中等學校用

三S平面幾何學

全一冊

譯者 仲光然 嚴幼芝 徐任吾

中華書局印行

代数未知数 　　 解析几何平面 S二 S三

abcdexyz

abcdexyz ,, abcdexyz

ABCDEFG 　　 ABCDEFG

三S平面几何学

三S平面幾何學

序言

美國 Schultze-Sevenoak-Schuyler 三氏對於中等算學的教學方法，有深刻的研究，有極豐富的經驗，他們所著的各種算學教本，我們採用的已經不止一種.(北京高師數理學會的數理雜誌，曾經發表 Schultze 著的中學數學教授法，是張鵬飛張邦銘兩君合譯的.) 因爲他們的書，說理很嚴密而清楚，選材饒興趣而適當，教的人容易教，學的人容易學，比較別種教本，的確有不可磨滅的優點.

現在我們所翻譯的這本三S幾何學，是原編著自己認爲最滿意的作品，可說是他們心血的結晶. 我們中國的中等學校，採用他做教本的很多，教算學的教師們，談到三S幾何學，沒有一個人不稱贊的.原書的優點很多，現在略舉幾條於下:

1. 注重學生思想的訓練.
2. 易於引起學生研究的興趣.
3. 能避免過於抽象的敍述.
4. 能注意實用的價值，使學生感覺到有實際的需要.
5. 教材的排列，能適合學習心理而有論理的次序.
6. 所採的問題，和別種科學能有相當的聯絡.
7. 所用的記號證法，簡易明曉，於初學者很是相宜.
8. 篇末附有實用題，幾何學史，幾何公式等，足供參考.

我們三人現在都在江蘇省立上海中學教算學，而且這種生涯，都有七八年了．對於各種所採用的教科書，總覺得有一些使我們不能滿意，尤其是幾何學的教本，所以決心把這本三S幾何學翻譯出來，在上海中學試教過兩年，很覺適用，經學校同人屢次的勸告我們，才把他刊印出來，不敢自誇怎樣的好，因爲不過是很忠實的把原文翻譯成中文罷了．

原書分平面，立體兩部分，平面部分可供初級中學之用，每星期五小時，一學年可以教完；立體部分可供高級中學之用，每星期四小時，一學期可以教完．本冊祇含他的平面部分，立體部分，另印一冊．

本書譯述時，得章倫淸先生的幫助不少，書此誌謝．

$AD < \frac{1}{2}(AB + AC)$ 譯者識

$BD = DC$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CED$ (S.A.S.)

$\therefore AB = CE$

$AE < AC + CE$

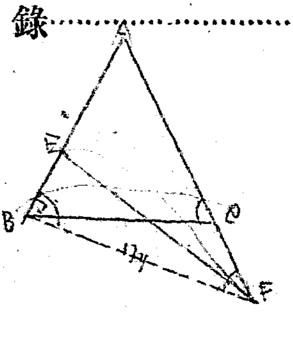
$2AD < AB + AC$

$\therefore AD < \frac{1}{2}(AB + AC)$

三S平面幾何學

目　　錄

	頁
緒　論	1
第一編　直線和直線形	23
第二編　圓——作圖	132
第三編　比例　相似多邊形	195
第四編　多邊形的面積	261
第五編　正多邊形　圓的度量	295
附　錄	329



記號

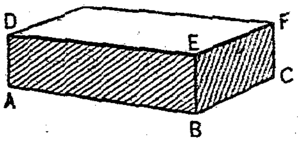
$+$	加	$\sim$	相似
$-$	減	$\angle$	角
$=$	等於，或等積	$\angle s$	角(多數)
$\cong$	全同	$\triangle$	三角形
$\neq$	不等	$\triangle s$	三角形(多數)
$>$	大於	$\square$	平行四邊形
$<$	小於	$\square s$	平行四邊形(多數)
$\therefore$	所以	$\odot$	圓
$\perp$	垂直於，或垂直線	Ⓢ	圓(多數)
$\perp s$	垂直線(多數)	$\frown$	弧
$\parallel$	平行於，或平行線	rt.	直
$\parallel s$	平行線(多數)	st.	平

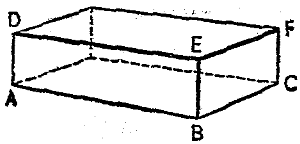
三S平面幾何學

緒　論

定　義

1. 大凡自然界的物體,譬如木塊鐵片等,必占着空間的一定部分. 其所占的空間部分,叫做**幾何立體**或**立體**.





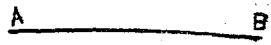
2. 定義. 空間的有限部分叫做**立體**. 立體有三個向度,就是長,廣,和厚.

3. 定義. 立體的界叫做**面**;如ABED,或BEFC. 面有兩個向度,就是長和廣.

窗的玻璃和空氣的界是一個面.這樣的界限很明顯的是沒有厚.

4. 定義. 面的界叫做線;如AB,AD(第1節的圖).線祇有一個向度,就是長.

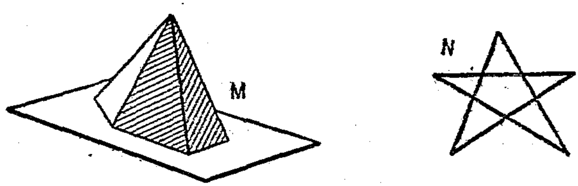
如上所述,右邊的黑線 AB 不能算幾何的線,因爲他有廣,而其黑白中間的界纔可以代表眞正幾何的線.



5. 定義. **線的界或端叫做點**. 點沒有向度,祇有位置罷了.

面可以認爲離開其所圍成的體而獨立存在. 同樣,線和點也可以獨立存在於空間的.

6. 定義. 點,線,面,或立體,或其中任意幾種的集合,叫做**幾何圖形**,如 M 或 N.



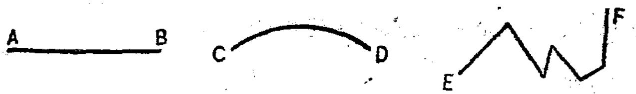
全是直線所組成的圖形叫做直線形.

7. 定義. **幾何學**是研究幾何圖形之性質的科學.

8. **直線**是最簡單的線,大略可用緊張在兩點中間的一絲來表明他;如 AB. 直線通常略稱爲線.

直線的概念很簡單而且是基本的,所以實際上很難下一個完美的定

義.



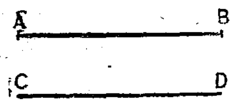
9. 定義. 沒有一部分是直的線叫做**曲線**;如第8節的CD.

10. 定義. 由幾個不同方向的直線連接而成的線叫做**折線**;如第8節的EF.

折線相連接的兩部分不在同一直線上.

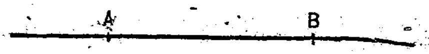
11. 直線這個名稱用來表示無限直線或者無限直線的一部分.

定長的直線,也叫做**線分**,或**線段**,用兩端有記號的直線表示他;如AB.這直線的長也叫做A與B間的**距離**.



直線的兩端沒有記號的,表示無限直線;如CD.

12. 直線AB的**方向**就是從A到B的方向;BA的方向就是從B到A的方向.

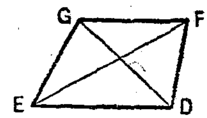


13. 延長直線AB就是使他經過B點而延長;延長BA就是使他經過A點而延長.

plane geometry

14. 定義. 連結一個面中的任意兩點使成直線,若這直線完全在這面上,那末這面就叫做平面.

15. 定義. 一個幾何圖形,他的全部各點都在同一平面上的,叫做**平面圖形**;如 EDFG.



16. 定義. **平面幾何學**祇研究平面圖形.

17. 定義. **立體幾何學**是研究不在同一平面上的圖形、**球面幾何學**研究在一球面上的圖形.

18. 一個圖形能够放在另一個圖形的上面而各點互相密合的,這兩個圖形稱爲**重合**.

19. 定義. 能使他們重合的兩個圖形叫做**全同形**.

全同的線常常稱爲相等的線.同樣,全同的角常常稱爲相等的角.理由見後.(參看 346 節的註)

20. **重疊證法**就是使兩個圖形重合而證明其全同.

21. **二等分**一線,就是平分這線成爲相等的兩部分.

那末，假如 AD＝DC，AC 就是被分做二等分．我們假定每一線分(AC)祇有一個[1]二等分點，那末這二等分點一定就是一點；如 D.

習　題

1 一個動點所經過的路是什麼？

2. 移動一線，常常成為什麼幾何圖形？ 移動一面呢？

3. 一直線能不能移動而使他不成為面呢？

4. 石匠怎樣用直尺的邊來決定面的平不平呢？

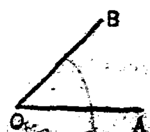
5. 室中的壁是那一種面呢？

6. 煤氣管的外表是那一種面呢？

(1)普通都說有一個而祇有一個，本書的說法言雖簡而意實同.

角 Angle

22. 假使一直線 OA 環繞其上的一點 O 而旋轉至 OB 的地位，這樣所生的旋轉量叫做 AOB 角．很明顯的，這樣旋轉的大小（就是角的大小），與旋轉線的長短是沒有關係的.

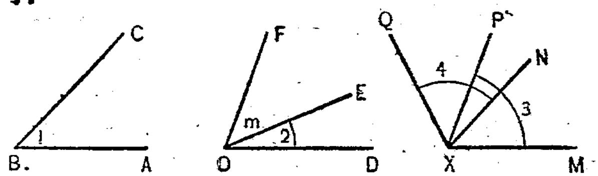


直線 OA 及 OB 叫做 AOB 角的邊，而 O 點是角的**頂點**.

我們可以為角下一個定義，角是由二射線或二半直線從一公共點放

射而成的圖形.

23. 記法. 假使用三個字母來表示一個角,頂點的一個字母應該放在其他兩個字母的中間; 如 ABC 角,EOF 角.



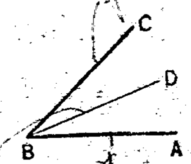
在頂點處單獨的一個字母, 常常表示在這個頂點的最大角(假使有幾個角同在這一點). 那末 DOF 角可以讀做 "O 角," ABC 角可以讀做 "B 角."

有時也可以拿一個數字, 或一個小寫字母放在角的裏面來表示一角;如 1 角, 2 角, m 角.

FOD 角是 2 角與 *m* 角的和. 2 角是 FOD 角與 *m* 角的差.

有時候畫一條曲線,可以使所指的角格外的明顯;如 2 角,及 3 角. 其所畫的弧須在指示角的數字的近旁.好像 MXP 角可以讀做"3 角." 又 NXQ 角可以讀做"4 角."

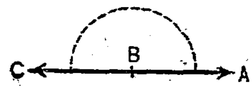
24. 二等分一個角,就是平分這個角成爲相等的兩部分. 我們假定每個角祇有一個二等分線.



平角 (straight angle

那末，假使 ABD 角 =DBC 角，BD 就是二等分 ABC 角. BD 叫做 ABC 角的**二等分線**.

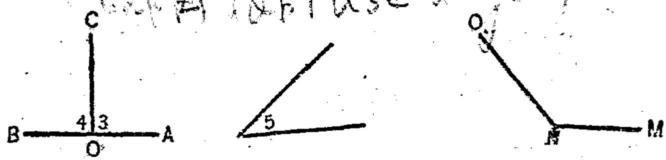
25. 定義. 角的二邊在同一直線上而向反對方向伸張的叫做**平角**; 如 ABC. 銳角 (acute angle)



26. 斜角 定義. 一個角等於半個平角的叫做**直角**.

那末，假使 OC 二等分平角 AOB，3 角和 4 角都是直角.

鈍角 (obtuse angle)



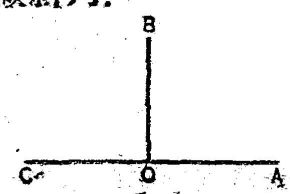
直角　　銳角　　鈍角

27. 定義. 比直角小的角叫做**銳角** 如 5 角.

28. 定義. 比直角大而比平角小的角叫做**鈍角**，如 MNO 角.

29. 定義. 銳角及鈍角都叫做**斜角**.

30. 定義. 若兩直線相交成直角，這兩直線叫做**互相垂直**; 如 AC 和 BO.



垂足

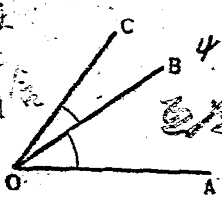
Vertical angles ?

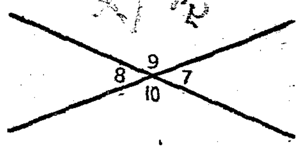
他們的交點(O)叫做**垂足**.

一點至一直線的**距離**，就是從這點到這直線的垂線的長;如 BO.

31. 量角的大小，就是求他包含某一個單位的多少倍. 普通的單位是度(就是一直角的九十分之一). 一度等分做六十份，每份叫做**分**;一分等分做六十份,每份叫做秒　度,分,秒常用記號來表示他,如 $6°50'12''$,讀做六度五十分十二秒,其他的單位還有直角和平角

32. 定義. 兩個角有公共的頂點,其間有一條公共的邊稱爲**鄰角**;如 AOB 角與 BOC 角.



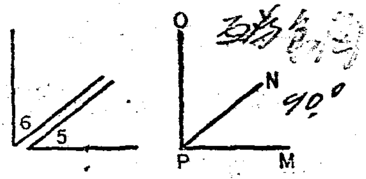


33. 定義. 假使一個角的邊,是他一個角的邊過公共頂點向反對方向的延長線,這兩個角叫做**對頂角**,如 7 角與 8 角,或 9 角與 10 角.

34. 定義. 把兩個角放在一起,使他們成鄰角而**相加**.其不公共的二邊所成的角稱爲二角的**和**.

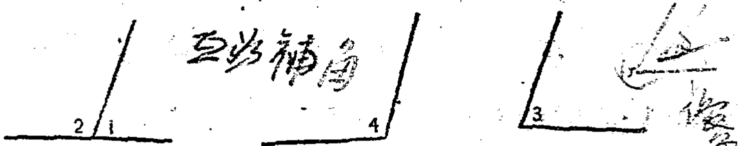
度量 measure

35. 定義. 假使兩個角的和等於一直角,這兩個角叫做互爲**餘角**.



因此每一個角稱爲他一個角的餘角,5 角與 6 角,或 MPN 角與 NPO 角都互爲餘角的.

36. 定義. 假使兩個角的和等於一平角(或兩直角),這兩角叫做互爲**補角**.



因此每一個角稱爲他一個角的補角. 1 角與 2 角,3 角與 4 角,是互爲補角的.

習　　題

1. 一個直角有若干度? 一個平角有若干度? 半個直角有若干度?

2. 三點鐘時鐘面上兩針所成的是什麼角? 六點鐘時如何? 兩點鐘時如何? 五點鐘時如何? 150°

3. 一點鐘時鐘面上兩針所成的是什麼角? 兩點三十分時如何? 105° 五點三十分時如何? 15°

4. 當車輪的輻旋轉$\frac{1}{4}$周的時候,其旋轉的角度是若干度? 旋轉$\frac{1}{6}$

周時是若干度？　旋轉 2 周時是若干度？

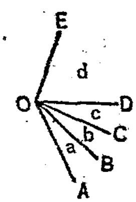
5.　假使一個餅從中心分做 5 等分，其每份角度的大小如何？　分做六等分呢？

6.　假使作二直線一向北而一向東北，他所成的是什麼角？　一向
45
南而一向東南如何？　一向西北而一向西南如何？
90°

7.　假使錶面的長針行 10 分鐘時，其所經的是什麼角？　行 15 分鐘時如何？　行 30 分鐘時如何？　行 45 分鐘時如何？　行一點鐘時如何？

8. 在第 9 題的圖中試用三個字母讀出：$\angle a$，　$\angle b$，　$\angle c$，　$\angle d$，$\angle(a+b)$，$\angle(b+c+d)$.

9.　於此處所示的圖形中求各未知角的數值：



(9)

(a)　若 $\angle a=30°$，$\angle b=40°$，求 $\angle AOC$.

(b)　若 $\angle b=35°$，$\angle c=10°$，求 $\angle BOD$.

(c)　若 $\angle b=40°$，$\angle c=10°$，$\angle d=50°$，求 $\angle BOE$.

(d)　若 $\angle AOC=60°$，$\angle b=40°$，求 $\angle a$.

(e)　若 $\angle AOD=90°$，$\angle a=35°$，$\angle c=10°$，求 $\angle b$.

(f)　若 $\angle AOE=110°$，$\angle a=20°$，$\angle d=30°$，求 $\angle BOD$.

(g)　若 $\angle AOC=60°$，$\angle a=\angle b$，求 $\angle a$.

(h)　若 $\angle AOD=75°$，$\angle a=\angle b=\angle c$，求 $\angle c$.

10.　在前圖中，何角是 $\angle BOC$ 的鄰角？　何角是 $\angle COD$ 的鄰角？何角是 $\angle BOD$ 的鄰角？

11. 如所示的圖形，若 $\angle O=90°$:

(a) 何角是 $\angle a$ 的餘角?

(b) 何角是 $\angle AOC$ 的餘角?

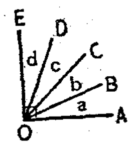
(c) 何角是 $\angle BOE$ 的餘角?

(d) 若 $\angle d=20°$，求 $\angle AOD$.

(e) 若 $\angle b=20°$，$\angle COE=55°$，求 $\angle a$.

(f) 若 $\angle AOC=55°$，$\angle d=15°$，求 $\angle c$.

(g) 若 $\angle a=\angle b=\angle c=\angle d$，求 $\angle a$.



(11)

12. 30° 的餘角是若干度? 35° 的餘角是若干度? $\frac{2}{3}$直角的餘角是若干度? $n°$ 的餘角是若干度? $\frac{1}{n}$直角的餘角是若干度? $(10+x)°$ 的餘角是若干度?

13. 一個角是他的餘角的 2 倍，問這個角是若干度?

14. 如附圖，若 FBA 是一直線:

(a) 何角是 $\angle p$ 的補角?

(b) 何角是 $\angle DBF$ 的補角?

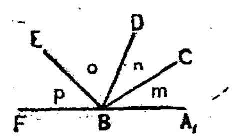
(c) 何角是 $\angle ABE$ 的補角?

(d) 若 $\angle p=40°$，求 $\angle ABE$.

(e) 若 $\angle m=30°$，$\angle p=35°$，求 $\angle CBE$.

(f) 若 $\angle DBF=100°$，$\angle m=\angle n$，求 $\angle m$.

(g) 若 $\angle p=30°$，$\angle m=\angle n=\angle o$，求 $\angle o$.



(14)

*(h) 若$\angle$FBC$=140°$，$\angle$ABD$=80°$，求$\angle n$.

*(i) 若$\angle$ABD$=80°$，$\angle n=35°$，$\angle$CBE$=85°$，求$\angle p$.

15. $20°$ 的補角是若干度？ $140°$ 的補角是若干度？ $\frac{3}{4}$平角的補角是若干度？ $n°$的補角是若干度？ $(50-3x)°$的補角是若干度？

16. 一個角是他的補角的3倍，這個角有若干度？

135°

17. 何種角比較他的補角小？ 何種角等於他的補角？ 何種角比較他的補角大？

直角 鈍角

18. 用代數記號寫：

(a) $n°$的餘角. (b) $x°$的餘角的3倍. (c) $(2x)°$的補角.

(d) $n°$的補角的6倍.

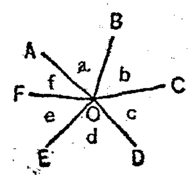
19. 如附圖中求各未知角的數值：

(a) 若$\angle a=80°$，$\angle b=50°$，$\angle c=60°$，$\angle d=90°$，$\angle e=50°$，求$\angle f$.

(b) 若$\angle a=\angle b=\angle c=\angle d=\angle e=\angle f$，求$\angle f$.

*(c) 若$\angle$AOC$=130°$，$\angle b=50°$，$\angle$BOD$=110°$，$\angle$DOF$=140°$，求$\angle f$.

(d) 若$\angle d=90°$，$\angle c=\angle b=\angle a=\angle f=\angle e$，求$\angle a$.

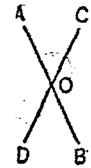


(19)

20. 若二直線AB和CD相交於O，而$\angle$AOC$=60°$，試求其他幾個

習題標以(*)的是難題.

角的度數.



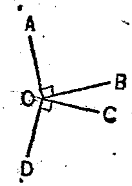
(20,21)

21. 若∠AOC$=m$度,那末∠DOB 有若干度?又∠BOC 有若干度?

22. 若∠AOB=∠COD=90°,求∠AOD.

(a) 若∠BOC=60°.

(b) 若∠BOC=m°.



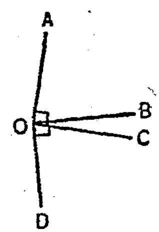
(22,23)

23. BOC 角和 AOD 角有什麼關係?

24. 若 AO 垂直於 CO,BO 垂直於 DO,求∠AOD.

(a) 若∠COB=40°.

(b) 若∠COB=m°.



(24–26)

25. ∠AOD 和∠BOC 有什麼關係?

***26.** 若∠AOC=∠BOD=90°,∠AOD=3∠BOC,求∠BOC.

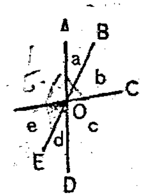
27. 三直線相會於 O 而成六個角:a, b, c, d, e, 及f.

(a) 若∠a=20°,∠b=60°,求∠c.

*(b) 若∠a=15°,∠c=95°,求∠e.

*(c) 若∠f=100°,∠d=20°,求∠b.

*(d) 若∠AOC=85°,∠BOD=155°,求∠e.



(27)

28. 試求互爲補角的兩個鄰角 AOB 和 BOC 的兩個二等分線所成

圓 circle

的角：

(*a*) 若∠AOB＝40°，　　(*b*) 若∠AOB＝60°，

(*c*) 若∠AOB＝m°.

29. 互爲補角的任意兩個鄰角的兩個二等分線所成的角是什麼角？

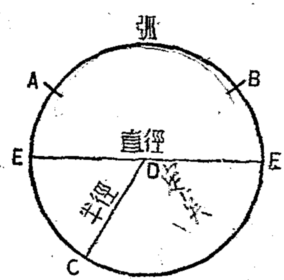
30. 試求互爲餘角的兩個鄰角 AOB 和 BOC 的兩個二等分線所成的角：

(*a*) 若∠AOB＝20°，　　(*b*) 若∠AOB＝30°，

(*c*) 若∠AOB＝m°.

31. 互爲餘角的任意兩個鄰角的兩個二等分線所成的角是什麼角？

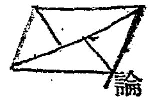
37. 定義. **圓**是在一個平面上的封閉曲線，[1] 其上的各點與一定點(D)等距離；如 ABC.



定點D叫做**中心**，從中心到圓上的任意一點的直線爲**半徑**；如 DC. 圓的任意一部分叫做弧，如AB. 圓的長叫做**圓周**. 圓周這個名詞常指這個曲線，圓是指這面積. 但是近來的用法，往往不拘泥於這種成法.

38. **幾何學所用的器具.** 平面幾何所用的器具祇許兩種，就是圓規和直線尺.

(1)平面上的線，倘使平面的有限部份和其餘的部份分開，叫做封閉線

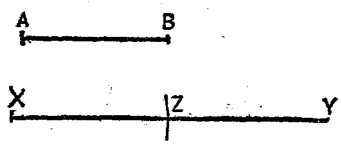


直線尺用來作直線，圓規用來畫圓或弧以及把定長的直線(線分)從一個位置移動到他一個位置.

幾何畫的練習

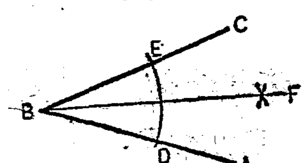
39. 下面的練習是要使學者熟習器具的用法，藉此把幾何的基本概念印在腦中，這個部份與幾何的論理部分並無關係，卽使略去了，與大體並無影響. 其畫法以下列的三種作圖做根據，這裏暫不證明.(與第 83, 86 節比較.)

I. 在 XY 上截取一線使他等於 AB.



以 X 做中心，用 AB 做半徑，畫一弧截 XY 於 Z; 那末 XZ 就是所求的線(第 38 節).

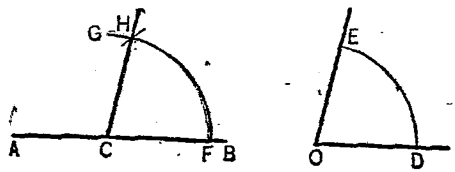
II 二等分一個已知角 ABC.



以B做中心，用任意半徑畫弧遇 AB 於 D，遇 BC 於 E. 又以 D 和

E 做中心,用適當的半徑畫兩個弧使相交於 F. 那末 BF 直線是所求的二等分線.

III. 於已知直線 AB 上的一點 C,作一直線使他和 AB 成一角與 O 角相等.



以 O 做中心,用任意半徑畫弧截 ∠O 的兩邊於 D 和 E. 以 C 做中心,用同一半徑畫弧 FG,交 AB 於 F. 以 F 做中心,用等於 DE[1] 的長做半徑,畫弧交 FG 於 H. 聯結 CH. 那末 ∠BCH 就是所求的角.

習 題

1. 畫兩點 A 和 B(用小點或小交叉來表示),過 A 和 B 作一直線.

2. 畫兩點 A 和 B,以 A 做中心用等於 AB 的長做半徑作一個圓.

3. 畫三點 A, B 和 C,過每兩點作一直線.

4. 畫定長的 AB 和 CD 二直線,但 AB 要比較的長一些, 作直線使他等於:

(a) AB+CD. (d) AB+2(CD).

(b) AB−CD. (e) 3(AB)−2(CD)

(c) 2(AB).

(1)兩個字母如 DE,像上面這樣用法,是指點一直線.

5. 畫一個銳角,而把他分做二等分.

6. 畫一個鈍角,而把他分做二等分.

7. 作一個直角,而把他分做二等分.

8. 畫一個平角,而把他分做二等分.

9. 作兩個角的和.

10. 在 AB 上的一已知點 C 畫一直線使垂直於 AB.

11. 把一個已知角分做 4 等分.

12. 把一個已知角分做 8 等分.

13. 作一個 $90°$ 的角;作一個 $45°$ 的角.

14. 作一個 $22°\ 30'$ 的角;作一個 $135°$ 的角.

15. 作一個 $270°$ 的角;作一個 $67°\ 30'$ 的角.

16. 作一個已知角 A 的補角.

17. 作一個已知角 A 的補角的半分.

18. 作一個已知銳角的餘角.

19. 作一個已知銳角的餘角的半分.

20. 作一個已知銳角的餘角的補角.

21. 作一個已知鈍角的補角的餘角.

22. 畫二個角 A 及 B. A 要比較 B 大一些,再作一個角使他等於:

(*a*) $A+B$. (*b*) $2A$.

(*c*) $180°-A$. (*d*) $90°+A$

(e) $A-B$.　　(f) $\frac{A}{2}$.

(g) $\frac{A}{2}+B$.　　(h) $\frac{A+B}{2}$.

(i) $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$.　　(j) $\frac{A}{2}-\frac{B}{2}$.

(k) $90^\circ+\frac{B}{2}$.　　(l) $\frac{B}{4}$的餘角.

普通名詞

40. 定義. 凡是一莊敍述,能證明他是正確的,叫做**定理**.

如:"設三角形的二邊相等,那末其所對的角亦相等,"這莊敍述是一個定理.這敍述的條件部分叫做**假設**,其斷定而須證實的叫做**終結**.如上一例的假設是"設三角形的二邊相等,"而終結是"那末其所對的角亦相等." 假設有時不明晰的寫出來,而蘊蓄在詞意之間.

41. 定義. 凡題之欲解決的叫做**問題**.

幾何問題解法,或作圖或計算.如"作一個45°角"(17頁13題)是一個**作圖題**. 又如"試計算互為餘角的一對鄰角的二等分線所成的角"(14頁30題)是一個**計算題**.

42. 定義. **命題**是定理及問題的總稱.

43. 定義. 一莊敍述假定為眞確的叫做**公理**.

如:"等量加等量,其和相等,"這個敍述是一個公理.

44. 定義. **幾何公理**是純粹用於幾何學的公理.

從前初等幾何學教本中,幾何公理一個名詞,限定用於幾何的作圖之無須證明的,而近世則大都用上面所說的定義.

45. 定義. 定理之從他一定理容易推得的叫做**系**.

公理和幾何公理

1. 等於同量的量相等,等於等量的量相等.
2. 等量加等量,其和相等.
3. 從等量減去等量,其餘相等.
4. 等量加不等量,其和不等,大者仍大.
5. 從不等量減去等量,其餘不等,大者仍大.
6. 從等量減去不等量,其餘不等,減大量的其餘反小.
7. 等量的同倍量相等.(重要特例:等量的二倍相等.)
8. 等量的同分量相等.(重要特例:等量的半分相等.)

決定 determine

9. 三量中的第一量大於第二量，第二量大於第三量，則第一量大於第三量.

10. 全量等於其諸部分的和.

11. 全量較其任意部分大.

12. 在一個等式或不等式中，一量可以代入他的等量.(簡稱"代入".)

13. 過兩點祗能引一直線(或兩點決定一直線).

14. 兩點間最短的線，是其間的一直線.

15. 平角都是相等的.

16. 相交二直線，不能都和第三直線相平行.

17. 一直線可以延長至任何長.

18. 以任意點做中心，用任意直線做半徑可以畫一個圓.

19. 一個幾何圖形，可以不變他的形狀大小而從一個位置移到別一個位置.

這裏前12個公理是普通公理，其餘的是幾何公理.

若已知一直線上的一點及此直線和某已知直線所成的角，則此直線可以完全決定.

Euclidean geometry

從第 13 條公理，很容易知道下面兩條是合理的：

(*a*) 二直線祇能交於一點。

(*b*) 二無限直線的某一部分能重合，則全部必重合。

習　題

1. 下列敍述指出其假設和終結：

(*a*) 鐵熱則漲。

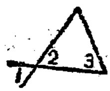
(*b*) 三角形的兩個角相等，則其對邊亦相等。

(*c*) 三角形的各邊，各與他三角形的各邊相等，則兩形爲全同。

(*d*) 對頂角相等。

vertical angles are equal

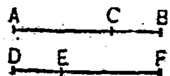
2. 若$\angle 1=\angle 2$，$\angle 2=\angle 3$，爲什麼[1] $\angle 1=\angle 3$？



(2)

(1)這題和以下幾題所問的理由，都是公理。

3. 若 AB＝DF，CB＝DE，爲什麼 AC＝EF？



(3)

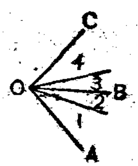
4. 若 GH＝IK，爲什麼 GI＝HK？

5. 若 GI＝HK，爲什麼 GH＝IK？

(4,5)

6. 若 OB二等分$\angle O$，$\angle 1=\angle 4$，爲什麼$\angle 2=\angle 3$？

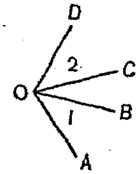
7. 若$\angle 1=\angle 4$，$\angle 3=\angle 2$，爲什麼 OB二等分$\angle O$？



(6,7)

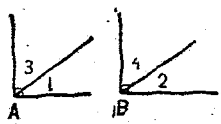
8. 若$\angle 1=\angle 2$，爲什麼$\angle AOC=\angle BOD$?

9. 若$\angle AOC=\angle BOD$，爲什麼$\angle 1=\angle 2$?



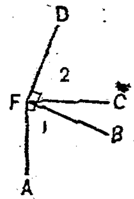
(8,9)

10. 若$\angle A=\angle B$，$\angle 1=\angle 2$，爲什麼$\angle 3=\angle 4$?



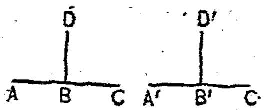
(10)

11. 若$\angle AFC=90^\circ$，$\angle BFD=90^\circ$，爲什麼$\angle 1=\angle 2$?



(11)

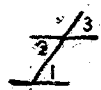
12. 若平角ABC＝平角A′B′C′，爲什麼直角DBC＝直角D′B′C′?



(12)

13. 若$\angle 1+\angle b+\angle 2=180^\circ$，$\angle 1=\angle a$，$\angle 2=\angle c$，爲什麼$\angle a+\angle b+\angle c=180$?

14. 若$\angle 1=\angle 2$，$\angle 2=\angle 3$，爲什麼$\angle 1=\angle 3$?



(14)

第一編

直線和直線形

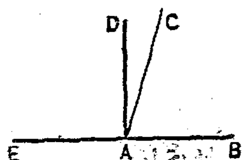
初步定理

46. 直角都是相等的.

因爲平角都是相等的(公理 15),又等量的半分是相等(公理 8).

47. 在一個已知直線上的一個已知點，祇能作一垂線垂直於這個直線.

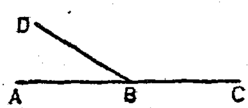
因爲假使在 A 點能作二垂線 AD 和 AC，那末將有兩個不相等的直角 BAD 和 BAC，這是不可能的(46).



48. 同角或等角的餘角相等.(公理 3)

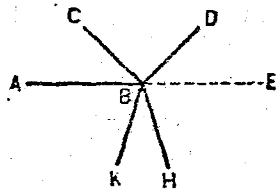
49. 同角或等角的補角相等.(公理 3)

50. 若二鄰角的外邊成一直線，則此二角互爲補角.(公理10)



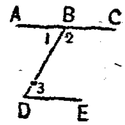
51. 若二鄰角互爲補角，則此二角的外邊成一直線.

因爲二鄰角的外邊夾成一平角(36),所以成一直線(25).



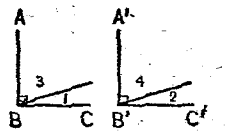
52. 環繞一點而在一平面內的諸角的和等於二平角.

習 題



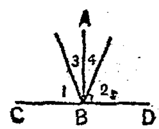
(1)

1. 若ABC是一直線,又$\angle 3$是$\angle 2$的補角,爲什麼$\angle 1=\angle 3$?



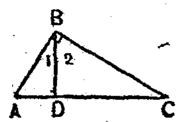
(2)

2. 若$AB\perp BC, A'B'\perp B'C'$,又$\angle 3=\angle 4$, 求證$\angle 1=\angle 2$.



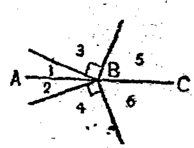
(3)

3. 若$AB\perp CD$, $\angle 1=\angle 2$,求證$\angle 3=\angle 4$.



(4)

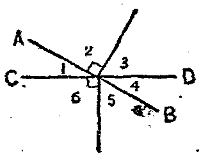
4. 若$\angle ABC$是直角,又$\angle A$是$\angle 1$的餘角,求證$\angle A=\angle 2$.



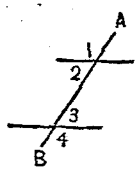
(5)

5. 若$\angle ABC$是平角, $\angle 1=\angle 2$, 又$\angle 3$和$\angle 4$都是直角,求證$\angle 5=\angle 6$.

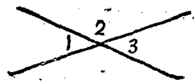
6. 若 AB 和 CD 是直線,又∠2和∠6是直角,求證∠3=∠5.



(6)



(7)



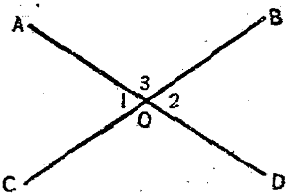
(8)

7. 若 AB 是直線,又∠2=∠3,求證∠1=∠4.

8. 若∠1是∠2的補角,又∠3是∠2的補角,爲什麼∠1=∠3?

命題 I.　定理

53. 對頂角相等.



設　∠1和∠2是對頂角.

求證　∠1=∠2.

證

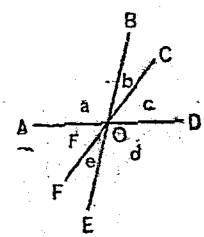
敍　述	理　由
1. AOD 和 COB 都是直線.	1. 假設∠1和∠2是對頂角.
2. ∠1是∠3的補角.	2. 若二鄰角的外邊成一直線,則此二角互爲補角.
3. ∠2是∠3的補角.	3. 理由與2相同.
4. ∴∠1=∠2.	4. 同角的補角相等.

54. 每一個證包含許多的敍述，每一個敍述都有確切的理由做根據.所有的理由祇許是:以前證過的定理,公理,定義,或假設.

(實用題在349—356頁)

習題

1. 三直線 AD, BE, 和 CF, 相遇於 O 而成六個角: a, b, c, d, e, 和 f.



(1,2,3)

(a) 若$\angle b=20°$,又$\angle c=60°$,求$\angle$AOE.

(b) 若$\angle$FOB$=130°$,又$\angle c=40°$,求$\angle a$.

(c) 若$\angle$FOD$=140°$,又$\angle b=60°$,求$\angle a$.

(d) 若$\angle f=60°$,又$\angle b=25°$,求$\angle d$.

(e) 若$\angle b$和$\angle f$互爲餘角,求$\angle d$.

(f) 若$\angle f=\angle b$,又$\angle d=100°$,求$\angle b$.

(g) 若$\angle a=2\angle c$,又$\angle e=60°$,求$\angle c$.

(h) 若$\angle$AOC$=140°$,又$\angle$COE$=120°$,求$\angle$BOD.

2. 在前圖中,求證:

(a) $\angle b+\angle c=\angle$AOE.

(b) $\angle$FOB$-\angle c=\angle a$.

(c) $\angle$FOB$-\angle f=\angle d$.

(d) $\angle f+\angle b+\angle d=180°$

(e) $\angle AOC+\angle BOD+\angle COE=360°$.

(f) $\angle AOC+\angle COE-\angle EOA=2\angle a$.

(g) $\angle f=\angle e$,則$\angle b=\angle c$.

*3.[1] 在前圖中.

(a) 若$\angle AOC=150°$,又$\angle COE=130°$,求$\angle a$.

(b) 若$\angle FOB=140°$,又$\angle AOC=125°$,求$\angle d$.

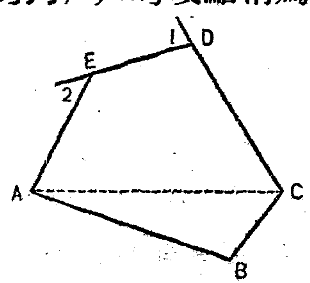
(c) 若$\angle AOE+\angle BOC=140°$,又$\angle c=40°$,求$\angle e$.

(d) 若$\angle FOB=\angle FOD$,求證$\angle f=\angle e$.

(1)習題標以(*)的是難題,在初學者可以略去.

55. 定義. **多邊形**[2]是一封閉的折線. 諸線分叫做多邊形的**邊**. 諸邊的和叫做多邊形的**周圍**.

連續二邊所成的角稱爲多邊形的**角**,角的頂點稱爲多邊形的**頂點**. 多邊形的**外角**是一邊和其連續邊的延長線所成的角. **對角線**是聯結不在同一邊上兩頂點所成的直線.



例如ABCDE是一個五邊的多邊形,AB和BC是邊,$\angle A$是角,B點是頂點,AC是多邊形的對角線,$\angle 1$和$\angle 2$是多邊形的外角.

56. 定義. **四邊形**是四邊的多邊形.

(2)多邊形亦稱多角形.

三角形（第一部）

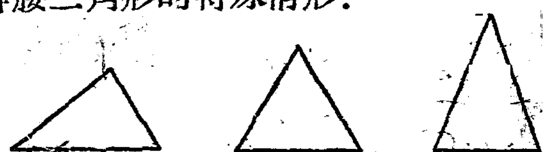
57. **三角形**是三邊的多邊形.

58. 三角形的按邊分類.

三角形沒有二邊相等的叫做**不等邊三角形**.

三角形有兩邊相等的叫做**等腰三角形**.[1]

三角形的各邊都相等的叫做**等邊三角形**. 等邊三角形是等腰三角形的特殊情形.



不等邊三角形　等邊三角形　等腰三角形

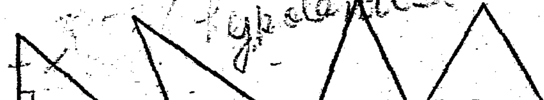
59. 三角形的按角分類.

三角形有一個角是直角的叫做**直角三角形**

三角形有一個角是鈍角的叫做**鈍角三角形**

三角形各角都是銳角的叫做**銳角三角形**.

三角形各角都是相等的叫做**等角三角形**.



直角三角形　鈍角三角形　銳角三角形　等角三角形

(1)等腰三角形亦稱二等邊三角形.

60. 定義. 三角形好像立着在他上面的一邊叫做三角形的**底**. 實在不論那一邊都可當他是底.

等腰三角形的相等的二邊常常叫做**腰**,其餘的一邊叫做底.

對腰的兩個角叫做等腰三角形的**底角**.

61. 定義. 三角形中對底的一個角叫做**三角形的頂角**.

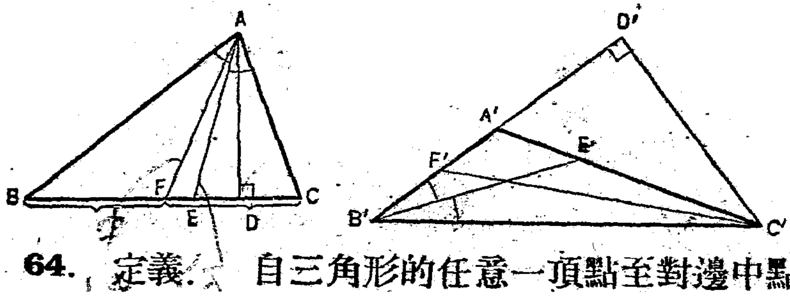
頂角的頂點有時叫做"三角形的頂點.

62. 定義. 直角三角形中對直角的邊叫做直角三角形的**斜邊**.

夾直角的二邊有時叫做**直角邊**.

63. 定義. 從三角形的任意一頂點至對邊(有時須延長)的垂線叫做三角形的**高**.

AD 和 C′D′ 是高. 每一個三角形有三個高.



64. 定義. 自三角形的任意一頂點至對邊中點

的直線叫做三角形的**中線**.

如:AF 和 C′F′ 是中線. 每一個三角形有三條中線.

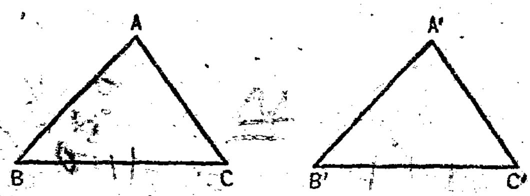
65. 定義. 從三角形的任意一頂點,二等分那頂點的角而止於其對邊的直線叫做三角形的**角二等分線**.

如:AE 和 B′E′ 是角二等分線. 每一個三角形有三條角二等分線.

【註】 學生已熟習幾何作圖練習的(39), 應該作幾個正確的圖表示上面所敍述的各項,譬如直角三角形,鈍角三角形中線,角二等分線,等邊三角形等等.

命題 II. 定理

66. 兩個三角形,一形的兩角及其夾邊,和他形的兩角及其夾邊各各相等,則兩形全同 ($a.s.a. = a.s.a.$).



設 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的 $AB = A'B'$, $\angle A = \angle A'$, 又 $\angle B = \angle B'$.

求證 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

證

敍述	理由
1. 放$\triangle ABC$在$\triangle A'B'C'$的上面,使 AB 和他的等量 $A'B'$ 重合.	1. { 公理19. 由假設 $AB=A'B'$.
2. 於是 BC 將沿 $B'C'$ 而落下. 重合	2. 由假設$\angle B=\angle B'$.
3. AC 將沿 $A'C'$ 而落下.	3. 由假設$\angle A=\angle A'$.
4. C 將落在 C' 上.	4. 二直線祇能相交於一點.
5. $\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.	5. 能使他們重合的兩個圖形叫做全同形.

67. 這種證的方法(重疊法)祇用在證基礎命題的時候,學者應該把其已知相等的某部分先行重合,那末再繼續追求圖形中其他部分的位置.

【註】 爲求便於記憶起見,拿下面的縮寫表示上面的命題.

$$a.\ s.\ a. = a.\ s.\ a.$$ [1]

68. 定義. 各角順次相等的兩個多邊形叫做**互等角多邊形**,各邊順次相等的叫做**互等邊多邊形**.

兩個互等角多邊形,其相似位置的線或角叫做**相當**

1) a 是 angle (角)的略寫, s 是 side (邊)的略寫.

a.s.a) angle 角 side (6

線或相當角(或稱對應線，對應角). 例如 AB 和 A'B'(命題 II)是相當邊; C 和 C' 是相當角,從 A 角和 A' 角所畫的中線是相當中線等.

習　題

1. 假設 $\angle a=30^\circ$, $\angle b=30^\circ$, $\angle c=60^\circ$, $\angle d=60^\circ$.

求證 $\triangle ABC\cong\triangle ADC$.

2. 假設 $\angle a=40^\circ$, $\angle b=40^\circ$, $\angle e=130^\circ$, $\angle d=50^\circ$,又 ACE 是一直線.

求證 $\triangle ABC\cong\triangle ADC$.

3. 假設 在四邊形 ABCD 中, AC 二等分 A 角,又 AC 二等分 C 角.

求證 $\triangle ABC\cong\triangle ADC$.

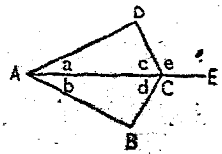
4. 假設 BD 二等分 $\angle B$, $EF\perp BD$.

求證 $\triangle EBD\cong\triangle FBD$.

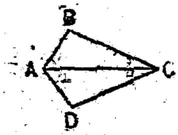
5. 假設 I 是 GH 的中點, $KG\perp GH$, $HL\perp GH$, KL 是一直線.

求證 $\triangle KGI\cong\triangle HLI$.

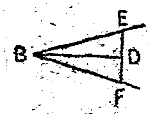
6. 假設 $DB\perp AC$, $\angle 3=\angle 4$,又 BDE 是一直線.



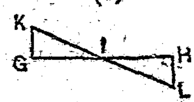
(1,2)



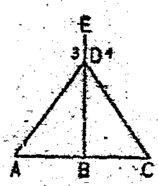
(3)



(4)



(5)



(6,7)

Corresponding #

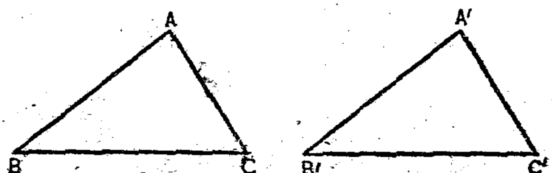
求證　$\triangle ABD \cong \triangle CBD$.

7. 假設　$DB \perp AC$, $\angle ADB$ 是 $\angle 4$ 的補角，又 BDE 是一直線.

求證　$\triangle ABD \cong \triangle CBD$.

命題 III. 定理

69. 兩個三角形，一形的兩邊及其夾角和他形的兩邊及其夾角各各相等，則兩形全同 ($s.a.s. = s.a.s.$).



設　$\triangle ABC$ 和 $A'B'C'$ 的 $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, 又 $\angle B = \angle B'$.

求證　$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

證

敍述	理由
1. 放 $\triangle ABC$ 在 $\triangle A'B'C'$ 的上面，使 BC 和他的等量 $B'C'$ 重合.	1. 幾何圖形得…(公理 19). 由假設 $BC = B'C'$.
2. BA 將沿 $B'A'$ 而落下.	2. 由假設 $\angle B = \angle B'$.
3. A 點將落在 A' 點的上面.	3. 由假設 $AB = A'B'$.

2

4. AC將和A′C′重合.

5. ∴△ABC≅△A′B′C′

4. 過兩點祇能引一直線.

5. 能使他們重合的兩個圖形叫做全同形.

習　題

1. 假設　兩直線AB和CD互相二等分於E.

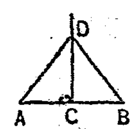
求證　△ADE≅△CEB.(1)

(1)下面的基本習題非常重要，學生須至能證明下列全部簡易定理的時候，纔能再往前進，這類習題的補充題，在蘇氏(*Schultze*)的數學教學法一書中可以找到.

70. 方法 I. 線的相等和角的相等，往往利用全同三角形證明.

【註一】 因爲相等的線可爲兩個全同三角形的相當邊，相等角也是這樣.

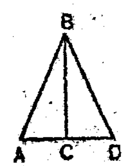
【註二】 學生做每一個習題時，須畫一個草圖.



(2)

2. 假設　DC是AB的垂直二等分線，(就是AC=CB；又DC⊥AB.)

求證　AD=BD.



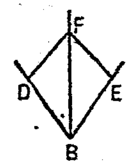
(3)

3. 等腰三角形頂角的二等分線，二等分其底邊.

4. 假設　BF 二等分 $\angle DBE$,

$BD=BE$.

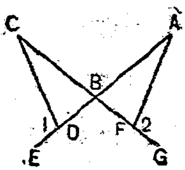
求證　$\angle FDB=\angle FEB$.



(4)

5. 假設　$BD=BF, BC=BA$, 又 CG 及 AE 都是直線.

求證　$CD=AF$.



(5—8)

6. 假設　$BD=BF, CD\perp EA, AF\perp CG$, 又 CG 及 AE 都是直線.

求證　$\angle C=\angle A$.

7. 假設　$BD=BF, \angle 1=\angle 2$, 又 CG 及 AE 都是直線.

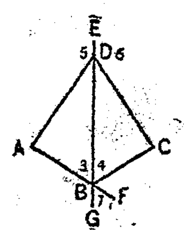
求證　$CB=AB$.

8. 假設　$BD=BF, CF=AD$, 又 CG 及 AE 都是直線.

求證　$\angle C=\angle A$.

9. 假設　$AD=DC, \angle 5=\angle 6$, 又 BE 是一直線.

求證　$\angle A=\angle C$.



(9—11)

10. 假設　$\angle 3=\angle 4, \angle 5=\angle 6$, 又 BE 是一直線.

求證　$AD=DC$.

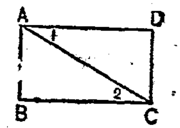
11. 假設　$AB=BC, \angle 4=\angle 7$ 又 AF 及 EG 都是直線,

求證 $AD=DC$.

12. 假設 $AB\perp AD, DC\perp BC$,

又 $\angle 1=\angle 2$.

求證 $\angle B=\angle D$.



(12)

13. 假設 $AD=CE, AB=FE, \angle 3=\angle 4$,

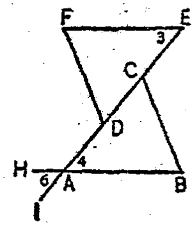
又 AE 是一直線.

求證 $\angle B=\angle F$.

14. 假設 $AD=CE, AB=FE, \angle 3=\angle 6$,

又 EI 及 HB 都是直線.

求證 $BC=FD$.



(13,14)

15. 假設 $\angle EDB=\angle FBD$,

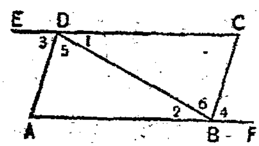
$\angle 5=\angle 6$,又 CE 及 AF 都是直線.

求證 $AD=BC$.

16. 假設 $\angle 3=\angle 4, \angle 5=\angle 6$,

又 EC 及 AF 都是直線.

求證 $AB=DC$.



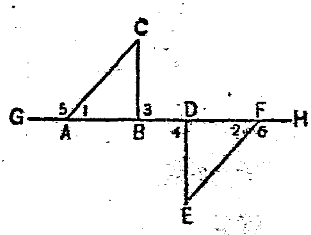
(15,16)

17. 假設 $AD=BF, \angle 1=\angle 2$,

$\angle 3=\angle 4$,又 GH 是一直線.

求證 $\angle C=\angle E$.

18. 假設 $AD=BF; \angle 5=\angle 6$,



(17,18)

AC=FE,又 GH 是一直線.

求證　　BC=DE.

19. 假設　AD⊥EF, CB⊥EF, AD=BC,又EF 是一直線.

求證　　∠C=∠D.

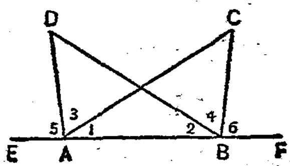
20. 假設　AD=CB, ∠5=∠6,又 EF 是一直線.

求證　　∠1=∠2.

21. 假設　∠5=∠6, ∠1=∠2.

又 EF 是一直線.

求證　　AC=DB.



(19—22)

22. 假設　∠5=∠6, ∠3=∠4,又 EF 是一直線.

求證　　AD=BC.

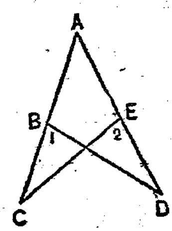
23. 假設　AB=AE, BC=ED,又 AC 及 AD 都是直線.

求證　　CE=BD.

24. 假設　AB=AE, ∠1=∠2,

又 AC 及 AD 都是直線.

求證　　CE=BD.



(23—25)

25.(1) 假設　AC=AD,又 BC=ED.

求證　　∠C=∠D.

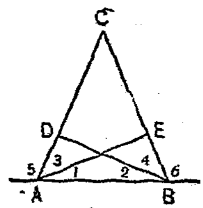
(1)若一線祇用兩個字母來表示他的,如 AC 或 AD,這就是表示他是一個直線.

26. 假設　$\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$,又 AE 及 BD 都是直線.

求證　　AD=BE.

27. 假設　$\angle DAB=\angle EBA$,又 $\angle 3=\angle 4$.

求證　　AD=BE.



(26—29)

28. 假設　$\angle 5=\angle 6$, $\angle 1=\angle 2$,

又 AE 及 DB 都是直線.

求證　　AD=BE.

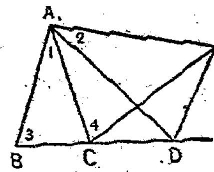
29. 假設　$\angle 5=\angle 6$, AD=BE,又 AE 及 BD 都是直線.

求證　　$\angle 1=\angle 2$.

30. 假設　BCD 是一直線, AB=AC,

AD=AE,又 $\angle 1=\angle 2$.

求證　　BD=CE.



(30,31)

31. 假設　AB=AC, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$,

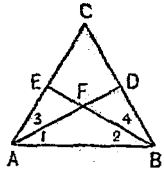
又 AD 是一直線.

求證　　AD=AE.

【註】 下面的習題比較的難一些,因爲所要證明相等的那兩部分,看上去是不同的兩對三角形的相當部分，但是學者必須試驗而決定用着那一對.

32. 假設　$\angle A=\angle B$,又 $\angle 3=\angle 4$.

求證　　AD=BE.



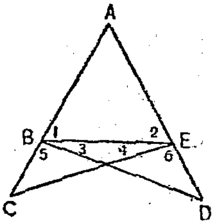
(32,33)

33. 假設　AC=BC,又$\angle 3=\angle 4$.

求證　AD=BE.

34. 假設　$\angle 1=\angle 2$,又$\angle 3=\angle 4$.

求證　EC=BD.



(34—36)

***35.** 假設　$\angle 1=\angle 2$,DB$\perp$AC,又CE$\perp$AD.

求證　$\angle C=\angle D$.

36. 假設　AB=AE,$\angle 5=\angle 6$.

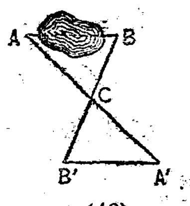
求證　EC=BD.

37. 若三角形的二角相等,那末相當的兩個角二等分線相等.

38. 向等腰三角形兩腰所引的兩個中線相等.

39. 若三角形的兩個外角相等,那末兩個相鄰內角的角二等分線相等.

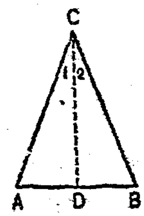
40. 我們要求小池對徑的距離,在便利的地點C立一個木樁,從A點望C點,在AC的延長線上求得A′,使CA′=AC.同樣再延長BC至B′,使CB′=BC.現在要求AB的長,我們必須測量那一條線?並證明他.



(40)

命題IV.　定理

71. 等腰三角形的底角相等



設 $\triangle ABC$ 的 $AC=BC$.

求證 $\angle A=\angle B$.

證

敍述	理由
1. 畫 $\angle C$ 的二等分線延長他使遇 AB 於 D.	1. 每一個角有一個二等分線. 一直線可以任意延長.
2. 在 $\triangle ACD$ 及 BCD 中, $AC=CB$.	2. 假設.
3. $\angle 1=\angle 2$.	3. 由作圖.
4. $CD=CD$.	4. 恆等.
5. $\triangle ACD\cong\triangle BCD$.	5. 兩個 $\triangle$ 有兩邊及其夾角彼此各各相等,則兩形全同.
6. $\therefore \angle A=\angle B$.	6. 全同 $\triangle$ 的相當角相等.

72. 系 1. 等腰三角形頂角的二等分線必垂直於其底,且二等分其底.

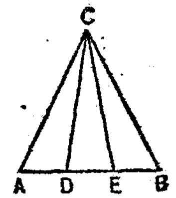
73. 系 2. 一個等邊三角形就是等角三角形.

耕開學後止

習　題

1. 若 AC=BC,又 AE=DB,則 CD=CE.

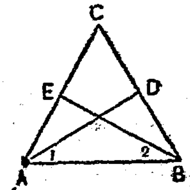
2. 若 AC=BC,又 ∠DCA=∠ECB,則 CD=CE.



(1,2)

3. 若 AC=BC,又 ∠1=∠2,則 AE=BD.

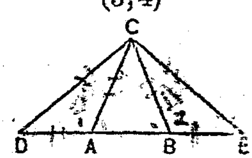
4. 若 AC=BC,又 AD 及 BE 都是角二等分線,則 AD=BE.



(3,4)

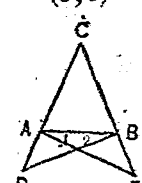
5. 若AC=BC,AD=BE,又DE是一直線,則 DEC 是一個等腰三角形。

6. 若AC=BC,∠ACD=∠BCE,又DE是一直線,則 DEC 是一個等腰三角形.



(5,6)

*7. 若 AC=BC,∠1=∠2,又 CD 及 CE 都是直線,則 ∠D=∠E.



(7)

8. 若三等分等腰三角形的底邊,則聯結頂點和兩分點的直線必相等.

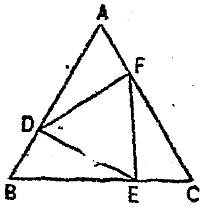
9. 若在等邊三角形 ABC 的三邊中,取 D,E,及 F 而使 AD=BE=CF,則 △DFE是一個等邊三角形.

10. 從等腰三角形的兩腰的中點各作直線至底邊的中點,則兩直線

必相等.

11. 若 $DE=EF=FD$,
又 $\angle AFD=\angle BDE=\angle CEF$,
則 $\triangle ABC$ 是一個等邊三角形.

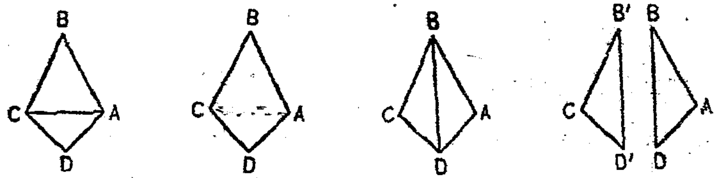
【註】 角的相等有時用命題 IV 來證明(與第 123 節比較).



(9,11)

12. 若 ABC 及 ADC 是在同一 AC 底上的兩個等腰三角形,則 $\angle BAD=\angle BCD$.

13. 若在四邊形 ABCD 中, $AB=BC$, 又 $AD=DC$, 則 $\angle A=\angle C$.



(12) (13) (14) (15)

14. 若 BD 是兩個三角形 ABD 及 DBC 的公共邊, $AB=BC$, 又 $AD=DC$, 則 $\angle A=\angle C$.

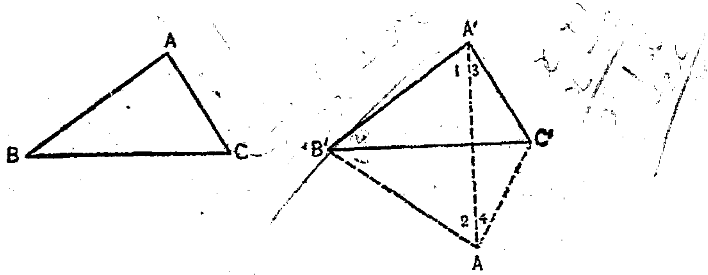
15. 若在兩個三角形 ABD 及 CB′D′ 中, $AD=CD'$, $AB=CB'$, 又 $BD=B'D'$, 則 $\angle A=\angle C$.

【示意】 放 $\triangle$ 在一起,使成一個四邊形.

命題 V. 定理

74. 兩個三角形,一形的三邊和他形的三邊各各

相等,則兩形全同($s.\ s.\ s. = s.\ s.\ s.$).



設　$\triangle$ABC 及 A′B′C′ 的 AB＝A′B′, BC＝B′C′, AC＝A′C′.

求證　　$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

證

敍述	理由
1. 放 $\triangle$ABC 使 BC 和 B′C′ 相重合, 又使 A 和 A′ 落在 B′C′ 的兩旁.	1. { 公理 19. 由假設 BC＝B′C′.
2. 作AA′.	2. 過二點能引一直線.
3. $\triangle$AB′A′ 是等腰三角形.	3. 由假設 AB＝A′B′.
4. $\therefore \angle 1 = \angle 2$.	4. 等腰$\triangle$的底角相等.
5. $\triangle$AC′A′ 是等腰三角形.	5. 由假設 AC＝A′C′.
6. $\therefore \angle 3 = \angle 4$.	6. 與 4 同.
7. $\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$.	7. 等量加等量,其和相等.
8. 或　$\angle A = \angle A'$.	8. 代入.

9. $\because \triangle AB'C' \cong \triangle A'B'C'$.	9. $s.a.s. = s.a.s.$
即 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.	

習 題

1. 等腰三角形的底的中線,必二等分其頂角.

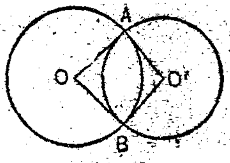
2. 四邊形的對邊各相等,則其對角亦各相等.

75. 方法 II. 我們欲證線或角相等,若所欲證的不是全同三角形的某部分,那末我們應該試作補助線而使之變做全同三角形的相當部分.

習 題

1. 若兩圓的中心是 O 及 O′,兩圓相交於 A 及 B,則 $\angle AOO' = \angle BOO'$.

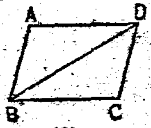
2. 若兩圓的中心是 O 及 O′,兩圓相交於 A 及 B,則 $\angle OAO' = \angle OBO'$.



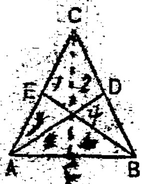
(1,2)

3. 若 $AB = CD$,又 $BC = DA$,則 $\angle ABD = \angle BDC$.

4. 若 $AE = BD$, $AD = BE$,又 AC 及 BC 都是直線,則 $\angle CEB = \angle CDA$.



(3)

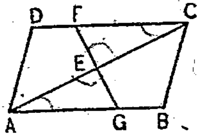


(4)

76. 方法 III. 若所欲證的一對三角形的全相同,不能證明,那末先證別的一對或幾對的全相同,然

後利用其相當部分因而使原有的一對也能證明.

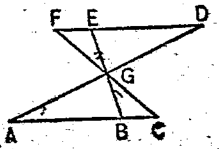
5. 若四邊形的各對邊相等,作一直線使過對角線的中點而止於其兩邊,則此直線被對角線所二等分.



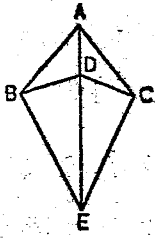
(5)

6. 若 AG=GD, CG=FG, 又所有的線都是直線,則 BG=GE.

7. 若 AB=AC, AE 二等分∠BAC,又 AE 是一直線,則∠DBE=∠DCE.



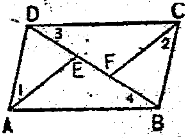
(6)



(7)

8. 若 AB=CD, BC=DA, ∠1=∠2, 又 DB 是一直線,則 AE=CF

9. 若 AB=CD, ∠3=∠4, 又 BF=DE, 則∠1=∠2.



(8,9)

10. 兩個三角形,各有兩邊及其中一邊的中線,彼此皆相等,則兩形全同.

CM = C'M'

11. 兩個等腰三角形,各有一腰及聯結兩腰中點的一直線,彼此皆相等,則兩形全同.

PE = P'E'

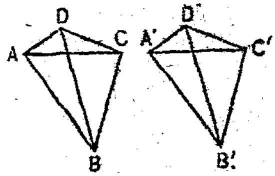
12. 若四邊形的對邊各相等,則其兩對角線互相二等分.

13. 兩個三角形 ABC 及 A'B'C' 的 AB=A'B', ∠A=∠A', 又角二等分線 AD=角二等分線 A'D', 則兩形全同.

AO = OC

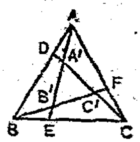
BO = OD

14. 在四邊形 ABCD 中，若 $AB=BC$，$CD=DA$，又對角線 AC 與 BD 相交於 E，則 $AE=EC$.



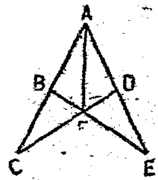
(15)

15. 在四邊形 ABCD 及 A′B′C′D′ 中，若 $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $CD=C'D'$, $DA=D'A'$，又 $AC=A'C'$，則 $BD=B'D'$.



(16)

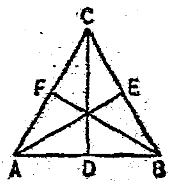
***16.** 在等邊三角形 ABC 的各邊上，取 D, E, F 諸點，使 $AD=BE=CF$，又使 D, E, F 各與所對的角頂點相聯結，則 $\triangle A'B'C'$ 是一個等邊三角形.



(18)

***17.** 若六邊形的對邊各相等，又有兩個相對的角相等，則所有相對的角都各相等.

***18.** 若 $AB=AD$, $AC=AE$，又 BE 及 DC 都是直線，則 $\angle BAF=\angle DAF$



(19)

***19.** 若 $\angle A=\angle B$，又 $AF=BE$，則 $AD=DB$.

77. 方法 IV. 欲證一個角是直角，往往證明他與鄰角互爲補角而相等. (統)

20. 一個等邊四邊形的對角線必互相垂直.

21. 一個等腰三角形的底的中線,必垂直於底.

22. 在四邊形 ABCD 中,若 AB=BC,又 CD=DA,則 BD⊥AC.

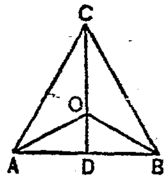
23. 若 AC=BC,又 AO=BO,

則 CD⊥AB.

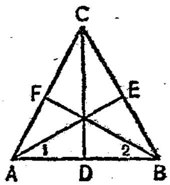
*24. 若 AC=BC,

又　$\angle 1=\angle 2$,

則　CD⊥AB.

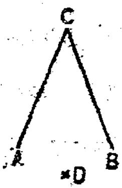


(23)



(24)

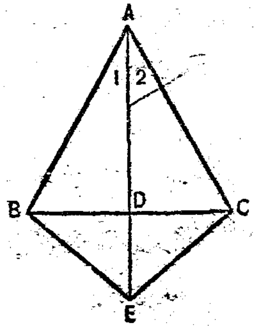
78. 若 AC=BC,則 C 點稱爲與其他 A, B 兩點等距離.



這裏的兩直線可以不必畫,那末我們雖然沒有畫 DA 及 DB,也可以說 D 與 A 及 B 是等距離. 通常,兩個字母,譬如 AD,意思就是聯結 A 及 D 的一直線.

命題 VI. 定理

79. 兩點各與一直線的兩端等距離,則此兩點決定此直線的垂直二等分線.



設　直線 BC 及 A, E 兩點,而 AB=AC, BE=EC.

求證　AE 是 BC 的垂直二等分線.

證

敍述	理由
1. $AB=AC, BE=EC$.	1. 假設.
2. $AE=AE$.	2. 恆等.
3. $\triangle ABE \cong \triangle AEC$.	3. s. s. s. = s. s. s.
4. $\angle 1=\angle 2$.	4. ≅△的相當∠s相等.
5. $\triangle ABC$ 是等腰三角形	5. 由假設 $AB=AC$.
6. 直線 ADE 是 BC 的垂直二等分線.	6. 等腰 △ 頂 ∠ 的二等分線必 ⊥ 於其底且二等分其底.

80. 系　與一直線兩端等距離的諸點，必在此直線的垂直二等分線上.

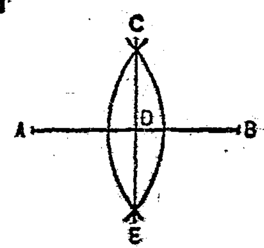
習　題

若一個四邊形的四邊都相等，則其對角線互相二等分.

作圖題

命題 VII　作圖

81. 二等分一已知直線.



設　一直線 AB.

求　二等分 AB.

作法　以 A 及 B 做中心，用相等而大於

$\frac{1}{2}$AB 的半徑，畫弧相交於 C 及 E. 畫 CE.

則直線 CE 二等分 AB 於 D.

證

敍述	理由
1. C 與 A 及 B 等距離.	1. 作圖.
2. E 與 A 及 B 等距離.	2. 作圖.
3. ∴ AD = DB.	3. 兩點各與一直線的兩端等距離，則此兩點決定此直線的垂直二等分線.

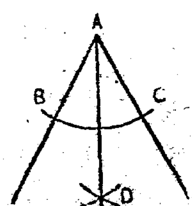
82. 系. 用上面的作圖法，我們能作一已知直線(AB)的垂直二等分線(CE).

習　題

1. 分一已知直線爲四等分.
2. 作一個三角形的三條中線.
3. 作一個三角形三邊的三條垂直二等分線.

命題 VIII. 作圖題

83. 二等分一個已知角.



設 ∠CAB.

求 二等分 ∠CAB.

作圖法. 以 A 做中心，用任意半徑 AB，畫一弧，

截∠A 的兩邊於 B 及 C.

以 B 及 C 做中心，用相等而大於 B 至 C 的距離的 $\frac{1}{2}$ 做半徑，畫兩弧相交於 D. 畫 AD.

則 AD 是所求的二等分線.

【示意】 欲證 AD 是二等分線，先畫 BD 及 DC，那末證明兩個△的全同.

84. 最好作圖的線要畫細線或虛線，而已知線及所求的線要用粗的實線. 在繁複的作圖中，所求的線可用紅線或藍線.

習　題

1. 分一個已知角為四等分.

2. 二等分一個平角.

3. 作一個 90° 的角，作一個 45° 的角.

4. 作一個 22°30′ 的角.

5. 作一個 67°30′ 的角.

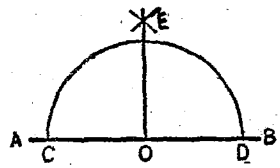
6. 作一個已知角的補角的半份.

7. 作一個三角形的三條角二等分線.

命題 IX. 作圖題

85. 在一已知直線上的一已知點，求作此直線的

垂線.



設 O 為直線 AB 上的一點.

求在 O 點作 AB 線的垂線.

作圖法. 以 O 做中心,用任意半徑 OC,畫弧交 AB 於 C 及 D.

又以 C 及 D 做中心,用相等而大於 OC 的半徑,畫兩弧相交於 E.

畫 OE.

OE 是所求的垂直線.

【註一】 畫 CE 及 DE. 證明兩 △ 全同. 那末證明 OE 是在 O 點垂直於 AB. 參閱 49 頁命題 7 證明.

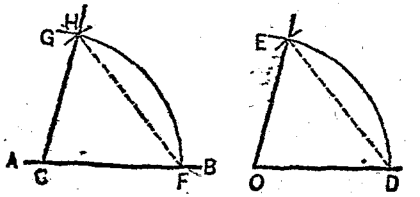
【註二】 無論何時,學者作出一圖,務須證明所作的是正確的.

習　題

1. 作一個已知銳角的餘角.
2. 作一個已知銳角的餘角的補角.
3. 作一個已知銳角的餘角的半份.
4. 作一個直角三角形,已知其兩直角邊各等於 1 吋及 $1\frac{1}{2}$ 吋.

命題 X.　作圖題

86. 過一已知直線上的一已知點,畫一直線使與已知直線成一已知角.



設直線 AB 上的一點 C，及 ∠O.

求於 C 點作一個角 = ∠O.

作圖法. 以 O 做中心，用任意半徑，畫弧截 ∠O 的兩邊於 D 及 E. 又以 C 做中心，用同一半徑，畫 FG 弧交 CB 於 F. 以 F 做中心，用等於 DE 的半徑，畫弧交 FG 弧於 H. 畫 CH.

則 ∠HCF 是所求的角.

【示意】 證明兩個 △ 全同，即可證明這個命題.

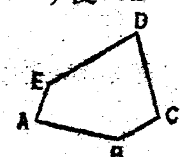
【註】 兩個字母，如上面所用的 DE，表示一直線.

習 題

1. 作一個角使他等於一個已知角的兩倍.

2. 作一個角使他等於一個已知角的補角的兩倍.

3. 已知一個三角形 ABC. 另作一個三角形 A′B′C′，使 A′B′ = AB，∠A′ = ∠A，又 ∠B′ = ∠B. △ABC 和 A′B′C′ 有什麼關係？



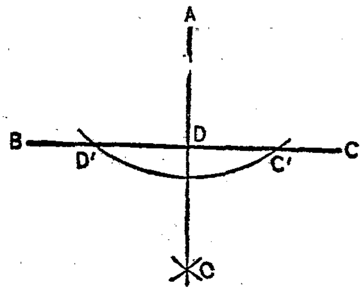
(4)

4. 已知一個五邊的多邊形(五邊形)ABCDE.

另作一個五邊形，使有四邊各等於 AB，BC，CD，及 DE，又使其夾角各於 $\angle$s B，C，及 D.

命題 XI. 作圖題

37. 自一直線外的一點，作此直線的垂線.



設一直線 BC 和此直線外的一點 A.

求自 A 點作此直線的垂線.

作圖法. 以 A 做中心，用適當大的半徑，畫弧截 BC 於 C′ 及 D′.

又以 D′ 及 C′ 做中心，用相等而大於 $\frac{1}{2}$D′C′ 的半徑，畫兩弧相交於 O. 畫 AO 與 BC 相交於 D.

則 AD 是所求的垂線.

(學者試自證明之. 用 § 79).

【註】 從這個命題，我們能推想到自一已知直線外的一點，必能作這直線的一垂線.

習　題

1. 作一個銳角三角形的三個高

2. 作一個鈍角三角形的三個高，作一個直角三角形的三個高.

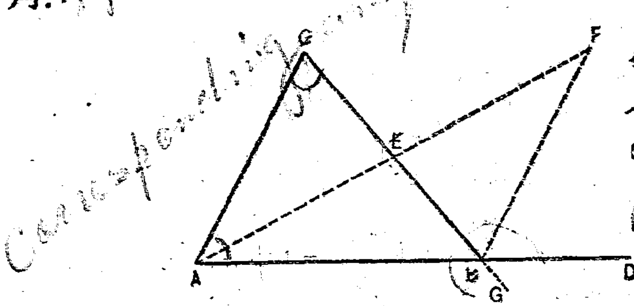
3. 作了三角形的三個高之後，你對於這三個高有什麼發見？

4. 在一個三角形中，其他有什麼線同樣有這種的情形？

5. 已知斜邊和一個 45° 的角，求作一個直角三角形.

命題 XII. 定理

88. 三角形的外角，大於其不相鄰的任意一個內角.



外角大於其不相鄰之內角

設 △ABC 及其外角 CBD.

求證　　∠CBD > ∠C 或 ∠A.

證

敍　述	理　由
1. 設 E 是 BC 的中點，畫 AE 而延長至 F，使 EF=AE，畫 FB.	1. 每一直線有一個二等分點. 二點間可畫一直線. 一直線可以延長.

（續）

2. 在△ACE及FBE中，AE=EF.	2. 作圖.
3. EC=BE.	3. 作圖.
4. ∠CEA=∠FEB.	4. 對頂角相等.
5. △ACE≅△FBE.	5. s. a. s.=s. a. s.
6. ∠EBF=∠C.	6. ≅△的相當部分相等.
7. ∠CBD>∠EBF.	7. 全量比其任意部分大.
8. 所以∠CBD>∠C.	8. 代入.

【註】 聯結C和AB的中點，那末

$$\angle ABG>\angle A,\quad \angle ABG=\angle CBD.$$

$$\therefore \angle CBD>\angle A.$$

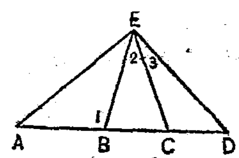
習　題

1. 若AD是一直線，求證

   (a) ∠1>∠2,

   (b) ∠1>∠D,

   (c) ∠1>∠3.

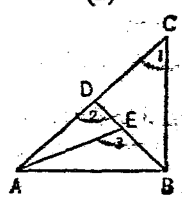


(1)

2. 若DB是一直線，求證

   (a) ∠2>∠1,

   (b) ∠3>∠1.



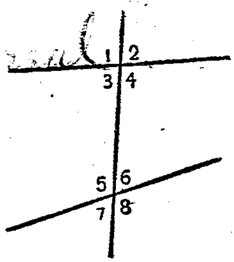
(2)

3. 在命題XII的圖中，求證

(*a*) $\angle FBD > \angle F$, (*b*) $\angle BEA > \angle ACE$,

(*c*) $\angle CEA > \angle GBD$, (*d*) $\angle CBD > \angle CEF$.

89. 定義. 與二(或多於二)直線相交的一直線,叫做**截線**,二直線與一截線所成各角的名稱如下:



1, 2, 7, 8 是**外角**.

3, 4, 5, 6 是**內角**.

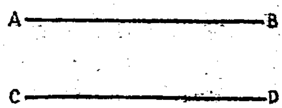
1 和 8, 2 和 7 是**外錯角**.

3 和 6, 4 和 5 是**內錯角**.

1 和 5, 2 和 6, 3 和 7, 4 和 8 是**同位角**.

平行線

90. 定義. 在同一平面上任何延長(向各方向)而永不相交的二直線,叫做**平行線**.



譬如, AB 和 CD 表示二平行線.

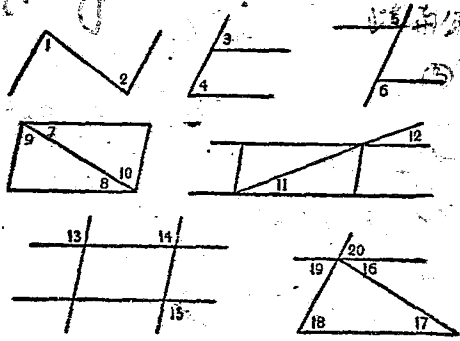
91. 公理 16. 相交兩直線,不能都和第三直線相平行.

【註】 我們假定,在同一平面上的兩無限直線不是相交,就是平行.

92. 定理. 兩直線各與第三直線平行，則此兩直線必互相平行.

因爲假使兩直線相交，那末相交兩直線都和第三直線平行，和公理16違背.

習　題



1. 在上面所設的圖中，說出下列諸角是何種角:

1 和 2， 3 和 4， 5 和 6， 7 和 8， 9 和 10， 11 和 12， 13 和 14，

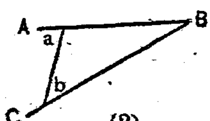
14 和 15， 16 和 17， 18 和 19， 18 和 20.

2. 若 AB 和 BC 都是直線，能否

(a). $\angle a=60°$，而 $\angle b=50°$？

(b) $\angle a=60°$，而 $\angle b=70°$？

(c) $\angle a=60°$，而 $\angle b=60°$？



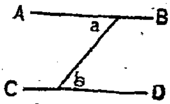
(2)

3. AB 和 CD 的延長線(就是向右延長)能否相交，若

(a) $\angle a=60°$，而 $\angle b=50°$？

(b) $\angle a=60°$，而 $\angle b=70°$？

(c) $\angle a=60°$，而 $\angle b=60°$？



(3—5)

4. BA 和 DC 的延長線(就是向左延長)能否相交，若

(a) $\angle a=60°$，$\angle b=70°$？

(b) $\angle a=60°$，$\angle b=50°$？

(c) $\angle a=60°$，$\angle b=60°$？

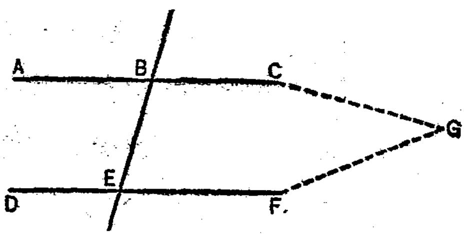
5. 兩直線任意延長能否相交，若

(a) $\angle a=50°$，而 $\angle b=50°$？

(b) $\angle a=60°$，而 $\angle b=60°$？

命題 XIII. 定理

93. 兩直線被一截線所截，若其一對內錯角相等，則此兩直線平行.(1)



設 AC 和 DF 被 BE 所截，而 $\angle ABE=\angle BEF$.

求證 $AC \parallel DF$.

證

敍述	理由
1. AC//DF 或 AC 不//DF.	**1.** 祇有兩種假設的可能.（第 91 節註）
2. 若 AC 與 DF 不平行，相交於 G 點而成 △EBG.	**2.** 不平行直線的定義.
3. ∠ABE>∠BEG.	**3.** △的外角＞其不相鄰的任意一個內角.
4. 這是不可能的.	**4.** 由假設. ∠ABE=∠BEG.
5. ∴AC//DF.	**5.** 已證明他一個假設不成立.

(1)在上面這個證明中我們作一個錯誤的假設，就是，若內錯角相等則兩直線相交. 圖中要說明這個錯誤的假設，所以圖形必須不正確，而兩個角不是眞實相等. 照這樣，凡是在證中要探討錯誤的假設（所謂間接證法）都用不正確的圖形來說明，若要使圖形正確，那反不合理了.

94. 方法 V. 欲證明兩直線平行，祇須證明一對內錯角的相等.

習題

1. 求證 AB 與 CD 平行，若

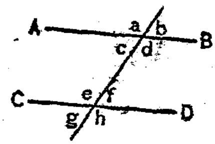
(a) $\angle c=70^\circ$，$\angle f=70^\circ$.

(b) $\angle c=60^\circ$，$\angle e=120^\circ$.

(c) $\angle a=110^\circ$，$\angle f=70^\circ$.

(d) $\angle b=60^\circ$，$\angle f=60^\circ$.

(e) $\angle a=120^\circ$，$\angle g=60^\circ$.



(1—4)

2. 求證 AB∥CD，若 $\angle b=\angle f$.

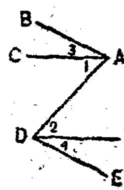
3. 求證 AB∥CD，若 $\angle a=\angle h$.

4. 求證 AB∥CD，若 $\angle b=\angle g$.

5. 若 $\angle 1=\angle 2$，又 $\angle 3=\angle 4$，求證 AB∥DE.

6. 若 $\angle A=\angle D$，又 $\angle 3=\angle 4$，求證 AC∥DF.

7. 若 BA⊥AD，ED⊥AD，又 $\angle 3=\angle 4$，求證 AC∥DF.

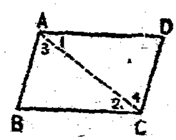


(5—7)

8. 若 AB 與 CD 互相二等分於 E，求證 AC∥DB.

9. 若 AB＝DC，又 $\angle 3=\angle 4$，求證 AD∥BC.

10. 若 AB＝DC，又 AD＝BC，求證 AB∥DC.

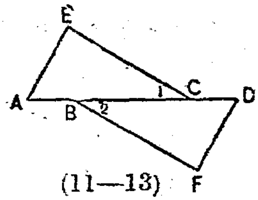


(9—10)

11. 若 AB＝CD，EC＝BF，$\angle 1=\angle 2$，又 AD 是一直線，則 AE∥DF.

12. 若 AE＝DF，AB＝CD，又 EC＝BF，則 EC∥BF.

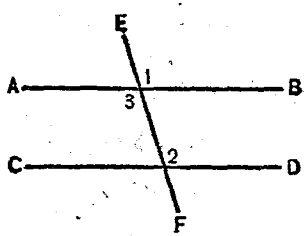
13. 若 AB＝CD，∠ABF＝∠DCE，EC＝BF，又 AD 是一直線，則 AE∥DF.



(11—13)

命題 XIV. 定理

95. 兩直線被一截線所截，若其一對同位角相等，則此兩直線平行. 內錯角等，兩綫平行



設　AB 和 CD 被 EF 所截，而 ∠1＝∠2.

求證　AB∥CD.

證

敘述	理由
1. ∠1＝∠2.	1. 假設.
2. ∠1＝∠3.	2. 對頂 ∠s 相等.
3. ∠2＝∠3	3. 等於同量的量相等.
4. ∴ AB∥CD.	4. 一對內錯角相等，則兩直線平行.

96. 系. 兩直線皆垂直於第三直線,則此兩直線平行.

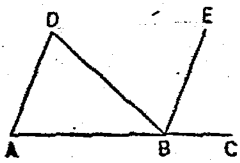
習　題

1. 在60頁習題1的圖中,若$\angle a=2\angle b$,又$\angle f=60^\circ$,則AB//CD.

2. 若$\angle A=70^\circ$, $\angle ABD=60^\circ$, $\angle DBE=50^\circ$, 又AC是一直線,求證AD//BE.

3. 若BE二等分$\angle DBC$, $\angle ABD=30^\circ$, $\angle A=75^\circ$,又AC是一直線,則AD//BE.

4. 若AB=BD,又$\angle D=\angle EBC$,則AD//BE.

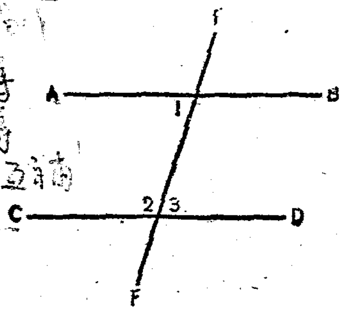


(2—4)

命題XV. 定理

97. 兩直線被一截線所截,若在截線同旁的一對內角相補,則此兩直線平行.

a 若內錯角相等
b 若同位角相等
c 若同側內角互補
d 同垂直線



設 AB和CD被EF所截,而$\angle 1$和$\angle 2$相補.

求證 AB//CD.

證

敍述	理由
1. ∠1是∠2的補角.	1. 假設.
2. ∠3是∠2的補角.	2. 若二鄰角的外邊成一直線,則此二角互爲補角.
3. ∠1=∠3.	3. 同角的補角相等.
4. ∴ AB∥CD.	4. 若一對內錯角相等,則兩直線平行.

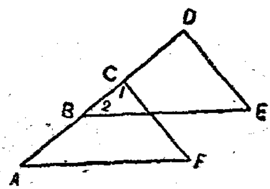
98. 方法 VI.　欲證明兩直線的平行，有時須證明:

(a)　兩個同位角相等;或

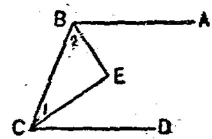
(b)　在截線同旁的兩個內角相補.

習　題

1. 若 AF=BE, AB=CD, ∠A=∠2, 又 AD是一直線, 求證 AF∥DE.



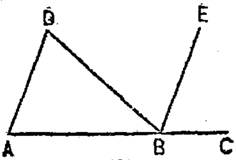
(1)



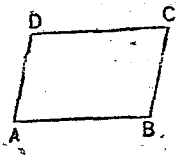
(2)

2. 若 BE 二等分 ∠B, CE 二等分 ∠C, 又 ∠1+∠2=90°, 則 BA∥CD.

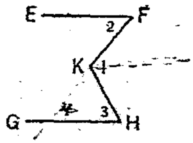
3. 若 AB=BD, 又 ∠D 是 ∠ABE 的補角, 則 AD∥BE.



(3)



(4)



(5)

4. 若 ∠A+∠B+∠C+∠D=360°, ∠A=∠C, 又 ∠B=∠D, 則 AD∥BC.

*5. 若 ∠1=∠2+∠3, 則 EF∥GH.

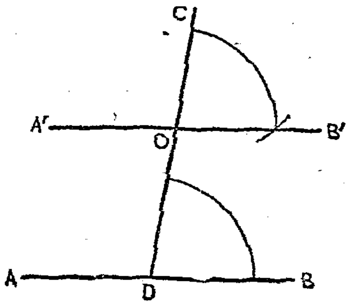
99. 欲作兩個圖形使其某部分互相有某種關係, 可以應用證明某種關係的方法. 譬如, 欲畫一直線平行於另一直線, 我們可以作一對相等的內錯角; 欲使一個角等於另一個角, 我們用作法 (86) 而這種作法實際上包含全同三角形的作法.

命題 XVI. 作圖題

100. 過一已知點作一已知直線的平行線.

設 直線 AB 和點 O.

求作過 O 而 ∥AB 的直線.



作圖法．過 O 畫 DC 交 AB 於 D．

在 O 作 $\angle COB' = \angle ODB$．

∴ $A'B'$ 是所求的直線．

【示意】欲證兩直線的平行，該用什麼方法？

【註】在一作圖題中，若引用以前的作法，其作法無需詳細敍述．譬如，在上面的作圖題中，假使詳細說明作 $\angle COB' = \angle ODB$ 的方法，那就呆笨而不合於理了．

然初學者必須把圖的各部分仔細的畫出來．換句話說，就是必須運用直線尺和圓規很正確的把圖作出來．

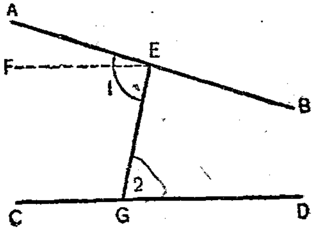
習　題

1. 用內錯角相等的方法，作一直線使過一已知點而平行於一已知直線．

2. 用 60 頁第 8 題的方法，作一直線使過一已知點而平行於一已知直線

命題 XVII.　定理

101. 兩直線被一截線所截，若其一對內錯角不等，則此兩直線不平行.　定理



設　AB 和 CD 被一截線所截，而

$$\angle 1 > \angle 2.$$

求證　AB 不平行於 CD

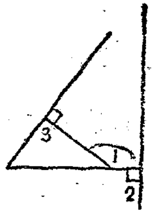
證

敍述	理由
1. 畫 EF，使 $\angle FEG = \angle 2$.	1. 畫一直線與已知直線成一已知角.
2. EF//CD.	2. 若一對內錯角相等則兩直線平行
3. ∴ AB 不平行於 CD.	3. 相交二直線，不能都與第三直線相平行.

102. 系.　兩直線各垂直於相交兩直線，則此兩直

線不平行.

【示意】 證明$\angle 1 > \angle 2$.



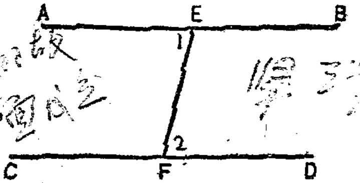
103. 一個命題是另一個命題的逆定理，假使他的假設和終結各是另一個命題的終結和假設.

Converse Theorem

命題 XVIII. 定理

104. 兩平行線被一截線所截,則其內錯角相等.

〔命題 XIII 的逆定理.〕



設 兩平行線 AB 和 CD,兩內錯角 1 和 2.

求證 $\angle 1 = \angle 2$.

證

敍述	理由
1. $\angle 1 = \angle 2$. 或 $\angle 1 \neq \angle 2$.	1. 祇許有這兩種假設.
2. 假定$\angle 1 \neq \angle 2$,那末	2. 兩直線被一截線所截,若

AB不$\parallel$CD.

3. 但是這是不可能的.

4. $\therefore \angle 1=\angle 2$.

其一對內錯角不等，則此兩直線不平行.

3. 由假設,AB$\parallel$CD.

4. 已證明另一假設是錯誤的.

105. 系. 若一截線垂直於兩平行線的一線，則亦必垂直於他一線.

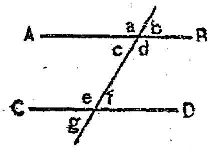
習 題

1. 兩$\parallel$線AB和CD被一截線所截.

(a) 若$\angle c=70^\circ$,求$\angle f$.

(b) 若$\angle c=80^\circ$,求$\angle e$.

(c) 若$\angle c=75^\circ$,求$\angle g$.



(1—3)

2. 若AB$\parallel$CD,又

(a) $\angle a=110^\circ$,求$\angle f$.

(b) $\angle b=80^\circ$,求$\angle g$.

(c) $\angle h=100^\circ$,求$\angle b$.

3. 若AB$\parallel$CD,求證

(a) $\angle a=\angle e$.

(b) $\angle b=\angle f$.

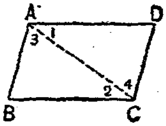
(c) $\angle a=\angle h$.

(d) $\angle c$ 是 $\angle e$ 的補角.

(e) $\angle g$ 是 $\angle d$ 的補角.

4. 若 AD=BC, 又 AD∥BC, 則 $\angle 3=\angle 4$.

5. 若AB∥CD, 又 AD∥BC, 則 $\angle B=\angle D$.



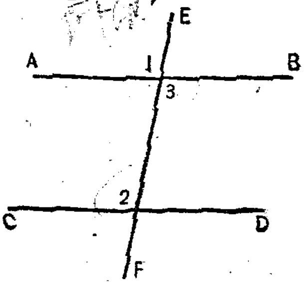
(4,5)

命題 XIX. 定理

106. 兩平行線被一截線所截,則其同位角相等.

〔命題 XIV 的逆定理.〕

截線 Transversal



設 兩平行線 AB 和 CD,及兩同位角 1 和 2.

求證 $\angle 1=\angle 2$.

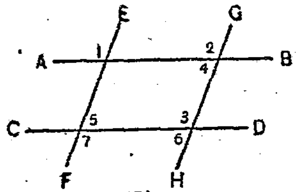
證

敍述	理由
1. $\angle 1=\angle 3$.	1. 對頂 $\angle$s 相等.
2. $\angle 2=\angle 3$.	2. ∥線的內錯 $\angle$s 相等.
3. $\therefore \angle 1=\angle 2$.	3. 等於同量的量相等.

(校)

習　題

1. 若 AB∥CD，又 EF∥GH，求證



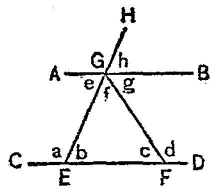
(1)

(a)　$\angle 1=\angle 3$.

(b)　$\angle 4=\angle 5$.

(c)　$\angle 2=\angle 7$.

2. 若 AB∥CD，又 EH 是一直線，求下列諸角的數值：



(2,3)

(a)　若 $\angle g=80^\circ$，求 $\angle d$.

(b)　若 $\angle h=60^\circ$，求 $\angle a$.

(c)　若 $\angle b=60^\circ$，又 $\angle c=70^\circ$，求 $\angle$FGH.

(d)　若 $\angle$FGH$=140^\circ$，又 $\angle c=80^\circ$，求 $\angle b$.

(e)　若 $\angle b=65^\circ$，又 $\angle c=70^\circ$，求 $\angle f$.

(f)　若 $\angle f=50^\circ$，又 $\angle c=70^\circ$，求 $\angle b$.

(g)　若 $\angle e=55^\circ$，又 $\angle c=75^\circ$，求 $\angle$HGF.

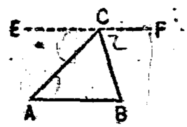
3. 若 AB∥CD，求證

(a)　$\angle$FGH$=\angle b+\angle c$.

(b)　$\angle f=180^\circ-\angle b-\angle c$.

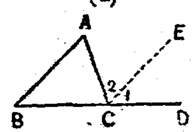
(c)　$\angle$CEH$=\angle f+\angle c$.

(d)　$\angle b+\angle f+\angle c=180^\circ$.



(4)

4. 求證 △ABC 的三個角的和等於 180°.



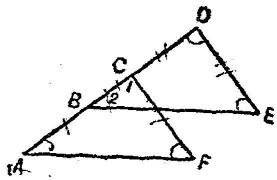
(5)

5. 若 ACD 是三角形ABC 的一個外角，則

$\angle ACD=\angle A+\angle B$.

6. 若AD是一直線，$AB=CD$，$AF \parallel BE$，又$CF \parallel DE$，則$DE=CF$.

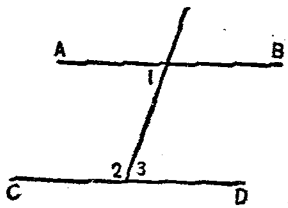
7. 若$AB=CD$，$CF=DE$，$CF \parallel DE$，又AD是一直線，則$AF=BE$.



(6,7)

命題XX.　定理

107. 兩平行線被一截線所截，則在截線同旁的內角相補.〔命題XV的逆定理.〕



設　$AB \parallel CD$，又內角1和2在截線的同旁.

求證　$\angle 1$是$\angle 2$的補角.

證

敘述	理由
1. $AB \parallel CD$.	1. 假設.
2. $\angle 1=\angle 3$.	2. $\parallel$s的內錯$\angle$s相等.
3. $\angle 3$是$\angle 2$的補角.	3. 若二鄰角的外邊成一直線，則此二角互爲補角.
4. $\therefore \angle 1$是$\angle 2$的補角.	4. 代入.

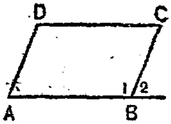
習　題

1. 若 $AB \parallel CD$, 又 $AD \parallel BC$, 求證

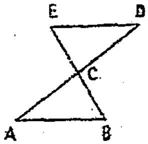
(a) $\angle 2$ 是 $\angle D$ 的補角.

(b) $\angle A = \angle C$.

2. 若 $ED \parallel AB$, $AC = CD$, 又 EB 和 AD 都是直線, 則 $\triangle ABC \cong \triangle CDE$.



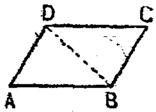
(1)



(2)

3. 若一個四邊形的對邊各平行, 則其對邊亦各相等.

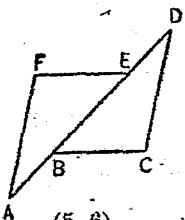
4. 若一個四邊形的兩邊相等而平行, 則其他兩邊亦必相等而平行.



(3, 4)

5. 若 $AB = ED$, $BC \parallel FE$, $AF \parallel DC$, 又 AD 是一直線, 則 $\triangle AEF$ 必全同於 $\triangle BCD$.

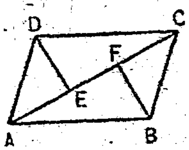
6. 若 $AB = ED$, $BC = FE$, $BC \parallel FE$, 又 AD 是一直線, 則 AF 必等於 CD.



(5, 6)

7. 若 $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $AE = FC$, 又 AC 是一直線, 則 $DE \parallel BF$. (用第 3 題)

8. 兩平行線所成的同位角中, 其一對的二等分線必平行.

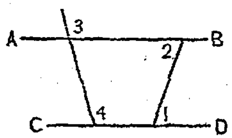


(7)

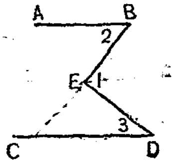
9. 在下面的圖中, 若 $\angle 1 = \angle 2$, 則 $\angle 3 = \angle 4$.

*10. 在下面的圖中, 若 $AB \parallel CD$, 求證 $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$.

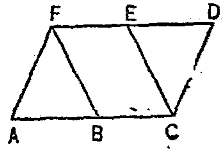
(續)



(9)



(10)



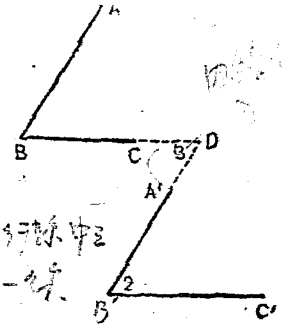
(11)

*11. 在附圖中，若 $AC \parallel FD$，$AF \parallel CD$，又 $FB \parallel EC$，求證 $\triangle AFB \cong \triangle ECD$.

命題 XXI.　定理

108. 兩個角的相當邊兩兩平行而方向相同，則此兩角相等.

平行線的性質
a 內錯角相等
b 同位角相等
c 同側內角互補
d 若一直線垂直于二平行線中之一條則也必垂直于他一條.



設　$\angle B$ 和 $\angle B'$ 間 $AB \parallel A'B'$，$BC \parallel B'C'$.

求證　$\angle B = \angle 'B$.

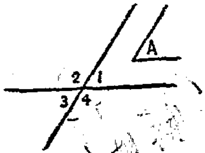
證

敍　述	理　由
1　$AB \parallel A'B'$，$BC \parallel B'C'$	1. 假設.

2. 在必要時，延長 BC 和 B′A′ 使相交於 D.	2. 相交二直線，不能都和第三直線平行.
3. $\angle B=\angle 3$，又 $\angle B'=\angle 3$.	3. ∥線的內錯 ∠s 相等.
4. $\therefore \angle B=\angle B'$.	4. 等於同量之量相等.

109. 系. 兩個角的相當邊兩兩平行，則此兩角相等或相補.

譬如在右邊的圖中，若相當邊兩兩平行，則 ∠s1 和 3 等於 $\angle A$，又 ∠s2 和 4 與 $\angle A$ 相補.



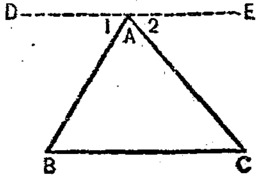
【註】 兩個角的右邊和右邊平行，左邊和左邊平行，則此兩角相等

三角形(第二部)

命題 XXII. 定理

110. 三角形三個角的和等於一平角.

由此



三角之和＝180°
等於一個平角

設 $\triangle ABC$.

求證 $\angle A+\angle B+\angle C=$一平角.

證

敍述	理由
1. 過 A 畫 $DE \parallel BC$.	1. 過一已知點,作一已知直線的平行線.
2. $\angle 1=\angle B$.	2. $\parallel$線的內錯$\angle$s 相等.
3. $\angle 2=\angle C$.	3. $\parallel$線的內錯$\angle$s 相等.
4. $\angle A+\angle 1+\angle 2=$ 一平角.	4. 全量等於其諸部分的和.
5. $\therefore \angle A+\angle B+\angle C=$ 一平角.	5. 代入.

111. 系 1. 在一個三角形中，至多祇能有一個鈍角或一個直角.

112. 系 2. 直角三角形的兩個銳角互爲餘角.

113. 系 3. 一三角形的兩角,和他三角形的兩角,彼此各各相等,則第三角必相等.

114. 系 4. 兩個三角形，各有兩角及其一條對邊彼此各各相等,則此兩形全同.

115. 系 5. 等角三角形的每個角是 60°.

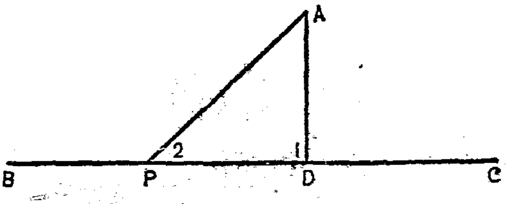
116. 系 6. 兩個直角三角形．各有一個銳角和斜

邊彼此各各相等,則此兩形全同.

【示意】 用系 4.

117. 系 7. 兩個直角三角形,各有一銳角和一直角邊彼此各各相等,則此兩形全同.

118. 系 8. 自直線外的一點祇能作一個垂線,垂直於此直線.



設 直線 BC 外的一點 A, $AD \perp BC$, AP 是自 A 至 BC 的任意直線.

求證 AP 不 $\perp BC$.

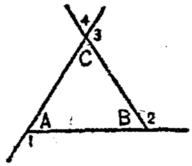
證

敍 述	理 由
1. 至少能作一個垂線 AD 垂直於 BC.	1. 自直線外的一點,作此直線的垂線(命題XI)
2. $\angle 1$ 是直角	2. $\perp$ 的定義.
3. $\angle 2$ 是銳角.	3. 一個直角 $\triangle$ 有兩個銳角
4. $\therefore$ AP 不 $\perp BC$.	4. AP 不與 BC 成直角.

不滿90°之角叫做銳角

習　題

1. 求諸角的值：



(a) 若$\angle B=60°$，又$\angle C=50°$，求$\angle A$.

(b) 若$\angle A=m°$，又$\angle C=n°$，求$\angle B$.

(c) 若$\angle A=50°$，又$\angle B=70°$，求$\angle 3$.

(d) 若$\angle 2=110°$，又$\angle A=60°$，求$\angle 4$.

(e) 若$\angle 4=40°$，又$\angle B=70°$，求$\angle 1$.

(f) 若$\angle 2=140°$，又$\angle 1=120°$，求$\angle 3$.

(g) 若$\angle C=m°$，求$\angle A+\angle B$.

2. 若C是等腰三角形ABC的頂角，求

(a) $\angle A$，若$\angle C=40°$.　　(c) $\angle C$，若$\angle A=40°$.

(b) $\angle B$，若$\angle C=m°$.　　(d) $\angle C$，若$\angle B=n°$.

3. 等腰直角三角形的各角各有多少度？

4. 一個三角形的兩個角各是60°和40°，這兩個角的二等分線所成的角如何？

5. 已知三角形的兩個角，求作第三個角.

6. 已知等腰三角形的一個底角，求作其頂角.

7. 已知等腰三角形的頂角，求作一個底角.

8. 作一個60°的角；30°的角；120°的角；75°的角.

9. 兩平行線被一截線所截，在同旁的兩個內角的二等分線互相垂

直.

10. 若作 CB 和 DE 各垂直於角 A 的兩邊,求證 ∠ACB = ∠ADE.

11. 若直角三角形 ABC 的斜邊上的高是 CD,求證 ∠ACD = ∠B.

12. 若三角形 ABC 的高是 CD 和 AE,求證 ∠BCD = ∠BAE

13. 求四邊形的四個角的和.

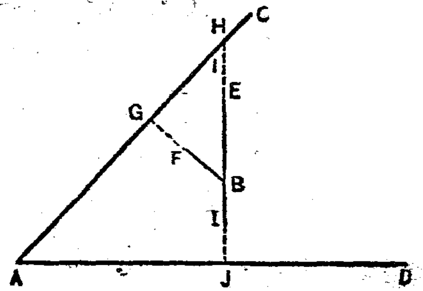
14. 三角形的兩角相等,則第三角的二等分線必分全形成兩個全同三角形.

15. 等腰三角形兩腰上的高相等.

16. 從等腰三角形底的中點所引兩腰的垂線必相等.

命題 XXIII. 定理

119. 兩角的各邊,彼此各各垂直,則此兩角相等或相補.



設 $\angle$s CAD 和 FBE, AD ⊥ BE, AC ⊥ BF.

求證 ∠CAD = ∠FBE, 又 ∠CAD 是 ∠FBI 的補角.

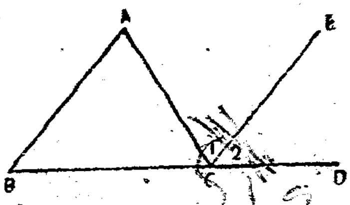
證

敍述	理由
1. 延長BF至G，BE至H，BI至J.	1. 一直線可以延長.
2. $\angle$s BGH和AJH都是直角.	2. $\perp$s 成 *rt.* $\angle$s.
3. $\angle$CAD是$\angle$1的餘角. $\angle$FBE是$\angle$1的餘角.	3. 一個 *rt.* $\triangle$ 的銳 $\angle$s 互爲餘角.
4. $\therefore \angle CAD = \angle FBE$.	4. 同$\angle$的餘$\angle$s相等.
又，	
5. $\angle$FBE是$\angle$FBI的補角.	5. 兩$\angle$s的外邊成一直線，則此兩$\angle$s互爲補角.
6. $\therefore \angle$CAD是$\angle$FBI的補角.	6. 代入.

【註】 兩個$\angle$s的邊，右方的$\perp$右方的，左方的$\perp$左方的，則此兩角相等.

命題 XXIV. 定理

120. 三角形的一個外角等於其不相鄰的兩個內角的和.



設 $\triangle$ABC的外角ACD.

求證 $\angle ACD = \angle A + \angle B$.

△之外角=其不相~~鄰之~~內對角和

證

敍述	理由
1. 畫 CE∥BA.	1. 過一點,作一已知直線的平行線.
2. $\angle 1=\angle A$.	2. ∥s 的內錯 ∠s 相等.
3. $\angle 2=\angle B$.	3. ∥s 的同位 ∠s 相等.
4. $\angle 1+\angle 2=\angle A+\angle B$.	4. 等量加等量其和相等.
5. $\angle ACD=\angle 1+\angle 2$.	5. 全量等於其諸部分的和.
6. $\therefore \angle ACD=\angle A+\angle B$.	6. 等於同量的量相等.

習　題

1. 已知三角形的兩個角，求作一個角,使他等於不相鄰的一個外角.

2. 已知三角形的一個外角,和一個不相鄰的內角，求作一個角使他等於其他一個不相鄰的內角.

3. 若三角形有兩個角相等,則其不相鄰的外角的二等分線必平行於此三角形的對邊.

4. 若在三角形的各頂點畫一個外角,則此三個外角的和等於四直角,

5. 從三角形的兩個外角的和減去第三內角等於兩直角.

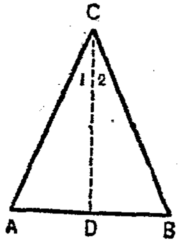
*6. 若三角形的兩個外角的和等於三直角,則此三角形是一個直角

三角形

命題 XXV.　定理

121. 三角形的二角相等,則其所對的邊亦等.

〔命題 IV 的逆定理.〕



設 $\triangle ABC$ 的 $\angle A=\angle B$.

求證　　$AC=BC$.

證

敘　述	理　由
1. 畫 $\angle C$ 的二等分線,引長之使遇 AB 於 D.	1. 每個 $\angle$ 有一個二等分線.
2. $\angle A=\angle B$.	2. 假設.
3. $\angle 1=\angle 2$.	3. 作圖.
4. $CD=CD$.	4. 恆等.
5. $\triangle ACD\cong\triangle BCD$	5. $s.a.a.=s.a.a.$
6. $\therefore AC=BC$.	6. $\cong\triangle$ 的相當邊相等.

122. 系. 一個等角三角形就是等邊三角形.

123. 方法 VII. **命題 IV 和 XXV 常常用來證明線的相等或角的相等.**(可與 42 頁的「註」比較)

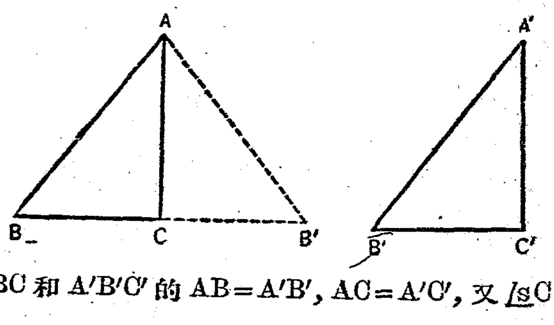
習 題

1. 若一個等腰三角形的頂角是 60°,則此三角形是等邊三角形.

2. 等腰三角形的兩個底角的二等分線及底邊,亦成一個等腰三角形.

命題 XXVI. 定理

124. 兩個直角三角形,其斜邊及一直角邊若彼此各各相等,則兩形全同.(hy. arm. = hy. arm.)



設 $\triangle$ABC 和 A′B′C′ 的 AB=A′B′, AC=A′C′, 又 $\angle$s C 和 C′ 都是直角.

求證 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

上平分線軌跡定理.

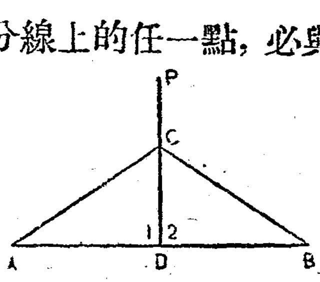
(正) ~~在一線之上平分線上的一点,必距線兩端等遠~~

(逆) 若一点距線的兩端 證 等遠,必在上平分線上. 垂直平分線軌跡定理

敍 述	理 由
1. 使△A′B′C′的A′C′和AC重合,又使B和B′落在AC的兩旁. 角分線軌跡定理.	1. 公理19. 又由假設AC=A′C′.
2. ∠s BCA 和 B′CA 都是直角. (正) 在角分線上的一点,必距角兩边等遠	2. 假設.
3. ∠BCB′是平角.	3. 1平角=2直角的和.
4. BC 和 CB′ 成一直線 BCB′. (逆) 若一点距角兩边等遠,必在角分線上	4. 平角的定義.
5. BCB′A是一個△,其AB=AB′.	5. 由假設AB=A′B′.
6. ∠B=∠B′.	6. 等腰△的底∠s相等.
7. ∴△ABC≅△A′B′C′.	7. (116).

命題 XXVII. 定理

125. 在一直線的垂直二等分線上的任一點,必與此直線的兩端等距離.



設PD是AB的垂直二等分線,又C是PD上的任意點.

求證 CA=CB.

證

敍述	理由
1. $AD=DB$.	1. 由假設, PD 二等分 AB.
2. $PD\perp AB$	2. 由假設.
3. $\angle 1=\angle 2$.	3. $\angle$s 成 *rt.* $\angle$s. 凡直角皆相等.
4. $DC=DC$.	4. 恆等.
5. $\triangle ADC\cong\triangle BDC$.	5. *s. a. s.* = *s. a. s.*
6. $\therefore CA=CB$.	6. $\cong\triangle$s的相當邊相等.

【註】 在48頁上的系,就是本定理的逆定理.

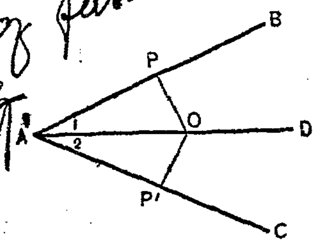
習 題

1. 在一已知直線AB上,求一點與已知兩點P和Q等距離.
2. 在一已知圓上,求一點與已知兩點等距離.
3. 求一點與已知三點等距離.
4. 已知三定點A,B,和C.求作一點X,使$AX=BX$,又$CX=\frac{1}{2}AB$.

命題 XXVIII. 定理

126. 在一個角的二等分線上的任一點,必與角的兩邊等距離.

locus of points 軌跡



設 AD 是 ∠BAC 的二等分線，又 O 是 AD 上的任意一點，又 OP ⊥ AB, OP′ ⊥ AC.

求證 O 與 AB 和 AC 等距離(就是 OP = OP′).

證

敍述	理由
1. ∠1 = ∠2.	1. 由假設, AD 二等分 ∠BAC.
2. OP ⊥ AB, OP′ ⊥ AC.	2. 假設.
3. ∠s APO 和 AP′O 都是 *rt.* ∠s.	3. ⊥s 成 *rt.* ∠s.
4. AO = AO.	4. 恆等.
5. △APO ≅ △AP′O.	5. 斜邊和銳角 = 斜邊和銳角.
6. ∴ OP = OP′.	6. ≅ △s 的相當邊相等.

127. 系. 與一個角的兩邊等距離的點，必在此角

的二等分線上．〔命題 XXVIII 的逆定理〕．

【示意】 學者務須用心寫出這個系的證明．先證明△APO和AP′O全同，而後再證明∠1=∠2．

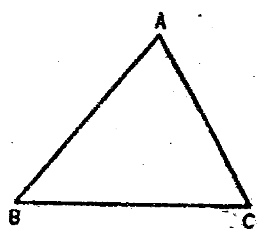
習 題

1. 在已知直線 AB 上，求一點與已知∠DEF 的兩邊等距離．
2. 在一已知圓上，求一點與已知兩直線等距離．
3. 求一點與已知三直線等距離．

不等線和不等角

命題 XXIX． 定理

128. 三角形的兩邊的和大於第三邊．



設 △ACB．

求證 AB+AC>BC．

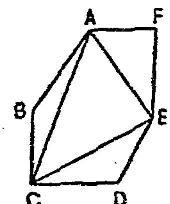
【示意】 參看公理 14．

習題

1. 用下列各組線分做邊,能作成三角形否?

(a) 4吋, 5吋, 10吋.　　(b) 8吋, 19吋, 12吋.

(c) 4呎, 12呎, 8呎.　　(d) 6吋, 2吋, 5吋.



(2)

2. 求證多邊形 ABCDEF 的周圍大於 △ACE 的周圍.

3. 在 △ABC 中, AC=BC, 又 AC 延長線上的一點 D 與 B 聯結, 則 DA>DB.

4. 在 △ABC 的 BC 邊上, 取任意點 D, 則 AB+BC>AD+DC.

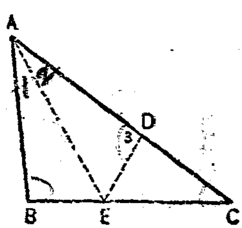
5. 在 △ABC 中的任意點 E, 畫EB和EC, 則 AB+AC>EB+EC.

【示意】 延長 BE 使與 AC 相遇於 D.

6. 三角形任何兩邊的差小於第三邊.

命題XXX. 定理

129. 三角形的兩邊不等, 則其所對的角亦不等, 而大邊所對的角大.



設 $\triangle ABC$ 的 $AC>AB$.

求證　　$\angle B>\angle C$.

證

敍　述	理　由
1. 畫角二等分線 AE.	1. 每一個 $\angle$ 有一個二等分線.
2. 在 AC 上截取 $AD=AB$.	2. 在一直線上,可以截取一段線分.
3. 畫 DE.	3. 公理 13.
4. $AB=AD$.	4. 作圖.
5. $AE=AE$.	5. 恆等.
6. $\angle 1=\angle 2$.	6. 作圖.
7. $\triangle ABE\cong\triangle ADE$.	7. $s.a.s.=s.a.s.$
8. $\angle B=\angle 3$.	8. $\cong\triangle$的相當$\angle$相等.
9. $\angle 3>\angle C$.	9. (88)外角>内角
10. $\therefore\angle B>\angle C$.	10. 代入.

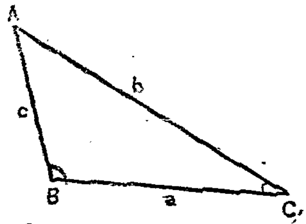
習　題

1. 延長等腰三角形 ABC 的一腰 AC 至 D, 則 $\angle ABD>\angle ADB$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB>AC$, 又 $\angle A=60°$, 那一個角是這三角形的最大角?

命題 XXXI.　定理

130. 三角形的兩個角不等,則其所對的邊亦不等,而大角所對的邊大.〔命題 XXX 的逆定理.〕



設 $\triangle ABC$ 的 $\angle B > \angle C$.

求證　　$b > c$.

證

敍述	理由
1. $b < c$, 或 $b = c$, 或 $b > c$.	1. 祇有三種假設的可能.
2. 若 $b < c$, 則 $\angle B < \angle C$.	2. 在一個 $\triangle$ 中,大角對大邊.
3. 這是不可能的.	3. 由假設, $\angle B > \angle C$.
4. 若 $b = c$, 則 $\angle B = \angle C$.	4. 等腰 $\triangle$ 的底角相等.
5. 這是不可能的.	5. 由假設, $\angle B > \angle C$.
6. $\therefore b > c$.	6. 其他兩種假設均錯誤.

131. 系. 從一點引到一已知直線的線,以垂線爲最短. (118)

【附註】 上面所用的證法叫做間接證法．並不證明某一個終結是須確，反而遍舉和這個終結相反的終結，而證明他們的錯誤．譬如，要證 $a=b$，祇要證明 $a\neq b$ 是錯誤．或者要證 $m>n$，祇要證明所有相反的終結的不對，就是 $m=n$，和 $m<n$ 是錯誤．

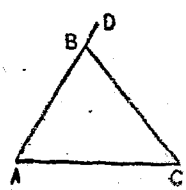
習　題

1． 直角三角形的那一邊最大？ 鈍角三角形呢？

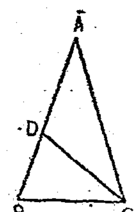
2． 若三角形的兩個角各是 50° 和 60°，相對的兩邊那一邊較大？這三角形的那一邊最大？ 那一邊最小？

3． 若在 △ABC 中，AB>AC，又 ∠B=60°，這三角形的那一邊最大？ 那一邊最小？

4． 若在 △ABC 中，AB>AC，又 ∠A=60°，這三角形的那一邊最大？



(5)

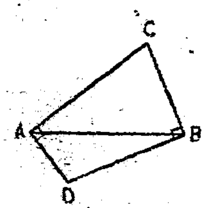


(6)

5． 若 △ABC 的 ∠A 等於一直角的三分之二，又外角 DBC 等於 110°，這三角形的那一邊最大？ 那一邊最小？

6． 在 △ABC 中，AB=AC，求證 DC>DB．

7． 在 △ABC 中，AC>BC，若角 A 和 B 的二等分線相遇於D，求證 AD>BD．



(8)

8． AC>BC，AD⊥AC，又 DB⊥BC，求證

BD＞AD.

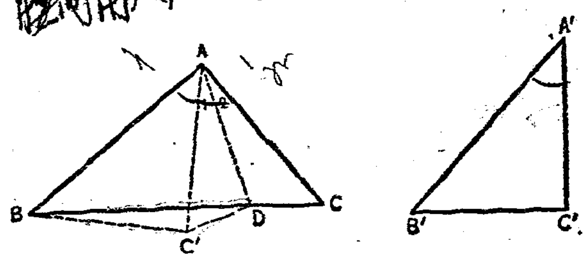
9. 直接證明命題XXXI.

【示意】 於B作∠CBD＝∠C.

10. 三角形高的和小於三角形的周圍.

命題XXXII. 定理

132. 兩個三角形有兩邊彼此各各相等，而甲形的夾角大於乙形的夾角，則甲形的第三邊大於乙形的第三邊. 腰間角大底也大



設△ABC和A′B′C′的AB＝A′B′，AC＝A′C′，∠A＞∠A′.

求證 BC＞B′C′.

證

敍述	理由
1. 使△A′B′C′重疊於△ABC的上面，而A′B′與AB重合.	1. 由假設，AB＝A′B′，又公理19. 移形公理

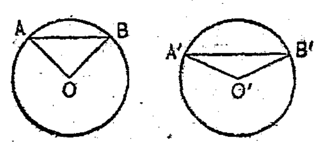
2. A′C′將落在AB和AC之間,如AC′.	2. 由假設,∠A>∠A′.
3. 畫AD二等分∠CAC′而遇BC於D,又畫DC′.	3. { 每個∠有一條二等分線. 畫一直線.
4. AC′=AC.	4. 假設.
5. ∠1=∠2.	5. 作圖.
6. AD=AD.	6. 恆等.
7. △C′AD≅△CAD.	7. $s.a.s.=s.a.s.$
8. DC′=DC.	8. 何故?全等形
9. BD+DC′>BC′.	9. (128),兩邊之和
10. BD+DC>BC′.	10. 代入.大於第三邊
11. ∴BC>BC′或B′C′.	11. 代入.

習題

1. 設兩個等圓O和O′,又

∠A′O′B′>∠AOB,

則 A′B′>AB.

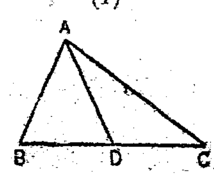


(1)

2. 設三角形ACB的中線AD所成的∠ADB是銳角,求證

(a) AC>AB,

(b) ∠B>∠C.



(2)

(續)

1348

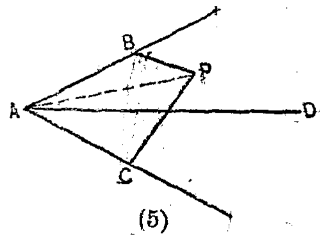
3. 設在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=\angle B$，又在 AB 上取一點 D，使 $\angle ACD>\angle DCB$，則 $AD>DB$。

4. 不在一直線的垂直二等分線上的一點，必不與此直線的兩端等距離。

【示意】 應用命題 XXXII.

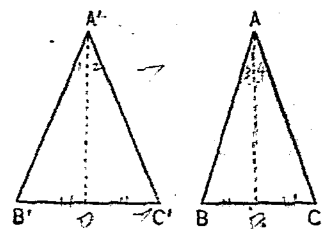
5. AD 是 $\angle BAC$ 的二等分線，又 $AB=AC$，求證

$$PC>PB.$$



(5)

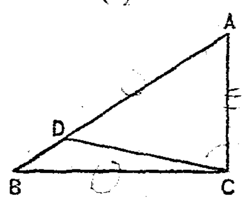
6. $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是等腰$\triangle$，祂們的底是 BC 和 $B'C'$，若 $AB=A'C'$，又 $\angle B>\angle B'$，那一個$\triangle$的底較大?



(6)

7. 試證命題 XXXII，若點 C' 落於 $\triangle ABC$ 中.

8. 在 $\triangle BCA$ 中，$AC\perp BC$，又 $AD=BC$，求證 $AB>DC$.



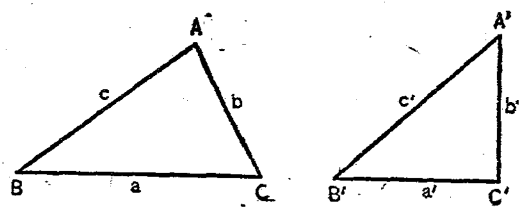
(8)

33

命題 XXXIII. 定理

133. 兩個三角形的兩邊彼此各各相等，而甲形的第三邊大於乙形的第三邊，則甲形的夾角大於乙形的

夾角．〔命題 XXXII 的逆定理〕．



設 △ABC 和 A′B′C′ 的 $b=b'$，$c=c'$，又 $a>a'$．

求證　　$\angle A > \angle A'$

證

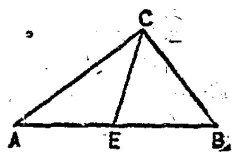
敍述	理由
1. $\angle A<\angle A'$，或 $\angle A=\angle A'$，或 $\angle A>\angle A'$．	1. 祇能有此三種假設的可能．
2. 若 $\angle A<\angle A'$，則 $a<a'$．	2. 兩個△各有兩邊彼此各各相等，而甲形的夾角大於乙形的夾角，則甲形的第三邊大於乙形的第三邊．
3. 這是不可能的．	3. 由假設，$a>a'$．
4. 若 $\angle A=\angle A'$，則 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$．	4. $s.a.s.=s.a.s.$
5. $a=a'$．	5. 相當邊………
6. 這是不可能的．	6. 由假設，$a>a'$．

7. $\therefore \angle A > \angle A'$.

7. 其他兩個假設的不成立,已經證明.

習　題

1. 設在 $\triangle ABC$ 中,$AC > BC$,畫中線 CE,則 $\angle AEC$ 是鈍角.



(1)

2. 設 $\triangle ABC$, $\angle A = \angle B$,若在 AB 上取一點 D 而使 $AD > DB$,則 $\angle ACD > \angle DCB$.

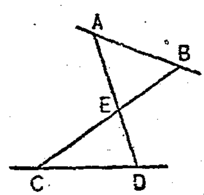
134. 方法 VIII. 線的不等,往往用命題 XXIX, XXXI, XXXII 來證明.若角的關係不能發現時,可用命題 XXIX;若兩直線是同一個三角形的邊,且能證明其對角的不等,則用命題 XXXI;若邊或角是不同的兩個三角形的某部分,則用命題 XXXII. 有時須用幾種方法纔能引到所求的結果.

依同樣的手續,角的不等,用命題 XII, XXX, XXXIII 可以證明.

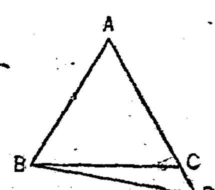
3. 設 AD 和 BC 相交於 E,求證 $AD + BC > AB + CD$.

(三條命題中應該用那一條呢?)

4. 設 AC 是等邊三角形的



(3)



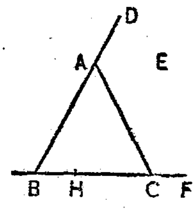
(4)

一邊,延長之至 D,又聯結 BD,則 AD>BD>AB.

5. 若 AB=AC,求證

(*a*) BD>DC, (*c*) AF>AB,

(*b*) BE>EC, (*d*) AB>AH.



(5)

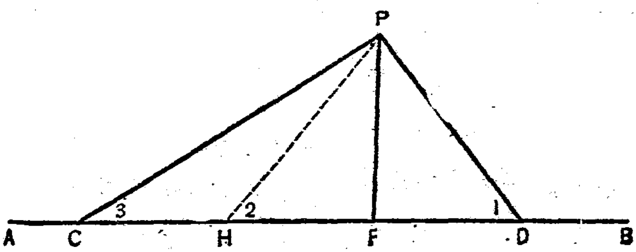
6. 任意四邊形的對角線的和,必小於其周圍,但必大於其半周.

***7.** 在 △ABC 中, AB<BC, 畫角 B 的二等分線 BD 遇 AC 於 D, 則 AD<DC.

***8.** 在 △ABC 中, AC>BC, 畫中線 CD, 則 CD 上任意一點 E,距 B 較近於距 A.

命題 XXXIV. 定理

135. 若自一已知直線的垂線上的一點, 作此直線的二斜線,其與垂足的距離較大的,則其線必較長.



設 直線 AB, 點 P, PF⊥AB, CF>FD.

求證 PC>PD.

證

敍述	理由
1. 在 FC 上取 FH=FD.	1. 在一直線上取已知的長.
2. 畫 HP.	2. 二點間得引一直線.
3. PH=PD.	3. 一直線的垂直二等分線上的任一點與此直線的兩端等距離.
4. ∠2=∠1.	4. 若△的兩邊相等，則其所對的∠s相等.
5. ∠2>∠3.	5. △的外角>其不相鄰的任意一個內角.
6. ∠1>∠3.	6. 代入.
7. ∴PC>PD.	7. △的兩個∠s不等，則大邊對大角.

習　題

1. 寫出並證明命題 XXXIV 的逆定理.

2. 試證自一已知直線外的一點，祗能作兩條相等的斜線於此直線.

四邊形

136. 定義. **四邊形**是四邊的多邊形.

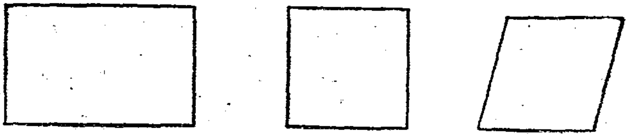
四邊形祇有兩邊平行的,叫做**梯形**.

四邊形的對邊平行的,叫做**平行四邊形**.

137. 定義. 平行四邊形的角都是直角的,叫做**矩形**.

正方形是等邊的矩形.

菱形是等邊的平行四邊形.



138. 定義. 梯形的不平行二邊相等的,叫做**等腰梯形**.梯形的平行二邊叫做梯形的**底**,而有**上底**和**下底**的分別.

聯結梯形不平行二邊中點的直線,叫做梯形的**中線**.

聯結四邊形相對兩頂點的直線,叫做四邊形的**對角線**.平行四邊形或梯形的兩底中間的垂直距離,叫做該形的**高**.

平行四边形性质定理。

1. 平行四边形的对边等。

2 平行四边形的对角等

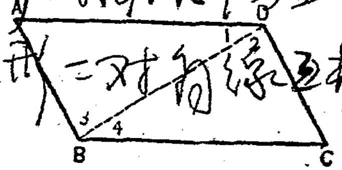
3 平行四边形邻角互补。

命題 XXXV. 定理

139. 平行四邊形的對邊和對角都相等.

4 平行四边形对角线平分全形。

5 平行四边形二对角线互相平分。



設 □ABCD.

求證 AD＝BC, AB＝CD, ∠A＝∠C, ∠B＝∠D.

證

敍　述	理　由
1. 畫 BD.	1. 二點間能作一直線.
2. AD∥BC, AB∥DC.	2. □的對邊平行.
3. ∠1＝∠4, ∠3＝∠2.	3. ∥線的內錯角相等.
4. BD＝BD.	4. 恆等.
5. △ABD≅△BDC.	5. a. s. a.＝a. s. a.
6. AD＝BC, AB＝CD, ∠A＝∠C.	6. ≅△的相當部份相等.
7. 同樣, 畫 AC, 得證 ∠B＝∠D.	7. 與 1—6 同.

140. 系 1. 一個對角線分平行四邊形成兩個全同三角形.

141. 系 2. 平行線間的平行線必相等.

142. 系 3. 兩平行線間的距離處處相等.

習題

1. 矩形的對角線相等.

2. 若一個平行四邊形的對角線相等,則此形是一個矩形.

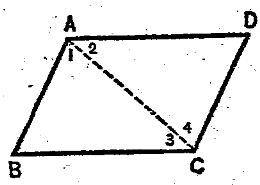
3. 自平行四邊形相對兩頂點至對角線的垂線必相等.

30

命題 XXXVI. 定理

143. 四邊形的對邊相等,則此形是平行四邊形.

〔命題35的逆定理.〕



設 四邊形ABCD的AB=CD, AD=BC.

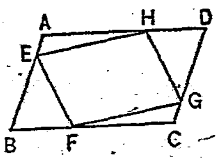
求證 ABCD是▱.

平行四边形判定定理.
若一四边形的对边等则此形必为一口
~~2 若一四边形的对角等则此形必为一口~~
3 若一四边形的邻角互补则此形必为一口
4 若一四边形的二对角线互相平分则此形必为一口
5 若一四边形的一组对边平行相等则此形必为一口

證

敍述	理由
1. 畫 AC.	1. 二點間能作一直線.
2. AB=CD, AD=BC.	2. 假設.
3. AC=AC.	3. 恆等.
4. △ABC≅△ACD.	4. s. s. s.=s. s. s.
5. ∠1=∠4, ∠3=∠2.	5. 全同△的相當∠s相等.
6. AB//CD, BC//AD.	6. 若一對內錯角相等,則此兩直線平行.
7. ∴ABCD 是口.	7. 他的對邊平行.

習題



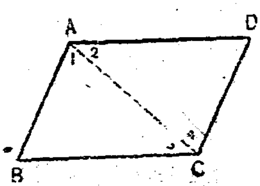
(1)

1. 若 ABCD 是一個平行四邊形, AE=CG, 又 BF=DH, 則 EFGH 是一個平行四邊形.

2. 依次聯結平行四邊形各邊中點的直線, 亦成一個平行四邊形.

命題 XXXVII. 定理

144. 四邊形的對邊相等而且平行,則此形是平行四邊形.



設 四邊形 ABCD 的 AD//BC, AD=BC.

求證 ABCD 是口.

證

敍述	理由
1. 畫 AC.	1. 公理 13.
2. AD∥BC.	2. 假設.
3. $\angle 2=\angle 3$.	3. ∥線的內錯$\angle$s相等.
4. AD=BC.	4. 假設.
5. AC=AC.	5. 恆等.
6. $\triangle ADC \cong \triangle ABC$.	6. s. a. s.=s. a. s.
7. $\angle 4=\angle 1$.	7. $\cong\triangle$s的相當$\angle$s相等.
8. BA∥CD.	8. (93).
9. ∴ABCD 是▱.	9. 兩雙對邊皆平行.

習題

1. 在 AB 的兩旁作 ABCD 和 ABEF 兩個平行四邊形，則 CDFE 也是一個平行四邊形.

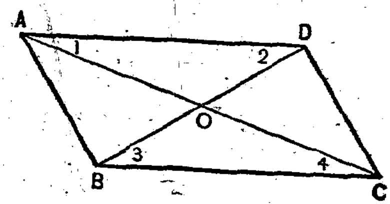
2. 平行四邊形的兩對邊向反對方向相等的延長，各端與其最近的頂點相聯結，則必另成一個平行四邊形.

145. 方法 IX. 要證明線的平行，祇須證明他們是平行四邊形的對邊.

3. 平行四邊形的兩對邊各分做三等分，聯結其各分點，則此聯結的直線相平行.

命題 XXXVIII.　定理

146. 平行四邊形的對角線,互相二等分.



設　□ABCD 的對角線 AC 和 BD.

求證　$AO = OC, BO = OD$.

證

敍述	理由
1. $AD \parallel BC, AB \parallel DC$.	1. 由假設,圖形是□.
2. $\angle 1 = \angle 4, \angle 2 = \angle 3$.	2. ∥線的內錯∠相等.
3. $AD = BC$.	3. □的對邊相等.
4. $\triangle AOD \cong \triangle BOC$.	4. $a.s.a. = a.s.a.$
5. $\therefore AO = OC, BO = OD$.	5. ≅△的相當邊相等.

習　題

1. 四邊形的對角線互相二等分,則此形是平行四邊形.

(命題 38 的逆定理.)

2. 菱形的對角線互相垂直.

3. 平行四邊形的對角線互相垂直,則此形是菱形.

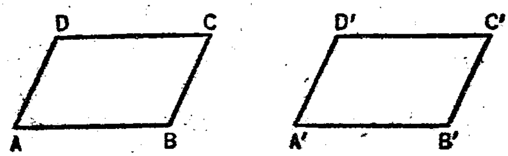
4. 二等分平行四邊形各對角線的半份，而順次聯結其中點，必另成一個平行四邊形.

5. 平行四邊形的一對角線，二等分其一角，則此形是菱形.

6. 順次聯結一個圓的兩直徑的各端，則必成一矩形.

命題 XXXIX. 定理

147. 兩個平行四邊形，各有兩邊及其夾角彼此各各相等，則兩形全同.



設 ▱ABCD 和 A′B′C′D′ 的 AB＝A′B′，AD＝A′D′，∠A＝∠A′.

求證 ▱ABCD≅▱A′B′C′D′.

證

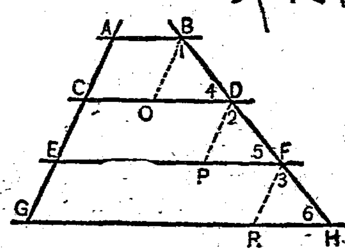
敍述	理由
1. 放 ▱ABCD 在 A′B′C′D′ 的上面，使 AB 與 A′B′ 重合.	1. 公理 19. 由假設，AB＝A′B′.
2. 則 AD 沿 A′D′ 而落下.	2. 由假設，∠A＝∠A′.
3. D 與 D′ 重合.	3. 由假設，AD＝A′D′
4. BC 沿 B′C′ 而落下.	4. 公理 16.

5. C點必在B′C′上，或B′C′的延長線上．	5. BC沿B′C′而落下．
6. 同樣，C點必在D′C′上，或D′C′的延長線上．	6. 公理16．
7. 所以C與C′重合，而▱ABCD與▱A′B′C′D′重合．	7. 公理13a．
8. ∴▱ABCD≅▱A′B′C′D′．	8. 若能使兩個圖形重合，則兩形全同．

命題XL. 定理

148. 一直線被三或三以上平行線所截，若其所截的線分相等，則他直線被此諸平行線所截，其所截的線分亦必相等．

平行截線定理。



設 AB//CD//EF//GH， 又 AC=CE=EG.

求證 BD=DF=FH.

證

敍述	理由
1. 畫BO, DP及FR∥AG.	1. (100)[illegible]
2. BO∥DP∥FR.	2. 平行於同一直線的諸直線互相平行.
3. $\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 = \angle 3. \\ \angle 4 = \angle 5 = \angle 6. \end{cases}$	3. ∥線的同位$\angle$s相等.
4. BO＝AC, DP＝CE. FR＝EG.	4. (141).
5. AC＝CE＝EG.	5. 假設.
6. BO＝DP＝FR.	6. 公理1.
7. $\triangle BOD \cong \triangle DPF \cong \triangle FRH$.	7. $s.a.a. = s.a.a.$
8. ∴BD＝DF＝FH.	8. ≅$\triangle$s的相當邊相等.

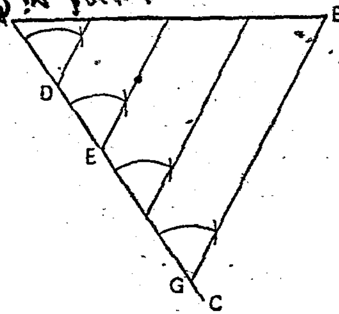
149. 系 1. 一直線平行於三角形的一邊，而二等分他一邊，則必二等分其第三邊.

150. 系 2. 一直線平行於梯形的底，而二等分其不平行的一邊，則必二等分其他不平行的一邊.

命題XLI. 作圖題

151. 求分一已知直線成任意等分.

均分線段法



若Δ内一線平行第一邊平行第二邊則必平行第三邊

設直線 AB.

求分 AB 成 n 等分.

作圖法. 自 A 畫任意直線 AC.

在 AC 上截取任意部分如 AD, 繼續截取至 n 次如 AD, DE, 等, 將最後的分點 G 與 B 聯結, 又過其他各分點畫直線平行於 GB.

【註】 證:過 A 畫直線平行於 GB, 再用命題 40.

習　題

求分一直線成三等分, 成五等分.

152. 方法 X. **要證明一直線是他一直線的兩倍, 往往二倍較小的一直線, 而證明他的兩倍等於較大的一直線, 有時或兩等分較大的而證明他的半份等於較小的. 角有同樣的關係的時候也照這樣證法.**

習　題

1. 若三角形的兩個角各是 30° 及60°，則對 30° 角的邊是這兩個角所夾的邊的一半.

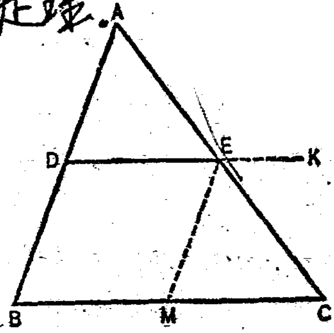
2. 在三角形 ABC 中，若過 AC 的中點 D，作直線 DE 平行於 AB，又 E 在 CB 上，則 DE 是 AB 的一半.

3. 等腰三角形的底和一腰上的高所成的角等於頂角之半.

命題 XLII. 定理

153. 三角形兩邊中點的聯結線必平行於第三邊，且等於第三邊之半

中点連線定理



設 △ABC 的 AD＝DB， AE＝EC.

求證 DE∥BC， 又 $DE=\frac{1}{2}BC$.

證

敍述	理由
1. 畫 DK∥BC.	1. (100). 过一已知之点 作已知之直线 ∥线

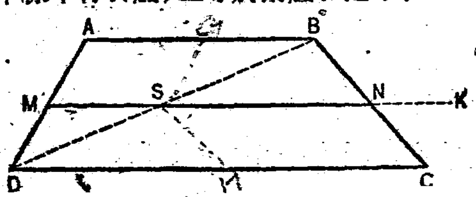
2. DK 二等分 AC (就是通過 E 點).	2. 命題 40,系 1.
3. DE 和 DK 重合.	3. 公理 13.
4. $\therefore DE /\!/ BC$.	4. 與 DK 是同一直線.
5. 畫 $EM /\!/ AB$.	5. 與 1 同.
6. $BM = MC$.	6. 與 2 同.
7. $DE = BM$.	7. 命題 35,系 2.
8. $\therefore DE = \frac{1}{2}(BC)$.	8. 由 6,7, $DE = BM$,而 BM 是 BC 之半.

習 題

1. 若聯結三角形的三邊的中點,則成四個全同三角形.

2. 聯結四邊形相鄰兩邊的中點的一直線,等於且平行於聯結其他兩邊的中點的一直線.

3. 梯形的中線平行於底,且等於兩底和之半.



設 梯形 ABCD 的中線 MN.

求證 $\begin{cases} MN /\!/ DC /\!/ AB. \\ MN = \frac{1}{2}(AB + DC). \end{cases}$

證

敍述	理由
1. 畫MK//DC, MK亦//AB.	1. 何故?
2. MK必通過N.	2. 命題40.
3. MN//DC,亦//AB.	3. 何故?
4. 畫對角線BD.	4. 何故?
5. S是DB的中點.	5. 命題40,系1.
6. $MS=\frac{1}{2}AB$, $SN=\frac{1}{2}DC$.	6. 命題42.
7. $MN=\frac{1}{2}(AB+DC)$.	7. 何故?

4. 等腰三角形兩腰的中點各與底的中點相聯結,則成菱形.

154. 定義. 多邊形的各角相等的,叫做**等角多邊形**. 多邊形的各邊相等的,叫做**等邊多邊形**.

五邊的多邊形叫做**五邊形**;六邊的,**六邊形**;七邊的,**七邊形**;八邊的,**八邊形**;十邊的,**十邊形**;十二邊的,**十二邊形**.

155. 兩個多邊形的各角和各邊互相兩兩相等,則兩形全同.(因可重合.)

5. 畫兩個互等角而不是互等邊的四邊形.

6. 畫兩個互等邊而不是互等角的四邊形.

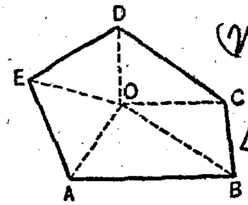
(萩)

命題 XLIII. 定理

156. n邊多邊形的諸角的和等於$(n-2)$平角.

$S=$各角和

$S=(n-2)180^{\circ}$



$(n-2)=S$

$\angle A=\frac{(n-2)180^{\circ}}{n}$

設　ABCDE……是一個 n 邊多邊形.

求證　$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\cdots\cdots=(n-2)$平角.

證

敘述	理由
1. 將形內任一點 O, 與各頂點相聯結.	1. 何故?
2. 則成 n △.	2. 多邊形的各邊是底.
3. 多邊形的諸∠s 的和＝諸△的諸底∠s的和.	3. 公理 10
4. 諸△的諸∠s的和＝n 平角.	4. 何故?
5. 諸△的頂角的和＝2 平角.	5. 何故?
6. 諸△的底角的和＝$(n-2)$	6. 何故?

(續)

平角.

7. ∴多邊形的諸$\angle$s的和=$(n-2)$平角.	7. 何故?

就是$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\cdots\cdots=(n-2)$平角.

157. 系. n邊等角多邊形的每一個角等於$\frac{n-2}{n}$平角.

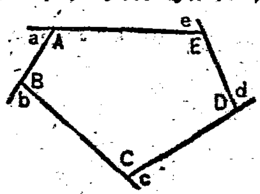
習題

1. 一個多邊形有多少邊,假使他的角的和是1000平角? 200直角? 24直角? 720°?

2. 一個等角四邊形的每一個角有多少度? 五邊形呢? 六邊形呢? 十邊形呢?

命題XLIV. 定理

158. 若順次延長一個任意多邊形的各邊,在各頂點作一個外角,則諸外角的和等於兩平角.



設 n邊的多邊形ABCDE,及其外角a, b, c等.

求證 $\angle a+\angle b+\angle c+\cdots\cdots=2st.\angle s.$

證　$\angle A+\angle a=1st.\angle, \angle B+\angle b=1st.\angle, \cdots\cdots.$　(50)

$\therefore\ (\angle A+\angle B+\cdots)+(\angle a+\angle b+\cdots)=n\ st.\underline{/s}.$　(公理 2)

但　$(\angle A+\angle B+\cdots)=(n-2)st.\underline{/s}.$　(156)

$\angle a+\angle b+\angle c=\cdots=2st.\underline{/s}.$　(公理 3)

159. 系. 等角多邊形的每一個外角等於一平角的$\frac{2}{n}$.

習題

1. 等角十邊形的每一外角是多少度？ 9 邊形呢？ 36 邊形呢？ 72 邊形呢？

2. 一個多邊形的每一個外角等於 30°，這是幾邊形呢？ 等於一直角呢？ 60°？ 45°？

3. 一個多邊形的每一個內角等於 160°，這是幾邊形呢？ 179°？ 135°？ $\frac{4}{3}rt.\underline{/s}$？

4. 一個等角多邊形的三個外角的和等於 90°，這是幾邊形呢？ 等於 $\frac{3}{4}$ 直角呢？

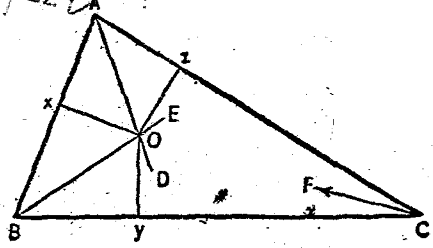
5. 一個多邊形的內角之和等於外角之和的兩倍，這是幾邊形呢？

命題 XLV. 定理

(甙)

160. 三角形各角的二等分線相交於一點，此點與各邊的距離相等.

△形内心定理



設 △ABC,又 A,B,C 各角的二等分線 AD,BE,CF.

求證 (*a*) AD,BE 和 CF 相交於一點如 O.

(*b*) O 與 AB,BC,CA 的距離相等.

證 因 AD 和 BE 不能平行,而相交於一點,如 O. (107)

從 O 畫 OX,OY,及 OZ 各各⊥AB,BC,及 CA.

OX=OZ. (126)

OX=OY. (126)

∴ OZ=OY. (公理 1)

∴ O 在 CF 上或在他的延長線上 (127)

∴ AD,BE 和 CF 相交於一點 O,而 O 與 AB, BC, CA 的距離相等.

161. 定義. 三直線(或三以上)相交於一點,叫做**共點線.**

40

習 題 (續)

1. 用作圖法,求一點與三角形的三邊等距離.

2. 求證三角形兩個外角的二等分線與第三內角的二等分線,相交

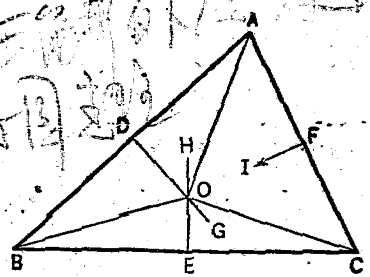
三角形傍心定理

於一點.

3. 作一點與平行四邊形 ABCD 的三邊 AB, BC, CD 等距離.

命題 XLVI. 定理

162. 三角形各邊的垂直二等分線相交於一點，此點與各頂點的距離相等.



設　△ABC，又 AB, BC, CA 各邊的垂直二等分線 DG, EH, FI.

求證　(a) DG, EH, 和 FI 相交於一公共點.

(b) 交點與 A, B, C 的距離相等.

證　DG 和 EH 相交於一點，如 O.　(102)

OA = OB, OB = OC.　(125)

∴ OA = OC.　(公理 1)

∴ O 在 AC 的垂直二等分線上.　(80)

就是 DG, EH, 和 FI 相交於 O；又因為 OA = OB = OC，故 O 與 A, B, C 的距離相等.

習題

1. 作一點O與四邊形的三個頂點等距離.

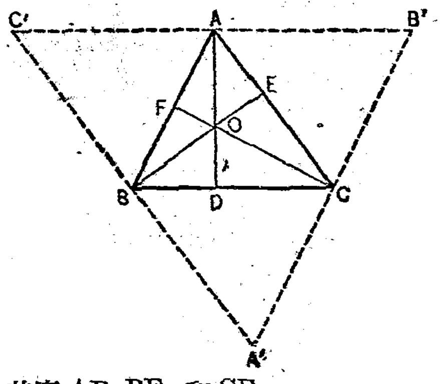
2. 作一個圓經過已知三角形的三個頂點.

3. 求證祇有一個圓能過三角形的三個頂點.

4. 求證等邊三角形的外接圓的中心,在各角的二等分線上.

命題 XLVII. 定理

163. 三角形的三個高(有時須延長)相交於一點.



設 △ABC及其高AD,BE,和CF.

求證 AD,BE,和CF相交於一公共點.

證 過ABC的頂點,畫B′C′∥BC, A′C′∥AC,

又A′B′∥AB. (何故?) (統)

因為 AD⊥BC. (假設)

AD⊥B′C′. (105)

但是　ABCB′ 和 ACBC′ 都是平行四邊形.　(136)

∴　$AB'=BC$, 又 $AC'=BC$.　(139)

∴　$AB'=AC'$.　(公理 1)

或　AD 是 B′C′ 的垂直二等分線.

同樣可知

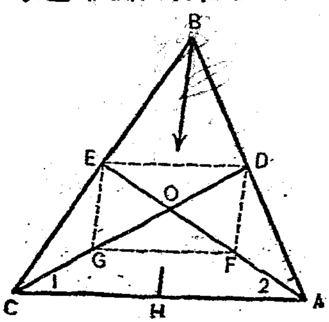
BE 是 A′C′ 的垂直二等分線.

又　CF 是 A′B′ 的垂直二等分線.

∴　AD, BE, 和 CF 相交於一點(就是共點線).　(162)

命題 XLVIII.　定理

164. 三角形的三中線相交於一點，此點與頂點的距離等於頂點至對邊中點的距離的三分之二.



設　△ABC 的中線 AE, CD, BH.

求證　AE, CD 和 BH 相交於一點 O,

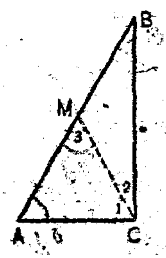
又　$AO=\frac{2}{3}AE$,　$CO=\frac{2}{3}CD$,　$BO=\frac{2}{3}BH$.

證

敘述	理由
1. 使CG＝GO，又 OF＝FA.	1. (81)
2. 畫 ED, DF, FG, 和 GE.	2. 何故？
3. ED＝$\frac{1}{2}$CA, 又 ED//CA.	3. (153)
4. GF＝$\frac{1}{2}$CA, 又 GF//CA.	4. (153)
5. ED＝GF, 又 ED//GF.	5. 何故？
6. EGFD是一個平行四邊形.	6. (144)
7. OE＝OF 和 OD＝OG.	7. (146)
8. 所以 OE＝OF＝FA，又 OD＝OG＝CG.	8. 何故？
9. AO＝$\frac{2}{3}$AE，又CO＝$\frac{2}{3}$CD.	9. 何故？
10. 同樣, BH 通過 O 而 BO＝$\frac{2}{3}$BH.	10. 同(1－9)

命題 XLIX. 定理

165. 直角三角形的一個銳角等於他一個銳角的兩倍，則斜邊等於短的直角邊的兩倍.



設 直角三角形ABC，∠C是直角，又∠A＝2∠B.

求證　　AB＝2AC.

證

敍述	理由
1. $\angle A=2\angle B$, $\angle C=90°$.	1. 假設.
2. $\angle A+\angle B=90°$.	2. 何故?
3. $\therefore \angle A=60°$, $\angle B=30°$.	3. 何故?
4. 畫CM使$\angle 1=\angle A=60°$.	4. 何故?
5. $\angle 3=60°$.	5. 何故?
6. $\angle 2=30°$.	6. 何故?
7. $AM=AC=MC$.	7. 何故?
8. $MB=MC$.	8. 何故?
9. $\therefore AB=AM+MB=2AC$.	9. 何故?

習　題

1. 在三角形ABC中，$\angle A=60°$，$\angle B=30°$，又AB=12吋.求AC的長.

2. 在三角形ABC中，AB=10吋，$\angle A=60°$，$\angle C=90°$，又CD是AB上的高，求AD的長.

3. 等腰三角形ABC的底角A和B各等於15°，又BC=8吋.求高AD的長.

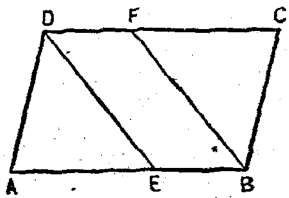
4. 在四邊形ABCD中，AB=BC=6吋，$\angle A=120°$，$\angle B=60°$，又$\angle C=150°$，求AD的長

5. 梯形 ABCD 的上底 DC 等於 14 吋，又 AB=BC，若 $\angle A=90°$，又 $\angle B=60°$，求 AB 的長。

定理的分析

166. 定理的證明，往往因**分析法**而得．所謂分析法，就是考察能證明終結的各種方法，把原有的命題化做較簡單的命題，這種化法繼續的進行，以得到一個已知的事實爲止．現在舉一個實例來說明這種方法的性質．

167. 定理． 斜的平行四邊形對角的二等分線互相平行



設 斜的平行四邊形 ABCD 兩個角的二等分線 DE 和 BF．

求證 DE//BF．

分析 1. 證明兩直線平行的方法，有應用：（統）

(a) 平行四邊形

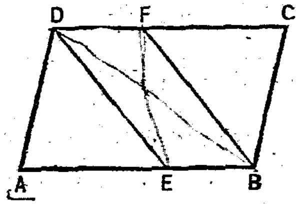
(b) 內錯角相等．

(c) 同位角相等.

(d) 內角相補,等等.

我們選擇這些方法中的任何一種,譬如1(a)就是

求證　　EBFD是一個平行四邊形.



2. 證明一個四邊形是▱的方法有應用:

(a) 對邊相等.

(b) 一雙對邊相等且平行,等等.

我們再選任何一種,譬如2(a)就是

求證　　ED=BF,　EB=DF.

3. 證明兩直線相等的方法,普通應用一對全同三角形,就是

求證　　△AED≅△BCF.

4. 兩個三角形的全相同,是易於成立的,所以我們得到下面的證法:

(**說**)　**證**　　AD=BC.　　(139)

∠A=∠C.　　(139)

∠ADE=∠FBC,　　(公理8)

$\therefore\quad \triangle ADE \cong \triangle FBC.$ (a. s. a. = a. s. a.)

$\therefore\quad ED = BF$, 又 $AE = FC$. (相當部分)

但 $AB = DC$. (139)

$\therefore\quad DF = EB$. (公理 3)

$\therefore$ DEBF 是 ▱. (143)

$\therefore\quad ED \parallel BF$. (136)

此題的證法不是祇限於上面一種，上面這個證法也不是最簡單的一個，在 1(*a*)，1(*b*)，1(*c*)，1(*d*)，2(*a*)，2(*b*)，中，每一種方法都有得到一個或一個以上的證法的可能.

習 題

1. 用 2(*b*) 的方法證明上面這個命題.
2. 用 1(*b*) 的方法證明上面這個命題.
3. 用 1(*c*) 的方法證明上面這個命題.

168. 在分析法中，假使要作補助線或補助角的時候，學者必須（在正式分析的以前）決定是否因此可以產生相等的新的線或角.

169. 方法 XI. **幾何的命題可以用代數的計算方法來證明.** (續)

上面的方法，在此處可以用來使兩個以上角的關係

成立．若在兩個角的時候，用代數形式表示一個角(如m°)，因而推得另一個角的數值．

至於三個以上角的關係的證明，除去一個角以外用代數記號(如 m°，n°，p°，等)表示其他各角的數值，因而發現餘下來的這一個角的數值．

嗣後，表示角的記號，譬如 $\angle A$，或 $\angle B$，都可用來表示他們的數值．

若已知其他各角的代數值，而學者不能求得最後一個角的值的時候，必須先從角的數值的問題着手，然後再解普通的問題．

習　題

設　已知 $\triangle ABC$，又 D 點在 AC 上，而 $AD=AB$．

求證　$\angle DBC=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$．

證：設　$\angle B=m^\circ$，$\angle C=n^\circ$，

則　$\angle A=180^\circ-m^\circ-n^\circ$．

但　$\angle ABD+\angle BDA=180^\circ-\angle A$，

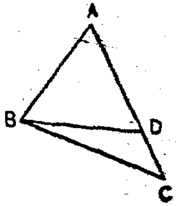
即　$\angle ABD+\angle BDA=180^\circ-(180^\circ-m^\circ-n^\circ)$

$=m^\circ+n^\circ$．

但　$\angle ABD=\angle ADB$．

$\therefore\ 2\angle ABD=m^\circ+n^\circ$，

$$\therefore \angle ABD = \frac{m^\circ}{2} + \frac{n^\circ}{2}.$$



但

$$\angle DBC = \angle B - \angle ABD$$

$$= m^\circ - \left(\frac{m^\circ}{2} + \frac{n^\circ}{2}\right)$$

$$= \frac{m^\circ}{2} - \frac{n^\circ}{2}$$

$$= \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2},$$

或

$$\angle DBC = \tfrac{1}{2}(\angle B - \angle C).$$

習　題

1. 等腰三角形底邊延長線所成的一個外角，等於 90° 加上頂角之半.

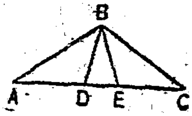
2. 直角三角形斜邊延長線所成的兩個外角的和等於 270°.

3. 在等腰 $\triangle ABC$ 的底邊 AC 上，取兩點 D 和 E，使

$$AE = AB; \text{又 } CD = BC.$$

求證 $$\angle DBE = \angle A.$$

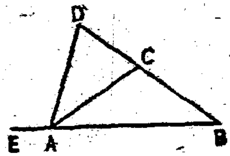
(3)



4. 若 $AD = AC = CB$，又 DB 和 EB 都是直線，則

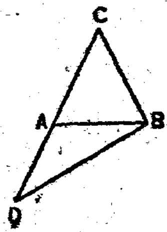
$$\angle EAD = 3\angle B.$$

(4)



5. 延長等腰三角形ABC的一腰CA，使AD等於底邊 AB，則

(5)



$\angle C=180^\circ-4\angle D$.

6. 若將等腰三角形 ABC 的底邊 AB 延長至 D，又畫 CD，則

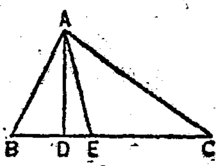
$\angle BCD=\angle A-\angle D$.

7. 在等腰三角形 ABC 中，將底邊 AB 的一端 B 與所對腰上的一點 D 相聯結，則　$\angle A=\frac{1}{2}(\angle CDB+\angle CBD)$.

8. 延長三角形 ABC 的一邊 AC 至 D，而使 CD＝CB，則

$\angle ABD=90^\circ+\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle A)$.

9. 在三角形 ABC 中，BAC 角的二等分線是 AE，高是 AD，求證　$\angle DAE=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.



(9)

10. 從四邊形三個角的和中，減去第四角的外角，等於一平角.

170. 證習題時，宜力求清楚而簡約.

雜　題

1. 時鐘在 11 點 12 分的時候，兩針間的角度如何？ 在 6 點 30 分呢？ 在 8 點 45 分呢？

2. 一個等腰三角形的頂角是 $18^\circ 44'$，每一個底角是多少度？

3. 一個等角多邊形的一個外角等於一直角的五分之一．求這多邊形的邊數.

4. 求證： 在直角三角形的任一直角邊中點上的垂線，必通過斜邊的中點.

5. 求證：在任一直角三角形中，斜邊的中線等於斜邊之半.（用第4題.）

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，$\angle B>\angle C$，那一邊最大？

7. 作一個四邊形，有三個角是 150°，90°，和 60°.

8. 等腰三角形有什麼特性？ 等邊三角形呢？ 菱形呢？ 矩形呢？ 正方形呢？

9. 已知 $AB=3''$，$\angle A=60^\circ$，$\angle B=45^\circ$，求作 $\triangle ABC$. 再作從 A 至 BC 的高，從 B 至 AC 的中線，和 $\angle C$ 的二等分線.

10. 三角形全同的各種證法如何？ 角的相等呢？ 直線的相等呢？ 直線的平行呢？ 直線的垂直呢？

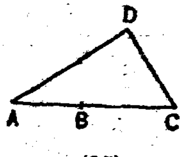
11. 兩直線不等的證法如何？ 兩個角的不等呢？

12. 相補的兩個鄰角的二等分線，必互相垂直.

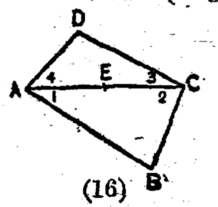
13. 兩個鄰角的二等分線互相垂直，則此兩角的外邊成一直線.

14. 兩個對頂角的二等分線必在一直線上.

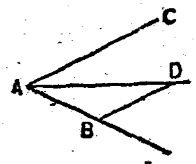
15. 若 $\angle A+\angle C+\angle D=180^\circ$，則 ABC 成一直線.



(15)



(16)



(18)

16. 若 $\angle 1+\angle 2+\angle B=\angle 3+\angle 4+\angle D$，則 AEC 成一直線.

17. 直角三角形斜邊上的高，分原形爲兩個互相等角的三角形.

18. 若過A角的二等分線上的任意一點D，作一邊的平行線遇他一邊於B，則AB＝BD.

19. 若從一個角的二等分線上的一點，作兩直線平行於此角的兩邊，則成一菱形.

20. 兩個等腰三角形的頂角互為補角，則其底角互為餘角.

21. 若過等腰三角形的頂點，而延長其一腰，使延長部份與此腰相等，則延長線末端與底邊近端的聯結線，必垂直於底邊.

22. 兩個全同三角形的相當中線必相等.

23. 兩個全同三角形的相當高，必相等.

24. 兩個全同三角形的相當角二等分線，必相等.

25. 兩個等腰三角形，各有一腰上的高和頂角彼此各各相等，則兩形全同.

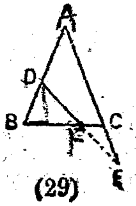
26. 若在五邊形ABCDE中，AB＝BC，AE＝CD，又∠A＝∠C，則

$$BE=BD,\text{又}\ \angle E=\angle D.$$

27. 兩個等邊三角形的高彼此相等，則兩形全同.

(28)

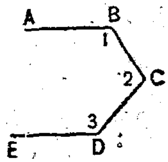
28. 若六邊形的對邊均平行，又二對邊相等，則各對邊均相等.



(29)

29. 從等腰三角形ABC底邊BC的兩端，在一腰上截取BD，在他一腰的延長線上取CE，若BD＝CE，則DE的聯結線被底邊BC所二等分.

求二 DF＝FE



(32)

30. 若兩直線被一截線所截，其同旁內角的二等分線互相垂直，則此兩直線平行.

31. 四邊形的各對角相等，則此形是平行四邊形.

32. 若 AB∥ED，$\angle 1+\angle 2+\angle 3=4rt.\ \angle s$.

33. 敍述並證明前面的一個命題的逆定理.

34. 五邊形的對角線有多少？ 八邊形？ 十邊形？ n 邊形？

35. 一個多邊形的內角之和等於外角之和的三倍，這是幾邊形呢？（每一個頂點的一個外角）.

36. 一個多邊形的內角之和，等於外角之和，這是幾邊形呢？

37. 一個多邊形，其內角之和等於六邊形內角之和的三倍，這是幾邊形呢？

38. 一個等角多邊形的一個外角等於等邊三角形的一個內角，這是幾邊形呢？

39. 若等腰梯形的上底等於他的一個腰，則其對角線必二等分其下底的底角.

40. 若從三角形的頂點作底邊的垂線，則底邊的兩線分各比他的鄰邊短.

41. 甲三角形的各頂點，落在乙三角形的各邊上，則甲形的周圍比乙形的周圍小.

42. 從三角形的兩頂點作從第三頂點所引中線的垂線，則此兩垂線

相等.

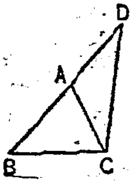
43. 順次聯結矩形各邊的中點，則諸聯結線成一菱形.

44. 順次聯結任意四邊形各邊的中點，則諸聯結線成一平行四邊形.

*45. 四邊形一雙對邊的兩中點，及兩對角線的兩中點，是一平行四邊形的四頂點.

46. 從等腰三角形的頂點至底邊上任意一點的一直線，必小於其一腰.

47. 在三角形ABC中，AB>AC，D是BA的延長線上的一點，則DB>DC.



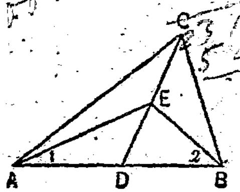
(47)

48. 平行四邊形兩對邊的中點，與一對角線兩端的聯結線，必分另一對角線爲三等分.


(48)

*49. 在三角形ABC中，C邊上的一點D與A聯結，而AC=BC，AB=AD=DC，則∠C=36°.

*50. 若中線CD上的任一點E，與A及B聯結，而∠B>∠A，求證∠2>∠1.



(50)

51. 從一直線外的一已知點作一直線，與已知直線成一等於半直角的角.

52. 從一直線外的一已知點，作一直線，與已知直線成一60°的角. 這樣的直線可作多少?

53. 從一直線外的一已知點，作一直線，與已知直線成一已知角.

54. 作一直線至一已知角的二邊上，使這直線等於且平行於一已知直線.

55. 等腰梯形的對角線相等.

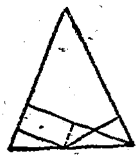
***56.** 若梯形的對角線相等，則此形爲等腰梯形.

171. 方法 XII. 要證兩直線 a 及 b 的和等於第三直線 c 有下列兩種方法:

(a) 作直線使等於 a 及 b 的和，而證所作的直線等於 c.

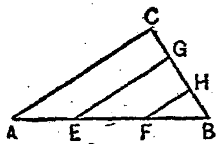
(b) 在 c 上截取 a (或 b)，而證明所餘的直線等於 b (或 a).

57. 在等腰三角形中，從底邊上任意一點作兩腰的垂線，其和等於一腰上的高.



(57)

58. 在 △ABC 中，若 AE＝BF，又 AC//EG//FH，求證 EG＋FH＝AC.



(58)

59. 在等腰三角形 ABC 中，過底邊 AB 上的一點 D，作兩腰的平行線，各遇兩腰於 E 及 F，則 DF＋DE＝AC.

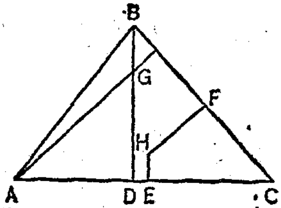
60. 從等邊三角形中的任意一點，作三邊的垂線，其和是一定量，且

等於這三角形的高.(57題).

*61. 在△ABC中,一高BD與另一高相交於G,又EH及HF是兩垂直二等分線,求證

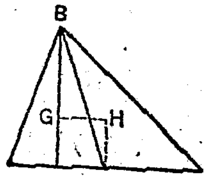
$$BG=2(HE),$$

又　　$$AG=2(HF).$$



(61)

62. 在三角形中,高的交點與垂直二等分線的交點的聯結線,必截中線的三分之一.(61題).



(62)

*63. 三角形的高的交點,中線的交點,和垂直二等分線的交點,這三點在一直線上.

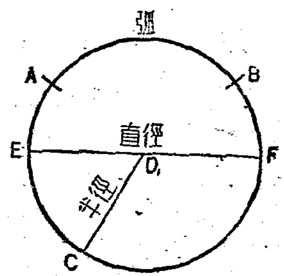
李先生

第二編

圓——作圖

172.　定義.　**圓**是一個平面上的封閉曲線，其上的各點與一個定點距離相等.如 ABC(37).

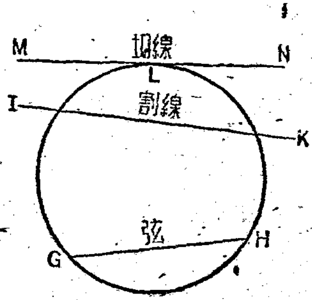
173.　定義.　定點(D)叫做**中心**.圓的長叫做**圓周**.**弧**是圓的任意一部份如 AB.**半圓**是圓周的一半.**劣弧**是小於半圓的弧；**優弧**是大於半圓的弧.



祇用一個弧字的時候，普通是指劣弧.

174.　定義.　**半徑**是聯結中心和圓上任意一點的一直線，如 DC.**直徑**是通過中心而兩端止於圓的一直線，如 EF.

175.　定義.　**弦**是聯結圓周上任意兩點的一直線，如 GH.**割線**是交圓於兩點的一直線，如 IK.**切線**是祇遇圓上一點的一直線，且雖延長之，亦不與圓相交，如 MN.



這一點(L)叫做**切點**.

176. 定義. **中心角**是兩半徑所成的角,如∠EDC.

一角的兩邊所夾的弧,叫做這角所對的弧;這角叫做這弧所對的角.聯結一弧兩端的弦,叫做這弧所對的弦;如弧GH所對的弦是GH.

177. 定義. 同中心的圓,叫做**同心圓**.

初步定理

178. 同圓的半徑相等. (由定義.)

179. 一點與中心的距離小於半徑,則此點在圓內.一點與中心的距離等於半徑,則此點在圓上.一點與中心的距點大於半徑,則此點在圓外.

180. 兩圓的半徑相等,則兩圓相等. (用重疊法.)

181. 同圓或等圓的直徑皆相等.

182. 直徑分圓爲二等分. (用重疊法.)

【註1.】直徑是過中心的弦,其他的弦是不過中心的弦.

【註2】圓因中心和半徑而定.

習題

1. 以A做中心作半徑等於r之圓.

2. 作90°,60°,45°,30°的中心角.

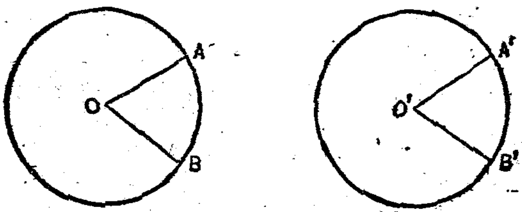
3. 求證: 任意直徑必分圓爲二等分.

4. 求證: 一個圓不能有兩個中心.

5. 作兩個同心圓以後,再作一個同心圓,使夾在先前所作的兩個圓的中間.

命題 I. 定理

183. 在同圓或等圓中,等中心角所對的弧相等;其逆,等弧所對的中心角相等.



I. 設在等Ⓢ O 和 O′ 中 $\angle O = \angle O'$.

求證 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$.

證

敍述	理由
1. 放圓 O 在他的等圓 O′上,使 OB 和 O′B′ 相重合.	1. 由假設,兩圓相等. 公理 19.
2. OA 沿 O′A′ 而落下.	2. 由假設, $\angle O = \angle O'$.
3. A 與 A′ 相重合.	3. 等Ⓢ的半徑相等.
4. $\overset{\frown}{AB}$ 與 $\overset{\frown}{A'B'}$ 相重合.	4. 等Ⓢ的半徑相等.
5. $\therefore \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$.	5. (19).

(續)

II. 逆定理. 設在等Ⓢ O 和 O′ 中, $\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$.

求證　$\angle O=\angle O'$.

1. 同上面的敍述(1).	1. 由假設, 兩圓相等.
2. $\widehat{BA}$ 沿 $\widehat{B'A'}$ 而落下.	2. 等Ⓢ有等半徑.
3. A 點落於 A′ 上.	3. 由假設, $\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$.
4. OA 與 O′A′ 相重合.	4. 二點決定一直線.
5. $\therefore\angle O=\angle O'$.	5. (19).

184. 系. 在同圓或等圓中, 中心角不等, 則大角所對的弧亦大. (逆定理亦眞).

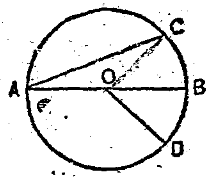
【示意】 用重疊法.

(實際的應用, 參看後面的附錄)

185. 方法 XII. **在同圓或等圓中, 要證弧的相等, 可證他們的中心角相等.**

習　題 41

1. 若 AB 和 CD 是同圓中的兩直徑, 則弧 AC=弧 BD.



(2)

2. 若 AB 是直徑, OD 是半徑, AC 是弦, 又 $\angle BOD=2\angle A$, 則 $\widehat{BD}=\widehat{BC}$.

3. 兩弦 AC 和 AD 所成的 A 角, 被直徑 AB 所二等分, 則 $\widehat{BC}=\widehat{BD}$.

4. 若從圓上一點A,作弦AB及直徑AC,則平行於AB的半徑分$\overset{\frown}{BC}$爲二等分.

5. 若過與圓上兩點等距離的一點,作一半徑,則兩點間的弧被他二等分.

6. 若從圓上一點所作兩半徑的垂線相等,則此點必二等分兩半徑所截的弧.

7. 試分一圓成四等份;八等份;六等份.

186. 一圓可分成360等份,每份叫做度.一度可再分成60等份,每份叫做分,同樣,一分可分成60秒.

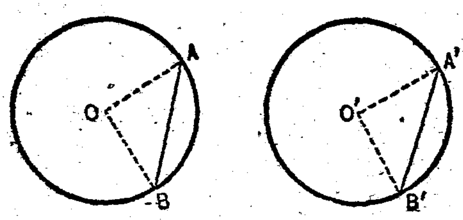
若角和弧的度數相同,則角以弧度之.

8. 若中心角是:(*a*) 90°;(*b*) 30°;(*c*) 1°,求證各中心角以其所對的弧度之.

9. 求作一45°的弧;60°的弧;150°的弧.

命題II. 定理

187. 在同圓或等圓中,等弧所對的弦相等;其逆,等弦所對的弧相等.



I. 設　在等Ⓢ O 和 O′ 中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$.

求證　$AB=A'B'$.

證

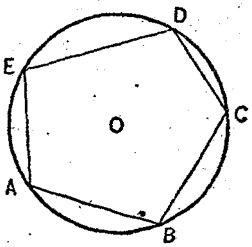
敍述	理由
1. 畫 $OA, OB, O'A', O'B'$.	1. 公理 13.
2. $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$.	2. 假設.
3. $\angle AOB=\angle A'O'B'$.	3. 在等Ⓢ中，等弧所對的中心角相等.
4. $AO=A'O', BO=B'O'$.	4. 等Ⓢ的半徑相等.
5. $\triangle ABO\cong\triangle A'B'O'$.	5. $s.a.s.=s.a.s.$
6. $\therefore AB=A'B'$.	6. ≅△的相當邊相等.

II. 逆定理. 設在等Ⓢ O 和 O′ 中，$AB=A'B'$.

求證　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$.

1. 畫 $OA, OB, O'A', O'B'$.	1. 公理 13.
2. $AB=A'B'$.	2. 假設.
3. $AO=A'O', BO=B'O'$.	3. 等Ⓢ的半徑相等.
4. $\triangle ABO\cong\triangle A'B'O'$.	4. $s.s.s.=s.s.s.$
5. $\angle AOB=\angle A'O'B'$.	5. ≅△的相當∠相等.
6. $\therefore\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$.	6. 在等Ⓢ中，等中心角所對的弧相等.

188. 定義.　一個多邊形的各頂點都在一個圓上，則此多邊形**內接於此圓**，如 ABCDE.　此圓稱爲**外接於此多邊形.**

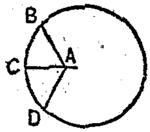


外接圓的中心叫做多邊形的**外心.**

189. 方法 XIV.　**在同圓或等圓中，要證弧的相等，可證弦的相等；反之，要證弦的相等，可證弧的相等.**

習　題

1. 若 $\angle BAC = \angle DAC$，又 $AB = AD$，則 $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$.



(1, 2)

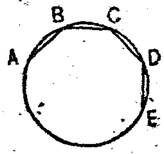
2. 若 $\angle BAC = \angle DAC$，又 $\angle CBA = \angle CDA$，(未畫於圖內)，則 $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{CD}$.

3. 若 $\triangle ABC$ 內接於一圓，而 $\angle A = \angle B$，求證 $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$.

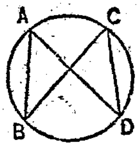
4. 若兩弦互相二等分，則一雙對頂角所對的弧相等.

5. 若兩弦互相二等分，則此兩弦都是直徑.

6. 若諸弦 AB, BC, CD, DE 相等，則諸弦 AC, BD, CE 亦相等.



(6)



(7, 8)

7. 若 $AB = CD$，則 $BC = AD$

8. 若相交兩弦 AD 和 BC 相等，則

(續)

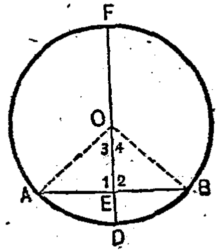
AB=CD.

9. 一個內接等邊五邊形的對角線相等.

10. 從一個內接等邊六邊形的各角頂所作的各半徑,分此形成六個全同的等邊三角形.

命題 III. 定理

190. 垂直於弦的直徑,必二等分此弦及其所對的弧.



設　在O圓中,直徑 $FD \perp AB$.

求證　$AE=EB$, $\widehat{AD}=\widehat{DB}$, $\widehat{AF}=\widehat{FB}$.

證

敍述	理由
1. 畫 OA, OB.	1. 公理 13.
2. $OE \perp AB$.	2. 假設.
3. $\angle 1 = \angle 2 = rt.$	3. ⊥s成直$\angle s$.
4. $OA = OB$.	4. 同圓的半徑相等.

(統)

5. $OE=OE$.	5. 恆等.
6. Rt. $\triangle AOE \cong$ rt. $\triangle BOE$.	6. 斜邊及一邊相等.
7. $\therefore AE=EB$, $\angle 3=\angle 4$.	7. $\cong$△的相當部分相等.
8. $\therefore \overparen{AD}=\overparen{DB}$.	8. 等中心角所對的弧相等.
9. $\overparen{DAF}=\overparen{DBF}$.	9. 直徑分圓為二等分.
10. $\therefore \overparen{AF}=\overparen{FB}$.	10. 公理 3.

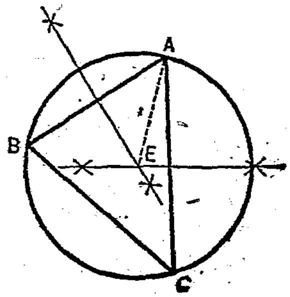
191. 系 弦的垂直二等分線,必通過圓的中心.

習 題

1. 在 O 圓中, $AB=AC$, $OD\perp AB$, 又 $OE\perp AC$, 求證 $\triangle ADO \cong \triangle AEO$.

命 題 IV. 作 圖 題

192. 求作已知三角形的外接圓.



(試)

設 $\triangle ABC$.

求作一圓外接於 $\triangle ABC$.

作圖法： 作 AC 和 AB 兩邊的垂直二等分線，此二直線相交於一點 E.　(82)(102)

以 E 做中心，用等於 EA 的半徑，作一圓 ABC.

ABC 就是所求的圓.

證　E 與 A, B, 及 C 等距離.　(162)

∴以 E 做中心，用等於 EA 的半徑，所作的圓，必通過 A, B, 和 C.

193.　系 1.　不在一直線上的三點，決定一圓.

194.　系 2.　一圓不能通過在一直線上的三點.

195.　系 3.　一直線截一圓，其截點不能多於兩點.

196.　系 4.　兩圓相交，其交點不能多於兩點.

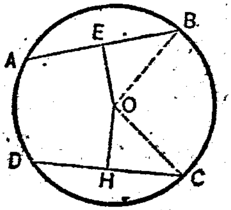
習　題

1.　求一已知圓的中心.

2.　二等分一已知弧.

命題 V5　定理

197.　在同圓或等圓中，等弦與中心的距離相等；其逆，與中心等距離的弦相等.



(統)　1.　設在 ⊙ABCD 中，AB＝CD, OE⊥AB, OH⊥CD.

求證　OE＝OH.

證

敍述	理由
1. 畫OB和OC.	1. 二點間得引一直線.
2. $AB=CD$, $OE\perp AB$, $OH\perp DC$.	2. 假設.
3. E和H是弦的中點.	3. 垂直於弦的直徑,必二等分此弦.
4. $EB=HC$.	4. 等量的半分相等.
5. $OB=OC$.	5. 同⊙的半徑相等.
6. $\angle BEO=\angle OHC=rt.\angle$.	6. ∠s成rt.∠s.
7. $Rt\triangle OEB\cong rt.\triangle OHC$.	7. 各有一斜邊及一邊彼此相等.
8. $\therefore OE=OH$.	8. ≅△s的相當邊相等.

習題

1. 從中心至內接等邊多邊形各邊的垂線相等.

2. 試重證命題V,作AO和DO,而證$\triangle AOB\cong\triangle DOC$.

【示意】 參考127頁23題.

II. 逆定理. 設在⊙ABCD中,　(統)

$OE=OH, OE\perp AB, OH\perp CD$.

求證　　　$AB=CD$.

1. 作OB和OC.	1. 公理13.
2. $OB=OC$.	2. 同⊙的半徑相等.
3. $OE=OH$，$OE\perp AB$；$OH\perp CD$.	3. 假設.
4. $\angle BEO=\angle OHC=rt.\angle$.	4. $\angle s$成$rt.\angle s$.
5. $Rt.\triangle OEB\cong rt.\triangle OHC$.	5. 各有一斜邊及一邊彼此相等.
6. $EB=HC$.	6. $\cong\triangle s$的相當邊相等.
7. 但是E和H都是弦的中點.	7. 命題III.
8. $\therefore AB=CD$.	8. 何故?

198. 方法XV. **在同圓或等圓中，要證兩弦的相等，往往證其與中心等距離，或證其所對的弧相等.**

習　題

1. 若過半徑上的任意一點，作兩弦與此半徑成等角，則此兩弦必相等.

2. 兩等弦相交於一點，此點與中心的聯結線，必二等分此兩弦所成的角.

3. 在一已知圓中，作一弦使等於且平行於一已知弦.

4. 在一已知圓中，作一弦使等於一已知弦，且平行於一已知直線.

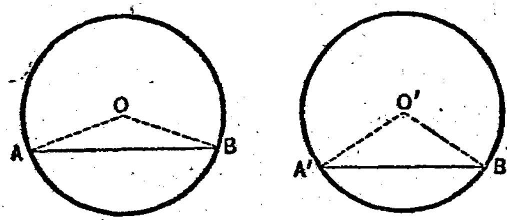
5. 在直徑的兩端作兩弦使與直徑成等角，求證此兩弦相等.

6. 一直徑二等分不過中心的兩弦，求證此兩弦平行.

7. 相交兩弦，各有一部分彼此相等，求證此兩弦相等.

命題 VI. 定理

199. 在同圓或等圓中，兩劣弧不等，則大弧所對的弦較大；其逆，大弦所對的弧較大.



I. 設在等⊙ O 和 O′ 中，$\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{A'B'}$,

求證 $AB>A'B'$.

證

敍述	理由
1. 作 $OA, OB, O'A', O'B'$.	1. 何故?
2. $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{A'B'}$.	2. 假設.
3. 在△ AOB 和 A′O′B′ 中，$\angle O>\angle O'$.	3. (184).
4. $AO=A'O'$, 又 $BO=B'O'$.	4. 何故?
5. $\therefore AB>A'B'$	5. (132).

(統)

II. 逆定理. 設在等Ⓢ O 和 O′ 中, $AB>A'B'$.

求證　$\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{A'B'}$.

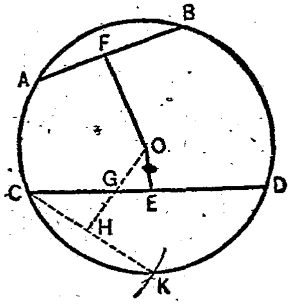
1. 作 $OA, OB, O'A', O'B'$.	1. 何故?
2. $AB>A'B'$.	2. 假設.
3. $OA=O'A'$,	3. 何故?
又 $OB=O'B'$.	
4. 在△AOB 和 $A'O'B'$ 中,	4. (133).
$\angle O>\angle O'$.	
5. $\therefore \overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{A'B'}$.	5. (184).

【註】 此後證題有時或不完全,學者須補足所缺的部分.

(習題在 148 頁)

命題 VII. 7 定理

200. 在同圓或等圓中,若兩弦不等,則大弦至中心的距離較近.



(既)

設　在⊙ABDC中，$CD>AB$，$OE\perp CD$，又 $OF\perp AB$.

求證　　$OE<OF$.

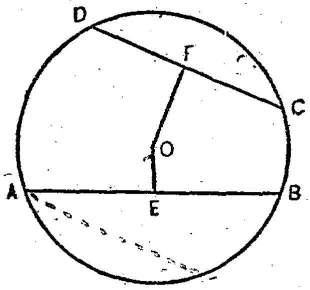
證

敍述	理由
1. $CD>AB$.	1. 假設.
2. $\overset{\frown}{CD}>\overset{\frown}{AB}$.	2. (199).
3. 以C做中心，用等於 AB 的半徑，作弧截 $\overset{\frown}{CD}$ 於 K.	3. 何故?
4. 作CK，又 $OH\perp CK$.	4. 何故?
5. $CK=AB$.	5. 何故?
6. $OH=OF$.	6. 等弦與中心的距離相等.
7. $OE<OG$.	7. (131).
8. $OG<OH$.	8. (公理 11).
9. $\therefore OE<OH$. 或 $OE<OF$.	9. (公理 9).

(習題在 148 頁)

命題 VIII. 定理

201.　在同圓或等圓中，若二弦至中心的距離不等，則距離近的弦較大.〔命題 VII 的逆定理〕.



設　在圓 ABCD 中，$OE<OF$，$OE\perp AB$，$OF\perp DC$。

求證　$AB>DC$。

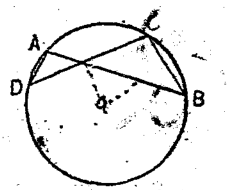
證

敍述	理由
1. $AB<DC$，或 $AB=DC$，或 $AB>DC$。	1. 何故？
2. 若 $AB<DC$，則 $OE>OF$。	2. (200)
3. 若 $AB=DC$，則 $OE=OF$。	3. (197)
4. 2，3，兩項均錯誤。	4. 由假設，$OE<OF$。
5. $\therefore AB>DC$。	5. 何故？

習題

1. 若 $AB>CD$，又 $\widehat{ACB}$ 和 $\widehat{DAC}$ 都是劣弧，求證 $CB>AD$。

2. 若 $CB>AD$，又 $\widehat{DAC}$ 和 $\widehat{ACB}$ 都是劣弧，求證 $AB>CD$。



(1,2)

202. 方法 XVI. **在同圓或等圓中，要證弦的不等，往往證其和中心的距離不等，或證其所對的弧不等。**

習　題

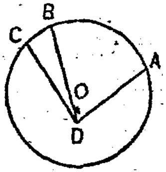
1. 若 ABC 是圓內的任意內接三角形，而 $\angle A > \angle B$，則 $\overset{\frown}{BC} > \overset{\frown}{AC}$.

2. 敍述並證明第1題的逆定理.

3. 若 $AD = DC$

又 $\angle ADB > \angle BDC$,

則 $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{BC}$.

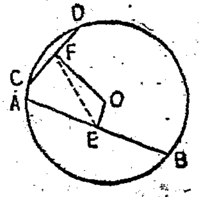


4. 若 $AD = DC$，又 $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{BC}$，則 $\angle ADB > \angle BDC$.

5. 若在半徑上，作二弦垂直於此半徑，則近中心的弦較大.

6. 從圓的中心至內接等邊六邊形一邊的垂線，小於從中心至內接等邊八邊形一邊的垂線.

7. 若 $EO \perp AB$，$OF \perp CD$，又 $\angle OEF > \angle OFE$，則 $AB > CD$.



8. 圓內接三角形 ABC 的 $\angle B > \angle C$，則從中心至 AB 的垂線，大於從中心至 AC 的垂線.

9. 在圓內過一點的弦，以垂直於過此點的半徑的弦爲最短.

10. 從圓周上一點所引的兩弦，與引向此點的半徑所成的角不等，則此兩弦不等.

*11. 過圓內一點的兩弦與過此點的半徑所成的角不等，則兩弦不

等.

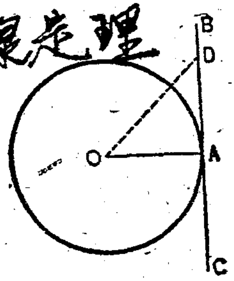
12. 直徑大於不過中心的任意一弦.

【示意】 作兩半徑至弦的兩端,其和等於直徑.

命題 IX. 定理

203. 垂直於圓半徑外端的一直線,是此圓的切線.

切線定理



設　在⊙O中,半徑 OA⊥BC 於 A.

求證　BC 是切線.

證

敍述	理由
1. 以 BC 上另一點 D 與 O 相聯結.	1. 何故?
2. OD>OA.	2. (131).
3. D 在圓外.	3. (179).
4. ∴ BC 是⊙O 的切線.	4. (175).

204. 系 1.　切線必垂直於自切點所作的半徑.

〔命題 IX 的逆定理〕.

【示意】 最短的直線是垂線，因為垂線是最短的直線.

205. 系 2. 在切點垂直於切線的垂線，必通過此圓的中心.

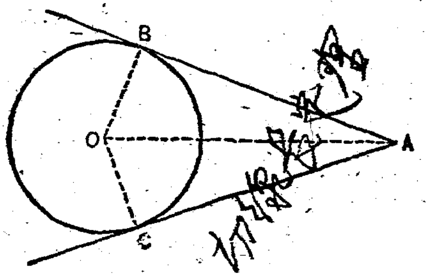
206. 系 3. 從中心至切線的垂線，必遇切線於切點.

207. 在一已知切點，祇能有一切線.

208. 定義. 從一點至一圓的切點所引直線的長稱為**切線的長**，如 AB(命題 X).

命題 X. 定理

209. 從圓外一點至圓所作的兩切線必相等.



(續)

設 O 圓的兩切線 AB 和 AC.

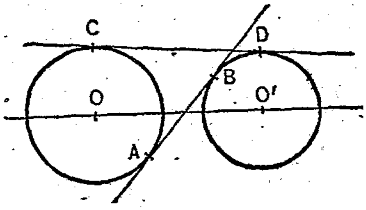
求證 AB＝AC.

證

敍述	理由
1. 作OA, OB, OC.	1. 何故?
2. $\angle OBA$和$\angle OCA$都是直角.	2. 命題IX,系1.
3. 在rt.$\triangle$OBA和OCA中, OB＝OC.	3. 何故?
4. OA＝OA.	4. 何故?
5. $\triangle OBA \cong \triangle OCA$.	5. 各有一斜邊,及一邊彼此相等.
6. $\therefore AB=AC$.	6. 何故?

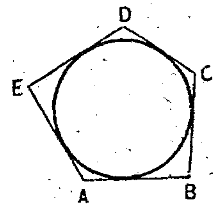
210. 系. 從圓外一點至圓所作的兩切線,與此點至中心的聯結線成等角(就是$\angle OAB=\angle OAC$).

211. 定義. 兩圓的中心,若在此兩圓的公切線的兩旁,此公切線叫做**內公切線**,如AB. 否則叫做**外公切線**,如CD.



公切線的長是指兩切點間線分的長.

212. 定義. 一個多邊形的各邊都是一個圓的切線，則此多邊形稱為**外切於此圓**，如 ABCDE. 此圓稱為**內切於此多邊形**.



內切圓的中心叫做多邊形的內心.

習 題

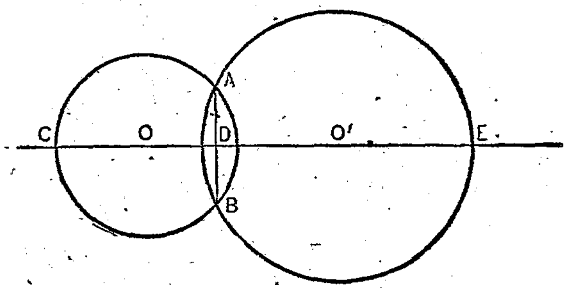
1. 兩圓的內公切線必相等.
2. 兩圓的外公切線必相等.
3. 聯兩切線的切點的弦，必與此兩切線成等角.
4. 圓外切四邊形兩對邊的和，必等於其他兩對邊的和.
5. ABCDEF 六邊形外切於一圓，則 AB+CD+EF=BC+DE+FA.
6. 直角三角形外切於一圓，則兩直角邊的和等於斜邊加此圓直徑的和.
7. 若兩切線成一 60° 之角，則聯結兩切點的弦等於任一切線.
8. 三角形 ABC 外切於一圓，此圓與 AB, BC, CA 邊各切於 X, Y, Z，若 AB=3, BC=4, CA=5， 求 AX, BY, CZ 的長.

213. 定義. 兩圓中心決定的直線叫做**聯心線**.

例如 OO′ 是兩圓 O 和 O′ 的聯心線(看上頁的圖).

命題 XI.　定理

214. 若兩圓相交，則其聯心線必垂直二等分其公共的弦.



設　ACB 和 AEB 兩圓相交於 A 和 B.

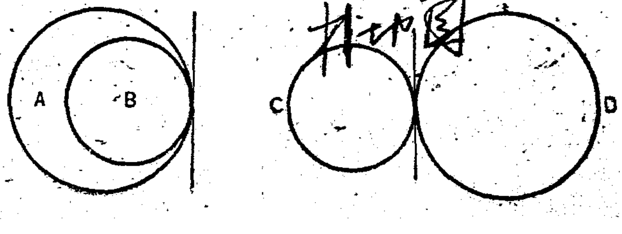
求證　聯心線 OO′ 是 AB 的垂直二等分線.

證　O 和 O′ 都是 A 和 B 的等距離點.（何故?）

∴ OO′ 是 AB 的垂直二等分線.（79）

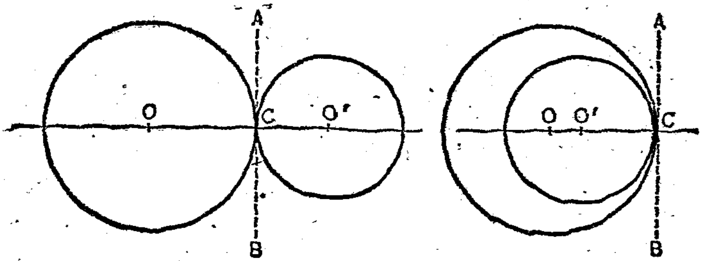
215. 定義. 若兩圓都切於一直線的同一點上，則稱此兩圓**相切**，視一圓在他一圓的裏面或外面，而稱爲內切或外切. 例如 A 和 B 是內切，C 和 D 是外切.

相切圓



命題XIII. 定理

216. 若兩圓相切，則聯心線必通過切點.



設 兩圓 O 和 O′ 相切於 C，OO′ 是聯心線.

求證 OO′ 通過 C.

證 在 C 點作公切線 AB. 在切點 C 作公切線的垂線.

此垂線必通過 O 和 O′ (205).

∴ OO′ 通過 C. (何故?)

習 題

1. 兩圓中心的距離如下，則其相關的位置如何?

(*a*) 大於兩半徑的和.

(*b*) 等於兩半徑的和.

(*c*) 小於兩半徑的和，而大於兩半徑的差.

(*d*) 等於兩半徑的差.

(*e*) 小於兩半徑的差.

(*f*) 等於零.

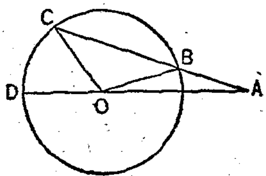
(2) 若在上面這命題(XII)的圖中，從 A 作兩圓 O 和 O′的兩切線，則此兩切線必相等.

(3) 若一割線截二同心圓，則兩圓間所截的線分相等.

(4) 若從一直徑的兩端所作的兩弦平行，則此兩弦相等.

(5) 若半徑 OB 等於 AB，

求證 $\angle COD=3\angle A$.



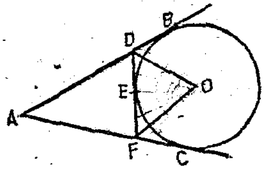
(5)

(6) 從 A 作已知圓 O 的兩切線 AB 和 AC，

又第三切線與 AB 和 AC，相交於 D 和 F.

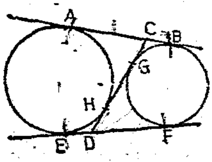
求證 $AD+DF+AF=2AB$，

又 $$\angle O=rt.\angle-\frac{\angle A}{2}.$$



(6)

*7. 兩圓的兩外公切線與一內公切線相交，則線分 CD 等於外公切線 AB.



(7)

度量法

217. 度一量的意義，就是求此量是其同種類量(卽單位)的幾倍.

218. 定義. 一量的**數量**，就是表明此量是其單位的幾倍的這個數.

例如　度一直線，要求此直線含有多少碼或吋，若度得的結果是16吋，則此直線的數量是16.

219.　定義.　一個數能以眞分數或假分數來表明他的，叫做**有理數**.

此定義包含一切整數在裏面，這是很明顯的.

例如　$\frac{2}{7}$，9，$2\frac{3}{4}$，11.4 都是有理數.若 m 和 n 是整數，則任何有理數必能以$\frac{m}{n}$之形式來代表他.

220.　定義.　一個數，不能以眞分數或假分數來表明的，叫做**無理數**[1].

1在許多初等代數教科書中，無理數的定義，祇指無理數的特殊的一種，就是開方不盡的一種根數.初等代數的演算所產生的無理數祇有這一種.

譬如$\sqrt{2}$是不能化爲分數的，因爲假使$\sqrt{2}$等於$\frac{m}{n}$(此處的 m 和 n 都是整數而無公約數的)，那末 $2=\frac{mm}{nn}$，這是不可能的，因爲 m 和 n 無公約數，所以$\sqrt{2}$是一個無理數.　其他如$\frac{\sqrt{7}}{5}$，$\sqrt[3]{9}$，$\sqrt[5]{11}$等，都是無理數.

221.　在以後諸章中，計算無理數之値至小數一位，二位，三位等，稱此諸小數爲此無理數的連續近似値.

譬如$\sqrt{2}$的連續近似值是:

1.4, 1.41, 1.414, 1.4142 等.

因為$\sqrt{2}$的眞值在 1.4 與 1.5 之間，第一近似值與眞值所差者小於 .1. 同樣第二近似值與眞值相差者小於 .01,第三相差者小於 .001,等. 很明顯的若繼續計算,所差的可以小於百萬分之一或萬萬分之一,或者小於任何指定很小之值.

222. 無理數不能以眞分或假分數來表明，但是他的近似值可以求到和眞值所相差的，小於任何指定很小之值.

223. 定義. 兩個無理數所有的連續近似值各各相等,則此兩個無理數相等.

譬如$\sqrt{3}$和$\frac{3}{\sqrt{3}}$所有的連續近似值,無論計算到任何位數,都是各各相等，所以我們叫$\sqrt{3}$和$\frac{3}{\sqrt{3}}$是相等的無理數.

224. 定義. 同種類的兩量之**比**,等於以同單位度量所得數量之商.

譬如 a 和 b 兩量的比是$\frac{a}{b}$或 $a \div b$;四碼和二碼的比是$\frac{4}{2}$ 或 2.

比是用來比較兩量的大小的.

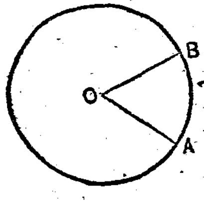
225. 若兩量的比是有理數,必有一個第三量,叫做公約量,存在,各原量必含此公約量之整數倍.

譬如　若 AB 和 CD 表兩線的長(用同一的單位),又 $\frac{AB}{CD}=\frac{5}{9}$,則 CD 的九分之一,AB 必含其五倍.或者把 CD 分做九份,於 AB 之上截其一份之長,繼續截取,則 AB 含五個如此之長.每一份叫做 AB 和 CD 的公約量.

226 若兩量的比是無理數,則可知兩量無公約量;譬如　若 $\frac{AB}{CD}=\sqrt{7}$,則 AB 和 CD 不能有一有理公約量,因爲不如此則 $\sqrt{7}$ 將與有理數相等.

命題 XIII. 定理[1]

227. 中心角以其所對的弧度他.



圓心角

設　中心角 O 所對的弧 $\overset{\frown}{AB}$,

求證　度量 $\angle O$ 和 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數相同.

證　(甲)　$\angle O$ 的度數是有理數.

1 教師喜用極限原理證明者,可翻閱附錄 343—346.

則$\angle O$的度數能以$\frac{m}{n}$表之，而m和n都是整數.

若環O點作360個相等的角，則每一個角必對圓周的$\frac{1}{360}$，

或1°的中心角對1°的弧.

若1°的角等分做n等份，則所對的弧均相等.

或$\left(\frac{1}{n}\right)^\circ$的中心角對$\left(\frac{1}{n}\right)^\circ$的弧.

取這一份的m倍，則得

$\left(\frac{m}{n}\right)^\circ$的中心角對$\left(\frac{m}{n}\right)^\circ$的弧.

（乙）$\angle O$的度數是無理數.

設$\angle O$的度數是某一無理數如$\sqrt{2}=1.41421\cdots\cdots\cdots$，又考察此數的連續近似值.

若$\angle O$含1.4°，則$\overset{\frown}{AB}$含1.4°.　（甲）

若$\angle O$含1.41°，則$\overset{\frown}{AB}$含1.41°.　（甲）

若$\angle O$含1.414°，則$\overset{\frown}{AB}$含1.414°.　（甲）

換句話說，就是$\angle O$和$\overset{\frown}{AB}$的數量的近似值各各相等.

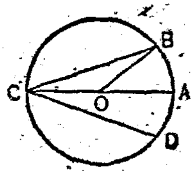
$\therefore\angle O$和$\overset{\frown}{AB}$的數量相等.　（223）

【註】在上面這個證明中，對於$\angle O$假定一個具體的數值.然而很明顯的，在這個證明中，並不限於某種選定的特殊數值.換句話說，就是無論$\angle O$的數值如何，同樣可以得到相同的終結的.所以這個證明是普遍的，這種證法的更普遍的形式，可以參考347節.

228. 系.　在同圓或等圓中，兩中心角的比等於其

所對的弧的比.

習　題



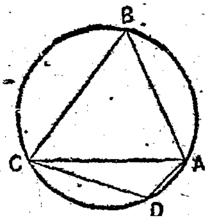
(1,2)

1. 若 $\overset{\frown}{AB}=40°$，中心角 AOB 是若干度？

又 $\angle ACB$ 是若干度？

2. 若 $\overset{\frown}{BD}=60°$，$\angle C$ 是若干度？

229. 定義. 一個角的頂點在圓周上，而以兩弦爲邊的；叫做**圓周角**；如 $\angle B$, $\angle D$, $\angle BCD$, $\angle BCA$.

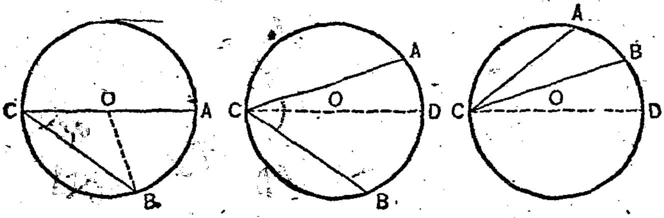


230. 定義. **弓形**是弧與其所對的弦所成的圖形，如弧 CBA 與弦 CA 所成的圖形.

231. 定義. 一個角的頂點在弧上而兩邊通過此弧的兩端的，叫做**弓形角**. 譬如，$\angle D$ 內接於弓形 CDA，又 $\angle B$ 內接於弓形 CBA.

命題 XIV. 定理

232. 圓周角以其所對的弧之半度他.



設　O圓的圓周角ACB.

求證　$\angle ACB$以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$度之.

（甲）角的一邊是圓的直徑.

證

敍述	理由
1. 作OB.	1. 何故？
2. $BO=OC$.	2. 何故？
3. $\angle C=\angle B$.	3. 等腰△的底∠＝,
4. $\angle AOB=\angle C+\angle B$.	4. (120).
5. $\angle AOB=2\angle C$.	5. 代入.
6. $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$.	6. 何故？
7. $\angle AOB$以$\overset{\frown}{AB}$度之	7. 中心角以其弧度之.
8. $\therefore \angle ACB$以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$度之.	8. 何故？

（乙）圓的中心在角內.

作直徑CD,

則$\angle ACD$以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$度之,　　　　（甲）

又$\angle BCD$以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$度之. (甲)

$\therefore \angle ACD+\angle BCD$以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BD})$度之. (公理 2)

或$\angle ACB$以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$度之.

(丙) 圓的中心在角外.

作直徑 CD,

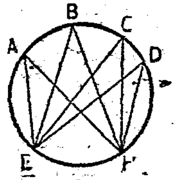
則$\angle ACD$以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$度之. (甲)

又$\angle BCD$以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$度之. (甲)

$\therefore \angle ACB$以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$度之. (公理 3)

233. 系 1. 同弓形內的弓形角相等.

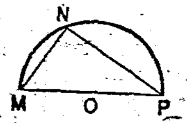
($\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$).



(系 1)

234. 系 2. 半圓內的弓形角是一直角.

($\angle N=90^\circ$).



(系 2)

【註】"$\angle AOB$以$\overset{\frown}{AB}$度之"這句話,是由"$\angle AOB$的數量$\doteqdot\overset{\frown}{AB}$的數量"簡約而成,所以這句話以及這種同類的話都可以當他們等式看,而公理 1,2,和 8 都可以拿來應用.

235. 系 3. 圓內接四邊形的對角相補.

(續)

習 題

1. 在232節的第一圖中,$\angle C=30^\circ$;$\overset{\frown}{CB}$有多少度?

2. 在同一圖形中，$\overset{\frown}{BC}=3\overset{\frown}{AB}$，求$\angle C$.

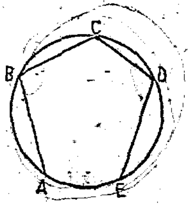
3. 在232節的第二圖中，$\overset{\frown}{AC}$是圓周的$\frac{1}{3}$，$\overset{\frown}{BC}$是圓周的$\frac{1}{4}$，求$\angle ACB$，$\angle ACD$.

4. 在232節的第三圖中，A是$\overset{\frown}{CD}$的中點，B是$\overset{\frown}{AD}$的中點，$\angle ACB$有多少度？

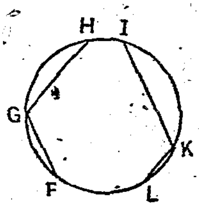
5. 四邊形ABCD內接於一圓，作兩對角線，若$\overset{\frown}{AB}=80°$，$\overset{\frown}{BC}=110°$，又$\overset{\frown}{CD}=90°$，求圖內各角的度數.

6. 在前面這習題的圖形中，求四對相等的角.

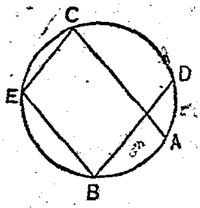
7. 若$\overset{\frown}{AE}=40°$，求$\angle B+\angle D$.



(7)



(8)



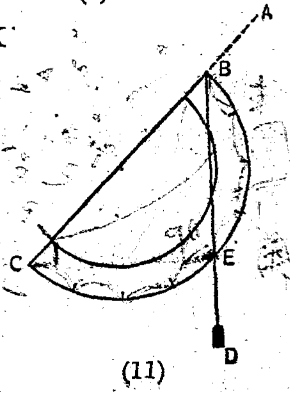
(9)

8. 若$\overset{\frown}{HI}=20°$，又$\overset{\frown}{FL}=30°$，$\angle G+\angle K$是多少度？

9. 若$\overset{\frown}{DA}=50°$，$\angle B+\angle C$是多少度？

10. 過兩等圓的交點之一，作一直線，使之與兩圓相遇，則其兩端與另一交點等距離.

11. 若一半圓如右圖放置之，使其直徑BC的延長線通過A點，又一鉛垂線BD交半圓於



(11)

E，則 A 的仰角以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BE}$ 度之.

〔仰角的定義和其實際上的應用，可參考 355 頁問題 34—36〕.

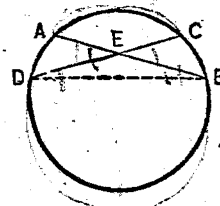
12、依 2:4:4:5 的連比把一個圓分做四份.順次連結各分點.求如此所成各圓周角的度數.

13. 在鐘面上，自 1 至 5 至 7 至 11 至 1，作諸直線，求各圓周角的度數.

14. 一個正六邊形內接於一圓，這六邊形每一個角有多少度？

命題 XV.　定理

236. 兩弦於圓內相交所成的角，以其所截的弧與其對頂角的弧之和之半度之.



兩弦角定理.

設　兩弦 AB 和 CD 在 O 圓內相交於 E.

求證　$\angle AED$ 以 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CB})$ 度之.

證

叙述	理由
1. 作 DB.	1. 何故？
2. $\angle AED = \angle D + \angle B$.	2. △的外∠ = …….

(続)

3. $\begin{cases} \angle D \text{ 以 } \frac{1}{2}\overset{\frown}{CB} \text{ 度之.} \\ \angle B \text{ 以 } \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} \text{ 度之.} \end{cases}$	3. 圓周角……
4. $\angle D+\angle B$ 以 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{CB}+\overset{\frown}{AD})$ 度之.	4. 何故?
5. $\therefore \angle AED$ 以 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{CB}+\overset{\frown}{AD})$ 度之.	5. 何故?

習　題

1. 在命題XV的圖中，設 $\overset{\frown}{AD}=60°$，$\overset{\frown}{BA}=140°$，又 $\overset{\frown}{CB}=20°$，求 $\angle AEC$ 和 $\angle DAE$.

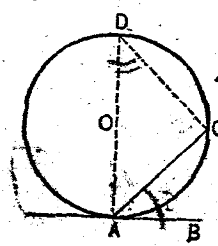
2. 設兩弦正交於圓內，則所截相對兩弧的和等於半圓.

3. 在命題XV的圖中，$\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{DB}$ 的和是 210°，求 $\angle CEB$.

4. 在同一圖(命題XV)中，$\angle B=40°$，又 $\overset{\frown}{BC}=100°$，求 $\angle AED$.

命題XVI.　定理

237. 圓的切線和自切點引的弦所夾成的角，以其弦所對的弧之半度之.



切弦角定理

設　切線AB,又在O圓內的弦AC.

求證　$\angle CAB$以$\frac{1}{2}\widehat{AC}$度他.

證

敘述	理由
1. 作直徑AD和弦DC.	1. 何故?
2. $\angle C$是一直角.	2. (234).
3. $\angle DAB$是一直角.	3. (204).
4. $\angle D$是$\angle DAC$的餘角.	4. (112).
5. $\angle BAC$是$\angle DAC$的餘角.	5. 何故?
6. $\angle BAC=\angle D$.	6. 何故?
7. $\angle D$以$\frac{1}{2}\widehat{AC}$度之.	7. 何故?
8. $\therefore\angle BAC$以$\frac{1}{2}\widehat{AC}$度之.	8. 等$\angle s$的度量相同.

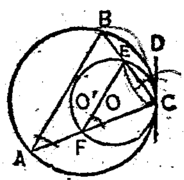
習　題

1. 在命題XVI的圖中,$\widehat{AC}=2\widehat{CD}$,求$\angle CAB$.

2. 弦必平行於過其所對弧的中點的切線.

3. 兩圓O和O′切DC於C點,求證

$\angle DCB=\angle A=\angle EFC$.



(3)

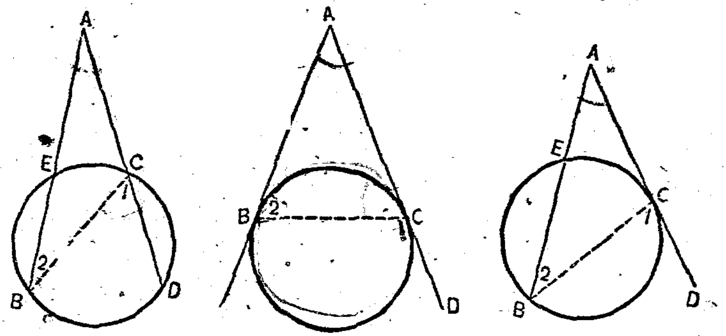
4. 一個圓的兩切線成40°的角,則兩切線間的劣弧有多少度?

(續)

172

命題XVII.　定理

238. 兩割線,或兩切線,或一切線和一割線在圓外相交所成的角,以其所截的兩弧的差之半度他.



(甲) **設** 從 O 圓外的一點 A, 作 AB 和 AD 兩割線, 割此圓於 E 和 C.

求證 $\angle A$ 以 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{EC})$ 度之.

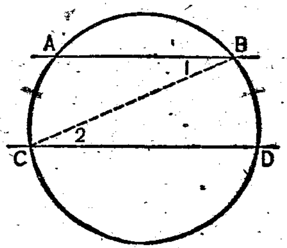
證

敍述	理由
1. 作 BC.	1. 何故?
2. $\angle A+\angle 2=\angle 1$.	2. 何故?
3. $\angle A=\angle 1-\angle 2$.	3. 何故?
4. $\angle 1$ 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ 度之.	4. 圓周角以……度之.
5. $\angle 2$ 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{EC}$ 度之.	5. 同 4.
6. $\angle 1-\angle 2$ 以 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{EC})$ 度之.	6. 兩$\angle$s 的差以其度量的差度之.
7. $\therefore \angle A$ 以 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{EC})$ 度之.	7. (代入).

【註】 學者試證(乙)和(丙).

命題 XVIII. 定理

239. 平行的割線在圓上所截的兩弧相等.



平行的截等弧

設 O圓的兩平行割線 AB 和 CD.

求證 $\widehat{AC}=\widehat{BD}$.

證

敍述	理由
1. 作 CB.	1. 何故?
2. $\angle 1$ 以 $\frac{1}{2}\widehat{AC}$ 度之. $\angle 2$ 以 $\frac{1}{2}\widehat{BD}$ 度之.	2. 圓周角以其弧之半度之.
3. AB//CD.	3. 假設.
4. $\angle 1=\angle 2$.	4. //s 的內錯 $\angle$s 相等.
5. $\frac{1}{2}\widehat{AC}=\frac{1}{2}\widehat{BD}$.	5. 等 $\angle$s 有相等的度量.
6. $\therefore \widehat{AC}=\widehat{BD}$.	6. 何故?

240. 系 1. 若一割線平行於一切線, 則所截的兩

弧相等.

241. 系 2. 平行的兩切線，在圓上所截的兩弧相等.

習題

1. 設兩切線所成的角是 60°，則其所截的兩弧各有多少度?

2. 設一割線與一切線所成的角是 20°，又其所截的較大弧是 90°，則其所截的另一弧是多少度?

3. 在命題 XVII(甲)的圖中，設 $\overset{\frown}{BD}=100°$，又 $\angle A=20°$，求 $\overset{\frown}{EC}$.

4. 在同一圖中，設 $\overset{\frown}{EC}=60°$，又 $\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$，求 $\angle A$.

5. 在命題 XVIII 的圖中，設 $\overset{\frown}{AB}=80°$，又 $\overset{\frown}{CD}=120°$，求 $\angle ABC$.

6. 一切線和自切點所引之弦所成的角的二等分線必二等分其所截的弧.

7. 圓內接梯形必是等腰梯形.

8. 在命題 XVIII 的圖中，設 $\overset{\frown}{AB}=80°$，又 $\overset{\frown}{CD}=200°$，求 $\angle B$.

9. 圓內接四邊形一個角的外角，必等於其內對角.

10. 求一個圓內接六邊形的相間三個角的和.

11. 設在兩個同心圓較大的一個圓中，作兩弦與較小的圓相切，則此兩弦必相等.

12. 設兩等弦相交，則順次聯結其各端的直線成一等腰梯形.

13. 延長圓周角的二等分線使與圓相交，過此交點作一弦平行於角

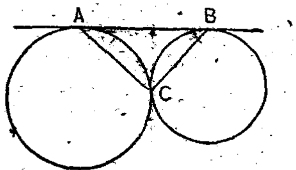
的一邊，則此弦必等於角的另一邊．

14. 以等腰三角形的一腰爲直徑作一圓，則此圓必二等分其底邊．

15. 設兩圓相交於 A 和 B，又 AC 和 AD 是兩圓的直徑，則聯結 C 和 D 的直線必通過 B 點．

16. 設兩圓相切，過切點作兩直線，使其各端與兩圓相遇，聯結此兩直線各端的弦必平行．

17. 設兩圓相切於 C，又一外公切線遇兩圓於 A 和 B，則角 ACB 是一直角．



(17)

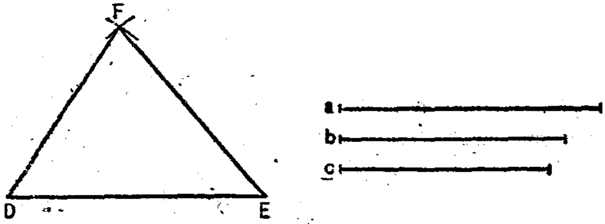
*18. 設自直徑的兩端作任意一弦(必須延長時，得延長之)的兩垂線，則兩垂足必與中心等距離．

作　圖

242. 【註】 在下面的諸例題中，我們用同樣的方法表示三角形中已知的部份；以 a, b, c 表三角形的三邊，以 A, B, C 表其所對的三個角，以 h_a, h_b, h_c 表其高，以 m_a, m_b, m_c 表其中線，以 t_a, t_b, t_c 表其角二等分線．

命題 XIX. 作圖題

243. 已知三邊，求作一三角形． ($s. s. s.$)



設　△的三邊是 a, b, c.

求作　三角形.

作法　作DE$=a$.

以E做中心,用等於 b 的半徑,作一弧,

以D做中心,用等於 c 的半徑,作一弧.

兩弧相交於F.　作FE和FD.

△DEF是所求的三角形.

討論　若一邊大於或等於其他兩邊的和,則作圖爲不可能.

習　題

1.　已知一邊,求作一等邊三角形.

2.　已知等邊三角形的周,求作等邊三角形.

3.　已知四邊及一對角線,求作一個四邊形.

（續）

命題~~XX~~20作圖題

244.　已知兩角及夾邊,求作一三角形.($a.s.a.$)

(學者試自解之)

習題

1. 在一已知直角邊上,求作一個等腰直角三角形.

2. 已知底邊和一個底角,求作一個等腰三角形.

245. 注意. 問題的能解與否,常常和作圖的先後有關.

命題 XXI. 作圖題

246. 已知兩邊和夾角,求作一三角形. ($s.a.s.$)

(學者試自解之)

習題

1. 已知一腰和頂角,求作一個等腰三角形.

2. 已知兩直角邊,求作一個直角三角形.

3. 已知三邊(AB,BC,和 CD),又知末一邊和未知邊所成的角($\angle D$),又知末一邊和對角線所成的角($\angle DCA$),求作一四邊形(ABCD).

4. 已知五邊(AB,BC,CD,DE,和 EA),又知夾其中一邊的兩個角($\angle A$和$\angle B$),求作一個五邊形(ABCDE).

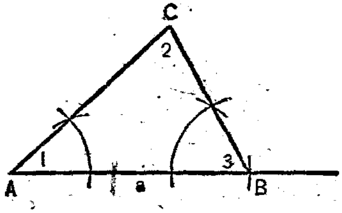
5. 已知四邊和一角,求作一個四邊形.

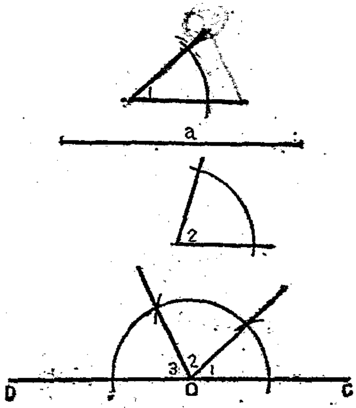
第5題,設不先作已知角的鄰邊,能作成否?

6. 已知周圍和一個角,求作一菱形.

命題 XXII. 作圖題

247. 已知一邊，一鄰角和一對角，求作一三角形。$(s.\ a.\ a.)$





設　$\angle 1$ 和 $\angle 2$，又 $\angle 2$ 的對邊 a。

求作　三角形。

作法　在平角 DOC 的 O 點，如上圖作 $\angle$s 1，2，所餘的 $\angle 3$ 等於三角形的第三角。

所求的三角形 ABC，用命題 XX$(a.\ s.\ a.)$的作法。

討論　若已知角的和大於或等於一平角，則作圖爲不可能。

習　題

1. 用命題 XXII 的方法作一直角三角形，設已知斜邊和一銳角。
2. 前面這個問題，不用命題 XXII，試另尋一個作圖法。
3. 求作一個直角三角形，已知其一直角邊及其對角。

4. 求作一個等邊三角形，已知其：

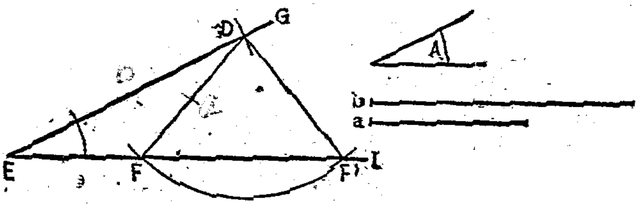
(a) 高.

(b) 內切圓的半徑.

(c) 外接圓的半徑.

命題 XXIII. 作圖題

248. 已知兩邊和其中的一對角，求作一三角形.



設 一個△的兩邊 a 和 b，又 a 邊的對角 ∠A.

求作 三角形.

作法 作∠GEI＝∠A.

在 EG 上，截取 ED＝b.

以 D 做中心，用等於 a 的半徑，作弧交 EI 於 F 和 F'.

兩個△EDF 和 EDF' 都適合所求的條件.

討論 若所作的弧，在E點的一側與底邊相交兩次，則此題有兩個解；若與底邊接觸一次，則有一個解；若不與底邊相遇，則無解.

習 題

1. 在命題 XXIII 中，若 A 是鈍角，有幾個解的可能？若 A 是直角呢？若 A 角是銳角呢？

2. 已知斜邊和一個直角邊，求作一個直角三角形．

3. 試先作斜邊以解前面這個問題．

249. 一個三角形可以作成，若已知下列各種部份：

(1) 三邊．

(2) 兩邊和夾角．

(3) 兩角和夾邊．

(4) 兩角和一非夾邊．

(5) 兩邊和其中的一對角．

作一個三角形，須已知三部份，而其中一部份常須一邊．

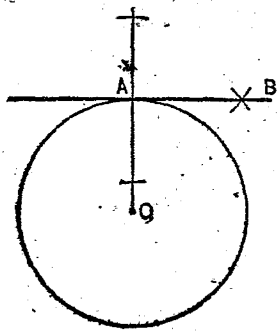
習　題

三角形的三個角是不是獨立的部份，若已知三個角能否作一個三角形？

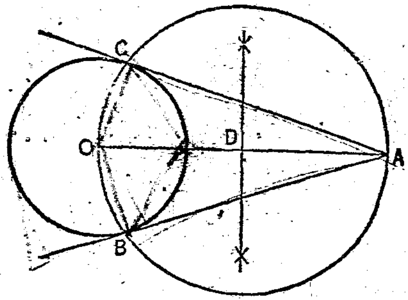
(統)

命題 XXIV．作圖題

250. 從一已知點，作一已知圓的切線．



(甲)



(乙)

(甲) 已知點A在圓上.

【示意】 圓半徑和在其一端的切線所成的角是什麼角?

(乙) 已知點A在圓外.

作法 聯結A與已知圓的中心O,以AO的中點D做中心,用DA做半徑作圓交已知圓於B與C,

則AC和AB都是所求的切線.

【示意】 證明$\angle$s ACO和OBA都是直角.

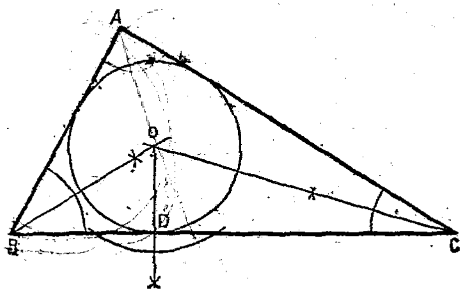
習 題

1. 作一直線,切於一已知圓,且平行於一已知直線.

2. 作一直線,切於一已知圓,且垂直於一已知直線.

命題XXV. 25 作圖題

251. 求作一圓使內切於一已知三角形.



設　△ABC.

求作　一圓使內切於△ABC.

作法　作∠B和∠C的二等分線.

此兩二等分線相交於一點O.　(160)

從O作OD⊥BC.

以O做中心,用等於OD的半徑,作一個圓,就是所求的圓.

〔學者試自證之,參看(160)和(203)〕.

252. 定義. 一個圓和三角形的一邊相切,又和其他兩邊的延長線相切的,叫做**傍切圓**.

習　題

1. 作一個三角形的三個傍切圓.

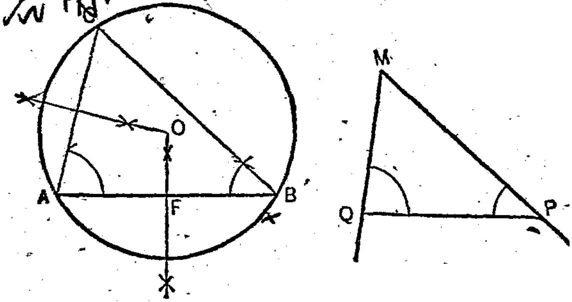
2. 三角形的一個角的二等分線遇外接圓於一點,此點與三角形的其他兩個角頂及內切圓的中心等距離.

3. 三角形的三邊是9, 8, 和9,一圓內切於其中,求自切點至各頂

點的距離(209).

命題 XXVI. 9/作圖題

253. 以已知直線做弦，求在其上作一個含已知角的弓形。容角弧 弧作法



設 直線 AB 和 ∠M.

求 以 AB 做弦,在其上作一個含 ∠M 的弓形.

作法 在 ∠M 的兩邊上取任意兩點 P 和 Q.

作 PQ.

以 AB 做底邊作 △ABC,使 ∠A = ∠Q,又 ∠B = ∠P.

作 △ABC 的外接圓.

則弓形 ACB 是所求的弓形.

證 　　　∠C = ∠M.　　　　(113)　(續)

∴ 在弓形 ACB 內的任意弓形角 = ∠M.　　　　(233)

習　題

在 2 吋的直線上求作弓形，使含 30° 的角；45° 的角；60° 的角；135° 的角．

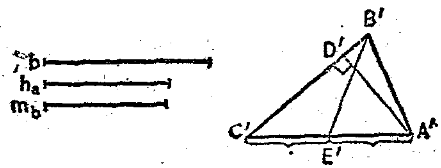
作圖題的分析

254. 作圖題的分析是一種推理的過程，作圖的方法可以因之而發現的．雖然沒有定則可以應用於一切的作圖題，而下面所舉的法則却可以應用到多數的問題．

例題A．已知一邊，相當的中線，和另一邊上的高，求作一個三角形．

設　b 是三角形的一邊，m_b 是相當的中線，又 h_a 是另一邊上的高．

求作　三角形．



分析　(1)　假設 A′B′C′ 是所求的三角形．

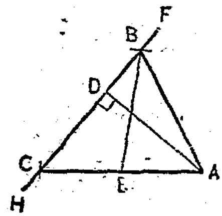
(2)　則必知 C′A′$(=b)$，C′E′ 和 E′A′$(=\frac{b}{2})$，A′D′$(=h_a)$，B′E′$(=m_b)$，又 $\angle$s A′D′C′ 和 A′D′B′$(=rt. \angle s)$．

（學者最好把已知的部份用記號標明，或用不同的顏色畫出來，使與其他的線分別清楚）．

(3) 細察此圖形中的各三角形，看一看有沒有一個三角形是能夠作的．此處直角 $\triangle A'D'C'$ 是能作的，因爲已經知道他的兩邊．

(4) 用這個三角形做作圖的基礎，因此

作法　作 $DA=h_a$．



在 D 點，作 $FH\perp AD$．

以 A 做中心，用等於 b 的半徑，作一弧交 DH 於 C．

作 AC．

二等分 AC 於 E，又以 E 做中心，用等於 m_b 的半徑，作一弧遇 FH 於 B．

則 ABC 是所求的三角形．

證　　$AD=h_a$．

$BE=m_b$．

$AC=b$．

AD 是高，因爲

$ADC=rt.\angle$

$CE=EA$．

$\therefore EB$ 是中線．

【註】學者首先應該十分注意，已知的各部份是否能使作圖可能．譬如在例題 A 中，若 $AD>AC$，則作圖爲不可能．

255. 下面的法則說明分析法普通的過程:

(1) 作一個與所求的相髣髴的圖，大小不必完全相同.

(2) 決定(*a*)各直線,(*b*)各角,這些是直接已知的,或者易於從已知部份求得的,並用記號標明.

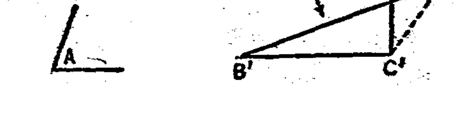
(3) 細察此圖的各三角形,而尋求一個可以作的.

(4) 用這個三角形做基礎，繼續決定圖形的其他部份.

(5) 假使尋不到直接可以作的三角形，那末作能得到這種三角形的補助線.

256. 有些問題必須要作補助線的（如 255 節的第 5 項所述）. 尤其是:**當已知和或差的時候,在分析中應該作出這種和或差.**

例題 B. 已知底邊和其他兩邊的和，和兩邊的夾角，求作一個三角形.



分析 (1) 假設 $A'B'C'$ 是所求的三角形.

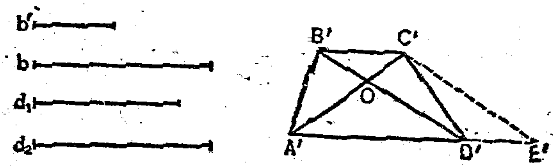
(2) 則僅知其兩部份.

$\therefore$延長 $B'A'$ 至 E' 使 $A'E'=A'C'$.

作$E'C'$, 乃知 $C'B'(=a)$, $B'E'(=b+c)$, $\angle B'A'C'(=\angle A)$, $\angle E'$ $(=\frac{\angle A}{2})$, 又$\angle A'C'E'(=\frac{\angle A}{2})$.

(3) 細察各三角形, $\triangle B'C'E'$ 是能夠作的, 就用這個三角形做作圖的基礎.

例題 C. 已知梯形的兩底(b 和 b'),又知其兩對角線(d_1 和 d_2),求作這個梯形.



分析 (1) 假設 $A'B'C'D'$ 是所求的梯形.延長 $A'D'$ 至 E' 使 $D'E'=B'C'$. 作 $C'E'$.

(2) 則知 $A'E'=b+b'$, $A'C'=d_1$, $B'D'=C'E'=d_2$.

(3) $\triangle A'C'E'$ 能夠作的 (*s. s. s.*).

(4) $\square B'C'E'D'$ 也能作的,因為已知兩邊和夾角.

(5) A', B', C', D'四頂點已得,故梯形得以完成.

習　題

已知下列各部,求作三角形:

(續)

1. a, b, m_b.

2. a, b, h_b.

3. $b, h_a, \angle A$.

4. $b, t_c, \angle A$.

5. $a, h_b, \angle B$.

6. a, b, h_c(2△).

7. $\angle C, t_c, b$.

8. $\angle A, \angle B, h_a$.

9. a, h_a, m_a.

10. b, h_a, m_a(2△).

11. a, m_a, m_b.

12. a, h_b, h_c.

13. $a, b, \angle A+\angle B$.

14. $a, \angle B, b+c$.

15. 作一個等腰三角形,若已知其底邊和一頂角.

16. 作一個等腰三角形,若已知底邊與一腰的和,和一個底角.

17. 作一個三角形,若已知其一角,這角的鄰邊,和其他兩邊的差.

18. 作一個三角形,若已知他的底邊,其他兩邊的差及夾角.

作直角三角形,已知:

19. 一直角邊和斜邊的高.

20. 斜邊及兩直角邊的差.

21. 斜邊及兩直角邊的和.

22. 作一個平行四邊形,若已知各邊和一對角線.

軌　跡

257. 在一個平面上的一點的軌跡,是一條線或是幾條線,必須(a)在這線(或這些線)上的點都適合於某

種條件，又(*b*)所有適合於這條件的點都在這線上(或這些線上).

如(*a*)一直線的垂直二等分線上的各點，均與這直線的兩端等距離. (125)

(*b*)與這直線的兩端等距離的各點，都在這直線的垂直二等分線上. (80)

所以此垂直二等分線是與此直線兩端等距離點的軌跡.

258. 軌跡意卽位置，在幾何上的意義是指一點依照某種條件而動所經過的各位置.

譬如 將緊張的細繩的一端釘在圖畫板上，使另一端環繞而移動必成一圓，這圓就是另一端的軌跡.

昇降機上的一點，在垂直於地面的一直線上，上下移動，這直線就是這個動點的軌跡.

同様，鐘錶的分針上的一點的軌跡就是一個圓.

259. 要證明某線是一軌跡，必須證:

(1) **這線(或許多線)上的各點都適合於所設的條件.**

(2) **適合於這個條件的各點都在這線(或許多線)上.**

卽證和(1)相當的定理，再證他的逆定理(和2相當)：

【註】 亦可證(1)和(2′).

(2′)不在這線(或許多線)上的各點,都不適合於所設的條件.

譬如求離AB $\frac{3}{8}$ 吋的一點的軌跡,假使祇證在CD上各點與AB有這樣的距離,這是不完全的,必須還要證明别無他點能適合這個條件,因而發現另一部的軌跡EF,在AB的他側.

習　題

試作下列各題的軌跡,無須證明:

(*a*)一點距離一已知點 $\frac{3}{4}$ 吋的軌跡.

(*b*)一點距離一已知直線 $\frac{1}{4}$ 吋的軌跡.

(*c*)一點與兩平行線等距離的軌跡.

(*d*)平行於一已知直線而在一已知圓內的弦的中點的軌跡.

(*e*)平行於三角形的底邊而止於其他兩邊的直線的中點的軌跡.

(*f*)一點與兩已知直線等距離的軌跡.

(*g*)已知圓的切線長 $\frac{1}{4}$ 吋,求其一端的軌跡.

(*h*)半徑等於 $\frac{1}{4}$ 吋的圓的中心的軌跡,這圓外切於半徑等於1吋的已知圓.

軌跡定理

260. 與已知點距離等於已知距離的點的軌跡,是以已知點做中心,用已知距離做半徑的一個圓.

因(*a*)在圓上各點與中心的距離等於已知距離，而(*b*)與中心距離等於已知距離的各點都在圓上.

261. 與一已知直線的兩端等距離的點的軌跡，是這直線的垂直二等分線.

因(*a*)在垂直二等分線上的各點與已知直線的兩端的距離相等，而(*b*)與直線兩端等距離的各點都在這垂直二等分線上. (80)

262. 與一已知直線距離等於已知距離的點的軌跡，是和已知直線平行而距離等於已知距離的二直線.

263. 與兩已知平行線等距離的點的軌跡，是平行於兩已知平行線中間的一直線.

264. 與相交二直線等距離的點的軌跡，是這二直線所成的角的二等分線.

習 題

1. 求一已知圓的半徑的中點的軌跡.
2. 求一直角的頂點的軌跡，若這直角的二邊過二定點.
3. 求一圓的中心的軌跡，若這圓切於一已知直線，且已知其半徑.
4. 求一圓的中心的軌跡，若這圓過一已知點，且已知其半徑. (續)
5. 求過二定點的一圓的中心的軌跡.
6. 求切於二已知直線的一圓的中心的軌跡.

7. 求一圓的中心的軌跡，若已知這圓的半徑，且切於另一已知圓.

8. 求切於一已知直線上的一定點的圓的中心的軌跡.

9. 求切於一已知圓上的一定點的圓的中心的軌跡.

10. 一個三角形的兩頂點 B 和 C 的位置是固定的，若 h_a 等於一已知直線，求第三頂點 (A) 的軌跡.

11. 一個三角形的兩頂點 B 和 C 的位置是固定的，若 m_a 等於一已知直線，求第三頂點 (A) 的軌跡.

12. 一個平行四邊形的底邊的長和位置是固定的，且其鄰邊等於一已知直線，求兩對角線的交點的軌跡.

13. 一矩形的底邊的位置是固定的，求對角線的交點的軌跡.

14. 求在一已知圓內等於已知長的弦的中點的軌跡.

15. 求過圓內一定點的弦的中點的軌跡.

16. **一個三角形的底邊等於已知長(固定)，頂角等於一已知角，則這頂點的軌跡是兩相等弧**(依照 178 頁 253 節作圖).

265. 應用軌跡能定適合於兩條件的一點或數點. 一條件決定一軌跡，兩軌跡的交點卽爲所求之點.

在下列各習題中，須說明在那種情形之下，可得一點或數點或無點.

習　題

1. 在一已知直線 AB 上求一點，與一定點 C 的距離等於所設距離 d.

2. 在一已知直線 AB 上求一點，與一已知直線 CD 的距離等於所設距離 d.

3. 在一已知直線 AB 上求一點，與兩定點 P 和 Q 等距離.

4. 在一已知圓上求一點，與一定點 C 的距離等於已知距離 d.

5. 在一已知圓上求一點，與所設二平行線 CD 和 EF 等距離.

6. 在一已知圓上求一點，與二已知相交直線 CD 和 EF 等距離.

7. 求一點與二已知相交直線 AB 和 CD 等距離，且與一定點 E 的距離等於已知距離.

8. 求一點與二已知相交直線 AB 和 CD 等距離，且與另一已知直線 EF 的距離等於已知距離.

9. 求一點，與二已知相交直線 AC 和 CD 等距離，且與兩定點 E 和 F 等距離.

10. 求一點，與二定點等距離，且與一定點 E 的距離等於已知距離.

11. 求一點，與二定點等距離，且與二已知平行直線 EF 和 GH 等距離.

12. 求一點，與二所設平行直線等距離，且與二已知相交直線 EF 和 GH 等距離.

13. 求一點，與一已知直線 AB 的距離等於所設距離 d，且與二定點 E 和 F 等距離.

14. 求一點，與一已知直線 AB 的距離等於所設距離 d，且與二已知平行直線 EF 和 GH 等距離.

求作一圓，已知圓的半徑：

15. 過一定點，且切於一已知直線.

16. 切於二已知直線.

17. 過一定點且切於一已知圓.

18. 切於二已知圓.

19. 切於一已知圓和一已知直線.

求作一圓：

20. 過一已知直線外的一點，且切於這已知直線上的一定點.

21. 切於一已知圓上的一定點，且過圓外的另一定點.

22. 切於一已知直線及一已知圓上的一定點.

【示意】 從圓上的一定點作一切線.

***23.** 已知 a，h_a，$\angle A$，作一三角形.

24. 已知 a，m_a，$\angle A$，作一三角形.

266. 解習題本沒有普遍的方法可以遵循，惟依下列的法則，可解出不少：

(1) **把已知的部分逐漸湊合起來.**(245).

(2) **應用分析方法.**

(3) **應用軌跡.**

雜題

作一等腰三角形,已知:

1. 底邊和一等腰上邊的高.

2. 底邊上的高和頂角.

3. 頂角,和底邊及一腰的和.

4. 周圍和兩底角.

作一直角三角形,已知:

5. 一銳角及斜邊上的高.

6. 斜邊上的高和高把斜邊分成二段線分中的一段.

7. 一銳角和兩直角邊的和.

8. 在一三角形的一邊上,求與其他兩邊等距離的一點.

9. 已知直角三角形的斜邊,求其直角頂點的軌跡.

10. 在四邊形的一邊上,求與其對邊兩端等距離的點.

11. 從圓上一點P,作與中心距離等於已知距離的弦.

12. 在一已知圓內,作與一定點的距離等於已知距離的直徑.

13. 過一定點,作與另一定點的距離等於已知距離的直線.

14. 從一已知圓上二定點,作相等且平行的二弦.

15. 三等分一平角.

16. 三等分一直角.

17. 三等分一半圓.

18. 從一已知直線外的一定點,作一直線，使與已知直線成一個角等於所設的角.

19. 從所設二平行直線間的一定點,作止於二平行線等於定長的直線.

20. 過一定點,作一直線使與所設二直線成等角.

*21. 作二直線所成的角的二等分線,不得延長使其相交.

作一三角形,已知:

22. a, $\angle B$, h_a.

23. a, $\angle B$, m_c.

24. a, $\angle B$, t_c.

25. $\angle A$, h_a, t_a.

26. $a+b+c$, $\angle B$, $\angle C$.

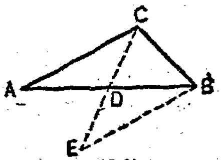
27. a, b, R^1.

28. a, h_a, R^1.

29. h_a, h_b, $\angle B$.

30. a, b, m_c.

R^1＝外接圓的半徑.



(30)

【示意】 延長 m_c 使等於原長.

*31. a, m_c, $\angle C$.

*32. m_a, m_b, h_c.

*33. m_a, h_b, h_c.

*34. m_a, m_b, m_c.

作一正方形,已知:

35. 對角線.

36. 一邊與對角線的差.

37. 一邊與對角線的和.

作一矩形,已知:

38. 一邊和一對角線.

39. 一邊及二對角線所成的角.

40. 周圍和對角線.

作一菱形,已知:

41. 二對角線.

42. 周圍和一對角線.

43. 一角和一對角線.

44. 高和底邊.

45. 高和一角.

作一平行四邊形,已知:

46. 相隣二邊和一高.

47. 相隣二邊和一角.

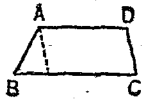
48. 一邊和二對角線.

49. 一邊,一角,和一對角線.

50. 二對角線和對角線所成的角.

267. 分析關於梯形的習題,可從一頂點A作一直

線平行於 DC，或平行於對角線 DB.



作一梯形，已知：

1. 四邊.

2. 二底邊和二下底角.

3. 二底邊，其他一邊，和一底角.

4. 二底邊和二對角線.

5. 一底邊，二對角線，和二對角線所成的角.

6. 作二已知圓的外公切線.

7. 作二已知圓的內公切線.

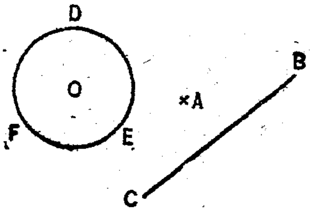
8. 已知三個角，作一三角形使外切於一已知圓.

9. 求從一圓外一定點所作割線的中點的軌跡.

10. 已知三個角，作一三角形內接於一已知圓.

*11. 從圓上一定點，作一弦被一已知弦所二等分.

12. 過一已知圓和一已知直線間的一定點 A，作一直線，止於圓及直線而被 A 所二等分.



(12)

13. 二定點 A 和 B，在直線 CD 的一側，求直線 CD 上一點 X，使 $\angle AXC = \angle BXD$.

14. 二全同三角形的二外接圓相等.

15. 二全同三角形的二內切圓相等.

16. 已知底邊和內切圓的半徑,求作一等腰三角形.

17. 一圓內切於半徑二倍大的圓上一點 P,求證在大圓內,過 P 點的諸弦都被小圓所二等分.

18. 圓上四點 A, B, C, D 分圓成 6, 9, 10, 11 之比.求順次聯結四點,所作對角線,及延長二對邊交於圓外所成諸角的度數.

第 三 編

比例 相似多邊形

268. 定義. **比例**是表示二比相等的等式，如$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，或 $a:b=c:d$.（參看 224 節）.

【註】 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$和 $a:b=c:d$ 二式是相同的，故假設時爲 $a:b=c:d$，在證明時可應用$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，不必說明理由.同樣，要證明 $a:b=c:d$，可證明$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$以代之.

269. 定義. 比例的第一和第四兩項叫做**外項**；第二和第三兩項叫做**內項**.

270. 定義. 第一和第三兩項是**前項**，第二和第四兩項是**後項**.

如在 $a:b=c:d$ 比例中，a 和 d 是外項，b 和 c 是內項，a 和 c 是前項，b 和 d 是後項.

271. 定義. 設比例的二內項相等時，任一內項是第一和末項間的**比例中項**.

如在 $a:b=b:c$ 比例中，b 是 a 和 c 間的比例中項.

272. 定義. 比例的末項是前三項的**第四比例項**.

如在 $a:b=c:d$ 比例中，d 是 a，b，和 c 的第四比例項.

273. 比的二項必須爲同類量，或量之以數量表示者.

命題 I. 定理

274. 在任何的比例中，二內項的積，必等於二外項的積.

設 $a:b=c:d$.

求證 $ad=bc$.

證 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. （假設）

去分母，即二邊以 bd 乘之，

$ad=bc$. （公理 7）

275. 系. 若一比例的任意三項，與其他一比例的相當三項各各相等，則其餘一項必相等.

276. 【註】 在幾何學中，二量的積，即二量的數量的積.

習 題

1. 求 x 的值，設

(a) $3:x=4:\frac{2}{3}$ (c) $x:7=2:21$.

(b) $112:42=16:x$. (d) $a:m=x:n$.

2. 求下列三數的第四比例項:

(a) 1, 2, 和 3. (b) 2, 1, 和 3. (c) m, n 和 P.

3. 求下列二數的比例中項:

(a) 9 和 4. (b) 30 和 3. (c) 1 和 16.

命題 II. 定理

277. 若二數的積等於其他二數的積，則以任二數做內項,其他二數做外項,必成比例.

設 $ad=bc$.

求證 $a:b=c:d$.

證 $ad=bc$. (假設)

兩邊以 bd 除之.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$ (公理 8)

習 題

1. 若 $ab=mn$, 求 a, b, m, 和 n 四數能成的各比例.

2. 從 $3\times10=5\times6$, 以 3 做第一項,列兩個比例.

3. 若 $ab=xy$, 以 b 做第一項,列兩個比例.

4. 求 $x:y$ 的比,若

(a) $6x=5y$. (c) $6x=y$.

(b) $9x=2y$. (d) $mx=ny$.

(e) $(a+b)x=cy$. (g) $4x-6y=0$.

(f) $mx+nx=py$. (h) $ax-ay=bx-by$.

命題 III. 定理

278. 二量的比例中項等於這二量的積的平方根.

設 $a:b=b:c$.

求證 $b=\sqrt{ac}$.

證 $a:b=b:c$. (假設)

$b^2=ac$. (274)

兩邊都開方,

$b=\sqrt{ac}$.

習題

求下列二數的比例中項:

(a) 2 和 18. (c) $2a$ 和 $32a$.

(b) $\frac{4}{3}$ 和 $\frac{25}{3}$. (d) $3b^2$ 和 $9a^2$.

命題 IV. 定理

279. 若四個量成比例,更迭之仍成比例,即第一項與第三項的比等於第二項與第四項的比.

設 $a:b=c:d$.

求證 $a:c=b:d$.

證 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. (假設)

$ad=bc$. (274)

$\therefore a:c=b:d$. (277)

命題 V. 定理

280. 若四個量成比例,反轉之仍成比例,即第二項與第一項的比等於第四項與第三項的比.

設 $a:b=c:d$.

求證 $b:a=d:c$.

證 $a:b=c:d$. (假設)

$ad=bc$. (274)

$\therefore b:a=d:c$. (277)

習 題

變更比例 $m:x=p:q$, 使 x 做第四項;第一項;第三項.

命題 VI. 定理

281. 若四個量成比例,合比之仍成比例,即第一與第二項的和與第二項的比,等於第三與第四項的和與第四項的比.

設 $a:b=c:d$.

求證 $a+b:b=c+d:d$.

證 $a:b=c:d$, (假設)

或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$. (何故?)

$\frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{c}{d}+\frac{d}{d}$. (何故?)

$\therefore$ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, (何故?)

或 $a+b:b=c+d:d$.

命題 VII. 定理

282. 若四個量成比例,分比之仍成比例,即第一與第二項的差與第二項的比,等於第三與第四項的差與第四項的比.

設 $a:b=c:d$.

求證 $a-b:b=c-d:d$.

證 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. (假設)

$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$. (公理3)

$\therefore$ $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$. (代入)

習 題

1. 變更下列各比例，使祇有一項含 x.

(a) $2:3=5-x:x$.　　(d) $4:3=2+x:x$.

(b) $6:7=2-x:x$.　　(e) $7:5=3+x:x$.

(c) $a:b=5-x:x$.　　(f) $a:b=5+x:x$.

2. 若 $x+y:y=7:3$，求 x 與 y 的比.

3. 若 $x-y:y=2:3$，求 x 與 y 的比.

命題 VIII. 定理

283. 若四個量成比例，合分比之仍成比例，卽第一與第二項的和與差的比，等於第三項與第四項的和與差的比：

設 $a:b=c:d$.

求證 $a+b:a-b=c+d:c-d$.

證 $a:b=c:d$.　　(假設)

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}. \qquad (281)$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}. \qquad (282)$$

(秋)

$$\therefore \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}. \qquad (\text{公理 } 8)$$

習 題

1. 變更下列各比例使祇有一項含 x。

(a) $3:2=5+x:5-x$.

(b) $5:3=3+x:3-x$.

(c) $a:b=1+x:1-x$.

2. 若 $x+y:x-y=12:5$，求 x 與 y 的比。

3. 若 $x+y:x-y=a:b$，求 x 與 y 的比。

命題 IX. 定理

284. 一串等比，前項的和與後項的和的比等於任意一比的前項與其後項的比。

設 $a:b=c:d=e:f$.

求證 $a+c+e:b+d+f=a:b$.

證 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\cdots\cdots=r$. (假設)

則 $a=br,\ c=dr,\ e=fr$. (何故?)

$a+c+e=br+dr+fr$, (公理 2)

或 $a+c+e=(b+d+f)r$, (代入)

$\therefore \frac{a+c+e}{b+d+f}=r=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$. (何故?)

習 題

1. 若 $a:b=c:d=e:f=5:7$，求 $\frac{a+c+e}{b+d+f}$.

2. 若$\frac{x-a-c}{y-b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，求 $x:y$.

3. 若$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$，求 $x+y+z$ 與 z 的比.

命題 X. 定理

285. 二個或二個以上比例的相當項的積仍成比例.

設 $a:b=c:d$.

$m:n=p:q$.

求證 $am:bn=cp:dq$.

證 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$. （假設）

$\therefore$ $\frac{am}{bn}=\frac{cp}{dq}$. （公理 7）

286. 系. 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，則 $\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd}$.

習 題

1. 若 $x:y=1:4$，$x:\frac{1}{y}=1:9$，求 x.

2. 若$\frac{1}{x}:y=1:2$，$x:y=1:8$，求 y.

命題 XI. 定理

287. 若四個量成比例，這些量的等次冪或等次根成比例.

設 $a:b=c:d$.

求證 $a^n:b^n=c^n:d^n$,

$\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{c}:\sqrt[m]{d}$.

證 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. (假設)

兩邊 n 方,

$\therefore \frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}$. (何故?)

同樣,兩邊開 m 方,

$\therefore \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}$. (何故?)

288. 初等平面和立體幾何,祇應用到平方和平方根及立方和立方根.故命題 XI 可改爲"若四個量成比例,其平方和平方根(或立方和立方根)成比例".

習 題

1. 若 $x^3:y^3=64:125$, 求 $\frac{x}{y}$.

2. 若 $\sqrt{x}:\sqrt{y}=1:2$, 求 $\frac{x}{y}$.

3. 若 $\sqrt[3]{x}:\sqrt[3]{y}=1:3$, 求 $\frac{x}{y}$.

4. 若 $\sqrt[3]{x}:1=\sqrt[3]{y}:2$, 求 $\frac{x}{y}$.

5. 若 $x+y:x-y=3:1$, 求 $\frac{x^2}{y^2}$.

6. 若 $x^2:4a^2=y^2:b^2$，求 x^3 與 y^3 的比.

命題 XII. 定理

289. 二量的同倍量的比與二量的比相等.

設 a 和 b 二量.

求證 $ma:mb=a:b$.

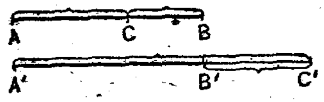
證 $a:b=a:b$. (恆等)

$m:m=1:1$. (何故?)

$\therefore$ $ma:mb=a:b$. (定理 X)

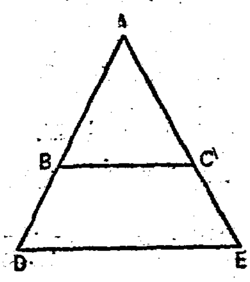
290. 定義. 在 AB 直線或其延長線上，取一點 C，AC 和 BC 叫做**線分**.

291. 線分有**內外**之別，視 C 在 AB 線上或在 AB 的延長線上而異.



如 AB 是被內分，A'B' 是被外分.

AB 的兩線分是 AC 和 CB，A'B' 的兩線分是 A'C' 和 B'C'.



【註】 若 BC 交 AD 和 AE 於 B 和 C 使 AB:BD=AC:CE，直線 BC 叫做分二邊成比例. 若 AB:AD=AC:AE，二邊亦叫做被分成比例.

習 題

1. 把 10 吋長的直線，內分成 2:3 的比.

2. 把 18 吋長的直線，外分成 3:2 的比.

3. 一 18 吋長的直線，分成三線分，成連比 2:3:4，求各線分的長.

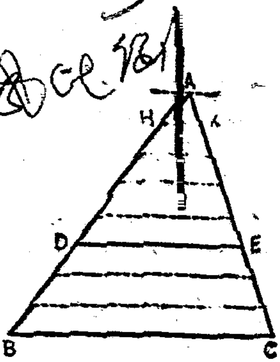
比 例 線

命題 XIII 定理[1]

13

292. 平行於一三角形的一邊的一直線，分其他二邊成比例.

線平行图比例



設 在 △ABC 內，DE∥BC.

求證 AD:DB＝AE:EC.

證

（甲）（可通約的）

敘 述	理 由
1. 設 AH 爲度量的單位，則 $AD=m(AH)$，又 $BD=n(AH)$.	1. 假設兩線分是可通約的.（續）

[1]用極限證明可參閱附錄.

2. $\frac{AD}{DB}=\frac{m}{n}$.	2. 二同類量的比，等於度量二量的數量的比.
3. 過A點及其他分點，作直線$\parallel$BC.	3. 何故?
4. 這許多線皆$\parallel$BC，DE，且互相平行.	4. 何故?
5. AE和EC被分成m和n線分，每線分等於AK；即AE$=m$(AK)和EC$=n$(AK).	5. 平行線，截一截線成等分，亦必截其他截線成等分.
6. $\frac{AE}{EC}=\frac{m}{n}$.	6. 何故?
7. $\therefore$ AD:DB$=$AE:EC.	7. 何故?

(實際應用問題可參閱361—367頁)

(乙) $\frac{AD}{DB}$是無理數.

設 $\frac{AD}{DB}=\sqrt{3}=1.732\cdots\cdots$.

若 $\frac{AD}{DB}=1.7$, 則$\frac{AE}{EC}=1.7$. (甲)

若 $\frac{AD}{DB}=1.73$, 則$\frac{AE}{EC}=1.73$, 等等 (甲)

所以 $\frac{AD}{DB}$的近似值皆各等於$\frac{AE}{EC}$的近似值.

$\therefore \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$. (223)

(統)

三角形比例線段

293. 注意. 若這和底邊平行的截線與三角形的兩邊相交,這二邊被內分成等比;若與二邊延長線相遇,這兩邊被外分成等比.

294. 系 1. 若平行於一三角形的一邊的直線,與其他二邊相交, 則任一邊與其一線分之比等於其他一邊與其對應線分的比.

證 由上命題的圖,得 $AB=(m+n)(AH)$ 和 $AD=m(AH)$.

所以 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{m+n}{m}$,

同理, $\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{m+n}{n}$.

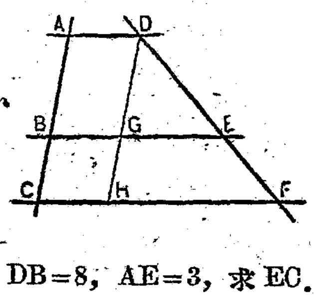
$\therefore\ \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$.

【註】 證明相似三角形時,本系頗爲重要.

295. 系 2. 三條(或三條以上)平行線在任意二截線上截取比例線分

【示意】 作 $DH\parallel AC$, $AB=DG$, $BC=GH$.

比例第四項作圖法



(続)

習 題

1. 在命題 XIII 的圖中, 若 $AD=4$, $DB=8$, $AE=3$, 求 EC.

2. 在同圖中，若 $AD=a$，$AE=b$，$EC=c$，求 DB.

3. 在同圖中，若 $AB=12$，$AD=8$，$AC=9$，求 AE.

4. 在同圖中，若 $AB=m$，$AD=n$，$AC=p$，求 AE.

5. 在同圖中，若 $AD=EC$，$DB=4$，$AE=9$，求 AD.

6. 在同圖中，若 $AE=2DB$，$AD=10$，$EC=20$，求 AE.

7. 在同圖中，若 $EC=AD$，$AE=m$，$BD=n$，求 EC.

8. 在同圖中，若 $AB=a$，$AD=b$，$AC=c$，求 EC.

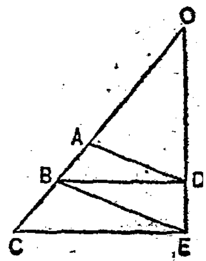
9. 在同圖中，若 $DE \parallel BC$，又 $AD:DB=EC:AE$，則 $AE=EC$.

10. 在同圖中，若 $AD=2(AE)$，又 $DB=6$，求 EC.

11. 在命題 XIII 的圖中，若 $AD=2$，$DB=3$，$AE=4$，$EC=4$，DE 是否 $\parallel BC$?

12. 在右圖中，若 $BD \parallel CE$，又 $AD \parallel BE$，

則 $OA:OB=OB:OC$.



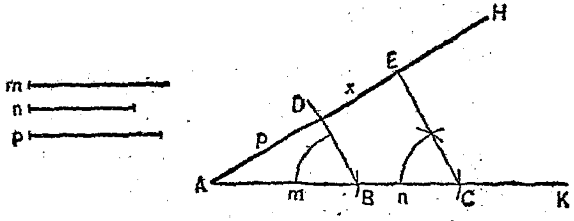
(12)

13. 在命題 XIII 的圖中，若 $AD=8$，$DB=AE$，又 $AC=6$，求 DB 和 EC.

14. 在命題 XIII 的圖中，若 $AD=8$，$AE=\frac{DB}{2}$，$EC=1$，求 DB 和 AE.

命題 XIV 作圖題

296. 求已知三直線的第四比例項.



設　三直線m, n, 和p.

求作　m, n和p的第四比例項.

作法　作任意角KAH.

在AK上,取$AB=m$,$BC=n$;在AH上,取$AD=p$.

作BD.

過C點,作一直線平行於BD,遇AH於E. DE卽所求的第四比例項.

(學者試自證之.示意.應用命題XIII.)

習　題

1. 設已知直線a, b, 和c, 作一直線x使$a:b=x:c$.

2. 設已知直線a, b, 和c, 作一直線使等於$\frac{bc}{a}$.

3. 設已知直線a, b, 和c, 作一直線使等於$\frac{bc}{2a}$.

4. 設已知直線a和b, 作一直線$x=\frac{b^2}{a}$; $\frac{2b^2}{3a}$.

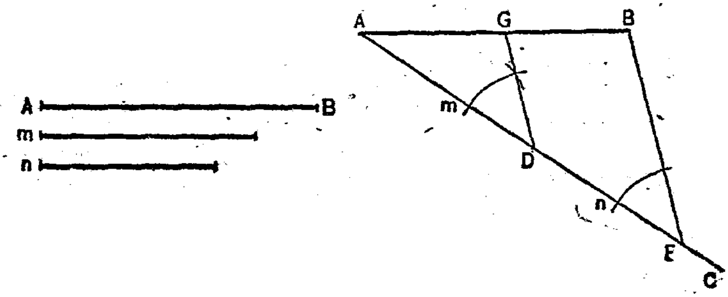
5. 作$x=a(a+b)\div b$.

6. 作三直線$\frac{7''}{8}$, $\frac{3''}{4}$和$1''$的第四比例項.

(續)

命題XV 定理

297 分一已知直線成二線分，其比等於二已知直線的比.



設 直線AB，m和n.

求 分AB成二線分，使其比等於m和n的比.

作法 作AC與AB成一任意角A.

在AC上，截取AD$=m$，DE$=n$.

聯EB.

過D點，作一直線平行於BE，與AB交於G.

AB即被分成所設的比.

(學者試自證之. 示意. 應用命題XIII.)

習題

1\. 分直線AB成二線分，其比等於2:3.

2\. 分2″長的一直線成二線分，其比等於一正方形的對角線與其

一邊的比.

3. 分一已知直線成三線分,其比等於三已知直線的連比.

4. 作二直線,已知這兩線的和,與其比.

5. 作二直線,已知這兩線的差,與其比.

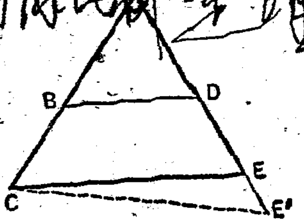
6. 在一已知直線 AB 上,求一點 C,使

$$AB:AC=m:n,$$

m 和 n 是二已知直線.

命題 XVI.　定理

298. 一直線分一三角形的二邊成比例線分,則這直線平行於第三邊.〔命題 XIII 的逆定理〕



設　在 △AEC 中,AB:BC=AD:DE.

求證　DB//EC.

證　(1)　過 C 點,作 CE'//BD,遇 AE 於 E'.　　(何故?)

(2)　AB:BC=AD:DE.　　(假設)

(3)　AB:BC=AD:DE'.　　(292)

(4) $\therefore$ DE＝DE′. (275)

(5) E點與E′點相合. (何故?)

(6) $\therefore$ CE與CE′相合. (何故?)

(7) $\therefore$ BD//CE. (何故?)

299. 系. 若一直線分一三角形的二邊, 使一邊與其一線分的比等於第二邊與其相當線分的比, 則這直線平行於第三邊. 〔命題XIII系1的逆定理〕

300. 注意. 上面的系常敘述如下: "若一直線分一三角形的二邊成比例, 則這直線平行於第三邊"

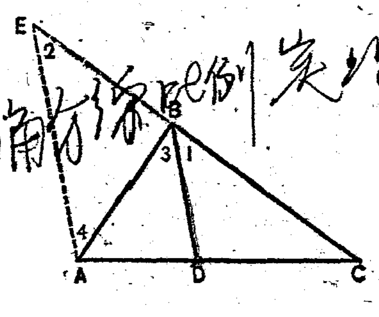
習 題

在命題XVI的圖中, 若AB＝12, BC＝16, AD＝15, DE＝20, BD是否平行於CE?

命題XVII. 定理

301. 三角形一角的二等分線, 分對邊成兩線分, 與兩鄰邊成比例.

三角形内角分线比例定理



(統)

設 在$\triangle ABC$中,BD二等分$\angle ABC$.

求證 $AB:BC=AD:DC$.

證 (1) 作$AE/\!/DB$,使遇CB的延長線於E. (何故?)

(2) $\angle 1=\angle 2$. (106)

(3) $\angle 3=\angle 4$. (104)

(4) $\angle 1=\angle 3$. (假設)

(5) $\angle 2=\angle 4$. (公理1)

(6) $AB=BE$. (121)

(7) $EB:BC=AD:DC$. (292)

(8) $\therefore AB:BC=AD:DC$. (代入)

302. 定理. 三角形外角的二等分線,外分對邊成兩線分與兩隣邊成比例.

【註】 若等腰三角形的頂角的外角的二等分線,則上述定理毫無意義,試證明之.

習題

1. 在命題XVII的圖中,若$AB=3$, $BC=4$, $AD=2$, 求DC.

2. 在同圖中,若$AB=m$, $BC=n$, $DC=p$, 求AD.

3. 在同圖中,求DC,若

(a) $AB=4$, $BC=5$, $AC=6$.

(b) $AB=18$, $BC=9$, $AC=21$

(統)

(c) AB$=$21, BC$=$14, AC$=$25.

4. 在同圖中,若 BC$=a$, CA$=b$, AB$=c$, 求 AD 和 DC.

5. 在同圖中,若 AB$=$DC, AD$=$4, BC$=$16, 求 AB.

6. 分三角形的一邊成兩線分,與其他二邊成比例.

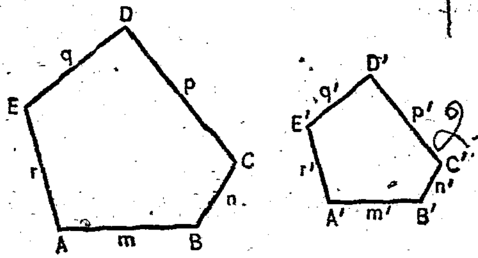
7. 試敍述并證明命題 XVII 的逆定理.

相似多邊形

303. 定義: 若二多邊形的相當角相等,且相當邊成比例,則二多邊形相似.

1 角等

2. 邊成比例



例如: 多邊形 ABCDE 和 A′B′C′D′E′ 相似,若

(1) $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$,等等,

(2) $\dfrac{m}{m'}=\dfrac{n}{n'}=\dfrac{p}{p'}$,等等.

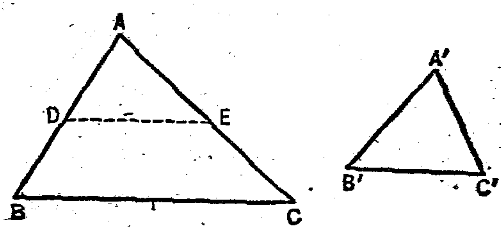
習 題

(甲)

二相似矩形的底邊是 $12''$ 和 $8''$, 若一個矩形的高是 $9''$,其他一個矩形的高若干?

命題 XVIII. 定理

304. 若一三角形的三角，與其他一三角形的三角，各各相等，則這二三角形相似.



設 在△ABC和A′B′C′中，

$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$.

求證 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

證

敍述	理由
1. 放△A′B′C′在△ABC上，使∠A′與∠A相合，佔△ADE的地位.	1. 何故?
2. $\angle ADE=\angle B'=\angle B$.	2. 假設.
3. DE∥BC.	3. 若二同位角相等，則二直線∥.
4. $AB:AD=AC:AE$.	4. (294).
5. $AB:A'B'=AC:A'C'$.	5. 代入.

1 求證∠等或邊等

相似的 2使他們的相當 邊或∠成比例

6. 放$\triangle A'B'C'$在$\triangle ABC$上，使$\angle B'$與$\angle B$相合，即得 $AB:A'B'=BC:B'C'$.	6. 與(1－5)相同.
7. $\therefore \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$.	7. 何故?
8. 但$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$.	8. 假設.
9. $\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.	9. 相當角相等. 相當邊成比例.

305. 系 1. 若一三角形的二角各等於他一三角形的二角，則二三角形相似.

306. 系 2. 若一直角三角形的一銳角等於他一直角三角形的一銳角，則二直角三角形相似.

307. 系 3. 平行於三角形的一邊的直線截成一三角形與原三角形相似.

308. 系 4. 若二三角形都與第三三角形相似，則二三角形互爲相似.

習 題

1. 一多邊形的各邊是 3, 4, 5, 6, 和 7. 若在他一相似多邊形中與 3 相當的一邊是 15，求其他各邊的長.

2. 三角形的三邊是 a, b, 和 c. 求其相似三角形的各邊的長，若與 a 相當的一邊是 m.

3. 若二弦 AB 和 CD 相交於 E，則 △AEC∽△BED.

4. 若從圓外的一點 A，作二割線，交圓於 B, C, D, 和 E，則 △ABE 與 △ACD 相似.

5. 若三角形 ABC 的高 AD 和 BE 相交於 F，則 △AFE∽△BFD.

6. 求證：凡等邊三角形相似.

7. 求證：頂角相等(或底角相等)的二等腰三角形相似.

8. 證明二正方形常相似.

9. 梯形的二對角線互分成比例.

10. 若內接三角形 ABC 的一角的二等分線 AD 引長與圓交於 E，則 △ABD 與 △AEC 相似.

11. 二圓內切. 從切點作大圓的諸弦，則諸弦都被小圓截分成等比.

309. 方法 XVII. **直線成比例，平常都用相似三角形來證明.** 故證明四直線成比例的手續如下：

(1) 選擇二三角形，每三角形含有二所設直線.(這些直線須用記號標明，如在 254 及 255 節)

(2) 證明這二三角形相似.(倘不相似，另擇一對.)

(3) 列比例.

(統)

(4) 必要時應用更迭,反轉等法.

習 題

1. 若在 △ABC 中,作高 AD 和 BE,求證 AC:BC=DC:EC.

2. 在上圖內;若 AD 與 BE 相交於 F,求證 BF:FA=DF:FE.

3. 在上圖中,AE:AD=FE:DC.

4. 若從內接 △ABC 的頂點 A,作高 AD 及直徑 AF,則 AB:AD=AF:AC.

5. 在上圖中,BD:FC=AD:AC.

6. 若從圓外一點,作一切線及一割線,則切線爲割線及其圓外線分的比例中項.

7. 若延長直徑 AB 至 C,在 C 上作垂線,再過 B 點作一直線與圓及垂線交於 D 及 E,則 AB:BE=DB:BC.

8. 若在直角三角形ABC內,作斜邊的高AD,則AD:AB=AC:BC.

9. 在上圖中,AD:AB=DC:AC.

10. 若延長內接 △ABC 的 C 角的二等分線 CD 與圓相交於E,則 EB:EC=DB:CB.

11. 若延長內接 △ABC 的 C 角的二等分線 CD 與圓相交於 E,則 EB 爲 CE 與 DE 的比例中項.

12. 在上圖中,AD:EB=AC:CE.

13. 在二相似三角形內,二相當角的二等分線之比等於任意二相當

邊的比.

14. 在二相似三角形內,二相當高之比等於任意二相當邊的比.

310. 方法 XVIII. **要證明二直線的積等於其他二直線的積,可用309節的方法得一比例式,然後取其內項的積與外項的積.**

習題

1. 若二弦相交於圓內,則一弦的二線分的積等於其他一弦的二線分的積.

2. 若從AB弦上的任意一點E作AD直徑的垂線EC,則 $AC \times AD = AB \times AE$.

3. 直角三角形的二直角邊的積等於斜邊與其高的積.

4. 若在三角形ABC內,AB的平行線與BC及CA相交於E及D,則 $AC \times DE = DC \times AB$.

5. 一三角形的任意一高與其相當邊的積,等於其他任一高與其相當邊的積.

6. 一三角形的三邊是14, 15, 及13, 14一邊的高是12,求其他邊的高. (與習題5比較).

7. 若在 $\triangle ABC$ 內,高AD與高BE相交於F,則 $BF \times BE = BC \times BD$.

8. 若在 $\triangle ABC$ 內,高 AD 與高 BE 相交於 F, 則 $BD\times DC=DF\times AD$.

9. 若 AB 是直徑,BD 是切於 B 的切線,DA 遇圓於 E,則 $\overline{AB}^2=AE\times AD$.

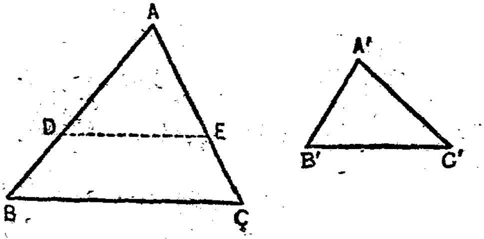
10. 在上圖中,$\overline{BE}^2=AE\times ED$.

11. 若內接四邊形 ABCD 的二邊 AB 和 DC 延長而相交於 E, 或 $\angle DBA=\angle CBE$, 則 $AD\times BE=CE\times BD$.

12. 若在 $\triangle ABC$ 內,作二高 AD 及 BE,又 BE=6,EC=3,DC=2, 求 AD.

命題 XIX. 定理

311. 若一三角形的一角等於他一三角形的一角,又夾這兩角的邊也成比例,則二三角形相似.



設 在 $\triangle ABC$, 及 $A'B'C'$ 內, $\angle A=\angle A'$, $AB:A'B'=AC:A'C'$.

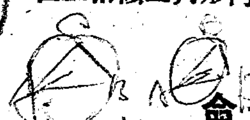
求證 $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$.

證

敍述	理由
1. 放△A′B′C′在△ABC上，使∠A′與∠A相合，佔△DAE的地位.	1. 何故?
2. AB:A′B′=AC:A′C′.	2. 假設.
3. AB:AD=AC:AE.	3. 代入.
4. DE//BC.	4. 命題XVI系.
5. ∠B=∠ADE，∠C=∠DEA.	5. 何故?
6. ∴△ABC∼△ADE(或△A′B′C′).	6. 命題XVIII.

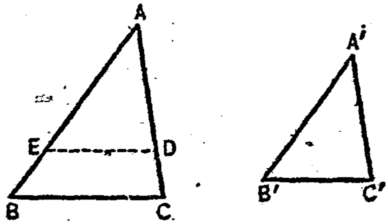
習題

1. 在二相似三角形內，二相當中線之比等於任意二相當邊的比.
2. 若高AD:高A′D′=BC:B′C′，又∠B=∠B′，則△ABC∼△A′B′C′.
3. 在二相似三角形內，二外接圓的半徑之比等於任意二相當邊的比.



命題XX. 定理

312. 若相當邊成比例，則二三角形相似.



設 在$\triangle$ABC及A′B′C′內，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

求證 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

證

敍述	理由
1. 在AC及AB上各取AD＝A′C′，及AE＝A′B′.	1. 何故?
2. 聯DE.	2. 何故?
3. $AB:A'B'=AC:A'C'$.	3. 假設.
4. $AB:AE=AC:AD$.	4. 代入.
5. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.	5. (311).
6. $AB:AE=BC:ED$.	6. (303).
7. 但 $AB:A'B'=BC:B'C'$.	7. 假設.
8. $ED=B'C'$.	8. (275).
9. $\therefore \triangle A'B'C' \cong \triangle ADE$.	9. (s. s. s.＝s. s. s.).
10. $\therefore \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.	10. 代入.

習題

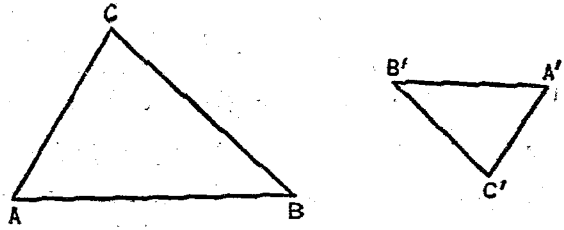
1. 聯 $\triangle ABC$ 的三邊的中點成一三角形與 $\triangle ABC$ 相似.

2. 若一三角形的二邊及二邊中的一邊的中線,與其他三角形的相當部分成比例,則這二三角形相似.

*3. 若一直角三角形的斜邊與一直角邊之比,等於其他直角三角形的斜邊與一直角邊之比,則此二直角三角形相似.

命題 XXI. 定理

313. 若一三角形的三邊,各平行於他一三角形的三邊,則這二三角形相似.



設 在$\triangle$s ABC 及 A′B′C′ 內, $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, 及 $BC \parallel B'C'$.

求證 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

證

敍述	理由
1. $\angle A + \angle A' = 2rt.\angle s$ 或 $\angle A = \angle A'$; $\angle B + \angle B' = 2rt.\angle s$, 或 $\angle B = \angle B'$; $\angle C + \angle C' = 2rt.\angle s$, 或 $\angle C = \angle C'$.	1. 何故?

2. 若$\angle A+\angle A'=2rt.\underline{\angle s}$, $\angle B+\angle B'=2rt.\underline{\angle s}$,及$\angle C+\angle C'=2rt.\underline{\angle s}$,則$\angle A+\angle B+\angle C+\angle A'+\angle B'+\angle C'=540°$.	2. 何故?
3. 這是不可能的.	3. 二$\triangle$的角的和$=360°$.
4. 若$\angle A+\angle A'=2rt.\underline{\angle s}$, $\angle B+\angle B'=2rt.\underline{\angle s}$,及$\angle C=\angle C$,則$\angle A+\angle B+\angle C+\angle A'+\angle B'+\angle C'=360°+2\angle C$.	4. 何故?
5. 這是不可能的.	5. 和3同.
6. $\therefore \angle C=\angle C'$及$\angle B=\angle B'$.	6. 何故?
7. $\therefore \triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$.	7. (305).

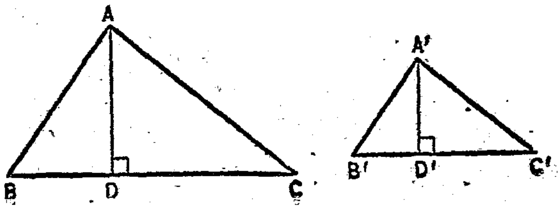
習題

若一三角形的三邊各垂直於他一三角形的三邊,則這二三角形相似.

【示意】 依照命題XXI.

命題XXII. 定理

314. 若二三角形相似,則相當高之比等於任意二相當邊的比.



設 AD 與 A′D′ 爲二相似三角形 ABC 和 A′B′C′ 的相當高.

求證 $\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$.

證

敍 述	理 由
1. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.	1. 假設.
2. $\angle BDA=\angle B'D'A'$.	2. 何故?
3. $\angle B=\angle B'$.	3. 何故?
4. Rt. $\triangle ABD \sim$ rt. $\triangle A'B'D'$	4. (306).
5. $\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}$.	5. (303).
6. 但$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$,	6. 何故?
7. $\therefore \frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$.	7. 何故?

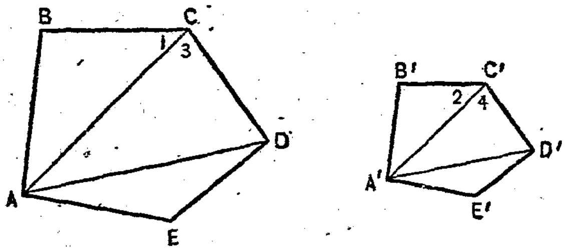
習 題

1. 一三角形的底邊是 2 呎，高是 9 吋，若一相似三角形的相當底邊是 6 吋，求相當高.

2. 求證： 在二相似三角形內，相當高分三角形成相似三角形.

命題 XXIII. 定理

315. 二相似多邊形可分成同數的相似三角形，各各相似，且地位亦相似，



設 多邊形 ABCDE∾多邊形 A′B′C′D′E′.

求證 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$,

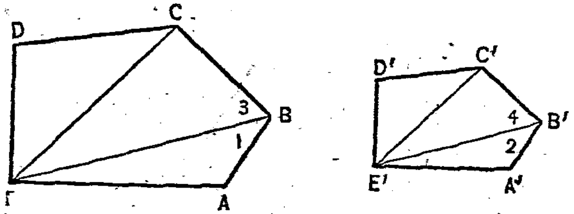
$\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$ 等等.

證

敍述	理由
1. $AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'$ 等等. $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$.	1. 何故?
2. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.	2. (311).
3. $\angle 1=\angle 2$.	3. 何故?
4. $\angle 3=\angle 4$.	4. 何故?
5. $\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}$.	5. 假設.
6. $\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$.	6. (303).
7. $\frac{CA}{C'A'}=\frac{CD}{C'D'}$.	7. 何故?
8. $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$.	8. (311).
9. 同樣可證明 $\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$ 等等.	9. 如上(1—8)

命題XXIV. 定理

316. 若二多邊形由同數的三角形組成,各各相似,且地位亦相似,則二多邊形相似.



設 在多邊形ABCDE及A′B′C′D′E′內,$\triangle ABE \sim \triangle A'B'E'$,$\triangle BCE \sim \triangle B'C'E'$, $\triangle CDE \sim \triangle C'D'E'$等等,且地位亦相似.

求證 多邊形ABCDE∼多邊形A′B′C′D′E′.

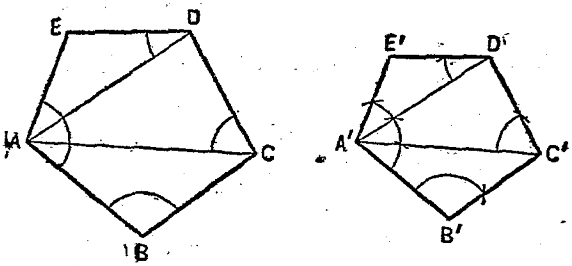
證

敍述	理由
1. $\triangle ABE \sim \triangle A'B'E'$.	1. 假設.
2. $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BE}{B'E'}$, $\angle 1=\angle 2$.	2. 相似三角形的定義.
3. $\triangle EBC \sim \triangle E'B'C'$.	3. 假設.
4. $\frac{BE}{B'E'}=\frac{BC}{B'C'}$, $\angle 3=\angle 4$.	4. 與2同.
5. $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$.	5. 何故?
6. $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$.	6. 何故?
7. $\angle B=\angle B'$.	7. 代入.

8. 同樣, $\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}$等等. 又$\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$等等.	8. 如上(1—7).
9. ∴.多邊形 ABCDE∼多邊形 A′B′C′D′E′.	9. (303).

命題 XXV. 作圖題

317. 在已知多邊形的一邊相當的線上, 作一多邊形與已知多邊形相似.



設 多邊形 ABCDE, A′B′ 是 AB 的相當邊.

求作 一多邊形與 ABCDE 相似.

作法 從已知多邊形一頂點, 如 A, 作所有的對角線. 在 A′ 及 B′, 作角使$\angle B'A'C'=\angle BAC$, $\angle B'=\angle B$. 引長二邊使遇於 C′. 在 A′ 及 C′ 作角, 使$\angle C'A'D'=\angle CAD$, $\angle A'C'D'=\angle ACD$等等.

證 $\triangle A'B'C'\sim\triangle ABC$, $\triangle C'A'D'\sim\triangle CAD$等等. (何故?)

所以多邊形 A′B′C′D′E′∼多邊形 ABCDE. (何故?)

習 題

1. 已知一四邊形,一五邊形及一六邊形,在與諸多邊形的一邊相當的一已知直線上,作一四邊形,一五邊形及一六邊形各與已知多邊形相似.

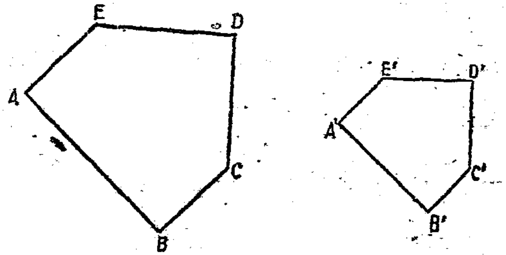
2. 已知一平行四邊形,在已知底邊 AB 上作一相似平行四邊形.

3. 對角線 AC 等於已知直線時,求作一四邊形 ABCD 與一已知四邊形 A′B′C′D′ 相似.

4. 應用命題 XXV,作一矩形與已知矩形相似.

命題 XXVI. 定理

318. 二相似多邊形的周圍之比,等於任意二相當邊的比.



設 P 及 P′ 爲二相似多邊形 ABDCE 及 A′B′C′D′E′ 的周圍.

求證 $P:P'=AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'$, 等等.

證

敍 述	理 由
1. $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\cdots$	1. 假設.
2. $\frac{AB+BC+CD+\cdots}{A'B'+B'C'+C'D'+\cdots}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\cdots$	2. (284).
3. $\therefore\frac{P}{P'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\cdots$	3. 代入.

習 題

1. 二相似多邊形的周圍之比等於任意二相當對角線的比.

2. 二相似三角形的周圍之比等於任意二相當高的比.

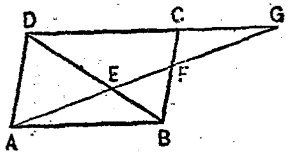
3. 一多邊形的邊為 4, 5, 6, 7, 8. 求其相似形的周圍, 若與 5 相當的一邊為 7.

4. 二相似多邊形之周圍為 20 及 25 寸. 若一多邊形之一邊為 4 寸,求他一多邊形的相當邊的長.

5. 在命題 XXVI 的圖內, 求 ABCDE 的周圍, 若 $A'B'C'D'E'$ 的周圍為 20 吋, $A'B'=4$ 吋, $B'C'=3$ 吋, $AC=10$ 吋, $B'C':A'B'=A'B':A'C'$, 及 $ABCDE\sim A'B'C'D'E'$.

319. 方法 XIX. 證明不成相似三角形的四線成比例,可求等於各已知比的第三比.

譬如,在附圖中,若 ABCD 為平行四邊形, 又 AG 為直線,



則 $\frac{EF}{EA}=\frac{EA}{EG}$.

圖內找不到二三角形，各有所設四直線中的二直線.

故求等於已知比的第三比$\frac{EB}{ED}$.

故本問題分成二步，即

(a) 求證$\frac{EF}{EA}=\frac{EB}{ED}$，及

(b) 求證$\frac{EA}{EG}=\frac{EB}{ED}$.

用基本方法 XVII，證明上比例式，易如反掌.

習題

1. 在二相似三角形內，其內切圓半徑之比等於任意二相當邊的比.

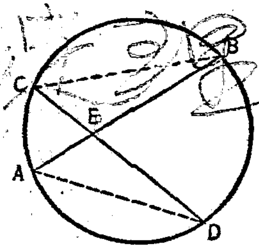
2. 若 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 為二相似三角形，AD 及 A′D′ 為角二等分線，AF 及 A′F′ 為高，求證 $AD:A'D'=AF:A'F'$.

3. 在二相似三角形 ABC 和 A′B′C′ 的 BC 及 B′C′ 邊上，取 D 及 D′ 點，使 $\angle BAD=\angle B'A'D'$，求證 $BD:B'D'=BC:B'C'$.

4. 求證 習題2內的 $\triangle$ADF 及 A′D′F′ 相似.

命題 XXVII. 定理

320. 若二弦相交於圓內，則一弦的二線分的積等於他一弦的二線分的積.



設 在⊙O內，弦 AB 和 CD 相交於 E.

求證 $AE \times EB = CE \times ED$.

證

敍述	理由
1. 作 CB 和 AD.	1. 何故?
2. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.	2. 各以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ 及 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ 度他.
3. $\triangle CEB \sim \triangle AED$.	3. 何故?
4. $AE:CE = ED:EB$.	4. (303).
5. $\therefore AE \times EB = CE \times ED$.	5. (274).

321. 系. 過圓內一定點的弦的二線分的積常相等.

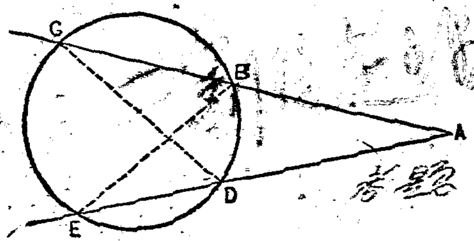
習題

1. 在命題 XXVII 的圖中，若 $AE=3$, $EB=4$, $ED=6$, 求 CE.
2. 在同圖中，若 $AE=a$, $EB=b$, 及 $ED=c$, 求 CE.
3. 在同圖中，若 $AE=4$, $EB=9$, 及 $CE=ED$, 求 CE.

4. 若延長二弦，使遇於圓外，則弦的外分線分，是否適用命題 XXVII?

命題 XXVIII.　定理

322. 若從圓外一定點作二割線，則一割線與其圓外線分的積等於他一割線與其圓外線分的積.



設　二割線 AC 及 AE 遇圓於 B, C, D, 及 E.

求證　$AC \times AB = AE \times AD$.

證

敘述	理由
1. 作 CD 及 EB.	1. 何故?
2. $\angle C = \angle E$.	2. (232). 同弧所容
3. $\angle A = \angle A$.	3. 恆等. 並公用∠
4. $\angle CDA = \angle EBA$.	4. 何故? 底角相等
5. $\triangle CDA \sim \triangle EBA$.	5. (304). 設此有兩角相等 則必相似
6. $AC : AE = AD : AB$.	6. (303). 相似三角形成比
7. $\therefore AC \times AB = AE \times AD$.	7. (274). 內項乘積 二外項乘積

習 題

1. 命題 XXVIII 的圖中,若 CB=16, BA=2, DA=4, 求 DE.

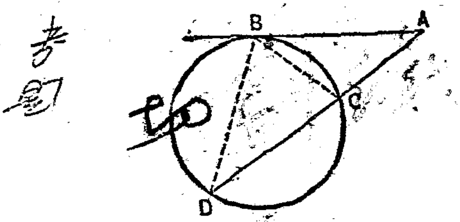
2. 同圖中,若 CA:DA=2:1, 求證 EA=2BA.

3. 同圖中, CB=a, BA=b, AE=c, 求 DA.

4. 同圖中,若 AB=AD, 則 BCED 是一等腰梯形.

命題 XXIX. 定理

323. 若從圓外一點,作一切線及一割線,則切線是割線和其圓外線分的比例中項.



設 切線 AB 切 ⊙BDC 於 B, 又割線 AD 與圓相交於 C 和 D.

求證 AD:AB=AB:AC.

證

敍 述	理 由
1. 作 BD 和 BC.	1. 何故? 作直
2. ∠D=∠CBA.	2. 何故? 以同BC弧所度
3. ∠A=∠A.	3. 恆等. 公用角
4. ∠DBA=∠BCA.	4. 何故? 圓周角相等

(續)

5. △DBA～△BCA.　　　5. (304).

6. ∴ AD:AB＝AB:AC.　　　6. (303)

324. 若從圓外一點作任意一割線，則割線全部與其圓外線分的積是常數.

習　題

1. 在命題 XXIX 的圖中，DC＝5，AC＝4，求 AB.

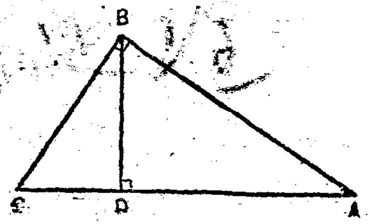
2. 在同圖中，若 AB＝8 吋，從 A 到中心的距離是 17 吋，求圓的半徑.

3. 從相交二圓的公共弦的延長線上任一點，作二圓的切線必相等.

4. 若從二外切圓的內公切線上任一點，作二圓的二條割線，則一割線與其圓外線分的積等於他一割線與其圓外線分的積.

命題 XXX. 定理

325. 在任一直角三角形內，從直角頂點作斜邊的垂線，則分成二個相似三角形，且都和原三角形相似.



(續)

設 在 *rt.* △ACB 內，BD⊥於斜邊 CA。

求證 △BCD∼△ACB∼△BDA。

證

敍述	理由
1. 各三角形皆是 *rt.* △。	**1.** 何故?
2. 在△ACB 和 BCD 內， ∠C=∠C。	**2.** 恆等。
3. ∴△BCD∼△ACB。	**3.** (306)。
4. 在△ACB 和 BDA 內， ∠A=∠A。	**4.** 恆等。
5. ∴△ACB∼△BDA。	**5.** (306)。
6. ∴△BCD∼△ACB∼△BDA。	**6.** (308)。

習題

1. 在命題 XXX 的圖中，求證 CB×BD=BA×CD。

2. 在同圖中，若 CD=9, DA=16, 求 BD。

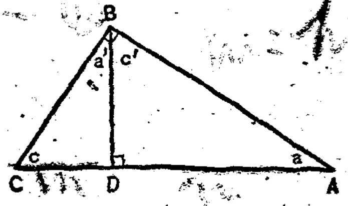
3. 若 CD=4, DA=9, 求 BC 和 BA.(用命題 XXX 的圖.)

4. 在同圖內，證 BC×BA=BD×CA。

命題 XXXI. 定理

326. 在直角三角形內，斜邊的高是斜邊上二線分

的比例中項，又任一直角邊是斜邊和其相隣線分的比例中項.



設 在 *rt.* △ABC 內，BD 是斜邊 AC 的高.

求證 (1) CD:DB=DB:DA.

(2) CA:BA=BA:DA.

(3) CA:CB=CB:CD.

證

敍述	理由
1. △ABC∼△BCD∼△BDA.	1. 命題 30.
2. 因 △BCD∼△BDA, ∴ CD:DB=DB:DA.	2. (303).
3. 因 △ABC∼△BDA, ∴ CA:BA=BA:DA.	3. (303).
4. 因 △ABC∼△BCD, ∴ CA:CB=CB:CD.	4. (303).

(續)

【註】 ∠a 或 ∠A=∠a'，又 ∠c 或 ∠C=∠c'. (何故?)

習 題

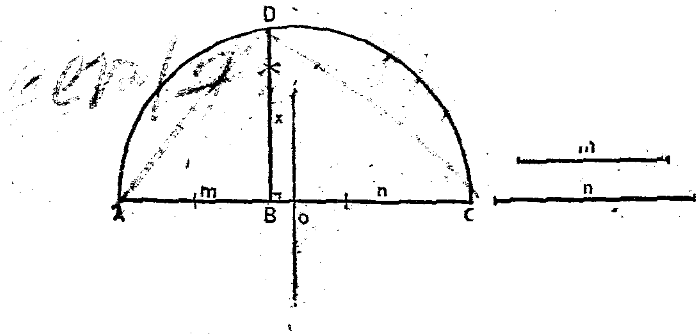
1. 在命題 XXXI 的圖中,若 AD=4, AC=9, AB 是多少長?

2. 在同圖中,若 AB=15, AC=25, 求 AD 及 BD.

3 在同圖中,若 BD=24, AD=18, 求 AC 及 BC.

命題 XXXII. 作圖題

327. 作二已知直線的比例中項.



設 直線 m 和 n.

求作 m 和 n 的比例中項.

作法 作 AB=m,並且引長 AB 到 C 使 BC=n.

以 AC 做直徑,作半圓.

從 B 作 AC 的垂線,遇圓於 D.

(統) BD 即是所求的比例中項.

〔學者試自證明之.作 AD,DC.應用命題 XXXI.〕

328. 從圓上任意一點到直徑的垂線,是直徑二線

分的比例中項；又從這點到直徑任一端的弦是直徑和相隣線分的比例中項.

習 題

1. 若已知直線 a 和 b,作 $\sqrt{ab}$.

2. 若已知直線 a 和 b,作 $\sqrt{6ab}$.

3. 若 a 是已知直線,作一直線使等於 $a\sqrt{2}$.

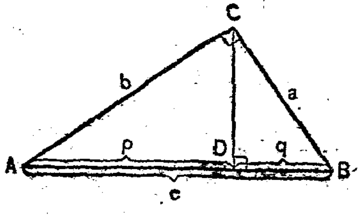
【示意】 $a\sqrt{2}=\sqrt{(2a)a}$.

4. 若 a 為已知直線,作一直線使其等於 $a\sqrt{5}$.

5. 若 a 為已知直線,作一直線使等於 $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

命題 XXXIII. 定理

329. 直角三角形的二直角邊的平方之和，等於斜邊的平方.



（統）

設 在 rt. △ABC 內, ∠C 是 rt. ∠.

求證 $a^2+b^2=c^2$.

證

敍　述	理　由
1. 作 $CD \perp AB$.	1. 何故?
2. $p:b=b:c$.	2. (326).
3. $\therefore b^2=c\cdot p$.	3. (274).
4. 同樣, $a^2=c\cdot q$.	4. 何故?
5. $a^2+b^2=cp+cq$ $=c(p+q)$.	5. 何故?
6. $a^2+b^2=c^2$.	6. 代入.

330. 系. 直角三角形的任一直角邊的平方等於從斜邊的平方減去他一直角邊的平方.

習　題

1. 求直角三角形的斜邊,若其二直角邊如下:

   (a) 1 呎和 5 吋.　　(b) m 和 n.

2. 直角三角形的斜邊是 25,一直角邊等於 20;求他一直角邊.
3. 求等邊三角形的高,其一邊等於 8 吋.
4. 求等邊三角形的高,其一邊等於 b. $\left(h=\frac{b}{2}\sqrt{3}\right)$.
5. 等腰三角形的底邊是 8,腰長是 5,求其高.
6. 若等腰直角三角形的斜邊等於 8 吋,求腰的長.
7. 兩圓的半徑是 6 吋和 21 吋,又二中心的距離是 25 吋; 求外公

切線的長.

8. 等邊三角形的高等於10,求其一邊的長.

9. 在命題XXXIII的圖中,直角三角形的二直角邊的平方之比等於斜邊上二直角邊相隣二線分的比.

10. 若AD是△ABC的高,則

$$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2.$$

11. 若四邊形的二對角線互相垂直,則二對邊平方之和等於他二對邊平方之和.

12. 若三角形的一邊的平方等於其他二邊的平方之和,則三角形爲直角三角形.

【示意】 作一直角三角形,使其二直角邊各等於所設的二直角邊,而後證明二三角形全同.

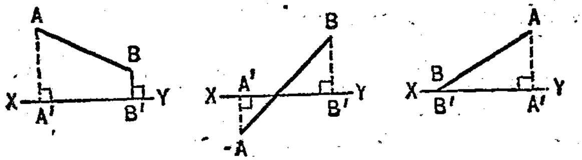
***13.** 若三角形的一邊的平方大於其他二邊的平方的和,則三角形是鈍角三角形.

【示意】 把這△和 *rt.* △比較, *rt.* △的二直角邊和所設△的二邊相等.

331. 定義. **一點在一直線上的射影,是從這點到直線的垂線的足.** (統)

332. **一直線在他一直線上的射影,是一直線的二**

端在他一直線上的射影間的線分.



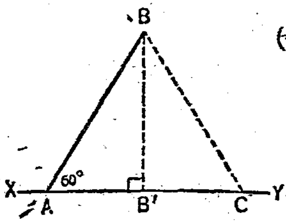
如,若 AA'⊥XY, 又 BB'⊥XY, 則 A' 是 A 在 XY 上的射影, A'B' 是 AB 在 XY 上的射影.

習　題

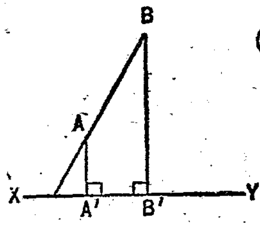
1. 在銳角三角形 ABC 內, 作 AB 在 AC 上, AB 在 BC 上及 AC 在 AB 上的射影.

2. 若 AB∥XY, 求證 AB 在 XY 上的射影等於 AB.

3. 若等邊三角形的邊長 10 吋, 求一邊在其他一邊上的射影的長.



(4)

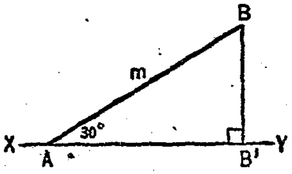


(5)

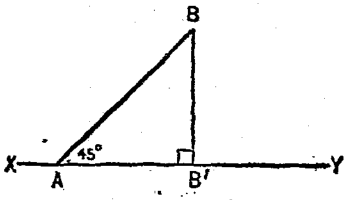
4. 若直線 AB 和 XY 的夾角是 60°, 則 AB 在 XY 上的射影等於 AB 之半. (165).

5. 若 BA 的延長線與 XY 成 60° 的角, 則 AB 在 XY 上的射影 A'B' 等於 AB 之半.

6. 若直線 AB 和 XY 的夾角是 30°, 又 AB=m, 求證 AB 在 XY



(6)



(7)

上的射影等於$\frac{m}{2}\sqrt{3}$.

【示意】 $BB'=\frac{m}{2}$(習題4).

7. 若直線AB和XY的夾角是45°,又$AB=m$,求證AB在XY上的射影等於$\frac{m}{2}\sqrt{2}$.

【示意】 若$AB'=x$,則$BB'=x$, $\therefore x^2+x^2=m^2$.

8. 若AB的延長線成30°,或45°的角,證明上二習題.(和第五題圖同).

9. 若$AB=m$,又AB和XY所成的角等於120°,求AB在XY上的射影.

10. 若$AB=m$,又AB和XY所成的角等於135°,求AB在XY上的射影.

11. 若$AB=m$,又AB和XY所成的角等於150°,求AB在XY上的射影

12. 若在△ABC內,$AB=8$, $AC=10$,又$\angle A=60°$,求AB在AC上及BC在AC上的射影.

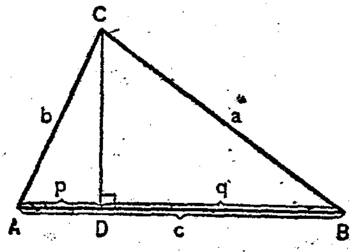
(統)

13. 若在 $\triangle ABC$ 內，$AB=10$，$AC=12$，又 $\angle A=45°$，求 AB 在 AC 上的射影.

14. 在同圖中，求 BC 在 AC 上的射影.

15. 在 $\triangle ABC$ 內，$AC=24$，$BC=10$，又 $\angle C=90°$，求 AC 在 AB 上的射影.

333. 【註】 $\triangle abc$ 代表一三角形，他的三邊是 a，b，和 c. p 爲 b 在 c 上的射影，q 爲 a 在 c 上的射影. 下列習題中，其他記號都依照 242 節所規定.



16. 在 $\triangle abc$ 內，若 $b=4$，$p=2$，求 $\angle A$ 及 h_c.

17. 在 $\triangle abc$ 內，若 $b=5$，$h_c=4$，$c=8$，求 q.

18. 在 $\triangle abc$ 內，若 $b=10$，$h_c=8$，$a=17$，求 c.

19. 在 $\triangle abc$ 內，若 $b=10$，$h_c=8$，$c=14$，求 a.

20. 在 $\triangle abc$ 內，用 b，h_c 和 c 表 a.

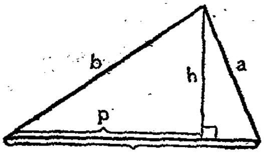
(統) **21.** 在 $\triangle abc$ 內，若 $a=20$，$b=37$，$q=16$，求 p.

22. 在 $\triangle abc$ 內，若 $b=15$，$p=9$，$c=25$，求 a.

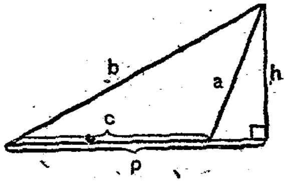
23. 在 $\triangle abc$ 內，用 b，c 和 p 表 a.

命題XXXIV. 定理

334. 在任意三角形內，銳角所對的邊的平方等於其他二邊的平方之和減去一邊與他一邊在這邊上的射影的積之二倍.



I



II

設 在$\triangle abc$內，p為b在c上的射影，又a所對的角是銳角.

求證 $a^2=b^2+c^2-2cp$.

證 設c邊的高是h.

在(I)圖內，$a^2=h^2+(c-p)^2$，

但 $h^2=b^2-p^2$.

[代入而簡單之.]

在(II)圖內，$a^2=h^2+(p-c)^2$，

但 $h^2=b^2-p^2$.

[學者試自完成之]

335. 注意. 在$a^2=b^2+c^2-2cp$式內有四個量. 故已知其中三個，由代數的方法可求其餘一個.（桃）

（以下諸命題倣此）

習　題

1. 在 $\triangle abc$ 內求 a，若

(a) $b=8$, $c=5$, $p=4$.　　(c) $b=5$, $c=6$, $p=3$.

(b) $b=24$, $c=9$, $p=12$.　　(d) $b=13$, $c=14$, $p=12$.

(e) $b=17$, $c=9$, $p=15$.

2. 若三角形的二邊是 15 和 25，又 15 在 25 上的射影等於 9，第三邊長若干？

3. 在 $\triangle abc$ 內，求 a，若

(a) $b=10$, $c=16$, $\angle A=60°$.

(b) $b=14$, $c=30$, $\angle A=60°$.

(c) $b=9$, $c=24$, $\angle A=60°$.

(d) $b=48$, $c=13$, $\angle A=60°$.

(e) $b=4$, $c=3$, $\angle A=30°$.

(f) $b=2$, $c=3$, $\angle A=45°$.

4. 三角形的三邊是 13, 14, 和 15，求 13 在 14 上的射影.

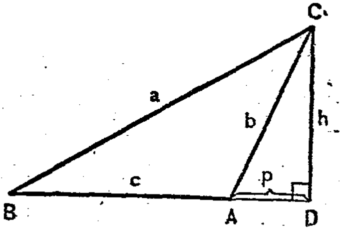
5. 三角形的三邊是 5, 7 和 8，求 8 在 5 上的射影.

6. 三角形的三邊是 10, 17 和 21，求 10 在 21 上的射影.

命題 XXXV. 53 定理

336. 在鈍角三角形內，鈍角所對的邊的平方等於

其他二邊平方之和加一邊與其他一邊在這邊上的射影的積之二倍.



設 在 $\triangle abc$ 內, p 為 b 在 c 上的射影, 又 a 所對的角是鈍角.

求證 $\qquad \boldsymbol{a^2=b^2+c^2+2cp}.$

證 $\qquad a^2=h^2+(c+p)^2.$

但 $\qquad h^2=b^2-p^2,$

$\therefore \quad a^2=?$

[學者試自完成之.]

1. 在 $\triangle abc$ 內, $b=6$, $c=10$, $p=3$, 又 $\angle A$ 是鈍角; 求 a.

2. 在 $\triangle abc$ 內, $b=10$, $c=9$, $p=6$, 又 $\angle A$ 是鈍角; 求 a.

3. 在 $\triangle abc$ 內, 求 a, 若

(a) $b=3$, $c=5$, $\angle A=120°$.

(b) $b=8$, $c=7$, $\angle A=120°$.

(c) $b=16$, $c=15$, $\angle A=120°$. (試)

(d) $b=24$, $c=11$, $\angle A=120°$.

337. **注意.** 若一邊在他一邊上的射影當做正的,

而在他一邊的延長線上的當做負的，則命題 XXXV 及 XXXIII 都可歸納於命題 XXXIV，即

$$a^2=b^2+c^2-2cp.$$

三角形的角都不知道時，要求邊的射影，常應用這個方程式.若結果是負數時，三角形是鈍角三角形.

習 題

1. 在 $\triangle abc$ 內，$a=20$，$b=15$，$c=7$，求 b 在 c 上的射影. 這三角形是鈍角還是銳角三角形?

2. 在 $\triangle abc$ 內，$a=20$，$b=15$，$c=25$，求 b 在 c 上的射影. A 角是銳角還是鈍角?

3. 三角形的三邊是 4，13 及 15，求 13 在 4 上的射影.

4. 若從上公式得到的 p 等於 0 時，這三角形怎樣?

5. 在 $\triangle abc$ 內，$a=15$，$b=13$，$c=14$，求 h_c.

6. 在 $\triangle abc$ 內，$a=17$，$b=10$，$c=9$，求 h_c.

338. 系 I. 在 $\triangle abc$ 內，若 p 是 b 在 c 上的射影，

$$p=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}.$$

339. 系 II. 若 h_c 是 c 邊的高，

$$h_c=\sqrt{b^2-p^2}=\sqrt{b^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2},$$

這式可用代數演算而簡單之:

$$h_c^2=b^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2=\left(b+\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)$$

$$=\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4c^2}$$

$$=\frac{[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]}{4c^2}$$

$$=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2}.$$

設 $a+b+c=2s$, 即設 s 爲半周圍.

$$b+c-a=2(s-a)$$

$$a-b+c=2(s-b)$$

$$a+b-c=2(s-c)$$

$$h_c^2=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}$$

或 $h_c=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

習 題

1. 在 $\triangle abc$ 內,求 h_c,若

   (a) $a=10$, $b=19$, $c=21$.

   (b) $a=20$, $b=13$, $c=21$.

   (c) $a=20$, $b=13$, $c=25$.

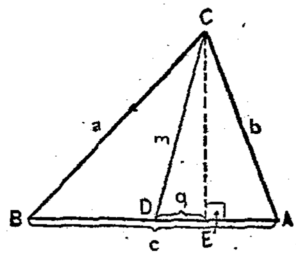
(d) $a=37$, $b=13$, $c=40$.

2. 三角形的三邊是 4, 13, 及 15, 求 4 上的高.

3. 三角形的三邊是 25, 30, 及 11, 求 11 上的高.

命題 XXXVI. 定理

340. 在任意三角形內，一邊的平方加相當中線的平方的四倍，等於其他二邊的平方之和的二倍.



設 在 $\triangle ABC$ 內，c 的中線是 m_c.

求證 $2a^2+2b^2=c^2+4m_c^2$.

證 作 $CE\perp AB$，又設 E 落在 A 和 D 的中間. 設 $DE=q$.

$$a^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+m^2+2\left(\frac{c}{2}\right)q. \qquad (336)$$

$$b^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+m^2-2\left(\frac{c}{2}\right)q. \qquad (334)$$

$$a^2+b^2=2\left(\frac{c}{2}\right)^2+2m^2. \qquad (\text{公理 }2)$$

或 $$2a^2+2b^2=c^2+4m^2 \qquad (\text{公理 }7)$$

習 題

1. 三角形的三邊是 7, 8 和 9, 求 8 的中線的長.

2. 三角形的三邊是 7, 4 和 9, 求 9 的中線的長.

3. 三角形的三邊是 10, 5 和 9, 求 9 的中線的長.

4. 三角形的三邊是 22, 20 和 18, 求 18 的中線的長.

5. 在 $\triangle abc$ 內, 若 m_c 是 c 邊的中線, 求證

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

6. 在 $\triangle abc$ 內, $a=8$, $b=11$, 又 $m_c=8\frac{1}{2}$. 求 c.

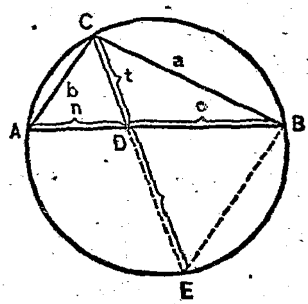
7. 在 $\triangle abc$ 內, $a=28$, $c=32$, $m_c=38$. 求 b.

8. 若 $a=b$, 求證命題 XXXVI.

9. 平行四邊形的四邊的平方之和等於二對角線的平方之和.

命題 XXXVII. 定理

341. 在任意三角形內, 二邊的積等於其夾角的二等分線的平方加第三邊的二線分的積.



設 $\triangle abc$, 角的二等分線 t 分 c 邊成二線分 n 和 o.

求證 $ab=t^2+on$.

證 作 $\triangle abc$ 的外接圓.

延長 CD 使遇圓於 E.

作 EB, 又設 $DE=x$.

$\angle ACD=\angle ECB$. (假設)

$\angle A=\angle E$. (232)

$\triangle ACD\sim\triangle EBC$. (305)

$\therefore\ b:t+x=t:a$.

或 $ab=t(t+x)$.

$ab=t^2+tx$.

但 $tx=on$. (320)

$\therefore\ ab=t^2+on$.

習　題

1. 三角形的三邊是 18, 9, 及 21, 求 21 的對角的二等分線的長.

【示意】 應用 301 節求 n 和 o.

2. 三角形的三邊是 21, 14 及 25, 求 25 的對角的二等分線的長.

3. 三角形的三邊是 22, 11 及 21, 求 21 的對角的二等分線的長.

4. 三角形的三邊是 6, 3 及 7, 求 7 的對角的二等分線的長.

5. 在 $\triangle abc$ 內, 若 t 是 $\angle C$ 的二等分線, 求證

$$t^2=ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}.$$

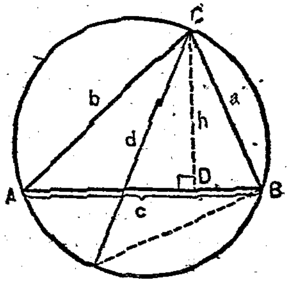
【示意】 $n=\frac{bc}{a+b}$, $o=\frac{ac}{a+b}$　(301).

*6. 用(339)節的記號和方法把上式化成下面的形式.

$$t=\frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}.$$

命題 XXXVIII. 定理

342. 在任意三角形內，二邊的積等於第三邊的高與其外接圓的直徑的積.



設 d 爲 $\triangle abc$ 的外接圓的直徑，又 h 是 c 邊的高.

求證　　$ab=hd$.

〔學者試自證明之〕

343. 系. 三角形的外接圓的直徑等於二邊的積以第三邊的高除之.

$$\left(d=\frac{ab}{h}\text{ 或 } d=\frac{abc}{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}\right)$$

(續)

習　題

1. 在 $\triangle abc$ 內，$a=6$，$b=10$，及 $h_c=4$，求其外接圓的直徑.

2. 在 $\triangle abc$ 內，$a=10$，$b=15$，$h_c=6$，求其外接圓的半徑.

3. $\triangle ABC$ 是內接於半徑 5 吋的圓內，若 $AB=4$ 吋，$AC=5$ 吋，求 BC 的高.

4. 求外接於 $\triangle abc$ 的圓的直徑，若

(a) $a=17$，$b=8$，$c=15$.

(b) $a=10$，$b=17$，$c=21$.

5. 在 $\triangle abc$ 內，$a=20$，$b=15$，b 在 c 上的射影等於 9，求外接圓的半徑.

6. 在 $\triangle abc$ 內，$a=9$，$b=12$，若外接圓的直徑等於 15，求 c.

計算題

1. 直角三角形的二直角邊是 8 和 15，計算斜邊及對於斜邊的高.

2. 14 吋長的弦與中心的距離是 12 吋，求圓的半徑.

3. 24 吋長的弦與中心的距離是 5 吋，求 10 吋長的弦與中心的距離.

4. 在 $\triangle abc$ 內，$a=4$，$b=8$，c 邊所對的角是 60°，求 c.

5. 敎堂塔頂的影子在平地上長 60 呎，而 10 呎長的竹竿的影子長 3 呎. 塔高若干?

6. 一圓的半徑是 10 吋，過離中心 8 吋的一點，作一弦，求這弦的二線分的積. 過該點所作最短弦的長若干?

7. 等腰三角形的底邊長 48 吋,若腰長 50 吋,求其高.

8. 平行四邊形的二邊和一對角線是7,9,及8,求他一對角線的長.

9. 正方形的對角線長 20 吋,求邊.

10. 矩形的二邊是 16 和 30,求對角線.

11. 延長 AB 直徑到 C,再從 C 作圓的切線;若 AB=30, BC=2,求切線的長.

12. 17 呎長的梯子上端靠在 15 呎高的窗子,梯子脚離屋若干尺?

13. 在 $\triangle abc$ 中, $c=10$, $\angle A=30^\circ$, $\angle C=90^\circ$, 求 a 及 b.

14. 等腰三角形的底邊是 b,腰長是 a,求其高.

15. 延長梯形的不平行的二邊 AB 和 CD 使交於 E,若 AB=7,底邊是 5 及 3,求 AE 及 BE.

16. 菱形對角線是 10 和 24 吋,求周圍及高.

17. 相距一吋的二平行弦的長是 6 吋和 8 吋,求圓的半徑.(有一個以上的解否?)

18. 梯形的高是 h,底邊是 a 和 b,延長不平行的二邊使相遇成兩個三角形,求他們的高.

19. 在高出海面 24 呎的地方,可望見的地平線的半徑是 6 哩.求地球的直徑.

20. 二圓的半徑是 5 和 3,二中心的距離是 17,求內公切線的長.

21. 30 吋長的弦對 120° 的角,求中心與弦的距離.

*22. 在 $\triangle ABC$ 內，$AB=BC=25$，$AC=30$，又在 AB 上取 $AD=8$，求 CD 的長。

*23. 三角形的三邊是 14，16 和 6，求 14 所對的角。

*24. 在四邊形 $ABCD$ 內，$AB=10$，$BC=17$，$CD=13$，$DA=20$，$AC=21$，求對角線 BD.

作圖題

1. 內分三角形的各邊成二段，其比等於其他二邊之比。

2. 作一三角形，已知：

   a，b，及 $b:c=4:5$。

3. 作一直線平行於矩形的一邊，使割取一相似矩形。

4. 在已知圓內，作一與已知三角形相似的內接三角形。

5. 在已知圓外，作一與已知三角形相似的外切三角形。

6. 作一三角形，與一已知三角形相似，且其高等於已知直線。

7. 在已知三角形內，作一內接正方形。

8. 設以任意長做單位，作直線使等於(a)$\sqrt{2}$，(b)$\sqrt{3}$，(c)$1+\sqrt{5}$。

9. 作一直線須與一已知直線之比等於 $1:\sqrt{2}$。

10. 作一直線須與一已知直線之比等於 $\sqrt{3}:1$。

11. 在一已知直線 AB 上，求一點 C，使 $AC:BC=1:\sqrt{2}$。

12. 作一平行四邊形與已知平行四邊形相似，且其對角線等於一已知直線。

13. 作一三角形,與一已知三角形相似,且其周圍等於定長.

14. 若 a 和 b 爲二已知直線,作一直線使等於 $\frac{2a^2}{b}$.

15. 從圓外一點作一割線使圓外的線分等於割線之半(參閱第16題的示意.)

16. 作一圓切於已知圓上的一定點且切於一已知直線.

【示意】 作圓的切線.

17. 過一定點,且切於二平行直線,作一圓.

18. 在一已知圓內,作一內接矩形,已知其二邊的比.

*19. 作一直線平行於梯形的底邊,使分梯形成二相似梯形.

定　　理

1. 若一弦被其他一弦二等分,則一弦的任一線分是其他一弦的二線分的比例中項.

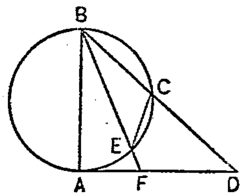
2. 若在 △ABC 內,高 BD 及 AE 遇於一點 F,又 AB=BC,則 BC:AF=BD:CD.

3. 若在二平行的切線間,作第三切線,則圓的半徑是第三切線的二線分的比例中項.

4. 若經過二外切圓的切點作一割線,則所成的二弦之比等於二圓半徑之比.

5. 若 C 是弧 AB 的中點,又弦 CD 和 AB 相交於一點 E,則 CE:CA=CA:CD.

6.　若 AB 是直徑，AD 是切線，又 FB 和 DB 是割線，求證 $BE\times BF=BC\times BD$.



(6)

7.　求證在直角三角形內，斜邊與其內切圓的直徑之和等於二直角邊之和.

8.　若二圓相交，則引長公弦必平分公切線.

9.　若一等腰三角形內接於圓內，則過各頂點的切線亦成一等腰三角形.

10.　過圓內接矩形的各頂點的切線成一菱形.

11.　若二平行四邊形有一角相等且其夾邊成比例，則二平行四邊形相似.

12.　若二矩形的二隣邊成比例，則二矩形相似.

13.　若過二外切圓的切點作二直線至二圓爲止，則這二直線的對應線分成比例.

雜　題

1.　若過一點作三(或三以上)截線與二平行線相交，則平行線的相當線分成比例.

2.　證明上題的逆定理.

3.　三角形的一邊的中線平分平行於這一邊而止於其他二邊的任何直線.

4.　已知底邊及其內接圓的半徑，作一等腰三角形.

5. 求證任一直角三角形的直角,被自頂點引至在斜邊上所作正方形的對角線的交點的直線所二等分.

6. 等腰三角形的底角的二等分線與兩腰遇於 D 和 E;求證 DE 平行於底邊.

7. 已知斜邊被直角的二等分線所分成的二線分,求作直角三角形.

8. 從三角形的二邊的中點到第三邊的垂線相等.

9. 若四邊形的二鄰角都是直角,則他二角的二等分線互相垂直.

10. 不用中心,從圓上一點,求作一切線.

11. 圓的半徑是 30 呎,求從離圓 4 呎的一點到圓的切線的長.

12. 一矩形內接於半徑 5 呎的圓內.底爲高的二倍;求矩形的周圍.

13. 二圓的半徑是 12 吋和 9 吋,又中心的距離是 28 吋.外公切線與聯心線相交的一點離二中心各若干?

14. 梯形的二底是 8″ 和 12″,又高是 3″.若離下底二吋作一直線,平行於底而止於不平行的二邊,求這直線的長.

第 四 編

多邊形的面積

344. 定義. 面的單位是一邊等於單位長的正方形.

譬如,長 1 吋闊 1 吋的正方形,是一平方吋,或長 1 碼闊 1 碼的正方形是一平方碼.

345. 面積是面所包含面的單位的數.

譬如,若地板是 25 呎長 15 呎闊,他包含 15×25 或 375 平方呎,所以地板的面積是 375 平方呎.

346. 兩圖形面積相等,則兩圖形叫做等積或相等.

譬如,若 $\triangle ABC$ 的面積$=25$ 平方呎,又 $\square MNOP$ 的面積$=25$ 平方呎,則 $\triangle ABC$ 和 $\square MNOP$ 爲等積,或以符號表之則爲:

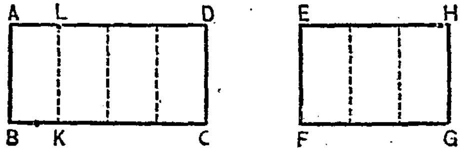
$$\triangle ABC=\square MNOP.$$

【註】 $=$號指圖形的大小,而$\sim$號指其形狀,$\cong$號指其大小和形狀.形狀沒有分別的圖形,如直線等,則$\sim$號失其意義.故全同號$\cong$應用於直線時,其意義與等號$=$相同.

應用等號$=$於面積的時候,可以讀做"等積"或"等於"(卽相等).有許多著者常稱全同形爲相等形,故希望用等積而不用等於,以防錯誤混亂.至於另一等積號$\backsimeq$,可以不用.

命題 I. 定理

347. 高相等的矩形的比等於其底邊的比.



設 矩形 ABCD 及 EFGH,底邊爲 BC 及 FG,高 AB=高 EF.

求證 ABCD:EFGH=BC:FG.

甲(可通約的)

證

敘述	理由
1. 以BK爲二底的度量的單位,則 $BC=m(BK)$,$FG=n(BK)$.	**1.** 二底是可通約的.
2. $\frac{BC}{FG}=\frac{m}{n}$.	**2.** (224).
3. 從BC及FG上的分點作垂線.二矩形分成 m 及 n 個小矩形,各等於 ABKL.	**3.** (47,141,147).
4. $\frac{ABCD}{EFGH}=\frac{m}{n}$.	**4.** (224).
5. $\therefore \frac{ABCD}{EFGH}=\frac{BC}{FG}$.	**5.** 何故?

乙(不可通約的)參閱附錄

348. 系. 等底的矩形的比等於其高的比.

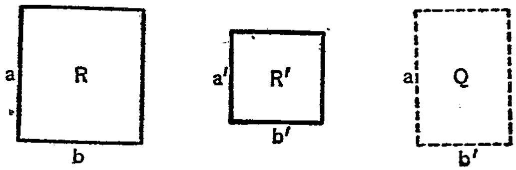
習　題

分所設矩形成三個全同的矩形

(實際應用題在367—368頁)

命題II. 定理

349. 二矩形的面積之比等於其底和高的積之比.



設 矩形R和R'的底是b和b',又高是a和a'.

求證 $$\frac{R}{R'}=\frac{a\times b}{a'\times b'}.$$

證

敍　述	理　由
1. 作矩形Q,使其底與R'同,高與R同.	1. 已知底和高作矩形.
2. $\frac{R}{Q}=\frac{b}{b'}$.	2. 命題1.
3. $\frac{Q}{R'}=\frac{a}{a'}$.	3. (348).
4. $\frac{R}{R'}=\frac{a\times b}{a'\times b'}$.	4. 何故?

習 題

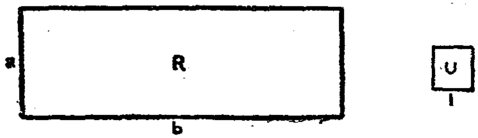
1. 求 4 呎 ×5 呎的矩形與一邊長 10 呎的正方形的面積之比.

2. 矩形的一對角線長 26 吋,一邊長 24 吋. 他一矩形的一對角線長 25 吋,一邊長 20 吋.求二矩形的面積之比.

3. 二矩形的面積之比等於 8 比 3. 第一矩形的尺寸是 6 和 12. 若第二矩形的底是 9, 求其高.

命題 III. 定理

350. 矩形的面積等於底和高的積.



設 矩形 R 的底是 b,高是 a.

求證 R 的面積 $=a\times b$.

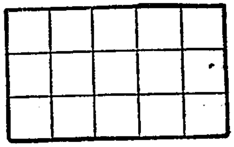
證

敍 述	理 由
1. 設 U 是面的單位.	**1.** 何故?
2. $\frac{R}{U}=\frac{a\times b}{1\times 1}$.	**2.** (349).
3. 但$\frac{R}{U}$是 R 的面積.	**3.** (345).
4. $\therefore$ R 的面積 $=a\times b$.	**4.** 何故?

351. 系. 正方形的面積等於一邊的平方.

352. 注意. 若矩形的高和底可以用整數表之,命題 III 可將圖分做許多正方形證明之.

如若底含有 5 個,高含有 3 個線分單位,則這圖可分成十五個正方形,各等於面的單位.

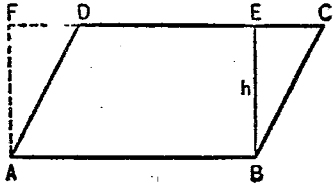


習　　題

1. 矩形田地長 24 碼闊 15 碼,求面積.
2. 矩形的面積等於 360 平方吋,又其底是 4 碼,求高.
3. 矩形的面積爲 125 平方吋,又長五倍於其闊,求矩形的長和闊.

命題 IV.—定理

353. 平行四邊形的面積等於其底和高之積.



設 □ABCD 的底邊 $AB=b$, 又高 $BE=h$.

求證　　$ABCD=b\times h$.

證

敍述	理由
1. 作 $AF\perp AB$ 使遇 CD 的延長線於 F.	1. 何故?

2. $AF \parallel BE$.	2. (96).
3. ABEF 是矩形，其底是 b，其高是 h.	3. 何故?
4. ABCD 是▱，其底是 b，高是 h.	4. 假設.
5. $AF=BE$, $AD=BC$.	5. 何故?
6. $Rt. \triangle AFD \cong rt. \triangle BEC$.	6. 斜邊，直角邊＝斜邊，直角邊.
7. $ABCF=ABCF$.	7. 恆等.
8. ▱$ABCD$＝矩形 ABEF.	8. 從等量減等量…….
9. 但矩形 $ABEF=bh$.	9. 何故?
10. $\therefore$ ▱$ABCD=bh$.	10. 代入.

354. 系1. 等底和等高的平行四邊形相等.

355. 系2. 二平行四邊形之比，等於底和高的積之比.

356. 系3. 等底的平行四邊形之比，等於其高之比.

357. 系4. 等高的平行四邊形之比；等於其底之比.

習　題

1. 平行四邊形的底是 15 吋，又高是 2 呎，求面積.

2. 平行四邊形的二邊是 15 和 20，又二邊所夾的角是 30°，求面積.

***3.** 平行四邊形的二邊是 5 和 8，又 5 在 8 上的射影是 3，求面積.

4. 三等分一平行四邊形.

5. 平行四邊形的邊是 13 和 14，又其一對角線是 15，求面積.

6. 平行四邊形的邊是 4 吋和 5 吋，又其所夾的角是 45°，求面積.

7. 平行四邊形的面積是 144 平方吋，若底長 3 呎，求其高的吋數.

8. 平行四邊形的底等於 30 呎，又其高等於 12 呎，若其等積的矩形的底是 20 呎，求矩形的高.

9. 矩形是 12×20，求其相等的平行四邊形的底和高，若平行四邊形的底較長多 4，又有一角等於 30°.

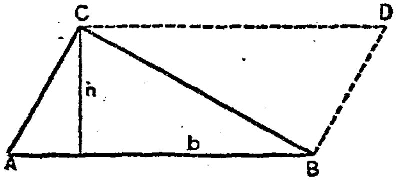
10. 二平行四邊形的底之比如 3 比 2，其面積之比如 5 與 3，試比較他們的高.

11. 平行四邊形的面積有何更變：(*a*)若底不變動而高增加(或減少)時；(*b*)若底和邊不變動而底和邊所夾的角增加(或減少)時？

(統)

命題 V.　定理

358. 三角形的面積等於其高和底的積之半.



設　$\triangle ABC$ 的底是 b，又高是 h.

求證　$\triangle ABC=\frac{1}{2}b\times h$.

證

敍述	理由
1. 作 $BD\parallel AC$，又 $CD\parallel AB$.	1. 何故?
2. ABDC 是 $\square$.	2. 何故?
3. $\square ABDC=bh$.	3. (353).
4. $\triangle ABC=\frac{1}{2}\square ABDC$.	4. (140).
5. $\frac{1}{2}\square ABDC=\frac{1}{2}bh$.	5. 何故?
6. $\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}bh$.	6. 何故?

359.　系 1.　等底等高的三角形相等.

360.　系 2.　二三角形的比，等於其高和底的積之比.

361.　系 3.　等底的三角形之比，等於其高之比.

362.　系 4.　等高的三角形之比，等於其底之比.

習　題

1. 求證：若二同底的三角形的頂點在平行於底的一直線上，則二三角形相等.

2. 若 A 爲面積，又 $2s$ 是 $\triangle abc$ 的周圍，則

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad (339)$$

3. 三角形的面積爲600平方吋，又高是20吋，求底.

4. 三角形的二邊是5和8，又其所夾的角是30°，求面積.

5. 求三角形的面積，他的各邊如下：

(a) 13, 14, 15.　　(c) 11, 25, 30.

(b) 9, 10, 17.　　(d) 4, 13, 15.

6. 求 $\triangle abc$ 的面積，若 $a=10$, $b=17$, $h_c=8$.（有二解）

7. 平行四邊形的二對角線分平行四邊形成四個等積的三角形.

8. 若二三角形的二邊各各相等，又其夾角互爲補角，則二三角形相等.

9. 在同底上面等積的三角形的頂點的軌跡若何?

10. 一三角形的底邊是8吋，又其面積等於底14吋和高6吋的平行四邊形，求三角形的高.

11. 求每邊等於4吋的等邊三角形的面積.

12. 求等腰三角形的面積，其底邊是20呎，又頂角是120°.

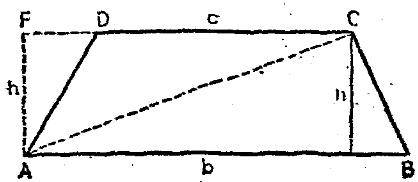
13. 求等腰直角三角形的面積，其斜邊等於18碼.

14. 求等邊三角形的面積，其高是 $4\sqrt{3}$.

15. 求等腰三角形的面積，若腰長為 20 呎，又底邊是 32 呎.

命題 VI. 定理

363. 梯形的面積等於高與二底和的積之半.



設 梯形 ABCD 的二底是 b 和 c，又高是 h.

求證 $ABCD=\frac{1}{2}h(b+c)$.

證

敍述	理由
1. 作 AC；又 AF⊥CD 的延長線.	1. 何故?
2. $AF=h$.	2. 何故?
3. $\triangle ADC=\frac{1}{2}c\times AF$.	3. (358).
4. $\triangle ADC=\frac{1}{2}hc$.	4. 代入.
5. $\triangle ACB=\frac{1}{2}hb$.	5. (358).
6. $\therefore ABCD=\frac{1}{2}hb+\frac{1}{2}hc$ $=\frac{1}{2}h(b+c)$.	6. 何故?

(續)

習題

1. 梯形的面積等於其高和中線的積.

2. 聯梯形二底的中點的直線分成二個相等的梯形.

3. 梯形的二底是 12 和 8，又高是 5，求面積.

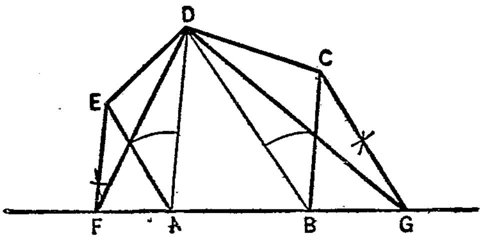
4. 在命題 VI 的圖中，若 $b=6$，$c=4$，$BC=10$，又 $\angle B=30°$，求面積.

5. 梯形的面積是 200，二底是 15 和 25，求高.

6. 梯形的面積是 30，高是 5，又一底是 8，求他一底邊.

命題 VII. 定理

364. 變多邊形成三角形.[1]



設　多邊形 ABCDE.

求作　一三角形等於 ABCDE.

作法　作 DB 及 DA. 過 C 及 E 作 CG 及 EF 各平行於 DB 及 DA. 延長 AB 與平行線交於 F 及 G. FDG 即所求的三角形.

(統)

證　$\triangle DBG=\triangle BCD$，又 $\triangle DFA=\triangle DEA$.　　(何故?)

(1)一圖形變成他一圖形，即作一個相等圖形之意.

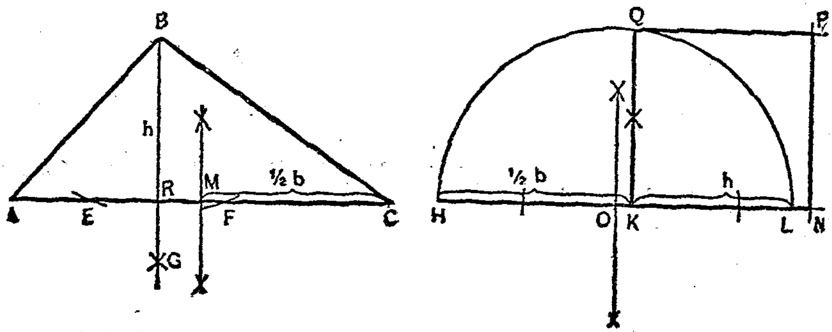
多邊形 ABCDE $= \triangle BCD + \triangle BDA + \triangle DEA = \triangle FDG$. (何故?)

習 題

1. 變正方形成直角三角形.
2. 變矩形成三角形.
3. 變四邊形成三角形;又變梯形成三角形.
4. 變平行四邊形成矩形;又變爲直角三角形.
5. 變等腰三角形成矩形;又變等邊三角形成矩形.
6. 變斜三角形成等腰三角形.

命題 VIII. 定理

365. 變三角形成正方形.



設 $\triangle ABC$.

求作 等於 $\triangle ABC$ 的正方形. (續)

分析 設底邊 $AC=b$, $h=$三角形的高. $\triangle$的面積$=\frac{1}{2}bh$.

又設 $x=$所求正方形的一邊. 正方形的面積$=x^2$.

$\therefore\quad x^2=\frac{1}{2}bh$，或$x\cdot x=\frac{1}{2}b\cdot h$.

則　$\frac{1}{2}b:x=x:h$. 所以正方形的一邊就是 △ 的高與底之半的比例中項.

作法　(1)　二等分 △ 的底邊 AC 得 $MC=\frac{1}{2}b$.

(2)　從 B 作底邊 AC 的垂線，設他的長是 h.

(3)　以 $\frac{1}{2}b+h$(或 HK+KL)做直徑作一半圓.

(4)　在直徑上 K 點，作 QK⊥HL.

然後在 QK(即 x)上作一正方形.

〔證明已在上分析內〕

習　題

變下列各圖形成相等的正方形：

(*a*)　等邊三角形　　(*b*)　鈍角平行四邊形

(*c*)　梯形　　(*d*)　四邊形

366. 方法XX. **應用代數方程式是變化幾何圖形的一種基本方法.**

367. 【註】　在下列命題中 a, b, c, d 等表已知直線，而 x, y, z 等表所求的直線.

368. (1)　作　$x=a+b$.

(2)　作　$x=a-b$.

(3) 若 m 是已知的有理數.

作 $x=m\cdot a$.

(4) 作 $x=\frac{a}{m}$.

(5) 作 $x=\frac{ab}{c}$.

【示意】 x 是 c, a, 和 b 的第四比例項.

(6) 作 $x=\frac{a^2}{b}$. 〔應用 5〕

(7) 作 $x=\sqrt{ab}$.

【示意】 x 是 a 和 b 的比例中項. (327).

(8) 作 $x=\sqrt{a^2+b^2}$.

【示意】 $x=rt.\ \triangle$ 的斜邊,他的直角邊是 a 和 b.

(9) 作 $x=\sqrt{a^2-b^2}$.

【示意】 $x=rt.\ \triangle$ 的直角邊, $a=$斜邊, $b=$他一直角邊.

(10) 作 $x=a\sqrt{2}$.

【示意】 $x=$正方形的對角線,他的一邊是 a.

(11) 若 m 是一已知數.

作 $x=a\sqrt{m}$.

【示意】 $x=\sqrt{a(am)}$.

(統)

習 題

1. 求作368節內的方程式中的 x [在(3),(4)及(11)內,設 $m=3$].

2. 作一正方形三倍於一已知正方形.

3. 變平行四邊形成矩形,他的底邊二倍於平行四邊形的底邊.

4. 求作等於已知三角形之半的正方形.

5. 作 $x=a\sqrt{5}$; $x=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$; $x=\sqrt{a^2+ab}$;

$x=\sqrt{a^2-ab}$; $x=\frac{a^2-b^2}{c}$.

6. 已知三角形的底邊和一底角,求作等於已知梯形的三角形.

7. 求作等於已知梯形的正方形.

8. 求作等於已知矩形的矩形, 他的底邊,等於已知矩形的周圍之半.

*9. 求作等於已知正方形的等邊三角形.

369. 二線的數量之積, 可用二線所成的矩形的面積代表他.若文字 a, b, c 等,代表幾條直線,則這許多文字的二次等次式可由矩形之和(或差)代表之.

【註】 下列習題中的圖形,可先作二直線互相垂直,然後照題意再作其平行線.

故在各習題中可假定下列事實,這是不難證明的:

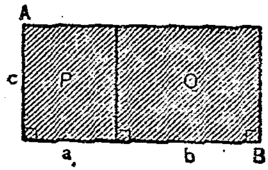
凡圖形中的四邊形都是矩形,又他們的對邊相等.

習　題

若 a, b, c 及 d 是四條直線，$a>b$ 及 $b>c$，用圖形表明：(a) ab；(b) $(a+b)b$；(c) $(a-c)d$；(d) $(a+b)(c+d)$；(e) $(a-b)(c+d)$；(f) $ab+ac$；(g) a^2+ab+b^2；(h) a^2-b^2；(i) $(a-b)^2$.

370. 任意二次等次恆等式可用幾何方法證明恆等式的兩邊所代表的面積相等.

譬如，證明：



$(a+b)c=ac+bc$ 則因

$(a+b)c=$ AB 的面積

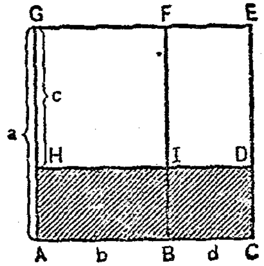
$ac=$ P 的面積

$bc=$ Q 的面積

但 $\quad AB=P+Q$

$\therefore \quad (a+b)c=ac+bc$

同樣，證明



$(a-c)(b+d)=ab+ad-bc-dc$.

$AH=a-c$, $AC=b+d$.

$\therefore$ 恆等式的左邊 $=(a-c)(b+d)=$ AD 的面積[1]

但 $ab=GB$, $ad=FC$.

$\therefore \quad ab+ad=GC$.

又 $bc=HF$, $dc=FD$.

(續)

(1)學者在下列習題中，恆等式左邊所代表的面積用陰影顯明他.

$\therefore\quad ab+ad-bc-dc=AD,$

即　$(a-c)(b+d)=ab+ad-bc-dc.$

習　題

用幾何方法證明下列代數公式:

(a)　$a(b+c+d)=ab+ac+ad.$

(b)　$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd.$

(c)　$a(b-c)=ab-ac.$

(d)　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$

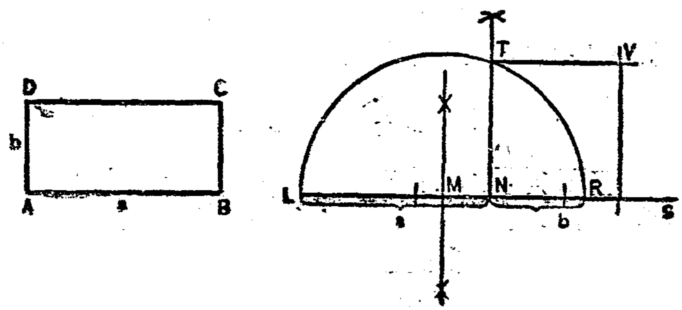
(e)　$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$

(f)　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$

【示意】　$a^2-ab+b^2-ab.$

命題 IX.　作圖題

371.　變矩形成正方形.



設 矩形ABCD.

求作 一正方形等於ABCD

作法 在LS線上截取LN及NR各等於a及b,以$(a+b)$做直徑作半圓.在N上作直徑的垂線遇半圓於T.NT即等於所求正方形的一邊.作正方形NV.

證 矩形的面積$=ab$.

正方形的面積$=x^2$.

$\therefore\ x^2=ab,\ x=\sqrt{ab}$.

即x是a和b的比例中項.

習 題

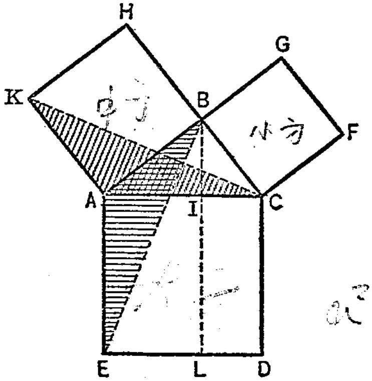
用代數方法求作:

1. 等於平行四邊形的正方形.
2. 二倍於三角形的正方形.
3. 等於梯形之半的正方形.
4. 等於二三角形之和的正方形.
5. 等於矩形與三角形之差的正方形.

命題 X. 定理

372. 在直角三角形內,二直角邊上的正方形的和等於斜邊上的正方形.[1]

1. 本圖上的陰影是顯明兩個全等的三角形.



$a^2+b^2=c^2$

設　直角三角形 ABC，AH 及 BF 是直角邊上的正方形，AD 是斜邊上的正方形.

求證　正方形 AD＝正方形 AH＋正方形 BF.

證

敍述	理由
1. 作 BL⊥ED.	1. 何故?
2. BL∥AE.	2. 何故?
3. 作 KC 及 BE.	3. 何故?
4. BA＝△KAC 的高. AI＝△BAE 的高.	4. 何故?
5. KA＝AB，又 AC＝AE.	5. 假設.
6. ∠KAB＝∠EAC.	6. *rt.* ∠s 相等.
7. ∠BAC＝∠BAC.	7. 恆等.

8. $\angle KAC = \angle BAE$.	8. 何故?
9. $\triangle KAC \cong \triangle BAE$.	9. *s. a. s.* = *s. a. s.*
10. $\begin{cases} \triangle KAC = \frac{1}{2}(ABHK). \\ \triangle BAE = \frac{1}{2}(AELI). \end{cases}$	10. 何故?
11. ∴正方形AH＝矩形AL.	11. 何故?
12. 正方形BF＝矩形DI.	12. 同(1—11).
13. ∴正方形 AH＋ 正方形 BF＝正方形 AD.	13. 何故?

373. 系. 直角三角形的直角邊上的正方形等於斜邊上的正方形與他一直角邊上的正方形之差.

374.【註】上面這定理由**畢達哥拉斯**(*Pythagoras*)在紀元前約 550 年首先證明的,故叫做**畢達哥拉斯定理**.上述的證法是**歐幾里得**(*Euclid*約在紀元前300年)發明的.

命題 XI. 作圖題

375. 作一正方形等於二已知正方形的和.

〔學者可以自解.應用命題 X.〕

命題 XII. 作圖題

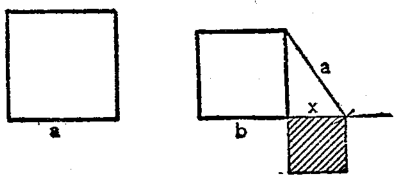
376. 作一正方形等於二已知正方形的差.

(續)

〔學者試自證明之〕

習　題

1. 作一正方形等於三已知正方形的和.



2. 作 x^2, 設 $x^2=a^2+b^2-c^2$.

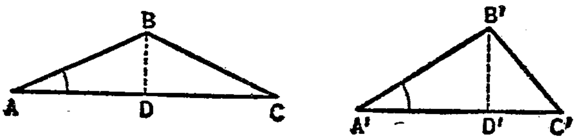
3. 作 x^2, 設 $x^2=2a^2$.

【示意】 $x^2=a^2+a^2$.

4. 用上面的方法,作一正方形等於已知正方形的三倍.

命題 XIII.　定理

377. 有一角相等的二三角形的面積之比, 等於夾等角的邊的積之比.



設 $\triangle ABC$ 及 $A'B'C'$, $\angle A=\angle A'$.

求證 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{AB\times AC}{A'B'\times A'C'}$.

證

敍述	理由
1. 作高 BD 及 B′D′.	1. 何故?
2. $\angle A=\angle A'$.	2. 假設.

3. $\therefore \triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$	3. (306).
4. $\dfrac{BD}{B'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}$.	4. 何故?
5. $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{AC\times BD}{A'C'\times B'D'}$	5. (360).
$=\dfrac{AC}{A'C'}\times\dfrac{BD}{B'D'}$	
6. $=\dfrac{AC}{A'C'}\times\dfrac{AB}{A'B'}$	6. 代入.
7. $=\dfrac{AC\times AB}{A'C'\times A'B'}$	7. 何故?

習 題

1. 在$\triangle$ABC及A'B'C'內，$\angle A=\angle A'$，AB=6吋，AC=9吋，A'B'=1呎，又A'C'=2呎，求二三角形的面積之比.

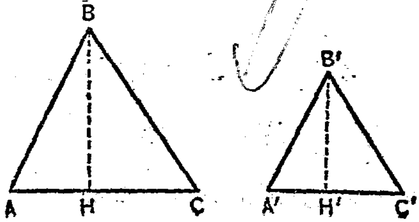
2. $\triangle$ABC等於$\triangle$A'B'C'，又$\angle A=\angle A'$. 若AB=2吋，A'B'=3吋，又A'C'=4吋，求AC.

3. 若$\triangle ABC=\triangle A'B'C'$，又$\angle A=\angle A'$，則

$$AB:A'B'=A'C':AC.$$

命題 XIV. 定理

378. 相似三角形之比等於相當邊的平方之比.



設　$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

求證　$\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}=\dfrac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$.

證

敍述	理由
1. 作相當高 BH 及 B′H′.	**1.** 何故?
2. $\angle A=\angle A'$.	**2.** 假設.
3. $Rt.\ \triangle ABH \sim rt.\ \triangle A'B'H'$.	**3.** (306).
4. $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{AC\times BH}{A'C'\times B'H'}$ $=\dfrac{AC}{A'C'}\times\dfrac{BH}{B'H'}$.	**4.** (360).
5. $\dfrac{BH}{B'H'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.	**5.** (314).
6. $\therefore \dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}\times\dfrac{AC}{A'C'}$ $=\dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}$.	**6.** 代入.
7. 同樣, $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$.	**7.** 同(1—6).

(統)

379. **相似三角形之比等於相當高的平方之比.**

習　題

1. 相似三角形之比等於周圍的平方之比.

2. 三角形的三邊是 4, 7, 及 8. 求其相似三角形的各邊，他的面積四倍於這個三角形.

3. 若二相似三角形的一對相當邊是 2 吋及 3 吋，求面積之比.

4. 若二相似三角形的二相當邊之比如 2:3, 比較他們的面積.

5. 二相似三角形的面積之比如 9:25. 若前者的周圍是 36，求後者的周圍.

6. 一等邊三角形的面積是 100 平方吋. 求他一等邊三角形的面積，若其底邊二倍於前者.

7. 若一直線聯三角形的二邊的中點，則所成的三角形佔原三角形的幾分之幾?

8. 在 325 節命題 XXX 的圖形中，求直角三角形 CBD 及 BDA 之比.

9. 在第八題內，若二直角邊是 5 和 2，求二三角形的比.

10. 延長梯形的不平行的二邊使交於一點. 若梯形的底是 20 和 12，求圖形內二三角形的面積之比.

11 相似三角形之比等於相當 (a) 中線的平方之比；(b) 角二等分線的平方之比.

12. 在等邊三角形的底和高上作正方形而比較他們的面積.

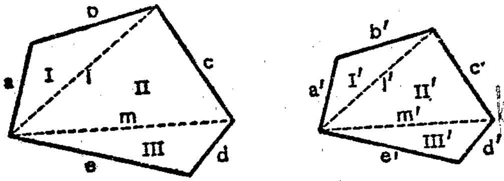
13. 二相似三角形的面積是 64 和 225，第一三角形的高是 6，求第二三角形的相當高.

14. 梯形的二底是 12 和 8，延長不平行的二邊使遇於一點. 若梯形

的面積是 90，求較小三角形的面積.

命題 XV.　定理

380. 相似多邊形之比等於相當邊的平方之比.



Area

設　a 和 a' 是二相似多邊形的相當邊，他們的面積是 S 和 S′.

求證　$\dfrac{S}{S'}=\dfrac{a^2}{a'^2}$.

Surface

證

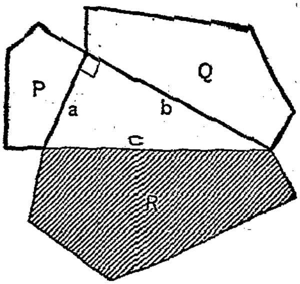
敍述	理由
1. 從相當兩頂點作所有的對角線.	1. 何故?
2. $\triangle I \sim \triangle I'$, $\triangle II \sim \triangle II'$, 等等.	2. (315).
3. $\dfrac{\triangle I}{\triangle I'}=\dfrac{a^2}{a'^2}$.	3. (378).
4. $\dfrac{\triangle I}{\triangle I'}=\left(\dfrac{b^2}{b'^2}\right)=\dfrac{\triangle II}{\triangle II'}=\left(\dfrac{m^2}{m'^2}\right)=\dfrac{\triangle III}{\triangle III'}$.	4. (378).
5. $\dfrac{\triangle I}{\triangle I'}=\dfrac{\triangle II}{\triangle II'}=\dfrac{\triangle III}{\triangle III'}$.	5. 何故?
6. $\dfrac{\triangle I+\triangle II+\triangle III}{\triangle I'+\triangle II'+\triangle III'}=\dfrac{\triangle I}{\triangle I'}$.	6. (284).
7. $\therefore$ $S:S'=\triangle I:\triangle I'$.	7. 何故?
8. $\therefore$ $S:S'=a^2:a'^2$.	8. 何故?

381. 系 I. 相似多邊形之比,等於相當對角線的平方之比.

382. 系 II. 相似多邊形之比,等於周圍的平方之比.

命題 XVI. 定理

383. 若在直角三角形的三邊上作相似多邊形, 則在二直角邊上的多邊形的和等於斜邊上的多邊形.



設 在直角 $\triangle abc$ 的二直角邊及斜邊上作相似多邊形 P, Q 及 R.

求證 $P+Q=R$.

證. $\frac{P}{R}=\frac{a^2}{c^2}$, 又 $\frac{Q}{R}=\frac{d^2}{c^2}$. (380)

$\therefore \frac{P+Q}{R}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1$. (公理 2, 329)

即 $P+Q=R$. (何故?)

(續)

習　題

1. 二相似多邊形的面積是 3 平方吋和 12 平方吋，又一多邊形的一邊是 6 吋，求他一多邊形的相當邊.

2. 二相似多邊形的二相當邊是 4 吋和 3 吋，又大多邊形的面積是 1 平方呎.求小多邊形的面積.

3. 一多邊形的面積二倍於相似多邊形的面積，求相當邊之比.

4. 地圖的比例尺是 1:1000，在地圖上面積等於 2 平方吋的多邊形實際上有多少平方呎?

5. 二相似多邊形的對應邊之比如 5:9，又面積之和是 212 平方呎，求各多邊形的面積.

6. 二相似平行四邊形之比等於其對角線的積之比.

7. 作一三角形等於已知三角形的三分之二，且同他相似.

8. 作一三角形與一已知三角形相似，且他的面積三倍於已知三角形.

9. 作一直線平行於三角形的一邊，且二等分他.(面積二等分)

10. 作二直線平行於三角形的一邊，且三等分他.(同上)

11. 作一多邊形與一已知多邊形相似，且等於他的三分之二.

12. 作一等邊三角形，他的面積等於二已知等邊三角形之和.

13. 作一等邊三角形，他的面積等於二已知等邊三角形之差.

14. 作一等腰直角三角形，他的面積等於二已知等腰直角三角形之

和.

15. 作一等腰直角三角形，他的面積等於二已知等腰直角三角形之差.

16. 作一三角形，與二已知相似三角形相似，且等於他們的和.

17. 作一多邊形，與二已知相似多邊形相似，且等於他們的和.

18. 作一多邊形，與二已知相似多邊形相似，且等於他們的差.

19. 作一等邊三角形，等於三個已知等邊三角形的和.

20. 二相似多邊形的相當邊是 12 呎和 5 呎，求等於二已知相似多邊形的和的相似多邊形的相當邊.

雜　　題

定　理

1. 若 E 是平行四邊形 ABCD 的對角線 AC 上的任一點，求證 $\triangle AEB = \triangle ADE$.

2. 過平行四邊形的二對角線的交點，作一直線分原形成相等的二部分.

3. 圓外切多邊形的面積，等於周圍與半徑的積之半.

4. 若過平行四邊形的對角線上的任一點作二直線平行於二邊，成四個平行四邊形，其中不含對角線的二個平行四邊形相等.

5. 若從平行四邊形內任一點與四頂點相聯，則相對的任一對三角形的和等於平行四邊形之半.

6. 順次聯四邊形的四邊的中點成一平行四邊形等於四邊形之半.

7. 菱形與正方形的周圍相等，已知菱形的一角是 60°，比較他們的面積.

8. 若在聯三角形的二邊的中點的直線上作一平行四邊形，有二頂點在三角形的底邊上，則這平行四邊形等於三角形之半.

9. 梯形的不平行的二邊與二對角線成二相等的三角形.

10. 若從三角形的中線的交點至三頂點作三直線，則這三直線與三邊成三個相等的三角形.

11. 若在 $\triangle ABC$ 內，D 及 F 是 AB 和 AC 邊的中點，則 $\triangle ADC = \triangle ABF$.

12. 一邊等於 a 的等邊三角形的面積等於 $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

13. 菱形的面積等於二對角線的積之半.

計算題

1. 等邊三角形的一邊是 10 吋，求面積.

2. 若等腰三角形的底邊是 6，又腰是 5，求面積.

3. 梯形的二底是 9 和 11，又高是 12 呎，求面積.

4. 菱形的二對角線是 9 和 10 呎，求面積.

(較) 5. 求四邊形 ABCD 的面積，若 $AB=10$，$BC=24$，$CD=30$，$AD=28$，對角線 $AC=26$.

6. 等邊 $\triangle ABC$ 的一邊是 8，求三倍於 $\triangle ABC$ 的等邊三角形的邊.

7. 矩形的周圍是 20 米突，一邊是 6 米突，求面積.

8. 求正方形的邊，他的面積是 900 平方米突，n 平方米突.

9. 菱形的面積等於 m，一對角線等於 d，求他一對角線.

10. 梯形的面積是 400 平方米突，高是 8 米突. 求聯不平行二邊的中點的直線之長.

11. 直角三角形的斜邊長 20，一直角邊在斜邊上的射影是 4，求面積.

12. 一農夫要計算一五邊形的田的面積. 他量得直線 AB＝4 桿，BC＝13 桿，CD＝14 桿，DE＝5 桿，EA＝12 桿，AC＝15 桿，及 AD＝13 桿. 這田有多少平方桿?

13. 三角形的底和高是 12 和 20，在離底 6 的地方作一直線平行於底，求三角形的二部分的面積.

14. 求矩形的面積，他的一邊等於 6，又一對角線等於 10.

15. 周圍等於 20 呎的多邊形外切於半徑等於 3 呎的圓，求多邊形的面積.

16. 三角形的底邊是 10 吋，又他的二底角是 120° 和 30°，求面積.

17. 矩形的底和高是 10 和 15，求面積等於矩形的等邊三角形的邊.

18. 一弧的弦長 42 吋，這弧之半的弦長 29 吋，求圓的直徑.

19. 三角形的底邊長 15 呎，面積等於 60 平方呎，求其相似三角形

的面積，若其相當高是 6 呎.

20. 等腰梯形的腰長 13 吋，又他在長底邊上的射影是 5 吋，又長底邊是 17 吋，求梯形的面積.

21. 二個等腰直角三角形的直角邊是 3 和 2，求一等腰直角三角形的腰的長，他的面積等於他們的差.

22. 三角形的三邊如 8:15:17，若面積等於 960 平方呎，求各邊的長.

23. 三角形的三邊是 8，15 和 17，求內切圓的半徑.

【示意】 三角形的面積等於以內心做頂點，三邊做底邊的三個三角形的和，這件事實試用方程式表示之.

24. 求內接於半徑等於 4 吋的圓內的等邊十二邊多邊形的面積.

25. 三角形的三邊是 6，7 和 8 呎. 6 和 7 所夾的角的二等分線分三角形成二部分，求這二部分的面積.

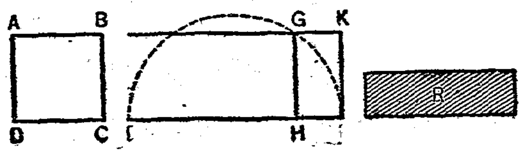
26. 求高等於 h 的等邊三角形的面積.

27. 若菱形的二對角線的和是 24 呎，其比如 3:5，求面積.

28. 矩形的長是16呎，廣是 12 呎，若在其對角線上作面積等於這矩形的三角形，求這三角形的高.

作圖題

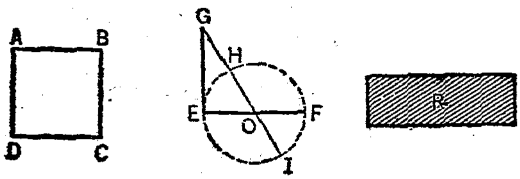
1. 作一矩形，使等於已知正方形，且底與高的和等於已知直線.



(1)

【示意】 若 FE 是已知直線,又 ABCD 是已知正方形,使 EK=AB

2. 作一矩形,使等於已知正方形,且底與高的差等於已知直線.



(2)

【示意】 若 ABCD 是已知正方形,又 EF 是已知直線,使 EG=AB.

3. 變矩形成另一矩形,使一邊等於已知直線.

4. 變正方形成等腰三角形,已知其底邊.

5. 變矩形成平行四邊形,已知其一對角線.

6. 平行於中線作二直線,使三等分一三角形.

7. 作一直線,二等分平行四邊形,且垂直於一邊.

8. 過平行四邊形的一頂點,作二直線,使三等分一平行四邊形.

9. 過一頂點,作一直線二等分一梯形.

10. 過一頂點,作數直線四等分一五邊形.

雜　題

1. 求作一直線與已知直線成 60° 角，且切於一已知圓.

2. 菱形的一邊是 20，長的對角線是 32，求短的對角線和面積.

3. 求證：矩形的角二等分線成一正方形.

4. 在已知直線外的一點，求作二直線與已知直線各成 45° 的角.

5. 塔影長 120 呎時，15 呎長的竹竿的影是 10 呎，求塔高.

6. 求切於二同心圓的圓的中心的軌跡.

7. 若某甲向北行 5 哩，又向東行 12 哩，再向南行 4 哩，他與出發點距離若干哩?

8. 求證：在任意直角三角形內，若延長直角的二等分線必定經過在斜邊上的正方形的中心.

9. 作等於已知六邊形的正方形.

10. 二個等邊三角形，一三角形的一邊等於他一三角形的高，求他們的面積之比.

11. 求在圓內平行弦的中點的軌跡.

12. 在已知三角形的底上作一等腰三角形使與原三角形相等.

13. 求證：有一角等於 30° 的三角形的面積等於夾 30° 的二邊之積的四分之一

14. 過一定點作一直線使與他二定點等距離(有二解).

15. 若等邊三角形的面積是 $25\sqrt{3}$，求邊之長.

16. 分圓上的已知弧成二段，使他們所對的弦之比等於一定比.

17. 二弦相交於圓內；一弦的二線分都是 4，他一弦的長是 10，求這弦的二線分的長.

18. 房屋的長是 40 呎，闊是 30 呎，從地板到天花板的高是25呎，又到屋梁的高是 35 呎，求屋外面的面積.

19. 作一正方形使與已知正方形成一定比.

20. 求證：若四邊形的二對角線互分成等比，則這四邊形是一梯形.

21. 一圓的半徑是 13 吋，過離中心 5 吋的一點作任一弦 求這弦的二線分的積.

22. 三角形底上的高是 12，底被高所分的二線分是 9 和 16，求證這三角形是直角三角形.

23. 菱形的一邊是 13 米突，又一對角線是 24 米突，求面積.

24. AB 是任意弦，AC 是切線，又割線 CDE 平行於 AB 弦截圓於 D 和 E. 求證 AC:AE＝DC:BE.

25. 分一已知直線使其二線分之積等於一已知正方形.

26. 在一三角形的一邊上作一菱形，使與這三角形相等

第五編

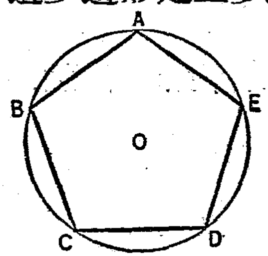
正多邊形 圓的度量

正多邊形

384. 定義. 等邊又等角的多邊形叫做**正多邊形**.

命題 I. 定理

385. 圓內接等邊多邊形是正多邊形.



設 圓 O 和內接等邊多邊形 ABCDE.

求證 多邊形 ABCDE 是正多邊形.

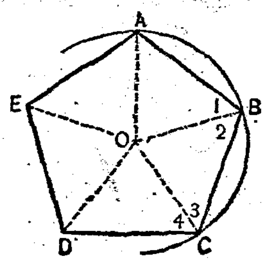
證

敍述	理由
1. $AB=BC=CD=DE\cdots\cdots$.	1. 假設.
2. $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}\cdots\cdots$.	2. (187).
3. $\overset{\frown}{ABC}=\overset{\frown}{BCD}=\overset{\frown}{CDE}=\overset{\frown}{DEA}\cdots\cdots$.	3. 公理 2.
4. $\therefore \angle B=\angle C=\angle D=\angle E=\angle A$.	4. 何故?
5. $\therefore$ 多邊形是正多邊形.	5. (384).

(實際應用題參閱 368—372 頁)

命題 II. 定理

386. 在任一正多邊形的外面可作一外接圓.



設 正多邊形 ABCDE.

求證 在 ABCDE 的外面可作一外接圓.

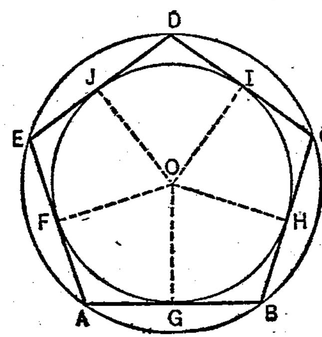
證

敍述	理由
1. 過 A, B, 和 C 作一圓, 設他的中心是 O.	**1.** 過不在一直線上的三點可作一圓.
2. 聯 OA, OB, OC, OD.	**2.** 何故?
3. $\angle ABC = \angle BCD$.	**3.** 假設.
4. $OB = OC$.	**4.** 何故?
5. $\angle 2 = \angle 3$.	**5.** (71).
6. $\angle 1 = \angle 4$.	**6.** 何故?
7. $AB = CD$.	**7.** 假設.
8. $\triangle OAB \cong \triangle OCD$.	**8.** *s. a. s.* = *s. a. s.*
9. $AO = OD$.	**9.** 何故?

10. 這圓必過 D 點.	**10.** 何故?
11. 同樣,這圓必過多邊形的其他各頂點.	**11.** 同(1—10).
12. 故在正多邊形的外面,可作一外接圓.	**12.** 何故?

命題 III.　定理

387. 在任一正多邊形的裏面可作一內切圓.



設　正多邊形 ABCDE.

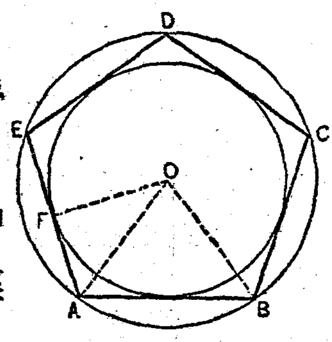
求證　在這多邊形的裏面可作一內切圓.

證

敍　述	理　由
1. 在這已知正多邊形外作一外接圓.	**1.** (386).
2. 從外接圓的中心到各邊作垂線.	**2.** 何故?

3. AB＝BC＝CD＝DE＝EA.	3. 假設.
4. OG＝OH＝OF,等等.	4. (197).
5. 以O做中心，OG做半徑作一圓.	5. 何故?
6. 這圓必過F,G,H,I,J,各點.	6. 何故?
7. AB,BC,CD等都是切線.	7. (203).
8. 故在正多邊形的裏面可作一內切圓.	8. 這多邊形的各邊是⊙的切線.

388. 定義. **正多邊形的中心**(O)是他的外接圓和內切圓的公共中心.



389. 定義. **正多邊形的半徑**是他的外接圓的半徑,如OA.

390. 定義. **正多邊形的中心角**是從一邊的二端所作兩半徑間的角,如AOB.

391. 定義. **正多邊形的邊心距**是他的內切圓的半徑,如OF.

392. 系. n邊正多邊形的中心角等於$\frac{4}{n}$直角.

習　題

1. 若 ABCDEF 是正六邊形，則 $\angle ADC = \angle AEC = \angle AFC$.

2. 若正多邊形 ABCDEFG 的二對角線 AC 和 BE 相交於 Q，則 $AQ \times QC = BQ \times QE$.

3. 若在正七邊形 ABCDEFG 內，AB 的延長線與對角線 EC 遇於一點 H，則 $HB \times HA = HC \times HE$.

4. 任一正多邊形的中心角是這多邊形的角的補角.

5. 若三角形的內切圓和外接圓是同心圓，則三角形為正三角形.

6. 若多邊形的內切圓和外接圓是同心圓，則多邊形為正多邊形.

7. 正三角形的中心角幾度？正八邊形的？正六邊形的？

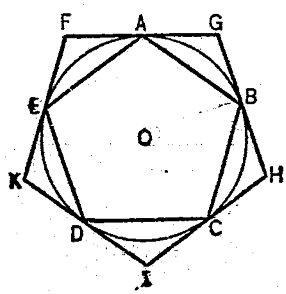
8. 求一邊為 6 吋的正六邊形的邊心距.

命題 IV.　定理

393. 若一圓被分成任意相等部分：

(1) 順次聯結分點所成之弦成一內接正多邊形.

(2) 從分點所作之切線成一外切正多邊形.



(統)

設 圓被分成相等弧 AB,BC,CD 等等，弦 AB,BC,CD 等等，又過分點的切線 FG,GH,HI 等等.

(1) 求證 ABCDE 是一正多邊形.

證 1. $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$,等等. (何故?)

2. AB=BC=CD,等等. (何故?)

3. ABCDE 是一正多邊形. (385)

(2) 求證 FGHIK 是一正多邊形.

證 1. $\angle GAB=\angle GBA=\angle CBH=\angle HCB$,等等. (何故?)

2. AB=BC=CD,等等. (何故?)

3. $\triangle$ABG,CBH……是等腰且≌. (何故?)

4. $\angle G=\angle H=\angle I$,等等. (何故?)

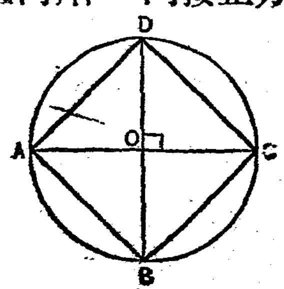
5. AG=GB=BH=HC,等等. (何故?)

6. GH=HI=IK,等等. (公理2)

7. ∴ FGHIK 是一正多邊形. (384)

命題V. 作圖題

394. 在已知圓內,作一內接正方形.



(続)

設 圓O.

求 在這圓內,作一內接正方形.

作法 作一任意直徑 AC. 作直徑 $DB \perp AC$. 順次聯 A, B, C, D. ABCD 即所求之正方形.

證

敘述	理由
1. $DB \perp AC$.	1. 何故?
2. $AD=DC=CB=BA$.	2. (125).
3. ABCD是一正四邊形,即正方形.	3. (385).

395. 系 1. 二等分中心角,則弧 AB,BC 等都被二等分,可成一內接正八邊形.同樣,可作內接正 16,32……邊形.

396. 系 2. 若圓之半徑是 R, 則內接正方形的一邊等於 $R\sqrt{2}$.

習題

(統) **1.** 作外切於圓的正方形.

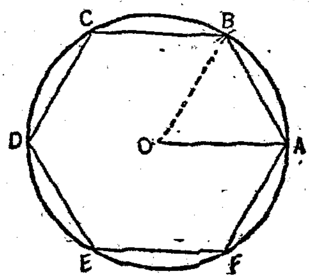
2. 作外切於圓的正八邊形.

3. 在一已知邊上作一正八邊形.

4. 若半徑等於 r, 求正方形的面積.

命題 VI. 作圖題

397. 在已知圓內作一內接正六邊形.



設 圓 O.

求 在這圓內作一內接正六邊形.

作法 在已知圓 ACD 內, 作半徑 AO, 以 A 做中心, 用等於 OA 的半徑作一弧與圓交於 B. 作 AB. 則 AB 弧在圓上適可取六次, 在圓上取 AB 弦亦適六次.

證

敍述	理由
1. 聯 OB.	1. 何故?
2. $OA=OB=AB$.	2. 何故?
3. $\angle O=\angle 60°$.	3. 何故?
4. $\overset{\frown}{AB}=60°$.	4. 何故?
5. $\overset{\frown}{AB}$ 在⊙上適可取六次.	5. 何故?

(續)

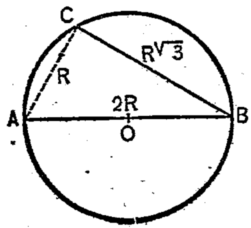
6. $\therefore AB=BC=CD$,等等.	6. (187).
7. ABCDEF是內接正六邊形.	7. (385).

398. 系 1.　內接正六邊形的一邊適等於圓的半徑.

399. 系 2.　聯內接正六邊形相間的項點,則成一內接等邊三角形.

400. 系 3.　可在圓內和圓外作內接和外切正多邊形,其邊數爲 3, 6, 12, 24, 等等.

401. 系 4.　若圓的半徑是 R,則內接等邊三角形的邊等於 $R\sqrt{3}$.



【示意】 若 AB 是直徑,又 $AC=R$,則 BC 是所求的邊.

習　題

1. 若圓的半徑是 R, 則內接正六邊形的邊心距等於$\frac{R}{2}\sqrt{3}$.
2. 在圓外作一外切正六邊形.
3. 在已知邊上作一正十二邊形.
4. 若半徑是 R,求正六邊形的面積.
5. 等邊三角形的邊心距等於半徑的二分之一

(統)

6. 圓內接等邊三角形的面積等於內接正六邊形的面積之半.

*7. 等圓的內接三角形的面積之比等於三邊的積之比. (342)

8. 在圓的直徑上的正方形等於內接正方形的面積之二倍.

402. 定義. 若一直線分成二線分,長的線分爲短的和直線全部的比例中項,則這直線叫做分成**外中比**.

如,AB是被分成外中比,若

$$AB:AC=AC:CB.$$

命題 VII. 作圖題

403. 分一直線成外中比.

設 直線 $AB=a$.

求 分 a 成外中比.

分析 設 AC 或 x 是所求線分中的較大者,則

$$CB=a-x$$

所以 $$a:x=x:a-x$$

$$\therefore\ x^2=a^2-ax$$

移項 $$x^2+ax=a^2$$

配成完全平方 $$x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

(續)

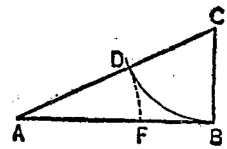
取平方根　　$x+\frac{a}{2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$$\therefore\ x=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}.$$

但因$\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$是直角三角形的斜邊，他的兩直角邊，是$a$和$\frac{a}{2}$，故$x$是容易作的。

作法　自B點作$CB=\frac{a}{2}$，且$\perp AB$。

［則$AC=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$.］



在CA上取$CD=CB\left(=\frac{a}{2}\right)$.

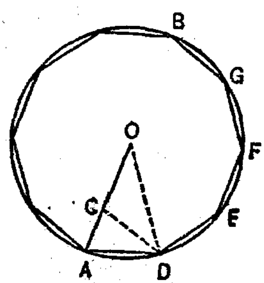
［則$AD=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}$或$x$.］

在AB上取AF=AD。

則AB被分成外中比。

命題 VIII.　作圖題

404. 在已知圓內作內接正十邊形的一邊。



設 $\odot O$.

求作 內接正十邊形的一邊.

作法 分半徑 OA 成外中比. 作弦 $AD=OC$,(OA 的大的線分.) AD 是所求十邊形的一邊.

證 作 DO 和 DC.

$AO:OC=OC:CA$. (作圖)

因 $OC=AD$,

$AO:AD=AD:AC$. (代入)

$\therefore$ $\triangle OAD \sim \triangle CAD$. (311)

$\therefore$ $\angle O=\angle CDA$. (何故?)

但因 $\triangle OAD$ 是等腰,他的相似三角形 DAC 一定也是等腰,

或 $CD=AD=CO$,

因之 $\angle O=\angle CDO$. (何故?)

但 $\angle O=\angle CDA$.

$\therefore$ $2\angle O=\angle ADO=\angle A$. (公理 2)

但 $\angle O+\angle A+\angle A=2rt.\angle s$.

$\therefore$ $5\angle O=2rt.\angle s$,

或 $\angle O=\frac{2}{5}rt.\angle s$, 或 $4rt.\angle s$ 的 $\frac{1}{10}$.

$\therefore$ $\overset{\frown}{AD}$ 是圓的 $\frac{1}{10}$, 即 AD 是內接正十邊形的一邊.

405. 系 1. 聯結相間頂點 A, E, G 等成一內接

(挑)

正五邊形.

406. 系 2. 在圓內和圓外可作內接和外切正多邊形,其邊數爲 5,10,20,40 等等.

習 題

1. 若 R 是圓的半徑,則內接正十邊形的一邊等於$\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$.

【示意】 化簡從命題 VII 分析所得的 x. $(a=R)$.

2. 作一角等於 36°.

3. 在一已知邊上作一正十邊形.

4. 分一直角成五等分.

5. 正五邊形的對角線相等.

6. 正五邊形的對角線互分成外中比.

7. 內接正六邊形的面積,是內接和外切等邊三角形的面積的比例中項.

8. 正多邊形的半徑必二等分他的角.

9. 從正十邊形的一頂點作諸對角線,則這角被分成八等分.

10. 在一已知邊上作一正五邊形.

11. 說明作等於 3° 的角的方法.

(統) **12.** 證: 在圓內接正五邊形的一邊上的正方形等於半徑上的正方形加內接正十邊形的一邊上的正方形.

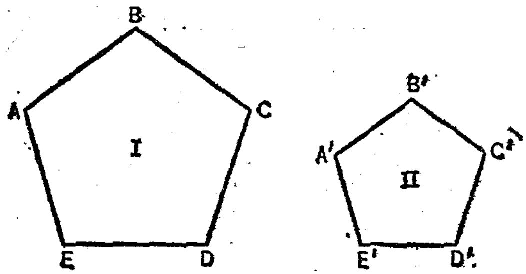
13. 用外接圓的半徑(R)求內接正五邊形的一邊.

14. 求正五邊形的面積,若一邊等於 4 吋.

15. 求一邊等於 4″ 的正十邊形的面積.

命題 IX. 定理

407. 邊數相同的正多邊形必相似.



設 I 和 II 兩正多邊形,各有 n 邊.

求證 $\mathrm{I} \sim \mathrm{II}$.

證

敍述	理由
1. $\begin{cases} \mathrm{I}\text{的各角}=\dfrac{n-2}{n}st.\angle. \\ \mathrm{II}\text{的各角}=\dfrac{n-2}{n}st.\angle. \end{cases}$	1. (157).
2. I 的各角 = II 的各角.	2. 何故?
3. I 和 II 是互等角的.	3. 何故?
4. $\begin{cases} AB=BC=CD=DE=EA. \\ A'B'=B'C'=C'D'=D'E'=E'A'. \end{cases}$	4. (384).

(續)

敍述	理由
5. $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}$.	5. 何故?
6. ∴ I∼II.	6. (303).

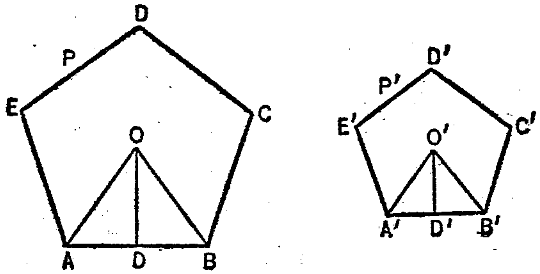
習 題

1. 作一正六邊形使等於已知正六邊形的面積之半.

2. 作一正五邊形使等於二已知正五邊形的面積之和.

命題 X. 定理

408. 邊數相同的正多邊形的周圍之比，等於他們的半徑之比,或邊心距之比.



設 邊數相同的正多邊形的周圍 P 和 P′,半徑 AO 和 A′O′, 又邊心距 OD 和 O′D′.

求證 $P:P'=OA:O'A'=OD:O'D'$.

(統)

證

敍述	理由
1. ABCDE∼A′B′C′D′E′.	1. (407).

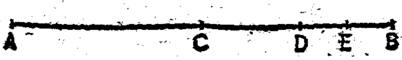
2. $P:P'=AB:A'B'$.	2. (318).
3. $\angle AOB=\angle A'O'B'$.	3. (392).
4. $AO=OB$, $A'O'=O'B'$.	4. 何故?
5. $\dfrac{AO}{A'O'}=\dfrac{OB}{O'B'}$.	5. 何故?
6. $\triangle AOB\sim\triangle A'O'B'$.	6. (311).
7. $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{OA}{O'A'}=\dfrac{OD}{O'D'}$.	7. (303,314).
8. $\therefore P:P'=OA:O'A'=OD:O'D'$.	8. 何故?

409. 系. 邊數相同的正多邊形的面積之比等於半徑的平方之比,或邊心距的平方之比.

410. 定義. **定量**是一個量,在同一討論中,他們的值常是相同的. **變量**是一個量,在同一討論中,他的值常是變化不同的.

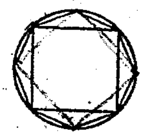
411. 定義. 若一變量 x 漸近於定量 l,而 l 與 x 的差永是小於不爲零的任何微小的量,則 l 叫做 x 的**極限**.

1. 例如: P 點順次在C,D,E等的地點,而$AC=\frac{1}{2}AB$,$CD=\frac{1}{2}CB$,$DE=\frac{1}{2}DB$ 等等;則線分 AC,AD,AE 漸近於極限 AB. (統)



2. 在圓內作內接正方形,然後聯各等弧的中點成內接八邊形,這

樣下去，得內接 16，32，64 等正多邊形. 圓面積 C 大於任何多邊形的面積 A，這是很明顯的；但若多邊形的邊數增加，則二者的差，C－A，漸小.



邊數增加無已，則多邊形的面積漸近於圓的面積，或 C－A 可以小於任何極微小的量.

多邊形的面積的極限，稱爲圓的面積.

3. 同樣，內接多邊形的周圍，邊數增加時，漸近於極限，這極限稱爲圓的長(卽圓周).

4. 分數 .9，.99，.999，……，.9999，……，漸近極限 1，因位數增加無限時，與 1 的差比任何微小的數還小.

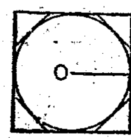
412. "漸近於極限"的記號，是用箭頭，$\longrightarrow$，來表示. "x 漸近於極限 l" 是用 $x \longrightarrow l$ 表之.

【註】 在初等幾何，漸近於極限的變量，不能等於極限. 但變量可以等於極限的情形亦有.

習　題

1. 若 n 增加無限時，$\frac{1}{n}$ 的極限怎樣？

2. $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$ 其和的極限怎樣？



3. 若 n 假設是 4，8，16，……到無限時，外切正多邊形的面積的極限怎樣？（n 爲正多邊形的邊數）

4. 若 n 假設是 4, 8, 16, ………………………到無限時，外切正多邊形的周圍的極限怎樣？（同上）

5. 若內接正多邊形的邊數增加到無限時，(a) 邊心距的極限怎樣？(b)邊的極限怎樣？

6. 若外切正多邊形的邊數增加到無限時，半徑的極限怎樣？

413. 定理. **若二變量 x 和 y 常相等，又 x 漸近於極限 a，則 y 亦必漸近於極限 a.**

因 $a-x=a-y$，又 $a-x$ 比任何數小.

$a-y$ 亦比任何數小. $\therefore\ y\longrightarrow a$.

414. 系. **若二變數常相等，又各漸近於極限，則其極限相等.** （極限原理.）

415. 系. 下列的定理是正確的:

(A) 若 $x\rightarrow a$，則 $nx\rightarrow na$.

(B) 若 $x\rightarrow a$，則 $\frac{1}{n}x\rightarrow\frac{1}{n}a$.

(C) 若 $x\rightarrow a$，又 $y\rightarrow b$，則 $(x\pm y)\rightarrow(a\pm b)$.

(D) 若 $x\rightarrow a$，又 $y\rightarrow b$，則 $\frac{x}{y}\rightarrow\frac{a}{b}$. $(b\neq 0)$

(E) 若 $x\rightarrow a$，又 $y\rightarrow b$，則 $xy\rightarrow ab$.

證: (A): $(a-x)\rightarrow 0$, $n(a-x)\rightarrow 0$,

$(na-nx)\rightarrow 0$. $\therefore\ nx\rightarrow na$.

(續)

416. 定義. 若圓內接正多邊形的邊數無限增加時,他的周圍的極限是**圓的長**(簡稱圓周).

圓周的意義確定後,弧的長的意義可從228節定之.

【註】 外切正多邊形的周圍的極限,等於內接正多邊形的周圍的極限,這是可以證明的.故圓周可以當做內接和外切正多邊形的公共極限.但在本書祇推究內接正多邊形已够應用.

417. 教者可用下列假說以代極限定理.正多邊形的性質,若與多邊形的邊數無關,亦是圓的性質.

418. 定義. 過弧的二端的二半徑與弧間的圖形是圓的**扇形**.

419. 定義. **相似弧,相似弓形,相似扇形**是對相等中心角的弧,弓形和扇形.

420. 定義. 若外切正多邊形的邊數增加無限時,這外切正多邊形的面積的極限稱爲**圓的面積**.

【註】 外切正多邊形的面積的極限,等於內接正多邊形的面積的極限,這是可以證明的.但本書祇推究外切多邊形,較爲便利.

習 題

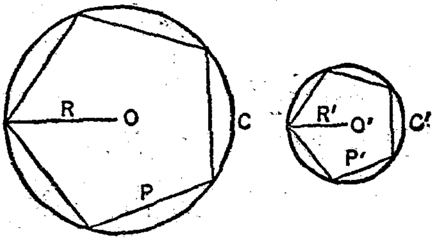
1. 證明415節的定理(B),(C),(D),和(E).

2. 證明相似弧的長之比等於半徑之比.

3. 證明二相似弓形的面積之比等於半徑的平方之比.

命題 XI.　定理

421. 圓周之比等於其半徑之比.



設 C 和 C' 及 R 和 R' 是 O 和 O' 的圓周和半徑.

求證　　$C:C'=R:R'$.

證

敍述	理由
1. 在各圓內，作 n 邊的內接正多邊形，周圍是 P 和 P'.	**1** 何故?
2. $P:P'=R:R'$	**2.** (408).
3. $P:R=P':R'$.	**3.** (279).
4. $P\rightarrow C$，又 $P'\rightarrow C'$.	**4.** (416).
5. $\frac{P}{R}\rightarrow\frac{C}{R}$，$\frac{P'}{R'}\rightarrow\frac{C'}{R'}$.	**5.** (415 B).
6. $\therefore\ \frac{C}{R}=\frac{C'}{R'}$.	**6.** (414).
7. $\frac{C}{C'}=\frac{R}{R'}$，即 $C:C'=R:R'$.	**7.** (279).

(續)

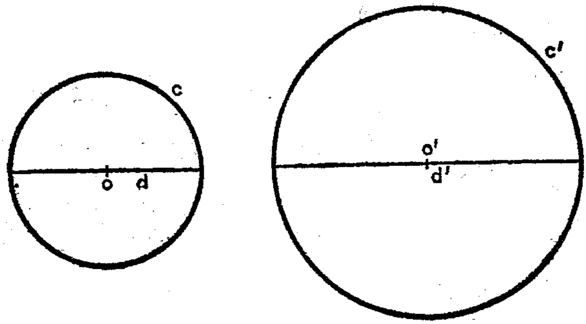
另一證法

1. 如上面的(1).	1. 何故?
2. $P:P'=R:R'$.	2. (408).
3. ∴ $C:C'=R:R'$.	3. (417).

422. 圓周之比等於直徑之比.

命題 XII.　定理

423. 任一圓的圓周與其直徑之比是一常數.



設　任一圓 o,圓周是 C,直徑 d.

求證　　$C\div d=$常數.

證

敍述	理由
1. 作一定圓 o',圓周 $=C'$,又直徑 $=d'$.	1. 何故?
2. $C:C'=d:d'$,	2. (421).

3. $C:d=C':d'$.	3. (279).
4. 但 $\dfrac{C'}{d'}=$常數.	4. o'圓是一定的.
5. $\therefore$ $\dfrac{C}{d}=$常數.	5. 代入.

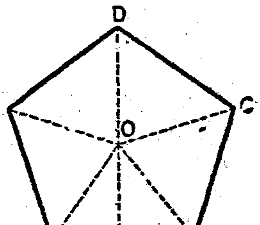
424. 常數$\frac{C}{d}$以希臘字π代表之,π的近似值是$3\frac{1}{7}$, 3.14, 3.1416.

因$\frac{C}{d}=\pi$, 所以$C=\pi d=2\pi R$.

425. 半徑爲R的圓內m°的弧的長等於 $\frac{m}{360}\times 2\pi R$.

命題 XIII. 定理

426. 正多邊形的面積，等於其周圍與邊心距的積之半.



設 n邊多邊形 ABCDE,其面積是S,周圍是P,邊心距r.

求證 $S=\frac{1}{2}P\times r$.

證

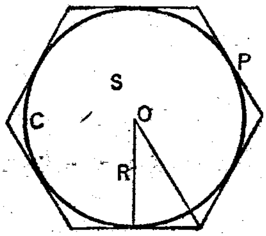
敍述	理由
1. 畫作外接圓的半徑 OA, OB, OC等等,分多邊形成 n 個$\triangle$.	1. 何故?
2. 這些$\triangle$是相等的$\triangle$.	2. $s.s.s.=s.s.s.$
3. 每個$\triangle$的高等於 r.	3. (178).
4. $\triangle AOB=\frac{1}{2}(AB)\times r$.	4. (358).
5. $S=n\times\triangle AOB$.	5. 何故?
6. $S=\frac{1}{2}\times n(AB)\times r$.	6. 代入.
7. 但 $n\times(AB)=P$.	7. 何故?
8. $\therefore S=\frac{1}{2}P\times r$.	8. 代入.

習 題

1. 求外切於半徑等於 12″ 的圓的正方形的面積.
2. 求一邊等於 6″ 的正六邊形的面積.

命題 XIV. 定理

427. 圓的面積等於圓周和半徑的積之半.



設 圓的半徑是 R，圓周是 C，面積是 S。

求證 $S=\frac{1}{2}C\times R$.

證

敍述	理由
1. 作圓的外切正多邊形，又設他的周圍是 P，面積是 A.	1. 何故?
2. $A=\frac{1}{2}P\times R$.	2. (426).
3. 設邊數增加至無限，則 $A\to S$.	3. (420).
4. 但 $P\to C$.	4. (416).
5. $\frac{1}{2}P\times R\to\frac{1}{2}C\times R$.	5. (415 A).
6. $\therefore\ S=\frac{1}{2}C\times R$.	6. (414).

另一證法

1. 同上(1).	1. 何故?
2. $A=\frac{1}{2}P\times R$.	2. (426).
3. $S=\frac{1}{2}C\times R$.	3. (417).

428. 系 1. 圓的面積等於 π 乘半徑的平方.

因 $S=\frac{1}{2}C\times R$, 即 $S=\frac{1}{2}(2\pi R)R=\pi R^2$.

429. 系 2. 圓的面積之比等於其半(直)徑平方之比.

430. 系 3.　中心角等於 n° 的扇形的面積等於 $\frac{n}{360}\times\pi R^2$.

431. 系 4.　相似扇形之比,等於其半徑的平方之比.

習　題

1. 作一圓使其圓周等於二已知圓的圓周之和.

【示意】 設 a 和 b 是二已知圓的半徑,又設 x 等於所求圓的半徑,

則 $$2\pi x=2\pi a+2\pi b=2\pi(a+b)$$

或 $$x=a+b.$$

2. 作一圓使其面積等於二已知圓的面積之和.

【示意】 $\pi x^2=\pi a^2+\pi b^2=\pi(a^2+b^2)$

或 $x^2=a^2+b^2$ 參閱 368節(8).

3. 作一圓使其圓周等於二已知圓的圓周之差.

4. 作一圓使其面積等於二已知圓的面積之差.

5. 作一圓使其面積三倍於一已知圓的面積.

6. 作一圓使其圓周二倍於一已知圓的圓周.

7. 作一圓使其面積等於二已知同心圓間的面積.

8. 作一圓使其圓周等於一已知圓的圓周之半.

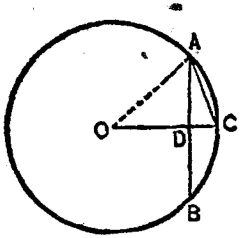
9. 求在正方形內外所作的內切圓和外接圓的面積之差.

10. 求圓的半徑,其面積是 616 平方吋.($\pi\doteq\frac{22}{7}$.)

11. 求在半徑 7 吋的圓內含 32° 的扇形的面積.

命題 XV. 問題

432. 已知正多邊形的一邊和半徑，求半徑相同而邊數加倍的正多邊形的一邊.



設 在 $\odot$O 內的內接正多邊形的一邊 AB 等於 s，半徑 $OA=R$.

求 在同圓內而邊數加倍的正多邊形的一邊.

作法 作 CO 過 AB 於 D. (何故?)

OC 二等分 AB 且成直角. (79).

$\overline{AC}^2=\overline{OA}^2+\overline{OC}^2-2OC\times OD$. (334).

或 $\overline{AC}^2=2R^2-2R\times OD$. (代入).

但 $\overline{OD}^2=R^2-\left(\frac{s}{2}\right)^2$. (330).

$\therefore OD=\sqrt{R^2-\frac{s^2}{4}}$.

或 $OD=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-s^2}$.

所以 $\overline{AC}^2=2R^2-R\sqrt{4R^2-s^2}$.

$\therefore AC=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-s^2}}$.

(續)

433. 系. 若 $R=1$, 又 n 邊的正多邊形的一邊爲 s_n, 則

$$s_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}}.$$

命題XVI. 問題

434. 計算圓周與直徑之比.

設 $R=1$, 則 $S_6=1$.

依照433節,即得	一邊的長	周圍的長
$S_{12}=\sqrt{2-\sqrt{4-1^2}}$.	$=0.51764$	6.21166
$S_{24}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.51764)^2}}$	$=0.26105$	6.26526
$S_{48}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.26105)^2}}$	$=0.13081$	6.27870
$S_{96}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.13081)^2}}$	$=0.06534$	6.28206
$S_{192}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.06534)^2}}$	$=0.03272$	6.28291
$S_{384}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.03272)^2}}$	$=0.01636$	6.28312
$S_{768}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.01636)^2}}$	$=0.00818$	6.28317

取末了的周圍當做圓周的近似數值,

$$\pi=\frac{C}{2R}=\frac{6.28317}{2}=3.14159.$$

435. 方法XXI. **關於圓的計算題大概應用二個公式: $C=2\pi R$ 和 $S=\pi R^2$. 若 R 不知道時, 先計算 R.**

習　題

1. 求半徑等於 5 的圓周.

2. 圓的直徑等於 10 吋，求 (*a*) 60°，(*b*) 1°，(*c*) 5°，的圓弧之長.

3. 求半徑等於 10 的圓的面積.

4. 圓的面積等於 100 平方吋，求半徑.

5. 圓的圓周等於 m 吋，求半徑.

6. 圓的面積等於 100π，求圓周.

7. 求圓的面積，若其圓周等於 4.

8. 求圓周，若其面積等於 S.

9. 求圓面積，若圓周等於 C.

10. 求半徑，若圓的面積等於一邊為 6 的正方形.

11. 圓周等於 10，求面積二倍於這已知圓的圓周.

12. 二同心圓的圓周是 30 和 40，求二圓間的面積.

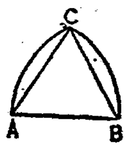
13. 求一半圓，若其面積等於一邊為 5 的等邊三角形的面積.

14. 求扇形的面積，若其半徑是 5，中心角是 40°.

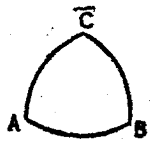
15. 一正方形內接於半徑為 10 的圓內，求正方形的一邊上的弓形的面積.

16. 圓半徑是 4，求 (*a*) 120°，(*b*) 60°，弧的弓形的面積.

17. 在圖內，AB＝BC＝CA＝4. B 是 AC 弧的中心，又 A 是 BC 弧的中心，求全面積.



(17)



(18)

18. A 是 BC 弧的中心，B 是 AC 弧的

中心，又 C 是 AB 弧的中心．若 AB＝6 吋，求全面積．

19. 圓的面積等於 60 平方呎，求 60° 弧的長．

20. 在已知扇形內作一內切圓．

21. 半徑是 20 呎；扇形的面積是 25π 平方呎．求扇形的弧的度數．

22. 扇形的面積是 18π，扇形的角是 80°，求扇形的半徑．

23. 等邊三角形的高是 6 吋，求外接和內切圓的面積．

24. 二圓面積之比如 9:4，大圓的半徑是 6 吋，求小圓的圓周．

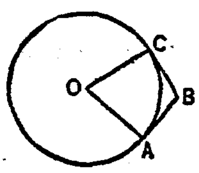
25. 正方形的面積是 $12\frac{1}{4}$ 平方吋，求其內切圓的面積．

26. 若正六邊形的邊心距是 4，求其外接圓的面積．

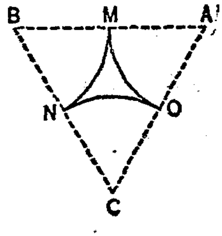
27. 圍半圓形的地需籬 $41\frac{1}{7}$ 桿，求地的面積．($\pi=3\frac{1}{7}$)

28. 證明把正六邊形的邊延長所成的星狀多邊形的面積二倍於這六邊形．

29. 若 AB 和 BC 是切線，$\angle$COA＝60°，又 OA＝10 吋，求(*a*)OABC 的面積，(*b*)在 AC 弧與二切線間的面積．



(29)



(30)

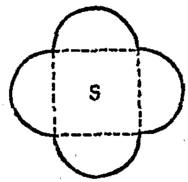
30. 求 MN，NO 和 OM 三弧所圍的面積，若每弧＝60°，又半徑都

是 10.

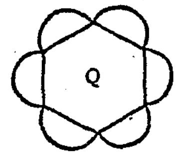
31. 在每邊等於 4 吋的正方形的邊上都作半圓 求全面積.

32. 正六邊形的每邊長 2 吋，又在每邊上作半圓，求全面積.

33. 若圓的圓周之數值適等於面積之數值，求其半徑.



(31)



(32)

34. 若扇形的面積等於其半徑的平方，求其中心角.

35. 圓的內接正方形的面積等於 16 平方吋，求圓的面積.

36. 車行一哩時，輪共轉 500 次，求輪的直徑.

雜　　題

1. 求下列正多邊形的半徑，邊心距，和面積:

(*a*) 一邊等於 4 的正方形.

(*b*) 一邊等於 s 的正方形.

(*c*) 一邊等於 2 的六邊形.

(*d*) 一邊等於 s 的六邊形.

(*e*) 一邊等於 6 的三角形.

(*f*) 一邊等於 s 的三角形. (續)

2. 圓外切正三角形的一邊等於內接正三角形的一邊的二倍.

3. 圓內接等邊三角形的一邊的平方，三倍於內接正六邊形一邊的

平方.

4. 外切於圓的等邊多邊形,若邊數是奇數,必是正多邊形.

5. 內接於圓的等角多邊形,若邊數是奇數,必是正多邊形.

6. 等邊三角形的面積是 $36\sqrt{3}$,求內切圓的面積.

7. 證明延長正多邊形的一邊所成的外角等於多邊形的中心角.

8. 圓的半徑是 12 吋,求弦等於半徑的弓形的面積和周圍.

9. 成等邊三角形的鉛皮,他的一邊是 12 吋,割成最大的圓片時,應剪去多少平方吋?

10. 正方形的一邊是 12,求外接圓與正方形間的面積.

11. 某村有水塔二座,高都是 50 呎,一座的直徑是 10 呎,他一座 16 呎.今要合併改成等高且容積亦相等的水塔一座,求新水塔的直徑.

總習題

1. 求證等腰三角形兩腰上的中線相等.

2. $\triangle ABC$ 的 $\angle C$ 是直角,AC 上的一點 D 三等分 AC,使 $AD=2DC$. 若 $AD=BD$,求 $\angle A$.

3. 求證從三角形的一邊的兩端到對邊止所作的二直線不能互相二等分.

4. 求分直角三角形成兩個等腰三角形.

5. 求正十五邊形的 (1) 內角的度數, (2) 外角的度數.

6. 在四邊形內,對角線相等,且有一對對邊相等,求證對角線所分

成的其中二三角形都是等腰.

7. 梯形的中線二等分二對角線.

8. 若平行四邊形的一對角線二等分一角,則這圖形是菱形.

9. 止於已知角的二邊求作一直線,使等於一已知直線,且平行於其他一已知直線.

10. 作一圓與已知一圓同心,且切於已知圓的一已知弦.

11. 若 60° 角的二邊經過二定點,他的頂點的軌跡怎樣?

12. 內接四邊形的連續三邊各對 70°, 85° 和 98° 的弧,求四邊形的各角,二對角線所夾的一角,及延長相對邊所成的角.

13. 若梯形內接於圓,延長不平行二邊必相交於二平行邊的垂直二等分線上.

14. 定長半徑的圓在已知直線上截取一定的長,求這圓的中心之軌跡.

15. 用直尺和圓規在一已知直線上作一含 30° 角的弓形.

16. 已知正五邊形的兩對角線相交於形內,求其交角的度數.

17. 過圓內一點 P, 作一動弦 APB 遇圓於 A 和 B, 求這弦的中點之軌跡.

18. 作一已知圓的二切線,使這二切線成一已知角.　〔綫〕

19. 若二多邊形都與第三多邊形相似,則這二多邊形相似.

20. 從圓外一點,作相交成 60° 角的二切線. 若切線長各等於 15

吋,求圓的直徑.

21. 二弦相交於圓內;一弦的二線分都是6,他一弦全長是13,求其二線分的長.

22. 8呎長的竹竿在8呎長6呎闊的矩形內自由移動.求這竹竿的中點移動區域的境界.

23. 作一等邊三角形,已知(1)內切圓的半徑;(2)外接圓的半徑.

24. 弓形的弦長34吋,又半徑長60吋,求弓形的高.

25. 直角三角形的斜邊長10吋,又一角是30°,求短的直角邊被對角的二等分線所分成的兩線分之長.

26. 三角形的高是12呎,他分底邊成5呎和9呎二線分,求這三角形的周圍.

27. 若二相等三角形有二邊相等,則其夾角或相等或相補.

28. 從圓上一點作被一已知弦二等分的弦.在什麼時候是不可能?

29. 二圓的二半徑是7吋和2吋,又兩中心相距13吋,求公切線的長.

30. 若一點在正多邊形內移動,則從這點到各邊的(或各邊的延長線)垂線之和是定量.

31. 梯形的二底是29呎和37呎,又他的面積是247.5平方呎,求他的高.

32. 三角形的三邊是5,5,和6.求(1)面積,(2)內切圓的面積,(3)

在一邊 5 上的高；(4) 外接圓的直徑。

33. 等腰直角三角形的斜邊是 10 吋，三倍於這三角形的面積的正方形之邊長多少？

34. 作一正方形，使等於一已知六邊形。

35. 菱形的一對角線是他一對角線的$\frac{8}{15}$，又他們的差是 14. 求菱形的面積與周圍。

36. 圓的面積是 275 平方呎，又他的內接矩形的面積是 150 平方呎，求矩形各邊的長。

37. 三角形的底邊是 20，高是 30，求離底 10，且平行於底邊的直線截這三角形所成之梯形之面積。

38. 用那一種正多邊形，可以恰鋪滿一邊數相同的平面？用那幾種邊數不同的正多邊形，也可以鋪滿他？

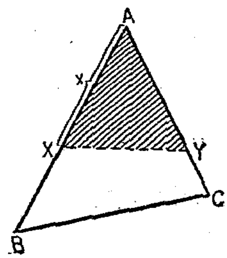
39. 用正六邊形的一邊 a，表其面積。

附　錄

幾何問題的代數分析法

436. 若在一個問題中求作幾條線，往往可以用方程式來敘述所有的條件，再解這方程式而得到表示未知線的代數式，因而得到他的作法。

例題A. 從三角形ABC，截取一個等腰三角形AXY，使他等於ABC之半。



分析 設 $AX=AY=x$,

$AB=c$,

又　　$AC=b$.

$\triangle AXY:\triangle ABC=x^2:bc=1:2$.　（何故？）

$\therefore\ 2x^2=bc$.

$$x=\sqrt{\frac{bc}{2}}.$$

作法 作 x，使他等於 $\frac{c}{2}$ 和 b 的比例中項，又於 AB 和 AC 上，截取 AX 和 AY 使他們等於 x。

例題B. 從圓外一點，作一被圓所二等分的割線。

(統) **分析** 設 PAB 是一任意割線，又假設 PCD 是所求的割線。

則　　$PC=CD$，或 $PD=2PC$.

以已知文字 a 和 b 表 PA 和 PB，則依 322 節，

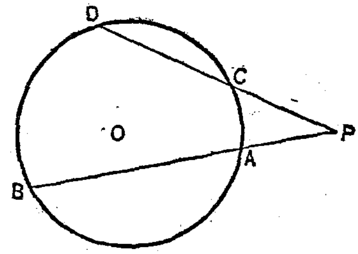
$PC \cdot PD = PB \cdot PA$,

或設 $PC = x$,

$x \cdot 2x = b \cdot a$,

$2x^2 = ba$,

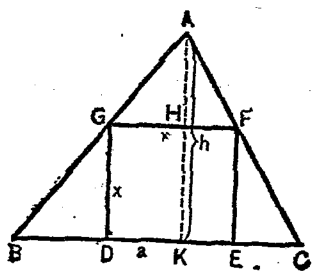
$x^2 = \frac{ba}{2} = \frac{b}{2} \cdot a$.



則得 $\frac{b}{2} : x = x : a$.

作法 作 x, 使他等於$\frac{b}{2}$和 a 的比例中項.

例題 C. 作一正方形內接於一已知三角形.



設 △ABC,求作一正方形內接於此三角形.

分析 設 x 等於所求正方形的一邊.

又設其高 $AK = h$,

又其底 $BC = a$.

依相似△, $BC : GF = AK : AH$,

或 $a : x = h : h - x$,

則 $xh = ah - ax$,

（続）

$$x=\frac{ah}{a+h}=\frac{a\cdot h}{(a+h)}.$$

化成比例，則　$a+h:a=h:x$.

作法　作 x，使他等於 $a+h$，a 和 h 的第四比例項.

習　　題

1. 分一矩形的長邊成二線分，使他們的平方差等於此矩形的面積.

2. 在一已知正方形中，作一內接正方形，使他的一邊等於已知直線.

3. 作一正方形內接於半圓中.

4. 變一正方形成一矩形，使他的周圍等於此正方形的周圍的兩倍.

5. 設兩同心圓，求在大圓內作一弦使他等於在小圓內所成的弦的兩倍.

6. 在直線 AB 上，求作一點 C 使 $\overline{AC}^2=3\overline{CB}^2$.

7. 求作一正方形使其面積等於一已知正方形減去另一已知正方形之半之差.

8. 過已知圓內的一點，求作一弦，使這點適三等分所求的弦.

平面形的極大和極小

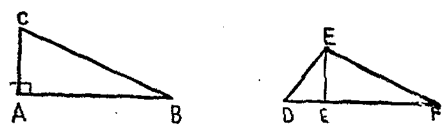
437. 定義.　適合於所設條件的諸量中的最大的.

量叫做**極大**;最小的量叫做**極小**.

438. 定義. 周圍相等的圖形叫做**等周形**.

命題 I. 定理

439. 已知兩邊的諸三角形中，其已知兩邊互成垂直的三角形是極大.



設 在$\triangle$ABC和DFE中，AB=DF，AC=DE，$\angle$A=*rt.* $\angle$，又$\angle$D是斜角.

求證 ABC的面積>DEF的面積.

證 從E作EG$\perp$DF,

則　　　　EG<DE,　　　　(何故?)

或　　　　EG<AC.

$\therefore$ $\triangle$ABC和DEF是等底而不等高.

$\therefore$ $\triangle$ABC>$\triangle$DEF,　　　　(何故?)

$\therefore$ $\triangle$ABC是極大.

習　題

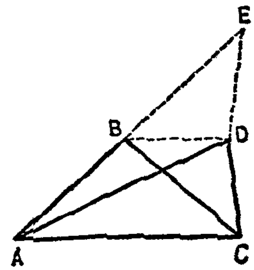
1. 底邊和底邊上的中線爲已知的諸三角形中,那一個是極大?

2. 兩對角線爲已知的諸平行四邊形中,那一個的面積是極大?

3. 求分一直線成二線分，使此二線分所含的矩形爲極大.

命題 II. 定理

440. 同底等面積的諸三角形中，等腰三角形的周圍爲極小.



設　$\triangle ADC=\triangle ABC$，又 $AB=BC$.

求證　$AB+BC+AC<AD+DC+AC$.

證　延長 AB 至 E，使 $BE=AB$. 作 BD 和 DE.

$$BD \parallel AC.$$

(因爲，否則 $\triangle ABC$ 將不等於 $\triangle ADC$).

$\angle EBD=\angle BAC$.　　(何故?)

$\angle BAC=\angle BCA$.　　(何故?)

$\angle BCA=\angle CBD$.　　(何故?)

(統)　$\therefore\ \angle EBD=\angle CBD$.　　(公理 1.)

但　$BC=BE$,　　(何故?)

又　BD 是公共的.

$\therefore\ \triangle BDC \cong \triangle BDE.$

$\therefore\qquad DC = DE.$

但　$AD + DE > AB + BE.$　　(何故?)

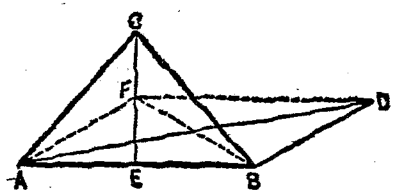
$\therefore\ AD + DC > AB + BC,$

各加以 AC,

$AC + AD + DC > AB + BC + AC.$

命題 III.　定理

441. **同底的諸等周三角形中，其他兩邊相等的爲極大.**



設　$\triangle$ ABC 和 ABD 的周圍相等, AB 是公共的底邊, 又 $AC = CB$.

求證　ACB 的面積 > ADB 的面積.

證　作中線 CE, 又作 $DF \parallel AB$, 遇 CE 於 F. 作 FA 和 FB.

則 CE 是 AB 的垂直二等分線.　　(何故?)　(續)

$\therefore\qquad AF = FB.$

但　$\triangle AFB = \triangle ADB.$　　(359).

$\therefore$　AFB 的周圍 $<$ ADB 的周圍.　　　　(440).

$\therefore$　$AF+FB<AD+DB$.

但　$AB+DB+DA=AB+BC+CA$.　　　　(假設).

$\therefore$　$DB+DA=BC+CA$.　　　　(公理 3).

$\therefore$　$AF+FB<BC+CA$.　　　　(代入).

但　$AF=FB$，又 $BC=CA$.

因而　$AF<AC$.

$\therefore$　$FE<CE$.　　　　(330).

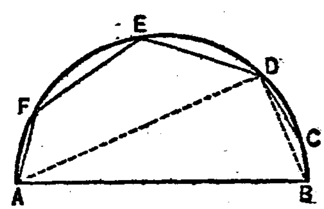
$\therefore$　AFB 的面積 $<$ ACB 的面積.　　　　(361).

或　ADB 的面積 $<$ ACB 的面積.

442. 系　諸等周三角形中，等邊三角形的面積爲極大.

命題 IV.　定理

443.　除一邊外已知其他順次各邊的諸多邊形中，其面積極大者，得內接於以未定邊爲直徑的半圓中.



設　多邊形 ABCDEF 是諸多邊形中的極大者，已知其 AF，FE，ED，DC 和 CB 各邊．

求證　ABCDEF 得內接於直徑為 AB 的半圓中．

證　從任一頂點 D，聯結 AD 和 BD．

則 △ADB 一定是含 AD，DB，兩邊的諸三角形中的極大者；就是 ∠ADB 一定是直角．若不然，AD 和 DB 不變，增大 ∠ADB 使成直角，則 △ADB 增大而多邊形的其他部分 AFED 和 DCB 不變．即多邊形得以增大而與所設相反，因為 ABCDEF 原設為極大．

∴　∠ADB 是直角．

即 D 在以 AB 為直徑的半圓周上．

同理，多邊形的各頂點一定都在此半圓周上．

【註】　假定 (1) 一個極大，及 (2) 祇有一個極大．

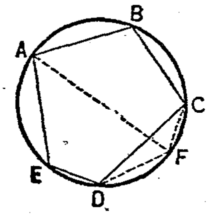
習　題

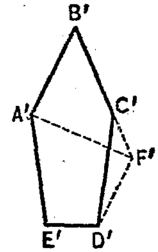
1.　在四邊形 ABCD 中，AB＝BC＝CD＝一已知直線．設 ABCD 變成極大，求決定 A，B，C，D 諸角．

2.　作一角內接於一已知半圓中，使其二邊的和為極大．

命題 V.　定理

444.　已知各邊及各邊的順序所作的諸多邊形中，（統）能內接於一圓內者面積為極大．





設 多邊形 ABCDE 內接於一圓內，其各邊與不內接於圓內的多邊形 $A'B'C'D'E'$ 的各邊各各相等．

求證 ABCDE 的面積 > $A'B'C'D'E'$ 的面積．

證 從 A 作直徑 AF，聯結 F 於最近的兩頂點 C 和 D．

在 $C'D'$ 上，作 $\triangle C'D'F'$ 使全同於 $\triangle CDF$，又聯結 $A'F'$．

則 ABCF 的面積 > $A'B'C'F'$ 的面積． (443)．

FDEA 的面積 > $F'D'E'A'$ 的面積． (443)．

$\therefore$ ABCFDE 的面積 > $A'B'C'F'D'E'$ 的面積．

但 $\triangle CFD \cong \triangle C'F'D'$．

所以 ABCDE 的面積 > $A'B'C'D'E'$ 的面積． (公理 5)．

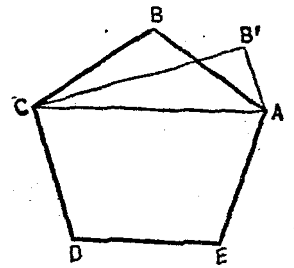
習 題

1. 在四邊形 ABCD 中，$AB=2$ 时，$BC=CD=DA=1$ 时． 問 A, B, C, D, 諸角各是多少度，始可使 ABCD 的面積為極大？

2. 決定 ABCDE 的各角，若其面積為極大，又 $AB=BC=CD=2$ 时，又 $DE=EA=2\sqrt{2}$ 时．

命題 VI. 定理

445. 邊數相同的等周多邊形中，面積極大者爲等邊多邊形.



設 ABCDE 是邊數相同的等周多邊形中的極大者.

求證 AB＝BC＝CD＝DE＝EA.

證 假設含不等兩邊 CB′ 和 AB′ 的多邊形 AB′CDE 是極大.

則在對角線 AC 上作等腰三角形 ABC，使其與 AB′C 等周.

AB′C 的面積小於 ABC 的面積.　　(441).

∴ 多邊形 AB′CDE 小於其等周多邊形 ABCDE.

所以多邊形 AB′CDE 不能認爲極大.

或在極大多邊形中 AB＝BC. 所以極大多邊形的各邊相等.

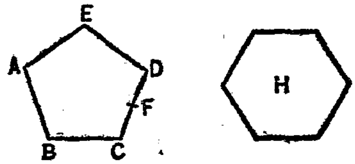
446. 系. 邊數相同的等周多邊形中，極大者是正多邊形.　　(444,445). (統)

習　題

求在半圓內作一內接梯形,使其面積爲極大.

命題 VII. 定理

447. 兩個等周正多邊形,其邊數較多的面積較大.



設　正五邊形 ABCDE 與正六邊形 H 的周圍相等.

求證　　H 的面積 > ABCDE 的面積.

證　　設 F 是 CD 上的任意一點.

ABCFDE 可以當作一個六邊形,其中一角等於一平角.

ABCFDE 不是等邊多邊形,而 H 是一個等邊多邊形.

∴ H 的面積 > ABCDE 的面積.　　(446).

448. 系. 圓的面積,大於周圍與圓周相等的任一多邊形的面積.

習　題

1. 在一已知弓形中,求作一角,使其兩邊的和爲極大.

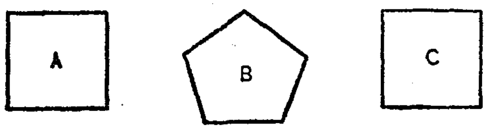
2. 在一已知圓中,求作一內接三角形,使其周圍爲極大.

3. 圓的外切正多邊形的面積,小於其他同邊數的任意外切多邊形的面積.

4. 同底邊等面積的諸平行四邊形,那一種的周圍最小?

命題 VIII. 定理

449. 兩個等積的正多邊形,邊數較多的周圍較小.



設 正方形 A = 正五邊形 B.

求證 A 的周圍 > B 的周圍.

證 作正方形 C 使其周圍與 B 的周圍相等.

C 的面積 < B 的面積. (447).

或 C 的面積 < A 的面積.

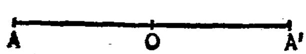
∴ C 的周圍 < A 的周圍.

∴ B 的周圍 < A 的周圍.

450. 系. 圓的圓周小於任何與圓等積的多邊形的周圍.

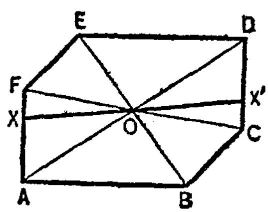
對 稱

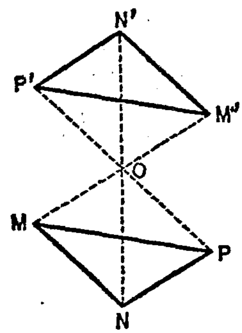
451. 若 O 是 AA′ 的中點,則兩點 A 和 A′ 關於 *O* 點爲對稱. (校)



452.　**若一圖形中的任一點和另一點關於 *O* 點爲對稱，則此圖形關於 O 點爲對稱.**

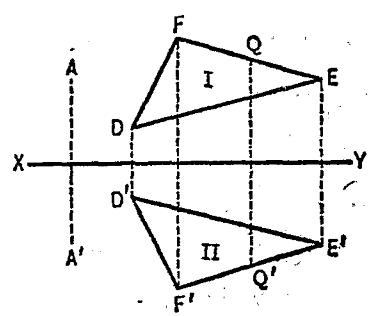
如 ABCDEF 是一關於 O 爲對稱的圖形. 很明顯的，過 O 而止於圖形的任一直線，如 XOX′，常被 O 所二等分.





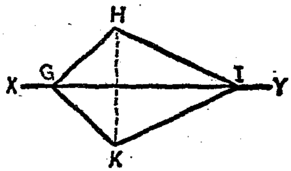
若圖形含兩部分，如 △MNP 和 △M′N′P′，則這兩部分(即兩個三角形)關於 O 爲對稱.

453.　**若 XY 是 AA′ 的垂直二等分線，則兩點 A 和 A 關於 *XY* 軸爲對稱.**



454.　**若對於一圖形上的任一點 Q，在他一圖形上亦有相當的一點 Q′，而 Q 和 Q′ 關於 XY 爲對稱，則兩圖形關於 *XY* 軸爲對稱.**

如 $\triangle DEF$ 和 $\triangle D'E'F'$ 關於 XY 爲對稱. 兩個圖形亦可合起來成一個圖形,如 GHIK,則稱全圖形 GHIK 關於 XY 爲對稱.

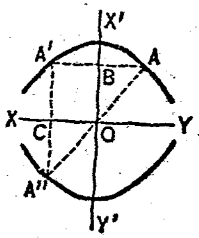


455. 若兩個圖形 I 和 II 關於 XY 軸爲對稱,又一個圖形 I 旋轉至 XY 的他側, 和圖形 II 在 XY 的同側,則 I 和 II 可以重合.

反過來說,若這樣旋轉兩個圖形因而重合,則他們關於 XY 爲對稱.

456. 定理. 若一個圖形關於互相垂直的兩軸爲對稱,則此圖形關於兩軸的交點爲對稱.

設 A 是圖形上的一點, 則必另有一點 A' 而 $AA' \perp X'Y'$, $AB = A'B$. 同樣,必再有一點 A'' 而 $A'A'' \perp XY$, $A'C = A''C$ 很明顯的 $AA' \parallel XY$, $A'A'' \parallel X'Y'$.



作 AA''.

則 $X'Y'$ 二等分 AA''. (148).

同樣 XY 二等分 AA''. (148).

$\therefore$ XY 和 $X'Y'$ 與 AA'' 相交於其中點.

卽直線 AA'' 被 XY 和 $X'Y'$ 的交點 O 所二等分．卽對於任一點 A，必另有一點 A'' 關於 O 爲對稱．

習　題

1. 平行四邊形關於其兩對角線的交點爲對稱．

2. 等腰三角形關於其底邊上的中線爲對稱．

3. 若四邊形 ABCD 的 $AB = AD$，$BC = CD$，則此四邊形關於其對角線 AC 爲對稱．

4. 正六邊形關於其中心爲對稱．

5. 關於一軸爲對稱的兩個圖形是全同形．

6. 關於一點爲對稱的兩個圖形是全同形．

依據極限原理證明不可通約量的命題[1]

457. **定量**是一個量，在同一討論中，他的數值常是相同的．**變量**是一個量，在同一討論中，他的數值常是變更的．

兩個量有公約量的叫做**可通約量**．兩個量沒有公約量的，叫做**不可通約量**．

(統)

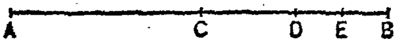
1. 這節是爲喜歡用極限證法的教師而寫的，不然可以省略．

(參閱第二編命題 XIII 的註)

458.　若一個變量 x 漸近於定量 a，而 a 和 x 間的差比任何量更小時(非零)，則 a 叫做 x 的極限.

例如P點從A點向B點移動，第一秒過AB之半而至C，第二秒過所餘CB之半而至D，第三秒過所餘DB之半而至E，如此不斷的移動.很顯明的從A至動點P的距離是一個變量，他和AB的差可使比任何數量更小，然而他終不能和AB相等.

所以AB是這變量的極限.



例題　(a)　.999………的極限是什麼?

(b)　$6+3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\cdots\cdots$ 的極限是什麼?

459.　定理.　**若兩個變數 x 和 y 常相等，若 x 漸近於極限 a，則 y 亦漸近於極限 a.**

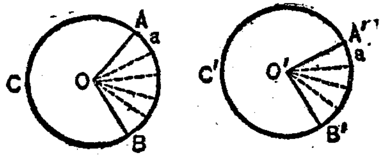
證　$a-x=a-y$，又 $a-x$ 可比任何指定的數更小.

所以 $a-y$ 可以比任何指定的數更小.　$\therefore y\to a$.

460.　系.　**若兩變數常相等而各漸近於其極限，則兩極限必相等.**

命題 I.　定理

461.　在同圓或等圓中，兩中心角之比等於其弧之比.　（較）



設　在等圓 ABC 和 A′B′C′ 中，兩中心角 AOB 和 A′O′B′ 各對弧AB 和 A′B′.

求證　$$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}}.$$

證 （甲） 兩弧是可通約的.

設弧 a 是公約量，$\overset{\frown}{AB}$ 含其 m 倍，$\overset{\frown}{A'B'}$ 含其 n 倍.

則　$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}}=\frac{m}{n}.$$

將各分點和中心相聯結，則 $\angle AOB$ 將分成 m 份，$\angle A'O'B'$ 分成 n 份，其各份皆相等.(183).

因此　$$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{m}{n}.$$

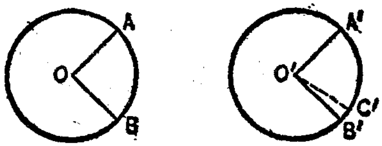
所以，若　$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}}=\frac{m}{n},$$

則　$$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}}.\qquad\text{（公理 1）}$$

【註】 若學者因用 m 和 n 而不能充分明瞭此證法，可使之用 4 與 5 之比等，俟明瞭後再改之爲普徧形式.

（乙） 兩弧是不可通約的.

分 $\overset{\frown}{AB}$ 成任意等份，以其一等份儘量度量 $\overset{\frown}{A'B'}$ 至若干次.



因為 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{A'B'}$ 是不可通約的，所以餘下一段比一等份小的弧 $C'B'$。作 $O'C'$。

因為 AB 弧和 $A'C'$ 弧是可通約的，

$$\frac{\widehat{A'C'}}{\widehat{AB}}=\frac{\angle A'O'C'}{\angle AOB}.$$

增加 $\widehat{AB}$ 的等份的份數，則每份的長因而縮小，即 $\widehat{C'B'}$ 的長將繼續縮小.

所以 $\widehat{A'C'}$ 漸近於極限 $\widehat{A'B'}$，而 $\angle A'O'C'$ 漸近於極限 $\angle A'O'B'$.

$$\therefore \frac{\widehat{A'C'}}{\widehat{AB}}\longrightarrow\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}};\quad 又\ \frac{\angle A'O'C'}{\angle AOB}\longrightarrow\frac{\angle A'O'B'}{\angle AOB}.$$

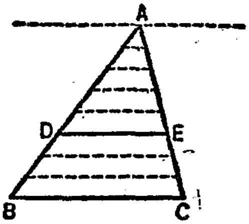
$\dfrac{\widehat{A'C'}}{\widehat{AB}}$ 和 $\dfrac{\angle A'O'C'}{\angle AOB}$ 兩變數常相等，其極限亦相等. (460).

因此 $$\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}}=\frac{\angle A'O'B'}{\angle AOB}.$$

462. 系. 中心角以其所對的弧度之.

命題 II 定理

463. 平行於三角形的一邊的一直線，必分其他兩邊成比例.



設　在 $\triangle$ABC 中，DE//BC.

求證　　　AD:DB=AE:EC.

證　(甲)　AD 和 DB 是可通約的.

設 m 是公約量，AD 含其 a 倍，DB 含其 b 倍.

則　　　$$\frac{AD}{DB}=\frac{a}{b}.$$

過 AB 的各分點作 BC 的平行線，則此諸平行線分 AE 成 a 份，分 EC 成 b 份，其各份皆相等.　　(148).

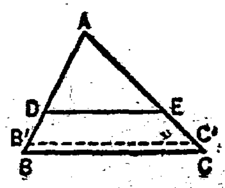
因此　　　$$\frac{AE}{EC}=\frac{a}{b}.$$

$$\therefore\quad \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.\qquad (公理 1)$$

(乙)　AD 和 DB 是不可通約的.

分 AD 成任意等份，以其一等份儘量度量 DB 至若干次.

因爲兩直線 AD 和 DB 是不可通約的，所以餘下一段比一等份小的直線 B′B.



作 B′C′ 平行於 BC.

因爲 AD 和 DB′ 兩直線是可通約的，

$$\therefore \quad \frac{AD}{DB'}=\frac{AE}{EC'}.$$

增加 AD 的等份的份數，則每份的長因而縮小，即 B′B 的長將繼續縮小.

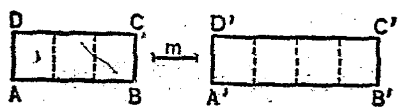
所以 DB′ 漸近於極限 DB，而 EC′ 漸近於極限 EC

$\frac{AD}{DB'}$ 和 $\frac{AE}{EC'}$ 兩變數常相等，其極限亦相等.

因此　　$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.　　(460).

命題 III.　定理

464. 等高的矩形之比等於其底邊之比.



設　在兩矩形 ABCD 和 A′B′C′D′ 中，高 AD＝高 A′D′.

求證　$\frac{ABCD}{A'B'C'D'}=\frac{AB}{A'B'}$.

證　(甲)　AB 和 A′B′ 是可通約的.

設 m 是公約量，AB 含其 a 倍，A′B′ 含其 b 倍.

[學者試自完成之，參閱(463).]

(乙)　AB 和 A′B′ 是不可通約的

分 AB 成任意等份，以其一等份儘量度量 A′B′ 至若干次，

因爲 AB 和 A'B' 是不可通約的，所以餘下一段比一等份小的 EB'.

作 $EF \perp A'B'$.

因爲 AB 和 A'E 是可通約的，

$$\frac{ABCD}{A'EFD'}=\frac{AB}{A'E}.$$

增加 AB 等份的份數，則每份的長因而縮小，即 EB' 的長將繼續縮小.

所以，A'E 漸近於極限 A'B'，而 A'EFD' 漸近於極限 A'B'C'D'.

$\frac{ABCD}{A'EFD'}$ 和 $\frac{AB}{A'E}$ 兩變數常相等，其極限亦相等.

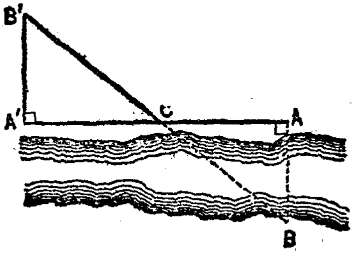
因此
$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

平面幾何應用題

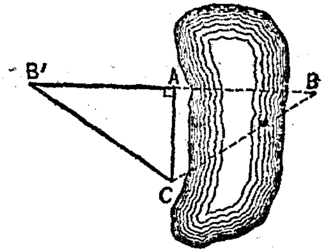
第一編[1]

1. 欲測量河面的闊 AB，先量垂直於 AB 的 AA'，然後在其中點 C 豎立一桿.從 A' 向 AA' 的垂直方向走，一直到 B' 使與 B 及 C 在一直線上.要求河闊，應量那一條線？何故？

1. 學者在田野量角，最好用轉鏡儀，平面桌，六分儀等.但儀器不必十分講究，即二個紙製量角器，一個直線尺，幾隻圖釘製成的器具，也已適用了.



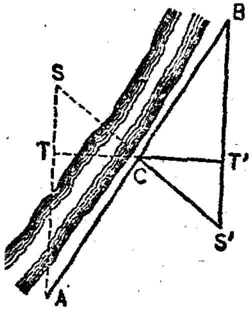
(1)



(2)

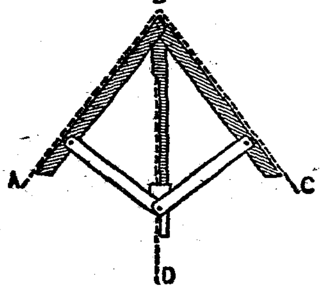
2. 若使 $\angle ACB=\angle ACB'$ 及 $BB'\perp AC$，則欲求河闊 AB，應量那一條線？

3. 欲測量在河彼岸的樹 T 與塔 S 的距離，先定一點 A，使在 ST 的延長線上，作 AB 直線，且在其中點 C 豎立一桿．從 B 向 BS′ 方向走去，使 $\angle B=\angle A$，豎立一桿於 T′ 處，須在 TC 的延長線上，再豎一桿於 S′ 須在 SC 的延長線上．那末應該測量那一條直線？試證明之．

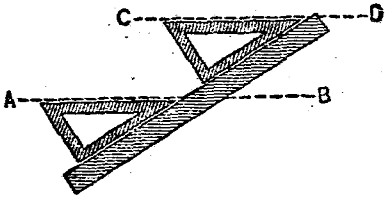


(3)

4. 要求 $\angle ABC$ 的二等分線，怎樣應用如圖所示的分角器？



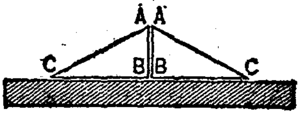
(4)



(5)

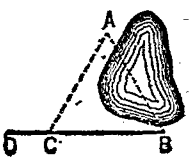
5. 要作一已知直線 AB 的平行線 CD,怎樣應用三角板和直線尺?

6. 一塊三角板靠緊於直線尺,成二個位置,如圖所示,且 AB 的位置相同,問 ∠B 有若干度?

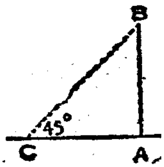


(6)

7. 要測量距離 AB, 從 B 向 D 走,使 ∠B=60°, 一直到 C, 使 ∠ACB=60°.要測量 AB, 應量那一條直線?何故?



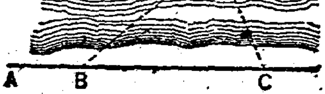
(7)



(8)

8. C 點距桿 AB 的基礎爲 80 呎,角 ACB 等於 45°, 桿高若干?

9. 測量者沿河從 A 到 C,在 B 處量 ∠ABS, 走 800 呎到 C, 再量 ∠BCS 適等於 ∠ABS 的一半. BS 距離若干?



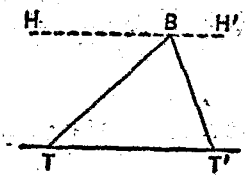
(9)

(10)

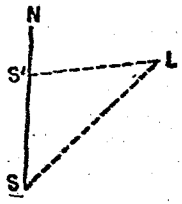
10. 若 ∠DAB=138°, ∠C=42°, AC=610 碼, BC=400 碼,求湖闊 AB.

11. 一個人在輕氣球 B 上, 量二個鎮 T 及 T', 與水平線 HH' 成:

$\angle HBT=40°$, $\angle H'B'T'=70°$. 若二個鎮相距 2 哩，又輕氣球適在 TT′ 線的上面，輕氣球離 T 鎮若干哩？



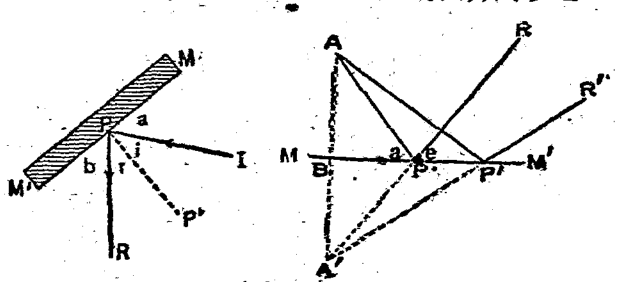
(11)



(12)

12. 一隻船每小時行 10 哩，向北行，在上午八時到 S 地方，上午 10 時到 S′ 地方. 若 $\angle S=43°$, $\angle NS'L=86°$，在上午十時船距燈塔 L 若干哩？

13. 在附圖內（以下同樣的習題都是這樣），MM′ 代表垂直於紙面的鏡子，又其他各線都在紙面內，若 $P'P\perp M'M$，IP 是投射光線，PR 是反射光線，則 $\angle i$（投射角）常等於 $\angle r$（反射角），所以 $\angle a=\angle b$.



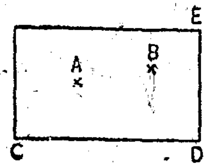
(13)

若從 A 點射出的光線被鏡子 MM′ 反射，證明反射光線可從下列作法得之：作 $AB\perp MM'$；延長 AB 到 A′ 使 $BA'=BA$. 作 A′P. 那末，PR

(續)

(即 AP 的延長線)即反射光線.

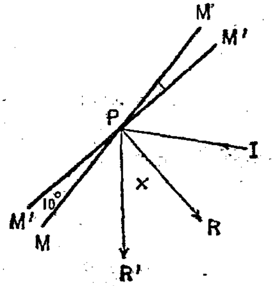
14. 彈子遇檯邊後反射，一如光線遇鏡，即投射角等於反射角.(習題 13.) 彈子 A 到檯邊 CD 上的一點 P 後反射到 B，作圖求 P 的地位.



(14)

15. 若彈子到 CD 邊後再到 DE 邊，然後遇 B，用作圖求彈子經過的路線.

16. 光線 IP 被 MM 反射後，向 PR 反射，若鏡旋轉 10° 到 M′M′($\angle MPM'=10°$)，IP 光線反射後向 PR′ 進行.求 $\angle RPR'$.



(16)

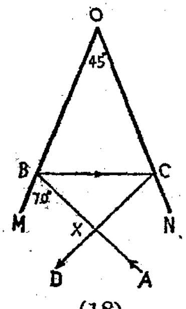
17. 解上題，若 $\angle MPM'=n°$.

【註】 航海量角用的六分儀的構造，即根據上題的結果.

18. 二個鏡子 MO 及 NO 成 $\angle O=45°$.若光線 AB 向 BC 反射，再向 CD 反射，求投射光與反射光所成的角度(即 $\angle X$)，若：

(a) $\angle ABM=70°$，

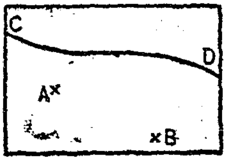
(b) $\angle ABM=n°$.



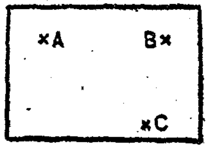
(18)

【註】 上題說明作直角的儀器的原理.

19. 附圖代表地圖的一部，A 及 B 為二鎮市，CD 為鐵路. 現欲築車站 S，使與二鎮距離相等，作圖求車站 S 的位置.



(19)

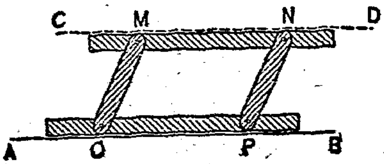


(20)

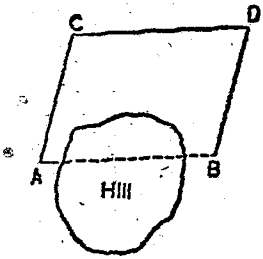
20. A, B, 及 C 代表三個市鎮. 現欲建造小學校舍一所, 須與三鎮距離相等. 作圖求校舍的地位 S.

21. 一隻船向 N. E. (卽東北方向)進行, 每小時速度 6 哩, 在下午九時遙見燈塔適在正東, 下午十一時燈塔適在正南. 什麼時候船距離燈塔最近, 當時相距若干?

22. 要作一已知直線 AB 的平行線 CD, 怎樣運用圖內所示的儀器? (M, N, O, 及 P 是活節, MO=NP, MN=OP).



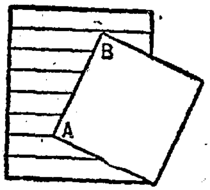
(22)



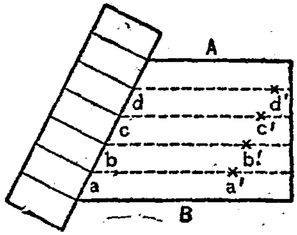
(23)

23. A 及 B 二點, 一在山前, 一在山後, 要測量 A, B 的距離, 從 A 及 B 各向北引直線 AC 及 BD, 使 AC=BD, 要知道 AB 的長, 應量那一條線? 其故安在? (續)

24.　應用有格的紙，怎樣分 AB 直線成五等分？在那種情形之下，這方法不能應用？



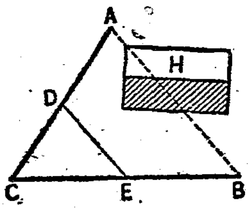
(24)



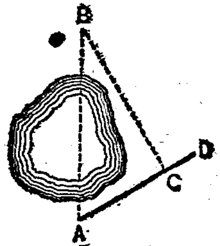
(25)

25.　作平行於 A 及 B 的直線使分 AB 狹片成相等的五條，可用格紙得 a, b, c, d 四點．同樣，得 a', b', c', d'，聯結相當各點．試證明之．

26.　A, B 二點間有房屋一所，測下列各線分，怎樣求得 A, B 間的距離？ AD = 9 碼，AC = 18 碼，EC = 11 碼，CB = 22 碼，DE = 10 碼．



(26)

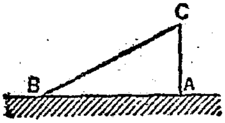


(27)

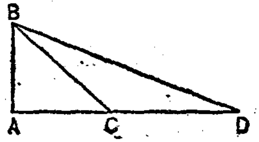
27.　要測 A, B 距離，向 AD 走，使 $\angle BAD = 60°$，到 C 停止，適使 $\angle BCD = 90°$．若 AC = 200 碼，AB 長若干？

28.　旗桿高 75 呎，折斷後桿頂遇地面於 B，若 $\angle B$ 是 $30°$，求 AC

的高.



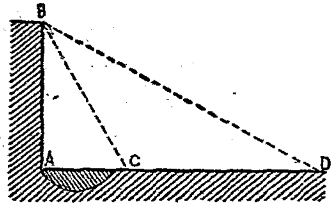
(28)



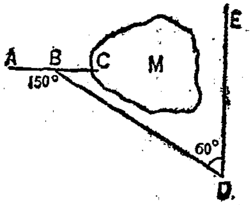
(29)

29. 某甲要量塔 AB 的高,在平直的路 DCA 上向塔走.在 D 處得 $\angle BDA=15°$, 在 C 處時 $\angle BCA=30°$. 若 $DC=300$ 呎,求 AB 之長.

30. AB 是在河邊垂直的懸崖. 測量者在離對岸 20 呎處 C, 測得 $\angle ACB=60°$, 又行 200 呎,於離河更遠處 D,測得 $\angle BDA=30°$.求河闊.



(30)



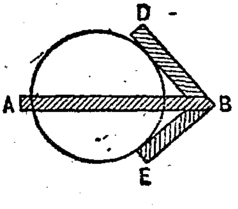
(31)

31. 成直線的軌道抵山脚 C,然後一直向前掘一地道.此項工程須於山背後同時進行. $\angle ABD=150°$, $BD=3$ 公里, $D=60°$. 應在 DE 上何處(離 D 多少)動工,且方向怎樣?

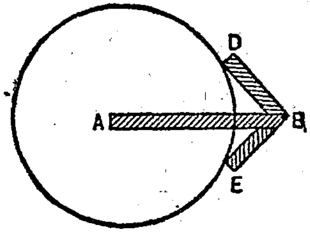
第 二 編

32. 附圖是求圓片中心的儀器,用三個金屬片釘成,使 AB 邊適二

等分 BD 及 BE 所成的角，且 BD 等於 BE. 求證 AB 必經過圓的中心.



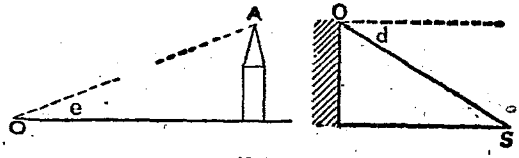
(32)



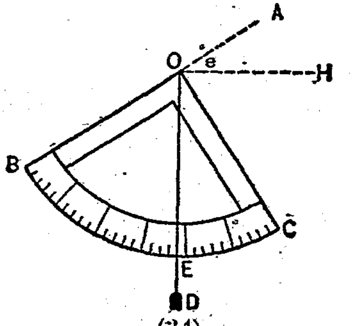
(33)

33. 第二個附圖是同樣的儀器，用來求較大圓片的中心. 求證 AB 必過其中心.

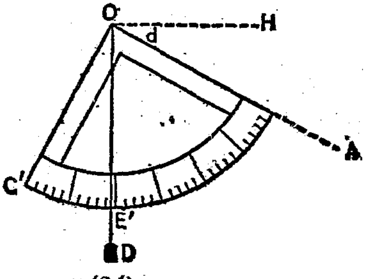
34. 從 O 觀察物體 A 或 S 的仰角或俯角就是觀察者的眼睛與物體間的直線與同在一垂直平面內的地平線所成的角. 若物體高於觀察者，則成仰角，如 $\angle e$. 若物體低於觀察者，則成俯角如 $\angle d$. 求證：測量一物的仰角的方法如下：把一個象限



(34)



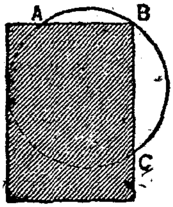
(34)



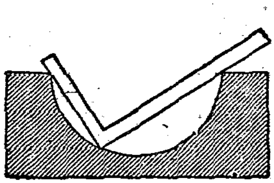
(34)

放在豎立的位置，使 BO 的延長線通過 A 點 (在 BO 附一瞄準器測量之)。鉛垂線 OD 繫於 O，交弧 BC 於 E. 仰角以弧 EC 度之.同樣，俯角 d 以弧 $C'E'$ 度之.

35. 求證從 A 點所引的圓片的直徑可從下法求之：放長方紙的一個角頂 B 於圓周上，且其鄰邊過 A 點，則 C 即直徑的他端.



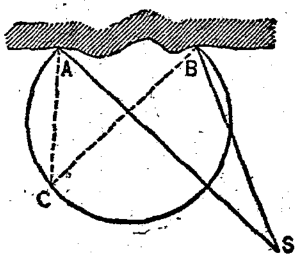
(35)



(36)

36. 試證明下列驗半圓形槽的方法：放木匠用的角尺，如圖所示.若角尺移動時而頂點遇槽的各點，則槽成眞半圓形.

37. 若 A 及 B 是二個燈塔，礁石在圓 ABC 內，圓外可自由行駛，求證，若 ∠S 小於 ∠C 時，則 S 船無觸礁之虞.



(37)

【註】 下列六個作圖(38 至 43)，須用量角器及直規.所求之線或角，祗須實測所得的近似值.(參閱 375 頁習題 19.)

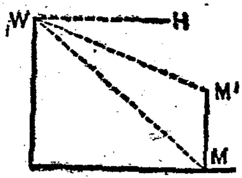
38. 25 呎的垂直竹桿的影子長 40 呎，太陽的仰角多少度?(設 1 吋代表 20 呎.)

39. 在江邊上的垂直峭壁高 120 呎，在峭壁頂上，望對岸的俯角是

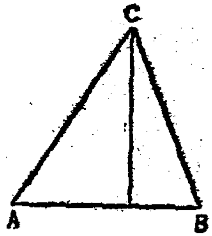
40°,江闊多少?(設1吋代表60呎.)

40.　離塔80呎與塔基在同一水平面上的地方,測塔的仰角得50°,求塔高.

41.　從離地60呎的窗口觀察紀念碑頂及碑基的俯角爲20°及40°,求紀念碑的高.



(41)

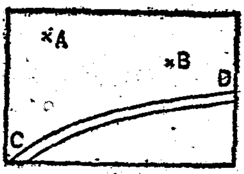


(42)

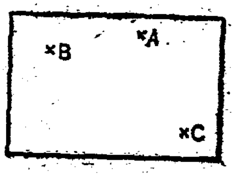
42.　A及B二處在雲C的二邊,測得仰角 A=60°,B=70°.若A及B相隔2哩,求雲的高.

43.　若赤道的半徑是4000哩,在北緯40°的緯線的半徑是多少?(畫1吋代表2000哩.)

44.　在地圖上CD是道路,A及B是二個高塔.一個人從C到D,在途中X處量得∠AXB=45°.X與B的距離較A爲近.在地圖上求這點X.

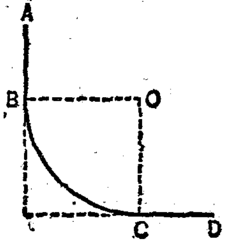


(44)



(45)

45. 在地圖上三點 A, B 及 C, 在某地 X 測量得 $\angle AXB=90°$, $\angle AXC=60°$, 求 X 點在地圖上何處.

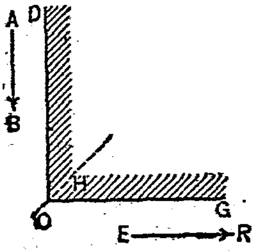


(46, 47)

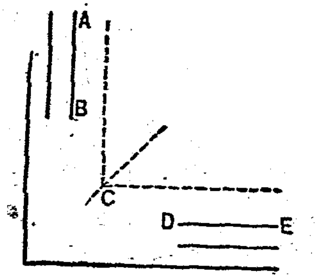
46. 在二條直交的街道的轉角上須成弧形. 求作一弧以 25 呎做半徑, 且比例尺為 1:500 (即以 1 吋代表 500 吋).

47. 解上題, 若二條街道相交成一銳角.

48. 騎自由車的人向 AB ($\parallel$DH) 的方向疾駛, 想在轉角走成一圓弧, 使過路旁 C 點, 然後向 EF ($\parallel$HG) 前進. 若 CH 二等分 $\angle H$, 前二平行線 (AB 及 DH) 間的距離等於後二平行線 (HG 及 EF) 間的距離, 求作一圓弧以表所過的路程.



(48)

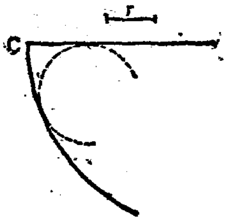


(49)

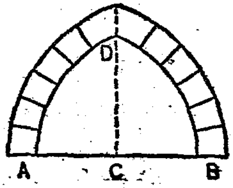
49. 作同上題相彷彿的電車軌道.

50. 一條成直線的街道與成圓弧的街道的轉角須成圓弧, 以 r 做半徑, 求作一圓. (續)

51. 如圖作哥德 (*Gothic*) 圓拱, 若闊 AB 與高 CD 為已知. (AD 及



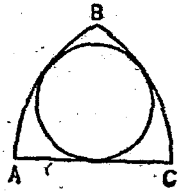
(50)



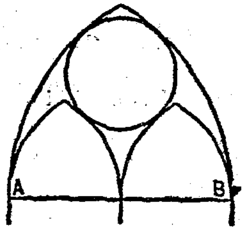
(51)

BD 弧的中心在 AB 上.)

52. 哥德圓拱 ABC 爲等邊,若 A 及 C 是 BC 及 AB 的中心.求在等邊圓拱內作一內切圓.



(52)



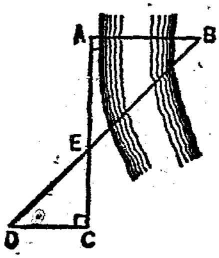
(53)

53. 若已知 AB,求作如圖所示三個等邊圓拱,且有一圓與三圓拱相切.

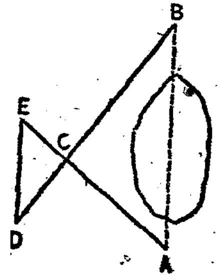
第 三 編

54. 高閣在平地上的影子長 120 呎,而同時 8 呎長的竹桿的影子長 3 呎,閣高多少呎?

55. 要測量河闊 AB,量垂直於 AB 的 AC 及垂直於 AC 的 CD.從 D 瞄準 B 得一點 E.若 AE=200 呎, EC=25 呎, DC=20 呎,求 AB.



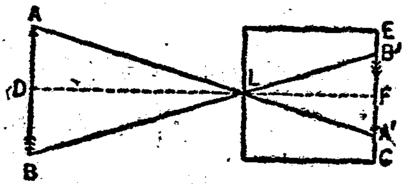
(55)



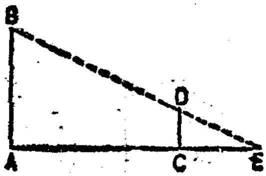
(56)

56. A,B的距離不能直接測量而得,從下列的數值,怎樣求他:AE=80呎, EC=20呎, DB=100呎, DC=25呎, ED=30呎.

57. 經過照相器鏡頭的一點A的像A′,可過收光鏡L的中心,作AA′得之;若CE是照相乾片的地位,則A′B′是AB的像.若 AB=6呎, LD=12呎, LF=6吋, A′B′長多少?



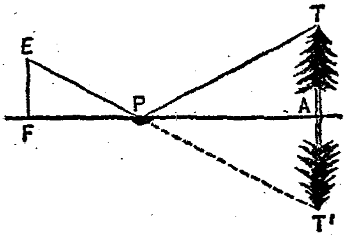
(57)



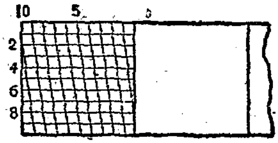
(58)

58. 從E望竹桿DC的頂D, 及塔AB的頂B, 適成一直線. 若EA是地平線, EC=4呎, DC=3呎, CA=36呎, 塔高多少呎?

59. 在E處可望見樹頂在湖水中的像T′. 若FPA是地平線, EF及TA都垂直於FPA, EF=5呎, FP=8呎, PA=30呎, 求樹的高. (續)



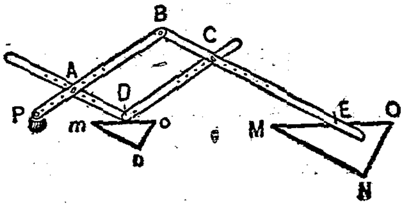
(59)



(60)

60. 若圖內小正方形的一邊的長是單位,怎樣求 .1, .2, .62, .34, 等等?

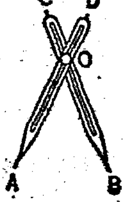
61. 放圖器是繪與已知圖形 *mno* 相似圖形MNO的儀器,放大或縮小地圖及圖畫用之. 四個棍子,活釘於 A,B,C,D,又AB=DC, AD=BC,使他們平行.固定於 P



(61)

而可轉動,在 D 及 E 附有鉛筆,使 PA 及 CE 的長適合於$\frac{PA}{AD}=\frac{DC}{CE}$. 求證 (1) P,D 及 E 在一直線上, (2)$\frac{PD}{PE}=\frac{PA}{PB}$, (3)任意一直線 MN 平行於 *mn*, 又 $\frac{mn}{MN}=\frac{PA}{PB}$, (4)所作的任意 △MNO 與已知 △*mno* 相似.

62. 附圖是一種儀器 (比例圓規),求作CD線使等於一已知直線 AB 的幾分之幾之用.配準 OC及 OD 可作 AB 的$\frac{2}{5}$等等.若OC$=\frac{2}{5}$OB, OD$=\frac{2}{5}$OA,求證CD$=\frac{2}{5}$AB.

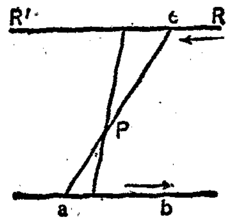


(62)

63. 地圖的比例尺是 1 吋比 100 哩. 在地圖上兩地

相距 $3\frac{1}{2}$ 吋，究竟相距多少？

64. 一個人在平行於鐵路 RR′ 的 a 路上，每小時走 3 哩，望到在走動的火車上的一點 C 適與竹桿 P 在一直線上．若 P 距 ab 10 呎，RR′ 與 ab 相距 100 呎，火車的速度若干？是否等速？



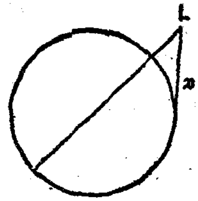
(64)

【註】 下面關於地球的問題，須知數值本係近似，則問題較為簡易；如，割線等於 $8000\frac{96}{5280}$ 哩，可將分數略去，使等於8000，因設地球的直徑為 8000 哩，較略去的分數大得多．同樣求在地面上的二地間的距離，可量二地間的直線，以代圓弧．

65. 若地球的直徑是 8000 哩，你能望多少遠？

(a) 從 96 呎高的燈塔 L 上．

(b) 從 2400 呎高的山上．



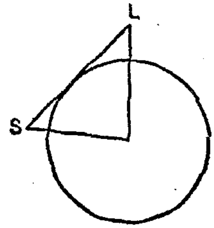
(65)

66. n 是在海上從 h 呎高的地方能夠望到的哩數．求證 n 的近似值可從下式計算：　$n=\sqrt{\frac{3h}{2}}$．

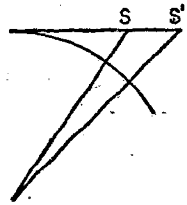
67. 游泳者的眼睛在平的水面上適能望到相距 4 哩的船頂，求船頂高出水面多少？

68. 在高出水面 24 呎的輪船的甲板上，見高出水面 40 呎的燈塔適沒在地平線下，求船與燈塔間的距離(SL)．

69. 從高出海面 54 呎的輪船的甲板上望到帆船的檣頂適在地平線上．若輪船與帆船相距 2 哩，求帆檣的高．

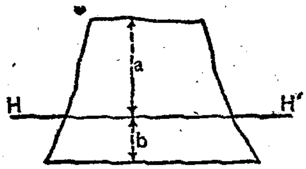


(68)



(69)

70. 從高出海面 54 呎的輪船甲板上，望見冰山一座，但冰山可見部份的高被水平線分成二部 a 及 b，且 $a=3b$．若輪船距冰山 3 哩，求冰山的高．

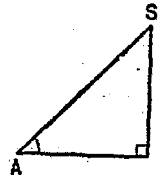


(70)

71. 從高出海面 6 呎的一點能望到的水平線的半徑是 3 哩，求地球的直徑．

72. 鐵軌從高處向下，長 1593 碼，傾斜成 30°，若低處一頭高出海面 1900 呎，高處一頭高出海面多少呎？

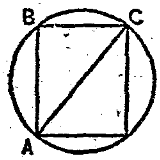
73. 流星煙火爆烈時的仰角，$\angle A=45°$．若見火焰 $\frac{3}{4}$ 秒後聞爆烈的聲音，求煙火爆烈時的高．(設聲音的速度等於每秒 330 公尺．)



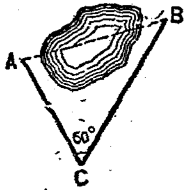
(73)

74. 從圓柱鋸成梁木，高 AB 與闊 BC 之比等於 $\sqrt{2}:1$ 時梁木能載重最多．作直徑 AC，求作 B，使 $AB:BC=\sqrt{2}:1$．

75. 若 $AC=20$ 桿，$BC=32$ 桿，$\angle C=60°$，在山前後的二點 A 及 B 間的距離多少？



(74)

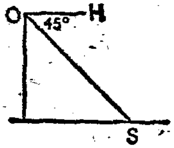


(75)

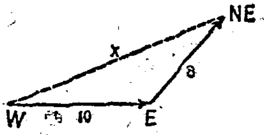
76. 在平地上的垂直竹桿的影子長 50 呎，當時太陽的仰角(通稱高度)等於 30°，求竹桿的高.

77. 從高 300 呎的巖石上望一隻船的俯角是 45°，求船與巖石之頂間的距離.

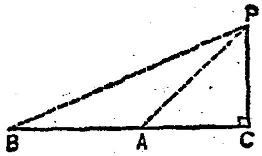
78. 西風送船的速度每小時 10 哩，而水向東北流之速度每小時 8 哩.船的速力多少？



(77)



(78)



(79)

79. 在 A 處測量 P 的仰角等於 45°，再在離 A 500 呎處，測量 P 的仰角等於 22°30′.若 BAC 成一地平線，P 高出 A 多少(即 PC)？

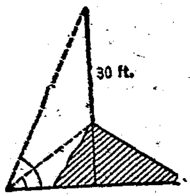
80. 從適在一鎮市上面的輕氣球上，測得另一鎮市的俯角是 30°. (續)
若二鎮相距 3 哩，求輕氣球的高.

81. 二個測量者在雲的兩邊測得仰角：A＝45°，B＝67°35′.若 AB

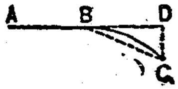
=3 哩，求雲的高。

82. 旗桿長 30 呎，豎立於土墩上，測得旗桿頂與足的仰角是 60° 及 30°. 求土墩的高。

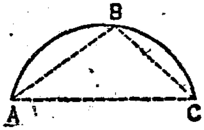
83. 軌道 ABC 是由直線 AB 及圓弧 BC 兩部組成。若 BC=50 碼，



(82)



(83)



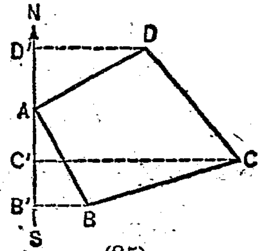
(84)

從 C 點至 AB 延長線的垂線 CD 為 4 碼，求 BC 弧的半徑。

84. 經過 A, B, C 三點建築成圓形的跑道。若 AB=50 碼，BC=30 碼，AC=70 碼，求圓弧 ABC 的半徑。

第 四 編

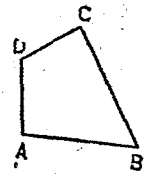
85. 測量四角形 ABCD 地的面積時，測量者量得至 NS 的垂直距離，及在 NS 上的線分如下：AD′=6 桿，AC′=5 桿，C′B′=4 桿，D′D=7 桿，C′C=12 桿，B′B=4 桿。求 ABCD 的面積。



(85)

86. 求五角形 ABCDE 地的面積；若 AB=18, BC=24, CD=28, DE=24, EA=10, AC=30, 及 AD=26.

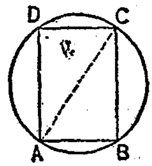
87. 成不等角四邊形的地，過 A 點作二直線，須分成面積相等的三塊，求作法.



(87)

88. 比例尺爲 1:500 的地圖上的多邊形等於 3 平方吋，這多邊形代表多少平方呎?

89. 從圓柱鋸成長方梁木，橫斷面ABCD須極大，求作 ABCD.



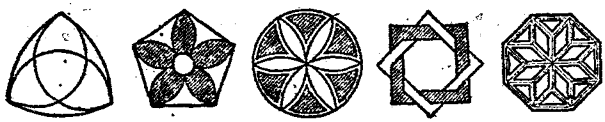
(89)

90. 成三角形的地，須作平行於一邊的直線分成相等的四塊，求作法.

應 用 題

第 五 編

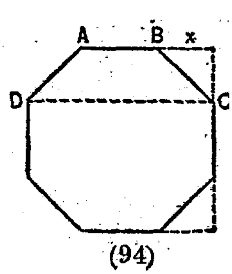
91. 作下列模型.



92. 矩形(如信封，窗，畫片等)的長與闊成外中比，則美觀悅目.若窗闊 4 呎，欲使長與闊等於上述的比，高須若干?

93. 塔的地基成正六邊形，每邊長 10 呎，求塔基所佔面積.

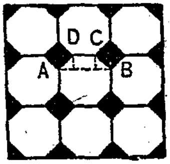
94. 成正八邊形的塔的地基的一邊 AB 等於 8 呎，求二對壁間的距離 CD.



(94)

95. 求上題塔基所佔的面積.

96. 圖內油布模型由正八邊形(白)與正方形(黑)組成,若正方形的一邊等於二吋,則正八邊形的二對邊的距離 AB 若干?



(96)

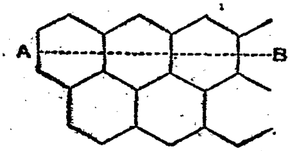
97. 在上圖內,求正八邊形的面積.(AD＝2 吋)

98. 若 AB 已知後,作上題的圖形.

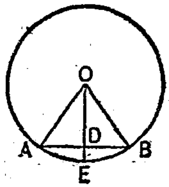
99. 若 AB(在上圖)等於 6 吋,計算正方形一邊之長.

100. 房屋內的地面長 AB,鋪以正六邊形的磚.若 AB＝10 尺,正六邊形每邊長 2 吋,每行須磚若干塊?

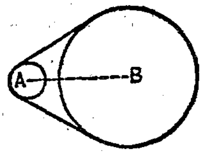
101. 木匠計算圓周近似值如下:作等邊三角形 AOB,延長高 OD 至 E,圓周等於 6AO＋2DE.若 π 等於 3.1416,求其誤差是多少?



(100)



(101)



(102)

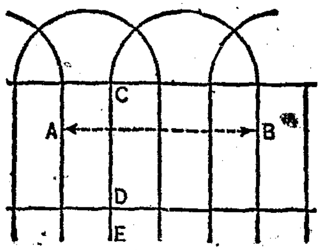
102. A,B 二輪,以皮帶連結,他們的半徑是 2 呎及 9 呎.若大輪(B)每分轉 40 轉,小輪每分轉若干轉?

103. 上題的圖,若 AB＝14 呎,求皮帶的長.(半徑是 2 呎及 9 呎).

104. 在同軸上的二汽車輪相距 4 呎 $8\frac{1}{2}$ 吋.若汽車繞矩形的角時,外輪比內輪多走若干吋?

105. 赤道的周圍約 25000 哩.設有同心圓的圓周比赤道的周圍長

1呎,求二半徑之差

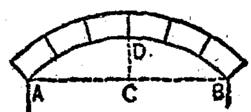


(106)

106. 上圖是保護花草的鐵絲籬.若 AB＝1呎,CD＝9 吋,DE＝3吋,籬長一尺須鐵絲若干尺?

107. 二條道路交成 120° 的角，汽車由一路轉入他路時,外輪與內輪所走路程的差若干?(二輪間的距離等於 4 呎 $8\frac{1}{2}$ 吋.)

108. 圓弧拱門之闊AB等於10呎,其高CD＝2呎,求圓弧之半徑.

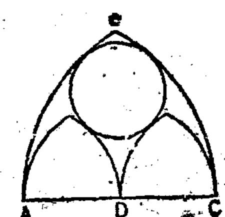


(108)

109. 若地球之軌道當做一圓，他的半徑等於93000000 哩,又一年＝365 日,地球每小時行若干哩?

110. 若 AC＝4呎，求等邊歌德(*Gothic*)圓拱 ABC 的面積?

111. 在上圖內,若 AD＝DC＝2 呎,小圓拱的面積若干?

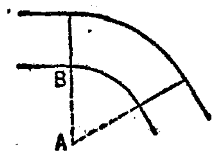


(110—112)

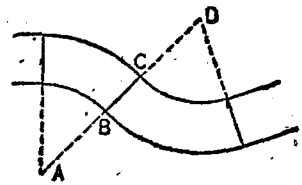
112. 在上圖內,求切於三圓拱的圓的面積.

113. 5呎闊的行人道彎成一角.若半徑 AB＝8 呎,又 ∠A＝60°,求

彎曲部分的面積.



(113)



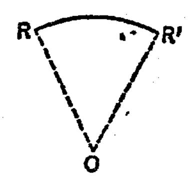
(114)

114.　若 AB＝90 呎，BC＝50 呎，CD＝90 呎，∠A＝45°，又∠D＝60°，求圖內道路彎曲部分的面積.

115.　在緯度 45° 的一點，因地球自轉而移動，每小時走若干哩？設地球的直徑等於 8000 哩，又地球自轉一轉需時 23 時 56 分.

116.　水管直徑 2 吋時祇供給所需的水量之半，供給全部水量，直徑須若干吋？

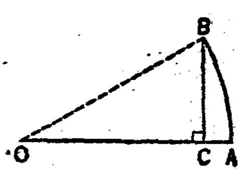
117.　設水管的壓力等都是相同，一水管供給的水量等於 6 吋與 8 吋二水管所供給的水量，這水管的直徑應該多少？



(118)

118.　鐵軌長 50 呎；須彎若干度(即求在二端的垂線所成的∠O)，若弧的半徑等於 360 呎？

119.　建築弧形軌道時，鐵軌 55 呎彎成 17°30′ 角，求弧的半徑.



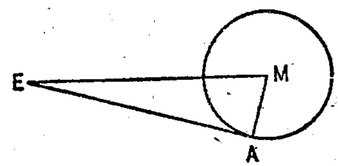
(120)

120.　若 O 是 AB 弧的中心，BC⊥OA，又∠O 是很小，則 $\overparen{AB}$ 與 BC 相差很小. 在這種情形之下，求 BC 時可求 AB 弧的長以代之. 若∠O＝4°，所生的誤差為結果的 .00005，角愈小則相差亦愈小，

因大約與角的立方成比例.

若塔 BC 立於 AO 水平面上, BO＝2000 呎, 又 ∠O＝2°, 求塔高.

121. 月球的視徑爲 30′, 即從地球(E)到月球中心(M) 作一直線, 與切線 EA 成 15′ 角. 若 EM＝243000 哩, 則月球的半徑若干?



(121)

122. 日球的視徑約等於月球的視徑. 若日球距地球93,000,000哩, 則日球的直徑若干?

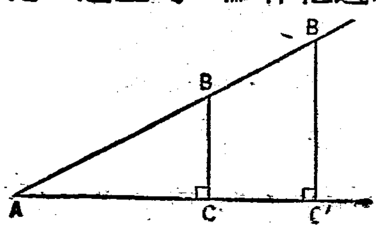
123. 應用三角函數(在 372—376 頁), 解習題 75—82.

124. 應用三角函數, 解習題 123 的各問, 以 ∠33° 代 ∠30°, ∠64° 代 ∠60°, 又 ∠40° 代 ∠45°.

三角函數

465. 有許多習題內的角不是 60°, 90° 或是他們的倍數, 欲解這種問題, 須應用三角函數. 一個角的三角函數是因角而定的比.

設已知 ∠A, 從一邊上的一點作他邊的垂線 BC



(統)

再從任意點 B′ 作 $B'C' \perp AC$, 則

直角 $\triangle ABC \sim$ 直角 $\triangle A'B'C'$ (何故?)

$BC:B'C' = AB:AB'$ (303)

又　$BC:AB = B'C':AB'$ (279)

或　$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$.

但　$\frac{BC}{AB}$是因 $\angle A$ 而定的常數.(何故?)

故　$\frac{B'C'}{AB'}$=隨便 B′ 點在那裏的常數.

466. 這比叫做 $\angle A$ 的正弦.

同樣, $\frac{AC}{AB}$叫做 $\angle A$ 的餘弦.

又　$\frac{BC}{AC}$叫做 $\angle A$ 的正切.

這種比值,可從高等數學求之,為便利應用起見,列成一表.本書祇限於銳角.

467. 定義.　一角的**正弦**$=\frac{\text{角的對邊}}{\text{斜邊}}$.

一角的**餘弦**$=\frac{\text{角的隣邊}}{\text{斜邊}}$.

一角的**正切**$=\frac{\text{角的對邊}}{\text{角的隣邊}}$.

應用第 376 頁的表,演算下列各題:

1. 那一個角的正弦等於 .326? .500? .946? .993? .775?

2. 那一個角的餘弦等於 .970? .707? .309? .883? .438?

3. 那一個角的正切等於 .158? 2.145? 5.671? .625? .249?

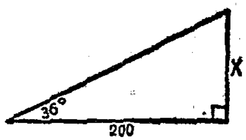
4. 求正弦等於 .450 的角的度數.(近似值)

5. 求餘弦等於 .450 的角的度數.(同上)

6. 求正切等於 .290 的角的度數.(同上)

7. 若角增加時,從表觀察他的三個函數的變遷怎樣?

8. 離塔 200 呎,測塔頂的仰角(參閱 357 頁習題 34)是 36°. 求塔的高.



【示意】 $\frac{x}{200}=tan36^\circ$.

9. 從 84 呎高的燈塔,測船的俯角是 17°, 船離塔基多少呎?

【示意】 $tan17^\circ=\frac{84}{d(\text{距離})}$.

10. 輕氣球繫於長 328 呎的繩上,若繩與地面成 67°, 輕氣球的高多少呎?

11. 在下列各題中, C 角是直角三角形的一個直角, a 與 b 是 ∠A 與 ∠B 所對的邊,又 c 是斜邊. 求一數代入問號.

∠A	∠B	a	b	c
48°	?	?	?	280
?	37°	14.2	?	?
?	?	8.3	10.2	?
?	?	?	6.5	12.4
71°	?	$3\frac{1}{3}$	?	?

(續)

12. 已知斜邊是 18,一銳角是 $\angle 40^\circ$,求這直角三角形的面積.

13. 三角形的面積有多少方呎,若二邊與夾角是 41 呎,36 呎,及 $\angle 38^\circ$?

14. 河邊一點 C 適與對岸上的 B 樹相對,沿河即與 CB 成直角從 C 走 120 碼到 A,測得 $\angle CAB$ 是 28°. 求河面的闊.

15. 從 P 點作一圓的二切線,這切線各長 45 呎,又成 68° 角,求圓的直徑.

16. 等腰三角形的底角各為 34°. 若底邊是 80 呎,三角形的高是多少呎?

17. 過弦的二端的二半徑成 130° 角. 若圓的半徑是 11 呎,求弦長.

18. 直角三角形的斜邊的高是 14 呎,三角形的一角是 24°,求斜邊的長.

19. 解 358—359 頁的應用題 38—42.

20. 解在 372 頁的 123,124 兩題.

三角函數表

度數	Sin∠	Cos∠	Tan∠	度數	Sin∠	Cos∠	Tan∠	度數	Sin∠	Cos∠	Tan∠
0	.000	1.000	.000	30	.500	.866	.577	60	.866	.500	1.732
1	.017	.999	.017	31	.515	.857	.601	61	.875	.485	1.804
2	.035	.999	.035	32	.530	.848	.625	62	.883	.469	1.881
3	.052	.998	.052	33	.545	.839	.649	63	.891	.454	1.963
4	.070	.997	.070	34	.559	.829	.675	64	.899	.438	2.050
5	.087	.996	.087	35	.574	.819	.700	65	.906	.423	2.145
6	.105	.995	.105	36	.588	.809	.727	66	.914	.407	2.246
7	.122	.993	.123	37	.602	.799	.754	67	.921	.391	2.356
8	.139	.990	.140	38	.616	.788	.781	68	.927	.375	2.475
9	.156	.988	.158	39	.629	.777	.810	69	.934	.356	2.605
10	.174	.985	.176	40	.643	.766	.839	70	.940	.342	2.748
11	.191	.982	.194	41	.656	.755	.869	71	.946	.325	2.904
12	.208	.978	.213	42	.669	.743	.900	72	.951	.309	3.078
13	.225	.974	.231	43	.682	.731	.933	73	.956	.292	3.271
14	.242	.970	.249	44	.695	.719	.966	74	.961	.276	3.487
15	.259	.966	.270	45	.707	.707	1.000	75	.966	.259	3.732
16	.276	.961	.287	46	.719	.695	1.036	76	.970	.242	4.011
17	.292	.956	.306	47	.731	.682	1.072	77	.974	.225	4.332
18	.309	.951	.325	48	.743	.669	1.111	78	.978	.208	4.705
19	.326	.946	.344	49	.755	.656	1.150	79	.982	.191	5.145
20	.342	.940	.364	50	.766	.643	1.192	80	.985	.174	5.671
21	.358	.934	.384	51	.777	.629	1.235	81	.988	.156	6.314
22	.375	.927	.404	52	.788	.616	1.280	82	.990	.139	7.115
23	.391	.921	.424	53	.799	.602	1.327	83	.993	.122	8.144
24	.407	.914	.445	54	.809	.588	1.376	84	.995	.105	9.514
25	.423	.906	.466	55	.819	.574	1.428	85	.996	.087	11.430
26	.438	.899	.488	56	.829	.559	1.483	86	.997	.070	14.300
27	.454	.891	.510	57	.839	.545	1.540	87	.998	.052	19.081
28	.469	.883	.532	58	.848	.530	1.600	88	.999	.035	28.636
29	.485	.875	.554	59	.857	.515	1.664	89	.999	.017	57.290

(續)

幾何學小史

468. 幾何學最初的記錄，散失殆盡，故幾何的起源，已無從考查.玆將刻意收集所得約略述之如後.

469. 古代**巴比侖**(Babylonians)及**克而第**(Chaldeans)人，因宗教儀禮，學習幾何.惟泰半由經驗所得，初無所謂幾何.

470. 幾何的起原歸功於**埃及人**(Egyptains)，以後幾何漸傳入**歐洲**各國，**小亞細亞**，及**美洲**. 那時建築金字塔，廟宇及測量**尼羅河**水退後的田地者，須收集各種工程所應用之法則以供應用.

約在公曆紀元前 1700 年 Ahmes 的手稿內載有求積方法，爲最古的幾何筆記.

埃及人士能計算矩形的面積，惟等腰三角形的面積以一腰底之積之半計算之，π的近似值爲 3.16. 他們應用三邊之比爲 3:4:5，能作一直角，惟於幾何的邏輯的基本，茫然一無所知.

471. 古代**中國**及**日本** π 當作 3 或 $\sqrt{10}$，亦有求積簡單法則，惟都從經驗觀察中得之.

古時印度殆不知幾何學，他們的智識之由來與其他民族同樣從經驗得之.後亦從希臘輸入，故已能應用初等幾何原理，惟無邏輯的證明.

472. 證明幾何的起源歸功於希臘人的研究精神.希臘人在埃及學習，能應用簡單法則後，亦復向前邁進，發現初等幾何內所包含的邏輯的原理，供獻於世.

推爾斯(Thales 紀元前 575)雖無筆記留傳於後世，惟幾何之傳入希臘皆氏所介紹，他當時已知道:(1)對頂角相等，(2)等腰三角形的底角相等，(3)二三角形全同，若有一邊相等，且在這邊二端的二角亦各相等，(4)直徑二等分圓，(5)互等角的三角形是相似.

希臘人應用幾何於實際自氏始.

畢達哥拉斯(Pythagoras 紀元前 540)發現畢達哥拉斯定理:斜邊上的正方形等於其他二邊上的正方形之和.惟這定理直到**歐幾里得**(Euclid)才證明.**畢達哥拉斯**所設學校以幾何學爲各種功課的基礎.當時他們已證明的定理有:(1)三角形的三角之和等於二直角，(2)作面積等於三角形的平行四邊形，(3)正方形的一邊與其

對角線是不可通約的.他們於圓無所發明.他們應用演繹法證明許多定理.

沙非斯脫 (Sophists) 專心研究圓,并想解決古時有名的三大難題:(1)三等分任意一角,(2)二倍立方體,(3)平方一圓.用初等方法解決這三難題,雖完全失敗,然因此發現圓的性質甚多.

希波克來脫(Hippocrates 紀元前 460)於圓心得甚多,應用邏輯來證明問題,又發明相似形及比例定理.曾著"原理"(Elements)一書.

柏拉圖 (Plato 紀元前 380) 及其學校專門從事訓練人的思考,務求正確嚴密,曾提議作圖時祇能用直規及圓規,在證明幾何時首先應用分析法.

阿力斯都德 (Aristotle 紀元前 340) 雖於數學無多大興趣,然供獻構成邏輯定義的原則不少.

歐幾里得 (Euclid 紀元前 300) 著述世界最著名的幾何教本.整理先賢所發現的事實,去其瑕疵,使初等幾何學的命題都根據於邏輯.

阿基密特史 (Archimedes 紀元前 225) 是古時數理大

家.在氏著述中,近世數學,已具端倪.氏以 π 數值必在 $3\frac{1}{7}$ 與 $3\frac{10}{71}$ 二極限之間.

473. 羅馬於理論幾何無卓異的研究可言,惟從**希臘**所學得者,能應用於工程實際問題.當時他們尚以 π 當做 $3\frac{1}{8}$,因便於當時他們的十二進位法.

474. **阿拉柏**(Arabs)於幾何無所發明,惟把教本譯成本國文字,而後希臘幾何得傳入歐洲,阿拉柏與有力焉.到阿拉柏末葉,把許多幾何習題用代數解之,由此全部數學得貫通聯絡.

475. 在中世紀時,全在**歐幾里得**支配之下,直到1794年,法國有**來近特**(Legendre)著幾何原理一書"Elements of geometry",敍述簡易,低級學校亦得採作課本.現在幾何分出不少新種類,如非歐幾里得,投影畫法,超空間及解析等.

476. 希望學者讀這幾何小史後,興趣橫生,再讀較爲詳細的數學歷史 Cajori's A History of Mathematics 一書,材料豐富,樂爲介紹.

數值計算法

477. 數値近似到百分之一.

例題:　求 $\frac{1}{8}$, $1\frac{2}{3}$, 0.63755, $\frac{9.217}{4}$的數值,近似到百分之一.

$\frac{1}{8}=.125$, 近似到百分之一. $=.13$

$1\frac{2}{3}=1.666$, 近似到百分之一. $=1.67$

0.63755, 近似到百分之一. $=0.64$

$\frac{9.217}{4}=2.304$, 近似到百分之一. $=2.30$.

478. 數的平方根.

例題:

$$\begin{array}{rl} & \ 4.97- \\ & \sqrt{24.7560} \\ & \ 16 \\ \hline 89) & \ 8.75 \\ & \ 8.01 \\ \hline 987) & \ \ 6460 \\ & \ \ 6909 \\ \hline \end{array}$$

答 4.97

簡單根數.

例題:　有理化$\frac{2}{\sqrt{3}}$, 并求其數値,近似到百分之一.

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2(1.732)}{3}=\frac{3.464}{3}$$

$$=1.154=1.15.$$

479. 幾何的方程式.

例一.　求一角,他的補角比其餘角之 $2\frac{1}{2}$ 多 $32°$.

解　$180-x=2\frac{1}{2}(90-x)+32$

$180-x=\frac{5}{2}(90-x)+32$

$360-2x=450-5x+64$

$3x=154$

$\therefore\quad x=51\frac{1}{3}°=51°20'.$

例二.　設 $AB=10$, $AE=8$, $EC=5$, 又 $DE//BC$, 在 $\triangle ABC$ 內求 AD 及 DB.

解　設 $x=AD$, 則 $10-x=DB$,

但　$AD:DB=AE:EC$,

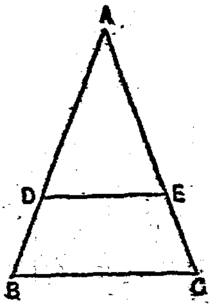
或　$x:10-x=8:5$

$5x=80-8x$

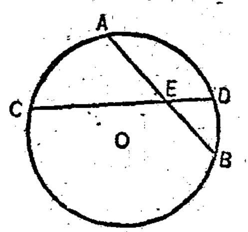
$13x=80$

$x=6\frac{2}{13}=AD$

$10-x=3\frac{11}{13}=DB$



例三.　在O圓內,CD被AB分成 $CE=12$, 及 $ED=2$. 若 $AB=11$, 求線分 AE 及 ED.



解　$CE\cdot ED=AE\cdot EB$

設　$x=AE$, 則 $11-x=EB$

則　$12\times 2=x(11-x)$

$$24=11x-x^2$$

$$x^2-11x=-24$$

$$x^2-11x+\left(\frac{11}{2}\right)^2=\frac{121}{4}-24=\frac{121}{4}-\frac{96}{4}=\frac{25}{4}$$

$$\left(x-\frac{11}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

$$x-\frac{11}{2}=\pm\frac{5}{2}$$

$$x=\pm\frac{5}{2}+\frac{11}{2}=8\text{ 或 }3$$

$$11-x=\qquad 3\text{ 或 }8$$

$\therefore$ AE$=8$, EB$=3$, 或 AE$=3$, EB$=8$.

例四. 有三個圓,他們的半徑是 3, 4, 及 5. 求另一圓的半徑,這圓的圓周等於三圓的圓周之和.

解 設 $r=$ 所求圓的半徑.

則 $2\pi r=2\pi(3)+2\pi(4)+2\pi(5)$

$$r=3+4+5=12.$$

例五. 設圓的半徑等於 4 吋, 求面積與圓相等的等邊三角形的一邊.

解 設$a=$所求三角形的一邊

則 $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\pi r^2=16\pi$

$$a^2=\frac{64\pi}{\sqrt{3}}$$

$$a^2=\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}=\frac{64(3.1416)(1.732)}{3}$$

$\therefore \quad a^2=116.08$

$$a=\sqrt{116.08}=10.8\text{ 吋.}$$

重要公式表

記 號

$a, b, c=\Delta ABC$ 的三邊

$m_a=a$ 邊的中線

$h_a=a$ 邊的高

$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

$b=$底

$c=$圓周

$s_n=$正 n 邊形的一邊

$b'=b$ 在 c 上的射影

$R=$外接圓的半徑

$t_c=C$ 角的二等分線

$r=$內接圓的半徑或邊心距

$S=$面積

$d=$直徑;正方形或菱形的對角線

b_1 及 $b_2=$梯形的二底

$p=$周圍

線值公式

直角 Δ, $a^2+b^2=c^2$($c=$斜邊) (329)

斜 Δ, $a^2=b^2+c^2\pm 2b'c$, 因 $\angle A$ 是銳角或鈍角而定. (334)(336)

圓周, $c=2\pi R=\pi d$ (424)

正方形的對角線, $d=b\sqrt{2}$

等邊△,	$h=\frac{b}{2}\sqrt{3}$.	(330 習題 4)
	$s_3=R\sqrt{3}$.	(401)
	$s_4=R\sqrt{2}$.	(396)
	$s_6=R$.	(398)
	$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	(339)
	$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$	(340,習題 5)
	$t_c=\frac{2}{a+b}\sqrt{abc(s-c)}$	(341,習題 6)

在相似多邊形內,

	$p:p'=a:a'$	(318)
	$a:a'=b:b'=c:c'$ 等等	(303)
	$s_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-s_n{}^2}}$	(432)
	$\text{弧}=\frac{\text{中心角}}{360°}\times 2\pi R$	(425)
在圓內,	$c:c'=d:d'=r:r'$	(421, 422)

平面形的面積

矩形	bh.	(350)
正方形	b^2.	(351)
平行四邊形	bh.	(353)
三角形	$\frac{1}{2}bh$, 或 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.	(358)

等邊△	$\frac{b^2}{4}\sqrt{3}$.	(289 頁習題 12)
梯形	$\frac{1}{2}h(b_1+b_2)$.	(363)
菱形	$\frac{1}{2}d_1d_2$.	(289 頁習題 13)
正多邊形	$\frac{1}{2}pr$.	(426)
圓	πR^2或$\frac{1}{2}Rc$	(427,428)
扇形	$\frac{1}{2}$弧$\times R$或$\frac{\text{中心角}}{360°}\times\pi R^2$	(430)
弓形	扇形±從弦二端作半徑與弦所成的△	
相似多角形	$s:s'=a^2:a'^2=p^2:p'^2$	(380,382)
二圓	$s:s'=R^2:R'^2=d^2:d'^2$	(429)

長度表

12 吋 $=1$ 呎

3 呎 $=1$ 碼

$5\frac{1}{2}$ 碼 $=1$ 桿

320 桿 $=1$ 哩

1 哩 $=1760$ 碼 $=5280$ 呎

面積

144 平方吋 $=1$ 平方呎

9 平方呎 $=1$ 平方碼

$30\frac{1}{4}$ 平方碼 $=1$ 平方桿

160 平方桿 =1 英畝

640 英　畝 =1 方哩

米突制

長度表

10 公釐(mm)=1 公分(cm)

10 公分 =1 公寸(dm)

10 公寸 =1 公尺(m)

10 公尺 =1 公丈(Dm)

10 公丈 =1 公引(Hm)

10 公引 =1 公里(Km)

1 公尺 =39.37 吋

面積

100 方釐 =1 方分

100 方分 =1 方寸

100 方寸 =1 方尺

近似值

$\sqrt{2}=1.414$　　$\pi=3.1416$

$\sqrt{3}=1.732$　　$\pi=3.14$

$\sqrt{5}=2.236$　　$\pi=3\frac{1}{7}$

(續)

初中幾何学

蔣学張

1953.3.19

geometric

se

ABCDEFG

(終)

中 西 名 詞 對 照 表

緒 論

幾何立體 (Geometric solid)
立體 (Solid)
面 (Surface)
線 (Line)
點 (Point)
幾何圖形 (Geometric figure)
直線形 (Rectilinear figure)
幾何學 (Geometry)
直線 (Straight line)
曲線 (Curved line)
折線 (Broken line)
線分 (Segment or Line-segment)
線段 (Segment or Line-segment)
距離 (Distance)
方向 (Direction)
平面 (Plane surface or Plane)
平面圖形 (Plane figure)
平面幾何學* (Plane geometry)
立體幾何學 (Solid geometry)
球面幾何學 (Spherical geometry)
重合 (Coincide)
全同形 (Congruent figures)
重壘證法 (Proof by superposition)

二等分 (Bisect)
角 (Angle)
邊 (Side)
頂點 (Vertex)
二等分線 (Bisector)
平角 (Straight angle)
直角 (Right angle)
銳角 (Acute angle)
鈍角 (Obtuse angle)
斜角 (Oblique angle)
垂直 (Perpendicular)
垂足 (Foot of the perpendicular)
度 (Degree)
分 (Minute)
秒 (Second)
鄰角 (Adjacent angle)
對頂角 (Vertical or opposite angle)
餘角 (Complementary angle)
補角 (Supplementary angle)
圓 (Circle)
中心 (Center)
半徑 (Radius)
弧 (Arc)
圓周 (Circumference)
直徑 (Diameter)
定理 (Theorem)
假設 (Hypothesis)

終結 (Conclusion)
問題 (Problem)
作圖題 (Problem of construction)
計算題 (Problem of computation)
命題 (Proposition)
公理 (Axiom)
幾何公理 (Postulate)
系 (Corollary)

第 一 編

多邊形 (Polygon)
周圍 (Perimeter)
外角 (Exterior angle)
對角線 (Diagonal)
四邊形 (Quadrilateral)
三角形 (Triangle)
不等邊三角形 (Scalene triangle)
等腰三角形或二等邊三角形 (Isosceles triangle)
等邊三角形 (Equilateral triangle)
直角三角形 (Right triangle)
鈍角三角形 (Obtuse triangle)
銳角三角形 (Acute triangle)
等角三角形 (Equiangular triangle)
底 (Base)
腰 (Arm, leg)
底角 (Base angle)
頂角 (Vertex angle)

斜邊 (Hypotenuse)
直角邊 (Arm, leg)
高 (Altitude)
中線 (Median)
角二等分線 (Angle-bisector)
互等角 (Mutually equiangular)
互等邊 (Mutually equilateral)
重疊法 (Superposition)
相當線或角 (Corresponding lines or angles)
等距離 (Equidistant)
內角 (Interior angle)
截線 (Transversal)
內錯角 (Alternate interior angles)
外錯角 (Alternate exterior angles)
同位角 (Corresponding angles)
平行線 (Parallel lines)
逆定理 (Converse)
梯形 (Trapezoid)
平行四邊形 (Parallelogram)
正方形 (Square)
矩形 (Rectangle)
菱形 (Rhombus)
等腰梯形 (Isosceles trapezoid)
等角多邊形 (Equiangular polygon)
等邊多邊形 (Equilateral polygon)
五邊形 (Pentagon)
六邊形 (Hexagon)

七邊形 (Heptagon)
八邊形 (Octagon)
十邊形 (Decagon)
十二邊形 (Dodecagon)
分析法 (Analytic Method)

第二編

半圓 (Semicircle)
劣弧 (Minor arc)
優弧 (Major arc)
弦 (Chord)
割線 (Secant)
切線 (Tangent)
切點 (Point of contact)
中心角 (Central angle)
同心圓 (Concentric circles)
內公切線 (Common internal tangent)
外公切線 (Common external tangent)
外切多邊形 (A polygon circumscribed about a circle)
內切圓 (A circle inscribed in a polygon)
聯心線 (Line of centers)
數量 (Numerical measure)
有理數 (Rational)
無理數 (Irrational)
比 (Ratio)
圓周角或內接角 (Inscribed angle)
弓形 (Segment)

傍切圓 (Escribed circle)
軌跡 (Locus)

第三編

比例 (Proportion)
外項 (Extremes)
內項 (Means)
前項 (Antecedents)
後項 (Consequents)
比例中項 (Mean proportional)
第四比例項 (Fourth proportional)
相似 (Similar)
射影 (Projection)

第五編

正多邊形 (Regular polygon)
正多邊形的半徑 (Radius of a regular polygon)
邊心距 (Apothem of a regular polygon)
外中比 (Extreme and mean ratio)
極限 (Limit)
定量 (Constant)
變量 (Variable)
扇形 (Sector)

附錄

極大 (Maximum)
極小 (Minimum)

等周形 (Isoperimetric figure)
對稱 (Symmetry)
正弦 (Sine)
餘弦 (Cosine)
正切 (Tangent)

蔣學振書

中華人民共和國湖南省

全世界

蔣學

〃 蔣學振

三S平面幾何學

民國三十五年六[illegible]十九版

中等學校用

[illegible]平面幾何學（全一冊）

◎定價國幣

（郵運匯費另加）

編者　仲光然　嚴幼芝　徐任吾

發行人　姚戟楣

中華書局有限公司代表

印刷者　中華書局永寧印刷廠

上海澳門路四六九號

發行處　各埠中華書局

（說）（六六[illegible]）

中華