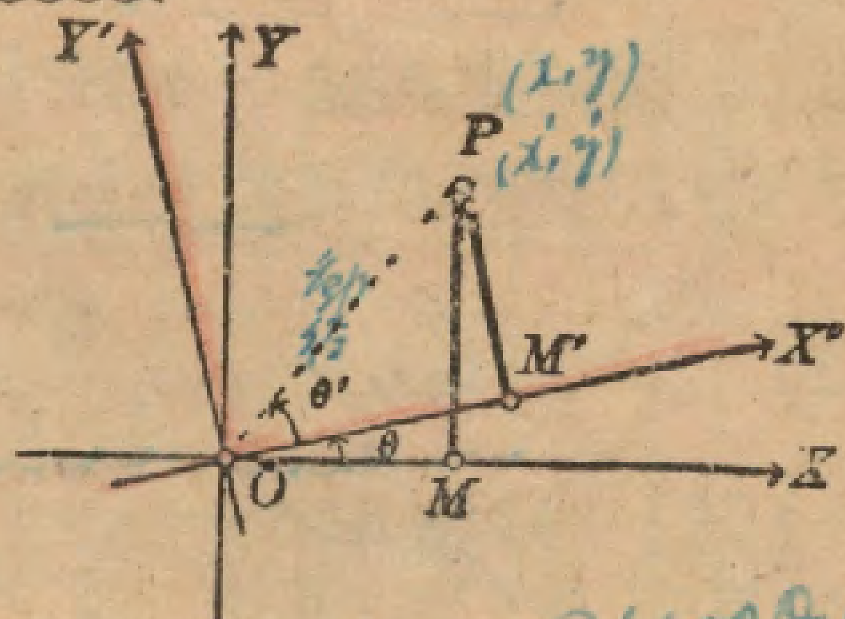
(c) $(x-k)^2=2y$. 　　(f) $4(x-k)^2-9(y-k)^2=36$.

61. 轉軸法(Rotation)　命 OX 與 OY 軸繞 O 旋轉 θ 角，至 OX' 與 OY' 之位置. 其以新坐標表舊坐標之方程式稱為轉軸方

程式 (Equations for rotating the axes).

定理　旋轉 θ 角後之轉軸方程式為

(II) $$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta. \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{cases}$$



[證]　命任一點 P 之舊與新坐標各為 (x,y) 與 (x',y'). 作 OP.　$x=OM$　$y=MP$　$x'=OM'$　$y'=M'P$

現 $x=OM=OP\cos\angle MOP=OP\cos(\theta'+\theta)$. $=OP(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')$

展開 $\cos(\theta'+\theta)$,用三角法(第3頁之9),而得

(1)　$x=OP\cos\theta'\cos\theta-OP\sin\theta'\sin\theta.$　$=x'\cos\theta-y'\sin\theta$

但　$x'=OM'=OP\cos\theta'$, $y=M'P=OP\sin\theta'$.

代入(1)中,得(II)中 x 之公式.同理可得 y 之公式. Q.E.D.

$y=MP=OP\sin(\theta+\theta')=OP(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')=OP\cos\theta'\cdot\sin\theta+OP\sin\theta'\cos\theta=x'\sin\theta+y'\cos\theta$

例　題

求方程式 $x^2-y^2=16$ 旋轉45°角後之轉軸方程式. $\theta=$

[解]　因

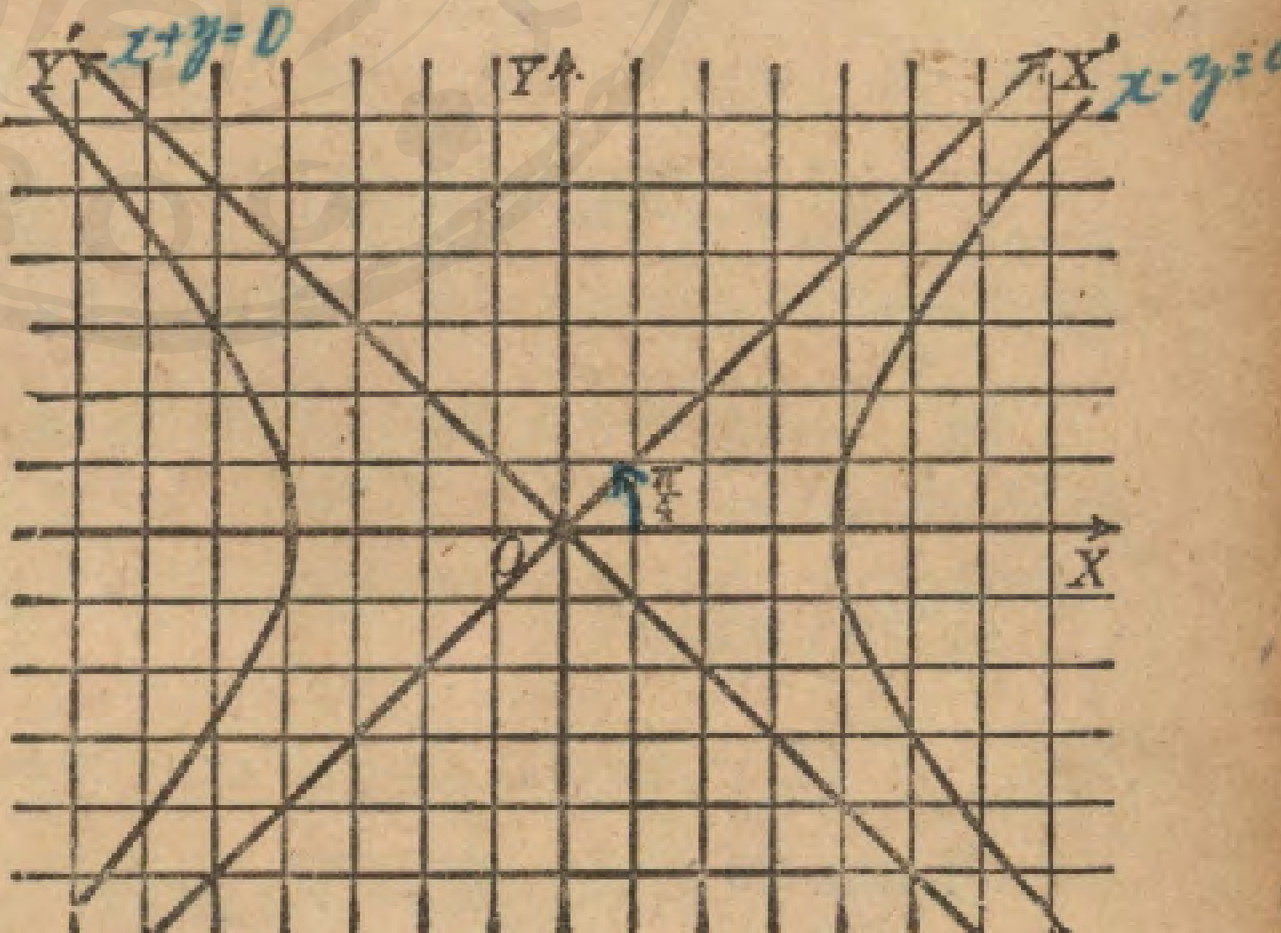
$$\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

與　$\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \end{cases}$$

方程式(II)成為

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\ y=\frac{x'+y}{\sqrt{2}}.$$



代入已知方程式中,得

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2=16.$$

$$\frac{x'^2-2x'y'+y'^2}{2}-\frac{x'^2+2x'y'+y'^2}{2}=16$$

或,化簡之,　$x'y'+8=0$.　答.

$-2x'y'=16$　$\therefore x'y'=-8.$

$(A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta)x'^2 + [-2A\sin\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2C\sin\theta\cos\theta]x'y' + [A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta]y'^2 + (D\cos\theta + E\sin\theta)x' + (-D\sin\theta + E\cos\theta)y' + F = 0$

令 $x'y'$ 之係數 $=0$ 得 $-A\sin 2\theta + B\cos 2\theta + C\sin 2\theta = 0$

$B\cos 2\theta = A\sin 2\theta - C\sin 2\theta = (A-C)\sin 2\theta$ $\quad \frac{B}{A-C} = \tan 2\theta$

62. 用轉軸法化簡方程式

$0<2\theta<180°$

定理 二次方程式 (一般的)

(1) $\quad Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$ $\quad \theta<90°$

中之 xy 項常可用旋轉 θ 角之轉軸法以移去之;惟

(III) $\quad \tan 2\theta = \dfrac{B}{A-C}.$ (定理)

[證] 以第 61 節之公式 (II),

$$\text{與}\quad\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta, \end{cases}$$

代入 (1) 中,平方,相乘,並依 x',y' 排列*之,其改變後之方程式為

$A(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + B(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + C(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 + D(x'\cos\theta - y'\sin\theta) + E(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + F = 0$

$$(2)\begin{array}{l|l|l|l} A\cos^2\theta & x'^2 - 2A\sin\theta\cos\theta & x'y' + A\sin^2\theta & y'^2 \\ +B\sin\theta\cos\theta & +B(\cos^2\theta-\sin^2\theta) & -B\sin\theta\cos\theta & \\ +C\sin^2\theta & +2C\sin\theta\cos\theta & +C\cos^2\theta & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l} +D\cos\theta & x' - D\sin\theta & y' + F = 0. \\ +E\sin\theta & +E\cos\theta & \end{array}$$

若 $x'y'$ 之係數等於零,則 $x'y'$ 項可從 (2) 中消去之,即

(3) $\quad -2A\sin\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2C\sin\theta\cos\theta = 0.$

但 $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ 與 $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ (用第 3 頁之 10).

故 (3) 變為

(4) $\quad (C-A)\sin 2\theta + B\cos 2\theta = 0.$

以 $\cos 2\theta$ 除之,並移項,即得

(5) $\quad \tan 2\theta = \dfrac{B}{A-C}.$ $\quad$ *Q.E.D.*

從 (5), $2\theta < 180°$,而 $\theta < 90°$. $\quad 0<2\theta<180°$ $\quad \theta<90°$

---

* 豎線代括弧之用. 例如,x'^2 之係數為 $A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta$.

$\frac{1}{2}(x'-y')^2+4\cdot\frac{x'^2-y'^2}{2}+\frac{1}{2}(x'+y')^2=4 \qquad x'^2+y'^2+2(x'^2-y'^2)=4$

$3x'^2-y'^2=4$

例　　題

用轉軸法化簡 $x^2+4xy+y^2=4$.

作图 $x=1$　$x=2$　$y=\frac{2}{3}\sqrt{3}=3.464$　$y=2.8$

［解］ 此處 $A=1, B=4, C=1$.

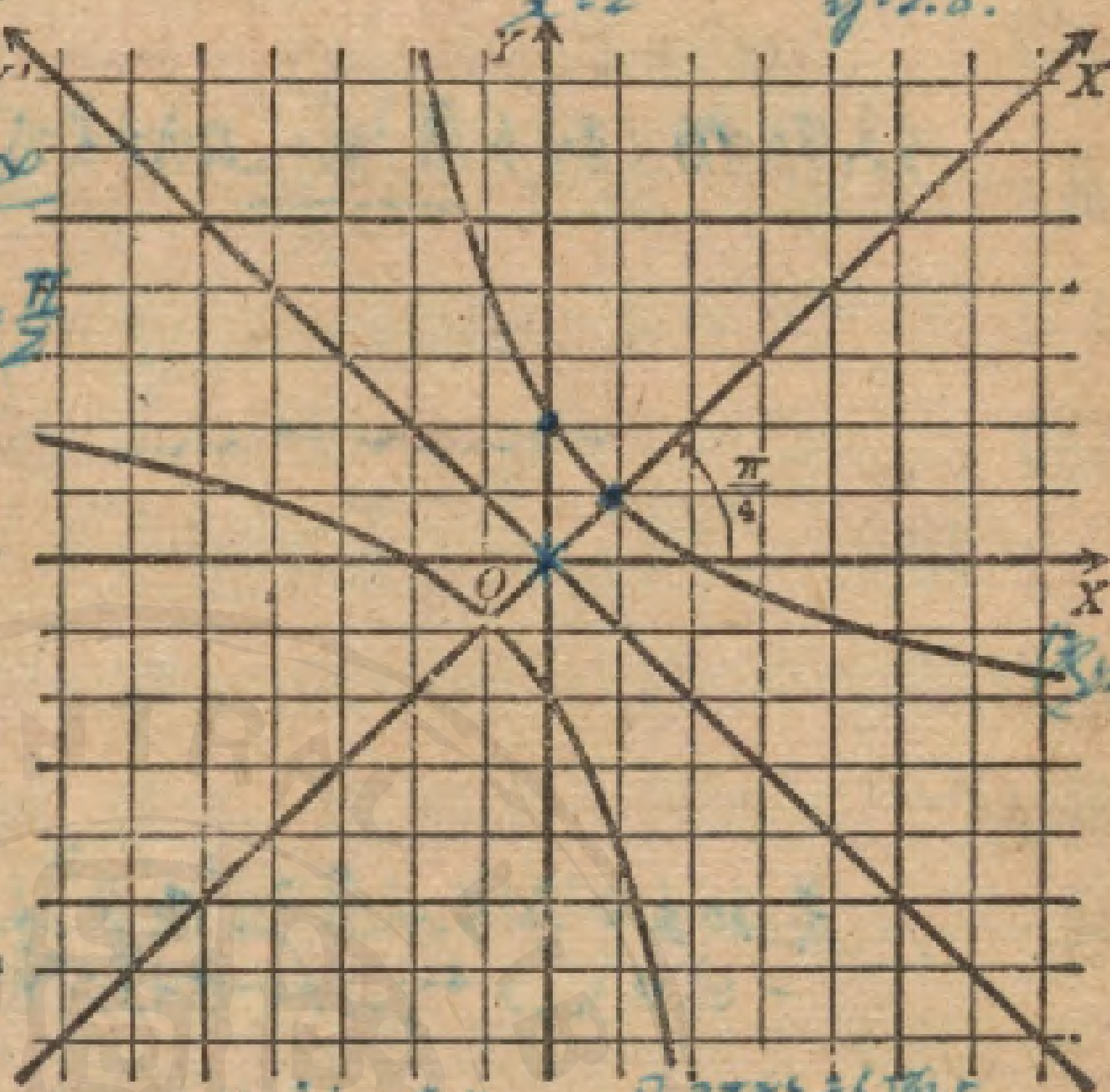
故，用 (III)，$\tan 2\theta=\infty$，$=\frac{4}{1-1}=\infty$　$2\theta=\frac{\pi}{2}$

而 $\theta=45°$. $=\frac{\pi}{4}$

於是 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y)$

(II)變為(比較第61節之例題) $y=\frac{1}{2}(x'+y')$

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$



对称於x軸，又对称於原点

以之代入已知方程式而化簡之，卽得此雙曲線

$$3x'^2-y'^2=4.　答.$$

習　　題 28

(1) 用轉軸法旋轉下列所示之角以改變下列方程式；作圖，示其兩組之軸：

(a) $x+y=0$; $45°$.　　答 $x'=0$.

(b) $x^2+y^2=9$; $60°$.

(c) $y^2-x^2=8$; $90°$.

(d) $x^2+4xy+y^2=16$; $45°$.　　答 $3x'^2-y'^2=16$.

(e) $4xy-3x^2=10$; $\tan\theta=2$.　　答 $x'^2-4y'^2=10$.

(f) $3x^2-3xy-y^2=5$; $\tan\theta=3$.

(g) $x^2+4xy+4y^2+12x-6y=0$; $\tan\theta=2$.

(2) 證明不論坐標軸如何旋轉，方程式 $x^2+y^2=r^2$ 終不變.

(3) 用轉軸法去下列方程式中之 xy 項，並作圖，示其兩組坐標軸：

(a) $x^2-2xy+y^2=12$.　　答 $y'^2=6$.

(b) $x^2+2\sqrt{3}\,xy-y^2=4$.　　答 $x'^2-y'^2=2$.

(c) $17x^2-16xy+17y^2=225$.

(d) $3x^2-4\sqrt{3}\,xy-y^2=9$.

(e) $x^2+4xy+y^2=16$.

(f) $x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0$.

(g) $3x^2-2\sqrt{3}\,xy+y^2+4x+4\sqrt{3}\,y=0$.

(h) $xy=12$.　　答 $x'^2-y'^2=24$.

(i) $25x^2+14xy+25y^2=88$.　　答 $16x'^2+9y'^2=144$.

(j) $3x^2-10xy+3y^2=0$.

36. 任意二次方程式之軌跡 當依第 118 頁之 (III) 將兩軸旋轉 θ 角後,則新軸之方程式為

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

(1) $$A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y'+F=0,$$

經轉軸(轉θ角)後,上方程式變為: $A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y'+F=0$

此處,從第 62 節之 (2),得

(2) $$A'=A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta,$$

(3) $$C'=A\sin^2\theta-B\sin\theta\cos\theta+C\cos^2\theta.$$

現方程 (1) 為本章中常見之一種形式,而吾人已知可用轉軸法化簡之.在第 59 節中,已知若方程式中祇含一坐標之平方 ($A'=0$ 或 $C'=0$) 而他一坐標之一次冪,則此方程式可改為拋物線標準式之一.

若(1)之二次項只含 x'^2 或 y'^2 (一坐標之平方) ($C'\neq 0$ 或 $A'=0$),一次項僅含 y' 或 x' (他一坐標之一次冪項)

設不含他一坐標之一次冪.例如,方程式 (1) 中之 $A'=0$ 與 $D'=0$.則其方程式為

拋物線 $A'x'^2+E'y'=0$ $C'y'^2+D'x'=0$

(2) 若(1)不含他一坐標之一次項,並設 $A'=0$, $D'=0$ 則 $C'y'^2+E'y'+F=0$

(4) $$C'y'^2+E'y'+F=0.$$

此乃一含 y 之二次式.若兩根為實數,其軌跡為平行於 x' 軸之二直線.若兩根相等,則此二線重合.若兩根為虛數,則無軌跡.

$E'^2-4C'F \gtrless 0$ 二平行直線 一直線 無軌跡 $y'=\frac{-E'\pm\sqrt{E'^2-4C'F}}{2C'}$

若 A' 與 C' 皆不為零,則可用移軸法移至新原點 $\left(-\frac{D'}{2A'},\ -\frac{E'}{2C'}\right)$ 而改變其方程式為

(3) 若 $A'\neq 0$ $C'\neq 0$ 用移軸法將原點移至新原點 $\left(-\frac{D'}{2A'}, -\frac{E'}{2C'}\right)$

(5) $$A'x''^2+C'y''^2+F'=0.$$

$x'=x''+h$ $y'=y''+k$ $A'(x''+h)^2+C'(y''+k)^2+D'(x''+h)+E'(y''+k)+F=0$

茲討論 (5) 之軌跡.

$2A'h+D'=0$ ∴ $h=-\frac{D'}{2A'}$ $2C'k+E'=0$ ∴ $k=-\frac{E'}{2C'}$

A' 與 C' 為同號,假定為正.則其軌跡為一橢圓,一點橢圓 ($x''=y''=0$),或無軌跡,全視 F' 為負,零或正而定.

$F'<0$ $F'=0$ $F'>0$

A' 與 C' 為異號.則其軌跡為一雙曲線或一對相交之直線,全視 F' 之不等於零或等於零而定.

$F'\neq 0$ $F'=0$

現求一檢驗法應用於含 xy 項之方程式使能預先決定其軌跡之性質．此事可用第 62 節之 (4) 從方程式 (2) 與 (3) 消去 θ 角．其結果為簡單方程式，

(IV) $$-4A'C' = B^2 - 4AC.$$

其消去法之步驟如下：

x'^2 之係數 (2) $A' = A\cos^2\theta + B\sin\theta + C\sin^2\theta$

y'^2 之係數 (3) $C' = A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$

將 (2) 與 (3) 加減之

(6) $$A' + C' = A + C, \qquad [\text{因 } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

(7) $$A' - C' = (A - C)\cos 2\theta + B\sin 2\theta. \qquad [\text{第 3 頁之 10}]$$

將 (7) 平方之，

(8) $$(A' - C')^2 = (A - C)^2\cos^2 2\theta + 2B(A - C)\sin 2\theta\cos 2\theta + B^2\sin^2 2\theta.$$

$(C-A)\sin 2\theta + B\cos 2\theta = 0$

將第 62 節之 (4) 平方之，

(9) $$0 = \overset{(C-A)^2}{\cancel{(A - C)^2}}\sin^2 2\theta + 2B(C - A)\sin 2\theta\cos 2\theta + B^2\cos^2 2\theta.$$

(8) 與 (9) 相加，

(10) $$(A' - C')^2 = (A - C)^2 + B^2.$$

將 (6) 平方之，

(11) $$(A' + C')^2 = (A + C)^2.$$

從 (10) 減去 (11) 即得 (IV). $-4A'C' = -4AC + B^2$

討論

1 設 (1) 之軌跡為一拋物線，$A' = 0$ 或 $C' = 0$. 故從 (IV)，$B^2 - 4AC = 0$.

2 設 (1) 之軌跡為一橢圓，A' 與 C' 為同號．故 $A'C'$ 為正，而從 (IV)，$B^2 - 4AC$ 為負．

3 設 (1) 之軌跡為一雙曲線，A' 與 C' 為異號．故 $A'C'$ 為負，而從 (IV)，$B^2 - 4AC$ 為一正數．

將此等結果集成一表，得

定理　已知任意二次方程式爲

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

其可能之軌跡，分類如下：

檢驗法	普通情形	例外情形*
B^2-4AC† 爲零	拋物線	兩平行線 一直線
B^2-4AC 爲負	橢圓	點橢圓
B^2-4AC 爲正	雙曲線	兩相交直線

例外情形時，方程式可分解成兩個含 x 與 y 之一次因式．此類問題於第 50 頁上見之．　non-degenerate conic 非退缩

一點橢圓常稱爲一"退縮橢圓 (Degenerate ellipse)"，兩相交直線常稱爲一"退縮雙曲線 (Degenerate hyperbola)，"而兩平行線常稱爲一"退縮拋物線 (Degenerate parabola)"．

代數學中，B^2-4AC 稱爲二次方程式之判別式(Discriminant)．

64．繪二次方程式之軌跡法　第一法　在方程式變換後．吾人已知設無 xy 項，則方程式可用移軸法以化簡之．此變換後之方程式於是可在新軸上作其圖形．

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$　用移軸法取消 xy 项

設有 xy 項，則將兩軸旋轉‡ θ 角並從 (III)，得

$$(1)\qquad \tan 2\theta=\frac{B}{A-C}.$$

於是 xy 項可消去，然後再用移軸法化簡之．

* 區別例外情形之檢驗法，參閱 Smith and Gale's "Elements of Analytic Geometry", p. 277.

† 此情形可用觀察法以知之，因此時諸二次項，$Ax^2+Bxy+Cy^2$，成一完全之平方．

‡ 參閱以下例題 2，又第 65 節．

轉軸時，代以

(2) $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\quad y=x'\sin\theta+y'\cos\theta.$

求 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 如下：先自

(3) $\cos 2\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\theta}}$ $= \frac{1}{\sec 2\theta}$ [第3頁之7]

中計算 $\cos 2\theta$ 之值，並須知 $\cos 2\theta$ 與 $\tan 2\theta$ 必為同號.

從第3頁之10，得

(4) $\sin\theta=+\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}},\quad \cos\theta=+\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}.$ 再代入(2)式

例　題

(1) 作圖並討論方程式

(5) $x^2+4xy+4y^2+12x-6y=0$ 之軌跡.

[解] 此處 $A=1,\ B=4,\ C=4.$ $B^2-4AC=4^2-4\times4\times1=0$

$\therefore B^2-4AC=0,$

而其軌跡為一拋物線.

將方程式 (5) 寫成

(6) $(x+2y)^2+12x-6y=0.$

將軸轉 θ 角使

$$\tan 2\theta=\frac{4}{1-4}=-\frac{4}{3}.$$

於是，從 (3)，$\cos 2\theta=-\frac{3}{5}$,

而從 (4)，

(7) $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 與 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}.$

故轉軸之方程式為

$$x=\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}},\quad y=\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}.$$

$x'=x\cdot\frac{1}{\sqrt5}-y\frac{2}{\sqrt5}=\frac{1}{\sqrt5}(x'-2\ldots$

$y=\frac{1}{\sqrt5}(2x'+y')$

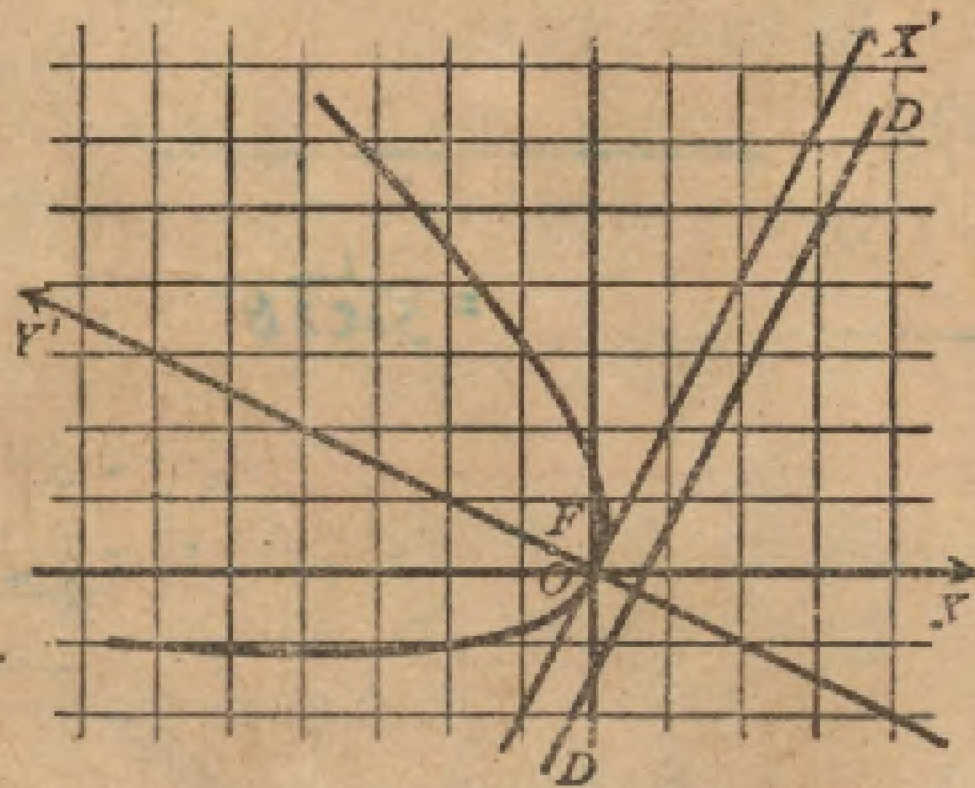
代入方程式 (6)，即得.

$\frac{1}{5}(x'-2y')^2+4\frac{1}{5}(x'-2y')(2x'+y'\ldots$

$+\frac{1}{5}(2x'+y')^2+12\frac{1}{\sqrt5}(x'-2y')-6\frac{2x'+\ldots}{\sqrt5}=0$

$$x'^2-\frac{6}{\sqrt{5}}y'=0.$$

化簡 $x'^2-\frac{6}{\sqrt5}y'=0$



圖示兩組坐標軸及拋物線之形狀，其焦點爲 $x'=0, y'=\frac{3}{10}\sqrt{5}$，而準線爲 $y'=-\frac{3}{10}\sqrt{5}$. 從 (7)，OX' 軸具斜率 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2$.

故 OX' 爲過原點而斜率爲 2 之直線.

圖中可得一良好之核算法卽從已知方程式 (5) 求 OX 與 OY 上之截部. 此等截部爲 $x=0$ 與 -12，及 $y=0$ 與 $\frac{3}{2}$ 是也.

(2) 作 $5x^2+6xy+5y^2+22x-6y+21=0$ 之軌跡.

［解］ 此處 $A=5,\ B=6,\ C=5$.

$\therefore\ B^2-4AC=36-100=-64=-$ 負數.

故其軌跡爲一橢圓.

用 (III)，　$\tan 2\theta=\frac{6}{5-5}=\infty$，而 $\theta=45°$.

故其轉軸方程式爲

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\qquad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

代入已知方程式內而化簡之，得

$$4x'^2+y'^2+4\sqrt{2}\,x'-7\sqrt{2}\,y'+\frac{21}{2}=0.$$

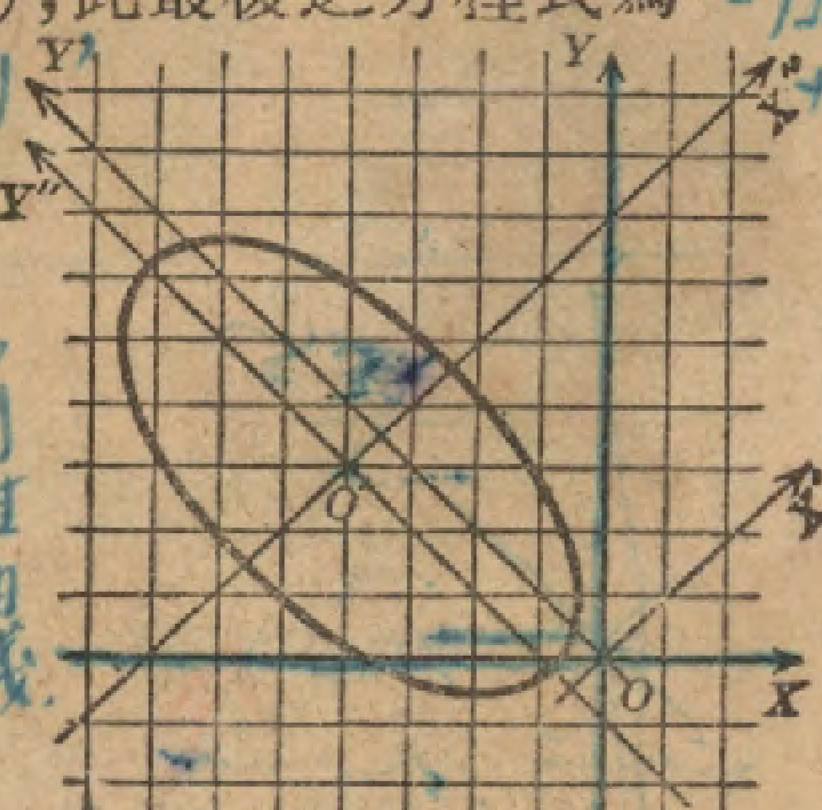
設 $x'=x''+h$　$y'=y''+k$

移至新原點 $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2},\ \frac{7}{2}\sqrt{2}\right)$，此最後之方程式爲

$$4x''^2+y''^2=16.$$

$\frac{x''^2}{4}+\frac{y''^2}{16}=1$

故長軸爲 8，短軸爲 4，而其焦點在 y'' 軸上.



圖示三組坐標軸及橢圓之形狀. 其新原點 O' 之坐標 $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2},\ \frac{7}{2}\sqrt{2}\right)$ 須依 OX' 與 OY' 計算之，作圖時應注意之.

有心圓錐曲線

注意　當此圓錐曲線有中心時，吾人可移軸至此點以爲新原點，然後再轉軸以消去 $x'y'$ 項. 蓋以 $x=x'+h,\ y=y'+k$ 代

$5(x'+h)^2+6(x'+h)(y'+k)+5(y'+k)^2+22(x'+h)-6(y'+k)+21=0$

令 x', y' 之係數為 0. $10h+6k+22=0$ $5h+3k+11=0$

析令 x', y' 之一次項 $6h+10k-6=0$ $3h+5k-3=0$

$\therefore h=-4,\ k=3$ 代入 (1) 得

入,使 x' 與 y' 之係數為零,而解之以求 h 與 k. 其中心卽此點 (h, k).

茲以第 124 頁之例 2 說明之. 欲求 h 與 k 所用之方程式為 $10h+6k+22=0$, $6h+10k-6=0$. 解之, $h=-4$, $k=3$. 此為圖中 O' 之坐標須依 OX 與 OY 計算者. 其新方程式變為 $5x'^2+6x'y'+5y'^2-32=0$. 旋轉 45° 後得 $4x''^2+y''^2=16$ 與前同.

第二法 用直接繪圖法. 用上節末尾之定理檢驗後,再討論之而直接繪其圖形.

$5x'^2+6x'y'+5y'^2-32=0$ $\begin{cases} x'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x''-y'') \\ y'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x''+y'') \end{cases}$

$5\cdot\frac{(x''-y'')^2}{2}+6\frac{(x''-y'')(x''+y'')}{2}+5\cdot\frac{(x''+y'')^2}{2}-32=0$

$5(2x''^2+2y''^2)+6(x''^2-y''^2)=32$

$8x''^2+2y''^2=32$

$4x''^2+y''^2=16$

例 題

(1) 繪方程式

(8) $x^2-2xy+4y^2-4x=0$ 之軌跡.

[解] 此處 $A=1$, $B=-2$, $C=4$.

$\therefore B^2-4AC=4-16=-12=$ 一負數.

故其軌跡為一橢圓.

討論 1. 截部. x 軸上為 0 與 4, y 軸上為 0.

2. 對稱. 無.

3. 範圍. 解方程式以求 x 如下: $x^2-(2y+4)x+4y^2=0$

(9) $$x^2-(2y+4)x+\left(\frac{2y+4}{2}\right)^2=-4y^2+\left(\frac{2y+4}{2}\right)^2.$$

$x^2-(2y+4)x+(y+2)^2=-4y^2+(y+2)^2$

[集合 x 項並配方].

$(x-y-2)^2=(y+2+2y)(y+2-2y)$

$=(3y+2)(2-y)$

(10) $$\therefore x=y+2\pm\sqrt{(2-y)(2+3y)}.$$

$x-y-2=\pm\sqrt{(3y+2)(2-y)}$

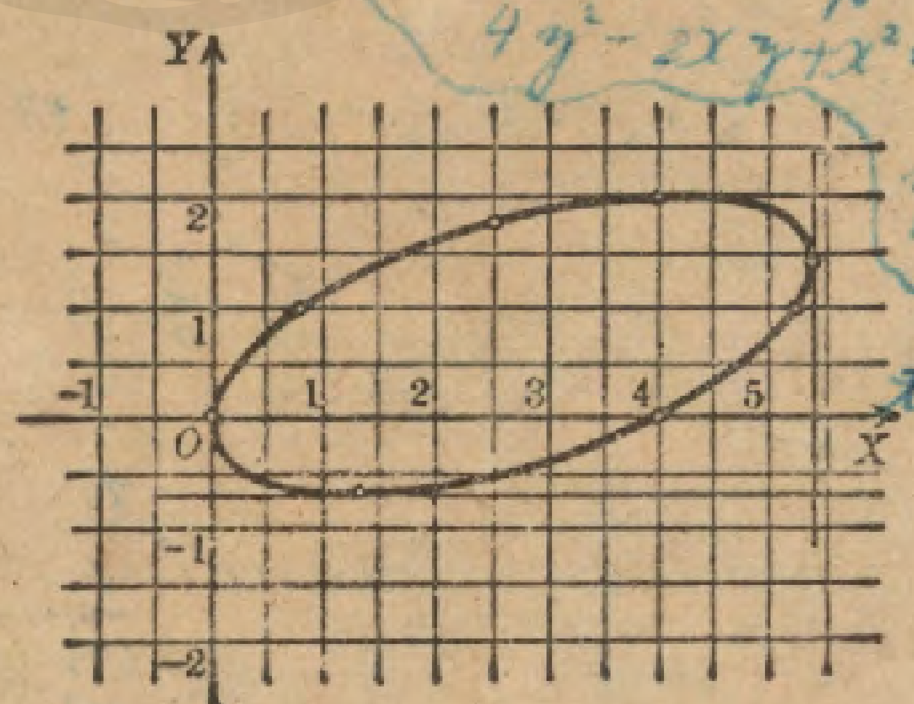
解之以求 y,

$4y^2-2xy+x^2-4x=0$

(11) $$y=\tfrac{1}{4}x\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{x(16-3x)}.$$

$y=\frac{x\pm\sqrt{x^2-4(x^2-4x)}}{4}$

x	y
$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$
0, 4	0
$3\pm\sqrt{5}$	1
4	2
$5\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$



從 (10) 與 (11) 中之根式,可知

y 所有之值應在 $-\frac{2}{3}$ 與 2 之間; $-\frac{2}{3}\leqq y\leqq 2$.

x 所有之值應在 0 與 $\frac{16}{3}$ 之間. $0\leqq x\leqq\frac{16}{3}$

故此橢圓在 $y=-\dfrac{2}{3}$, $y=2$, $x=0$, $x=\dfrac{16}{3}$ 四線所成之矩形內,而軌跡上諸點可從 (10) 求得之,如表中所載者.

(2) 決定 $5x^2+4xy-y^2+24x-6y-5=0$ 之軌跡.

[解] $A=5$, $B=4$, $C=-1$.

$$\therefore \quad B^2-4AC=16+20=36.$$

故從第 63 節之表,知此軌跡為一雙曲線或一對相交直線.

解之以求 y 如下: $y^2-(4x-6)y+5-24x-5x^2=0$

因: $(5x-y-1)(x+y+5)=0$

$$y^2-(4x-6)y+(2x-3)^2=5x^2+24x-5+(2x-3)^2,$$

$$[y-(2x-3)]^2 = 9x^2+12x+4=(3x+2)^2.$$

[集合 y 項並配方]

$$\therefore \quad y-(2x-3)=\pm(3x+2).$$

故其軌跡為一對相交直線

$$y=5x-1 \text{ 與 } y=-x-5. \quad \text{答.}$$

Or $y-5x+1=0$ $y+x+5=0$

習題 29

(1) 化簡下列諸方程式.作圖並繪其各組坐標軸:

(a) $x^2+3xy+5y^2=11$

(b) $x^2-2xy+y^2-5y=0$. 答 $4y'^2-5\sqrt{2}x'=0$.

(c) $x^2+3xy+y^2+4y=0$.

(d) $x^2+2xy+y^2+4x-4y=0$. 答 $x'^2-2\sqrt{2}y'=0$

(e) $3xy+4x+8y+4=0$.

(f) $x^2+6x-3y+6=0$. 答 $x'^2-3y'=0$.

(g) $3x^2+y^2-9x+y+4=0$.

(h) $x^2+4y^2-16x+24y+84=0$. 答 $x'^2+4y'^2=16$.

(i) $7x^2+50xy+7y^2=50$.

(j) $13x^2+13y^2+10xy-42x+6y-27=0$. 答 $9x'^2+4y'^2=36$.

(2) 用上述第二法作下列諸方程式之圖形:

(a) $3x^2-4xy-1=0$.

(b) $4xy+4y^2-2x+3=0$.

(c) $x^2-4y^2-4x-32y-60=0$.

(d) $x^2+y^2-4x-6y-18=0$.

(e) $4xy-3x^2=9$.

(f) $2x^2+3y^2-16x+18y+53=0$.

(g) $x^2+4xy+4y^2+12x-6y=0$.

(h) $3x^2+4xy+y^2-2x-1=0$.

(3) 檢驗下列諸方程式並作圖，變換法或直接繪圖法擇其較便者用之.

(a) $3x^2-2xy+y^2-4x-6=0$.

(b) $x^2-xy+y^2-2x-6y=0$.

(c) $x^2+\sqrt{8}\,xy+y^2-4x-6y+5=0$.

(d) $2x^2+4xy+5y^2-4x-22y+7=0$.

(e) $xy-x^2+4=0$.

(f) $xy-2x-y+3=0$.

(g) $x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0$.

(h) $2x^2-5xy-3y^2-2x+13y-12=0$.

(i) $x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0$.

(j) $y^2+4xy+4x^2-4=0$. 為二直線 $(2x+y+2)(2x+y-2)=0$

特 設 習 題

(4) 證明二次方程式之普遍式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

可用移軸法化簡之使新方程式不含一次項，祇須新原點之坐標 (h,k) 適合於 $2Ah+Bk+D=0$，$Bh+2Ck+E=0$ 二方程式.再證明除 $B^2-4AC=0$ 外，新原點爲軌跡之中心.因在此情形 $B^2-4AC=0$ 中，變換法不能應用也.

(5) 試去方程式 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 之根號，以證其軌跡爲一圓錐曲線，並決定其形式.給 a 以特殊數值以作圖.

(6) 繪下列各方程式之曲線系:

(a) $(x-y)^2+(y-k)^2=0$.

(b) $xy+h^2-h(x+y)=0$.

(c) $x^3-y^3-(x-h)(x^2-y^2)=0$.

65. 特例.等邊(直角)雙曲線.

定理 等邊雙曲線以漸近線爲軸時之方程式爲 $\begin{cases} y=\frac{1}{\sqrt2}(x'+y') \\ x=\frac{1}{\sqrt2}(x'-y') \end{cases}$

(V) $\qquad 2xy+a^2=0$. 証 $x^2-y^2=a^2$

[解] 用第52節之方程式而旋轉其軸 45°. 其結果爲 (V)(參閱第117頁之例題)，而其新軸即爲其漸近線. Q.E.D.

化簡 $\frac{1}{2}(x'-y')^2-\frac{1}{2}(x'+y')^2=a^2 \qquad -2x'y'=a^2 \qquad 2x'y'+a^2=0$

(1) $\qquad Bxy+Dx+Ey+F=0$.

移軸 $\begin{cases} x=x'+h \\ y=y'+h \end{cases}$ $B(x'+h)(y'+k)+D(x'+h)+E(y'+k)+F=0$

令 x', y' 之係數為零. $Bk+D=0$ $\therefore k=-\frac{D}{B}$

$Bh+E=0$ $h=-\frac{E}{B}$ $Bx'y'+F=0$

$y(Bx+E)=-(Dx+F)/Bx+E$ $Bx+E=x'$ $y=y'$

移軸,使新方程式中 x' 與 y' 之係數爲零,則 (1) 變爲

$$(2) \qquad Bx'y'+F'=0$$

卽 (V) 之形狀.現可知 (1) 爲一直角雙曲線之方程式,其漸近線各平行於 OX 與 OY (參閱第 112 頁例題 4). $(By+D)x=-(Ey+F)$

$x=-\frac{Ey+F}{By+D}$

以後常用之二種 (1) 之特別形式爲

$x=\frac{y}{ay+b}$

$$(3) \qquad y=\frac{ax+b}{x} \text{ 與 } y=\frac{x}{ax+b}.$$

等邊雙曲線之作圖法 當一等邊雙曲線之漸近線及曲線上一點已知時,常用如下之作圖法(圖 1):

$(Bx+E)y=-(Dx+F)$

$y=-\frac{Dx+F}{Bx+E}$

$Dx+F=x'$

$y=y'$

$y=\frac{x}{ax+b}$

命 OX 與 OY 爲其漸近線而 A 其已知點.過 A 畫任一直線遇 OX 於 M,遇 OY 於 N.

截取 $MP=AN$.於是 P 爲所求之雙曲線上一點.

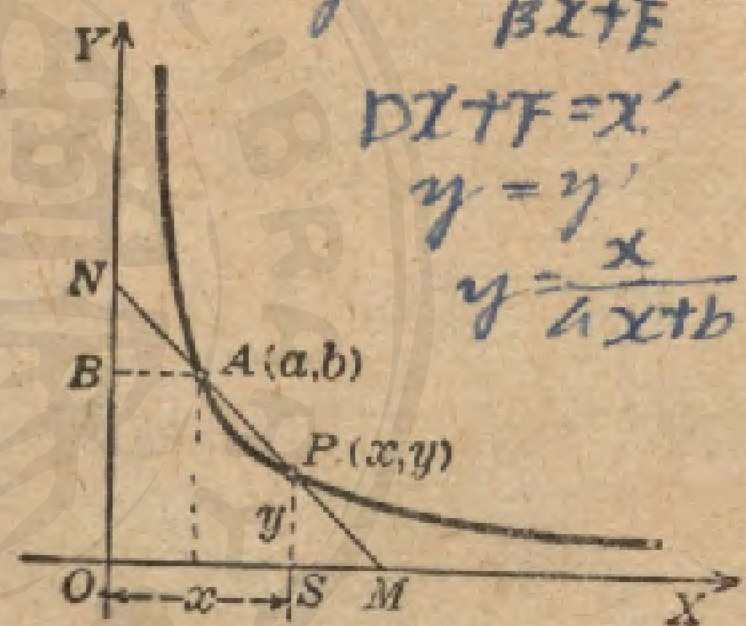


圖 1

[證] 取其漸近線爲坐標軸.命 A 之坐標爲 (a,b) 而 P 之坐標爲 (x,y).於是

$OS=x$, $SP=y$,

$OB=b$, $BA=a$.

從作圖,得 $AN=MP$,

$\therefore \triangle PSM=\triangle NBA$,

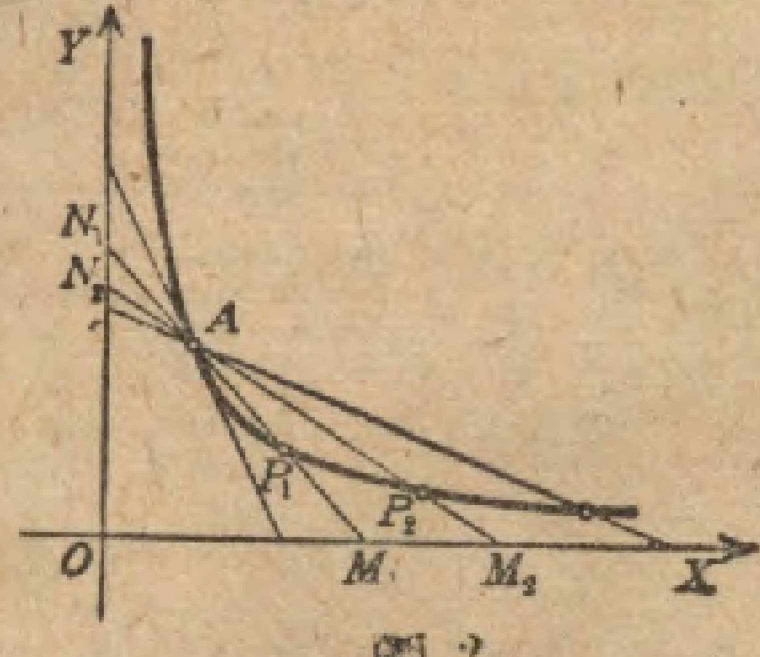


圖 2

而 $\qquad BN=SP=y$, $SM=BA=a$.

因 $\triangle OMN$ 與 BAN 相似,

$$\frac{BN}{BA}=\frac{ON}{OM}=\frac{OB+BN}{OS+SM}.$$

$xy+ay=ab+ay$

代入，$\dfrac{y}{a}=\dfrac{b+y}{a+x}$，或 $xy=ab$.

與 (V) 比較之，可知 $P(x,y)$ 在以 OX 與 OY 爲漸近線且過 (a,b) 之等邊雙曲線上. $Q.E.D.$

過 A 點作諸相異之直線，各截取 $M_1P_1=AN_1$，$M_2P_2=AN_2$，等，可隨意定雙曲線上多點 P_1，P_2，等，(如圖 2).

66. 圓錐曲線之另一定義　當一點 P 移動時，其至一定點之距離與至一定線之距離成一常數比，則其軌跡爲一圓錐曲線.

此定線稱爲準線，定點稱爲焦點，而 P 至焦點與準線之距離比稱爲離心率.

在第 38 頁題 3 中已得任意圓錐曲線之方程式爲

(1) $$(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0.$$

設 e 爲離心率，YY' 爲準線，而 $(p,0)$ 其焦點.

現 (1) 不含 xy 項. 故與以前諸結果比較之，卽此曲線爲

一拋物線當 $e=1$，

一橢圓當 $e<1$，

一雙曲線當 $e>1$.

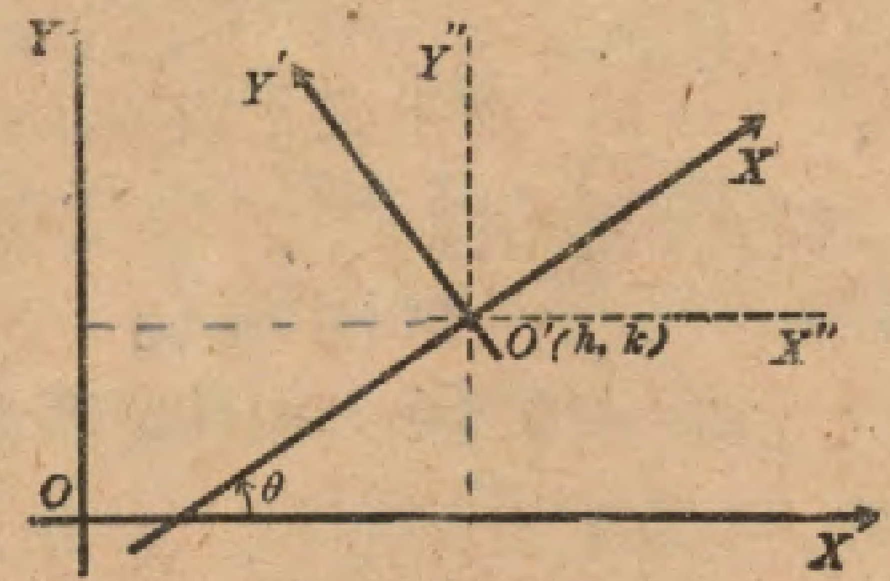
顯然，當 $e=1$ 時，此定義與以前所述拋物線之定義相合.

橢圓與雙曲線，各有一中心，故稱爲有心圓錐曲線 (Central conics).

本節所用焦點與準線二名詞與前述之意義相同. 此事實在下題中待學者自證之.

67 坐標之一般變換　設坐標軸作任意之移動，可用移軸法自舊位置移至新位置而得其新原點，然後將軸再旋轉一適當之角度.

定理　設兩軸移至新原點 (h,k)，然後旋轉一 θ 角，則變換後之方程式爲



$$(\mathrm{IV})\quad \begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta+h, \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta+k. \end{cases}$$

［證］　移軸至 $O'X'$ 與 $O'Y''$，從 (I) 得

$$x=x''+h, \qquad y=y''+k.$$

其中 $(x''\ y')$ 爲以 $O'X''$ 與 $O'Y''$ 爲軸時，任一點 P 之坐標.

從 (II) 轉軸，得

$$x''=x'\cos\theta-y'\sin\theta,$$

$$y'=x'\sin\theta+y\cos\theta.$$

代入 x'' 與 y' 之值，卽得公式 (VI).　　　$Q.E.D.$

68. 軌跡之分類　代數方程式之軌跡依其次數而分類. 此分類法可以下列定理證實之.

一次方程式 則一次曲线 直线 一些多点
二 .... " 二次 曲线 圆锥曲线
三 " " ...... 三次 " " 抛物线

定理　在坐標之變換中，一曲線方程式之次數並不改變.

［證］　因方程式 (VI) 爲 x 與 y 之一次式，故將 (VI) 中 x 與 y 之值代入任一方程式，其次數並不因之而增高. 但亦不會減低，因如能減低則若以此新軸改爲舊軸，則次數必將增高也.

次數既不能增高亦不能減低則其保持不變也明矣.　$Q.E.D.$

習　　題 30

(1) 使用適當移軸法，求下列直角雙曲線以漸近線爲軸之方程式，並作圖：

(a) $xy-2x-y+8=0$　　答 $x'y'+6=0$.

(b) $3xy-6x-12y+30=0$.

(c) $2xy-6x+4y-16=0$.

(d) $4xy+12x-4y-6=0$.

(e) $5xy+5x+20y+24=0$.

(f) $3xy+x+4y+1=0$.

(2) $A(x-h)(y-k)+C=0$ 爲何種圓錐曲線?

(3) 用移軸法化簡 $(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0$.

特設習題

(4) 用解析法證明有心圓錐曲線之焦點與已採用之焦點相重合.

(5) 證明題 3 中之 e 與第 44 節及第 48 節中所說之 e 相同.

(6) 證明自橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上一點 (x,y) 至焦點之距離(稱爲焦點半徑 Fo al radii)爲 $a\pm ex$.

(7) 用解析法證明設在任一橢圓上取三點其橫坐標成一等差級數則其對應之焦點半徑亦成一等差級數.

(8) 證明雙曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任一點之焦點距離爲 $ex\pm a$.

軌跡問題

(1) 求下列諸軌跡之方程式，討論之，並作其圖形.

三角底邊之長與位置已一定，求其所對之頂點之軌跡，若

(a) 他二邊之和爲一常數;

(b) 他二邊之差爲一常數;

(c) 他二邊之斜率之和爲一常數;

(d) 他二邊之斜率成反比;

(e) 一底角爲他底角之 2 倍;

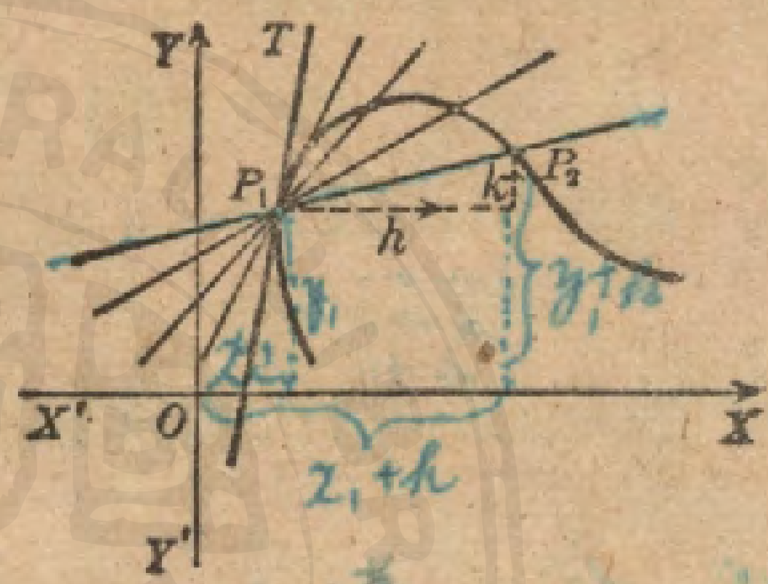
(f) 二底角之和爲一常數;

(g) 二底角之差爲一常數.

第 八 章 (高三下起)

切 線 (Tangents)

69. 切線之方程式 求曲線上 P_1 點之切線，其法如下．在曲線上近 P_1 處取另一點 P_2．過 P_1 與 P_2 作一割線 (Secant)．現設 P_2 沿曲線向 P_1 移動，則此割線將繞 P_1 而旋轉．當 P_2 達於 P_1 之極限位置時，則此割線卽稱爲 P_1 點之切線．



命 P_1 之坐標爲 (x_1, y_1) 而 P_2 之坐標爲 (x_1+h, y_1+k)．於是

$$\text{割線 } P_1P_2 \text{ 之斜率} = \frac{k}{h}.$$

欲求此切線之斜率須先求其 $\frac{k}{h}$ 之值如以下之例題所爲，而由此例題，以下之定理亦得證明．

定理 切圓

$$x^2+y^2=r^2.$$

於切點 $P_1(x_1, y_1)$ 之切線，其方程式爲

(I) $$x_1x+y_1y=r^2.$$

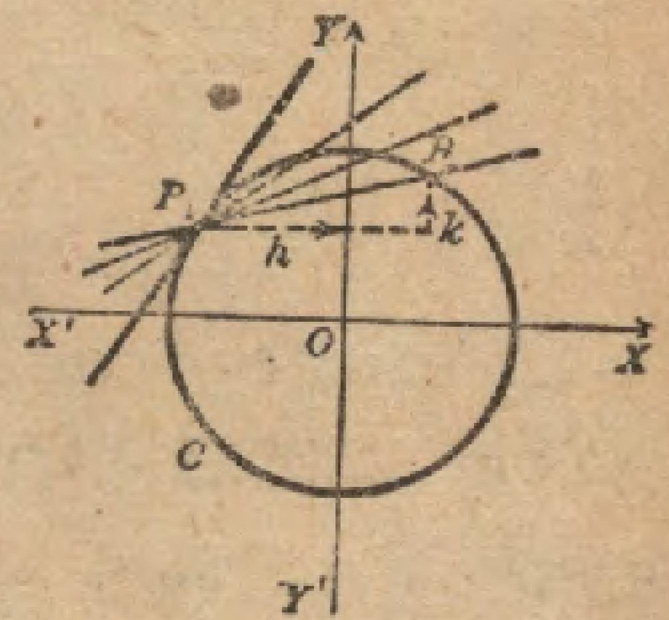
例 題

求切圓

$$x^2+y^2=r^2$$

於切點 (x_1, y_1) 之切線方程式．

[解]　命 $P_1(x_1, y_1)$ 與 $P_2(x_1+h, y_1+k)$ 為圓 C 上兩點。因此等坐標適合此圓之方程式，故得



(1)　$x_1{}^2+y_1{}^2=r^2$,

與　$(x_1+h)^2+(y_1+k)^2=r^2$；或

(2)　$x_1{}^2+2x_1h+h^2+y_1{}^2+2y_1k+k^2=r^2$.

從 (2) 減 (1)，得

$$2x_1h+h^2+2y_1k+k^2=0.$$

移項與分解因式，得

$$k(2y_1+k)=-h(2x_1+h)，故，用除法，$$

(3)　$\frac{k}{h}$＝過 P_1 與 P_2 之割線之斜率 $=-\frac{2x_1+h}{2y_1+k}$.

當 h 與 k 皆等於零，則割線變為 P_1 點之切線。故 P_1 點切線之斜率 m 為 $h=k=0$ 時，(3) 式右邊之值；即

$$\lim_{\substack{h\to0\\k\to0}}\frac{k}{h}=m=-\frac{x_1}{y_1}.$$

於是 P_1 點切線方程式為

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1),\qquad \because x_1^2+y_1^2=r^2 \ (\text{由圓定義})$$

或，從 (1)，　$x_1x+y_1y=x_1{}^2+y_1{}^2=r^2$.　　答.

例題中所用之法為求切線之普遍方法而可作成定式如下：

求曲線 C 上一點 P_1 之切線斜率之規則.

第一步　命 $P_1(x_1, y_1)$ 與 $P_2(x_1+h, y_1+k)$ 為曲線 C 上之二點。將此等坐標代入 C 中而減之。分解所得之結果為因式，而求 $\frac{k}{h}$ 之值。此為過 P_1 與 P_2 之割線斜率.

第二步　當 $h=k=0$ 時，求割線之斜率之值。此為切線之斜率.

求 $\lim_{\substack{h\to0\\k\to0}}\frac{k}{h}$ 之值為

已得切線之斜率，可用點與斜率式以求其方程式。點 P_1 稱為切點 (Point of contact).

第一步 將 $P_1(x_1,y_1)$ 及 $P_2(x_1+h, y_1+k)$ 代入(1)

$y_1^2=2px$ $\quad (y_1+k)^2=2p(x_1+h)$ (2) $\quad y^2+2ky_1+k^2=2px_1+2ph$ (3)

(3)-(2) $k(2y_1+k)=2ph$ $\quad \frac{k}{h}=\frac{2p}{2y_1+k}$ $\quad m=\frac{p}{y_1}$

用此規則可證以下 $y_1y=2p\frac{x+x_1}{2}$

定理 切於切點 $P_1(x_1,y_1)$ 諸切線方程式，如 P_1 在

橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上，則爲 $b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2$；

雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 上，則爲 $b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2$；

拋物線 $y^2=2px$ 上，則爲 $y_1y=p(x+x_1)$.

在諸證明中，一點應注意者，爲

以 x_1 與 y_1 代已知曲線方程式中之 x 與 y 而得一新方程式，則常用此所得之方程式以化簡其切線之方程式.

習　題 31.

(1) 求切下列諸曲線於切點 (x_1,y_1) 之切線之方程式：

(a) $3y^2=4x$. 答 $2x-3y_1y+2x_1=0$.

(b) $x=Ay^2+By+C$.

(c) $x^2+y^2+2hx+2ky+r^2=0$.

(d) $x^2+6y^2=16$. 答 $x_1x+6y_1y=16$.

(e) $4x^2-2y^2=7$.

(f) $xy=k$. 特殊 答 $x_1y+y_1x=2k$.

(g) $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$.

(h) $y=x^3$. 答 $3x_1^2x-y-2y_1=0$.

(i) $3x^2=4y^3$.

(j) $xy^2=xy-y-x$.

(2) 求下列諸曲線之切線方程式，其切點如下：

(a) $x^2+9y^2=40$, $(-2,2)$.

(b) $x^2+4y^2+2x+8y-20=0$, $(2,-3)$. 答 $3x-8y=30$.

(c) $2x^2+3y^2=50$, $(-1,-4)$.

(d) $y=x^3+2x$, $(1,3)$. 答 $5x-y=2$.

(e) $2y^2=x^3$, $(2,2)$.

(f) $y=2x^3+3$, $(-2,-13)$.

(g) $2x^2-3y^2=12$, $(3,\sqrt{2})$. 答 $\sqrt{2}x-y=2\sqrt{2}$.

(h) $y=2x-x^2$, $(0,0)$. 答 $y=2x$.

(i) $xy=x+3$, $(3,2)$.

(j) $xy-2x+y=0$, $(x_1=3)$.

莊子：一尺之棰，日取其半，取之不盡 (即今之微積分(極限觀念))

$(Bx_1+2Cy_1+E)(y-y_1) = -(2Ax_1+By_1+D)(x-x_1)$

$Bx_1y + 2Cy_1y + Ey - Bx_1y_1 - 2Cy_1^2 - Ey_1 = -2Ax_1x - By_1x - Dx + 2Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Dx_1$

之軌跡為於點 $P_1(x_1,y_1)$ 之切線方程式為

70．普偏定理　次取任一二次方程式，可證下之

定理　切軌跡．二次曲線

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

於切點 $P_1(x_1,y_1)$ 之切線方程式為

$$\mathbf{A}\,x_1x+\mathbf{B}\frac{y_1x+x_1y}{2}+\mathbf{C}y_1y+\mathbf{D}\frac{x+x_1}{2}+E\frac{y+y_1}{2}+F=0.$$

証，設 $P_2(x_1+h,\ y_1+k)$ 為(1)之軌跡上之另一点

［證］　命 $P_1(x_1,y_1)$ 與 $P_2(x+h,y+k)$ 為曲線上二點．則

(1)　$$Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0,\text{與}$$

(2)　$$A(x_1+h)^2+B(x_1+h)(y_1+k)+C(y_1+k)^2+D(x_1+h)+E(y_1+k)+F=0.$$

去 (2) 之括號而減去 (1)，得

(3)$$2Ax_1h+Ah^2+Bx_1k+By_1h+Bhk+2Cy_1k+Ck^2+Dh+Ek=0.$$

移項，分解因子，與除法，可得

$$\frac{k}{h}=-\frac{2Ax_1+By_1+D+Ah+Bk}{Bx_1+2Cy_1+E+Ck}.$$

此為割線 P_1P_2 之斜率．

設命 P_2 趨近於 P_1，則 h 與 k 將漸近於零而切線之斜率 m 為

$$m=-\frac{2Ax_1+By_1+D}{Bx_1+2Cy_1+E}.$$

於是此切線之方程式為（代入点斜率式）

$$y-y_1=-\frac{2Ax_1+By_1+D}{Bx_1+2Cy_1+E}(x-x_1).$$

欲化此方程式為所求之形式，可先去分數而移項．由此得

$$(2Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+2Cy_1+E)y-(2Ax_1^2+2Bx_1y_1+2Cy_1^2+Dx_1+Ey_1)=0.$$

但從 (1)，此方程式中最末括號內諸項等於

$$-(Dx_1+Ey_1+2F).$$

代入，則切線之方程式為

$$(2Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+2Cy_1+E)y+(Dx_1+Ey_1+2F)=0.$$

去括號，集合 A,B,C,D,E,F 之係數而除以 2，卽得定理中所需之方程式．$Ax_1x+B\frac{x_1y+y_1x}{2}+Cy_1y+D\frac{x+x_1}{2}+E\frac{y+y_1}{2}+F=0$　Q.E.D.

上述結果使吾人可自由寫出任一二次方程式軌跡之切線方程式．因比較曲線之方程式與切線之方程式卽得下之規則．

寫出切二次方程式之軌跡於切點 $P_1(x_1,y_1)$ 之切線方程式之規則．

以 x_1x 與 y_1y 代已知方程式中之 x^2 與 y^2，以 $\frac{y_1x+x_1y}{2}$ 代 xy，又以 $\frac{x+x_1}{2}$ 與 $\frac{y+y_1}{2}$ 代 x 與 y．

例如，切曲線 $x^2+3xy-4y+5=0$ 於切點 (x_1,y_1) 之切線方程式爲

$x_1x+3\frac{x_1y+y_1x}{2}-4\frac{y+y_1}{2}+5=0$

$$x_1x+\tfrac{3}{2}(x_1y+y_1x)-\tfrac{4}{2}(y+y_1)+5=0;$$

或，
$$(2x_1+3y_1)x+(3x_1-4)y-4y_1+10=0.$$

重要 **71. 法線之方程式** normal (法線) 過 P_1 點作垂直於 P_1 點處之切線，則此線稱爲曲線上 P_1 點之法線．當切線之方程式已求得時，可依第四章之方法立卽求得法線之方程式．如用第 143 頁上所設之切線方程式，得

定理 在 $P_1(x_1,y_1)$ 点之法线方程式於

很重要 **定理** $P_1(x_1,y_1)$ 上之法線方程式，如 P_1 在

橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上，則爲 $a^2y_1x-b^2x_1y=(a^2-b^2)x_1y_1$；

雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 上，則爲 $a^2y_1x+b^2x_1y=(a^2+b^2)x_1y_1$；

拋物線 $y^2=2px$ 上，則爲 $y_1x+py=x_1y_1+py_1$． $y=mx+b$

証 例如，橢圓之切線方程式爲

$$b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2,$$

$y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x+\frac{a^2b^2}{a^2y_1}$

其斜率爲
$$m=-\frac{A}{B}=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$

$m_n=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$ ∵⊥ (互為負倒數)

故其法線之方程式爲

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1),$$

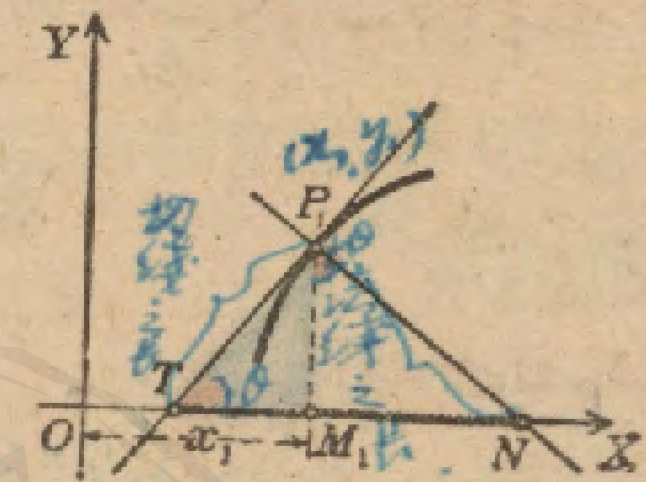
$b^2x_1y-b^2x_1y_1=a^2y_1x-a^2x_1y_1$

而由此可化至定理中之方程式．

$b^2x_1y-a^2y_1x=(-a^2+b^2)x_1y_1$

於多數例題中，學者應用已知之規則寫下其切線方程式．於是將法線視作垂直線以求其方程式，不需用其特別公式．

72．次切線與次法線　設 P_1 點之切線與法線各交 x 軸於 T 及 N，則定



(1)　$P_1T=P_1$ 點切線之長，
　　$P_1N=P_1$ 點法線之長．

P_1T 與 P_1N 在 XX 上之射影各稱為 P_1 點之次切線與次法線 (Subtangent and subnormal)；即圖中

Tan $\theta = m$

(2)　$M_1T=P_1$ 點之次切線，
　　$M_1N=P_1$ 點之次法線．

$\dfrac{y_1}{TM}=m_1$

$\dfrac{y_1}{-MT}=m$

定理　設 m 為點 (x_1, y_1) 之切線斜率，則

$MT=-\dfrac{y_1}{m}=$ 次切线

(3)　$$-\frac{y_1}{m}=\text{次切線},\quad my_1=\text{次法線}.$$

$\dfrac{MN}{y_1}=m$

次法线 $=MN=my_1$

［證］　圖中，因 $\angle P_1TM_1=\angle M_1P_1N$（邊互相垂直），而 m 為 $\angle P_1TM_1$ 之正切，於是

$$\text{在 } \triangle P_1TM_1 \text{ 中}, m=\frac{M_1P_1}{TM_1}=\frac{y_1}{TM_1};$$

$$\text{在 } \triangle M_1P_1N \text{ 中}, m=\frac{M_1N}{M_1P_1}=\frac{\text{次法線}}{y_1}.$$

從此，注意 $TM_1=-M_1T$，得方程式 (3)．　　$Q.E.D.$

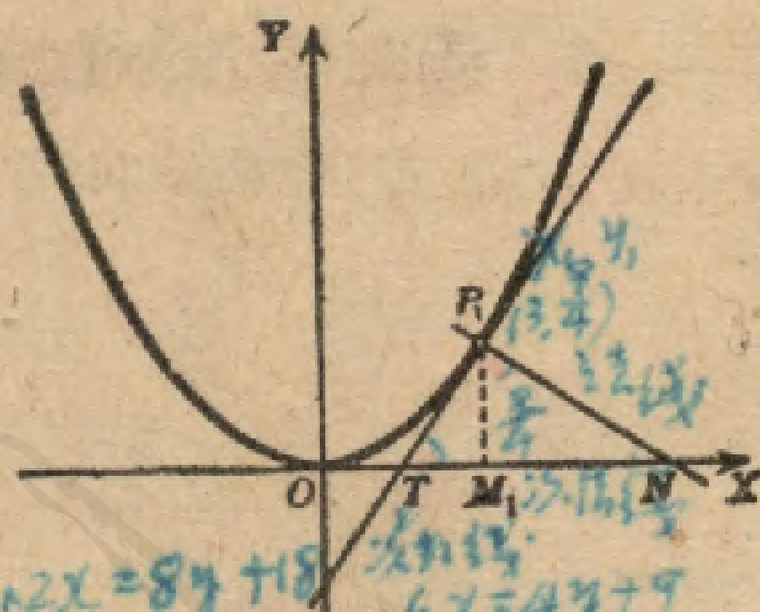
因次切線與次法線皆由縱坐標 M_1P_1 之足之相反方向量之，故二者異號．

切線 P_1T 與法線 P_1N 之長現極易用幾何學方法求得之．

$y_1=1$ 時，次切線長為…，之為負倒數．如 $y_1=1$ $m=\frac{3}{8}$．
可否為負倒數．

例　題

拋物線 $x^2=4y$ 上一點，其橫坐標等於 3．求此點之切線與法線之方程式並其次切線與次法線之長．



［解］　切點 (x_1,y_1) 爲

代入 $x^2=4y$　得 $9=4y_1$

$$x_1=3,\ y_1=\tfrac{9}{4}.$$

依第 70 頁之規則在點 (x_1,y_1) 上之切線方程式爲 節

$$x_1x=2(y+y_1).$$

以 x_1 與 y_1 之值代入，$3x=2(y+\frac{9}{4})$． $12x=8y+18$　$6x=4y+9$

或　　$6x-4y-9=0$．　　答．

此爲所求之切線方程式． $4y=6x-9$　$m=\frac{3}{2}$

此線之斜率爲 $\frac{3}{2}$．故在點 $(3,\frac{9}{4})$ 上之法線之方程式爲

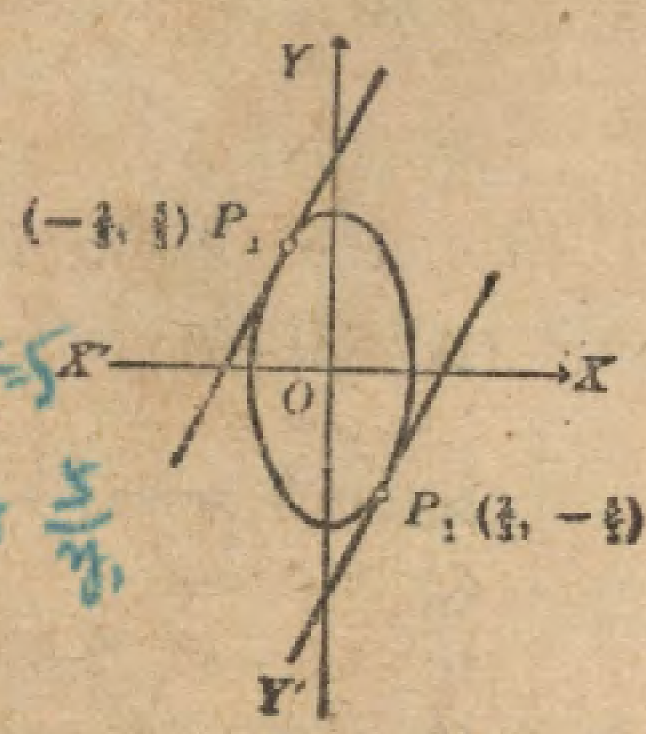
$y-\frac{9}{4}=-\frac{2}{3}(x-3)$，或 $8x+12y-51=0$．　　答．

用 (3)，得 $m=\frac{3}{2}$，$y_1=\frac{9}{4}$．故次切線 $=-\frac{3}{2}$，而次法線 $=\frac{27}{8}$． $=-\frac{y_1}{m}=-\frac{9}{4}/\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$ $=my_1=$ 答． $\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}=\frac{27}{8}$

次切線與次法線之長則可用幾何學之方法求得之．因三角形 $\triangle P_1TM_1$ 與 $\triangle M_1P_1N$ 之兩腰之長皆爲已知也．

73．已知斜率之切線　在此情形下之求切線之方程式法可以下例說明之：

例　題



求切於橢圓

(1)　　$5x^2+y^2=5$　　$m=2$

之切線之方程式，其斜率爲 2．

［解］　命 $P_1(x_1,y_1)$ 爲切點

則所求之切線方程式爲（第 70 節） $5x_1^2+y_1^2=5$

(2)　　$5x_1x+y_1y=5$． $y=-\frac{5x_1}{y_1}x+\frac{5}{y_1}$

(2) 之斜率須等於 2．故 $=2$

(3)　　$-\dfrac{5x_1}{y_1}=2$，或 $y_1=-\dfrac{5}{2}x_1$．

因 P_1 在橢圓 (1) 上，故得

(4)　　　$5x_1^2+y_1^2=5.$

$5x_1^2+\frac{25}{4}x_1^2=5$　$4x_1^2+5x_1^2=4$　$9x_1^2=4$　$x_1=\pm$　$\therefore y_1=\mp\frac{5}{3}$

解 (3) 與 (4)，即得兩平行切線之切點為 $(\frac{2}{3},-\frac{5}{3})$ 與 $(-\frac{2}{3},\frac{5}{3})$.
代入 (2)，得 $2x-y-3=0$，$2x-y+3=0$.　答.

$y+\frac{5}{3}=2(x-\frac{2}{3})$　$y-\frac{5}{3}=2(x+\frac{2}{3})$　兩切線

74. 過曲線外一已知點之切線　從曲線外一已知點所作之切線，其方程式之求法如下：

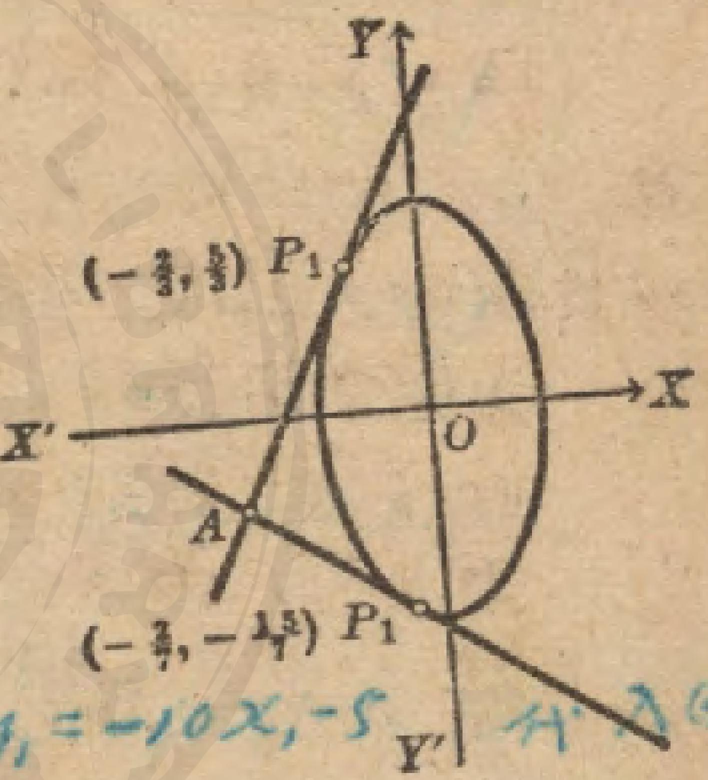
例　　題

求從點 $A(-2,-1)$ 切於橢圓

(1)　　$5x^2+y^2=5$

之切線之方程式.

［解］ 命 $P_1(x_1,y_1)$ 為切點. 則所需之切線方程式為(第 70 節)



(2)　　$5x_1x+y_1y=5.$

但點 $A(-2,-1)$ 亦在此切線上，故

(3)　　$-10x_1-y_1=5.$

又　x_1 與 y_1 亦適合方程式 (1)；即

(4)　　$5x_1^2+y_1^2=5.$

(3) 從(3)得 $y_1=-10x_1-5$ 代入(4)得
$5x_1^2+100x_1^2+100x_1+25=0$
$105x_1^2+100x_1+20=0$
$21x_1^2+20x_1+4=0$

解 (3) 與 (4) 即得從 A 所作兩切線之切點為 $(-\frac{2}{3},\frac{5}{3})$ 與 $\left(-\frac{2}{7},-\frac{15}{7}\right)$. 代入 (2)，即得

$$2x-y+3=0,\quad 2x+3y+7=0.\quad 答.$$

習　　題 32.

(1) 求至下列各曲線上所示之點之法線方程式：

(a) $2x^2+3y^2=35,(2,3)$.　　答　$9x-4y=6$.

(b) $y^2=4x+4,(3,4)$.

(c) $x^2+xy=4,(-2,0)$.　　答　$x-2y+2=0$.

(d) $xy^2=9,(1,-3)$.

(e) $3y^2=x^3,(3,3)$.

(f) $x^2+4y^2+5x=0,(-4,1)$.　　答　$8x+3y+29=0$.

a.c.f.

(2) 求題1各部中之次切線與次法線之長． 答 (a)$6\frac{3}{4}, -1\frac{1}{3}$.

(3) 證明拋物線 $y^2=2px$ 之次切線為切點橫坐標之二倍，而次法線為一定，且等於 p.

(4) 求在下列已知曲線之已知切點上之切線與法線之方程式，及其次切線與次法線之長：

(a) $y^2-6y-8x-31=0, (-3, -1)$.

答 $x+y+4=0, x-y+2=0; -1, 1$.

(b) $2x^2-y^2=14, (3, -2)$.

(c) $x^2-3y^2+6x+12y=9, (0, 3)$.

(d) $5x^2+9y^2+20x+36y+11=0, (1, -2)$.

(e) $4x^2+9y^2+24x+36y=0, (0, 0)$. 答 $2x+3y=0, 3x-2y=0; 0, 0$.

(5) 求自下列各已知點至下列各已知曲線上之切線方程式：

(a) $x^2+y^2=5, (3, -1)$. 答 $x-2y-5=0, 2x+y-5=0$.

(b) $x^2+4y^2=4, (2, 2)$. (c) $12x^2-10y^2=120, (0, 2)$.

(d) $3x^2+y^2=16, (2, 2)$. (e) $y^2=6x, (8, 13)$.

答 $x-8y+96=0, 3x-2y+2=0$.

(6) 依所示之斜率與傾角，求下列圓錐曲線之切線方程式：

(a) $2x^2+3y^2=6, m=-1$. 一切線之斜率 答 $x+y=\pm\sqrt{5}$.

(b) $y^2=4x, \alpha=30°$ (c) $x^2+y^2=25, m=-\frac{3}{4}$.

(d) $2y^2-16x^2=1, m=2$. (e) $y^2-12y-8x+20=0, \alpha=90°$.

答 $x+2=0$.

(f) $15x^2-8y^2+30x+32y-137=0, m=\sqrt{2}$.

答 $\sqrt{2}x-y+3+\sqrt{2}=0, \sqrt{2}x-y+1+\sqrt{2}=0$.

(g) $8x^2+9y^2=72, m=1$.

(7) 依所示之斜率，求下列圓錐曲線之法線方程式：

(a) $xy=4, m=\frac{1}{4}$. 一法线之斜率 答 $x-4y\pm15=0$.

(b) $4x^2+6y^2=25, m=-6$.

(c) $x^2-4y^2=9, m=\frac{1}{2}$.

(d) $2y^2-16x^2=1, m=\pm1$.

75. 斜率已知時之切線公式 為以後參考計，本節中集合諸公式表已知斜率 m 之圓錐曲線之切線方程式．學者可依第73節之

解(1),(2)　$r_1^2+\frac{x_1^2}{m^2}=r^2$　$(m^2+1)x_1^2=m^2r^2$　$x_1=\frac{mr}{\sqrt{m^2+1}}$

法演出之．　$x^2+y^2=r^2$　切線：$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$

定理　已知斜率 m 之切線方程式，其圓錐曲線爲

圓　　$x^2+y^2=r^2$ 則爲 $y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$;

橢圓　$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 則爲　$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$;

雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 則爲　$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$;

抛物線　$y^2=2px$ 則爲　$y=mx+\frac{p}{2m}$.

其第二種求法如下：

例　　題

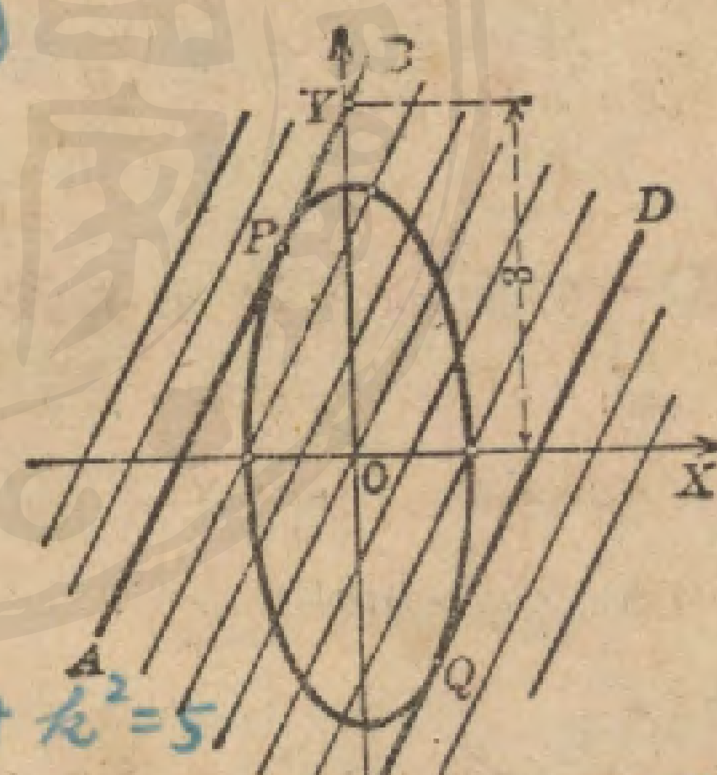
已知斜率爲 2，求切於橢圓

(1)　　$5x^2+y^2=5$ 之切線方程式．

［解］　斜率爲 2 之直線系之方程式爲

(2)　　$y=2x+k$,　(切線方程式)

其中 k 爲一任意常數．



然則 k 爲何值時，直線 (2) 方爲一切線？欲答此問題，須先求此線與橢圓 (1) 之交點．從 (2) 代入 (1)，

(3)　　$5x^2+(2x+k)^2=5$.

展之且集項，得　$5x^2+4x^2+4kx+k^2=5$

(4)　　$9x^2+4kx+k^2-5=0$.　$x=\frac{-4k\pm\sqrt{16k^2-36k^2+180}}{18}$

(4) 式之根爲直線(2)與橢圓兩相交點之橫坐標．當此線爲切線時，兩根應相等．比較 (4) 與第 1 頁之 2，二次方程式，則得 $A=9,B=4k,C=k^2-5$，而等根時 $B^2=4AC$．故　$16k^2-36k^2+180=0$

(5)　　$16k^2-36(k^2-5)=0$，或 $k=\pm3$.　$k=\pm3$

故所求之切線方程式爲　$\therefore y=2x+3$　$y=2x-3$

AB:　$y=2x+3$ 而 CD:　$y=2x-3$．答．

驗算　以 $k=3$ 代入 (4) 中，得　驗算：$\because y=2x\pm3$ 代入 $5x^2+y^2=5$

$9x^2+12x+4=0$，或 $(3x+2)^2=0$.

$5x^2+(2x\pm3)^2=5$

說此 $k=\pm3$ 爲真：$x=\frac{-4k\pm\sqrt{16k^2-36k^2+180}}{18}$ 時 $5x^2+4x^2+12x+9=5$

說明：$\sqrt{16k^2-36k^2+180}=0$　故 $x=\frac{-4k}{18}=\frac{-2}{3}$　$9x^2+12x+4=0$　$(3x+2)^2=0$

其兩等根之公共值爲 $x=-\frac{2}{3}$. 此爲切點 P 之橫坐標. 從 $y=2x+3$, 其縱坐標爲 $y=\frac{5}{3}$. 故 P 爲 $(-\frac{2}{3},\frac{5}{3})$.

同理,於 (4) 中命 $k=-3$, 則求得 Q 之坐標爲 $(\frac{2}{3},-\frac{5}{3})$.

此法可敍述如下:

求斜率已知時圓錐曲線之切線方程式:

(1) 寫下已知斜率之直線系方程式 $(y=mx+k)$. 此方程式含一未知數須求之.

(2) 從直線與圓錐曲線兩方程式中消去 x 或 y. 將結果整理之使成一二次方程式,

(6) $$Ay^2+By+C=0 \text{ 或 } Ax^2+Bx+C=0.$$

(3) 此二次方程式之兩根應相等. 故命

(7) $$B^2-4AC=0,$$

解此以求未知數 k, 而將其值代入直線系方程式中.

(4) 驗算 將適合 (7) 式之每個 k 值代入 (6) 中時,此二次方程式成爲一完全平方.

習題 33

(1) 求適合下列所示條件之諸圓錐曲線之切線方程式. 求其切點並用作圖法證實之.

(a) $x^2+y^2=16$, $m=-\frac{4}{3}$.

答 $4x+3y\pm20=0$; $(3\frac{1}{5},2\frac{2}{5})$, $(-3\frac{1}{5},-2\frac{2}{5})$.

(b) $y^2=4x$, $m=1$. 答 $x-y+1=0$; $(1,2)$.

(c) $x^2+y^2-2x+3y-8=0$, $m=2$.

(d) $x^2+y^2-2y=0$, $\alpha=90°$.

(e) $xy-12=0$, $m=-\frac{3}{2}$.

(f) $x^2-4y^2=4$ 垂直於 $x-2y-5=0$.

(g) $x^2+9y^2=4$ 垂直於 $9x-y=0$.

(h) $x^2-y^2-4x+6y+7=0$, 平行於 $x+2y=7$.

(i) $9x^2-16y^2=32$, 平行於 $18x-8\sqrt{7}\,y=15$.

答 $9x-4\sqrt{7}\,y=\pm8$; $(4,\sqrt{7})$, $(-4,-\sqrt{7})$.

(j) $4x^2+7y^2=79, m=\frac{8}{21}$. 答 $8x-21y=\pm 79$;$(-2,3)$,$(2,-3)$.

(k) $2x+5y=10, a=60°$.

(l) $x^2+2y^2=22$, 平行於 $2x-6y+11=0$.

答 $x-3y\pm 11=0$;$(-2,3)$,$(2,-3)$.

(m) $4x^2-9y^2+36=0$, 垂直於 $5x+2y=7$.

(n) $x^2-2y^2=1, m=\frac{3}{4}$.

(o) $xy+y^2-4x+8y=0, m=\frac{1}{2}$.

(p) $x^2+2xy+y^2+8x-6y=0, m=\frac{4}{3}$. 答 $4x-3y=0$;$(0,0)$.

(q) $x^2+2xy-4x+2y=0, m=2$.

答 $y=2x$, $2x-y+10=0$;$(0,0)$,$(-2,6)$.

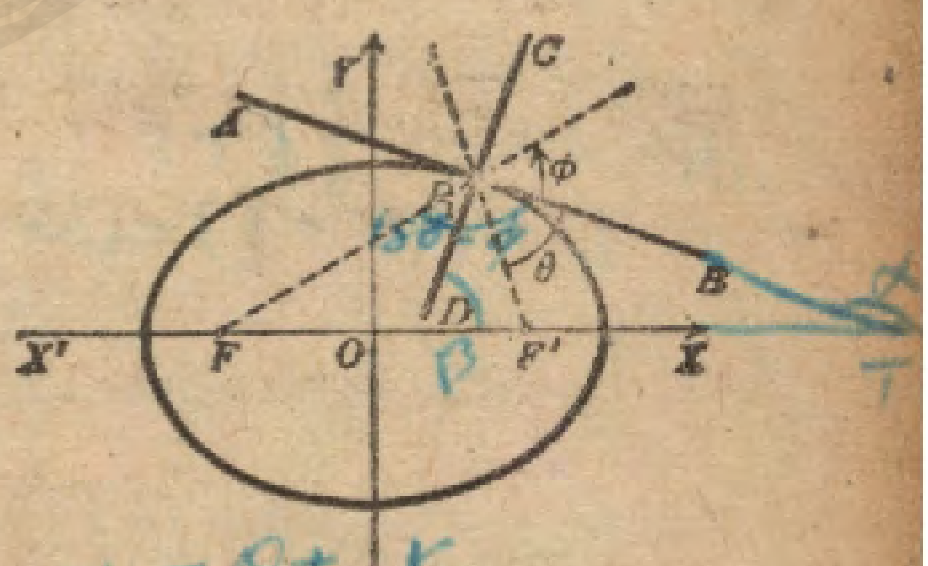
(2) 求第 141 頁定理中各切線之切點.

(a) 椭圆

答 斜率爲 m 之橢圓上切線之切點爲

$$\left(-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},\ \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right);\text{ 等.}$$

76. 圓錐曲線之切線與法線之性質 若在橢圓上任一點 P_1 畫切線 AB 與法線 CD, 又畫其兩焦點半徑 P_1F 與 P_1F', 則可證下之



定理 橢圓上之切線與法線各平分過切點之二焦點半徑所成之內角與外角.

[證] 圖中,欲證 $\theta=\phi$. 可用第 14 節之 (V) 求 $\tan\phi$ 與 $\tan\theta$.

$\alpha=\theta+\gamma$

$\theta=\alpha-\gamma$

橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上一點 P_1 (x_1, y_1) 與焦點 F' $(c,0)$ 及 F $(-c,0)$ 之連線之斜率爲

$\tan\theta=\tan(\alpha-\gamma)$

$\tan\theta=\frac{\tan\alpha-\tan\gamma}{1+\tan\alpha\tan\gamma}$

$$F'P_1\text{ 之斜率}=\frac{y_1}{x_1-c};\quad FP_1\text{ 之斜率}=\frac{y_1}{x_1+c}.$$

$b^2x+a^2y=a^2b^2$ $b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2$

$y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x+\frac{a^2b^2}{a^2y_1}$ $\tan r=\frac{y_1-0}{x_1-c}$

$\tan\theta=\dfrac{-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}-\frac{y_1}{x_1-c}}{1+\left(-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)\left(\frac{y_1}{x_1-c}\right)}$

切線 AB 之率斜爲 $-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$.

現 $\tan\theta=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$,其中 $m_1=AB$ 之斜率, $m_2=P_1F'$ 之斜率.

將以上諸斜率之值代入上式,

$$\tan\theta=\frac{-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}-\dfrac{y_1}{x_1-c}}{1-\dfrac{b^2x_1y_1}{a^2y_1(x_1-c)}}=\frac{-b^2x_1{}^2+b^2cx_1-a^2y_1{}^2}{a^2x_1y_1-a^2cy_1-b^2x_1y_1}$$

$$=\frac{(a^2y_1{}^2+b^2x_1{}^2)-b^2cx_1}{a^2cy_1-(a^2-b^2)x_1y_1}.$$

但因 P_1 在橢圓上,故 $a^2y_1{}^2+b^2x_1{}^2=a^2b^2$ 而 $a^2-b^2=c^2$.

故 $$\tan\theta=\frac{a^2b^2-b^2cx_1}{a^2cy_1-c^2x_1y_1}=\frac{b^2(a^2-cx_1)}{cy_1(a^2-cx_1)}=\frac{b^2}{cy_1}.$$

同理,

$$\tan(180^\circ-\phi)=\frac{-b^2x_1{}^2-b^2cx_1-a^2y_1{}^2}{a^2x_1y_1+a^2cy_1-b^2x_1y_1}=-\frac{b^2}{cy_1}.$$ $=-\tan\phi$

故 $\tan\theta=\tan\phi$; 而因 θ 與 ϕ 皆小於 π, 故 $\theta=\phi$.

卽,AB 平分 FP_1 與 $F'P_1$ 所成之外角,於是 CD 平分其內角.

因 $\alpha=180^\circ-\phi+\beta$ $180^\circ-\phi=\alpha-\beta$

Q.E.D.

$\tan(180^\circ-\phi)=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}-\frac{y_1}{x_1+c}}{1+\left(-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)\left(\frac{y_1}{x_1+c}\right)}=$

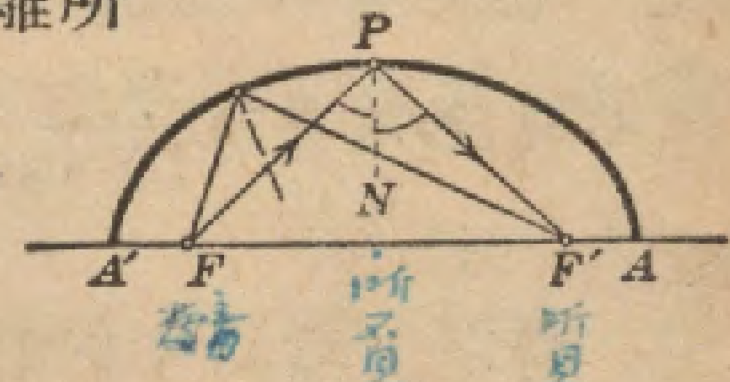
下題爲此定理之應用.

在橢圓上一定點 P_1 作一切線與法線.

其作法爲將 P_1 與二焦點連接之, 再將所成之內外角平分之卽得.

耳語廊(Whispering galleries)所具之現象,卽由此性質而來.設橢圓弧 $A'PA$ 爲此廊之縱斷面. 凡從焦點 F 所發出之聲浪,遇廊頂於 P 點後,卽反射於 PF' 之方向. 因設 NP 爲 P 點之法線,則 $\angle NPF=\angle NPF'$, 而聲浪之反射定律爲射入角 $(=\angle NPF)$

與反射角 $(=\angle NPF')$ 相等. 故自 F 發向各方之聲浪皆將收斂於 F'. 在 F 處之低語之不為 FF' 之距離所能聽聞者,經反射後卽能在 F' 處聽得之.

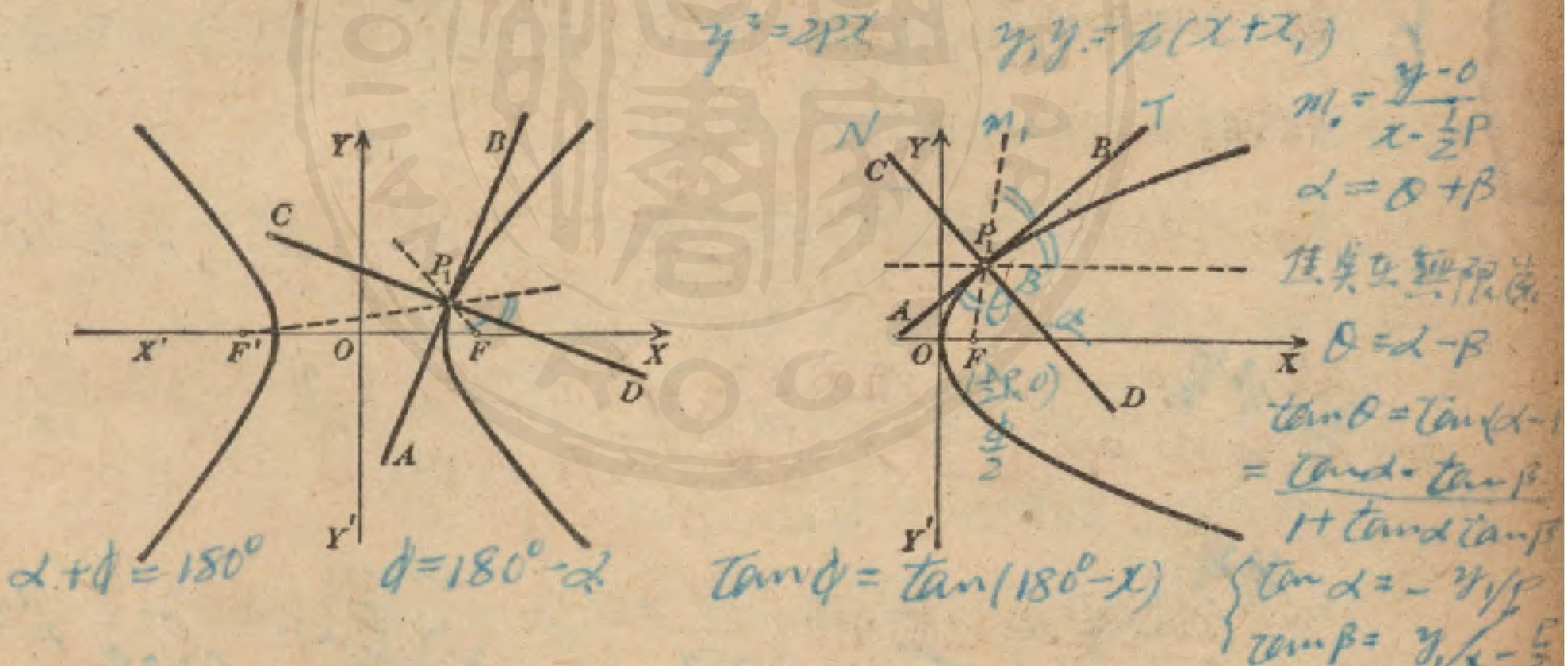


同理,可證以下二定理:

雙曲線上之切線與法線各平分過切點之二焦點半徑所成之內角與外角.

拋物線上之切線與法線各平分過切點之焦點半徑與過此點而平行於其軸之直線所成之內角與外角.

此二定理使圓錐曲線之切線及法線可用直尺與圓規以作之.



欲在雙曲線上任一點作其切線與法線,可將此點與兩焦點連接之,然後平分此兩線所成之內角與外角卽得. 欲在拋物線上任一點作其切線與法線,可過此點作一直線至焦點,又作一直線平行於其軸,然後平分此兩線所成之內角與外角卽得.

拋物面鏡 (Parabolic reflectors) 之原理,卽根據上述切線與法線之性質而得. 卽其反射面乃由一拋物線弧繞其軸旋轉而成. 現

設置一發光體於焦點處，則光線遇鏡面後即向拋物線軸之方向反射之；因光線如遇鏡面於圖中之 P_1 點，則其反射之方向與法線 PD 所成之角等於 $\angle FP_1D$. 但此方向，從上之性質，平行於拋物線之軸 OX.

習　　題 34.

(1) 用解析法證明雙曲線上一切線之切點平分兩漸近線間所夾此切線之線段.

(2) 用解析法證明 (1) 垂直於拋物線焦點弦 (Focal chord) 於焦點之垂線與焦點弦二端所作之切線遇於準線上；(2) 此二切線互相垂直.

8 (3) 用解析法證明自拋物線焦點至一切線之垂線與準線相遇於過切點而平行於拋物線軸之直線上.

(4) 用解析法證明拋物線上任一點之切線各交準線及通徑之延長線於兩點而此兩交點至焦點之距離相等.

很重要 (5) 一拋物線之焦點與兩切線之交點連接之直線平分兩焦點半徑至兩切點所成之角.

很重要 (6) 一拋物線兩切線間所成之角為兩焦點半徑至此兩切點所成之角之半.

$y^2=2px$　$y^2=4px$　$p=2g$　$\frac{p}{2}=r$

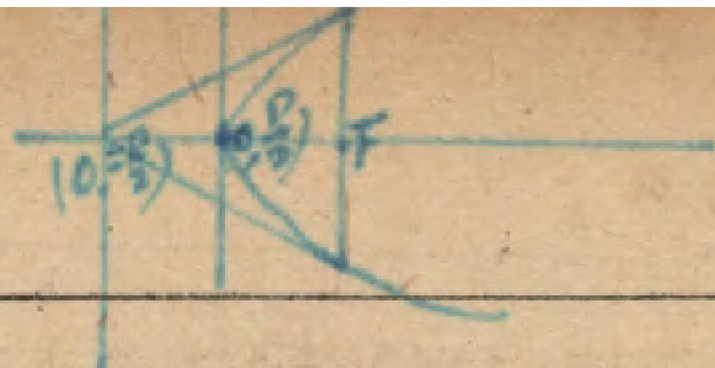
特　設　習　題 (要做)

(7) 用解析法證明自橢圓(或雙曲線)上一切線至兩焦點之垂直距離之乘積為一常數.

(8) 共焦點 (Confocal) 之橢圓與雙曲線，必相交成直角.

(9) 以拋物線 $y^2=2px$ 之通徑兩端之切線 (互相垂直) 為坐標軸，求此拋物線之方程式. 45°

答 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=\sqrt{p\sqrt{2}}$.



(10) 過有心圓錐曲線上一點 P 所作之法線被坐標軸截成線段 AB，求證 P 分 AB 成一常數比 $(a^2:b^2$.

(11) 過雙曲線一頂點之切線，遇共軛雙曲線於兩點．求證過此兩點之二切線必過其他一頂點．

(12) 證明雙曲線之二焦點及頂點所作之切線與任一切線之兩交點同在一圓周上．

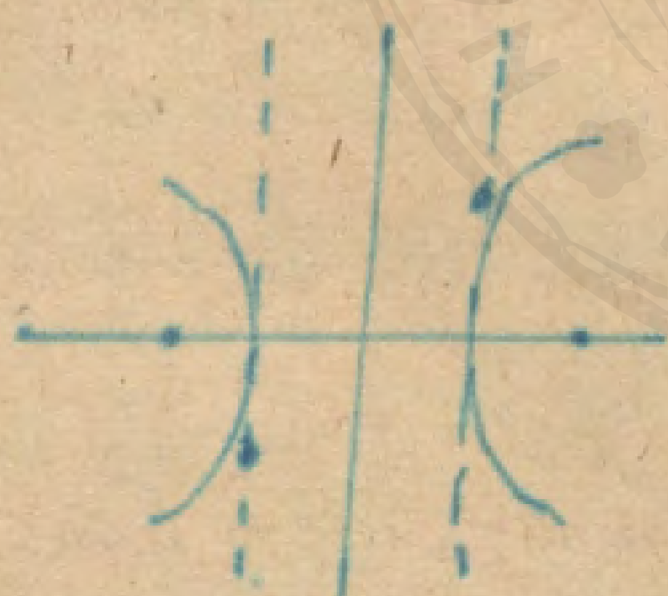
(13) 求橢圓上次切線與次法線相等之諸點．

答　$\left(\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

(14) 設兩等邊雙曲線，其漸近線各爲他雙曲線之軸時，求證兩雙曲線相交成直角．

(15) 用解析法證明雙曲線之一切線與二漸近線所成之三角形之面積爲一定．

(12) 很繁.



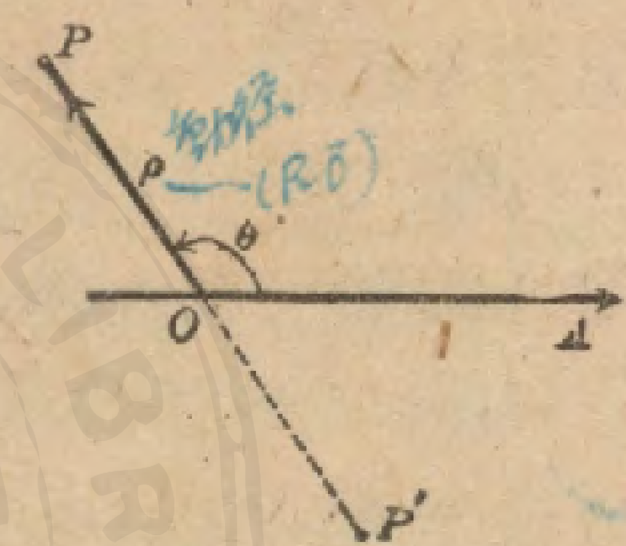
第九章

pole 極

極坐標(Polar coördinates)

極軸

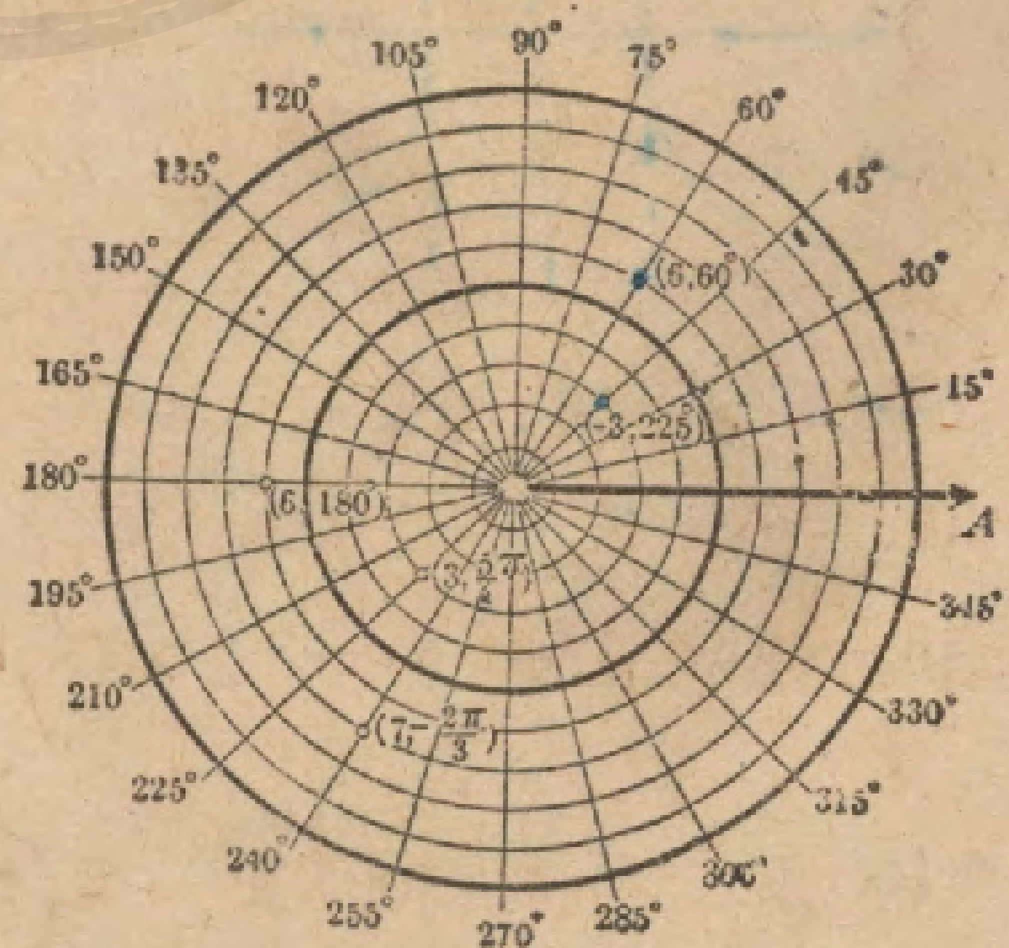
77. 極坐標. 本章將討論第二種平面上用坐標以決定點之位置方法. 此法有一已知定點 O 稱為極(Pole)與一過 O 點之定線 OA 稱為極軸(Polar axis). 於是一點 P 之位置可以 OP 之長 $=\rho$ 與 $\angle AOP=\theta$ 決定之. ρ 與 θ 二值稱為 P 之極坐標 (Polar coördinates); ρ 稱為動徑 (Radius vector) 而 θ 稱為變角 (Vectorial angle). 變角之正負與三角法中之意義相同 (見第 2 頁 5). 若 P 在 θ 之終線上, 則其動徑為正; 若 P 在終線過極 O 後之延線上, 則其動徑為負.



4, 15°　-4, 15°
-4, -15°

如, 圖中 P 之動徑為正, 而 P' 之動徑為負.

故每對實數 (ρ,θ) 顯然可決定一點, 而此點之作法可用

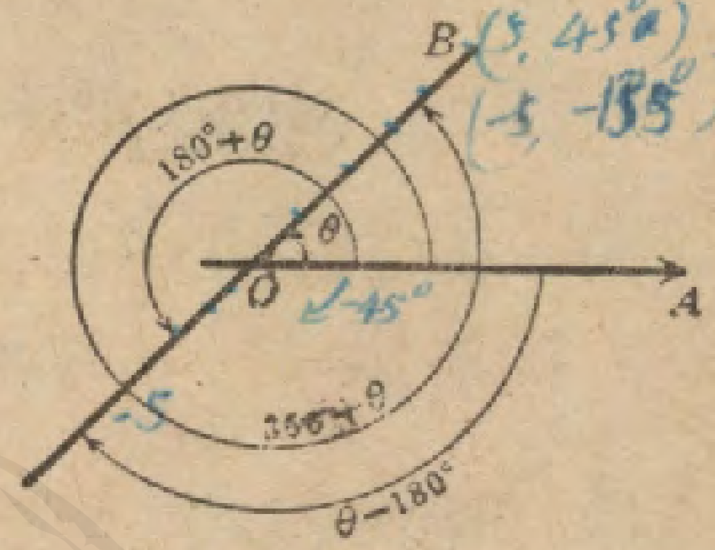


已知一點之極坐標(ρ,θ)之作圖規則.

(ρ, θ), $(-\rho, 180°+\theta)$ $(\rho, 360°+\theta)$

作變角θ之終線，與三角法中相同．設其動徑為正，則在θ之終線上截取 $OP=\rho$；設為負，則在其終線過極之延線上截取 OP 等於 ρ 之數值．於是 P 即為所求之點．

在第148頁上之圖中所作諸點其極坐標為 $(6, 60°)$，$(3, \frac{5}{4}\pi)$，$(-3, 225°)$，$(6, 180°)$，與 $(7, -\frac{2}{3}\pi)$．



如極角之大小及正負無限制，則每一點之極坐標，其數無限．

例如設 $OB=\rho$，則 B 之坐標可寫成下列各式之一，(ρ, θ)，$(-\rho, 180°+\theta)$，$(\rho, 360°+\theta)$，$(-\rho, \theta-180°)$，等等．

除特別聲明者外，常設θ為正或零，且小於360°；即 $0 \leqq \theta < 360°$．

習　　題 35

(1) 作 $(3, 30°)$ $(6, 120°)$，$(-5, -145°)$，$(-10, -20°)$，$(-4, 60°)$ 諸點．

(2) 作 $(10, 0°)$，$(-2, 90°)$ $(5, 180°)$，$(5, 18°)$，$(5, 100°)$，$(4\frac{1}{2}, 135°)$ 諸點．

(3) 證明點 (ρ, θ) 與點 $(\rho, -\theta)$ 對稱於極軸．

(4) 證明點 (ρ, θ) 與點 $(-\rho, \theta)$ 對稱於極．

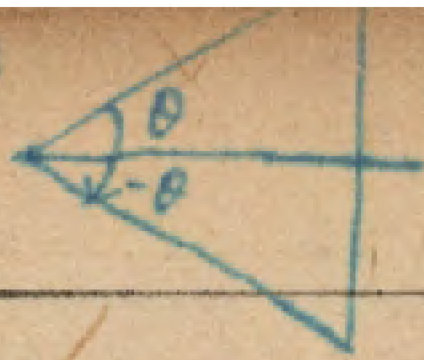
(5) 證明點 (ρ, θ) 與點 $(\rho, 180°-\theta)$ 對稱於直線 $\theta=90°$．

(6) 寫出題1與題2中各點之另一對坐標．

(7) (1) 兩點 $(3, 210°)$ 與 $(4, 30°)$ 間之距離為何？(2) 兩點 $(4, 45°)$ 與 $(-6, 45°)$ 間之距離為何？

(8) 連接二點 $(4, 60°)$ 與 $(3, 30°)$ 之直線與極軸所成之角為何？

(9) 求二點 $(1, 30°)$ 與 $(-2, 240°)$ 間之距離．(用第4頁11之餘弦定律)． 答 1.24.



78. 極方程式之作圖法. 解方程式以求 ρ 而以 θ 表之. 將 θ 之適宜值代入而算出 ρ 之對應值，直至所得諸點足夠決定曲線之形狀爲止. 連諸點成一曲線.

作圖以用極坐標紙爲便. 此紙有許多過極之直線以便繪 θ 之值，又有以極爲圓心之許多同心圓以便繪 ρ 之值.

第 4 節之表可用以造 ρ 與 θ 諸值之表.

例　　題

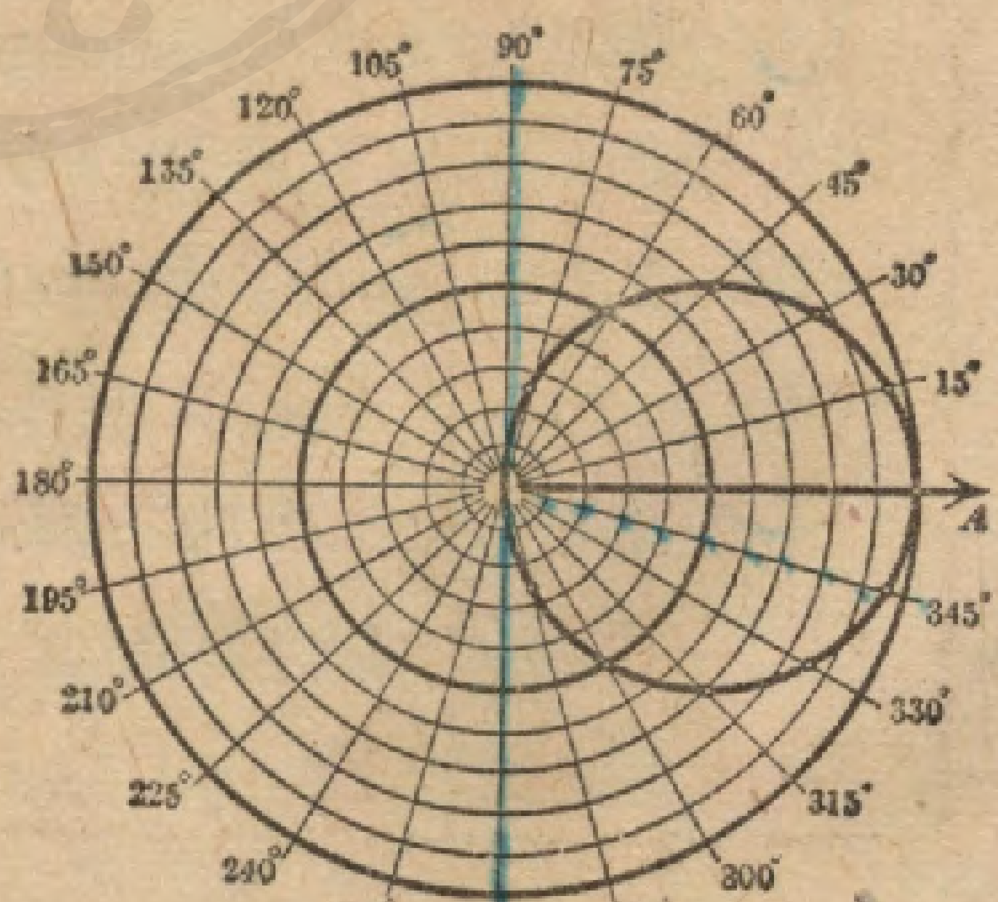
(1) 作方程式

$$\rho=10\cos\theta \text{ 之軌跡.} \tag{1}$$

[解] 如下表中，假設 θ 以種種數值而用第 3 頁之 8 以計算 ρ. 例如，設

$$\theta=105°,\rho=10\cos 105°=10\cos(180°-75°)$$
$$=-10\cos 75°=-2.6.$$

$\rho=10\cos\theta$			
θ	ρ	θ	ρ
0°	10	105°	−2.6
15°	9.7	120°	−5
30°	8.7	135°	−7.1
45°	7.1	150°	−8.7
60°	5	165°	−9.7
75°	2.6	180°	−10
90°	0		



此例題所得之全軌跡，其 θ 之值不出 180°.

討論. 1. 對稱. 因 $\cos(-\theta)=\cos\theta$(第 3 頁 8),故方程式(1)可寫成 $\rho=10\cos(-\theta)$; 即每一點 (ρ,θ) 在軌跡上,必有一第二點$(\rho,-\theta)$亦在軌跡上.因此二點對稱於極軸,故得下述結果:(1)之軌跡對稱於極軸.

2. 範圍. θ 之値無限制,但 ρ 必在 0 與 10 之間.故爲一閉曲線.在第 81 節內可知其爲一圓.

90

(2) 作方程式 →不能爲負

(2) $$\rho^2=a^2\cos 2\theta \text{ 之軌跡.}$$

[解] 作圖前,先討論此方程式. $\cos 2\theta<0$ $90^\circ>2\theta>270^\circ$

討論. 1. 對稱. (2)中改 θ 爲 $-\theta$ 而方程式不受其影響,又以 $-\rho$ 代 ρ 亦然.故此軌跡對稱於極軸及極.

2. 範圍. 因 $\cos 2\theta$ 之極大値爲 1,故 ρ 之極大値爲 a 而一閉曲線.

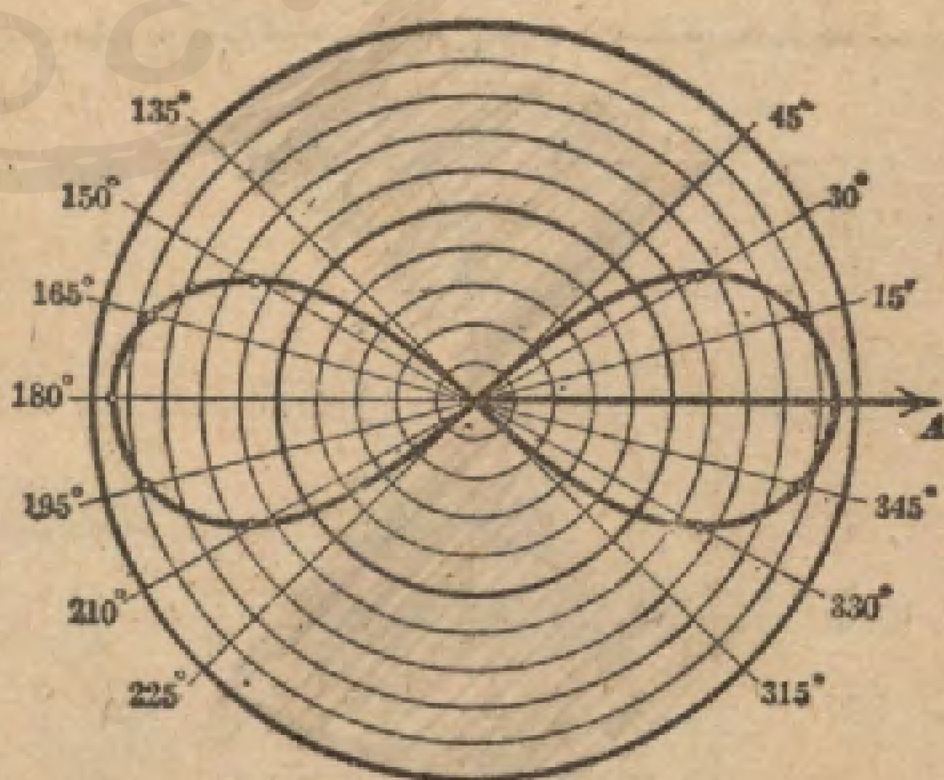
當 $\cos 2\theta$ 爲負時,ρ 爲虛數. 但 $\cos 2\theta$ 爲負則 2θ 爲第二或第三象限中之角;即當 $\rho^2=-$

$$90^\circ<2\theta<270^\circ,\text{ 或 }45^\circ<\theta<135^\circ$$

時,ρ 爲虛數.故此曲線無一部份在 45° 與 135°二線間者.

表中 θ 之値爲自 0° 至 45°.

$\rho^2=a^2\cos 2\theta$			
θ	2θ	$\cos 2\theta$	ρ
0°	0°	1	$\pm a$
15°	30°	.866	$\pm .93a$
30°	60°	.500	$\pm .7a$
45°	90°	0	0



此完全曲線可繪此諸點及其對稱於極軸諸點而得. 此曲線稱爲雙紐線(Lemniscate).圖中以 $a=9.5$.

(3) 討論並作方程式

(3)　　$\rho=\dfrac{2a}{1+\cos\theta}$ 之軌跡

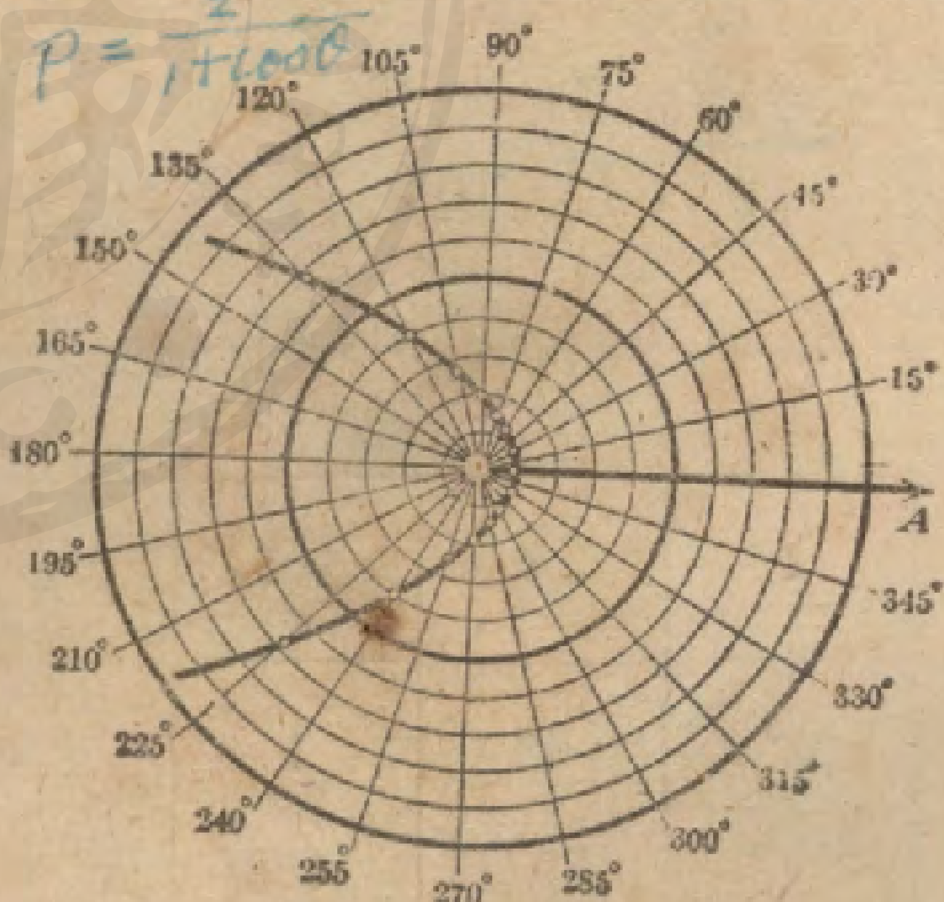
$\rho=2\div(1+\cos\theta)$							
θ	$\cos\theta$	$1+\cos\theta$	ρ	θ	$\cos\theta$	$+\cos\theta$	ρ
0°	1	2	1	105°	−.259	.741	2.7
15°	.966	1.966	1.02	120°	−.500	.500	4
30°	.866	1.866	1.07	135°	−.70	.293	6.8
45°	.707	1.707	1.2	150°	−.866	.134	15
60°	.500	1.500	1.3	165°	−.96	.034	59
75°	.259	1.259	1.6	180°	−1	0	∞
90°	0	1	2				

[解]　討論.　1. 對稱.　因 θ 可以 $-\theta$ 代之，故此曲線對稱於極軸.

$\rho\to\infty$　$a=1$　$\rho=\frac{2}{1+\cos\theta}$

2. 範圍.　當 $1+\cos\theta=0$，或 $\cos\theta=-1$，卽 $\theta=180°$ 時，ρ 爲無限遠. 故曲線在 $\theta=180°$ 之方向伸展至無限遠而 θ 無除外之值.

表中之值祇算至 $\theta=180°$，其餘諸點可由其對稱於極軸之關係而得，取 $a=1$. 此軌跡稱爲拋物線.



極方程式之討論　參考上述例題可知極易決定.

(1) 曲線對於極軸，極，或直線 $\theta=90°$ 之對稱(見第77節題5).

(2) 曲線之範　(閉曲線或非閉曲線).

在作極方程式之前，學者應先討論之而得其簡單之性質，如上例所示.

習 題 36.

討論並繪下列方程式之軌跡:

(1) $\rho=8$.

(2) $\theta=135^\circ$.

(3) $\rho=10\sin\theta$.

(4) $\rho=\ \sin\theta+3\cos\theta$.

(5) $\rho\sin\theta=5$.

(6) $\rho=\dfrac{4}{1+\ \text{os}\,\theta}$.

(7) $\rho=\dfrac{8}{2+\cos\theta}$.

(8) $\rho=\dfrac{8}{1+2\cos\theta}$.

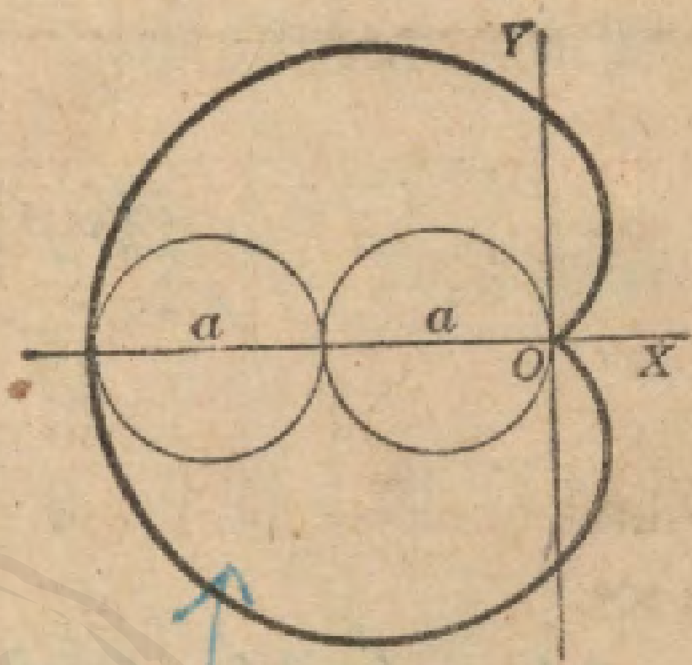
(9) $\rho=a\sin 2\theta$.

(10) $\rho=2(1+\tan\theta)$.

(11) $\rho^2\sin 2\theta=9$.

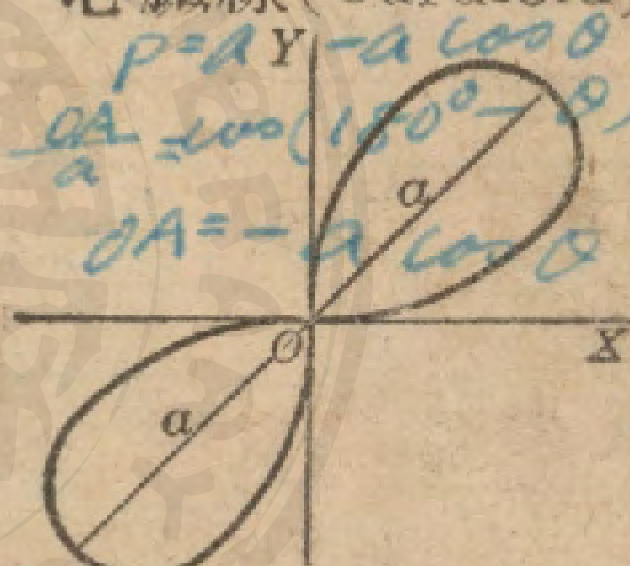
(12) $\rho^2\cos 2\theta=a^2$.

(13) $\rho=a\sin\theta\tan\theta$.



(15) $\rho=a(1-\cos\theta)$.

心臟線(Cardioid)



$\rho = a\ Y - a\cos\theta$

$\frac{\partial A}{a} = \cos(180^\circ-\theta) = -\cos\theta$

$\partial A = -a\cos\theta$

$P = a + a$

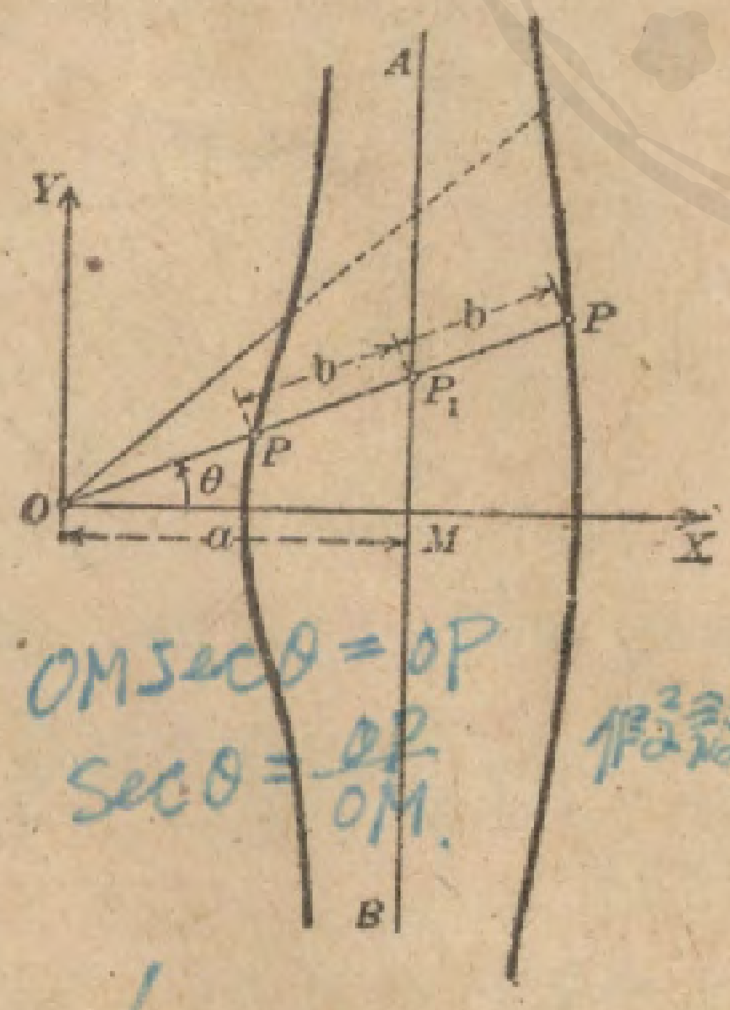
$\angle 1+\angle 2+\angle 3 =$

$1+\theta = 180^\circ$

(16) $\rho^2=a^2\sin 2\theta$.

二葉薔薇雙紐線

(Two-Leaved Rose Lemniscate)



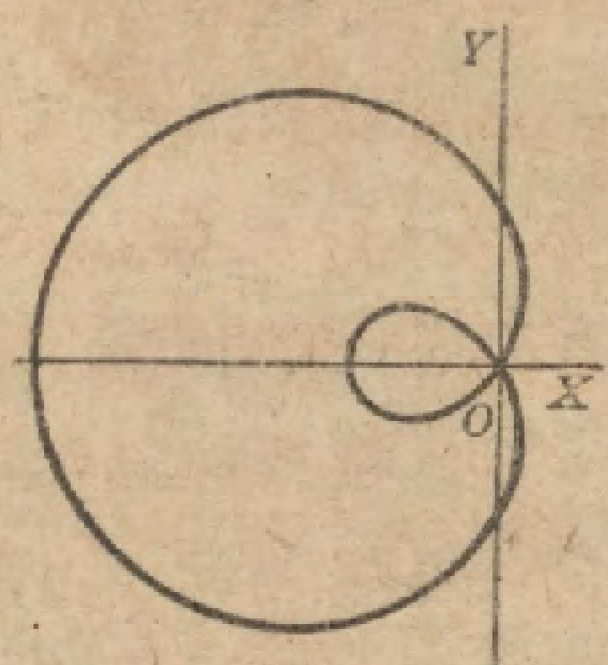
OM sec θ = OP

sec θ = OP/OM.

假設 cos θ = A°

(14) $\rho=a\sec\theta\pm b;\ b<a$.

尼氏蚌線(Conchoid of Nicomedes)



(17) $\rho=b-a\cos\theta;\ b<a$.

蝸線(Limacon)

(18)作蚌線(題 14)以 $b=a$; 與 $b>a$.

(19)作蝸線(題 17)以 $b>a$.

79. 極方程式之作圖捷法. 當一草圖已足用時,得者應具繪極方程式之敏捷技能.

例 題

作方程式 常數.

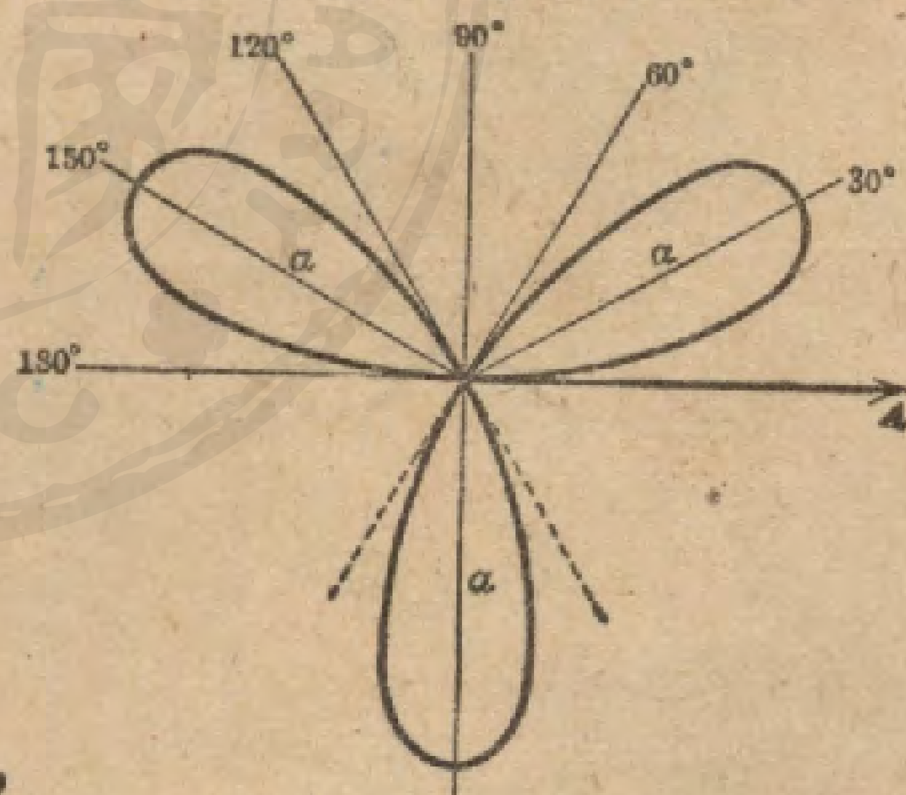
(1) $\rho=a\sin 3\theta$ 之軌跡.

[解] 設 θ 從 $0°$ 漸增.從(1),ρ 之値亦隨 3θ 繼續經過諸象限而俱變.

3θ $0°\to 90°$ $90°\to 180°$ $180°\to 270°$

當 3θ 之變化自	$0°$ 至 $90°$	$90°$ 至 $180°$	$180°$ 至 $270°$	$270°$ 至 $360°$	$360°$ 至 $450°$	$450°$ 至 $540°$
則 θ 之變化自	$0°$ 至 $30°$	$30°$ 至 $60°$	$60°$ 至 $90°$	$90°$ 至 $120°$	$120°$ 至 $150°$	$150°$ 至 $180°$
而 ρ 之變化自	0 至 a	a 至 0	0 至 $-a$	$-a$ 至 0	0 至 a	a 至 0

例如,當 3θ 之變化自 $270°$ 至 $360°$, 卽在第四象限內之一角,則 ρ 爲負而從 $-a$ 增至 0.



現於 θ 之諸間隔處,卽 $0°,30°,60°,90°,120°,150°,180°$,作諸射線.

記出 ρ 之變化與 θ 之對應變化,作曲線之略圖如下:

此曲線自極開始,其方向由 $0°$ 而經 $30°$ 之直線,且垂直於 $\rho=a$ 處,然後折回而與 $60°$ 之直線遇於極處.再經 $90°$ 之延長線而垂直於 $\rho=-a$ 處.又折回而與 $120°$ 直線之延線遇於極處.再進而垂直 $150°$ 之直線於 $\rho=a$ 處,更折回遇 $180°$ 之直線於極.

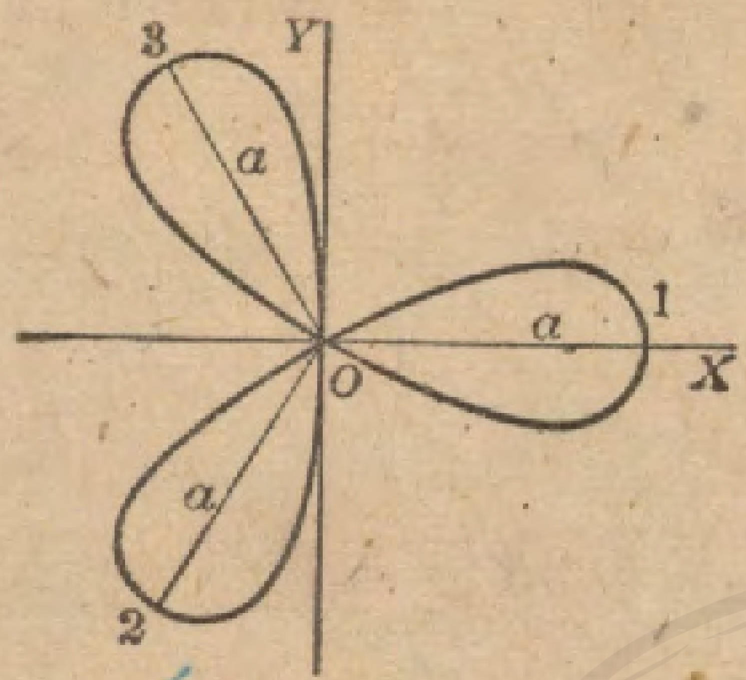
如此得一完全軌跡.作圖時筆尖須連貫移動其方向之變更不能斷續,最後須回至原位置與原方向.

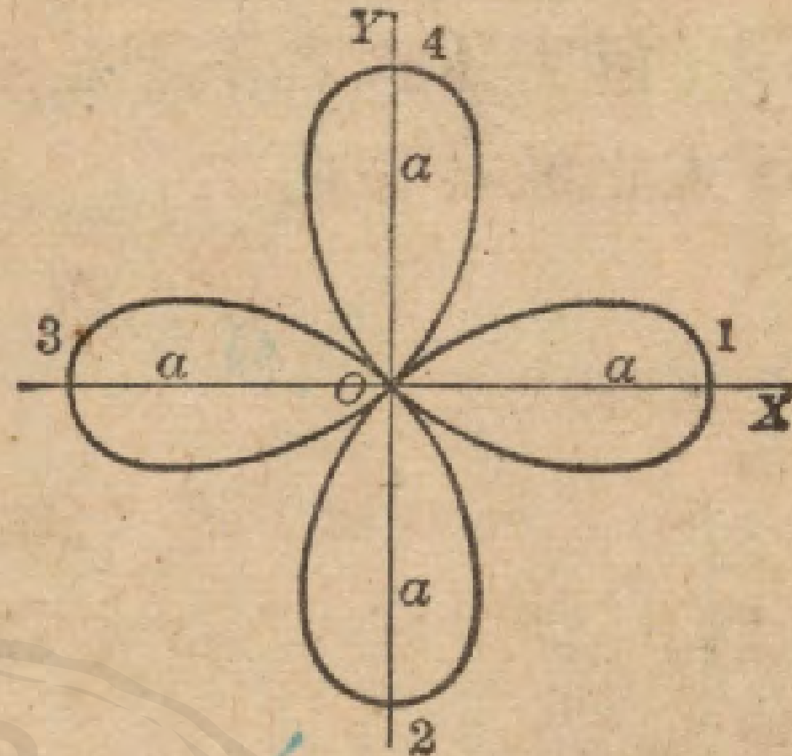
此曲線稱爲三葉薔薇線(Three-leaved rose).

cosθ

習　　題 37

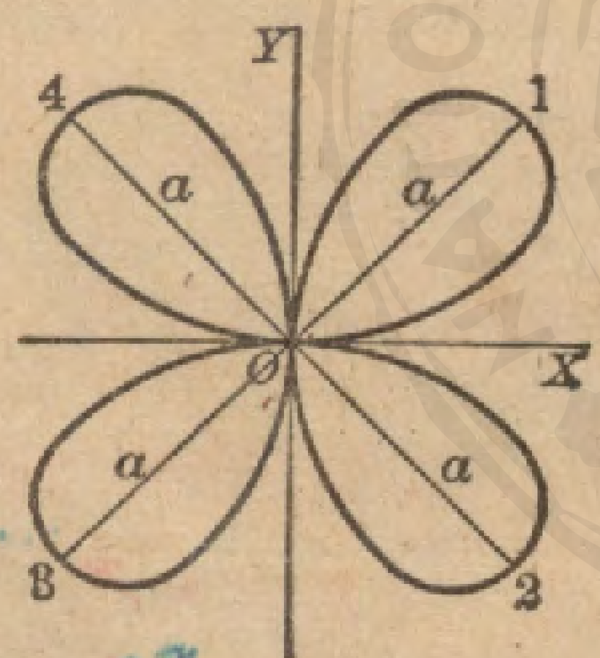
作下列方程式之軌跡

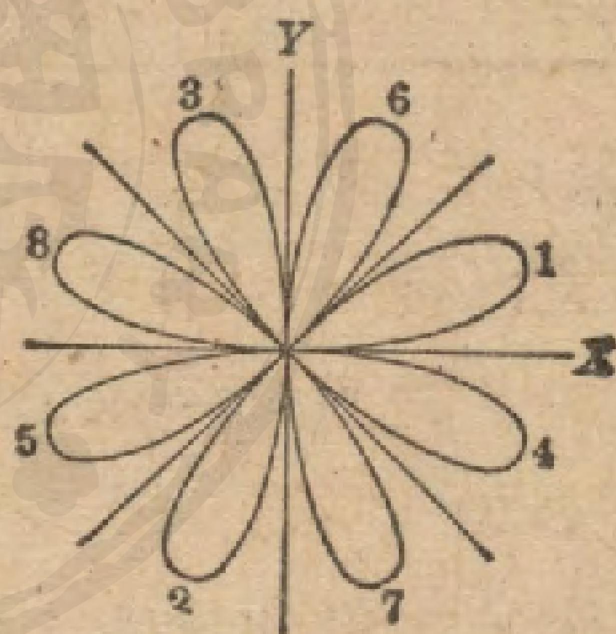




(1) $\rho=a\cos 3\theta$.
三葉薔薇線
(Three-leav d rose)

(3) $\rho=a\cos 2\theta$.
四葉薔薇線
(Four-leaved rose)





(2) $\rho=a\sin 2\theta$.
四葉薔薇線
(Four-leaved rose)

(4) $\rho=a\sin 4\theta$.
八葉薔薇線
(Eight l av d rose)

(5) $\rho=a\cos\frac{1}{2}\theta$.

(6) $\rho=a\sin\frac{2}{3}\theta$.

(7) $\rho=a\cos 4\theta$.

(8) $\rho=a(1+2\sin\theta)$.

(9) $\rho=a(2+\cos\theta)$.

(10) $\rho=a\sin(\theta+45°)$.

(11) $\rho=a\cos(\theta+\frac{\pi}{6})$.

(12) $\rho=a\sin\frac{1}{3}\theta$.

(13) $\rho=a\cos\frac{2}{3}\theta$.

(14) $\rho=a\cos\frac{1}{3}\theta$.

(15) $\rho=a\sin^2\frac{1}{2}\theta$.

(16) $\rho=a\cos^2\frac{1}{2}\theta$.

(17) $\rho=a\sin^3\frac{1}{3}\theta$.

(18) $\rho=a\cos^3\frac{1}{3}\theta$.

80. 直坐標與極坐標之關係.

定理. 設極與原點重合而極軸與正 x 軸重合,則

(I) $$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases}$$

此處(x,y)爲任一點之直坐標而(ρ,θ)爲其極坐標.

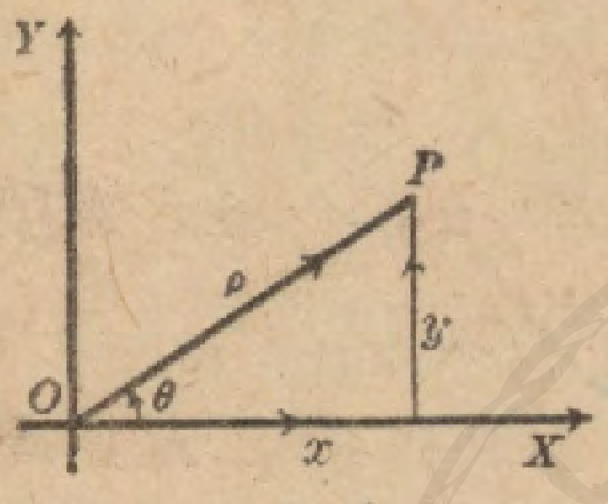


圖 1

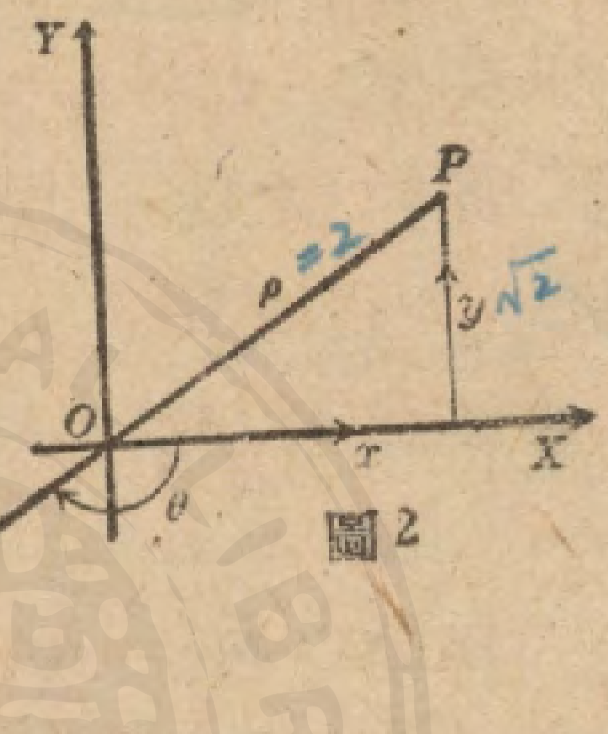


圖 2

[證] 當 ρ 爲正時(圖 1),不論 P 在何象限內,從定理,得

$$\cos\theta=\frac{x}{\rho}, \qquad \sin\theta=\frac{y}{\rho}.$$

解之,得

(1) $$x=\rho\cos\theta, \qquad y=\rho\sin\theta.$$

當 ρ 爲負時(圖 2),作 P' 點其直坐標與極坐標各爲$(-x,-y)$與$(-\rho,\theta)$. 由(1),因$-\rho$ 爲正,故 P' 之

$-\sqrt{2}=-2\cos 45^\circ=-2\times\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$-x=-\rho\cos\theta, \qquad -y=-\rho\sin\theta;$$ $=-\sqrt{2}$

或 $$x=\rho\cos\theta, \qquad y=\rho\sin\theta$$

與前者相同。 *Q.E.D.*

一曲線之直坐標方程式已知時, 可用方程式 (I) 以求其極

坐標方程式.從上二圖,又得數有用公式如下:

$$(2)\quad \begin{cases}\rho^2=x^2+y^2, & \theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x},\\ \sin\theta=\dfrac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}, & \cos\theta=\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}.\end{cases}$$

此等方程式皆以任一點之直坐標表其極坐標.

例　　題

(1) 求圖 $x^2+y^2=25$ 之極坐標方程式.

[解]. 從(2)之第一方程式,立得 $\rho^2=25$;故 $\rho=\pm5$ 爲所求之方程式.此表明從原點至(ρ,θ)之距離爲五單位.

(2) 求雙紐線(第 151 頁例題 2) $\rho^2=a^2\cos2\theta$ 之直坐標方程式.

[解] 用第 3 頁之 10, $\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$,

$$\rho^2=a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta).$$

從(2),得

$$x^2+y^2=a^2\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}-\frac{y^2}{x^2+y^2}\right).$$

$$\therefore (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).\qquad 答.$$

81. 應用. 直線與圓.

定理. 一直線之極坐標普遍方程式爲

(II)　　$\rho(A\cos\theta+B\sin\theta)+C=0,$

其中之 A, B, 與 C 爲任意常數.

[證] 直線之直坐標普遍方程式爲

$$Ax+By+C=0.$$

用(I)之公式代入,卽得(II).　　Q.E.D.

(II)之特別情形爲 $\rho\cos\theta=a$, $\rho\sin\theta=b$, 各因 $B=0$ 或 $A=0$ 而得,卽此直線平行於 OY 或 OX 時之極方程式也.

$l^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2$

$= \rho_1^2\cos^2\theta_1 - 2\rho_1\cos\theta_1\rho_2\cos\theta_2 + \rho_2^2\cos^2\theta_2 + \rho_1^2\sin^2\theta_1 - 2\rho_1\sin\theta_1\rho_2\sin\theta_2 + \rho_2^2\sin^2\theta_2 = \rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)$

同法,從第 34 節(2)得

定理. 一圓之極坐標普遍方程式為

(III) $$\rho^2+\rho(D\cos\theta+E\sin\theta)+F=0,$$

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

其中之 $D,E,$ 與 F 為任意常數.

$\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+D\rho\cos\theta+E\rho\sin\theta+F=0$

設極在圓周上而極軸為直徑,則方程式為

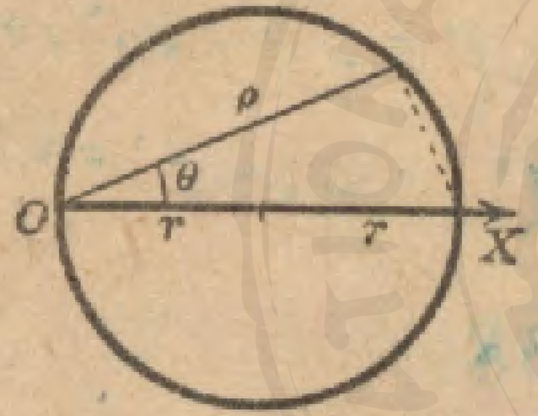
$\frac{\rho}{2r}=\cos\theta$ $$\rho=2r\cos\theta,$$

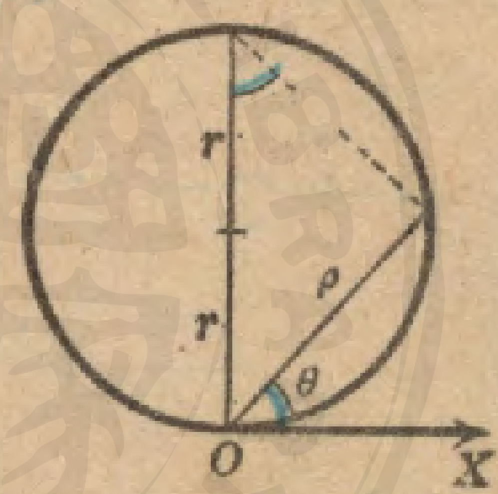
$\rho^2+\rho(D\cos\theta+E\sin\theta)+F=0$

r 為圓之半徑.

同理,設圓切極軸於極,則其方程式為 $\rho=2r\sin\theta$. 此等結果皆可由下圖直接求得之.

$\frac{\rho}{2r}=\sin\theta$





定理. 連 $P_1(\rho_1,\theta_1)$ 與 $P_2(\rho_2,\theta_2)$ 二點之線段長 l 其公式為

(IV) $$l^2=\rho_1{}^2+\rho_2{}^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2).$$

〔證〕 設 P_1 與 P_2 之直坐標各為 (x_1,y_1) 與 (x_2,y_2). 則用第 80 節 (I),

$$\begin{cases}x_1=\rho_1\cos\theta_1,\\ y_1=\rho_1\sin\theta_1,\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=\rho_2\cos\theta_2,\\ y_2=\rho_2\sin\theta_2.\end{cases}$$

$\frac{\rho}{2r}=\cos\theta$

$\rho=2r\sin\theta.$

但 $$l^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2,$$

故 $$l^2=(\rho_1\cos\theta_1-\rho_2\cos\theta_2)^2+(\rho_1\sin\theta_1-\rho_2\sin\theta_2)^2.$$

去括號而用第 3 頁之公式 7 與 9, 卽得(IV).　　*Q.E.D.*

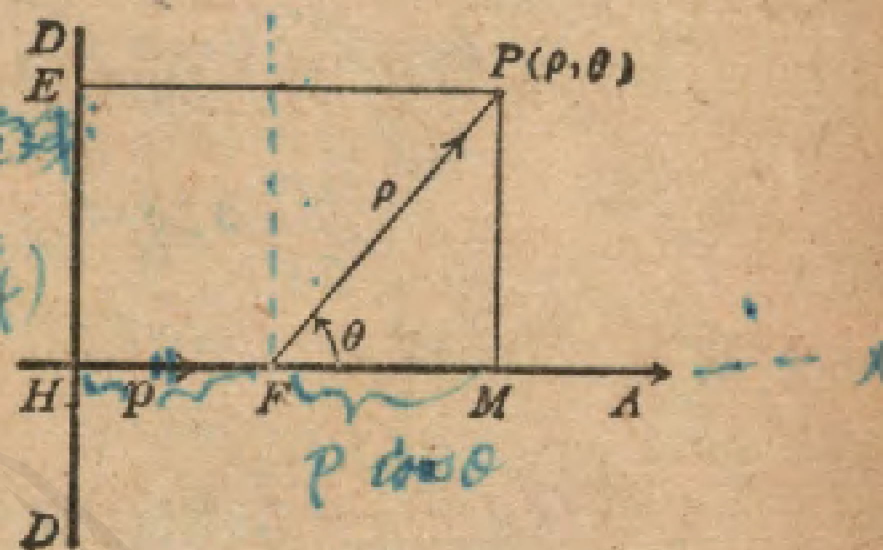
公式(IV)又可用餘弦定律(第 4 頁之 11)直接從圖求得之.

82. 圓錐曲線之極方程式.

定理. 設極在焦點而極軸垂直於準線，又假定 e 爲離心率，p 爲焦點至準線之距離，則圓錐曲線之極方程式爲

e: 離心率　p: 焦點至準線间之距離.

(V)　　$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}.$$



［證］ 設 P 爲圓錐曲線上任一點，則

從定義(見第 66 節)，　$\frac{FP}{EP}=e.$ (离心率定義)

從圖，　$FP=\rho$，

而　$EP=HM=p+\rho\cos\theta.$

代入上式，得　$\frac{\rho}{p+\rho\cos\theta}=e.$

$\therefore \rho=ep+e\rho\cos\theta$

$\rho(1-e\cos\theta)=ep$

解 ρ，卽得(V).　　Q.E.D.

習　題　38.

(1) 求$(5,12)$，$(13,12)$，$(-4,-3)$，$(\sqrt{3},1)$，$(-2\sqrt{3},2)$，$(1,-1)$，$(5,5)$，諸點之極坐標.

(2) 改下列各方程式爲極方程式，並作其軌跡：

(a) $2x-5y=0$.　　答　$\tan\theta=\frac{2}{5}$.

(b) $4x-3y+6=0$.

(c) $x^2+y^2=25$.　　答　$\rho=\pm5$.

(d) $x^2+y^2+2x=0$.

(e) $x^2+y^2-2x+4y=5$.　　答　$\rho^2-\rho(2\cos\theta-4\sin\theta)=5$.

(f) $xy=a$.

(g) $x^2-y^2=a^2$.　　答　$\rho^2\cos2\theta=a^2$.

(h) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

(i) $(x^2+y^2+bx)^2-a^2(x^2+y^2)=0$.

(j) $(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0$.

(k) $y^2=3x^3$.

(3) 改下列極方程式爲直坐標方程式:

(a) $\rho=7$.

(b) $\theta=15^\circ$

(c) $\rho=4\sin\theta$.

(d) $=6\cos\theta$.

(e) $\rho^2=9\cos^2\theta$.

(f) $\rho^2=4\cot\theta$.

答 $x^2y+y^3=4x$.

(g) $\rho=\frac{1}{3}\tan\theta$.

(h) $\rho=4\sec\theta$.

(i) $\rho(2\cos\theta+3\sin\theta)+5=0$.

答 $2x+3y+5=0$.

(j) $\rho(7\cos\theta-5\sin\theta)=7$.

(k) $\rho=5\csc\theta$.

(l) $\rho^2\cos 2\theta=16$.

(m) $\rho+6\cot\theta\csc\theta=0$. 答 $y^2+6x=0$.

(n) $\rho=\dfrac{6}{1+2\cos\theta}$.

(4) 設極軸繞極旋轉 α 角,則任一點之舊坐標(ρ,θ)與其新坐標(ρ',θ')間之關係若何?

(5) 設極軸繞極旋轉 90°,卽使與第 82 節所述之圓錐曲線之準線平行,則方程式(V)成何形狀? 答 $\rho=\dfrac{ep}{1+e\sin\theta}$.

(6) 將下列各圓錐曲線之方程式與第 82 節之(V)或題 5 比較之而求 e 與 p. 作圖並畫出其準線.

(a) $\rho=\dfrac{7}{2-2\cos\theta}$. 答 $e=1, p=\frac{7}{2}$.

(b) $\rho=\dfrac{16}{2+\sin\theta}$. 答 $e=\frac{1}{2}, p=16$.

(c) $\rho=\dfrac{12}{1+3\cos\theta}$.

(d) $\rho=\dfrac{10}{2-\sin\theta}$.

83. 交點. 欲求兩極坐標曲線之交點,正與直坐標制中所用之法相似,將兩極方程式聯立解之卽得.最便之法莫如消去 ρ 而得一含 θ 之超越方程式(Transcendental equation).

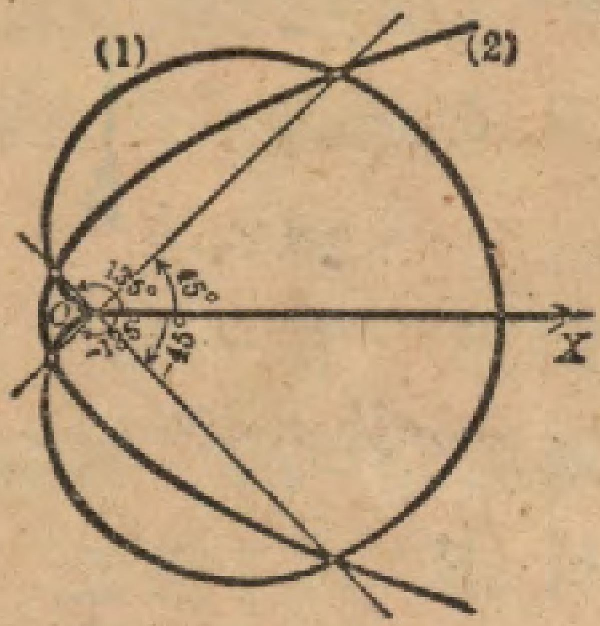
下例說明此法:

例　　題

求下列兩方程式軌跡之交點:

$$\begin{cases} \rho=1+\cos\theta, & (1)\\[2ex] \rho=\dfrac{1}{2(1-\cos\theta)}. & (2)\end{cases}$$

［解］　消去 ρ，



$$1+\cos\theta=\frac{1}{2(1-\cos\theta)}.$$

或
$$1-\cos^2\theta=\tfrac{1}{2},$$
$\cos\theta^2=1-\frac{1}{2}$
$$\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
$$\therefore\ \theta=\pm45^\circ,\pm135^\circ.$$

代入上述任一方程式中，即得四點，

$$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},\pm45^\circ\right),\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\pm135^\circ\right)\qquad 答.$$

結果可於圖中驗之，(1)之軌跡為心臟線；(2)之軌跡為拋物線．

習　　題　39

求下列各對曲線之交點並作圖以驗之：

(1) $\begin{cases}\rho=4\sin\theta,\\ \rho=2.\end{cases}$

答　$(2,30^\circ),(2,150^\circ)$.

(2) $\begin{cases}\rho=1+\quad os\,\theta,\\ \rho=\frac{1}{2}.\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\rho=2a\sin\theta,\\ \rho=2a.\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\rho\cos\theta=4a,\\ \rho=4a\cos\theta.\end{cases}$

答　$(4a,0^\circ),(-4a,180^\circ)$.

(5) $\begin{cases}\rho=\sin\theta,\\ \rho=\cos2\theta.\end{cases}$

答　$(\frac{1}{2},30^\circ),(\frac{1}{2},150^\circ)$.

(6) $\begin{cases}\rho=\cos2\theta,\\ \rho=\frac{1}{2}.\end{cases}$

(7) $\begin{cases}\rho=4+4\cos\theta,\\ \rho(1-\cos\theta)=3.\end{cases}$

答　$(6,\pm60^\circ),(2,\pm120^\circ)$.

(8) $\begin{cases}\rho^2=\sin2\theta,\\ \rho=\sqrt{2}\sin\theta.\end{cases}$

(9) $\begin{cases}\rho=5-2\sin\theta,\\ \rho=\dfrac{6}{1+\sin\theta}.\end{cases}$

(10) $\begin{cases}\rho^2\cos2\theta=a^2,\\ \rho=\sqrt{2}a.\end{cases}$

(11) $\begin{cases}\rho\cos(\theta-60^\circ)=a,\\ \rho\cos(\theta-30^\circ)=a.\end{cases}$

(12) $\begin{cases}\rho=\dfrac{3}{2-\cos\theta}.\\ \rho=2\end{cases}$

(13) $\begin{cases}\rho=6\sin\theta,\\ \rho=2(1+\cos\theta).\end{cases}$

(14) $\begin{cases}\rho=a\sin\theta,\\ \rho=a\sin2\theta.\end{cases}$

(15) $\begin{cases}\rho=2+\cos\theta,\\ 4\rho(1-\cos\theta)=9.\end{cases}$　答　$(\frac{3}{2},120^\circ),(\frac{3}{2},240^\circ)$.

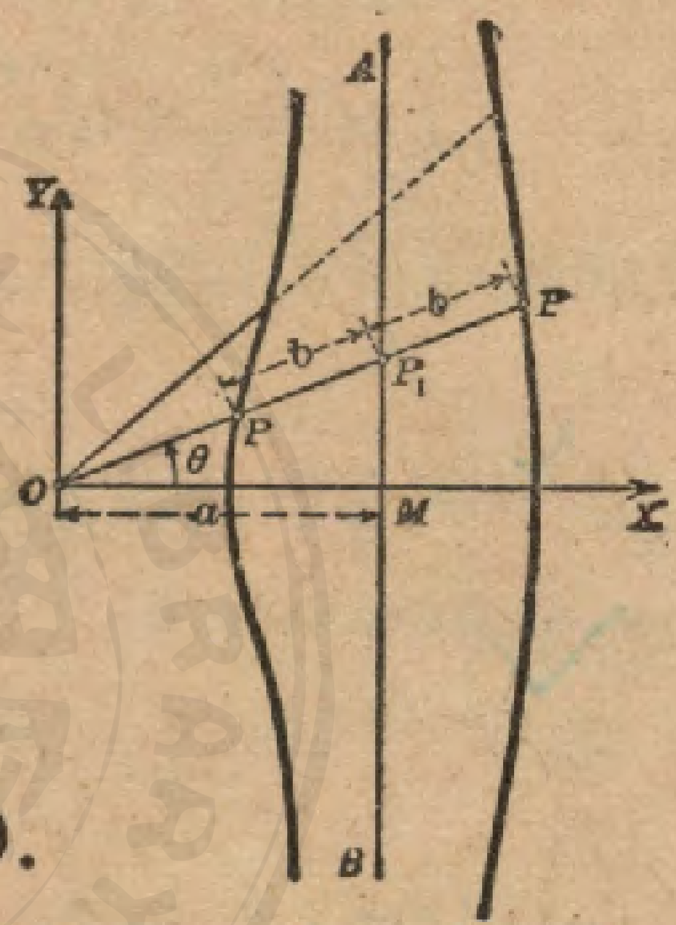
84. 用極坐標求軌跡法.　直線之一端固定,而他端隨其長短而變易,則他端所作之曲線以用極坐標求之爲便.

例　　題 (重要)

蚌線.　求一點 P 之軌跡,其作法如下:

過定點 O 作一線截一定線 AB 於 P_1. 在此線上取點 P 使 $P_1P=\pm b$, 而 b 爲一常數.

〔解〕　此所求之軌跡爲直線 OP 端點 P 之軌跡而 O 爲定點. 故用極坐標制,取 O 爲極而對於 AB 之垂直線 OM 爲極軸. 於是



(1)　　$OP=\rho$　$\angle MOP=\theta$.

從作法,

(2)　　$\rho=OP=OP_1\pm b$.

但在直角$\triangle OMP_1$中,

(3)　　$OP_1=OM\sec\angle MOP_1=a\sec\theta$.

將(3)代入(2),

(4)　　$\rho=a\sec\theta\pm b$.

此方程式之軌跡稱爲尼氏蚌線,依 a 大於 b, 等於 b, 或小於 b 而有三種不同之形狀.

習　　題 40

(1) 從極作圓 $\rho=2r\cos\theta$ 之諸弦. 求各弦中點所成軌跡之方程式.

(2) 延長定圓 $\rho=a\cos\theta$ 之弦 OB 至 P, 而 BP 之長由下述條件決定之. 求 P 之軌跡並作其圖.

(a) BP 等於自極軸至之 B 垂直距離.

答　$\rho=a\cos\theta(1+\sin\theta)$.

(b) $BP=$直徑 $=a$ (見圖 1.)

答　心臟線 $\rho=a(1+\cos\theta)$.

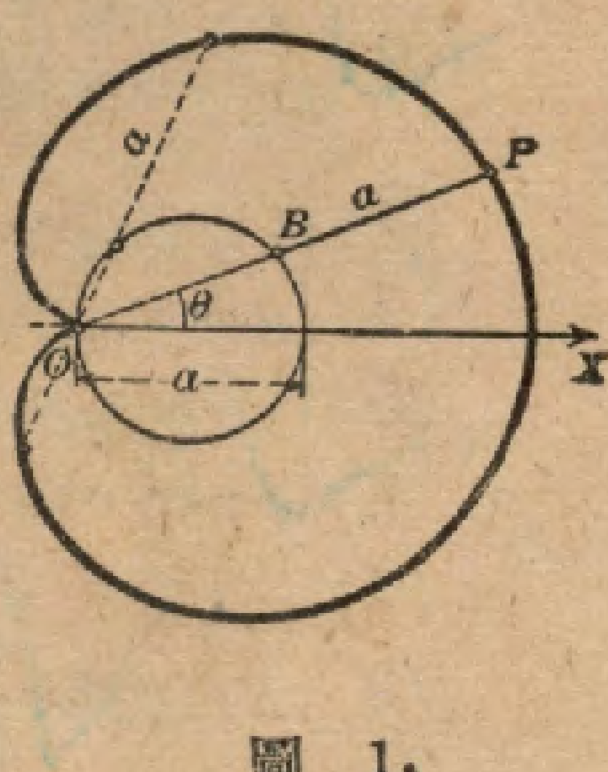


圖　1.

(c) BP＝半徑＝$\frac{1}{2}a$.(見第 153 頁圖 17.)　　答　蝸線 $\rho=a(\frac{1}{2}+\cos\theta)$.

(d) $BP=AB$ (見圖 2.)　　答　圓 $\rho=a(\sin\theta+\cos\theta)$.

(e) $BP=2AB$.

(f) $BP=\frac{3}{2}a$.

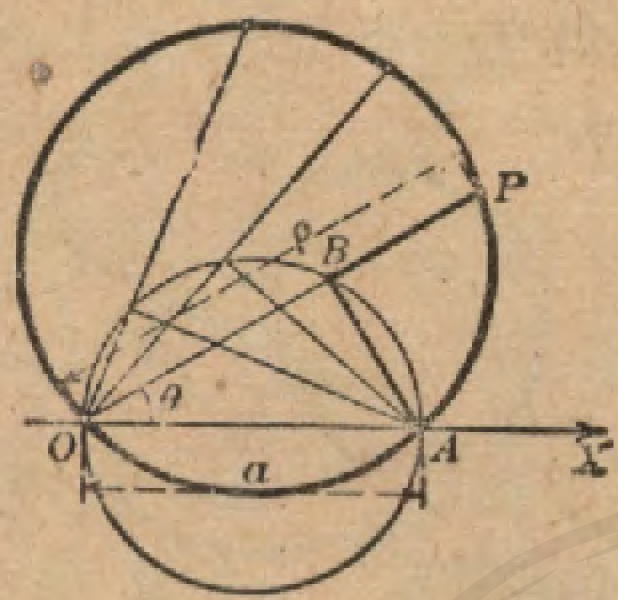


圖 2.

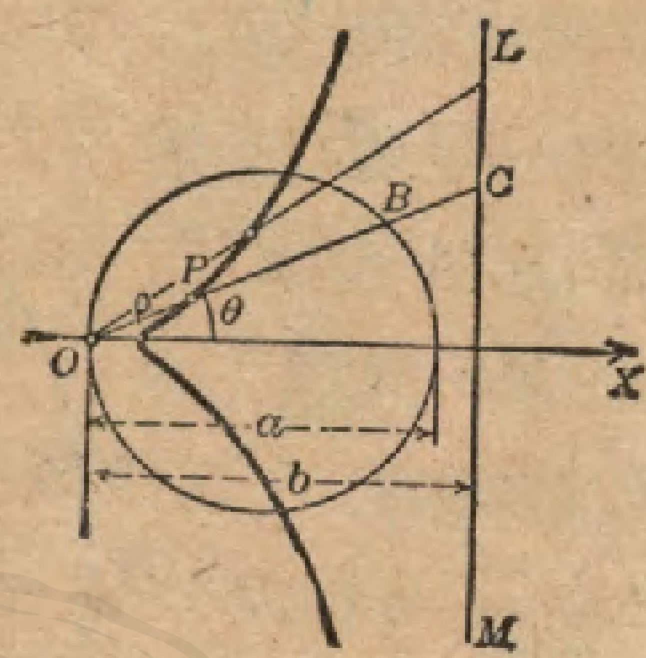


圖 3.

(3) 從定圓上定點 O 作諸線使與過 O 點之直徑之垂線 LM 相遇.在此諸線中之任一線,如 OC 上截取 $OP=BC$. 則 點之軌跡爲何?(圖 3)　　答　$\rho=b\sec\theta-a\cos\theta$.

設(1)$b=4,a=3$; (2)$b=3,a=4$; (3)$a=b=4$.作其軌跡.

當 $a=b$ 時,此曲線爲蔓葉線(Cissoid)(第 95 節題 8).

(4) 自極 O 作一直線過直線 $\rho\cos\theta=4$ 於 M.依下已知條件,求 OM 上一點 P 之軌跡之方程式並作圖.

(a) $MP=4$ (b) $MP=OM+4$.(c) $OM\cdot OP=12$.

特設習題

作下列諸軌跡之圖形:

(1) $\rho=a\sin\theta+b\sec\theta$.

(2) $\left(\rho-\dfrac{a}{2}\right)^2=a^2\cos 2\theta$.

(3) $\rho=a\ \cos 2\theta+\sin 2\theta)$.

(4) $\rho=a\cos 2\theta+\frac{1}{2}a\sec\theta$.

(5) $\rho=a\sin 2\theta+\frac{1}{2}a\sec\theta$.

(6) $\rho=a\cos 2\theta+b\cos\theta$

(7) $\rho=a\sin 2\theta+b\cos\theta$.

(8) $\rho=a\cos 2\theta+b(\sin\theta+1)$.

(9) $\rho=a\cos 3\theta-b\cos\theta$.

(10) $\rho=\cos 3\theta+\cos\theta+1$.

(11) $\rho=\cos 3\theta+\cos 2\theta$.

(12 $\rho=\cos 3\theta-\sin 2\theta$.

(13) $\rho^2\cos\theta=a^2\sin 3\theta$.

(14) $\rho^2=\dfrac{2\cos\theta}{\cos 2\theta}+1$.

(15) $\rho^2=\dfrac{2\cos 2\theta}{\cos\theta+2}+1$.

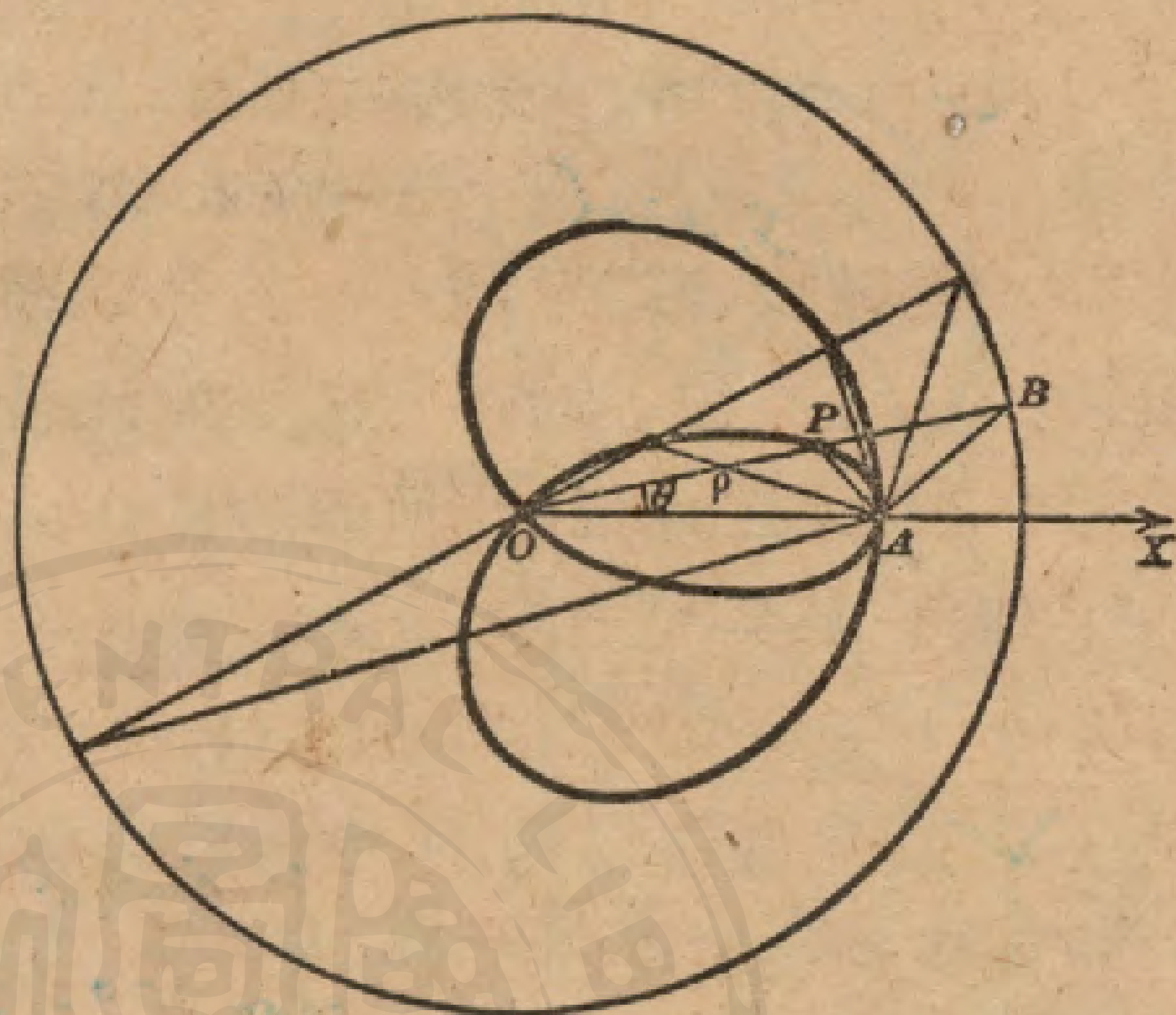
(16) 在橢圓 $\rho=\dfrac{6}{2-\cos\theta}$ 之一動徑(焦點半徑) FQ 上從 Q 向 F 截取線段 $QP=4$. 求 P 之軌跡.(線段 $QP=$半長軸.)

8 (17) O 爲定圓之圓心而 A 爲圓內一定點.作任一半徑 OB, 連 A 與 B, 而作 AP 垂直 AB 且遇 OB 於 P. 求 P 之軌跡.

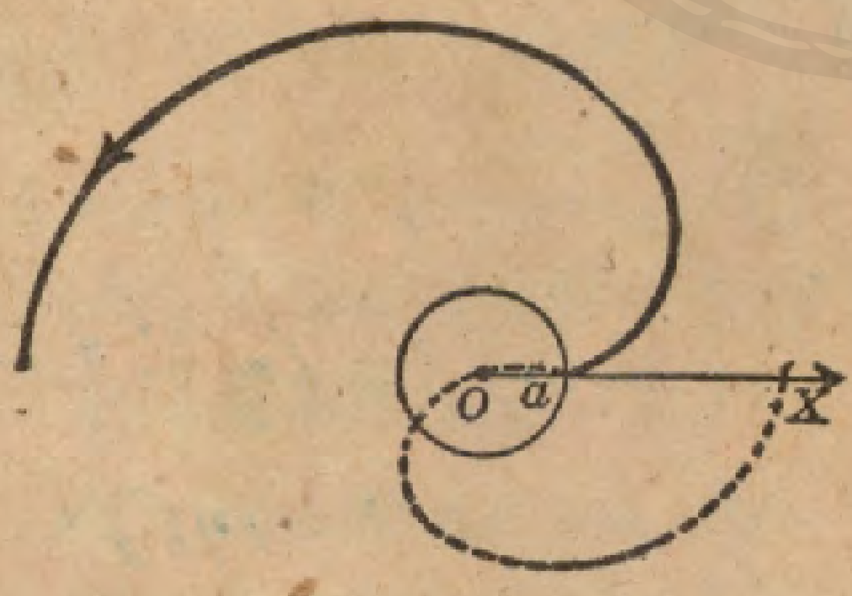
答 $\rho=e\dfrac{e-a\cos\theta}{e\cos\theta-a}$.

所設 $OB=a$, $OA=e$.

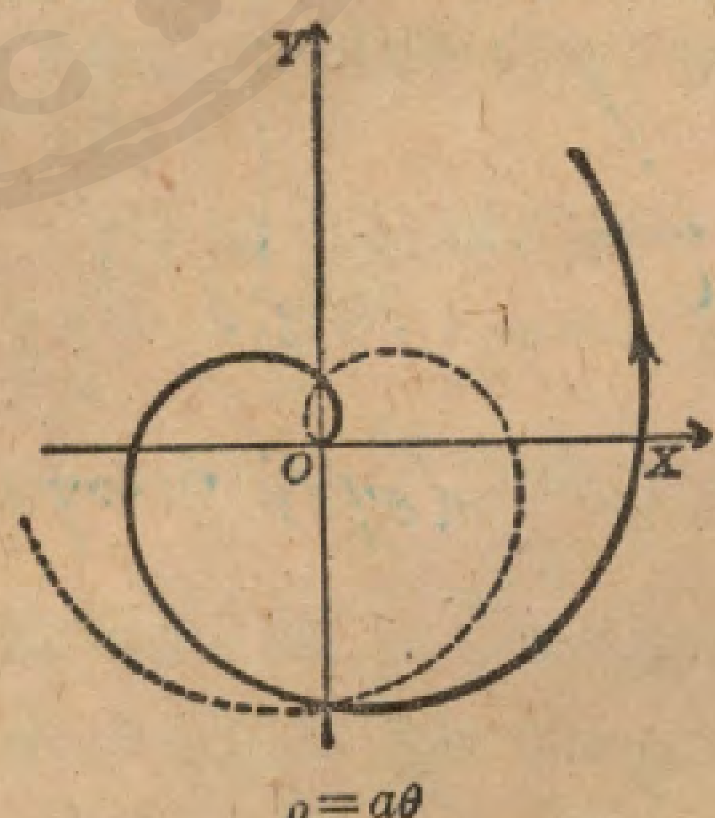
設 $a=4$, $e=2$, 作其軌跡,並證明與題 16 中者相同.



(18) 設 x 軸截圓 $x^2+y^2=a^2$ 於 A. 在圓周截取任一弧 AB 等於拋物線 $y^2=4cx$ 上一點 (x_0, y_0) 之橫坐標 X_0. 延長半徑 OB 至 P, 使 $BP=y_0$. 證 P 之軌跡爲拋物螺線(Parabolic spiral) $(\rho-a)^2=4ac\,\theta$(見圖).



抛物螺線(Parabolic spiral)



亞氏螺線(Spiral of Archimedes)

(19) 求一點之軌跡,其條件爲

(a) 其動徑與其變角成正比例; 答 亞氏螺線 $\rho=a\theta$.

(b) 其動徑與變角成反比例；

答　雙曲螺線或倒數螺線 (Hyperbolic or reciprocal spiral) $\rho\theta=a$.

(c) 其動徑之平方與變角成反比例；

答　卜杖線(Lituus) $\rho^2\theta=a^2$.

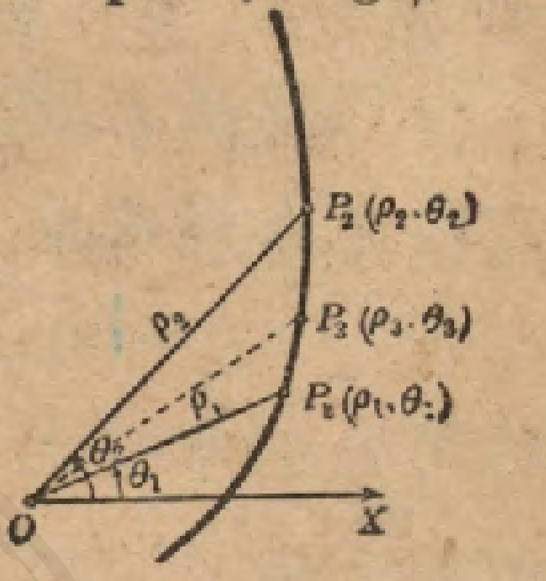
(d) 其動徑之對數與變角成正比例；

答　對數螺線 (Logarithmic spiral). $\log\rho=a\theta$.

spiral

20. 對數螺線之定理.　當對數螺線上已作出 P_1 與 P_2 二點，則在此二點間此軌跡上之各點，可依下述定理，用幾何學方法作出之：

平分角 P_2OP_1 而在平分線上截取一線段 OP_3 等於 OP_1 與 OP_2 之比例中項，則 P_3 在此軌跡上.



對數螺線

證此定理(參閱上圖).

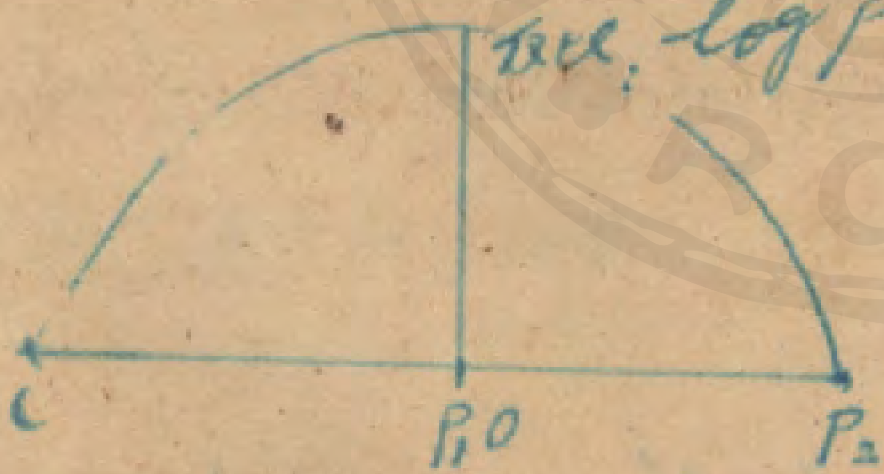
$\rho=a\theta$

$\log\rho=a\theta$

$\frac{\log\rho}{\theta}=a$

$\log\rho=a\theta.$

$\log\rho=\frac{a}{\theta}$



$\overline{OP_3}^2=OP_1\cdot OP_2$

$\log P_3^2=\log P_1P_2$

$2\log P_3=\log P_1+\log P_2$

$=(\log P_1+\log P_2)/2$

$=\frac{a\theta_1+a\theta_2}{2}=\frac{a(\theta_1+\theta_2)}{2}.$

$p=a\theta$

第 十 章

超越曲線 (Transcendental curves)

以前諸章其注重點，大部在代數方程式，即祇含坐標 x, y 之方冪之方程式也. 現所注意者爲如下之方程式

$$y=\log x, \quad y=2^x, \quad x=\sin y,$$

所謂超越方程式 (transcendental equations)，而其軌跡，稱謂超越曲線.

85. 自然對數(Natural logarithms). 已知數 N 之常用對數 (Common logarithms) 爲以 10 爲底之指數 x，以方程式表之如下: $\log p=a\theta$

(1) $\quad 10^x=N$; 即，$x=\log_{10} N$.

對數之第二系稱爲自然對數 (Natural logarithms) 或納氏對數 (Naperian logarithms) 其底以 e 表之稱爲自然對數之底 (Natural base). 其數値，至三位小數，則爲

(2) $\quad e=2.718.$ $\quad 10^a=N \quad \log_e N=b \quad \log_{10} N=a$

一已知數 N 之自然對數即以 e 爲底之指數 y，以方程式表之如下: $\quad e^b=N \quad \log N=(\log_{10} e)(\log_e N)$

(3) $\quad e^y=N$; 即，$y=\log_e N$.

欲求一已知數之常用與自然對數互相關連之方程式，可取(3)式兩邊之對數以 10 爲底，即得

(5) $\quad \log_{10} N=\log_{10} e \cdot \log_e N.$ (积定要)

故任一數之常用對數等於其自然對數與常數 $\log_{10} e$ 之相乘積．此常數稱為常用對數之模 $(=M)$ (Modulus)；即，用對數表，則

(6)　　$M=\log_{10} e=0.434$；又 $\frac{1}{M}=2.303$.　　$\log_{10} M=A \to 10^A=N$

可總結以上所述於下方程式中：　　$\log_e N=B \to e^B=N$

(A)　　常用對數＝自然對數 $\times 0.434$ (M)，　　$A \log_{10} 10 = B \log_{10} e$

自然對數＝常用對數 $\times 2.303$ ($\frac{1}{M}$).　　$\log_{10} N = \log_{10} e \log_e N$.

等方程式指示如何從常用對數求自然對數，或從自然對數求常用對數．　　$\log_5 N = a$.　$5^a = N$.

指數曲線與對數曲線

方程式

(7)　　$y=e^x$

之軌跡稱為指數曲線 (Exponential curve).

從上所述，(7) 式可寫成

(8)　　$x=\log_e y=2.303 \log_{10} y$.

故(7)之軌跡為一曲線，其橫坐標為縱坐標之自然對數．茲討論(7)式並作其圖形(見圖).

討論　1. 截部．　從(8)，設 $y=0, x=\log_e 0=-\infty$.

從(7)，設 $x=0, y=e^0=1$. 將所得結果列成右表．

x	y
$-\infty$	0
0	1

2. 無對稱．

3. 因負數無對數，故 y 之負數須除外，但 x 無除外之值．其次，y 增加時，x 亦增加．

4. x 軸為一漸近線，因當 x 之負值增加(以絕對值而論)時，y 漸近於 0.

軌跡上數點之坐標列入表中．e^x 與 e^{-x} 之值列表如下．

如將此曲線仔細繪出,則自然對數可自曲線上量得之．例如,在圖中,設 $y=4$, 則量得 $x=1.39=\log_e 4$.

x	y	x	y
0	1	0	1
1	$e=2.7$	-1	$\frac{1}{e}=.37$
2	$e^2=7.4$	-2	$\frac{1}{e^2}=.14$
等	等	等	等

方程式

$$(9)\qquad y=be^{ax}$$

之軌跡,其 a 與 b 為常數,亦為一指數曲線．其討論留待學者自為之．

指數函數 e^x 之數值表．

x	.0		.1		.2		.3		.4	
	e^x	e^{-x}	e^x	e^{-x}	e^x	e^{-x}	e^x	e^{-x}	e^x	e^{-x}
0	1.00	1.00	1.11	0.90	1.22	0 82	1.35	0.74	1.49	0.67
1	2.72	0.37	3.00	0.33	3.32	0.30	3.67	0.27	4.06	0.25
2	7.39	0.14	8.17	0.12	9.03	0.11	9.97	0.10	11.0	0.09
3	20.1	0.05	22.2	0.05	24.5	0.04	27.1	0.04	30.0	0.03
4	54.6	0.02	60.3	0.02	66.7	0.02	73.7	0.01	81.5	0.01
5	148	0.01	164	0.01	181	0.01	200	0.00	221	0.00

x	.5		.6		.7		.8		.9	
	e^x	e^{-x}	e^x	e^{-x}	e^x	e^{-x}	e^x	e^{-x}	e^x	e^{-x}
0	1.65	0.61	1.82	0.55	2.01	0.50	2.23	0.45	[illegible].46	[illegible].41
1	4.48	0.22	4.95	0.20	5.47	0.18	6.05	0.17	6 69	0.15
2	12.2	0.08	13.5	0.07	14.9	0.07	16.4	0.06	18.2	0.06
3	33.1	0.03	36.6	0.03	40.4	0.02	44.7	0.02	49.4	0.02
4	90.0	0.01	99.5	0.01	110	0.01	122	0.01	134	0.01
5	245	0.00	270	0.00	299	0.00	330	0.00	365	0.00

例如,求 $e^{2.3}$ 之值,先於 x 之直行內查 2, 然後向右至標有 .3 之下,再於 e^x 之下尋得其值為 9.97. 此數之右鄰在 e^{-x} 下之值為 $e^{-2.3}=0.10$.

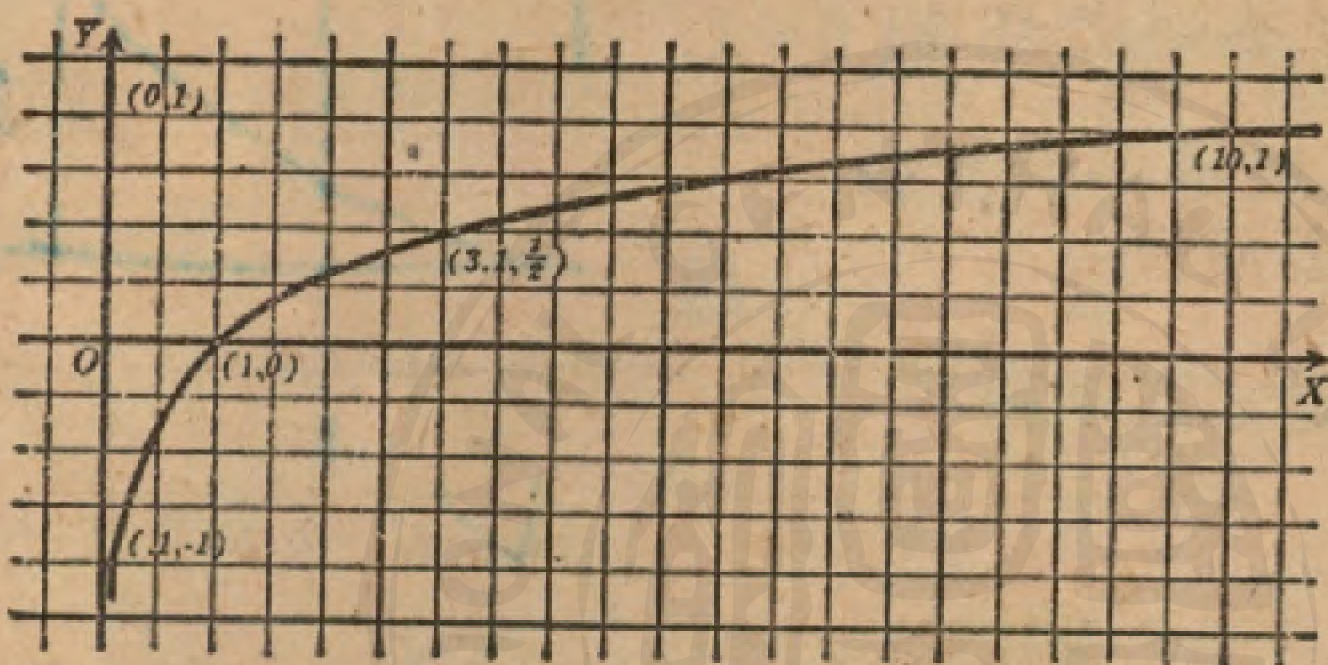
方程式 $y=e^x$ $e=2.718$

(10) $y=\log_{10}x$, $\to 10^y=x$

之軌跡稱爲對數曲線 (Logarithmic curve). 其與(9)之軌跡相異之處，祇爲對於坐標軸之關係. 實則二曲線之稱爲指數或對數曲線，祇依觀點而定.

解 10 以求 x,

(11) $x=10^y=e^{2.303y}$. $\log_{10}x=y$ $\log_e x=2.303y$



x	y
.01	−2
.1	−1
1	0
2	.301
10	1

討論 1. 其截部在 OX 上者爲 1, 在 OY 上者爲 $-\infty$.

2. 無對稱.

3. x 之負數須除外，而 y 無除外之值，且與 x 同時增減.

4. y 軸爲其垂直漸近線.

(10)之軌跡在上圖中，曲線上數點之坐標列入表中. 作圖時所取之單位爲

在 OX 上以兩格作一單位長,

在 OY 上以四格作一單位長.

複利曲線 (compound-interest curve). 複利問題可引用指數曲線. 因如以 $r=$ 利率，與 $n=$ 年數，則 n 年後一元之本利和 $(=A)$，如以複利計算，可用公式 $A=(1+r)^n$. $=(1.05)^n$ $r=5\%$

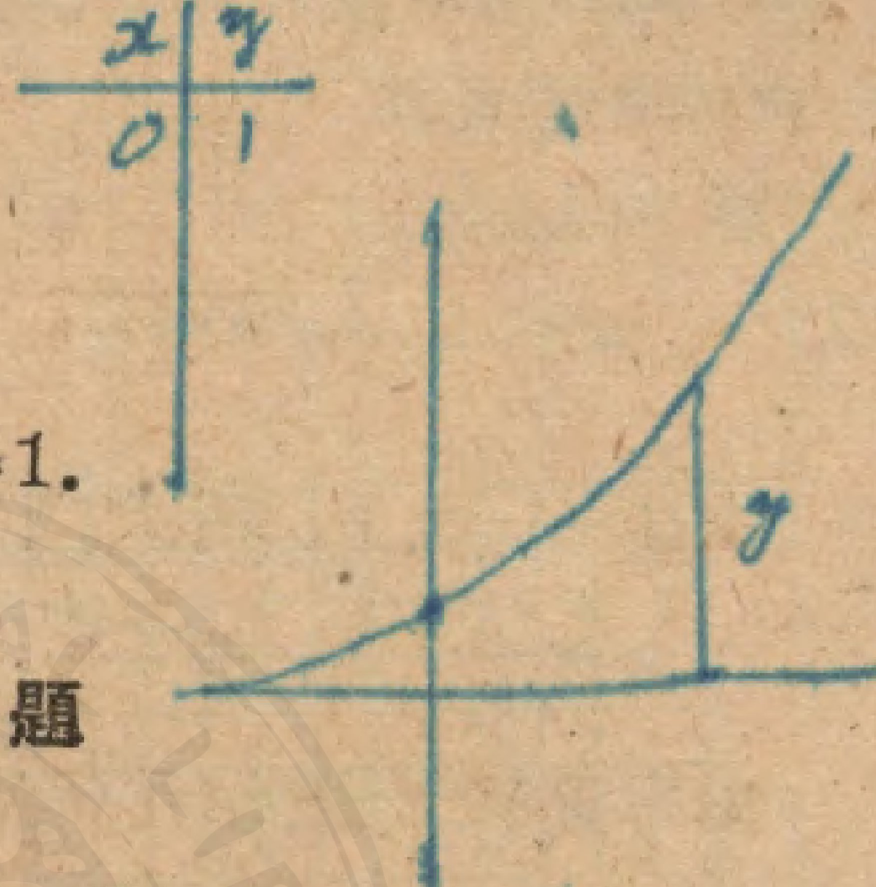
例如，設利率爲 5%，其公式爲

(12) $A=(1.05)^n$. $y=(1.05)^x$ $y=a^x=e^{.048}$

設以橫坐標表年數，縱坐標表本利和，則其曲線爲一指數曲線．因 $\log_{10} 1.05 = 0.021$．故，從 (A)

$$\log_e 1.05 = 2.303 \times 0.021 = 0.048 \text{(至三位小數)}.$$

故，用 (3)，　$e^{.048} = 1.05$，



而方程式 (12) 變作

(13)　　$A = e^{.048n}$，

此爲 (9) 之形狀；卽 $a = 0.048$ 而 $b = 1$．

解下列諸題時，須備一對數表．

習　　題

作* 下列各方程式之軌跡：

(1) $y = 3e^{-x}$.　　(3) $y = \frac{1}{2}e^{2x}$　　(5) $y = x^2 e^{-x}$.

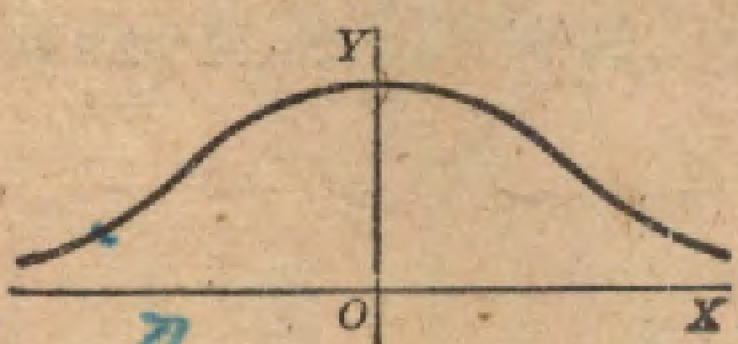
(2) $y = 2e^{-\frac{1}{2}x}$　　(4) $y = xe^{-2x}$.　　(6) $y = 2 \log_{10}\sqrt{x}$.

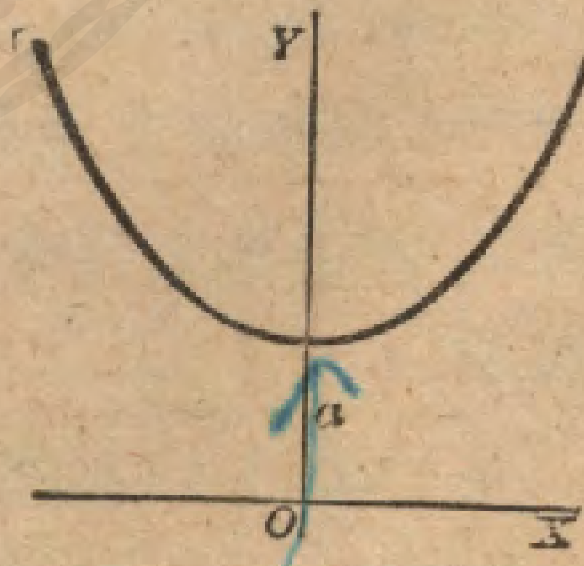
(7) $y = \log_{10}(2+x)$.

(8) $y = \log_e(9 - x^2)$.

(9) $y = \log_{10}\sqrt{x+3}$.

(10) $y = \log_e(4x - x^2)$.





學2程特別重要．

(11) $y = e^{-x^2}$. $= \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{(2.718)^{x^2}}$　　(12) $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

有名的．— 或然率曲線 (Probability curve) $x \to \pm\infty$, $y \to 0$　　有名的

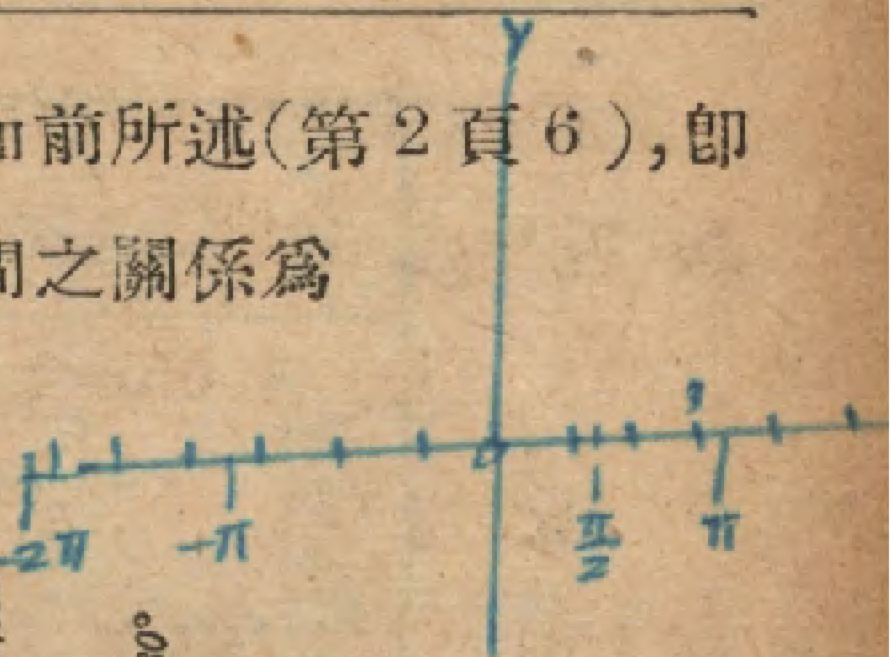
題 12．之軌跡稱爲懸鏈線 (Catenary) (見圖)，蓋其形狀與繫一重繩之兩端而使其自由下垂相似．

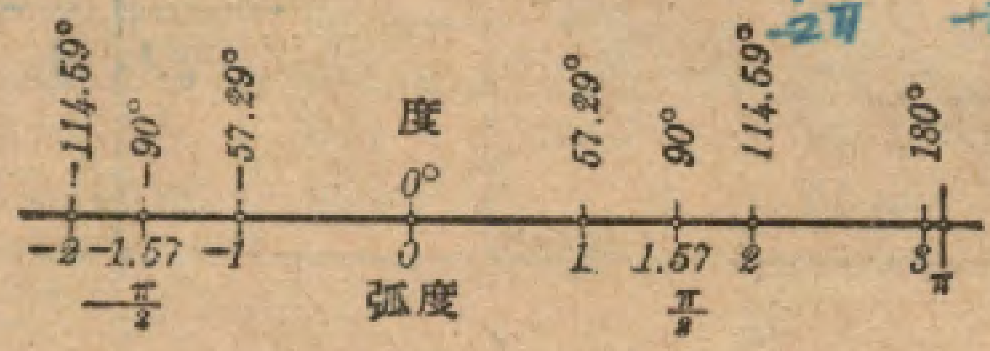
* 如僅需題 1–5 曲線之形狀，可以 e 之近似值 3 代 e．

86. 正弦曲線　普通量角之法有二，如前所述(第2頁6)，即弧度制與度制；其單位各為弧度與度．其間之關係為

(1)　　π 弧度 $=180°$.

y= sinx





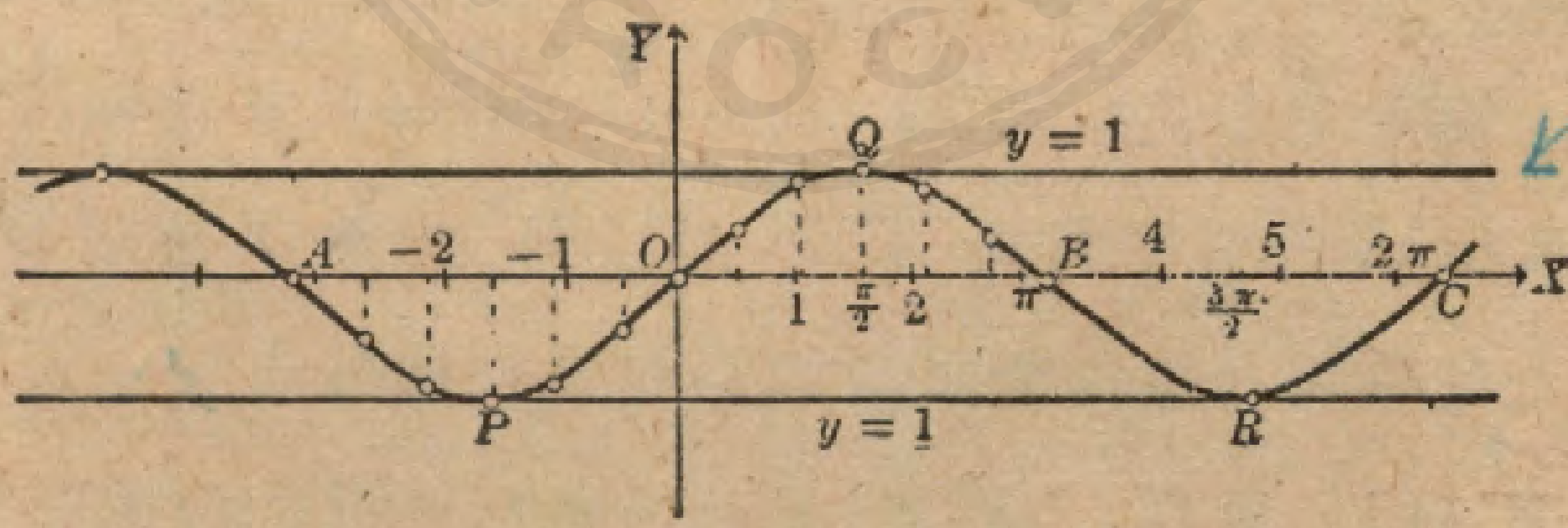
例如 $\frac{1}{2}\pi$ 弧度 $=90°$，$\frac{1}{4}\pi$ 弧度 $=45°$，等．上圖將兩種單位在一直線上表之．

在高等數學中，常用弧度制．例如，$x=1$ 弧度時 $\sin 2x$ 之數值求之如下：

(2)　　$\sin x=\sin 2$ 弧度 $=\sin 114°35'=0.909$.

現作方程式

(3)　　$y=\sin x$ 之軌跡．



［解］　為作圖時計算（見第172頁）上便利計，可選取 x 之值每間隔，此處假定，$30°$，然後求 x 之弧度值，與從第4節之表(又參閱第　頁之8)中求 y 之值．

作圖時，在 XX' 上選一適宜之單位長以表1弧度，並用此相同之單位表縱坐標．作其圖形，此曲線 $APOQB$ 即其結果．

x 度	x 弧度	y	x 度	x 弧度	y
0	0	0	0	0	0
30	.52	.50	−30	−.52	−.50
60	1.05	.87	−60	−1.05	−.87
90	1.57	1.00	−90	−1.57	−1.00
120	2.09	.87	−120	−2.09	−.87
150	2.62	.50	−150	−2.62	−.50
180	3.14	0	−180	−3.14	0

B 點以外之曲線由關係式

$$\sin(-\pi+x)=\sin x.$$

易決定之.

故　　$y=\sin x=\sin(2\pi+x)$;

卽設 x 之每値增加 2π, 則 y 之値重複一次.其意卽爲曲線上任一點當平行於 OX 而向右移動 2π 之距離後,此點仍在曲線上.故弧 APO 可平行 XX' 而移動直至 A 落於 B 上,卽移至 BRC 之位置,而此新位置亦必爲此曲線之一部.此性質可述之如下:此曲線 $y=\sin x$ 爲一週期性曲線(A periodic curve),其週期(Period)爲 2π.又弧 OQB 亦可平行於 XX' 而移動,直至 O 落於 C 上.由此可知其全部軌跡乃包含無限數之全等弧交錯分布於 XX' 之上下.

討論　(1) 截部.　若 $x=0$, $y=\sin 0=0=y$ 軸上之截部.若 $y=0$, 則 $\sin x=0$, 而 $x=n\pi$, n 爲任意整數.故此曲線在 0 之左右兩邊截 x 軸無限之次數而此等截點互距 π 之距離.

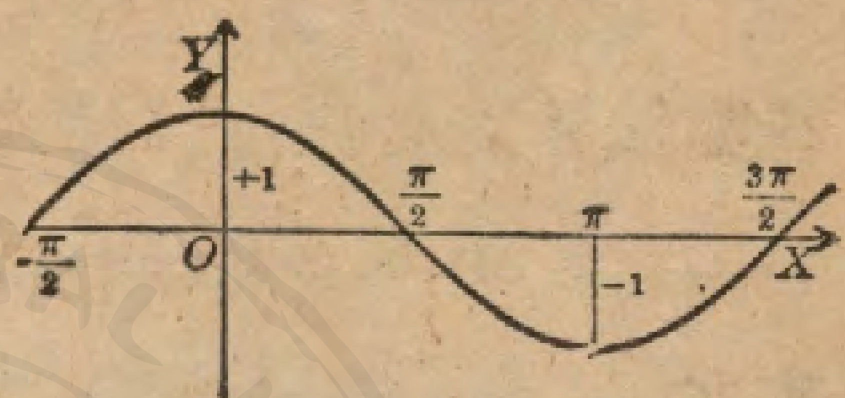
(2) 對稱　原點爲對稱中心,因 $\sin(-x)=-\sin x$(第 3 頁之 8).故 (3) 中之 (x,y) 以 $(-x,-y)$ 代之,得 $-y=\sin(-x)=-\sin x$,或兩邊皆改變則仍爲方程式 (3).

(3) **範圍**　此曲線沿 XX' 左右兩方向伸展至無限遠，但其上下兩方向則在 $y=+1$ 與 $y=-1$ 兩直線之間.

若其軸移至 $(\frac{1}{2}\pi, 0)$ 處，則 (3) 變為

(4) $$y'=\sin(x'+\tfrac{1}{2}\pi)=\sin(90°+x')=\cos x'.$$

故 $y=\cos x$ 亦為一正弦曲線，如圖所示. 此曲線與 $y=\sin x$ 之軌跡之相異處祇在 y 軸之位置而已.



在第 171 頁之圖中，曲線 $APOQB$ 可作為"模型曲線(Pattern curve)". 當此段曲線平行於 $X'X$ 向右或左移動一距離等於週期之任何倍數時，則此段在新位置後，仍為曲線之一部份.

87. 週期性　方程式

(1) $$\sin x=\sin(x+2\pi),\quad \tan x=\tan(x+\pi).$$

指示 $\sin x$ 與 $\tan x$ 為週期性函數 (Periodic function). 其正式定義為

設 P 為一常數而 x 為任意值. 當 x 代以 $x+P$ 時，若 x 之函數之值重複而不變，則此等函數為週期性函數.

設 P 為使函數有此特性之最小數，則 P 稱為週期 (Period). 從 (1)，$\sin x$ 與 $\tan x$ 為週期性函數，前者之週期為 2π，後者為 π. 雖 $\tan(x+2\pi)$ 亦等於 $\tan x$，然其週期則為 π.

$\sin kx$ 之週期為 $\frac{2\pi}{k}$. 即以 $x+\frac{2\pi}{k}$ 代 x；於是 kx 變為 $kx+2\pi$，而 $\sin kx$ 變為 $\sin(kx+2\pi)$. 但此二式相等.

同理，可證明 $\tan ax$ 之週期為 $\frac{\pi}{a}$.

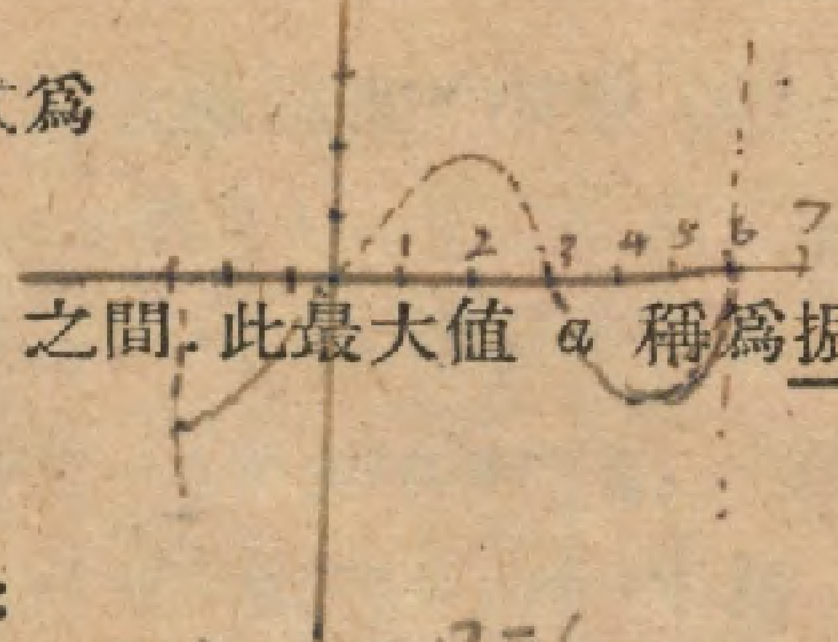
$y = a\sin kx$　$P=\frac{2\pi}{k}$　$-a \le y \le a$　$k=\frac{\pi}{3}$

1. 振幅 a. 週期 P　$y=2\sin\frac{\pi x}{3} = 2\sin\frac{\pi}{3}(x+6)$

2. x, y 同一單位.　$=2\sin\frac{\pi}{3}(x+P)$

3. $(\frac{1}{4}P)\times n$

很重要



88. 繪正弦曲線法　設此方程式為

(1)　　$y = a\sin kx$.

其週期為 $\frac{\pi}{k}$. y 之值在 $-a$ 至 $+a$ 之間. 此最大值 a 稱為振幅 (Amplitude).

欲速畫正弦曲線, 可用以下步驟:

(1) 求振幅 a 與週期 P.　　1. $a=2$　$P=6$

(2) 在兩軸上取同一單位.　　2. x y 同一單位　$\frac{2P}{4}$

3. $\frac{1}{4}P = \frac{1}{4}\times 6 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$　$\frac{3P}{4}$

(3) 在 XX' 上從 O 起, 每隔 $\frac{1}{4}$ 週期記下一點. 其最高與最低諸點皆在奇數之 $\frac{1}{4}$ 週期處, 其與 XX' 之交點則在偶數之 $\frac{1}{4}$ 週期處.

如, 在第 171 頁之圖中, 其中 $\frac{1}{4}P = \frac{1}{2}\pi$, 即在 Q 處, $x=\frac{1}{2}\pi$; 在 R 處, $x=\frac{3}{2}\pi$; 在 B 處, $x=\pi$; 等.

例　題

圖画得好、所以三角函數

(1) 繪正弦曲線

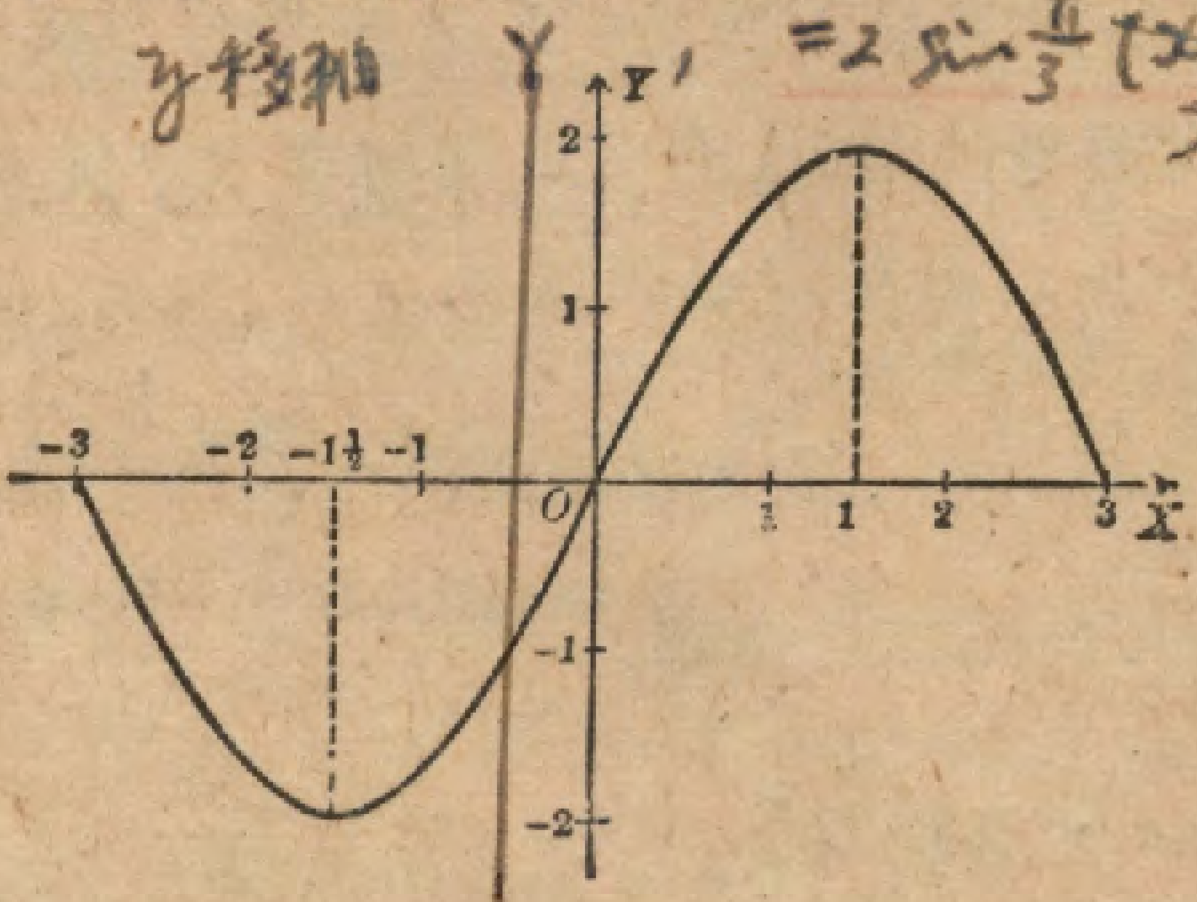
(2)　　$y = 2\sin\frac{\pi x}{3}$.　很重要

[解]　振幅 $a=2$. 週期 $P=6$. 故 $\frac{1}{4}P = 1\frac{1}{2}$. 記下 $x=0, \pm 1\frac{1}{2}, \pm 3$, 等諸點在 x 軸上. y 之對應值載在下表中. 從 $x=-3$ 至 $x=3$ 之曲線之部份繪在圖中.

$y=2\sin(\frac{1}{3}\pi x+\frac{\pi}{6})$　　$x'=x+\frac{1}{2}$

$=2\sin\frac{\pi}{3}(x+\frac{1}{2})$　　$y'=2\sin\frac{\pi}{3}x'$

y 移軸



x	y
0	0
$\pm 1\frac{1}{2}$	± 2
± 3	0

(2) 繪曲線

(3)　　$y=2\sin(\frac{1}{3}\pi x+\frac{1}{6}\pi)$.

［解］ 寫 x 之係數(卽 $\frac{1}{3}\pi$)於括號之外,(3)成爲

(4)　　$y=2\sin\frac{1}{3}\pi(x+\frac{1}{2})$.

命 $x+\frac{1}{2}=x'$,卽 $x=x'-\frac{1}{2}$ 與 $y=y'$.則(4)成爲

(5)　　$y'=2\sin\frac{1}{3}\pi x'$,

與(2)相同.(5)之圖形以 $x'=0$ 在原點 O 上時,卽爲第 174 頁之圖.但 $x=x'-\frac{1}{2}, y=y'$ 之變換,乃移軸至新原點$(-\frac{1}{2},0)$.故圖中之點 O,對於(3)之坐標軸而言,爲$(-\frac{1}{2},0)$.卽在 OY 之右半單位距離處作 y 軸,則得(3)之圖形.

普遍正弦曲線　方程式

(6)　　$y=a\sin(kx+c)$ 或 $y=a\cos(kx+c)$.

之軌跡爲一正弦曲線,其振幅爲 a 與週期爲 $\frac{2\pi}{k}$;由移軸至

$$x=x'-\frac{c}{k}, y=y'$$

使(6)中兩方程式各變爲

$y'=a\sin kx'$ 與 $y'=a\cos kx'$.

習　　題

(1) 作 $\cos x$ 之數值表(參閱第 86 節)與繪 $y=\cos x$ 之圖形,並充分討論之.

繪下列方程式一完全週期之圖形.依所設 x 之值計算 y 值,並作圖以驗之.

(2) $y=\sin 3x, x=\frac{1}{2}$.

(3) $y=2\sin\frac{1}{2}x, x=\frac{1}{2}\pi$.

(4) $y=2\cos\pi x, x=\frac{2}{3}$.

(5) $y=\frac{1}{2}\cos 2x, x=1$.

(6) $y=\cos\frac{1}{2}\pi x, x=3$.

(7) $y=2\sin\frac{1}{3}\pi x, x=2$.

(8) $y=3\cos\frac{1}{4}\pi x, x=-3$.

(9) $y=3\sin(x+2), x=1$.

(10) $y=2\cos(1-3x), x=-\frac{1}{3}$.

(11) $y=2\cos(2\pi x+\frac{2}{3}\pi), x=\frac{2}{3}$.

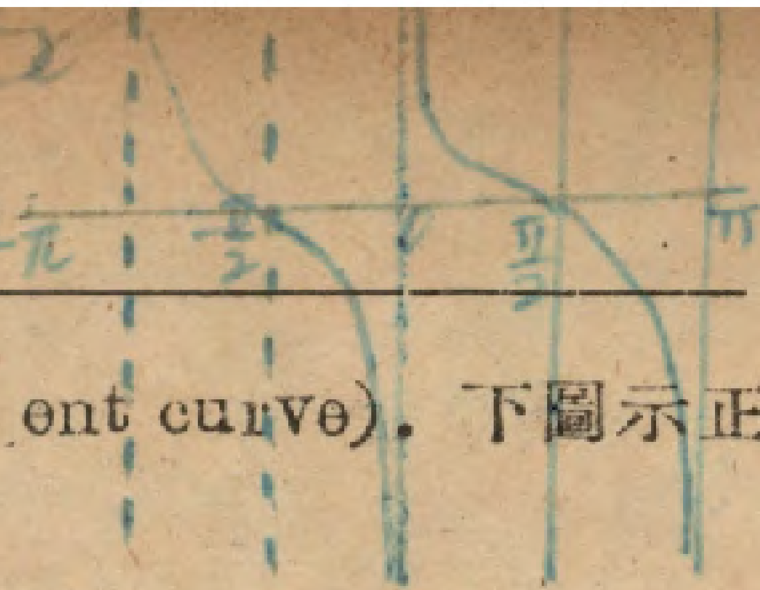
(12) $y=\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}), x=2$.

(13) $y=\sin(\frac{1}{3}\pi x-\frac{1}{5}\pi), x=2$.

(14) $y=a\sin(kx+\pi)$.

(15) $s=a\cos\left(\frac{2\pi t}{P}+\beta\right)$.

$y=\cot x$　$y=\tan(-\frac{\pi}{2}+x)=-\cot x$



89. 其他三角曲線　正切曲線 (Tangent curve). 下圖示正切曲線,即方程式

(1)　　$y=\tan x.$

之軌跡.

$-\infty \to +\infty$

x	y	x	y
0	0	0	0
$\frac{1}{4}\pi$	1	$-\frac{1}{4}\pi$	-1
$\frac{1}{2}\pi$	∞	$-\frac{1}{2}\pi$	∞
$\frac{3}{4}\pi$	-1	$-\frac{3}{4}\pi$	1
π	0	π	0

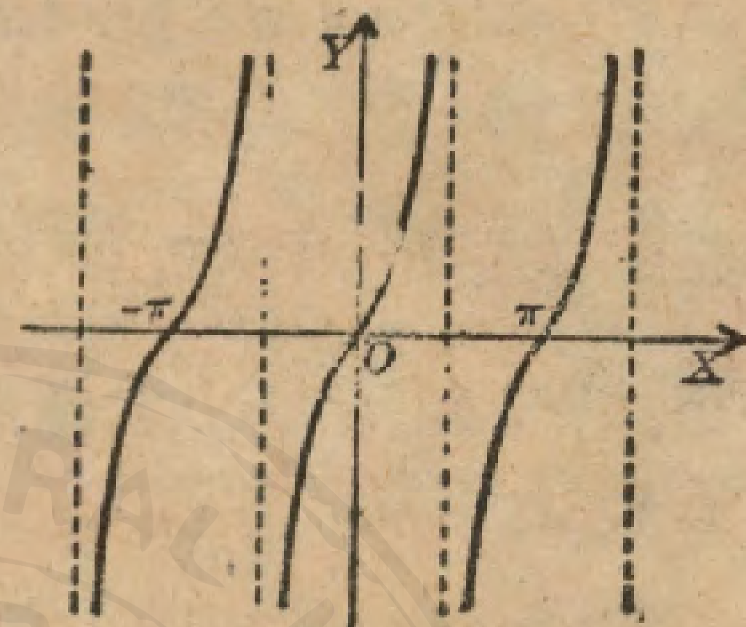


圖 1

週期 $P=\pi$, 與 $\frac{1}{4}$ 週期諸倍數之 y 值列於上表中.

討論　(1) 截部. y 軸上為 O; x 軸上為 $\pm n\pi$, n 為任何整數.

(2) 對稱　此曲線對稱於 O.

(3) 範圍　x 與 y 無除外之值.

(4) 漸近線　$x=\frac{1}{2}\pi\pm n\pi$, n 為任何整數.

注意: 相鄰兩漸近線之距離等於週期 π.

正割曲線 (Secant curve).　下圖示方程式

(2)　　$y=\sec x. = \frac{1}{\cos x}$

之軌跡.

$y=\sec(x'-\frac{\pi}{2})=\csc x'$

$x=x'-\frac{\pi}{2}$

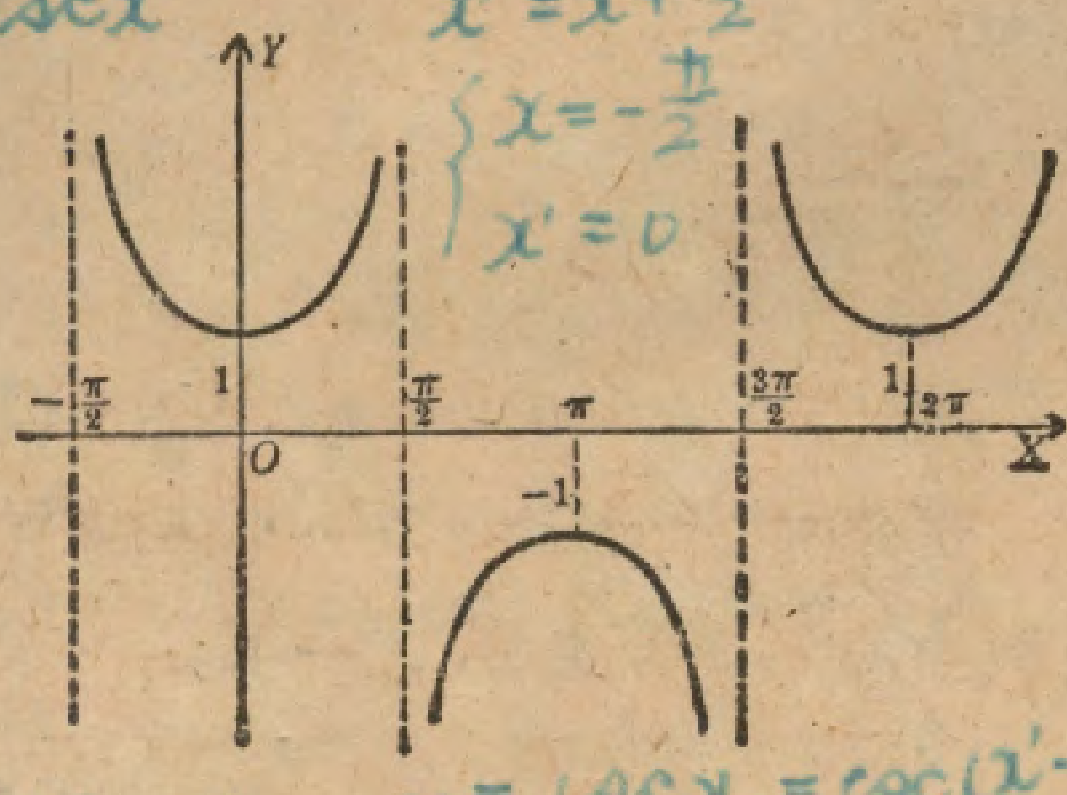
$x'=x+\frac{\pi}{2}$

$x=-\frac{\pi}{2}$

$x'=0$

x	y	x	y
0	1	$\frac{1}{3}\pi$	2
$\frac{1}{2}\pi$	∞	$-\frac{1}{3}\pi$	2
π	-1	$-\frac{\pi}{2}$	∞

$\frac{3}{2}\pi$



$y=\sec x$　$y=\sec x=\csc(x'-\frac{\pi}{2})$

圖 2

週期 $P=2\pi$. 在 x 軸上於每 $\frac{1}{4}$ 週期 $\frac{1}{2}\pi$ 處記下諸點，寫 (2) 式成

(3) $$y=\frac{1}{\cos x}$$ P=2π

而以 x 諸值還求 $\cos x$ 諸值. 表中所載者爲以 x 之其他值所求得之 y 值.

正切曲線可取兩漸近線 $x=-\frac{1}{2}P, x=\frac{1}{2}P$ 間之一枝曲線爲其模型曲線；而正割曲線可取在 $x=-\frac{1}{4}P, x=\frac{3}{4}P$ 兩漸近線間之兩枝曲線爲其模型曲線.

餘切曲線(Cotangent curve). $y=\cot x$ 之軌跡之圖形在第 111 節中圖示之. 下之討論表明用簡單之幾何移軸法，從正切曲線以得此曲線.

在上之圖 1 中，移軸至$(\frac{1}{2}\pi, 0)$. 則(1)改爲

(4) $$y'=\tan(\tfrac{1}{2}\pi+x')=-\cot x'.$$ [用第 3 頁之 8]

(4) 之圖形除以漸近線 $x=\frac{1}{2}\pi$ 作 y' 軸外，餘皆與圖 1 相同. 在(4)中以 $-y'$ 代 y'. 則得

(5) $$-y'=-\cot x', \text{或 } y'=\cot x'.$$

(5) 之圖形可從圖 1 作 $O'Y'$ 於漸近線 $x=\frac{1}{2}\pi$處，再以$(x, -y)$點代*(x, y)各點.

餘割曲線 (Cosecant curve). 在圖 2 中，移軸至$(-\frac{1}{2}\pi, 0)$. 則(2)改爲

(6) $$y=\sec(x'-\tfrac{1}{2}\pi)=\csc x'.$$ [用第 3 頁之 8]

在圖 2 中，若作 $O'Y'$ 於左邊第一漸近線處即得(6)之圖形. 故餘割曲線爲正割曲線之一種.

* 稱爲 x 軸中之反射.

習　　題

(1) 直接繪 (1)$y=\cot x$;(2)$y=\csc x$.並討論之.

(2) 試繪下列各方程式一週期之曲線,從所設 x 之值計算 y,並以圖驗之:

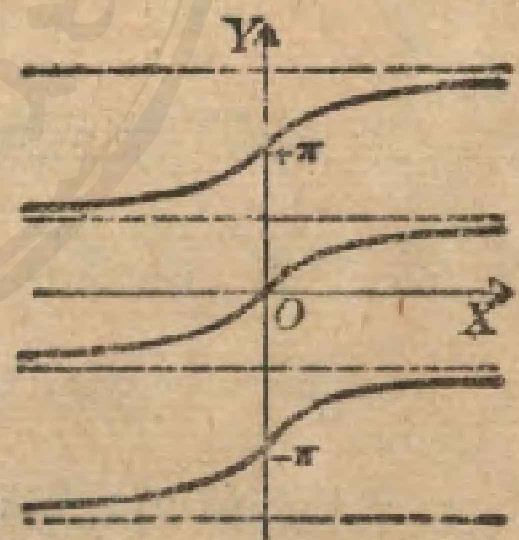
(a) $y=3\tan x;x=\frac{1}{4}\pi$.
(b) $y=3\tan(\frac{1}{2}\pi x-\frac{2}{3}\pi);x=\frac{3}{2}$.
(c) $y=\cot\frac{2}{3}\pi x;x=2$.
(d) $y=4\cot(\frac{1}{4}\pi x+\frac{3}{4}\pi);x=-1.2$.
(e) $2y=3\cot 3x;x=\frac{1}{2}$.
(f) $3y=\sec[-(x+1)];x=0.8$.
(g) $2y=\sec\frac{1}{2}x;x=5$.
(h) $4y=\csc\frac{1}{4}\pi x;x=3$.
(i) $y=\csc(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3});x=5$.
(j) $2y=3\csc 3x;x=1.2$.

繪下列各軌跡,並討論之:

(3) $x=\sin y$. 又可寫作 $y=\text{arc}\sin x$ 或 $\sin^{-1}x$,而讀作"正弦為 x 之角:

(4) $x=2\cos y$,或 $y=\text{arc}\cos\frac{1}{2}x$.

(5) $x=\tan y$,或 $y=\text{arc}\tan x$(見圖).



(6) $x=2\sin\frac{2}{3}\pi y$.

(7) $x=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{3}\pi y$.

(8) $y=\text{arc}\tan 2x$.

(9) $y=\frac{1}{2}\pi\text{arc co}\ \frac{1}{2}x$.

90. 縱坐標之加法　當一曲線之方程式之形式為

$y=$ 兩式之代數和時,如 $y=\sin x+\cos x$,$y=\frac{1}{2}x+\sin^2 x$,等,則應用縱坐標加法之原理以作曲線為便.例如,作

(1)　　$y=2\sin\frac{1}{4}\pi x+\frac{1}{2}x$

x	0	2	4
y	0	1	0

之軌跡,可用兩輔助曲線

$$\begin{cases} y_1=2\sin\frac{1}{4}\pi x, & (2)\\ y_2=\frac{1}{2}x. & (3)\end{cases}$$

繪一曲線於他曲線之下，而使其兩 y 軸在一直線上，且用同一之單位. (2)之軌跡爲圖 1 之正弦曲線. (3)之軌跡爲圖 2 中之直線.

圖 1 中之縱坐標與圖 2 中之對應縱坐標相加，並注意其代數符號，則所得之複曲線 (Compound curve) $A_1B_1OB_2A_2$ 卽所求之

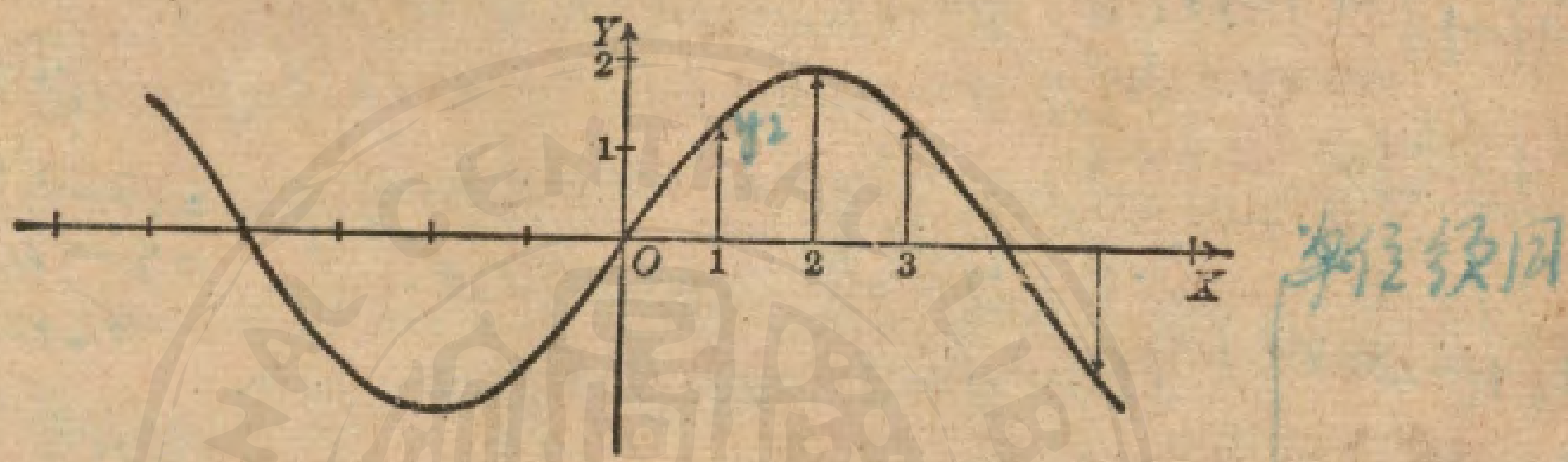


圖 1

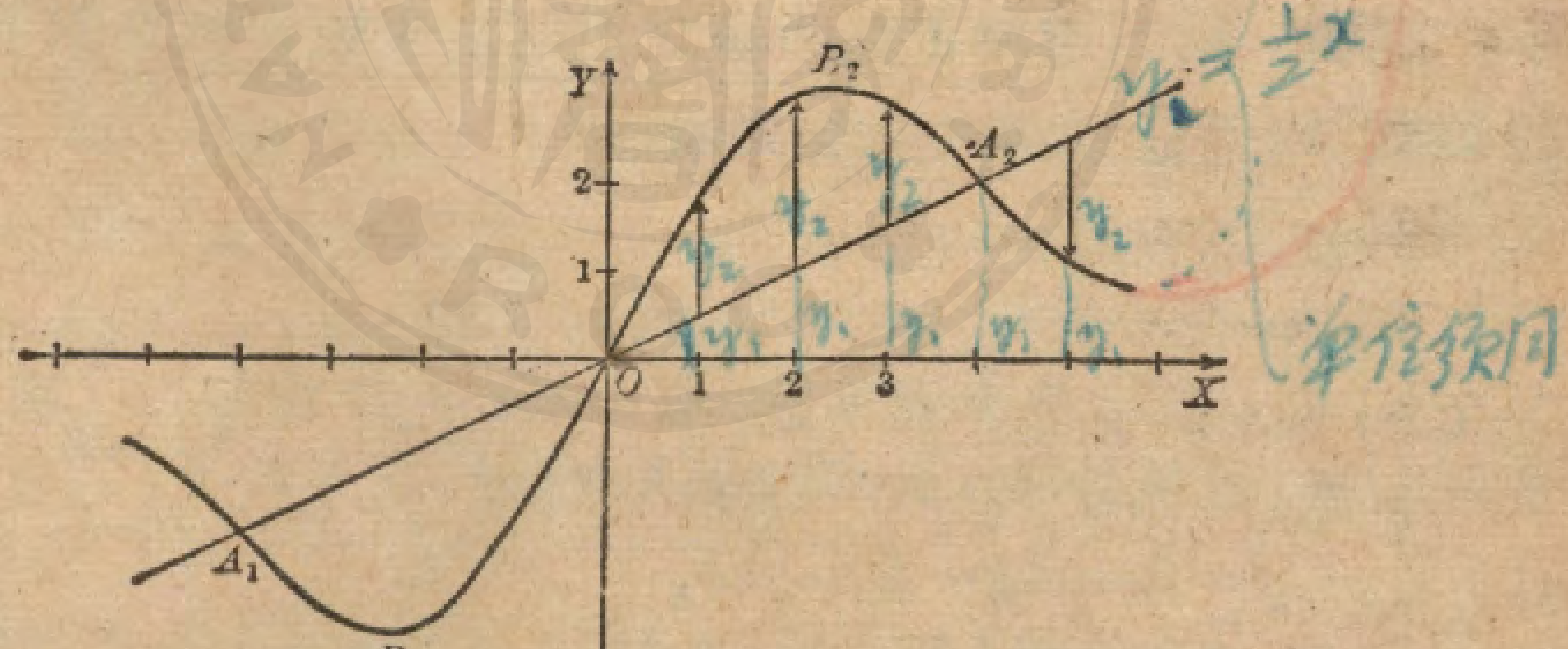


圖 2

方程式

(4) $\quad y=y_1+y_2=2\sin\frac{1}{4}\pi x+\frac{1}{2}x.$

此軌跡蜿蜒於直線 $y=\frac{1}{2}x$ 之兩側而交此直線於 $x=0,\ \pm4,\ \pm8,\ \pm12$，等點；卽正對圖 1 中正弦曲線與 x 軸之諸交點.

$y_1 = e^{\frac14 x}$
$y_2 = -\cos \pi x$

x	0	2	4	8	100	-2	-4	-∞
y	1	$\frac12$ 1.65	2.71	7.30	∞	.61	.37	0

習　　題

繪下列曲線,從所設 x 之值,準確計算 y 值,並以圖驗之:

(1) $y=2\sin x+\frac{1}{3}x;x=1.$

(2) $y=2\cos x+\frac{1}{10}x^2;x=\frac{1}{2}.$

(3) $y=\sin x-\cos 2x;x=-\frac{1}{2}.$

(4) $3y=x-3\sin\frac{1}{3}\pi x;x=2.$

(5) $y=\log_{10}x-4\cos\frac{1}{4}\pi x;x=2.$

x	0	2	4	-2	-4
y	-1	-1	-1	-1	-1

(6) $y=e^{\frac{1}{4}x}-\cos\pi x;x=\frac{1}{2}.$

(7) $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x;x=1.8.$

$\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

x	$\frac12$	$\frac32$	$\frac52$
y	0	-2	0

(8) $y=\frac{1}{2}x+e^{x};x=-\frac{1}{2}.$

$y=\sin 2x+\cos 2x$
$=\sin 2(x+\pi)$
$+\cos(2x+\pi)$

(9) $y=\sin 2x+\cos 2x;x=\frac{9}{10}.$

$y=e^{\frac14 x}+(-\cos\pi x)$
$=y_1+y_2$

(10) $y=2\sin x+3\cos x;x=1.5.$

(11) $y=2\sin 2x-e^{-\frac{1}{4}x};x=1.$ (很準)

(12) 題 (9) 與題 (10) 說明下之

定理　兩同週期正弦曲線之對應縱坐標,相加後所得之複曲線,其週期與前二者之週期仍相等.

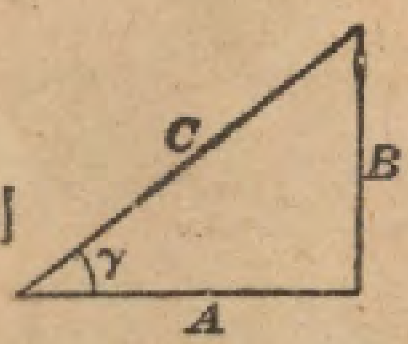
例如,方程式

(5)　　$y=a\sin(kx+\alpha)+b\sin(kx+\beta)$

其中 a,b,α,β, 與 k 爲常數.用 $\sin(x+y)$ 之規則 (第 3 頁之 9) 展開右邊,並集合 $\sin kx$ 與 $\cos kx$ 諸項.則方程式(5)可寫作

(6)　　$y=A\sin kx+B\cos kx,$

其中 A 與 B 爲常數,與 x 無關.現引用直角三角形之角 γ,其二腰爲 A 與 B.設其斜邊 $\sqrt{A^2+B^2}=C$,則 $B=C\sin\gamma,A=C\cos\gamma$.代入(6)中,得



(7)　　$y=C(\sin kx\cos\gamma+\cos kx\sin\gamma)=C\sin(kx+\gamma).$

此爲一正弦曲線,其週期爲 $\frac{2\pi}{k}$(與(5)中二項之週期相同),振幅爲 $C=\sqrt{A^2+B^2}$.　　　Q.E.D.

但由兩不等週期正弦曲線之縱坐標相加後所得之複曲線,決非一簡單之正弦曲線.

(13) 題 10 中複正弦曲線之振幅爲何?證明此方程式可寫作 $y=\sqrt{13}\sin(x+\alpha)$,其中 $\alpha=\arctan 1.5=0.98$. 作圖,並與複曲線比較之.

91. 界限曲線(Boun ary curves). 方程式之形爲

(1) $y=$二因式之積

而其中一因式爲一正弦或餘弦者,則作圖時多藉助於下之研討.

例如,就方程式

(2) $y=e^{-\frac{1}{4}x}\sin\frac{1}{2}\pi x$ 之軌跡而論之.

試作下列之觀察:

(1) 因正弦之數值從無大於 1 者,故(2)中 y 之值不能大於第一因式 $e^{-\frac{1}{4}x}$ 之值. 更因 $\sin\frac{1}{2}\pi x$ 之極大與極小值各爲 $+1$ 與 -1. 故 y 之極大與極小值爲 $e^{-\frac{1}{4}x}$ 與 $-e^{-\frac{1}{4}x}$.

因此,設作兩曲線

(3) $y=e^{-\frac{1}{4}x}$ 與 $y=-e^{-\frac{1}{4}x}$,

則(2)之軌跡必完全在此兩曲線之間. 故稱此兩曲線爲界限曲線.

畫此等曲線(見 182 頁之圖). 兩曲線顯然對稱於 x 軸. 作圖時,在第一曲線上求三點,如附表中所載.(用第 85 節之表).

x	y
0	1
2	$e^{-\frac{1}{2}}=.61$
4	$e^{-1}=.37$

(2) 當 $\sin\frac{1}{2}\pi x=0$, 則在(2)中 $y=0$, 因其第一因式常爲有限. 故(2)之軌跡與輔助正弦曲線

(4) $y=\sin\frac{1}{2}\pi x$

交 x 軸於相同諸點.

(3) 當第二因式 $\sin\frac{1}{2}\pi x$ 爲 $+1$ 或 -1 時,卽當輔助曲線(4)之縱坐標有一極大或極小之值時,所求之曲線與界限曲線相接觸*

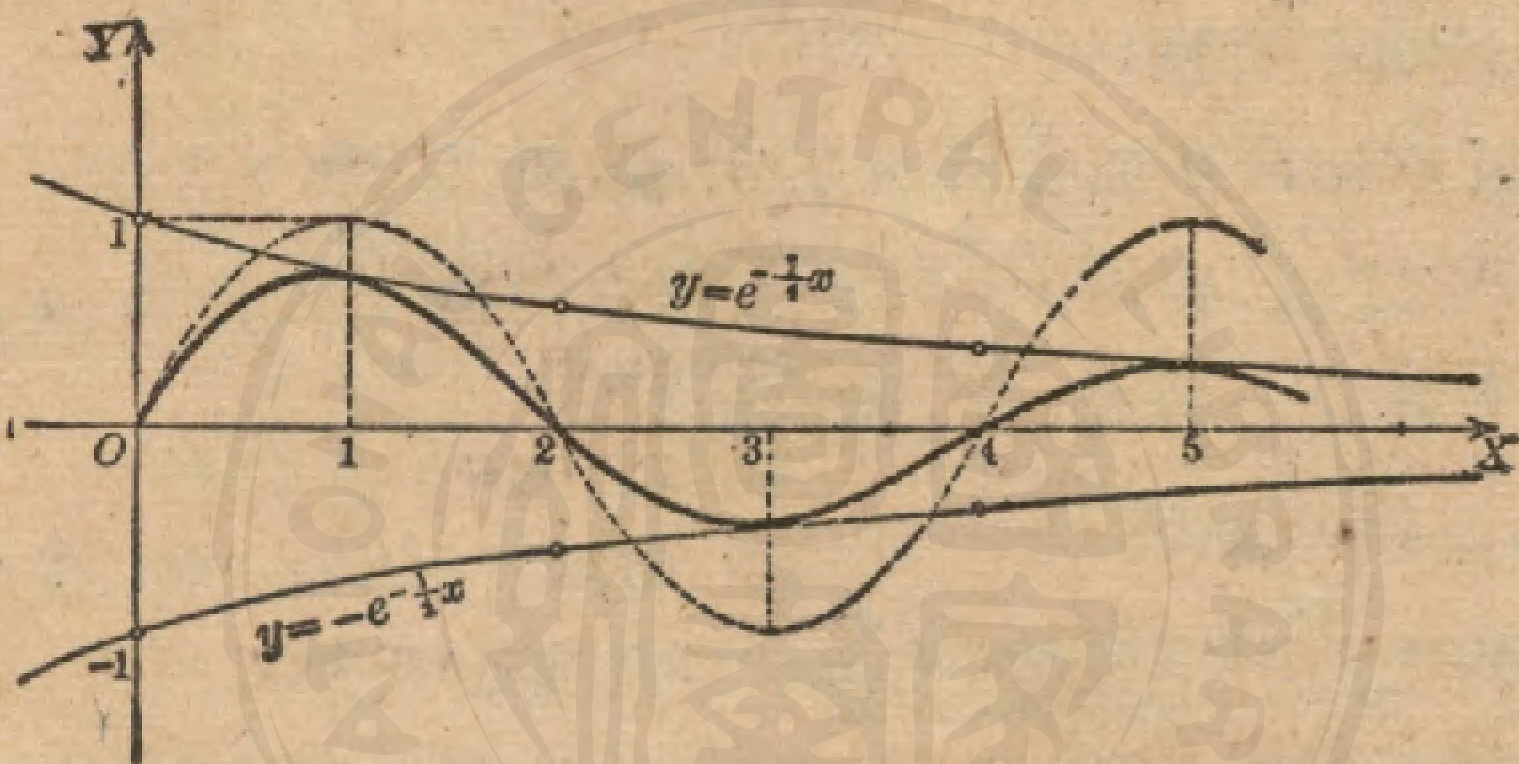
* 此討論僅說明曲線(2)達於界限曲線. 至其相切乃由微積分證明之.

故畫正弦曲線(4).其週期為 4 而振幅為 1. 此曲線卽圖中之虛線.

由討論知以下之事實:

(2) 之軌跡交 XX' 於 $x=0,\pm2,\pm4,\pm6$ 等點而與界限曲線(3) 相接觸於 $x=\pm1,\pm3,\pm5$ 等點.

吾人於是可卽作此曲線如圖;卽在界限曲線間之蜿蜒曲線(3)是也.



(4) 核驗時,須記憶 (2) 之縱坐標為界限曲線 $y=e^{-\frac{1}{4}x}$ 與正弦曲線(4)之縱坐標之積.例如圖中,當 $x=0$ 與 $x=2$ 之間時,所求之曲線在 XX' 之上方,因此時 $y=e^{-\frac{1}{4}x}$ 與正弦曲線之縱坐標皆為正也.但當 $x=2$ 與 $x=4$ 之間時,所求之曲線在 XX' 之下方,因此時 $y=e^{-\frac{1}{4}x}$ 與正弦曲線之縱坐標異號故也.

習　　題

作下列諸軌跡,以所設 x 之值,精確計算 y, 並以圖驗之.

(1) $y=x\sin x;\ x=3\frac{1}{23}\pi.$

(2) $xy=\sin x;\ x=\frac{1}{2}.$

(3) $xy=\cos x;\ x=1.$

(4) $3y=x\cos\pi x;\ x=3.$

(5) $10y=x^2\sin\frac{1}{2}\pi x;\ x=\frac{1}{2},3.$

(6) $y=3e^{-\frac{1}{2}x}\sin 2x;\ x=1,2.$

(7) $ye^x=\cos 2x;\ x=1.5,2.$

(8) $y=e^{-\frac{1}{4}x^2}\sin\frac{1}{3}\pi x;\ x=1,3.$

(9) $y=(x+1)\sin 2x;x=\frac{1}{3}\pi.$

(10) $x^2y=\cos\frac{1}{2}x;x=2,\frac{1}{2}\pi.$

(11) $ye^{\frac{1}{4}x}=\cos\frac{1}{4}\pi x;x=1.6.$

(12) $y=2e^{-\frac{1}{3}x}\sin\pi(x+1);x=-\frac{1}{2},\frac{2}{3}.$

(13) $y=3e^{x}\sin\frac{1}{3}\pi(x+\frac{1}{2});x=-\frac{1}{2}.$

(14) $y=2e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\pi x-\frac{1}{2}\pi);x=0.$

特 設 習 題

(15) 作下列兩種軌跡,其法將下列各對曲線之縱坐標(1)相加與(2)相乘:

(a) $y=\sin 2x,$
$y=e^{-x}.$

(b) $y=e^{\frac{1}{2}x},$
$y=\cos\frac{1}{2}x.$

(c) $y=2+\frac{1}{16}x^2,$
$y=\cos\frac{1}{2}\pi x.$

(d) $y=\frac{1}{8}(16-x^2),$
$y=\cos\frac{1}{3}\pi x.$

(e) $y=e^x,$
$y=\log_e x.$

(f) $y=x,$
$y=\frac{1}{3}\cos(\frac{1}{3}\pi x+\frac{2}{3}).$

(16) 作下列複曲線

(a) $y=2\sin(\pi x+\frac{1}{4}\pi)+3\sin(\pi x-\frac{1}{3}\pi).$

(b) $y=5\cos(2x+\frac{3}{4}\pi)-\cos(2x-\frac{1}{4}\pi).$

(c) $y=\sin(x+\frac{1}{12}\pi)-2\cos(x-\frac{1}{12}\pi).$

(17) 以$y=A\sin(\pi x+a)$之形式表題16之各方程式,並求A與a之值,作圖而與上題之複曲線比較之.

第十一章

通徑方程式與軌跡 (Parametric Equations and Loci)

92. 通徑方程式作圖法 設 x 與 y 爲直角坐標，又設各以一變數或通徑 (Parameter) t 表之，例如，

(1) $x=\frac{1}{2}t^2,\quad y=\frac{1}{4}t^3,$

則此等方程式稱爲此曲線——(x, y) 之軌跡——之通徑方程式.

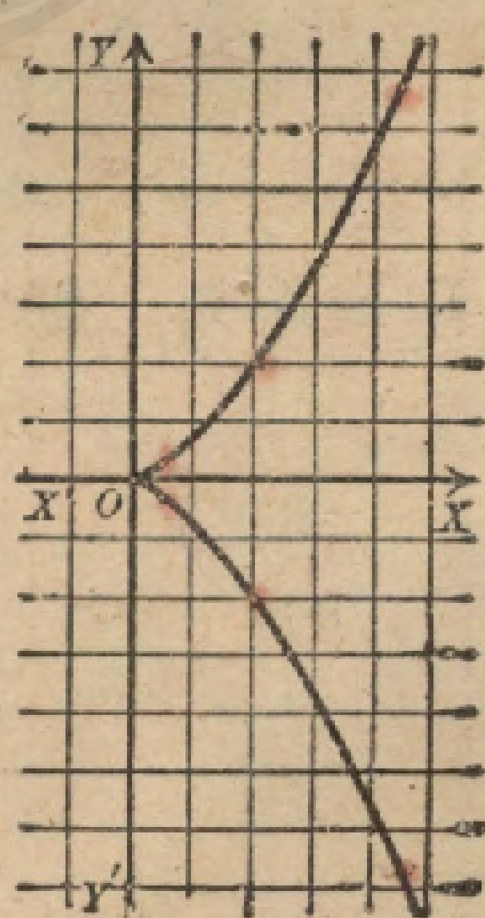
作圖時，漸次命 t 之値代數式增加而計算 x 與 y，並將結果列成一表. 作 (x, y) 諸點並依表中之次序連成一光滑之曲線.

例題

(1) 作曲線其通徑方程式爲

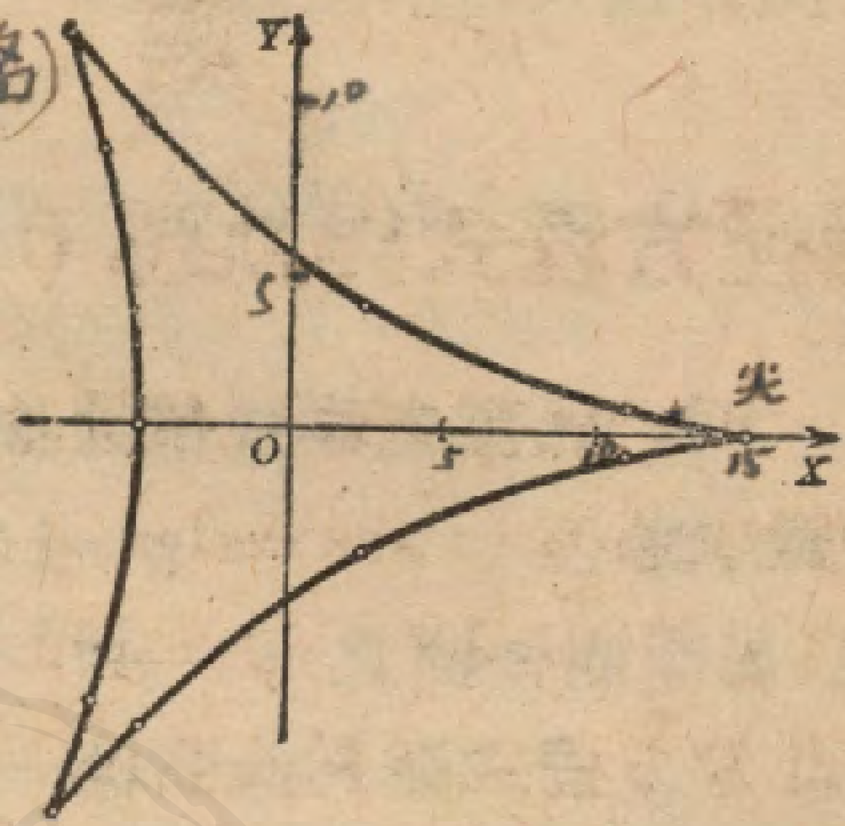
(2) $x=\frac{1}{2}t^2,\quad y=\frac{1}{3}t^3.$

t	x	y
-3	4.5	-6.75
-2	2	-2
-1	0.5	-0.25
0	0	0
1	0.5	0.25
2	2	2
3	4.5	6.75
等	等	等



［解］ 此表易作．例如，設 $t=2$，則 $x=2, y=2$ 等．

此曲線稱爲半立方拋物線（很有名）(Semicubical parabola)．



(2) 畫曲線其通徑方程式爲

(3) $$x=2r\cos\theta+r\cos 2\theta,$$
$$y=2r\sin\theta-r\sin 2\theta,$$

此處 θ 爲通徑．

［解］ 取 $r=5$．將算得之結果列成下表：

$x=10\cos\theta+5\cos 2\theta,\quad y=10\sin\theta-5\sin 2\theta$							
θ	$\cos\theta$	2θ	$\cos 2\theta$	x	$\sin\theta$	$\sin 2\theta$	y
0°	1	0°	1	15	0	0	0
30°	.866	60°	.5	11.2	5	.866	0.7
60°	.5	120°	−.5	2.5	.866	.866	4.3
90°	0	180°	−1	−5	1	0	10
120°	−.5	240°	−.5	−7.5	.866	−.866	13.0
150°	−.866	300°	.5	−6.2	.5	−.866	9.3
180°	−1	360°	1	−5	0	0	0
210°	−.866	420°	.5	−6.2	−5	.866	−9.3
240°	−.5	480°	−.5	−7.5	−.866	.866	−13.0
270°	0	540°	−1	−5	−1	0	−10
300°	.5	600°	−.5	2.5	−.866	−.866	−4.3
330	.866	660°	.5	11.2	−.5	−.866	−0.7
360°	1	720°	1	15	0	0	0

由此所得之三尖點曲線稱爲三歧點之內旋輪線(Hypocycloid of three cusps)．

93 自通徑方程式化成直坐標方程式 欲自通徑方程式得直坐標方程式須消去其通徑．其法以下例說明之．

例 題

(1) 求一曲線之直坐標方程式，已知其通徑方程式為

(1) $x=2t+3,\quad y=\frac{1}{2}t^2-4.$

［解］ 解第一方程式以求 t，即得 $t=\frac{1}{2}(x-3)$，代入第二方程式中，得 $$y=\frac{1}{8}(x-3)^2-4.$$

或，展開而化簡之 $8y=x^2-6x+9-32.$

$$x^2-6x-8y-23=0,\ \text{一拋物線} \qquad \text{答.}$$

(2) 求一曲線之直坐標方程式，已知其通徑方程式為

(2) $x=3+4\cos\theta,\quad y=3\sin\theta.$

［解］ 須記 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，於是解第一方程式以求 $\cos\theta$，第二方程式以求 $\sin\theta$．得 $\left(\frac{x-3}{4}\right)^2=\cos^2\theta \cdots(1)$ $\left(\frac{y}{3}\right)^2=\sin^2\theta\cdots(2)$

(3) $\cos\theta=\frac{1}{4}(x-3),\quad \sin\theta=\frac{1}{3}y.$ (1)+(2) $\left(\frac{x-3}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$

故其直坐標方程式為

(4) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，一橢圓． 答． $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3^2}=1$

習 題

作下列各通徑方程式之圖形，t 與 θ 為通徑．並求各題之直坐標方程式．

(1) $x=t,y=2-t.$

(2) $x=2+t,y=2-3t.$

(3) $x=t^2,y=\frac{1}{2}t.$

(4) $x=\frac{1}{2}t,y=t^2-8$

(5) $x=t^2-t,\ y=t^2+2.$

(6) $x=t^2+t,y=\frac{1}{2}t^2-3t.$

(7) $x=\frac{2}{t},y=4t.$

(8) $x=t+2,y=\frac{t}{t-2}.$

(9) $x=\frac{1}{2}t^2+1,y=\frac{1}{3}t^3-2.$

(10) $x=2\cos\theta,y=2\sin\theta.$

(11) $x=3\sin\theta,y=4\cos\theta.$

(12) $x=5+\cos\theta,y=\sin\theta-5.$

(13) $x=3\sec\theta,y=3\tan\theta.$

(14) $x=\csc\theta,y=5\cot\theta.$

特别曲线很重要.

(15) $x=2\cos\theta, y=\cos 2\theta$.

(16) $x=3\tan\theta, y=\cot\theta$.

(17) $x=5t\cos 30^\circ \quad y=5t\sin 30^\circ-16t^2$.

(18) $x=3+4\cos\theta, y=3\sin\theta-2$.

(19) $x=6+4\sec\theta, y=3\tan\theta-2$.

(20) 作下列通徑方程式之圖形:

(a) $x=t^2-4t, y=t^3-3t^2-3t$.

(b) $x=t+\sin t, y=1+\cos t$.

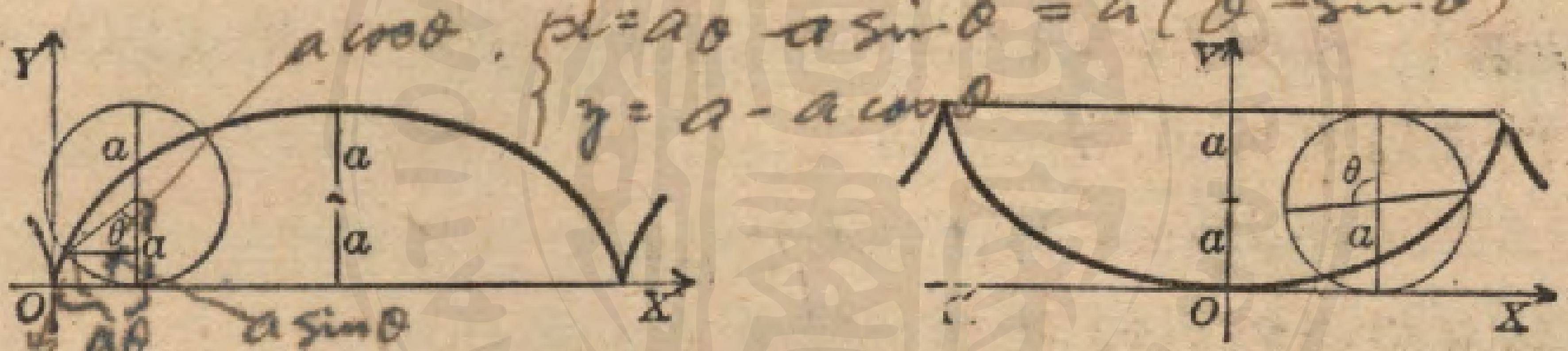
(c) $x=r\cos\theta-r\cos 2\theta, y=2r\sin\theta-r\sin 2\theta$.

(d) $x=3r\cos\theta-\frac{1}{2}r\cos 3\theta, y=3r\sin\theta-\frac{1}{2}r\sin 3\theta$

(e) $x=r\cos\theta+r\theta\sin\theta, y=r\sin\theta-r\theta\cos\theta$.

圆的展开线

$\theta=\frac{\pi}{6}, x=\frac{1}{2}\sqrt{3}+.26=0.86$
$+.26=1.12$



很重的曲線 $\frac{s}{a}=\theta$　$S=a\theta$

(21) (a) $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta), \\ y=a(1-\cos\theta). \end{cases}$　(b) $\begin{cases} x=a(\theta+\sin\theta), \\ y=a(1-\cos\theta). \end{cases}$

歧點在原點之旋輪線　　　　頂點在原點之旋輪線

(22) $x=a\theta-\frac{1}{2}a\sin\theta, y=a-\frac{1}{2}a\cos\theta$.

(23) $x=a\theta-2a\sin\theta, y=a-2a\cos\theta$.

(24) $x=b\cos^2\theta, y=a\tan\theta$.

94. 同一曲線之各種通徑方程式　當一曲線之直坐標方程式已知時,則由此求得之通徑方程式可有任意個.

例如,已知橢圓之直坐標方程式爲

(1) $$4x^2+y^2=16.$$

$x^2=2^2\cos^2\theta$

命 $x=2\cos\theta$,此處 θ 爲一通徑.代入(1)中,

$16\cos^2\theta+y^2=16$,或 $y^2=16(1-\cos^2\theta)=16\sin^2\theta$.

故方程式

(2) $x=2\cos\theta,\quad y=4\sin\theta,$

為橢圓(1)之通徑方程式. $\sin 90^\circ=1$ $\sin 270^\circ=-1$

又如以

$$y=tx+4,$$

此處 t 為一通徑,代入(1)中.

則得 $4x^2+(tx+4)^2=16$.

(3) $4x^2+t^2x^2+8tx+\cancel{16}=\cancel{16}$, 或 $(4+t^2)x^2+8tx=0.$

(4) $\therefore x=-\dfrac{8t}{4+t^2}.$

將此 x 之值代入 $y=tx+4$ 中而化簡之.

(5) $y=\dfrac{16-4t^2}{4+t^2}.$

故方程式(4)與(5)亦為此橢圓之一對通徑方程式.

其要點為: 欲得通徑方程式可命坐標之一等於一通徑之函數而代入已知直坐標方程式中,然後解之以求他一坐標使亦含此通徑.

欲得簡單之通徑方程式必需假定一坐標以適當之函數. 此無普遍規則可尋,但研究下列諸問題,當有助於學者.

有時通徑方程式祇代表曲線之一部份;例如,方程式

$$x=\sin\theta,\quad y=\cos 2\theta,$$

代表拋物線 $2x^2+y-1=0$ 之一部份弧,此段弧上 x 與 y 之絕對值不大於 1.

有許多直坐標方程式難於直接作圖,可先化為通徑方程式而後依之以作圖.

一次函數：一次方程式
二 … … 二 … …
三 … … 三 … …
四 … … 四 … …
五 … … 五 … …（不可解）

距離 { 垂直距離
平行 〃

例　　題

作方程式

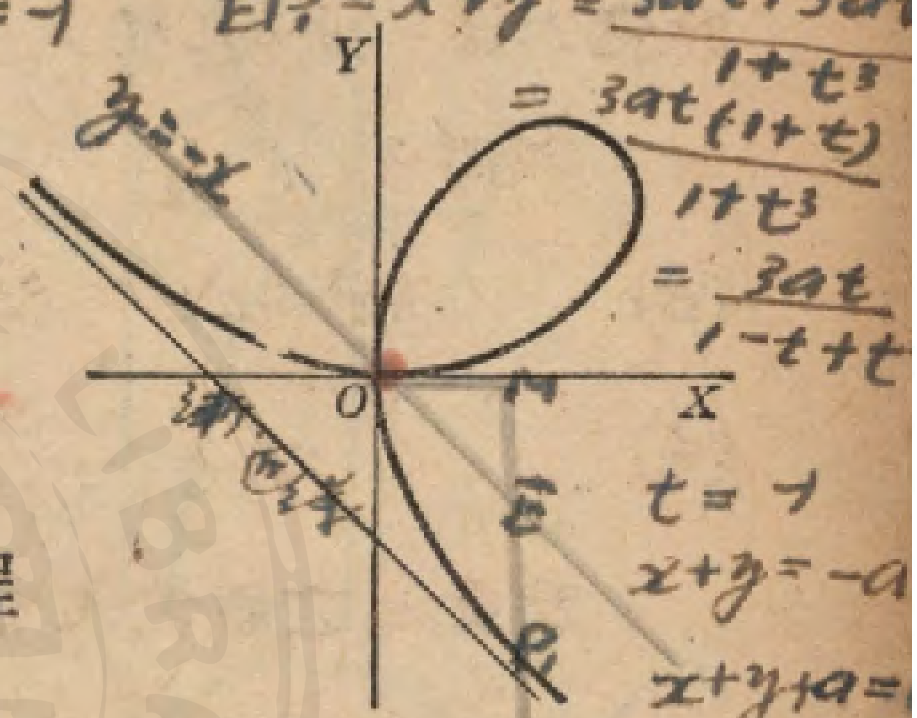
(6) $x^3+y^3-3\,axy=0$. 之軌跡.

［解］ 命 $y=tx$, 此處 t 爲通徑. 則從(6),

(7) $x^3+t^3x^3-3\,atx^2=0$.

以 x^2 除去之，解之以求 x，而記住 $y=tx$，即得所需之通徑方程式

(8) $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$.



此軌跡即爲圖中之曲線，名爲笛卡兒之蝶線 (Folium of Descartes).

圖中所作之直線爲一斜漸近線. 其方程式爲 $x+y+a=0$.

(8)中之通徑 t 顯然爲直線 $y=tx$ 之斜率，即連接曲線上一點與原點所成之直線之斜率也.

在上例題中，假定 $y=tx$ 之關係，其理由爲(7)中 x^2 除去後所餘以解 x 者爲 x 之一次方程式. 下列題 1 中之(a)與(b)可依此理以解之. 在許多情形中則用三角函數爲便，例如(c).

習　　題（新很重要）

(1) 求下列曲線之通徑方程式，用所示之方程式代入而解之. 其通徑爲 t 或 θ，作各題之曲線.

(a) $y^2=4x^2-5x^3$; $y=\ x$. 　答 $x=\frac{1}{5}(4-t^2)$; $y=\frac{1}{5}t(4-t^2)$.

(b) $y^3=5x^2-8x^3$; $y=tx$.

(c) $4x^2+y^2-16x+12=0$; $y=2\cos\theta$. 　答 $x=2\pm\sin\theta$.

(d) $x^2-4xy+13y^2=9$; $y=\sin\theta$. 　答 $x=2\sin\ \pm3\cos\theta$.

(e) $x^2y^2=b^2x^2-a^2y^2$; $y=b\sin\theta$. 　答 $x=a\tan\theta$.

(f) $x^2y^2=a^2y^2+b^2x^2$; $y=b\csc\theta$.

(g) $x^2+2xy+y^2+2x-2y=0$; $x=t-t^2$.

(h) $17x^2-16xy+4y^2-34x+16y+13=0$; $x=1+2\cos\theta$.

特設習題

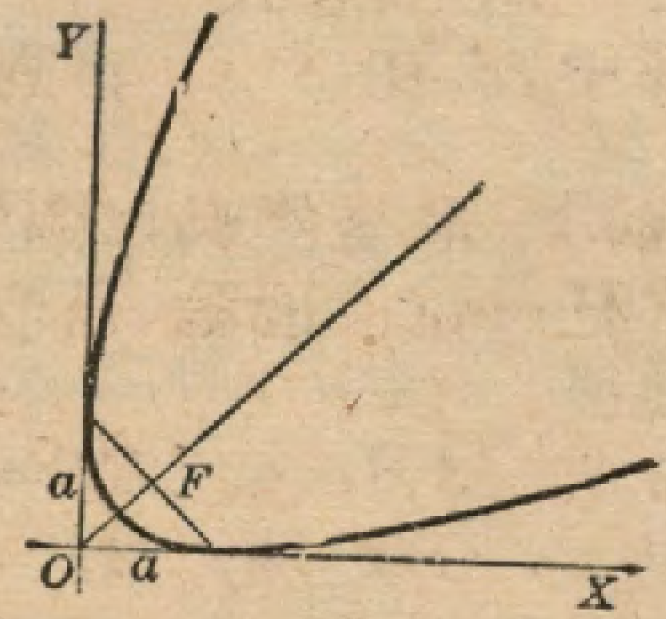
(2) 化下列方程式爲通徑方程式

並作其曲線:

(a) $y^2(2a-x)=x^3; y=tx.$

狄凹克爾氏之蔓葉線

(Cissoid of Diocles)

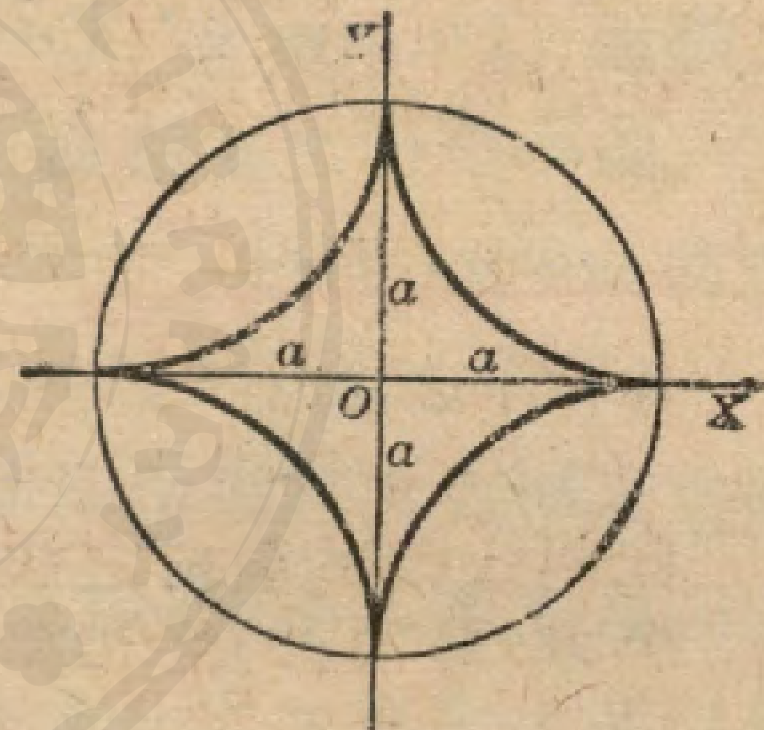


(d) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}: x=a\cos^4\theta.$

拋物線

(b) $y^2=x^2\dfrac{2+x}{2-x}; y=tx.$

答 $x=\dfrac{2t^2-2}{1+t^2}; y=\dfrac{2t^3-2t}{1+t^2}.$



(e) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}; x=a\sin\theta.$

四歧點之內旋輪線

(Hypocycloid of Four Cusps)

(c) $x^2+xy+2y^2+2x+1=0;$

$x=ty-1.$

(f) $x^4+2ax^2y-ay^3=0; y=tx.$

(g) $(x^2+y^2+4ay-a^2)(x^2-a^2)+4a^2y^2=0; x^2=a^2-t^2y^2.$

(h) $x^2=y(y-2)^2; y-2=tx.$

(i) $(x^2-\frac{1}{2}b^2)^2+y^2(x^2-b^2)=0; x^2=\frac{1}{2}b^2+ty.$

(j) $(a-x)y^2=(a+x)x^2; x=a\cos\theta.$

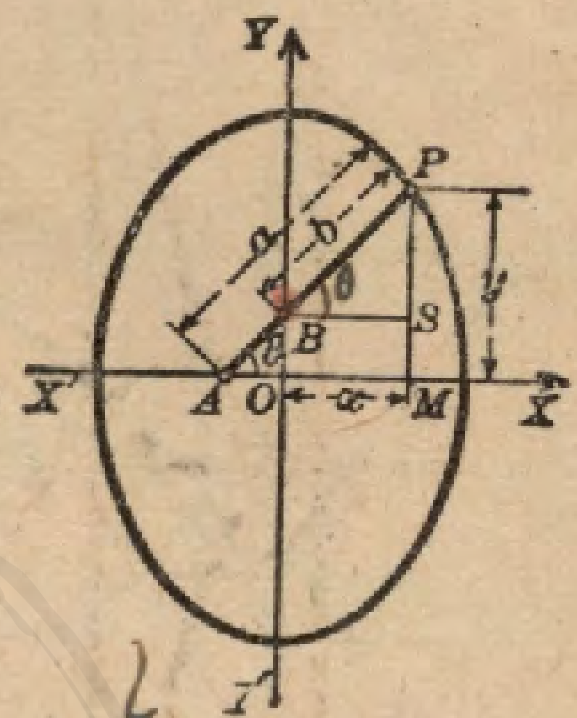
95. 用通徑方程式解軌跡問題 通徑方程式甚爲重要，因當一軌跡題難於直接求得其直坐標方程式時，如用一通徑表軌跡上一點之坐標即爲易多矣. 下例說明此意.

例 題

(1) ABP 為一剛堅直線．A 與 B 兩點沿相交兩垂線移動．則 AB 上 P 點之軌跡為何？

圖中，A 在 XX 移動，B 在 YY' 上移動；求 $P(x,y)$ 點之軌跡．

［解］ 取坐標軸如圖所示，乃就此直線之任一位置而論．選取 $\angle XAB=\theta$ 為其通徑．



命 $AP=a,\ BP=b.$ $x=BS=b\cos\theta$

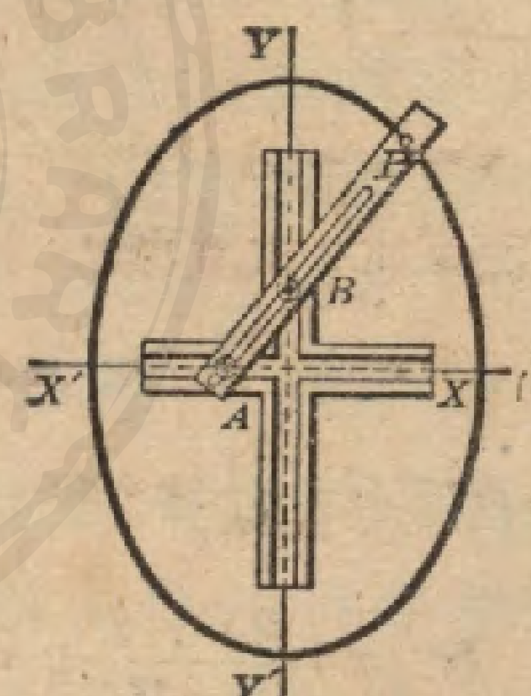
現 $OM=x,\ MP=y.$ $y=MP=a\sin\theta$

在直角 $\triangle MPA$ 中， $x^2=b^2\cos^2\theta$ $y^2=a^2\sin^2\theta$

(1) $$\sin\theta=\frac{MP}{AP}=\frac{y}{a}.$$ $\frac{x^2}{b^2}=\cos^2\theta$

在直角 $\triangle BSP$ 中，$\angle PBS=\theta$. $\frac{y^2}{a^2}=\sin^2\theta$

(2) $$\therefore\cos\angle PBS=\cos\theta=\frac{BS}{BP}=\frac{x}{b}.$$



從(1)與(2)，

(3) $$x=b\cos\theta,\quad y=a\sin\theta.$$

此兩式卽此軌跡之通徑方程式也．

平方(1)與(2)而相加，

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

故點 P 移動在一橢圓上，其軸 $2a$ 與 $2b$ 在已知兩垂線上．

普通所用畫橢圓之一種方法卽據此結果而得．其所用之儀器包含兩有槽木條 XX 與 YY' 及一橫木 ABP．在 A 與 B 處為兩螺旋套裝置於槽內且沿 ABP 可校正其位置．若此橫木移動，則 P 處之鉛筆將畫一橢圓其半軸為 PA 與 PB．

(2) **旋輪線** (Cycloid)． 一圓沿 x 軸滾動，求圓周上一點 P 之軌跡之通徑方程式．

［解］ 取動點 P 與 x 軸相接觸之一點 O 為原點(見第 192 頁之圖)．設所畫之圓為滾動圓之任一位置．命 a 為其半徑，而取變角 CBP 為通徑 θ．

從圖，設 (x,y) 為 P 之坐標，則

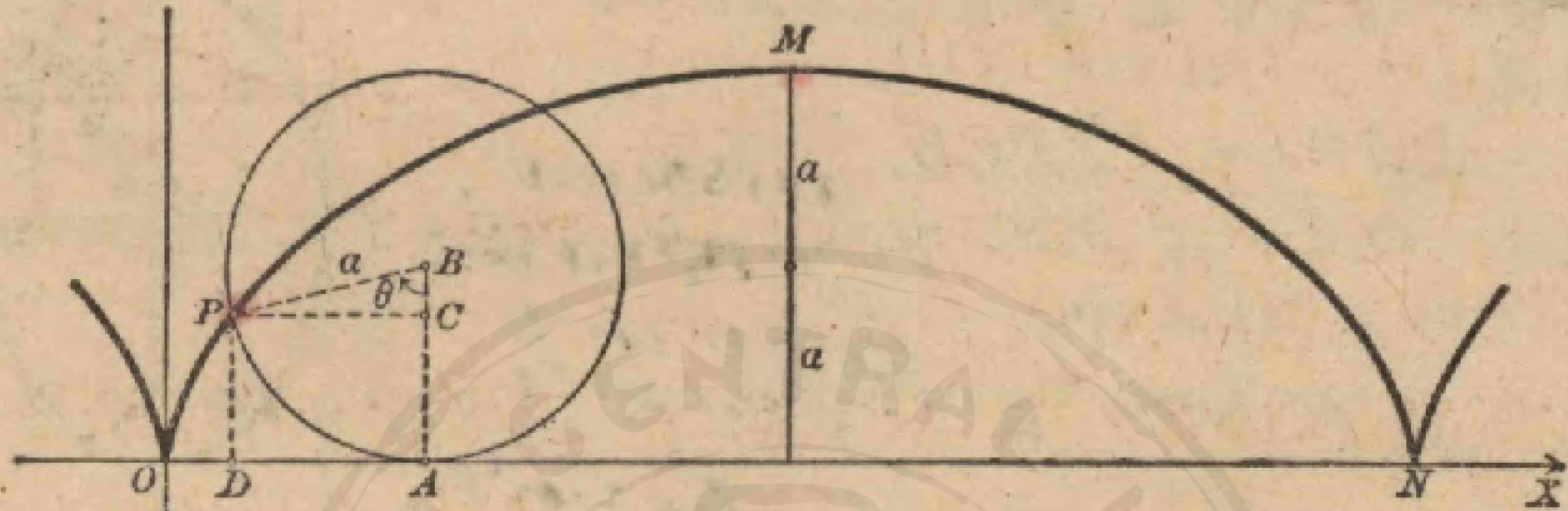
$$x=OD=OA-DA,\ y=DP=AB-CB.$$

但 $PC=a\sin\theta, CB=a\cos\theta$，而，由定義，

$$OA=\text{弧}\ AP=a\theta.$$

(因從弧度之定義，一圓之弧等於其半徑乘所張之角).故

$$(4)\qquad\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta),\\ y=a(1-\cos\theta).\end{cases}$$



此兩式爲此旋輪線之通徑方程式.

此旋輪線向左右二方伸展至無限遠而所含諸弧各等於 OMN.

旋輪線之作法　由旋輪線之定義得下之簡單作法：

取 $ON=2\pi a=$ 母圓 (Generating circle) 之圓周.畫母圓切 ON 於其中點 C.分 OC 成任意個等分而半圓 CM 亦分成同數之等分.各標以字母如圖.過 M_1, M_2，等，畫線平行於 ON.取 $M_1D_1=CC_1$，$M_2D_2=CC_2$，$M_3D_3=CC_3$，等.

於是 D_1, D_2, D_3 等點在旋輪上.

因，命母圓向左滾動時，M 點卽描成此曲線.當此圓切 ON 於 C_1 時，M 與 M_1 將在同一水平線上.而在 M_1 之左相距 CC_1 處.同理，可推得 D_2, D_3，等點.

旋輪線之弧 MN 可用 CM 爲對稱軸而作之.

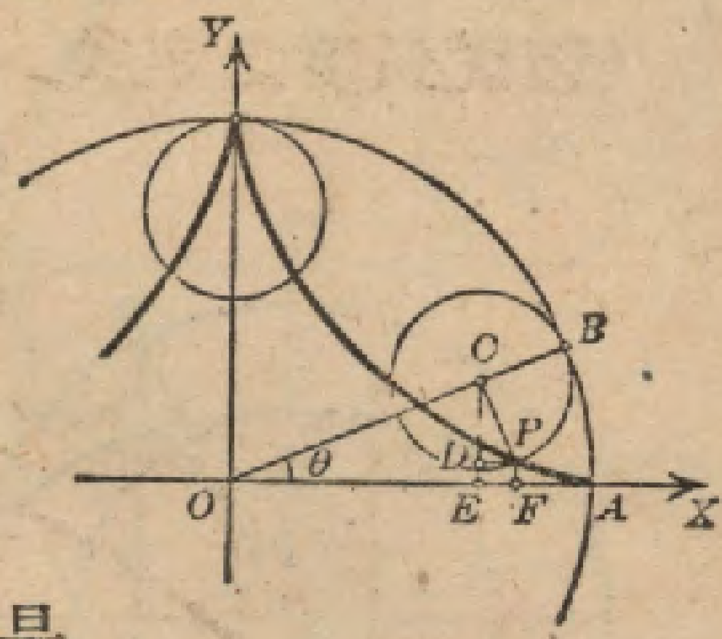
(3) **內旋輪線**(Hypocycloid).　一圓在一定圓內沿圓周滾動，求其上一點 P 之軌跡之通徑方程式.

[解]　取定圓之圓心爲原點而命 x 軸經過一點 A，此點爲跡點 $P(x,y)$ 與大圓接觸之點.命 $OA=R$，$BC=r$.則 $OC=R-r$.

現

(5)　　$x=OF=OE+DP, y=FP=EC-DC.$

在直角 $\triangle OEC$ 中，



(6)　　$OE=(\ \ -r)\cos\theta,$

$EC=(R-r)\sin\theta.$

在直角 $\triangle DPC$ 中，

(7)　　$DP=r\sin\angle PCD,$

$DC=r\cos\angle PCD.$

但　　$\angle BCP+\angle PCD=90°+\theta$，於是

(8)　　$\angle PCD=90°-\angle BCP+\theta.$

從定義，弧 $BP=$ 弧 AB，故 $r\cdot\angle BCP=R\theta$，於是 $\angle BCP=\dfrac{R\theta}{r}$；而代入(8)中，得

(9)　　$\angle PCD=90°-\dfrac{R-r}{r}\theta.$

於是，從(7)與(9)，得

(10)　　$DP=r\cos\left(\dfrac{R-r}{r}\right)\theta,\ DC=r\sin\left(\dfrac{R-r}{r}\right)\theta.$

從(6)與(10)代入(5)中得所求之結果

(11)　　$\left\{\begin{aligned} x&=(R-r)\cos\theta+r\cos\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta,\\ y&=(R-r)\sin\theta-r\sin\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta.\end{aligned}\right\}$ 答.

當 r 與 R 有公度量時，此曲線爲一閉曲線．圖中，$R=4r$，故得四歧點之內旋輪線，第 190 頁，稱爲星形線 (Astroid)，乃一特例．又參閱第 185 頁例題 2，其(11)中 $R=3r$.

習　　題

在下列諸題中以通徑及圖中已知線之長表 x 與 y 速繪其軌跡．

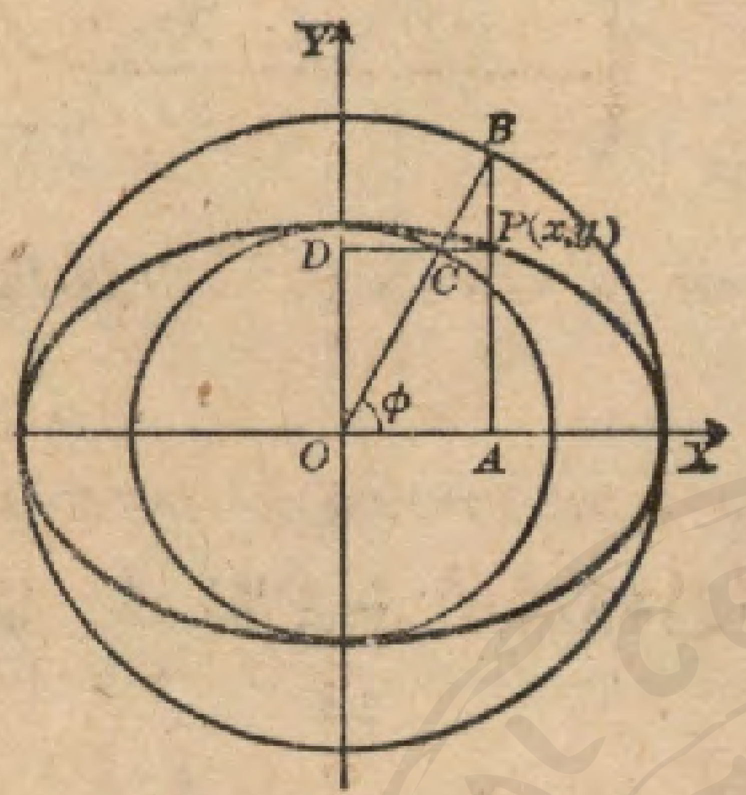
(1) 求橢圓之通徑方程式，以其離心角 (Eccentric angle) ϕ 爲通徑，卽其長軸與圓 $x^2+y^2=a^2$ 上 B 點處之半徑間之角也．而 B 點之橫坐標與橢圓上 $P(x,y)$ 點同（見第 194 頁與第 45 節之圖）．

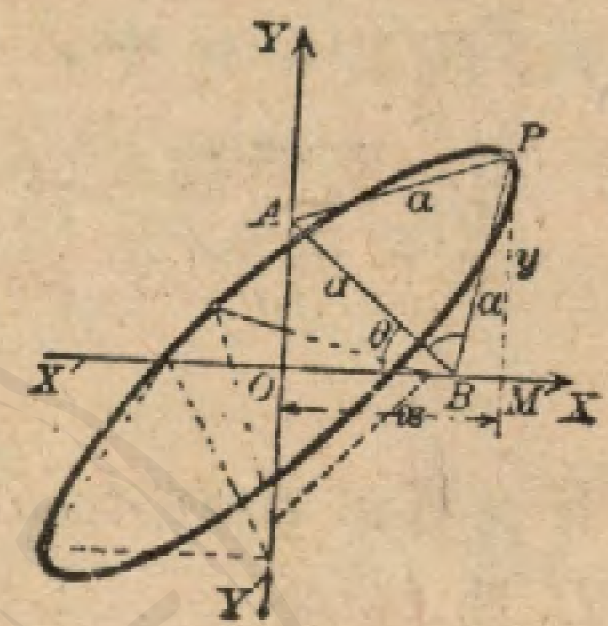
答　$x=a\cos\phi,\ y=b\sin\phi.$

(2) 在下右圖中，ABP 爲一剛堅之等邊三角形．A 在 YY' 上移動，B 在 XX' 上移動．求頂點 P 之軌跡．

答　$x=a\cos\theta+a\cos(120°-\theta),\ y=a\sin(120°-\theta)$;

橢圓 $x^2-\sqrt{3}\,xy+y^2=\frac{1}{4}a^2$.

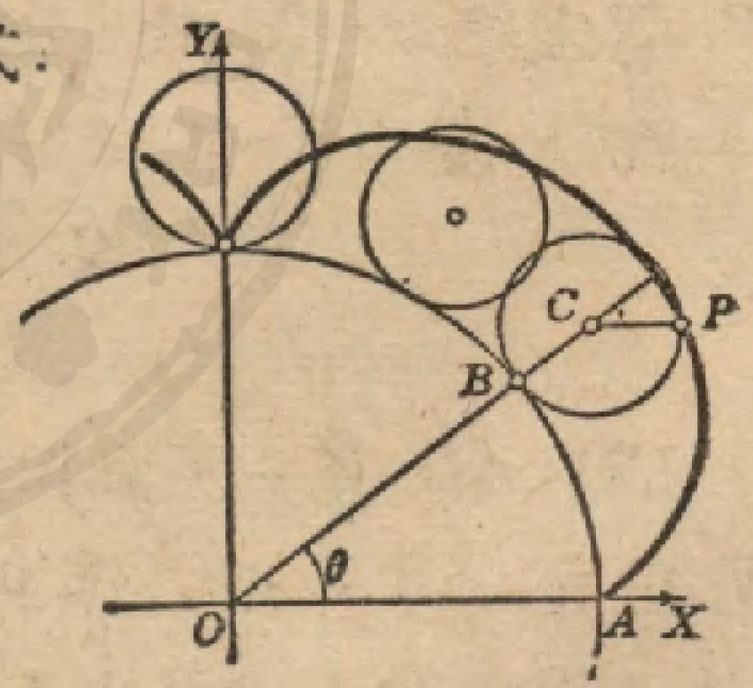




(3) **外旋輪線**(Epicycloid)　一半徑 r 之圓在一半徑爲 R 之圓外滾動．求動圓上一點之軌跡之方程式．

答　$x=(R+r)\cos\theta-r\cos\frac{R+r}{r}\theta$;

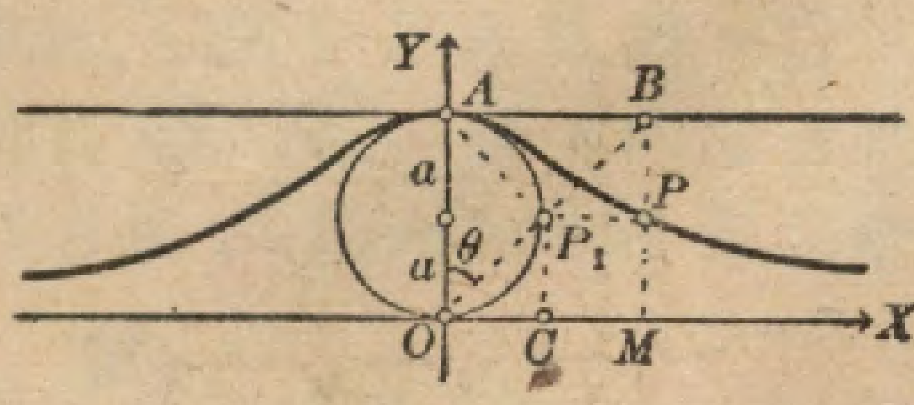
$y=(R+r)\sin\theta-r\sin\frac{R+r}{r}\theta$.



在第 193 頁上內旋輪線之方程式(11)中以 $-r$ 代 r 即得此結果．

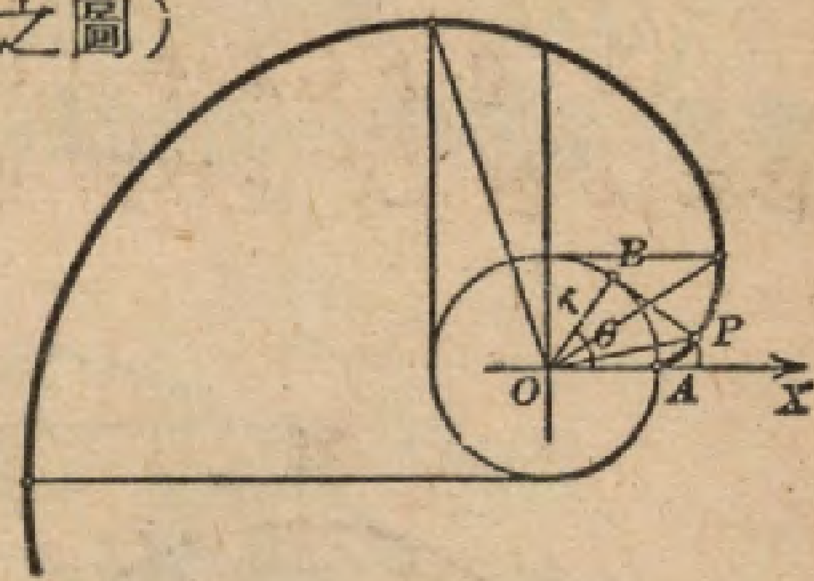
當 r 與 R 有公度量時，此線爲閉曲線．圖中 $R=4r$．

(4) 描述外旋輪線與內旋輪線之作圖法，與第 192 頁旋輪線之作法相類似．



(5) **亞尼西之箕舌線** (The witch of Agnesi)　求一點 P 之軌跡，其作法如下：命 OA 爲一圓之直徑，而命任一直線 OB 爲過 O 遇圓於 P_1 與切於 A 點之切線相交於 B．畫 $P_1P\perp OA$ 與 $BP\parallel OA$．

答　$x=2a\tan\theta,\ y=2a\cos^2\theta$：直坐標方程式，$y(x^2+4a^2)=8a^3$.



(6) Q 爲半徑 BP（第 192 頁例題 2 之圖）上一點．若 $BQ=b$，求 Q 點之軌跡．

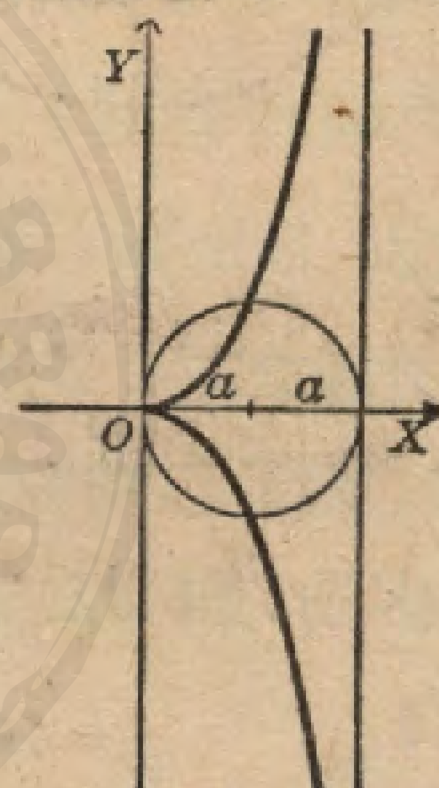
答　$x=a\theta-b\sin\theta,\ y=a-b\cos\theta$.

此軌跡稱爲長旋輪線（Prolate cycloid）或短旋輪線（Curtate cycloid）全視其 a 之大於或小於 b 而定．

(7) **圓之展開線**（The involute of a circle）．一繩盤繞於一圓周上；求當解開時，繩端之軌跡．

答　$x=r\cos\theta+r\theta\sin\theta,\ y=r\sin\theta-r\theta\cos\theta$.

提示　取圓心爲原點而命 x 軸經過繩端所止之點 A．設將繩解開至 B 點，而命 $\angle AOB=\theta$（見圖）．



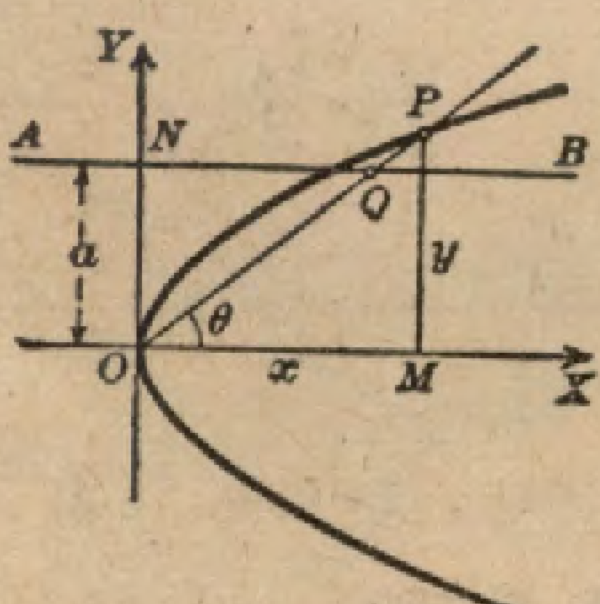
(8) **狄凹克爾之蔓葉線**（The cissoid of Diocles）　圓 $x^2+y^2-2ax=0$ 之一弦 OP_1 遇直線 $x=2a$ 於一點 A．求直線 OP_1 上一點 P 使 $OP=P_1A$ 之軌跡．

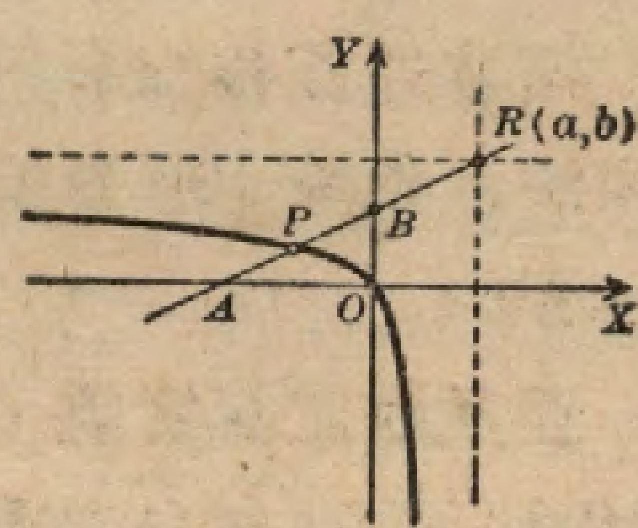
答　$y^2(2a-x)=x^3$（見圖）．

特　設　習　題

(9) AB 爲一定直線而 O 爲一定點．過 O 畫 OX 平行 AB 與 ON 垂直 AB．從 O 作直線過 AB 上任一點 Q．在此線上取一點 P 使 $MP=NQ$，MP 垂直 x 軸．則 P 之軌跡爲何？

答　拋物線 $y^2=ax$.



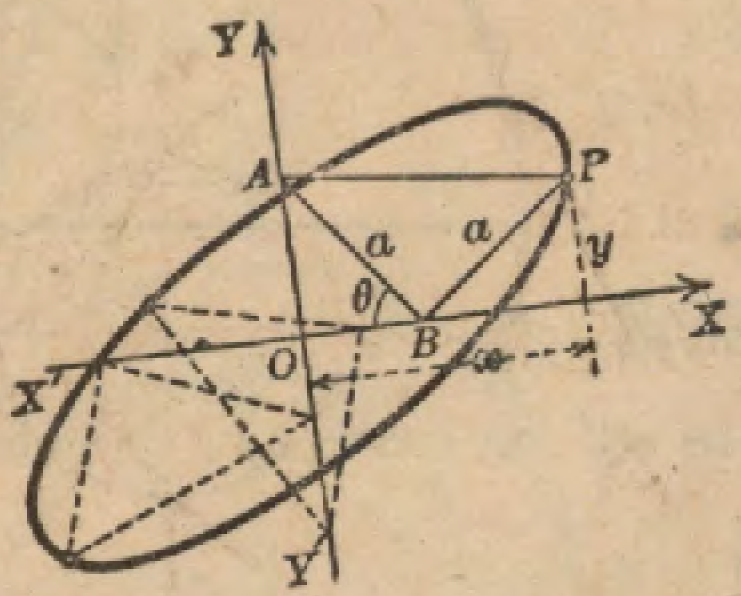


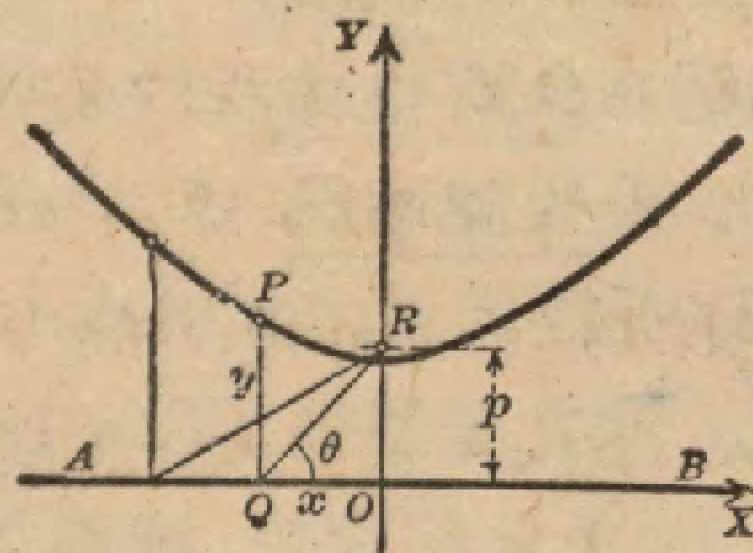
(10) 過定點 $R(a,b)$ 作線遇二坐標軸於 A 與 B．則 AB 中點之軌跡爲何？

答　等邊雙曲線 $(2x-a)(2y-b)=ab$.

(11) 一剛堅等腰直角 $\triangle ABP$ 之兩頂點 A 與 B 在兩垂線上移動. 求頂點 P 之軌跡.

答　橢圓 $x^2-2xy+2y^2=a^2$.

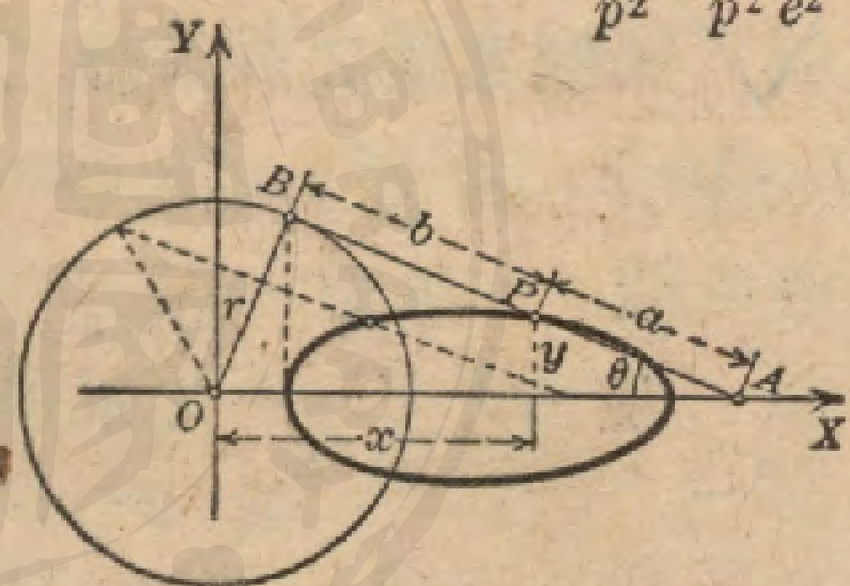




(12) AB 爲一定線而 R 一定點. 自 R 至 AB 上任一點 Q, 作直線 RQ; 於 Q 點作 AB 之垂線 QP, 使 $QP \div QR$ 等於一常數 e. 則 P 之軌跡爲何?

答　雙曲線 $\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{p^2e^2}=-1$.

(13) OB 爲一機器之曲拐而 AB 爲所連之桿. B 在曲拐之圓周上移動, 其圓心爲 O, 而 A 在定線 OX 上移動. 則 AB 上一點 P 之軌跡爲何?

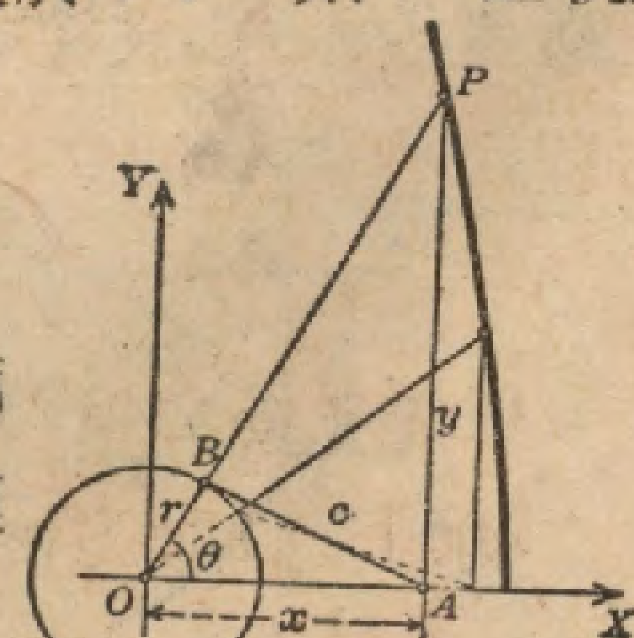


答　當 $r=a+b$ 時, 爲一橢圓; 否則爲一卵形曲線.

(14) OB 爲一機器之曲拐繞 O 旋轉, 而 AB 爲其連桿, 點 A 在 OX 上移動. 畫 $AP \perp OX$ 遇 OB 之延長線於 P. * 則 P 之軌跡爲何?

答　$(x^2+r^2-c^2)\sqrt{x^2+y^2}=2rx^2$.

當 $c=r$ 時, 此軌跡爲圓 $x^2+y^2=4r^2$.

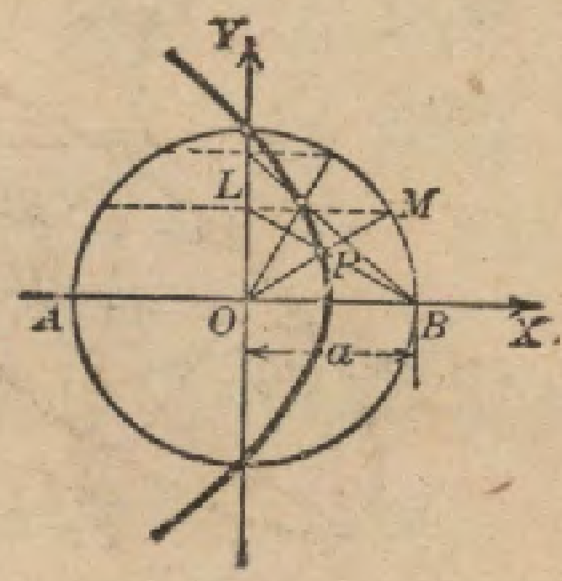


96. 用對應線之交點以確定軌跡　若兩直線系之方程式含同一之通徑, 則屬於通徑同數值之直線稱爲對應線 (Corresponding lines). 有時一曲線可視爲對應線之交點之軌跡.

* P 爲連桿運動之"瞬間中心 (Instantaneous center)."

例　　題

(1) 圖中，LM 爲圓中平行於直徑 AB 之任一半弦．求 BL 與 OM 之交點 P 之軌跡．



［解］ OM 之方程式爲 $y=x\tan t$，若 $\angle XOM=t$．M 之坐標爲 $(a\cos t, a\sin t)$；L 之坐標爲 $(0, a\sin t)$．故 BL 之方程式爲 $y=\sin t\,(a-x)$．於是此兩直線系爲

(1)　$y=x\tan t, y=\sin t\,(a-x)$．

解之以求 x 與 y，得

(2)　$$x=\frac{a\cos t}{1+\cos t},\quad y=\frac{a\sin t}{1+\cos t},$$

爲此軌跡之通徑方程式．其直坐標方程式可從(2)或(1)

消去 t 而得，即　$y^2=a^2-2ax$．　答．

此軌跡乃爲圓內之拋物線之弧．

例題 1 之解法可總述如下：

求兩對應直線系交點軌跡之方程式之規則

第一步　求含同一通徑之兩直線系之方程式．

第二步　解此等方程式而以通徑表 x 與 y 之值，即得此軌跡之通徑方程式．或從兩直線系方程式中消去其通徑，即得其直坐標方程式．

例　　題

從拋物線之頂點作其切線之垂線，求此垂線足之軌跡．

［解］　設取拋物線之標準方程式 $y^2=2px$，則以斜率 t 表切線 AB 之方程式爲（第 75 節）

(3)　$$y=tx+\frac{p}{2t}.$$

垂線 OP 之方程式爲

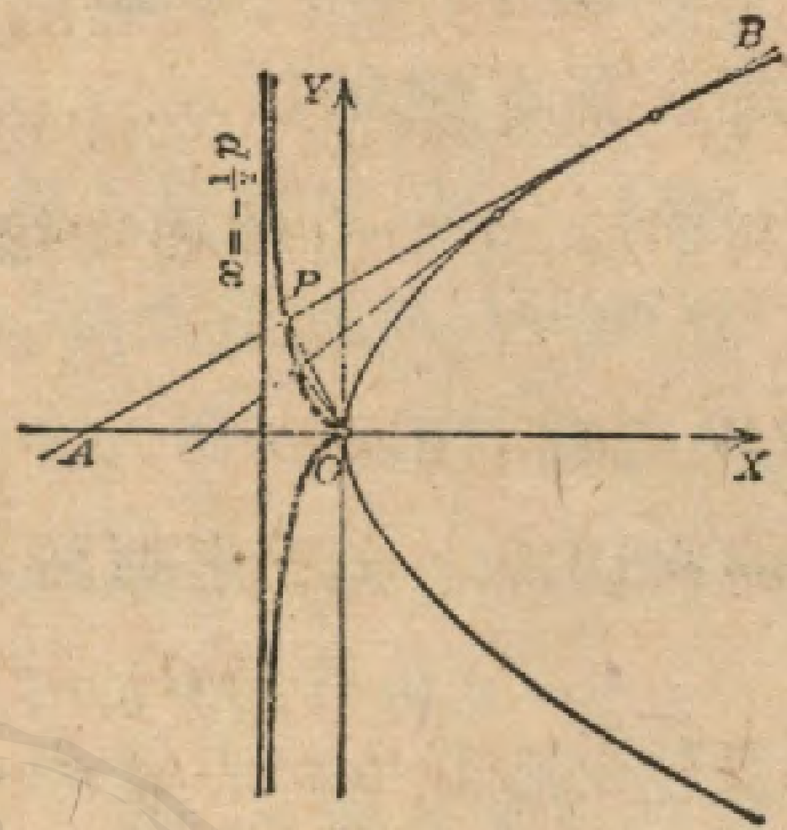
(4)　　$y=-\frac{1}{t}x.$

其直坐標方程式可從(3)與(4)消去 t 而得.

從 (4), $t=-\frac{x}{y}$. 代入(3)中而化簡之,得

$$y^2(x+\tfrac{1}{2}p)=-x^3.\quad 答.$$

與第195頁題8之答案比較之,卽知其軌跡爲一蔓葉線.



習　　題

(1) 過等邊雙曲線(第52節)之中心作切線之垂線,求此垂線與此切線之交點之軌跡. 答 雙紐線 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$(第157頁例題2).

(2) 設一三角形之底邊固定,其高亦爲定長,試求此三角形三高之交點之軌跡. 答 拋物線.

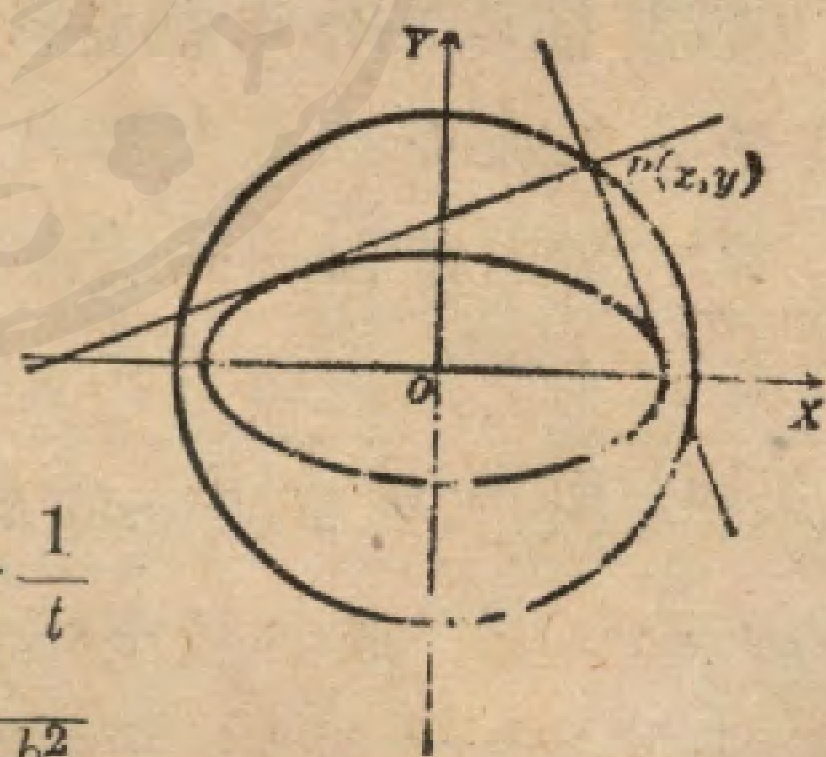
(3) 求橢圓

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

上兩垂直切線之交點之軌跡.

答 準圓 (Director circle).

$$x^2+y^2=a^2+b^2.$$



提示 從第75節,斜率爲 t 與 $-\frac{1}{t}$ 之切線方程式各爲 $y-tx=\sqrt{a^2t^2+b^2}$,

$ty+x=\sqrt{a^2+b^2t^2}.$

平方而加之,以消去 t.

(4) 橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上一切線遇 x 軸於 A, y 軸於 B. 從 A 畫一線 $\parallel OY$,而從 B 畫一線 $\parallel OX$. 則此二線之交點之軌跡爲何? 答 $x^2y^2=a^2y^2+b^2y^2$(第189頁題1之(f)).

(5) 以雙曲線代題4中之橢圓而求之.

(6) 求二垂直切線交點之軌跡，此二切線切於(1)拋物線，(2)第 48 節之雙曲線(IV)(參閱題 3)．　答 (1)準線；(2)$x^2+y^2=a^2-b^2$．

(7) 過(1)橢圓，(2)拋物線，(3)雙曲線之一焦點，各作直線垂直於其切線．求此直線與切線之交點之軌跡．

答 (1) $x^2+y^2=a^2$；(2) $x=0$；(3) $x^2+y^2=a^2$(參閱題 3)．

(8) 過圓 $x^2+y^2+2ax+a^2-b^2=0$ 作直線垂直於其切線，求此直線與切線之交點之軌跡．

答 蝸線 $(x^2+y^2+ax)^2=b^2(x^2+y^2)$(參閱第 153 頁題 17)．

(9) 在橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上任一點 M 作切線．從橢圓之中心作直線垂直於此切線且遇 M 之縱坐標(必要時，延長之)於 P．求 P 之軌跡(參閱第 143 頁題 2)．　答 橢圓 $a^2x^2+b^2y^2=a^4$．

(10) 拋物線上任一點 M 作切線．從拋物線之頂點作此切線之垂線遇 M 之焦點半徑(必要時，延長之)於 P 則 P 之軌跡為何？

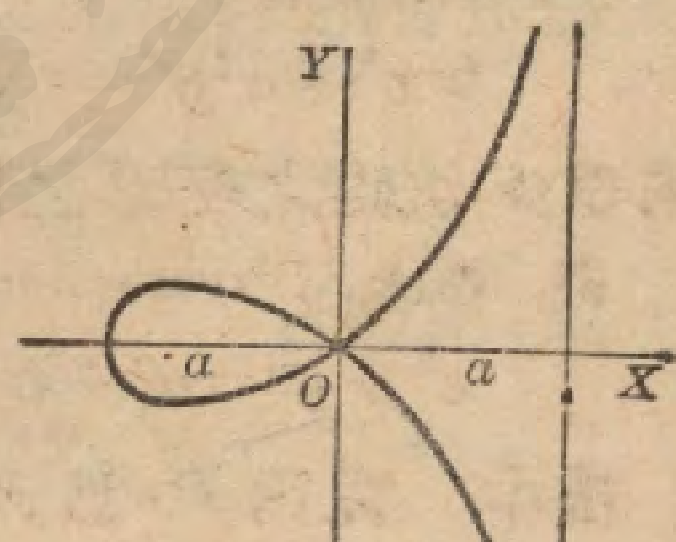
答 一圓．

特設習題

(11) 從原點作直線垂直於拋物線 $y^2+4ax+4a^2=0$ 之切線；求其垂足之軌跡．

答 環索線(Strophoid)，$y^2=x^2\dfrac{a+x}{a-x}$

(見圖)．



(12) 在橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 及大輔圓 $x^2+y^2=a^2$ 上，取其橫坐標相同諸點作法線，求其交點之軌跡．答 圓 $x^2+y^2=(a+b)^2$．

(13) AB 為一圓之定直徑而 M 為圓上任一點．從 A 作直線垂直於 M 處切線遇 BM 之延長線於 P．求 P 之軌跡．　答 一圓．

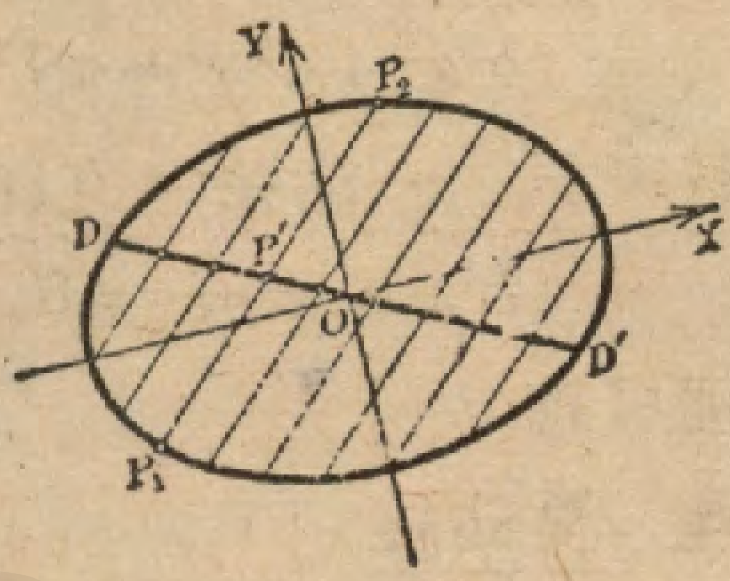
(14) A 與 B 為定點而 LM 為一定線．作 PA 與 PB 使在 LM 上截一已知長．則 P 之軌跡為何？

97. 圓錐曲線之直徑　一種與前稍異之軌跡問題今舉例說明如下．

例 題

橢圓內平行弦系中點之軌跡爲何?

[解] 命平行弦系之方程式爲



(1) $y=mx+k.$

命弦 P_1P_2 之 k 值爲 k_1;卽

(2) $y=mx+k_1$

爲 P_1P_2 之方程式.假定 P_1 之坐標爲 (x_1,y_1) 而 P_2 爲 (x_2,y_2).

設 $P'\ (x',y')$ 爲 P_1P_2 之中點,則

(3) $x'=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\quad y'=\frac{1}{2}(y_1+y_2).$

因 (x_1,y_1) 與 (x_2,y_2) 爲弦(2)與橢圓之交點,故欲得其值可解

(4) $y=mx+k_1$ 與 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$

消去 y,得方程式

(5) $(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2k_1mx+a^2k_1{}^2-a^2b^2=0.$

此方程式之根爲 x_1 與 x_2,而從(3),x 等於此二根和之半.故吾人祇須求得(5)中二根之和已足.但從代數學,*

(6) $$x_1+x_2=-\frac{2a^2k_1m}{a^2m^2+b^2}.$$

故,從(3),

(7) $$x'=-\frac{a^2m}{a^2m^2+b^2}k_1.$$

因 (x',y') 適合(2),

(8) $$y'=m\ x'+k_1=\frac{-a^2m^2k_1}{a^2m^2+b^2}+k_1=\frac{b^2}{a^2m^2+b^2}k_1.$$

從(7)與(8)消去 k_1 並去其符標,卽得此軌跡之方程式,

(9) $b^2x+a^2my=0.$

此軌跡爲圖中之直線 DD'.

在圓中,一直徑可定爲一平行弦系中點之軌跡.在圓錐曲線

* 在二次方程式 $Ax^2+Bx+C=0$ 中,二根之和 $=-\frac{B}{A}$;二根之積 $=\frac{C}{A}$.

中,其與此相當之軌跡稱爲此圓錐曲線之直徑(A diameter of the conic). 故得

定理　橢圓

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

內平分斜率爲 m 諸弦之直徑爲

$$\boldsymbol{b^2x+a^2my=0.}$$

同理可證

定理　雙曲線

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

內平分斜率爲 m 諸弦之直徑爲

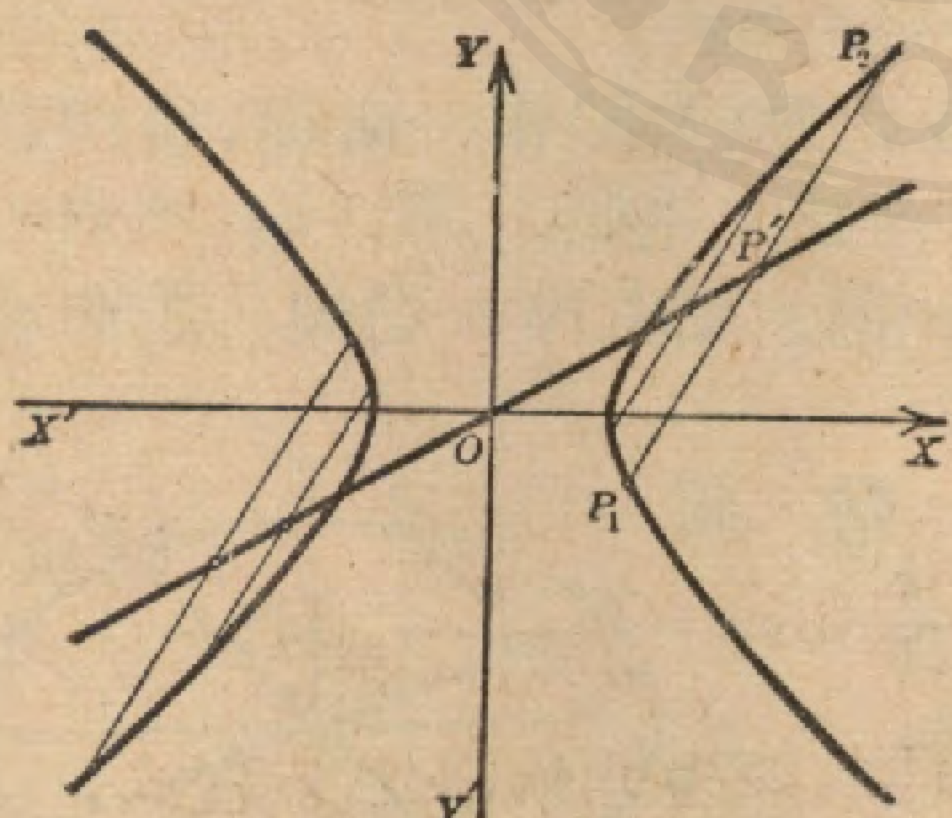
$$\boldsymbol{b^2x-a^2my=0;}$$

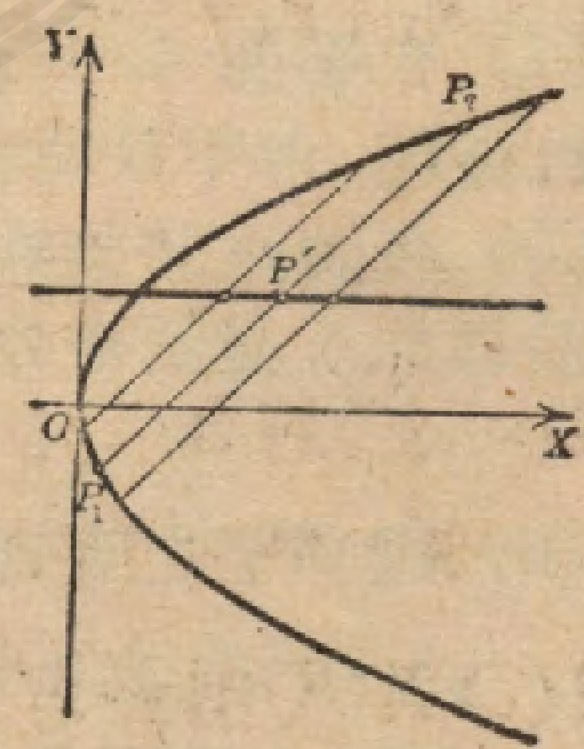
拋物線

$$y^2=2px$$

內平分斜率爲 m 諸弦之直徑爲

$$\boldsymbol{my=p.}$$





過橢圓或雙曲線之中心之各線卽爲其直徑，而於拋物線內則平行於其軸之各線爲其直徑.

上例之法應解析之,使學者可用之於任何圓錐曲線之方程式

習　　題

(1) 求下列圓錐曲線內平分所示諸弦之直徑之方程式．每一情形中作一圖．

(a) $4x^2+9y^2=36$, 諸弦之斜率$=\frac{1}{2}$.

(b) $x^2=8y$, 諸弦 $x+y=k$. 答 $x+4=0$.

(c) $4x^2-y^2=16$, 諸弦 $3x-y+k=0$.

(d) $xy=12$. 諸弦之斜率 $=-2$. 答 $2x-y=0$.

(e) $x^2-y^2+4x-16=0$. 諸弦 $x+y=k$. 答 $x+4y+2=0$.

(f) $xy-y^2+2x-4=0$, 諸弦 $3y=2x+k$.

(2) 求從下列已知條件所決定之已知圓錐曲線之直徑方程式及被此直徑所平分諸弦系之斜率．

(a) $y^2=6x$, 過 $(3,-1)$. 答 $y+1=0$; 諸弦之斜率 $=-3$.

(b) $9x^2+36y^2=324$, 過 $(4,2)$.

(c) $4x^2-16y^2=25$, 過 $(1,-2)$. 答 $2x+y=0$; 諸弦之斜率 $=-\frac{1}{8}$.

(d) $x^2+2y^2-4x-2y-6=0$, 過 $(8,0)$.

(e) $y^2+xy-8=0$, 過 $(3,-3)$.

(3) 求弦之方程式，此弦為

(a) $y^2=6x$ 之弦而被 $(4,3)$ 所平分; 答 $x-y-1=0$.

(b) $9x^2+36y^2=324$ 之弦而被 $(4,2)$ 所平分;

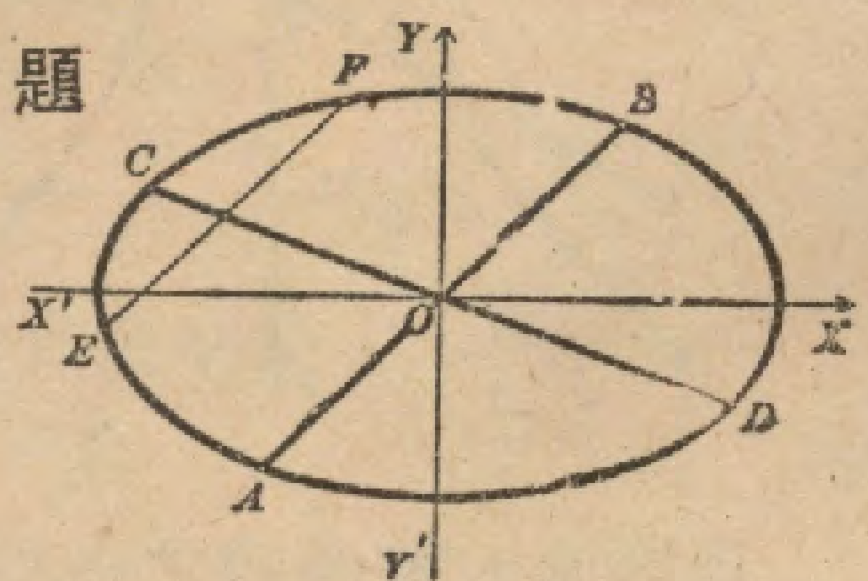
(c) $4x^2-y^2=9$ 之弦而被 $(4,2)$ 所平分; 答 $8x-y-3=0$.

(d) $xy-4=0$ 之弦而被 $(2,-1)$ 所平分.

(4) 在橢圓 $4x^2+y^2=25$ 上之點$(2,3)$作一直徑，復作諸弦平行於此直徑．求平分諸弦之直徑兩端之坐標． 答 $(\frac{3}{2},-4)$與$(-\frac{3}{2},4)$.

(5) 在圓錐曲線與一直徑相遇之點處作一切線．證明此切線平行於被此直徑所平分之諸弦．

特　設　習　題



(6) 證明下之定理：設橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 之兩直徑，其斜率為 m 與 m' 能適合 $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$之關係，則各直徑平分平行於他直徑之諸弦，而稱為共軛直徑 (Conjugate diameter)．圖中 AB 與 CD 為共軛直徑．

(7) 橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上一點 $A(x_0, y_0)$ 爲一直徑之端點.證明下列諸定理:

(a) 其共軛直徑 CD 之兩端點爲

$$\left(\pm\frac{ay_0}{b},\ \pm\frac{bx_0}{a}\right).$$

(b) 在二共軛直徑 AB 與 CD 之端點作切線,則由此切線所成之平行四邊形,其面積爲 $\triangle OAC$ 之八倍而等於 $4ab$.

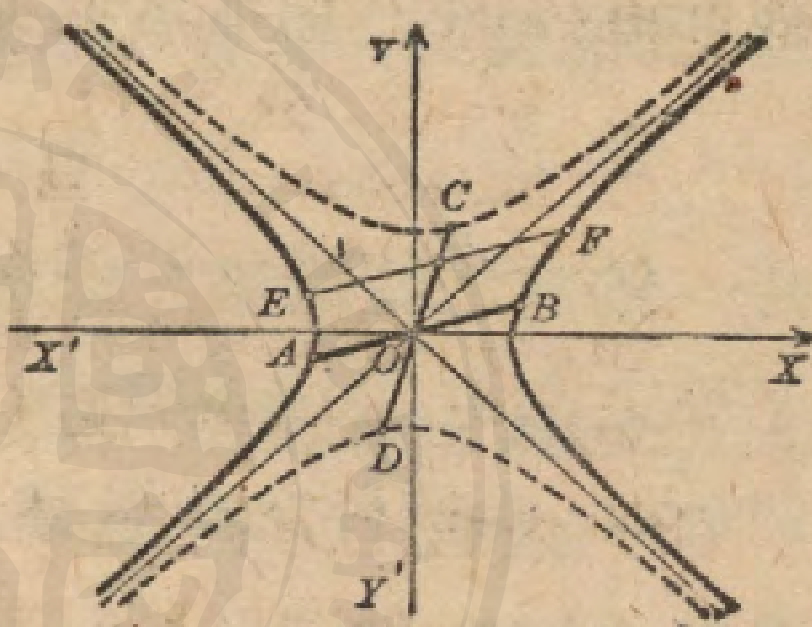
(c) 設 OB 與 OC 爲任意兩半共軛直徑之長 則 $\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=a^2+b^2$.

(8) 過橢圓一焦點作一直徑之垂線而交其共軛直徑之延長線於 P. 求 P 之軌跡

(9) 題(6)與題(7)中之橢圓如以雙曲線

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

代之.試述其相當諸定理並證明之.(參閱右圖,其中 AB 與 CD 爲共軛直徑).



第 十 二 章

函數,圖形,及經驗方程式

98 函數 (Functions) 在多數實用題之中所含之兩變數 (Variables) 常成一種關係,卽一變數之值依他一變數之值而定. 例如,寄許多封信,其郵資與重量皆爲變數,但郵資之總值依其重量而定. 其他實例,學者可思得之. 此種關係可用下述定義明顯確定之:

當一變數之值隨第二變數而變,又當第二變數爲一定值時,此變數亦隨之而定,則此變數稱爲第二變數之函數.

例如,已知信件之重量時,則其郵資亦因之而決定.

函數之記法 (Notation of functions) x 之函數常以符號 $f(x)$ 表之,而讀作"f of x". 爲分別不同之函數起見常將冠首字母變更之,如 $F(x)$, $\phi(x)$(讀作"phi of x"), $f(x)$, 等.

在任一研究中,同一函數符號常指示此函數依其變數而變之同一定律. 在較簡單之情形中,此定律常依其變數形成一組解析之運算. 故,在此種情形中,同一函數符號,雖用不同之量,仍指示同一之運算或同一組之運算. 如,設

$$f(x) = x^2 - 9x + 14,$$

則 $$f(y) = y^2 - 9y + 14;$$

又 $$f(0) = 0^2 - 9.0 + 14 = 14,$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 9(-1) + 14 = 24, \text{等}$$

99. 函數之圖形 (Graph of a function) **簡單函數之例**　以變數之值爲橫坐標，其函數之對應值爲縱坐標，連諸點以成一曲線,則此曲線卽函數之圖形也.圖形之作,常有助於函數之硏究.

一次函數 (Linear function), $\boldsymbol{ax+b}$. 其圖形,卽

(1)　　$y=ax+b$,

之軌跡,乃爲一直線. x 中每一單位之變化,常使 y 中之變化等於斜率 a;卽 y 之變化率爲一定.換言之,設 h 與 k 各爲 x 與 y 之值中之對應變化,則 k 與 h 之比等於 a. 此爲一次函數之特性.

定理 1.　在一次函數中,設 x 諸連續值之諸差皆爲(h),則其對應諸 y 值之諸差必皆爲(ah).

二次函數(Quadratic function),$\boldsymbol{ax^2+bx+c}$ 其圖形,卽

(2)　　$y=ax^2+bx+c$.

之軌跡.乃爲一拋物線,其對稱軸平行於 y 軸(參閱第 59 節,方程式(4)).

設 $x+h$ 與 $y+k$ 爲對應值,則

(3)　　$y+k=a(x+h)^2+b(x+h)+c$.

展開之而減去方程式(2),得

(4)　　$k=2ahx+(ah^2+bh)$.

設 h 爲一定,則 k 爲 x 之一次函數.

定理 2.　在二次函數中,設 x 諸連續值之諸差皆相等,則 y 之諸對應連續值之諸差爲 x 之一次函數.

設 k_1, k_2, k_3 等爲 y 諸連續值之差,從上一次函數之特性,可知 k_2-k_1, k_3-k_2 等皆相等.從(4),其差爲 $2ah^2$. k_1, k_2, k_3, 等數

稱為 y 之第一差(First differences of y)，而 k_2-k_1，等數，為第二差．後者在定理 2 所設之情形中為一常數(非零)．

記法　y 之第一差以 Δy 表之，第二差以 $\Delta^2 y$ 表之，餘類推．

例　　題

證明右表中 x 與 y 之諸值皆確切適合

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
1	25	16	-2
2	41	14	-2
3	55	12	-2
4	67	10	-2
5	77	8	-2
6	85	6	
7	91		

(2)　　$y=ax^2+bx+c$ 而求 a,b,c.

［解］　此處 $\Delta x=1$ 而為一常數．y 之第一與第二差列在表中．因後者為常數(非零)，故 y 為 x 之二次函數．欲求 a, b, c, 可用下列二法之一．

第一法　從 (4)，因 $k=\Delta y$，故必有

(5)　　$\Delta y=a'x+b'$，其中 $a'=2ah$, $b'=ah^2+bh$.

又從定理 1．$\Delta^2 y=a'h$．因 $h=1$，則 $a'=-2$．故 $-2=2ah$，而 $a=-1$．將任一對 x 與 Δy 之對應值代入 (5) 中，如 $x=1$，$\Delta y=16$，得 $b'=18$．故 $ah^2+bh=18$，而 $b=19$．於是 (2) 為 $y=-x^2+19x+c$．欲求 c，可將表中 x 與 y 任一對數值代入．於是 $c=7$，而其關係式為 $y=7+19x-x^2$．x 與 y 之一切已知值適合此方程式．

第二法　將 x 與 y 三對數值代入(2)中而解之以求 a,b,c；卽決定 a,b,c 使拋物線(2)經過此三個已知點．

習　　題

(1) 在下表中求 Δx, Δy, 與 $\Delta^2 y$．於是證明 x 與 y 之值確切適合一次關係式 $y=ax+b$，而求 a 與 b.

(a)

x	1	2	3	4	5
y	-1	2	5	8	11

(b)

x	1	2	3	4
y	3	1	-1	-3

(2) 作一 x 與 y 之數值表使適合一假定之一次關係式. 求 Δx, Δy, 與 $\Delta^2 y$. y 之變化率為何?

(3) 在下表中求 Δx, Δy, 與 $\Delta^2 y$. 於是證明 x 與 y 之值確切適合 $y=ax^2+bx+c$, 而求 a, b, c.

(a)

x	1	2	3	4	5
y	-3	2	13	30	53

(b)

x	-2	-1	0	1	2
y	13	8	5	4	5

(4) 作一 x 與 y 之數值表使適合一所假定如(2)式之關係式. 求 Δx, Δy, 與 $\Delta^2 y$, Δy^2 在何時為一常數?

(5) 從下列諸已知值,證明 y 之變化率為一常數. 以一 x 之函數表 y.

(a)

x	0	1.4	2	5
y	3.26	4.8	5.46	8.76

答　$y=1.1x+3.26$.

(b)

x	10	15	25	40
y	72.4	83.4	105.4	138.4

(6) 求 a, b, c 於拋物線律 $y=ax^2+bx+c$ 中,此律確切適合下表中諸值.

(a)

x	0	2	5	10	15
y	6	12	42	148	324

(b)

x	0	0.5	2	4	5
y	10.2	10.2	13.8	27	37.2

(7) 已知 $f(x)=x^2-4x+2$. 求 $f(3)$, $f(0)$, $f(-2)$ 之值.

特設習題

(8) 設 $P_0(x_0, y_0)$ 為拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 上一定點,而 P 為任一點,證明弦 PP_0 之斜率為 x 之一次函數.

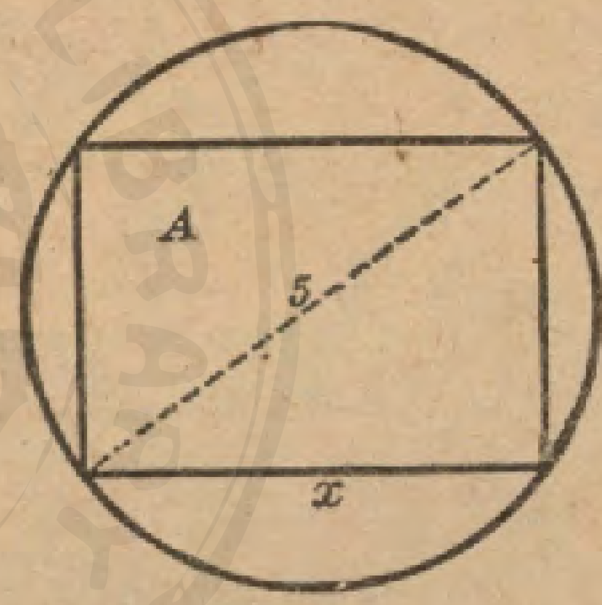
(9) 試將題 8 之定理應用之於題 6.

(10) 證方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之實根為其左邊式之圖形在 x 軸上之截部.

100. 函數之立式與作圖 當函數之關係敍述明白後,常易以公式表之.然後"作此函數之圖形".

例　題

(1) 一矩形內接於5吋直徑之圓,試以一邊 x 之函數表其面積.

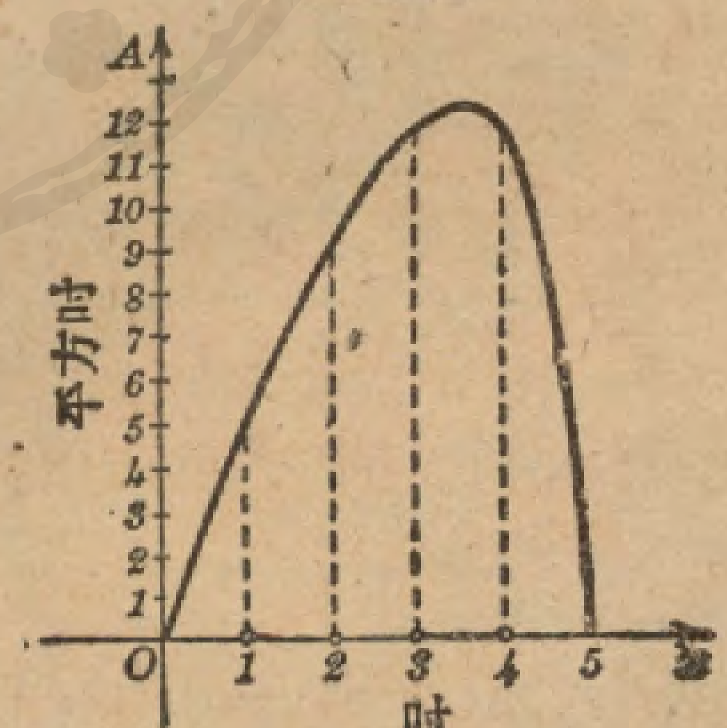


[解] 其高求得為 $(25-x^2)^{\frac{1}{2}}$.故設 A 為其面積之平方吋數,則得

(1) $$A=f(x)=x(25-x^2)^{\frac{1}{2}}.\text{ 答.}$$

此方程式表示函數 A 與變數 x 間之函數關係.由此可計算 A 之值對應於 x 之任何值.例如,設 $x=3$ 吋,

$$A=f(3)=12 \text{ 平方吋}.$$



右圖表示此函數之圖形. x 之值在 0 與 5 之間.須取適當之單位如圖中所示.

從此圖形中有何性質可知?

(1) 若此圖形乃精密作成者,則在 $x=0$ 與 $x=5$ 間任何邊長之內接矩形之面積皆可從圖中量得之.

(2) 命 x 自一小數值起,逐漸增加.於是面積亦漸增加直至 x 到達 3 與 4 之間之某值,然後漸減.故(1)所定之函數有一極大值.此值乃水平切線上切點之縱坐標也.精密量之,可得此極大矩形之

底為 $x=3.5$, 與其面積為 $A=12.5$, 此等結果,如用微分法,可證明其準確至一位小位.其最大矩形為一正方形;卽在一已知圓中所內接之一切矩形,以正方形之面積為最大.

(2) 欲造一能容 108 立方呎之無蓋木箱.其底須正方形.試將其正方形底之一邊 x 為函數表其所用木料之總數.

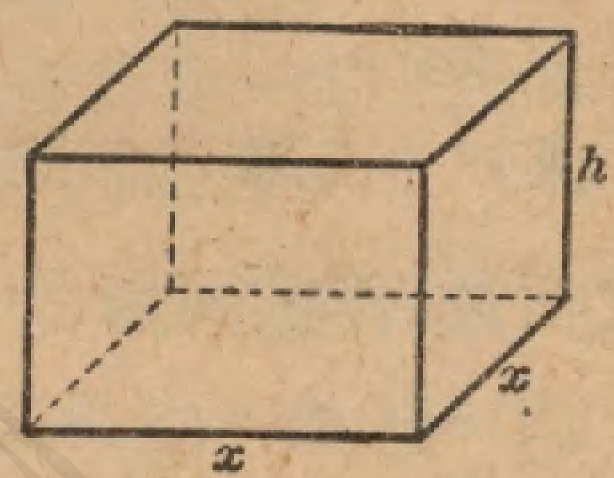
[解] 命 $M=$ 木料之總平方呎數.

則　底面積 $=x^2$ 平方呎,

而　四邊之面積 $=4hx$ 平方呎.

故　$M=x^2+4hx$.

但　$hx^2=108$,於是 $h=\dfrac{108}{x^2}$.



故

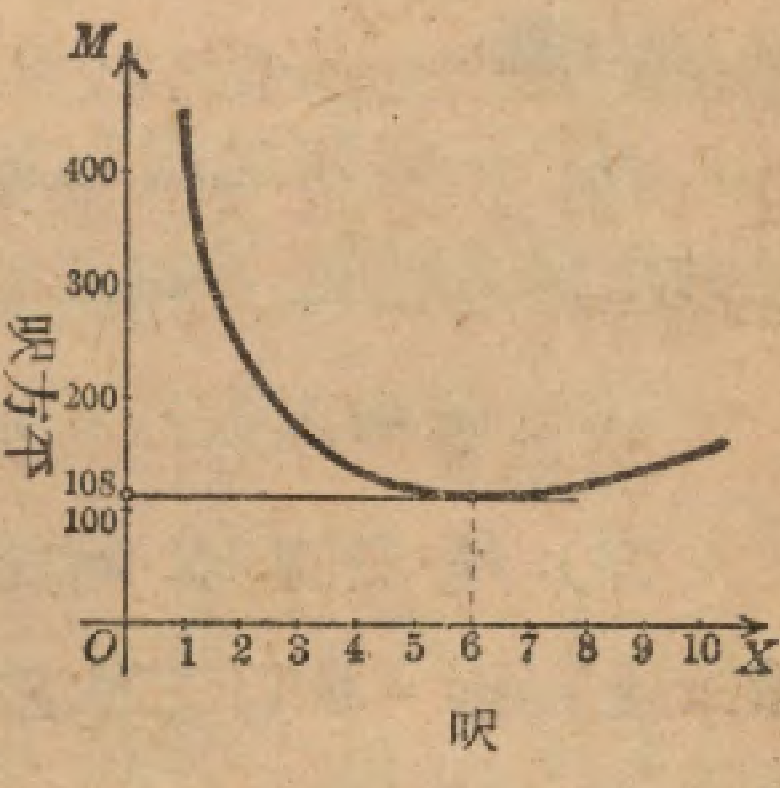
$$M=f(x)=x^2+\frac{432}{x}. \quad 答. \tag{2}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	……	20 等呎
M	∞	433	220	153	124	111	108	111	118	……	422 等平方呎

現作方程式 (2) 之圖形,選取適當單位如圖.表中為 x 與 $M=f(x)$ 之對應值.

從此圖形中有何性質可知?

(1) 此圖形若精密作之,則凡能容 108 立方呎而底為正方形之任何木箱,其所需木料之平方呎數皆可從此圖形量得之.



(2) 命 x 自一小數值起,逐漸增加.則其函數之值漸減直至 x 到達一某值,然後漸增;卽, M 有一極小值.此值乃水平切線上切點之縱坐標也.圖形上此點可用微積分精確決定之,而在此情形中,精密之度量,亦可得其準確之值,卽, $x=6$, $M=108$.卽設底長 6 呎,高 3 呎,則構造此箱所需之木料為最少(108平方呎).

在下列諸例中，學者應求出其函數關係，作其圖形，並敍述從圖所得之結果．在兩軸上選取適當之單位一事，應注意而練習之，對於函數值之單位尤應特別注意之．圖形應避免太扁平或太尖銳．欲免後者之弊可取較長單位爲變數單位．作圖應精密而準確，其中函數之極大或極小值應量得之，並用計算以證實之．

習　　題

(1) 矩形內接於 3 吋半徑之半圓中．以矩形之面積 A 爲其寬 y 之函數，作其圖形．　　答 $A=2y\sqrt{9-y^2}$.

(2) 已知一直角三角形之兩腰爲 15 與 20．在其內作矩形使一邊 x 在斜邊上而其相對兩頂點在兩腰上．表面積 A 爲 x 之函數並作其圖形．　　答 $A=\frac{12}{25}(25x-x^2)$.

(3) 直圓柱體內接於半徑 r 之球內．表其曲面積 S 爲其高 x 之函數，並作其圖形．　　答 $S=\pi x(4r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$.

(4) 直圓錐體內接於半徑 r 之球內．表其體積 V 爲其高 x 之函數，並作圖．　　答 $V=\frac{1}{3}\pi(2rx^2-x^3)$.

(5) 直圓錐體已知其斜高爲 L．表其全面積 T 爲其高 x 之函數，並作圖．　　答 $T=\pi L(L^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+\pi(L^2-x^2)$.

(6) 一錫製之漏斗其形爲直圓錐體．設 V 爲其一定之體積，表所用錫之總量 T 爲其底半徑 x 之函數，而作其圖形．

答 $T=\dfrac{(\pi^2x^6+9V^2)^{\frac{1}{2}}}{x}$.

(7) 用 16×12 吋之硬紙一塊，於其四角切去相等之正方形，摺其邊以成一開口之紙匣．表體積 V 爲其所切去之正方形之邊 x 之函數，並作圖．

(8) 作自 $(0,5)$ 至橢圓 $x^2+2y^2=98$ 上任一點 (x,y) 之距離 d 之圖形．　　答 $d=(123-10y-y^2)^{\frac{1}{2}}$.

(9) 過一定點(3,4)作一直線.表此線在兩軸間之長爲其 x 軸上截部 x 之函數.

(10) 一窗爲一矩形與矩形上一半圓所組成.已知其面積爲 A,試表其週界 P 爲半圓之半徑 x 之函數,並作圖. 答 $P=\frac{2A+4x^2+\pi x^2}{2x}$.

(11) 二竿各高 40 與 20 呎,在一水平街道上相距 60 呎.在二竿間地上同一點繫二支索.表此二索之長爲自一竿至此繫點之距離 x 之函數,並作圖.

(12) 一木匠有木料 96 平方呎,用以作一底蓋皆爲正方形之匣.表此匣之體積爲其底邊之函數,作圖,並討論之.

(13) 一窗之形爲一矩形與其上一等邊三角形所組成.已知此窗之面積爲 A,試表其窗架之長爲其寬之函數.

(14) 已知一金屬線之長爲 L.設將其切成二段,一段折成一正方形,而他段折成一圓,表兩形之總面積爲其圓之半徑之函數,並作其圖形.

(15) 以正六邊形爲底之直角柱之體積爲 16 立方吋.表其表面之總面積爲一底邊之函數並作圖.

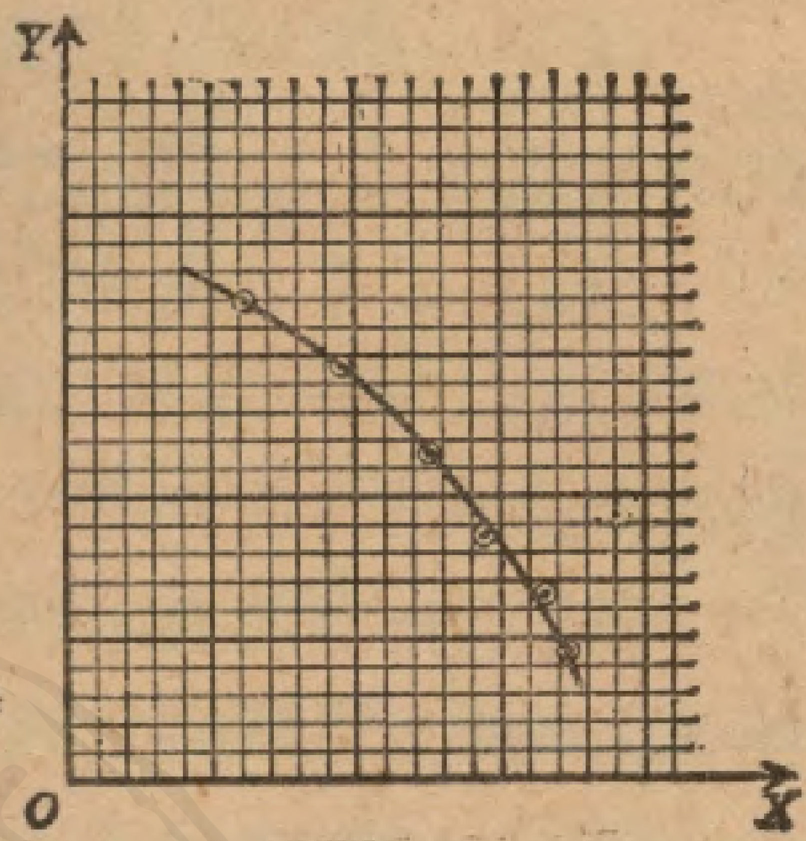
(16)距一正方形屋 15 呎之四週圍一高 10 呎之牆.牆外一梯靠於牆上適達此屋.試表梯長爲梯足與牆間之距離之函數或爲梯與地平線所成之傾角之函數,作圖並討論之.

(17) 欲造一圓柱形之汽鍋其容量爲 1200 立方呎.其用於兩底之材料每方呎之價爲 \$3.50,而其曲面每方呎之價爲 \$2.50.表其總價爲汽鍋長之函數,作圖,並討論之.

(18) 一人在舟中,此舟離一直線海岸之最近點爲 3 哩,欲至一離此點 5 哩之屋.此人每小時能行 4 哩,能划行 $3\frac{1}{2}$ 哩.試表此人至屋所需之時間爲其登陸處至此屋之距離之函數.

101. 以經驗決定之函數(Function defined empirically) 變數與函數之關係可從實驗所決定諸對應值列成一表而研究之即

由經驗而得也．通常變數之值爲正確而函數之值有時不正確，乃因度量之值由於觀察之誤差，儀器上缺點之誤差等所致．以變數(x)與函數(y)之已知值作成諸點而尋求關係時，則立見此關係之圖形爲一曲線而"適合"諸點，但未必全通過之，僅依實驗之準確度與諸點極相接近而已．前者作曲線必通過所作諸點，此處不需如此(見圖)．



此問題乃爲：已知 x 與 y 某種對應值而求一公式(或定律)爲此等值所能近似適合者，亦卽在準確度中以此等已知值證實之者．

此重要問題之普遍討論在一初等課本範圍之外．以下諸節僅將其簡單者論之．

102．直線定律　設所作諸點連成之線爲一直線，可假定其定律爲

(1)　$y=mx+b,$

而從已知值中決定 m 與 b 之值．又須注意此直線不必需要全通過所作諸點，因實驗工作常有誤差也．普通，使其通過諸點中之二點，而 m 與 b 從此二點之坐標計算之．

例　　　題

在一滑車實驗中,以E磅之力,舉一W磅之重物,其結果如下:

W	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
E	$3\frac{1}{4}$	$4\frac{7}{8}$	$6\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{2}$	9	$10\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	$13\frac{3}{4}$	15	$16\frac{1}{2}$

求一適合此等已知值之定律.

[解]　作諸點如圖,可見過(30,6.25)與(100,16.5)兩點之直線極適合此等所得之巳知值.欲求其方程式,將此二點之值代入方程式

(2)　　$E=mW+b$

中.

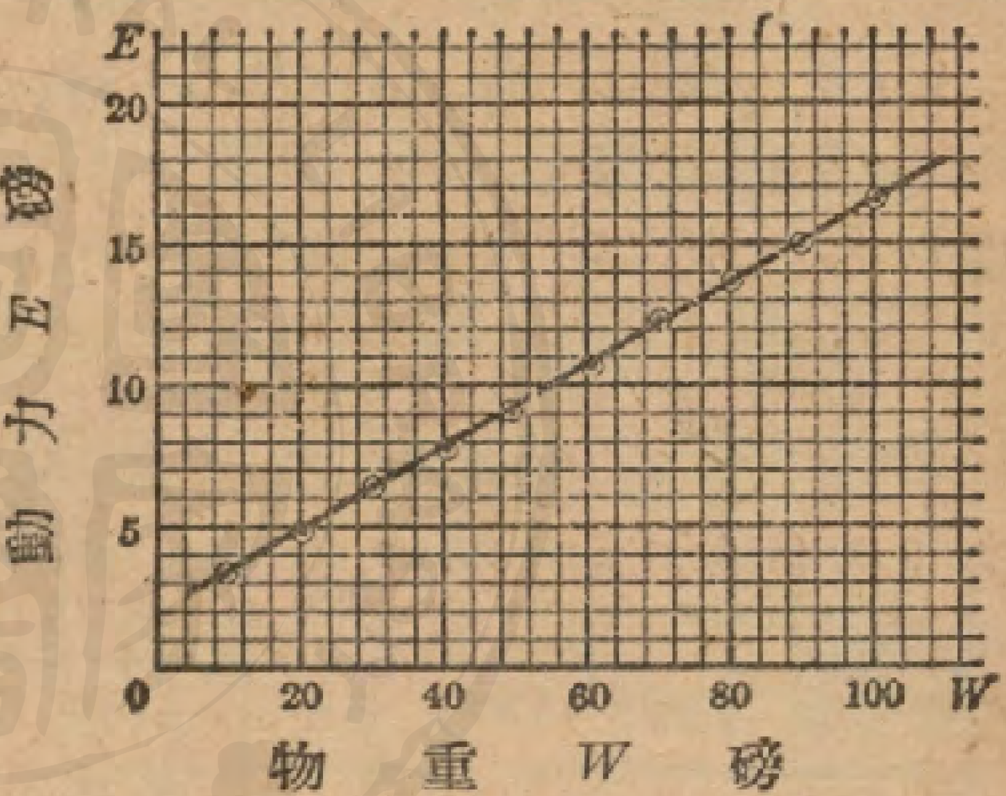
得 $6.25=30m+b$,

$16.5=100m+b$.

解之以求 m 與 b,而代入(2)中,得

(2)　　$E=0.146W+1.86$,

卽所求之方程式.



103. 平均法 (Method of averages)　上述例題說明選點之法(Method of selected points);卽,選取二點以決定一直線.第二法乃取其所有諸點之全部而論之.其法如下:

第一步　將每一對x與y之值代入定律

(1)　　$y=mx+b$

中,如是所得之方程式其數與x及y之對應值之對數相同.是爲觀察方程式(Observation equations).

第二步　將此等方程式分成兩組,各組之數最好相等.每組之方程式各自相加,如是得兩個含m與b之方程式.

第三步　解之以求m與b而代入(1)中.

例　　題

將平均法應用於第 102 節例題所得之已知值.

［解］ (1) 此處 $W=x$, $E=y$. 代入(1)中,得十個方程式,分成二組,每組五個,其分法如下:

$$
(2)\qquad
\begin{array}{ll}
3.250=10m+b, & 10.500=60m+b,\\
4.875=20m+b, & 12.250=70m+b,\\
6.250=30m+b, & 13.750=80m+b,\\
7.500=40m+b, & 15.000=90m+b,\\
9.000=50m+b. & 16.500=100m+b.
\end{array}
$$

(2) 各組中之方程式相加,得

$$(3)\qquad 30.875=150m+5b,\quad 68.000=400m+5b.$$

(3) 解之 得 $m=0.1485$, $b=1.720$.

故此定律爲

$$(4)\qquad E=0.1485W+1.720.$$

欲驗此定律,可自 W 之已知值用此律以求其對應之 E 值而與前觀察所得之值比較之. 其結果顯示於下表:

W	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
觀察值	3.250	4.875	6.250	7.500	9.000	10.500	12.250	13.750	15.000	16.500
計算值	3.205	4.690	6.175	7.660	9.145	10.630	12.115	13.600	15.085	16.570
差	+0.045	+0.185	+0.075	−0.160	−0.145	−0.130	+0.135	+0.150	−0.085	−0.070

此比較指明一半之差爲正,一半之差爲負. 正差之和爲 $+0.590$ 而負差之和爲 -0.590; 卽諸差之代數和爲零. 此指示諸點平均分配於此線之兩旁. 由實驗數值所作諸點,無一點恰在此線上.

104. 上例評註 (Comments on the preceding example) 以 Δy 表 y 之任一值與前一值之差(第 99 節,第一差),得下表,命 $W=x$, $E=y$, 而觀察 y 之首二值,得 $\Delta y=4.875-3.25=1.625$, 等.

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Δy	1.625	1.375	1.25	1.5	1.5	1.75	1.50	1.25	1.5	—

此處 $\Delta x=10$ 而爲一常數．故若 x 與 y 確切適合 $y=mx+b$，則 Δy 亦爲一常數（第 99 節）．此 Δy 之值雖近於相等，而並非全增或全減．當 x 之連續值有一常數差 Δx 時，常用此驗證法於直線定律．在其他情形中 Δy 與 Δx 之比值（y 之變化率）所以檢驗之．

剩餘(Residuals)　函數由觀察所得之值與由計算所得之對應值之差稱爲剩餘．第 103 節末之表中最後一行卽此等剩餘．當將 m 與 b 所求得之值代入上節方程式(2)之右邊時卽得 E 之諸計算值．於是 $3.25-(10m+b)$ 爲第一剩餘．故前五個剩餘之和爲 $30.875-(150m+5b)$．但從(3)之第一方程式，此和爲零．故得

定理　當直線定律中之常數用平均法求得時，在第二步所得之各組方程式中 y 值之剩餘之和必爲零．

實際上，此等和祇近於 0．上例中兩個和皆恰爲零，其理論之要點爲其剩餘之正負適使其和爲零．

評註　在實際應用上，並非常分觀察所得之結果爲相等兩組，而此事可引起因觀察所得之值不同，生不能決定之困難，分成兩組之分法不同則所得 m 與 b 之值亦稍異．在問題中，欲免此不能決定之困難，吾人同意於分成相等兩組之分法；如所得結果爲奇數則將額外一個加入第二組．

更精密之最小二乘法 (Method of least square) 最宜用以解決上題，但此又出於本書範圍之外.

習 題

(1) 用平均法，求一直線定律以適合下列各羣已知值. 計算其剩餘.（參閱第 104 節之定理）.

(a)

x	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	0.31	0.82	1.29	1.[illegible]5	2.51	3.02

答 $y=1.10x-0.29$.

(b)

x	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y	2.1	6.8	12.0	17.2	21.8	27.1

(c)

x	0.9	3.0	5.2	7.0	8.8	10.7
y	5.6	4.4	3.3	2.6	1.6	0.7

(d)

x	0	2.2	4.0	5.8	7.9	10.0
y	3.8	8.2	12.1	15.7	19.8	24.0

答 $y=2.02x+3.90$.

(e)

x	10	20	30	40	50
y	0.75	1.15	1.74	2.18	2.67

(2) 在題(1)中檢驗 Δy 與 Δx 之比值，因以證實直線定律之用.

(3) 作由下列諸值所決定諸點，而求一直線定律 $V=mt+b$ 以適合之.

在壓力一定，溫度 ($t°C$). 變更之情形下，量得某定量氣體之體積（V 立方公分）之結果如下表（參閱下頁頂端之評註）

t	20	30	40	50	60	70
V	106.5	110.9	114	117.2	121.2	124.7

評註　以 t 之值爲橫坐標，V 之值爲縱坐標．最便在兩軸之交點在 t 單位上爲 20，而在 V 單位上爲 105，務使諸點皆在坐標紙上．即祇移兩軸至新原點(20，105)之意也．

(4) 用平均法求下列各題之直線律．計算其剩餘．作諸點與所求得之直線．

(a) S 爲在 $t°C$ 時溶於 100 克水用溴化鉀之重量．

t	0	20	40	60	80
S	53.4	64.6	74.6	84.7	93.5

(b)

x	30	25	20	15	10	5
y	1	4	7.4	10.4	13.4	16.7

(c) 弧光發電機之速度與感應伏數，二者之對應值求得爲

每分鐘旋轉次數，R	200	320	495	621	744
感應伏數，V	165	270	410	525	625

(d) 在 $t°C$ 時，一金屬線之抵抗 R 歐量得如下：

t	0	5	10	15	20	25
R	25.00	25.49	25.98	26.48	26.99	27.51

105. 具二常數諸定律 (Laws with two Constants)　當直線定律不能成立時，欲求一適合已知數值之公式，則此題當屬於下列二情形之一：(1)從理論上研究可得此公式之形式者；(2)不能預知此公式之任何情形者．玆僅將第一種情形討論之．通常所用具二常

數諸公式爲

(1) $y=ax^n$ 乘冪定律);

(2) $y=be^{ax}$ (指數定律);

(3) $y=\dfrac{ax+b}{x}$ (第一雙曲線定律);

(4) $y=\dfrac{x}{ax+b}$ (第二雙曲線定律).

以上各公式皆可改爲直線定律.

106. 乘冪定律 (Power law). 在

(1) $y=ax^n$

中求 a 與 n, 兩邊各取其對數(第2頁3);得

(2) $\log y=\log a+n\log x.$

命 $\log y=y'$, $\log a=a'$, $\lg x=x'$ 則(2)爲

(3) $y'=nx'+a'.$

即方程式(1)改成直線定律矣.

定理 當 $\log x$ 與 $\log y$ 適合直線定律時, 乘冪定律方能成立.

例題

下列之已知値近似適合於 $y=ax^n$ 之形狀之定律. 求 a 與 n 之値.

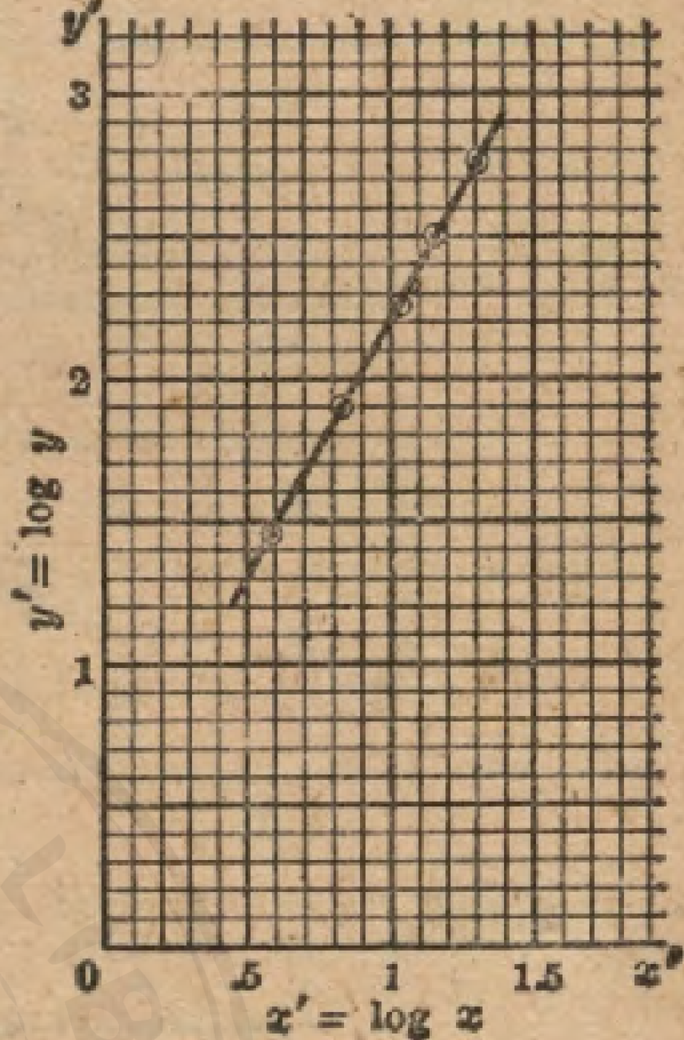
x	4	7	11	15	21
y	28.6	79.4	182	318	5 9

[解] 將其 $\log x$ 與 $\log y$ 列成一表,

$\log x=x'$	0.6021	0.8451	1.0414	1.1761	1.3222
$\log y=y'$	1.4564	1.8998	2.2601	2.5024	2.7701

作諸點 (x',y')，得一直線能適合此等諸點.處置方程式(3)在第 103 節中所述.其工作如下:

$$\begin{array}{rl} & 1.4564=0.6021n+a' \\ & 1.8998=0.8451n+a' \\ \hline \text{相加} & 3.3562=1.4472n+2a' \\ & 2.2601=1.0414n+a' \\ & 2.5024=1.1761n+a' \\ & 2.7701=1.3222n+a' \\ \hline \text{相加} & 7.5326=3.5397n+3a' \end{array}$$



解之，$n=1.8251$，$a'=0.3575$ 與 x',y' 得定律

(4)　$y'=1.8251x'+0.3575.$

計算 y 之值而與觀察所得之值比較之,得

y' (觀察值)	1.4564	1.8998	2.2601	2.5024	2.7701
y' (計算值)	1.4563	1.8998	2.2582	2.5039	2.7706
差	+0.0001	0	+0.0019	−0.0015	−0.0005

此等差 (剩餘) 與第 104 節之定理相合.故 (4) 可適合.實因 $\log a=a'=0.3575$ 故得 $a=2.278$，而所求之乘冪定理爲 $y=2.278x^{1.8251}$.　答.

最後,用 y' 之計算值以計算 y 之值而與其觀察值比較之,得

y (觀察值)	28.6	79.4	182	318	589
y (計算值)	28.6	79.4	181	319	590
差	0	0	+1	−1	−1

故此曲線 $y=2.278x^{1.8251}$ 適合 x,y 諸已知點且通過其中之二點.

上例中用圖形證驗乘冪定律之準確度之法乃作 (x',y') 諸點與直線(3).此法應適用於一般情形.

習　　題

(1) 下列諸值近似適合一乘冪定律 $y=ax^n$. 用平均法求 a 與 n 而計算其剩餘.

(a)

x	1	2	3	4	5	6
y	9.2	6.1	4.7	3.9	3.5	3.2

答　$y=9.18x.^{-0.60}$.

(b)

x	5	10	15	20	25	30
y	2.56	3.23	3.70	4.07	4.39	4.66

(c)

x	4	4.5	5	5.5	6	7
y	110	97.1	86.8	78.4	71.5	60.7

(2) 下表之值爲輸送 H 馬力所需每分鐘轉動 70 次之熟鐵軸之直徑 D. 求 $D=mH^n$ 形之定律.

H	10	20	30	40	50	60	70	80
D	2.11	2.67	3.04	3.36	3.61	3.82	4.02	4.22

答　$D=0.991H^{0.330}$.

(3) 下表之值爲兩磁極相距 d 公分所生之力 F 達因.
求 $F=md^n$ 形之定律.

d	1.2	1.9	2.3	3.2	4.5
F	4.44	1.77	1.21	0.63	0.32

(4) 下表之值爲在每平方吋 p 磅壓力下之飽和蒸氣之體積(u 立方呎). 求 pu^n=一常數形之定律.

u	26.43	22.40	19.08	16.32	14.04
p	14.70	17.53	20.80	24.54	28.83

(5) 下表所示之馬力 I，用以駛行一每小時行 10 浬，排水量爲 D 噸之輪船．求 $I=mD^n$ 形之定律．

D	1720	2300	3200	4100
I	655	789	1000	1164

107. 指數與雙曲線諸定律(Exponential and hyperbolic laws)

在方程式

(1) $$y=be^{ax}$$

中，求 a 與 b，可取兩邊之對數(第 2 頁 8)，得

(2) $$\log y=\log b+ax\log e,$$

而命 $\log y=y'$，$\log b=b'$，$a\log e=a'$．於是

(3) $$y'=a'x+b'.$$

方程式(1)已改爲直線形式．

定理 1. 當 x 與 $\log y$ 適合一直線定律時，指數定律方能成立．

定律 (1) 常稱爲複利定律(見第 85 節)．

第 105 節之(3)寫成 $xy=ax+b$ 之形式，而以 $u=xy$，得

(4) $$u=ax+b.$$

定理 2. 當 x 與 xy 適合一直線定律時，第一雙曲線定律方能成立．

又，第 105 節定律(4)可寫成

(5) $$\frac{x}{y}=ax+b，或\ u=\frac{x}{y}=ax+b.$$

故其結果爲

定理 3. 當 x 與 $\frac{x}{y}$ 適合一直線定律時，第二雙曲線定律方能成立．

故第 105 節各定律皆可用一直線定律以驗證之．用平均法求此直線定律中之 a' 與 b'，或 a 與 b 再從此而得所求公式中之常數．

例　　題

從下表中諸值求 $y=be^{ax}$ 形之定律.

［解］ 將 $\log y=y$ 之值列成表式，如下表所示. 於是用第 221 頁上之方程式(3)，得其觀察方程式如下：

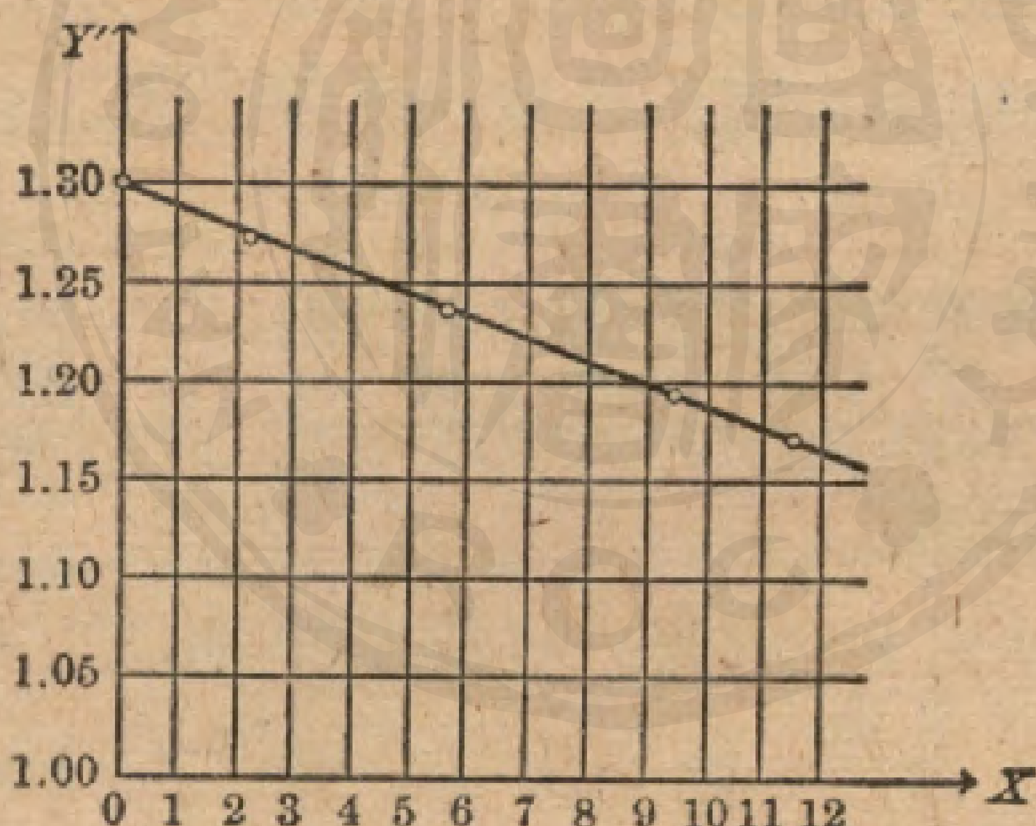
x	y	$\log y$	y(計算值)
0	20	1.3010	19.96
2.1	18.92	1.2769	18.94
5.6	17.34	1.2390	17.35
9.3	15.8	1.1987	15.8
11.5	14.96	1.1749	14.96

$$1.3010=0\qquad +b'$$
$$1.2769=2.1a'+b'$$

相加， $2.5779=2.1a'+2b'.$

$$1.2390=5.6a'+b'$$
$$1.1987=9.3a'+b'$$
$$1.1749=11.5a'+b'$$

相加， $3.6126=26.4a'+3b'$



解之，$a'=-0.01091$，$b'=1.3003$. 故其直線定律為

$$y=-0.01091x+1.3003.$$

計算 y' 而比較之，其結果為

y'（觀察值	1.3010	1.2769	1.2390	1.1987	1.1749
y'（計算值）	1.3003	1.2774	2.2392	1.1988	1.1748
差	+0.0007	−0.0005	−0.0002	−0.0001	+0.0001

此等差（剩餘）與第 104 節之定理相合.

因 $a'=a\log e$，故得 $a=-0.01091\times 2.3026=-0.0251$，取 $\log e=0.4343$．又 $\log b=b'=1.3003$．故 $b=19.96$，而所求之定律爲

$$y=19.96e^{-0.0251x}.\quad 答.$$

表中所得 y 之計算值與其觀察值之比較留待學者自爲之．第 222 頁上之圖示明 x 與 $\log x(=y')$ 甚近於適合一直線定律．

上例中應用直線驗證（[illegible]），其圖形亦已作出．下列各題應選用第 221 頁上之直線驗證(3)，(4)，或(5)．

習　　題

(1) 從下述已知值，求 $y=be^{ax}$ 形之定律，並計算其剩餘．

(a)

x	0	3.45	10.85	19.30	28.8	40.1	53.75
y	19.9	18.9	16.9	14.9	12.9	10.9	8.9

答　$y=19.9e^{-0.0[illegible]x}$.

(b)

x	10	20	30	40	[illegible]0	60
y	64.72	58.03	52	[illegible]8.54	41.75	37.33

(c)

x	−2.4	−1.2	0	2	4	6
y	1.6	2.8	5.1	14	37.5	102

(2) 從下述已知值，可得定律 $y=\dfrac{ax+b}{x}$．用平均法求 a 與 b，並計算其剩餘．

(a)

x	3	5	7	9	12
y	4.85	2.95	2.10	1.50	1.15

(b)

x	1.96	2.46	2.[illegible]7	3.45	3.96	4.97
y	50.25	48.7	47.9	47.5	46.8	[illegible]5.7

答　$y=\dfrac{43.2x+13.8}{x}$

(c)

x	1.5	2	2.5	3	3.5	4
y	3.08	3.12	3 14	3.15	3.162	3.1 4

(3) 從下述已知值，求 $y=\dfrac{x}{ax+b}$ 形之定律，並計算其剩餘.

(a)

x	5	10	15	20	30
y	5.0	6.8	7.4	8.0	8.7

答　$y=\dfrac{x}{0.1x+0.5}$.

(b)

x	10	20	30	40	50	60	70	80
y	12.8	17.1	20	22.2	23.1	23.8	23.8	24.2

(c)

x	8	15	30	60	80	100
y	13.0	15.4	17.2	18.5	18.9	19.2

(4) 下表所載之 h 爲高度之呎數，p 爲氣壓計上之吋數. 求 $p=be^{ah}$ 形之定律.

h	0	886	2753	4763	6942	10,593
p	30	29	27	25	23	20

(5) 從下述已知值，求 $y=b+\dfrac{a}{x^2}$ 形之定律而求其剩餘.

x	2	3	4	5
y	40	17	7	3

(6) 從下述已知值，求 $y=a\sqrt{x}+b$ 形之定律，並計算其剩餘.

x	3	6	9	12	16	20
y	6.2	8.8	11.1	13.2	15.3	17.0

108. 拋物線諸定律 (Parabolic laws)　其簡單公式爲

(1)　　$y=a+bx^2$[特殊拋物線定律 (Special parabolic law)]

其圖形爲一以 y 軸爲對稱軸之拋物線.

命 $x^2=t$,則(1)改爲

(2)　　$y=a+bt.$

故 x^2 與 y 適合一直線定律.

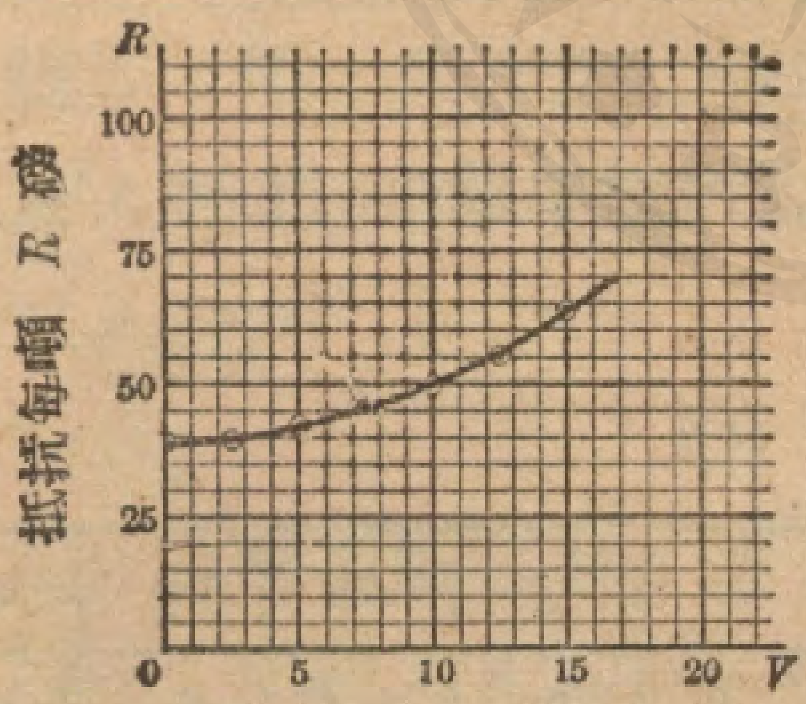
例　　題

實驗測定每小時速度爲 V 哩之自動貨車,其每噸之滑動抵抗爲 R 磅,所得之已知值如下:

V	0	$2\frac{1}{2}$	5	$7\frac{1}{2}$	10	$12\frac{1}{2}$	15
R	40	40	42	45	50	55	63

[解]　當作等點時,所得之曲線爲一拋物線 (圖 1), 其方程式爲

(3)　　$R=a+bV^2$



速度每小時 V 哩
圖 1

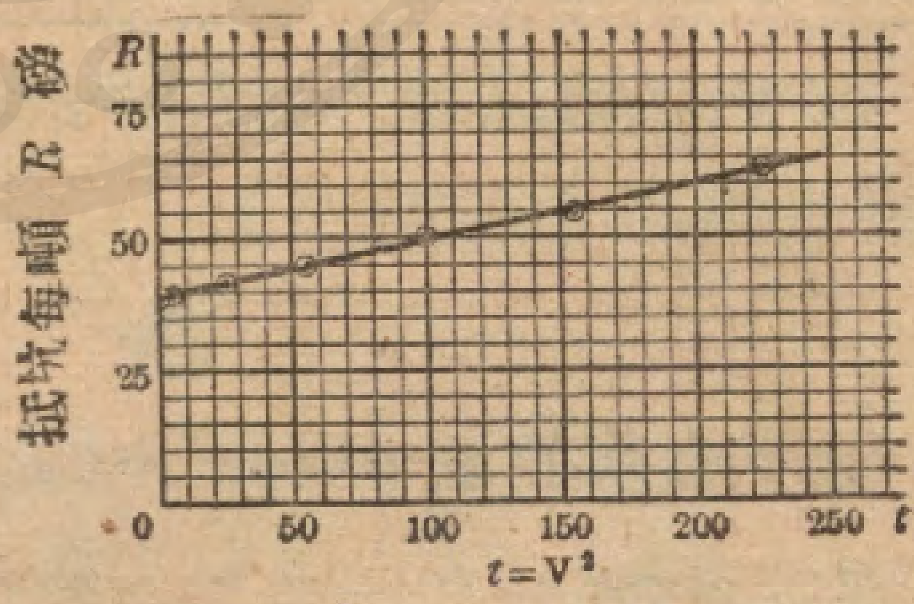


圖 2

欲驗算之,可計算 V^2 之值,命 $V^2=t$,重列一表如下:

$t(=V^2)$	0	$6\frac{1}{4}$	25	$56\frac{1}{4}$	100	$156\frac{1}{4}$	225
R	40	40	42	45	50	55	63

當作此等點時(圖 2),卽知其適合一直線.用平均法得決定 a 與 b 之兩方程式爲

$$122=31.25b+3a,\quad 213=537.50b+4a.$$

解之, $a=39.6$, $b=0.102$, 故所求之定律爲

$$R=39.6+0.102V^2.\quad 答.$$

與剩餘之和有關之第 104 節之定理亦可應用於上述定律(1).

現進而研究含三常數之定律,

(4) $\boldsymbol{y=ax^2+bx+c}$ [普遍拋物線定律 (General parabolic law)],當以上含二常數諸定律無一能成立時,則常可用此定律.設 $x+h$ 與 $y+\Delta y$ 爲二對應值,則從第 99 節(4),

(5) $\Delta y=2ahx+ah^2+bh.$

設 h 爲一常數,取 $a'=2ah, b'=ah^2+bh$;於是

(6) $\Delta y=a'x+b'.$

定理 設 x 之連續數值有一常數差,而 x 與 Δy 遵從一直線定律,則普遍拋物線定律卽能成立.

設 y 之第二差大體相等,可以之得數字驗證.茲用 Δ^2y 表第二差(見第 99 節定理 2).

例　　題

從下表諸值求 $y=ax^2+bx+c$ 形之定律.

[解] 因 x 諸值有一常數差 5, 乃攷查 Δ^2y 之值而得其大體上爲同一之常數. 取上述方程式(b),而用平均法以求 a' 與 b', 得以下之觀察方程式:

x	y	Δy	Δ^2y	x^2
5	20	4.4	−0.4	25
10	24.4	4.0	−0.4	100
15	28.4	3.6	−0.4	225
20	32	3.2	−0.3	400
25	35.2	2.9		625
30	38.1	——	——	900
105	178.1			2275

$$
\begin{array}{lll}
 & & 3.6=15a'+b' \\
 & 4.4=5a'+b' & 3.2=20a'+b' \\
 & 4.0=10a'+b' & 2.9=25a'+b' \\
\hline
\text{相加,} & 8.4=15a'+2b' & 9.7=60a'+3b'
\end{array}
$$

解之,$a'=-0.0773$, $b'=4.78$. 但 $a'=2ah=10a$. 故

$$a=-0.00773.$$

又 $b'=ah^2+bh=25a+5b$. 故

$$b=-5a+\tfrac{1}{5}b'=0.994.$$

欲求(4)中之 c,可將 x 與 y 諸值代入而加所得六個方程式.爲便利起見,即用表中 x^2 諸值及諸直行已加諸值. 故得

$$178.1=2275a+105b+6c.$$

以 $a=-0.00773, b=0.994$代入,即得$c=15.21$. 故其定律爲

$$y=15.21+0.994x-0.00773x^2. \quad \text{答.}$$

y 之觀察值與計算值至小數一位相同.

109. **平均法應用於普偏拋物線定律**. 當 x 諸值無一公差時,則用下述之第二法.此爲平均法之用於公式

$$(4) \qquad y=ax^2+bx+c.$$

規則 將 x 與 y 之已知值代入 (4),分所得之方程式成三組,每組諸方程式各自相加,使成三個方程式,然後解之以求 a, b, c,最後代入(4)中.

例 題

用上述規則解第 108 節之例題.

〔解〕 此題共有六個方程式,即

$$
\begin{aligned}
20&=25a+5b+c,\\
24.4&=100a+10b+c;\\
28.4&=225a+15b+c,\\
32&=400a+20b+c;\\
35.2&=625a+25b+c,\\
38.1&=900a+30b+c.
\end{aligned}
$$

分成三組，每組中之二個方程式相加．得

$$44.4=125a+15b+2c,$$

$$60.4=62\ a+35b+2c,$$

$$73.3=1525a+55b+2c.$$

解之，　$a=-0.00775,\ b=0.994, c=15.23.$

故其定律爲

$$y=-0.00775x^2+0.994x+15.23.\quad \text{答.}$$

結果與上節求得者大體相同．

第 104 節中之剩餘定理亦適用於拋物線定律 (4) 祇從二組改爲三組而已．

習　題

(1) 從已知值求 $y=a+bx^2$ 之定律．計算其剩餘．作諸點與所得之拋物線．

(a)

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y	1.0	4.1	8.5	14.1	21.0	29.1

答　$y=2.5x^2-1.5.$

(b)

x	2	6	10	14	18	22
y	84	177	370	661	1040	1525

(c)

x	10	20	30	40	50
y	7	9.1	14.5	20	29

(2) 求一拋物線定律 $y=ax^2+bx+c$ 大致適合於下值．用第 108 節第二例題之法 計算其剩餘．

(a)

x	0	20	40	60	80	100
y	8290	8253	8215	8176	8136	8094

答　$y=-0.0014x^2-1.82x+8290.$

(b)

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	5.4	6.3	6.6	6.1	5.0	3.2	0.6

(c)

x	0	20	40	60	80	100
y	290	253	215	176	136	94

(3) 考查 $\Delta^2 y$ 之值以證實題 2 所用之抛物線定律.

(4) 用平均法(第 109 節)解題 2 (b).

(5) $V=$ 火車每小時速度之哩數,$R=$ 火車每噸抵抗之磅數.

V	20	40	60	80	100	120
R	5.5	9.1	14.9	22.8	33.3	46.0

證明諸值大致適合 $R=aV^2+bV+c$. 作諸點及代表此定律之抛物線.

110. 代數方程式之圖解法 方程式之實根,可作相交兩曲線近似求得之.

二次方程式 解已知方程式以求 x^2. 其結果爲

$$x^2=Ax+B$$

之形式,其中 A 與 B 爲常數.作抛物線 $y=x^2$ 與直線 $y=Ax+B$ 在一大單位格上.諸交點之 x 之值爲 $x^2=Ax+B$ 之實根.(何故?)此等數值可從圖上看出.應注意下列不同之情形:

若此直線爲一割線,則兩根爲實數而不等.

若此直線爲一切線,則兩根爲實數且相等.

若此直線在抛物線之外,則兩根爲虛數.

例題

圖解 $3x^2+4x-5=0$.

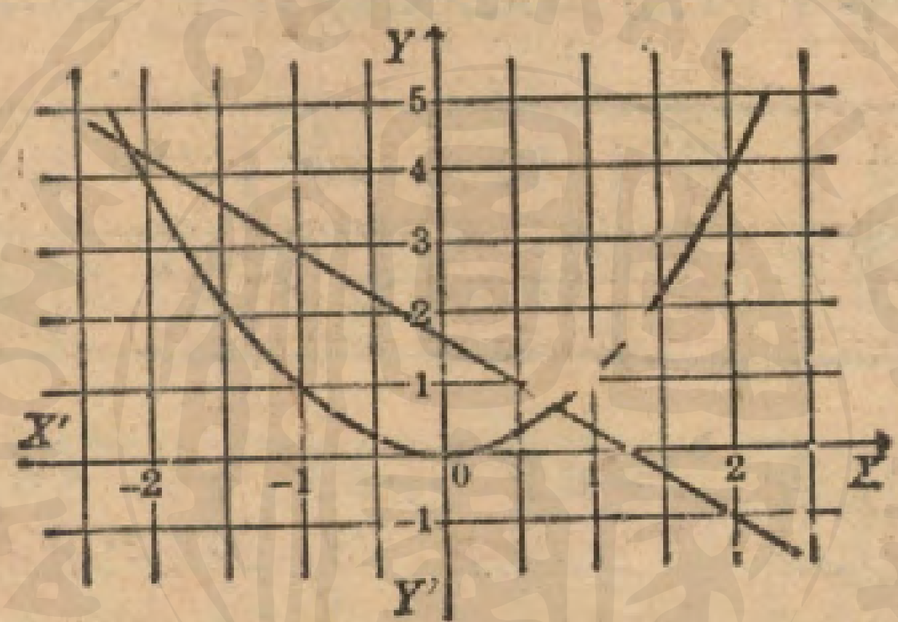
［解］ 移項而除以3，得

$$x^2=\frac{5}{3}-\frac{4}{3}x. \tag{1}$$

在相同之坐標軸上，作方程式

$$y=x^2 \text{ 與 } y=\frac{5}{3}-\frac{4}{3}x \tag{2}$$

之圖形.其交點之横坐標爲 0.79 與 -2.12，近似於已知方程式之兩實根.因用普通解法，得 $x=0.786$ 與 -2.120.



圖中每隔 0.1 而平行於 OY 諸線並未畫出.

三次方程式　三次方程式

$$x^3+px+q=0 \tag{3}$$

其中 p 與 q 爲常數.試用圖解法求其近似實根.解方程式以求 x^3，得

$$x^3=-px-q.$$

畫立方抛物線 $y=x^3$ 與直線 $y=-px-q$，而在其交點上看出其 x 之值.

方程式 (3) 可有一或三實根.若此直線切於立方抛物線時，則三根中可有二根相等.

例　　題

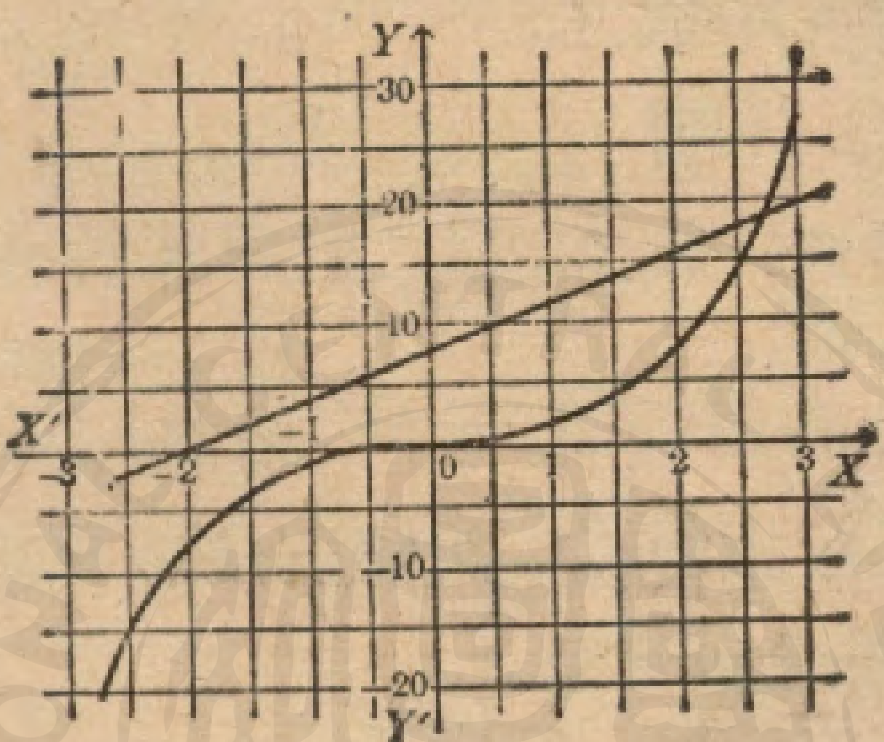
求方程式

(4)　　$x^3-4x-8=0$ 之實根．

［解］　如下圖所示，畫

$$y=x^3,\ y=4x+8$$

之圖形．有一實根，$x=2.65$．　答．



附加以補間法驗算（Checking by interpolation）其結果．

	x	x^3	$4x+8$	$x^3-(4x+8)$
	2.7	19.683	18.8	+0.883
	$2.6+z$	(根)		0
	2.6	17.576	18.4	−0.824
差	0.1			+1.707

$$\frac{z}{0.1}=\frac{0.824}{1.707}.\quad z=0.048,\ x=2.6+z=2.648.$$

設將所解之方程式各項皆移至左邊如上述方程式(4)，而畫其函數之圖形，則 x 軸上之截部卽爲實根．

例如，方程式

(5)　　$y=x^3-4x-8$

之圖形，其在 x 軸上之截部必爲(4)之實根．在上述補間法中，此圖形已求得兩點，卽，(2.6，−0.824) 與 (2.7，+0.883)，因上法中最後一行卽 (5) 中 y 之値也．顯然在此兩點間，此圖形必與 x 軸相

交，故一根必在 $x=2.6$ 及 $x=2.7$ 之間．在補間法中，此兩點間之圖形乃以連此兩點之直線代之．此可用下列事實證實之，卽兩點在圖形上極接近也．此直線在 x 軸上之截部乃計算之而作爲眞根之近似値．

普遍三次方程式

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \tag{6}$$

之圖解法當在以下題 3 中述之．

習　　題

(1) 圖解下列二次方程式．以代數解法驗算之．

(a) $2x^2-4x-5=0$.

(b) $2x^2-3x-2=0$.

(c) $x^2+11x+30=0$.

(d) $3x^2+4x+6=0$.

(2) 圖解下列三次方程式．用補間法驗算之．並注意，從大代數，如無 x^2 項，則諸根之和爲零．

(a) $x^3-9x-5=0$.

答 $-2.67,-0.58,3.25$.

(b) $x^3-6x-12=0$.

(c) $x^3-5x+2=0$.

(d) $x^3+2x-5=0$.

(e) $x^3-5x+1=0$.

答 $-2.33,0.20,2.13$.

(f) $x^3+x-7=0$.

特設習題

(3) 證明下述命辭：將 $x=x_1-\frac{1}{3}a$ 代入方程式 (6)，則可化爲 $x_1^3+px_1+q_1=0$．用此結果解下列方程式：

(a) $x^3-6x^2+3x+5=0$.

(b) $x^3-3x^2-2x+5=0$.

(4) 一圓柱形炮彈，一端爲半球形，其體積爲 700 立方吋．圓柱部之長爲 24 吋．求其直徑．

答 5.86 吋．

(5) 單底球盤(Spherical segment of one base)之體積 v，其高爲 h，則 $v=\pi(rh^2-\frac{1}{3}h^3)$，其中 $r=$ 球之半徑．設 $r=2$ 呎，$v=20$ 立方呎，求 h．

111．超越方程式之圖解法 非代數方程式之圖解法與上節所述之法相似．

茲討論方程式

(1)　　$\cot x = x$, 或 $\cot x - x = 0$.

求能適合此方程式 x 之值(以弧度表之).

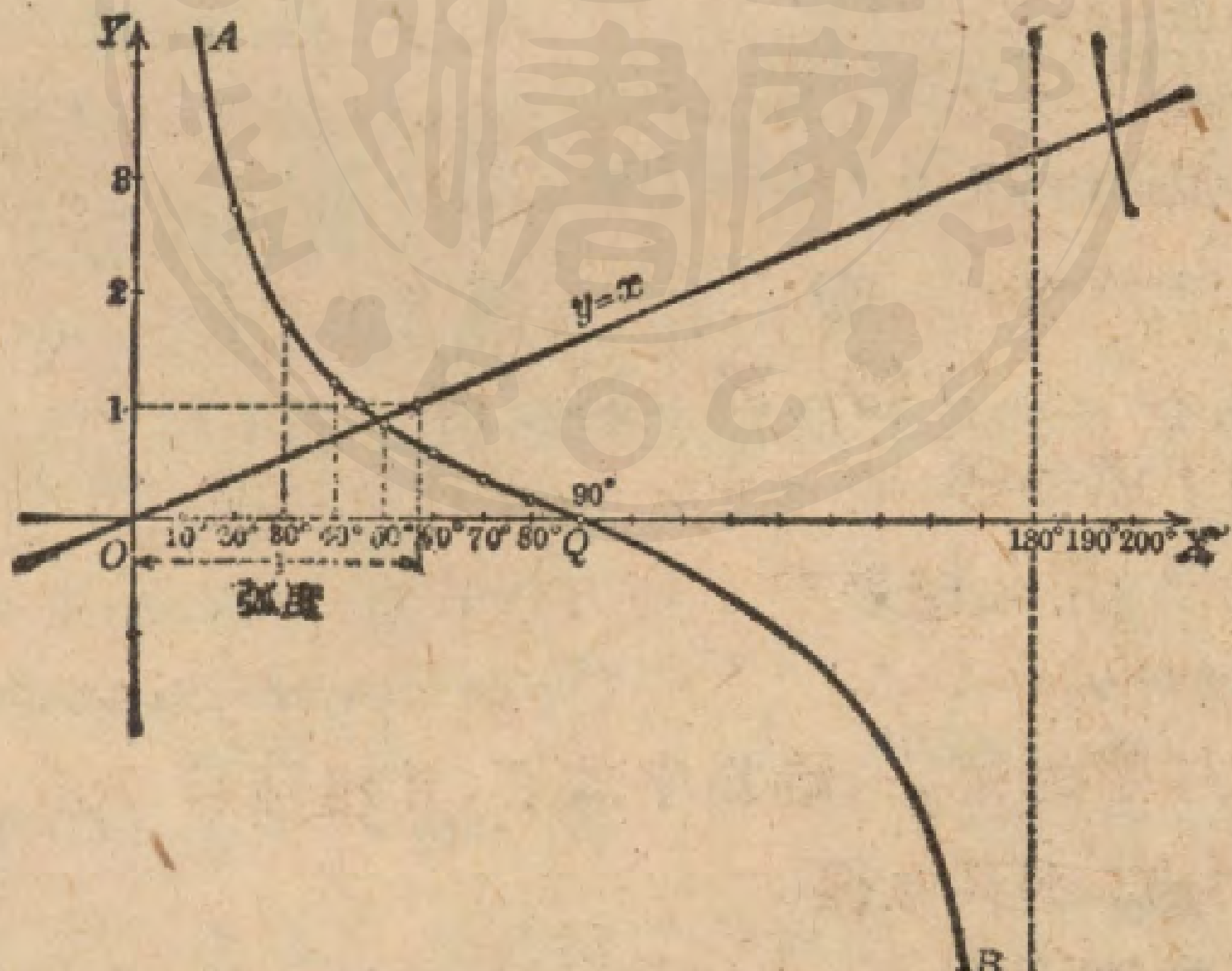
先作

(2)　　$y=\cot x$ 與 $y=x$

二曲線以作求根之助.

則各交點之橫坐標爲方程式(1)之根,因方程式(2)所代表之二條曲線之各交點,顯然得 $\cot x = x$ 之結果;卽皆能適合方程式(1)也.

$y=\cot x$		
度	x 弧度	y
0	0	∞
10	0.174	5.67
20	0.349	2.75
30	0.524	1.73
40	0.698	1.19
45	0.785	1.000
50	0.873	0.839
60	1.047	0.577
70	1.222	0.364
80	1.396	0.176
90	1.571	0



作圖時,最好在 OX 上標出二種單位(度 * 與弧度).

* 若用一三角函數眞數表,其中將已知角化爲一弧度之小數部份,則圖中不需標出度數.參閱 W. R. Longley "表與公式" 第 8 頁.

解答之數　曲線 $y=\cot x$ 包含與圖 (第 89 節) 之 AQB 相合之枝線其數無限．直線 $y=x$ 顯然與各枝線相交．故方程式 (1) 之解答其數亦無限．

最小解答 (Smallest solution) 從圖，此解答在 45° 與 50° 之間，或在 $x=0.785$ 與 $x=0.873$ 弧度之間．故其最小根之第一位有效數字爲 0.8. 以下有效數字須用補間法決定之．

此法，用前表，其步驟如下：

	x (弧度)	$\cot x$	$\cot x-x$
	0.873	0.839	-0.034
	$0.785+z$	(根)	0
	0.785	1.000	$+0.215$
差	$+0.088$		-0.249

於是，用比例

$$\frac{z}{0.088}=\frac{-0.215}{-0.249}.\qquad \therefore\quad z=0.076.$$

$\therefore\quad x=0.785+0.076=0.86$ (至二位小數)

習　題

用圖解決定下列各題解答之數而求其最小根 (異於零者).

(1) $\cos x=x$.
　答　一解；$x=0.74$.

(2) $\sin 2x=x$.
　答　三解；$x=0.95$.

(3) $\tan x+x-1=0$.
　答　解法無限.

(4) $3\sin x-x=0$.

(5) $\cot x-1+x^2=0$.

(6) $e^x+x-2=0$.
　答　一解；$x=0.44$.

(7) $\sin x-\log_{10}x=0$.
　答　三解.

(8) $\cos x-\log_{10}(x+1)=0$.

(9) $\sin 2x-\cos 3x=0$.

(10) $e^{-x}-\tan\frac{1}{2}x=0$.

特　設　習　題

(11) 一弓形其弧張一 x 弧度之圓心角，半徑爲 2 吋．其面積爲 5 方吋．求 x.　　答　2.82.

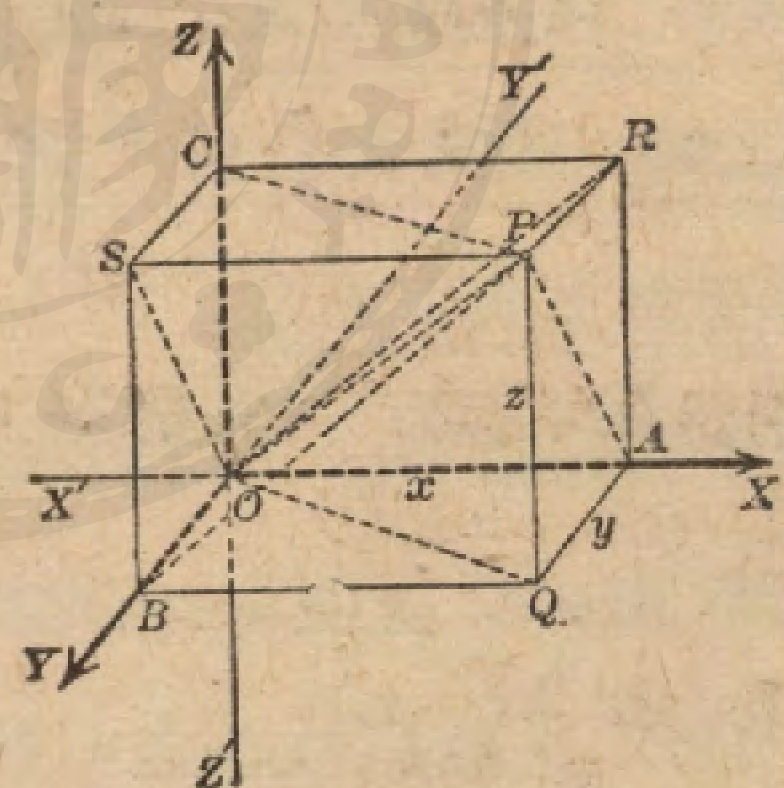
第十三章

空間之笛卡兒坐標

(Cartesian Coördinates in Space)

112. 笛卡兒坐標 立體解析幾何之研究基於用三實數 $x, y,$ 與 z 以決定空間一點之位置.

設有三個互相垂直之平面相交於直線 XX, YY, 與 ZZ' 處. 此三直線亦互相垂直. 則三平面稱爲坐標面 (Coördinate planes), 而分別稱爲 XY 平面, YZ 平面, ZX 平面. 相交之三直線稱爲坐標軸, 又分別稱爲 x 軸, y 軸, 與 z 軸. 其正向以箭頭指示之. 三坐標面之交點. 稱爲原點.



設想 XX' 與 ZZ' 在此紙之平面內, XX' 上之正方向爲向右之方向, ZZ' 上之正方向爲向上之方向. 又設想 YY' 垂直於紙之平面其正方向在紙面之前, 卽自紙面至讀者之方向也.

設 P 爲空間任一點. 過 P 作三平面各平行於坐標面, 而交軸於 A, B, 與 C. 此三平面與三坐標面圍成一直角六面體, 其中 P

與原點 O 為相對之頂點，如圖．其三邊 $OA=x$，$OB=y$，與 $OC=z$ 稱為 P 之直坐標．顯然 $OA=SP$，$OB=RP$，$OC=QP$．即 P 之直坐標其絕對值等於 P 至坐標面之垂直距離．P 之坐標寫作 (x,y,z)．

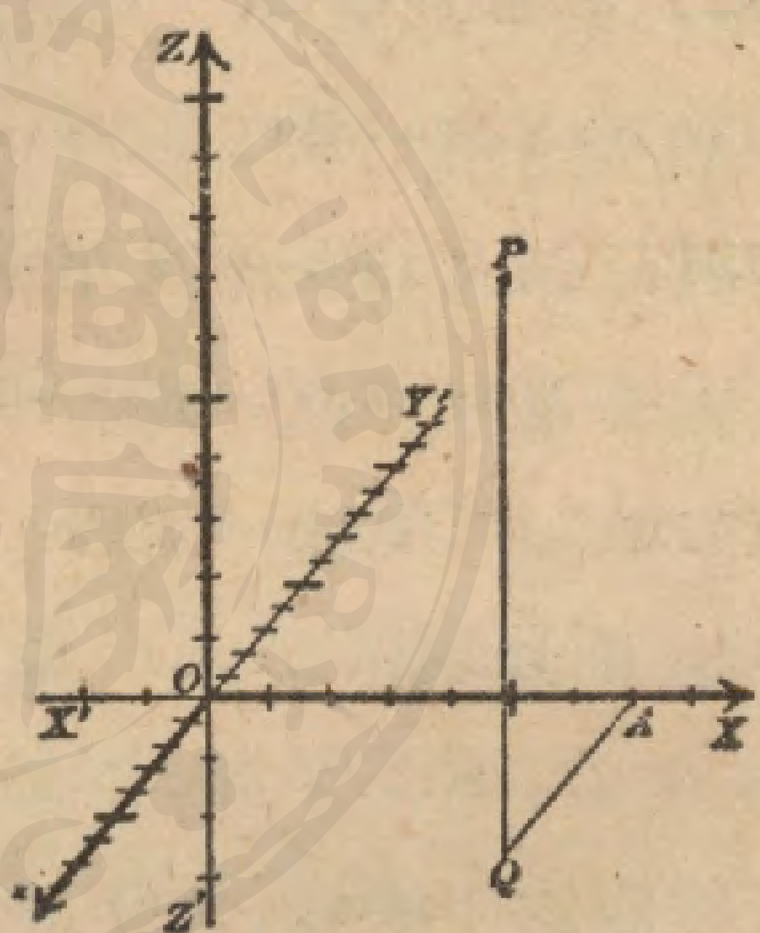
坐標面分全空間成八部份，稱為八分區 (Octants)，各標以 $O-XYZ$，$O-X'YZ$，等．在任一八分區內一點坐標之符號可用以下規則決定之．

規則

x 之為正或為負全視 P 之在 YZ 平面之右或左而定．

y 之為正或為負全視 P 之在 ZX 平面之前或後而定．

z 之為正或為負全視 P 之在 XY 平面之上或下而定．



欲作空間諸點，其較便之法可在 XX' 與 ZZ' 上標以相同之單位而在 YY' 上標以較小之單位．例如，作 OY 使 $\angle X'OY=45°$，而在 OY 截取之單位距離等於 OX 上之單位距離之半（"半長射影 Cabinet projection"）．於是作任意點，例如(7,6,10)，可在 OX 上截取 $OA=7$，而作 $AQ \parallel OY$ 且等於 OY 上 6 單位，又 $QP \parallel OZ$ 且等於 OZ 上 10 單位．注意：在 XY 平面作 Q 乃用第 7 節中斜坐標之規則．YZ 平面內諸點亦用此規則作之．

113. 重要關係式　在第235頁上之圖中，有

$$\overline{OP}^2=\overline{OQ}^2+\overline{QP}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2.$$

故，設 $OP=\rho$，則

(1) $$\rho^2=x^2+y^2+z^2.$$

設 OP 與 OX, OY 及 OZ 間之角各為 α, β, 與 γ. 因 OA 垂直於 AP，三角形 OAP 為一直角三角形．又 $\angle XOP=\alpha$. 故 $OA=OP\cdot\cos\alpha$，或 $x=\rho\cos\alpha$. 從直角三角形 OBP 與 OCP 可求得 y 與 z 之與上相似之值．故

(2) $$x=\rho\cos\alpha,\quad y=\rho\cos\beta,\quad z=\rho\cos\gamma.$$

平方各方程式且相加，用(1)且除以 ρ^2，卽得其重要關係式

(3) $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

方程式(2)可寫成一組等比，卽，

(4) $$\frac{\cos\alpha}{x}=\frac{\cos\beta}{y}=\frac{\cos\gamma}{z}=\frac{1}{\rho}.$$

解(2)以求 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$，並用(1)式中 ρ 之值，得

(5) $$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

在第235頁上之圖中，P 至 x 軸之垂直距離為 AP. 在直角三角形 OAP 中，得 $\overline{AP}^2=\overline{OP}^2-\overline{OA}^2$. 以 $OA=x$ 代入，並用(1)，則其結果為 $P(x,y,z)$ 至 x 軸之垂直距離為 $\sqrt{y^2+z^2}$. 同理，$P(x,y,z)$ 至 y 軸與 z 軸之垂直距離各為 $\sqrt{z^2+x^2}$ 與 $\sqrt{x^2+y^2}$.

習　題

(1) 作下列諸點並計算各點坐標軸之垂直距離，與至原點之距離：

(a) $(0,0,4),(0,-2,0),(-4,0,0),(3,0,5),(7,3,0),(0,-4,3)$.

(b) $(1,3,5),(1,6,1),(-2,-1,4),(3,4,-2),(-3,-4,-6),(-4,5,7)$.

(c) $(4,5,8),(3,-4,8),(6,4,-2),(3,-2,6),(-2,3,1),(-3,-6,-7)$.

(2) 證下列諸點在一直圓柱面上,其軸爲 z 軸:

$(3,4,7),(5,0,4),(2\sqrt{5},\sqrt{5},-3),(2\sqrt{6},-1,-4)$.

(3) $P(x,y,z)$ 之軌跡爲何,設

(a) $x=0$?　(d) $x=y=0$?　(g) $x=y=z$?

(b) $y=0$?　(e) $x=z=0$?　(h) $x=y,z=0$?

(c) $z=0$?　(f) $y=z=0$?　(i) $x=z$?

(4) 設 $(0,0,0)$ 與 $(3,6,7)$ 爲一直角六面體一對角線之兩端,其邊在坐標面內或平行於坐標面,求作此直角六面體.

(5) 從 (a,b,c), $(a,b,-c)$, $(a,-b,c)$, $(-a,-b,c)$, $(-a,b,-c)$, $(a,-b,-c)$, $(-a,b,c)$, $(-a,-b,-c)$ 各點至原點之距離及其至坐標軸之垂直距離爲何? 諸點中何對乃對稱於坐標面?對稱於坐標軸?對稱於原點?

(6) 從原點作直線至下列各點,求此直線與各軸所成之角:

(a) $(1,-1,-1)$;　答 $\alpha=54°44'$, $\beta=\gamma=125°16'$.　(b) $(1,-2,-2)$;

(c) $(4,3,12)$;　答 $\alpha=72°5'$, $\beta=76°40'$, $\gamma=22°37'$.　(d) $(4,-4,7)$;

(e) $(-6,2,3)$;　答 $\alpha=149°$, $\beta=73°24'$, $\gamma=64°37'$.　(f) $(4,-2,-3)$.

(7) 過點 $(-6,5,2)$ 作一直線平行於 y 軸.求此線上距原點 9 單位諸點之坐標.

(8) 設題 7 中之線平行於 x 軸;平行於 z 軸;試解之.

(9) 作一點之軌跡,設此移動時

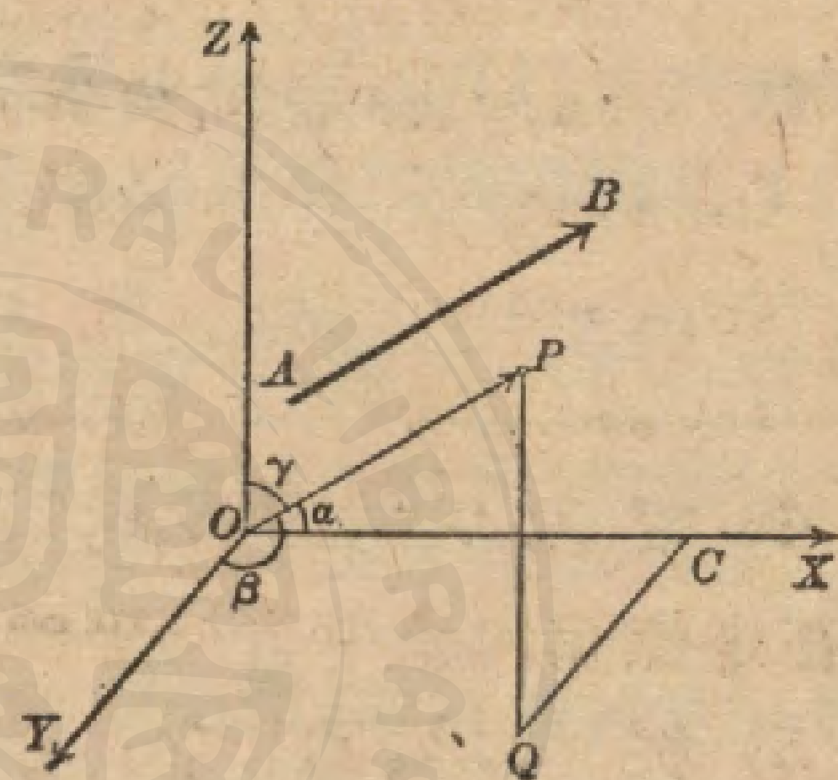
(a) 其至 y 軸之垂直距離爲 3;

(b 其至原點之距離爲 6;

(c) 其至坐標面 XY 與 YZ 之垂直距離相等；

(d) 其至坐標面 ZX 之垂直距離爲 -5.

114. 直線之方向餘弦 (Direction cosines of a line)　方向線 OP 與各坐標軸所成之角 α, β, γ 稱爲此線之方向角 (Direction angles). 設此線不經過 O, 則過原點作一直線與此已知線平行且其方向亦相一致，此所作之直線與坐標軸所成之角卽爲此已知線之方向角 α, β, 與 γ.



一線之方向角之餘弦，稱爲此線之方向餘弦.

使此線之方向相反，則其方向餘弦之符號亦變更；因一線之方向相反，則 α, β, 與 γ 各變爲 $\pi-\alpha, \pi-\beta$, 與 $\pi-\gamma$, 而 $\cos(\pi-x)=-\cos x$ (第3頁之8).

從第113節中之(3), 得

定理　一線之方向餘弦之平方和爲 1；卽

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{I}$$

115. 直線之方向數 (Direction numbers of a line)　吾人常用與方向餘弦成比例之三數以代方向餘弦之用，因名此三數爲此線之方向數.

定理　設 a, b, c 爲一直線之方向數，則其方向餘弦可從下列公式得之：

$$\cos\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \cos\beta=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \tag{II}$$

$$\cos\gamma=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

［證］ 從定義,

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{c}.$$

命 r 代表公有之比值,則

(1)　　$\cos\alpha=ar,\cos\beta=br,\cos\gamma=cr.$

平方,相加,而用第 114 節之(I),

$$1=r^2(a^2+b^2+c^2),\ 與\ r=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

將此代入(1)中,卽得上述之公式.　　　　*Q.E.D.*

以上推證所得之重要結論可敍述如下(將(II)與第 113 節(5)比較之):

任意 a, b, c 三數,可定空間一直線之方向.當(II)中取其根式前之正號時,則其方向與原點及點 (a,b,c) 之連線方向相同;否則相反.

設一方向數爲零,則此線垂直於此坐標之對應軸.設二方向數爲零,則此線平行於第三坐標軸.

設一直線截 XY 面,則其方向之向上或向下,全視 $\cos\gamma$ 之爲正或爲負而定.

設一直線平行於 XY 面,$\cos\gamma=0$,則其方向在 ZX 面之前或後,全視 $\cos\beta$ 之爲正或爲負而定.

設一直線平行於 x 軸,$\cos\beta=\cos\gamma=0$,則其方向與 x 軸之方向一致與否,全視 $\cos\alpha=1$ 或 -1 而定.

此等硏究,使吾人預知一線之正方向時,可選取定理中根式之符號.

習　　題

(1) 下列各情形中之數爲一直線之方向數.試寫出同一直線之其他數組方向數,而計算其方向餘弦.

(a) $2,-3,4$.　(b) $3,0,-1$.　(c) $\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{2}{3}$.　(d) $0,-\frac{1}{2},\frac{4}{5}$.

用各情形中已知之方向數作一直線.

(2) 求一向上直線之方向餘弦與角，設其方向數為

(a) $-6,2,3$;　答 $\alpha=149°, \beta=73°24', \gamma=64°37'$.

(b) $1,2,3$;　(c) $4,1,0$;　(d) $-2,-3,1$;

(e) $1,-1,-1$;　答 $\alpha=125°16', \beta=\gamma=54°44'$.

(f) $5,-4,7$;　(g) $5,0,-6$.

在各情形中，用已知之方向數作一直線.

(3) 述一線之方向，設其

(a) $\cos\alpha=0$;　(d) $\cos\alpha=\cos\beta=0$;

(b) $\cos\gamma=0$;　(e) $\cos\alpha=\cos\gamma=0$;

(c) $\cos\beta=0$;　(f) $\cos\beta=\cos\gamma=0$.

(4) 一直線與各坐標軸所成之角皆相等，求其角.

(5) 一直線與 x 軸成 $45°$ 之角，與 y 軸成 $60°$ 之角. 則與 z 軸成何角?

(6) 一直線與 z 軸成 $30°$ 之角，與 x 軸及 y 軸成等角. 求其方向餘弦.　答 $\pm\frac{1}{4}\sqrt{2}, \pm\frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(7) 下列任意組諸數可為一線之方向餘弦否?

(a) $\left(\frac{1}{15}, 1, -\frac{2}{15}\right)$;　(c) $\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$;

(b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$;　(d) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{7}\right)$.

(8) 設一線之二方向角為 $60°$ 與 $30°$，則其第三角為何?

(9) 一線之二方向餘弦為 $\frac{1}{3}$ 與 $-\frac{2}{3}$. 則其第三方向餘弦為何?

(10) 過 O 點之直線，其正向部份在何八分區 ($O-XYZ$; $O-X'YZ$ 等)內，設其

(a) $\cos\alpha>0, \cos\beta>0, \cos\gamma>0$?

(b) $\cos\alpha>0, \cos\beta>0, \cos\gamma<0$?

(c) $\cos\alpha>0, \cos\beta<0, \cos\gamma<0$?

(d) $\cos\alpha>0, \cos\beta<0, \cos\gamma>0$?

(e) $\cos\alpha<0, \cos\beta>0, \cos\gamma>0$?

(f) $\cos\alpha<0, \cos\beta<0, \cos\gamma>0$?

(g) $\cos\alpha<0, \cos\beta<0, \cos\gamma<9$?

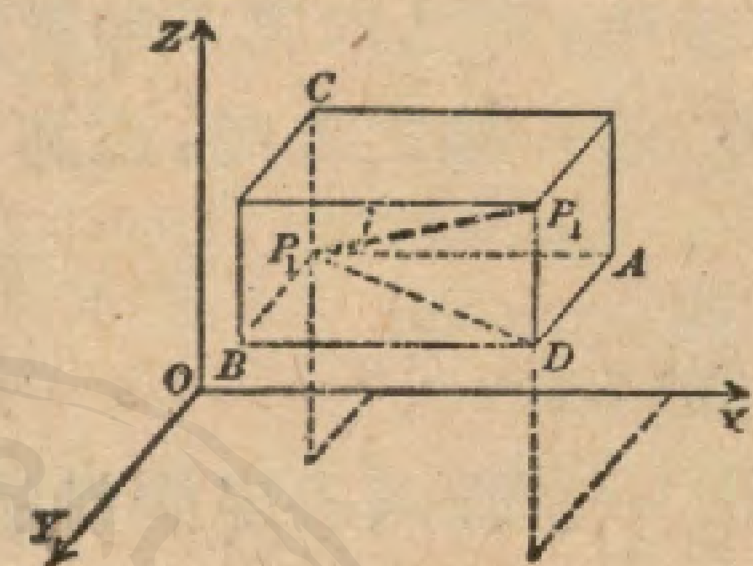
(h) $\cos\alpha<0, \cos\beta>0, \cos\gamma<0$?

116. 長.

定理 連接二點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 與 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 之線段，其長爲

(III) $$l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

［證］ 過 P_1 與 P_2 作諸平面各平行於坐標面而成一直角六面體．其邊與坐標軸平行而各等於 x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1. P_1P_2 爲此直角六面體之一對角線，故 l^2 等於其三邊之平方和． Q.E.D.



命 α, β, γ 爲 P_1P_2 之方向角．於是從圖，$\angle AP_1P_2=\alpha$，而 $P_1A=l\cos\alpha$. 同理，$P_1B=l\cos\beta$, $P_1C=l\cos\gamma$.

故得其方程式

(1) $$x_2-x_1=l\cos\alpha,\ y_2-y_1=l\cos\beta,\ z_2-z_1=l\cos\gamma.$$

於是 x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1，或與此等數成比例之諸數，皆可取作 P_1P_2 之方向數.

117. 二方向直線間之角.

定理 設二方向線之方向角各爲 α,β,γ 與 α',β',γ'，則二線間之角 θ 爲

(IV) $$\cos\theta=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'.$$

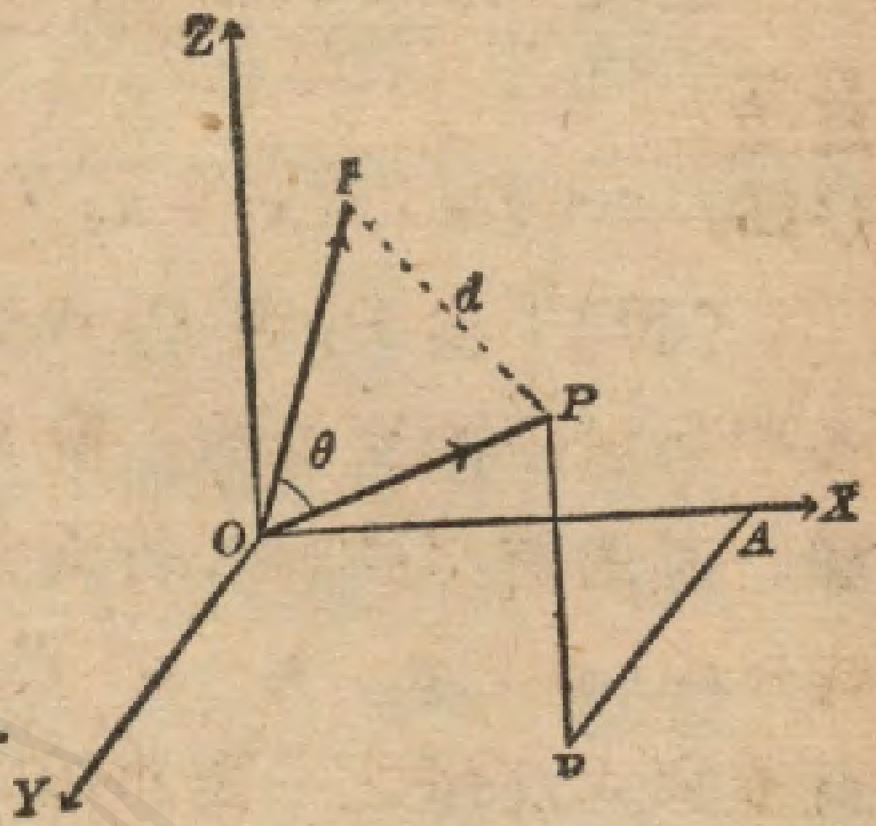
［證］ 作 OP 與 OP' 平行二已知直線．於是命二已知線間之角爲

$$\angle POP'=\theta.$$

命 $OP=\rho$, $OP'=\rho'$, $PP'=d$ (第 243 頁之圖). 則從餘弦定律(第 4 頁之 11)，

(1) $$\cos\theta=\frac{\rho^2+\rho'^2-d^2}{2\rho\rho'}.$$

設 (x, y, z) 與 (x', y', z') 各為 P 與 P' 之坐標，得



$$\rho^2=x^2+y^2+z^2,$$

$$\rho'^2=x'^2+y'^2+z'^2,$$

$$d^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2.$$

故 $\rho^2+\rho'^2-d^2=2(x'x+y'y+z'z)$.

從第 113 節(2)，得$x'=\rho'\cos\alpha'$ 等，$x=\rho\cos\alpha$ 等.將此等數值代入(1)中，卽得(IV).　*Q.E.D.*

118. 平行或垂直線之檢驗法.

定理 1　二線平行且同向，則祗在二線之方向角相等時；二線垂直，則祗在二線之方向餘弦之乘積之和爲零時.

［證］　平行之條件乃依下述之事實，卽二線與過原點之直線平行且同向，祗在諸線之方向角相等時.

垂直之條件，乃依公式(IV)而得，因設 $\theta=90^\circ$ 則 $\cos\theta=0$，反之亦然.　*Q.E.D.*

二線平行而異向，則祗在二線之方向角互爲補角時，空間二直線，其間之角爲 90° 時，則稱爲垂直，但不必需要相交.

當笛卡兒坐標作空間二平行線時，可繪二平行線.然二垂直線在圖中並不需要垂直.(參閱第 112 節開端之圖).

在實用上，吾人不常得其方向餘弦，而常得其方向數．故下述定理頗覺重要．

定理 2 設二線之方向數各爲 a, b, c 與 a', b', c'，則其平行及垂直之條件各爲

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'},\qquad aa'+bb'+cc'=0.$$

證法可從上述定理 1 與第 115 節之(II)得之．

119．分一線段成定比之點．

定理 連接 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 二點之線段，如以 P 點分之使

$$\frac{P_1P}{PP_2}=r,$$

則 P 點之坐標 (x, y, z)，其公式爲

$$\text{(V)}\qquad x=\frac{x_1+rx_2}{1+r},\quad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r},\quad z=\frac{z_1+rz_2}{1+r}.$$

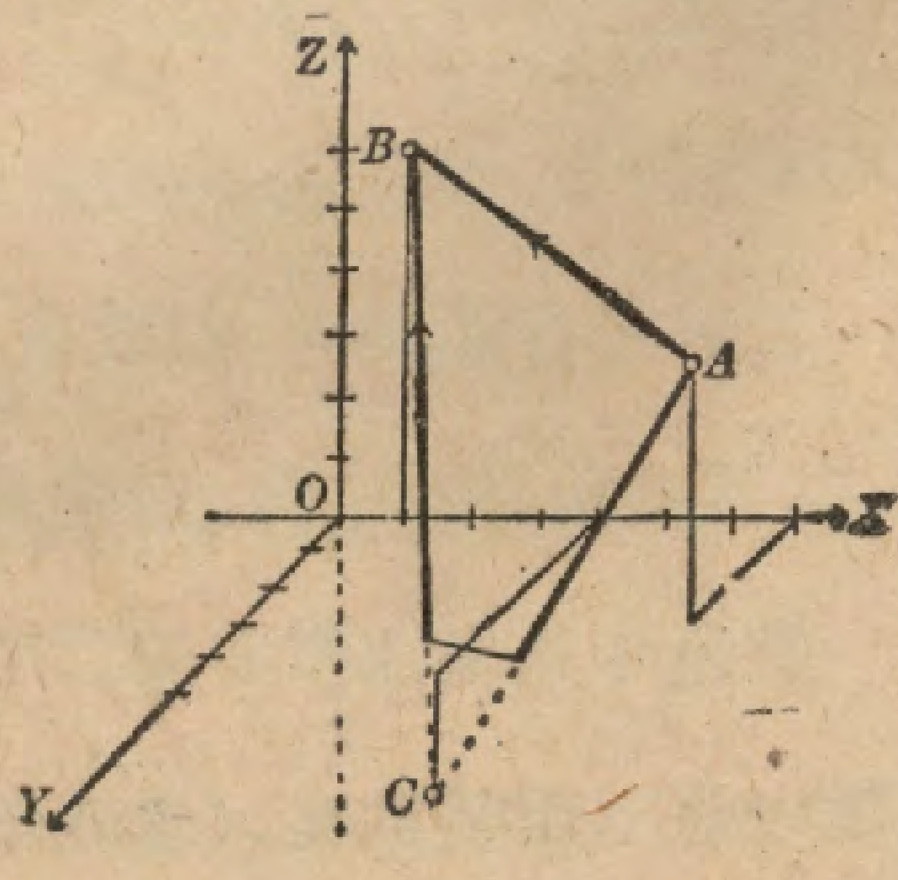
其證與第 10 節之證法相同．

系 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 之中點之坐標 (x, y, z) 爲

$$x=\tfrac{1}{2}(x_1+x_2),\ y=\tfrac{1}{2}(y_1+y_2),\ z=\tfrac{1}{2}(z_1+z_2).$$

例　題

(1) 證明頂點爲 $A(7,3,4)$，$B(1,0,6)$，$C(4,5,-2)$ 之三角形爲一直角三角形．



[解] 從第 116 節，知其方向數爲：AB 者，$6,3,-2$；BC 者，$-3,-5,8$；CA 者，$-3,2,-6$．

$a'a+b'b+c'c=0$ 之條件，可應用於 AB 與 CA 之方向數．故 $\angle A$ 爲 $90°$．答．

(2) 在例題 1 之三角形中,求 $\angle B$.

［解］ 取 AB 與 CB 之正方向(第 115 節)如圖.命 α,β,γ, 與 α',β,γ' 為二線之方向角.於是 γ 與 γ' 為銳角.從第 115 節(II),

$$\cos\alpha=-\frac{6}{7},\ \cos\beta=-\frac{3}{7},\ \cos\gamma=\frac{2}{7};$$

$$\cos\alpha'=-\frac{3\sqrt{2}}{14},\ \cos\beta'=-\frac{5\sqrt{2}}{14},\ \cos\gamma'=\frac{8\sqrt{2}}{14}.$$

故,從(IV), $\cos B=\dfrac{(18+15+16)\sqrt{2}}{98}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$. $B=45°$.答.

習　　題

(1) 用長之公式證明頂點為 (7,3,4),(1,0,6),與(4,5,−2) 之三角形為一等腰直角三角形(參閱上例).

(2) 求下列各三角形內第一頂點之角.各三角形皆應作出.又須決定所求之角為向上(第 115 節)二邊間之角.抑或其補角.

(a) (2,1,4),(3,−1,2),(5,0,6).　　答 84°53′.
(b) (2,−4,7),(3,−2,0),(4,−5,4).
(c) (4,3,−4),(−2,9,−4),(−2,3,2).
(d) (4,3,−2),(7,−1,4),(−2,1,−4).
(e) (3,2,2),(1,2,1),(2,4,−1).

(3) 用長之公式,決定題 2 中各三角形之性質.

(4) 何種四邊形之頂點為 (5,5,2),(7,5,−3),(3,2,−1),(1,2,4)? 作此圖.

(5) 求下列每兩點之連線之中點及其三等分點:

(a) (3,2,−1)與(4,−2,6);　　答 $(3\frac{1}{2},0,2\frac{1}{2}),(3\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\frac{1}{3}),(3\frac{2}{3},-\frac{2}{3},3\frac{2}{3})$.
(b) (4,−7,3)與(−6,3,−5);
(c) (4,3,−2)與(−2,1,−5);
(d) (4,7,−2)與(3,5,−4);
(e) (3,−8,6)與(6,−4,6).

(6) 用比較方向與長之方法,決定下列各組頂點之圖形(各組頂點依其周界之次序排列如下):

(a) (7,3,−4),(1,0,−6),(4,5,2).
(b) (2,−1,5),(3,4,−2),(6,2,2),(5,−3,9).
(c) (6,7,3),(3,11,1),(−3,7,2),(0,3,4).
(d) (−6,3,2),(3,−2,4),(5,7,3),(−13,17,−1).
(e) (2,3,0),(4,5,−1),(3,7,1),(1,5,2).

(f) $(6,-6,0)$, $(3,-4,4)$, $(2,-9,2)$, $(-1,-7,6)$.

(g) $(3,2,2)$, $(1,2,1)$, $(2,4,-1)$, $(4,4,0)$.

(h) $(2,1,4)$, $(0,0,0)$, $(3,-1,2)$, $(5,0,6)$.

(7) 審定下列各組中諸點是否在一直線上.作其圖形.

(a) $(3,2,7)$ $(1,4,6)$, $(7,-2,9)$.

(b) $(13,4,9)$, $(1,7,13)$, $(7,5.5,11)$, $(5,6,11\frac{2}{3})$.

(c) $(3,6,-2)$, $(7,-4,3)$, $(-1,16,-7)$, $(-5,25,-12)$.

(d) $(2,-15,-4)$, $(-3,-5,-9)$, $(3,-17,-3)$, $(4,-19,-2)$.

(8) 求各三角形之面積,其頂點爲:

(a) $(1,3,3)$, $(0,1,0)$, $(4,-1,0)$ 答 $2\sqrt{70}$.

(b) $(3,1,2)$, $(2,-1,5)$, $(1,0,-1)$. 答 $\frac{3}{2}\sqrt{19}$.

(c) $(4,-4,2)$, $(9,-1,10)$, $(6,-7,8)$.

(d) $(3,-4,4)$, $(2,-9,2)$, $(-1,-7,6)$.

(9) 設直線 L_1 與 L_2 之方向數各爲$(0,-1,1)$與$(-1,-1,0)$,又一直線 L_3 垂直於 L_1 並與 L_2 成 $30°$ 之角,求 L_3 之方向餘弦.

(10) 設一直線之一端點爲$(2,-3,5)$而其中點爲$(4,2,3)$,求他一端點之坐標.

(11) 證明$(0,0,0)$, $(0,-1,-1)$, $(-1,0,-1)$ 與 $(-1,-1,0)$ 爲一正四面體 (Regular tetrahedron)之頂點.

(12) 設直線之一端點爲$(6,-1,-7)$而自此端點至全線五分之三處之點爲$(3,2,-1)$求他端點之坐標.

(13) 設三直線之方向數各爲 $(12,-3,-4)$, $(4,12,3)$, 與 $(3,-\ ,12)$,證明此三線互相垂直.

(14) 在$(2,-3,4)$ 與 $(8,0,10)$連線上一點之 x 坐標爲 4. 求此點之其他二坐標.

特設習題

(1) 設 L_1 與 L_2 兩直線之方向數各爲$(2,-3,4)$與$(-1,2,-3)$,求垂直於 L_1 與 L_2一線之方向數.

(2) 求 $\triangle ABC$ 之面積,其頂點爲 $A(2,1,4)$, $B(3,-1,2)$ $C(5,0,6)$,用公式,面積$=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A$.

(3) 證明 $(2,3,4)$ 與 $(-1,2,6)$ 之連線與 $(1,2,-5)$ 與 $(6,3,-18)$之連線相交,並求其交點.

(4) 求任一三角形之重心(Centroid)之坐標.

答 $\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$, $\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$, $\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$.

(5) 證明任意四邊形（不必平面）對邊中點之連線互相平分.

(6) 連接四面體對邊中點之三線互相平分.

(7) 在任一四面體內，從各頂點至其相對表面上之重心所作諸線相會於一點，且各線皆分成 $r=3$ 之比.（此點卽四面體之重心）

(8) 任一四邊形二對角線之平方和，爲其連接對邊中點兩直線平方和之兩倍.

(9) 四面體兩雙對邊之平方和，等於第三雙對邊之平方和加第三雙對邊之中點連線平方之四倍.

120. 空間之軌跡　在立體幾何學中，須研究下列兩種軌跡.

(1) 空間一點能適合一已知條件者其軌跡通常爲一立體之表面 (Surface).

例如，距一定點等遠之點之軌跡爲一球面.距二定點等遠之點之軌跡爲一平面，垂直於二已知點之連線於其中點.

(2) 空間一點能適合兩已知條件者，其軌跡通常爲一曲線.因一點適合兩條件之一之軌迹爲一立體之表面，旣如上述，今適合兩條件，則其軌跡必在兩立體之表面上，卽在兩面相交之曲線上無疑.

例如，一點 (1) 距一定 P_1 點之距離爲 r 而又與兩定點 P_2 及 P_3 爲等距，則其軌跡爲一圓，卽以 P_1 爲圓心，r 爲半徑之球面與垂直於 P_2P_3 中點之平面相交所成之曲線也.

條件之數須仔細數淸.如設一點至三定點 P_1, P_2, 與 P_3 爲等距，此爲適合兩條件，卽至 P_1 與 P_2 爲等距，及至 P_2 與 P_3 爲等距.

以上二種軌跡，學者須詳細區別之.

121. 面之方程式(Equation of a surface) 設面上任一點 P 其坐標爲 (x,y,z),則定此面爲一軌跡之條件,引出一含變數 $x,y,$ 與 z 之方程式.此方程式稱爲面之方程式,而可用一與第 16 節相類似之規則以求得之.

面之方程式爲一含 $x,y,$ 與 z 之方程式,凡面上各點之坐標皆適合於此式,而面外無點可適合.

平面爲最簡單之面,將於下章詳述之.至此,下之命辭顯見其眞確:

定理 一平面與

XY 平面平行,則其方程式爲 $z=$ 常數;

YZ 平面平行,則其方程式爲 $x=$ 常數;

ZX 平面平行,則其方程式爲 $y=$ 常數;

122. 曲線之方程式(Equation of a curve) 設曲線上任一點 P 其坐標爲 (x,y,z),則定此曲線爲一軌跡之二條件將引出二個含 $x,y,$ 與 z 之方程式.每一條件所定之面之方程式在許多情形中,可分別用類似第 16 節之規則以求得之.再將此二個方程式視作聯立即爲此曲線之方程式,而此曲線和卽此二個面相交處之曲線也.

曲線之方程式爲二個含 $x,y,$ 與 z 之聯立方程式,凡曲線上各點之坐標皆適合於此二方程式,而曲線外無點能完全適合之.

此後可知,同一曲線之方程式可有無限不同之形式.

直線爲二平面相交所成,常視作空間"曲線"中之最簡例(參閱下章).簡例之一,如下之顯明定理.

定理 一直線平行於

x 軸,則其方程式爲 $y=$ 常數, $z=$ 常數;

y 軸,則其方程式爲 $z=$ 常數, $x=$ 常數;

z 軸,則其方程式爲 $x=$ 常數, $y=$ 常數.

123. 方程式之軌跡 (Locus of an equation) 含表示空間坐標之三變數(可缺一或二)之方程式,其軌跡爲一面,經過其坐標適合於此方程式之一切諸點而不過其他諸點.

方程式之討論與面之作法皆在下章論及之.

二個聯立程式之軌跡爲該二方程式各自決定之兩個面之相交曲線.

習 題

(1) 坐標面之方程式爲何?坐標軸之方程式爲何?

(2) 求一點之軌跡之方程式,此點

(a) 在 XY 平面之下 4 單位;
(b) 在 YZ 平面之左 5 單位;
(c) 在 XZ 平面之前 3 單位;
(d) 在 YZ 平面之右 4 單位;
(e) 在 XY 平面之上 10 單位;
(f) 在 XZ 平面之後 6 單位;

(3) 求一點之軌跡之方程式,此點

(a) 與 $(1,-1,3)$ 相距 6 單位;
(b) 與 $(3,0,4)$ 相距 5 單位; 答 球面 $x^2+y^2+z^2-6x-8z=0$.
(c) 與 $(2,-2,1)$ 及 $(4,5,6)$ 等距;
(d) 與 $(4,-6,-8)$ 及 $(-2,7,9)$ 等距.

答 平面 $6x-13y-17z+9=0$.

(4) 一平面垂直且平分下列各對已知點之連線,求此平面之方程式.

(a) $(6,3,2)$ 與 $(4,2,0)$. 答 $4x+2y+4z-29=0$.
(b) $(7,-6,0)$ 與 $(-5,-2,3)$.
(c) $(4,-3,6)$ 與 $(2,-4,2)$. 答 $4x+2y+8z-37=0$.
(d) $(4,-5,-12)$ 與 $(-2,4,6)$.

(5) 求球面之方程式，此球

(a) 之半徑爲 4 而圓心爲$(3,-4,-5)$；

(b) 以 $(-3,4,2)$ 與 $(7,-2,6)$ 之連線爲其直徑；

答 $x^2+y^2+z^2-4x-2y-8z-17=0$.

(c) 之圓心爲 $(2,1,4)$ 而切於 YZ 平面；

(d) 之圓心爲 $(3,2,7)$ 而過 $(5,-3,8)$；

答 $x^2+y^2+z^2-6x-4y-14z+32=0$.

(e) 之半徑爲 3 而與三個坐標皆相切(有八種情形)；

(f) 過 $(2,0,0)$，$(0,-4,0)$，$(0,0,4)$，$(8,0,0)$.

(6) 求一點軌跡之方程式，此點

(a) 與 $(5,4,0)$ 之距離二倍於與 $(-4,3,4)$ 之距離；

(b) 至 $(5,0,0)$ 與至 $(-5,0,0)$ 之距離和爲 20；

答 $3x^2+4y^2+4z^2=300$.

(c) 至$(7,-5,9)$ 與至 $(5,-3,8)$ 距離之平方和爲 6；

(d) 至 $(-4,3,4)$ 之距離等於至 XY 平面之距離；

(e) 至 x 軸之距離 4 倍於至 $(4,-2,4)$ 之距離；

(f) 至三坐標面之距離和等於至原點之距離. 答 $xy+yz+zx=0$.

(7) 求垂直平分四面體$(4,8,0)$，$(2,5,-2)$，$(3,2,2)$，$(5,1,2)$之各邊之六個平面之方程式. 此等平面相會於一共公點否？

(8) 寫出下列各圓柱面之方程式.

(a) 其半徑爲 5 而以 z 軸爲軸；

(b) 其半徑爲 4 而以 y 軸爲軸；

(c) 其半徑爲 3 而以 x 軸爲軸.

(9) 一點至三定點$(1,3,8)$，$(-6,-4,2)$，與$(3,2,1)$之距離皆相等，求此點之軌跡之方程式.

(10) 求一點之軌跡之方程式，設此點

(a) 至 $(1,3,2)$ 與至 $(0,0,1)$ 之距離相等，又至 $(3,0,3)$ 與 $(0,-2,0)$ 之距離亦相等；

(b) 至 $(1,2,1)$ 爲 3 單位而至 $(2,0,1)$ 爲 2 單位；

(c) 至 x 軸與至 y 軸皆爲 2 單位；

(d) 至 y 軸，XZ 平面，與 $(3,3,2)$ 之距離皆相等；

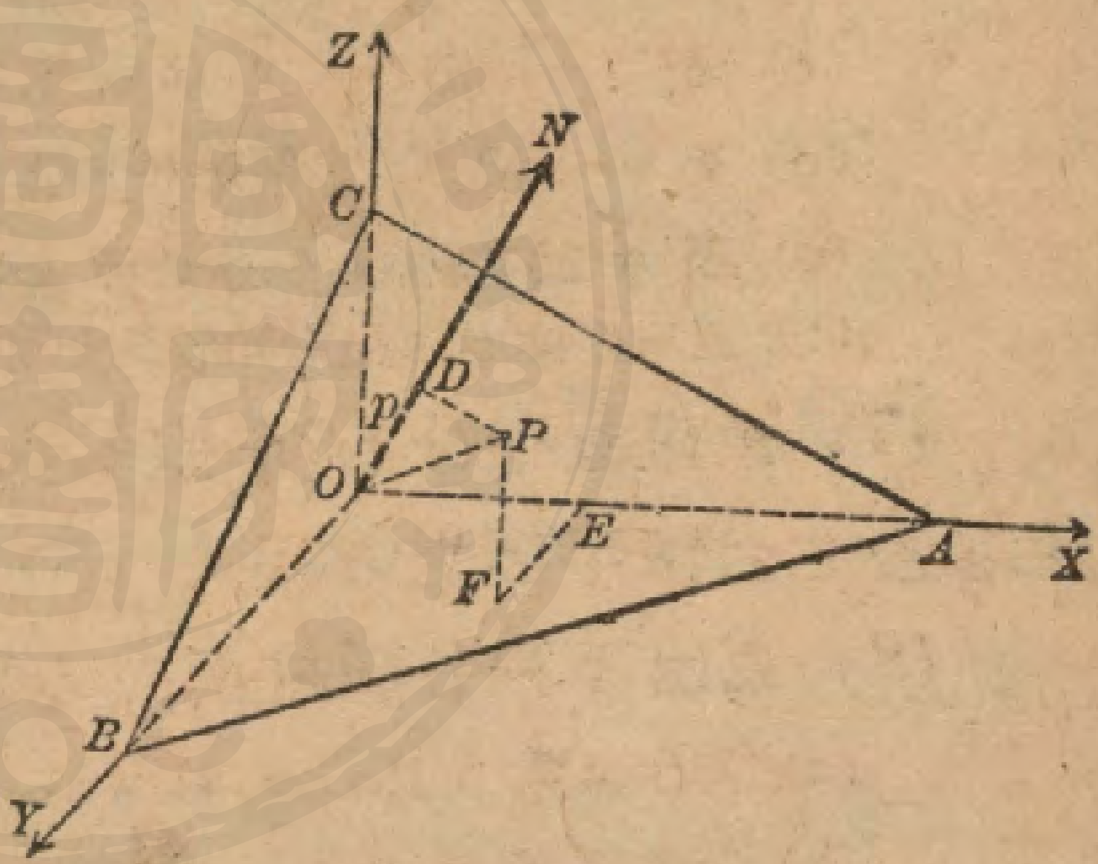
(e) 爲等腰三角形之頂點，其底爲 $(4,5,6)$ 與 $(-2,-1,2)$ 之連綫.

第十四章

空間之平面與直線

(The Plane and The Straight Line In Space)

124 平面方程式之法線式 設 ABC 爲一任意平面. 從原點作 ON 垂直 ABC 於 D. 命 ON 之正方向爲從 O 向 N, 即從原點向平面, 並以 p 表 OD 之長, 而以 α, β, 與 γ 表 ON 之方向角, 於是一任意平面之位置可用已知之 p, α, β 與 γ 諸正值以決定之. 此平面 ABC 可作爲一點 P 之軌跡, 此點 P 在垂直 ON 於 D 之垂直線上.



茲證明下之

定理 法線式. 一平面之方程式爲

$$\text{(I)} \qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

其中 p 爲從原點至平面之垂直距離, 而 α. β, 與 γ 爲此垂線之方向角.

[證] 命 $P(x, y, z)$ 爲已知平面 ABC 上任一點. 命 α', β', γ' 爲 OP 之方向角, 又命 $\theta = \angle PON$. 於是從第 117 節 (IV),

$$(1) \qquad \cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$$

在直角三角形 DOP 中,$OD=p=OP\cos\theta$.又從第 113 節 (2) $x=OP\cos\alpha'$, $y=OP\cos\beta'$, $z=OP\cos\gamma'$. 將 $\cos\theta$, $\cos\alpha'$ 等值代入(1)而化簡之卽得其結果爲(I). *Q.E.D.*

系 任一平面之方程式爲含 x, y, 與 z 之一次方程式.

當 $p=0$ 時,上述證法須有變更,但亦甚易,因如此則 $\theta=90°$,而(1)之 $\cos\theta=0$.

特例 設 $p=0$,吾人假定 ON 爲向上.於是因 $\gamma<\frac{1}{2}\pi$, 故 $\cos\gamma>0$. 設此平面過 OZ, 則 ON 在 XY 平面中而 $\cos\gamma=0$; 在此情形中,吾人假定 ON 之方向使 $\beta<\frac{1}{2}\pi$, 故 $\cos\beta>0$. 最後,設此平面與 YZ 平面相疊合,則 ON 上之正向與 OX 上者相同.

125. 任意一次方程式之軌跡 化作法線式法.

定理 方程式

(II) $$\boldsymbol{Ax+By+Cz+D=0}.$$

之軌跡爲一平面.

〔證〕 欲證此定理,可說明用一適當常數乘 (II) 卽可化作法線式(I).(與第 30 節比較之).欲決定此常數,用 k 乘(II),得

(1) $$kAx+kBy+kCz+kD=0.$$

將(1)與(I)中之對應係數列成方程式,

(2) $$kA=\cos\alpha,\ kB=\cos\beta,\ kC=\cos\gamma,\ kD=-p.$$

平方(2)中前三式而相加,

$$k^2(A^2+B^2+C^2)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

(3) $$\therefore k=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

從(2)中最末之方程式觀察,可知根式之符號必須與 D 相反方使 p 爲正數.

將(3)代入(2),得

$$
(4)\quad \begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, & \cos\beta=\dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\gamma=\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, & p=\dfrac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{cases}
$$

如是 α, β, γ, 與 p 之值已決定,因此(I)與(II)之軌跡相同.故(II)之軌跡爲一平面.

方程式(II)稱爲含 x, y, 與 z 一次之普遍方程式.此討論得化一平面方程式爲法線式之規則.

將方程式除以 $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$,取根式之符號與 D 相反.

當 $D=0$ 時,則 $p=0$,而根式之符號須與 C 相同.若 $C=D=0$,則其符號須與 B 同;又若 $B=C=D=0$,則其符號須與 A 同,(參閱第 124 節).

從(4)得下之重要

定理 在一平面方程式中 x, y, z 之係數與此平面之垂直線之方向餘弦(或方向數)成比例.

從此定理及第 118 節,甚易證明下之

系 1 兩平面其方程式爲

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad A'x+B'y+C'z+D'=0,$$

祇在 x, y, 與 z 之係數成比例時,即

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'},$$

兩平面方互相平行.

系 2 兩平面互相垂直,祇在其 $x, y,$ 與 z 之係數積之和爲零時,即

$$AA'+BB'+CC'=0.$$

126. 特種平面.

定理 一平面之方程式爲

$Ax+By+D=0$ 之形式者垂直於 XY 平面;

$By+Cz+D=0$ 之形式者垂直於 YZ 平面;

$Ax+Cz+D=0$ 之形式者垂直於 ZX 平面;

即,設方程式中缺少一變數時,此平面垂直於相當其餘兩變數之坐標面.

[證] 一直線垂直於 $Ax+By+D=0$, 其方向數爲 $A, B, 0$; 直線垂直於 $z=0$, 其方向數爲 $0, 0, 1$. 其積之和爲零. 其他二情形中之證相同.

系 一平面之方程式爲

$Ax+D=0$ 之形式者垂直於 x 軸;

$By+D=0$ 之形式者垂直於 y 軸;

$Cz+D=0$ 之形式者垂直於 z 軸.

即,設方程式中缺少二變數時,此平面垂直於相當其一餘一變數之坐標軸.

例如,平面 $Ax+D=0$ 垂直於 XY 平面與 ZX 平面,故亦垂直於兩平面之交線.

127. 平面之截部與踪線 (Inte cepts and traces of a plane) 用類似於第 18 節中之規則敍述一平面(或任何面).

在坐標軸上 求截部之規則.

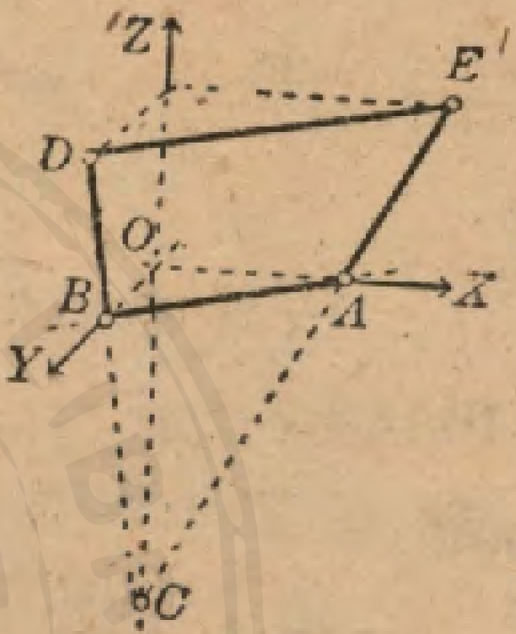
命 x, y z 中各對變數輪流等於零而解之以求其餘一變數之實值.

一平面與坐標面相交之直線稱爲蹤線(Traces). 在 XY 平面上,卽以 OX 與 OY 爲軸者之蹤線之方程式,可將 $z=0$ 代入其平面方程式中而得. 其他蹤線之求法相同.

平面之圖法是從方程式求其截部, 記在坐標軸上, 連所得諸點. 此等連線卽是蹤線,若截距爲零時,作一條或多條蹤線,其法如下之例題.

例　　　　題

(1) 求平面



(1)　　$2x+2y-z-6=0$

之蹤線與截距,並畫此平面.

[解] 從上之規則並參閱右圖,得其截部爲

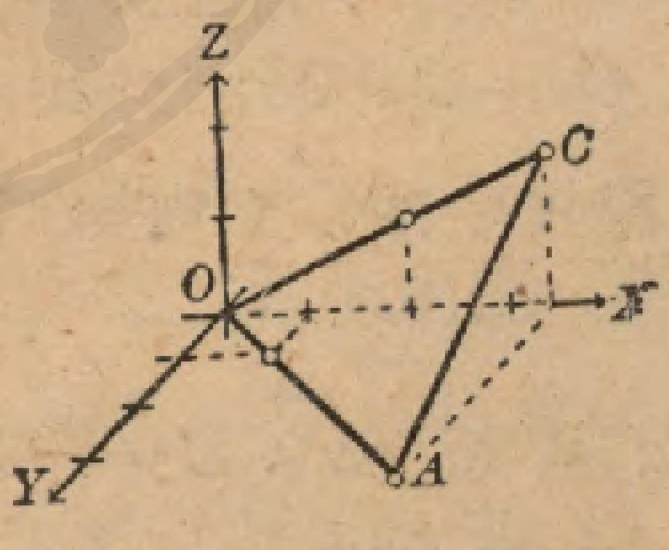
$OA=3$, $OB=3$, $OC=-6$. 答.

其蹤線爲

$AB: x+y-3=0$; $BC: 2y-z-6=0$; $CA: 2x-z-6=0$. 答.

作直線 DE 平行 BA 以顯示在第一八分區內此平面之一部份.

(2) 求其蹤線,並作此平面



(2)　　$x-y-2z=0$.

[解] 其蹤線爲

$OA: x-y=0$; $OB: y+2z=0$,

$OC: x-2z=0$. 答.

作 OA 與 OC 及直線 CA 以顯示在第一八分區內此平面之一部份.

習　　　　題

(1) 求下列各平面在坐標軸上之截部,與在坐標面上之蹤線. 作其圖形.

(a) $6x-2y+3z-20=0$.
(b) $x+2y+3z+12=0$.
(c) $6x-4y+z-12=0$.
(d) $2x+y-z=0$.
(e) $3x+2y-6z-10=0$.
(f) $x-y+z-14=0$.
(g) $4y+3z+36=0$.
(h) $5x+3z+45=0$.

(2) 求下列諸平面之方程式並作其圖形：

(a) $p=5, \alpha=120°, \beta=45°\ \gamma=120°$.　　答 $x-\sqrt{2}\,y+z+10=0$.

(b) $p=7, \alpha=45°, \beta=60°, \gamma=60°$.

(c) $p=4, \alpha=90°\ \beta=135°\ \gamma=45°$.　　答 $y-z+4\sqrt{2}=0$.

(d) $p=2\ \alpha=60°, \beta=45°, \gamma=120°$.

(e) $p=4, \frac{\cos\alpha}{6}=\frac{\cos\beta}{-2}=\frac{\cos\gamma}{3}$.　　答 $6x-2y+3z\pm 28=0$.

(f) $p=6, \frac{\cos\alpha}{-2}=\frac{\cos\beta}{-1}=\frac{\cos\gamma}{-2}$.

(g) $p=3, \frac{\cos\alpha}{6}=\frac{\cos\beta}{-3}=\frac{\cos\gamma}{2}$.

(h) $p=0, \frac{\cos\alpha}{-3}=\frac{\cos\beta}{4}=\frac{\cos\gamma}{12}$.　　答 $3x-4y-12z=0$.

(3) 求一平面之方程式,已知從原點至平面之垂線之足爲

(a) $(-2,-2,1)$;　答 $2x+\ y-z+9=0$.

(b) $(1,4,2)$;　答 $x+4y+2z-21=0$.

(c) $(-4,3,-12)$;

(d) $(2,-1,3)$;

(e) $(-1,6,3)$;

(f) $(1,0,2)$.

(4) 化題 1 中諸平面之方程式爲法線式．求各情形中從原點至平面所作之垂線之方向餘弦,與從原點至平面之垂直距離.

答 (a) $\cos\ =\frac{6}{7}, \cos\beta=-\frac{}{7}, \cos\gamma=\frac{}{7}, p=2\frac{6}{7}$.

(5) 寫出平面之方程式，此平面垂直於從原點

(a) 至$(4,5,3)$之連線,且過$(1,3,2)$;

(b) 至$(2,-4,3)$之連線,且過$(3,-4,-5)$.

(6) 寫出平面之方程式,此平面通過$(1, -3, 2)$而垂直於$(0,0,3)$與$(1,-3,-4)$之連線.

(7) 設一直角三角形之直角頂點爲$(4,-2,-2)$,其他一頂點爲$(3,1,1)$,求其第三頂點之軌跡之方程式.

(8) 在下列各情形中,證明二平面互相平行,且求二平面間之垂直距離.

(a) $x-y-z+5=0, 2x-2y-2z-7=0$.

(b) $3x-y+2z+10=0\ 3x-y+2z-7=0$.

(c) $6x+2y-3z-63=0, 6x+2y-3z+49=0$.　　答 16.

(d) $x+2y+2z-7=0, 3x+6y+6z-1=0$.

(9) 在下列各情形中，檢出各對互相平行之平面或互相垂直之平面．

(a) $2x+3y-z=0, 3x-y+3z+2=0, 4x+6y-2z+8=0$.

(b) $2x-5y+4=0, 5x+2y-8=0, x-2y=0$.

(10) 求平面之方程式此平面

(a) 垂直於 XY 平面並過 $(2,-1,0)$ 與 $(3,0,5)$ 二點．　答　$x-y-3=0$.

(b) 垂直於 YZ 平面 其在 y 軸與 z 軸上之截部各為 5 與 -2.

(c) 平行於平面 $x-2y-2z-15=0$ 而至原點之距離較近 2 單位．

(11) 求下列平面之交點：

(a) $x+2y+z=0, x-2y-8=0, x+y+z-3=0$;　答　$(2,-3\ 4)$

(b) $2x-5y-4z+7=0, 6x+2y+2z-7=0, x+y=5$.

(12) 證明 $4x+y+z+4=0, y-5z+14=0, x+2y-z+3=0, x+y+z-2=0$，四平面有一公共點．

(13) 求三坐標面截以下各平面所成之三角形之面積：

(a) $2x+2y+z-12=0$.　答　54.

提示　用截部並用二種方法表出巳知平面與三坐標面所圍成之四面體之體積．

(b) $7x-7y+2z-6=0$.　(d) $x+5y+7z-3=0$.

(c) $2x-y-3z+12=0$.　答　$\frac{9}{14}\sqrt{3}$.

128．二平面間之角　由兩相交平面所成之一對兩面角 (Dihedral angles) 之平面角 (Plane angle) 乃等於從原點至二平面所作垂線之正方向間之角．此角稱為二平面間之角 (The angle between the planes).

定理　二平角

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 與 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

間之角 θ 可從下式得之：

$$\text{(III)}\qquad \cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\times\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

其根式之符號依第 125 節選取之．

〔證〕 從原點所作垂直於此等平面諸直線之方向餘弦爲

$$\cos\alpha_1=\frac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},\quad \cos\alpha_2=\frac{A_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

$$\cos\beta_1=\frac{B_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},\quad \cos\beta_2=\frac{B_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

$$\cos\gamma_1=\frac{C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},\quad \cos\gamma_2=\frac{C_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

角 θ 等於此兩直線間之角.故從第 117 節(IV),得

$$\cos\theta=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2.$$

將方向餘弦諸值代入,卽得(III).　　*Q.E.D.*

129. 三條件決定之平面　方程式

(1)　$Ax+By+Cz+D=0.$

吾人已知其代表一切平面.欲求一某平面之方程式,可寫出含係數 A, B, C, D 之三個齊次方程,於是能解之而以第四係數表其餘三係數.當此等數值代入(1)中後,其第四數值可約去而得所求之方程式.

例　　題

(1) 求一平面之方程式,此平面經過點 $P_1\,(2,-7,\frac{3}{2})$ 而平行於平面 $21x-12y+28z-84=0.$

〔解〕 命所求平面之方程式爲

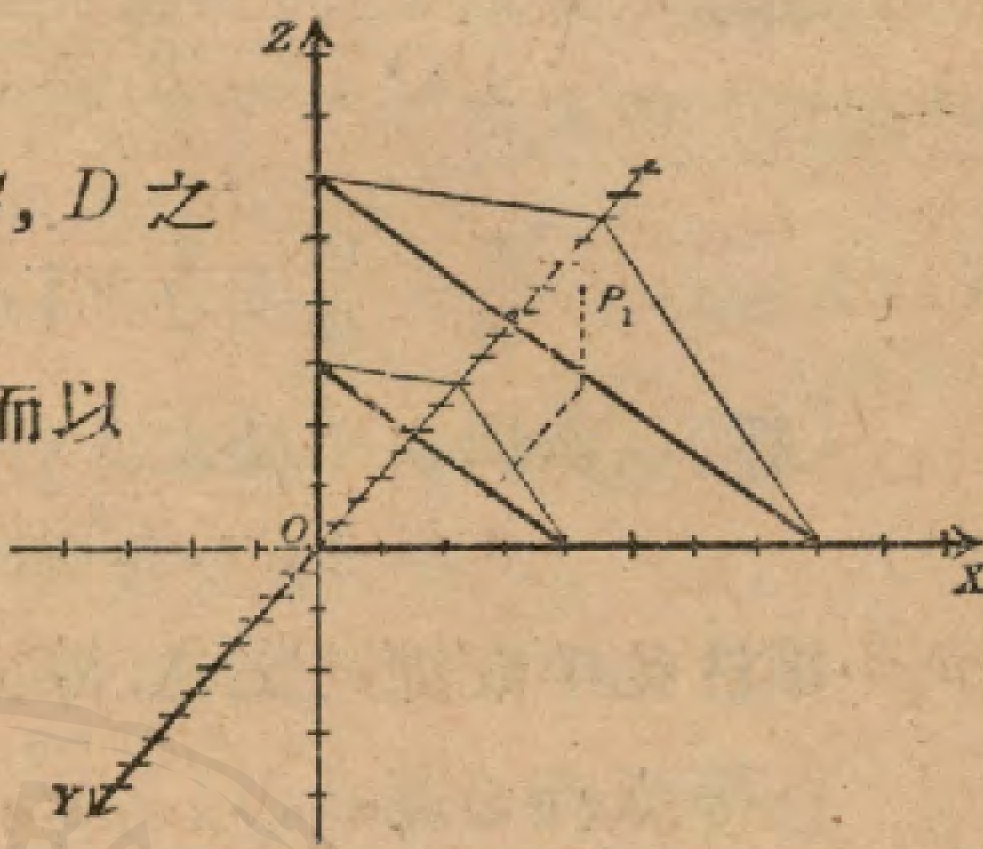
(2)　$Ax+By+Cz+D=0.$

因 P_1 在(2)上,可將 $x=2,\ y=-7,\ z=\frac{3}{2}$ 代入,得

(3)　$2A-7B+\frac{3}{2}C+D=0.$

因 (2) 平行於已知平面 (第 253 頁系 1),

(4) $$\frac{A}{21}=\frac{B}{-12}=\frac{C}{28}.$$



方程式(3)與(4)為含 A, B, C, D 之三個齊次方程式.

解(3)與(4)以求 A, B, 與 D 而以 C 表之.

$A=\frac{3}{4}C,\ B=-\frac{3}{7}C,\ D=-6C.$

代入(2)中,

$\frac{3}{4}Cx-\frac{3}{7}Cy+Cz-6C=0,$

去分數並約去 C, $21x-12y+28z-168=0$. 答.

(2) 欲求一經過三點之平面之方程式,將各點之坐標代(1)中之 x, y, 與 z 而得三個含 A, B, C, D 之方程式,亦可解之而以第四係數表其他三係數.

過三已知點 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ 之平面之方程式以寫作行列式為便. 即

(5) $$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

實則當以第一列諸元展開 (5) 時,其結果得一含 x, y, z 之一次方程式. 再當以三已知點中任一點之坐標代 x, y, z, 則二列變數相同,故能適合(5). 即平面(5)必過此三已知點.

方程式(5)亦可用以決定四知點是否在一平面上.

若寫(5)之展開式為

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

則其係數為三次之行列式,

$$A=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},\quad B=-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},\quad D=-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

130. 平面方程式之截部式.

定理 設 a, b, 與 c 為一平面在 x, y. 與 z 軸上之截部，則此平面之方程式為

(IV) $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

［證］ 命所求平面之方程式為

(1) $$Ax+By+Cz+D=0.$$

由已知平面之三點，卽 $(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$.

此等坐標必適合(1).故

$Aa+D=0,\ Bb+D=0,\ Cc+D=0.$

於是 $A=-\dfrac{D}{a},\ B=-\dfrac{D}{b},\ C=-\dfrac{D}{c}.$

代入(1)中，以 $-D$ 除之，而移項卽得(IV). Q.E.D.

習 題

(1) 求過下列已知點之平面之方程式.並驗證其解答.

(a) $(0,0,3),(4,0,0),(8,0,0)$.

(b) $(2,3,0),(-2,-3,4),(0,6,0)$. 答 $3x+2y+6z-12=0$.

(c) $(-4,0,6),(8,2,-1),(2,4,6)$.

(d) $(4,2,1),(-1,-2,2),(0,4,-5)$. 答 $11x-17y-13z+3=0$.

(e) $(1,2,3),(2,3,4),(5,4,3)$.

(f) $(1,1,-1),(-2,-2,2),(1,-1,2)$. 答 $x-3y-2z=0$.

(2) 求平面之方程式，此平面經過

(a) $(2,1,-1)$ 而平行於平面 $7x+4y-4z=0$;

(b) $(3,-4,5)$ 而平行於平面 $3x-y+z+6=0$. 答 (b)$3x-y+z=18$.

(3) 寫出平面之方程式，其截部如下，並作此平面.

(a) $3,4,5$. (c) $2,4,-7$. (e) $a,-b,-c$.

(b) $-1,-3,5$. (d) $7,0,-4$. (f) $2a,-a,3a$.

(4) 寫出平面之方程式,其平面過

(a) $(2,1,-1)$與$(1,1,2)$而垂直於平面 $7x+4y-4z+30=0$.

答　$12x-17y+4z-3=0$

(b) $(6,4,-1)$與$(2,4,1)$而垂直於平面 $4x+6y+3z-7=0$.

(5) 寫出平面之方程式,此平面過

(a) $(7,0,3)$ 而與 $2x-4y+3z=0$及$7x+2y+z=14$ 各平面互相垂直.

答　$10x-19y-32z+26=0$.

(b) $(3,4,5)$ 而與 $2x+3y-7=0$ 及 $4x-3z=7$ 各平面互相垂直.

(6) 證明下列各情形內已知之四點在一平面內.

(a) $(-1,0,0),(0,2,-3),(2,10,-5),(1,0,-10)$.

(b) $(1,0,-1),(3,4,-3),(8,-2,6),(2,2,-2)$.

(7) 求下列各對平面間之角.

(a) $4x-3y+5z=8$, $2x+3y-z=4$.

(b) $2x-y+z=7$, $x+y+2z=11$.　答　$60°$

(c) $4x-3y+z=6$, $2x+3y-5z=4$.

(d) $x+2y-z=12$, $x-2y-2z=7$.　答　$97°49'$.

(e) $3x-z+12=0$, $x+5y+17=0$.

(f) $x+5y-3z=10, 2x-3y+z=10$.

(8) 證明第128節(III)所得之角等於不含原點之二面角之平面角.

(9) 求平面 $x+y+z=2$, $x-y-2z-4=0$, $2x+y-z=2$ 所成之三面角之頂點與二面角.　答　頂點$(4,-4,2)$,一只二面角 $120°$.

(10) 求下列各平面之方程式:

(a) 過 $(0,-1,0)$ 與 $(0,0,1)$ 而與 XY 平面成 $60°$ 之角.

答　$\sqrt{2}x-y+z-1=0$.

(b) 過 $(0,-1,0)$ 與 $(0,0,1)$ 而與平面 $y-z-2=0$ 成 $120°$ 之角.

特　設　習　題

(11) 一平行六面體之三面,其方程式為 $x-4y=3$, $2x-y+z=3$, 與 $3x+y-2z=0$, 而其一頂點為 $(3,7,-2)$.則其他三面之方程式為何?其他諸頂點之坐標為何?

(12) 求平面之方程式,此平面經過點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 而平行於平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$.

答　$A_1(x-x_1)+B_1(y-y_1)+C_1(z-z_1)=0$.

(13) 求平面之方程式，此平面過原點與 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 而垂直於平面 $A_1x+B_1y+\ _1z+D_1=0$.

答 $(B_1z - C\,y_1)x+(C\,x_1-A\,z_1)y+(A_1y\ -B_1x_1)z=0$.

(14) 求平面之方程式，此平面過 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 而垂直於平面 $A\ \ +By+Cz+D=0$.

131. 一平面至一點之垂直距離 垂直於平面之任一直線，其正方向假定與過原點而垂直此平面之直線之正方向相同（第 124 節）. 故從一平面至一點 P_1 之垂直距離之正或負全視 P_1 與原點在此平面之兩側與否而定.

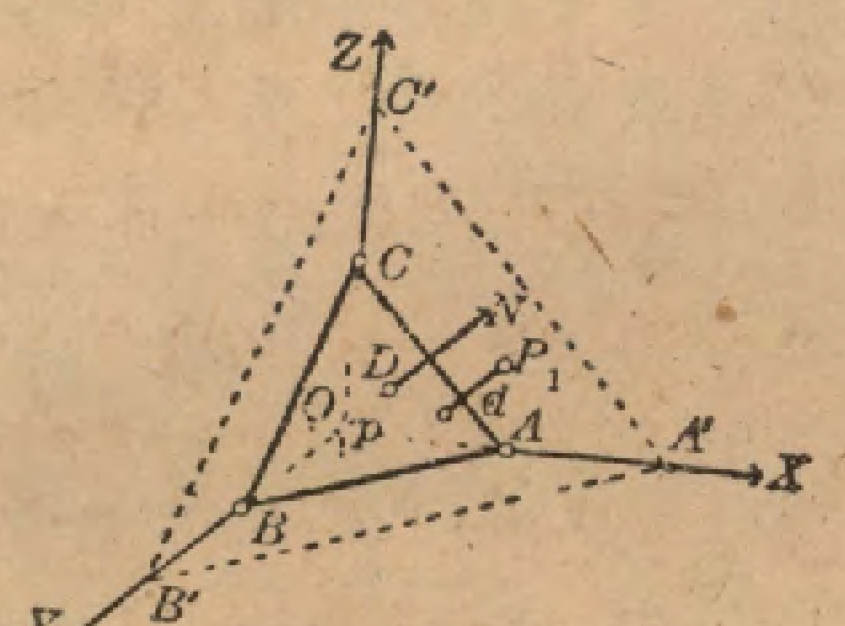
設此平面過原點，則從平面至 P_1 之距離，其符號依第 124 節中特別情形之慣例而定.

玆解此問題：已知一平面之方程式與一點之坐標，求從平面至此點之垂直距離.（與第 31 節比較之）.

[解] 命此點爲 $P_1(x_1, y_1\ z_1)$ 而假定此已知平面之方程式爲法線式

(1) $$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.$$

命 d 爲所求之距離.



過 P_1 作平面 $A'B'C'$ 平行於已知平面 ABC.

此平面之方程式爲

$$x\cos\alpha+y\text{co}\ \beta+z\cos\gamma-(p+d)=0.$$

點 P_1 之坐標適合此方程式. 將 $x=x_1$ 等代入而解之以求 d，得

$$d=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p. \quad \text{答.}$$

故其垂直距離 d 卽爲將已知點之坐標代 (1) 中左邊之 x, y, 與 z 後所得之結果. 於是得

求從一已知平面至一已知點之垂直距離 d 之規則.

化此平面之方程式爲法線式. 使 d 等於此方程式左邊諸項. 將已知點之坐標代 x, y, 與 z. 其結果卽爲所求之距離.

例　　題

求從平面 $2x+y-2z+8=0$ 至點 $(-1,2,3)$ 之垂直距離.

[解] 以 -3 除此方程而依此規則,得

$$d=\frac{2x+y-2z+8}{-3}=\frac{2(-1)+2-2(3)+8}{-3}=-\frac{2}{3}.\quad 答.$$

故所求之距離爲 $\frac{2}{3}$ 而已知點與原點在此平面之同側. 答.

從規則,得從平面

$$Ax+By+Cz+D=0$$

至點 (x_1, y_1, z_1) 之垂直距離 d, 其結果爲

$$d=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{2}$$

其中根式之符號依上之決定(第 125 節).

習　　題

(1) 求從下列已知平面至已知點之垂直距離

(a) $6x-3y+2z-10=0$ 至 $(4,2,10)$; 答 4.

(b) $x+2y-2z-12=0$ 至 $(1,-2,3)$; 答 -7.

(c) $4x+3y+12z+6=0$ 至 $(9,-1,0)$;

(d) $2x-5y+3z+4=0$ 至 $(-2,1,7)$;

(e) $3x-4y+12z+26=0$ 至 $(1,5,9)$;

(f) $3x+4y-12z+10=0$ 至 $(1,6,5)$;

在各情形之結果中,說明其代數符號之意義.

(2) 求一四面體諸高之長,其頂點為 $(0,3,1)$, $(2,-7,1)$, $(0,5,-4)$與$(2,$[illegible]$,1)$.　　答 $\frac{10}{29}\sqrt{29}$ 等.

(3) 求一四面體之體積已知其頂點為$(1,2,1)$及平面 $3x+4y+2z+12=0$ 與三坐標軸之交點.

(4) 求具下列四頂點之四面體之體積:

(a) $(3,4,0)$, $(4,-1,0)$, $(1,2,0)$, $(6,-1,4)$.　　答 8.

(b) $(0,0,4)$, $(3,0,0)$, $(0,2,0)$, $(7,7,3)$.

(c) $(4,0,0)$, $(0,4,0)$, $(0,0,4)$, $(7,3,2)$.

(d) $(3,0,0)$, $(0,-2,0)$, $(0,$[illegible]$,-1)$, $(3,-1,-1)$.　　答 $\frac{3}{2}$.

(e) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,-2)$, $(4,-1,3)$

(f) $(3,0,0)$, $(0,5,0)$, $(0,0,-1)$, $(3,-4,0)$.

(5) 求一點之軌跡之方程式,此點至 $2x-y-2z-3=0$ 與 $6x+3y+2z+4=0$ 兩平面之距離之絕對值相等.

答 兩平面;一為 $32x+2y-8z-9=0$.

(6) 求一點之軌跡之方程式,此點至平面 $3x-6y-2z=0$ 之距離為至平面 $2x+y+2z=9$ 之距離之 3 倍.

(7) 求一點軌跡之方程式,其至平面 $x+y+z+12=0$ 之距離等於至原點之距離.

(8) 求一點之軌[illegible]之方程式,其至平面 $x+y=1$ 之距離等於至 z 軸之距離.　　答 $(x-y)^2+2(x+y)-1=0$.

(9) 求一點之軌跡之方程式,其至平面$x+y-z-1=0$與$x+y+z+1=0$之距離之平方和等於1.　　答 $2(x+y)^2+2z(z+2)-1=0$.

(10) 一平面與各坐標面成等角而從原點之距離為 p. 寫出其方程式.

(11) 求從原點至一平面之垂直距離 p 與其截部 a, b, c 間之關係式.

132. 平面系　三條件方可決定一平面,故適合二條件之平面通常含一任意常數,而此方程式代表一平面系.

平面系用以求滿足三條件一平面之方程式,恰似用直線系以求一直線之方程式(第 32 節).

下列爲三種重要平面系.

平行於一已知平面

$$Ax+By+Cz+D=0$$

之平面系乃以

(V) $$\boldsymbol{Ax+By+Cz+k=0}$$

代表之,其中 k 爲一任意常數.

平面 (V) 顯然平行於已知平面(第 125 節系 1).

過二已知平面

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

之交線之平面系乃以

(VI) $$\boldsymbol{A_1x+B_1y+C_1z+D_1+k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0}$$

代表之,其中 k 爲一任意常數.

顯然交線上任一點之坐標適合二已知平面之方程式，故亦適合方程式(IV).

適合一條件之平面系必含兩任意常數. 此種最重要平面系之一如下:

過一已知點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$之平面系,其代表式爲

(VII) $$\boldsymbol{A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.}$$

方程式 (VII) 爲過 P_1 一平面之方程式,因 P_1 之坐標顯然適合之.又設任一平面之方程式爲

$$Ax+By+Cz+D=0$$

而過 P_1，則必

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0.$$

相減，得 (VII)．故 (VII) 代表過 P_1 之一切平面．

方程式 (VII) 含二重要任意常數，即任意二係數對於第三係數之比．

在下列習題中，寫出其適當之平面系方程式，然後從其餘已知條件決定諸未知通徑．

習　　題

(1) 決定 k 之值使平面 $x+ky-2z-9=0$

(a) 過點 $(5,-4,-6)$；　　答 2.

(b) 平行於平面 $6x+2y-12z=7$；

(c) 垂直於平面 $2x+4y+3z=3$；　　答 1.

(d) 離原點 5 單位；

(e) 與平面 $2x-y+z=0$ 成 $45°$ 之角.　　答 $-\frac{1}{2}\sqrt{70}$.

(2) 求一平面之方程式，此平面過 $(3,-2,1)$ 而平行於平面 $7x-y-z=14$.

(3) 求一平面之方程式，此平面過 $2x+y-4=0$ 與 $y+2z=0$ 二平面之交線，又

(a) 過點 $(2,-1,-1)$；　　答 $3x+y-z=6$.

(b) 垂直於平面 $3x+2y+3z=6$.

(4) 求諸平面之方程式，此等平面過 $2x+y-z=4$ 與 $x-y+2z=0$ 二平面之交線，並垂直於坐標面.

答 $5x+y=8$　$3x+z=4$　$3y-5z=4$.

(5) 求一平面之方程式，此平面平行於 $6x+3y+2z+21=0$ 而切於一半徑為 1 而圓心為原點之球.

(6) 求一平面之方程式，此平面平行於 $6x-2y+3z+15=0$ 而點 $(0,-2,-1)$ 恰在兩平面之中間.

(7) 求一平面之方程式，此平面過點 $(2,-3,0)$ 而在 XZ 平面上之跡線與在 $x-3y+7z+12=0$ 上者同.

(8) 求一平面之方程式，此平面平行於 $2x+y+2z+5=0$ 而與三坐標面成一體積為 1 之四面體.

(9) 求一平面之方程式，此平面平行於 $5x+3y+2z+7=0$ 而其截部之總和為 23.

特設習題

(10) 求一平面之方程式,此平面平行於 $2x+6y+3z-8=0$,而在第一八分區內被坐標面所截之面積為 $\frac{7}{8}$.

答　$2x+6y+3z-3=0$.

(11) 求一平面之方程式,此平面平行於 $12x+y+$[illegible]$z+5=0$,並與坐標面所成四面體之全面積為 1.

(12) 求一平面之方程式,此平面之跡線為 $x+3y-2=0$,並與坐標面所成四面體之體積為 $\frac{8}{3}$.

(13) 求一平面之方程式,此平面過 $6x+2y+$[illegible]$z-6=0$ 與 $-x+y+z+1=0$ 二平面之交線而與坐標面所成四面體之體積為 [illegible].

(14) 證明 $x+2y-3z+1=0$, $3x+4y-19z+5=0$ 與 $y+5z=1$ 有一公共交線.

(15) 求一平面之方程式,此平面過 $3x+y-z+5=0$ 與 $x-y+z-2=0$ 之交線,並與平面 $y-z=0$ 成 $45°$ 之角.

(16) 求一平面之方程式,此平面過 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 與 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 二平面之交線,並過原點.

答　$(A_1D_2-A_2D_1)x+(B_1D_2-B_2D_1)y+(C_1D_2-C_2D_1)z=0$.

(17) 求一平面之方程式,此平面過 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 與 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 二平面之交線,並垂直於一坐標面.

答　$(A_1B_2-A_2B_1)y-(C_1A_2-C_2A_1)z+A_1D_2-A_2D_1=0$. 等.

(18) 求一平面之方程式,此平面過原點與 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 而垂直於 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$.

答　$(B_1z_1-C_1y_1)x+(C_1x_1-A_1z_1)y+(A_1y_1-B_1x_1)z=0$.

133. 直線之普徧方程式　一直線可視作二平面之交線,二平面方程式視作聯立方程式時,即為此交線之方程式.

二個聯立一次方程式之軌跡為一直線,除非二平面為二分離

方程式時則二平面互相平行.故得

定理 二個聯立一次方程式

(VIII) $$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

除 x, y, 與 z 係數成比例外,其軌跡爲一直線.

當一直線之方向數已知時,此線之方向亦可知.其法如下:

例　　題

(1) 求一直線之方向數 其方程式爲

(1) $$3x+2y-z-1=0,\ 2x-y+2z-3=0.$$

[解] 命 a b, c 爲所求之方向數.

在(1)之第一平面中其係數 3, 2, -1, 與此平面之垂線之方向餘弦成比例.已知線在此平面內.故從第118節定理 ..,

(2) $$3a+2b-c=0.$$

同理,用(1)中第二平面,

(3) $$2a-b+2c=0.$$

解(2)與(3)而以 c 表 a, b, 其結果爲

$$7b=8c,\ 7a=-3c,$$

(4) $$\therefore \frac{a}{3}=\frac{b}{-8}=\frac{c}{-7}.$$

即 3, -8, -7 爲方向數. 答.

(2) 求一直線之方向數 a, b, c 其方程式爲

(5) $$2x+y+3z+2=0,\ 3x+y+3z-5=0.$$

[解] 依例 1,必須解方程式

(6) $$2a+b+3c=0,\ 3a+b+3c=0.$$

解之 得 $a=0$, $b=-3c$.

故 0, -3, 1 爲所求之方向數. 答.

此直線平行於 YZ 平面.

欲描一直線，必須知其上一點及方向數。易求之點爲直線與坐標面之交點，稱爲此直線在平面上之跡點。例如，在 XY 平面上踪點之 x 與 y 之值可命直線方程式中之 $z=0$ 而求 x 與 y.

(3) 示明例題 1 中直線 (1) 之作法.

［解］ 在 (1) 中，命 $z=0$ 得 $3x+2y-1=0$, $2x-y-3=0$, 由此得 $x=1$, $y=-1$. 而在 XY 平面上踪點爲 $A(1,-1,0)$. 其方數爲 $3,-8,-7$. 故過 A 作直線平行於原點及 $(3,-8,-7)$ 之連線，或過 A 與 $B(4,-9,-7)$, 因 AB 之方向數爲 $3,-8,-7$ (第 116 節).

(4) 求線 (VIII) 之方向餘弦.

［解］ 方向餘弦 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 必滿足

$$A_1\cos\alpha+B_1\cos\beta+C_1\cos\gamma=0,$$
$$A_2\cos\alpha+B_2\cos\beta+C_2\cos\gamma=0,$$

用例題 1 中之理由.

解此等方程式以求其比，則得

定理 設 α, β, 與 γ 爲直線 (VIII) 之方向角，則

$$\frac{\cos\alpha}{B_1C_2-B_2C_1}=\frac{\cos\beta}{C_1A_2-C_2A_1}=\frac{\cos\gamma}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

分母頗易記憶，因可視作從 (VIII) 中 x, y, z 之係數所成之三個二次行列式也. $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$.

習　題

(1) 求下列各直線之中點及其方向數，並作此直線.

(a) $x+5y+7z-3=0$, $x-2y+3z-6=0$.　　答 $\dfrac{\cos\alpha}{29}=\dfrac{\cos\beta}{4}=\dfrac{\cos\gamma}{-7}$.

(b) $3x-5y-4z+12=0$, $6x+2y+2z-12=0$.

(c) $6x-3y+6z-7=0$, $3x+2y+3z+28=0$.

(d) $5x-7y+3z-10=0$, $3x+5y-8z+4=0$.

(e) $x+2y=8$, $2x-4y=7$.　　答　方向數, 0, 0, 1.

(f) $y+z=4$, $x+y-2z=12$.

(2) 求下列各對直線間之角，假定其方向爲向上(若 $\cos\gamma=0$，則假定其方向爲向 ZX 平面之前(第 115 節)，如 $\cos\beta=\cos\gamma=0$，則向右)：

(a) $x+y-z=0, y+z=0$，與 $x-y=1, x-3y+z=0$. 答 $60°$.

(b) $2x+y-z=2, x-y+2z=4$，與 $4x+3y-6z=0, 4x-3y=2$.

(c) $x+y+z=5$ $x-y+z=3$，與 $y+3z=4$ $3y-5z=1$. 答 $45°$.

(d) $2x-y+2z=5, x+2y-2z=4$，與 $3x-2y-6z+49=0, 2x+2y-z=9$.

(e) $x-2y+z=2, 2y-z=1$，與 $x-2y+z=2, x-2y+2z=4$. 答 $78°28'$.

(f) $x+y-3z=6, 2x-y+3z=3$ 與 $x+y=6, 2x-3z=5$.

(g) $3x+2y-z=4, x-2y-2z=5$，與 $5x-14z=7, 2x+7z=19$.

答 $63°19'$.

(h) $6x-3y+2z-7=0, 2x-2y-z+12=0$，與 $2x+2y-z=9$, $6x+4y-z+12=0$.

(3) 證明每兩對方程式所表之直線互相平行，並作此等直線：

(a) $2y+z=0, 3y-4z=7$ 與 $5y-2z=8, 4y+z=44$.

(b) $x+2y-z=7, y+z-2x=6$，與 $3x+6y-2z=8, 2x-y-z=0$.

(c) $3x+z=4, y+2z=$ [illegible]，與 $6x-y=7, 3y+6z=1$.

(4) 證明下列每兩對平面之交線遇於一點並互相垂直.

(a) $x+2y=1, 2y-z=1$，與 $x-y=1, x-2z=3$.

(b) $4x+y-3z+24=0, z=5$，與 $x+y+3=0, x+2=0$.

(c) $3x+y-z=1, 2x-z=2$，與 $2x-y+2z=4, x-y+2z=3$.

(5) 證明 $x+2y+3z=3$ 與 $3x+$[illegible]$y+9z=20$ 同 $4x-y+z=0$ 之二交線爲二平行線.

(6) 求直線 $3x-y-$ [illegible] $z-8=0$，$x-y+z+2=0$，與 $x+y-z=0, 6x-$[illegible]$y-3z-15=0$ 之交點. 答 $(-1,-2,-3)$.

(7) 用解析法證明兩平行平面同任意第三平面所成之二交線互相平行.

(8) 用解析法證明平面 $y-z=0$ 同平面 $3x+y-z+5=0$ 與 $x-y+z-2=0$ 相交成二平行線.

134. 直線方程式之各種形式.

定理 1　通徑式　過一已知點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 而其方向角爲 α　β, 與 γ 之直線上任一點 $P(x,y,z)$ 之坐標爲

(IV)　$$x=x_1+t\cos\alpha,\ y=y_1+t\cos\beta,\ z=z_1+t\cos\gamma,$$

其中 t 爲通徑乃表可變方向長 P_1P.

證法依第 116 節(1),命 $l=t$ 即得.

定理 2　對稱式　過 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 而其方向角 α, β, 與 γ 之直線之方程式爲

(X)　$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma}.$$

欲得 (X), 可解 (IX) 之各方程式以求 t 而將其結果寫成等式.

系　設 a, b, 與 c 爲方向數,則一線之對稱式可寫成

(XI)　$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}.$$

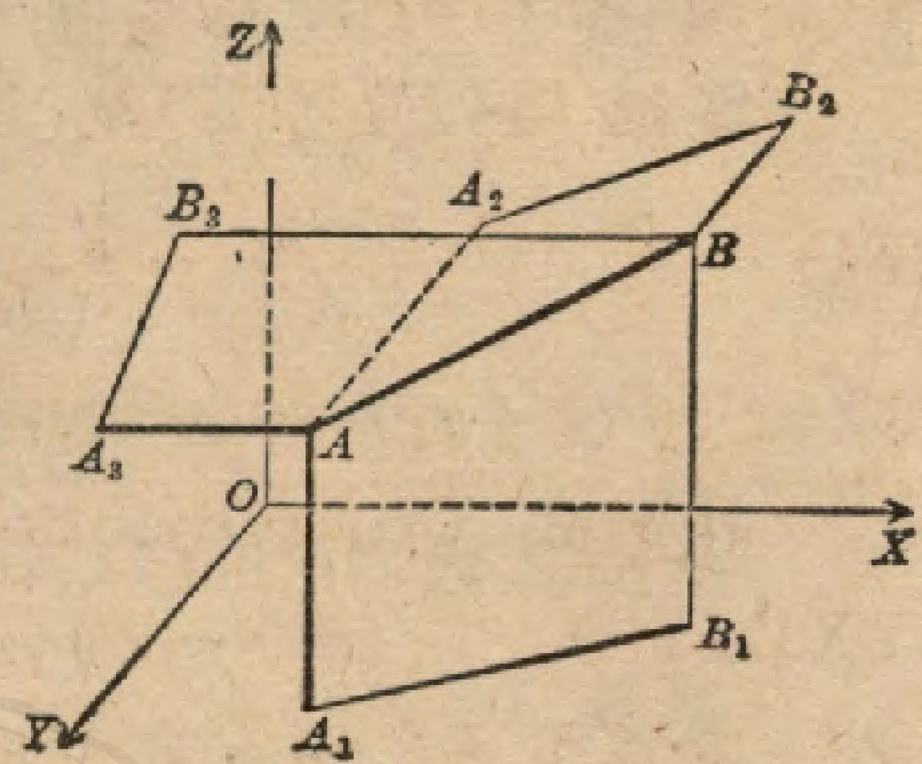
定理 3　兩點式　過 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 與 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 二點之直線之方程式爲

(XII)　$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

［證］　從第 116 節 (XII) 中諸分母爲此直線之方向數. 故 (XII) 依 (XI) 而得.　*Q.E.D.*

在(X)至(XII)各式中之三等比相等於兩獨立方程式,各代表過此線之一平面（參閱下節）.在(X)至(XII)各情形中,當一方向角爲 90° 時,其證即不能成立(見第 274－275 頁題 2,3).

135. 直線之投影面　過一已知直線而垂直於一坐標面之平面稱為投影面 (Projecting plane).



設此線垂直於一坐標面，則含此線之任一平面必垂直此坐標面．在此情形中常謂祇有二投影面，即過此線各垂直於他二坐標面之二平面．

設此線平行於一坐標面，則二投影面重合．

從第 132節 (VI)，過直線

(1)　$$3x+2y-z-1=0,\ 2x-y+2z-3=0$$

之任一平面之方程式其形為

$$3x+2y-z-1+k(2x-y+2z-3)=0.$$

乘出之並集項，得

(2)　$$(3+2k)x+(2-k)y+(-1+2k)z-1-3k=0.$$

此平面當 z 之係數為零時方垂直於 XY 平面，即設 $k=\frac{1}{2}$ (第 126 節)．將 k 值代入(2)中而化簡之，

(3)　$$4x+\tfrac{3}{2}y-\tfrac{5}{2}=0,\ \text{或}\ 8x+3y-5=0.$$

此即直線 (1) 在 XY 平面上投影面之方程式，即圖中之平面 ABB_1A_1.

現方程式 (3) 祇自方程式 (1) 消去 z 後所得之結果；即將(1)中之第一式乘以(2)而與第二式相加．故得結論：

欲求一直線之投影面之方程式，可從已知方程式中輪流消去其 x y，與 z 而得之．

例如，完成上例，從(1)消去 y 得 $7x+3z-7=0$ 卽在 XZ 上之投影面．消去 x，得 $7y-8z+7=0$ 卽在 YZ 上之投影面．

從第 134 節之(X)至(XII)立得諸投影面．例如，在(XI)中，

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}. \tag{4}$$

或　$b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$ 爲在 XY 上之投影面．

投影式(The projections orm)　聯立方程式

$$\boldsymbol{x=mz+p,\quad y=nz+q,} \tag{XIII}$$

表一線爲在 XZ 與 YZ 上兩投影面之交線．解各方程式以求 z 而寫成等式，得其對稱方程式，

$$\frac{x-p}{m}=\frac{y-q}{n}=\frac{z}{1}. \tag{5}$$

與第 134 節(XI)比較之，得

定理　在投影式(XIII)中，此直線通過$(p,q,0)$而 $m, n, 1$ 爲其方向數．

方程式(XIII)常屬有用．可用以表不平行於 XY 平面之任一線．顯然，其他兩投影面亦可如是應用．

例　　題

化下列一直線之方程式爲對稱式(XI)：

$$x-2y+z=8,\quad 2x-3y=13.$$

［**解**］　求二投影面之方程式．其第二平面已爲 XY 上之投影面．消去 x，得 $y-2z=-3$．從所得之二投影面，

$$2x-3y=13 \text{ 與 } y-2z=-3; \tag{6}$$

解第一方程式以求 x 與第二方程式以求 z，得投影式

$$x=\frac{3}{2}y+\frac{13}{2},\quad z=\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}. \tag{7}$$

解各方程式以求 y 而寫成等式，得

$$(8)\qquad \frac{x-\frac{13}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{y}{1}=\frac{z-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}.$$

以 2 乘各分母，則其結果為

$$\frac{x-\frac{13}{2}}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-\frac{3}{2}}{1}.\quad 答.$$

與 (XI) 比較之，得 $x_1=\frac{13}{2}$, $y_1=0$, $z_1=\frac{3}{2}$, $a=3$, $b=2$, $c=1$. 故此線過$\left(\frac{13}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$，而其方向餘弦與 3, 2, 1 成比例. 如是，一直線之方向數，得第二種之求法.（見第 268 頁諸例）.

一注意點頗重要. 在 (XI) 中，x_1, y_1, 與 z_1 為此線上任一已知點之坐標. 故一已知直線在(XI)中，可有不同諸分子. 例如，命 (6) 中之 $z=0$，得 $x=2$, $y=-3$. 故方程式$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$亦代表此已知直線. 注意在方程式 (XI) 中 x, y, 與 z之係數必為 1. 此卽說明(8)之形式.

習　　題

(1) 求下列各直線之投影面之方程式；將此直線之方程式寫成投影式.

(a) $2x+y-z=0, x-y+2z=3$.
　答 $5x+y=3, 3x+z=3, 3y-5z+6=0; y=-5x+3$ 與 $z=-3x+3$.
(b) $2x+y+z=6, x+3y-2z=2$.
(c) $2x+y-z=1, x-y+z=2$.　　答 直線平行於 YZ. $x=1, y=z-1$.
(d) $3x+y-4z=10, 2x+2y+3z=10$.
(e) $2y+3z=6, 2y-3z=18$.　　答 直線平行於 OX. $y=6, z=-2$.
(f) $12x+y+z=0, 4x+3y+2z=16$.
(g) $x+z=1, x-z=3$.

(2) 證明下列各公式，在所設特別情形中代替(X)至(XII). 從(IX)導出之.

(a) 當 $\gamma=90°$, $\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}, z=z_1$.

(b) 當 $c=0$, $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}, z=z_1$.

(c) 當$z=z_2$, $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, z=z_1$.

(3) 證明下列公式，以代 (X) 至 (XII) (參閱題 2).

(a) 當 $\beta=\gamma=90^\circ$, $y=y_1$, $z=z_1$.

(b) 當 $b=c=0$, $y=y_1$, $z=z_1$.

(c) 當 $y_1=y_2$, $z_1=z_2$, $y=y_1$, $z=z_1$.

(4) 試導出下列各線之方程式. 在特別情形中，用題 2 與題 3 之結果.

(a) 通過 $(3, 4, -4)$ 而其方向角爲 $60^\circ, 45^\circ, 120^\circ$.

(b) 通過 $(1, -2, 3)$ 而其方向角爲 $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$.

答 $y=-2,\ x+z-4=0$.

(c) 通過 $(3, -2, 1)$, $(2, 3, 4)$.　答 $5x+y-13=0,\ 3y+z-10=0$.

(d) 通過 $(3, -2, 1)$, $(3, -4, 5)$.

(e) 通過 $(3, 2, -1)$, 其方向數爲 0, 1, [illegible].

(f) 通過 $(1, 4, 6)$ 與 $(-1, 4, 6)$.

(g) 通過 $(0, -3, 2)$ 而平行於 $(3, 4, -7)$, $(2, 7, -6)$ 之連線.

答 $x=-z+2,\ y=3z-9$.

(5) 證明三點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 與 $P_3(x_3, y_3, z_3)$ 在一直線上之條件爲 $\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$.

(6) 化下列各線之方程式爲對稱式 (XI) (參閱以上題 2 與題 3) 而說明其結果.

(a) $4x+5y+3z=3,\ 4x-5y+z+9=0$.

(b) $2x+y+5=0,\ x+3z-5=0$.

(c) $x+2y+6z=5,\ 3x-2y-10z=7$.　答 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-7}=\dfrac{z}{2}$.

(d) $3x+y-2z=0,\ 6x-3y+4z+9=0$.

(e) $2x+y+2z=7,\ x+3y+6z=11$.　答 $\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{-1},\ x=2$.

(f) $3x-3y+z=4,\ 4x-6y-z=5$.

(7) 一直線過點 $(-2, 4, 0)$ 並與直線 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-4}{-1}$ 相平行. 求其方程式.　答 $x=-4z-2,\ y=3z+4$.

(8) 證明 $\dfrac{x+2}{-6}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-11}{2}$ 與 $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z+3}{3}$ 二直線互相垂直.

(9) 求在直線 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$ 與 $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-7}{2}=\dfrac{z}{1}$ 間之角，所設兩直線之方向皆向上.　答 120°.

(10) 求下列各直線之方程式:

(a) 通過 $(-1, 2, 6)$ 而平行於直線 $x=2z-3,\ y=-3z-5$.

(b) 通過 $(-1,2,6)$ 而垂直相交於 x 軸.

(c) 通過原點而垂直於下列各線 $x=z-4$, $y=-z+2$, 與 $y=x+5$, $z=2x-8$.

(d) 通過 $(0,2,0)$ 而與直線 $x=z, y=2z$, 及 y 軸成直角.

(e) 垂直於兩直線 $y=-x+6, z=2x-11$, 與 $x=2z+10, y=2z+8$ 之交點處.

(11) 一直線過點 $(2,3,4)$, 其方向餘弦與 $1, -4$, 及 2 成比例, 求其通徑方程式.

(12) 作諸線其通徑方程式:

(a) $x=2+\frac{2}{3}t, y=4+\frac{1}{3}t, z=6+\frac{2}{3}t$;

(b) $x=-3+\frac{2}{7}t, y=6-\frac{6}{7}, z=4+\frac{3}{7}t$.

(13) 一線之方程式為 $x=2-\dfrac{3}{13}t, y=4+\dfrac{12}{13}t, z=-3+\dfrac{4}{13}t$. 求從點 $(2,4,-3)$ 至此線與平面 $4x+y-2z=16$ 之交點之距離.

答 $3\frac{1}{4}$.

136. 直線與平面相關之位置 設直線 L 之方程式為第 135 節之投影式(XIII), 則 L 是否在一已知平面內可決定之如下: 將其 x 與 y 之值代入平面之方程式中. 若其結果對於一切 z 值皆屬眞確; 則此線在平面內.

其次, 吾人頗易證明下述

定理 一直線 L 其方向數為 a, b, 與 c 與平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 為

(a) 平行, 祇當

$$Aa+Bb+Cc=0 \text{ 時;} \tag{1}$$

(b) 垂直, 祇當

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c} \text{時.} \tag{2}$$

[證] 此平面之垂線 L_2, 其方向數為 A, B, 與 C.

直線 L 與此平面平行祇在 L 與 L_2 相垂直時, 即祇當 (1) 成立時.

直線L與平面垂直衹在 L 與 L_2 相平行時，卽衹當 (2) 成立時.　*Q. E. D.*

如 L 在此平面內，則方程式 (1) 亦當能成立。

習　　題

(1) 證明直線 $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 平行於平面 $4x-2y-2z=9$.

(2) 證明直線 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7}$ 垂直於平面 $3x-2y+7z=8$.

(3) 證明

(a) 直線 $x=z+4,\ y=2z+3$ 在平面 $2x+3y-8z-17=0$ 內；

(b) 直線 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$ 在平面 $2x+2y+2z-6=0$.

(4) 求下列各線之方程式：

(a) 通過 $(2,\ -3,\ 4)$ 而垂直於平面 $3x-y+2z=4$.

答　$x=-3y-7,\ z=-2y-2$.

(b) 通過 $(-1,\ 3,\ 2)$ 而垂直於平面 $x-3z=4$.

(c) 通過 $(0,\ 2,\ 4)$ 而平行於 $x+2z=1$ 與 $y-3z=2$ 兩平面.

(d) 通過 $(1,\ -2,\ 3)$ 而平行於 $2x-y=4$ 與 $x+y-z=4$ 兩平面.

(5) 求下列各平面之方程式：

(a) 通過 $(1,\ 2,\ -3)$ 而垂直於直線 $3x-y=4,\ y+2z=5$.

答　$2x+6y-3z-23=0$.

(b) 通過 $(-4,\ 0,\ 1)$ 而垂直於直線 $x+y-4z=0,\ y-z=2$.

(c) 通過 $(3,\ 6,\ -12)$ 而平行於 $x+3y-1=0,\ 3y+z-2=0$, 與 $z=2x+1,\ y=3$ 各直線.

答　$2x+3y-z-36=0$.

(d) 由二交點 $x=2z+1,\ y=3z+2$, 與 $2x=2-z,\ 3y=z+6$ 所決定之.

(e) 通過直線 $x+2z-4=0,\ 3y-z+8=0$ 而平行於直線 $x=y+4,\ z=y-6$.

答　$2x-9y+7z-32=0$.

(f) 由點 $(2,\ 3,\ -4)$ 與直線 $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$ 決定之.

(g) 由$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z}{1}$, 與$\frac{x+3}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z+1}{1}$二平行線決定之.

(6) 求由下列條件所決定之諸線之方程式:

(a) 在平面 $x+3y-z+4=0$ 內而與直線 $x=2z+3, y=2z$. 相垂直於此線與平面相遇之一點. 答 $3x+5y+7=0, 4x+5z+1=0$.

(b) 過 $(4,2,-4)$, 平行於平面 $x+y+z-10=0$, 而垂直於直線 $x+2y-z=5$ $z=10$.

(c) 與直線 $3x+2y-z=8, x-3y+1=0$ 相垂直於此線與平面 $2x-y+z-3=0$ 相遇之一點.

(d) 過$(2,5,-3)$,垂直於原點與此點之連線,而平行於平面$2x-3y+16=0$.

特設習題

(1) 求從點 $(3,4,-6)$ 至直線 $3x-2y+7=0$, $2y+z-3=0$ 之垂直距離.

(2) 一直線通過 $A(3,-7,5)$, 其方向數為 4, 1, 8, 遇平面 $2x+3y-z+7=0$ 於 B. 求 AB 之長.

(3) 推算下列各線之方程式,各線皆過 $P_1(x_1, y_1\ z_1)$:

(a) 平行於直線 $x=mz+a, y=nz+b$.

(b) 垂直於 $x=m_1z+a_1, y=n_1z+b_1$, 與 $x=m_2z+a_2, y=n_2z+b_2$ 各線.

(c) 垂直於平面 $Ax+By+Cz+D=0$.

(d) 平行於 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 與 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 各平面.

(4) 求過 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 而垂直於直線 $x=mz+p$, $y=nz+q$ 之平面之方程式.

(5) 當題 3 (b)中諸線在一平面內時,證明

$$(a_1-a_2)(n_1-n_2)=(b_1-b_2)(m_1-m_2).$$

(6) 求在直線$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$與平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 間之角 θ. 答 $\sin\theta=\frac{Aa+Bb+Cc}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

提示 一直線與一平面間之角乃此線與其在平面上正射影間之銳角.此角等於此線與至平面之法線間之角加 $\frac{1}{2}\pi$ 或減 $\frac{1}{2}\pi$.

(7) 求過 $P_3(x_3,y_3,z_3)$ 而平行於 $\dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{b_1}=\dfrac{z-z_1}{c_1}$ 與 $\dfrac{x-x_2}{a_2}=\dfrac{y-y_2}{b_2}=\dfrac{z-z_2}{c_2}$ 各線之平面之方程式.

答 $(b_1c_2-b_2c_1)(x-x_3)+(c_1a_2-a_2c_1)(y-y_3)+(a_1b_2-a_2b_1)(z-z_3)=0.$

(8) 求平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 平行於直線 $A_2x+B_2y+C_2x+D_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ 之必要條件.

答 $A_1(B_2C_3-B_3C_2)+B_1(C_2A_3-C_3A_2)+C_1(A_2B_3-A_3B_2)=0.$

(9) 求由點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 與直線 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 所決定之平面之方程式.

答 $(A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1+D_2)(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)$
$=(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1)(A_2x+B_2y+C_2z+D_2).$

(10) 求由兩相交直線 $\dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{b_1}=\dfrac{z-z_1}{c_1}$ 與 $\dfrac{x-x_1}{a_2}=\dfrac{y-y_1}{b_2}=\dfrac{z-z_1}{c_2}$ 所決定之平面之方程式.

答 $(b_1c_2-b_2c_1)(x-x_1)+(c_1a_2-c_2a_1)(y-y_1)+(a_1b_2-a_2b_1)(z-z_1)=0.$

(11) 求由二平行直線 $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$ 與 $\dfrac{x-x_2}{a}=\dfrac{y-y_2}{b}=\dfrac{z-z_2}{c}$ 所決定之平面之方程式.

答 $[(y_1-y_2)c-(z_1-z_2)b]x+[(z_1-z_2)a-(x_1-x_2)c]y$
$+[(x_1-x_2)b-(y_1-y_2)a]z+(y_1z_2-y_2z_1)a+(z_1x_2-z_2x_1)b$
$+(x_1y_2-x_2y_1)c=0.$

(12) 求直線 $x=mz+a, y=nz+b$ 在平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 內之必要條件.　答 $Aa+Bb+D=0, Am+Bn+C=0$

(13) 求通過直線 $\dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{b_1}=\dfrac{z-z_1}{c_1}$ 而平行於直線 $\dfrac{x-x_2}{a_2}=\dfrac{y-y_2}{b_2}=\dfrac{z-z_2}{c_2}$ 之平面之方程式.

答 $(b_1c_2-b_2c_1)(x-x_1)+(c_1a_2-c_2a_1)(y-y_1)+(a_1b_2-a_2b_1)(z-z_1)=0.$

(14) 求由 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 與過 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 而有方向數 a,b,c 之直線所決定之平面之方程式.

第十五章

特種曲面 (Special Surfaces)

137. 球面 (The sphere) 本章將討論球面,圓柱面,與圓錐面(初等幾何學中所研究之曲面),又及二次曲面.

在解析幾何學中,'Sphere", "Cylinder", 與 "Cone" 諸名詞常用以表示初等幾何學中之球面,圓柱面,與圓錐面,並非表示其所包圍之全部立體或部分立體.

定理 球心為 (h,k,l) 而半徑為 r 之球面之方程式為

(I) $$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2.$$

[證] 命 $P(x,y,z)$ 為球面上任一點,而其球心以 C 表之.則從定義, $PC=r$. 將由長之公式所得 PC 之值代入而平方之,得 (I). *Q.E.D.*

當 (I) 乘出之,則為

$$x^2+y^2+z^2-2hx-2ky-2lz+h^2+k^2+l^2-r^2=0;$$

卽,其形為

(1) $$x^2+y^2+z^2+Gx+Hy+Iz+K=0.$$

現之問題為,具此式之方程式之軌跡為何? (與第 35 節比較之)

欲答此問題,可集項如下:

$$(x^2+Gx)+(y^2+Hy)+(z^2+Iz)=-K.$$

在各括號內,完成其平方,得

$$(x+\tfrac{1}{2}G)^2+(y+\tfrac{1}{2}H)^2+(z+\tfrac{1}{2}I)^2=\tfrac{1}{4}(G^2+H^2+I^2-4K).$$

方程式右邊之值可爲正，爲零，或爲負．故與 (I) 比較之，卽見其軌跡爲一球面，或一點球 $(r=0)$，或無軌跡．

(1) 中有四常數 G, H, I, K 之存在，卽表示一球面須由四條件以決定之（與第 36 節比較之）．欲求一球面之方程式適合其已知條件者，可取 (I) 或 (1) 之較便者用之．

若用 (I)，則須求 h, k, l，與 r．若用 (1) 則需要包含 G, H, I, K 之四個方程式，而解之以得此等常數之值．

例　題

方程式 $x^2+y^2+z^2-2x+3y+1=0$ 之軌跡爲何？

［解］　集項，

$$(x^2-2x)+(y^2+3y)+z^2=-1.$$

完成平方，

$$(x^2-2x+1)+(y^2+3y+\tfrac{9}{4})+z^2=-1+1+\tfrac{9}{4},$$

或

$$(x-1)^2+(y+\tfrac{3}{2})^2+z^2=\tfrac{9}{4}.$$

此軌跡爲一球面，其半徑爲 $\frac{3}{2}$ 而球心爲 $(1, -\frac{3}{2}, 0)$．　答．

習　題

(1) 求下列方程式各軌跡之性質；如軌跡爲一球面，求其中心與半徑；如爲一點球，則求其中心之坐標．

(a) $x^2+y^2+z^2+4x-6z=0$.

(b) $x^2+y^2+z^2-4x+2y-5=0$.

(c) $x^2+y^2+z^2-x+4y+10=0$.

(d) $x^2+y^2+z^2-12y+6z=5$.

(e) $x^2+y^2+z^2-4x+6y+8z+29=0$.

(f) $x^2+y^2+z^2+2x+2y+4z=0$.

(2) 求一點之軌跡之方程式，此點

(a) 至 $(0, \frac{1}{2}, -2)$ 之距離爲 $\frac{1}{2}$；

(b) 至 $(-2, \frac{1}{3}, 0)$ 之距離爲 $\sqrt{5}$；

(c) 至 $(-3, 2, 1)$ 之距離爲 4；　答　$x^2+y^2+z^2+6x-4y-2z-2=0$.

(d) 至 $(-1, 3, \frac{3}{2})$ 之距離爲 $\sqrt{3}$.

(3) 求球面之方程式

(a) 以 $(3,0,4)$ 與 $(4,6,0)$ 之連線爲半徑而以第一點爲球心;

(b) 以 $(3,0,7)$ 與 $(-2,1,1)$ 之連線爲直徑;

答 $x^2+y^2+z^2-x-y-8z+1=0$.

(c) 球心爲 $(2,-2,1)$ 而切於 XZ 平面;

答 $x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z+5=0$.

(d) 過 $(2,0,0)$, $(0,4,0)$, $(0,0,-4)$, 與 $(-8,0,0)$ 四點.

(4) 證明適合下列各情形中巳知條件之點之軌跡皆爲一球面,並求其半徑與球心.

(a) 至 $(7,1,-3)$ 之距離爲至 $(-\frac{5}{4},-2,\frac{3}{4})$ 之距離之二倍

答 $h=-4, k=-3, l=1, r=\frac{1}{2}\sqrt{141}$.

(b) 至 $(-3,4,5)$ 之距離爲至原點之距離之四倍.

(c) 至 $(4,-5,1)$ 與 $(0,2,-4)$ 之距離之平方和爲 64.

(d) 至 $x+y+z=5$, $2x-3y-2z-1=0$, $3x-2y+3z=6$ 三平面之垂直距離之平方和爲 5.

(5) 求球面之方程式,此球面

(a) 與 $x^2+y^2+z^2-6x+4z-36=0$ 同心並過 $(2,5,-7)$;

答 $x^2+y^2+z^2-6x+4z=38$.

(b) 之球心爲 $(4,-4,3)$ 而切於平面 $3x+2y-z=7$;

(c) 之球心在 XZ 平面中而過 $(1,0,2)$, $(1,3,1)$, $(-3,0,0)$ 三點;

答 $x^2+y^2+z^2-2x+6z=15$.

(d) 之球心在 z 軸上而過 $(3,4,0)$ 與 $(-2,3,5)$;

答 $5x^2+5y^2+5z^2-13z=125$.

(e) 過 $(1,5,-3)$ 與 $(-3,0,0)$ 而球心在直線 $3x+y+z=0$, $x+2y+1=0$;

答 $9x^2+9y^2+9z^2-34x+26y+76z-183=0$.

(f) 過 $(2,2,0)$, $(0,2,2)$, 與 $(2,0,2)$ 而半徑爲 5.

(6) 求切於下列各球面上巳知之平面之方程式:

(a) $x^2+y^2+z^2-14=0$, 在 $(3,-2,1)$.

(b) $x^2+y^2+z^2-6x+4z-36=0$, 在 $(1,6,-5)$.

答 $2x-6y+3z+49=0$.

(c) $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z=0$, 在 $(0,0,-6)$.

(d) $x^2+y^2+z^2-2x+6z=15$, 在 $(1,5,-3)$.

(7) 已知兩球面，A：$x^2+y^2+z^2-6x+8y-10z+41=0$，與 B：$x^2+y^2+z^2+6x+8y-6z+10=0$．求第三球面之方程式，設

(a) A 與 B 兩球心之連線爲其直徑；

(b) 其球心與 A 相同而切於 B（有二情形）；

其球心在 A 與 B 球心之連線上，而

(c) 與 A 及 B 皆相切（四種情形）；

(d) 其球心在 B 球面上而切於 A（四種情形）．

(8) 求諸平面之方程式，此等平面切球面 $x^2+y^2+z^2-10x+5y-2z-24=0$ 於其與坐標相交者．

(9) 求一球面之方程式，此球內切於由下列任意四個平面所成之四面體內：

$$14x+5y-2z-168=0,\qquad 10x+11y+2z+88=0,$$
$$14x-5y+2z+28=0,\qquad 2x-y-2z+12=0,$$
$$10x-11y+2z+33=0,\qquad 2x-y+2z+8=0.$$

(10) 求切於下列球面之最小球面之方程式：

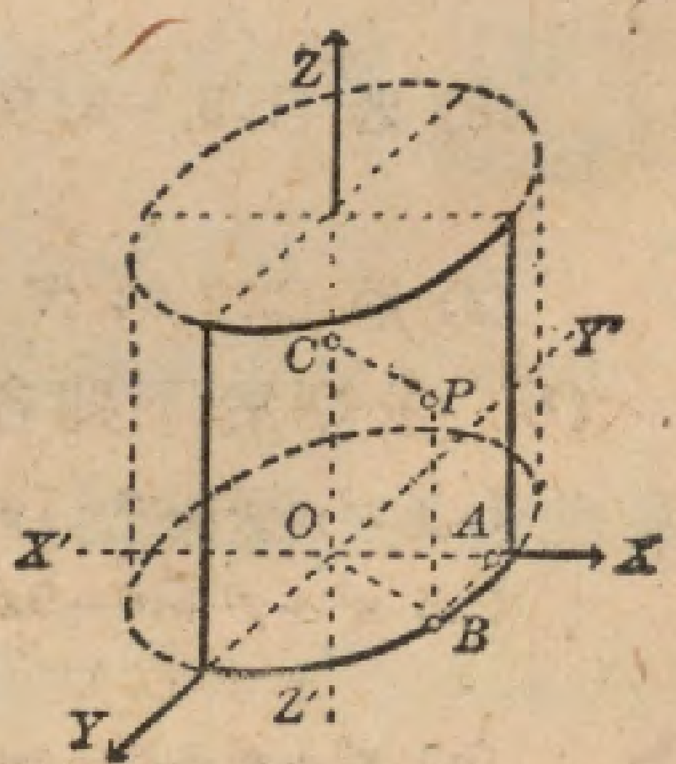
$$x^2+y^2+z^2-2x-6y+1=0,\ x^2+y^2+z^2+6x+2y-4z+5=0.$$

答　$x^2+y^2+z^2+2x-2y-2z+3=0$.

138．圓柱面 (Cylinders)　一直線平行於原有之位置而移動，並與一已知曲線相交，如是所生之曲面稱謂圓柱面．此曲線稱謂準線．現討論軌跡爲圓柱面者之方程式．

例　　題

(1) 求半徑爲 r，軸爲 z 軸之正圓柱面之方程式．



[解]　命 $P(x,y,z)$ 爲圓柱面上一點則如圖，$OA=x, AB=y, BP=z$．設 CP 爲垂直於 OZ，則 P 在圓柱面上之條件爲

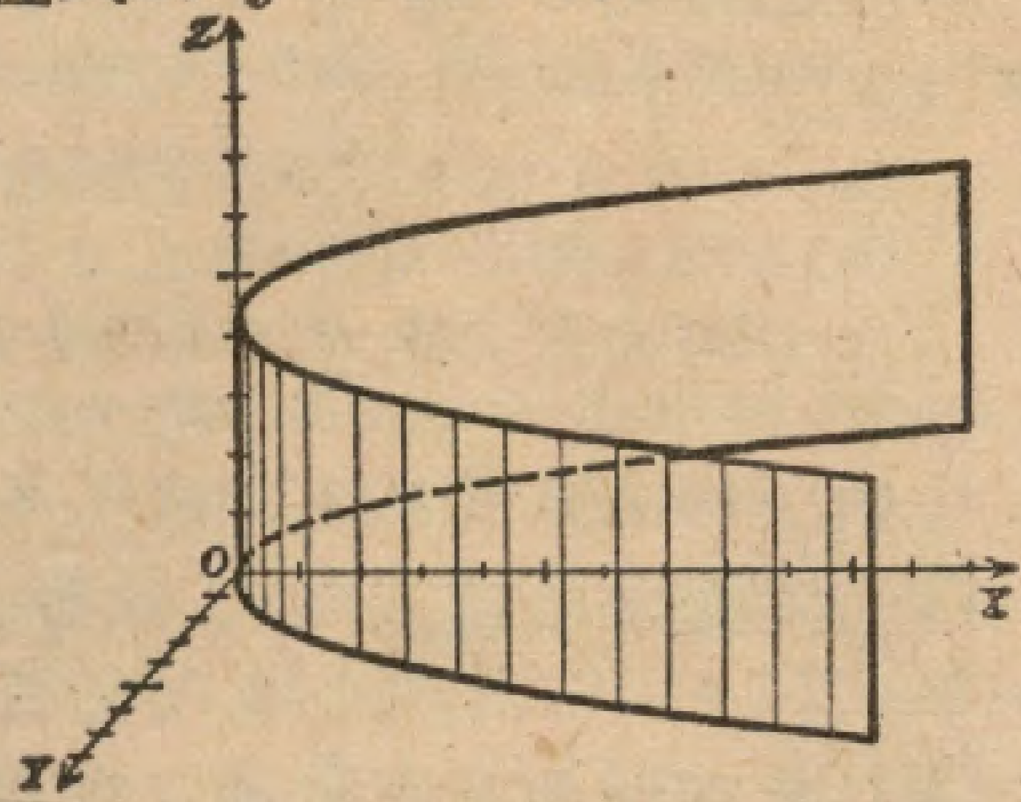
(1)　$$CP=OB=r.$$

但 $OB=\sqrt{x^2+y^2}$ 故所需之方程式爲

(2)　$$x^2+y^2=r^2.\quad 答.$$

注意在 xy 平面內之圓 $x^2+y^2=r^2$ 爲此圓柱面之準線．

(2)決定曲面之性質，其方程式爲 $y^2-4x=0$.



［解］ 設 $M(a,b)$ 爲 XY 平面內之拋物線 $y^2-4x=0$ 上任一點，則過 M 作線平行 OZ，在此線之各點必在此所設之曲面上．因 $b^2-4a=0$，而 M 在此拋物線上．故坐標 (a,b,z)，其中 z 爲任意值，皆適合此曲面之方程式．故其軌跡爲一圓柱面，以 XY 平面內之拋物線 $y^2-4x=0$ 爲準線，而諸發生線(Elements)與 OZ 平行．答．

從此等例題卽得下之

定理 方程式中缺少一變數，則其軌跡爲一圓柱面，其發生線平行於所缺變數之坐標軸，而沿此軸可量得此變數．所設之方程式在其對應之坐標平面內，可視作一平面軌跡以代表其準線．

139．圓錐面 (Cones) 一直線繞其自身上一點而轉動，且截一已知曲線，則所成之曲面稱爲圓錐面．

例 題

決定曲面之性質，其方程式爲

$$16x^2+y^2-z^2=0.$$

［解］ 命 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 爲曲面被平面 $z=k$ 所截成之截面上一點．則

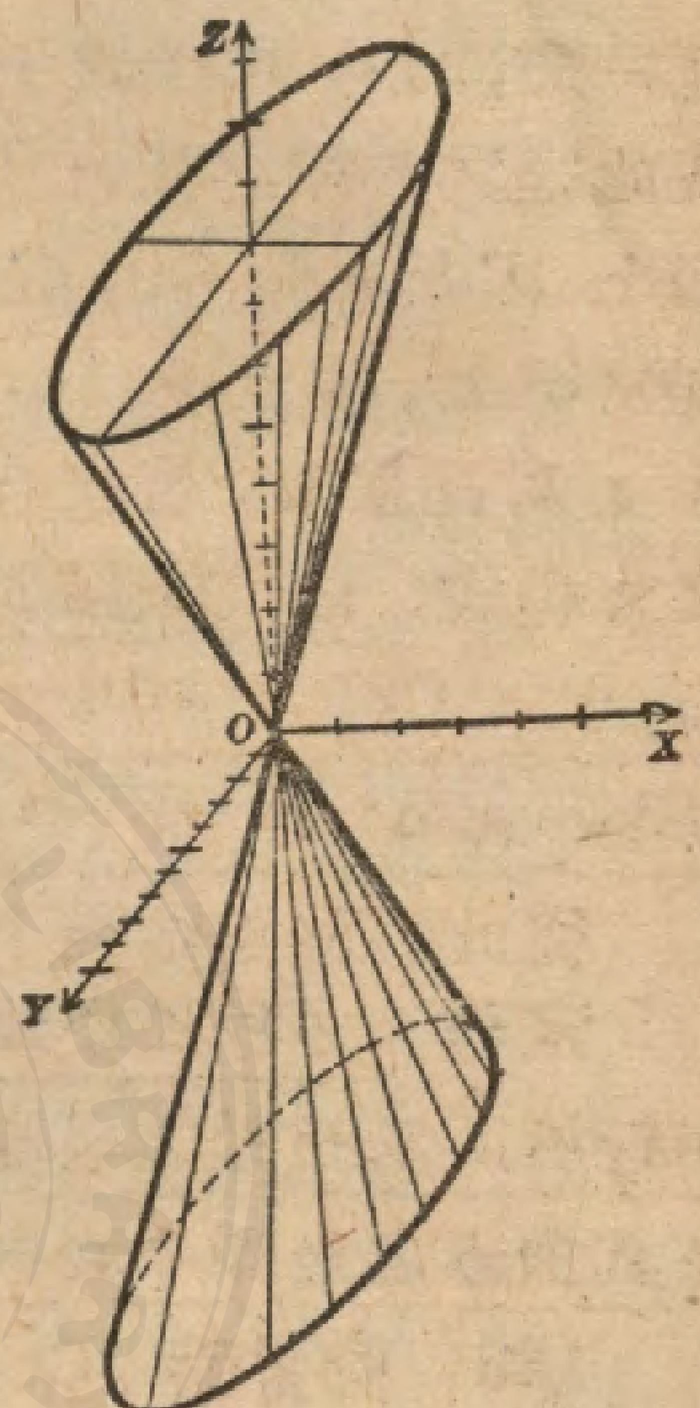
$$(1)\qquad 16{x_1}^2+{y_1}^2-{z_1}^2=0,\quad z_1=k.$$

現原點 O 在此曲面上．故將證明直線 OP_1 全部在此曲面上，故此曲面爲一圓錐面．OP_1 之方向餘弦爲 $\frac{x_1}{\rho_1}$，$\frac{y_1}{\rho_1}$，與 $\frac{z_1}{\rho_1}$，其中 $\rho_1=OP_1$．故 OP_1 上任一點之坐標，從第134節(IX)，得

$$(2)\qquad x=\frac{x_1}{\rho}t,\quad y=\frac{y_1}{\rho_1}t,\quad z=\frac{z_1}{\rho_1}t.$$

將此等 x, y, z 之值代入所設方程式之左邊，得

(3) $$\frac{t^2}{\rho_1^2}(16x_1^2+y_1^2-z_1^2).$$



但從方程式(1)中之第一個方程式，知(3)中括號內之式等於零．故不論 t 爲何值，(3)中之積亦必爲零，其意卽謂直線(2)上每一點皆在此曲面上，卽全線在此曲面上．故此曲面爲一圓錐面，其頂點爲原點．

答．

同一證法可應用於凡含 x, y, z 而各項同次之任何方程式．如此之方程式名爲含 x, y, z 之齊次式．故得

定理　一含 x, y, z 之齊次方程式之軌跡爲一圓錐面，其頂點爲原點．

在上例之圖中，此圓錐被平面 $z=8$ 所截．此圓錐面 $16x^2+y_2-z^2=0$ 與此平面 $z=8$ 相交之曲線，其方程式顯然爲

$$z=8,\ 16x^2+y^2-64=0.$$

此曲線爲一橢圓，而用斜坐標作在平面 $z=8$ 中．

欲作一圓錐面方程式之軌跡，選一平行於一坐標面之適當平面，求此圓錐面與此平面相交之曲線之方程式．作此平面曲線，然後從此曲線上諸點作諸發生線至此圓錐面之頂點．

習　題

(1) 決定下列諸曲面之性質而作其圖形：

(a) $x^2+z^2=16$.
(b) $x^2+y^2=4x$.
(c) $y^2+4x^2=16$.
(d) $x^2-y^2-z^2=0$,
(e) $y^2+xz+yz=0$.
(f) $xz-6=0$
(g) $y^2+z^2-2xz=0$.
(h) $y^2-2z^3=0$.
(i) $x^2-4y^2+6z^2=0$.
(j) $x^2-z^2=25$.

(2) 求適合已知條件一點之軌跡之方程式．決定此軌跡之性質，而作其圖形．

(a) 從 z 軸至此點之距離之平方等於從 YZ 平面至此點之距離之二倍．
答　$x^2+y^2-2x=0$.

(b) 從 z 軸至此點之距離爲從 XY 平面至此點之距離之三倍．

(c) 從點 $(4,0,0)$ 與從 XY 平面至此點之距離爲相等．
答　$x^2+y^2-8x+16=0$.

(d) 從 XY 平面與從 z 軸至此點之距離爲相等．　答　$x^2+y^2-z^2=0$.

(e) 離 y 軸之距離爲離 z 軸之距離之四倍．

(f) 離三坐標面之距離和等於離原點之距離．

(g) 距點 $(0,0,5)$ 與 x 軸之距離爲相等．　答　$x^2-10z+25=0$.

(h) 離 XY 平面與 XZ 平面之距離，其和與差之積爲離 YZ 平面之距離平方之四倍．

(3) 求圓錐面之方程式，其頂點爲原點而其發生線割圓 $y^2+z^2=4$，$x=1$．

(4) 求以頂點爲原點，其發生線割橢圓 $2x^2+3z^2=6$，$y=1$ 之圓錐面之方程式．
答　$2x^2+3z^2-6y^2=0$.

特設習題

(5) 一點移動時，使其從兩垂直相交線之距離之平方差爲一常數．則其軌跡爲何？

(6) 從一平面與從一垂直於此平面之直線至一點之距離爲相等，則此點之軌跡爲何？

(7) 一點移動時，其從兩垂直相交線之距離之比爲一常數．則其軌跡爲何？

(8) 一點移動時，使其從一定點之距離常等於從一定線之距離．其軌跡爲何？

(9) 一點離三個互相垂直平面之距離和，等於離其公共交點距離之一半．此軌跡爲何?

140．曲面方程式之討論　曲面之數種性質，可用與第 18 節中類似之方法以決定之．

(1) 坐標軸上之截部．

求曲面截部之規則．

輪流命各對變數等於零而解之以求第三變數之實值．

(2) 坐標面上之踪線．

曲面與坐標面相交所成之曲線稱爲踪線 (Traces)．

求踪線之規則．

曲面踪線之方程式，可於曲面方程式中相繼命 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 而求得之．

(3) 對稱．

定理　設變更一變數之符號而方程式之值不變者，其軌跡必對稱於量度此變數之坐標面．

設變更二變數之符號而方程式之值不變者，其軌跡必對稱第三變數之坐標軸．

設三變數之符號全變更而方程式之值不變者，其軌跡對稱於原點．

對稱之定義與證法與第 18 節中相同．

(4) 由平行於坐標面之平面所截成之截口 (Sections)．

曲面之普通狀態可由平行於坐標面之平面所截成之曲線以決定之．又可由此以決定此曲面爲封閉或延展至無限遠．

下列說明此法.

欲討論一曲面之方程式,可求其 (1) 截部與 (2) 蹤線,檢討其(3)對稱問題與(4)在平行於坐標面諸平面上之截口之性質.

例　題

決定曲線之性質,此線爲平面 $z=4$ 與曲面 $y^2+z^2=4x$ 相交所成.

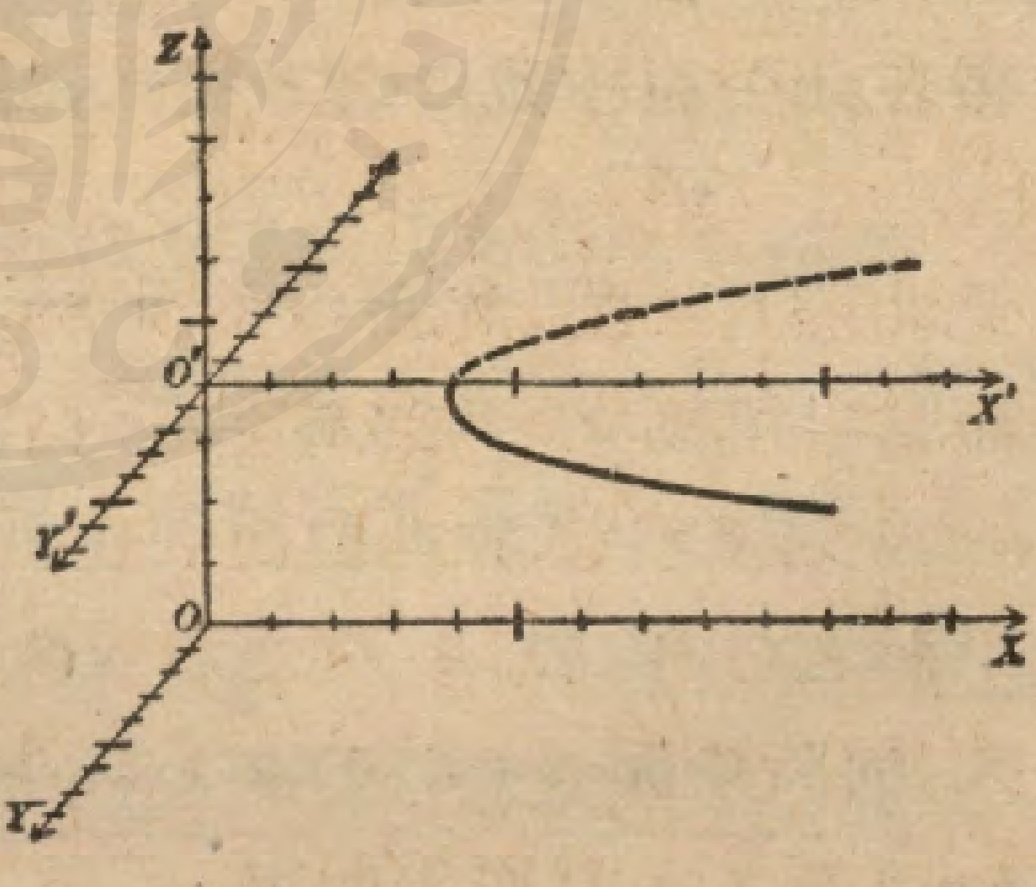
[解] 從定義(第 122 節),此曲線之方程式爲

(1) $$y^2+z^2=4x,\quad z=4.$$

將第二式中之 z 值代入第一式中以消去 z. 得

(2) $$y^2-4x+16=0,\quad z=4.$$

方程式 (2) 和爲此曲線之方程式而定爲拋物圓柱面 $y^2-4x+16=0$ 與平面 $z=4$ 相交所成之曲線.



因每組(x,y,z)之值,適合於方程式 (1) 者亦必適合方程式(2),反之亦然.

設在平面 $z=4$ 中,取直線 $O'X'$ 與 $O'Y'$ 爲軸,此兩直線卽平面截 ZX 平面與 ZY 平面所成之直線. 則此曲線對於新軸之方程式爲(2)中之第一式. 卽

(3) $$y^2-4x+16=0.$$

(3)之軌跡爲一拋物線.其頂點,在平面 $z=4$ 中,而爲點$(4,0)$;又 $p=2$. 答.

在平面 $X'O'Y'$ 中作(3)之軌跡時, x 與 y 之值須各與 $O'X'$ 及 $O'Y'$ 平行,如作斜坐標之軌跡(參閱第 7 節).

從前例，可得

求一曲線之性質之規則；此曲線爲一平行於一坐標面之平面與一已知曲面相截所成

從平面與曲面兩方程式中消去平面方程式內之變數．其結果爲此曲線之方程式，而以平面與其他兩坐標面相交之直線爲軸．用平面解析幾何學之法討論之．

例　　題

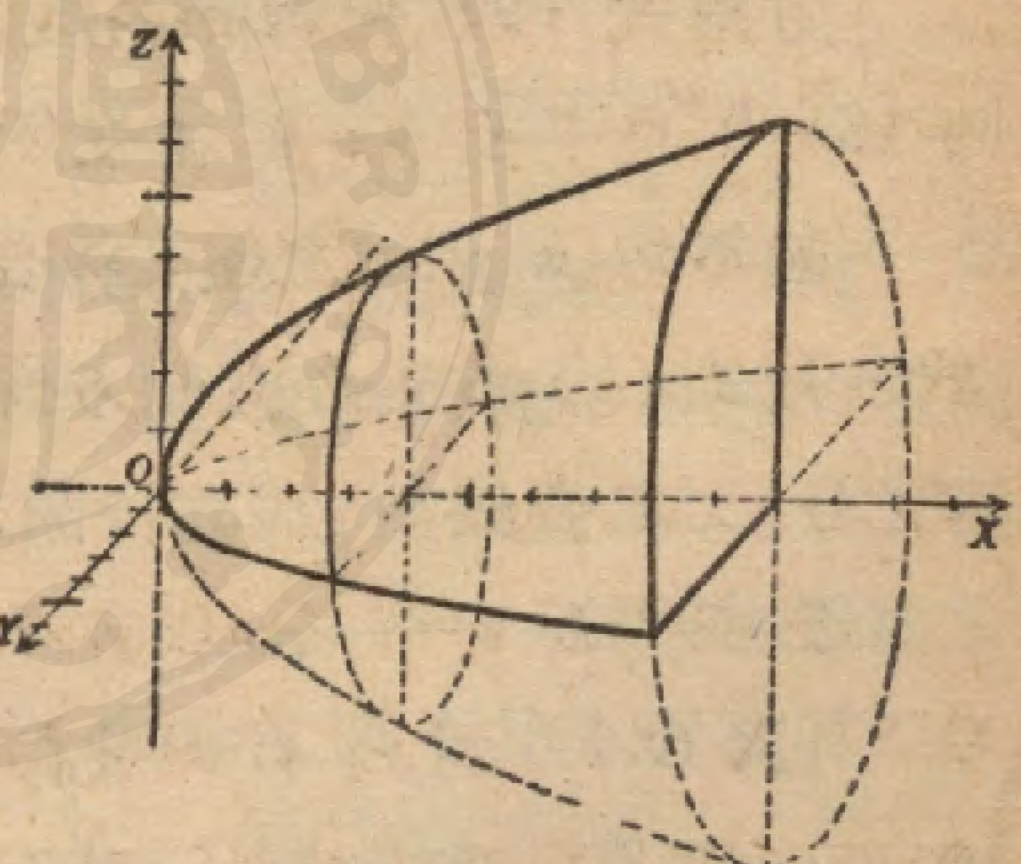
討論方程式

(4)　$$y^2+z^2=4x$$ 之軌跡．

［解］(1)　在各軸上之截部爲零．

(2)　其踪線各爲點圓 $y^2+z^2=0$ 與二拋物線 $z^2=4x$ 及 $y^2=4x$．

(3)　此曲面對稱於 XY 平面，ZX 平面，與 x 軸．



(4)　在方程式(4)中命 $x=k$，得在此平面中截口之方程式，即

$$y^2+z^2=4k.$$

此曲線爲一圓，其圓心在 x 軸上而其半徑設 $k>0$ 則爲$2\sqrt{k}$．但設 $k<0$ 則無軌跡．故此曲面全在 YZ 平面之右邊．設 k 從零增至無限大，則圓之半徑亦從零增至無限大，同時平面 $x=k$ 亦離 YZ 平面而至無限遠處．圖中之圓乃作在 $x=4$ 與 $x=10$ 兩平面中．

與 $z=k$ 或 $y=k'$ 之平面所成之截線，平行於 XY 平面或 ZX 平面，乃爲一拋物線，其方程式爲

$$y^2=4x-k^2 \text{ 或 } z^2=4x-k'^2.$$

此拋物線有同一之 p 值，即 $p=2$，而其頂點從 YZ 平面或 ZX 平面之距離如 k 或 k' 之數值同時增加．

習題

(1) 作下列已知曲面與已知平面相交之曲線.

(a) $4x^2+y^2-8z=0, z=2$.
(b) $x^2+3y^2+4z^2\quad 45, z=3$.
(c) $x^2+3y^2+4z^2=45, x=3$.
(d) $x^2+3y^2-4z^2=9, z=3$.
(e) $x^2+3y^2-4z^2=16, x=2$.

(2) 討論下列各曲面之方程式,作其踪線.

(a) $x^2+4y^2+9z^2=36$.
(b) $x^2+4y^2=8z$.
(c) $x^2+y^2+z^2=25$.
(d) $z^2+7xy=0$.
(e) $x^2-y^2+z^2=25$.
(f) $x^2-y^2-4z^2=8$.
(g) $x^2+9y^2-9z^2=0$.
(h) $xy-4=0$.

(3) 討論並作下列各方程式之軌跡:

(a) $x^2+4y^2=8z$.
(b) $x^2+4z^2=8y$.
(c) $x^2+4y^2+9z^2=100$.
(d) $x^2-9y^2=10z$.
(e) $x^2+4y^2-z^2=25$.
(f) $y^2+z^2-4z+8=0$.
(g) $x^2+4y^2-16x=0$.
(h) $x^2-y^2-z^2-1=0$.
(i) $x^2+y^2-2zx=0$.
(j) $y^2+z^2-x-4=0$.

141. **二次曲面** (Quadric surfaces) 此種曲面在空間內與圓錐曲線在平面內相似.第 138 節之球面,圓柱面,與第 139 節之圓錐面(二次圓錐面)為其特例.此處將此類中之其他曲面研究之.下為普通討論.

其方程式具下列之形式

(1) $$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$$ [有心二次曲面(Central quadrics)];

(2) $$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=2cz$$ [無心二次曲面(Noncentral quadrics)].

142. **橢圓面** (The ellipsoid) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 設第 141 節方程式(1)中之符號皆為正,其軌跡稱謂橢圓面.討論其方程式,可得下列之性質:

(1) 在坐標軸上之截部各為

$$x=\pm a,\ y=\pm b,\ z=\pm c.$$

直線 $AA'=2a$, $BB'=2b$, $CC'=2c$ 稱爲橢圓面之主軸(Principal axes).(見下圖)

(2) 在主平面上之踪線爲橢圓 $ABA'B'$, $BCB'C'$, 與 $ACA'C'$, 其方程式爲

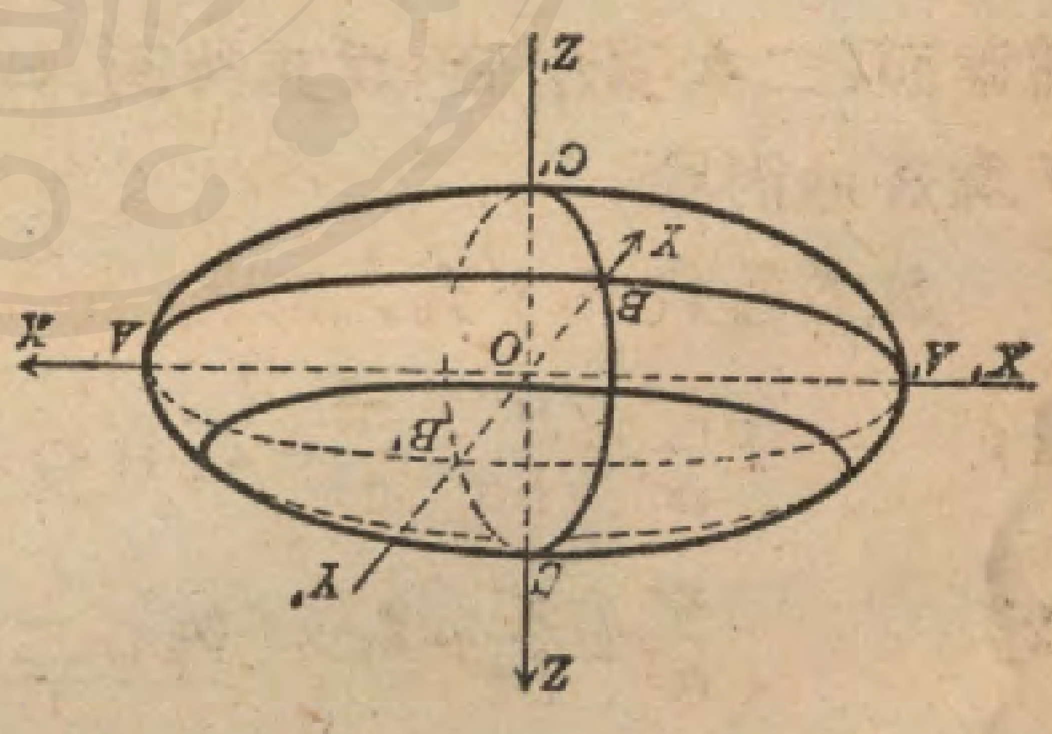
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

(3) 此曲面對稱於各坐標面，各坐標軸，與原點．此等對稱之平面稱爲此橢圓面之主平面(Principal planes).

(4) 與 XY 平面平行之平面 $z=k$ 中，其截口之方程式爲

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2},\ \text{或}\ \frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-k^2)}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-k^2)}=1.$$

此方程式之軌跡爲一橢圓．設 k 從 0 增至 c，或從 0 減至 $-c$，則此平面遠離 XY 平面，而此橢圓之軸各從 $2a$ 與 $2b$ 減至 0，同時此橢圓縮退成一點．設 $k>c$ 或 $k<-c$，則無軌跡．故此橢圓全在兩平面 $z=\pm c$ 間．



同理，平行於 YZ 平面與 ZX 平面之截口爲橢圓其軸因截面遠離時而減小．故此橢圓面全在平面 $x=\pm a$ 與 $y=\pm b$ 間．所以橢圓面爲一閉曲面．(參閱插圖 I)．

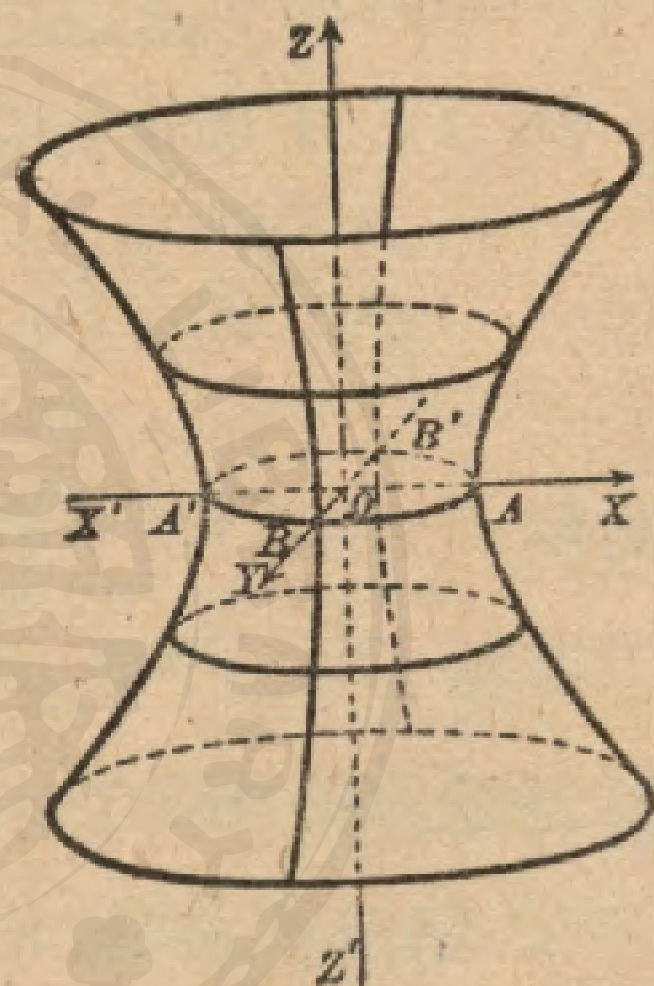
設 $a=b$，則截口 (1) 爲一圓適合於 $-c<k<c$ 中之 k 諸值，而此時之橢圓面爲一"旋轉橢圓面(Ellipsoid of revolution"其旋轉軸爲 z 軸．此曲面爲在 XZ 上踪線繞 OZ 旋轉而成．設 $b=c$ 或

$c=a$, 其曲面亦爲一旋轉橢圓面,其旋轉軸爲 x 軸或 y 軸.

設 $a=b=c$, 其曲面爲一球面,因其方程式可寫作 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

143. 單葉雙曲面(The hyperboloid of one sheet) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 設第 141 節(1)中兩項之符號爲正,一項爲負,則其軌跡稱爲單葉雙曲面,茲先論方程式

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$



討論此方程式可得下列諸性質:

(1) 在 x 軸與 y 軸上之截部各爲

$$x=\pm a,\ y=\pm b,$$

在 z 軸上爲虛數.

(2) 在坐標面上之踪線爲圓錐曲線

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

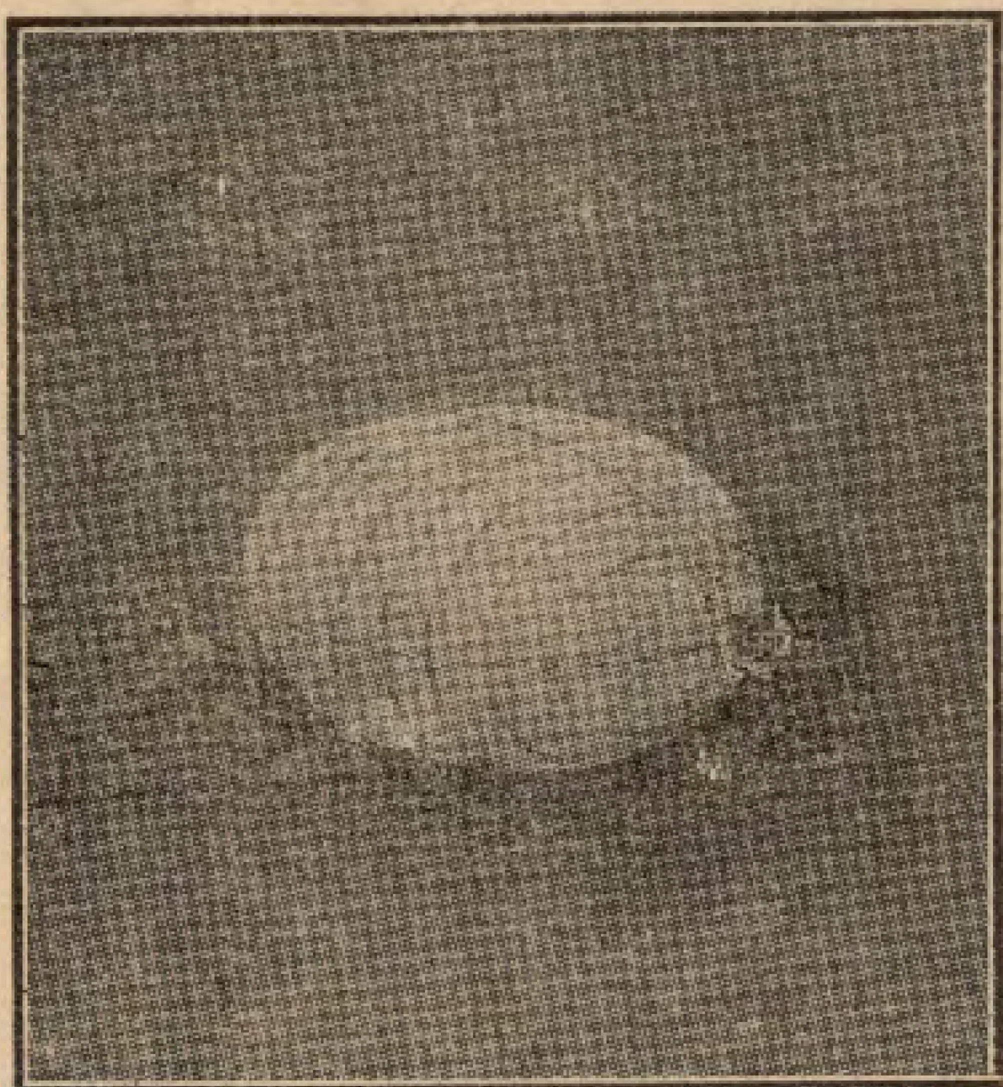
其中第一曲線爲橢圓,其軸爲 $AA'=2a$ 與 $BB'=2b$, 而其他兩曲線爲雙曲線,其橫軸各爲 BB' 與 AA'

(3) 此曲面對稱於各坐標面,各軸,與原點.

(4) 在平行於 XY 平面之平面 $z=k$, 其截口之方程式爲

(2) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}\quad 或\ \frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2+k^2)}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2+k^2)}=1.$$

附圖 I



Ellipsoid
橢圓面

Hyperboloid of one sheet
單葉雙曲面

Hyperboloid of two sheets
兩葉雙曲面

CENTRAL QUADRICS
二次中心式

此方程式之軌跡為一橢圓.設 k 從 0 增至 ∞，或減至 $-\infty$，此平面從 XY 平面移至無限遠，而此橢圓之軸亦各從 $2a$ 與 $2b$ 增至無限大.故此曲面亦遠離 XY 平面與 z 軸至無限遠處.

同理，由平面 $x=k'$ 與 $y=k''$ 所成之截口可知其為雙曲線.當 k' 與 k'' 之絕對值增加時，其雙曲線之軸減短，而當 $k'=\pm a$ 或 $k''=\pm b$ 時，此雙曲線退縮成兩相交直線.當 k 與 k'' 超出此點而增大時，其橫軸與共軛軸之方向互換而此等軸之長亦增至無限.（參閱第 292 頁所對之插圖 I）.

雙曲面(1)，與 OZ 並不相交，因稱為"沿 z 軸".

方程式

$$(3)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

為單葉雙曲面之方程式而各沿 y 軸與 x 軸.

設 $a=b$，則雙曲面(1)為一旋轉曲面，其軸為 z 軸 因其截口(2)成一圓也.設 $a=c$ 與 $b=c$ 則雙曲面(3)各為旋轉雙曲面.

144. 兩葉雙曲面 (The hyperboloid of two sheets) $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$. 設第 141 節之 (1) 中祇一項為正，則其軌跡稱為兩葉雙曲面.玆先論方程式

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

(1) 其在 x 軸上之截部為 $x=\pm a$，但與 y 軸及 z 軸不相交.

(2) 在 XY 平面與 XZ 平面上踪線各爲雙曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

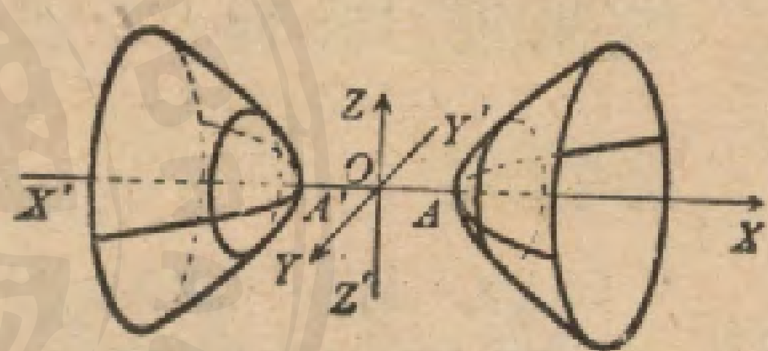
此二雙曲線有同一之橫軸 $AA'=2a$，但在 YZ 平面上無踪線.

(3) 此曲面對稱於各坐標面，各軸與原點.

(4) 在平行於 YZ 平面之平面 $x=k$ 中，其截口之方程式爲

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2}{a^2}-1, \text{或} \quad \frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(k^2-a^2)}+\frac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}(k^2-a^2)}=1.$$

設 $-a<k<a$，此方程式無軌跡. 設 $k=\pm a$，此軌跡爲一點橢圓，而當 k 從 a 增至 ∞，此軌跡爲一橢圓，其軸亦增至無限大. 故此曲面包含兩葉各從 YZ 平面及從 x 軸移至無限遠處.



同理，由平行於 XY 平面與 ZX 平面之一切平面所成之截口皆爲雙曲線，當此等平面遠離各坐標面時，其軸亦無限增長.（參閱第 292 頁所對之插圖 I）.

雙曲面(I)稱爲“沿 x 軸”.

方程式

$$(2) \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

爲兩葉雙曲面之方程式各沿 y 軸與 z 軸.

設 $b=c$，或 $c=a$，或 $a=b$，則雙曲面(1)與(2)爲旋轉雙曲面.

習　　題

(1) 討論，作圖，並舉出下列各方程式之軌跡之名稱：

(a) $x^2+4y^2+9z^2=36$.
(b) $x^2+4y^2-9z^2=36$.
(c) $x^2-4y^2-9z^2=36$.
(d) $4x^2+9y^2-9z^2=36$.
(e) $x^2-y^2-z^2=1$.
(f) $9x^2-4y^2-z^2=36$.
(g) $9x^2+y^2-z^2=36$.
(h) $9x^2-16y^2+4z^2=64$.
(i) $x^2-4y^2+9z^2+36=0$.
(j) $4x^2+4y^2+z^2=16$.
(k) $x^2+y^2-9z^2=1$.
(l) $x^2+4y^2-z^2=16$.
(m) $4x^2+16y^2-z^2=64$.
(n) $x^2-8y^2+2z^2=16$.

(2) 假定一有心二次曲面之方程式爲

$$Ax^2+By^2+Cz^2+D=0,$$

而過下列各已知點，求其方程式．舉出曲面之名稱．

(a) $(2,-1,1),(-3,0,0),(1,-1,-2)$.　　答　$x^2+4y^2+z^2=9$.
(b) $(-1,5,4),(-7,1-8),(8,-2,10)$.
(c) $(4,-2,-1),(0,1,-3),(3,5,2)$.
(d) $(-1,-1,\sqrt{5}),(2\sqrt{5}\ -2,4),(0,0,-2)$　答　$x^2+y^2-2z^2+8=0$.

(3) 求一點之軌跡之方程式，其離點$(1,0,0)$之距離爲離平面 $x=4$ 之垂直距離之半．討論，述其名稱，並作其軌跡．

答　$3x^2+4y^2+4z^2-12=0$.

(4) 求一點之軌跡之方程式，設其從$(0,-4,0)$之距離爲從平面 $y+1=0$ 之垂直距離之二倍．討論，作圖，並述此曲面之名稱．

(5) 假定爲題 2 之方程式，求過$(2,1,3)$與具下列方程式之曲線之曲面方程式：

(a) $z=4,3x^2+y^2-9=0$;　　答　$21x^2+7y^2+4z^2-127=0$.
(b) $z=4,x^2+y^2-25=0$.

(6) 一點移動時，其與空間兩正交直線之距離之平方和爲一常數．證明此軌跡爲一旋轉橢圓面．

145．橢圓拋物面(The elliptic paraboloid)$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2cz$.

設第 141 節(2)中 y^2 之係數爲正，則其軌跡稱爲一橢圓拋物面．討

論其方程式可得下列之性質:

(1) 其截部全爲零.

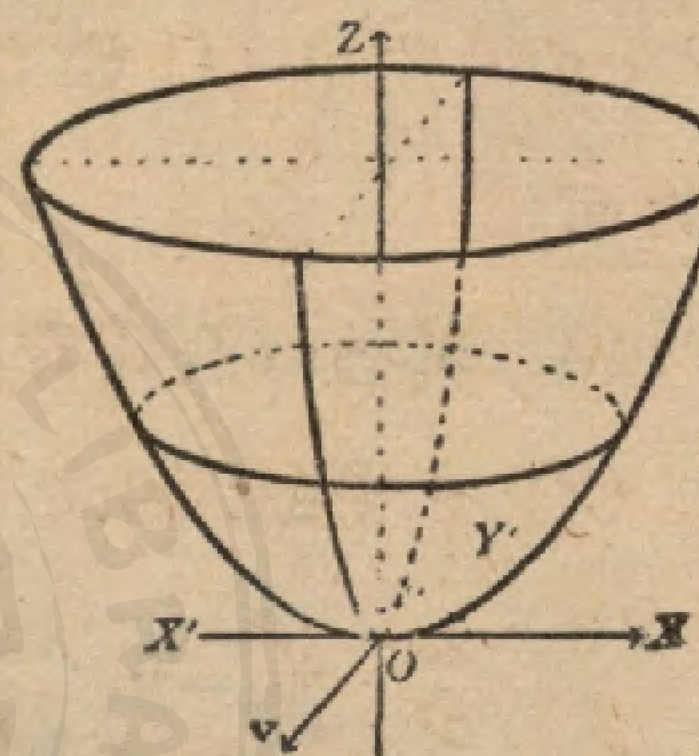
(2) 在坐標面上之踪線各爲圓錐曲線

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0,\frac{x^2}{a^2}=2cz,\quad \frac{y^2}{b^2}=2cz,$$

其中第一軌跡爲一點橢圓而其他兩軌跡皆爲拋物線.

(3) 此曲面對稱於 YZ 平面, ZX 平面,與 z 軸.

(4) 在平行於 XY 平面之平面 $z=k$ 中之截口,其方程式爲



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2ck,$$

或
$$\frac{x^2}{2a^2ck}+\frac{y^2}{2b^2ck}=1.$$

設 c 與 k 爲同號,則此曲線爲一橢圓,但設 c 與 k 爲異號,則無軌跡.故設 c 爲正,則此曲面全在 XY 平面之上.設 k 從 0 增至 ∞, 則此平面遠離 XY 平面而此橢圓之二軸無限增長.故此曲面離 XY 平面與 z 軸至無限遠處.

同理,平行於 YZ 平面與 ZX 平面之截口皆爲拋物線其頂點從 XY 平面遠離 XY 平面當此等截口所在之平面遠離各坐標面時.(參閱第 298 項所對之插圖 II).

此拋物面稱爲"沿 z 軸".

方程式

(1) $$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2ax,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=2by,$$

之軌跡爲橢圓拋物面之各沿 y 軸與 z 軸者.

設 $a=b$，則第一曲面爲一旋轉拋物面其軸爲 z 軸；而設 $b=c$ 與 $a=c$，則拋物面(1)爲旋轉曲面其軸各爲 x 軸與 y 軸.

橢圓拋物面所沿之軸相當於其方程式中之一次項內之變數，而在軸之正向或負向全視此項之正或負而定.

146. 雙曲線拋物面 (The hyperbolic paraboloid) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2\,cz$. 設第 141 節 (2) 中 y^2 之係數爲負，其軌跡稱爲雙曲線拋物面.

(1) 其截部全爲零.

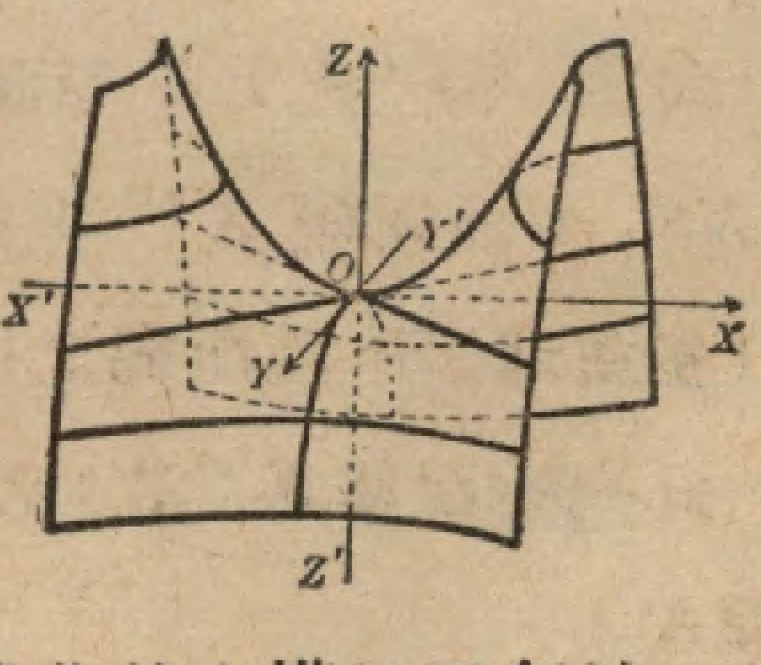
(2) 在坐標面上之蹤線各爲圓錐曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,\quad \frac{x^2}{a^2}=2cz,\quad -\frac{y^2}{b^2}=2cz,$$

其中第一曲線爲一對相交直線而其他皆爲拋物線.

(3) 此曲面對稱於 YZ 平面，ZX 平面，與 z 軸.

(4) 在平行於 XY 面之一平面，$z=k$，內，其截口爲



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2ck,$$

或
$$\frac{x^2}{2a^2ck}-\frac{y^2}{2b^2ck}=1.$$

此軌跡爲一雙曲線.設 c 爲正，則雙曲線之橫軸平行於 x 軸或 y 軸全視 k 之爲正或負而定.設 k 從 0 增至 ∞，或從 0 減至 $-\infty$，則此平面遠離 XY 平面，而此雙曲線之二軸各增至無限長

故此曲面離 XY 平面與 z 軸至無限遠處．此曲面之形狀與馬鞍近似．

同理，平行於其他坐標面之截口皆爲拋物線其頂點從 XY 平面遠離當此等截口所在之平面遠離其坐標面時．（參閱對頁上插圖 II）．

此曲面稱爲"沿 z 軸"．

方程式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=2by, \qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=2ax,$$

之軌跡爲雙曲線拋物面之各沿 y 軸與 x 軸者．雙曲線拋物面所沿之軸，相當其方程式中一次項之變數．

二次曲面之時稱平面稱爲主平面 (Principal plane)．每一拋物面有二主平面；每一有心二次曲面則有三主平面．其對稱軸稱爲主軸(Principal axes)．拋物面有一主軸；有心二次曲面有三主軸．有心二次曲面因有一對稱中心存在，故名"有心二次曲面"．

習　　題

(1) 討論，作圖，並述下列各曲面之名稱：

(a) $x^2+y^2=4z$.

(b) $y^2-z^2=6x$.

(c) $y^2-4x^2=16z$.

(d) $x^2+z^2=8x$.

(e) $3x^2+z^2-4y=0$.

(f) $y^2-2x^2-4z=0$.

(g) $9y^2-4z^2=288x$.

(h) $x^2-y^2-z=0$.

(i) $2y^2+3z^2-2x=0$.

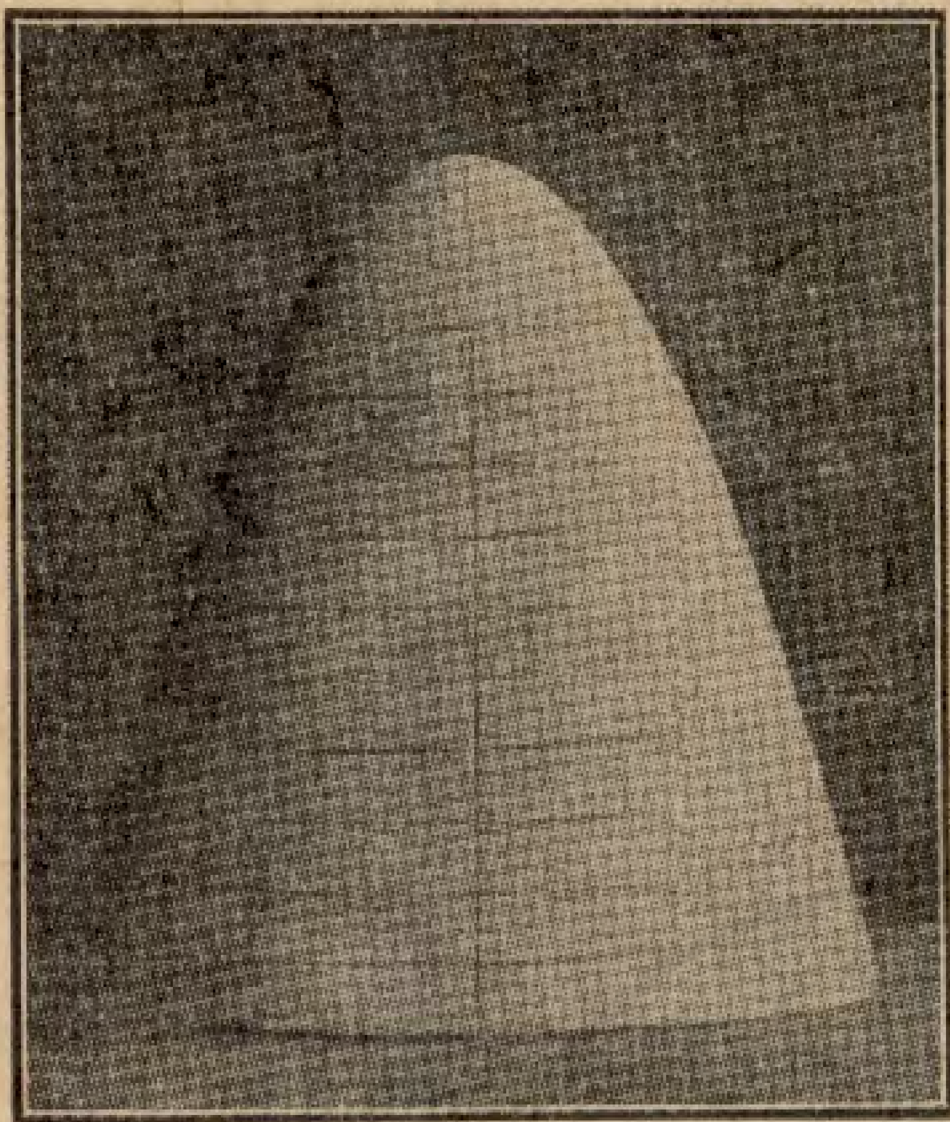
(j) $y^2-2z^2-4x=0$.

(k) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=6z$.

(l) $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{4}=2y$.

(2) 命一無心二次曲面之方程式爲 $Ax^2+By^2+Cz=0$ 之形式，求其方程式，設此曲面過下列諸已知點．述此曲面之名稱．

附圖 II

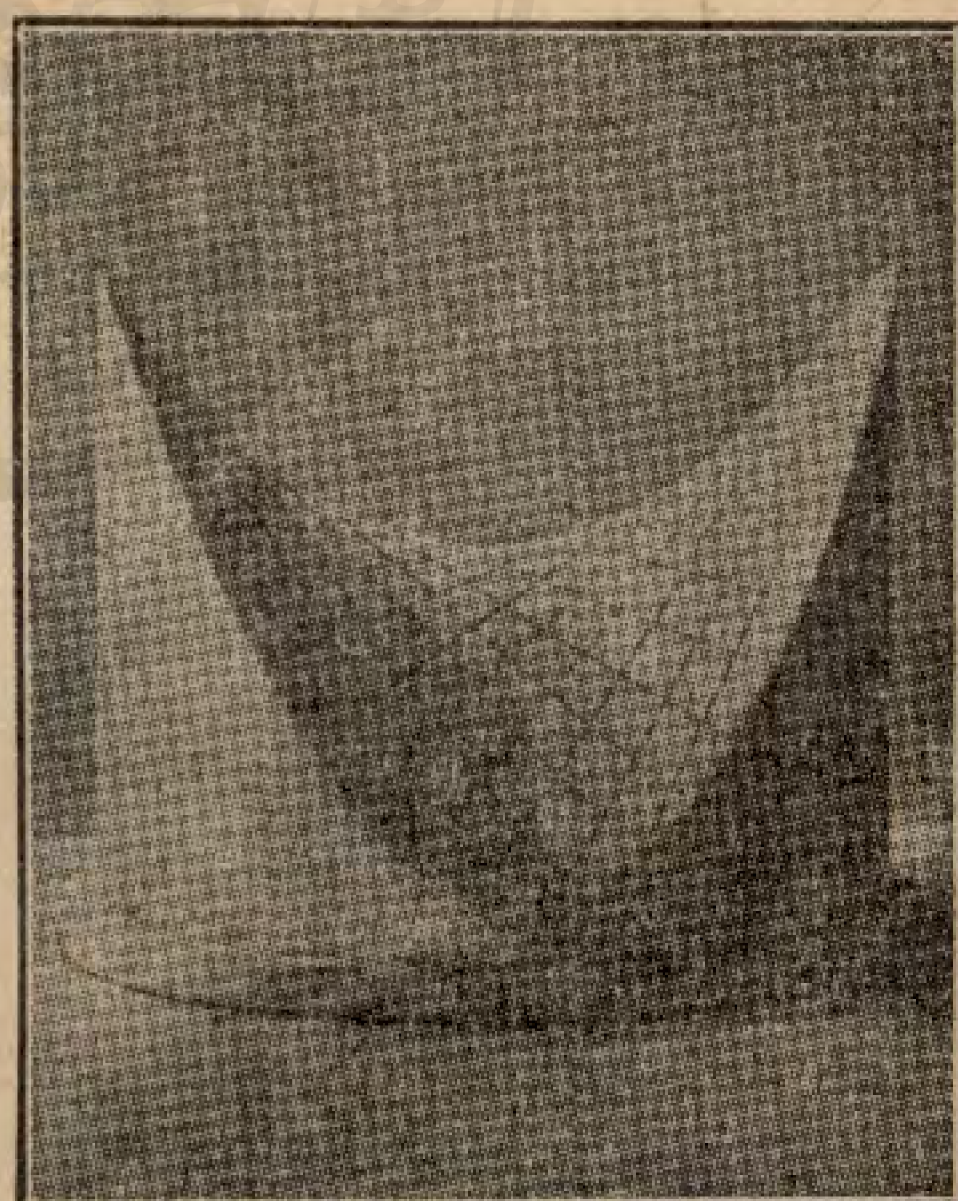


(Elliptic Paraboloid)
橢圓抛物面

(Hyperbolic Paraboloid)
雙曲線抛物面

(NONCENTRAL QUADRICS)
二次無心面

(Hyperboloid of one sheet)
單葉雙曲面



(Hyperbolic Paraboloid)
雙曲線抛物面

(RULED QUADRICS)
二次法面

(a) (1,0,1),(0 2,1).　　答　$4x^2+y^2-4z=0$.

(b) (1 0,1),(0,2,-1).

(c) (1,2,1),(2,1,1).

(3) 用題 2 之公式,求過曲線 $z=4$, $2x^2+y^2=4$ 之拋物面之方程式.

特設習題

(1) 證明平行於一主平面之諸平面割(1)一橢圓拋物面或(2)一雙曲線拋物面,所得之拋物線爲全等.

(2) 方程式 $\dfrac{x^2}{a^2-k}+\dfrac{y^2}{b^2-k}+\dfrac{z^2}{c^2-k}=1$, $a>b>c$, 其中 k 爲一通徑,代表一有心二次曲面系.則 k 之何值須除外?此二次曲面爲一橢圓面時, k 應爲何值?爲一單葉雙曲面時?爲一兩葉雙曲面時?

(3) 證明題 2 中之二次曲面在各坐標面上諸踪線皆爲共焦點圓錐曲線(參閱第 5□ 節之例題).

(4) 方程式 $\dfrac{x^2}{a^2-k}+\dfrac{y^2}{b^2-k}=2cz$, 其中 k 爲一通徑,代表一無心二次曲面系.此二次曲面爲一橢圓拋物面時, k 應爲何值?爲一雙曲線拋物面時?

(5) 如何移動一拋物線使成一拋物面?(參閱題 1).

(6) 在題 2 中,證明此曲面,一橢圓面,當 k 增加而漸近於 c^2 時,漸漸變爲扁平.約去方程式之分數,證明當 $k=c^2$ 時,此極限曲面爲 XY 平面內之一橢圓.此橢圓之方程式爲何?

第十六章

空間幾何補編

(Supplementary Topics In The Geometry Of Space)

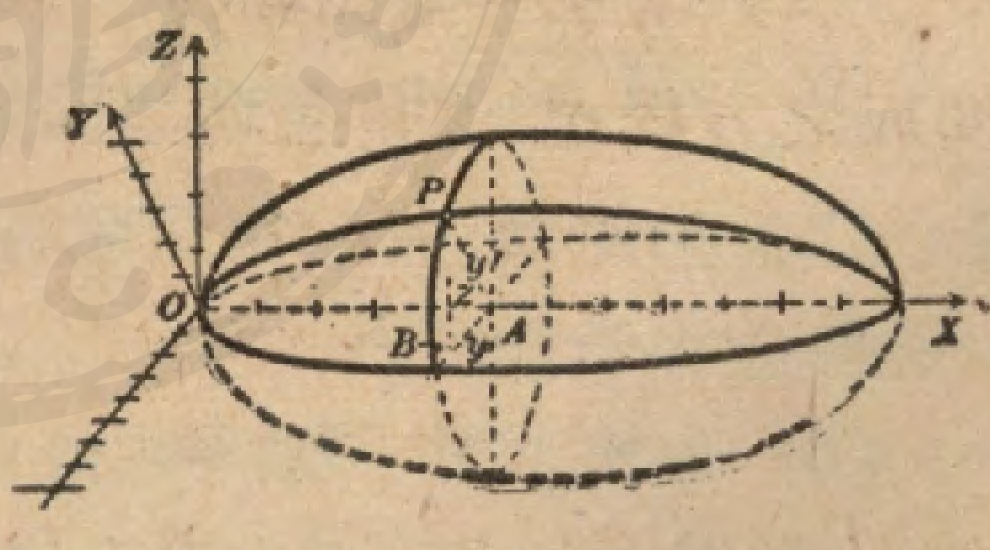
本章綜集諸重要論題,如時間充分,可將其一部或全部研究之.

147. 旋轉面 (Surfaces of revolution) 由一曲線繞其平面中之直線旋轉時所成之曲面稱爲旋轉面.

常遇之例爲球面,直圓柱面,與直圓錐面.

例　　題

求由橢圓 $x^2+4y^2-12x=0$, $z=0$, 繞 x 軸而旋轉時所成之旋轉面之方程式.



[解] 命 $P(x,y,z)$ 爲曲面上任一點.過 P 與 OX 作一平面使沿橢圓截曲面於一位置.在此平面中作 OY' 垂直於 OX.以 OX 與 OY' 爲軸,則此橢圓之方程式必爲

(1) $$x^2+4y'^2-12x=0.$$

但從直角 $\triangle PAB$ 中,得

$$y'^2=y^2+z^2.$$

代入(1)中,得

(2) $$x^2+4y^2+4z^2-12x=0.$$ 答.

此方程式表明曲面上任一點必能適合之關係,故爲此曲面之方程式.

由此解法，可得

一規則以求在一坐標面內，一曲線繞一坐標軸旋轉時所成之曲面之方程式．

此曲線方程式含兩變數，其中之一爲不沿旋轉軸所量得者，此變數今被其本身與第三變數之平方和之平方根代換之，卽得此旋轉面之方程式．

此已知曲線旋轉時所繞之直線稱爲此曲面之軸．由垂直於曲面之軸所截得之截口，顯然皆爲圓其圓心在此軸上．

設一曲面被垂直於一坐標軸之一切平面所截，其截口皆爲圓而圓心在此坐標軸上時，則此曲面必爲一旋轉面，其軸卽此坐標軸．此可決定一已知曲面是否爲一以一坐標軸爲其旋轉軸之旋轉面．

習　　題

(1) 求在一坐標面內，一已知曲線繞一已知軸旋轉時所成旋轉面之方程式，述其名稱並作此曲面．

(a) $4x-y=2$, x 軸．

(b) $x^2+4z^2=16$, z 軸．　　答　$x^2+y^2+4z^2=16$.

(c) $9x^2+4y^2=36$, y 軸．

(d) $9x^2-4y^2=36$, x 軸；y 軸．

(e) $y^2=8x$, x 軸．　　答　$y^2+z^2=8x$.

(f) $2x^2-4z^2=1$, 其橫軸；其共軛軸．

(g) $x^2=y^3$. y 軸．

(h) $2x^2=4-y$, y 軸．

(i) $xz=8$, z 軸．

(j) $y=\sin x$, x 軸．

(k) $x^2+4y^2-4x=0$, x 軸；y 軸；$x=2$.

(l) $xy=a$, 繞其兩漸近線．　　答　$y^2(x^2+z^2)=a^2$; $x^2(y^2+z^2)=a^2$.

(2) 求已知曲線繞所示之軸旋轉時所成旋轉面之方程式. 述其名稱並作此曲面.

(a) $y^2=2pz$, z 軸. 答 一旋轉拋物面, $x^2+y^2=2pz$.

(b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, x 軸. 答 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$.

(c) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, y 軸

(d) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, x 軸.

(3) 曲線 $z=e^x$ 繞(1) x 軸;(2) z 軸旋轉時所成之曲面,求其方程式並作此曲面.

(4) 用解析法證明球面為一圓繞其一直徑旋轉而成.

(5) 求圓 $x^2+y^2-2hx+h^2-r^2=0$ 繞 y 軸旋轉所成曲面之方程式. 討論此曲面當 $h>r$, $h=r$, 與 $h<r$.

答 $(x^2+y^2+z^2+h^2-r^2)^2=4h^2(x^2+z^2)$.

當 $h>r$ 時,此曲面稱為錨環形曲面(Anchor ring or torus).

(6) 一旋轉圓柱面之軸即為坐標軸,其半徑為 r. 求其方程式.

(7) 一旋轉圓錐面之軸即為坐標軸, 而其發生線與旋轉軸成 ϕ 角 求其方程式. 答 $y^2+z^2=x^2\tan^2\phi$; $z^2+x^2=y^2\tan^2\phi$; $x^2+y^2=z^2\tan^2\phi$.

(8) 證明下列軌跡為旋轉面:

(a) $y^2+z^2=4x$.

(b) $x^2-4y^2+z^2=0$.

(c) $4x^2+4y^2-z^2=16$.

(d) $x^2-4y^2+z^2-3y=0$.

(e) $xz^2+xy^2=3$.

(f) $(x^2+z^2)y=4a^2(2a-y)$.

(g) $x^2+y^2+zx^2+zy^2-z+3=0$.

(h) $x^2+y^2+z^3-2y+1=0$.

(i) $y^2+z^2+xy^2+xz^2-8=0$.

(9) 一點移動時, 其從一定平面之垂直距離與從一定點之距離成一常數比. 證明其軌跡為旋轉面.

(10) 一點移動時,其從一定直線之垂直距離與從在此直線上一定點之距離成一常數比. 用解析法證明此軌跡為一旋轉圓錐面. 何種比值須除外?

148. 法面 (Ruled surfaces) 移動一直線所成之曲面稱爲法面.設一直線之方程式含一不定常數,則此等方程式代表一直線系而成一法面.設從直線之方程式中消去其通徑,其結果即爲此法面之方程式.

因設(x_1,y_1,z_1)適合於含通徑爲某值時之二已知方程式,則亦必適合於消去通徑後所得之一方程式; 即直線系中各直線上每點之坐標皆適合此方程式.

圓柱與圓錐面爲最簡單之法面.

例 題

(1) 求由下列已知方程式之直線系所成曲面之方程式.

$$x+y=kz,\ x-y=\frac{1}{k}z.$$

[解] 將此直線系之兩方程式相乘以消去 k,即得

(1) $$x^2-y^2=z^2.$$

此爲一圓錐面之方程式(第 139 節)其頂點爲原點.因由平面 $x=k$ 所成之截口爲圓,故爲一旋轉圓錐面,其軸爲 x 軸.

不論 k 爲何值,已知諸直線皆在曲面(1)上,其證法如下:

解諸直線之方程式以求 x 與 y 之值而以 z 表之,得

$$x=\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)z,\ y=\frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{k}\right)z.$$

代入(1)中,得

$$\frac{1}{4}\left(k+\frac{1}{k}\right)^2z^2-\frac{1}{4}\left(k-\frac{1}{k}\right)^2z^2=z^2,$$

去括號,可知此方程式對於 k 與 z 之一切值皆爲眞確.故此系中任何直線上每點皆在(1)上,因其坐標適合(1)也.

(2) 決定曲面 $z^3-3zx+8y=0$ 之性質.

[解] 此曲面與平面 $z=k$ 之交線爲一直線

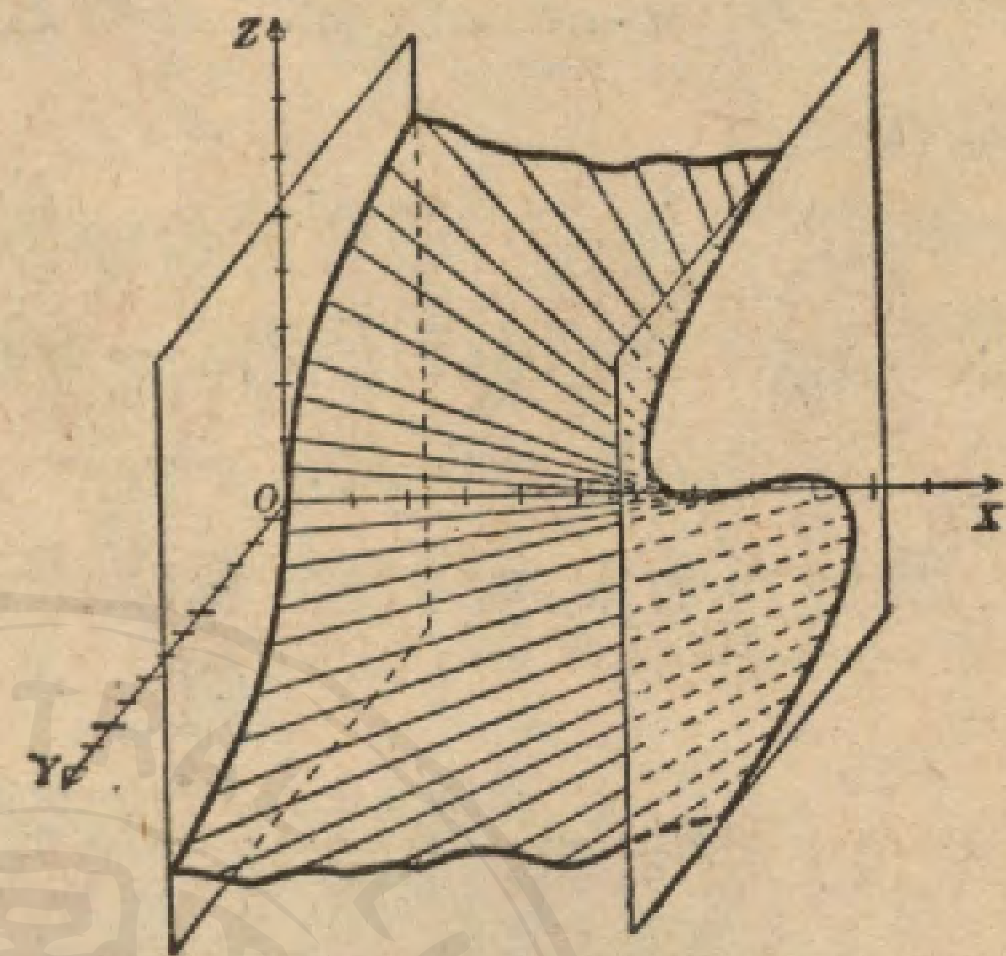
$$k^3-3kx+8y=0,\ z=k.$$

故此曲面為由此直線當 k 變其值時所成之法面. 欲作此曲面, 先討論其平面 $x=0$ 與 $x=8$. 其方程式各為

$$x=0,$$
$$8y+z^3=0,$$

與

$$x=8,$$
$$8y^2-24z+z^3=0.$$



連接在此等曲線上具同一 k 值之諸點即得生此曲面之諸直線.

例題 2 中所用之法可用於法面之決定與作圖. 此種曲面方程式之檢驗法, 將指出一平面系, 此等平面與此曲面之截線為一直線系如第 305 頁上題 1 中之說明.

149. 二次法面 (Ruled quadrics). **直母線** (Rectilinear generators). 單葉雙曲面之方程式(第 143 節)可寫成下之形式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}. \tag{1}$$

當此方程式為從直線系之方程式

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1+\frac{y}{b}\right), \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

中消去 z 而得時, 此雙曲面為一法面. 方程式 (1) 亦為從直線系之方程式

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1-\frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

中消去 z 後之結果, 故此雙曲面可有二法以視作法面.(參閱第 298 頁所對之插圖 II).

同理,雙曲線拋物面(第 146 節)包含兩直線系

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2ck,\qquad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{z}{k},$$

與

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=kz,\qquad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{2c}{k},$$

此等直線稱爲曲面之直母線.故得下之

定理　單葉雙曲面與雙曲線拋物面皆有兩種直母線系；即有二種方法將此等曲面作法面.

二種母線系已示於插圖 II 中.

習　　題

(1) 證明下列各方程式之軌跡爲法面，其直母線平行於一坐標面.求直母線之方程式,並用此等方程式作曲面.

(a) $xy=z$.　　(e) $xy=y^2-3z$.

(b) $yz=x+z^2$.　　(f) $x^2y-x^2+z=0$.

(c) $y^2=x+yz$.　　(g) $xz-z^2+y=0$.

(d) $x^2y+xz=y$.　　(h) $x^2=y^2(z+1)$.

(2) 求下列各二次曲面之兩種直母線系.用一種直母線系之方程式,作此等曲面.

(a) $x^2-z^2-y^2+1=0$.　　(d) $y^2-4z^2+2x=0$.

(b) $x^2+yz-1=0$.　　(e) $x^2-4y^2=4z$.

(c) $9x^2+4y^2-36z^2=36$.　　(f) $x^2+y^2-yz-1=0$.

(3) 求法面之方程式其直母線如下.作此等曲面.

(a) $x+2z+k(1-y)=0,\ k(x-2z)+1+y=0$.　　答　$x^2+y^2-4z^2=1$.

(b) $2x+y-3k=0,\ k(2x-y)-z=0$.

(c) $x+2ky+4z=4k,\ kx-2y-4kz=4$.

(d) $5-x-ky=0,\ k(5+x)-y=0$.

(e) $y-4k=0,\ ky-x=0$.

(f) $3x-4y=kz,\ k(3x+4y)=z$.

特設習題

(4) 證明雙曲線拋物面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz$ 之各直母線平行於平面$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$ 中之一.

(5) 證明(1)單葉雙曲面,(2)雙曲線拋物面之直母線在一主平面上諸直母線之射影必與該曲面在此主平面上之蹤線相切.

(6) 過單葉雙曲面之中心與其一母線之平面與此曲面相交於第二母線中,此第二母線平行於第一母線.

(7) 證明(1)雙曲線拋物面與單葉雙曲面之兩種直母線皆通過曲面上各點.

(8) 設一平面通過二次曲面之一直母線,證明其必通過第二直母線,而此兩母線並不屬於同系.

(9) 單葉雙曲面之方程式可寫作$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$. 用第 149 節中之法處理之,可得曲面上兩種直線系之方程式.證明此兩種直線系與以前所得者相同.

150. 斜圓柱面 (Cylinders with elements oblique to the axes) 從第 138 節所述,學者不應因此而斷定凡圓柱面之方程式皆缺少一變數.設其發生線不平行於任一坐標軸,則方程式中即有三變數.可於下例見之.

例題

決定方程式

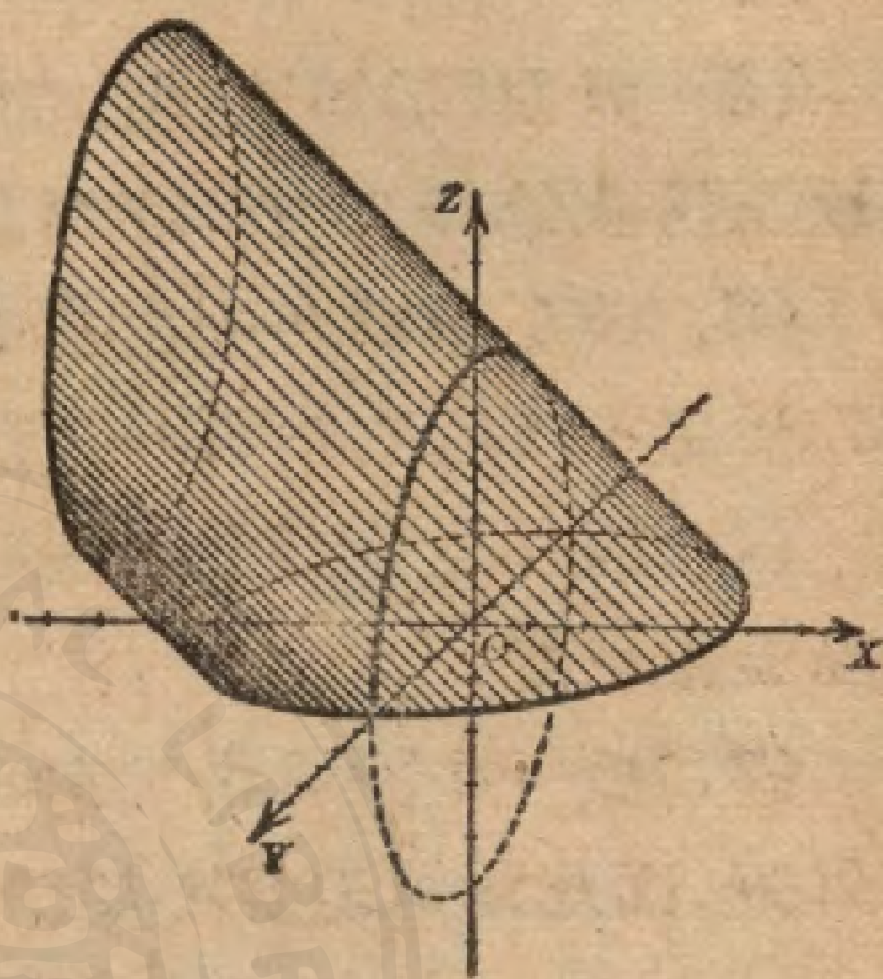
$$x^2+2xz+z^2=1-y^2 \text{ 之軌跡之性質.}$$

[解] 此曲面顯然爲一法面其直母線爲

$$y=k,\ x+z=\pm\sqrt{1-k^2}.$$

此等方程式規定一平行線系因其方向數爲 $-1,\ 0,\ 1$, 而與 k 無關.即此等直線皆與連接 $(-1,0,1)$ 與原點之直線平行.故得其結論爲此曲面爲一圓柱面. 答.

欲作此曲面，先作一踪線而在其上諸點作直線使具以上之方向數．在 YZ 平面內之踪線爲圓 $y^2+z^2=1$；在 XY 平面內之踪線爲圓 $x^2+y^2=1$.



二圓中任一圓皆可作爲準線.

顯然，欲證一曲面爲圓柱面，祇須證明其爲一法面而其母線爲平行線.

151　曲線之投影圓柱面 (The projecting cylinders of a curve)

圓柱面之發生線交一已知線而平行於一坐標軸者稱謂此曲線之投影圓柱面．其方程式可從曲線之方程式中輪流消去變數 x, y, 與 z 而得之．例如，設從第 138 節之結果以消去 z，卽爲發生線平行 z 軸之圓柱面方程式．又，此圓柱面通過此曲線，因 x, y, 與 z 之値如能適合一曲線之二方程式亦必適合從此等方程式消去一變數後所得之方程式.

通常一曲線之方程式可用任意相等之兩個獨立方程式替代之．此二獨立方程式卽從曲線之兩個方程式組合而導出者也．實則一曲線可用通過此曲線之任兩曲面之方程式以規定之.

二投影圓柱面方程式頗便於用作此曲線之方程式．故作原曲線這問題，現變爲作兩圓柱面，其發生線平行於坐標軸者，相交之曲線．其法於下例見之.

例題

(1) 作兩圓柱面相交之曲線，其方程式如下：

$$x^2+y^2-2y=0,\quad y^2+z^2-4=0.$$

[解] 在與兩圓柱面之發生線正交之坐標面上，作各圓柱面之踪線(圖 1).於是探求一平面垂直於坐標軸，此坐標軸不與任一圓柱面之發生線平行者.在本例題中，此平面爲 $y=k$. 命此平面交 y 軸於 K 點.此平面交兩踪線於 A, B, C, D 四點.每一交點，必有

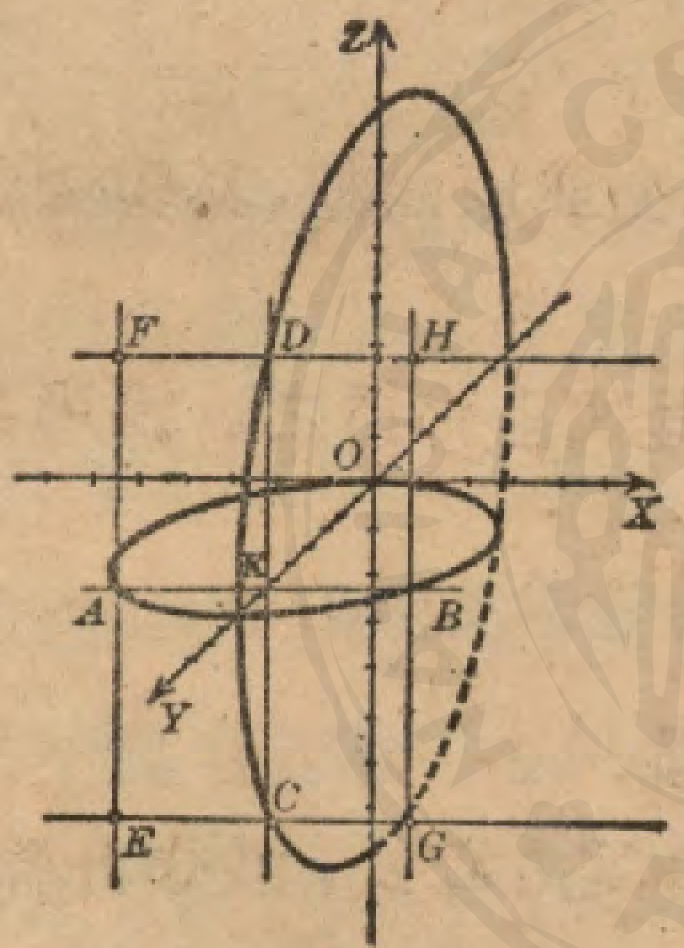


圖 1

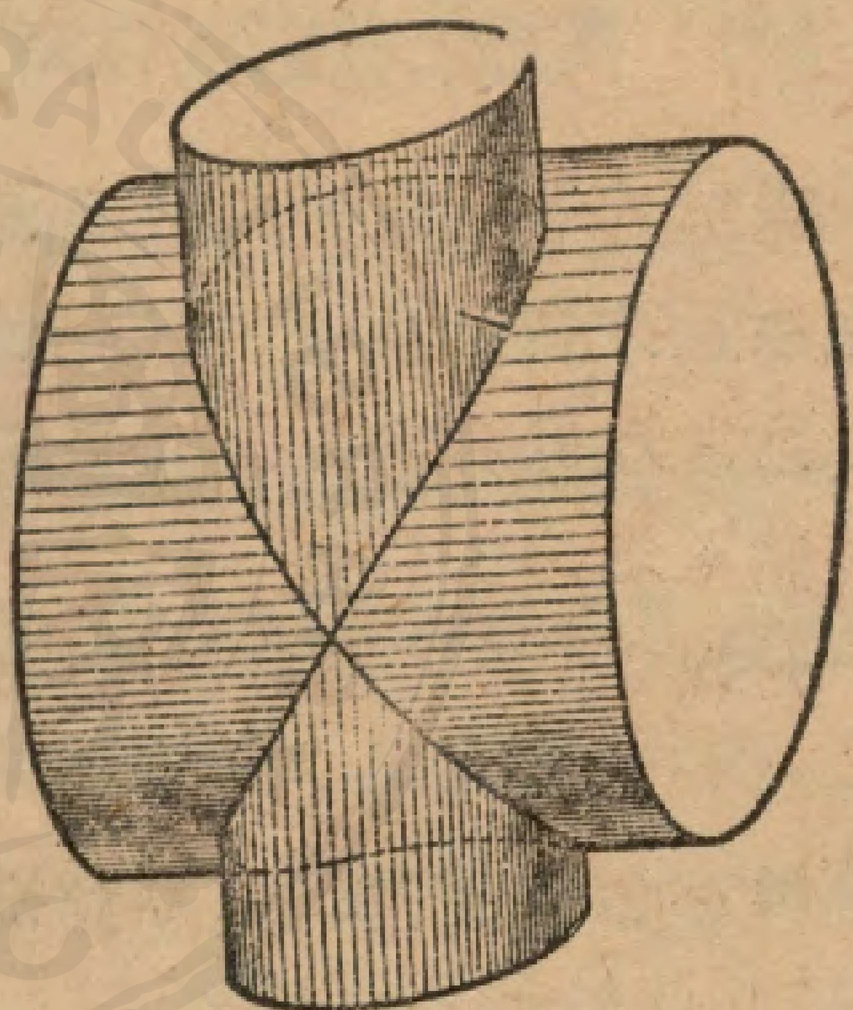


圖 2

一相當圓柱面之發生線通過之，此四發生線全在此平面內.此等發生線之交點 E, F, G, H 爲兩圓柱面相交之曲線上之點.如取平面 $y=k$ 之數個位置，即得足用之諸點以作此全曲線，如圖 2 所示.

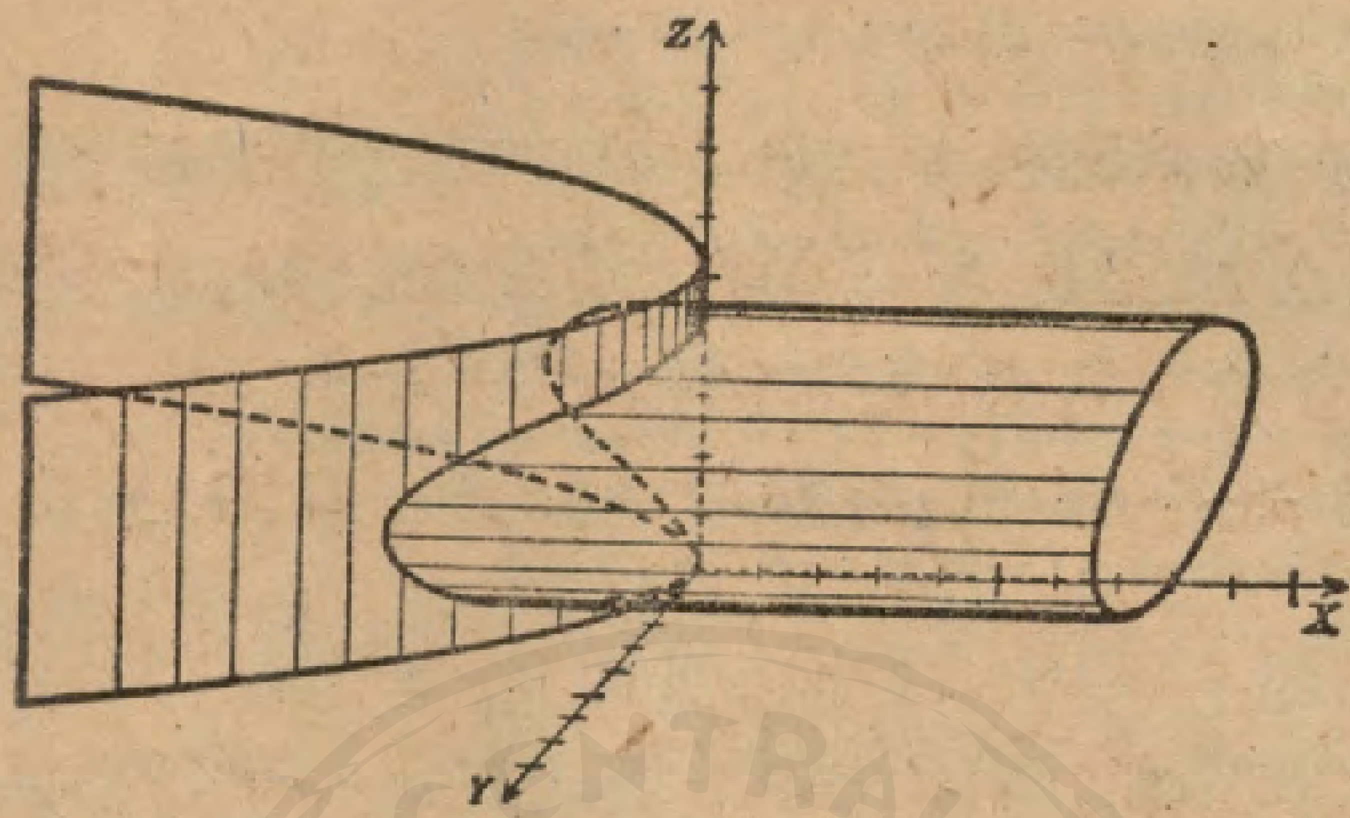
(2) 曲線之方程式爲

$$2y^2+z^2+4x=4z,\ y^2+3z^2-8x=12z,$$

求其投影圓柱面之方程式，並作此曲線.(又可參閱第 312 頁上例題以得其第二解).

［解］ 輪流消去 x, y, 與 z, 即得其投影圓柱面之方程式

$$y^2+z^2=4z,\quad z^2-4x=4z,\quad y^2+4x=0.$$



圖示其中之第一與第三圓柱面，相交於原曲線，其作法即用上例之法．

通常最好將投影圓柱面之三個方程式全化得之，因可選取二個較簡單者以便作圖．

直線之"投影圓柱面"爲投影平面．

習　　題

(1) 證明下列曲面爲圓柱面．討論其方程式，並作此等曲面．

(a) $x-y^2+z=0$.　　(e) $x^2+2xy+y^2=4z$.

(b) $xz+yz-1=0$.　　(f) $y^2-2yz+z^2=4-x^2$.

(c) $y^2-2x-3z=0$.　　(g) $x^2-4xy+4y^2=z-1$.

(d) $y^2-4(x+z)+8=0$.　　(h) $x^2+9y^2+4z^2-12yz=4$.

(2) 證明下列曲面爲圓柱面．作此等曲面．

(a) $(x+z)(y+z)=4$.　　(c) $(x+y)^2+(x-z)^2=a^2$.

(b) $(x+z)^2=y+z$.　　(d) $(y+z-a)^2+(x-z)^2=a^2$.

(3) 作下列各對曲面相交之曲線．

(a) $x^2+y^2=36, y-z=0$.

(b) $x^2+y^2-4x=0, x^2+z^2-4=0$.

(c) $x^2+4z^2-8z=0, x+y-1=0$.

(d) $y^2-4z=0, x^2-z-4=0$.

(4) 求下列各曲線之投影圓柱面之方程式並將此曲線當作其中之二圓柱面之交線而作之:

(a) $x^2+y^2+z^2=25, x^2+4y^2-z^2=0.$
(b) $x^2+4y^2-z^2=16, 4x^2+y^2+z^2=4.$
(c) $x^2+y^2=4z, x^2+y^2-4x=0.$
(d) $x^2+2y^2+4z^2=32, x^2+4y^2=4z.$
(e) $x^2-10y-5z-25=0, x^2+2y^2+5z+10y-25=0.$
(f) $x^2+2y^2+4z-4=0, 2x^2+5y^2+12z-8=0.$
(g) $y^2-x^2+2z^2+7y-72=0, x^2-z^2-7y+36=0.$
(h) $2x^2+y^2-9z=0, y^2+9z-72=0.$
(i) $x^2+y^2-z-1=0, x^2-y^2-z+1=0.$

(5) 在題 1 (f) 中,證明亦可從 $y-z-kx-2k=0, k(y-z)-2+x=0$. 以求得之.證明此等方程式規定一平行線系.用同法研究題 1 (h).

特設習題

(6) 證明二平面系 $4x\pm12z=k$ 與橢圓 $9x^2+25y^2+169z^2=100$ 相交成諸圓.

(7) 證明平面 $3x+y=10$ 切於圓柱面 $x^2+y^2-10=0$. 寫出此平面切於圓柱面處之發生線之方程式.

(8) 作下列諸曲面並在第一曲面爲第二曲面所截之部份以暗色表之:

(a) $x^2+4y^2+9z^2=36, x^2+y^2+z^2=16.$
(b) $x^2+y^2+z^2=64, x^2+y^2-8x=0.$
(c) $4x^2+y^2-4z=0, x^2+4y^2-z^2=0.$

(9) 作圖並描述由下列曲面所圍成之立體:

(a) $x^2+y^2=a^2, z=mx, z=0;$
(b) $x^2+y^2=az, x^2+y^2=2ax, z=0.$

(10) 一點移動時其離一定點之距離常等於其離一定線之距離.證明此軌跡爲一拋物線圓柱面 (Parabolic cylinder).

(11) 一點移動時,其離二正交直線之距離之平方差爲一常數.證明此軌跡爲一雙曲線圓柱面 (Hyperbolic cylinder).

(12) 一點移動時,其離二平面之距離和等於其離第三平面之平方.此三個平面互相垂直.證明此軌跡爲一圓柱面.

(13) 一點移動時,其離二平面之距離和等於其離第三平面之距離之平方根. 證明其軌跡爲一拋物線圓柱面當三平面互相垂直時.

152. 空間曲線之通徑方程式 設一點 P 之坐標 x, y, 與 z 爲一變數(通徑)之函數,則 P 之軌跡爲一曲線(比較第 92 節).

例如,設

(1) $$x=\frac{1}{4}t^2,\ y=1-2t,\ z=3t^3+2,$$

其中 t 爲一變數(通徑),則 (x,y,z) 之軌跡爲空間一曲線 給 t 以各種數值,計算 x,y, 與 z, 作出諸點而聯成一連續之曲線,卽作得此曲線. 方程式(1)稱爲此曲線之通徑方程式.

從各對方程式中消去其通徑後卽得此曲線,(1)之軌跡之投影圓柱面之方程式. 如,取前兩個方程式,

(2) $$x=\frac{1}{4}t^2,\ y=1-2t,$$

從第二方程式,得 $t=\frac{1}{2}(1-y)$,代入第一中,得

(3) $$4x=\frac{1}{4}(1-y)^2 \text{ 或 } (y-1)^2-16x=0,$$

而其軌跡在此拋物線圓柱面上.

同樣,從(1)中第一與第三方程式

$$x=\frac{1}{4}t^2,\ z=3t^3+2,$$

消去 t, 得立方圓柱面 (Cubic cylinder).

(4) $$(z-2)^2=576x^3.$$

故曲線(1)爲圓柱面(3)與(4)相交所成之曲線.

有時以用通徑求空間曲線之方程式爲便.

例 題

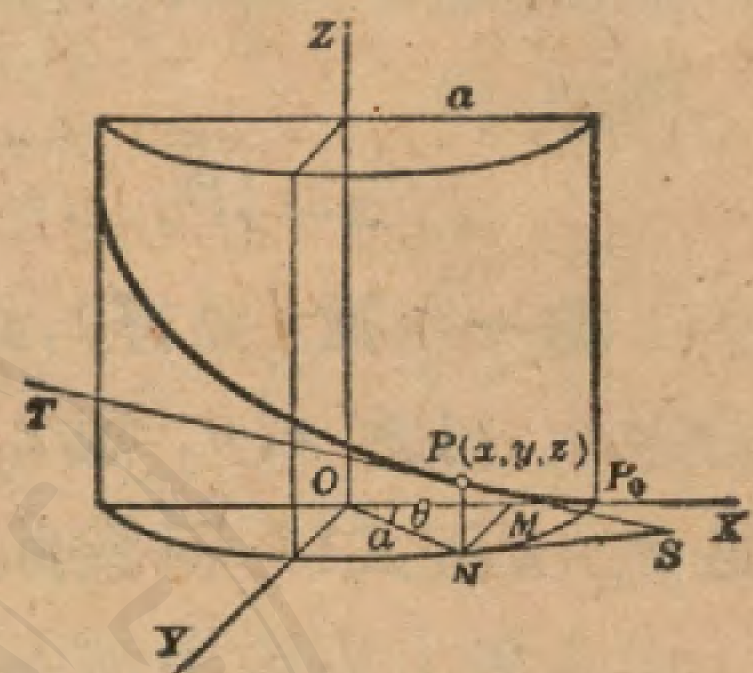
螺線 (Helix) 之方程式 一點在一正直圓柱面上移動時, 其平行於圓柱面之軸所移動之距離與繞軸所成之角成正比. 求其軌跡之方程式.

［解］　選擇坐標軸使圓柱面之方程式爲

(5)　　　$x^2+y^2=a^2$,

如圖.

命 OX 上之 P_0 爲動點之一位置，P 爲其他任一位置.於是從定義，距離 N $(=z)$ 與角 XON $(=\theta)$ 成正變；卽 $z=b\theta$，其中 b 爲一常數.



再，從圖，

$$x=OM=ON\cos\theta=a\cos\theta,$$

$$y=MN=ON\sin\theta=a\sin\theta.$$

故此螺線之方程式爲

(6)　　$x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=b\theta,$

其中 θ 爲一通徑.　答.

從方程式(6)中前兩個方程式消去 θ，則得(5).

已知投影圓柱面，求曲線之通徑方程式.在第 94 節中，一平面曲線可有無數之通徑方程式.空間曲線亦然.現說明如下.

例　　　題

求下列曲線之通徑方程式

$$2y^2+z^2+4x=4z,\quad y^2+3z^2-8x=12z.$$

［解］　其諸投影圓柱面爲(見第 151 節，例題 2)，

(7)　　$y^2+z^2=4z$　$z^2-4x=4z$，$y^2+4x=0$.

若命 $y=2t$，則最後之方程式爲 $x=-t^2$.從其餘二圓柱面之一可得

$$z=2\pm2\sqrt{1-t^2}.$$

故已知曲線爲

(8)　　$x=-t^2$, $y=2t$, $z=2\pm2\sqrt{1-t^2}$.　答.

此曲線現可由此等方程式作之.

如命(7)中任一坐標等於他種通徑之函數時，可得其他通徑方程式.固然，目的在求一簡單之通徑方程式.所用之法須隨所設之問題而定.

習　　題

(1) 求下列各對已知曲面相交之曲線之簡單通徑方程式．從此等通徑方程式，作此曲線．

(a) $y^2-4z=0, 4x+z^2=0.$　　答 $x=-\frac{1}{4}t^4, y=2t, z=t^2.$

(b) $x^2-9z+36=0, x^2+y^2-36=0.$

(c) $x^2+y^2-25=0, 3x-z^2=0.$

(d) $x^2+y^2-2y=0, y^2+z^2-4=0.$

(e) $x^2+y^2-25=0, x^2+z^2-25=0.$

(f) $2y^2+z^2+4x-4z=0, y^2+3z^2-8x-12z=0.$

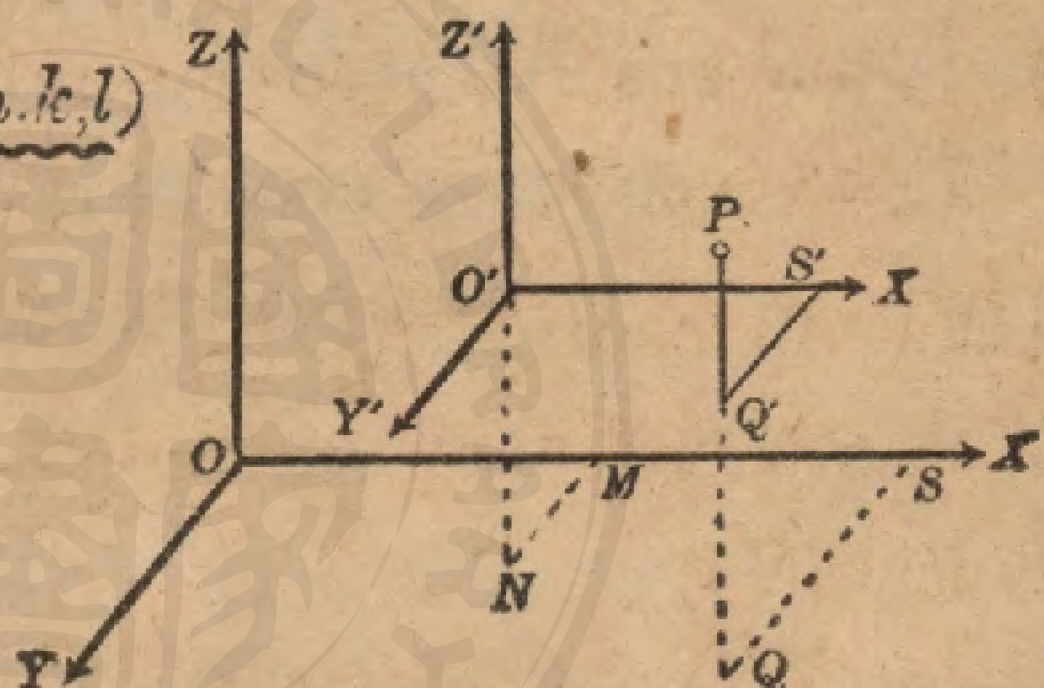
(2) 求其通徑方程式並由此等方程式作其軌跡以驗證第 151 節題 3 與題 4 中所作各曲線．

第 十 七 章

坐標之變換　各種坐標制

153. 移軸法 (Translation of the axes) 用於空間之公式與第七章中用於平面之公式全相似.說明如下.

定理 移軸至新原點 $O'(h,k,l)$ 後之方程式為



$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} x=x'+h, \\ y=y'+k, \\ z=z'+l. \end{cases}$$

［證］ 命任一點移軸前後之坐標各為(x,y,z)與(x',y',z').圖中,$OM=h$, $OS=x$, $O'S'=x'$. 但 $OS=OM+MS=OM+O'S'$. 故 $x=x'+h$. 其他二公式之證相同. *Q.E.D.*

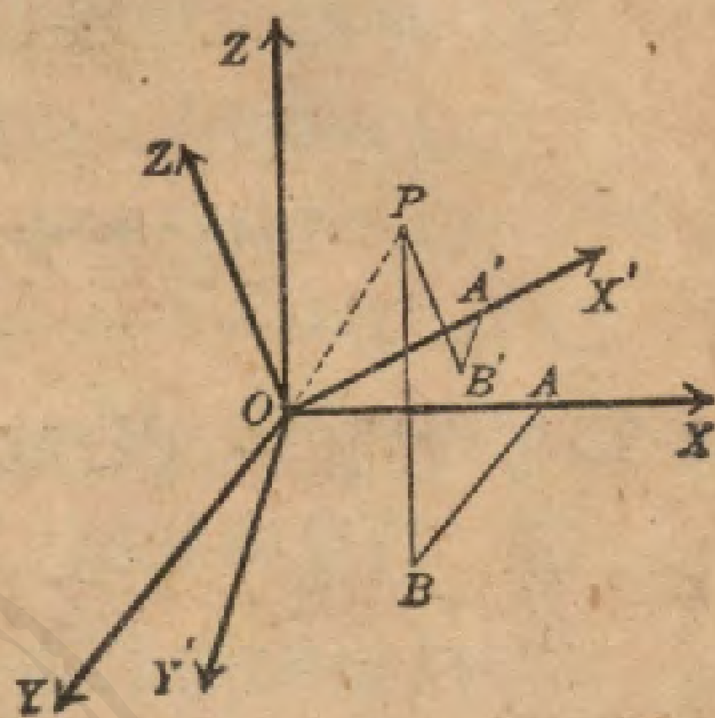
154. 轉軸法(Rotation of the axes) 設兩坐標軸繞第三軸而旋轉,則簡單轉軸方程式卽由此發生.例如,當 OX 與 OY 軸繞 z 軸轉一 θ 角,則任一點 P 之 z 坐標不變,而其 x 與 y 之新坐標可由第 61 節公式(II)得之.故得

定理 二坐標軸繞 z 軸旋轉一θ 角後之方程式為

$$\text{(II)}\qquad x=x\cos\theta-y\sin\theta,\quad y=x\sin\theta+y\cos\theta,\quad z=z'.$$

當兩軸繞 x 軸或 y 軸旋轉時,同樣可得其他兩公式.

設三軸全繞原點轉至一新位置 $O-X'Y'Z'$,又設任一點 P 轉軸前後之坐標各為 (x,y,z) 與 (x',y',z'),則得



定理 設 $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$, 與 $\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$, 各為互相垂直之三直線 OX', OY', 與 OZ' 之方向角,則轉軸至位置 $O-X'Y'Z'$ 後之方程式為

$$
\text{(III)}\quad \begin{cases} x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3, \\ y=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3, \\ z=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3. \end{cases}
$$

[證] 命 $\angle XOP=\theta$. 將 OX 與 OP 參照新軸 OX', OY', OZ'. 則 OX 之方向角為 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 命 OP 之方向角為 α',β',γ'. 於是從第 117 節 (IV),

$$\cos\theta=\cos\alpha'\cos\alpha_1+\cos\beta'\cos\alpha_2+\cos\gamma'\cos\alpha_3.$$

以 $\rho=OP$ 乘兩邊,更注意 $\rho\cos\theta=x$, $\rho\cos\alpha'=x'$, $\rho\cos\beta'=y'$, $\rho\cos\gamma'=z'$, 即得 (III) 中之第一公式. 其他公式可用同法證明之. Q.E.D.

OX', OY' 與 OZ' 之方向餘弦顯然適合下列六方程式.

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1,$$

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0,$$

$$\cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2=1,$$

$$\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3=0,$$

$$\cos^2\alpha_3+\cos^2\beta_3+\cos^2\gamma_3=1,$$

$$\cos\alpha_3\cos\alpha_1+\cos\beta_3\cos\beta_1+\cos\gamma_3\cos\gamma_1=0.$$

故 (III) 中之九個常數,祇有三個獨立.

定理　坐標變換,方程式之冪次仍不變.

此可用第 68 節之理以證之.

習　　題

(1) 移軸至所示點以變換下列各方程式.述曲面之名稱.

(a) $x^2+y^2-4x+2y-4z+1=0$;$(2,-1,-1)$.　　答　$x^2+y^2-4z=0$.

(b) $4x^2+9y^2-36z^2-16x-18y+216z-385=0$;$(2,1,3)$.

(c) $2x^2-5y^2-3z^2+20x-4z-46=0$;$(-5,0,\frac{2}{3})$.

(d) $x^2+y^2-4z^2-4x-y-4z-3=0$;$(2,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

(2) 將坐標軸繞(1)x 軸;(2)y 軸旋轉 θ 角而導出其方程式.

(3)用移軸法或繞一坐標軸之轉軸法(見第 58,64 節)以證下列方程式可變爲答案中之方程式.述曲面之名稱及與原軸之關係.

(a) $x^2+y^2-z^2-6x-8y+10z=0$.　　答　$x^2+y^2-z^2=0$.

(b) $3x^2-8xy+3y^2-5z^2+5=0$.　　答　$x^2-7y^2+5z^2=5$.

(c) $y^2+4z^2-16x-6y+16z+9=0$.　　答　$y^2+4z^2=16x$.

(d) $2x^2-5y^2-5z^2-6yz=0$.　　答　$x^2-4y^2-z^2=0$.

(e) $9x^2-25y^2+16z^2-24zx-80x-60z=0$.　　答　$x^2-y^2=4z$.

(4) 用坐標變換法,將下列方程式化爲第 141 節之二次曲面標準式(1)或(2).

(a) $x^2+4y^2+6z^2-8x+8y=0$.　　(d) $x^2+3xy+y^2+z^2-6z=0$.

(b) $x^2+xy+y^2+z^2-3=0$.　　(e) $x^2+y^2+6y-6z-18=0$.

(c) $3y^2-5yz+3z^2-8x=0$.　　(f) $x^2+xy+y^2-2z^2+5x=0$.

(5) 轉軸至一位置其方向餘弦各爲 $\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}$;$\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}$;$\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}$;以變換方程式 $5x^2+8y^2+5z^2-4yz+8zx+4xy-4x+2y+4z=0$.　　答　$3x^2+3y^2=2z$.

(6) 將坐標軸繞 x 軸旋轉使 y' 軸之方向餘弦爲 $(0,\frac{1}{2}\sqrt{3},\frac{1}{2})$,以變換方程式

$$5x^2-2y^2+11z^2+12xy+12yz-16=0.$$

(7) 用轉軸法使其新方向餘弦爲 $-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3},\frac{1}{3}$; $-\frac{2}{3},\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$. 以變換方程式 $5x^2+5y^2+2z^2+2xy-4yz+4xz+6x-6y-12z=0$.

(8) 轉軸至一位置使其方向數爲 $2,-1,-1$; $0,1,-1$; $1,1,1$; 以變換方程式 $x^2+2y^2+6z^2-2x-2y+18z+9=0$.

(9) 證明繞 z 軸之轉軸法常可消去 $Ax^2+By^2+Cz^2+Fxy+K=0$ 中之 xy 項.

(10) 設 (x,y,z) 與 (x',y',z') 各爲一點轉軸前後之坐標，證明

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2.$$

(11) 用變換坐標法化下列各方程式爲標準式（第 141 節）而決定其所代表之拋物面之形式：

(a) $z=xy$.　　(c) $x^2+2y^2-6x+4y+3z+11=0$.

(b) $z=x^2+xy+y^2$.　　(d) $z^2-3y^2-4x+2z-6y+1=0$.

(12) 一點至一固定平面與至一固定點之距離相等. 證明其軌跡爲一旋轉橢圓拋物面.

(13) 一點至不相交之兩垂直線之距離相等. 證明其軌跡爲一雙曲線拋物面.

155. 三元二次方程式之軌跡　其最普通之方程式爲

$$(1)\qquad Ax^2+By^2+Cz^2+Dyz+Ezx+Fxy+Gx+Hy+Iz+K=0,$$

稱爲二次曲面 (Quadric surface) 或圓錐面 (Conicoid). 吾人可用其截口以研究其一部份之性質. 先得

定理 1　二次曲面與任一平面之截線爲一圓錐曲線或爲一退縮圓錐曲線.

［證］ 用坐標變換法，任一平面可作爲 XY 平面，$z=0$. 對於任何坐標軸，二次方程式有 (1) 之形式（由第 154 節最後之定理）. 故所截曲線之方程式對於在其本平面 $z=0$ 內坐標軸有下之形式

$$Ax^2+Fxy+By^2+Gx+Hy+K=0,$$

面其軌跡從第 63 節可知爲一圓錐曲線或一退縮圓錐曲線.

$Q.E.D.$

如在第 54 節中所指出者,拋物線,橢圓,與雙曲線最初卽作爲圓錐曲線,——一旋轉圓錐曲面之平面截口.此種曲面爲一直線繞一相交軸而成,並含有兩葉(或面包 nappes).從上述定理並直覺下述命辭顯然眞實:

系 一旋轉圓錐面被一平面所截之截口,當此平面截一葉上之一切發生線時,爲一橢圓;當此平面截一葉上之一切發生線而與此平面平行之一發生線除外時,爲一拋物線;當此平面截兩葉之發生線時,爲一雙曲線.

對於用一組平行平面所得二次曲線之諸截口有下列重要結果:

定理 2 一二次曲線與一平行平面系之截口爲同種之圓錐曲線.

[證] 理由同定理 1,祇須研究一平面系 $z=k$ 中之截口.在(1)中,命 $z=k$,在此平面內之截口之方程式爲

(2) $$Ax^2+Fxy+By^2+D'x+E'y+G'=0,$$

其中祇 D',E',G' 爲 k 之函數.故判別式,$F^2-4\ AB$ 與 k 無關.故該定理可由第 63 節得之.

$Q.E.D.$

本定理之意義如此:一組平行截口皆爲橢圓,或皆爲雙曲線,或皆爲拋物線,各種特例(第 63 節)包括在內.

156. 三元二次普徧方程式之化簡法 此可更進一步證明如下:設方程式(1)用轉軸法改變,則可選取新軸使其中之 yz, zx, 與

xy 消去.故(1)化成

$$A'x^2+B'y^2+C'z^2+G'x+H'y+I'z+K=0.$$

設用移軸法變換此方程式，則頗易證明選擇新軸使變換後之方程式必有下列之一式

(1) $$A''x^2+B''y^2+C''z^2+K''=0,$$

(2) $$A''x^2+B''y^2+I'z=0.$$

注意(1)與(2)中之異點.(1)中各變數皆為平方,無一代表一次者.(2)中祇有二平方而其他一變數為一次.

設(1)與(2)中之一切係數皆不為零,則改其記法,可寫作

(3) $$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1,$$

(4) $$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=2cz.$$

(3)與(4)兩方程式已於第 142－146 節中討論之.其軌跡為普遍二次曲面.

設(1)或(2)中有一個或多個係數為零,則其軌跡稱為退縮二次曲面 (Degenerate quadric).

其特例,可用前述結果處理之.

設 $K''=0$,(1)之軌跡為一圓錐面(第 139 節之定理),但 A'', B'',與 C'' 之符號相同時,其軌跡為一點,卽原點是也.

設 A'', B'',與 C'' 係數中之一為零,則(1)之軌跡為一圓柱面其發生線平行於一坐標軸而其準線為一橢圓形或雙曲線形之圓錐曲線.又設 $K''=0$,其軌跡為一對相交平面,或此方程式祇為一坐標軸上一切點所適合.

設 A'', B'', 與 C'' 係數中之二爲零，則其(1)之軌跡爲一對平行平面(若 $K''=0$，則重合)或無軌跡.

設 (2) 中有一係數爲零，則軌跡爲一圓柱面其準線爲一拋物線，或一對相交平面，或 z 軸. 設有二係數爲零，則軌跡爲一對重合之平面. (A'' 與 B'' 不能同時爲零，因方程式須保住其二次式).

習　　題

(1) 述下列各退縮二次曲面之名稱:

(a) $9x^2-36y^2+4z^2=0$.　　(e) $y^2-25=0$.

(b) $16x^2-4y^2-z^2=0$.　　(f) $y^2+7z^2=0$.

(c) $4x^2+z^2-16=0$.　　(g) $8y^2+25z=0$.

(d) $y^2-9z^2+36=0$.　　(h) $z^2+16=0$.

(2) 用坐標變換法證明下列各二次曲面爲退縮曲面:

(a) $x^2-y^2+z^2-6z+9=0$.

(b) $x^2+4y^2-z^2-2x+8y+5=0$.

(c) $x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z+6=0$.

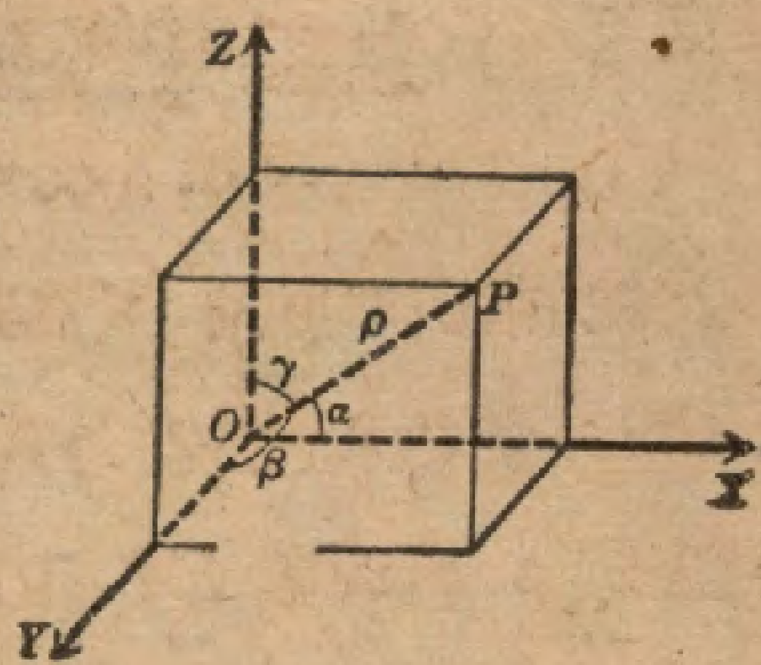
(d) $x^2+y^2-2z^2+2y+4z-1=0$.

(e) $x^2+yz=0$.

(f) $4x^2-y^2+9z^2+16x+6y+18z+16=0$.

(g) $3x^2-6xy+xz-2yz+12x-6y+3z+6=0$.

157. 極坐標　從原點作直線 OP 至任一點 P 稱爲 P 之動徑. 動徑 ρ, 與 OP 之方向角，卽 α, β, 與 γ, 稱謂 P 之極坐標.



此等數值非全爲獨立者，因 α, β, 與 γ 適合第 114 節(I). 若其中二數爲已知，卽可求得第三數，但爲對稱起見，三者皆保留之.

定理　直角坐標與極坐標間之關係為

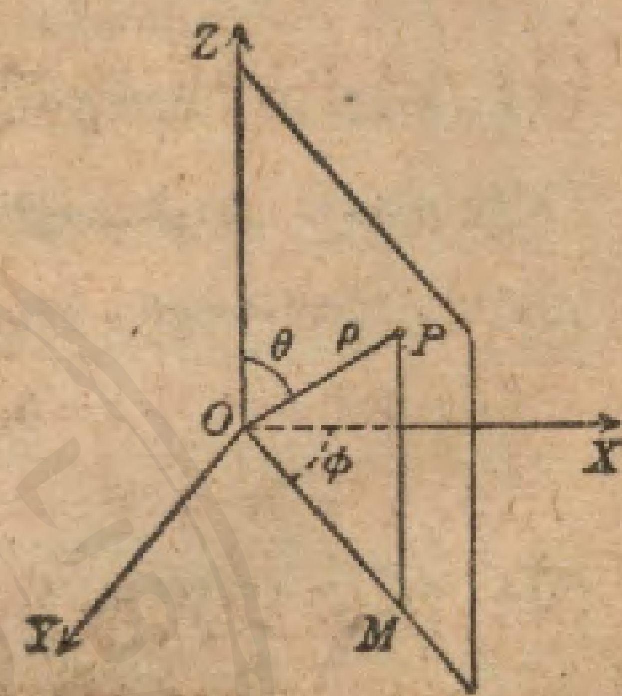
(IV)　　$x=\rho\cos\alpha,\ y=\rho\cos\beta,\ z=\rho\cos\gamma.$

顯然

(1)　　$\rho^2=x^2+y^2+z^2$

即以 x, y, 與 z 表動徑.

158, 球面坐標 (Spherical coördinates)　一點 P 之動徑 ρ, 在 OP 與 z 軸間之角 θ, 及 OP 在 XY 平面上之投影與 x 軸間之角 ϕ 稱為 P 之球面坐標　θ 稱為餘緯度 (Colatitude) 而 ϕ 稱為經度 (Longitude). P 之球面坐標寫成 (ρ, θ, ϕ)



從圖.

$$z=MP=\rho\cos\theta,$$

$$OM=\rho\sin\theta;$$

又

$$x=OM\cos\phi,$$

$$y=OM\sin\phi.$$

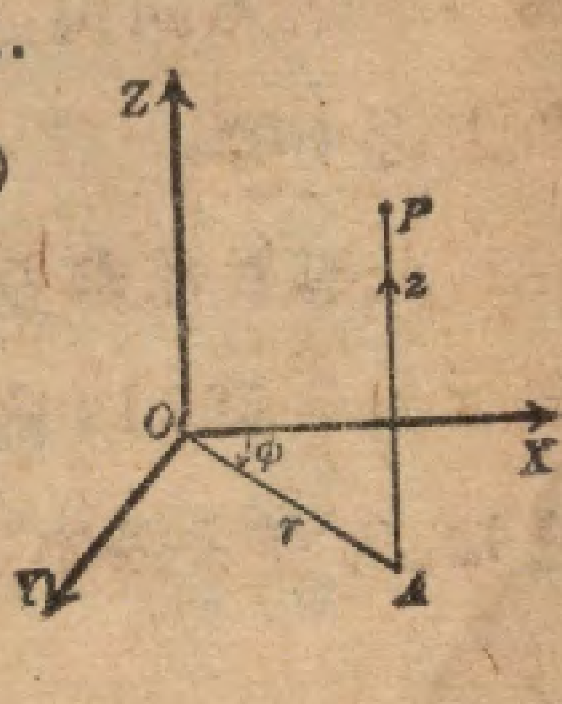
故得

定理　直角坐標與球面坐標間之關係為

(V)　　$x=\rho\sin\theta\cos\phi,\ y=\rho\sin\theta\sin\phi,\ z=\rho\cos\theta,$

其他關係式可解(V)以求 ρ, θ, 與 ϕ 而得之.

159. 圓柱面坐標 (Cylindrical coördinates)　一點 $P(x, y, z)$ 與 XY 平面之距離 z 及 P 點在 XY 平面上之投影 $(x, y, 0)$ 之極坐標 (r, ϕ) 稱為 P 之圓柱面坐標. 其寫法為 (r, ϕ, z).



定理 直角坐標與圓柱面坐標間之關係爲

(VI)　　$x=r\cos\phi,\ y=r\sin\phi,\ z=z.$

其他關係式可解(VI)以求 r 與 ϕ.

習　　題

(1) 求下列各點之極坐標與球面坐標:

(a) (0,2,0);　(b) (3,4,12);　(c) (−2,2,−1).

(2) 作下列諸點,其球面坐標爲

(a) (2,90°,60°);　(b) (5,120°,90°);　(c) (9,−135°,120°).

(3) 求題 2 中各點之直角坐標.

(4) 一點之圓柱面坐標爲 (4,45°,6), 作此點.其直角坐標爲何?

(5) "一方程式之軌跡"在極坐標 ρ,α,β, 與 γ 中之意義爲何?在球面坐標 ρ,θ, 與 ϕ 中?在圓柱面坐標 r,ϕ, 與 z 中?

(6) 設已知其極坐標方程式, 如何求此曲面在直坐標軸上之截部?設已知其球面坐標方程式?設已知其圓柱面坐標方程式?

(7) 改下列方程式爲極坐標方程式:

(a) $x^2+y^2+z^2=25$.　答 $\rho=5$.

(b) $x^2+y^2-z^2=0$.　答 $\gamma=\frac{1}{4}\pi$.

(c) $2x^2-y^2-z^2=0$.　答 $\alpha=\text{arc}\cos\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

(d) $x^2-y^2+z^2=0$.

(8) 改下列方程式爲球面坐標方程式:

(a) $x^2+y^2+z^2=16$.　答 $\rho=4$.

(b) $2x+3y=0$.　答 $\phi=\text{arc}\tan(-\frac{2}{3})$.

(c) $3x^2+3y^2=7z^2$.　答 $\theta=\text{arc}\tan\frac{1}{3}\sqrt{21}$.

(d) $x^2-y^2+z^2=0$.

(e) $x^2+y^2-4z^2=0$.

(9) 改下列方程式爲圓柱面坐標方程式:

(a) $5x-y=0$.　答 $\phi=\text{arc}\tan 5$.

(b) $x^2+y^2=4$.　答 $r=2$.

(c) $x^2+y^2-z^2=0$.

(10) 描述下列各方程式之軌跡：

極坐標 (a) $\rho=$常數. (b) $\alpha=$常數.

球面坐標 (a) $\rho=$常數. (b) $\theta=$常數. (c) $\phi=$常數.

圓柱面坐標 (a) $r=$常數. (b) $\phi=$常數.

(11) P 點 (a, b, c) 三個互相垂直之平面 $x=a, y=b, z=c$ 之交點.參考上題,描述相交於 P 點之三曲面,當 P 之

(a) 球面坐標爲 $(\rho_1, \theta_1, \phi_1)$ 時;

(b) 圓柱面坐標爲 (r_1, ϕ_1, z_1) 時.

(12) 證明其極坐標爲 $(\rho_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ 與 $(\rho_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ 之兩點間之距離 r 之平方爲

$$r^2=\rho_1{}^2+\rho_2{}^2-2\rho_1\rho_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2 +\cos\gamma_1\cos\gamma_2).$$

(13) 求在極坐標制中一球面之普遍方程式.

答 $\rho^2+\rho(G\cos\alpha+H\cos\beta+I\cos\gamma)+K=0$.

索　引

中華民國三十七年二月新十版

斯蓋尼三氏解析幾何學

實價 外加運費匯費

原著者 Smith—Gale—Neelley
譯者 邱調梅
校訂者 馬地泰
發行人 李煜瀛
出版者 世界書局
發行所 世界書局

逸文購於建中 38.9.30