Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Maß- und Integrationstheorie

Arbeitsblatt 22

Übungsaufgaben

Aufgabe 22.1. Bestimme die optimale Approximation für den Datensatz $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 2$, durch eine konstante Funktion bezüglich der folgenden Normen des $\mathbb{R}^n$.

(1) Summennorm,
(2) euklidische Norm (L^2-Norm),
(3) Maximumsnorm,
(4) L^p-Norm für $p \geq 1$.

Aufgabe 22.2. Es sei $x_1, \ldots, x_n$ verschiedene reelle Zahlen und seien $y_1, \ldots, y_n$ reelle Zahlen. Bestimme die optimale Approximation für den Datensatz $f(x_i) = y_i$ durch eine konstante Funktion bezüglich der folgenden Normen des $\mathbb{R}^n$.

(1) Summennorm,
(2) euklidische Norm (L^2-Norm),
(3) Maximumsnorm,
(4) L^p-Norm für $p \geq 1$.

Wann gibt es eine „geschlossene Formel“, wann nicht? Wie sieht es bei $n = 1, 2, 3$ aus?

Aufgabe 22.3. Bestimme in Beispiel 22.4 die optimale affin-lineare Approximation im Sinne der Summe der kleinsten Quadrate mit Lemma 22.2 unter Verwendung einer Orthonormalbasis von U.

Aufgabe 22.4.*

Beweise Satz 22.5 analytisch.

Aufgabe 22.5. Bestimme in Beispiel 22.4 die optimale affin-lineare Approximation im Sinne der Summennorm.

Aufgabe 22.6. Bestimme in Beispiel 22.4 die optimale affin-lineare Approximation im Sinne der Maximumsnorm.

Aufgabe 22.7. Es seien $x_1, \ldots, x_n$ verschiedene reelle Zahlen, $n \geq 2$, und $y_1, \ldots, y_n$ reelle Zahlen. Bestimme analytisch die optimale affin-lineare Approximation $ax + b$ für den Datensatz $f(x_i) = y_i$ bezüglich der p-Norm im $\mathbb{R}^n$ für p eine positive gerade Zahl.

Aufgabe 22.8. Es seien $x_1, \ldots, x_n$ verschiedene reelle Zahlen, $n \geq 2$, und $y_1, \ldots, y_n$ reelle Zahlen. Es sei $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ und $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$. Zeige, dass $(\bar{x}, \bar{y})$ auf der optimalen linearen Approximation im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate für den Datensatz liegt.

Aufgabe 22.9. Bestimme die optimale affin-lineare Approximation im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate für die Messdaten $(2, 8)$, $(5, 14)$, $(7, 20)$.

Aufgabe 22.10. Bestimme die optimale affin-lineare Approximation im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate für die Messdaten

$$(x_1, 0), \ldots, (x_{i-1}, 0), (x_i, 1), (x_{i+1}, 0), \ldots, (x_n, 0)\,.$$

Aufgabe 22.11. Für die Bewegung eines Teilchens in der Ebene liegen zu verschieden Zeitpunkten die gemessenen Ortspunkte gemäß der Tabelle

t	0	1	2
$P(t)$	$(5, 1)$	$(5, 2)$	$(4, 3)$

vor. Aus theoretischen Gründen ist klar, dass es sich um eine Kreisbewegung um den Nullpunkt mit konstanter Geschwindigkeit handeln müsste, die sich zum Zeitpunkt 0 auf der x-Achse befinden müsste. Die Bewegung sollte also von der Form

$$g(t) = (a \cos (ct)\,, a \sin (ct))$$

sein. Bestimme (a, c) derart, dass die zugehörige Kreisbewegung mit den Messdaten im Sinne der kleinsten Quadrate optimal übereinstimmt.

Aufgabe 22.12. Es sei v_i, $i \in I$, ein Orthonormalsystem in einem $\mathbb{K}$-Hilbertraum V. Zeige, dass man das System zu einem vollständigen Orthonormalsystem ergänzen kann.

Die folgende Aufgabe verallgemeinert Lemma 22.2.

Aufgabe 22.13. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum und sei v_i, $i \in I$, ein Orthonormalsystem mit dem davon erzeugten Untervektorraum U und dem zugehörigen Abschluss $W = \overline{U}$. Dann gilt für die orthogonale Projektion

$$p_W(v) = \sum_{i \in I} \langle v, v_i \rangle \, v_i .$$

Aufgabe 22.14. Es sei v_i, $i \in I$, ein vollständiges Orthonormalsystem in einem Hilbertraum V. Es seien $v, w \in V$ Vektoren mit den Darstellungen $v = \sum_{i \in I} c_i v_i$ und $w = \sum_{i \in I} d_i v_i$. Zeige

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i \in I} c_i \overline{d_i} .$$

Aufgabe 22.15. Zeige, dass zwei separable Hilberträume von unendlicher Dimension zueinander isometrisch isomorph sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.16. (3 Punkte)

Bestimme die optimale affin-lineare Approximation im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate für die Messdaten $(-2, 10)$, $(3, 5)$, $(4, 8)$, $(7, 15)$.

Aufgabe 22.17. (5 Punkte)

Bestimme die optimale Approximation durch ein quadratisches Polynom vom Grad ≤ 2 im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate für die Messdaten $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 10)$.

Aufgabe 22.18. (5 Punkte)

Für die Bewegung eines Teilchens in der Ebene liegen zu verschieden Zeitpunkten die gemessenen Ortspunkte gemäß der Tabelle

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$P(t)$	$(9, 0)$	$(2, 30)$	$(-21, -1)$	$(1, -32)$

vor. Aus theoretischen Gründen ist klar, dass es sich um eine Bewegung auf einer Ellipse mit konstanter Geschwindigkeit handeln müsste und die Bewegung durch eine Funktion der Form

$$g(t) = (a \cos(ct), b \sin(ct))$$

modelliert werden sollte. Bestimme (a, b, c) derart, dass die zugehörige Bewegung mit den Messdaten im Sinne der kleinsten Quadrate optimal übereinstimmt.

Aufgabe 22.19. (5 Punkte)

Es sei V ein unendlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Hilbertraum. Zeige, dass V keine Orthonormalbasis besitzt.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5