Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 11

Ein Schema hat, verglichen mit einem metrischen Raum, topologisch eher ungewöhnliche Eigenschaften, die wir hier vorstellen wollen. Wir beginnen mit der Irreduzibilität.

Irreduzible Räume

Definition 11.1. Ein topologischer Raum V heißt *irreduzibel*, wenn $V \neq \emptyset$ ist und es keine Zerlegung $V = Y \cup Z$ mit abgeschlossenen Mengen $Y, Z \subset V$ gibt.

Lemma 11.2. *Ein topologischer Raum $X \neq \emptyset$ ist genau dann irreduzibel, wenn für nichtleere offene Teilmengen $U, V \subseteq X$ auch der Durchschnitt $U \cap V$ nicht leer ist.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der Definition, da für die abgeschlossenen Teilmengen $Y = X \setminus U$ und $Z = X \setminus V$ die Beziehung $X = Y \cup Z$ genau dann gilt, wenn $U \cap V = \emptyset$ ist. □

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ eines topologischen Raumes X heißt irreduzibel, wenn sie als topologischer Raum mit der induzierten Topologie irreduzibel ist.

Lemma 11.3. *Es sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann ist die abgeschlossene Teilmenge*

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spek}(R)$$

genau dann irreduzibel, wenn das Radikal zu $\mathfrak{a}$ ein Primideal ist.

Beweis. Wir können direkt annehmen, dass $\mathfrak{a}$ ein Radikal ist. Ferner ist es nicht das Einheitsideal. Wenn $V(\mathfrak{a})$ nicht irreduzibel ist, so gibt es eine nichttriviale Zerlegung

$$V(\mathfrak{a}) = Y \cup Z = V(\mathfrak{b}) \cup V(\mathfrak{c}),$$

wobei wir $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ als Radikale ansetzen können. Das bedeutet $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$. Wegen $V(\mathfrak{b}), V(\mathfrak{c}) \subset V(\mathfrak{a})$ ist nach Proposition 8.4 (5)

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$$

Somit gibt es $f \in \mathfrak{b}$, $f \notin \mathfrak{a}$, und $g \in \mathfrak{c}$, $g \notin \mathfrak{a}$. Daher ist

$$fg \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} = \mathfrak{a},$$

und $\mathfrak{a}$ ist kein Primideal.

Wenn umgekehrt $\mathfrak{a}$ kein Primideal ist, so gibt es Elemente $f, g \notin \mathfrak{a}$ und $fg \in \mathfrak{a}$. Dann ist $D(fg) \subseteq D(\mathfrak{a})$ und somit

$$D(fg) \cap V(\mathfrak{a}) = \emptyset.$$

Da $\mathfrak{a}$ ein Radikal ist, ist $f^n \notin \mathfrak{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Aufgabe 8.5 gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Also ist

$$D(f) \cap V(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$$

und entsprechend für $D(g)$. Nach Lemma 11.2 ist $V(\mathfrak{a})$ nicht irreduzibel. □

Es liegt also durch $\mathfrak{p} \leftrightarrow V(\mathfrak{p})$ eine Korrespondenz zwischen den Primidealen und den abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen des Spektrums vor. Die maximalen Ideale entsprechen den einzelnen abgeschlossenen Punkten, die minimalen Primideale entsprechen den sogenannten irreduziblen Komponenten des Spektrums, siehe weiter unten.

Definition 11.4. Zu einem topologischen Raum X und einer abgeschlossenen irreduziblen Teilmenge $Y \subseteq X$ nennt man einen Punkt $\eta \in Y$ mit der Eigenschaft, dass für jede offene Menge $U \subseteq X$ die Beziehung $U \cap Y \neq \emptyset$ genau dann gilt, wenn $\eta \in U$ ist, den *generischen Punkt* von Y.

Lemma 11.5. *In einem Schema X besitzt jede abgeschlossene irreduzible Teilmenge $Y \subseteq X$ einen eindeutig bestimmten generischen Punkt.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist Y nicht leer. Sei $P \in Y$ ein Punkt und $P \in W = \operatorname{Spek}(R)$ eine offene affine Umgebung. Es ist dann

$$Y \cap W \subseteq W$$

eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge in einem affinen Schema. Nach Lemma 11.3 ist $Y \cap W = V(\mathfrak{p})$ mit einem Primideal $\mathfrak{p} \in W$. Wir behaupten, dass $\mathfrak{p}$ der generische Punkt von Y ist. Wenn $U \subseteq X$ offen und $Y \cap U$ nicht leer ist, so ist auch $Y \cap U \cap W$ wegen der Irreduzibilität von Y nicht leer und daher $\mathfrak{p} \in U$. Der generische Punkt ist eindeutig bestimmt, da er als Punkt im affinen Schema W eindeutig bestimmt ist. □

Die Krulldimension

Definition 11.6. Zu einem topologischen Raum X nennt man die maximale Länge von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen

$$X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_{n-1} \subset X_n$$

in X die *Krulldimension* des Raumes.

Lemma 11.7. *Die Krulldimension eines kommutativen Ringes stimmt mit der Krulldimension seines Spektrums* $\operatorname{Spek}(R)$ *überein.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 11.3 und Proposition 8.4 (5). □

Noethersche Räume

Definition 11.8. Ein topologischer Raum X heißt *noethersch*, wenn in ihm jede aufsteigende Kette

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq \ldots$$

von offenen Mengen *stationär* wird, d.h. es gibt ein n mit

$$U_n = U_{n+1} = U_{n+2} = \ldots .$$

Lemma 11.9. *Ein topologischer Raum X ist genau dann noethersch, wenn in ihm jede offene Teilmenge quasikompakt ist.*

Beweis. Zunächst ist in einem noetherschen Raum jede offene Teilmenge selbst noethersch. Für die Hinrichtung genügt es also zu zeigen, dass X quasikompakt ist. Sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung und angenommen, es gäbe keine endliche Teilüberdeckung. Dann kann man eine echt aufsteigende unendliche Kette von offenen Teilmengen der Form

$$V_n = \bigcup_{i \in I_n} U_i$$

mit $I_n \subseteq I$ endlich konstruieren. Sei umgekehrt jede offene Teilmenge quasikompakt und eine aufsteigende Kette $U_k \subseteq U_{k+1}$ gegeben. Dann ist

$$U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$$

offen und quasikompakt und daher gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Dies bedeutet, dass es einen Index n mit $U_n = U_k$ für alle $k \geq n$ gibt. $\square$

Für einen noetherschen Raum gilt: jede nichtleere Teilmenge von offenen Mengen (abgeschlossenen Mengen) besitzt ein maximales (minimales) Element. Dies kann man vorteilhaft als Beweisprinzip einsetzen (*Beweis durch noethersche Induktion*): Man möchte zeigen, dass eine gewisse Eigenschaft E für alle abgeschlossenen Teilmengen gilt, und man betrachtet die Menge derjenigen abgeschlossenen Teilmengen, die E nicht erfüllen. Man möchte zeigen, dass die Menge leer ist, und nimmt an, dass sie nicht leer ist. Dann besitzt sie auch ein minimales Element, und dies muss man dann zum Widerspruch führen. Die Gültigkeit dieses Beweisprinzips beruht darauf, dass man in einer nichtleeren Menge ohne einem minimalen Element eine unendlich absteigende Kette konstruieren kann. Ein typisches Beispiel für dieses Beweisprinzip liefert der Beweis der folgenden Aussage.

Satz 11.10. *Für jeden noetherschen topologischen Raum X gibt es eine eindeutige Zerlegung $X = V_1 \cup \ldots \cup V_k$ in abgeschlossene irreduzible Teilmengen.*

Beweis. Die Existenz beweisen wir durch noethersche Induktion über die abgeschlossenen Teilmengen von X. Angenommen, nicht jede abgeschlossene Teilmenge habe eine solche Zerlegung. Dann gibt es auch eine minimale Teilmenge, sagen wir $V \subseteq X$, ohne eine solche Zerlegung. Diese Menge V kann nicht irreduzibel sein, sondern es gibt eine nicht-triviale Darstellung $V = V_1 \cup V_2$. Da V_1 und V_2 echte Teilmengen von V sind, gibt es für diese beiden jeweils endliche Darstellungen als Vereinigung von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen. Diese beiden vereinigen sich zu einer endlichen Darstellung von V, was ein Widerspruch ist. Zur Eindeutigkeit. Seien

$$X = V_1 \cup \ldots \cup V_k = W_1 \cup \ldots \cup W_m$$

zwei Zerlegungen in irreduzible Teilmengen (jeweils ohne Inklusionsbeziehung). Es ist

$$V_1 = V_1 \cap X = V_1 \cap (W_1 \cup \ldots \cup W_m) = (V_1 \cap W_1) \cup \ldots \cup (V_1 \cap W_m).$$

Da V_1 irreduzibel ist, muss $V_1 \subseteq W_j$ für ein j sein. Umgekehrt ist mit dem gleichen Argument $W_j \subseteq V_i$ für ein i, woraus $i = 1$ und $V_1 = W_j$ folgt. Ebenso findet sich V_2 etc. in der Zerlegung rechts wieder, so dass die Zerlegung eindeutig ist. □

Die dabei auftretenden Mengen nennt man die *irreduziblen Komponenten* des Raumes.

Definition 11.11. Ein Schema X heißt *noethersch*, wenn es durch endlich viele affine Schemata zu noetherschen Ringen überdeckt werden kann.

Insbesondere ist das Spektrum zu einem noetherschen Ring ein noethersches Schema.

Lemma 11.12. *Ein noethersches Schema ist ein noetherscher topologischer Raum.*

Beweis. Eine endliche Vereinigung von noetherschen Räumen ist wieder noethersch, deshalb können wir direkt davon ausgehen, dass ein Spektrum zu einem noetherschen Ring vorliegt. Wir müssen gemäß Lemma 11.9 zeigen, dass eine jede offene Teilmenge $U = D(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spek}(R)$ quasikompakt ist. Da R noethersch ist, gilt $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_n)$ und daher

$$D(\mathfrak{a}) = D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_n)$$

nach Proposition 8.4 (2). Nach Korollar 8.6 in Verbindung mit Proposition 8.11 sind die $D(f_i)$ quasikompakt, also auch ihre endliche Vereinigung. □

Mit unseren bisher entwickelten topologischen Methoden können wir direkt das folgende rein algebraische Resultat beweisen.

Lemma 11.13. *In einem noetherschen kommutativen Ring gibt es nur endlich viele minimale Primideale.*

Beweis. Siehe Aufgabe 11.15. □

Integre Schemata

Definition 11.14. Ein beringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *reduziert*, wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ der Ring $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ reduziert ist.

Definition 11.15. Ein Schema X heißt *integer*, wenn es irreduzibel und reduziert ist.

Lemma 11.16. *In einem integren Schema sind die Restriktionsabbildungen*

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$$

zu $\emptyset \neq V \subseteq U \subseteq X$ *injektiv.*

Beweis. Sei $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ nicht 0. Die Menge

$$X_f = \{P \in X \mid f(P) \neq 0\}$$

ist offen nach Lemma 7.16 und wegen der Reduziertheit nicht leer. Wegen der Irreduzibilität von X ist $X_f \cap V$ ebenfalls nicht leer und somit ist die Restriktion von f auf V ebenfalls nicht 0. □

Beispiel 11.17. Sei K ein Körper und $R = K[X,Y]/(X^2, XY)$. Es ist $\mathfrak{q} = (X)$ das einzige minimale Primideal von R und daher ist $\operatorname{Spek}(R)$ irreduzibel. Wegen $Y \notin \mathfrak{q}$ und $XY = 0$ gilt in der Lokalisierung $R_\mathfrak{q}$ die Gleichheit $X = 0$, und es ist

$$R_\mathfrak{q} = K[Y]_{(0)} = K(Y)$$

ein Körper. Die Restriktionsabbildung $R \to R_\mathfrak{q}$ ist nicht injektiv. Es ist

$$D(X) = \emptyset,$$

das Element X ist aber in der Lokalisierung $R_{(X,Y)}$ nicht 0.

Lemma 11.18. *In einem integren Schema X ist zu jeder nichtleeren offenen Menge $U \subseteq X$ der Schnittring $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ ein Integritätsbereich.*

Beweis. Da U offen und nicht leer ist, gibt es eine nichtleere offene affine Teilmenge

$$V = \operatorname{Spek}(R) \subseteq U.$$

Nach Lemma 11.16 genügt es zu zeigen, dass R ein Integritätsbereich ist. Es sei $\mathfrak{a}$ das Nilradikal von R. Wegen der Irreduzibilität von V, die aus der Irreduzibilität von X folgt, ist nach Lemma 11.3 das Ideal $\mathfrak{a}$ ein Primideal. Da die Reduziertheit nach Aufgabe 10.14 eine lokale Eigenschaft ist, gilt $\mathfrak{a} = 0$. Das Nullideal ist also ein Primideal und damit ist R ein Integritätsbereich. □

Lemma 11.19. *Zu einem integren Schema ist der Halm der Strukturgarbe im generischen Punkt ein Körper.*

Beweis. Den Halm kann man ausgehend von einer beliebigen nichtleeren affinen offenen Teilmenge U bestimmen. Diese haben die Form $U = \operatorname{Spek}(R)$ mit einem kommutativen Ring R, der aufgrund von Lemma 11.18 ein Integritätsbereich ist. Der generische Punkt entspricht dabei dem Nullideal, und die Lokalisierung am Nullideal ergibt den Quotientenkörper von R. $\square$

Definition 11.20. Zu einem integren Schema nennt man den Halm der Strukturgarbe im generischen Punkt den *Funktionenkörper* von X.

In einem integren Schema ist der Schnittring zu jeder nichtleeren offenen Menge ein Unterring des Funktionenkörpers.

Abbildungsverzeichnis