算學叢書

最小二乘法

郁樹錕編

中華書局印行

民國三十七年五月發行
民國三十七年五月初版

算學叢書 最小二乘法（全一冊）

◎ 定價國幣五元五角
（郵運匯費另加）

編著者 郁樹錕

發行人 中華書局股份有限公司代表 李虞杰
印刷者 上海澳門路八九號 中華書局永寧印刷廠
發行處 各埠中華書局

（一三七五一）（中）

最小二乘法

目錄

最小二乘法

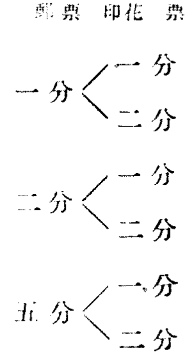
第一編　或然率

第一章　排列　配合　二項定理

1. 同時發生之事象

例　設有二袋,其一袋中有一分、二分及五分之郵票各一枚,另一袋中有一分及二分之印花稅票各一枚,若信手從二袋中各取出一枚,則取出之樣式共有若干種?

當由第一袋中取出一分之郵票時,由第二袋中取出之印花稅票必爲一分或爲二分,計有兩種.同樣,由第一袋取出二分之郵票時,由第二袋中取出印花稅票之方式亦有兩種.但由第一袋中取出郵票之方式計有三種,而每種中又與兩種印花稅票相配合,故得配合之樣式爲 $3\times2=6$ 種.



問　題

1. 取銅幣銀幣各一枚投之,則表面裏面之出現方式計

有幾種?

2. 設有領結三條,西裝四套,問配合之方法計有幾種?

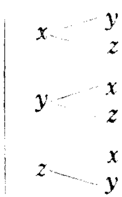
由以上之例及問題,可推得如下之定理:

定理 設有二事件 E_1 及 E_2, E_1 事件發生之方式有 m 種,E_2 事件發生之方式有 n 種,則 E_1 及 E_2 同時發生之方式計有 mn 種.

此定理對於三個以上之事件亦能成立.

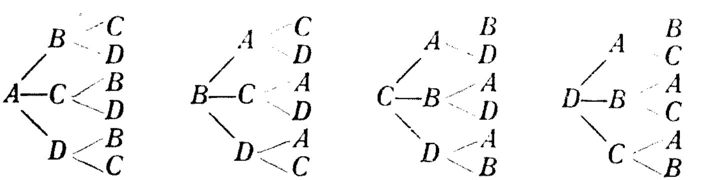
2. 排列 (permutations)

例 1. 由 x、y、z 三個物件中每次取出二個,則有如下之六種方式:



$$xy \quad xz \quad yx \quad yz \quad zx \quad zy$$

例 2. 由 A、B、C、D 四個物件中,每次取出三個時,如下所示.若第一個為 A,則由其餘之 B、C、D



中取一個配之,得 AB、AC、AD 三種.再以剩餘物中之一配之,即以 C 或 D 配於 AB, B 或 D 配於 AC, 及以 B 或 C 配於 AD, 如此配合,則以 A 為第一數時,其配合方法計有如下之六種:

$$ABC \quad ABD \quad ACB \quad ACD \quad ADB \quad ADC$$

同樣,以 B、C 或 D 爲第一數時,其配合方法亦各有六種,故共有配合方法

$$6 \times 4 = 24\text{種}.$$

若由 n 個物件中,每次取出 r 個排列,則排列種種不同樣式之個數稱爲排列之數,通常以 ${}_nP_r$ 表之.

例 由三個物件中每次取出二個排列之,其排列之數爲

$${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6.$$

由四個物件中每次取出三個排列之數爲

$${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24.$$

由十個物件中,每次取出四個之排列數 ${}_{10}P_4$,可如次推得之.取十個物件中之一個特別物件如 a 置於左端,而於其餘九個物件中每次取三個排列之,其數爲 ${}_9P_3$. 但此種排列法無論以何物件置於左端均可,旣物件之總數有十,故排列之數當爲 $10\,{}_9P_3$. 故

$${}_{10}P_4 = 10\,{}_9P_3.$$

同理得 $${}_9P_3 = 9\,{}_8P_2,$$

$${}_8P_2 = 8\,{}_7P_1,$$

及 $${}_7P_1 = 7.$$

各式兩邊相乘,且簡約之,得

$$_{10}P_4=10\cdot9\cdot8\cdot7.$$

以上所述,可適用於任何個不同物件之排列,故得如下之定理.

定理 由 n 個不同物件中每次取 r 個排列之數爲

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1).$$

系 如將 n 個物件全數取出排列,則排列之數爲

$$_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1,$$

略記之,得 $$_nP_n=n!.$$

$n!$ 爲由 n 至 1 之各整數之連乘積,稱爲 n 之階乘(factor),有時以 $\lfloor n$ 表之.$0!$ 本無若何意義,但便宜上定之爲 $0!=1$.

例 由 1、2、4、6、8 五個數字中每次取三個排列之數爲

$$_5P_3=5\cdot4\cdot3=60.$$

其中爲奇數之數僅有十二個,因以上列五個數字排列而成三位數之奇數時,必須以 1 置於末端方可;除 1 外之四個數字中,每次取二個之排列數爲

$$_4P_2=4\cdot3=12,$$

故以1置於末端之三位數僅有12個.

問題

1. 由0、1、2、3、4五數字中每次取三個排成三位數之排列數有幾?但0不能排在左端.

3. 配合(combination)

從 n 個不同物件中每次取 r 個作成一組,謂之配合,其所成之組數謂之配合之數,以 ${}_nC_r$ 表之.例如由 a、b、c 三者中每次取二個作成之配合爲 ab、ac、bc,即 ${}_3C_2=3$.

公式　$${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!},$$

及　$${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

證明　由 n 個不同物件中每次取出之 r 個物件,若依次序排列之,可得 ${}_rP_r=r!$ 種不同之排列.但配合僅論每組中組成分子之異同,而不問各分子排列之次序;故 $r!$ 種排列中構成分子既相同,祇能作爲一個配合.故得

$${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!},$$

$$\therefore\quad {}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!},$$

上式右邊之分母及分子均乘以$(n-r)!$,得

$$ {}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)!}{r!(n-r)!} $$

$$ =\frac{n!}{r!(n-r)!} $$

問題

1. 試求 ${}_9C_6$ 及 ${}_9C_3$ 之值.

2. 試證 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$.

3. 由六人之候補者中選出代表二人,其方式有幾種?

4. 由甲地之候補者五人及乙地之候補者四人中選出代表四人,問選出之方式計有幾種?

4. n 個物件中有相同物件存在時之排列

在 $a\,b\,a\,a\,b\,c$ 之排列中,與 a 同者有三,與 b 同者有二,若於 a. b 附以數字如 $a_1 b_1 a_2 a_3 b_2 c$, 此時假定 a_1、a_2、a_3、b_1、b_2 均爲不同之物件,取此六者而排列之,得排列之數爲 ${}_6P_6=6!$.事實上 $a_1=a_2=a_3$, 而 $b_1=b_2$, 故取 a_1、a_2、a_3,而排列之數 $3!$,實祇能認爲一種;取 b_1、b_2 而排列之數 $2!$,實亦爲一種.故 $6!$ 種排列中有 $3!\times2!$ 種爲相同者.設以 x 表所求之排列數,則有如下之關係:

$$ 3!2!x=6!, $$

$$ \therefore \qquad x=\frac{6!}{3!2!}. $$

由此例推,一般取 $aa\cdots\cdots bb\cdots\cdots cd$ 等 n 個之物件,悉數

排列之,若 a 有 p 個,b 有 q 個,以 x 表所求之排列數,則

$$x=\frac{n!}{p!q!},$$

其中 $$n=p+q+1+1.$$

問　題

1. 取 1、1、2、2、2、2、3 排列成七位之數時,其排列數有幾?

5. 二項定理(binomial theorem)

$$\begin{aligned}(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)(a+b_4)\\ =a^4+(b_1+b_2+b_3+b_4)a^3\\ +(b_1b_2+b_1b_3+b_1b_4+b_2b_3+b_2b_4+b_3b_4)a^2\\ +(b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+b_1b_3b_4+b_2b_3b_4)a\\ +b_1b_2b_3b_4.\end{aligned}$$

將上式右邊 a^3、a^2、a 之係數考察之,知 a^3 之係數為由 b_1、b_2、b_3 及 b_4 四數中每次取一個所成組合之和,其項數為 ${}_4C_1=4$; a^2 之係數為由 b_1、b_2、b_3、b_4 中每次取二個所成組合之和,其項數為 ${}_4C_2=6$; 同理,a 之係數之項數為 ${}_4C_3=4$.

設 b_1、b_2、b_3、b_4 相等,以 b 表之,則 a^3 之係數為 ${}_4C_1b$. a^2 之係數為 ${}_4C_2b^2$, a 之係數為 ${}_4C_3b^3$, 而不含 a 之項為 b^4.故

$$(a+b)^4=a^4+{}_4C_1a^3b+{}_4C_2a^2b^2+{}_4C_3ab^3+b^4.$$

由此類推,得成立如下之一般式

$$(a+b)^n = a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots\cdots$$
$$+ {}_nC_r a^{n-r} b^r + \cdots\cdots + b^n,$$

此稱為二項定理.又上式可改書如下之形式:

$$(a+b)^n = b^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a^{n-2} b^2 + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots\cdot r} a^{n-r} b^r + \cdots + b^n.$$

上式中之 $\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots r} a^{n-r} b^r$ 為第$(r+1)$項,或稱為一般項.

系　$a=1,\ b=x$ 時,則

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^2 + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots\cdot r} x^r + \cdots\cdots + x^n.$$

例 1　$$(p+q)^7 = p^7 + 7p^6 q + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2} p^5 q^2 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} p^4 q^3$$
$$+ \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} p^3 q^4 + \cdots\cdots + q^7$$
$$= p^7 + 7p^6 q + 21 p^5 q^2 + 35 p^4 q^3$$
$$+ 35 p^3 q^4 + 21 p^2 q^5 + 7 p q^6 + q^7.$$

例 2　試求$(2a+b)^8$展開式之第六項.

以 $n=8,\ r=5$ 代入一般項,得

$$\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} (2a)^3 b^5 = 448 a^3 b^5.$$

例 3　於 $\left(x-\frac{1}{2x}\right)^7$ 之展開式中,試求 x^3 之項.

由一般式得第 $(r+1)$ 項為

$${}_7C_r x^{7-r}\left(-\frac{1}{2x}\right)^r=\left(-\frac{1}{2}\right)^r {}_7C_r x^{7-2r}.$$

但依題意, $7-2r=3$, 故 $r=2$. 即所求之項為第三項,由上式得

$${}_7C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 x^3=\frac{21}{4}x^3.$$

問　題

1. 將 $(3x+y)^5$ 式展開之.
2. $(1+3x)$[illegible] 之展開式中, x^4 之係數為何?

c. $(a+b)^n$ 之最大項

以 T_{r+1} 表一般項即第 $(r+1)$ 項,則有

$$T_{r+1}=\frac{n!}{r!(n-r)!}a^{n-r}b^r,$$

但第 r 項為　$$T_r=\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}a^{n-r+1}b^{r-1},$$

第 $(r+2)$ 項為　$$T_{r+2}=\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}a^{n-r-1}b^{r+1},$$

$$\therefore\quad \frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{b}{a},\quad \frac{T_{r+2}}{T_{r+1}}=\frac{n-r}{r+1}\cdot\frac{b}{a}.$$

若 T_{r+1} 為最大項,則　$T_r<T_{r+1}, T_{r+1}>T_{r+2}$.

$$\therefore \quad \frac{T_{r+1}}{T_r} > 1 \qquad\qquad \frac{T_{r+2}}{T_{r+1}} < 1$$

即 $$\frac{n-r+1}{r}\,\frac{b}{a} > 1 \qquad\qquad \frac{n-r}{r+1}\,\frac{b}{a} < 1$$

或 $$\frac{(n+1)b}{a+b} > r \qquad\qquad \frac{nb-a}{a+b} < r$$

$$1+\frac{nb-a}{a+b} < 1+r$$

$$\frac{(n+1)b}{a+b} < 1+r$$

由上所得之結果知T_{r+1}如爲最大項,則 r 當等於 $\frac{(n+1)b}{a+b}$ 中所含之最大整數. $T_r = T_{r+1}$ 時 $r=\frac{(n+1)b}{a+b}$. 故 $\frac{(n+1)b}{a+b}$ 爲整數時無最大項,惟 T_r 及 T_{r+1} 較其他各項爲大.

例 試求$\left(1+\frac{2}{5}\right)^7$之最大項.

解 $$\frac{(n+1)b}{a+b} = \frac{(7+1)\times\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{16}{7} = 2\frac{2}{7},$$

$$\therefore \qquad r = 2.$$

即第三項爲最大項.

問 題

1. 試求$\left(1+\frac{2}{3}\right)^{11}$之最大項.

第二章 或然率

1. 或然率之意義

舉骰投之,則其點數爲六爲一,無人能知之;十萬之嬰兒中究有幾何能生活到三十歲以上,亦無人能知之.此類問題,驟視之,均爲不確實之事件,而非算學所能處理者.但深加考察,亦但有其確實性.苟吾人能知此確實性之大略,則裨益於吾人者實非淺鮮.如上所述,決定一事件發生或不發生之或然性之比率,謂之該事件發生或不發生之或然率(probability).

設一事件發生及不發生之方法計有 n 種,發生之方法有 a 種時,則不發生之方法有 $n-a$ 種,而 n 稱爲方法之總數.

2. 或然率之算學的定義(第一定義)

以 n 表方法之總數,其中某一事件發生之方法有 a 個,則 $\frac{a}{n}$ 謂之該事件發生之或然率,以 p 表之,即

$$p=\frac{a}{n},$$

$p=1$ 時,指一事件必定發生;$p=0$ 時,指一事件不致發生.

$\frac{n-a}{n}$ 係表一事件不發生之或然率,而

$$\frac{n-a}{n}=1-\frac{a}{n}=1-p.$$

故常以$1-p$表一事件不發生之或然率,有時又以q表之.

例 1 投銅元一次,其現出表面之或然率爲$\frac{1}{2}$.

因銅元有表裏兩面,一次投下,則其現出表面或不現出之方法總數有二,即$n=2$.其中表面出現之方法(a)爲1.由定義,表面出現之或然率$p=\frac{1}{2}$.

例 2 舉一骰而投之,其點數爲六之或然率爲$\frac{1}{6}$.

例 3 一袋中盛有白球三枚,紅球五枚.如從其中取出一球,其爲白球之或然率爲何?又同時取出兩球,均爲白球之或然率爲何?

解 袋中所有之球數爲八,取出一個之方法總數有八,而取出一白球之方法有三,故取出之球爲白球之或然率爲$\frac{3}{8}$.

八球中每次取出兩枚之方法,共有${}_8C_2$種;而二球均爲白球之方法計有${}_3C_2$種,故其或然率爲

$${}_3C_2/{}_8C_2=\frac{3}{28}.$$

例 4 以二骰投之,其點數爲八之或然率若何?

解 由第一章第一節,發生及不發生八點之方法總數$n=6^2=36$.但八點發生之方法爲

(2,6)　(3,5)　(4,4)　(5,3)　(6,2)

計五種,即 $a=5$,故由定義 $p=\frac{5}{36}$.

問題

1. 一袋中盛紅球四個,白球五個.從其中取出三個,均為白球之或然率為何?

2. 投骰子二枚,其點數之和為五之或然率為何?

3. 由 a、b、c、……j 十人中選出委員三人,試求 a、b 二人均能當選之或然率為何?

3. 或然率之經驗的定義(第二定義)

如上所述,投貨幣時表面現出之或然率為 $\frac{1}{2}$,實驗上十次投擲中未必能五次為表面,即投 1000 次亦未嘗五百次為表面.至於人之年齡能達三十歲之或然率,更無法計算.如此類問題,除實地調查外,別無良法.例如投擲貨幣問題,可如次實驗之.設投擲 n_1 次時,表面出現 a_1 次;投擲 n_2 次,表面出現 a_2 次;計算 $\frac{a_1}{n_1}$、$\frac{a_2}{n_2}$、……之值.若投擲之次數愈多,此等分數之值漸與定數 k 趨近.又如人之年齡問題,亦可如上法實驗之,先調查某年出生之 n_1 人中能達三十歲者為 a_1 人;又 n_2 人中能生存至該年齡者為 a_2 人;若統計之人數愈多,則或然率 $\frac{a_1}{n_1}$、$\frac{a_2}{n_2}$、……之值亦趨一定(k).此情形中,可以 k 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n}$ 為所求或然

率之定義.

定義 在 n 次之實驗中,某事件發生之次數爲 a,如 n 非常大時,則以 $\frac{a}{n}$ 爲該事件發生之或然率.

昔有某統計學大家,由盛有白球、黑球同數之袋中,每次取出一球,其結果如下:

取球之次數	白球出現	黑球出現	百分率	
			白	黑
4	1 次	3 次	25	75
16	8 次	8 次	50	50
64	28 次	36 次	44	56
256	125 次	131 次	49	51
1024	528 次	496 次	52	48
4096	2066 次	2030 次	50.4	49.6

由上表知取球之次數愈多,則白黑兩球出現之次數漸趨一致,即各種球出現之或然率漸與 $\frac{1}{2}$ 接近.由此知從盛同數之白黑球之袋中取出各球時之經驗的或然率爲 $\frac{1}{2}$,此與算學的或然率一致.

次章中所論之大數定律,即爲此經驗的或然率之理論.

4. 事象之區別

(a) 反排事象 (exclusive events) 一事象發生而他

事象決不發生時,此二事象稱爲反排事象.例如投擲骰子,當其發生四點時,則六點決不致同時發生.此爲互相反排事象.

(b)獨立事象與從屬事象 一事象,不問另一事象之發生與否,其發生之或然率一定,則此二事象爲獨立事象;否則爲從屬事象.例如擲二枚骰子,其一出現三點,另一出現六點.此兩事象之發生互爲獨立而無任何關係.但由盛有白球二個,紅球三個之袋中取出一球後,再取一球,則第二次取球時與第一次所取出者有連帶關係,因其或然率隨第一次取出之球之爲白爲紅而變也.

5. 或然率之加法定理

E 事象爲由 i 個反排事象 E_1、E_2、……E_i 所成.設 E_1、E_2、……E_i 發生之或然率爲 p_1、p_2、……p_i. E 之發生或然率爲 p,則

$$p=p_1+p_2+\cdots\cdots+p_i.$$

證 設以 n 表總方法數,則 E_1 發生方法之數爲 np_1(由或然率定義),同樣 E_2、E_3、………發生之方法數爲 np_2、np_3、…….但 E_1、E_2、……E_i 等爲反排事象,不能同時發生.故各事象發生方法數之總和等於 E 事象發生方法之數,即

$$p=\frac{1}{n}(np_1+np_2+\cdots\cdots+np_i)=p_1+p_2+\cdots\cdots+p_i.$$

例 某學校學生會之委員名額,以各院學生人數之多寡爲比例,分配爲甲院三名,乙院四名,丙院五名,其中互選一人爲委員長.問甲乙兩院之委員中能當選委員長之或然率爲何.

解 因委員之人數爲十二,而由甲乙兩院選出者爲七,故甲乙兩院之委員能當選爲委員長之或然率 p 爲

$$p=\frac{7}{12}.$$

然 $\frac{7}{12}=\frac{3}{12}+\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$ 爲甲院委員當選委員長之或然率 p_1, $\frac{4}{12}$ 爲乙院者之或然率 p_2,故得

$$p=p_1+p_2.$$

6. 或然率之乘法定理(複或然率之定理)

例 1 A 袋中盛有白球三、紅球五,B 袋中白球二、紅球五,今由二袋中各取一球,其均爲白球之或然率爲何?

解 由 A 袋中取出一枚白球之事象 (E_1) 與由 B 袋中取出白球一枚之事象 (E_2),乃係毫無相互關係之獨立事象.但 E_1 發生之方法數爲 3. E_2 者爲 2, E_1、E_2 同時

發生之方法數爲3×2.又E_1發生及不發生之總方法數爲8,E_2者爲7,E_1、E_2發生及不發生之總方法數爲8×7.故E_1、E_2同時發生之或然率爲

$$\frac{3\times2}{8\times7}=\frac{3}{28}.$$

但E_1發生之或然率爲$\frac{3}{8}$,E_2發生之或然率爲$\frac{2}{7}$,其積爲$\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$;故$E_1$、$E_2$同時發生之或然率等於各事象發生之或然率之積.

例 2　一袋中盛有白球三枚,紅球五枚,由其中取出一球後,再取一球,試求二球均爲白球之或然率.

解　由盛有白球三、紅球五之袋中取出一白球後,袋中計有白球二,紅球五,故本例實與前例相同,惟文字上有差異而已.但如本例,第一次取出白球之事象,與第二次取出白球之事象謂之從屬事象.

由以上二例,得次之定理:

定理 1　設E事象爲同時或逐次發生之i個獨立事象E_1、E_2、……E_i所成;以p_1、p_2、……p_i表E_1、E_2、……E_i發生之或然率,則E發生之或爲率p爲

$$p=p_1\times p_2\times\cdots\cdots p_i.$$

定理 2　E事象爲由逐次發生之i個從屬事象

E_1、E_2、……E_t所成.E_1發生之或然率爲p_1;E_1發生時,E_2發生之或然率爲p_2;E_1、E_2發生時,E_3發生之或然率爲p_3.依次順推,E_1、E_2、……E_t各事象均發生之或然率,即E事象發生之或然率p爲

$$p=p_1p_2p_3\cdots\cdots p_t.$$

證明 一般的證明頗爲繁雜;兹就二事象E_1、E_2所成之事象E證明之.此證明可適用於E_1、E_2之爲獨立事象及從屬事象.

今以m_1表E_1事象發生之方法數,n_1爲方法總數,m_2表E_2事象發生之方法數,n_2爲方法總數.

但E_1發生時,E_2亦發生之方法數爲$m_1\times m_2$;又E_1、E_2之發生及不發生之方法總數爲$n_1\times n_2$;故E_1、E_2同發生之或然率p爲

$$p=\frac{m_1\times m_2}{n_1\times n_2}.$$

然E_1發生之或然率爲$p_1=\frac{m_1}{n_1}$,E_2者爲$p_2=\frac{m_2}{n_2}$;其相乘積

$$p_1p_2=\frac{m_1}{n_1}\times\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1m_2}{n_1n_2},$$

$$\therefore\qquad p=p_1p_2.$$

別證(1) E_1、E_2同發生之方法數爲a,E_1發生E_2

不發生之方法數爲b;E_1、E_2之發生及不發生之方法總數爲n,則E_1、E_2一同發生之或然率p爲

$$p=\frac{a}{n}.$$

E_1發生之方法數爲$a+b$,故E_1發生之或然率$p_1=\frac{a+b}{n}$;又E_1發生而E_2亦發生之方法數爲a,故E_1發生而E_2亦發生之或然率$p_2=\frac{a}{a+b}$,故

$$p_1p_2=\frac{a+b}{n}\times\frac{a}{a+b}=\frac{a}{n},$$

即
$$p=p_1p_2.$$

別證(2) 以n表方法總數,則E_1發生之方法數爲np_1.此np_1方法中,E_2發生之方法數爲$p_2(np_1)=p_1p_2n$,即E_1、E_2同發生之方法數爲p_1p_2n;故E_1、E_2同發生之或然率p爲

$$p=\frac{p_1p_2n}{n}=p_1p_2.$$

由別證(2)之方法,頗易擴張至三個以上之事象.

例 3 投一顆骰子二次,其第一次點數爲一,第二次之點數爲六之或然率若何?

解 第一次得一點之或然率爲$\frac{1}{6}$,第二次得六點之或然率亦爲$\frac{1}{6}$.此兩事象互相無關,爲獨立事象,故由

複或然率定理得所求之或然率為

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}.$$

例 4　今有袋二個,甲袋中白球三而紅球四;乙袋中白球五而紅球二.隨意在任一袋中取出一球,其為白球之或然率若何?

解　袋有兩個,則由甲袋取球之或然率為 $\frac{1}{2}$.而由甲袋取出一白球之或然率為 $\frac{3}{7}$,故由甲袋取得白球之或然率為 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}$(定理 2).同理由乙袋取得白球之或然率為 $\frac{1}{2}\times\frac{5}{7}$.但手伸入甲袋則不能入乙袋,為反排事象,故取得白球之或然率為

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{7}=\frac{4}{7}.$$

例 5　一袋中盛有三個白球及二個黑球,先某甲取出一球,如為白球則甲勝,否則甲負;另由某乙從其所餘之球中取出一個,若為白球則乙勝,否則乙負;再由甲於所餘球中取出一個,取得白球則甲勝.試求甲、乙二人得勝之或然率之比.

解　第一回甲取一白球之或然率為 $\frac{3}{5}$.若甲失敗,則由乙取.此時乙取得白球之或然率為 $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$.若乙亦失敗而再由甲取.因所餘之球皆為白球.故甲勝.其或然

率爲 $\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$.

故甲得勝之或然率爲

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{10}$$

乙得勝之或然率爲

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}.$$

甲乙兩人得勝之或然率之比爲7:3.

問　題

1. 投骰子二顆,其點數各爲六之或然率若何?

2. 一袋中盛有白球三枚,紅球二枚.先取出一球爲紅,次取一球爲白之或然率若何?

3. 甲袋中白球三,赤球五;乙袋中白球四,赤球六.任意從一袋取出二球,其均爲赤球之或然率若何?

4. 由午前六時至午後六時之間,甲服務五小時,乙服務三小時;在某瞬間內(I)兩人同時服務之或然率若何?(II)任一人服務之或然率若何?

5. 一袋盛白球五,黑球二.甲乙二人順次由其中每次取出一球(但取出之球不放還袋中);以取白者爲勝.試求甲乙二人得勝之或然率之比.

7. 反復試行之或然率

同一事象反復行之,如繼續擲骰若干次,或由一袋

中取出一球後,將球復置袋中,再取一球,如此繼續爲之,謂之反復試行.

例 1 有袋十個,每袋中盛白球三、紅球五,今從各袋取出一球,內中三個爲白、七個爲紅之或然率若何?

解 由一袋取得白球之或然率爲 $\frac{3}{3+5}=\frac{3}{8}$,以 p 表之,則由一袋取得紅球之或然率當爲 $1-p$,而以 q 表之,得 $q=\frac{5}{8}$. 但由乘法定理知:從三個袋中取得白球,其餘七個袋中取得紅球之或然率爲

$$p^3q^7=\left(\frac{3}{8}\right)^3\left(\frac{5}{8}\right)^7.$$

由組合之定理,在十個袋中選出三個袋之方法計有 ${}_{10}C_3$ 種.故取得白球三枚及紅球七枚之或然率爲

$${}_{10}C_3p^3q^7={}_{10}C_3\left(\frac{3}{8}\right)^3\left(\frac{5}{8}\right)^7.$$

例 2 由盛有白球三枚、紅球五枚之袋中取出一球,將其顏色記出後,仍放入袋中,又取一球同樣行之,如此十次,試求取出之球,其顏色三個爲白、七個爲紅之或然率.

解 本例乃與例 1. 相同,所求之或然率亦爲

$${}_{10}C_3p^3q^7={}_{10}C_3\left(\frac{3}{8}\right)^3\left(\frac{5}{8}\right)^7.$$

上式係二項式 $(q+p)^{10}$ 展開式之第四項.

由以上之說明,得次之重要定理:

定理 在一次之試行中,某事象 E 發生之或然率為 p,其不發生之或然率為 q,於 n 次試行中 E 事象發生 r 次之或然率為二項式 $(q+p)^n$ 展開式之第 $r+1$ 項 ${}_nC_r p^r q^{n-r}$.

系 n 次試行中,E 事象至少有 r 次發生之或然率為 $(p+q)^n$ 展開式中由第一項至第 $(n-r+1)$ 項之和.

例 3 擲骰六次,試求(I)六次均為一點之或然率;(II)四次得一點之或然率;(III)至少有三次為一點之或然率.

解 由骰之性質,得

$$p=\frac{1}{6},\quad q=\frac{5}{6}.$$

故(I)六次均為一點之或然率為 $\left(\frac{1}{6}\right)^6$;

(II) 四次得一點之或然率為 ${}_6C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{3\times5^3}{6^6}$;

(III) 至少有三次為一點之或然率為

$$p^6+{}_6C_1p^5q+{}_6C_2p^4q^2+{}_6C_3p^3q^3$$
$$=\left(\frac{1}{6}\right)^6+{}_6C_1\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)+{}_6C_2\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2+{}_6C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3.$$

例 4 甲乙二人作圍碁賽,但甲乙之力量為二與一之比,試求乙勝二次之甲勝三次之或然率.

解 三次中甲勝二次,乙勝一次.故甲勝之或然率為 $p=\frac{2}{3}$, 失敗之或然率為 $q=\frac{1}{3}$. 但乙勝二次甲能勝三次,卽四次試行中甲至少須勝三次之意,故由系得

$$p^4+4p^3q=\left(\frac{2}{3}\right)^4+4\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{48}{81}=\frac{16}{27}.$$

問題

1. 將一骰擲五次,一點僅出一次之或然率爲何?

2. 擲鎳幣十次,其中三次出現表面之或然率爲何?

3. 有一學生,於三問題中平均能解答二題.但在某次試驗時,所出五題中能解答三題卽能及格.試求此學生能及格之或然率.

4. 在某種決勝時,四次中甲勝三次,乙勝一次;但乙勝三次前,甲勝三次之或然率爲何?

第二編 最小二乘法

第三章 緒 論

1. 觀察値

研究各種科學時,其主要工作之一爲對於各事物作數量的考察,而決定其對應之數値.此種數値,隨對象物之如何,或利用科目之種類而異其名稱,有測定値、觀測値、觀察値、測度等,在本書中概稱爲觀察値 (observed value).

但與一事物對應之眞値 (true value) 無由測定,僅能由種種方法作多次之觀察,然後由甚多之觀察値中決定最可信賴之値,且決定其信賴之程度.

設觀察値有 n 個,通常以 M_1、M_2、M_3、……M_n 或 X_1、X_2、X_3、……X_n 表之.

2. 觀察之分類 (classification of observations)

- 觀察
  - 直接觀察
    - 獨立觀察
    - 條件觀察
  - 間接觀察
    - 獨立觀察
    - 條件觀察

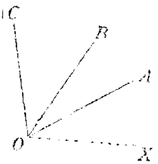
直接觀察(direct observation) 直接測定所求之數值,謂之直接觀察.例如以尺測量長度,用天秤稱出物體之質量,以代替法量出導線之電阻.

間接觀察(indirect observation) 不直接測定所求之數值,而將與其有關之其他數值加以測定,以間接決定所求之數值,謂之間接觀察.物理學及工學上之觀察多屬於此類.例如直接測出圓之半徑,間接的求出圓之面積或球之體積;由測定單擺之長及振動週期以測定重力加速度;用分光鏡測量三稜鏡之角度及最小偏向以決定一物質之折射率.

獨立觀察(independent observation) 不問其為直接或間接觀察,其數值上並無任何條件之存在時,謂之獨立觀察.例如測定三角形之兩角時,其間無何種條件之關係.

條件觀察(conditional observation) 不問其為直接或間接,觀察之數值須適合於理論上之嚴密條件者,謂之條件觀察.例如測定平面三角形三內角時,其和須等於180°;測定百分比時,其和須等於100.

例 置測角器於 O 點,直接測定 $\angle AOB$ 及 $\angle BOC$,此乃直接觀察也.若由 $\angle XOA$、$\angle XOB$、$\angle XOC$ 之測定,以定



第一圖

$\angle AOB$及$\angle BOC$之大小,乃間接觀察也.至於僅將$\angle AOB$及$\angle BOC$測定,乃獨立觀察.若須將$\angle AOC$測出,且有$\angle AOC=\angle BOC+\angle AOB$之條件必須滿足,則為條件觀察.

3. 誤差及誤差之分類

測定某數量時,其眞值不能知,觀察值與眞值之差,謂之誤差(errors).如下所述,此誤差有可設法避免者,有不能避免者.

誤差
- (1) 常差(constant errors)
  - 由於器械者.
  - 由於個人者.
  - 由於理論者.
- (2) 過失(mistakes)
- (3) 偶差(accidental errors)

常差 或稱有規則之誤差(systematic errors),為由旣知之原因所發生,可從測量之結果設法除去之.常差又可分為次之三種:

(*a*)器械誤差(instrumental errors) 此乃由於器械構造或調準(adjustment)之不良有以致之.例如螺旋測微器、尺標之刻度不正確,天秤兩臂之不均等,此等誤差可於測定時用反逆法消去,或預將所用之器械嚴密檢查以求出之.

(*b*) 個人誤差(personal errors) 此乃由於觀察者個人之癖性所發生者.例如記錄一現象發生之時間或過快或過慢,此種個人誤差雖經驗豐富之觀察者亦所難免,然老於斯事者,其發生之誤差,常爲一定.

(*c*) 理論誤差(theoretical errors) 此由於器械在使用時之狀況下,其刻度發生變化所致.

以上所述誤差,可由下引之例以明之.設化學天秤之兩臂不等長,以通常方法用此天秤所權出物體之重量,其中定含有一定之誤差.以同一方法在同一天秤上反復權量時,不能發覺此種誤差之存在.惟用不同方法或用不同之天秤權衡同一物體,將其所得種種之結果比較之,方可檢出此誤差之存在.因不同之器械而具有同一之器械誤差者,其或然率極小也.

再如用尺標在 20°C. 時測量長度,但尺標係在 0°C 校正者,若在同一狀況下以同一方法反復量度,惟能知所得各值非常一致而已,但其中所含之常差實無由發現.尺標因膨脹之故而增長,故所得之觀察值較眞值爲小.但此誤差可從製造尺標之金屬之膨脹係數求出而消去之.

檢出及消去此種誤差之法,必須用不同方法、不同

器械.可能時,用不同之觀察者以觀察同一量,而將其結果用特殊之方法(後當述之)處理之,蓋在不同之狀況下,而具有誤差發生之同一原因者,其或然率極小故也.昔英國協會(British Association Committee)測定電阻單位歐姆時,因所得之結果非常一致,遂認所測定之值極為可靠,而未檢出有常差存在其中.及後由其他觀察者用不同之方法測定此量時,竟發見所得之值與英國協會之標準值相差在百分之一以上.因而知有常差之存在.而當時實未被檢出也.

過失(mistakes)　此由於觀測者之不熟練或精神錯亂所生之結果.例如將讀度(reading)30記為13,或將52認作48,此種誤差由精細檢查所記之結果即可發現而設法消去之.

偶差(accidental errors)　以上所述之常差及過失均可由其發生之原因而設法消去.然尚有殘餘之小誤差,勢不能完全除去者,此之謂偶差.例如由於天秤兩臂之不均等所生之器械誤差,可設法求得兩臂之比以改正之,但決定兩臂之比時,其精密度自有限度,當不免含有誤差.故如是所得之改正值,亦有誤差其大小隨改正值之精密度而異.再如尺標因膨脹而發生之誤差,可由

實驗測定製造尺標之金屬之膨脹係數以改正之;但測定此係數時,僅有某程度之精密度,從而由此係數所改正之結果,亦仍有誤差存在.

吾人嘗經驗得知某一量經同一器械及同一觀察者在同一狀況下反復觀察所得之結果,通常在末位或末二位數字上有所差異.例如測定兩線間之距離時,所用之尺標可測至毫米,各次所測結果在$\frac{1}{10}$毫米上常不一致.發生此種時大時小之差異結果,其原因實非觀察者所能控制.如溫度驟變,使器械各部發生相異之膨脹;光之折射,氣壓計之變化,器具為風所吹動等,均係偶然的遭遇而無法避免者.此項不規則之誤差,驟視之似無算學的研究之餘地;但詳加探討,則知實受或然率之定律所支配.本書以下所稱誤差,如無特別言明,均係指此偶差而言,而不含有過失及常差.

最小二乘法之目的即在對於某觀察量反復施行觀察,以期偶差之互相消却,而得到最確之結果.

4. 殘差 (residuals)

以X表某量之眞值,n次所得之觀察值為M_1、M_2、M_3、……M_n, 其誤差為x_1、x_2、x_3、……x_n,則有

$$\left.\begin{array}{l} M_1 - X = x_1 \\ M_2 - X = x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_n - X = x_n \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots [1]$$

略記之如次:

$$M_i - X = x_i (i = 1, 2, 3, \cdots n) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots [1]'$$

前曾述及,某量之眞值無由得知,從而誤差亦不能求出,故吾人僅能由種種之觀察值決定一最良值,或稱或然值(most probable value).觀察值與此最良值之差稱爲殘差,以 ν_1、ν_2、$\cdots\cdots\nu_n$ 表之,而以 X_0表最良值,得

$$\left.\begin{array}{l} M_1 - X_0 = \nu_1 \\ M_2 - X_0 = \nu_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_n - X_0 = \nu_n \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots [2]$$

略記之如次:

$$M_i - X_0 = \nu_i (i = 1, 2, 3, \cdots n) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots [2]'$$

5. 算術平均

設某數量 X 之觀察值爲 M,若該觀察十分準確,則當有

$$X - M = 0.$$

之關係,但就一般經驗,對於一數量之多次觀察,所得之結果不同,每次觀察中總有多少誤差存在,如[1]式所示.[1]式中未知數有$(n+1)$個,而方程式僅有 n 個,吾人將如何解此等方程式以求出各未知數之值.但吾人知 X 之值爲觀察值之函數,其值在最大與最小觀測值之間.若將此等觀測值依照大小之次序而排列之,則知其分配於一個中央值之兩側.如觀察次數爲奇數,則可選定配列中之中央值爲 X 之最良值;若爲偶數則選定二個中央值中之任一數.換言之,觀測值之大於 X 最良值之數與小於該值之數相等.觀測次數相同時,中央值以外之值雖稍有變化,亦不影響於結果,故此方法在觀察值間有顯著之差異時似特適當,而其缺點則爲僅取觀察值之一個,實則其他各值本以同一之注意所測得者,其於未知數之影響亦相同,不能捨此而取彼也.由理論上言之,未知數 X 之值當取觀察值之對稱函數(symmetrical function) X_0.但觀察值最簡單之對稱函數當推算術平均(arithemetical mean),卽

$$X_0=\frac{M_1+M_2+M_3+\cdots+M_n}{n}=\frac{\Sigma M}{n}=\frac{[M]}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{【3】}$$

其中之 $\Sigma=[\ ]$,爲本書所採用之總和符號.此原理可述之如次:

若對於某未知數有 n 個測定值,此等值均同樣可靠,則此未知數之最良值爲其算術平均.

對稱函數中,除算術平均外容或有更善者,但由前述之結果與經驗之記錄比較,得確定算術平均爲最善之形式.茲將[1]式相加而取其平均,則有

$$X=\frac{[M]}{n}+\frac{[x]}{n}=X_{0}+\frac{[x]}{n}.$$

若 n 極大而 x 常甚小時,則 $\frac{[x]}{n}$ 爲極小值.故 n 極大時 $\frac{[x]}{n}$ 與 X 比較可視爲微分小,此時 $X=X_{0}$.即觀測次數極多時,算術平均爲眞值.

6. 關於算術平均之定律

由算術平均之原理,得如下之二重要定律:

I. 第一定律　將[2]式相加,得

$$[M]-nX_{0}=[v],$$

$$\therefore \qquad [v]=0 \cdots\cdots\cdots\cdots \textbf{【4】}$$

即殘差之和爲零.換言之,正殘差之和與負殘差之和相等.

此處所當注意者,n 爲無限大時 X 爲眞值,與 n 爲有限大時以算術平均 X_{0} 爲最良值,其間有相似之處,即前者之誤差總和爲零,後者之殘差總和爲零是也.

II. 第二定律　以X'爲算術平均以外之假定值,且令

$$\left.\begin{array}{l} M_1 - X' = \nu_1' \\ M_2 - X' = \nu_2' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_n - X' = \nu_n' \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \textbf{【5】}$$

將[2]式各方程式自乘且相加,得

$$[\nu\nu] = [MM] - 2X_0[M] + nX_0^2 \cdots\cdots\cdots\cdots \textbf{【2】}''$$

$[\nu\nu]$及$[MM]$爲ν及M之自乘總和符號.

將[5]式各方程式自乘且相加,得

$$[\nu'\nu'] = [MM] - 2X'[M] + nX'^2 \cdots\cdots\cdots\cdots \textbf{【5】}'$$

由$[5]'$式減去$[2]''$式得

$$[\nu'\nu'] = [\nu\nu] + \frac{[M]^2}{n} - 2X'[M] + nX'^2 = [\nu\nu] + n\left(\frac{[M]}{n} - X'\right)^2.$$

但
$$\left(\frac{[M]}{n} - X'\right)^2 \geqq 0,$$

$$\therefore \quad [\nu'\nu'] \geqq [\nu\nu] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)\textbf{【5】}''$$

即以算術平均爲最良值時,殘差ν之平方和爲最小,反之,求得使殘差平方之和爲最小之值,即爲最良值,其證明後當述之.

7. 求算術平均別法

下述方法較由公式 $X_0=\dfrac{[M]}{n}$ 以求 X_0 之手續爲簡.

例

M	$M-A$	$\nu(=M-X_0)$
601·4	−0·6	−0·63
603·4	+1·4	+1·37
603·1	+1·1	+1·07
601·8	−0·2	−0·23
600·6	−1·4	−1·43
599·7	−2·3	−2·33
602·7	+0·7	+0·67
603·7	+1·7	+1·67
602·1	+0·1	+0·07
601·8	−0·2	−0·23
	5·0−4·7 =0·3	4·85−4·85 =0

$$A=602,$$

$$X_0=602+\frac{0{\cdot}3}{10}$$

$$=602.03.$$

說明　求算術平均時,先任意決定與各觀察值相近之值 A, 如上例 $A=602$, 次將 $M-A$ 之平均 0·03 加於 A 即得.

與各觀察值相近之值(A),謂之假平均值,以 ν'_1、ν'_2、……ν'_n 表假殘差 M_i-A, 則 A 之補正值 d 爲

$$d=\frac{[\nu']}{n}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

即

$$X_0=A+d\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$【6】

由次之形式可求得算術平均:

M	$v'(=M-A)$	$v(=M-X_0)$
M_1	v'_1	v_1
M_2	v'_2	v_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
M_n	v'_n	v_n
	$[v']$	$[v]$

$$A=\cdots\cdots\cdots,$$
$$d=\frac{[v']}{n}$$
$$=\cdots\cdots\cdots,$$
$$X_0=A+d$$
$$=\cdots\cdots\cdots.$$

各殘差及其總和 $[v]$ 本無直接的需要,但為檢算(check) $[v]=0$ 起見,故須一併錄出.

問 題

1. 五次測定銅線直徑之結果為3.2, 2.9, 2.9, 3.0, 3.2,試求其最良值及殘差之和.

2. 測定某基線之長,其結果如下,試求其最良值及殘差和.

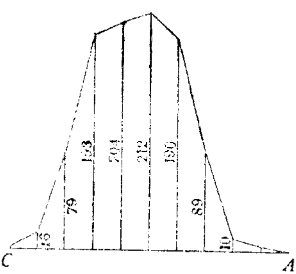
312.2, 312.4, 312.3, 311.9, 311.8, 312.3, 312.0, 311.9.

第四章　誤差之或然率

1. 基本性質

例　槍彈射擊演習之靶高十一英尺,寬五十二英尺,引水平平行線,分靶爲十一等區間,以通過靶中央之水平線爲標準,發射一千發槍彈,其分佈如右(據美國軍械局1878年報告):

	區間	命中子彈數
1	$+5\frac{1}{2}$ 至 $+4\frac{1}{2}$ (最上)	1
2	$+4\frac{1}{2}$ 至 $+3\frac{1}{2}$	4
3	$+3\frac{1}{2}$ 至 $+2\frac{1}{2}$	10
4	$+2\frac{1}{2}$ 至 $+1\frac{1}{2}$	89
5	$+1\frac{1}{2}$ 至 $+\frac{1}{2}$	190
6	$+\frac{1}{2}$ 至 $-\frac{1}{2}$ (中央)	212
7	$-\frac{1}{2}$ 至 $-1\frac{1}{2}$	204
8	$-1\frac{1}{2}$ 至 $-2\frac{1}{2}$	193
9	$-2\frac{1}{2}$ 至 $-3\frac{1}{2}$	79
10	$-3\frac{1}{2}$ 至 $-4\frac{1}{2}$	16
11	$-4\frac{1}{2}$ 至 $-5\frac{1}{2}$ (最下)	2



第二圖

以區間次序數字作橫座標,各區間內命中子彈數作縱座標,作成第二圖。

由表中之數字知最上(A)及最下(C)區間內命中子彈數甚少,而中央線兩側各對應區間內命中數幾相等,而中央線以下命中數之所以略多者乃基於描準時未將重力作用所生之常差盡量除去之故.

在此例中,子彈距中央線之距離即係表誤差之大小,故得如次之公理:

(i) 小誤差之數較大誤差者爲多.

(ii) 絕對值相等之正誤差個數與負誤差個數相等.

(iii) 甚大之誤差不發生.

以上三公理又可改述之如次:

(i′) 發生小誤差之或然率較發生大誤差者爲大.

(ii′) 絕對值相等之正誤差與負誤差,其發生之或然率相等.

(iii′) 甚大誤差發生之或然率爲零.

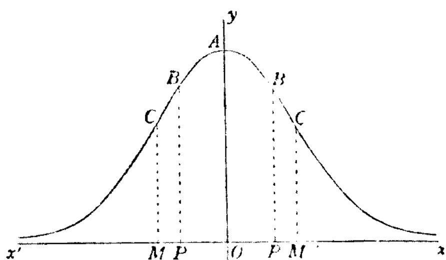
故誤差發生之或然率視誤差之大小爲轉移;換言之,誤差發生之或然率爲誤差之函數.惟第三公理中所云甚大二字,意義頗覺含糊,茲舉例以明之.例如使用能測至一秒之經緯儀時,則20秒之誤差可稱甚大;若經緯儀之最小讀度爲一分,則五分之誤差亦爲甚大矣.在測量上,誤差應有其界限,今以 l 表之,正誤差在 0 至 $+l$之

間,負誤差在 0 至 $-l$ 之間.因誤差發生之或然率爲誤差之函數,故以 x 表誤差,而 y 表其或然率,則誤差之或然率定律可以下式表之:

$$y=f(x)\cdots\cdots(1)【7】$$

若將 $f(x)$ 之形式決定,即得或然率曲線矣.

今以 y 爲縱軸,x 爲橫軸,此曲線式當與前述三公理一致,即其最大縱距 OA 與誤差 0 一致;又因同大之正負誤差同樣發生,故此曲線當與 y 軸對稱;x 之絕對值增加,y 之值次第減少,x 非常大時,y 之值爲零.故此曲線當如第三圖.OP 及 OM 表誤差,PB 及 MC 表其或然率.



第　三　圖

決定此曲線方程式,必須 y 爲 x 之連續函數,因觀測精密時,誤差連續值之差甚小.x 之值在界限 $\pm l$ 以外時,y 之值必須爲零,如是則第三公理似有不合,蓋 $x=\pm l$ 時,y 爲零,而對於由 $\pm l$ 至 $\pm\infty$ 間一切 x 之值,y 均爲零,如此實不能決定 y 之連續函數也.界限 l 既不能精密決定,故宜將界限擴至 $\pm\infty$.此時 y 對於 x 之大

値雖不能爲零,然實際已小至不必列入計算,於是可以決定曲線式.

此或然率曲線式乃算學的表示觀察誤差發生之或然率定律.求此定律之法有海根氏(Hagen)及高斯氏(Gauss)二種.

2. 海根氏求誤差定律法

海根氏法乃基於經驗所得之假設,即「一切誤差爲無數個獨立無窮小元素誤差(elementary errors)之代數和,各元素誤差大小互相等,可爲正爲負.」兹說明之如次:

以水平儀及標桿測定二點間之高低差,設所得之値爲 h,此値與眞正之高低差相差 x,此誤差 x 發生之原因蓋有多種,例如水平儀並非水平.或器械受風而動搖,或太陽之熱使器械之一側膨脹,或水平儀之氣泡不甚精密,或玻璃質料不良,讀數不明,或三脚架未固定,或觀察者之目不完全,或大氣發生不規則之折射,或標桿未垂直樹立,或標桿之刻度不準,或目標未適當固定,以及其他種種原因集合而發生此誤差 x.而以上所舉各原因,又爲其他多數之原因所集合而成.故曰誤差 x 之發生,乃由於無數個無窮小之元素誤差所集合而成也.

正元素誤差之數與負元素誤差之數大約相等者,因其比較一方多於他方或少於他方時爲最可信,而一切元素誤差均爲正或均爲負之或然率非常小也.由前者之結果,使實際之誤差非常小,而由後者之結果使實際之誤差非常大;故小誤差發生之或然率最大,大誤差發生之或然率實際上等於零.此與或然率曲線所須具之性質一致.

今以 E 表元素誤差之大小,E 爲正之或然率等於 $\frac{1}{2}$,而爲負之或然率亦等於 $\frac{1}{2}$;故 n 個元素均爲正之或然率爲 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$,而 $(n-1)$ 個爲正,一個爲負之或然率爲 $n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^1$.以下各種情形之或然率與二項定理之對應項相同.若 n 個元素誤差皆爲正時所生之誤差之大小爲 nE;$(n-1)$ 個爲正,一個爲負所生之誤差大小爲 $(n-1)E-E=(n-2)E$;$(n-m)$ 個爲正,m 個爲負所生之誤差大小爲 $(n-m)E-mE=(n-2m)E$,此誤差發生之或然率爲 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^n$ 展開式之第 $(m+1)$ 項,故可書之如下:

元素誤差	誤差 x	或然率 y
n 個爲 $+$,0 個爲 $-$.	nE	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$
$(n-1)$ 個爲 $+$,1 個爲 $-$.	$(n-2)E$	$n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$(n-2)$個為$+$，2個為$-$.	$(n-4)E$	$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$
$(n-3)$個為$+$，3個為$-$.	$(n-6)E$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$
…………………………	…………	…………………………
$(n-m+1)$個為$+$，$(m-1)$個為$-$.	$(n-2m+2)E$	$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(m-1)}\left(\frac{1}{2}\right)^n$
$(n-m)$個為$+$，m個為$-$.	$(n-2m)E$	$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots m}\left(\frac{1}{2}\right)^n$
$(n-m-1)$個為$+$，$(m+1)$個為$-$.	$(n-2m-2)E$	$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(m+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^n$
…………………………	…………	…………………………

由第三圖 $y=f(x)$ 之曲線.$OM=$誤差(x)，$MC=$誤差(x)發生之或然率 y，$OP=$比 x 次小之誤差(x')，$PB=$誤差(x')發生之或然率 y'.由圖知

$$\lim\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{dy}{dx}.$$

此為曲線之微分方程式.故求誤差之或然率定律,須以 x 及 y 之項代入 $\frac{y-y'}{x-x'}$，使此極限與 $\frac{dy}{dx}$ 相同而積分之.

今 x' 為次於 x 之誤差,兩者之差為 $x-x'=2E$，而曲線若係連續的，$\frac{y-y'}{x-x'}$ 之值即等於 $\lim\frac{dy}{dx}$，兩個連續之誤差 x 及 x' 之值如為 $x=(n-2m)E$ 及 $x'=(n-2m-2)E$ 時,此兩誤差發生之或然率之比如次:

$$\frac{y'}{y}=\frac{\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(m+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots m}\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{n-m}{m+1}\cdots\cdots\cdots(1).$$

但 $$x=(n-2m)E,$$

故 $$\frac{x}{E}=n-2m\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

即 $$m=\frac{n-\frac{x}{E}}{2}=\frac{n}{2}-\frac{x}{2E}\cdots\cdots\cdots\cdots(3),$$

故 $$1-\frac{y'}{y}=1-\frac{n-m}{m+1}=\frac{2m+1-n}{m+1}$$

$$=\frac{n-\frac{x}{E}+1-n}{\frac{n}{2}-\frac{x}{2E}+1}=\frac{2(E-x)}{(n+2)E-x},$$

或 $$y-y'=y\times\frac{2(E-x)}{(n+2)E-x}=y\times\frac{-2x}{nE}=-\frac{2y}{nE}x\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

因分子中 E 比 x 爲小,分母中 2 比 n 小,故皆省略;又 nE 爲最大正誤差,比 x 爲大,故將 x 略去.

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{y-y'}{2E}=-\frac{2yx}{nE}\div 2E=-\frac{yx}{nE^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(5),$$

或 $$\frac{dy}{dx}=-2h^2yx\cdots\cdots\left[2h^2=\frac{1}{nE^2}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots(6).$$

將此式積分,得 $\log y=-h^2x^2+k\cdots\cdots\cdots\cdots(7),$

k 爲積分常數,或 $y=e^{-h^2x^2+k}=e^{-h^2x^2}e^k\cdots\cdots\cdots\cdots(8).$

因 e^k 爲常數,故得 $y=Ce^{-h^2x^2}\cdots\cdots\left[C=e^k\right]\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$**【8】**.

此爲或然率曲線之方程式,即表示觀察誤差之或然率定律之式也.此式合於由實驗所得之公理因 x 爲 0 時,

y 最大;與 y 軸對稱,因以同大之正負 x 值代入式中,y 之值不變;當 x 之值漸次增加,y 漸次減少而趨於零.式中常數 C 及 h 之意義,後當論之.

3. 高斯氏求誤差定律法

同一量之獨立測定,若均可同樣信賴,則正誤差與負誤差當一樣發生.徵之上述之例,可知在可信用之觀察中,小誤差之發生遠多於大誤差,而零之附近爲最多.

設在 0 與 x 間之誤差發生之或然率爲 $\psi(x)$, 在 x 與$x+dx$間者爲 q.

$$q=\psi(x+dx)-\psi(x)=\psi'(x)dx=f(x)dx\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但 $f(x)$ 爲 x 之函數.dx爲非常小,q 可視爲誤差 x 發生之或然率.誤差在任意極限值 b 與 l 間之或然率爲

$$\int_l^b f(x)dx,$$

故誤差之絕對值在 l 以內之或然率爲

$$\int_{-l}^{+l} f(x)dx.$$

$f(x)$ 之形式當可由或然率原理決定之.

設誤差 x_1 發生之或然率爲 $f(x_1)dx_1$,

誤差 x_2 發生之或然率爲 $f(x_2)dx_2$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

誤差 x_n 發生之或然率爲 $f(x_n)dx_n$，

若此等誤差系同時發生之或然率爲 P，則由或然率乘法定理，得次式之關係：

$$P=f(x_1)f(x_2)f(x_3)\cdots f(x_n)dx_1\,dx_2\,dx_3\cdots dx_n \cdots\cdots\cdots\cdots(2)【9】$$

若 P 爲極大，此一系之誤差最易發生，即誤差最小，而求得之觀測值爲最良值．將上式取對數，則

$$\log P=\log f(x_1)+\log f(x_2)+\cdots\cdots+\log f(x_n)$$
$$+\log dx_1+\log dx_2+\cdots\cdots$$
$$+\log dx_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

x_1、x_2、……x_n 等爲觀察某量 X 時之誤差．此 x_1、x_2、……x_n 當爲 X 之函數，從而 P 亦爲 X 之函數，故將上式就 X 微分之，得

$$\frac{d\log P}{dX}=\frac{d\log f(x_1)}{dx_1}\,\frac{dx_1}{dX}+\frac{d\log f(x_2)}{dx_2}\,\frac{dx_2}{dX}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{d\log f(x_n)}{dx_n}\,\frac{dx_n}{dX}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4),$$

但 dx_1、dx_2、dx_3、……dx_n 與 X 無關，$\frac{d(dx_i)}{dX}=0$，即

$$\frac{d}{dX}[\log dx_i]=\frac{d}{dx_i}[\log dx_i]\frac{d(dx_i)}{dX}=0,$$

故 $\log dx_1$、$\log dx_2$、……等之微分皆略去．

若使 P 爲極大，則當使 $\log P$ 爲極大，此時

$$\frac{d\log f(x_1)}{dx_1}\frac{dx_1}{dX}+\frac{d\log f(x_2)}{dx_2}\frac{dx_2}{dX}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{d\log f(x_n)}{dx_n}\frac{dx_n}{dX}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(5).$$

上式為一般討論所得之結果,當能適用於任何情形.在特殊情形中,$x_i=M_i-X$,則

$$\frac{dx_i}{dX}=-1 \quad (i=1,2,3,\cdots\cdots,n).$$

故上式可簡書之如下:

$$\frac{d\log f(x_1)}{dx_1}+\frac{d\log f(x_2)}{dx_2}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{d\log f(x_n)}{dx_n}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6).$$

由算術平均原理,觀察次數非常多時$[x]=0$,即

$$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7).$$

上二式同時成立,則其係數須成比例,即

$$\frac{d\log f(x_1)}{x_1dx_1}=\frac{d\log f(x_2)}{x_2dx_2}=\cdots\cdots=\frac{d\log f(x_n)}{x_ndx_n},$$

以 k 表各項之值,則

$$\frac{d\log f(x_i)}{x_idx_i}=k,\text{ 即 }\frac{d\log f(x_i)}{dx_i}=kx_i\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

積分之,得
$$\log f(x_i)=\frac{1}{2}kx_i^2+C_1,$$

或
$$f(x_i)=Ce^{\frac{1}{2}kx_i^2},$$

卽 $$f(x)=Ce^{\frac{1}{2}kx^2}\cdots\cdots(9)【8】.$$

但誤差大時,或然率當小,故 $\frac{1}{2}k$ 當爲負數,以

$$\frac{1}{2}k=-h^2,$$

得 $$f(x)=Ce^{-h^2x^2}\cdots\cdots【8】.$$

此與由海根氏法所得之結果相同.茲進而討論兩常數 C 與 h 之值及其意義.

4. C 之值

所有誤差當在最大誤差 $\pm l$ 之間,而 1 爲表示事件一定發生之符號,故

$$\int_{-l}^{+l}f(x)dx=C\int_{-l}^{+l}e^{-h^2x^2}dx=1\cdots\cdots(1)【10】$$

前已述及 l 之數值隨觀察之種類而異,不易明確決定,故以 $+\infty$ 及 $-\infty$ 爲誤差之極限,

$$\therefore\quad\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=C\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2x^2}dx=1\cdots\cdots(2),$$

卽 $$2C\int_0^{\infty}e^{-h^2x^2}dx=1\cdots\cdots(3),$$

因被積分函數爲偶函數.

若令 $hx=t$,則 $hdx=dt$,或 $dx=\frac{dt}{h}$,則

$$1=2C\int_0^{\infty}e^{-h^2x^2}dx=\frac{2C}{h}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt\cdots\cdots(4).$$

上式右端積分之值,可如下決定之.

令 $$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = A \cdots\cdots\cdots\cdots(5),$$

由定積分之性質,得 $$\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = A \cdots\cdots\cdots\cdots(6),$$

而 $$A^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(t^2+u^2)} du\, dt \cdots\cdots\cdots\cdots(7),$$

次設 $$u = t\cdot\nu,$$

則 $$du = t\cdot d\nu;$$

$$\therefore\quad A^2 = \int_0^{\infty} d\nu \int_0^{\infty} e^{-t^2(1+\nu^2)} t\cdot dt \cdots\cdots\cdots\cdots(8),$$

但 $$\int_0^{\infty} e^{-t^2(1+\nu^2)} t\cdot dt = \left[-\frac{e^{-t^2(1+\nu^2)}}{2(1+\nu^2)}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2(1+\nu^2)} \cdots\cdots\cdots\cdots(9),$$

$$\therefore\quad A^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{d\nu}{1+\nu^2} = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0\right) = \frac{\pi}{4},$$

或 $$A = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{h}{2C} \cdots\cdots\cdots\cdots(10)【11】,$$

$$\therefore\quad C = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdots\cdots\cdots\cdots(11)【12】.$$

故誤差定律可如下表之:

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \cdots\cdots\cdots\cdots(12)【13】.$$

別法 以 O 爲原點,OT、OU、OV 爲三直交軸,

$$A=\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\text{軸與曲線 }VtT\text{ 間之面積},$$

$$A=\int_0^\infty e^{-u^2}\,du=\text{軸與曲線 }VuU\text{ 間之面積}.$$

且 $$A^2=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(t^2+u^2)}dt\cdot du.$$

但 $v=e^{-t^2}$ 爲曲線 VtT 之方程式，$v=e^{-u^2}$ 爲曲線 VuU 之方程式，任一曲線在 V 軸周圍迴轉時，所生之曲面方程式爲

$$v=e^{-(t^2+u^2)}.$$

故二重積分 A^2 等於此曲線與水平平面間所含之體積之四分之一．若此體積乃由無數以 V 軸爲軸之同軸圓筒重叠而成，設相鄰之圓筒半徑各爲 r、$r+dr$，則此兩筒間圓圈之面積爲 $2\pi r\cdot dr$，其對應之高度爲

$$v=e^{-t^2-u^2}=e^{-r^2},$$

故 $$A^2=\frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-r^2}\cdot 2\pi r\,dr=\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore\quad A=\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{h}{2C}\qquad\cdots\cdots(13),$$

即 $$C=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\qquad\cdots\cdots(14).$$

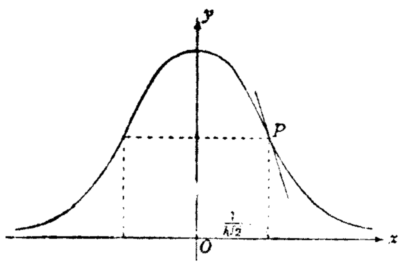
5. 或然率曲線

於 x 軸上取誤差之值，而 $y=f(x)$ 時，則 x 與 $x+dx$ 間

之誤差發生之或然率(約與誤差 x 發生之或然率相同)與面積 $f(x)dx$ 相一致.故或然率可以幾何的討論之.由此意義得曲線

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)【13】.$$

此稱爲或然率曲線.(probability curve, 第四圖).因此曲線方程式中僅含 x 之偶次乘方,故此曲線對稱於 y 軸,且 y 常爲正.又



第 四 圖

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}x\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}(1-2h^2x^2)e^{-h^2x^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

$x=0$ 時, $\frac{dy}{dx}=0$. 故或然率曲線交 y 軸之點之切線與 x 軸平行.又 $x=0$, $\frac{d^2y}{dx^2}<0$; 故 $x=0$ 時, y 爲極大. $x=\pm\infty$ 時, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$, x 軸爲漸近線.令 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, 則 $x=\frac{1}{\sqrt{2}h}$ ($=\varepsilon$,後當論之).故 $x=\frac{1}{\sqrt{2}h}$ 時,曲線上之點 P 爲變曲點(reflexion point).

6. 或然率積分 (probability integral)

誤差在 $-a$ 與 $+a$ 間之或然率 P 爲

$$P=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-a}^{+a}e^{-h^2x^2}dx \cdots\cdots\cdots\cdots (1).$$

令 $hx=t, h\,dx=dt$,

$$\therefore \qquad P=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-ah}^{+ah}e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ah}e^{-t^2}dt \cdots\cdots\cdots\cdots (2)\text{【14】}.$$

故 P 爲 ah 之函數.

***P* 之值:**

(I) $ah<1$ 時,

$$e^{-t^2}=1-t^2+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\frac{t^8}{4!}-\cdots\cdots \cdots\cdots (3)\text{【15】}.$$

將上式之值代入(2)式中而積分之,得

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big[(ah)-\frac{1}{3}(ah)^3+\frac{1}{2!}\,\frac{1}{5}(ah)^5$$

$$-\frac{1}{3!}\,\frac{1}{7}(ah)^7+\cdots\cdots\Big] \cdots\cdots (4)\text{【16】}.$$

(II) $ah>1$ 時,

$$\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\int_0^{ah}e^{-t^2}dt$$

$$+\int_{ah}^{\infty}e^{-t^2}dt \cdots\cdots\cdots (5),$$

$$\therefore \quad \int_0^{ah} e^{-t^2} dt = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \int_{ah}^{\infty} e^{-t^2} dt \cdots\cdots\cdots\cdots (6),$$

$$\therefore \quad P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \int_{ah}^{\infty} e^{-t^2} dt\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_{ah}^{\infty} e^{-t^2} dt\right] \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

設 $u=\frac{-1}{2t}$, $v'=-2te^{-t^2}$, 用部分積分法,則

$$\int_{ah}^{\infty} e^{-t^2} dt = \int_{ah}^{\infty} \frac{-1}{2t}\left(-2t\, e^{-t^2}\right) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2t} e^{-t^2}\right]_{ah}^{\infty} - \int_{ah}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\, dt$$

$$= \frac{e^{-a^2h^2}}{2ah} - \int_{ah}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\, dt \cdots\cdots\cdots\cdots (8).$$

再用同上次第積分,得

$$P = 1 - \frac{e^{-(ah)^2}}{ah\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{1}{2(ah)^2} + \frac{1\cdot 3}{2^2(ah)^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3(ah)^6} + \cdots\right] \cdots (9)【17】.$$

用(4)及(9)兩式之結果,計算(2)式之值,如下列各表.

第一表（已知 ha，求 P 之值）

公式　$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ha}e^{-t^2}dt$$

ha	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	差
0.0	0.0000	0.0113	0.0226	0.0338	0.0451	0.0564	0.0676	0.0789	0.0901	0.1013	113
0.1	1125	1236	1348	1459	1569	1680	1790	1900	2009	2118	110
0.2	2227	2335	2443	2550	2657	2763	2869	2974	3079	3183	106
0.3	3286	3389	3491	3593	3694	3794	3893	3992	4090	4187	100
0.4	4284	4380	4475	4569	4662	4755	4847	4937	5027	5117	92
0.5	5205	5292	5379	5465	5549	5633	5716	5798	5879	5959	83
0.6	6039	6117	6194	6270	6346	6420	6494	6566	6638	6708	74
0.7	6778	6847	6914	6981	7047	7112	7175	7238	7300	7361	64
0.8	7421	7480	7538	7595	7651	7707	7761	7814	7867	7918	55
0.9	7969	8019	8068	8116	8163	8209	8254	8299	8342	8385	45
1.0	8427	8468	8508	8548	8586	8624	8661	8698	8733	8768	37
1.1	8802	8835	8868	8900	8931	8961	8991	9020	9048	9076	30
1.2	9103	9130	9155	9181	9205	9229	9252	9275	9297	9319	23
1.3	9340	9361	9381	9400	9419	9438	9456	9473	9490	9507	18
1.4	9523	9539	9554	9569	9583	9597	9611	9624	9637	9649	14
1.5	9661	9673	9684	9695	9706	9716	9726	9736	9745	9755	10
1.6	9763	9772	9780	9788	9796	9804	9811	9818	9825	9832	7
1.7	9838	9844	9850	9856	9861	9867	9872	9877	9882	9886	5
1.8	9891	9895	9899	9903	9907	9911	9915	9918	9922	9925	4
1.9	9928	9931	9934	9937	9939	9942	9944	9947	9949	9951	3
2.0	9953	9955	9957	9959	9961	9963	9964	9966	9967	9969	2
2.1	9970	9972	9973	9974	9975	9976	9977	9979	9980	9980	1
2.2	9981	9982	9983	9984	9985	9985	9986	9987	9987	9988	1
2.3	9989	9989	9990	9990	9991	9991	9992	9992	9992	9993	
2.4	9993	9993	9994	9994	9994	9995	9995	9995	9995	9996	

第二表（已知$\dfrac{a}{r}$，求 P）

公式 $$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\rho\frac{a}{r}} e^{-t^2}\,dt \quad (r:\text{或然差},\ \rho=0.4769)$$

$\frac{a}{r}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	差
0.0	0.0000	0.0054	0.0108	0.0161	0.0215	0.0269	0.0323	0.0377	0.0430	0.0484	54
0.1	0538	0591	0645	0699	0752	0806	0859	0913	0966	1020	54
0.2	1073	1126	1180	1233	1286	1339	1392	1445	1498	1551	53
0.3	1603	1656	1709	1761	1814	1866	1918	1971	2023	2075	52
0.4	2127	2179	2230	2282	2334	2385	2436	2488	2539	2590	51
0.5	0.2641	0.2691	0.2742	0.2793	0.2843	0.2893	0.2944	0.2994	0.3043	0.3093	50
0.6	3143	3192	3242	3291	3340	3389	3438	3487	3535	3583	49
0.7	3632	3680	3728	3775	3823	3870	3918	3965	4012	4059	47
0.8	4105	4152	4198	4244	4290	4336	4381	4427	4472	4517	45
0.9	4562	4606	4651	4695	4739	4783	4827	4860	4914	4957	43
1.0	0.5000	0.5043	0.5085	0.5128	0.5170	0.5212	0.5254	0.5295	0.5337	0.5378	41
1.1	5419	5460	5500	5540	5581	5620	5660	5700	5739	5778	39
1.2	5817	5856	5894	5932	5970	6008	6046	6083	6120	6157	37
1.3	6194	6231	6267	6303	6339	6375	6410	6445	6480	6515	35
1.4	6550	6584	6618	6652	6686	6719	6753	6786	6818	6851	32
1.5	0.6883	0.6915	0.6947	0.6979	0.7011	0.7042	0.7073	0.7104	0.7134	0.7165	30
1.6	7195	7225	7255	7284	7313	7342	7371	7100	7428	7457	28
1.7	7485	7512	7540	7567	7594	7621	7648	7675	7701	7727	26
1.8	7753	7778	7804	7829	7854	7879	7904	7928	7952	7976	24
1.9	8000	8023	8047	8070	8093	8116	8138	8161	8183	8205	22
2.0	0.8227	0.8248	0.8270	0.8291	0.8312	0.8332	0.8353	0.8373	0.8394	0.8414	20
2.1	8433	8453	8473	8492	8511	8530	8549	8567	8585	8604	19
2.2	8622	8639	8657	8674	8692	8709	8726	8742	8759	8775	17
2.3	8792	8808	8824	8840	8855	8870	8886	8901	8916	8930	15
2.4	8945	8960	8974	8988	9002	9016	9029	9043	9056	9069	13
2.5	0.9082	0.9095	0.9108	0.9121	0.9133	0.9146	0.9158	0.9170	0.9182	0.9193	12
2.6	9205	9217	9228	9239	9250	9261	9272	9283	9293	9304	11
2.7	9314	9324	9334	9344	9354	9364	9373	9383	9392	9401	10
2.8	9410	9419	9428	9437	9446	9454	9463	9471	9479	9487	8
2.9	9495	9503	9511	9519	9526	9534	9541	9548	9556	9563	7
3.0	0.9570	0.9577	0.9583	0.9590	0.9597	0.9603	0.9610	0.9616	0.9622	0.9629	6
3.1	9635	9641	9647	9652	9658	9664	9669	9675	9680	9686	5
3.2	9691	9696	9701	9706	9711	9716	9721	9726	9731	9735	5
3.3	9740	9744	9749	9753	9757	9761	9766	9770	9774	9778	4
3.4	9782	9786	9789	9793	9797	9800	9804	9807	9811	9814	4
3.	0.9570	0.9635	0.9691	0.9740	0.9782	0.9818	0.9848	0.9874	0.9896	0.9915	
4.	9930	9943	9954	9963	9970	9976	9981	9985	9988	9990	
5.	9993	9994	9996	9997	9997	9998	9998	9999	9999	9999	
∞	1.0000										

第一表表中之數字爲與公式〔14〕中種種ha之值所對應之 P 值.

例 1　　$ah=0.43.$　　$P=0.457;$

$ah=0.436.$　　$P=?.$

解　查表$ah=0.44, P=0.466$, 故ah之值相差0.01時, P之值相差$0.466-0.457=0.009$.ah之值相差0.006,P之值當差$0.6\times0.009=0.0054$, 即

$$\underset{ah=0.436}{P}=0.457+0.0054=0.462.$$

如$h=1$, 則$ah=a$; 故$h=1$時,第一表中之值爲$-a$至$+a$間誤差之或然率.

例 2　$ah=0.43, P=0.457$;則$h=1$時,由-0.43至$+0.43$間誤差之或然率$P=0.457$.

公式〔14〕中之ah變爲$\rho\left(\frac{ah}{\rho}\right)$, 將與種種$\frac{ah}{\rho}$之值對應之$P$值算出,即爲第二表.如$\frac{ah}{\rho}=0.4$, 由第二表$P=0.213$. 但$ah=0.4\rho=0.4\times0.4769\fallingdotseq0.191$, 而由第一表與0.191對應之$P$值亦爲0.213,與第二表所得之結果一致,唯由第二表可簡單求得之.

如後所述$\frac{h}{\rho}=\frac{1}{r}$($r$爲或然差),$\frac{ah}{\rho}$可以$\frac{a}{r}$表之.而第二表之值爲下列公式中$\frac{a}{r}$之種種值所對應之$P$值.

$$\text{公式}\quad P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\rho\frac{a}{r}}e^{-t^2}dt.$$

例 3 ah 比 0.42 小之或然率為何?又觀察 100 次中,誤差 a 之絕對值比 $\frac{0.42}{h}$ 爲小時有幾次?

解 $ah=0.42$ 時,由第一表知所求之或然率 P 爲

$$P=0.448.$$

其次,a 比 $\frac{0.42}{h}$ 爲小時,即 ah 比 0.42 爲小,則 100 次觀察中,發生此種情形之次數爲

$$100\text{ 回}\times 0.448=44.8\text{ 回}\fallingdotseq 45\text{ 回}.$$

例 4 觀察 1000 次中,誤差比 $0.12r$ 爲小時有幾次?

解 誤差 $a=0.12r$,則

$$\frac{a}{r}=\frac{0.12r}{r}=0.12.$$

故由第二表,得

$$P=0.0645.$$

所求誤差之個數爲

$$1000\text{ 回}\times 0.0645=64.5\text{ 回}\fallingdotseq 65\text{ 回}.$$

7. 常數 h 之意義

由第一表可計算與種種 a、h 之值對應之或然率 P.但由下例,則誤差 a 愈小,h 之值愈大;從此知觀察愈精密時,h 之值愈大,即 h 表示觀察精密之程度.

a	h	ah	P
0.36	1	0.36	0.389
0.18	2	0.36	0.389
0.12	3	0.36	0.389

此種事實可如次討論之.誤差在 $-a$ 與 $+a$ 間之或然率以

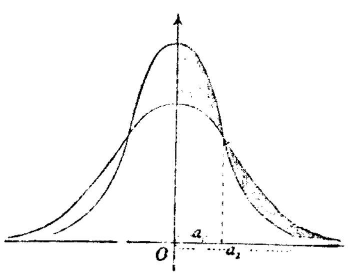
$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ha}e^{-t^2}dt$$

表之;由此公式,知將 P 固定,使 a 變小時,則必使 h 變大,蓋使定積分之值一定,則界限 ah 亦必一定,故 a 愈變小,h 必須增大.故

$$\left.\begin{array}{l}P_1=P_2\\ a_1<a_2\end{array}\right\}\text{時},\ h_1>h_2,$$

而
$$P_i=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h_i a_i}e^{-t^2}dt.\qquad (i=1,2).$$

換言之,h 大時,則小誤差多.即觀察趨於精密之意,故稱 h 爲**精密度**(precision).



第五圖

茲就下列與 h_1、h_2 對應之二或然率曲線論之.

$$y_1=\frac{h_1}{\sqrt{\pi}}e^{-h_1^2x^2},$$

$$y_2=\frac{h_2}{\sqrt{\pi}}e^{-h_2^2x^2},$$

$x=0$ 時，$y_1=\dfrac{h_1}{\sqrt{\pi}}$，$y_2=\dfrac{h_2}{\sqrt{\pi}}$，由此知 $y_1>y_2$ 時，則 $h_1>h_2$. 但曲線下之面積乃表示或然率，故 y 大時，其對應之或然率亦大.從而 h 大時，精密度亦大.圖中 t 之大小與誤差 a 之大小一致，a 小則 h 大，即觀察之精密度增大.第五圖表示誤差(e)與 h 之大小關係.

問　題

1. 觀察一角100次，其誤差之分布如次，試作圖表示之.

區間	誤差數	區間	誤差數	區間	誤差數
$6''-5''$	1	$2''-1''$	13	$-2''-(-3'')$	8
$5''-4''$	2	$1''-0''$	26	$-3''-(-4'')$	2
$4''-3''$	[illegible]	$0''-(-1'')$	26		
$3''-2''$	3	$-1''-(-2'')$	17		

2. 試於第一表求出與 $P=\frac{1}{2}$ 對應之 ah 值.

3. 試求誤差之絕對值小於 $\frac{0.5}{h}$ 之或然率，並問在一千次觀察中誤差之絕對值小於 $\frac{0.5}{h}$ 之次數有幾.

4. 在五百次觀測中，誤差比 $0.2r$ 小之個數有幾?

第五章 最良值

第一節 總說

1. 補正

以M_1、M_2、M_3、……M_n表觀測未知數X、Y之函數

$$f_1(X,Y)、f_2(X,Y)、\cdots\cdots f_n(X,Y)$$

之值.此等觀察值並非各函數之眞值,而當有誤差;以x_1、x_2、………x_n表此等誤差,得下列各等式

$$f_1(X,Y)-M_1=x_1,$$

$$f_2(X,Y)-M_2=x_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n(X,Y)-M_n=x_n.$$

若無誤差,則決定X、Y之值時,有二個方程式即足.惟因有誤差,故須多作方程式,以便能得近眞之值.此種決定最確最良之觀察值之方法,稱之為觀測值之補正(adjustment).

2. 最良值

於第二篇第四章§3中曾述及最良值之誤差或然率為最大.設誤差x_i發生之或然率為y_i.

$$y_i=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x_i^2}dx_i\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

誤差 x_1、x_2、……x_n 同時發生之或然率 P 爲

$$P=\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}dx_1\cdot dx_2\cdots dx_n \cdots(2)【18】.$$

但使 P 爲極大時,則須

$$x_1+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2 \text{爲極小} \cdots\cdots(3)$$

此最小二乘法 (the method of least square) 之名所由來也.

然眞誤差 x_1、x_2、……x_n 實無法可求得,故不得不以殘差(ν)以代誤差.今以 X_0 表算術平均 $\frac{1}{n}[M]$,而以 Δ 表 X_0 之誤差,則有

$$X=X_0+\Delta,$$

及 $$M_i-X_0=\nu_i \cdots\cdots(4).$$

故 $$x_i=X-M_i=X_0+\Delta-(X_0+\nu_i)$$

$$=\Delta-\nu_i \cdots\cdots(5),$$

平方之,得 $$[x^2]=[(\Delta-\nu)^2]$$

$$=n\Delta^2-2\Delta[\nu]+[\nu^2] \cdots\cdots(6),$$

然由[4], $$[\nu]=o \cdots\cdots(7),$$

故 $$[x^2]=n\Delta^2+[\nu^2] \cdots\cdots(8).$$

因 Δ 爲常數,故 $[x^2]$ 極小時 $[\nu^2]$ 亦爲極小.即決定最良值時,使殘差之平方和爲極小即可.由此知與以 $\frac{1}{n}[M]$

爲最良值之事實完全一致,何則,因

$$\nu_i = M_i - X_0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9),$$

而
$$[\nu^2] = (M_1 - X_0)^2 + (M_2 - X_0)^2 + \cdots\cdots + (M_n - X_0)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (10),$$

此爲X_0之函數,若使之爲極小,則由微分學求函數之極小方法,將函數就X_0微分之,而使微係數爲零,即

$$\frac{d}{dX_0}[\nu^2] = 0,$$

或
$$(M_1 - X_0) + (M_2 - X_0) + \cdots\cdots + (M_n - X_0) = 0 \cdots\cdots\cdots (11),$$

故得
$$X_0 = \frac{[M]}{n} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12),$$

即與以算術平均爲最良值之假定完全一致.

3. 重率

例 1 由袋中取出一球,登記其顏色後,重置袋中,再取一球登記其顏色,又重放入袋中,如是行之十次,設其結果爲

赤球五次 白球三次 黑球二次

則假定袋中赤,白,黑球數之比爲5:3:2,亦或與事實相近.

例 2 測量桌子之長度十次,設其結果爲

2.95 尺五次, 3.01 尺三次, 2.97 尺二次,

則此等觀測值之信賴度爲

$$5, \qquad 3, \qquad 2,$$

吾人稱之爲重率 (weight), 如上例:

觀察值爲	2.95 尺	3.01 尺	2.97 尺
其重率爲	5	3	2

通常觀察值均附有重率.

由上之例,知同一量之觀察如有 M_1、M_2、……M_n 等多種時,其信賴度未必相同,往往附以重率以示差別.但附重率之理由亦有多種,如觀察者之熟練或不熟練,器械之精粗等,均爲觀察値添附重率之原因.設有多年經驗之甲技師所得之觀察值爲 M_1, 而僅有一、二年經驗之乙技師所得之觀察值爲 M_2, 就二人技術之優劣而於其所得之值 M_1、M_2 附以重率 3、2. 此重率固依技術之高下而定者,但亦可視爲五次觀察中有三次得 M_1, 二次得 M_2 之觀察值.在最小二乘法中,重率可以如斯之意義看待之.

重率有時以分數或小數表之;但重率爲一種比率,故可以與此等數成比例之整數表之.由此而重率乃爲表示觀察之次數矣.

表示重率之符號有用 p_1、p_2、……者,有用 ω_1、ω_2、……

者,本書採用前者爲符號.

4. 有重率之算術平均

觀察未知量 X 歷 n 次,其中 p_1 次爲 M_1、p_2 次爲 M_2,p_3 次爲 M_3,則其最良值,卽算術平均,當爲

$$X_0=\frac{(M_1+M_1+\cdots)+(M_2+M_2+\cdots)+(M_3+M_3+\cdots)}{n}$$

$$=\frac{p_1M_1+p_2M_2+p_3M_3}{n},$$

卽
$$X_0=\frac{[pM]}{[p]},\qquad [p]=n.$$

若觀察值 M_1、M_2、M_3 之重率 p_1、p_2、p_3 不爲整數時,則將 p_1、p_2、p_3 乘以 K,使成整數之比,以 p_1'、p_2'、p_3' 表之,

$$p_1'=Kp_1,\quad p_2'=Kp_2,\quad p_3'=Kp_3.$$

此時算術平均爲

$$X_0=\frac{p_1'M+p_2'M_2+p_3'M_3}{p'_1+p'_2+p'_3}$$

$$=\frac{K(p_1M_1+p_2M_2+p_3M_3)}{K(p_1+p_2+p_3)}=\frac{[pM]}{[p]}.$$

卽重率爲分數或爲小數時,上式亦得成立.以文字述之:使用有重率之觀察值時,其最良值爲各觀察值與各自之重率相乘積之和除以重率之和.此種平均稱爲有重率平均,或稱廣義平均(weighted mean or general mean).

上述之事實與使 $p_1v_1^2+p_2v_2^2+\cdots\cdots+p_mv_m^2$ 爲極

小之事實一致,蓋

$$[pv^2]=p_1(M_1-X_0)^2+p_2(M_2-X_0)^2+\cdots\cdots+p_m(M_m-X_0)^2,$$

故 $$\frac{d}{dX_0}[pv^2]=-2\{p_1(M_1-X_0)-p_2(M_2-X_0)-\cdots\cdots-p_m(M_m-X_0)\}.$$

使上式等於零,則有

$$X_0=\frac{[pM]}{[p]},\qquad [p]=n \cdots\cdots\cdots\cdots \textbf{【19】}.$$

由上所述,知從直接觀察所得之值以求最良值時,可取其算術平均.

問 題

1. 測定砝碼之重量十次,其結果為10.2、9.9、9.8、10.1、10.2、9.9、10.1、10.3、9.9、9.8,問 9.8、9.9、10.1、10.2、10.3 之重率為何?

2. 試求前題之最良值.

3. 由三技師測定某角之觀察值各為31°27′、30°59′、31°3′,其重率為 2、3、4,試求其最良值.

5. 常數 h 與重率之關係

觀察值非同性質時,則精密度 h 隨觀察而異.設各誤差(x_i)發生之或然率為:

$$y_i=\frac{h_i}{\sqrt{\pi}}e^{-h_i^2x_i^2}dx_i. \qquad (i=1,2,3\cdots n) \cdots\cdots\cdots(1).$$

則此一系之誤差 x_1、x_2、x_3、$\cdots x_n$同時發生之或然率 P 為

$$P=\frac{h_1h_2\cdots h_n}{(\sqrt{\pi})^n}e^{-(h_1^2x_1^2+h_2^2x_2^2+\cdots h_n^2x_n^2)}dx_1\cdot dx_2\cdots dx_n\cdots(2).$$

若 P 為極大,則　$[h_i^2x_i^2]$ 為極小,

亦即　$[h_i^2\nu_i^2]$ 為極小 $\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$.

今以 h 為標準精密度,其值定之如下:

$$h_1^2=p_1h^2,\quad h_2^2=p_2h^2,$$

$$\cdots\cdots,\quad h_n^2=p_nh^2\cdots\cdots\cdots\cdots(4),$$

故前式可書為

$p_1\nu_1^2+p_2\nu_2^2+\cdots\cdots+p_n\nu_n^2$ 為極小,

即　$[p\nu^2]$ 為極小 $\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$.

此與前條之結果一致,而 p、h 之間成立如下之關係,

$$p_1:p_2:p_3=h_1^2:h_2^2:h_3^2\cdots\cdots\cdots\cdots(6)\textbf{[20]}.$$

即重率與精密度之平方成正比.

第二節　單量觀察

1. 單量之直接觀察

(*a*) 重率相等(即不計及重率)

各觀察值之重率相等,則可依第三章 §7 所論方法,以算術平均求得最良值即可.

(*b*) 有重率之觀察

此可由公式 [19] 求得有重率之算術平均,或由下

述之方法求得之.

求有重率之算術平均別法　在觀察值中先任取一適宜之值爲假定平均,以 A 表之,而算出 $M_i - A = \nu_i'$ $(i=1, 2, \cdots\cdots m)$ 之值,再由 $d = \frac{[p\nu']}{[p]}$ 求得補正值 d, 則最良值 X_0 可依下式算出之:

$$X_0 = A + \frac{[p\nu']}{[p]} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

因
$$\frac{[p\nu']}{[p]} = \frac{p_1(M_1 - A) + p_2(M_2 - A) + \cdots + p_m(M_m - A)}{p_1 + p_2 + \cdots + p_m}$$

$$= \frac{(p_1 M_1 + p_2 M_2 + \cdots + p_m M_m) - A[p]}{[p]}$$

$$= \frac{[pM]}{[p]} - A = X_0 - A \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2).$$

$$\therefore \qquad X_0 = A + \frac{[p\nu']}{[p]} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3).$$

即
$$X_0 = A + d \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4).$$

但
$$d = \frac{[p\nu']}{[p]} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5).$$

作以上之計算時,可取下述形式較爲便利.

M	p	ν'	$p\nu'$
M_1	p_1	ν_1'	$p_1\nu_1'$
M_2	p_2	ν_2'	$p_2\nu_2'$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$A = \cdots\cdots\cdots\cdots,$

$d = \frac{[p\nu']}{[p]}$

$= \cdots\cdots\cdots\cdots,$

M_m	p_m	ν_m'	$p_m\nu_m'$
	$[p]$		$[p\nu']$

$$X_0 = A + d$$
$$= \cdots\cdots\cdots\cdots.$$

例

M	p	ν'	$p\nu'$
45.12	2	0.12	0.24
45.07	4	0.07	0.28
45.03	3	0.03	0.09
45.15	1	0.15	0.15
44.97	3	−0.03	−0.09
45.02	2	0.02	0.04
45.11	2	0.11	0.22
	$[p]=17$		$[p\nu']=1.02-0.09=0.93$

$$A = 45,$$

$$d = \frac{0.93}{17} = 0.055,$$

$$X_0 = 45 + 0.055 = \mathbf{45.055}.$$

2. 單疊之間接觀察

設函數 $f(X)=H$，爲求 X 之值起見，將 H 作 n 次觀察，其結果得觀察值 M_1、M_2、……M_n，得次式

$$f(X)=M_1,\quad f(X)=M_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots,\quad f(X)=M_n \cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

以 X_0 表 X 之最良值，$f(X_0)-M_i$ 不爲零，而有殘差存

在,故成立次之關係式:

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &= f(X_0) - M_1 \\ \nu_2 &= f(X_0) - M_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \nu_n &= f(X_0) - M_n \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

此可應用最小二乘法,使殘差之平方和爲最小以決定 H 之最良値.由此而決定 X_0.

$$[\nu^2] = [\{f(X_0) - M_i\}^2] \cdots\cdots\cdots\cdots(3),$$

此爲 X_0 之函數,故就 X_0 微分之,而使所得之微分係數爲零.即

$$\frac{d}{dX_0}[\nu^2] = 2f'(X_0)[f(X_0) - M_i] = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots(4),$$

故

$$[M_i] - nf(X_0) = 0,$$

$$\therefore \qquad f(X_0) = \frac{[M_i]}{n} \cdots\cdots\cdots\cdots(5)【21】.$$

由上式所決定之 X_0 值爲最良值.即先計算 H 之最良値 $\frac{[M]}{n}$,由此以求出 X_0.

例 將圓之直徑直接測定以求圓之面積,其最良值爲何?

由直接觀察所得直徑之値以求圓之面積時,計有二法:其一爲先將所得直徑之觀察值平均之,以計算圓之面積;其又一爲由各直徑之値求出圓之面積,而後將

所得各面積之值平均之.究以何法爲是,似難決定,但由上之推論,知先求直徑之平均,而後以之計算圓之面積,如此所得之(面積)值爲最良值.

系 在如下之方程式內,觀察H以決定X之最良值.

$$f(a_i, X)=H, \qquad (i=1, 2, 3, \cdots\cdots n),$$

則殘差方程式爲

$$\left.\begin{array}{l} v_1=f(a_1, X)-M_1 \\ v_2=f(a_2, X)-M_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n=f(a_n, X)-M_n \end{array}\right\}$$

則由$[v^2]=[\{f(a, X)-M\}^2]$之極小條件,得下式,從下式之解以定X之最良值.

$$\{f(a_1, X)-M_1\}\frac{df(a_1, X)}{dX}$$

$$+\{f(a_2, X)-M_2\}\frac{df(a_2, X)}{dX}+\cdots\cdots\cdots\cdots=0,$$

即 $$\left\{f(a_1, X)\frac{df(a_1, X)}{dX}+f(a_2, X)\frac{df(a_2, X)}{dX}+\cdots\cdots\right\}$$

$$-\left\{M_1\frac{df(a_1, X)}{dX}+M_2\frac{df(a_2, X)}{dX}+\cdots\cdots\right\}=0.$$

例 密度測定:

一立方厘米水之密度爲一克,某物質 V 立方厘米之質量爲 G 克,其密度 ρ 爲 $\frac{G}{V}$. 今測定 G、V 以求 ρ, 但 G 爲能精密測定之量,假定其無誤差,而體積 V 則有誤差,以直接觀察值 V 視爲 ρ 之函數,則有

$$V=f(\rho),$$

即

$$V=\frac{G}{\rho}.$$

以 G_1、V_1、G_2、V_2、……表觀察值,得殘差方程式如下:

$$\left.\begin{aligned}\nu_1&=V_1-\frac{G_1}{\rho}\\ \nu_2&=V_2-\frac{G_2}{\rho}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \nu_n&=V_n-\frac{G_n}{\rho}\end{aligned}\right\},$$

由此以求 $[\nu^2]=\left[\left(V-\frac{G}{\rho}\right)^2\right]$ 之極小,得

$$\left(V_1-\frac{G_1}{\rho}\right)\left(\frac{G_1}{\rho^2}\right)+\left(V_2-\frac{G_2}{\rho}\right)\left(\frac{G_2}{\rho^2}\right)+\cdots\cdots=0,$$

即

$$\frac{1}{\rho^2}(V_1G_1+V_2G_2+\cdots\cdots)-\frac{1}{\rho^3}(G_1{}^2+G_2{}^2+\cdots\cdots)=0,$$

$$\therefore\qquad \rho=\frac{[G^2]}{[GV]}.$$

若

G	13.1	17.2	24.3
V	8.6	11.8	17.1

,

則
$$\rho=\frac{[G^2]}{[GV]}=\frac{13.1^2+17.2^2+24.3^2}{13.1\times8.6+17.2\times11.8+24.3\times17.1}$$
$$=\frac{1057.94}{731.15}=1.45.$$

注意
$$\rho=\frac{1}{n}\left\{\frac{G_1}{V_1}+\frac{G_2}{V_2}+\cdots\cdots\right\},$$

或
$$\rho=\frac{\frac{1}{n}(G_1+G_2+\cdots\cdots)}{\frac{1}{n}(V_1+V_2+\cdots\cdots)},$$

均不為最良值.

問　題

1. 由「別法」以求下之觀察值之廣義平均.

觀察值	131.2	129.9	130.8	130.6
重　率	2	2	3	5

2. 五次測定正方形一邊之長度爲

53.1 厘米　53.1 厘米　53.0 厘米　52.9 厘米　53.2 厘米

試求正方形面積之最良值.

3. 某圓半徑之值如下:

21.5 厘米　21.7 厘米　21.3 厘米

試求圓面積之最良值.

第三節　衆量之間接觀察

1. 補助定理

(a) Taylor 定理

將 x 之函數 $f(x+h)$ 依 x 之昇冪展開之,可得如下之式:

$$f(x+h)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots\cdots\qquad(1).$$

(1)式中,如 $x=0$,則

$$f(h)=A_0,$$

即 $$A_0=f(h).$$

將(1)式就 x 微分之,則有

$$f'(x+h)=A_1+2A_2x+3A_3x^2+\cdots\cdots\qquad(2).$$

如置 x 爲零,則有

$$f'(h)=A_1,$$

$\therefore$ $$A_1=f'(h).$$

再將(2)式微分,且令 x 爲零,得

$$f''(h)=2A_2,$$

$\therefore$ $$A_2=\frac{f''(h)}{2!}.$$

同樣繼續行之,得

$$A_3=\frac{f'''(h)}{3!},\quad A_4=\frac{f^{iv}(h)}{4!},\quad\cdots\cdots,\quad A_k=\frac{f^{(k)}(h)}{k!}.$$

將此等值代入(1)式,則

$$f(x+h)=f(h)+\frac{f'(h)}{1!}x+\frac{f''(h)}{2!}x^2$$

$$+\frac{f'''(h)}{3!}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

設將 x 與 h 交換,則上式可改書為

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2$$

$$+\frac{f'''(x)}{3!}h^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)【22】.$$

上式又可改書為

$$f(x+h)=f(x)+\frac{df(x)}{dx}h+\frac{1}{2!}\frac{d^2f(x)}{dx^2}h^2$$

$$+\frac{1}{3!}\frac{d^3f(x)}{dx^3}h^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)'.$$

(4)式(4)′式及上式均稱為 Taylor 定理.此為$f(x)$函數中之 x 變為 $x+h$ 時之結果.如變化之值(h)相當小時,則 h^2 更小,將 h^2 以上各項省略之,可得 $f(x+h)$ 之近似值.即 h 充分小時,

$$f(x+h)\fallingdotseq f(x)+\frac{df(x)}{dx}h\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5).$$

(**b**) Taylor 定理之擴張

如函數中變數為二個(x, y)時,則得

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}k$$

$$+\frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}hk\right.$$

$$+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}k^2\Big\}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)【23】.$$

此爲函數 $f(x,y)$ 中變數 x、y 變爲 $x+h$、$y+k$ 時之結果. h, k 相當小時, h、k 之二次以上各項當更小,而可省略,即 h、k 充分小時,

$$f(x+h,y+k)\doteqdot f(x,y)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}k.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7).$$

(c) $f(x,y)$ 爲極小之必須條件

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)【24】.$$

說明 不問 h、k 之值爲何,而 $f(x,y)$ 比 $f(x+h,y+k)$ 爲小,即 $f(x+h,y+k)-f(x,y)>0$ 時,稱函數 $f(x,y)$ 爲極小.由(6)式,

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}k+\cdots\cdots.$$

如 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 不爲零時,則 $f(x+h,y+k)-f(x,y)$ 不能常爲正,故 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0$ 及 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$ 爲 $f(x,y)$ 極小之條件.

同樣可證明 $f(x,y,z)$ 爲極小之必須條件:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}=0,\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=0\cdots\cdots\cdots(9)【24】'$$

2. 重率相等之間接觀察

設未知量 X、Y 之一次等式爲

$$aX+bY+l=H \quad \cdots\cdots(1).$$

令 a、b、l 作種種變化,而與此對應之 H 値由直接觀察之結果爲 M_1、M_2、……M_n,則得如次之等式,卽所謂觀察方程式 (observation equation) 是也.

$$\left.\begin{array}{l} a_1X+b_1Y+l_1=M_1 \\ a_2X+b_2Y+l_2=M_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nX+b_nY+l_n=M_n \end{array}\right\} \cdots\cdots(2).$$

以 $l_i-M_i=m_i(i=1,2,\cdots\cdots n)$,則有

$$\left.\begin{array}{l} a_1X+b_1Y+m_1=0 \\ a_2X+b_2Y+m_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nX+b_nY+m_n=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots(2)' \text{【25】}.$$

若 M_1、M_2、……爲眞値,則將三次觀察所得之三個方程式解之卽可.實際上 M_1、M_2、……非爲眞値,故觀察次數在三次以上而爲 n 次,所得方程式亦爲 n 個.由(2)式 n 個方程式中,每次取三個解之,則所得之解答當有 ${}_nC_3$ 組;惟如許之解答中何者最爲可靠,無法知之.故必須就 n 個方程式加以適宜之處置,以期得到近於眞値之最良値.

因 M_1、M_2、……非爲眞值,故有殘差,以 v_i 表之,由(2)得成立下式,此稱爲殘差方程式(residual equations).

$$\left.\begin{array}{l} a_1X+b_1Y+m_1=v_1 \\ a_2X+b_2Y+m_2=v_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nX+b_nY+m_n=v_n \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\text{【26】}.$$

於此欲得 X、Y 之最良值,則當應用最小二乘法,令 $[v^2]$ 爲極小.由(3)式,

$$[v^2]=[(a_iX+b_iY+m_i)^2],\ (i=1,2,\cdots\cdots n).\cdots\cdots\cdots(4)$$

此爲 X、Y 之函數,由前條之(c),$[v^2]$ 爲極小之必要條件,乃將 $[v^2]$ 就 X 偏微分之偏微係數,及就 Y 偏微分之偏微係數各等於零,即

$$\frac{\partial[v^2]}{\partial X}=0,\qquad \frac{\partial[v^2]}{\partial y}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5).$$

由(4)式,
$$\frac{\partial[v^2]}{\partial X}=2a_1(a_1X+b_1Y+m_1)$$
$$+2a_2(a_2X+b_2Y+m_2)+\cdots\cdots$$
$$+2a_n(a_nX+b_nY+m_n)=0,$$

及
$$\frac{\partial[v^2]}{\partial Y}=2b_1(a_1X+b_1Y+m_1)$$
$$+2b_2(a_2X+b_2Y+m_2)+\cdots\cdots$$
$$+2b_n(a_nX+b_nY+m_n)=0;$$

或 $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)X+(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)Y$

$$+(a_1m_1+a_2m_2+\cdots+a_nm_n)=0,$$

及 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)X+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)Y$

$$+(b_1m_1+b_2m_2+\cdots+b_nm_n)=0.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{略記之為}\ [a^2]X+[ab]Y+[am]=0,\text{即}\ [av]=0\\ \text{及}\qquad [ab]X+[b^2]Y+[bm]=0,\text{即}\ [bv]=0\end{array}\right\}(5)'\textbf{【27】}.$$

上式中之第一式稱為X之標準方程式(normal equation);第二式為Y之標準方程式.此等標準方程式數與未知量數一致,故將此等方程式解之,得確定X、Y之值而為X、Y之最良值.

標準方程式之作法:

將觀察方程式(2)′各乘以式內X之係數而相加之,得X之標準方程式,又將Y之係數乘其本式而相加之,得Y之標準方程式.

以上僅就二個未知量者立論,但二個以上者亦相同.例如未知量為三個時,其觀察方程式為

$$\left.\begin{array}{l}a_1X+b_1Y+c_1Z+m_1=0\\ a_2X+b_2Y+c_2Z+m_2=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_nX+b_nY+c_nZ+m_n=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\textbf{【25】}'.$$

作成標準方程式,得

$$\left.\begin{array}{l}[aa]X+[ab]Y+[ac]Z+[am]=0\\ [ab]X+[bb]Y+[bc]Z+[bm]=0\\ [ac]X+[bc]Y+[cc]Z+[cm]=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[27]'.$$

例 觀察方程式 標準方程式

$$\left.\begin{array}{rr}X\qquad\quad &=10\\ -X+Y\qquad &=7\\ Y\qquad &=18\\ Y-Z &=9\\ X\qquad -Z &=2\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{rr}3X-Y-Z= & 5\\ -X+3Y-Z= & 34\\ -X-Y+2Z= & -11\end{array}\right\}$$

將標準方程式解之,得

$$\left.\begin{array}{l}X=10\frac{3}{8}\\ Y=17\frac{5}{8}\\ Z=\ \ 8\frac{1}{2}\end{array}\right\}$$

此爲所求之最良值.

3. 有重率之間接觀察

設觀察方程式爲

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{重率}\\ a_1X+b_1Y+c_1Z+m_1=0 & p_1\\ a_2X+b_2Y+c_2Z+m_2=0 & p_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\\ a_nX+b_nY+c_nZ+m_n=0 & p_n\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

則殘差方程式爲 $a_iX+b_iY+c_iZ+m_i=v_i$. $(i=1,2,\cdots n)$.

由公式[24]

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial[pv^2]}{\partial X}=0\\[2mm]\dfrac{\partial[pv^2]}{\partial Y}=0\\[2mm]\dfrac{\partial[pv^2]}{\partial Z}=0\end{array}\right\}$$

即

$$\left.\begin{array}{l}p_1v_1\dfrac{\partial v_1}{\partial X}+p_2v_2\dfrac{\partial v_2}{\partial X}+\cdots\cdots+p_nv_n\dfrac{\partial v_n}{\partial X}=0\\[2mm]p_1v_1\dfrac{\partial v_1}{\partial Y}+p_2v_2\dfrac{\partial v_2}{\partial Y}+\cdots\cdots+p_nv_n\dfrac{\partial v_n}{\partial Y}=0\\[2mm]p_1v_1\dfrac{\partial v_1}{\partial Z}+p_2v_2\dfrac{\partial v_2}{\partial Z}+\cdots\cdots+p_nv_n\dfrac{\partial v_n}{\partial Z}=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

即

$$\left.\begin{array}{l}p_1a_1v_1+p_2a_2v_2+\cdots\cdots+p_na_nv_n=0\\[2mm]p_1b_1v_1+p_2b_2v_2+\cdots\cdots+p_nb_nv_n=0\\[2mm]p_1c_1v_1+p_2c_2v_2+\cdots\cdots+p_nc_nv_n=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)【28】.$$

此即爲所求之標準方程式也.

有重率之標準方程式之求法　將各觀察式次第乘以 p_1a_1、p_2a_2、……p_na_n 而相加之,得 X 之標準方程式;同樣乘以 p_1b_1、p_2b_2、……p_nb_n 而相加之,得 Y 之標準方程式.一般言之,如求某未知數之標準方程式,將各觀察式乘以本式所有之重率(p)及該未知數在式中之係數而相加之即得.故公式[28]可改書之如下:

$$\left.\begin{array}{l}[paa]X+[pab]Y+[pac]Z+[pam]=0\\ [pab]X+[pbb]Y+[pbc]Z+[pbm]=0\\ [pac]X+[pbc]Y+[pcc]Z+[pcm]=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots[28]'$$

例 觀察方程式 重率

$$\left.\begin{array}{lll}X\quad\;\; = & 0 & 8\\ \quad\;\; Y= & 0 & 10\\ X+2Y= & 0.25 & 1\\ X-3Y= & -0.92 & 5\end{array}\right\}$$

第一式乘 8,第三式乘 1,第四式乘 5,相加得

$$14X-13Y=-4.35.$$

第二式乘10,第三式乘 2,第四式乘 -15,相加得

$$-13X-59Y=14.30.$$

將此標準方程式解之,得最良值如次:

$$X=-0.108,\quad Y=0.219.$$

4. 函數非爲一次式時

設 X、Y 未知數間非爲一次的關係,而成立若干個如下之關係式時,

$$f(X,Y)=H\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

以 M_1、M_2、……M_n 表 H 之觀察值,則有觀察方程式:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(X,Y)=M_1 \\ f_2(X,Y)=M_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(X,Y)=M_n \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

$f_1(X,Y)$、$f_2(X,Y)$、……$f_n(X,Y)$之內或有同形者亦可.

以 X_0、Y_0 爲 X、Y 之近似值,則有

$$X=X_0+x,\quad Y=Y_0+y,$$

而 $f_1(X,Y)=f(X_0+x,Y_0+y)$

$$=f_1(X_0,Y_0)+\frac{\partial f_1(X_0,Y_0)}{\partial X_0}x+\frac{\partial f_1(X_0,Y_0)}{\partial Y_0}y+\cdots\cdots.$$

故 x、y 充分小時,二次以上各項均可省略,(2)式中之第一式可改書如下:

$$\frac{\partial f_1(X_0,Y_0)}{\partial X_0}x+\frac{\partial f_1(X_0,Y_0)}{\partial Y_0}y+f_1(X_0,Y_0)-M_1=0,$$

更令
$$\frac{\partial f_1(X_0,Y_0)}{\partial X_0}=a_1,\quad \frac{\partial f_1(X_0,Y_0)}{\partial Y_0}=b_1,$$

$$f_1(X_0,Y_0)-M_1=m_1,$$

且(2)式中第二式以下,各式可以同法處理之,得

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+m_1=0 \\ a_2x+b_2y+m_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nx+b_ny+m_n=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

乃將非一次之觀察方程式化為一次形之誘導觀察方程式矣.

例 頂角30°之三角形面積,觀察二次之結果為74及75.夾頂角二邊之和為35,試求夾頂角之二邊.

解 此三角形之面積$=\frac{1}{2}bc\sin 30^\circ=\frac{1}{4}bc$,

故觀察方程式為

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{4}bc&=74\\ \frac{1}{4}bc&=75\\ b+c&=35\end{aligned}\right\}\ \text{即}\ \left.\begin{aligned}bc&=296\\ bc&=300\\ b+c&=35\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1).$$

設b_0、c_0為b、c之近似值,

$$b=b_0+\nu_1,\quad c=c_0+\nu_2,$$

第一式為 $$(b_0+\nu_1)(c_0+\nu_2)=296.$$

此時 $$f_1=b_0c_0,\quad \frac{\partial f_1}{\partial b_0}=c_0,\quad \frac{\partial f_1}{\partial c_0}=b_0.$$

故將(1)之第一式化為一次式時,則為

$$b_0c_0+c_0\nu_1+b_0\nu_2=296.$$

假定$b_0=20$, $c_0=15$,且將此值代入上式,得

$$20\times15+15\nu_1+20\nu_2=296,$$

$$\left.\begin{array}{lr}\text{即} & 15\nu_1+20\nu_2=-4\\ \text{同理由第二式} & 15\nu_1+20\nu_2=0\\ \text{又由第三式} & \nu_1+\nu_2=0\end{array}\right\}\cdots\cdots(2)$$

由(2)之誘導觀測方程式作成標準方程式,得

$$\left.\begin{aligned}451v_1+601v_2&=-60\\601v_1+801v_2&=-80\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

將上式解之,得　$v_1=+0.4,\quad v_2=-0.4;$

$$\therefore\quad\left.\begin{aligned}b&=b_0+v_1=20+0.4=20.4\\c&=c_0+v_2=15-0.4=14.6\end{aligned}\right\}$$

5. 標準方程式之特殊解法

標準方程式通常可以一次式之消去法,或用行列式法解之,但方程式之數甚多,則以用高斯氏之代入法(method of substitution)爲佳,蓋此種運算法,完全爲機械的,而最適於用計算器計算.

(a) 消去方程式及其作法

設觀察方程式爲

$$\left.\begin{aligned}a_1z_1+b_1z_2+c_1z_3+m_1&=0\\a_2z_1+b_2z_2+c_2z_3+m_2&=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\a_nz_1+b_nz_2+c_nz_3+m_n&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1)式之標準方程式爲

$$\left.\begin{aligned}[aa]z_1+[ab]z_2+[ac]z_3+[am]&=0\\[ab]z_1+[bb]z_2+[bc]z_3+[bm]&=0\\[ac]z_1+[bc]z_2+[cc]z_3+[cm]&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2).$$

(2)式之解可如下討論之.由(2)式中之第一式得

$$z_1 = -\frac{[ab]}{[aa]}z_2 - \frac{[ac]}{[aa]}z_3 - \frac{[am]}{[aa]} \cdots\cdots\cdots\cdots(3),$$

以之代入(2)式中之第二式,則得

$$\left\{[bb]-[ab]\frac{[ab]}{[aa]}\right\}z_2 + \left\{[bc]-[ab]\frac{[ac]}{[aa]}\right\}z_3 + \left\{[bm]-[ab]\frac{[am]}{[aa]}\right\} = 0.$$

以高斯氏之略記法記之則爲

$$\left.\begin{array}{l}[bb.1]z_2+[bc.1]z_3+[bm.1]=0 \\ [bc.1]z_2+[cc.1]z_3+[cm.1]=0\end{array}\right\}\text{第一誘導標準式}\cdots\cdots(4),$$

同樣得

此處

$$\left.\begin{array}{l}[bb.1]=[bb]-[ab]\dfrac{[ab]}{[aa]} \\ [bc.1]=[bc]-[ab]\dfrac{[ac]}{[aa]} \\ [bm.1]=[bm]-[ab]\dfrac{[am]}{[aa]} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)\text{【29】}.$$

更由(4)將 z_2 消去,由(4)之第一式,得

$$z_2 = -\frac{[bc.1]}{[bb.1]}z_3 - \frac{[bm.1]}{[bb.1]} \cdots\cdots\cdots\cdots(6).$$

代入(4)式中第二式得

$$\left\{[cc.1]-[bc.1]\frac{[bc.1]}{[bb.1]}\right\}z_3 + \left\{[cm.1]-[bc.1]\frac{[bm.1]}{[bb.1]}\right\} = 0,$$

略記之為 $$[cc.2]z_3+[cm.2]=0 \qquad \cdots\cdots(7).$$

此處
$$\left.\begin{aligned}[cc.2]&=[cc.1]-[bc.1]\frac{[bc.1]}{[bb.1]}\\ [cm.2]&=[cm.1]-[bc.1]\frac{[bm.1]}{[bb.1]}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(8)\textbf{【30】},$$

$$\therefore \qquad z_3=-\frac{[cm.2]}{[cc.2]} \qquad \cdots\cdots(9).$$

將(9)代入(6)式中得 z_2,以 z_2 及 z_3 之值代入(3)得 z_1,此即為(2)之解.如將解標準方程式(2)所必須之關係式提出,則為下之方程式

$$\left.\begin{aligned}[cc.2]z_3+[cm.2]&=0\\ [bb.1]z_2+[bc.1]z_3+[bm.1]&=0\\ [aa]z_1+[ab]z_2+[ac]z_3+[am]&=0\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(10)\textbf{【31】}.$$

此等式稱為消去方程式(elimination equations).

將(10)式改書之,則為

$$\left.\begin{aligned}z_3+\frac{[cm.2]}{[cc.2]}&=0\\ z_2+\frac{[bc.1]}{[bb.1]}z_3+\frac{[bm.1]}{[bb.1]}&=0\\ z_1+\frac{[ab]}{[aa]}z_2+\frac{[ac]}{[aa]}z_3+\frac{[am]}{[aa]}&=0\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(10)'\textbf{【31】}'.$$

若更如下略記之:

$$\frac{[ab]}{[aa]}=A_b, \quad \frac{[ac]}{[aa]}=A_c, \quad \frac{[am]}{[aa]}=A_m$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{[bc.1]}{[bb.1]}=B_c,\ \frac{[bm.1]}{[bb.1]}=B_m\\ \frac{[cm.2]}{[cc.2]}=C_m\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(11)【32】,$$

則(10)式爲

$$\left.\begin{array}{r}z_3+C_m=0\\ z_2+B_cz_3+B_m=0\\ z_1+A_bz_2+A_cz_3+A_m=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)''【31】''$$

作成此式時可依如次之手續及形式:

先將觀察方程式內之常數記之如第一表:

第 一 表

No.	z_1 a	z_2 b	z_3 c	m	s
1	a_1	b_1	c_1	m_1	s_1
2	a_2	b_2	c_2	m_2	s_2
3	a_3	b_3	c_3	m_3	s_3
....	....	....	....	....	....
n	a_n	b_n	c_n	m_n	s_n
Σ	$[a]$	$[b]$	$[c]$	$[m]$	$[s]$

但 $s_i=a_i+b_i+c_i+m_i$.

由第一表之常數作成第二表:

第二表

No	aa	ab	ac	am	as	bb	bc	bm	bs	cc	cm	cs	mm	ms
1	a_1a_1	a_1b_1	a_1c_1	a_1m_1	a_1s_1	b_1b_1	b_1c_1	b_1m_1	b_1s_1	c_1c_1	c_1m_1	c_1s_1	m_1m_1	m_1s_1
2	a_2a_2	a_2b_2	a_2c_2	a_2m_2	a_2s_2	b_2b_2	b_2c_2	b_2m_2	b_2s_2	c_2c_2	c_2m_2	c_2s_2	m_2m_2	m_2s_2
3	a_3a_3	a_3b_3	a_3c_3	a_3m_3	a_3s_3	b_3b_3	b_3c_3	b_3m_3	b_3s_3	c_3c_3	c_3m_3	c_3s_3	m_3m_3	m_3s_3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	a_na_n	a_nb_n	a_nc_n	a_nm_n	a_ns_n	b_nb_n	b_nc_n	b_nm_n	b_ns_n	c_nc_n	c_nm_n	c_ns_n	m_nm_n	m_ns_n
Σ	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[am]$	$[as]$	$[bb]$	$[bc]$	$[bm]$	$[bs]$	$[cc]$	$[cm]$	$[cs]$	$[mm]$	$[ms]$

如數不大,則不用第二表而用第三表.由第二或第三表,即可將標準方程式書出.

第 三 表

	z_1 a	z_2 b	z_3 c	m	s	檢算
a	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[am]$	$[as]$	
b		$[bb]$	$[bc]$	$[bm]$	$[bs]$	
c			$[cc]$	$[cm]$	$[cs]$	
m				$[mm]$	$[ms]$	
s					$[ss]$	

次用第三表以作第四表:

第 四 表

		a	b	c	m	s	准
a		$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[am]$	$[as]$	
b	A_b		$[bb]$ $A_b[ab]$	$[bc]$ $A_b[ac]$	$[bm]$ $A_b[am]$	$[bs]$ $A_b[as]$	
c	A_c			$[cc]$ $A_c[ac]$	$[cm]$ $A_c[am]$	$[cs]$ $A_c[as]$	
m	A_m				$[mm]$ $A_m[am]$	$[ms]$ $A_m[as]$	
b			$[bb.1]$	$[bc.1]$	$[bm.1]$	$[bs.1]$	
c	B_c			$[cc.1]$ $B_c[bc.1]$	$[cm.1]$ $B_c[bm.1]$	$[cs.1]$ $B_c[bs.1]$	
m	B_m				$[mm.1]$ $B_m[bm.1]$	$[ms.1]$ $B_m[bs.1]$	

$$A_b = \frac{[ab]}{[aa]},\quad A_c = \frac{[ac]}{[aa]},\quad A_m = \frac{[am]}{[aa]}.$$

$$B_c = \frac{[bc.1]}{[bb.1]},\quad B_m = \frac{[bm.1]}{[bb.1]}.$$

c		$[cc.2]$	$[cm.2]$	$[cs.2]$		
m	C_m		$[mm.2]$ $C_m[cm.2]$	$[ms.2]$ $C_m[cs.2]$		$C_m=\dfrac{[cm.2]}{[cc.2]}$
m	$z_3=-C_m$	$[\nu\nu]=$	$[mm.3]$	$[ms.3]$		

〔第四表之說明〕　先將第二表之$[aa]$、$[ab]$、………$[ms]$轉記於第一列.由此作成A_b、A_c、A_m,記入表中.次作$A_b[\ ]$、$A_c[\ ]$、$A_m[\ ]$.由$[bb]$減去$A_b[ab]$以作成$[bb.1]$,以及其他之$[\cdots 1]$.其次作成B_c、B_m、$B_c[\ ]$、$B_m[\ ]$.次由$[cc.1]-B_c[bc.1]$作成$[cc.2]$,同樣作成其他$[\cdots 2]$.最後順次作成C_m、$C_m[cm.2]$、$C_m[cs.2]$、$[mm.3]$.

此時$-C_m=z_3$,$[vv]=[mm.3]$(參照後(17)式).

如數目太大,則用對數更便.即求出$\log B_c$,$\log[bb.1]$、$\log B_c[bc.1]$……等,記入相當欄內.以便計算,如第五表.

用第四表內之C_m、B_m、B_c、A_m、A_c、A_b,即可書出方程式(10)''.

第　五　表

a	b	c	m	s
$[aa]$ $\log[aa]$	$[ab]$ $\log[ab]$	$[ac]$ $\log[ac]$	$[am]$ $\log[am]$	$[as]$ $\log[as]$

$\log A_b$	$[bb]$ $\log A_b[ab]$ $A_b[ab]$	$[bc]$ $\log A_b[ac]$ $A_b[ac]$	$[bm]$ $\log A_b[am]$ $A_b[am]$	$[bs]$ $\log A_b[as]$ $A_b[as]$
$\log A_c$		$[cc]$ $\log A_c[ac]$ $A_c[ac]$	$[am]$ $\log A_c[am]$ $A_c[am]$	$[cs]$ $\log A_c[as]$ $A_c[as]$
$\log A_m$			$[mm]$ $\log A_m[am]$ $A_m[am]$	$[ms]$ $\log A_m[as]$ $A_m[as]$
	$[bb.1]$ $\log[bb.1]$	$[bc.1]$ $\log[bc.1]$	$[bm.1]$ $\log[bm.1]$	$[bs.1]$ $\log[bs.1]$
$\log B_c$		$[cc.1]$ $\log B_c[bc.1]$ $B_c[bc.1]$	$[cm.1]$ $\log B_c[bm.1]$ $B_c[bm.1]$	$[cs.1]$ $\log B_c[bs.1]$ $B_c[bs.1]$
$\log B_m$			$[mm.1]$ $\log B_m[bm.1]$ $B_m[bm.1]$	$[ms.1]$ $\log B_m[bs.1]$ $B_m[bs.1]$
		$[cc.2]$ $\log[cc.2]$	$[cm.2]$ $\log[cm.2]$	$[cs.2]$ $\log[cs.2]$
$\log C_m$			$[mm.2]$ $\log C_m[cm.2]$ $C_m[cm.2]$	$[ms.2]$ $\log C_m[cs.2]$ $C_m[cs.2]$
$z=$		$[vv]=$	$[mm.3]$	$[ms.3]$

(*b*) 檢算所用諸等式

$$\left.\begin{array}{l} a_1+b_1+c_1+m_1=s_1 \\ a_2+b_2+c_2+m_2=s_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n+b_n+c_n+m_n=s_n \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12).$$

各式相加,得

$$[a]+[b]+[c]+[m]=[s]\cdots\cdots\cdots(13)\textbf{【33】}.$$

此爲檢算第一表所用之式.

以m_1、m_2、……m_n依次乘(12)之各式而相加之,得

$$[am]+[bm]+[cm]+[mm]=[sm]\cdots\cdots(14);$$

又以a_1、a_2、……a_n依次乘(12)之各式而相加之,得

$$\left.\begin{array}{l} [aa]+[ab]+[ac]+[am]=[as] \\ [ab]+[bb]+[bc]+[bm]=[bs] \\ [ac]+[bc]+[cc]+[cm]=[cs] \\ [am]+[bm]+[cm]+[mm]=[ms] \end{array}\right\}\cdots\cdots(15)\textbf{【34】}.$$

同樣得

(14)及(15)爲檢算第二表所用之方程式,即爲檢算標準方程式(2)是否正確成立時所用之方程式.

(15)式內之第一式乘以$\frac{[ab]}{[aa]}$,而由第二式減去之,得

$$\left\{[bb]-[ab]\frac{[ab]}{[aa]}\right\}+\left\{[bc]-[ab]\frac{[ac]}{[aa]}\right\}$$
$$+\left\{[bm]-[ab]\frac{[am]}{[aa]}\right\}=\left\{[bs]-[ab]\frac{[as]}{[aa]}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{卽}\qquad [bb.1]+[bc.1]+[bm.1]&=[bs.1] \\ \text{同樣,}\qquad [cc.2]+[cm.2]&=[cs.2] \\ [mm.3]&=[ms.3] \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(16)\text{【35】}.$$

此爲檢算第四表所用之式,卽爲檢算消去方程式正否所用之式.但因計算時小數或有省略,以致檢算用之方程式不能精確成立.此點應記及之.

求【vv】之式　設觀察方程式爲

$$a_1z_1+b_1z_2+c_1z_3+m_1=v_1,$$

$$a_2z_1+b_2z_2+c_2z_3+m_2=v_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$a_nz_1+b_nz_2+c_nz_3+m_n=v_n.$$

以m_1、m_2、$\cdots\cdots m_n$各乘其本式而相加之,得

$$[am]z_1+[bm]z_2+[cm]z_3+[mm]=[mv];$$

又以v_1、v_2、$\cdots\cdots v_n$各乘其本式而相加之,得

$$[av]z_1+[bv]z_2+[cv]z_3+[mv]=[vv].$$

由公式[27],$[av]=0$, $[bv]=0$, $[cv]=0$時,則有

$$[mv]=[vv]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{【36】}.$$

故　$$[am]z_1+[bm]z_2+[cm]z_3+[mm]=[vv].$$

以$z_1=-\dfrac{1}{[aa]}\Big\{[ab]z_2+[ac]z_3+[am]\Big\}$代入上式,消去$z_1$,得

$$[vv]=-\frac{[am]}{[aa]}\left\{[ab]z_2+[ac]z_3+[am]\right\}$$

$$+[bm]z_2+[cm]z_3+[mm]$$

$$=+\left\{[bm]-\frac{[am]}{[aa]}[ab]\right\}z_2+\left\{[cm]\right.$$

$$\left.-\frac{[am]}{[aa]}[ac]\right\}z_3+\left\{[mm]-\frac{[am]}{[aa]}[am]\right\}$$

$$=[bm.1]z_2+[cm.1]z_3+[mm.1].$$

以 $z_2=-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}z_3-\frac{[bm.1]}{[bb.1]}$ 代入上式,以消去 z_2,得

$$[vv]=+[bm.1]\left\{-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}z_3-\frac{[bm.1]}{[bb.1]}\right\}$$

$$+[cm.1]z_3+[mm.1]$$

$$=+\left\{[cm.1]-[bm.1]\frac{[bc.1]}{[bb.1]}\right\}z_3$$

$$+\left\{[mm.1]-\frac{[bm.1]}{[bb.1]}[bm.1]\right\}$$

$$=+[cm.2]z_3+[mm.2].$$

以 $z_3=-\frac{[cm.2]}{[cc.2]}$ 代入上式,以消去 z_3,得

$$[vv]=[mm.2]-\frac{[cm.2]}{[cc.2]}[cm.2]=[mm.3].$$

即 $$[vv]=[mm.3]\cdots\cdots\cdots\cdots(17)【37】$$

由(16) $$[mm.3]=[ms.3].$$

故 $$[vv]=[ms.3]\cdots\cdots\cdots\cdots(17)'【37】'$$

如計算時小數有省略,則(17)′比較與實際相近.

(c)消去方程式之解法　由(10)″,含三個未知數z_1、z_2、z_3之消去方程式為

$$\left.\begin{aligned} z_3+C_m&=0\\ z_2+B_c z_3+B_m&=0\\ z_1+A_b z_2+A_c z_3+A_m&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)''.$$

上式可以如次之形式解之:

第六表

$-C_m$	$-B_m$ $-B_c z_3$	$-A_m$ $-A_c z_3$ $-A_b z_2$
z_3 $\log z_3$	z_2 $\log z_2$	z_1
$\log B_c$ $\log A_c$	$\log A_b$	
$\log B_c z_3$ $\log A_c z_3$	$\log A_b z_2$	

茲將第六表說明之如下:由第四表,將$-C_m$、$-B_m$、$-A_m$、z_3、$\log z_3$、$\log B_c$、$\log A_c$、$\log A_b$記入之.

次將$\log B_c z_3$、$\log A_c z_3$、$-B_c z_3$、$-A_c z_3$記入之.由$-B_m-B_c z_3=z_2$求出z_2之值記錄之.最後求出$\log z_2$、$\log A_b z_2$、

$-A_b z_2$,由 $-A_m-A_c z_3-A_b z_2$ 求得 z_1.

(*d*)求 z_1、z_2、z_3 之別法　以 α_2、α_1、1 順次乘消去方程式 $(10)''$ 之各式,相加之,得

$$z_1+(A_b+\alpha_1)z_2+(A_c+B_c\alpha_1+\alpha_2)z_3$$
$$+(A_m+B_m\alpha_1+C_m\alpha_2)=0.$$

選定 α_1、α_2 之值,使 z_2、z_3 之係數適等於零.故有

$$\left.\begin{array}{r} A_b+\alpha_1=0 \\ A_c+B_c\alpha_1+\alpha_2=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(18).$$

此時,

$$z_1+(A_m+B_m\alpha_1+C_m\alpha_2)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(19).$$

又以 β、1 乘 $(10)''$ 之第一式,第二式,而相加之,使 z_3 之係數適等於零,以選定 β 之値.故得

$$z_2+(B_m+C_m\beta)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(20),$$

$$B_c+\beta=0\cdots\cdots\cdots\cdots(21).$$

由 (18)、(21) 以決定 α_1、α_2、β 之值如下:

第　七　表

$-A_b$	$-A_c$ $-B_c\alpha_1$
α_1 $\log\alpha_1$	α_2 $\log\alpha_2$

$-B_c$
β $\log\beta$

又由 (19)、(20) 以求 z_1、z_2 如下:

第　八　表

$-A_m$ $-B_m\alpha_1$ $-C_m\alpha_2$	$-B_m$ $-C_m\beta$	$-C_m$
z_1	z_2	z_3

但 z_1、z_2、z_3 之值為

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= -(A_m + B_m\alpha_1 + C_m\alpha_2) \\ z_2 &= -(B_m + C_m\beta) \\ z_3 &= -C_m \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(22).$$

將 A_m、B_m、C_m 變形,得

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= -\left\{\frac{[am]}{[aa]} + \frac{[bm.1]}{[bb.1]}\alpha_1 + \left[\frac{cm.2}{cc.2}\right]\alpha_2\right\} \\ z_2 &= -\left\{\frac{[bm.1]}{[bb.1]} + \frac{[cm.2]}{[cc.2]}\beta\right\} \\ z_3 &= -\frac{[cm.2]}{[cc.2]} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(23).$$

但 α_1、α_2、β 均與 $[am]$、$[bm]$、$[cm]$ 無關,而可以(18)、(21)之關係求得之.

第四節　條件觀察

1. 直接條件觀察

未知數除滿足觀察方程式外,往往尙須精密符合其他條件方程式,本節當就條件觀察論之.

茲命觀察方程式之數爲 n,未知數之數爲 q,條件方程式之數爲 s,但 $n>q>s$.

(α)直接法　s 個條件方程式中,取 s 個未知數,以其餘之未知數表之.代入觀察方程式後,則與含有 $(q-s)$ 個未知數之無條件觀察方程式相同矣.由前節之方法作成標準方程式.以決定 $(q-s)$ 個未知數之最良值,再利用條件方程式決定所餘 s 個未知數之值,如此,則 q 個未知數之值均得決定矣.

但實際計算時,通常不直接求未知數之數值,而先計算補正值,然後算出未知數之值.茲先就 $q=3$, $s=2$ 之場合論之.

設觀察方程式爲

$$\left.\begin{aligned}X&=M_1\\Y&=M_2\\Z&=M_3\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

條件式爲
$$\left.\begin{aligned}\alpha_1X+\alpha_2Y+\alpha_3Z+\lambda_1=0\\\beta_1X+\beta_2Y+\beta_3Z+\lambda_2=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

命 ν_1、ν_2、ν_3 各各爲 M_1、M_2、M_3 之補正值,而

$$\left.\begin{aligned} X &= M_1 + \nu_1 \\ Y &= M_2 + \nu_2 \\ Z &= M_3 + \nu_3 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3),$$

代入(1)式,得

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &= 0 \\ \nu_2 &= 0 \\ \nu_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)',$$

以(3)之 X、Y、Z 之值代入(2)式,得

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1(M_1+\nu_1)+\alpha_2(M_2+\nu_2)+\alpha_3(M_3+\nu_3)+\lambda_1 &= 0 \\ \beta_1(M_1+\nu_1)+\beta_2(M_2+\nu_2)+\beta_3(M_3+\nu_3)+\lambda_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(2)',$$

即

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\nu_1+\alpha_2\nu_2+\alpha_3\nu_3+d_1 &= 0 \\ \beta_1\nu_1+\beta_2\nu_2+\beta_3\nu_3+d_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4),$$

其中

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \alpha_1 M_1+\alpha_3 M_2+\alpha_2 M_3+\lambda_1 \\ d_2 &= \beta_1 M_1+\beta_2 M_2+\beta_3 M_3+\lambda_2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4),$$

(2)′式內以 ν_3 表 ν_1、ν_2,得如次之形式之關係式:

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &= L_1\nu_3+H_1 \\ \nu_2 &= L_2\nu_3+H_2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5),$$

(1)′式中之 ν_1、ν_2,以上式表之,則得

$$\left.\begin{aligned} L_1\nu_3+H_1 &= 0 \\ L_2\nu_3+H_2 &= 0 \\ \nu_3 \quad &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)【38】,$$

(6)式為無條件之誘導觀察方程式,以此而作成標準方

程式解之,得ν_3之最良值.代入(5)式,得ν_1,ν_2之最良值.以所得之ν_1、ν_2、ν_3之值代入(3)式而得X、Y、Z之最良值.

例 1　茲就測定三角形三內角A、B、C論之.

設觀察方程式爲

$$\left.\begin{aligned}A&=M_1\\B&=M_2\\C&=M_3\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

而條件式爲　$A+B+C-180^\circ=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$.

設ν_1、ν_2、ν_3爲補正值,則有

$$\left.\begin{aligned}A&=M_1+\nu_1\\B&=M_2+\nu_2\\C&=M_3+\nu_3\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3),$$

以之代入(1)式,得

$$\left.\begin{aligned}\nu_1&=0\\\nu_2&=0\\\nu_3&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)'.$$

又將其代入(2)式,得

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3+d=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)'.$$

但　$d=M_1+M_2+M_3-180^\circ\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$.

由(2)′式,　$\nu_1=-\nu_2-\nu_3-d\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$,

代入(1)′式,得誘導觀察方程式如下:

$$\left.\begin{aligned} -\nu_2-\nu_3&=d\\ \nu_2&=0\\ \nu_3&=0 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6).$$

由(6)作標準方程式得

$$\left.\begin{aligned} 2\nu_2+\nu_3&=-d\\ \nu_2+2\nu_3&=-d \end{aligned}\right\}$$

將上式解之,得

$$\nu_2=\nu_3=-\frac{1}{3}d,$$

$$\therefore \qquad \nu_1=-\frac{1}{3}d.$$

$$\therefore \qquad \left.\begin{aligned} A&=m_1-\frac{1}{3}d\\ B&=M_2-\frac{1}{3}d\\ C&=M_3-\frac{1}{3}d \end{aligned}\right\}$$

若

$$\begin{array}{rl} A=36^\circ & 25'.8\\ B=90^\circ & 36'.5\\ C=52^\circ & 57'.9\\ \hline A+B+C=180^\circ & 00'.2 \end{array}$$

而 $d=0'.2,$

$$\therefore \qquad \nu_2=\nu_3=-\frac{1}{3}\times 0.2=-0.07$$

$$\therefore \qquad \nu_1 = -d - \nu_2 - \nu_3 = -0.06.$$

$$\therefore \qquad \begin{array}{ll} A = 36^\circ & 25'.74 \\ B = 90^\circ & 36'.43 \\ C = 52^\circ & 57'.83 \\ \hline A+B+C = 180^\circ & 00'.0 \end{array}$$

如觀察附有重率,則此時(1)、(1)′及(6)式當加入重率之計算.將(6)式如前節3之方法作成標準方程式而解之卽可.

例 2　設測定三角形三內角之結果如下:

$$\left.\begin{array}{ll} A = 36^\circ & 25'.8 \\ B = 89^\circ & 46'.5 \\ C = 53^\circ & 47'.9 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} \text{重率} & 4 \\ \text{〃 〃} & 2 \\ \text{〃 〃} & 3 \end{array}$$

條件式爲　　$A + B + C = 180^\circ.$

設 ν_1、ν_2、ν_3 爲 A、B、C 之補正值,而

$$\left.\begin{array}{l} \nu_1 = 0 \\ \nu_2 = 0 \\ \nu_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} \text{重率} & 4 \\ \text{〃 〃} & 2 \\ \text{〃 〃} & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\nu_2 - \nu_3 = 0.2, \\ \nu_2 \qquad = 0, \\ \nu_3 = 0. \end{array}$$

條件式爲　　$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + 0.2 = 0.$

標準方程式爲

$$\left.\begin{array}{l} 6\nu_2 + 4\nu_3 = -0.8 \\ 4\nu_2 + 7\nu_3 = -0.8 \end{array}\right\}$$

將上式解之,得、
$$\left.\begin{aligned} \nu_2 &= -0.09 \\ \nu_3 &= -0.06 \\ \nu_1 &= -0.05 \end{aligned}\right\}$$
而

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} A &= 36^\circ \quad 25'.75 \\ B &= 89^\circ \quad 46'.41 \\ C &= 53^\circ \quad 47'.84 \end{aligned}\right\}$$
$$A+B+C = 180^\circ \quad 00'.0$$

(*b*)未定係數法　若條件方程式太多,則用上法未免複雜,是宜用高斯氏之未定係數法.茲述之如下:

設未知數三個,條件方程式二個時,其條件式爲

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z + \lambda_1 &= 0 \\ \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z + \lambda_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1).$$

命　$X = M_1 + \nu_1,\quad Y = M_2 + \nu_2,\quad Z = M_3 + \nu_3 \cdots\cdots\cdots (2).$

以(2)式中 X、Y、Z 之值代入(1)式,得

$$\alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 + \alpha_3\nu_3 + d_1 = 0,$$
$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 + \beta_3\nu_3 + d_2 = 0.$$

即
$$\left.\begin{aligned} [\alpha\nu] + d_1 &= 0 \\ [\beta\nu] + d_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3).$$

但
$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 + \lambda_1 \\ d_2 &= \beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 + \beta_3 M_3 + \lambda_2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (4).$$

此時當於(3)式所示之條件下,令$[p\nu\nu]$為極小,而後X、Y、Z之最良值可求得.在微分學中,求有條件之極大極小如下:以常數$-2K_1$、$-2K_2$乘$[\alpha\nu]+d_1$、$[\beta\nu]+d_2$,因二式為零,故加於$[p\nu\nu]$後之值仍等於$[p\nu\nu]$.以Q代表$[p\nu\nu]$而求其極小值.

$$Q\equiv[p\nu\nu]-2K_1([\alpha\nu]+d_1)-2K_2([\beta\nu]+d_2).$$

但上式為ν_1、ν_2、ν_3之函數,故其極小之必要條件為

$$\frac{\partial Q}{\partial \nu_i}=0,\quad i=(1,2,3).$$

即
$$\left.\begin{aligned}p_1\nu_1-(\alpha_1K_1+\beta_1K_2)=0\\p_2\nu_2-(\alpha_2K_1+\beta_2K_2)=0\\p_3\nu_3-(\alpha_3K_1+\beta_3K_2)=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(5)$$

由此以求得ν之值為

$$\left.\begin{aligned}\nu_1=\frac{\alpha_1}{p_1}K_1+\frac{\beta_1}{p_1}K_2\\\nu_2=\frac{\alpha_2}{p_2}K_1+\frac{\beta_2}{p_2}K_2\\\nu_3=\frac{\alpha_3}{p_3}K_1+\frac{\beta_3}{p_3}K_2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(6)\textbf{【39】}$$

以(6)式ν_1、ν_2、ν_3之值代入(3)式,得

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\alpha_1{}^2}{p_1}+\frac{\alpha_2{}^2}{p_2}+\frac{\alpha_3{}^2}{p_3}\right)K_1+\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{p_1}+\frac{\alpha_2\beta_2}{p_2}+\frac{\alpha_3\beta_3}{p_3}\right)K_2=-d_1\\\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{p_1}+\frac{\alpha_2\beta_2}{p_2}+\frac{\alpha_3\beta_3}{p_3}\right)K_1+\left(\frac{\beta_1{}^2}{p_1}+\frac{\beta_2{}^2}{p_2}+\frac{\beta_3{}^2}{p_3}\right)K_2=-d_2\end{aligned}\right\},$$

即
$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]K_1+\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]K_2=-d_1\\ \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]K_1+\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]K_2=-d_2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)[40].$$

由(7)式可求得K_1、K_2.以之代入(6)式,即得ν_1、ν_2、ν_3之值,由此可求出最良值$X=M_1+\nu_1$等.

系 1 如條件方程式僅有一個,且其係數均爲1時,則

$$\nu_1=-\frac{\frac{1}{p_1}}{\left[\frac{1}{p}\right]}d,\quad \nu_2=-\frac{\frac{1}{p_2}}{\left[\frac{1}{p}\right]}d,\quad \nu_3=-\frac{\frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p}\right]}d\cdots\cdots\cdots[41].$$

〔法則〕 條件方程式僅有一個,且其係數均爲1時,則$-d$依重率逆數之比,按配分比例法計算之,即得對應之各補正值.

系 2 重率相等時,可命$p_1=p_2=\cdots\cdots=1$.此時(6)式及(7)式爲

$$\left.\begin{aligned}\nu_1=\alpha_1K_1+\beta_1K_2\\ \nu_2=\alpha_2K_1+\beta_2K_2\\ \nu_3=\alpha_3K_1+\beta_3K_2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)',$$

$$\left.\begin{aligned}[\alpha\alpha]K_1+[\alpha\beta]K_2+d_1=0\\ [\alpha\beta]K_1+[\beta\beta]K_2+d_2=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)',$$

由 [41] 知條件方程式僅有一個且其係數均爲 1 時,

$$\nu_1=\nu_2=\nu_3=-\frac{1}{3}d.$$

例 1　設三角形三內角爲 A、B、C, 其觀察值爲

$$\left.\begin{array}{ll} A=36^\circ & 25'.8 \\ B=89^\circ & 46'.5 \\ C=53^\circ & 47'.9 \end{array}\right\}\begin{array}{ll} \text{重率} & 4 \\ \text{〃 〃} & 2 \\ \text{〃 〃} & 3 \end{array}$$

$$\overline{A+B+C=180^\circ \quad 00'.2}$$

條件方程式爲 $A+B+C=180^\circ$, 由 (4) 得

$$d=0'.2.$$

重率逆數之比:

$$\frac{1}{4}:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=3:6:4,$$

故由 [41] 得

$$\nu_1=-0.2\times\frac{3}{13}=-0.046\cdots\cdots=-0.05,$$

$$\nu_2=-0.2\times\frac{6}{13}=-0.092\cdots\cdots=-0.09,$$

$$\nu_3=-0.2\times\frac{4}{13}=-0.061\cdots\cdots=-0.06;$$

$$\therefore\quad \begin{array}{lll} A=36^\circ & 25'.8-0'.05=36^\circ & 25'.75 \\ B=89^\circ & 46'.5-0'.09=89^\circ & 46'.41 \\ C=53^\circ & 47'.9-0'.06=53^\circ & 47'.84 \\ \hline & A+B+C=180^\circ & 00'.00 \end{array}$$

例 2 觀察方程式 重率

$$\left.\begin{array}{ll} z_1=10.1 & 1 \\ z_2=\ \ 6.6 & 2 \\ z_3=18.0 & 1 \\ z_4=\ \ 9.2 & 1 \\ z_5=\ \ 2.7 & 1 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1).$$

條件方程式爲

$$\left.\begin{array}{l} z_1+z_2-z_3=0 \\ z_2-z_4+z_5=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2).$$

命 ν_i 爲 z_i 之補正值,以 $z_i+\nu_i$ 代(2)式中之 z_i,得

$$\left.\begin{array}{l} \nu_1+\nu_2-\nu_3-1.3=0 \\ \nu_2-\nu_4+\nu_5+0.1=0 \end{array}\right\},$$

卽

$$\left.\begin{array}{l} d_1=1.3 \\ d_2=-0.1 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

以下表之形式,將 p、α、β、……各值記入:

p	α	β	$\frac{\alpha}{p}$	$\frac{\beta}{p}$	$\frac{\alpha^2}{p}$	$\frac{\alpha\beta}{p}$	$\frac{\beta^2}{p}$
1	1	0	1	0	1	0	0
2	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	-1	0	-1	0	1	0	0
1	0	-1	0	-1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1
					2.5	0.5	2.5

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} 2.5K_1+0.5K_2&=1.3\\ 0.5K_1+2.5K_2&=-0.1 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

將上式解之,得

$$K_1=0.55,$$

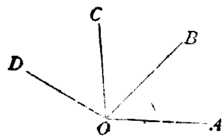
$$K_2=-0.15.$$

但

$$\left.\begin{aligned} v_1&=\frac{\alpha_1}{p_1}K_1+\frac{\beta_1}{p_1}K_2= & 0.55\\ v_2&=\frac{\alpha_2}{p_2}K_1+\frac{\beta_2}{p_2}K_2= & 0.20\\ v_3&=\frac{\alpha_3}{p_3}K_1+\frac{\beta_3}{p_3}K_2= & -0.55\\ v_4&=\frac{\alpha_4}{p_4}K_1+\frac{\beta_4}{p_4}K_2= & 0.15\\ v_5&=\frac{\alpha_5}{p_5}K_1+\frac{\beta_5}{p_5}K_2= & -0.15 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} z_1&=10.1+0.55=10.65\\ z_2&=\ \ 6.6+0.20=\ \ 6.80\\ z_3&=18.0-0.55=17.45\\ z_4&=\ \ 9.2+0.15=\ \ 9.35\\ z_5&=\ \ 2.7-0.15=\ \ 2.55 \end{aligned}\right\}$$

例 3 觀察方程式



第六圖

$$\left.\begin{aligned} z_1&=\angle AOB=\ 48^\circ\quad 17'.0\\ z_2&=\angle AOC=\ 96^\circ\quad 52'.3 \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} z_3 &= \angle AOD = 152^\circ\ 54'.1 \\ z_4 &= \angle BOC = 48^\circ\ 35'.2 \\ z_5 &= \angle BOD = 104^\circ\ 37'.1 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1),$$

條件方程式為
$$\left.\begin{aligned} z_1 - z_2 + z_4 &= 0 \\ z_1 - z_3 + z_5 &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (2).$$

由圖知 $z_4 = z_2 - z_1$, $z_5 = z_3 - z_1$, 以此代入(1)式,得

$$\left.\begin{aligned} z_1 \qquad\qquad\qquad &= 48^\circ\ 17'.0 \\ z_2 \qquad\qquad &= 96^\circ\ 52'.3 \\ z_3 \qquad &= 152^\circ\ 54'.1 \\ -z_1 + z_2 \qquad\qquad &= 48^\circ\ 35'.2 \\ -z_1 \qquad + z_3 \qquad &= 104^\circ\ 37'.1 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)'.$$

由(1)及(2)式得 $\qquad d_1 = -0.1, \qquad d_2 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3),$

p	α	β	$\frac{\alpha}{p}$	$\frac{\beta}{p}$	$\frac{\alpha^2}{p}$	$\frac{\alpha\beta}{p}$	$\frac{\beta^2}{p}$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	−1	0	−1	0	1	0	0
1	0	−1	0	−1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1
					3	1	3

$$\therefore \qquad \left.\begin{aligned} 3K_1 + K_2 - 0.1 &= 0 \\ K_1 + 3K_2 + 0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

將上式解之,得

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \quad 0.0375 \\ K_2 &= -0.0125 \end{aligned}\right\}$$

由上所得之值,得

$$\left\{\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{\alpha_1}{p_1}K_1 + \frac{\beta_1}{p_1}K_2 = 0.0375 - 0.0125 = 0.0250 \\ \nu_2 &= -0.0375 \\ \nu_3 &= +0.0125 \\ \nu_4 &= +0.0375 \\ \nu_5 &= -0.0125 \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \ \ 48^\circ\ 17'.0 + 0'.0250 = \ \ 48^\circ\ 17'.0250 \\ z_2 &= \ \ 96^\circ\ 52'.3 - 0'.0375 = \ \ 96^\circ\ 52'.2625 \\ z_3 &= 152^\circ\ 54'.1 + 0'.0125 = 152^\circ\ 54'.1125 \\ z_4 &= \ \ 48^\circ\ 35'.2 + 0'.0375 = \ \ 48^\circ\ 35'.2375 \\ z_5 &= 104^\circ\ 37'.1 - 0'.0125 = 104^\circ\ 37'.0875 \end{aligned}\right\}$$

2. 間接條件觀察

設未知量三個,條件方程式二個,觀察方程式 n 個,而觀察之殘差方程式爲

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{重率} \\ a_1x + b_1y + c_1z + m_1 = \nu_1 & p_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + m_2 = \nu_2 & p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_nx + b_ny + c_nz + m_n = \nu_n & p_n \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

條件方程式爲

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z+\lambda_1=0 \\ \beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 z+\lambda_2=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

求未知量 x、y、z 之最良值之法:於(2)式所示之條件下求$[p\nu\nu]$等於極小值.

在條件方程式(2)內,將 y、z 以 x 之項表之如次:

$$\left.\begin{array}{l}y=\alpha' x+\beta' \\ z=\alpha'' x+\beta''\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

以上式之值代入(1)式,將y、z消去,得如次形式之方程式:

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha'_1 x+m'_1=\nu_1 & p_1 \\ \alpha'_2 x+m'_2=\nu_2 & p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \alpha'_n x+m'_n=\nu_n & p_n\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

解(4)之標準方程式,卽得 x 之值.以之代入(3)式,得 y、z 之值.更將 x、y、z 之值代入(1),卽求得 ν_1、ν_2、ν_3.

例　　觀察方程式　　重率

$$\left.\begin{array}{lcrc}x+y & = & 3.0 & 2 \\ x\quad -z & = & -0.9 & 1 \\ \quad y & = & 2.0 & 3 \\ x\quad +z & = & 3.1 & 2\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

條件方程式: $x+y+z=5.0$ ……………………………………(2).

由(2)得 $z=5.0-x-y$ ……………………………………(3).

以(3)式內 z 之值代入(1)式,得

$$\begin{array}{rc} & \text{重率} \\ x+y=3.0 & 2 \\ 2x+y=4.1 & 1 \\ y=2.0 & 3 \\ y=1.9 & 2 \end{array}\Bigg\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

作(4)式之標準方程式:

$$\left.\begin{array}{r} 6x+4y=14.2 \\ 4x+8y=19.9 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5).$$

將上式解之,得

$$x=1.06,$$

$$y=1.96,$$

$$z=1.98,$$

$$\therefore \quad x+y+z=5.00.$$

問　題

1. 觀察三角形三內角之結果如下:

$$A=52°57', \qquad B=87°28', \qquad C=39°47',$$

試求各角之最良值.

2. 在前題中,如 A、B、C 之重率為 2、1、3,其最良值為何?

3. 試從下列之觀察值求 x 之最良值:

$$\begin{array}{ll} & \text{重率} \\ x=5.6 & 2 \\ y=4.5 & 3 \\ z=7.2 & 5 \end{array}\Bigg\}$$

條件方程式:　　$x+2y+3z=36$.

4. 觀察四邊形各內角之結果如下,求各角之最良值:

$$\begin{array}{ll} & \text{重率} \\ A=\ 92°49' & 1 \\ B=102°14' & 2 \\ C=\ 78°15' & 3 \\ D=\ 86°44' & 4 \end{array}\Bigg\}$$

5. 從觀察之結果知 A、B、C 三處之海拔爲 100.3 米,150.6 米,301.2 米.但 B 比 A 高 50.0米,C 比 B 高 150.5 米.求 A、B、C 三處海拔之最良值(用未定係數法解之).

第五節　經驗公式

1. 常數之決定

理論上將變數間所成立之公式形式決定,而由觀察測定公式中所含某變數之數值,以此數值決定公式中之常數時,可利用最小二乘法以解決之.

例　適合方程式 $y=mx+b$ 內 x、y 之數值,由實驗觀察之結果如下:

x	2	4	6	7
y	5	8	10	12

試求常數 m、b 之最良值.

解　將觀察值代入方程式內,得如次之觀察方程式:

$$\left.\begin{aligned} 2m+b&=5 \\ 4m+b&=8 \\ 6m+b&=10 \\ 7m+b&=12 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(1).$$

由(1)作成標準方程式,得

$$\left.\begin{aligned} 105m+19b&=186 \\ 19m+4b&=35 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(2).$$

將上式解之,得

$$m=1.339,\quad b=2.390.$$

故所求之方程式爲

$$y=1.339x+2.390.$$

2. 實驗式

將觀察某量所得之觀察值爲基準,而利用最小二乘法以決定經驗公式 (empirical formula) 之形式,其步驟大約如下:

取觀察量之一(x)爲橫軸,而以其他觀察量(y)爲縱軸,將觀察值作成曲線.由圖可知y或隨x之增加而增加,或所得曲線爲一拋物線,若然,則可以一般式

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots\cdots$$

表示y與x之關係.此方程式可應用於頗多之物理現象,例如速度與距離,體積與溫度,應力與應變等.式中之A、B、C、D……係常數,其值由觀察決定之.

其他尚有大部之現象可以如下之一般式表之:

$$y=A+B\sin\frac{360^\circ}{m}x+B'\cos\frac{360^\circ}{m}x$$

$$+C\sin\frac{360^\circ}{m}2x+C'\cos\frac{360^\circ}{m}2x+\cdots\cdots.$$

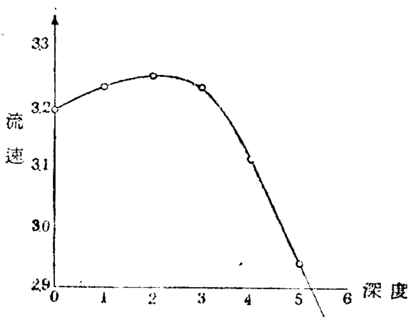
上式中如x增加,則y或增或減,而成一波狀之曲線.關於此類之現象,如一年間溫度之變化,及氣壓之變化,潮之乾滿,地球表面熱之配布與緯度之關係等.式中之A、B、B'、C、C'、……爲常數,可由觀察決定,而m爲y值之一周期內所含x之單位數.若多數之周期相似,且屬秩序整然時,僅取式中前三項卽足表示變化.

此外尚採用其他實驗式以討論物理及其他現象,至於觀察所測得之結果究應採用何種公式方能使之非常適合,且同時能應用於其他相似之情形,則除嘗試

外別無他法.觀察者應憑本人之學識經驗假定某種式爲最適宜,而後算出常數之最良值.比較觀察及計算之值當有殘差,若事實所需,則可由殘差以求出或然差(見後).同一觀察而得數個之實驗式時,其最佳之實驗式當爲使殘差之平方和爲最小者.

例 1　觀察某河流之速度(y)與水深(x)之關係如次,試求 x 與 y 之關係.

深度(由表面)	水流速度
0尺	3.19
1	3.23
2	3.25
3	3.23
4	3.11
5	2.94



第　七　圖

以由表面至水中之深度爲 x 軸,水流速度爲 y 軸,以觀察值作圖如上.由圖觀之,知其與拋物線相似.假定關係式爲

$$y = A + Bx + Cx^2.$$

$x=0$ 時,$y=3.19$,故知 $A=3.19$.將上式改書之爲

$$y = 3.19 + Bx + Cx^2.$$

但觀察方程如下:

$$\left.\begin{array}{r}C+B+3.19=3.23\\4C+2B+3.19=3.25\\9C+3B+3.19=3.23\\16C+4B+3.19=3.11\\25C+5B+3.19=2.94\end{array}\right\}\text{卽}\quad\left.\begin{array}{rr}C+B=&0.04\\4C+2B=&0.06\\9C+3B=&0.01\\16C+4B=&-0.08\\25C+5B=&-0.25\end{array}\right\}$$

作成標準方程式,得

$$\left.\begin{array}{r}979C+225B=-6.87\\225C+55B=-1.29\end{array}\right\}$$

解之,得 $C=-0.0272,\quad B=0.0878.$

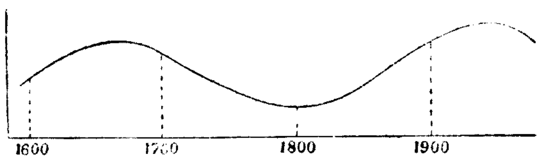
故所求之關係式爲

$$y=3.19+0.0878x-0.0272x^2.$$

例 2　據1882年美國海岸及大地測量之報告,Hartford Conn. 之地磁方位角之變化如下:

年代	方位角
1786	5° 25′ W
1810 年	4° 46′
1824 年	5° 45′
1828－29 年	6° 03′
1859 年 7 月 27 日	7° 17′
1867 年 8 月 16 日	7° 49′.3
1879 年 7 月 25 日	8° 34′.0

由各地所得之紀錄,知方位角作週期的變動.週期隨地而異,短者約二百五十年,長者竟達四百年之久.新英格蘭(New England)之方位角變動略如下圖所示:



第八圖

圖之橫軸表年代,縱軸表方位角之大小.故下式可適用於討論此種觀察:

$$y=A+B\sin\frac{360^\circ}{m}x+B'\cos\frac{360^\circ}{m}x.$$

式中之 y 爲 x 年代之磁方位角.常數 A、B、B'、m 則利用最小二乘法由觀察決定之.但進行之唯一步驟,當假定一最適宜之 m 值,然後成立觀察方程式及標準方程式.由此方能決定常數 A、B、B'.更命 m 以另一值,又計算之,以得出各常數之其他值.遇必要時,假定 m 以數個值,計算數次,而求出各常數對應之數值.求出每次之殘差(即 y 之觀察值與計算值之差).於是 m 之最適宜一值當使殘差之平方和爲最小.

設 $m=288$ 年,則

$$\frac{360^\circ}{m}=1^\circ.25,$$

而上式成為 $y=A+B\sin 1^\circ.25x+B'\cos 1^\circ.25x.$

若 x 為距 1850 年 1 月 1 日之年數,一切角度之單位為度.如此,則第一次觀察:

$$x=1786.5-1850.0=-63.5(\text{年}),$$

$$1^\circ.25x=-79^\circ.4,$$

$$\sin 1^\circ.25x=-0.983,\quad \cos 1^\circ.25x=+0.184,$$

$$y=5^\circ.42.$$

其他各次之觀察可以同法計算,所得之值如下表所列:

次數	年代	x	$1^\circ.25x$	$\sin 1^\circ.25x$	$\cos 1^\circ.25x$	y
1	1786.5	-63.5	$-79^\circ.4$	-0.983	$+0.184$	$+5^\circ.42$
2	1810.5	-39.5	$-49^\circ.4$	-0.759	$+0.651$	$+4^\circ.77$
3	1824.5	-25.5	$-31^\circ.9$	-0.528	$+0.849$	$+5^\circ.75$
4	1829.0	-21.0	$-26^\circ.25$	-0.412	$+0.897$	$+6^\circ.05$
5	1859.6	$+9.6$	$+12^\circ.0$	$+0.208$	$+0.978$	$+7^\circ.29$
6	1867.6	$+17.6$	$+22^\circ.0$	$+0.375$	$+0.927$	$+7^\circ.82$
7	1879.6	$+29.6$	$+37^\circ.0$	$+0.602$	$+0.799$	$+8^\circ.57$

由上表最後三行所載之數字,可書出七個觀察方程式,由此以作三個標準方程式如次:

$$\left.\begin{aligned}+7.00A-1.53B+5.28B'-45.67=0\\-1.53A+2.56B-0.51B'+5.03=0\\+5.28A-0.51B+4.53B'-35.64=0\end{aligned}\right\}$$

解之,得 $A=+8^\circ.06,\quad B=+2^\circ.60,\quad B'=-1^\circ.29;$

故實驗式為

$$y=8^\circ.06+2^\circ.60\sin 1^\circ.25x-1^\circ.29\cos 1^\circ.25x.$$

下表為觀察與計算值之比較:

年代	x	y 之觀察值	y 之計算值	殘差 v
1786.5	−63.5	+5°.42	5°.28	+0.14
1810.5	−39.5	4°.77	5°.25	−0.48
1824.5	−25.5	5°.75	5°.60	+0.15
1829.0	−21.0	6°.05	5°.76	+0.29
1859.6	+9.6	7°.29	7°.34	−0.05
1867.6	+17.6	7°.82	7°.84	−0.02
1879.6	+29.6	8°.57	8°.59	−0.02

問 題

1.

x	0	1	2	4	5
y	12.0	12.5	13.5	16.5	18.5

決定方程式 $y=A+Bx+Cx^2$ 之係數 A、B、C。

2. 螺線之長 y 變與砝碼 x 間之關係如下:

x 克	1	2	3	4	5
y 厘米	8.1	12.4	16.6	20.9	25.1

試決定 x、y 間成立之方程式.

第六章 精密度

第一節 三種特殊誤差

1. 三種特殊誤差

對於同一量而得有二個以上之最良值時,此二者中何者較爲可靠,且如何處理之,則更能得可信度較多之結果;換言之,即如何決定最良値之精密度(precision),本章當論述之.

討論以前,當先將種種用語及定理述之.研究觀察值之精密度所用之特殊誤差通常有三種,其名稱如下:

I. 或然差(probable error),以 γ 表之.

II. 標準誤差(standard deviation),以 ε 表之,此爲皮耳生(Pearson)氏所命名者,高斯氏稱之爲平均差(mean error),而有爾(Yule)氏稱之爲平均平方差(mean square error).表示之符號,除上記者外尚有用 σ、μ 等.

III. 平均差(average mean or mean error),其記號爲 η.

2. 或然差

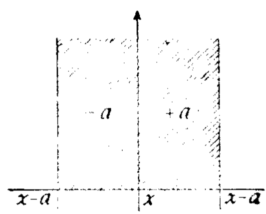
吾人欲測出某量之眞值 X,可用種種方法觀察之,但觀察所得之值 M_1、M_2、……M_n,均不免有誤差之存在.

此時當判別各觀察值之精密程度,以期選定一最確定可靠之值.茲述判斷精密程度之一方法.

今就$(X-a, X+a)$之範圍論之.選定a之大小,使觀察值有半數在此範圍以內,其餘半數在此範圍以外,則a愈小之觀察當益精密.

更就誤差論之.若誤差x_1、x_2、……x_n之半數在$(-a, +a)$之範圍外,其餘半數在範圍內,如此選定a之值,則a愈小,觀察愈精密.

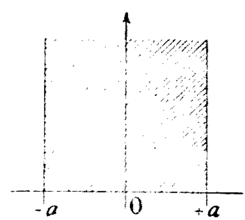
若誤差x_1、x_2、……x_n內之半數$\frac{n}{2}$個,其絕對值比γ小,其餘半數$\frac{n}{2}$個之絕對值比γ大,如此將γ選定時,則γ稱爲觀察值之或然差.



第九圖

用或然率之用語表上述之事實,則如次:

a愈大時,誤差x_i在$-a$與$+a$間之或然率愈大.將a適當選定,使其或然率爲$\frac{1}{2}$,此時之a如以γ表之.則某量之觀察值M_i之誤差x_i在$-\gamma$與$+\gamma$間之或然率爲$\frac{1}{2}$,此γ稱爲觀察值M_i之或然差.



第十圖

由公式[14],則得表示誤差在$-\gamma$與$+\gamma$間之或然

率爲$\frac{1}{2}$之式如下:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h\gamma}e^{-t^2}dt\cdots\cdots\cdots\cdots(6),$$

滿足此式之 γ 稱爲觀察值之或然差.

例如觀察值 43.2 之或然差爲 0.1, 其意義即以眞值作中點,此觀察值 43.2 在 -0.1 與 $+0.1$ 間之或然率爲$\frac{1}{2}$,亦即 43.2 在 $X-0.1$ 與 $X+0.1$ 間之或然率爲$\frac{1}{2}$之意也.

γ 與 h 之關係:

玆將 γ 與 h 之關係論之.由第二表知$h\gamma$適合下式時:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h\gamma}e^{-t^2}dt,$$

$h\gamma$之值爲 $h\gamma=0.4769,$

即 $$\gamma=\frac{1}{h}\times0.4769\cdots\cdots\cdots\cdots(7).$$

系 1 由(7)式知或然差與 h 成反比,即

$$\gamma_1:\gamma_2=\frac{1}{h_1}:\frac{1}{h_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{【42】}.$$

系 2 由公式[20],

$$p_1:p_2=h_1^2:h_2^2.$$

合上式與公式[42]推之,得

$$\gamma_1:\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{p_1}}:\frac{1}{\sqrt{p_2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{【43】}.$$

3. 標準誤差

各誤差之平方和之平均平方根稱爲標準差,通常以 ε 表之.

設誤差爲 x_1、x_2、……x_n,由上之定義,

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2}{n}}=\sqrt{\frac{[xx]}{n}},$$

或 $$\varepsilon^2=\frac{[xx]}{n}\cdots\cdots(1)【44】.$$

ε 與 h 之關係:

誤差 x_i 發生之或然率爲 $f(x_i)dx_i$.命誤差之總數爲 n,而誤差 x_i 之個數爲 n_i,由或然率之定義,誤差 x_i 發生之或然率爲 $\frac{n_i}{n}$,

$$\therefore\qquad f(x_i)dx_i=\frac{n_i}{n}.$$

即 $$n_i=nf(x_i)dx_i\cdots\cdots(2).$$

但誤差 x_i 之平方和爲 n_ix^2.即等於 $nx_i{}^2f(x_i)dx_i$,故在 $-a$ 與 $+a$ 間之誤差平方和 $[xx]$ 可以如下之積分式表之:

$$n\int_{-a}^{+a}x^2f(x)dx\cdots\cdots(3).$$

設積分界限爲由 $-\infty$ 至 $+\infty$,而 $f(x)$ 代以誤差之或然率函數,則有

$$[xx]=n\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\frac{nh}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-h^2x^2}dx \cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

由(1)及(4)式,

$$\varepsilon^2=\frac{[xx]}{n}=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-h^2x^2}dx$$

$$=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-h^2x^2}dx;$$

由部分積分法,

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}x^2e^{-h^2x^2}dx$$

$$=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\left\{\left|-\frac{xe^{-h^2x^2}}{2h^2}\right|_0^{+\infty}+\frac{1}{2h^2}\int_0^{\infty}e^{-h^2x^2}dx\right\}$$

$$=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\left\{0+\frac{1}{2h^2}\int_0^{\infty}e^{-h^2x^2}dx\right\}=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-h^2x^2}dx$$

$$=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2h}=\frac{1}{2h^2}.$$

即 $$\varepsilon^2=\frac{1}{2h^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)\textbf{[45]}.$$

或 $$\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{2}h}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)'\textbf{[45]}'.$$

4. 平均誤差

誤差之絕對值相加平均,稱爲平均誤差(η).以 n 表誤差之總數, n_i 表誤差 x_i 之個數,如前所述,

$$\frac{n_i}{n}=f(x_i)dx,$$

即 $$n_i = nf(x_i)dx$$

誤差 x_i 之和爲 $$n_i x_i = n x_i f(x_i) dx,$$

一切誤差之和爲

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots\cdots = n\{x_1 f(x_1)dx + x_2 f(x_2)dx + \cdots\cdots\}.$$

將上式以積分式表之,則爲

$$n\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

其平均值,即爲平均誤差 η,故

$$\eta = \frac{n\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx}{n} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-h^2x^2}dx$$

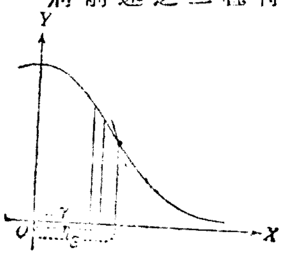
$$= \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} xe^{-h^2x^2}dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2h^2} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}},$$

即 $$\eta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \cdots\cdots\cdots\cdots (8)【46】,$$

即 $$\eta = \frac{1}{h} \times \text{常數} \cdots\cdots\cdots\cdots (8)'.$$

5. 三種特殊誤差之關係

將前述之三種特殊誤差列記如次:



第十一圖

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{h}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \gamma &= \frac{1}{h}\rho \quad (\rho = 0.4769) \\ \eta &= \frac{1}{h}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (9),$$

故 $$\gamma:\eta:\varepsilon=\rho:\frac{1}{\sqrt{\pi}}:\frac{1}{\sqrt{2}} \cdots\cdots\cdots(10),$$

而 $$\gamma<\eta<\varepsilon \cdots\cdots\cdots(11).$$

由(9)及(10)式,如知 γ、η、ε 三種誤差中之一,即可計算其他誤差.其換算公式如次:

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon=1.4826\gamma\\ \eta=1.1829\gamma\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}\gamma=0.6745\varepsilon\\ \eta=0.7979\varepsilon\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}\varepsilon=1.2533\eta\\ \gamma=0.8453\eta\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\textbf{[47]}.$$

6. 三種特殊誤差與 h 之關係

由公式[45]',得 $$\varepsilon h=\frac{1}{\sqrt{2}}=\text{常數},$$

故 ε 與 h 成反比,即觀察之精密度 h 與 ε 成反比例.

又 $$\gamma h=\rho=\text{常數},$$

故精密度 h 與 γ 成反比例.

又 $$\eta h=\frac{1}{\sqrt{\pi}}=\text{常數},$$

故精密度 h 與 η 成反比例.

通常不以 η 作比較精密度,而用之以求 ε、γ,蓋計算$[\nu]$比計算$[\nu\nu]$容易故也.

問 題

1. 誤差爲0.2、0.8、0.3、0.5、0.8,試求標準誤差、或然差及平均誤差.

2. $\epsilon=1.95$，試求 r 及 η.

3. 誤差為 -0.1、0.1、-0.1、0，試求標準誤差及或然差.

4. $r=2.46$，試求 h 之值.

5. $r_1=0.2$，$r_2=0.3$，試求二觀察之重率之比.

第二節 誤差傳佈定律

設 Z 為互相獨立量 z_1、z_2、……之任意函數.觀察各獨立量時,其各個之標準誤差、或然差,於 Z 之標準誤差、或然差上,其傳佈定律將若何?本節之目的,即在研究此誤差傳佈定律(law of propagation of errors).

設獨立數量為

z_1、z_2、……；其函數為 $Z=f(z_1,z_2,\cdots\cdots z_k)$.

或然差為

γ_1、γ_2、……；其函數為 R.

標準誤差為

ε_1、ε_2、……；其函數為 E.

茲先討論二三特殊式函數,俾可簡單求出誤差傳佈定律之一般式:

1. $Z=z_1\pm z_2$ 時.

觀察 n 次時,設

	第一次	第二次……第 n 次
z_1 之誤差	x_1'	x_1'' …… $x_1^{(n)}$
z_2 之誤差	x_2'	x_2'' …… $x_2^{(n)}$
Z 之誤差	X'	X'' …… $X^{(n)}$

則有

$$\left.\begin{aligned} X' &= x_1' \pm x_2' \\ X'' &= x_1'' \pm x_2'' \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\}$$

各式自乘相加,得

$$[XX] = [(x_1 \pm x_2)^2] = [x_1 x_1] + [x_2 x_2] \pm 2[x_1 x_2].$$

然 n 大時,則正負誤差之數約略相同,故成立下式:

$$[x_1 x_2] = 0,$$

故

$$[XX] = [x_1 x_1] + [x_2 x_2],$$

以 n 除之,得

$$\frac{[XX]}{n} = \frac{[x_1 x_1]}{n} + \frac{[x_2 x_2]}{n}.$$

上式各項均為對應之標準誤差,故

$$E^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \cdots\cdots [48].$$

以 0.6745^2 乘上式兩邊,則得

$$R^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \cdots\cdots [49].$$

系　設　$Z = z_1 \pm z_2 \pm z_3 \pm \cdots\cdots \pm z_n$,則

$$E^2 = \varepsilon_1^2 \pm \varepsilon_2^2 \pm \varepsilon_3^2 \pm \cdots\cdots \pm \varepsilon_n^2,$$

$$R^2 = \gamma_1^2 \pm \gamma_2^2 \pm \gamma_3^2 \pm \cdots\cdots \pm \gamma_n^2.$$

2. $Z=az_1$ 及 $Z=az_1+b$ (a、b 爲常數)時.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{命 } Z \text{ 之誤差爲} & X',X'',X''',\cdots\cdots \\ z_1 \text{ 之誤差爲} & x_1',x_1'',x_1''',\cdots\cdots\end{array}\right\}$$

則有
$$\left.\begin{array}{l}X'=ax_1' \\ X''=ax_1'' \\ X'''=ax_1''' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}$$

兩邊自乘,且相加得

$$[XX]=(ax_1')^2+(ax_1'')^2+\cdots\cdots=a^2[xx],$$

$$\therefore\qquad \frac{[XX]}{n}=a^2\cdot\frac{[xx]}{n},$$

即
$$E^2=a^2\varepsilon_1^2,\quad R^2=a^2\gamma_1^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{【50】}.$$

系 僅有常數相差之二量,其標準誤差相同.

3. $Z=a_1z_1\pm a_2z_2$ 時.

與前條同樣計算之,得次式:

$$E^2=a_1^2\varepsilon_1^2+a_2^2\varepsilon_2^2,\qquad R^2=a_1^2\gamma_1^2+a_2^2\gamma_2^2\cdots\text{【51】}.$$

4. $Z=f(z_1,z_2,z_3)$ 時.

命 z_1、z_2、z_3 之近似值爲 m_1、m_2、m_3,而 x_1、x_2、x_3 爲小補正值,則

$$z_1=m_1+x_1,\quad z_2=m_2+x_2,\quad z_3=m_3+x_3,$$

$$Z=f(m_1+x_1,m_2+x_2,m_3+x_3).$$

由 Taylor 之擴張定理〔23〕展開之,且省略二次以上各項,得

$$Z=f(m_1,m_2,m_3)+\frac{\partial f(m_1,m_2,m_3)}{\partial m_1}x_1$$

$$+\frac{\partial f(m_1,m_2,m_3)}{\partial m_2}x_2+\frac{\partial f(m_1,m_2,m_3)}{\partial m_3}x_3.$$

以 l 代表 $f(m_1,m_2,m_3)$,則上式可書之爲

$$Z=l+\frac{\partial l}{\partial m_1}x_1+\frac{\partial l}{\partial m_2}x_2+\frac{\partial l}{\partial m_2}x_3.$$

故 Z 之標準誤差等於 $\frac{\partial l}{\partial m_1}x_1+\frac{\partial l}{\partial m_2}x_2+\frac{\partial l}{\partial m_3}x_3$ 之標準誤差矣.由【51】得

$$E^2=\left(\frac{\partial l}{\partial m_1}\right)^2\varepsilon_1{}^2+\left(\frac{\partial l}{\partial m_2}\right)^2\varepsilon_2{}^2+\left(\frac{\partial l}{\partial m_3}\right)^2\varepsilon_3{}^2 \cdots\cdots\cdots \textbf{【52】}.$$

$$R^2=\left(\frac{\partial l}{\partial m_1}\right)^2\gamma_1{}^2+\left(\frac{\partial l}{\partial m_2}\right)^2\gamma_2{}^2+\left(\frac{\partial l}{\partial m_3}\right)^2\gamma_3{}^2 \cdots\cdots\cdots \textbf{【53】}.$$

系　$Z=f(m)$ 時,

$$E^2=\left(\frac{\partial Z}{\partial m}\right)^2\varepsilon^2,\qquad R^2=\left(\frac{\partial Z}{\partial m}\right)^2\gamma^2,$$

故

$$E=\left(\frac{\partial Z}{\partial m}\right)\varepsilon,\qquad R=\left(\frac{\partial Z}{\partial m}\right)\gamma \cdots\cdots\cdots \textbf{【54】}.$$

例　以 k 表圓之半徑,z 表其面積,則

$$z=\pi k^2,\qquad \therefore\quad \frac{\partial z}{\partial k}=2\pi k,$$

$$\therefore \qquad R=\left(\frac{\partial z}{\partial k}\right)\gamma=2\pi k\gamma.$$

此處之 γ 爲或然差.故圓之半徑 $k=9.67\pm0.02$ 時,$\gamma=0.02$ 圓之面積之或然差 R 爲

$$R=2\pi k\times0.02=1.215.$$

5. 算術平均之標準誤差(ε_0)、或然差(γ_0)

算術平均M_0之重率爲 n,而各觀察值之重率爲 1,故 M_0 及 M_i 之或然差爲 γ_0 及 γ 時,由[43],成立如下之關係:

$$\gamma_0{}^2:\gamma^2=1:n,$$

即

$$\gamma_0=\frac{\gamma}{\sqrt{n}}.$$

兩邊除以 0.6745 得

$$\frac{\gamma_0}{0.6745}=\frac{\gamma}{0.6745}\times\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

如令

$$\gamma_0=0.6745\varepsilon_0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\textbf{[55]},$$

則得

$$\varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\textbf{[56]}.$$

此 ε_0 稱爲算術平均之標準誤差.

例 觀察 X 歷 10 次,得 $\varepsilon=0.20$,試求算術平均之標準誤差及或然差.

解 由公式[56]及[55],得

$$\varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}=\frac{0.20}{\sqrt{10}}=0.063,\quad \gamma_0=0.6745\varepsilon_0=0.042.$$

6. 觀察值精密度之表示法

觀察值精密度之表示,係用最良值之或然差γ_0或標準誤差ε_0;或常於最良值之後附以$\pm\gamma_0$,以示最良值及精密度.

例 117.94±0.007者,爲最良值117.94,附記$\gamma_0=0.007$以示精密度也.

7. 解例

例 1 設 $A=30.99\pm0.23, B=15.04\pm0.06, C=10.69\pm 0.14$,試求$A+B-C$及其或然差.

解
$$R=\sqrt{0.23^2+0.06^2+0.14^2}=0.28,$$
$$A+B-C=35.34\pm0.28.$$

例 2 設某棒之長在20°C.時爲50.004±0.005.溫度昇高1°C.棒伸長0.003±.002.問在17°C.時該棒之長爲若干?

解 設$z_1=50.004\pm0.005$, $z_2=0.003\pm0.002$, 17°C. 棒之長爲Z,故從20°C.時棒長z_1減去對於3°C.棒之伸長,即得Z之值,故

$$Z=z_1-3z_2,$$

即
$$Z=50.004-3\times0.003=49.995$$

$$R=\sqrt{0.005^2+(3\times 0.002)^2}=0.008,$$

$$\therefore \qquad Z=49.995\pm 0.008.$$

例 3 直角三角形之二邊為

$$a=49.7\pm 0.6, \quad b=50.4\pm 0.9,$$

試求其斜邊之長.

解 斜邊 $z=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{49.7^2+50.4^2}=70.8,$

$$\frac{\partial z}{\partial a}=\frac{a}{z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial b}=\frac{b}{z},$$

$$\therefore \qquad R^2=\left(\frac{a}{z}\right)^2\gamma_1{}^2+\left(\frac{b}{z}\right)^2\gamma_2{}^2$$

$$=\frac{1}{70.8^2}\{49.7^2\times 0.6^2+50.4^2\times 0.9^2\}=0.5878\cdots,$$

$$\therefore \qquad R=\sqrt{0.5878\cdots}=0.766\cdots\doteqdot 0.77,$$

$$\therefore \qquad \text{斜邊 } z=70.8\pm 0.77.$$

例 4 設 $x=45.28\pm 0.03$, 試求 $\log x$ 之或然差.

解 命 $z=\log x$, $\quad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{x}$,

$$\therefore \qquad R=\frac{1}{x}r_1=\frac{0.03}{45.28}=0.00066\cdots\cdots\doteqdot 0.0007.$$

問 題

1. $Z=z_1+z_2$, $\varepsilon_1=2.3$, $\varepsilon_2=0.8$, 試求 E.

2. $Z=3z_1-2z_2$, $\varepsilon_1=0.5$, $\varepsilon_2=3.4$, 試求 E.

3. $Z=z_1{}^2+z_2{}^2$, 試求 E 與 ε_1、ε_2 之關係式.

4. $A=ab$, $a=30$, $b=20$; a、b 之或然差爲 0.7、0.4, 試求 R.

5. 設圓之半徑爲 a, 其或然差爲 γ; 試求圓周之或然差.

6. 三角形三內角爲 A、B、C, B、C 之或然差爲 $1'$、$2'$, 試求 A 之或然差.

7. 設 $x=321.6\pm0.2$, 試求 $\log x$ 之或然差.

第三節　用殘差之公式

在第一及第二節中,曾用誤差以作種種之討論.實際上誤差爲不可知之數,故必須用殘差以代誤差.本節之目的卽在將用誤差所表之公式換爲用殘差表示者.

1. 誤差與殘差之關係式:

$$\frac{[xx]}{n}=\frac{[\nu\nu]}{n-1}.$$

一個量 X 作 n 次觀察時,設其觀察值爲 M_1、M_2、M_3、……M_n;算術平均爲 M_0; 眞誤差爲 x_1、x_2、x_3、……x_n; 殘差爲 ν_1、ν_2、ν_3、……ν_n; 又 X 之眞值以 $M_0+\Delta$ 表之.此時成立下列之關係式:

$$x_1=M_1-X=M_1-(M_0+\Delta)=(M_0+\nu_1)-(M_0+\Delta)=\nu_1-\Delta,$$

卽

同様

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\nu_1-\Delta\\ x_2&=\nu_2-\Delta\\ &\cdots\cdots\cdots\\ x_n&=\nu_n-\Delta \end{aligned}\right\}$$

各式自乘相加後以 n 除之,得

$$\frac{[xx]}{n}=\frac{1}{n}[(\nu-\Delta)^2]=\frac{1}{n}\{[\nu\nu]+n\Delta^2-2\Delta[\nu]\}.$$

然由公式[4], $[\nu]=0$,

$$\therefore\qquad \frac{[xx]}{n}=\frac{[\nu\nu]}{n}+\Delta^2.$$

最良值 M_0 之誤差 Δ 雖爲不可知之數,然可視爲與 M_0 之標準誤差 ε_0 近似的相等.故由公式[56]及[44]得

$$\Delta=\varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{[xx]}{n}}=\frac{\sqrt{[xx]}}{n}.$$

代入前式得 $\dfrac{[xx]}{n}=\dfrac{[\nu\nu]}{n}+\dfrac{[xx]}{n^2}$,

$$\therefore\qquad \frac{[xx]}{n}=\frac{[\nu\nu]}{n-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{【57】}.$$

由上式知 n 充分大時,$[xx]$ 與 $[\nu\nu]$ 約略相等,故作大量觀察時,誤差與殘差事實上可無須加以區別.

2. 以殘差 ν 所表之 ε、γ.

由[57]知 $\dfrac{[xx]}{n}=\dfrac{[\nu\nu]}{n-1}$.

但由[44] $\varepsilon^2=\dfrac{[xx]}{n}$,

$$\therefore\qquad \varepsilon^2=\frac{[\nu\nu]}{n-1},$$

$$\therefore\qquad \varepsilon=\sqrt{\frac{[\nu\nu]}{n-1}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{【58】},$$

$$\gamma = 0.6745\sqrt{\frac{[\nu\nu]}{n-1}} \cdots\cdots\cdots\cdots \textbf{【59】}.$$

3. 算術平均之標準誤差(ε_0)及或然差(γ_0):

由公式[56], $$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},$$

又由[58] $$\varepsilon = \sqrt{\frac{[\nu\nu]}{n-1}},$$

故得 $$\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{[\nu\nu]}{n(n-1)}} \cdots\cdots\cdots\cdots \textbf{【60】}.$$

但 $$\gamma_0 = 0.6745\varepsilon_0,$$

$$\therefore \qquad \gamma_0 = 0.6745\sqrt{\frac{[\nu\nu]}{n(n-1)}} \cdots\cdots\cdots\cdots \textbf{【61】}.$$

例 $[\nu\nu] = 0.096, n = 10$.求 ε_0 及 γ_0.

解 $$\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{[\nu\nu]}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0.096}{10\times 9}} = 0.0326 = 0.033,$$

$$\gamma_0 = 0.6745\varepsilon_0 = 0.022.$$

4. 有重率之觀察値化成重率 1 之觀察値

設觀察方程式及其重率爲

$$\left.\begin{array}{lc} & \text{重率} \\ a_1X + b_1Y + c_1Z + m_1 = 0 & p_1 \\ a_2X + b_2Y + c_2Z + m_2 = 0 & p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_nX + b_nY + c_nZ + m_n = 0 & p_n \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(1).$$

設 k 爲一因數,能使上式中之第一式由重率 p_1 變

爲重率 1,則上式可改書之如下:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{重率} \\ k(a_1X+b_1Y+c_1Z+m_1)=0 & 1 \\ a_2X+b_2Y+c_2Z+m_2=0 & p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_nX+b_nY+c_nZ+M_n=0 & p_n \end{array}\right\}\cdots\cdots(2).$$

在此式中,其未知量之最良値當與原式者相同;換言之,由此兩系之方程式當得出同樣之標準方程式.作(1)式 X 之標準方程式,得

$$\left.\begin{array}{l} p_1a_1{}^2X+p_1a_1b_1Y+p_1a_1c_1Z+p_1a_1m_1 \\ \quad +p_2a_2{}^2X+p_2a_2b_2Y+p_2a_2c_2Z+p_2a_2m_2 \\ \quad +\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad +P_na_n{}^2X_n+p_na_nb_nY+p_na_nc_nZ+p_na_nm_n=0 \end{array}\right.\cdots\cdots(3).$$

同樣由(2)作 X 之標準方程式,得

$$\left.\begin{array}{l} k^2a_1{}^2X+k^2a_1b_1Y+k^2a_1c_1Z+k^2a_1m_1 \\ \quad +p_2a_2{}^2X+p_2a_2b_2Y+p_2a_2c_2Z+p_2a_2m_2 \\ \quad +\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad +P_na_n{}^2X_n+p_na_nb_nY+p_na_nc_nZ+p_na_nm_n=0 \end{array}\right.\cdots\cdots(4).$$

將(3)及(4)逐項比較,則知若 $k^2=p_1$,各項均等,即

$$k=\sqrt{p_1}\cdots\cdots\cdots\cdots【62】.$$

作(1)及(2)式之 Y 或 Z 之標準方程式而比較之,亦

得同樣之結果.故有重率(p)之觀察方程式改爲重率1之觀察方程式時,祇須將原式乘以重率之方根$\sqrt{p}$.

例 1　觀察方程式

$$\begin{array}{ll} & \text{重率} \\ x=23 & 3 \\ x=25 & 1 \end{array}$$

由上式,　　最良值 $x_0=\dfrac{25+3\times 23}{1+3}=23.25$.

又由觀察方程式

$$\begin{array}{ll} & \text{重率} \\ \sqrt{3}\,x=\sqrt{3}\times 23 & 1 \\ x=25 & 1 \end{array}$$

得最良值 x_0 爲

$$x_0=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}\times 23)+25}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}+1}=\frac{1}{4}(23\times 3+25)=23.25.$$

5. 有重率觀察之標準誤差

設觀察值之重率爲　p_1、p_2、……p_n,

殘差爲　v_1、v_2、……v_n.

由前條所述之方法,將重率化成單位重率,則

重率爲　1、　1、………………1

殘差爲　$\sqrt{p_1}v_1$、$\sqrt{p_2}v_2$、……$\sqrt{p_n}v_n$

標準誤差(ε)爲

$$\varepsilon^2=\frac{(\sqrt{p_1}\,\nu_1)^2+(\sqrt{p_2}\,\nu_2)^2+\cdots\cdots+(\sqrt{p_n}\,\nu_n)^2}{n-1},$$

$$\therefore\qquad \varepsilon=\sqrt{\frac{[p\nu\nu]}{n-1}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots【63】$$

例 1

M	p	ν	ν^2	$p\nu^2$
26	1	4	16	16
21	4	1	1	4
22	5			20
M_0	$[p]$			$[p\nu\nu]$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{[p\nu\nu]}{n-1}}=\sqrt{\frac{20}{2-1}}=\sqrt{20}.$$

例 2

M	p	pM	ν	ν^2	$p\nu^2$
14.30	4	120	0.066	0.004356	0.017424
14.48	3	144	0.114	0.012996	0.038988
14.35	9	315	0.016	0.000256	0.002304
14.41	1	41	0.044	0.001936	0.001936
14.37	4	148	0.004	0.000016	0.000064
14.366	21	768			0.060716
M_0	$[p]$	$[pM]$			$[p\nu\nu]$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{0.060716}{5-1}}=\sqrt{0.015179}=0.123.$$

6. 有重率觀察值之算術平均之標準誤差、或然差

以 M_1、M_2、……M_n 表有重率 p_1、p_2、……p_n 之觀察值。

$$M_0=\frac{[pM]}{[p]}=\frac{p_1M_1}{[p]}+\frac{p_2M_2}{[p]}+\cdots\cdots+\frac{p_nM_n}{[p]}.$$

由誤差傳佈定律,得

$$\varepsilon_0^2=\left(\frac{p_1}{[p]}\varepsilon_1\right)^2+\left(\frac{p_2}{[p]}\varepsilon_2\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{p_n}{[p]}\varepsilon_n\right)^2$$

$$=\frac{p_1}{[p]^2}p_1\varepsilon_1^2+\frac{p_2}{[p]^2}p_2\varepsilon_2^2+\cdots\cdots+\frac{p_n}{[p]^2}p_n\varepsilon_n^2.$$

設 ε_i、ε 爲重率 p_i、1 之標準誤差,因重率與標準誤差之平方成反比,故

$$\frac{\varepsilon_i^2}{\varepsilon^2}=\frac{1}{p_i},\qquad 或\qquad p_i\varepsilon_i^2=\varepsilon^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\textbf{[64]}.$$

以之代入上式,得

$$\varepsilon_0^2=\frac{p_1}{[p]^2}\varepsilon^2+\frac{p_2}{[p]^2}\varepsilon^2+\cdots\cdots+\frac{p_n}{[p]^2}\varepsilon^2$$

$$=\frac{\varepsilon^2}{[p]^2}(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)=\frac{\varepsilon^2}{[p]^2}[p]=\frac{\varepsilon^2}{[p]}$$

卽

$$\varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{\sqrt{[p]}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\textbf{[65]}$$

由 [63],

$$\varepsilon_0=\sqrt{\frac{[pvv]}{(n-1)[p]}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\textbf{[66]}$$

$$\gamma_0=0.6745\,\varepsilon_0.$$

系 1

$$\varepsilon_0=\varepsilon_1\sqrt{\frac{p_1}{[p]}},\qquad \varepsilon_0=\varepsilon_2\sqrt{\frac{p_2}{[p]}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\textbf{[67]},$$

$$\gamma_0=\gamma_1\sqrt{\frac{p_1}{[p]}},\qquad \gamma_0=\gamma_2\sqrt{\frac{p_2}{[p]}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\textbf{[68]}.$$

何則?因 $$\varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{\sqrt{[p]}},\qquad \varepsilon^2=p_1\varepsilon_1^2,$$

$$\therefore\qquad \varepsilon_0=\varepsilon_1\sqrt{\frac{p_1}{[p]}}.$$

$$\therefore\qquad \gamma_0=\gamma_1\sqrt{\frac{p_1}{[p]}}.$$

系 2 $$\varepsilon_i=\sqrt{\frac{[pvv]}{p_i(n-1)}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{【69】}$$

因 $$\varepsilon_i=\frac{\varepsilon}{\sqrt{p_i}}=\sqrt{\frac{[pvv]}{p_i(n-1)}}.$$

例 1　$\gamma_1=0.3$,　$\gamma_2=0.4$,　試求 γ_0.

解　由[43]得

$$p_1:p_2=\frac{1}{(0.3)^2}:\frac{1}{(0.4)^2}=16:9,$$

$$\therefore\qquad \gamma_0=\gamma_1\sqrt{\frac{p_1}{[p]}}=0.3\sqrt{\frac{16}{25}}=0.24.$$

例 2　$\varepsilon=0.123$,　$[p]=21$ 時:

$$\varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{\sqrt{[p]}}=\frac{0.123}{\sqrt{21}}=\frac{0.123\sqrt{21}}{21}$$

$$=\frac{0.123\times4.5825}{21}=0.027,$$

$$\gamma_0=0.6745\varepsilon_0=0.6745\times0.027=0.019.$$

問　題

1. $[vv]=0.3610$,　$n=10$; 試求 ε、ε_0、γ_0.

2. v 為 -2.7, -1.4, 0.3, 3.2, -2.0, 2.6; 試求 ε、ε_0、γ_0.

3. 殘差及重率如下,試求 ε、ε_0、γ_0.

v	-3.6	$+2.6$	$+1.6$	-0.6	-0.4	$+1.4$	$+2.4$	-3.4
重率	1	3	5	7	8	6	4	2

4. 將下列觀察方程式化成重率1之觀察方程式後,作標準方程式.

$$
\begin{array}{rl|c}
 & & \text{重率} \\
x & =10 & 5 \\
y & =7 & 3 \\
z & =2 & 6 \\
x+y & =18 & 2 \\
y+z & =9 & 4
\end{array}
$$

5. $\gamma_1=0.02$, $\gamma_2=0.03$, 試將 γ_0 決定之.

第四節　單量觀察

1. 單量之直接觀察

(a) 重率相等時:

例

M	$M-A$	$\nu=M-M_0$	ν^2
31.5	0.5	-0.05	0.0025
30.7	-0.3	-0.85	0.7225
32.2	1.2	0.65	0.4225
31.9	0.9	0.35	0.1225
31.4	0.4	-0.15	0.0225
31.6	0.6	0.05	0.0025
$M_0=31.55$	$3.6\ -0.3$ $=3.3$	$1.05-1.05$ $[\nu]=0$	1.2950 $[\nu\nu]$

$$A=31.0,$$

$$M_0=31.0+\frac{3.3}{6}=31.55,$$

$$\varepsilon_0=\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{1.2950}{6\times5}}=0.2077\cdots\cdots=0.208,$$

$$\gamma_0=0.6745\varepsilon_0=0.14,$$

$$M_0=31.55\pm0.14.$$

(*b*)附有重率時:

例

M	p	$M-A$	$p(M-A)$	ν	ν^2	$p\nu^2$
34.15	1	0.15	0.15	+0.095	0.009025	0.009025
34.12	2	0.12	0.24	+0.065	0.001225	0.008450
34.07	4	0.07	0.28	+0.015	0.000225	0.000900
34.02	2	0.02	0.04	−0.035	0.001225	0.002450
34.03	3	0.03	0.09	−0.025	0.000625	0.001875
34.11	2	0.11	0.22	+0.055	0.003025	0.006050
33.97	3	−0.03	−0.09	−0.085	0.007225	0.021675
$M_0=34.055$	$[p]=17$		$[\ ]=0.93$			$[p\nu\nu]=0.050425$

$$A=34,$$

$$M_0=34+\frac{0.93}{17}=34+0.055=34.055,$$

$$\varepsilon_0=\sqrt{\frac{[p\nu\nu]}{[p](n-1)}}=\sqrt{\frac{0.050425}{6\times17}}=\sqrt{0.00049436}=0.022,$$

$$\gamma_0=0.6745\varepsilon_0=0.015,$$

$\therefore \quad M_0 = 34.055 \pm 0.015.$

2. 單量之間接觀察

$X = f(M)$ 時,直接的觀察 M,以間接求出 X.命 M 之直接觀察值為 M_i, M_i 之近似值為 M_0, m_i 為補正值.命

$$f(M_0) = X_0, \quad f(M_0 + m_i) = X_0 + x_i.$$

由〔22〕,

$$X_0 + x_i = f(M_0 + m_i)$$

$$= f(M_0) + \frac{df(M_0)}{dM_0} m_i + \frac{d^2 f(M_0)}{dM_0^2} \frac{m_i^2}{2!} + \cdots\cdots$$

$$= X_0 + \frac{dX_0}{dM_0} m_i + \frac{d^2 X_0}{dM_0^2} \frac{m_i^2}{2!} + \cdots\cdots,$$

$$\therefore \qquad x_i = \frac{dX_0}{dM_0} m_i + \cdots\cdots.$$

省略m_i之二次以上各項,則

$$x_i = \frac{dX_0}{dM_0} m_i. \qquad \text{【70】}$$

若 x_i 為 X 之誤差, m_i 為 M 之誤差,則有

$$[x_i x_i] = \left(\frac{dX_0}{dM_0}\right)^2 [m_i m_i],$$

以 n 除之,得 $$\frac{[x_i x_i]}{n} = \left(\frac{dX_0}{dM_0}\right)^2 \frac{[m_i m_i]}{n},$$

即 $$E^2 = \left(\frac{dX_0}{dM_0}\right)^2 \varepsilon^2;$$

$$\therefore \qquad E=\left(\frac{dX_0}{dM_0}\right)\varepsilon, \quad 而 \quad R=\left(\frac{dX_0}{dM_0}\right)\gamma.$$

例 1　$X=\sin A$ 內,直接的觀察 A 之值以求出 X.

設 $A=A_0$ 時, $X=X_0$,則

$$X_0=\sin A_0.$$

又

$$X_0+x=\sin(A_0+a)$$

$$=\sin A_0+\frac{d\sin A_0}{dA_0}a+\cdots\cdots$$

$$=\sin A_0+\cos A_0 a+\cdots\cdots,$$

a 充分小時,　$x=\cos A_0 a.$

$$\therefore \qquad E^2=(\cos A_0)^2\varepsilon^2, \quad E=(\cos A_0)\varepsilon.$$

例 2　五次測定直徑之結果如次,試求圓之面積.

14.4　13.9　14.2　14.3　14.2　(厘米)

解　以 k 表直徑, A 表面積.

k	ν	ν^2
14.4	0.2	0.04
13.9	-0.3	0.09
14.2	0.0	0.00
14.3	0.1	0.01
14.2	0	0.00
$k_0=14.2$	0	$[\nu\nu]=0.14$

$$\varepsilon_0=\sqrt{\frac{0.14}{4\times 5}}=0.08,$$

$$\gamma_0=0.6745\varepsilon_0=0.05,$$

$$k=14.2\pm 0.05.$$

圓面積　$$A_0=\pi\left(\frac{k_0}{2}\right)^2=\pi\times\left(\frac{14.2}{2}\right)^2=158.368,$$

其或然差　$$R_0=\left(\frac{dA}{dk_0}\right)\gamma_0=\frac{1}{2}\pi k_0\gamma_0=1.115,$$

∴　$$A=158.368\pm 1.115.$$

例 3　20°C. 時棒之長度為 l, 線脹係數為 a,

$$l=75.004\pm 0.004,\quad a=0.0036\pm 0.0018,$$

試求 60°F. 時棒之長度.

解　$60°\text{F.}=\frac{5}{9}(60°-32°)\text{C.}=15°.55\text{C.}$

設 60°F. 時棒之長度為 L. 棒之原來溫度為 20°C., 其長為 l; L 為 15°.55C. 時棒之長度, 即溫度降低 4°.45C. 時棒之長度, 故有

$$L=l-4.45a=75.004-0.0036\times 4.45=74.988.$$

又由公式[53],

$$R^2=\left(\frac{\partial L}{\partial l}\right)^2\gamma_1{}^2+\left(\frac{\partial L}{\partial a}\right)^2\gamma_2{}^2=\gamma_1{}^2+4.45^2\gamma_2{}^2,$$

∴ $R=\sqrt{0.004^2+4.45^2\times 0.0018^2}=0.009;$

∴ $L=74.988\pm 0.009.$

3. 二組測定值之合併法

對於同一量而有二組之測定值時,將此二組所得之值應如何合併之,方能得到更精密之值,茲當述之.

設二組之測定值為(甲)$M_{01}\pm\gamma_1$,(乙)$M_{02}\pm\gamma_2$.甲乙之重率為p_1,p_2,由公式[43],

$$p_1:p_2=\gamma_2^2:\gamma_1^2.$$

依據上式關係,得以決定重率,利用所得重率以求有重率之算術平均而得最良值M_0,即

$$M_0=\frac{p_1M_{01}+p_2M_{02}}{p_1+p_2}.$$

次由公式[68]以決定γ_0

$$\gamma_0=\gamma_1\sqrt{\frac{p_1}{p}}=\cdots\cdots.$$

例 甲乙兩技師觀察某角之結果如次,問合併兩結果所得之最良值為何?

甲 $34^\circ\ 55'\pm 4'.3,$

乙 $34^\circ\ 54'\pm 6'.3.$

解 設甲乙之重率為p_1 p_2,則

$$p_1:p_2=6.3^2:4.3^2=20:9.$$

故將兩人之結果平均之,得

$$M_0 = 34^\circ + \frac{55' \times 20 + 54' \times 9}{29} = 34^\circ 54'.7,$$

又 $$\gamma_0 = \gamma_1 \sqrt{\frac{p_1}{[p]}} = 4'.3 \times \sqrt{\frac{20}{29}} = 3.5,$$

∴ $$M = 34^\circ 54'.7 \pm 3'.5.$$

問 題

1. 某比重瓶之重量如次,試求最良值之或然差.

42.603 克　42.602 克　42.604 克　42.604 克　42.603 克

2. 觀察某長度之結果如次,試求最良值之或然差.

觀察值	72.68	72.77	72.86	72.10	72.27 (單位厘米)
重率	16	9	4	1	2

3. 設圓之直徑(h)爲15.68±0.02厘米,試求圓之面積及其或然差.

4. 測定銀之原子量之結果如下,試求兩結果合併後之最良值及其或然差.

107.9401±0.0058,　107.9232±0.0140.

5. 由 $X = 19.34 \pm 0.05$ 以求 $\log_{10} X$ 之或然差.

第五節 衆量之間接觀察

1. 標準方程式之根之重率

在間接觀察中,決定未知量之精密度時,須知此等

未知量之重率,故計算此重率之方法必先討論之.以下暫假定各觀察之重率爲 1.

(a)計算重率之第一法　二個未知數之標準方程式如下:

$$\left.\begin{aligned}[aa]x+[ab]y+[am]=0\\ [ab]x+[bb]y+[bm]=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

上式依次乘以 Q_1、Q_2 且相加,得

$$\{[aa]Q_1+[ab]Q_2\}x+\{[ab]Q_1+[bb]Q_2\}y$$

$$+\{[am]Q_1+[bm]Q_2\}=0.$$

Q_1、Q_2 之值適當選定,可使 x 之係數爲 1,y 之係數爲 0,

$$\left.\begin{aligned}Q_1[aa]+Q_2[ab]=1\\ Q_1[ab]+Q_2[bb]=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

即由(2)以決定 Q_1、Q_2 之值,此時

$$\begin{aligned}x&=-\{Q_1[am]+Q_2[bm]\}\\ &=-\{Q_1(a_1m_1+a_2m_2)+Q_2(b_1m_1+b_2m_2)\}\\ &=-\{(a_1Q_1+b_1Q_2)m_1+(a_2Q_1+b_2Q_2)m_2\}\cdots\cdots\cdots(3).\end{aligned}$$

以 α_1、α_2 表上式中 m_1、m_2 之係數,即令

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1=a_1Q_1+b_1Q_2\\ \alpha_2=a_2Q_1+b_2Q_2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

而

$$x=-(\alpha_1m_1+\alpha_2m_2)\cdots\cdots\cdots\cdots(5).$$

m_1、m_2之標準誤差相同以 ε 表之,而以 ε_x 表 x 之標準誤差.由誤差傳佈定律,得

$$\varepsilon_x^2=(-\alpha_1)^2\varepsilon^2+(-\alpha_2)^2\varepsilon^2=[\alpha\alpha]\varepsilon^2.$$

但由公式[64],以 p_x 表 x 之重率,

$$p_x=\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_x^2}=\frac{\varepsilon^2}{[\alpha\alpha]\varepsilon^2}=\frac{1}{[\alpha\alpha]}\cdots\cdots\cdots(6).$$

以 α_1、α_2 依次乘(4),相加,得

$$[\alpha\alpha]=Q_1[\alpha a]+Q_2[\alpha b]\cdots\cdots\cdots(7)$$

以 a_1、a_2 依次乘(4),將其結果相加,且由(2)之關係,得

$$[\alpha a]=Q_1[aa]+Q_2[ab]=1$$

又以 b_1、b_2 乘(4),相加,且由(2)之關係得 $\cdots\cdots\cdots$(8)**【71】**.

$$[\alpha b]=Q_1[ab]+Q_2[bb]=0$$

以(8)之關係代入(7)式,得

$$[\alpha\alpha]=Q_1\cdots\cdots\cdots(9).$$

故由(6)及(9)得次式:

$$p_x=\frac{1}{Q_1}\cdots\cdots\cdots(10)$$**【72】**.

但 Q_1 為(2)式之根,亦即為標準方程式(1)內令 $[am]=-1$ 及 $[bm]=0$,將此二方程式解之,所求得 x 之值.故成立如下之法則:

法則 在標準方程式內,令 $[am]=-1$,$[bm]=0$,解

此方程式,得 x 之值,其逆數即為由標準方程式所得 x 之重率 p_x. 又令 $[am]=0$, $[bm]=-1$, 解之,得 y 之值,其逆數即為 y 之重率 p_y.

三個未知量之標準方程式為

$$\left.\begin{aligned}[aa]x+[ab]y+[ac]z+[am]=0\\ [ab]x+[bb]y+[bc]z+[bm]=0\\ [ac]x+[bc]y+[cc]z+[cm]=0\end{aligned}\right\}$$

由此方程式所得之 x 之重率 p_x, 可以由

$$[am]=-1,\quad [bm]=0,\quad [cm]=0$$

三方程式所得 x 值之逆數表之.同樣可求得 y、z 之重率.

(*b*)計算重率之第二法　有二個未知量時:

在標準方程式內,以 $-A$ 代替 $[am]$, $-B$ 代替 $[bm]$, 則得

$$\left.\begin{aligned}[aa]x+[ab]y=A\\ [ab]x+[bb]y=B\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11).$$

以 Q_1 乘(11)之第一式, Q_2 乘其第二式,相加,得

$$\{Q_1[aa]+Q_2[ab]\}x+\{Q_1[ab]+Q_2[bb]\}y=AQ_1+BQ_2.$$

適當選定 Q_1、Q_2, 使其如第一法內能滿足(2)之關係,則有

$$x=Q_1A+Q_2B\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12).$$

但 $$p_x=\frac{1}{Q_1},\qquad \therefore\ p_x=\frac{1}{(A\text{之係數})}.$$

(12)乃爲以未定係數法解(11)所得 x 之值,故得下之法則:

法則　在標準方程式內,以 $-A$、$-B$ 代替 $[am]$、$[bm]$. 解方程式所得之結果以 A、B 之項表示時,則表 x 之式內,A 之係數爲 x 之重率 p_x 之逆數.同樣可求得 p_y.

上述法則可改述之如下:

系　由(11)式將 y 消去,在所得之結果式內令 A 之係數爲 1,此時 x 之係數之絕對値爲 x 之重率 p_x.

證明　由上法則中,表 x 之式(12)爲

$$x=Q_1A+Q_2B.$$

故由(11)式消去 y 所得之結果式爲

$$x-Q_1A-Q_2B=0.$$

令 A 之係數爲 1,則有

$$-\frac{1}{Q_1}x+A+\frac{Q_2}{Q_1}B=0.$$

此 x 之係數之絕對値爲 $\frac{1}{Q_1}$,故知其爲 x 之重率.

有三個未知數時

此時與上述同理,得如次之法則:

法則 在標準方程式

$$\left.\begin{aligned}[aa]x+[ab]y+[ac]z+[am]&=0\\ [ab]x+[bb]y+[bc]z+[bm]&=0\\ [ac]x+[bc]y+[cc]z+[cm]&=0\end{aligned}\right\}$$

內,命 $[am]=-A,[bm]=-B,[cm]=-C$.以A、B、C項表標準方程式之解,則表 x 值之式內,A 之係數之逆數爲 x 之重率p_x;表 y 值之式內,B 之係數之逆數爲 y 之重率 p_y;表 z 值之式內,C 之係數之逆數爲 z 之重率p_z.

例 1 標準方程式爲

$$\left.\begin{aligned}7x-\ y\ -4.8&=0\\ -x+10y-19.4&=0\end{aligned}\right\}$$

解(第一法)命 $\left.\begin{aligned}7x-\ y&=1\\ -x+10y&=0\end{aligned}\right\},$

$$\therefore\ x=\frac{10}{69},\qquad \therefore\ p_x=\frac{69}{10}=6.9.$$

又 $\left.\begin{aligned}7x-\ y&=0\\ -x+10y&=1\end{aligned}\right\},$

$$\therefore\ y=\frac{7}{69},\qquad \therefore\ p_y=\frac{69}{7}=9.9.$$

(第二法)命 $\left.\begin{aligned}7x-\ y&=A\\ -x+10y&=B\end{aligned}\right\},$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} x &= \frac{10}{69}A + \frac{1}{69}B \\ y &= \frac{1}{69}A + \frac{7}{69}B \end{aligned}\right\},$$

$$\therefore \; p_x = \frac{1}{\frac{10}{69}} = \frac{69}{10} = 6.9, \qquad p_y = \frac{1}{\frac{7}{69}} = \frac{69}{7} = 9.9.$$

例 2　標準方程式

$$\left.\begin{aligned} 27x + 6y \qquad &= 88 \\ 6x + 15y + z \; &= 70 \\ y + 54z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

解(第一法)命

$$\left.\begin{aligned} 27x + 6y \qquad &= 1 \\ 6x + 15y + z \; &= 0 \\ y + 54z &= 0 \end{aligned}\right\},$$

解之,得　$x = \frac{809}{19899}$,　$\therefore \; p_x = \frac{19899}{809} = 24.60;$

又命

$$\left.\begin{aligned} 27x + 6y \qquad &= 0 \\ 6x + 15y + z \; &= 1 \\ y + 54z &= 0 \end{aligned}\right\},$$

解之,得　$y = \frac{54}{737}$,　$\therefore \; p_y = \frac{737}{54} = 13.65;$

又命

$$\left.\begin{aligned} 27x + 6y \qquad &= 0 \\ 6x + 15y + z \; &= 0 \\ y + 54z &= 1 \end{aligned}\right\},$$

解之,得 $z=\frac{41}{2211}$, $\therefore\ p_z=\frac{2211}{41}=53.93.$

(第二法)命
$$\left.\begin{aligned} 27x+6y\qquad &=A\\ 6x+15y+z&=B\\ y+54z&=C\end{aligned}\right\},$$

將上式解之,得
$$\left.\begin{aligned} 19899x&=809A-324B+6C\\ 737y&=-12A+54B-C\\ 6633z&=2A-9B+123C\end{aligned}\right\},$$

$$\therefore\quad p_x=\frac{19899}{809}=24.60,\qquad p_y=\frac{737}{54}=13.65,$$

$$p_z=\frac{6633}{123}=53.93.$$

(c)計算重率之第三法 設標準方程式爲

$$\left.\begin{aligned}[aa]x+[ab]y+[am]&=0\\ [ab]x+[bb]y+[bm]&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

方程式右邊之 0 以 A、B 代之,得如下之式:

$$\left.\begin{aligned}[aa]x+[ab]y+[am]&=A\\ [ab]x+[bb]y+[bm]&=B\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

由(2)式內第二式,得

$$y=\frac{1}{[bb]}\{B-[bm]-[ab]x\},$$

以之代入第一式,得

$$[aa]x+\frac{[ab]}{[bb]}\{B-[bm]-[ab]x\}+[am]=A,$$

去分母 $$[aa][bb]x+[ab]B-[ab][bm]-[ab]^2x$$
$$+[bb][am]=[bb]A,$$

即 $$\{[aa][bb]-[ab]^2\}x=[ab][bm]-[bb][am]$$
$$+[bb]A-[ab]B.$$

令 A 之係數爲 1,上式可以如次之形式表之:

$$Ex=F+A+GB \cdots\cdots\cdots\cdots (3).$$

命 $A=0, B=0$, 則 (3) 爲 (1) 之解,即

$$Ex=F, \qquad \therefore\ x=\frac{F}{E},$$

此爲求得 x 之最良值.如命 $F=0, A=1, B=0$, 則與在 (1) 式中命 $[am]=-1, [bm]=0$ 相同,故 (3) 式內可如斯假定之.此時

$$Ex=1,$$

而上式中之 E 乃係 p_x 之值,即

$$p_x=E.$$

由此得如次之法則:

法則 以 A、B 代替標準方程式右邊之 0,由其第二式以 x 項表 y 之值,代入第一式,將 y 消去,令 A 之係數爲 1,則 x 之係數之絕對值乃 x 之重率.命含 A、B 各

項為 0,解之,得 x 之最良值.同樣,可求 y 及 p_y.

例 3 由第三法求下列標準方程式內 x,y 之重率:

$$7x-y-4.8=0,\quad -x+10y-19.4=0.$$

解(第三法)命
$$\left.\begin{aligned}7x-\ y\ -\ 4.8&=A\\ -x+10y-19.4&=B\end{aligned}\right\}.$$

由第二式,得
$$y=\frac{1}{10}(19.4+x+B),$$

代入第一式,得
$$\frac{69}{10}x=6.74+A+\frac{1}{10}B,$$

$$x=\frac{6.74}{69}\times10=0.98,\qquad p_x=\frac{69}{10}=6.9.$$

又由第二式,得
$$x=10y-19.4-B.$$

代入第一式,得
$$69y=140.6+A+7B,\qquad p_y=\frac{69}{7}=9.9.$$

例 4 標準方程式為

$$\left.\begin{aligned}27x+6y\qquad\ &=88\\ 6x+15y+\ z\ &=70\\ y+54z&=107\end{aligned}\right\}.$$

解(第三法)命
$$\left.\begin{aligned}27x+6y\qquad\ &=88+A\\ 6x+15y+\ z&=70+B\\ y+54z&=107+C\end{aligned}\right\},$$

消去 y, z, 得
$$19899x=49159+809A-324B+6C,$$

$$\therefore \quad x=\frac{49159}{19899}=2.47, \qquad p_x=\frac{19899}{809}=24.60.$$

又將 x、z 消去,得

$$737y=2617-12A+54B-C,$$

$$\therefore \quad y=\frac{2617}{737}=3.55, \qquad p_y=\frac{737}{54}=13.65.$$

又將 x、y 消去,得

$$6633z=12707+2A-9B+123C,$$

$$\therefore \quad z=\frac{12707}{6633}=1.92, \qquad p_z=\frac{6633}{123}=53.93.$$

例 5 觀察方程式爲

$$\left.\begin{aligned} z_1-z_2 \qquad -1.7&=0_1 \\ z_3-2.4&=0_2 \\ -z_1+z_2+z_3-1.0&=0_3 \\ z_2-z_3-3.0&=0_4 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

標準方程式爲

$$\left.\begin{aligned} 2z_1-2z_2-z_3-0.7&=0 \\ -2z_1+3z_2 \qquad -2.3&=0 \\ -z_1 \qquad +3z_3-0.4&=0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

試求各未知數之重率.

解(第一法)命

$$\left.\begin{aligned} 2z_1-2z_2-z_3&=1 \\ -2z_1+3z_2 \qquad &=0 \\ -z_1 \qquad +3z_3&=0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)',$$

消去 z_2, z_3，

$$\begin{array}{lrrrl} 第一式\times 3 & 6z_1 & -6z_2 & -3z_3 & =3 \\ 第二式\times 2 & -4z_1 & +6z_2 & & =0 \\ 第三式\times 1 & -z_1 & & +3z_3 & =0 \\ \hline & z_1 & & & =3. \end{array}$$

$$z_1=3. \quad \therefore \quad p_{z_1}=\frac{1}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)'$$

同樣,求 z_2 之重率,改書標準方程式爲下之形式:

$$\left.\begin{array}{rrrl} 2z_1 & -2z_2 & -z_3 & =0 \\ -2z_1 & +3z_2 & & =1 \\ -z_1 & & +3z_3 & =0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)''.$$

$$\begin{array}{lrrrl} 第一式\times 3 & 6z_1 & -6z_2 & -3z_3 & =0 \\ 第三式\times 1 & -z_1 & & +3z_3 & =0 \\ \hline & 5z_1 & -6z_2 & & =0, \end{array}$$

$$z_1=\frac{6}{5}z_2.$$

代入(2)″之第二式,得 $\quad z_2=\frac{5}{3}, \quad \therefore p_{z_2}=\frac{3}{5} \cdots\cdots\cdots (3)''.$

求 z_3 之重率,命

$$\left.\begin{array}{rrrl} 2z_1 & -2z_2 & -z_3 & =0 \\ -2z_1 & +3z_2 & & =0 \\ -z_1 & & +3z_3 & =1 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)'''.$$

由上式之第二式,得 $\quad 2z_2=\frac{4}{3}z_1,$

代入第一式內,得 $2z_1-3z_3=0$

以 2 乘第三式 $\underline{-2z_1+6z_3=2}$

$$3z_3=2,$$

$$z_3=\frac{2}{3}, \quad \therefore\ p_{z_3}=\frac{3}{2} \cdots\cdots(3)'''.$$

(第二法) 將標準方程式改書爲下之形式:

$$\left.\begin{aligned} 2z_1-2z_2-z_3-0.7&=A\\ -2z_1+3z_2\qquad -2.3&=B\\ -z_1\qquad +3z_3-0.4&=C \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)'.$$

第一式×3 $6z_1-6z_2-3z_3-2.1=3A$

第三式×1 $\underline{-z_1\qquad +3z_3-0.4=C}$

$$5z_1-6z_2\qquad -2.5=3A+C$$

第二式×2 $\underline{-4z_1+6z_2\qquad -4.6=2B}$

$$z_1\qquad -7.1=3A+2B+C\cdots\cdots(2)'.$$

$$\therefore\quad z_1=7.1, \quad p_{z_1}=\frac{1}{3}\cdots\cdots(3).$$

以(2)′代入(1)′式之第二式,得

$$3z_2=16.5+6A+5B+2C,$$

$$\therefore\quad z_2=5.5, \quad p_{z_2}=\frac{3}{5}\cdots\cdots(3)'.$$

以(2)′代入(1)′式之第三式,得

$$3z_3=7.5+3A+2B+2C,$$

$$\therefore\quad z_3=2.5, \quad p_{z_3}=\frac{3}{2}\cdots\cdots(3)''.$$

(第三法)由(2)式之第三式,

$$z_3=\frac{z_1}{3}+\frac{0.4}{3},$$

由(2)式之第二式, $z_2=\frac{2z_1}{3}+\frac{2.3}{3}.$

代入(2)式之第一式,得

$$2z_1-\frac{4}{3}z_1-\frac{4.6}{3}-\frac{z_1}{3}-\frac{0.4}{3}-0.7=0,$$

即 $$\frac{z_1}{3}-\frac{7.1}{3}=0.$$

$$\therefore \qquad z_1=7.1, \qquad p_{z_1}=\frac{1}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

以3乘(2)之第一式,與第三式相加,得

$$5z_1-6z_2-2.5=0,$$

$$\therefore \qquad z_1=\frac{6}{5}z_2+0.5.$$

代入(2)之第二式,得

$$-\frac{12}{5}z_2-1.0+3z_2-2.3=0,$$

即 $$\frac{3}{5}z_2-3.3=0.$$

$$\therefore \qquad z_2=5.5, \qquad p_{z_2}=\frac{3}{5}.$$

以3乘(2)之第一式加2乘(2)之第二式,得

$$2z_1-3z_3-6.7=0,$$

$$\therefore \qquad z_1=\frac{3}{2}z_3+\frac{6.7}{2}.$$

代入(2)之第三式,得

$$-\frac{3}{2}z_3-\frac{6.7}{2}+3z_3-0.4=0,$$

即

$$\frac{3}{2}z_3-\frac{7.5}{2}=0,$$

$$\therefore \qquad z_3=2.5, \qquad p_{z_3}=\frac{3}{2}.$$

由上所得之結果觀之,知無論用何種方法,求得之值均相同.

2. 間接觀察時 x、y 之標準誤差及或然差

設殘差方程式爲

$$\left.\begin{aligned}a_1x+b_1y+m_1&=v_1\\a_2x+b_2y+m_2&=v_2\\\cdots\cdots&\cdots\cdots\\a_nx+b_ny+m_n&=v_n\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

命 x、y 之眞值爲 $x+x_1$、$y+y_1$,觀察值 M_1、M_2、…… 之眞誤差爲 Δ_1、Δ_2、………,則有

$$\left.\begin{aligned}a_1(x+x_1)+b_1(y+y_1)+m_1&=\Delta_1\\a_2(x+x_1)+b_2(y+y_1)+m_2&=\Delta_2\\\cdots\cdots&\cdots\cdots\\a_n(x+x_1)+b_n(y+y_1)+m_n&=\Delta_n\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

即
$$\left.\begin{aligned}&(a_1x+b_1y+m_1)+a_1x_1+b_1y_1=\Delta_1\\&(a_2x+b_2y+m_2)+a_2x_1+b_2y_1=\Delta_2\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

以(1)式代入之,得

$$\left.\begin{aligned}&a_1x_1+b_1y_1+v_1=\Delta_1\\&a_2x_1+b_2y_1+v_2=\Delta_2\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)內各式依次乘以Δ_1、Δ_2、……且相加,得

$$[a\Delta]x_1+[b\Delta]y_1+[v\Delta]=[\Delta\Delta]\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

又(3)內各式依次乘以v_1,v_2,……且相加,得

$$[av]x_1+[bv]y_1+[vv]=[v\Delta]\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

但由標準方程式,

$$\left.\begin{aligned}&[av]=[aa]x+[ab]y+[am]=0,\\ \text{同樣}\quad&[bv]=0,\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

代入(5)式,得　$[vv]=[v\Delta]\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

由(4)及(7),得　$[a\Delta]x_1+[b\Delta]y_1+[vv]=[\Delta\Delta]\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$

以a_1、a_2、……依次　(3)式,且相加,得

$$[aa]x_1+[ab]y_1+[av]=[a\Delta].$$

但由(6)式,　$[av]=0$,

$$\therefore\quad\left.\begin{aligned}&[aa]x_1+[ab]y_1=[a\Delta]\\ \text{同樣得}\quad&[ab]x_1+[bb]y_1=[b\Delta]\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

上式乃標準方程式中之 m 爲 $-\Delta$ 所代,故(9)式之根亦如前節(5)式用 α_1、α_2、β_1、β_2,表之如下:

$$x_1=\alpha_1\Delta_1+\alpha_2\Delta_2,$$

$$y_2=\beta_1\Delta_1+\beta_2\Delta_2,$$

故 $$[a\Delta]x_1=(\alpha_1\Delta_1+\alpha_2\Delta_2)(a_1\Delta_1+a_2\Delta_2)$$

$$=a_1\alpha_1\Delta_1^2+a_2\alpha_2\Delta_2^2+(a_1\alpha_2+a_2\alpha_1)\Delta_1\Delta_2.$$

但在最良場合中,$\Delta_1\Delta_2$ 之項爲零,

$$\therefore\quad [a\Delta]x_1=a_1\alpha_1\Delta_1^2+a_2\alpha_2\Delta_2^2.$$

此時之 Δ_1、Δ_2 可以標準誤差 ε 代替之,故

$$[a\Delta]x_1=\varepsilon^2(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2)=\varepsilon^2[a\alpha].$$

然由公式[71], $[a\alpha]=1$,

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad &[a\Delta]x_1=\varepsilon^2,\\ \text{同樣}\quad &[b\Delta]y_1=\varepsilon^2.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

將所得之值代入(8)式,得

$$\varepsilon^2+\varepsilon^2+[\nu\nu]=n\varepsilon^2,\qquad [\nu\nu]=(n-2)\varepsilon^2,$$

$$\varepsilon^2=\frac{[\nu\nu]}{n-2}\cdots\cdots\cdots\cdots(11).$$

n 爲觀察次數,2 爲未知數之個數.

以上爲未知數爲二個時之情形,若未知數爲 q 個,則(11)式可變爲次之形式:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \frac{[vv]}{n-q}, \\ \text{即}\qquad \varepsilon &= \sqrt{\frac{[vv]}{n-q}}. \\ \text{然由公式[64]},\qquad \varepsilon_x &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_x}}, \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots [73].$$

$$\therefore\qquad \left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sqrt{\frac{[vv]}{(n-q)p_x}} \\ \varepsilon_y &= \sqrt{\frac{[vv]}{(n-q)p_y}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots [74].$$

$$\gamma_x = 0.6745\varepsilon_x.$$

如觀察方程式附有重率p_1、p_2、………時,則由公式[62],各乘以對應項$\sqrt{p_1}$、$\sqrt{p_2}$、……,使為有相等重率之方程式.此時等重率之殘差方程式如下:

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{p_1}\,a_1x+\sqrt{p_1}\,b_1y+\sqrt{p_1}\,m_1=\sqrt{p_1}\,v_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}.$$

以上式代替(1)式,而仍照上述方法計算,其結果得對應於[73]之式如下: $\varepsilon = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-q}}$ ……………………[73]',

故[74] $\varepsilon_x = \sqrt{\frac{[pvv]}{(n-q)p_x}}$ ……………………[74]'.

法則 先求出x,y,z之重率,再以x,y,z之最良值代

入殘差方程式以求v_1、v_2、……，由公式[73]求得ε。次依公式[74]計算ε_x、ε_y、ε_z，最後則算出γ_x、γ_y、γ_z。

例 1 觀察方程式

$$\left.\begin{array}{rr} & \text{重率} \\ x=4.5 & 10 \\ y=1.6 & 5 \\ x-y=2.7 & 3 \end{array}\right\}$$

由上式作成標準方程式：

$$\left.\begin{array}{r} 13x-3y=53.1 \\ -3x+8y=-0.1 \end{array}\right\}$$

將上式解之，得 $x=4.468$, $y=1.663$.

ν	p	ν^2	$p\nu^2$
0.032	10	0.001024	0.010240
0.063	5	0.003969	0.019845
0.105	3	0.011025	0.033075
	$[p]=18$		$[p\nu\nu]=0.063160$

由第一法求未知數之重率：

$$\left.\begin{array}{r} 13x-3y=1 \\ -3x+8y=0 \end{array}\right\}, \qquad x=\frac{8}{95}, \qquad \therefore \quad p_x=\frac{95}{8}.$$

$$\left.\begin{array}{r} 13x-3y=0 \\ -3x+8y=1 \end{array}\right\}, \qquad y=\frac{13}{95}, \qquad \therefore \quad p_y=\frac{95}{13}.$$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-q}}=\sqrt{\frac{0.063160}{3-2}}=0.2513\cdots\cdots=0.251;$$

$$\gamma=0.6745\varepsilon=0.6745\times0.251=0.169.$$

$$\gamma_x=\frac{0.169}{\sqrt{\frac{95}{8}}}=0.049;\qquad \gamma_y=\frac{0.169}{\sqrt{\frac{95}{13}}}=0.062.$$

$$\therefore\qquad x=4.468\pm0.049,\qquad y=1.663\pm0.062.$$

例 2 殘差方程式

$$\left.\begin{aligned} x-y\qquad -1.7&=v_1\\ z-2.4&=v_2\\ -x+y+z-1.0&=v_3\\ y-z-3.0&=v_4 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

其標準方程式爲

$$\left.\begin{aligned} 2x-2y-z-0.7&=0\\ -2x+3y\qquad -2.3&=0\\ -x\qquad +3z-0.4&=0 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

解之,得 $x=7.1,\qquad y=5.5,\qquad z=2.5$ ……………………(3).

由第一法以求 x、y、z 之重率,則有

$$\left.\begin{aligned} 2x-2y-z&=1\\ -2x+3y\qquad&=0\\ -x\qquad+3z&=0 \end{aligned}\right\}$$

解之,得 $x=3,\qquad \therefore\quad p_x=\frac{1}{3}.$

又
$$\left.\begin{aligned}2x-2y-\ z&=0\\-2x+3y\qquad&=1\\-\ x\qquad+3z&=0\end{aligned}\right\},$$

解之,得 $y=\frac{5}{3}$, $\therefore\ p_y=\frac{3}{5}$.

同樣,得 $z=\frac{2}{3}$, $\therefore\ p_z=\frac{3}{2}$.

以(3)式之值代入(1)式,得

ν	ν^2
-0.1	0.01
$+0.1$	0.01
-0.1	0.01
0	0
	$[\nu\nu]=0.03$

由題知 $n=4$, $q=3$,

$$\therefore\qquad \varepsilon=\sqrt{\frac{[\nu\nu]}{n-q}}=\sqrt{\frac{0.03}{4-3}}=0.173,$$

$$\varepsilon_x=\frac{0.173}{\sqrt{\frac{1}{3}}}=0.30,\qquad \gamma_x=0.6745\,\varepsilon_x=0.20.$$

$$\varepsilon_y=\frac{0.173}{\sqrt{\frac{3}{5}}}=0.22,\qquad \gamma_y=0.6745\,\varepsilon_y=0.15.$$

$$\varepsilon_z=\frac{0.173}{\sqrt{\frac{3}{2}}}=0.14,\qquad \gamma_z=0.6745\,\varepsilon_z=0.09.$$

$\therefore \quad x=7.1\pm0.20,\quad y=5.5\pm0.15,\quad z=2.5\pm0.09.$

例 3 觀察方程式

$$\left.\begin{array}{lr} & \text{重率} \\ x+y+z-6.1=0 & 2 \\ x+y\qquad -5.1=0 & 3 \\ y-2z+0.1=0 & 1 \\ y\qquad -2.1=0 & 2 \end{array}\right\}\cdots\cdots(1).$$

作成標準方程式:
$$\left.\begin{array}{l} 5x+5y+2z=27.5 \\ 5x+8y\qquad =31.6 \\ 2x\qquad +6z=12.4 \end{array}\right\}\cdots\cdots(2),$$

解之,得 $x=2.9931\cdots\cdots,\quad y=2.0793\cdots\cdots,$

$z=1.0689\cdots\cdots.$

以第一法求 x、y、z 之重率,則有

$$\left.\begin{array}{l} 5x+5y+2z=1 \\ 5x+8y\qquad =0 \\ 2x\qquad +6z=0 \end{array}\right\},$$

解之,得 $x=\dfrac{24}{29},\qquad \therefore\ p_x=\dfrac{29}{24}=1.208\cdots\cdots.$

又
$$\left.\begin{array}{l} 5x+5y+2z=0 \\ 5x+8y\qquad =1 \\ 2x\qquad +6z=0 \end{array}\right\},$$

解之,得　$y=\frac{13}{29}$,　$\therefore$　$p_y=\frac{29}{13}=2.230\cdots\cdots$.

又
$$\left.\begin{array}{l}5x+5y+2z=0\\5x+8y\qquad=0\\2x\qquad+6z=1\end{array}\right\},$$

解之,得　$z=\frac{15}{58}$,　$\therefore$　$p_z=\frac{58}{15}=3.866\cdots\cdots$.

以 $x=2.993$, $y=2.079$, $z=1.069$ 代入(1),以求殘差 ν, 得下表:

p	ν	ν^2	$p\nu^2$
2	0.041	0.001681	0.003362
3	-0.028	0.000784	0.002352
1	-0.041	0.001681	0.001681
2	-0.021	0.000441	0.000882
			$[p\nu\nu]=0.008277$ $\doteqdot 0.0082$

$$\therefore\qquad \varepsilon=\sqrt{\frac{0.0082}{4-3}}=0.091,$$

$$\gamma=0.6745\varepsilon=0.061,$$

$$\gamma_x=\frac{0.061}{\sqrt{1.208}}=\frac{0.061}{1.1}=0.055,$$

$$\gamma_y=\frac{0.061}{\sqrt{2.230}}=\frac{0.061}{1.49}=0.041,$$

$$\gamma_z=\frac{0.061}{\sqrt{3.866}}=\frac{0.061}{1.97}=0.031,$$

$\therefore \quad x=2.993\pm0.055, \quad y=2.079\pm0.041,$

$z=1.069\pm0.031.$

3. 未知數之值爲大數時:

在觀察方程式
$$\left.\begin{aligned} X+Y&=M_1\\ X\quad&=M_2\\ Y&=M_3 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

內,X、Y 之值甚大,且與 a、b 相近時,命

$$\left.\begin{aligned} X&=a+x\\ Y&=b+y \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

代入(1)式,得
$$\left.\begin{aligned} a+x+b+y&=M_1\\ a+x\qquad&=M_2\\ b+y&=M_3 \end{aligned}\right\},$$

故
$$\left.\begin{aligned} x+y&=m_1\\ x\quad&=m_2\\ y&=m_3 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

由(3)作成標準方程式以求出 x、y,從(2)以求 X、Y;再以所得 x、y 之值代入(3)式,即得 v_1、v_2、v_3.由此以求得 m 之或然差 γ 及 γ_x、γ_y.x 與 X 相差爲常數,則由第六章第二節,知 $\gamma_X=\gamma_x$,同理 $\gamma_Y=\gamma_y$.如此可得到如下形式之結果

$$X=\cdots\cdots\pm\cdots\cdots,$$

$$Y = \cdots\cdots \pm \cdots\cdots.$$

例 觀察方程式
$$\left.\begin{aligned} X &= 573.08 \\ -X+Y &= \quad 2.60 \\ Y &= 575.27 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

命
$$\left.\begin{aligned} X &= 573+x \\ Y &= 575+y \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

則得
$$\left.\begin{aligned} 573+x &= 573.03 \\ -(573+x)+(575+y) &= \quad 2.60 \\ 575+y &= 575.27 \end{aligned}\right\},$$

即
$$\left.\begin{aligned} x &= 0.08 \\ -x+y &= 0.60 \\ y &= 0.27 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

作(3)之標準方程式,得
$$\left.\begin{aligned} 2x-y &= -0.52 \\ -x+2y &= +0.87 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(4),$$

解之,得
$$x = -0.06, \qquad y = +0.41 \cdots\cdots\cdots\cdots(5),$$

$$\therefore \qquad \left.\begin{aligned} X &= 573+(-0.06) = 572.94 \\ Y &= 575+(\quad 0.41) = 575.41 \end{aligned}\right\}.$$

又以第一法計算 x、y 之重率,則有

$$\left.\begin{aligned} 2x-\ y &= 1 \\ -x+2y &= 0 \end{aligned}\right\},$$

$$x=\frac{2}{3}, \quad \therefore \quad p_x=\frac{3}{2}=1.5.$$

$$\left.\begin{aligned} 2x-\ y &=0 \\ -x+2y &=1 \end{aligned}\right\},$$

$$y=\frac{2}{3}, \quad \therefore \quad p_y=\frac{3}{2}=1.5.$$

以(5)式之值代入(3)式,得殘差ν_1、ν_2之值

$$\left.\begin{aligned} -0.06 \qquad\qquad &=0.08+\nu_1 \\ -0.06+0.41 &=0.60+\nu_2 \\ 0.41 &=0.27+\nu_3 \end{aligned}\right\}$$

ν	ν^2
-0.14	0.0196
-0.25	0.0625
0.14	0.0196
	$[\nu\nu]=0.1017$

由上所得之值得或然差之值如下:

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{0.1017}{3-2}}=\sqrt{0.1017}=0.319;$$

$$\gamma=0.6745\varepsilon=0.6745\times0.319=0.215.$$

$$\gamma_x=\frac{0.215}{\sqrt{1.5}}=0.18=\gamma_y,$$

即 $\gamma_X=\gamma_Y=0.18.$

$$\therefore \quad X=572.94\pm0.18, \qquad Y=575.41\pm0.18.$$

4. 非一次形函數之自變數之重率

設未知數 X、Y 有如下之關係時:

$$f_1(X,Y)=H_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

將 f 中所含之常數變更,觀察 H_1,其值爲 M_1、M_2、……時,得如下之觀察方程式:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(X,Y)=M_1 \\ f_2(X,Y)=M_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(X,Y)=M_n \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

f_1、f_2、…… f_n 之內有同形者亦可,有時竟均爲同形.若 f_1 爲非一次式時,則以 X_0、Y_0 爲 X、Y 之近似值,而以 x、y 爲其補正值,命

$$X=X_0+x, \qquad Y=Y_0+y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3),$$

得(2)式中之第一式爲　$f_1(X_0+x, Y_0+y)=M_1$.

由 Taylor 定理,即由[23]展開之,得

$$f_1(X_0,Y_0)+\frac{\partial f_1(X_0,Y_0)}{\partial X_0}x+\frac{\partial f_1(X_0,Y_0)}{\partial Y_0}y+\cdots\cdots=M_1.$$

省略二次以上各項,且命

$$\frac{\partial f_1(X_0,Y_0)}{\partial X_0}=a_1, \qquad \frac{\partial f_1(X_0,Y_0)}{\partial Y_0}=b_1,$$

$$f_1(X_0,Y_0)-M_1=m_1,$$

則得 $a_1x+b_1y+m_1=0$

同樣得

$$\left.\begin{array}{l} a_2x+b_2y+m_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nx+b_ny+m_n=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

(4)爲誘導觀察方程式,由此作標準方程式:

$$\left.\begin{array}{l} [aa]x+[ab]y+[am]=0 \\ [ab]x+[bb]y+[bm]=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5).$$

將(5)式解之,得

$$\left.\begin{array}{l} x=\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y=\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6).$$

以上式之值代入(3)式,則得

$$\left.\begin{array}{l} X=X_0+x=\cdots\cdots \\ Y=Y_0+x=\cdots\cdots \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7).$$

此乃所求之最良值.

次由第一法以求 x、y 之重率,由下式解之,

$$\left.\begin{array}{l} [aa]x+[ab]y=1 \\ [ab]x+[bb]y=0 \end{array}\right\},$$

$$x=\cdots\cdots\cdots,\qquad \therefore\quad p_x=\frac{1}{x}.$$

$$\left.\begin{array}{l} [aa]x+[ab]y=0 \\ [ab]x+[bb]y=1 \end{array}\right\},$$

$$y=\cdots\cdots\cdots,\qquad \therefore\quad p_y=\frac{1}{y}.$$

以(6)式之值代入(4)式以求 ν_1、ν_2、……$[\nu\nu]$,由如下之計算,可算出各或然差,即

$$\gamma=0.6745\sqrt{\frac{[\nu\nu]}{n-q}}=\cdots\cdots;$$

$$\gamma_x=\frac{\gamma}{\sqrt{p_x}}=\cdots\cdots,$$

$$\gamma_y=\frac{\gamma}{\sqrt{p_y}}=\cdots\cdots.$$

然由前節知 $\gamma_x=\gamma_X$, $\gamma_y=\gamma_Y$,故得次之結果:

$$\left.\begin{aligned}X&=\cdots\cdots\cdots\pm\gamma_X\\Y&=\cdots\cdots\cdots\pm\gamma_Y\end{aligned}\right\}$$

5. X、Y 之函數之重率

如下之 X、Y 函數

$$f(X,Y)=H$$

中,觀察 X、Y 之值後,以求函數即 H 之最良值及其精密度時,必先求得 H 之重率.本節即述其求法.

以 X_0、Y_0 爲 X、Y 之近似值, x、y 爲其小補正值,則有

$$H=f(X_0+x,Y_0+y)$$

$$=f(X_0,Y_0)+\frac{\partial f(X_0,Y_0)}{\partial X_0}x+\frac{\partial f(X_0,Y_0)}{\partial Y_0}y+\cdots\cdots\cdots(1)$$

命 $H-f=dH$,省略 x、y 之二次以上各項,則展開式可簡

單書之如下: $$dH=\frac{\partial f}{\partial X_0}x+\frac{\partial f}{\partial Y_0}y \cdots\cdots (2).$$

更命 $$\frac{\partial f}{\partial X_0}=G_1,\qquad \frac{\partial f}{\partial Y_0}=G_2;$$

則得 $$dH=G_1x+G_2y \cdots\cdots (2)'.$$

然 x、y 間另成立如下之標準方程式,即

$$\left.\begin{aligned}[aa]x+[ab]y+[am]=0\\ [ab]x+[bb]y+[bm]=0\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (3).$$

由上式所得 x、y 之值可以 m_1、m_2 表之,故有

$$\left.\begin{aligned}x+\alpha_1m_1+\alpha_2m_2=0\\ y+\beta_1m_1+\beta_2m_2=0\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (4).$$

以(4)之值代入(2)'式,得

$$\begin{aligned}dH&=-G_1(\alpha_1m_1+\alpha_2m_2)-G_2(\beta_1m_1+\beta_2m_2)\\ &=-\{(G_1\alpha_1+G_2\beta_1)m_1+(G_1\alpha_2+G_2\beta_2)m_2\} \cdots\cdots (5).\end{aligned}$$

由公式[51],dH 之標準誤差 ε_{dH} 與單量 X、Y 之標準誤差 ε 間有如次之關係:

$$\varepsilon_{dH}^2=\{(G_1\alpha_1+G_2\beta_1)^2+(G_1\alpha_2+G_2\beta_2)^2\}\varepsilon^2.$$

但由第三節 $$\varepsilon_{dH}=\varepsilon_H=\varepsilon_f;$$

故得 $$\varepsilon_f^2=\{(G_1\alpha_1+G_2\beta_1)^2+(G_1\alpha_2+G_2\beta_2)^2\}\varepsilon^2 \cdots\cdots (6).$$

然由公式[64],

$$\frac{1}{P_f}=\frac{\varepsilon_f{}^2}{\varepsilon^2}=\frac{\varepsilon^2\{(G_1\alpha_1+G_2\beta_1)^2+(G_1\alpha_2+G_2\beta_2)^2\}}{\varepsilon^2}$$

$$=G_1{}^2[\alpha\alpha]+G_2{}^2[\beta\beta]+2G_1G_2[\alpha\beta]\cdots\cdots\cdots\cdots(7).$$

另就下列之關係式論之:

$$\left.\begin{aligned}P_1+G_1[\alpha\alpha]+G_2[\alpha\beta]=0\\P_2+G_1[\alpha\beta]+G_2[\beta\beta]=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(8).$$

以 G_1、G_2 分別乘(8)之第一、第二式,且相加,得

$$G_1P_1+G_2P_2+G_1{}^2[\alpha\alpha]+G_2{}^2[\beta\beta]+2G_1G_2[\alpha\beta]=0,$$

即
$$G_1{}^2[\alpha\alpha]+G_2{}^2[\beta\beta]+2G_1G_2[\alpha\beta]$$
$$=-(G_1P_1+G_2P_2)\cdots\cdots\cdots\cdots(9).$$

由(7)式及(9)式,得

$$\frac{1}{P_f}=-(G_1P_1+G_2P_2)=-[GP]\cdots\cdots\cdots\cdots(10).$$

如 P_1、P_2 之值能決定,則上式即可算出.然利用(3)及(4)式之關係,則(8)式可改書之如下:

$$\left.\begin{aligned}P_1[aa]+P_2[ab]+G_1=0\\P_1[ab]+P_2[bb]+G_2=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(11).$$

(11)式與(3)式比較觀之,(3)式之 x、y、$[am]$、$[bm]$,代以 P_1、P_2、G_1、G_2,則爲(11)式.故 P_1、P_2 爲標準方程式(3)內以 G_1、G_2 代 $[am]$、$[bm]$ 所成方程式之根;因 G_1、G_2 爲已知,$G_1P_1+G_2P_2$ 可求得之.故由次式可求出 P_f:

$$p_f = -\frac{1}{G_1P_1 + G_2P_2} \cdots\cdots (12)【75】.$$

系 $f(X,Y,Z)=H$ 時,

$$p_f = -\frac{1}{G_1P_1 + G_2P_2 + G_3P_3} \cdots\cdots 【75】'.$$

如上形之公式對於任意個數之未知量均能成立.

例 1 x、y 之標準方程式爲

$$\left.\begin{aligned} 5x + 20y &= \ \ 3.60 \\ 20x + 90y &= 16.18 \end{aligned}\right\},$$

或然差爲 $\gamma = 0.012.$

試求 $\alpha = \dfrac{y}{1000+x}$ 時 α 之重率 p_α 及或然差 γ_α.

解 解標準方程式,得

$$x = 0.008, \qquad y = 0.178,$$

$$G_1 = \frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{-y}{(1000+x)^2}, \qquad G_2 = \frac{\partial\alpha}{\partial y} = \frac{1}{1000+x}.$$

由(11)式及標準方程式,則有

$$\left.\begin{aligned} 5P_1 + 20P_2 + G_1 &= 0 \\ 20P_1 + 90P_2 + G_2 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

解之,得 $P_1 = -\dfrac{9G_1 - 2G_2}{5}, \qquad P_2 = -\dfrac{-4G_1 + G_2}{10},$

$$[GP] = G_1P_1 + G_2P_2$$

$$=G_1\left(-\frac{9G_1-2G_2}{5}\right)+G_2\left(-\frac{-4G_1+G_2}{10}\right)$$

$$=\frac{1}{10}(-18G_1^{\ 2}+8G_1G_2-G_2^{\ 2}).$$

G_1 較 G_2 爲甚小,故含 G_1 之項可省略之,此時

$$[GP]=-\frac{1}{10}G_2^{\ 2}.$$

$$\therefore\qquad \frac{1}{p_a}=-[GP]=\frac{G_2^{\ 2}}{10}=\frac{1}{10(1000+x)^2}\fallingdotseq\frac{1}{10^7}.$$

$$\therefore\qquad p_a=10^7.$$

$$\therefore\qquad \gamma_a=\frac{\gamma}{\sqrt{p_a}}=\frac{0.012}{10^3\sqrt{10}}=\frac{0.012\sqrt{10}}{10000}=0.000004.$$

例 2　直角三角形二邊 a、b 之觀察方程式如下:

$$\left.\begin{aligned} a\quad &= 49.1 \\ a+b &= 100.2 \\ b &= 50.1 \\ b &= 49.8 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

試求斜邊 c 之長.

解　作成標準方程式:

$$2a+b=149.3,\qquad a+3b=200.1\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

解之,得　$a=49.6,\qquad b=50.2\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$

以(3)之值代入(1)式中,得

ν	ν^2
0.5	0.25
−0.4	0.16
0.1	0.01
−0.4	0.16
	$[\nu\nu]=0.58$

$$\therefore \qquad \varepsilon=\sqrt{\frac{[\nu\nu]}{4-2}}=\sqrt{\frac{0.58}{2}}=\sqrt{0.29}=0.54,$$

$$\gamma=0.6745\times0.54=0.36.$$

由題意,知 a、b、c 之關係爲

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=70.6.$$

$$\therefore \qquad G_1=\frac{\partial c}{\partial a}=\frac{a}{c}, \qquad G_2=\frac{\partial c}{\partial b}=\frac{b}{c}.$$

又由(11)式
$$\left.\begin{array}{l}2P_1+P_2+G_1=0\\ P_1+3P_2+G_2=0\end{array}\right\}$$

得
$$\left.\begin{array}{l}P_1=\frac{1}{5}(-3G_1+G_2)\\ P_2=\frac{1}{5}(G_1-2G_2)\end{array}\right\}.$$

$$\therefore \quad [GP]=G_1\cdot\frac{1}{5}(-3G_1+G_2)+G_2\cdot\frac{1}{5}(G_1-2G_2)$$

$$=\frac{1}{5}(-3G_1^2+2G_1G_2-2G_2^2).$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{p_c}=-[GP]=-\frac{1}{5}(-3G_1^2+2G_1G_2-2G_2^2)$$

$$=\frac{1}{5}(3G_1^2-2G_1G_2+2G_2^2).$$

$$\therefore \qquad p_c=\frac{5}{3G_1^2-2G_1G_2+2G_2^2}=\frac{5c^2}{3a^2-2ab+2b^2}$$

$$=\frac{24921.80}{7440.72}=3.35,$$

$$\gamma_c=\frac{\gamma}{\sqrt{p_c}}=\frac{0.36}{\sqrt{3.35}}=0.20,$$

卽
$$c=70.6\pm0.20.$$

6. 求未知量之重率之別法

前曾述及高斯氏解標準方程式之方法,而得含三個未知量 z_1、z_2、z_3 之消去方程式,卽由〔31〕″,

$$\left.\begin{aligned} z_3+C_m&=0\\ z_2+B_cz_3+B_m&=0\\ z_1+A_bz_2+A_cz_3+A_m&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

以 α_2、α_1、1 依次乘上式,各式相加,得

$$z_1+(A_b+\alpha_1)z_2+(A_c+B_c\alpha_1+\alpha_2)z_3$$
$$+(A_m+B_m\alpha_1+C_m\alpha_2)=0.$$

選定 α_1、α_2 之值適使 z_2、z_3 之係數爲零,卽

$$\left.\begin{aligned} A_b+\alpha_1&=0\\ A_c+B_c\alpha_1+\alpha_2&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

$$\therefore \qquad z_1+(A_m+B_m\alpha_1+C_m\alpha_2)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

以 β、1 乘(1)式中之第一、第二式,選定 β 之值使適合 z_3 之係數爲零,故有　$z_2+(B_m+C_m\beta)=0$ ……(4),

$$B_c+\beta=0 \quad\cdots\cdots(5),$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} z_1&=-(A_m+B_m\alpha_1+C_m\alpha_2)\\ z_2&=-(B_m+C_m\beta)\\ z_3&=-(C_m)\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(6).$$

將 A_m B_m,C_m 變形表示之,即

$$\left.\begin{aligned} z_1&=-\left(\frac{[am]}{[aa]}+\frac{[bm.1]}{[bb.1]}\alpha_1+\frac{[cm.2]}{[cc.2]}\alpha_2\right)\\ z_2&=-\left(\frac{[bm.1]}{[bb.1]}+\frac{[cm.2]}{[cc.2]}\beta\right)\\ z_3&=-\frac{[cm.2]}{[cc.2]}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(6)'.$$

由第一法,z_1 之重率之求法,可於標準方程式中令

$$[am]=-1,\quad [bm]=0,\quad [cm]=0.$$

由此所得 z_1 值之逆數即爲 z_1 之重率.利用(2)式關係,

$$[bm.1]=[bm]-A_b[am]=0-A_b(-1)=A_b=-\alpha_1,$$

$$[cm.2]=[cm]-A_c[am]-B_c[bm.1]$$

$$=0-A_c(-1)-B_c(-\alpha_1)=A_c+B_c\alpha_1=-\alpha_2.$$

以上所得之值代入(6)′之第一式,且注意 $[am]=-1$, $[bm]=[cm]=0$ 之關係,得

$$z_1=-\left(\frac{-1}{[aa]}+\frac{-\alpha_1^2}{[bb.1]}+\frac{-\alpha_2^2}{[cc.2]}\right)$$

$$=\frac{1}{[aa]}+\frac{\alpha_1^2}{[bb.1]}+\frac{\alpha_2^2}{[cc.2]}.$$

此爲p_{z_1}之逆數,

$$\therefore \qquad \frac{1}{p_{z_1}}=\frac{1}{[aa]}+\frac{\alpha_1^2}{[bb.1]}+\frac{\alpha_2^2}{[cc.2]}\cdots\cdots\cdots\cdots(7).$$

z_2之重率可如下求之:

於(6)′式中之第二式,令$[am]=0$,$[bm]=-1$,$[cm]=0$,

如此所得z_2之值爲其重率p_{z_2}之逆數.故

$$[bm.1]=[bm]-A_b[am]=-1,$$

$$[cm.2]=[cm]-A_c[am]-B_c[bm.1]$$

$$=0-A_c\cdot 0-B_c(-1)$$

利用(5)式, $\qquad =B_c=-\beta.$

以上所得之值代入(6)′式之第二式,得

$$z_2=-\left(\frac{-1}{[bb.1]}+\frac{-\beta^2}{[cc.2]}\right)=\frac{1}{[bb.1]}+\frac{\beta^2}{[cc.2]}=\frac{1}{p_{z_2}}\cdots\cdots(8).$$

彙集以上之結果,

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{p_{z_1}}&=\frac{1}{[aa]}+\frac{\alpha_1^2}{[bb.1]}+\frac{\alpha_2^2}{[cc.2]}\\ \frac{1}{p_{z_2}}&=\frac{1}{[bb.1]}+\frac{\beta^2}{[cc.2]}\\ \frac{1}{p_{z_3}}&=\frac{1}{[cc.2]}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(9).$$

實行以上之計算時,依下之形式較爲便利,

第九表

$\log\alpha_1^2$ $\log\alpha_2^2$	$\log\beta^2$		
$\frac{1}{[aa]}$			$\log\frac{1}{[aa]}$
$\frac{\alpha_1^2}{[bb.1]}$	$\frac{1}{[bb.1]}$		$\log\frac{1}{[bb.1]}$
$\frac{\alpha_2^2}{[cc.2]}$	$\frac{\beta^2}{[cc.2]}$	$\frac{1}{[cc.2]}$	$\log\frac{1}{[cc.2]}$
$\frac{1}{p_{z_1}}$	$\frac{1}{p_{z_2}}$	$\frac{1}{p_{z_3}}$	

說明: 由第七表求得 $\log\alpha_1^2$、$\log\alpha_2^2$、$\log\beta^2$, 及由第四表求得 $\log\frac{1}{[\ \ ]}$, 記入表中,次求出 $\frac{1}{[\ \ ]}$,將各行相加得 $\frac{1}{p_{z_i}}$.

例 1 觀察方程式爲

$$
\left.
\begin{array}{rl}
x \qquad & = 10 \\
-x+y \qquad & = 7 \\
y \qquad & = 18 \\
y-z & = 9 \\
x \qquad -z & = 2
\end{array}
\right\}
$$

作第一表:

x a	y b	z c	m	s
1	0	0	−10	−9
−1	1	0	−7	−7
0	1	0	−18	−17
0	1	−1	−9	−9
1	0	−1	−2	−2
1	3	−2	−46	−44

[ ]

作第二表:

aa	ab	ac	am	as	bb	bc	bm	bs	cc	cm	cs	mm	ms
1	0	0	−10	−9	0	0	0	0	0	0	0	100	90
1	−1	0	7	7	1	0	−7	−7	0	0	0	49	49
0	0	0	0	0	1	0	−18	−17	0	0	0	324	306
0	0	0	0	0	1	−1	−9	−9	1	9	9	81	81
1	0	−1	−2	−2	0	0	0	0	1	2	2	4	4
3	−1	−1	−5	−4	3	−1	−34	−33	2	11	11	558	530

[ ]

由上表作成標準方程式,得

$$\left.\begin{aligned} 3x - y - z &= 5 \\ -x + 3y - z &= 34 \\ -x - y + 2z &= -11 \end{aligned}\right\},$$

作 成 第 四 表:

	a	b	c	m	s
a	3	-1	-1	-5	-4
b		3	-1	-34	-33
A_b	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$
c			2	11	11
A_c	$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$
m				558	530
A_m	$-\frac{5}{3}$			$\frac{25}{3}$	$\frac{20}{3}$
b		$\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{107}{3}$	$-\frac{103}{3}$
c			$\frac{5}{3}$	$\frac{28}{3}$	$\frac{29}{3}$
B_c	$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{107}{6}$	$\frac{103}{6}$
m				$\frac{1649}{3}$	$\frac{1570}{3}$
B_m	$-\frac{107}{8}$			$\frac{107^2}{24}$	$\frac{107\times 103}{24}$
c			1	$-\frac{51}{6}$	$-\frac{45}{6}$
m				$\frac{1743}{24}$	$\frac{1539}{24}$
C_m	$-\frac{51}{6}$			$\frac{2601}{36}$	$\frac{2295}{36}$
m	$z=+8.5$		$[\nu\nu]=$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

此時之消去方程式可書之如下:

$$\left.\begin{aligned} z-8.5=0 \\ y-\frac{1}{2}z-\frac{107}{8}=0 \\ x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z-\frac{5}{3}=0 \end{aligned}\right\}.$$

作成第六表(不用對數):

8.5	13.375	1.666·······
	4.25	2.833·······
		5.875
$z=8.5$	$y=17.625$	$x=10.375$

獨立的求出未知量 x、y、z, 並決定其重率之計算如下:

第 七 表

$-B_c=\frac{1}{2}$	$-A_b=\frac{1}{3}$	$-A_c=\frac{1}{3}$
		$-B_c\alpha_1=\frac{1}{6}$
$\beta=\frac{1}{2}$	$\alpha_1=\frac{1}{3}$	$\alpha_2=\frac{1}{2}$

第 八 表

1.6666·······	13.375	8.5
4.4583·······	4.25	
4.25		
$x=10.375$	$y=17.625$	$z=8.5$

第 九 表

$\begin{array}{c}1\\3\\\frac{3}{8}\times\frac{1}{3^2}\\1\times\frac{1}{4}\end{array}$	$\begin{array}{c}\frac{3}{8}\\1\times\frac{1}{4}\end{array}$	1
$\frac{1}{p_x}=\frac{5}{8}$	$\frac{1}{p_y}=\frac{5}{8}$	$\frac{1}{p_z}=1$

$$\therefore \qquad p_x=p_y=\frac{8}{5},$$

$$p_z=1.$$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{3}{8}\div(5-3)}=0.43,$$

$$\gamma=0.6745\varepsilon=0.29=\gamma_z,$$

$$\gamma_x=\gamma_y=\frac{0.29}{\sqrt{\frac{8}{5}}}=0.23.$$

$$\therefore \qquad x=10.375\pm0.23,$$

$$y=17.625\pm0.23,$$

$$z=\ \ 8.5\ \ \ \pm0.29.$$

例 2 观察方程式

$$\left.\begin{array}{r}x-y\qquad -1.7=0\\ z-2.4=0\\ -x+y+z-1.0=0\\ y-z-3.0=0\end{array}\right\},$$

作成第一表:

a	b	c	m	s
1	−1	0	−1.7	−1.7
0	0	1	−2.4	−1.4
−1	1	1	−1.0	0.0
0	1	−1	−3.0	−3.0
0	1	1	−8.1	−6.1

[ ]

第 二 表:

aa	ab	ac	am	as	bb	bc	bm	bs	cc	cm	cs	mm	ms
1	−1	0	−1.7	−1.7	1	0	1.7	1.7	0	0	0	2.89	2.89
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	−2.4	−1.4	5.76	3.36
1	−1	−1	+1.0	0	1	1	−1.0	0	1	−1.0	0	1.00	0
0	0	0	0	0	1	−1	−3.0	−3.0	1	3.0	3.0	9.00	9.00
2	−2	−1	−0.7	−1.7	3	0	−2.3	−1.3	3	−0.4	1.6	18.65	15.25

第 四 表

	a	b	c	m	s
a	2	−2	−1	0.7	−1.7
b		3	0	−2.3	−1.3
	$A_b=-1$	2	1	0.7	1.7
c			3	−0.4	1.6
	$A_c=-0.5$		0.5	0.35	0.85
m				18.65	15.25
	$A_m=-0.35$			0.245	0.595
b		1	−1	−3.0	−3.0
c			2.5	−0.75	0.75
	$B_c=-1$		1	3	3
m				18.405	14.655
	$B_m=-3$			9.0	9.0
c			1.5	−3.75	−2.25
m				9.405	5.655
	$C_m=-2.5$			9.375	5.625
m	$z=+2.5$		$[vv]=$	0.030	0.030

$$z=2.5,$$

$$y=-B_c z-B_m=5.5,$$

$$x=-A_b y-A_c z-A_m=7.1.$$

$-A_b=1$	$-A_c=0.5$ $-B_c a_1=1$	$-B_c=1$
$a_1=1$	$a_2=1.5$	$\beta=1$

第 九 表

$\frac{1}{[aa]}=\frac{1}{2}$, $\frac{\alpha_1^2}{[bb.1]}=1$, $\frac{\alpha_2^2}{[cc.2]}=1.5$	$\frac{1}{[bb.1]}=1$ $\frac{\beta^2}{[cc.2]}=\frac{2}{3}$	$\frac{1}{[cc.2]}=\frac{2}{3}$
$\frac{1}{p_x}=3$	$\frac{1}{p_y}=\frac{5}{3}$	$\frac{1}{p_z}=\frac{2}{3}$

$$\therefore \quad p_x=\frac{1}{3}, \qquad p_y=\frac{3}{5}, \qquad p_z=\frac{3}{2}.$$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{0.03}{4-3}}=\sqrt{0.03}=0.173,$$

$$\gamma=0.6745\varepsilon=0.117, \qquad \gamma_y=\frac{0.117}{\sqrt{\frac{3}{5}}}=0.151,$$

$$\gamma_x=\frac{0.117}{\sqrt{\frac{1}{3}}}=0.203, \qquad \gamma_z=\frac{0.117}{\sqrt{\frac{3}{2}}}=0.095,$$

$$\therefore \quad x=7.1\pm0.20,$$
$$y=5.5\pm0.15,$$
$$z=2.5\pm0.09.$$

例 3 觀察方程式

$$\left.\begin{aligned}3x-3y+5z&=0.6\\3x+\ y-\ z&=1.5\\x+8y+\ z&=8.1\\x\qquad+2z&=1.4\\-x+\ y\qquad&=0.4\end{aligned}\right\}.$$

第　一　表

a	b	c	m	s
2	−3	5	−0.6	3.4
3	1	−1	−1.5	1.5
1	8	1	−8.1	1.9
1	0	2	−1.4	1.6
−1	1	0	−0.4	−0.4
6	7	7	−12.0	8.0

第　二　表

aa	ab	ac	am	as	bb	bc	bm	bs	cc	cm	cs	mm	ms
4	−6	10	−1.2	6.8	9	−15	1.8	−10.2	25	−3.0	17.0	0.36	−2.04
9	3	−3	−4.5	4.5	1	−1	−1.5	1.5	1	1.5	−1.5	2.25	−2.25
1	8	1	−8.1	1.9	64	8	−64.8	15.2	1	−8.1	1.9	65.61	−15.39
1	0	2	−1.4	1.6	0	0	0.0	0	4	−2.8	3.2	1.96	−2.24
1	−1	0	+0.4	0.4	1	0	−0.4	−0.4	0	0	0	0.16	+0.16
16	4	10	−14.8	15.2	75	−8	−64.9	6.1	31	−12.4	20.6	70.34	−21.76

故標準方程式爲

$$\left.\begin{aligned} 16x+4y+10z-14.8&=0 \\ 4x+75y-8z-64.9&=0 \\ 10x-8y+31z-12.4&=0 \end{aligned}\right\}$$

第四表

	a	b	c	m	s
a	16	4	10	−14.8	15.2
b		75	−8	−64.9	6.1
A_b	$=\frac{4}{16}=0.25$	1	2.5	−3.7	3.8
c			3.1	−12.4	20.6
A_c	$=\frac{10}{16}=0.625$		6.25	−9.25	9.5
m				70.34	−21.76
A_m	$=\frac{-14.8}{16}=-0.925$			13.69	−14.06
b		74	−10.5	−61.2	2.3
c			24.75	−3.15	11.1
B_c	$=\frac{-10.5}{74}=-0.14189$		1.48985	8.68367	−0.32635
m				56.65	−7.70
B_m	$=\frac{-61.2}{74}=-0.82703$			50.61424	−1.90217
c			23.26015	−11.83367	11.42635
m				6.03576	−5.79783
C_m	$=-0.50875$			6.02038	−5.81316
m	$z=0.50875$		$[\nu\nu]=$	0.01538	0.01533

第 六 表

$-B_m = 0.82703$ $-B_c z = 0.07210$	$-A_m = 0.925$ $-A_c z = -0.31797$ $-A_b y = -0.22481$
$y = 0.89922$	$x = 0.38222$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} x &= 0.382 \\ y &= 0.899 \\ z &= 0.509 \end{aligned}\right\}.$$

第 七 表

$-A_b = -0.25$	$-A_c = -0.625$ $-\alpha_1 B_c = -0.03547$	$-B_c = 0.14189$
$\alpha_1 = -0.25$	$\alpha_2 = -0.66047$	$\beta = 0.14189$

第 九 表

$\frac{1}{[aa]} = 0.0625$ $\frac{\alpha_1^2}{[bb.1]} = 0.00084$ $\frac{\alpha_2^2}{[cc.2]} = 0.01876$	$\frac{1}{[bb.1]} = 0.0136$ $\frac{\beta^2}{[cc.2]} = 0.00087$	$\frac{1}{[cc.2]} = 0.04299$
$\frac{1}{p_x} = 0.08210$	$\frac{1}{p_y} = 0.01437$	$\frac{1}{p_z} = 0.04299$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} p_x &= 12.18, \\ p_y &= 69.59, \\ p_z &= 23.26. \end{aligned}\right\}$$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{0.0153}{5-3}}=\sqrt{0.0076}=0.0872,$$

$$\gamma=0.6745\varepsilon=0.0588,$$

$$\gamma_x=\frac{0.0588}{\sqrt{12.18}}=\frac{0.0588}{3.49}=0.017,$$

$$\gamma_y=\frac{0.0588}{\sqrt{69.59}}=\frac{0.0588}{8.34}=0.007,$$

$$\gamma_z=\frac{0.0588}{\sqrt{23.26}}=\frac{0.0588}{4.82}=0.012.$$

$$\therefore\qquad x=0.382\pm0.017,$$

$$y=0.899\pm0.007,$$

$$z=0.506\pm0.012.$$

7. 未知數為二個時,其重率之決定

	a	b	m	s
a	$[aa]$	$[ab]$	$[am]$	$[as]$
b		$[bb]$	$[bm]$	$[bs]$
	$A_b=\frac{[ab]}{[aa]}$	$A_b[ab]$	$A_b[am]$	$A_b[as]$
m			$[mm]$	$[ms]$
	$A_m=\frac{[am]}{[aa]}$		$A_m[am]$	$A_m[as]$
b		$[bb.1]$	$[bm\cdot1]$	$[bs\cdot1]$
m			$[mm\cdot1]$	$[ms\cdot1]$
	$B_m=\frac{[bm.1]}{[bb.1]}$		$B_m[bm\cdot1]$	$B_m[bs\cdot1]$
m	$y=-\frac{[bm.1]}{[bb.1]}$	$[vv]=$	$[mm\cdot2]$	$[ms\cdot2]$

檢　算

$$[aa]+[ab]+[am]=[as],$$

$$[bb\cdot 1]+[bm\cdot 1]=[bs\cdot 1],$$

$$[mm\cdot 2]=[ms\cdot 2].$$

由表得　　$y=-\dfrac{[bm\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$,　　$x=-\dfrac{[ab]}{[aa]}y-\dfrac{[am]}{[aa]}$.

$-\dfrac{[ab]}{[aa]}$
α

$\dfrac{1}{[aa]}$	
$\dfrac{\alpha^2}{[bb.1]}$	$\dfrac{1}{[bb.1]}$
$\dfrac{1}{p_x}$	$\dfrac{1}{p_y}$

例 1　觀察方程式爲

$$\left.\begin{aligned} x+2y-0.36=0\\ x+3y-0.53=0\\ x+4y-0.74=0\\ x+5y-0.91=0\\ x+6y-1.06=0\end{aligned}\right\},$$

a	b	m	s
1	2	−0.36	2.64
1	3	−0.53	3.47
1	4	−0.74	4.26
1	5	−0.91	5.09
1	6	−1.06	5.94
5	20	−3.60	21.40

aa	ab	am	as	bb	bm	bs	mm	ms
1	2	-0.36	2.64	4	-0.72	5.28	0.1296	-0.9504
1	3	-0.53	3.47	9	-1.59	10.41	0.2809	-1.8391
1	4	-0.74	4.26	16	-2.96	17.04	0.5476	-3.1524
1	5	-0.91	5.09	25	-4.55	25.45	0.8281	-4.6319
1	6	-1.06	5.94	36	-6.36	35.64	1.1236	-6.2964
5	20	-3.60	21.40	90	-16.18	93.82	2.9098	-16.8702

	a	b	m	s
a	5	20	-3.60	21.40
b		90	-16.18	93.82
	$A_b=\frac{20}{5}=4$	80	-14.40	85.60
m			2.9098	-16.8702
	$A_m=-0.72$		2.592	-15.408
b		10	-1.78	8.22
m			0.3178	-1.4622
	$B_m=-0.178$		0.31684	-1.46316
m	$\nu=0.178$	$[\nu\nu]=$	0.00096	0.00096

$-\frac{[ab]}{[aa]}$
$a=-4$

$\frac{1}{5}$ $\frac{16}{10}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{p_x}=\frac{9}{5}$	$\frac{1}{p_y}=\frac{1}{10}$

$$\therefore \qquad \left.\begin{array}{l} p_x = \dfrac{5}{9} \\ p_y = 10 \end{array}\right\}.$$

$$y = 0.178,$$

$$x = -4 \times 0.178 + 0.72 = 0.008.$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{0.00096}{5-2}} = 0.018,$$

$$\gamma = 0.6745\varepsilon = 0.012.$$

$$\gamma_x = \frac{0.012}{\sqrt{\dfrac{5}{9}}} = 0.016,$$

$$\gamma_y = \frac{0.012}{\sqrt{0.10}} = 0.0038.$$

因此，
$$x = 0.008 \pm 0.016,$$

$$y = 0.178 \pm 0.0038.$$

例 2 標準方程式爲

$$\left.\begin{array}{r} 16x + 4y + 10z - 14.8 = 0 \\ 4x + 75y - 8z - 64.9 = 0 \\ 10x - 8y + 31z - 12.4 = 0 \end{array}\right\},$$

又 $[mm] = 70.34.$

本例以對數計算,故作成第五表如下:

a	b	c	m	s
16	4	10	−14.8	15.2
1.2041	0.6021	1.0000	1.1703N	1.1818
	75	−8	−64.9	6.1
$\log A_b=\bar{1}.3980$	0.0001	0.3980	0.5683N	0.5798
	+1	+2.5	−3.7	+3.8
		31	−12.4	20.6
$\log A_c=\bar{1}.7959$		0.7959	0.9662N	0.9777
		+6.25	−9.25	+9.5
			70.34	−21.76
$\log A_m=\bar{1}.9662N$			1.1363	1.1480N
			13.69	−14.06
	74	−10.5	−61.20	2.3
	1.8694	1.0212N	1.7867N	0.3617
		24.75	−3.15	11.1
$\log B_c=\bar{1}.1520N$		0.1732	0.9387	$\bar{1}$.5137N
		+1.49	+8.684	−0.3264
			56.65	−7.7
$\log B_m=\bar{1}.9175N$			1.7042	0.2792N
			50.61	−1.902
		23.26	−11.834	11.4264
		1.3666	1.0731N	1.0579
			6.04	−5.798
$\log C_m=\bar{1}.7066N$			0.7796	0.7644N
			6.020	−5.81
$z=0.5088$		$[\nu\nu]=$	0.02	0.01

(註1)表中 $\log K=\cdots\cdots N$ 爲 $-K$ 之 $\log K$.

(註2)在理論 $[vv]=[mm.3]=[ms.3]$,實際計算時,常略去數位以下之小數,故 $[mm.3]$ 多不與 $[ms.3]$ 相等.在如此情形中 $[ms.3]$ 較近於眞,故表中 $[vv]$ 之值爲0.015.

$-C_m=0.509$	$-B_m=0.827$ $-B_cz=0.07219$	$-A_m=0.925$ $-A_cz=-0.3180$ $-A_by=-0.2248$
$z=0.509$ $\log z=\bar{1}.7065$	$y=0.89919$ $\log y=\bar{1}.9539$	$x=0.3822$
$\log B_c=\bar{1}.1520N$ $\log A_c=\bar{1}.7959$	$\log A_b=\bar{1}.3980$ $\log A_by=\bar{1}.3519$	
$\log B_cz=\bar{2}.8585N$ $\log A_cz=\bar{1}.5024$		

(註)因 $\log B_c=\cdots\cdots N$, B_c 爲負,故 $-B_c$ 爲正;又 $\log A_cz$ 之假數後不附 N, A_cz 爲正,而 $-A_cz$ 爲負.其他準此.

計算 p_x、p_y、p_z 時,可依如下之形式

$-A_b=-0.25$	$-A_c=-0.625$ $-\alpha_1B_c=-0.03548$	$-B_c=0.14189$
$\alpha_1=-0.25$ $\log\alpha_1=\bar{1}.3980N$ $\log\alpha_1B_c=\bar{2}.5500$ $\log\alpha_1^2=\bar{2}.7960$	$\alpha_2=-0.66048$ $\log\alpha_2=\bar{1}.8199N$ $\log\alpha_2^2=\bar{1}.6398$	$\beta=0.14189$ $\log\beta=\bar{1}.1520N$

$\frac{1}{[aa]}=0.6250$		
$\frac{a_1^2}{[bb.1]}=0.00084$	$\frac{1}{[bb.1]}=0.0135$	
$\frac{a_2^2}{[cc.2]}=0.01876$	$\frac{b_2^2}{[cc.2]}=0.00087$	$\frac{1}{[cc.2]}=0.0430$
$\frac{1}{p_x}=0.0820$	$\frac{1}{p_y}=0.0144$	$\frac{1}{p_z}=0.0430$
$p_x=\frac{1}{0.082}=12.2$	$p_y=\frac{1}{0.0144}=69.44$	$p_z=\frac{1}{0.043}=23.2$
$\log[aa]=1.2041$		
$\log\frac{1}{[aa]}=\bar{2}.7959$		
$\log[bb.1]=1.8692$		
$\log\frac{1}{[bb.1]}=\bar{2}.1308$		
$\log\frac{a_1^2}{[bb.1]}=\bar{4}.9268$		
$\log[cc.2]=1.3666$		
$\log\frac{1}{[cc.2]}=\bar{2}.6334$	$\log\frac{b_2^2}{[cc.2]}=\bar{4}.9$[illegible]$71$	
$\log\frac{a_2^2}{[cc.2]}=\bar{2}.2732$		

8. 觀察有重率時求未知量之值及其重率法

(α)未知數爲二個時:

設觀察方程式之係數及重率如下:

p	a	b	m	s
p_1	a_1	b_1	m_1	s_1
p_2	a_2	b_2	m_2	s_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

以之作成下表:

paa	pab	pam	pas	pbb	pbm	pbs	pmm	pms
$p_1a_1a_1$	$p_1a_1b_1$	$p_1a_1m_1$	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$p_2a_2a_2$	$p_2a_2b_2$	$p_2a_2m_2$						
⋮	⋮	⋮						
$[paa]$	$[pab]$	$[pam]$	$[pas]$	$[pbb]$	$[pbm]$	$[pbs]$	$[pmm]$	$[pms]$

由上表所得之值作成標準方程式如下:

$$\left.\begin{array}{l}[paa]x+[pab]y+[pam]=0\\ [pab]x+[pbb]y+[pbm]=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

由第一式,得 $$x=-\frac{[pab]}{[paa]}y-\frac{[pam]}{[paa]}\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

以之代入第二式,

$$[pab]\left\{-\frac{[pab]}{[paa]}y-\frac{[pam]}{[paa]}\right\}+[pbb]y+[pbm]=0,$$

即 $$\left\{[pbb]-[pab]\frac{[pab]}{[paa]}\right\}y$$

$$+\left\{[pbm]-[pab]\frac{[pam]}{[paa]}\right\}=0,$$

簡書之爲　　$[pbb.1]y+[pbm.1]=0$ ……………………(3).

故上之標準方程式可改書之爲

$$\left.\begin{array}{r}[pbb.1]y+[pbm.1]=0\\ [paa]x+[pab]y+[pam]=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

作成下表以解上式:

	a	b	m	s
a	$[paa]$	$[pab]$	$[pam]$	$[pas]$
b	$A_b=\frac{[pab]}{[paa]}$	$[pbb]$ $A_b[pab]$	$[pbm]$ $A_b[pam]$	$[pbs]$ $A_b[pas]$
m	$A_m=\frac{[pam]}{[paa]}$		$[pmm]$ $A_m[pam]$	$[pms]$ $A_m[pas]$
b		$[pbb.1]$	$[pbm.1]$	$[pbs.1]$
m	$B_m=\frac{[pbm.1]}{[pbb.1]}$		$[pmm.1]$ $B_m[pbm.1]$	$[pms.1]$ $B_m[pbs.1]$
m	$y=-B_m$	$[pvv]=$	$[pmm.2]$	$[pms.2]$

但　　$$\left.\begin{array}{l}y=-B_m\\ x=-A_by-A_m\end{array}\right\}$$

上式中 $[pmm.2]=[pvv]$, 可證明之如下:

設殘差方程式爲

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{重率}\\ a_1x+b_1y+m_1=v_1 & p_1\\ a_2x+b_2y+m_2=v_2 & p_2\end{array}\right\}$$

以 p_1m_1、p_2m_2 乘上列第一、第二式，相加，得

$$[pam]x+[pbm]y+[pmm]=[pm\nu].$$

又以 $p_1\nu_1$、$p_2\nu_2$ 乘第一、第二式，相加，得

$$[pa\nu]x+[pb\nu]y+[pm\nu]=[p\nu\nu],$$

但　$[pa\nu]=0,\quad [pb\nu]=0,\qquad \therefore\quad [pm\nu]=[p\nu\nu],$

$$\therefore\qquad [p\nu\nu]=[pam]x+[pbm]y+[pmm].$$

以 x 之值代入，$=[pbm.1]y+[pmm.1]$

更以 y 之值代入，

$$=[pmm.1]-[pbm.1]\frac{[pbm.1]}{[pbb.1]}$$

$$=[pmm.2].$$

由
$$\left.\begin{aligned} y+B_m=0\\ x+A_by+A_m=0\end{aligned}\right\},$$

以 α 乘第一式，1 乘第二式，相加，得

$$x+(A_b+\alpha)y+A_m+\alpha B_m=0.$$

選定 α 之值，使其適能令 y 之係數為 0，則

$$A_b+\alpha=0,\qquad 即\ \alpha=-A_b.$$

如此，得　$x=-(A_m+\alpha B_m).$

故 x、y 之值可由下列形式求出之：

$-A_b$	$-A_m$	$-B_m$
	$-B_m\alpha$	
$\alpha=\cdots\cdots$	$x=\cdots\cdots$	$y=\cdots\cdots$

x、y 之重率可如下求之:

由
$$\left.\begin{aligned} x &= -\left\{\frac{[pam]}{[paa]} + \frac{[pbm.1]}{[pbb.1]}\alpha\right\} \\ y &= -\frac{[pbm.1]}{[pbb.1]} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)',$$

於標準方程式中,令 $[pam]=-1$, $[pbm]=0$,此時所得 x 值之逆數卽爲 x 之重率.玆計算 $[pbm.1]$ 如下:

$$[pbm.1]=[pbm]-\frac{[pab]}{[paa]}[pam]=0-A_b(-1)=-\alpha,$$

由此得
$$x=-\left\{\frac{-1}{[paa]}+\frac{-\alpha}{[pbb.1]}\alpha\right\}=\frac{1}{[paa]}+\frac{\alpha^2}{[pbb.1]},$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{p_x}=\frac{1}{[paa]}+\frac{\alpha^2}{[pbb.1]}.$$

於標準方程中,令 $[pam]=0$, $[pbm]=-1$,此時所得 y 值之逆數卽爲 y 之重率.由 (4)' 之第二式,

$$y=-\frac{-1}{[pbb.1]}=\frac{1}{[pbb.1]},$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{p_y}=\frac{1}{[pbb.1]}.$$

集合上之結果,得
$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{p_x} &= \frac{1}{[paa]}+\frac{\alpha^2}{[pbb.1]} \\ \frac{1}{p_y} &= \frac{1}{[pbb.1]} \end{aligned}\right\}.$$

故 $\frac{1}{p_x}$、$\frac{1}{p_y}$ 可依下列形式計算之:

$\frac{1}{[paa]}$	
$\frac{\alpha^2}{[pbb.1]}$	$\frac{1}{[pbb.1]}$
$\frac{1}{p_x}$	$\frac{1}{p_y}$

例　設觀察方程式爲

$$
\left.\begin{array}{lr}
 & \text{重率} \\
x - \quad 4.5 = 0 & 10 \\
y - 1.6 = 0 & 5 \\
x - y - 2.7 = 0 & 3
\end{array}\right\}.
$$

p	a	b	n	s
10	1	0	−4.5	−3.5
5	0	1	−1.6	−0.6
3	1	−1	−2.7	−2.7
18	2	0	−8.8	−6.8

paa	pab	pan	pas	pbb	pbn	pbs	pnn	pns
10	0	−45	−35	0	0	0	202.5	157.5
0	0	0	0	5	−8.0	−3.0	12.80	4.8
3	−3	−8.1	−8.1	3	8.1	8.1	21.87	21.87
13	−3	−53.1	−43.1	8	0.1	5.1	237.17	184.17

由此作標準方程式:

$$\left.\begin{aligned} 13x-3y-53.1=0 \\ -3x+8y+\ \ 0.1=0 \end{aligned}\right\}.$$

	a	b	m	s
pa	13	-3	-53.1	-43.1
pb		8	0.1	5.1
	$A_b=-\frac{3}{13}=-0.23077$	0.69231	12.25389	9.94619
pm			237.17	184.17
	$A_m=\frac{-53.1}{13}=-4.08461$		216.89279	176.04669
pb		7.30769	-12.15389	-4.84619
pm			20.27721	8.12331
	$B_m=\frac{-12.15389}{7.30769}=-1.66316$		20.21388	8.05994
	$y=1.663$	$[p\nu\nu]=$	0.0633	0.0633

$$\alpha=-A_b=\frac{3}{13}, \qquad x=-(A_b y+A_m)=4.468,$$

$\frac{1}{[paa]}=\frac{1}{3}$ $\frac{\alpha^2}{[pbb.1]}=\left(\frac{3}{13}\right)^2\frac{13}{95}$	$\frac{1}{[pbb.1]}=\frac{13}{95}$
$\frac{1}{p_x}=\frac{8}{95}$	$\frac{1}{p_y}=\frac{13}{95}$
$p_x=\frac{95}{8}$	$p_y=\frac{95}{13}$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{0.0633}{3-2}}=0.25.$$

$$\gamma=0.6745\varepsilon=0.169.$$

$$\gamma_x=\frac{\gamma}{\sqrt{p_x}}=\frac{0.169}{\sqrt{\frac{95}{8}}}=0.049,$$

$$\gamma_y=\frac{\gamma}{\sqrt{p_y}}=\frac{0.169}{\sqrt{\frac{95}{13}}}=0.062.$$

$\therefore \qquad x=4.468\pm0.049, \qquad y=1.663\pm0.062.$

(*b*)未知數爲三個時其重率之決定:

p	a	b	c	m	s
p_1	a_1	b_1	c_1	m_1	s_1
p_2	a_2	b_2	c_2	m_2	s_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

paa	pab	pac	pam	pas	pbb	pbc	pbm	pbs	pcc	pcm	pcs	pmm	pms
$p_1a_1a_1$	$p_1a_1b_1$	$p_1a_1c_1$	$p_1a_1m_1$	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$p_2a_2a_2$	$p_2a_2b_2$	$p_2a_2c_2$	$p_2a_2m_2$										
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$[paa]$	$[pab]$	$[pac]$	$[pam]$	…	…	…	…	…	…	…	…	…	$[pms]$

由此作成次表:

	a	b	c	m	s
pa	$[paa]$	$[pab]$	$[pac]$	$[pam]$	$[pas]$
pb	$A_b=-\frac{[pab]}{[paa]}$	$[pbb]$	$[pbc]$	$[pbm]$	$[pbs]$
pc	$A_c=-\frac{[pac]}{[paa]}$		$[pcc]$	$[pcm]$	$[pcs]$
pm	$A_m=-\frac{[pam]}{[paa]}$			$[pmm]$	$[pms]$
pb		$[pbb.1]$	$[pbc.1]$	$[pbm.1]$	$[pbs.1]$
pc	$B_c=-\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}$		$[pcc.1]$	$[pcm.1]$	$[pcs.1]$
pm	$B_m=-\frac{[pbm.1]}{[pbb.1]}$			$[pmm.1]$	$[pms.1]$
pc			$[pcc.2]$	$[pcm.2]$	$[pcs.2]$
pm	$C_m=-\frac{[pcm.2]}{[pcc.2]}$			$[pmm.2]$	$[pms.2]$
pm	$-C_m$		$[pvv]$	$[pmm.3]$	$[pms.3]$

但

$$\left.\begin{aligned} z &= -C_m \\ y &= -B_c z - B_m \\ x &= -A_b y - A_c z - A_m \end{aligned}\right\}.$$

以 α_2、α_1、1 分别乘第一式,第二式,第三式,相加,得

$$x+(\alpha_1+A_b)y+(\alpha_2+\alpha_1 B_c+A_c)z+(\alpha_2 C_m+\alpha_1 B_m+A_m)=0.$$

選定未定係數 α_2、α_1 之值,適使 y、z 之係數各等於零,故

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1+A_b=0 \\ &\alpha_2+\alpha_1 B_c+A_c=0 \end{aligned}\right\},$$

即

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1=-A_b \\ &\alpha_2=-\alpha_1 B_c-A_c \end{aligned}\right\},$$

而

$$x=-(\alpha_2 C_m+\alpha_1 B_m+A_m).$$

次以 β 乘第一式,1 乘第二式,相加,得

$$y+(\beta+B_c)z+(\beta C_m+B_m)=0,$$

選定 β 之值,使 z 之係數適為零,則

$$\beta+B_c=0,$$

即

$$\beta=-B_c,$$

而

$$y=-(\beta C_m+B_m).$$

x、y、z 之值可由下之形式求之:

$-A_b$
$\alpha_1=\cdots\cdots$

$-A_c$
$-B_c\alpha_1$
$\alpha_2=\cdots\cdots$

$-B_c$
$\beta=\cdots\cdots$

$-A_m$		
$-\alpha_1 B_m$	$-B_m$	
$-\alpha_2 C_m$	$-\beta C_m$	$-C_m$
$x=\cdots\cdots$	$y=\cdots\cdots$	$z=\cdots\cdots$

未知數 x、y、z 之重率,可如下求之:

$\frac{1}{[paa]}$ $\frac{\alpha_1^2}{[pbb.1]}$ $\frac{\alpha_2^2}{[pcc.2]}$	$\frac{1}{[pbb.1]}$ $\frac{\beta^2}{[pcc.2]}$	$\frac{1}{[pcc.2]}$
$\frac{1}{p_x}$	$\frac{1}{p_y}$	$\frac{1}{p_z}$
$p_x=\cdots\cdots$	$p_y=\cdots\cdots$	$p_z=\cdots\cdots$

例　觀察方程式

$$\left.\begin{array}{llr} x+y+z-6.1=0 & & 2 \\ x+y-5.1=0 & & 3 \\ y-2z-0.1=0 & & 1 \\ y-2.1=0 & & 2 \end{array}\right\} \quad \text{重率}$$

解

p	a	b	c	m	s
2	1	1	1	−6.1	−3.1
3	1	1	0	−5.1	−3.1
1	0	1	−2	+0.1	−0.9
2	0	1	0	−2.1	−1.1
8	2	4	−1	−13.2	−8.2

paa	pab	pac	pam	pas	pbb	pbc
2	2	2	−12.2	−6.2	2	2
3	3	0	−15.3	−9.3	3	0
0	0	0	0	0	1	−2
0	0	0	0	0	2	0
5	5	2	−27.5	−15.5	8	0

pbm	pbs	pcc	pcm	pcs	pmm	pms
−12.2	−6.2	2	−12.2	−6.2	74.42	37.82
−15.3	−9.3	0	0	0	78.03	47.43
+0.1	−0.9	4	−0.2	1.8	0.01	−0.09
−4.2	−2.2	0	0	0	8.82	4.62
−31.6	−18.6	6	−12.4	−4.4	161.28	89.78

	a	b	c	m	s
pa	5	5	2	−27.5	−15.5
pb		8	0	−31.6	−18.6
A_b	$=\frac{5}{5}=1$	5	2	−27.5	−15.5
pc			6	−12.4	−4.4
A_c	$=\frac{2}{5}=0.4$		0.8	−11.0	−6.2
pm				161.28	89.78
A_m	$=\frac{-27.5}{5}=-5.5$			151.25	85.25

pb		3	-2	-4.1	-3.1
pc			5.2	-1.4	1.8
B_c	$\frac{-2}{3}=-0.66667$		1.33333	2.73335	2.06668
pm				10.03	4.53
B_m	$=\frac{-4.1}{3}=-1.36667$			5.60335	4.23668
pc			3.86667	-4.13335	-0.26668
pm				4.42665	0.29332
C_m	$=\frac{-4.13335}{3.86667}=-1.06897$			4.41843	0.28507
pm	$z=1.06897$		$[pvv]=$	0.00822	0.00825

$-B_c=0.66667$	$-A_b=-1$	$-A_c=-0.4$ $-B_c\alpha_1=-0.66667$
$\beta=0.66667$	$\alpha_1=-1$	$\alpha_2=-1.06667$

$-C_m=1.06897$	$-B_m=1.36667$ $-\beta C_m=0.71265$	$-A_m=5.5$ $-\alpha_1 B_m=-1.36667$ $-\alpha_2 C_m=-1.14024$
$z=1.06897$	$y=2.07932$	$x=2.99309$

$\frac{1}{[paa]}=\frac{1}{5}=0.2$ $\frac{\alpha_1^2}{[pbb.1]}=\frac{(-1)^2}{3}=0.33333$ $\frac{\alpha_2^2}{[pcc.2]}=\frac{(-1.06667)^2}{3.86667}$ $=0.29425$	$\frac{1}{[pbb.1]}=\frac{1}{3}=0.33333$ $\frac{\beta^2}{[pcc.2]}=\frac{(0.66667)^2}{3.86667}$ $=0.11494$	$\frac{1}{[pcc.2]}=\frac{1}{3.86667}$ $=0.25862$
$\frac{1}{P_x}=0.82758$	$\frac{1}{P_y}=0.44827$	$\frac{1}{P_z}=0.25862$
$P_x=\frac{1}{0.82758}=1.2083$	$P_y=\frac{1}{0.44827}=2.2308$	$P_z=\frac{1}{0.25862}=3.8667$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-q}}=\sqrt{\frac{0.0082}{4-3}}=\sqrt{0.0082}=0.09055,$$

$$\gamma=0.6745\varepsilon=0.061,$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma_x&=\frac{0.061}{\sqrt{1.2083}}=\frac{0.061}{1.099}=0.055\\ \gamma_y&=\frac{0.061}{\sqrt{2.2308}}=\frac{0.061}{1.494}=0.041\\ \gamma_z&=\frac{0.061}{\sqrt{3.8667}}=\frac{0.061}{1.966}=0.031\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}x&=2.993\pm0.055\\ y&=2.079\pm0.041\\ z&=1.069\pm0.031\end{aligned}\right\}$$

問 題

1. 以三種方法求下列標準方程式之重率:

(a)
$$\left.\begin{aligned}5x-\ \ y-3.1&=0\\ -x+12y-5.3&=0\end{aligned}\right\},$$

(b)
$$\left.\begin{aligned}2x\qquad+z&=30.2\\ 3y\qquad&=31.0\\ x\qquad+3z&=65.2\end{aligned}\right\}.$$

2. 由下列觀察方程式求 x 及 γ_x 之值.

$$\left.\begin{aligned}-x\qquad&=10.1\\ -x+y&=10.2\\ y&=19.9\\ &=20.2\end{aligned}\right\}.$$

3. 在下列觀察方程式中,命 $a-300=x$, $10ab=y$,試先求 x、y、γ_x;然後求出 a、b;最後求 γ_a、γ_b 之值.

$$\left.\begin{aligned} a+10ab&=300.1\\ a+30ab&=300.4\\ a+50ab&=360.9 \end{aligned}\right\}$$

4. 某金屬棒在各種溫度之長度如下表,試求 $0°C$ 時棒之長度 L_0,及膨脹係數 α.

溫度(°C.)	30°	40°	50°
長度(厘米)	100.05	100.07	100.10

5. 試求本節(1)之例 5 各未知數(z_1、z_2、z_3)之標準誤差及或然差.

第六節　條件觀察

1. 有條件之直接觀察

$$\left.\begin{array}{ll} \text{觀察次數} & n \\ \text{未知數個數} & s \\ \text{條件式數} & q \end{array}\right\}$$

I. 第一法(消去法)

利用條件方程式以消去 q 個未知數後,即得含有 $(s-q)$ 個未知數之無條件的觀察方程式.此時可以前節之[73]公式計算其標準誤差,即

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-(s-q)}}\cdots\cdots\cdots\cdots\textbf{【76】}.$$

如條件方程式僅有一個時,則由[41],

$$[pvv]=\frac{d^2}{\left[\frac{1}{p}\right]},$$

$$\varepsilon_x=\frac{\varepsilon}{\sqrt{p_x}},\qquad \gamma_x=0.6745\varepsilon_x.$$

設 $n=3,\ s=3,\ q=1$ 時,

觀察方程式爲
$$\left.\begin{aligned}x&=M_1\\y&=M_2\\z&=M_3\end{aligned}\right\},$$

條件方程式爲 $x+y+z=\lambda,$

以 M_1+v_1、M_2+v_2、M_3+v_3 表 x、y、z 之最良値,則有

$$(M_1+M_2+M_3)+[v]=\lambda,$$

卽
$$[v]+([M]-\lambda)=0,$$

卽
$$[v]+d=0.\qquad (d=[M]-\lambda).$$

但
$$[vv]=v_1^2+v_2^2+(-v_1-v_2-d)^2,$$

故 $[vv]$ 爲最小之條件:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial[vv]}{\partial v_1}&=0,\qquad \text{卽 } v_1-(-v_1-v_2-d)=0\\ \frac{\partial[vv]}{\partial v_2}&=0,\qquad \text{卽 } v_2-(-v_1-v_2-d)=0\end{aligned}\right\}.$$

故標準方程式為
$$\left.\begin{aligned}2\nu_1+\nu_2+d=0\\ \nu_1+2\nu_2+d=0\end{aligned}\right\},$$

將上式解之,得
$$\nu_1=\nu_2=\frac{-d}{3}=\nu_3,$$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{[\nu\nu]}{n-(s-q)}}=\sqrt{\left(-\frac{d}{3}\right)^2\times 3}=\frac{d}{\sqrt{3}}.$$

(此處之 d 為 $|d|$ 之略)

今試求各未知數之重率,由(第一法),

$$\left.\begin{aligned}2\nu_1+\nu_2=1\\ \nu_1+2\nu_2=0\end{aligned}\right\},\qquad \nu_1=\frac{2}{3},\qquad \therefore\quad p_x=p_{\nu_1}=\frac{3}{2}.$$

同樣得
$$p_y=p_z=\frac{3}{2}.$$

$$\therefore\qquad \varepsilon_x=\frac{\varepsilon}{\sqrt{p_x}}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{3}d.$$

若條件方程式為

$$\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3z=\lambda.$$

命 $M_1+\nu_1$、$M_2+\nu_2$、$M_3+\nu_3$ 為 x、y、z 之最良值,代入上式,

得
$$\alpha_1(M_1+\nu_1)+\alpha_2(M_2+\nu_2)+\alpha_3(M_3+\nu_3)=\lambda,$$

即
$$(\alpha_1M_1+\alpha_2M_2+\alpha_3M_3-\lambda)+(\alpha_1\nu_1+\alpha_2\nu_2+\alpha_3\nu_3)=0.$$

命
$$[\alpha M]-\lambda=d,$$

則
$$\alpha_1\nu_1+\alpha_2\nu_2+\alpha_3\nu_3+d=0,$$

或
$$[\alpha\nu]+d=0.$$

但
$$[\nu\nu]=\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2$$
$$=\nu_1^2+\nu_2^2+\frac{1}{\alpha_3^2}(-\alpha_1\nu_1-\alpha_2\nu_2-d)^2,$$
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial[\nu\nu]}{\partial\nu_1}&=0\\ \frac{\partial[\nu\nu]}{\partial\nu_2}&=0\end{aligned}\right\}.$$

即
$$\left.\begin{aligned}\nu_1-\frac{\alpha_1}{\alpha_3^2}(-\alpha_1\nu_1-\alpha_2\nu_2-d)&=0\\ \nu_2-\frac{\alpha_2}{\alpha_3^2}(-\alpha_1\nu_1-\alpha_2\nu_2-d)&=0\end{aligned}\right\}.$$

故標準方程式爲
$$(\alpha_1^2+\alpha_3^2)\nu_1+\alpha_1\alpha_2\nu_2+\alpha_1 d=0,$$
$$\alpha_1\alpha_2\nu_1+(\alpha_2^2+\alpha_3^2)\nu_2+\alpha_2 d=0.$$

例　觀察三角形內角之結果如下:
$$\begin{aligned}A&=\ 35^\circ.6\\ B&=\ 90^\circ.4\\ C&=\ 53^\circ.8\\ \hline [\ \ ]&=179^\circ.8\end{aligned}$$

條件方程式爲　　$A+B+C=180^\circ.$

由第五章第四節,設ν_1、ν_2、ν_3爲A、B、C之補正值,則

有
$$\nu_1=\nu_2=\nu_3=\frac{-1}{3}d=\frac{1}{3}\times 0.2.$$
但
$$d=179^\circ.8-180^\circ=-0.2,$$

$$\therefore \quad [\nu\nu]=3\times\frac{1}{9}d^2=\frac{1}{3}d^2,$$

$$\therefore \quad \varepsilon=\sqrt{\frac{[\nu\nu]}{n-(s-q)}}=\sqrt{\frac{1}{3}d^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}d,$$

$$d=0.2,$$

$$\gamma=.06745\varepsilon=0.6745\frac{1}{\sqrt{3}}d=0.389d.$$

標準方程式爲

$$\left.\begin{array}{l}2\nu_1+\nu_2=0.2\\ \nu_1+2\nu_2=0.2\end{array}\right\}.$$

以第一法求未知數之重率,則有

$$\left.\begin{array}{l}2\nu_1+\nu_2=1\\ \nu_1+2\nu_2=0\end{array}\right\} \qquad \nu_1=\frac{2}{3},$$

$$p_A=\frac{3}{2}=1.5, \qquad \gamma_A=\frac{\gamma}{\sqrt{1.5}}=0.317d=0.06.$$

其他可同樣求之.

II.第二法(未定係數法)

觀察附有重率,則可依第五章第四節1. (b)法及公式[64]解之,茲舉例說明如下.

例　觀察方程式爲

$$\begin{array}{ll} & \text{重率} \\ x=2.7 & 2 \\ y=4.2 & 5 \\ z=2.8 & 3 \\ w=2.2 & 1 \end{array}\Bigg\} \cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

條件方程式爲

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z+w=12.0 \\ y \qquad -w=\ \ 2.0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

p	α	β	$\frac{\alpha^2}{p}$	$\frac{\alpha\beta}{p}$	$\frac{\beta^2}{p}$	M	αM	βM
2	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{2}$	2.7	2.7	0
5	1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	4.2	4.2	4.2
3	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{0}{3}$	2.8	2.8	0
1	1	-1	$\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	2.2	2.2	-2.2
			$\frac{61}{30}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{6}{5}$		11.9	2.0

$$\left.\begin{array}{l} d_1=[\alpha M]+\lambda_1=11.9-12.0=-0.1 \\ d_2=[\beta M]+\lambda_2=\ 2.0\ -\ 2.0\ =\ \ \ 0.0 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{61}{30}K_1-\frac{4}{5}K_2=0.1 \\ -\frac{4}{5}K_1+\frac{6}{5}K_2=0 \end{array}\right\}.$$

解之,得 $\qquad K_1=\frac{1}{15}, \qquad K_2=\frac{2}{45}.$

$$v_1=\frac{1}{p_1}(\alpha_1K_1+\beta_1K_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{15}+0\cdot\frac{2}{45}\right)=\frac{1}{30}=0.033.$$

$$v_2=\frac{1}{p_2}(\alpha_2K_1+\beta_2K_2)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{15}+\frac{2}{45}\right)=\frac{1}{45}=0.022,$$

$$v_3=\frac{1}{p_3}(\alpha_3K_1+\beta_3K_2)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{15}+0\cdot\frac{2}{45}\right)=\frac{1}{45}=0.022.$$

$$v_4=\frac{1}{p_4}(\alpha_4K_1+\beta_4K_2)=\frac{1}{1}\left(\frac{1}{15}-\frac{2}{45}\right)=\frac{1}{45}=0.022.$$

v	p	v^2	pv^2
0.033	2	0.001089	0.002178
0.022	5	0.000484	0.002420
0.022	3	0.000484	0.001452
0.022	1	0.000484	0.000484
			$[pvv]=0.006534$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-(s-q)}}=\sqrt{\frac{0.006534}{2}}=\sqrt{0.003267}=0.057,$$

$$\gamma=0.6745\varepsilon=0.038,$$

$$\gamma_x=\frac{\gamma}{\sqrt{p_x}}=\frac{0.038}{\sqrt{2}}=0.027,\qquad \gamma_y=\frac{\gamma}{\sqrt{p_y}}=\frac{0.038}{\sqrt{5}}=0.017,$$

$$\gamma_z=\frac{\gamma}{\sqrt{p_z}}=\frac{0.038}{\sqrt{3}}=0.022,\qquad \gamma_w=\frac{\gamma}{\sqrt{p_w}}=\frac{0.038}{\sqrt{1}}=0.038.$$

$$\therefore\quad x=2.7+0.033\pm0.027=2.733\pm0.027$$

$$y=4.2+0.022\pm0.017=4.222\pm0.017$$

$$z=2.8+0.022\pm0.022=2.822\pm0.022$$

$$w=2.2+0.022\pm0.038=2.222\pm0.038$$

$$[\ \ ]=11.999$$

2. 有條件之間接觀察

I. 第一法

依第五章第四節2之第一法(消去法)計算之,可得出未知量之最良值;將所得之值代入觀察方程式中,而計算其殘差 v_1、v_2、……;再由本章第五節以算出或然差.

例 1 觀察方程式爲

$$\left.\begin{array}{l} x+y \qquad -3.0=0 \\ x \qquad -z+0.9=0 \\ \qquad y \qquad -2.0=0 \\ x \qquad +z-3.1=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1),$$

條件方程式 $x+y+z-5.0=0$ ……………………(2).

由(2)得 $z=5.0-x-y$, 以之代入(1)式,得

$$\left.\begin{array}{r} x+y=3.0 \\ 2x+y=4.1 \\ y=2.0 \\ y=1.9 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3),$$

作成標準方程式:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+3y=11.2 \\ 3x+4y=11.9 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (4),$$

解上式,得 $x=1.07$, $y=1.95$, $z=1.98$.

求各未知量之重率,則由

$$\left.\begin{aligned}5x+3y&=1\\3x+4y&=0\end{aligned}\right\}.\qquad x=\frac{4}{11},\qquad\therefore\qquad p_x=\frac{11}{4};$$

$$\left.\begin{aligned}5x+3y&=0\\3x+4y&=1\end{aligned}\right\}.\qquad y=\frac{5}{11},\qquad\therefore\qquad p_y=\frac{11}{5}.$$

又由(1),(2)將 y 消去,依上之運算處理之,則有

$$\left.\begin{aligned}3x+\ z&=0\\x+4z&=1\end{aligned}\right\}.\qquad z=\frac{3}{11},\qquad\therefore\qquad p_z=\frac{11}{3}.$$

以所得各未知量之值代入(1),求出殘差之值如下:

v	v^2
0.02	0.0004
−0.01	0.0001
−0.05	0.0025
−0.05	0.0025
	$[vv]=0.0055$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{[vv]}{n-(s-p)}}=\sqrt{\frac{0.0055}{2}}=0.052,$$

$$\gamma=0.6745\,\varepsilon=0.035,$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma_x&=\frac{\gamma}{\sqrt{p_x}}=\frac{0.035}{\sqrt{\frac{11}{4}}}=0.021\\\gamma_y&=\frac{\gamma}{\sqrt{p_y}}=\frac{0.035}{\sqrt{\frac{11}{5}}}=0.024\\\gamma_z&=\frac{\gamma}{\sqrt{p_z}}=\frac{0.035}{\sqrt{\frac{11}{3}}}=0.018\end{aligned}\right\},$$

$$\therefore \qquad \left.\begin{aligned} x &= 1.07 \pm 0.021 \\ y &= 1.95 \pm 0.024 \\ z &= 1.98 \pm 0.018 \end{aligned}\right\}.$$

例 2　觀察方程式為

$$\left.\begin{array}{llr} & & \text{重率} \\ x+y & -3.0=0 & 2 \\ x & -z+0.9=0 & 1 \\ y & -2.0=0 & 3 \\ x & +z-3.1=0 & 2 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

條件方程式為　　$x+y+z-5.0=0$ ……………………(2).

由(2)得 z 之值為　　$z=5.0-x-y$ ……………………(3).

以之代入(1),得

$$\left.\begin{array}{rr} & \text{重率} \\ x+y=3.0 & 2 \\ 2x+y=4.1 & 1 \\ y=2.0 & 3 \\ y=1.0 & 2 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

作成標準方程式:　$\left.\begin{aligned} 6x+4y &= 14.2 \\ 4x+8y &= 19.9 \end{aligned}\right\}$ ……………………(5),

解之,得　　$x=1.06,\qquad y=1.96,\qquad z=1.98.$

次求未知量 x, y 之重率,

由 $\left.\begin{array}{l}6x+4y=1\\4x+8y=0\end{array}\right\}$, $x=\frac{1}{4}$, $\therefore$ $p_x=4.$

由 $\left.\begin{array}{l}6x+4y=0\\4x+8y=1\end{array}\right\}$, $y=\frac{3}{16}$, $\therefore$ $p_y=\frac{16}{3}.$

又(1)及(2)式將 y 消去,而以同上之方法作成標準方程式,得

$$\left.\begin{array}{l}6x+4z=14.3\\4x+8z=20.1\end{array}\right\},$$

解之,得 $z=1.98,$

次求 z 之重率,由

$\left.\begin{array}{l}6x+4z=0\\4x+8z=1\end{array}\right\}$, $z=\frac{3}{16}$, $\therefore p_z=\frac{16}{3}.$

以 $x=1.06, y=1.96, z=1.98$ 代入(1)式,得殘差爲

v	v^2	p	pv^2
0.02	0.0004	2	0.0008
−0.02	0.0004	1	0.0004
−0.04	0.0016	3	0.0048
−0.06	0.0036	2	0.0072
		$[p]=8$	$[pvv]=0.0132$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-(s-q)}}=\sqrt{\frac{0.0132}{2}}=0.081,$$

$$\gamma=0.6745\varepsilon=0.055.$$

$$
\therefore\qquad \left.\begin{aligned}
\gamma_x&=\frac{\gamma}{\sqrt{p_x}}=\frac{0.055}{\sqrt{4}}=0.028\\
\gamma_y&=\frac{\gamma}{\sqrt{p_y}}=\frac{0.055}{\sqrt{16/3}}=0.024\\
\gamma_z&=\frac{\gamma}{\sqrt{p_z}}=\frac{0.055}{\sqrt{16/3}}=0.024
\end{aligned}\right\},
$$

$$
\therefore\qquad \left.\begin{aligned}
x&=1.06\pm0.028\\
y&=1.96\pm0.024\\
z&=1.98\pm0.024
\end{aligned}\right\}.
$$

問　題

1. 測定三角形內角之值如下,試求其最頁值及或然差:

$$A=73^\circ 35'.1\qquad B=60^\circ 7'.2\qquad C=46^\circ 18'.0$$

2. 觀察值爲　$x=4.3,\quad y=5.7,\quad z=7.3;$

條件方程爲　$x+2y+3z=3.6;$

試求 x 之最頁值,及其或然差.

3. 觀察方程式爲

$$
\left.\begin{aligned}
x\qquad\quad &=3.1\\
y\quad &=1.9\\
x\qquad +z&=4.0\\
x+y+z&=5.9
\end{aligned}\right\},
$$

條件方程式爲　$x-y-z=0,$

試求 x、y、z 之最頁值及其或然差.

4. 設 A、B、C、D 四角之和爲 360°,其測定值及其重率如下,試求其最頁值及或然差.

			重率
$A=$	$101°$	$13'\ 22''$	3
$B=$	$93°$	$49'\ 17''$	2
$C=$	$87°$	$5'\ 39''$	2
$D=$	$77°$	$52'\ 40''$	1

附 錄

公 式

[1] $M_i - X = x_i \qquad (i=1, 2, 3,\cdots\cdots n)$

[2] $M_i - X_o = v_i \qquad (i=1, 2, 3.\cdots\cdots n)$

[3] $X_o = \dfrac{M_1 + M_2 + M_3 + \cdots\cdots + M_n}{n} = \dfrac{[M]}{n}$

[4] $[v] = 0$

[5] $[v'v'] \geqq [vv]$

[6] $X_o = A + d$

[7] $y = f(x)$

[8] $f(x) = Ce^{-h^2x^2}$

[9] $P = f(x_1)f(x_2)f(x_3)\cdots\cdots f(x_n)dx_1dx_2dx_3\cdots\cdots dx_n$

[10] $\int_{-\iota}^{+\iota} f(x)dx = c\int_{-\iota}^{+\iota} e^{-h^2x^2}dx = 1$

[11] $A = \dfrac{h}{2C}$

[12] $C = \dfrac{h}{\sqrt{\pi}}$

[13] $y = f(x) = \dfrac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$

[14] $P = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-ah}^{+ah} e^{-t^2}dt = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{ah} e^{-t^2}dt$

[15] $$e^{-t^2}=1-t^2+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\frac{t^8}{4!}-\cdots\cdots$$

[16] $$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{(ah)-\frac{1}{3}(ah)^3+\frac{1}{2!}\,\frac{1}{5}(ah)^5-\frac{1}{3!}\,\frac{1}{7}(ah)^7+\cdots\cdots\right\}$$

[17] $$P=1-\frac{e^{-(ah)^2}}{ah\sqrt{\pi}}\left\{1-\frac{1}{2(ah)^2}+\frac{1\cdot3}{2^2(ah)^4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3(ah)^6}+\cdots\cdots\right\}$$

[18] $$P=\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2)}dx_1.dx_2\cdots\cdots dx_n$$

[19] $$X_0=\frac{[pM]}{[p]}$$

[20] $$p_1:p_2:p_3=h_1{}^2:h_2{}^2:h_3{}^2$$

[21] $$f(X_0)=\frac{[M]}{n}$$

[22] $$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\frac{f'''(x)}{3!}h^3+\cdots\cdots$$

[23] $$f(x+h,y+k)=f(x,y)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}k+\frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial f(x,y)}{\partial x\cdot\partial y}hk+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}k^2\right\}+\cdots$$

[24] $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$$

$$[25]\quad \left.\begin{array}{l} a_1X+b_1Y+m_1=0 \\ a_2X+b_2Y+m_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nX+b_nY+m_n=0 \end{array}\right\}$$

$$[26]\quad \left.\begin{array}{l} a_1X+b_1Y+m_1=v_1 \\ a_2X+b_2Y+m_2=v_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nX+b_nY+m_n=v_n \end{array}\right\}$$

$$[27]\quad \left.\begin{array}{l} [av]=0 \\ [bv]=0 \end{array}\right\}$$

$$[28]\quad \begin{array}{l} p_1a_1v_1+p_2a_2v_2+\cdots\cdots+p_na_nv_n=0 \\ p_1b_1v_1+p_2b_2v_2+\cdots\cdots+p_nb_nv_u=0 \\ p_1c_1v_1+p_2c_2v_2+\cdots\cdots+p_nc_nv_n=0 \end{array}$$

$$[28]'\quad \begin{array}{l} [paa]X+[pab]y+[pac]Z+[pam]=0 \\ [pab]X+[pbb]Y+[pbc]Z+[pbm]=0 \\ [pac]X+[pbc]Y+[pcc]Z+[pcm]=0 \end{array}$$

$$[29]\quad \left\{\begin{array}{l} [bb.1]=[bb]-[ab]\dfrac{[ab]}{[aa]} \\ [bc.1]=[bc]-[ab]\dfrac{[ac]}{[aa]} \\ [bm.1]=[bm]-[ab]\dfrac{[am]}{[aa]} \end{array}\right.$$

[30] $$[cc.2]=[cc.1]-[bc.1]\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$$

$$[cm.2]=[cm.1]-[bc.1]\frac{[bm.1]}{[bb.1]}$$

[31] $$[cc.2]z_3+[cm.2]=0$$

$$[bb.1]z_2+[bc.1]z_3+[bm.1]=0$$

$$[aa]z_1+[ab]z_2+[ac]z_3+[am]=0$$

[32] $$\frac{[ab]}{[aa]}=A_b,\frac{[ac]}{[aa]}=A_c,\frac{[am]}{[aa]}=A_m$$

$$\frac{[bc.1]}{[bb.1]}=B_c,\frac{[bm.1]}{[bb.1]}=B_m$$

$$\frac{[cm.2]}{[cc.2]}=C_m$$

[33] $$[a]+[b]+[c]+[m]=[s]$$

[34] $$[aa]+[ab]+[ac]+[am]=[as]$$

$$[ab]+[bb]+[bc]+[bm]=[bs]$$

$$[ac]+[bc]+[cc]+[cm]=[cs]$$

$$[am]+[bm]+[cm]+[mm]=[ms]$$

[35] $$[bb.1]+[bc.1]+[bm.1]=[bs.1]$$

$$[cc.2]+[cm.2]=[cs.2]$$

$$[mm.3]=[ms.3]$$

[36] $$[mv]=[vv]$$

[37] $$[vv]=[mm.3]=[ms.3]$$

[38]
$$L_1 v_3 + H_1 = 0$$
$$L_2 v_3 + H_2 = 0$$
$$v_3 = 0$$

[39]
$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{\alpha_1}{p_1} K_1 + \frac{\beta_1}{p_1} K_2 \\ v_2 &= \frac{\alpha_2}{p_2} K_1 + \frac{\beta_2}{p_2} K_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}$$

[40]
$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] K_1 + \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] K_2 &= -d_1 \\ \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] K_1 + \left[\frac{\beta\beta}{p}\right] K_2 &= -d_2 \end{aligned}\right\}$$

[41]
$$v_i = -\frac{\frac{1}{p_i}}{\left[\frac{1}{p}\right]} d$$

[42]
$$\gamma_1 : \gamma_2 = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2}$$

[43]
$$p_1 : p_2 = \frac{1}{\gamma_1^2} : \frac{1}{\gamma_2^2}, \text{或 } \gamma_1 : \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{p_1}} : \frac{1}{\sqrt{p_2}}$$

[44]
$$\varepsilon^2 = \frac{[xx]}{n}$$

[45]
$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2h^2},\quad [45]' \quad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}\,h}$$

[46]
$$\eta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

[47]
$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= 1.4826\gamma \\ \eta &= 1.1829\gamma \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \gamma &= 0.6745\varepsilon \\ \eta &= 0.7979\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \varepsilon &= 1.2533\eta \\ \gamma &= 0.8453\eta \end{aligned}\right\}$$

[48] $E^2=\varepsilon_1{}^2+\varepsilon_2{}^2$

[49] $R^2=\gamma_1{}^2+\gamma_2{}^2$

[50] $E^2=a^2\varepsilon_1{}^2.R^2=a^2\gamma_1{}^2$

[51] $E^2=a_1{}^2\varepsilon_1{}^2+a_2{}^2\varepsilon_2{}^2,\quad R^2=a_1{}^2\gamma_1{}^2+a_2{}^2\gamma_2{}^2$

[52] $E^2=\left(\frac{\partial l}{\partial m_1}\right)^2\varepsilon_1{}^2+\left(\frac{\partial l}{\partial m_2}\right)^2\varepsilon_2{}^2+\left(\frac{\partial l}{\partial m_3}\right)^2\varepsilon_3{}^2$

[53] $R^2=\left(\frac{\partial l}{\partial m_1}\right)^2\gamma_1{}^2+\left(\frac{\partial l}{\partial m_2}\right)^2\gamma_2{}^2+\left(\frac{\partial l}{\partial m_3}\right)^2\gamma_2{}^2$

[54] $E=\left(\frac{\partial l}{\partial m}\right)\varepsilon,\quad R=\left(\frac{\partial l}{\partial m}\right)\gamma$

[55] $\gamma_0=0.6745\varepsilon_0.$

[56] $\varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

[57] $\frac{[xx]}{n}=\frac{[vv]}{n-1}$

[58] $\varepsilon=\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$

[59] $\gamma=0.6745\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$

[60] $\varepsilon_0=\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$

[61] $\gamma_0=0.6745\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$

[62] $k=\sqrt{p_1}$

[63] $\varepsilon=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}$

[64]　$\varepsilon^2 = p_i \varepsilon_i^2,\quad \varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_i}}$

[65]　$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[p]}}$

[66]　$\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{(n-1)[p]}}$

[67]　$\varepsilon_0 = \varepsilon_1\sqrt{\frac{p_1}{[p]}},\quad \varepsilon_0 = \varepsilon_2\sqrt{\frac{p_2}{[p]}}$

[68]　$\gamma_0 = \gamma_1\sqrt{\frac{p_1}{[p]}},\quad \gamma_0 = \gamma_2\sqrt{\frac{p_2}{[p]}}$

[69]　$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{[pvv]}{p_i(n-1)}}$

[70]　$x_i = \frac{dX}{dM_i} m_i$

[71]　$\left.\begin{array}{l}[aa]Q_{11} + [ab]Q_{12} = 1\\ [ab]Q_{11} + [bb]Q_{12} = 0\end{array}\right\}$

[72]　$p_x = \frac{1}{Q_{11}}$

[73]　$\varepsilon = \sqrt{\frac{[vv]}{n-q}}$　　[73]′　$\varepsilon = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-q}}$

[74]　$\varepsilon_x = \sqrt{\frac{[vv]}{(n-q)p_x}},\quad \varepsilon_y = \sqrt{\frac{[vv]}{(n-q)p_y}}$

[74]′　$\varepsilon_x = \sqrt{\frac{[pvv]}{(n-q)p_x}},\quad \varepsilon_y = \sqrt{\frac{[pvv]}{(n-p)q_y}}$

[75]　$P_f = \frac{1}{G_1P_1 + G_2P_2}$

[76]　$\varepsilon = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-(s-q)}}$

（完）

(13751)