EUKLEIDOVY

ZÁKLADY

(ELEMENTA).

PŘELOŽIL

FRANTIŠEK SERVÍT,

professor českého gymnasia vinohradského.

V PRAZE 1907.

Nákladem Jednoty českých mathematiků. — Tiskem Alberta Malíře na Král. Vinohradech.

Předmluva.

Předkládaje Eukleidovy Základy řídil jsem se vydáním Heibergovým, ježto se zdá nejlepším a také nepřístupnějším. Kde novověké názvosloví geometrické věc označuje jiným výrazem, než shledáváme u Eukleida, tam užil jsem z pravidla rovněž názvu nyní obvyklého; jen místy podržel jsem výraz Eukleidův, na př. »přímka« místo »úsečka«, rozděliti »poměrem krajním a středním« a j., nebo sám jsem utvořil slovo nové, na př. soudělník (gnómon); zvláště v kn. X. o přímkach nezměrných dovolil jsem si užíti výrazův nově utvořených. Volil-li jsem pokaždé slovo vhodné, o tom rozhodnouti zůstavuji shovívavému čtenáři.

Kde jsem co pozměnil v textu neb obrazcích, poznamenáno pod čarou; tam jsem přidal i některé vysvětlivky. Dle potřeby uvádím v závorkách také místo, kde věta, jíž právě k důkazu jest užito, byla odůvodněna. Vůbec snažil jsem se, aby byl překlad aspoň tak srozumitelný, jakým se jeví originál.

Korrekturu měl jsem na starosti jen já; co mi přese všecku bedlivost proklouzlo chybného, na konci opraveno zvlášť. Malá nedopatření račiž si laskavý čtenář opraviti sám.

Slavné »Jednotě českých mathematiků«, která nemalým nákladem umožnila vydání tohoto překladu, jakož i slovutnému panu vládnímu radovi Dru Josefu Bernhardovi, řediteli c. k. českého gymnasia na Král. Vinohradech, za všeliké ochotné přispění, zvláště pokud se týká obrazců, vzdávám srdečné díky.

Na Král. Vinohradech v únoru 1905.

František Servít.

Úvod.

O Eukleidovi a jeho spisech.

Eukleides, slavný mathematik řecký (rozdílný od Eukleida, filosofa megarského), žil kolem r. 300. př. Kr., tedy asi 100 let po Platonovi, za vlády egyptského Ptolemaia I. a ještě před ní. O jeho životě málo je známo; neví se, ani kdy ani kde se narodil, ani kdy zemřel. Pravdě podobno, že vzdělání své ve vědě mathematické dovršil v Athenách. Později vyučoval v Alexandrii, kdež založil školu. Od té doby vědění mathematické se ponenáhlu soustředilo v tomto městě, takže mnozí, mimo jiné prý též Archimedes, podnikali tam studijní cesty.

Spisy jeho většinou se týkaly geometrie, některé fysiky neb astronomie a jeden hudby.

Díla zachovaná: Základy (Στοιχεῖα, Elementa); Dané prvky (Δεδομένα, Data — 95 vět o prvcích, jimiž určeny prvky jiné); Úkazy (Φαινόμενα – počátky astronomie, valně porušeno); Nauka o světle (Ὀπτικά, asi 60 pouček — valně porušeno nebo dle nynějšího stavu vědy nesprávno); O hudebních intervallích (Κατατομὴ κανόνος). Úryvkovitě mimo to zachovány spisy: O dělení útvarů (Περὶ διαιρέσεων — 36 vět objevených u spisovatelův arabských) a Porismata*) o III. kn. (ze spisů, jež napsal vykladatel Eukleidův Pappos kol. r. 300. po Kr.). Díla ztracená: Místa na ploše (Τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ, o II. kn.); O kuželosečkách (Κωνικά, o IV. kn.); Klamné závěry (Ψευδάρια).

Nejdůležitější ze spisův Eukleidových jsou Základy, t. j. počátky geometrie, o XIII. knihách; ve vydáních bývá i kn. XIV. a XV., ona však jest prací Hypsikleovou (asi 120 let po Eukl.), tato pochází od neznámého, snad až ze 6. stol. po Kr. Část díla toho věnována ovšem též arithmetice, bylo však toho třeba k důkazům geometrickým a tyto poučky se dokazují rovněž na základě geometrickém. V díle tom užil bez pochybnosti také prací předchůdcův a vrstevníků svých,

*) Porisma tuto jest úkol, jímž se žádá, by se na základech daných vyhledala veličina určitých vlastností (Heiberg: Literargeschichtl. Studien ü. Euklid, str. 56. nn.). V základech porisma značí poučku, jež z důkazu poučky jiné vysvítá jasně sama sebou (důsledek), kdežto lémma (λῆμμα, výtěžek) jest věta z důkazu poučky jiné, abych tak řekl, vytěžena, ovšem ještě nedokázaná nebo nevysvětlená.

jež dle potřeby opravil, doplnil a soustavně spořádal. Methodu do té doby uznávanou a přijatou zachoval důsledně.

Známost a sláva díla toho se rozšířila rychle, takže práce odboru toho dosavadní upadly téměř v zapomenutí. Nástupcům jeho, když se ho kde dokládali, na místě výslovného jmenování stačilo pouze připomenouti, že to neb ono praví spisovatel Základů (στοιχειωτής). Pilně se dílem tím zaměstnávali mathematikové byzantijští; z Římanův o Eukleidovi nejprve se zmiňuje Cicero (de orat. III. 132.); s dílem jeho však seznámili se Římané jen ponenáhlu a čítali je v původním jazyce. Teprve Boëthius koncem 5. stol. po Kr. jal se je překládati na jazyk latinský. Později zvl. Arabové horlivě se jím zabývali. Ve středověku studium mathematické vůbec ochablo, a tak i dílo Eukleidovo teprve po r. 1500 opět hojněji vydáváno a vysvětlováno, a dosud se nižší geometrie zakládá na jeho Základech. V některých zemích (na př. v Anglii) prý se jich ještě nedávno užívalo za učebnici.

Z rukopisů, jichž je řada, nejlepší jest codex Vaticanus č. 190. z 10. stol.

První vydání Základů tiskem pořídil Grynaeus (v Basileji 1533); z pozdějších nejlepší E. F. Augustovo (v Berlíně 1826 nn.); ze souborných uvésti sluší F. Peyrardovo (Oeuvres d' Euclide, řec., lat. a franc. — v Paříži 1814) a vydání Heibergovo i Mengeovo (Euclidis opera omnia — u Teubnera ve sbírce Bibl. script. Graec. et Rom., v Lipsku 1883 nn., řec. a lat.).

Obsah Základů.

Eukleidovy Základy.

Kniha první.

Výměry.

1. Bod jest, co nemá dílu.
2. Čára pak délka bez šířky.
3. Hranicemi čáry jsou body.
4. Přímá jest čára (přímka), která svými body táhne se rovně.
5. Plocha jest, co jen délku a šířku má.
6. Hranicemi plochy jsou čáry.
7. Rovinná jest plocha (rovina), která přímkami na ní jsoucími prostírá se rovně.
8. Rovinný pak úhel je vzájemný sklon dvou čar, v rovině se stýkajících a neležících k sobě v přímce.
9. Když pak čáry úhel svírající jsou přímky, úhel zove se přímkovým.
10. Když se postaví přímka na přímku tak, že sousední úhly činí navzájem stejnými, jeden i druhý z těch stejných úhlů jest pravý, a přímka postavená zove se kolmicí té, na níž jest postavena.
11. Tupý jest úhel pravého větší.
12. Ostrý pak pravého menší.
13. Meze jest, co jest něčeho hranicí.
14. Útvar jest, co nějaká nebo nějaké meze objímají.
15. Kruh jest útvar rovinný, objímaný jednou čarou (jež se nazývá obvodem), k níž od jednoho bodu vnitř útvaru vedené přímky všecky sobě rovny jsou.
16. Středem pak kruhu zove se ten bod.
17. Průměrem kruhu jest přímka některá vedená středem a končící se na obou stranách obvodem kruhu, jež také rozděluje kruh na polovice.
18. Polokruh pak jest útvar omezený průměrem a částí obvodu jím useceného. Střed polokruhu je týž jako kruhu.

19. Útvary přímkové jsou, které jsou přímkami omezovány, třístranné třemi, čtyřstranné čtyřmi, mnohostranné více než čtyřmi přímkami omezené.
20. Z třístranných útvarů jest trojúhelník stejnostranný, který má tři strany stejné, rovnoramenný pak, který má jen dvě strany stejné, a různostranný, který má tři strany nejstejné.
21. Mimo to z útvarů třístranných jest trojúhelník pravoúhlý, který má pravý úhel, tupoúhlý pak, který má úhel tupý, a ostroúhlý, mající tři úhly ostré.
22. Ze čtyřstranných útvarů je čtverec, který jest stejnostranný a pravoúhlý; obdélník, pravoúhlý sice, však nestejnostranný; kosočtverec, stejnostranný, ne však pravoúhlý; kosodélník, jenž má protější strany i úhly navzájem stejné, jenž není ani stejnostranný ani stejnoúhlý; mimo to pak čtyřstranné útvary nazývány buďte lichoběžníky.*)
23. Rovnoběžky jsou přímky, které jsouce v téže rovině a prodlouženy jsouce na obě strany do nekonečna nikde se nesbíhají.

Úkoly prvotné.

1. Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vésti přímku.
2. A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti.
3. A z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem narýsovati kruh.
4. A že všecky pravé úhly sobě rovny jsou.
5. A když přímka protínajíc dvě přímky tvoří na téže straně vnitřní (přilehlé) úhly menší dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna že se sbíhahají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.

Zásady.

1. Veličiny témuž rovné i navzájem rovny jsou.
2. Když se přidají veličiny rovné k rovným, i celky jsou rovny.
3. A odejmou-li se od rovných rovné, zbývající části rovny jsou.
(4. A když se přidají k nerovným rovné, celky jsou nerovny.
5. A dvojnásobky téhož vespolek rovny jsou.
6. A polovičky téhož vespolek rovny jsou.)
7. A co se navzájem kryje, navzájem rovno jest.
8. A celek větší než díl.
(9. A dvě přímky místa neomezují.)

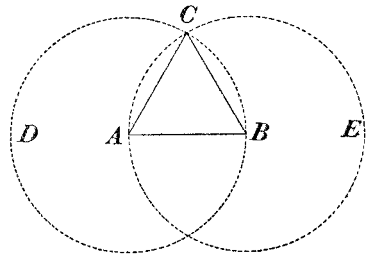
*) Snad míní různoběžníky; ač v kn. I. 35. jsou to lichoběžníky.

I.

Na dané přímce omezené postav trojúhelník rovnostranný.

Danou přímkou omezenou buď AB. Má se tedy na přímce AB postaviti trojúhelník rovnostranný.

Ze středu A poloměrem AB buď narýsován kruh BCD, a opět ze středu B poloměrem BA buď narýsován kruh ACE, a od bodu C, v němž kruhy se protínají, k bodům A, B buďte vedeny spojnice AC, CB. A ježto bod A je středem kruhu CDB, AC je stejné s AB; ježto dále bod B je středem kruhu CAE, jest BC stejné s BA. Bylo pak dokázáno, že i CA je stejné s AB; tedy jedna i druhá z CA, CB je stejná s AB. Veličiny však témuž rovné i navzájem rovny jsou; tedy též CA jest rovna CB; ty tři tedy, CA, AB, BC jsou si rovny.



Je tedy trojúhelník ABC rovnostranný a postaven jest na dané přímce omezené AB; což právě bylo vykonati.[1])

II.

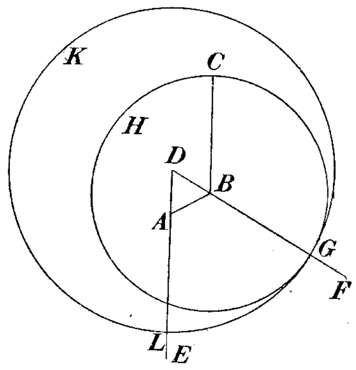
Z daného bodu zřiď přímku rovnou přímce dané.

Daným bodem buď A, danou přímkou BC; má se tedy z bodu A zříditi přímka dané přímce BC rovná.

Nuže veďme z bodu A do bodu B spojnici AB a sestavme na ní trojúhelník rovnostranný DAB (I. I.) a prodlužme rovně přímky DA, DB v přímky AE, BF a ze středu B poloměrem BC narýsujme kruh CGH a též ze středu D poloměrem DG narýsujme kruh GKL.

Ježto tedy bod B je středem kruhu CGH, $BC = BG$. Ježto dále bod D je středem kruhu GKL, $DL = DG$, z čehož $DA = DB$. Zbytek tedy $AL = BG$. Bylo pak dokázáno, že též $BC = BG$. Veličiny však témuž rovné i navzájem rovny jsou; tedy $AL = BC$.

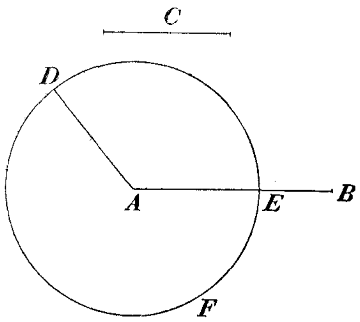
Tedy z daného bodu A vedena jest přímka AL rovná dané přímce BC, což bylo vykonati.



[1]) Eukl. neužívá znamének, jako jsou: $=$, $\|$, $\backsim$, $\sphericalangle$, $\triangle$, AB^3 a pod., tak nestalo se ani v překladě tohoto úkolu; dále jich užíváno bude.

III.

Dány-li dvě přímky nestejné, odejmi od větší přímku rovnou přímce menší.



Buďtež dvěma danými přímkami nestejnými AB, C, z nichž větší buď AB; má se tedy od větší AB odníti přímka rovná přímce menší C.

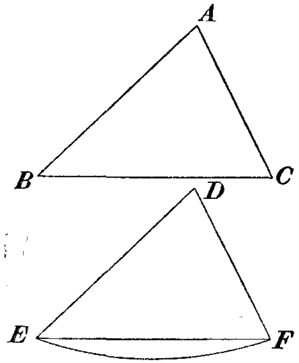
Při bodě A ležiž AD stejná s přímkou C; ze středu A poloměrem AD narýsujme kruh DEF. A ježto bod A je středem kruhu DEF, $AE = AD$. Tedy každá z přímek AE a C rovná se AD, a tak i $AE = C$.

Ze dvou tedy daných přímek nestejných AB a C jest od větší odňata AE, rovná přímce menší C; což právě bylo vykonati.

IV.

Když mají dva trojúhelníky dvě strany (střídavě) s dvěma stranami stejné a úhly stejnými stranami sevřené mají stejné, budou i základnu základně míti rovnou a trojúhelník s trojúhelníkem bude stejný i ostatní úhly s ostatními úhly, proti nimž leží stejné strany, (střídavě) budou stejné.

Buďte dva trojúhelníky ABC, DEF mající dvě strany AB, AC se dvěma stranami DE, DF jednotlivě stejné, a to AB s DE, AC pak s DF a $\sphericalangle BAC$ s $\sphericalangle EDF$ stejný; pravím, že i základna BC rovná se základně EF, i trojúhelník ABC s trojúhelníkem DEF bude stejný i ostatní úhly budou střídavě stejné s ostatními úhly, proti nimž leží stejné strany, úhel pak ABC s DEF a úhel ACB s DFE.



Neboť přikládáme-li $\triangle ABC$ na $\triangle DEF$ a klademe-li bod A na bod D a přímku AB na DE, také bod B bude krýti E, ježto $AB = DE$: a když AB bude krýti DE, též přímka AC bude krýti DF, ježto $\sphericalangle BAC = EDF$; a tak i bod C bude krýti bod F, protože opět $AC = DF$. Avšak zajisté B krylo E; a tak základna BC krýti bude EF. Neboť bude-li se krýti B s E a C s F, nikoli však základna BC s EF, dvě přímky budou místo omezovati, což právě nemožno[2]). Bude se tedy základna BC krýti s EF a bude jí rovna; a tak i celý trojúhelník ABC bude se krýti s celým $\triangle DEF$ a bude mu roven, i ostatní úhly budou se krýti s úhly ostatními a budou jim rovny, $\sphericalangle ABC = DEF$, $\sphericalangle ACB = DFE$.

Když tedy mají dva trojúhelníky — —[3]).

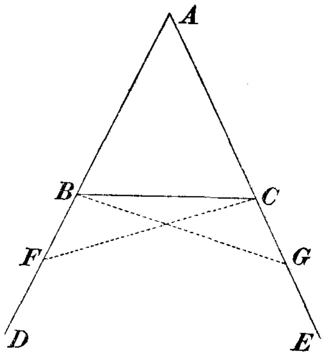
[2]) Vznikla by plocha uzavřená dvěma přímkami, což dle zásady 9. nemožno.
[3]) Eukl. opakuje do slova jako v záhlaví.

V.

V trojúhelnících rovnoramenných úhly při základně jsou si rovny, a prodlouží-li se stejné přímky (ramena), úhly pod základnou budou si rovny.

Trojúhelníkem rovnoramenným buď ABC, rameno AB buď $= AC$, a prodlouženy buďte přímky AB, AC o přímky BD, CE; pravím, že $\sphericalangle ABC = ACB$ a $\sphericalangle CBD = BCE$.

Nuže vezměme na BD kterýkoli bod F a od delšího AE odřízněme AG rovné menšímu AF a veďme přímky FC, GB. Ježto tedy $AF = AG$, jakož i $AB = AC$, obě ovšem strany FA, AC střídavě stejné jsou s oběma GA, AB; také společný úhel svírají, totiž FAG; základna tedy $FC = BG$ a bude $\triangle AFC = AGB$ i ostatní úhly ostatním úhlům, proti nimž leží stejné strany, střídavě budou rovny, $ACF = ABG$, $AFC = AGB$. A ježto celé AF rovno celému AG, z čehož $AB = AC$, zbytek tedy $BF = CG$. Dokázáno však, že též $FC = GB$, patrně obě, BF i FC, oběma, CG i GB, střídavě se rovnají; rovněž $\sphericalangle BFC = CGB$, a základna jejich BC je společná; také tedy bude $\triangle BFC = CGB$, i ostatní úhly úhlům ostatním, proti nimž leží stejné strany, střídavě budou rovny; tedy $\sphericalangle FBC = GCB$ a $BCF = CBG$. Ježto tedy celý $\sphericalangle ABG$ úhlu ACF ukázal se rovným, z nichž $CBG = BCF$, zbývající tedy ABC rovná se zbývajícímu ACB, a jsou při základně trojúhelníku ABC. Dokázáno pak bylo, že i $\sphericalangle FBC = GCB$, a jsou pod základnou.

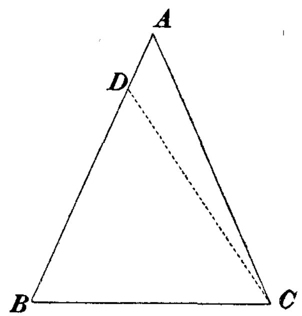


Tedy v trojúhelnících rovnoramenných — —.

VI.

Když jsou si v trojúhelníku dva úhly rovny, též strany proti stejným úhlům ležící budu si rovny.

Trojúhelníkem, majícím $\sphericalangle ABC = ACB$, budiž ABC; pravím, že i strana $AB = AC$. Neboť jest-li $AB \lesseqgtr AC$, jedna z nich jest větší. Buď větší AB, a budiž od větší AB odříznuta DB, rovná straně menší AC, a vedena buď DC. Ježto tedy $DB = AC$ a společnou jest BC, tož DB a BC s AC a CB jednotlivě stejné jsou, a $\sphericalangle DBC = ACB$; tedy základna $DC = AB$, a $\triangle DBC = \triangle ACB$, menší většímu, což nesmyslné; není tedy strana AB s AC nestejná; tedy stejná.

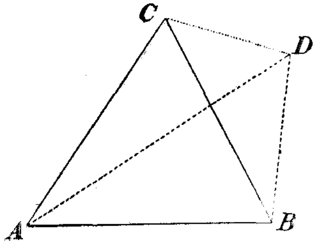


Když jsou si tedy v trojúhelníku — —.

VII.

Na téže přímce z bodu jiného a jiného nezřídíš dvou přímek jiných týmž dvěma přímkám střídavě rovných, majících tytéž paty na téže straně jako přímky prvotní.

Neboť možno-li to, zřízeny buďte na téže přímce AB týmž dvěma přímkám AC, CB jiné jednotlivě rovné přímky AD, DB z jiného a jiného bodu C a D, na téže straně tytéž paty mající, takže by byla $CA = DA$ majíc s ní touž patu A, a $CB = DB$, majíc s ní touž patu B; a budiž vedena CD.



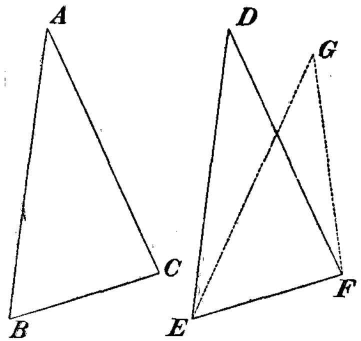
Ježto tedy $AC = AD$, též $\sphericalangle ACD = ADC$; větší tedy jest $\sphericalangle ADC$ než DCB, tedy $\sphericalangle CDB$ jest mnohem větší než DCB. Ježto zase $CB = DB$, také $\sphericalangle CDB = DCB$; ukázalo se však, že nad něj dokonce mnohem jest větší; což právě jest nemožné.

Tedy na téže přímce — —.

VIII.

Když mají dva trojúhelníky dvě a dvě strany střídavě stejné a mají též základnu základně rovnou, budou též úhly stejnými přímkami sevřené míti stejné.

Dvěma trojúhelníky buďtež ABC a DEF a mějte dvě strany AB, AC dvěma stranám DE, DF střídavě rovné, totiž $AB = DE$, $AC = DF$, a mějtež i základnu BC rovnu základně EF; pravím, že též $\sphericalangle BAC = EDF$.



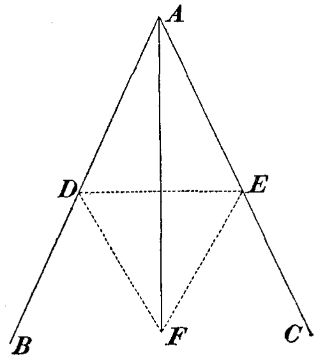
Neboť přiložíme-li $\triangle ABC$ na $\triangle AEF$, kladuce bod B na bod E a přímku BC na EF, také bod C bude se krýti s bodem F, ježto $BC = EF$. Když pak ovšem BC pokryje EF, budou se krýti též BA, CA s ED, DF. Neboť bude-li se základna BC krýti se základnou EF, strany však BA, AC nebudou-li se krýti s ED, DF, nýbrž budou-li se uchylovati jako EG, GF, postaveny budu na téže přímce z jiného (a jiného) bodu týmž dvěma přímkám jiné dvě přímky střídavě rovné, na téže straně paty mající. Nelze jich však postaviti (I. VII.). Položí-li se tedy základna BC na základnu EF, nelze, aby se nekryly též strany BA, AC s ED, DF. Budou se tedy krýti; a tak i úhel BAC bude se krýti s úhlem EDF a jemu se rovnati.

Když mají tedy dva trojúhelníky — —.

IX.

Daný úhel přímkový jest rozpůliti.

Daným úhlem přímkovým buď BAC; má se tedy rozpůliti. Vezmemež na AB kterýkoli bod D a odřízněmež od AC část AE rovnou AD a veďme DE a na DE zřiďme trojúhelník rovnostranný DEF a veďme AF; pravím, že $\sphericalangle BAC$ přímkou AF je rozpůlen.



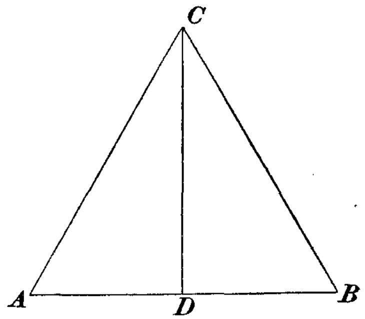
Neboť ježto $AD = AE$ a AF společnou, tož obě přímky DA, AF oběma EA, AF střídavě rovny jsou. Též základna DF rovná se základně EF; tedy $\sphericalangle DAF = EAF$ (I. VIII.).

Daný tedy úhel BAC přímkou AF je rozpůlen; což se právě mělo vykonati.

X.

Danou přímku omezenou jest rozpůliti.

Danou přímkou omezenou buď AB; tož má se omezená přímka AB rozpůliti.



Sestrojen buď na ní trojúhelník rovnostranný ABC a úhel ACB přímkou CD buď rozpůlen; pravím, že přímka AB jest v bodě D rozpůlena.

Neboť ježto $AC = CB$, společnou pak CD, obě tedy AC, CD oběma BC, CD jsou střídavě rovny; též $\sphericalangle ACD = BCD$; tedy základna AD rovná se základně BD.

Daná tedy omezená přímka AB je v D rozpůlena; což právě bylo vykonati.

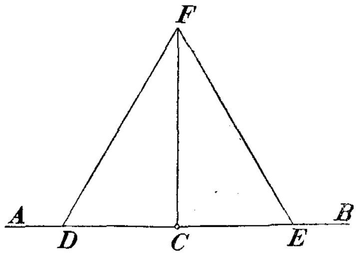
XI.

Na dané přímce buď z daného na ní bodu vztýčena kolmice.

Danou přímkou buď AB a daným bodem na ní C; tož má se z bodu C na přímce AB vztýčiti kolmice.[4])

Vezmemež na AC kterýkoli bod D a odřízněme $CE = CD$ a zřiďme na DE trojúhelník rovnostranný FDE a veďme FC; pravím, že

[4]) Eukl. praví: εὐθεῖα γραμμὴ πρὸς ὀρθὰς γωνίας.



na dané přímce AB z daného na ní bodu vztýčena jest kolmice CF.

Neboť ježto $DC = CE$ a CF je společná; tož obě strany DC, CF jsou střídavě rovny oběma EC, CF a základna $DF = FE$, tedy $\sphericalangle DCF = ECF$ a jsou vedlejší (výplňkové). Když pak se postaví přímka na přímku tak, že tvoří vedlejší úhly navzájem stejné, každý z těch stejných úhlů jest pravý; tedy oba úhly DCF a FCE jsou pravé.

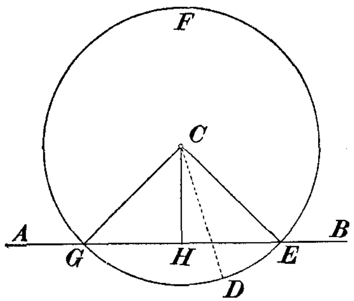
Tedy na dané přímce AB z daného na ní bodu C je vztýčena kolmice; což právě bylo vykonati.

XII.

K dané přímce neomezené buď z daného bodu mimo ni spuštěna kolmice.

Danou přímkou neomezenou buď AB, daným pak bodem mimo ni C; tož má se k dané přímce neomezené AB z daného bodu C mimo ni spustiti kolmice.

Nuže, vezměme na druhé straně přímky AB kterýkoli bod D a ze středu C poloměrem CD opišme kruh EFG a rozpolme přímku EG v H a veďme spojnice CG, CH, CE; pravím, že na danou přímku neomezenou AB z daného mimo ni bodu C spuštěna jest kolmice CH.



Neboť ježto $GH = HE$, HC pak společná, patrně obě přímky GH, HC rovny jsou jednotlivě oběma EH, CH, též základna $CG = CE$; tedy úhel $CHG = EHC$. Když pak se postaví přímka na přímku tak, že tvoří vedlejší úhly navzájem stejné, každý z těch stejných úhlů jest pravý, a postavená přímka zove se kolmicí té, na které stojí.

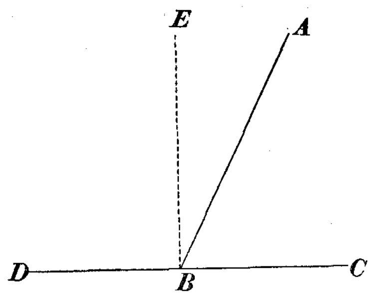
K dané tedy přímce neomezené AB z daného mimo ni bodu C spuštěna jest kolmice CH; což právě bylo vykonati.

XIII.

Když přímka na přímku postavena jsouc tvoří úhly, buď dva pravé bude tvořiti buď dvěma pravým rovné.

Nuže, přímka nějaká AB na přímku CD postavena jsouc tvořiž úhly CBA, ABD; pravím, že úhly CBA, ABD jsou buď dva pravé, buď dvěma pravým rovné.

Jest-li tedy $\sphericalangle CBA = ABD$, jsou to dva pravé. Pakli ne, veďme z bodu B ku přímce CD kolmici BE; tedy $\sphericalangle CBE$ a EBD jsou pravé.



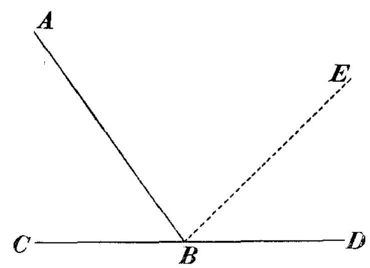
A ježto $CBE = CBA + ABE$, k oběma přičtěme $\sphericalangle EBD$; tedy $CBE + EBD = CBA + ABE + EBD$. Dále, ježto $DBA = DBE + EBA$, k oběma přičtěme ABC; tedy $DBA + ABC = DBE + EBA + ABC$. Ukázalo pak se, že i $CBE + EBD$ týmž třem se rovnají. Veličiny však témuž rovné jsou i navzájem rovny; tedy též $CBE + EBD = DBA + ABC$; avšak úhly CBE, EBD jsou pravé; tedy též DBA, ABC rovnají se dvěma pravým.

Když tedy přímka na přímku — —.

XIV.

Když na nějaké přímce a v bodě na ní dvě přímky na rozličných stranách ležící tvoří styčné úhly dvěma pravým rovné, ty přímky budou navzájem k sobě v přímce.

Nuže na nějaké přímce AB a v bodě na ní B tvořte přímky BC, BD, na rozličných stranách ležící, styčné úhly ABC, ABD dvěma pravým rovné; pravím, že bude BD ku BC v přímce.



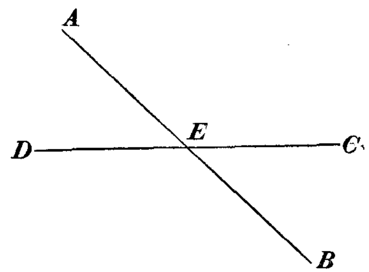
Neboť není-li BD ku BC v přímce, budiž BE ku BC v přímce.

Ježto tedy přímka AB stojí na přímce CBE, tedy $\sphericalangle ABC + ABE = 2R$; avšak též $\sphericalangle ABC + ABD = 2R$; tedy $CBA + ABE = CBA + ABD$. Od nich společně buď odečten $\sphericalangle CBA$; zbývající tedy $\sphericalangle ABE = ABD$, menší většímu, což jest nemožno. Není tedy BE v přímce ku BC. Podobně ovšem dokážeme, že žádná jiná kromě BD; tedy CB je v přímce ku BD.

Když tedy na nějaké přímce — —.

XV.

Když se dvě přímky navzájem protínají, tvoří úhly vrcholové navzájem rovné.



Nuže protínejte se navzájem dvě přímky AB, CD v bodě E; pravím, že $\sphericalangle AEC = DEB$ a $\sphericalangle CEB = AED$.

Neboť přímka AE stojí na přímce CD tvoříc úhly CEA, AED, tedy $CEA + AED = 2R$; Dále, ježto přímka DE stojí na přímce AB tvoříc úhly AED, DEB, tedy úhly $AED + DEB = 2R$. Bylo pak dokázáno, že též $CEA + AED = 2R$; tedy

$CEA + AED = AED + DEB$. Odečten buď spospolečný AED; zbývající tedy $CEA = BED$. Podobně ovšem se dokáže, že též $\sphericalangle CEB = DEA$.

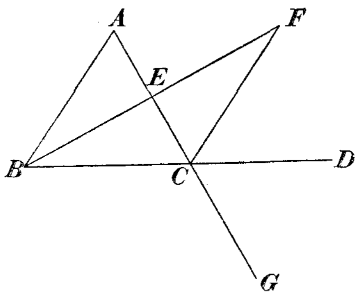
Když se tedy dvě přímky — —.

XVI.

V každém trojúhelníku, jehož jedna strana se prodlouží, vnější úhel větší jest než kterýkoli protější úhel vnitřní.

Trojúhelníkem buď ABC, a prodloužena buď jedna jeho strana BC do D; pravím, že vnější úhel ACD je větší než kterýkoli z protějších úhlů vnitřních CBA, BAC.

Rozpůlena buď AC v E a spojnice BE prodloužena buď (v přímce) do F, a buď $BE = EF$ a vedena buď spojnice FC, a buď AC prodloužena do G. Ježto tedy $AE = EC$ a $BE = EF$, patrně $AE + EB = CE + EF$ a $\sphericalangle AEB = FEC$, neboť jsou vrcholové; základna tedy $AB = FC$ a $\triangle ABE = FEC$, i zbývající úhly zbývajícím úhlům, proti nimž leží stejné strany, jeden druhému se rovnají; tedy $\sphericalangle BAE = ECF$. Avšak $\sphericalangle ECD > ECF$, tehdy $\sphericalangle ACD > BAE$. Podobně ovšem, když se rozpůlí BC, též $\sphericalangle BCG$, t. j. $ACD > ABC$.

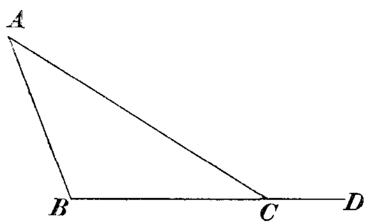


V každém tedy trojúhelníku — —.

XVII.

V každém trojúhelníku součet kterýchkoli dvou úhlů jest menší dvou pravých.

Trojúhelníkem budiž ABC; pravím, že v trojúhelníku ABC součet kterýchkoli dvou úhlů [5]) jest menší dvou pravých.



Nuže budiž BC prodloužena do D.

A ježto v $\triangle ABC$ vnějším úhlem jest ACD, jest větší vnitřního a protějšího ABC, spolu pak přičtěme ACB; tedy $(\sphericalangle ACD + ACB) > (ABC + BCA)$. Avšak $ACD + ACB = 2\,\mathrm{R}$; tedy $(ABC + BCA) < 2\,\mathrm{R}$. Podobně ovšem dokážeme, že i $(\sphericalangle BAC + ACB) < 2\,R$ a rovněž $CAB + ABC$.

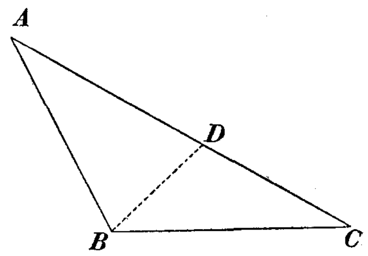
Tedy v každém trojúhelníku — —.

[5]) Eukl. dí: »dva úhly jakkoli střídány jsouce«, roz. součet jejich.

XVIII.

V každém trojúhelníku proti delší straně jest větší úhel.

Nuže budiž ABC trojúhelníkem a měj stranu AC delší než AB; pravím, že též úhel $ABC > BCA$.



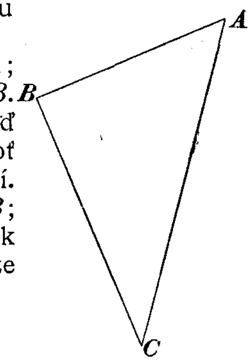
Nuže ježto $AC > AB$, odřízněme $AD = AB$ a veďme BD. A ježto vnějším úhlem trojúhelníku BCD jest ADB, jest větší úhlu vnitřního protějšího DCB; avšak $\sphericalangle ADB = ABD$, ježto i strana $AB = AD$; tedy též $\sphericalangle ABD > ACB$; mnohem větší tedy jest ABC než ACB.

V každém tedy trojúhelníku — —.

XIX.

V každém trojúhelníku proti většímu úhlu leží delší strana.

Trojúhelníkem buď ABC a buď $\sphericalangle ABC > BCA$; pravím, že též strana AC delší je než strana AB. Neboť není-li tomu tak, buď ovšem $AC = AB$ buď $AC < AB$. Stejnou zajisté není AC s AB, neboť stejným byl by též $\sphericalangle ABC$ s ACB; avšak není. Tedy AC nerovná se AB. Ani zajisté $AC < AB$; neboť i $\sphericalangle ABC$ byl by menší než ACB; avšak není; tedy není $AC < AB$. Ukázalo se však, že není ani stejný. Jest tedy AC delší než AB.



Tedy v každém trojúhelníku — —.

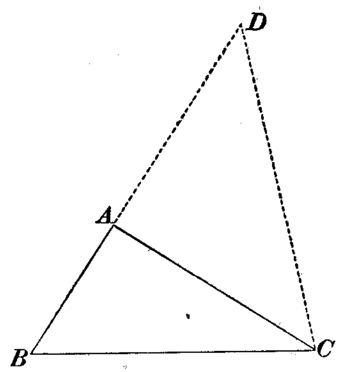
XX.

V každém trojúhelníku kterékoli dvě strany (součtem) jsou delší než strana zbývající.

Nuže budiž trojúhelníkem ABC; pravím, že v $\triangle ABC$ kterékoli dvě strany (dohromady) delší jsou než zbývající, t. j. $(BA + AC) > BC$, $(AB + BC) > AC$, $(BC + CA) > AB$.

Nuže budiž BA prodloužena do bodu D a učiňme $AD = AC$ a veďme spojnici DC.

Ježto tedy $DA = AC$, také $\sphericalangle ADC = ACD$; tedy $\sphericalangle BCD > ADC$; a ježto v $\triangle DCB$ $\sphericalangle BCD > BDC$ a proti většímu úhlu leží delší strana, tedy DB jest delší než BC. DA však $= AC$; tedy $BA + AC$ jsou delší než BC. Podobně dokážeme, že též $(AB + BC) > CA$ jakož i $(BC + CA) > AB$.

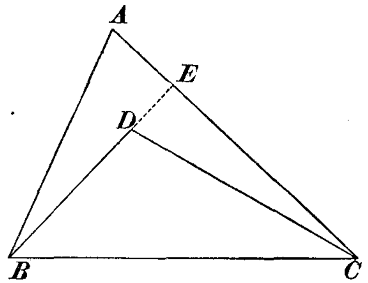


Tedy v každém trojúhelníku — —.

XXI.

Když sestavíme v trojúhelníku od mezných bodů jedné strany uvnitř dvě přímky, sestavené budou kratší než ostatní dvě strany trojúhelníku, budou však svírati větší úhel.

Nuže sestavme v $\triangle ABC$ na jedné straně BC od mezných bodů $B, C,$ uvnitř dvě přímky BD, DC; pravím, že $BD + DC$ ostatních v trojúhelníku dvou stran $BA + AC$ jsou kratší, avšak svírají $\sphericalangle BDC$ větší než BAC.



Nuže prodlužme BD do E. A ježto v každém trojúhelníku dvě strany jsou delší než zbývající, tedy v $\triangle ABE$ strany $AB + AE > BE$; spolu přibeřme EC; tedy $(BA + AC) > (BE + EC)$. Dále, ježto v $\triangle CED$ dvě strany $CE + ED > CD$; spolu přibeřme DB; tedy $(CE + EB) > (CD + DB)$. Avšak ukázalo se, že $(BA + AC) > (BE + EC)$; tedy $BA + AC$ mnohem delší jsou než $BD + DC$.

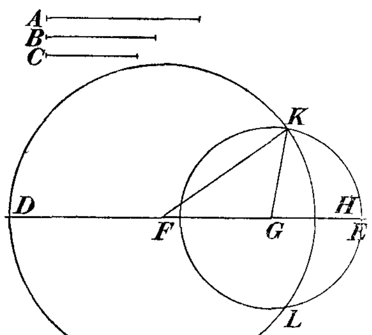
Dále, ježto v každém trojúhelníku vnější úhel jest větší než protější vnitřní, tedy v $\triangle CDE$ vnější $\sphericalangle BDC > CED$. Proto ovšem též v $\triangle ABE$ vnější $\sphericalangle CEB > BAC$. Avšak ukázalo se, že $\sphericalangle BDC > CEB$; tedy $\sphericalangle BDC$ mnohem větší jest než BAC.

Když tedy sestavíme v trojúhelníku — —.

XXII.

Ze tří přímek, jež se rovnají třem daným přímkám, má se sestrojiti trojúhelník; nutno však, aby kterékoli dvě spolu byly větší než zbývající

Buďte danými třemi přímkami $A, B, C,$ z nichž dvě kterékoli spolu větší buďte než zbývající, tedy $(A + B) > C$, $(A + C) > B$, a též $(B + C) > A$; tož má se z přímek délkám A, B, C rovných sestrojiti trojúhelník.



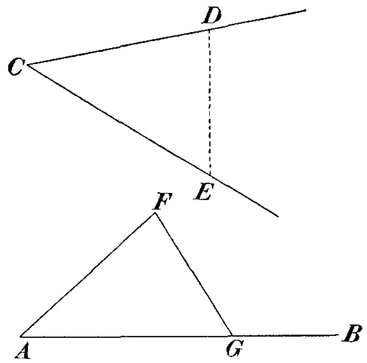
Mějme nějakou přímku DE, při D omezenou, při E pak neomezenou a odřízněme $DF = A$, $FG = B$, $GH = C$; a ze středu F poloměrem FD opišme kruh DKL; dále ze středu G poloměrem GH opišme kruh KLH a veďme spojnice KF, KG; pravím, že ze tří přímek, stejných s $A, B, C,$ je sestrojen trojúhelník KFG.

Neboť ježto F je středem kruhu DKL, jest $FD = FK$; avšak $FD = A$; tedy i $KF = A$. Dále, ježto G je středem kruhu LKH, jest $GH = GK$; avšak $GH = C$, tedy i $KG = C$. Avšak i $FG = B$; tedy tři přímky KF, FG, GK stejné jsou s A, B, C.

Tedy ze tří přímek KF, FG, GK, jež se rovnají třem daným přímkám $A, B, C,$ je sestrojen $\triangle KFG$; což právě bylo vykonati.

XXIII.

Na dané přímce a z daného na ní bodu má se sestrojiti přímkový úhel danému úhlu přímkovému rovný.



Danou přímkou budiž AB, bodem na ní A a daným úhlem přímkovým DCE; tož má se na dané přímce AB a v bodě na ní A sestrojiti úhel přímkový danému úhlu přímkovému DCE rovný.

Vezměme na obou CD, CE kterékoli body D, E a veďme spojnici DE a ze tří přímek, jež se rovnají přímkám CD, DE, CE, sestrojme $\triangle AFG$ (I. XXII.) tak, aby $CD = AF$, $EC = AG$ a rovněž $DE = FG$.

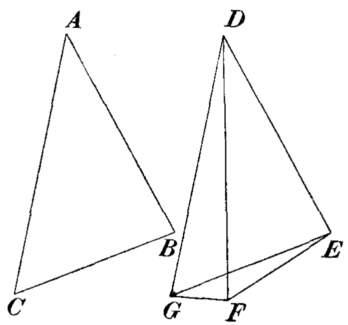
Ježto tedy obě DC, CE rovnají se jednotlivě oběma FA, AH i základna $DE = FG$, tedy $\sphericalangle DCE = FAG$.

Na dané tedy přímce — —.

XXIV.

Když mají dva trojúhelníky dvě strany dvěma stranám střídavě sobě rovné, úhel však stejnými přímkami sevřený jeden větší než druhý, bude také základna jednoho delší než druhého.

Dvěma trojúhelníky buďtež ABC, DEF a dvě strany AB, AC buďte střídavě stejné s DE, DF, totiž $AB = DE$, $AC = DF$, úhel pak buď při $A >$ než při D; pravím, že též základna BC je delší základny EF.



Neboť ježto $\sphericalangle BAC > EDF$, sestrojme na přímce DE a z bodu na ní $D \sphericalangle EDG = BAC$ a veďme $DG = AC = DF$ a spojnice EG, FG.

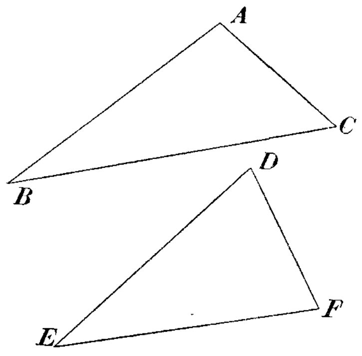
Ježto tedy $AB = DE$ a $AC = DG$, tož obě BA, AC oběma ED DG střídavě rovny jsou; také $\sphericalangle BAC = EDG$; tedy základna $BC = EG$. Dále, ježto $DF = DG$; též $\sphericalangle DGF = DFG$; tedy $\sphericalangle DFG > EGF$, tedy mnohem větší jest $\sphericalangle EFG$ než EGF. A ježto $\triangle EFG$ má $\sphericalangle EFG$ větší než EGF a proti většímu úhlu jest delší strana, tedy též strana EG je delší než EF. Avšak $EG = BC$, tedy $BC > EF$.

Když tedy mají dva trojúhelníky — —.

XXV.

Když mají dva trojúhelníky dvě strany dvěma stranám střídavě rovné, základnu však jeden delší než druhý, bude též úhel stejnými stranami sevřený v jednom větší než ve druhém.

Dvěma trojúhelníky buďtež ABC, DEF a mějte dvě strany AB, AC střídavě rovné dvěma stranám DE, DF, totiž $AB = DE$, $AC = DF$, základna však BC buď delší než EF; pravím, že též $\sphericalangle BAC > EDF$. Neboť není-li tomu tak, buď jest mu roven buď jest menší; stejný ovšem není $\sphericalangle BAC$ jako EDF, neboť byla by též základna $BC = EF$ (I. IV.); není však. Tedy není $\sphericalangle BAC = EDF$. Ani zajisté $\sphericalangle BAC < EDF$, neboť byla by též základna $BC < EF$ (I. XXIV.); není však. Tedy není $BAC < EDF$. Bylo však dokázáno, že ani stejné nejsou; tedy $\sphericalangle BAC > EDF$.

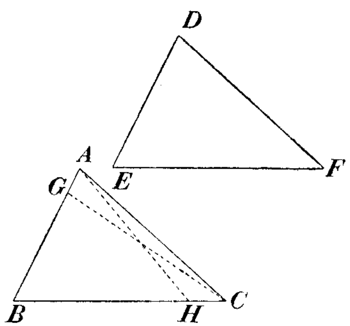


Když tedy mají dva trojúhelníky — —.

XXVI.

Když mají dva trojúhelníky dva úhly dvěma úhlům jednotlivě rovné a jednu stranu jedné straně rovnou buď při stejných úhlech nebo proti jednomu ze stejných úhlů, budou míti též ostatní strany rovné ostatním stranám i zbývající úhel úhlu zbývajícímu.

Dvěma trojúhelníky buďtež ABC, DEF a mějtež úhly ABC, BCA dvěma úhlům DEF, EFD střídavě rovné, totiž $\sphericalangle ABC = DEF$ a $\sphericalangle BCA = EFD$ a mějtež i jednu stranu jedné straně rovnou, nejprve při stejných úhlech, t. $BC = EF$; pravím, že budou míti střídavě i ostatní strany ostatním stranám rovné, totiž $AB = DE$, $AC = DF$, i zbývající úhel úhlu zbývajícímu, totiž $BAC = EDF$.



Neboť není-li $AB = DE$, jedna z nich jest větší. Buď větší AB a buď $BG = DE$ a vedena buď spojnice GC.

Ježto tedy $BG = DE$, jakož i $BC = EF$, obě ovšem BG, BC s DE, EF jsou střídavě stejné, též $\sphericalangle GBC = DEF$; základna

tedy $GC = DF$ a $\triangle GBC = DEF$, i zbývající úhly budou rovny zbývajícím úhlům, proti nimž leží stejné strany, tedy $\sphericalangle GCB = DFE$; avšak $\sphericalangle DFE$ vzat za stejný s $\sphericalangle BCA$, tedy též $\sphericalangle BCG = BCA$, menší většímu; což právě nemožno. Tedy AB není nestejná s DE; tedy stejná. Jest pak též $BC = EF$; tož obě AB, BC oběma DE, EF jednotlivě rovny jsou, i $\sphericalangle ABC = DEF$; základna tedy $AC = DF$, i zbývající $\sphericalangle BAC$ roven zbývajícímu $\sphericalangle EDF$ (I. IV.).

Avšak již dále buďte strany proti rovným úhlům ležící stejné, na př. AB s DE; pravím opět, že též zbývající strany zbývajícím stranám budou rovny, t. $AC = DF$, $BC = EF$, a rovněž zbývající úhel $BAC = EDF$.

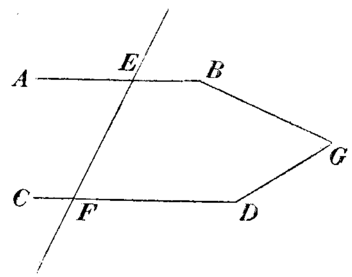
Neboť, není-li $BC = EF$, jedna z nich jest větší. Větší buď, možno-li, BC, a dejme tomu, že $BH = EF$, a veďme spojnici AH. A ježto $BH = EF$, $AB = DE$, tož obě AB, BH oběma DE, EF střídavě rovny jsou, též úhly svírají stejné; tedy základna $AH = DF$ a $\triangle ABH = DEF$, i zbývající úhly rovny budou zbývajícím úhlům, proti nimž leží stejné strany, tedy $\sphericalangle BHA = EFD$. Avšak $\sphericalangle EFD = BCA$; tož v $\triangle AHC$ vnější $\sphericalangle BHA$ rovná se vnitřnímu protějšímu BCA; což právě nemožno (I. XVI.). Tedy BC není nestejná s EF. Avšak $AB = DE$. Obě patrně AB, BC jsou střídavě stejné s oběma DE, EF, také svírají stejné úhly; tedy základna $AC = DF$ a $\triangle ABC = DEF$ i zbývající $\sphericalangle BAC = EDF$.

Když mají tedy dva trojúhelníky — —.

XXVII.

Když přímka protínajíc přímky dvě tvoří střídavé úhly navzájem stejné, budou ty přímky navzájem rovnoběžné.

Nuže přímka EF protínajíc dvě přímky AB, CD tvoř úhly střídavé AEF, EFD navzájem stejné; pravím, že $AB \parallel CD$.

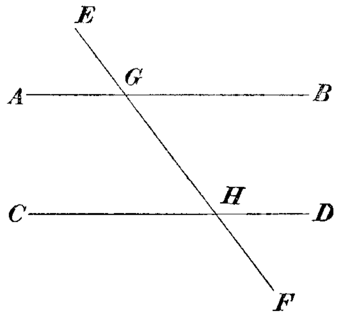


Neboť jinak AB, CD prodlouženy jsouce setkají se buď na straně B, D buď na straně A, C. Buďte prodlouženy a stýkejte se na straně B, D v G. V $\triangle GEF$ ovšem vnější $\sphericalangle AEF$ rovná se vnitřnímu protějšímu EFG, což nemožno; tedy AB, CD jsouce prodlouženy nesetkají se na straně B, D. Podobně se dokáže, že ani na straně A, C; přímky však na žádné straně se nestýkající jsou rovnoběžné (I. vým. 23.); tedy AB, CD jsou rovnoběžky.

Když tedy přímka protínajíc přímky dvě — —.

XXVIII.

Když přímka protínajíc přímky dvě tvoří úhel vnější rovný úhlu vnitřnímu protějšímu na téže straně (souhlasné úhly) neb úhly vnitřní na téže straně (přilehlé) dvěma pravým rovné, budou ty přímky navzájem rovnoběžné.



Nuže přímka EF protínajíc dvě přímky AB, CD tvoř úhel vnější EGB rovný úhlu vnitřnímu protějšímu GHD neb úhly vnitřní na téže straně BGH, GHD dvěma pravým rovné; pravím, že $AB \parallel CD$.

Neboť ježto $\sphericalangle EGB = GHD$ a $EGB = AGH$, tedy též $AGH = GHD$, a jsou střídavé; tedy $AB \parallel CD$ (I. XXVII.).

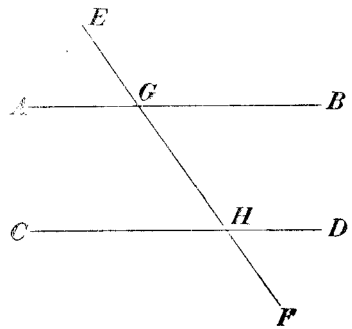
Dále, ježto $\sphericalangle BGH + GHD = 2\,R$, jsou pak též $\sphericalangle AGH + BGH = 2\,R$, tedy $\sphericalangle AGH + BGH = BGH + GHD$; odečtěme společný $\sphericalangle BGH$, zbývající tedy $\sphericalangle AGH = GHD$, a jsou střídavé; tedy $AB \parallel CD$.

Když tedy přímka protínajíc přímky dvě — —.

XXIX.

Přímka protínajíc rovnoběžky tvoří střídavé úhly navzájem stejné a úhel vnější vnitřnímu protějšímu rovný a vnitřní na téže straně dvěma pravým rovné.

Nuže protínej rovnoběžky AB, CD přímka EF; pravím, že tvoří střídavé úhly AGH, GHD stejné a vnější $\sphericalangle EGB$ rovný vnitřnímu protějšímu (souhlasnému) GHD a vnitřní na téže straně (přilehlé) $BGH + GHD$ rovné dvěma pravým.

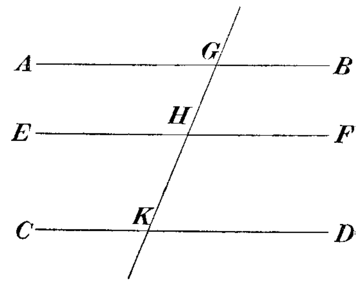


Neboť není li $\sphericalangle AGH = GHD$, jeden z nich jest větší. Větším buď AGH; společným buď BGH; tedy $(\sphericalangle AGH + BGH) > (BGH + GHD)$. Avšak $\sphericalangle AGH + BGH = 2\,R$. Tedy $(BGH + GHD) < 2\,R$. Avšak ramena menších úhlů než dva pravé, prodlužována jsouce do nekonečna, se stýkají; tedy AB, CD, prodlužovány jsouce do nekonečna, se setkají; avšak nestýkají se, ježto je pokládáme za rovnoběžky; tedy $\sphericalangle AGH$ není neroven úhlu GHD; tedy roven. Avšak $\sphericalangle AGH = EGB$; tedy též $\sphericalangle EGB = GHD$. Společným buď $\sphericalangle BGH$; tedy $\sphericalangle EGB + BGH = BGH + GHD$. Avšak $\sphericalangle EGB + BGH = 2\,R$; tedy též $\sphericalangle BGH + GHD = 2\,R$.

Když tedy přímka protínajíc rovnoběžky — —.

XXX.

Rovnoběžky téže přímky též vespolek jsou rovnoběžné.



Buď AB i CD rovnoběžná s EF; pravím, že též $AB \parallel CD$.

Nuže protínej je přímka GK.

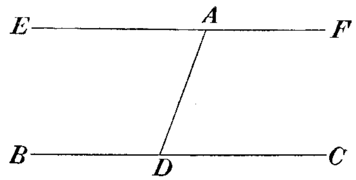
A ježto rovnoběžky AB, EF protíná přímka GK, tedy $\sphericalangle AGK = GHF$. Dále ježto rovnoběžky EF, CD protíná přímka GK, jest $\sphericalangle GHF = GKD$. Dokázáno však bylo, že též $\sphericalangle AGK = GHF$. Tedy též $\sphericalangle AGK = GKD$, a jsou střídavé. Tedy $AB \parallel CD$.

Tedy rovnoběžky téže přímky — —.

XXXI.

Daným bodem veď rovnoběžku s přímkou danou.

Daným bodem buď A, danou pak přímkou BC; tož má se bodem A vésti rovnoběžka s BC.



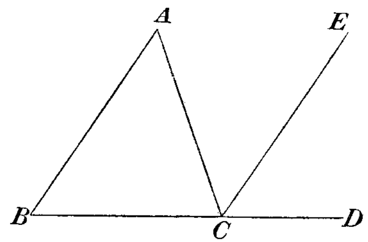
Vezměme na BC kterýkoli bod D a veďme spojnici AD; a sestrojen buď na přímce DA a v bodě na ní A $\sphericalangle DAE = ADC$ a přímka EA prodloužena buď o AF.

A ježto AD protínajíc dvě přímky BC, EF tvoří úhly střídavé EAD, ADC navzájem rovné, tedy $EAF \parallel BC$.

Tedy daným bodem A vedena jest přímka EAF s BC rovnoběžná; což právě bylo vykonati.

XXXII.

V každém trojúhelníku, prodlouží-li se jedna strana, vnější úhel rovná se dvěma vnitřním protějším a tři úhly vnitřní rovnají se dvěma pravým.



Trojúhelníkem buď ABC a jedna strana jeho BC prodloužena buď do D; pravím, že se vnější $\sphericalangle ACD$ rovná dvěma vnitřním protějším, $CAB + ABC$, a tři vnitřní úhly trojúhelníku, t. $ABC + BCA + CAB = 2\,R$.

Nuže budiž bodem C vedena EC rovnoběžně s AB. A ježto $AB \parallel CE$ a je protíná AC, střídavé úhly BAC, ACE jsou si rovny. Dále, ježto $AB \parallel CE$ a je protíná přímka BD, vnější $\sphericalangle ECD$ rovná se vnitřnímu protějšímu ABC (úhly souhlasné I. XXIX.). Bylo však dokázáno, že též $\sphericalangle ACE = BAC$; celý tedy $\sphericalangle ACD$ rovná se oběma vnitřním protějším $BAC + ABC$.

Společným buď $\sphericalangle ACB$; tedy $\sphericalangle ACD + ACB = ABC + BCA + CAB$. Avšak $ACD + ACB = 2\,R$; tedy též $ACB + CBA + BAC = 2\,R$.

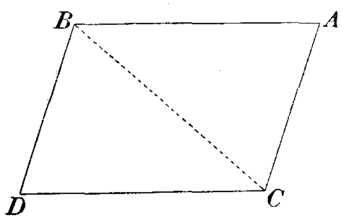
V každém tedy trojúhelníku, prodlouží-li se — —.

XXXIII.

Přímky spojující dvě stejné rovnoběžky na téže straně též samy jsou stejné a rovnoběžné.

Stejnými rovnoběžkami buďtež AB, CD a spojujtež je na téže straně[6]) přímky AC, BD; pravím, že též AC, BD jsou stejné a rovnoběžné.

Veďme spojnici BC. A ježto $AB \parallel CD$ a je protíná BC, jsou střídavé úhly ABC, BCD sobě rovny. A ježto $AB = CD$ a společnou BC, tož obě AB, BC rovnají se střídavě oběma BC, CD, a $\sphericalangle ABC = BCD$; základna tedy AC rovná se základně BD a $\triangle ABC = BCD$, i zbývající úhly budou jednotlivě rovny úhlům zbývajícím, proti nimž leží stejné strany, tedy $\sphericalangle ACB = CBD$. A ježto přímka BC protínajíc obě přímky AC, BD tvoří střídavé úhly navzájem stejné, tedy $AC \parallel BD$. Bylo však dokázáno, že jest jí též rovna.



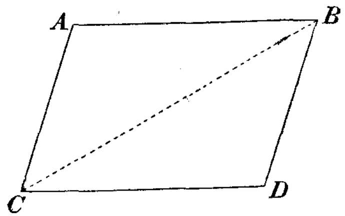
Tedy přímky spojující — —.

XXXIV.

Rovnoběžníky mají protější strany i úhly navzájem stejné a úhlopříčkou se půlí.

Buď rovnoběžníkem $ACDB$, úhlopříčkou jeho pak BC; pravím, že v rovnoběžníku $ACDB$ protější strany i úhly jsou navzájem stejné a že úhlopříčka BC jej půlí.

Neboť ježto $AB \parallel CD$ a je protíná přímka BC, střídavé úhly ABC, BCD jsou si rovny. Dále, ježto $AC \parallel BD$ a je protíná BC, střídavé úhly ACB, CBD jsou si rovny. Oba zajisté trojúhelníky ABC, BCD mají dva úhly ABC, BCA dvěma BCD, CBD jednotlivě stejné a jednu stranu jedné straně rovnou, totiž společnou BC při stejných úhlech; tedy též zbývající strany zbývajícím stranám jednotlivě bude míti rovné a zbývající úhel úhlu zbývajícímu; tedy strana $AB = CD$, $AC = BD$, a rovněž $\sphericalangle BAC = CDB$. A ježto $\sphericalangle ABC = BCD$ a $\sphericalangle CBD = ACB$, tedy celý $\sphericalangle ABD$ roven celému ACD. Bylo pak dokázáno, že též $\sphericalangle BAC = CDB$.



[6]) T. j. nikoli na př. B s C.

Tedy rovnoběžníky mají protější strany i úhly navzájem stejné.

Pravím ovšem, že též úhlopříčka je půlí. Neboť ježto $AB = CD$ a společnou BC, tož obě AB, BC oběma CD, BC jsou jednotlivě rovny; též $\sphericalangle ABC = BCD$. Tedy též základna $AC = DB$. A trojúhelník $ABC = \triangle BCD$.

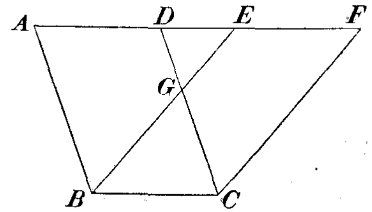
Tedy úhlopříčka BC rovnoběžník $ABCD$ půlí; což právě bylo dokázati.

XXXV.

Rovnoběžníky na téže základně a mezi týmiž rovnoběžkami jsou navzájem stejné.

Rovnoběžníky buďtež $ABCD$, $EBCF$ na téže základně BC a mezi týmiž rovnoběžkami AF, BC; pravím, že $ABCD = EBCF$.

Neboť ježto $ABCD$ jest rovnoběžník, $AD = BC$, z téže příčiny ovšem též $EF = BC$, a tak i $AD = EF$ a společnou je DE. Celá tedy $AE = DF$. Také však $AB = DC$; obě tedy EA, AB jednotlivě rovnají se oběma FD, DC a $\sphericalangle FDC = EAB$, vnější vnitřnímu (souhlasnému), tedy základna $EB = FC$, a $\triangle EAB$ bude roven $\triangle DFC$. Odečten pak buď společný DGE; zbývající tedy lichoběžník $ABGD = EGCF$. Společným buď přičten $\triangle GBC$; celý tedy rovnoběžník $ABCD$ rovná se celému rovnoběžníku $EBCF$.



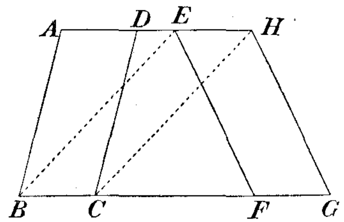
Tedy rovnoběžníky na téže základně — —.

XXXVI.

Rovnoběžníky na stejných základnách a mezi týmiž rovnoběžkami jsou navzájem stejné.

Buďtež $ABCD$, $EFGH$ rovnoběžníky na stejných základnách BC, FG a mezi týmiž rovnoběžkami AH, BG; pravím, že rovnoběžník $ABCD = EFGH$.

Nuže veďme spojnice BE, CH, a ježto $BC = FG$, avšak $FG = EH$, tedy $BC = EH$. Jsou pak též rovnoběžné, a spojují je EB, HC; přímky pak, jež spojují stejné a rovnoběžné na téže straně, jsou stejné a rovnoběžné (I. XXXIII.). Tedy $EBCH$ jest rovnoběžník a je stejný s $ABCD$ (I. XXXV.), neboť i základnu BC touž má i jest mezi týmiž rovnoběžkami BC, AH. Z téže příčiny ovšem též $EFGH = EBCH$; a tak i rovnoběžník $ABCD = EFGH$.

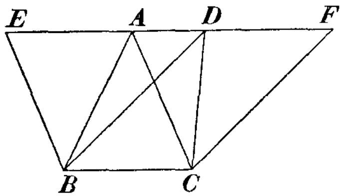


Tedy rovnoběžníky na stejných základnách — —.

XXXVII.

Trojúhelníky na téže základně a mezi týmiž rovnoběžkami jsou si rovny.

Buďtež ABC, BCD trojúhelníky na téže základně BC a mezi týmiž rovnoběžkami AD, BC; pravím, že $\triangle ABC = DBC$.



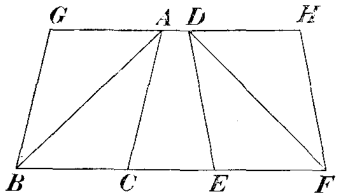
Prodlužme AD na obě strany do E, F a z B veďme $BE \parallel CA$, z C pak veďme $CF \parallel BD$; tedy $EBCA$ i $DBCF$ jsou rovnoběžníky a jsou stejné, neboť jsou na téže základně BC a mezi týmiž rovnoběžkami BC, EF; a trojúhelník ABC jest polovina rovnoběžníku $EBCA$, neboť úhlopříčka AB jej půlí (I. XXXIV.); a $\triangle DBC = \frac{DBCF}{2}$, neboť úhlopříčka DC jej půlí. Tedy $\triangle ABC = DBC$.

Tedy trojúhelníky na téže základně — —.

XXXVIII.

Trojúhelníky na stejných základnách a mezi týmiž rovnoběžkami jsou si rovny.

Buďtež ABC, DEF trojúhelníky na stejných základnách BC, EF a mezi týmiž rovnoběžkami BF, AD; pravím, že $\triangle ABC = \triangle DEF$.

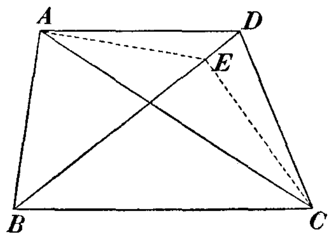


Nuže prodlužme AD na obě strany do G, H a z B veďme $BG \parallel CA$, z F pak veďme $FH \parallel DE$. Tedy $GBCA$ i $DEFH$ jsou rovnoběžníky, a $GBCA = DEFH$, neboť jsou na stejných základnách BC, EF a mezi týmiž rovnoběžkami BF, GH; a polovina rovnoběžníku $GBCA$ jest $\triangle ABC$, neboť úhlopříčka AB jej půlí. Polovina pak rovnoběžníku $DEFH$ jest $\triangle FED$, neboť úhlopříčka DF jej půlí. Tedy $\triangle ABC = \triangle DEF$.

Tedy trojúhelníky na stejných základnách — —.

XXXIX.

Stejné trojúhelníky na téže základně a na téže straně jsou též mezi týmiž rovnoběžkami.



Buďtež ABC, DBC stejnými trojúhelníky na téže základně BC, a na téže straně (základny); pravím, že jsou též mezi týmiž rovnoběžkami.

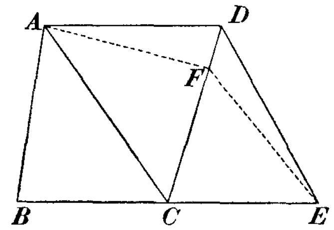
Nuže veďme spojnici AD; pravím, že $AD \parallel BC$. Neboť není-li, buď z bodu A vedena přímka $AE \parallel BC$ a spojnice EC; tedy $\triangle ABC = EBC$, neboť jsou na téže základně BC a mezi týmiž rovnoběžkami. Avšak $\triangle ABC = DBC$, tedy $DBC = EBC$, totiž větší menšímu; což právě nemožno. Tedy AE není s BC rovnoběžná. Podobně ovšem dokážeme, že ani žádná jiná kromě AD; tedy $AD \parallel BC$.

Tedy stejné trojúhelníky na téže základně — —.

XL.

Stejné trojúhelníky na stejných základnách a na téže straně jsou též mezi týmiž rovnoběžkami.

Buďtež ABC a CDE stejnými trojúhelníky na stejných základnách BC, CE a na téže straně (základen, jež činí jednu přímku); pravím, že jsou též mezi týmiž rovnoběžkami.

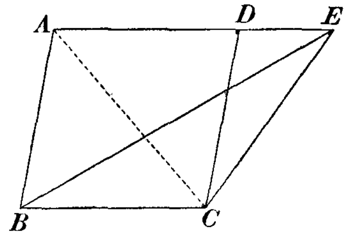


Nuže veďme spojnici AD; pravím, že $AD \parallel BE$. Neboť není-li, buď z A vedena $AF \parallel BE$ a spojnice FE. Tedy $\triangle ABC = FCE$, neboť jsou na stejných základnách BC, CE a mezi týmiž rovnoběžkami BE, AF. Avšak $\triangle ABC = DCE$, tedy též $\triangle DCE = FCE$, totiž větší menšímu, což právě nemožno. Tedy není $AF \parallel BE$. Podobně dokážeme, že ani žádná jiná kromě AD; tedy $AD \parallel BE$.

Tedy stejné trojúhelníky na stejných základnách — —.

XLI.

Když má rovnoběžník s trojúhelníkem touž základnu a jest mezi týmiž rovnoběžkami, rovnoběžník je dvakrát větší než trojúhelník.



Nuže rovnoběžník $ABCD$ měj s $\triangle EBC$ touž základu BC a buď mezi týmiž rovnoběžkami BC, AE; pravím, že rovnoběžník $ABCD$ je dvakrát větší než $\triangle BEC$.

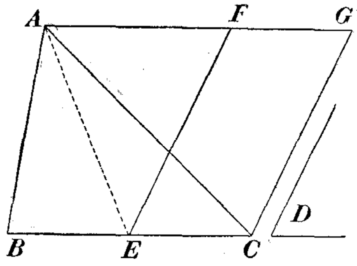
Nuže veďme spojnici AC. Stejný zajisté je $\triangle ABC$ s $\triangle EBC$, neboť jest na téže základně BC a mezi týmiž rovnoběžkami BC, AE (I. XXXVII.). Avšak rovnoběžník $ABCD = 2\,ABC$; neboť úhlopříčka AC jej půlí; a tak rovnoběžník $ABCD$ je dvakrát větší také než $\triangle EBC$.

Když tedy má rovnoběžník — —.

XLII.

Sestroj na daném úhlu přímkovém rovnoběžník danému trojúhelníku rovný.

Buď daným trojúhelníkem ABC, daným pak úhlem přímkovým D; tož má se na daném úhlu přímkovém D sestrojiti rovnoběžník trojúhelaíku ABC rovný.



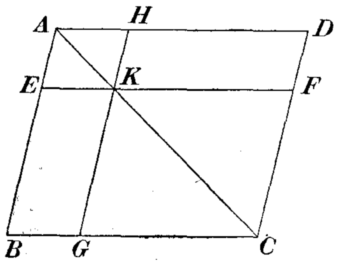
Rozpolme BC v E a veďme spojnici AE a sestrojme na přímce EC a v bodě na ní E $\sphericalangle CEF = D$ a z A veďme $AG \parallel EC$, z C pak veďme $CG \parallel EF$; tedy $FECG$ jest rovnoběžník. A ježto $BE = EC$, též $\triangle ABE = AEC$. Je však také rovnoběžník $FECG = 2\,AEC$, neboť má touž základnu a jest mezi týmiž rovnoběžkami (I. XLI.); tedy rovnoběžník $FECG = \triangle ABC$. Také má $\sphericalangle CEF$ rovný danému D.

Tedy na úhlu CEF, jenž je stejný s D, sestrojen jest rovnoběžník $FECG$ rovný danému $\triangle ABC$; což právě bylo vykonati.

XLIII.

V každém rovnoběžníku doplňky rovnoběžníkův objímajících úhlopříčku jsou si rovny.

Rovnoběžníkem buď $ABCD$, úhlopříčkou jeho AC, rovnoběžníky AC objímajícími buďtež EH, FG, tak řečenými doplňky BK, KD; pravím, že doplněk BK rovná se doplňku KD.



Neboť ježto $ABCD$ jest rovnoběžník, AC pak jeho úhlopříčka, $\triangle ABC = ACD$. Dále, ježto EH jest rovnoběžník, AK pak jeho úhlopříčka, $\triangle AEK = AHK$. Z téže příčiny ovšem $\triangle FKC = KGC$. Ježto tedy $\triangle AEK = AHK$ a $KFC = KGC$, jest $AEK + KGC = AHK + KFC$; jest pak též celý $ABC = ADC$; tedy zbývající doplněk BK rovná se zbývajícímu doplňku KD.

V každém tedy rovnoběžníku doplňky — —.

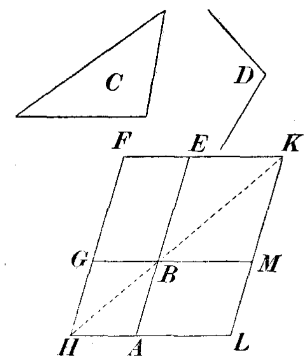
XLIV.

K dané přímce přistav daným úhlem přímkovým rovnoběžník rovný danému trojúhelníku.

Danou přímkou buď AB, daným trojúhelníkem C, daným úhlem přímkovým D; tož má se k dané přímce AB úhlem stejným s D přistaviti rovnoběžník danému trojúhelníku C rovný.

Sestrojen buď rovnoběžník $BEFG = \triangle C$ úhlem EBG, který je stejný s D; i položen buď tak, aby BE s AB bylo v přímce, a prodloužena buď FG k H, a z bodu A vedena buď AH[7]), s kteroukoli se stran BG, EF rovnoběžná, i spojnice HB.

7) H označ, až tato rovnoběžka protne prodlouženou FG.



A ježto rovnoběžky AH, EF protala přímka HF, tedy $\sphericalangle AHF + HFE = 2\,R$. Pročež $\sphericalangle (BHG + GFE) < 2\,R$; tedy přímky při úhlech menších než dva pravé, prodlužují-li se do nekonečna, setkávají se; tedy se HB, FE prodlužovány jsouce setkají. Buďte prodlouženy a stýkejte se v K, a z bodu K vedena buď KL, a prodlouženy buďte HA, GB do bodů L, M. Tedy $HLKF$ jest rovnoběžníkem a HK jeho úhlopříčkou, a tuto HK objímají rovnoběžníky AG, ME, a tak řečené doplňky jsou LB, BF; tedy $LB = BF$ (I. XLIII.). Avšak $BF = \triangle C$; tedy též $LB = C$. A ježto $\sphericalangle GBE = ABM$, avšak $GBE = D$, tedy též $\sphericalangle ABM = D$.

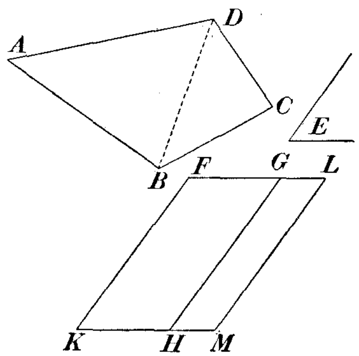
K dané tedy přímce AB daným úhlem ABM, který je stejný s D, přistaven jest rovnoběžník rovný danému $\triangle C$; což právě bylo vykonati.

XLV.

Sestroj na daném úhlu přímkovém rovnoběžník rovný danému útvaru přímkovému.

Daným útvarem přímkovým buď $ABCD$, daným pak úhlem přímkovým E; tož má se sestrojiti na daném úhlu E rovnoběžník danému útvaru přímkovému $ABCD$ rovný.

Veďme spojnici DB a sestrojme rovnoběžník FH rovný trojúhelníku ABD na $\sphericalangle HKF = E$ a přistavme ku přímce GH rovnoběžník GM rovný trojúhelníku DBC na $\sphericalangle GHM = E = HKF$. Společným buď KHG; tedy $\sphericalangle FKH + KHG = KHG + GHM$. Avšak $FKH + KHG = 2\,R$; tedy též $KHG + GHM = 2\,R$. Tedy na jakési přímce GH a v jejím bodě H dvě přímky KH, HM na rozličných stranách ležící tvoří stýkané úhly rovné dvěma pravým; tedy KH, HM jsou v přímce (I. XIV.); a ježto rovnoběžky KM, FG protala přímka HG, úhly střídavé MHG, HGF jsou si rovny. Společným buď $\sphericalangle HGL$; tedy $\sphericalangle MHG + HGL = HGF + HGL$. Avšak $MHG + HGL = 2\,R$; tedy též $HGF + HGL = 2\,R$. Tedy FG, GL činí přímku. A ježto $FK = HG$ a s ní jest rovnoběžná, avšak i $GH = ML$ a s ní jest rovnoběžná, tedy též $KF \parallel ML$. A spojují je KM, FL; tedy též KM, FL jsou stejné a rovnoběžné; tedy $KFML$ jest rovnoběžník. A ježto $\triangle ABC$ rovná se rovnoběžníku FH a $\triangle DBC = GM$, tedy celý útvar přímkový rovná se celému rovnoběžníku $KFLM$.



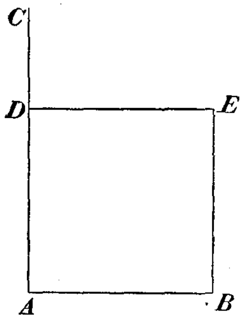
Tedy na daném $\sphericalangle FKM$, jenž se rovná danému $\sphericalangle E$, sestrojen jest rovnoběžník $KFLM$ rovný danému útvaru přímkovému $ABCD$; což právě bylo vykonati.

XLVI.

Na dané přímce narýsuj čtverec.

Danou přímkou buď AB; má se tedy na přímce AB narýsovati čtverec.

Veďme ku přímce AB z bodu na ní A kolmici AC, a buď $AD = AB$; a z bodu D veďme $DE \parallel AB$, z bodu pak B veďme $BE \parallel AD$. Tedy $ADEB$ jest rovnoběžník; tedy $AB = DE$, $AD = BE$; ale $AB = AD$; tedy všecky čtyři, BA, AD, DE, EB, jsou si rovny; pročež rovnoběžník $ADEB$ je stejnostranný. Pravím ovšem, že též pravoúhlý. Neboť ježto rovnoběžky AB, DE proťala přímka AD, tedy $\sphericalangle BAD + ADE = 2R$. Avšak BAD jest pravý, tedy jest pravý též ADE. V rovnoběžnících pak protější strany i úhly jsou si navzájem rovny; tedy též oba protější úhly ABE, BED jsou pravé. Tedy $ADEB$ jest obrazec pravoúhlý. Dokázáno však bylo, že též stejnostranný.

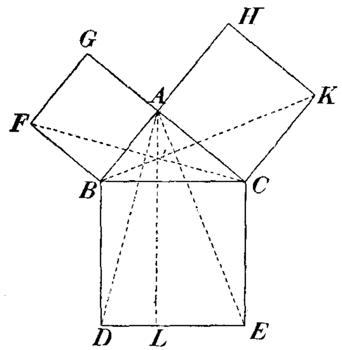


Jest to tedy čtverec a jest narýsován na přímce AB; co právě bylo vykonati.

XLVII.

V pravoúhlých trojúhelnících čtverec na straně proti úhlu pravému ležící rovná se čtvercům na stranách pravý úhel svírajících (»věta Pythagorova«).

Trojúhelníkem pravoúhlým buď ABC, maje pravý úhel BAC; pravím, že čtverec na BC rovná se (součtem) čtvercům na BA a na AC.



Nuže buď narýrován na BC čtverec $BDEC$, na BA, AC pak GB, HC, a z bodu A vedena buď $AL \parallel BD$ nebo CE a spojnice AD, FC. A ježto $\sphericalangle BAC$ i BAG jsou pravé, tož na jakési přímce BA a při bodě na ní A dvě přímky AC, AG na rozličných stranách tvoří stýkavé úhly rovné dvěma pravým, tedy CA, AG činí přímku; z téže příčiny ovšem též BA, AH činí přímku (I. XIV.). A ježto $\sphericalangle DBC = FBA$, oba totiž jsou pravé; společný přičtěmež ABC; tedy celý $\sphericalangle DBA = FBC$. A ježto $DB = BC$ a $FB = BA$, jsou ovšem DB, BA oběma FB, BC jednotlivě rovny, a $\sphericalangle DBA = FBC$; tedy základna $AD = FC$ a $\triangle ABD = FBC$; a dvakrát větší než $\triangle ABD$ jest rovnoběžník

BL; neboť mají touž základnu a jsou mezi týmiž rovnoběžkami BD, AL (I. XLI.); a dvakrát větší než $\triangle FBC$ je čtverec GB, neboť mají touž základnu a jsou mezi týmiž rovnoběžkami FB, GC. [Dvojnásobky pak týchž veličin jsou si rovny.] Tedy též rovnoběžník BL rovná se čtverci GB.

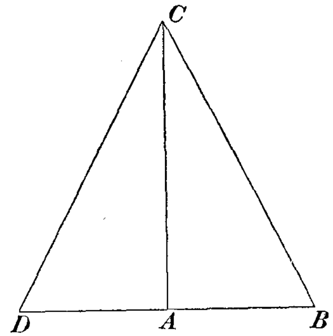
Podobně ovšem vedením spojnic AE, BK dokáže se, že též rovnoběžník CL rovná se čtverci HC. Celý tedy čtverec $BDEC$ rovná se součtu obou čtverců GB, HC. I jest čtverec $BDEC$ narýsován na BC, a GB, HC na BA, AC. Tedy $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

Tedy v pravoúhlých trojúhelnících — —.

XLVIII.

Když v trojúhelníku čtverec na jedné ze stran rovná se čtvercům na dvou ostatních stranách trojúhelníku, úhel ostatními dvěma stranami trojúhelníku sevřený jest pravý.

Nuže v $\triangle ABC$ čtverec na jedné straně BC buď roven součtu čtverců na BA, AC; pravím, že $\sphericalangle BAC$ jest pravý.



Nuže veďme z bodu A ku přímce AC kolmici AD, a buď $BA = AD$, a veďme spojnici DC. Ježto $DA = AB$, také čtverec na DA roven čtverci na AB. Společným přičtěme čtverec na AC; tedy $DA^2 + AC^2 = BA^2 + AC^2$. Avšak $DA^2 + AC^2 = DC^2$, neboť $\sphericalangle DAC$ jest pravý; čtverce však $BA^2 + AC^2 = BC^2$; to je totiž podmínkou; tedy $DC^2 = BC^2$, takže též strana $DC = BC$. A ježto $DA = AB$, společnou pak jest AC, patrně obě DA, AC jsou oběma BA, AC jednotlivě rovny a základna $DC = BC$; tedy $\sphericalangle DAC = BAC$. Úhel však DAC jest pravý; pravý tedy též $\sphericalangle BAC$.

Když tedy v trojúhelníku čtverec — —.

Kniha druhá.

Výměry.

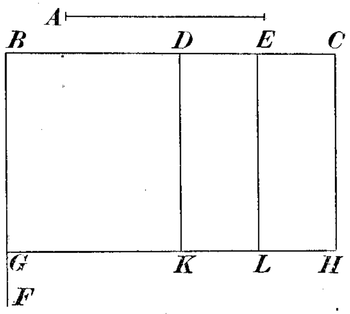
1. O každém pravoúhlém rovnoběžníku pravíme, že jej svírají dvě přímky, svírající pravý úhel.

2. V každém útvaru rovnoběžkovém kterýkoli z rovnoběžníkův objímajících jeho úhlopříčku se dvěma doplňky nazýván buď soudélníkem (gnómón).

I.

Když jsou dvě přímky a jedna z nich se rozdělí na několik dílů, pravoúhelník sevřený těmi dvěma přímkami rovná se pravoúhelníkům sevřeným přímkou nerozdělenou a každou z úseček.

Buďte dvě přímky A, BC, a BC buď rozdělena jakkoli v bodech D, E; pravím, že pravoúhelník sevřený přímkami A, BC rovná se pravoúhelníkům sevřeným přímkami A, BD a A, DE a ještě A, EC.



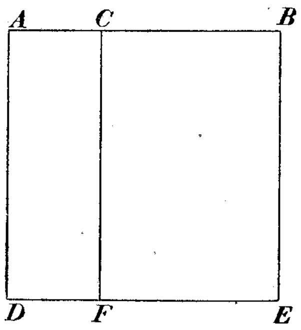
Nuže veďme z B k BC kolmici BF, a budiž $BG = A$ a z G veďme $GH \parallel BC$ a z D, E, C veďme DK, EL, CH rovnoběžně s BG.

Patrně $BH = BK + DL + EH$. A BH jest z A, BC, neboť je sevřen přímkami GB, BC; BG pak $= A$; BK jest z A, BD, neboť sevřen jest přímkami GB, BD; BG pak $= A$. DL je z A, DE, neboť DK, t. j. $BG = A$. A podobně ještě EH je z A, EC; tedy pravoúhelník z A, BC rovná se pravoúhelníkům z A, BD a z A, DE a ještě z A, EC.

Když jsou tedy dvě přímky — —.

II.

Když se přímka libovolně rozdělí, pravoúhelníky sevřené celou a oběma úsečkami rovnají se čtverci z celé.



Nuže přímka AB buď libovolně rozdělena v bodě C; pravím, že pravoúhelník sevřený přímkami AB, BC i s pravoúhelníkem z BA, AC rovná se čtverci z AB.[1])

Nuže narýsujme z AB čtverec $ADEB$ a z C veďme CF rovnoběžně s AD nebo BE.

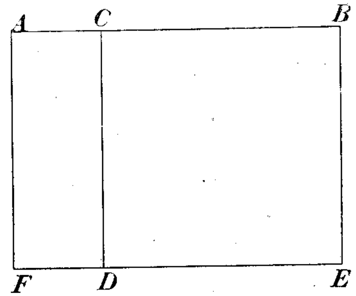
AE patrně se rovná $AF + CE$. I jest AE čtverec z AB; AF pak pravoúhelník z BA, AC, neboť je sevřen přímkami DA, AC, a $AD = AB$; CE pak je z AB, BC, neboť $BE = AB$. Tedy rovnoběžník z BA, AC spolu s rovnoběžníkem z AB, BC rovná se čtverci z AB.

Když se tedy přímka libovolně rozdělí, — —.

[1]) Algebraicky: buď $a = b + c$, bude $ab + ac = a^2$.

III.

Když se přímka libovolně rozdělí, pravoúhelník celou přímkou a jednou úsečkou sevřený rovná se pravoúhelníku úsečkami sevřenému a čtverci z řečené úsečky.



Nuže přímka AB buď libovolně rozdělena v C; pravím, že pravoúhelník sevřený přímkami AB, BC rovná se pravoúhelníku sevřenému úsečkami AC, CB se čtvercem z BC.[2])

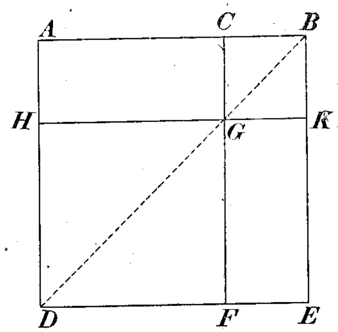
Nuže narýsujme z CB čtverec, prodlužme ED do F a z A veďme $AF \parallel CD$ nebo BE. Patrně $AE = AD + CE$ a jest AE pravoúhelník z AB, BC; neboť sevřen je přímkami AB, BE a $BE = BC$. AD pak je z AC, CB, neboť $DC = CB$. DB pak je čtverec z CB. Tedy pravoúhelník z AB, BC rovná se pravoúhelníku z AC, CB se čtvercem z BC.

Když se tedy přímka libovolně rozdělí — —.

IV.

Když se přímka libovolně rozdělí, čtverec z celé rovná se čtvercům z úseček a dvojnásobnému pravoúhelníku úsečkami sevřenému.

Nuže přímka AB buď libovolně rozdělena v C; pravím, že čtverec z AB rovná se čtvercům z AC a z CB a dvojnásobnému pravoúhelníku úsečkami AC, CB sevřenému.[3])



Nuže narýsujme z AB čtverec $ADEB$, veďme spojnici BD, z bodu C veďme $CF \parallel AD$ nebo BE a bodem G veďme $HK \parallel AB$ nebo DE. A ježto $CF \parallel AD$ a protíná je BD, vnější $\sphericalangle CGB$ rovná se vnitřnímu protějšímu (souhlasnému) ADB. Avšak $\sphericalangle ADB = ABD$, ježto též strana $BA = AD$, tedy též $\sphericalangle CGB = GBC$, a tak i strana $BC = CG$. Avšak $CB = GK$ a $CG = BK$; tedy též $GK = KB$; tedy je $CGKB$ rovnostranný. Pravím ovšem, že také pravoúhlý. Neboť ježto $CG \parallel BK$ [a protíná je přímka CB], tedy $\sphericalangle KBC + GCB = 2R$. Avšak $\sphericalangle KBC$ je pravý, pravým tedy též $\sphericalangle BCG$; a tak i protější CGK a GKB jsou pravé. Tedy $CGKB$ jest pravoúhelník; dokázáno však, že i stejnostranný, jest to tedy čtverec, a je z CB. Z téže příčiny ovšem

[2]) Buď $a = b + c$, bude $ac = bc + c^2$.

[3]) Buď $a = b + c$, bude $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$.

i HF je čtverec, a jest z HG, t. j. AC. Tedy HF, KC jsou čtverce z AC, CB. A ježto $AG = GE$ (I. XLIII.) a jest AG z AC, CB, neboť $GC = CB$; tedy též $GE = AC \times CB$; tedy $AG + GE = 2\,AC \times CB$. Jsou pak HF, CK čtverce z AC, CB; tedy ty čtyři $HF + CK + AG + GE = AC^2 + CB^2 + 2\,AC \times CB$. Avšak HF, CK, AG, GE je celý $ADEB$, což je čtverec z AB; tedy $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2\,AC \times CB$.

Když se tedy přímka libovolně rozdělí, — —.

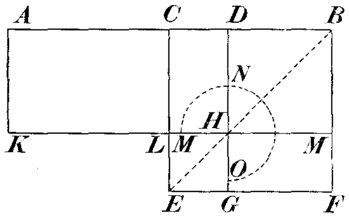
[Důsledek.

Z toho zajisté patrno, že ve čtvercích rovnoběžníky objímající úhlopříčku jsou čtverce.]

V.

Když se přímka rozdělí v úsečky stejné a nestejné, pravoúhelník nestejnými úsečkami celé sevřený se čtvercem úsečky mezi průsečíky rovná se čtverci půlky.

Nuže rozdělme jakousi přímku AB na úsečky stejné v C a nestejné v D; pravím, že $AD \times DB + CD^2 = CB^2$ [4]).



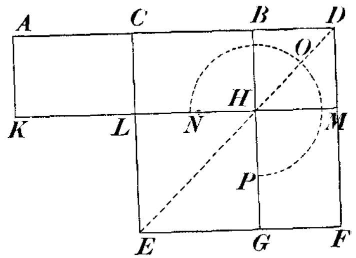
Nuže narýsujme z CB čtverec $CEFB$ a spojnici BE a z D veďme $DG \parallel CE$ nebo BF, z H pak $KM \parallel AB$ nebo EF a dále z A veďme $AK \parallel CL$ nebo BM. A ježto doplněk CH rovná se doplňku HF, společným přičtěme DM; tedy celý $CM = DF$. Avšak $CM = AL$, ježto též $AC = CB$; tedy též $AL = DF$. Společným přičtěme CH; celý tedy AH rovná se soudélníku MNO. Avšak AH je z AD, DB; neboť $DH = DB$; tedy též soudélník $MNO + LG = AD \times DB + CD^2$. Avšak soudélník $MNO + LG$ je celý čtverec $CEFB$, jenž je z CB; tedy $AD \times DB + CD^2 = CB^2$.

Když se tedy přímka rozdělí v úsečky stejné a — —.

VI.

Když se rozpůlí přímka a připojí se k ní v přímém směru jiná, pravoúhelník z celé s připojenou a z připojené spolu se čtvercem z půlky rovná se čtverci z půlky a připojené.

Nuže buď nějaká přímka AB rozpůlena v bodě C, k ní buď připojena v přímém směru přímka BD; pravím, že $AD \times DB + CB^2 = BD^2$ [5]).



Nuže buď narýsován z CD čtverec $CEFD$ a spojnice DE, a z bodu B veďme $BG \parallel EC$ nebo DF a z bodu H veďme $KM \parallel AB$ nebo EF a rovněž z A veďme $AK \parallel CL$ nebo DM.

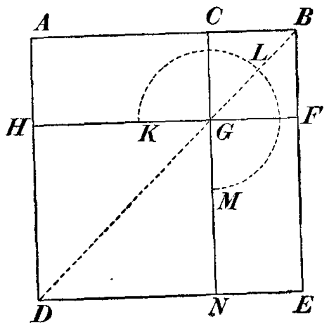
Ježto tedy $AC = CB$, též $AL = CH$; avšak $CH = HF$ (I. XLIII.); tedy též $AL = HF$. Společným přičtěme CM; celý tedy AM rovná se soudélníku NOP. Avšak AM je z AD, DB, neboť $DM = DB$; tedy též soudélník $NOP = AD \times DB$. Společným přičtěme $LG = BC^2$; tedy $AD \times DB + CB^2 = NOP + LG$. Avšak $NOP + LG$ je čtverec $CEFD$ celý, jenž je z CD; tedy $AD \times DB + CB^2 = CD^2$.

Když se tedy rozpůlí přímka a připojí se — —.

VII.

Když se přímka libovolně rozdělí, čtverec celé a čtverec jedné úsečky součtem rovnají se dvojnásobnému pravoúhelníku z celé a řečené úsečky a čtverci úsečky zbývající.

Nuže rozdělme nějakou přímku AB v bodě C; pravím, že $AB^2 + BC^2 = 2\,AB \times BC + CA^2$. [6])



Nuže narýsujme z AB čtverec $ADEB$, a útvar buď linkami vyznačen. [7])

Ježto zajisté $AG = GE$, společným přičtěme CF; tedy celý $AF = CE$; tedy $AF + CE = 2\,AF$. Avšak $AF + CE$ jest soudélník KLM a CF čtverec; tedy soudélník $KLM + CF = 2\,AF$. Jest pak $2\,AB \times BC = 2\,AF$, neboť $BF = BC$; tedy soudélník $KLM + CF = 2\,AB \times BC$. Společným přičtěme DG, což je čtverec z AC; tedy soudélník $KLM + BG + GD = 2\,AB \times BC + AC^2$. Avšak $KLM + BG + GD = ADEB + CF$, což jsou čtverce z AB a BC: tedy $AB^2 + BC^2 = 2\,AB \times BC + AC^2$.

Když se tedy přímka libovolně rozdělí, čtverec — —.

---

[4]) Nestejnými úsečkami buďtež a, b; bude $ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

[5]) Půlkou přímky buď a, připojenou b; bude $(2a + b)\,b + a^2 = (a + b)^2$.

[6]) Úsečkami buďtež a, b; bude $(a + b)^2 + b^2 = 2\,(a + b)\,b + a^2$, n. $(a + b)^2 + a^2 = 2\,(a + b)\,a + b^2$.

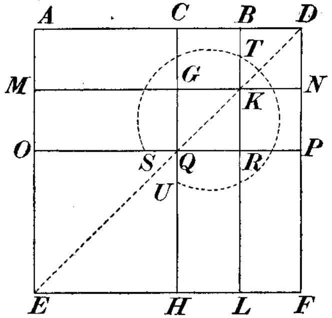
[7]) Linkami CN, HF a DB, příslušným směrem vedenými.

VIII.

Když se přímka libovolně rozdělí, čtyřnásobný pravoúhelník z celé a jedné úsečky spolu se čtvercem úsečky zbývající rovná se čtverci celé a řečené úsečky v jedno vzatých.

Nuže rozdělme libovolně nějakou přímku AB v bodě C; pravím, že čtyřnásobný pravoúhelník z AB, BC spolu se čtvercem z AC rovná se čtverci z AB, BC v jedno vzatých.[8])

Nuže veďme dále přímým směrem BD a buď $BD = CB$, a narýsujme z AD čtverec $AEFD$, a útvar vyznačme dvojími linkami.[9])



Ježto tedy $CB = BD$, avšak $CB = GK$, $BC = KN$, tedy $GK = KN$. Z téže příčiny patrně $QR = RP$. A ježto $BC = BD$ a $GK = KN$, tedy též $CK = KD$ a $GR = RN$. Avšak $CK = RN$, neboť jsou to doplňky rovnoběžníku; tedy též $KD = GR$; tedy všechny čtyři DK, CK, GR, RN jsou si rovny. Ty čtyři tedy jsou čtyřikrát větší než CK. Ježto dále $CB = BD$, avšak $BD = BK$, t. j. CG, a $CB = GK$, t. j. GQ, tedy též $CG = GQ$. A ježto $CG = GQ$ a $QR = RP$, též $AG = MQ$ a $QL = RF$. Avšak $MQ = QL$, neboť to doplňky rovnoběžníku ML; tedy též $AG = RF$; tedy ty čtyři AG, MQ, QL, RF jsou si rovny; tedy ty čtyři jsou čtyřikrát větší než AG. Bylo pak dokázáno, že též čtyři CK, KD, GR, RN čtyřikrát větší než CK; tedy všech osm obsahujících soudélník STU je čtyřikrát větší než AK. A ježto AK je z AB, BC, neboť $BK = BD$, tedy $4\,AB \times BD = 4\,AK$. Dokázáno však bylo, že též soudélník $STU = 4\,AK$; tedy $3\,AB \times BD = STU$. Společným buď OH, což rovno čtverci z AC; tedy $4\,AB \times BD + AC^2 = STU + OH$. Avšak $STU + OH$ jest celý čtverec $AEFD$, jenž je z AD; tedy $4\,AB \times BD + AC^2 = AD^2$; BD však $= BC$. Tedy $4\,AB \times BC + AC^2 = AD^2$, t. j. čtverci z AB a BC v jedno vzatých.

Když se tedy přímka libovolně rozdělí, čtyřnásobný — —.

IX.

Když se rozdělí přímka na úsečky stejné a nestejné, čtverce nestejných úseček přímky celé jsou dvakrát větší nežli čtverce z půlky a z úsečky mezi průsečíky.

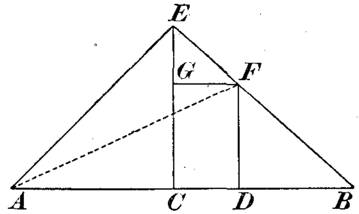
Nuže rozdělme nějakou přímku AB na úsečky stejné v C a nestejné v D; pravím, že čtverce z AD a z DB dvakrát větší jsou nežli čtverce z AC a z CD.[10])

[8]) Úsečkami buďtež a, b; bude $4(a+b)b + a^2 = [(a+b)+b]^2$ n. $4(a+b)a + b^2 = [(a+b)+a]^2$.

[9]) Jednak MN, CH, jednak OP, BL (a úhlopříčkou DE).

[10]) Nestejnými úsečkami buďtež a, b; bude $a^2 + b^2 = 2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2\right]$.

Nuže z C vedena buď CE kolmo k AB a buď $CE = AC$ nebo CB, a spojnice AE, EB, a z D veďme $DF \parallel EC$ a z F $FG \parallel AB$ a spojnici AF. A ježto $AC = CE$, též $\sphericalangle EAC = AEC$, a ježto při C jest pravý, tedy ostatní $EAC + AEC = R$ a jsou stejné; tedy $\sphericalangle CEA = CAE = \frac{R}{2}$. Z téže příčiny ovšem $\sphericalangle CEB$ i EBC jsou každý $\frac{R}{2}$; celý tedy $AEB = R$. A ježto $GEF = \frac{R}{2}$ a $EGF = R$, neboť se rovná vnitřnímu protějšímu (souhlasnému) ECB; tedy zbývající $EFG = \frac{R}{2}$, a tak též strana $EG = GF$. Ježto dále $\sphericalangle B$ jest $\frac{R}{2}$ a $FDB = R$, neboť se rovná opět vnitřnímu protějšímu (souhlasnému) ECB; tedy zbývající $BFD = \frac{R}{2}$ tedy $\sphericalangle B = DFB$; a tak též strana $FD = DB$. A ježto

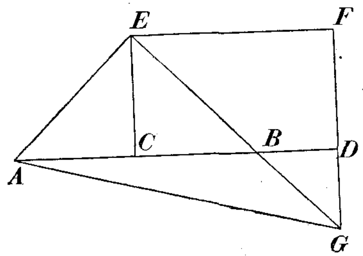


$AC = CE$, také $AC^2 = CE^2$; tedy $AC^2 + CE^2 = 2\,AC^2$. Avšak $AC^2 + CE^2 = EA^2$, neboť $\sphericalangle ACE = R$; tedy $EA^2 = 2\,AC^2$. Dále, ježto $EG = GF$, také $EG^2 + GF^2 = 2\,GF^2$. Avšak $EG^2 + GF^2 = EF^2$; tedy $EF^2 = 2\,GF^2$. GF však se rovná CD; tedy $EF^2 = 2\,CD^2$. Jest pak i $EA^2 = 2\,AC^2$; tedy $AE^2 + EF^2 = 2\,(AC^2 + CD^2)$. Avšak $AE^2 + EF^2 = AF^2$, neboť $\sphericalangle AEF = R$; tedy $AF^2 = 2\,(AC^2 + CD^2)$. Též $AF^2 = AD^2 + DF^2$, neboť $\sphericalangle D = R$. Tedy $AD^2 + DF^2 = 2\,(AC^2 + CD^2)$. DF však rovná se DB; tedy $AD^2 + DB^2 = 2\,(AC^2 + CD^2)$.

Když se tedy rozdělí přímka na úsečky stejné a nestejné — —.

X.

Když se přímka rozpůlí a připojí se k ní v přímém směru jiná, čtverce z celé s připojenou a z připojené jsou celkem dvakrát větší nežli čtverec z půlky se čtvercem z půlky a připojené v jedno vzatých.



Nuže buď nějaká přímka AB rozpůlena v C a k ní ve směru přímém připojena jiná BD; pravím, že $AD^2 + DB^2 = 2\,(AC^2 + CD^2)$.[11])

Nuže z bodu C veďme $CE \perp AB$ a buď $CE = AC$ nebo CB, a spojme EA, EB a z E veďme $EF \parallel AD$ a z D veďme $FD \parallel CE$. A ježto rovnoběžky EC, FD protíná nějaká přímka EF, tedy $\sphericalangle CEF + EFD = 2R$; tedy $(CEB + EFD) < 2R$; přímky však při menších úhlech než jsou dva pravé, prodlouženy

[11]) Půlkou přímky buď a, připojenou b; bude $(2a + b)^2 + b^2 = 2\,[a^2 + (a+b)^2]$.

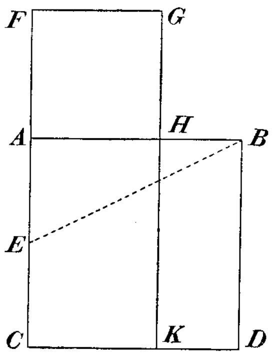
jsouce, se stýkají; tedy EB, FD, prodlouženy jsouce směrem k B, D, se setkají. Buďte prodlouženy a stýkejte se v G, a spojme AG. A ježto $AC = CE$, též $\sphericalangle EAC = AEC$. Z téže příčiny ovšem $\sphericalangle CEB = EBC = \frac{R}{2}$, tedy $\sphericalangle AEB = R$. A ježto $\sphericalangle EBC = \frac{R}{2}$, tedy též $\sphericalangle DBG = \frac{R}{2}$. Jest pak i $\sphericalangle BDG = R$, neboť je stejný s DCE, totiž střídavý; tedy zbývající $\sphericalangle DGB = \frac{R}{2}$, pročež $\sphericalangle DGB = DBG$; a tak i strana $BD = GD$. Dále, ježto $\sphericalangle EGF = \frac{R}{2}$ a úhel při $F = R$, neboť se rovná protějšímu při C; tedy zbývající $\sphericalangle FEG = \frac{R}{2}$; tedy $\sphericalangle EGF = FEG$; a tak i strana $GF = EF$. A ježto $EC^2 = CA^2$, tedy $EC^2 + CA^2 = 2\,CA^2$. Avšak $EC^2 + CA^2 = EA^2$; tedy $EA^2 = 2\,AC^2$. Ježto dále $FG = EF$, také $FG^2 = FE^2$; tedy $GF^2 + FE^2 = 2\,EF^2$. Avšak $GF^2 + FE^2 = EG^2$; tedy $EG^2 = 2\,EF^2$. Avšak $EF = CD$; tedy $EG^2 = 2\,CD^2$. Bylo pak dokázáno, že též $EA^2 = 2\,AC^2$; tedy $AE^2 + EG^2 = 2(AC^2 + CD^2)$. Avšak $AE^2 + EG^2 = AG^2$; $AG^2 = 2(AC^2 + CD^2)$. Čtverec pak $AG^2 = AD^2 + DG^2$; tedy $AD^2 + DG^2 = 2(AC^2 + CD^2)$; DG pak $= DB$: tedy $AD^2 + DB^2 = 2(AC^2 + CD^2)$.

Když se tedy přímka rozpůlí a připojí se — —.

XI.

Rozděl danou přímku tak, aby pravoúhelník z celé a z jedné úsečky rovnal se čtverci úsečky zbývající.

Danou přímkou buď AB; má se tedy AB rozděliti, aby pravoúhelník z celé a z jedné úsečky rovnal se čtverci úsečky zbývající.



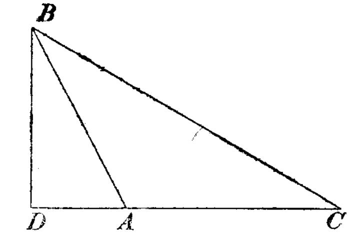
Nuže narýsujme z AB čtverec $ABDC$ a rozpolme AC v bodě E i spojme BE a prodlužme CA do F, a buď $EF = BE$, a narýsujme z AF čtverec FH a prodlužme GH do K; pravím, že AB jest rozdělena v H, takže činí pravoúhelník z AB, BH rovným čtverci z AH.

Neboť AC rozpůlena jest v E a připojena k ní FA, tedy pravoúhelník $CF \times FA + AE^2 = EF^2$ (II. VI.). Avšak $EF = EB$; tedy $CF \times FA + AE^2 = EB^2$. Ale $EB^2 = BA^2 + AE^2$, neboť $\sphericalangle A$ je pravý; tedy $CF \times FA + AE^2 = BA^2 + AE^2$; odečtěme společný AE^2, tedy zbývající $CF \times FA = AB^2$. I jest $FK = CF \times FA$, neboť $AF = FG$; AD pak $= AB^2$; tedy $FK = AD$. Odečten buď společný AK, zbývající tedy $FH = HD$. I jest $HD = AB \times BH$, neboť $AB = BD$; a $FH = AH^2$; tedy pravoúhelník $AB \times BH = HA^2$.

Tedy daná přímka AB rozdělena je v H, takže pravoúhelník $AB \times BH$ činí rovným čtverci HA^2; což právě bylo vykonati.

XII.

V trojúhelnících tupoúhlých čtverec strany proti úhlu tupému větší jest nežli čtverce stran tupý úhel svírajících o dvojnásobný pravoúhelník sevřený jedním ramenem úhlu tupého, na něž dopadá kolmice, a vnější úsečkou při úhlu tupém, již kolmice omezuje.



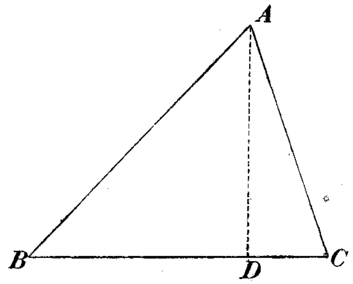
Tupoúhlým trojúhelníkem buď ABC a měj tupý $\sphericalangle BAC$, a vedena buď z bodu B na prodlouženou CA kolmice BD; pravím, že $BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2\,CA \times AD$.

Neboť ježto přímka CD nahodile rozdělena v bodě A, tedy $DC^2 = CA^2 + AD^2 + 2\,CA \times AD$ (II. IV.). Společným přičtěme DB^2; tedy $CD^2 + DB^2 = CA^2 + AD^2 + DB^2 + 2\,CA \times AD$. Avšak $CD^2 + DB^2 = CB^2$, neboť $\sphericalangle D = R$; avšak $AD^2 + DB^2 = AB^2$; tedy $CB^2 = CA^2 + AB^2 + 2\,CA \times AD$.

Tedy v trojúhelnících tupoúhlých — —.

XIII.

V trojúhelnících ostroúhlých čtverec strany proti úhlu ostrému jest menší nežli čtverec stran úhel ostrý svírajících o dvojnásobný pravoúhelník sevřený jedním ramenem úhlu ostrého, na něž dopadá kolmice, a vnitřní úsečkou jeho při úhlu ostrém, již kolmice omezuje.



Ostroúhlým trojúhelníkem buď ABC a měj ostrý $\sphericalangle B$, a vedena buď z bodu A na BC kolmice AD; pravím, že $AC^2 + 2\,CB \times BD = CB^2 + BA^2$.

Neboť ježto přímka CB jest nahodile rozdělena v D, tedy $CB^2 + BD^2 = 2\,CB \times BD + DC^2$ (I. VII.). Společným přičtěme DA^2; tedy $CB^2 + BD^2 + DA^2 = 2\,CB \times BD + AD^2 + DC^2$. Avšak $BD^2 + DA^2 = AB^2$, neboť $\sphericalangle D = R$; čtvercům pak $AD^2 + DC^2 = AC^2$; tedy $CB^2 + BA^2 = AC^2 + 2\,CB \times BD$; a tak pouhý $AC^2 < (CB^2 + BA^2)$ o dvojnásobný pravoúhelník $CB \times BD$.

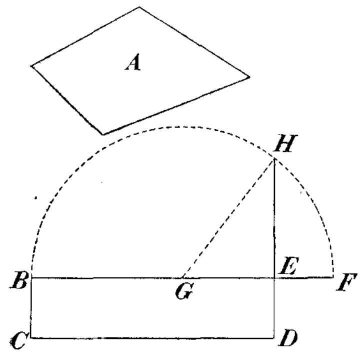
Tedy v trojúhelnících ostroúhlých — —.

XIV.

Sestroj čtverec rovný danému útvaru přímkovému.

Daným útvarem přímkovým (čtyřúhelníkem) buď A; má se tedy sestrojiti čtverec útvaru přímkovému A rovný.

Nuže buď sestrojen útvaru přímkovému A rovný obdélník BD. Jest-li ovšem $BE = ED$, byl by úkol vykonán; neboť sestrojen jest čtverec BD rovný útvaru přímkovému A; pakli ne, jest BE nebo ED větší. Buď větší BE a prodloužena buď do F, a buď $ED = EF$, a rozpolme BF v G a ze středu G narýsujme poloměrem GB nebo GF polokruh BHF a prodlužme DE do H i veďme spojnici GH.



Ježto tedy přímka BF rozdělena v G na díly stejné, na nestejné pak v E, tedy $BE \times EF + EG^2 = GF^2$ (I. v.). GF však $= GH$; tedy $BE \times EF + GE^2 = GH^2$. Tomu však se rovnají čtverce $HE^2 + EG^2$. Tedy pravoúhelník $BE \times EF + GE^2 = HE^2 + EG^2$. Odečtěme společný GE^2; tedy zbývající pravoúhelník $BE \times EF = EH^2$. Avšak $BE \times EF = BD$, neboť $EF = ED$; tedy $BD = HE^2$. BD však je rovno útvaru přímkovému A. Tedy též útvar přímkový A rovná se čtverci, jenž bude narýsován z EH.

Tedy danému útvaru přímkovému A rovný čtverec je sestrojen, jenž bude narýsován z EH; což právě bylo vykonati.

Kniha třetí.

Výměry.

1. Stejné jsou kruhy, jejichž průměry jsou stejné neboli jejichž poloměry jsou stejné.
2. Říká se, že přímka kruhu se dotýká, která kruh zasahuje a prodloužena jsouc kruhu neprotíná.
3. Říká se, že kruhy navzájem se dotýkají, které zasahujíce se vespolek se neprotínají.
4. Říká se, že v kruhu přímky jsou stejně od středu vzdáleny, když kolmice ze středu k nim vedené jsou stejné.
5. Říká se však, že vzdálenější je ta, na kterou dopadá kolmice delší.
6. Úsečí kruhu jest útvar omezený přímkou (tětivou) a obloukem kruhu.
7. Úhlem úseče jest ten, jejž svírá tětiva a oblouk kruhu.
8. Když se na oblouku úseče vezme nějaký bod a z něho k mezným bodům přímky, která je základnou úseče (tětivou), vedou spojnice, jest ten úhel, jejž svírají ty spojnice, úhlem v úseči (obvodovým).
9. Když pak přímky úhel svírající zabírají nějaký oblouk, říká se, že úhel na něm stojí.
10. Výsečí kruhu, když se ve středu kruhu sestrojí úhel, jest útvar omezený přímkami úhel svírajícími a obloukem jimi zabíraným.

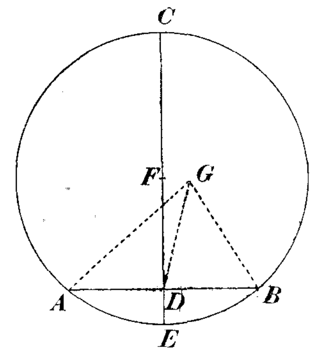
11. Podobnými jsou úseče kruhů ty, jež obsahují stejné úhly neboli v nichž úhly navzájem jsou si rovny (úhly v úseči, obvodové; v. vým. 8.).

I.

Najdi střed kruhu daného.

Budiž daným kruhem ABC; má se tedy najíti kruhu ABC střed.

Veďme v něm libovolně nějakou přímku AB a rozpolme ji v bodě D a z D veďme $DC \perp AB$ a prodlužme do E a rozpolme CE v F; pravím, že F je střed kruhu ABC.



Nuže, nebuď jím, nýbrž, možno-li, buď jím G, a veďme spojnice GA, GD, GB. A ježto $AD = DB$, společnou pak DG, obě patrně AD, DG jednotlivě stejné jsou s GD, DB, a základna $GA = GB$, neboť jdou ze středu; tedy $\sphericalangle ADG = GDB$. Když pak přímka na přímce postavena jsouc tvoří stýkavé úhly navzájem sobě rovné, jest každý ten úhel pravý; tedy $\sphericalangle GDB = R$. Jest pak i $FDB = R$; tedy $\sphericalangle FDB = GDB$, větší menšímu, což právě jest nemožno. Tedy bod G není středem kruhu ABC. Podobně ovšem dokážeme, že ani žádný jiný kromě F.

Tedy bod F je středem kruhu ABC.

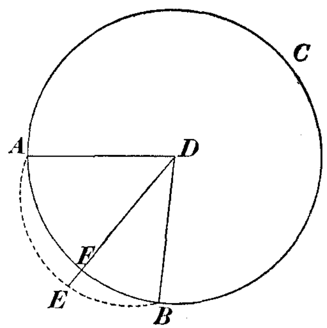
Důsledek.

Z toho zajisté patrno, že když v kruhu nějaká přímka přímku nějakou v polovici a kolmo protíná, střed kruhu jest na přímce protínající. — Což právě bylo vykonati.

II.

Když se vezmou na obvodě kruhu kterékoli dva body, přímka ty body spojující padne dovnitř kruhu.

Kruhem budiž ABC, a na obvodě jeho vezměme dva kterékoli body A, B; pravím, že přímka spojující A s B padne dovnitř kruhu.



Nuže nebuď tak, nýbrž, možno-li, padni vně jako AEB, a za střed kruhu vezměme D a veďme spojnice DA, DB a prodlužme DF do E.

Ježto tedy $DA = DB$, tedy $\sphericalangle DAE = DBE$; a ježto v $\triangle DAE$ jedna strana, totiž AEB, jest prodloužena, tedy $\sphericalangle DEB$ (vnější) $> DAE$ (vnitřní protější, I. XVI.). Avšak $\sphericalangle DAE = DBE$, tedy $\sphericalangle DEB > DBE$. Proti většímu však úhlu leží delší strana; tedy $DB > DE$. DB však $= DF$, tedy $DF > DE$, kratší nad delší; což právě nemožno. Tedy přímka spojující A s B nepadne vně kruhu. Podobně ovšem dokážeme, že ani na obvod; tedy dovnitř.

Když se tedy vezmou na obvodě kruhu — —.

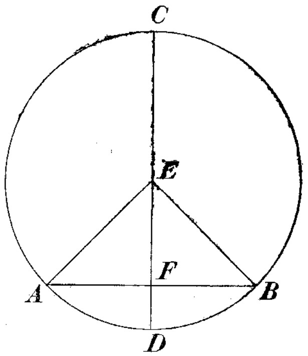
III

Když nějaká přímka v kruhu středem jdouc jinou přímku mimostřednou půlí, též kolmo ji protíná; když pak ji prtíná kolmo, též ji půlí.

Kruhem buď ABC a v něm nějaká přímka CD středem jdouc rozpoluj nějakou přímku mimostřednou AB v bodě F; pravím, že též kolmo ji protíná.

Nuže vezměme střed kruhu ABC, a tím buď E, a veďme spojnice EA, EB.

A ježto $AF = FB$, společnou pak FE, dvě jsou rovny dvěma, a základna $EA = BE$, tedy $\sphericalangle AFE = BFE$ (I. VIII.). Když pak přímka na přímce postavena jsouc tvoří stýkavé úhly navzájem rovné, každý z těch stejných úhlů jest pravý. Tedy CD středem jdouc a rozpolujíc mimostřednou AB též kolmo ji protíná.



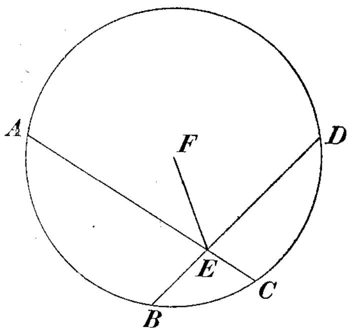
Nuže nyní CD protínej přímku AB kolmo; pravím, že ji též půlí, t. j. že $AF = FB$.

Neboť když touž úpravu vykonáme[1]), ježto $EA = EB$, též $\sphericalangle EAF = EBF$; jest pak pravý $\sphericalangle AFE = BFE$; tedy oba trojúhelníky EAF i EFB mají dva a dva úhly stejné a jednu společnou stranu EF proti jednomu ze stejných úhlů ležící stejnou; tedy též zbývající strany zbývajícím stranám budou míti rovné; tedy $AF = FB$.

Když tedy nějaká přímka v kruhu — —.

IV.

Když dvě mimostředné přímky v kruhu navzájem se protínají, nerozpolují se navzájem.



Kruhem buď $ABCD$ a v něm dvě mimostředné přímky AC, BD navzájem se protínejte v E; pravím, že se navzájem nerozpolují.

Nuže, možno-li, rozpolujte se navzájem, tak aby bylo $AE = EC$, $BE = ED$, a vezměme střed kruhu $ABCD$, a buď jím F, a veďme spojnici FE.

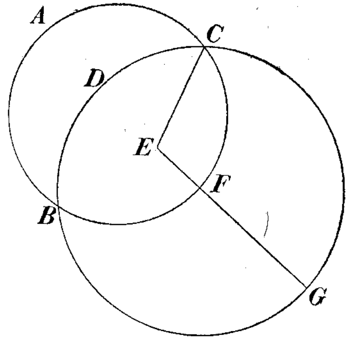
[1]) t. j. vedeme přímky pomocné.

Ježto tedy přímka nějaká středem jdoucí FE nějakou přímku AC mimostřednou rozpoluje, též kolmo ji protíná (III. III.); tedy $\sphericalangle FEA = R$; dále, ježto přímka nějaká FE přímku nějakou BD půlí, též kolmo ji protíná; tedy $\sphericalangle FEB = R$. Dokázáno však bylo, že též $\sphericalangle FEA = R$; tedy $\sphericalangle FEA = FEB$, menší většímu; což právě nemožno. Tedy AC, BD se navzájem nerozpolují.

Když se tedy dvě mimostředné přímky — —.

V.

Když se dva kruhy navzájem budou protínati, nebude střed jejich týž.



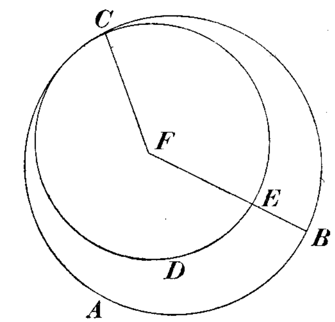
Nuže, dva kruhy ABC, CDG protínejte se v bodech B, C; pravím, že nebude jejich střed týž.

Neboť, možno-li, buď jím E a vedena buď spojnice CE a prodloužena buď EFG jakko-li. A ježto bod E je středem kruhu ABC, jest $EC = EF$. Dále, ježto E je středem kruhu CDG, jest $EC = EG$; dokázáno však, že též $EC = EF$; tedy také $EF = EG$, kratší stejná s delší; což právě nemožno. Tedy bod E není středem kruhů ABC, CDG[2]).

Když se tedy dva kruhy navzájem — —.

VI.

Když se dva kruhy budou navzájem dotýkati, nebude střed jejich týž.



Nuže dva kruhy ABC, CDE dotýkejte se navzájem v bodě C; pravím, že nebude střed jejich týž.

Neboť, možno-li, buď jím F a vedena buď spojnice FC a prodloužena libovolně FEB.

Ježto tedy bod F je středem kruhu ABC, jest $FC = FB$. Dále, ježto bod F je středem kruhu CDE jest $FC = FE$. Dokázáno však, že $FC = FB$, tedy též $FE = FB$, kratší stejná s delší; což právě nemožno. Tedy bod F není středem kruhů ABC, CDE[3]).

Když se tedy dva kruhy budou — —.

[2]) Totéž možno dokázati o každém jiném bodě.

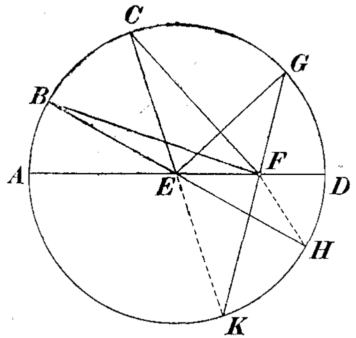
[3]) Podobně o každém jiném bodě dokážeme, že není středem obou kruhů.

VII.

Když se na průměru kruhu vezme nějaký bod, jenž není středem kruhu, z toho pak bodu na kružnici budou dopadati nějaké přímky, nejdelší bude ta, naníž střed, nejkratší pak úsečka zbývající, z ostatních však, kterákoli je blíže přímky středové, delší jest než která dále, a pouze dvě (a dvě) stejné z toho bodu padnou na kružnici s obou stran úsečky nejkratší.

Kruhem buď $ABCD$, průměrem jeho buď AD, a na AD vezměme nějaký bod F, jenž není středem kruhu, středem pak kruhu buď E, a z bodu F na kružnici $ABCD$ dopadejte přímky nějaké BF, FC, FG; pravím, že nejdelší jest FA, nejkratší pak FD, z ostatních pak $FB > FC$, $FC > FG$.

Nuže veďme spojnice BE, CE, GE; a ježto v každém trojúhelníku dvě strany delší jsou než třetí, tedy $(EB + EF) > BF$. Avšak $BE = AE$, tedy $AF > BF$. Dále, ježto $BE = CE$ a společnou FE, tož $BE + EF = CE + EF$. Ale též $\sphericalangle BEF > CEF$, tedy základna $BF > CF$. Z téže ovšem příčiny také $CF > FG$.



Dále, ježto $(GF + FE) > EG$, EG pak $= ED$, tedy $(GF + FE) > ED$. Odečtěme společnou EF; tedy zbývající $GF > FD$; nejkratší pak jest FD, FB však $> FC$, a $FC > FG$.

Pravím také, že z bodu F pouze dvě (a dvě) stejné dopadnou na kružnici $ABCD$ na obou stranách úsečky nejkratší FD. Nuže sestrojen buď na přímce EF a z bodu na ní E $\sphericalangle FEH$ rovný úhlu GEF a spojnice FH. Ježto tedy $GE = EH$, společnou pak EF, tož $GE + EF = HE + EF$; též $\sphericalangle GEF = HEF$; tedy základna $FG = FH$. Pravím ovšem, že jiná stejná s FG nedopadne na kružnici z bodu F. Neboť, možno-li, dopadej FK. A ježto $FK = FG$, avšak $FG = FH$, tedy též $FK = FH$, bližší úsečky středové je stejná se vzdálenější, což právě nemožno. Tedy z bodu F žádná jiná nedopadne na kružnici stejná s GF (kromě FH); tedy jedna jediná.

Když se tedy na průměr kruhu — —.

VIII.

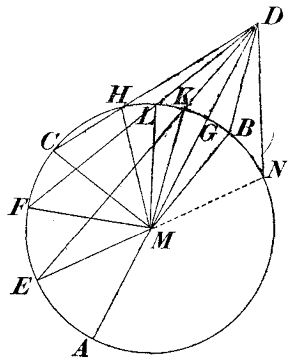
Když se vezme nějaký bod vně kruhu a z toho bodu ke kruhu se vedou nějaké přímky, z nichž jedna středem, ostatní pak jakkoli, z přímek dopadajících na dutou část kružnice nejdelší jest, která jde středem, z ostatních pak vždy, která je středové bližší, je delší než která je vzdálenější, z přímek pak dopajících na

vypuklou část kružnice nejkratší jest mezi bodem a průměrem, z ostatních pak vždy, která je bližší úsečky nejkratší, jest kratší než která je vzdálenější, a pouze dvě (a dvě) stejné dopadnou z bodu na kružnici s obou stran úsečky nejkratší.

Kruhem buď ABC, a vezměme vně kruhu ABC nějaký bod D a z něho veďme nějaké přímky DA, DE, DF, DC, středem pak jdi DA; pravím, že z přímek na dutou část kružnice $AEFC$ dopadajících nejdelší je středová DA a $DE > DF$, $DF > DC$, z přímek pak na vypuklou část kružnice $HLKG$ dopadajících nejkratší jest DG mezi bodem a průměrem AG, a která jest úsečky DG bližší, je kratší než která je vzdálenější, $DK < DL$, $DL < DH$.

Nuže vezměme střed kruhu ABC, a buď jím M, a veďme spojnice ME, MF, MC, MK, ML, MH.

A ježto $MA = EM$, společnou přičtěme MD, tedy $AD = EM + MD$, avšak $(EM + MD) > ED$; tedy $AD > ED$. Dále, ježto $ME = MF$, společná pak MD, tedy $EM + MD = FM + MD$, a $\sphericalangle EMD > FMD$. Tedy základna $ED > FD$. Podobně ovšem dokážeme, že $FD > CD$; tedy nejdelší je DA, DE pak $> DF$, $DF > DC$.



A ježto $(MK + KD) > MD$, $MG = MK$, tedy zbývající $KD > GD$, a tak $GD < KD$; a ježto v $\triangle MLD$ na jedné straně MD uvnitř byly sestrojeny dvě přímky, totiž MK, KD, tedy $(MK + KD) < (ML + LD)$ (I. xxi.); $MK = ML$; zbývající tedy $DK < DL$. Podobně ovšem dokážeme, že též $DL < DH$; tedy nejkratší jest DG, DK pak $< DL$, $DL < DH$.

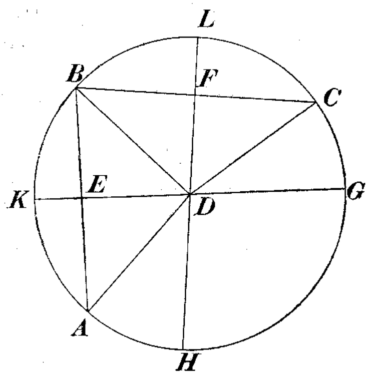
Pravím, že též pouze dvě (a dvě) stejné z bodu D dopadnou na kružnici s obou stran nejkratší úsečky DG. Sestrojen buď na přímce MD a v bodě jejím M $\sphericalangle DMB = KMD$ a spojnice DB. A ježto $MK = MB$, společnou pak MD, zajisté $KM + MD = BM + MD$ a $\sphericalangle KMD = BMD$; tedy základna $DK = DB$. Pravím, že žádná jiná přímce DK rovná nedopadne na kružnici z bodu D. Neboť, možno-li, dopadej a budiž jí DN. Ježto tedy $DK = DN$, avšak $DK = DB$, tedy též $DB = ND$, přímka bližší úsečky nejkratší přímce vzdálenější; což právě dokázáno nemožným. Tedy nedopadne více úseček než dvě stejné na kružnici ABC z bodu D s obou stran úsečky nejkratší DG.

Když se tedy vezme nějaký bod vně kruhu — —.

IX.

Když se vezme nějaký bod uvnitř kruhu a z toho bodu na kružnici dopadá více než dvě přímek stejných, vzatý bod je středem kruhu.

Kruhem buď ABC, bodem pak uvnitř něho D, a z D ke kruhu ABC dopadejte více než dvě přímky stejné DA, DB, DC; pravím, že bod D je středem kruhu ABC.



Nuže veďme spojnice AB, BC a buďte rozpůleny v bodech E, F a spojnice ED, FD prodlouženy buďte do bodů D, K a H, L.

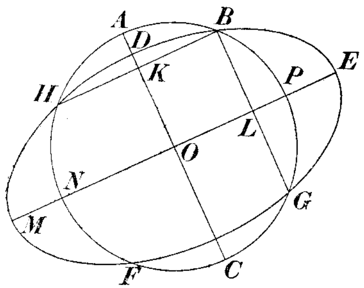
Ježto tedy $AE = EB$, společnou pak ED, ovšem $AE + ED = BE + ED$, a základna $DA = DB$; tedy $\sphericalangle AED = BED$; tedy $AED = R = BED$; tedy GK rozpoluje AB a jest na ní kolmo. A ježto v kruhu, když nějaká přímka přímku nějakou půlí a jest na ní kolmo, na rozpolovací je střed kruhu, tedy na GK je střed kruhu (III. I. důsl.). Z téže příčiny ovšem též na HL je střed kruhu ABC. A žádného jiného bodu společného přímky GK, HL nemají než D; tedy bod D je středem kruhu ABC.

Když se tedy vezme nějaký bod uvnitř kruhu — —.

X.

Kruh kruhu neprotíná ve více bodech než ve dvou.

Nuže, možno-li, kruh ABC protínej kruh DEF ve více bodech než ve dvou, totiž v B, G, F, H a spojnice BG, BH buďte rozpolovány v bodech K, L, a z K, L na BH, BG vedené kolmice KC, LM buďte prodlouženy do bodů A, E.



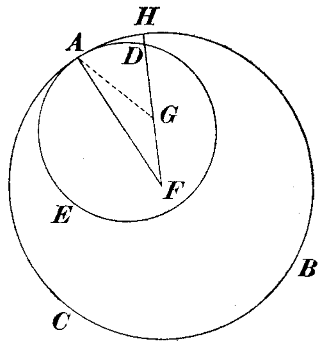
Ježto tedy v kruhu ABC nějaká přímka AC přímku nějakou BH půlí a jest na ní kolmo, na AC tedy je střed kruhu ABC. Dále, ježto v témž kruhu ABC nějaká přímka NP přímku nějakou BG půlí a jest na ní kolmo, tedy na NP je střed kruhu ABC. Dokázáno pak bylo, že i na AC, a přímky AC, NP nikde se neprotínají než v O; tedy bod O je střed kruhu ABC. Podobně ovšem dokážeme, že také kruhu DEF středem jest O, tedy dva kruhy ABC, DEF navzájem se protínající mají týž střed O; což právě není možno.

Tedy kruh kruhu neprotíná ve více bodech než ve dvou; což právě bylo dokázati.

XI.

Když se dva kruhy navzájem uvnittř dotýkají [a vezmeme jejich středy], přímka spojující středy jejich prodloužena jsouc padne do bodu dotyčného těch kruhů.

Nuže dva kruhy ABC, ADE dotýkejte se navzájem uvnitř v bodě A, a za střed kruhu ABC vzato buď F, kruhu pak ADE G; pravím, že přímka spojující G s F prodloužena jsouc padne do A.



Nuže nebuď tak, nýbrž, možno-li, dopadej jako FGH a vedeny buďte spojnice AF, AG.

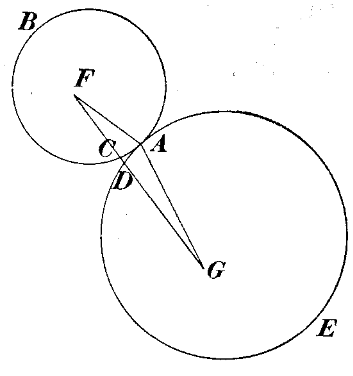
Ježto tedy $(AG + GF) > FA$, t. j. FH, odečtěme společnou FG; zbývající tedy $AG > GH$. AG však $= GD$, tedy $GD > GH$, kratší nad delší, což právě nemožno. Tedy přímka spojující F s G nepadne mimo, tedy padne do A, do bodu dotyčného.

Když se tedy dva kruhy navzájem uvnitř dotýkají — —.

XII.

Když se dva kruhy budou navzájem dotýkati vně, spojnice jejich středů půjde bodem dotyčným.

Nuže dva kruhy ABC, ADE dotýkejte se navzájem vně v bodě A, a za střed v ABC vzato buď F, v ADE pak G; pravím, že přímka spojující F, G půjde bodem dotyčným A.



Nuže, není-li tak, nýbrž, možno-li, jdi jako $FCDG$, a veďme spojnice AF, AG.

Ježto tedy bod F je středem kruhu ABC, $FA = FC$. Dále, ježto bod G je středem kruhu ADE, $GA = GD$. Dokázáno pak, že též $FA = FC$; tedy $FA + AG = FC + DG$; a tak celá FG (t. j. $FC + DG$ a ještě CD) je větší než $FA + AG$, ale též menší (I. XX.); což právě nemožno. Tedy přímka spojující F s G nebude procházeti mimo bod dotyčný A; tedy jím.

Když se tedy dva kruhy budou navzájem — —.

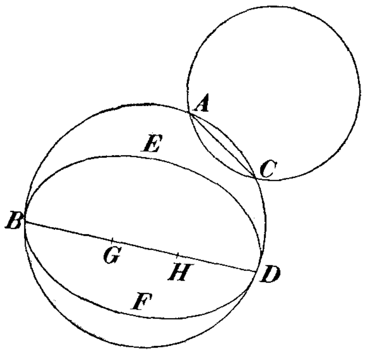
XIII.

Kruh kruhu se nedotýká ve více bodech než v jednom, ať se dotýká vnitř ať vně.

Nuže, možno-li, kruh $ABCD$ dotýkej se kruhu $EBFD$ ve více bodech než v jednom, totiž v D a B. A za střed kruhu $ABCD$ vezměme G, kruhu $EBFD$ H.

Tedy spojnice GH padne do B a D (III. XI.).

Padni jako $BGHD$. A ježto bod G je středem kruhu $ABCD$, $BG = GD$, tedy $BG > HD$, tedy BH o mnoho delší než HD. Dále,



ježto bod H je středem kruhu $EBFD$, $BH = HD$; dokázáno však, že je dokonce o mnoho delší; což právě nemožno. Tedy kruh kruhu uvnitř se nedotýká ve více bodech než v jednom.

Pravím ovšem, že ani vně.

Nuže, možno-li, kruh ACK dotýkej se kruhu $ABCD$ vně ve více bodech než v jednom, totiž v A, C, a vedena buď spojnice AC.

Ježto tedy v kruzích $ABCD$, ACK vzaty jsou na obvodě obou dva nahodilé body (dotyčné) A, C, spojnice tedy těch bodů dovnitř obou padne (III. II.); avšak v $ABCD$ padla dovnitř, v ACK pak vně[4]); což právě nesrovnalost; tedy kruh kruhu se nedotýká vně ve více bodech než v jednom; dokázáno pak, že ani vnitř.

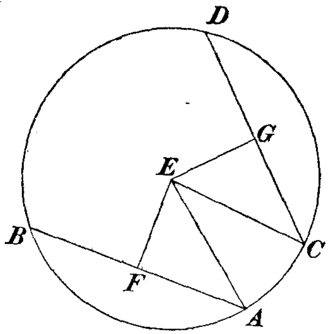
Tedy kruh kruhu se nedotýká ve více bodech — —.

XIV.

V kruhu stejné přímky (tětivy) jsou stejně vzdáleny od středu, a stejně vzdálené od středu jsou navzájem stejné.

Kruhem buď $ABCD$ a v něm stejnými tětivami buďtež AB, CD; pravím, že AB, CD jsou stejně vzdáleny od středu.

Nuže vezměme střed kruhu, a buď jím E, z bodu E k AB, CD veďme kolmice EF, EG a spojnice AE, EC.



Ježto tedy nějaká přímka středem vedená EF nějakou přímku mimostřednou AB protíná kolmo, též ji půlí (III. III.). Tedy $AF = FB$; tedy $AB = 2AF$. Z téže příčiny ovšem též $CD = 2CG$. A ježto $AE = EC$, také $AE^2 = EC^2$. Ale $AE^2 = AF^2 + EF^2$, neboť $\sphericalangle F = R$; a $EC^2 = EG^2 + GC^2$, neboť $\sphericalangle G = R$; tedy $AF^2 + FE^2 = CG^2 + GE^2$, z nichž $AF^2 = CG^2$, neboť $AF = CG$; zbývající tedy $FE^2 = EG^2$; tedy $EF = EG$. Pravíme však, že přímky od středu stejně jsou vzdáleny, když kolmice ze středu k nim vedené sou stejné; tedy AB, CD jsou od středu stejně vzdáleny.

Ale buďte již přímky AB, CD od středu stejně vzdáleny, t. j. buď $EF = EG$; pravím, že též $AB = CD$.

Neboť po téže úpravě podobně dokážeme, že $AB = 2AF$ a $CD = 2CG$, a ježto $AE = CE$, $AE^2 = CE^2$; avšak $AE^2 = EF^2 + FA^2$ a $CE^2 = EG^2 + GC^2$. Tedy $EF^2 + FA^2 = EG^2 + GC^2$, z nichž $EF^2 =$

4) Nejasno. III. vým. 3. praví, že »kruhy navzájem se dotýkají, které zasahujíce se vespolek se neprotínají«, ale ovšem bez důkazu.

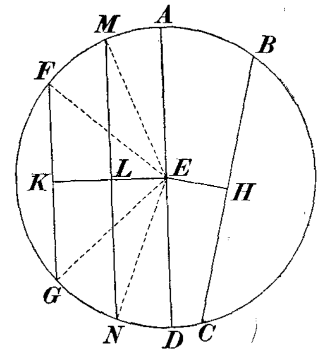
EG^2, neboť $EF = EG$; zbývající tedy $AF^2 = CG^2$; tedy $AF = CG$; a $AB = 2AF$, CD pak $= 2CG$; tedy $AB = CD$.

Tedy v kruhu stejné přímky (tětivy) jsou — —.

XV.

V kruhu nejdelší jest průměr, z ostatních pak přímek vždy středu bližší je delší než ta, která je vzdálenější.

Kruhem buď $ABCD$, průměrem jeho pak buď AD a středem E, a blíže průměru AD buď BC, dále od něho FG; pravím, že nejdelší jest AD, BC pak $> FG$.



Nuže veďme ze středu E k BC, FG kolmice EH, EK. A ježto BC je středu blíže, FG pak od něho dále, tedy $EK > EH$. Buď $EL = EH$ a na bod L k EK spuštěná kolmice LM prodloužena buď do N a vedeny spojnice ME, EN, FE, EG.

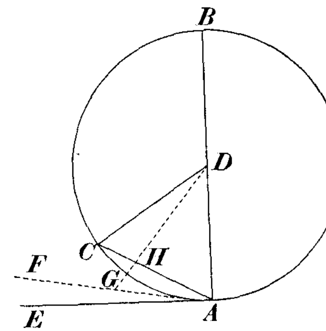
A ježto $EH = EL$, též $BC = MN$ (III. XIV.). Dále, ježto $AE = EM$, $ED = EN$, tedy $AD = ME + EN$. Avšak $(ME + EN) > MN$ [a $AD > MN$], MN pak $= BC$, tedy $AD > BC$. A ježto dvě ME, EN rovnají se se jednotlivě dvěma FE, EG, také $\sphericalangle MEN > FEG$; tedy základna $MN > FG$ (I. XXIV.). Avšak dokázáno, že $MN = BC$ [a $BC > FG$]. Tedy průměr AD nejdelší, BC pak $> FG$.

Tedy v kruhu nejdelší je průměr, z ostatních — —.

XVI.

Kolmice na konci průměru kruhového zřízená padne vně kruhu, a v prostor mezi přímkou (kolmicí) a obvodem nevejde se přímka jiná, a úhel polokružní[5]) větší jest nad jakýkoliv ostrý úhel přímkový, zbývající však jest menší.

Kruhem buď ABC kolem středu D a průměru AB; pravím, že kolmice v A na konci AB vedená padne vně kruhu.



Nuže nebuď tak, nýbrž, možno-li, dopadej dovnitř jako CA, a vedena buď spojnice DC.

Ježto $DA = DC$, též $\sphericalangle DAC = ACD$. DAC však je pravý, tedy též $ACD = R$. V $\triangle ACD$ tedy $\sphericalangle DAC + ACD = 2R$, což právě nemožno. Tedy kolmice vedená z bodu A k BA nepadne dovnitř kruhu. Podobně ovšem dokážeme, že ani na obvod; tedy vně.

5) Míní se úhel, jejž tvoří polokružnice s průměrem.

Dopadej jako AE; pravím již, že v prostor mezi přímkou AE a obloukem CHA nevejde se přímka jiná.

Nuže, možno-li, vložena buď jako FA, a veďme z bodu D k FA kolmici DG. A ježto $\sphericalangle AGD = R$, $\sphericalangle DAG$ však jest menší, tedy $AD > DG$ (I. XIX.). Avšak $DA = DH$, tedy $DH > DG$, kratší nad delší, což právě nemožno. Tedy v prostor mezi kolmicí (tečnou) a obvodem nevejde se přímka jiná.

Pravím, že též úhel polokružní sevřený přímkou BA a obloukem CHA jest větší než jakýkoliv úhel ostrý přímkový, zbývající však sevřený obloukem CHA a přímkou AE jest menší než jakýkoliv úhel ostrý přímkový.

Neboť jest-li nějaký úhel přímkový větší než sevřený přímkou BA a obloukem CHA, menší však než sevřený obloukem CHA a přímkou AE, vejde se v prostor mezi obloukem CHA a přímkou AE přímka, jež utvoří úhel větší než sevřený přímkou BA a obloukem CHA, sevřený totiž přímkami, menší však než sevřený obloukem CHA a přímkou AE. Nevejde se však; tedy nebude nad úhel sevřený přímkou AB a obloukem CHA většího úhlu přímkami sevřeného, ani ajisté menšího nad sevřený obloukem CHA a přímkou AE.

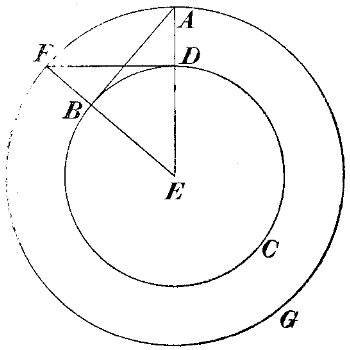
Důsledek.

Z toho jest ovšem patrno, že kolmice k průměru kruhovému na konci vedená dotýká se kruhu [a že přímka kruhu se dotýká pouze v jednom bodě, ježto právě dokázáno, že přímka ve dvou bodech s ním se stýkající dopadá dovnitř]; což právě bylo dokázati.

XVII.

Z daného bodu veď přímku daného kruhu se dotýkající (tečnou).

Danym bodem buď A, daným kruhem BCD; má se tedy z bodu A vésti přímka kruhu BCD se dotýkající.



Nuže vzato buď za střed kruhu E, veďme spojnici AE a ze středu E poloměrem EA narýsujme kruh AFG a z D k EA veďme kolmici DF a spojnice EF, AB; pravím, že z bodu A jest vedena tečná AB kruhu BCD.

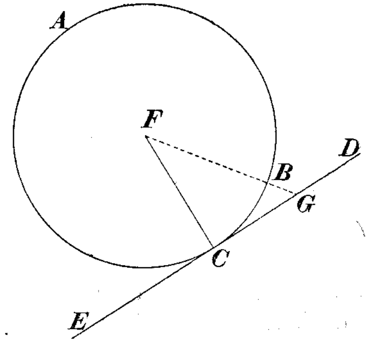
Neboť ježto E je střed kruhů BCD, AFG, tedy $EA = EF$, $ED = EB$; obě ovšem AE, EB stejné jsou s FE, ED, též úhel společný při E svírají; tedy základna $DF = AB$ a $\triangle DEF = EBA$ a zbývající úhly rovny úhlům zbývajícím; tedy $\sphericalangle EDF = EBA$. Avšak $EDF = R$, tedy též $EBA = R$. A jest EB středová; kolmice však vedená na konec průměru [6]) kruhového dotýká se kruhu; tedy AB je tečná kruhu BCD.

[6]) Má býti zde »poloměru«, pro nějž Eukl. nemá názvu. Věc se tím nemění.

Tedy z daného bodu A vedena jest ke kruhu danému BCD tečná; což právě bylo vykonati.

XVIII.

Když se nějaká přímka kruhu dotýká a ze středu k bodu dotyčnému povede se spojnice, spojnice bude kolmicí k tečné.



Nuže kruhu ABC dotýkej se nějaká přímka DE v bodě C a za střed kruhu ABC vezměme F a veďme z F do C spojnici FC; pravím, že FC jest kolmicí k DE.

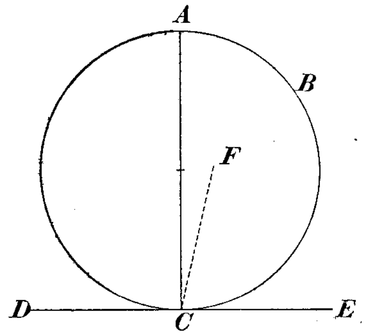
Nuže není-li tak, veďme z F k DE kolmici FG.

Ježto tedy $\sphericalangle FGC$ je pravý, tedy FCG jest ostrý; proti většímu pak úhlu leží delší strrana, tedy $FC > FG$, FC však $= FB$, tedy $FB > FG$, kratší nad delší; což právě nemožno. Tedy FG není kolmicí k DE. Podobně ovšem dokážeme, že ani žádná jiná kromě FC; tedy FC jest kolmicí k DE.

Když se tedy nějaká přímka kruhu dotýká — —.

XIX.

Když se kruhu nějaká přímka dotýká a sestrojí se v bodě dotyčném k tečné kolmice, na kolmici bude střed kruhu.



Nuže kruhu ABC dotýkej se nějaká přímka DE v bodě C, a v bodě C k DE buď vztýčena kolmice CA; pravím, že na AC je střed kruhu.

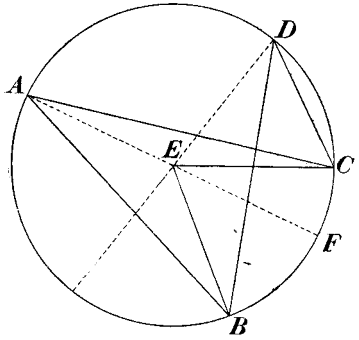
Nuže nebuď tak, nýbrž, možno-li, buď jím F a buď vedena spojnice CF.

Ježto kruhu ABC dotýká se nějaká přímka DE a ze středu k bodu dotyčnému jest vedena FC, tedy FC je kolmicí k DE (III. XVIII.), tedy $\sphericalangle FCE = R$. Jest pak též $ACE = R$; tedy $\sphericalangle FCE = ACE$, menší většímu, což právě nemožno. Tedy není bod F středem kruhu ABC. Podobně ovšem dokážeme, že ani žádný jiný leč na AC.

Když se tedy kruhu nějaká přímka dotýká — —.

XX.

V kruhu jest úhel středový dvakrát větší než úhel obvodový, když ty úhly za základnu mají týž oblouk.



Kruhem buď ABC a úhlem jeho středovým BEC, obvodovým pak BAC, a mějte za základnu týž oblouk BC; pravím, že $\sphericalangle BEC = 2\,BAC$.

Nuže spojnice AE buď prodloužena do F.

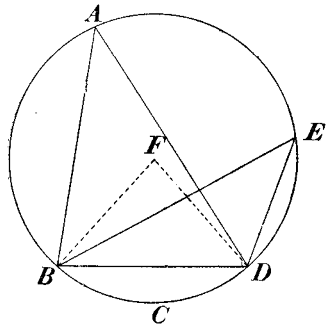
Ježto tedy $EA = EB$ a $\sphericalangle EAB = EBA$, tedy $\sphericalangle EAB + EBA = 2EAB$. Úhel pak $BEF = EAB + EBA$, tedy též $BEF = 2\,EAB$. Z téže příčiny ovšem též $\sphericalangle FEC = 2\,EAC$. Tedy celý $\sphericalangle BEC = 2\,BAC$.

Tož dále budiž úhel odehnut[7] a druhým úhlem buď BDC a spojnice DE buď prodloužena do G. Podobně ovšem dokážeme, že $\sphericalangle GEC = 2\,EDC$, z nichž $GEB = 2\,EDB$; tedy zbývající $BEC = 2\,BDC$.

V kruhu tedy jest úhel středový — —.

XXI.

Úhly v kruhu na téže úseči jsou si navzájem rovny[8]).



Kruhem buď $ABCD$, a na téže úseči $BAED$ buďtež $\sphericalangle BAD$, BED; pravím, že $\sphericalangle BAD = BED$.

Nuže vezměme střed kruhu $ABCD$, a buď jím F, a veďme spojnice BF, FD.

A ježto $\sphericalangle BFD$ je středový a $\sphericalangle BAD$ obvodový a mají za základnu týž oblouk BCD, tedy $\sphericalangle BFD = 2\,BAD$. Z téže příčiny ovšem $\sphericalangle BFD = 2\,BED$ (III. xx.); tedy $\sphericalangle BAD = BED$.

Tedy úhly v kruhu na téže úseči — —.

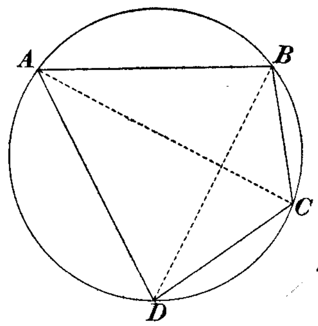
XXII.

Protější úhly čtyřúhelníků v kruzích rovnají se dvěma pravým.

Kruhem buď $ABCD$ a v něm čtyřúhelníkem buď $ABCD$; pravím, že protější úhly (součtem) rovnají se dvěma pravým.

[7]) T. j. úhel obvodový buď posunut z polohy BAC do polohy BDC.

[8]) Míní se úhly obvodové na témž oblouku.



Veďme spojnice AC, BD.

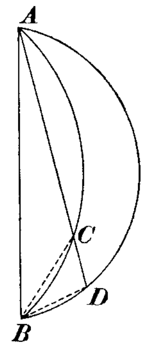
Ježto tedy v každém trojúhelníku tři úhly (vnitřní) rovnají se dvěma pravým (I. xxxii.), tedy v $\triangle ABC$ tři úhly CAB, ABC, BCA rovnají se dvěma pravým. Avšak $\sphericalangle CAB = BDC$, neboť jsou na téže úseči $BADC$; $\sphericalangle ACB$ však $= ADB$, neboť jsou na téže úseči $ADCB$; tedy celý $\sphericalangle ADC = BAC + ACB$. Společným přičtěme $\sphericalangle ABC$; tedy $\sphericalangle ABC + BAC + ACB = ABC + ADC$. Avšak $\sphericalangle ABC + BAC + ACB = 2\,R$. Tedy též $\sphericalangle ABC + ADC = 2\,R$.

Podobně ovšem dokážeme, že též $\sphericalangle BAD + DCB = 2\,R$.

Tedy protější úhly čtyřúhelníků — —.

XXIII.

Na téže straně téže přímky nesestrojíš dvou úsečí kruhových podobných a nestejných.



Nuže, možno-li, buďte na téže straně téže přímky AB sestrojeny dvě podobné a nestejné úseče ACB, ADB a vedena buď ACD i spojnice CB, DB.

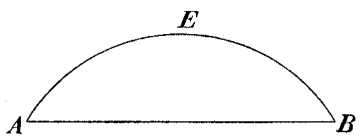
Ježto tedy úseč ACB podobna jest úseči ADB; podobné však úseče kruhů jsou ty, které objímají stejné úhly; tedy $\sphericalangle ACB = ADB$, vnější vnitřnímu, což právě nemožno.

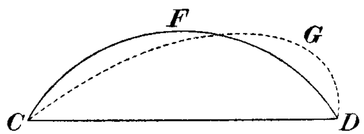
Tedy na téže straně téže přímky — —.

XXIV.

Na stejných přímkách podobné úseče kruhové jsou si navzájem rovny.

Nuže buďte na stejných přímkách AB, CD podobné úseče kruhové AEB, CFD; pravím, že úseč $AEB = CFD$.





Neboť položíme-li úseč AEB na CFD a připadne-li bod A na C a přímka AB na CD, bude se krýti též bod B s bodem D, ježto $AB = CD$; když pak AB pokryje CD, také úseč AEB bude krýti CFD. Neboť bude-li přímka AB krýti CD, úseč pak AEB nebude krýti CFD, buď padne dovnitř nebo ven nebo se uchýlí jako CGD a kruh bude protínati ve více bodech než ve dvou; což právě nemožno (III. x.)[9]. Tedy položíme-li přímku AB na CD, nebude možno, by se též úseč AEB nekyla s CFD; tedy se bude krýti a bude jí rovna.

Tedy na stejných přímkách podobné úseče — —.

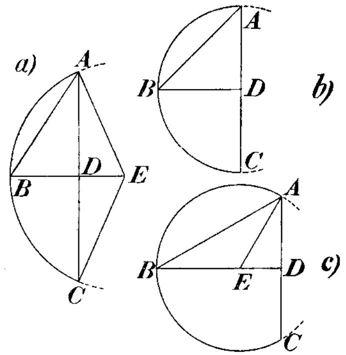
XXV.

K dané úseči kruhové přirýsuj kruh, jehož jest úsečí.

Danou úsečí kruhovou buď ABC; tož má se k úseči ABC přirýsovati kruh, jehož jest úsečí.

Nuže rozpolme AC v D a veďme z bodu D kolmici k AC, totiž DB, a spojnici AB; tedy $\sphericalangle ABD \gtreqless BAD$.

a) Buď nejprve větší, a sestrojen buď ku přímce BA a z bodu na ní A $\sphericalangle BAE = ABD$ a prodloužena buď DB do E a vedena spojnice EC, Ježto tedy $\sphericalangle ABE = BAE$, tedy též přímka $EB = EA$ (I. vi.). A ježto $AD = DC$, společná pak DE, patrně AD, DE stejné jsou jednotlivě s CD, DE a $\sphericalangle ADE = CDE$, neboť jsou oba pravé; základna tedy $EA = CE$. Avšak dokázáno bylo, že $AE = BE$, tedy též $BE = CE$; tedy tři: AE, EB, EC jsou si navzájem rovny; tedy kruh ze středu E poloměrem AE neb EB neb EC rýsovaný půjde též body zbývajícími a bude přirýsován. Tedy k dané úseči kruhové přirýsován kruh. A patrno, že úseč ABC jest menší než polokruh, ježto střed E připadá mimo ni.



b) Podobně též, bude-li $\sphericalangle ABD = BAD$, stane-li se AD stejnou s BD nebo DC, tři: DA, DB, DC budou si navzájem rovny, a bude D středem kruhu doplněného a bude ABC patrně polokruhem.

c) Pakli $\sphericalangle ABD$ bude $< BAD$ a sestrojíme-li na přímce BA a v bodu na ní A úhel rovný úhlu ABD, připadne střed dovnitř úseče ABC na DB a bude patrně úseč ABC polokruhu větší.

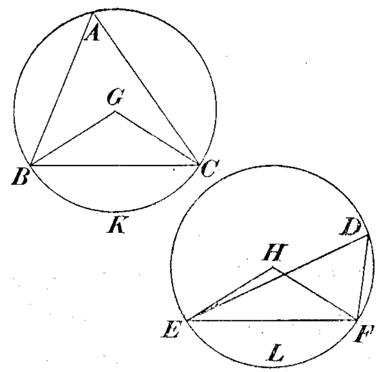
Tedy k dané úseči kruhové přirýsován jest kruh; což právě bylo vykonati.

XXVI.

Ve stejných kruzích stejné úhly stojí na stejných obloucích, ať jsou to středové ať obvodové.

[9]) K prvním dvěma případům nehledí; ostatně viz III. xxiii.

Buďte stejnými kruhy ABC, DEF, a v nich buďte stejnými úhly středovými BGC, EHF, obvodovými pak BAC, EDF; pravím, že oblouk $BKC = ELF$.



Nuže veďme spojnice BC, EF.

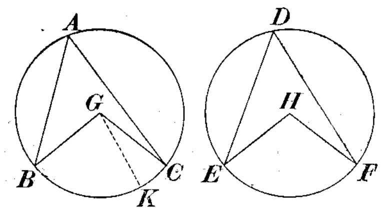
A ježto kruhy ABC, DEF jsou stejné, jsou též poloměry stejné; tedy BG, GC stejné s EH, HF a $\sphericalangle G = \sphericalangle H$, tedy třetí přímka $BC = EF$. A ježto $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, tedy úseč $BAC \sim EDF$, a jsou na stejných přímkách; podobné však úseče kruhové na stejných přímkách jsou si navzájem rovny (III. xxiv.); tedy úseč $BAC = DEF$. Jest pak i celý kruh $ABC = DEF$; tedy zbývající oblouk $BKC = ELF$.

Tedy ve stejných kruzích stejné úhly — —.

XXVII.

Úhly ve stejných kruzích stojící na stejných obloucích jsou si navzájem rovny, ať jsou to středové ať obvodové.

Nuže ve stejných kruzích ABC, DEF na stejných obloucích BC, EF stůjte při středech G, H středové úhly BGC, EHF; pravím, že $\sphericalangle BGC = EHF$ a $\sphericalangle BAC = EDF$.



Neboť není-li $\sphericalangle BGC = EHF$, jeden z nich je větší. Buď větším BGC, a sestrojen buď na přímku BG a z bodu na ní G $\sphericalangle BGK = EHF$; stejné však úhly stojí na stejných obloucích, když jsou středové; tedy oblouk $BK = EF$. Avšak $EF = BC$, tedy též $BK = BC$, menší většímu; což právě nemožno.

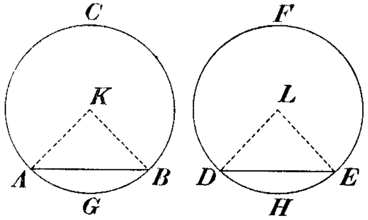
Tedy $\sphericalangle BGC$ není neroven úhlu EHF; tedy roven. A $\sphericalangle \frac{BGC}{2} = \sphericalangle A$, $\sphericalangle \frac{EHF}{2} = \sphericalangle D$, tedy též $\sphericalangle A = \sphericalangle D$.

Tedy úhly ve stejných kruzích — —.

XXVIII.

Ve stejných kruzích stejné tětivy odtínají oblouky stejné, větší s větším stejný, menší pak s menším.

Stejnými kruhy buďtež ABC, DEF, a v těch kruzích stejnými tětivami buďtež AB, DE a odtínejtež oblouky větší ABC, DEF



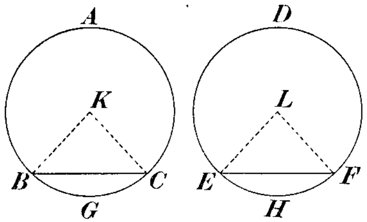
a menší AGB, DHE; pravím, že větší oblouk $ACB = DEF$ a menší $AGB = DHE$.

Nuže vezměme za středy kruhů K, L a veďme spojnice AK, KB, DL, LE. A ježto jsou kruhy stejné, stejné jsou též poloměry; obě tedy AK, $KB =$ oběma DL, LE a třetí $AB = DE$; tedy $\sphericalangle AKB = DLE$. Stejné pak úhly stojí na stejných obloucích, když jsou středové; tedy oblouk $AGB = DHE$. Jest pak též celý kruh ABC roven kruhu DEF, tedy též oblouk zbývající $ACB =$ oblouku zbývajícímu DFE.

Tedy ve stejných kruzích stejné tětivy — —.

XXIX.

Ve stejných kruzích proti stejným obloukům leží stejné tětivy.



Stejnými kruhy buďtež ABC, DEF a v nich odťaty buďte stejné oblouky BGC, EHF, a veďme spojnice BC, EF; pravím, že $BC = EF$.

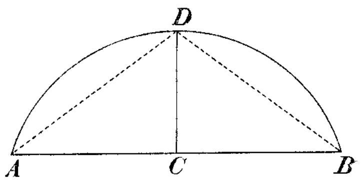
Nuže vezměme středy kruhův, a buďte jimi K, L, a veďme spojnice BK, KC, EL, LF. A poněvadž oblouk $BGC = EHF$, též $\sphericalangle BKC = ELF$. A ježto kruhy ABC, DEF jsou stejné, stejné jsou též poloměry. Obě tedy BK, $KC = EL$, LF, též úhly svírají stejné. Tedy třetí strana $BC = EF$.

Tedy ve stejných kruzích proti stejným obloukům — —.

XXX.

Rozpol daný oblouk.

Daným obloukem buď ADB; tož má se oblouk ADB rozpůliti.



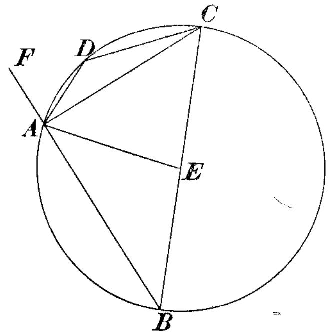
Veďme spojnici AB a rozpolme ji v C a z bodu C veďme ku přímce AB kolmici CD a spojnice AD, DB.

A ježto $AC = CB$, společnou pak CD, obě patrně AC, $CD = BC$, CD, též $\sphericalangle ACD = BCD$, neboť oba jsou pravé; tedy třetí $AD = DB$. Stejné však tětivy odtínají oblouky stejné, větší s větším, menší s menším; i jsou oba z oblouků menší než polokružnice; tedy oblouk $AD = DB$.

XXXI.

Úhel v kruhu na polokruží (obvodový) jest pravý, ve větší úseči menší než pravý, v menší pak úseči větší než pravý; a mimo to úhel úseče[10]) větší jest pravého větší, úhel úseče menší jest pravého menší.

Kruhem buď $ABCD$, průměrem jeho BC a středem E, a veďme spojnice BA, AC, AD, DC; pravím, že $\sphericalangle BAC$ na polokruží jest pravý, v úseči pak ABC, polokruhu větší, jest $\sphericalangle ABC < R$, v úseči ADC, polokruhu menší, jest $\sphericalangle ADC > R$.



Veďme spojnici AE a prodlužme BA do F.

A ježto $BE = EA$, též $\sphericalangle ABE = BAE$. Dále, ježto $CE = EA$, též $\sphericalangle ACE = CAE$. Tedy celý $\sphericalangle BAC = ABC + ACB$. Také však $\sphericalangle FAC$, vně trojúhelníku ABC, rovná se $\sphericalangle ABC + ACB$; tedy $BAC = FAC$, tedy jsou oba pravé; tedy (obvodový) $\sphericalangle BAC$ v polokruhu BAC je pravý.

A ježto v $\triangle ABC$ dva úhly $(ABC + BAC) < 2R$, úhel však $BAC = R$, tedy $\sphericalangle ABC < R$ a jest v úseč ABC, ve větší než polokruh.

A ježto v kruhu je čtyřúhelník $ABCD$ a protější úhly čtyřúhelníků v kruzích rovnají se dvěma pravým (III. XXII.) [tedy $\sphericalangle ABC + ADC = 2R$] a $\sphericalangle ABC < R$; tedy zbývající $\sphericalangle ADC > R$ a jest v úseči ADC, v menší než polokruh.

Pravím, že též úhel úseče větší, sevřený obloukem ABC a přímkou AC je větší než pravý, úhel pak menší úseče, sevřený obloukem ADC a přímkou AC, jest menší než pravý. Také je to hned patrno. Ježto totiž úhel přímek BA, AC je pravý, tedy úhel sevřený obloukem ABC a přímkou AC jest větší než pravý. Dále, ježto úhel přímek AC, AF jest pravý, tedy úhel sevřený přímkou CA a obloukem ADC jest menší než pravý.

Tedy úhel v kruhu na polokruží — —.

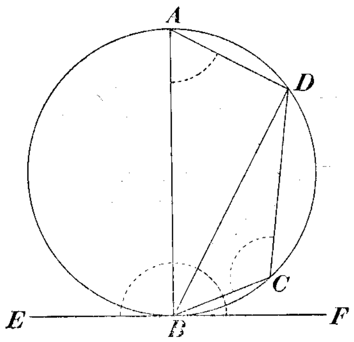
XXXII.

Když se bude kruhu dotýkati nějaká přímka (tečná) a sestrojí se z bodu dotyčného do kruhu nějaká přímka kruh sekoucí (tětiva n. sečná), úhly, které činí stečnou, budou střídavě rovny úhlům (obvodovým) v úsečích kruhu.

Nuže kruhu $ABCD$ dotýkej se nějaká přímka EF v bodě B, a z bodu B veďme nějakou přímku BD do kruhu $ABCD$ jej sekoucí; pravím, že úhly, jež tvoří BD s tečnou, budou střídavě rovny úhlům v úsečích kruhu, t. j. že $\sphericalangle FBD$ rovná se úhlu sestrojenému v úseči BAD, úhel pak EBD rovná se úhlu sestrojenému v úseči DCB.

---

[10]) Úhel úseče jest sevřen tětivou a obloukem úseče (III. vým. 7.).



Nuže z B veďme k EF kolmici BA a vezměme na oblouku BD kterýkoli bod C a veďme spojnice AD, DC, CB.

A ježto kruhu $ABCD$ dotýká se nějaká přímka EF v B a z bodu dotyčného vedena jest kolmice BA, tedy na BA je střed kruhu $ABCD$. Tedy BA je průměr kruhu $ABCD$, tedy $\sphericalangle ADB$ jsa v polokruží je pravý. Tedy ostatní $BAD + ABD = R$. Je však též $\sphericalangle ABF = R$; tedy $\sphericalangle ABF = BAD + ABD$. Odečtěme společný ABD, tedy zbývající $\sphericalangle DBF = BAD$, střídavě v úseči kruhu.

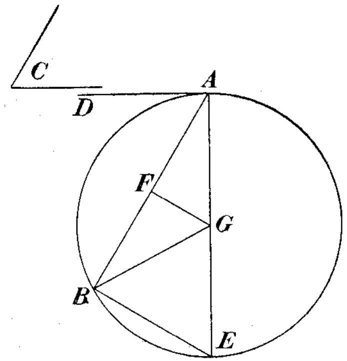
A ježto $ABCD$ je čtyřúhelník v kruhu, protější úhly jeho rovnají se dvěma pravým (III. XXII.). Jsou pak též $\sphericalangle DBF + DBE = 2R$; tedy úhly $DBF + DBE = BAD + BCD$, z nichž $\sphericalangle BAD$, jak bylo dokázáno, roven úhlu DBF; tedy zbývající $\sphericalangle DBE = DCB$, střídavě v kruhové úseči DCB.

Když se tedy bude kruhu dotýkati — —.

XXXIII.

N a r ý s u j n a d a n é p ř í m c e ú s e č k r u h o v o u o b s a h u j í c ú h e l (o b v o d o v ý) r o v n ý ú h l u d a n é m u p ř í m k o v é m u.

Danou přímkou buď AB, daným pak úhlem přímkovým $\sphericalangle C$; tož má se narýsovati na dané přímce AB úseč kruhová obsahující úhel stejný s $\sphericalangle C$.

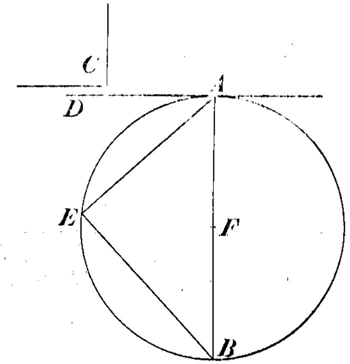


Úhel C jest ovšem buď ostrý buď pravý buď tupý.

a) Buď nejprve ostrý a buď jako v prvním vyobrazení sestrojen na přímce AB a z bodu A $\sphericalangle BAD = C$, tedy též BAD jest ostrý. Vedena buď k DA kolmice AE a buď AB v F rozpůlena a z bodu F k AB sestrojena kolmice FG a spojnice GB.

A ježto $AF = FB$, společnou pak FG, obě patrně AF, FG rovnají se oběma BF, FG, a $\sphericalangle AFG = BFG$, tedy třetí $AG = BG$. Tedy kruh sestrojený ze středu G poloměrem GA půjde též bodem B. Buď sestrojen a budiž to ABE a vedena spojnice EB. Ježto tedy na konci průměru AE v bodě A vedena kolmice k AE, tedy AD se kruhu dotýká; ježto tedy kruhu ABE dotýká se nějaká přímka AD a z bodu dotyčného A do kruhu ABE vedena nějaká přímka AB, tedy $\sphericalangle DAB = AEB$, střídavě v úseči kruhové. Avšak $\sphericalangle DAB = C$, tedy též $\sphericalangle C = AEB$. Tedy k dané přímce AB narýsována úseč kruhová AEB, obsahující $\sphericalangle AEB$ rovný danému $\sphericalangle C$.

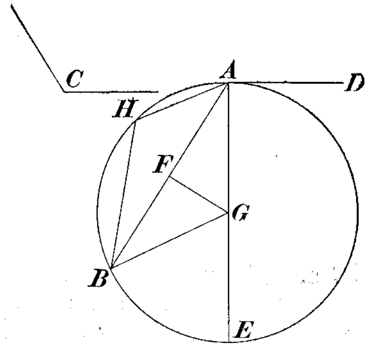
b) Nuže buď již $\sphericalangle C$ pravým, a buď opět úkolem na AB narýsovati úseč kruhovou obsahující úhel rovný pravému $\sphericalangle C$.



Sestrojen buď $\sphericalangle BAD = C$, jak ukazuje vyobrazení druhé, a buď AB v F rozpůlena a ze středu F poloměrem FA nebo FB narýsován kruh AEB. Tedy přímka AD je tečná kruhu ABE, protože $\sphericalangle A$ jest pravý, a $\sphericalangle BAD$ rovná se úhlu v úseči AEB, neboť též on je pravý, jsa na polokruží. Ale též $\sphericalangle BAD = C$, tedy rovněž $\sphericalangle AEB = C$.

Tedy sestrojena jest opět úseč kruhová na AB obsahující $\sphericalangle AEB$ rovný úhlu C.

c) Nuže buď již $\sphericalangle C$ tupým, a sestrojen buď jemu rovný na přímce AB z bodu A, totiž BAD, jak ukazuje vyobrazení třetí, a k AD veďme kolmici AE a rozpolme opět AB v F a k AB veďme kolmici FG a spojnici GB.

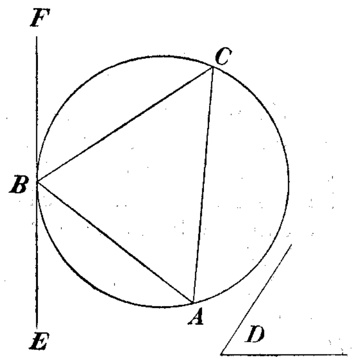


A ježto opět $AF = FB$ a společnou FG, patrně AF, $FG = BF$, FG a $\sphericalangle AFG = BFG$; tedy třetí $AG = BG$; tedy kruh narýsovaný ze středu G poloměrem GA půjde i bodem B. Jdiž jako AEB. A ježto na konci průměru AE jest kolmice AD, jest tedy AD tečnou kruhu AEB. A z bodu dotyčného A vedena jest AB; tedy $\sphericalangle BAD$ rovná se úhlu sestrojenému střídavě v úseči kruhové AHB. Avšak $\sphericalangle BAD = C$, tedy též úhel v úseči $AHB = C$.

Tedy na dané přímce AB narýsována jest úseč kruhová AHB obsahující úhel rovný úhlu C; což právě bylo vykonati.

XXXIV.

O d e t n i ž o d k r u h u d a n é h o ú s e č o b s a h u j í c í ú h e l ú h l u d a n é m u p ř í m k o v é m u r o v n ý.



Daným kruhem buď ABC, daným úhlem přímkovým $\sphericalangle D$; tož má se od kruhu ABC odtíti úseč obsahující úhel úhlu danému přímkovému D rovný.

Veďme bodem B k ABC tečnou EF a sestrojme na přímce FB v bodě na ní B $\sphericalangle FBC = D$.

Ježto tedy kruhu ABC dotýká se nějaká přímka EF a z bodu dotyčného B vedena BC, tedy $\sphericalangle FBC$ rovná se úhlu sestrojenému střídavě v úseči BAC, t. j.

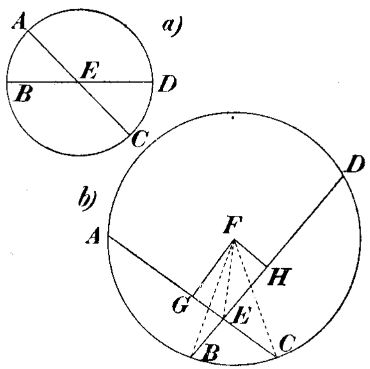
$\sphericalangle A$. Avšak $\sphericalangle FBC = D$; tedy též úhel v úseči BAC rovná se úhlu D.

Tedy od kruhu daného ABC odťata jest úseč BAC obsahující — —.

XXXV.

Když se v kruhu dvě přímky navzájem protínají, pravoúhelník sevřený úsečkami jedné rovná se pravoúhelníku sevřenému úsečkami druhé.

Nuže v kruhu $ABCD$ protínejte se dvé přímky AC, BD navzájem v bodě E; pravím, že pravoúhelník sevřený úsečkami AE, EC rovná se pravoúhelníku sevřenému úsečkami DE, EB.



Jdou-li ovšem AC, BD středem, tak aby E bylo středem kruhu $ABCD$; patrno, ježto $AE = EC = DE = EB$, že též pravoúhelník $AD \times EC = DE \times EB$ (*a*).

Nejdětež tedy AC, DB středem, a vezměme střed kruku $ABCD$, a buď jím F (*b*), a z F ku přímkám AC, DB veďme kolmice FG, FH a spojnice FB, FC, FE.

A ježto nějaká přímka GF středem jdoucí na nějaké přímce mimostředné AC stojí kolmo, též ji půlí; tedy $AG = GC$. Ježto tedy přímka AC rozdělena jest na díly stejné v G, na nestejné pak v E, tedy pravoúhelník $AE \times EC + EG^2 = GC^2$ (II. v.); přičtěme společný GF^2; tedy $AE \times EC + GE^2 + GF^2 = CG^2 + GF^2$. Avšak $EG^2 + GF^2 = FE^2$ a $CG^2 + GF^2 = FC^2$; tedy $AE \times EC + FE^2 = FC^2$, FC však $= FB$; tedy $AE \times EC + EF^2 = FB^2$. Z téže příčiny ovšem $DE \times EB + FE^2 = FB^2$. Bylo však dokázáno, že také $AE \times EC + FE^2 = FB^2$; tedy $AE \times EC + FE^2 = DE \times EB + FE^2$. Odečteno buď společné FE^2; tedy zbývající $AE \times EC = DE \times EB$.

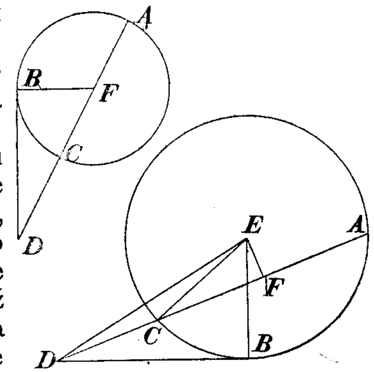
Když se tedy v kruhu dvě přímky navzájem protínají, — —.

XXXVI.

Když se vezme nějaký bod vně kruhu a budou z něho na kruh dopadati dvě přímky a jedna z nich bude kruh protínati, druhá pak se ho dotýkati, pravoúhelník sevřený celou sečnou a úsečkou vnější mezi bodem a obloukem vypuklým bude se rovnati čtverci z tečné.

Nuže vezměme nějaký bod D vně kruhu ABC, a z D na kruh ABC dopadejte dvě přímky DCA, DB a DCA protínej kruh ABC, BD pak se ho dotýkej; pravím, že $AD \times DC = DB^2$.

DAC zajisté jde buď středem buď mimo. Jdiž nejprve středem, a buď F středem kruhu ABC, a veďme spojnici FB; tedy $\sphericalangle FBD = R$. A ježto přímka AC v F jest rozpůlena a druží se k ní CD, tedy $AD \times DC + FC^2 = FD^2$ (I. vi.). FC pak $= FB$; tedy $AD \times DC + FB^2 = FD^2$. Avšak $FD^2 = FB^2 + BD^2$; tedy $AC \times DC + FB^2 = FB^2 + BD^2$. Společný FB^2 odečtěme; zbývající tedy $AD \times DC$ rovná se čtverci z tečné DB.



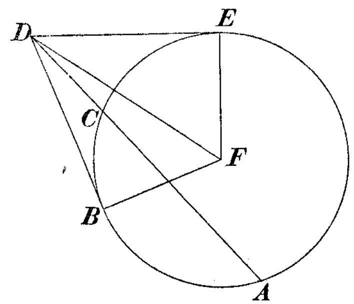
Avšak již nejdi DCA středem kruhu ABC, a vezměme za střed E a veďme z E k AC kolmici EF a spojnice EB, EC, ED; tedy $\sphericalangle EBD$ jest pravý. A ježto přímka nějaká středová EF ku přímce nějaké mimostředné AC stojí kolmo, též ji půlí; tedy $AF = FC$. A ježto přímka AC jest rozpůlena v bodě F a druží se k ní CD, tedy $AD \times DC + FC^2 = FD^2$. Společným buď FE^2; tedy $AD \times DC + FC^2 + FE^2 = FD^2 + FE^2$. Avšak $CF^2 + FE^2 = EC^2$, neboť $\sphericalangle EFC = R$; $DF^2 + FE^2$ však $= ED^2$; tedy $AD \times DC + EC^2 = ED^2$. Avšak $EC = EB$; tedy $AD \times DC + EB^2 = ED^2$. ED^2 však $= EB^2 + BD^2$, neboť $\sphericalangle EBD = R$; tedy $AD \times DC + EB^2 = EB^2 + BD^2$. Odečtěme společný EB^2; zbývající tedy $AD \times DC = DB^2$.

Když se tedy vezme nějaký bod vně kruhu — —.

XXXVII.

Když se vezme nějaký bod vně kruhu a budou z něho na kruh dopadati dvě přímky a jedna z nich bude kruh protínati, druhá pak ho dosahovati a pravoúhelník sevřený celou sečnou a úsečkou vnější mezi bodem a obloukem vypuklým bude se rovnati čtverci přímky dosahující, přímka dosahující bude se kruhu dotýkati.

Nuže vezměme nějaký bod D vně kruhu ABC a z D na kruh ABC dopadejte dvě přímky DCA, DB a DCA protínej kruh, DB pak ho dosahuj a buď pravoúhelník $AD \times DC = DB^2$; pravím, že DB dotýká se kruhu ABC.



Nuže veďme k ABC tečnu DE a vezměme střed kruhu ABC, a buď jím F, a veďme spojnice FE, FB, FD. Tedy $\sphericalangle FED = R$. A ježto DE je tečná kruhu ABC, DCA pak sečná, tedy $AD \times DC = DE^2$ (III. xxxvi.). A byl také $AD \times DC = DB^2$, tedy $DE^2 = DB^2$, tedy $DE = DB$; také však $FE = FB$; tož DE, $EF = DB$, BF; a základna jejich společná FD; tedy $\sphericalangle DEF = DBF$. Avšak

$DEF = R$; tedy též $\sphericalangle DBF = R$. I jest FB, prodloužena jsouc, průměrem; přímka však na konci průměru kruhového kolmo vedená dotýká se kruhu; tedy DB je tečná kruhu ABC.

Podobný ovšem bude důkaz, když bude střed náhodou na AC.
Když se tedy vezme nějaký bod vně kruhu — —.

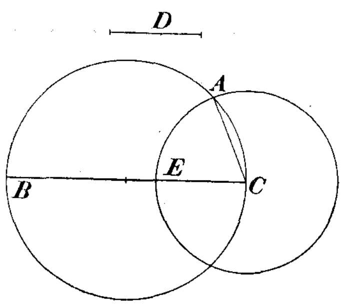
Kniha čtvrtá.

Výměry.

1. Pravíme, že obrazec přímkový do obrazce přímkového vpisujeme, když každý z úhlův obrazce vpisovaného dotýká se každé strany obrazce, do něhož jej vpisujeme.
2. Podobně pravíme, že obrazec kol obrazce opisujeme, když každá strana opisovaného dotýká se každého úhlu obrazce, kol něhož jej opisujeme.
3. Pravíme, že obrazec přímkový do kruhu vpisujeme, když každý úhel vpisovaného dotýká se obvodu kruhu.
4. Pravíme pak, že obrazec přímkový kol kruhu opisujeme, když každá strana opisovaného dotýká se obvodu kruhu.
5. Podobně pak kruh, jak pravíme, do obrazce vpisujeme, když obvod kruhu dotýká se každé strany obrazce, do něhož jej vpisujeme.
6. O kruhu pak pravíme, že jej kol obrazce opisujeme, když obvod kruhu dotýká se každého úhlu obrazce, kol něhož jej opisujeme.
7. O přímce pravíme, že ji do kruhu zapouštíme, když mezné body její jsou na obvodě kruhu.

I.

Zapusť do kruhu daného přímku danou ne větší průměru kruhu.



Daným kruhem buď ABC, danou pak přímkou ne větší než průměr kruhu buď D; má se tedy do kruhu ABC zapustiti přímka přímce D rovná.

Veďme v kruhu ABC průměr BC. Jest-li ovšem $BC = D$, byla by úloha vykonána; zapuštěna zajisté do kruhu ABC přímka BC stejná s D.

Pakli $BC > D$, buď $CE = D$, a z C rozpětím CE narýsujme EAF a veďme spojnici CA.

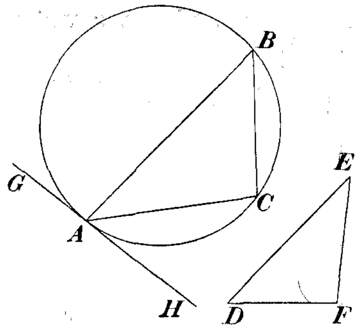
Ježto tedy bod C je středem kruhu EAF, jest $CA = CE$. Avšak $CE = D$; tedy též $D = CA$.

Tedy do kruhu daného ABC — —.

II.

Vpiš do kruhu daného trojúhelník s daným trojúhelníkem stejnoúhlý.

Daným kruhem buď ABC, daným pak trojúhelníkem DEF; má se tedy do kruhu ABC vepsati trojúhelník s daným trojúhelníkem stejnoúhlý.



Veďme ke kruhu ABC tečnou GH v A a sestrojme na přímce AH a v bodě na ní A $\sphericalangle HAC = DEF$, na AG v bodě na ní A $\sphericalangle GAB = DFE$ a spojnici BC.

Ježto tedy kruhu ABC dotýká se nějaká přímka AH a z bodu dotyčného A do kruhu vedena přímka AC, tedy $\sphericalangle HAC = ABC$ střídavě v úseči kruhu (III. XXXII.). Avšak $HAC = DEF$, tedy též $\sphericalangle ABC = DEF$.

Z téže příčiny ovšem též $\sphericalangle ACB = DFE$; tedy také zbývající $\sphericalangle BAC = EDF$ [tedy $\triangle ABC$ je stejnoúhlý s trojúhelníkem daným a jest vepsán do kruhu ABC].

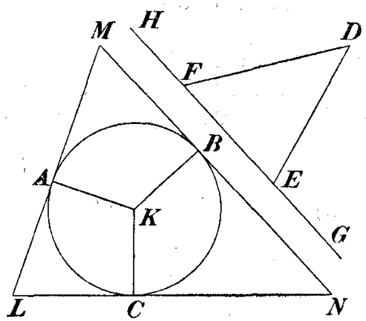
Tedy do kruhu daného jest vepsán — —.

III.

Opiš kolem daného kruhu trojúhelník s trojúhelníkem daným stejnoúhlý.

Daným kruhem buď ABC, daným trojúhelníkem DEF; má se tedy kolem kruhu ABC opsati trojúhelník s trojúhelníkem DEF stejnoúhlý.

Prodlužme EF na obě strany do bodu G, H a za střed kruhu ABC vezměme K a veďme libovolně přímku KB a sestrojme na přímce KB v bodě na ní K $\sphericalangle BKA = DEG$ a $\sphericalangle BKC = DFH$ a v bodech A, B, C veďme ke kruhu ABC tečné LAM, MBN, NCL.



A ježto LM, MN, NL kruhu ABC se dotýkají v bodech A, B, C a ze středu K k bodům A, B, C vedeny jsou KA, KB, KC, tedy úhly při bodech A, B, C jsou pravé. A ježto ve čtyřúhelníku $AMBK$ čtyři úhly rovnají se čtyřem pravým a úhly KAM, KBM jsou pravé, tedy zbývající $\sphericalangle AKB + AMB = 2R$. Jsou pak též $\sphericalangle DEG + DEF = 2R$; tedy $\sphericalangle AKB + AMB = DEG + DEF$, z nichž $\sphericalangle AKB = DEG$; tedy zbývající $\sphericalangle AMB = DEF$. Podobně ovšem se dokáže, že též $\sphericalangle LNB = DFE$; tedy zbývající $\sphericalangle MLN = EDF$. Tedy $\triangle LMN$ je stejnoúhlý s $\triangle DEF$ a jest opsán kolem kruhu ABC.

Kolem daného tedy kruhu jest opsán — —.

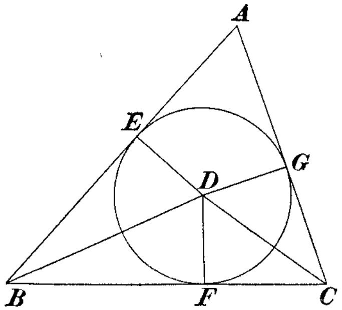
IV.

Do trojúhelníku daného vpiš kruh.

Daným trojúhelníkem buď ABC; má se tedy do trojúhelníku ABC vepsati kruh.

Úhly ABC, ACB buďte rozpůleny přímkami BD, CD a ty stýkejte se v bodě D, a vedeny buďte z D k AB, BC, CA kolmice DE, DF, DG.

A ježto $\sphericalangle ABD = CBD$, jest pak i $\sphericalangle BED = BFD = R$; oba tedy trojúhelníky EBD, FBD mají po dvou úhlech stejných a jednu stranu rovnou jedné straně, t. BD, která ležíc proti jednomu ze stejných úhlů jest jim společná; tedy též ostatní strany budou míti stejné se stranami ostatními; tedy $DE = DF$. Z téže příčiny ovšem též $DG = DF$. Tedy tři přímky DE, DF, DG jsou navzájem stejné; pročež kruh rýsovaný ze středu D rozpětím E (t. DE), F nebo G půjde též ostatními body a dotkne se přímek AB, BC, CA, ježto úhly při E, F, G jsou pravé. Neboť bude-li je protínati, dopadne kolmice na konci průměru kruhu sestrojená dovnitř kruhu; což, jak dokázáno (III. XVI.), jest nemožno; tedy kruh rýsovaný ze středu D rozpětím E neb F nebo G nebude protínati přímek AB, BC, CA; tedy se jich bude dotýkati a bude to kruh vepsaný do ABC. Vepsán buď jako FGE.



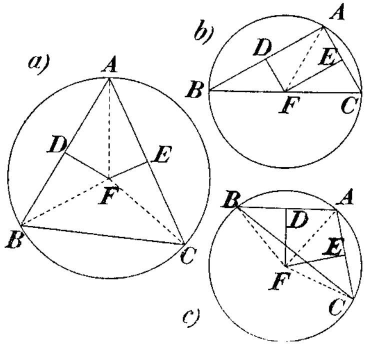
Tedy do daného trojúhelníku ABC jest vepsán — —.

V.

Kolem daného trojúhelníku opiš kruh.

Daným trojúhelníkem buď ABC; má se tedy kolem daného $\triangle ABC$ opsati kruh.

Přímky AB, AC buďte rozpůleny v bodech D, E a z bodů D, E k AB, AC vedeny kolmice DF, EF; tož se setkají buď uvnitř trojúhelníku nebo na přímce BC nebo vně BC.



a) Setkejte se nejprve vnitř v F, a veďme spojnice FB, FC, FA. A ježto $AD = DB$, společnou pak kolmice DF, tedy třetí $AF = FB$. Podobně ovšem dokážeme, že $CF = AF$, a tak též $FB = FC$, tedy všecky tři FA, FB, FC jsou si rovny. Tedy kruh rýsovaný ze středu F rozpětím A (t. FA) nebo B neb C půjde též ostatními body a opsán kruh kolem $\triangle ABC$. Buď opsán jako ABC.

b) Avšak již stýkejte se DF, EF na přímce BC v F, jak naznačuje vyobr. druhé, a veďme spojnici AF. Podobně zajisté dokážeme, že bod F je středem kruhu rýsovaného kolem $\triangle ABC$.

c) Avšak již stýkejte se DF, EF vně trojúhelníku ABC opět v F, jak naznačuje vyobr. třetí, a veďme spojnice AF, BF, EF. A ježto opět $AD = DB$, společnou pak kolmice DF, tedy třetí $AF = BF$. Podobně ovšem dokážeme, že též $CF = AF$, a tak též $BF = FC$; tedy kruh ze středu F rozpětím FA neb FB neb FC rýsovaný půjde též ostatními body i bude opsán kolem trojúhelníku ABC.

Tedy kolem daného trojúhelníku jest opsán kruh; což právě bylo vykonati.

Důsledek.

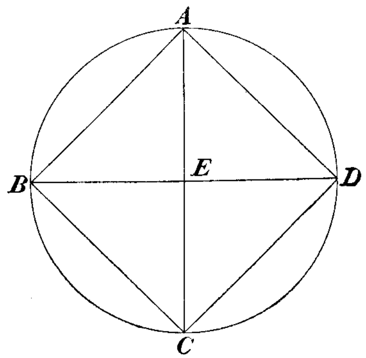
I jest patrno, že, když dopadá střed kruhu dovnitř trojúhelníku, $\sphericalangle BAC$, jsa právě v úseči nad polokruh větší, jest menší než pravý; když pak dopadá střed na přímku BC, $\sphericalangle BAC$ jsa právě v polokruži je pravý; když pak střed kruhu dopadá vně trojúhelníku, $\sphericalangle BAC$, jsa právě v úseči nad polokruh menší, jest větší než pravý.

VI.

Vpiš do kruhu daného čtverec.

Daným kruhem buď $ABCD$; má se tedy do kruhu daného vepsati čtverec.

Veďme v kruhu $ABCD$ dva průměry navzájem kolmé AC, BD a spojnice AB, BC, CD, DA.



A ježto $BE = ED$, neboť E je střed, a společnou kolmice EA, tedy třetí $AB = AD$. Z téže příčiny ovšem též BC, CD jednotlivě stejné jsou s AB, AD; tedy čtyřúhelník $ABCD$ je stejnostranný. Pravím ovšem, že též pravoúhlý. Neboť ježto přímka BD je průměrem kruhu $ABCD$, tedy BAD jest polokruhem, pročež $\sphericalangle BAD = R$. Z též ovšem příčiny také každý z úhlův ABC, BCD, CDA jest pravý; tedy čtyřúhelník $ABCD$ je pravoúhlý, dokázáno pak bylo, že též stejnostranný; je to tedy čtverec. Též je vepsán do kruhu $ABCD$.

Tedy do kruhu daného — —.

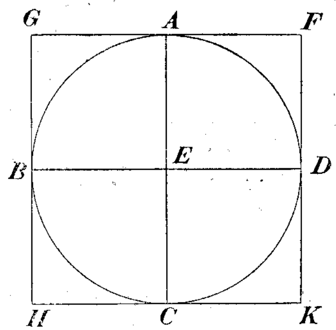
VII.

Opiš kolem kruhu daného čtverec.

Daným kruhem buď $ABCD$; má se tedy kolem kruhu $ABCD$ opsati čtverec.

Veďme v kruhu $ABCD$ dva průměry navzájem kolmé AC, BD a v bodech A, B, C, D veďme ke kruhu $ABCD$ tečné FG, GH, HK, KF.

Ježto tedy FG se dotýká kruhu $ABCD$ a ze středu E k bodu dotyčnému A vedena spojnice EA, tedy úhly při A jsou pravé. Z téže příčiny ovšem též uhly při bodech B, C, D jsou pravé. A ježto $\sphericalangle AEB = R$ a též $\sphericalangle EBG = R$, tedy $GH \parallel AC$. Z téže příčiny ovšem též $AC \parallel FK$. Pročež také $GH \parallel FK$. Podobně ovšem dokážeme, že též GF, HK jsou s BED rovnoběžné. Tedy GK, GC, AK, FB, BK[1]) jsou rovnoběžníky; tedy $GF = HK$, $GH = FK$. A ježto $AC = BD$, avšak též $AC = GH = FK$ a $BD = GF = HK$, tedy čtyřúhelník $FGHK$ je stejnostranný. Pravím ovšem, že též pravoúhlý. Neboť ježto $GBEA$ jest rovnoběžník a $\sphericalangle AEB = R$, tedy též $\sphericalangle AGB = R$. Podobně ovšem dokážeme, že též úhly při H, K, F jsou pravé. Tedy $FGHK$ je pravoúhelník. Dokázáno však bylo, že také stejnostranný, tedy jest to čtverec. A opsán jest kolem kruhu $ABCD$.



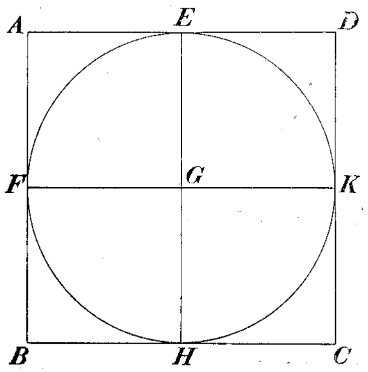
Tedy kolem daného kruhu jest opsán čtverec; což právě bylo vykonati.

VIII.

Vpiš do čtverce daného kruh.

Daným čtvercem buď $ABCD$; má se tedy do čtverce $ABCD$ vepsati kruh.

Buďtež AD, AB rozpůleny v bodech E, F, a z bodu E veďme $EH \parallel AB$ nebo CD, z bodu F pak veďme $FK \parallel AD$ nebo BC; tedy AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD jsou samé rovnoběžníky a jejich protější strany patrně stejné. A ježto $AD = AB$ a polovinou AD jest AE, polovinou pak AB jest AF, tedy $AE = AF$, a tak i protější; tedy $FG = GE$. Podobně ovšem dokážeme, že GH, GK jsou jednotlivě stejné s FG, GE; tedy $GE = GF = GH = GK$. Kruh tedy ze středu G rozpětím E n. F n. H n. K rýsovaný půjde též ostatními body a přímek AB, BC, CD, DA bude se dotýkati, ježto úhly při E, F, H, K jsou pravé; neboť bude-li kruh AB, BC, CD, DA protínati, přímka na konci průměru kruhu kolmo vedená dopadne dovnitř kruhu, což právě, jak bylo dokázáno, nemožno (III. XVI.). Tedy kruh ze středu G



[1]) Stačilo uvésti, že GK jest rovnoběžník (k tomu viz I. XXXIII.).

rozpětím E, F, H n. K rýsovaný nebude protínati přímek AB, BC, CD, DA. Bude se jich tedy dotýkati a bude vepsán do čtverce $ABCD$.

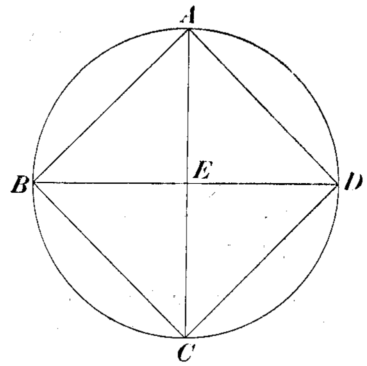
Tedy do čtverce daného jest vepsán — —.

IX.

Opiš kolem daného čtverce kruh.

Daným čtvercem buď $ABCD$; má se tedy kolem čtverce $ABCD$ opsati kruh.

Nuže protínejte se spojnice AC, BD, v E. A ježto $DA = AB$, společnou pak AC, obě tedy DA, $AC = BA$, AC a základna $DC = BC$; tedy $\sphericalangle DAC = BAC$; tedy $\sphericalangle DAB$ přímkou AC je rozpůlen. Podobně ovšem dokážeme, že též každý z úhlův ABC, BCD, CDA je rozpůlen přímkami AC, DB. A ježto $\sphericalangle DAB = ABC$ a $\sphericalangle EAB = \frac{DAB}{2}$ a $\sphericalangle EBA = \frac{ABC}{2}$ tedy též $\sphericalangle EAB = EBA$; a tak též strana $EA = EB$. Podobně ovšem dokážeme, že též $EA = EC = ED$, $EB = EC = ED$. Tedy $EA = EB = EC = ED$. Tedy kruh rýsován jsa ze středu E rozpětím A, B, C n. D půjde též ostatními body a bude opsán kolem čtverce $ABCD$. Buď opsán jako $ABCD$.



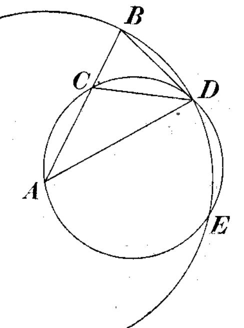
Tedy kolem daného čtverce opsán — —.

X.

Sestroj rovnoramenný trojúhelník mající úhly na základně jednotlivě dvakrát větší úhlu třetího.

Stranou buď nějaká přímka AB a buď rozdělena v bodě C tak, aby pravoúhelník $AB \times BC = CA^2$ (dle II. XI.); a ze středu A rozpětím AB buď narýsován kruh BDE a zapuštěna buď do kruhu BDE přímka BD rovná přímce AC, ne větší než průměr kruhu BDE; i veďme spojnice AD, DC a opišme kolem $\triangle ACD$ kruh ACD.

A ježto $AB \times BC = AC^2$ a $AC = BD$, tedy $AB \times BC = BD^2$. A ježto vzat jest nějaký bod B mimo kruh ACD a z B na kruh ACD dopadají dvě přímky BA, BD, a jedna z nich jej seče, druhá ho dosahuje a $AB \times BC = BD^2$, tedy BD je tečná kruhu ACD (III. XXXVIII.). A ježto tedy BD je tečná a z bodu dotyčného D vedena jest DC, tedy $\sphericalangle BDC = DAC$



střídavě v úseči kruhu (III. XXXII.). Ježto tedy $\sphericalangle BDC = DAC$, společným přičtěme $\sphericalangle CDA$; tedy celý $\sphericalangle BDA = CDA + DAC$. Avšak $\sphericalangle CDA + DAC = BCD$ vnějšímu; tedy též $\sphericalangle BDA = BCD$. Avšak $\sphericalangle BDA = CBD$, ježto také strana $AD = AB$; a tak též $\sphericalangle DBA = BCD$. Tedy $BDA = DBA = BCD$. A ježto $\sphericalangle DBC = BCD$, též strana $BD = DC$. Avšak BD vzata za stejnou s CA; tedy též $CA = CD$; a tak také $\sphericalangle CDA = DAC$, tedy $\sphericalangle CDA + DAC = 2\,DAC$. Úhel však $BCD = CDA + DAC$; tedy též $\sphericalangle BCD = 2\,CAD$. Úhel však $BCD = BDA = DBA$. Tedy $\sphericalangle BDA = 2\,DAB = DBA$.

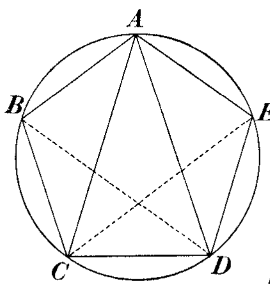
Tedy je sestrojen rovnoramenný $\triangle\, ABD$ mající — —.

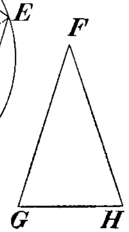
XI.

V p i š d o k r u h u d a n é h o p ě t i ú h e l n í k s t e j n o s t r a n n ý a s t e j n o ú h l ý.

Daným kruhem buď $ABCDE$; má se tedy do kruhu $ABCDE$ vepsati pětiúhelník stejnostranný a stejnoúhlý.

Vedle buď trojúhelník rovnoramenný FGH mající úhly při G, H jednotlivě dvakrát větší úhlu při F, a vpišme do kruhu $ABCDE$ $\triangle\, ACD$ s $\triangle\, FGH$ stejnoúhlý, tak aby $\sphericalangle F = CAD$ a $\sphericalangle G$, H byly stejné s $\sphericalangle ACD$, CDA; tedy též $\sphericalangle ACD$, CDA jsou jednotlivě dvakrát větší než $\sphericalangle CAD$.





Tož úhly ACD, CDA rozpolme přímkami CE, DB a veďme spojnice AB, BC, DE EA.

Ježto tedy $\sphericalangle ACD$, CDA jsou jednotlivě dvakrát větší než CAD a jsou přímkami CE, DB rozpůleny, jest tedy pět úhlů DAC, ACE, ECD, CDB, BDA navzájem sobě rovných. Stejné však úhly (zde všecky obvodové) stojí na stejných obloucích (III. XXVI.); tedy oblouky AB, BC, CD, DE, EA jsou si rovny. Stejným však obloukům náleží stejné tětivy; tedy tětivy AB, BC, CD, DE, EA jsou si rovny; pročež pětiúhelník $ABCDE$ je stejnostranný. Pravím ovšem, že též stejnoúhlý. Neboť ježto obl. $AB = DE$, společným buď obl. BCD; tedy celý oblouk $ABCD = EDCB$ a na oblouku $ABCD$ stojí $\sphericalangle AED$, na obl. $EDCB$ $\sphericalangle BAE$; tedy též $\sphericalangle BAE = AED$. Z téže příčiny ovšem též každý z $\sphericalangle ABC$, BCD, CDE rovná se kterémukoli z úhlů BAE, AED; tedy pětiúhelník $ABCDE$ je stejnoúhlý. Dokázáno pak bylo, že též stejnostranný.

Tedy do kruhu daného vepsán jest — —.

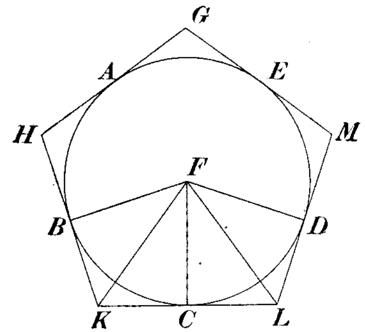
XII.

O p i š k o l e m k r u h u d a n é h o p ě t i ú h e l n í k s t e j n o s t r a n n ý a s t e j n o ú h l ý.

Daným kruhem buď $ABCDE$; má se tedy kolem kruhu $ABCDE$ opsati pětiúhelník stejnostranný a stejnoúhlý.

Dejme tomu, že v pětiúhelníku vepsaném jsou body úhlů (vrcholy) A, B, C, D, E, tak aby oblouky AB, BC, CD, DE, EA byly stejné; a body A, B, C, D, E veďme tečné kruhu GH, HK, KL, LM, MG a za střed kruhu $ABCDE$ vezměme F a veďme spojnice FB, FK, FC, FL, FD.

A ježto přímka KL dotýká se kruhu $ABCDE$ v C a ze středu F k bodu dotyčnému C vedena spojnice FC, tedy $FC \perp KL$; pročež oba úhly při C jsou pravé. Z téže příčiny ovšem též úhly při bodech B, D jsou pravé. A ježto $\sphericalangle FCK = R$, tedy $FK^2 = FC^2 + CK^2$. Z téže příčiny ovšem též $FK^2 = FB^2 + BK^2$, takže $FC^2 + CK^2 = FB^2 + BK^2$, z nichž $FC^2 = FB^2$; zbývající tedy $CK^2 = BK^2$. Tedy $BK = CK$. A ježto $FB = FC$ a společná FK, tedy BF, $FK = CF$, FK a základna $BK = CK$, tedy $\sphericalangle BFK = KFC$ a $\sphericalangle BKF = FKC$, tedy $\sphericalangle BFC = 2\,KFC$ a $\sphericalangle BKC = 2\,FKC$. Z téže příčiny ovšem též $\sphericalangle CFD = 2\,CFL$ a $\sphericalangle DLC = 2\,FLC$. A ježto obl. $BC = CD$, též $\sphericalangle BFC = CFD$. I jest $\sphericalangle BFC = 2\,KFC$ a $\sphericalangle DFC = 2\,LFC$; tedy $\sphericalangle KFC = LFC$; avšak též $\sphericalangle FCK = FCL$. Oba zajisté $\triangle\, FKC$ a FLC mají po dvou úhlech stejných a jednu stranu stejnou společnou FC; tedy též ostatní strany jejich budou rovny ostatním stranám a zbývající úhel úhlu zbývajícímu. Tedy $KC = CL$ a $\sphericalangle FKC = FLC$. A ježto $KC = CL$, tedy $KL = 2\,KC$. Týmž způsobem zajisté se dokáže, že též $HG = 2\,BK$. I jest $BK = KC$, tedy též $HK = KL$. Podobně ovšem dokážeme, že i každá ze stran HG, GM, ML každé ze stran GH, KL se rovná; tedy pětiúhelník $GHKLM$ je stejnostranný. Pravím ovšem, že též stejnoúhlý. Neboť ježto $\sphericalangle FKC = FLC$ a dokázáno, že $HKL = 2\,FKC$ a $KLM = 2\,FLC$; tedy též $\sphericalangle HKL = KLM$. Podobně ovšem dokážeme, že každý z úhlů KHG, HGM, GML roven každému z úhlů HKL, KLM; tedy $GHK = HKL = KLM = LMG = MGH$. Tedy pětiúhelník $GHKLM$ je stejnoúhlý. Dokázáno však, že i stejnostranný, a opsán je kolem kruhu $ABCDE$.



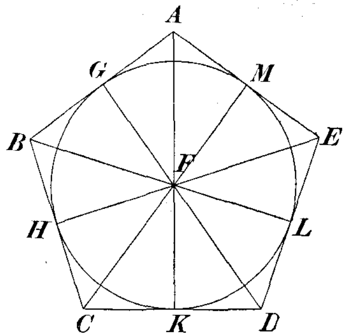
Tedy kolem daného kruhu opsán jest — —.

XIII.

Do daného pětiúhelníku stejnostranného a stejnoúhlého vpiš kruh.

Daným pětiúhelníkem stejnostranným a stejnoúhlým buď $ABCDE$; má se tedy do pětiúhelníku $ABCDE$ vepsati kruh.

Nuže rozpolme $\sphericalangle BCD$ a CDE dvěma přímkami CF, DF a z bodu F, v němž přímky CF, DF se stýkají, veďme spojnice FB, FA, FE. A ježto $BC = DC$, společnou pak CF, tedy BC, $CF = DC$, CF i $\sphericalangle BCF = DCF$, tedy základna $BF = DF$ a $\sphericalangle BCF = DCF$, i ostatní úhly budou rovny ostatním úhlům, proti nimž leží stejné strany; tedy $\sphericalangle CBF = CDF$. A ježto $\sphericalangle CDE = 2\,CDF$ a $\sphericalangle CDE = ABC$ i $\sphericalangle CDF = CBF$, tedy též $\sphericalangle CBA = 2\,CBF$; tedy $\sphericalangle ABF = FBC$; pročež $\sphericalangle ABC$ přímkou BF je rozpůlen. Podobně ovšem dokážeme, že též úhly BAE, AED přímkami FA, FE jsou rozpůleny. Veďme již z bodu F ku přímkám AB, BC, CD, DE, EA kolmice FG; FH, FK, FL, FM. A ježto $\sphericalangle HCF = KCF$ a pravý $\sphericalangle FHC = FKC$, tedy oba trojúhelníky FHC, FKC mají po dvou úhlech stejných a stejnou jednu společnou stranu FC proti jednomu ze stejných úhlů ležící; tedy též ostatní strany budou míti rovné ostatním stranám; tedy kolmice $FH = FK$. Podobně ovšem dokážeme, že též každá z kolmic FL, FM, FG každé z kolmic FH, FK se rovná; tedy $FG = FH = FK = FL = FM$. Tedy kruh z bodu F rozpětím G, H, K, L neb M rýsovaný půjde též ostatními body a bude se dotýkati přímek AB, BC, CD, DE, EA, ježto úhly při G, H, K, L, M jsou pravé. Neboť nebude-li se jich dotýkati, nýbrž bude je protínati, stane se, že kolmice vedená na konci průměru kruhu padne dovnitř kruhu; což dokázáno nemožným. Tedy kruh rýsovaný ze středu F a rozpětím G, H, K, L neb M nebude protínati přímek AB, BC, CD, DE, EA; tedy se jich bude dotýkati. Buď narýsován jako $GHKLM$.



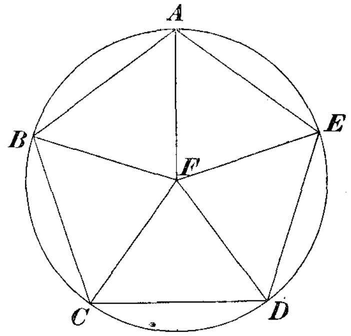
Tedy do daného pětiúhelníku stejnostranného — —.

XIV.

Kolem daného pětiúhelníku stejnostranného a stejnoúhlého opiš kruh.

Daným pětiúhelníkem stejnostranným a stejnoúhlým buď $ABCDE$; má se tedy kolem pětiúhelníku $ABCDE$ opsati kruh.

Rozpolme tedy úhly BCD, CDE přímkami CF, DF a z bodu F, v němž se přímky stýkají, k bodům B, A, E veďme spojnice FB, FA, FE. Podobně ovšem jako předešle (XIII.) dokážeme, že též úhly CBA, BAE, AED rozpolují přímky FB, FA, FE. A ježto $\sphericalangle BCD = CDE$ a $\sphericalangle FCD = \frac{BCD}{2}$ a $\sphericalangle CDF = \frac{CDE}{2}$, tedy $FCD = FDC$; a tak též strana $FC = FD$. Podobně ovšem dokážeme, že též FB, FA, FE každá je stejná s FC i FD; tedy $FA = FB = FC = FD = FE$. Tedy kruh rýsovaný z bodu F a rozpětím FA, FB, FC, FD neb FE půjde též ostatními body a bude opsán. Buď opsán a budiž to $ABCDE$.



Tedy kolem daného pětiúhelníku stejnostranného — —.

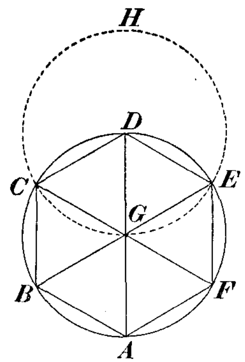
XV.

Do daného kruhu vpiš šestiúhelník stejnostranný i stejnoúhlý.

Daným kruhem buď $ABCDEF$; má se tedy do kruhu $ABCDEF$ vepsati šestiúhelník stejnostranný i stejnoúhlý.

Veďme v kruhu $ABCDEF$ průměr AD a vezměme za střed kruhu G a ze středu D rozpětím DG narýsujme kruh $EGCH$ a spojnice EG, CG prodlužme do bodů B, F a veďme spojnice AB, BC, CD, DE, EF, FA; pravím, že $ABCDEF$ je šestiúhelník stejnostranný i stejnoúhlý.

Neboť ježto bod G je středem kruhu $ABCDEF$, $GE = GD$. Dále, ježto bod D je středem kruhu GCH, $DE = DG$. Avšak dokázáno, že $GE = GD$; tedy též $GE = ED$; tedy $\triangle EGD$ je stejnostranný; pročež také tři úhly jeho EGD, GDE, DEG jsou navzájem rovny, poněvadž v trojúhelnících rovnoramenných (I. v.) úhly při základně jsou stejné[2]; a tři úhly v trojúhelníku rovnají se dvěma pravým; tedy $\sphericalangle EGD = \frac{2\,R}{3}$.



Podobně ovšem dokážeme, že též $\sphericalangle DGC = \frac{2\,R}{3}$. A ježto CG na EB postavena jsouc, činí úhly stýkavé $EGC + CGB = 2\,R$, tedy též zbývající $\sphericalangle CGB = \frac{2\,R}{3}$; tedy úhly EGD, DGC, CGB jsou si rovny; pročež také příslušné vrcholové úhly BGA, AGF, FGE jsou stejné. Tedy $EGD = DGC = CGB = BGA = AGF = FGE$. Stejné však úhly (středové) stojí na stejných obloucích; tedy oblouky AB, BC, CD, DE,

[2]) $\triangle\, EGD$ je rovnoramený, ať základnou strana kterákoli. Rovnosti úhlů v $\triangle$ stejnostranném Eukl. dotud nedokázal. Mohla by se ovšem vyvoditi z I. XVIII.

EF, FA jsou stejné. Na stejných však obloucích jsou stejné tětivy; tedy šestiúhelník $ABCDEF$ je stejnostranný.

Pravím ovšem, že též stejnoúhlý. Neboť ježto obl. $FA = ED$, společným přičtěmež obl. $ABCD$; tedy celý $FABCD = EDCBA$; a na obl. $FABCD$ stojí $\sphericalangle FED$ (obvodový) a na obl. $EDCBA$ $\sphericalangle AFE$; tedy $\sphericalangle AFE = DEF$. Podobně ovšem dokážeme, že též ostatní úhly šestiúhelníku $ABCDEF$ jednotlivě stejné jsou s AFE i s FED; tedy šestiúhelník $ABCDEF$ je stejnoúhlý. Dokázáno však bylo, že také stejnostranný; i jest vepsán do kruhu $ABCDEF$.

Tedy do daného kruhu vepsán šestiúhelník — —.

Důsledek.

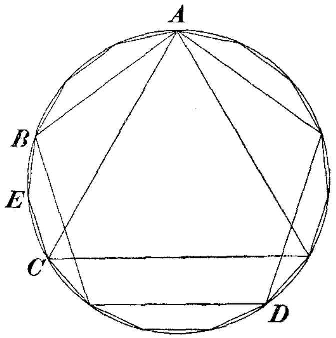
Z toho zajisté patrno, že strana šestiúhelníku (pravidelného) rovná se poloměru kruhu.

Podobně pak, jako při pětiúhelníku, když vedeme v bodech kružnici rozdělujících ke kruhu tečné, opíšeme kolem kruhu šestiúhelník stejnostranný i stejnoúhlý tak, jak pověděno jest při pětiúhelníku (IV. XII.). A také způsobem podobným tomu, co řečeno při pětiúhelníku (IV. XIII. XIV.), do daného šestiúhelníku vpíšeme i kolem něho opíšeme kruh; což právě bylo vykonati.

XVI.

Do daného kruhu vpiš patnáctiúhelník stejnostranný i stejnoúhlý.

Daným kruhem buď $ABCD$; má se tedy do kruhu $ABCD$ vepsati patnáctiúhelník stejnostranný i stejnoúhlý.



Vpišme do kruhu $ABCD$ stranu AC trojúhelníku stejnostranného do kruhu vpisovaného (srv. IV. II.), stranu pak AB pětiúhelníku stejnostranného; jakých tedy úsečí má kruh $ABCD$ patnáct, takových obl. ABC, jsa třetinou kruhu, bude míti pět a obl. AB, jsa pětinou kruhu, bude míti tři, tedy zbývající BC stejných dvé. Rozpolme BC v E; tedy obl. BE i CE jest patnáctinou kruhu $ABCD$.

Když tedy spojíce B, E a E, C zapustíme nepřetržitě přímky jim rovné do kruhu $ABCD$, bude do něho vepsán patnáctiúhelník stejnostranný i stejnoúhlý[3]); což právě bylo vykonati.

Podobně pak jako při pětiúhelníku, když vedeme v bodech kružnici rozdělujících ke kruhu tečné, opíšeme kolem kruhu patnáctiúhelník stejnostranný i stejnoúhlý. Mimo to způsobem podobným tomu, jak ukázáno při pětiúhelnících, též do daného patnáctiúhelníku vpíšeme a kolem něho opíšeme kruh; což právě bylo vykonati.

[3]) Že je též stejnoúhlý, zde nedokázáno; způsob důkazu však snadno nalezneme v oddílech předešlých.

Jiné důkazy.

Kn. II. IV.

Jinak.

Pravím, že $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2\,AC \times CB$.

Neboť v témže vyobrazení (str. 27. t. d.), ježto $BA = AD$, též úhel $ABD = ADB$, a ježto v každém trojúhelníku tři úhly rovnají se dvěma pravým, tedy v $\triangle\, ADB$ tři úhly $ADB + BAD + DBA = 2R$. Avšak $\sphericalangle BAD = R$, tedy ostatní $ABD + ADB = 2R$ a jsou stejné, tedy $\sphericalangle ABD = \frac{R}{2} = ADB$. Úhel však $BCG = R$, neboť se rovná protějšímu (souhlasnému) $\sphericalangle A$; tedy zbývající $\sphericalangle CGB = \frac{R}{2}$, tedy $\sphericalangle CBG = CGB$ pročež i strana $BC = CG$. Avšak $CB = GK$ a $CG = BK$, tedy CK je stejnostranný. Má však též $\sphericalangle CBK$ pravý; tedy CK je čtverec a je z CB. (Ostatek téměř slovo od slova stejný.)

Kn. III. VII.

Nebo též takto:

Veďme spojnici EK. A ježto $GE = EK$, společnou pak FE, i základna $FG = FK$, tedy $\sphericalangle GEF = KEF$, Avšak $\sphericalangle GEF = HEF$, menší většímu; což právě není možno. (Týká se části poslední.)

Kn. III. VIII.

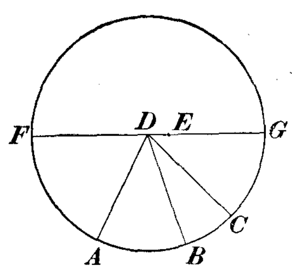
Nebo též jinak.

Veďme spojnici MN. Ježto $KM = MN$, společnou pak MD, i základna $DK = DN$, tedy $\sphericalangle KMD = DMN$. Avšak $\sphericalangle KMD = BMD$, tedy též $\sphericalangle BMD = NMD$, menší většímu; což právě nemožno. (K poslední č.)

Kn. III. IX.

Jinak.

Nuže v kruhu ABC vezměme nějaký bod uvnitř D a z D na kruh ABC dopadej více než dvé stejných přímek AD, DB, DC; pravím, že vzatý bod D je středem kruhu ABC.

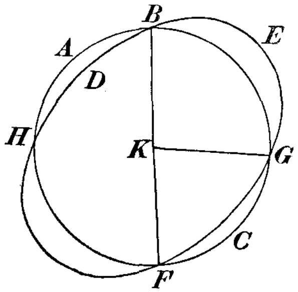


Nuže nebuď, nýbrž, možno-li, buď jím E a spojnice DE buď prodloužena do bodů F, G; tedy FG je průměrem kruhu ABC. Ježto tedy v kruhu ABC na průměru FG vzat jest nějaký bod, jenž není středem kruhu, t. D, největší bude DG, DC pak $> DB$, $DB > DA$ (III. VII.). Avšak jsou si též rovny; což právě jest nemožno; tedy E není středem kruhu ABC. Podobně ovšem dokážeme, že ani jiný bod kromě D. Tedy bod D je středem kruhu ABC; což právě bylo dokázati.

Kn. III. x.

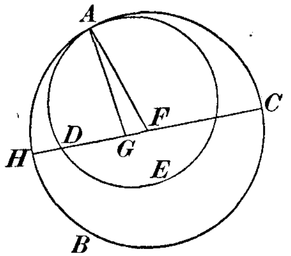
Jinak.

Nuže opět kruh ABC protínej kruh DEF ve více než dvou bodech B, G, H, F a za střed kruhu ABC vezměme K a veďme spojnice KB, KG, KF.



Ježto tedy v kruhu DEF vzat nějaký bod uvnitř K a z K na kruh DEF dopadá více než dvě stejných přímek KB, KF, KG, tedy bod K je středem kruhu DEF. Jest pak K také středem kruhu ABC; tedy dva kruhy navzájem se protínající mají týž střed K; což právě jest nemožno (III. v.). Tedy kruh protíná kruh ve více bodech než dvou; což právě bylo dokázati.

Kn. III. xi.



Nuže již dopadej jako GFC, i prodlužme přímým směrem CFG do bodu H a veďme spojnice AG, AF.

Ježto tedy $(AG + GF) > AF$, avšak $FA = FC = FH$, společnou odečtěmež FG, tedy zbývající $AG > GH$, t. j. $GD > GH$, menší nad větší; což právě jest nemožno.

Podobně dokážeme nemožnost toho, i když střed kruhu většího je vně malého.

Kn. III. xxxi.

Jiný důkaz,

že $\sphericalangle BAC$ je pravý (vyobr. str. 51.).

Ježto $\sphericalangle AEC = 2\,BAE$ (je zajisté roven dvěma vnitřním protějším), jest pak též $\sphericalangle AEB = 2\,EAC$; tedy $\sphericalangle AEB + AEC = 2\,BAC$. Avšak $\sphericalangle AEB + AEC = 2\,R$; pročež $\sphericalangle BAC$ jest pravý, což právě bylo dokázati.

Kniha patá.

Výměry.

1. Dílem veličiny větší jest veličina menší, když veličinu větší doměřuje.[1])
2. Násobkem pak veličiny menší jest větší, když ji menší doměřuje.

[1]) Míní se beze zbytku.

3. Poměrem jest nějaký vztah dvou stejnorodých veličin dle jejich kolikosti.
4. Pravíme, že k sobě mají poměr veličiny, které násobeny jsouce mohou býti jedna druhé větší.
5. Pravíme, že jsou veličiny v témž poměru k sobě, první ke druhé, a třetí ke čtvrté, když stejné násobky veličiny první a třetí nad stejné násobky druhé a čtvrté jsou dle jakékoli násobnosti buď jeden nad druhý zároveň větší buď zároveň stejné buď zároveň menší, jsouce vzaty ve vzájemném pořádku.[2])
6. Veličiny mající týž poměr nazývejme úměrou (úměrnými).
7. Když ze stejných násobků násobek veličiny první jest větší než násobek druhé, násobek třetí však není větší než násobek čtvrté, tehdy pravíme, že první ke druhé jest v poměru větším než třetí ke čtvrté.
8. Úměra o trojím členství jest nejmenší.[3])
9. Když jsou tři veličiny úměrou, pravíme, že se má první ke třetí jako dvojmoc první ke dvojmoci druhé.[4])
10. Když pak jsou čtyři veličiny (spojitě) úměrou, první má se ke čtvrté jako trojmoc první k trojmoci druhé, a tak stále po řadě týmž způsobem, jakoukoli máme úměru.[5])
11. Pravíme, že souhlasnými veličinami (členy jsou přední s předními a zadní se zadními.
12. Střídavým poměrem je sdružení členu predního s předním a zadního se zadním.[6])
13. Zpětným poměrem je sdružení zadního na místě předním s předním na místě zadním.[7])
14. Součetným poměrem je sdružení předního a spolu zadního se zadním samým.[8])
15. Rozdílovým poměrem jest sdružení rozdílu, oč přední člen je větší zadního, se zadním samým.[9])

---

[2]) Stejný poměr tedy jest, když $ma \lesseqgtr nb$ a zároveň $mc \lesseqgtr nd$, $a : b = c : d$.

[3]) Z a, b, c bude $a : b = b : c$.

[4]) $a : b = \cancel{a} : c$, z toho $a : c = a^2 : b^2$, neboť $c = \frac{b^2}{a}$, $\frac{a}{c} = \frac{a^2}{b^2}$. b

[5]) $a : b = b : c = c : d$, z toho $a : d = a^3 : b^3$, neboť $d = \frac{c^2}{b}$, $c = \frac{b^2}{a}$, $c^2 = \frac{b^4}{a^2}$, z toho $\frac{c^2}{b} = \frac{b^3}{a^2}$, tedy $\frac{a}{d} = \frac{a^3}{b^3}$. Týmž způsobem z úměry $a : b = b : c = c : d = d : e$ bude $a : e = a^4 : b^4$, neboť $e = \frac{d^2}{c}$, $c = \frac{b^2}{a}$ a dle předešlého zde (5.) výsledku $d^2 = \frac{b^6}{a^4}$, z toho $\frac{a}{e} = \frac{a^4}{b^4}$; atd.

[6]) Z a, b, c, d budiž $a : c = b : d$.

[7]) $b : a = d : c$.

[8]) $(a + b) : (c + d) : d$.

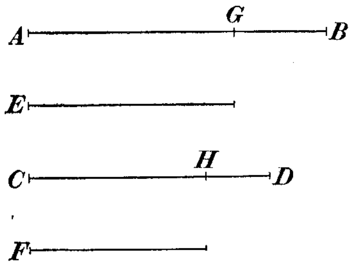
[9]) $(a - b) : b = (c - d) : d$.

16. Zvratným poměrem je sdružení členu prvního s rozdílem, oč přední člen je větší zadního.[10])
17. Stejnořadným poměrem jest, jest-li více členův a jiné jim počtem rovné a berou-li se po dvou v témž poměru, když se má jako v prvních členech první k poslednímu, tak ve druhých členech první k poslednímu; nebo jinak: sdružení krajních s vypuštěním středních.[11]
18. Nestejnořadným poměrem jest, když jsou členy a jiné jim počtem rovné a jako v prvních členech má se přední k zadnímu, tak ve druhých členech přední k zadnímu a jako v prvních členech zadní k jinému, tak ve druhých členech jiný ku přednímu[12])

I.

Když několik veličin několika veličin počtem stejných jest každá každé stejným násobkem, jakým násobkem jest jedna jedné, takým bude i součet součtu.

Buď několik veličin AB, CD (dvě) několika veličin počtem stejných E, F každá každé stejným násobkem; pravím, že, jakým násobkem jest AB veličiny E, takovým bude $AB + CD$ součtu $E + F$.



Neboť ježto AB je stejným násobkem veličiny E jako CD veličiny F; tedy kolik v AB jest veličin stejných s E, tolik i v CD stejných v F. Rozdělme AB na veličiny stejné s E, totiž AG, GB; CD pak na veličiny stejné s F, totiž CH, HD; bude zajisté počet veličin AG, GB počtu CH, HD roven. A ježto $AG = E$ a $CH = F$, tedy $AG + CH = E + F$. Z téže příčiny $GB = E$ a $GB + HD = E + F$. Tedy kolik veličin jest v AB stejných s E, tolikéž i v $AB + CD$ stejných s $E + F$. Tedy jakým násobkem jest AB veličiny E, takovým bude též $AB + CD$ veličiny $E + F$.

Tedy když několik veličin několika veličin — —.

II.

Když první veličina je stejným násobkem druhé jako třetí čtvrté a pátá stejným násobkem druhé jako šestá čtvrté, též součet prvé s pátou bude stejným násobkem druhé jako součet třetí se šestou čtvrté.[13])

Nuže buď první AB stejným násobkem druhé C jako třetí DE

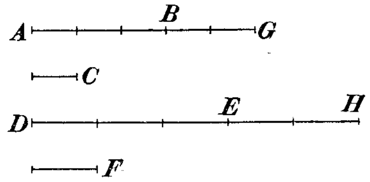
[10]) $a:(a-b) = c:(c-d)$.

[11]) Z $a:b:c = \alpha:\beta:\gamma$ bude $a:c = \alpha:\gamma$ (srv. V. XXII.

[12]) Z a, b, c; α, β, γ bude $a:b = \beta:\gamma$ i $b:c = \alpha:\beta$ átd. (srv. V. XXIII.)

[13]) $a:b = c:d$, $e:b = f:d$; bude $(a+e):b = (c+f):d$; neboť $bc = ad$, $bf = de$, sečtením $bc + bf = ad + de$, z toho $b(c+f) = d(a+e)$, z toho $(a+e):b = (c+f):d$.

čtvrté veličiny F a buď také pátá BG stejným násobkem druhé veličiny C jako šestá EH čtvrté F; pravím, že též součet první a páté AG bude stejným násobkem veličiny druhé C jako součet třetí a šesté DH veličiny čtvrté F.



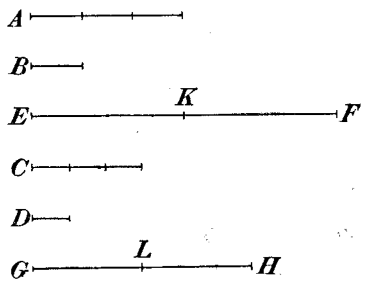
Neboť ježto AB je stejným násobkem veličiny C jako DE veličiny F, tedy kolik dílů má AB stejných s C, tolik též DE stejných s F. Z téže příčiny ovšem kolik má jich BG stejných s C, tolik též EH stejných s F; tedy kolik je v celku AG stejných s C, tolik též v celku DH stejných s F; jakým tedy násobkem jest AG veličiny C, takovým bude též DH veličiny F. Tedy též součet první a páté AG bude stejným násobkem veličiny C jako třetí a šesté DH veličiny F.

Když tedy první veličina je stejným násobkem — —.

III.

Když první veličina je stejným násobkem druhé jako třetí čtvrté a vezmeme stejný násobek první a třetí, bude též z obdržených po řadě násobků první stejným násobkem druhé jako druhý čtvrté.[14])

Nuže buď první A stejným násobkem druhé B jako třetí C čtvrté D a za stejné násobky veličin A, C vezměme EF, GH; pravím, že EF je stejným násobkem veličiny B jako GH veličiny D.



Neboť ježto EF je stejným násobkem veličiny A jako GH veličiny C, tedy kolik dílů má EF stejných s A, tolik též GH stejných s C. Rozdělme EF na EK, KF stejné s A, GH pak na GL, LH stejné s C; bude zajisté počet EK, KF s počtem GL, NH stejný. A ježto A je stejným násobkem veličiny B jako C veličiny D, avšak $EK = A$ a $GL = C$, tedy EK je stejným násobkem veličiny B jako GL veličiny D. Z téže příčiny ovšem KF je stejným násobkem veličiny B jako LH veličiny D. Ježto tedy první EK je stejným násobkem veličiny druhé B jako třetí GL čtvrté D, jest pak i pátá KF stejným násobkem druhé B jako šestá LH čtvrté D, tedy též součet první a páté EF je stejným násobkem druhé B jako součet třetí a šesté GH čtvrté B (V. II.)

Když tedy první veličina je stejným násobkem — —.

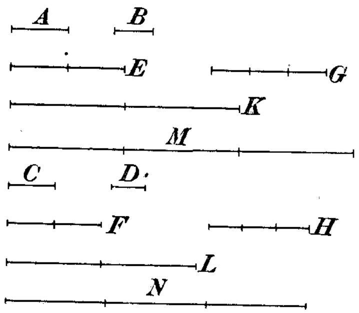
IV.

Když se má první veličina ke druhé jako třetí ke čtvrté, též stejné násobky první a třetí ke stejným

[14]) $a:b = c:d$, bude též $na:b = nc:d$.

násobkům druhé a čtvrté dle jakékoli násobnosti budou, po řadě vzaty jsouce, míti týž poměr.[15])

Nuže buď $A:B=C:D$ a vezměme veličin A, C stejné násobky E, F a veličin B, D jiné jakékoli stejné násobky G, H; pravím, že $E:G=F:H$.



Nuže vezměme veličin E, F stejné násobky K, L a veličin G, H jiné jakékoli stejné násobky M, N.

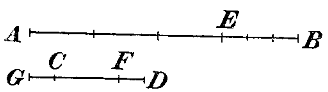
A ježto E je stejným násobkem veličiny A jako F veličiny C a za stejné násobky veličin E, F jsme vzali K, L, tedy stejnými násobky jsou K veličiny A a L veličiny C. Z téže příčiny ovšem je stejným násobkem M veličiny B jako N veličiny D. A ježto $A:B=C:D$ a K, L vzaty jsou za stejné násobky veličin A, C a za jiné jakékoli stejné násobky veličin B, D vzaty M, N, jest-li ovšem $K>M$, je též $L>N$, pakli stejné ono, stejné toto, pakli menší ono, menší toto. I jsou K, L veličin E, F stejnými násobky, jako M, N jinými nahodilými stejnými násobky veličin G, H; tedy $E:G=F:H$ (srv. V. III.).

Když se má tedy první veličina ke druhé — —.

V.

Když jest veličina veličiny stejným násobkem jako část odečtená odečtené, též zbytek zbytku bude stejným násobkem jakým celá celé.[16])

Nuže buď AB veličiny CD stejným násobkem jako část odečtená AE odečtené CF; pravím, že též zbytek EB bude stejným násobkem zbytku FD jako celek AB celku CD.



Nuže jakým násobkem jest AE veličiny CF, takovým násobkem buď též EB veličiny CG.

A ježto AE je stejným násobkem veličiny CF jako EB veličiny GC, tedy AE je stejným násobkem veličiny CF jako AB veličiny GF (V. I.) Jest pak AE vzato za stejný násobek veličiny CF jako AB veličiny CD. Tedy AB je stejným násobkem veličiny GF i CD; tedy $GF=CD$. Odečtěme společné CF; tedy zbývající $GC=FD$. A ježto AE je stejným násobkem veličiny CF jako EB veličiny GC a $GC=DF$, tedy AE bude stejným násobkem veličiny CF jako EB veličiny FD. AE však vzato za stejný násobek veličiny CF jako AB veličiny CD; tedy EB je stejným násobkem veličiny FD jako AB veličiny CD. Tedy také zbytek EB bude stejným násobkem veličiny FD jako celek AB celku CD.

Když je tedy veličina veličiny stejným násobkem — —.

[15]) Z $a:b=c:d$ bude $am:bn=cm:dn$.

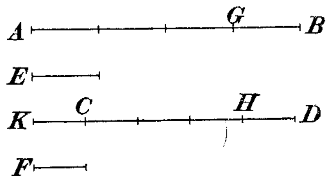
[16]) $a:b=u:v$; též bude $(a-u):(b-v)=a:b$.

VI.

Když jsou dvě veličiny dvou veličin stejnými násobky a nějaké části od nich odečtené jsou týchž veličin (druhých) stejnými násobky, též zbytky týmž (druhým) veličinám buď jsou rovny nebo jsou stejnými jejich násobky.[17])

Nuže buďte dvě veličiny AB, CD dvou veličin E, F stejnými násobky a části odečtené AG, CH buďte stejnými násobky týchž veličin E, F; pravím, že též zbytky GB, HD veličinám E, F buď jsou rovny buď jsou stejnými jejich násobky.

Nuže buď dříve $GB=E$; pravím, že též $HD=F$.



Nuže buď $CK=F$. Ježto AG je stejným násobkem veličiny E jako CH veličiny F a GB veličiny E jako KC veličiny F; tedy AB je stejným násobkem veličiny E jako KH veličiny F. Vzali jsme však AB za stejný násobek veličiny E jako CD veličiny F; tedy KH je stejným násobkem veličiny F jako CD veličiny F. Ježto tedy KH i CD jsou stejnými násobky veličiny F, tedy $KH=CD$. Společným odečteno buď CH, tedy zbývající $KC=HD$. Avšak $F=KC$, tedy též $HD=F$. Pročež jest-li $GB=E$, bude též $HD=F$.

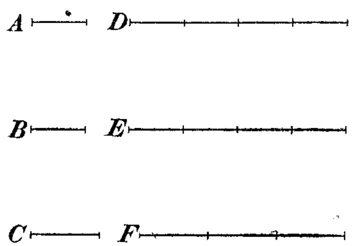
Podobně ovšem dokážeme, i když GB je násobkem veličiny E, že též HD je týmž násobkem veličiny F.

Když jsou tedy dvě veličiny dvou veličin — —.

VII.

Stejné veličiny k témuž mají stejný poměr i totéž stejný k veličinám stejným.[18])

Stejnými veličinami buďtež A, B, jinou pak jakoukoli veličinou C; pravím, že A i B má k C týž poměr i C k A jako k B.



Nuže vezměme D, E za stejné násobky veličin A, B a za jiný jakýkoli násobek veličiny C vezměme F.

Ježto tedy D je stejným násobkem veličiny A jako E veličiny B a $A=B$, tedy též $D=E$. A jinou veličinou jakoukoli jest F. Jest-li tedy $D>F$, též $E>F$, pak-li $D=F$, též $E=F$, pak-li $D<F$, též $E<F$. I jsou D, E stejné násobky veličin A, B; F pak jiným jakýmkoli násobkem veličiny C; tedy $A:C=B:C$.

Pravím, že též C[19]) k A i B má týž poměr.

[17]) $a:b=c:d$, $u:b=v:d$, bude buď $(a-u)=b$, $(c-v)=d$ nebo $(a-u):b=(c-v):d$.

[18]) Budiž $a=a_1$, bude $a:x=a_1:x$ a též $x:a=x:a_1$.

[19]) V orig. jest E; má býti patrně Γ. neboť tu se počíná druhý důkaz.

Neboť vykonajíce touž úpravu podobně dokážeme, že $D = E$. A jinou veličinou jest F; jest-li tedy $F \gtreqless D$, též $F \gtreqless E$. I jest F násobkem veličiny C, a D, E jinými jakýmikoli stejnými násobky veličin A, B; tedy $C : A = C : B$.

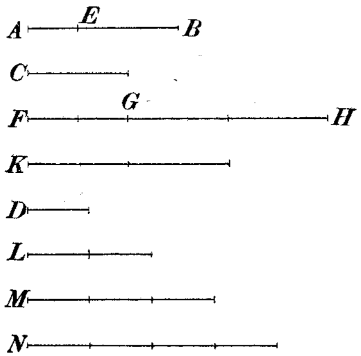
Stejné tedy veličiny k témuž mají — —.

Důsledek.

Z toho zajisté patrno, že veličiny, když mají nějaký poměr k sobě, též opačně budou úměrny; což právě bylo dokázati.

VIII.

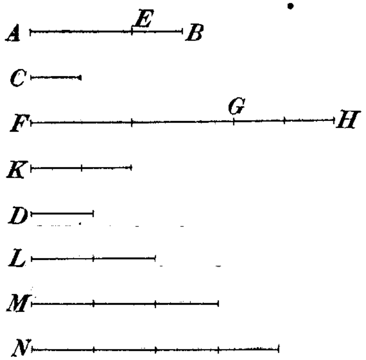
Z nestejných veličin větší k témuž má poměr větší než veličina menší; a totéž k menší má větší poměr nežli k větší.[20])



Nestejnými veličinami buďtež AB, C a buď $AB > C$, jinou pak jakoukoli buď D; pravím, že $AB : D > C : D$ a $D : C > D : AB$.

Neboť ježto $AB > C$, budiž $BE = C$. Menší zajisté veličina než AE, EB násobena jsouc bude někdy větší než D. Buď dříve $AE < EB$, i buď AE znásobena, a násobkem jejím buď FG, větším než D, a učiňmež, aby $FG : AE = GH : EB = K : C$, a buď $L = 2D$, $M = 3D$ a dále vždy o D více, až veličina bude násobkem veličiny D, a to prvním větším než K. I budiž to N a buď čtyřnásobkem veličiny D, a to prvním větším než K.

Ježto tedy K jest menší než první N, tedy není $K < M$. A ježto $FG : AE = GH : EB$, tedy $FG : AE = FH : AB$, avšak $FG : AE = K : C$, tedy $FH : AB = K : L$. Tedy FH, K jsou stejné násobky veličin AB, C. Dále, ježto $GH : EB = K : C$ a $EB = C$, tedy $GH = K$. Avšak není $K < M$, tedy není ani $GH < M$. Avšak $FG > D$, tedy celá $FH > (D + M)$. Ale $D + M = N$, ježto právě $M = 3D$ a $M + D = 4D$, jest pak i $N = 4D$; tedy $M + D = N$. Avšak $FH > (M + D)$, tedy $FH > N$. K však není větší než N. Jsou pak FH, K stejnými násobky veličin AB, C a N jiným jakýmkoli násobkem veličiny D; tedy $AB : D > C : D$.



Pravím ovšem, že též $D : C > D : AB$.

[20]) Buď $v > m$, mimo to s; bude $v : s > m : s$, ale $s : m > s : v$.

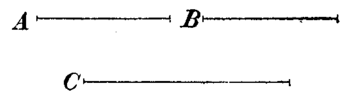
Neboť stejnou úpravu vykonajíce[21]) podobně dokážeme, že $N > K$, nikoli však $N > FH$. I jest N násobkem veličiny D a FH, K jinými jakýmikoli stejnými násobky veličin AB, C; tedy $D : C > D : AB$. Ale již buď $AE > EB$. Menší zajisté EB znásobena jsouc bude někdy větší než D. Buď znásobena, a buď GH násobkem veličiny EB, větším však než D; a buď $GH : EB = FG : AE = K : C$. Podobně ovšem dokážeme, že FH, K jsou stejnými násobky veličin AB, C; a vezměme podobně N za násobek veličiny D, první větší než FG; pročež opět není $FG < M$. Avšak $GH > D$. Tedy celá $FH > (D + M)$, t. j. $FH > N$. K však není větší než N, ježto právě též FG, větší jsouc než GH, t. j. K, není větší než N. A rovněž jako svrchu postupujíce dokončíme důkaz.

Tedy z nestejných veličin větší k témuž — —.

IX.

Veličiny mající k témuž týž poměr jsou si rovny a ke kterým totéž má týž poměr, ty jsou si rovny.

Nuže měj každá z veličin A, B k C týž poměr; pravím, že $A = B$.



Neboť nebýti tak, neměla by každá z veličin A, B k C poměru téhož; má však; tedy $A = B$.

Měj již opět C k A i k B týž poměr; pravím, že $A = B$.

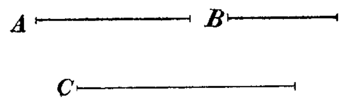
Neboť nebýti tak, nebyla by C k A i B v poměru témž; jest však, tedy $A = B$,

Tedy veličiny mající k témuž týž poměr — —.

X.

Z veličin k témuž poměr majících ta, jež má větší poměr, jest větší; ke které však totéž má větší poměr; ta jest menší.[22])

Nuže buď $A : C > B : C$; pravím, že $A > B$.



Neboť není-li tak, jest buď $A = B$ buď $A < B$. Není ovšem $A = B$, neboť A i B by měla k C týž poměr (V. VII.); nemá však; tedy není $A = B$. Ani zajisté není $A < B$, neboť A by měla k C menší poměr než B k C (V. VIII.); nemá však; tedy není $A < B$. Dokázano však, že nejsou ani stejné; tedy $A > B$.

Buď již opět $C : B > C : A$; pravím, že $B < A$.

Neboť není-li tak, buď $B = A$ buď $B > A$. Není ovšem $B = A$, neboť C by měla k A i B týž poměr; nemá však, tedy není $B = A$. Ani zajisté není $B > A$, neboť by bylo $C : B < C : A$ (V. VIII.); avšak

[21]) T. j. aby opět bylo $AE > EB$.
[22]) $a : n$ $b : n$, tedy $a > b$; $n : b > n : a$, teey $b < a$.

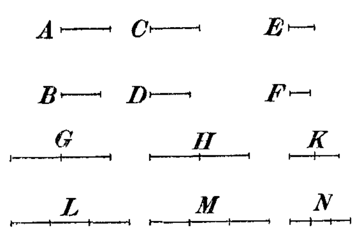
není tak. Tedy není $B > A$. Dokázáno však, že ani stejné nejsou; tedy $B < A$.

Tedy z veličin k témuž poměr majících — —.

XI.

Poměry témuž poměru rovné jsou si též navzájem rovny.

Nuže buď $A:B = C:D$ a $C:D = E:F$; pravím, že $A:B = E:F$



Nuže vezměme veličin A, C, E stejné násobky G, H, K, veličin pak B, D, F jiné jakékoli stejné násobky L, M, N.

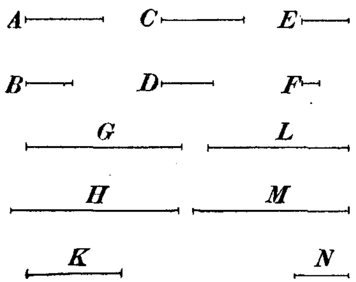
A ježto $A:B = C:D$ a za stejné násobky veličin A, C vzali jsme G, H, veličin pak B, D jiné jakékoli stejné násobky L, M, jest-li tedy $G > L$, je též $H > M$, a jest-li $G = L$, je $H = M$, a jest-li $G < L$, je $H < M$. Ježto dále $C:D = E:F$ a za stejné násobky veličin C, E vzali jsme H, K, veličin pak D, F jiné jakékoli stejné násobky M, N, jest-li tedy $H > M$, je též $K > N$, a jest-li $H = M$, je $K = N$, a jest-li $H < M$, je $K < N$. Avšak byla-li veličina $H > M$, byla též $G > L$, a byla-li $H = M$, tu též $G = L$, pakli $H < M$, též $G < L$; pročež také jest-li $G > L$, je též $K > N$, pakli $G = L$, též $K = N$, pakli $G < L$, též $K < N$. A G, K jsou stejnými násobky veličin A, E a L, N jinými jakýmikoli stejnými násobky veličin B, F; tedy $A:B = E:F$.

Tedy poměry témuž poměru rovné — —.

XII.

Když jest několik veličin úměrou, jako se má jeden člen přední ke svému zadnímu, tak se bude míti součet předních k součtu zadních.

Buď úměrou několik veličin A, B, C, D, E, F, aby bylo $A:B = C:D = E:F$; pravím, že $A:B = (A+C+E):(B+D+F)$.



Nuže za stejné násobky veličin A, C, E vezměme G, H, K a veličin B, D, F jiné jakékoli stejné násobky L, M, N.

A ježto $A:B = C:D = E:F$ a za stejné násobky veličin A, C, E vzali jsme G, H, K a veličin B, D, F jiné jakékoli stejné násobky L, M, N, tedy jest-li $G > L$, je též $H > M$ a $K > N$, pakli $G = L$, je též $H = M$ a $K = N$, pakli $G < K$, též $H < M$, $K < N$. Pročež také jest-li $G > L$, je též $(G+H+K) > (L+M+N)$, pakli $G = L$, jsou součty stejné, pakli $G < L$, je první součet menší. I jsou G jakož i $G+H+K$

stejnými násobky veličin A i $A+C+E$, ježto právě, když je několik veličin několika veličin počtem stejných každá každé stejným násobkem, jakým násobkem jest jedna veličiny jedné, takovým bude též součet součtu (V. I.). Z téže příčiny ovšem též L a $L+M+N$ jsou stejnými násobky veličin B a $B+D+F$; tedy $A:B = (A+C+E):(B+D+F)$.

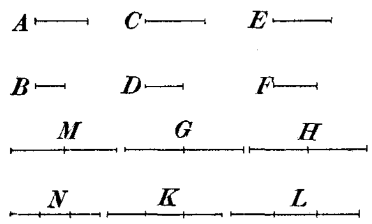
Když jest tedy několik veličin úměrou, — —.

XIII.

Když bude míti veličina první ke druhé týž poměr jako třetí ke čtvrté, třetí pak ke čtvrté bude míti poměr větší než pátá k šesté, též první ke druhé bude míti poměr větší než pátá k šesté.

Budiž $A:B = C:D$, avšak $C:D > E:F$; pravím, že též $A:B > E:F$.

Neboť ježto C, E mají nějaké stejné násobky a D, F jiné jakékoli stejné násobky a násobek veličiny C jest větší než veličiny D, násobek však veličiny E není větší než veličiny F, vezměme stejné násobky veličin C, E a buďte jimi G, H, veličin pak D, F jinými jakýmikoli stejnými násobky K, L, tak aby byla $G > K$ a nikoli $H > L$, a jakým násobkem jest G veličiny C, takovým buď též M veličiny A, a jakým K veličiny D, takovým buď též N veličiny B.



A ježto $A:B = C:D$ a za stejné násobky veličin A, C vzaty M, G a veličin B, D za jiné jakékoli stejné násobky N, K tedy jest-li $M > N$ je též $G > K$, pakli $M = N$, též $G = K$, pakli $M < L$, též $G < K$. Avšak $G > K$, tedy též $M > N$. Není však $H > L$; a M, H jsou stejné násobky veličin A, E a N, L jiné jakékoli stejné násobky veličin B, F. Tedy $A:B > E:F$.

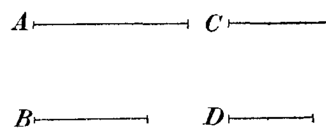
Když tedy bude míti veličina první ke druhé — —.

XIV.

Když bude míti veličina první ke druhé týž poměr jako třetí ke čtvrté, první však bude větší než třetí, též druhá bude větší čtvrté; a když stejná, bude stejná, a když menší, bude menší.

Nuže buď $A:B = C:D$ a buď $A > C$; pravím, že též $B > D$.

Neboť ježto $A > C$ a jinou jakoukoli veličinou jest B, tedy $A:B > C:B$ (V. VIII.). Avšak $A:B = C:D$, tedy též $C:D > C:B$. K čemu však totéž má větší poměr, to jest menší; tedy $D < B$; pročež $B > D$.



Podobně ovšem dokážeme, když $A = C$, že též $B = D$, a když $A < C$, že též $B < D$.

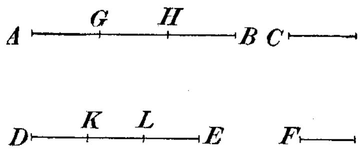
Když tedy bude míti veličina první ke druhé, — —.

XV.

Části mají po řadě vzaty jsouce týž poměr jako stejné násobky.

Nuže buď AB stejným násobkem veličiny C jako DE veličiny F; pravím, že $C:F = AB:DE$.

Neboť ježto AB je stejným násobkem veličiny C a DE veličiny F, tedy kolik veličin jest v AB stejných s C, tolikéž v DE stejných s F. Rozdělme AB v části AG, GH, HB stejné s C a DE v části DK, KL, LE stejné s F. Bude zajisté počet veličin AG, GH, HB stejný s počtem veličin DK, KL, LE. A ježto $AG = GH = HB$, je též $DK = KL = LE$; tedy $AG:DK = GH:KL = HB:LE$. Tedy jako se má jedna veličina přední ke své zadní, tak též součet předních k součtu zadních (V. XII.) tedy $AG:DK = AB:DE$. Avšak $AG = C$ a $DK = F$. Tedy $C:F = AB:DE$



Tedy části mají po řadě vzaty jsouce — —.

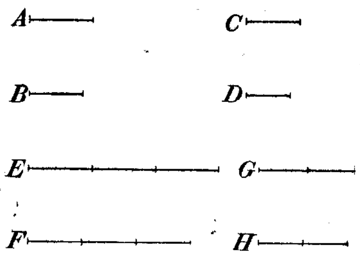
XVI.

Když jsou čtyři veličiny úměrou, také střídavě budou úměrou (srv. vým. 12)[23].)

Buďtež úměrou čtyři veličiny A, B, C, D, totiž $A:B = C:D$; pravím, že též střídvě bude $A:C = B:D$.

Nuže za stejné násobky veličin A, B, vezměme E, F, veličin pak C, D za jiné jakékoli stejné násobky G, H,

A ježto E je stejným násobkem veličiny A jako F veličiny B a části mají týž poměr jako stejné násobky (V. XV.), tedy $A:B = E:F$. Avšak $A:B = C:D$, tedy též $C:D = E:F$. Dále, ježto G, H jsou stejné násobky veličin C, D, tedy $C:D = G:H$. Také však $C:D = E:F$, tedy též $E:F = G:H$. Když pak čtyři veličiny jsou úměrou, první však je větší než třetí, též druhá bude větší nežli čtvrtá; pakli stejná, stejná; pakli menší, menší. Jest-li tedy $E > G$, též $F > H$; pakli stejná, stejná; pakli menší, menší. I jsou E, F stejnými násobky veličin A, B a G, H jinými jakýmikoli stejnými násobky veličin C, D; tedy $A:C = B:D$.



Když jsou tedy čtyři veličiny úměrou — —.

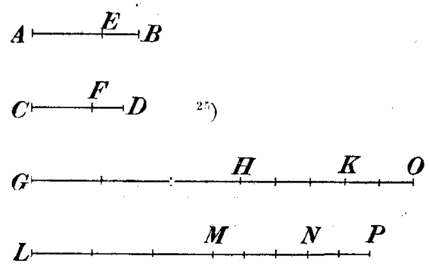
XVII.

Když jsou veličiny součetně úměrou, budou též rozdílově úměrou.[24])

[23]) Když $a:b = c:d$ bude též $a:c = b:d$.

[24]) K tomu viz vým. 14. a 15. Míní se takto: buď $S = a + b$, $T = c + d$; jest-li $(a + b):b = (c + d):d$, t. j. $S:b = T:d$; bude též $a:b = c:d$, t. j. $(S-b):b = (T-d):d$.

Buďte součetně úměrnými veličinami AB, BE, CD, DF, totiž $AB:BE = CD:DF$; pravím, že též rozdílově bude $AE:EB = CF:DF$.



Nuže za stejné násobky veličin AE, EB, CF, FD vezměme GH, HK, LM, MN, veličin pak EB, FD za jiné jakékoli stejné násobky KO, NP.

A ježto GH je stejným násobkem veličiny AE jako HK veličiny EB, tedy GH je stejným násobkem veličiny AE jako GK veličiny AB, a GH je stejným násobkem veličiny AE jako LM veličiny CF, tedy GK je stejným násobkem veličiny AB jako LM veličiny CF. Dále, ježto LM je stejným násobkem veličiny CF jako MN veličiny FD, tedy LM je stejným násobkem veličiny CF, jako LN veličiny CD. LM však bylo stejným násobkem veličiny CF jako GK veličiny AB; tedy GK je stejným násobkem veličiny AB jako LN veličiny CD. Tedy GK, LN jsou stejné násobky veličin AB, CD.

Dále, ježto HK je stejným násobkem veličiny EB jako MN veličiny FD a též KO stejným veličiny EB jako NP veličiny FD, též HO je stejným násobkem veličiny EB jako MP veličiny FD. A ježto $AB:BE = CD:DF$ a za stejné násobky veličin AB, CD vzali jsme GK, LN a HO, MP za stejné násobky veličin EB, FD, tedy jest-li $GK > HO$, též $LN > MP$; pakli stejná, stejná; pakli menší, menší. Nuže budiž $GK > HO$, a odečteme-li společnou HK, tedy též $GH > KO$. Ale bylo-li $GK > HO$, byla též $LN > MP$; a odečteme-li společnou MN, tedy též $LM > NP$. Podobně ovšem dokážeme, když $GH = KO$, že bude též $LM = NP$, pakli menší, bude menší. A GH, LM jsou stejné násobky veličin AE, CF a KO, NP veličin EB, FD jiné jakékoli stejné násobky. Tedy $AE:EB = CF:FD$.

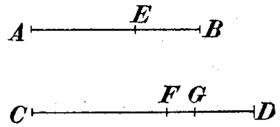
Když tedy jsou veličiny součetně úměrou — —.

XVIII.

Když jsou veličiny rozdílově úměrou, budou též součetně úměrou.

Rozdílově úměrou buďte veličiny AE, EB, CF, FD, totiž $AE:EB = CF:FD$; pravím, že budou též součetně úměrou, totiž $AB:BE = CD:FD$.

Neboť není-li $AB:BE = CD:DF$, bude se míti AB k BE jako CD buď k něčemu menšímu než DF nebo většímu.



Měj se prve k menšímu DG. A ježto $AB:BE = CD:DG$, veličiny součetně jsou úměrou, pročež i rozdílově budou úměrou. Tedy $AE:EB = CG:GD$. Je však podmínkou, že též $AE:EB = CF:FD$; také tedy $CG:GD = CF:FD$. Avšak první člen CG je větší než třetí CF; tedy též druhý GD větší než čtvrtý FD. Ale též menší,

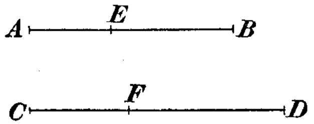
[25]) Tohoto vyobr. ve vyd. Heibergově není; doplnil jsem tedy sám.

což právě jest nemožno. Tedy AB k BE nemá se jako CD k menšímu než FD. Podobně ovšem dokážeme, že ani k většímu; tedy právě k FD.

Když jsou tedy veličiny rozdílově úměrou, — —.

XIX.

Když se má část k části jako celek k celku, též zbytek bude se míti ke zbytku jako celek k celku[26].)



Nuže buď $AE:CF = AB:CD$; pravím, že bude též $EB:FD = AB:CD$.

Neboť ježto $AE:CF = AB:CD$, také střídavě $BA:AE = DC:CF$. A ježto součetně veličiny jsou úměrné, též rozdílově budou úměrné, totiž $DF:CF = BE:EA$, a střídavě $EA:FC = BE:DF$. Avšak podmínkou jest, že $AB:CD = AE:CF$, tedy též zbytek EB bude se míti ke zbytku FD jako celek AB k celku CD.

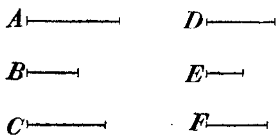
Když se tedy má část k části jako celek k celku, — —.

Důsledek.

Z toho zajisté patrno, když jsou veličiny součetně úměrou, že též obráceně budou úměrou. [Což právě bylo dokázati].

XX.

Když jsou tři veličiny a jiné jim počtem rovné a jsou po dvou brány jsouce také v témž poměru, první však po řadě větší jest než třetí, také čtvrtá bude větší než šestá, a když stejná bude stejná a když menší bude menší.[27])



Třemi veličinami buďtež A, B, C a jinými jim počtem rovnými D, E, F a buďte po dvou brány jsouce v témž poměru, totiž $A:B = D:E$ a $B:C = E:F$ a buď po řadě $A > C$; pravím, že bude též $D > F$, a když $A = C$, též $D = F$, a když $A < C$, též $D < F$.

Neboť ježto $A > C$ a jinou nějakou veličinou jest B, větší k témuž má větší poměr než veličina menší, tedy $A:B > C:B$. Avšak $A:B = D:E$ a obráceně $C:B = F:E$, tedy též $D:E > F:E$. Z veličin však k témuž poměr majících která má větší poměr, jest větší; tedy $D > F$. Podobně ovšem dokážeme, když $A = C$, že bude též $D = F$, a když $A < C$, též $D < F$.

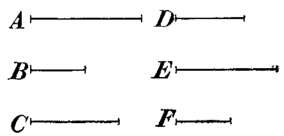
Když tedy jsou tři veličiny a jiné jim počtem rovné — —.

[26]) Buď $M = a + b$, $N = c + d$; když $a:c = M:N$, bude též $b:d = M:N$.

[27]) Buďtež a, b, c; d, e, f; buď $a:b = d:e$, $b:c = e:f$; jest li $a \gtreqless c$, bude též $d \gtreqless f$.

XXI.

Když jsou tři veličiny a jiné jim počtem rovné po dvou brány jsouce také v témž poměru a jest úměra jejich nestejnořadná, po řadě však jest první větší než třetí, také čtvrtá bude větší než šestá a když stejná, bude stejná, a když menší, bude menší.[28])



Třemi veličinami buďtež A, B, C, a jinými jim počtem rovnými D, E, F a po dvou brány jsouce také v témž poměru, buď však úměra jejich nestejnořadná, totiž $A:B = E:F$ a $B:C = D:E$ a po řadě buď $A > C$; pravím, že bude též $D > F$, a když stejná, bude stejná, a když menší, bude menší.

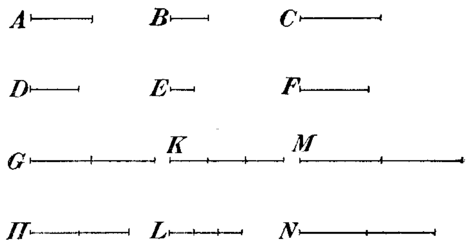
Neboť ježto $A > C$, jinou pak nějakou veličinou B, tedy $A:B > C:B$. Avšak $A:B = E:F$ a obráceně $C:B = E:D$. Tedy též $E:F > E:D$. K čemu však totéž má větší poměr, to jest menší; tedy $F < D$, pročež $D > F$. Podobně ovšem dokážeme, když $A = C$, že též $D = F$, a když $A < C$, že též $D < F$.

Když jsou tedy tři veličiny a jiné jim počtem rovné — —.

XXII.

Když jest několik veličin a jiné jim počtem rovné po dvou brány jsouce také v témž poměru, též stejnořadně budou v témž poměru.[29])

Buď několik veličin A, B, C a jiné jim počtem rovné D, E, F po dvou brány jsouce v témž poměru, totiž $A:B = D:E$ a $B:C = E:F$; pravím, že též stejnořadně budou v témž poměru.



Nuže za stejné násobky veličin A, D vezměme G, H, veličin B, E za jiné jakékoli stejné násobky K, L a ještě M, N za jiné jakékoli násobky veličin C, F.

A ježto $A:B = D:E$ a G, H vzaty za stejné násobky veličin A, D a K, L za jiné jakékoli stejné násobky veličin B, E, tedy $G:K = H:L$. Z téže příčiny ovšem též $K:M = L:N$. Ježto tedy jsou tři veličiny G, K, M a jiné jim počtem rovné H, L, N po dvou brány jsouce také v témž poměru, tedy po řadě, jest-li $G > M$, též $H > N$, pakli stejná, bude stejná, pakli menší, bude menší. I jsou G, H, veličin A, D stejnými násobky a M, N jinými jakýmikoli stejnými násobky veličin C, F, tedy $A:C = D:F$.

Když jest tedy několik veličin a jiné jim počtem rovné — —.

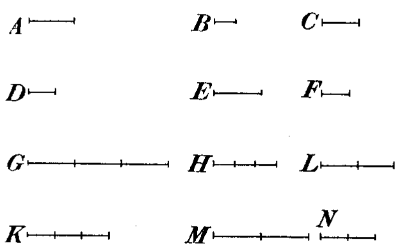
[28]) Buďtež a, b, c; d, e, f; buď $a:b = e:f$, $b:c = d:e$; bude-li $a \gtreqless c$, bude též $d \gtreqless f$.

[29]) Buďtež a, b, c; d, e, f; jest-li $a:b = d:e$, $b:c = e:f$, bude též $a:c = d:f$.

XXIII.

Když jsou tři veličiny a jiné jim počtem rovné po dvou brány jsouce v témž poměru a mají úměru nestejnořadnou, také stejnořadně v témž poměru budou.[30])

Buďte tři veličiny A, B, C a jiné jim počtem rovné po dvou brány jsouce v témž poměru D, E, F a mějtež úměru nestejnořadnou, totiž $A:B=E:F$ a $B:C=D:E$; pravím, že $A:C=D:F$.



Vezměme G, H, K za stejné násobky veličin A, B, D a L, M, N za jiné jakékoli stejné násobky veličin C, E, F.

A ježto G, H jsou stejné násobky veličin A, B a části mají se stejnými násobky týž poměr (V. XV.), tedy $A:B=G:H$. Z téže příčiny ovšem též $E:F=M:N$; i jest $A:B=E:F$; tedy též $G:H=M:N$. A ježto $B:C=D:E$, též střídavě $B:D=C:E$. A ježto H, K jsou stejné násobky veličin B, D a části se stejnými násobky mají stejný poměr, tedy $B:D=H:K$. Avšak $B:D=C:E$, tedy též $H:K=C:E$. Dále, ježto L, M jsou stejné násobky veličin C, E, tedy $C:E=L:M$. Avšak $C:E=H:K$, tedy též $H:K=L:M$ a střídavě $H:L=K:M$. Bylo pak dokázáno, že $G:H=M:N$. Ježto tedy jsou tři veličiny G, H, L a jiné jim počtem rovné K, M, N po dvou brány jsouce v témž poměru a mají úměru nestejnořadnou, stejnořadně tedy, jest-li $G>L$, je též $K>N$, pakli stejná, stejná, pakli menší, menší. I jsou G, K stejnými násobky veličin A, D a L, N veličin C, F. Tedy $A:C=D:F$.

Když tedy jsou tři veličiny a jiné jim počtem rovné — —

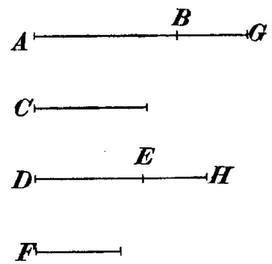
XXIV.

Když první veličina má ke druhé týž poměr jako třetí ke čtrté a též pátá ke druhé má týž poměr jako šestá ke čtvrté, také součet první s pátou bude míti ke druhé týž poměr jako součet třetí se šestou ke čtvrté.[31])

Nuže buď $AB:C=DE:F$ a též $BG:C=EH:F$; pravím, že též $AG:C=DH:F$.

[30]) Buďtež $a, b, c; d, e, f$; jest-li $a:b=e:f$, $b:c=d:e$; bude též $a:c=d:f$.

[31]) Buďtež $a, b, c; d, e, f$; jest-li $a:b=c:d$, $e:b=f:d$, bude též $(a+e):b=(c+f):d$; neboť $ad=bc$, $ed=bf$, sečtením $d(a+e)=b(c+f)$.



Neboť ježto $BG:C=EH:F$, tedy obráceně $C:BG=F:EH$.

Ježto tedy $AB:C=DE:F$ a $C:BG=F:EH$, tedy po řadě $AB:BG=DE:EH$.

A ježto veličiny jsou úměrné rozdílově, též součetně budou úměrné (V. XVIII.); tedy $AG:GB=DH:HE$. I jest také $BG:C=EH:F$; tedy po řadě $AG:C=DH:F$ (V. XXII.).

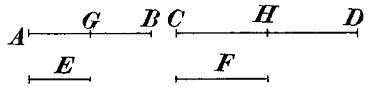
Když tedy první veličina má ke druhé týž poměr — —.

XXV.

Když jsou čtyři veličiny úměrou, největší s nejmenší jest větší než dvě ostatní.

Čtyřmi veličinami úměrnými buďtež AB, CD, E, F, totiž buď $AB:CD=E:F$, a největší z nich buď AB, nejmenší pak F; pravím, že $(AB+F)>(CD+E)$.

Nuže dejme tomu, že $E=AG$ a $F=CH$*).



Ježto $AB:CD=E:F$ a $E=AG$ a $F=CH$, tedy $AB:CD=AG:CH$. A ježto celek AB má se k celku CD jako část AG k části CH, tedy zbytek GB bude se míti ke zbytku HD jako celek AB k celku CD (V. XIX.). Avšak $AB>CD$, tedy $GB>HD$ (V. XIV.). A ježto $AG=E$ a $CH=F$, tedy $AG+F=E+CH$. A když GB, HD jsou nestejné a $GB>HD$ a ku GB přičteme $AG+F$, k HD pak přičteme $CH+E$, vychází z toho $(AB+F)>(CD+E)$.

Když jsou tedy čtyři veličiny úměrou — —.

Kniha šestá.

Výměry.

1. Útvary přímkové jsou si podobny, které mají úhly jednotlivě stejné a strany při stejných úhlech úměrné.
2. [Zvratné (reciproké) jsou útvary, když v jednom i druhém z nich přední i zadní poměry jsou]†).
3. Pravíme, že přímka jest rozdělena poměrem krajním a středním, když větší úsečka má se k menší jako celá k větší††).
4. Výškou každého útvaru jest kolmice vedená od temene k základně.
5. [Pravíme, že poměr z poměrů se skládá, když hodnoty poměrů samy sobě násobky jsouce činí nějaký poměr]†).

*) Že AB jest největší, tedy též $AB>E$, to podmínkou; že $CD>F$, jde z úměry (srv. V. XIV.).

†) Vým. 2. nepochází od Eukl., také nejasný (srv. úkol XIV.) Výměr 5. podvržený.

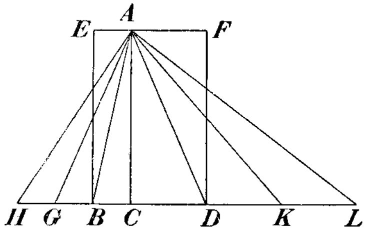
††) Rozdělení »zlatým řezem«, kdež úsečka větší je střední úměrnou.

I.

Trojúhelníky a rovnoběžníky mající stejnou výšku mají se k sobě jako základny.

Buďtež trojúhelníky ABC, ACD a rovnoběžníky EC, CF o téže výšce AC; pravím, že základna BC má se k CD jako $\triangle ABC$ k $\triangle ACD$ a rovnoběžník EC k rovnoběžníku CF.

Nuže prodlužme BD na obě strany do bodů H, L a mějme BG, GH za rovné základně BC a několik základně CD za rovné, t. DK, KL, a veďme spojnice AG, AH, AK, AL.



A ježto $CB = BG = GH$, také $\triangle AHG = AGB = ABC$ (I. XXXVIII.). Tedy jakým násobkem základny BC je základna HC, takovým násobkem trojúhelníku ABC je též $\triangle AHC$. Z téže příčiny ovšem, jakým násobkem základny CD jest AC, takovým násobkem trojúhelníku ACD je též $\triangle ALC$; a jest li $HC = CL$, též $\triangle AHC = ACL$, a jest-li $HC > CL$, též $\triangle AHC > ACL$, a jest-li $HC < CL$, též $\triangle AHC < ACL$. Když tedy jsou čtyři veličiny, dvě základny BC, CD a dva trojúhelníky ABC, ACD, za stejné násobky zkladny BC a trojúhelníku ABC vzaty jsou základna HC a $\triangle AHC$, základny pak CD a trojúhelníku ADC za jiné jakékoli násobky základna LC a $\triangle ALC$; a dokázáno, že, jest-li $HC > CL$, též $\triangle AHC > ALC$, a jest-li stejná, stejný, a jest-li menší, menší; tedy $BC : CD = ABC : ACD$.

A ježto $EC = 2\,ABC$ a $FC = 2\,ACD$ (I. XXXIV.) a části mají se k sobě jako stejné násobky, tedy $\triangle ABC : ACD = EC : FC$. Ježto ovšem bylo dokázáno, že $BC : CD = ABC : ACD$ a $ABC : ACD = EC : CF$, tedy též $BC : CD = EC : FC$.

Tedy trojúhelníky a rovnoběžníky mající stejnou výšku — —.

II.

Když se v trojúhelníku zřídí k jedné straně rovnoběžka, protne strany (druhé) trojúhelníku úměrně; a když se strany trojúhelníku protnou úměrně, spojnice průsečíků bude rovnoběžkou (třetí) strany trojúhelníku.[1])

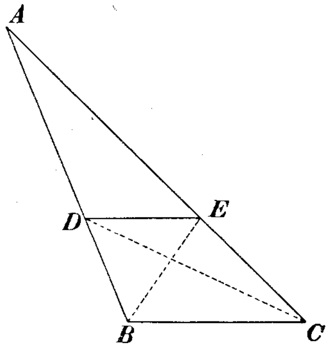
Nuže veďme v $\triangle ABC$ k jedné straně BC rovnoběžku DE; pravím, že $BD : DA = CE : EA$.

Nuže veďme spojnice BE, CD.

Tedy $\triangle BDE = CDE$, neboť jsou na téže základně DE a mezi týmiž rovnoběžkami DE, BC. Jiná pak jakási veličina jest $\triangle ADE$. Stejné však veličiny mají k témuž týž poměr; tedy $\triangle BDE : ADE = CDE : ADE$. Avšak $BDE : ADE = BD : DA$; neboť majíce touž výškou

[1].) Druhá část je pravdivá, jen když úměrné úsečky jsou stejnolehlé.

kolmici vedenou z E k AB mají se k sobě jako základny. Z téže příčiny ovšem $CDE : ADE = CE : EA$; tedy též $BD : DA = CE : EA$.



Ale buďte již strany AB, AC trojúhelníku ABC proťaty úměrně, $BD : DA = CE : EA$, a vedena spojnice DE; pravím, že jest $DE \parallel BC$.

Neboť vykonáme-li touž úpravu, ježto $BD : DA = CE : EA$, avšak $BD : DA = \triangle BDE : ADE$ a $CE : EA = \triangle CDE : ADE$, tedy též $BDE : ADE = CDE : ADE$. Tedy $\triangle BDE$ i CDE mají k ADE týž poměr. Tedy $\triangle BDE = CDE$; a jsou na téže základně DE. Stejné však trojúhelníky a na téže základně jsou též mezi týmiž rovnoběžkami. Tedy $DE \parallel BC$.

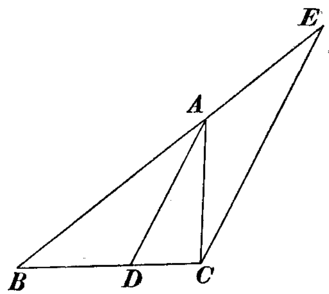
Když se tedy v trojúhelníku zřídí k jedné straně — —.

III.

Když se úhel trojúhelníku (na temeni) rozpůlí a přímka úhel rozpolující seče též základnu, úsečky základny budou míti týž poměr jako zbývající strany trojúhelníku; a mají-li úsečky základny týž poměr jako zbývající strany trojúhelníku, přímka vedená od vrcholu k průsečíku bude úhel trojúhelníku rozpolovati.

Trojúhelníkem buď ABC a $\sphericalangle BAC$ buď přímkou AD rozpůlen; pravím, že $BD : CD = BA : AC$.

Nuže veďme z bodu C k DA rovnoběžku CE a prodlužmen BA do E. A ježto rovnoběžky AD, EC proťala přímka AC, tedy $\sphericalangle ACE = CAD$. Avšak $\sphericalangle CAD$ vzat za stejný s BAD, tedy též $BAD = ACE$. Dále, ježto rovnoběžky AD, EC proťala přímka BAE, vnější $\sphericalangle BAD = AEC$ vnitřnímu. Dokázáno pak, že též $\sphericalangle AEC = BAD$, tedy též $\sphericalangle ACE = AEC$; pročež i strana $AE = AC$. A ježto v $\triangle BCE$ k jedné straně EC vedena rovnoběžka AD, tedy $BD : DC = BA : AE$ (VI. II.). Avšak $AE = AC$; tedy $BD : DC = BA : AC$.



Ale buď již $BD : DC = BA : AC$ a veďme spojnici AD; pravím, že přímka AD $\sphericalangle BAC$ půlí.

Neboť vykonáme-li touž úpravu, ježto $BD : DC = BA : AC$, ale též $BD : DC = BA : AE$, neboť v $\triangle BCE$ jest $EC \parallel AD$; tedy $BA : AC = BA : AE$. Tedy $AC = AE$; pročež i $\sphericalangle AEC = ACE$. Avšak $\sphericalangle AEC = BAD$ vnějšímu. Úhel však $ACE = CAD$ střídavému; tedy též $\sphericalangle BAD = CAD$. Tedy přímkou AD $\sphericalangle BAC$ rozpůlen.

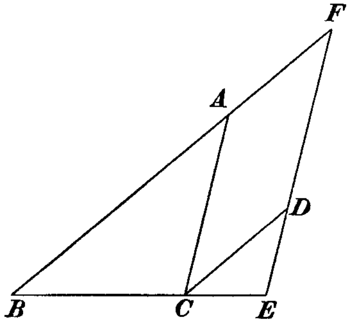
Když se tedy (na temeni) úhel v trojúhelníku rozpůlí — —.

IV.

V stejnoúhlých trojúhelnících úměrné jsou strany při stejných úhlech i stejnolehlé, které leží proti stejným úhlům.

Stejnoúhlými trojúhelníky buďtež ABC, DCE a buď $\sphericalangle ABC = DCE$, $\sphericalangle BAC = CDE$, $\sphericalangle ACB = CED$; pravím, že v trojúhelnících ABC, DCE úměrné jsou strany při stejných úhlech i stejnolehlé, které leží proti stejným úhlům.

Nuže BC buď s CE v přímce. A ježto $(\sphericalangle ABC + ACB) < 2R$ a $\sphericalangle ACB = DEC$, tedy $(\sphericalangle ABC + DEC) < 2R$, pročež BA, ED prodloužením se setkají. Buďte prodlouženy a stýkejte se v F.

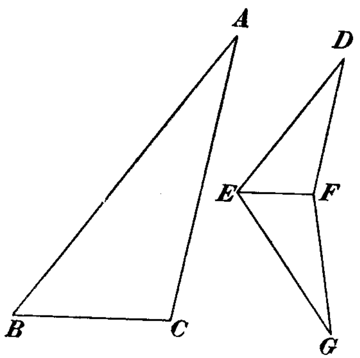


A ježto $\sphericalangle DCE = ABC$, jest $BF \parallel CD$. Dále, ježto $\sphericalangle ACB = DEC$, jest $AC \parallel FE$. Tedy $FACD$ jest rovnoběžník; pročež $FA = DC$, $AC = FD$. A ježto v $\triangle FBE$ vedena k FE rovnoběžka AC, tedy $BA : AF = BC : CE$. Avšak $AF = CD$; tedy $BA : CD = BC : CE$ a střídavě $AB : BC = DC : CE$. Dále, ježto $CD \parallel BF$, tedy $BC : CE = FD : DE$. Avšak $FD = AC$, tedy $BC : CE = AC : DE$ a střídavě $BC : CA = CE : ED$. Ježto tedy dokázáno, že $AB : BC = DC : CE$ a $BC : CA = CE : ED$, stejnořadně tedy $BA : AC = CD : DE$ (V. XXII.).

Tedy v stejnoúhlých trojúhelnících úměrné jsou strany — —.

V.

Když mají dva trojúhelníky strany úměrné, budou ty trojúhelníky stejnoúhlé a budou míti ty úhly stejné, proti nimž leží stejnolehlé strany.



Buďtež ABC, DEF trojúhelníky majícími úměrné strany, totiž $AB : BC = DE : EF$ a $BC : CA = EF : FD$ a též $BA : AC = ED : DF$; pravím, že $\triangle ABC$ je stejnoúhlý s $\triangle DEF$ a že úhly, proti nimž leží stejnolehlé strany, budou míti stejné, t. $ABC = DEF$, $BCA = EFD$, $BAC = EDF$.

Nuže sestrojme na přímce EF v bodech na ní E, F $\sphericalangle FEG = ABC$ a $\sphericalangle EFG = ACB$, tedy zbývající $\sphericalangle A = G$.

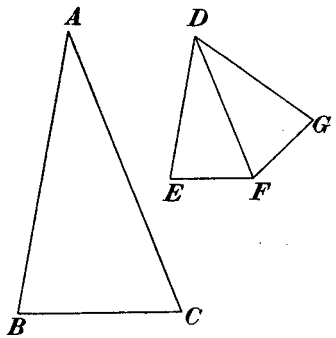
Tedy $\triangle ABC$ je stejnoúhlý s $\triangle EGF$. Pročež v trojúhelnících ABC, EGF strany při stejných úhlech i stejnolehlé proti stejným úhlům ležící jsou úměrné; tedy $AB : BC = GE : EF$. Avšak dáno jest, že $AB : BC = DE : EF$; tedy $DE : EF = GE : EF$. Tedy DE, GE mají k EF týž poměr; pročež $DE = GE$. Z téže příčiny ovšem i $DF = GF$. Ježto tedy $DE = EG$ a společnou EF, dvě tedy DE, EF dvěma GE, EF jednotlivě rovny jsou, i základna $DF = FG$; tedy $\sphericalangle DEF = GEF$ a $\triangle DEF = GEF$ i ostatní úhly rovny ostatním úhlům, proti nimž leží stejné strany. Tedy též $\sphericalangle DFE = GFE$ a $\sphericalangle EDF = EGF$. A ježto $\sphericalangle FED = GEF$, avšak $GEF = ABC$, tedy též $\sphericalangle ABC = DEF$. Z téže příčiny ovšem též $\sphericalangle ACB = DFE$ a též $\sphericalangle A = D$. Tedy $\triangle ABC$ je stejnoúhlý s $\triangle DEF$.

Když tedy mají dva trojúhelníky strany úměrné — —.

VI.

Když mají dva trojúhelníky po jednou úhlu stejném a strany při stejných úhlech úměrné, ty trojúhelníky budou stejnoúhlé a budou míti ty úhly stejné, proti nimž leží stejnolehlé strany.

Buďtež ABC, DEF trojúhelníky majícími jeden úhel BAC jednomu úhlu EDF rovný a při stejných úhlech úměrné strany, tak že $BA : AC = ED : DF$; pravím, že $\triangle ABC$ je s $\triangle DEF$ stejnoúhlý a bude míti $\sphericalangle ABC$ stejný s DEF a $\sphericalangle ACB$ s DFE.



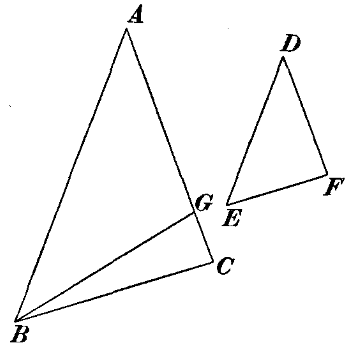
Nuže buď sestrojen na přímce DF a v bodech na ní D, F $\sphericalangle FDG$ kterémukoli z úhlů BAC, EDF rovný a $\sphericalangle DFG$ rovný úhlu ACB, tedy zbývající $\sphericalangle B = G$. Tedy $\triangle ABC$ je s $\triangle DGF$ stejnoúhlý. Tedy $BA : AC = GD : DF$. Dáno však, že $BA : AC = ED : DF$; tedy též $ED : DF = GD : DF$. Pročež $ED = DG$ a společnou DF; obě tedy ED, DF rovny oběma GD, DF i $\sphericalangle EDF = GDF$, tedy základna $EF = GF$ a $\triangle DEF = GDF$, i ostatní úhly budou rovny ostatním, proti nimž leží stejné strany. Tedy $\sphericalangle DFG = DFE$, $\sphericalangle DGF = DEF$. Avšak $\sphericalangle DFG = ACB$, tedy též $\sphericalangle ACB = DFE$. Dáno však, že též $\sphericalangle BAC = EDF$; tedy též zbývající $\sphericalangle B = E$; tedy $\triangle ABC$ je s trojúhelníkem DEF stejnoúhlý.

Když tedy mají dva trojúhelníky po jednom úhlu — —.

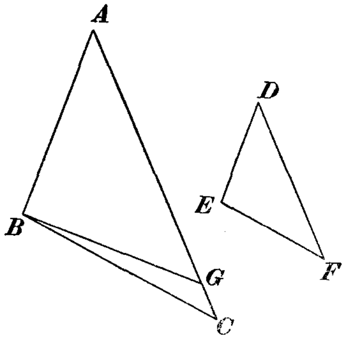
VII.

Když mají dva trojúhelníky po jednom úhlu stejném strany pak při jiných úhlech úměrné, z ostatních pak úhlů jeden i druhý zároveň buď menší nebo nemenší pravého, stejnoúhlé budou ty trojúhelníky a stejné budou míti ty úhly, při nichž úměrné jsou strany.

Buďtež ABC, DEF trojúhelníky majícími po jednom úhlu stejném, t. $\sphericalangle BAC = EDF$, a při jiných úhlech ABC, DEF úměrné strany, $AB : BC = DE : EF$, z ostatních pak úhlů C, F dříve oba zároveň menší pravého; pravím, že $\triangle ABC$ s DEF je stejnoúhlý i bude $\sphericalangle ABC = DEF$ i patrně úhel zbývající $C = F$.



Neboť není-li $\sphericalangle ABC = DEF$, jeden z nich je větší. Větším buď $\sphericalangle ABC$ I sestrojme na přímce AB a v bodě na ní $B \sphericalangle ABG = DEF$. A ježto $\sphericalangle A = D$ a $\sphericalangle ABG = DEF$, tedy zbývající $\sphericalangle AGB = DFE$. Tedy $\triangle ABG$ je s $\sphericalangle DEF$ stejnoúhlý; pročež $AB : BG = DE : EF$. Dáno však, že $DE : EF = AB : BC$, tedy AB má ku BC i ku BG týž poměr; tedy $BC = BG$. Protož i $\sphericalangle C = BGC$. Dáno však, že $\sphericalangle C < R$; tedy též $\sphericalangle BGC < R$; pročež úhel jeho vedlejší $AGB > R$. I dokázáno, že roven úhlu F; tedy též $\sphericalangle F > R$. Dáno však, že jest pravého menší; což právě nesrovnalost. Tedy není $\sphericalangle ABC$ nestejný s DEF, tedy je stejný. Jest pak i $\sphericalangle A = D$, tedy též zbývající $\sphericalangle C = F$. Tedy $\triangle ABC$ s DEF je stejnoúhlý.



Nuže již dejme tomu, že zase i $\sphericalangle C$ i $\sphericalangle F$ není pravého menší; pravím opět, že též takto $\triangle ABC$ je s $\triangle DEF$ stejnoúhlý.

Neboť vykonáme-li touž úpravu, podobně dokážeme, že $BC = BG$; pročež i $\sphericalangle C = BGC$. Avšak $\sphericalangle C$ není menší než pravý, tedy ani $\sphericalangle BGC$ není pravého menší. Tedy v $\triangle BGC$ dva úhly nejsou menší dvou pravých; což právě nemožno. Tedy opět $\sphericalangle ABC$ není nestejný s $\sphericalangle DEF$; tedy je stejný. Jest pak i $\sphericalangle A = D$; tedy zbývající $\sphericalangle C = F$. Pročež $\triangle ABC$ a DEF jsou stejnoúhlé.

Když tedy mají dva trojúhelníky po jednom úhlu stejném — —.

VIII.

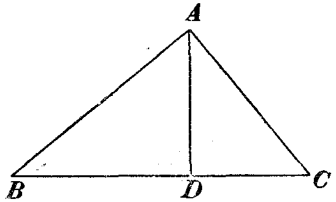
Když se v pravoúhlém trojúhelníku vede od pravého úhlu na základnu kolmice, trojúhelníky při kolmici jsou podobny celému i navzájem.

Pravoúhlým trojúhelníkem buď ABC a jeho pravým úhlem BAC a veďme z A k BC kolmici AD; pravím, že $\triangle ABD$ i $\triangle ADC$ jsou podobny trojúhelníku ABC i také navzájem.

Neboť ježto $\sphericalangle BAC = ADB$, neboť oba pravé, a společným obou trojúhelníkův ABC i ABD jest $\sphericalangle B$, tedy zbývající $\sphericalangle ACB = BAD$; tedy $\triangle ABC$ s $\triangle ABD$ je stejnoúhlý; tedy BC proti pravému úhlu v $\triangle ABC$ má se k BA proti pravému úhlu v $\triangle ABD$ jako sama AB proti $\sphericalangle C$ v $\triangle ABC$ k BD proti stejnému $\sphericalangle BAD$ v $\triangle ABD$ a rovněž jako $AC : AD$ proti $\sphericalangle B$, oběma trojúhelníkům společnému. Tedy $\triangle ABC$ s ABD je stejnoúhlý a má strany při stejných úhlech úměrné.

Tedy $\triangle ABC \sim ABD$. Podobně ovšem dokážeme, že též $\triangle ADC \sim ABC$; a tak ABD i ADC podoben je celému ABC.

Pravím ovšem, že $\triangle ABD$ a $\triangle ADC$ jsou si také navzájem podobny.



Neboť ježto $\sphericalangle BDA = R = \sphericalangle ADC$, avšak zajisté dokázáno, že též $\sphericalangle BAD = C$, tedy také zbývající $\sphericalangle B = DAC$; pročež $\triangle ABD$ s $\triangle ADC$ je stejnoúhlý. Tedy jako se má BD proti $\sphericalangle BAD$ v $\triangle ABC$ k DA proti $\sphericalangle C$ $(= \sphericalangle BAD)$ v $\triangle ADC$, tak sama AD proti $\sphericalangle B$ v $\triangle ABD$ k DC proti $\sphericalangle DAC$ v $\triangle ADC$, stejnému s $\sphericalangle B$, a rovněž jako $BA : AC$ proti úhlům pravým; tedy $\triangle ABD \sim \triangle ADC$.

Když se tedy v pravoúhlém trojúhelníku — —.

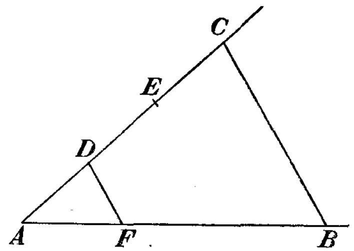
Důsledek.

Z toho zajisté patrno, že, když se v pravoúhlém trojúhelníku od úhlu pravého vede k základně kolmice, kolmice ta je střední úměrnou úseček základny; což se právě mělo dokázati.

IX.

Od přímky dané odřízni určenou několikátou část

Danou přímkou buď AB; má se tedy od přímky AB určená několikátá část odříznouti.



Určena tedy buď třetina. Veďme z A nějakou přímku AC, aby s AB svírala jakýkoliv úhel, a vezměme na AC jakýkoli bod D a buď $AD = DE = EC$, i veďme spojnici BC a z D rovnoběžku k ní DF.

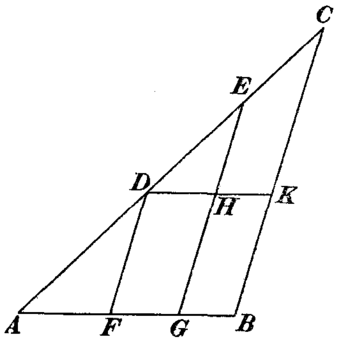
Ježto tedy v $\triangle ABC$ k jedné straně BC vedena rovnoběžka FD, tedy $CD : DA = BF : FA$, avšak $CD = 2\,DA$, tedy též $BF = 2\,FA$; pročež $BA = 3\,AF$.

Tedy od přímky dané AB odříznuta — —.

X.

Danou přímkou nerozdělenou rozděl podobně dané rozdělené.

Danou přímkou nerozdělenou buď AB, AC pak rozdělenou a bodech D, E, a postaveny buďte tak, aby svíraly jakýkoliv úhel,



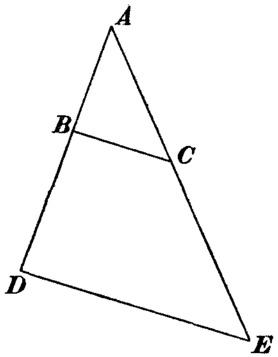
a vedena buď spojnice CB a z D, E, vedeny buďte rovnoběžky s BC, totiž DF, EG, a z D rovnoběžná s AB, t. DHK.

Tedy FH i HB jsou rovnoběžníky; pročež $DH = FG$, $HK = GB$. A ježto v $\triangle DKC$ k jedné straně KC vedena rovnoběžka HE, tedy $CE:ED = KH:HD$. Avšak $KH = BG$ a $HD = GF$. Tedy $CE:ED = BG:GF$. Dále ježto v $\triangle AGE$ k jedné straně GE vedena rovnoběžka FD, tedy $ED:DA = GF:FA$. Dokázáno pak, že $CE:ED = BG:GF$; tedy $CE:ED = BG:GF$ a $ED:DA = GF:FA$.

Tedy daná přímka nerozdělená AB rozdělena jest — —.

XI.

Dány-li dvě přímky, najdi třetí s nimi úměrnou.



Danými dvěma přímkami buďte BA, AC a buďte sestaveny, aby svíraly jakýkoliv úhel. Má se tedy ku přímkám BA, AC nalézti třetí úměrná.

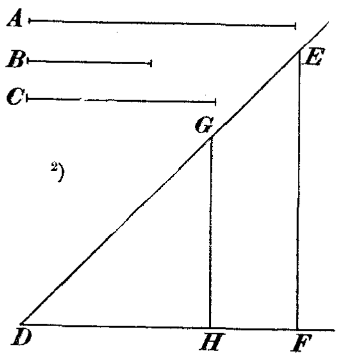
Nuže prodlužme je do bodů D, E a buď $AC = BD$ a veďme spojnici BC a z D k ní rovnoběžku DE.

Ježto tedy v $\triangle ADE$ k jedné straně DE vedena rovnoběžka BC, $AB:BD = AC:CE$. A $BD = AC$, Tedy $AB:AC = AC:CE$.

Dány-li tedy dvě přímky AB, AC nalezena — —.

XII.

Ke třem daným přímkám najdi úměrnou čtvrtou.



[2])

Danými třemi přímkami buďtež A, B, C; má se tedy k A, B, C nalézti čtvrtá úměrná.

Stranou buďte dvě přímky DE, DF a svírejte úhel EDF, a buď $A = DG$, $B = GE$, $C = DH$; a ke spojnici GH buď vedena z E rovnoběžka EF.

Ježto tedy v $\triangle DEF$ k jedné straně EF vedena rovnoběžka GH, tedy $DG:GE = DH:HF$. Avšak $DG = A$, $GE = B$ a $DH = C$; tedy $A:B = C:HF$.

Ke třem tedy daným přímkám A, B, C nalezena — —.

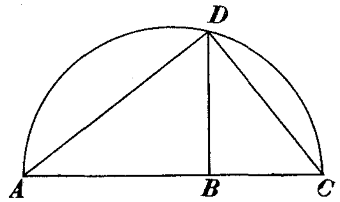
[2]) Ve vyd. Heibergově přímky A, B, C, při XI., náleží však patrně ke XII.

XIII.

Ke dvěma daným přímkám najdi střední úměrnou.

Danými dvěma přímkami buďtež AB, BC; má se tedy k AB, BC nalézti střední úměrná.

Buďte v přímce, a na AC narýsujme polokruh ADC a veďme z bodu B na přímce AC kolmici BD a spojnice AD, DC.



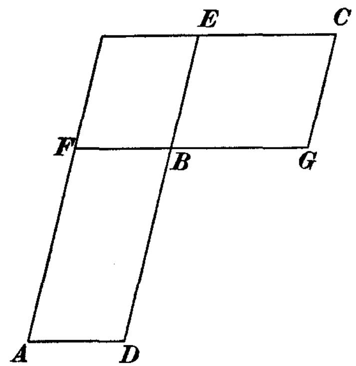
Ježto $\sphericalangle ADC$ je v polokruží, jest pravý. A ježto v pravoúhlém $\triangle ADC$ od pravého úhlu na základnu vedena kolmice, tedy DB je střední úměrnou úseček základny AB, BC (VI. VIII. důsl.).

Ke dvěma tedy daným přímkám AB, BC nalezena — —.

XIV.

Ve stejných a stejnoúhlých rovnoběžnících strany při stejných úhlech jsou k sobě v poměru obráceném; a rovnoběžníky stejnoúhlé, jichž strany při stejných úhlech jsou k sobě v poměru obráceném, jsou si rovny.

Stejnými a stejnoúhlými rovnoběžníky buďtež AB, BC a mějte stejné úhly při B, a DB, BE buďte v přímce, tedy v přímce jsou též FB, BG. Pravím, že v AB, BC strany při stejných úhlech jsou k sobě v obráceném poměru, t. j. že $DB:BE = GB:BF$.



Nuže doplňme rovnoběžnlk EF. Ježto tedy $AB = BC$ a jest mimo to FE, tedy $AB:FE = BC:FE$. Avšak $AB:FE = DB:BE$ a $BC:FE = GB:BF$ (VI. I.). Pročež také $DB:BE = GB:BF$. Tedy v rovnoběžnících AB, BC jsou strany při stejných úhlech v obráceném poměru.

Avšak buď již $DB:BE = GB:BF$; pravim, že $AB = BC$.

Neboť ježto $DB:BE = GB:BF$, avšak $DB:BE = AB:FE$ a $GB:BF = BC:FE$, tedy též $AB:FE = BC:FE$; pročež $AB = BC$.

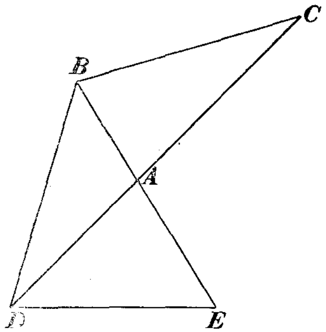
Tedy ve stejných a stejnoúhlých rovnoběžnících — —.

XV.

Ve stejných trojúhelnících, jež mají po jednom úhlu stejném, strany při stejných úhlech mají poměr obrácený; a trojúhelníky, jež mají po jednom úhlu stejném a jichž strany při stejných úhlech mají poměr obrácený, jsou si rovny.

Stejnými trojúhelníky buďtež ABC, ADE a buď $\sphericalangle BAC = DAE$;

pravím, že v trojúhelnících ABC, ADE strany při stejných úhlech jsou k sobě v poměru obráceném, t. j. že $CA : AD = EA : AB$.



Nuže buďte položeny tak, aby CA s AD byla v přímce; v přímce je tedy též EA s AB. I veďme spojnici BD.

Ježto △ $ABC = ADE$ a jiný jest BAD, tedy $CAB : BAD = EAD : BAD$. Avšak $CAB : BAD = CA : AD$ a $EAD : BAD = EA : AB$. Tedy $CA : AD = EA : AB$. Tedy v trojúhelnících ABC, ADE strany při stejných úhlech jsou k sobě v obráceném poměru

Nuže již buďte v △ ABC, ADE strany v obráceném poměru, a to $CA : AD = EA : AB$; pravím, že △ $ABC = ADE$.

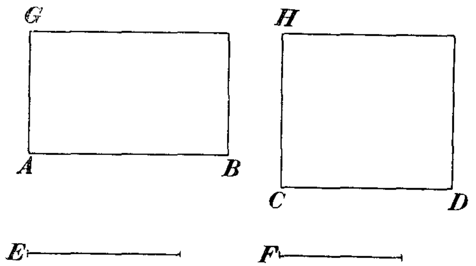
Neboť vedeme-li opět spojnici BD, ježto $CA : AD = EA : AB$, avšak $CA : AD = BAC : BAD$, a $EA : AB = EAD : BAD$; tedy $ABC : BAD = EAD : BAD$. Tedy oba △ ABC, EAD k BAD mají týž poměr. Tedy $ABC = EAD$.

Tedy ve stejných trojúhelnících, jež mají — —.

XVI.

Když jsou čtyři přímky úměrou, pravoúhelník objímaný krajními rovná se pravoúhelníku objímanému středními; a když pravoúhelník objímaný krajními rovná se pravoúhelníku objímanému středními, ty čtyři přímky budou úměrou.

Buďtež úměrou čtyři přímky AB, CD, E, F, totiž $AB : CD = E : F$; pravím, že pravoúhelník z AB, F rovná se pravoúhelníku z CD, E.



Veďme z bodů A, C ku přímkám AB, CD kolmice AG, CH a buď $AG = F$ a $CH = E$, i doplňme rovnoběžníky BG, DH.

A ježto $AB : CD = E : F$ a $E = CH$, $F = AG$, tedy $AB : CD = CH : AG$. Tedy v rovnoběžnících BG, DH strany při stejných úhlech[3]) jsou k sobě v poměru obráceném. Ve kterých však stejnoúhlých rovnoběžnících strany při stejných úhlech mají k sobě poměr obrácený, ty jsou si rovny (VI. XIV.); tedy $BG = DH$. I jest BG z AB, F, neboť $AG = F$, a DH z CD, E, neboť $E = CH$. Tedy pravoúhelník z AB, F rovná se pravoúhelníku z CD, E.

Avšak již buď pravoúhelník z AB, F roven pravoúhelníku z CD, E; pravím, že ty čtyři přímky budou úměrou, t. $AB : CD = E : F$.

[3]) Všecky rovnoběžníky lze zajisté proměniti v stejnoúhlé.

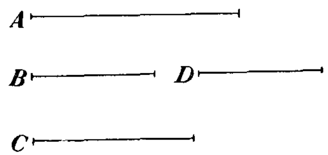
Neboť vykonáme-li touž úpravu, ježto $AB \times F = CD \times E$ a $AB \times F$ jest BG, neboť $AG = F$, a $CD \times E$ jest DH, neboť $CH = E$; tedy $BG = DH$, a jsou stejnoúhlé. V rovnoběžnících však stejných a stejnoúhlých strany při stejných úhlech mají se k sobě v obráceném poměru. Tedy $AB : CD = CH : AG$. Avšak $CH = E$, $AG = F$; tedy $AB : CD = E : F$.

Když jsou tedy čtyři přímky úměrou, pravoúhelník — —.

XVII.

Když jsou tři přímky úměrou, pravoúhelník objímaný krajními rovná se čtverci ze střední; a když pravoúhelník objímaný krajními rovná se čtverci ze střední, ty tři přímky budou úměrou.

Buďtež úměrou tři přímky A, B, C, t. $A : B = B : C$; pravím, že pravoúhelník z A, C rovná se čtverci z B.



Buď $D = B$. A ježto $A : B = B : C$ a $B = D$, tedy $A : B = D : C$. Když pak jsou čtyři přímky úměrou, pravoúhelník z krajních rovná se pravoúhelníku ze středních; tedy $A \times C = B \times D$. Avšak $B \times D = B^2$, neboť $B = D$; tedy $A \times C = B^2$.

Avšak již buď $A \times C = B^2$; pravím, že $A : B = B : C$.

Neboť vykonáme-li touž úpravu, ježto $A \times C = B^2$, avšak $B^2 = B \times D$, neboť $B = D$, tedy $A \times C = B \times D$. Když pak pravoúhelník z krajních roven provoúhelníku ze středních, ty čtyři přímky jsou úměrou. Tedy $A : B = D : C$. Avšak $B = D$; tedy $A : B = B : C$.

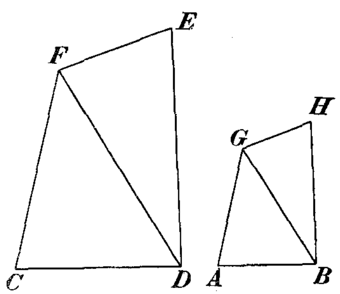
Když jsou tedy tři přímky úměrou, pravoúhelník — —.

XVIII.

Na dané přímce narýsuj útvar přímkový danému útvaru přímkovému podobný a podobně položený (stejnolehlý).

Danou přímkou buď AB a daným útvarem přímkovým CE; má se tedy na přímce AB narýsovati útvar přímkový, útvaru CE podobný a podobně položený.

Veďme spojnici DF a zřiďme na přímce AB a v bodech na ní A, B úhel $GAB = C$ a ∢ $ABG = CDF$. Tedy zbývající ∢ $CFD = AGB$; pročež △ FCD je s △ GAB stejnoúhlý. Tedy $FD : GB = FC : GA = CD : AB$. Opět zřiďme na přímce BG a v bodech na ní B, G ∢ $BGH = DFE$ a ∢ $GBH = FDE$. Tedy zbývající ∢ $E = H$; pročež △ FDE s △ GBH je stejnoúhlý; tedy $FD : GB = FE : GH = ED : HB$. Dokázáno pak, že též $FD : GB = FC : GA = CD : AB$; tedy též $FC : AG = CD : AB = FE : GH = ED : HB$.



A ježto ∢ $CFD = AGB$ a ∢ $DFE = BGH$, tedy celý $CFE = AGH$.

Z téže příčiny ovšem též $\sphericalangle CDE = ABH$; jest pak též $\sphericalangle C = A$ a $\sphericalangle E = H$. Tedy AH s CE je stejnoúhlý, a mají strany při stejných úhlech úměrné. Tedy útvar přímkový AH jest podoben útvaru přímkovému CE.

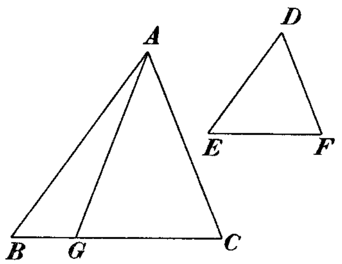
Tedy na dané přímce AB narýsován útvar přímkový — —.

XIX.

Podobné trojúhelníky mají se k sobě jako dvojmoci stejnolehlých stran.[4])

Podobnými trojúhelníky buďtež ABC, DEF a buď $\sphericalangle B = E$ a $AB : BC = DE : EF$, takže BC je stejnolehlá s EF; pravím, že $\triangle ABC : DEF = BC^2 : EF^2$.

Nuže vezměme k BC, EF za třetí úměrnou BG, tak aby byla $BC : EF = EF : BG$, a veďme spojnici AG.



Ježto tedy $AB : BC = DE : EF$, tedy střídavě $AB : DE = BC : EF$. — Avšak $BC : EF = EF : BG$. Tedy též $AB : DE = EF : BG$; tedy v trojúhelnících ABG, DEF strany při stejných úhlech jsou k sobě v obráceném poměru. Trojúhelníky pak mající po jednom úhlu stejném, když strany jejich při stejných úhlech mají k sobě poměr obrácený, jsou stejné. Tedy $\triangle ABG = DEF$ (VI. XV.). A ježto $BC : EF = EF : BG$ a když jsou tři přímky úměrou, první má se ke třetí jako čtverec prvé ke čtverci druhé (V. vým. 9.), tedy $BC : BG = BC^2 : EF^2$. Avšak $CB : BG = \triangle ABC : ABG$; tedy též $\triangle ABC : ABG = BC^2 : EF^2$. A $\triangle ABG = DEF$; tedy též $\triangle ABC : DEF = BC^2 : EF^2$.

Tedy podobné trojúhelníky mají se k sobě — —.

Důsledek.

Z toho zajisté patrno, když tři přímky jsou úměrou, že se má první ke třetí jako útvar z první k útvaru z druhé podobnému a podobně sestrojenému.[5])

XX.

Podobné mnohoúhelníky rozdělují se v trojúhelníky podobné a počtem rovné i s celky stejnolehlé; a mnohoúhelník má se k mnohoúhelníku (podobnému) jako dvojmoci stejnolehlých stran.

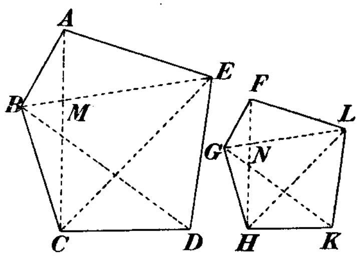
[4]) Eukl. dí: ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστί, t. j. $M : N = a \times a : b \times b$.

[5]) Slovem útvar (εἶδος) dle výkladu předcházejícího míní se *čtverec;* důsledek však nevysvítá z výkladu, nýbrž zakládá se na vým. 9. knihy V., pravdivém, ale nedokázaném.

Podobnými mnohoúhelníky buďtež $ABCDE$, $FGHKL$ a buď AB stejnolehlou s FG; pravím, že mnohoúhelníky $ABCDE$, $FGHKL$ rozdělují se v trojúhelníky podobné a počtem rovné a s celky stejnolehlé, a že $ABCDE : FGHKL = AB^2 : FG^2$.

Veďme BE, EC, GL, LH.

A ježto $ABCDE \sim FGHKL$, $\sphericalangle BAE = GFL$, a $BA : AE = GF : FL$.



Ježto tedy dva trojúhelníky ABE, FGL mají po jednom úhlu stejném a strany při stejných úhlech úměrné, tedy $\triangle ABE$ je s $\triangle FGL$ stejnoúhlý, pročež i podobný; tedy $\triangle ABE = FGL$. Jest pak i celý $\sphericalangle EBC = FGH$ pro podobnost mnohoúhelníků, tedy zbývající $\sphericalangle EBC = LGH$. A ježto $\triangle ABE \sim FGL$ a proto $EB : BA = LG : GF$, avšak zajisté též pro podobnost mnohoúhelníkův $AB : BC = FG : GH$, tedy po řadě $EB : BC = LG : GH$ i strany při stejných úhlech EBC, LGH jsou úměrné; tedy $\triangle EBC$ s LGH je stejnoúhlý, pročež i $\triangle EBC \sim LGH$. Z téže příčiny ovšem též $\triangle ECD \sim LHK$. Tedy podobné mnohoúhelníky $ABCDE$, $FGHKL$ rozdělují se v trojúhelníky podobné a počtem rovné.

Pravím, že také s celky stejnolehlé, t. j. tak, že úměrné jsou trojúhelníky a předními členy jsou ABE, EBC, ECD a jejich zadními FGL, LGH, LHK, a že $ABCDE$ má se k $FGHKL$ jako dvojmoci stejnolehlých stran t. j. AB^2 ku FG^2.

Nuže veďme spojnice AC, FH. A ježto pro podobnost mnohoúhelníkův $\sphericalangle ABC = FGH$ a $AB : BC = FG : GH$, $\triangle ABC$ s FGH je stejnoúhlý; tedy $\sphericalangle BAC = GFH$ a $\sphericalangle BCA = GHF$. A ježto $\sphericalangle BAM = GFN$ a též $\sphericalangle ABM = FGN$, tedy též zbývající $\sphericalangle AMB = FNG$. Tedy $\triangle ABM$ je s FGN stejnoúhlý. Podobně ovšem dokážeme, že též $\triangle BMC$ s GNH je stejnoúhlý. Úměrou tedy jest $AM : MB = FN : NG$ a $BM : MC = GN : NH$; protož také po řadě $AM : MC = FN : NH$. Avšak $AM : MC = ABM : MBC = AME : EMC$, neboť mají se k sobě jako základny. Tedy též jako se má jeden z předních členů k jednomu zadnímu, tak součet předních k součtu zadních; tedy $\triangle AMB : BMC = ABE : CBE$. Avšak $AMB : BMC = AM : MC$; tedy též $AM : MC = \triangle ABE : EBC$ Z téže příčiny ovšem též $FN : NH = FGL : GLH$. I jest $AM : MC = FN : NH$; tedy též $\triangle ABE : BEC = FGL : GLH$ a střídavě $\triangle ABE : FGL = BEC : GLH$. Podobně ovšem dokážeme zřídíce spojnice BD, GK, že též $BEC : LGH = ECD : LHK$. A ježto $\triangle ABE : FGL = EBC : LGH$ a rovněž $ECD : LHK$, tedy též jak se má jeden přední k jednomu zadnímu členu, tak součet předních k součtu zadních; tedy $\triangle ABE : FGL = ABCDE : FGHKL$. Avšak $\triangle ABC : FGL = AB^2 : FG^2$ — strany stejnolehlé čtverec ke čtverci strany stejnolehlé —; neboť podobné trojúhelníky mají se k sobě jako čtverce stejnolehlých stran (VI. XIX.). Tedy také $ABCDE : FGHKL = AB^2 : FG^2$.

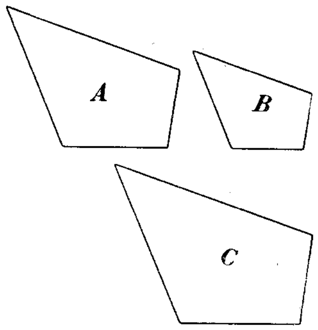
Tedy podobné mnohoúhelníky rozdělují se — —.

Důsledek.

A rovněž tak i o čtyřúhelnících dokážeme, že se mají k sobě jako čtverce stejnolehlých stran. Dokázáno pak to také o trojúhelnících; pročež i vůbec podobné útvary přímkové mají se k sobě jako čtverce stejnolehlých stran; což právě bylo dokázati.[6])

XXI.

Útvary témuž útvaru přímkovému podobné jsou též navzájem podobné.



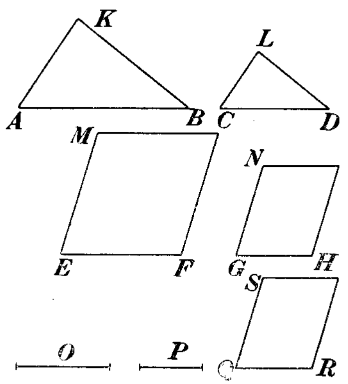
Nuže buďtež oba útvary přímkové A, B útvaru C podobny; pravím, že též $A \sim B$.

Ježto totiž $A \sim C$, jsou stejnoúhlé a mají strany při stejných úhlech úměrné. Dále, ježto $B \sim C$, jsou stejnoúhlé a mají strany při stejných úhlech úměrné. Tedy A i B jsou s C stejnoúhlé a mají s ním strany při stejných úhlech úměrné (pročež i A s B je stejnoúhlý a mají při stejných úhlech úměrné strany). Tedy $A \sim B$, což právě bylo dokázati.

XXII.

Když jsou čtyři přímky úměrou, též přímkové útvary na nich podobné a podobně sestrojené budou úměrou; a když přímkové útvary na nich podobné a podobně sestrojené budou úměrou, též přímky samy budou úměrou.

Čtyřmi přímkami úměrnými buďtež AB, CD, EF, GH, totiž $AB:CD = EF:GH$, a narýsujme na AB, CD útvary přímkové podobné a podobně položené KAB, LCD a na EF, GH podobné a podobně položené MF, NH; pravím, že $KAB : LCD = MF:NH$.



Nuže za třetí úměrnou přímek AB, CD vezměmež O a přímek EF, GH za třetí úměrnou P. A ježto $AB : CD = EF:GH$ a $CD:O = GH:P$[7]), tedy po řadě $AB:O = EF:P$ (V. XXII.). Avšak $AB:O = KAB:LCD$ a $EF:P = MF:NH$[8]); tedy $KAB:LCD = MF:NH$.

Avšak buď již $KAB:LCD = MF:NH$; pravím, že též $AB:CD = EF:GH$. Neboť není-li $AB:CD = EF:GH$, buď $AB:CD = EF:QR$, a narýsujme na QR útvar přímkový SR útvaru MF i NH podobný a podobně položený.

[6]) Následuje ještě druhý důsledek, avšak nepochybně není Eukleidův.

[7]) $AB:CD = CD:O$, $EF:GH = GH:P$, a ježto $AB:CD = EF:GH$. z toho $CD:O = GH:P$.

[8]) To jde z úměr $AB:CD = CD:O$, $EF:GH = GH:P$ (VI. XIX. důsl.).

Ježto tedy $AB:CD = EF:QR$ a narýsovány na AB, CD útvary podobné a podobně položené KAB, LCD a na EF, QR podobné a podobně položené MF, SR, tedy $KAB:LCD = MF:SR$. Podmínkou však, že též $KAB:LCD = MF:NH$; tedy též $MF:SR = MF:NH$. Tedy MF i k NH i k SR má týž poměr; tedy $NH = SR$. Jest pak mu i podoben i podobně položen; tedy $GH = QR$. A ježto $AB:CD = EF:QR$ a $QR = GH$, tedy $AB:CD = EF:GH$.

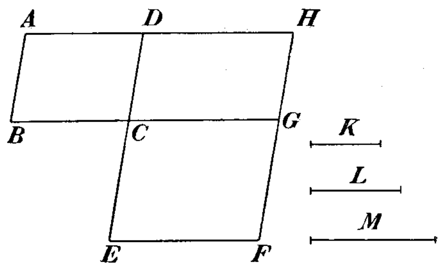
Když jsou tedy čtyři přímky úměrou, též přímkové — —.[9])

XXIII.

Stejnoúhlé rovnoběžníky mají se k sobě jako poměry jejich stran.[10])

Stejnoúhlými rovnoběžníky buďtež AC, CF, tak že $\sphericalangle BCD = ECG$; pravím, že AC má se k CF jako poměry jejich stran.

Nuže buď BC s CG v přímce; tedy v přímce je též DC s CE. I doplňme rovnoběžník DG a buď vedle nějaká přímka K a buď $BC:CG = K:L$ a $DC:CE = L:M$.



Tedy poměry $K:L$ a $L:M$ jsou stejné s poměry stran $BC:CG$ a $DC:CE$. Avšak poměr $K:M$ je složen z poměrů $K:L$ a $L:M$, proto též K k M má poměr složený z poměrů stran.[11]) A ježto $BC:CG = AC:CH$, avšak $BC:CG = K:L$, tedy též $K:L = AC:CH$. Dále, ježto $DC:CE = CH:CF$, avšak $DC:CE = L:M$, tedy též $L:M = CH:CF$. Ježto tedy dokázáno, že $K:L = AC:CH$ a $L:M = CH:CF$, tedy po řadě $K:M = AC:CF$. Avšak K k M má poměr složený z poměrů stran, tedy též AC k CF má poměr složený z poměrů stran.[12])

Tedy stejnoúhlé rovnoběžníky mají se k sobě jako poměry jejich stran

XXIV.

V každém rovnoběžníku jsou rovnoběžníky, jimiž prochází úhlopříčka, podobny celému i sobě navzájem.

[9]) Následuje »výtěžek« (λῆμμα), avšak nejspíše nikoliv Eukleidův.

[10]) Míní se strany při stejných úhlech, aby krajními i vnitřními členy byly strany téhož rovnoběžníku.

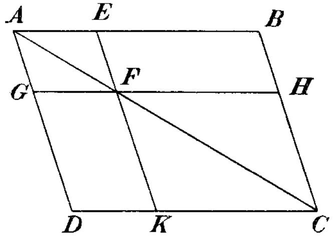
[11]) Eukl. ἐκ τῶν πλευρῶν m. ἐκ τῶν τῶν πλευρῶν (sc. λόγων). $\frac{BC}{CG} = \frac{K}{L}$, $\frac{CE}{CD} = \frac{M}{L}$, tedy $K:M = \frac{BC}{CG} : \frac{CE}{CD}$.

[12]) $AC:CF = \frac{BC}{CG} : \frac{CE}{CD}$. Určitěji bylo by (též v záhlaví) $AC:CF$ jako součiny vlastních stran při stejných úhlech, t. $AC:CF = BC \times CD : CE \times CG$.

Buď rovnoběžníkem $ABCD$, úhlopříčkou jeho AC a rovnoběžníky, jimiž AC prochází, buďtež EG, HK; pravím, že EG i HK jsou podobny celému $ABCD$ i sobě navzájem.

Neboť ježto v $\triangle ABC$ k jedné straně BC vedena rovnoběžka EF, úměrou $BE:EA = CF:FA$. Dále ježto v $\triangle ACD$ k jedné straně CD vedena rovnoběžka FG, úměrou $CF:FA = DG:GA$.

Avšak dokázáno, že $CF:FA = BE:EA$; tedy též $BE:EA = DG:GA$, tedy též součetně $BA:AE = DA:AG$ (V. XVIII.) i střídavě $BA:AD = EA:AG$. Tedy v rovnoběžnicích $ABCD$, EG strany při společném úhlu BAD jsou úměrné. A ježto $GF \parallel DC$, $\sphericalangle AFG = DCA$, a $\sphericalangle DAC$ oběma $\triangle ADC$, AGF společný; tedy $\triangle ADC$ je s AGF stejnoúhlý. Z téže příčiny ovšem též $\triangle ACB$ je stejnoúhlý s $\triangle AFE$, i celý rovnoběžník $ABCD$ je s EG stejnoúhlý. Tedy úměrou $AD:DC = AG:GF$ a $DC:CA = GF:FA$ a $AC:CB = AF:FE$ a rovněž $CB:BA = FE:EA$. A ježto že dokázáno, $DC:CA = GF:FA$ a $AC:CB = AF:FE$, tedy po řadě $DC:CB = GF:FE$. Tedy v rovnoběžnících $ABCD$, EG strany při stejných úhlech jsou úměrné, tedy $ABCD \sim EG$. Z téže příčiny ovšem též $ABCD \sim KH$. Tedy EG i KH jsou podobny rovnoběžníku $ABCD$. Útvary však témuž útvaru přímkovému podobné jsou i navzájem podobny (VI. XXI.), tedy též $EG \sim HK$.

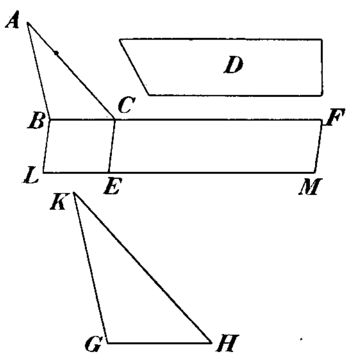


V každém tedy rovnoběžníku jsou — —.

XXV.

Sestav útvar přímkový danému podobný a jinému danému spolu rovný.

Daným útvarem přímkovým, jemuž má se podobný sestaviti, buď ABC, a kterému rovný, buď D; má se tedy sestaviti útvaru ABC podobný a zároveň útvaru D rovný.



Nuže přistavme si k BC rovnoběžník BE stejný s $\triangle ABC$ a k CE rovnoběžník CM stejný s D v $\sphericalangle FCE$, jenž roven úhlu CBL. Tedy jest BC s CF v přímce, LE pak s EM[13]). A k BC, CF buď střední úměrnou GH, a na GH narýsujme $\triangle KGH$ trojúhelníku ABC podobný a podobně položený.

A ježto $BC:GH = GH:CF$ a když jsou tři přímky úměrou, první má se ke třetí jako útvar z první k útvaru z druhé podobnému a podobně sestrojenému (VI. XIX. důsl.), tedy $BC:CF = \triangle ABC:KGH$. Avšak též $BC:CF = BE:EF$. Tedy také $\triangle ABC:KGH =$

[13]) Třeba totiž BE i EF tak sestrojiti (I. XLIV. n.).

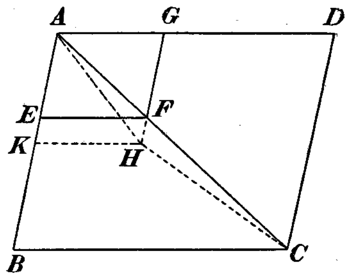
$BE:EF$; pročež střídavě $ABC:BE = KGH:EF$. Avšak $ABC = BE$, tedy též $KGH = EF$. Avšak $EF = D$, tedy též $KGH = D$. A jest i $KGH \sim ABC$.

Tedy sestaven jest útvar přímkový danému podobný — —.

XXVI.

Když se od rovnoběžníku oddělí rovnoběžník celému podobný a podobně položený, mající s ním společný úhel, má s celým touž úhlopříčku.

Nuže od rovnoběžníku $ABCD$ oddělme rovnoběžník AF celému $ABCD$ podobný a podobně položený, mající $\sphericalangle DAB$ s ním společný pravím, že $ABCD$ má s AF touž úhlopříčku.



Nuže nebuď tak, nýbrž, možno-li, budiž úhlopříčkou AHC, a prodloužíce GF veďme do H a bodem H veďme $HK \parallel AD$ n. BC.

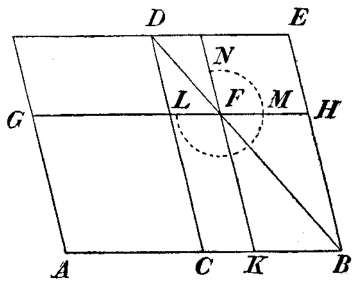
Ježto tedy $ABCD$ má s KG touž úhlopříčku, tedy $DA:AB = GA:AK$. Avšak $ABCD \sim EG$ a proto $DA:AB = GA:AE$; tedy též $GA:AK = GA:AE$. A tak GA i k AK i k AE má týž poměr. Tedy $AE = AK$, menší stejná s větší, což právě nemožno. Není tedy možno, by $ABCD$ a AF neměly téže úhlopříčky; tedy rovnoběžník $ABCD$ má s rovnoběžníkem AF touž úhlopříčku.

Když se tedy od rovnoběžníku oddělí — —.

XXVII.

Ze všech rovnoběžníků k téže přímce přistavených, jimž scházejí[14]) doplňovací rovnoběžníky podobné a stejnolehlé s tím, jenž sestrojen jest na polovině, největší jest rovnoběžník přistavený k polovině, podobný doplňku.

Přímkou buď AB a buď rozpůlena v C, a ku přímce AB buď přistaven rovnoběžník AD, tak aby mu scházel doplňovací rovnoběžník DB, sestrojený na polovině přímky AB, t. j. na CB; pravím, že ze všech rovnoběžníků přistavených k AB, jimž scházejí doplňovací útvary podobné a stejnolehlé s DB, největší jest AD.



Nuže přistavme ku přímce AB rovnoběžník AF, jemuž schází doplněk FB podobný a stejnolehlý s DB; pravím, že $AD > AF$.

Neboť ježto $DB \sim FB$, mají touž úhlopříčku. Veďme jejich úhlopříčku DB a útvar linkami vyznačme. Ježto tedy $CF = FE$ (I, XLIII.), společným pak FB, tedy celý $CH =$

[14]) Totiž do zabrání celé přímky.

KE. Avšak $CH = CG$, ježto též $AC = CB$. Tedy též $CG = KE$. Společným buď CF; tedy AF roven je soudelníku LMN; pročež DB, t. j. $AD > AF$[15].

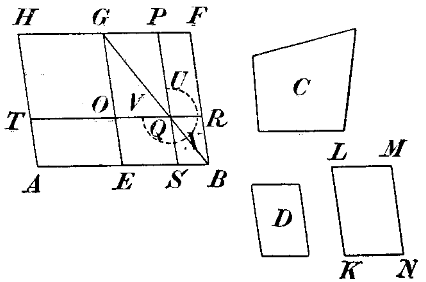
Ze všech tedy rovnoběžníků k téže přímce — —.

XXVIII.

Přistav k dané přímce rovnoběžník útvaru danému přímkovému rovný, aby mu scházel doplňovací rovnoběžník danému podobný; daný však útvar přímkový nesmí býti větší než útvar (rovnoběžník) sestrojený na polovině, doplňku podobný.

Danou přímkou buď AB, daným pak útvarem přímkovým, jemuž rovný má se k AB přistaviti, buď C, ne větším než sestrojený na polovině přímky AB, doplňku podobný, útvarem pak, jemuž podoben má býti doplněk, buď D; má se tedy k dané přímce AB přistaviti rovnoběžník danému útvaru přímkovému C rovný, aby mu scházel doplňovací rovnoběžník danému D podobný.

Nuže rozpolme AB v bodě E a narýsujme na EB $EBFG$ útvaru D podobný a podobně položený a doplňme rovnoběžník AG.



Jest-li ovšem $AG = C$, úkol byl by vykonán; neboť k dané přímce AB jest přistaven rovnoběžník AG rovný danému útvaru přímkovému C, jemuž schází doplňovací rovnoběžník GB, podobný útvaru D. Pakli tomu jinak, buď $HE > C$. HE však $= GB$; tedy též $GB > C$. Oč tedy GB je větší než C; tomu rozdílu rovný a útvaru D rovněž podobný sestavme $KLMN$. Avšak $D \backsim GB$, tedy též $KM \backsim GB$. Stejnolehlou tedy buď KL s GE a LM GF. A ježto $GB = C + KM$, tedy $GB > KM$, pročež také $GE > KL$ a $GF > LM$. Buď $GO = KL$ a $GP = LM$, i doplňme rovnoběžník $OGPQ$; tedy $GQ \cong KM$. Tedy též $GQ \backsim GB$; pročež GQ a GB mají touž úhlopříčku. Úhlopříčkou jejich buď GQB, i vyznačme útvar linkami.

Ježto tedy $GB = C + KM$, z čehož $GQ = KM$, tedy zbývající soudělník $UXV = C$. A ježto $PR = OS$ (I. XLIII.), společnym buď QB; tedy celý $PB = OB$. Avšak $OB = TE$, ježto také strana $AE = EB$; tedy též $TE = PB$. Společným buď OS; tedy celý TS rovná se celému soudělníku UXV. Avšak dokázáno, že $UXV = C$; tedy též $TS = C$.

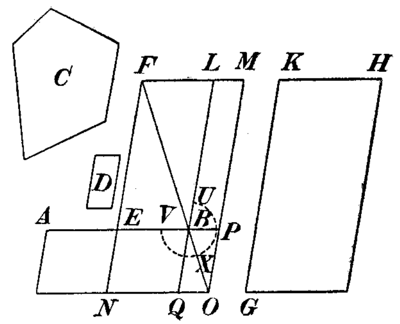
Tedy k dané přímce AB přistaven rovnoběžník — —.

XXIX.

Přistav k dané přímce rovnoběžník obrazci danému přímkovému rovný, přesahující o útvar rovnoběžníku danému podobný.

[15]) Totéž podobně dokázati lze o každém jiném, že jest menší než AD.

Danou přímkou buď AB, daným pak útvarem přímkovým, jemuž rovný se má k AB přistaviti, buď C, ten pak, jemuž podobný má přesahovati, D; má se tedy ku přímce AB přistaviti rovnoběžník obrazci přímkovému C rovný, přesahující o útvar podobný rovnoběžníku D.



Rozpolme AB v E a narýsujme na EB rovnoběžník BF útvaru D podobný a podobně položený a zřiďme GH, rovný součtu $BF + C$ a zároveň útvaru D podobný a podobně položený. Stejnolehlou pak buď KH s FL a KG s FE. A ježto $GH > FB$, tedy též $KH > FL$ a $KG > FE$. Prodlužme FL, FE a buď $FLM = KH$ a $FEN = KG$ a doplňme MN; tedy $MN \cong GH$ a $GH \backsim EL$, tedy též $MN \backsim EL$, tedy EL, MN mají touž úhlopříčku. Veďme jejich úhlopříčku FO a obrazec vyznačme.

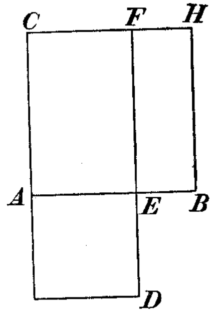
Ježto $GH = EL + C$, avšak $GH = MN$, tedy též $MN = EL + C$. Společný EL odečtěme, tedy zbývající soudélník $UXV = C$. A ježto $AE = EB$, též $AN = NB = LP$. Společným přičtěme EO; tedy celý AO rovná se soudelníku UXV. Avšak soudélník $UXV = C$; tedy též $AO = C$.

Tedy k dané přímce AB přistaven rovnoběžník — —.

XXX.

Rozděl danou přímku omezenou poměrem krajním a středním (VI. vým. 3.)

Danou přímkou omezenou buď AB; má se tedy přímka AB rozděliti poměrem krajním a středním.



Narýsujme na AB čtverec BC a přistavme k AC rovnoběžník CD čtverci BC rovný, přesahující útvarem AD čtverci BC podobným (VI. XXIX.).

Jest pak BC čtverec, tedy též AD je čtverec. A ježto $BC = CD$, společným odečtěme CE; tedy zbývající $BF = AD$. Jest pak s ním i stejnoúhlý; tedy v BF, AD jsou strany při stejných úhlech k sobě v poměru obráceném (VI. XIV.); tedy $FE : ED = AE : EB$. Avšak $FE = AB$ a $ED = AE$. Tedy $BA : AE = AE : EB$. I jest $AB > AE$, tedy též $AE > EB$.

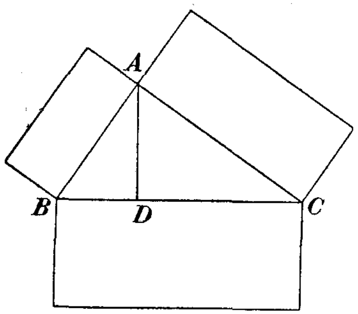
Tedy přímka AB rozdělena jest v E poměrem krajním a středním a větší její úsečkou jest AE; což právě bylo vykonati.

XXXI.

V trojúhelnících pravoúhlých útvar sestrojený na přeponě rovná se součtu útvarů podobných a stejnolehlých, sestrojených na odvěsnách.

Trojúhelníkem pravoúhlým buď ABC a měj pravý úhel BAC; pravím, že útvar na BC rovná se součtu útvarů podobných a stejnolehlých, sestrojených na BA, AC.

Veďme kolmici AD. Ježto tedy v pravoúhlém $\triangle ABC$ od pravého úhlu při A na základnu BC vedena kolmice AD, trojúhelníky ABD, ADC jsou podobny celému ABC i navzájem. A ježto $ABC \sim ABD$, tedy $CB : BA = AB : BD$. A ježto jsou tři přímky úměrou, první má se ke třetí, jako útvar na první k útvaru na druhé podobnému a stejnolehlému (VI. XIX. důsl.). Tedy $CB : BD$ jako útvar na CB k útvaru na BA podobnému a stejnolehlému. Z téže příčiny ovšem též $BC : CD$ jako útvar na BC k útvaru na CA[16]). Pročež také $BC : (BD + DC)$ jako útvar na BC k útvarům na BA, AC podobným a stejnolehlým. Avšak $BC = BD + DC$; tedy též útvar na BC rovná se útvarům na BA, AC podobným a stejnolehlým[17].)



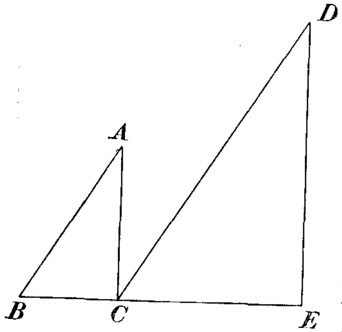
Tedy v trojúhelnících pravoúhlých útvar na přeponě — —.

XXXII.

Když se dva trojúhelníky mající dvě a dvě strany úměrné sestaví úhlem k úhlu tak, aby souhlasné strany byly též rovnoběžné, zbývající strany těch trojúhelníků budou v přímce.

Dvěma trojúhelníky buďtež ABC, DCE a mějte dvě strany BA, AC úměrné se dvěma stranami DC, DE tak, že $AB : AC = DC : DE$, a $AB \parallel DC$, $AC \parallel DE$; pravím, že BC je s CE v přímce.

Neboť ježto $AB \parallel DC$ a protíná je přímka AC, střídavé úhly BAC, ACD jsou si rovny. Z téže příčiny ovšem též $CDE = ACD$; pročež také $BAC = CDE$. A ježto dva trojúhelníky ABC, DCE mají po jednom úhlu A, D stejném a strany při stejných úhlech úměrné, t. $BA : AC = CD : DE$, tedy $\triangle ABC$ je s $\triangle DCE$ stejnoúhlý; tedy $\sphericalangle ABC = DCE$. Dokázáno pak, že též $\sphericalangle ACD = BAC$; celý tedy $\sphericalangle ACE = ABC + BAC$. Společným



[16]) Neboť $ABC \sim ACD$; $BC : CA = CA : CD$.

[17]) Útvary na BC, AC, AB buďtež a, b, c. Dokázáno, že $BC : CD = a : b$, $BC : BD = a : c$; tedy $CD : BD = b : c$, součetně $\frac{BC}{BD} = \frac{b+c}{c}$; avšak $BD = \frac{BC \cdot c}{a}$, dosazením za BD bude $\frac{BC \cdot a}{BC \cdot c} = \frac{b+c}{c}$, z toho $a = b + c$.

buď $\sphericalangle ACB$; tedy $\sphericalangle ACE + ACB = ABC + BAC + ACB$. Avšak $ABC + BAC + ACB = 2R$; tedy též $ACE + ACB = 2R$. Na nějaké tedy přímce AC a v bodě na ní C dvě přímky BC, CE na protivných stranách ležíce činí úhly styčné $ACE + ACB$ rovnými dvěma pravým; tedy BC s CE jsou v přímce (I. XIV.).

Když se tedy dva trojúhelníky mající dvě a dvě — —.

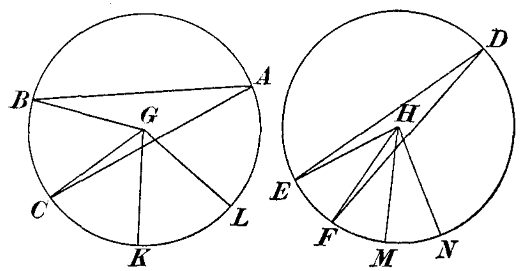
XXXIII.

Ve stejných kruzích úhly mají se k sobě jak oblouky, na nichž stojí, ať jsou středové, ať obvodové.

Stejnými kruhy buďtež ABC, DEF a úhly středovými při G, H buďte BGC, EHF, obvodovými pak BAC, EDF; pravím, že $\sphericalangle BGC : EHF =$ obl. BC : obl. $EF = \sphericalangle BAC : EDF$.

Nuže budiž oblouku BC rovných po řadě několik CK, KL, oblouku pak EF rovných několik FM, MN, a veďme spojnice GK, GL, HM, HN.

Ježto tedy obl. $BC = CK = KL$, též $\sphericalangle BGC = CGK = KGL$; tedy jakým násobkem oblouku BC jest BL, takým násobkem úhlu BGC jest $\sphericalangle BGL$. Z téže příčiny ovšem též, jakým násobkem oblouku EF jest NE, takým násobkem úhlu EHF jest NHE. Jest-li tedy obl. $BL = EN$, je též $\sphericalangle BGL = EHN$, pakli $BL > EN$, též $\sphericalangle BGL > EHL$, pakli menší, menší. Když tedy jsou čtyři veličiny, dva oblouky BC, EF a dva úhly BGC, EHF, za stejné násobky ublouku BC a úhlu BGC vzaty jsou obl. BL a $\sphericalangle BGL$, oblouku pak EF a úhlu EHF oblouk EN a $\sphericalangle EHN$. I dokázáno, když obl. $BL > EN$, že též $\sphericalangle BGL > EHN$, pakli roven, roven, pakli menší, menší. Tedy obl. $BC : EF = \sphericalangle BGC : EHF$. Avšak $\sphericalangle BGC : EHF = \sphericalangle BAC : EDF$ (V. XV.), neboť ony jsou dvojnásobky těchto (III. XX.). Tedy též obl. $BC : EF = \sphericalangle BGC : EHF = \sphericalangle BAC : EDF$.



Tedy ve stejných kruzích úhly mají se k sobě, jak oblouky, na nichž stojí, ať jsou středové, ať obvodové; což právě bylo dokázati.

Kniha sedmá.

Výměry.

1. Jednotka jest, dle níž každé věci říká se jedna.
2. Číslo pak je množství složené z jednotek.[1])

[1]) Dle toho jednotka není číslo.

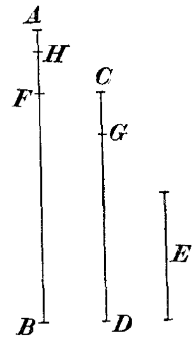
3. Díl čísla většího jest číslo menší, když se jím větší doměřuje.
4. Díly pak, když se nedoměřuje.[2])
5. Násobek čísla menšího je číslo větší, když se menším doměřuje.
6. Sudé jest číslo, když se půlí.
7. Liché pak, které se nepůlí neboli které jednotkou se liší od sudého.
8. Sudosudé jest číslo, které se měří číslem sudým dle čísla sudého.
9. Sudoliché pak, které se měří číslem sudým dle čísla lichého. [Lichosudé jest, které se měří číslem lichým dle čísla sudého.]
10. Licholiché pak, které se měří číslem lichým dle čísla lichého.
11. Kmenné jest číslo (prvočíslo), které měří jednotka jediná.
12. Kmenná navzájem jsou čísla, jež měří jednotka jediná jakožto míra společná.
13. Složené jest číslo, které se nějakým číslem doměřuje.
14. Složená pak navzájem jsou čísla, jež se doměřují nějakým číslem jakožto měrou společnou.
15. Pravíme, že číslo číslem se násobí, když násobené (násobenec) tolikrát se složí, kolik v druhém jest jednotek, a nějaké vznikne.
16. Když se dvě čísla vespolek znásobí a dají číslo, vzniklé zove se rovinným (rovinou), stranami pak jeho (jejími) čísla vespolek znásobená.
17. Když pak se tři čísla vespolek znásobí a dají číslo, vzniklé jest tělesové, stranami pak jeho jsou čísla vespolek znásobená.
18. Čtvercové jest číslo tolikéžkrát stejné neboli které je násobkem dvou stejných čísel.
19. Krychlové jest číslo tolikéžkrát stejné tolikéžkrát neboli které je násobkem tří stejných čísel.
20. Čísla jsou úměrná, když první je stejným násobkem druhého jako třetí čtvrtého nebo týmž dílem nebo týmiž díly.
21. Podobná jsou čísla rovinná a tělesová, která mají strany úměrné.
22. Plné jest číslo, jež se rovná součtu svých dílů.

I.

J s o u - l i d á n a d v ě č í s l a n e s t e j n á a o d č í t á - l i s e s t ř í d a v ě v ž d y m e n š í o d v ě t š í h o, k d y ž z b ý v a j í c í p ř e d c h á z e j í c í h o n i k d y n e d o m ě ř u j e, d o k u d n e z b u d e j e d n o t k a, p o č á t e č n í č í s l a b u d o u n a v z á j e m k m e n n á.

Nuže ze dvou čísel AB, CD, odčítá-li se střídavě vždy menší od většího, zbývající nikdy nedoměřuj předcházejícího, dokud nezbude jednotka; pravím, že AB, CD jsou navzájem čísla kmenná, t. j. že AB, CD doměřuje jednotka jediná.

Neboť nejsou-li AB, CD čísla navzájem kmenná, bude je měřiti[3]) nějaké číslo. Měř je a buď to E; a CD měříc BF ostavuj menší sebe FA, AF pak měříc DG ostavuj menší sebe GC a GC měříc FH ostavuj jednotku HA.



Ježto tedy E měří CD, CD pak měří BF, tedy též E měří BF; měří však též celou veličinu BA; tedy též zbytek AF bude měřiti. AF pak měří DG; tedy též E měří veličinu DG; jest však měrou i celému DC; tedy též zbytku CG bude měrou. CG však měří FH; tedy též E bude měřiti veličinu FH; jest však měrou též celému FA, tedy též zbývající jednotce AH bude měrou, ač je číslem; což právě nemožno. Tedy čísel AB, CD nebude měřiti žádné číslo; pročež AB, CD jsou čísla navzájem kmenná; což právě bylo dokázati.

[2]) Čtvrtí, třetinou, pětinou atd. číslo se doměřuje; tedy čtvrt je díl čísla většího, rovněž $^1/_3$, $^1/_5$ atd. Avšak $^3/_4$ jsou díly čísla většího, rovněž $^4/_5$, $^5/_8$ atd.

[3]) Měří, doměřuje, jest něčemu měrou — jsou výrazy souznačné.

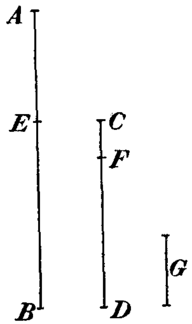
II.

J s o u - l i d á n a d v ě č í s l a n a v z á j e m n e k m e n n á, n a j d i n e j v ě t š í j e j i c h s p o l e č n o u m í r u.

Danými dvěma čísly navzájem nekmennými buďtež AB, CD; má se tedy nalézti čísel AB, CD největší společná míra.

Jestliže ovšem CD měří veličinu AB a je též samo sobě měrou, tedy CD je společnou měrou čísel CD, AB, i zřejmo, že též největší, neboť žádné nad CD větší nebude čísla CD měřiti.

Pakli CD neměří čísla AB, budeme-li z čísel AB, CD střídavě vždy menší od většího odčítati, zbude nějaké číslo, jež bude měrou předcházejícího. Jednotka zajisté nezbude, sice budou AB, CD navzájem kmennými, což však proti podmínce. Tedy zbude nějaké číslo, jež bude měrou předcházejícího. I ostavuj CD měříc BE menší sebe EA, EA pak měříc DF ostavuj menší sebe FC, CF pak AE doměřuj. Ježto tedy CF měří AE, AE pak měří DF, tedy CF bude měřiti DF; měří však i sebe, tedy též celému CD bude měrou. CD však měří BE, tedy též CF měří veličinu BE; měří však též EA, protož i celému BA bude měrou; měří však též CD; CF tedy měří čísla AB, CD. Pročež CF je společnou měrou čísel AB, CD.



Pravím ovšem, že též největší. Neboť není-li CF největší společnou měrou čísel AB, CD, bude čísla AB, CD měřiti číslo větší než CF. Měř je a buď jím G. A ježto G měří CD, CD pak měří BE, tedy též G měří BE; jest však i celému BA měrou, tedy též zbytku AE bude měrou. AE však měří DF, pročež i G bude měřiti DF; jest však i celému DC měrou, tedy též zbytku CF bude měrou, větší menšímu; což právě nemožno. Tedy číslům AB, CD nebude měrou žádné číslo větší než CF; pročež CF je největší společnou měrou čísel AB, CD.

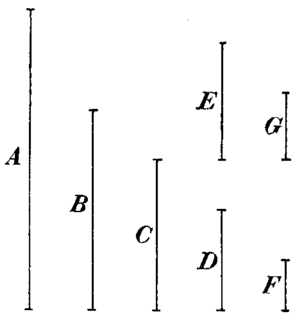
Důsledek.

Z toho zajisté patrno, že když číslo dvě čísla doměřuje, též největší společnou míru jejich bude doměřovati[4]); což právě bylo dokázati.

III.

Jsouli dána tři čísla navzájem nekmenná, najdi největší jejich společnou míru.

Danými třemi čísly navzájem nekmennými buďtež A, B, C; má se tedy číslům A, B, C nalézti největší společná míra.



Nuže za největší společnou míru čísel A, B vezměme D; D zajisté buď měří C buď ho neměří. Měř je dříve[5]); i měří též A, B. D tedy měří A, B, C, tedy D je společnou měrou čísel A, B, C Pravím ovšem, že též největší. Neboť nemají-li A, B, C za největší společnou míru D, bude čísla A, B, C měřiti číslo větší než D. Měř je a buď jím E. Ježto tedy E měří A, B, C, tedy bude měřiti též A, B, pročež bude měřiti i největší společnou míru čísel A, B (VII. II. důsl.). Největší však společnou měrou čísel A, B jest D, tedy E jest měrou číslu D, větší menšímu; což právě nemožno. Tedy čísel A, B, C nebude doměřovati žádné číslo větší než D; pročež D jest největší společnou měrou čísel A, B, C.

Neměř již D čísla C; pravím nejprve, že C, D nejsou navzájem kmennými. Neboť ježto A, B, C nejsou navzájem kmennými, bude je měřiti nějaké číslo. Číslo měřící A, B, C bude zajisté též A, B měřiti, a největší míra čísel A, B bude měrou čísla D; jest pak měrou též čísla C; tedy čísla D, C bude měřiti nějaké číslo; pročež D, C nejsou navzájem kmennými. Vezměme tedy za největší jejich společnou míru F.[6]) A ježto F měří D, D pak měří A, B, tedy též F měří A, B; jest pak měrou též čísla C; tedy F měří A, B, C; pročež F je společnou měrou čísel A, B, C. Pravím ovšem, že též největší. Neboť není-li F největší společnou měrou čísel A, B, C, bude čísla A, B, C měřiti číslo větší než F. Měř je a buď jím G. A ježto G měří A, B, C, měří též A, B, tedy měřiti bude též největší společnou míru čísel A, B. Největší však společná míra čísel A, B jest D; G tedy měří D; jest však měrou i čísla C; pročež G měří D, C. Protož i největší společnou míru čísel D, C bude měřiti (VII II. důsl.). Největší však společná míra čísel D, C jest F; tedy G je měrou číslu F, větší menšímu; což právě nemožno. Tedy čísel A, B, C nebude doměřovati žádné číslo větší než F; pročež F je největší společnou měrou čísel A, B, C; což právě bylo dokázati (nalézti).

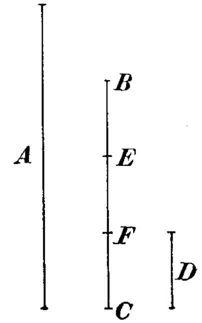
---

[4]) To číslo bude ovšem buď stejné s největší spol. měrou buď menší.
[5]) Vyobrazení dbá jen případu druhého, kdež D není spolu měrou čísla C.
[6]) Svrchu vzato E za větší než D, což zde nemožno: označil jsem tedy společnou míru všech tří F a dále, že $G > F$.

IV.

Každé číslo menší každého čísla většího jest buďto dílem buďto díly.

Dvěma čísly buďtež A, BC, a buď BC menší; pravím, že BC jest čísla A buďto dílem buďto díly.



Neboť A, BC jsou buď navzájem kmennými buď nejsou. Buďtež A, BC dříve navzájem kmennými. Rozdělíme-li tedy BC v jednotky jeho, každá zajisté jednotka z těch, kolik jich v BC, bude nějakým dílem čísla A; pročež BC jsou díly čísla A.

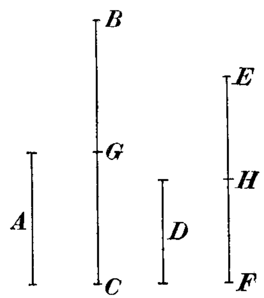
Nebuďte již A, BC navzájem kmennými; BC zajisté číslu A buď jest měrou buď není. Jestliže tedy BC měří A, jest BC dílem čísla A. Pakli ne, vezměme D za největší společnou míru čísel A, BC i rozdělme BC v části BE, EF, FC stejné s D. A ježto D měří A, jest D dílem čísla A; D však je rovno každé z částí BE, EF, FC; tedy též každá z částí BE, EF, FC jest dílem čísla A; pročež BC jsou díly čísla A.

Tedy každé číslo menší — —.

V.

Když je číslo čísla dílem a jiné jiného je týmž dílem, též součet obou týmž dílem bude součtu, jakým jedno jednoho.

Nuže buď A dílem čísla BC a jiné D jiného EF týmž dílem, jakým A čísla BC; pravím, že též $A+D$ součtu $BC+EF$ týmž dílem jest, jakým A čísla BC.

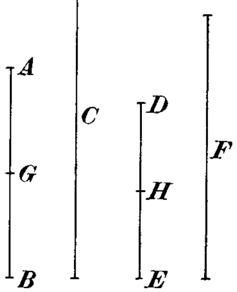


Neboť ježto takovým dílem, jakým jest A čísla BC, je též D čísla EF, tedy kolik jest čísel v BC stejných s A, tolik je též v EF stejných s D. Rozdělme BC v části BG, GC stejné s A, EF pak v EH, HF stejné s D; bude zajisté počet BG, GC stejných s počtem EH, HF. A ježto $BG = A$ a $EH = D$, též $BG + EH = A + D$. Z téže příčiny ovšem též $GC + HF = A + D$. Kolik tedy v BC čísel stejných s A, tolik je též v $(BC + EF)$ stejných s $(A + D)$. Jakým tedy násobkem jest BC čísla A, takovým jsou též $BC + EF$ součtu $A + D$. Jakým tedy dílem čísla BC jest A, takovým jest i součet $A + D$ součtu $BC + EF$; což právě bylo dokázati.

VI.

Když je číslo čísla díly a jiné jiného týmiž díly, též součet obou bude týmiž díly součtu, jakými jedno jednoho.

Nuže buď číslo AB díly čísla C a jiné DE jiného F týmiž díly, jakými AB čísla C; pravím, že také součet $AB+DE$ je týmiž díly součtu $C+F$, jakými AB čísla C.



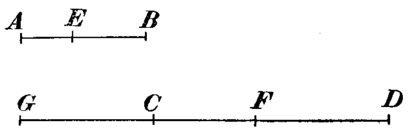
Neboť ježto týmiž díly, jakými jest AB čísla C, je též DE čísla F, tedy kolik dílů čísla C jest v AB, tolik dílů čísla F je též v DE. Rozděleno buď AB v díly čísla C, totiž AG, GB, a DE v díly čísla F, totiž DH, HE; bude zajisté počet dílů AG, GB roven počtu DH, HE. A ježto týmž dílem, jakým jest AG čísla C, je též DH čísla F, tedy jakým dílem čísla C jest AG, týmž dílem jest i součet $AG+DH$ součtu $C+F$ (VII. v.). Z téže příčiny ovšem, jakým dílem čísla C jest GB, i součet $GB+HE$ je týmž dílem součtu $C+F$. Tedy jakými díly čísla C jest AB, týmiž díly součtu $C+F$ jest i součet $AB+DE$; což právě bylo dokázati.

VII.

Když je číslo čísla dílem, jakým odečtené odečteného, také zbytek zbytku týmž dílem bude, jakým celek celku.

Nuže buď číslo AB dílem čísla CD, jakým odečtené AE odečteného CG; pravím, že též zbytek EB zbytku FD týmž dílem jest, jakým celek AB celku CD.

Nuže jakým dílem čísla CF jest AE, budiž i EB týmž dílem čísla CF. A ježto, jakým dílem čísla CF jest AE, týmž dílem čísla CG je též EB, tedy jakým dílem čísla CF jest AE, týmž dílem čísla GF jest AB.



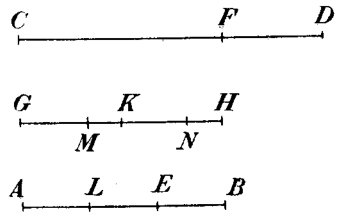
A jakým dílem čísla CF jest AE, za týž díl čísla CD vzato též AB; jakým tedy dílem čísla GF je též AB, je také týmž dílem čísla CD; pročež $GF=CD$. Společným odečtěme CF, tedy zbývající $GC=FD$. A ježto, jakým dílem čísla CF jest AE, týmž dílem čísla GC je též EB a $GC=FD$, tedy jakým dílem čísla CF jest AE, týmž dílem čísla FD je též EB. Avšak jakým dílem čísla CF jest AE, týmž dílem čísla CD je též AB; tedy též zbytek EB je týmž dílem zbytku FD, jakým celek AB celku CD; což právě bylo dokázati.

VIII.

Když je číslo čísla díly, jakými odečtené odečteného, také zbytek zbytku týmiž díly bude, jakými celek celku.

Nuže buď číslo AB čísla CD díly, jakými odečtené AE odečteného CF; pravím, že i zbytek EB zbytku FD týmiž díly jest, jakými celek AB celku CD.

Nuže vezměme GH za stejné s AB. Jakými tedy díly čísla CD iest GH, týmiž díly je též AE čísla CF. Rozděleno buď GH v díly čísla CD, totiž GK, KH, a AE v díly čísla CF, totiž AL, LE; bude zajisté počet GK, KH roven počtu AL, LE. A ježto, jakým dílem čísla CD jest GK, též AL je týmž dílem čísla CF, avšak $CD>CF$; tedy též $GK>AL$. Budiž $AL=GM$. Jakým tedy dílem čísla CD jest GK, též GM je týmž dílem čísla CF; tedy též zbytek MK je týmž dílem zbytku FD, jakým celek GK celku CD (VII. VII.).



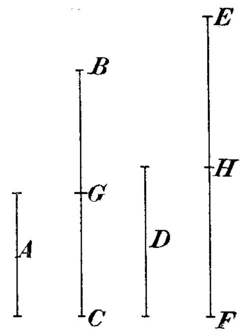
Ježto dále, jakým dílem čísla CD jest KH, týmž dílem čísla CF je též EL, avšak $CD>CF$, tedy též $HK>EL$. Budiž $EL=KN$. Jakým tedy dílem čísla CD jest KH, týmž dílem čísla CF jest i KN; pročež i zbytek NH zbytku FD týmž dílem jest, jakým celek KH celku CD. Bylo však dokázáno, že též zbytek MK je týmž dílem zbytku FD, jakým celek GK celku CD; protož i součet $MK+NH$ je týmiž díly čísla DF, jakými celek HG celku CD. Součet pak $MK+NH=EB$[7]) a $HG=BA$; tedy též zbytek EB je týmiž díly zbytku FD, jakými celek AB celku CD; což právě bylo dokázati.

IX.

Když je číslo čísla dílem a jiné jiného je týmž dílem, také střídavě, jakým dílem nebo jakými díly jest první třetího, týmž dílem nebo týmiž díly bude též druhé čtvrtého.

Nuže buď číslo A dílem čísla BC a jiné D jiného EF týmž dílem, jakým A čísla BC; pravím, že také střídavě, jakým dílem nebo díly čísla D jest A, týmž dílem nebo díly čísla EF je též BC.

Neboť ježto, jakým dílem čísla BC jest A, týmž dílem čísla EF je též D; kolik tedy čísel stejných s A jest v BC, tolik stejných s D je též v EF. Rozděleno buď BC ve stejná s A, totiž BG, GC, a EF ve stejná s D totiž EH, HF; bude zajisté počet BG, GC roven počtu EH, HF.



A ježto $BG=GC$ a též $EH=HF$ a počet BG, GC jest roven počtu EH, HF, tedy jakým dílem nebo díly čísla EH jest BG, týmž dílem nebo týmiž díly čísla HF jest i GC; pročež také jakým dílem nebo díly čísla EH jest BG, týmž dílem nebo týmiž díly jest i součet BC součtu EF, (VII. V. VI.). Avšak $BG=A$ a $EH=D$; jakým tedy dílem nebo díly čísla D jest A, týmž dílem nebo týmiž díly čísla EF jest BC; což právě bylo dokázati.

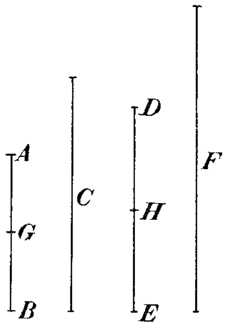
---

[7]) Neboť $GM+MK+KN+NH=AL+LE+EB$ a $GM=AL$, $KN=EL$.

X.

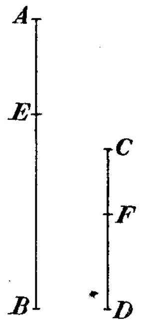
Když je číslo čísla díly a jiné jiného je týmiž díly, také střídavě, jakými díly nebo dílem jest první třetího, týmiž díly nebo týmž dílem bude též druhé čtvrtého.

Nuže buď číslo AB díly čísla C a jiné DE týmiž díly čísla F; pravím, že také střídavě, jakými díly nebo dílem čísla DE jest AB, též C je týmiž díly nebo týmž dílem čísla F.



Neboť jakými díly čísla C jest AB, ježto týmiž díly čísla F je též DE; kolik tedy dílů čísla C jest v AB, tolik dílů čísla F je též v DE. Rozděleno buď AB v díly čísla C, totiž AG, GB, a DE v díly čísla F, totiž DH, HE; bude zajisté počet AG, GB počtu DH, HE roven. A ježto, jakým dílem čísla C jest AG, také DH je týmž dílem čísla F, a střídavě, jakým dílem nebo díly čísla DH jest AG, týmž dílem nebo díly čísla F je též C (VII. IX.). Z téže příčiny ovšem též, jakým dílem nebo díly čísla HE jest GB, týmž dílem nebo týmiž díly čísla F je též C; pročež také jakými díly nebo dílem čísla DE jest AB, týmiž díly nebo týmž dílem čísla F je též C[8]); což právě bylo dokázati.

XI.

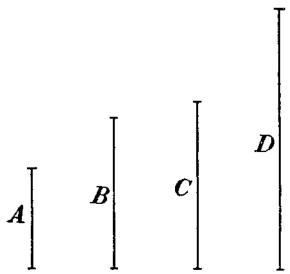


Když se má odečtené k odečtenému, jako celek k celku, také zbytek bude se míti ke zbytku, jako celek k celku.

Budiž $AB:CD = AE:CF$; pravím, že též $EB:FD = AB:CD$.

Ježto $AB:CD = AE:CF$, jakým tedy dílem nebo díly čísla CD jest AB, týmž dílem nebo týmiž díly čísla CF je též AE. Pročež i zbytek EB je týmž dílem nebo díly zbytku FD, jakými AB čísla CD (VII. VII. VIII.). Tedy $EB:FD = AB:CD$; což právě bylo dokázati.

XII.



Když je několik čísel úměrných, bude se míti jedno z předních k jednomu ze zadních, jako součet předních k součtu zadních.

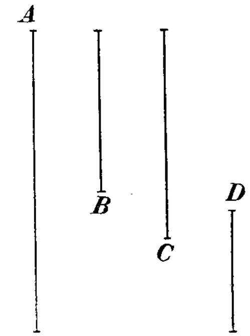
Budiž několik čísel úměrných A, B, C, D, t. $A:B = C:D$; pravím, že $A:B = (A+C):(B+D)$.

Neboť ježto $A:B = C:D$, tedy jakým dílem nebo díly čísla B jest A, týmž dílem nebo díly čísla D je též C. Tedy též součet

[8]) Neboť též AG je týmž dílem nebo díly čísla DH, jakými GB čísla HE; tedy (VII. V. VI.) AB je týmž dílem nebo díly čísla DE, jakými AG čísla DH nebo C čísla F.

$A+C$ je týmž dílem nebo díly součtu $B+D$, jakými A čísla B (VII. V. VI.). Proto $A:B = (A+C):(B+D)$; což právě bylo dokázati.

XIII.



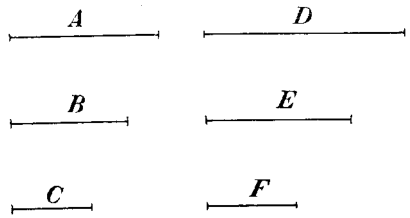
Když jsou čtyři čísla úměrná, také střídavě budou úměrná.

Buďte čtyři čísla úměrná A, B, C, D, takže $A:B = C:D$; pravím, že budou také střídavě úměrná, totiž $A:C = B:D$.

Neboť ježto $A:B = C:D$, tedy jakým dílem nebo díly čísla B jest A, týmž dílem nebo týmiž díly čísla D je též C. Pročež střídavě, jakým dílem nebo díly čísla C jest A, týmž dílem nebo týmiž díly čísla D jest i B (VII. X.). Tedy $A:C = B:D$; což právě bylo dokázati.

XIV.

Když jest několik čísel a jiná jim počtem rovná jsouce po dvou brána také v témž poměru, též stejnořadně (V. vým. 17.) v témž poměru budou.

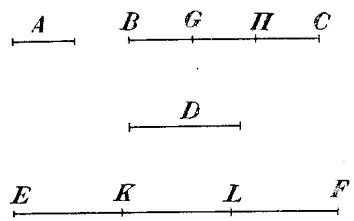


Budiž několik čísel A, B, C a jiná jim počtem rovná D, E, F po dvou brána jsouce buďte v témž poměru, takže $A:B = D:E$ a $B:C = E:F$; pravím, že také stejnořadně $A:C = D:F$.

Neboť ježto $A:B = D:E$, střídavě tedy $A:D = B:E$ (VII. XIII.). Ježto dále $B:C = E:F$, střídavě tedy $B:E = C:F$. Avšak $B:E = A:D$; tedy též $A:D = C:F$ a střídavě $A:C = D:F$; což právě bylo dokázati.

XV.

Když jednotka jest nějakého čísla měrou a jiné číslo je touž měrou nějakého čísla jiného, také střídavě bude jednotka touž měrou čísla třetího, jakou druhé čtvrtého.[9])



Nuže buď jednotka A měrou nějakého čísla BC a jiné číslo D touž měrou nějakého čísla jiného EF; pravím, že také střídavě jednotka A je touž měrou čísla D, jakou BC čísla EF.

Neboť ježto jednotka A je touž měrou čísla BC jakou D čísla EF, tedy kolik jednotek jest v BC, tolik čísel stejných s D je též v EF. Rozděleno buď BC ve

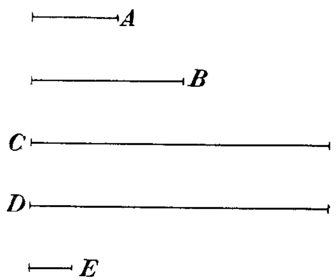
[9]) O číslech to dokázáno v VII. XIII., jednotka však dle VII. vým. 2. není číslo

své jednotky BG, GH, HC a EF v díly stejné s D, totiž EK, KL LF. Bude zajisté počet BG, GH, HC roven počtu EK, KL, LF. A ježto jednotky BG, GH, HC jsou si navzájem rovny, jsou si pak i čísla EK, KL, LF navzájem rovna i počet jednotek BG, HG, HC jest roven počtu čísel EK, KL, LF, bude tedy $BG:EK=GH:KL=HC:LF$. Bude se tedy míti též jedno z předních k jednomu ze zadních, jako součet předních k součtu zadních (VII. XII.). Pročež $BG:EK=BC:EF$. Avšak $BG=A$ a $EK=D$; tedy $A:D=BC:EF$. Jednotka A je tedy stejnou měrou čísla D, jakou BC čísla EF; což právě bylo dokázati.

XVI.

Když se dvě čísla navzájem znásobí a vzniknou jiná, vzniklá z nich budou si rovna.

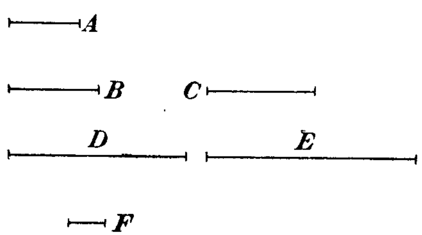
Dvěma čísly buďtež A, B, a buď $A\times B=C$, $B\times A=D$; pravím, že $C=D$.



Neboť ježto $A\times B=C$, tedy B jest měrou čísla C dle jednotek v A; jest pak i jednotka E měrou čísla A dle jeho jednotek. Tedy jednotka E je touž měrou čísla A, jakou B čísla C. Pročež střídavě jednotka E je touž měrou čísla B, jakou A čísla C. Dále, ježto $B\times A=D$, tedy A jest měrou čísla D dle jednotek v B, avšak i jednotka E jest měrou čísla B dle jeho jednotek; pročež jednotka E je stejnou měrou čísla B, jakou A čísla D. Avšak jednotka E byla stejnou měrou čísla B, jakou A čísla C; tedy A je touž měrou čísel C i D. Pročež $C=D$, což právě bylo dokázati.

XVII.

Když se číslem znásobí čísla dvě a vzniknou jiná, vzniklá z nich budou se míti k sobě jako znásobená.

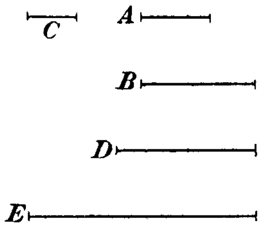


Nuže znásobme číslem A dvě čísla B, C, aby vznikla D, E; pravím, že $D:E=B:C$.

Neboť ježto znásobením čísla B číslem A vzniklo D, jest tedy B měrou čísla D dle jednotek v A. Také však jednotka F je měrou čísla A dle jeho jednotek; tedy jednotka F je touž měrou čísla A, jakou B čísla D. Pročež $F:A=B:D$. Z téže příčiny zajisté také $F:A=C:E$, tedy též $C:E=B:D$, pročež střídavě $D:E=B:C$; což právě bylo dokázati.

XVIII.

Když se nějaké číslo znásobí dvěma čísly a vzniknou jiná, vzniklá z nich budou se míti k sobě jako ta, kterými násobeno.

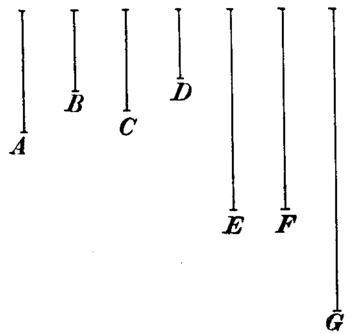


Nuže násobme dvěma čísly A, B nějaké číslo C, aby vznikla D, E; pravím, že $A:B=D:E$.

Neboť ježto znásobením čísla C číslem A vzniklo D, také tedy znásobením čísla A číslem C vznikne D (VII. XVI.). Z téže příčiny ovšem také znásobením čísla B číslem C vznikne E. Tedy znásobením čísel A, B číslem C vznikla D, E. Tedy $A:B=D:E$ (VII. XVII.); což právě bylo dokázati.

XIX.

Když jsou čtyři čísla úměrná, součin prvního a čtvrtého bude roven součinu druhého a třetího; a když součin prvního a čtvrtého jest roven součinu druhého a třetího, ta čtyři čísla budou úměrná.



Čtyřmi čísly úměrnými buďtež A, B, C, D, takže $A:B=C:D$, a budiž $A\times D=E$, a $B\times C=F$; pravím, že $E=F$. Nuže budiž $A\times C=G$. Ježto tedy $A\times C=G$ a $A\times D=E$, tedy znásobením čísel C, D číslem A vznikla G, E, pročež $C:D=G:E$. Avšak $C:D=A:B$, tedy též $A:B=G:E$. Dále, ježto $A\times C=G$, ale ovšem též $B\times C=F$, tedy znásobením nějakého čísla C dvěma čísly A, B vznikla G, F. Protož $A:B=G:F$. Ale ovšem též $A:B=G:E$, tedy též $G:E=G:F$. Pročež G má k oběma E i F týž poměr; tedy $E=F$.

Buď již dále $E=F$; pravím, že $A:B=C:D$.

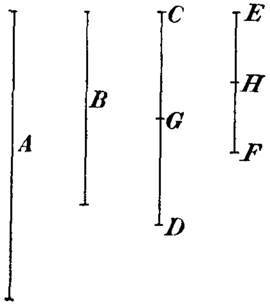
Neboť po téže úpravě, ježto $E=F$, tedy $G:E=G:F$. Avšak $G:E=C:D$ a $G:F=A:B$; tedy též $A:B=C:D$; což právě bylo dokázati.

XX.

Čísla nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký ona, jsou stejnou měrou čísel týž poměr majících, větší většího jako menší menšího.

Nuže nejmenšími čísly z těch, jež mají týž poměr jak $A:B$, buďte CD, EF; pravím, že CD je touž měrou čísla A jakou EF čísla B.

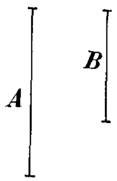
Neboť CD není díly čísla A. Nuže, možno-li, budiž díly; tedy též EF je týmiž díly čísla B jakými CD čísla A. Tedy kolik dílů čísla A je v CD, tolikéž dílů čísla B jest v EF. Rozděleno buď CD v díly čísla A, totiž CG, GD a EF v díly čísla B, totiž EH, HF; bude zajisté počet CG, GD roven počtu EH, HF. A ježto $CG = GD$ a též $EH = HF$ a počet CG, GD je roven počtu EH, HF, tedy $CG : EH = GD : HF$. Bude se tedy míti též jedno z předních k jednomu ze zadních jako součet předních k součtu zadních (VII. XII.). Pročež $CG : EH = CD : EF$; tedy CG, EH mají týž poměr jako CD, EF, ač jsou jich menší; což právě není možno, neboť CD, EF jsme vzali za nejmenší z těch, jež mají týž poměr, jaký ona. Není tedy CD díly čísla A; tedy dílem. A EF je týmž dílem čísla B, jakým CD čísla A; tedy CD je touž měrou čísla A, jakou EF čísla B; což právě bylo dokázati.



XXI.

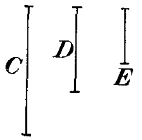
Čísla navzájem kmenná jsou nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký ona.

Čísly navzájem kmennými buďtež A, B; pravím, že A, B jsou nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký ona.



Neboť nejsou-li, budou nějaká čísla, mající týž poměr jaký A, B, menší než A, B. Buďte jimi C, D.

Ježto tedy čísla nejmenší z těch, která mají týž poměr, jsou touž měrou těch, jež mají týž poměr, větší většího jako menší menšího, t. j. přední předního jako zadní zadního, tedy C jest měrou čísla A jako D čísla B. Jakou tedy měrou čísla A jest C, tolik jednotek buď v E. Proto též D jest měrou čísla B dle jednotek v E. A ježto C jest měrou čísla A dle jednotek v E, tedy též E jest měrou čísla A dle jednotek v C. Z téže příčiny ovšem E je také měrou čísla B dle jednotek v D. Tedy E jest měrou čísel A, B, ač jsou navzájem kmenná; což právě jest nemožno (VII. vým. 12.). Pročež nijaká čísla, mající týž poměr jaký A, B, nebudou menší než A, B. Tedy A, B jsou nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký ona; což právě bylo dokázati

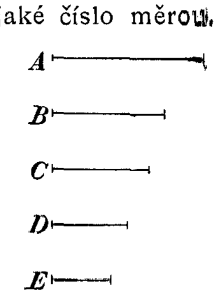


XXII.

Nejmenší čísla z těch, která mají týž poměr, jaký ona, jsou navzájem kmenná.

Nejmenšími čísly z těch, která mají týž poměr, jaký ona, buďtež A, B; pravím, že A, B jsou navzájem kmenná.

Neboť nejsou-li navzájem kmenná, bude jim nějaké číslo měrou. Buď měrou a buď to C. A jakou měrou čísla A jest C, tolik jednotek buď v D, a jakou C čísla B, tolik jednotek buď v E.



Ježto C jest měrou čísla A dle jednotek v D, tedy bude $C \times D = A$. Z téže příčiny ovšem také $C \times E = B$.

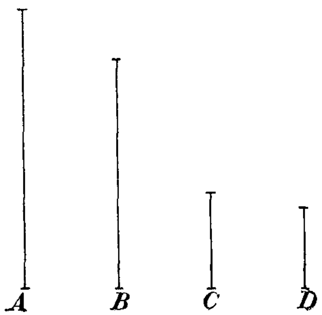
Tedy znásobením dvou čísel D, E číslem C vzniknou A, B; pročež $D : E = A : B$; tedy D, E mají týž poměr, jaký A, B, ač jsou jich menší; což právě není možno. Pročež čísel A, B žádné číslo nebude měrou. Tedy A, B jsou navzájem kmenná; což právě bylo dokázati.

XXIII.

Když jsou dvě čísla navzájem kmenná, číslo, které jednomu z nich je měrou, druhému bude kmenným.

Dvěma čísly navzájem kmennými buďtež A, B, měrou pak čísla A buď nějaké číslo C; pravím, že také, C, B jsou navzájem kmenná.

Neboť nejsou-li C, B navzájem kmenná, nějaké číslo bude číslům C, B měrou. Budiž měrou a buď to D. Ježto D jest měrou čísla C a C čísla A, tedy též D jest měrou čísla A. Je však měrou též čísla B; tedy D jest měrou čísel A, B, ač jsou navzájem kmenná, což právě jest nemožno. Tedy číslům C, B žádné číslo nebude měrou. Pročež C, B jsou navzájem kmenná; což právě bylo dokázati.

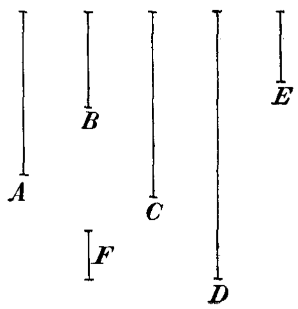


XXIV.

Když jsou dvě čísla nějakému číslu kmenná, též součin jejich bude témuž číslu kmenným.

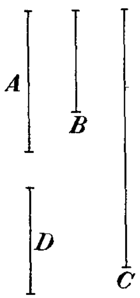
Nuže buďte dvě čísla A, B nějakému číslu C kmenná a buď $A \times B = D$; pravím, že C, D jsou navzájem kmenná.

Neboť nejsou-li C, D navzájem kmenná, nějaké číslo bude číslům C, D měrou. Budiž měrou a buď to E. A ježto C, A jsou navzájem kmenná, číslu C pak jest nějaké číslo E měrou, tedy A, E jsou navzájem kmenná (VII. XXIII.). Jakou tedy měrou čísla D jest E, tolik jednotek buď v F; tedy též F je měrou čísla D dle jednotek v E. Pročež $E \times F = D$. Avšak zajisté také $A \times B = D$; tedy $E \times F = A \times B$. Když pak součin krajních čísel



roven součinu středních, ta čtyři čísla jsou úměrná (VII. xix.), tedy $E:A=B:F$. A, E však jsou kmenná, kmenná pak i nejmenší; nejmenší pak čísla z těch, která mají týž poměr, jaký ona, jsou stejnou měrou čísel týž poměr majících, větší většího jako menší menšího, t. j. přední předního jako zadní zadního: tedy E jest měrou čísla B. Je však měrou i čísla C; tedy E jest měrou čísel B, C, ač jsou navzájem kmenná, což právě nemožno. Pročež nebude číslům C, D žádné číslo měrou. Tedy C, D jsou navzájem kmenná; což právě bylo dokázati.

XXV.



Když jsou dvě čísla navzájem kmenná, čtverec jednoho z nich bude druhému číslu kmenným.

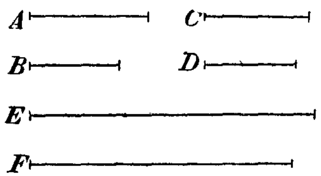
Dvěma čísly navzájem kmennými buďtež A, B a budiž $A^2=C$; pravím, že B, C jsou navzájem kmenná.

Nuže buď $A=D$. Ježto A, B jsou navzájem kmenná a $A=D$, tedy též D, B jsou navzájem kmenná. A tak A i D jsou číslu B kmenná; pročež i součin $D\times A$ bude číslu B kmenný (VII. xxiv.). Avšak $D\times A=C$, tedy C, B jsou navzájem kmenná; což právě bylo dokázati.

XXVI.

Když jsou dvě čísla jednotlivě dvěma číslům jednomu i druhému kmenná, též součiny jejich budou navzájem kmennými.

Nuže buďte čísla A, B jednotlivě dvěma číslům C, D jednomu i druhému kmenná a buď $A\times B=E$, $C\times D=F$; pravím, že E, F jsou navzájem kmenná.

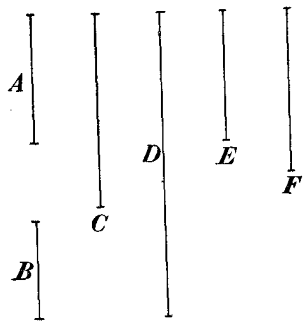


Neboť ježto A, B číslu C jsou kmenná, tedy též $A\times B$ bude číslu C kmenným (VII. xxiv.). Avšak $A\times B=E$, tedy E, C jsou navzájem kmenná. Z téže příčiny ovšem též E, D jsou navzájem kmenná. Tedy jedno i druhé z čísel C, D jest číslu E kmenné. Pročež i součin $C\times D$ bude číslu E kmenným. Avšak $C\times D=F$; tedy E, F jsou čísla navzájem kmenná; což právě bylo dokázati.

XXVII.

Když jsou dvě čísla navzájem kmenná a obě sama sebou znásobena jsouce dají čísla jiná, vzniklá z nich budou navzájem kmenná, a když počátečními znásobíme vzniklá a dají jiná, i ta budou navzájem kmenná [a tak děje se s konečnými pokaždé].[10])

[10]) Poslední část nepochybně podvržena.



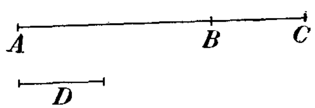
Dvěma čísly navzájem kmennými buďtež A, B a buď $A^2=C$, $A\times C=D$ a $B^2=E$, $B\times E=F$; pravím, že jak C, E tak D, F jsou navzájem kmenná.

Neboť ježto A, B jsou navzájem kmenná a $A^2=C$, tedy C, B jsou navzájem kmenná (VII. xxv.). Ježto tedy C, B jsou navzájem kmenná a $B^2=E$, jsou tedy C, E navzájem kmenná. Dále, ježto A, B jsou navzájem kmenná a $B^2=E$, tedy A, E jsou navzájem kmenná. Ježto tedy dvě čísla A, C jsou dvěma číslům B, E jednotlivě jednomu i druhému kmenná, tož i součin $A\times C$ součinu $B\times E$ je kmenný (VII. xxvi.). I jest $A\times C=D$ a $B\times E=F$. Pročež D, F jsou navzájem kmenná; což právě bylo dokázati.

XXVIII.

Když jsou dvě čísla navzájem kmenná, též součet jejich jednomu i druhému z nich bude kmenný; a když jejich některému z obou je součet jejich kmenný, také počáteční čísla budou navzájem kmenná.

Nuže sečtěme dvě čísla navzájem kmenná AB, BC; pravím, že též součet AC číslům AB, BC je kmenný.



Neboť nejsou-li AC, AB navzájem kmenná, bude nějaké číslo číslům AC, AB měrou. Budiž měrou a buď to D. Ježto tedy D jest měrou čísel AC, AB, tedy bude též zbytku BC měrou. Jest pak měrou i čísla BA; tedy D jest měrou čísel AB, BC, ač jsou navzájem kmenná, což právě nemožno. Pročež číslům CA, AB nebude měrou číslo žádné; tedy CA, AB jsou navzájem kmenná. Z téže příčiny ovšem též AC, CB jsou navzájem kmenná. Tedy CA jest oběma z čísel AB, BC kmenné.

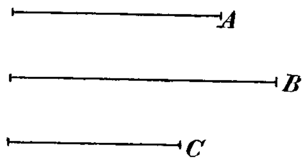
Buďte již dále CA, AB navzájem kmenná; pravím, že též AB, BC jsou navzájem kmenná.

Neboť nejsou-li AB, BC navzájem kmenná, bude číslům AB, BC nějaké číslo měrou. Budiž měrou a buď to D. A ježto D jest měrou čísla AB i BC, tedy bude též měrou čísla CA. Jest pak měrou i čísla AB; tedy D jest měrou čísel CA, AB, ač jsou navzájem kmenná; což právě nemožno. Pročež nebude číslům AB, BC žádné číslo měrou. Tedy AB, BC jsou navzájem kmenná; což právě bylo dokázati.

XXIX.

Každé kmenné číslo každému číslu, jehož není měrou, jest kmenné.

Kmenným číslem buď A a nebuď měrou čísla B; pravím, že B, A jsou navzájem kmenná.

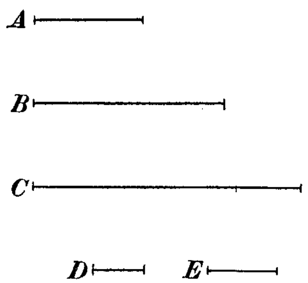


Neboť nejsou-li B, A navzájem kmenná, bude jim nějaké číslo měrou. Budiž měrou C. Ježto C jest měrou čísla B, avšak A není měrou čísla B, není tedy $C = A$. A ježto C jest měrou čísel B, A, tedy je též měrou čísla A jemu kmenného, ač není s ním stejné; což právě nemožno. Tedy A, B jsou navzéjem kmenná; což právě bylo dokázati.

XXX.

Když se dvě čísla spolu znásobí a vznikne jiné a součinu z nich jest měrou nějaké číslo kmenné, také jednomu z počátečních čísel bude měrou.

Nuže buďte dvě čísla A, B spolu znásobena a součinem buď C, číslu C pak buď měrou nějaké číslo kmenné D; pravím, že D jest měrou jednoho z čísel A, B.



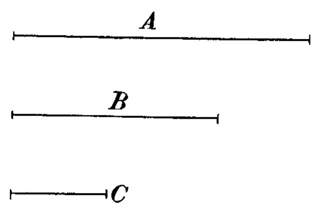
Nuže nebuď měrou čísla A; i jest D kmenné; tedy A, D jsou navzájem kmenná (VII XXIX.). A jakou měrou jest D čísla C, tolik jednotek buď v E. Ježto tedy D jest měrou čísla C dle jednotek v E, jest $D \times E = C$. Avšak zajisté též $A \times B = C$; tedy $D \times E = A \times B$. Pročež $D : A = B : E$. D, A však jsou kmenná, kmenná však i nejmenší, nejmenší pak jsou touž měrou čísel týž poměr majících, větší většího jako menší menšího, t. j. přední předního jako zadní zadního; tedy D jest měrou čísla B. Podobně ovšem dokážeme, když není měrou čísla B, také že bude měrou čísla A. Tedy D jest měrou jednoho z čísel A, B; což právě bylo dokázati

XXXI.

Každému složenému číslu jest měrou nějaké číslo kmenné.

Číslem složeným[11]) buď A; pravím, že číslu A jest měrou nějaké číslo kmenné.

Neboť ježto A je složené, bude mu nějaké číslo měrou. Budiž



měrou a buď to B. A jest-li B kmenné, byl by úkol vykonán; pakli složené, bude mu nějaké číslo měrou. Budiž měrou a buď to C. A ježto C jest měrou čísla B a B čísla A, tedy C je též měrou čísla A. A jest-li C kmenné, byl by úkol vykonán; pakli složené, bude mu nějaké číslo měrou. Bude-li se ovšem dále takto uvažovati,

[11]) Tím rozumí se součin nejméně dvou čísel (větších než jednotka).

dojde se nějakého čísla kmenného, jež bude (předcházejícího) měrou.[12]) Neboť nedojde-li se ho, bude číslu A měrou nekonečný počet čísel, z nichž jedno druhého bude menší; což právě při číslech nemožno. Dojde se tedy nějakého čísla kmenného, jež bude měrou předcházejícího a též čísla A.

Tedy každému složenému číslu jest měrou nějaké číslo kmenné; což právě bylo dokázati.

XXXII.

Každé číslo jest buď kmenné nebo má nějaké číslo kmenné měrou.

Číslem budiž A; pravím, že A jest buď kmenné nebo má nějaké číslo kmenné měrou.

Jest-li ovšem A kmenné, byl by úkol vykonán; pakli složené, bude mu nějaké kmenné číslo měrou (XXXI.).

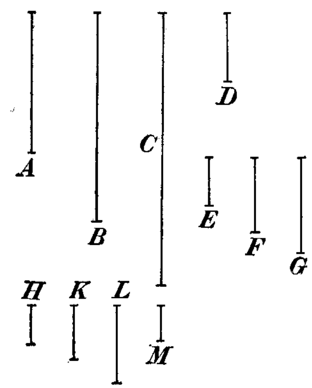
Tedy každé číslo jest buď kmenné nebo má nějaké číslo kmenné měrou; což právě bylo dokázati.

XXXIII.

Dáno-li několik čísel, najdi nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký ona.

Danými několika čísly buďtež A, B, C; mají se tedy najíti nejmenší z těch, která mají týž poměr jako A, B, C

A, B, C zajisté buď jsou navzájem kmenná buď ne, Jsou-li tedy A B, C navzájem kmenná, jsou to nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký ona (VII. XXI.).



Pakli ne, vezměme D za největší společnou míru čísel A, B, C (VII. III.), a jakou měrou je D každému z čísel A, B, C, po tolika jednotkách mějtež E, F, G. Tedy též čísla E, F, G jsou jednotlivě měrami čísel A, B, C dle jednotek v D. Tedy E, F, G jsou stejnou měrou čísel A, B, C; pročež E, F, G jsou v témž poměru jako A, B, C. Pravím ovšem, že jsou také nejmenší. Neboť nejsou-li E, F, G nejmenší z těch, která mají týž poměr jako A, B, C, nějaká čísla menší než E, F, G budou míti týž poměr jako A, B, C. Buďte to H, K, L; tedy H je stejnou měrou čísla A, jakou jednotlivě čísla K, L číslům B, C. A jakou měrou čísla A jest H, tolik jednotek měj M; tedy také čísla K, L jsou jednotlivě měrami čísel B, C dle jednotek v M. A ježto H jest měrou čísla A dle jednotek v M, tedy M jest měrou čísla A dle jednotek v H. Z téže příčiny ovšem jest M také měrou čísel B, C jednotlivě

[12]) Číslo 2 patrně pokládá za kmenné, jinak byl by úkol nesprávný.

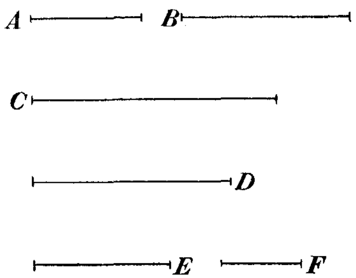
dle jednotek v K, L; tedy M jest měrou čísel A, B, C. A ježto H jest měrou čísla A dle jednotek v M, tedy $H \times M = A$. Z téže příčiny ovšem též $E \times D = A$; pročež $E \times D = H \times M$. Tedy $E : H = M : D$. Avšak $E > H$, tedy též $M > D$ a jest měrou čísel A, B, C, což právě nemožno; neboť D vzato za největší společnou míru čísel A, B, C. Pročež nebude čísel menších než E, F, G, jež by měla týž poměr jako A, B, C. Tedy E, F, G jsou nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký A, B, C; což právě bylo dokázati.

XXXIV.

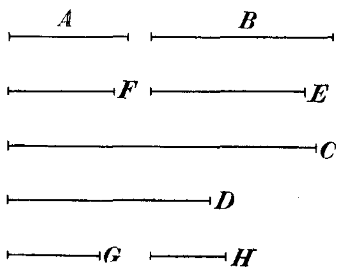
Dána-li dvě čísla, najdi číslo nejmenší, jehož jsou měrami.

Danými dvěma čísly buďtež A, B, má se tedy najíti nejmenší číslo, jehož jsou měrami.

A, B jsou zajisté buď navzájem kmenná buď ne. Buďtež A, B dříve navzájem kmenná a buď $A \times B = C$, tedy též $B \times A = C$. Tedy A, B jsou měrami čísla C. Pravím ovšem, že C jest nejmenší. Neboť není-li tak, budou A, B měrami čísla menšího než C. Budiž to číslo D. A jakou měrou čísla D jest A, tolik jednotek buď v E, a jakou měrou čísla D jest B, tolik jednotek buď v F. Tedy $A \times E = D$, $B \times F = D$; pročež $A \times E = B \times F$. Tedy $A : B = F : E$. A, B však jsou kmenná, kmenná pak i nejmenší, nejmenší pak jsou stejnou měrou čísel týž poměr majících, větší většího, menší menšího; tedy B jest měrou čísla E jakožto zadní zadního. A ježto znásobením čísel B, E číslem A vzniknou C, D, tedy $B : E = C : D$. Avšak B jest měrou čísla E, jest tedy též C měrou čísla D, větší menšího, což právě nemožno. Tedy A, B nejsou měrami čísla menšího než C; pročež A, B jsou měrami čísla C, které jest nejmenší.



Nebuďte již A, B navzájem kmenná, a za nejmenší čísla z těch, která mají týž poměr jako A, B, vezmětež F, E (VII. XXXIII.); tu jest $A \times E = B \times F$. A budiž $A \times E = C$, tedy též $B \times F = C$; pročež A, B jsou měrami čísla C. Pravím ovšem, že C jest nejmenší. Neboť není-li tak, budou A, B měrami nějakého čísla menšího než C; budiž to D. A jakou měrou čísla D jest A, tolik jednotek měj G, a jakou měrou čísla D jest B, tolik jednotek měj H. Tedy $A \times G = D$ a $B \times H = D$. Pročež $A \times G = B \times H$; tedy $A : B = H : G$, avšak $A : B = F : E$, tedy též $F : E = H : G$, F, E však jsou nejmenší, nejmenší pak jsou touž měrou těch, která mají týž poměr, větší většího a menší menšího. Pročež E je měrou čísla G.



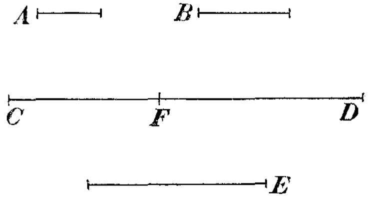
A ježto znásobením čísel E, G číslem A vzniknou C, D, tedy $E : G = C : D$. E však je měrou čísla G, pročež také C je měrou čísla D, větší menšího, což právě nemožno. Tedy A, B nebudou měrami čísla menšího než C. Pročež A, B jsou měrami čísla C, které jest nejmenší; což právě bylo dokázati.

XXXV.

Když jsou dvě čísla nějakému číslu měrami, také nejmenší číslo, jehož jsou měrou, bude rovněž onomu měrou.

Nuže buďte dvě čísla A, B měrami nějakého čísla CD i nejmenšího E; pravím, že též E jest měrou čísla CD.

Neboť není-li E měrou čísla CD, E doměřujíc DF ostavuj menší sebe číslo CF. A ježto A, B jsou měrami čísla E, E pak čísla DF, tedy též A, B budou měrami čísla DF. Jsou pak měrami též celého CD, tedy budou též měrami zbývajícího čísla CF, ač jest menší než E; což právě nemožno.[13]) Pročež není možno, by E nebylo měrou čísla CD; tedy jest; což právě bylo dokázati.

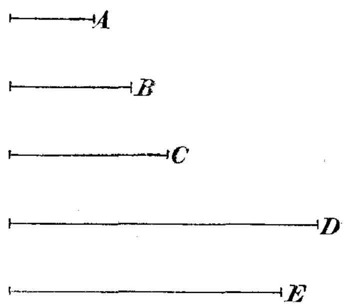


XXXVI.

Jsou-li dána tři čísla, najdi nejmenší číslo, jemuž jsou měrami.

Danými třemi čísly buďtež A, B, C; má se tedy najíti nejmenší číslo, jemuž jsou měrami.

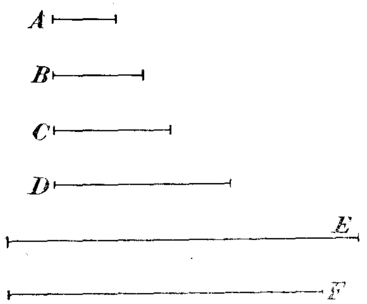
Nuže vezměme D za nejmenší číslo, jemuž dvě A, B jsou měrami (VII. XXXIV.). C ovšem buď jest nebo není měrou čísla D. Budiž dříve měrou; jsou pak též A, B měrami čísla D; tedy A, B, C jsou měrami čísla D. Pravím ovšem, že je D také nejmenší. Neboť není-li tak, budou A, B, C měrami čísla menšího než D. Budiž to E. Ježto A, B, C jsou měrami čísla E, tedy též A, B jsou měrami čísla E. Pročež také nejmenší, jemuž A, B jsou měrami, bude měrou čísla E. Nejmenší pak, jemuž A, B jsou měrami, jest D; tedy D bude měrou čísla E, větší menšího, což právě nemožno. Pročež A, B, C nebudou měrami nijakého čísla menšího než D; D tedy jest nejmenší, jehož měrami jsou A, B, C.



Nebuď již dále C měrou čísla D, a za nejmenší číslo, jehož měrami jsou C, D, vezměme E (VII. XXXIV.). Ježto A, B jsou měrou

[13]) Neboť napřed položeno, že nejmenší jest E.

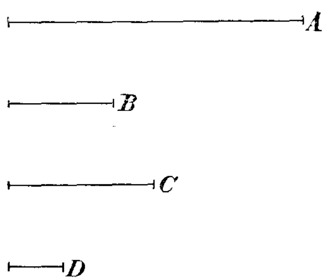
čísla *D*, *D* pak čísla *E*, tedy též *A*, *B* jsou měrami čísla *E*. Jest pak též *C* jeho měrou; pročež *A*, *B*, *C* jsou měrami čísla *E*. Pravím ovšem, že *E* je též nejmenší. Neboť není-li tak, budou *A*, *B*, *C* měrami nějakého čísla menšího než *E*. Buďtež měrami čísla *F*. Ježto *A*, *B*, *C* jsou měrami čísla *F*, též *A*, *B* jsou tedy měrami čísla *F*; pročež také nejmenší, jehož *A*, *B* jsou měrami, bude měrou čísla *F*. Nejmenší však, jehož měrami jsou *A*, *B*, je *D*; tedy *D* jest měrou čísla *F*. Jest pak též *C* měrou čísla *F*; tedy *D*, *C* jsou měrami čísla *F*; pročež i nejmenší, jehož *D*, *C* jsou měrami, bude měrou čísla *F*. Nejmenší však, jehož měrami jsou *C*, *D*, jest *E*; tedy *E* jest měrou čísla *F*, větší menšího, což právě nemožno. Pročež *A*, *B*, *C* nebudou měrami žádného čísla menšího než *E*. Tedy *E* jest nejmenší, jehož měrami jsou *A*, *B*, *C*; což právě bylo dokázati.



XXXVII.

Když je číslu číslo nějaké měrou, měřené bude míti díl s měrou stejnojmenný.

Nuže buď číslu *A* měrou nějaké číslo *B*; pravím, že má *A* díl s *B* stejnojmenný.[14])



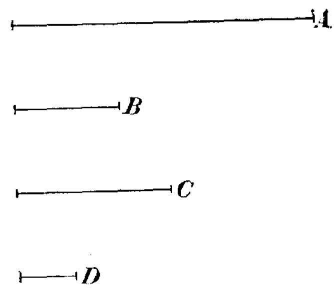
Nuže jakou měrou čísla *A* jest *B*, tolik jednotek měj *C*. Ježto *B* jest měrou čísla *A* dle jednotek v *C* a též jednotka *D* jest měrou čísla *C* dle jeho jednotek, tedy jednotka *D* je touž měrou čísla *C* jako *B* čísla *A*. Pročež střídavě jednotka *D* je touž měrou čísla *B* jako *C* čísla *A*; jakým tedy dílem čísla *B* jest jednotka *D*, týmž dílem jest i *C* čísla *A*. Jednotka pak *D* jest díl čísla *B* s ním stejnojmenný. Tedy též *C* jest díl čísla *A* stejnojmenný s *B*; pročež *A* má díl *C* stejnojmenný s *B*; což právě bylo dokázati.

XXXVIII.

Když má číslo nějaký díl, bude mu měrou číslo s dílem tím stejnojmenné.

Nuže měj číslo *A* nějaký díl *B*, a s dílem *B* budiž stejnojmenným *C*.

[14]) T. j. jakým dílem míry *B* jest jednotka, takovým dílem čísla *A* jest díl jeho *C*;



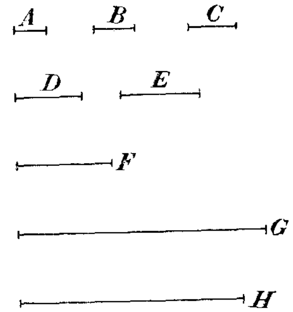
pravím, že *C* jest měrou čísla *A*. Neboť ježto *B* jest díl čísla *A* stejnojmenný s *C* a též jednotka *D* jest díl čísla *C* s ním stejnojmenný, jaký tedy díl čísla *C* jest jednotka *D*, také *B* je týž díl čísla *A*; tedy jednotka *D* je touž měrou čísla *C* jako *B* čísla *A*. Pročež střídavě jednotka *D* je touž měrou čísla *B* jako *C* čísla *A*.

Tedy *C* jest měrou čísla *A*; což právě bylo dokázati.

XXXIX.

Najdi číslo, jež by mělo díly dané jsouc nejmenší.

Danými díly buďtež *A*, *B*, *C*; má se tedy najíti číslo, jež by jsouc nejmenší mělo díly dané *A*, *B*, *C*.



Nuže mějme s díly *A*, *B*, *C* stejnojmenná čísla *D*, *E*, *F* a za číslo nejmenší, jehož měrami jsou *D*, *E*, *F*, vezměme *G*.

Tedy *G* má díly stejnojmenné s *D*, *E*, *F* (VII. xxxvii.); díly pak s *D*, *E*, *F* stejnojmenné jsou *A*, *B*, *C*. Pravím ovšem, že *G* je též nejmenší. Neboť není-li, bude nějaké číslo menší než *G*, jež bude míti díly *A*, *B*, *C*. Budiž to *H*. Ježto *H* má díly *A*, *B*, *C*, tedy číslu *H* budou měrami čísla stejnojmenná s díly *A*, *B*, *C* (VII. xxxviii). S díly však *A*, *B*, *C* stejnojmenná čísla jsou *D*, *E*, *F*; tedy číslu *H* jsou měrami *D*, *E*, *F*. I jest *H* menší než *G*, což právě nemožno. Nebude tedy žádného čísla menšího než *G*, jež by mělo za díly *A*, *B*, *C*; což právě bylo dokázati.

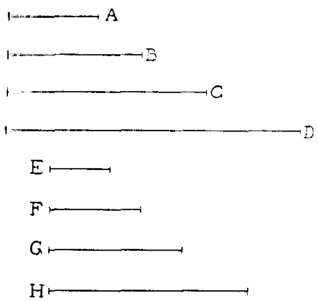
Kniha osmá.

I.

Když jest několik čísel spojitě úměrných a krajní z nich jsou navzájem kmenná, jsou nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký ona.

Budiž několik čísel spojitě[1]) úměrných *A*, *B*, *C*, *D* a krajní z nich *A*, *D* buďte navzájem kmenná; pravím, že *A*, *B*, *C*, *D* jsou nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký ona.

[1]) Pravidlo řečené má platnost, jen když ἑξῆς ἀνάλογον značí »spojitou« úměrnost; a tu čísla po řadě buď se zvětšují buď zmenšují. Vyobrazení vydání Heibergova tedy dle toho tuto jest opraveno.



Nuže není-li tak, menší než A, B, C, D buďtež E, F, G, H, majíce týž poměr, jaký ona. A ježto A, B, C, D mají týž poměr, jaký E, F, G, H a počet počtu jest roven, tedy stejnořadně $A:D=E:H$. A, D však jsou kmenná, kmenná pak i nejmenší, nejmenší však čísla jsou týmiž měrami těch, která mají týž poměr, větší většího jako menší menšího, t. j. přední předního jako zadní zadního. Jest tedy A měrou čísla E, větší menšího, což právě nemožno. Pročež E, F, G, H jsouce menší než A, B, C, D nemají téhož poměru, jaký tato. Tedy A, B, C, D jsou nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký ona; což právě bylo dokázati.

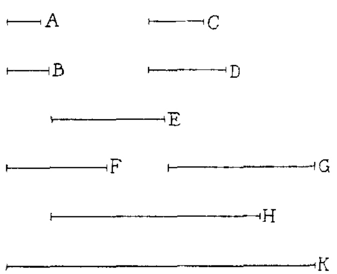
II.

Najdi nejmenších čísel spojitě úměrných, kolik kdo uloží, v poměru daném.

Daným poměrem v číslech nejmenších buď $A:B$[2]); má se tedy najíti nejmenších čísel spojitě úměrných, kolik kdo uloží, v poměru $A:B$.

Nuže buďtež uložena čtyři, a buď $A\times A=C$, $A\times B=D$ a ještě $B\times B=E$ a též $A\times C=F$, $A\times D=G$, $A\times E=H$ a $B\times E=K$.

A ježto $A\times A=C$ a $A\times B=D$, tedy $A:B=C:D$. Dále, ježto $A\times B=D$ a $B\times B=E$, tedy násobením čísla B čísly A, B vzniknou D, E. Pročež $A:B=D:E$. Avšak $A:B=C:D$, tedy též $C:D=D:E$. A ježto znásobivše C, D číslem A dostali jsme F, G, tedy $C:D=F:G$. Bylo však $C:D=A:B$, tedy též $A:B=F:G$. Dále, ježto znásobivše D, E číslem A dostali jsme G, H, tedy $D:E=G:H$. Avšak $D:E=A:B$, tedy též $A:B=G:H$. A ježto znásobivše E čísly A, B dostali jsme H, K, tedy $A:B=H:K$. Avšak $A:B=F:G=G:H$, tedy též $F:G=G:H=H:K$. Pročež C, D, E a F, G, H, K jsou úměrná poměrem $A:B$. Pravím ovšem, že jsou také nejmenší. Neboť ježto A, B jsou nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký ona, nejmenší pak z těch, která mají týž poměr, jsou navzájem kmenná (VII. XXII.), tedy A, B jsou navzájem kmenná. A samonásobky čísel A, B daly C, E a $A\times C=F$, $B\times E=K$, tedy C, E jsou navzájem kmenná a též F a K. A když jest několik čísel spojitě úměrných a krajní z nich jsou navzájem kmenná, jsou nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký ona. Tedy C, D, E[3]) a F, G, H, K jsou nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký A, B; což právě bylo dokázati.



[2]) Nejsou-li nejmenší, najdeme nejmenší téhož poměru dle VII. XXXIII.
[3]) K číslům C, D, E přihlíží pro následující důsledek.

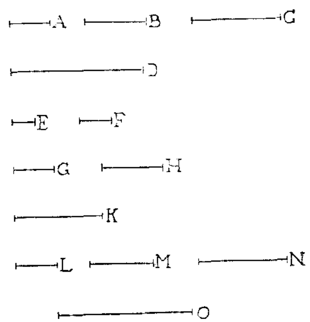
Důsledek.

Z toho zajisté patrno, když tři čísla spojitě úměrná jsou nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký ona, že krajní z nich jsou čtvercová, pakli čtyři, krychlová [4]).

III.

Když jest několik čísel spojitě úměrných nejmenších z těch, která mají týž poměr, jaký ona, krajní z nich jsou navzájem kmenná.

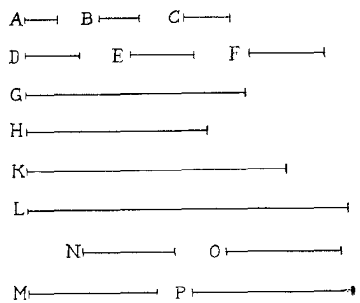
Několika čísly spojitě úměrnými nejmenšími z těch, která mají týž poměr, jaký ona, buďtež A, B, C, D; pravím, že krajní z nich A, D jsou navzájem kmenná.



Nuže vezměmež E, F za dvě nejmenší čísla poměru, jaký mají A, B, C, D, za tři pak G, H, K a po řadě o jedno více, až braný počet se vyrovná počtu A, B, C, D. Vezměmež a buďte to L, M, N, O.

A ježto E, F jsou nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký ona, jsou navzájem kmenná (VII. XXII.). A ježto E^2, F^2 dají G^2, K^2 (VIII. II.) a $E\times G=L$, $F\times K=O$, tedy též G, K a L, O jsou navzájem kmenná. A ježto A, B, C, D jsou nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký ona, a též L, M, N, O jsou nejmenší téhož poměru jako A, B, C, D, a počet A, B, C, D, jest roven počtu L, M, N, O, tedy čísla A; B, C, D jsou jednotlivě rovna číslům L, M, N, O; a tak $A=L$, $D=O$. I jsou L, O navzájem kmenná; pročež také A, D, jsou kmenná; což právě bylo dokázati.

IV.



Dáno-li několik poměrů čísly nejmenšími, najdi čísla nejmenší spojitě poměrná[5]) dle poměrů daných.

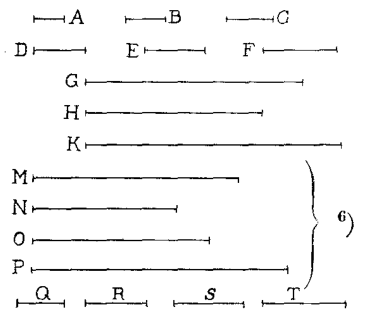
Danými poměry v číslech nejmenších buďtež $A:B$, $C:D$ a ještě $E:F$; mají se tedy najíti nejmenší čísla spojitě poměrná dle poměrův $A:B$, $C:D$ a ještě $E:F$

Nuže za nejmenší číslo, jehož měrami jsou B, C, vezměme G. A jakou

[4]) Neboť v řadě C, D, E vznikla C, E z A^2, B^2, v řadě F, G, H, K vznikla F K z $A\times A^2$ a $B\times B^2$.
[5]) Mají se totiž najíti čísla nejmenší, která by se spojitě k sobě měla jako $A:B$ $C:D$, $E:F$, na př. $v:x$, $x:y$, $y:z$, kdež $v:x=A:B$, $x:y=C:D$, $y:z=E:F$. Zovu

měrou čísla G jest B, takovou buď A čísla H, a jakou C čísla G, takovou buď i D čísla K. E však buď jest měrou čísla K buď není. Budiž nejprve. A jakou měrou čísla K jest E, takovou buď i F čísla L. A ježto A je touž měrou čísla H, jakou B čísla G, tedy $A:B = H:G$. Z téže příčiny ovšem také $C:D = G:K$ a rovněž $E:F = K:L$; pročež H, G, K, L jsou spojitě poměrná dle poměrův $A:B$, $C:D$, $E:F$. Pravím ovšem, že také nejmenší. Nuže nejsou-li H, G, K, L spojitě poměrná nejmenší dle poměrův $A:B$, $C:D$, $E:F$, buďtež N, O, M, P. A ježto $A:B = N:O$ a A, B jsou nejmenší, nejmenší pak jsou touž měrou těch, která mají týž poměr, větší většího jako menší menšího, t. j. přední předního jako zadní zadního, tedy B jest měrou čísla O; z téže příčiny ovšem i C jest měrou čísla O; tedy B, C jsou měrami čísla O. Proto i nejmenší, jehož měrami jsou B, C, bude měrou čísla O. Nejmenší však, jehož měrami jsou B, C, jest G; tedy G jest měrou čísla O, větší menšího, což právě nemožno. Tedy nebude čísel nad H, G, K, L menších spojitě poměrných dle poměrův $A:B$, $C:D$, $E:F$.

Nebuď již E měrou čísla K, a za nejmenší číslo, jehož měrami jsou E, K, vezměmež M (vyobr. druhé). A jakou měrou čísla M jest K, takovou buď též H čísla N a G čísla O; a jakou měrou čísla M jest E, takovou buď též F čísla P. Ježto H je touž měnou čísla N, jakou G čísla O, tedy $H:G = N:O$. Avšak $H:G = A:B$, proto též $A:B = N:O$. Z téže příčiny ovšem i $C:D = O:M$. Dále, ježto E je touž měrou čísla M, jakou F čísla P, tedy $E:F = M:P$. Pročež N, O, M, P jsou spojitě poměrná dle poměrův $A:B$, $C:D$, $E:F$. Pravím ovšem, že i nejmenší v poměrech $A:B$, $C:D$, $E:F$. Pakli ne, budou některá čísla spojitě poměrná dle poměrův $A:B$, $C:D$, $E:F$ menší než N, O, M, P. Buďtež jimi Q, R, S, T. A ježto $Q:R = A:B$, avšak $A:B$ jsou nejmenší, nejmenší pak jsou týmiž měrami těch, která mají týž poměr, jaký ona, přední předního jako zadní zadního, tedy B jest měrou čísla R. Z téže příčiny ovšem i C jest měrou čísla R; a tak B, C jsou měrami čísla R; pročež i nejmenší, jemuž B, C jsou měrami, bude měrou čísla R. Nejmenší však, jemuž B, C jsou měrami, jest G; tedy G jest měrou čísla R. A $G:R = K:S$, pročež i K jest měrou čísla S. Jest pak též E měrou čísla S; tedy E, K jsou měrami čísla S. Také nejmenší tedy, jemuž E, K jsou měrami, bude měrou čísla S. Nejmenší pak, jemuž E, K jsou měrami, jest M; tedy M jest měrou čísla S, větší menšího, což právě nemožno. Pročež nebude čísel spojitě poměrných dle poměrův $A:B$, $C:D$, $E:F$ menších než N, O, M, P; tedy N, O, M, P



řadu takových čísel »spojitě poměrnými« čísly (na rozdíl od čísel »spojitě úměrných«, což by bylo $v:x = x:y = y:z$), ač je Eukl. rovněž jako spojitě úměrná jmenuje — nepřesně — ἑξῆς ἀνάλογον.

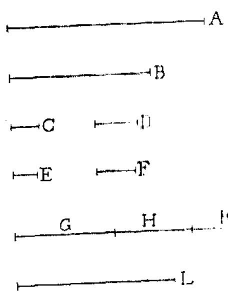
[6] Zmenšeno na $^1/_{10}$.

jsou nejmenší spojitě poměrná dle poměrův $A:B$, $C:D$, $E:F$; což právě bylo dokázati.

V.

Rovinná čísla mají k sobě poměr složený ze stran.

Rovinnými čísly buďtež A, B a měj A za strany čísla C, D a B čísla E, F; pravím, že A se má ku B poměrem složeným ze stran.[7]

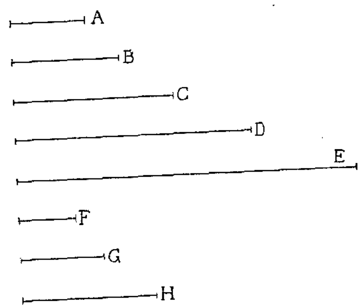


Nuže dány-li poměry $C:E$ a $D:F$, za čísla spojitě poměrná dle poměrů $C:E$, $D:F$ vezměme G, H, K, takže $C:E = G:H$ a $D:F = H:K$, a budiž $D \times E = L$. A ježto $D \times C = A$ a $D \times E = L$, tedy $C:E = A:L$. A $C:E = G:H$; pročež i $G:H = A:L$. Dále, ježto $E \times D = L$, avšak bylo zajisté také $E \times F = B$, tedy $D:F = L:B$. Avšak $D:F = H:K$, pročež i $H:K = L:B$. Bylo pak dokázáno, že též $G:H = A:L$; stejnořadně (VII. XIV.) tedy $G:K = A:B$. G však má se ke K poměrem složeným ze stran[8]; tedy A se má ku B poměrem složeným ze stran; což právě bylo dokázati.

VI.

Když je několik čísel spojitě úměrných a první druhému není měrou, ani jiné žádné žádnému nebude měrou.

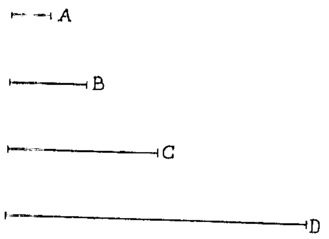
Několika čísly spojitě úměrnými buďtež A, B, C, D, E a nebuď A měrou číslu B; pravím, že ani jiné žádné žádnému nebude měrou.



Že zajisté A, B, C, D, E po řadě navzájem se nedoměřují, patrno; neboť ani A číslu B není měrou. Pravím ovšem, že ani jiné žádné žádnému nebude měrou. Nuže, možno-li, budiž A měrou čísla C. A kolik čísel jest A, B, C, tolik za nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký A, B, C, vezměmež F, G, H (VII. XXXIII.). A ježto F, G, H mají týž poměr, jaky A, B, C a počet A, B, C roven počtu F, G, H, tedy stejnořadně $A:C = F:H$. A ježto $A:B = F:G$ a není A měrou čísla B, tedy ani F není měrou čísla G; pročež F není jednotka, neboť jednotka jest měrou každého čísla. I jsou F, H navzájem kmenná (VIII. III.). A $F:H = A:C$; není tedy ani A měrou čísla C. Podobně ovšem dokážeme, že ani jiné žádné žádnému nebude měrou; což právě bylo dokázati.

[7] T. j. $A:B = C \times D : E \times F$ neboli $A:B = \frac{C}{E} : \frac{F}{D}$.

[8] To jde z úměr $C:E = G:H$ a $D:F = H:K$.



VII.

Když jest několik čísel spojitě úměrných a první jest měrou posledního, také druhého bude měrou.

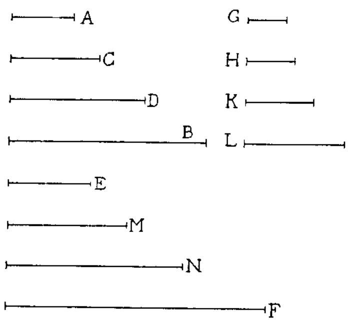
Několika čísly spojitě úměrnými buďtež A, B, C, D a buď A měrou čísla D; pravím, že jest A též měrou čísla B.

Neboť není li A měrou čísla B, ani jiné žádné žádnému nebude měrou; je však A měrou čísla D. Tedy A jest měrou čísla B; což právě bylo dokázati.

VIII.

Když se mezi dvě čísla vejdou čísla dle spojité úměry, kolik čísel mezi ně se vejde dle spojité úměry, tolik se vejde dle spojité úměry též mezi čísla (jiná) téhož poměru.

Nuže mezi dvě čísla A, B vejdětež se dle spojité úměry čísla C, D a buď $A:B=E:F$; pravím, že tolik čísel, kolik dle spojité úměry vloženo mezi A a B, vejde se dle spojité úměry též mezi E a F.



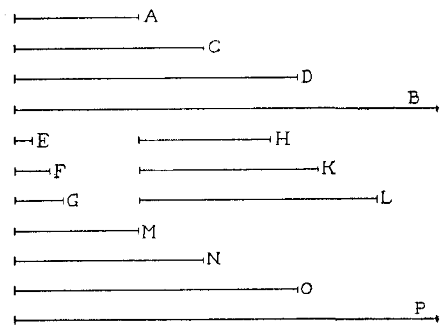
Nuže kolik je čísel A, B, C, D, za tolik čísel nejmenších téhož poměru, jaký mají A, C, D, B, vezměme G, H, K, L. Tedy krajní z nich G, L jsou navzájem kmenná (VIII. III.). A ježto A, C, D, B mají týž poměr jako G, H, K, L a počet A, C, D, B je roven počtu G, H, K, L, tedy stejnořadně $A:B=G:L$; avšak $A:B=E:F$; pročež i $G:L=E:F$. G, L však jsou kmenná, kmenná pak také nejmenší, nejmenší pak čísla jsou týmiž měrami těch, která mají týž poměr, větší většího jako menší menšího, t. j. přední předního jako zadní zadního. Tedy G je touž měrou čísla E, jakou L čísla F. Jakou tedy měrou čísla E jest G, takovou buď též H čísla M a K čísla N. Tedy G, H, K, L jsou týmiž měrami čísel E, M, N, F. Pročež G, H, K, L mají týž poměr, jaký E, M, N, F. Avšak G, H, K, L mají týž poměr, jaký A, C, D, B; tedy též A, C, D, B mají týž poměr, jaký E, M, N, F. A, C, D, B jsou však spojitě úměrná; pročež i E, M, N, F jsou spojitě úměrná. Tedy kolik čísel jest vloženo mezi A, B dle spojité úměry, tolik čísel je dle spojité úměry vloženo mezi E a F; což právě bylo dokázati.

IX.

Když jsou dvě čísla navzájem kmenná a mezi ně se vejdou čísla dle spojité úměry, kolik čísel mezi ně se vejde dle spojité úměry, tolik také se vejde dle spojité úměry mezi kterékoli z obou a jednotku.

Dvěma čísly navzájem kmennými buďtež A, B a mezi ně dle spojité úměry vložme C, D a za jednotku vezměme E; pravím, že tolik čísel, kolik vloženo dle spojité úměry mezi A a B, vejde se dle spojité úměry též mezi A nebo B a jednotku.

Nuže za dvě nejmenší čísla poměru A, C, D, B vezměmež F, G, za tři pak H, K, L a vždy po řadě o jednu více, až se počet jejich vyrovná počtu A, C, D, B (dle VIII. II.). Vezměmež a buďtež to M, N, O, P. Patrno zajisté, že $F\times F=H$, $F\times H=M$ a $G\times G=L$, $G\times L=P$ (VIII. II.). A ježto M, N, O, P jsou nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký F, G, jsou pak též A, C, D, B nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký F, G a počet M, N, O, P roven počtu A, C, D, B, tedy čísla M, N, O, P jsou jednotlivě číslům A, C, D, B rovna; tedy $M=A$, $P=B$. A ježto $F\times F=H$, tedy F jest měrou čísla H dle jednotek v F. Jest pak jednotka E měrou čísla F dle jeho jednotek; pročež jednotka je touž měrou čísla F, jakou F čísla H, tedy $E:F=F:H$. Dále, ježto $F\times H=M$, tedy H jest měrou čísla M dle jednotek v F. Jest pak též jednotka E měrou čísla F dle jeho jednotek; pročež jednotka E je touž měrou čísla F, jakou H čísla M, tedy $E:F=H:M$. Dokázáno však bylo, že též $E:F=F:H$; a tak též $E:F=F:H=H:M$. Avšak $M=A$; pročež $E:F=F:H=H:A$. Z téže příčiny ovšem také $E:G=G:L=L:B$. Tedy kolik čísel je vloženo dle spojité úměry mezi A a B, tolik čísel vloženo též jednotlivě mezi A, B a jednotku E; což právě bylo dokázati.



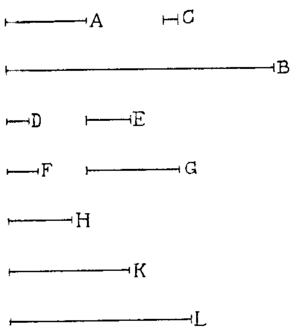
X.

Když se vejdou mezi některé ze dvou čísel a jednotku čísla dle spojité úměry, kolik čísel se vejde mezi některé z nich a jednotku dle spojité úměry, tolik se vejde dle spojité úměry též mezi ona čísla.

Nuže mezi čísla A, B a jednotku C vejdětež se dle spojité úměry čísla D, E a F, G; pravím, že tolik čísel, kolik se vloží dle spojité úměry mezi A nebo B a jednotku C, vloží se dle spojité úměry též mezi A a B.

Nuže budiž $D\times F=H$, $D\times H=K$, $F\times H=L$.

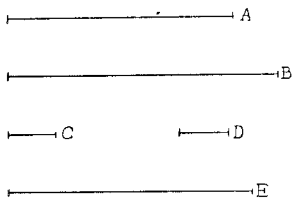
A ježto $C:D=D:E$, tedy jednotka C je touž měrou čísla D, jakou D čísla E. Jednotka však C jest měrou čísla D dle jednotek v D, tedy též číslo D jest měrou čísla E dle jednotek v D; pročež $D\times D=E$. Dále, ježto $C:D=E:A$, tedy jednotka C je touž měrou čísla D, jakou E čísla A. Avšak jednotka C jest měrou čísla D dle jednotek v D, tedy též E jest měrou čísla A dle jednotek v D; pročež $D \times E = A$. Z téže příčiny ovšem též $F \times F = G$ a $F \times G = B$. A ježto $D \times D = E$ a $D \times F = H$, tedy $D:F = E:H$. Z téže příčiny ovšem též $D:F = H:G$ Pročež také $E:H = H:G$. Dále, ježto $D \times E = A$ a $D \times H = K$, tedy $E:H = A:K$. Avšak $E:H = D:F$, tedy též $D:F = A:K$. Dále, ježto $D \times H = K$, $F \times H = L$, tedy $D:F = K:L$. Avšak $D:F = A:K$, pročež také $A:K = K:L$. Poněvadž mimo to $F \times H = L$ a $F \times G = B$, tedy $H:G = L:B$. Avšak $H:G = D:F$, tedy též $D:F = L:B$. Bylo však dokázáno, že též $D:F = A:K = K:L$; proto též $A:K = K:L = L:B$. Tedy A, K, L, B mají se k sobě po řadě dle spojité úměry. Kolik tedy čísel se vejde jednotlivě mezi A, B a jednotku C dle spojité úměry, tolik se vejde dle spojité úměry též mezi A a B; což právě bylo dokázati.



XI.

Dvě čísla čtvercová mají jedno za střední úměrnou, a čtverec má se ke čtverci jako dvojmoci jejich stran.[9])

Čísly čtvercovými buďtež A, B, a měj A za stranu C, a B měj D; pravím, že A, B mají jedno číslo za střední úměrnou a že $A:B = C^2:D^2$.



Nuže budiž $C \times D = E$. A ježto A jest číslo čtvercové a strana jeho C, tedy $C \times C = A$; z téže příčiny ovšem též $D \times D = B$. Ježto tedy $C \times C = A$ a $C \times D = E$, tedy $C:D = A:E$ Z téže příčiny ovšem také $C:D = E:B$; proto též $A:E = E:B$. Tedy A, B mají jedno číslo za střední úměrnou.

Pravím již, že $A:B = C^2:D^2$. Neboť ježto tři čísla A, E, B jsou (spojitou) úměrou, tedy $A:B = A^2:E^2$ (V. vým. 9.); avšak $A:E = C:D$, pročež $A:B = C^2:D^2$; což právě bylo dokázati.

XII.

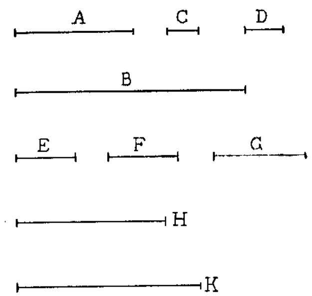
Dvě čísla krychlová mají dvě čísla za střední úměrné, a krychle má se ke krychli jako trojmoci jejich stran.

Čísly krychlovými buďtež A, B, a mějž A za stranu C, a B měj D; pravím, že mají A, B dvě čísla střední úměrná a že $A:B = C^3:D^3$.

[9]) Vlastně: mají k sobě poměr dvojmocně větší (διπλασίονα λόγον) než strana k straně.

Nuže buď $C \times C = E$, $C \times D = F$ a $D \times D = G$, jakož i $C \times F = H$, $D \times F = K$.

A ježto A jest číslo krychlové a strana jeho C a $C \times C = E$, tedy $C \times C = E$ a $C \times E = A$. Z téže příčiny ovšem též $D \times D = G$ a $D \times G = B$. A ježto $C \times C = E$ a $C \times D = F$, tedy $C:D = E:F$. Z téže příčiny ovšem také $C:D = F:G$. Dále, ježto $C \times E = A$ a $C \times F = H$, tedy $E:F = A:H$. Avšak $E:F = C:D$, tedy též $C:D = A:H$. Dále, ježto $C \times F = H$ a $D \times F = K$, tedy $C:D = H:K$. Dále, ježto $D \times F = K$ a $D \times G = B$, tedy $F:G = K:B$. Avšak $F:G = C:D$, pročež také $C:D = A:H = H:K = K:B$. Tedy A, B mají dvě střední úměrné H, K.

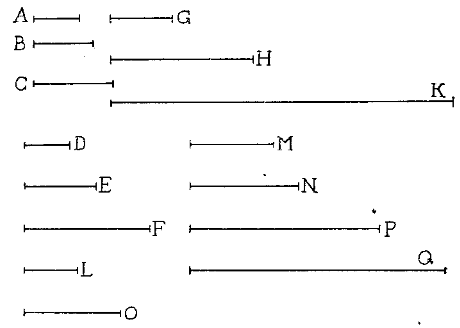


Pravím již, že též $A:B = C^3:D^3$. Neboť ježto čtyři čísla A, H, K, B jsou (spojitě) úměrná, tedy $A:B = A^3:H^3$ (V. vým. 10.). Avšak $A:H = C:D$, tedy též $A:B = C^3:D^3$; což právě bylo dokázati.

XIII.

Když jest několik čísel spojitě úměrných a každé samo sebou znásobeno jsouc činí jiné, vzniklá z nich budou (spojitě) úměrná, a když se vzniklá znásobí počátečními a vzniknou jiná, i ta budou sama (spojitě) úměrná [a tak vždy s konečnými se stává.]

Budiž několik čísel spojitě úměrných A B, C, takže $A:B = B:C$, a budiž $A \times A = D$[10]), $B \times B = E$, $C \times C = F$, jakož i $A \times D = G$, $B \times E = H$, $C \times F = K$; pravím, že D, E, F i G, H, K jsou spojitě úměrná.



Nuže buď $A \times B = L$, $A \times L = M$, $B \times L = N$, a dále $B \times C = O$. $B \times O = P$, $C \times O = Q$. Podobně ovšem jako svrchu (t. j. VIII. XII. dle VII. XVII XVIII.), dokážeme, že D, L. E a G. M, N, H jsou spojitě úměrná dle poměru $A:B$ a rovněž E, O, F a H, P, Q, K jsou spojitě úměrná dle poměru $B:C$. I jest $A:B = B:C$; pročež také D, L, E mají týž poměr jako E, O, F a též G, M, N, H jako H, P, Q, K. A počet D, L, E je roven počtu E. O, F, počet pak G, M, N, H počtu H, P, Q, K; stejnořadně tedy $D:E = E:F$ a $G:H = H:K$; což právě bylo dokázati.

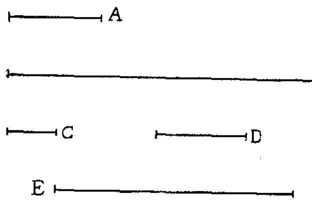
[10]) Bylo nutno zmenšiti D, E, F, L, O na $^1/_{10}$, G, H, K, M, N, P, Q na $^1/_{60}$.

XIV.

Když je čtverec čtverci měrou, též strana straně bude měrou; a když je měrou strana straně, bude i čtverec měrou čtverci.

Čtvercovými čísly buďtež A, B, stranami pak jejich C, D, a buď A měrou čísla B; pravím, že též C je měrou čísla D.

Nuže budiž $C \times D = E$, tedy A, E, B jsou spojitě úměrná (VIII. XI.) dle poměru $C:D$[11]. A ježto A, E, B jsou spojitě úměrná a jest A měrou čísla B, tedy A je též měrou čísla E (VIII. VII.); a $A:E = C:D$, tedy je též C měrou čísla D.



Buď již naopak C měrou čísla D; pravím, že též A jest měrou čísla B.

Neboť touž úpravu vykonajíce podobně dokážeme, že A, E, B jsou spojitě úměrná dle poměru $C:D$. A ježto $C:D = A:E$ a C jest měrou čísla D, tedy též A jest měrou čísla E; a A, E, B jsou spojitě úměrná; pročež také A jest měrou čísla B.

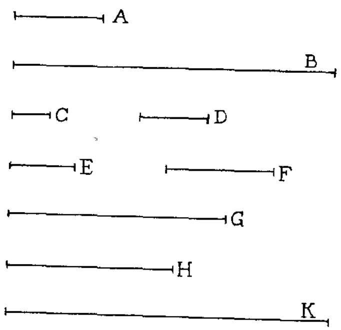
Když tedy je čtverec čtverci měrou, — — —

XV.

Když jest měrou číslo krychlové číslu krychlovému, bude měrou i strana straně; a když strana straně jest měrou, i krychle krychli bude měrou.

Nuže budiž krychlové číslo A měrou čísla krychlového B[12], a mějž A za stranu C, B pak D; pravím, že C jest měrou strany D.

Nuže buď $C \times C = E$, $D \times D = G$ a též $C \times D = F$, $C \times F = H$, $D \times F = K$[13]. Patrno zajisté, že E, F, G a A, H, K, B jsou spojitě úměrná dle poměru $C:D$. A ježto A, H, K, B jsou spojitě úměrná a jest A měrou čísla B, tedy je též měrou čísla H (VIII. VII.). Též $A:H = C:D$; tedy též C jest měrou čísla D.



Avšak buď již C měrou čísla D; pravím, že bude též A měrou čísla B.

Neboť touž úpravu vykonajíce podobně zajisté dokážeme, že A, H, K, B jsou spojitě úměrná dle poměru $C:D$. A ježto C jest měrou čísla D a $C:D = A:H$, tedy též A jest měrou čísla H; pročež jest A též měrou čísla B; což právě bylo dokázati.

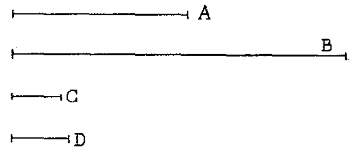
---

11) $A:E = C^2 : C \times D = C:D$; $E:B = C \times D : D^2 = C:D$.
12) B v obr. myšleno buď dvojnásobným.
13) Ve vyd. Heiberg. K zaměněno písmenem jiným; opravil jsem.

XVI.

Když není číslo čtvercové měrou číslu čtvercovému, ani strana straně nebude měrou; a když není strana straně měrou, ani čtverec čtverci měrou nebude.

Čtvercovými čísly buďtež A, B, stranami pak jejich C, D, a nebuď A měrou čísla B; pravím, že ani C není měrou čísla D.



Neboť jest-li C měrou čísla D, bude též A měrou čísla B (VIII. XIV.); avšak A není měrou čísla B, tedy ani C nebude měrou čísla D.

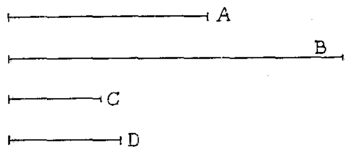
Nuže nebudiž naopak C měrou čísla D; pravím, že ani A nebude měrou čísla B.

Neboť jest li A číslu B měrou, bude též C měrou číslu D (ib.); C však není měrou čísla D, tedy ani A nebude měrou čísla B; což právě bylo dokázati.

XVII.

Když není číslo krychlové měrou číslu krychlovému, ani strana straně nebude měrou; a když není strana straně měrou, ani krychle krychli měrou nebude.

Nuže nebuď krychlové číslo A měrou krychlového čísla B, a měj A za stranu C, B pak měj D; pravím, že C nebude měrou strany D.



Neboť jest-li C měrou strany D, bude též A měrou čísla B (VIII. XV.); A však není měrou čísla B, tedy ani C není měrou strany D.

Avšak nebuď již C měrou strany D; pravím, že ani A číslu B nebude měrou.

Neboť jest-li A číslu B měrou, také C bude měrou straně D; C však není měrou straně D, pročež ani A nebude měrou čísla B; což právě bylo dokázati.

XIX.

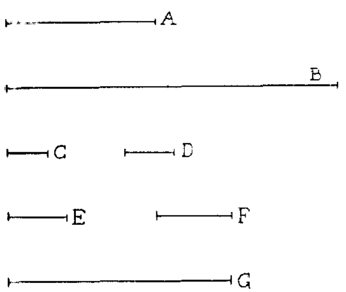
Dvě podobná čísla rovinná[14]) mají jedno číslo za střední úměrnou; a roviny mají se k sobě jako dvojmoci stejnolehlých stran.

Podobnými dvěma čísly rovinnými buďtež A, B a mějž A za strany čísla C, D a B čísla E, F. A ježto podobny jsou ty roviny, jež mají úměrné strany (VII. vým. 21.), tož $C:D = E:F$. Pravím tedy, že A, B mají jedno číslo za střední úměrnou a že $A:B = C^2:E^2$ nebo $D^2:F^2$, t. j. ve dvojmoci stejnolehlá strana ke straně stejnolehlé.

---

14) T. j. čísla plošného obsahu podobných rovin.

A ježto $C:D=E:F$, střídavě bude $C:E=D:F$. A ježto A jest rovina, strany pak její C, D, tedy $D\times C=A$; z téže příčiny ovšem též $E\times F=B$. Tož budiž $D\times E=G$. A ježto $D\times C=A$ a $D\times E=G$, tedy $C:E=A:G$. Avšak $C:E=D:F$; pročež také $D:F=A:G$. Dále, ježto $E\times D=G$ a $E\times F=B$, tedy $D:F=G:B$. Bylo pak dokázáno, že též $D:F=A:G$; proto též $A:G=G:B$. Pročež A, G, B jsou spojitě úměrná. Tedy A, B mají jedno číslo za střední úměrnou.

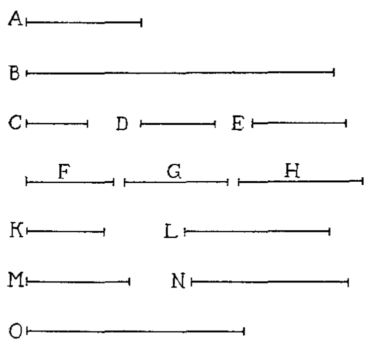


Pravím ovšem, že též $A:B=C^2:E^2$ nebo $D^2:F^2$. Neboť ježto A, C, B jsou spojitě úměrná, $A:B=A^2:G^2$ (V. vým. 9.). Též $A:G=C:E=D:F$; pročež také $A:B=C^2:E^2=D^2:F^2$; což právě bylo dokázati.

XIX.

Mezi dvě podobná čísla tělesová vejdou se dvě čísla za střední úměrné; a podobná tělesa mají se k sobě jako trojmoci stejnolehlých stran.

Podobnými dvěma tělesy buďtež A, B a mějž A za strany C, D, E a B měj F, G, H. A ježto podobná tělesa jsou ta, která mají úměrné strany (VII. vým. 21.), tedy $C:D=F:G$, $G:E=G:H$; pravím, že mezi A, B vejdou se dvě čísla za střední úměrné a že $A:B=C^3:F^3=D^3:G^3=E^3:H^3$.



Nuže budiž $C\times D=K$ a $F\times G=L$. A ježto C, D a F, G mají stejný poměr a $C\times D=K$, $F\times G=L$, jsou K, L podobná čísla rovinná, pročež K, L mají jedno číslo za střední úměrnou (VIII. XVIII.); budiž to M. Tedy $M=D\times F$, jak dokázáno v poučce předešlé. A ježto $D\times C=K$, $D\times F=M$, tedy $C:F=K:M$; avšak $K:M=M:L$; tedy K, M, L jsou spojitě úměrná dle poměru $C:F$. A ježto $C:D=F:G$, střídavě tedy $C:F=D:G$. Z téže příčiny ovšem také $D:G=E:H$. Tedy K, M, L jsou spojitě úměrná dle poměrů $C:F$, $D:G$ a $E:H$. Buď již $E\times M=N$, $H\times M=O$. A ježto A jest těleso a strany jeho jsou C, D, E, tedy $E\times C\times D=A$; avšak $C\times D=K$, tedy $E\times K=A$. Z téže příčiny ovšem též $H\times L=B$. A ježto $E\times K=A$, ale zajisté také $E\times M=N$, tedy $K:M=A:N$. Avšak $K:M=C:F=D:G=E:H$; tedy též $C:F=D:G=E:H=A:N$. Dále, ježto $E\times M=N$ a $H\times M=O$, tedy $E:H=N:O$. Avšak $E:H=C:F=D:G$; pročež i $C:F=D:G=E:H=A:N=N:O$. Dále, ježto $H\times M=O$, ale zajisté též $H\times L=B$,

tedy $M:L=O:B$. Avšak $M:L=C:F=D:G=E:H$. Proto též $C:F=D:G=E:H=O:B=A:N=N:O$.

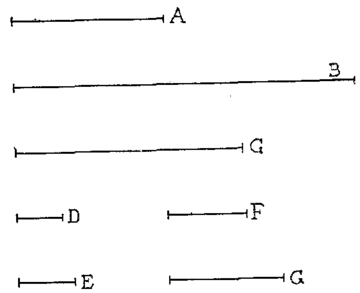
Tedy A, N, O, B jsou spojitě úměrná dle řečených poměrů stran.

Pravím, že též $A:B=C^3:F^3=D^3:G^3=E^3:H^3$. Neboť ježto čtyři čísla A, N, O, B jsou spojitě úměrná, tedy $A:B=A^3:N^3$ (V. vým. 10.). Avšak dokázáno, že $A:N=C:F=D:G=E:H$. Pročež také $A:B=C^3:F^3=D^3:G^3=E^3:H^3$; což právě bylo dokázati.

XX.

Když se mezi dvě čísla vejde jedno číslo za střední úměrnou, ta čísla budou podobné roviny.

Mezi dvě čísla A, B vejdiž se jedno číslo C za střední úměrnou; pravím, že A, B jsou podobná čísla rovinná.



Za nejmenší čísla z těch, která mají týž poměr, jaký $A:C$, vezměme D, E (VII. XXXIII.); tedy D je touž měrou čísla A, jakou E čísla C. Jakou tedy měrou čísla A je D, tolik jednotek měj F; pročež $F\times D=A$. Tedy A jest rovina a strany její D, F. Dále, ježto D, E jsou nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký $C:B$, tedy D je touž měrou čísla C, jakou E čísla B. Jakou tedy měrou čísla B jest E, tolik jednotek měj G. Pročež E jest měrou čísla B dle jednotek v G; tedy $G\times E=B$. Pročež B jest jest rovina a strany její jsou E, G. Tedy A, B jsou čísla rovinná.

Pravím ovšem, že také podobná. Neboť ježto $F\times D=A$ a $F\times E=C$,[15]) tedy $D:E=A:C$, t. j. $C:B$. Dále, ježto $E\times F=C$ a $E\times G=B$, tedy $F:G=C:B$. Avšak $C:B=D:E$; proto i $D:E=F:G$, a střídavě $D:F=E:G$. Tedy A, B jsou podobná čísla rovinná, neboť mají úměrné strany; což právě bylo dokázati.

XXI.

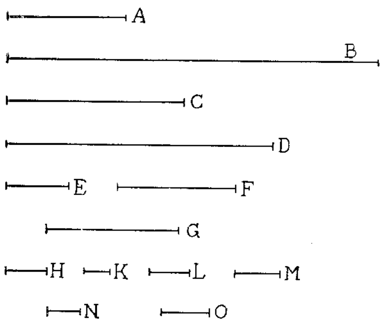
Když se mezi dvě čísla vejdou čísla dvě za střední úměrné, ta čísla (počáteční) jsou podobná tělesa.

Nuže vložme mezi dvě čísla A, B čísla dvě C, D za střední úměrné; pravím, že A, B jsou podobná tělesa.

Nuže za nejmenší čísla z těch, která mají týž poměr, jaký A, C, D vezměme tři E, F, G; tedy krajní z nich E, G jsou navzájem kmenná (VIII. III.). A ježto mezi E, G vloženo jedno za střední úměrnou F, tedy E, G jsou podobná čísla rovinná. Měj tedy E za strany H, K a G měj L, M. Tu je z předešlého patrno, že E, F, G jsou spojitě úměrná dle poměrů $H:L$ a $K:M$. A ježto E, F, G jsou nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký A, C, D, a počet E, F, G

[15]) $D:A=1:F=E:C$, z toho $F\times E=C$.

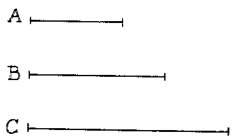
roven počtu A, C, D, tedy stejnořadně $E:G = A:D$. Avšak E, G jsou kmenná, kmenná pak také nejmenší, nejmenší však jsou týmiž měrami těch, která mají týž poměr, jaký ona, větší většího jako menší menšího, t. j. přední předního jako zadní zadního; pročež E je touž měrou čísla A, jakou G čísla D. Jakou tedy měrou čísla A jest E, tolik jednotek měj N. Pročež $N \times E = A$. Avšak $E = H \times K$; tedy $N \times H \times K = A$. Proto A jest těleso a strany jeho jsou H, K, N. — Dále, ježto E, F, G jsou nejmenší z těch, která mají týž poměr, jaký C, D, B, tedy E je touž měrou čísla C, jakou G čísla B. Jakou tedy měrou čísla C jest E, tolik jednotek měj O. Pročež G jest měrou čísla B dle jednotek v O; tedy $O \times G = B$. Avšak $G = L \times M$; a tak $O \times L \times M = B$; B jest tedy těleso, a strany jeho jsou L, M, O; pročež A, B jsou tělesa.



Pravím ovšem, že též podobná. Neboť ježto $N \times E = A$ a $O \times E = C$, tedy $N:O = A:C$, t. j. $E:F$. Avšak $E:F = H:L = K:M$, pročež také $H:L = K:M = N:O$; a H, K, N jsou strany tělesa A; O, L, M strany tělesa B. Tedy čísla A, B jsou tělesa podobná; což právě bylo dokázati.

XXII.

Když jsou tři čísla spojitě úměrná a první je čtverec, i třetí bude čtverec.

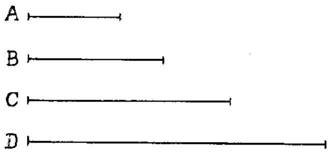


Třemi čísly spojitě úměrnými buďtež A, B, C, a první A buď čtverec; pravím, že i třetí C je čtverec.

Neboť ježto mezi A, C jest jedno číslo B střední úměrnou, tedy A, C jsou podobné roviny (VIII. xx.); A však je čtverec, pročež i C je čtverec; což právě bylo dokázati.

XXIII.

Když jsou čtyři čísla spojitě úměrná a první je krychle, i čtvrté bude krychle.

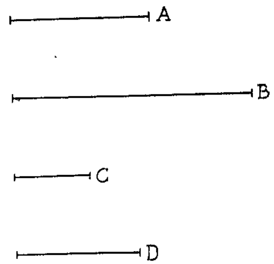


Čtyřmi čísly spojitě úměrnými buďtež A, B, C, D, a buď A krychlí; pravím, že též D jest krychle.

Neboť ježto mezi A, D jsou dvě čísla B, C středními úměrnými, tedy A, D jsou podobná čísla tělesová (VIII. xxi.); A však je krychle, krychle tedy jest i D; což právě bylo dokázati.

XXIV.

Když se mají dvě čísla k sobě jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému a první je čtverec, i druhé bude čtverec.

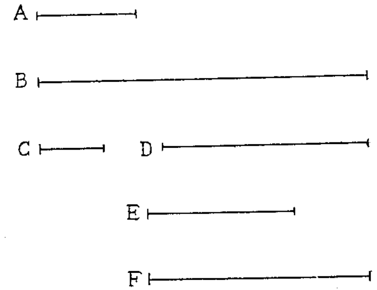


Nuže mějtež se čísla A, B k sobě jako číslo čtvercové C k číslu čtvercovému D a budiž A čtverec; pravím, že také B je čtverec.

Neboť ježto C, D jsou čtverce, tedy C, D jsou podobné roviny. Pročež se vloží mezi C, D jedno číslo za střední úměrnou (VIII. xviii.). I jest $C:D = A:B$; tedy též mezi A a B se vloží jedno číslo za střední úměrnou. I jest A čtverec; tedy též B je čtverec (VIII. xxii.); což právě bylo dokázati.

XXV.

Když se mají dvě čísla k sobě jako číslo krychlové k číslu krychlovému a první je krychle, i druhé bude krychle.

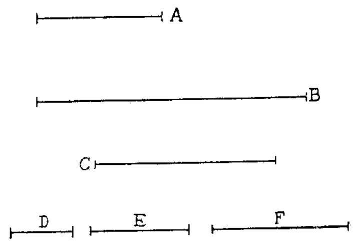


Nuže mějtež se čísla A, B k sobě jako číslo krychlové C k číslu krychlovému D a budiž A krychlí; pravím, že i B jest krychle.

Neboť ježto C, D jsou krychle, C, D jsou podobná tělesa; tedy mezi C a D vejdou se dvě čísla za střední úměrné. A kolik se jich vejde mezi C a D dle spojité úměry, tolik též mezi ta, která mají týž poměr, jaký ona (VIII. viii.); proto též mezi A a B vložíme dvě čísla za střední úměrné. Vložme E, F. Ježto tedy čtyři čísla A, E, F, B jsou spojitě úměrná, A pak jest krychle, krychle tedy též B (VIII. xxiii.); což právě bylo dokázati.

XXVI.

Podobná čísla rovinná mají se k sobě jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému.

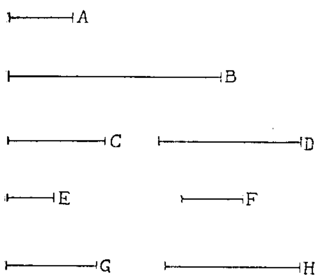


Podobnými čísly rovinnými buďtež A, B; pravím, že A se má k B, jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému.

Neboť ježto A, B jsou podobné roviny, tedy mezi A, B vejde se jedno číslo za střední úměrnou. Vložme a budiž to C, a za nejmenší čísla z těch, která mají týž poměr, jaký A, C, B, vezměme D, E, F; tedy krajní z nich D, F jsou čtvercová (VIII. II. důsl.). A ježto $D:F=A:B$ a D, F jsou čtvercová, tedy A se má k B jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému; což právě bylo dokázati.

XXVII.

Podobná čísla tělesová mají se k sobě jako číslo krychlové k číslu krychlovému.



Podobnými čísly tělesovými buďtež A, B; pravím, že A se má k B jako číslo krychlové k číslu krychlovému.

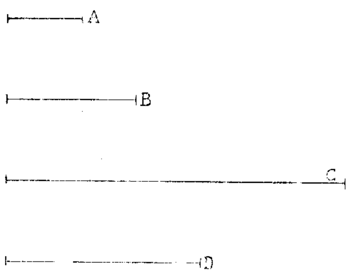
Neboť ježto A, B jsou podobná tělesa, tedy mezi A a B vejdou se dvě čísla za střední úměrné. Vložme C, D a za nejmenší čísla z těch, která mají týž poměr, jaký A, C, D, B, a jichž počet je týž, vezměme E, F, G, H; tedy krajní z nich E, H jsou krychle (VIII. II. důsl.). A $E:H=A:B$. Pročež má se též A k B jako číslo krychlové k číslu krychlovému; což právě bylo dokázati.

Kniha devátá.

I.

Když se dvě podobná čísla rovinná vespolek znásobí a dají nějaké číslo, vzniklé bude čtverec.

Dvěma podobnými čísly rovinnými buďtež A, B, a buď $A\times B=C$; pravím, že C je čtverec.

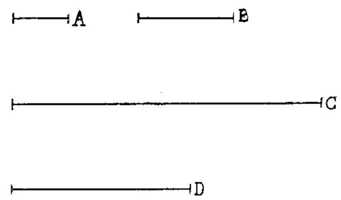


Nuže budiž $A\times A=D$. Tu jest D čtverec. Ježto $A\times A=D$ a $A\times B=C$, tedy $A:B=D:C$. A ježto A, B jsou podobná čísla rovinná, mezi A, B tedy vejde se jedno číslo za střední úměrnou (VIII. XVIII.). Když pak mezi dvě čísla se vloží čísla za střední úměrné, kolik se jich mezi ně vloží, tolik též mezi ta, jež mají týž poměr (VIII. VIII.): proto též mezi D, C vložíš jedno číslo za střední úměrnou. I jest D čtverec, pročež i C jest čtverec (VIII. XXII.); což právě bylo dokázati.

II.

Když se dvě čísla vespolek znásobí a dají čtverec, jsou to podobná čísla rovinná.

Dvěma čísly buďtež A, B, a buď $A\times B=C$; pravím, že A, B jsou podobná čísla rovinná.



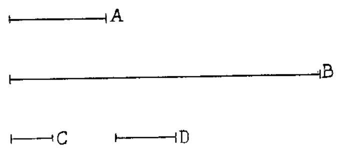
Nuže buď $A\times A=D$; D jest tedy čtverec. A ježto $A\times A=D$ a $A\times B=C$, tedy $A:B=D:C$. A ježto D je čtverec, avšak také C, tedy D, C jsou podobná čísla rovinná. Pročež mezi D, C vložíš jedno číslo za střední úměrnou. A $D:C=A:B$; tedy též mezi A, B se vejde jedno číslo za střední úměrnou. Když pak se vejde mezi dvě čísla jedno za střední úměrou, jsou to podobná čísla rovinná (VIII XX.); tedy A, B jsou podobná čísla rovinná; což právě bylo dokázati.

III.

Když se číslo krychlové samo sebou znásobí a dá jiné, vzniklé bude krychle.

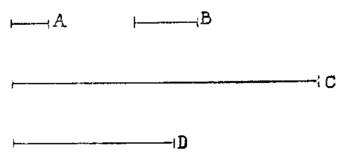
Nuže budiž číslo krychlové A samo sebou znásobeno a dej B; pravím, že B je krychle.

Nuže stranou čísla A buď C a $C\times C=D$. Tu jest patrno, že $C\times D=A$. A ježto $C\times C=D$, tedy C jest měrou čísla D dle svých jednotek. Než ovšem i jednotka jest měrou čísla C dle jeho jednotek; pročež $1:C=C:D$. Dále ježto $C\times D=A$, tedy D jest měrou čísla A dle jednotek v C, jest pak i jednotka měrou čísla C dle jeho jednotek; tedy $1:C=D:A$. Avšak $1:C=C:D$; pročež také $1:C=C:D=D:A$. Tedy mezi jednotku a číslo A vložena jsou spojitě čísla C, D za střední úměrné. Dále, ježto $A\times A=B$, tedy A jest měrou čísla B dle svých jednotek; jest pak i jednotka měrou čísla A dle jeho jednotek; pročež $1:A=A:B$. A mezi jednotku a A vložena jsou dvě čísla za střední úměrné; tedy též mezi A, B se vejdou dvě čísla za střední úměrné (VIII. VIII.) [1]. Když pak mezi dvě čísla se vejdou dvě čísla za střední úměrné a první je krychle, též druhé bude krychle (VIII. XXIII.). I jest A krychle, pročež i B jest krychle; což právě bylo dokázati.



VI.

Když se číslo krychlové znásobí číslem krychlovým a vznikne jiné, vzniklé bude krychle.



Nuže znásobme krychlovým číslem A krychlové číslo B a vznikni C; pravím, že C jest krychle.

Nuže budiž $A\times A=D$; D tedy jest krychle. A ježto $A\times A=D$ a $A\times B=$

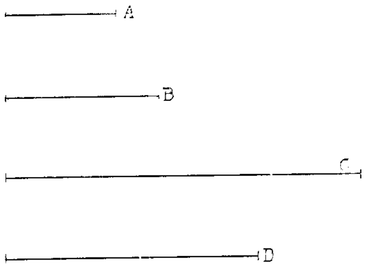
---

[1]) V VIII. VIII. dokázáno to vůbec o číslech, zde však první číslo jednotka!

C, tedy $A:B=D:C$. A ježto A, B jsou krychle, jsou A, B podobná tělesa; pročež se vejdou mezi A, B dvě čísla za střední úměrné (VIII. XIX.), proto též mezi D a C se vejdou dvě čísla za střední úměrné (VIII. VIII). A D jest krychle, tedy též C jest krychle (VIII. XXIII.); což právě bylo dokázati.

V.

Když se číslem krychlovým znásobí nějaké číslo a vznikne krychle, též číslo znásobené bude krychle.



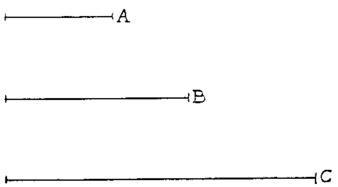
Nuže znásobme číslem krychlovým A nějaké číslo B, a součinem buď krychle C; pravím, že B je krychle.

Nuže buď $A\times A=D$; tedy D je krychle. A ježto $A\times A=D$ a $A\times B=C$, tedy $A:B=D:C$. A ježto D, C jsou krychle, jsou to podobná tělesa. Pročež mezi D, C se vejdou dvě čísla za střední úměrné. A $D:C=A:B$; tedy též mezi A, B se vejdou dvě čísla za střední úměrné. I jest A krychle, pročež i B jest krychle; což právě bylo dokázati.

VI.

Když se číslo samo sebou znásobí a vznikne krychle, též samo bude krychle.

Nuže buď $A\times A$ rovno krychli B; pravím, že též A jest krychle.



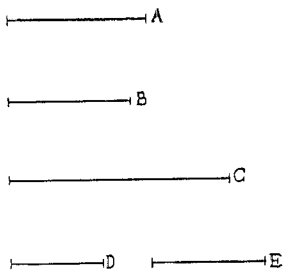
Nuže buď $A\times B=C$. Ježto tedy $A\times A=B$ a $A\times B=C$, tedy C jest krychle. A ježto $A\times A=B$, tedy A jest měrou čísla B dle svých jednotek; jest však i jednotka měrou čísla A dle jeho jednotek. Proto $1:A=A:B$. A ježto $A\times B=C$, tedy B jest měrou čísla C dle jednotek v A. Jest pak i jednotka měrou čísla A dle jeho jednotek; pročež $1:A=B:C$. Avšak $1:A=A:B$, tedy $A:B=B:C$. A ježto B, C jsou krychle, jsou to podobná tělesa; tedy mezi B, C vejdou se dvě čísla za střední úměrné. Také $B:C=A:B$; pročež i mezi A, B se vejdou dvě čísla za střední úměrné. I jest B krychle; krychle tedy je též A [2]; což právě bylo dokázati.

VII.

Když se složeným číslem [3]) nějaké číslo znásobí a vznikne jiné, vzniklé bude těleso.

[2]) Dle VIII. XXIII.; neboť $A:x=x:y=y:B$ možno též obrátiti takto: $B:y=y:x=x:A$.

[3]) Tím se rozumí, jak již z VII. vým. 13. poznati, nějaký součin.



Nuže znásobme složeným číslem A nějaké číslo B, a buď součinem C; pravím, že C je těleso.

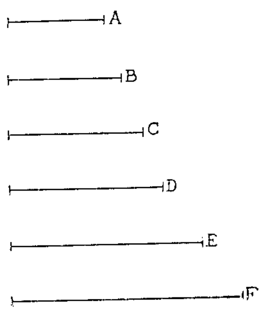
Neboť ježto A jest složené, bude mu nějaké číslo měrou. Budiž mu měrou D, a jakou měrou čísla A je D, tolik jednotek měj E. Ježto tedy D jest měrou čísla A dle jednotek v E, tedy $E\times D=A$. A ježto $A\times B=C$ a $A=D\times E$, tedy $D\times E\times B=C$; pročež C je těleso a strany jeho jsou D, E, B; což právě bylo dokázati.

VIII.

Když jest od jednotky počínajíc několik čísel spojitě úměrných, třetí od jednotky [4]) bude čtverec i dále ob číslo, čtvrté pak krychle a všecka ob dvě čísla, a sedmé krychle i spolu čtverec a dále ob pět čísel.

Budiž od jednotky počínajíc několik čísel spojitě úměrných A, B, C, D, E, F; pravím, že od jednotky třetí, totiž B, je čtverec a všecka ob číslo, čtvrté pak C krychle a všecka ob dvě čísla, sedmé pak F krychle i spolu čtverec a všechna ob pět čísel.

Neboť ježto $1:A=A:B$, tedy jednotka je touž měrou čísla A, jakou A čísla B. Jednotka pak jest měrou čísla A dle jeho jednotek; též A tedy jest měrou čísla B dle jednotek v A. Pročež $A\times A=B$, tedy B je čtverec.



A ježto B, C, D jsou spojitě úměrná a B je čtverec, tedy je také D čtverec. Z téže příčiny ovšem též F je čtverec. Podobně zajisté dokážeme, že také všechna ob číslo jsou čtverce.

Pravím již, že také od jednotky čtvrté, totiž C, je krychle i všechna ob dvě čísla. Neboť ježto $1:A=B:C$, tedy jednotka je touž měrou čísla A, jakou B čísla C; jednotka pak jest měrou čísla A dle jednotek v A; pročež i B jest měrou čísla C dle jednotek v A. Tedy $A\times B=C$. Ježto tedy $A\times A=B$ a $A\times B=C$, tedy C je krychle. A ježto C, D, E, F jsou spojitě úměrná a C jest krychle, tedy též F jest krychle. Bylo pak dokázáno, že také čtverec; pročež od jednotky číslo sedmé je krychle i čtverec. Podobně ovšem dokážeme, že také všechna od jednotky ob pět čísel jsou krychle i čtverce; což právě bylo dokázati.

IX.

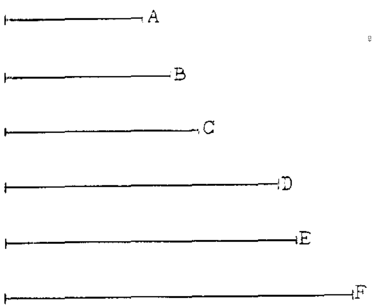
Když jest od jednotky počínajíc několik čísel za sebou spojitě úměrných a za jednotkou je čtverec, též

[4]) Všude včetně.

ostatní všechna budou čtverce; a když za jednotkou je krychle, též ostatní všechna budou krychle.

Budiž od jednotky počínajíc několik čísel A, B, C, D, E, F spojitě úměrných, a za jednotkou budiž A čtvercem; pravím, že též ostatní všechna budou čtverce.

Že ovšem třetí od jednotky, totiž B, je čtverec i všechna ob číslo, jest dokázáno (IX VIII.); pravím, že též ostatní všechna jsou čtverce. Neboť ježto A, B, C jsou spojitě úměrná a jest A čtverec, je také C čtverec. Dále, ježto B, C, D jsou spojitě úměrná a B je čtverec, také D je čtverec. Podobně ovšem dokážeme, že též ostatní všechna jsou čtverce.



Avšak buď již A krychlí; pravím, že též ostatní všechna jsou krychle.

Že ovšem od jednotky čtvrté, totiž C, je krychle i všechna ob dvě čísla, jest dokázáno (IX. VIII.); pravím, že též ostatní všechna jsou krychle. Neboť ježto $1:B=A:B$, tedy jednotka je touž měrou čísla A, jakou A čísla B. Jednotka však jest měrou čísla A dle jeho jednotek; tedy též A jest měrou čísla B dle svých jednotek; pročež $A\times A=B$. I jest A krychle; když pak se číslo krychlové samo sebou znásobí a dá jiné, vzniklé jest krychle; pročež i B jest krychle. A ježto čtyři čísla A, B, C, D jsou spojitě úměrná a jest A krychle, tedy též D jest krychle; z téže příčiny ovšem také E jest krychle a podobně ostatní všechna jsou krychle; což právě bylo dokázati.

X.

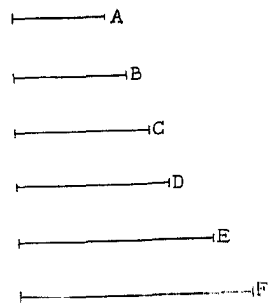
Když jest od jednotky počínajíc několik čísel spojitě úměrných a za jednotkou není čtverec, ani žádné jiné nebude čtverec kromě třetího od jednotky a všech ob číslo; a když za jednotkou není krychle, ani žádné jiné nebude krychle kromě čtvrtého od jednotky a všech ob dvě čísla.

Budiž od jednotky několik čísel spojitě úměrných A, B, C, D, E, F a za jednotkou nebudiž A čtverec; pravím, že ani žádné jiné nebude čtverec kromě třetího od jednotky a dále ob číslo.

Neboť možno-li, budiž C čtvercem; je však i B čtverec; tedy B se má k C jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému. I jest $B:C=A:B$, tedy A, B mají se k sobě jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému; pročež A, B jsou podobné roviny. I jest B čtverec, čtverec tedy též A, což právě proti podmínce. Tedy C není čtverec. Podobně ovšem dokážeme, že ani žádné jiné není čtverec kromě třetího od jednotky a dále ob číslo.

Avšak již nebuď A krychlí; pravím, že ani žádné jiné nebude krychle kromě čtvrtého od jednotky a dále ob dvě čísla.

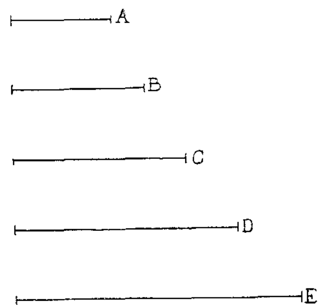
Neboť možno-li, budiž D krychlí. Jest pak i C krychle, neboť je čtvrté od jednotky; a jest $C:D=B:C$; tedy též B má se k C jako číslo krychlové k číslu krychlovému. I jest C krychle; tedy též B je krychle. A ježto $1:A=A:B$ a jednotka jest měrou čísla A dle jeho jednotek, tedy též A jest měrou čísla B dle svých jednotek. Pročež $A\times A=B$, což krychle. Když pak se znásobí číslo číslem a dá krychli, též samo bude krychle. Tedy též A jest krychle; což právě proti podmínce. Pročež D není krychle. Podobně ovšem dokážeme, že ani žádné jiné není krychle kromě čtvrtého od jednotky a dále ob dvě čísla; což právě bylo dokázati.



XI.

Když jest od jednotky několik čísel spojitě úměrných, menší jest většího měrou dle některého z čísel úměrných, jež se tam naskytují.

Budiž od jednotky A počínajíc několik čísel spojitě úměrných B, C, D, E; pravím, že z čísel B, C D, E nejmenší B jest měrou čísla E dle jednoho z čísel C, D.



Neboť poněvadž $A:B=D:E$, jednotka A je touž měrou čísla B, jakou D čísla E. Pročež střídavě jednotka A je touž měrou čísla D, jakou B čísla E. Avšak jednotka A jest měrou čísla D dle jeho jednotek; pro-i B jest měrou čísla E dle jednotek v D. Tedy menší B jest měrou většího E dle některého[5]) z čísel úměrných, která se tam naskytují.

Důsledek.

Také patrno, které místo za jednotkou má číslo měrové, že totéž místo má před měřeným i číslo, dle něhož jest měrou.

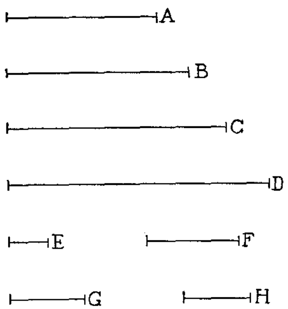
XII.

Když jest od jednotky několik čísel spojitě úměrných, kterákoli čísla kmenná jsou měrami posledního, táž budou měrami též čísla za jednotkou.

Budiž od jednotky kolikkolivěk čísel (spojitě) úměrných, totiž A, B, C, D; pravím, že táž čísla kmenná, která jsou měrami čísla D, budou měrami též čísla A.

[5]) Patrně jen dle D; že však B číslu D jest měrou dle C, snadno se dokáže.

Nuže buď nějaké číslo kmenné E měrou čísla D; pravím, že E jest měrou čísla A. Nuže nebuď; i jest E kmenné, každé pak číslo kmenné jest každému, jehož není měrou, kmenným; tedy E, A jsou navzájem kmenná. A ježto E jest měrou čísla D, budiž mu měrou dle F. Pročež $E \times F = D$. Dále, ježto A jest měrou čísla D dle jednotek v C (IX. XI. důsl.), tedy $A \times C = D$. Avšak zajisté též $E \times F = D$. Pročež $A \times C = E \times F$. Tedy $A : E = F : C$. A, E však jsou kmenná, kmenná pak také nejmenší, nejmenší pak jsou touž měrou těch, která mají týž poměr, přední předního jako zadní zadního; tedy E jest měrou čísla C. Budiž mu měrou dle G. Tedy $E \times G = C$. Avšak zajisté dle předešlého (IX. XI. důsl.) též $A \times B = C$. Pročež $A \times B = E \times G$; tedy $A : E = G : B$. A, E však jsou kmenná, kmenná pak také nejmenší, nejmenší pak jsou touž měrou těch, která mají týž poměr, přední předního jako zadní zadního; tedy E jest měrou čísla B. Budiž mu měrou dle H; pročež $E \times H = B$. Avšak zajisté též $A \times A = B$; tedy $E \times H = A \times A$. Proto $E : A = A : H$. A, E však jsou kmenná, kmenná pak také nejmenší, nejmenší pak jsou touž měrou těch, která mají týž poměr, přední předního jako zadní zadního; jest tedy E měrou čísla A, přední předního.



Avšak zajisté též není měrou; což právě nemožno. Pročež E, A nejsou navzájem kmenná; tedy složená. Složená pak mají nějaké číslo měrou. A ježto podmínkou, že E je kmenné; kmenné však nemá jiného čísla za míru leč sebe: tedy E jest měrou čísel A, E. A tak E jest měrou čísla A. Je však měrou též čísla D; tedy E jest měrou čísel A, D. Podobně ovšem dokážeme, že táž čísla (jiná) kmenná, jež jsou měrami čísla D, budou měrami též čísla A; což právě bylo dokázaii.

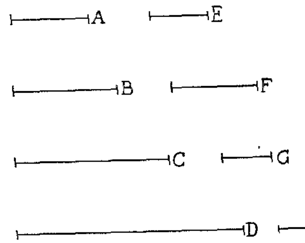
XIII.

Když jest od jednotky několik čísel spojitě úměrných a za jednotkou je kmenné, největšímu žádné nebude měrou kromě čísel úměrných, jež se tam vyskytují.

Budiž od jednotky několik čísel spojitě úměrných A, B, C, D a za jednotkou budiž A kmenné; pravím, že největšímu z nich D žádné jiné nebude měrou kromě A, B, C.

Neboť, možno-li, budiž mu měrou E, a nebuď E žádnému z čísel A, B, C rovno. Patrno zajisté, že E není kmenné; neboť jest-li E kmenné a jest měrou čísla D, bude měrou též číslu A (IX. XII.), kmennému, nejsouc mu rovno; což právě jest nemožno. Pročež E není kmenné; tedy složené. Každé pak složené číslo má za míru nějaké číslo kmenné; tedy E jest měřitelné nějakým číslem kmenným. Pravím již, že mu nebude měrou žádné jiné číslo kmenné kromě A. Neboť jest-li jiné měrou čísla E, E pak jest měrou čísla D, i ono tedy bude měrou čísla D; pročež i číslu A bude měrou (IX. XII.), kmennému,

nejsouc mu rovno; což právě jest nemožno. Tedy A jest měrou čísla E. A ježto E jest měrou čísla D, budiž mu měrou dle F. Pravím, že F žádnému z čísel A, B, C není rovno. Neboť rovno-li F některému z čísel A, B, C a jest měrou čísla D dle E, tedy též jedno z čísel A, B, C je měrou čísla D dle E. Avšak jedno z čísel A, B, C jest měrou čísla D dle některého z čísel A, B, C; tedy je též E některému z čísel A, B, C rovno; což proti podmínce. Pročež F není žádnému z čísel A, B, C rovno. Podobně ovšem dokážeme, že A jest měrou čísla F, dovozujíce opět, že F není kmenné. Neboť kmenné-li a měrou čísla D, měrou bude též číslu A, kmennému, nejsouc mu rovno; což právě nemožno. Pročež F není kmenné; tedy složené. Každé však složené číslo jest nějakým číslem kmenným měřitelné; jest tedy



číslu F nějaké číslo kmenné měrou. Pravím již, že jiné kmenné mu nebude měrou leč A. Neboť jest-li nějaké jiné kmenné číslu F měrou, F pak číslu D, tedy též ono (jiné) bude měrou číslu D; pročež bude měrou i číslu A, kmennému, nejsouc mu rovno; což právě nemožno. Tedy jest A měrou čísla F.

A ježto E jest měrou čísla D dle F, tedy $E \times F = D$. Avšak zajisté též $A \times C = D$; pročež $A \times C = E \times F$. Tedy $A : E = F : C$. A však jest měrou čísla E, tedy též F jest měrou čísla C. Budiž mu měrou dle G. Podobně ovšem dokážeme, že G není rovno žádnému z čísel A, B a že A jest mu měrou. A ježto F jest měrou čísla C dle G, tedy $F \times G = C$; avšak zajisté též $A \times B = C$; pročež $A \times B = F \times G$. Tedy $A : F = G : B$. A však jest měrou čísela F, pročež i G jest měrou čísla B. Budiž mu měrou dle H. Podobně ovšem dokážeme, že není $H = A$. A ježto G jest měrou čísla B dle H, tedy $G \times H = B$. Avšak zajisté též $A \times A = B$; pročež $H \times G = A \times A$. Tedy $H : A = A : G$. A však jest měrou čísla G; jest tedy též H měrou čísla A, kmenného, nejsouc mu rovno; což právě nesmyslné. Pročež největšímu, totiž D, jiné číslo nebude měrou kromě A, B, C; což právě bylo dokázati [6]).

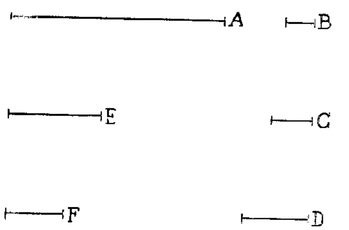
XIV.

Když jest nejmenší číslo měřitelné čísly kmennými, nebude měřitelné žádným jiným číslem kmenným kromě těch, která jsou mu měrami počátečními.

Nuže buď A nejmenším číslem měřitelným kmennými čísly B, C, D; pravím, že A nebude měřitelné žádným jiným číslem kmenným kromě B, C, D.

Neboť, možno-li buď mu měrou kmenné E, a nebudiž E žádnému z čísel B, C, D rovno. A ježto E jest měrou čísla A, budiž

[6]) Že A, B, C jsou měrami čísla D, dokázáno v IX. XI.

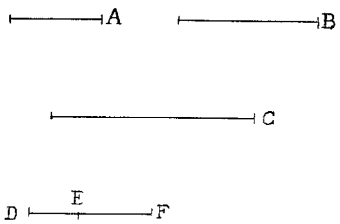


mu měrou dle F; pročež $E \times F = A$. I jest A měřitelné kmennými čísly B, C, D. Když pak se dvě čísla spolu znásobí a činí jiné a vzniklému součinu jest měrou nějaké číslo kmenné, bude měrou i jednomu počátečnímu (VII. XXX.); tedy B, C, D jednomu z čísel E, F budou měrami. Číslu E ovšem nebudou měrami, neboť E jest kmenné a není žádnému z čísel B, C, D rovno. Tedy číslu F, menšímu než A, budou měrami; což právě nemožno. Neboť jest podmínkou, že A, měřitelné čísly B, C, D, jest nejmenší. Tedy číslu A nebude měrou číslo kmenné kromě čísel B, C, D; což právě bylo dokázati.

XV.

Když tři čísla spojitě úměrná jsou nejmenší z těch' která mají týž poměr, jaký ona, součet kterýchkoli dvou třetímu jest kmenný.

Třemi čísly spojitě úměrnými nejmenšími z těch, která mají týž poměr, jaký ona, buďtež A, B, C; pravím, že součet kterýchkoli dvou z čísel A, B, C třetímu jest kmenný, $A + B$ číslu C, $B + C$ číslu A a též $A + C$ číslu B.



Nuže vezměme za nejmenší čísla z těch, která mají týž poměr, jaký A, B, C, dvě DE, EF[7]). Patrno zajisté, že $DE \times DE = A$, $DE \times EF = B$ a též $EF \times EF = C$ (dle VIII. II.). A ježto DE, EF jsou nejmenší, jsou navzájem kmenná. Když pak jsou dvě čísla navzájem kmenná, též součet jednomu i druhému je kmenný (VII. XXVIII.); tedy též DF jednomu i druhému z čísel DE, EF je kmenné. Avšak zajisté též DE číslu EF je kmenné; tedy DF, DE jsou číslu EF kmenná. Když pak dvě čísla jsou nějakému číslu kmenná, též součin z nich je zbývajícímu kmenný (VII. XXIV.); pročež $FD \times DE$ číslu EF je kmenne; proto též $FD \times DE$ číslu EF^2 je kmenné. Avšak $FD \times DE = DE^2 + DE \times EF$; tedy $DE^2 + DE \times EF$ číslu EF^2 je kmenné. I jest $DE^2 = A$, $DE \times EF = B$ a $EF^2 = C$. Tedy součet $A + B$ jest číslu C kmenný. Podobně ovšem dokážeme, že také součet $B + C$ číslu A je kmenný.

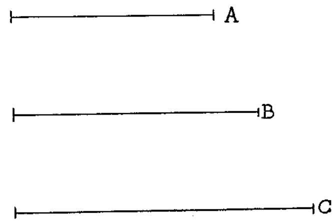
Pravím již, že též součet $A + C$ číslu B je kmenný. Neboť ježto DF číslu DE i číslu EF je kmenné, též DF^2 je součinu $DE \times EF$ kmenné (VII. XXIV. XXV.). Avšak $DF^2 = DE^2 + EF^2 + 2\,DE \times EF$. Tedy též $DE^2 + EF^2 + 2\,DE \times EF$ bude součinu $DE \times EF$ kmenné. Odečteš-li, $DE^2 + EF^2 + DE \times EF$ jest součinu $DE \times EF$ kmenné;

[7]) DE, EF značí jen poměr $A : B$ n. $B : C$, nedbajíc úměrnosti spojité.

odečteš-li opět, $DE^2 + EF^2$ jest součinu $DE \times EF$ kmenné[8]). I jest $DE^2 = A$, $DE \times EF = B$ a $EF^2 = C$. Tedy součet $A + C$ číslu B jest kmenný; což právě bylo dokázati.

XVI.

Když jsou dvě čísla navzájem kmenná, jako se má první k druhému, tak nebude se míti druhé k žádnému jinému.



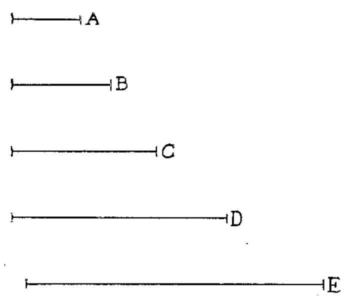
Nuže buďte dvě čísla A, B navzájem kmenná; pravím, že tak, jako A k B, nemá se B k žádnému jinému.

Nuže, možno-li, měj se $A : B = B : C$. Avšak A, B jsou kmenná, kmenná pak také nejmenší, nejmenší pak čísla jsou týmiž měrami těch, která mají týž poměr, přední předního jako zadní zadního; tedy A jest měrou číslu B (na třetím místě), přední přednímu. Jest pak měrou i sobě; pročež A jest měrou číslům A, B, ač jsou navzájem kmenná; což právě nesmyslné. Tedy nebude se míti $A : B = B : C$; což právě bylo dokázati.

XVII.

Když jest kolikkolivěk čísel spojitě úměrných a krajní z nich jsou navzájem kmenná, jako se má první k druhému, tak nebude se míti poslední k žádnému jinému.

Budiž kolikkolivěk čísel spojitě úměrných, A, B, C, D, a krajní z nich A, D buďte navzájem kmenná; pravím, že tak, jako A k B, nemá se D k žádnému jinému.



Nuže, možno-li, měj se $A : B = D : E$; střídavě tedy $A : D = B : E$. Avšak A, D jsou kmenná, kmenná pak také nejmenší, nejmenší pak čísla jsou týmiž měrami těch, která mají týž poměr, přední předního jako zadní zadního. Tedy A jest měrou čísla B. I má se $A : B = B : C$; pročež i B jest měrou čísla C; a tak též A jest měrou čísla C. A ježto $B : C = C : D$, B pak jest měrou čísla C, jest tedy též C měrou čísla D. Avšak A bylo měrou čísla C, tedy A jest také měrou čísla D. Jest pak měrou i sobě samému. Pročež A jest měrou čísel A, D, ač jsou navzájem kmenná; což právě není možno. Tedy nebude se míti D k žádnému jinému číslu tak jako A k B; což právě bylo dokázati.

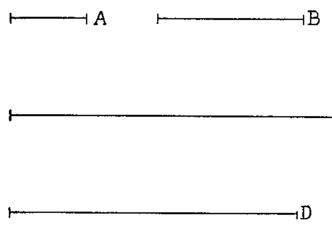
[8]) Budiž $DE^2 + EF^2 = M$, $DE \times EF = N$ a $M + N = O$; součet $O + N$ jest číslu N kmenný; tedy dle VII. XXVIII. též O neboli $M + N$ jest číslu N kmenné. A jestli $M + N$ číslu N kmenné, též M je kmenné číslu N.

XVIII.

Dána-li dvě čísla, vyšetři, možno-li k nim najíti třetí úměrné.

Danými dvěma čísly buďtež A, B, a budiž úkolem vyšetřiti, možno-li k nim najíti třetí úměrné.

A, B tedy buď jsou navzájem kmenná buď nikoliv. A jsou-li navzájem kmenná, dokázáno jest, že není možno k nim najíti třetího úměrného (IX. XVI.).



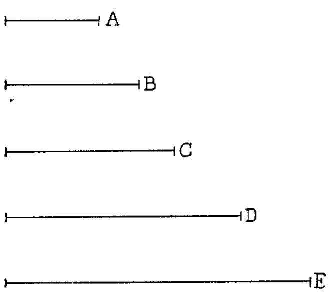
Nuže nebuďte již A, B navzájem kmenná, a budiž $B \times B = C$. Tu A buď jest měrou čísla C buď není. Budiž mu nejprve měrou dle D; pročež $A \times D = C$. Avšak zajisté i $B^2 = C$; tedy $A \times D = B^2$. Proto $A:B = B:D$; tedy k číslům A, B nalezeno třetí úměrné D.

Nuže nebuď již A měrou čísla C; pravím, že není možno číslům A, B najíti třetího úměrného. Neboť možno-li, bndiž nalezeno D. Tedy $A \times D = B^2$. Avšak $B^2 = C$; tedy $A \times D = C$; a tak znásobivše D číslem A dostali jsme C; tedy A jest měrou čísla C dle D. Avšak podmínkou zajisté, že též není měrou; což právě nesmyslné. Pročež není možno číslům A, B najíti třetího úměrného, když A není měrou čísla C; což právě bylo dokázati.

XIX.

Dána-li tři čísla, vyšetři, kdy jest možno k nim najíti čtvrté úměrné.

Danými třemi čísly buďtež A, B, C, a budiž úkolem vyšetřiti, kdy jest možno k nim najíti čtvrté úměrné.



Buď zajisté nejsou spojitě úměrná a krajní z nich jsou navzájem kmenná, buď jsou spojitě úměrná a krajní z nich nejsou navzájem kmenná, buď ani nejsou spojitě úměrná ani nejsou krajní z nich navzájem kmenná, buď jsou i spojitě úměrná i krajní z nich navzájem kmenná. Jsou-li tedy A, B, C spojitě úměrná a krajní z nich A, C navzájem kmenná, dokázáno jest, že není možno k nim najíti čtvrtého čísla úměrného (IX. XVII.).

Nebuďte již A, B, C spojitě úměrná, krajní však buďtež opět navzájem kmenná; pravím, že i takto jest nemožno k nim najíti čtvrté úměrné [9]. Nuže, možno-li, nalezeno buď D, tak aby se mělo $A:B =$

[9]) Nesprávné; viz pozn. [11]).

$C:D$, a učiňme, aby bylo $B:C = D:E$ [10]). A ježto $A:B = C:D$ a $B:C = D:E$, stejnořadně tedy $A:C = C:E$. A, C však jsou kmenná, kmennná pak i nejmenší, nejmenší pak jsou týmiž měrami těch, která mají týž poměr, přední předního jako zadní zadního; tedy A jest měrou číslu C (na třetím místě), přední přednímu, je však měrou i sobě samému. Pročež A jest měrou čísel A, C, ač jsou navzájem kmenná; což právě jest nemožno. Tedy k číslům A, B, C není možno najíti čtvrtého úměrného [11]).

Avšak buďte již A, B, C opět spojitě úměrná, A, C však nebuďte navzájem kmenná; pravím, že jest možno k nim najíti čtvrté úměrné. Nuže budiž $B \times C = D$. Tedy A buď jest měrou čísla D buď není. Budiž mu nejprv měrou dle E; pročež $A \times E = D$. Avšak zajisté také $B \times C = D$; tedy $A \times E = B \times C$. Pročež $A:B = C:E$; tedy k číslům A, B, C nalezeno jest E za čtvrté úměrné. — Avšak již nebuď A měrou čísla D; pravím, že jest nemožno k číslům A, B, C najíti čtvrté úměrné. Nuže, možno-li, nalezeno buď E; tedy $A \times E = B \times C$; avšak $B \times C = D$, pročež i $A \times E$ je D. Tedy $A \times E = D$; pročež A jest měrou čísla D dle E; a tak jest A měrou čísla D. Avšak též není měrou; což právě nesmyslné. Tedy není možno k číslům A, B, C najíti čtvrtého úměrného, když A není měrou čísla D.

Avšak již ani nebuďtež A, B, C spojitě úměrná ani krajní navzájem kmenná. I buď $B \times C = D$. Podobně se ovšem dokáže, jest-li A měrou čísla D, že možno k nim najíti úměrné; pakli není měrou, že nemožno; což právě bylo dokázati [12]).

XX.

Kmenných čísel jest více než jakékoli dané množství kmenných čísel.

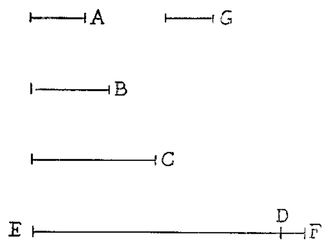
Danými čísly kmennými buďtež A, B, C; pravím, že jest více kmenných čísel než A, B, C.

Nuže vezměme v úvahu nejmenší číslo, jehož měrami jsou A, B, C, a budiž to DE a přičtěme k DE jednotku DF. EF tedy buď je kmenné buď není. Budiž dříve kmenné; jsou tedy nalezena čísla kmenná A, B, C, EF, počtem více než A, B, C.

[10]) Jak to možno?

[11]) Že to chybné, ukáže již jediný příklad. Mějme čísla 3, 6, 8, která nejsou spojitě úměrná, ale krajní z nich 3 a 8 jsou navzájem kmenná. Čtvrté číslo uměrné jest 16, t. j. $\frac{6 \times 8}{3}$. Dle způsobu Eukleidova bylo by správné asi toto: Nebuďte již A, B, C spojitě úměrná, krajní však opět buďte navzájem kmenná. Nuže buď $B \times C = D$. A tu A buď jest měrou čísla D buď není. Budiž nejprve měrou dle E. Pročež $A \times E = D$; také však $B \times C = D$, tedy $A \times E = B \times C$; pročež $A:B = C:E$. Tedy k číslům A, B, C nalezeno jest E za čtvrté úměrné. — Avšak již nebuď A měrou čísla D; pravím, že jest nemožno k číslům A, B, C najíti čtvrté úměrné. — — Dále jako v druhé části odstavce následujícího.

[12]) Když jsou tedy A, B, C spojitě úměrná a spolu krajní navzájem kmenná, nemožno najíti čtvrté úměrné; v ostatních případech možno, jest-li A měrou čísla D; pakli není, nemožno.

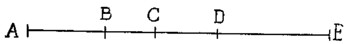


Avšak již nebuď EF kmenné; tedy jest mu nějaké číslo kmenné měrou. Budiž mu měrou kmenné G; pravím, že G není rovno žádnému z čísel A, B, C. Nuže, možno-li, budiž rovno. Avšak A, B, C jsou měrami čísla DE; tedy též G bude měrou čísla DE. Jest pak měrou i čísla EF; také zbývající jednotky DF měrou bude G, ač jest číslo; což právě nesmyslno. Tedy G není rovno žádnému z čísel A, B, C. A bylo vzato za kmenné. Tedy jest nalezeno více kmenných než dané množství A, B, C, totiž A, B, C, G; což právě bylo dokázati.

XXI.

K d y ž s e n ě k o l i k č í s e l s u d ý c h s e č t e, c e l e k j e s u d ý.

Nuže budiž sečteno několik čísel sudých, AB, BC, CD, DE; pravím, že celek AE jest sudý.

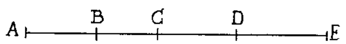


Neboť ježto každé z čísel AB, BC, CD, DE jest sudé, má za díl polovinu; pročež i celek AE má za díl polovinu. Sudým pak jest číslo, které se rozpoluje; tedy AE jest sudé; což právě bylo dokázati.

XXII.

K d y ž s e n ě k o l i k l i c h ý c h č í s e l s e č t e a p o č e t j e j i c h j e s t s u d ý, c e l e k b u d e s u d ý.

Nuže budiž sečteno několik čísel lichých počtu sudého, AB, BC, CD, DE; pravím, že celek AE jest sudý.

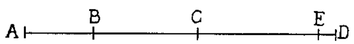


Neboť ježto každé z čísel AB, BC, CD, DE jest liché, odečteme li od každého jednotku, každý ze zbytků bude sudý; pročež i součet jejich bude sudý. Jest pak i počet jednotek sudý; tedy též celek AE jest jest sudý; což právě bylo dokázati.

XXIII.

K d y ž s e n ě k o l i k l i c h ý c h č í s e l s e č t e a p o č e t j e j i c h j e s t l i c h ý, t é ž c e l e k b u d e l i c h ý.

Nuže buď sečteno několik čísel lichých a počet jejich buď lichý, AB, BC, CD; pravím, že též celek AD jest lichý.



Budiž od CD odečtena jednotka DE; zbytek CE je tedy sudý. Jest pak i CA sudé (IX. XXII.); pročež i celek AE jest sudý. A DE jest jednotka; tedy AD jest liché; což právě bylo dokázati.

XXIV.

K d y ž s e o d e č t e o d č í s l a s u d é h o s u d é, z b y t e k b u d e s u d ý.

Nuže buď od čísla sudého AB odečteno sudé BC; pravím, že zbytek CA jest sudý.

Neboť ježto AB jest sudé, má za díl polovinu. Z téže příčiny ovšem i BC má za díl polovinu; pročež i zbytek AC jest sudý; což právě bylo dokázati.

XXV.

K d y ž s e o d e č t e o d č í s l a s u d é h o l i c h é, z b y t e k b u d e l i c h ý.

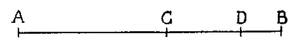
Nuže od čísla sudého AB buď odečteno liché BC; pravím, že zbytek CA jest lichý.

Nuže buď od BC odečtena jednotka CD; DB tedy jest sudé. Jest pak též AB sudé; pročež i zbytek AD jest sudý. A CD jest jednotka; CA tedy jest liché; což právě bylo dokázati.

XXVI.

K d y ž s e o d e č t e o d č í s l a l i c h é h o l i c h é, z b y t e k b u d e s u d ý.

Nuže buď od čísla lichého AB odečteno liché BC; pravím, že zbytek CA jest sudý.



Nuže, ježto AB jest liché, buď odečtena jednotka BD; zbytek tedy AD jest sudý. Z téže příčiny ovšem i CD jest sudé; pročež i zbytek CA jest sudý; což právě bylo dokázati.

XXVII.

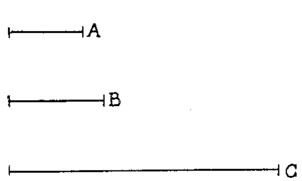
K d y ž s e o d e č t e o d č í s l a l i c h é h o s u d é, z b y t e k b u d e l i c h ý.

Nuže buď od čísla lichého AB odečteno sudé BC; pravím, že zbytek CA jest lichý.

Nuže buď odečtena jednotka AD; Tedy DB jest sudé. Jest pak i BC sudé; tedy zbytek CD jest sudý. Pročež AC jest liché; což právě bylo dokázati.

XXVIII.

K d y ž s e l i c h ý m č í s l e m z n á s o b í s u d é a v z n i k n e j i n é, v z n i k l é b u d e s u d é.

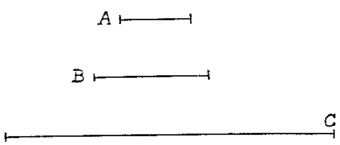


Nuže buď lichým číslem A znásobeno sudé B a součinem buď C; pravím, že C jest sudé.

Neboť ježto $A \times B = C$, tedy C se skládá z tolika částí rovných číslu B, kolik jest v A jednotek. I jest B sudé; pročež C se skládá ze sudých. Když pak se sečte několik čísel sudých, celek jest sudý; tedy C est s udé; což právě bylo dokázati.

XXIX.

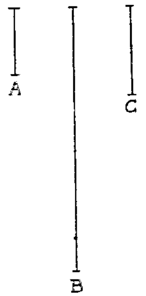
Když se lichým číslem znásobí číslo liché a vznikne jiné, vzniklé bude liché.



Nuže znásobme lichým číslem A liché B a součinem buď C; pravím, že C jest liché.

Neboť ježto $A \times B = C$, tedy C se skládá z tolika částí rovných číslu B, kolik jest v A jednotek. I jest A i B lichá; tedy C se skládá z čísel lichých, jejichžto počet jest lichý. Pročež C jest liché (IX. XXIII.); což právě bylo dokázati.

XXX.

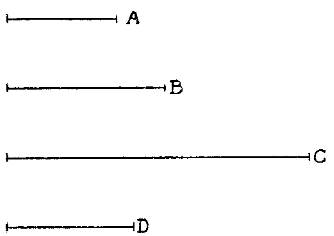


Když jest číslo liché měrou čísla sudého, též polovině jeho bude měrou.

Nuže buď liché číslo A měrou sudého B; pravím, že též polovině jeho bude měrou.

Nuže, ježto A jest měrou čísla B, buď mu měrou dle C; pravím, že C není liché. Nuže, možno-li, budiž. A ježto A jest měrou čísla B dle C, tedy $A \times C = B$. Tedy B se skládá z čísel lichých a počet jejich jest lichý; pročež B jest liché; což nesmyslné, neboť jest podmínkou, že jest sudé. Tedy C není liché; C jest sudé. Pročež A jest měrou čísla B dle suda. Z té příčiny zajisté i polovině jeho bude měrou; což právě bylo dokázati.

XXXI.



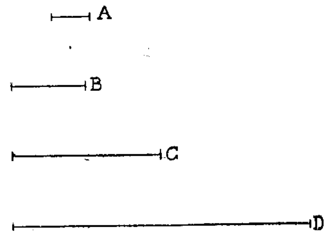
Když jest číslo liché nějakému číslu kmenné, také dvojnásobku jeho bude kmenné.

Nuže buď liché číslo A nějakému číslu B kmenným a dvojnásobkem čísla B budiž C; pravím, že A číslu C je kmenné. Neboť nejsou li [A, C] kmenná, bude jim nějaké číslo měrou. Budiž měrou a budiž to D. I jest A liché, liché tedy jest i D. A ježto D jsouc liché jest měrou čísla C a C jest sudé, bude tedy měrou též polovině čísla C. Polovina však čísla C jest B; tedy D jest měrou čísla B. Je však měrou i číslu A. Tedy D jest měrou čísel A, B, navzájem kmenných; což právě není možno. Pročež nemožno, aby A nebylo číslu C kmenné; tedy A, C jsou navzájem kmenná; což právě bylo dokázati.

XXXII.

Z čísel od dvojky počínajíc dvojnásobených[13]) každé jest jen sudosudé.

Nuže budiž od dvojky A počínajíc zdvojnásobeno několik čísel B, C, D; pravím, že B, C, D jsou jen sudosudá (VII. vým. 8.).



Že ovšem každé z čísel B, C, D jest sudosudé, patrno; neboť od dvojky počínajíc je zdvojnásobeno. Pravím, že také jen sudosudé. Nuže vezměme v úvahu jednotku. Poněvadž jest ovšem od jednotky počínajíc několik čísel spojitě úměrných a číslo A za jednotkou jest kmenné, největšímu z čísel A, B, C, D, totiž D, žádné jiné nebude měrou kromě A, B, C (IX. XIII.). I jest každé z čísel A, B, C sudé; tedy D jest jen sudosudé. Podobně ovšem dokážeme, že B i C jsou jen sudosudá; což právě bylo dokázati.

XXXIII.

Když má číslo polovinu lichou, jest jen sudoliché.

Nuže měj číslo A[14]) polovinu lichou; pravím, že jest A jen sudoliché[15]).

Že zajisté jest sudoliché, patrno; neboť polovina jeho jsouc lichá jest mu měrou dle suda. Pravím ovšem, že také jen sudoliché. Neboť bude-li A též sudosudé, bude mu měrou číslo sudé dle sudého; pročež i polovině jeho, ač jest lichá, bude měrou číslo sudé; což právě jest nesmyslné. Tedy A jest jen sudoliché; což právě bylo dokázati.

XXXIV.

Když číslo ani není z dvojnásobených od dvojky počínajíc ani nemá poloviny liché, jest sudosudé a sudoliché.

Nuže A[14]) nebuď ani z dvojnásobených od dvojky počínajíc ani neměj poloviny liché; pravím, že A jest i sudosudé i sudoliché[16]).

Že zajisté jest A sudosudé, patrno; neboť polovina jeho není lichá. Pravím ovšem, že jest i sudoliché. Neboť když půlíme A i polovinu jeho i stále tak činíme, dojdeme nějakého čísla lichého, jež bude měrou čísla A dle čísla sudého. Neboť pakli ne, dojdeme dvojky a

---

[13]) Totiž $2A = B$, $2B = 2^2 A = C$, $2C = 2^3 A = D$ a t. d.

[14]) Vyobr. k tomu — pouhou přímku — vynechal jsem.

[15]) Na př. 6, 14, 30 a p., t. j. 2×3, 2×7, $2 \times 15 = 6 \times 5 = 10 \times 3$.

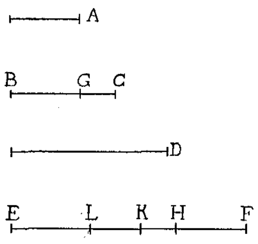
[16]) Na př. 12, 20, 28 a p., t. j. $2 \times 6 = 4 \times 3$, $2 \times 10 = 4 \times 5$, $2 \times 14 = 4 \times 7$.

bude A z čísel od dvojky počínajíc dvojnásobených; což právě proti podmínce. Pročež A jest sudoliché. Dokázáno pak bylo, že též sudosudé. Tedy A jest i sudosudé i sudoliché; což právě bylo dokázati.

XXXV.

Když jest kolikkolivěk čísel spojitě úměrných a od druhého i posledního se odečtou čísla rovná prvnímu; jako zbytek druhého k číslu prvnímu, tak se bude míti zbytek posledního k součtu všech předcházejících (prvotních).

Několika čísly spojitě úměrnými buďtež A, BC, D, EF, od nejmenšího A počínajíce, a odečtěmež od BC i EF číslu rovná BG, FH; pravím, že $GC:A = EH:(A + BC + D)$.



Nuže budiž $BC = FK$ a $FL = D$. A ježto $FK = BC$, z nichž $FH = BG$, tedy zbytek $HK = GC$. A ježto $EF:D = D:BC = BC:A$ a $D = FL$, $BC = FK$, $A = FH$, tedy $EF:FL = FL:FK = FK:FH$. Odčetně (V. vým. 15.) $EL:LF = LK:FK = KH:FH$. Má se tedy též jeden z předních k jednomu ze zadních jako součet předních k součtu zadních (VII. XII.); tedy $KH:FH = (EL + LK + KH):(LF + FK + FH)$. Avšak $KH = CG$, $FH = A$ a též $LF + FK + HF = D + BC + A$; pročež $CG:A = EH:D + BC + A$). Tedy zbytek druhého čísla má se k číslu prvnímu jako zbytek posledního k součtu všech předcházejících; což právě bylo dokázati.

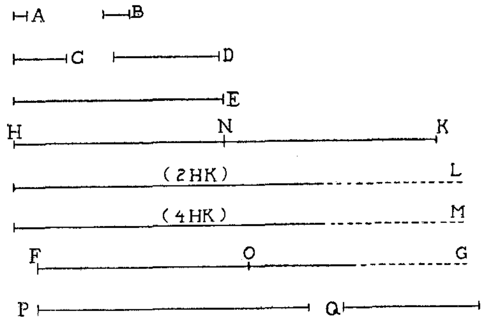
XXXVI.

Když jest dáno po řadě od jednotky několik čísel v poměru jedné ke dvěma, až součet všech stane se číslem kmeným, a když se ten součet znásobí číslem posledním a vznikne jiné, vzniklé bude číslo dokonalé.

Nuže dáno buď několik čísel od jednotky počínajíc v poměru jedné ke dvěma, až součet všech (i s jednotkou) se stane číslem kmenným, totiž A, B, C, D, a součtu rovno buď E a budiž $E \times D = FG$; pravím, že FG jest číslo dokonalé.

Nuže kolik jest čísel A, B, C, D, tolik vezměmež od E počínajíce v poměru jedné ke dvěma, E, HK, L, M; stejnořadně tedy $A:D = E:M$; pročež $E \times D = A \times M$. I jest $E \times D = FG$. Tedy $A \times M = FG$; pročež M jest měrou čísla FG dle jednotek v A. I jest A dvojka; tedy $FG = 2M$. Jsou pak též M, L, HK, E po řadě dvojnásobná (sestupně); tedy E, HK, L, M, FG mají se k sobě po řadě jako jedna ke dvěma. Odečtěme již od druhého HK a od posledního FG čísla prvnímu, E, rovná HN, FO; tedy zbytek druhého čísla má se k prvnímu jako zbytek posledního k součtu všech předcházejících. Pročež $NK:E = OG:(M + L + KH + E)$. I jest $NK = E$; tedy též $OG = M + L + HK + E$. Jest pak i $FO = E$ a $E = A + B + C + D + 1$.

Tedy celé $FG = E + HK + L + M + A + B + C + D + 1$ a má je za své míry. Pravím, že číslu FG též nebude žádné jiné měrou kromě A, B, C, D, E, HK, L, M a jednotky. Nuže, možno-li, budiž číslu FG nějaké měrou, totiž P, a P nebuď žádnému z čísel A, B, C, D, E, HK, L, M rovno. A jakou měrou čísla FG jest P, tolik jednotek měj Q; tedy $Q \times P = FG$. Avšak zajisté též $E \times D = FG$; tedy $E:Q = P:D$. A ježto A, B, C, D jsou od jednotky spojitě úměrná, tedy číslu D nebude žádné jiné číslo měrou kromě A, B, C. A jest podmínkou, že P není žádnému z čísel A, B, C rovno; pročež P nebude měrou čísla D. Avšak $P:D = E:Q$; ani tedy E není měrou čísla Q. I jest E kmenné; každé však číslo kmenné každému, jemuž není měrou, jest kmenné (VII. XXIX.). Tedy E, Q jsou navzájem kmenná,



kmenná však také nejmenší, nejmenší pak jsou týmiž měrami těch, která mají týž poměr, přední předního jako zadní zadního. I má se $E:Q = P:D$; tedy E je touž měrou čísla P jak Q čísla D. Číslu D však žádné jiné číslo není měrou kromě A, B, C; tedy Q jest jednomu z čísel A, B, C rovno. Budiž rovno číslu B. A kolik jest čísel B, C, D, tolik vezměme čísel od E počínajíce, totiž E, HK, L. I mají E, HK, L týž poměr jako B, C, D; stejnořadně tedy $B:D = E:L$; pročež $B \times L = D \times E$; avšak $D \times E = Q \times P$; tedy též $Q \times P = B \times L$. Tedy $Q:B = L:P$. I jest $Q = B$; pročež i $L = P$, což právě nemožno. Neboť podmínkou jest, že P žádnému z daných není rovno. Tedy nebude číslu FG žádné číslo měrou kromě A, B, C, D, E, HK, L, M a jednotky. Také bylo dokázáno, že $FG = A + B + C + D + E + HK + L + M + 1$. Dokonalé pak jest číslo, které se rovná součtu svých dělitelů (měr); tedy FG jest číslo dokonalé; což právě bylo dokázati.

Doplňky.

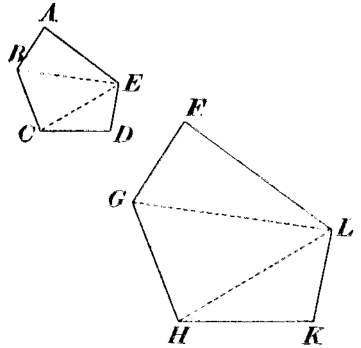
V. XIX.

Důsledek.

Poměry však trvají i při stejných násobcích i při úměrách, ježto právě, když jest první číslo stejným násobkem druhého jako třetí čtvrtého, bude se míti též první k druhému jako třetí ke čtvrtému. Nikoli však též naopak: když se má první k druhému jako třetí ke čtvrtému, nebude vesměs také první stejným násobkem druhého a třetí čtvrtého, jako na př. při poměrech půldruhadílných nebo půltřetídílných nebo podobných; což právě bylo dokázati.

VI. XX.

Jinak.

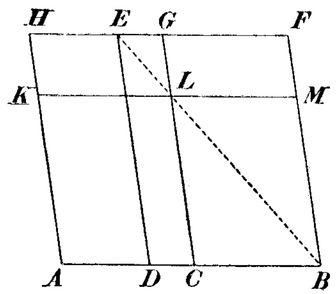


Dokážeme ovšem i jinak případněji, že trojúhelníky jsou stejnolehlé.

Nuže mějme opět mnohoúhelníky $ABCDE$, $FGHKL$ a veďme spojnice BE, EC, GL, LH; pravím, že $\triangle ABE : FGL = EBC : LGH = CDE : HKL$. Neboť ježto $\triangle ABE \sim FGL$, tedy $\triangle ABE : FGL = BE^2 : GL^2$. Z téže příčiny ovšem i $\triangle BEC : GLH = BE^2 : GL^2$. Pročež $\triangle ABE : FGL = BEC : GLH$. Dále, ježto $\triangle EBC \sim LGH$, tedy $EBB : LGH = CE^2 : HL^2$. Z téže příčiny ovšem i $\triangle ECD : LHK = CE^2 : HL^2$. Tedy $\triangle BEC : LGH = CED : LHK$. Bylo však dokázáno, že též $EBC : LGH = ABE : FGL$. Pročež také $ABE : FGL = BEC : GLH = ECD : LHK$; což právě bylo dokázati.

VI. XXVII.*)

Jinak.



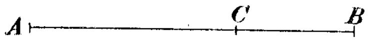
Nuže buď opět AB rozpůlena v C a přistaveno AL, takže se mu nedostává doplňku LB, a buď opět k AB přistaven rovnoběžník AE, takže se mu nedostává doplňku EB, podobného a podobně položeného, jako jest útvar nad polovinou, LB; pravím, že $AL > AE$.

Neboť ježto $EB \sim LB$, objímají touž úhlopříčku. Budiž úhlopříčkou jejich EB a obrazec buď vylinkován. A ježto $LF = LH$, protože $FG = GH$, tedy $LF > KE$. Avšak $LF = DL$ (I. XLIII.), pročež také $DL > EK$. Společným přičtěme KD; tedy celé $AL > AE$; což právě bylo dokázati.

VI. XXX.

Jinak.

Danou přímkou buď AB. Má se tedy AB rozděliti poměrem krajním a středním.



Nuže buď AB rozdělena v C tak, aby bylo $AB \times BC = CA^2$ (II. XI.). Ježto tedy $AB \times BC = CA^2$, tedy $BA : AC = AC : CB$. Tedy AB jest rozdělena v C poměrem krajním a středním; což právě bylo vykonati.

*) Doplněk tento nepochybně cizí.

VI. XXXI.

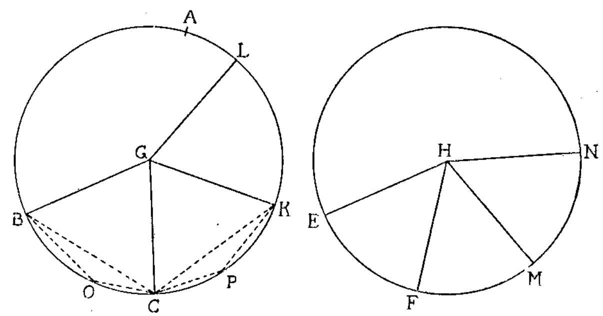
Jinak.

Ježto útvary podobné mají se k sobě jako dvojmoci stejnolehlých stran (VI. XX.), tedy útvar z BC (viz přísl. vyobr. kn. VI.) má se k útvaru z BA jako dvojmoc z CB ke dvojmoci z BA. Také však čtverec z BC má se ke čtverci z BA jako dvojmoc z BC ke dvojmoci z BA. Protož i útvar z CB má se k útvaru z BA jako čtverec z CB ke čtverci z BA. Z téže příčiny ovšem též útvar z BC má se k útvaru z CA jako čtverec z BC ke čtverci z CA. A tak i útvar z BC má se k součtu útvarů z BA, AC jako čtverec z BC k součtu čtverců z BA, AC. Avšak $BC^2 = BA^2 + AC^2$; pročež i útvar z BC roven je součtu útvarů z BA, AC, podobných a podobně sestrojených [což právě bylo dokázati].

VI. XXXIII.*)

Pravím, že též oblouk BC : obl. EF = výseč GBC : výs. HEF.

Nuže veďme spojnice BC, CK (tečkov.) a na obl. BC, CK zvolme body O, P a veďme též spojnice BO, OC, CP, PK. A ježto $BG = GK$ a $GC = GC$ a svírají stejné úhly a základna $BC = KC$, tedy též $\triangle GBC = GCK$. A ježto obl. $BC = CK$, též obl. (BAC), jenž celý kruh doplňuje, roven jest oblouku (CAK) celý kruh doplňujícímu; pročež i $\sphericalangle BOC = CPK$ (III. XXVII.). Tedy úseč $BOC \sim$ úseči CPK. Také jsou na stejných tětivách BC, CK. Úseče pak podobné na stejných tětivách jsou si rovny; pročež úseč $BOC = CPK$. Je však i $\triangle GBC = GCK$; tedy též celá výseč $BGC = GCK$. Z téže příčiny ovšem i výseč $GKL = GBC = GCK$. Tedy tři výseče GBC, GCK, GLK jsou si rovny. Z téže příčiny ovšem i výseče HEF, HFM, HMN jsou si rovny. Kolikrát tedy obl. $LB > BC$, tolikrát i výs. $GBL > GBC$. Z téže příčiny ovšem též kolikrát obl. $NE > EF$, tolikrát i výseč $HEN > HEF$. Jestliže tedy obl. $BK = EN$, také výs. $BGL = EHN$, a jestliže obl. $BL > EN$, také výs. $BGL > EHN$, a jestliže menší, menší. Když jsou tedy čtyři veličiny, a to dva obl. BC, EF a dvě výs. GBC, EHF, vzali jsme za stejné násobky oblouku BC a výseče GBC oblouk BL a výseč GBL a za stejné násobky oblouku EF a výseče HEF oblouk EN a výseč HEN; a dokázáno, když obl. $BL > EN$, že též výseč $BGL > EHN$, pakli stejný, stejná, pakli menší, menší. Pročež obl. $BC : EF$ = výs. $GBC : HEF$.



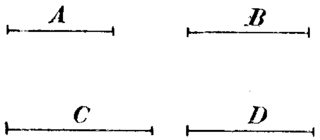
*) Doplněk Theonův.

Důsledek. *)

I jest patrno také, že jako se má výseč k výseči, tak se má též úhel k úhlu.

Obecně VII. XX.

Když jsou tři čísla úměrou, součin krajních rovná se čtverci středního; a když součin krajních rovná se čtverci středního, ta tři čísla jsou úměrou.

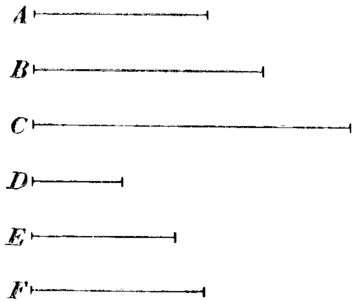


Buďtež úměrou tři čísla A, B, C, takže $A:B=B:C$; pravím, že $A\times C=B^2$. Nuže budiž $B=D$; tedy $A:B=D:C$. Pročež $A\times C=B\times D$ (VII. XIX.). Avšak $B\times D=B^2$, neboť $B=D$. Tedy $A\times C=B^2$.

Avšak buď již $A\times C=B^2$; Pravím, že $A:B=B:C$. Neboť ježto $A\times C=B^2$ a $B^2=B\times D$, tedy $A:B=D:C$. Avšak $B=D$, pročež $A:B=B:C$; což právě bylo dokázati.

Obecně VII. XXII.

Když jsou tři čísla a jiná jim počtem rovná, po dvou brána jsouce a v témž poměru, úměra pak jejich jest nestejnořadná, také stejnořadně budou v témž poměru.



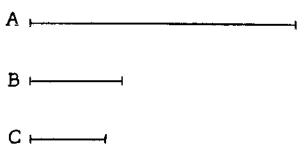
Třemi čísly buďtež A, B, C a jinými jim počtem rovnými D, E, F, po dvou brána jsouce v témž poměru, a úměra jejich buď nestejnořadná, t. $A:B=E:F$ a $B:C=D:E$; pravím, že také stejnořadně $A:C=D:F$.

Neboť ježto $A:B=E:F$, tedy $A\times F=B\times E$. Dále, ježto $B:C=D:E$, tedy $D\times C=B\times E$. Bylo pak dokázáno, že též $A\times F=B\times E$, pročež také $A\times F=D\times C$. Tedy $A:C=D:F$; což právě bylo dokázati.

VII. XXXI.

Jinak.

Složeným číslem buď A; pravím, že nějaké číslo kmenné jest mu měrou.



Neboť ježto A je složené, bude mu číslo měrou; i budiž nejmenší z měr jeho B; pravím, že B jest číslo kmenné. Neboť není-li, jest složené; bude mu tedy nějaké číslo měrou. Budiž mu měrou C. Pročež $C<B$. A ježto C jest měrou čísla B, B však jest měrou čísla A, tedy též C jest měrou čísla A, jsouc menší než B; což nemožno. Pročež B není složené; tedy kmenné; což právě bylo dokázati **).

*) Důsl. snad rovněž Theonův.
**) Následuje scholion k VII. XXXIX., nesprávné a nejasné.

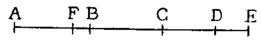
Scholion [1]).

Poměr složený z poměrů najedeme dle VIII. V.; rozložíme poměr (složený) takto: budiž $A:B=2:1$ (vlastně $A=2B$), a od toho (poměru) má se odděliti $3:1$ [2]). Budiž $A:C=3:1$. Zbývá činitel $C:B$. Pravím, že $C:B$ jest poměr půldruhadílný [3]). Nuže nebuď tak, nýbrž možno-li, budiž $C=2B$. Je však též $A=3C$, bude tedy též $A=6B$. Podmínkou však, že $A=2B$; což nesrovnalé. Nebude tedy $C=2B$. Podobně ovšem dokážeme, že ani jiného poměru nemá $C:B$ [4]) kromě půldruhadílného.

IX. XXII.

Jinak.

Nebo též takto: ježto tedy AB jest liché, odejmemež od něho jednotku FB; tedy zbývající AF jest sudé. Dále, ježto BC jest liché a FB jest jednotka, tedy FC jest sudé; je však též AF sudé, pročež i celé AC jest sudé. Z téže příčiny ovšem i CE jest sudé. A tak i celek AE sudý jest.



Kniha desátá.

Výměry.

1. Souměřitelnými zovou se veličiny, které touž měrou se měří; nesouměřitelnými pak, jimž míra žádná nemůže státi se společnou.
2. Přímky jsou dvojmocně souměřitelné, když čtverce z nich touž plochou měřiti lze; nesouměřitelné, když čtvercům z nich nemůže žádná plocha státi se měrou společnou [1]).
3. Uznáno-li toto, vysvítá z toho, že s danou přímkou jest nekonečné množství přímek souměřitelných, jakož i nesouměřitelných, dílem jen dle délky, dílem i dvojmocně. Nazývejme tedy danou přímku změrnou a přímky s ní souměřitelné, buďsi dle délky i dvojmoci, buďsi jen dvojmocně, změrnými, nesouměřitelné pak s ní nazývejme nezměrnými.
4. I čtverec dané přímky nazývejme změrným a s ním souměřitelné změrnými, s ním pak nesouměřitelné nezměrnými, i přímky, jejichžto čtverce jsou jim rovny, nezměrnými, a to byly-li by

[1]) Snad k VIII. V.
[2]) T. j. má se nalézti druhý činitel složeného poměru $2:1$, jehož jeden činitel jest $3:1$. Stane se dělením $\frac{A:B}{A:C}=\frac{2:1}{3:1}=C:B=2:3$.
[3]) T. j. druhý člen jest $1\frac{1}{2}$krát větší než první.
[4]) Ve vyd. Heiberg. $B:\Gamma$ (t. j. $B:C$) $=2:3$, — chybně, snad chyba tisková.
[1]) Plochou — χωρίον — rozumí se obyč. čtverec.

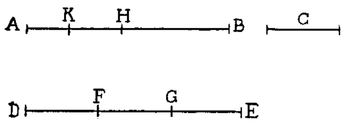
to čtverce, strany samy, pakli jiné nějaké útvary přímkové, strany čtverců jim rovných.

I.

Jsou-li dány dvě veličiny nestejné, když od větší odečteme část větší než polovina a od zbytku opět větší než polovina a tak stále budeme činiti, zbude nějaká veličina, jež bude menší než daná veličina menší.

Buďte dvěma veličinami nestejnými AB, C, z nichž větší AB; pravím, že, když od AB odečteme část větší než polovina a od zbytku opět větší než polovina a tak stále budeme činiti, zbude nějaká veličina, jež bude menší než veličina C.

Neboť C znásobena jsouc bude někdy větší než AB. Buď znásobena a buď DE násobkem veličiny C, větším však než AB, a rozdělme DE v díly s C stejné DF, FG, GE a od AB odřízněme BH, větší než je polovina, od AH pak HK, větší než je polovina, a to stále čiňme, dokud nebude v AB tolik částí, kolik má jich DE.



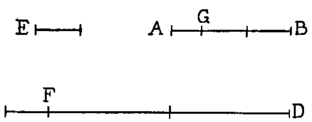
Buďtež tedy AK, KH, HB na počet stejné s DF, FH, GE, a ježto $DE > AB$ a od DE odříznuta část EG, menší než polovina, od AB pak BH, větší než polovina, tedy zbytek $GD > AH$. A ježto $GD > AH$ a od GD odříznuta polovina, t. GF, od AH pak HK, větší než polovina, tedy zbytek $DF > AK$. Avšak $DF = C$, tedy též $C > AK$. Pročež $AK < C$.

Tedy z veličiny AB zbývá veličina AK, menší jsouc než daná veličina menší C; což právě bylo dokázati. — A podobně dokážeme, i když budou části odčítané polovinami.

II.

Když ze dvou nestejných veličin střídavě se odčítá pokaždé menší od větší a zbytek nikdy nedoměřuje části předcházející, budou ty veličiny nesouměřitelné.

Nuže jsou-li dvě veličiny AB, CD nestejné a menší jest AB a odčítáme-li vždy menší od větší, zbytek nikdy nedoměřuj části předcházející; pravím, že veličiny AB, CD jsou nesouměřitelné.



Neboť jsou-li souměřitelné, bude je nějaká veličina měřiti. Měř je, možno-li, a buď to E; a AB doměřujíc FD ostavuj menší sebe CF, CF pak doměřujíc BG ostavuj menší sebe AG, a to děj se stále, dokud nezbude nějaká veličina, jež je menší než E. Staň se, a zbývej AG, menší než E. Ježto tedy E měří AB, AB však měří DF, tedy

též E bude měřiti DF. Měří však i celou CD, bude tedy též zbytek CF měřiti. Avšak CF měří veličinu BG, tedy též E měří BG. Měří však i celou AB, tedy bude měřiti též zbytek AG, větší veličina veličinu menší; což právě nemožno. Tedy veličin AB, CD nebude měřiti veličina žádná; pročež veličiny AB, CD jsou nesouměřitelné.

Když tedy ze dvou nestejných veličin atd.

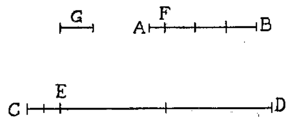
III.

Jsou-li dány dvě veličiny souměřitelné, najdi největší jejich společnou míru.

Dvěma veličinami souměřitelnými buďtež AB, CD, z nichžto menší AB; má se tedy veličinám AB, CD najíti největší společná míra.

AB zajisté veličinu CD buď doměřuje buď nikoli. Doměřuje-li tedy, doměřuje pak i sebe, tedy AB je společnou měrou veličin AB, CD; i patrno, že též největší. Neboť větší než AB veličiny AB měřiti nebude.

Neměř již AB veličiny CD. A když střídavě budeme odčítati vždy menší od většího, zbytek jednou bude doměřovati část předcházející, ježto AB, CD nejsou nesouměřitelné; i ostavuj AB doměřujíc ED menší sebe EC, EC pak doměřujíc FB ostavuj menší sebe AF, AF pak CE doměřuj.



Ježto tedy AF měří CE, CE však měří FB, tedy též AF měří FB. Měří však i sebe, pročež bude AF měřiti i celou AB. Avšak AB měří DE, tedy též AF bude měřiti DE; měří však i CE, tedy měří též celou CD. Tedy AF je společnou měrou veličin AB, CD. Pravím ovšem, že též největší. Neboť sice bude nějaká veličina větší než AF, jež bude měřiti AB, CD. Budiž to G. Ježto tedy G měří AB; AB však měří ED, tedy též G bude měřiti ED. Měří však i celou CD; tedy G bude měřiti též zbytek CE. Avšak CE měří FB, tedy též G bude měřiti FB. Měří však i celou AB, i zbytek AF bude měřiti, větší veličina veličinu menší; což právě nemožno. Tedy žádná veličina větší než AF nebude měřiti AB, CD; pročež AF je největší společnou měrou veličin AB, CD.

Nalezena tedy největší společná míra dvou daných veličin souměřitelných AB, CD; což právě bylo dokázati (vykonati).

Důsledek.

Z toho zajisté patrno, když je veličina měrou veličin dvou, že měřiti bude též největší jejich společnou míru.

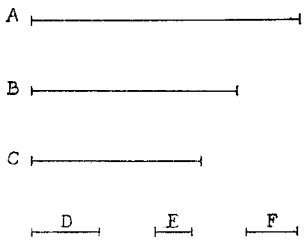
IV.

Jsou-li dány tři veličiny souměřitelné, najdi největší jejich společnou míru.

Danými třemi veličinami souměřitelnými buďtež A, B, C; má se tedy veličinám A, B, C najíti největší společná míra.

Nuže mějme největší společnou míru dvou veličin A, B (X. III.) a buď jí D; D zajisté veličině C buď jest měrou buď není. Buď dříve měrou. Ježto tedy D měří C, měří však též A, B, tedy D měří A, B, C; pročež D je společnou měrou veličin A, B, C. I patrno, že též největší; neboť veličina větší než D veličin A, B neměří.

Nebuď již D měrou veličiny C. Pravím nejprve, že C a D jsou souměřitelné. Neboť ježto A, B, C jsou souměřitelné, bude je měřiti nějaká veličina, jež patrně i A, B bude měřiti, pročež i největší společnou míru veličin A, B, totiž D, bude měřiti. Měří však i C; tedy řečená veličina bude měřiti C, D. Vezměme tedy jejich největší společnou míru a buď jí E. Ježto tedy E měří D, D však měří A, B, tedy též E bude měřiti A, B. Měří však i veličinu C. Tedy E měří A, B, C; pročež E je společnou měrou veličin A, B, C. Pravím ovšem, že též největší. Nuže buď, možno-li, nějaká veličina F, větší než E, a měř A, B, C. A ježto F měří A, B, C, tedy též A, B bude měřiti, jakož i největší společnou míru veličin A, B (X. III. důsl). Největší však společná míra veličin A, B jest D; F tedy měří D. Měří však i veličinu C; tedy F měří C, D; pročež bude F měřiti též největší společnou míru veličin C, D. Jest pak to E; tedy F bude měřiti E, větší veličina veličinu menší; což právě nemožno. Tedy žádná veličina nad E větší neměří veličin A, B, C. Pročež E jest největší společnou měrou veličin A, B, C, když D veličiny C neměří; pakli měří, tož samo D.



Největší tedy společná míra daných tří veličin souměřitelných jest nalezena.

Důsledek.

Z toho zajisté patrno, když veličina měří tři veličiny, že bude měřiti též největší jejich společnou míru.

Podobně ovšem najde se i při větším počtu (veličin) největší společná míra, i důsledek bude míti platnost. Což právě bylo dokázati.

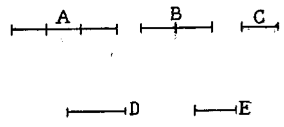
V.

Veličiny souměřitelné mají se k sobě jako číslo k číslu.

Veličinami souměřitelnými buďtež A, B; pravím, že A má se k B jako číslo k číslu.

Neboť ježto A, B jsou souměřitelné, nějaká veličina bude je měřiti. Měř je a buď to C. A kolikrát C je obsaženo v A, tolik jednotek buď v D, a kolikrát obsaženo C v B, tolik jednotek buď v E.

Ježto tedy C měří A dle jednotek v D a též jednotka měří D dle jednotek jeho, tedy jednotka je tolikrát obsažena v čísle D jako veličina C v A; pročež $C:A = 1:D$; tedy zpětně $A:C = D:1$. Dále ježto C měří B dle jednotek v E a též jednotka měří E dle jednotek jeho, tedy jednotka je tolikrát obsažena v E jako C v B; pročež $C:B = 1:E$. Dokázáno však, že též $A:C = D:1$; tedy stejnořadně $A:B = D:E$.



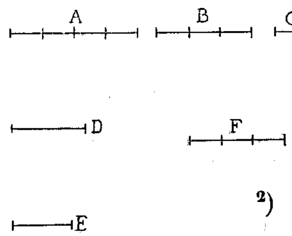
Tedy souměřitelné veličiny A, B mají se k sobě jako číslo D k číslu E; což právě bylo dokázati.

VI.

Když se mají dvě veličiny k sobě, jako číslo k číslu, ty veličiny budou souměřitelné.

Nuže mějte se k sobě dvě veličiny A, B, jako číslo D k číslu E; pravím, že jsou veličiny A, B souměřitelné.

Nuže kolik je v D jednotek, v tolik stejných dílů rozdělme A, a jednomu z nich buď rovno C; a kolik je v E jednotek, z tolika veličin stejných s C skládej se F.



[2])

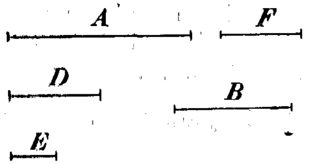
Ježto tedy, kolik jednotek má D, tolik je též v A veličin stejných s C, tedy jakou částí veličiny D jest jednotka, takovou jest i C veličiny A; pročež $C:A = 1:D$. Jednotka pak měří číslo D, tedy též C měří A. A ježto $C:A = 1:D$, tedy zpětně $A:C = D:1$. Ježto dále, kolik jednotek má E, tolik má též F stejných s C, tedy $C:F = 1:E$. Dokázáno pak, že též $A:C = D:1$; tedy stejnořadně $A:F = D:E$. Avšak $D:E = A:B$, tedy též A má se stejně ku B jako k F. Má tedy A k B i F týž poměr; tedy $B = F$. C však měří F, pročež měří i B. Avšak zajisté též A; tedy C měří A, B. Jest tedy A s B souměřitelné.

Když se tedy mají dvě veličiny k sobě, atd.

Důsledek.

Z toho zajisté patrno, když máme dvě čísla, na př. D, E, a přímku, na př. A, že jest možno učiniti, by se číslo D mělo k E,

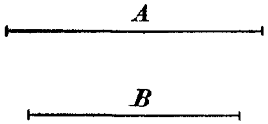
[2]) Ve vyd. Heiberg. jest ve vyobr. ještě jedna úsečka (H), jež nemá účelu.



jako ta přímka k jiné (na př. F). — Když pak vezmeme též střední úměrnou veličin A, F, na př. B, bude $A : F = A^2 : B^2$, t. j. jako se má první ke třetí, tak se má útvar (na př. čtverec) z první k útvaru z druhé podobnému a podobně sestrojenému (stejnolehlému; dle V. vým. 9. a VI. xx. důsl.). Avšak $A : F = D : E$; učiněno tedy, že též $D : E = A^2 : B^2$; což právě bylo dokázati.[3])

VII.

Veličiny nesouměřitelné nemají se k sobě jako číslo k číslu.



Veličinami nesouměřitelnými buďtež A, B; pravím, že nemá se A ku B jako číslo k číslu.

Neboť má-li se A ku B jako číslo k číslu, bude A s B souměřitelným. Není však; tedy nemá se A ku B jako číslo k číslu.

Tedy veličiny nesouměřitelné nemají se k sobě atd.

VIII.

Když se nemají dvě veličiny k sobě jako číslo k číslu, budou ty veličiny nesouměřitelné (vyobr. jako předešlé).

Nuže nemějte se veličiny A, B k sobě jako číslo k číslu; pravím, že jsou veličiny A, B nesouměřitelné.

Neboť budou-li souměřitelné, bude se míti A ku B jako číslo k číslu. Nemá se však. Tedy veličiny A, B jsou nesouměřitelné.

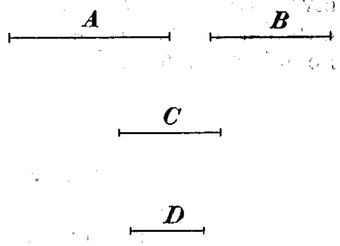
Když se tedy nemají dvě veličiny atd.

IX.

Čtverce z přímek dle délky souměřitelných mají se k sobě jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému; a čtverce, jež se mají k sobě jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému, též strany budou míti dle délky souměřitelné. Čtverce pak z přímek dle délky nesouměřitelných nemají se k sobě jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému; a čtverce, jež se nemají k sobě jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému, ani stran nebudou míti dle délky souměřitelných.

[3]) Vyobr. předešlé sem se nehodí, neboť onde $B = F$, zde však B má býti střední úměrnou veličin A, F. Proto jsem příslušné sem vyobr. přidal.

Nuže buďtež A, B dle délky souměřitelné; pravím, že čtverec z A má se ke čtverci z B jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému.



Neboť ježto A je s B dle délky souměřitelná, tedy A se má ku B jako číslo k číslu. Měj se jako C k D. Ježto tedy $A : B = C : D$, avšak poměr čtverce z A ke čtverci z B je dvojmocně větší než $A : B$, — neboť útvary podobné mají se k sobě jako dvojmoci stejnolehlých stran (VI. xx. důsl.) —, a poměr čtverce z C ke čtverci z D je dvojmocně větší než $C : D$, neboť dvě čísla čtvercová mají jedno číslo za střední úměrnou a čtverec ke čtverci má poměr dvojmocně větší než strana ke straně (VIII. xi.) —, tedy též $A^2 : B^2 = C^2 : D^2$.

Nuže měj se již $A^2 : B^2 = C^2 : D^2$; pravím, že A je s B souměřitelná dle délky.

Neboť ježto $A^2 : B^2 = C^2 : D^2$, avšak poměr čtverce z A ke čtverci z B je dvojmocně větší než $A : B$ a poměr čtverce z C ke čtverci z D je dvojmocně větší než $C : D$, tedy též $A : B = C : D$. Tedy se má A k B jako číslo C k číslu D; pročež A s B je dle délky souměřitelná.

Nuže buď již A s B dle délky nesouměřitelná; pravím, že nemá se A^2 k B^2 jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému.

Neboť má-li se A^2 k B^2 jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému, bude A s B souměřitelné. Není však; tedy A^2 nemá se k B^2 jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému.

Neměj se již naopak A^2 k B^2 jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému; pravím, že A je s B dle délky nesouměřitelná.

Neboť jest-li A s B souměřitelná, bude se míti A^2 k B^2 jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému. Nemá se však; pročež A není s B dle délky souměřitelná.

Tedy čtverce z přímek dle délky souměřitelných atd.

Důsledek.

I bude z toho, což dokázáno, patrno, že přímky souměřitelné dle délky jsou vesměs i dle dvojmoci, ty pak, jež dle dvojmoci, ne vesměs i dle délky.[4])

Výtěžek.

Dokázáno v oddíle arithmetickém[5]), že se čísla podobných rovin mají k sobě jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému, a když se dvě čísla mají k sobě jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému, jsou

[4]) Co následuje, nepochybně nepochází od Eukl.

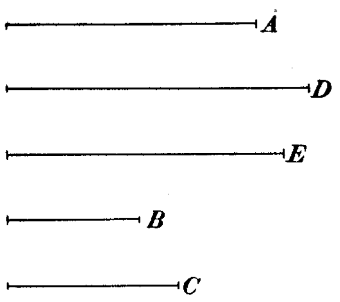
[5]) Srv. VIII. XXVI.

to čísla podobných rovin. A z toho patrno, že čísla nepodobných rovin, t. j. která nemají úměrných stran, nemají se k sobě jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému. Neboť budou-li se míti, budou to podobné roviny; to však proti podmínce. Tedy čísla nepodobných rovin nemají se k sobě jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému.

X.

K dané přímce najdi dvě přímky s ní nesouměřitelné, jednu jen dle délky, druhou i dle dvojmoci.

Danou přímkou budiž A; mají se tedy k A nalézti dvě přímky s ní nesouměřitelné, jedna jen dle délky, druhá i dle dvojmoci.



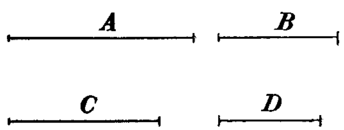
Nuže mějme dvě čísla B, C, jež se nemají k sobě jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému, t. j. roviny nepodobné, a učiňmež, aby se mělo $B:C = A^2:D^2$ (tomu zajisté jsme se naučili[6]); tedy A^2 a D^2 jsou veličiny souměřitelné (X. VI.). A ježto se nemá B k C jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému, tož ani A^2 nemá se k D^2 jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému; jest tedy A s D dle délky nesouměřitelná (X. IX.) Za střední úměrnou přímek A, D vezměmež E; tedy $A:D = A^2:E^2$ (V. výměr 9.). Avšak A je s D dle délky nesouměřitelná; pročež i A^2 a E^2 jsou veličiny nesouměřitelné. Tedy A je s E dle dvojmoci nesouměřitelná.

Jsou tedy ku přímce dané A nalezeny dvě přímky s ní nesouměřitelné D, E, jen dle délky D, dle dvojmoci pak a ovšem i dle délky E; [což právě bylo dokázati].

XI.

Když jsou čtyři veličiny úměrou a první s druhou jest souměřitelná, i třetí bude souměřitelná se čtvrtou; a když první s druhou jest nesouměřitelná, nesouměřitelná bude i třetí se čtvrtou.

Buďtež úměrou čtyři veličiny A, B, C, D, tak že $A:B = C:D$, a budiž A s B souměřitelnou; pravím, že i C je s D souměřitelná.



Neboť ježto A s B jest souměřitelná, má se tedy A k B jako číslo k číslu. Také se má $A:B = C:D$; tedy také C má se k D jako číslo k číslu; pročež C je s D souměřitelná (X. VI.).

Avšak buď již A s B nesouměřitelná; pravím, že i C bude s D nesouměřitelná.

[6]) Viz X. VI. důsl.

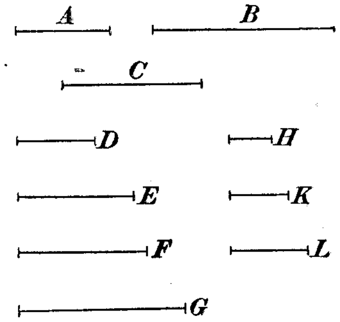
Neboť ježto A s B jest nesouměřitelná, tedy se nemá A k B jako číslo k číslu. A $A:B = C:D$; pročež nemá se ani C k D jako číslo k číslu; tedy C je s D nesouměřitelná.

Když jsou tedy čtyři veličiny atd.

XII.

Veličiny s touž veličinou souměřitelné jsou i navzájem souměřitelné.

Nuže budiž A i B souměřitelnou s C; pravím, že je též A s B souměřitelná.



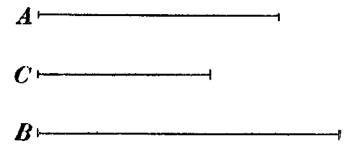
Neboť ježto jsou veličiny A, C souměřitelné, má se tedy A k C jako číslo k číslu. Měj se k ní jako D k E. Dále, ježto C jest souměřitelná s B, tedy C má se k B jako číslo k číslu. Měj se k ní jako F ku G. A když je dáno několik poměrů, $D:E$ a $F:G$, za čísla po řadě v daných poměrech vezměme H, K, L. tak aby se mělo $D:E = H:K$ a $F:G = K:L$.

Ježto tedy $A:C = D:E$, avšak $D:E = H:K$, tedy též $A:C = H:K$. Dále ježto $C:B = F:G$, avšak $F:G = K:L$, tedy též $C:B = K:L$. Také však $A:C = H:K$; stejnořadně tedy $A:B = H:L$. Pročež A má se k B jako číslo H k číslu L. Tedy A je s B souměřitelná.

Tedy veličiny s touž veličinou souměřitelné i navzájem souměřitelné jsou; což právě bylo dokázati.

XIII.

Když jsou dvě veličiny souměřitelné a jedna z nich je s nějakou veličinou nesouměřitelná, i zbývající bude s ní nesouměřitelná.



Dvěma veličinami souměřitelnými buďtež A, B a jedna z nich A s jinou nějakou C buď nesouměřitelnou; pravím, že i zbývající B je s C nesouměřitelná.

Neboť jest-li B s C souměřitelná, také však A s B jest souměřitelná, tedy souměřitelná je též A s C[7]). Avšak jest i nesouměřitelná; což právě nemožné. Není tedy B s C souměřitelná; pročež nesouměřitelná.

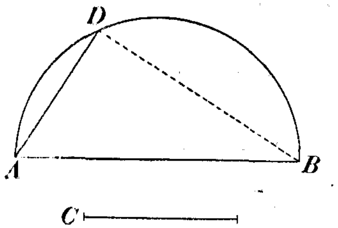
Když jsou tedy dvě veličiny souměřitelné atd.

[7]) Dvě veličiny A a C s veličinou B souměřitelné (X. XII.).

Výtěžek.

Dány-li dvě přímky nestejné, najdi, oč vyniká čtverec přímky delší nad čtverec přímky kratší.

Dvěma danými přímkami nestejnými buďtež AB, C, z nichžto delší budiž AB; má se tedy najíti, oč $AB^2 > C^2$.



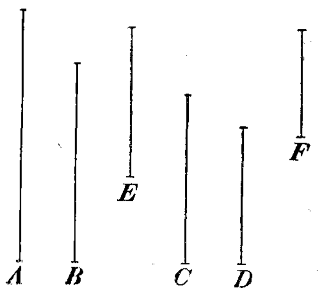
Budiž na AB narýsován polokruh ADB a do něho zapusťme AD stejnou s C a veďme spojnici DB. Patrno zajisté, že $\sphericalangle ADB$ jest pravý a že $AB^2 = AD^2$ (t. j. C^2) $+ DB^2$.

Podobně pak, i když dány dvě přímky, najde se takto přímka, jejížto čtverec je čtvercům jejich (součtu) roven.

Dvěma danými přímkami buďtež AD, DB a budiž úkolem najíti přímku, jejížto čtverec je čtvercům jejich roven. Nuže postavme je na sebe kolmo, tak aby svíraly pravý úhel ADB, a veďme spojnici AB; patrno opět, že $AB^2 = AD^2 + DB^2$; což právě bylo dokázati.

XIV.

Když jsou čtyři přímky úměrou a rozdíl čtverců z první a druhé je čtverec přímky souměřitelné [dle délky] s první, také rozdíl čtverců ze třetí a čtvrté bude čtverec přímky souměřitelné [dle délky] s třetí. A když rozdíl čtverců z první a druhé je čtverec přímky nesouměřitelné [dle délky] s první, také rozdíl čtverců ze třetí a čtvrté bude čtverec přímky nesouměřitelné [dle délky] s třetí.



Buďtež úměrou čtyři přímky A, B, C, D, tak že $A:B = C:D$, a budiž $A^2 = B^2 + E^2$ a $C^2 = D^2 + F^2$; pravím, jest-li A s E souměřitelná, že je také C s F souměřitelná, pak-li A s E nesouměřitelná, že jest i C s F nesouměřitelná.

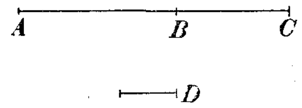
Neboť ježto $A:B = C:D$, tedy též $A^2:B^2 = C^2:D^2$ (VI. XXII.). Avšak $A^2 = E^2 + B^2$ a $C^2 = D^2 + F^2$. Tedy $(E^2 + B^2):B^2 = (D^2 + F^2):D^2$. Pročež odečtením (V. XVII.) $E^2:B^2 = F^2:D^2$; tedy též $E:B = F:D$, a tak též obráceně $B:E = D:F$. Také však $A:B = C:D$; pročež stejnořadně $A:E = C:F$. Jest-li tedy A s E souměřitelná, jest souměřitelná i C s F, pakli A s E nesouměřitelná, nesouměřitelná jest i C s F.

Když jsou tedy atd.

XV.

Když se sečtou dvě veličiny souměřitelné, též celek bude s kteroukoli z nich souměřitelný; a když jest celek s jednou z nich souměřitelný, také počáteční veličiny budou souměřitelné.

Nuže buďte sečteny dvě veličiny souměřitelné AB, BC; pravím, že i celek AC bude s AB i s BC souměřitelný.



Neboť ježto AB, BC jsou souměřitelné, bude jim nějaká veličina měrou. Budiž měrou a budiž to D. Ježto tedy D jest měrou veličin AB, BC, bude měrou i celku AC. Je však měrou i veličin AB, BC; tedy D jest měrou veličin AB, BC, AC. Pročež AC jest souměřitelná s AB i s BC.

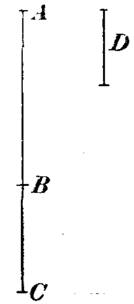
Avšak již buď AC souměřitelnou s AB; pravím již, že též AB, BC jsou souměřitelné.

Neboť ježto AC, AB jsou souměřitelné, bude jim nějaká veličina měrou. Budiž měrou a budiž to D. Ježto tedy D jest měrou veličin AC, AB, tedy též zbytku BC bude měrou. Jest pak měrou i veličiny AB; tedy D jest měrou veličin AB, BC; pročež AB, BC jsou souměřitelné.

Když se tedy sečtou dvě veličiny atd.

XVI.

Když se sečtou dvě veličiny nesouměřitelné, též celek bude s kteroukoli z nich nesouměřitelný; a když jest celek s jednou z nich nesouměřitelný, také počáteční veličiny budou nesouměřitelné.



Nuže buďte sečteny dvě veličiny nesouměřitelné AB, BC; pravím, že též celek AC jest s AB i s BC nesouměřitelný.

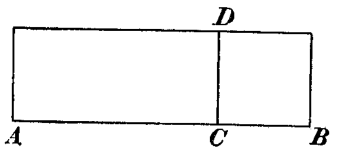
Neboť nejsou-li CA, AB nesouměřitelné, bude jim nějaká veličina měrou. Budiž měrou, možno-li, a budiž to D. Ježto tedy D jest měrou veličin CA, AB, bude měrou i zbytku BC. Je však měrou i veličiny AB; D jest tedy měrou veličin AB, BC. Pročež AB, BC jsou souměřitelné. Je však podmínkou, že jsou též nesouměřitelné; což právě jest nemožné. Tedy veličinám CA, AB nebude žádná veličina měrou; pročež CA, AB jsou nesouměřitelné. Podobně zajisté dokážeme, že též AC, CB jsou nesouměřitelné. Jest tedy AC s AB i s BC nesouměřitelná

Avšak buď již AC s jednou z veličin AB, BC nesouměřitelnou. Budiž tedy nejprve s AB; pravím, že též AB, BC jsou nesouměřitelné. Neboť jsou-li souměřitelné, bude jim nějaká veličina měrou. Buď jim měrou a budiž to D. Ježto tedy D jest měrou veličin AB, BC, bude též celku AC měrou. Jest však měrou i veličiny AB; D jest tedy měrou veličin CA, AB. Pročež CA, AB jsou souměřitelné; bylo však podmínkou, že jsou též nesouměřitelné; co právě jest nemožné. Tedy veličinám AB, BC nebude měrou veličina žádná; pročež AB, BC jsou nesouměřitelné.

Když se tedy sečtou dvě veličiny atd.

Výtěžek.

Když se k nějaké přímce přistaví rovnoběžník, tak že se mu nedostává doplňku čtvercového, přistavený útvar jest roven obdélníku z úseček přímky přistavením vzniklých.



Nuže budiž ku přímce AB přistaven rovnoběžník AD, tak aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového DB; pravím, že $AD = AC \times CB$.

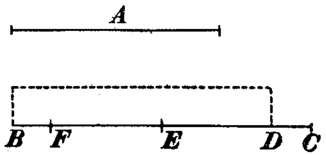
I jest to samo sebou zřejmé; neboť ežto DB je čtverec, $DC = CB$ a $AD = AC \times CD$, t. j. $AC \times CB$.

Když se tedy k nějaké přímce atd.

XVII.

Když jsou dvě přímky nestejné a k delší se přistaví útvar rovný čtvrtině čtverce přímky kratší, tak aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, a přímku dělí v části souměřitelné dle délky, rozdíl čtverců z delší a z kratší přímky bude čtverec přímky [dle délky] souměřitelné s přímkou delší. A když rozdíl čtverců z delší a z kratší přímky je čtverec přímky [dle délky] souměřitelné s přímkou delší a když se ku přímce delší přistaví útvar rovný čtvrtině čtverce přímky kratší, tak aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, dělí ji v části souměřitelné dle délky.

Nestejnými dvěma přímkami buďtež A, BC, z nichžto delší BC, a přistaven buď k BC útvar rovný čtvrtině čtverce kratší přímky A, t. j. $\left(\frac{A}{2}\right)^2$, tak aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, a budiž to $BD \times DC$[8]), BD pak budiž s DC dle délky souměřitelnou; pravím, že $BC^2 > A^2$ o čtverec přímky souměřitelné s BC.



Nuže budiž BC v bodě E rozpůlena a buď $DE = EF$; tedy zbytek $DC = BF$. A ježto přímka BC rozdělena jest v E na části stejné, v D pak na nestejné, tedy pravoúhelník $BD \times DC + ED^2 = EC^2$ (II. v.), a čtyřnásobně $4\,BD \times DC + 4\,DE^2 = 4\,EC^2$. Avšak $4\,BD \times DC = A^2$ a $4\,DE^2 = DF^2$, neboť $DF = 2\,DE$; a $4\,EC^2 = BC^2$, neboť $BC = 2\,CE$. Pročež

[8]) Třebas dle II. XIV. postupem opačným.

$A^2 + DF^2 = BC^2$; a tak $BC^2 > A^2$ o DF^2; tedy čtverec z BC jest větší nežli čtverec z A o čtverec z DF. Dokázati jest, že BC je též souměřitelná s DF. Ježto totiž BD jest dle délky souměřitelná s DC, také tedy BC jest souměřitelná s CD dle délky (X. XV.). Avšak CD jest dle délky souměřitelná s CD a BF, neboť $CD = BF$. Tedy též BC jest dle délky souměřitelná s BC a CD; a tak i zbývající FD jest dle délky souměřitelná s BC. Pročež $BC^2 > A^2$ o čtverec přímky souměřitelné.

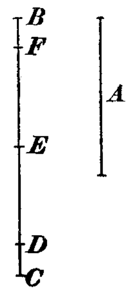
Avšak buď již $BC^2 > A^2$ o čtverec přímky souměřitelné a k BC přistaven buď útvar rovný čtvrtině A^2, tak aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, a budiž to $BD \times DC$. Dokázati jest, že jest BD dle délky s DC souměřitelná.

Touž úpravu vykonajíce zajisté podobně dokážeme, že $BC^2 > A^2$ o FD^2. Jest pak $BC^2 > A^2$ o čtverec přímky souměřitelné. Tedy BC je s FD dle délky souměřitelná; a tak BC je dle délky souměřitelná i s úsečkami zbývajícími $BF + DC$. Avšak $BF + DC$ jsou [dle délky] souměřitelné s DC. Pročež i BC je s CD dle délky souměřitelná; tedy též odčetně BD jest dle délky s DC souměřitelná.

Když jsou tedy dvě přímky nestejné atd.

XVIII.

Když jsou dvě přímky nestejné a k delší se přistaví útvar rovný čtvrtině čtverce přímky kratší, tak aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, a přímku dělí v části nesouměřitelné [dle délky], rozdíl čtverců z delší a z kratší přímky bude čtverec přímky nesouměřitelné s přímkou delší. A když rozdíl čtverců z delší a z kratší přímky je čtverec přímky nesouměřitelné s přímkou delší a když se ku přímce delší přistaví útvar rovný čtvrtině čtverce přímky kratší, tak aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, dělí ji v části nesouměřitelné [dle délky].



Nestejnými dvěma přímkami buďtež A, BC, z nichžto větší BC; a k BC přistaven budiž útvar rovný čtvrtině čtverce přímky kratší A, tak aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, a budiž to $BD \times DC$, a buď BD s DC dle délky nesouměřitelnou; pravím, že $BC^2 > A^2$ o čtverec přímky nesouměřitelné.

Neboť touž úpravu jako dříve vykonajíce podobně dokážeme, že $BC^2 > A^2$ o FD^2. Má se dokázati, že BC je s DF dle délky nesouměřitelná. Ježto BD jest zajisté s DC dle délky nesouměřitelná, tedy též BC je s CD dle délky nesouměřitelná (X XVI.). Avšak DC jest souměřitelná s BF i DC; pročež i BC jest nesouměřitelná s BF i DC. A tak i se zbývající FD jest BC dle délky nesouměřitelná. A $BC^2 > A^2$ o FD^2; pročež $BC^2 > A^2$ o čtverec přímky nesouměřitelné.

Buď již naopak $BC^2 > A^2$ o čtverec přímky nesouměřitelné a k BC přistaven budiž útvar rovný čtvrtině čtverce přímky A, tak aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, a budiž to $BD \times DC$; má se dokázati, že jest BD s DC dle délky nesouměřitelná.

Touž zajisté úpravu vykonajíce podobně dokážeme, že $BC^2 > A^2$ o FD^2. Avšak $BC^2 > A^2$ o čtverec přímky nesouměřitelné. Tedy BC je s FD dle délky nesouměřitelná; a tak BC i se zbývajícím součtem $BF + DC$ jest nesouměřitelná (X. XVI.). Avšak $BF + DC$ je s DC dle délky nesouměřitelné; tedy též BC je s DC dle délky nesouměřitelná; a tak i odčetně BD jest dle délky nesouměřitelná s DC.

Když jsou tedy dvě přímky atd.

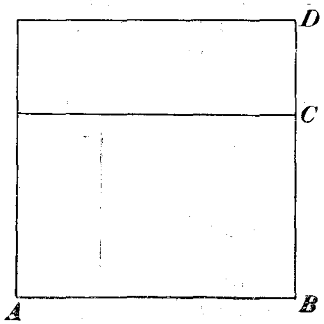
Výtěžek.

Ježto dokázáno jest, že přímky souměřitelné dle délky jsou vesměs i dle dvojmoci souměřitelné, které však dle dvojmoci, nejsou vesměs i dle délky, nýbrž mohou ovšem dle délky býti i souměřitelné i nesouměřitelné; patrno, když s danou změrnou jest nějaká dle délky souměřitelná, že se nazývá změrnou a s ní souměřitelnou nejen dle délky, nýbrž i dle dvojmoci, ježto souměřitelné dle délky jsou vesměs i dle dvojmoci souměřitelné.

Pakli s danou změrnou jest nějaká souměřitelná dle dvojmoci jest-li také dle délky, zove se i takto změrnou a s ní souměřitelnou dle délky i dvojmoci; pakli naopak nějaká přímka, s danou změrnou souměřitelná jsouc dle dvojmoci, je s ní dle délky nesouměřitelná, zove se i takto změrnou, jen dle dvojmoci souměřitelnou.

XIX.

P r a v o ú h e l n í k o b j í m a n ý p ř í m k a m i z m ě r n ý m i a d l e n ě k t e r é h o z ř e č e n ý c h z p ů s o b ů (v. výtěžek) d l e d é l k y s o u m ě ř i t e l n ý m i j e z m ě r n ý.



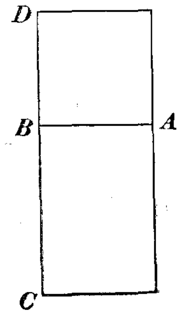
Nuže objímejte pravoúhelník AC přímky změrné a dle délky souměřitelné AB, BC; pravím, že jest AC změrné.

Nuže buď narýsován z AB čtverec AD; tedy jest AD změrné. A ježto AB jest dle délky s BC souměřitelná a $AB = BD$, tedy BD je s BC souměřitelná dle délky. Také $BD : BC = DA : AC$. Pročež DA je s AC souměřitelné. Avšak DA je změrné; změrné je tedy též AC.

Tedy pravoúhelník objímaný přímkami atd

XX.

K d y ž s e p ř i s t a v í z m ě r n ý ú t v a r k u p ř í m c e z m ě r n é, š í ř k o u č i n í p ř í m k u z m ě r n o u a s t o u, k n í ž p ř i s t a v e n j e s t, d l e d é l k y s o u m ě ř i t e l n o u.



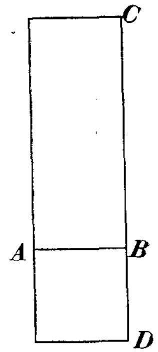
Nuže přistavme ku přímce AB, opět dle některého z řečených způsobů (X. XVIII. výt.) změrné, útvar změrný AC, šířkou činící přímku BC; pravím, že BC je změrná a s BA dle délky souměřitelná.

Nuže narýsujme na AB čtverec AD; tedy AD je změrné. Změrné však je též AC; pročež DA je s AC souměřitelné. A $DA : AC = DB : BC$; tedy též DB je s BC souměřitelná. Avšak $DB = BA$; pročež AB je souměřitelná s BC. AB však je změrná; tedy i BC je změrná a s AB dle délky souměřitelná.

Když se tedy přistaví změrný útvar ku přímce změrné atd.

XXI.

P r a v o ú h e l n í k o b j í m a n ý p ř í m k a m i z m ě r n ý m i a j e n v e d v o j m o c i s o u m ě ř i t e l n ý m i j e s t n e z m ě r n ý, a p ř í m k a, j e j í ž t o č t v e r e c j e s t m u r o v e n, j e s t n e z m ě r n á, i n a z ý v e j s e *střední* (s t ř e d n i c í).



Nuže objímejte pravoúhelník AC přímky změrné a jen ve dvojmoci souměřitelné AB, BC; pravím, že AC jest nezměrné a přímka ve dvojmoci jemu rovná jest nezměrná, i nazývej se střední.

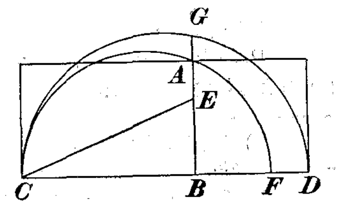
Nuže narýsujme na AB čtverec AD; čtverec AD je tedy změrný. A ježto AB, BC dle délky jsou nesouměřitelné (vzali jsme je totiž za souměřitelné jen dle dvojmoci) a $AB = BD$, také DB je s BC dle délky nesouměřitelná. A $DB : BC = AD : AC$ (VI. I.). Tedy DA je s AC nesouměřitelné (X. XI.). Avšak DA je změrné, pročež AC jest nezměrné. A tak také přímka ve dvojmoci s AC stejná jest nezměrná; i nazývej se střední[9]); což právě bylo dokázati.

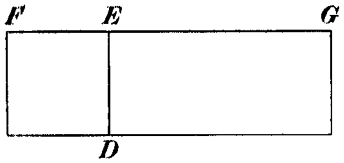
Výtěžek.

Když jsou dvě přímky, první má se ke druhé jako čtverec z první k pravouhelníku z obou přímek.

---

[9]) Budiž $AB \times BC = S^2$, $AB : S = S : BC$; proto zajisté Eukl. přímku S nazývá nezměrnou »střední«. — Sestrojiti možno takto: měj se $CB : BE (= BF)$ jako čísla nečtvercová; $CB : AB = AB : BF$, z toho $CB : BF = CB^2 : AB^2$, tedy CB, AB jsou jen ve dvojmoci souměřitelné. $AB \times BC = BD \times BC = BG^2$; přímka tedy, jejížto čtverec je stejný s AC, jest BG a nazývá se nezměrnou střední.





Dvěma přímkami buďtež FE, EG; pravím, že $FE:EG = FE^2:FE\times EG$.

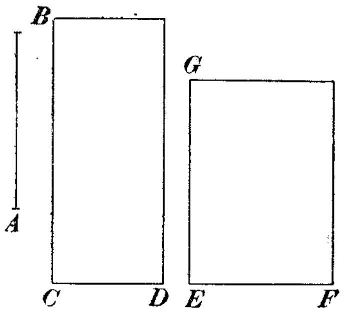
Nuže narýsován buď z FE čtverec DF a budiž doplněno GD. Ježto tedy $FE:EG = FD:DG$ a $FD = FE^2$, $DG = DE\times EG = FE\times EG$, tedy $FE:EG = FE^2:FE\times EG$. Podobně též $GE\times EF: EF^2 = GD:FD = GE:EF$; což právě bylo dokázati.[10])

XXII.

Čtverec přímky střední přistavený[11]) *ke změrné činí šířkou přímku změrnou a s tou, k níž přistaven, dle délky nesouměřitelnou.*

Přímkou střední budiž A, změrnou pak CB, a k BC přistavme pravoúhelník s A^2 stejný o šířce CD; pravím, že CD je změrná a s CB dle délky nesouměřitelná.

Neboť ježto A je střední, čtverec její rovná se pravoúhelníku, objímanému přímkami změrnými, jen ve dvojmoci souměřitelnými (X. XXI.). Čtverec ten budiž stejný s GF; avšak je stejný též s BD; tedy $BD = GF$. Jsou však i stejnoúhlé; ve stejných pak a stejnoúhlých rovnoběžnících strany při stejnolehlých úhlech jsou k sobě v poměru obráceném (VI. XIV.): pročež $BC:EG = EF:CD$. Tedy též $BC^2:EG^2 = EF^2:CD^2$. Avšak CB^2 je s EG^2 souměřitelné, neboť obé je změrné; tedy též EF^2 je s CD^2 souměřitelné. Avšak EF^2 je změrné, pročež i CD^2 je změrné; tedy CD je změrná. A ježto EF je s EG dle délky nesouměřitelná, neboť jsou jen ve dvojmoci souměřitelné, a $EF:EG = EF^2:FE\times EG$, tedy EF^2 je s $FE\times EG$ nesouměřitelné. Avšak s EF^2 jest souměřitelné CD^2, neboť jsou to veličiny ve dvojmoci změrné, a s $FE\times EG$ je $DC\times CB$ souměřitelné, neboť jsou stejná s A^2, tedy též CD^2 je s $DC\times CB$ nesouměřitelné. Avšak $CD^2:DC\times CB = DC:CB$; pročež DC je s CB dle délky nesouměřitelná. Tedy CD je změrná a s CB dle délky nesouměřitelná; což právě bylo dokázati.



XXIII.

Přímka se střední souměřitelná je střední.

Přímkou střední budiž A a souměřitelnou s A budiž B; pravím, že též B je střední.

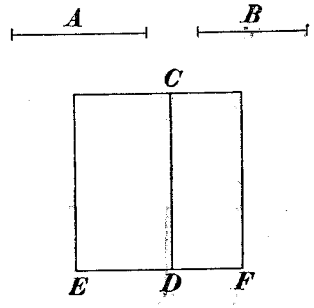
---

[10]) Algebr. kratčeji: $a:b = a:b$; násobením poměru druhého veličinou a bude: $a:b = a^2:ab$.

[11]) Ovšem ve tvaru stejného obdélníku.

Nuže mějme změrnou CD a k CD přistavme pravoúhelník CE stejný s A^2, jenžto šířkou činí přímku ED; pročež ED je změrná a s CD dle délky nesouměřitelná (X. XXII.).

A přistavme k CD pravoúhelník CF s B^2 stejný, jenžto šířkou činí DF.



Ježto tedy A je s B souměřitelná, též A^2 je s B^2 souměřitelné. Avšak $A^2 = EC$ a $B^2 = CF$; tedy EC je s CF souměřitelné. A $EC:CF = ED:DF$; jest ED s DF dle délky souměřitelná. ED však je změrná a s DC dle délky nesouměřitelná; pročež i DF je změrná a s DC dle délky nesouměřitelná (X. XIII); tedy CD, DF jsou změrné jen ve dvojmoci souměřitelné. Přímka pak, jejížto čtverec jest roven pravoúhelníku objímanému přímkami změrnými a jen ve dvojmoci souměřitelnými, je střední (X. XXI.). A přímka rovná ve dvojmoci útvaru $CD\times DF$ jest B; tedy B je střední.

Důsledek.

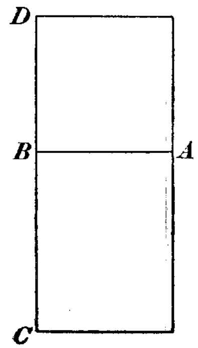
Z toho zajisté patrno, že útvar útvaru střednímu rovný je střední.

Výtěžek.

A rovněž tak, jako bylo při změrných přímkách řečeno, má platnost i při středních, že přímka se střední dle délky souměřitelná slove střední a s ní souměřitelnou nejen dle délky, nýbrž i dle dvojmoci, jelikož vůbec přímky souměřitelné dle délky jsou vesměs i dle dvojmoci souměřitelné. Když pak je s přímkou střední nějaká souměřitelná dle dvojmoci, jest-li též dle délky, též takto se zovou středními a dle délky i dvojmoci souměřitelnými, pakli jen dle dvojmoci (t. jsou souměřitelné), zovou se středními a jen ve dvojmoci souměřitelnými.

XXIV.

Pravoúhelník objímaný přímkami středními, dle délky některým z řečených způsobů souměřitelnými, je střední.



Nuže objímejte pravoúhelník AC přímky střední AB, AC, souměřitelné dle délky; pravím, že AC je střední.

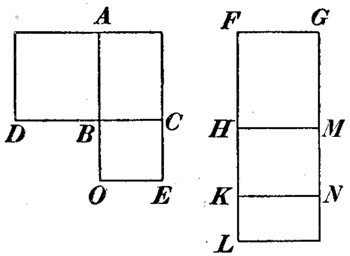
Nuže narýsujme z AB čtverec AD; tedy AD je střední. A ježto AB je s BC dle délky souměřitelná a s BD stejná, tedy též DB je s BC dle délky souměřitelná; a tak i DA je s AC souměřitelné (X. XI.). Avšak DA je střední, pročež také AC je střední, což právě bylo dokázati.

XXV.

Pravoúhelník objímaný přímkami středními a jen ve dvojmoci souměřitelnými, je buď změrný nebo střední.

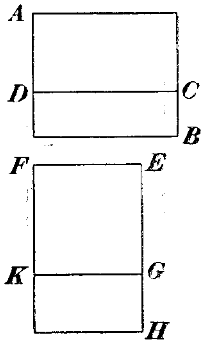
Nuže objímejte pravoúhelník AC přímky střední AB, BC, jen ve dvojmoci souměřitelné; pravím, že AC je buď změrné nebo střední.

Nuže narýsujme z AB, BC čtverce AD, BE; tedy AD i BE jsou střední. A dána buď změrná FG a k FG přistavme pravoúhlý rovnoběžník GH s AD stejný, jenžto šířkou činí FH, a k HM přistavme pravoúhlý rovnoběžník MK s AC stejný, jenžto šířkou činí HK, a ještě podobně ke KN přistavme NL, stejný s BE, jenžto šířkou činí KL; tedy FH, HK, KL jsou v přímce. Ježto tedy AD a BE jsou střední a $AD = GH$ a $BE = NL$, tedy též GH a NL jsou střední. I jsou to útvary přistavené ke změrné FG, pročež FH i KL jsou změrné a s FG dle délky nesouměřitelné (X. XXII.). A ježto AD s BE jest souměřitelné, tedy též GH jest souměřitelné s NL. A $GH:NL = FH:KL$; pročež FH je s KL dle délky souměřitelná (X. XI.). Tedy FH, KL jsou změrné a dle délky souměřitelné; pročež $FH \times KL$ je změrné (X. XIX.). A ježto $DB = BA$ a $OB = BC$, tedy $DB:BC = AB:BO$. Avšak $DB:BC = DA:AC$ a $AB:BO = AC:CO$; pročež $DA:AC = AC:CO$. Avšak $AD = GH$, $AC = MK$, $CO = NL$; tedy $GH:MK = MK:NL$; pročež také $FH:HK = HK:KL$. Proto $FH \times KL = HK^2$. Avšak $FH \times KL$ je změrné, tedy změrné jest i HK^2; pročež HK je změrná. A jest-li souměřitelná dle délky s FG, jest HN změrné; pakli s FG jest dle délky nesouměřitelná, KH a HM jsou toliko ve dvojmoci souměřitelné: tu HN je střední. Tedy HN je buďto změrné nebo střední. HN však rovno AC; pročež AC je buďto změrné nebo střední.



Tedy pravoúhelník objímaný přímkami středními atd.

XXVI.



Rozdíl útvarů středních není změrný.

Nuže, možno-li, budiž střední AB větší než střední AC o změrné DB, a dána buď změrná EF, a k EF přistavme pravoúhlý rovnoběžník FH s AB stejný o šířce EH a odečtěme FG stejné s AC, tedy zbývající $BD = KH$. DB pak je změrné; změrné je tedy též KH. Ježto tedy útvary AB, AC jsou střední a $AB = FH$, $AC = FG$, tedy též útvary FH, FG jsou střední. I jsou přistaveny ke změrné EF, pročež HE, EG jsou změrné a s EF dle délky nesouměřitelné (X. XXII.). A ježto DB je změrné a stejné s KH, tedy změrné jest i KH. I jest přistaveno ke změrné EF; pročež GH je změrná a s EF dle délky souměřitelná (X. XX.). Avšak i EG je změrná a s EF dle délky nesouměřitelná; pročež EG je s GH dle délky nesouměřitelná (X. XIII.) A $EG : GH = EG^2 : EG \times GH$; tedy EG^2 je s $EG \times GH$ nesouměřitelné. Avšak s EG^2 jsou čtverce $EG^2 + GH^2$ souměřitelné (neboť obé je změrné); s $EG \times GH$ však souměřitelné jest $2\,EG \times GH$ (neboť jest to dvojnásobek); tedy $GE^2 + GH^2$ je s $2\,EG \times GH$ nesouměřitelné. Proto též součet $EG^2 + GH^2 + 2\,EG \times GH$, což jest EH^2, je s $EG^2 + GH^2$ nesouměřitelný (X XVI.). Avšak $EG^2 + GH^2$ je změrné; pročež EH^2 jest nezměrné (X. vým. 4.). Tedy EH jest nezměrná. Avšak také změrná; což právě jest nemožné.

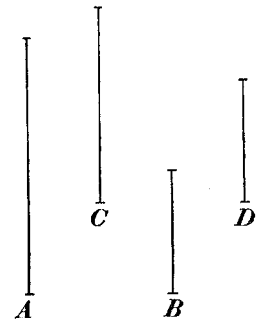
Tedy rozdíl útvarů středních není změrný; což právě bylo dokázati.

XXVII.

Najdi přímky střední jen ve dvojmoci souměřitelné, aby objímaly útvar změrný.

Mějme za dvě přímky změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, A, B a za střední úměrnou přímek A, B vezměme C a učiňme $A:B = C:D$.

A ježto A, B jsou změrné a jen ve dvojmoci souměřitelné, tedy $A \times B$, t. j. C^2, je střední (X. XXI.). Pročež C je střední (*ib.*). A ježto $A:B = C:D$, avšak A, B jsou jen ve dvojmoci souměřitelné, tedy též C, D jsou jen ve dvojmoci souměřitelné. I jest C střední; pročež i D je střední (X. XXIII.). Tedy C a D jsou střední, jen ve dvojmoci souměřitelné. Pravím, že objímají útvar změrný. Neboť ježto $A:B = C:D$, střídavě tedy $A:C = B:D$. Avšak $A:C = C:B$, pročež $C:B = B:D$. Tedy $C \times D = B^2$; B^2 však je změrné, pročež i $C \times D$ je změrné.



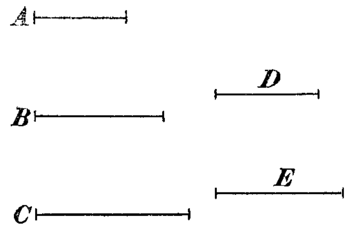
Jsou tedy nalezeny přímky střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, takže objímají útvar změrný; což právě bylo dokázati.

XXVIII.

Najdi přímky střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, aby objímaly útvar střední (srv. X. XXV.)

Přímkami změrnými, jen ve dvojmoci souměřitelnými, buďtež A, B, C a za střední úměrnou přímek A, B vezměme D a učiňme $B:C = D:E$.

Ježto A, B jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, jest tedy $A \times B$, t. j.



D^2, střední (X. XXI.); tedy D je střední. A ježto B, C jsou jen ve dvojmoci souměřitelné a $B:C=D:E$, tedy také D, E jsou jen ve dvojmoci souměřitelné. Avšak D je střední, pročež i E je střední (X. XXIII.); tedy D, E jsou střední, jen ve dvojmoci souměřitelné. Pravím již, že též objímají útvar střední. Neboť ježto $B:C=D:E$, střídavě tedy $B:D=C:E$; avšak $B:D=D:A$, pročež i $D:A=C:E$. Tedy $A\times C=D\times E$; $A\times C$ však je střední, pročež i $D\times E$ je střední.

Jsou tedy nalezeny přímky střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, takže objímají útvar střední, což právě bylo dokázati.

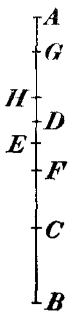
Výtěžek I.

Najdi dvě čísla čtvercová, by též součet jejich byl čtvercový.

Mějme dvě čísla AB, BC, a buďtež (pokaždé obě) buďto sudá buďto lichá. A ježto zbytek jest sudý, ať se odečte sudé od sudého, ať liché od lichého; zbytek tedy AC jest sudý. Rozpolme AC v D. Buďte pak též AB, BC buďto podobné roviny buďto čtverce, jež i samy jsou podobné roviny. Tedy $AB\times BC+CD^2=BD^2$ (II. VI.). I jest $AB\times BC$ čtverec, ježto bylo dokázáno (IX. I.), když dvě podobné roviny[12]) vespolek se znásobí, že vzniklé číslo je čtverec. Jsou tedy nalezena dvě čísla čtvercová $AB\times BC$ a CD^2, jejichžto součet je čtverec BD^2.

I jest patrno, že opět nalezeny jsou dva čtverce BD^2 a CD^2, takže rozdíl jejich $AB\times BC$ je čtverec, jsou li AB, BC podobné roviny. Pakli to nejsou podobné roviny, nalezeny jsou dva čtverce BD^2, DC^2, jejichžto rozdíl $AB\times BC$ není čtverec; což právě bylo dokázati.

Výtěžek II.



Najdi dvě čísla čtvercová, by součet jejich nebyl čtvercový.

Nuže budiž $AB\times BC$, jak jsme pravili (výt. I.), čtvercem a CA sudým a rozpolme CA v D; patrno zajisté, že $AB\times BC+CD^2=BD^2$ (výt. I.). Odečtěme jednotku DE; tedy $(AB\times BC+CE^2)<BD^2$. Pravím již, že součet čtverců $AB\times BC+CE^2$ není čtverec.

Neboť bude-li to čtverec, buď jest roven čtverci BE^2 buď jest menší než BE^2, nikoli však také větší, aby se jednotka nestala zlomkem.[13])

Budiž dříve, možno-li, $AB\times BC+CE^2=BE^2$ a budiž $GA=2\,DE$. A ježto celek $AC=2\,CD$, z čehož $AG=2\,DE$, tedy též zbytek $GC=2\,EC$; pročež GC jest v E rozpůleno. Tedy $GB\times BC+CE^2=BE^2$ (II. VI.). Avšak dle podmínky též $AB\times BC+CE^2=BE^2$. Tedy $GB\times BC+CE^2=AB\times BC+CE^2$; a odečteme-li společné CE^2, nabýváme výsledku, že $AB=GB$; což právě nemožné. Pročež $AB\times BC+CE^2$ nerovná se čtverci BE^2; Pravím již, že není ani menší než BE^2. Nuže, možno-li, budiž to rovno čtverci BF^2 a $HA=2\,DF$, i dospějeme opět toho, že $HC=2\,CF$; a tak i CH jest rozpůleno v F, a proto $HB\times BC+FC^2=BF^2$. Je však dle podmínky též $AB\times BC+CE^2=BF^2$. Tedy bude též $HB\times BC+FC^2=AB\times BC+CE^2$; což právě nemožné. Tedy $AB\times BC+CE^2$ není rovno čtverci menšímu než BE^2. Bylo pak dokázáno, že ani čtverci BE^2. Pročež $AB\times BC+CE^2$ není čtverec;[14]) což právě bylo dokázati.

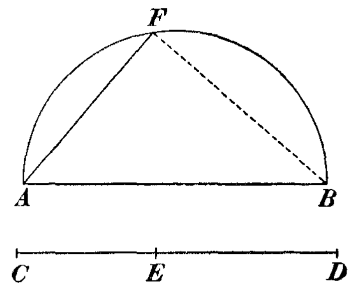
[12]) T. čísla plošného obsahu dvou podobných rovin.

[13]) Neboť součet jest menší než BD^2, a byl-li by větší než BE^2, byl by rozdíl menší než jednotka, tedy zlomek.

XXIX.

Najdi dvě přímky změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, tak aby rozdíl čtverců z delší a z kratší byl čtverec přímky s delší souměřitelné dle délky.

Nuže mějme nějakou změrnou AB a dvě čísla čtvercová CD, DE, tak aby rozdíl jejich CE nebyl čtverec a narýsován buď na AB polokruh AFB a učiňme $DC:CE=BA^2:AF^2$ (X. VI. důsl.) a veďme spojnici FB.



Ježto $BA^2:AF^2=DC:CE$, tedy BA^2 má se k AF^2 jako číslo DC k číslu CE; pročež BA^2 je s AF^2 souměřitelné. Avšak AB^2 je změrné, změrné tedy je též AF^2, pročež je změrná též AF. A ježto DC nemá se k CE jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, nemá se tedy ani BA^2 k AF^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež AB je s AF dle délky nesouměřitelná (X. IX.); tedy AB, AF jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné. A ježto $DC:CE=BA^2:AF^2$, tedy zvratně $CD:DE=AB^2:AF^2$ (V. vým. 16.). CD však má se k DE jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, pročež také AB^2 má se k BF^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; tedy AB je s BF dle délky souměřitelná (X. IX.). I jest $AB^2=AF^2+FB^2$. Pročež $AB^2>AF^2$ o čtverec z BF s AB souměřitelné.

Nalezeny jsou tedy dvě přímky změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné BA, AF, takže rozdíl čtverců z delší a z kratší je čtverec přímky s delší souměřitelné dle délky; což právě bylo dokázati.

XXX.

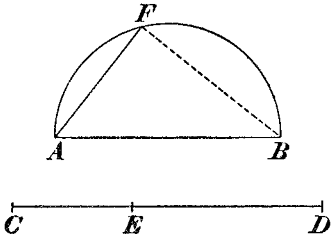
Najdi dvě přímky změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, tak aby rozdíl čtverců z delší a z kratší byl čtverec přímky s delší nesouměřitelné dle délky.

Mějme změrnou AB a dvě čísla čtvercová CE, ED, tak aby součet

[14]) Další asi tři řádky nepocházející od Eukl.

jejich CD nebyl čtverec a narýsujme na AB polokruh AFB a učiňme $DC:CE = BA^2:AF^2$ (X. VI. důsl.) a veďme spojnici FB.

Podobně zajisté jako svrchu dokážeme, že BA, AF jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné. A ježto $DC:CE = BA^2:AF^2$, tedy zvratně $CD:DE = AB^2:BF^2$ (V. vým. 16.). Avšak CD nemá se k DE jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; ani tedy AB^2 nemá se k BF^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému. Pročež AB je s BF dle délky nesouměřitelná. I jest $AB^2 > AF^2$ o čtverec přímky FB s AB nesouměřitelné.

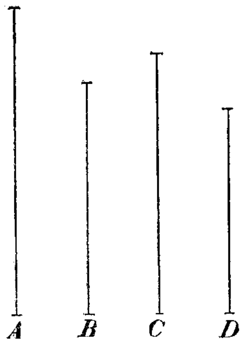


Jsou tedy AB, AF změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné a $AB^2 > AF^2$ o čtverec přímky FB s AB dle délky nesouměřitelné; což právě bylo dokázati.

XXXI.

Najdi dvě přímky střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, aby objímaly útvar změrný a rozdíl čtverců z delší a z kratší aby byl čtverec přímky s delší souměřitelné dle délky.

Mějme dvě přímky změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, A, B, tak aby rozdíl čtverců přímky delší A a kratší B byl čtverec přímky s delší souměřitelné dle délky (X. XXIX.). I budiž $C^2 = A \times B$. Avšak $A \times B$ je střední (X. XXI.); tedy též C^2 je střední. A budiž $C \times D = B^2$; B^2 však je změrné, pročež i $C \times D$ je změrné. A ježto $A:B = A \times B:B^2$, avšak $A \times B = C^2$ a $B^2 = C \times D$, tedy $A:B = C^2:C \times D$. Avšak $C^2:C \times D = C:D$; pročež také $A:B = C:D$. Jest pak A s B jen ve dvojmoci souměřitelná; pročež i C je s D souměřitelná jen ve dvojmoci. I jest C střední; střední je tedy též D (X. XXIII.). A ježto $A:B = C:D$ a $A^2 > B^2$ o čtverec přímky s A souměřitelné, také $C^2 > D^2$ o čtverec přímky s C souměřitelné (X. XIV.)



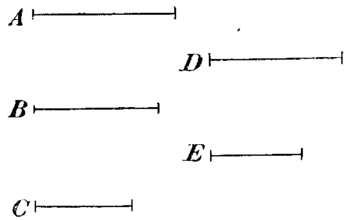
Jsou tedy nalezeny dvě přímky střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, C, D, jež objímají útvar změrný, a rozdíl čtverců z přímek C a D je čtverec přímky s C souměřitelné dle délky.

Podobně ovšem dokážeme také, že rozdíl je čtverec přímky nesouměřitelné, když $A^2 > B^2$ o čtverec přímky s A nesouměřitelné (viz X. XXX.).

XXXII.

Najdi dvě přímky střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, aby objímaly útvar střední a rozdíl čtverců z přímky delší a kratší aby byl čtverec přímky s delší souměřitelné.

Mějme tři přímky změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, A, B, C, tak aby byla $A^2 > C^2$ o čtverec přímky s A souměřitelné (X. XXIX.), a budiž $A \times B = D^2$. Pročež D^2 je střední; i D je tedy střední. Budiž pak $B \times C = D \times E$. A ježto $A \times B : B \times C = A:C$, avšak $A \times B = D^2$ a $B \times C = D \times E$, tedy $A:C = D^2:D \times E$. Avšak $D^2:D \times E = D:E$; pročež také $A:C = D:E$. Jest pak A s C ve dvojmoci souměřitelná; tedy též D s E jen ve dvojmoci souměřitelná. Avšak D je střední, střední je tedy též E (X. XXIII.). A ježto $A:C = D:E$, A^2 pak $> C^2$ o čtverec přímky s A souměřitelné, tedy bude též $D^2 > E^2$ o čtverec přímky s D souměřitelné.



Pravím již, že také je $D \times E$ střední. Neboť ježto $B \times C = D \times E$, $B \times C$ však je střední (X. XXI.) [neboť B, C jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné]; pročež i $D \times E$ je střední.

Jsou tedy nalezeny dvě přímky střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, D, E, objímající útvar střední, takže rozdíl čtverců z přímky delší a kratší je čtverec přímky s delší souměřitelné.

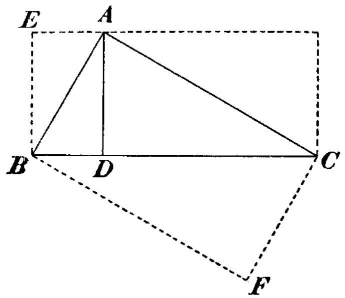
Podobně ovšem opět dokážeme také, že rozdíl je čtverec přímky nesouměřitelné, když $A^2 > C^2$ o čtverec přímky s A nesouměřitelné (viz X. XXX.).

Výtěžek.[15])

Budiž ABC trojúhelníkem pravoúhlým, jenž má pravý úhel A, a veďme kolmici AD; pravím, že $CB \times BD = BA^2$, $BC \times CD = CA^2$ a $BD \times DC = AD^2$ a též $BC \times AD = BA \times AC$.

A nejprve, že $CB \times BD = BA^2$.

Neboť ježto v trojúhelníku pravoúhlém jest od pravého úhlu na základnu vedena kolmice AD, $\triangle ABD \sim \triangle ADC \sim \triangle ABC$. A ježto $\triangle ABC \sim ABD$, tedy $CB:BA = BA:BD$; pročež $CB \times BD = AB^2$.



Z téže příčiny ovšem i $BC \times CD = AC^2$.

A ježto v trojúhelníku pravoúhlém, když se vede od úhlu pravého na základnu kolmice, ta je střední úměrnou úseček základny, tedy $BD:DA = DA:DC$; pročež $BD \times DC = DA^2$.

Pravím, že též $BC \times AD = BA \times AC$. Neboť ježto jest, jak jsme

---

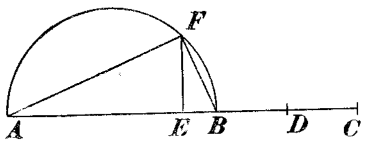
15) Náleží jinam, nepochybně do kn. VI.

pravili, $ABC \sim ABD$, tedy $BC:CA = BA:AD$. Pročež $BC \times AD = BA \times AC$; což právě bylo dokázati.

XXXIII.

Najdi dvě přímky ve dvojmoci nesouměřitelné, aby součet čtverců jejich byl změrný, pravoúhelník však střední.

Mějme dvě přímky změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, AB, BC, tak aby čtverec z delší, t. AB^2, byl větší nežli čtverec přímky kratší, t. BC^2, o čtverec přímky s AB nesouměřitelné (X. xxx.) a rozpolme BC v D a ku přímce AB přistavme rovnoběžník, tak aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového (VI. xxviii.), a budiž to $AE \times EB$, a narýsujme na AB polokruh AFB a vztyčme na AB kolmici EF a veďme spojnice AF, FB.



A ježto přímky AB, BC jsou nestejné a $AB^2 > BC^2$ o čtverec přímky s AB nesouměřitelné a ku přímce AB přistaven jest rovnoběžník[16]) rovný čtvrtině čtverce BC^2, t. j. $\left(\frac{BC}{2}\right)^2$, a nedostává se mu doplňku čtvercového a je to $AE \times EB$, tedy jest AE s EB nesouměřitelná (X. xviii.). I má se $AE:EB = BA \times AE : AB \times BE$; a $BA \times AE = AF^2$, $AB \times BE = BF^2$, pročež jsou čtverce AF^2 a FB^2 nesouměřitelné (X. xi.); tedy AF, FB jsou ve dvojmoci nesouměřitelné. A ježto AB je změrea, změrný tedy jest i čtverec AB^2; pročež i součet $AF^2 + FB^2$ je změrný (I. xlvii.). A ježto dále $AE \times EB = EF^2$ a dle podmínky též $AE \times EB = BD^2$, tedy $FE = BD$; pročež $BC = 2FE$. A tak též $AB \times BC$ jest s $AB \times EF$ souměřitelné. $AB \times BC$ však je střední (X. xxi.); pročež i $AB \times EF$ je střední. Avšak $AB \times EF = AF \times FB$; tedy též $AF \times FB$ je střední. Bylo pak také dokázáno, že součet čtverců jejich je změrný.

Jsou tedy nalezeny dvě přímky ve dvojmoci nesouměřitelné AF, FB, takže součet čtverců jejich je změrný, pravoúhelník (součin) však střední; což právě bylo dokázati.

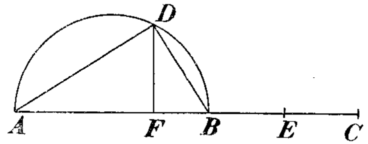
XXXIV.

Najdi dvě přímky ve dvojmoci nesouměřitelné, aby součet čtverců jejich byl střední, pravoúhelník však změrný.

Mějme dvě přímky střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, AB, BC, aby jejich pravoúhelník byl změrný a byla $AB^2 > BC^2$ o čtverec přímky s AB nesouměřitelné (X. xxxi.), a narýsujme na AB polokruh ADB a rozpolme BC v E a přistavme ku přímce AB rovnoběžník $AF \times FB$, stejný se čtvercem BE^2, tak aby se mu nedostávalo doplňku

16) Třeba si na obrazci domysliti.

čtvercového (VI. xxviii.); tu jest AF s FB dle délky nesouměřitelná (X. xviii.). I vztyčme v F na AB kolmici FD a veďme spojnice AD, DB.



Ježto AF je s FB nesouměřitelná, tedy též $BA \times AF$ jest s $AB \times BF$ nesouměřitelné. Avšak $BA \times AF = AD^2$, $AB \times BF = DB^2$; pročež také AD^2 je s DB^2 nesouměřitelné. A ježto AB^2 je střední, tedy též součet $AD^2 + DB^2$ je střední. A ježto $BC = 2DF$, tedy též $AB \times BC = 2AB \times FD$. $AB \times BC$ však je změrné, směrné jest tedy také $AB \times FD$. Avšak $AB \times FD = AD \times DB$; pročež také $AD \times DB$ je změrné.

Jsou tedy nalezeny dvě přímky ve dvojmoci nesouměřitelné AD, DB, takže součet čtverců jejich je střední, pravoúhelník však změrný; což právě bylo dokázati.

XXXV.

Najdi dvě přímky ve dvojmoci nesouměřitelné, aby součet čtverců jejich byl střední a pravoúhelník střední a mimo to se součtem čtverců jejich nesouměřitelný.

Mějme dvě přímky střední ve dojmoci nesouměřitelné AB, BC,[17]) aby objímaly útvar střední a rozdíl čtverců jejich aby byl čtverec přímky s AB nesouměřitelné (X. xxxii.), a narýsujme na AB polokruh ADB a ostatek upravme podobně jako svrchu.

A ježto AF je s FB dle délky nesouměřitelná, jest také AD s DB ve dvojmoci nesouměřitelná (X. xi.). A ježto AB^2 je střední, tedy též součet $AD^2 + DB^2$ je střední. A ježto $AF \times FB = BE^2 = DF^2$, jest tedy $BE = DF$; pročež $BC = 2FD$; a tak též $AB \times BC = 2AB \times FD$. Avšak $AB \times BC$ je střední, pročež také $AB \times FD$ je střední. I je stejné $AD \times DB$; tedy též $AD \times DB$ je střední. A ježto AB je s BC dle délky nesouměřitelná, CB však s BE souměřitelná, tedy též AB je s BE dle délky nesouměřitelná; a tak i čtverec AB^2 je s $AB \times BE$ nesouměřitelný. Avšak $AD^2 + DB^2 = AB^2$ a $AB \times FD$, t. j. $AD \times DB = AB \times BE$; pročež součet $AD^2 + DB^2$ je s $AD \times DB$ nesouměřitelný.

Jsou tedy nalezeny dvě přímky AD, DB ve dvojmoci nesouměřitelné, takže součet čtverců jejich je střední i pravoúhelník z nich je střední a mimo to se součtem čtverců jejich nesouměřitelný; což právě bylo dokázati.

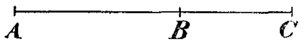
XXXVI.

Když se sečtou dvě přímky změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, celá jest nezměrná; i nazývejme ji ***dvoučástnou*** *(dvoučástnicí).*

17) Dle vyobr. předešlého.

Nuže buďte sečteny dvě přímky změrné AB, BC, jen ve dvojmoci souměřitelné; pravím, že celá AC jest nezměrná.

Neboť ježto AB je s BC dle délky nesouměřitelná (neboť jsou jen ve dvojmoci souměřitelné) a $AB : BC = AB \times BC : BC^2$, tedy jest $AB \times BC$ s BC^2 nesouměřitelné. Avšak s $AB \times BC$ je $2\,AB \times BC$ souměřitelné a s BC^2 jest souměřitelný součet $AB^2 + BC^2$ (neboť AB, BC jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné); tedy $2\,AB \times BC$ je s $AB^2 + BC^2$ nesouměřitelné. A současně $2\,AB \times BC + AB^2 + BC^2$, t. j. AC^2, je s $AB^2 + BC^2$ nesouměřitelné (X. XVI.). Avšak $AB^2 + BC^2$ je změrné, pročež AC^2 je nezměrné; a tak též AC jest nezměrná, i nazývejme ji dvoučástnou; což právě bylo dokázati.[18])



XXXVII.

Když se sečtou dvě přímky střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, jež objímají útvar změrný, celá jest nezměrná; i nazývejme ji dvoustřednicí první.

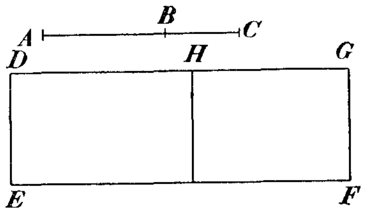
Nuže buďte sečteny dvě přímky střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, AB, BC, jež objímají útvar změrný (X. XXVII.); pravím, že celá AC jest nezměrná.

Neboť ježto AB je s BC dle délky nesouměřitelná, tedy též $AB^2 + BC^2$ je s $2\,AB \times BC$ nesouměřitelné; a součetně $AB^2 + BC^2 + 2\,AB \times AC$, t. j. AC^2 jest s $AB \times BC$ nesouměřitelné (X. XVI.). Avšak $AB \times BC$ je změrné, neboť dle podmínky AB, BC objímají útvar změrný; pročež AC^2 jest nezměrné; nezměrná tedy jest AC; i nazývejme ji dvoustřednicí první; což právě bylo dokázati.

XXXVIII.

Když se sečtou dvě přímky střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, jež objímají útvar střední, celá jest nezměrná; i nazývejme ji dvoustřednicí druhou.

Nuže buďte sečteny dvě přímky střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, AB, BC, jež objímají útvar střední (X. XXVIII.); pravím, že AC jest nezměrná.



Nuže mějme změrnou DE a přistavme k DE útvar DF rovný čtverci AC^2, šířkou činící DG. A ježto $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB \times BC$, tož přistavme k DE útvar EH stejný s $AB^2 + BC^2$; zbývající tedy $HF = 2\,AB \times BC$. A ježto AB, BC jsou střední, jest tedy střední též $AB^2 + BC^2$. Střední však je dle podmínky též $2\,AB \times BC$. Také $AB^2 + BC^2 = EH$ a $2\,AB \times BC = FH$; tedy EH i HF jsou střední. A jsou

[18]) X. XXI. pozn. 9. jest nezměrnou dvoučástnou CD.

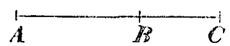
přistaveny ke změrné DE; pročež DH i HG jsou změrné a s DE dle délky nesouměřitelné (X. XXII.). Ježto tedy AB je s BC dle délky nesouměřitelná a $AB : BC = AB^2 : AB \times BC$, tedy AB^2 je s $AB \times BC$ nesouměřitelné. Avšak s AB^2 jest $AB^2 + BC^2$ souměřitelné (X. XV.) a s $AB \times BC$ jest souměřitelné $2\,AB \times BC$. Pročež $AB^2 + BC^2$ je s $2\,AB \times BC$ nesouměřitelné. Avšak $AB^2 + BC^2 = EH$ a $2\,AB \times BC = HF$. Proto EH je s HF nesouměřitelné; a tak i DH je s HG dle délky nesouměřitelná. Tedy DH, HG jsou změrné, jen dle dvojmoci souměřitelné. Pročež DG jest nezměrná (X. XXXVI.). DE však je změrná; pravoúhelník pak objímaný nezměrnou a změrnou jest nezměrný. Tedy útvar DF jest nezměrný, a přímka ve dvojmoci mu rovná jest nezměrná. Avšak $DF = AC^2$; tedy AC jest nezměrná; i nazývejme ji dvoustřednicí druhou. Což právě bylo dokázati.

XXXIX.

Když se sečtou dvě přímky ve dvojmoci nesouměřitelné a součet jejich čtverců je změrný, pravoúhelník však střední, celá přímka jest nezměrná; i nazývejme ji (nezměrnou) *větší*.

Nuže buďte sečteny dvě přímky ve dvojmoci nesouměřitelné AB, BC, řečeným podmínkám vyhovující (X. XXXIII.); pravím, že AC jest nezměrná.

Neboť ježto $AB \times BC$ je střední, též $2\,AB \times BC$ střední jest. Avšak $AB^2 + BC^2$ je změrné, tedy $2\,AB \times BC$ je s $AB^2 + BC^2$ nesouměřitelné; a tak též $AB^2 + BC^2 + 2\,AB \times BC$, což jest právě AC^2, jest s $AB^2 + BC^2$ nesouměřitelné (X. XVI.). Pročež AC^2 jest nezměrné; tedy též AC jest nezměrná; i nazývejme ji větší. Což právě bylo dokázati.



XL.

Když se sečtou dvě přímky ve dvojmoci nesouměřitelné a součet čtverců jejich je střední, pravoúhelník pak změrný, celá přímka jest nezměrná, i nazývejme ji *základnicí útvaru změrného a středního*.

Nuže buďte sečteny dvě přímky ve dvojmoci nesouměřitelné AB, BC, řečeným podmínkám vyhovující (X. XXXIV.); pravím, že AC jest nezměrná.

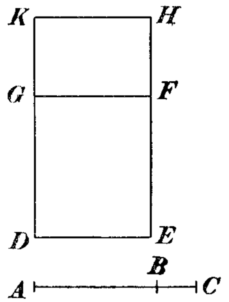
Neboť ježto součet $AB^2 + BC^2$ je střední a $2\,AB \times BC$ změrné, tedy $AB^2 + BC^2$ je s $2\,AB \times BC$ nesouměřitelné; pročež také AC^2 je s $2\,AB \times BC$ nesouměřitelné. Avšak $2\,AB \times BC$ je změrné; pročež AC^2 jest nezměrné. AC je tedy nezměrná; i nazývejme ji základnicí útvaru změrného a středního.[19])

[19]) Eukl.: ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, t. j. přímka, která jest základem čtverce stejného se součtem útvaru změrného a středního.

XLI.

Když se sečtou dvě přímky ve dvojmoci nesouměřitelné a součet čtverců jejich je střední i pravoúhelník střední a také se součtem čtverců jejich nesouměřitelný, celá přímka jest nezměrná, i nazývejme ji *základnicí dvou útvarů středních.*

Nuže buďte sečteny dvě přímky ve dvojmoci nesouměřitelné AB, BC, řečeným podmínkám vyhovující (X. XXXV.); pravím, že AC jest nezměrná.



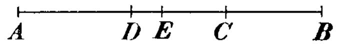
Mějme změrnou DE a k DE přistavme DF stejné s AB^2+BC^2 a GH stejné s $2AB\times BC$; tedy celek $DH=AC^2$. A ježto AB^2+BC^2 je střední a stejné s DF, tedy též DF je střední. Také jest přistaveno ke změrné DE; pročež DG je změrná a s DE dle délky nesouměřitelná (X. XXII.). Z téže příčiny ovšem i GK je změrná a s GF, t. j. DE dle délky nesouměřitelná. A ježto AB^2+BC^2 s $2AB\times BC$ jest nesouměřitelné, je DF s GH nesouměřitelné; pročež i DG je s GK nesouměřitelná. A jsou změrné; tedy DG, GK jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; pročež DK jest nezměrná řečená dvoučástná. Změrná však DE; tedy DH jest nezměrné i čtverec mu rovný jest nezměrný. Základem pak čtverce stejného s HD jest AC; pročež AC jest nezměrná, i nazývejme ji základnicí dvou útvarů středních.[20]) Což právě bylo dokázati.

Výtěžek.

Že však řečené přímky nezměrné jen jednako se dělí v ty úsečky, z nichž se skládají, tvoříce jimi žádané útvary, dokážeme teprve vyložíce napřed tento výtěžek.

Mějme přímku AB a rozdělme celou v části nestejné v C a v D a budiž podmínkou, že $AC>DB$; pravím, že $(AC^2+CB^2)>(AD^2+DB^2)$.

Nuže rozpolme AB v E. A ježto $AC>DB$, odejměme společnou DC; zbývající tedy $AD>CB$. Avšak $AE=EB$; pročež $DE<EC$; tedy body C, D nejsou stejně vzdáleny bodu rozpolovacího. A ježto $AC\times CB+EC^2=EB^2$ (II. V.), avšak zajisté též $AD\times DB+DE^2=EB^2$, tedy $AC\times CB+EC^2=AD\times DB+DE^2$, z čehož $DE^2<EC^2$; pročež zbývající $AC\times CB<AD\times DB$, takže též $2AC\times CB<2AD\times DB$. Tedy též zbývající[21]) $(AC^2+CB^2)>(AD^2+DB^2)$; což právě bylo dokázati.



[20]) Eukl.: δύο μέσα δυναμένη, jejíž čtverec jest roven součtu dvou útvarů středních.

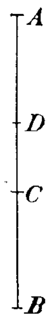
[21]) To patrno z rovnice $AC^2+CB^2+2AC\times CB=AD^2+DB^2+2AD\times DB$.

XLII.

Nezměrná přímka dvoučástná dělí se ve své části jen v jediném bodě.

Dvoučástnicí budiž AB, rozdělena jsouc ve své části v C; tedy AC, CB jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné (X. XXXVI.). Pravím, že AB nedělí se v jiném bodě na dvě přímky změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné.

Nuže, možno-li, buď rozdělena též v D, takže by též AD, DB byly změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné.



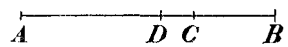
Patrno arci, že AC není s DB totožná. Nuže, možno-li, budiž (totožná). Bude zajisté též $AD=CB$. I bude se míti $AC:CB=BD:DA$, a bude AB rozdělením v D na stejno rozdělena jako v C, což právě proti podmínce. Pročež AC není s DB totožná. Proto zajisté také body C, D nejsou stejně vzdáleny bodu rozpolovacího. Jaký tedy jest rozdíl mezi AC^2+CB^2 a AD^2+DB^2, takový je též mezi $2AD\times DB$ a $2AC\times CB$ proto, že též $AC^2+CB^2+2AC\times CB=AB^2=AD^2+DB^2+2AD\times DB$.[22]) Avšak rozdíl mezi AC^2+CB^2 a AD^2+DB^2 je změrný, neboť to i ono je změrné; pročež i $2AD\times DB$ a $2AC\times CB$ mají rozdíl změrný, ač jsou střední; což právě nemožno, neboť rozdíl útvaru středního a středního není změrný (X. XXVI.).

Pročež přímka nezměrná dvoučástná nedělí se v bodech rozličných; tedy pouze v jediném; což právě bylo dokázati.

XLIII.

Dvoustřednice první dělí se jen v jediném bodě.

Dvoustřednicí první budiž AB, rozdělena jsouc v bodě C, tak aby úsečky AC, CB byly střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, a objímaly útvar změrný; pravím, že se AB nedělí v bodě jiném.



Nuže, možno-li, budiž rozdělena také v D, takže by též AD, DB byly střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, a objímaly útvar změrný. Ježto tedy, jaký jest rozdíl mezi $2AD\times DB$ a $2AC\times CB$, takový jest mezi AC^2+CB^2 a AD^2+DB^2 a rozdíl mezi $2AD\times DB$ a $2AC\times CB$ je změrný (neboť to i ono je změrné); tedy AC^2+CB^2 a AD^2+DB^2 mají též rozdíl změrný, ač jsou střední; což právě nemožné. (X. XXVI.).

Pročež dvoustřednice první nedělí se ve své části v bodech rozličných; tedy pouze v jediném; což právě bylo dokázati.

XLIV.

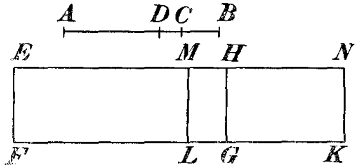
Dvoustřednice druhá dělí se jen v jediném bodě.

Dvoustřednicí druhou budiž AB, rozdělena jsouc v C, tak aby AC, CB byly střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, a objímaly útvar

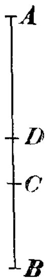
[22]) Všeobecně: $a+c=b+d$; z toho $a-b=d-c$ nebo $b-a=c-d$.

střední (X. xxxviii.); patrno zajisté, že C není bod rozpolovací, ježto nejsou dle délky souměřitelné. Pravím, že AB se nedělí v bodě jiném.

Nuže, možno-li, budiž rozdělena také v D, tak aby AC nebyla s DB totožná, nýbrž dle podmínky AC větší (patrno zajisté, jak jsme svrchu (X. xli. výt.) dokázali, že též $AD^2 + DB^2 < AC^2 + CB^2$) a aby AD, DB byly střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, a objímaly útvar střední. A mějme za změrnou EF a přistavme k EF rovnoběžník pravoúhlý EK rovný čtverci AB^2 a oddělme EG rovné součtu $AC^2 + CB^2$; zbytek tedy $HK = 2\,AC \times CB$. Dále již oddělme EL, rovné součtu $AD^2 + DB^2$ (o němž jsme dokázali, že jest menší než $AC^2 + CB^2$); tedy též zbývající $MK = 2\,AD \times DB$. A ježto $AC^2 + CB^2$ je střední, tedy také EG je střední. A přistaveno jest ke změrné EF; pročež EH je změrná a s EF dle délky nesouměřitelná (X. xxii.). Z téže příčiny ovšem i HN je změrná a s EF dle délky nesouměřitelná. A ježto AC, CB jsou střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, tedy AC je s CB dle délky nesouměřitelná. Avšak $AC : CB = AC^2 : AC \times CB$; pročež AC^2 je s $AC \times CB$ nesouměřitelné. Avšak AC^2 je souměřitelné s $AC^2 + CB^2$, neboť AC, CB jsou ve dvojmoci souměřitelné. S $AC \times CB$ však jest souměřitelné $2\,AC \times CB$; pročež také $AC^2 + CB^2$ jest nesouměřitelné s $2\,AC \times CB$. Avšak $AC^2 + CB^2 = EG$ a $2\,AC \times CB = HK$; tedy EG je s HK nesouměřitelné. A tak též EH jest dle délky nesouměřitelná s HN. A jsou změrné; pročež EH, HN jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné. Když pak sečteme dvě přímky změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, celá jest nezměrná, řečená dvoučástná (X. xxxvi.); tedy EN je dvoučástná, rozdělená v H. Týmž způsobem zajisté dokážeme, že též EM, MN jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; i bude EN dvoučástnicí v rozličných bodech, totiž H a M, rozdělenou, [což nemožno (X. xlii.)], a není EH s MN totožná, ježto $(AC^2 + CB^2) > (AD^2 + DB^2)$; pročež také $AC^2 + CB^2$, t. j. EG, o mnoho větší než $2\,AD \times DB$, t. j. MK; a tak též $EH > MN$. Tedy EH není s MN totožná; což právě bylo dokázati.



XLV.



Nezměrná větší dělí se jen v jediném bodě.

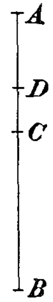
Nezměrnou větší budiž AB, rozdělena jsouc v C, tak aby byly AC, CB ve dvojmoci nesouměřitelné a součet $AC^2 + CB^2$ aby byl změrný, $AC \times CB$ však nezměrné; pravím, že se AB nedělí v bodě jiném.

Nuže, možno-li, budiž rozdělena také v D, takže by též AD, DB byly ve dvojmoci nesouměřitelné a součet $AD^2 + DB^2$ byl změrný, pravoúhelník však jejich střední. A ježto rozdíl, jaký jest mezi $AC^2 + CB^2$ a $AD^2 + DB^2$, takový jest i mezi $2\,AD \times DB$ a $2\,AC \times CB$, avšak rozdíl mezi $AC^2 + CB^2$ a $AD^2 + DB^2$ je změrný (neboť to i ono je změrné); tedy též $2\,AD \times DB$ a $2\,AC \times CB$ mají rozdíl změrný, ač jsou střední; což právě ne-

možno (X. xxvi). Pročež nezměrná větší nedělí se v rozličných bodech; tedy se dělí v bodě jediném; což právě bylo dokázati.

XLVI.

Základnice útvaru změrného a středního dělí se jen v jediném bodě.



Základnicí útvaru změrného a středního budiž AB, jsouc rozdělena v C, tak aby AC, CB byly ve dvojmoci nesouměřitelné a součet $AC^2 + CB^2$ aby byl střední, $2\,AC \times CB$ však změrné (X. xl.); pravím, že se AC nedělí v bodě jiném.

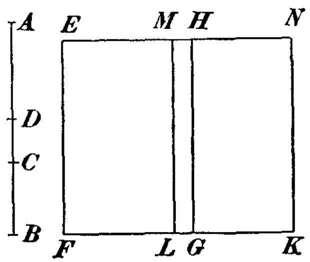
Nuže, možno-li, budiž rozdělena také v D; takže by též AD, DB byly ve dvojmoci nesouměřitelné a součet $AD^2 + DB^2$ byl střední, $2\,AD \times DB$ však změrné. Ježto tedy rozdíl, jaký jest mezi $2\,AC \times CB$ a $2\,AD \times DB$, takový jest i mezi $AD^2 + DB^2$ a $AC^2 + CB^2$, avšak $2\,AC \times CB$ a $2\,AD \times DB$ mají rozdíl změrný; tedy též $AD^2 + DB^2$ a $AC^2 + CB^2$ mají rozdíl změrný, ač jsou střední; což právě jest nemožné (X. xxvi.). Pročež základnice útvaru změrného a středního nedělí se v rozličných bodech. Tedy se dělí v bodě jediném; což právě bylo dokázati.

XLVII.

Základnice dvou útvarů středních dělí se jen v jediném bodě.

Základnicí dvou útvarů středních budiž AB, jsouc rozdělena v C, tak aby AC, CB byly ve dvojmoci nesouměřitelné a součet $AC^2 + CB^2$ aby byl střední a $AC \times CB$ střední a také se součtem $AC^2 + CB^2$ nesouměřitelné (X. xli.); pravím, že se AB, vyhovujíc řečeným podmínkám, nedělí v bodě jiném.

Nuže, možno-li, budiž rozdělena v D, takže by opět patrně AC nebyla stejná s DB, nýbrž aby dle podmínky AC byla větší, a mějme za změrnou EF a přistavme k EF útvar EG, rovný součtu $AC^2 + CB^2$, a HK stejné s $2\,AC \times CB$; tedy celek $EK = AB^2$. Dále již přistavme k EF útvar EL stejný s $AD^2 + DB^2$; tedy zbývající $2\,AD \times DB = MK$. A ježto součet $AC^2 + CB^2$ dle podmínky je střední, tedy rovněž EG je střední. Také jest přistaveno ke změrné EF; pročež HE je změrná a s EF dle délky nesouměřitelná. Z téže příčiny ovšem i HN je změrná a s EF dle délky nesouměřitelná. A ježto



součet $AC^2 + CB^2$ je s $2\,AC \times CB$ nesouměřitelný, tedy též GE je s GN nesouměřitelné; a tak též EH jest nesouměřitelná s HN. A jsou změrné; pročež EH, HN jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; tedy EN jest nezměrná dvoučástná, jsouc rozdělena v H (X. xxxvi.). Podobně ovšem dokážeme, že je také rozdělena v M. I není EH s MN stejná; nezměrná tedy dvoučástná jest rozdělena v rozličných bodech;

což právě jest nemožné (X. XLII.). Pročež základnice dvou útvarů středních nedělí se v rozličných bodech; tedy se dělí jen v jediném.

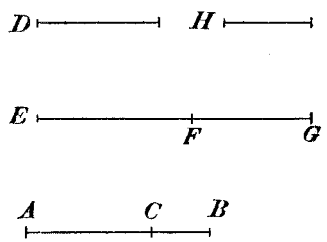
Výměry druhé.

1. Dána-li přímka změrná a nezměrná dvoučástná, rozdělená ve své části, kteréž ve dvojmoci mají za rozdíl čtverec přímky s větší částí souměřitelné dle délky, když s danou změrnou jest dle délky souměřitelná část větší, [celá] nazývej se dvoučástnicí první.
2. Když pak menší část jest dle délky souměřitelná s danou změrnou, nazývej se dvoučástnicí druhou.
3. Když pak žádná z těch částí není dle délky souměřitelná s danou změrnou, nazývej se dvoučástnicí třetí.
4. Když zase naopak mají ve dvojmoci za rozdíl čtverec přímky s větší částí nesouměřitelné dle délky, jest-li s danou změrnou dle délky souměřitelná část větší, nazývej se dvoučástnicí čtvrtou
5. Pakli menší část,[23]) pátou.
6. Pakli žádná,[23]) šestou.

XLVIII.

Najdi dvoučástnici první.

Mějme dvě čísla AC, CB, aby se měl součet jejich AB k BC jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, k CA však aby se neměl jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, a mějme nějakou přímku změrnou D a s D budiž dle délky souměřitelná EF. Tedy jest rovněž EF změrná. A učiňme $BA:AC = EF^2:FG^2$ (X. VI. důsl.). Avšak AB: AC jako číslo k číslu; tedy též $EF^2:FG^2$ jako číslo k číslu; pročež EF^2 je s FG^2 souměřitelné. I jest EF změrná, změrná tedy je také FG. A ježto BA nemá se k AC jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, ani tedy EF^2 nemá se k FG^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež EF je s FG dle délky nesouměřitelná. Tedy EF, FG jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; pročež EG jest nezměrná dvoučástná (X. XXXVI.).



Pravím, že také první.

Neboť ježto $BA:AC = EF^2:FG^2$ a $BA > AC$, tedy též $EF^2 > FG^2$. Budiž tedy $EF^2 = FG^2 + H^2$. A ježto $BA:AC = EF^2$: FG^2, zvratně tedy $AB:BC = EF^2:H^2$. Avšak $AB:BC$ jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež i $EF^2:H^2$ jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému. Tedy EF je s H dle délky souměřitelná; proto jest EF ve dvojmoci větší než FG o čtverec přímky s EF souměřitelné. I jsou EF, FG změrné, a EF je s D dle délky souměřitelná.

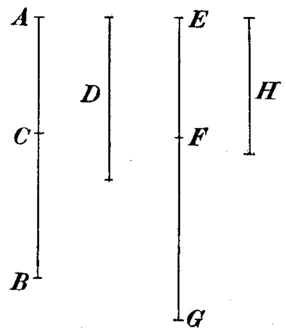
Pročež EG je dvoučástnice první (vým. druhých č. 1.); což právě bylo dokázati.

[23]) Rozuměj: jest — není — dle délky souměřitelná s danou změrnou.

XLIX.

Najdi dvoučástnici druhou.

Mějme dvě čísla AC, CB, aby se měl součet jejich AB k BC jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, k AC však aby se neměl jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, a mějme změrnou D a s D budiž dle délky souměřitelná EF; tedy jest EF změrná. Učiňme již také $CA:AB = EF^2:FG^2$. Tedy též FG je změrná. A ježto se nemá CA k AB jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému, nemá se ani EF^2 k FG^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému. Tedy EF, FG jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; pročež EG jest nezměrná dvoučástná.



Má se již dokázati, že též druhá.

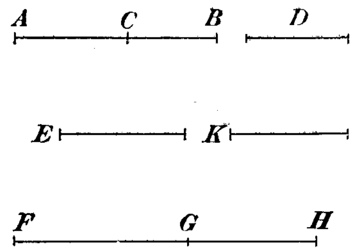
Neboť ježto obráceně $BA:AC = GF^2:FE^2$, avšak $BA > AC$, tedy též $GF^2 > FE^2$. Budiž $GF^2 = EF^2 + H^2$; zvratně tedy $AB:BC = FG^2$: H^2. Avšak $AB:BC$ jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, tedy též $FG^2:H^2$ jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému. Jest tedy FG s H dle délky souměřitelná; pročež jest FG ve dvojmoci větší než FE o čtverec přímky s FG souměřitelné. I jsou FG, FE změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, a menší část EF je s danou přímkou změrnou D dle délky souměřitelná.

Pročež EG je dvoučástnice druhá; což právě bylo dokázati (vým. druhých č. 2.).

L.

Najdi dvoučástnici třetí.

Mějme dvě čísla AC, CB, aby se měl součet jejich AB k BC jako čtvercové číslo k číslu čtercovému, k AC však aby se neměl jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému. Mějme pak i jiné číslo nečtvercové D a to neměj se ani k AB ani k AC jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, a mějme nějakou přímku změrnou E a učiňme $D:AB = E^2:FG^2$ (X. VI. důsl.); tedy E^2 je s FG^2 souměřitelné. I jest E změrná; změrná jest tedy též FG. A ježto se nemá $D:AB$ jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, ani E^2 nemá se k FG^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež D jest dle délky s FG nesouměřitelná. Učiňme již dále $BA:AC = FG^2:GH^2$; tedy FG^2 je s GH^2 souměřitelné. Avšak FG je změrná; změrná je tedy též GH. A ježto se nemá BA k AC jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, ani FG^2 se nemá k HG^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež FG je



s GH dle délky nesouměřitelná. Tedy FG, GH jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; proto FH jest nezměrná dvoučástná (X. XXXVI.).

Pravím ovšem, že také třetí.

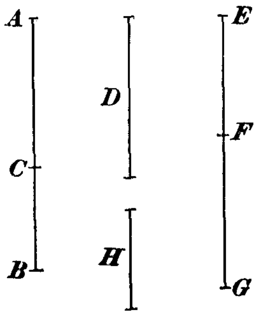
Neboť ježto $D:AB = E^2:FG^2$ a $BA:AC = FG^2:GH^2$, tedy stejnořadně $D:AC = E^2:GH^2$. Avšak D nemá se k AC jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, pročež ani E^2 nemá se ku GH^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; tedy E je s GH dle délky nesouměřitelná. A ježto $BA:AC = FG^2:GH^2$, jest tedy $FG^2 > GH^2$. Budiž tedy $FG^2 = GH^2 + K^2$; zvratně tedy $AB:BC = FG^2:K^2$. Avšak AB se má k BC jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež i FG^2 má se ke K^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; tedy FG je s K dle délky souměřitelná. A tak FG jest ve dvojmoci větší než GH o čtverec přímky s FG souměřitelné. I jsou FG, GH přímky změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, a žádná z nich není s E dle délky souměřitelná.

Tedy FH jest dvoučástnice třetí (vým. druhých č. 3.); což právě bylo dokázati.

LI.

Najdi dvoučástnici čtvrtou.

Mějme dvě čísla AC, CB, tak aby se nemělo AB k BC, ani ovšem k AC jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému. A mějme změrnou přímku D a s D budiž dle délky souměřitelná EF; změrná je tedy též EF. A učiňme $BA:AC = EF^2:FG^2$; tedy EF^2 jest souměřitelné s FG^2; pročež i FG je změrná. A ježto se nemá BA k AC jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, ani EF^2 se nemá k FG^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; tedy jest EF s FG dle délky nesouměřitelná. Pročež EF a FG jsou přímky změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; a tak EG je dvoučástná (X. XXXVI.).



Pravím ovšem, že také čtvrtá.

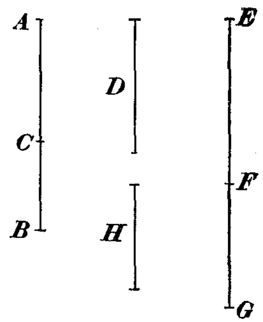
Neboť ježto $BA:AC = EF^2:FG^2$ [a $BA > AC$], tedy $EF^2 > FG^2$. Budiž tedy $EF^2 = FG^2 + H^2$. Proto zvratně $AB:BC = EF^2:H^2$. Avšak AB nemá se k BC jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; tedy ani EF^2 nemá se k H^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému. Pročež EF je s H dle délky nesouměřitelná; tedy $FE^2 > FG^2$ o čtverec přímky s EF nesouměřitelné. I jsou EF, FG přímky změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, a EF je s D dle délky souměřitelná.

Tedy jest EG dvoučástnice čtvrtá (vým. druhých č. 4.); což právě bylo dokázati.

LII.

Najdi dvoučástnici pátou.

Mějme dvě čísla AC, CB, tak aby se AB nemělo k žádnému z nich jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému a mějme nějakou přímku změrnou D, i budiž EF s D souměřitelná; jest tedy EF změrná. A učiňme $CA:AB = EF^2:FG^2$. CA však nemá se k AB jako



čtvercové číslo k číslu čtvercovému; tedy ani EF^2 nemá se k FG^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému. Pročež EF, FG jsou přímky změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; tedy EG jest dvoučástná.

Pravím ovšem, že také pátá.

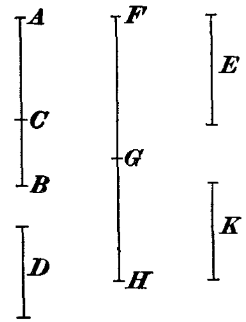
Neboť ježto $CA:AB = EF^2:FG^2$, obráceně $BA:AC = FG^2:EF^2$; pročež $GF^2 > FE^2$. Budiž tedy $GF^2 = EF^2 + H^2$. Pročež zvratně $AB:BC = GF^2:H^2$. AB však nemá se k BC jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; ani tedy FG^2 nemá se k H^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému. Pročež FG je s H dle délky nesouměřitelná; a tak $FG^2 > FE^2$ o čtverec přímky s FG nesouměřitelné. I jsou GF, FE přímky změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, a část menší EF je s danou změrnou D dle délky souměřitelná.

Tedy jest EG dvoučástnice pátá (vým. druhých č. 5.); což právě bylo dokázati.

LIII.

Najdi dvoučástnici šestou.

Mějme dvě čísla AC, CB, tak aby se AB nemělo k žádnému z nich jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; budiž pak i jiné číslo nečtvercové D a neměj se ani k BA ani k AC jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, a mějme nějakou změrnou přímku E a učiňme $D:AB = E^2:FG^2$; tedy E^2 je s FG^2 souměřitelné. I jest E změrná; pročež také FG je změrná. A ježto se nemá D k AB jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, tedy ani E^2 nemá se k FG^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež jest E s FG dle délky nesouměřitelná. Učiňme již opět $BA:AC = FG^2:GH^2$; tedy FG^2 je s GH^2 souměřitelné. Pročež jest HG^2 změrné; HG jest tedy změrná. A ježto se nemá BA k AC jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, ani FG^2 nemá se ku GH^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; jest tedy FG s GH dle délky nesouměřitelná. Pročež FG, GH jsou přímky změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; tedy FH je dvoučástná



Třeba již dokázati, že také šestá.

Neboť ježto $D:AB = E^2:FG^2$ a též $BA:AC = FG^2:GH^2$, tedy stejnořadně $D:AC = E^2:GH^2$. Avšak D nemá se k AC jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; nemá se tedy ani E^2 ku GH jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež E je s GH dle délky nesouměřitelná. Bylo pak dokázáno, že je též s FG nesouměřitelná. Tedy jest i FG i GH s E dle délky nesouměřitelná. A ježto $BA:AC = FG^2:GH^2$, tedy $FG^2 > GH^2$. Budiž tedy $FG^2 = GH^2 + K^2$; pročež zvratně

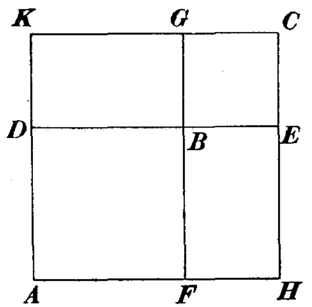
$AB:BC = FG^2:K^2$. Avšak AB nemá se k BC jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; a tak ani FG^2 nemá se ke K^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému. Tedy jest FG s K dle délky nesouměřitelná; pročež $FG^2 > GH^2$ o čtverec přímky s FG nesouměřitelné. I jsou FG, GH přímky změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné a žádná z nich není dle délky souměřitelná s danou změrnou E.

Tedy jest FH dvoučástnice šestá (vým. druhých č. 6.); což právě bylo dokázati.

Výtěžek.

Buďtež AB, BC dvěma čtverci a DB čiň s BE přímku, tedy též FB činí s BG přímku. I doplňme rovnoběžník AC; pravím že AC je čtverec a že AB, BC mají za střední úměrnou DG a také že AC, CB mají za střední úměrnou DC.

Neboť ježto $DB = BF$, $BE = BG$, celá tedy $DE = FG$. Avšak $DE = AH = KC$, $FG = AK = HC$; pročež také AH, KC, AK, HC jsou navzájem stejné. Tedy rovnoběžník AC je stejnostranný; jest pak i pravoúhlý; tedy AC je čtverec. A ježto $FB:BG = DB:BE$, avšak $FB:BG = AB:DG$ a $DB:BE = DG:BC$, tedy $AB:DG = DG:BC$; pročež DG je střední úměrnou mezi AB, BC.

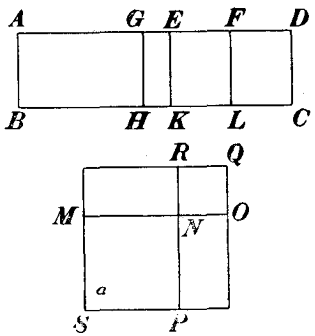


Pravím již, že také DC střední úměrnou mezi AC, CB.

Neboť ježto $AD:DK = KG:GC$ (neboť jsou střídavě stejné) a součetně $AK:KD = KC:CG$, avšak $AK:KD = AC:CD$ a $KC:CG = DC:CB$, tedy též $AC:DC = DC:BC$; pročež DC je střední úměrnou mezi AC, CB; což se mělo dokázati.

LIV.

Když útvar objímají přímka změrná a dvoučástnice první, strana čtverce s útvarem stejného jest nezměrná řečená dvoučástná.



Nuže útvar AC objímejte změrná AB a dvoučástnice první AD; pravím, že strana čtverce s útvarem AC stejného jest nezměrná řečená dvoučástná.

Neboť ježto AD jest dvoučástná první, rozdělena budiž ve své části v E, a větší částí buď AE. Zjevno zajisté, že AE, ED jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné a že $AE^2 > ED^2$ o čtverec přímky s AE souměřitelné a že jest AE souměřitelná dle délky s danou změrnou AB (vým. druhých č. 1.). Tož rozpolme ED v bodě F. A ježto $AE^2 > ED^2$ o čtverec přímky s AE souměřitelné, když tedy přistavíme k větší AE čtverec rovný čtvrtině čtverce části menší, t. čtverci EF^2, tak aby se nedostávalo doplňku čtvercového, rozděluje ji (AE) v části souměřitelné (X. XVII.). Přistavme tedy k AE útvar s EF^2 stejný, t. $AG \times GE$; jest tedy AG s EG dle délky souměřitelná. I veďmež od G, E, F s AB, CD rovnoběžky GH, EK, FL a sestavme čtverec SN stejný s rovnoběžníkem AH a s GK stejný NQ, i buďtež MN, NO v přímce; v přímce tedy jsou též RN, NP; a budiž doplněn rovnoběžník SQ; jest tedy SQ čtverec. A ježto $AG \times GE = EF^2$, tedy $AG:EF = FE:EG$; pročež také $AH:EL = EL:KG$; jest tedy EL střední úměrnou veličin AH, GK. Avšak $AH = SN$ a $GK = NQ$; pročež EL je střední úměrnou veličin SN, NQ. Je však týchž veličin SN, NQ střední úměrnou též MR; tedy $EL = MR$, a tak též $EL = PO$ (I. XLIII.). Také však $AH + GK = SN + NQ$; pročež celek $AC = SQ$, t. j. MO^2; tedy $AC = MO^2$.

Pravím, že MO jest nezměrná dvoučástná.

Neboť ježto AG je s GE souměřitelná, též AE jest souměřitelná s AG i s GE. Dáno však, že AE je též s AB souměřitelná; tedy též AG, GE jsou s AB souměřitelné. I jest AB změrná, pročež změrné jsou též AG, GE; změrné jsou tedy útvary AH, GK (X. XIX.) a jest AH s GK souměřitelné. Avšak $AH = SN$ a $GK = NQ$; pročež i SN, NQ, t. j. MN^2, NO^2, jsou útvary změrné a souměřitelné. A ježto AE jest dle délky s ED nesouměřitelná, avšak AE s AG jest nesouměřitelná, DE pak souměřitelná s EF, tedy též AG nesouměřitelná s EF (IX. XIII.); a tak i útvar AH je s EL nesouměřitelný. Avšak $AH = SN$ a $EL = MR$; pročež i útvar SN jest nesouměřitelný s MR. Avšak $SN:MR = PN:NR$; tedy PN je s NR nesouměřitelná. Avšak $PN = MN$ a $NR = NO$; tedy MN je s NO nesouměřitelná. I jest čtverec MN^2 s NO^2 souměřitelný a oba změrné; MN, NO jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné.

Pročež MO je dvoučástnice (X. XXXVI.) a čtverec její stejný je s AC; což právě bylo dokázati.

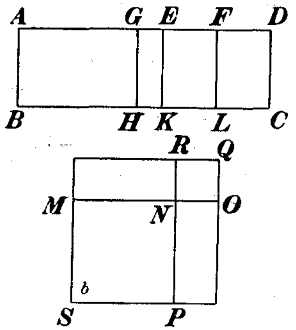
LV.

Když útvar objímají přímka změrná a dvoučástnice druhá, strana čtverce s útvarem stejného jest nezměrná řečená dvoustřednice první.

Nuže objímejtež útvar $ABCD$ změrná AB a dvoučástnice druhá AD; pravím, že strana čtverce rovného útvaru AC je dvoustředuice první.

Neboť ježto AD je dvoučástnice druhá, rozdělena buď ve své části v E, tak aby větší částí bylo AE; tedy AE, ED jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné a $AE^2 > ED^2$ o čtverec přímky s AE souměřitelné a menší část ED je s AB souměřitelná dle délky (vým. druhých č. 2.). Rozpolme ED v F a přistavme k AE útvar $AG \times GE$ stejný s EF^2, tak aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového; tedy AG je s GE dle délky souměřitelná (X. XVII.). I veďme z G, E, F přímky GH, EK, FL rovnoběžně s AB, CD a sestavme čtverec SN stejný s rovnoběžníkem AH a čtverec NQ stejný s GK a budiž MN

s NO v přímce; jest tedy též RN s NP v přímce. A doplňme čtverce SQ: patrno zajisté z toho, co svrchu dokázáno (X. LIII. výt.), že MR je střední úměrná veličin SN, NQ a stejná s EL a že $MO^2 = AC$.



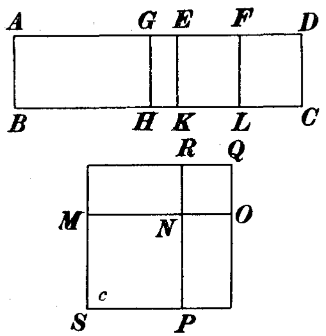
Má se tedy dokázati, že MO je dvoustřednice první.

Ježto AE je dle délky s ED nesouměřitelná, ED však s AB souměřitelná, tedy AE je s AB nesouměřitelná. A ježto AG je souměřitelná s EG, také AE jest souměřitelná s AG i s GE. Avšak AE je dle délky s AB nesouměřitelná; tedy též AG, GE jsou s AB nesouměřitelné. Pročež BA, AG, GE jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; a tak AH, GK jsou útvary střední (X. XXI.). A tak i SN, NQ jsou střední. Také tedy MN, NO jsou střední. A ježto AG je s GE dle délky souměřitelná, souměřitelný je též útvar AH s GK, t. j. SN s NQ, t. j. MN^2 s NO^2 (X. XI.). A ježto AE je s ED dle délky nesouměřitelná, avšak AE jest souměřitelná s AG, ED pak souměřitelná s EF, tedy AG je s EF nesouměřitelná; a tak je též nesouměřitelný útvar AH s EL, t. j. SN s MR, t. j. PN s NR, t. j. MN s NO jest délky nesouměřitelná. Bylo pak dokázáno, že MN, NO jsou také střední a ve dvojmoci souměřitelné; jsou tedy MN, NO střední, jen ve dvojmoci souměřitelné. Pravím již, že též objímají útvar změrný. Neboť ježto dáno jest, že DE jest souměřitelná s AB i s EF, tedy jest EF souměřitelná s EK. A obě jsou změrné; změrný jest tedy útvar EL, t. j. MR; MR však $= MN \times NO$. Když pak se sečtou dvě přímky střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, objímajíce útvar změrný, celá jest nezměrná i nazývá se dvoustřednicí první (X. XXXVII.).

Tedy MO je dvoustřednice první; což právě bylo dokázati.

LVI.

Když útvar objímají přímka změrná a dvoučástnice třetí, strana čtverce s útvarem stejného jest nezměrná řečená dvoustřednice druhá.



Nuže objímejtež útvar $ABCD$ přímka změrná AB a dvoučástnice třetí AD rozdělena jsouc ve své části v E, z nichž větší jest AE; pravím, že strana čtverce s útvarem AC stejného jest nezměrná řečená dvoustřednice druhá.

Nuže upravme totéž jako svrchu. A ježto AD je dvoučástná třetí, tedy AE, ED jsou přímky změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, a $AE^2 > ED^2$ o čtverec přímky s AE souměřitelné a žádná z přímek AE, ED není s AB dle délky souměřitelná. Podobně ovšem, jako svrchu dokázáno, dokážeme, že $MO^2 = AC$ a že MN, NO jsou střední jen ve dvojmoci souměřitelné; a tak MO jest dvoustřednice. Má se ovšem dokázati, že též druhá.

Ježto DE je dle délky nesouměřitelná s AB, t. j. s EK, souměřitelná však je DE s EF, tedy EF je s EK dle délky nesouměřitelná. I jsou změrné; tedy FE, EK jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné. Pročež EL, t. j. MR, jest útvar střední (X. XXI.); a objímají jej MN, NO; tedy $MN \times NO$ jest útvar střední.

Tedy MO je dvoustřednice druhá (X. XXXVIII.); což právě bylo dokázati.

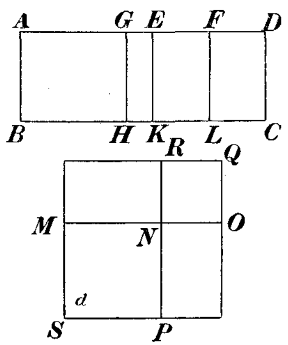
LVII.

Když útvar objímají přímka změrná a dvoučástnice čtvrtá, strana čtverce s útvarem stejného jest nezměrná řečená větší.

Nuže objímejtež útvar AC přímka změrná AB a dvoučástnice čtvrtá AD, rozdělena jsouc ve své části v E, z nichž větší budiž AE; pravím, že strana čtverce s útvarem AC stejného jest nezměrná řečená větší.

Neboť ježto AD je dvoučástnice čtvrtá, tedy AE, ED jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, a $AE^2 > ED^2$ o čtverec přímky s AE nesouměřitelné, a dle délky jest AE s AB souměřitelná (vým druhých čís. 4.).

Rozpolme DE v F a k AE přistavme rovnoběžník $AG \times GE$ stejný s EF^2; tedy AG je s GE dle délky nesouměřitelná (X. XVIII.). Veďme s AB rovnoběžky GH, EK, FL a ostatně totéž upravme jako dříve; zjevno zajisté, že strana čtverce s útvarem AC stejného jest MO. Má se ovšem dokázati, že MO jest nezměrná řečená větší. Ježto AG s EG dle délky jest nesouměřitelná, nesouměřitelné je AH s GK, t. j. SN s NQ; pročež MN, NQ jsou ve dvojmoci nesouměřitelné. A ježto AE jest dle délky s AB souměřitelná, AK je změrné, i jest $AK = MN^2 + NQ^2$; tedy také součet $MN^2 + NQ^2$ je změrný. A ježto DE je s AB, t. j. s EK, dle délky nesouměřitelná, avšak DE jest souměřitelná s EF, EF tedy je s EK dle délky nesouměřitelná. Pročež EK, EF jsou změrné jen ve dvojmoci souměřitelné; tedy LE, t. j. MR, jest střední (X. XXI.). A objímají je MN, NO; tedy $MN \times NO$ je střední. Také jest $MN^2 + NO^2$ změrné a MN, NO jsou ve dvojmoci nesouměřitelné. Když pak se sečtou dvě přímky ve dvojmoci nesouměřitelné, činící součet svých čtverců změrným, pravoúhelník pak středním, celá jest nezměrná a slove větší (X. XXXIX.).



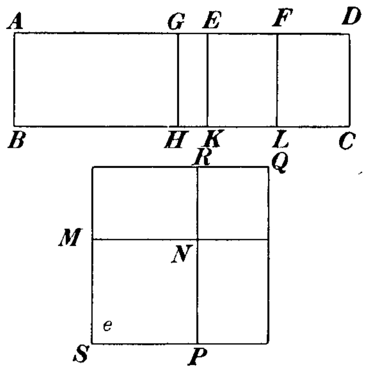
Tedy MO jest nezměrná řečená větší, a čtverec její roven jest útvaru AC; což právě bylo dokázati.

LVIII.

Když útvar objímají přímka změrná a dvoučástnice pátá, strana čtverce s útvarem stejného jest nezměrná řečená základnice útvaru změrného a středního.

Nuže objímejtež útvar AC přímka změrná AB a dvoučástnice pátá AD, rozdělena jsouc ve své části v E, tak aby větší částí bylo AE; pravím, že strana čtverce s útvarem AC stejného jest nezměrná řečená základnice útvaru změrného a středního.

Nuže upravme totéž jako v důkazech předešlých; zjevno zajisté, že stranou čtverce s útvarem AC stejného jest MO. Třeba ovšem dokázati, že MO jest základnice útvaru změrného a středního. Neboť ježto AG je s GE nesouměřitelná (X. XVIII.), nesouměřitelné jest tedy též AH s HE, t. j. MN^2 s NO^2; pročež MN, NO jsou ve dvojmoci nesouměřitelné.



A ježto AD je dvoučástnice pátá a úsečka její menší jest ED, tedy ED je s AB dle délky souměřitelná (vým. druhých č. 5.). Avšak AE je s ED nesouměřitelná; proto též AB je s AE dle délky nesouměřitelná; tedy AK, t. j. MN^2+NO^2, je střední. A ježto DE je s AB, t. j. s EK, dle délky souměřitelná, avšak DE jest souměřitelná s EF, tedy též EF je souměřitelná s EK. I jest EK změrná; proto též EL, t. j. MR, t. j. $MN \times NO$ je změrné (X. XIX.); pročež MN, NO jsou ve dvojmoci nesouměřitelné a součet čtverců svých činí středním, pravoúhelník pak změrným.

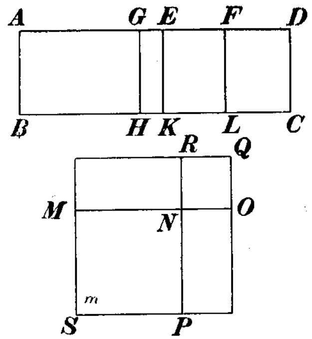
Tedy MO jest základnice útvaru změrného a středního (X. XL.) a čtverec její roven jest útvaru AC; což právě bylo dokázati.

LIX.

Když útvar objímají přímka změrná a dvoučástnice šestá, strana čtverce s útvarem stejného jest nezměrná řečená základnice dvou útvarů středních.

Nuže objímejtež útvar $ABCD$ přímka změrná AB a dvoučástnice šestá AD rozdělena jsouc ve své části v E, tak aby části větší bylo AE; pravím, že strana čtverce s AC stejného jest základnice dvou útvarů středních.

Upravme totéž jako v důkazech předešlých. Patrno zajisté, že strana čtverce s AC stejného jest MO a že MN je s NO ve dvojmoci nesouměřitelná. A ježto EA je s AB dle délky nesouměřitelná, tedy EA, AB jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; pročež AK, t. j. MN^2+NO^2, je střední (X. XXI.). Dále, ježto ED je s AB dle délky nesouměřitelná, nesouměřitelná tedy je též FE s EK; pročež FE, EK jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; tedy EL, t. j. MR, t. j. $MN \times NO$, je střední. A ježto AE je s EF nesouměřitelná, též AK je s EL nesouměřitelné. Avšak $AK = MN^2+NO^2$ a $EL = MN \times NO$, tedy MN^2+NO^2 je s $MN \times NO$ nesouměřitelné. A to i ono je střední, a MN, NO jsou ve dvojmoci nesouměřitelné.



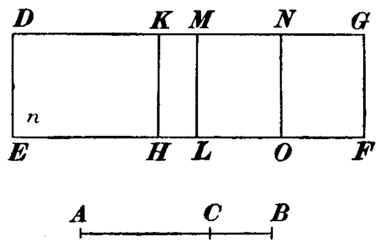
Tedy MO je základnice dvou útvarů středních (X. XLI.), a $MO^2 = AC$; což právě bylo dokázati.[24])

LX.

Čtverec přímky dvoučástné přistavený[25]) ke změrné šířkou činí dvoučástnici první.

Dvoučástnicí budiž AB, rozdělena jsouc ve své části v C, tak, aby větší částí bylo AC, a dána buď změrná DE a k DE přistavme útvar $DEFG$ stejný s AB^2, šířkou činící DG; pravím, že DG je dvoučástnice první.

Nuže budiž k DE přistaven útvar DH stejný s AC^2 a KL stejný s BC^2, zbývající tedy $2\,AC \times CB = MF$. Rozpolme MG v N a veďme s ML, GF rovnoběžku NO. Tedy $MO = NF = AC \times CB$. A ježto AB jest dvoučástná, rozdělena jsouc ve své části v C, tedy AC, CB jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné (X. XXXVI.); proto čtverce AC^2, CB^2 jsou změrné a navzájem souměřitelné;[26]) pročež i součet AC^2+CB^2 je změrný, a je stejný s DL; DL tedy je změrné. A jest přistaveno ke změrné DE; pročež DM je změrná a s DE dle délky souměřitelná (X. XX.). Dále, ježto AC, CB jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, tedy $2\,AC \times CB$, t. j. MF, je střední (X. XXI.). I jest přistaveno ke změrné ML; tedy též MG je změrná a s ML, t. j. s DE nesouměřitelná. Jest pak též MD změrná a s DE dle délky souměřitelná; pročež DM je s MG dle délky nesouměřitelná. A jsou změrné;



[24]) Následuje výtěžek, že $(a^2+b^2) > 2ab$, když $a \gtrless b$, nejspíše podvržený (srv. X. XLIV. ke konci).

[25]) Ve způsobě obdélníku.

[26]) Mějme $a : b = a : b$; znásobíce jeden poměr veličinou a, druhý veličinou b nabudeme úměry $a^2 : ab = ab : b^2$.

proto DM, MG jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; tedy DG je dvoučástnice (X. XXXVI.).

Má se ovšem dokázati, že také první.

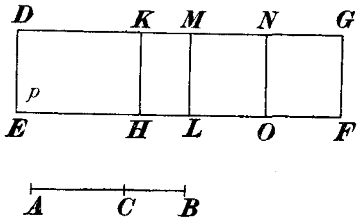
Ježto AC^2, CB^2 mají za střední úměrnou $AC \times CB$[26], tedy rovněž DH, KL mají za střední úměrnou MO. Pročež $DH : MO = MO : KL$, t. j. $DK : MN = MN : MK$; tedy $DK \times KM = MN^2$. A ježto AC^2 je s CB^2 souměřitelné, také DH jest souměřitelné s KL; a tak i DK jest souměřitelná s KM. A ježto $(AC^2 + CB^2) > 2\,AC \times CB$ (pozn. 24.), tedy též $DL > MF$; a tak i $DM > MG$. Také $DK \times KM = MN^2 = \frac{1}{4} MG^2$, a DK je s KM souměřitelná. Když pak jsou dvě přímky nestejné a přistaví se k delší části útvar rovný čtvrtině čtverce části kratší, tak aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, a dělí ji (delší) v úsečky souměřitelné, rozdíl čtverců jejich (těch přímek) je čtverec přímky s delší souměřitelné (X. XVII.). Tedy $DM^2 > MG^2$ o čtverec přímky s DM souměřitelné. I jsou DM, MG změrné, a DM jsouc částí delší jest dle délky souměřitelná s danou změrnou DE.

Tedy DG je dvoučástnice první (vým. druhých č. 1.); což právě bylo dokázati.

LXI.

Čtverec dvoustřednice první přistavený[25] ke změrné šířkou činí dvoučástnici druhou.

Dvoustřednicí první budiž AB rozdělena jsouc ve své úsečky střední v C, z nichž delší AC, a dána buď změrná DE a k DE přistavme rovnoběžník stejný s AB^2, šířkou činící DG; pravím, že je DG dvoučástnice druhá.



Nuže upravme totéž jako před tím. A ježto AB je dvoustřednice první, jsouc rozdělena v C, tedy AC, CB jsou střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, objímajíce útvar změrný (X. XXXVII.); pročež také AC^2, CB^2 jsou střední (X. XXI.); tedy DL je střední. A jest přistaveno ke změrné DE; tedy MD je změrná a s DE dle délky nesouměřitelná (X. XXII.). Dále, ježto $2\,AC \times CB$ je změrné, změrné jest i MF. A přistaveno jest ke změrné ML; pročež také MG je změrná a dle délky souměřitelná s ML, t. j. DE; tedy DM je s MG dle délky nesouměřitelná. A jsou změrné; tedy DM, MG jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; pročež DG je dvoučástnice.

Třeba ovšem dokázati, že též druhá.

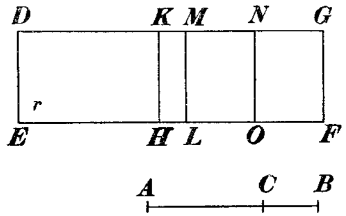
Neboť $(AC^2 + CB^2) > 2\,AC \times CB$, tedy též $DL > MF$, a tak i $DM > MG$. A ježto AC^2 je s CB^2 souměřitelné, také DH jest souměřitelné s KL; a tak i DK jest souměřitelná s KM. I jest $DK \times KM = MN^2$; tedy rozdíl čtverců DM^2, MG^2 je čtverec přímky s DM souměřitelné. Také jest MG s DE dle délky souměřitelná.

Tedy DG je dvoučástnice druhá (vým. druhých č. 2.)

LXII.

Čtverec dvoustřednice druhé přistavený[25] ke změrné šířkou činí dvoučástnici třetí.

Dvoustřednicí druhou budiž AB, jsouc rozdělena ve své střednice v C, tak aby delší úsečkou bylo AC, změrnou pak jakousi buď DE, a k DE přistavme rovnoběžník DF stejný s AB^2, který šířkou činí DG; pravím, že DG je dvoučástnice třetí.



Upravme totéž jako v důkazech předešlých. A ježto AB je dvoustřednice druhá, jsouc rozdělena v C, tedy AC. CB jsou střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, objímajíce útvar střední (X. XXXVIII.); a tak i součet $AC^2 + CB^2$ je střední, a jest roven útvaru DL, pročež i DL je střední. A přistaven je ke změrné DE; změrná tedy jest i MD a dle délky s DE souměřitelná. Z téže příčiny zajisté i MG je změrná a s ML, t. j. DE, nesouměřitelná; tedy DM i MG jsou změrné a s DE dle délky nesouměřitelné. A ježto AC je dle délky nesouměřitelná s CB a $AC : CB = AC^2 : AC \times CB$, také jest AC^2 s $AC \times CB$ nesouměřitelné. A tak i součet $AC^2 + CB^2$ je nesouměřitelný s $2\,AC \times CB$, t. j. DL s MF; a tak i DM jest nesouměřitelná s MG. A jsou změrné. Proto DG je dvoučástnice (X. XXXVI.).

Má se dokázati, že také třetí.

Podobně ovšem jako dříve při tom uvážíme, že $MD > MG$ a že DK je souměřitelná s KM. A $DK \times KM = MN^2$; tedy rozdíl čtverců DM^2 a MG^2 je čtverec přímky s DM souměřitelné (X. XVII.). A žádná z přímek DM, MG není s DE dle délky souměřitelná.

Tedy DG je dvoučástnice třetí (vým. druhých č. 3.); což právě bylo dokázati.

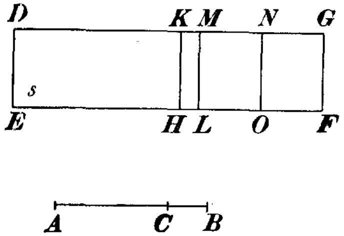
LXIII.

Čtverec nezměrné větší přistavený[25] ke změrné šířkou činí dvoučástnici čtvrtou.

Nezměrnou větší budiž AB, jsouc rozdělena v C, tak, aby byla $AC > CB$, změrnou pak DE, a k DE přistavme DF stejné s AB^2, šířkou činící DG; pravím, že DG jest dvoučástnice čtvrtá.

Upravme totéž jako v předešlých důkazech. A ježto AB jest nezměrná větší, jsouc rozdělena v C, jsou AC, CB ve dvojmoci nesouměřitelné, součet čtverců činíce změrným, pravoúhelník pak středním (X. XXXIX.). Ježto tedy součet $AC^2 + CB^2$ je změrný, tedy změrné jest i DL; pročež i DM je změrná a s DE dle délky souměřitelná. Dále, ježto $2\,AC \times CB$, t. j. MF, je střední a přistaveno ke změrné ML, změrná tedy jest i MG a s DE dle délky nesouměřitelná (X. XXII.); pročež i DM je s MG dle délky nesouměřitelná. Tedy DM, MG jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; pročež DG je dvoučástnice.

Má se dokázati, že také čtvrtá



Podobně zajisté jako dříve dokážeme, že $DM > MG$ a $DK \times KM = MN^2$. Ježto tedy AC^2 je s CB^2 nesouměřitelné, proto nesouměřitelné jest i DH s KL; a tak i DK je s KM nesouměřitelná. Když pak jsou dvě přímky nestejné a k větší se přistaví rovnoběžník rovný čtvrtině čtverce přímky menší, tak aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, a dělí ji v části nesouměřitelné, rozdíl čtverců jejich bude čtverec přímky s delší nesouměřitelné dle délky (X. XVIII.); tedy $DM^2 > MG^2$ o čtverec přímky s DM nesouměřitelné. Také jsou DM, MG změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, a DM jest souměřitelná s danou změrnou DE.

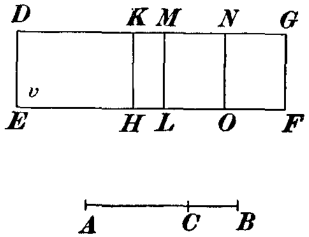
Tedy DG je dvoučástnice čtvrtá (vým. druhých č. 4.); což právě bylo dokázati.

LXIV.

Čtverec základnice útvaru změrného a středního přistavený[25]) ke změrné šířkou činí dvoučástnici pátou.

Základnicí útvaru změrného a středního budiž AB, jsouc rozdělena v úsečky v C, tak aby delší byla AC, a dána buď změrná DE, a k DE přistavme útvar DF stejný s AB^2, šířkou činící DG; pravím, že DG je dvoučástnice pátá.

Upravme totéž jako před tím. Ježto tedy AB jest základnice útvaru změrného a středního, jsouc rozdělena v C, tedy AC, CB jsou ve dvojmoci nesouměřitelné a součet čtverců jejich je střední, pravoúhelník pak změrný (X. XL). Ježto tedy $AC^2 + CB^2$ je střední, střední tedy jest DL; a tak DM je změrná a dle délky nesouměřitelná s DE (X. XXII.). Dále, ježto změrné jest $2\, AC \times CB$, t. j. MF, změrná tedy jest MG a s DE souměřitelná. Pročež DM je s MG nesouměřitelná; tedy DM, MG jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; a tak DG je dvoučástnice.



Pravím ovšem, že i pátá.

Podobně totiž dokážeme, že $DK \times KM = MN^2$ a že DK je s KM dle délky nesouměřitelná; tedy $DM^2 > MG^2$ o čtverec přímky s DM nesouměřitelné (X. XVIII.). I jsou DM, MG jen ve dvojmoci souměřitelné, a kratší MG s DE dle délky souměřitelná.

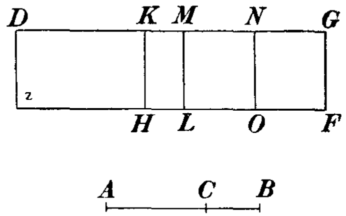
Tedy DG je dvoučástnice pátá (vým. druhých č. 5.); což právě bylo dokázati.

LXV.

Čtverec základnice dvou útvarů středních přistavený[25]) ke změrné šířkou činí dvoučástnici šestou.

Základnicí dvou útvarů středních budiž AB, jsouc rozdělena v C, změrnou pak budiž DE, a k DE přistavme útvar DF stejný s AB^2, šířkou činící DG; pravím, že DG je dvoučástnice šestá.

Nuže upravme totéž jako dříve. A ježto AB jest základnice dvou útvarů středních, jsouc rozdělena v C, tedy AC, CB jsou ve dvojmoci nesouměřitelné a součet čtverců jejich je střední a také součet čtverců jejich s pravoúhelníkem nesouměřitelný (X. XLI.), a tak dle důkazů předešlých DL i MF jsou střední. A jsou přistaveny ke změrné DE; změrná tedy jest DM i MG a s DE dle délky nesouměřitelná. A ježto součet $AC^2 + CB^2$ je s $2\, AC \times CB$ nesouměřitelný, tedy DL je s MF nesouměřitelné. Pročež i DM jest nesouměřitelná s MG; tedy DM, MG jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; proto DG je dvoučástnice.



Pravím ovšem, že také šestá.

Podobně zajisté opět dokážeme, že $DK \times KM = MN^2$ a že DK je s KM dle délky nesouměřitelná; a z téže příčiny ovšem $DM^2 > MG^2$ o čtverec přímky s DM dle délky nesouměřitelné (X. XVIII.). A žádná z úseček DM, MG není dle délky souměřitelná s danou změrnou DE.

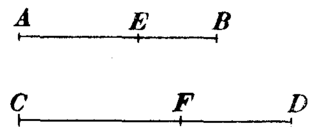
Tedy DG je dvoučástnice šestá (vým. druhých č. 6); což právě bylo dokázati.

LXVI.

Přímka s dvoučástnicí dle délky souměřitelná i sama je dvoučástnice a v pořadí táž.

Dvoučástnicí budiž AB a s AB dle délky souměřitelnou budiž CD; pravím CD je dvoučástnice a v pořadí táž jako AB.

Nuže, ježto AB je dvoučástnice, rozdělena buď ve své části v E a větší částí budiž AE; AE, EB jsou tedy změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné (X. XXXVI.). Učiňmež, aby se měla $AB : CD = AE : CF$ (VI. XII); tedy také zbývající $EB : FD = AB : CD$. AB však je s CD dle délky souměřitelná; souměřitelná tedy je též AE s CF a EB s FD. I jsou AE, EB změrné; změrné jsou tedy též CF, FD. A ježto $AE : CF = EB : FD$, střídavě tedy $AE : EB = CF : FD$. Avšak AE, EB jsou jen ve dvojmoci souměřitelné; pročež i CF, FD jsou jen ve dvojmoci souměřitelné. A jsou změrné; tedy CD je dvoučástnice.



Pravím ovšem, že je v pořadí táž jako AB.

Neboť rozdíl čtverců AE^2 a EB^2 je buďto čtverec přímky s AE souměřitelné nebo nesouměřitelné. Jestli tedy rozdíl čtverců AE^2, EB^2 čtverec přímky s AE souměřitelné, také CF^2 bude větší než FD^2 o čtverec přímky s CF souměřitelné (X. XIV.). A jestli AE souměřitelná s danou změrnou, také CF bude s ní souměřitelná (X. XII.), a z té příčiny jsou AB i CD dvoučástnice první, t. j. v pořadí tytéž. Pakli EB jest souměřitelná s danou změrnou, také FD je s ní souměřitelná, a z té příčiny opět bude (CD) v pořadí táž jako AB; neboť obě budou dvoučástnice druhé. Pakli žádná z úseček AE, EB není souměřitelná s danou změrnou, žádná z úseček CF, FD nebude s ní souměřitelná (X. III.), a obě jsou (dvoučástnice) třetí. Pakli $AE^2 > EB^2$ o čtverec přímky s AE nesouměřitelné, také $CF^2 > FD^2$ o čtverec přímky s CF nesouměřitelné (X. XIV.). A jestli AE souměřitelná s danou změrnou, také CF je s ní souměřitelná (X. XII.), a obě jsou čtvrté. Pakli EB, též FD, a obě jsou páté. Pakli žádná z úseček AE, EB, také žádná z úseček AE, EB, také žádná z úseček CF, FD není souměřitelná s danou změrnou, i budou obě šesté (vým. druhé).

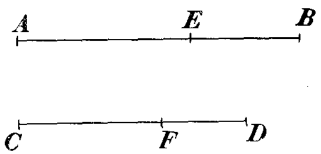
A tak přímka s dvoučástnicí dle délky souměřitelná je dvoučástnice a v pořadí táž; což právě bylo dokázati.

LXVII.

Přímka s dvoustřednicí dle délky souměřitelná i sama je dvoustřednice a v pořadí táž.

Dvoustřednicí budiž AB a s AB dle délky souměřitelnou buď CD; pravím, že CD je dvoustřednice a v pořadí táž jako AB.

Nuže, ježto AB je dvoustřednice, rozdělena buď ve své střednice v E; AE, EB jsou tedy střední, jen ve dvojmoci souměřitelné. I učiňme, aby se měla $AB : CD = AE : CF$; tedy také zbývající $EB : FD = AB : CD$. AB však dle délky souměřitelná s CD, souměřitelná tedy jak AE tak EB i s CF i s FD. Avšak AE, EB jsou střední; střední tedy též CF, FD. A ježto $AE : EB = CF : FD$ a jen ve dvojmoci souměřitelné jsou AE, EB, také CF, FD jsou jen ve dvojmoci souměřitelné. Bylo pak dokázáno, že také střední; tedy CD je dvoustřednice.



Pravím ovšem, že je také v pořadí táž jako AB.

Neboť ježto $AE : EB = CF : FD$, tedy též $AE^2 : AE \times EB = CF^2 : CF \times FD$; střídavě $AE^2 : CF^2 = AE \times EB : CF \times FD$. Avšak AE^2, CF^2 jsou souměřitelné; tedy souměřitelné jsou též součiny $AE \times EB$, $CF \times FD$ (X. XI.). Jestli tedy $AE \times EB$ změrné, také $CF \times FD$ je změrné (a z té příčiny jest přímka dvoustřednice první); pakli střední, střední; a obě přímky jsou (dvoustřednice) druhé (X. XXXVII. XXXVIII.).

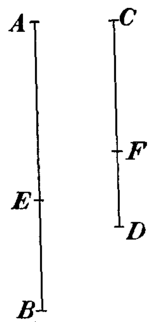
A proto CD bude v pořadí táž jako AB; což právě bylo dokázati.

LXVIII.

Přímka s nezměrnou větší souměřitelná i sama jest nezměrná větší.

Nezměrnou větší budiž AB, a s AB souměřitelnou buď CD; pravím, že CD jest nezměrná větší.

Budiž AB rozdělena v E; AE, EB jsou tedy ve dvojmoci nesouměřitelné a součet čtverců jejich je změrný, pravoúhelník pak střední (X. XXXIX.); a učiňme totéž jako dříve. A ježto $AB : CD = AE : CF$, rovněž $AB : CD = EB : FD$, tedy též $AE : CF = EB : FD$. Avšak AB je s CD souměřitelná; souměřitelná je tedy též AE i EB s CF i FD. A ježto $AE : CF = EB : FD$, také střídavě $AE : EB = CF : FD$; pročež i součetně $AB : BE = CD : DF$; tedy rovněž $AB^2 : BE^2 = CD^2 : DF^2$. Podobně zajisté dokážeme, že též $AB^2 : AE^2 = CD^2 : CF^2$. Tedy také $AB^2 : (AE^2 + EB^2) = CD^2 : (CF^2 + FD^2)$. Pročež i střídavě $AB^2 : CD^2 = (AE^2 + EB^2) : (CF^2 + FD^2)$. Avšak AB^2 je s CD^2 souměřitelné; tedy souměřitelné jest i $AE^2 + EB^2$ s $CF^2 + FD^2$. I jest $AE^2 + EB^2$ spolu změrné, i $CF^2 + FD^2$ je tedy spolu změrné. Podobně pak i $2 AE \times EB$ je souměřitelné s $2 CF \times FD$. A $2 AE \times EB$ je střední; střední tedy též $2 CF \times FD$. Proto CF, FD jsou ve dvojmoci nesouměřitelné (X. XIII) a součet čtverců jejich je spolu změrný a pravoúhelník střední; pročež celá CD jest nezměrná řečená větší.



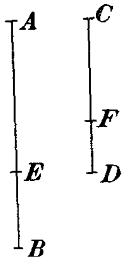
Tedy přímka s nezměrnou větší souměřitelná jest nezměrná větší; což právě bylo dokázati.

LXIX.

Přímka se základnicí útvaru změrného a středního souměřitelná jest i (sama) základnice útvaru změrného a středního.

Základnicí útvaru změrného a středního budiž AB, a s AB souměřitelnou buď CD; má se dokázati, že i CD jest základnice útvaru změrného a středního.

Rozdělena budiž AB ve své úsečky v E; tedy AE, EB jsou ve dvojmoci nesouměřitelné a součet čtverců jejich je střední, pravoúhelník však změrný (X. XL.); a upravme totéž jako dříve. Podobně zajisté dokážeme, že také CF, FD jsou ve dvojmoci nesouměřitelné a že $AE^2 + EB^2$ je s $CF^2 + FD^2$ souměřitelné, součin pak $AE \times EB$ s $CF \times FD$; a tak i součet $CF^2 + FD^2$ je střední, $CF \times FD$ však změrné.

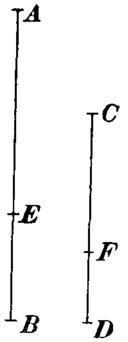


Tedy CD jest základnice útvaru změrného a středního; což právě bylo dokázati.

LXX.

Přímka se základnicí dvou útvarů středních souměřitelná jest základnice dvou útvarů středních.

Základcicí dvou útvarů středních budiž AB, a s AB souměřitelná buď CD; má se dokázati, že také CD jest základnice dvou útvarů středních.



Nuže, ježto AB jest základnice dvou útvarů středních, rozdělena buď ve své úsečky v E; AE, EB jsou tedy ve dvojmoci nesouměřitelné a součet čtverců jejich střední a pravoúhelník střední a rovněž součet AE^2+EB^2 s $AE\times EB^2$ nesouměřitelný (X. XLI.); i upravme totéž jako dříve. Podobně zajisté dokážeme, že také CF, FD jsou ve dvojmoci nesouměřitelné a že souměřitelné jest AE^2+EB^2 s CF^2+FD^2 a $AE\times EB$ s $CF\times FD$; pročež i součet CF^2+FD^2 je střední i $CF\times FD$ střední a mimo to CF^2+FD^2 s $CF\times FD$ nesouměřitelné.

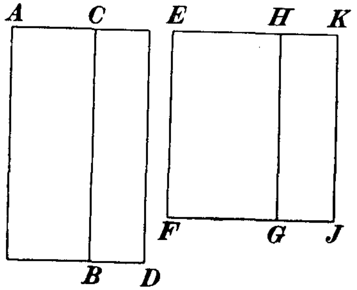
Tedy CD jest základnice dvou útvarů středních; což právě bylo dokázati.

LXXI.

Když se přidruží[27]) útvar změrný ke střednímu, vznikají čtyři přímky nezměrné: buď dvoučástnice nebo dvoustřednice první nebo nezměrná větší nebo základnice útvaru změrného a středního.

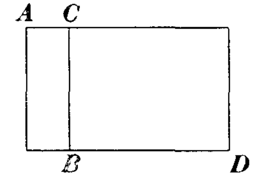
Změrným útvarem budiž AB, středním pak CD; pravím, že přímka ve dvojmoci s útvarem AD stejná jest buďto dvoučástnice nebo dvoustřednice první nebo nezměrná větší nebo základnice útvaru změrného a středního.

Neboť $AB > CD$ neb $AB < CD$. Budiž dříve $AB > CD$; a dána buď změrná EF a k EF přistavme EG stejné s AB, šířkou činící EH; a přistavme k EF (t. j. k HG) útvar HI stejný s DC, šířkou činící HK. A ježto AB je změrné a stejné s EG, změrné tedy také EG. A jest přistaveno k EF, šířkou činíc EH; EH tedy je změrná a s EF dle délky souměřitelná (X. XX.). Dále ježto CD je střední a stejné s HI, střední tedy jest i HI. A jest přistaveno ke změrné EF, šířkou činíc HK; HK je tedy změrná a dle délky nesouměřitelná s EF (X. XXII). A ježto CD je střední, AB však změrné, tedy AB je s CD nesouměřitelné; a tak i EG jest nesouměřitelné s HI. Avšak $EG:HI = EH:HK$; pročež EH je s HK dle délky nesouměřitelná. A obě jsou změrné; tedy EH, HK jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; jest tedy EK dvoučástnice, jsouc rozdělena v H. A ježto $AB > CD$, avšak $AB = EG$ a $CD = HI$, tedy též $EG > HI$; pročež i $EH > HK$. Buďto tedy $EH^2 > HK^2$ o čtverec přímky s EH dle délky souměřitelné nebo nesouměřitelné. — Budiž dříve větší o čtverec sou-

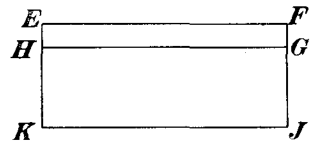


[27]) Ve způsobě obdélníkův, aby jednu stranu měly společnou.

měřitelné; a delší HE jest souměřitelná s danou změrnou EF; tedy EK je dvoučástnice první (vým. druhých č. 1.). EF pak je změrná; když pak útvar objímají přímka změrná a dvoučástnice první, přímka ve dvojmoci s útvarem stejná je dvoučástnice (X. LIV.). Přímka tedy ve dvojmoci s EI stejná je dvoučástnice; a tak i přímka stejná ve dvojmoci s AD dvoučástnice jest. — Nuže buď již $EH^2 > HK^2$ o čtverec přímky s EH nesouměřitelné; a delší EH jest dle délky souměřitelná s danou změrnou EF; pročež EK je dvoučástnice čtvrtá (vým. druhých č. 4.). EF pak je změrná; když pak útvar objímají změrná a dvoučástnice čtvrtá, přímka ve dvojmoci s útvarem stejná jest nezměrná řečená větší (X. LVII.). Tedy přímka ve dvojmoci stejná s útvarem EI jest nezměrná větší; a tak i přímka ve dvojmoci stejná s AD jest nezměrná větší.



Nuže buď již $AB < CD$, tedy též $EG < HI$ a tak i $EH < HK$. Avšak $HK^2 > EH^2$ buď o čtverec přímky s HK souměřitelné nebo nesouměřitelné. Dříve buď větší o čtverec přímky souměřitelné dle délky; a kratší EH je dle délky souměřitelná s danou změrnou EF; tedy EK je dvoučástnice druhá (vým druhých č. 2.). EF pak je změrná; když pak útvar objímají přímka změrná a dvoučástnice druhá, přímka ve dvojmoci s útvarem stejná je dvoustřednice první (X. LV.). Pročež přímka ve dvojmoci stejná s EI je dvoustřednice první; a tak i přímka ve dvojmoci stejná s AD je dvoustřednice první. — Nuže již buď $HK^2 > HE^2$ o čtverec přímky s HK nesouměřitelné. A kratší EH jest souměřitelná s danou změrnou EF; EK je tedy dvoučástnice pátá (vým. druhých č. 5.). EF pak je změrná; když pak útvar objímají přímka změrná a dvoučástnice pátá, přímka ve dvojmoci s útvarem stejná jest základnice útvaru změrného a středního (X. LVIII.); a tak i přímka ve dvojmoci stejná s útvarem AD jest základnice útvaru změrného a středního.



Když se tedy přidruží útvar změrný ke střednímu, vznikají čtyři přímky nezměrné: buďto dvoučástnice nebo dvoustřednice první nebo nezměrná větší nebo základnice útvaru změrného a středního; což právě bylo dokázati.

LXXII.

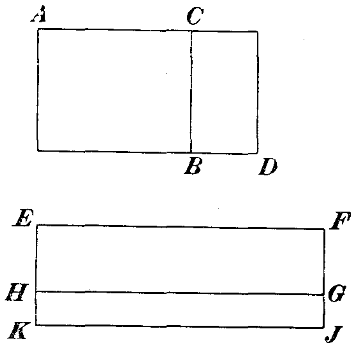
Když se k sobě přidruží[27]) dva útvary střední, vespolek nesouměřitelné, ze dvou zbývajících přímek[28]) stanou se nezměrné: buďto dvoustřednice druhá nebo základnice dvou útvarů středních.

Buďte k sobě přidruženy dva útvary střední AB, CD, vespolek

[28]) Kromě strany společné a jejích rovnoběžek, s ní stejných.

nesouměřitelné; pravím, že přímka ve dvojmoci s AD stejná jest buďto dvoustřednice druhá nebo základnice dvou utvarů středních.

Neboť buďto $AB > CD$ nebo $AB < CD$. Budiž dříve třebas $AB > CD$; a dána buď změrná EF, a k EF přistavmež útvar EG s AB stejný, šířkou činící EH, a s CD stejný HI, šířkou činící HK.



A ježto AB i CD jsou střední, střední jsou tedy též EG i HI. A jsou přistaveny ke změrné FE, šířkami činíce EH, HK; pročež EH i HK jsou změrné a s EF dle délky nesouměřitelné (X. XXII.). A ježto AB je s CD nesouměřitelné a $AB = EG$, $CD = HI$, tedy nesouměřitelné je též EG s HI. Avšak $EG : HI = EH : HK$; pročež EH je s HK dle délky nesouměřitelná. Tedy EH, HK jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; pročež EK je dvoučástnice. Avšak $EH^2 > HK^2$ o čtverec přímky s EH souměřitelné nebo nesouměřitelné. Budiž dříve větší o čtverec přímky dle délky souměřitelné. A není ani EH ani HK dle délky souměřitelná s danou změrnou EF; tedy EK je dvoučástnice třetí (vým. druhých č. 3.). EF pak je změrná; když pak útvar objímají přímka změrná a dvoučástnice třetí, přímka ve dvojmoci s útvarem stejná je dvoustřednice druhá (X. LVI.). Tedy přímka ve dvojmoci stejná s EI, t. j. s AD, je dvoustřednice druhá. — Nuže buď již $EH^2 > HK^2$ o čtverec přímky s EH nesouměřitelné. I jsou EH i HK dle délky nesouměřitelné s EF; tedy EK je dvoučástnice šestá (vým. druhých č. 6.). Když pak útvar objímají přímka změrná a dvoučástnice šestá, přímka ve dvojmoci s útvarem stejná jest základnice dvou útvarů středních (X. LIX.). A tak i přímka ve dvojmoci stejná s AD jest základnice dvou útvarů středních.

(Podobně zajisté dokážeme, i když $AB < CD$, že přímka ve dvojmoci s AD stejná buď je dvoustřednice druhá nebo základnice dvou útvarů středních.)

Když se tedy k sobě přidruží dva útvary střední, vespolek nesouměřitelné, ze dvou zbývajících přímek stanou se nezměrné: buďto dvoustřednice druhá nebo základnice dvou útvarů středních.

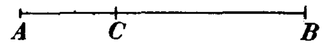
Přímka dvoučástná a nezměrné od ní odvozené ani se střednicí ani navzájem nejsou totožné. Neboť čtverec přímky střední přistavený ke změrné šířkou činí přímku změrnou a nesouměřitelnou dle délky s tou, k níž jest přistaven (X. XXII.). Čtverec pak dvoučástnice přistavený ke změrné, šířkou činí dvoučástnici první (X. LX.). A čtverec dvoustřednice první přistavený ke změrné šířkou činí dvoučástnici druhou (X. LXI.). Čtverec pak dvoustřednice druhé přistavený ke změrné šířkou činí dvoučástnici třetí (X. LXII.). A čtverec nezměrné větší přistavený ke změrné šířkou činí dvoučástnici čtvrtou (X. LXIII.). Čtverec pak základnice útvaru změrného a středního přistavený ke změrné šířkou činí dvoučástnici pátou (X. LXIV.). A čtverec základnice dvou útvarů středních přistavený ke změrné šířkou činí dvoučástnici šestou (X. LXV.). Řečené pak šířky liší se jak od přímky prvotní tak navzájem; od prvotní, poněvadž je to změrná, navzájem pak, ježto v pořadí nejsou tytéž; a tak i samy přímky nezměrné navzájem se liší.

LXXIII.

Když se oddělí od přímky změrné změrná, jen ve dvojmoci s celou souměřitelná, zbývající část jest nezměrná; i nazývej se *úsečnicí*.

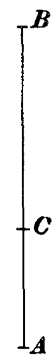
Nuže budiž od změrné AB oddělena změrná BC jen ve dvojmoci s celou souměřitelná; pravím, že zbývající AC jest nezměrná řečená úsečnice.

Neboť ježto AB je s BC dle délky nesouměřitelná a $AB : BC = AB^2 : AB \times BC$, tedy nesouměřitelné jest AB^2 s $AB \times BC$. Avšak s AB^2 souměřitelné jsou čtverce $AB^2 + BC^2$ (X. XV.) a s $AB \times BC$ souměřitelné jest $2\,AB \times BC$. A jelikož $AB^2 + BC^2 = 2AB \times BC + CA^2$ (II. VII.), tedy též se zbývajícím AC^2 nesouměřitelné jest $AB^2 + BC^2$. Avšak $AB^2 + BC^2$ je změrné; tedy AC jest nezměrná; nazývej se úsečnicí. Což právě bylo dokázati.



LXXIV.

Když se od přímky střední oddělí střední, jen ve dvojmoci s celou souměřitelná, objímající s celou útvar změrný, zbývající část jest nezměrná; i nazývej se *střednicovou úsečnicí první*.



Nuže budiž od přímky střední AB oddělena střední BC, jen ve dvojmoci s AB souměřitelná, s AB však činící útvar změrný $AB \times BC$; pravím, že zbývající AC jest nezměrná; i nazývej se střednicovou úsečnicí první.

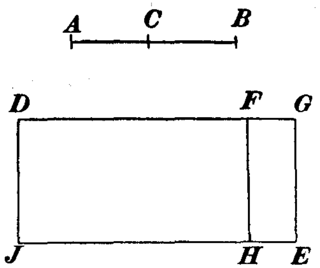
Neboť, ježto AB, BC jsou střední, střední jsou i čtverce AB^2, BC^2. Změrné však $2\,AB \times BC$; tedy $AB^2 + BC^2$ je s $2\,AB \times BC$ nesouměřitelné; pročež i se zbývajícími AC^2 jest $2\,AB \times BC$ nesouměřitelné, ježto, když i s jednou částí celek jest nesouměřitelný, i prvotní veličiny budou nesouměřitelné (X. XVI.). Avšak $2\,AB \times BC$ je změrné, proto AC^2 jest nezměrné. Tedy AC jest nezměrná; i nazývej se střednicovou úsečnicí první.

LXXV.

Když se od přímky střední oddělí střední, jen ve dvojmoci s celou souměřitelná, objímající s celou útvar střední, zbývající část jest nezměrná; i nazývej se *střednicovou úsečnicí druhou.*

Nuže budiž od přímky střední AB oddělena střední BC, jen ve dvojmoci s celou AB souměřitelná, objímající však s celou AB útvar střední $AB \times BC$ (X. XXVIII.); pravím, že zbývající AC jest nezměrná; i nazývej se střednicovou úsečnicí druhou.

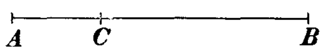
Nuže dána buď změrná DI, a k DI přistavmež útvar DE stejný s $AB^2 + BC^2$, šířkou činící DG, a přistavme k DI útvar DH stejný s $2\,AB \times BC$, šířkou činící DF; zbývající tedy $FE = AC^2$ (II. VII.). A ježto čtverce AB^2 i BC^2 jsou střední a souměřitelné, tedy střední jest i DE, a přistaveno jest ke změrné DI, šířkou činíc DG; změrná tedy jest i DG a s DI dle délky nesouměřitelná. Dále, ježto $AB \times BC$ je střední, tedy též $2\,AB \times BC$ je střední. A je stejné s DH; pročež i DH je střední. A jest přistaveno ke změrné DI, šířkou činíc DF; tedy DF je změrná a s DI dle délky nesouměřitelná (X. XXII.). A ježto AB, BC jsou jen ve dvojmoci souměřitelné, tedy AB je s BC dle délky nesouměřitelná; pročež nesouměřitelný jest i čtverec AB^2 s $AB \times BC$. Avšak s AB^2 souměřitelné jest $AB^2 + BC^2$ (X. XV.), a s $AB \times BC$ souměřitelné jest $2\,AB \times BC$; tedy $2\,AB \times BC$ je s $AB^2 + BC^2$ nesouměřitelné. Avšak $AB^2 + BC^2 = DE$ a $2\,AB \times BC = DH$. Tedy DE je s DH nesouměřitelné. A $DE : DH = GD : DF$; pročež GD je s DF nesouměřitelné. A obě jsou změrné; tedy GD, DF jsou změrné jen ve dvojmoci souměřitelné; proto FG jest úsečnice (X. LXXIII.). DI však je změrná; útvar pak objímaný přímkou změrnou a nezměrnou jest nezměrný (X. XX.), a přímka s ním ve dvojmoci stejná nezměrná jest. A $AC^2 = FE$; tedy AC jest nezměrná. I nazývej se střednicovou úsečnicí druhou; což právě bylo dokázati.



LXXVI.

Když se oddělí od přímky přímka, ve dvojmoci s celou nesouměřitelná, a s celou činí zároveň součet čtverců změrný, pravoúhelník pak střední, zbývající část nezměrná jest; i nazývej se nezměrnou *menší.*

Nuže budiž od přímky AB oddělena BC ve dvojmoci s celou nesouměřitelná, vyhovujíc daným podmínkám (X. XXXIII.); pravím, že zbývající AC jest nezměrná řečená menší.



Neboť, ježto $AB^2 + BC^2$ je změrné a $2\,AB \times BC$ střední, tedy $AB^2 + BC^2$ je s $2\,AB \times BC$ nesouměřitelné, a zvratně se zbývajícím AC^2 nesouměřitelné jest $AB^2 + BC^2$ (X. XVI.). Avšak $AB^2 + BC^2$ je změrné; pročež AC^2 jest nezměrné. Tedy AC jest nezměrná; i nazývej se nezměrnou menší; což právě bylo dokázati.

LXXVII.

Když se oddělí od přímky přímka, ve dvojmoci s celou nesouměřitelná, a s celou činí součet čtverců střední a dvojnásobný pravoúhelník změrný, zbývající část nezměrná jest; i nazývej se *základnicí útvaru se změrným celku střednímu rovného.*

Nuže budiž od přímky AB oddělena přímka BC, ve dvojmoci s AB nesouměřitelná, vyhovujíc daným podmínkám (X. XXXIV.); pravím, že zbývající AC je svrchu řečená nezměrná.

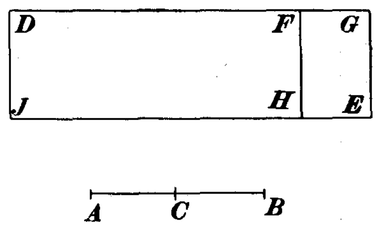
Neboť, ježto $AB^2 + BC^2$ je střední a $2\,AB \times BC$ změrné, tedy $AB^2 + BC^2$ je s $2\,AB \times BC$ nesouměřitelné; tedy též zbývající AC^2 jest nesouměřitelné s $2\,AB \times BC$ (X. XVI.). A $2\,AB \times BC$ je změrné; tedy AC^2 jest nezměrné. Pročež AC jest nezměrná; i nazývej se základnicí útvaru se změrným celku střednímu rovného.

LXXVIII.

Když se oddělí od přímky přímka, ve dvojmoci s celou nesouměřitelná, a s celou činí jak součet čtverců střední tak i dvojnásobný pravoúhelník střední a také součet čtverců s dvojnásobným pravoúhelníkem nesouměřitelný, zbývající část nezměrná jest; i nazývej se *základnicí útvaru se středním celku střednímu rovného.*

Nuže budiž od přímky AB oddělena přímka BC, jsouc ve dvojmoci s AB nesouměřitelná, vyhovujíc daným podmínkám (X. XXXV); pravím, že zbývající AC jest nezměrná řečená základnice útvaru se středním celku střednímu rovného.

Nuže buď dána změrná DI, a k DI přistavmež útvar DE stejný s $AB^2 + BC^2$, šířkou činící DG, a oddělmež útvar DH stejný s $2\,AB \times BC$ (šířkou činící DF). Tedy zbytek $FE = AC^2$; a tak AC je stranou čtverce stejného s FE. A ježto $AB^2 + BC^2$ je střední a stejné s DE, tedy DE je střední. A přistaveno jest ke změrné DI, šířkou činíc DG; pročež DG je změrná a s DI dle délky nesouměřitelná. Dále, ježto $2\,AB \times BC$ je střední a stejné s DH; tedy DH je střední. A jest přistaveno ke změrné DI, šířkou činíc DF; pročež také DF je změrná a s DI dle délky nesouměřitelná. A poněvadž $AB^2 + BC^2$ je s $2\,AB \times BC$ nesouměřitelné, tedy též DE je s DH nesouměřitelné. A $DE : DH = DG : DF$; pročež DG jest nesouměřitelná s DF. A obě jsou změrné; tedy DG, DF jsou změrné jen ve dvojmoci souměřitelné. Pročež FG jest úsečnice (X. LXXIII); FH pak změrná. Útvar však objímaný přímkou změrnou a úsečnicí jest nezměrný (srv. X. XXVI.), a přímka



vę dvojmoci s ním stejná jest nezměrná. I jest $FE = AC^2$; tedy AC jest nezměrná; i nazývej se základnicí útvaru se středním celku střednímu rovného; což právě bylo dokázati.

LXXIX.

K úsečnici pouze jediná přísluší přímka změrná, s celou jen ve dvojmoci souměřitelná.

Úsečnicí budiž AB a k ní příslušej BC; tedy AC, CB jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; pravím, že k AB jiná nepřísluší změrná, s celou jen ve dvojmoci souměřitelná.

Nuže, možno-li, příslušej BD; též AD, BD tedy jsou jen ve dvojmoci souměřitelné (X. LXXIII.). A ježto $(AD^2 + DB^2) - 2AD \times DB = (AC^2 + CB^2) - 2AC \times CB$ (neboť rozdíl tu i onde jest AB^2 [II. VII.]); tedy střídavě $(AD^2 + DB^2) - (AC^2 + CB^2) = 2AD \times DB - 2AC \times CB$. Avšak $(AD^2 + DB^2) - (AC^2 + CB^2)$ je změrné, neboť to i ono je změrné. Pročež i $2AD \times DB - 2AC \times CB$ je změrné; což právě jest nemožné; neboť to i ono je střední (X. XXI.), rozdíl pak útvarů středních není změrný (X. XXVI.). Tedy k AB jiná nepřísluší přímka změrná, s celou jen ve dvojmoci souměřitelná.

Tedy k úsečnici pouze jediná přísluší přímka změrná, s celou jen ve dvojmoci souměřitelná; což právě bylo dokázati.

LXXX.

K střednicové úsečnici první pouze jediná přísluší přímka střední, s celou jen ve dvojmoci souměřitelná a objímající s celou útvar změrný.

Nuže buď střednicovou úsečnicí první AB a k AB příslušej BC; tedy AC, CB jsou střední, jen ve dvojmoci souměřitelné a objímají útvar změrný $AC \times CB$ (X. LXXIV.); pravím, že k AB jiná nepřísluší přímka střední, s celou jen ve dvojmoci souměřitelná a objímající s celou útvar změrný.

Nuže, možno-li, příslušej také DB; tedy AD, DB jsou střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, a objímají útvar změrný $AD \times DB$. A ježto $(AD^2 + DB^2) - 2AD \times DB = (AC^2 + CB^2) - 2AC \times CB$ (neboť tu i onde je týž rozdíl AB^2 [II. VII.]); tedy střídavě $(AD^2 + DB^2) - (AC^2 + CB^2) = 2AD \times DB - 2AC \times CB$. Avšak $2AD \times DB - 2AC \times CB$ je změrné, neboť to i ono je změrné. Pročež také $(AD^2 + DB^2) - (AC^2 + CB^2)$ je změrné; což právě jest nemožné; neboť obojí je střední (X. LXXIV.). Rozdíl pak útvarů středních není změrný (X. XXVI.).

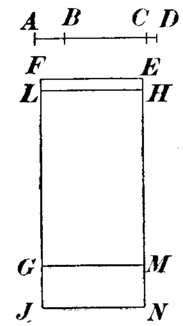
Tedy k střednicové úsečnici první pouze jediná přísluší přímka střední, s celou jen ve dvojmoci souměřitelná a objímající s celou útvar změrný; což právě bylo dokázati.

LXXXI.

K střednicové úsečnici druhé pouze jediná přísluší přímka střední, s celou jen ve dvojmoci souměřitelná a objímající s celou útvar střední.

Střednicovou úsečnicí druhou budiž AB a k AB příslušej BC; tedy AC, BC jsou střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, a objímají útvar střední $AC \times CB$ (X. LXXV.); pravím, že k AB jiná nebude příslušeti přímka střední, s celou jen ve dvojmoci souměřitelná a objímající s celou útvar střední.

Nuže, možno-li, příslušej BD; tedy též AD, DB jsou střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, a objímají útvar střední $AD \times DB$. I buď dána změrná EF, a k EF přistavmež útvar EG stejný s $AC^2 + CB^2$, šířkou činící EM; oddělmež útvar HG stejný s $2AC \times CB$, šířkou činící HM; tedy zbývající $EL = AB^2$; a tak AB je stranou čtverce stejného s EL. Opět již přistavme k EF útvar EI stejný s $AD^2 + DB^2$, šířkou činící EN; jest pak rovněž $EL = AB^2$; zbývající tedy $HI = 2AD \times DB$ (II. VII.). A ježto AC, CB jsou střední, střední tedy také jest $AC^2 + CB^2$. A $AC^2 + CB^2 = EG$; pročež i EG je střední. A přistaveno jest ke změrné EF, šířkou činíc EM; tedy EM je střední a s EF dle délky nesoumětitelná. Dále, ježto $AC \times CB$ je střední, též $2AC \times CB$ je střední (X. XXII. důsl.). A je stejné s HG; tedy též HG je střední. A jest přistaveno ke změrné EF, šířkou činíc HM; pročež i HM je změrná a s EF dle délky nesouměřitelná. A ježto AC, CB jsou jen ve dvojmoci souměřitelné, tedy AC je s CB dle délky nesouměřitelná. Avšak $AC : CB = AC^2 : AC \times CB$; pročež AC^2 je s $AC \times CB$ nesouměřitelné. Avšak s AC^2 jest souměřitelné $AC^2 + CB^2$ a s $AC \times CB$ souměřitelné jest $2AC \times CB$; tedy $AC^2 + BC^2$ je s $2AC \times CB$ nesouměřitelné. I jest $AC^2 + CB^2 = EG$ a $2AC \times CB = GH$; pročež EG je s GH nesouměřitelné. A $EG : HG = EM : HM$; tedy EM je s HM dle délky nesouměřitelná. A obě jsou změrné; proto EM, MH jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné. Tedy EH jest úsečnice (X. LXXIII.), a přísluší k ní HM. Podobně zajisté dokážeme, že též HN k ní přísluší; tedy k úsečnici jiná a jiná přísluší přímka, s celou jen ve dvojmoci souměřitelná; což právě jest nemožné (X LXXIX.).

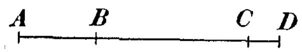


Tedy k střednicové úsečnici druhé pouze jediná přísluší přímka střední, s celou jen ve dvojmoci souměřitelná a objímající s celou útvar střední; což právě bylo dokázati.

LXXXII.

K nezměrné menší pouze jediná přísluší přímka ve dvojmoci s celou nesouměřitelná, činící s celou součet čtverců změrný a dvojnásobný pravoúhelník střední.

Nezměrnou menší budiž AB, a k AB příslušej BC; tedy AC, CB jsou ve dvojmoci nesouměřitelné a činí součet čtverců změrný a dvojnásobný pravoúhelník střední (X. LXXVI.); pravím, že k AB jiná přímka nebude příslušeti týmž podmínkám vyhovující.



Nuže, možno-li příslušej BD; tedy též AD, BD jsou ve dvojmoci nesouměřitelné, vyhovujíce svrchu řečeným podmínkám. A ježto $(AD^2 + DB^2) - (AC^2 + CB^2) = 2\,AD \times DB - 2\,AC \times CB$ a $(AD^2 + DB^2) - (AC^2 + CB^2)$ je změrné (neboť to i ono je změrné), také tedy $2\,AD \times DB - 2\,AC \times CB$ je změrné, což právě jest nemožné (X. XXVI.), neboť obojí je střední.

Tedy k nezměrné menší pouze jediná přísluší přímka ve dvojmoci s celou nesouměřitelná a činící s celou součet čtverců zároveň změrný, dvojnásobný pak pravoúhelník střední; což právě bylo dokázati.

LXXXIII.

K základnici útvaru se změrným celku střednímu rovného pouze jediná přísluší přímka ve dvojmoci s celou nesouměřitelná, činící s celou součet čtverců střední a dvojnásobný pravoúhelník změrný.

Základnicí útvaru se změrným celku střednímu rovného budiž AB a k AB příslušej BC; tedy AC, CB jsou ve dvojmoci nesouměřitelné, daným podmínkám vyhovujíce (X. LXXVII.); pravím, že k AB nebude jiná přímka příslušeti týmž podmínkám vyhovující.

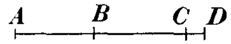
Nuže, možno-li, příslušej BD; tedy též přímky AD, DB jsou ve dvojmoci nesouměřitelné, daným podmínkám vyhovujíce. Ježto tedy stejně jako před tím (X. LXXXII.) $AD^2 + DB^2) - (AC^2 + CB^2) = 2\,AD \times DB - 2\,AC \times CB$, avšak $2\,AD \times DB - 2\,AC \times CB$ je změrné (neboť to i ono je změrné); tedy též $(AD^2 + DB^2) - (AC^2 + CB^2)$ je změrné; což právě jest nemožné, neboť to i ono je střední (X. XXVI.). Tedy k AB nebude jiná příslušeti přímka ve dvojmoci s celou nesouměřitelná a vyhovující s celou svrchu řečeným podmínkám; tedy bude příslušeti pouze jediná; což právě bylo dokázati.

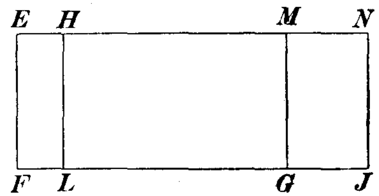
LXXXIV.

K základnici útvaru se středním celku střednímu rovného pouze jediná přísluší přímka ve dvojmoci s celou nesouměřitelná, činící s celou součet čtverců střední a dvojnásobný pravoúhelník střední a také se součtem čtverců nesouměřitelný.

Základnicí útvaru se středním celku střednímu rovného budiž AB, a k ní příslušej BC; tedy AB, CB jsou ve dvojmoci nesouměřitelné, vyhovujíce svrchu řečeným podmínkám. Pravím, že k AB nebude jiná přímka příslušeti oněm podmínkám vyhovující.

Nuže, možno-li, příslušej BD, takže by též AD, DB byly ve dvojmoci nesouměřitelné a činily zároveň $AD^2 + DB^2$ středním a $2\,AD \times DB$ středním a rovněž $AD^2 + DB^2$ nesouměřitelným s $2\,AD \times DB$; a dána buď změrná EF, a k EF přistavmež EG stejné s $AC^2 + CB^2$, šířkou činící EM, a přistavme k EF útvar HG stejný s $2\,AC \times CB$, šířkou činící HM; tedy zbývající $AB^2 = EL$ (II. VII.); tedy AB je strana čtverce stejného s EL. Dále přistavme k EF útvar EI stejný s $AD^2 + DB^2$, šířkou činící EN. Jest pak rovněž $AB^2 = EL$. Tedy zbývající $2\,AD \times DB = HI$ (II. VII.). A ježto $AC^2 + CB^2$ je střední a stejné s EG, tedy též EG je střední. A jest přistaveno ke změrné EF, šířkou činíc EM; pročež EM je změrná a dle délky s EF nesouměřitelná (X. XXII.). Dále, ježto $2\,AC \times CB$ je střední a stejné s HG, tedy též HG je střední. A jest přistaveno ke změrné EF, šířkou činíc HM; pročež HM je změrná a dle délky s EF nesouměřitelná. A ježto $AC^2 + CB^2$ je s $2\,AC \times CB$ nesouměřitelné, nesouměřitelné jest i EG s GH; tedy též EM je s MH dle délky nesouměřitelná. A obě jsou změrné; tedy EM, MH jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné. Pročež EH jest úsečnice (X. LXXIII.), a k ní přísluší HM. Podobně zajisté dokážeme, že opět EH jest úsečnice a že k ní přísluší HN. Tedy k úsečnici jiná a jiná přísluší přímka změrná, jen ve dvojmoci s celou souměřitelná; což dokázáno nemožným (X. LXXIX.). Nebude tedy k AB příslušeti přímka jiná.





Tedy k AB pouze jediná přísluší přímka ve dvojmoci s celou nesouměřitelná, činící s celou součet čtverců zároveň střední a dvojnásobný pravoúhelník střední a také součet čtverců jejich s dvojnásobným pravoúhelníkem nesouměřitelný; což právě bylo dokázati.

Výměry třetí.

1. Dána-li přímka změrná a úsečnice, když celá ve dvojmoci jest větší než příslušná o čtverec přímky s celou souměřitelné dle délky a celá jest souměřitelná dle délky s danou změrnou, nazývej úsečnicí první.

2. Když pak příslušná jest souměřitelná dle délky s danou změrnou a celá ve dvojmoci jest větší než příslušná o čtverec přímky s celou souměřitelné, nazývej se úsečnicí druhou.

3. Když pak žádná[29]) není dle délky souměřitelná s danou

[29]) T. j. ani přímka celá ani ta, která k úsečnici přísluší.

změrnou, celá však jest ve dvojmoci větší než příslušná o čtverec přímky s celou souměřitelné, nazývej se *úsečnicí třetí*.

4. Když naopak celá ve dvojmoci jest větší než příslušná o čtverec přímky s celou nesouměřitelné (dle délky), celá-li je dle délky souměřitelná s danou změrnou, nazývej se *úsečnicí čtvrtou*.

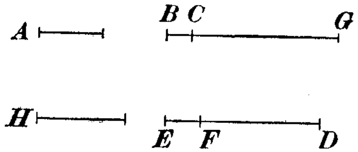
5. Pak-li příslušná[30]), *pátou*.

6. Pak-li žádná, *šestou*.

LXXXV.

Najdi úsečnici první.

Mějme přímku změrnou A, a buď s A dle délky souměřitelnou BG; změrná tedy jest i BG. A mějme dvě čísla čtvercová DE, EF, rozdíl však jejich FD nebuď čtvercový; tedy nemá se ani ED k DF jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému. I učiňme $ED:DF = BG^2:GC^2$ (X. VI. důsl.); tedy BG^2 je s GC^2 souměřitelné. BG^2 však je změrné; změrné tedy též GC^2; pročež i GC je změrná. A jelikož nemá se ED k DF jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, ani tedy BG^2 nemá se ku GC^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež BG je s GC dle délky nesouměřitelná. A obě jsou změrné; BG, GC jsou tedy změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; pročež BC jest úsečnice (X. LXXIII.).



Pravím ovšem, že také první.

Nuže budiž $BG^2 - GC^2 = H^2$. A ježto $ED:FD = BG^2:GC^2$; tedy také zvratně $DE:EF = GB^2:H^2$. Avšak DE má se k EF jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, neboť to i ono je čtverec; tedy též GB^2 má se k H^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež BG je s H dle délky souměřitelná. A $BG^2 - GC^2 = H^2$; tedy BG jest ve dvojmoci větší než GC o čtverec přímky souměřitelné dle délky s BG. I jest celá BG souměřitelná s danou změrnou A; pročež BC jest úsečnice první (vým. tř. č. 1.).

Tedy nalezena jest úsečnice první BC; což právě bylo nalézti.

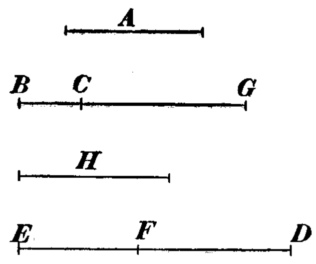
LXXXVI.

Najdi úsečnici druhou.

Mějme změrnou přímku A, a budiž s A dle délky souměřitelnou GC. Tedy GC je změrná. A mějme dvě čísla čtvercová DE, EF, rozdíl však jejich DF nebuď čtvercový. I učiňmež $FD:DE = CG^2:GB^2$ (X. VI. důsl.). Tedy CG^2 je s GB^2 souměřitelné. CG^2 však je změrné, změrné tedy jest i GB^2; pročež BG je změrná. A ježto GC^2 nemá se ku GB^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, CG je s GB dle

[30]) T. je dle délky souměřitelná s danou změrnou.

délky nesouměřitelná. A obě jsou změrné; tedy CG, GB jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; pročež BC jest úsečnice (X. LXXIII.).



Pravím ovšem, že také druhá.

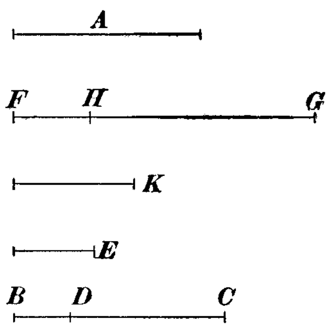
Budiž $BG^2 - GC^2 = H^2$. Ježto tedy $BG^2:GC^2 = ED:DF$, tedy zvratně $BG^2:H^2 = DE:EF$. I jest jak DE tak EF čtverec; pročež BG^2 má se k H^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; tedy BG je s H dle délky souměřitelná. A $BG^2 - GC^2 = H^2$; a tak BG jest ve dvojmoci větší než GC o čtverec přímky s BG souměřitelné dle délky. A přímka příslušná CG je s danou změrnou A souměřitelná; pročež BC jest úsečnice druhá (vým. tř. č. 2.).

Tedy nalezena jest úsečnice druhá BC; což právě bylo dokázati.

LXXXVII.

Najdi úsečnici třetí.

Mějme přímku změrnou A a mějme tři čísla E, BC, CD, aby se neměla k sobě jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, avšak CB měj se k BD jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, a učiňme $E:BC = A^2:FG^2$ a $BC:CD = FG^2:GH^2$. Ježto tedy $E:BC = A^2:FG^2$, tedy A^2 je s FG^2 souměřitelné. A^2 však je změrné; proto změrné také FG^2; FG je tedy změrná. A ježto se nemá E k BC jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, ani tedy A^2 nemá se k FG^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež A je s FG dle délky nesouměřitelná. Dále, ježto $BC:CD = FG^2:GH^2$, tedy FG^2 je s GH^2 souměřitelné. FG^2 však je změrné; změrné tedy též GH^2; proto GH je změrná. A ježto BC nemá se k CD jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, ani tedy FG^2 nemá se ku GH^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež FG je s GH nesouměřitelná dle délky. A obě jsou změrné; tedy FG, GH jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; pročež FH jest úsečnice.



Pravím ovšem, že také třetí.

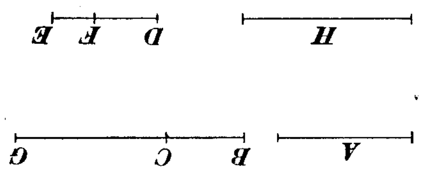
Neboť, ježto $E:BC = A^2:FG^2$ a $BC:CD = FG^2:HG^2$, tedy stejnořadně $E:CD = A^2:HG^2$. Avšak E nemá se k CD jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, ani tedy A^2 nemá se k HG^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež A je s GH dle délky nesouměřitelná. Tedy ani FG ani GH není s danou změrnou A dle délky souměřitelná. I budiž $FG^2 - GH^2 = K^2$. Ježto tedy $BC:CD = FG^2:GH^2$, tož zvratně $BC:CD = FG^2:K^2$. BC pak má se k BD jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; tedy také FG^2 má se ke K^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému. Pročež FG je s K dle délky souměřitelná, i jest FG ve dvojmoci větší než GH o čtverec přímky s FG souměřitelné. A není ani FG ani GH s danou změrnou A dle délky souměřitelná; pročež FH jest úsečnice třetí (vým. tř. č. 3.).

Tedy nalezena jest úsečnice třetí FH; což právě bylo dokázati.

LXXXVIII.

Najdi úsečnici čtvrtou.

Mějme přímku změrnou A a s A dle délky souměřitelnou BG; tedy změrná jest i BG. A mějme dvě čísla DF, FE, tak aby se celá DE neměla ani k DF ani k EF jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému. I učiňme $DE:EF = BG^2:GC^2$; tedy BG^2 je s GC^2 souměřitelné. Avšak BG^2 je změrné; pročež i GC^2 je změrné; tedy GC je změrná. A ježto DE nemá se k EF jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, tedy ani BG^2 nemá se ku GC^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež BG je s GC dle délky nesouměřitelná. A obě jsou změrné; proto BG, GC jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; tedy BC jest úsečnice.

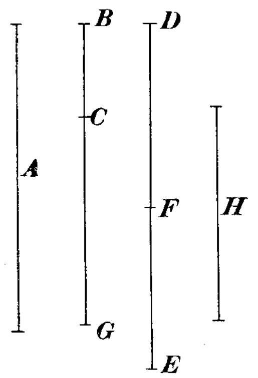


Pravím ovšem, že také čtvrtá.

Budiž tedy $BG^2 - GC^2 = H^2$. A tak, ježto $DE:EF = BG^2:GC^2$, také zvratně tedy $ED:DF = GB^2:H^2$. ED však se nemá k DF jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež ani GB^2 nemá se k H^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; tedy BG je s H dle délky nesouměřitelná. I jest $BG^2 - GC^2 = H^2$; proto BG jest ve dvojmoci větší než GC o čtverec přímky s BG nesouměřitelné. A celá BG je dle délky s danou změrnou A souměřitelná; pročež BC jest úsečnice čtvrtá (vým. tř. č. 4.).

Tedy nalezena jest úsečnice čtvrtá; což právě bylo dokázati.

LXXXIX.



Najdi úsečnici pátou.

Mějme přímku změrnou A, a buď s A dle délky souměřitelná CG; tedy CG je změrná. A mějme dvě čísla DF, FE, tak aby se opět nemělo DE ani k DF ani k FE jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému; a učiňme $FE:ED = CG^2:GB^2$. Tedy změrné jest i GB^2; pročež i BG je změrná. A ježto $DE:EF = BG^2:GC^2$, DE však nemá se k EF jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, tedy ani BG^2 nemá se ku GC^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež BG je s BC dle délky nesouměřitelná. A obě jsou změrné; tedy BG, GC jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; pročež BC jest úsečnice.

Pravím ovšem, že také pátá.

Nuže budiž $BG^2 - GC^2 = H^2$. Ježto tedy $BG^2:GC^2 = DE:EF$, proto zvratně $ED:DF = BG^2:H^2$. ED však nemá se k DF jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, tedy ani BG^2 nemá se k H^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež BG je s H dle délky nesouměřitelná. A $BG^2 - GC^2 = H^2$; tedy GB jest ve dvojmoci větší než GC o čtverec přímky s GB dle délky nesouměřitelné. A příslušná CG je dle délky souměřitelná s danou změrnou A; pročež BC jest úsečnice pátá (vým. tř. č. 5.).

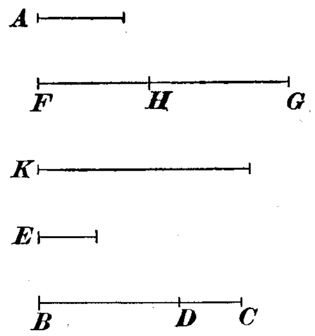
Tedy nalezena jest úsečnice pátá BC; což právě bylo dokázati

XC.

Najdi úsečnici šestou.

Mějme přímku změrnou A a tři čísla E, BC, CD, která se nemají k sobě jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; mimo to pak také neměj se CB k BD jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, a učiňmež $E:BC = A^2:FG^2$ a $BC:CD = FG^2:GH^2$.

Ježto tedy $E:BC = A^2:FG^2$, tu jest A^2 s FG^2 souměřitelné. Avšak A^2 je změrné; změrné tedy také FG^2; proto změrná jest i FG. A ježto E nemá se k BC jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, tedy nemá se ani A^2 k FG^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež A je s FG dle délky nesouměřitelná. Dále, ježto $BC:CD = FG^2:GH^2$, tedy FG^2 je s GH^2 souměřitelné. FG^2 však je změrné; pročež i GH^2 je změrné; změrná tedy jest i GH. A ježto BC nemá se k CD jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, tedy nemá se ani FG^2 ku GH^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež FG je s GH dle délky nesouměřitelná. A obě jsou změrné; proto FG, GH jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné. Tedy FH jest úsečnice.



Pravím ovšem, že také šestá.

Neboť, ježto $E:BC = A^2:FG^2$ a $BC:CD = FG^2:GH^2$, stejnořadně tedy $E:CD = A^2:GH^2$. Avšak E nemá se k CD jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež nemá se ani A^2 ku GH^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; tedy A je s GH dle délky nesouměřitelná; pročež ani FG ani GH není dle délky se změrnou A souměřitelná. Budiž tedy $FG^2 - GH^2 = K^2$. Ježto tedy $BC:CD = FG^2:GH^2$, proto zvratně $CB:BD = FG^2:K^2$. Avšak CB nemá se k BD jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému, tedy ani FG^2 nemá se ku K^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; pročež FG je s K dle délky nesouměřitelná. A $FG^2 - GH^2 = K^2$; protož FG jest ve dvojmoci větší než GH o čtverec přímky s FG nesouměřitelné dle délky. Také ani FG ani GH není s danou změrnou A dle délky souměřitelná. Pročež FH jest úsečnice šestá (vým. tř. č. 6.).

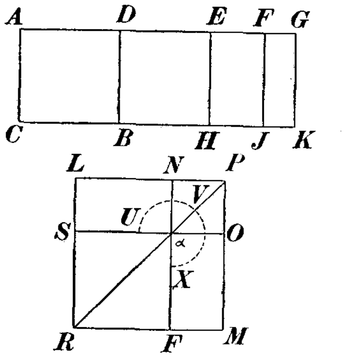
Tedy nalezena jest úsečnice šestá FH; což právě bylo dokázati.

XCI.

K d y ž ú t v a r o b j í m a j í p ř í m k a z m ě r n á a ú s e č n i c e p r v n í, p ř í m k a v e d v o j m o c i s ú t v a r e m s t e j n á j e s t ú s e č n i c e.

Nuže objímejtež útvar AB přímka změrná AC a úsečnice první AD; pravím, že přímka ve dvojmoci s AB stejná jest úsečnice.

Nuže, ježto AD jest úsečnice první, přislušej k ní DG; tedy AG, GD jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné (X. LXXIII.). A celá AG jest souměřitelná s danou změrnou AC, a AG jest ve dvojmoci větši než GD o čtverec přímky s AG souměřitelné dle délky (vým. tř. č. 1.); když se tedy k AG přistaví útvar rovný čtvrtině čtverce DG^2, aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, dělí ji v části souměřitelné (X. XVII.). Rozpolme DG v E a k AG přistavmež útvar stejný s EG^2, aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, a buď to $AF \times FG$; tedy AF je s FG souměřitelná. A z bodův E, F, G veďme s AC rovnoběžné EH, FI, GK.



A ježto AF je s FG dle délky souměřitelná, tedy též AG jest i s AF i s FG dle délky souměřitelná. Avšak AG jest souměřitelná s AC; pročež také AF i FG jsou dle délky souměřitelné s AC. I jest AC změrná; tedy AF i FG jsou změrné; a tak i útvary AI, FK jsou změrné. A ježto DE je dle délky souměřitelná s EG, tedy také DG jest souměřitelná dle délky s DE i s EG. Avšak DG je změrná a s AC dle délky nesouměřitelná (X. XIII); proto též DE, EG jsou změrné a s AC dle délky nesouměřitelné; tedy útvary DH, EK jsou střední (X. XXI.).

Tož dejme tomu, že AI rovno čtverci LM, a oddělme čtverec NO, stejný s FK, mající $\sphericalangle LPM$ společný; tedy LM, NO jsou na téže úhlopříčce (VI. XXVI.). Budiž úhlopříčkou jejich PR a obrazec buď vyznačen.*) Ježto tedy pravoúhelník $AF \times FG = EG^2$, proto $AF : EG = EG : FG$. Avšak $AF : EG = AI : EK$ a $EG : FG = EK : FK$; tedy AI, KF mají za střední úměrnou EK. Mají však i LM, NO za střední úměrnou MN, jak bylo dříve (X. LIII. výt.) dokázáno, i jest $AI = LM$ a $KF = NO$; pročež i $MN = EK$. Avšak $FK = DH$ a $MN = LO$; pročež DK rovno soudélníku UVX spolu s NO. Jest pak též $AK = LM + NO$; tedy zbývající $AB = ST$. ST však jest LN^2; pročež $LN^2 = AB$; LN je tedy ve dvojmoci stejná s AB.

Pravím ovšem, že LN jest úsečnice.

Neboť, ježto AI, FK jsou útvary změrné a stejné s LM, NO,

*) V dol. obr. mylně RFM m. správného označení RTM.

tedy LM, t. j. LP^2, a NO, t. j. PN^2, jsou útvary změrné; pročež i LP, PN jsou změrné. Dále, ježto DH je střední a stejné s LO, též LO je střední. Ježto tedy LO je střední, NO pak změrné, tedy LO je s NO nesouměřitelné. A $LO : NO = LP : PN$; pročež LP je s PN dle délky nesouměřitelná. A obě jsou změrné; tedy LP, PN jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; pročež LN jest úsečnice (X. LXXIII.). A jest ve dvojmoci rovna útvaru AB; a tak přímka ve dvojmoci rovná útvaru AB jest úsečnice.

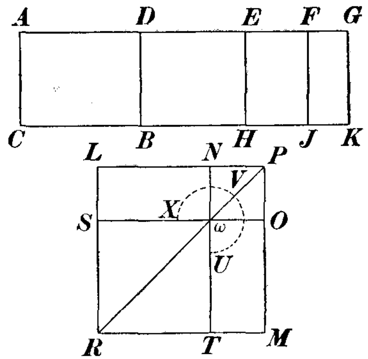
Když tedy útvar objímají přímka změrná atd.

XCII.

K d y ž ú t v a r o b j í m a j í p ř í m k a z m ě r n á a ú s e č n i c e d r u h á, p ř í m k a v e d v o j m o c i s ú t v a r e m s t e j n á j e s t ř e d n i c o v á ú s e č n i c e p r v n í.

Nuže objímejtež útvar AB přímka změrná AC a úsečnice druhá AD; pravím, že přímka ve dvojmoci s útvarem AB stejná je střednicová úsečnice první.

Nuže k AD příslušej DG; tedy AD, GD jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné (X. LXXIII.); a příslušná DG jest souměřitelná s danou změrnou AC, celá pak AG jest ve dvojmoci větší než příslušná GD o čtverec přímky s AG souměřitelné dle délky. Ježto tedy rozdíl mezi AG^2 a GD^2 je čtverec přímky s AG souměřitelné, proto když se k AG přistaví útvar rovný čtvrtině čtverce GD^2, tak aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, rozděluje ji v části souměřitelné. Rozpolme tedy DG v E a k AG přistavmež útvar rovný čtverci EG^2, aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, a budiž to $AF \times FG$; tedy AF je s FG dle délky souměřitelná. Pročež AG je dle délky souměřitelná s AF i s FG (X. XV.). Avšak AG je změrná a s AC dle délky nesouměřitelná; proto též AF, FG jsou změrné a s AC dle délky nesouměřitelné; tedy AI, FK jsou útvary střední (X. XX.). Dále, ježto DE jest souměřitelná s EG, tedy také DG jest souměřitelná s DE i s EG. Avšak DG jest souměřitelná dle délky s AC; pročež DH, EK jsou útvary změrné.



Zřiďme tedy čtverec $LM = AI$ a oddělmež $NO = FK$, které má s LM týž $\sphericalangle LPM$; tedy čtverce LM, NO jsou na téže úhlopříčce. Budiž úhlopříčkou jejich PR a obrazec buď vyznačen. Ježto tedy AI, FK jsou útvary střední a stejné s LP^2, PN^2, též LP^2, PN^2 jsou střední; proto jsou též LP, PN střední, jen ve dvojmoci souměřitelné. A ježto $AF \times FG = EG^2$, tedy $AF : EG = EG : FG$; avšak $AF : EG = AI : EK$; a $EG : FG = EK : FK$. Pročež AI, FK mají za střední úměrnou EK. Avšak i LM, NO mají za střední úměrnou MN; i jest $AI = LM$

a $FK = NO$; tedy též $MN = EK$. Avšak $EK = DH$ a $MN = LO$; pročež celé DK rovná se soudélníku UVX spolu s NO. Ježto tedy celé $AK = LM + NO$, z čehož $DK = UVX + NO$, proto zbývající $AB = TS$. TS pak jest LN^2; tedy LN^2 je stejné s útvarem AB; pročež LN rovná se ve dvojmoci útvaru AB.

Pravím, že LN je střednicová úsečnice první.

Neboť, ježto EK je změrné a stejné s LO, tedy LO, t. j. $LP \times PN$, je změrné. Dokázáno pak, že NO je střední; pročež LO je s NO nesouměřitelné. A $LO : NO = LP : PN$; tedy LP, PN jsou dle délky nesouměřitelné (X. XI.). A tak LP, PN jsou střední, jen ve dvojmoci souměřitelné, a objímají útvar změrný; pročež LN je střednicová úsečnice první (X. LXXIV.); a jest $LN^2 = AB$.

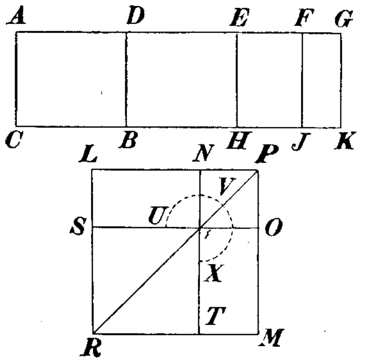
Tedy přímka ve dvojmoci stejná s útvarem AB je střednicová úsečnice první; což právě bylo dokázati.

XCIII.

Když útvar objímají přímka změrná a úsečnice třetí, přímka ve dvojmoci s útvarem stejná je střednicová úsečnice druhá.

Nuže objímejtež útvar AB přímka změrná AC a úsečnice třetí AD; pravím, že přímka ve dvojmoci s útvarem AB stejná je střednicová úsečnice druhá.

Nuže k AD přísluší DG; tedy AG, GD jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, a žádná z přímek AG, GD není dle délky souměřitelná s danou změrnou AC, celá však AG jest ve dvojmoci větší než příslušná DG o čtverec přímky s AG souměřitelné. Ježto tedy $AG^2 > GD^2$ o čtverec přímky s AG souměřitelné, proto když se k AG přistaví útvar rovný čtvrtině čtverce DG^2, tak aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, bude ji děliti v části souměřitelné. Rozpolme tedy DG v E a k AG přistavmež útvar rovný čtverci EG^2, tak aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, a budiž to $AF \times FG$. A veďme z bodův E, F, G přímky s AC rovnoběžné EH, FI, GK; jsou tedy AF, FG souměřitelné; pročež také AI je s FK souměřitelné. A ježto AF, FG jsou dle délky souměřitelné,



tedy též AG je dle délky souměřitelná s AF i s FG (X. XV.). AG však je změrná a s AC dle délky nesouměřitelná, a tak rovněž AF, FG (X. XIII). Tedy AI i FK jsou střední (X. XX.). Dále ježto DE je s EG dle délky souměřitelná, tedy rovněž DG je dle délky souměřitelná s DE i s EG. GD však je změrná a s AC dle délky nesouměřitelná; pročež i DE, EG jsou změrné a dle délky s AC nesouměřitelné; tedy DH, EK jsou útvary střední. A ježto AG, GD jsou jen

ve dvojmoci souměřitelné, tedy AG je s GD nesouměřitelná dle délky. Avšak AG je dle délky souměřitelná s AF a DG s EG; procež AF je s EG dle délky nesouměřitelná. Též $AF : EG = AI : EK$; tedy AI je s EK nesouměřitelné.

Zřiďme tedy čtverec $LM = AI$ a oddělmež $NO = FK$ o témž úhlu ako LM; pročež LM, NO jsou na téže úhlopříčce. Úhlopříčkou jejich jbudiž PR a útvar buď vyznačen. Ježto tedy $AF \times FG = EG^2$, tedy $AF : EG = EG : FG$. Avšak $AF : EG = AI : EK$ a $EG : FG = EK : FK$; proto též $AI : EK = EK : FK$; tedy AI, FK mají za střední úměrnou EK. Také však LM, NO mají za střední úměrnou MN (X. LIII. výt.); i jest $AI = LM$ a $FK = NO$; pročež i $EK = MN$. Avšak $MN = LO$ a $EK = DH$; tedy $DK = UVX + NO$. Jest pak také $AK = LM + NO$; tedy také zbývající $AB = ST$, t. j. LN^2; pročež LN jest ve dvojmoci stejná s útvarem AB.

Pravím, že LN je střednicová úsečnice druhá.

Neboť, ježto bylo dokázáno, že AI, FK jsou střední a stejná s LP^2, PN^2, tedy střední jsou též LP^2, PN^2; pročež LP, PN jsou střední. A ježto AI je s FK souměřitelné, tedy též LP^2 jest souměřitelné s PN^2. Dále, ježto bylo dokázáno, že AI je s EK nesouměřitelné, tedy rovněž LM jest nesouměřitelné s MN, t. j. LP^2 s $LP \times PN$; a tím též LP je dle délky nesouměřitelná s PN; tedy LP, PN jsou střední, jen ve dvojmoci souměřitelné.

Pravím ovšem, že objímají též útvar střední.

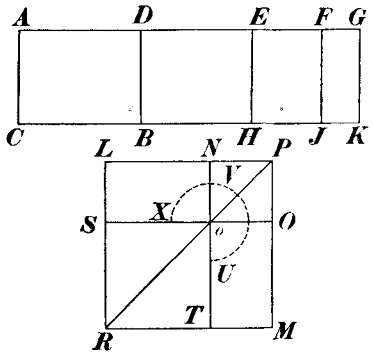
Neboť, ježto bylo dokázáno, že jest EK střední a stejné s $LP \times PN$, tedy rovněž $LP \times PN$ je střední; a tak LP, PN jsou střední jen ve dvojmoci souměřitelné a objímají útvar střední. Pročež LN je střednicová úsečnice druhá (X. LXXV.), a $LN^2 = AB$.

Tedy přímka ve dvojmoci stejná s útvarem AB je střednicová úsečnice druhá; což právě bylo dokázati.

XCIV.

Když útvar objímají přímka změrná a úsečnice čtvrtá, přímka ve dvojmoci s útvarem stejná jest nezměrná menší.

Nuže objímejtež útvar AB přímka změrná AC a úsečnice čtvrtá AD; pravím, že přímka ve dvojmoci s útvarem AB stejná jest nezměrná menší.



Nuže k AD přísluší DG; tedy AG, GD jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, a AG jest dle délky souměřitelná s danou změrnou AC, celá pak AG jest ve dvojmoci větší než příslušná DG o čtverec přímky s AG nesouměřitelné dle délky. Ježto tedy $AG^2 > GD^2$ o čtverec přímky s AG dle délky nesouměřitelné, proto když se k AG přistaví útvar rovný čtvrtině čtverce DG^2, tak, aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, bude ji děliti v části nesouměřitelné (X. XVIII.). Rozpolme tedy DG v E a k AG přistavmež útvar stejný s EG^2, aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, a budiž to $AF \times FG$; tož jest AF s FG dle délky nesouměřitelná. Veďme tedy z bodův E, F, G přímky s AC, BD rovnoběžné EH, FI, GK. Ježto tedy AG je změrná a s AC dle délky souměřitelná, proto celé AK je změrné. Dále, ježto DG je s AC nesouměřitelná dle délky a obě jsou změrné, DK tedy je střední. Dále, ježto AF je s FG dle délky nesouměřitelná, proto též AI jest souměřitelné s FK. Zřiďme tedy čtverec $LM = AI$ a oddělmež $NO = FK$ o témž $\sphericalangle LPM$. Tedy čtverce LM, NO jsou na téže úhlopříčce. Budiž úhlopříčkou jejich PR a obrazec buď vyznačen. Ježto tedy $AF \times FG = EG^2$, proto $AF:EG = EG:FG$; avšak $AF:EG = AI:EK$ a $EG:FG = EK:FK$; tedy AI, FK mají za střední úměrnou EK. Rovněž pak mají LM, NO za střední úměrnou MN, také jest $AI = LM$ a $FK = NO$; tedy též $EK = MN$. Avšak $EK = DH$ a $MN = LO$; proto celé $DK = UVX + NO$. Ježto tedy celé $AK = LM + NO$, z čehož $DK = UVX + NO$, proto zbývající $AB = ST$, t. j. LN^2; tedy LN jest ve dvojmoci stejná s útvarem AB.

Pravím, že LN jest nezměrná řečená menší.

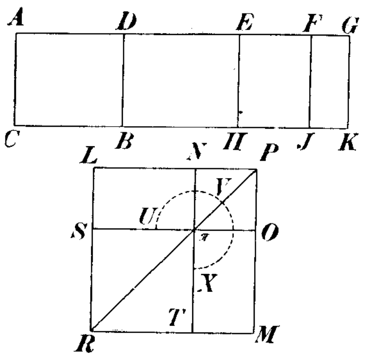
Neboť, ježto AK je změrné a rovno čtvercům $LP^2 + PN^2$, tedy $LP^2 + PN^2$ je změrné. Dále, ježto DK je střední a $DK = 2LP \times PN$, tedy $2LP \times PN$ je střední. A jelikož bylo dokázáno, že AI je s FK nesouměřitelné, proto také čtverec LP^2 jest nesouměřitelný s PN^2. Tedy LP, PN jsou ve dvojmoci nesouměřitelné, činíce součet čtverců změrný, dvojnásobný pak pravoúhelník střední. Pročež LN jest nezměrná řečená menší (X. LXXVI.), a $LN^2 = AB$.

Tedy přímka ve dvojmoci stejná s AB jest nezměrná menší; což právě bylo dokázati.

XCV.

Když útvar objímají přímka změrná a úsečnice pátá, přímka ve dvojmoci s útvarem stejná jest základnice útvaru se změrným celku střednímu rovného.

Nuže objímejtež útvar AB přímka změrná AC a úsečnice pátá AD; pravím, že přímka ve dvojmoci s útvarem AB stejná jest základnice útvaru se změrným celku střednímu rovného.



Nuže k AD příslušej DG; tedy AG, GD jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, a příslušná GD je dle délky souměřitelná s danou změrnou AC, celá pak AG jest ve dvojmoci větší než příslušná DG o čtverec přímky s AG nesouměřitelné. Když se tedy k AG přistaví útvar rovný čtvrtině čtverce DG^2, tak aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, bude ji děliti v části nesouměřitelné. Nuže rozpolme DG v bodě E a při-

stavme k AG útvar stejný s EG^2, aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, a budiž to $AF \times FG$; tedy jest AF s FG dle délky nesouměřitelná. A ježto AG s CA je dle délky nesouměřitelná a obě jsou změrné, proto AK je střední. Dále, ježto DG je změrná a s AC dle délky souměřitelná, DK je změrné. Zřiďme tedy čtverec $LM = AI$ a oddělmež $NO = FK$ o témž $\sphericalangle LPM$; proto jsou LM, NO na téže úhlopříčce. Budiž úhlopříčkou jejich PR a obrazec buď vyznačen. Podobně zajisté dokážeme, že $LN^2 = AB$.

Pravím, že LN jest základnice útvaru se změrným celku střednímu rovného.

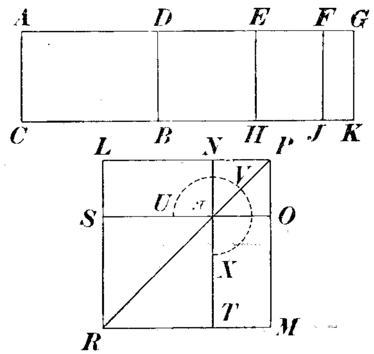
Neboť, ježto bylo dokázáno, že jest AK střední a rovno součtu $LP^2 + PN^2$, tedy $LP^2 + PN^2$ je střední. Dále ježto DK je změrné a stejné s $2LP \times PN$, i to je změrné. A ježto AI je s FK nesouměřitelné, proto nesouměřitelné jest i LP^2 s PN^2; tedy LP, PN jsou ve dvojmoci nesouměřitelné a činí součet čtverců střední, dvojnásobný pak pravoúhelník změrný. Pročež zbývající LN jest nezměrná řečená základnice útvaru se změrným celku střednímu rovného (X. LXXVII.); a $LN^2 = AB$.

Tedy přímka ve dvojmoci s útvarem AB stejná jest základnice útvaru se změrným celku střednímu rovného; což právě bylo dokázati.

XCVI.

Když útvar objímají přímka změrná a úsečnice šestá, přímka ve dvojmoci s útvarem stejná jest základnice útvaru se středním celku střednímu rovného.

Nuže objímejtež útvar AB přímka změrná AC a úsečnice šestá AD; pravím, že přímka ve dvojmoci s útvarem AB stejná jest základnice útvaru se středním celku střednímu rovného.



Nuže k AD příslušej GD; tedy AG, GD jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, a žádná z nich není dle délky souměřitelná s danou změrnou AC, celá pak AG jest ve dvojmoci větší než příslušná DG o čtverec přímky s AG dle délky nesouměřitelné. Ježto tedy $AG^2 > GD^2$ o čtverec přímky s AG dle délky nesouměřitelné, proto když se k AG přistaví útvar rovný čtvrtině čtverce DG^2, tak aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, bude ji děliti v části nesouměřitelné (X. XVIII.). Rozpolme tedy DG v E a k AG přistavmež útvar stejný s EG^2, aby se mu nedostávalo doplňku čtvercového, a budiž to $AF \times FG$; tedy AF je s FG dle délky nesouměřitelná. A $AF:FG = AI:FK$; pročež AI je s FK nesouměřitelné. A ježto AG, AC jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, AK je střední (X. XXI.). Dále ježto AC, DG jsou změrné a dle délky nesouměřitelné, také DK

je střední. Ježto tedy AG, GD jsou jen ve dvojmoci souměřitelné, jest proto AG s GD dle délky nesouměřitelná. A $AG:GD = AK:KD$; pročež AK je s KD nesouměřitelné. Zřiďme tedy čtverec $LM = AI$ a oddělmež $NO = FK$ o témž úhlu; tedy LM, NO jsou na téže úhlopříčce. Úhlopříčkou jejich budiž PR a budiž obrazec vyznačen. Podobně zajisté jako svrchu dokážeme, že $LN^2 = AB$.

Pravím, že LN jest základnice útvaru se středním celku střednímu rovného.

Neboť, ježto bylo dokázáno, že AK je střední a stejné s $LP^2 + PN^2$, tedy $LP^2 + PN^2$ je střední. Ježto dále bylo dokázáno, že DK je střední a stejné s $2LP \times PN$, také $2LP \times PN$ je střední. A ježto shledáno bylo AK s DK nesouměřitelným, také součet $LP^2 + PN^2$ jest nesouměřitelný s $2LP \times PN$. A ježto AI je s FK nesouměřitelné, tedy nesouměřitelné též LP^2 s PN^2; pročež LP, PN jsou ve dvojmoci nesouměřitelné, číníce součet čtverců střední a dvojnásobný pravoúhelník střední a mimo to součet čtverců s dvojnásobným pravoúhelníkem nesouměřitelný. Pročež LN jest nezměrná řečená základnice útvaru se středním celku střednímu rovného (X. LXXVIII.); a $LN^2 = AB$.

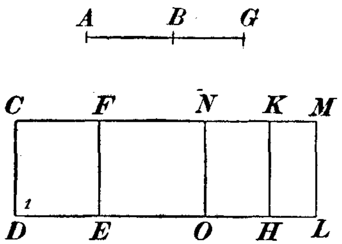
Tedy přímka ve dvojmoci s útvarem stejná jest základnice útvaru se středním celku střednímu rovného; což právě bylo dokázati.

LCVII.

Čtverec úsečnice přistavený ku přímce změrné šířkou činí úsečnici první.

Úsečnicí budiž AB, změrnou pak CD, a k CD buď přistaveno CE stejné s AB^2, takže šířkou činí CF; pravím, že CF jest úsečnice první.

Nuže k AB přislušej BG; tedy AG, GB jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné (X. LXXIII.). I přistavme k CD útvar CH stejný s AG^2 a KL stejný s BG^2. Tedy celé $CL = AG^2 + GB^2$, z čehož $CE = AB^2$; pročež zbývající $FL = 2AG \times GB$. Rozpolmež FM v bodě N a z N veďme NO rovnoběžně s CD; tedy $FO = LN = AG \times GB$. A ježto $AG^2 + GB^2$ je změrné a $AG^2 + GB^2 = DM$, proto DM je změrné; a jest přistaveno ke změrné CD, šířkou činíc CM; tedy CM je změrná a s CD dle délky souměřitelná (X. XX.). Dále, ježto $2AG \times GB$ je střední (X. XXI) a $2AG \times GB = FL$, tedy FL je střední; a jest přistaveno ke změrné CD, šířkou činíc FM; pročež FM je změrná a s CD dle délky nesouměřitelná (X. XXII.). A ježto $AG^2 + GB^2$ je změrné a $2AG \times GB$ střední, tedy $AG^2 + GB^2$ je s $2AG \times GB$ nesouměřitelné. A $AG^2 + GB^2 = CL$, $2AG \times GB = FL$; proto DM je s FL nesouměřitelné. Avšak $DM:FL = CM:FM$; pročež CM je s FM dle délky nesoumě-



řitelná. A obě jsou změrné; tedy CM, MF jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; pročež CF jest úsečnice (X. LXXIII.).

Pravím ovšem, že také první.

Neboť, ježto AG^2, GB^2 mají za střední úměrnou $AG \times GB$ (X. XXI. výt.) a $AG^2 = CH$, $BG^2 = KL$, $AG \times GB = NL$, tedy mají též CH, KL za střední úměrnou NL. Pročež $CH:NL = NL:KL$. Avšak $CH:NL = CK:MN$ a $NL:KL = NM:KM$; tedy $CK \times KM = NM^2 = \frac{1}{4}FM^2$. A ježto AG^2 je s GB^2 souměřitelné, také CH je s KL souměřitelné. Rovněž $CH:KL = CK:KM$; pročež CK je s KM souměřitelná. Ježto tedy CM, MF jsou dvě přímky nestejné a k CM je přistaven útvar $CK \times KM$, rovný čtvrtině čtverce FM^2, takže se mu nedostává doplňku čtvercového, a CK jest souměřitelná s KM, tedy $CM^2 > MF^2$ o čtverec přímky s CM dle délky souměřitelné (X. XVII.). A CM je dle délky souměřitelná s danou změrnou CD; pročež CF jest úsečnice první (vým. tř. č. 1.).

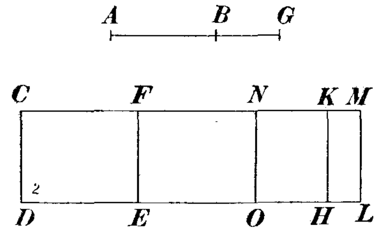
Tedy čtverec úsečnice přistavený ku přímce změrné šířkou činí úsečnici první; což právě bylo dokázati.

XCVIII.

Čtverec střednicové úsečnice první přistavený ku přímce změrné šířkou činí úsečnici druhou.

Střednicovou úsečnicí první budiž AB, přímkou pak změrnou CD a k CD přistaven buď útvar CE, stejný s AB^2, takže šířkou činí CF; pravím, že CF jest úsečnice druhá.

Nuže k AB přislušej BG; tedy AG, GB jsou střední, jen ve dvojmoci souměřitelné a objímají útvar změrný (X. LXXIV.). A k CD přistavmež útvar CH, stejný s AG^2, takže šířkou činí CK, a KL stejný s GB^2, šířkou činící KM; celé tedy $LC = AG^2 + GB^2$; pročež i CL je střední. A jest přistaveno ke změrné CD, šířkou činíc CM; tedy CM je změrná a s CD dle délky nesouměřitelná (X. XXII.). A ježto $CL = AG^2 + GB^2$, z čehož $AB^2 = CE$; proto zbývající $2AG \times GB = FL$. Avšak $2AG \times GB$ je změrné; tedy FL je změrné. A přistaveno jest ke změrné FE, šířkou činíc FM; proto též FM je změrná a s CD dle délky souměřitelná (X. XX.). Ježto tedy $AG^2 + GB^2$, t. j. CL, je střední, avšak $2AG \times GB$, t. j. FL, změrné, proto CL je s FL nesouměřitelné. A $CL:FL = CM:FM$; tedy CM je s FM dle délky nesouměřitelná. A obě jsou změrné; pročež CM, MF jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; tedy CF jest úsečnice (X. LXXIII.).



Pravím ovšem, že také druhá.

Nuže rozpolme FM v N a z N veďme NO rovnoběžně s CD; tedy $FO = NL = AG \times GB$. A ježto čtverce AG^2, GB^2 mají za střední úměrnou $AG \times GB$ a $AG^2 = CH$, $AG \times GB = NL$, $BG^2 = KL$, proto též CH, KL mají za střední úměrnou NL; tedy $CH:NL = NL:KL$.

Avšak $CH:NL = CK:NM$ a $NL:KL = NM:MK$; pročež $CK:NM = NM:KM$; tedy $CK \times KM = NM^2$, t. j. čtvrtině čtverce FM^2. Ježto tedy CM, MF jsou dvě přímky nestejné a k delší CM přistaven útvar $CK \times KM$, rovný čtvrtině čtverce MF^2, takže se mu nedostává doplňku čtvercového, a dělí ji v části souměřitelné[31]), tedy $CM^2 > MF^2$ o čtverec přímky s CM dle délky souměřitelné (X. XVII). A příslušná FM je dle délky souměřitelná s danou změrnou CD; pročež CF jest úsečnice druhá (vým. tř. č. 2.).

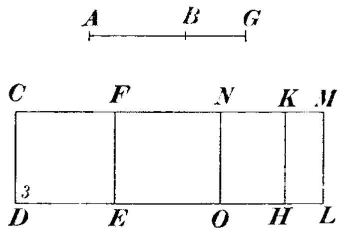
Tedy čtverec střednicové úsečnice první přistavený ku přímce změrné šířkou činí úsečnici druhou; což právě bylo dokázati.

IC.

Čtverec střednicové úsečnice druhé přistavený ku přímce změrné šířkou činí úsečnici třetí.

Střednicovou úsečnicí druhou budiž AB, přímkou pak změrnou CD a k CD přistaven buď útvar CE stejný s AB^2, takže šířkou činí CF; pravím, že CF jest úsečnice třetí.

Nuže k AB příslušej BG; tedy AG, GB jsou střední, jen ve dvojmoci souměřitelné a objímají útvar střední (X. LXXV.). A k CD přistavmež útvar CH stejný s AG^2, takže šířkou činí CK, a ke KH přistavmež útvar KL stejný s BG^2, takže šířkou činí KM; celé tedy $CL = AG^2 + GB^2$ (a $AG^2 + GB^2$ je střední); pročež i CL je střední.



A přistaveno jest ke změrné CD, šířkou činíc CM; tedy CM je změrná a s CD dle délky nesouměřitelná (X. XXII.). A ježto celé $CL = AG^2 + GB^2$, z čehož $CE = AB^2$, proto zbývající $LF = 2 AG \times GB$. Rozpolme tedy FM v bodě N a s CD veďme rovnoběžku NO; tož $FO = NL = AG \times GB$. Avšak $AG \times GB$ je střední; střední tedy jest i FL. A jest přistaveno ke změrné EF, šířkou činíc FM; pročež i FM je změrná a dle délky s CD nesouměřitelná. A ježto AG, GB jsou jen ve dvojmoci souměřitelné, tedy dle délky jest AG s GB nesouměřitelná; pročež také AG^2 je s $AG \times GB$ nesouměřitelné (X. XXI. výt.). Avšak s AG^2 souměřitelné jest $AG^2 + GB^2$, $AG \times GB$ pak s $2 AG \times GB$; tedy $AG^2 + GB^2$ je s $2 AG \times GB$ nesouměřitelné. Avšak $AG^2 + GB^2 = CL$ a $2 AG \times GB = FL$; pročež CL je s FL nesouměřitelné. A $CL:FL = CM:FM$; tedy CM je s FM dle délky nesouměřitelná. A obě jsou změrné; pročež CM, MF jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; tedy CF jest úsečnice (X. LXXIII.).

Pravím ovšem, že také třetí.

Neboť, ježto AG^2 jest souměřitelné s GB^2, souměřitelné tedy též CH s KL; a tak i CK s KM. A ježto AG^2, GB^2 mají za střední úměrnou $AG \times GB$ a $AG^2 = CH$, $GB^2 = KL$, $AG \times GB = NL$, tedy také CH, KL mají za střední úměrnou NL; pročež $CH:NL = NL:KL$.

[31]) Neboť AG^2 je s BG^2 souměřitelné a $AG^2:GB^2 = CH:KL = CK:KM$.

Avšak $CH:NL = CK:NM$ a $NL:KL = NM:KM$; tedy $CK:MN = MN:KM$; pročež $CK \times KM = MN^2$, t. j. $\frac{1}{4} FM^2$. Ježto tedy CM, MF jsou dvě přímky nestejné a k CM jest přistaven útvar rovný čtvrtině čtverce FM^2, takže se mu nedostává doplňku čtvercového a dělí ji v části souměřitelné, tedy $CM^2 > MF^2$ o čtverec přímky s CM souměřitelné. A žádná z přímek CM, MF není dle délky souměřitelná s danou změrnou CD; pročež CF jest úsečnice třetí (vým. tř. č. 3).

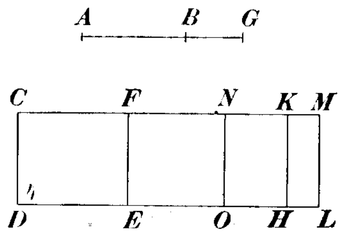
Tedy čtverec střednicové úsečnice druhé přistavený ku přímce změrné šířkou činí úsečnici třetí; což právě bylo dokázati.

C.

Čtverec přímky nezměrné menší přistavený ku přímce změrné šířkou činí úsečnici čtvrtou.

Nezměrnou menší budiž AB, změrnou pak CD a ke změrné CD přistavmež útvar CE stejný s AB^2, šířkou činící CF; pravím, že CF jest úsečnice čtvrtá.

Nuže k AB příslušej BG; tedy AG, GB jsou ve dvojmoci nesouměřitelné a činí součet $AG^2 + GB^2$ změrný a $2 AG \times GB$ střední (X. LXXVI.). I přistavme k CD CH stejné s AG^2, šířkou činící CK, a KL stejné s GB^2, šířkou činící KM; pročež celé $CL = AG^2 + GB^2$. A $AG^2 + GB^2$ je změrné; změrné tedy také CL. A přistaveno jest ke změrné CD, šířkou činíc CM; pročež



i CM je změrná a dle délky s CD souměřitelná (X. XX.). A ježto celé $CL = AG^2 + GB^2$, z čehož $CE = AB^2$; proto zbývající $FL = 2 AG \times GB$. Rozpolme tedy FM v bodě N a z N veďme s CD nebo s ML rovnoběžnou NO; tedy $FO = NL = AG \times GB$. A ježto $2 AG \times GB$ je střední a stejné s FL, tedy také FL je střední. A přistaveno jest k FE, šířkou činíc FM; pročež FM je změrná a s CD dle délky nesouměřitelná (X. XXII). A ježto $AG^2 + GB^2$ je změrné a $2 AG \times GB$ střední, tedy $AG^2 + GB^2$ je s $2 AG \times GB$ nesouměřitelné. Avšak $AG^2 + GB^2 = CL$ a $2 AG \times GB = FL$; pročež CL je s FL nesouměřitelné. A $CL:FL = CM:FM$; tedy CM je s MF nesouměřitelná dle délky. A obě jsou změrné; pročež CM, MF jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; tedy CF jest úsečnice (X. LXXIII.).

Pravím ovšem, že také čtvrtá.

Neboť, ježto AG, GB jsou ve dvojmoci nesouměřitelné, tedy též AG^2 je s GB^2 nesouměřitelné. A $AG^2 = CH$, $GB^2 = KL$; pročež nesouměřitelné jest CH s KL. Avšak $CH:KL = CK:KM$; tedy CK je s KM dle délky nesouměřitelná. A ježto AG^2, GB^2 mají za střední úměrnou $AG \times GB$ a $AG^2 = CH$, $GB^2 = KL$, $AG \times GB = NL$, tedy CH, KL mají za střední úměrnou NL; pročež $CH:NL = NL:KL$. Avšak $CH:NL = CK:NM$ a $NL:KL = NM:KM$; tedy $CK:MN = MN:KM$. Pročež $CK \times KM = MN^2 = \frac{1}{4} FM^2$. Ježto tedy CM, MF jsou dvě přímky nestejné a k CM jest přistaven útvar $CK \times KM$ stejný se $\frac{1}{4} MF^2$, takže se mu nedostává doplňku čtvercového, a dělí ji v části nesouměřitelné, proto $CM^2 > MF^2$ o čtverec přímky s CM nesouměřitelné (X. XVIII.). Acelá CM je dle délky souměřitelná se změrnou CD; pročež CF jest úsečnice čtvrtá (vým. tř. č. 4.).

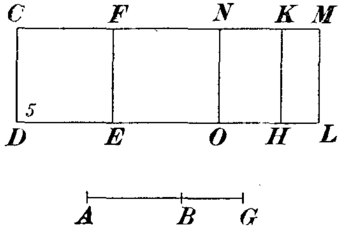
Tedy čtverec přímky nezměrné menší atd.

CI

Čtverec základnice útvaru, se změrným celku střednímu rovného, přistavený ku přímce změrné šířkou činí úsečnici pátou.

Základnicí útvaru se změrným celku střednímu rovného budiž AB, změrnou pak CD a k CD přistaven buď útvar CE stejný s AB^2, šířkou činící CF; pravím, že CF jest úsečnice pátá.

Nuže k AB příslušej BG; tedy přímky AG, GB jsou ve dvojmoci nesouměřitelné a součet čtverců jejich je střední, dvojnásobný pak pravoúhelník změrný (X. LXXVII.). A k CD přistavmež útvar CH stejný s AG^2 a KL stejný s GB^2; celé tedy $CL = AG^2 + GB^2$. A součet $AG^2 + GB^2$ jest zároveň střední, pročež i CL je střední. I jest přistaveno ke změrné CD, šířkou činíc CM; tedy CM je změrná a s CD nesouměřitelná (X. XXII.). A ježto celé $CL = AG^2 + GB^2$, z čehož $CE = AB^2$, proto zbývající $FL = 2\,AG \times GB$. Rozpolme tedy FM v N a veďme z N s CD nebo ML rovnoběžnou NO; pročež $FO = NL = AG \times GB$. A ježto $2\,AG \times GB$ je změrné a stejné s FL, tedy FL je změrné. A přistaveno jest ke změrné EF, šířkou činíc FM; pročež FM je změrná a s CD dle délky souměřitelná (X. XX.). A ježto CL je střední, FL pak změrné; tedy CL je s FL nesouměřitelné. Avšak $CL : FL = CM : FM$; pročež CM je s MF nesouměřitelná. A obě jsou změrné; CM, MF jsou tedy změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; pročež CF jest úsečnice. (X LXXIII.).



Pravím ovšem, že také pátá.

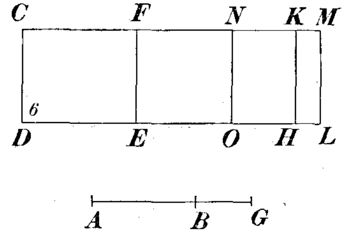
Podobně zajisté dokážeme, že $CK \times KM = NM^2 = \frac{1}{4} FM^2$ A ježto AG^2 je s GB^2 nesouměřitelné a $AG^2 = CH$, $GB^2 = KL$, tedy CH je s KL nesouměřitelné. A $CH : KL = CK : KM$; pročež CK je s KM dle délky nesouměřitelná. Ježto tedy CM, MF jsou dvě přímky nestejné a k CM přistaven jest útvar stejný se $\frac{1}{4} FM^2$, takže se mu nedostává doplňku čtvercového, a rozděluje ji v části nesouměřitelné, tedy $CM^2 > MF^2$ o čtverec přímky s CM nesouměřitelné (X. XVIII.). A příslušná FM je s danou změrnou CD souměřitelná; tedy CF jest úsečnice pátá (vým. tř. č. 5.); což právě bylo dokázati.

CII.

Čtverec základnice útvaru se středním celku střednímu rovného přistavený ke změrné šířkou činí úsečnici šestou.

Základnicí útvaru se středním celku střednímu rovného budiž AB, přímkou pak změrnou CD a k CD přistaven buď útvar CE stejný s AB^2, takže šířkou činí CF; pravím, že CF jest úsečnice šestá.

Nuže k AB příslušej BG; tedy AG, GB jsouve dvojmoci nesouměřitelné a součet čtverců jejich je střední a $2\,AG \times GB$ střední a $AG^2 + GB^2$ s $2\,AG \times GB$ nesouměřitelné (X. LXXVIII.). Nuže přistavme k CD útvar CH stejný s AG^2, šířkou činící CK, a KL stejný s GB^2; celé tedy $CL = AG^2 + GB^2$; střední tedy také CL. A přistaveno jest ke změrné CD, šířkou činíc CM; pročež CM je změrná a s CD dle délky nesouměřitelná (X. XXII.). Ježto tedy $CL = AG^2 + GB^2$, z čehož $CE = AB^2$, proto zbývající $FL = 2\,AG \times GB$. A $2\,AG \times GB$ je střední; pročež i FL je střední. A přistaveno jest ke změrné FE, šířkou činíc FM; tedy FM je změrná a s CD dle délky nesouměřitelná (X. XXII.). A ježto $AG^2 + GB^2$ jest nesouměřitelné s $2\,AG \times GB$ a $AG^2 + GB^2 = CL$, $2\,AG \times GB = FL$; proto CL je s FL nesouměřitelné. A $CL : FL = CM : FM$; tedy CM je s MF dle délky nesouměřitelná. A obě jsou změrné. Pročež CM, MF jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; tedy CF jest úsečnice (X. LXXIII.).



Pravím ovšem, že také šestá.

Nuže, ježto $FL = 2\,AG \times GB$, rozpolmež FM v N a z N veďme NO rovnoběžně s CD; tedy $FO = NL = AG \times GB$. A ježto AG, GB jsou ve dvojmoci nesouměřitelné, tedy AG^2 je s GB^2 nesouměřitelné. Avšak $AG^2 = CH$ a $GB^2 = KL$; pročež CH je s KL nesouměřitelné. A $CH : KL = CK : KM$; tedy CK je s KM nesouměřitelná. A ježto AG^2, GB^2 mají za střední úměrnou $AG \times GB$ a $AG^2 = CH$, $GB^2 = KL$, $AG \times GB = NL$; tedy rovněž CH, KL mají za střední úměrnou NL. Pročež $CH : NL = NL : KL$. A proto právě $CM^2 > MF^2$ o čtverec přímky s CM nesouměřitelné (X. XVIII.). A žádná z nich není souměřitelná s danou změrnou CD; tedy CD jest úsečnice šestá (vým. tř. č. 6.); což právě bylo dokázati.

CIII.

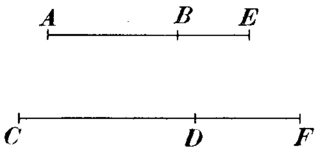
Přímka s úsečnicí dle délky souměřitelná jest úsečnice a v pořadí táž.

Úsečnicí budiž AB a s AB buď dle délky souměřitelnou CD; pravím, že i CD jest úsečnice a v pořadí táž jako AB.

Nuže, ježto AB jest úsečnice, příslušej k ní BE; AE, EB jsou tedy změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné (X. LXXIII.). A učiňmež $AB : CD = BF : DF$; a jako člen ke členu, tak součet k součtu; tedy též celá $AE : CF = AB : CD$. Avšak AB je s CD dle délky souměřitelná, pročež také AE jest souměřitelná s CF a BE s DF. I jsou AE, EB změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; tedy také CF, FD jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; (pročež CD jest úsečnice.

Pravím ovšem, že také v pořadí táž jako AB).

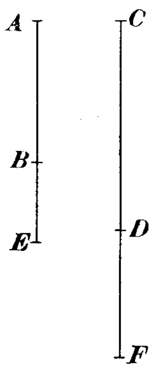
Ježto tedy $AE:CF = BE:DF$, proto střídavě $AE:EB = CF:FD$. Buďto zajisté $AE^2 > EB^2$ o čtverec přímky s AE souměřitelné nebo nesouměřitelné. Jestliže tedy $AE^2 > EB^2$ o čtverec přímky souměřitelné, také bude $CF^2 > FD^2$ o čtverec přímky s CF souměřitelné (X. XIV.). A jestli AE souměřitelná dle délky s danou změrnou, také CF, pakli BE, také DF, pakli žádná z přímek AE, EB, také ani CF ani FD. Pakli $AE^2 > EB^2$ o čtverec přímky s AE nesouměřitelné, také bude $CF^2 > FD^2$ o čtverec nesouměřitelné. A jestli AE souměřitelná dle délky s danou změrnou, také CF, pakli BE, také DF, pakli žádná z přímek AE, EB, tož ani CF ani FD.



Tedy CD jest úsečnice a v pořadí táž jako AB; což právě bylo dokázati.

CIV.

P ř í m k a s e s t ř e d n i c o v o u ú s e č n i c í s o u m ě ř i t e l n á j e s t ř e d n i c o v á ú s e č n i c e a v p o ř a d í t á ž.



Střednicovou úsečnicí buďiž AB a s AB dle délky souměřitelnou buď CD; pravím, že i CD je střednicová úsečnice a v pořadí táž jako AB.

Nuže, ježto AB je střednicová úsečnice, příslušej k ní EB; tedy AE, EB jsou střední, jen ve dvojmoci souměřitelné (X. LXXIV. n.). I učiňmež $AB:CD = BE:FD$; souměřitelná tedy je též AE s CF a BE s DF. Avšak AE, EB jsou střední, jen ve dvojmoci souměřitelné; pročež i CF, FD jsou střední, jen ve dvojmoci souměřitelné; tedy CD je střednicová úsečnice.

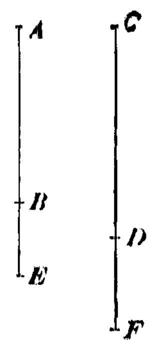
Pravím ovšem, že také v pořadí je táž jako AB. Ježto $AE:EB = CF:FD$ (avšak $AE:EB = AE^2:AE \times EB$ a $CF:FD = CF^2:CF \times FD$), tedy též $AE^2:AE \times EB = CF^2:CF \times FD$ (a střídavě $AE^2:CF^2 = AE \times EB:CF \times FD$). AE^2 však jest souměřitelné s CF^2; proto též $AE \times EB$ jest souměřitelné s $CF \times FD$. Jestli tedy $AE \times EB$ změrné, změrné bude též $CF \times FD$, pakli $AE \times EB$ střední, střední též $CF \times FD$.

Tedy CD je střednicová úsečnice a v pořadí táž jako AB; což právě bylo dokázati.

CV.

P ř í m k a s n e z m ě r n o u m e n š í s o u m ě ř i t e l n á j e s t n e z m ě r n á m e n š í.

Nuže buď nezměrnou menší AB a s AB souměřitelnou CD; pravím, že i CD jest nezměrná menší.

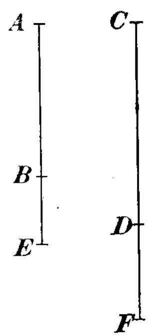


Nuže upravme totéž; a ježto AE, EB jsou ve dvojmoci nesouměřitelné, tedy ve dvojmoci nesouměřitelné jsou i CF, FD. Ježto tedy $AE:EB = CF:FD$, proto též $AE^2:EB^2 = CF^2:FD^2$. Tedy součetně $(AE^2 + EB^2):EB^2 = (CF^2 + FD^2):FD^2$ (i střídavě); BE^2 však je s DF^2 souměřitelné; pročež i $AE^2 + EB^2$ jest souměřitelné s $CF^2 + FD^2$. Avšak $AE^2 + EB^2$ je změrné, změrné je tedy též $CF^2 + FD^2$. Dále, ježto $AE^2:AE \times EB = CF^2:CF \times FD$ a AE^2 je s CF^2 souměřitelné, tedy též $AE \times EB$ jest souměřitelné s $CF \times FD$. $AE \times EB$ však je střední (X. LXXVI.), střední tedy také $CF \times FD$; proto CF, FD jsou ve dvojmoci nesouměřitelné a součet čtverců jejich je změrný, pravoúhelník pak střední.

Tedy CD jest nezměrná menší (X. LXXVI.); což právě bylo dokázati.

CVI.

P ř í m k a s e z á k l a d n i c í ú t v a r u, s e z m ě r n ý m c e l k u s t ř e d n í m u r o v n é h o, s o u m ě ř i t e l n á j e s t z á k l a d n i c e ú t v a r u s e z m ě r n ý m c e l k u s t ř e d n í m u r o v n é h o.



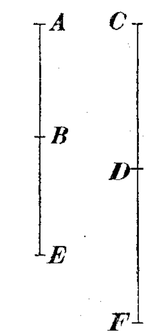
Základnicí útvaru se změrným celku střednímu rovného budiž AB a s AB souměřitelnou CD; pravím, že i CD jest základnice útvaru se změrným celku střednímu rovného.

Nuže k AB příslušej BE; tedy AE, EB jsou ve dvojmoci nesouměřitelné a součet čtverců jejich $AE^2 + EB^2$ je střední, pravoúhelník pak změrný (X. LXXVII.). A upravme totéž. Podobně zajisté jako dříve (X. CV.) dokážeme, že $CF:FD = AE:EB$ a že souměřitelné jest $AE^2 + EB^2$ s $CF^2 + FD^2$ a $AE \times EB$ s $CF \times FD$; a tak i CF, FD jsou ve dvojmoci nesouměřitelné a $CF^2 + FD^2$ je střední, $CF \times FD$ však změrné.

Tedy CD jest základnice útvaru se změrným celku střednímu rovného; což právě bylo dokázati.

CVII.

P ř í m k a s e z á k l a d n i c í ú t v a r u, s e s t ř e d n í m c e l k u s t ř e d n í m u r o v n é h o, s o u m ě ř i t e l n á i s a m a j e s t z á k l a d n i c e ú t v a r u s e s t ř e d n í m c e l k u s t ř e d n í m u r o v n é h o.



Základnicí útvaru se středním celku střednímu rovného budiž AB a s AB budiž souměřitelnou CD; pravím, že i CD jest základnice útvaru se středním celku střednímu rovného.

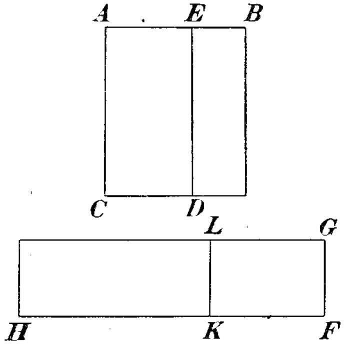
Nuže k AB příslušej BE a budiž upraveno totéž; tedy AE, EB jsou ve dvojmoci nesouměřitelné a součet čtverců jejich je střední i pravoúhelník střední a také součet čtverců jejich s tím pravoúhelníkem nesouměřitelný (X. LXXVIII.). A jak bylo dokázáno (X. CIV.), jsou AE, EB souměřitelné s CF, FD a $AE^2 + EB^2$ s $CF^2 + FD^2$ a $AE \times EB$ s $CF \times FD$; pročež i CF, FD jsou ve dvojmoci nesouměřitelné a součet čtverců jejich střední i pravoúhelník střední a také součet čtverců jejich s tím pravoúhelníkem nesouměřitelný.

Tedy CD jest základnice útvaru se středním celku střednímu rovného; což právě bylo dokázati.

CVIII.

Oddělíme-li od útvaru změrného střední, přímka ve dvojmoci útvaru zbývajícímu rovná jest jedna ze dvou nezměrných, buď úsečnice nezměrná menší.

Nuže oddělmež od útvaru změrného BC střední BD; pravím, že přímka ve dvojmoci rovná útvaru zbývajícímu EC jest jedna ze dvou nezměrných, buď úsečnice buď nezměrná menší.



Nuže mějme přímku změrnou FG a k FG přistavme pravoúhlý rovnoběžník GH stejný s BC a oddělme GK stejné s DB; pročež zbývající $EC = LH$. Ježto tedy BC je změrné, BD však střední a $BC = GH$, $BD = GK$, tedy GH je změrné a GK střední. A přistavena jsou ke změrné FG; pročež FH je změrná a s FG dle délky souměřitelná (X. XX.), FK pak změrná a s FG dle délky nesouměřitelná (X. XXII.); tedy FH je s FK dle délky nesouměřitelná (X. XIII.). Proto FH, FK jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; tedy KH jest úsečnice a k ní přísluší KF (X. LXXIII). Buďto zajisté $HF^2 > FK^2$ o čtverec přímky souměřitelné nebo nikoliv.

Budiž větší dříve o čtverec souměřitelné. I jest celá HF s danou změrnou FG dle délky souměřitelná; tedy KH jest úsečnice první (vým. tř. č. 1.). Přímka však ve dvojmoci stejná s útvarem, jejž objímají přímka změrná a úsečnice první, jest úsečnice (X. XCI.). Tedy přímka ve dvojmoci stejná s LH, t. j. s EC, jest úsečnice.

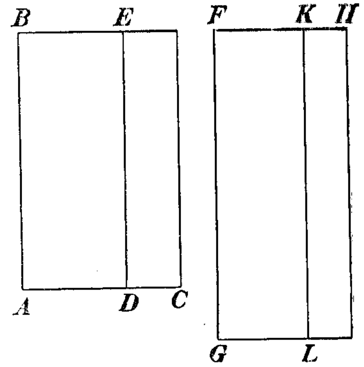
Pakli $HF^2 > FK^2$ o čtverec přímky s HF nesouměřitelné a celá FH je s danou změrnou FG dle délky souměřitelná, KH jest úsečnice čtvrtá (vým. tř. č. 4.). Přímka pak ve dvojmoci stejná s útvarem, jejž objímají přímka změrná a úsečnice čtvrtá, jest nezměrná menší (X. XCIV.); což právě bylo dokázati.

CIX.

Oddělíme-li od útvaru středního změrný, jiné vznikají dvě přímky nezměrné, buďto střednicová úsečnice první nebo základnice útvaru se změrným celku střednímu rovného.

Nuže oddělmež od útvaru středního BC změrný BD; pravím, že přímka ve dvojmoci stejná se zbytkem EC jest jedna ze dvou nezměrných, buďto střednicová úsečnice první nebo základnice útvaru se změrným celku střednímu rovného.

Nuže mějme přímku změrnou FG a přistavmež útvary podobně. Stejně zajisté jest FH změrná a dle délky s FG nesouměřitelná a KF změrná a dle délky s FG souměřitelná; tedy FH, FK jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné (X. XIII.); pročež KH jest úsečnice (X. LXXIII.) a k ní přísluší FK. Buďto zajisté $HF^2 > FK^2$ o čtverec přímky s HF souměřitelné nebo nesouměřitelné.



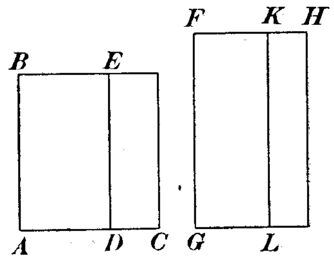
Jestli tedy $HF^2 > FK^2$ o čtverec souměřitelné a příslušná FK je dle délky s danou změrnou FG souměřitelná, KH jest úsečnice druhá (vým. tř. č. 2). Avšak FG změrná; tedy přímka ve dvojmoci stejná s LH, t. j. s EC, je střednicová úsečnice první (X. XCII.).

Pakli $HF^2 > FK^2$ o čtverec nesouměřitelné a příslušná FK je dle délky s danou změrnou FG souměřitelná, KH jest úsečnice pátá (vým. tř. č. 5.); pročež přímka ve dvojmoci stejná s EC jest základnice útvaru se změrným celku střednímu rovného (X XCV.); což právě bylo dokázati.

CX.

Oddělíme-li od útvaru středního střední, s celkem nesouměřitelný, vznikají dvě ostatní přímky nezměrné, buďto střednicová úsečnice druhá nebo základnice útvaru se středním celku střednímu rovného.

Nuže oddělmež jako v dosavadních vyobrazeních od útvaru středního BC střední BD, s celkem nesouměřitelný; pravím, že přímka ve dvojmoci s EC stejná jest jedna ze dvou nezměrných, buďto střednicová úsečnice druhá nebo základnice útvaru se středním celku střednímu rovného.



Neboť ježto BC, BD jsou střední (a BC s BD jest nesouměřitelné), stejně budou FH, FK změrné a s FG dle délky nesouměřitelné (X. XXII.). A ježto BC je s BD, t. j. GH s GK, nesouměřitelné, také HF je s FK nesouměřitelná; tedy FH, FK jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; pročež KH jest úsečnice (X. LXIII.) (a k ní přísluší FK. Buďto zajisté $FH^2 > FK^2$ o čtverec přímky s FH souměřitelné nebo nesouměřitelné).

A jestli ovšem $FH^2 > FK^2$ o čtverec přímky s FH souměřitelné a žádná z přímek FH, FK není dle délky souměřitelná s danou změrnou FG, KH jest úsečnice třetí (vým. tř. č. 3.). KL však je změrná, a pravoúhelník, jejž objímají přímka změrná a úsečnice třetí, jest nezměrný a přímka ve dvojmoci jemu rovná nezměrná jest, i slove střednicová úsečnice druhá (X. XCIII.); a tak i přímka ve dvojmoci s LH, t. j. s EC, stejná je střednicová úsečnice druhá.

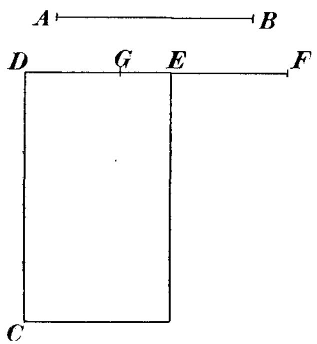
Pakli $FH^2 > FK^2$ o čtverec nesouměřitelné a žádná z přímek HF, FK není s FG dle délky souměřitelná, KH jest úsečnice šestá (vým. tř. č. 6.). Přímka pak ve dvojmoci stejná s útvarem, jejž objímají přímka změrná a úsečnice šestá, jest základnice útvaru se středním celku střednímu rovného (X. XCVI.). Tedy přímka ve dvojmoci stejná s LH, t. j. s EC, jest základnice útvaru se středním celku střednímu rovného; což právě bylo dokázati.

CXI.

Úsečnice není stejná s dvoučástnicí.

Úsečnicí budiž AB; pravím, že AB není stejná s dvoučástnicí.

Nuže, možno-li, budiž; i dána buď změrná DC a k CD přistavme pravoúhelník CE stejný s AB^2, šířkou činící DE. Ježto tedy AB jest úsečnice, DE jest úsečnice první (X. XCVII.). K ní příslušej EF; tedy DF, FE jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, a $DF^2 > FE^2$ o čtverec přímky s DF souměřitelné a DF je dle délky souměřitelná s danou změrnou DC (vým. tř. č. 1.). Dále, ježto AB je dvoučástnice, DE je tedy dvoučástnice první (X. LX.). Rozdělena buď ve své části v G a větší částí buď DG; proto DG, GE jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné, a $DG^2 > GE^2$ o čtverec přímky s DG souměřitelné a větší část DG je dle délky souměřitelná s danou změrnou DC (vým. dr. č. 1.). Tedy také DF je dle délky souměřitelná s DG; pročež i zbývající GF jest souměřitelná dle délky s DF. (Ježto tedy DF jest souměřitelná s GF a DF je změrná, proto jest i GF změrná. Ježto tedy DF je dle délky souměřitelná s GF) a DF je dle délky nesouměřitelná s EF; nesouměřitelná tedy dle délky s EF jest i FG. Pročež GF, FE jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné; tedy EG jest úsečnice. Avšak i změrná; což právě jest nemožné.



Tedy úsečnice není stejná s dvoučástnicí; což bylo dokázati.

Úsečnice a přímky nezměrné od ní odvozené nejsou ani se střednicí ani vespolek stejné. Neboť čtverec střednice, přistaven jsa ke změrné, šířkou činí přímku změrnou a s tou, k níž jest přistaven, dle délky nesouměřitelnou (X. XXII.); čtverec pak úsečnice, přistaven jsa ke změrné, šířkou činí úsečnici první (X. XCVII.); a čtverec střednicové úsečnice první, přistaven jsa ke změrné, šířkou činí úsečnici druhou (X. XCVIII.); a čtverec střednicové úsečnice druhé, přistaven jsa ke změrné, šířkou činí úsečnici třetí (X. XCIX.); čtverec pak nezměrné menší, přistaven jsa ke změrné, šířkou činí úsečnici čtvrtou (X. C.); čtverec pak základnice útvaru se změrným celku střednímu rovného, přistaven jsa ke změrné, šířkou činí úsečnici pátou (X. CI.); a čtverec základnice útvaru se středním celku střednímu rovného, přistaven jsa ke změrné, šířkou činí úsečnici šestou (X. CII.). Ježto tedy řečené šířky jak od první tak i navzájem se liší, od první, jelikož to přímka změrná, navzájem pak, ježto nejsou v pořadí tytéž, patrno, že i samy přímky nezměrné navzájem se liší. A ježto bylo dokázáno, že úsečnice není stejná s dvoučástnicí, a přímky od úsečnice odvozené, přistaveny jsouce ke změrné, šířkami činí úsečnice, každá dle svého pořadí, přímky pak od dvoučástnice odvozené činí dvoučástnice i samy dle svého pořadí; jedny tedy jsou odvozeninami úsečnice a druhé odvozeninami dvoučástnice, takže všech nezměrných přímek je v pořadí třináct:

1. střednice,
2. dvoučástnice,
3. dvoustřednice první,
4. dvoustřednice druhá,
5. nezměrná větší,
6. základnice útvaru změrného a středního,
7. základnice dvou útvarů středních,
8. úsečnice,
9. střednicová úsečnice první,
10. střednicová úsečnice druhá,
11. nezměrná menší,
12. základnice útvaru se změrným celku střednímu rovného,
13. základnice útvaru se středním celku střednímu rovného.*)

Kniha jedenáctá.

Výměry.

1. Těleso jest, co má délku a šířku a výšku.
2. Hranicí pak tělesa plocha.
3. Přímka jest na rovině kolmo, když se všemi přímkami, s ní se stýkajícími a jsoucími v rovině, tvoří úhly pravé.
4. Rovina jest na rovině kolmo, když přímky v jedné z rovin, vedené kolmo na společnou průsečnici rovin, jsou na druhé rovině kolmo.
5. Sklonem přímky k rovině jest, když se od vyvýšeného konce přímky spustí na rovinu kolmice a od paty její k patě přímky na rovině se vede spojnice, úhel sevřený spojnicí a přímkou vztyčenou.

---

*) Dále jsou ve vyd. Heibg. ještě poučky CXII.—CXV., nepochybně dodavek cizí.

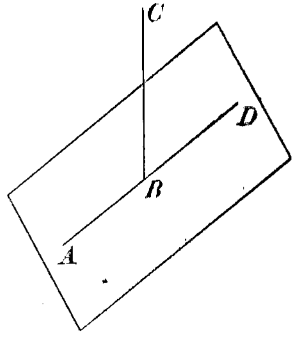
6. Sklonem roviny k rovině jest úhel sevřený kolmicemi v obou rovinách vedenými k témuž bodu na společné průsečnici.
7. Pravíme, že jest rovina k rovině stejně skloněna jako jiná k jiné, když jsou řečené úhly sklonů navzájem sobě rovny.
8. Rovnoběžné jsou roviny nesbíhavé.
9. Podobny jsou útvary tělesové omezené podobnými rovinami, na počet stejnými.
10. Stejné pak i podobné (shodné) jsou útvary tělesové omezené rovinami podobnými, stejnými počtem i velikostí.
11. Tělesový úhel je sklon více než dvou čar navzájem se stýkajících, a to v netéže ploše, ke všem těm čarám.*) Jinak: tělesový úhel jest úhel sevřený více než dvěma úhly rovinnými, v netéže rovině jsoucími, v jednom bodě vrcholícími.
12. Jehlan jest útvar tělesový omezený rovinami od jedné roviny k jednomu bodu se sbíhajícími.
13. Hranol jest útvar tělesový omezený rovinami, z nichž dvě protější jsou stejné i podobné a rovnoběžné, ostatní pak rovnoběžníky.
14. Koule jest útvar omezený tím, že se kolem pevného průměru polokruhu polokruh otočí, až se opět vrátí na totéž místo, odkud se počal otáčeti.
15. Osou koule jest ona přímka pevná, kolem níž se polokruh otáčí (14.).
16. Střed koule je týž jako polokruhu (14.).
17. Průměrem pak koule jest nějaká přímka vedená středem a na obou stranách zakončená povrchem koule.
18. Kužel jest útvar omezený tím, že se trojúhelník pravoúhlý otočí kolem pevné jedné ze stran pravý úhel svírajících, až se opět vrátí na totéž místo, odkud se počal otáčeti. A když pevná přímka se rovná druhé při úhlu pravém se otáčející, kužel bude pravoúhlým, pakli je menší, tupoúhlým, pakli větší, ostroúhlým.**)
19. Osou kužele jest pevná přímka, kolem níž se otáčí ten trojúhelník (18,).
20. Základnou pak kruh rýsovaný otáčenou přímkou (18.).
21. Válec jest útvar omezený tím, že se rovnoběžník pravoúhlý otočí kolem pevné jedné ze stran rovnoběžníku pravý úhel svírajících, až se opět vrátí na totéž místo, odkud se počal otáčeti.
22. Osou válce jest pevná přímka, kolem níž se otáčí ten rovnoběžník (21.).
23. Základnami pak jsou kruhy rýsované pohybem dvou přímek protějších (21.).
24. Podobny jsou kůžele a válce, které mají úměrné osy a průměry základen.
25. Krychle jest útvar tělesový omezený šesti stejnými čtverci.
26. Osmistěn jest útvar tělesový omezený osmi trojúhelníky stejnými a stejnostrannými.

*) Snad od některého Eukleidova předchůdce.
**) Hledí se k úhlu v temeni.

27. Dvacetistěn jest útvar tělesový omezený dvaceti trojúhelníky stejnými a stejnostrannými.
28. Dvanáctistěn jest útvar tělesový omezený dvanácti pětiúhelníky stejnými a stejnostrannými i stejnoúhlými.

I.

N e n í   m o ž n o,   b y   n ě j a k á   č á s t   p ř í m k y   b y l a   n a   r o v i n ě   p o l o ž e n é,   n ě j a k á   p a k   č á s t   n a   z v ý š e n é.



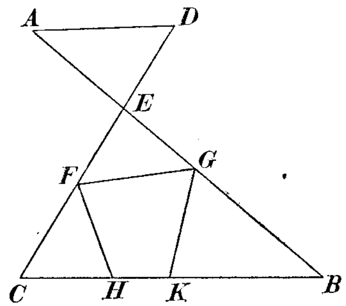
Nuže buď, možno-li, nějaká část AB přímky ABC na rovině položené a nějaká část BC na zvýšené.

Bude tedy nějaká přímka s přímkou AB nepřetržitě v přímce na rovině položené. Buď to BD; dvou tedy přímek ABC, ABD společnou úsečkou jest AB; což práve nemožno, jelikož průměry, když ze středu B a rozpětím AB narýsujeme kruh[1]), zaberou nestejné oblouky kruhu.

Tedy není možno, by nějaká část přímky — —.

II.

K d y ž   s e   d v ě   p ř í m k y   n a v z á j e m   p r o t í n a j í,   j s o u   v   j e d i n é   r o v i n ě,   a   k a ž d ý   t r o j ú h e l n í k   j e s t   v   j e d i n é   r o v i n ě.



Nuže protínejte se navzájem přímky AB, CD v bodě E; pravím, že AB, CD jsou v jediné rovině a každý trojúhelník jest v jediné rovině.

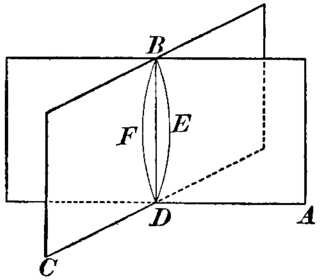
Nuže vytkněme na EC, EB nahodilé body F, G a veďme spojnice CB, FG a protněme je přímkami FH, GK; pravím nejprve, že $\triangle ECB$ jest v jediné rovině. Neboť jestli část trojúhelníku ECB, buď FHC nebo GBK, v rovině položené, ostatek pak v jiné, také nějaká část přímky EC nebo EB bude v rovině položené, druhá pak v jiné; pakli část $FCBG$ trojúhelníku ECB jest v rovině položené, ostatek pak v jiné, také nějaká část přímky EC i EB bude v rovině položené, druhá pak v jiné; což dokázáno nesmyslným (XI. I.). Tedy $\triangle ECB$ jest v jediné rovině. Ve které však je $\triangle ECB$, v té také EC i EB; ve které však EC i EB, v té též AB, CD. Pročež přímky AB, CD jsou v jediné rovině i každý trojúhelník jest v jediné rovině; což právě bylo dokázati.

[1]) Totiž v rovině ACD, oblouk AC je menší, obl. ACD větší.

III.

Když se dvě roviny navzájem protínají, společný průsek jejich jest přímka.

Nuže protínejte se navzájem roviny AB, BC a společným průsekem jejich budiž čára DB; pravím, že čára DB je přímka.



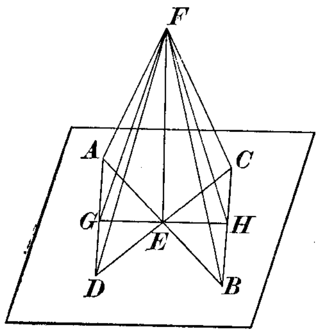
Nuže, není-li, spojme D a B v rovině AB přímkou DEB a v rovině BC přímkou DFB. Budou míti zajisté obě přímky DEB a DFB společné konce a budou patrně objímati plochu; což právě nesmyslné. Tedy DEB, DFB nejsou přímky. Podobně zajisté dokážeme, že ani žádná jiná z D do B vedená čára nebude přímka kromě DB, společného to průseku rovin AB, BC.

Když se tedy dvě roviny navzájem protínají, společný průsek jejich je přímka; což právě bylo dokázati.

IV.

Když se postaví přímka na přímky dvě navzájem se protínající ve společném průseku kolmo, i na jejich[2]) rovině bude kolmo.

Nuže budiž z E vztyčena nějaká přímka EF na dvou přímkách AB, CD navzájem v bodě E se protínajících kolmo; pravím, že EF jest kolmo i na rovině přímek AB, CD.



Nuže odřízněmež úsečky navzájem stejné AE, EB, CE, ED a veďme bodem E jakkoli přímku GEH a spojnice AD, CB a ještě z nahodilého bodu F[3]) veďme spojnice FA, FG, FD, FC, FH, FB. A ježto dvě strany AE, ED jsou stejné s CE, EB a svírají stejné úhly (vrcholové), tedy základna $AD = CB$ a bude $\triangle AED = CEB$; a tak i $\sphericalangle DAE = EBC$. Také však $\sphericalangle AEG = BEH$. Oba zajisté trojúhelníky AGE, BEH mají po dvou úhlech střídavě stejných a po jedné straně stejné při stejných úhlech, t. $AE = EB$; pročež i ostatní strany budou míti s ostatními stranami stejné. Tedy $GE = EH$, $AG = BH$. A ježto $AE = EB$, společnou pak kolmice FE, tedy základna $FA = FB$. Z téže příčiny ovšem i $FC = FD$. A ježto $AD = CB$ a též $FA = FB$, jest zajisté po dvou stranách, FA, AD a FB, BC, střídavě stejných; také dokázáno, že základna $FD = FC$; pročež i $\sphericalangle FAD = FBC$. A ježto dále bylo dokázáno, že $AG = BH$, avšak zajisté i $FA = FB$; obě tedy FA, AG jsou s FB, BH střídavě

²) Eukl. τῷ δι αὐτῶν ἐπιπέδῳ, na rovině jimi proložené.
³) Ovšem na kolmici EF, třebas i prodloužené

stejné. Také dokázáno, že $\sphericalangle FAG = FBH$; tedy základna $FG = FH$. A ježto dále bylo dokázáno, že $GE = EH$, společnou pak EF, obě zajisté GE, EF jsou střídavě stejné s HE, EF; i základna $FG = FH$; pročež $\sphericalangle GEF = HEF$. Tedy $\sphericalangle GEF = HEF = R$. Proto FE na EH, nahodile bodem E vedené, jest kolmo. Podobně zajisté dokážeme, že FE i se všemi přímkami s ní se stýkajícími a jsoucími v položené rovině bude činiti úhly pravé. Přímka pak jest na rovině kolmo, když se všemi přímkami s ní se stýkajícími a jsoucími v téže rovině činí úhly pravé; tedy FE stojí na položené rovině kolmo. Položená pak rovina je ta, jež proložena přímkami AB, CD. Tedy FE jest na rovině přímek AB, CD kolmo.

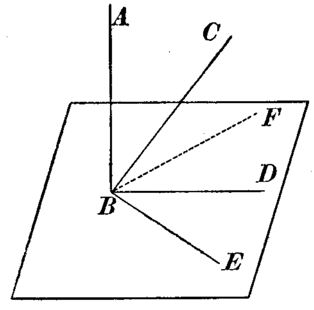
Když se tedy postaví přímka na přímky dvě navzájem se protínající ve společném průseku kolmo, i na jejich rovině bude kolmo; což právě bylo dokázati.

V.

Když se přímka na třech přímkách navzájem se stýkajících ve společném průseku postaví kolmo, ty tři přímky jsou v jediné rovině.

Nuže postavme nějakou přímku AB na třech přímkách BC, BD, BE ve styčném bodě B kolmo; pravím, že BC, BD, BE jsou v jediné rovině.

Nuže nebuďte, nýbrž, možno-li, buďte BD, BE v rovině položené, BC však ve zvýšené, a proložme přímkami AB, BC rovinu; bude zajisté společným průsekem v položené rovině přímka (XI. III.). Budiž jí BF. Pročež jsou v jediné rovině, proložené přímkami AB, BC, tři přímky AB, BC, BF. A ježto AB jest na BD i BE kolmo, tedy jest AB kolmo také na rovině přímek BD, BE. Rovina pak přímek BD, BE jest položená; pročež AB jest kolmo na rovině položené. A tak i se všemi přímkami s ní se stýkajícími a jsoucími v té položené rovině činiti bude AB pravé úhly. Stýká pak se s ní BF, jsouc v rovině položené; tedy $ABF = R$. Dáno však, že též $ABC = R$; pročež $\sphericalangle ABF = ABC$. A jsou v jediné rovině[4]); což právě jest nemožné. Tedy přímka BC není v rovině zvýšené; pročež tři přímky BC, BD, BE jsou v jediné rovině.



Když se tedy přímka — — [5]).

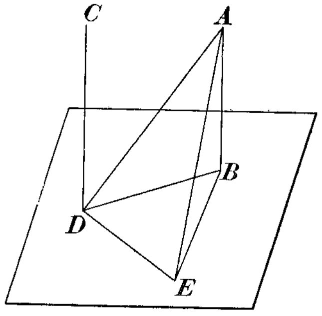
VI.

Když jsou dvě přímky na téže rovině kolmo, ty přímky budou rovnoběžné.

⁴) Totiž $ABFC$.
⁵) Slova ze záhlaví tuto se opakují s dodavkem, »což právě bylo dokázati«.

Nuže buďte dvě přímky AB, CD na položené rovině kolmo; pravím, že $AB \parallel CD$.

Nuže sbíhejte se s položenou rovinou v bodech B, D, i veďme spojnici BD a zřiďme na položené rovině $DE \perp BD$ a budiž $DE = AB$ a veďme spojnice BE, AE, AD.



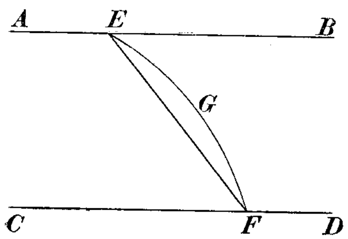
A ježto AB jest na položené rovině kolmo, také se všemi přímkami s ní se stýkajícími a jsoucími v položené rovině bude činiti úhly pravé. Stýkají pak se s AB i BD i BE, jsouce v položené rovině; pročež $\sphericalangle ABD = ABE = R$. Z téže příčiny ovšem i $\sphericalangle CDB = CDE = R$. A ježto $AB = DE$ a společnou BD, obě zajisté strany AB, BD jsou střídavě stejné s ED, DB, a svírají úhly pravé; tedy základna $AD = BE$. A ježto $AB = DE$, avšak též $AD = BE$, obě zajisté AB, BE jsou střídavě stejné s ED, DA; a základna jejich AE je společná; tedy $\sphericalangle ABE = EDA$. Avšak $ABE = R$, pročež i $\sphericalangle EDA = R$; tedy jest $ED \perp DA$. Je však kolmo též na BD i DC; tedy ED stojí kolmo na třech přímkách BD, DA, DC v bodě styčném. Pročež tři přímky BD, DA, DC jsou v jediné rovině (XI. v.). Ve které však jsou DB, DA, v té také AB, neboť každý trojúhelník jest v jediné rovině; jsou tedy přímky AB, BD, DC v jediné rovině. A $\sphericalangle ABD$, BDC jsou pravé; pročež $AB \parallel CD$ (I. xxviii.).

Když jsou tedy dvě přímky — —

VII.

Když jsou dvě přímky rovnoběžné a vytkne se na obou po nahodilém bodě, spojnice těch bodů je v téže rovině jako ty rovnoběžky.

Dvěma přímkami rovnoběžnými buďtež AB, CD, a vytkněme na obou nahodilé body E, F; pravím, že spojnice bodův E, F je v téže rovině jako ty rovnoběžky.



Nuže nebuď, nýbrž, možno-li, budiž ve zvýšené jako EGF, a veďme přímkou EGF rovinu; průsekem zajisté činiti bude v rovině položené přímku (XI. iii.). Buď jí EF; a tak dvě přímky EGF, EF budou objímati plochu; což právě jest nemožné. Tedy spojnice bodův E, F není v rovině zvýšené; pročež přímka body E, F spojující jest v rovině rovnoběžek AB, CD.

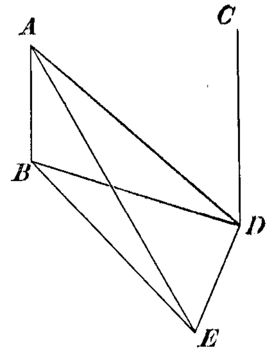
Když jsou tedy dvě přímky rovnoběžné — —

VIII.

Když jsou dvě přímky rovnoběžné a jedna z nich jest na nějaké rovině kolmo, i zbývající bude na téže rovině kolmo.

Dvěma přímkami rovnoběžnými buďtež AB, CD, jedna pak z nich, AB, buď na položené rovině kolmo; pravím, že také zbývající CD bude na téže rovině kolmo.

Nuže stýkejte se AB, CD s rovinou položenou v bodech B, D, a veďme spojnici BD; tedy AB, CD, BD jsou v jediné rovině (XI. vii.). Veďme k BD v položené rovině kolmici DE a buď $DE = AB$ a veďme spojnice BE, AE, AD. A ježto AB jest na rovině položené kolmo, tož i na všech přímkách s ní se stýkajících a jsoucích v položené rovině jest AB kolmo; pročež $\sphericalangle ABD = ABE = R$. A ježto přímka BD prochází rovnoběžkami AB, CD, tedy $\sphericalangle ABD + CDB = 2R$. ABD však jest úhel pravý; pročež i $\sphericalangle CDB$ jest pravý; tedy $CD \perp BD$. A ježto $AB = DE$, společnou pak BD, obě zajisté AB, BD jsou s ED, DB střídavě stejné a $\sphericalangle ABD = EDB$, neboť jsou oba pravé; tedy základna $AD = BE$. A ježto $AB = DE$ a $BE = AD$, obě zajisté AB, BE jsou střídavě stejné s ED, AD a základnou jejich společnou AE; pročež $\sphericalangle ABE = EDA$. ABE však jest pravý, pravý tedy též EDA; tedy $ED \perp AD$. Avšak jest kolmo též na DB; pročež ED jest kolmo i na rovině přímek BD, DA. Také tedy se všemi přímkami s ní se stýkajícími a jsoucími v rovině BDA bude činiti ED úhly pravé. Avšak v rovině BDA jest DC, jelikož právě v rovině BDA jsou AB, BD, a ve které AB, BD, v té jest i DC. Tedy $ED \perp DC$; a tak i $CD \perp DE$. Avšak i $CD \perp BD$. Pročež CD stojí na dvou přímkách DE, DB, navzájem se protínajících, v průseku D kolmo; a tak CD jest kolmo též na rovině DE, DB. Rovina pak přímek DE, DB jest položená; pročež CD jest na rovině položené kolmo.



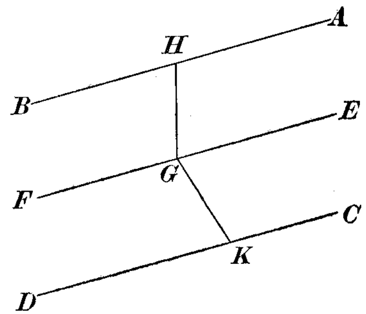
Když jsou tedy dvě přímky rovnoběžné — —

IX.

Přímky s touž přímkou rovnoběžné, i když s ní nejsou v téže rovině, také navzájem jsou rovnoběžné.

Nuže buďtež AB, CD rovnoběžné s EF, nejsouce s ní v téže rovině; pravím, že $AB \parallel CD$.

Nuže vytkněme na EF nahodilý bod G a v něm na rovině přímek EF, AB veďme k EF kolmici GH, v rovině pak přímek FE, CD veďme opět k EF kolmici GK. A ježto EF jest na GH i GK kolmo, tedy EF jest kolmo též na rovině přímek GH, GK (XI. iv.). A $EF \parallel AB$; pročež také AB jest kolmo na rovině HGK (XI. viii.). Z téže příčiny ovšem i CD jest kolmo na rovině HGK; tedy AB i CD jsou na

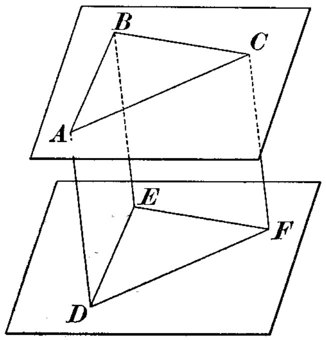


rovině HGK kolmo. Když pak jsou dvě přímky na téže rovině kolmo, ty přímky jsou rovnoběžné (XI. VI.); pročež $AB \parallel CD$; což právě bylo dokázati.

X.

Když dvě přímky navzájem se stýkající jsou rovnoběžné se dvěma přímkami navzájem se stýkajícími a nejsou s nimi v téže rovině, budou svírati stejné úhly.

Nuže buďte dvě přímky navzájem se stýkající AB, BC rovnoběžné se dvěma přímkami navzájem se stýkajícími DE, EF a nebuďte s nimi v téže rovině; pravím, že $\sphericalangle ABC = DEF$.



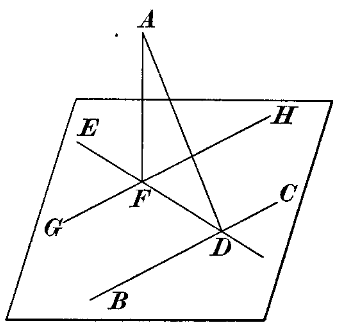
Nuže vezměme BA, BC a ED, EF střídavě za stejné a veďme spojnice AD, CF, BE, AC, DF. A ježto $BA = ED$ a jsou rovnoběžné, též AD je s BE stejná a rovnoběžná (I. XXXIII.). Z téže příčiny ovšem i CF je s BE stejná a rovnoběžná; tedy AD, CF jsou s BE stejné i rovnoběžné. Přímky pak s touž přímkou rovnoběžné, byť i nebyly s ní v téže rovině, jsou i navzájem rovnoběžné (XI. IX.); pročež AD je s CF rovnoběžná a stejná. A stýkají se s nimi AC, DF; tedy též AC je s DF stejná i rovnoběžná. A ježto obě strany AB, BC jsou s DE, EF střídavě stejné i základna $AC = DF$, proto $\sphericalangle ABC = DEF$.

Když tedy dvě přímky navzájem se stýkající — —

XI.

Z daného bodu zvýšeného spusť na danou rovinu kolmici.

Daným bodem zvýšeným budiž A, danou pak rovinou položená; má se tedy z bodu A na položenou rovinu spustiti kolmice.



Nuže veďme v položené rovině nějakou nahodilou přímku BC a z bodu A zřiďme na BC kolmici AD (I. XII.). Jestli tedy AD kolmo i na položené rovině, byl by úkol vykonán. Pakli ne, veďme z bodu D na položené rovině k BC kolmici DE a veďme z A k DE kolmici AF a bodem F veďme GH rovnoběžně s BC

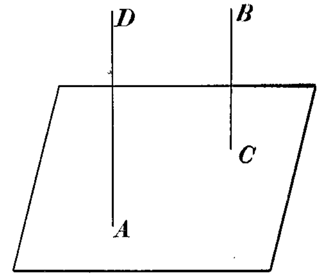
A ježto BC jest na DA i DE kolmo, tedy BC jest i na rovině EDA kolmo. A s ní rovnoběžná jest GH; když pak jsou dvě přímky rovnoběžné a jedna z nich jest na nějaké rovině kolmo, i zbývající na téže rovině bude kolmo (XI. VIII.); pročež i GH jest kolmo na rovině přímek ED, DA. I na všech tedy přímkách s ní se stýkajících a jsoucích v rovině přímek ED, DA jest GH kolmo. Stýká však se s ní AF, jsouc v rovině přímek ED, DA; pročež GH jest na FA kolmo; a tak i $FA \perp HG$. Také však $AF \perp DE$; tedy AF jest kolmo na GH i DE. Když pak se postaví přímka na dvě přímky navzájem se stýkající ve styčném bodě kolmo, také na jejich rovině bude kolmo. Tedy FA jest kolmo na rovině přímek ED, GH. Rovina pak přímek ED, GH jest rovina položená; pročež AF jest na položené rovině kolmo.

Z daného tedy bodu zvýšeného A spuštěna jest na položenou rovinu kolmice AF; což právě bylo vykonati.

XII.

Vztyč na dané rovině z daného na ní bodu kolmici.

Danou rovinou budiž rovina položená a bodem na ní buď A; má se tedy z bodu A na položené rovině vztýčiti kolmice.



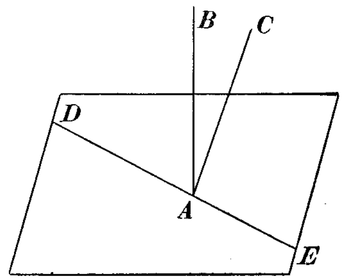
Mysleme si nějaký zvýšený bod B[6]) a z B spusťme na položenou rovinu kolmici BC (XI. XI.) a z bodu A veďme AD rovnoběžně s BC.

Ježto tedy dvě přímky AD, CB jsou rovnoběžné a jedna z nich BC jest na položené rovině kolmo, proto i zbývající AD jest na položené rovině kolmo (XI. VIII).

Tedy jest na dané rovině z bodu na ní A vztýčena kolmice AD; což právě bylo vykonati.

XIII.

V témž bodě na téže rovině nepostavíš dvou přímek kolmo na téže straně.



Nuže, možno-li, buďte v témž bodě A na položené rovině postaveny na téže straně přímky dvě AB, AC a proložme přímkami AB, AC rovinu; průsekem zajisté bodem A v položené rovině činiti bude přímku. Buď jí DAE; tedy AB, AC, DAE jsou v jediné rovině. A ježto CA jest na položené rovině kolmo, tedy též se všemi přímkami s ní se stýkajícími a jsoucími v položené rovině bude činiti pravé úhly. Stýká pak se s ní DAE, jsouc v položené rovině; proto $\sphericalangle CAE = R$. Z téže příčiny ovšem

---

[6]) Bod B jsem položil nahoru, C dolů (u Heiberga opačně); neboť B bod zvýšený.

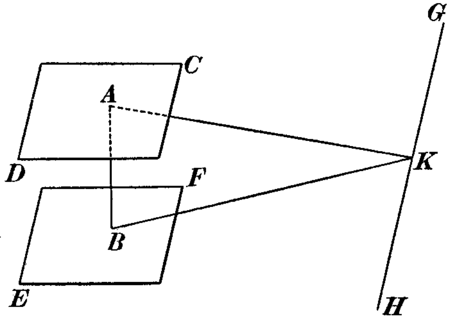
i $\sphericalangle BAE = R$; pročež $\sphericalangle CAE = BAE$. A jsou v téže rovině; což právě jest nemožné.

Tedy v témž bodě na téže rovině — —

XIV.

Na kterých rovinách táž přímka jest kolmo, ty roviny budou rovnoběžné.

Nuže buď nějaká přímka AB kolmo na rovinách CD i EF; pravím, že jsou ty roviny rovnoběžné.

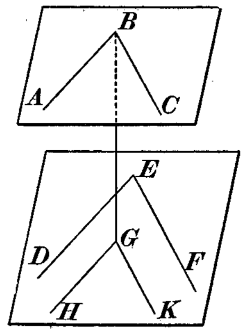


Neboť, nejsou-li, prodlužovány jsouce setkají se. Stýkejte se; budou zajisté společným průsekem činiti přímku. Buďiž to GH; a vytkněme na GH nahodilý bod K a veďme spojnice AK, BK. A ježto AB jest kolmo na rovině EF, tedy také na přímce BK, která jest v prodloužené rovině EF, jest AB kolmo; pročež $\sphericalangle ABK = R$. Z téže příčiny ovšem i $\sphericalangle BAK = \mathrm{R}$. Tedy v $\triangle ABK$ součet dvou úhlů $ABK + BAK$ jest roven dvěma pravým; což právě jest nemožné. Pročež roviny CD, EF prodlužovány jsouce se nesetkají; jsou tedy roviny CD, EF rovnoběžné.

Na kterých tedy rovinách — —

XV.

Když jsou dvě přímky navzájem se stýkající se dvěma přímkami navzájem se stýkajícími rovnoběžné, nejsouce s nimi v téže rovině, roviny jejich jsou rovnoběžné.[7])



Nuže buďte dvě přímky navzájem se stýkající AB, BC rovnoběžné se dvěma přímkami navzájem se stýkajícími DE, EF, nejsouce s nimi v téže rovině; pravím, že roviny přímek AB, BC a DE, EF prodlužovány jsouce navzájem se nesetkají.[8])

Nuže veďme z bodu B na rovinu přímek DE, EF kolmici BG a ta dopadej na rovinu v bodě G a z G veďme $GH \parallel ED$ a $GK \parallel EF$. A ježto BG jest kolmo na rovině přímek DE, EF, tedy také se všemi přímkami s ní se stýkajícími a jsoucími v rovině přímek DE, EF bude činiti úhly pravé. Stýkají se pak s ní GH i GK, jsouce v rovině přímek DE, EF; pročež $\sphericalangle BGH = BGK = R$.

[7]) Totiž roviny obou dvojic.

[8]) Nesmí ovšem úhel přímkami sevřený býti $2R$ ani $4R$.

A ježto $AB \parallel GH$ (XI. IX.), tedy $\sphericalangle GBA + BGH = 2R$. Avšak $\sphericalangle BGH = R$, tedy též $\sphericalangle GBA = R$; pročež $GB \perp BA$. Z téže příčiny ovšem $GB \perp BC$. Ježto tedy přímka GB na dvou přímkách BA, BC vzájemně se stýkajících stojí kolmo, proto GB jest i na rovině přímek BA, BC kolmo.[9]) Na kterých však rovinách táž přímka jest kolmo, ty roviny jsou rovnoběžné (XI. XIV.); pročež rovina přímek AB, BC je s rovinou přímek DE, EF rovnoběžná.

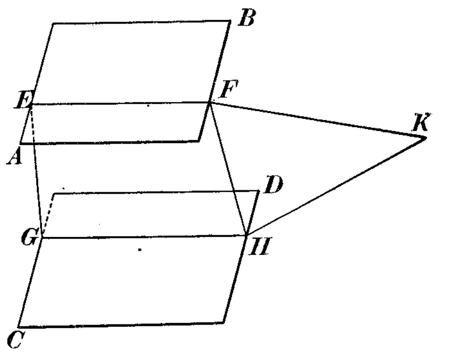
Když jsou tedy dvě přímky navzájem — —

XVI.

Když dvě roviny rovnoběžné protíná nějaká rovina, společné jejich průseky jsou rovnoběžné.

Nuže protínej dvě rovnoběžné roviny AB, CD rovina $EFGH$ a společnými jejich průseky buďtež EF, GH; pravím, že $EF \parallel GH$.

Nuže, není-li tomu tak, EF, GH jsouce prodlužovány setkají se buď na straně F, H buď na straně E, G. Prodlouženy buďte na straně F, H a stýkejte se nejprve v K.

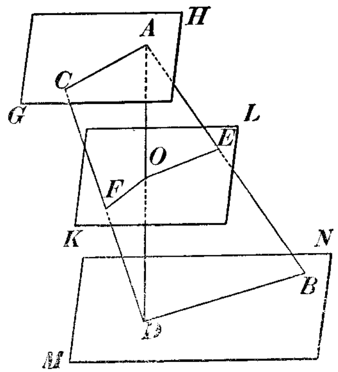


A ježto EFK jest v rovině AB, proto i všechny body na EFK jsou v rovině AB. A jedním z bodů na přímce EFK jest K; tedy K jest v rovině AB. Z téže příčiny ovšem jest K i v rovině CD; pročež roviny AB, CD jsouce prodlužovány setkají se. Nestýkají se však, jelikož dáno jest, že jsou rovnoběžné; tedy přímky EF, GH jsouce prodlužovány na straně F, H se nesetkají. Podobně ovšem dokážeme, že přímky EF, GH jsouce prodlužovány nesetkají se ani na straně E, G. Přímky pak na žádné straně se nestýkající jsou rovnoběžné; pročež $EF \parallel HG$.

Když tedy dvě rovnoběžné roviny — —

XVII.

Když jsou dvě přímky protínány rovnoběžnými rovinami, budou protínány v týchž poměrech.



Nuže buďte přímky AB, CD protínány rovnoběžnými rovinami GH, KL, MN v bodech A, E, B, C, F, D; pravím, že $AE : EB = CF : FD$.

Nuže veďme spojnice AC, BD, AD a protínej AD rovinu KL v bodě O a veďme spojnice EO, OF. A ježto dvě ro-

[9]) Následuje několik řádků zbytečných, nepochybně cizích.

viny rovnoběžné KL, MN protíná rovina $EBDO$, společné jejich průseky EO, BD jsou rovnoběžné (X. XVI.). Z téže příčiny ovšem, ježto dvě roviny rovnoběžné GH, KL protíná rovina $AOFC$, společné jejich průseky AC, OF jsou rovnoběžné. A ježto v $\triangle ABD$ jest $EO \parallel BD$, tedy $AE:EB = AO:OD$ (VI. II.). Ježto dále v $\triangle ADC$ jest $OF \parallel AC$, $AO:OD = CF:FD$. Bylo však dokázáno, že též $AO:OD = AE:EB$; pročež také $AE:EB = CF:FD$.

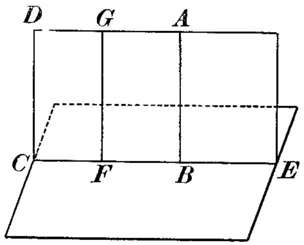
Když jsou tedy dvě přímky protínány — —

XVIII.

Když je přímka na nějaké rovině kolmo, také všecky roviny jí proložené budou na téže rovině kolmo.

Nuže buď nějaká přímka AB na položené rovině kolmo; pravím, že také všecky roviny přímkou AB proložené jsou na položené rovině kolmo.

Nuže proložme přímkou AB rovinu DE a společným průsekem roviny DE a roviny položené budiž CE, a vytkněme na CE nahodilý bod F a z F vztyčme na CE v rovině DE kolmici FG. A ježto AB jest na položené rovině kolmo, proto i na všech přímkách s ní se stýkajících a jsoucích v položené rovině jest AB kolmo (vým. 3.), a tak i na CE jest kolmo; tedy $\sphericalangle ABF = R$. Avšak i $\sphericalangle GFB = R$; pročež $AB \parallel FG$. AB však jest kolmo na rovině položené; tedy též FG jest kolmo na rovině položené (XI. VIII.). I jest rovina na rovině kolmo, když přímky v jedné rovině vedené kolmo na společný průsek rovin jsou na rovině druhé kolmo (vým. 4.). A dokázáno bylo, že FG v jedné z rovin, t. v DE, na společném průseku jejich CE vztyčena byvši kolmo, jest kolmo na rovině položené; pročež rovina DE jest na položené kolmo. Podobně zajisté se dokáže, že také všecky roviny přímkou AB proložené jsou na rovině položené kolmo.



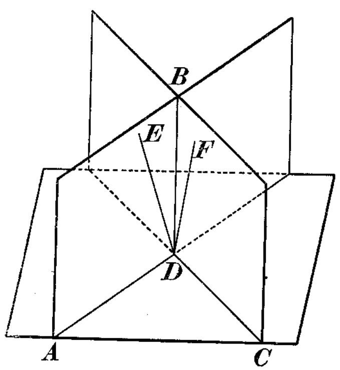
Když je tedy přímka na nějaké rovině — —

XIX.

Když jsou dvě roviny navzájem se protínající na nějaké rovině kolmo, také společný jejich průsek na téže rovině bude kolmo.

Nuže buďte dvě roviny AB, BC kolmo na rovině položené, společným pak jejich průsekem BD; pravím, že BD jest kolmo na rovině položené.

Nuže nebuď tak a z bodu D vztyčme v rovině AB na přímce AD kolmici DE, v rovině pak BC na CD kolmici DF.



A ježto rovina AB jest na položené kolmo a na společném průseku jejich AD vztyčena v rovině AB kolmice DE, tedy DE jest kolmo na rovině položené (vým. 4.). Podobně ovšem dokážeme, že i DF jest na položené rovině kolmo. Pročež jsou z téhož bodu D na rovině položené dvě přímky vztyčeny kolmo na téže straně; což právě jest nemožné (XI. XIII.). Proto na položené rovině z bodu D nevztýčíš kolmice kromě DB, společného to průseku rovin AB, BC.

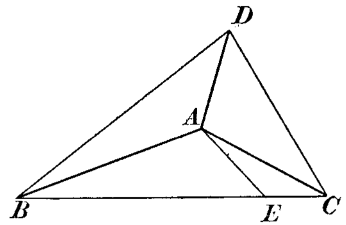
Když jsou tedy dvě roviny navzájem se protínající — —

XX.

Když úhel tělesový svírají tři úhly rovinné, dva kterékoli, jakkoli střídány jsouce, jsou větší než zbývající.

Nuže svírejtež úhel tělesový A tři úhly rovinné BAC, CAD, DAB; pravím, že z úhlův BAC, CAD, DAB dva kterékoli, jakkoli střídány jsouce, jsou větší než zbývající.

Jsou-li ovšem úhly BAC, CAD, DAB navzájem stejné, patrno, že dva kterékoli jsou větší než zbývající. Pakli ne, větší buď BAC[10], a zřiďme na přímce AB z bodu na ní A v rovině $BAC \sphericalangle BAE$ stejný s DAB a budiž $AE = AD$, a bodem E prodloužena jsouc BEC protínej přímky AB, AC v bodech B, C, a veďme spojnice DB, DC. A ježto $DA = AE$, společnou pak AB, dvě střídavě dvěma rovné, i $\sphericalangle DAB = BAE$; tedy základna $DB = BE$. A ježto $(BD + DC) > BC$, z nichžto, jak dokázáno, $DB = BE$, proto zbývající $DC > EC$. A ježto $DA = AE$ a společnou AC a základna $DC > EC$, tedy $\sphericalangle DAC > EAC$ (I. XXV.). Bylo pak dokázáno, že též $\sphericalangle DAB = BAE$; pročež $(\sphericalangle DAB + DAC) > BAC$[11]. Podobně zajisté dokážeme, že též ostatní po dvou brány jsouce jsou větší než zbývající.



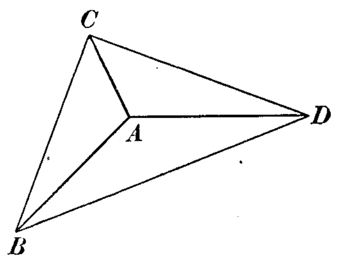
Když tedy úhel tělesový — —

XXI.

Každý tělesový úhel svírají úhly rovinné menší než čtyři pravé.

Tělesový úhel A svírejtež úhly rovinné BAC, CAD, DAB; pravím, že součet $\sphericalangle BAC + CAD + DAB$ jest menší než čtyři pravé.

Nuže vytkněme na přímkách AB, AC, AD nahodilé body B, C, D a veďme



[10]) Totiž větší než BAD.

[11]) K nerovnosti $\sphericalangle DAC > EAC$ přičtěme na obou stranách $\sphericalangle EAB\,(= DAB)$, bude $(DAB + DAC) > (EAB + EAC)$ neboli $(DAB + DAC) > BAC$.

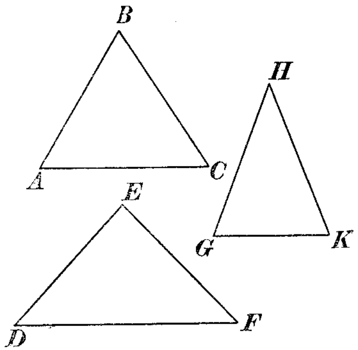
spojnice BC, CD, DB. A ježto tělesový úhel B objímají tři úhly rovinné CBA, ABD, CBD, dva kterékoli jsou větší než zbývající (XI. xx.); pročež $(\sphericalangle CBA + ABD) > CBD$. Z téže příčiny ovšem i $(\sphericalangle BCA + ACD) > BCD$ a $(\sphericalangle CDA + ADB) > CDB$; tedy šest úhlů $(CBA + ABD + BCA + ACD + CDA + ADB) > (CBD + BCD + CDB)$. Avšak $\sphericalangle CBD + BCD + BDC = 2\,R$ (I. xxxii.); pročež oněch šest $(CBA + ABD + BCA + ACD + CDA + ADB) > 2\,R$. A ježto v každém z trojúhelníkův ABC, ACD, ADB tři úhly (vnitřní) rovnají se dvěma pravým, tedy v těch třech trojúhelnících devět úhlů $CBA + ACB + BAC + ACD + CDA + CAD + ADB + DBA + BAD = 6\,R$, z nichžto šest $(ABC + BCA + ACD + CDA + ADB + DBA) > 2\,R$; pročež tři zbývající $BAC + CAD + DAB$, jež svírají úhel tělesový, jsou menší než čtyři pravé.

Každý tedy tělesový úhel svírají — —

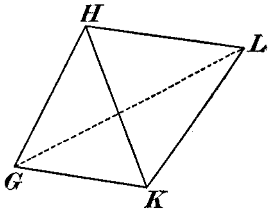
XXII.

Když jsou tři úhly rovinné, z nichžto dva jakkoli střídány jsouce jsou větší než zbývající, a svírají je ramena stejná, ze spojnic těch stejných ramen jest možno sestaviti trojúhelník.

Třemi úhly rovinnými buďtež ABC, DEF, GHK, z nichžto dva, jakkoli střídány jsouce, jsou větší než zbývající, totiž $(\sphericalangle ABC + DEF) > GHK$, $(\sphericalangle DEF + GHK) > ABC$ a též $(\sphericalangle GHK + ABC) > DEF$, a ramena AB, BC, DE, EF, GH, HK buďte stejná, i veďme spojnice AC, DF, GK; pravím, že možno je z přímek stejných s AC, DF, GK sestaviti trojúhelník, t. j. že dvě kterékoli z přímek AC, DF, GK jsou delší než zbývající.



Jsou-li ovšem $\sphericalangle ABC$, DEF, GHK stejné, patrno, že též AC, DF, GK jsou stejné a že ze stejných AC, DF, GK možno jest sestaviti trojúhelník. Pak-li ne, buďtež nestejné, a zřiďme na přímce HK při bodě na ní H $\sphericalangle KHL$ stejný s ABC, a budiž HL rovna některému z ramen AB, BC, DE, EF, GH, HK a veďme spojnice KL, LG[12]). A ježto dvě strany AB, BC jsou s KH, HL stejné a $\sphericalangle B = KHL$, tedy základna $AC = KL$. A ježto $(\sphericalangle ABC + GHK) > DEF$ a $\sphericalangle ABC = KHL$, tedy $\sphericalangle GHL > DEF$. A ježto dvě strany GH, HL se dvěma DE, EF jsou stejné a $\sphericalangle GHL > DEF$, proto základna $GL > DF$. Avšak $(GK + KL) > GL$; tedy $GK + KL$ jest mnohem větší než DF. KL však je stejná s AC; pročež $AC + GK$ jest větší než zbývající DF. Podobně ovšem



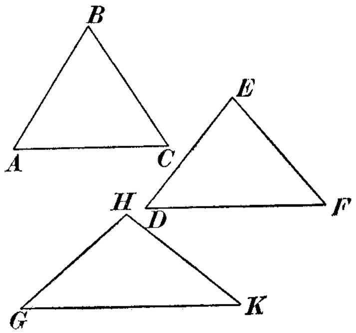
[12]) Vyobr. druhé, u Heiberga nesprávné, tuto jest opraveno.

dokážeme, že také $(AC + DF) > GK$ a rovněž $(DF + GK) > AC$. Tedy jest možno z přímek stejných s AC, DF, GK sestaviti trojúhelník; což právě bylo dokázati.

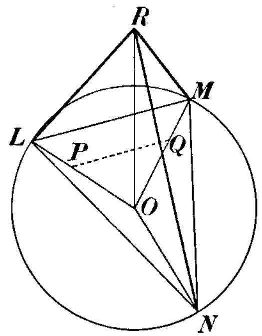
XXIII.

Ze tří rovinných úhlů, z nichžto dva jakkoli střídány jsouce jsou větší než zbývající, sestav úhel tělesový; nutno jest ovšem, aby ty tři byly čtyř pravých menší.

Danými třemi úhly rovinnými buďtež ABC, DEF, GHK, z nichžto dva jakkoli střídány jsouce jsou větší než zbývající a mimo to ty tři čtyř pravých menší; má se tedy z úhlů stejných s ABC, DEF, GHK sestaviti úhel tělesový.



Odřízněme ramena stejná AB, BC, DE, EF, GH, HK a veďme spojnice AC, DF, GK; tedy jest možno z přímek stejných s AC, DF, GK sestaviti trojúhelník (XI. xxii.). Sestavmež LMN, tak, aby byla $AC = LM$, $DF = MN$ a též $GK = NL$, a opišme kolem $\triangle LMN$ kruh LMN a vytkněme střed jeho a budiž to O a veďme spojnice LO, MO, NO; pravím, že $AB > LO$. Neboť, není-li, jest AB buď stejná s LO nebo jest menší. Budiž nejprve stejná. A ježto $AB = LO$, avšak $AB = BC$ a $OL = OM$; dvě tedy AB, BC jsou se dvěma LO, OM stejné i základna AC položena za stejnou s LM; pročež $\sphericalangle ABC = LOM$. Z téže příčiny ovšem i $\sphericalangle DEF = MON$ a rovněž $\sphericalangle GHK = NOL$; tedy tři úhly ABC, DEF, GHK jsou jednotlivě stejné s LOM, MON, NOL. Avšak tři $\sphericalangle LOM + MON + NOL = 4\,R$, pročež i tři $\sphericalangle ABC + DEF + GHK = 4\,R$. Podmínkou však, že jsou také menší než čtyři pravé; což právě nesrovnalé. Tedy není $AB = LO$. Pravím již, že AB není ani menší než LO. Nuže, možno-li, budiž, a vezměmež OP za stejnou s AB a OQ za stejnou s BC a veďme spojnici PQ. A ježto $AB = BC$, také $OP = OQ$, a tak i zbývající $LP = QM$. Pročež $LM \parallel PQ$ a $\triangle LMO$ s PQO stejnoúhlý (I. xxix.); tedy $OL : LM = OP : PQ$; střídavě $LO : OP = LM : PQ$. Avšak $LO > OP$, pročež i $LM > PQ$. Avšak LM vzata za stejnou s AC, tedy $AC > PQ$.



Ježto tedy dvě AB, BC se dvěma PO, OQ jsou stejné a základna $AC > PQ$, proto $\sphericalangle ABC > POQ$. Podobně ovšem dokážeme, že i $\sphericalangle DEF > MON$ a $\sphericalangle GHK > NOL$. Tedy tři $(\sphericalangle ABC + DEF + GHK) > (\sphericalangle LOM + MON + NOL)$. Avšak podmínkou jest, že $(\sphericalangle ABC$

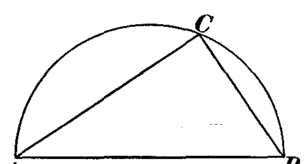
$+DEF+GHK) < 4R$; pročež součet $\sphericalangle LOM+MON+NOL$ jest o mnoho menší nežli $4R$. Avšak též stejný; což právě nesmyslné. Tedy není $AB < LO$. Bylo pak dokázáno, že ani stejná; pročež $AB > LO$.

Vztyčme tedy v bodě O v rovině kruhové LMN kolmici OR, a budiž $AB^2 - LO^2 = OR^2$ a veďme spojnice RL, RM, RN. A ježto RO jest kolmo na rovině kruhové LMN, tedy též na každé z přímek LO, MO, NO jest RO kolmo. A ježto $LO = OM$, společnou pak jest kolmice OR, proto základna $RL = RM$. Z téže příčiny ovšem také $RN = RL = RM$; tedy tři RL, RM, RN jsou navzájem stejné. A ježto $AB^2 - LO^2 = OR^2$, tedy $AB^2 = LO^2 + OR^2$. Součet pak $LO^2 + OR^2 = LR^2$, neboť $\sphericalangle LOR = R$; pročež $AB^2 = LR^2$; tedy $AB = RL$. Avšak $AB = BC = DE = EF = GH = HK$ a $RL = RM = RN$; a tak AB, BC, DE, EF, GH, HK, RL, RM, RN jsou stejné. A ježto dvě LR, RM jsou stejné se dvěma AB, BC a podmínkou jest, že základna $LM = AC$, tedy $\sphericalangle LRM = ABC$. Z téže příčiny ovšem i $\sphericalangle MRN = DEF$ a $LRN = GHK$.

Ze tří tedy úhlů rovinných LRM, MRN, NRL, jež jsou stejné se třemi danými $\sphericalangle ABC$, DEF, GHK, sestaven jest úhel tělesový R, jejž svírají úhly LRM, MRN, NRL; což právě bylo vykonati.

Výtěžek.

Jakým však způsobem $AB^2 - LO^2$ možno vzíti za stejné s OR^2, dokážeme takto: Mějme přímky AB, LO a budiž AB větší a zřiďme na ní polokruh ABC a v polokruh ABC zapusťmež AC stejnou s LO, jež není větší[13]) než průměr AB, a veďme spojnici CB. Ježto tedy $\sphericalangle ACB$ je v polokruží ACB, tedy $\sphericalangle ACB = R$ (III. XXXI.). Pročež $AB^2 = AC^2 + CB^2$. A tak $AB^2 - AC^2 = CB^2$. Avšak $AC = LO$; tedy $AB^2 - LO^2 = CB^2$. Vezmeme-li tedy OR za stejnou s BC, bude $AB^2 - LO^2 = OR^2$; což se mělo vykonati.



XXIV.

Když těleso omezují roviny rovnoběžné, protější roviny jeho jsou stejné rovnoběžníky[14]).

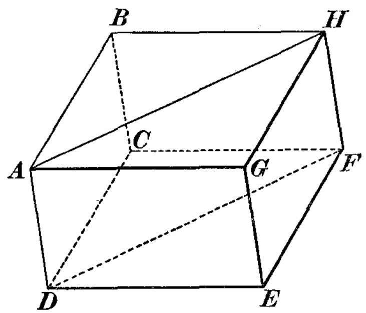
Nuže omezujtež těleso $CDHG$ roviny rovnoběžné AC a GF, AH a DF, BF a AE; pravím, že protější jeho roviny jsou stejné rovnoběžníky.

Neboť ježto dvě roviny rovnoběžné BG, CE protíná rovina AC, společné průseky jejich jsou rovnoběžné; tedy $AB \parallel DC$. Dále, ježto

[13]) Ba dokonce menší býti musí.

[14]) Výrok jen za některých podmínek pravdivý. Tak na př. o osmistěnu, kdež také dvě a dvě protější roviny jsou rovnoběžné, výrok ten platnosti nemá. Eukl. patrně míní plochami meznými šest čtyřúhelníků.

dvě roviny rovnoběžné BF, AE protíná rovina AC, společné průseky jejich jsou rovnoběžné; tedy $BC \parallel AD$. Bylo pak dokázáno, že též $AB \parallel DC$; tedy AC jest rovnoběžník. Podobně zajisté dokážeme, že také DF, FG, GB, BF, AE jsou rovnoběžníky[15]).



Veďme spojnice AH, DF. A ježto $AB \parallel DC$, $BH \parallel CF$, dvě tedy přímky AB, BH navzájem se stýkající jsou rovnoběžné se dvěma přímkami DC, CF v netéže rovině; pročež budou svírati stejné úhly (XI. XV.); tedy $\sphericalangle ABH = DCF$. A ježto AB, BH jsou se dvěma DC, CF střídavě stejné a $\sphericalangle ABH = DCF$, tedy základna $AH = DF$ a $\triangle ABH = DCF$. I jest rovnoběžník $BG = 2\,ABH$ a $CE = 2\,DCF$; pročež rovnoběžník $BG = CE$. Podobně ovšem dokážeme, že také $AC = GF$ a $BF = AE$.

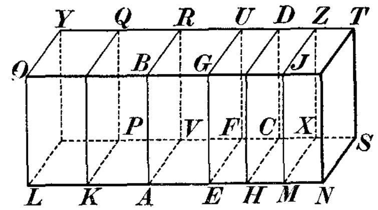
Když tedy těleso omezují roviny rovnoběžné, — —

XXV.

Když rovnoběžnostěn[16]) protne rovina rovnoběžná s rovinami protějšími, bude se míti základna k základně jako těleso k tělesu.

Nuže protínej rovnoběžnostěn $ABCD$ rovina FG, rovnoběžná s protějšími rovinami RA, DH; pravím že $AEFV : EHCF = ABFU : EGCD$.

Nuže prodlužme AH na obě strany, a buď s přímkou AEněkolik stejných AK, KL a s EH několik stejných HM, MN, a doplňme rovnoběžníky LP, KV, HX, MS a tělesa LQ, KR, DM, MT. A ježto $LK = KA = AE$, také rovnoběžníky LP, KV, AF jsou si rovny, rovněž KO, KB, AG a též LY, KQ, AR; neboť jsou protější (XI. XXIV.). Z téže příčiny ovšem také rovnoběžníky EC, HX, MS jsou si rovny, rovněž HG, HI, IN a též DH, MZ, NT; tedy tři roviny těles LQ, KR, AU jsou třem rovinám rovny. Avšak ty tři jsou rovny třem rovinám protějším; pročež ta tři tělesa LQ, KR, AU jsou si rovna (XI. XXIV.). Z téže příčiny ovšem i tři tělesa ED, DM, MT jsou si rovna. Tedy kolikrát větší jest LF než základna AF, tolikrát větší je též těleso LU než AU. Z téže příčiny ovšem, kolikrát větší jest základna NF než FH, tolikrát větší je též těleso NU než HU. A jestli základna $LF = NF$,



[15]) Kdyby však bylo boků na př. šest, také po dvou protějších rovnoběžných, byly by roviny BG CE třebas také rovnoběžné, avšak šestiúhelníky.

[16]) Těleso omezené šesti rovnoběžníky, z nichž dva a dva protější rovnoběžné (viz vyobr. předešlé).

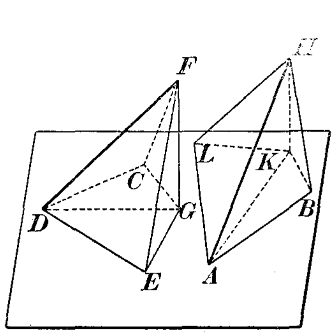
také těleso $LU = NU$, a jestli základna $LF > NF$, také těleso $LU > NU$, a jestli menší, menší. Když jsou tedy čtyři veličiny, dvě základny AF, FH a dvě tělesa AU, UH, vzata jest základna LF a těleso LU za stejný násobek základny AF a tělesa AU i základna NF a těleso NU za stejný násobek základny HF a tělesa HU; také dokázáno jest, jestli základna LF větší než FN, že také těleso LU jest větší než NU, pakli stejná, stejné, pakli menší, menší. Tedy základna AF má se k základně FH jako těleso AU k tělesu UH; což právě bylo dokázati.

XXVI.

Na dané přímce a při bodě na ní sestav úhel tělesový danému úhlu tělesovému rovný.

Danou přímkou buď AB a daným na ní bodem A, daným pak úhlem tělesovým D, jejž svírají úhly rovinné EDC, FDF, FDC; má se tedy na přímce AB při bodě na ní A sestaviti úhel tělesový rovný úhlu tělesovému D.

Nuže vytkněme DF nahodilý bod F a spusťme z F na rovinu přímek ED, DC kolmici FG, a dopadej na rovinu v G, a veďme spojnici DG i sestavme na přímce AB v bodě na ní A $\sphericalangle BAL$ stejný s EDC a $\sphericalangle BAK$ stejný s EDG, a budiž $AK = DG$, a vztyčme z bodu K na rovinu BAL kolmici KH, a budiž $KH = FG$, i veďme spojnici HA; pravím, že tělesový $\sphericalangle A$, sevřený úhly BAL, BAH, HAL, roven jest úhlu tělesovému D, sevřenému úhly EDC, EDF, FDC.



Nuže odřízněme stejná ramena AB, DE a veďme spojnice HB, KB, FE, GE. A ježto FG jest na rovině položené kolmo, tedy také se všemi přímkami s ní se stýkajícími a jsoucími v rovině položené činiti bude úhly pravé; pročež $\sphericalangle FGD = FGE = R$. Z téže příčiny ovšem i $\sphericalangle HKA = HKB = R$. A ježto strany KA, AB jsou střídavě stejné s GD, DE a svírají stejné úhly, tedy základna $KB = GE$. Avšak též $KH = GF$, a svírají (t. KH s KB a FG s GE) stejné úhly; pročež $HB = FE$. Dále ježto AK, KH jsou střídavě stejné s DG, GF a svírají stejné úhly, tedy základna $AH = FD$. Jest pak také $AB = DE$; pročež HA, AB jsou střídavě stejné s DF, DE, i základna $HB = FE$; tedy $\sphericalangle BAH = EDF$. Z téže příčiny ovšem i $\sphericalangle HAL = FDC$[17]. Jest pak i $\sphericalangle BAL = EDC$[18].

Na dané tedy přímce AB v bodě na ní A sestaven jest úhel tělesový A stejný s daným úhlem tělesovým D; což právě bylo vykonati.

---

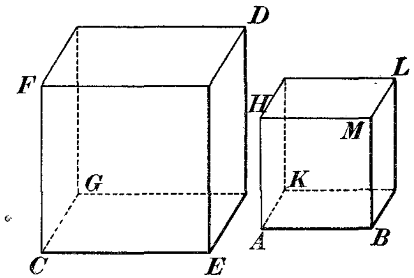
[17]) Následuje část zbytečná a beze vší pochybnosti cizí.

[18]) Tedy sestavený úhel tělesový jest sevřen stejnými úhly rovinnými jako daný. Že takové úhly tělesové jsou stejné, jest tu axiomatem.

XXVII.

Na dané přímce narýsuj rovnoběžnostěn danému rovnoběžnostěnu podobný a podobně položený.

Danou přímkou budiž AB, daným pak rovnoběžnostěnem CD; má se tedy na dané přímce AB narýsovati rovnoběžnostěn danému rovnoběžnostěnu CD podobný a podobně položený.



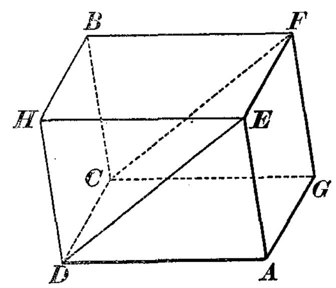
Nuže sestavme na přímce AB při bodě na ní A tělesový úhel stejný s C, sevřený úhly BAH, HAK, KAB, tak aby $\sphericalangle BAH$ byl stejný ECF, BAK s ECG a KAH s KCF (XI. XXVI.); i učiňmež $EC : CG = BA : AK$ a $GC : CF = KA : AH$. Tedy také stejnořadně $EC : CF = BA : AH$. A doplňme rovnoběžník HB i těleso AL.

A ježto $EC : CG = BA : AK$ a strany při stejných $\sphericalangle ECG$, BAK jsou úměrné, tedy rovnoběžník $GE \sim KB$. Z téže příčiny ovšem i rovnoběžník $KH \sim GF$ a rovněž $FE \sim HB$; tři tedy rovnoběžníky tělesa CD podobny jsou třem rovnoběžníkům tělesa AL. Avšak jedna trojice jest rovna i podobna třem rovinám protějším i druhá trojice jest rovna i podobna třem rovinám protějším; pročež celé těleso $CD \sim AL$.

Tedy na dané přímce AB jest narýsován rovnoběžnostěn AL, danému rovnoběžnostěnu CD podobný a podobně položený; což právě bylo vykonati.

XXVIII.

Když se rovnoběžnostěn protne rovinou úhlopříček protějších rovin, těleso tou rovinou se rozpůlí.



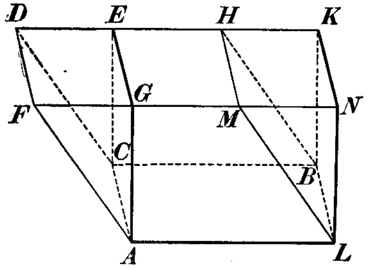
Nuže protněme rovnoběžnostěn AB rovinou $CDEF$ úhlopříček protějších rovin CF, DE; pravím, že těleso AB rovinou $CDEF$ se rozpůlí.

Neboť, ježto $\triangle CGF = CFB$ a $\triangle ADE = DEH$, také však rovnoběžník $CA = EB$ (neboť jsou protější) a $GE = CH$, tedy i hranol omezený dvěma trojúhelníky CGF, ADE a třemi rovnoběžníky GE, AC, CE roven jest hranolu omezenému dvěma trojúhelníky CFB, DEH a třemi rovnoběžníky CH, BE, CE, neboť jsou omezeny rovinami počtem i velikostí stejnými (vým. 10.). Pročež celé těleso AB rovinou $CDEF$ jest rozpůleno; což právě bylo dokázati.

XXIX.

Rovnoběžnostěny o téže základně a téže výšce, jejichžto přímky zvýšené[19]) stýkají se s týmiž přímkami, jsou si rovny.

Rovnoběžnostěny CM, CN mějte touž základnu AB a touž výšku a zvýšené přímky jejich AG, AF, LM, LN, CD, CE, BH, BK stýkejte se s týmiž přímkami FN, DK; pravím, že těleso $CM = CN$.



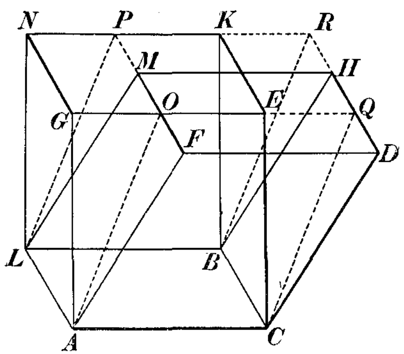
Neboť, ježto CH i CK jsou rovnoběžníky, CB je stejné s DH i s EK, a tak i $DH = EK$. Společnou EH odečtěme; tedy zbývající $DE = HK$. A tak i $\triangle DCE = HBK$ a rovnoběžník $DG = HN$. Z téže příčiny ovšem také $\triangle AFG = MLN$. Jest pak i rovnoběžník $CF = BM$ a $CG = BN$, neboť jsou protější; pročež i hranol omezený dvěma $\triangle AFG$, DCE a třemi rovnoběžníky AD, DG, CG jest roven hranolu omezenému dvěma $\triangle MLN$, HBK a třemi rovnoběžníky BM, HN, BN. Přičtěme společné těleso, jehož základnou jest rovnoběžník AB a protější rovinou $EGHM$; celý tedy rovnoběžnostěn $CM = CN$.

Tedy rovnoběžnostěny o téže základně a téže výšce, — —

XXX.

Rovnoběžnostěny o téže základně a téže výšce, jejichžto přímky zvýšené[19]) nestýkají se s týmiž přímkami, jsou si rovny.

Rovnoběžnostěny CM, CN mějte touž základnu AB i touž výšku a zvýšené přímky jejich AF, AG, LM, LN, CD, CE, BH, BK nestýkejte se s týmiž přímkami; pravím, že těleso $CM = CN$.



Nuže prodlužme NK, DH a stýkejte se v R, a ještě prodlužme FM, GE do P, Q a veďme spojnice AO, LP, CQ, BR. Tu těleso CM, jehož základnou jest rovnoběžník $ACBL$ a protější rovinou její $FDHM$, rovno je tělesu CP, jehož základnou jest $ACBL$ a protější rovinou její $OQRP$; neboť jsou na téže základně $ACBL$ a mají touž výšku a zvýšené přímky jejich AF, AO, LM, LP, CD, CQ, BH, BR stýkají se s týmiž přímkami

[19]) Míní se hrany poboční.

FP, DR (X. XXIX.). Avšak těleso CP, jehož základnou jest rovnoběžník $ACBL$ a protější rovinou její $OQRP$, jest rovno tělesu CN, jehož základnou rovnoběžník $ACBL$, protější pak rovinou $GEKN$; neboť opět jsou na téže základně $ACBL$ i mají touž výšku a zvýšené přímky jejich AG, AO, CE, CQ, LN, LP, BK, BR stýkají se s týmiž přímkami GQ, NR. A tak i těleso $GM = CN$.

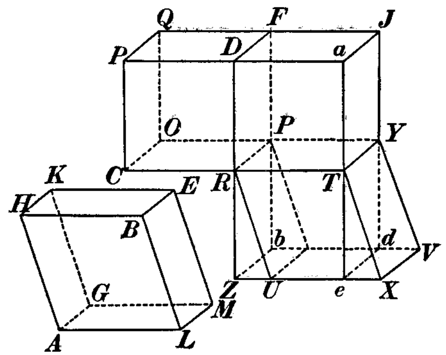
Tedy rovnoběžníky o téže základně a téže výšce, — —

XXXI.

Rovnoběžnostěny o stejných základnách a téže výšce jsou si rovny.

Rovnoběžnostěny AE, CF mějte stejné základny AB, CD a touž výšku; pravím, že těleso $AE = CF$.

Dříve tedy buďte zvýšené přímky HK, BE, AG, LM a PQ, DF, CO, RS*) na základnách AB, CD kolmo, a prodlužme CR přímo o RT a sestavme na přímce RT a při bodě na ní R $\sphericalangle TRU$ stejný s ALB, a budiž $RT = AL$ a $RU = LB$, a doplňme základnu RX a těleso YU. A ježto dvě strany TR, RU jsou střídavě stejné s AL, LB a svírají stejné úhly, tedy rovnoběžník $RX \cong HL$ (VI. XIV.). A ježto dále $AL = RT$ a $LM = RS$ a svírají úhly pravé, tedy rovnoběžník $RY \cong AM$. Z téže příčiny ovšem též $LE \cong SU$. Pročež tři rovnoběžníky tělesa AE jsou se třemi rovnoběžníky tělesa YU stejné a jim podobné (t. j. shodné). Avšak jedna i druhá trojice je shodná jednotlivě se třemi rovinami protějšími; tedy celý rovnoběžnostěn $AE = YU$. Prodlužme DR, XU, a stýkejte se v Z, a bodem T veďme s DZ rovnoběžku aTe a prodlužme PD do a a doplňme tělesa ZY, RI.

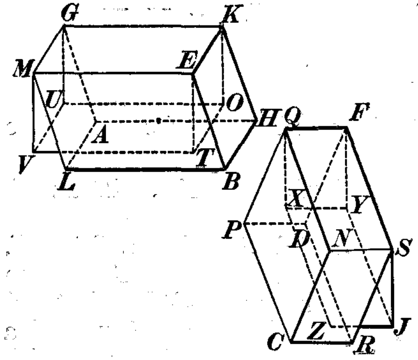


Těleso YZ, jehož základnou jest rovnoběžník RY, protější pak rovinou její Zd, zajisté rovná se tělesu YU, jehož základnou jest rovnoběžník RY, protější pak rovinou UV; neboť jsou na téže základně RY a mají touž výšku a zvýšené přímky jejich RZ, RU, Te, TX, Sb, Sc, Yd, YV stýkají se s týmiž přímkami ZX, bV. Avšak těleso $YU = AE$; pročež i těleso $YZ = AE$. A ježto rovnoběžník $RUXT = ZT$, neboť mají touž základnu RT a jsou mezi týmiž rovnoběžkami RT, ZX, avšak $RUXT = CD$; tedy též rovnoběžník $ZT = CD$. Jiný pak jest DT; pročež základna $CD : DT = ZT : DF$. A ježto rovnoběžnostěn CI protíná rovina RF, rovnoběžná s rovinami protějšími, základna CD má se k DT jako těleso CF k RI. Z téže příčiny ovšem, ježto rovnoběžnostěn ZI protíná rovina RY, rovnoběžná s rovinami pro-

*) Tak má býti v hořejší části obrazce m. RP.

tějšími, základna ZT má se k TD jako těleso ZY k RI. Avšak $CD:DT = ZT:DF$; tedy také $CF:RI = ZY:RI$. Pročež CF i ZY mají k RI týž poměr; tedy těleso $CF = ZY$. Avšak bylo dokázáno, že $ZY = AE$; pročež také $AE = CF$.

Nebuďte již přímky zvýšené AG, HK, BE, LM, CN[20]), PQ, DF, RS (vyobr. druhé) kolmo na základnách AB, CD; pravím opět, že $AE = CF$. Nuže spusťme z bodů K, E, G, M, Q, F, N, S na rovinu položenou kolmice KO, ET, GU, MV, a QX, FY, NZ, SI, a stýkejte se v rovině v bodech O, T, U, V a X, Y, Z, I, a veďme spojnice OT, OU, UV, TV a XY, XZ, ZI, IY. Jest zajisté těleso $KV = QI$, neboť jsou na stejných základnách KM, QS a mají touž výšku a zvýšené přímky jsou na základnách kolmo. Avšak těleso $KV = AE$ a $QI = CF$, neboť mají touž základnu a touž výšku a zvýšené přímky nestýkají se s týmiž přímkami (XI. xxx.). Pročež také těleso $AE = CF$.



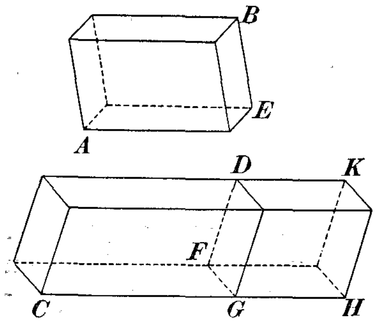
Tedy rovnoběžnostěny o stejných základnách — —

XXXII.

R o v n o b ě ž n o s t ě n y o t é ž e v ý š c e m a j í s e k s o b ě j a k o z á k l a d n y.

Rovnoběžnostěny AB, CD mějte touž výšku; pravím, že rovnoběžnostěny AB, CD mají se k sobě jako základny, t. j. $AB:CD = AE:CF$.

Nuže k FG přistavme FH, stejné s AE, a na základně FH do téže výšky jako CD doplňme rovnoběžnostěn GK. Těleso AB zajisté je stejné s GK, neboť jsou na stejných základnách AE, FH a mají touž výšku. A ježto rovnoběžnostěn CK protíná rovina DG, rovnoběžná s rovinami protějšími, tedy základna $CF:FH = CD:DH$ (XI. xxv.). Avšak základna $FH = AE$ a těleso $DH = AB$; pročež také $AB:CD = AE:CF$.



Tedy rovnoběžnostěny o téže výšce — —

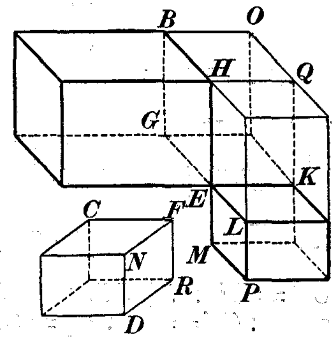
XXXIII.

P o d o b n é r o v n o b ě ž n o s t ě n y m a j í s e k s o b ě j a k o t r o j m o c i s t e j n o l e h l ý c h h r a n.

[20]) Ve vyd. Heibg. písmena v textu s písmeny v obr. se neshodují.

Podobnými rovnoběžnostěny buďtež AB, CD*) a budiž AE s CF stejnolehlou; pravím, že $AB:CD = AE^3:CF^3$.

Nuže prodlužme přímo AE, GE, HE o úsečky EK, EL, EM a budiž $EK = CF$, $EL = FN$ a rovněž $EM = FR$ a doplňme rovnoběžník KL i těleso KP. A ježto dvě strany KE, EL dvěma CF, FN jsou střídavě rovny; avšak i $\sphericalangle KEL = CFN$, jelikož právě pro podobnost těles AB, CD i $\sphericalangle AEG = CFN$, tedy rovnoběžník $KL \cong CN$. Z téže příčiny ovšem také rovnoběžník $KM \cong CR$ a rovněž $EP \cong DF$; tedy tři rovnoběžníky tělesa KP jsou shodné se třemi rovnoběžníky tělesa CD. Avšak jedna i druhá trojice je shodná jednotlivě se třemi rovinami protějšími; tedy celé těleso $KP \cong CD$. Doplňme rovnoběžník GK a na základnách GK, KL do stejné výšky jako AB doplňme tělesa EO, LQ. A ježto pro podobnost těles AB, CD má se $AE:CF = EG:FN = EH:FR$ a $CF = EK$, $FN = EL$, $FR = EM$, tedy $AE:EK = GE:EL = HE:EM$. Avšak $AE:EK = AG:GK$ a $GE:EL = GK:KL$ a $HE:EM = QE:KM$; pročež také rovnoběžník $AG:GK = GK:KL = QE:KM$. Avšak $AG:GK = AB:EO$ a $GK:KL = OE:QL$ a $QE:KM = QL:KP$. (XI. xxxii.); tedy též $AB:EO = EO:QL = QL:KP$. Když pak jsou čtyři veličiny spojitě úměrné, první se má ke čtvrté jako trojmoc z první ke trojmoci z druhé (V. vým. 10. pozn. 5.); pročež $AB:KP = AB^3:EO^3$. Avšak $AB:EO = AG:GK = AE:EK$; a tak i těleso $AB:KP = AE^3:EK^3$. Avšak těleso $KP = CD$ a hrana $EK = CF$; proto těleso AB má se k tělesu CD jako trojmoc stejnolehlé hrany jeho AE ke trojmoci stejnolehlé hrany CF.



Tedy podobné rovnoběžnostěny mají se k sobě — —

Důsledek.[21])

Z toho zajisté patrno, když jsou čtyři přímky úměrné (spojitě), že první bude se míti ke čtvrté jako rovnoběžnostěn z první k rovnoběžnostěnu z druhé podobnému a podobně sestrojenému, ježto také první má se ke čtvrté jako trojmoc z první ke trojmoci z druhé.

XXXIV.

Z á k l a d n y s t e j n ý c h r o v n o b ě ž n o s t ě n ů m a j í s e k s o b ě o b r á c e n ý m p o m ě r e m v ý š e k; a k t e r ý c h r o v n o b ě ž n o s t ě n ů z á k l a d n y m a j í s e k s o b ě o b r á c e n ý m p o m ě r e m v ý š e k, t y j s o u s t e j n é.

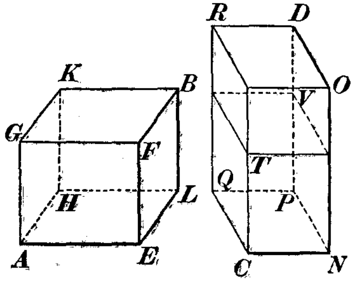
Stejnými rovnoběžnostěny buďtež AB, CD; pravím, že základny rovnoběžnostěnův AB, CD mají se k sobě obráceným poměrem výšek,

*) Na konci prodloužené KE budiž roh označen A (omylem vypuštěno).
[21]) Nejspíše cizí.

a to základna EH k základně NQ jako výška tělesa CD k výšce tělesa AB.

Nuže buďte dříve zvýšené přímky AG, EF, LB, HK a CM, NO, PD, QR na základnách jejich kolmo; pravím, že základna $EH:NQ = CM:AG$.

Jest-li tedy základna $EH = NQ$, jest pak i těleso $AB = CD$, bude též $CM = AG$. Neboť rovnoběžnostěny o stejné výšce mají se k sobě jako základny (XI. XXXII.[22]) I bude základna $EH:NQ = CM:AG$, i patrno, že základny rovnoběžnostěnů mají se k sobě obráceným poměrem výšek.[23])



Nebuď již základna $EH = NQ$, nýbrž větší buď EH. Jest pak i těleso $AB = CD$; pročež i $CM > AG$.[22]) Budiž tedy $AG = CT$, a doplňme na základně NQ do výšky CT rovnoběžnostěn CV. A ježto těleso $AB = CD$, vedle toho pak jest CV, stejné pak veličiny mají k témuž poměr týž, tedy $AB:CV = CD:CV$. Avšak $AB:CV = EH:NQ$ (XI. XXXII.), neboť tělesa AB, CV jsou stejně vysoká; a $CD:CV = MQ:TQ = CM:CT$; pročež i základna $EH:NQ = MC:CT$. Avšak $CT = AG$; pročež i základna $EH:NQ = MC:AG$. Tedy základny rovnoběžnostěnův AB, CD mají se k sobě obráceným poměrem výšek.

Mějte se již naopak základny rovnoběžnostěnův AB, CD k sobě obráceným poměrem výšek, a to měj se EH k NQ jako výška tělesa CD k výšce tělesa AB; pravím, že těleso $AB = CD$.

Buďtež opět přímky zvýšené na základnách kolmo. A jestli $EH = NQ$, a má se EH k NQ jako výška tělesa CD k výšce tělesa AB, tedy je také výška tělesa CD rovna výšce tělesa AB. Rovnoběžnostěny však o stejných základnách a o téže výšce jsou si rovny (XI. XXXI.); pročež těleso $AB = CD$.

Nebuď již základna $EH = NQ$, nýbrž větší buď EH; větší tedy jest i výška tělesa CD než výška tělesa AB, t. j. $CM > AG$. Budiž opět $AG = CT$ a podobně doplňme těleso CV. Ježto $EH:NQ = MC:AG$ a $AG = CT$, tedy $EH:NQ = CM:CT$. Avšak $EH:NQ = AB:CV$, neboť jsou tělesa AB, CV stejně vysoká; a $CM:CT = MQ:QT = CD:CV$. Proto také $AB:CV = CD:CV$; tedy AB, CD mají k CV týž poměr. Tedy těleso $AB = CD$.

Nebuďte již přímky zvýšené [vyobr. druhé[24])] FE, BL, GA, HK, a ON, DP, MC, RQ*) na základnách jejich kolmo, i veďme z bodův F, G, B, K a O, M, D, R na roviny FH, NQ[25]) kolmice, a stýkejte

[22]) Následující, tuto vynechané řádky jsou asi podvrženy.

[23]) V tomto případě i poměrem přímým, jelikož výšky jsou stejné.

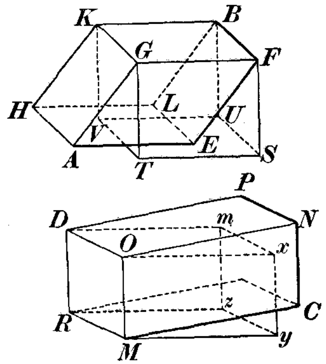
[24]) V obrazci dolejším za kolmý pokládám hranol DY, ne naopak, jako u Heibga; dle toho jsem písmena zaměnil.

*) Označení rohu Q (RQ, PQ, CQ) budiž doplněno (nedopatřením vypuštěno.

[25]) Pro lepší zřetelnost otoč dolejší obr. rovinou $DOMR$ nahoru.

se s rovinami v bodech S, T, U, V a X, Y, Z, m, a doplňme tělesa FV, OZ; pravím, že i tak, jestli $AB = CD$, základny mají se k sobě obráceným poměrem výšek, a to EH k NQ jako výška tělesa CD k výšce tělesa AB.

Ježto $AB = CD$, avšak $AB = BT$, neboť mají touž základnu FK a touž výšku, a $CD = DY$, neboť opět mají touž základnu RO a touž výšku; tedy $BT = DY$. Pročež FK má se k OR jako výška tělesa DY k výšce tělesa BT. Avšak $FK = EH$ a $OR = NQ$; tedy základna EH má se k základně NQ jako výška tělesa DY k výšce tělesa BT. Tělesa však DY s DC a BT s BA mají touž výšku; pročež EH má se k NQ jako výška tělesa DC k výšce tělesa AB[26]). Tedy základny rovnoběžnostěnův AB, CD mají se k sobě obráceným poměrem výšek.



Mějte se již naopak základny rovnoběžnostěnův AB, CD k sobě obráceným poměrem výšek, a to základna EH měj se k NQ jako výška tělesa CD k výšce tělesa AB; pravím, že těleso $AB = CD$.

Neboť, vykonáme-li touž úpravu, ježto EH má se k NQ jako výška tělesa CD k výšce tělesa AB a $EH = FK$, jakož i $NQ = OR$; tedy FK má se k OR jako výška tělesa CD k výšce tělesa AB. Avšak tělesa AB s BA a CD s DY mají touž výšku; pročež FK má se k OR jako výška tělesa DY k výšce tělesa BT. Tedy základny rovnoběžnostěnů BT, DY mají se k sobě obráceným poměrem výšek; pročež těleso $BT = DY$. Avšak $BT = BA$, neboť mají touž základnu FK a touž výšku. A těleso $DY = DC$[22]); tedy jest i těleso $AB = CD$; což právě bylo dokázati.

XXXV.

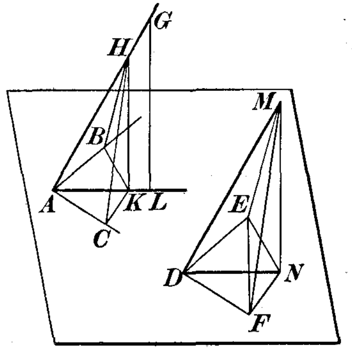
Když jsou dva rovinné úhly stejné a vztýčíme na jejich vrcholích přímky, svírající s přímkami počátečními střídavě stejné úhly, a vytkneme na přímkách vztýčených nahodilé body a z nich na roviny počátečních úhlů spustíme kolmice a z bodů vzniklých na rovinách vedeme k počátečním úhlům (vrcholům) spojnice, svírati budou s přímkami vztýčenými stejné úhly.

Dvěma stejnými úhly přímkovými buďte BAC, EDF, a v bodech A, D vztyčme přímky AG, DM, aby svíraly s přímkami počátečními[27]) střídavě stejné úhly, MDE stejný s GAB, MDF s GAC, a vytkněme na AG, DM nahodilé body G, M a spusťme z bodů G, M na roviny BAC, EDF kolmice GL, MN, a stýkejte se s rovinami v N, L, a veďme spojnice LA, ND; pravím, že $\sphericalangle GAL = MDN$.

[26]) Jako by to byly rovnoběžnostěny kolmé.

[27]) Totiž s rameny těch úhlův.

Budiž $DM = AH$, a bodem H veďme HK rovnoběžně s GL; GL však jest kolmo na rovině BAC, pročež i HK jest na rovině BAC kolmo. Veďme z bodů K, N na AB, AC, DF, DE kolmice KC, NF, KB, NE a spojnice HC, CB[28]), MF, FE[28]). Ježto $HA^2 = HK^2 + KA^2$ a $KA^2 = KC^2 + CA^2$, tedy též $HA^2 = HK^2 + KC^2 + CA^2$. A $HK^2 + KC^2 = HC^2$; pročež $HA^2 = HC^2 + CA^2$; tedy $\sphericalangle HCA$ jest pravý. Z téže příčiny ovšem i $\sphericalangle DFM$ jest pravý. Proto $\sphericalangle ACH = DFM$. Jest pak též $\sphericalangle HAC = MDF$. Jsou tedy dva trojúhelníky HAC, MDF, kteréž mají po dvou úhlech střídavě stejných a po jedné stejné straně při jednom ze stejných úhlů, t. $HA = MD$; budou tedy míti též ostatní strany ostatním stranám střídavě rovné. Pročež $AC = DF$. Podobně zajisté dokážeme, že též $AB = DE$[22]). Ježto tedy $AC = DF$ a $AB = DE$, dvě strany tedy CA, AB jsou střídavě rovny dvěma stranám FD, DE. Avšak i $\sphericalangle CAB = FDE$; pročež základna $BC = EF$ a trojúhelník trojúhelníku a ostatní úhly ostatním úhlům; tedy $\sphericalangle ACB = DFE$. Jest pak i pravý ACK roven pravému DFN; pročež i zbývající $BCK = EFN$. Z téže příčiny ovšem i $\sphericalangle CBK = FEN$. Dva jsou tedy trojúhelníky BCK, EFN, kteréž mají po dvou úhlech střídavě stejných a po jedné stejné straně při stejných úhlech, t. $BC = EF$; pročež i ostatní strany ostatním stranám budou míti rovné. Tedy $CK = EN$. Jest pak též $AC = DF$; dvě tedy AC, CK jsou střídavě rovny dvěma DF, FN; a svírají stejné úhly. Proto základna $AK = DN$. A ježto $AH = DM$, také $AH^2 = DM^2$. Avšak $AH^2 = AK^2 + KH^2$, neboť $\sphericalangle AKH = R$, a $DM^2 = DN^2 + NM^2$, neboť $\sphericalangle DNM = R$; tedy $AK^2 + KH^2 = DN^2 + NM^2$, z čehož $AK^2 = DN^2$; tedy zbývající $KH^2 = NM^2$; pročež $HK = NM$. A ježto dvě strany HA, AK jsou střídavě rovny dvěma MD, DN i základna HK, jak bylo dokázáno, je stejná s MN, proto $\sphericalangle HAK = MDN$.



Když jsou tedy dva rovinné úhly stejné — —

Důsledek.

Z toho zajisté patrno, když dva úhly rovinné jsou stejné a vztýčí se na nich stejné přímky, svírající s přímkami počátečními střídavě stejné úhly, že kolmice[29]) od nich spuštěné na roviny, v nichžto jsou počáteční úhly, jsou si rovny (což právě bylo dokázati).

XXXVI.

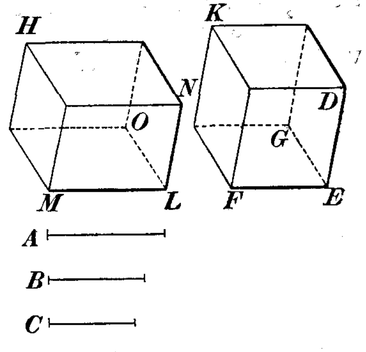
Jsou-li tři přímky (spojitě) úměrné, rovnoběžno-

[28]) U Heiberga v obr. vynechána.
[29]) V úkolu předešlém jsou to KH, NM.

stěn z těch tří rovná se rovnoběžnostěnu z prostřední, stejnostrannému a s řečeným stejnoúhlému.

Třemi úměrnými přímkami buďtež A, B, C, t. $A : B = B : C$; pravím, že těleso z A, B, C rovná se tělesu z B, stejnostrannému a s řečeným stejnoúhlému[30]).

Mějme tělesový úhel při E, jejž svírají úhly DEG, GEF, FED, a budiž $DE = GE = EF = B$, a doplňme rovnoběžnostěn EK, a budiž $LM = A$, a sestavme na přímce LM při bodě na ní L úhel tělesový stejný s E, aby jej svíraly úhly NLO, OLM, MLN, a budiž $LO = B$ a $LN = C$. A ježto $A : B = B : C$ a $A = LM$, $B = LO = ED$, $C = LN$; tedy $LM : EF = DE : LN$. A tak strany při stejných úhlech NLM, DEF mají se k sobě poměrem obráceným; pročež rovnoběžník $MN = DF$ (VI. XIV.). A ježto dva rovinné úhly přímkové DEF, NLM jsou si rovny a z nich (t. z vrcholů jejich) vztýčeny jsou přímdy LO, EG a svírají s počátečními přímkami střídavě stejné úhly, tedy kolmice spuštěné z bodů G, O na roviny MLN, DEF[31]) jsou si rovny (XI. XXXV. důsl.); pročež tělesa LH, EK mají stejnou výšku. Rovnoběžnostěny pak mající stejné základny a stejné výšky jsou si rovny (XI. XXXI.); proto těleso $HL = EK$. A těleso LH je z A, B, C a těleso EK z B; tedy rovnoběžnostěn z A, B, C jest roven tělesu z B, stejnostrannému a s řečeným stejnoúhlému; což právě bylo dokázati.

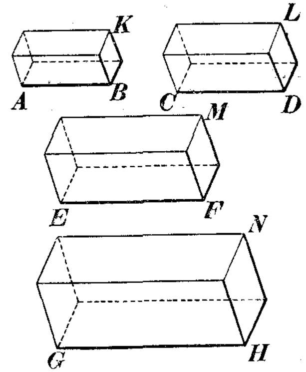


XXXVII.

Když jsou čtyři přímky úměrou, také rovnoběžnostěny z nich podobné a podobně sestrojené budou úměrou; a když rovnoběžnostěny úměrou z nich podobné a podobně sestrojené jsou úměrou, i samy přímky budou úměrou.

Buďtež úměrou čtyři přímky AB, CD, EF, GH, tak že $AB : CD = EF : GH$, a sestrojme z AB, CD, EF, GH rovnoběžnostěny podobné a podobně položené KA, LC, ME, NG; pravím, že $KA : LC = ME : NG$.

Neboť, ježto rovnoběžnostěn $KA \sim LC$, tedy $KA : LC = AB^3 : CD^3$ (XI. XXXIII.). Z téže příčiny ovšem též $ME : NG = EF^3 : GH^3$. Také $AB : CD = EF : GH$; pročež také $AK : LC = ME : NG$[32]).



[30]) Z vyobr. u Heiberga patrno, že to nejsou tělesa stejná; opravil jsem.
[31]) Roviny MLN, DEF třeba si mysliti položenými.
[32]) Jest-li totiž $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$, jest také $\left(\frac{AB}{CD}\right)^3 = \left(\frac{EF}{GH}\right)^3$.

Avšak již se měj těleso $AK:LC=ME:NG$; pravím že přímka $AB:CD=EF:GH$.

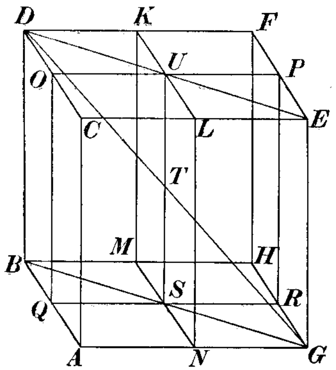
Neboť, poněvadž opět $KA:LC=AB^3:CD^3$ a též $ME:NG=EF^3:GH^3$ a $KA:LC=ME:NG$, tedy též $AB:CD=EF:GH$.

Když jsou tedy čtyři přímky úměrou, — —

XXXVIII.

Když se v krychli rozpůlí strany protějších rovin a body rozpolovacími se proloží roviny, společný průsek rovin a úhlopříčka té krychle navzájem se půlí.

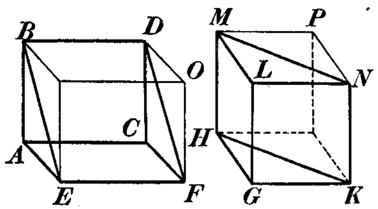
Nuže rozpolme v krychli AF strany protějších rovin CF, AH v bodech K, L, M, N, O, P, Q, R a body rozpolovacími proložme roviny KN, OR, a společným průsekem rovin budiž US a uhlopříčkou krychle AF budiž DG; pravím, že $UT=TS$ a $DT=TG$.



Nuže veďme spojnice DU, UE, BS, SG. A ježto $DO \parallel PE$, střídavé úhly DOU, UPE jsou si rovny (I. xxix.). A ježto $DO=PE$, $OU=UP$ a svírají stejné úhly, tedy základna $DU=UE$ a $\triangle DOU$ je stejný s $\triangle PUE$ i ostatní úhly jsou stejné s úhly ostatními; pročež $\sphericalangle OUD=PUE$. Proto zajisté DUE jest přímka (I. xiv.). Z téže příčiny ovšem i BSG jest přímka a $BS=SG$. A ježto CA je s DB stejná i rovnoběžná, avšak CA je také s EG stejná i rovnoběžná, tedy je též DB stejná i rovnoběžná s EG. A spojují (protínají) je přímky DE, BG; pročež $DE \parallel BG$ (I. xxxiii.). Proto $\sphericalangle EDT=BGT$, neboť jsou střídavé, a $\sphericalangle DTU=GTS$. Tedy DTU, GTS jsou dva trojúhelníky, jež mají po dvou stejných úhlech a po jedné stejné straně při jednom ze stejných úhlů, t. $DU=GS$, neboť jsou to poloviny přímek DE, BG; i ostatní strany budou míti s ostatními stranami stejné. A tak $DT=TG$ a $UT=TS$.

Když se tedy v krychli rozpůlí strany — —

XXXIX.



Když mají dva hranoly stejnou výšku a jeden má za základnu rovnoběžník, druhý pak trojúhelník a rovnoběžník je dvojnásobkem trojúhelníku, ty hranoly budou stejné[33]).

Dvěma hranoly o stejné výšce buďtež $ABCDEF$ a $GHKLMN$ a onen

[33]) Hranolem, jehož základnou jest rovnoběžník, míní se tu klín, s jehož základnou jest rovnoběžná přímka, nikoli rovina.

měj za základnu rovnoběžník AF, tento pak trojúhelník GHK, a budiž $AF=2\,GHK$; pravím, že hranol $ABCDEF$ jest roven hranolu $GHKLMN$.

Doplňme tělesa AO, GP. Ježto rovnoběžník $AF=2\triangle GHK$ a též rovnoběžník $HK=2\triangle GHK$, tedy $AF=HK$. Rovnoběžnostěny pak o stejných základnách a téže výšce jsou si rovny (XI. xxxi.); pročež těleso $AO=GP$. I jest hranol $ABCDEF$ polovinou tělesa AO a polovinou tělesa GP hranol $GHKLMN$; tedy hranol $ABCDEF=GHKLMN$.

Když tedy mají dva hranoly stejnou výšku — —

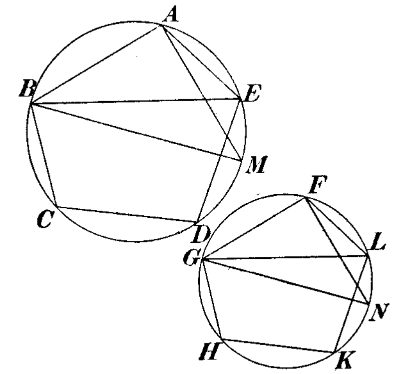
Kniha dvanáctá.

I.

Podobné mnohoúhelníky do kruhů vepsané mají se k sobě jako čtverce průměrů.

Kruhy buďtež ABC, FGH a v nich podobnými mnohoúhelníky buďtež $ABCDE$, $FGHKL$, průměry pak těch kruhů buďte BM, GN; pravím, že $ABCDE:FGHKL=BM^2:GN^2$.

Nuže veďme spojnice BE, AM, GL, FN. A poněvadž $ABCDE \sim FGHKL$, také $\sphericalangle BAE=GFL$ a $BA:AE=GF:FL$. Jsou tedy dva trojúhelníky BAE, GFL, kteréž mají po jednom úhlu stejném, $\sphericalangle BAE=GFL$, a při stejných úhlech úměrné strany; pročež $\triangle ABE$ je s $\triangle FGL$ stejnoúhlý (VI. vi). Tedy $\sphericalangle AEB=FLG$. Avšak $\sphericalangle AEB=AMB$, neboť jsou na témž oblouku (III. xxvii.), a $\sphericalangle FLG=FNG$; pročež i $\sphericalangle AMB=FNG$. Jest pak také $\sphericalangle BAM=R=GFN$; tedy též zbývající je zbývajícímu roven. Pročež $\triangle ABM$ je s $\triangle FGN$ stejnoúhlý. Tedy $BM:GN=BA:GF$. Avšak dvojmocně větší než $BM:GN$ jest $BM^2:GN^2$, a dvojmocně větší než $BA:GF$ jest $ABCDE:FGHKL$ (VI. xx.); pročež také $ABCDE:FGHKL=BM^2:GN^2$.



Tedy podobné mnohoúhelníky do kruhů vepsané — —

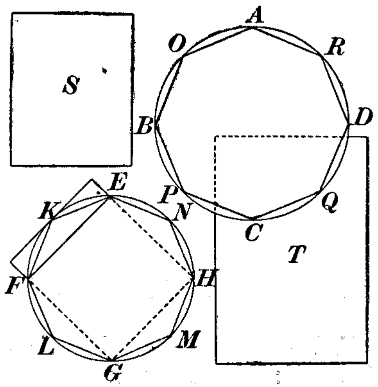
II.

Kruhy mají se k sobě jako čtverce průměrů.

Kruhy buďtež $ABCD$, $EFGH$, průměry pak jejich BD, FH; pravím, že $ABCD:EFGH=BD^2:FH^2$.

Neboť nemá-li se $ABCD:EFGH=BD^2:FH^2$, bude se míti BD^2 k FH^2 jako kruh $ABCD$ buď k menšímu útvaru než je kruh $EFGH$ nebo k většímu. Měj se dříve jako k menšímu, totiž k S. I vpišme do kruhu

$EFGH$ čtverec $EFGH$[1]); vepsaný čtverec je zajisté větší než polovina kruhu $EFGH$, ježto právě, když body E, F, G, H, vedeme tečné kruhu, polovina čtverce kolem kruhu opsaného je čtverec $EFGH$[2]) a kruh jest menší než opsaný čtverec; pročež vepsaný čtverec $EFGH$ jest větší než polovina kruhu $EFGH$[3]). Rozpolme oblouky EF, EG, GH, HE v bodech K, L, M, N a veďme spojnice $EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE$; jest tedy i každý z trojúhelníků EKF, FLG, GMH, HNE větší než příslušné úseče kruhové, ježto právě, když body K, L, M, N vedeme tečné kruhu a doplníme na přímkách EF, FG, GH, HE rovnoběžníky, každý z trojúhelníků EKF, FLG, GMH, HNE bude polovinou příslušného rovnoběžníku, avšak příslušná úseč jest rovnoběžníku menší; a tak každý z trojúhelníků EKF. FLG, GMH, HNE jest větší než polovina příslušné úseče kruhové. Tedy rozpolujíce zbývající oblouky a vedouce spojnice a to stále činíce ostavíme nějaké úsečnice kruhové, které budou menší než rozdíl kruhu $EFGH$ a útvaru S. Dokázáno bylo totiž v první poučce knihy desáté, dány-li dvě veličiny nestejné, když se od větší odečte část větší než polovina a od zbytku větší než polovina a to stále se děje, že zbude nějaká veličina, jež bude menší než daná veličina menší. Zbývej tedy, a buďtež úseče $EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE$ kruhu $EFGH$ menší než rozdíl kruhu $EFGH$ a útvaru S. Pročež zbývající mnohoúhelník $EKFLGMHN > S$. Vpišme též do kruhu $ABCD$ mnohoúhelník $AOBPCQDR$ podobný mnohoúhelníku $EKFLGMHN$; tedy $BD^2 : FH^2 = AOBPCQDR : EKFLGMHN$. Avšak též $BD^2 : FH^2 =$ kruh $ABCD : S$; pročež i kruh $ABCD : S =$ mnohoúhelník $AOBPCQDR : EKFLGMHN$; tedy střídavě kruh $ABCD$ má se ke svému mnohoúhelníku jako útvar S k mnohoúhelníku $EKFLGMHN$. Ale kruh $ABCD$ jest větší než mnohoúhelník vepsaný, pročež i útvar $S > EKFLGMHN$. Avšak i menší; což právě jest nemožné. Tedy BD^2 nemá se k FH^2 jako kruh $ABCD$ k nějakému útvaru menšímu než jest kruh $EFGH$. Podobně zajisté dokážeme, že nemá se ani FH^2 k BD^2 jako kruh $EFGH$ k nějakému útvaru menšímu než jest kruh $ABCD$.



Pravím již, že nemá se BD^2 k FH^2 ani jako kruh $ABCD$ k nějakému útvaru většímu než jest kruh $EFGH$.

[1]) Naznačil jsem přímkami čárkovanými (u Heiberga vůbec nenaznačen).

[2]) Neboť čtverec opsaný, třebas Z, jest čtverec průměru, t. d^2, čtverec vepsaný z jest $\frac{d^2}{2}$ (viz I. XLVII.); tedy $z = \frac{Z}{2}$. Dotud nedokázáno.

[3]) Neboť, jestli (pozn. 2.) $Z = 2z$ a jestli $2z$ větší než celý kruh, bude z větší než polovina kruhu.

Nuže, možno-li, měj se jako k většímu T.[4]) Obráceně tedy má se FH^2 k DB^2 jako útvar T ke kruhu $ABCD$. Avšak útvar T má se ke kruhu $ABCD$ jako kruh $EFGH$ k nějakému útvaru menšímu než jest kruh $ABCD$; pročež také FH^2 má se k BD^2 jako kruh $EFGH$ k útvaru menšímu než jest kruh $ABCD$; což právě dokázáno nemožným. Tedy nemá se BD^2 k FH^2 jako kruh $ABCD$ k nějakému útvaru většímu než jest kruh $EFGH$. Dokázáno pak bylo, že ani jako k menšímu; a tak $BD^2 : FH^2 =$ kruh $ABCD : EFGH$.

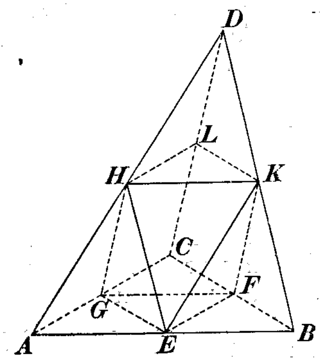
Tedy kruhy mají se k sobě — —[5])

III.

Každý jehlan, mající za základnu trojúhelník, dělí se ve dva jehlany stejné a navzájem i celému podobné, jež mají za základny trojúhelníky[6]), a ve dva stejné hranoly; a ty dva hranoly jsou větší než polovina celého jehlanu.

Mějme jehlan, jehož základnou jest $\triangle ABC$, temenem pak bod D; pravím že jehlan $ABCD$ dělí se ve dva jehlany navzájem stejné, mající za základny trojúhelníky, a celému podobné a ve dva stejné hranoly; a ty dva hranoly jsou větší než polovina celého jehlanu.

Nuže rozpolme AB, BC, CA, AD, DB, DC v bodech E, F, G, H, K, L a veďme spojnice $HE, EG, GH, HK, KL, LH, KF, FG$. Ježto $AE = EB$, $AH = DH$, tedy $EH \parallel BK$ (VI. II.). Z téže příčiny ovšem i $HK \parallel AB$. Pročež $HEBK$ jest rovnoběžník; tedy $HK = EB$. Avšak $EB = EA$; pročež také $AE = HK$. Jest pak také $AH = HD$; obě tedy EA, AH jsou oběma KH, HD střídavě rovny; i $\sphericalangle EAH = KHD$; pročež $EH = KD$. Proto též $\triangle AEH \cong HKD$. Z téže příčiny ovšem i $\triangle AHG \cong HLD$. A ježto dvě přímky navzájem se stýkající EH, HG jsou rovnoběžné se dvěma přímkami navzájem se stýkajícími KD, DL v netéže rovině, budou svírati stejné úhly (XI. x.). Pročež $\sphericalangle EHG = KDL$. A ježto dvě přímky (strany) EH, HG jsou se dvěma KD, DL střídavě stejné a $\sphericalangle EHG = KDL$, tedy základna $EG = KL$; pročež $\triangle EHG \cong KDL$. Z téže příčiny ovšem i $\triangle AEG \cong HKL$. Tedy jehlan, jehož základnou je $\triangle AEG$ a temenem bod H, jest roven i podoben jehlanu, jehož základnou jest $\triangle HKL$ a temenem bod D (XI. vým. 10.). A ježto v $\triangle ADB$ jest vedena k jedné straně AB rovnoběžka HK, $\triangle ADB$ je s DHK stejnoúhlý, a mají strany úměrné; pročež $\triangle ADB \sim DHK$. Z téže příčiny zajisté i $\triangle DBC \sim DKL$ a $\triangle ADC \sim DLH$. A ježto dvě přímky navzájem se stýkající BA, AC



[4]) Eukl. má tu opět S, takže S pokládá poprvé za menší, podruhé za větší; přizpůsobil jsem obrazec i označení, aby rozdílnost byla patrná.

[5]) Následuje výtěžek nepochybně cizí.

[6]) Dodavek zbytečný; jsouť celému podobny.

jsou rovnoběžné se dvěma přímkami navzájem se stýkajícími KH, HL v netéže rovině, svírati budou stejné úhly. Tedy $\sphericalangle BAC = KHL$. A $BA:AC = KH:HL$; pročež $\triangle ABC \sim HKL$. Tedy též jehlan, jehož základnou $\triangle ABC$ a temenem bod D, podoben jest jehlanu, jehož základnou $\triangle HKL$ a temenem bod D. Avšak dokázáno bylo, že jehlan, jehož základnou $\triangle HKL$ a temenem bod D, jest podoben jehlanu, jehož základnou $\triangle AEG$ a temenem bod H [takže i jehlan, jehož základnou $\triangle ABC$ a temenem D, podoben jest jehlanu, jehož základnou $\triangle AEG$ a temenem H]. Pročež oba jehlany $AEGH$ i $HKLD$ jsou podobny celému jehlanu $ABCD$.

A ježto $BF = FC$, rovnoběžník $EBFG = 2\,GFC$. A poněvadž, když jsou dva hranoly stejné výšky a jeden má za základnu rovnoběžník, druhý pak trojúhelník, a rovnoběžník je dvakrát větší než trojúhelník, ty hranoly jsou stejné (XI. XXXIX. a pozn.); tedy hranol omezený dvěma trojúhelníky BKF, EHG a třemi rovnoběžníky $EBFG$, $EBKH$, $HKFG$ rovná se hranolu omezenému dvěma trojúhelníky GFC, HKL a třemi rovnoběžníky $KFCL$, $LCGH$, $HKFG$. I jest patrno, že i hranol, jehož základnou rovnoběžník $EBFG$ a jí protilehlou přímka HK, i ten, jehož základnou $\triangle GFC$ a protilehlým $\triangle HKL$, jest větší než jeden z jehlanů, jejichžto základnami jsou $\triangle AEG$, HKL a temeny body H, D, ježto právě, když vedeme spojnice EF, EK, hranol, jehož základnou rovnoběžník $EBFG$ a protilehlou HK, větší jest než jehlan, jehož základnou $\triangle EBF$ a temenem bod K. Avšak jehlan, jehož základnou $\triangle EBF$ a temenem bod K, rovná se jehlanu, jehož základnou $\triangle AEG$ a temenem bod H; neboť je omezují shodné roviny. A tak i hranol, jehož základnou rovnoběžník $EBFG$ a protilehlou přímka HK, větší jest než jehlan, jehož základnou $\triangle AEG$ a temenem bod H. Avšak hranol, jehož základnou rovnoběžník $EBFG$ a protilehlou přímka HK, rovná se hranolu, jehož základnou $\triangle GFC$ a protilehlým $\triangle HKL$; jehlan pak, jehož základnou $\triangle AEG$ a temenem bod H, rovná se jehlanu, jehož základnou $\triangle HKL$ a temenem bod D. Pročež řečené dva hranoly jsou větší než řečené dva jehlany, jejichžto základnami $\triangle AEG$, HKL a temeny body H, D.

Tedy celý jehlan, jehož základnou $\triangle ABC$ a temenem bod D, dělí se ve dva jehlany navzájem stejné a ve dva stejné hranoly, a ty dva hranoly jsou větší než polovina jehlanu celého; což právě bylo dokázati.

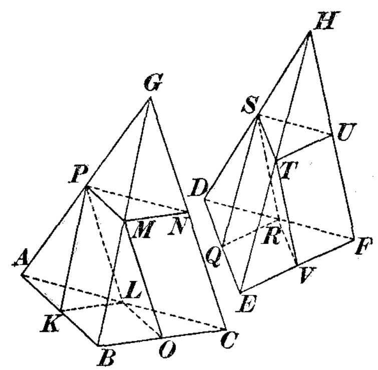
IV.

Když jsou dva jehlany téže výšky, mající za základny trojúhelníky, a jeden i druhý se rozdělí ve dva jehlany stejné a celému podobné a ve dva stejné hranoly, základna jednoho jehlanu bude se míti k základně jehlanu druhého jako součet hranolů v jehlaně jednom k součtu hranolů stejného počtu v jehlaně druhém.

Mějme dva jehlany téže výšky, jež mají za základny $\triangle ABC$, DEF, za temena pak body G, H, a rozdělen buď jeden i druhý ve

dva jehlany stejné a celému podobné a ve dva stejné hranoly; pravím, že se má základna ABC k DEF jako součet hranolů v jehlaně $ABCG$ k součtu hranolů stejného počtu v jehlaně $DEFH$.

Neboť, ježto $BO = OC$, $AL = LC$, tedy $LO \parallel AB$ a $\sphericalangle ABC \sim LOC$. Z téže příčiny ovšem i $\triangle DEF \sim RVF$. A ježto $BC = 2\,CO$ a $EF = 2\,FV$, tedy $BC:CO = EF:FV$. A sestrojeny jsou při BC, CO podobné a podobně položené útvary přímkové ABC, LOC a při EF, FV podobné a podobně položené DEF, RVF; pročež $\triangle ABC:LOC = DEF:RVF$; střídavě tedy $ABC:DEF = LOC:RVF$ (VI. XXII.). Avšak jako se má $\triangle LOC$ k RVF, tak hranol, jehož základnou $\triangle LOC$ a protilehlým PMN, k hranolu, jehož základnou $\triangle RVF$ a protilehlým STU (viz násl. výt.); pročež také $\triangle ABC$ má se k DEF jako hranol, jehož základnou $\triangle LOC$ a protilehlým PMN, k hranolu, jehož základnou $\triangle RVF$ a protilehlým STU. A jako se mají k sobě řečené hranoly, tak hranol, jehož základnou rovnoběžník $KBOL$ a protilehlou přímka PM, k hranolu, jehož základnou rovnoběžník $QEVR$ a protilehlou přímka ST (XI. XXXIX. XII. III.). Tedy také dva hranoly, ten, jehož základnou rovnoběžník $KBOL$ a protilehlou přímka PM, a ten, jehož základnou $\triangle LOC$ a protilehlým PMN, mají se k hranolům, z nichž jednomu základnou $QEVR$ a protilehlou přímka ST a druhému základnou $\triangle RVF$ a protilehlým STU (V. XII.). Pročež i základna ABC má se k DEF jako řečené dva hranoly k řečeným dvěma hranolům.



A podobně, když se rozdělí jehlany $PMNG$, $STUH$ každý ve dva hranoly a dva jehlany, bude se míti základna PMN k STU jako dva hranoly v jehlaně $PMNG$ ke dvěma hranolům v jehlaně $STUH$. Avšak základna $PMN:STU = ABC:DEF$, neboť $\triangle PMN = LOC$, $STU = RVF$. Tedy také jako $ABC:DEF$, tak ty čtyři hranoly k oněm čtyřem hranolům (V. XII.). Podobně pak, i když rozdělíme zbývající jehlany (při temenech) každý ve dva jehlany a ve dva hranoly, základna ABC bude se míti k základně DEF, jako součet hranolů v jehlaně $ABCG$ k součtu hranolů stejného počtu v jehlaně $DEFH$; což právě bylo dokázati.

Výtěžek[7]).

Že však má se $\triangle LOC$ k RVF jako hranol, jehož základnou $\triangle LOC$ a protilehlým PMN, k hranolu, jehož základnou RVF a protilehlým STU, dlužno dokázati takto.

Nuže mysleme si v témž vyobr. z bodů G, H na roviny ABC, DEF spuštěné kolmice, právě stejné, jak patrno z toho, že ty jehlance

[7]) Sotva Eukleidův.

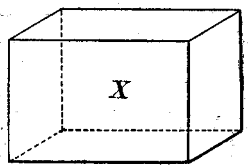
předem položeny za stejně vysoké. A ježto dvě přímky, t. GC a z G spuštěnou kolmici, protínají rovnoběžné roviny ABC, PMN, protínati je budou v týchž poměrech (XI. XVII.). I jest GC rovinou PMN v N rozpůlena, tedy též kolmice z G spuštěná na rovinu ABC bude rovinou PMN rozpůlena. Z téže příčiny ovšem i kolmice spuštěná z H na rovinu DEF bude rozpůlena rovinou STU. Také kolmice z bodů G, H na roviny ABC, DEF spuštěné jsou stejné; pročež stejné jsou i kolmice spuštěné z trojúhelníků PMN, STU na roviny ABC, DEF. Tedy hranoly, jimž jsou základnami $\triangle LOC$, RVF a protějšími PMN, STU, mají stejné výšky. A tak i rovnoběžnostěny z řečených hranolů sestrojené jsou stejně vysoké a mají se k sobě jako základny (XI. XXXII.). Pročež i řečené hranoly, jsouce poloviny[8]), mají se k sobě jako základna LOC k RVT; což právě bylo dokázati.

V.

Jehlany stejně vysoké, mající za základny trojúhelníky, mají se k sobě jako základny.

Mějme stejně vysoké jehlany, jež mají za základny $\triangle ABC$, DEF a za temena body G, H (vyobr. jako k poučce IV.); pravím že $ABC : DEF = ABCG : DEFH$.

Neboť nemá-li se $ABC : DEF = ABCG : DEFH$, bude se míti ABC k DEF jako jehlan $ABCG$ k tělesu menšímu než je $DEFH$ nebo k většímu. Měj se dříve jako k menšímu X (vyobr. zde), a rozdělme jehlan $DEFH$ ve dva jehlany stejné a celému podobné a ve dva stejné hranoly; ty dva hranoly zajisté jsou větší než polovina celého jehlanu (XII. III.). A jehlany vzniklé rozdělením opět podobně rozdělmež a to stále čiňmež, až zbudou z jehlanu $DEFH$ nějaké jehlany, které jsou menší než rozdíl jehlanu $DEFH$ a tělesa X. Zbývejtež, a buďte to třebas $DQRS$ a $STUH$; tedy zbývající hranoly v jehlaně $DEFH$ jsou větší než těleso X. Rozdělmež i jehlan $ABCG$ podobně a stejným počtem jako jehlan $DEFG$; tedy základna ABC má se k DEF jako hranoly v jehlaně $ABCG$ k hranolům v jehlaně $DEFH$ (XII. IV.). Avšak též $ABC : DEF = ABCG : X$; pročež také $ABCG$ k X jako hranoly v jehlaně $ABCG$ k hranolům v jehlaně $DEFH$; tedy střídavě jehlan $ABCG$ ke svým hranolům jako těleso X k hranolům v jehlaně $DEFH$. Jehlan však $ABCG$ jest větší než jeho hranoly, pročež i těleso X je větší než hranoly v jehlaně $DEFH$. Avšak i menší; což právě jest nemožné. Tedy nemá se základna ABC k DEF jako jehlan $ABCG$ k nějakému tělesu menšímu než je $DEFH$. Podobně zajisté dokážeme, že ani se nemá základna DEF k ABC jako jehlan $DEFH$ k nějakému tělesu menšímu než jest $ABCG$.



Pravím již, že nemá se $ABCG$ ani k žádnému tělesu většímu než je $DEFH$ jako základna ABC k DEF.

Nuže, možno-li, měj se k většímu X; obráceně tedy $DEF : ABC =$

[8]) Rozuměj: poloviny oněch rovnoběžnostěnů.

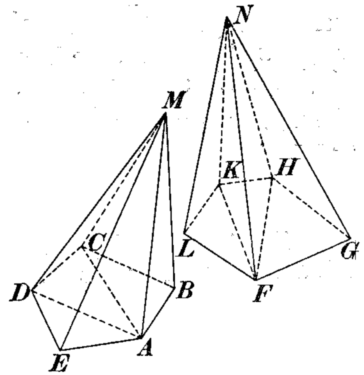
$X : ABCG$. A jako se má X k jehlanu $ABCG$, tak jehlan $DEFH$ k něčemu menšímu než jest $ABCG$, jak svrchu bylo dokázáno; pročež také DEF má se k ABC jako $DEFH$ k něčemu menšímu než jest $ABCG$; což právě dokázáno nesmyslným. Tedy nemá se ABC k DEF jako $ABCG$ k nějakému většímu tělesu než je $DEFH$. Dokázáno pak bylo, že ani jako k menšímu. Pročež $ABC : DEF = ABCG : DEFH$; což právě bylo dokázati.

VI.

Jehlany stejně vysoké, i když mají za základny mnohoúhelníky, mají se k sobě jako základny.

Mějme stejně vysoké jehlany, jež mají za základny mnohoúhelníky $ABCDE$, $FGHKL$ a za temena body M, N; pravím, že $ABCDEM : FGHKLN = ABCDE : FGHKL$.

Nuže veďme spojnice AC, AD, FH, FK. Ježto tedy jsou dva jehlany $ABCM$, $ACDM$, jež mají za základny trojúhelníky a stejnou výšku, mají se k sobě jako základny (XII. V.); pročež $ABC : ACD = ABCM : ACDM$. A součetně $ABCD : ACD = ABCDM : ACDM$. Avšak též $ACD : ADE = ACDM : ADEM$. Tedy stejnořadně $ABCD : ADE = ABCDM : ADEM$. A opět součetně $ABCDE : ADE = ABCDEM : ADEM$. Podobně ovšem dokážeme, že též $FGHKL : FGH = FGHKLN : FGHN$. A ježto jsou dva jehlany $ADEM$, $FGHN$, které mají za základny trojúhelníky a stejnou výšku, tedy $ADE : FGH = ADEM : FGHN$. Avšak $ADE : ABCDE = ADEM : ABCDEM$. Pročež stejnořadně $ABCDE : FGH = ABCDEM : FGHN$. Avšak zajisté i $FGH : FGHKL = FGHN : FGHKLN$. Tedy stejnořadně $ABCDE : FGHKL = ABCDEM : FGHKLN$; což právě bylo dokázati.

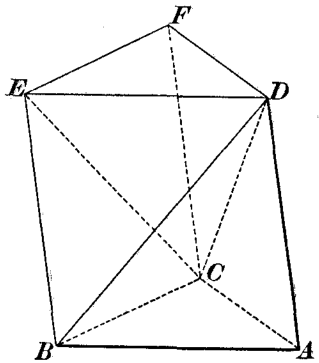


VII.

Každý hranol, jenž má za základnu trojúhelník, dělí se ve tři stejné jehlany, jež mají za základny trojúhelníky.

Mějme hranol, jehož základnou je $\triangle ABC$ a protilehlým DEF; pravím, že hranol $ABCDEF$ dělí se ve tři stejné jehlany, jež mají za základny trojúhelníky.

Veďme spojnice BD, EC, CD. Ježto $ABED$ jest rovnoběžník a úhlopříčkou jeho BD, tedy $\triangle ABD = EBD$; pročež i jehlan, jehož základnou je $\triangle ABD$ a temenem bod C, rovná se jehlanu, jehož základnou je $\triangle DEB$ a temenem bod C. Avšak jehlan, jehož základnou je $\triangle DEB$ a temenem bod C, je týž jako jehlan, jehož základnou je $\triangle EBC$ a temenem D, neboť jest omezen týmiž rovinami. Tedy též jehlan, jehož základnou $\triangle ABD$ a temenem bod D, rovná se jehlanu,



jehož základnou $\triangle EBC$ a temenem bod D. Dále, ježto $FCBE$ jest rovnoběžník a úhlopříčkou jeho CE, $\triangle CEF = CBE$. Proto též jehlan, jehož základnou $\triangle BCE$ a temenem D, rovná se jehlanu, jehož základnou $\triangle ECF$ a temenem D. Jehlan pak, jehož základnou $\triangle BCE$ a temenem D, rovná se, jak dokázáno, jehlanu, jehož základnou $\triangle ABD$ a temenem C; tedy též jehlan, jehož základnou $\triangle CEF$ a temenem D, roven jehlanu, jehož základnou ABD a temenem C; dělí se tedy hranol $ABCDEF$ ve tři stejné jehlany, jež mají za základny trojúhelníky.

A ježto jehlan, jehož základnou $\triangle ABD$ a temenem bod C, je týž jako jehlan, jehož základnou $\triangle CAB$ a temenem D, neboť je omezují tytéž roviny, a jehlan, jehož základnou $\triangle ABD$ a temenem bod C, jest, jak dokázáno, třetinou hranolu, jehož základnou $\triangle ABC$ a protilehlým DEF; tedy jehlan, jehož základnou $\triangle ABC$ a temenem bod D, je třetina hranolu, jenž má touž základnu, totiž ABC, a protilehlý $\triangle DEF$.

Důsledek.

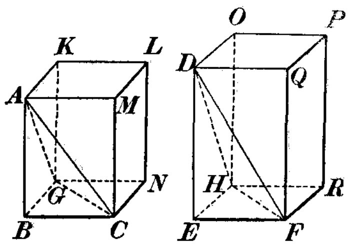
Z toho zajisté patrno, že každý jehlan je třetina hranolu o téže základně a téže výšce[9]); což právě bylo dokázati.

VIII.

J e h l a n y p o d o b n é, m a j í c í z a z á k l a d n y t r o j ú h e l n í k y, m a j í s e k s o b ě j a k o k r y c h l e s t e j n o l e h l ý c h h r a n[10]).

Mějme podobné a podobně položené jehlany, jejichž základnami jsou $\triangle ABC$, DEF a temeny body G, H; pravím, že $ABCG : DEFH = BC^3 : EF^3$.

Nuže doplňme rovnoběžnostěny $BGML$, $EHQP$. A ježto jehlan $ABCG \backsim DEFH$, tedy $\sphericalangle ABC = DEF$, $\sphericalangle GBC = HEF$ a $\sphericalangle ABG = DEH$ a $AB : DE = BC : EF = BG : EH$.



A ježto $AB : DE = BC : EF$ a strany při stejných úhlech jsou úměrné, tedy rovnoběžník $BM \backsim EQ$. Z téže příčiny ovšem i $BN \backsim ER$ a $BK \backsim EO$. A tak tři MB, BK, BN jsou střídavě podobny třem EQ, EO, ER. Avšak tři MB, BK, BN shodují se s protějšími a také tři EQ, EO, ER jsou s protějšími shodné. Pročež tělesa $BGML$, $EHQP$ jsou omezena po-

9) Další čtyři řádky nepochybně cizí a konec kusý.
10) Eukl. dí: πλευρῶν, stran.

dobnými rovinami stejného počtu. Tedy těleso $BGML \backsim EHQP$. Podobné pak rovnoběžnostěny mají se k sobě jako krychle stejnolehlých hran (XI. XXXIII.). Pročež $BGML : EHQP = BC^3 : EF^3$. Avšak $BGML : EHQP = ABCG : DEFH$, ježto jehlan jest šestina tělesa (rovnoběžnostěnu), protože hranol[11]) jsa polovinou rovnoběžnostěnu je třikrát větší než jehlan[12]) (XII. VII.). Tedy též $ABCG : DEFH = BC^3 : EF^3$; což právě bylo dokázati.

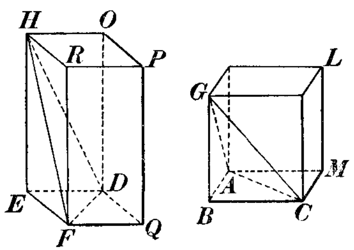
Důsledek.

Z toho zajisté patrno, že podobné jehlany, i když mají za základny mnohoúhelníky, mají se k sobě jako krychle stejnolehlých hran. Neboť když se rozdělí v jehlany v nich obsažené, mající za základny trojúhelníky, tím, že se dělí podobné mnohoúhelníky základní v trojúhelníky podobné a počtem stejné i s celky stejnolehlé (VI. XX.), jako se má v jednom jeden jehlan, mající za základnu trojúhelník, k jednomu v druhém, majícímu za základnu trojúhelník, tak se bude míti též součet jehlanů v jednom, majících za základny trojúhelníky, k součtu jehlanů v druhém, jež mají za základny trojúhelníky, t. j. sám jehlan, jemuž základnou mnohoúhelník, k jehlanu, jemuž základnou mnohoúhelník. Jehlan však, jenž má za základnu trojúhelník, má se k jehlanu, jenž má za základnu trojúhelník, poměrem krychlí stejnolehlých hran (XII. VIII.); pročež i ten, jemuž základnou mnohoúhelník, má se k tomu, jenž má základnu podobnou, právě jako krychle hrany ke krychli hrany.

IX.

V e s t e j n ý c h j e h l a n e c h z á k l a d n y t v a r u t r o j ú h e l n í k o v é h o m a j í s e k s o b ě o b r á c e n ý m p o m ě r e m v ý š e k; a v e k t e r ý c h j e h l a n e c h z á k l a d n y t v a r u t r o j ú h e l n í k o v é h o m a j í s e k s o b ě o b r á c e n ý m p o m ě r e m v ý š e k, t y j s o u s t e j n é.

Nuže mějme jehlany, jimž základnami jsou $\triangle ABC$, DEF a temeny body G, H; pravím, že základny jehlanův $ABCG$, $DEFH$ mají se k sobě obráceným poměrem výšek, a jako se má základna ABC k DEF, tak výška jehlanu $DEFH$ k výšce jehlanu $ABCG$.



Nuže doplňme rovnoběžnostěny $BGML$, $EHQP$. A ježto jehlan $ABCG = DEFH$ a těleso $BGML = 6\,ABCG$ a těleso $EHQP = 6\,DEFH$ (XII. VIII.); tedy těleso $BGML = EHQP$. Ve stejných pak rovnoběžnostěnech základny mají se k sobě obráceným poměrem výšek (XI. XXXIV.); proto má se základna

11) Jehož základnou je totiž trojúhelník.
12) Totiž ten, jenž má stejnou základnu i výšku.

BM k *EQ* jako výška tělesa *EHQP* k výšce tělesa *BGML*. Avšak $BM:EQ = \triangle ABC:DEF$. Pročež má se i $\triangle ABC$ k *DEF* jako výška tělesa *EHQP* k výšce tělesa *BGML*. Avšak výška tělesa *EHQP* je táž jako výška jehlanu *DEFH*, a výška tělesa *BGML* je táž jako výška jehlanu *ABCG*; má se tedy základna *ABC* k *DEF* jako výška jehlanu *DEFH* k výšce jehlanu *ABCG*. Pročež základny jehlanů *ABCG*, *DEFH* mají se k sobě obráceným poměrem výšek.

Avšak mějte se již základny jehlanův *ABCG*, *DEFH* k sobě obráceným poměrem výšek, a jako základna *ABC* k *DEF*, tak měj se výška jehlanu *DEFH* k výšce jehlanu *ABCG*; pravím, že jehlan $ABCG = DEFH$.

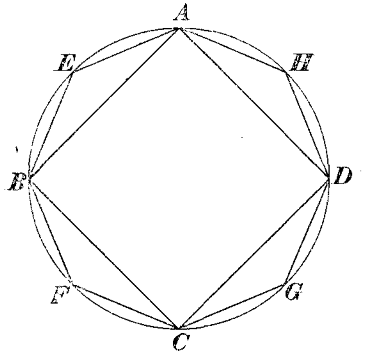
Neboť, vykonáme-li touž úpravu, ježto základna *ABC* má se k *DEF* jako výška jehlanu *DEFH* k výšce jehlanu *ABCG*, avšak $ABC: DEF = BM:EQ$, tedy též *BM* k *EQ* jako výška jehlanu *DEFH* k výšce jehlanu *ABCG*. Avšak výška jehlanu *DEFH* je táž jako výška rovnoběžnostěnu *EHQP* a výška jehlanu *ABCG* je táž jako výška rovnoběžnostěnu *BGML*; má se tedy *BM* k *EQ* jako výška rovnoběžnostěnu *EHQP* k výšce rovnoběžnostěnu *BGML*. Ve kterých pak rovnoběžnostěnech základny mají se k sobě obráceným poměrem výšek, ty jsou si rovny; pročež rovnoběžnostěn $BGML = EHQP$. I jest $ABCG = \frac{1}{6} BGML$ a $DEFH = \frac{1}{6} EHQP$; tedy jehlan $ABCG = DEFH$.

Ve stejných tedy jehlanech základny — —

X

Každý kužel je třetina válce, majícího touž základnu a stejnou výšku.

Nuže měj kužel touž základnu jako válec, totiž kruh *ABCD*, a stejnou výšku; pravím, že kužel je třetina válce, t. j. že válec je trojnásobek kužele.



Neboť není-li válec trojnásobek kužele, bude válec buď větší než trojnásobek kužele buď menší než trojnásobek. Budiž dříve větší než trojnásobek, a vpišme do kruhu *ABCD* čtverec *ABCD*; čtverec *ABCD* zajisté větší jest než polovina kruhu *ABCD* (pozn. 2. 3.). I postavme na čtverci *ABCD* hranol stejné výšky jako válec. Postavený tedy hranol jest větší než polovina válce, poněvadž právě, když kolem kruhu *ABCD* opíšeme čtverec, čtverec do kruhu *ABCD* vepsaný jest polovinou opsaného (pozn. 2. 3.); a na nich postavená tělesa jsou rovnoběžnostěnné hranoly[13]) stejné výšky; rovnoběžnostěny pak o stejné výšce mají se k sobě jako základny (XI. XXXII.); pročež i hranol postavený na čtverci *ABCD* jest polovinou hranolu na čtverci kol kruhu *ABCD* opsaném; a válec jest menší než hranol postavený na čtverci kol kruhu *ABCD* opsaném; tedy hranol postavený na čtverci *ABCD*, stejně vysoký jako válec, jest větší než polovina válce[14]). Rozpolmež oblouky *AB*, *BC*, *CD*. *DA* v bodech *E*, *F*, *G*, *H* a veďme spojnice *AE*, *EB*, *BF*, *FC*, *CG*, *GD*, *DH*, *HA*; tedy též každý z trojúhelníkův *AEB*, *BFC*, *CGD*, *DHA* jest větší než polovina příslušné úseče kruhu *ABCD*, jak jsme svrchu (XII. II.) dokazovali. Postavme na $\triangle AEB$, *BFC*, *CGD*, *DHA* hranoly stejné výšky jako válec; tedy též každý z postavených hranolů jest větší než polovina příslušného úseku válcového, ježto právě, když body *E*, *F*, *G*, *H* vedeme rovnoběžky k *AB*, *BC*, *CD*, *DA* a doplníme na *AB*, *BC*, *CD*, *DA* rovnoběžníky a na nich postavíme rovnoběžnostěny stejné s válcem výšky, polovinou každého z nich jsou hranoly na $\triangle AEB$, *BFC*, *CGD*, *DHA*; a úseky válcové jsou menší než postavené rovnoběžnostěny; a tak i hranoly na *AEB*, *BFC*, *CGD*, *DHA* jsou větší než poloviny příslušných úseků válcových. Rozpolujíce tedy zbývající oblouky a vodíce spojnice a na každém z trojúhelníků stavějíce hranoly stejně vysoké, jako jest válec, a to stále číníce, ostavíme nějaké úseky válcové, jež budou menší než rozdíl válce a trojnásobného kužele. Ostavmež, a buďte to ty, které jsou na *AE*, *EB*, *BF*, *FC*, *CG*, *GD*, *DH*, *HA*[15]); zbývající tedy hranol, jehož základnou mnohoúhelník *AEBFCGDH* a výška táž jako válce, jest větší než trojnásobný kužel. Avšak hranol, jehož základnou mnohoúhelník *AEBFCGDH* a výška táž jako válce, je třikrát větší než jehlan, jehož základnou mnohoúhelník *AEBFCGDH* a temeno totéž jako kužele (XII. VII. důsl.); pročež i jehlan, jehož základnou mnohoúhelník *AEBFCGDH* a temeno totéž jako kužele, jest větší než kužel, jemuž základnou kruh *ABCD*. Avšak i menší, neboť je v něm obsažen; což právě jest nemožné. Tedy válec není větší než trojnásobek kužele.

Pravím již, že válec není ani menší než trojnásobek kužele.

Nuže, možno-li, buď válec menší než trojnásobek kužele. Obráceně tedy kužel jest větší než třetina válce. Vpišme tedy do kruhu *ABCD* čtverec *ABCD*; čtverec *ABCD* je tedy větší než polovina kruhu *ABCD*. A na čtverci *ABCD* postavme jehlan mající totéž temeno jako kužel; tož postavený jehlan jest větší než polovina kužele, jelikož právě, jak jsme svrchu dokazovali, když se kol kruhu opíše čtverec, bude čtverec *ABCD* polovinou čtverce kol kruhu opsaného; a když se na těch čtvercích postaví rovnoběžnostěny stejné výšky jako kužel, jež se zovou též hranoly[16]), bude postavený na čtverci *ABCD* polovinou postaveného na čtverci opsaném kolem kruhu, neboť se mají k sobě jako základny (XI. XXXII.). Pročež tak tomu i s třetinami, tedy též jehlan, jemuž základnou čtverec *ABCD*, jest polovina jehlanu postaveného na čtverci kol kruhu opsaném. I jest jehlan postavený na čtverci kol kruhu opsaném větší než kužel, neboť ten jest v onom

[13]) T. j. hranoly, jejichž stěny po dvou jsou rovnoběžné; zde jsou to arci pravé rovnoběžnostěny.

[14]) Vnější hranol, větší patrně než válec, rovná se totiž dvojnásobnému hranolu vnitřnímu, tedy dva vnitřní jsou větší než válec, pročež jeden vnitřní jest větší než polovina válce.

[15]) Soudím, že m. τὰ *AE*, *EB* — — třeba čísti τὰ ἐπὶ τῶν *AE*, *EB* — —, a dle toho jsem i přeložil.

[16]) Zde zajisté jsou to hranoly, jakož vůbec každý rovnoběžnostěn jest hranol, ale ovšem ne každý hranol rovnoběžnostěn.

obsažen. Pročež jehlan, jemuž základnou čtverec $ABCD$ a temeno totéž jako kuželi, jest větší než polovina kužele (pozn. 2. 3.). Rozpolmež oblouky AB, BC, CD, DA v bodech E, F, G, H a veďme spojnice AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA; tedy též každý z trojúhelníkův AEB, BFC, CGD, DHA jest větší než polovina příslušné úseče kruhu $ABCD$. A postavme na $\triangle$ AEB, BFC, CGD, DHA jehlany mající totéž temeno jako kužel; tedy též každý z postavených jehlanů z téhož důvodu větší jest než polovina příslušného úseku kuželového. Rozpolujíce tedy zbývající oblouky a vodíce spojnice a stavějíce na všech trojúhelnících jehlany, mající totéž temeno jako kužel, a to stále70 činíce ostavíme nějaké úseky kuželové, jež budou menší než rozdíl kužele a třetiny válce. Ostavmež, a buďte to ty, které jsou na AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA; tedy zbývající jehlan, jemuž základnou mnohoúhelník $AEBFCGDH$ a temeno totéž jako kuželi, jest větší než třetina válce. Avšak jehlan, jemuž základnou mnohoúhelník $AEBFCGDH$ a temeno totéž jako kuželi, je třetina hranolu, jenž má za základnu mnohoúhelník $AEBFCGDH$ a touž výšku jako válec; pročež hranol, jemuž základnou mnohoúhelník $AEBFCGDH$ a táž výška jako válci, jest větší než válec, jenž má za základnu kruh $ABCD$. Avšak i menší, neboť je v něm obsažen; což právě jest nemožné. Pročež válec není menší než trojnásobek kužele; tedy válec je trojnásobek kužele; a tak jest kužel třetina válce.

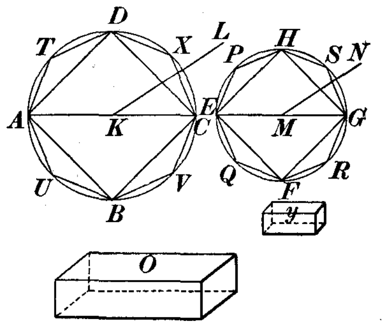
Tedy každý kužel je třetina válce, — —

XI.

Kužele a válce téže výšky mají se k sobě jako základny[17]).

Touž výšku mějte kužele a válce, jimž jsou základnami kruhy $ABCD$, $EFGH$ a osami KL, MN, a průměry základen AC, EG; pravím, že kužel $AL : EN = ABCD : EFGH$.

Neboť, není-li tomu tak, bude se míti kruh $ABCD$ k $EFGH$ jako kužel AL buď k nějakému tělesu menšímu než EN nebo k většímu.



Měj se dříve jako k menšímu O, a budiž $EN - O = Y$; pročež $EN = O + Y$. Vpišme do kruhu $EFGH$ čtverec $EFGH$; tedy čtverec jest větší než polovina kruhu (XII. II. pozn. 2. 3.). Postavme na čtverci $EFGH$ jehlan stejné s kuželem výšky; tedy postavený jehlan jest větší než polovina kužele, ježto právě, když kolem kruhu opíšeme čtverec a na něm postavíme jehlan stejné s kuželem výšky, vepsaný jehlan jest polovinou opsaného, neboť se mají k sobě jako základny (XII. VI.); a kužel jest menší než opsaný jehlan. Rozpolmež oblouky EF, FG, GH, HE v bodech P, Q, R, S a veďme spojnice HP, PE, EQ, QF,

[17]) T. j. kužele ke kuželům a válce k válcům.

FR, RG, GS, SH. [Každý tedy z trojúhelníkův HPE, EQF, FRG, GSH jest větší než polovina příslušné úseče kruhové. Postavme na $\triangle$ HPE, EQF, FRG, GSH jehlany stejné výšky, jako má kužel; každý tedy z postavených jehlanů jest větší než polovina příslušného úseku kuželového. Rozpolujíce zbývající oblouky a vodíce spojnice a stavějíce na všech trojúhelnících jehlany téže výšky, jako má kužel, a to stále činíce ostavíme zajisté nějaké úseky kuželové, jež budou menší než těleso Y. Ostavmež, a buďte to ty, které jsou na HPE, EQF, FRG, GSH: pročež zbývající jehlan, jemuž základnou mnohoúhelník $HPEQFRGS$ a výška táž jako kuželi, větší jest než těleso O. Vpišme též do kruhu $ABCD$ mnohoúhelník $DTAUBVCX$ mnohoúhelníku $HPEQFRGS$ podobný a podobně položený a postavme na něm jehlan stejné výšky, jako má kužel AL. Ježto tedy $AC^2 : EG^2 = DTAUBVCX : HPEQFRGS$ a $AC^2 : EG^2 =$ kruh $ABCD : EFGH$ (XII. II.); tedy též kruh $ABCD : EFGH = DTAUBVCX : HPEQFRGS$. Avšak kruh $ABCD : EFGH = AL : O$, a $DTAUBVCX$ k $HPEQFRGS$ jako jehlan, jehož základnou mnohoúhelník $DTAUBVCX$ a temenem bod L, k jehlanu, jehož základnou $HPEQFRGS$ a temenem bod N. Pročež i AL má se k O jako jehlan, jehož základnou $DTAUBVCX$ a temenem L, k jehlanu, jehož základnou $HPEQFRGS$ a temenem N; tedy střídavě kužel AL k jehlanu v něm obsaženému jako těleso O k jehlanu v kuželi EN. Kužel AL však jest větší než jehlan v něm obsažený; pročež i těleso O jest větší než jehlan v kuželi EN. Avšak i menší; což právě jest nemožné. Tedy kruh $ABCD$ nemá se ke kruhu $EFGH$ jako kužel AL k nějakému tělesu menšímu než jest kužel EN. Podobně zajisté dokážeme, že ani se nemá kruh $EFGH$ ke kruhu $ABCD$ jako kužel EN k nějakému tělesu menšímu než jest AL.

Pravím již, že ani se nemá kruh $ABCD$ k $EFGH$ jako kužel AL k většímu nějakému tělesu než jest EN.

Nuže, možno-li, měj se jako k většímu O; obráceně tedy kruh $EFGH : ABCD = O : AL$. Avšak O má se k AL jako EN k nějakému tělesu menšímu než jest AL[18]); pročež také kruh $EFGH$ k $ABCD$ jako EN k nějakému tělesu menšímu než jest AL; což právě bylo (svrchu) dokázáno nemožným. Tedy nemá se kruh $ABCD$ k $EFGH$ jako kužel AL k většímu nějakému tělesu než jest EN. Dokázáno pak bylo, že ani jako k menšímu; pročež kruh $ABCD : EFGH =$ kužel $AL : EN$.

Avšak jako kužel ke kuželi, tak se má válec k válci; neboť tyto jsou každý třikrát větší než ony (XII. X.). Pročež jako kruh $ABCD$ ke kruhu $EFGH$, tak se mají k sobě i válce stejně vysoké, postavené na nich.

Tedy kužele a válce téže výšky — —

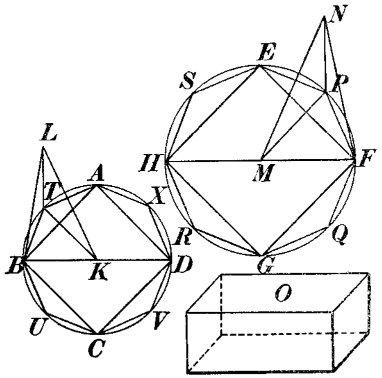
XII.

Podobné kužele a válce[17]) mají se k sobě jako krychle z průměrů základen.

[18]) Bylo totiž připuštěno, že $O > EN$; tedy čtvrtý člen nutně jest menší než druhý (V. XIV.).

Mějme podobné kužele a válce, jejichž základnami kruhy *ABCD*, *EFGH* a průměry základen *BD*, *FH*, osami pak kuželův i válců *KL*, *MN*; pravím, že kužel, jehož základnou kruh *ABCD* a temenem bod *L*, má se ke kuželi, jehož základnou *EFGH* a temenem *N*, jako BD^3 k FH^3.

Neboť, nemá-li se $ABCDL : EFGHN = BD^3 : FH^3$, bude se míti, jako BD^3 k FH^3, tak kužel *ABCDL* buďto k menšímu nějakému tělesu, než jest *EFGHN*, nebo k většímu. Měj se dříve k menšímu *O*, a vpišme do kruhu *EFGH* čtverec *EFGH*; tedy čtverec *EFGH* jest větší než polovina kruhu *EFGH* (pozn. 2. 3.). A postavme na čtverci *EFGH* jehlan, mající s kuželem totéž temeno; tož jest postavený jehlan větší než polovina kužele (XII. x. v II. části). Rozpolme již oblouky *EF*, *FG*, *GH*, *HE* v bodech *P*, *Q*, *R*, *S* a veďme spojnice *EP*, *PF*, *FQ*, *QG*, *GR*, *RH*, *HS*, *SE*. Tedy též každý z trojúhelníkův *EPF*, *FQG*, *GRH*, *HSE* jest větší než polovina příslušné úseče kruhu *EFGH*. I postavme na △ *EPF*, *FQG*, *GRH*, *HSE* jehlany téže výšky jako kužel; pročež i každý z postavených jehlanů větší jest než polovina příslušného úseku kuželového. Rozpolujíce tedy zbývající oblouky a vodíce spojnice a stavějíce na trojúhelnících jehlany téže výšky jako kužel a to stále činíce ostavíme nějaké úseky kuželové, jež budou menší než rozdíl kužele *EFGHN* a tělesa *O*. Ostavmež, a buďte to ty, které jsou na *EP*, *PF*, *FQ*, *QG*, *GR*, *RH*, *HS*, *SE*; pročež zbývající jehlan, jehož základnou mnohoúhelník *EPFQGRHS* a temenem bod *N*, větší jest než těleso *O*. Vpišme také do kruhu *ABCD* mnohoúhelník *ATBUCVDX* podobný mnohoúhelníku *EPFQGRHS* a podobně položený a postavme na mnohoúhelníku *ATBUCVDX* jehlan, mající totéž temeno jako kužel, a jedním z trojúhelníkův omezujících jehlan, jehož základnou *ATBUCVDX* a temenem bod *L*, budiž *LBT*, z těch pak trojúhelníků, jež omezují jehlan, jehož základnou *EPFQGRHS* a temenem *N*, jedním buď *NFP*, a veďme spojnice *KT*, *MP*. A ježto kužel $ABCDL \backsim EFGHN$, tedy $BD : FH =$ osa $KL : MN$ (XI. vým. 24.) A $BD : FH = BK : FM$; pročež i $BK : FM = KL : MN$. Také střídavě $BK : KL = FM : MN$. Také strany při stejných úhlech *BKL*, *FMN* jsou úměrné; tedy $\triangle BKL \backsim FMN$ (VI. VI.). Ježto dále $BK : KT = FM : MP$ a při stejných úhlech *BKT*, *FMP* (ježto právě, jakým dílem jest $\sphericalangle BKT$ čtyř pravých kolem středu *K*, týmž dílem jest i $\sphericalangle FMP$ čtyř pravých kolem středu *M*), ježto tedy při stejných úhlech strany jsou úměrné, tedy $\triangle BKT \backsim FMP$. Dále, ježto bylo dokázáno, že $BK : KL = FM : MN$ a $BK = KT$, $FM = PM$, tedy $TK : KL = PM : MN$. A při stejných úhlech *TKL*, *PMN* (neboť jsou pravé) [19]) strany jsou úměrné; pročež $\triangle LKT \backsim NMP$. A ježto pro podobnost trojúhelníkův *LKB*, *NMF* $LB : BK = NF : FM$



a pro podobnost △ *BKT*, *FMP*, $KB : BT = MF : FP$, proto stejnořadně $LB : BT = NF : FP$. Dále, ježto pro podobnost △ *LTK*, *NPM* $LT : TK = NP : PM$ a pro podobnost △ *TKB*, *PMF* $KT : TB = MP : PF$, tedy stejnořadně $LT : TB = NP : PF$. Bylo však dokázáno, že i $TB : BL = PF : FN$. Pročež stejnořadně $TL : LB = PN : NF$. Tedy v △ *LTB*, *NPF* jsou strany úměrné; pročež △ *LTB*, *NPF* jsou stejnoúhlé, a tím i podobné. Tedy též jehlan, jehož základnou △ *BKT* a temenem bod *L*, jest podoben jehlanu, jehož základnou △ *FMP* a temenem *N*; neboť je omezují roviny podobné a počtem stejné (XI. vým. 9.). Podobné však jehlany, mající za základny trojúhelníky, mají se k sobě jako krychle ze stejnolehlých stran (XII. VIII.). Pročež jehlan $BKTL : FMPN = BK^3 : FM^3$. Podobně zajisté, spojujíce *A*, *X*, *D*, *V*, *C*, *U* s *K* a *E*, *S*, *H*, *R*, *G*, *Q* s *M* a stavíce na trojúhelnících jehlany, mající táž temena jako kužele, dokážeme, že i každý ze stejnolehlých jehlanů má se ke každému z jehlanů stejnolehlých jako krychle ze stejnolehlých stran BK^3 k FM^3, t. j. BD^3 k FH^3. A jako přední člen k zadnímu, tak se má součet předních k součtu zadních (V. XII.). Pročež také, jako se má jehlan *BKTL* k *FMPN*, tak celý jehlan, jehož základnou *ATBUCVDX* a temenem *L*, k celému jehlanu, jehož základnou *EPFQGRHS* a temenem *N*; a tak i jehlan, jehož základnou *ATBUCVDX* a temenem *L*, má se k jehlanu, jehož základnou *EPFQGRHS* a temenem *N*, jako BD^3 k FH^3. Připustili jsme však, že i kužel, jehož základnou kruh *ABCD* a temenem *L*, má se k tělesu *O* jako BD^3 k FH^3; tedy kužel, jehož základnou kruh *ABCD* a temenem *L*, má se k tělesu *O* jako jehlan, jehož základnou *ATBUCVDX* a temenem *L*, k jehlanu, jehož základnou *EPFQGRHS* a temenem *N*; pročež střídavě kužel, jehož základnou kruh *ABCD* a temenem *L*, k jehlanu v něm obsaženému, jehož základnou *ATBUCVDX* a temenem *L*, jako *O* k jehlanu, jehož základnou *EPFQGRHS* a temenem *N*. Řečený však kužel jest větší než příslušný jehlan, neboť je v něm obsažen; proto větší jest i těleso *O* než jehlan, jehož základnou *EPFQGRHS* a temenem *N*. Avšak i menší; což právě jest nemožné. Tedy kužel, jehož základnou kruh *ABCD* a temenem *L*, nemá se k žádnému tělesu menšímu, než jest kužel, jehož základnou kruh *EFGH* a temenem *N*, tak jako BD^3 k FH^3. Podobně zajisté dokážeme, že nemá se ani kužel *EFGHN* k žádnému tělesu menšímu, než jest kužel *ABCDL*, tak jako FH^3 k BD^3.

Pravím již, že kužel *ABCDL* nemá se ani k žádnému většímu tělesu, než jest kužel *EFGHN*, jako BD^3 k FH^3.

Nuže, možno-li, měj se k většímu *O*. Obráceně tedy $O : ABCDL = FH^3 : BD^3$. Jako však těleso *O* ke kuželi *ABCDL*, tak se má kužel *EFGHN* k nějakému tělesu menšímu než jest kužel *ABCDL* (pozn. 18.). Pročež i kužel *EFGHN* má se k nějakému tělesu menšímu, než jest *ABCDL*, jako FH^3 k BD^3; což právě se ukázalo nemožným. Tedy nemá se kužel *ABCDL* k žádnému většímu tělesu, než jest *EFGHN*, tak jako BD^3 k FH^3. Bylo pak dokázáno, že ani k menšímu. Pročež $ABCDL : EFGHN = BD^3 : FH^3$.

[19]) Míní se tedy kužele kolmé.

Avšak jako kužel ke kuželi, tak se má válec k válci; neboť válec na téže základně jako kužel a stejně vysoký je třikrát větší než kužel. Proto též válec má se k válci jako BD^3 k FH^3.

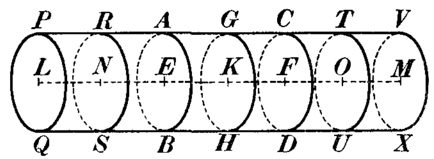
Tedy podobné kužele a válce — —

XIII.

Když se protne válec rovinou, s rovinami protějšími rovnoběžnou, bude se míti válec k válci jako osa k ose.

Nuže protněme válec AD rovinou GH, s protějšími rovinami AB, CD rovnoběžnou, a rovina GH sbíhej se v bodě K s osou; pravím, že válec $BG : GD =$ osa $EK : KF$.

Nuže prodlužmež osu EF na obě strany do bodův L, M, a budiž $EK = EN = NL$ (jakýkoli počet) a $FK = FO = OM$ (jakýkoli počet), a mysleme si na ose LM válec PX, jehož základnami jsou kruhy PQ, VX. A proložme body N, O roviny rovnoběžné s AB, CD i se základnami válce PX, a vznikejte tím kruhy RS, TU kolem středů N, O. A ježto osy LN, NE, EK jsou stejné, tedy válce QR, RB, BG mají se k sobě jako základny (XII. xi.)[19]). Základny však jsou stejné; pročež i válce QR, RB, BG jsou si rovny. Ježto tedy osy LN, NE, EK jsou stejné a též válce QR, RB, BG jsou si rovny a počet roven počtu, tedy kolikrát větší jest osa KL než EK, tolikrát i válec QG bude větší než GB. Z téže příčiny ovšem i kolikrát větší jest osa MK než KF, tolikrát větší jest i válec XG než GD. A jest-li $KL = KM$, bude též $QG = GX$, pakli osa osy větší, větší též válec válce, pakli menší, menší. Když jsou tedy čtyři veličiny, osy EK, KF a válce BG, GD, osa LK a válec QG jsou vzaty za stejné násobky osy EK a válce BG, osa pak KM a válec GX za stejné násobky osy KF a válce GD, a dokázáno jest, když osa $KL > KM$, že též válec $QG > GX$, a když osy stejné, stejné i válce, a když menší, menší[20]).

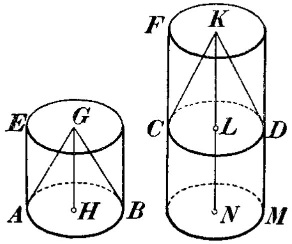


Tedy válec $BG : GD =$ osa $EK : KF$; což právě bylo dokázati.

XIV.

Kužele a válce na stejných základnách mají se k sobě jako výšky[17]).

Nuže buďte válce (kolmé) EB, FD na stejných základnách, totiž na kruzích AB, CD; pravím, že $EB : FD = GH : KL$.



Nuže prodlužmež osu KL do bodu N a budiž $LN = GH$, a kolem osy LN mysleme si válec CM. Ježto tedy válce EB, CM mají touž výšku, mají se k sobě jako základny

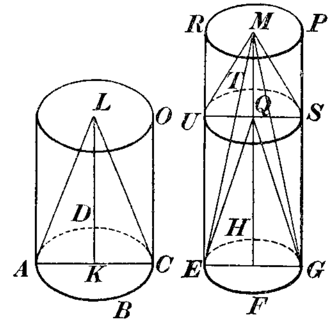
20) Rozuměj, že stejným poměrem.

(XII. xi.). Základny však jsou stejné; pročež stejné jsou i válce EB, CM. A ježto válec FM proťat jest rovinou CD, s rovinami protějšími rovnoběžnou, válec $CM : FD =$ osa $LN : KL$ (XII. xiii.). Avšak válec $CM = EB$ a osa $LN = GH$; tedy válec $EB : FD =$ osa $GH : KL$. Jako však se má válec EB k FD, tak kužel ABG k CDK (XII. x.). Pročež $ABG : CDK = GH : KL = EB : FD$; což právě bylo dokázati.

XV.

Ve stejných kuželích a válcích základny mají se k sobě obráceným poměrem výšek; a ve kterých kuželích a válcích mají se k sobě základny obráceným poměrem výšek, ty jsou stejné.

Mějme stejné (obsahem) kužele a válce, jejichž základnami jsou kruhy $ABCD$, $FFGH$, průměry pak jejich AC, EG a osami KL, MN*), jěž jsou také výškami kuželů nebo válců, a doplňme válce AO, EP; pravím, že ve válcích AO, EP základny mají se k sobě obráceným poměrem výšek, a to $ABCD : EFGH = MN : KL$.



Výška LK je zajisté s výškou MN buď stejná nebo nikoli. Budiž dříve stejná. Je však i válec $AO = EP$. A kužele i válce stejné výšky mají se k sobě jako základny; tedy též základna $ABCD = EFGH$. A tak jsou k sobě také v poměru obráceném, $ABCD : EFGH = MN : KL$.

Avšak již nebuď výška LK stejná s MN, nýbrž větší buď MN, a od výšky MN odřízněme QN stejnou s KL a v bodě Q protněme válec EP rovinou TUS[21]) rovnoběžnou s rovinami kruhovými $EFGH$, RP, a na základně $EFGH$ do výšky NQ mysleme si válec ES. A ježto válec $AO = EP$, tedy $AO : ES = EP : ES$. Avšak $AO : ES = ABCD : EFGH$, neboť válce AO, ES mají touž výšku (XII. xi.). A $EP : ES = MN : QN$, neboť válec EP jest proťat rovinou rovnoběžnou s rovinami protějšími (XII. xiii.). Pročež $ABCD : EFGH = MN : QN$. Avšak $QN = KL$; tedy $ABCD : EFGH = MN : KL$. Tedy ve válcích AO, EP základny mají se k sobě obráceným poměrem výšek.

Avšak mějte se již základny válců k sobě obráceným poměrem výšek, takže $ABCD : EFGH = MN : KL$; pravím, že válec $AO = EP$.

Neboť, vykonáme-li touž úpravu, ježto $ABCD : EFGH = MN : KL$ a $KL = QN$, tedy $ABCD : EFGH = MN : NQ$. Avšak $ABCD : EFGH =$ válec $AO : ES$, neboť mají touž výšku; a výška $MN : QN =$ válec $EP : ES$; pročež $AO : ES = EP : ES$. Tedy $AO = EP$ (V. ix.). A právě tak tomu i s kuželi; což právě bylo dokázati.

XVI.

Dány-li dva kruhy kolem téhož středu (soustředné),

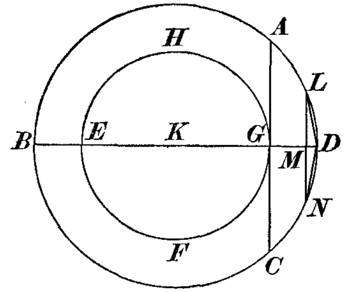
*) Střed kruhu $EFGH$ označ N, což nedopatřením vypuštěno.

21) Písmě T u Heiberga v obrazci vynecháno; doplnil jsem.

vpiš do kruhu většího mnohoúhelník stejnostranný i sudostranný, aby se nedotýkal kruhu menšího.

Danými dvěma kruhy kolem téhož středu K buďtež $ABCD$, $EFGH$; má se tedy do většího kruhu $ABCD$ vepsati mnohoúhelník stejnostranný i sudostranný, aby se nedotýkal kruhu $EFGH$.

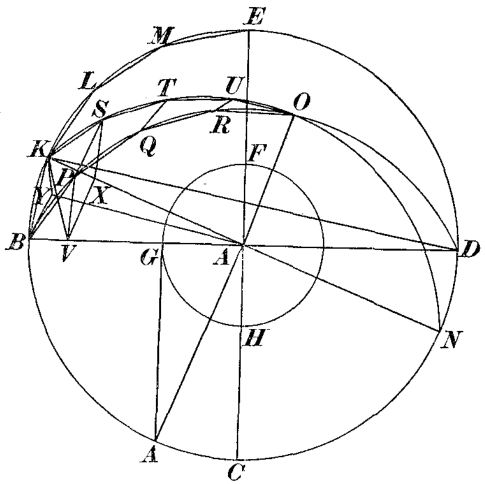
Nuže veďme středem K přímku BKD a v bodě G vztyčme na BD kolmici GA a prodlužme ji do C; tedy AC dotýká se kruhu $EFGH$ (III. XVI. důsl.). Rozpolujíce tedy oblouk ABD i polovinu jeho a to stále činíce ostavíme oblouk menší než AD. Ostavmež, a budiž to LD, a z L spusťme na BD kolmici LM a prodlužme ji do N a veďme spojnice LD, DN; tu jest $LD = DN$ (III III.). A ježto $LN \parallel AC$, AC pak dotýká se kruhu $EFGH$, tedy LN kruhu $EFGH$ se nedotýká; pročež mnohem více LD, DN kruhu $EFGH$ se nedotýkají. Když tedy zapustíme do kruhu $ABCD$ spojitou řadou přímky stejné s LD, vepsán bude do kruhu $ABCD$ mnohoúhelník stejnostranný i sudostranný, tak aby se nedotýkal menšího kruhu $EFGH$; což právě bylo vykonati.



XVII.

Dány-li dvě koule soustředné, vpiš do větší koule mnohostěn, aby se povrchu menší koule nedotýkal*)

Mysleme si dvě koule kolem téhož středu A; má se tedy vepsati do větší koule mnohostěn, aby se povrchu menší koule nedotýkal.



Protněme koule středem nějakou rovinou; řezy zajisté budou kruhy, ježto právě tím, že průměr zůstával pevný a polokruh se otáčel, vznikala koule (XI. vým. 14.); a tak také, v jakékoli poloze si pomyslíme polokruh, rovina jím vedená bude činiti kruh. I jest na jevě, že také největší, ježto právě průměr kulový, kterýžto průměr, jak patrno, náleží i polokruhu i kruhu, jest větší než jakékoli přímky do kruhu nebo koule zapuštěné. Mějme tedy ve větší kouli kruh $BCDE$, v menší pak kouli kruh FGH, a veďme v nich dva průměry na sobě

*) V obr. dole v levo od C m. A budiž označení A'.

kolmé BD, CE, a majíce dva kruhy soustředné $BCDE$, FGH vpišme do kruhu většího $BCDE$ mnohoúhelník stejnostranný i sudostranný, aby se nedotýkal menšího kruhu FGH, a stranami jeho ve čtverníku BE buďte BK, KL, LM, ME, a spojnici KA prodlužme do N a vztyčme v bodě A na rovině kruhu $BCDE$ kolmici AO, a ta stýkej se s povrchem kulovým v O, a přímkami (AO), BD, KN proložme roviny; budou zajisté z důvodu řečeného činiti na povrchu koule největší kruhy. Čiňtež, a polokruhy jejich na průměrech BD, KN buďtež BOD, KON. A ježto AO jest na rovině kruhu $BCDE$ kolmo, tedy také všechny roviny kolmicí OA proložené jsou kolmo na rovině kruhu $BCDE$; a tak i polokruhy BOD, KON jsou na rovině kruhu $BCDE$ kolmo. A ježto polokruhy BED, BOD, KON jsou stejné (mají totiž stejné průměry BD, KN), také čtverníky BE, BO, KO jsou stejné. Kolik tedy je stran mnohoúhelníku ve čtverníku BE, tolik i ve čtverníku BO i v KO stejných s BK, KL, LM, ME. Vpišme je, a buďte to BP, PQ, QR, RO, KS, ST, TU, UO, a veďme spojnice SP, TQ, UR a z bodů P, S na rovinu kruhu $BCDE$ spusťme kolmice; dopadnou zajisté na společné průseky rovin BD, KN, ježto právě též roviny BED, KON jsou kolmo na rovině kruhu $BCDE$. Dopadejtež, a buďte to PV, SX, a veďme spojnici XV. A ježto v stejných polokruzích BOD, KON odříznuty stejné tětivy BP, KS a spuštěny kolmice PV, SX, tedy $PV = SX$ a $BV = KX$[22]. Také však celá $BA = KA$; pročež i zbývající $VA = XA$. Tedy $BV : VA = KX : XA$; pročež $XV \parallel KB$. A ježto PV i SX jsou na rovině kruhu $BCDE$ kolmo, jest $PV \parallel SX$. Bylo však dokázáno, že jsou i stejné; tedy XV, SP jsou i stejné i rovnoběžné (I. XXXIII.). A ježto $XV \parallel SP$, avšak $XV \parallel KB$, tedy též $SP \parallel KB$. A protínají je BP, KS; pročež čtyřúhelník (čtyřstran) $KBPS$ jest v jedné rovině, jelikož právě, když jsou dvě přímky rovnoběžné a na obou se vytknou nahodilé body, spojnice těch bodů jest v téže rovině jako rovnoběžky (XI. VII.). Z téže příčiny ovšem i čtyřúhelníky $SPQT$, $TQRU$ jsou každý v jedné rovině; jest pak v jedné rovině i $\triangle URO$. Když si tedy pomyslíme z bodů P, S, Q, T, R, U do A vedené spojnice, sestaven bude jakýsi útvar mnohostěnný mezi oblouky BO, KO, složený z jehlanů, jejichž základnami jsou čtyřúhelníky $KBPS$, $SPQT$, $TQRU$ a $\triangle URO$, temenem pak bod A. Když pak také na každé z přímek KL, LM, ME jako právě na BK upravíme totéž a rovněž na ostatních třech čtvernících, sestaven bude jakýsi útvar mnohostěnný, vepsaný do koule, složený z jehlanů, jejichž základnami jsou řečené čtyřúhelníky a $\triangle URO$ i útvary stejnolehlé, temenem pak bod A.

Pravím, že řečený mnohostěn se nedotýká povrchu koule menší, na níž jest kruh FGH.

Veďme z bodu A na rovinu čtyřúhelníku $KBPS$ kolmici AY, a stýkej se s rovinou v bodě Y, a veďme spojnice YB, YK. A ježto $AY \perp KBPS$, tedy též na všech přímkách s ní se stýkajících a jsoucích v rovině čtyřúhelníku jest kolmo. Pročež $AY \perp BY$, $AY \perp KY$. A ježto $AB = AK$, též $AB^2 = AK^2$. A $AB^2 = AY^2 + YB^2$, neboť $\sphericalangle Y$ jest

[22]) Neboť $\triangle BPV \cong KSX$ (I. XXVI.).

pravý; a $AK^2 = AY^2 + YK^2$. Pročež $AY^2 + YB^2 = AY^2 + YK^2$ Odečtěme společné AY^2; tedy zbývající $BY^2 = YK^2$; proto $BY = YK$. Podobně zajisté dokážeme, že také spojnice bodu Y s P, S jsou stejné s BY, YK. Tedy kruh rýsovaný ze středu Y a rozpětím YB neb YK zasáhne i body P, S, a čtyřúhelník $KBPS$ bude v kruhu. A ježto $KB > XV$ a $XV = SP$, tedy $KB > SP$. Avšak $KB = KS = BP$; pročež i $KS > SP$, $BP > SP$. A ježto čtyřúhelník $KBPS$ jest v kruhu a KB, BP, KS jsou stejné, PS však menší a BY jest poloměrem kruhu, tedy $KB^2 > 2BY^2$[23]). Veďme z K na BV kolmici KV[24]). A ježto $BD < 2DV$ a $BD : DV = BD \times BV : DV \times BV$; narýsujeme-li z BV čtverec a doplníme-li na VD rovnoběžník, tedy též $DB \times BV < 2DV \times VB$. A vedeme-li spojnici KD, jest $DB \times BV = BK^2$[25]) a $DV \times VB = KV^2$; pročež $KB^2 < 2KV^2$. Avšak $KB^2 > 2BY^2$, tedy $KV^2 > BY^2$. A ježto $BA = KA$, tedy $BA^2 = KA^2$. A $BA^2 = BY^2 + YA^2$ a $KA^2 = KV^2 + VA^2$; pročež $BY^2 + YA^2 = KV^2 + VA^2$, z čehož $KV^2 > BY^2$; tedy zbývající $VA^2 < YA^2$. Pročež $AY > AV$; tedy o mnoho větší jest AY než AG. I dosahuje AY jedné základny mnohostěnu, AG pak povrchu menší koule; a tak mnohostěn povrchu menší koule nebude se dotýkati.

Dány-li tedy dvě koule soustředné, do větší koule jest vepsán mnohostěn, takže se nedotýká povrchu koule menší; což právě bylo vykonati.

Důsledek.

Když pak se vpíše i do jiné koule mnohostěn podobný mnohostěnu v kouli $BCDE$, mnohostěn v kouli $BCDE$ má se k mnohostěnu v kouli druhé jako krychle z průměru koule $BCDE$ ke krychli z průměru koule druhé. Neboť rozdělí-li se ta tělesa v jehlany stejného počtu a stejnolehlé, budou to jehlany podobné. Podobné jehlany mají se k sobě jako krychle stejnolehlých hran (XII VIII. důsl.); tedy jehlan, jehož základnou čtyřúhelník $KBPS$ a temenem bod A, má se k stejnolehlému jehlanu v kouli druhé jako krychle stejnolehlé hrany ke krychli hrany stejnolehlé, t. j. jako krychle poloměru AB té koule, jejímž středem jest A, ke krychli poloměru koule druhé. Podobně i každý jehlan v kouli, jejímž středem jest A, ke každému stejnolehlému jehlanu v kouli druhé bude se míti tak, jako AB^3 ke krychli poloměru koule druhé. A jako se má jeden člen přední k jednomu zadnímu, tak součet předních k součtu zadních; a tak celý mnohostěn v kouli, jejímž středem A, bude se míti k celému mnohostěnu v kouli druhé jako AB^3 ke krychli poloměru koule druhé, t. j. jako krychle průměru BD ke krychli průměru koule druhé; což právě bylo dokázati.

---

23) KB je totiž delší než strana s čtverce vepsaného; a $s^2 = 2r^2$ (zde $2BY^2$); tedy $KB^2 > 2BY^2$.

24) V orig. $K\Omega$, avšak dopadne právě do V; dle toho všude dále opraveno.

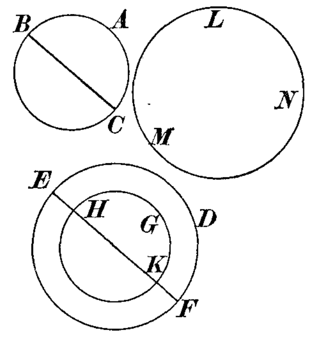
25) $BK^2 = KV^2 + BV^2$, $KV^2 = BV \times VD$; tedy $BK^2 = BV \times VD + BV^2 = BV(VD + BV) = BV \times BD$.

XVIII.

Koule mají se k sobě jako krychle vlastních průměrů.

Mysleme si kulemi ABC, DEF, průměry pak jejich BC, EF; pravím, že $ABC : DEF = BC^3 : EF^3$.

Neboť, nemá-li se $ABC : DEF = BC^3 : EF^3$, bude se tedy míti koule ABC buď k nějaké kouli menší, než jest DEF, nebo k větší tak, jako BC^3 k EF^3. Měj se dříve k menší GHK, a mysleme si DEF soustřednou s GHK a vpišme do větší koule DEF mnohostěn, tak aby se nedotýkal povrchu menší koule GHK (XII. XVII.), a vpišme rovněž do koule ABC mnohostěn mnohostěnu v kouli DEF podobný; tedy mnohostěn v ABC má se k mnohostěnu v DEF jako BC^3 k EF^3 (XII. XVII. důsl.). Avšak i koule $ABC : GHK = BC^3 : EF^3$; pročež má se koule ABC ku GHK jako mnohostěn v ABC k mnohostěnu v DEF; střídavě tedy koule ABC ke svému mnohostěnu jako koule GHK k mnohostěnu v DEF. Koule ABC však jest větší než vepsaný mnohostěn; pročež i koule GHK jest větší než mnohostěn v DEF. Avšak i menší, neboť jest v něm obsažena. Tedy koule ABC nemá se ke kouli menší, než jest DEF, jako BC^3 k EF^3. Podobně zajisté dokážeme, že ani koule DEF nemá se ke kouli menší, než jest ABC, jako EF^3 k BC^3.



Pravím již, že koule ABC nemá se ani ke kouli větší, než jest DEF, jako BC^3 k EF^3.

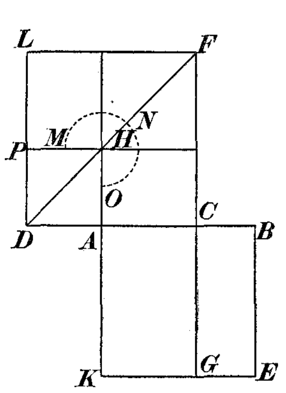
Nuže, možno-li, měj se k větší LMN; obráceně tedy $LMN : ABC = EF^3 : BC^3$. Jako však LMN k ABC, tak se má koule DEF k nějaké menší kouli, než jest ABC, ježto právě $LMN > DEF$ (viz XII. XI. pozn. 18.) [jakož bylo svrchu dokázáno). Pročež také se má koule DEF k nějaké menší kouli, než jest ABC, jako EF^3 k BC^3; což právě dokázáno bylo nemožným. Proto koule ABC nemá se k žádné kouli větší, než jest DEF, jako BC^3 k EF^3. Dokázáno však, že ani k menší. Tedy $ABC : DEF = BC^3 : EF^3$; což právě bylo dokázati.

Kniha třináctá.

I.

Když se rozdělí přímka poměrem krajním a středním, čtverec z větší úsečky, zvětšené o polovici celé, rovná se pateronásobnému čtverci z polovice.

Nuže buď přímka AB rozdělena poměrem krajním a středním v bodě C a větší úsečkou buď AC a buď AC prodloužena v přímém směru o AD a buď $AD = \frac{AB}{2}$; pravím, že čtverec z $CD = 5\,DA^2$.



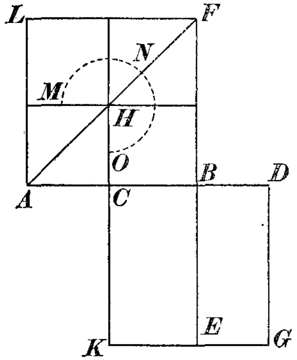
Nuže sestrojme z AB, DC čtverce AE, DF a DF vylinkujme a prodlužme FC do G. A ježto AB je v C rozdělena poměrem krajním a středním, jest $AB \times BC = AC^2$. I jest $AB \times BC = CE$ a $AC^2 = FH$; tedy $CE = FH$. A ježto $BA = 2\,AD$ a $BA = KA$ a $AD = AH$, tedy též $KA = 2\,AH$. Avšak $KA : AH = CK : CH$; tedy $CK = 2\,CH$. Jest pak i $LH + HC = 2\,HC$ (I. XLIII.). Pročež $KC = LH + HC$. Dokázáno pak bylo, že také $CE = HF$; tedy celý čtverec $AE = MNO$. A ježto $BA = 2\,AD$, jest $BA^2 = 4\,AD^2$, t. j. $AE = 4\,DH$. Avšak $AE = MNO$; tedy též soudélník $MNO = 4\,DH$. Tedy celý $DF = 5\,DH$ (n. AP). I jest $DF = DC^2$, AP pak $= DA^2$. Tedy $CD^2 = 5\,DA^2$.

Když se tedy rozdělí přímka — —

II.

Když je čtverec přímky pateronásobkem čtverce z úsečky její, rozdělí-li se řečená úsečka zdvojnásobena jsouc poměrem krajním a středním, větší úsečka (nová) je zbývající částí přímky počáteční.

Nuže buď $AB^2 = 5\,AC^2$ a $CD = 2\,AC$; pravím, že větší úsečkou přímky CD, když se rozděluje poměrem krajním a středním, jest BC.



Nuže narýsujeme z AB i z CD čtverec AF, CG a vylinkujeme AF a veďme BE. A ježto $BA^2 = 5\,AC^2$, jest $AF = 5\,AH$. Tedy soudélník $MNO = 4\,AH$. A ježto $DC = 2\,CA$, tedy $DC^2 = 4\,CA^2$, t. j. $CG = 4\,AH$. Dokázáno pak bylo, že též soudélník $MNO = 4\,AH$, tedy soudélník $MNO = CG$. A ježto $DC = 2\,CA$ a $DC = CK$, $AC = CH$, tedy též $KB = 2\,BH$. (VI. I.) Avšak též $LH + HB = 2\,BH$ (I. XLIII.), tedy $KB = LH + HB$. Bylo pak dokázáno, že též celý soudélník MNO je roven celému CG, tedy též zbývající $HF = BG$. I jest $BG = CD \times DB$, neboť $CD = DG$; a $HF = CB^2$; tedy $CD \times DB = CB^2$. Pročež $DC : CB = CB : DB$. Avšak $DB > CB$; tedy také $CB > BD$ (V. XIV.). Tedy větší úsečkou přímky CD, když se dělí poměrem krajním a středním, jest BC.

Výtěžek.[1])

Je pak $2\,AC > BC$, takto třeba dokázati.

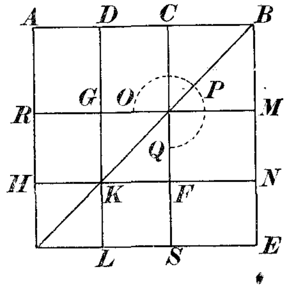
Nuže, není-li tomu tak, budiž, možno-li, $BC = 2\,AC$. Tedy $BC^2 = 4\,CA^2$. Podmínkou však jest, že $BA^2 = 5\,CA^2$; tedy $BA^2 = BC^2 + CA^2$, což právě nemožno (II. IV.). Tedy není $CB = 2\,AC$. Podobně ovšem dokážeme, že ani menší než CB není dvakrát větší než CA; neboť to je mnohem nemožnější.

Tedy $2\,AC > BC$; což právě bylo dokázati.

III.

Když se rozdělí přímka poměrem krajním a středním, čtverec menší úsečky zvětšené o polovici úsečky větší rovná se pateronásobnému čtverci z polovice úsečky větší.

Nuže rozdělme nějakou přímku AB v bodě C poměrem krajním a středním a větší úsečkou buď AC a buď AC v D rozpůlena; pravím že $BD^2 = 5\,DC^2$.



Nuže narýsujme z AB čtverec AE a dvojitě vylinkujeme. Ježto $AC = 2\,DC$, tedy $AC^2 = 4\,DC^2$, t. j. $RS = 4\,FG$. A ježto $AB \times BC = AC^2$ a $AB \times BC = CE$. tedy $CE = RS$. Avšak $RS = 4\,FG$, tedy též $CE = 4\,FG$. Ježto dále $AD = DC$, též $HK = KF$. Pročež také $GF = HL$. Tedy $GK = KL$, t. j. $MN = NE$, pročež také $MF = FE$. Avšak $MF = CG$, tedy též $CG = FE$. Společným přičtěme CN; tedy soudélník $OPQ = CE$. Avšak dokázáno, že $CE = 4\,GF$; tedy též soudélník $OPQ = 4\,FG$. Pročež $OPQ + FG = 5\,FG$. Avšak $OPQ + FG = DN$. I jest $DN = DB^2$ a $FG = DC^2$; tedy $DB^2 = 5\,DC^2$; což právě bylo dokázati.

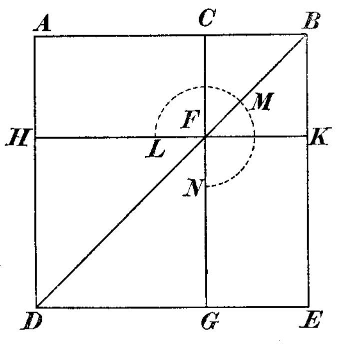
IV.

Když se přímka rozdělí poměrem krajním a středním, součet čtverců z celé a z úsečky menší je třikrát větší nežli čtverec úsečky větší.

Mějme přímku AB a rozdělme ji poměrem krajním a středním v C a větší úsečkou buď AC; pravím, že $AB^2 + BC^2 = 3\,CA^2$.

Nuže narýsujme z AB čtverec $ADEB$ a útvar vylinkujme.

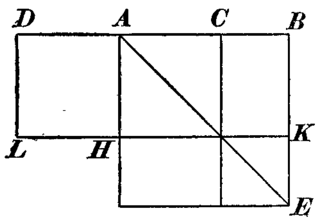
[1]) Pochybného původu.



Ježto tedy AB jest rozdělena v C poměrem krajním a středním a větší úsečkou jest AC, tedy $AB \times BC = AC^2$. I jest $AB \times BC = AK$, $AC^2 = HG$, tedy $AK = HG$. A ježto $AF = FE$ (I. XLIII.), společným přičtěme CK; tedy celý AK rovná se celému CE; tedy $AK + CE = 2\,AK$. Avšak $AK + CE = LMN + CK$; tedy $LMN + CK = 2\,AK$. Avšak bylo zajisté dokázáno, že též $AK = HG$, tedy $LMN + CK + HG = 3\,HG$. I jest soudélník $LMN + CK + HG = AE + CK$, což právě jsou čtverce z AB a BC, GH pak čtverec z AC. Tedy $AB^2 + BC^2 = 3\,AC^2$; což právě bylo dokázati.

V.

Když se přímka rozdělí poměrem krajním a středním a připojí se k ní rovná úsečce větší, celá přímka rozdělena jest poměrem krajním a středním, a větší úsečkou jest přímka počáteční.



Nuže buď přímka AB rozdělena poměrem krajním a středním v bodě C a větší úsečkou buď AC a buď $AD = AC$; pravím, že přímka DB jest v A rozdělena poměrem krajním a středním a větší úsečkou že je přímka počáteční AB.

Nuže narýsujme z AB čtverec AE a útvar vylinkujme. A ježto AB je v C rozdělena poměrem krajním a středním, tedy jest $AB \times BC = AC^2$. I jest $AB \times BC = CE$, $AC^2 = CH$; tedy $CE = CH$. Avšak $CE = HE$ a $CH = DH$, tedy též $DH = EH$. Pročež celé $DK = AE$. I jest $DK = BD \times DA$, neboť $AD = DL$; AE pak $= AB^2$; tedy $BD \times DA = AB^2$. Pročež $DB : BA = BA : AD$. Avšak $DB > BA$, tedy též $BA > AD$.

Tedy DB jest v A rozdělena poměrem krajním a středním a větší úsečkou jest AB; což právě bylo dokázati[2]).

VI.

Když se přímka změrná rozdělí poměrem krajním a středním, každá z úseček je nezměrná, nazývaná úsečnicí.

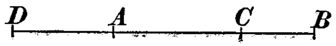
Přímkou změrnou buď AB a buď rozdělena v C poměrem krajním a středním, a větší úsečkou buď AC; pravím, že AC i CB jest nezměrná, nazývaná úsečnicí.

Nuže prodlužme BA a buď $AD = \frac{BA}{2}$. Ježto tedy přímka AB

---

[2]) Buď $a = b + c$, a též $a : b = b : c$; $b : a = (a - b) : b$, z toho $(b + a) : a = a : b$.

rozdělena je v C poměrem krajním a středním a k úsečce větší AC připojena AD, jsouc $\frac{AB}{2}$, tedy $CD^2 = 5\,DA^2$ (XIII. I.). Tedy CD^2 má se k DA^2 jako číslo k číslu; jest tedy CD^2 s DA^2 souměřitelné. DA^2 však je změrné, neboť DA je změrná, jsouc polovicí změrné přímky AB, tedy též CD^2 je změrné; pročež i CD je změrná (X. VI. a vým. 3. 4.). A ježto CD^2 nemá se k DA^2 jako číslo čtvereční k číslu čtverečnímu, tedy CD je s DA dle délky nesouměřitelná (X. IX.); pročež CD, DA jsou změrné, jen dle dvojmoci souměřitelné. Tedy AC jest úsečnice (X. LXXIII.).



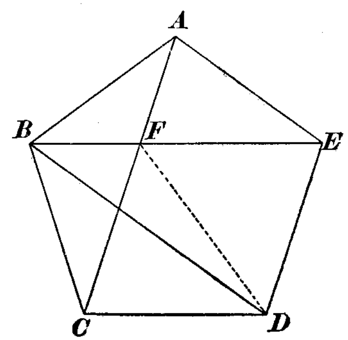
Dále, ježto AB je rozdělena poměrem krajním a středním a větší úsečkou jest AC, tedy $AB \times BC = AC^2$. Tedy čtverec úsečnice AC přistavený ke změrné AB šířkou činí BC. Čtverec úsečnice však, ke změrné přistavený, šířkou činí úsečnici první (X. XCVII.). Tedy CB jest úsečnice první. Bylo pak dokázáno, že též CA jest úsečnice.

Když se tedy přímka změrná rozdělí — — —

VII.

Když jsou v stejnostranném pětiúhelníku tři úhly buď pořadem buď mimo pořad sobě rovny, pětiúhelník bude stejnoúhlý.

Nuže buďte v pětiúhelníku stejnostranném $ABCDE$ nejprve pořadem tři úhly A, B, C sobě rovny; pravím, že pětiúhelník $ABCDE$ je stejnoúhlý.



Nuže veďme spojnice AD, BE, FD. A ježto $CB = BA = AE$ a $\sphericalangle CBA = BAE$, tedy základna $AC = BE$ a $\triangle ABC = ABE$ i ostatní úhly rovny budou úhlům ostatním, proti nimž leží stejné strany, $\sphericalangle BCA = BEA$, $\sphericalangle ABE = CAB$, pročež i strana $AF = BF$. Bylo pak dokázáno, že též celá $AC = BE$; tedy též zbývající $FC = FE$. Jest pak i $CD = DE$; tedy FC, CD jsou stejné s FE, ED a základnou jejich společnou FD; tedy $\sphericalangle FCD = FED$. Bylo pak dokázáno, že též $\sphericalangle BCA = AEB$, pročež i celý $\sphericalangle BCD = AED$. Avšak jest podmínkou, že $\sphericalangle BCD = A = B$; tedy též $\sphericalangle AED = A = B$. Podobně ovšem dokážeme, že též $\sphericalangle CDE = A$ i B i C; tedy pětiúhelník $ABCDE$ jest stejnoúhlý.

Avšak již nebuďtež úhly po řadě stejné, nýbrž stejné buďte při bodech A, C, D; pravím, že i takto pětiúhelník $ABCDE$ je stejnoúhlý.

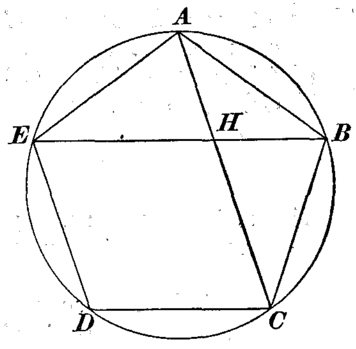
Nuže veďme spojnici BD. A ježto strany BA, $AE = BC$, CD a svírají stejné úhly, tedy základna $BE = BD$ a $\triangle ABE = BCD$, i ostatní úhly rovny budou ostatním úhlům, proti nimž leží stejné strany; tedy $\sphericalangle AEB = CDB$. Jest pak i $\sphericalangle BED = BDE$, ježto i strana $BE = BD$. Pročež i celý $\sphericalangle AED = CDE$. Avšak jest podmínkou, že $\sphericalangle CDE = A, C$; tedy též $\sphericalangle AED = A, C$. Z téže příčiny ovšem i $\sphericalangle ABC = A$,

C, D. Tedy pětiúhelník $ABCDE$ je stejnoúhlý; což právě bylo dokázati.

VIII.

Když jsou v pětiúhelníku stejnostranném a stejnoúhlém proti dvěma sousedním úhlům úhlopříčky, protínají se navzájem poměrem krajním a středním, a větší jejich úsečky rovnají se stranám pětiúhelníku.

Nuže buďte v pětiúhelníku stejnostranném a stejnoúhlém $ABCDE$ po řadě proti dvěma úhlům A, B úhlopříčky AC, BE navzájem se protínající v bodě H; pravím, že jedna i druhá rozdělena je v bodě H poměrem krajním a středním a větší jejich úsečky že se rovnají stranám pětiúhelníku.



Nuže opišme kolem pětiúhelníku $ABCDE$ kruh $ABCDE$. A ježto dvě strany EA, AB rovnají se dvěma stranám AB, BC a svírají stejné úhly, tedy základna $BE = AC$ a $\triangle ABE = ABC$ i ostatní úhly budou jednotlivě rovny ostatním úhlům, proti nimž leží stejné strany. Tedy $\sphericalangle BAC = ABE$; pročež $\sphericalangle AHE = 2BAH$. Jest pak i $\sphericalangle EAC = 2BAC$, ježto zajisté i oblouk $EDC = 2CB$; tedy $\sphericalangle HAE = AHE$; pročež i přímka $HE = EA$, t. AB. A ježto $BA = AE$, též $\sphericalangle ABE = AEB$. Avšak dokázáno, že $\sphericalangle ABE = BAH$; tedy též $\sphericalangle BEA = BAH$. A společným úhlem obou trojúhelníkův ABE, ABH jest $\sphericalangle ABE$; tedy zbývající $\sphericalangle BAE = AHB$; pročež $\sphericalangle ABE$ je s ABH stejnoúhlý: tedy $EB : BA = AB : BH$. Avšak $BA = EH$, tedy $BE : EH = EH : HB$. BE však $> EH$, tedy též $EH > HB$. BE tedy je rozdělena v H poměrem krajním a středním, a větší úsečka HE rovná se straně pětiúhelníku. Podobně ovšem dokážeme, že též AC je v H rozdělena poměrem krajním a středním a že větší úsečka její CH rovná se straně pětiúhelníku, což právě bylo dokázati.

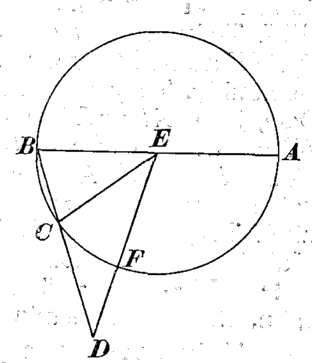
IX.

Když se sečtou strana šestiúhelníku a strana desetiúhelníku, do téhož kruhu vepsaných, celá přímka jest rozdělena poměrem krajním a středním a její úsečkou větší je strana šestiúhelníku.

Mějme kruh ABC a útvarů do kruhu ABC vepsaných, a to desetiúhelníku buď stranou BC, šestiúhelníku pak CD, a čiňte přímku; pravím, že celá přímka BD je rozdělena poměrem krajním a středním a větší úsečkou její že je CD.

Nuže vezměme za střed kruhu bod E a veďme spojnice EB, EC, ED a prodlužme BE do A. Ježto stranou desetiúhelníku stejno-

stranného jest BC, tedy oblouk ACB je pětkrát větší než oblouk BC, pročež obl. $AC = 4$ obl. CB. A jako se má obl. AC k obl. CB, tak $\sphericalangle AEC$ k $\sphericalangle CEB$; tedy $\sphericalangle AEC = 4CEB$. A ježto $\sphericalangle EBC = ECB$, tedy $\sphericalangle AEC = 2ECB$. A ježto $EC = CD$, neboť jedna i druhá z nich rovná se straně šestiúhelníku do kruhu ABC vepsaného; též $\sphericalangle CED = CDE$. Tedy $\sphericalangle ECB = 2EDC$. Avšak dokázáno, že $\sphericalangle AEC = 2ECB$, tedy $\sphericalangle AEC = 4EDC$. Dokázáno pak, že též $\sphericalangle AEC = 4BEC$; pročež $\sphericalangle EDC = BEC$. Oběma však trojúhelníkům BEC i BED, společný jest $\sphericalangle EBD$; pročež i zbývající $\sphericalangle BED = ECB$; tedy $\triangle EBD$ je s $\triangle EBC$ stejnoúhlý. Proto $DB : BE = EB : BC$. Avšak $EB = CD$. Pročež $BD : DC = DC : CB$. Avšak $BD > DC$; tedy též $DC > CB$. Tedy přímka BD jest rozdělena poměrem krajním a středním, a větší úsečkou její jest DC; což právě bylo dokázati.

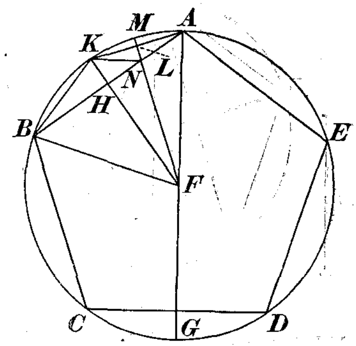


X.

Když se do kruhu vpíše pětiúhelník stejnostranný, čtverec strany toho pětiúhelníku rovná se čtvercům strany šestiúhelníku a desetiúhelníku, vepsaných do téhož kruhu.

Kruhem buď $ABCDE$, a vpišme do kruhu $ABCDE$ stejnostranný pětiúhelník $ABCDE$; pravím, že čtverec strany pětiúhelníku $ABCDE$ rovná se čtvercům strany šestiúhelníku a desetiúhelníku, vepsaných do kruhu $ABCDE$.

Nuže vezměme za střed kruhu bod F a prodlužme spojnici AF do bodu G a veďme spojnici FB a z F veďme na AB kolmici FH a prodlužme ji do K a veďme spojnice AK, KB a opět veďme z bodu F na AK kolmici FL a prodlužme ji do M i spojme K s N. A ježto obl. $ABCG = AEDG$, z čehož $ABC = AED$, tedy zbývající obl. $CG = GD$. CD však náleží pětiúhelníku; pročež CG desetiúhelníku. A ježto $FA = FB$ a FH jest kolmice, tedy též $\sphericalangle AFK = KFB$. A tak i obl. $AK = KB$; protož obl. $AB = 2BK$; tedy přímka AK je strana desetiúhelníku. Z téže příčiny ovšem též obl. $AK = 2KM$. A ježto obl. $AB = 2BK$ a obl. $CD = AB$, tedy též obl. $CD = 2BK$.



Jest pak i obl. $CD = 2CG$; pročež i obl. $CG = BK$. Avšak obl. $BK = 2KM$, ježto i KA[3]); tedy $CG = 2KM$. Avšak zajisté i obl. $CB = 2BK$,

[3]) Rozuměj: obl. $KA = 2KM$.

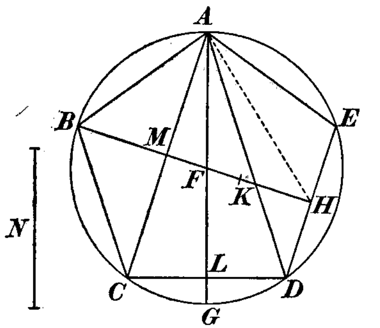
neboť obl. CB = obl. BA. Proto též celý obl. $GB = 2\,BM$; a tak i $\sphericalangle GFB = 2\,BFM$ (VI. XXXIII.). Také však $\sphericalangle GFB = 2\,FAB$, neboť $\sphericalangle FAB = ABF$. Tedy též $\sphericalangle BFN = FAB$[4]). Avšak $\sphericalangle ABF$ je společný oběma $\triangle ABF$ a BFN, tedy zbývající $\sphericalangle AFB = BNF$; pročež $\triangle ABF$ je s BFN stejnoúhlý. Tedy strana $AB : BF = BF : BN$; pročež $AB \times BN = BF^2$. Dále, ježto $AL = LK$, společnou však jest kolmice LN, tedy základna $KN = AN$, pročež i $\sphericalangle LKN = LAN$. Avšak $\sphericalangle LAN = KBN$; tedy též $\sphericalangle LKN = KBN$. A $\sphericalangle A$ je společný trojúhelníkům AKB, AKN. Zbývající tedy $\sphericalangle AKB = KNA$; pročež trojúhelník KBA je s KNA stejnoúhlý. Tedy strana $BA : AK = AK : AN$. Proto $BA \times AN = AK^2$. Bylo však dokázáno, že též $AB \times BN = BF^2$; tedy $AB \times BN + BA \times AN = BA^2 = BF^2 + AK^2$ (II. II.). I jest BA strana pětiúhelníku, BF šestiúhelníku, AK desetiúhelníku.

Tedy čtverec strany pětiúhelníku — —

XI.

Když se do kruhu, jehož průměr je změrný, vpíše stejnostranný pětiúhelník, strana toho pětiúhelníku jest nezměrná, řečená menší.

Nuže do kruhu $ABCDE$, jehož průměr je změrný, vpišme stejnostranný pětiúhelník $ABCDE$; pravím, že strana toho pětiúhelníku jest nezměrná, řečená menší.



Nuže vezměme za střed kruhu bod F a veďme spojnice AF, FB a prodlužme je do bodů G, H*) a spojme A s C, a budiž $FK = \frac{1}{4} AF$. AF pak je změrná, pročež změrná jest i FK. Jest pak i BF změrná, pročež celá BK je změrná. A ježto obl. $ACG = ADG$, z čehož $ABC = AED$, tedy zbývající $CG = GD$ A když spojíme A s D, shledáváme, že úhly při L jsou pravé a $CD = 2\,CL$. Z téže příčiny ovšem i úhly při M jsou pravé a $AC = 2\,CM$. Ježto tedy $\sphericalangle ALC = AMF$ a $\sphericalangle LAC$ je společný trojúhelníkům AMF, ACL, proto zbývající $\sphericalangle ACL = MFA$; tedy $\triangle ACL$ je s AMF stejnoúhlý; pročež $LC : CA = MF : FA$; a vezmou-li se přední členy dvojnásobně, $2\,LC : CA = 2\,MF : FA$. Avšak $2\,MF : FA = MF : \frac{1}{2} FA$; pročež také $2\,LC : CA = MF : \frac{1}{2} FA$. A vezmeme-li zadních členů poloviny, tedy $2\,LC : \frac{1}{2} CA = MF : \frac{1}{4} FA$. I jest $2\,LC = DC$, $\frac{1}{2} CA = CM$ a $\frac{1}{4} FA = FK$; pročež $DC : CM = MF : FK$. Také součetně $(DC + CM) : CM = MK : FK$; tedy též $(DC + CM)^2 : CM^2 = MK^2 : KF^2$. A ježto větší úsečka úhlopříčky při sousedních stranách pětiúhelníku, jako jest AC, jest-li rozdělena poměrem krajním a středním, je stejná se stranou pětiúhelníku, t. j. s DC (XIII. VIII.) a čtverec větší úsečky, zvětšené o polovinu celé, rovná se pateronásobnému čtverci z poloviny (XIII. I.) a polovinou celé AC jest CM, tedy $(DC + CM)^2 = 5\,CM^2$. Avšak dokázáno bylo, že $(DC + CM)^2 : CM^2 = MK^2 : KF^2$; proto $MK^2 = 5\,KF^2$. A KF^2 je změrné, neboť průměr je změrný; tedy změrné jest i MK^2; pročež MK je změrná. A ježto $BF = 4\,FK$, tedy $BK = 5\,KF$; pročež $BK^2 = 25\,KF^2$. Avšak $MK^2 = 5\,KF^2$; tedy $BK^2 = 5\,KM^2$; proto nemá se BK^2 ke KM^2 jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; tedy BK není s KM dle délky souměřitelná. A každá z nich je změrná. Pročež BK, KM jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné. Když pak se od změrné odečte změrná, jen ve dvojmoci s celou souměřitelná, zbývající jest nezměrná, t. úsečnice; tedy MB jest úsečnice a příslušnou k ní MK. Pravím již, že také čtvrtá. Nuže, oč $BK^2 > KM^2$, tomu rovnej se N^2; pročež $BK^2 = KM^2 + N^2$. A ježto KF je s FB souměřitelná, také součetně KB jest souměřitelná s FB. Avšak BF jest souměřitelná s BH; tedy též BK jest souměřitelná s BH. A ježto $BK^2 = 5\,KM^2$, tedy $BK^2 : KM^2 = 5 : 1$. Pročež zvratně (V. vým. 16.) $BK^2 : N^2 = 5 : 4$, nikoli jako čtvercové číslo k číslu čtvercovému; tedy BK je s N nesouměřitelná (X. IX.). Pročež $BK^2 > KM^2$ o čtverec přímky s BK nesouměřitelné. Ježto tedy celá BK jest ve dvojmoci větší než příslušná KM o čtverec přímky s BK nesouměřitelné a celá BK jest souměřitelná s danou změrnou BH, tedy jest MB úsečnice čtvrtá (X. vým. třetích č. 4.). Pravoúhelník pak objímaný změrnou a úsečnicí čtvrtou jest nezměrný, a přímka ve dvojmoci jemu rovná jest nezměrná, i slove menší (X. XCIV.). Avšak $HB \times BM = AB^2$, ježto vedením spojnice AH[5]) stává se $\triangle ABH$ stejnoúhlým s $\triangle ABM$ a $HB : BA = AB : BM$.

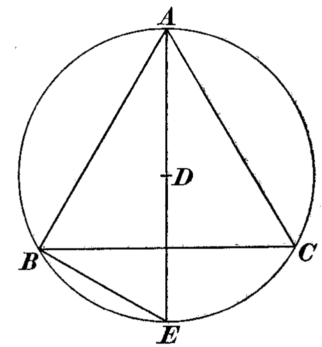
Tedy v pětiúhelníku strana AB jest nezměrná, řečená menší; což právě bylo dokázati.

4) Neboť $\sphericalangle BFN$ je týž jako BFM.

*) Styčný bod H tětiv AH, BH má býti až na obvodě kruhu.

XII.

Když se vpíše do kruhu trojúhelník stejnostranný, čtverec strany tohoto trojúhelníku je třikrát větší nežli čtverec kruhového poloměru.



Kruhem budiž ABC, a do něho vpišme stejnostranný $\triangle ABC$; pravím, že čtverec jedné strany trojúhelníku ABC je třikrát větší nežli čtverec poloměru kruhu ABC.

Nuže za střed kruhu ABC vezměme D a spojnici AD prodlužme do E a spojme B s E. A ježto $\triangle ABC$ je stejnostranný, tedy obl. BEC je třetina obvodu kruhu ABC. Pročež obl. BE jest šestina kružnice; náleží tedy přímka BE šestiúhelníku, pročež je stejná s poloměrem DE. A ježto $AE = 2\,DE$, jest $AE^2 = 4\,DE^2$, t. j. $4\,BE^2$. Avšak $AE^2 = AB^2 + BE^2$; tedy $AB^2 + BE^2 = 4\,BE^2$. Pročež odečtením $AB^2 = 3\,BE^2$. Avšak $BE = DE$; a tak $AB^2 = 3\,DE^2$.

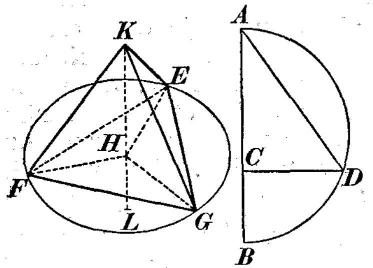
5) V obr. jsem přidal.

Tedy čtverec strany toho trojúhelníku rovná se trojnásobnému čtverci (kruhového) poloměru; což právě bylo dokázati.

XIII.

Sestroj jehlan a opiš danou kulí a dokaž, že čtverec kulového průměru jest půldruhakrát větší nežli čtverec jehlanové strany (hrany).

Průměrem dané koule budiž AB a buď rozdělen v bodě C tak, aby bylo $AC = 2\,CB$; a narýsujme na AB polokruh ADB a zřiďme v bodě C na AB kolmici CD a veďme spojnici DA; mějme též kruh EFG poloměru stejného s DC a v pišme do kruhu EFG stejnostranný $\triangle EFG$ a za střed kruhu vezměme H a veďme spojnice EH, HF, HG; i vztyčme v bodě H na rovině kruhu EFG kolmici HK a odřízněme od HK úsečku HK stejnou s AC a veďme spojnice KE, KF, KG [6]). A ježto HK jest na rovině kruhu EFG kolmo, tedy také se všemi přímkami s ní se stýkajícími a jsoucími v rovině kruhu EFG bude činiti úhly pravé. Stýkají však se s ní HE, HF, HG; pročež HK jest na HE, HF, HG kolmo. A ježto $HK = AC$ a $HE = CD$ a svírají pravé úhly, tedy základna $KE = DA$. Z téže příčiny ovšem i $KF = DA$ i $KG = DA$; tedy $KE = KF = KG$. A ježto $AC = 2\,CB$, tedy $AB = 3\,BC$. Avšak $AB : BC = AD^2 : DC^2$, jakož ihned potom bude dokázáno (výt.). Pročež $AD^2 = 3\,DC^2$. Jest pak i $FE^2 = 3\,EH^2$ (XIII. XII.) a $DC = EH$; tedy $DA = EF$. Avšak bylo dokázáno, že $DA = KE = KF = KG$; pročež EF, FG, GE jsou stejné s KE, KF, KG. Tedy čtyři trojúhelníky EFG, KEF, KFG, KEG jsou stejnostranné. Pročež jehlan sestaven je ze čtyř stejnostranných trojúhelníkův a základnou jeho jest $\triangle EFG$ a temenem bod K.



Má se ovšem též opsati danou kulí a dokázati, že čtverec kulového průměru jest půldruhakrát větší nežli čtverec strany jehlanové.

Nuže prodlužme přímku KH přímým směrem, aby vznikla HL, a budiž $HL = CB$. A ježto $AC : CD = CD : CB$ a $AC = KH$, $CD = HE$ a $CB = HL$, tedy $KH : HE = EH : HL$; pročež $KH \times HL = EH^2$. A $\sphericalangle KHE$ i EHL jsou pravé; tedy polokruh rýsovaný na KL půjde i bodem E [ježto právě spojením E s L tvoří se pravý $\sphericalangle LEK$ tím, že vzniká $\triangle ELK$ s $\triangle ELH$, EHK stejnoúhlý [7])]. Když pak se kolem pevné osy KL polokruh otočí, až se opět vrátí do téhož postavení, odkud se počal otáčeti, bude procházeti i body F, G, a spojnicemi FL, LG podobně také vznikají při F, G úhly pravé; i bude jehlan danou kulí opsán. Neboť průměr kulový KL je stejný s průměrem AB koule dané, ježto právě za pravdu vzato, že $KH = AC$ a $CB = HL$.

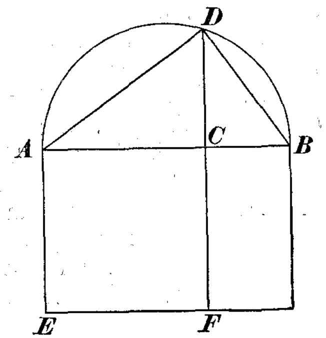
[6]) Tuto část vyobr. učinil jsem trochu zřetelnější.
[7]) Slova v závorkách nejspíše cizí.

Pravím, již, že čtverec kulového průměru jest půldruhakrát větší nežli čtverec strany jehlanové.

Neboť, ježto $AC = 2\,CB$, tedy $AB = 3\,BC$; pročež zvratně $BA = \frac{3}{2} AC$. A $BA : AC = BA^2 : AD^2$ [ježto právě, spojíme-li D s B, $BA : AD = DA : AC$ pro podobnost $\triangle DAB$ a DAC a proto, že první veličina má se ke třetí jako čtverec z první ke čtverci z druhé (V. vým. 9. pozn. 4.) [7])]. Tedy též $AB^2 = \frac{3}{2} AD^2$ [8]) A BA jest průměr dané koule, AD pak rovná se straně toho jehlanu.

Tedy čtverec průměru kulového jest půldruhakrát větší nežli čtverec strany jehlanové; což právě bylo dokázati.

Výtěžek.

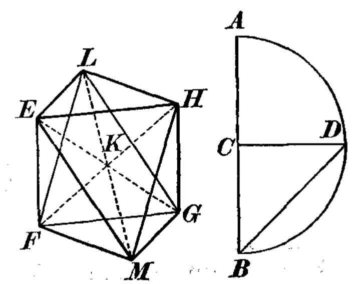


Má se dokázati, že $AB : BC = AD^2 : DC^2$. Mějme nárys polokruhu a veďme spojnici DB a sestrojme z AC čtverec EC a doplňme rovnoběžník FB. Ježto tedy proto, že $\triangle DAB$ je stejnoúhlý s DAC, $BA : AD = DA : AC$, tedy $BA \times AC = AD^2$. A poněvadž $AB : BC = EB : BF$ a $EB = BA \times AC$, neboť $EA = AC$, a $BF = AC \times CB$, tedy $AB : BC = BA \times AC : AC \times CB$. I jest $BA \times AC = AD^2$ [9]) a $AC \times CB = DC^2$, neboť kolmice DC je střední úměrnou úseček základny AC, CB, jelikož $\sphericalangle ADB$ jest pravý. Pročež $AB : BC = AD^2 : DC^2$; což právě bylo dokázati.

XIV.

Sestroj osmistěn a opiš kulí, jako již dříve, a dokaž, že čtverec kulového průměru je dvakrát větší nežli čtverec strany osmistěnové.

Za průměr dané koule mějmež AB a rozpolme jej v C a narýsujme na AB polokruh ADB a vztyčme v C na AB kolmici CD a veďme spojnici DB i mějme čtyřúhelník $EFGH$, aby každá strana jeho byla stejná s DB, a veďme spojnice HF, EG a postavme v bodě K na rovině čtverce $EFGH$ kolmici KL a prodlužme ji na druhou stranu roviny, aby vznikla KM, a od každé z přímek KL, KM odřízněme úsečky KL, KM rovné některé z přímek EK, FK, GK, HK a veďme spojnice LE, LF, LG, LH, ME, MF, MG, MH. A ježto $KE = KH$ a $\sphericalangle EKH = R$



[8]) Neboť $BA : AC = 3 : 2 = BA^2 : AD^2$, z toho $2\,BA^2 = 3\,AD^2$, $BA^2 = \frac{3}{2} AD^2$.
[9]) Neboť $\triangle ABD \sim ACD$.

tedy $HE^2 = 2\,EK^2$. Dále, ježto $LK = KE$ a $\sphericalangle LKE = R$, tedy $EL^2 = 2\,EK^2$. Bylo pak dokázáno, že též $HE = 2\,EK^2$; pročež $LE^2 = EH^2$; proto $LE = EH$. Z téže příčiny ovšem i $LH = HE$; tedy $\triangle LEH$ je stejnostranný. Podobně zajisté dokážeme, že též každý z ostatních trojúhelníků, jejichž základnami jsou strany čtyřúhelníku $EFGH$ a vrcholy body L, M, je stejnostranný; sestaven je tedy osmistěn, omezený osmi stejnostrannými trojúhelníky.

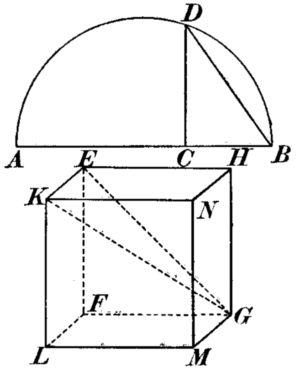
Má se ovšem také opsati danou kulí a dokázati, že čtverec kulového průměru je dvakrát větší nežli čtverec strany osmistěnové.

Ježto tedy tři přímky LK, KM, KE jsou navzájem stejné, tedy polokruh rýsovaný na LM půjde též bodem E. A z téže příčiny, když se polokruh ten otočí kolem pevné osy LM, až se vrátí do téhož postavení, odkud se počal otáčeti, bude procházeti též body F, G, H, a osmistěn bude opsán kulí. Pravím již, že také danou. Neboť, ježto $LK = KM$ a společnou KE a svírají pravé úhly [10]), tedy základna $LE = EM$. A ježto $\sphericalangle LEM = R$, neboť je v polokruhu [11]), tedy $LM^2 = 2\,LE^2$. Dále, ježto $AC = CB$, jest $AB = 2\,BC$. A $AB : BC = AB^2 : BD^2$ (VI. viii. V. vým. 9.); tedy $AB^2 = 2\,BD^2$. Bylo však dokázáno, že též $LM^2 = 2\,LE^2$. Také $DB^2 = LE^2$, neboť EH ($= EL$) vzali jsme za stejnou s DB. Tedy též $AB^2 = LM^2$; pročež $AB = LM$. I jest AB průměr dané koule; a tak LM se rovná průměru koule dané.

Tedy osmistěn jest opsán danou kulí; a spolu dokázáno jest, že čtverec průměru kulového je dvakrát větší nežli čtverec osmistěnové strany; což právě bylo dokázati.

XV.

S e s t r o j k r y c h l i a o p i š k u l í, j a k o p r v e j e h l a n, a d o k a ž, ž e č t v e r e c p r ů m ě r u k u l o v é h o j e t ř i k r á t v ě t š í n e ž l i č t v e r e c k r y c h l o v é s t r a n y.



Za průměr dané koule mějmež AB a rozdělme jej v C tak, aby byla $AC = 2\,CB$ a narýsujme na AB polokruh ADB a v C vztyčme na AB kolmici CD a veďme spojnici DB; i mějme čtyřúhelník $EFGH$, aby strana jeho byla stejná s DB, a z bodův E, F, G, H vztyčme na rovině čtverce $EFGH$ kolmice EK, FL, GM, HN a odřízněmež od přímek EK, FL, GM, HN úsečky EK, FL, GM, HN, jednotlivě stejné s některou z přímek EF, FG, GH, HE, a veďme spojnice KL, LM, MN, NK; tedy sestavena jest krychle FN, omezena šesti stejnými čtyřúhelníky (čtverci). Má se ovšem též opsati danou kulí a dokázati, že čtverec průměru kulového je třikrát větší nežli čtverec krychlové strany (hrany).

Nuže veďme spojnice KG, EG. A ježto $\sphericalangle KEG = R$, protože i KE

[10]) Totiž se společnou KE, t. j. $\sphericalangle LKE = EKM = R$.

[11]) obvodový (III. xx.).

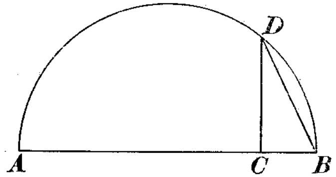
jest na rovině EG i, jak patrno, na přímce EG kolmo, tedy polokruh rýsovaný na KG půjde též bodem E. Dále ježto GF jest kolmo na FL i FE, také tedy na rovině FK jest GF kolmo; a tak, když spojíme též F s K, kolmo bude GF i na FK; a z té příčiny opět polokruh na GK rýsovaný půjde i bodem F. Podobně půjde též ostatními body (rohy) té krychle. Když se tedy polokruh otočí kolem pevné osy KG, až se vrátí do téhož postavení, odkud počal se otáčeti, krychle bude opsána kulí. Pravím ovšem, že také danou. Poněvadž totiž $GF = FE$ a $\sphericalangle$ při $F = R$, tedy $EG^2 = 2\,EF^2$. Avšak $EF^2 = EK^2$; pročež $EG^2 = 2\,EK^2$; a tak $GE^2 + EK^2$ (t. j. GK^2) $= 3\,EK^2$. A ježto $AB = 3\,BC$ a $AB : BC = AB^2 : BD^2$ (VI. viii. V. vým. 9.), tedy $AB^2 = 3\,BD^2$. Bylo však dokázáno, že též $GK^2 = 3\,KE^2$. A KE vzata za stejnou s DB; pročež také $KG = AB$. I jest AB průměr dané koule; proto i KG se rovná průměru koule dané.

Tedy danou kulí jest krychle opsána; a spolu dokázáno jest, že čtverec kulového průměru je třikrát větší nežli čtverec krychlové strany; což právě bylo dokázati.

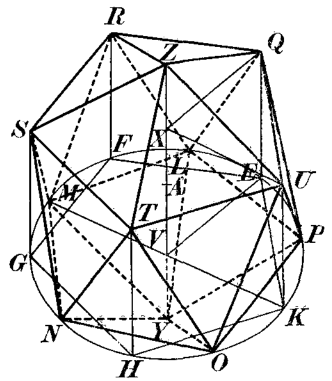
XVI.

S e s t r o j d v a c e t i s t ě n a o p i š k u l í, j a k o j i ž s v r c h u j m e n o v a n é o b r a z c e, a d o k a ž, ž e s t r a n a d v a c e t i s t ě n u j e s t n e z m ě r n á, ř e č e n á m e n š í.

Za průměr dané koule mějmež AB a rozdělme jej v C tak, aby byla $AC = 4\,CB$, a narýsujme na AB polokruh ADB a vztyčme na AB v C kolmici CD a veďme spojnici DB



a mimo to mějme kruh $EFGHK$, jehož poloměrem budiž DB, a do kruhu $EFGHK$ vpišme pětiúhelník stejnostranný a stejnoúhlý $EFGHK$ a v bodech L, M, N, O, P rozpolmež oblouky EF, FG, GH, HK, KE a veďme spojnice LM, MN, NO, OP, PL, EP. Tedy pětiúhelník $LMNOP$ je stejnostranný a přímka EP náleží desetiúhelníku [12]). I vztyčme v bodech E, F, G, H, K na rovině kruhové kolmice EQ, FR, GS, HT, KU, stejné s poloměrem kruhu $EFGHK$, a veďme spojnice QR, RS, ST, TU, UQ, QL, LR, RM, MS, SN, NT, TO, OU, UP, PQ. A ježto EQ i KU jsou na téže rovině kolmo, tedy $EQ \parallel KU$. Jsou pak i stejné; přímky však, spojující stejné rovnoběžky na téže straně, jsou stejné a rovnoběžné (I. xxxiii.). Pročež QU je s EK stejná i rovnoběžná. EK však náleží stejnostrannému pětiúhelníku; tedy rovněž QU náleží stejnostrannému pětiúhelníku, vepsanému do kruhu $EFGHK$. Z téže příčiny zajisté i každá z přímek



[12]) Je stranou desetiúhelníku pravidelného.

QR, RS, ST, TU náleží stejnostrannému pětiúhelníků, vepsanému v kruh $EFGHK$; pročež pětiúhelník $QRSTU$ je stejnostranný. A ježto QE náleží šestiúhelníku, EP pak desetiúhelníku a $\sphericalangle QEP = R$, tedy QP je strana pětiúhelníku; neboť čtverec strany pětiúhelníkové rovná se součtu čtverců ze stran šestiúhelníku a desetiúhelníku, vepsaných do téhož kruhu (XIII. x.). Z téže příčiny ovšem i PU je strana pětiúhelníku. Rovněž pak i QU náleží pětiúhelníku Pročež $\triangle QPU$ je stejnostranný. Z téže příčiny ovšem i trojúhelníky QLR, RMS, SNT, TOU jsou stejnostranné. A ježto bylo dokázáno, že QL i QP náleží pětiúhelníku a též LP je strana pětiúhelníku, tedy $\triangle QLP$ je stejnostranný. Z téže příčiny zajisté i všechny trojúhelníky LRM, MSN, NTO, OUP jsou stejnostranné. Vezměme za střed kruhu $EFGHK$ bod V a v bodě V vztyčme na rovině kruhové kolmici VZ a prodlužme ji na druhou stranu o VY a odřízněme stranu šestiúhelníkovou VX a desetiúhelníkové VY, XZ i veďme spojnice QZ, QX, UZ, EV, LV, LY, YM. A ježto VX, QE jsou na rovině kruhové kolmo, tedy $VX \parallel QE$. Jsou pak i stejné; pročež i EV, QX jsou stejné a rovnoběžné. EV však náleží šestiúhelníku; tedy též QX je strana šestiúhelníku. A ježto QX náleží šestiúhelníku a XZ desetiúhelníku a $\sphericalangle QXZ = R$, tedy QZ je strana pětiúhelníku. Z téže příčiny ovšem také UZ náleží pětiúhelníku, ježto právě, když vedeme spojnice VK, XU, budou stejné a protější, a VK jsouc poloměrem náleží šestiúhelníku; pročež XU je strana šestiúhelníku. XZ pak náleží desetiúhelníku a $\sphericalangle UXZ = R$; tedy UZ jest strana pětiúhelníku. Jest pak i QU strana pětiúhelníku; pročež $\triangle QUZ$ je stejnostranný. Z téže příčiny ovšem i ostatní trojúhelníky, jejichž základnami jsou přímky QR, RS, ST, TU, vrcholem pak bod Z, jsou stejnostranné. Dále, ježto VL náleží šestiúhelníku a VY desetiúhelníku a $\sphericalangle LVY = R$, tedy LY je strana pětiúhelníku. Z téže příčiny ovšem, když vedeme spojnici MV, jež je stranou šestiúhelníku, shledáváme, že též MY náleží pětiúhelníku. Jest pak i LM strana pětiúhelníku; pročež $\triangle LMY$ je stejnostranný. Podobně zajisté se dokáže, že též ostatní trojúhelníky, jejichž základnami jsou MN, NO, OP, PL a vrcholem bod Y, jsou stejnostranné. Tedy sestrojen jest dvacetistěn, omezený dvaceti stejnostrannými trojúhelníky.

Má se ovšem též opsati danou kulí a dokázati, že strana (hrana) dvacetistěnu jest nezměrná, řečená menší.

Poněvadž je totiž VX strana šestiúhelníku a XZ desetiúhelníku, tedy VZ je v X rozdělena poměrem krajním a středním a větší úsečkou její jest VX (XIII. IX.); pročež $ZV : VX = VX : XZ$. Avšak $VX = VE$ a $XZ = VY$; tedy $ZV : VE = EV : VY$. A $\sphericalangle ZVE = R = EVY$. Když tedy vedeme spojnici EZ, bude $\sphericalangle YEZ = R$ pro podobnost trojúhelníkův YEZ a VEZ (VI. VIII.). Z téže příčiny zajisté, ježto $ZV : VX = VX : XZ$ a $ZV = YX$, $VX = XV$[13], tedy $YX : XQ = QX : XZ$. A proto, když opět vedeme spojnici QY, bude $\sphericalangle$ při $Q = R$; pročež polokruh na YZ rýsovaný půjde i bodem Q. A když polokruh, otoče se kolem pevné osy YZ, vrátí se opět do téhož postavení, odkud počal se otá-

[13]) Strany pravid. šestiúhelníku.

četi, protínati bude i Q i ostatní body (rohy) dvacetistěnu, a dvacetistěn opsán bude kulí. Pravím ovšem, že také danou. Nuže rozpolme VX v A'. A ježto přímka VZ rozdělena je v X poměrem krajním a středním a menší její úsečkou je ZX, tedy $A'Z^2 = 5 A'Y^2$. Také $ZY = 2 A'Z$ a $VX = 2 A'X$; pročež $ZY^2 = 5 XV^2$. A ježto $AC = 4 CB$, tedy $AB = 5 BC$. Též $AB : BC = AB^2 : BD^2$ (VI. VIII. V. vým. 9.); pročež $AB^2 = 5 BD^2$. Bylo však dokázáno, že též $ZY^2 = 5 VX^2$. A $DB = VX$; neboť ta i ona rovná se poloměru kruhu $EFGHK$; tedy též $AB = YZ$. I jest AB průměr dané koule; pročež také YZ rovná se průměru koule dané. Tedy dvacetiúhelník opsán jest kulí danou.

Pravím již, že strana dvacetistěnu jest nezměrná, řečená menší.

Neboť, ježto průměr koule je změrný a čtverec jeho rovná se pateronásobnému čtverci z poloměru kruhu $EFGHK$, tedy též poloměr kruhu $EFGHK$ je změrný, pročež změrný jest i jeho průměr. Když pak se do kruhu, jehož průměr je změrný, vpíše stejnostranný pětiúhelník, strana pětiúhelníku jest nezměrná, řečená menší (XIII. XI.; viz X. XLIV) Avšak strana pětiúhelníku $EFGHK$ je hranou dvacetistěnu. Tedy hrana dvacetistěnu jest nezměrná, řečená menší[14]).

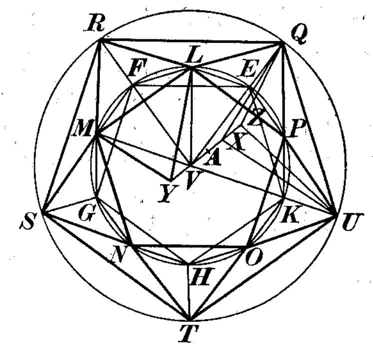
Důsledek.

Z toho zajisté patrno, že čtverec kulového průměru se rovná pateronásobnému čtverci z poloměru kruhu, v němž narýsován dvacetistěn, a že průměr té koule se skládá ze strany šestiúhelníku a dvou stran desetiúhelníku, vepsaných do téhož kruhu. Což právě bylo dokázati.

XVII.

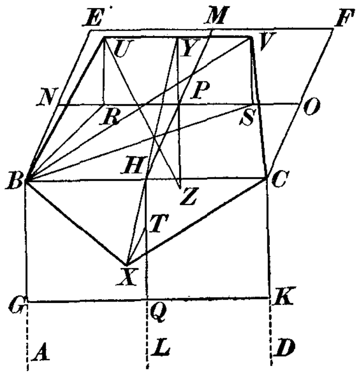
Sestav dvanáctistěn a opiš kulí, jako již svrchu jmenované obrazce, a dokaž, že strana (hrana) dvanáctistěnu jest nezměrná, řečená úsečnice.

Mějme z krychle svrchu řečené (XIII. XV.) dvě roviny $ABCD$, $CBEF$, jež jsou na sobě kolmo, a přímky AB, BC, CD, DA, EF, EB, FC rozpolme v bodech G, H, K, L, M, N, O a veďme spojnice GK, HL, MH, NO a každou z přímek NP, PO, HQ, rozdělme v bodech R, S, T poměrem krajním a středním, a většími úsečkami jejich buďtež PR, PS, TQ, a postavme v bodech R, S, T na rovinách krychlových na vnější strany té krychle kolmice RU, SV, TX, a ty buďte stejné s RP, PS, TQ, a veďme spojnice UB, BX, XC, CV, VU. Pravím, že $UBXCV$ jest pětiúhelník stejnostranný i v jediné rovině a spolu stejnoúhlý. Nuže veďme spojnice RB, SB, VB. A ježto přímka NP rozdělena v R poměrem kraj-



[14]) Obr. druhý ve vydání Heibergově vypadá takto:

ním a středním a větší úsečkou jest RP, $PN^2+NR^2=3RP^2$ (XIII. IV.). A $PN=NB$, $PR=RU$, pročež $BN^2+NR^2=3RU^2$. Avšak $BN^2+NR^2=BR^2$; tedy $BR^2=3RU^2$. A tak $BR^2+RU^2=4RU^2$. Je však $BR^2+RU^2=BU^2$; pročež $BU^2=4UR^2$; tedy $BU=2RU$. Avšak též $VU=2UR$, poněvadž právě též $SR=2PR$ (t. j. $2RU$); tedy $BU=UV$. Podobně zajisté dokážeme, že také BX, XC, CV jsou jednotlivě s BU i VU stejné. Tedy pětiúhelník $BUVCX$ je stejnostranný. Pravím ovšem, že je též v jediné rovině. Nuže veďme z P na vnější stranu krychle s RU i s SV rovnoběžku PY a spojnice YH, HX; pravím, že YHX je přímka. Neboť, ježto HQ jest rozdělena v T poměrem krajním a středním a větší její úsečkou jest QT, tedy $HQ:QT=QT:TH$. Avšak $HQ=HP$ a $QT=TX=PY$; pročež $HP:PY=XT:TH$. A $HP \parallel TX$, neboť obě jsou na rovině BD kolmo; a $TH=PY$, neboť obě jsou kolmo na rovině BF. Když pak se dva trojúhelníky sestaví při jednom úhlu tak, jako YPH, HTX, a mají po dvou stranách úměrných, takže stejnolehlé strany jejich jsou také rovnoběžné, zbývající strany budou činiti přímku (VI. XXXII.); tedy YH činí s HX přímku. Každá však přímka jest v jediné rovině; tedy pětiúhelník $UBXCV$ jest v jediné rovině.



Pravím ovšem, že je také stejnoúhlý.

Poněvadž totiž přímka NP jest rozdělena v R poměrem krajním a středním a větší úsečkou jest PR[15]) a $PR=PS$[15]), tedy NS jest rozdělena v P poměrem krajním a středním a větší úsečkou jest NP (XIII. V.). Pročež $NS^2+SP^2=3NP^2$ (XIII. IV.). Avšak $NP=NB$ a $PS=SV$; tedy $NS^2+SV^2=3NB^2$; a tak $VS^2+SN^2+NB^2=4NB^2$. Avšak $SN^2+NB^2=SB^2$; pročež BS^2+SV^2 (t. j. BV^2, neboť $\sphericalangle VSB=R$) $=4NB^2$; tedy $BV=2NB$. Také však $BC=2BN$, pročež $BV=BC$. A ježto dvě přímky BU, UV jsou střídavě stejné se dvěma BX, XC i základna $BV=BC$, tedy $\sphericalangle BUV=BXC$. Podobně zajisté dokážeme, že též $\sphericalangle UVC=BXC$; pročež $\sphericalangle BXC$, BUV, UVC navzájem jsou si rovny. Když pak jsou v pětiúhelníku stejnostranném tři úhly navzájem stejné, ten pětiúhelník bude stejnoúhlý (XIII. VII.); tedy pětiúhelník $BUVCX$ je stejnoúhlý. Bylo však dokázáno, že také stejnostranný; pročež pětiúhelník $BUVCX$ je stejnostranný i stejnoúhlý, a sestrojen jest na jedné straně (hraně) krychlové BC. Když tedy na každé z dvanácti hran krychlových upravíme totéž, sestaven bude jakýsi útvar tělesový, omezený dvanácti stejnostrannými a stejnoúhlými pětiúhelníky, jenž slove dvanáctistěn.

Má se tedy též opsati danou kulí a dokázati, že hrana toho dvanáctistěnu jest nezměrná, řečená úsečnice.

Nuže prodlužme YP do Z; stýká se tedy PZ s průměrem (úhlo-

15) Následující úměra zbytečná a nepochybně cizí.

příčkovým) té krychle a ty navzájem se půlí; to bylo totiž v předposlední poučce knihy jedenácté dokázáno (XI XXXVIII.). Stýkejte se v Z; pročež Z je střed koule, objímající krychli, a ZP jest polovina krychlové hrany. Veďme tedy spojnici UZ. A ježto přímka NS rozdělena jest v P poměrem krajním a středním a její větší úsečkou jest NP, tedy $NS^2+SP^2=3NP^2$. A $NS=YZ$, ježto právě též $NP=PZ$ a $YP=PS$. Avšak zajisté i $PS=YU$, ježto také $PS=RP$; pročež $ZY^2+YU^2=3NP^2$. A $ZY^2+YU^2=UZ^2$; tedy $UZ^2=3NP^2$. Také však čtverec z poloměru koule, objímající krychli, je třikrát větší nežli čtverec z poloviční krychlové hrany; neboť svrchu jsme ukázali, jak sestrojiti krychli a opsati kulí a dokázati, že čtverec z průměru kulového jest třikrát větší nežli čtverec hrany krychlové (XIII. XV.). A jak tomu se čtverci z celků, tak se čtverci z polovin. I jest NP polovina krychlové hrany; tedy UZ je stejná s poloměrem koule, objímající krychli. A Z je střed koule, která objímá krychli; pročež bod U jest na obvodě kulovém. Podobně zajisté dokážeme, že též ostatní úhly (tělesové, t. j. rohy) dvanáctistěnu jsou na obvodě kulovém; tedy dvanáctistěn jest opsán danou kulí.

Pravím již, že hrana dvanáctistěnu jest nezměrná, řečená úsečnice.

Neboť, ježto NP jest rozdělena poměrem krajním a středním a větší úsečkou jest RP a ježto PO jest rozdělena poměrem krajním a středním a větší úsečkou jest PS, když se tedy rozdělí celá NO poměrem krajním a středním, větší úsečkou jest RS. A tak, ježto $NP:PR=PR:RN$, tak i dvojnásobky, neboť díly mají se k sobě stejným poměrem jako násobky, tedy $NO:RS=RS:(NR+SO)$. Avšak $NO>RS$; pročež také $RS>(NR+SO)$; tedy NO rozdělena jest poměrem krajním a středním a větší její úsečkou jest RS. Avšak $RS=UV$; když se tedy NO rozdělí poměrem krajním a středním, větší úsečkou jest UV. A ježto průměr té koule je změrný a čtverec jeho je třikrát větší nežli čtverec hrany krychlové; tedy NO, jsouc rovna hraně krychlové, je změrná. Když pak se přímka změrná rozdělí poměrem krajním a středním, ta i ona úsečka jest nezměrná úsečnice (XIII. VI. X. LXXIII.). Pročež UV, jsouc hranou dvanáctistěnu, jest nezměrná úsečnice[16]).

Důsledek.

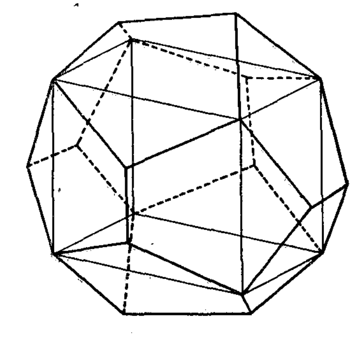
Z toho zajisté patrno, že když se hrana krychlová rozdělí poměrem krajním a středním, větší úsečka jest hranou dvanáctistěnu; což právě bylo dokázati.

XVIII.

Urči hrany těch pěti útvarů a navzájem přirovnej.

Průměrem koule dané budiž AB, a rozdělme jej v C tak, aby byla $AC=CB$, a v D tak, aby byla $AD=2DB$, a

16) Dvanáctistěn s řečenou krychlí vypadal by takto:

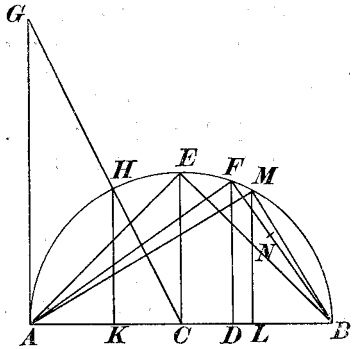


na AB narýsujme polokruh AEB a v bodech C, D vztyčme na AB kolmice CE, DF a veďme spojnice AF, FB, EB. A ježto $AD = 2\,DB$, tedy $AB = 3\,BD$. Pročež zvratně $BA = \frac{3}{2} AD$. A $BA : AD = BA^2 : AF^2$ (V. vým. 9. pozn.); tedy $\triangle AFB$ je s $\triangle AFD$ stejnoúhlý; pročež $BA^2 = \frac{3}{2} AF^2$. Jest pak i čtverec kulového průměru půldruhakrát větší nežli čtverec hrany jehlanové (XIII. XIII.). A průměrem kulovým jest AB; AF tedy se rovná hraně jehlanové[17].

Dále, ježto $AD = 2\,DB$, tedy $AB = 3\,BD$. Avšak $AB : BD = AB^2 : BF^2$ (VI. VIII. V. vým. 9. pozn.); pročež $AB^2 = 3\,BF^2$. Jest pak i čtverec průměru kulového třikrát větší nežli čtverec hrany krychlové (XIII. XV.) A průměrem kulovým jest AB; tedy BF jest hrana krychlová.

A ježto $AC = CB$, tedy $AB = 2\,BC$. Avšak $AB : BC = AB^2 : BE^2$; pročež $AB^2 = 2\,BE^2$. A čtverec průměru kulového je také dvakrát větší nežli čtverec hrany osmistěnové (XIII. XIV.). I jest AB průměrem dané koule; tedy BE jest hrana osmistěnová.

Vztyčme již v bodě A na přímce AB kolmici AG. a budiž $AG = AB$, a veďme spojnici GC a z H spusťme na AB kolmici HK. A ježto $GA = 2\,AC$ (neboť $GA = AB$) a $GA : AC = HK : KC$, tedy $HK = 2\,KC$. Proto $HK^2 = 4\,KC^2$; tedy $HK^2 + KC^2 (= HC^2) = 5\,KC^2$. Avšak $HC = CB$; pročež $BC^2 = 5\,KC^2$. A ježto $AB = 2\,CB$, z čehož $AD = 2\,DB$, tedy zbývající $BD = 2\,DC$. Pročež $BC = 3\,CD$; tedy $BC^2 = 9\,CD^2$. Avšak $BC^2 = 5\,CK^2$; pročež $CK^2 > CD^2$; tedy $CK > CD$. Dejme tomu, že $CK = CL$, a vztyčme v L na AB kolmici LM a veďme spojnici MB. A ježto $BC^2 = 5\,CK^2$ a $AB = 2\,BC$ i $KL = 2\,CK$, tedy $AB^2 = 5\,KL^2$. Jest pak i čtverec průměru kulového roven pateronásobnému čtverci kruhového poloměru, na němž narýsován dvacetistěn (XIII. XVI. důsl.). A průměrem kulovým jest AB; pročež KL jest poloměrem kruhu, na němž narýsován dvacetistěn; tedy KL je stranou šestiúhelníku (pravid.) v řečeném kruhu. A ježto průměr kulový se skládá ze strany šestiúhelníku a ze dvou stran desetiúhelníku, vepsaných v řečený kruh (XIII. XVI. důsl.), a průměrem kulovým jest AB, stranou pak šestiúhelníkovou KL a $AK = LB$, tedy AK, LB jsou stranami desetiúhelníku, vepsaného v kruh, na němž narýsován dvacetistěn. A ježto LB přísluší desetiúhelníku a ML šestiúhelníku (neboť $ML = KL$, ježto též $ML = HK$, poněvadž jsou od středu stejně vzdáleny, a $HK = 2\,KC = KL$), tedy MB přísluší pětiúhelníku (XIII. X.). Strana pak pětiúhelníková je hranou dvacetistěnovou (XIII. XVI.); pročež MB přísluší dvacetistěnu.



A ježto FB jest hranou krychlovou, rozdělme ji v N poměrem

17) Rozumí se: hraně jehlanu pravidelného, do koule vepsaného.
18) Obě jsou poloměry.

krajním a středním, a větší úsečkou budiž NB; tedy NB jest hranou dvanáctistěnovou (XIII. XVII. důsl.).

A ježto bylo dokázáno, že čtverec kulového průměru jest půldruhakrát větší než AF^2, čtverec to hrany jehlanové, a dvakrát větší nežli BE^2 hrany osmistěnové a třikrát větší nežli FB^2 hrany krychlové, jakých dílů má tedy ve dvojmoci průměr kulový šest, takové hrana jehlanová ve dvojmoci čtyři, osmistěnová tři a krychlová dvě. Pročež hrana jehlanová ve dvojmoci rovná se čtyřem třetinám hrany osmistěnové nebo dvojnásobku hrany krychlové (ve dvojmoci), hrana pak osmistěnová rovná se ve dvojmoci půldruhanásobné hraně krychlové. Tedy řečené hrany těch tří útvarů, míním totiž jehlanu a osmistěnu a krychle, mají se k sobě poměry změrnými. Ostatní pak dvě, míním totiž dvacetistěnovou a dvanáctistěnovou, ani k sobě ani k oněm jmenovaným nemají se poměry změrnými; jsou totiž nezměrné, ona totiž nezměrná menší, tato úsečnice (XIII. XVI. XVII.).

Že hrana dvacetistěnová MB jest větší než dvanáctistěnová NB, dokážeme takto.

Poněvadž totiž $\triangle FDB$ je s $\triangle FAB$ stejnoúhlý, $DB : BF = BF : BA$. [A ježto tři přímky jsou úměrné, první má se ke třetí jako čtverec z první ke čtverci z druhé]; pročež $DB : BA = DB^2 : BF^2$. Tedy obráceně $AB : BD = FB^2 : BD^2$. Avšak $AB = 3\,BD$, pročež $FB^2 = 3\,BD^2$. Také však $AD^2 = 4\,DB^2$, neboť $AD = 2\,DB$; tedy $AD^2 > FB^2$; pročež $AD > FB$; a tak AL jest mnohem větší než FB. A když se AL rozdělí poměrem krajním a středním, větší úsečkou jest KL, ježto právě LK náleží šestiúhelníku, KA však desetiúhelníku (XIII. IX.); když pak FB rozdělíme poměrem krajním a středním, větší úsečkou jest NB; tedy $KL > NB$. A $KL = LM$; pročež $LM > NB$. Tedy MB, jsouc hranou dvacetistěnovou, jest o mnoho větší než hrana dvanáctistěnová NB; což právě bylo dokázati.

Pravím ještě, že kromě řečených pěti útvarův nesestrojíš útvaru jiného, jenž by byl omezen stejnými úhelníky stejnostrannými a stejnoúhlými.

Ze dvou trojúhelníkův anebo vůbec rovin zajisté úhel tělesový se nesestrojí (XI. vým. 11.). Ze tří pak trojúhelníkův úhel jehlanový, ze čtyř osmistěnový a z pěti dvacetistěnový; ze šesti však trojúhelníků stejnostranných a stejnoúhlých, při jednom bodě sestavených, úhel tělesový nevznikne; poněvadž totiž úhel stejnostranného trojúhelníku rovná se dvěma třetinám pravého, těch šest bude rovno čtyřem pravým; což právě nemožné, neboť každý úhel tělesový svírají úhly (rovinné) součtem menší nežli čtyři pravé (XI. XXI.). Z téže příčiny ovšem nemožno úhlu tělesového sestrojiti ani z více úhlů rovinných nežli ze šesti[19]. Třemi pak čtverci omezen jest úhel krychlový; čtyřmi však to nemožno, neboť opět to budou čtyři pravé. Pětiúhelníky stejnostrannými a stejnoúhlými, a to třemi, omezen dvanáctistěnový; čtyřmi však to nemožno; poněvadž totiž úhel stejnostranného (a stejnoúhlého) pětiúhelníku rovná se pravému a pětině,

19) Totiž z úhlů trojúhelníků pravidelných; tedy ani ze šesti ani z více nežli šesti.

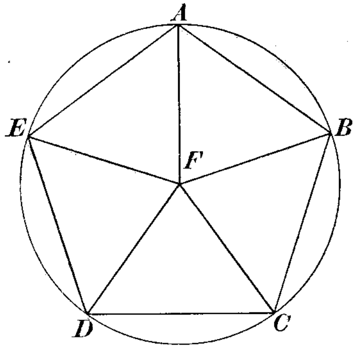
ty čtyři úhly budou čtyř pravých větší; což právě nemožné. Ani zajisté jinými útvary mnohoúhlými nebude omezen úhel tělesový pro touž nemožnost.

Tedy kromě řečených pěti útvarův nesestrojíš jiného útvaru tělesového, omezeného úhelníky stejnostrannými a stejnoúhlými; což právě bylo dokázati.

Výtěžek.

Že pak úhel pětiúhelníku stejnostranného a stejnoúhlého rovná se pravému a pětině, dokázati třeba takto.

Nužе budiž pětiúhelníkem stejnostranným a stejnoúhlým $ABCDE$, a opišme kolem něho kružnici $ABCDE$ a za střed její vezměme F, i veďme spojnice FA, FB, FC, FD, FE. Ty zajisté rozpolují úhly v pětiúhelníku při A, B, C, D, E. A ježto pět úhlů při F rovná se čtyřem pravým a jsou stejné, tedy jeden z nich, na př. AFB, rovná se pravému bez pětiny; pročež zbývající (v $\triangle AFB$) součet $\sphericalangle FAB + ABF$ rovná se pravému a pětině. Avšak $\sphericalangle FAB = FBC$; tedy celý úhel pětiúhelníkový ABC jest roven pravému a pětině; což právě bylo dokázati.

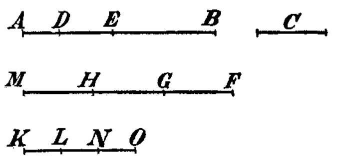


Jiné důkazy a doplňky

ke kn. X.

I. *Jinak.*

Mějme dvě nestejné veličiny AB, C; a ježto C jest menší, násobením bude někdy větší než AB. Budiž jako FM, a tato budiž rozdělena v díly stejné s C, totiž MH, HG, GF, a odřízněmež od AB část větší než jest polovina, t. BE, a od EA větší než polovinu, t. ED, a to stále čiňmež, až se části v FM počtem vyrovnají částem v AB. Buďtež to BE, ED, DA, a budiž $DA = KL = LN = NO$, a to tak, aby se díly v KO počtem vyrovnaly dílům veličiny FM.

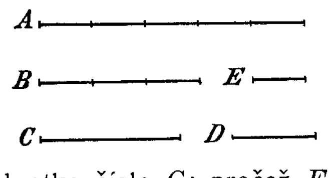


A ježto $BE > \frac{1}{2} BA$ a $BE > EA$, tedy jest BE mnohem větší než DA. Avšak $DA = ON$, tedy $BE > NO$. Ježto dále $ED > \frac{1}{2} EA$, bude $ED > DA$. Avšak $DA = NL$, pročež $ED > NL$. Tedy celá $DB > OL$. Avšak $DA = LK$; tedy celá $BA > OK$. Avšak $BA < MF$; pročež MF jest mnohem větší než OK. A ježto $ON = NL = LK$ a $MH = HG = GF$ a počet dílů v MF se rovná počtu dílů v OK,

tedy $KL : FG = KO : FM$; ale $FM > KO$; pročež i $GF > LK$. A $FG = C$ a $KL = AD$, tedy $C > AD$; což právě bylo dokázati.

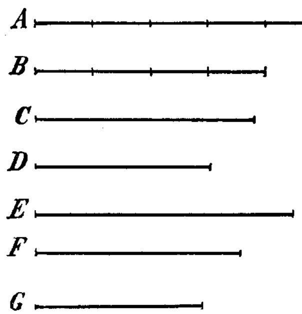
VI. *Jinak.*

Nuže mějte se k sobě dvě veličiny A, B jako číslo C k číslu D; pravím, že jsou ty veličiny souměřitelné. Neboť kolik je v C jednotek, v tolikéž dílů buď rozděleno A a jednomu z nich se rovnej E; tedy $1 : C = E : A$ (V. xv.). Také však $C : D = A : B$, tedy stejnořadně (V. xxii.) $1 : D = E : B$. A jednotka jest také měrou čísla D; tedy rovněž E jest měrou veličiny B. Je však i E měrou veličiny A, ježto i jednotka čísla C; pročež E jest měrou veličiny A i B; tedy jsou A, B souměřitelné a společnou jejich měrou jest E; což právě bylo dokázati.



IX. *Jinak.*

Poněvadž totiž A je s B souměřitelná, mají se k sobě jako číslo k číslu. Mějtež se jako C k D, a C samo sebou znásobeno jsouc dej E a D znásobeno číslem C dej F a D samo sebou znásobeno jsouc dej G. Ježto tedy $C \times C = E$ a $C \times D = F$, tedy $C : D$ (t. j. $A : B$) $= E : F$ (VII. xvii.). Avšak $A : B = A^2 : A \times B$, pročež $A^2 : A \times B = E : F$. Ježto dále $D \times D = G$ a $C \times D \times F$, tedy $C : D$ (t j. $A : B$) $= F : G$. Avšak $A : B = A \times B : B^2$; pročež $A \times B : B^2 = F : G$. Avšak mělo se $A^2 : A \times B = E : F$; tedy stejnořadně $A^2 : B^2 = E : G$. Jsou pak E i G čtverce, neboť $E = C^2$ a $G = D^2$; pročež se má A^2 k B^2 jako číslo čtvercové k číslu čtvercovému; což právě bylo dokázati.



Avšak měj se již A^2 k B^2 jako číslo čtvercové E k číslu čtvercovému G; pravím, že jest A s B souměřitelná.

Nuže budiž C stranou čtverce E a D čtverce G a budiž $C \times D = F$; tedy E, F, G jsou po řadě úměrné dle poměru $C : D$ (VIII. xi.). A ježto $A^2 : A \times B = A \times B : B^2$ a $E : F = F : G$; tedy $A^2 : A \times B = E : F$. A $A \times B : B^2 = F : G$; avšak $A^2 : A \times B = A : B$. Pročež A, B jsou souměřitelné, neboť se mají k sobě jako číslo E k číslu F, t. j. jako $C : D$; neboť $C : D = E : F$; jest totiž $C \times C = E$ a $C \times D = F$. Pročež $C : D = E : F$.

X.

Tedy k dané přímce změrné, která jest, jak jsme pravili, měřítkem, na př. A, nalezena jest souměřitelná ve dvojmoci přímka D, totiž změrná, jen ve dvojmoci souměřitelná, nezměrná pak E. Neboť nezměrnými vůbec nazývá ty, které jsou se změrnou i dle délky i dle dvojmoci nesouměřitelné.

XIII.

K výtěžku této poučky důkaz z nemožnosti opaku.

Když jsou dvě veličiny a jedna je s touž (třetí) veličinou souměřitelná, druhá však nesouměřitelná, budou ty veličiny nesouměřitelné.

Nuže buďte dvě veličiny A, B*), jiná pak C, a budiž A s C souměřitelná, B však s C nesouměřitelná; pravím, že též A je s B nesouměřitelná.

Neboť jest-li A s B souměřitelná, rovněž pak C s A, tedy též C je s B souměřitelná (X. XII); což proti podmínce.

XVIII.

Změrnými totiž nazývá přímky s danou změrnou buďto dle délky i dle dvojmoci souměřitelné neb i jen dle dvojmoci. Jsou však i jiné přímky, jež jsou dle délky sice s danou změrnou nesouměřitelné, jen dle dvojmoci však souměřitelné, a proto se opět nazývají změrnými a vespolek souměřitelnými, jelikož jsou změrné, avšak vespolek souměřitelnými patrně buďto dle délky i dle dvojmoci nebo jen dle dvojmoci. A jestliže dle délky, i ty samy se zovou změrnými, dle délky souměřitelnými, při čemž se vyrozumívá, že i dle dvojmoci; pakli jen dle dvojmoci jsou vespolek souměřitelné, i ty se takto zovou změrnými, jen dle dvojmoci souměřitelnými. Že pak přímky změrné jsou souměřitelné, vysvítá z tohoto: ježto jsou totiž změrné přímky s danou změrnou souměřitelné, veličiny pak s touž veličinou souměřitelné jsou i vespolek souměřitelné, tedy změrné jsou souměřitelné.

XX.

Výtěžek.

Přímka ve dvojmoci rovná ploše (čtverci) nezměrné jest nezměrná.

Nuže budiž A^2 rovna ploše nezměrné*); pravím že A jest nezměrná.

Neboť jest-li A změrná, bude i čtverec její změrný (tak totiž stanoveno ve výměrech); není však; tedy A jest nezměrná, což právě bylo dokázati.

XXIII.

Důsledek.

Jsou pak dále i jiné přímky, jež jsou dle délky sice se střední nesouměřitelné a jen ve dvojmoci souměřitelné, a opět se zovou střední, protože jsou se střední ve dvojmoci souměřitelné a souměřitelné vespolek, jelikož jsou střední, avšak vespolek souměřitelné jsou buď dle délky a patrně i ve dvojmoci nebo jen ve dvojmoci. A jestliže dle délky, slovou i tyto střední, dle délky souměřitelné, a spolu se rozumí,

———

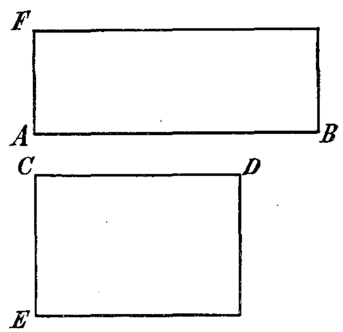
*) Vyobr. zbytečné; vynechal jsem.

že i ve dvojmoci; pakli jsou jen ve dvojmoci souměřitelné, slovou i tak střední, jen ve dvojmoci souměřitelné.

Že pak přímky střední jsou souměřitelné, třeba dokázati takto. Ježto přímky střední jsou s nějakou střední souměřitelné a veličiny s týmž souměřitelné jsou i vespolek souměřitelné, jsou tedy přímky střední souměřitelné.

XXVII.

Výtěžek.



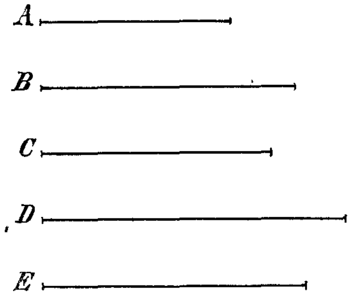
Dána-li dvě čísla jakéhokoli poměru a nějaké číslo jiné (třetí), dlužno učiniti, aby se mělo číslo k číslu, jako třetí k nějakému jinému.

Danými dvěma čísly jakéhokoli poměru buďtež AB, CD, jiným pak nějakým CE; dlužno vykonati, což uloženo.

Nuže narýsujme z DC, CE pravoúhlý rovnoběžník DE a k AB přistavme stejný s DE rovnoběžník BF o šířce AF. Ježto tedy rovnoběžník $DE = BF$ a jsou i stejnoúhlé, strany pak stejných a stejnoúhlých rovnoběžníků při stejných úhlech jsou k sobě v poměru obráceném (VI. XIV.), tedy $AB : CD = CE : AF$; což právě bylo dokázati.

XXIX.

Výtěžek.



Dána-li dvě čísla a přímka, dlužno učiniti, aby se mělo číslo k číslu jako čtverec z oné přímky ke čtverci z nějaké jiné.

Danými dvěma čísly buďtež A, B, přímkou pak C; i dlužno vykonati, což uloženo. Nuže učiňmež, aby se mělo $A : B = C : D$ a vezměmež E za střední úměrnou přímek C, D. Ježto tedy $A : B = C : D$ a $C : D = C^2 : E^2$ (V. vým. 9.), tedy $A : B = C^2 : E^2$.

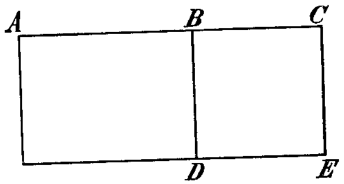
XXXI.

Výtěžek.

Když jsou dvě přímky nějakého poměru, bude se míti přímka ku přímce jako pravoúhelník z obou ke čtverci z kratší.*)

———

*) V řec. textu ἐλαχίστης (nejmenší, nejkratší). Tento úkol i další dokážeme pouhým násobením zcela krátce.



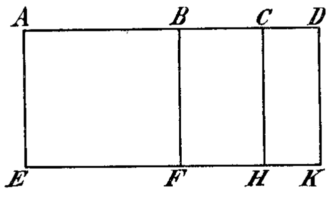
Nuže buďte dvěma přímkami nějakého poměru AB, BC; pravím, že $AB : BC = AB \times BC : BC^2$.

Nuže narýsujme z BC čtverec $BDEC$ a doplňme rovnoběžník AD. Patrno zajisté, že $AB : BC = AD : BE$. I jest $AD = AB \times BC$, neboť $BC = BD$, a $BE = BC^2$. Tedy $AB : BC = AB \times BC : BC^2$; což právě bylo dokázati.

XXXII.

Výtěžek.

Když jsou tři přímky nějakého poměru, bude se míti první ke třetí jako pravoúhelník z první (nejdelší) a prostřední k pravoúhelníku z prostřední a nejkratší.



Třemi přímkami nějakého poměru buďtež AB, BC, CD; pravím, že $AB : CD = AB \times BC : BC \times CD$.

Nuže veďme z bodu A na AB kolmici AE a budiž $AE = BC$, a bodem E veďme k AD rovnoběžku EK a body B, C, D veďme k AE rovnoběžky FB, CH, DK. A ježto $AB : BC = AF : BH$ a $BC : CD = BH : CK$, stejnořadně tedy $AB : CD = AF : CK$. I jest $AF = AB \times BC$, neboť $AE = BC$, a $CK = BC \times CD$, neboť $BC = CH$.

Když jsou tedy tři přímky — —

(Dále obsahují doplňky ke kn. X. ještě 16 čísel a scholion. Z toho uvádím jen tyto vysvětlivky.

K poučce XXXVI. se praví, že zove onu přímku dvoučástnicí (ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων), ježto se skládá ze dvou částí změrných a veličinu změrnou nazývá ὄνομα (v překladě č á s t).

K poučce XXXVII. připomenuto, že přímku nazval dvoustřednicí p r v n í, ježto obě části objímají útvar změrný a veličina změrná má přednost.

K XXXVIII. Přímku nazval dvoustřednicí d r u h o u, ježto obě části její objímají útvar střední a střední jest za změrným.

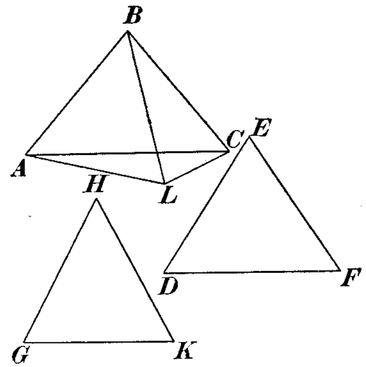
K XXXIX. Přímku nazval nezměrnou v ě t š í, ježto změrný součet $AB^2 + BC^2$ jest větší než střední součin $2\,AB \times BC$.

Podobně se vykládají i některé jiné názvy přímek nezměrných, které z pouček samých a z příslušných důkazů snadno vysvětliti.)

1. XI. XXII.

Jinak.

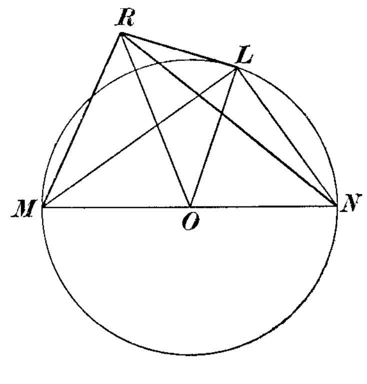
Danými třemi úhly rovinnými buďtež ABC, DEF, GHK, z nichž dva buďte větší než zbývající, jakkoli střídány jsouce, a svírejtež je stejná ramena AB, BC, DE, EF, GH, HK, a veďme spojnice AC, DF, GK. Pravím, že možno je z přímek stejných s AC, DF, GK sestaviti trojúhelník, t. j. opět, že dvě jsou delší než zbývající, jakkoli střídány jsouce.



Jsou-li tedy opět úhly při bodech B, E, H stejné, stejné budou též AC, DF, GK, a dvě budou větší než zbývající. Pakli ne, buďtež úhly při bodech B, E, H nestejné, a to $\sphericalangle B > E$ a $\sphericalangle B > H$; pročež bude i přímka $AC > DF$ a též $AC > GK$. I jest patrno, že $(AC + DF) > GK$, $(AC + GK) > DF$. Pravím, že také $(DF + GK) > AC$. Sestavme na přímce AB a v bodě na ní $B \sphericalangle ABL$, stejný s $\sphericalangle GHK$, a BL rovnej se jedné z přímek AB, BC, DE, EF, GH, HK, a veďme spojnice AL, LC. A ježto dvě strany AB, BL jsou jednotlivě stejné s GH, HK a svírají stejné úhly, tedy základna $AL = GK$. A ježto úhly při bodech E, H jsou větší součtem než $\sphericalangle ABC$, z nichž $\sphericalangle GHK = ABL$, proto zbývající $\sphericalangle E > LBC$. A ježto dvě strany LB, BC jsou jednotlivě stejné s DE, EF i $\sphericalangle DEF > LBC$, tedy základna $DF > LC$. Bylo pak dokázáno, že $GK = AL$; pročež $(DF + GK) > (AL + LC)$; avšak $(AL + LC) > AC$; tedy $DF + GK$ jest o mnoho větší než AC. A tak z přímek AC, DF, GK dvě jsou větší než zbývající, jakkoli střídány jsouce; možno tedy z přímek stejných s AC, DF, GK sestaviti trojúhelník; což právě bylo dokázati.

2. XI. XXIII.

Avšak buď již střed kruhu na jedné ze stran toho trojúhelníku totiž na MN*), a buď jím O, a veďme spojnici OM. Pravím opět, že $AB > LO$. Neboť není-li tomu tak, buďto $AB = LO$ nebo $AB < LO$. Buďte dříve stejné. Dvě tedy AB, BC, t. j. DE, EF, jsou s MO, OL, t. j. s MN, stejné. Avšak dáno jest, že $MN = DF$; pročež také $DE + EF = DF$; což právě jest nemožné. Tedy není AB stejná s LO. Podobně zajisté ani menší než LO, neboť tu jest ještě větší nemožnost. Proto $AB > LO$. A když podobně postavíme na rovinu kruhu kolmici OR, aby bylo $OR^2 = AB^2 - LO^2$, úloha (strojná) bude vykonána.



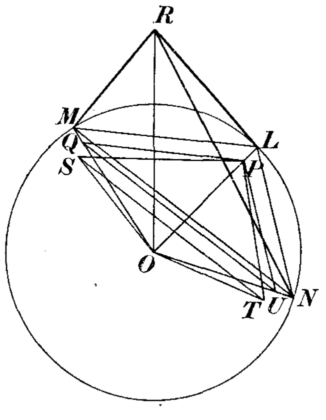
Avšak buď již střed kruhu vně trojúhelníku LMN a buď jím O

---

*) Ta ovšem musí býti nejdelší.

a veďme spojnice LO, MO. Pravím ovšem i takto, že $AB > LO$. Neboť není-li tomu tak, buďto $AB = LO$ nebo $AB < LO$. Buďte dříve stejné. Dvě tedy AB, BC jsou jednotlivě stejné s MO, OL i základna $AC = ML$; tedy $\sphericalangle ABC = MOL$. Z téže příčiny ovšem i $\sphericalangle GHK = LON$. Pročež celý $\sphericalangle MON = ABC + GHK$. Avšak $(\sphericalangle ABC + GHK) > DEF$. Tedy též $\sphericalangle MON > DEF$. A ježto dvě ramena DE, EF jsou stejná s MO, ON i základna $DF = MN$, tedy $\sphericalangle MON$ je stejný s DEF. Ukázalo se však že také větší; což právě nesrovnalé. Není tedy $AB = LO$. Ihned pak dokážeme, že ani menší. Tedy jest větší. A když na rovině kruhu opět vztyčíme kolmici OR, tak aby bylo $OR^2 = AB^2 - LO^2$, úloha bude vykonána.

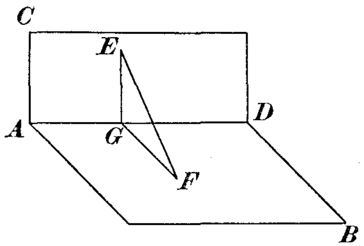
Pravím tedy, že ani není $AB < LO$. Nuže, možno-li, budiž. A dejme tomu, že $AB = OP$ a $BC = OQ$, a veďme spojnici PQ.



A ježto $AB = BC$, též $OP = OQ$. A tak i zbývající $PL = QM$. Tedy $LM \parallel QP$ a $\triangle LMO$ je s QOP stejnoúhlý. Protož $OL : LM = OP : PQ$ a střídavě $LO : OP = LM : PQ$. Avšak $LO > OP$; tedy též $LM > PQ$. Avšak $LM = AC$; pročež také $AC > PQ$. Ježto tedy dvě AB, BC jsou jednotlivě stejné s PO, OQ i základna $AC > PQ$, tož $\sphericalangle ABC > POQ$. Podobně zajisté, i když se vezme OU za stejnou s OP neb OQ a když vedeme spojnici PU, dokážeme, že též $\sphericalangle GHK > POU$. Sestavme již na přímce LO a v bodě na ní O $\sphericalangle LOS = ABC$ a $\sphericalangle LOT = GHK$, a budiž $OS = PO = OT$, a veďme spojnice PS, PT, ST. A poněvadž dvě AB, BC jsou stejné s PO, OS a $\sphericalangle ABC = POS$, tedy základna AC (t. j. LM) $= PS$. Z téže příčiny ovšem i $LN = PT$. A ježto dvě ML, LN jsou stejné s SP, PT a $\sphericalangle MLN > SPT$, tedy základna $MN > ST$. Avšak $MN = DF$; pročež i $DF > ST$. Ježto tedy dvě DE, EF jsou stejné s SO, OT i základna $DF > ST$, proto $\sphericalangle DEF > SOT$. Avšak $\sphericalangle SOT > (ABC + GHK)$; pročež $\sphericalangle DEF > (ABC + GHK)$. Avšak $\sphericalangle DEF$ je též menší; což právě nemožné.

3. Obecně XI. xxxviii.

Když jest rovina na rovině kolmo a z některého bodu v jedné rovině vede se na druhou rovinu kolmice, vedená kolmice padne na společnou průsečnici rovin.



Nuže budiž rovina CD na rovině AB kolmo a společnou jejich průsečnicí budiž AD, i vytkněme na rovině CD nahodilý bod E; pravím, že kolmice vedená z E na rovinu AB padne na AD.

Nuže nebuď tak, nýbrž, možno-li, dopadej mimo jako EF a stýkej se s rovinou AB v bodě F, a z F

veďme na DA v rovině AB kolmici FG, kterážto i na rovině CD jest kolmo, a veďme spojnici EG. Ježto tedy FG jest kolmo na rovině CD a sbíhá se s ní EG, jsouc v rovině CD, tedy $\sphericalangle FGE = R$. Avšak též EF jest na rovině AB kolmo; pročež $\sphericalangle EFG = R$. Tedy v $\triangle EFG$ jsou dva úhly pravé; což právě nemožné. Pročež kolmice vedená z bodu E na rovinu AB nepadne mimo DA. Tedy dopadne na DA; což právě bylo dokázati.

4. XII. iv.

A ježto ty dva hranoly v jehlaně $ABCG$ jsou si rovny, avšak zajisté i ony dva hranoly v jehlaně $DEFH$ jsou si rovny, tedy hranol, jemuž základnou rovnoběžník $BKLO$ a protilehlou přímka MP, má se k hranolu, jemuž základnou $\triangle LOC$ a protilehlým $\triangle PMN$, jako hranol, jehož základnou $QERV$ a protilehlou ST, k hranolu, jehož základnou $\triangle RVF$ a protilehlým $\triangle STU$. Pročež součetně $(KBOLMP + LOCMNP) : LOCMNP = (QEVRST + RVFSTU) : RVFSTU$. Tedy střídavě $(KBOLMP + LOCMNP) : (QEVRST + RVFSTU) = LOCMNP : RVFSTU$. Bylo však dokázáno, že $LOCMNP : RVFSTU = LOC : RVF = ABC : DEF$. Pročež také $\triangle ABC$ má se k DEF jako dva hranoly v jehlaně $ABCG$ ke dvěma hranolům v jehlaně $DEFH$. Podobně pak, i když rozdělíme zbývající jehlany, na př. $MNPG$, $STUH$, týmž způsobem, dva hranoly v jehlaně $MNPG$ budou se míti ke dvěma hranolům v jehlaně $STUH$ jako základna MNP k základně STU. Avšak $MNP : STU = ABC : DEF$. A jako se má tedy základna ABC k DEF, tak i dva hranoly v jehlaně $ABCG$ ke dvěma hranolům v jehlaně $DEFH$ i dva hranoly v $MNPG$ ke dvěma hranolům v jehlaně $STUH$ i ty čtyři k těm čtyřem. A totéž se dokáže o hranolech, které vzniknou rozdělením jehlanův $AKLP$ a $DQRS$ a vůbec o všech stejného počtu; což právě bylo dokázati.

5. XII. xvii.

Možno zajisté i případněji dokázati, že $AY > AG$. Zřiďme v G na AG kolmici GA' a veďme spojnici AA'. Rozpolujíce tedy obl. EB a rovněž polovinu jeho a to stále činíce ostavíme nějaký oblouk, který jest menší než oblouk kruhu $BCDE$ příslušný k tětivě stejné s GA'. Ostavmež, a budiž to obl. KB. Tedy tětiva $KB < GA'$. A ježto čtyřúhelník $BKSP$ jest v kruhu*) a PB, BK, KS jsou stejné a PS jest menší, $\sphericalangle BYK$ jest tupý**). Proto strana $KB > BY$. Avšak $GA' > KB$; tedy o mnoho jest $GA' > BY$; pročež i $A'G^2 > BY^2$. A ježto $AA' = AB$, také $A'A^2 = AB^2$. Avšak $A'A^2 = AG^2 + A'G^2$ a $AB^2 = BY^2 + YA^2$; tedy $AG^2 + A'G^2 = BY^2 + YA^2$, z čehož $BY^2 > A'G^2$; pročež zbývající $YA^2 > AG^2$; tedy $AY > AG$†).

*) T. v kruhu opsaném kolem toho čtyřúhelníku.

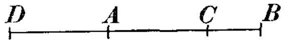
**) Ve čtyřúh. $KBPS$, jehož strana PS jest menší než ostatní, $\sphericalangle (K + B) < 2R$, tedy součet polovin $\sphericalangle (BKY + KBY) < R$; pročež $\sphericalangle BYK > R$.

†) Následuje přídavek ke XIII. VI., místy nejasný a chybný.

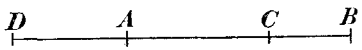
6. XIII. V.

Jinak.

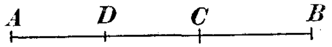
Když se přímka rozdělí poměrem krajním a středním, celá s větší úsečkou bude se míti k celé jako celá k úsečce větší.



Nuže buď nějaká přímka AB rozdělena v C poměrem krajním a středním a větší úsečkou budiž AC; pravím, že $(BA+AC):AB=AB:AC$.



Nuže dejme tomu, že $AC=AD$; pravím, že $BD:BA=BA:AC$. Neboť ježto AB jest rozdělena v C poměrem krajním a středním a větší úsečkou jest AC, tedy $BA:AC=AC:CB$. Avšak $AC=DA$; pročež $BA:AD=AC:CB$; obráceně tedy $DA:AB=BC:CA$; a tak součetně $DB:BA=BA:AC$. Avšak $DA=AC$; tedy $(BA+AC):AB=BA:AC$. A ježto bylo dokázáno, že $DB:BA=BA:AC$ a $CA=DA$, tedy $DB:BA=BA:AD$. A tak i DB jest rozdělena v A poměrem krajním a středním a větší úsečkou jest přímka počáteční AB; což právě bylo dokázati.



7. XIII. I–V.

Co jest analyse (rozbor) a co synthese (soubor).

Analyse jest dokazování věci vyšetřované, jakoby již byla uznávána, sousledky k nějaké pravdě uznávané vedoucími.

Synthese pak dokazování věci uznávané sousledky k nějaké pravdě uznávané vedoucími.*)

Analyse a synthese poučky I. bez vyobrazení (pomocného).

Analyse. Nuže rozdělme nějakou přímku AB**) poměrem krajním a středním v C, a větší úsečkou budiž AC a budiž $AD=\frac{1}{2}AB$; pravím, že $CD^2=5AD^2$.

Neboť, ježto $CD^2=5AD^2$ a $CD^2=CA^2+AD^2+2CA\times AD$, tedy $CA^2+AD^2+2CA\times AD=5AD^2$; pročež odečtením $AC^2+2CA\times AD=4AD^2$. Avšak $2CA\times AD=BA\times AC$, neboť $BA=2AD$; a $CA^2=AB\times BC$, neboť AB jest rozdělena poměrem krajním a středním; tedy $BA\times AC+AB\times BC=4AD^2$. Avšak $BA\times AC+AB\times BC=AB^2$. Pročež $AB^2=4AD^2$. A je tomu tak skutečně, neboť $AB=2AD$.

Synthese. Ježto tedy $AB^2=4AD^2$ a $BA^2=BA\times AC+AB\times BC$, tedy $BA\times AC+AB\times BC=4AD^2$. Avšak $BA\times AC=2DA\times AC$ a $AB\times BC=AC^2$; pročež $AC^2+2DA\times AC=4AD^2$. A tak $DA^2+AC^2+2DA\times AC=5DA^2$. Avšak $DA^2+AC^2+2DA\times AC=CD^2$. Tedy $CD^2=5AD^2$; což právě bylo dokázati.

*) Smysl je tento: analyse, vycházejíc od pravdy, jež se má dokázati, a předem ji připouštějíc, vede k nějaké pravdě vůbec uznávané; synthese, vycházejíc od podmínek daných, vede ku pravdě, jež se má dokázati.

**) Sem patří druhá část vyobr. předešlého.

Analyse a synthese poučky II. bez vyobrazení.

Analyse. Nuže budiž nějaká přímka CD (vyobr. k poučce I.) ve dvojmoci rovna pateronásobnému čtverci své úsečky DA a budiž $AB=2DA$; pravím, že AB jest rozdělena v bodě C poměrem krajním a středním a že větší úsečkou jest AC, kterážto jest zbývající částí přímky počáteční.

Ježto AB jest rozdělena v C poměrem krajním a středním a větší úsečkou jest AC, tedy $AB\times BC=AC^2$. Také však $BA\times AC=2DA\times AC$, neboť $BA=2AD$; pročež $AB\times BC+BA\times AC$ (což právě jest AB^2) $=2DA\times AC+AC^2$. Avšak $AB^2=4DA^2$; tedy též $2DA\times AC+AC^2=4AD^2$; a tak $DA^2+AC^2+2DA\times AC$ (což jest CD^2) $=5DA^2$. A je tomu tak skutečně.

Synthese. Ježto tedy $CD^2=5DA^2$ a $CD^2=DA^2+AC^2+2DA\times AC$, tedy $DA^2+AC^2+2DA\times AC=5DA^2$. Odečtením $2DA\times AC+AC^2=4AD^2$; jest pak také $AB^2=4AD^2$; pročež $2DA\times AC$ (t. j. $BA\times AC$) $+AC^2=AB^2$. Avšak $AB^2=AB\times BC+AB\times AC$; tedy $BA\times AC+AB\times BC=BA\times AC+AC^2$. A odečtením veličiny společné $BA\times AC$ zbývající tedy $AB\times BC=AC^2$. Pročež $AB:AC=AC:BC$. Avšak $BA>AC$, tedy též $AC>CB$; a tak AB rozdělena je v C poměrem krajním a středním a větší úsečkou jest AC; což právě bylo dokázati.

Analyse a synthese poučky III.

Analyse. Nuže budiž přímka AB*) rozdělena v bodě C poměrem krajním a středním a větší úsečkou budiž AC a CD polovinou úsečky AC; pravím, že $BD^2=5CD^2$.

Ježto je totiž $BD^2=5CD^2$ a $DB^2=AB\times BC+DC^2$ (II. VI), tedy $AB\times BC+DC^2=5DC^2$; odečtením $AB\times BC=4DC^2$. Avšak $AB\times BC=AC^2$, neboť AB jest rozdělena v C poměrem krajním a středním; pročež $AC^2=4DC^2$. A tak tomu skutečně, neboť $AC=2DC$.

Synthese. Ježto $AC=2DC$, $AC^2=4DC^2$. Avšak $AC^2=AB\times BC$; pročež $AB\times BC=4DC^2$. Tedy součetně $AB\times BC+DC^2$ (t. j. DB^2) $=5DC^2$; což právě bylo dokázati.

Analyse a synthese poučky IV.

Analyse. Nuže budiž přímka AB rozdělena v C poměrem krajním a středním a větší úsečkou budiž AC (vyobr. jako k poučce I. — bez AD); pravím, že $AB^2+BC^2=3AC^2$.

Neboť, ježto $AB^2+BC^2=3AC^2$, avšak $AB^2+BC^2=2AB\times BC+AC^2$ (II. VII.), tedy $2AB\times BC+AC^2=3AC^2$; pročež odečtením $2AB\times BC=2AC^2$; a tak $AB\times BC=AC^2$. A skutečně tomu tak, neboť AB jest rozdělena v C poměrem krajním a středním.

Synthese. Ježto AB jest rozdělena v C poměrem krajním a středním a větší úsečkou jest AC, tedy $AB\times BC=AC^2$, pročež $2AB\times BC=2AC^2$; přičítáním tedy $2AB\times BC+AC^2=3AC^2$. Avšak $2AB\times BC+AC^2=AB^2+BC^2$; proto $AB^2+BC^2=3AC^2$; což právě bylo dokázati.

*) Sem patří třetí část vyobr. předešlého.

Analyse a synthese poučky V.

Analyse. Nuže budiž nějaká přímka AB rozdělena v C poměrem krajním a středním a větší úsečkou budiž AC a budiž $AD = AC$ (vyobr. jako k doplňku 6.); pravím, že DB jest rozdělena v A poměrem krajním a středním a že větší úsečkou jest AB.

Ježto je totiž DB rozdělena v A poměrem krajním a středním a větší úsečkou jest AB, tedy $DB : BA = BA : AD$. Avšak $AD = AC$; pročež $DB : BA = AB : AC$; tedy zvratně $BD : DA = AB : BC$; a tak odčetně $BA : AD = AC : BC$. Avšak $AD = AC$; tedy $BA : AC = AC : CB$. A tak tomu skutečně, neboť AB jest rozdělena v C poměrem krajním a středním.

Synthese. Ježto AB jest rozdělena v C poměrem krajním a středním, tedy $BA : AC = AC : CB$. Avšak $AC = AD$; pročež $BA : AD = AC : CB$; součetně $BD : DA = AB : BC$; zvratně $DB : BA = BA : AC$. Avšak $AC = AD$; tedy $DB : BA = BA : AD$. A tak DB jest rozdělena v A poměrem krajním a středním a větší úsečkou jest AB; což právě bylo dokázati.

8. XIII. XVII.

Nuže buď změrná přímka AB rozdělena v C poměrem krajním a středním a větší úsečkou budiž AC. Mimo to pak budiž $AD = \frac{1}{2} AB$ (vyobr. jako k analysi poučky I.). Tedy též AD je změrná. A ježto $CD^2 = 5\,DA^2$ (XIII. I.), tedy CD, DA jsou změrné, jen ve dvojmoci souměřitelné. Pročež AC jest úsečnice (X. LXXIII). AB však je změrná. Čtverec*) pak z úsečnice, přistaven jsa ku přímce změrné, šířkou činí úsečnici (X. XCVII.); tedy BC jest úsečnice. Pročež AC i CB jsou úsečnice; což právě bylo dokázati. A příslušnou k AC jest AD, k CB pak CD.

9. XIII. XVIII.

Jiný důkaz, že $MB > NB$.

Ježto je totiž $AD = 2\,DB$, tedy $AB = 3\,BD$. Též $AB : BD = AB^2 : BF^2$, protože $\triangle FAB$ je s FDB stejnoúhlý. Pročež $AB^2 = 3\,BF^2$. Bylo pak dokázáno, že $AB^2 = 5\,KL^2$ (XIII. XVIII.). Tedy $5\,KL^2 = 3\,BF^2$. Avšak $3\,FB^2 > 6\,NB^2$. Proto též $5\,KL^2 > 6\,NB^2$. A tak i $KL^2 > NB^2$. Pročež $KL > NB$. Avšak $KL = LM$. Tedy $LM > NB$. Pročež MB jest mnohem větší než BN; což právě bylo dokázati. Že však $3\,FB^2 > 6\,NB^2$, dokážeme takto: poněvadž totiž $BN > NF$, tedy $FB \times BN > BF \times FN$. Pročež $(FB \times BN + BF \times FN) > 2\,BF \times FN$. Avšak $FB \times BN + BF \times FN = FB^2$ a $BF \times FN = NB^2$. Tedy $FB^2 > 2\,NB^2$. A tak i $3\,FB^2 > 6\,BN^2$; což právě bylo dokázati**).

---

*) Třebas i ve způsobě obdélníku.

**) Ve vyd. Heibergově za touto částí následuje ještě druhý přídavek (appendix). Obsahuje jiné výklady od XI. XXXVI. do konce a celé kn. XII. kromě poučky VI.; je však pln chyb opisovačských a bez obrazcův. Z té příčiny jsem tohoto přídavku nepřeložil.

Chyby tiskové.

Str. 33. XIII. ř. 2. místo čtverec čti *čtverce.*

» 35. II. místo vezmou, vezměme čti *vytknou, vytkněme*; a tak v této části častěji, pokud se hodí sloveso vytknouti místo vzíti.

» 69. vým. 10. na konci místo úměrou čti *úměru.*

» 69. pozn. 4. místo $a : b = a : c$ čti $a : b = b : c$.

» 69. pozn. 8. čti $(a + b) : b = (c + d) : d$.

EUKLEIDOVY ZÁKLADY.

EUKLEIDOVY

ZÁKLADY

(ELEMENTA).

PŘELOŽIL

FRANTIŠEK SERVÍT.