$\sqrt{13^2-5^2}=12$, 卽チ 12 寸,

故ニ其ノ對角線ハ 12寸×2=24寸, 卽チ 2尺4寸.

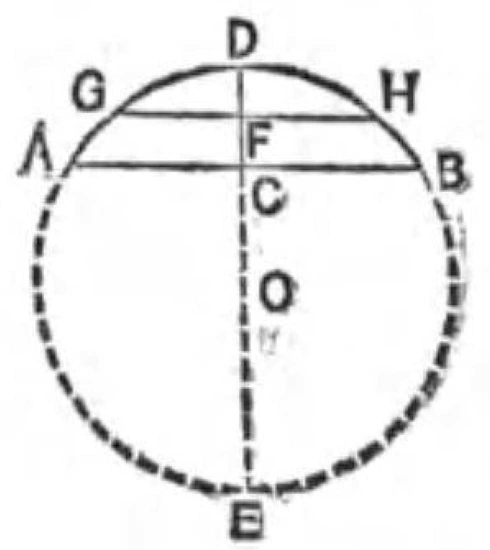
次ニ直角三角形ノ面積ノ 2 倍ハ

12×5=60, 卽チ 60 平方寸

ナルガ故ニ菱形ノ面積ハ 60平方寸×2=120平方寸.

15. 幅60尺ノ河ニ水面ヨリ架セル弧線ノ橋アリ, 高サ 18尺ナリ. 此ノ弧線ノ半徑ヲ求ム. 又若シ河水ガ溢レテ 14 尺ヲ沒スルトキハ橋ノ弦ハ幾何トナルカ. [44. 陸. 經.]

解 AB ヲ河ノ幅, ADB ヲ橋, 其ノ高サヲ CD



トスレバ D, C ハソレゾレ弧 ADB, 弦 AB ノ中點ナリ.

今圓ノ中心ヲ O トシ, DC ノ延線ガ圓周ト交ル點ヲ E トスレバ AB=60尺, CD=18尺

ナルユヱ AC=30尺.

而シテ $\overline{AC}^2$=DC.CE ナルユヱ所要ノ半徑ヲ x 尺トスレバ DE=2x尺, 依リテ $30^2=18(2x-18)$

故ニ $x=34$, 卽チ 34 尺ナリ.

又河水ガ溢レテ 14 尺ヲ沒シタルトキノ水面

ヲ GH トシ; CD, GH ノ交點ヲ F トスレバ

CF=14尺, 從ヒテ DF=18尺−14尺=4尺,

依リテ $\overline{GF}^2$=DF.FE=4×64,

故ニ所要ノ弦ノ長サ

GH=2GF=2×2×8=32,

卽チ 32 尺ナリ.

16. 二ツノ與ヘラレタル點ヲ過リ與ヘラレタル圓ニ切スル圓ヲ畫クコトヲ求ム.

[43. 東. 高. 商.]

解 302 頁 78 題ニ同ジ.

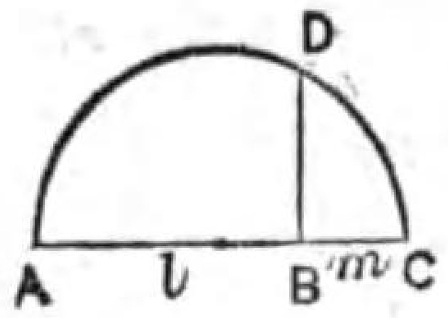
17. 半徑 r 寸ノ圓ニ外切スル等邊三角形ノ一邊ノ長サヲ求メヨ. [44. 海. 機.]

解 圓ニ外切スル等邊三角形ノ重心ハ圓ノ中心ト合シ, 又切點ハ各邊ノ中點ナリ. 故ニ外切等邊三角形ノ高サハ $3r$ 寸, 而シテ等邊三角形ノ一邊ハ高サノ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ナリ.

故ニ所要ノ長サハ $\frac{2}{\sqrt{3}}\times 3r$寸$=2\sqrt{3}r$寸.

18. 與ヘラレタル矩形ノ面積ニ等シキ面積ヲ有スル正方形ヲ畫ケ. [44. 專. 入. 檢.]

解 與ヘラレタル矩形ノ二邊ヲ l, m トス, 任



意ノ直線ヲ引キ，其ノ上ニ AB, BC ヲ順次ニ l, m ニ等シク取リ, AC ヲ徑トシテ半圓 ADC ヲ畫キ, B ヲ過リ, AC ニ垂線 BD ヲ引キ半圓 ADC トノ交點ヲ D トスレバ, BD ヲ一邊トスル正方形ハ所要ノモノナリ　如何トナレバ $AB.BC=\overline{BD}^2$ ナレバナリ.

19. 與ヘラレタル正方形ノ面積ノ 5 倍ニ等シキ正方形ヲ作レ.　[43. 七高.]

解　與ヘラレタル正方形ノ一邊ヲ a ニテ表ハシ a 及ビ $2a$ ヲ直角ノ二邊トシテ直角三角形ヲ作レバ其ノ斜邊上ノ正方形ハ $a^2+(2a)^2$, 即チ $5a^2$ ニ等シ，故ニ此ノ斜邊ハ即チ所要ノ正方形ノ一邊ナリ.

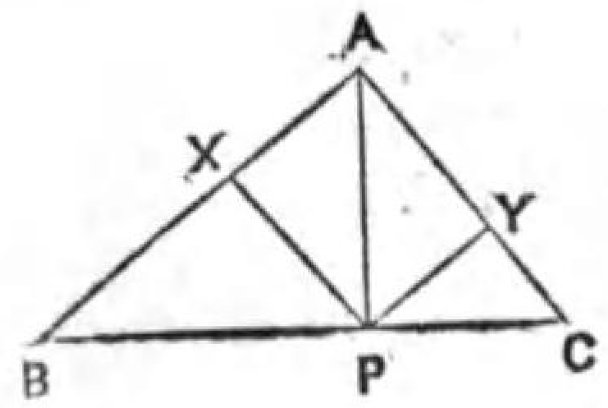
D'. 比　例

1. 直角三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ斜邊 BC ヘ垂線 AP ヲ引キ, P ヨリ二邊 AB, AC ヘ垂線 PX PY ヲ引ケバ BX ト CY トノ比ハ AB ト

AC トノ比ノ三乘比ニ等シ，之ヲ證セヨ.

[44. 東. 高. 師.]

證　三角形 XBP, XAP, YCP ハ皆三角形 ABC ニ相似ナルヲ以テ



$BX:XP=AB:AC$　(1)

$XP:XA=AB:AC,$

然ルニ $XA=PY$ ナルニヨ

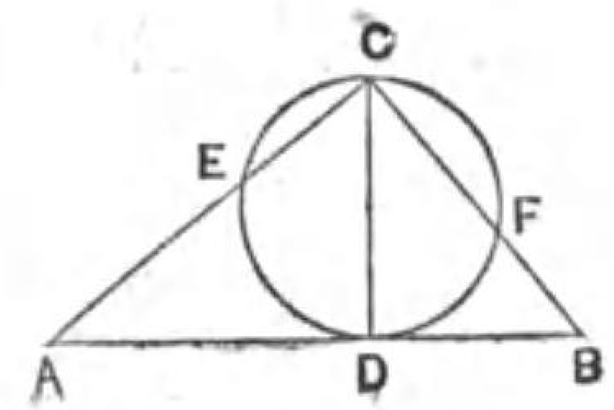
$XP:PY=AB:AC$ ... ... (2)

又　$PY:CY=AB:AC$ ... ... (3)

故ニ (1), (2), (3) ヨリ　$BX:CY=\overline{AB}^3:\overline{AC}^3$.

2. 直角三角形 ABC ノ斜邊 AB ヲ底トシ,其ノ高サ CD ヲ徑トスル圓ト，二邊 AC, CB トノ交點ヲソレゾレ E, F トス，而シテ BF, AE, BC 及ビ AC ヲ順次ニ x, y, a 及ビ b トスレバ $x:y=a^3:b^3$ ナリ，其ノ證ヲ問フ.　[43. 商船.]

證 I.　AB ハ D ニ於テ圓ニ切ス，故ニ



$AC.AE=\overline{AD}^2,$

$BC.BF=\overline{BD}^2,$

即チ　$by=\overline{AD}^2,$

$ax=\overline{BD}^2,$

$\therefore\ ax:by=\overline{BD}^2:\overline{AD}^2$ ... ... (1)

然ルニ $BD:AD=\overline{BC}^2:\overline{AC}^2=a^2:b^2$,

從ヒテ $\overline{BD}^2:\overline{AD}^2=a^4:b^4$,

故ニ (1) ヨリ $ax:by=a^4:b^4$,

故ニ $x:y=a^3:b^3$.

證 II. DE, DF ヲ結ビ付クレバ CEDF ハ矩形ニシテ △DBF, △CDF, △ADE ハ何レモ △ABC ニ相似ナルコト明カナリ.

故ニ $x:DF=a:b$, $DF:CF=a:b$,

$ED:y=a:b$, 故ニ $x:y=a^3:b^3$.

注意 本題ハ前題ト同意ナリ.

3. 直角三角形 ABC ノ直角 B ヲ二等分スル直線ガ AC ト F ニ於テ交リ外接圓ノ周ト D ニ於テ交レバ矩形 BD.BF ハ三角形 ABC ノ二倍ニ等シキコトヲ證セヨ. [43. 陸. 經]

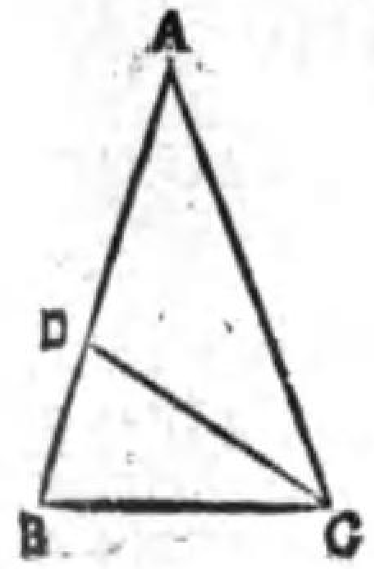
證 343 頁 **34** 題ニ同ジ.

4. 二等邊三角形 ABC ノ各底角ガ頂角 A ノ 2 倍ナルトキ $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+AB.BC$ ナルコトヲ證セヨ. [43. 陸. 經]

證 I. $\hat{C}$ ノ二等分線ト AB トノ交點ヲ D ト

セバ $A\hat{B}C=A\hat{C}B=2\hat{A}$ ナルユヱ

$A\hat{C}D=B\hat{C}D=\hat{A}$, 故ニ $C\hat{D}B=2\hat{A}$,



故ニ △ABC ∽ △CBD.

故ニ $AB:BC=BC:BD$,

故ニ $\overline{BC}^2=AB.BD$

$=AB(AB-AD)$,

而シテ $AD=BC$ ナルユヱ

$\overline{BC}^2=AB(AB-BC)=\overline{AB}^2-AB.BC$,

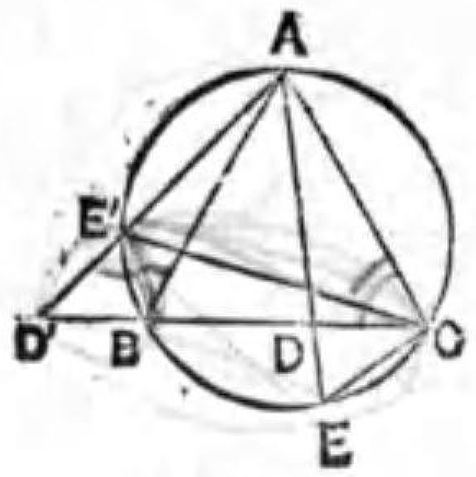
即チ $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+AB.BC$.

證 II. $\hat{A}=A\hat{C}D$ ナルユヱ BC ハ △ADC ノ外接圓ニ C ニ於テ切ス.

故ニ $\overline{BC}^2=AB(AB-AD)$, 以下證 I ト同樣ナリ.

5. 一ノ圓ニ內接スル二等邊三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ其ノ底邊上ノ任意ノ一點 D ニ引ケル直線 AD ガ圓周ト出會フ點ヲ E トセバ AD ト AE トノ包ム矩形ハ一定ノ大イサナルコトヲ證セヨ. D ヲ底邊ノ延線上ニ取ラバ如何. [44. 陸. 士.]

證 CE ヲ結ビ付クレバ △AEC, △ADC ニ於



テ $A\hat{E}C=A\hat{B}C=A\hat{C}B$,

$E\hat{A}C$ ハ共通ナルユエ

$\triangle AEC \backsim \triangle ACD$,

故ニ $AE:AC=AC:AD$,

故ニ $AE.AD=\overline{AC}^2$ (一定量).

次ニ CB ノ延線上ノ一點ヲ D′ トシ, AD′ ト圓周トノ交點ヲ E′ トス. CE′ ヲ結ビ付クルトキハ $\triangle AE'C$, $\triangle AD'C$ ニ於テ $E'\hat{A}C$ ハ共通,

$$A\hat{E'}C=A\hat{B}C=A\hat{C}B.$$

故ニ $\triangle AE'C \backsim \triangle ACD'$.

故ニ $AE':AC=AC:AD'$,

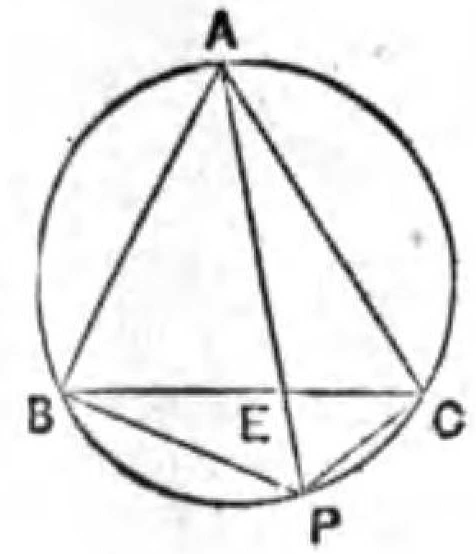
故ニ $AE'.AD'=\overline{AC}^2$ (一定量).

6. 正三角形 ABC ノ外接圓ノ弧 BC 上ニアル任意ノ一點 P ト點 A トヲ結ビ付クル直線ガ邊 BC ト點 E ニ於テ交ルトセバ

(1) $\triangle ABP \backsim \triangle PEC$, 依リテ

(2) $\overline{PA}^2=\overline{AC}^2+PB.PC$. [44. 各高等.]

證 (1) $B\hat{A}P=B\hat{C}P$, 又 $AB=AC$ ナルユエ $A\hat{P}B=A\hat{P}C$, 故ニ $\triangle ABP$, $\triangle CEP$ ハ等角ナリ. 故ニ互ニ相似ナリ. 依リテ



(2) $AP:BP=CP:EP$,

故ニ $AP.EP=BP.CP$.

又 $\triangle ABP \backsim \triangle AEB$

ニシテ $AP.AE=\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$.

依リテ $AP.EP+AP.AE=\overline{AC}^2+BP.CP$,

即チ $\overline{AP}^2=\overline{AC}^2+BP.CP$.

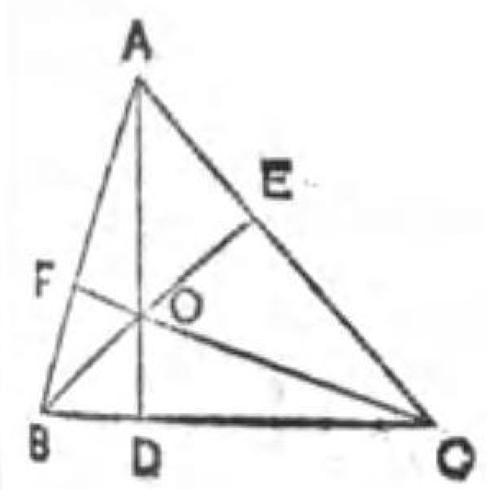
7. 三角形ノ頂角ヲ二等分スル直線ハ底ヲ二邊ノ比ニ分ツコトヲ證セヨ. [44. 東. 都. 靈. 講.]

證 397 頁 64 題ニ同ジ.

8. 三角形ノ各角頂ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル三ツノ直線ガ同一ノ點ヲ過リ此ノ點ニ於テ相等シキ矩形ヲ包ム分ニ分タルルトキハ此ノ點ハ此ノ三角形ノ垂心ナルコトヲ證明セヨ.

[43. 專. 入. 檢.]

證 I. 三角形 ABC ノ各角頂ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル三ツノ直線 AD, BE, CF ガ同一ノ點 O ヲ過リ $OA.OD=OB.OE=OC.OF$ トス.



$OA.OD=OB.OE$ ナルユエ

A, E, D, B ハ同一ノ圓周上ニアリ，

故ニ　$A\hat{D}B=A\hat{E}B$, 故ニ $A\hat{D}C=C\hat{E}B$,

然ルニ $OA.OD=OC.OF$ 及ビ $OB.OE=OC.OE$

ナルユヱ A, F, D, C 及ビ B, F, E, C モ亦ソレゾレ同一ノ圓周上ニアリ，故ニ $A\hat{D}C=A\hat{F}C$,

及ビ　$C\hat{E}B=B\hat{F}C$,

故ニ　$A\hat{F}C=B\hat{F}C$,

故ニ　$CF\perp AB$,

同樣ニ　$AD\perp BC$, $BE\perp CA$,

故ニ O ハ垂心ナリ.

證 II.　$AO.OD=BO.OE$

ナルユヱ　$AO:OE=BO:OD$,

而シテ三角形 OAE, OBD ノ O ニ於ケル角ハ對頂角ニシテ相等シ.

故ニ　$\triangle OAE\backsim\triangle OBD$.

同樣ニ　$\triangle OAF\backsim\triangle OCD$,

及ビ　$\triangle OBF\backsim\triangle OCE$.

依リテ　$A\hat{D}B=A\hat{E}B$,

$A\hat{D}C=A\hat{F}C$.

尙　$B\hat{E}C=C\hat{F}B$

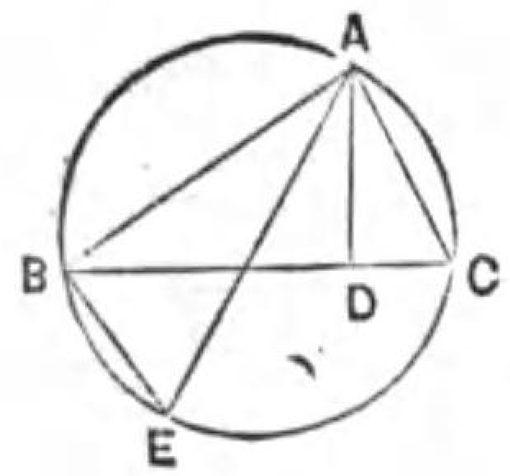
ナルユヱ各ノ補角ナル $A\hat{E}B=A\hat{F}C$.

故ニ　$A\hat{D}B=A\hat{D}C$,

卽チ　$AD\perp BC$, 云々.

9. 三角形ノ二邊ノ包ム矩形ハ其ノ夾ム角ノ頂點ヨリ引ケル高サト外接圓ノ徑トノ包ム矩形ニ等シキコトヲ證セヨ.　[44. 秋. 鑛. 專.]

證　三角形 ABC ノ高サヲ AD, 外接圓ノ徑ヲ AE トス. 然ルトキハ



$AB.AC=AD.AE$

ナルコトヲ證セン.

BE ヲ結ビ付クレバ

$\triangle ADC$, $\triangle ABE$

ニ於テ $A\hat{D}C=\hat{R}=A\hat{B}E$, $A\hat{C}D=A\hat{E}B$.

故ニ　$\triangle ADC\backsim\triangle ABE$.

故ニ　$AC:AD=AE:AB$.

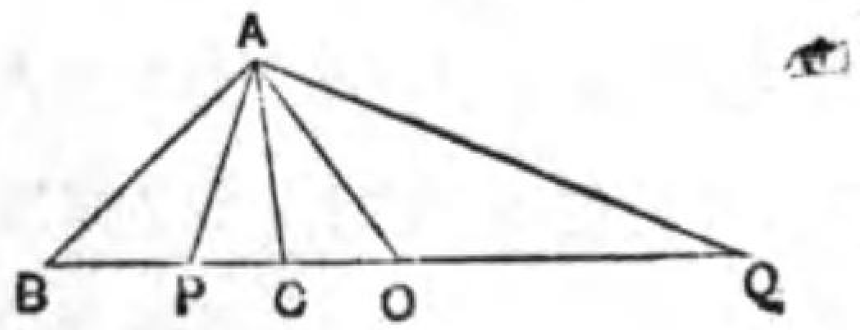
故ニ　$AC.AB=AD.AE$.

10. 三角形 ABC ノ頂角 A ノ二等分線ガ底邊 BC ニ交ル點ヲ P トシ, 又頂角 A ノ外角ノ二等分線ガ BC ノ延線ニ交ル點ヲ Q トセヨ. 今 PQ ノ中點ヲ O トシ下ノ二件ヲ證明セヨ.

(1) $OB.OC=\overline{OA}^2$. (2) $OB:OC=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$.

[43. 海. 機.]

證 (1) $P\hat{A}Q=\hat{R}$ ニシテ O ハ PQ ノ中點ナルユヱ



$$O\hat{A}P=O\hat{P}A$$
$$=P\hat{A}B+A\hat{B}P,$$

而シテ

$$C\hat{A}P=P\hat{A}B,$$

故ニ $O\hat{A}C=A\hat{B}P$. 故ニ $\triangle AOB \backsim \triangle COA$.

故ニ $OB:OA=OA:OC$, 故ニ $OB.OC=\overline{OA}^2$.

(2) (1) ニ依リテ $OB:OC=\overline{OB}^2:\overline{OA}^2$,

然ルニ $\triangle AOB \backsim \triangle COA$ ナルユヱ

$$OB:OA=AB:AC,$$

從ヒテ $\overline{OB}^2:\overline{OA}^2=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$,

故ニ $OB:OC=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$.

11. 二ツノ圓ガ互ニ外切スルトキ其ノ切點ヲ過ラザル共通切線ノ切點ノ間ニ在ル部分ハ二ツノ圓ノ徑ノ比例中項ナルコトヲ證セヨ.

[44. 名. 高. 工.]

證 346 頁 39 題ニ同ジ.

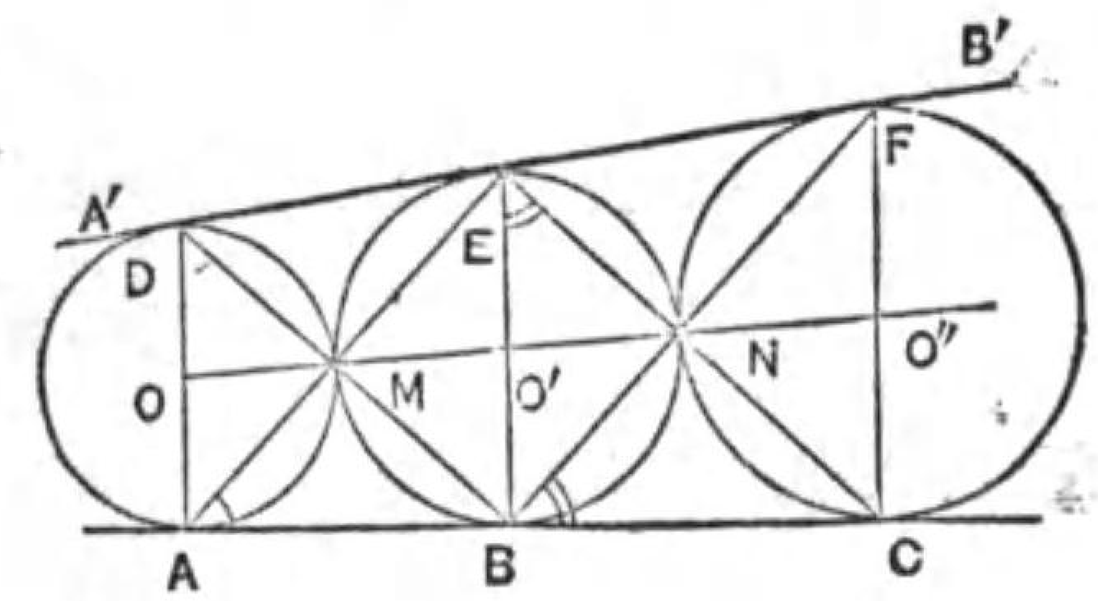
12. 二ツノ直線ニ切スル三ツノ圓ノ中心ガ同一ノ直線上ニ在リテ中間ノ圓ガ他ノ兩圓ニ外

切スルトキ, 次ノ關係アルコトヲ證スベシ.

(1) 相隣レル二ツノ圓ノ共通切線ノ長サ [二ツノ切點ニ限ラレタル] ハ二ツノ圓ノ徑ノ比例中項ナルコト.

(2) 中間ノ圓ノ徑ハ他ノ二ツノ圓ノ徑ノ比例中項ナルコト. [44. 商船.]

證 二ツノ直線 AB, A′B′ ニ切スル三ツノ圓



ノ中心 O, O′, O″ ハ同一ノ直線上ニアリトシ, 且圓 O, O′, O″ ガ直線 AB ト切スル點ヲソレゾレ A, B, C トシ, 又中間ノ圓 O′ ガ圓 O, O″ ニ切スル點ヲソレゾレ M, N トシ; 圓 O, O′, O″ ノ半徑ヲソレゾレ r, r', r'' トス.

(1) 前題ニ同ジ.

(2) $AB:BC=OO':O'O''=r+r':r'+r''$,

故ニ $\overline{AB}^2:\overline{BC}^2=r^2+r'^2+2rr':r'^2+r''^2+2r'r''$,

然ルニ (1) ニ依リテ $4rr'=\overline{AB}^2$, $4r'r''=\overline{BC}^2$,

故ニ $rr' : r'r''=r^2+r'^2-2rr' : r'+r''^2-2r'r''$,

故ニ $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2=(r'-r)^2 : (r''-r')^2$,

依リテ $r+r' : r'+r''=r'-r : r''-r'$,

故ニ $2r : 2r'=2r' : 2r''$.

13. C ヲ直角トセル直角三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線ト對邊 BC トノ交點ヲ D トス, 此ノ三角形ノ面積 6 平方寸, 邊 AC ノ長サ 4 寸ヲ知リテ直線 AB 及ビ AD ノ長サヲ求メヨ.

[43. 海. 兵.]

解 直角三角形 ABC ノ面積ハ $\frac{1}{2}$.AC.BC

ナルガ故ニ $\frac{1}{2}.AC.BC=6$.

而シテ $AC=4$

ナルガ故ニ $\frac{1}{2}.4.BC=6$,

依リテ $BC=3$,

依リテ又 $AB=\sqrt{(\overline{AC}^2+\overline{BC}^2)}$

$=\sqrt{(4^2+3^2)}=5$.

次ニ AD ハ $\hat{A}$ ノ二等分線ナルガ故ニ

$AC : AB=CD : BD$,

故ニ $AC+AB : AC=CD+BD : CD$,

卽チ $4+5 : 4=3 : CD$,

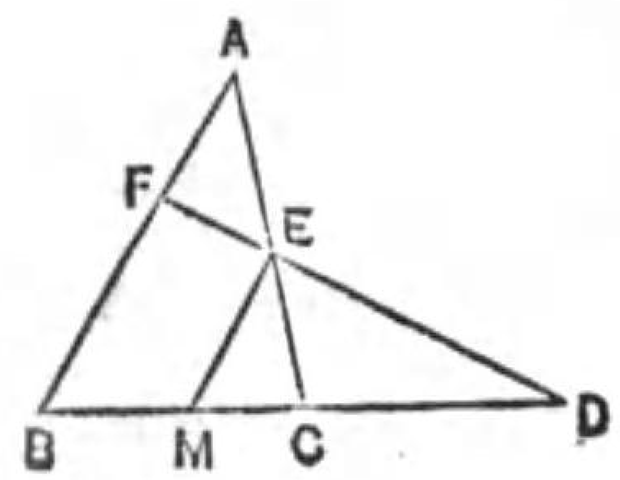
之ヨリ $CD=\frac{4\times 3}{9}=\frac{4}{3}$,

依リテ $AD=\sqrt{\{\overline{AC}^2+\overline{CD}^2\}}=\sqrt{4^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}$

$=\frac{4}{3}\sqrt{10}$,

是ニ依リテ所要ノ AB ハ 5寸, AD ハ $\frac{4}{3}\sqrt{10}$寸.

14. 三角形 ABC ノ邊 BC ヲ引キ延バシテ BC ニ等シク CD ヲ取リ, 點 D ヲ AC ノ中點 E ニ結ビ付ケ, DE ヲ引キ延バシテ AB ト F ニ於テ交ラシム, 然ルトキ FE ト ED トノ比ヲ求ム.



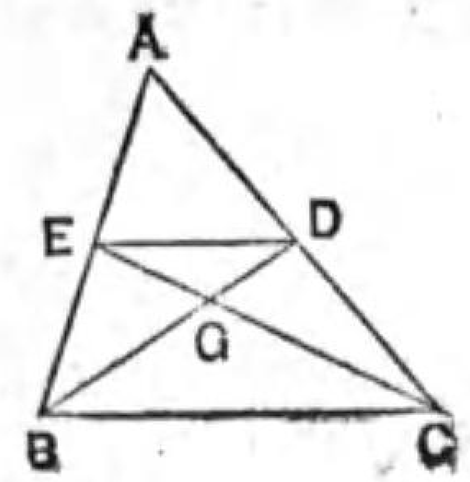
[44. 東. 高. 工.]

解 BC ノ中點ヲ M トシ, EM ヲ結ビ付クレバ $EM \parallel AB$,

故ニ $FE : ED=BM : MD=BM : MC+CD$

$=\frac{1}{2}BC : \frac{1}{2}BC+BC=1 : 3.$

15. 三角形 ABC ノ二ツノ角頂 B, C ヨリ引ケル中線 BD, CE ノ交點ヲ G トス, 二ツノ



三角形 BCG, EDG ノ面積ヲ比較セヨ。 [44. 各醫. 專.]

解 $BC \parallel DE$ ナルユヱ

$\triangle BCG \backsim \triangle DEG$

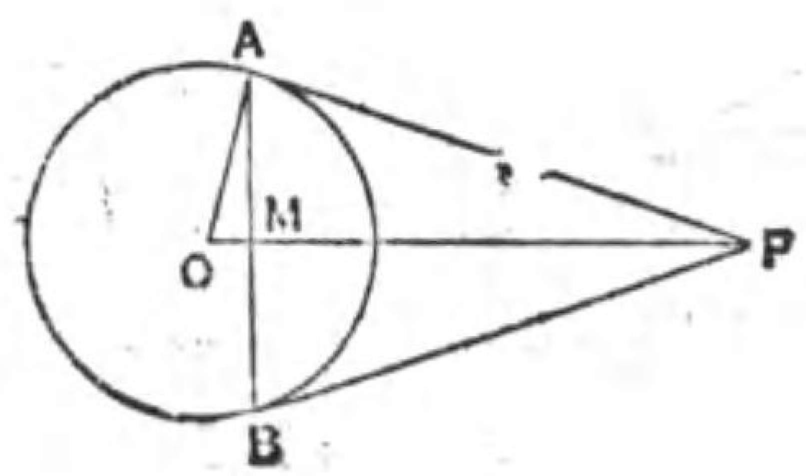
ナルコト明カナリ。

故ニ $\triangle BCG : \triangle DEG = \overline{BG}^2 : \overline{DG}^2$

$= \overline{2DG}^2 : \overline{DG}^2 = 4 : 1.$

16. 半徑2尺1寸ナル圓周ヨリ3尺5寸ノ距離ニアル一點 P ヨリ此ノ圓ニ二ツノ切線ヲ引キ切點ヲ結ビ付ケテ得ル弦ノ長サヲ計算セヨ。 [43. 陸. 經.]

解 半徑21寸ナル圓ノ中心ヲ O トシ,此ノ圓周ヨリ35寸ノ距離ニアル點 P ヨリ引ケル切線ノ切點ヲ A, B トス. OA, OP ヲ結ビ付ケ OP, AB ノ交點ヲ M トセバ OP ハ M ニ於テ AB ヲ直角ニ二等分ス, 而シテ $\triangle OAP$ ハ OP ヲ斜邊トスル直角三角形



ナルユヱ $OP : OA = OA : OM,$

然ルニ $OP = 21^{寸} + 35^{寸} = 56^{寸}$, $OA = 21^{寸}$ ナルユヱ

$$OM = \frac{\overline{OA}^2}{OP} = \frac{21^2}{56} = \frac{63}{8},$$

從ヒテ $\overline{AM}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OM}^2 = 21^2 - \left(\frac{63}{8}\right)^2 = \frac{24255}{64},$

故ニ $AM = \sqrt{\frac{24255}{64}} = \frac{21}{8}\sqrt{55},$

故ニ $AB = 2.AM = \frac{21}{4}\sqrt{55} = 38.935\ldots\ldots,$

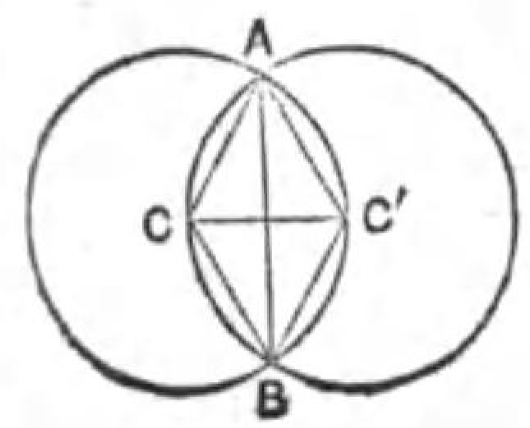
即チ $3^{尺}8^{寸}.94$ 弱.

注意 點ト圓周トノ距離ガ徑ヨリ小ナルユヱ唯一ツノ解アルノミ.

17. 相等シキ二圓ノ中心ガ互ニ他ノ圓周上ニアルトキハ其ノ共通弦ノ平方ハ半徑ノ平方ノ3倍ニ等シキコトヲ證シ, 且其ノ二圓ニ共通ナル面積ト一ツノ圓ノ面積トノ比ヲ求メヨ.

[44. 陸. 士.]

證 相等シキ二圓ノ中心 C, C′ ガ互ニ他ノ圓周上ニアリトシ, 其ノ共通弦ヲ AB トスレバ $\overline{AB}^2 = 3\overline{CA}^2$ ナルコトヲ證セン.



二圓ハ相等シキヲ以テ

$CA=BC=C'A=C'B=CC'$,

即チ　ACBC′ ハ菱形ナルユヱ

$$\overline{CA}^2+\overline{CB}^2+\overline{C'B}^2+\overline{C'A}^2=\overline{AB}^2+\overline{CC'}^2,$$

故ニ　$$3\overline{CA}^2=\overline{AB}^2.$$

次ニ　$\triangle ACC'$, $\triangle BCC'$ ハ正三角形ナルユヱ

$\hat{ACB}=120°$ ナリ.

依リテ　等圓ノ半徑ヲ r トスレバ

$$弓形\ ACB=\frac{1}{3}\pi r^2-\triangle ACB,$$

故ニ　二圓ニ共通ナル部分ノ面積ハ

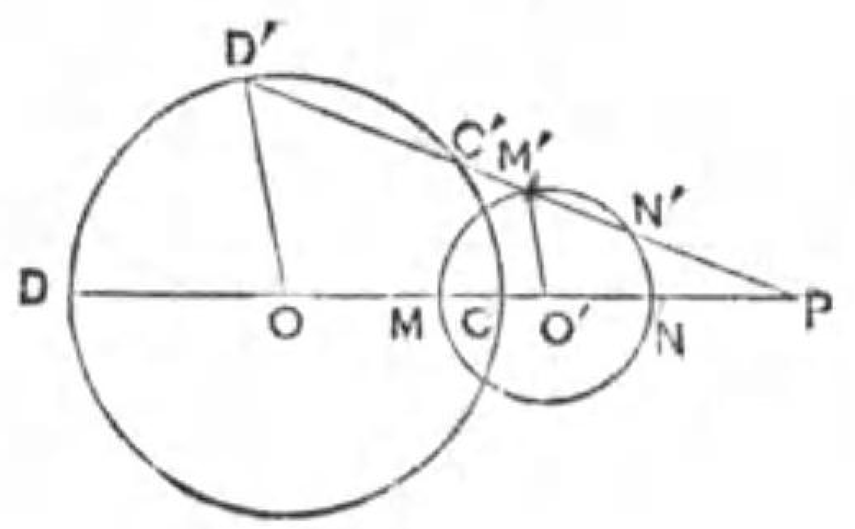
$$\frac{2}{3}\pi r^2-(菱形\ ACBC')=\frac{2}{3}\pi r^2-\frac{1}{2}AB,CC'$$

$$=\frac{2}{3}\pi r^2-\frac{1}{2}\sqrt{3}\overline{CA}^2=\frac{2}{3}\pi r^2-\frac{1}{2}\sqrt{3}r^2,$$

依リテ所要ノ比ハ

$$\frac{2}{3}\pi r^2-\frac{\sqrt{3}}{2}r^2:\pi r^2=4\pi-3\sqrt{3}:6\pi.$$

18.　圓外ノ一定點ヨリ 此ノ圓周ニ引キタル直線ノ中點ノ軌跡ヲ求ム.　[43. 大. 高. 工]



解　與ヘラレタル圓ノ中心ヲ O, 與ヘラレタル圓外ノ點ヲ P トス.

PO ヲ結ビ付クル直線ガ圓 O ト交ル二點ヲ C, D トシ P ニ近キ方ヲ C, 遠キ方ヲ D トス, 別ニ任意ノ割線 PC′D′ ヲ引キ圓周トノ交點ヲ C′,D′ トシ C′ ハ C ニ, D′ ハ D ニ對應スト ナス, PD, PC ノ中點ヲソレゾレ M, N トシ PD′, PC′ ノ中點ヲソレゾレ M′, N′ トシ又 MN ノ中點ヲ O′ トシ OD′, O′M′ ヲ結ビ付クレバ

$$OM=MD-OD=\frac{1}{2}PD-OD,$$

$$PN=\frac{1}{2}PC=\frac{1}{2}(PD-CD)=\frac{1}{2}PD-\frac{1}{2}CD$$

$$=\frac{1}{2}PD-OD,\qquad 故ニ\quad MO=PN,$$

故ニ O′ ハ PO ノ中點トナル, 故ニ O′ ハ定點ナリ, 而シテ　$OD':O'M'=PO:PO'$

ナルユヱ　$$O'M'=\frac{1}{2}OD'=(定長),$$

故ニ要件ニ適スル點ハ定點 O′, 即チ PO ノ中點ヲ中心トシ, 與ヘラレタル圓ノ半徑ノ半分ヲ半徑トセル圓周上ニアリ. 逆ニ P ヨリ引ケル任意ノ割線ガ圓 O ト C′,D′ ニ於テ交リ圓 O′ ト N′,M′ ニ於テ交リ, C′ ト N′ トハ P ニ近ク, D′ ト M′ トハ P ニ遠キ點トシ; OD′, O′M′ ヲ結ビ付クレバ

$$PO'=\frac{1}{2}PO,\quad O'M'=\frac{1}{2}OD'$$

ナルニエ PO:PO'=OD':O'M', 而シテ一双ノ對應邊 OD', O'M' ニ對スル角ハ何レモ $\hat{P}$ ニシテ, 他ノ一双ノ對應邊ニ對スル角 PD'O, PM'O' ハ何レモ鋭角ナリ, 故ニ △POD'∽△PO'M',

故ニ $$PO:PO'=PD':PM'$$

ニシテ M' ハ PD' ノ中點トナル. 同様ニ N' ハ PC' ノ中點トナル, 即チ圓 O' ノ周上ノ點ハ何レモ要件ニ適ス, 故ニ所要ノ軌跡ハ圓 O' ナリ.

注意 $NN' \parallel CC'$, $MN' \parallel DC'$,

故ニ $M\hat{N'}N = D\hat{C'}C = \hat{R}$,

故ニ N' ハ MN ヲ徑トスル圓周上ニアリ. 云々.

19. 二ツノ與ヘラレタル點ヨリノ距離ガ與ヘラレタル比ヲ有スル點ノ軌跡ヲ求ム.

[44. 海. 兵.]

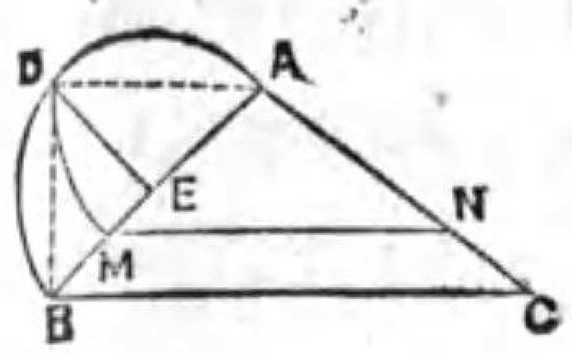
解 409 頁 79 題ニ同ジ.

20. 與ヘラレタル三角形ノ面積ヲ其ノ一邊ニ平行ナル直線ニテ二等分セヨ.

[43. 盛. 高. 農., 44. 海. 機., 東北農. 大.]

解 三角形 ABC ノ底 BC ニ平行ナル直線ニテ本形ヲ二等分スルコトヲ求メントス. AB ヲ徑トシテ其ノ上ニ半圓 ADB ヲ畫キ AB

ノ中點 E ヲ過リ AB ニ垂直ナル直線ヲ引キ半圓トノ交點ヲ D トス.



次ニ AB 上ニ AM=AD ナル如ク點 M ヲ取リ M ヲ過リ BC ニ平行ナル直線 MN ヲ引キ AC ト N ニ於テ交ラシムレバ MN ハ所要ノ直線ナリ. 如何トナレバ △ABC∽△AMN ナルコトハ作圖ニ依リテ明カナリ. 故ニ

$$\triangle ABC:\triangle AMN=\overline{AB}^2:\overline{AM}^2=2\overline{AD}^2:\overline{AD}^2=2:1$$

ナレバナリ.

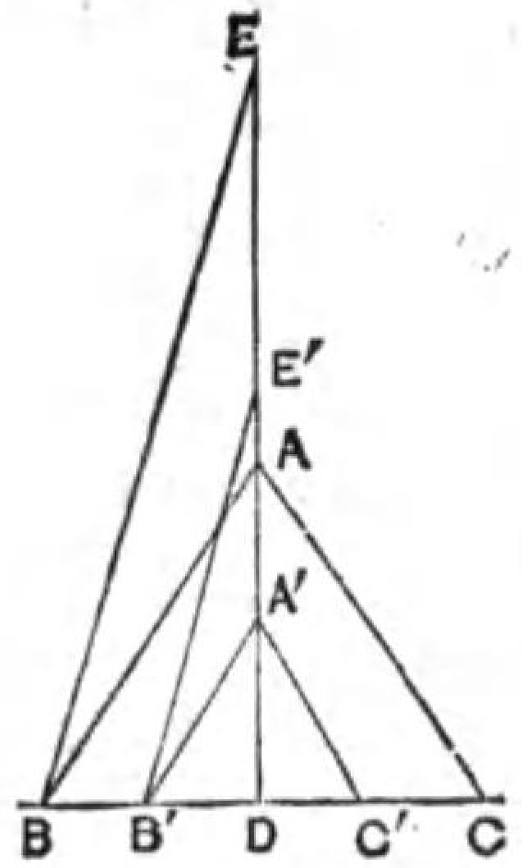
21. 三角形ノ一邊ニ垂直ナル直線ヲ以テ其ノ面積ヲ二等分セヨ. [44. 農. 大. 實.]

解 375 頁 54 題ニ同ジ.

22. 一邊ト高サトノ和ヲ與ヘテ正三角形ヲ作レ. [44. 商船.]

解 正三角形 ABC ノ一邊ト高サトノ和 l ヲ知リテ本形ヲ作ラントス. 先ヅ任意ノ大イサノ正三角形 A'B'C' ヲ作リ高サ A'D ヲ引キ DA' ヲ A' ノ方ヘ引キ延バシ其ノ上ニ A'E'=A'B' ナル樣ニ E' ヲ取リ, 又 DE=l ナル樣ニ E ヲ取ル.

次ニ B'E' ヲ結ビ付ケ E ヲ過リ E'B' ニ平行ニ EB ヲ引キ DB', 或ハ其ノ延線トノ交點ヲ B トシ, B ヲ過リ B'A' ニ平行ニ BA ヲ引キ, ED トノ交點ヲ A トシ, A ヲ過リ A'C' ニ平行ニ AC ヲ引キ BD ノ延線ト交ル點ヲ C トスレバ ABC ハ所要ノ正三角形ナリ. 如何ニモ作圖ニ依リテ



$\triangle EBA \backsim \triangle E'B'A'$, $\triangle EBD \backsim \triangle E'B'D$,

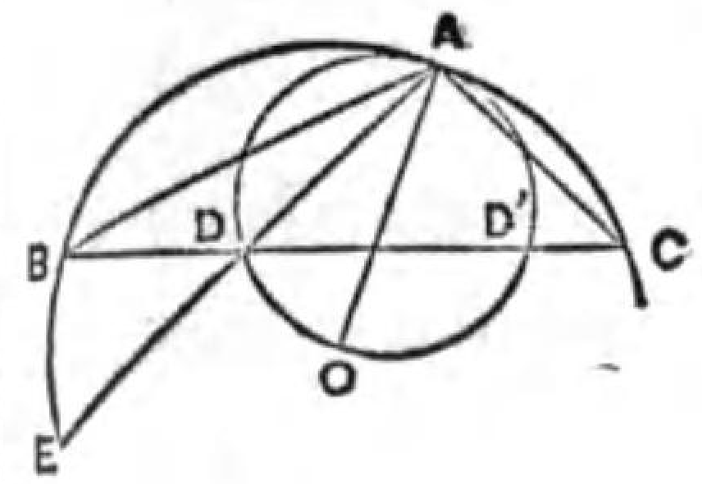
$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ ナルコト明カナリ.

故ニ $BA=AE$, 從ヒテ $BA+AD=ED=l$ ニシテ $\triangle ABC$ ハ正三角形ナレバナリ.

23. 三角形 ABC ニ於テ BC 上ニ一點 D ヲ求メ AD ノ上ノ正方形ヲシテ BD ト DC トノ包ム矩形ニ等シカラシメヨ. [43. 名. 高. 工]

解 三角形 ABC ノ外接圓ノ中心ヲ O トシ, OA ヲ徑トセル圓周ト邊 BC トノ交點ヲ D, D' トシ, AD ト圓 O トノ交點ヲ E トスレバ, OA ハ圓 O ノ半徑ナルユヱ之ヲ徑トセル圓周ハ A

ヨリ引ケル圓 O ノ弦ヲ二等分ス,



故ニ $AD=DE$,

而シテ

$$BD.DC=AD.DE$$
$$=\overline{AD}^2,$$

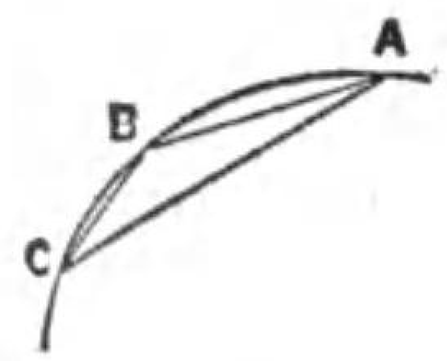
同樣ニ

$$\overline{AD'}^2=BD'.D'C,$$

即チ D 及ビ D' ハ所要ノ點ナリ. OA ヲ徑トセル圓ガ BC ニ切スレバ解ハ一ツニシテ若シ圓周ト BC トニ共通點ナケレバ解ナシ.

24. 與ヘラレタル圓ニ內接スル正十五角形ヲ畫ク法如何. [43. 商船.]

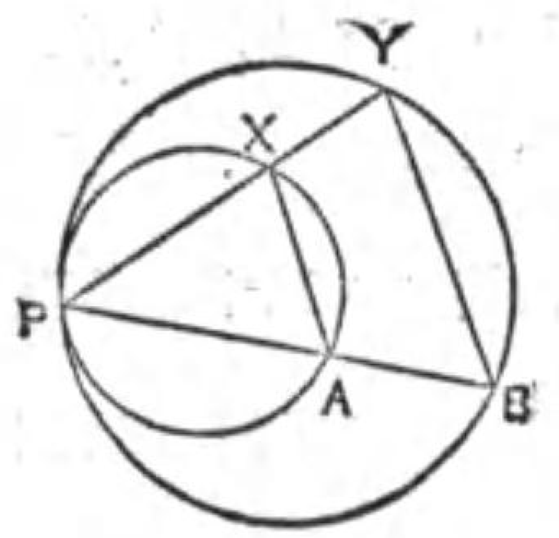
解 與ヘラレタル圓周上ノ一點 A ヨリ二ツノ弦 AB, AC ヲ引キ AB ヲ內接正十邊形ノ邊ニ, AC ヲ內接正六邊形ノ邊ニ等シカラシメ B, C ヲ A ノ同ジ側ニ置クトキハ弧 AB ハ圓周ノ十分ノ一ニシテ, 弧 AC ハ圓周ノ六分ノ一ナルガ故ニ弧 BC ハ圓周ノ $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$, 即チ $\frac{1}{15}$ ニ等シ, 故ニ



弦 BC ハ內接正十五邊形ノ一邊トナル，依リテ連續シテ之ニ等シキ弦ヲ畫ケバ內接正十五邊形ヲ得ベシ．

25. 二ツノ圓ガ P ニ於テ互ニ內切スルトキ直線 PXY ヲ引キ二ツノ圓トソレゾレ點 X 及ビ Y ニ於テ交ラシメ，XY ヲ與ヘラレタル長サニ等シクナスコトヲ求ム． [43. 東. 高. 工.]

解 與ヘラレタル長サヲ l ニテ表ハス，圖ヲ作リ得タリトシ，P ヨリ任意ノ弦 PAB ヲ引キ二ツノ圓周トノ交點ヲ A, B トシ，A ト X，B ト Y トハソレゾレ同一ノ圓周上ニアリトセン．AX, BY ヲ結ビ付クレバ



$$\triangle PAX \backsim \triangle PBY$$

ナルユヱ　$PA:AB=PX:XY,$

即チ　$PA:AB=PX:l$

ニシテ PA, AB, l ハ何レモ既知ナリ，故ニ PX ヲ求メ得ベシ．是ニ依リテ次ノ作圖法ヲ得．P ヨリ任意ノ弦ヲ引キ內圓ト A ニ，外圓ト B ニ於テ交ラシメ $PA:AB=PX:l$

ニ適スル PX ヲ求メ P ヲ中心，PX ヲ半徑トシテ畫ケル圓ト內圓周トノ交點ヲ X トシ，直線 PX ヲ引キ其ノ外圓周トノ交點ヲ Y トスレバ

$$PA:AB=PX:XY,$$

然ルニ　$PA:AB=PX:l,$

故ニ　$XY=l$

ニシテ，PXY ハ即チ所要ノ直線ナリ，而シテ l ガ二ツノ圓ノ徑ノ差ヨリ大ナルトキハ不能ナリ．

E'. 空間に於ける線及び面

1. 一ツノ平面ヘノ垂線ヲ含ム平面ハ其ノ平面ニ垂直ナルコトヲ證セヨ． [43. 海. 兵.]

證 462 頁 15 題ニ同ジ．

2. 互ニ平行ナル二直線ノ各ヲ過ル二平面ノ交リハ其ノ二直線ノ各ニ平行ナルコトヲ證明セヨ． [43. 長. 高. 商.]

證 互ニ平行ナル二直線ヲ AB, CD トス. AB ヲ過ル平面 P ト CD ヲ過ル平面 Q トノ交リヲ MN トスレバ $AB \parallel CD$ ナルユヱ

$$P \parallel CD,$$

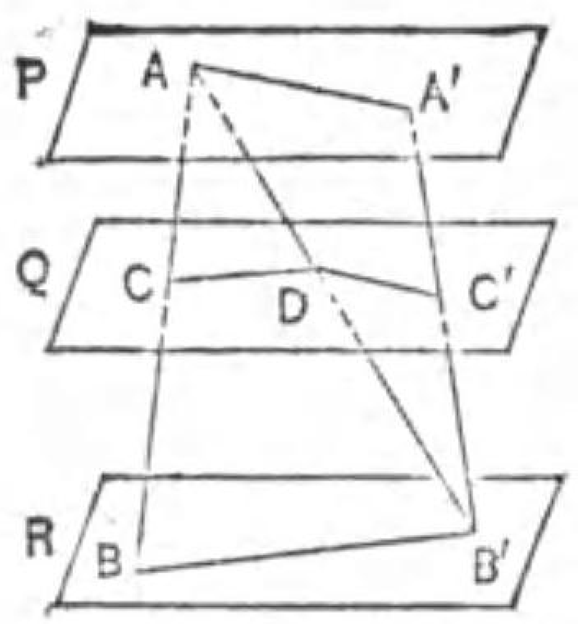
故ニ P 上ノ直線 MN ト CD トハ相交ラズ, 而シテ MN, CD ハ同一ノ平面 Q ノ上ニアリ.

故ニ $CD \parallel MN$, 同様ニ $AB \parallel MN$.

3. 二ツノ直線ガ平行ナル三ツノ平面ト交ルトキハ其ノ直線ノ分ノ比ハ相等シ.

[43. 東. 高. 商.]

證 二ツノ直線 AB, A′B′ ガ三ツノ平行ナル平面 P, Q, R トソレゾレ A, C, B 及ビ A′, C′, B′ ニ於テ交レリトス. AB′ ヲ結ビ付ケ其ノ Q トノ交點ヲ D トシ AA′, CD, DC′, BB′ ヲ結ビ付クレバ BB′, CD ハ平面 ABB′ ト平行ナル平面 R, Q トノ交リナルユヱ平行ナリ.



故ニ $AC : CB = AD : DB'$,

同様ニ $A'C' : C'B' = AD : DB'$.

故ニ $AC : CB = A'C' : C'B'$.

4. 空間ニ與ヘラレタル二直線アリ, P, Q ハソレゾレ是等ノ直線上ニアル任意ノ點ナリトス. PQ ノ中點ハ一定ナル平面上ニアルコトヲ證セヨ.

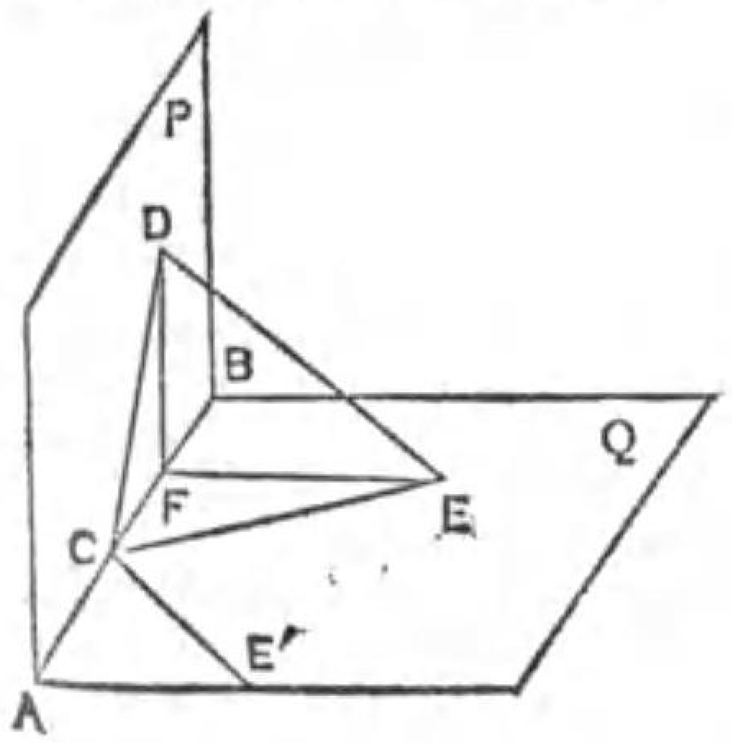
[43. 水. 講.]

證 8 題ヲ見ヨ.

5. 互ニ垂直ナル二ツノ平面ノ交リノ上ノ一點ヲ過リ, 其ノ交リト半直角ヲナス直線ヲ各ノ平面上ニ引クトキハ, 此ノ二直線ノナス角ハ直角ノ三分ノ二ニ等シキカ, 若シクハ其ノ補角ニ等シキコトヲ證セヨ.

[44. 海. 機.]

證 互ニ垂直ナル二ツノ平面 P, Q ノ交リヲ AB トシ, AB 上ノ一點 C ヲ過リ AB ト半直角ヲナス直線 CD, CE ヲソレゾレ平面 P, Q 上ニ引クトキハ, $D\hat{C}E$ ハ $\frac{2}{3}\hat{R}$, 或ハ其ノ補角ニ等シキコトヲ證セントス. サテ CD, CE ハ CB ト $\frac{1}{2}\hat{R}$

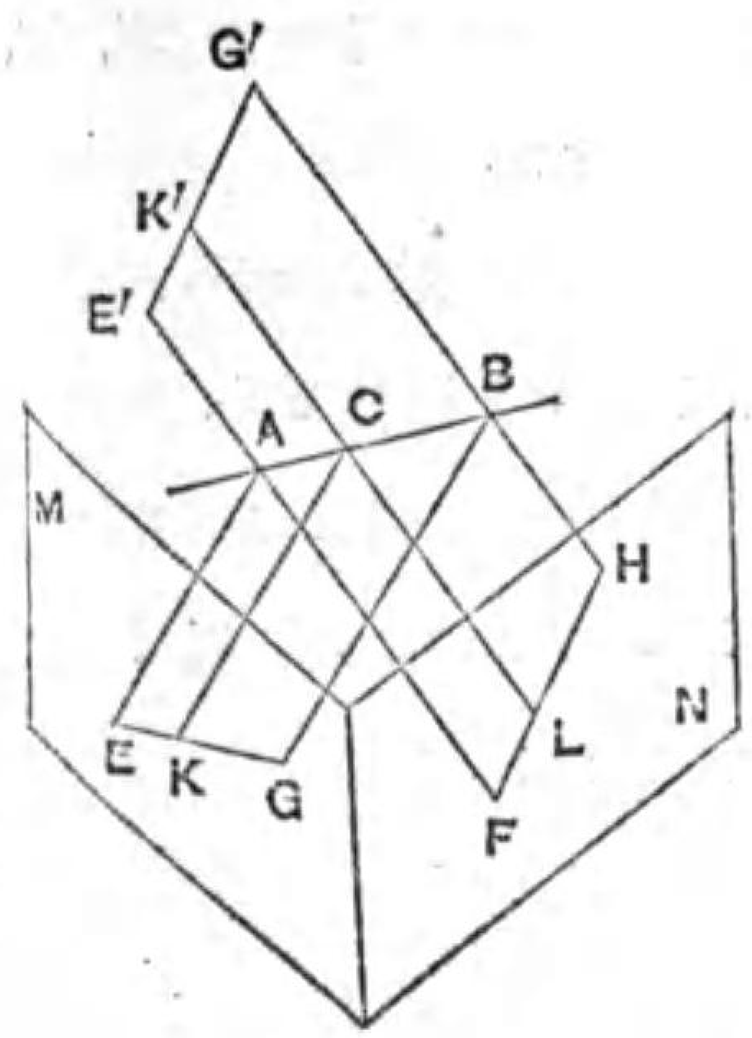


チナスモノトス. 直線 CD 上ノ一點 D ヨリ CB ニ垂線 DF チ下シ, F チ過リ平面 Q 上ニ於テ AB ニ垂線 FE チ引キ CE トノ交點チ E トシ, DE チ結ビ付クレバ △CDF, △CEF ハ何レモ二等邊直角三角形ニシテ CF ハ共通ナルユエ DF=EF, 從ヒテ △DEF ハ二等邊直角三角形ニシテ △CDF, △CEF ト全等ナリ.

故ニ CD=DE=EC, 依リテ $D\hat{C}E=\frac{2}{3}\hat{R}$, 次ニ CE′ ガ平面 Q 上ニ在リテ AC ト $\frac{1}{2}\hat{R}$ チナスモノトスレバ $D\hat{C}E'$ ハ $D\hat{C}E$ ノ補角ニ等シキコト明カナリ.

6. 二ツノ點 A, B 及ビ二ツノ平面 M, N アリ。A ヨリ M, N ヘノ垂線ノ和ガ B ヨリ M, N ヘノ垂線ノ和ニ等シキトキハ, 直線 AB 上ノ總テノ點ニ就キテモ之ト同一ナル關係ガ成立スルコトチ證セヨ. [44. 各高等]

證 A, B ヨリ M, N ヘノ垂線ノ趾チソレゾレ E, F; G, H トス, 又 AB 上ノ任意ノ點 C ヨリ M, N ヘノ垂線ノ趾チソレゾレ K, L トス, 然ルトキ AE+AF=BG+BH



ナラバ

CK+CL

=AE+AF

ナルコトチ證セン.

AF, BH, CL ハ直線 AB 上ノ點 A, B, C ヨリ平面 N ヘ下セル垂線ナルユエ互ニ平行ニシテ且同一ノ平面上ニアルコト明カナリ. 同樣ニ AE, BG, CK ハ互ニ平行ニシテ且同一ノ平面上ニアリ.

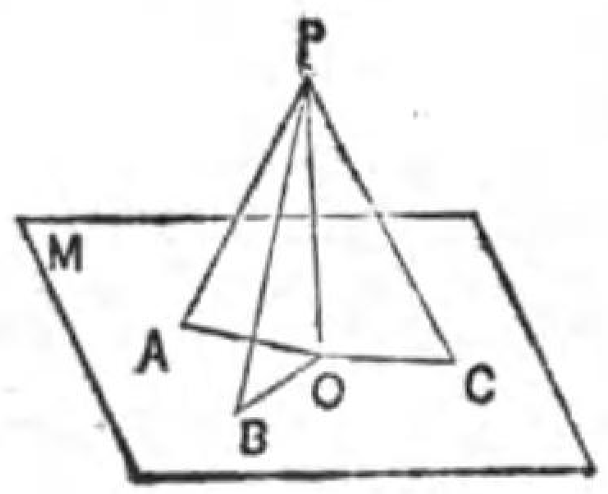
今 FA, HB ノ延線上ニ AE′=AE, BG′=BG ナル如ク點 E′, G′ チ取リ E′G′, FH チ結ビ付クレバ FE′=HG′ ニシテ且 FE′∥HG′, $A\hat{F}H=\hat{R}$ ナルユエ E′G′HF ハ矩形ナリ. 依リテ EG チ結ビ付クレバ二ツノ梯形 AEGB, AE′G′B ハ全等ナルコト明カナリ. 又 L, K ハソレゾレ FH, EG ノ上ニアルコト明カナリ. 故ニ LC ノ延線ガ E′G′ ト交ル點チ K′ トスレバ CK′=CK ニシテ LK′=FE′. 依リテ CK+CL=AE+AF.

注意　若シ M, N ガ平行ナルトキハ E', K', G' ハ E, K, G ニ一致スベシ.

7.　三點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ. 不能ノ場合アリヤ否ヤヲ決定セヨ.

[44. 米. 高. 工.]

解　三定點ヲ A, B, C トシ, 此ノ三點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メントス.



(1) A, B, C ガ同一ノ直線上ニアラザルトキ. P ヲ軌跡上ノ點トシ, P ヨリ A, B, C ノ定ムル平面 M ニ垂線 PO ヲ下シ, 其ノ趾ヲ O トスレバ $PA=PB=PC$ ナルユヱ $OA=OB=OC$,

即チ P ハ三點 A, B, C ヲ過ル圓ノ中心 O ヲ過リ平面 M ニ垂直ナル直線 PO 上ニアリ.

逆ニ PO 上ノ任意ノ點 P ヲ取レバ $PA=PB=PC$ ナリ. 故ニ所要ノ軌跡ハ直線 PO ナリ.

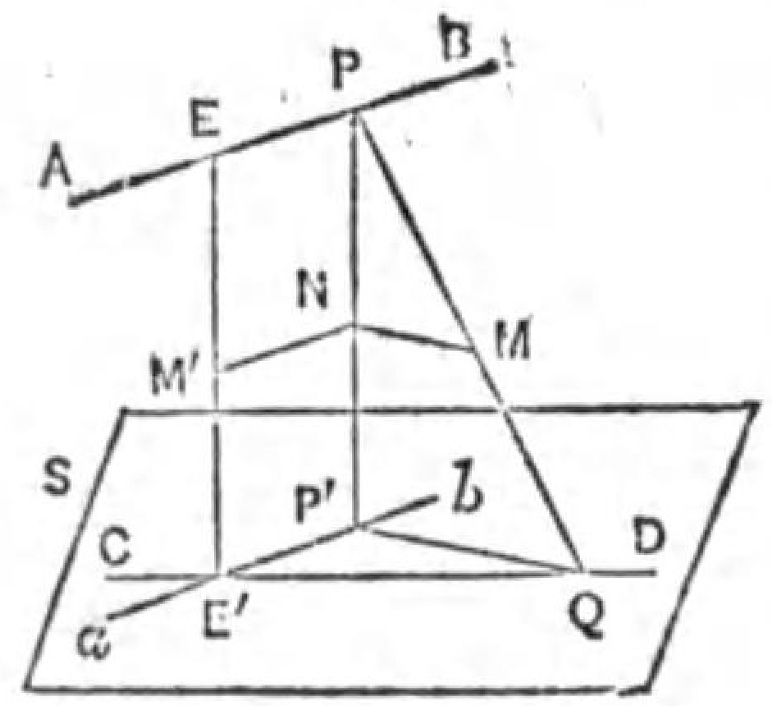
(2) A, B, C ガ同一ノ直線上ニアルトキ.

一點ヨリ一直線上ニ至ル等シキ長サノ直線ハ二ツヨリ多クアルコトナシ. 故ニ A, B, C ガ同一ノ直線上ニアルトキハ此ノ三點ヨリ等距離ナル點ナシ. コレ不能ノ場合ナリ.

8.　空間ニ與ヘラレタル二ツノ直線 AB, CD アリ, AB 上ノ任意ノ點 P ト CD 上ノ任意ノ點 Q トヲ結ビ付クル直線 PQ ノ中點 M ノ軌跡ヲ求ム.

[43. 東. 高. 工.]

解　CD ヲ含ミ AB ニ平行ナル平面 S 上ニ於ケル AB ノ正射影 ab ト CD トノ交點ヲ E', 及ビ ab 上ノ點 P' ヲソレゾレ AB 上ノ點 E 及ビ P ノ正射影トシ, EE', PP' ノ中點ヲソレゾレ M' N トシ; $M'N$, NM, $P'Q$ ヲ結ビ付クレバ



$$M'N \parallel ab,\quad NM \parallel P'Q.$$

故ニ　　平面 $M'NM \parallel$ 平面 S,

故ニ M ハ二直線 AB, CD ノ共通垂線, 即チ EE' ノ中點 M' ヲ過リ S ニ平行ナル平面上ニアリ, 此ノ平面ヲ R トス. 次ニ R ノ上ノ任意ノ點ヲ L トスレバ L ハ AB, CD ノ間ニ引ケル直線上

ノ點トナスコトヲ得ベシ，如何トナレバ AB ト L トノ定ムル平面ト S トノ交リ $a'b'$ ガ若シ CD ニ平行ナレバ　　$AB \parallel a'b'$

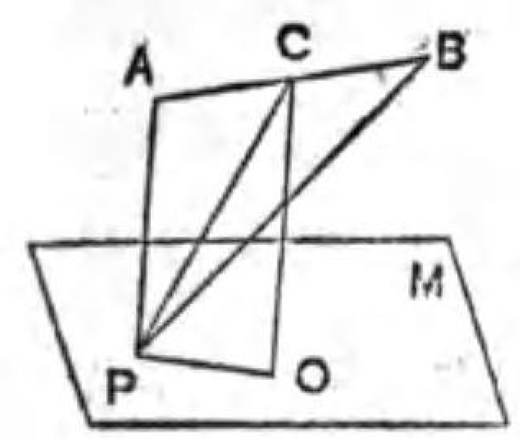
ナルユエ　　$AB \parallel CD$

トナリ，假設ニ戻ル，故ニ $a'b'$, CD ハ相交リ，其ノ交點ト L トヲ過ル直線ハ AB ニ交ルベケレバナリ．依リテ今 AB ヲ含ミ CD ニ平行ナル平面ヲ S′ トスレバ S, S′ 及ビ R ハ平行ナルユエ AB, CD ノ間ニ引ケル直線，即チ S ト S′ トノ間ノ直線ハ R トノ交點 L ニ於テ比 PM : MQ ニ等シク分タルルヲ以テ L ハ其ノ中點トナル，即チ R 上ノ任意ノ點ハ要件ニ適ス．是ニ依リテ所要ノ軌跡ハ平面 R ナリ．

9. 一ツノ平面上ニ動點アリ，其ノ平面外ノ二ツノ與ヘラレタル點ヨリ此ノ點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ與ヘラレタルトキハ動點ノ軌跡如何．　　[44. 名. 高. 工.]

解　平面 M 上ノ動點ヲ P トシ，平面 M 外ノ二定點ヲ A, B トス．

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=k^2$ (一定) ナルトキ點 P ノ軌跡ヲ求メントス．



AB ヲ結ビ付ケ其ノ中點ヲ C トシ，C ヨリ平面 M ニ垂線 CO ヲ下シ，又要件ニ適スル一ツノ點ヲ P トシ PO, PC ヲ結ビ付クレバ

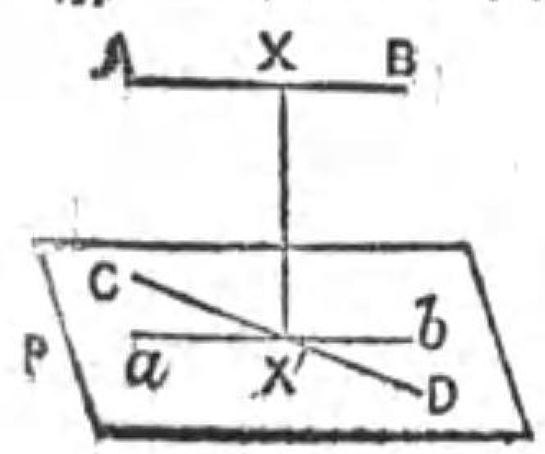
$$2(\overline{AC}^2+\overline{PC}^2)=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=k^2(\text{一定}),$$

然ルニ AC ハ一定ナルユエ PC ノ長サハ一定ナリ．從ヒテ OP ノ長サモ亦一定ナリ．故ニ P ハ O ヲ中心トスル圓周上ニアリ．

逆ニ此ノ圓周上ノ點ハ皆要件ニ適スルコト容易ニ證明シ得ベシ．故ニ所要ノ軌跡ハ平面 M 上ニ於テ O ヲ中心トシ，OP ヲ半徑トスル圓周ナリ．

10. 空間ニ於ケル相交ラザル二直線ノ各ト互ニ垂直ニ交ル直線ヲ求ム．　　[43. 東北農. 大.]

解　AB, CD ガ平行ナレバ其ノ定ムル平面上



ニ於テ其ノ一ニ垂直ナル直線ヲ引ケバ他ノ一ニ垂直トナリ，即チ所要ノ直線ナリ，次ニ AB, CD ガ

平行ナラズトセバCDヲ過リABニ平行ナル平面ヲPトシ, ABヲ過リPニ垂直ナル平面QトPトノ交リヲabトスレバab, CDハ相交ル, 如何トナレバ$AB \parallel ab$ナルユヱ, 若シ$ab \parallel CD$ナレバ$CD \parallel AB$トナリテ假設ニ戻レバナリ, 依リテ其ノ交點ヲX'トシ, X'ヲ過リQノ上ニ於テabニ垂直ニ引ケル直線トABトノ交點ヲXトスレバ, $AB \parallel ab$ナルユヱ$AB \perp X'X$, 然ルニ$P \perp Q$ナルヲ以テ$X'X \perp P$, 故ニ$X'X \perp CD$, 依リテ$X'X$ハ所要ノ直線ナリ.

注意 456頁 8題ヲ參照セヨ.

11. 一ツノ直線ト平行シ, 同一ノ平面上ニアラザル二ツノ直線ト交ルベキ直線ヲ作ル方法及ビ其ノ證如何. [43. 新. 醫. 專.]

解 一ノ直線ヲXトシ, 同ジ平面上ニアラザル二ツノ直線ヲY, Zトス. Yヲ過リテXニ平行ナル平面Pヲ作リ, PガZト交ル點ヲzトシ, P上ニ於テXニ平行ナル直線yzヲ作リYトノ交點ヲyトセバyzハ即チ所要ノ直線ナリ. 而シテP若シZニ平行ナルトキハ解ナシ, 又PガZト交ルモZヲ過リテXニ平行ナル直線ガYト交ラザレバ解ナシ.

12. 空間ニ與ヘラレタル一點ヲ過リテ同一ノ平面上ニ在ラザル二ツノ與ヘラレタル直線ト交ル直線ヲ作レ, 又作圖不能ノ場合アリヤ. [43. 東. 高. 師.]

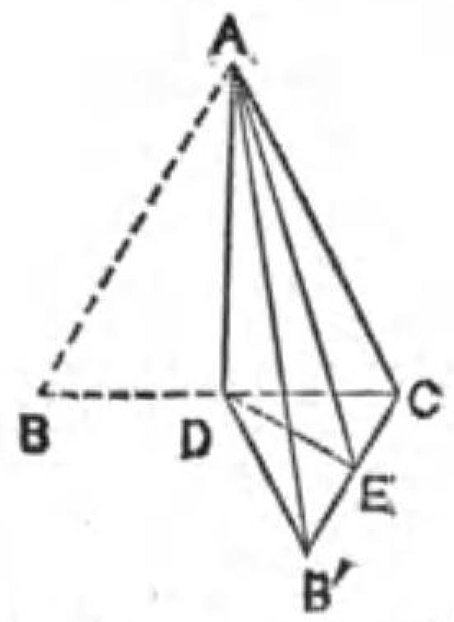
解 與ヘラレタル點ヲO, 同一ノ平面上ニアラザル二ツノ與ヘラレタル直線ヲAB, CDトシ, Oヲ過リAB, CDニ交ル直線ヲ引クコトヲ求ム. OトABトニテ決定セル平面ヲP, OトCDトニテ決定セル平面ヲQトシ, P, Qノ交リヲMNトスレバMN, ABハ倶ニPノ上ニアルユヱ一般ノ場合ニ於テハ相交ル, MN, CDモ亦同樣ナリ. 故ニMNハ所要ノ直線ナリ. 若シ$MN \parallel AB$, 若シクハ$MN \parallel CD$ナレバ作圖ハ不能トナル.

F. 多面角

1. 各邊ノ長サガaナル正三角形ABCヲ, A

ヨリ BC ヘ引ケル垂線ニ沿ヒテ折リ 60 度ノ二面角ヲ作ルトキ，直線 BC ト頂點 A トノ距離ハ a ノ幾倍ナルカ． [44. 東. 高. 師.]

解 頂點 A ヨリ BC ニ引ケル垂線ヲ AD トシ，AD ニ沿ヒテ ABD ヲ折リ 60 度ノ二面角ヲ作リタルトキ B ノ位置ヲ B′ トス．



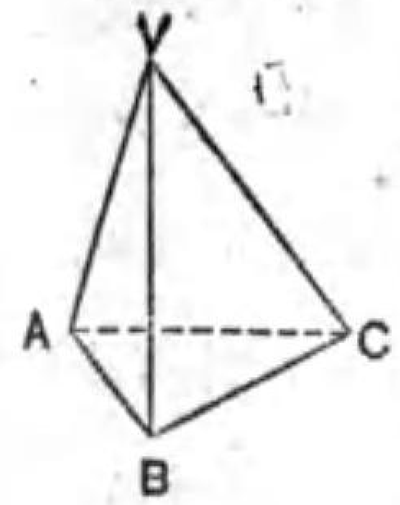
然ルトキハ $\widehat{B'DC}=60°$ ナリ．而シテ $\triangle B'DC$ ハ正三角形ナリ．今 B′C ノ中點ヲ E トスレバ

$$DE=\frac{\sqrt{3}}{2}DC=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{a}{2},\ AD=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

故ニ
$$AE=\sqrt{(\overline{AD}^2+\overline{DE}^2)}=\sqrt{\frac{3}{16}a^2+\frac{3}{4}a^2}$$
$$=\frac{\sqrt{15}}{4}a.$$

2. 一ツノ二面角ガ直角ナル三面角ヲ，其ノ一ツノ稜ニ垂直ナル平面ヲ以テ截レバ，其ノ截口ハ直角三角形ナルコトヲ證セヨ． [44. 東. 高. 工.]

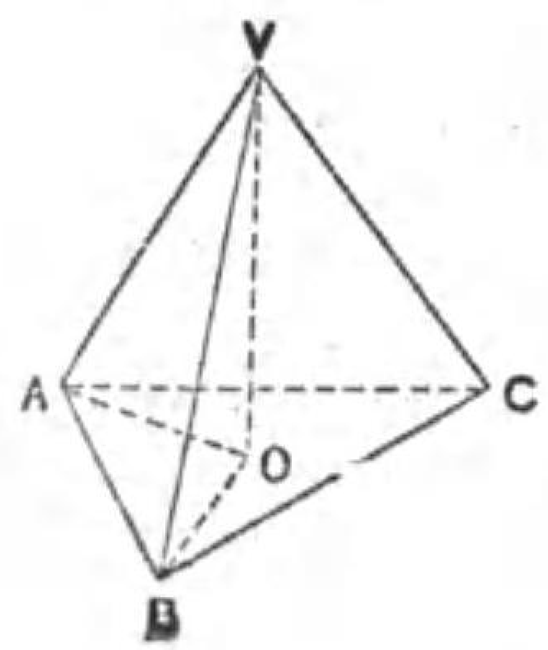
證 三面角 V-ABC ノ稜 VB ニ於ケル二面



角ヲ直角ナリトスレバ，VB ニ垂直ナル平面ニテ此ノ三面角ヲ截リタル截口ナル △ABC ハ B ニ於ケル角ガ直角ナル三角形ナルコト明カナリ．次ニ他ノ稜，例ヘバ VA ニ垂直ナル平面ニテ截リタル截口ヲ △ABC トセバ平面 VAB ハ二ツノ平面 ABC, VBC ノ何レニモ垂直ナルユヱ，其ノ交リ BC ニ垂直ナリ．依リテ $BC\perp AB$，即チ △ABC ハ B ニ於テ直角ヲモツ直角三角形ナリ．

3. 三面角アリ，其ノ二面角ハ何レモ直角ナリ，此ノ三面角ヲ一平面ニテ截ルトキハ此ノ平面ト三面角ノ各面トノ交リノナス三角形ノ垂心ハ三面角ノ頂點ヨリ此ノ平面ヘ下セル垂線ノ趾ト同ジ點ナルコトヲ證セヨ． [43. 各高等.]

證 三面角 V-ABC ノ二面角 VA, VB, VC ハ

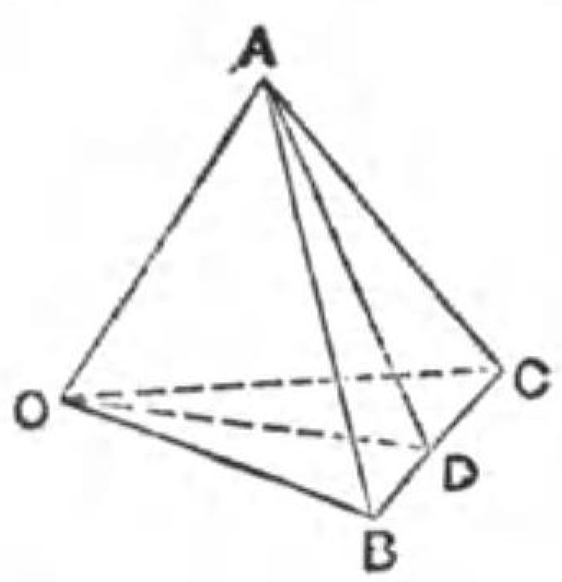


何レモ直角ナリトシ，一平面ニテノ截口ヲ ABC トス．頂點 V ヨリ截口 ABC ヘノ垂線ノ趾ヲ O トセヨ．面 VAB, VBC ハ何レモ面 VCA ニ垂直ナルガ故

ニ其ノ交リ VB ハ面 VCA ニ垂直トナル，故ニ面 VBO ハ二ツノ面 ABC, VCA ニ垂直トナリ，從ヒテ其ノ交リ AC ハ面 VBO ニ垂直トナル，依リテ AC ハ面 VBO 上ノ直線，卽チ面 VBO ト面 ABC トノ交リ BO ニ垂直ナリ，換言スレバ BO ハ AC ヘノ垂線ナリ，同樣ニ AO ハ BC ヘノ垂線トナル，依リテ O ハ又截口ナル △ABC ノ垂心ナリ．

4. 相異レル平面上ニアル角 AOB, AOC ガ相等シキトキハ其ノ平面ニテナス二面角ヲ二等分スル平面ハ平面 BOC ニ垂直ナルコトヲ證セヨ． [44. 東北農．大.]

證 平面 AOB, AOC ノ交リ AO 上ノ任意ノ一點 A ヲ過リ各平面上ニ於テ OA ニ垂線 AB, AC ヲ引キ OB, OC トノ交點ヲソレゾレ B, C トスレバ直角三角形 AOB, AOC ニ於テ AO ハ共通, $\widehat{AOB}=\widehat{AOC}$ [假設] ナルユエ △AOB≡△AOC,



故ニ AB=AC, OB=OC.

今二面角 BAOC ヲ二等分スル平面 ADO ヲ作リ BC トノ交點ヲ D トスレバ面 BAC ハ OA ニ垂直ナルユエ $\widehat{BAC}$, $\widehat{BAD}$, $\widehat{CAD}$ ハ各二面角ヲ測ル角ナリ．故ニ $\widehat{BAD}=\widehat{CAD}$,

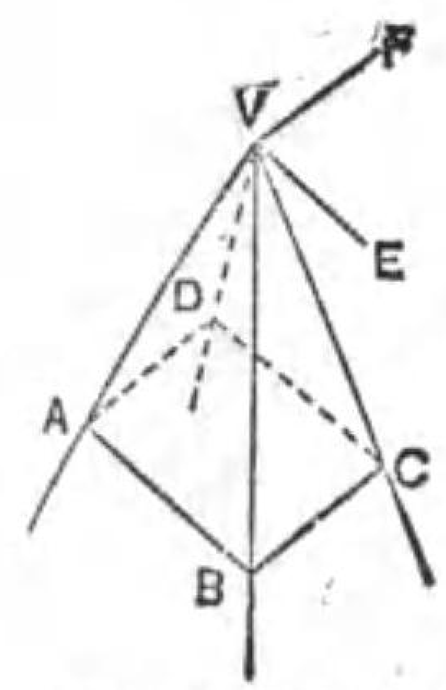
依リテ AD⊥BC, 從ヒテ OD⊥BC,

故ニ　平面AOD⊥BC,

從ヒテ　平面AOD⊥平面BOC.

5. 四面角ヲ平面ニテ截リ其ノ截口ヲシテ平行四邊形ナラシムルコトヲ求ム．[43. 名．高．工.]

解 四面角ヲ V-ABCD トス．二平面 VAB, VCD ノ交リヲ VE, 二平面 VBC, VDA ノ交リヲ VF トシ，任意ノ位置ニ於テ VE, VF ノ定ムル平面ニ平行ナル平面 P ヲ作リ稜トノ交點ヲ A, B, C, D トスレバ P ハ二平面 VAB, VCD ノ交リ VE ニ平行ナルユエ其ノ各平面トノ交リ AB, CD ハ何レモ VE ニ平行ナリ，從ヒテ互ニ平行ナリ，同樣ニ BC, DA ハ何レモ VF ニ平行ニシテ，亦互ニ平行ナリ，



故ニ ABCD ハ平行四邊形トナル．

G′. 多面體 角壔

角錐

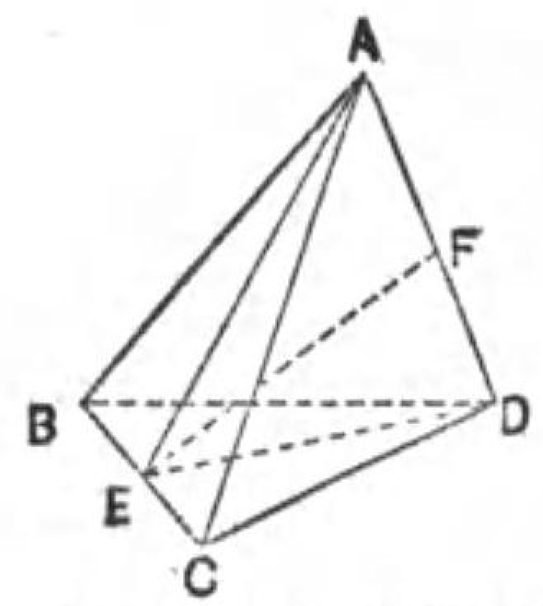
1. 四面體ノ一ツノ二面角ヲ二等分スル平面ガ之ニ對スル稜ヲ分ツ二ツノ分ノ比ハ其ノ二面角ノ二ツノ面ノ比ニ等シキコトヲ證明セヨ.

[43. 專. 入. 檢.]

證 492 頁 8 題ニ同ジ.

2. 正四面體ノ相對スル稜ノ間ノ最短距離ハ其ノ一稜ノ上ノ正方形ノ對角線ノ半分ニ等シキコトヲ證セヨ. [43. 海. 經.]

證 正四面體ヲ ABCD トス, 一稜 BC ノ中點ヲ E トシ AE, DE ヲ結ビ付クレバ何レモ BC ニ垂直トナルユエ BC⊥平面 AED, 故ニ BC ノ對稜 AD ノ中點 F ト E トヲ結ビ付クル直線 EF ハ BC ニ垂直ナリ, 而シテ AE. DE ハ何レモ相等シキ正三角形ノ高サナルユエ



△AED ハ二等邊三角形ニシテ F ハ底ノ中點ナルヲ以テ $EF \perp AD$,

故ニ EF ハ對稜 BC, AD ノ最短距離トナル.

今一稜ヲ a ニテ表ハセバ

$$AE=\frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad AF=\frac{1}{2}a$$

ナルユエ $$EF=\sqrt{\left(\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{4}a^2\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}a,$$

然ルニ a ノ上ノ正方形ノ對角線ノ半分ハ

$$\frac{1}{2}\sqrt{2a^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}a,$$ 故ニ題言ノ如シ.

3. 正四面體内ノ任意ノ一點ヨリ各面ニ下セル垂線ノ長サノ和ハ其ノ高サニ等シキコトヲ證セヨ. [44. 仙. 高. 工.]

證 正四面體ノ高サヲ h トシ, 底面積ヲ A トスレバ體積ハ $V=\frac{1}{3}Ah$,

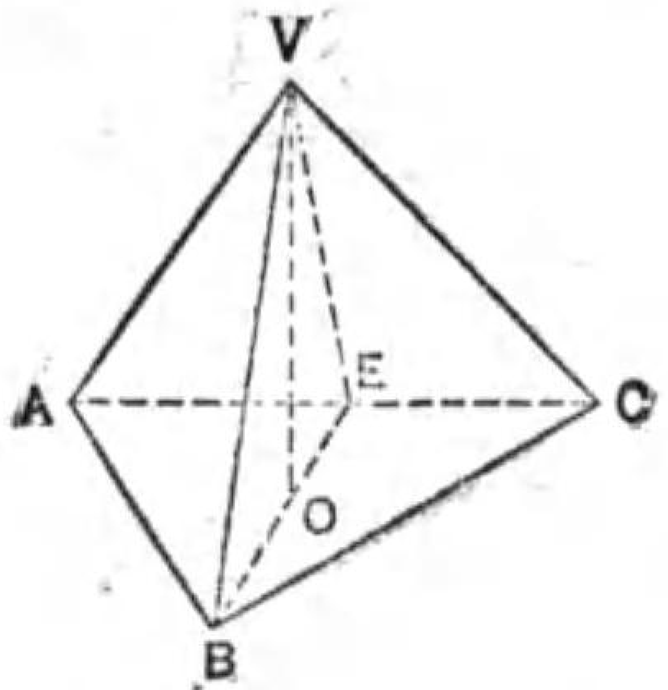
又正四面體内ノ一點ヨリ各面ニ下セル垂線ノ長サヲ a, b, c, d トスレバ

$$V=\frac{1}{3}Aa+\frac{1}{3}Ab+\frac{1}{3}Ac+\frac{1}{3}Ad$$
$$=\frac{1}{3}A(a+b+c+d).$$

故ニ $$h=a+b+c+d.$$

4. 正四面體ノ稜ノ長サ a 寸ナルトキ其ノ高サ幾寸ナルカ. [43. 海. 兵.]

解　正四面體ヲ V-ABC トス．底面 ABC ノ垂心ヲ O トスレバ，



BO⊥AC ニシテ且 △ABC ハ正三角形ナルユヱ其ノ交點 E ハ AC ノ中點トナリ，從ヒテ VE ヲ結ビ付クレバ，VE⊥AC，故ニ AC ハ VE, BE ノ平面 VBE ニ垂直トナル，故ニ又之ヲ含ム平面 ABC ハ平面 VBE ニ垂直ナリ，同様ニ平面 ABC ハ平面 VAO ニ垂直トナル．依リテ二ツノ平面 VBE, VAO ノ交リ VO モ亦平面 ABC ニ垂直トナル，即チ VO ハ頂點 V ヨリ下セル正四面體ノ高サナリ，而シテ何レノ頂點ヨリ下セル高サモ皆此ノ VO ニ等シ．

サテ ABC ハ正三角形ナルユヱ其ノ垂心 O ハ又其ノ重心ナリ，故ニ $BE=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

從ヒテ　$BO=\frac{2}{3}.BE=\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{1}{\sqrt{3}}a.$

故ニ　$VO=\sqrt{(\overline{VB}^2-\overline{BO}^2)}=\sqrt{\left\{a^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right)^2\right\}}$

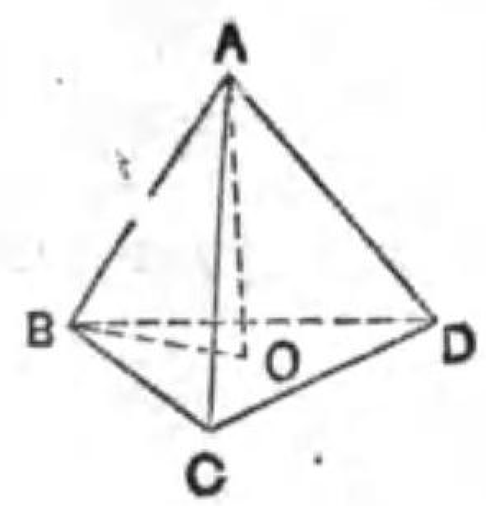
$=\frac{a}{3}\sqrt{6}$，

即チ高サハ $\frac{a}{3}\sqrt{6}$ 寸ナリ．

5. 高サ 6 寸ノ正四面體ノ體積ヲ求メヨ．

[44. 熊. 高. 工.]

解　正四面體 ABCD ノ高サヲ AO トスレバ O ハ △BCD ノ垂心ナリ．然ルニ △BCD ハ正三角形ナルユヱ O ハ又重心ナリ．故ニ此ノ正四面體ノ一ツノ稜ノ長サヲ a 寸トスレバ OB ハ



一邊ノ長サガ a 寸ナル正三角形ノ高サ $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 寸ノ $\frac{2}{3}$ ナルユヱ $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 寸ナリ．又直角三角形 AOB ヨリ AO=6寸 ナルユヱ $a^2-\frac{3}{9}a^2=36$，故ニ $a^2=54$.

△BCD ノ面積ハ　$\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，

故ニ所要ノ體積ハ　$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times 6=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 54$
$=27\sqrt{3}=46.76......$，即チ約 46立方寸.76 ナリ．

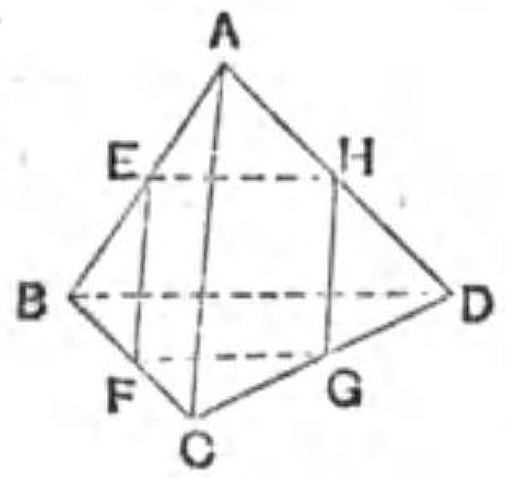
6. 正四面體ヲ截リテ其ノ截面ヲ正方形トセヨ．

[44. 陸. 經.]

解　與ヘラレタル正四面體ヲ ABCD トシ，此ノ四面體ヲ截リテ其ノ截面ヲ正方形ナラシメン

トス. 二双ノ對邊 AB, CD 及ビ AD, BC ノ中點ヲソレゾレ E, G 及ビ H, F トスレバ EFGH ハ所要ノ正方形ナリ.

如何トナレバ EF, GH ハ何レモ AC ニ平行ニ



シテ且ソノ半分ニ等シキユヱ $EF \parallel GH$, $EF=GH=\frac{1}{2}AC$, 同樣ニ $EH \parallel FG$,

$$EH=FG=\frac{1}{2}BD,$$

故ニ EFGH ハ同一ノ平面上ニアリテ且平行四邊形ナリ. 而シテ ABCD ハ正四面體ナルユヱ

$$AC=BD,\ AC \perp BD,$$

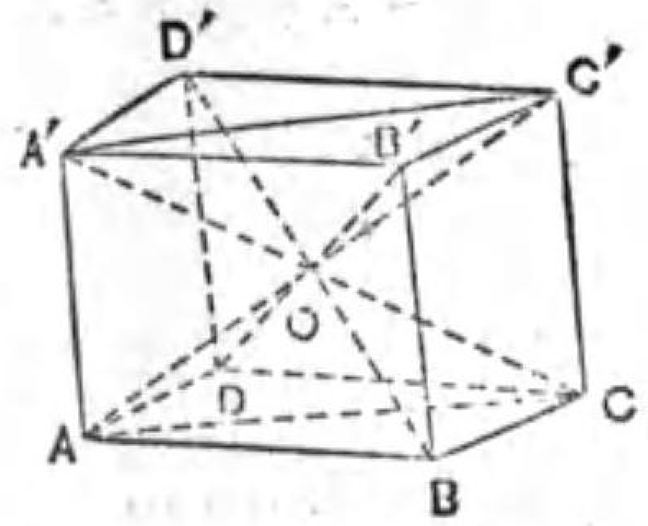
故ニ $\qquad EF=EH,\ EF \perp EH,$

依リテ EFGH ハ正方形ナリ.

注意 正四面體ニハ三組ノ對稜アルユヱ任意ノ二組ヅツヲ取リテ同樣ノ作圖ヲナシ得ベシ. 依リテ要件ニ適スル三ツノ截面アリ.

7. 平行六面體ノ對角線ハ一點ニ於テ交リ且互ニ二等分スルコトヲ證セヨ. [43. 各醫. 專.]

證 平行六面體ヲ ABCD-A′B′C′D′ トス. 對面ナル平行四邊形 ABCD, A′B′C′D′ ノ對角線 AC, A′C′ ヲ引ケバ ACC′A′ ハ平行四邊形ナルユヱ, AC′, A′C ハ其ノ交點 O ニ於テ互ニ二等分セラル.



同樣ニ AC′ ト BD′ ト, 及ビ AC′ ト DB′ トハ互ニ其ノ交點ニ於テ二等分セラル, 故ニ四ツノ對角線ハ同一ノ點 O ヲ過リ且互ニ O ニ於テ二等分セラル.

8. 直六面體ノ三ツノ稜ノ比ガ 2:3:4 ニシテ其ノ體積ハ 3 立方尺ナリト云フ, 其ノ三ツノ稜ノ長サ各幾寸ナルカ. [41. 秋. 鑛. 專.]

解 所要ノ三ツノ稜ハ $2x$寸, $3x$寸, $4x$寸ニテ表ハスコトヲ得ベシ.

故ニ $\quad (2x)(3x)(4x)=3000$, 故ニ $x^3=125$,

故ニ $\quad x=5$, 依リテ所要ノ長サハ

1尺, 1尺5寸, 2尺ナリ.

9. 底面ガ正三角形ナル角壔アリ, 其ノ體積 1 立方米, 其ノ高サ 0米8 ナリ. 底面ノ一邊ヲ糎ノ位マデ正シク算出セヨ. [43. 陸. 經.]

解 底面ナル正三角形ノ面積ハ

$$1 \times 3 \div 0.8 = 3.75,\ \text{即チ}\ 3^{\text{平方米}}.75$$

ナリ，依リテ底面一邊ノ米數ヲ x ニテ表ハセバ正三角形ノ面積ハ $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ ナルニヨ

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=3.75,$$

之ヨリ $x^2=\frac{15}{\sqrt{3}}=5\sqrt{3}=8.660\ldots\ldots,$

從ヒテ $x=\sqrt{8.660\ldots\ldots}=2.942\ldots\ldots,$

即チ 2米94 ナリ.

10. 底面ノ一邊ノ長サ 4尺，側稜ノ長サ 10尺アル正四角錐ノ全面積並ニ體積ヲ求ム［小數第三位マデ］. [44. 專. 入. 檢.]

解 此ノ正四角錐ノ側面ヲナス二等邊三角形ハ等邊 10 尺，底邊 4 尺ナリ. 故ニ其ノ高サハ $\sqrt{10^2-2^2}$，即チ $4\sqrt{6}$ 尺ナリ. 依リテ此ノ二等邊三角形ノ面積ハ $\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{6}$,

即チ $8\sqrt{6}$ 平方尺ナリ. 故ニ所要ノ全面積ハ

$$4^2+4\times8\sqrt{6}=16+\sqrt{6144}$$

$$=16+78.383\ldots\ldots=94.383\ldots\ldots,$$

即チ 94平方尺.383 ナリ.

次ニ此ノ正四角錐ノ底面ノ對角線ノ長サハ $4\sqrt{2}$ 尺ナルニヨ，正四角錐ノ高サハ等邊ガ 10尺，底

邊ガ $4\sqrt{2}$ 尺ナル二等邊三角形ノ高サ，

即チ $\sqrt{10^2-(2\sqrt{2})^2}$，即チ $\sqrt{92}$ 尺ナリ.

故ニ所要ノ體積ハ

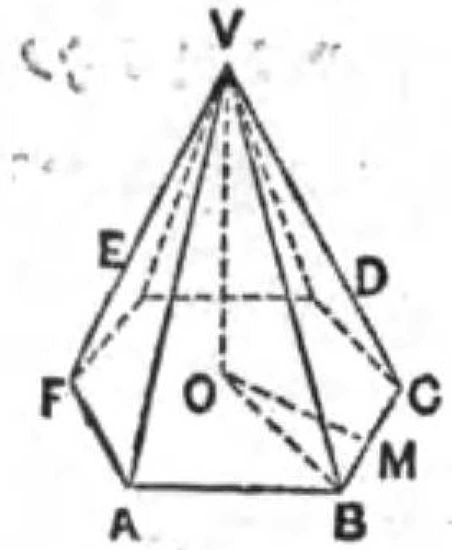
$$\frac{1}{3}\times4^2\times\sqrt{92}=\sqrt{\frac{23552}{9}}$$

$$=\sqrt{2616.888888\ldots\ldots}=51.155\ldots\ldots,$$

即チ 51立方尺.155 ナリ.

11. 正六角錐ノ高サ a 吋，底面ノ一邊ノ長サ b 吋ナルトキ其ノ表面積ヲ求メ併テ計算ノ理由ヲ記セ. [44. 上. 鑛. 專.]

解 正六角錐ヲ V-ABCDEF トシ，底面ノ中心ヲ O トス.



然ルトキハ $VO=a$,

$$AB=BC=\ldots\ldots=b$$

ナリ.

ABCDEF ハ正六角形ナルニヨ

$$OB=AB=b,$$

今 BC ノ中點ヲ M トスレバ

$$OM=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{BM}^2}$$

$$=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}b,$$

故ニ $\triangle OBC=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}b\times b=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2.$

又 $VM=\sqrt{\overline{VO}^2+\overline{OM}^2}$

$$=\sqrt{a^2+\frac{3}{4}b^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+3b^2}.$$

故ニ $\triangle VBC=\frac{1}{2}\times b\times\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+3b^2}$

$$=\frac{1}{4}b\sqrt{4a^2+3b^2}.$$

依リテ所要ノ表面積ハ平方吋ニテ

$$6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{1}{4}b\sqrt{4a^2+3b^2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}b(b\sqrt{3}+\sqrt{4a^2+3b^2}).$$

12. 底面ノ各邊4寸ニシテ高サ1尺5寸ノ正六角錐ノ體積ヲ求メヨ. [43.熊.高.工.]

解 各邊4寸ナル正六角形ノ面積ハ

$$6.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}.4^2=24\sqrt{3},$$

即チ $24\sqrt{3}$ 平方寸ナルユヱ所要ノ體積ハ

$$24\sqrt{3}\times 15\times\frac{1}{3}=120\sqrt{3}$$

$$=120\times 1.7320508\ldots\ldots\ldots,$$

$$=207.846\ldots\ldots\ldots,$$

即チ 207立方寸85 ナリ.

H′. 圓壔 圓錐

1. 面積 a^2 ナル一ツノ矩形アリ,此ノ矩形ノ相隣レル二邊ヲ軸トシテソレゾレ之ヲ一廻轉セシメテ生ズル二ツノ圓壔ノ體積ノ差ハ半徑 $\frac{a}{2}$ ナル球ノ體積ノ 3倍ニ等シ.矩形ノ二邊各幾何ナルカ. [43.海.機.]

解 矩形ノ二邊ヲ x, y トスレバ

$$xy=a^2 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (1)$$

又二邊ヲ軸トシテソレゾレ一廻轉シテ生ズル圓壔ノ體積ハソレゾレ πy^2x, πx^2y ニシテ半徑 $\frac{a}{2}$ ナル球ノ體積ハ $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3$ ナリ

故ニ $x>y$ トスレバ

$$\pi x^2y-\pi y^2x=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3\ldots\ \ldots \quad (2)$$

(2) ヨリ $xy(x-y)=\frac{1}{6}a^3,$

之ヲ (1) ニテ除シ $x-y=\frac{1}{6}a,$

故ニ $x=y+\frac{1}{6}a \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (3)$

(1) ト (3) トヨリ $y^2+\frac{1}{6}ay=a^2.$

之ヨリ　$y=-\frac{1}{12}a\pm\frac{\sqrt{145}}{12}a,$

依リテ正ノ値ヲ取レバ $y=\frac{\sqrt{145}-1}{12}a.$

從ヒテ (3) ヨリ　$x=\frac{\sqrt{145}+1}{12}a.$

2. 相似直圓錐ノ體積ハ底面ノ徑ノ立方ニ比例スルコトヲ證セヨ.　[44. 農. 大. 實.]

證 相似直圓錐ノ體積ヲ V, V′; 底面ノ半徑ヲ r, r'; 高サヲ h, h' トスレバ

$$\mathrm{V}:\mathrm{V}'=\frac{1}{3}\pi r^2h:\frac{1}{3}\pi r'^2h'=r^2h:r'^2h'.$$

然ルニ　$r:r'=h:h',$

故ニ　$\mathrm{V}:\mathrm{V}'=r^3:r'^3=(2r)^3:(2r')^3.$

3. 截頭直圓錐ノ側面積ハ兩底面ノ周圍ノ和ノ半分ト斜高トノ相乘積ニ等シキコトヲ證セヨ.　[44. 各醫. 專.]

證 截頭直角錐ノ各側面ハ二等邊梯形ナルユエ其ノ面積ハ兩底面ノ一邊ノ和ノ半分ト斜高トノ積ニ等シ. 而シテ側面積ハ各側面ノ和ナルユエ兩底面ノ周圍ノ和ノ半分ト斜高トノ積ニ等シ. 然ルニ截頭直角錐ノ底面ノ邊數ヲ無限ニ増加シタル極限ハ截頭直圓錐トナルヲ以テ題言ノ如シ.

4. 底面ノ周圍 8寸8分ニシテ, 高サ 2寸7分ナル直圓錐ノ體積ヲ求ム. 但圓周率ヲ $\frac{22}{7}$ トス.　[44. 長. 高. 商.]

解 底面ノ周圍ガ 8寸 8分ナルユエ

底面ノ半徑ハ $\frac{88}{2\pi}$分$=\frac{44}{\pi}$分 ナリ.

依リテ　公式 $\frac{1}{3}\pi r^2h$ ニ代入スレバ

$$\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{44}{\pi}\right)^2\times 27=\frac{44^2\times 9}{\pi}$$

$$=44^2\times 9\times\frac{7}{22}$$

$$=44\times 2\times 9\times 7=5544,$$

即チ　5544 立方分ナリ.

5. 直圓錐臺[或ハ截頭直圓錐]ノ上下兩底面ノ徑ソレゾレ 3尺, 4尺ニシテ高サハ 5尺ナリ. 此ノ體積如何. 但 $\pi=\frac{22}{7}$ トス.　[43. 七高.]

解 直圓錐臺ノ兩底面ノ半徑ヲ r, r' トシ, 高サヲ h, 體積ヲ V ニテ表ハセバ

$$\mathrm{V}=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$$

ナリ. 此ノ式ニ於テ

$r=\frac{3}{2},\ r'=2,\ h=5,\ \pi=\frac{22}{7}$　トスレバ

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times5\times\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\times2\right)+2^2\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times5\times\frac{37}{4}$$

$$=48.45\cdots\cdots\cdots$$

答 48立方尺.45 [弱].

6. 截頭直圓錐アリ，其ノ高サ 70 尺ニシテ兩底面ノ徑ハ 10 尺及ビ 7 尺ナリ，體積ヲ求ム．但 $\pi=\frac{22}{7}$ トス． [44. 水. 講.]

解 公式 $V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)$ ニ所題ノ數ヲ代入スレバ

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times70\times(5^2+5\times3.5+3.5^2)$$

$$=4015,$$

即チ 4015 立方尺ナリ．

7. 直角ヲ夾メル二邊ノ長サガ 7 寸ト 2 尺 4 寸ナル直角三角形ノ斜邊ヲ軸トシテ此ノ三角形ヲ一廻轉シタルトキ生ジタル體ノ體積ヲ求メヨ． [43. 陸. 士.]

解 斜邊ヲ軸トシ一廻轉シテ生ズル體ハ二ツノ直圓錐ヨリ成リ，其ノ底面ノ半徑ハ何レモ直角頂ヨリ斜邊ニ下セル垂線ニシテ，其ノ高サノ和ハ即チ斜邊ナリ，然ルニ寸ノ單位ニテ斜邊ハ

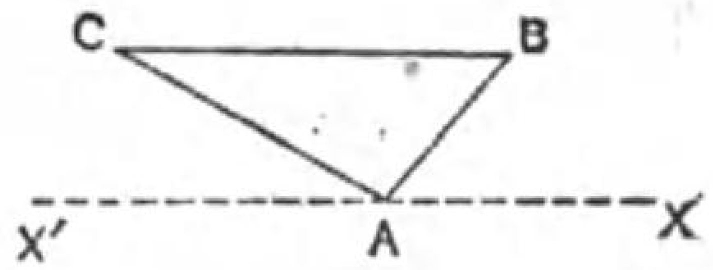
$\sqrt{(7^2+24^2)}=25$, 從ヒテ直角頂ヨリ斜邊ニ下セル垂線ハ $\frac{7\times24}{25}=6.72$ ナルユエ所要ノ體積ヲ V ニテ表ハセバ

$$V=\frac{1}{3}\times25\times(6.72)^2\pi$$

$$=1182.246\cdots\cdots\cdots$$

即チ 1182立方寸.25 ナリ．

8. 圖ノ三角形ニ於テ AB=10寸, BC=21寸, CA=17 寸トス．今 A ヲ過リ BC ニ平行ナル直線 XAX′ ヲ軸トシテ △ABC ノ平面ヲ一廻轉スルトキ，次ノ第一及ビ第二ヲ計算セヨ． [44. 大. 高. 工.]



[第一] △ABC ノ作ル廻轉體ノ體積．

[第二] △ABC ノ重心ノ畫ク徑路ト △ABC ノ面積トノ相乘積．

解 [第一] A ヨリ BC ニ引ケル高サ即チ BC ト XX′ トノ距離ヲ x トス．

△ABC ヲ, XAX′ ヲ軸トシテ廻轉スルトキ生ズル體ノ體積ハ, BC ノ生ズル圓壔ヨリ AB, AC ノ生ズル圓錐ヲ減ジタルモノナリ．

故ニ $\qquad \pi x^2.BC-\frac{1}{3}\pi x^2.BC=\frac{2}{3}\pi x^2.BC.$

[第二] $\triangle ABC$ ノ重心ノ畫ク徑路ハ $\frac{2}{3}x$ ヲ半徑トスル圓周ナリ. 故ニ $\frac{4}{3}\pi x$. $\triangle ABC$ ノ面積ハ $\frac{1}{2}x.BC$. 依リテ此ノ積ハ $\frac{2}{3}\pi x^2.BC$.

即チ 第一, 第二ノ値ハ相等シ.

次ニ値ヲ計算スベシ.

$$\frac{2}{3}\pi x^2.BC=\frac{8\pi}{3.BC}\times\frac{1}{4}x^2\overline{BC}^2$$

$$=\frac{8\pi}{3\times 21}\times(\triangle ABC)^2.$$

而シテ $\frac{1}{2}(10+21+17)=24.$

$$24-10=14,\ 24-21=3,\ 24-17=7.$$

故ニ $\qquad (\triangle ABC)^2=24\times 14\times 3\times 7,$

依リテ所要ノ値ハ $\frac{8\pi}{3\times 21}\times 24\times 14\times 3\times 7$

$$=896\times\pi,$$

之ヲ第一位マデ正シク計算スレバ次ノ如シ.

```
 3.14159.........
      6.98
 -------
 25 13272
  2 82735
    18846
 --------
 2814.853
     9
```


故ニ第一ノ値ハ 2815 立方寸弱.

第二ノ値ハ 2815 弱ナリ.

9. 雨天ニ屋外ニ置キタル口徑1尺, 底徑寸, 深サ 8寸ナルばけつニ水ノ溜レルコトばけつノ深サノ半分ニ至リシト云フ. 一坪ノ面積ニ降レル雨ノ量幾斗幾升ナルカ.

但1升ヲ 64立方寸.8 トス. [43. 海. 兵.]

解 ばけつノ内ノ水ノ量ヲ求メンニ, 溜リタル水ノ部分ハ直圓錐臺ヲナシ, 其ノ底半徑ハ (10寸+6寸)÷4=4寸, 及ビ 3寸ニシテ, 深サハ 8寸÷2=4寸 ナルガ故ニ其ノ體積ハ

$$\frac{1}{3}\times 4\times\pi(4^2+4\times 3+3^2)=\frac{148}{3}\pi,$$

即チ $\frac{148}{3}\pi$ 立方寸ナリ.

而シテコレダケノ雨水ハ徑1尺ノ圓ノ面, 即チ $(5^2\times\pi)$ 平方寸ノ面積內ニ降レル雨水ナルベシ, 故ニ 1坪, 即チ 60^2 平方寸內ニ降レル雨水ノ量ヲ x 立方寸トスレバ,

$$5^2\times\pi:60^2=\frac{148}{3}\pi:x \quad ヨリ \quad x=7104,$$

即チ 1 坪內ニ降レル雨水ノ量ハ 7104 立方寸

ナルコトヲ知ル，故ニ所要ノ量ハ

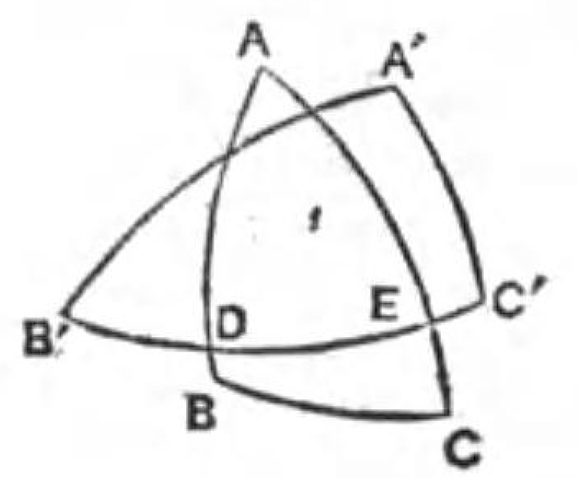
$$\frac{7104}{64.8}=109.6\ldots\ldots,$$

即チ約1石1斗ナリ.

I′. 球

1. 球面三角形ノ各ノ角ハ其ノ極三角形ノ之ニ對應スル邊ガ中心ニ於テ對スルノ角ノ補角ニ等シキコトヲ證セヨ. [43. 仙. 高. 工.]

證 ABC, A′B′C′ ハ各他ノ極三角形ニシテ



A′, B′, C′ ハソレゾレ BC, CA, AB ノ極トス. 邊 AB, AC 或ハ其ノ延線ガ B′C′, 或ハ其ノ延線トソレゾレ D, E ニ於テ交ルトスレバ A ハ B′C′ ノ極ナルヲ以テ角 A ハ DE ガ中心ニ於テ對スル角ニ等シク；B′, C′ ハソレゾレ AC, AB ノ極ナルヲ以テ弧 B′E, C′D ハ何レモ四分圓周ナリ，故ニ弧 B′E, C′D ノ和，即チ弧 DE, B′C′ ノ和ハ半圓ニ等シ，故ニ弧

DE, B′C′ ガ中心ニ於テ對スル角ノ和ハ二直角ニ等シ，即チ角 A ハ弧 B′C′ ガ中心ニ於テ對スル角ノ補角トナル，角 B, C ニ於テモ亦同樣ナリ.

2. 同一ノ平面上ニアラザル四ツノ點ヲ過ル球ニ幾種アルカ. [44. 海. 經.]

解 同一ノ平面上ニアラザル四ツノ點ヲ過ル球ノ中心ヨリ其ノ四ツノ點ニ至ル距離ハ相等シ. 然ルニ同一ノ平面上ニアラザル四ツノ點ヨリ等距離ナル點ハ唯一ツアルノミ. 故ニ同一ノ平面上ニアラザル四ツノ點ヲ過ル球ハ唯一ツニ限ル.

3. 半徑3間3尺ノ球ノ體積ヲ求メヨ.

但 $\pi=3.1416$ トシ一立方尺ニ滿タザル端數ハ四捨五入セヨ. [44. 海. 機.]

解 公式 $\frac{4}{3}\pi r^3$ ニ依リ

$$\frac{4}{3}\times 3.1416\times 21^3=38792.4768,$$

即チ 38792 立方尺強ナリ.

4. 球ノ面積 3.1416 平方寸ナルトキ此ノ球ノ半徑及ビ體積ヲ求メヨ. [44. 京. 醫. 專.]

解 公式ニ依リ $4\pi r^2=31416$, 今 $\pi=3.1416$

トスレバ $4r^2=10000$, 故ニ $r^2=2500$,

故ニ $r=50$, 卽チ半徑ハ5尺ナリ.

又公式 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ ヨリ

$$V=\frac{1}{3}r\times 4\pi r^2=\frac{1}{3}\times 50\times 31416=523600,$$

卽チ體積ハ523600立方寸ナリ.

5. 半徑8尺ナル球ト體積相等シクシテ底面ノ半徑7尺ナル直圓錐ノ高サヲ求ム.

[44. 海. 兵.]

解 半徑8尺ナル球ノ體積ハ $\frac{4}{3}\pi 8^3$,

卽チ $\frac{4\times 8^3}{3}\pi$ 立方尺ナリ, 故ニ所要ノ直圓錐ノ高サヲ x 尺トスレバ其ノ體積ハ $\frac{1}{3}\pi\times 7^2\times x$

立方尺ナルユヱ $\frac{7^2}{3}\pi x=\frac{4\times 8^3}{3}\pi$,

依リテ $7^2x=4\times 8^3$,

故ニ $x=\frac{4\times 8^3}{7^2}=41.795\cdots\cdots$

卽チ約41尺8寸ナリ.

6. 次ノ事項ヲ證セヨ. [44. 陸. 士.]

(1) 相似直圓壔ノ側面積ハ底面ノ半徑ノ平方ニ比例シ, 又體積ハ底面ノ半徑ノ立方ニ比例ス.

(2) 徑6米ナル球ノ體積ト底面ノ徑6米, 高サ4米ナル直圓錐ノ體積トノ比ハ $3:1$ ナリ.

證 (1) 二ツノ相似直圓壔ノ底面ノ半徑ヲ R, r トシ, 高サヲ H, h トスレバ

$$H:h=R:r.$$

故ニ 側面積ヲ S, s トスレバ

$$S:s=2\pi RH:2\pi rh=RH:rh=R^2:r^2.$$

又 體積ヲ V, v トスレバ

$$V:v=\pi R^2H:\pi r^2h=R^2H:r^2h=R^3:r^3.$$

(2) 徑6米ナル球ノ體積ハ立方米ニテ $\frac{4}{3}\pi\times 3^3$,

又底面ノ徑6米, 高サ4米ナル直圓錐ノ體積ハ

立方米ニテ $\frac{1}{3}\pi\times 3^2\times 4.$

故ニ此ノ體積ノ比ハ

$$\frac{4}{3}\pi\times 3^3:\frac{1}{3}\pi\times 3^2\times 4=3:1.$$

7. 徑6cm, 高サ28cm ノ直圓壔ノ兩端ニ同ジ徑ノ半球ヲ附シタル立體アリ, 之ト同ジ體積ヲ有スル球ノ徑ヲ求ム. [44. 小. 高. 商.]

解 本題ニ於ケル立體ノ體積ハ立方糎ニテ

$$\pi\times 3^2\times 28+\frac{4}{3}\pi\times 3^3=3\pi(3\times 28+12),$$

故ニ所題ノ球ノ半徑ヲ r トスレバ

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 3\pi(3\times 28+12),$$

故= $r^3=216$, 故= $r=6$,

依リテ所要ノ徑ハ 12cm ナリ.

再 増 補

目　次

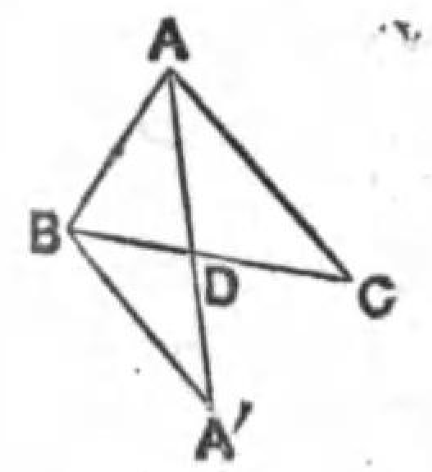
明治 45 —— 大正 2 年度

試驗問題講義
幾何學之部

直　線

1. 三角形 ABC ニ於テ邊 AC ハ邊 AB ヨリ大ナリ，然ルトキ頂點 A ヲ過ル中線ガ邊 AC トナス角ハ，其ノ中線ガ邊 AB トナス角ヨリ小ナルコトヲ證セヨ．　[45. 商船.]

證　BC ノ中點ヲ D トシ，AD ノ延線上ニ



DA′=DA ヲ取リ，BA′ ヲ結ビ付クルトキハ，△ADC, △A′DB ハ二邊ト其ノ夾角トガ相等シキヲ以テ全等ナリ．

故ニ　　$\hat{A'}=D\hat{A}C$,　$BA'=CA$,

依リテ △ABA′ ニ於テ $BA<BA'$

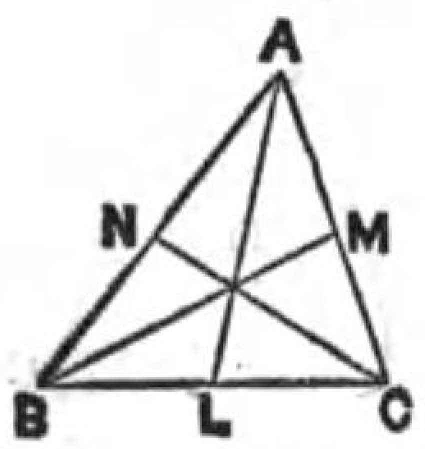
ナルユエ　　$\hat{A}' < D\hat{A}B,$

故ニ　　$D\hat{A}C < D\hat{A}B.$

尙本書 41 頁 39 題ヲ參照セヨ.

2. 三角形ノ三邊ノ和ハ, 其ノ三ツノ中線ノ和ヨリ大ニシテ, 其ノ和ノ 2 倍ヨリ小ナルコトヲ證セヨ.　　[45. 各醫.專.]

證　$\triangle ABC$ ノ三ツノ中線ヲ AL, BM, CN トスレバ



$$\frac{1}{2}(AB+AC) > AL,$$
$$\frac{1}{2}(BC+AB) > BM,$$
$$\frac{1}{2}(AC+BC) > CN.$$

故ニ　　$AB+BC+AC > AL+BM+CN,$

又　　$AB < AL+BL,$
$$AC < AL+CL,$$
$$BC < BM+CM,$$
$$AB < BM+AM,$$
$$AC < CN+AN,$$
$$BC < CN+BN.$$

故ニ　　$2(AB+BC+AC) < 2(AL+BM+CN) + AB+BC+AC.$

卽チ　　$AB+BC+AC < 2(AL+BM+CN).$

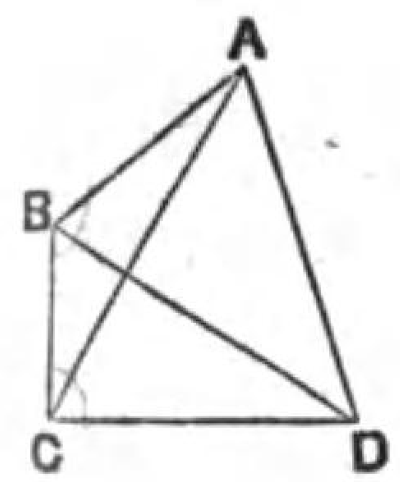
3. 直角三角形アリ, 其ノ二ツノ銳角ノ中, 一ツガ他ノ 2 倍ニ等シキトキハ, 小サキ方ニ對スル邊ハ斜邊ノ半分ニ等シキコトヲ證セヨ.

[II. 商船.]

證　本書 51 頁 51 題ニ同ジ.

4. 凸四邊形 ABCD ノ四邊中 AD ガ最モ長ク, BC ガ最モ短キトキハ, 角 ABC ハ角 ADC ヨリ大ニシテ角 BCD ハ角 BAD ヨリ大ナルコトヲ證セヨ.　　[II. 海.機.]

證　對角線 AC, BD ヲ結ビ付クルトキハ



$$AD > AB,\ CD > BC,$$

故ニ　　$A\hat{B}D > A\hat{D}B,$
$$C\hat{B}D > C\hat{D}B.$$

故ニ　　$A\hat{B}D + C\hat{B}D > A\hat{D}B + C\hat{D}B,$

卽チ　　$A\hat{B}C > A\hat{D}C,$

又　　$BA > BC,\ AD > CD.$

故ニ　　$B\hat{C}A > B\hat{A}C,$
$$A\hat{C}D > C\hat{A}D.$$

故ニ　　$B\hat{C}A + A\hat{C}D > B\hat{A}C + C\hat{A}D.$

卽チ　　$B\hat{C}D > B\hat{A}D.$

5. 凸多角形ノ各邊ヲ順次ニ引キ延バシテ生ズル外角ノ和ハ，四直角ニ等シキコトヲ證セヨ [45. 鹿.高.農.]

證 本書 32 頁 **29** 題ニ同ジ.

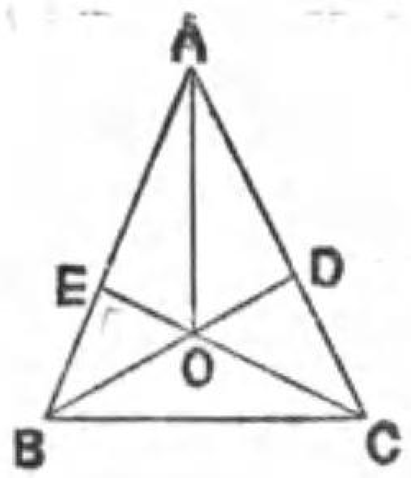
6. 正十五角形ノ一角ノ大イサハ何度ナルカ. [II. 鹿.高.農.]

解 所要ノ角ノ大イサハ

$$180^\circ-\frac{360^\circ}{15}=\underset{\sim\sim}{156^\circ}.$$

7. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端ヨリ相對スル邊ヘ引ケル垂線ノ交點ト，頂點トヲ結ビ付クル直線ハ，頂角ヲ二等分スルコトヲ證セヨ. [I. 女.高.師.]

證 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ノ兩端 B, C ヨリ對邊 AC, AB ニソレゾレ垂線 BD, CE ヲ引キ，其ノ交點ヲ O トス.



然ルトキハ △ABD, △ACE ニ於テ

斜邊 AB=AC, $B\hat{A}C$ ハ共通.

故ニ △ABD≡△ACE.

依リテ AD=AE.

又 △AOD, △AOE ニ於テ

斜邊 AO ハ共通，

AD=AE.

依リテ △AOD≡△AOE.

故ニ $O\hat{A}D=O\hat{A}E.$

8. 三角形ノ二ツノ中線ガ相等シキトキハ，本形ハ二等邊ナルコトヲ證セヨ. [II. 商船.]

證 三角形 ABC ニ於テ二ツノ中線 BE, CF ヲ相等シトシ，

其ノ交點ヲ G トス.

然レバ G ハ △ABC ノ重心ナルヲ以テ

$$BG=\frac{2}{3}BE=\frac{2}{3}CF=CG,$$

$$FG=\frac{1}{3}CF=\frac{1}{3}BE=EG,$$

又 $B\hat{G}F=C\hat{G}E,$

故ニ △BGF≡△CGE,

故ニ BF=CE,

依リテ 2BF=2CE,

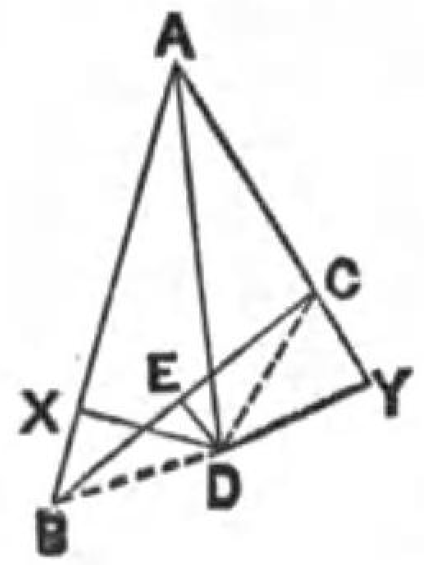
即チ AB=AC.

卽チ △ABC ハ二等邊ナリ.

尙本書 65 頁 63 題ヲ參照セヨ.

9. 三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線ト, 邊 BC ノ垂直二等分線トノ交點ヲ D トシ, D ヨリ AB, AC 或ハ其ノ延線ヘ垂線 DX, DY ヲ引クトキハ; AX=AY, BX=CY ナルコトヲ證セヨ. [I. 商船]

證 BC ノ中點ヲ E トス, 直角三角形 ADX, ADY ニ於テ



斜邊 AD ハ共通,

$$D\hat{A}X=D\hat{A}Y$$

ナルユエ, 兩形ハ全等ナリ.

故ニ AX=AY.

又 ED ハ BC ノ垂直二等分線ナルヲ以テ

$$DB=DC,$$

依リテ直角三角形 DBX, DCY ハ全等ナリ.

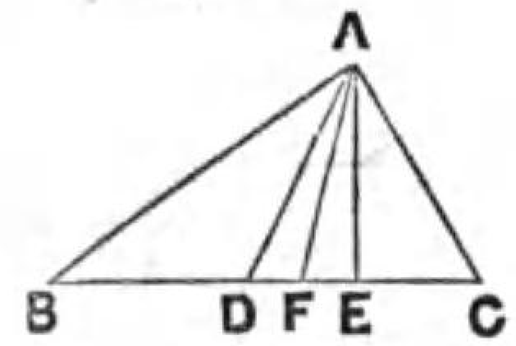
故ニ BX=CY.

10. 三角形ノ一ツノ角ヲ二等分スル直線ハ, 其ノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル垂線ト中線トノ間ニアルコトヲ證セヨ. [45. 東. 高. 商]

證 △ABC ノ角頂 A ヨリ引ケル中線ヲ AD,

垂線ヲ AE, 角 A ノ二等分線ヲ AF トス.

今 AB>AC トスレバ



$$B\hat{A}D<C\hat{A}D,$$

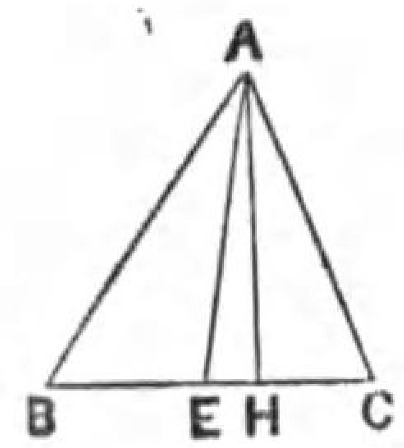
及ビ $B\hat{A}E>C\hat{A}E$.

故ニ AF ハ角 CAD 內ニアリテ且角 BAE 內ニアリ.

依リテ AF ハ AD ト AE トノ間ニアリ.

11. 三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線 AE ト, A ヨリ BC ニ下セル垂線 AH トニテナス角 HAE ハ角 B, C ノ差ノ半分ニ等シキコトヲ證セヨ. [45. 陸. 經.]

證 $\hat{B}$, $\hat{C}$ ガ鋭角ナルトキハ



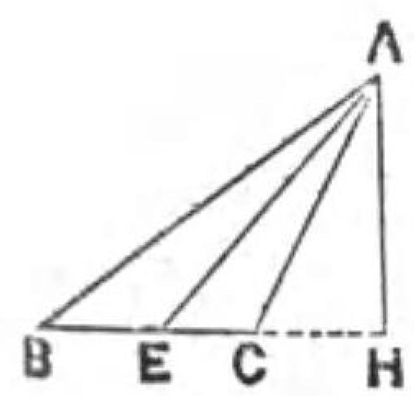
$$\hat{R}-B\hat{A}H=A\hat{B}C,$$

$$\hat{R}-H\hat{A}C=A\hat{C}B.$$

相減ズレバ

$$B\hat{A}H\sim H\hat{A}C=A\hat{B}C\sim A\hat{C}B,$$

卽チ



$$(B\hat{A}E\pm H\hat{A}E)\sim(C\hat{A}E\mp H\hat{A}E)=A\hat{B}C\sim A\hat{C}B,$$

然ルニ $B\hat{A}E=C\hat{A}E$.

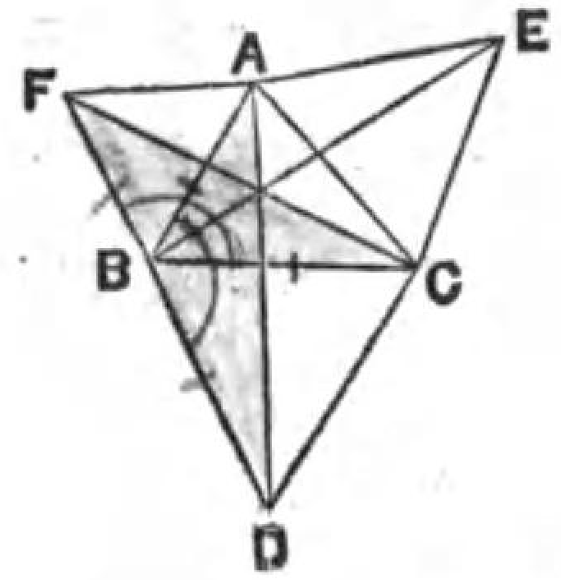
故ニ $2H\hat{A}E=A\hat{B}C\sim A\hat{C}B$.

故ニ $\hat{HAE}=\frac{1}{2}(\hat{ABC}\sim\hat{ACB})$.

次ニ $\hat{B}$ 或ハ $\hat{C}$ ガ鈍角ナルトキモ同様ニシテ證明シ得ベシ.

12. 三角形 ABC ノ各邊上ニ其ノ外側ニ, 正三角形 BCD, CAE, ABF ヲ畫ケバ, 直線 AD, BE, CF ハ相等シキコトヲ證セヨ. [II. 海. 經.]

證 △ABD, △FBC ニ於テ



$$AB=FB,\ BD=BC,$$
$$\hat{ABD}=\hat{ABC}+\hat{CBD}$$
$$=\hat{ABC}+\frac{2}{3}\hat{R}$$
$$=\hat{ABC}+\hat{ABF}$$
$$=\hat{FBC},$$

故ニ $\triangle ABD\equiv\triangle FBC$.

依リテ $AD=FC$,

同様ニ $AD=EB$.

故ニ $AD=BE=CF$.

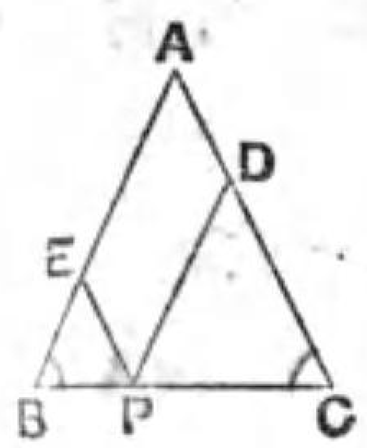
尙本書 38 頁 **35** 題ヲ見ヨ.

13. 二等邊三角形ノ底邊上ノ一點 P ヨリ, 他ノ二邊ニ平行ナル直線ヲ引キ, 其ノ二邊ト共ニ作レル平行四邊形ノ周圍ハ, 點 P ノ位置ニ

係ラズ, 恒ニ一定不易ナルコトヲ證セヨ.

[45. 女. 高. 師.]

證 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ任意ノ點 P ヨリ AB, AC ニ平行線 PD, PE ヲ引キ平行四邊形 AEPD ヲ作レバ



$$\hat{EPB}=\hat{C}=\hat{B},$$

故ニ $EB=EP$,

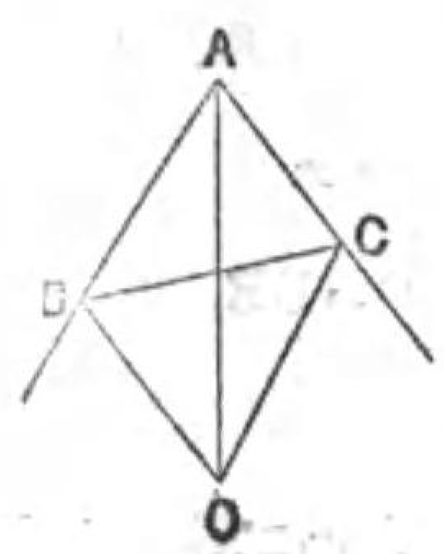
又 $AE=PD,\ EP=AD$,

依リテ平行四邊形 AEPD ノ周圍ハ

$$2(PE+PD)=2(EB+AE)$$
$$=2AB.$$

即チ一定ナリ.

14. 三角形ノ一ツノ角ヲ二等分スル直線及ビ他ノ二ツノ頂點ニ於テノ外角ヲ二等分スル二ツノ直線ハ同一ノ點ニ於テ相交ルコトヲ證セヨ. [II. 山. 高. 商.]



證 三角形 ABC ノ角 B, C ノ外角ノ二等分線ノ交點ヲ O トシ, OA ヲ結ビ付クレバ OB 上ノ點ハ

AB, BC ヨリ等距離ニシテ OC 上ノ點ハ BC, CA ヨリ等距離ナリ.

依リテ點 O ハ AB, BC, CA ヨリ等距離ナリ.

即チ點 O ハ AB, AC ヨリ等距離ナリ, 而シテ O ハ $B\hat{A}C$ 內ニアリ.

故ニ O ハ $B\hat{A}C$ ノ二等分線上ニアリ.

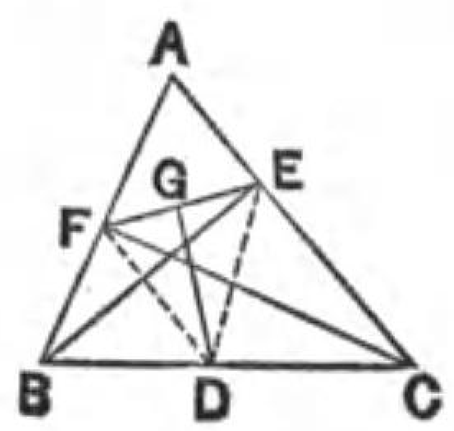
故ニ OA ハ $B\hat{A}C$ ヲ二等分ス.

即チ $\hat{A}$, $\hat{B}$ ノ外角, $\hat{C}$ ノ外角ノ二等分線ハ點 O ヲ過ル. 即チ題言ノ如シ.

15. 三角形 ABC ノ二ツノ角頂 B, C ヨリ對邊 AC, AB ニ引ケル垂線ノ趾ヲソレゾレ E, F トセバ直線 EF ノ中點ト邊 BC ノ中點トヲ結ビ付クル直線ハ EF ニ垂直ナルコトヲ證セヨ.

[45. 海. 機.]

證 BC, EF ノ中點ヲソレゾレ D, G トシ,



DE, DF ヲ結ビ付クレバ D ハ直角三角形 BEC ノ斜邊ノ中點ナルユヱ

$$BD=DE.$$

同様ニ $$BD=DF.$$

依リテ DE=DF ニシテ △DEF ハ二等邊ナリ,

故ニ $$DG\perp EF.$$

別證 $B\hat{E}C=B\hat{F}C=\hat{R}$ ナルヲ以テ BFEC ハ BC ヲ徑トスル圓周上ニアリ.

故ニ BC ノ中點 D ハ此ノ圓ノ中心ナリ.

依リテ DG ハ EF ニ垂直ナリ.

16. 正三角形ノ內ニアル任意ノ一點ヨリ, 其ノ三邊ヘ下セル垂線ノ長サノ和ハ, 其ノ三角形ノ一ツノ頂點ヨリ, 之ニ對スル邊ノ中點ヘ引ケル直線ノ長サニ等シキコトヲ證セヨ.

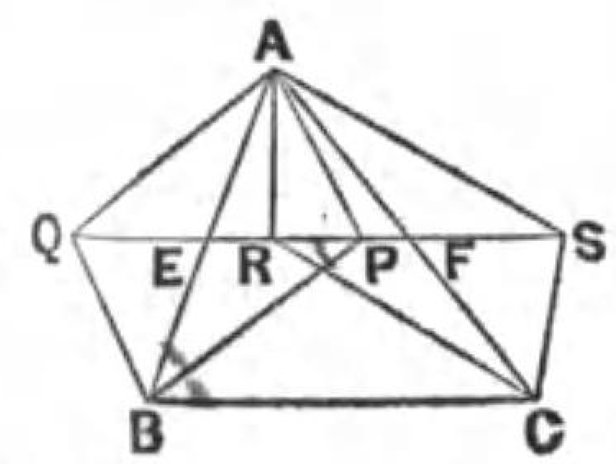
[45. 山. 高. 商.]

證 本書 83 頁 79 題ニ同ジ.

17. 三角形 ABC ノ B, C ニ於ケル內角及ビ外角ノ二等分線ヘ角頂 A ヨリ下セル垂線ノ趾ハ同一ノ直線上ニアルコトヲ證セヨ.

[II. 東. 高. 工.]

證 角 B ニ於ケル內角及ビ外角ノ二等分線ヲソレゾレ BP, BQ トシ, A ヨリ之ニ下セル垂線ノ趾ヲソレゾレ P, Q トス.



又角 C ニ於ケル內角及ビ外角ノ二等分線ヲソ

レゾレ CR, CS トシ, A ヨリ之ニ下セル垂線ノ趾ヲソレゾレ R, S トス, 然ルトキハ AQBP ニ於テ

$$\hat{Q}=\hat{P}=\hat{R},$$

又 $$P\hat{B}Q=\hat{R}.$$

故ニ AQBP ハ矩形ナリ.

依リテ PQ ヲ結ビ付クレバ PQ ハ AB ノ中點 E ヲ過ル.

而シテ $$E\hat{P}B=E\hat{B}P=P\hat{B}C,$$

故ニ $$PQ \parallel BC,$$

即チ PQ ハ AB ノ中點 E ヲ過リテ BC ニ平行ナル直線ナリ. 故ニ AC ノ中點 F ヲ過ル.

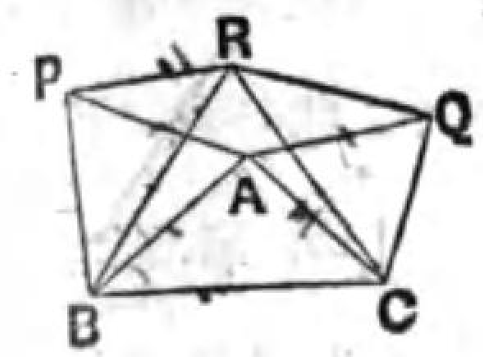
同様ニ RS ハ AC ノ中點 F ヲ過リテ BC ニ平行ナル直線ナリ.

故ニ PQ, RS ハ一致ス.

即チ P, Q, R, S ハ同一直線上ニアリ.

18. 三角形 ABC ノ二邊 AB, AC 上ニソレゾレ正三角形 APB, AQC ヲ, 元ノ三角形ノ外方ニ作リ, 又邊 BC ヲ一邊トシテ元ノ三角形ノ上ニ正三角形 BRC ヲ作ルトキハ, PAQR ハ平行四邊形ナルコトヲ證セヨ. [45. 陸. 經.]

證 △PBR, △ABC ニ於テ PB=AB,



$$BR=BC,$$

$$P\hat{B}R=A\hat{B}C.$$

故ニ $$\triangle PBR \equiv \triangle ABC,$$

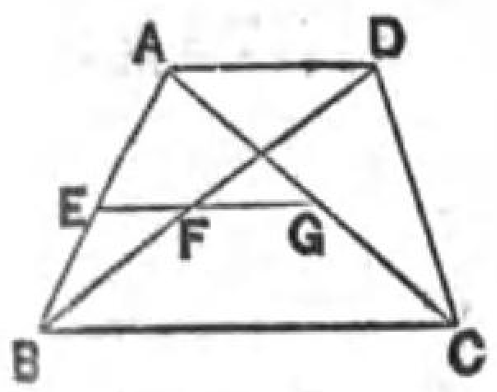
故ニ $$PR=AC=AQ,$$

同様ニ $$RQ=PA.$$

故ニ PAQR ハ平行四邊形ナリ.

19. 梯形ノ兩對角線ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ平行スル二邊ノ差ノ半分ニ等シキコトヲ證セヨ. [45. 海. 經.]

證 梯形 ABCD ニ於テ AD∥BC トス.



AB ノ中點 E ト BD ノ中點 F トヲ結ビ付クル直線ガ AC ニ交ル點ヲ G トスレバ

$$EF \parallel AD,\ EF=\frac{1}{2}AD,$$

又 EG∥BC ナルユヱ G ハ AC ノ中點ナリ.

依リテ $$EG=\frac{1}{2}BC.$$

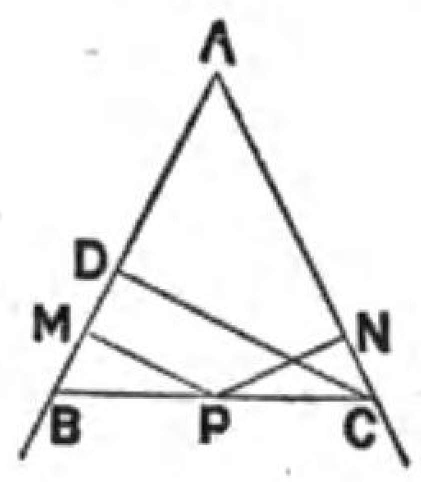
故ニ $$FG=EG\sim EF$$

$$=\frac{1}{2}BC\sim\frac{1}{2}AD$$

$$=\frac{1}{2}(BC\sim AD).$$

20. 與ヘラレタル銳角內ノ一點ヨリ兩邊ニ下セル垂線ノ和ガ一定ナルトキ，此ノ點ノ軌跡ヲ求メヨ．　[45. 東. 高. 師.]

解　銳角 BAC 內ノ一點 P ヨリ AB, AC ニ



下セル垂線 PM, PN ノ和ガ定長 m ニ等シキトキ，點 P ノ軌跡ヲ求メントス．

P ヨリ $B\hat{A}C$ ノ二等分線ニ垂線ヲ引キ; AB, AC トノ交點ヲソレゾレ B, C トシ，C ヨリ AB ニ垂線 CD ヲ下セバ

$$PM+PN=CD$$ [本書 82 頁 78 題]

$$=m,$$

依リテ AC=AB ハ一定ナリ．

故ニ P ハ二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ニアリ．

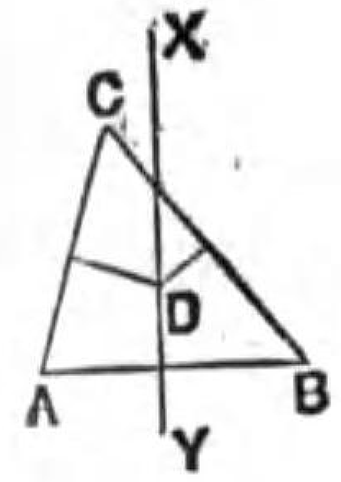
逆ニ BC 上ノ點ハ皆要件ニ適ス．

故ニ所要ノ軌跡ハ二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ナリ．

21. 位置及ビ長サノ與ヘラレタル直線 AB ノ上ニ任意ノ三角形 ABC ヲ畫キ; 邊 AC, BC ヲ直角ニ二等分スル直線ノ交點ヲ D トシ，點

D ノ軌跡ヲ求メヨ．　[45. 新. 醫. 專.]

解　點 D ハ AC, BC ノ垂直二等分線上ノ



點ナルユヱ △ABC ノ外心ナリ．

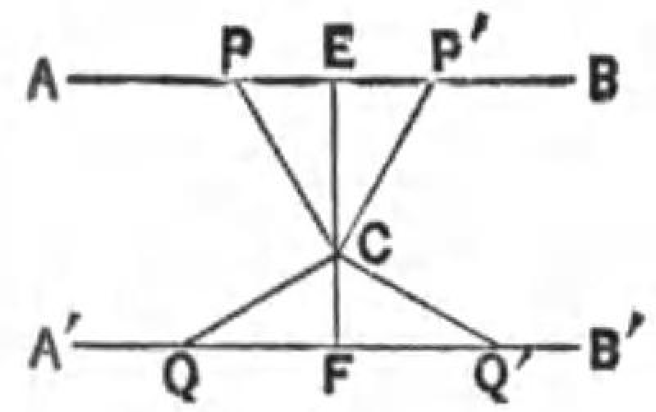
故ニ D ハ AB ノ垂直二等分線 XY ノ上ニアリ．

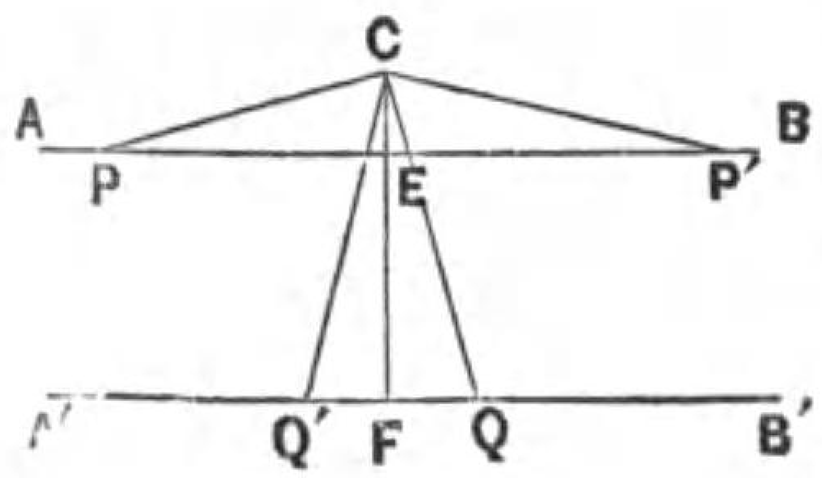
逆ニ XY 上ノ點ハ要件ニ適スルコト容易ニ證明シ得ベシ．

故ニ所要ノ軌跡ハ直線 XY ナリ．

22. C ヲ與ヘラレタル點トシ，與ヘラレタル二平行線上ニソレゾレ點 P 及ビ Q ヲ取リ; CP, CQ ヲ相等シカラシメ，且角 PCQ ヲ直角ナラシムル方法及ビ其ノ證明如何．

[II. 東北農. 大.]





解　二ツノ平行線ヲ AB, A′B′ トシ，P ハ AB 上ニ，Q ハ A′B′ 上ニ取ルモノトス．

C ヲ過リ AB, A′B′ ノ共通垂

線 ECF ヲ引キ, EA 上ニ EP ヲ CF ニ等シク取リ,

又 C ガ AB, A′B′ ノ間ニアルトキハ FA′ 上ニ, C ガ AB, A′B′ ノ間ニアラザルトキハ FB′ 上ニ FQ ヲ CE ニ等シク取レバ P, Q ハ所要ノ點ナリ.

如何トナレバ CP, CQ ヲ結ビ付クレバ直角三角形 CEP, QFC ハ二邊ト其ノ夾角トガ相等シキヲ以テ全等ナリ.

依リテ $\quad C\hat{P}E=Q\hat{C}F,$

故ニ $\quad Q\hat{C}F+P\hat{C}E=C\hat{P}E+P\hat{C}E=\hat{R}.$

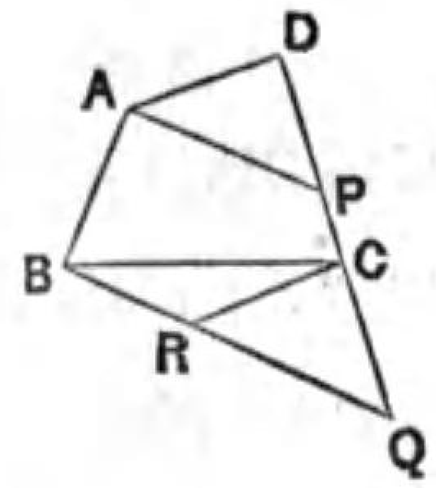
故ニ $\quad P\hat{C}Q=\hat{R}$

ナレバナリ.

又 P, Q ヲソレゾレ EB, FB′ [或ハ FA′] 上ニ取リテモ同様ナリ.

23. 四邊形 ABCD ノ相隣レル二角頂 A, B ヨリ平行線 AP, BQ ヲ引キ, CD 或ハ其ノ延線ト P, Q ニ於テ交ラシメ, DP ヲ CQ ニ等シカラシメヨ. [I. 商船]

解 C ヲ過リ, CR ヲ DA ニ平行ニ引キ, CR=DA ナル如キ點 R ヲ取リ, BR ヲ結ビ付



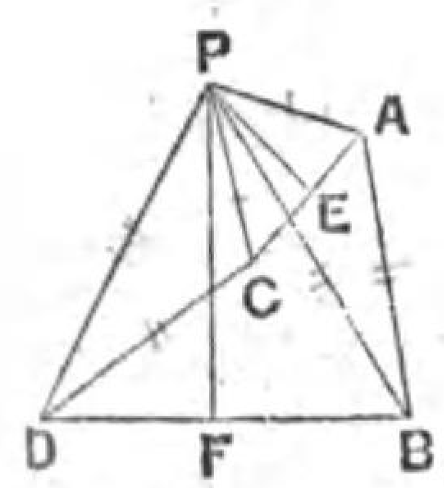
ケ, DC 或ハ其ノ延線ヲ截ル點ヲ Q トシ, A ヲ過リ BQ ニ平行ナル直線 AP ヲ引キ, DC 或ハ其ノ延線ヲ截ル點ヲ P トスレバ DP=CQ ナルベシ.

如何トナレバ △ADP, △RCQ ニ於テ底邊 AD=RC ニシテ其ノ兩端ニ於ケル角ハソレゾレ相等シキヲ以テ兩形ハ全等ナレバナリ.

次ニ RC ノ延線上ニ CR′=RC ナル如キ點 R′ ヲ取リテ尙一ツノ解ヲ得ベシ.

若シ AD ∥ BC ナルトキハ AD≠BC ナレバ解ナク, AD=BC ナレバ無數ノ解アリ.

24. AB, CD ハ同一ノ平面上ニアル等長ナル二直線トス, 今コノ平面上ニ一點ヲ求メ, 二ツノ三角形 PAB, PCD ヲ全等ナラシメントス. 點 P ノ位置如何. [45. 海. 機.]



解 AC, BD ヲ結ビ付ケ, 其ノ垂直二等分線ノ交點ヲ P トスレバ P ハ所要ノ點ナリ.

如何トナレバ PA, PB, PC,

PD ヲ結ビ付クレバ

$$PA=PC,\ PB=PD,\ AB=CD.$$

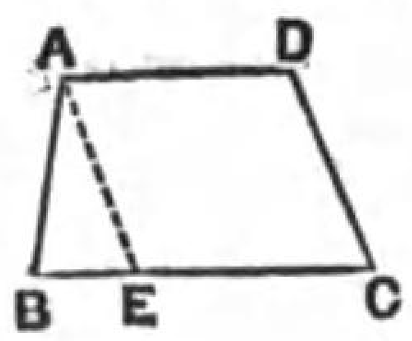
故ニ $\triangle PAB\equiv\triangle PCD$ ナレバナリ.

而シテ AC, BD ノ垂直二等分線ガ相交ラザルトキハ解ナク, 一致スルトキハ無數ノ解アリ.

注意 AD, BC ノ垂直二等分線ノ交點ヲ P' トスレバ　$\triangle P'AB\equiv\triangle P'DC$.

25. 與ヘラレタル長サ a, b, c 及ビ d ヲ以テ梯形ヲ作レ.　[45. 農.大.實.]

解 所要ノ梯形 ABCD ヲ作リ得タリトシ,



AB, BC, CD, DA ヲソレゾレ a, b, c, d ニ等シトシ, 且 $AD \parallel BC$ トス.

今 A ヨリ DC ニ平行ニ AE ヲ引キ, BC トノ交點ヲ E トスレバ $AE=DC$, $AD=EC$ ナルユエ　$BE=BC\sim AD=b\sim d$.

依リテ $\triangle ABE$ ノ三邊ヲ知リ得ベシ.

故ニ三角形 ABE ヲ畫キ, BE ノ延線上ニ $EC=AD$ ニ取リ, A ヲ過リ BC ニ平行ニ AD ヲ引キ, 之ヲ與ヘラレタル長サニ等シクシ, CD ヲ結ビ付クレバ ABCD ハ所要ノ梯形ナリ.

而シテ $b=d$ ナルトキハ $a=c$ ナラザレバ $AD \parallel BC$ ナル如キ梯形ヲ作ルコト能ハズ.

然レドモ此ノ場合ニハ $AB \parallel DC$ ナル等脚梯形ヲ作リ得ベシ.

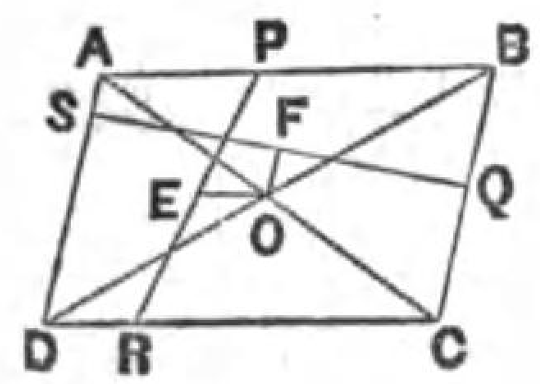
又 $b=d$, $a=c$ ナルトキハ ABCD ハ平行四邊形トナリテ不定ナリ.

次ニ $b\sim d \geqq a+c$ ナルトキハ不能ナリ.

26. 平行四邊形ノ對角線ノ交點 O, 及ビ其ノ四邊ノ上ニ一ツヅツアルベキ點 P, Q, R, S ガ與ヘラレタルトキ, 其ノ平行四邊形ヲ作レ.

[I. 東.高.師.]

解 I. 平行四邊形 ABCD ヲ作リ得タリトシ;



P, Q, R, S ハソレゾレ AB, BC, CD, DA ノ上ニアリトス. PR, QS ノ中點ヲソレゾレ E, F トシ; OE, OF ヲ結ビ付クレバ $OE \parallel AP \parallel CR$, $OF \parallel AS \parallel CQ$ ナルコトハ容易ニ知リ得ベシ.

依リテ次ノ作圖法ヲ得.

PR, QS ヲ結ビ付ケ, 其ノ中點ヲソレゾレ E, F トシ; OE, OF ヲ結ビ付ケ; P, R ヲ過リ OE

ニ平行ナル直線, 及ビ Q, S ヲ過リ OF ニ平行ナル直線ノナス四邊形 ABCD ヲ作レバ此ハ所要ノ平行四邊形ナリ.

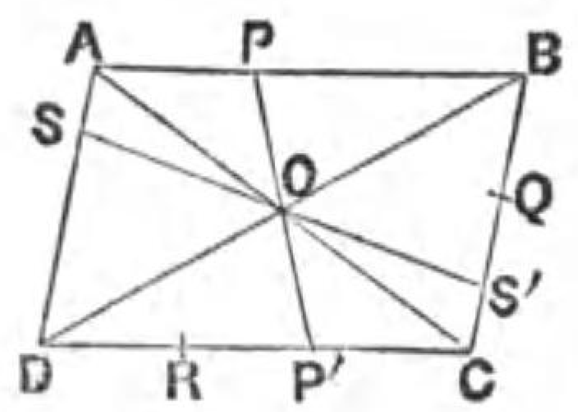
如何トナレバ ABCD ガ平行四邊形ナルコトハ作圖ニ依リ明カニシテ AC ノ中點ハ FO 上ニアリ. 又 BD ノ中點ハ EO 上ニアルヲ以テ; AC, BD ノ交點ハ O ト合スレバナリ.

次ニ此ノ作圖ガ出來得ベキ爲ニハ; P, Q, R, S ハ同一ノ直線上ニアラザルコトヲ要シ, 又 PR, QS ハ相交ルコトヲ要ス.

換言スレバ P, Q, R, S ノ中ノ二點ヲ結ビ付クル直線ガ, 他ノ二點ヲ結ビ付クル直線ニ交ル如ク取ルコトヲ要ス.

而シテ O ガ E, F ノ何レカト合スレバ解ハ無數ニアリ.

解 II. 點 O ニ關スル P, S ノ對稱點ヲソレゾレ P′, S′ トシ, P′R, S′Q ヲ結ビ付ケ, 其ノ交點ヲ C トシ, O ニ關シテ C ノ對稱點 A ヲ求メ; AP, AS ヲ結ビ付ケ, ソレゾレ CQ,



CR ト B, D ニ於テ交ラシムレバ ABCD ハ所要ノ平行四邊形ナリ.

如何トナレバ O ハ AC, PP′, SS′ ノ中點ナルヲ以テ AP′CP, ASCS′ ハ平行四邊形ナリ.

依リテ ABCD ハ平行四邊形ニシテ P, Q, R, S ハ作圖ニ依リテ其ノ各邊上ニアリ, 又 O ハ對角線 AC ノ中點ナレバナリ.

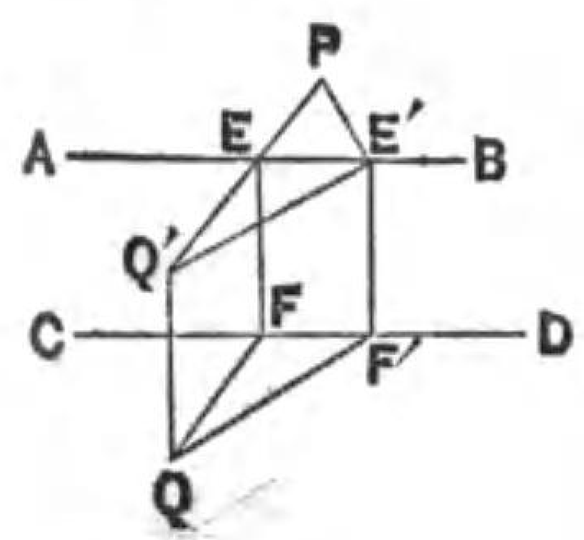
次ニ此ノ作圖ガ出來得ベキ爲ニハ P′R, S′Q ガ相交ルコトナリ.

若シ P′ ガ R, 或ハ S′ ガ Q ニ合スルトキハ無數ノ解アリ.

27. 平行セル二直線ト同平面内ニ於テ其ノ兩外側ニ一ツヅツノ定點アリ, 其ノ一ツノ定點ヨリ他ノ定點ニ至ル最短線路ヲ求メヨ. 但線路ノ平行線間ニアル部分ハ其ノ平行線ニ垂直ナルヲ要ス. [II. 熊.高.工.]

解 平行セル二直線ヲ AB, CD トシ, 其ノ兩側ニ一ツヅツアル點ヲ P, Q トス.

Q ヨリ CD ニ垂線ヲ作



リ，其ノ上ニ QQ' ヲ AB, CD 間ノ距離ニ等シク取リ，PQ' ヲ結ビ付ケ，AB ト交ル點ヲ E トシ，E ヨリ CD ニ垂線 EF ヲ引キ，CD トノ交點ヲ F トシ，FQ ヲ結ビ付クレバ折線 PEFQ ハ所要ノ最短距離ナリ．

如何トナレバ AB 上ニ任意ノ點 E' ヲ取リ，E' ヨリ CD ニ垂線 $E'F'$ ヲ引キ，CD ヲ F' ニ於テ截リ；PE', QF', $Q'E'$ ヲ結ビ付クレバ $QQ'EF$, $QQ'E'F'$ ハ何レモ平行四邊形ナルユヱ

$$QQ'=EF=E'F',$$

$$Q'E=QF,$$

$$Q'E'=QF',$$

故ニ　折線 $PEFQ=$折線 $PQ'Q$,

　　　折線 $PE'F'Q=$折線 $PE'Q'Q$.

然ルニ　$PQ'<$折線 $PE'Q'$.

故ニ　折線 $PEFQ<$折線 $PE'F'Q$.

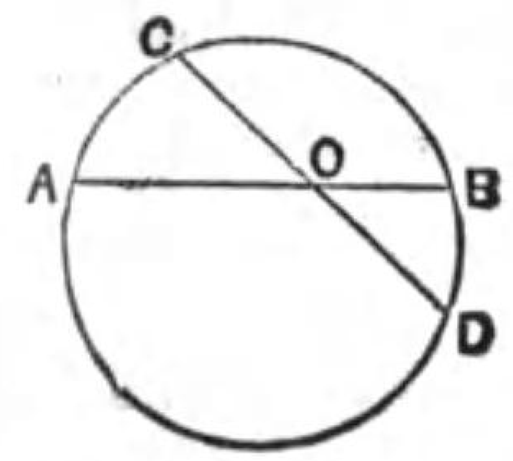
即チ折線 PEFQ ハ要件ニ適スル最短距離ナリ．

尙本書 80 頁 77 題ヲ參照セヨ．

圓

1. 圓ノ相交ル二ツノ弦ガ互ニ他ヲ二等分スルトキハ其ノ交點ハ圓ノ中心ナルコトヲ證セヨ．　[II. 各醫.專.]

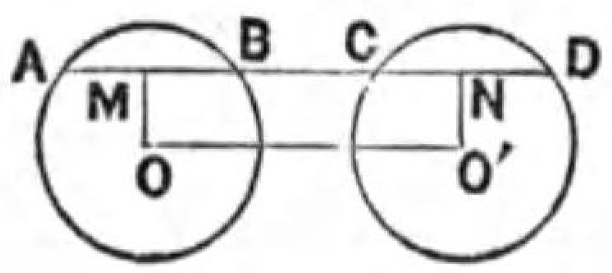
證　圓ノ弦 AB, CD ガ O ニ於テ相交リ，互ニ他ヲ二等分スルモノトス．然ルトキハ中心ハ O ヲ過リ，AB ニ垂直ナル直線 L 上ニアリ．



又 O ヲ過リ CD ニ垂直ナル直線上 M ニアリ．故ニ直線 L, M ノ交點ハ O ニシテ即チ圓ノ中心ナリ．

2. 二ツノ相等シキ圓アリ，其ノ中心ヲ結ビ付クル直線ニ平行ナル直線ニテ，之ヲ截ルトキハ此ノ直線ノ各ノ圓內ニ夾マレタル部分ハ相等シ，之ヲ證セヨ．　[I. 女.高.師.]

證　二ツノ相等シキ圓ノ中心線 OO' ニ平行ナル直線ガ圓 O, O' ヲ截ル點ヲソレゾレ A, B; C, D トシ，O, O' ヨリ垂線 OM, $O'N$ ヲ下セ



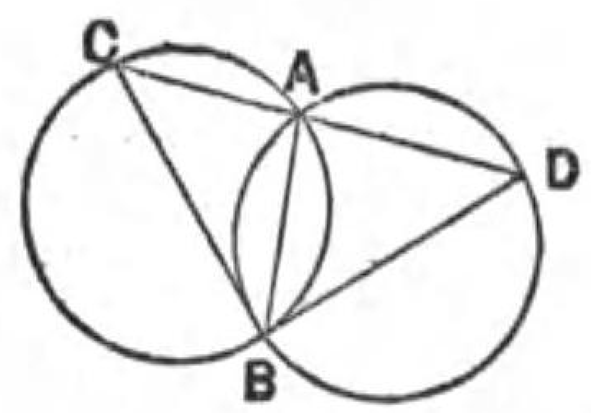
バ OMNO′ ハ矩形ナルコト容易ニ知ラルベシ.

故ニ　　　　　$OM=O'N$.

然ルニ圓 O, O′ ハ相等シキユヱ $AB=CD$.

3. 二ツノ等圓アリ, A, B 二點ニ於テ相交ル, A ヲ過リテ引キタル直線ガ兩圓周ト更ニ交ル二點 C, D ヲ B ニ結ビ付クルトキハ, BCD ハ二等邊三角形ナルコトヲ證セヨ.

證 AB ヲ結ビ付クルトキハ



$$B\hat{A}C+B\hat{A}D=2\hat{R},$$

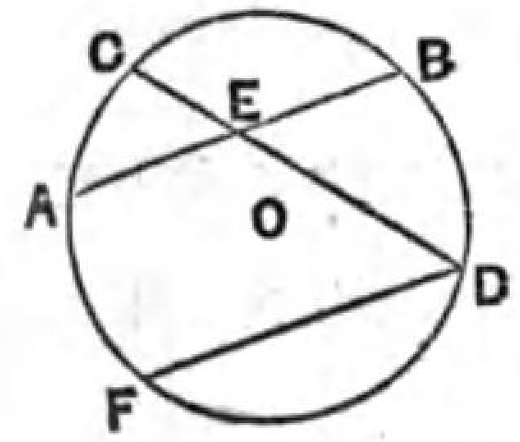
故ニ相等シキ圓ノ弦 BC, BD ハ互ニ補角ヲナス圓周角ニ對ス.

依リテ　　　　　$BC=BD$,

即チ △BCD ハ二等邊ナリ.

4. 一ツノ圓内ノ點 E ニ於テ相交ルニツノ弦 AB, CD ガ爲ス所ノ角 AEC ハ弧 AC 及ビ弧 BD ノ上ニ立ツ所ノ中心角ノ和ノ半分ナリ, 之ヲ證セヨ.　[II. 海. 經.]

證 圓ノ中心ヲ O トシ, D ヲ過リ AB ニ平



行ナル弦ヲ DF トス.

然ルトキハ

弧 $AF=$ 弧 BD,

依リテ $A\hat{E}C=F\hat{D}C$

$$=\frac{1}{2}F\hat{O}C$$

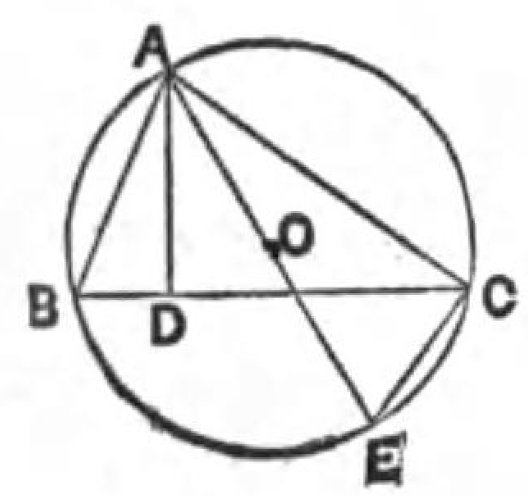
$$=\frac{1}{2}(F\hat{O}A+A\hat{O}C)$$

$$=\frac{1}{2}(B\hat{O}D+A\hat{O}C).$$

尙本書 104 頁 9 題ヲ見ヨ.

5. 三角形 ABC ノ一角頂 A ヨリ其ノ對邊 BC ニ下セル垂線ヲ AD トシ, 而シテ三角形 ABC ノ外接圓ノ中心ヲ O トシ, OA ヲ結ビ付クルトキハ $B\hat{A}O$ ハ $D\hat{A}C$ ニ等シキコトヲ證セヨ.　[II. 陸. 經.]

證 AO ノ延線ガ外接圓周ト交ル點ヲ E トシ, CE ヲ結ビ付クレバ



△ABD, △AEC ニ於テ

$$A\hat{D}B=\hat{R}=A\hat{C}E,$$

$$A\hat{B}D=A\hat{E}C,$$

故ニ　$B\hat{A}D=E\hat{A}C$,

故ニ此ノ兩邊ニ $D\hat{A}O$ ヲ加ヘ［或ハ減ジ］テ

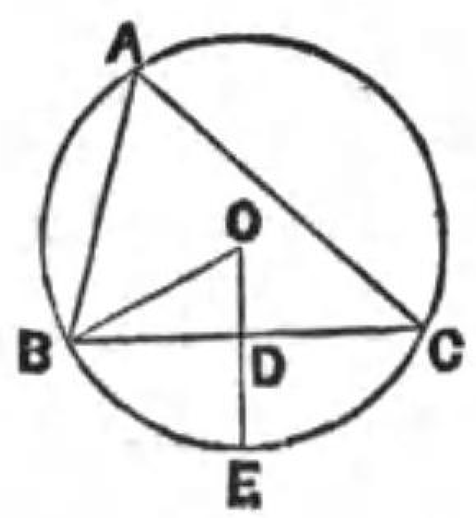
$B\hat{A}O=D\hat{A}C.$

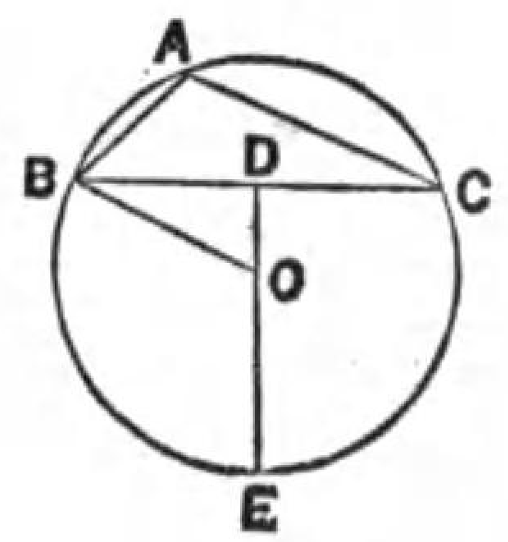
6. 圓ニ內接スル四邊形ノ相對スル角ハ互ニ補角ナルコトヲ證セヨ. [45. 海.兵，陸.經.]

證 本書 107 頁 13 題ニ同ジ.

7. 三角形 ABC ノ頂點 A, B, C ヲ過ル圓ノ中心 O ヨリ一邊 BC ヘ垂線 OD ヲ引ケバ角 BOD ハ角 A 或ハ其ノ補角ニ等シキコトヲ證セヨ. [II. 鹿.高.農.]

證 OD ノ延線ト弧 BC トノ交點ヲ E トス.





然ルトキハ $OD \perp BC$ ナルユヱ E ハ弧 BEC ノ中點ナリ.

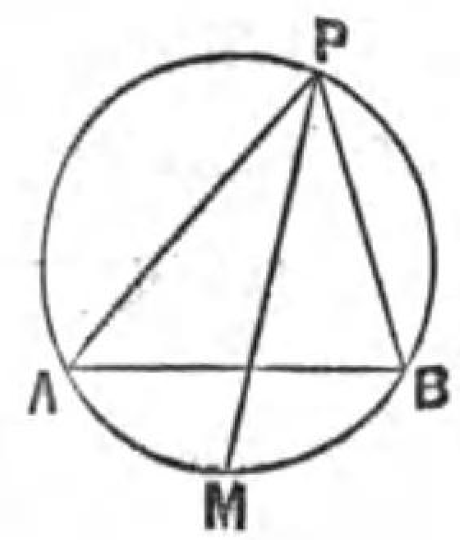
依リテ $B\hat{O}E=B\hat{A}C.$

而シテ $B\hat{O}D$ ハ $B\hat{O}E$ ニ等シキカ，或ハ其ノ補角ナリ.

依リテ $B\hat{O}D$ ハ $B\hat{A}C$ ニ等シキカ，或ハ其ノ補角ニ等シ.

8. 二ツノ與ヘラレタル點ヨリ之ト同一平面上ニアル任意ノ一點ニ引ケル二直線ノ交角ガ一定ナルトキハ，此ノ角ノ二等分線ハ定點ヲ過ルコトヲ證セヨ. [II. 東.蠶.講.]

證 與ヘラレタル二ツノ點ヲ A, B トシ，同一平面上ノ任意ノ點ヲ P トス.



然ルトキハ $A\hat{P}B$ ハ一定ナルユヱ P ハ直線 AB 上ニ定角 APB ヲ張ル弧ノ上ニアリ.

依リテ $A\hat{P}B$ ノ二等分線ハ弧 APB ノ共軛弧 AMB ノ中點 M ヲ過ル.

而シテ P ハ AB ニ關シテ對稱ナル二ツノ弧ノ上ニアルヲ以テ M モ亦 AB ニ關シテ對稱ナル二ツノ定點ナリ.

即チ $A\hat{P}B$ ノ二等分線ハ AB ニ關シテ對稱ナル二ツノ定點ノ何レカヲ過ル.

尙 本書 138 頁 42 題ヲ參照スベシ.

9. 圓ニ內接スル四邊形ノ相對スル二組ノ二邊ノ延線ガ相交ル點ニ於テ生ズル角ノ二等分線

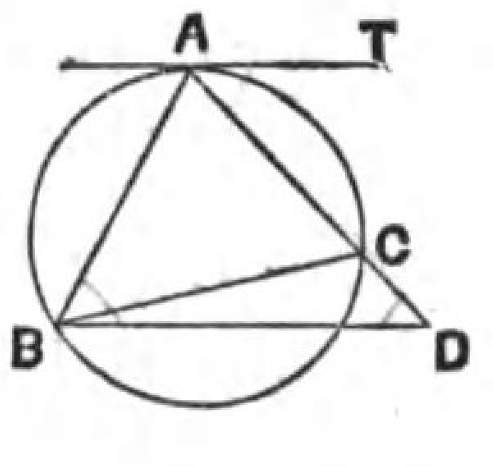
ハ互ニ直角ニ相交ルコトヲ證セヨ.

[45. 盛. 高. 農., 商船.]

證 本書 129 頁 **33** 題ニ同ジ.

10. AB, AC ハ一ツノ圓周上ノ點 A ヨリ引ケル二ツノ弦ナリ. 而シテ BD ヲ A ニ於ケル切線 AT ニ平行ニ引キ, AC ト點 D ニ於テ交ラシム, 然ルトキハ圓 BCD ハ AB ニ切スルコトヲ證セヨ. [45. 海. 經.]

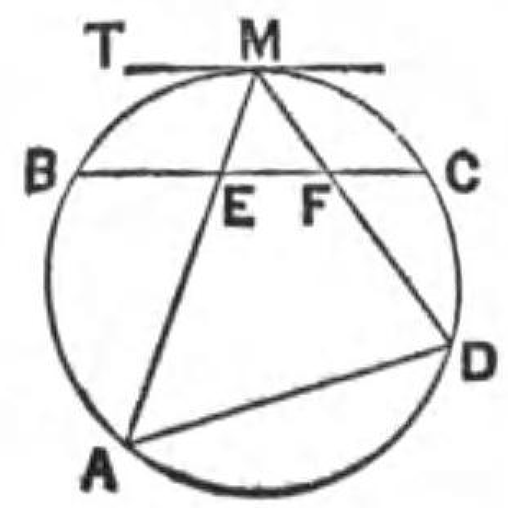
證
$$B\hat{D}A = D\hat{A}T$$
$$= A\hat{B}C.$$



故ニ圓 BCD ハ AB ニ切ス.

注意 D ガ AC ノ上ニアルトキハ T ヲ A ノ反對ノ側ニ取ルベシ.

11. 圓ノ弧 BC ノ中點 M ヨリ二ツノ弦 MA, MD ヲ引キ, 弦 BC トノ交點ヲソレゾレ E, F トスレバ, 四ツノ點 A, E, F, D ハ同一ノ圓周上ニアルコトヲ證セヨ. [II. 山. 高. 商.]



證 I. 點 M ニ於ケル

切線 TM ヲ引キ, T ヲ ME ニ對シ, B ト同ジ側ニ取ル.

然ルトキハ M ハ弧 BC ノ中點ナルヲ以テ

$$TM \parallel BC,$$

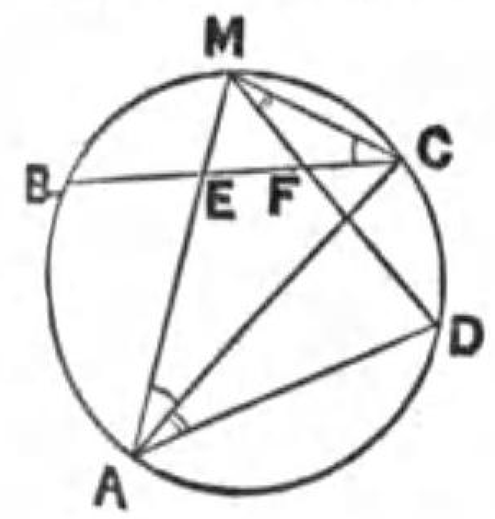
故ニ
$$M\hat{E}F = T\hat{M}A$$
$$= A\hat{D}M.$$

故ニ
$$A\hat{E}F + A\hat{D}F = 2\hat{R}.$$

依リテ四邊形 AEFD ハ圓ニ内接ス.

即チ題言ノ如シ.

證 II. MC, CA ヲ結ビ付クレバ



$$C\hat{A}D = C\hat{M}D,$$

又 $C\hat{A}M$, $M\hat{C}B$ ハ相等シキ弧ノ上ニ立ツヲ以テ相等シ,

故ニ
$$B\hat{F}M = F\hat{M}C + F\hat{C}M$$
$$= C\hat{A}D + C\hat{A}M = E\hat{A}D.$$

故ニ EADF ハ圓ニ内接ス.

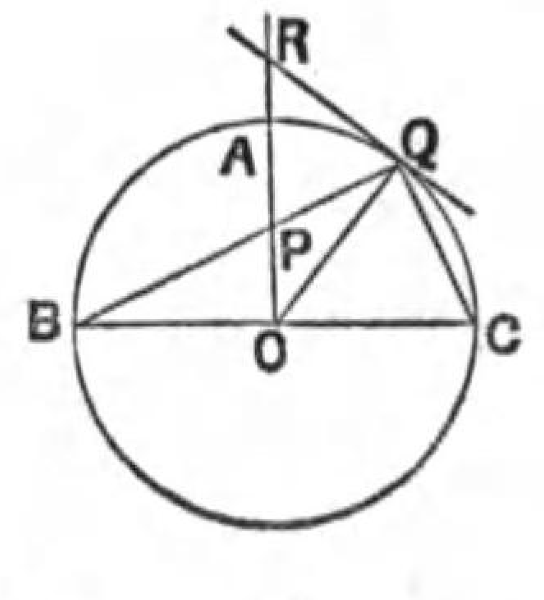
尙 増補 14 頁 **5** 題ヲ見ヨ.

12. OA, OB ハ中心ヲ O トスル一ツノ圓ノ互ニ垂直ナル半徑ニシテ, P ハ OA 上ノ一

點ナリ, BP ノ延線ガ圓周ト出會フ點 Q ニ於テ引ケル切線ト OA ノ延線トノ交點ヲ R トセバ, 三角形 PQR ハ二等邊ナルコトヲ證セヨ.

[II. 專. 入. 檢]

證 I. OQ ヲ結ビ付クレバ



$$O\hat{Q}P + P\hat{Q}R = \hat{R},$$

又 $O\hat{B}P + O\hat{P}B = \hat{R}$,

然ルニ $O\hat{Q}P = O\hat{B}P$,

故ニ

$$P\hat{Q}R = O\hat{P}B = Q\hat{P}R,$$

即チ △RPQ ハ二等邊ナリ.

證 II. BO ヲ引キ延バシ, 圓周ヲ C ニテ截リ, CQ ヲ結ビ付クレバ

$$P\hat{Q}C = P\hat{O}C = \hat{R},$$

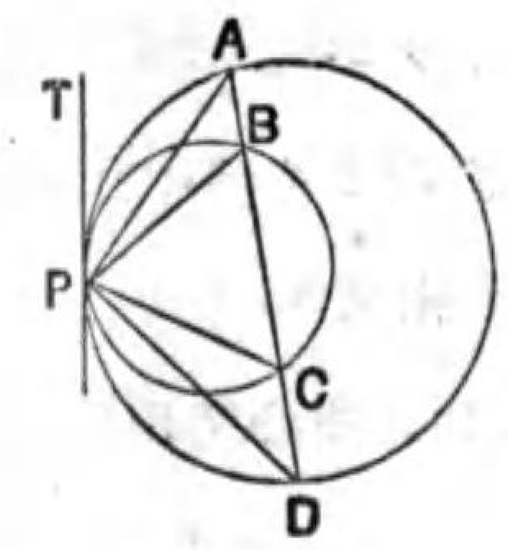
故ニ OPQC ハ圓ニ內接シ得ベシ.

依リテ　$Q\hat{P}R = O\hat{P}B = B\hat{C}Q = B\hat{Q}R$.

故ニ △RPQ ハ二等邊ナリ.

13. 二圓ガ點 P ニ於テ內切シ, 割線ガ二圓周ヲ A, B, C, D ニ於テ截ルトキハ $A\hat{P}B = C\hat{P}D$ ナルコトヲ證セヨ. [I. 廣. 高. 師]

證 點 P ニ於ケル二圓ノ共通切線ヲ PT ト



ス.

然ルトキハ

$$T\hat{P}B = P\hat{C}B.$$

$$T\hat{P}B = T\hat{P}A + B\hat{P}A,$$

$$P\hat{C}B = P\hat{D}C + D\hat{P}C,$$

故ニ　$T\hat{P}A + B\hat{P}A = P\hat{D}C + D\hat{P}C$.

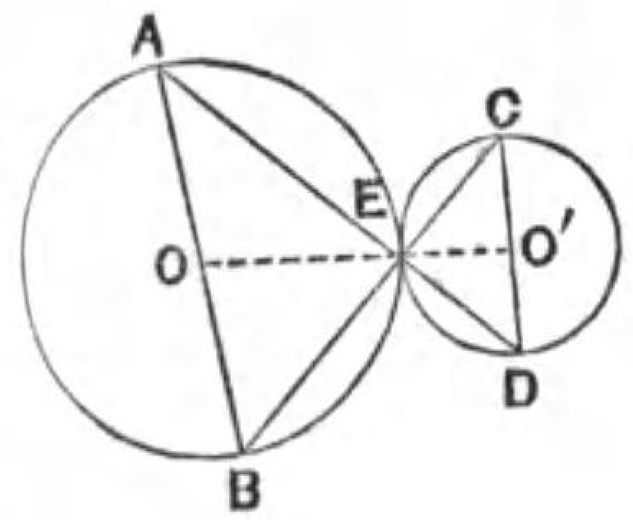
然ルニ　$T\hat{P}A = P\hat{D}C$.

故ニ　$B\hat{P}A = D\hat{P}C$.

14. 二ツノ圓ガ點 E ニ於テ外接シ; AB, CD ハ平行ニシテ各一ツノ圓ノ徑ナレバ, 直線 AD, BC ハ點 E ニ於テ相交ルコトヲ證セヨ.

[45. 小. 高. 商.]

證 二ツノ圓ノ中心ヲ O, O′ トス.



今 AE, DE ヲ結ビ付ケ, 次ニ中心線 OO′ ヲ引ケバ E ハ OO′ 上ニアリ.

而シテ $A\hat{O}E = D\hat{O'}E$ ナルユヱ二ツノ二等邊三角形 OAE, O′DE ハ等角ナリ.

依リテ　$O\hat{E}A = O'\hat{E}D$.

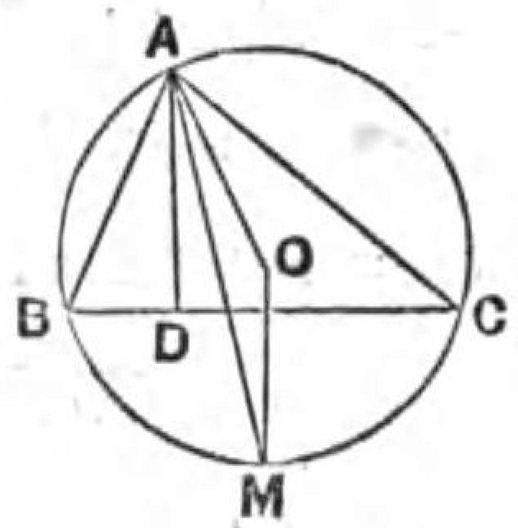
故ニ AE, ED ハ同一ノ直線ヲナス.

同樣ニ CE, EB モ亦同一ノ直線ヲナス.

卽チ AD, BC ハ點 E ニ於テ相交ル.

15. 三角形 ABC ノ外接圓ノ中心ト頂點 A ヲ結ビ付クル直線ト, A ヨリ邊 BC ニ下セル垂線トハ, 角 A ノ二等分線ニ對シテ對稱ノ位置ニアリ, 之ヲ證セヨ.　[I. 東. 高. 師.]

證 O ヲ三角形 ABC ノ外接圓ノ中心, AD ヲ頂點 A ヨリ底邊 BC ニ下セル垂線, M ヲ角 A ノ二等分線ト外接圓トノ交點トシ; OA, OM ヲ結ビ付クレバ



$$弧\ BM = 弧\ MC.$$

故ニ　$OM \perp BC,$

然ルニ假設ニ依リ　$AD \perp BC,$

故ニ　$AD \parallel OM,$

故ニ　$D\hat{A}M = A\hat{M}O,$

然ルニ又 $\triangle OMA$ ヨリ

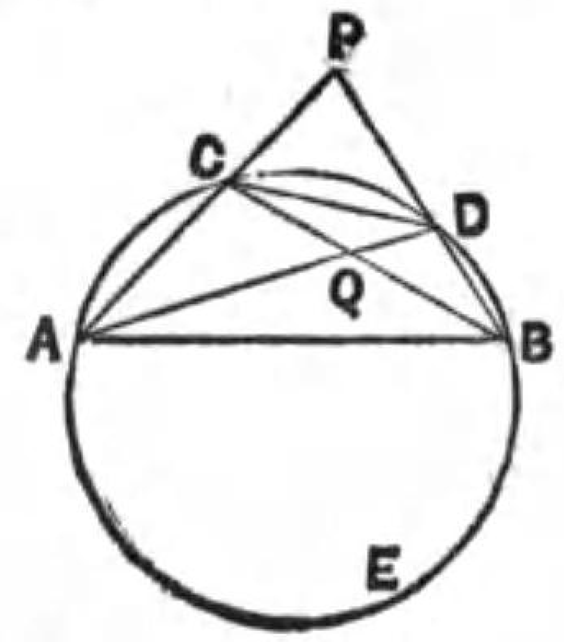
$$O\hat{A}M = A\hat{M}O,$$

故ニ　$D\hat{A}M = M\hat{A}O.$

16. AB, CD ハ一ツノ圓ノ弦ニシテ, AB ハ定マリ, CD ハ長サ定マリ, 位置不定ナリトス, 然ルトキハ AC, BD ノ交點及ビ AD, BC ノ交點ハ恒ニ或圓周上ニアルコトヲ證セヨ.

[45. 名. 高. 工.]

證 AC, BD ノ交點ヲ P; AD, BC ノ交點ヲ Q トスレバ $A\hat{P}B$, $A\hat{Q}B$ ハ弧 AEB, CD ノ差或ハ和ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シ.



然ルニ弧 AEB, CD ハ一定ノ大イサナリ.

從ヒテ $A\hat{P}B$, $A\hat{Q}B$ モ亦定角ナリ.

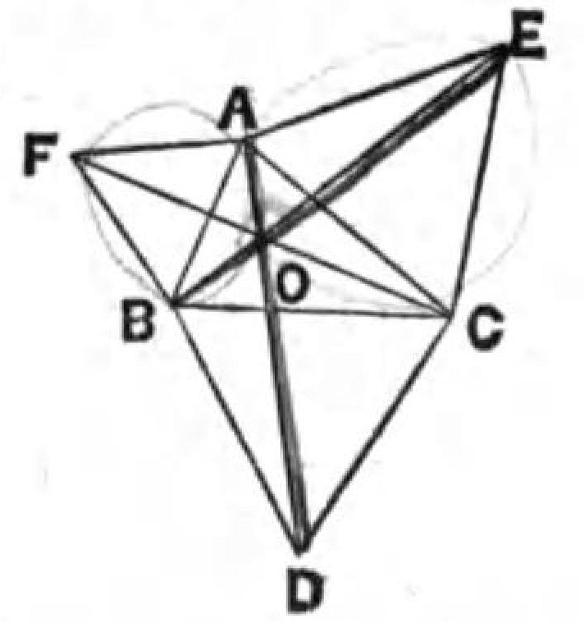
依リテ P, Q ハ定直線 AB ノ上ニ定角ヲ張ル圓周上ニアリ.

注意 CD ガ移動シテ AB ニ交ル如キ位置, 及ビ AB ノ反對ノ側ニ來ルトキモ; P, Q ハ同ジ圓周上ニアルコトヲ見ルハ容易ナリ.

17. 三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ外方ニ正三角形 BCD, ACE, AFB ヲ作ルトキハ三ツノ直線 AD, BE, CF ハ同一ノ點ニ於テ相

交ルコトヲ證セヨ. [II. 盛. 高. 農]

證 BE, CF ノ交點ヲ O トス.



△ABE, △AFC ニ於テ

AB=AF, AE=AC.

$$B\hat{A}E=B\hat{A}C+C\hat{A}E$$
$$=B\hat{A}C+F\hat{A}B$$
$$=F\hat{A}C.$$

故ニ $\triangle ABE\equiv\triangle AFC.$

故ニ $A\hat{B}E=A\hat{F}C.$

依リテ AFBO ハ圓ニ内接ス,

同樣ニ AECO ハ圓ニ内接ス.

故ニ $A\hat{O}B=2\hat{R}-A\hat{F}B$

$$=2\hat{R}-\frac{2}{3}\hat{R}=\frac{4}{3}\hat{R}.$$

同樣ニ $A\hat{O}C=\frac{4}{3}\hat{R},$

依リテ $B\hat{O}C=\frac{4}{3}\hat{R},$

故ニ $B\hat{O}C+B\hat{D}C=\frac{4}{3}\hat{R}+\frac{2}{3}\hat{R}=2\hat{R},$

故ニ BOCD ハ圓ニ内接ス.

依リテ AO, OD ヲ結ビ付クレバ

$$A\hat{O}E=A\hat{C}E=\frac{2}{3}\hat{R}$$

$$=B\hat{C}D=B\hat{O}D.$$

故ニ AO, OD ハ同一ノ直線上ニアリ.

卽チ AD, BE, CF ハ一點 O ニ於テ交ル.

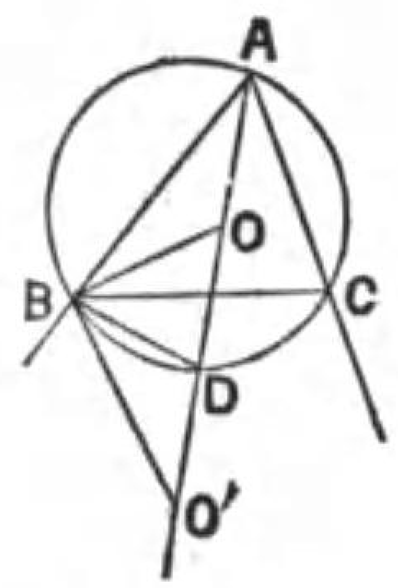
18. 三角形 ABC 外ノ一點 P ヨリ邊 AB, BC, CA ニ下セル垂線ノ趾 L, M, N ガ同一ノ直線上ニアルトキハ, 點 P ハ三角形 ABC ノ外接圓周上ニアルコトヲ證セヨ.

[II. 陸. 經., 45. 東. 高. 師.]

證 本書 169 頁 75 題ニ同ジ.

19. 三角形ノ外接圓周ハ内心ト各傍心トヲ結ビ付クル直線ヲ二等分ス. [45. 專. 入. 檢.]

證 △ABC ノ内心 O ト, 傍心 O′ トヲ結ビ付クル直線ト外接圓トノ交點ヲ D トシ.



O′ ハ $B\hat{A}C$ 内ニアリトス.

然ルトキハ O, O′ ハ $\hat{A}$ ノ二等分線上ニアリ,

サテ BO, BO′, BD ヲ結ビ付クレバ

$$D\hat{B}O=D\hat{B}C+C\hat{B}O=D\hat{A}C+O\hat{B}A$$
$$=D\hat{A}B+O\hat{B}A=B\hat{O}D.$$

故ニ　　　DB=DO,

又　　　$O\hat{B}O'=\hat{R}$,

故ニ　　　DB=DO',

卽チ　　　OD=DO'.

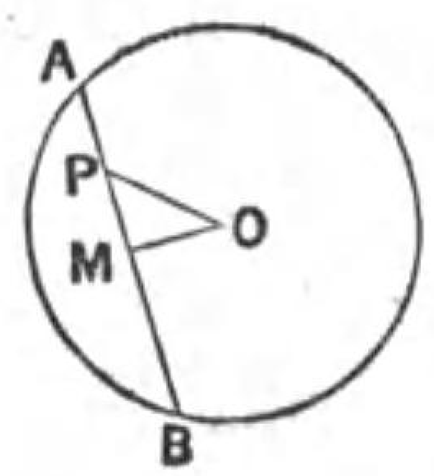
20. 三角形 ABC ノ底邊 AB ノ位置及ビ大イサト其ノ對角 C ノ大イサトガ一定不易ナルトキ點 C ノ軌跡如何. [45. 海. 經.]

解 要件ニ適スル一ツノ三角形ヲ ABC トシ, 弓形 ACB ヲ畫ケバ弧 ACB 及ビ AB ニ關シテ之ト對稱ナル弧ノ上ノ點ハ總テ要件ニ適シ, 其ノ他ノ點ハ要件ニ適セズ.

故ニ所要ノ軌跡ハ AB ノ兩側ニ於テ定角 C ヲ張ル二ツノ圓弧ナリ.

21. 定圓內ノ一定點ヲ過ル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ. [II. 各高等.]

解 圓 O ノ內ニアル定點ヲ P トシ, P ヲ過ル任意ノ弦ヲ AB トシ, 其ノ中點ヲ M トス. OP, OM ヲ結ビ付クレバ



$$O\hat{M}P=\hat{R}$$

ニシテ OP ハ一定ナリ.

故ニ M ハ恒ニ OP ヲ徑トスル圓周上ニアリ.

逆ニ此ノ圓周上ニ任意ノ點 M ヲ取リ PM ヲ結ビ付ケ, 其ノ延線ガ圓 O ヲ截ル點ヲ A, B トシ, OM ヲ結ビ付クレバ $O\hat{M}P=\hat{R}$,

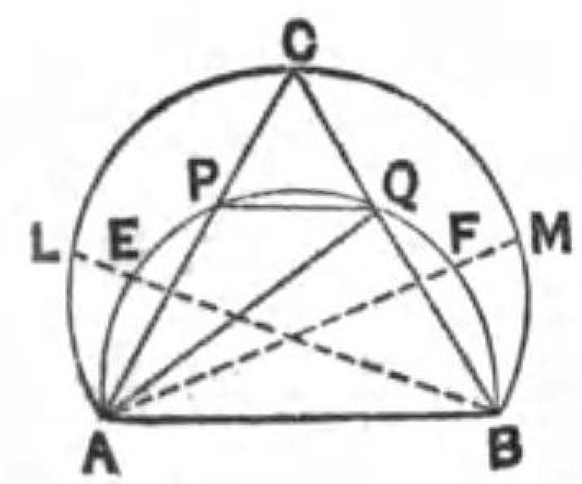
故ニ M ハ AB ノ中點ナリ.

卽チ OP ヲ徑トスル圓周上ノ點ハ皆要件ニ適ス. 依リテ所要ノ軌跡ハ OP ヲ徑トスル圓ナリ.

22. 一定圓アリ, 其ノ平面上ニアル圓外ノ一定點ト此ノ圓周上ノ點トヲ結ビ付クル直線ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ. [45. 各高等.]

解 本書 174 頁 78 題ニ同ジ.

23. 定長ノ直線 PQ ハ其ノ兩端 P, Q ガ AB ヲ徑トセル與ヘラレタル半圓周上ニアルヤウニ動クモノトス. 今四ツノ點 A, B, P, Q ガ A, P, Q, B ノ順ニ在ル場合ニ於テ二直線 AP, BQ ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ. [II. 各高等.]



解 AP, BQ ノ交點ヲ C トシ, AQ ヲ結ビ付クレバ

$$A\hat{C}B = A\hat{Q}B - Q\hat{A}P,$$

然ルニ　$A\hat{Q}B = \hat{R} =$（定量）,

又 $Q\hat{A}P$ ハ PQ ノ長サガ一定ナルユエ定量ナリ.

依リテ $A\hat{C}B$ ノ大イサハ一定ナリ.

故ニ C ハ AB ニ對シ半圓ト同ジ側ニ於テ定角 $A\hat{C}B$ ヲ張ル弧ノ上ニアリ.

而シテ半圓周上ニ　弧AE＝弧BF＝弧PQ ヲ取リ, BE, AF ヲ結ビ付ケ, 其ノ延線ガ弧 ACB ヲ截ル點ヲソレゾレ L, M トスレバ, E ハ Q ノ極限ノ位置ニシテ F ハ P ノ極限ノ位置ナルヲ以テ C ハ弧 LCM ノ上ニアリ.

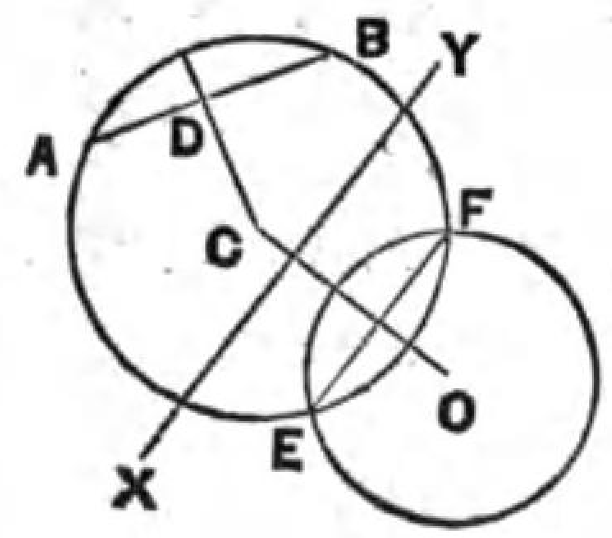
逆ニ弧 LCM ノ上ノ點ハ皆要件ニ適ス.

故ニ所要ノ軌跡ハ AB ニ對シ定角ヲ張ル弧ノ一部分 LCM ナリ.

24. 與ヘラレタル二點ヲ過リテ圓ヲ畫キ, 此ノ圓ト他ノ與ヘラレタル圓ト交リテナス共通弦ヲ與ヘラレタル直線ニ平行ナラシメヨ.

[II. 海. 機.]

解　與ヘラレタル二點ヲ A, B トシ, 與ヘラレタル圓ヲ O, 直線ヲ XY トス, AB ノ垂直二



等分線 CD ト O ヨリ XY ニ下セル垂線 OC トノ交點ヲ C トシ, C ヲ中心トシ CA ヲ半徑トスル圓ヲ畫ケバ, 此ハ所要ノ圓ナリ.

如何トナレバ圓 C ト圓 O トノ共通弦ヲ EF トスレバ　$EF \perp OC$,

故ニ　$EF \parallel XY$

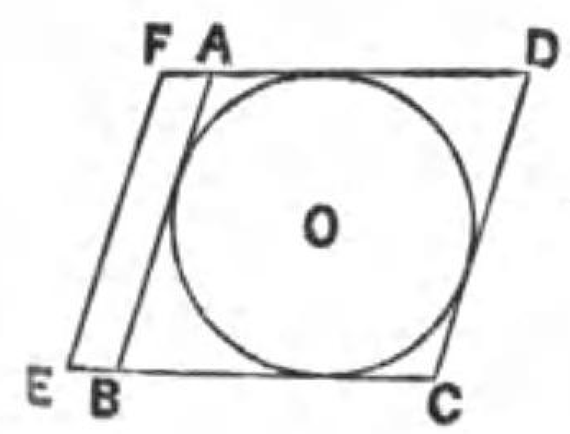
ニシテ且圓 O ハ A, B ヲ過レバナリ.

而シテ若シ圓 C ガ圓 O ニ交ラザレバ解ナク, 又 XY ガ AB ニ平行ナルトキハ CD, OC ガ一致スレバ不定ニシテ然ラザレバ不能ナリ.

25. 與ヘラレタル圓 O ニ外切シテ, 與ヘラレタル長サ L ヲ一邊トスル菱形ヲ畫ケ.

[II. 海. 經.]

解　圓 O ニ互ニ平行ナル二ツノ切線 AD, BC ヲ引キ,



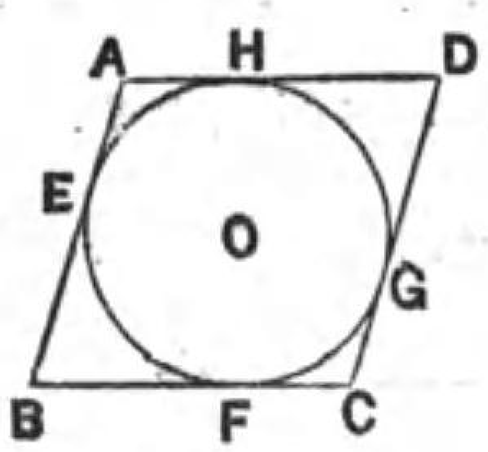
BC 上ニ任意ノ點 E ヲ取リ, E ヲ中心トシ, l ヲ半徑トシテ圓

ヲ畫キ, AD ヲ F, F′ ニ於テ截リ, EF 或ハ EF′ ニ平行ナル二ツノ切線 AB, DC ヲ引キ, AD, BC ニ交ル點ヲソレゾレ A, B; D, C トスレバ ABCD ハ所要ノ菱形ナリ.

如何トナレバ作圖ニ依リテ ABCD ハ圓 O ニ外切スル平行四邊形ナルヲ以テ菱形ニシテ其ノ一邊 AB ハ EF, 即チ l ニ等シケレバナリ.

而シテ l ガ AD, BC ノ距離, 即チ圓 O ノ徑ヨリ小ナルトキハ解ナシ.

注意 圓ニ外切スル平行四邊形ガ菱形ナルコトノ證明ハ次ノ如シ.



圓 O ニ外切スル平行四邊形 ABCD ノ各邊 AB, BC, CD, DA ノ切點ヲソレゾレ E, F, G, H トス.

然ルトキハ　$AD+BC=AB+CD,$

即チ　$2BC=2AB,$

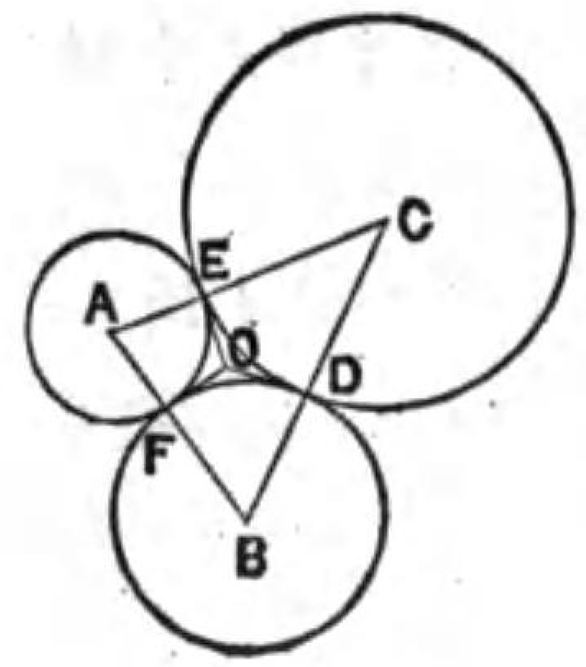
故ニ　$BC=AB=AD=CD,$

即チ ABCD ハ菱形ナリ.

26. 同一ノ直線上ニアラザル與ヘラレタル

三ツノ點 A, B, C ノ各ヲ中心トシテ互ニ相切スル三ツノ圓ヲ畫クコト.　[45. 山. 高. 商.]

解 與ヘラレタル三ツノ點ヲ A, B, C トシ, △ABC ニ内切スル圓ノ中心ヲ O トス.



而シテ OD, OE, OF ヲソレゾレ BC, CA, AB ニ垂直ニ引ケバ

$$BD=BF,$$

$$CD=CE,\quad AE=AF$$

ナルユヱ A, B, C ヲ中心トシ, 半徑ガソレゾレ AF, BD, CE ナル圓ヲ畫ケバ, コレ所要ノ圓ナルコト明ナリ.

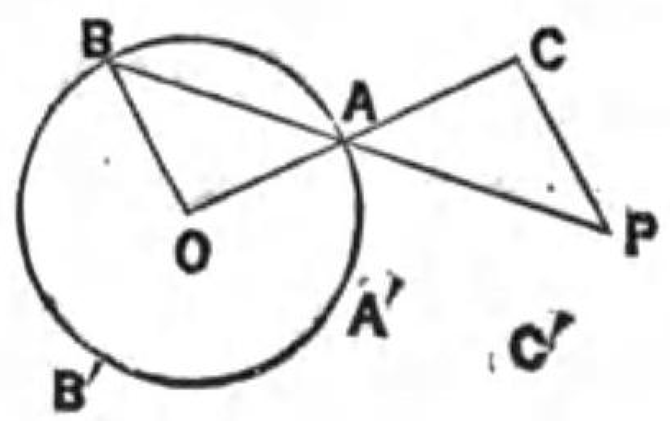
又 △ABC ノ傍心ヨリ邊及ビ邊ノ延線ニ下セル垂線ノ趾ヲ切點トシ, 各角頂ヲ中心トスル三ツノ圓ヲ畫ケバ二ツガ互ニ外切シ, 他ハ内切スル圓ヲ得ベシ.

而シテ各傍心ニ就キテモ亦同樣ナルユヱ, 本題ニハ四ツノ解アリ.

27. 一定點ヲ過リ, 一定圓ヲ截ル一直線ヲ引キ, 圓外ノ部分ヲ圓内ノ部分ニ等シクセヨ.

又如何ナル場合ニ不能ナルカ.　[II. 商船.]

解 I. 定點ヲ P トシ, 定圓ノ中心ヲ O トシ, P ヲ中心トシ圓 O ノ半徑ヲ半徑トスル圓及ビ O ヲ中心トシ其ノ徑ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ,



其ノ交點ヲ C, C′ トシ, OC, OC′ ヲ結ビ付ケ, 圓 O ノ周ヲ截ル點ヲソレゾレ A, A′ トシ, PA, PA′ ヲ結ヒ付ケ, 再ビ圓周ヲ截ル點ヲソレゾレ B, B′ トスレバ PAB, PA′B′ ハ所要ノ直線ナリ.

如何トナレバ OB ヲ結ビ付クレバ

$\triangle OAB$, $\triangle CAP$ ニ於テ

$$OA=OB=CA=CP$$

ニシテ　$O\hat{A}B=C\hat{A}P$,

故ニ　$\triangle OAB\equiv\triangle CAP$.

故ニ　$BA=AP$,

又 PA′B′ ニ就キテモ同樣ナレバナリ.

而シテ所要ノ直線ヲ作リ得ベキ爲ニハ點 C, C′ ヲ得ルコト, 即チ

$$OC+CP\geqq PO>OC-CP,$$

即チ圓 O ノ半徑ヲ r トスレバ

$$3r\geqq PO>r,$$

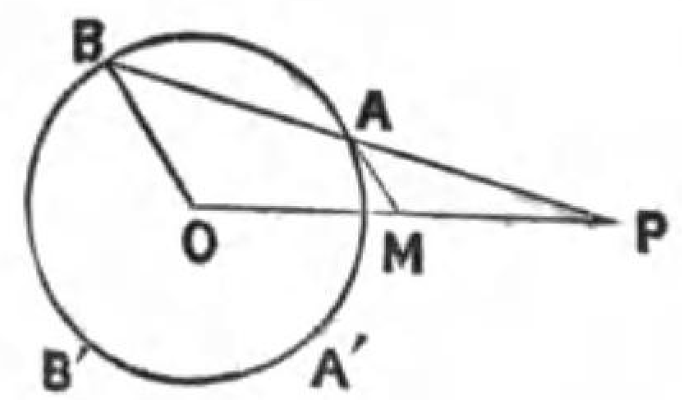
若シ $3r=PO$ ナルトキハ C, C′ ハ相合シテ解ハ一ツトナル.

故ニ本題ノ不能ナル場合ハ

$$PO>3r,\ 或ハ\ PO\leqq r$$

ナルトキナリ.

解 II. 定點ヲ P トシ, 定圓ヲ O トス.



OP ヲ結ビ付ケ, 其ノ中點ヲ M トシ, M ヲ中心, 圓 O ノ半徑ノ半分ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ, 圓 O ノ周ヲ截ル點ヲ A, A′ トシ, PA, PA′ ヲ結ビ付ケ, 再ビ圓 O ノ周ヲ截ル點ヲソレゾレ B, B′ トスレバ PAB, PA′B′ ハ所要ノ直線ナリ.

如何トナレバ AM ヲ結ビ付ケ, O ヲ過リ, OE ヲ MA ニ平行ニ引キ, PA ノ延線トノ交點ヲ E トスレバ　$PM=MO$

ナルユヱ　$OE=2MA$,

故ニ E ハ圓 O ノ周上ノ點ナリ.

然ルニ B ハ PA ノ延線ト圓 O ノ周トノ交點ナリ.

故ニ E ハ點 B ニ合ス.

即チ PA=AB ニシテ PA′B′ ニ就キテモ亦同様ナレバナリ.

而シテ所要ノ直線ヲ作リ得ベキ爲ニハ點 A, A′ ヲ得ルコト,

即チ $$OA+AM \geqslant OM > OA-AM,$$

即チ $$r+\frac{1}{2}r \geqslant \frac{1}{2}OP > r-\frac{1}{2}r,$$

或ハ $$3r \geqslant OP > r,$$

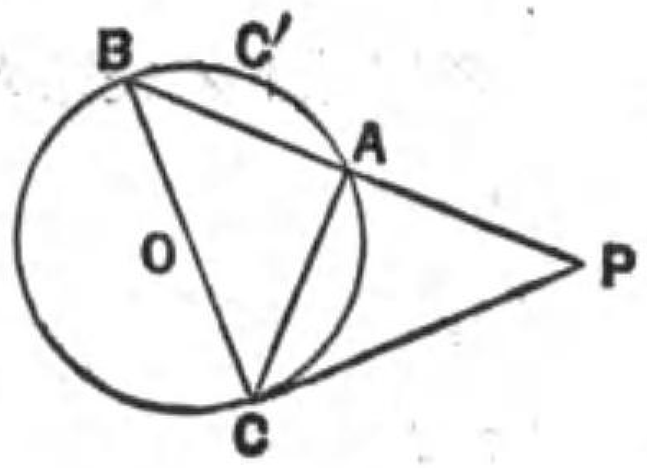
若シ $3r=OP$ ナルトキハ A, A′ ハ相合シテ解ハ一ツトナル.

故ニ本題ノ不能ナル場合ハ

$$PO>3r,\ 或ハ\ PO \leqslant r.$$

ナルトキナリ.

解 III. 定點ヲ P トシ, 定圓ノ中心ヲ O トス.



P ヲ中心トシ圓 O ノ徑ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ, 圓 O ノ

周ヲ截ル點ヲ C, C′ トシ, C, C′ ヲ過ル徑 CB, C′B′ ヲ引キ, PB, PB′ ヲ結ビ付ケ, 圓 O ノ周ヲ截ル點ヲソレゾレ A, A′ トスレバ

PAB, PA′B′ ハ所要ノ直線ナリ.

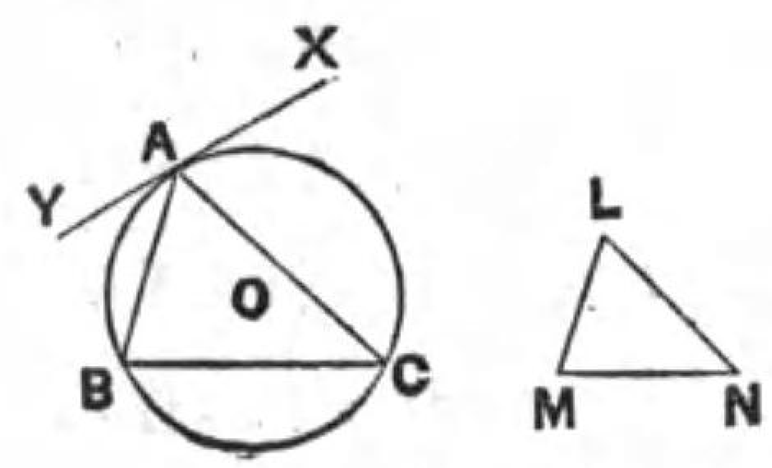
如何ニモ CA ヲ結ビ付クレバ $C\hat{A}B=\hat{R}$ ニシテ CB=CP ナルユエ A ハ PB ノ中點ナリ.

又 PA′B′ ニ就キテモ同様ナレバナリ.

吟味ハ解 I ト同様ナリ.

28. 定圓ニ内接シテ, 定三角形ト等角ナル三角形ヲ作レ. [II. 秋. 鑛. 專.]

解 定圓ヲ O トシ, 定三角形ヲ LMN トス.



圓 O ノ周上ノ任意ノ點 A ヲ取リ, 切線 XAY ヲ引キ, 弦 AC, AB ヲ

$$X\hat{A}C=\hat{M},\ Y\hat{A}B=\hat{N}$$

ナル如ク引キ,

BC ヲ結ビ付クレバ △ABC ハ所要ノモノナリ

如何トナレバ $\hat{B}=X\hat{A}C=\hat{M},$

$\hat{C}=Y\hat{A}B=\hat{N},$

從ヒテ $\hat{A}=\hat{L}$

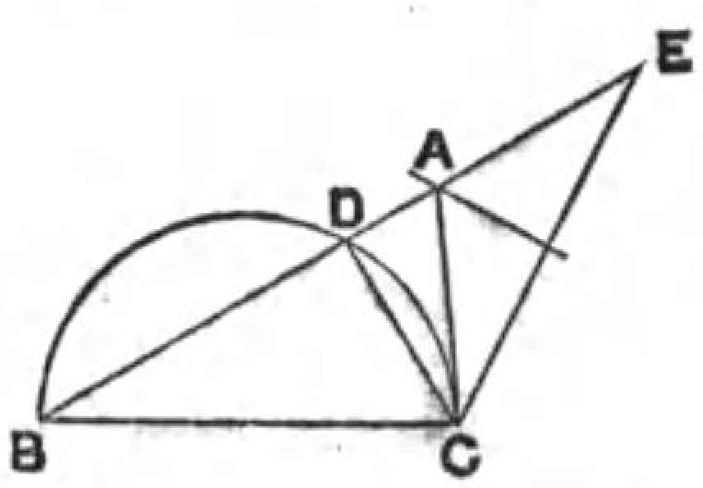
ナレバナリ.

注意 A ハ圓 O ノ周上ノ任意ノ點ナルユヱ △ABC ハ無數ニ作ルコトヲ得レドモ三角形ハ全等ナリ.

29. 底邊, 他ノ二邊ノ和及ビ底邊ノ端ヨリ對邊マデノ距離ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

[II. 大. 高. 工.]

解 三角形 ABC ニ於テ $BC=a$, $AB+AC=l$, 及ビ C ヨリ AB ニ至ル距離 $CD=d$ ヲ既知スルモノトス.



先ヅ $BC=a$ ヲ引キ, BC ノ上ニ半圓 BDC ヲ畫キ, C ヲ中心トシ, d ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ, 半圓 BDC ヲ D ニ於テ截リ, BD ヲ結ビ付ケ, 其ノ延線上ニ點 E ヲ $BE=l$ ナル如ク取リ, CE ヲ結ビ付ケ, 其ノ垂直二等分線ヲ作リ, BE ヲ截ル點ヲ A トシ, AC ヲ結ビ付クレバ △ABC ハ所要ノモノナリ.

如何トナレバ A ハ CE ノ垂直二等分線ナルユヱ

$$AC=AE,$$

故ニ

$$AB+AC=BE=l$$

ニシテ作圖ニ依リテ $BC=a$, $CD=d$ ナレバナリ.

而シテ作圖ガ出來得ベキ爲ニハ

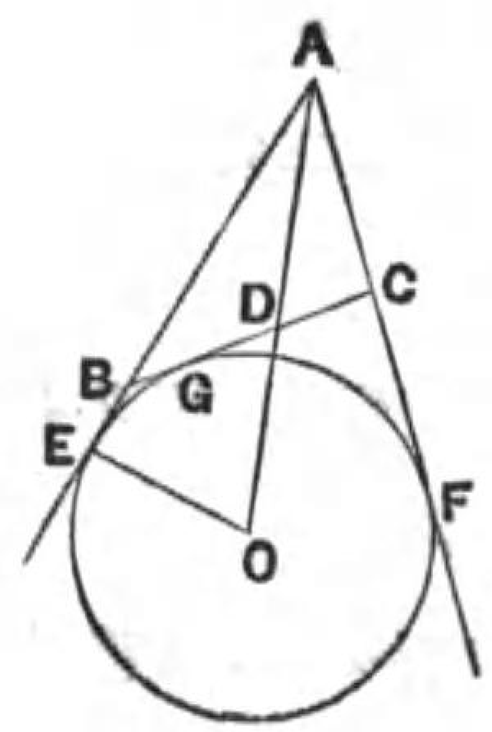
$$l>a\geqq h$$

ナルコトヲ要ス.

30. 頂角, 其ノ二等分線 m, 及ビ周圍 l ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

[II. 陸. 經.]

解 與ヘラレタル角ト等シキ角 A ヲナス直線 AE, AF ヲ $\frac{l}{2}$ ニ等シク取リ, E ヨリ AE ニ垂線ヲ引キ角 A ノ二等分線トノ交點ヲ O トスレバ O ハ △ABC ノ傍切圓ノ中心ナリ.



故ニ O ヲ中心トシ, OE ヲ半徑トスル圓 O ヲ畫キ, AO 上ニ AD ヲ m ニ等シク取リ, D ヨリ此ノ圓ニ切線ヲ引キ AE, AF トノ交點ヲソレゾレ B, C トスレバ ABC ハ所要ノ三角形ナリ.

如何トナレバ BC ト傍切圓トノ切點ヲ G トス

レバ $\quad AE=AB+BE$

$$=AB+BG=\frac{l}{2},$$

及ビ $\quad AF=AC+CF$

$$=AC+CG=\frac{l}{2}.$$

故ニ $\quad AE+AF=AB+BC+CA=l.$

且角 A ハ與ヘラレタル角ニ等シク, AD ハ與ヘラレタル長サ m ニ等シキヲ以テナリ.

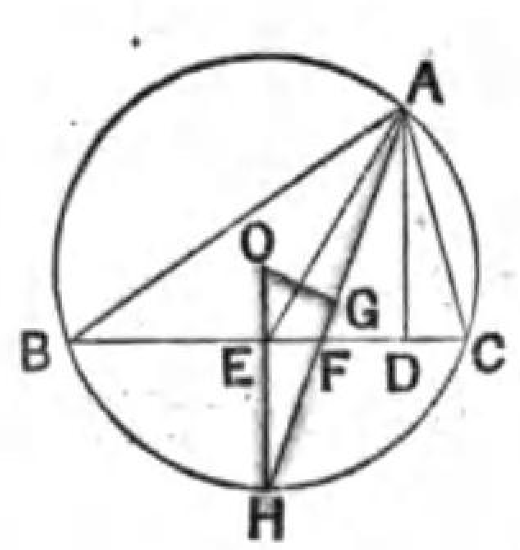
次ニ作圖ガ成立スル爲ニハ點 D ハ圓 O ノ外ニアルコトヲ要シ, 外ニアルトキハ二個ノ切線ヲ引クコトヲ得. 從ヒテ二個ノ三角形ヲ得レドモ此ハ全等形ナリ.

若シ圓周上ニアルトキハ一個ノ切線ヲ引クコトヲ得, 從ヒテ一個ノ三角形ヲ得.

若シ圓內ニアルトキハ切線ヲ引クコトヲ得ズ, 從ヒテ解ナシ.

31. 一ツノ三角形ノ一角頂ヨリ對邊上ノ各點ニ引ケル諸直線中, 垂線, 中線, 及ビ角ノ二等分線ヲ知リテ, 其ノ三角形ヲ作リ, 且吟味セヨ. [45. 陸. 士.]

解 三角形 ABC ニ於テ, 垂線 $AD=h$, 中線



$AE=m$, 角 A ノ二等分線 $AF=w$ ヲ既知スルモノトス.

$AE=m$ ヲ斜邊, $AD=h$ ヲ一邊トスル直角三角形 AED ヲ作リ, A ヨリ ED ニ至ル直線 $AF=w$ ヲ引キ, E ヲ過リ ED ニ垂線 EH ヲ引キ, AF ノ延線トノ交點ヲ H トシ, AH ノ中點 G ヲ過リ, 之ニ垂線 OG ヲ引キ, HE ノ延線ト交ル點ヲ O トシ, O ヲ中心トシ, OA ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ, ED ノ延線ヲ截ル點ヲ B, C トシ, AB, AC ヲ結ビ付クレバ △ABC ハ所要ノモノナリ.

如何トナレバ $OA=OH$ ナルユヱ, 圓 ABC ハ H ヲ過リ, $OE\perp BC$ ナルヲ以テ $BE=CE$,

從ヒテ $\quad$ 弧 $BH=$ 弧 HC,

故ニ △ABC ニ於テ AE ハ中線ニシテ, AF ハ $\hat{A}$ ノ二等分線ナリ.

又 AD ハ作圖ニ依リテ BC ニ垂直ナリ.

依リテ △ABC ハ要件ニ適スレバナリ.

次ニ此ノ作圖ガ出來得ベキ爲ニハ

$$AE>AF>AD,$$

卽チ $$m>w>h$$

ナルコト必要ニシテ且十分ナリ.

注意 $m=w=h$ ナルトキハ, 無數ノ二等邊三角形ヲ畫クコトヲ得ベシ.

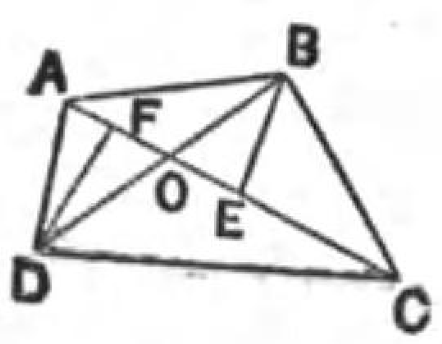
面積

1. 直角三角形ニ於テ, 斜邊ノ上ノ正方形ハ, 他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シキコトヲ證セヨ. [45. 小.高.商., 東北農.大.]

證 增補 41頁 1題ヲ見ヨ.

2. 四邊形ノ一ツノ對角線ガ其ノ四邊形ヲ二等分スルトキハ, 此ノ對角線ハ他ノ對角線ノ中點ヲ過ルコトヲ證セヨ. [45. 商船., 東.高.師.]

證 四邊形 ABCD ノ對角線 AC ガ本形ヲ二等分スルトキハ; AC, BD ノ交點 O ハ BD ノ中點ナルベシ. B, D ヨリ AC ニ下セル垂線ヲ BE, DF トスレバ



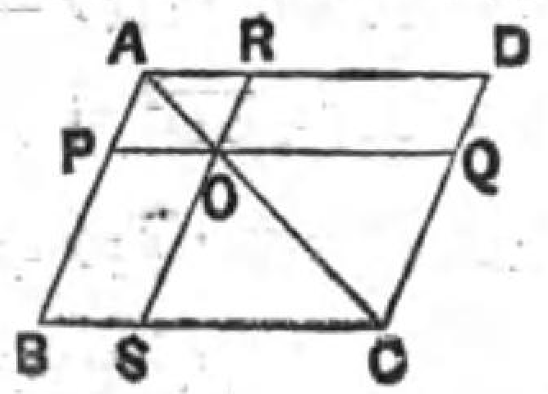
$\triangle ABC=\triangle ADC$ ナルユヱ $BE=DF$,

故ニ $$\triangle BOE \equiv \triangle DOF.$$

故ニ $$BO=OD.$$

3. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC ノ上ノ任意ノ點 O ヲ過リ, BC ニ平行ナル直線ヲ引キ; AB, DC ト交ル點ヲソレゾレ P, Q トシ, 又 O ヲ過リ AB ニ平行ナル直線ヲ引キ; AD, BC ト交ル點ヲソレゾレ R, S トス, 然ルトキハ二ツノ四邊形 PBSO, ROQD ハ相等シキコトヲ證セヨ. [45. 秋.鑛.專.]

證 對角線ハ平行四邊形ヲ二等分スルヲ以テ



$$\triangle ABC=\triangle ADC,$$
$$\triangle APO=\triangle ARO,$$
$$\triangle OSC=\triangle OQC,$$

故ニ $$\triangle ABC-\triangle APO-\triangle OSC$$
$$=\triangle ADC-\triangle ARO-\triangle OQC,$$

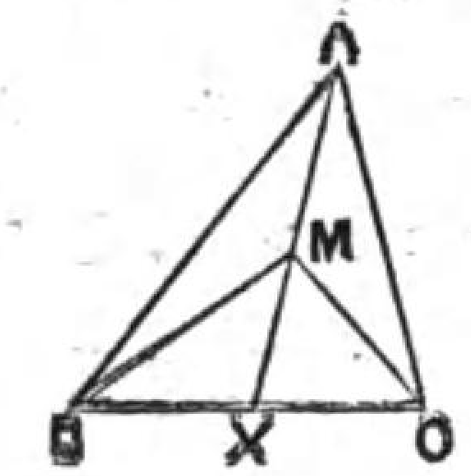
故ニ $$▱PBSO=▱ROQD.$$

4. 三角形 ABC ノ邊 BC 上ニ一點 X ヲ取リ, 之ヲ頂點 A ニ結ビ付ケ, 次ニ AX ノ中點 M ヲ取リ, 之ヲ B, C ニ結ビ付クルトキ

$$\overline{AB}^2+\overline{BX}^2=\overline{CA}^2+\overline{CX}^2$$

ナル關係アルトキハ三角形 BMC ハ二等邊ナルコトヲ證セヨ. [II. 商船.]

證 $\overline{AB}^2+\overline{BX}^2=\overline{CA}^2+\overline{CX}^2$



ナルトキハ M ハ AX ノ中點ナルヲ以テ

$$2(\overline{BM}^2+\overline{AM}^2)=2(\overline{CM}^2+\overline{AM}^2),$$

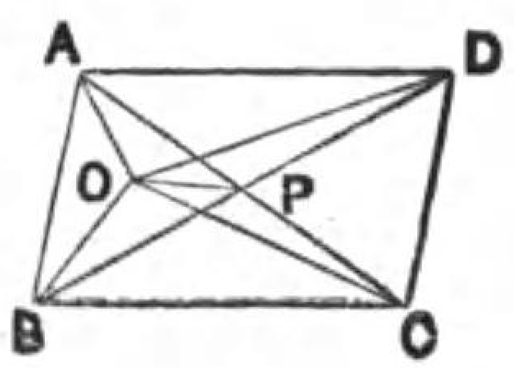
即チ $\overline{BM}^2=\overline{CM}^2$,

故ニ BM=CM,

即チ △MBC ハ二等邊ナリ.

5. 平行四邊形 ABCD ノ形內ナル任意ノ一點ヲ O トセバ $\overline{OA}^2+\overline{OC}^2$ ト $\overline{OB}^2+\overline{OD}^2$ トノ差ハ, 兩對角線 AC, BD 上ノ正方形ノ差ノ半分ニ等シキコトヲ證セヨ. [I. 商船.]

證 AC, BD ノ交點ヲ P トシ, OP ヲ結ビ付クレバ



$$\overline{OA}^2+\overline{OC}^2=2(\overline{AP}^2+\overline{OP}^2),$$

及ビ $\overline{OB}^2+\overline{OD}^2=2(\overline{BP}^2+\overline{OP}^2)$.

故ニ $(\overline{OA}^2+\overline{OC}^2)\sim(\overline{OB}^2+\overline{OD}^2)$

$$=2(\overline{AP}^2\sim\overline{BP}^2)$$

$$=\frac{1}{2}(4\overline{AP}^2\sim4\overline{BP}^2)$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{AC}^2\sim\overline{BD}^2).$$

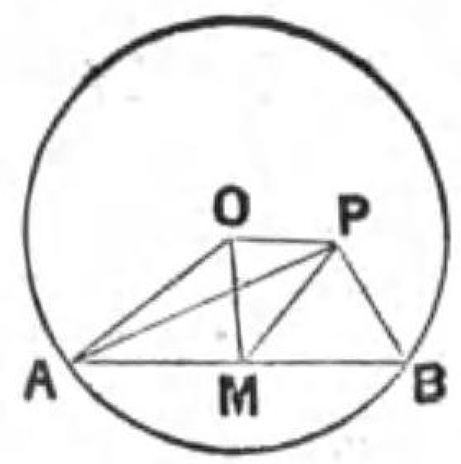
6. P ハ中心 O ナル圓ノ平面上ノ一點ニシテ, AB ハ OP ニ平行ナル任意ノ弦ナルトキ

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{OA}^2+\overline{OP}^2)$$

ナルコトヲ證セヨ. [II. 東北大.工.]

證 弦 AB ノ中點ヲ M トシ; OM, PM ヲ結ビ付クレバ OM⊥AB, OP∥AB,

故ニ OM⊥OP.



△PAB ニ於テ

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{PM}^2)$$

$$=2\{(\overline{OA}^2-\overline{OM}^2)+(\overline{OM}^2+\overline{OP}^2)\}$$

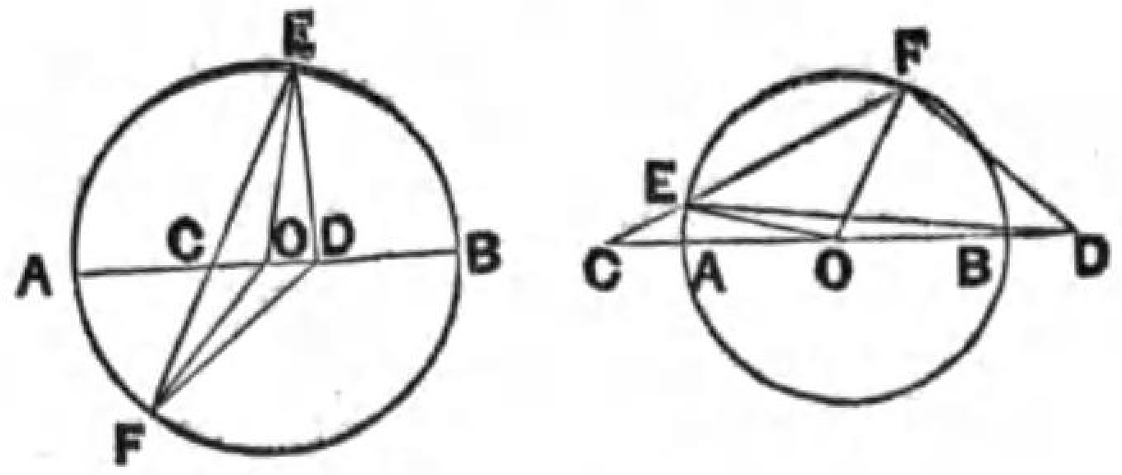
$$=2(\overline{OA}^2+\overline{OP}^2)$$

7. O ヲ中心トスル圓ノ徑 AB, 又ハ其ノ延線上ニ二點 C, D ヲ取リ, OC=OD ナラシメ, C ヲ過ル任意ノ弦 EF ヲ引キ; DE, DF ヲ結ビ付クルトキハ, 三角形 DEF ノ各邊ノ上ノ正方形ノ和ハ一定ノ大イサナルコトヲ證セヨ.

[45. 陸.士.]

證 $\overline{EC}^2+\overline{ED}^2=2(\overline{OE}^2+\overline{OC}^2)$,

$\overline{FC}^2+\overline{FD}^2=2(\overline{OF}^2+\overline{OC}^2)$,



$$2EC.FC=2(\overline{OE}^2\sim\overline{OC}^2).$$

依リテ $\overline{DE}^2+\overline{DF}^2+\overline{CE}^2+\overline{CF}^2\pm 2CE.CF$

$$=4\overline{OE}^2+4\overline{OC}^2\pm(2\overline{OE}^2\sim 2\overline{OC}^2).$$

故ニ OE>OC ナルトキハ複符號ノ中, 正ヲ取リテ

$$\overline{DE}^2+\overline{DF}^2+\overline{EF}^2=6\overline{OE}^2+2\overline{OC}^2,$$

又 OE<OC ナルトキハ負ヲ取リテ

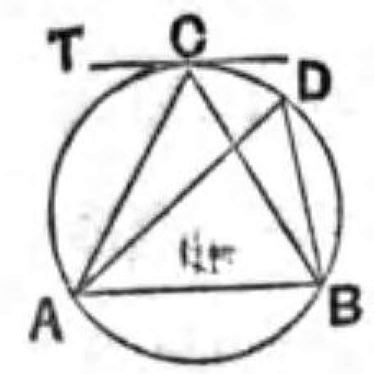
$$\overline{DE}^2+\overline{DF}^2+\overline{EF}^2=2\overline{OE}^2+6\overline{OC}^2.$$

即チ $\overline{DE}^2+\overline{DF}^2+\overline{EF}^2$ ハ一定ノ大イサナリ.

8. 與ヘラレタル圓ニ內接シ, 與ヘラレタル弦 AB ヲ底邊トスル最大面積ノ三角形ハ二等邊三角形ナルコトヲ證セヨ. [45. 仙. 高. 工.]

證 弦 AB ニ平行ナル切線 CT ヲ引キ, 其ノ切點ヲ C トスレバ, △CAB ハ內接二等邊三

角形ナリ.



弧 ACB 上ニ任意ノ點 D ヲ取リ, △DAB ヲ作レバ, D ハ CT ト AB トノ間ニアリ.

故ニ △CAB>△DAB,

即チ題言ノ如シ.

9. 與ヘラレタル圓ニ內接スル三角形ノ中, 最モ大ナル面積ヲ有スルモノハ正三角形ナルコトヲ證セヨ. [44. 廣. 高. 師., II. 米. 高. 工.]

證 與ヘラレタル圓ニ內接スル三角形ニ於テ底邊ガ一定ナルトキハ二等邊三角形ガ最大ノ面積ヲ有ス.

故ニ內接三角形ニ於テ任意ノ二邊ガ不等ナルトキハ他ノ一邊ヲ底トスル最大面積ノ二等邊三角形ヲ作ルコトヲ得.

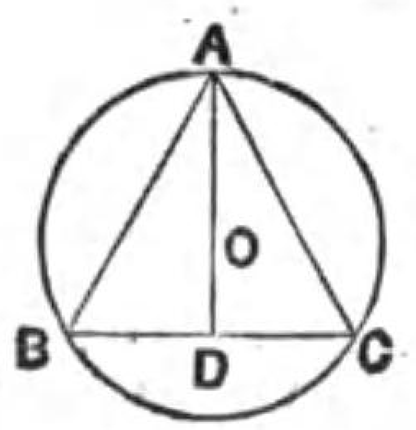
而シテ此ノ方法ハ三角形ノ三邊ガ等シカラザル間ハ繰リ返スコトヲ得.

即チ正三角形ナラザルトキハ恒ニソレヨリ大ナル內接三角形ヲ作ルコトヲ得.

依リテ內接三角形ノ中最大ノ面積ヲ有スルモノハ正三角形ナリ.

10. 徑 a 尺ナル圓ニ內接スル正三角形ノ面積ヲ計算セヨ. [45. 上. 蠶. 專.]

解 徑 a 尺ナル圓 O ニ內接スル正三角形ヲ ABC, 其ノ高サヲ AD トスレバ O ハ AD 上ニアリテ



$$OD=\frac{1}{2}AO$$

ナルユヱ $AD=\frac{3}{4}a$,

又 $$3\overline{AB}^2=4\overline{AD}^2,$$

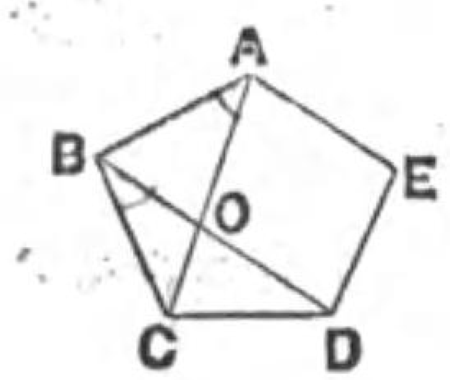
故ニ $$AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}AD=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

依リテ $$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{16}a^2\ (\text{平方尺}).$$

11. 一邊ノ長サ 1 尺ナル正五邊形ノ對角線ノ長サヲ求メヨ. 但小數第三位マデ算出シ以下四捨五入スベシ. [II. 水. 講.]

解 正五邊形ヲ ABCDE トシ, 對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トス.



然ルトキハ

$$AC \parallel ED,$$

$$BD \parallel AE,$$

故ニ AODE ハ平行四邊形ニシテ

$$AO=ED=BC.$$

又 $$B\hat{A}C=C\hat{B}D,$$

故ニ BC ハ圓 ABO ニ B ニ於テ切ス.

依リテ $$\overline{BC}^2=CO.CA$$

$$=(CA-AO).CA$$

$$=(CA-BC).CA.$$

今 $BC=1$, $CA=x$ トスレバ

$$1=(x-1)x,$$

或ハ $$x^2-x-1=0,$$

故ニ $$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},$$

而シテ x ハ負數ナルコト能ハズ.

故ニ $$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

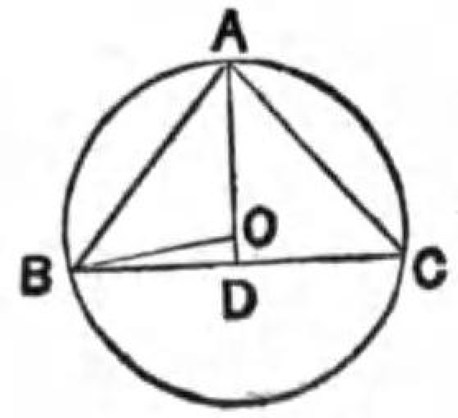
$$=\frac{1+2.2360\ldots\ldots}{2}$$

$$=1.6180\ldots\ldots,$$

卽チ 1尺.618 ナリ.

12. 二等邊三角形ノ三邊ガ 6, 6, 8 ナルトキ, 此ノ三角形ノ外接圓ノ半徑, 及ビ內切圓ノ半徑各幾何ナルカ. [45. 海. 機.]

解 圓 O ニ內接スル △ABC ニ於テ



AB=AC=6, BC=8 トシ,
AD ヲ高サトスレバ
$2\times 6^2>8^2$ ナルヲ以テ, $\hat{A}$ ハ
鋭角ナルユヱ, 中心 O ハ
AD ノ上ニアリ. AO=R トスレバ

$$AD-AO=OD,$$

即チ $\sqrt{(\overline{AB}^2-\overline{BD}^2)}-AO=\sqrt{(\overline{BO}^2-\overline{BD}^2)}$,

或ハ $\sqrt{6^2-4^2}-R=\sqrt{R^2-4^2}$,

兩邊ヲ平方シテ簡單ニスレバ

$$2R\sqrt{20}=36,$$

故ニ $R=\dfrac{9}{\sqrt{5}}=1.8\sqrt{5}=4.024\ldots\ldots$,

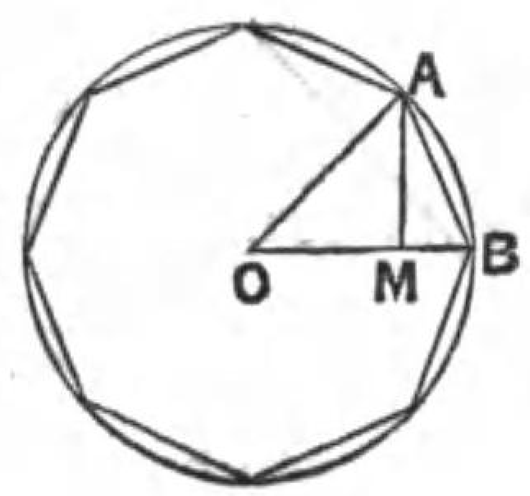
次ニ內切圓ノ半徑ヲ r トスレバ

$$r(AB+AC+BC)=AD.BC,$$

即チ $r(6+6+8)=8\times 2\sqrt{5}$,

故ニ $r=\dfrac{16\sqrt{5}}{20}=0.8\sqrt{5}=1.788\ldots\ldots$

13. 徑1尺ノ圓ニ內接スル正八角形ノ周圍ノ長サ及ビ面積ヲ求メヨ。 [45. 熊. 高. 工.]



解 圓 O ニ內接スル正八角形ノ一邊ヲ AB トシ,

中心 O ト A, B トヲ結ビ付ケ, A ヨリ OB ニ垂線 AM ヲ下セバ

$$A\hat{O}M=\frac{1}{2}\hat{R},$$

故ニ $\overline{OM}^2=\overline{AM}^2=\dfrac{1}{2}\overline{OA}^2=\dfrac{1}{2}\overline{OB}^2$,

依リテ
$$\begin{aligned}\overline{AB}^2&=\overline{AM}^2+\overline{BM}^2\\&=\overline{AM}^2+(OB-OM)^2\\&=2\overline{AM}^2+\overline{OB}^2-2OB.OM\\&=2\overline{OB}^2-2OB.\frac{1}{\sqrt{2}}OB\\&=(2-\sqrt{2}).\overline{OB}^2,\end{aligned}$$

故ニ $AB=OB.\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

依リテ $OB=\dfrac{1}{2}$ トスレバ所要ノ周圍ハ

$$\begin{aligned}8AB&=4\sqrt{2-\sqrt{2}}\\&=4\sqrt{2-1.41421\ldots\ldots}\\&=4\sqrt{0.58578\ldots\ldots}\\&=3.061\ldots\ldots(\text{尺}).\end{aligned}$$

又
$$\begin{aligned}\triangle AOB&=\frac{1}{2}OB.AM\\&=\frac{1}{2}OB.\frac{1}{\sqrt{2}}OB\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{OB}^2,\end{aligned}$$

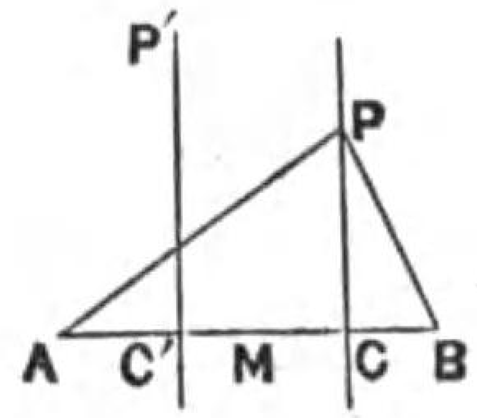
依リテ $OB=\frac{1}{2}$ トスレバ所要ノ面積ハ

$$8\triangle AOB=\frac{8}{2\sqrt{2}}\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=0.7071\ldots\ldots(\text{平方尺}).$$

14. 一ツノ平面上ニ於テ，二ツノ與ヘラレタル點ヨリノ距離ノ上ノ正方形ノ差ガ與ヘラレタル正方形ニ等シキ如キ點ノ軌跡ヲ求メヨ．

[I. 東.高.師.]

解 二定點 A, B ヨリノ距離ノ上ノ正方形ノ差ガ一定量 k^2 ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求メントス．



點 P ヲ要件ニ適スル點トシ，P ヨリ AB ニ垂線 PC ヲ下セバ

$$\overline{PA}^2\sim\overline{PB}^2=\overline{AC}^2\sim\overline{BC}^2$$
$$=(AC+BC)(AC\sim BC).$$

今 AB ノ中點ヲ M トスレバ

$$AC\sim BC=2MC.$$

故ニ $\overline{PA}^2\sim\overline{PB}^2=2AB.MC=k^2.$

然ルニ k^2, AB ハ一定ナルユエ MC モ亦一定

ナリ．

故ニ P ハ定點 C ヲ過リ AB ニ垂直ナル直線 PC 上ニアリ．

逆ニ PC 上ノ任意ノ點 P ヲ取レバ

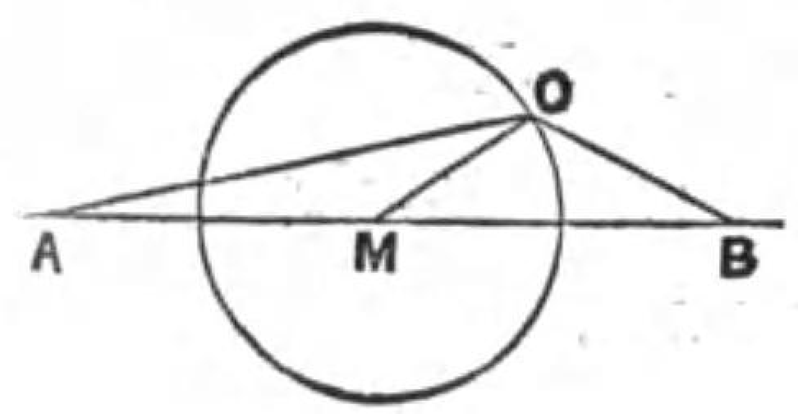
$$\overline{PA}^2\sim\overline{PB}^2=\overline{AC}^2\sim\overline{BC}^2$$
$$=2AB.MC=k^2.$$

故ニ P ハ要件ニ適ス．

依リテ所要ノ軌跡ハ AB ニ垂直ナル二ツノ直線ナリ．

15. 間隔 2 寸ナル二定點 A, B ヨリ一點 O ニ引ケル直線ノ上ノ正方形ノ和ガ 2.5 平方寸，又其ノ差ガ 8 平方寸ナル兩場合ニ於ケル點 O ノ軌跡ヲ求メ，且點 A, B ト軌跡トノ概略ノ位置ヲ圖示セヨ．但 O ハ A, B ヲ含メル一平面上ニアルモノトス． [II. 陸.士.]

解 $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=2.5(\text{平方寸})$ トス．



AB ノ中點ヲ M トシ，OM ヲ結ビ付クレバ

$$2\overline{OM}^2+2\overline{AM}^2$$
$$=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2,$$

即チ $2\overline{OM}^2+2\times 1^2=2.5$,

或ハ $\overline{OM}^2=0.25$ (平方寸),

故ニ $OM=0.5$ (寸).

依リテ點 O ハ AB ノ中點 M ヲ中心トシ, 半徑ヲ 5 分トスル圓周上ニアリ.

逆ニ此ノ圓周上ノ點 O ヲ取リ OA, OB, OM ヲ結ビ付クレバ $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{OM}^2$

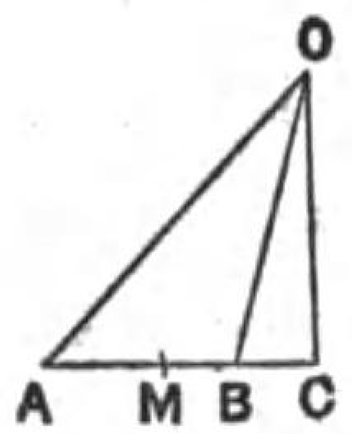
$$=2\times 1^2+2\times 0.25$$

$$=2.5 \text{ (平方寸)}.$$

即チ O ハ要件ニ適ス.

故ニ點 O ノ軌跡ハ AB ノ中點 M ヲ中心トシ半徑ヲ 5 分トスル圓周ナリ.

次ニ $\overline{OA}^2\sim\overline{OB}^2=8$ (平方寸) トス.



O ヨリ AB ニ垂線 OC ヲ下シ, AB ノ中點ヲ M トスレバ

$$\overline{OA}^2\sim\overline{OB}^2$$

$$=(\overline{OC}^2+\overline{AC}^2)\sim(\overline{OC}^2+\overline{BC}^2)$$

$$=\overline{AC}^2\sim\overline{BC}^2$$

$$=(AC+BC)(AC\sim BC)$$

$$=2AB.MC,$$

即チ $8=2\times 2MC$.

故ニ $MC=2$ (寸).

依リテ C ハ定點ナリ.

從ヒテ點 O ハ定點 C ヲ過リテ AB ニ垂直ナル直線上ニアリ.

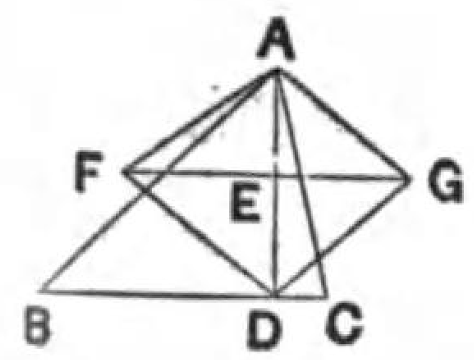
逆ニ此ノ直線上ノ點ハ皆要件ニ適ス.

故ニ點 O ノ軌跡ハ AB ノ延線上, M ヨリ 2 寸ノ距離ニアル定點ニ於テ AB ニ垂直ナル二ツノ直線ナリ.

16. 與ヘラレタル三角形ト等積ナル任意ノ菱形ヲ作ル方法ヲ記シ, 且其ノ理由ヲ述ベヨ.

[45. 女. 高. 師.]

解 本題ハ面積ヲ知リテ菱形ヲ作ルコトトナルヲ以テ, 解ハ無數ニアリ. 即チ不定ナリ.



今其ノ一二ヲ示サン.

I. 三角形ヲ ABC トシ, 高サ AD ヲ引キ, AD ノ中點 E ニ於テ之ニ垂線 FEG ヲ引キ, 其ノ上ニ

$$EF=EG=\frac{1}{2}BC$$

ナル如キ點 F, G ヲ取リ; AF, FD, DG, GA

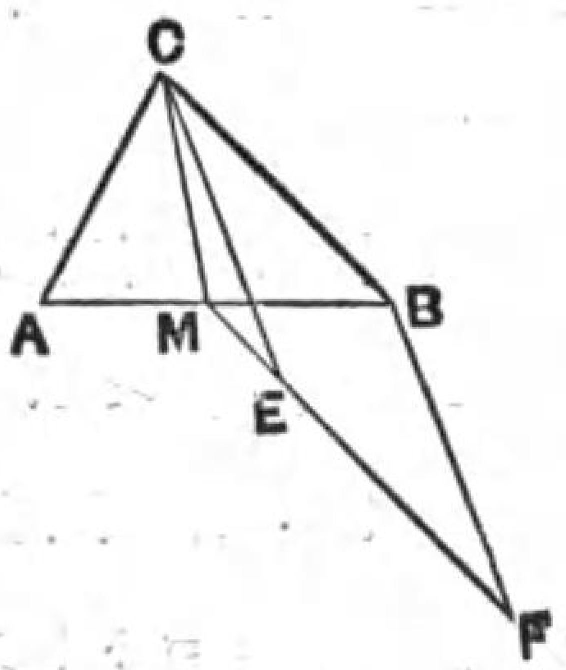
ヲ結ビ付クレバ AFDG ハ所要ノ菱形ナリ.

如何トナレバ AD, FG ハ互ニ他ヲ直角ニ二等分スルヲ以テ, AFDG ハ菱形ニシテ, 其ノ面積ハ

$$\frac{1}{2}AD.FG=\frac{1}{2}AD.BC$$

ナレバナリ.

II. 三角形ヲ ABC トシ, AB ノ中點 M ヲ求メ, M ヨリ CA, CB ノ大ナル方, 例ヘバ CB ニ平行ニ ME ヲ引キ, C ヲ中心トシ CB ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ, ME ヲ E ニ於テ截リ, B ヨリ CE ニ平行ニ BF ヲ引キ ME ノ延線ヲ F ニ於テ截ルトキハ CBFE ハ所要ノ菱形ナリ.



如何トナレバ CBFE ハ作圖ニ依リテ平行四邊形ニシテ且相隣レル二邊 CB, CE ガ相等シキヲ以テ菱形ナリ.

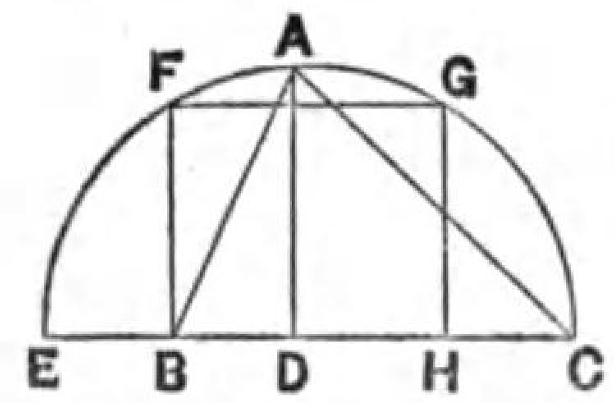
又 $$CBFE=2\triangle CMB=\triangle ABC$$

ナレバナリ.

17. 與ヘラレタル三角形ニ等シキ正方形ヲ

作ル方法及ビ其ノ證明如何. [II. 東北農.大.]

解 與ヘラレタル三角形ヲ ABC トス.



高サ AD ヲ引キ, CB ノ延線上ニ BE ヲ $\frac{1}{2}AD$ ニ等シク取リ, EC ヲ徑トシテ其ノ上ニ半圓 EFC ヲ畫キ, B ヲ過リ BC ニ垂線 BF ヲ引キ, 半圓ヲ截ル點ヲ F トシ, BF ヲ一邊トシ, 其ノ上ニ正方形 BFGH ヲ作レバ此ハ所要ノ正方形ナリ.

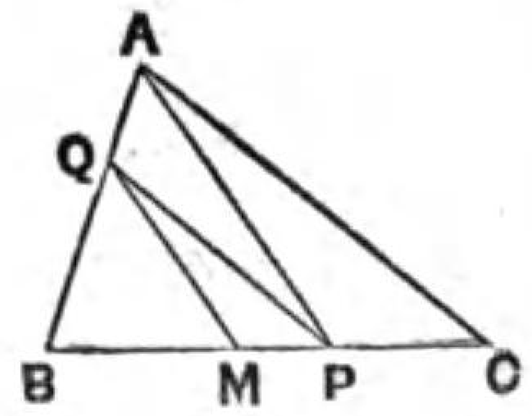
如何トナレバ作圖ニ依リテ

$$\begin{aligned}BFGH&=\overline{BF}^2\\&=BE.BC\\&=\frac{1}{2}AD.BC\\&=\triangle ABC\end{aligned}$$

ナレバナリ.

18. 三角形ノ一邊上ノ任意ノ一點ヨリ此ノ三角形ノ面積ヲ二等分スル直線ヲ引ケ [證明ヲ要セズ]. [II. 海.兵.]

解 三角形 ABC ノ邊 BC 上ニ與ヘラレタ

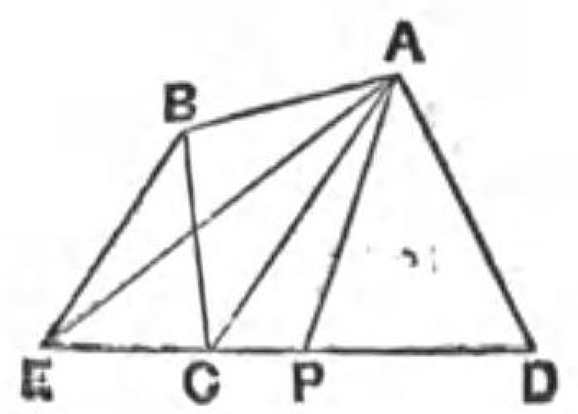


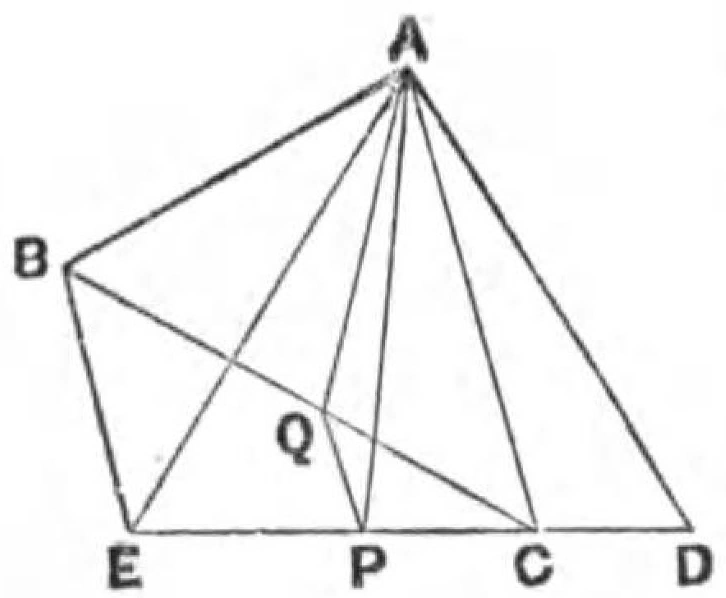
ル點ヲ P トス.

AP ヲ結ビ付ケ, BC ノ中點 M ヨリ PA ニ平行ニ MQ ヲ引キ, AB 或ハ AC ニ交ル點ヲ Q トシ, PQ ヲ結ビ付クレバ PQ ハ所要ノ直線ナリ.

19. 四邊形ノ一角頂ヲ過リテ引キタル直線ニテ本形ヲ二等分セヨ. [II. 京.蠶.講.]

解 四邊形 ABCD ノ一角頂 A ヲ過ル直線ニテ本形ヲ二等分セントス.





對角線 AC ヲ結ビ付ケ, B ヲ過リテ AC ニ平行ナル直線 BE ヲ引キ, DC ノ延線トノ交點ヲ E トシ, ED ノ中點 P ガ DC ノ上ニアルトキハ AP ヲ結ビ付クレバ此ハ所要ノ直線ナリ.

如何トナレバ AE ヲ結ビ付クレバ

$$AC \parallel BE$$

ナルユヱ $\triangle ABC = \triangle AEC$,

故ニ $ABCD = \triangle AED$,

又 P ハ ED ノ中點ナルユヱ

$$\triangle APD = \frac{1}{2} \triangle AED,$$

故ニ $\triangle APD = \frac{1}{2} ABCD$

ナレバナリ.

次ニ ED ノ中點 P ガ DC ノ延線上ニアルトキハ P ヲ過リ AC ニ平行ニ PQ ヲ引キ, BC ヲ Q ニ於テ截リ, AQ ヲ結ビ付クレバ AQ ハ所要ノ直線ナリ.

如何トナレバ前ト同樣ニ

$$\triangle APD = \frac{1}{2} ABCD,$$

又 $\triangle AQC = \triangle APC$,

故ニ $AQCD = \triangle APD$

ナレバナリ.

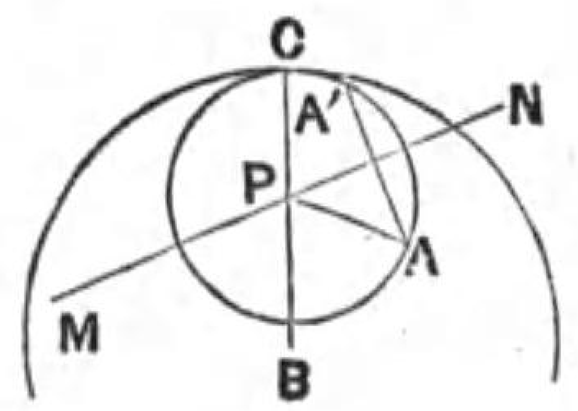
尙本書 229 頁 **11** 題ヲ見ヨ.

20. 二定點ヲ過リ定圓ニ切スル圓ヲ畫ク法, 及ビ其ノ證如何. [45. 東北農.大.]

解 本書 302 頁 **78** 題ニ同ジ.

21. 與ヘラレタル直線 MN ノ同ジ側ニ與ヘラレタル二點 A, B アリ; AP+BP ヲシテ與ヘラレタル長サ l ニ等シカラシムベキ點 P ヲ直線 MN ノ上ニ求メヨ. [II. 陸. 士.]

解 MN ニ關シテ A ノ對稱點 A′ ヲ取リ, B ヲ中心トシ l ヲ半徑トシテ圓 B ヲ畫キ, 又 A, A′ ヲ過リ且圓 B ニ內切スル圓ヲ畫キ其ノ切點ヲ C トス.



BC ヲ結ビ付ケ, MN トノ交點ヲ P トスレバ P ハ所要ノ點ナリ.

如何トナレバ圓 AA′C ハ圓 B ニ切スルヲ以テ其ノ中心ハ直線 BC 上ニアリ.

又 A, A′ ハ MN ニ關シテ互ニ對稱點ナルヲ以テ圓 AA′C ノ中心ハ MN 上ニアリ.

故ニ BC, MN ノ交點 P ハ圓 AA′C ノ中心ナリ.

依リテ
$$\begin{aligned} BP+PA &= BP+PC \\ &= BC = l \end{aligned}$$
ナレバナリ.

サテ BA′ ヲ結ビ付クレバ BA′ ハ A, B ヨリ MN 上ノ一點ニ至ル距離ノ和ノ最小ナルモノニ等シキヲ以テ本題ガ成立スル爲ニハ $l \geqq BA'$ ナルコトヲ要ス.

而シテ $l > BA'$ ナルトキハ A, A′ ヲ過リ, 圓 B ニ內切スル圓ハ二ツアルユヱ二ツノ解アリ.

若シ $l = BA'$ ナルトキハ A, A′ ヲ過リ, 圓 B ニ內切スル圓ハ一ツナルユヱ一ツノ解アリ.

注意 本題ハ楕圓ヲ用フルトキハ容易ナリ. 卽チ A, B ヲ焦點トシ, l ヲ長徑トスル楕圓ト直線 MN トノ交點ハ所要ノ點ナリ.

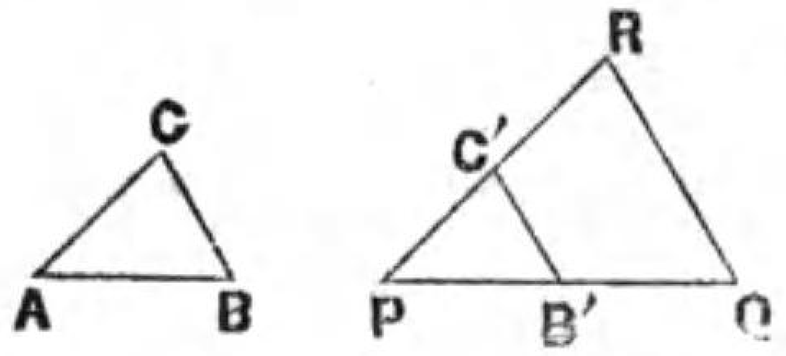
故ニ此ノ楕圓ト MN トガ交ルカ, 切スルカ, 出會ハザルカニ依リテ解ハ二ツ, 或ハ一ツ, 或ハ解ナシ.

比　例

1. 二ツノ三角形 ABC, PQR ニ於テ AB : PQ = AC : PR, 又 $\hat{A} = \hat{P}$ ナルトキハ, 此ノ兩三角形ハ互ニ相似ナルコトヲ證セヨ.

[45. 商船.]

證　三角形ABCヲ三角形PQRノ上ニ重ネ，點Aヲ點Pノ上ニ，邊ABヲ邊PQノ上ニ重ナル様ニスルトキハ



$$B\hat{A}C = Q\hat{P}R$$

ナルヲ以テ邊ACハ邊PRノ上ニ重ナル，

故ニ點B及ビCハソレゾレPQ, PR或ハ其ノ延線上ノ點B′, C′ノ上ニ落ツベシ.

然ルトキB′C′ヲ結ビ付クレバ

$$AB : PQ = AC : PR$$

ナルヲ以テ　$PB' : PQ = PC' : PR.$

故ニ　$PQ \parallel B'C',$

故ニ　$P\hat{B'}C' = P\hat{Q}R,$

$P\hat{C'}B' = P\hat{R}Q,$

即チ　$A\hat{B}C = P\hat{Q}R,$

$A\hat{C}B = P\hat{R}Q.$

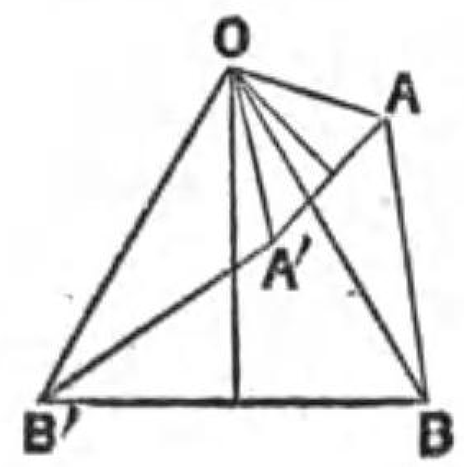
故ニ　$\triangle ABC \backsim \triangle PQR.$

2.　AB, A′B′ハ同一ノ平面上ニアル相等シキ長サノ有限直線ナリ; AB, A′B′ノ平面上ニ

於テAA′, BB′ニ其ノ中點ヨリ立テタル垂線ノ交點OヲA, A′, B, B′ニ結ビ付クレバ，二ツノ三角形AOA′, BOB′ハ相似ナルコトヲ證セヨ.

[45. 東.高.工.]

證　OハAA′, BB′ノ垂直二等分線上ノ點ナルユヱ



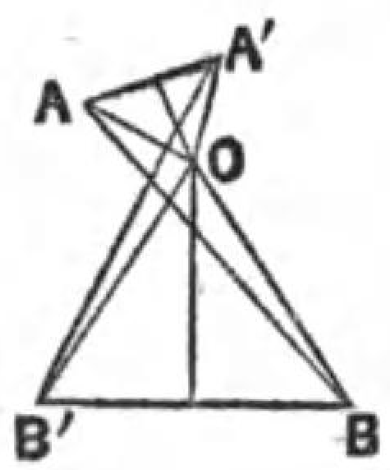
$OA = OA',\ OB = OB',$

又假設ニ依リテ $AB = A'B'.$

故ニ　$\triangle OAB \equiv \triangle OA'B',$

故ニ　$A\hat{O}B = A'\hat{O}B',$

依リテ　$A\hat{O}A' = B\hat{O}B',$



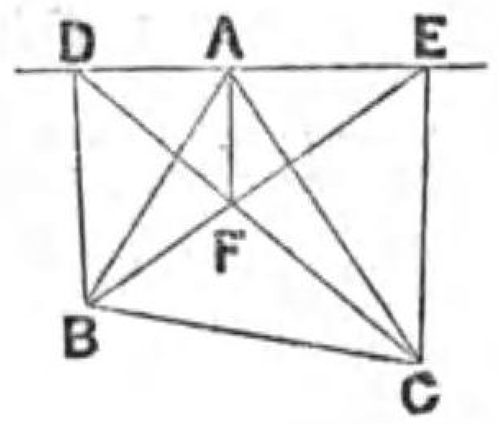
即チ　△AOA′, △BOB′ハ何レモ二等邊三角形ニシテ，頂角ハ相等シ.

故ニ互ニ相似ナリ.

3.　三角形ABCノ角Aノ外角ノ二等分線ヘB及ビCヨリ引ケル垂線ノ趾ヲソレゾレD及ビEトスレバ，二直線BE, CDノ交點ハ角Aノ二等分線上ニアルコトヲ證セヨ.

[II. 海.機.]

證　BE, CDノ交點ヲFトス.



然ルトキハ $BD \parallel CE$ ナルヲ以テ

$$\triangle FBD \backsim \triangle FEC.$$

故ニ $FB : BD = FE : EC.$

故ニ $$FB : FE = BD : EC \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

又 $$B\hat{A}D = C\hat{A}E,$$

$$B\hat{D}A = \hat{R} = C\hat{E}A.$$

故ニ $$\triangle BAD \backsim \triangle CAE.$$

故ニ $$BD : DA = CE : EA,$$

故ニ $$BD : CE = DA : EA \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1), (2) ヨリ $FB : FE = DA : AE.$

依リテ $$FA \parallel BD,$$

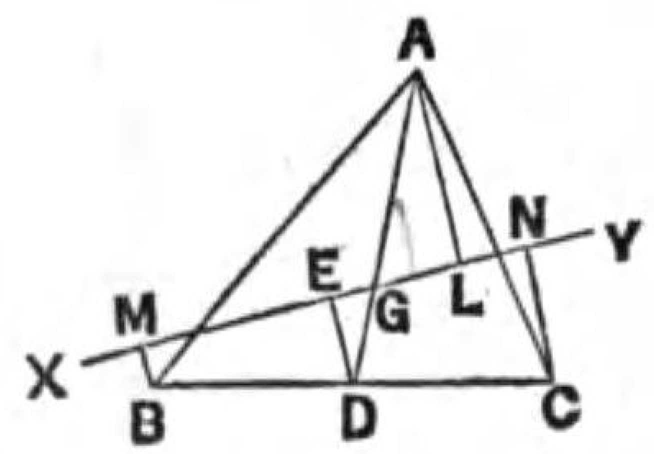
故ニ $$F\hat{A}E = B\hat{D}A = \hat{R}.$$

然ルニ AE ハ $\hat{A}$ ノ外角ノ二等分線ナルヲ以テ AF ハ $\hat{A}$ ノ二等分線ナリ,

即チ F ハ $\hat{A}$ ノ二等分線上ニアリ.

4. 三角形ノ重心ヲ過リテ, 其ノ平面上ニ任意ノ直線ヲ引キ, 其ノ同ジ側ニアル二ツノ頂點ヨリ, 此ノ直線ニ下セル垂線ノ和ハ, 反對ノ側ニアル頂點ヨリ, 同ジ直線ニ下セル垂線ニ等シキコトヲ證セヨ. [45. 各高等.]

證 △ABC ノ重心 G ヲ過ル直線 XY ニ A, B, C ヨリ下セル垂線ノ趾ヲ L, M, N トシ; AG ノ延線ガ BC ニ交ル點ヲ D トシ, D ヨリ XY ニ下セル垂線ノ趾ヲ E トス.



今 B, C ハ XY ノ同ジ側ニアリトスレバ BCNM ハ梯形ニシテ D ハ BC ノ中點ナルヲ以テ

$$DE = \frac{1}{2}(BM + CN),$$

又 △AGL, △DGE ハ相似三角形ニシテ

$$DG = \frac{1}{2}AG$$

ナルユエ $$DE = \frac{1}{2}AL,$$

故ニ $$BM + CN = AL.$$

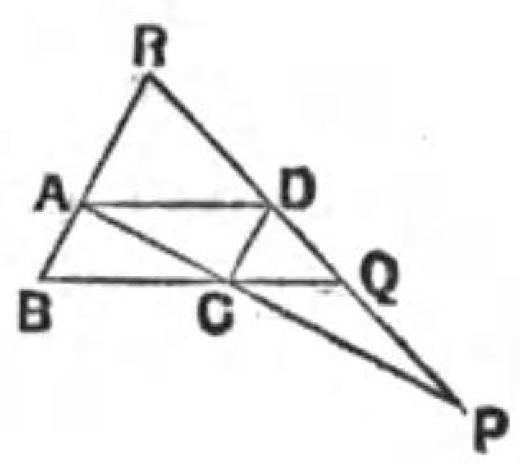
注意 AG ノ中點 P ヨリ AL ニ平行ニ直線 PQ ヲ引キ, GL ヲ截ル點ヲ Q トスレバ

$$\triangle PGQ \equiv \triangle DGE$$

ヨリ相似三角形ノ理ヲ用ヒズシテ, 即チ直線ノ定理ニ依リテ證スルコトヲ得ベシ.

5. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC ヲ P ニ引キ延バシ, P ト D トヲ過リテ直線ヲ引キ; BC, BA ノ延線トソレゾレ點 Q, R ニ於テ交ラシムレバ, PD ハ PQ ト PR トノ比例中項ナルコトヲ證セヨ. [I. 商船.]

證 $BR \parallel CD$ ナルユヱ



$$PR : PD = PA : PC.$$

又 $AD \parallel CQ$ ナルユヱ

$$PA : PC = PD : PQ,$$

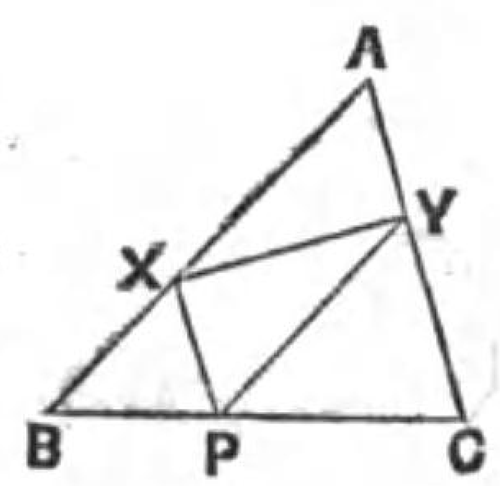
故ニ

$$PR : PD = PD : PQ.$$

6. 三角形 ABC アリ, BC 上ニ一點 P ヲ取リ, 之ヨリ他ノ二邊ニ平行ナル二直線ヲ引キ, AB 上ノ交點 X ト AC 上ノ交點 Y トヲ結ビ付クレバ

$$\triangle PBX : \triangle AXY = \triangle AXY : \triangle PCY$$

ナルコトヲ證セヨ.



證 $AB \parallel PY$, $AC \parallel PX$ ナルヲ以テ

$$\triangle PBX : \triangle AXY = BX : XA$$

$$= BP : PC$$

$$= AY : YC$$

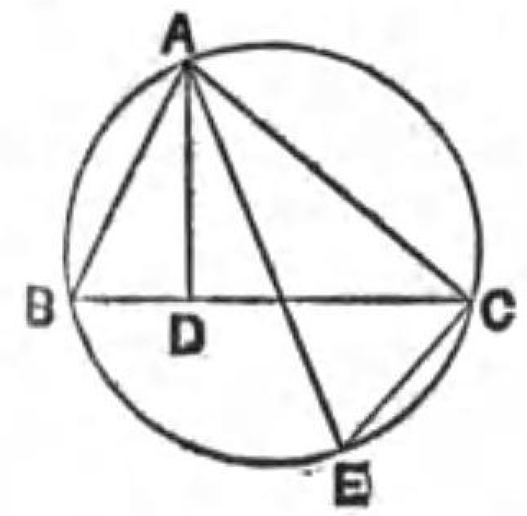
$$= \triangle AXY : \triangle PCY.$$

尙 本書 315 頁 5 題ヲ見ヨ.

7. 三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ對邊 BC ニ下セル垂線ヲ AD トスルトキハ二邊 AB, AC ノ包ム矩形ハ此ノ三角形ノ外接圓ノ徑ト AD トノ包ム矩形ニ等シキコトヲ證セヨ.

[II. 上.蠶.專., 各醫.專.]

證 A ヲ過ル徑ヲ AE トシ, CE ヲ結ビ付クレバ $A\hat{C}E = \hat{R} = A\hat{D}B$,



$$A\hat{E}C = A\hat{B}C.$$

故ニ $\triangle ABD \backsim \triangle AEC$.

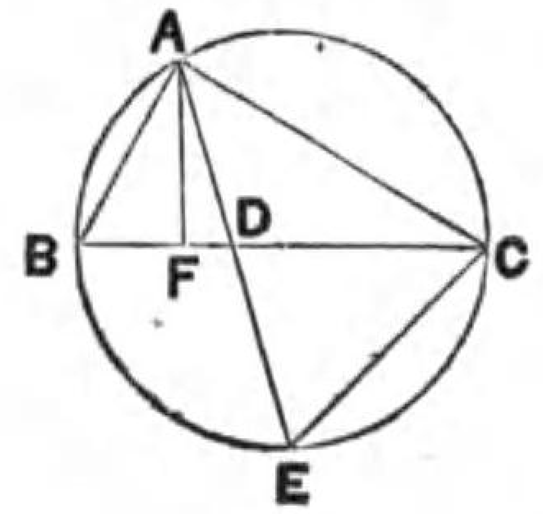
故ニ $AB : AD = AE : AC$,

故ニ $AB.AC = AE.AD$.

尙 增補 65 頁 9 題ヲ見ヨ.

8. 三角形 ABC ノ頂角 A ノ二等分線ガ底邊及ビ外接圓ニ交ル點ヲソレゾレ D, E トス. 今 AD, AE ノ包ム矩形ノ面積ガ三角形 ABC ノ面積ノ二倍ナラバ頂角 A ハ直角ナルコトヲ證セヨ. [II. 各高等.]

證 A ヨリ BC ニ引ケル高サヲ AF トス.



然ルトキハ

$AF.BC=2\triangle ABC,$

故ニ $AD.AE$

$=AF.BC$ ... (1)

又 CE ヲ結ビ付クレバ

$A\hat{E}C=A\hat{B}C,$

$E\hat{A}C=B\hat{A}D.$

故ニ $\triangle AEC \backsim \triangle ABD.$

故ニ $AE:AC=AB:AD.$

依リテ $AE.AD=AC.AB.$

之ト (1) トヨリ $AF.BC=AC.AB.$

*故ニ $AF:AC=AB:BC.$

而シテ $\triangle AFC$, $\triangle BAC$ ニ於テ $\hat{C}$ ハ共通, 故ニ

$A\hat{F}C=B\hat{A}C,$ 或ハ $A\hat{F}C+B\hat{A}C=2\hat{R}.$

然ルニ $A\hat{F}C=\hat{R}.$

故ニ $B\hat{A}C=\hat{R}.$

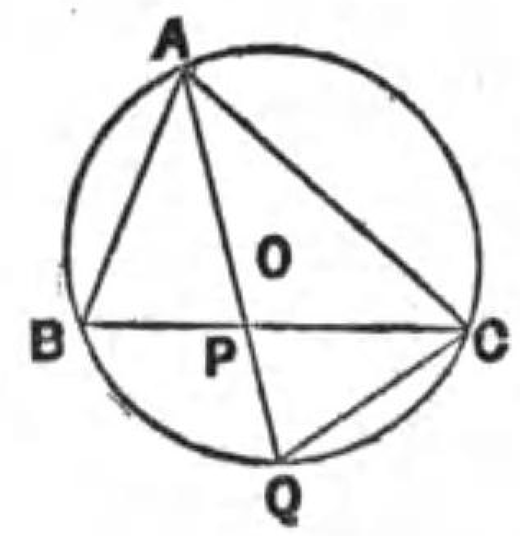
注意 *以下ヲ次ノ如クスルモ可ナリ.

故ニ $\triangle ABC$ ニ於テ AB ヲ底邊ト見レバ CA ハ其ノ高サナリ.

依リテ $B\hat{A}C=\hat{R}.$

9. 底邊 BC 及ビ頂角 A ガ一定ナル三角形 ABC ニ於テ角 A ノ二等分線ガ底邊ニ交ル點ヲ P トシ, AP ヲ引キ延バシテ其ノ上ニ點 Q ヲ取リ, AP, AQ ノ包ム矩形ヲ AB, AC ノ包ム矩形ニ等シカラシムルトキハ Q ハ定點ナルコトヲ證セヨ. [II. 各高等.]

證 底邊 BC 及ビ頂角 A ガ一定ナルユヱ



$\triangle ABC$ ノ外接圓 O ハ定圓ナリ.

而シテ $AP.AQ=AB.AC$

ヨリ $AP:AB=AC:AQ,$

又 AP ハ $\hat{A}$ ノ二等分線ナルヲ以テ $B\hat{A}P=Q\hat{A}C.$

故ニ $\triangle PAB \backsim \triangle CAQ,$

故ニ $A\hat{B}C=A\hat{Q}C,$

依リテ Q ハ圓 O ノ周上ニアリ.

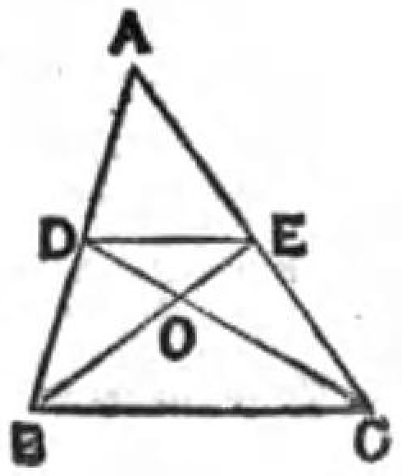
即チ Q ハ弧 BQC ノ中點ナリ.

即チ Q ハ定點ナリ.

10. 三角形 ABC ノ二邊 AB 及ビ AC ノ中點ヲソレゾレ D 及ビ E トシ, 直線 CD 及ビ BE ガ O ニ於テ交ルトスレバ, 三角形 ADE

ノ面積ハ三角形 ODE ノ面積ノ三倍ナルコトヲ證セヨ. [II. 海機.]

證 DE∥BC ナルユヱ $\triangle ODE \backsim \triangle OCB$.



故ニ $OE:OB=ED:BC$
$=1:2,$

故ニ $OE:BE=1:3$

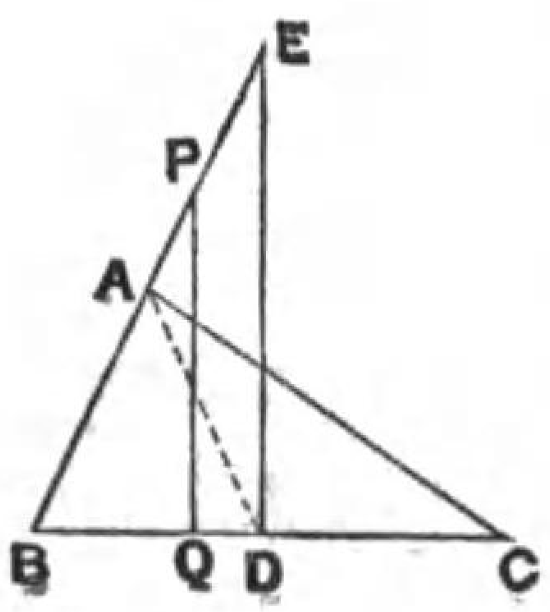
故ニ $3\triangle ODE=\triangle BDE.$

又 D ハ AB ノ中點ナルユヱ

$\triangle ADE=\triangle BDE.$

故ニ $\triangle ADE=3\triangle ODE.$

11. 三角形 ABC ノ底邊 BC ノ中點 D ニ於テ垂線 DE ヲ引キ, 邊 AB 或ハ其ノ延線ト E ニ於テ交ラシメ, 點 P ヲ AB 上ニ取リテ BP ヲ BE, BA ノ比例中項ニ等シカラシメ, P ヨリ CB 或ハ其ノ延線ニ垂線 PQ ヲ引キ, CB 或ハ其ノ延線ト Q ニ於テ交ラシムレバ, 三角形 BPQ ハ三角形 ABC ノ半分ニ等シ, 其ノ證ヲ問フ. [II. 商船.]



證 PQ∥ED ナルヲ

以テ $BE:BP=BD:BQ.$

然ルニ $BE:BP=BP:BA,$

故ニ $BD:BQ=BP:BA.$

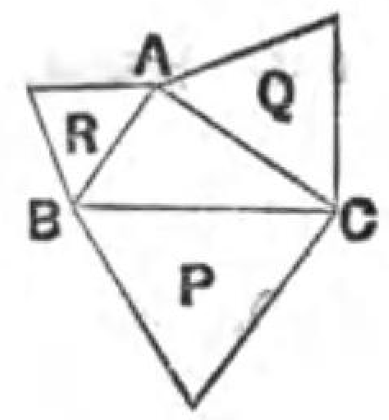
故ニ $BQ.BP=BD.BA.$

依リテ AD ヲ結ビ付クレバ

$$\triangle BPQ=\triangle BDA=\frac{1}{2}\triangle ABC.$$

12. 直角三角形ニ於テ, 斜邊ノ上ノ正三角形ハ, 他ノ二邊ノ上ノ正三角形ノ和ニ等シキコトヲ證セヨ. [45. 新.醫.專., 東北農.大.]

證 直角三角形 ABC ニ於テ, $\hat{A}$ ヲ直角トシ;



邊 BC, CA, AB 上ニ作レル正三角形ヲソレゾレ P, Q, R トスレバ

$P:Q:R=\overline{BC}^2:\overline{CA}^2:\overline{AB}^2,$

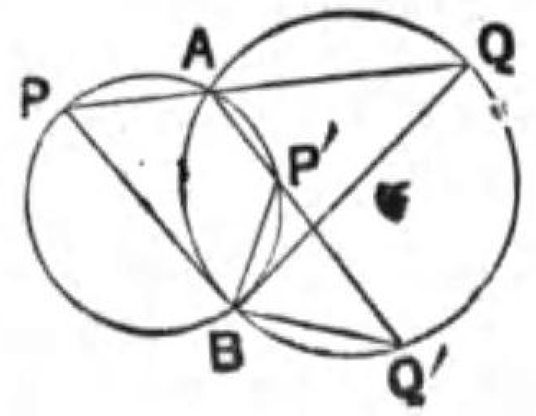
故ニ $P:Q+R=\overline{BC}^2:\overline{CA}^2+\overline{AB}^2$
$=\overline{BC}^2:\overline{BC}^2,$

故ニ $P=Q+R.$

13. A, B ハ二ツノ圓ノ交點ニシテ PQ ハ A ヲ過リ二ツノ圓周ト P, Q ニ於テ交ル任意ノ直線ナリ, 然ルトキハ PB, BQ ノ比ハ一定

不易ナルコトヲ證セヨ. [45. 水. 講.]

證 $B\hat{P}Q$ ハ恒ニ弧 AB ノ上ニ立ツ弓形ノ角ニ等シキヲ以テ一定ナリ.



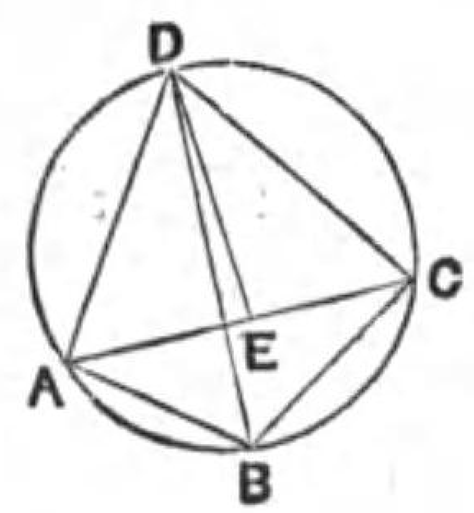
同様ニ $P\hat{Q}B$ ノ大イサモ亦一定ナリ.

依リテ △BPQ ハ形狀一定ナリ.

從ヒテ BP : BQ ハ一定ナリ.

14. 圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル邊ノ包ム二ツノ矩形ノ和ハ, 對角線ノ包ム矩形ニ等シキコトヲ證セヨ. [45. 陸. 士.]

證 圓ニ内接スル四邊形ヲ ABCD トセヨ.



然ルトキハ

$$AB.CD+BC.DA=AC.BD$$

ナルコトヲ證セントス.

點 D ヲ過リ, DC ト $A\hat{D}B$ ヲナス直線 DE ヲ, DC ノ A ト同ジ側ニ取リ, AC トノ交點ヲ E トスレバ,

$A\hat{D}B \gtreqless B\hat{D}C$ ナルニ從ヒテ, 點 E ハ角 ADB ノ内, 或ハ DB 上, 或ハ角 BDC 内ニアルベシ.

然ルトキハ △ABD, △ECD ニ於テ

$$A\hat{B}D=E\hat{C}D,$$

$$A\hat{D}B=E\hat{D}C\ [B\hat{D}C \pm B\hat{D}E],$$

故ニ $\triangle ABD \backsim \triangle ECD,$

故ニ $AB : BD = EC : CD,$

即チ $AB.CD = BD.EC,$

又 △DAE, △DBC ニ於テ

$$D\hat{A}E=D\hat{B}C,$$

$$A\hat{D}E\ [A\hat{D}B \mp B\hat{D}E]=B\hat{D}C\ [E\hat{D}C \mp B\hat{D}E],$$

故ニ $\triangle DAE \backsim \triangle DBC,$

故ニ $DA : AE = DB : BC,$

即チ $AD.BC = BD.AE,$

故ニ $AB.CD+AD.BC=BD.EC+BD.AE$

$$=BD.(AE+EC)$$

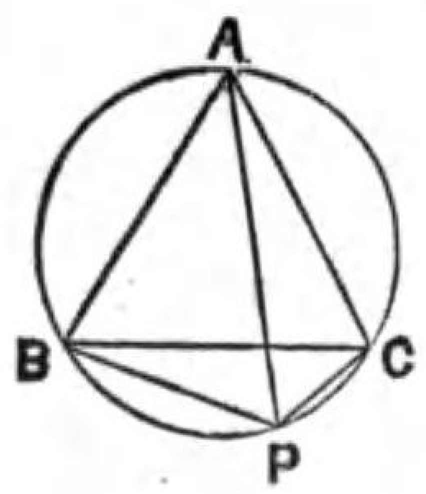
$$=BD.AC.$$

15. 正三角形 ABC ノ外ニ一點 P アリ, 若シ PA=PB+PC ナルトキハ, 點 P ハ三角形 ABC ノ外接圓周上ニアルコトヲ證セヨ.

[45. 海. 經.]

證 PA=PB+PC ナルユヱ

$$PA.BC=(PB+PC).BC$$



$$=PB.BC+PC.BC$$
$$=PB.AC+PC.AB.$$

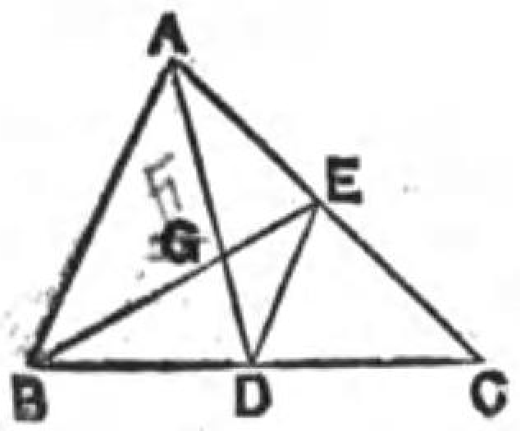
故ニぷとれみ一ノ定理ニ依リテ ABPC ハ圓ニ内接ス.

故ニ P ハ $\triangle ABC$ ノ外接圓周上ニアリ.

16. 三角形 ABC ノ二ツノ中線 AD, BE ノ交點ヲ G トシ, $\triangle AGB : \triangle DGE$ ノ値ヲ求メヨ. [II. 海.經.]

解 $DE \parallel AB$ ナルユエ

$$\triangle AGB \backsim \triangle DGE,$$

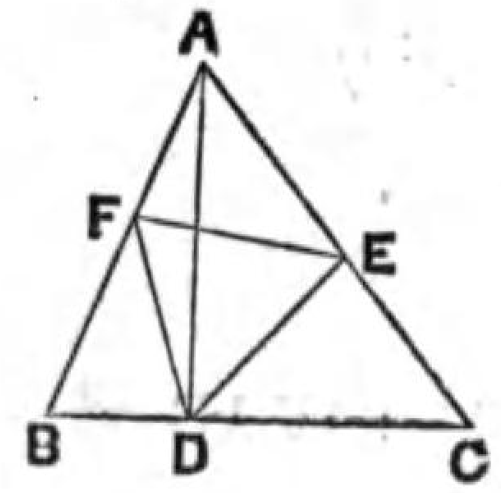


故ニ
$$\triangle AGB : \triangle DGE$$
$$=\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$$
$$=\overline{2DE}^2 : \overline{DE}^2$$
$$=4:1.$$

17. 三角形 ABC ノ三邊 BC, CA, AB ノ上ニソレゾレ點 D, E, F ヲ取リ, $BD:DC=1:2$, $CE:EA=2:3$, $AF:FB=3:4$ ナラシムルトキハ, 三角形 DEF ト三角形 ABC トノ比如何. [II. 水.講.]

解 I. AD ヲ結ビ付クレバ

$$BD:DC=1:2$$



ナルユエ

$$\triangle ADB=\frac{1}{3}\triangle ABC,$$
$$\triangle ADC=\frac{2}{3}\triangle ABC,$$

又 $AF:FB=3:4$

ナルユエ $\triangle ADF=\frac{3}{7}\triangle ADB=\frac{1}{7}\triangle ABC,$

又 $CE:EA=2:3$

ナルユエ $\triangle ADE=\frac{3}{5}\triangle ADC=\frac{2}{5}\triangle ABC,$

故ニ
$$AFDE=\triangle ADF+\triangle ADE$$
$$=\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{5}\right)\triangle ABC$$
$$=\frac{19}{35}\triangle ABC.$$

而シテ
$$\triangle AFE:\triangle ABC=AF.AE:AB.AC$$
$$=\frac{3}{7}AB.\frac{3}{5}AC:AB.AC$$
$$=\frac{9}{35}:1,$$

故ニ
$$\triangle AFE=\frac{9}{35}\triangle ABC.$$

依リテ
$$\triangle DEF=AFDE-\triangle AFE$$
$$=\left(\frac{19}{35}-\frac{9}{35}\right)\triangle ABC$$
$$=\frac{2}{7}\triangle ABC,$$

故ニ $\triangle DEF : \triangle ABC = 2 : 7.$

解 II. $AB : AF = 7 : 3,$

$AC : AE = 5 : 3.$

故ニ $\triangle ABC : \triangle AFE = AB.AC : AF.AE$

$= 7 \times 5 : 3 \times 3$

$= 35 : 9.$

又 $BA : BF = 7 : 4,$

$BC : BD = 3 : 1.$

故ニ $\triangle BAC : \triangle BFD = BA.BC : BF.BD$

$= 7 \times 3 : 4 \times 1$

$= 21 : 4.$

又 $CB : CD = 3 : 2,$

$CA : CE = 5 : 2.$

故ニ $\triangle CBA : \triangle CDE = CB.CA : CD.CE$

$= 3 \times 5 : 2 \times 2$

依リテ $= 15 : 4.$

$$\triangle DEF = \triangle ABC - \triangle AFE - \triangle BFD - \triangle CDE$$

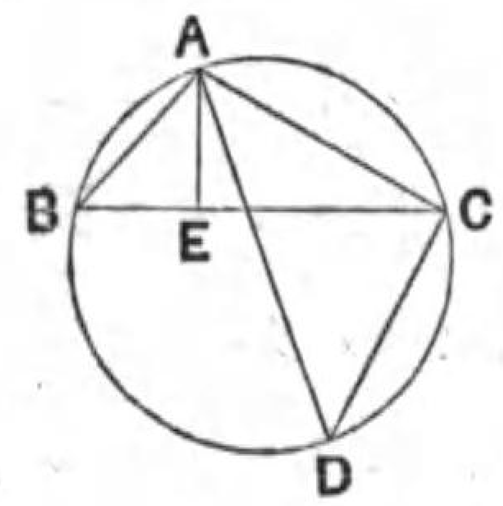
$$= \left(1 - \frac{9}{35} - \frac{4}{21} - \frac{4}{15}\right)\triangle ABC$$

$$= \frac{2}{7}\triangle ABC,$$

即チ $\triangle DEF : \triangle ABC = 2 : 7.$

18. 三角形アリ，其ノ兩邊ハ 4 寸ト 5 寸トニシテ高サハ 3 寸ナルトキ之ニ外接スル圓ノ半徑ヲ求メヨ． [I. 海.兵.]

解 $\triangle ABC$ ニ於テ $AB = 4,\ AC = 5,$ 高サ $AE = 3$ トス． 今外接圓ノ徑ヲ AD トシ，CD ヲ結ビ付クレバ $\triangle ABE,\ \triangle ADC$ ニ於テ



$$A\hat{B}E = A\hat{D}C,$$

$$A\hat{E}B = \hat{R} = A\hat{C}D.$$

故ニ $\triangle ABE \backsim \triangle ADC.$

依リテ $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AC},$

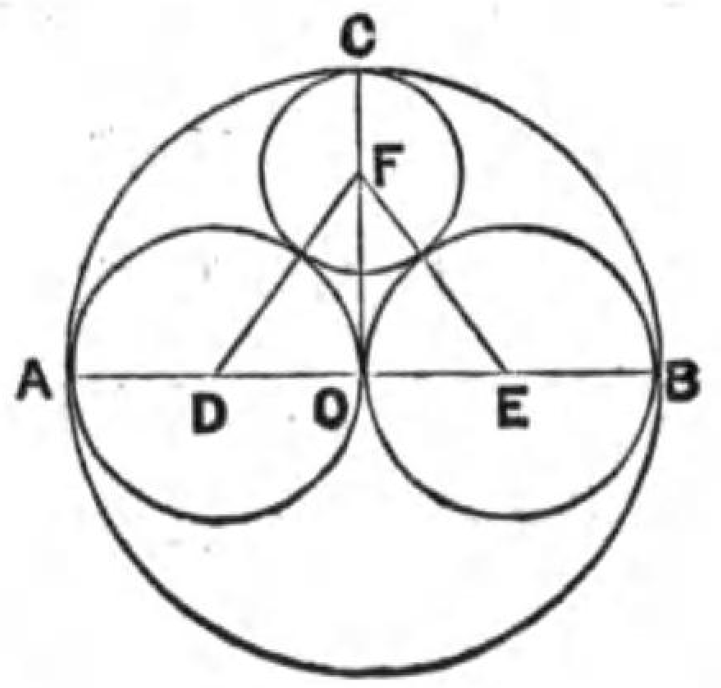
即チ $\dfrac{AD}{5} = \dfrac{4}{3},$

故ニ $\dfrac{AD}{2} = 3\dfrac{1}{3},$

即チ所要ノ半徑ハ 3寸$\frac{1}{3}$ ナリ．

19. O ヲ中心トスル圓ノ徑ヲ AB トス，今 OA, OB ヲ徑トシテ圓ヲ作リ，更ニ是等ノ三ツノ圓ニ切スル圓ヲ作ルトキハ，此ノ最後ノ圓ノ面積ハ圓 O ノ面積ノ幾分ニ當ルカ．[44. 陸. 士.]

解 OA, OB ヲ徑トスル圓ノ中心, 即チ OA, OB ノ中點ヲソレゾレ D, E トシ, 三ツノ圓 O, D, E ニ切スル圓ノ中心ヲ F トス. 然ルトキハ圓 O, F ノ切點 C ハ OF ノ延線上ニアリ.



今圓 O, F ノ半徑ヲ R, r トシ; DF, EF ヲ結ビ付クレバ

$$OD=\frac{R}{2},$$

$$DF=FE=\frac{R}{2}+r,$$

$$OF=R-r$$

ニシテ $\widehat{DOF}=\widehat{R}.$

故ニ $\overline{DF}^2=\overline{OD}^2+\overline{OF}^2,$

即チ $\left(\frac{1}{2}R+r\right)^2=\frac{R^2}{4}+(R-r)^2,$

之ヲ簡單ニシテ $3Rr=R^2,$

故ニ $3r=R,$

依リテ (圓 O ノ面積) : (圓 F ノ面積)

$$=R^2:r^2$$

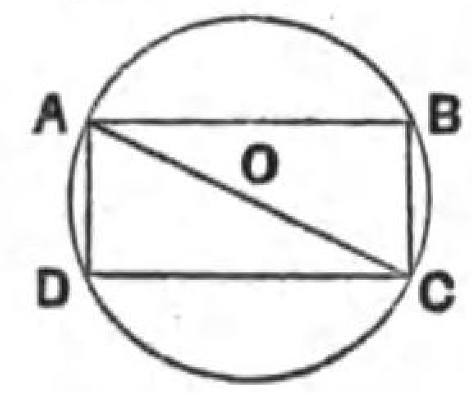
$$=9r^2:r^2=9:1,$$

即チ圓 F ノ面積ハ圓 O ノ面積ノ $\frac{1}{9}$ ナリ.

20. 一ツノ矩形アリ, 其ノ面積ハ之ニ外接スル圓ノ面積ノ半分ナリ, 今 π ヲ $\frac{22}{7}$ トシテ計算スルトキハ, 其ノ矩形ノ二邊ノ比ハ $5+\sqrt{3}:5-\sqrt{3}$ ナルコトヲ證セヨ.

[44. 廣. 高. 師.]

證 圓 O ニ內接スル矩形ヲ ABCD トシ, AB$=x$, BC$=y$ トス.



サテ半徑ヲ r トスレバ

$$x^2+y^2=4r^2 \quad \ldots \quad (1)$$

$$xy=\frac{1}{2}\pi r^2,\ \pi=\frac{22}{7}$$

トスレバ $xy=\frac{11}{7}r^2 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (2)$

(1), (2) ヨリ $\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{28}{11},$

即チ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{28}{11},$

今 $\frac{x}{y}=z$ トスレバ

$$z+\frac{1}{z}=\frac{28}{11},$$

或ハ $11z^2-28z+11=0,$

之ヨリ $z=\frac{14\pm5\sqrt{3}}{11}=\frac{5\pm\sqrt{3}}{5\mp\sqrt{3}},$

故ニ題言ノ如シ.

21. 一定點ヨリ定圓周上ノ點ニ至ル距離ヲ定比ニ分ツ點ハ或定圓周ノ上ニアルコトヲ證セヨ.

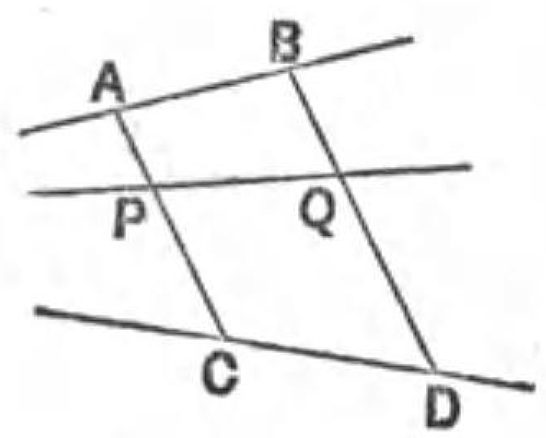
[45. 京. 醫. 專.]

證 本書 359 頁 **47** 題ニ同ジ.

22. 延長スルコト能ハザル二直線ガ相交ルベキ點ト, 一ツノ定點トヲ過ル直線ヲ引ケ.

[I. 廣. 高. 師.]

解 二直線ヲ AB, CD トシ, 一定點ヲ P トス. 點 P ヲ過リ AB, CD ニ交ル任意ノ直線ヲ引キ, 其ノ交點ヲソレゾレ A, C トシ, AC ニ平行ナル任意ノ直線ヲ引キ, 其ノ AB, CD ニ交ル點ヲソレゾレ B, Q トス.



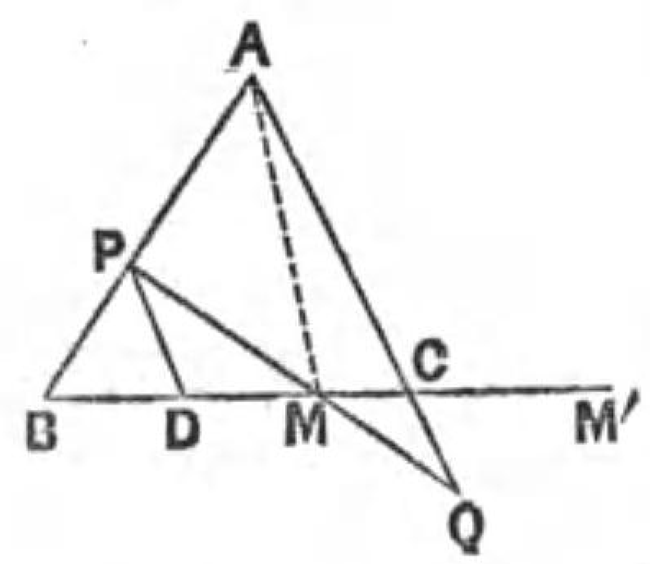
BD ヲ Q ニ於テ BQ : QD = AP : PC ナル如ク相似ニ分チ, PQ ヲ結ビ付クレバ此ハ所要ノ直線ナリ.

如何トナレバ AC ∥ BD ニシテ P, Q ハソレゾレ AC, BD ヲ相似ニ分ツユヱ AB, PQ, CD ハ同一ノ點ニ於テ相交ルベケレバナリ.

23. 三角形 ABC ノ邊 AB 上ノ與ヘラレタル點 P ヲ過リテ直線ヲ引キ, 邊 AC 或ハ其ノ延線ト Q ニ, 邊 BC 或ハ其ノ延線ト M ニ交ラシメ, △APM ト △AQM トノ比ヲ與ヘラレタル比 $k:l$ ニ等シカラシメヨ.

[II. 專. 入. 檢.]

解 點 P ヲ過リ AC ニ平行ニ PD ヲ引キ, BC ニ交ル點ヲ D トシ, DC ヲ與ヘラレタル比 $k:l$ ニ內分及ビ外分スル點ヲソレゾレ M, M′ トシ; PM, PM′ ヲ結ビ付ケ, AC 或ハ其ノ延線ト交ル點ヲソレゾレ Q, Q′ トスレバ PMQ, PQ′M′ ハ所要ノ直線ナリ.



如何ニモ AM ヲ結ビ付クレバ

$$\triangle APM : \triangle AQM = PM : QM$$
$$= DM : CM$$
$$= k : l.$$

M′ ニ就キテモ同樣ナリ.

而シテ $k>l$ ナルトキハ M, M′ ハ DC ノ中點

ニ對シテ C ト同ジ側ニアリテ二ツノ解アリ.

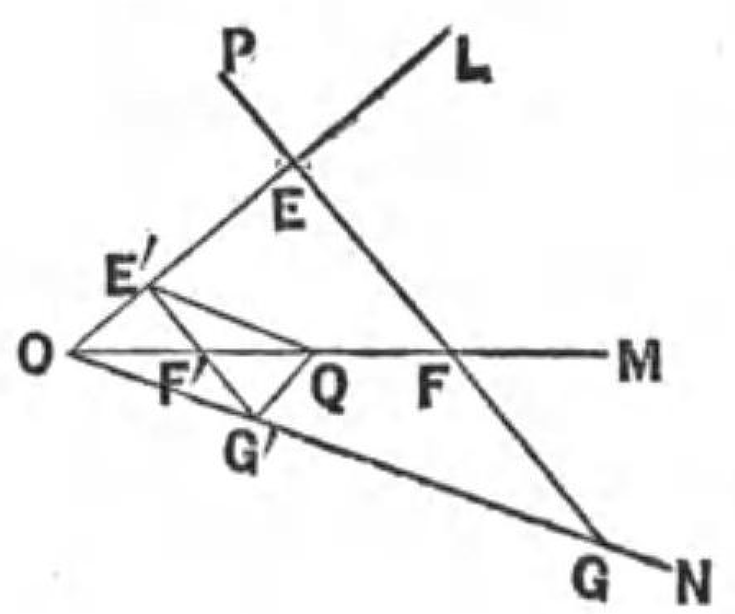
又 $k<l$ ナルトキハ M, M′ ハ DC ノ中點ニ對シテ D ト同ジ側ニアリテ二ツノ解アリ.

若シ $k=l$ ナルトキハ M ハ DC ノ中點ニシテ外分點ナシ.

故ニ一ツノ解アリ.

24. 點 O ニ於テ相交ル三直線 OL, OM, ON ニソレゾレ E, F, G ニ於テ交ル直線ヲ與ヘラレタル點 P ヲ過リテ引キ EF=FG ナラシメヨ.　[II. 名. 高. 工.]

解 OL 上ニ任意ノ點 E′ ヲ取リ E′Q ヲ ON ニ平行ニ引キ,



OM ニ交ル點ヲ Q トシ, 又 QG′ ヲ OL ニ平行ニ引キ, ON ニ交ル點ヲ G′ トスレバ P ヲ過リ E′G′ ニ平行ニ PG ヲ引キ OL, OM, ON ニソレゾレ E, F, G ニ於テ交ラシムレバコレ所要ノ直線ナリ.

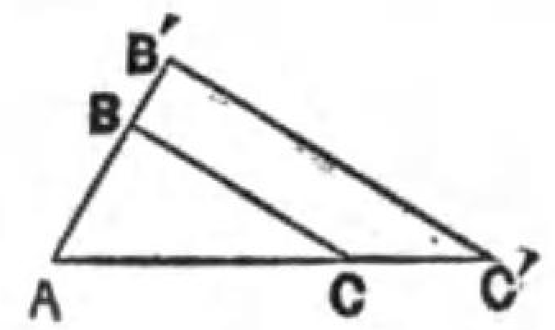
如何ニモ E′G′ ガ OM ニ交ル點ヲ F′ トスレバ

作圖ニ依リテ OE′QG′ ハ平行四邊形ナルヲ以テ　E′F′=F′G′. 又 E′G′ ∥ EG,

故ニ　EF=FG.

25. 二直線ノ比ト其ノ上ノ正方形ノ和トヲ知リテ其ノ二直線ヲ求メヨ.　[44. 廣. 高. 師.]

解 既知ノ比ヲ $m:n$, 既知ノ面積ヲ k^2 トス. 直角 AB′C′ ヲ作リ; B′A, B′C′ 上ニソレゾレ B′A=m, B′C′=n ナル如キ點 A, C′ ヲ取リ,



AC′ ヲ結ビ付ケ, AC′ 或ハ其ノ延線上ニ AC=k ナル如キ點 C ヲ取リ, CB ∥ C′B′ ニ引キ, AB′ 或ハ其ノ延線ヲ截ル點ヲ B トスレバ AB, BC ハ所要ノ直線ナリ.

如何トナレバ

$$AB:BC=AB':B'C'=m:n,$$

及ビ

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2=k^2$$

ナレバナリ.

26. 與ヘラレタル三角形ト等シキ頂角及ビ面積ヲ有スル二等邊三角形ヲ作ルコト.

[45. 盛. 高. 農.]

解 本書 427 頁 89 題ニ同ジ.

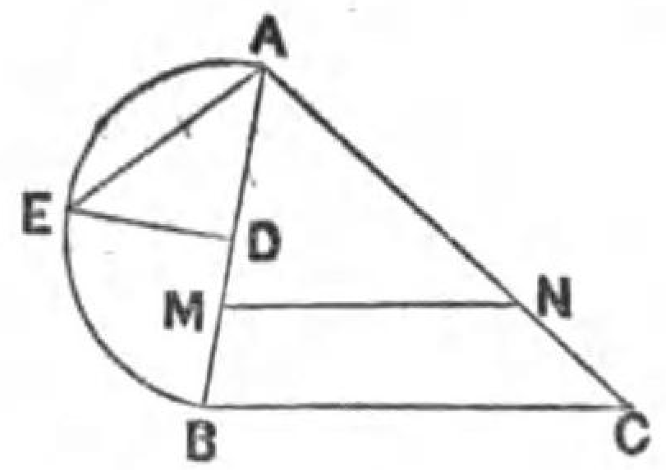
27. 與ヘラレタル梯形 ABCD ノ平行ナル二邊 AD, BC ニ平行ナル直線ニテ此ノ梯形ヲ二等分セヨ. [45. 大. 高. 工.]

解 本書 378 頁 **55** 題ニ同ジ.

28. 三角形ヲ其ノ一邊ニ平行ナル直線ニ依リテ二等分セヨ. [II. 新. 醫. 專.]

解 三角形ヲ ABC トス.

AB ヲ徑トシテ半圓 AEB ヲ畫キ, AB ノ中點 D ヲ過リ AB ニ垂線 DE ヲ引キ, 半圓ノ周ヲ截ル點ヲ E トシ, AB 上ニ AM ヲ AE ニ等シク取リ, M ヲ過リ BC ニ平行ナル直線 MN ヲ引キ, AC ヲ截ル點ヲ N トスレバ MN ハ所要ノ直線ナリ.



如何トナレバ MN ∥ BC ナルユヱ

$$\triangle ABC : \triangle AMN = \overline{AB}^2 : \overline{AM}^2$$
$$= 2\overline{AE}^2 : \overline{AE}^2$$
$$= 2 : 1,$$

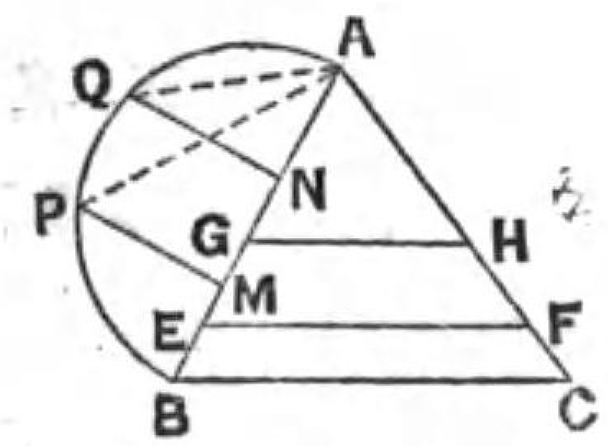
故ニ $\triangle AMN = \frac{1}{2}\triangle ABC$

ナレバナリ.

尙 增補 74 頁 **20** 題ヲ見ヨ.

29. 三角形ヲ底邊ニ平行ナル二ツノ直線ニ依リテ三等分セヨ. [45. 東. 高. 商.]

解 △ABC ヲ底邊 BC ニ平行ナル二ツノ直線ヲ引キテ三等分セントス.



AB ヲ徑トスル半圓ヲ畫キ, AB ヲ三等分スル點 M, N ヨリ AB ニ垂線ヲ引キ, 半圓周トノ交點ヲソレゾレ P, Q トス. 次ニ AB 上ニ AE=AP, AG=AQ ニ取リ, E, G ヲ過リ BC ニ平行線ヲ引キ, AC ヲ截ル點ヲソレゾレ F, H トスレバ EF, GH ハ所要ノ直線ナリ.

如何トナレバ △ABC∽△AEF

ナルユヱ $\triangle ABC : \triangle AEF = \overline{AB}^2 : \overline{AE}^2$

$$= \overline{AB}^2 : \overline{AP}^2,$$

然ルニ $\overline{AP}^2 = AM.AB = \frac{2}{3}AB.AB = \frac{2}{3}\overline{AB}^2,$

故ニ $\triangle ABC : \triangle AEF = \overline{AB}^2 : \frac{2}{3}\overline{AB}^2$

$=3:2.$

依リテ　梯形 $EBCF=\frac{1}{3}\triangle ABC.$

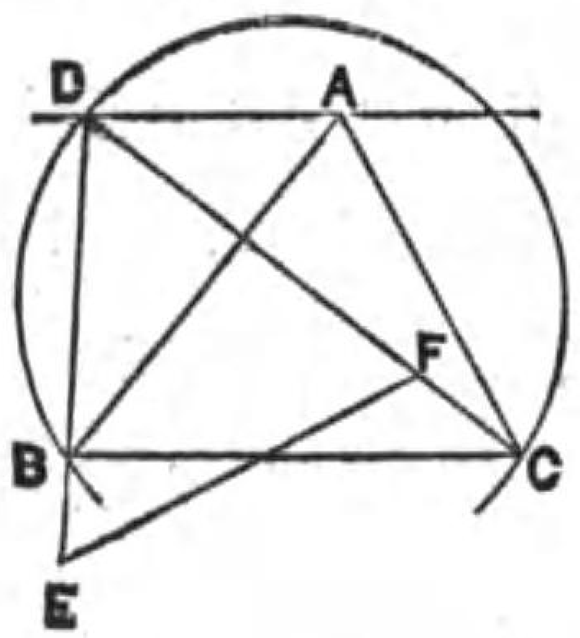
同理ニ依リテ　$\triangle AGH=\frac{1}{3}\triangle ABC,$

從ヒテ　梯形 $GEFH=\frac{1}{3}\triangle ABC.$

卽チ EF, GH ハ所要ノ直線ナリ.

30. 與ヘラレタル三角形ト等積ナル正三角形ヲ作レ.　[II. 盛. 高. 農.]

解 I. 與ヘラレタル三角形ヲ ABC トス.



底邊 BC ノ上ニ $\frac{2}{3}\hat{R}$ ノ角ヲ含ム弧 BDC ヲ畫キ, A ヲ過リ BC ニ平行ニ引ケル直線ガ弧 BDC ヲ截ル點ノ一ツヲ D トシ, DB, DC ヲ結ビ付ケ, 其ノ上ニ

$$\overline{DE}^2=\overline{DF}^2=DB.DC$$

ナル如キ點 E, F ヲ取リ, EF ヲ結ビ付クレバ △DEF ハ所要ノモノナリ.

如何トナレバ △DEF ハ DE=DF ニシテ $\hat{D}=\frac{2}{3}\hat{R}$ ナルユヱ正三角形ナリ.

又　$\triangle DEF:\triangle DBC=\overline{DE}^2:DB.DC$

ニシテ　$\overline{DE}^2=DB.DC,\ \triangle DBC=\triangle ABC$

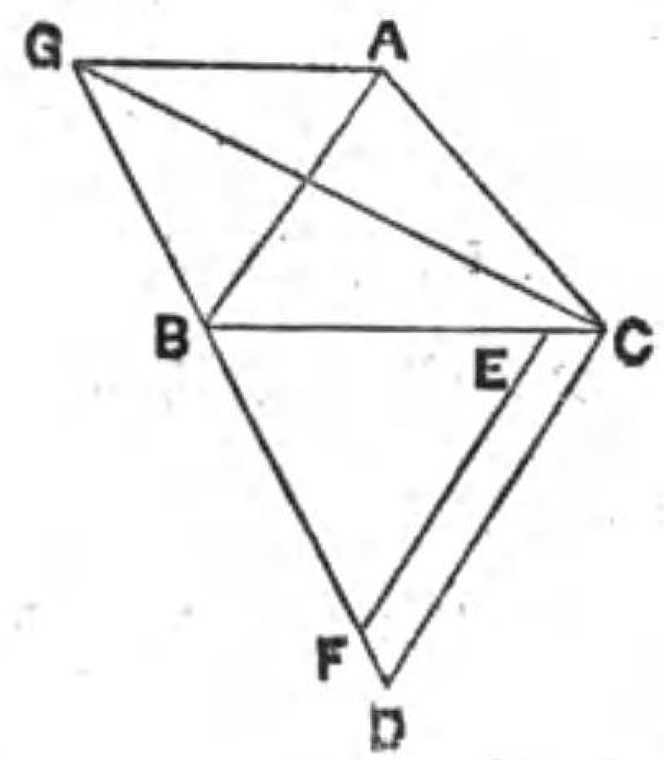
ナルユヱ　$\triangle DEF=\triangle ABC$

ナレバナリ.

而シテ $\hat{A}<\frac{2}{3}\hat{R}$ ナルトキハ作圖ハ不能ニ歸ス.

然レドモ △ABC ガ正三角形ナラザルトキハ其ノ何レカ一ツハ $\frac{2}{3}\hat{R}$ ヨリ小ナラザル角アルベシ, 依リテ其ノ角ヲ頂角ニ取リテ作圖ハ可能トナルベシ.

解 II. 與ヘラレタル三角形ヲ ABC トス.



△ABC ノ外側ニ正三角形 DBC ヲ作リ, DB ノ延線ト A ヲ過リ BC ニ平行ニ引ケル直線トノ交點ヲ G トシ, BC, BD ノ上ニ

$$\overline{BE}^2=\overline{BF}^2=BG.BD$$

ナル如キ點 E, F ヲ取リ, EF ヲ結ビ付クレバ △BEF ハ所要ノモノナリ. 如何ニモ △BEF ハ正三角形ナルコトハ作圖ニ依リテ明カニシテ

$$\triangle BEF:\triangle BCD=\overline{BF}^2:\overline{BD}^2$$

$$=BG.BD:\overline{BD}^2$$

$$=BG:BD$$

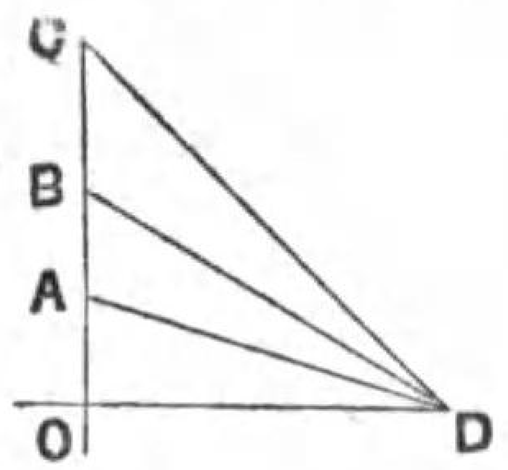
$$=\triangle BCG:\triangle BCD.$$

故ニ $\triangle BEF=\triangle BCG=\triangle ABC$

ナレバナリ.

31. 直交セル眞直ナル二道路アリ, 第一道路ニ沿ヒテ交叉點ヨリ同方向ニソレゾレ 2町, 4町, 7町ノ處ニ立テル甲乙丙ノ煙突アリ, 第二道路上ニテ甲乙ノ煙突ト乙丙ノ煙突トヲ等角ニ視ルベキ位置ハ交叉點ヨリ幾何ノ距離ニアルカ. [II. 海. 兵.]

解 道路ノ交叉點ヲ O トシ, 甲乙丙ノ煙突ヲソレゾレ A, B, C トシ.



煙突ヲ見ル位置ヲ D トス.

然ルトキハ

$$OA=2\ (町),\ OB=4\ (町),$$

$$OC=7\ (町);\ A\hat{O}B=B\hat{O}C$$

ナリ.

故ニ $DA:DC=AB:BC,$

今 $OD=x$ (町) トスレバ

$$DA=\sqrt{x^2+2^2},\ DC=\sqrt{x^2+7^2},$$

$$AB=4-2=2,\ BC=7-4=3.$$

故ニ $\sqrt{x^2+2^2}:\sqrt{x^2+7^2}=2:3.$

故ニ $x^2+4:x^2+49=4:9,$

故ニ $4(x^2+49)=9(x^2+4),$

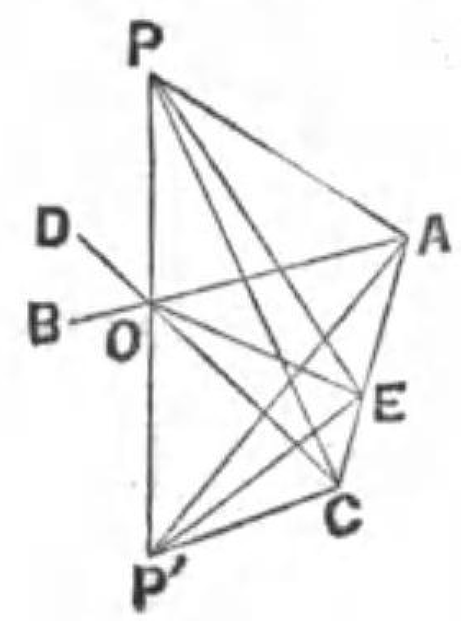
之ヲ簡單ニシテ $x^2=32,$

故ニ $x=4\sqrt{2}=5.6568......$(町).

直線及び平面

1. 一ツノ直線ガ相交ル二直線ノ交點ニ於テ二直線ノ各ニ垂直ナルトキハ其ノ直線ハ此ノ二直線ノ平面ニ垂直ナルコトヲ證セヨ. [II. 海. 兵.]

證 直線 PO ガ O ニ於テ相交ル二直線 AB, CD ノ各ニ垂直ナリトス.



OA, OC 上ニソレゾレ點 A, C ヲ任意ニ取リ, AC ヲ結ビ付ケ, AC 上ノ點ヲ E トス. 又 PO ノ上ニ O ノ

兩側ニ $OP=OP'$ ニ取リ，

$PA, PE, PC, P'A, P'E, P'C, OE$ ヲ結ビ付クルトキハ $\triangle APP'$ ニ於テ AO ハ PP' ヲ直角ニ二等分スルヲ以テ

$$AP=AP',$$

同樣ニ　$CP=CP'$.

故ニ　$\triangle APC\equiv\triangle AP'C$.

故ニ　$P\hat{A}C=P'\hat{A}C$.

依リテ　$\triangle APE,\ \triangle AP'E$

ハ二邊ト其ノ夾角トガ相等シキヲ以テ全等ナリ.

故ニ　$PE=P'E$.

依リテ $\triangle PEP'$ ハ二等邊ニシテ O ハ PP' ノ中點ナルユヱ　$OE\perp PP'$.

即チ PO ハ O ヲ過リ平面 AOC ノ上ニアル任意ノ直線 OE ニ垂直ナリ.

故ニ PO ハ平面 AOC ニ垂直ナリ.

倚　本書 450 頁 3 題ヲ見ヨ.

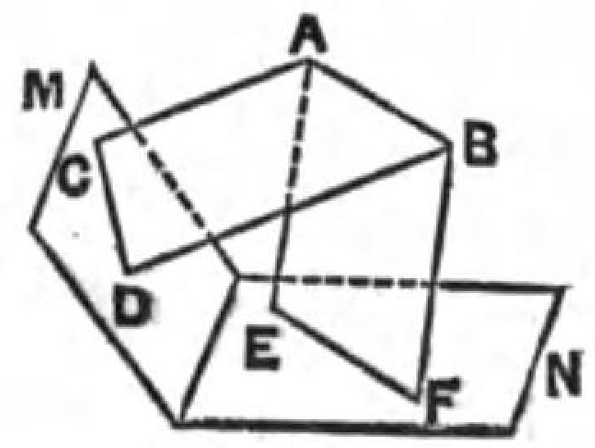
2. 相等シク且平行ナル二ツノ直線ノ同一平面ヘノ正射影ハ，亦相等シク且互ニ平行ナルコトヲ證セヨ.　[45. 大. 高. 工.]

證　本書 463 頁 17 題ニ同ジ.

3. 或線ノ相交ル二ツノ平面上ヘノ正射影ガ何レモ直線ナルトキハ，其ノ線ハ一般ニ直線ナルコトヲ證シ，且其ノ除外例ヲ示セ.

[I. 東. 高. 師.]

證　線 AB ガ相交ル二ツノ平面 M, N 上ニ投ズル正射影ヲソレゾレ直線 CD, EF トスレバ AB ハ一般ニ直線ナルベシ.



線 AB 上ノ總テノ點ノ平面 M 上ニ投ズル正射影ハ皆直線 CD 上ニアルヲ以テ線 AB ハ CD ヲ過リ平面 M ニ垂直ナル平面 AD 上ニアリ.

同樣ニ線 AB ハ N ニ垂直ナル平面 AF 上ニアリ.　然ルニ二ツノ平面ハ一般ニ相交ルヲ以テ AB ハ其ノ交リナル直線ナリ.

特別ニ平面 AD ガ二ツノ平面 M, N ノ交リニ垂直ナルトキハ平面 AD, AF ハ共ニ平面 N ニ垂直ナルユヱ相合ス.

然ルトキハ AB ハ唯一ツノ平面上ニアル線ナルヲ以テ必ズシモ直線ナラズ.

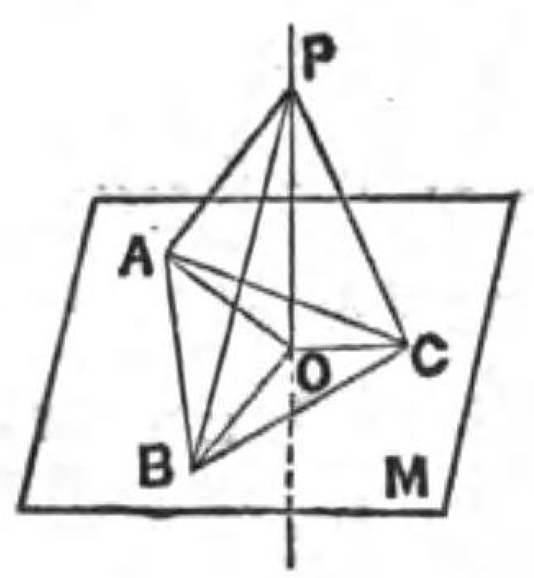
4. 矩形ノ紙 ABCD アリ，AB ハ 4尺，BC ハ 3尺ナリ，之ヲ對角線 AC ニ沿ヒテ折リ平面 ABC ト平面 CDA トヲシテ互ニ垂直ナラシムルトキハ BD ノ距離何程ナルカ．

[45. 鹿. 高. 農.]

解 本書 471 頁 **24** 題ニ同ジ．

5. 同一ノ直線上ニアラザル三點 A, B, C ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ．[45. 水. 講.]

解 A, B, C ヨリ等距離ナル任意ノ點ヲ P トシ，P ヨリ三ツノ點 A, B, C ヲ含ム平面 M ニ垂線 PO ヲ下セバ



PA＝PB＝PC ナルユヱ

$$AO=BO=CO.$$

依リテ O ハ △ABC ノ外心ナリ．

依リテ點 P ハ △ABC ノ外心ヲ過リ，平面 M ニ垂直ナル直線上ニアリ．

逆ニ此ノ直線上ノ任意ノ點 P ヲ取レバ

$$AO=BO=CO$$

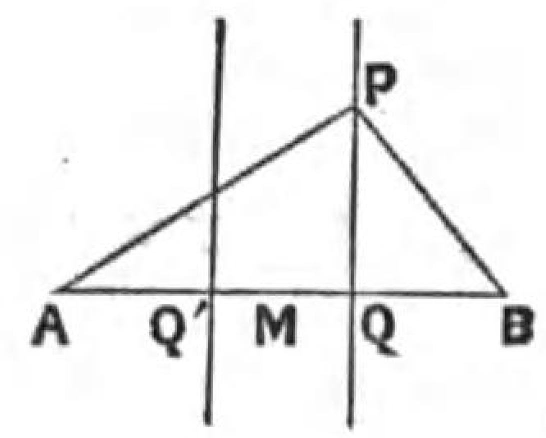
ナルユヱ　$PA=PB=PC,$

故ニ所要ノ軌跡ハ平面 M ニ垂直ナル一ツノ直線 PO ナリ．

尙 增補 84 頁 **7** 題ヲ見ヨ．

6. 二定點 A, B ヨリ一點 P ニ至ル距離ノ平方ノ差ガ一定不易ナルトキ，點 P ノ軌跡ヲ求メヨ．[II. 商船.]

解 P ヲ要件ニ適スル點ナリトシ，P ヨリ AB ニ垂線 PQ ヲ下セバ



$$\overline{PA}^2\sim\overline{PB}^2$$
$$=(\overline{AQ}^2+\overline{PQ}^2)\sim(\overline{BQ}^2+\overline{PQ}^2)$$
$$=\overline{AQ}^2\sim\overline{BQ}^2$$
$$=(AQ+BQ)(AQ\sim BQ)$$
$$=AB.(AQ\sim BQ).$$

今 AB ノ中點ヲ M トスレバ

$$AQ\sim BQ=2MQ,$$

故ニ　$\overline{PA}^2\sim\overline{PB}^2=2AB.MQ.$

然ルニ $\overline{PA}^2\sim\overline{PB}^2$, 2AB ハ一定ナルユヱ MQ ハ一定ナリ．

從ヒテ Q ハ定點ナリ．

依リテ點 P ハ AB 上 M ノ兩側ニ定長 MQ＝MQ′ ニ取リタル點 Q, Q′ ヲ過リ直線 AB

ニ垂直ナル平面上ニアリ.

逆ニ此ノ平面上ニ任意ノ點 P′ ヲ取リ, P′A, P′B, P′Q ヲ結ビ付クレバ P′Q ハ AB ニ垂直ナルユエ

$$\overline{P'A}^2\sim\overline{P'B}^2=\overline{AQ}^2\sim\overline{BQ}^2$$
$$=(AQ+BQ)(AQ\sim BQ)$$
$$=AB.2MQ.$$

故ニ P′ ハ要件ニ適ス.

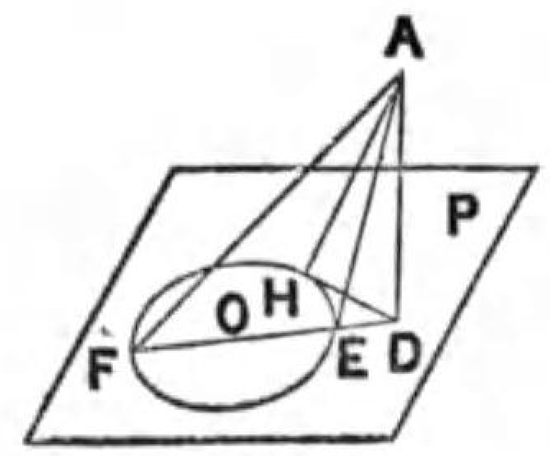
依リテ所要ノ軌跡ハ AB ニ垂直ナル二ツノ平面ナリ.

注意 $\overline{PA}^2\sim\overline{PB}^2$ ガ $\overline{AB}^2$ ヨリ小ナルトキハ Q, Q′ ハ內分點ニシテ, 大ナルトキハ外分點ナリ.

特別ニ $\overline{PA}^2\sim\overline{PB}^2=\overline{AB}^2$ ナルトキハ Q, Q′ ハ A, B ニ合ス.

7. 一ツノ圓アリ, 其ノ平面外ノ一點ヨリ此ノ圓周ニ至ル最長及ビ最短ナル直線ヲ作ルコトヲ求メヨ. [45. 各醫. 專.]

解 圓 O ヲ含ム平面 P 外ノ一點ヲ A トシ, A ヨリ圓 O ノ周上ニ至ル最長及ビ最短ナル直線ヲ引クコトヲ求メントス.



點 A ヨリ平面 P ニ下セル垂線 AD ノ趾ヲ D トシ, 中心 O ト D トヲ結ビ付クル直線ガ圓周ト交ル點ヲ E, F トシ, 且 $DE<DF$ トスレバ, AF ハ所要ノ最長線ニシテ, AE ハ最短線ナルベシ.

如何トナレバ圓周上ノ任意ノ點 H ヲ取リ; AH, HD ヲ結ビ付クレバ, 直角三角形 AFD, AHD, AED ニ於テ, AD ハ共通.

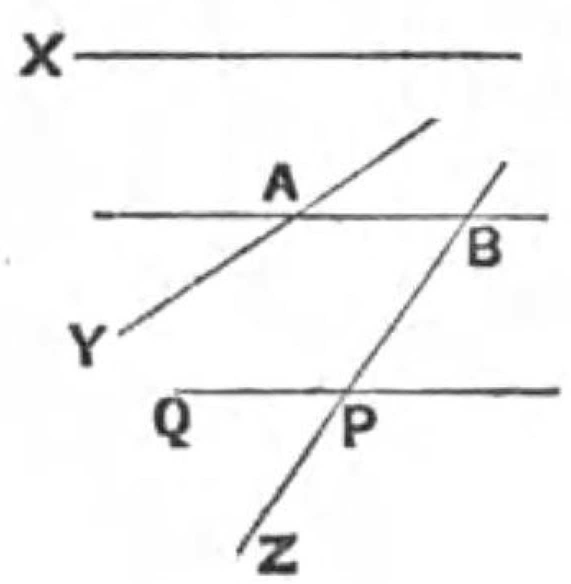
又平面幾何學ニ依リテ

$$DF>DH>DE.$$

依リテ $AF>AH>AE$

ナレバナリ.

8. 空間ニ三ツノ直線 X, Y, Z アリ, X ニ平行ニシテ Y, Z ニ交ル可キ直線ヲ引ケ. [II. 水. 講.]



解 直線 Z 上ニ任意ノ點 P ヲ取リ, P ヲ過リ直線 X ニ平行ナル直線 PQ ヲ引キ平

面 ZPQ ト直線 Y トノ交點ヲ A トシ,

A ヲ過リテ X ニ平行ナル直線 AB ヲ引ケバ此ハ所要ノ直線ナリ.

如何トナレバ直線 PQ ハ X ニ平行ナルヲ以テ平面 ZPQ ハ X ニ平行ナリ.

故ニ直線 AB ハ平面 ZPQ 上ニアリテ PQ ニ平行ナリ.

依リテ AB ハ Z ニ交レバナリ.

而シテ直線 Y ガ ZPQ ニ出會ハザルトキハ解ナシ.

又直線 Y ガ平面 ZPQ ノ上ニアルトキハ無數ノ解アリ.

但直線 X, Y, Z ガ同一平面上ニアル場合ハ略ス.

多面角

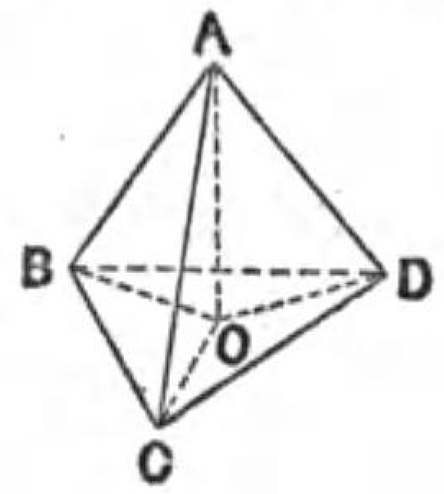
1. 三面角ノ稜ガ頂點ニ於テナス所ノ三ツノ平面角ノ中ニテ, 何レノ二ツヲ取ルモ, 合セテ第三ノ角ヨリ大ナルコトヲ證セヨ. [I. 海. 兵.]

證 本書 473 頁 1 題ニ同ジ.

多面體 角壔 角錐

1. 正四面體ノ一ツノ頂點ヨリ底面ヘ引ケル垂線ノ趾ハ, 底面ノ重心ト一致スルコトヲ證セヨ. [45. 專. 入. 檢.]

證 正四面體ヲ ABCD トシ, 頂點 A ヨリ底面 BCD ニ下セル垂線ノ趾ヲ O トシ; BO, CO, DO ヲ結ビ付ケヨ. 然ルトキハ三角形 AOB, AOC, AOD ハ何レモ直角三角形ニシテ, 斜邊 AB, AC, AD ハ相等シク, AO ハ共通ナルヲ以テ全等ナリ.



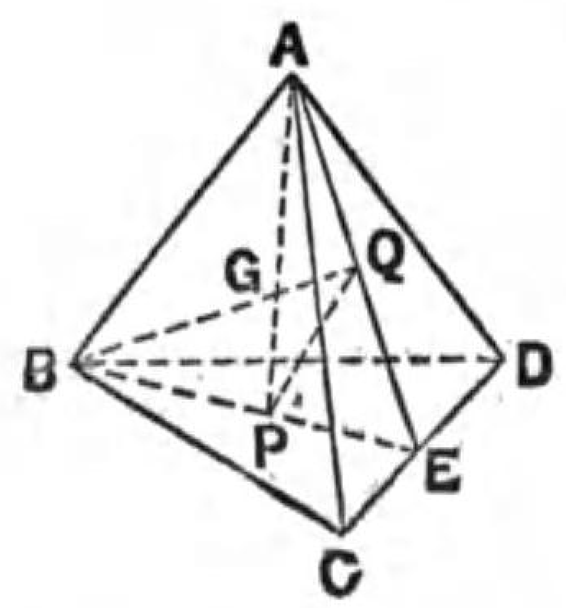
依リテ　　BO＝CO＝DO,

即チ O ハ三角形 BCD ノ外心ナリ.

然ルニ △BCD ハ正三角形ナルユヱ, O ハ其ノ重心ナリ.

2. 四面體ノ各頂點ト相對スル面ノ重心トヲ過ル四ツノ直線ハ同一ノ點ニ於テ相交ルコトヲ證セヨ. [II. 新. 醫. 專.]

證 四面體 ABCD ノ各頂點 A, B, C, D ニ



對スル面ノ重心ヲソレゾレ P, Q, R, S トス. CD ノ中心ヲ E トスレバ P, Q ハソレゾレ BE, AE ノ上ニアリ.

故ニ AP, BQ ハ平面 ABE ノ上ニアリテ相交ル, 其ノ交點ヲ G トシ, PQ ヲ結ビ付クレバ

$$BE : PE = 3 : 1 = AE : QE,$$

故ニ $AB \parallel PQ$ ニシテ $AB : PQ = 3 : 1$,

依リテ　$\triangle ABG \backsim \triangle PGQ$

ニシテ　$AG : PG = BG : QG$

$= AB : PQ$

$= 3 : 1$,

即チ AP, BQ ノ交點 G ハ AP ヲ 3 : 1 ニ分ツ,

同樣ニ AP, CR ノ交點ハ AP ヲ 3 : 1 ニ分ツ, 即チ CR ハ點 G ヲ過ル.

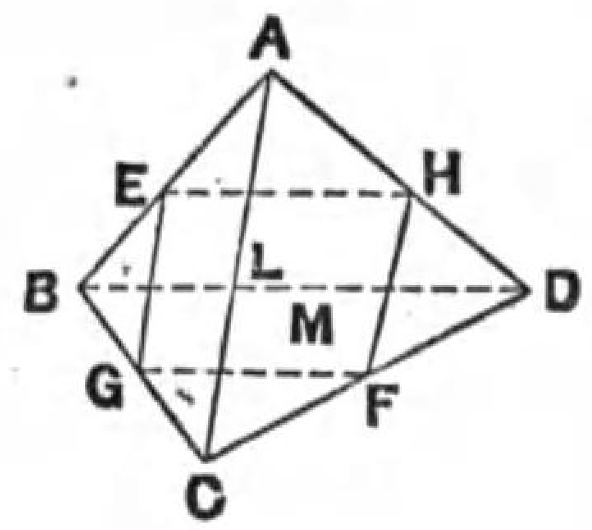
同樣ニ DS ハ點 G ヲ過ル.

故ニ AP, BQ, CR, DS ハ同一ノ點 G ニ於テ相交ル.

尙 本書 487 頁 3 題ヲ見ヨ.

3. 四面體ノ相對スル稜ノ中點ヲ結ビ付クル三ツノ直線ハ同一ノ點ニ於テ相交ルコトヲ證セヨ.　[45. 東. 高. 師., II. 海. 機.]

證 I. 四面體 ABCD ノ稜 AB, BC, CD, DA, AC, BD ノ中點ヲソレゾレ E, G, F, H, L, M トス.



然ルトキハ EF, GH, LM ハ同一ノ點ニ於テ相交ルベシ.

ABCD ハごーしゅ四邊形ナルユヱ EGFH ハ平行四邊形ナリ.

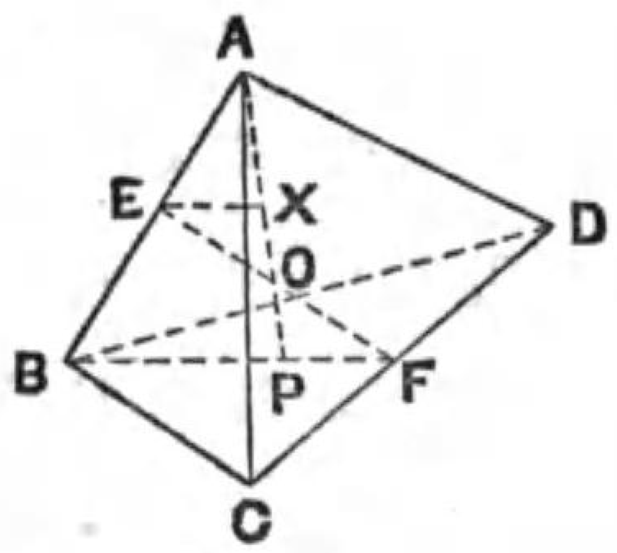
依リテ EF ハ GH ノ中點 O ヲ過ル.

同樣ニ ACBD モ亦ごーしゅ四邊形ナルユヱ LGMH ハ平行四邊形ニシテ LM ハ GH ノ中點 O ヲ過ル.

故ニ三ツノ直線 EF, GH, LM ハ同一ノ點 O ニ於テ相交ル.

證 II. BF ヲ結ビ付ケ, 其ノ上ニ點 P ヲ $BP = 2PF$ ナル如ク取ルトキハ P ハ $\triangle BCD$ ノ重心ナリ.

而シテ AP, EF ヲ結ビ付クレバ, 何レモ △FAB ノ平面上ニアリ.



故ニ相交ル, 其ノ交點ヲ O トス.

E ヲ過リ, BP ニ平行ナル直線 EX ヲ引キ, AP トノ交點ヲ X トスルトキハ E ハ AB ノ中點ナルヲ以テ

$$EX=\frac{1}{2}BP$$

$$=PF,$$

故ニ $\triangle OXE \equiv \triangle OPF$,

依リテ $OX=OP$.

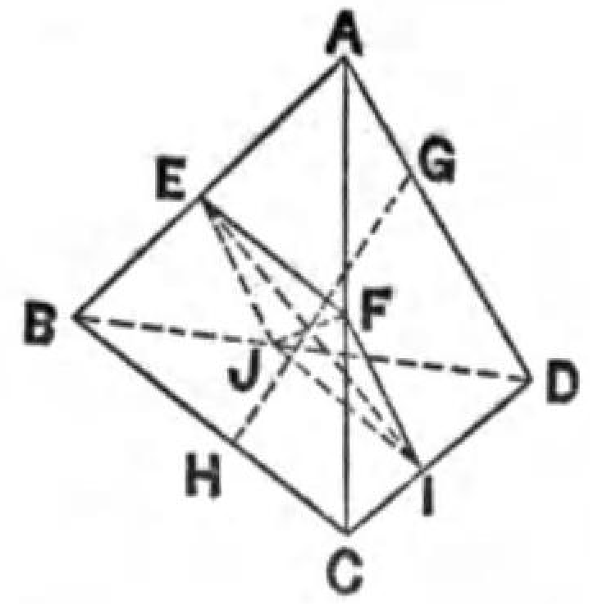
然ルニ X ハ AP ノ中點ナルヲ以テ

$$AO=3.OP.$$

同様ニシテ GH, LM ハ AP ト O ニ於テ交ル.

即チ EF, GH, LM ハ同一ノ點 O ニ於テ相交ル.

證 III. 四面體 ABCD ノ對稜 AB ト CD, BC ト AD, AC ト BD トノ中點ヲソレゾレ E



ト I, H ト G, F ト J トスレバ EI, HG, FJ ハ同一ノ點ニ於テ相交ルベシ.

EF, FI, IJ, JE ヲ結ビ付クレバ $EF \parallel BC,\ EF=\frac{1}{2}BC,$

$JI \parallel BC,\ JI=\frac{1}{2}BC,$

故ニ $EF \parallel JI,\ EF=JI.$

故ニ EFIJ ハ平行四邊形ナリ.

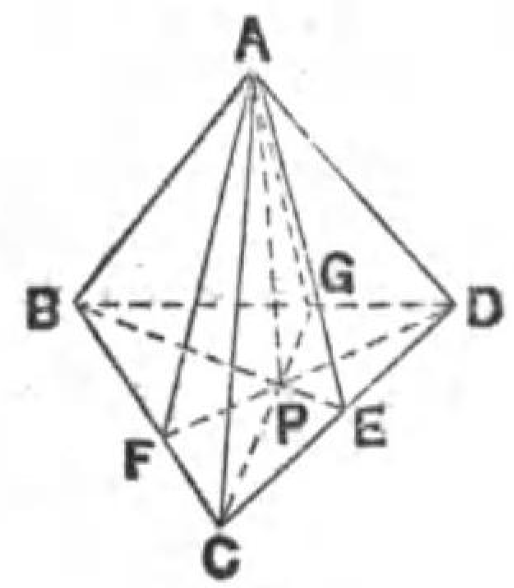
依リテ其ノ對角線 EI, JF ハ相交リテ互ニ他ヲ二等分ス.

同様ニ EI, HG ハ相交リテ互ニ他ヲ二等分ス.

故ニ EI, HG, FJ ハ同一ノ點ニ於テ相交ル.

4. 四面體ノ二双ノ相對スル稜ガ互ニ直角ナルトキハ, 殘リノ一双ノ相對スル稜モ亦互ニ直角ナルコトヲ證セヨ.

[45. 名. 高. 工.]



證 四面體 ABCD ニ於テ稜 $AB \perp CD$, $AD \perp BC$ トスレバ殘リ

ノ稜 $AC \perp BD$ ナルコトヲ證セン.

面 BCD 上ニ於テ $BE \perp CD$, $DF \perp BC$ ニ引ケバ CD ハ平面 ABE 上ノ二直線 AB, BE ニ垂直ナルユエ　$CD \perp$ 平面ABE.

同樣ニ　$BC \perp$ 平面ADF.

依リテ此ノ二ツノ垂線ヲ含ム平面 BCD ハ二ツノ平面 ABE, ADF ノ何レニモ垂直ナリ.

故ニ其ノ交リヲ AP トスレバ

$AP \perp$ 平面BCD.

然ルニ P ハ BE, DF ノ交點ナルユエ $\triangle BCD$ ノ垂心ナリ.

故ニ　$CP \perp BD$,

今 CP ノ延線ト BD トノ交點ヲ G トスレバ三垂線ノ定理ニ依リテ

$AG \perp BD$,

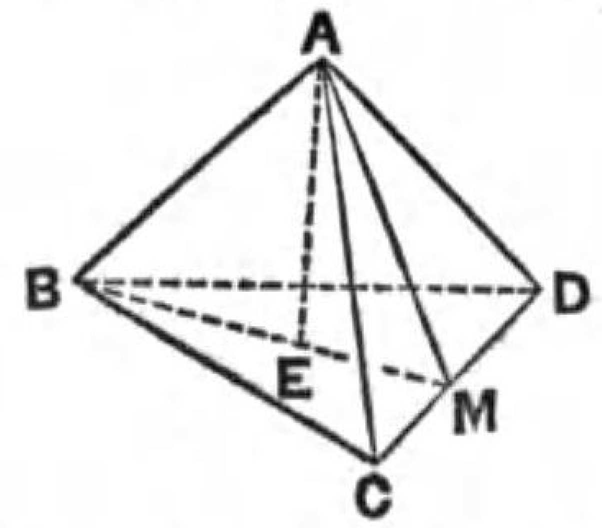
故ニ　$BD \perp$ 平面ACG.

從ヒテ　$AC \perp BD$.

5. 四面體ノ底面ガ等邊三角形ニシテ, 其ノ頂ニ於ケル各角ガ直角ナルトキ, 其ノ高サノ上ノ正方形ト頂ニ於テ止マル一稜ノ上ノ正方形トハ恒ニ一定ノ關係ヲ有ス, 之ヲ證セヨ.

[II. 海. 經.]

證　四面體 ABCD ノ底面 BCD ガ等邊三角形ニシテ $B\hat{A}C$, $C\hat{A}D$, $D\hat{A}B$ ハ何レモ直角トシ, 高サヲ AE トス.



然ルトキハ二ツノ直角三角形 BAC, DAC ハ斜邊ガ相等シク, 一邊ガ共通ナルヲ以テ全等ナリ.

依リテ　$AB = AD$,

同樣ニ　$AB = AC$.

故ニ $\triangle BAC$, $\triangle CAD$, $\triangle DAC$ ハ全等ナル二等邊三角形ナリ.

依リテ E ハ $\triangle BCD$ ノ中心ナリ.

故ニ BE ヲ結ビ付ケ, 其ノ延線ガ CD ニ交ル點ヲ M トシ, AM ヲ結ビ付クレバ, M ハ CD ノ中點ニシテ　$AM = CM$.

故ニ

$$\overline{AE}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{EM}^2$$

$$= \frac{1}{4}\overline{CD}^2 - \frac{1}{9}\overline{BM}^2$$

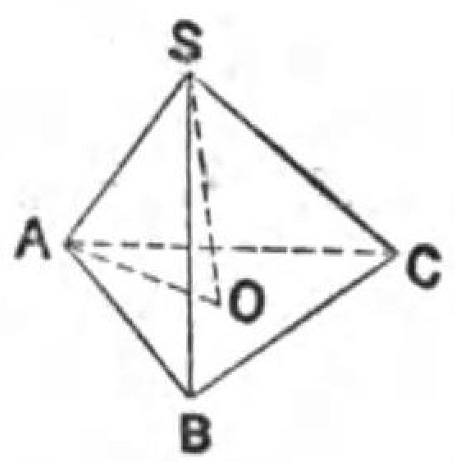
$$= \frac{1}{4}\overline{CD}^2 - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4}\overline{CD}^2$$

$$=\frac{1}{6}\overline{CD}^2=\frac{1}{3}\overline{AC}^2.$$

即チ $\overline{AE}^2$ ハ恒ニ $\overline{AC}^2$ ノ $\frac{1}{3}$ ナリ.

6. 正四面體ノ高サノ上ノ正方形ト，其ノ一邊ノ正方形トノ比ヲ求メヨ. [45. 海.經.]

解 正四面體 S-ABC ノ高サ SO ヲ引ケバ



O ハ △ABC ノ外心ナルコト明カナリ. 依リテ OA ヲ結ビ付クレバ

$$\overline{SO}^2=\overline{AS}^2-\overline{AO}^2.$$

然ルニ AO ハ正三角形 ABC ノ外接圓ノ半徑ナルユヱ

$$AO=\frac{1}{\sqrt{3}}AB=\frac{1}{\sqrt{3}}SA.$$

故ニ $\overline{SO}^2=\overline{SA}^2-\overline{AO}^2$

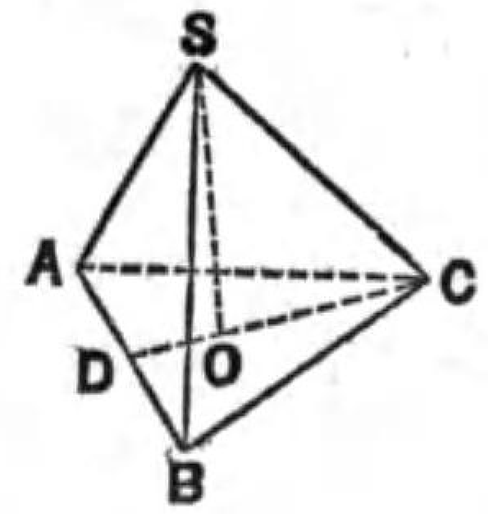
$=\overline{SA}^2-\frac{1}{3}\overline{SA}^2$

$=\frac{2}{3}\overline{SA}^2,$

故ニ $\overline{SO}^2:\overline{SA}^2=2:3.$

7. 正四面體ノ一ツノ稜ノ長サガ a ナルトキ，其ノ高サ幾何ナルカ. [45. 專.入.檢.]

解 正四面體 S-ABC ノ高サヲ SO トスレバ



O ハ正三角形 ABC ノ重心ナルユヱ CO ガ AB ト D ニ於テ交ルトスレバ D ハ，AB ノ中點ナリ.

故ニ $CD=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$

依リテ $CO=\frac{2}{3}CD=\frac{1}{\sqrt{3}}a,$

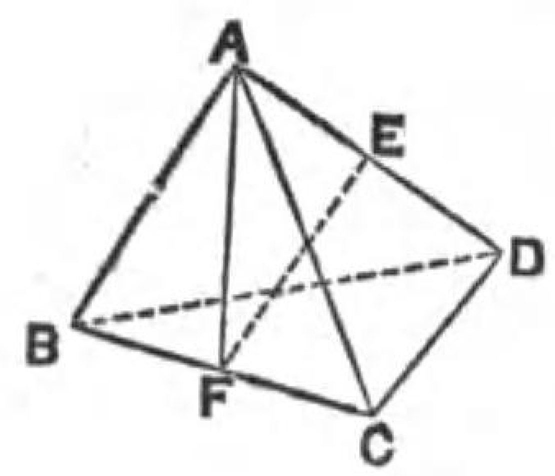
従ヒテ $SO=\sqrt{(\overline{SC}^2-\overline{CO}^2)}$

$=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}$

$=\frac{\sqrt{6}}{3}a.$

8. 一邊ノ長サ a ナル正四面體ノ相對スル稜ノ間ノ最短距離ヲ求メヨ. [II. 東.高.工.]

解 正四面體 ABCD ノ相對スル稜 AD, BC



ノ最短距離ヲ EF トスレバ EF ハ AD, BC ニ垂直ニシテ E ハ AD ノ中點, F ハ BC ノ中點ナリ.

AF ヲ結ビ付クレバ直角三角形 ABF ニ於テ

$$AB=a,\ BF=\frac{1}{2}a,$$

故ニ $\overline{AF}^2=a^2-\frac{1}{4}a^2=\frac{3}{4}a^2,$

又直角三角形 AFE ニ於テ $AE=\frac{1}{2}a,$

故ニ $\overline{EF}^2=\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{2}a^2,$

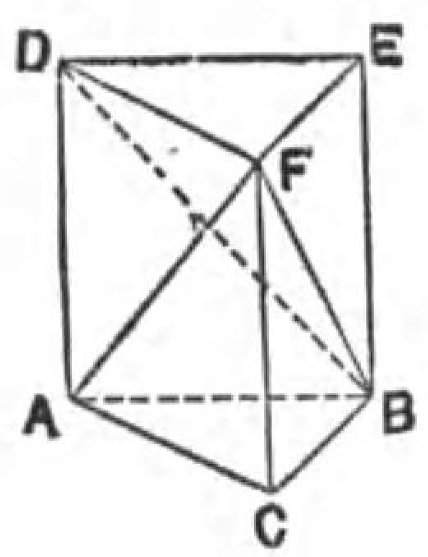
故ニ $EF=\frac{1}{\sqrt{2}}a.$

9. 立方體 ABCD-EFGH ニ於テ, 三ツノ角頂 B, E, G ヲ含ム平面ハ對角線 DF ニ垂直ナルコトヲ證セヨ. [II. 專. 入. 檢.]

證 本書 490 頁 **6** 題ニ同ジ.

10. 三角錐體ハ等底, 等高ノ三角柱體ノ三分ノ一ニ等シキコトヲ證セヨ. [II. 陸. 經.]

證 三角柱體ハ三ツノ等底, 等高ナル三角錐體ニ分チ得ベキコトヲ證明スレバ可ナリ.



ABC-DEF ヲ三角柱體トシ, 此ノ體ヲ AF, BF ノナス平面及ビ BD, BF ノナス平面ヲ截口トシテ三ツノ部分ニ分テバ三ツノ三角錐體ヲ得, 而シテ三角錐體 F-ABC ハ三角錐體 B-DEF ト等底, 等高ナルヲ以テ相等シ.

同様ニ三角錐體 F-BDE ト三角錐體 F-ABD ハ相等シ.

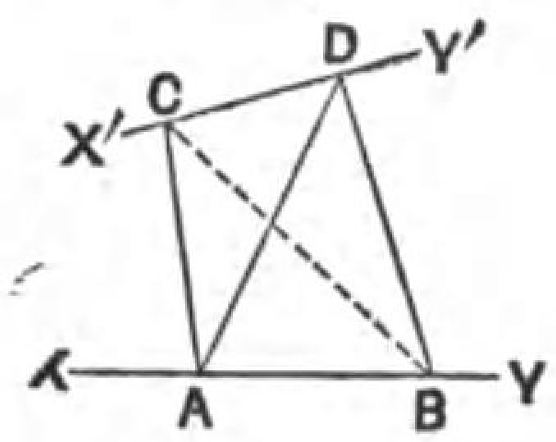
即チ三ツノ三角錐體ハ何レモ相等シク且其ノ底面ハ何レモ元ノ三角錐體ノ底面ニ等シキヲ以テ題言ノ如シ.

倘 本書 499 頁 **16** 題ヲ見ヨ.

11. 空間ニ與ヘラレタル二ツノ無限直線 XY, X′Y′ アリ, XY 上ニ定長ノ有限直線 AB ヲ取リ, X′Y′ 上ニ定長ノ有限直線 CD ヲ取ル; AB, CD ガソレゾレ XY, X′Y′ 上ニ於テ其ノ位置ヲ變ズルモ A, B, C, D ヲ頂點トスル四面體ノ體積ハ一定不易ナルコトヲ證セヨ.

[45. 東. 高. 工.]

證 今 AB ガ動カズシテ CD ガ直線 X′Y′ 上ヲ動クモノト考フルトキハ △BCD ハ底邊 CD ノ長サガ一定ニシテ高サハ B ヨリ X′Y′ ニ至ル距離ナルヲ以テ面積ハ一定ナリ.



又 A ヨリ平面 BCD ニ至ル距離ハ一定ナリ.

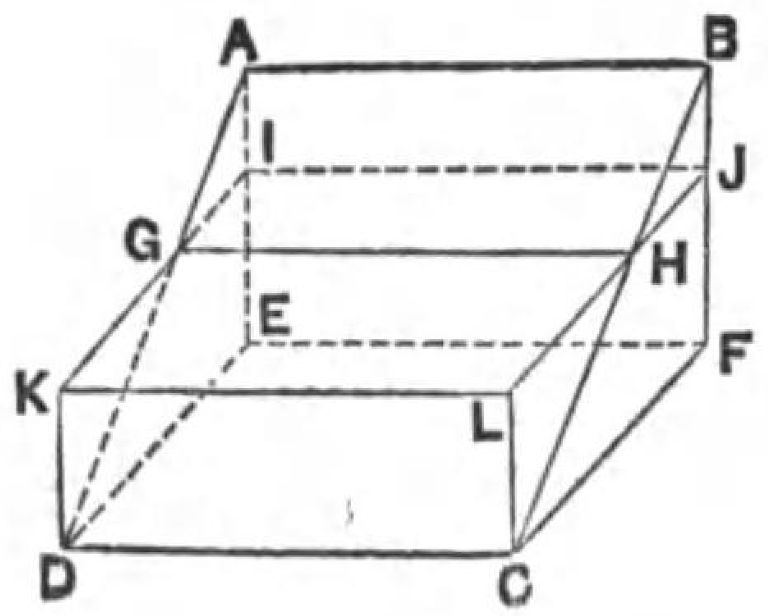
依リテ四面體 A-BCD ノ體積ハ一定ナリ.

同樣ニ CD ガ動カズシテ AB ガ XY 上ヲ動クモノト考フルモ四面體 ABCD ノ體積ハ一定ナリ.

依リテ AB, CD ガソレゾレ XY, X′Y′ 上ヲ動クモ四面體 ABCD ノ體積ハ一定ナリ.

12. 東西ニ傾斜ナク, 北ヨリ南ニ向ヒ地面ニ沿ヒテ m 尺ニ付キ n 尺低下セル地面アリ, 此ノ地面中東西 a 尺, 南北 b 尺ノ矩形ノ地所ヲ北ノ境界線ヨリ地面ニ沿ヒテ $\frac{b}{4}$ 尺南ノ處ト同ジ高サニ地均セントス. 幾何ノ土ヲ補フヲ要スルカ. [II. 海. 兵.]

解 地面ヲ ABCD トシ, AB$=a$(尺), BC$=b$(尺) トス.



今 CD ヲ過ル水平面ニ AB ノ投ズル正射影ヲ EF トシ, AD, BC 上ニソレゾレ AG, BH ヲ $\frac{1}{4}b$(尺) ニ取リ, GH ヲ含ム水平面ニ AB ノ投ズル正射影ヲ IJ, CD ノ投ズル正射影ヲ KL トスレバ

KLJI ハ地均シタル後ノ地面ナリ.

故ニ所要ノ土ノ立積ハ

$$\begin{aligned} V &= \text{三角壔 HGKDCL} - \text{三角壔 HGIABJ} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{HL}(\mathrm{CDKL}) - \frac{1}{2}\mathrm{HJ}(\mathrm{ABJI}) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{HL.CD.CL} - \frac{1}{2}\mathrm{HJ.AB.BJ} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{HL.AB.CL} - \frac{1}{2}\mathrm{HJ.AB.BJ}, \end{aligned}$$

然ルニ　$\mathrm{HL}:\mathrm{CL}=\mathrm{HJ}:\mathrm{BJ}=\mathrm{CF}:\mathrm{BF}$,

而シテ　$\mathrm{BH}=\frac{1}{4}\mathrm{BC}$ ナルユヱ

$$\mathrm{HL}=\frac{3}{4}\mathrm{CF},\quad \mathrm{CL}=\frac{3}{4}\mathrm{BF},$$

$$\mathrm{HJ}=\frac{1}{4}\mathrm{CF},\quad \mathrm{BJ}=\frac{1}{4}\mathrm{BF}.$$

故ニ　$$V=\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\mathrm{AB.CF.BF}$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{AB.CF.BF}.$$

又　$\mathrm{BC}:\mathrm{BF}=m:n$,

$$\mathrm{BF}=\frac{bn}{m},$$

$$\mathrm{CF}=\sqrt{(\overline{\mathrm{BC}}^2-\overline{\mathrm{BF}}^2)}=\sqrt{b^2-\frac{b^2n^2}{m^2}}$$

$$=\frac{b}{m}\sqrt{m^2-n^2}.$$

故＝ $$V=\frac{1}{4}a\cdot\frac{b}{m}\sqrt{m^2-n^2}\cdot\frac{bn}{m}$$

$$=\frac{ab^2n}{4m^2}\sqrt{m^2-n^2}\ (\text{立方尺}).$$

13. 底面積 9 平方寸, 高サ 5 寸ノ角錐アリ, 之ヲ高サ 3 寸ノ處ニテ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ, 此ノ兩部分ノ體積各幾何ナルカ. [I. 海.兵.]

解 角錐ノ體積ハ

$$\frac{1}{3}\times9\times5=15,$$

而シテ相似體ノ體積ハ高サノ立方ニ比例スルヲ以テ上部ノ體積ハ

$$5^3:(5-3)^3=15:x$$

ヨリ $$x=\frac{24}{25}=0.96,$$

即チ 0立方寸.96,

從ヒテ下部ノ體積ハ

$$15-0.96=14.04,$$

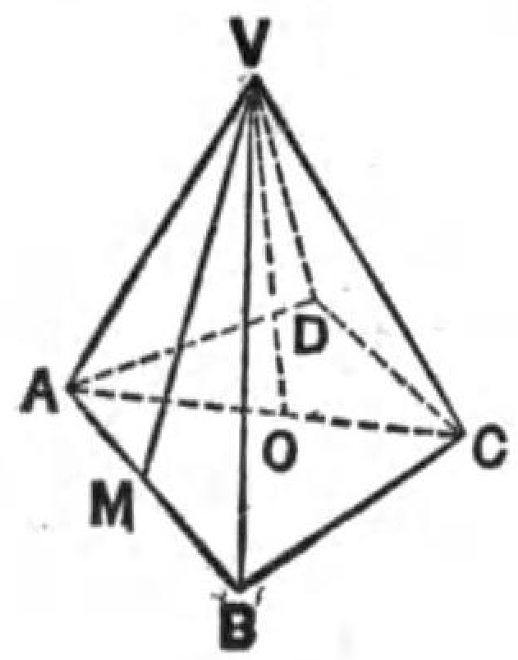
即チ 14立方寸.04 ナリ.

14. 對角線ノ長サ a 寸ナル正方形ヲ底面トスル直角錐ノ斜稜及ビ底面ノ一邊ノ長サノ比

3:2 ナルトキ, 體積及ビ斜面ノ面積ヲ求メヨ.

[II. 東北大.工.]

解 直角錐 V-ABCD ニ於テ底面 ABCD ヲ正方形トシ, VO ヲ高サトスレバ O ハ ABCD ノ中心ナリ.



今 AC$=a$ トシ, VM⊥AB トスレバ

$$AO=\frac{1}{2}a,\quad AB=\frac{1}{\sqrt{2}}a.$$

$$AM=\frac{1}{2}AB$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}a,$$

又 $$VA:AB=3:2$$

ナルユエ $$VA=\frac{3}{2}AB$$
$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}a.$$

而シテ $$VO=\sqrt{(\overline{VA}^2-\overline{AO}^2)}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{14}}{4}a,$$

$$VM=\sqrt{(\overline{VA}^2-\overline{AM}^2)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}a\right)^2-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}a\right)^2}$$

$$=a,$$

故ニ　　體積 $=\frac{1}{3}\overline{AB}^2.VO$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\right)^2\left(\frac{\sqrt{14}}{4}a\right)$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{24}a^3 \text{ (立方寸)}.$$

斜面ノ面積 $=4\triangle VAB$

$$=4\times\frac{1}{2}AB.VM$$

$$=4\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\right)a$$

$$=\sqrt{2}a^2 \text{ (平方寸)}.$$

圓壔　圓錐

1. 半徑 5 尺, 斜高 13 尺ナル直圓錐ノ體積ハ幾立方尺ナルカ.　[45. 海. 機.]

解　高サハ $\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{18\times 8}=12$,

依リテ體積ハ $\frac{1}{3}\times 5^2\times 12\pi=314.159\ldots\ldots$,

即チ約 314立方尺.16 ナリ.

2. 高サガ底面ノ徑ニ等シキ圓錐體アリ, 底

面ノ周圍 2尺 2寸ナルトキハ其ノ體積幾何ナルカ. 但 $\pi=\frac{22}{7}$ トシテ計算スベシ.

[II. 農. 大. 實.]

解　底面ノ半徑ヲ r 寸トスレバ高サハ $2r$ 寸ナルユヱ體積ハ

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2\times 2r=\frac{2}{3}\pi r^3,$$

然ルニ　$2\pi r=22$,

故ニ　$$V=\frac{2}{3}\pi\left(\frac{22}{2\pi}\right)^3$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{11^3}{\pi^2}=\frac{2}{3}\times 11^3\times\frac{7^2}{22^2}$$

$$=\frac{539}{6}=89\frac{5}{6} \text{ (立方寸)}.$$

3. 底面ノ半徑 20 寸, 及ビ 10 寸ニシテ高サ 16 寸ナル截頭直圓錐アリ, 今高サノ中點ニ於テ底面ニ平行ナル平面ニテ之ヲ二分シ, 各部分ノ體積ヲ計算セヨ.　[II. 大. 高. 工.]

解　高サノ中點ニ於ケル截口ハ圓ニシテ其ノ半徑ハ　$(20+10)\div 2=15$ (寸),

依リテ截頭直圓錐ノ體積ノ公式

$$\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)$$

ヨリ上部ノ體積ハ

$$=\frac{1}{3}\times 8\times(10^2+10\times 15+15^2)\times 3.14159265\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{3}\times 11938.05\ldots\ldots$$

$$=3979.35\ldots\ldots$$

下部ノ體積

$$=\frac{1}{3}\times 8\times(15^2+15\times 20+20^2)\times 3.14159265\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{3}\times 23247.78\ldots\ldots$$

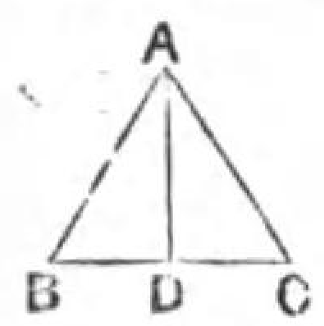
$$=7749.26\ldots\ldots,$$

即チ 上部ハ 3979 立方寸弱, 下部ハ 7749 立方寸强ナリ.

4. 正三角形 ABC ノ高サヲ AD トシ, AD ヲ軸トシテ此ノ三角形ヲ廻轉シテ生ズル直圓錐體ノ全面積ヲ求メヨ. 但一邊ノ長サヲ 3 尺トス.

[45. 陸. 經.]

解 AD ヲ軸トシテ廻轉シテ生ズル直圓錐體ノ側面積ハ



$$\frac{1}{2}AB.BC\pi=\frac{9}{2}\pi,$$

底面積ハ

$$\overline{BD}^2\pi=\frac{9}{4}\pi,$$

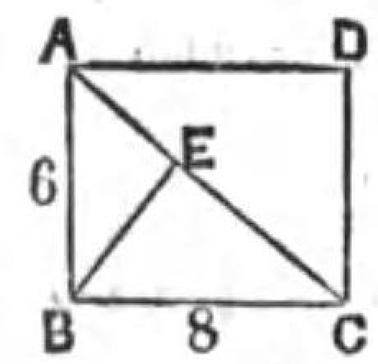
故ニ全面積ハ $\frac{9}{2}\pi+\frac{9}{4}\pi=\frac{27}{4}\pi\doteqdot 21.2057,$

即チ約 21平方尺.2057 ナリ.

5. ABCD ハ矩形ニシテ; AB, BC ノ長サハソレゾレ 6 寸, 8 寸ナリ, 對角線 AC ヲ軸トシテ三角形 ABC ヲ一廻轉スルトキ, 生ズル體ノ體積ヲ計算セヨ.

[45. 京. 醫. 專.]

解 $AC=\sqrt{6^2+8^2}=10,$



又 B ヨリ AC ニ垂線 BE ヲ引ケバ

$$BE=\frac{AB.BC}{AC}=\frac{6\times 8}{10}$$

$$=4.8,$$

故ニ所要ノ體積

$$=\frac{1}{3}\overline{BE}^2.AC.\pi=\frac{1}{3}\times 4.8^2\times 10\times\pi$$

$$=76.8\pi=241.274\ldots\ldots,$$

即チ約 241立方寸.27 ナリ.

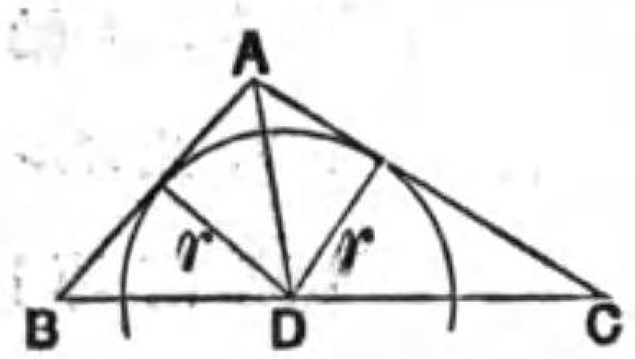
6. 三角形 ABC ニ於テ BC ハ 18 寸, CA ハ 15 寸, AB ハ 12 寸ナルトキ, 邊 BC 上ニ中心ヲ有シ, 且他ノ二邊ニ切スル樣ニ半圓ヲ內切セシメ, BC ヲ軸トシテ此ノ半圓ヲ一回旋轉セシムルトキ生ズル體ノ面積及ビ體積ヲ求メ,

次ニ此ノ體積ニ等シキ容量ヲ升ニテ表ハセ.

[II. 陸. 士.]

解 $\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ニシテ $a=18,\ b=15,\ c=12;$



從ヒテ

$$s=\frac{1}{2}(18+15+12)$$

$$=22.5$$

ナルユエ $\triangle ABC=\sqrt{22.5\times4.5\times7.5\times10.5}$

$$=\sqrt{5\times4.5\times4.5\times5\times1.5\times7\times1.5}$$

$$=5\times4.5\times1.5\sqrt{7},$$

又圓ノ中心ヲ D トシ, 其ノ半徑ヲ r トスレバ

$$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$$

$$=\frac{1}{2}r.AB+\frac{1}{2}r.AC=\frac{1}{2}r(12+15)$$

$$=13.5r.$$

故ニ $13.5r=5\times4.5\times1.5\sqrt{7},$

故ニ $r=2.5\sqrt{7}$ (寸),

依リテ BC ヲ軸トシテ此ノ半圓ヲ一廻轉シテ生ズル球ノ面積ハ $4\pi(2.5\sqrt{7})^2=175\pi$

$$=175\times3.141592\ldots\ldots$$

$$=549.77\ldots\ldots\ (\text{平方寸}).$$

體積ハ $\frac{4}{3}\pi(2.5\sqrt{7})^3=\frac{875}{6}\pi\sqrt{7}$

$$=\frac{875}{6}\times3.141592\ldots\ldots\times2.645751\ldots\ldots$$

$$=875\times0.523598\ldots\ldots\times2.645751\ldots\ldots$$

$$=1212.1\ldots\ldots\ (\text{立方寸}).$$

之ヲ升ニ直セバ

$$1212.1\ldots\ldots\div61.827=18.69\ldots\ldots\ (\text{升}).$$

球

1. 球ヲ平面ニテ截リタル截口ハ圓ナルコトヲ證セヨ. [I. 海. 兵.]

證 本書 510 頁 1 題ニ同ジ.

2. 同一ノ平面上ニアラザル四ツノ定點ヨリ等距離ニアル點ヲ求ムル方法ヲ說明セヨ.

[45. 熊. 高. 工.]

解 本書 485 頁 2 題ニ同ジ.

3. 球ノ面積ガ 400 平方寸ナルトキハ, 此ノ球ノ徑幾寸ナルカ. [45. 海. 機.]

解 半徑ヲ r トスレバ

$$4\pi r^2=400,$$

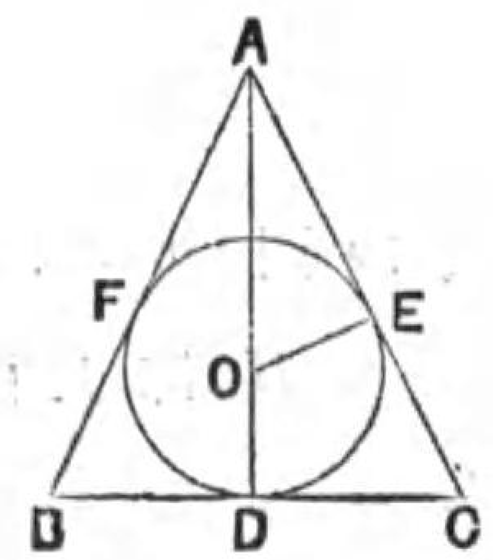
故ニ $$2r=\sqrt{\frac{400}{\pi}}$$
$$=11.283\ldots,$$

即チ 11寸.28 強ナリ.

4. 底面ノ半徑 5 寸, 高サ 1尺 2 寸ノ直圓錐ニ內接スル球ノ面積及ビ體積ヲ求メヨ.

[II 熊. 高. 工.]

解 直圓錐 ABC ノ高サ AD ヲ含ム平面ニテノ截口ヲ △ABC トスレバ之ニ內切スル圓 O ハ直圓錐ノ內切球ノ截口ニシテ切點ヲ D, E, F トスレバ OD, OE, OF ハ球ノ半徑ナリ.



而シテ △AOE, △ACD ハ相似ナルヲ以テ

$$AO : OE = AC : CD,$$

即チ $$AD - OE : OE = \sqrt{(\overline{AD}^2+\overline{CD}^2)} : CD,$$

故ニ $$12 - OE : OE = \sqrt{(12^2+5^2)} : 5,$$

或ハ $$12 : OE = 13+5 : 5,$$

故ニ $$OE=\frac{12\times 5}{18}=\frac{10}{3}\ (\text{寸}).$$

依リテ所要ノ球ノ面積ハ

$$4\left(\frac{10}{3}\right)^2\pi=\frac{1}{9}\times 400\times 3.14159\ldots\ldots$$
$$=139.626\ldots\ldots\ (\text{平方寸}).$$

體積ハ $$\frac{4}{3}\times\left(\frac{10}{3}\right)^3\pi=\frac{4000}{81}\times 3.14159\ldots\ldots$$
$$=155.14\ldots\ldots\ (\text{立方寸}).$$

5. 次ノ二ツノ面積ノ何レガ大ナルカ.

(1) 球ノ小圓周ヨリ其ノ極ニ至ル大圓ノ弧ガ大圓周ノ $\frac{1}{12}$ ナル小圓ノ面積.

(2) 兩底ガソレゾレ (1) ノ小圓ノ半徑及ビ大圓ノ半徑ニ等シク, 高サモ亦大圓ノ半徑ニ等シキ梯形ノ面積. [II 海. 兵.]

解 球ノ小圓周ヨリ其ノ極ニ至ル大圓ノ弧ガ大圓周ノ $\frac{1}{12}$ ナルトキハ小圓ノ徑ハ球ノ中心ニ於テ $$\frac{2}{12}\times 4\hat{R}=\frac{2}{3}\hat{R}$$
ニ對ス. 故ニ小圓ノ徑ハ球ノ半徑ニ等シ.

依リテ球ノ半徑ヲ r トスレバ

(1) ノ面積ハ $$\frac{1}{4}r^2\pi.$$

(2) ノ面積ハ $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}r+r\right)r=\frac{3}{4}r^2,$$

然ルニ $$\pi>3.$$

故ニ (1) ノ面積ガ大ナリ.

6. AB ハ與ヘラレタル有限直線ニシテ P ハ與ヘラレタル平面ナリ. 平面 P 上ニ點 M ヲ取リ, $A\hat{M}B$ ガ直角ナルトキ點 M ノ軌跡如何. [II. 名. 高. 工.]

解 $A\hat{M}B$ ハ恒ニ直角ニシテ AB ハ定直線ナルヲ以テ點 M ハ恒ニ AB ヲ徑トスル球面 O 上ニアリ. 然ルニ點 M ハ平面 P 上ニアルベキヲ以テ M ハ球面 O ト平面 P トノ交リナル圓周上ニアリ. 逆ニ此ノ圓周上ノ點 M′ ヲ取レバ $A\hat{M'}B$ ハ直角ナリ.

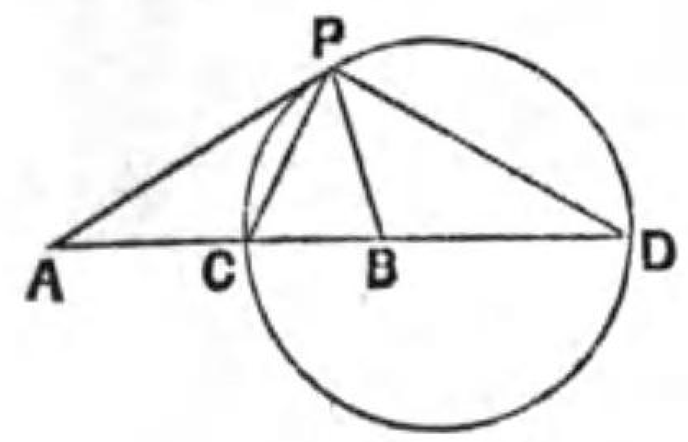
依リテ所要ノ軌跡ハ AB ヲ徑トスル球面ト平面 P トノ交リナル圓周ナリ.

注意 球面 O ト平面 P トガ出會ハザルトキハ所要ノ軌跡ナク, 切スルトキハ只一點トナル.

7. A, B ヲ二定點トシ, 比 PA : PB ガ一定不易ナル如キ點 P ノ軌跡ヲ求メヨ. [45. 米. 高. 工.]

解 PA : PB $=m:n$ トス, 線分 AB ヲ C, D ニ於テ $m:n$ ノ比ニ等シク内分及ビ外分スレ

バ PC ハ $A\hat{P}B$ ヲ二等分シ, PD ハ其ノ外角ヲ二等分ス. 故ニ $C\hat{P}D=\hat{R}$.



依リテ點 P ハ CD ヲ徑トスル球面上ニアリ.

逆ニ此ノ球面上ニ於テ任意ノ點 P ヲ取リ, P 及ビ AD ノ定ムル平面ニテ此ノ球ヲ截レバ其ノ截口ハ大圓ニシテ大圓周 CPD ハ此ノ平面上ニ於テ A, B マデノ距離ノ比ガ $m:n$ ニ等シキ如キ點ノ軌跡ナルユヱ

$$AP : PB = m : n.$$

即チ點 P ハ要件ニ適ス.

依リテ所要ノ軌跡ハ CD ヲ徑トスル球面ナリ.

注意 與ヘラレタル比ガ等比ナルトキハ軌跡ハ AB ヲ直角ニ二等分スル平面トナル.

不許複製

明治四十三年五月十七日印刷
明治四十三年五月二十日發行
明治四十四年十月十日訂正再版發行
明治四十五年五月一日增訂三版發行
大正元年九月五日增訂四版發行
大正二年三月廿五日增訂五版發行
大正二年十月十五日增訂六版發行
大正三年七月九日再增訂七版印刷
大正三年七月十二日再增訂七版發行

【定價金七拾錢】
(試驗問題幾何學)

著作者　東京市小石川區小日向臺町三丁目五十三番地　長澤龜之助

發行者　東京市京橋區尾張町二丁目二十六番地　川合晉

印刷者　東京市牛込區市谷加賀町一丁目十二番地　中田福三郎

印刷所　東京市牛込區市谷加賀町一丁目十二番地　株式會社秀英舍第一工場

發行所　東京市京橋區尾張町二丁目廿六番地　東海堂書店
振替口座八六七電話新橋長二〇一五及一九一二

終