函數概念ノ養成トイフコトハ近來ノ數學ノ教育思潮ノ一ツデアル。函數概念ノ養成トイツテモ別ニ六ケ敷イ函數ヲ擧ゲル必要ハナイ。今一ツノ變數 x ノ函數ノ種類ヲ表示スルト

- 函數 Function
  - 代數函數 Algebraic function
    - 有理函數 Rational function
      - 整函數 Integral function
      - 分數函數 Fractional fuction
    - 無理函數 Irrational function
  - 超越函數 Transcendental function
    - 三角函數 Trigonometric function
    - 對數函數 Logarithmic function
    - 等

今カラ最モ多ク用ヒルノハ整函數デアル。之ヲ普通**有理整函數** Rational integral function トイフ。

有理整函數ハ加減乘ノ三演算ヲ有限回施シテ得ラレル函數デアルガ，更ニ之ヲ分類シテ

一次函數 linear function (又ハ function of first degree)

二次函數 quadratic function (又ハ function of second degree)

三次函數 cubic function (又ハ function of third degree)

四次函數 quartic function (又ハ function of fourth degree)

高次函數 function of higher degree

等トスル。次ニ各次ノ函數ノ一般的例ヲ示スナラバ

一次函數	$ax+b$	但シ　$a \neq 0$
二次函數	ax^2+bx+c	$a \neq 0$
三次函數	ax^3+bx^2+cx+d	$a \neq 0$
....	....	

一般ニ n 次函數ハ

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n \qquad a_0 \fallingdotseq 0$$

x ノ最高次ノ係數 a_0 ハ一般ニ 0 ナル事ヲ許サヌ。何トナレバ a_0 ガ 0 ナル時ハ次數ガ低下シテ考ヘラレタル次數ノ函數デナイ事トナルカラデアル。x ノ最高次ノ係數 a_0 ヲ**主係數** leading coefficient トイフ。

一次函數トカ二次函數トカイフノハ有理整函數ノトキ丈ケデアル。倘變數ガ x, y ノ二ツニナルコトモアルシマダ多クナルコトモアルガ何レモ茲デイフノハ實變數ノコトデアル。

又 $y=2x+3$ 及ビ $y=\sin x$ ハ何レモ y ハ x ノ函數デアルガ之ヲ $x=\frac{1}{2}(y-3)$ 及 $x=\text{arc}\sin y$ トスルト x ハ又 y ノ函數デアル。即チ變數ト函數トハ絶對的ノモノデハナク相互ニ變ヘ得ルモノデアル。

問 題 29

1 (一) x ノ二次函數

(二) z ハ x, y ノ二次函數

(三) x, y ノ二次函數

2 一頂點ヨリ出ヅル對角線ノ數ハ $(n-3)$ 本デ n 個ノ頂點カラデハ $n(n-3)$ デアルガ, 實ハ一本ガ二度數ヘラレテキルカラ

$\frac{n(n-1)}{2}$ 　答 $\frac{n(n-1)}{2}$

3 (一) $x=\frac{1}{5}(y+3)$

(二) $x=\frac{y}{3}+\frac{3}{y}$

(1) 元金, 利率, 期間ノ函數デアル。公式

$$S=A(1+r)^n$$

(2) 直角三角形ノ直角ヲ挾ム二邊ヲ x, y トシ, 斜邊ヲ z トスレバ

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

(3) $s^2=9.8d+9.8\times3h$

$$h=\frac{s^2-9.8d}{9.8\times3}$$

$$\therefore\ h=\frac{s^2}{29.4}-\frac{d}{3}$$

答 $h=\frac{s^2}{29.4}-\frac{d}{3}$

例ヘバ $2x+3$ ハ變數 x ノ一次函數デ

$x^2+2xy+y^2$ ハ變數 x, y ノ二次函數デアル。

モシ代數式ノ數値ヲ他ノ一ツノ數デ表シ

$y=2x+3$, $z=x^2+2xy+y^2$ 　ノ如ク書クトキハ y ヲ x ノ函數トイヒ, z ヲ x, y ノ函數トイフ。

問 題 29

1 次ノ式ハ如何ナル變數ノ函數デアルカ。

(一) $x^2+4x-10$

(二) $z=\pi xy$

(三) $3x^2-7xy+y^2-x$

2 多角形ノ對角線ノ總數ヲ邊數ノ函數トシテ書キ表セ。

3 次ノ式ノ x ヲ y ノ函數トシテ書キ表セ。

(一) $y=5x-3$

(二) $y^2=3xy-9$

(1) 複利法ニ於ケル元利合計ハ如何ナルモノヽ函數デアルカ。

(2) 直角三角形ノ斜邊ノ長サヲ直角ヲ夾ム二邊ノ函數トシテ書キ表セ。

(3) 海ノ波ノ高サガ h 米デ海ノ深サガ d 米デアルトキ, 波ノ一秒間ニ進ム距離ヲ s 米トスレバ $s=\sqrt{9.8d\left(1+\frac{3h}{d}\right)}$ デアル。波ノ高サ h ヲ d, s ノ函數トシテ書キ表セ。

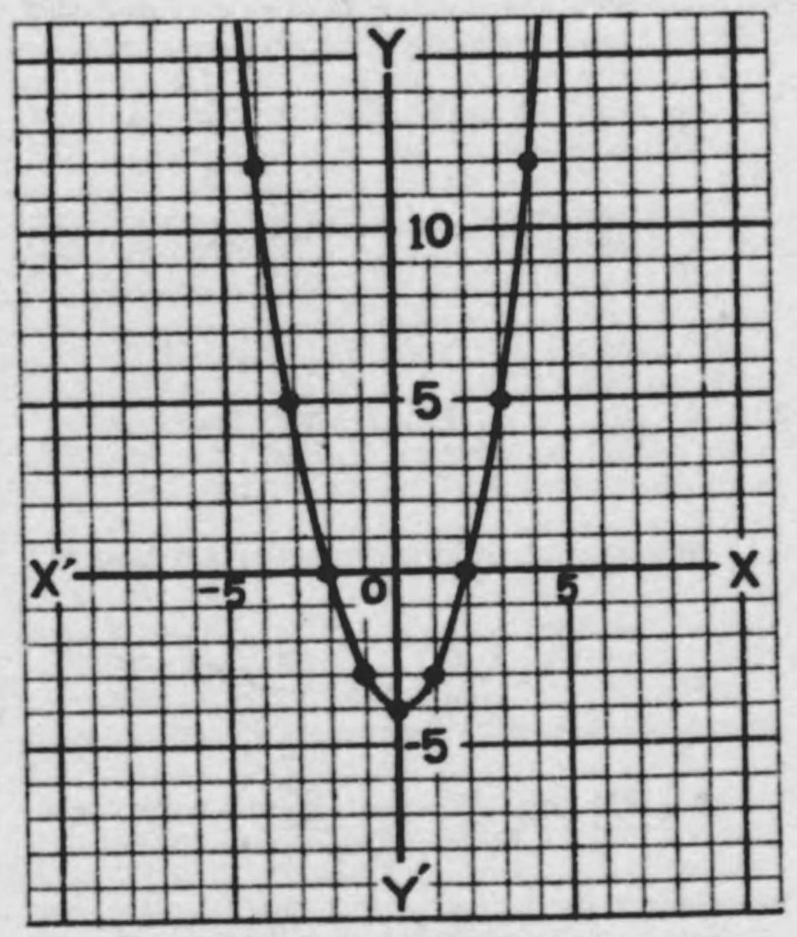
20 二次函數ノ圖示法及極大極小

二次函數ノ變化ノ模樣モ亦一次函數ノ場合ト同樣ニ圖示法ニヨツテ之ヲ明ニスルコトガ出來ル。通常函數ヲ縱坐標ニトル。

例一 x ノ函數 x^2-4 ヲ圖示セヨ。

$x^2-4=y$ トシテ變數 x ノ變化ニ伴フ函數 y ノ値ノ變化ヲ考ヘテ見ルト

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12



x, y ノ各組ノ値ヲ坐標トスル點ヲ順次ニ曲線デ連結シ滑カナ線トスルトキハ圖ノ樣ナ曲線ガ出來ル。カヽル曲線ヲ拋物線トイフ。

(1) 變數 x ノ値ノ變化ニ伴フ y ノ値ノ變化ヲ考ヘルト x ノ絶對値ガ大トナルニ從ツテ y ノ値モ大トナリ, x ノ絶對値ガ限リナク大トナルトキハ y ノ値モ限リナク大トナル。

20 二次函數ノ圖示法及極大極小

「グラフ」Graph ノコトハ上卷ニ述ベテアル。即チ上卷デ二元一次聯立方程式ニ入ル前, 坐標ニ關スル一通リノ概念 (原點, 坐標軸, 坐標), 二元一次方程式ノ「グラフ」及ビ聯立方程式ノ根ノ意義 (聯立方程式ノ不定, 不能ノ意義ヲモ) 等ヲ學習シテ來テキル筈デアル。今本節ニ入ル豫備トシテハ坐標ニ關スル一通リノ事並ビニ y ヲ x ノ函數ニシタ一次ノ「グラフ」ノ描キ方等ヲ復習スルガヨイ。

二次函數 ax^2+bx+c

ノ「グラフ」ハ常ニ**拋物線** parabola トナル。今之ヲ y ニ等シトオキ,

$$\boldsymbol{y=ax^2+bx+c} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ノ「グラフ」ヲ考ヘルニ, 之ハ y 軸ニ平行ナ直線ヲ軸トスル拋物線デアツテ, 其ノ中 $\boldsymbol{a}$ **ノ値**ガ正ナラバ上向キ Concave upward デアリ, a ガ負ナラバ下向キ Concave downward デアル。a ノ絶對値ハ拋物線ノ形ヲ決定スルモノデアツテ, a ノ絶對値ガ大ニナレバ拋物線ハ細長クナリ, 其ノ絶對値ガ小ニナレバ太ツタ形トナル。

$\boldsymbol{b, c}$ **ノ値**ハ拋物線ノ位置ヲ決定スル。其ノ中 c ハ拋物線ガ y 軸ヲ截ル截片ノ値ヲ與ヘルコトハ, 二元一次ノ「グラフ」$y=ax+b$ ニ於ケル b ノ値ト同樣デアル。之ハ x ヲ 0 トスルトキ (1) ハ

$$y=c$$

トナリ, 證明サレル。b ノ値ハ拋物線ノ軸ノ位置ガ y 軸ヨリ離レル距離ニ影響スルモノデアルガ, b ノ値ソレ自身ガ直チニ y 軸カラノ距離ヲ現ハスモノデハナイ。

即チ, a ノ値ノ同一ナ拋物線ノ形ハ全部合同デアリ, b ノ値ノ0ナル方

程式
$$y=ax^2+c$$
ノ「グラフ」ハ y 軸ヲ軸トスル拋物線, c ノ値ノ 0 ナル方程式
$$y=ax^2+bx$$
ハ原點ヲ通ル拋物線デアル。又 b, c 共＝ 0 ナル方程式
$$y=ax^2$$
ハ原點ヲ頂點トシ y 軸ヲ軸トスル拋物線デアリ, 更＝ $a=1$ ナル方程式
$$\boldsymbol{y=x^2}$$
ヲ**標準拋物線** Standard parabola トイフ。之ガ利用ノ事ハ後＝述ベル。

一般＝ x ノ二次函數 ab^2+bx+c ヲ描クニハ, 之ヲ y ＝等シトオキ, x ノ種々ノ値＝對應スル y ノ値 (即チ函數ノ値) ヲ求メ, 之ヲ表示スル。次＝對應スル x ト y トノ値ヲ坐標トスル點(**標點**)ヲ打チ, 之ヲ滑カ＝結ブ。(此ノトキ, 直線デ結ンデ折線ヨリ成ル「グラフ」ヲ作ルノハ誤ツテヰル)

拋物線 Parabola ＝就テハ, (1) 或ル直線＝關シテ對稱圖形ヲナシテヰルコト, (2) 共ノ對稱ノ軸ヲ拋物線ノ**軸** axis トイヒ, (3) 軸ト拋物線トノ交點 (即チ拋物線ノ最モ彎曲シテヰル點) ヲ拋物線ノ**頂點** Vertex トイフコトナドハ教授スルガヨロシイ。

「グラフ」ヲ描クトキ＝ y ＝種々ノ値ヲ入レテソレ＝應ズル x ノ値ヲ求メルト一般＝ y ノ一ツノ値＝對シテ x ノ二ツノ値ガ定マルノデ此方法ハアマリ感心出來ナイ。コノヤウ＝一ツノ變數ノ一ツノ値＝對シテ函數ノ二ツノ値ガ定マルトキハ**二價函數** Two valued function トイヒ, 一ツノ變數ノ値＝對シテ唯一ツノ函數ノ値ガ對應スルトキハ**一價函數** One valued function トイフ。

尙又函數ノ「グラフ」ヲ描ク＝ツイテハ函數ノ連續ナドガ問題トナツテ來ルガ, 茲デハソンナ理論的ナコトハ全部拔＝シテ唯生徒ノ直觀＝ヨツテ教授シテ貰ヒタイ。

極大極小 Maximum, Minimum

極大, 極小ハ微分學ノ力ヲ藉リ, $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メルコト＝依ツテ最モ容易＝求メラレ, 又理論的＝美麗デアル。併シ函數概念ノ養成ノ上カラ見ルトキハ, 極大極小ヲ初等的＝取扱フ事モ亦必要ナ事デアル。本書デハ全ク初等的＝之ヲ取扱ヒ, 共ノ意義ヲ「グラフ」＝依ツテ示シ, 共ノ求メ方ヲ代數計算＝依ツテ授ケヨウトスルモノデアル。

極大ト最大, 極小ト最小トハ全然意義ヲ異＝スル。此ノ區別ヲ判然ト立テテオク必要ガアル。然ル＝初等的＝取扱フ函數ハ二次乃至三次デアルカラ, 極大或ハ極小ハ一ツシカナイ。從ツテ極大ガ最大ト一致シ, 極小ガ最小ト一致スル事ガ多イ。特＝幾何學ノ場合＝於テ此ノ兩者ガ一致スル。故＝共ノ別ヲ眞＝理解サセル＝ハ「グラフ」＝依ルノガ最モ有効デアル。

x ノ二次函數ヲ一回微分スレバ一次トナリ, 之ヲ 0 トオク事＝依リ $\dfrac{dy}{dx}$ ノ値ハ一ツシカ得ラレナイ事ヨリモ知ラレルガ如ク, 二次函數＝ハ極大或ハ極小ガ一ツシカナイ。故＝二次函數 $y=ax^2+bx+c$ ＝於テ, a ガ正ナラバ拋物線ハ上向キデ, 此ノトキハ極大ハ存在シナイデ, 極小ノミガ存在スル。之＝反シ a ガ負ナラバ拋物線ハ下向キデ, 此ノトキハ極小ハ存在シナイデ, 極大ノミガ存在スル。(例二)

x ノ三次函數ヲ一回微分スレバ二次トナリ, 之ヲ 0 トオク事＝依リ $\dfrac{dy}{dx}$ ノ値ハ二ツ得ラレル。故＝三次函數＝ハ極大, 極小ガ皆デ二ツアリ, 共ノ一ツハ極大, 他ハ極小デアル。即チ四次函數以上デナクテハ極大ガ二ツ以上, 或ハ極小ガ二ツ以上ナイ。ソレガ更＝進ムト極小値ガ極大値ヨリモ大トナルコトモアル。〔附錄(52)頁(3)〕 此等ハ極大, 極小ト, 最大, 最小トノ意義ノ異ナルコトヲ最モ明瞭＝説明シテヰル。

虛數ニハ大小ガナイカラ，極大極小ヲ論ズルノハ勿論實數ノ範圍ニ限ル。之ハヨク理解サセテオク必要ガアル。即チ代數計算デ極大極小ヲ求メル方法ノ基礎トナル點ハ實ニココニアルノデアル。

代數計算ニ依ツテ極大，極小ヲ求メルニハ

(1) x ヲ含ム項全部ヲ完全平方式ニシ，x ノ値ノ如何ニカカハラズ共ノ平方ハ負デハナイカラ・・・・・・・・トスル方法ト，

(2) 與式ヲ λ トオキ，判別式ヲ考ヘル方法〔附錄(51)頁 1 ノ別解〕トガアル。

此ノ(2)ノ方法並ニ之ガ應用等ニ就テハ附錄ニ讓リ，ココデハ唯(1)ノ方法ノミヲ述ベルコトニスル。一般ニ x ノ二次函數

$$ax^2+bx+c$$

ニ於テハ

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

x ノ値ハ實數ナレバ，$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ハ x ノ値ノ如何ニ拘ラズ負ニナルコトナシ。即チ $x+\frac{b}{2a}\geqq 0$ 故ニ與式ハ $x+\frac{b}{2a}=0$ ノトキ，極小或ハ極大トナリ，其ノ値ハ $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ デアル。之ガ極小ナルカ或ハ極大ナルカハ a ノ正負ニ依ルモノデアツテ，a ガ正ナラバ $(x+\alpha)^2-\beta$ ノ形トナル故，$x+\alpha=0$ 即チ $x=-\alpha$ ノトキ，極小値 $-\beta$ トナル。之ニ反シ a ガ負ナラバ $\beta-(x+\alpha)^2$ ノ形トナル。此ノトキハ $x=-\alpha$ ノトキ，極大値 β トナル。即チ $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ガ正ナル爲ニハ，a ガ正ナルヲ要スル。a ガ正ナラバ極小トナル。之ニ反シ $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ガ負ナル爲ニハ，a ガ負ナルヲ要スル。a ガ負ナラバ極大トナル。

今此ノ抛物線上ヲ右カラ左へ辿ルトキハ x ノ値ガ減少スルニ從ツテ y ノ値モ亦減少シ $x=2$ ニ至レバ $y=0$ トナル。尙 x ノ値ヲ減少スレバ y ノ値モ減少スルガ $x=0$ ニ至レバ $y=-4$ トナリ減少ノ極點ニ達シ，コレカラ x ヲ減ズルト y ハ又增大スル。

カクノ如ク　或函數ガ減少ノ極點ニ達シテ更ニ增大シ始メルトキハ其ノ減少ノ極點ニ於ケル函數ノ値ヲ其ノ**極小値**又ハ單ニ**極小**トイフ。

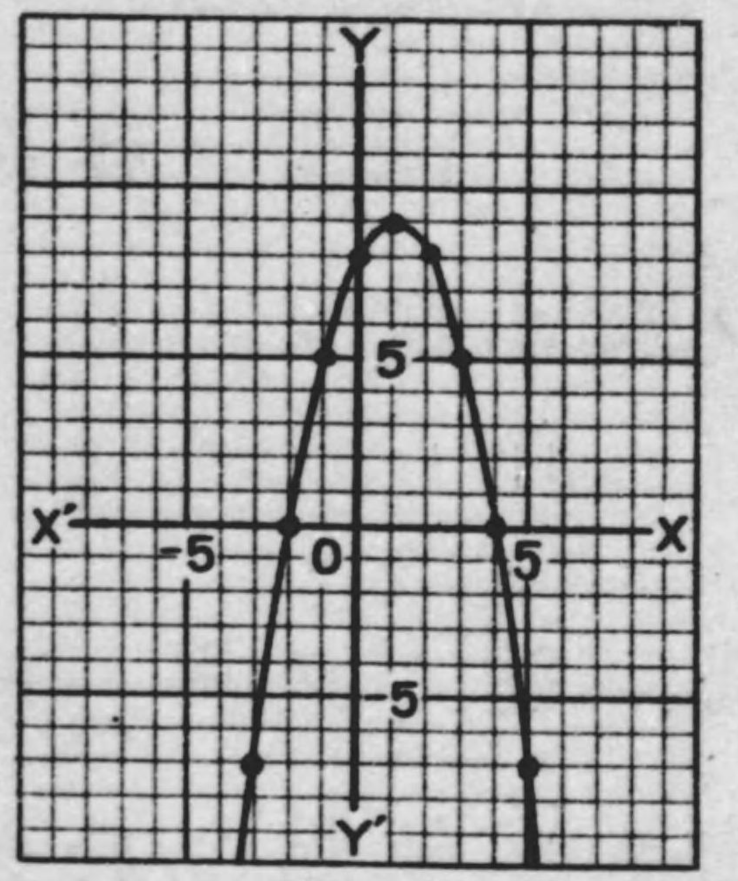
又或函數ガ增大ノ極點ニ達シテ更ニ減少シ始メルトキハ其ノ增大ノ極點ニ於ケル函數ノ値ヲ其ノ**極大値**又ハ單ニ**極大**トイフ。

(2) 圖ニ於テ抛物線ト x 軸ト交ル點ノ横坐標 ± 2 ハ函數 y ヲ 0 ニスル。即チ $x^2-4=0$ ヲ滿足スル x ノ値デアルカラ　± 2 ハ $x^2-4=0$ ノ根デアル。

例二　x ノ函數 $8+2x-x^2$ ヲ圖示シ之ヲ0ト置イタトキノ根及ビ極大極小ヲ求メヨ。

$8+2x-x^2=y$　トシテ次ノ表ニヨツテ之ヲ圖示スレバ例一ノ樣ナ抛物線トナル。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-7	0	5	8	9	8	5	0	-7



(1)　此ノ曲線ト x 軸ト交ル點ノ横坐標 -2 ト4トハ $8+2x-x^2=0$ ノ根デアル。

(2)　函數 y ノ極大極小ヲ求メルニハ先ヅ與式ヲ次ノ樣ニ變形セヨ。

$$y=8+2x-x^2=9-(1-x)^2$$

$(1-x)^2$ ハ x ノ實數ナル範圍ニ於テハ決シテ負トナラナイカラ $(1-x)^2=0$ 即チ $x=1$ ノトキ函數 y ハ9トイフ極大値ヲトル。

夫ヨリ x ノ絕對値ガ大トナルニ從ツテ $(1-x)^2$ モ亦大トナル故ニ y ハ小トナリ，x ノ絕對値ガ限リナク大トナルトキハ $(1-x)^2$ ハ限リナク大トナル。故ニ y ハ限リナク小トナル。

故ニ函數 y ニハ極小値ハナイ。

一元方程式ノ「グラフ」ニ依ル解法

一般ニ一元方程式 $f(x)=0$ ヲ「グラフ」ニ依ツテ解クニハ，之ヲ y ニ等シトオキ　　　$y=f(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

トスル。此ノ「グラフ」ヲ描キ，之ガ x 軸ト交ル點ノ横坐標ヲ讀メバヨロシイ。何トナレバ，x 軸ト交ル點ノ縱坐標ハ常ニ 0 デアルカラ $y=0$. 之ヲ (1) ニ代入スレバ

$$f(x)=0$$

トナリ，之レ與ヘラレタ方程式デアルカラデアル。即チ (1) ノ「グラフ」ヲ描ク勞サヘ厭ハナイナラバ何次ノ方程式デモ（近似的ニナル事ガ多イガ）一元方程式ヲ解ク事ガ出來ル。

今之ヲ一元二次方程式　$ax^2+bx+c=0$　ニ就テ考ヘルニ，其ノ左邊ヲ y ニ等シトオキ　　$y=ax^2+bx+c\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

ノ「グラフ」ヲ描キ，之ガ x 軸ト交ル點ノ横坐標ガ與方程式ノ根ヲ與ヘル。而シテ (2) ハ拋物線デアリ，x 軸ト一般ニ二點デ交ルカラ根ハ二ツアル。(三點以上デハ決シテ交ラヌ。)併シ「グラフ」ハ實數ヲシカ表ハサナイカラ拋物線ガ x 軸ト

(1)　交ルトキ，二ツノ相異ナル實根

(2)　切スルトキ，二ツノ相等シイ實根

(3)　交ラズ切シナイトキ，二ツノ相異ナル虛根

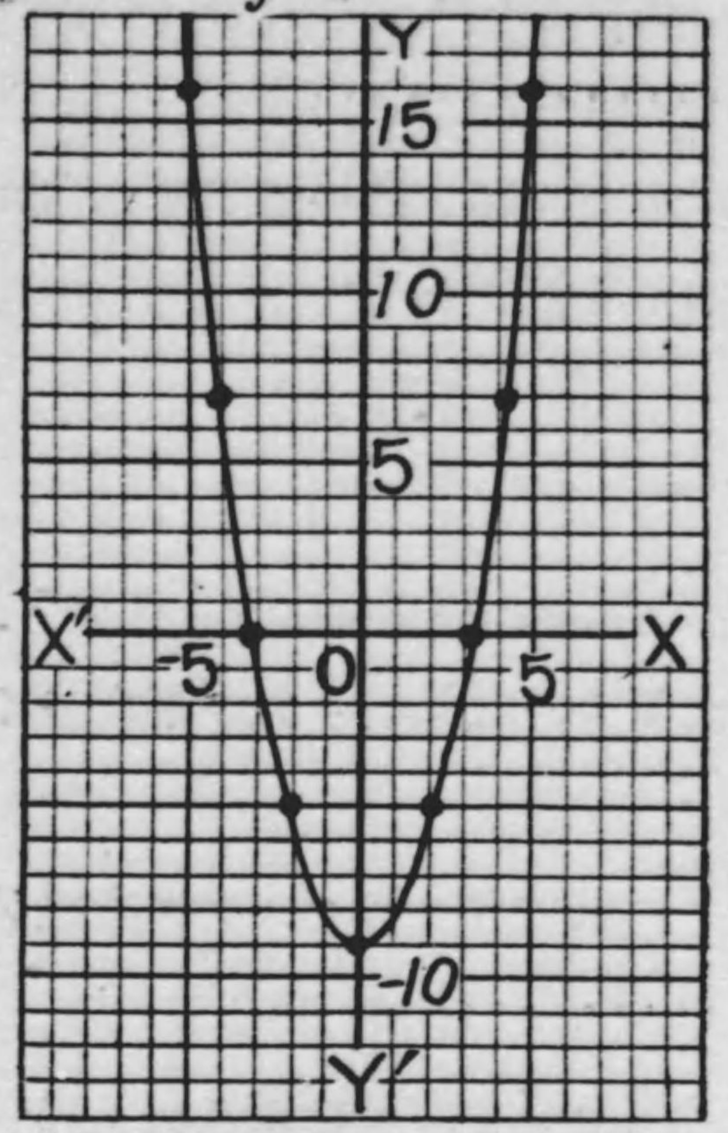
ヲ有スルトイフ。

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

故ニ　$y=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$　ソコデ $b^2-4ac<0$ ナラバ x ノ實數値ニ對シテ括弧ノ中全體ハ常ニ正デアルカラ y ハ常ニ a ト同符號ヲ有スルコトトナツテ決シテ x 軸ニ交ラナイ。之ハ $b^2-4ac<0$ ノトキハ方程式ハ虛根ヲ有スルコトト一致シテヰル。

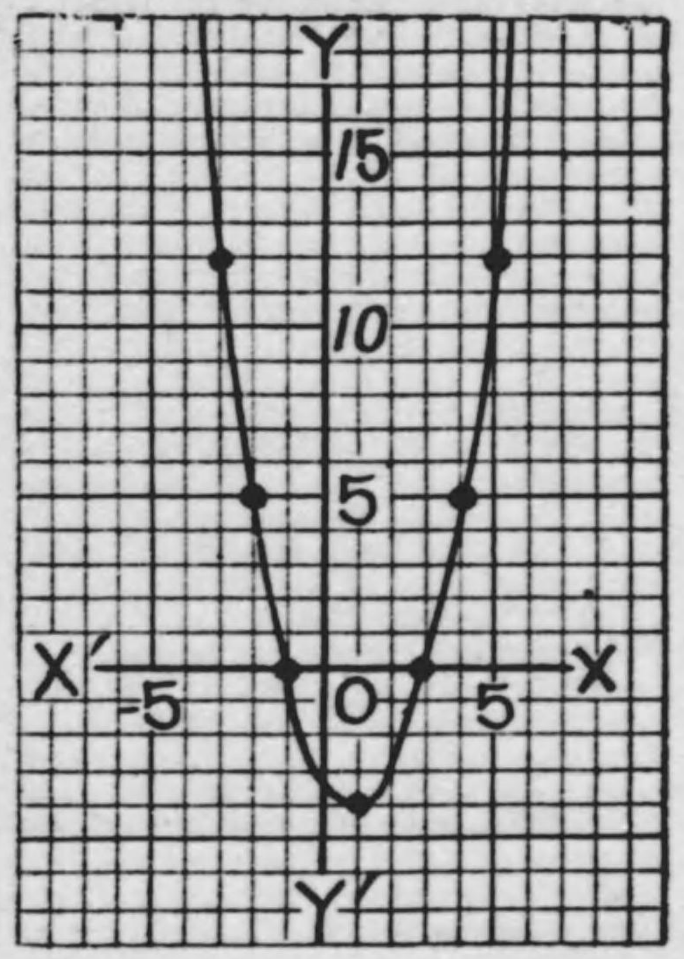
問　題　30

1　$y=x^2-9$



答　$x=0$ ノトキ極小。
極小值-9。根ハ ±3

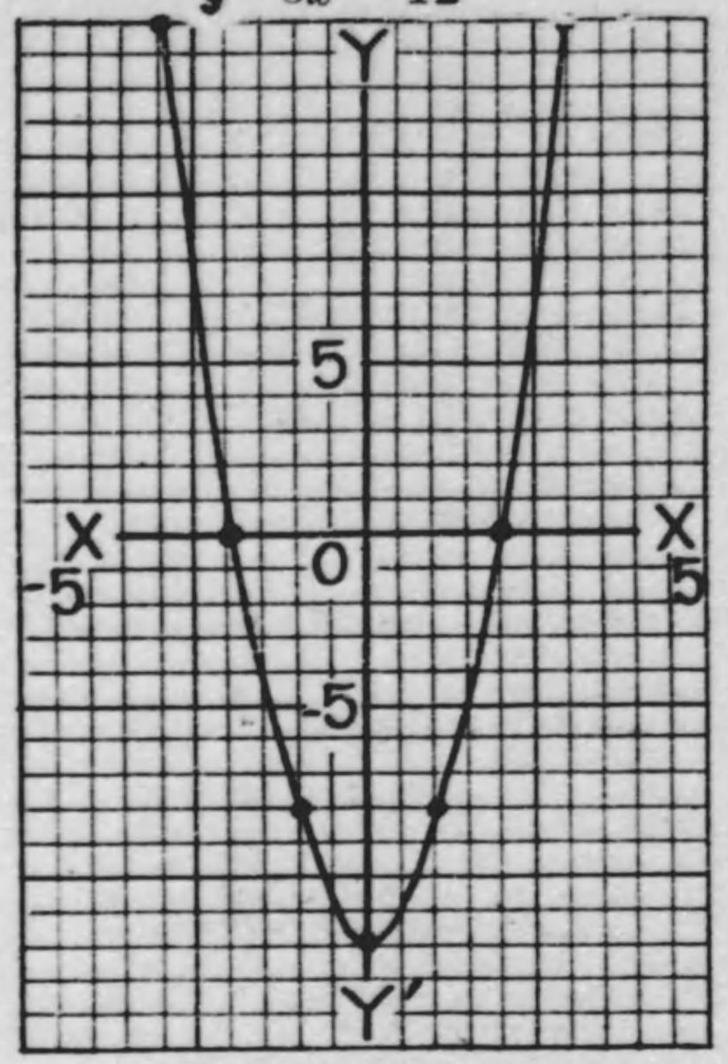
2



$y=x^2-2x-3$ ∴ $y=(x-1)^2-4$

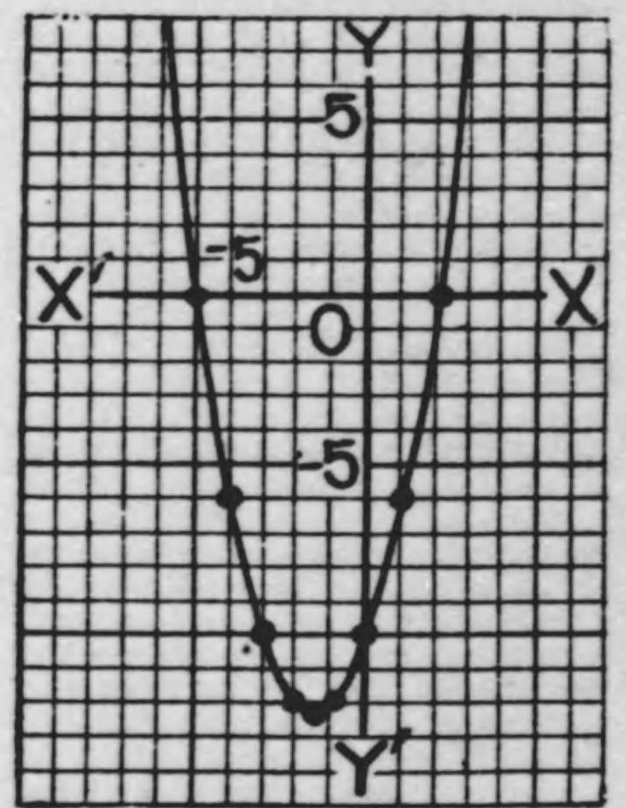
答　$x=1$ ノトキ極小。
極小值-4。根ハ $-1, 3$

(1)　$y=3x^2-12$



答　$x=0$ ノトキ極小。
極小值-12。根ハ ±2

(2)

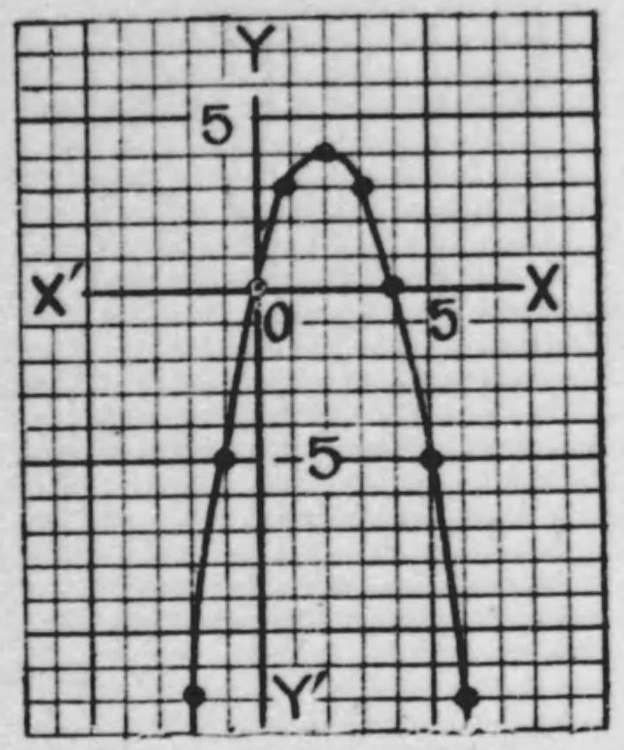


$y=x^2+3x-10$

∴ $y=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$

答　$x=-\frac{3}{2}$ ノトキ極小。
極小值-12.25。根$-5, 2$

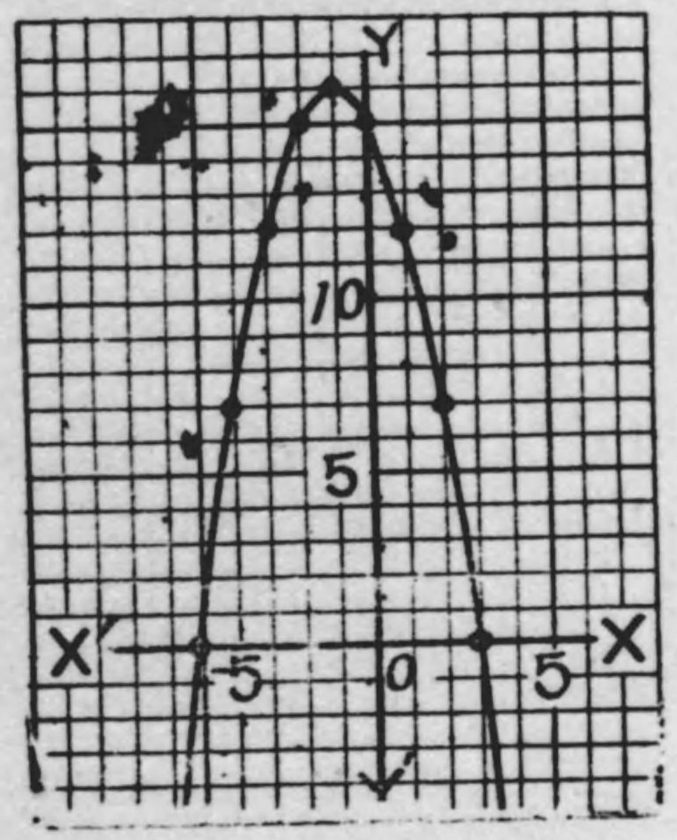
3　$y=4x-x^2$



$y=4-(2-x)^2$

答　$x=2$ ノトキ極大。
極大值4。根ハ $0, 4$

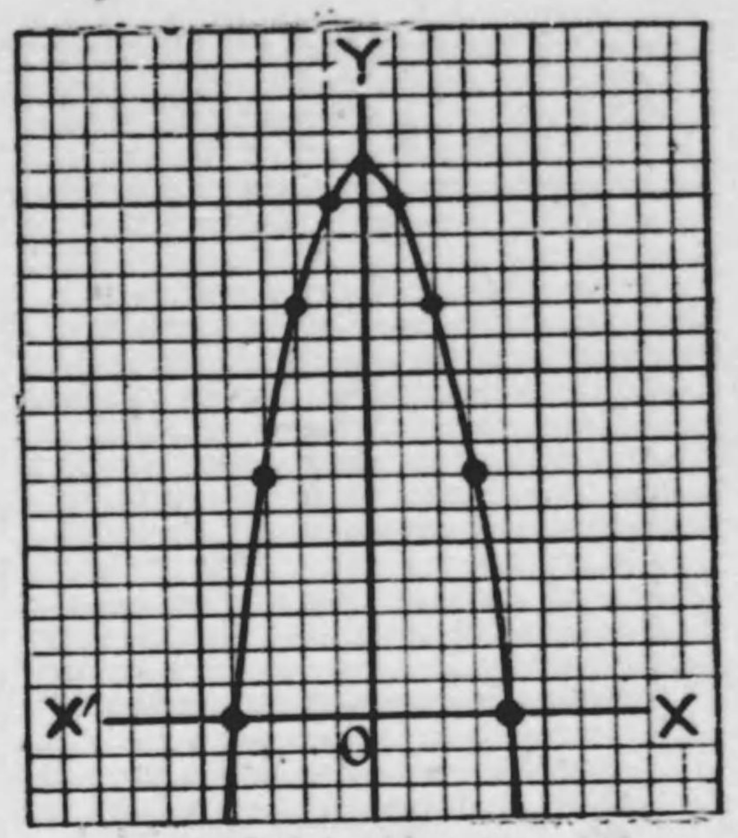
4　$y=15-2x-x^2$



$y=16-(1+2x+x^2)=16-(1+x)^2$

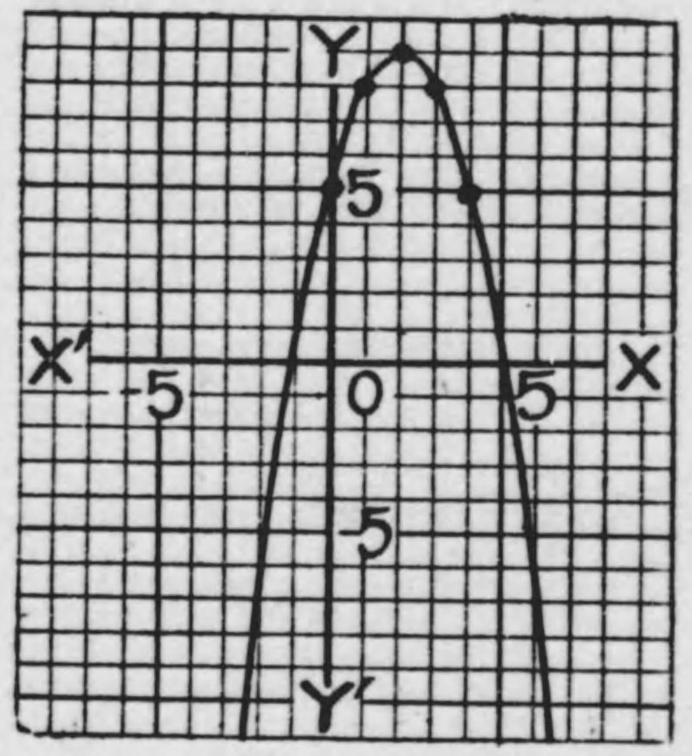
答　$x=-1$ ノトキ極大。
極大值16。根ハ $-5, 3$

(3)　$y=16-x^2$



答　$x=0$ ノトキ極大。極大值16。根ハ±4

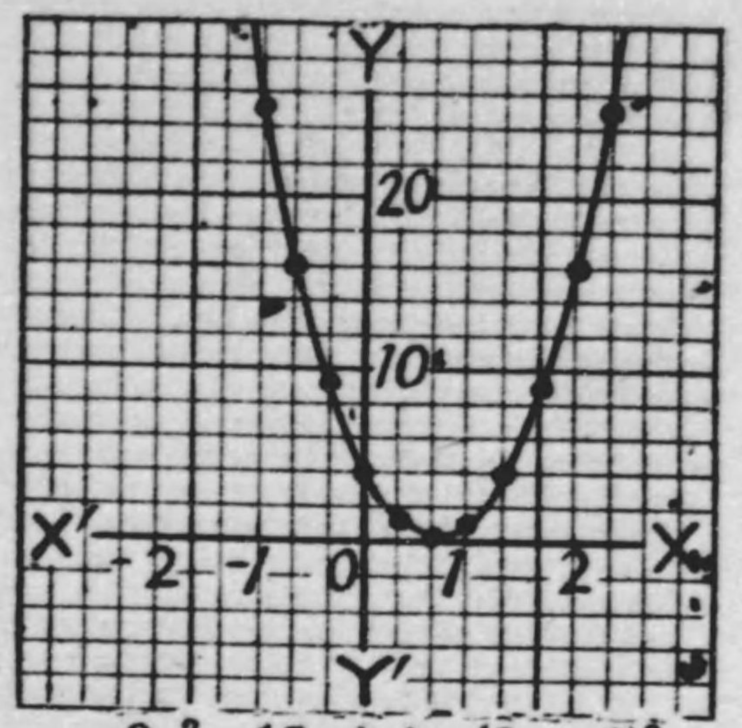
(4)　$y=-x^2+4x+5$



$y=-(x^2-4x+4)+9=9-(x-2)^2$

答　$x=2$ ノトキ極大。極大值9。根ハ $-1, 5$

5　$y=9x^2-12x+4$

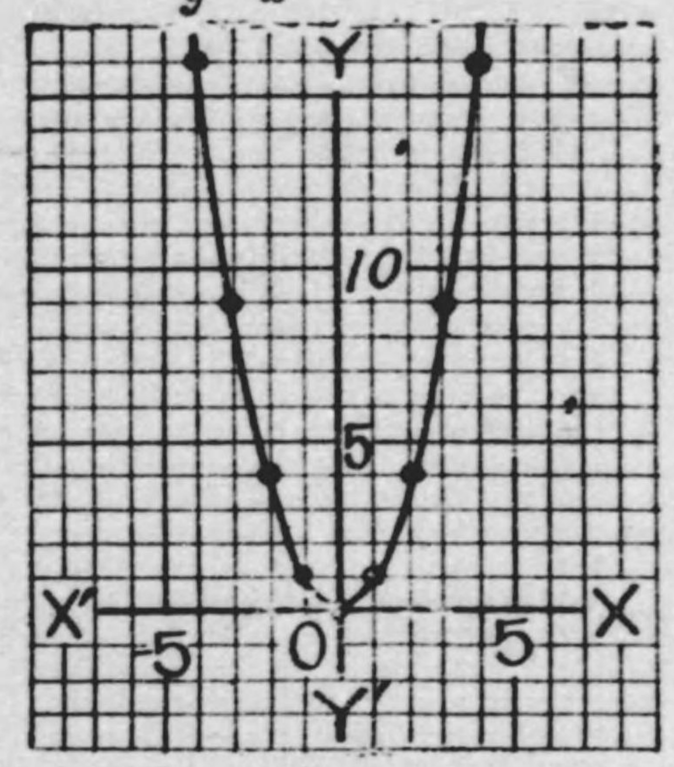


$y=9x^2-12x+4=(3x-2)^2$

答　$x=\frac{2}{3}$ ノトキ極小。

極小値 0。根ハ$\frac{2}{3}$(等根)

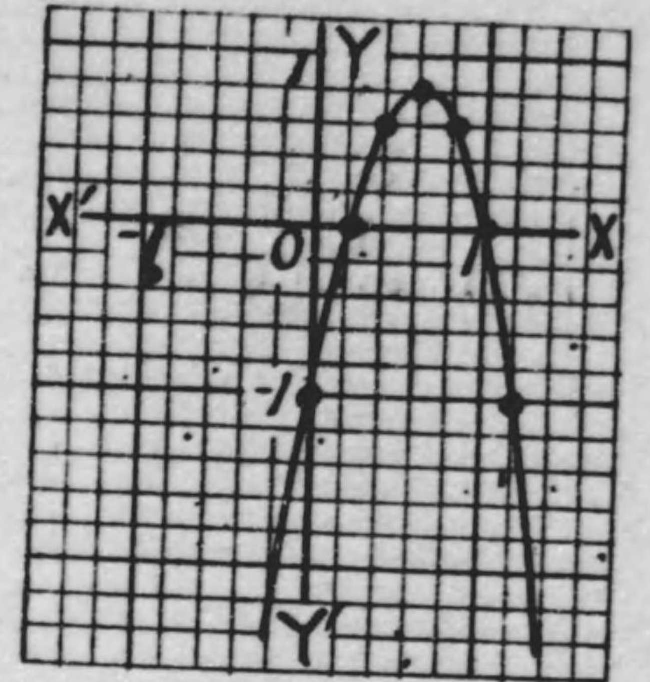
6　$y=x^2$



1, 2, 3, 4 及ビ (2), (3), (4) トコヽニ得タ抛物線トハ合同デアリ，全部重ナル。

即チ $y=ax^2+bx+c$ ノ「グラフ」ニ於テaノ値ハ抛物線ノ形ヲ決定スルノニ，此等ハ全部 $a=1$ デアルカラデアル。(78, a, b頁參照) ソコデ6ノ結果ヲ手際ヨク描イテ

(5)　$y=6x-1-5x^2$

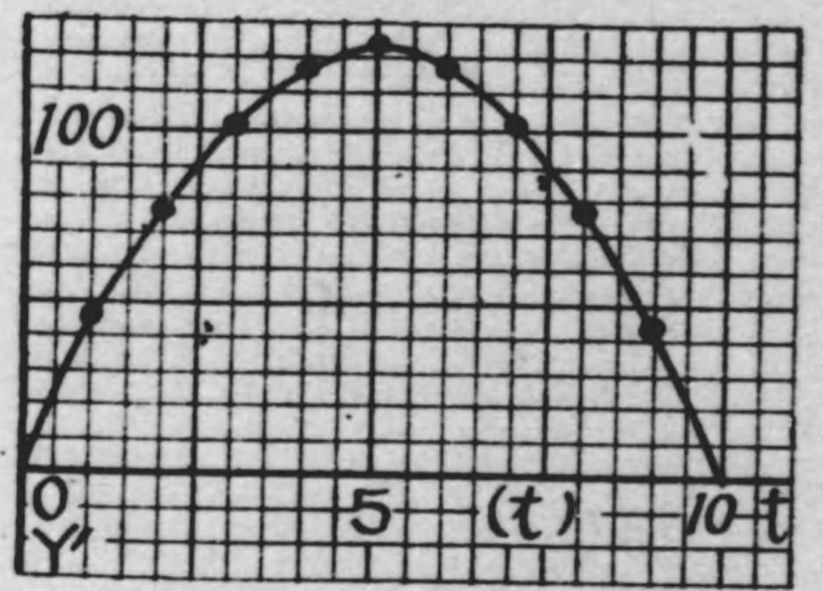


$$y=-5(x^2-\frac{6}{5}x+\frac{9}{25})+\frac{4}{5}$$
$$=-5(x-\frac{3}{5})^2+\frac{4}{5}$$

答　$x=\frac{3}{5}$ ノトキ極大。

極大値$\frac{4}{5}$。根ハ$\frac{1}{5}$, 1

(6)　$s=vt-\frac{1}{2}gt^2$



$s=vt-\frac{1}{2}gt^2$ ニ於テ，g ハ常數(地球表面上或ハ之ニ近イ所デハ)デアル事，並ニ之ハ重力ニ依ル加速度ノ値デsヲ cm ニ，tヲ秒ニトレバ 980 秒²糎ナル値ヲ有スル事ナド示サレタイ。

今sノ單位ヲ m ニトレバ本題ニ與ヘラレタ通リ9.8米トナル。v ハ

問　題　30

次ノ式ノ極大又ハ極小値及ビ其ノ式ヲ0トシタ方程式ノ根ヲ圖示及ビ代數計算ニヨツテ求メヨ。1——(5)

1　x^2-9	(1)　$3x^2-12$
2　x^2-2x-3	(2)　$x^2+3x-10$
3　$4x-x^2$	(3)　$16-x^2$
4　$15-2x-x^2$	(4)　$-x^2+4x+5$
5　$9x^2-12x+4$	(5)　$6x-1-5x^2$

6　$y=x^2$ ヲ圖示シ前問題 1, 2, 3, 4 ニ於テ得タ各抛物線ニ重ネ合セテ見ヨ。

(6)　毎秒 v 米ノ速サデ地上カラ眞上ニ投ゲ上ゲタ物體ガ t 秒間ニ進ム距離 s ハ次ノ公式デ表サレル。$s=vt-\frac{1}{2}gt^2$　但シ $g=9.8$ 秒々米デアル。

今 $v=49$ 秒米トシテ此ノ公式ヲ圖示シ此ノ物體ガ再ビ地上ニ歸ルマデニ要スル時間及ビ最モ高ク昇ツタトキノ高サヲ求メヨ。

21 二元二次方程式ノ圖示法

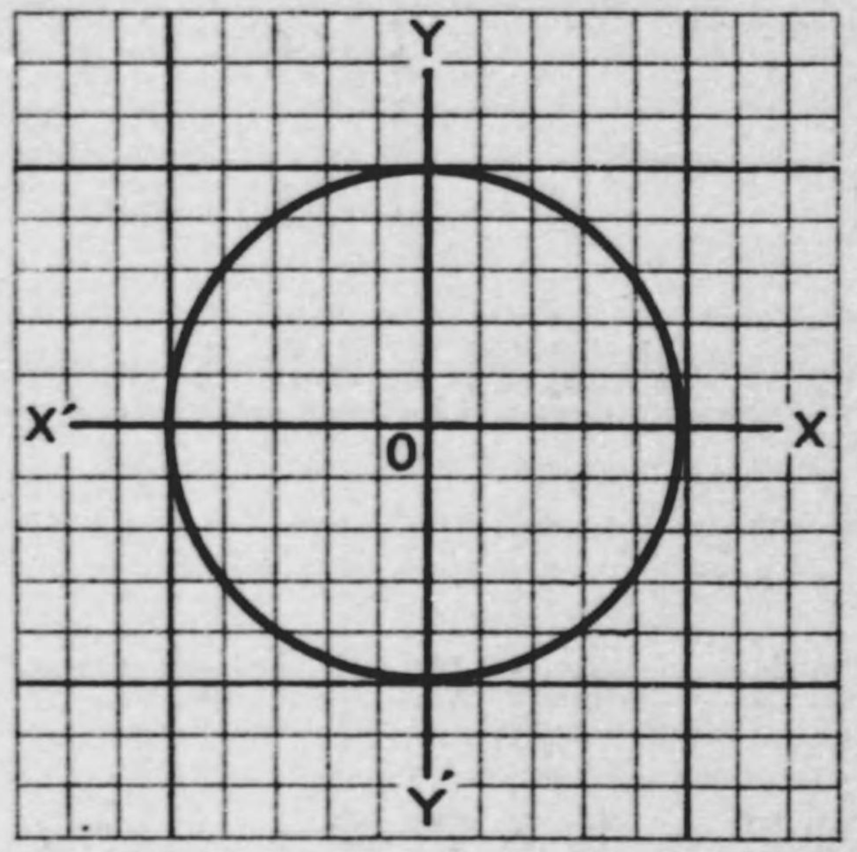
例一 $x^2+y^2=25$ ヲ圖示セヨ。

解 $x^2+y^2=25$ ノ y ヲ變數 x ノ函數トシテ表セバ

$$y=\pm\sqrt{25-x^2}$$

x	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6
y	±5	±4.90	±4.58	±4	±3	0	$\pm\sqrt{-11}$

トナリ。之ヲ圖示スレバ次ノ如ク圓トナル。



圓ノ半徑ハ 5 劃 $(=\sqrt{25})$ ノ長サデアル。

$y=\pm\sqrt{25-x^2}$ ニ於テ $x>5$, $x<-5$ ナル x ノ値ニ對シテハ y ノ實數値ハナイ。

又 $x=\pm\sqrt{25-y^2}$ デアル。故ニ $y>5$, $y<-5$ ナル y ノ値ニ對シテハ x ノ實數値ハナイ。

「ボール」紙或ハ薄イ板(セルロイド」板ナラバ一層適切)ニ貼ツテ之ヲ切リ拋物線ノ定規ヲ作ツテオケバ此等ノ問題ノミナラズ,後ニモ大イニ役立ツ事ヲ示シタイモノデアル。(86頁參照)

初速度ヲ示スモノデアツテ,本題デハ之ヲ 49 秒米トスル。卽チ上ニ描イタ拋物線ハ $s=49t-4.9t^2$ ノ「グラフ」デアル。

答 最高 122.5m

再ビ地上ニ歸ルマデノ所要時間10秒

21 二元二次方程式ノ圖示法

二元二次方程式ノ一般ナル形ハ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

デアル。併シ此ノ方程式ノ「グラフ」ハ解析幾何學ノ敎ヘル所ニヨリ適當ニ坐標軸ヲ變換スレバ次ノ場合ニ歸セシメル事ガ出來ル。

(1) $x^2+y^2=r^2$ 原點ヲ中心, r ヲ半徑トスル**圓** Circle

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ x 軸ヲ $\pm a$, y 軸ヲ $\pm b$ デ截ル**橢圓** Ellipse

若シ $a=b$ ナラバ圓トナル。

(3) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$, $y=\dfrac{k}{x}$ 或ハ $xy=k$

前二者ハ共ニ $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=0$ 卽チ $\dfrac{y}{b}=\dfrac{x}{a}$ 及ビ $\dfrac{y}{b}=-\dfrac{x}{a}$ ヲ漸近線トスル**双曲線** Hyperbola

後ノ一ツハ x 軸, y 軸ヲ**漸近線**トスル双曲線デ漸近線ハ直交シテキルカラ之ヲ**直角双曲線**又ハ**等邊双曲線**トイフ。

(4) $y=ax^2+bx+c$, $y^2=px$ **拋物線** Parabola

(5) $ax^2+bxy+cy^2=0$ 卽チ $(lx+m)(l'x+m')=0$

之卽チ原點ニ於テ相交ハル**二直線**デアル。

(6) $x^2+y^2=0$ ハ原點。之ヲ點圓トイフ。

上ノ六ツハ何レモ二元二次方程式デアツテ, ソノ「グラフ」ハ圓, 橢

圓, 双曲線, 拋物線, 相交二直線 (或ハ點) ノ何レカデアル。此ノ五ツノ線ヲ**二次曲線**トイフノハ二元二次方程式ノ「グラフ」デアルカラデ, 而モ二次曲線ハ直圓錐ノ諸種ノ截面ト一致スル。

(1)　直截面……………………………………圓

(2)　任意ノ截面 ……………………………橢圓

(3)　頂點ヲ通ラズシテ一母線ニ平行ナル截面‥拋物線

(4)　頂點ヲ通ラズ二ツノ母線ニ平行ナル截面‥双曲線

(5)　頂點ヲ通ル平面ノ截面 ……………相交二直線

(6)　頂點ヲ通リ圓錐ヲ一點ニ於テ截ルトキ‥‥點(點圓)

故ニ二次曲線ヲ**圓錐曲線** (Conic section) トモイフ。　(85, b)頁參照。

二次曲線ハ上述ノ如ク, 五ツノ種類ニ分ツ事ガ出來ルケレド, 之ヲ尙一般的ニ述ベルナラバ橢圓ニ於テ $a=b$ ノトキ卽チ長徑ト短徑トノ等シイトキハ圓トナルカラ, 圓ハ橢圓ノ特殊ノ場合トミル事ガ出來ル。直角双曲線ハ勿論双曲線ノ特別ノモノデアリ, 點圓 (或ハ點橢圓) ハ勿論半徑ガ無限小トナツタ圓ト考ヘ得ルカラ橢圓ノ特別ノ場合デアル。又相交ル二直線ハ双曲線ノ特別ナモノト考ヘラレル。故ニ二次曲線ハ之ヲ

橢圓,　　拋物線,　　双曲線

ノ三ツニ大別スル事ガ出來ル。

今一般ノ二元二次方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ニ於テ, 之ガ上記三種ノ場合ニナル條件ヲ列擧シヨウ。

(i)　$h^2-ab \fallingdotseq 0$　有心二次曲線 $\begin{cases} (a)\ h^2-ab<0\ \text{橢圓} \\ \quad (h=0,\ a=b\ \text{ノトキ圓}) \\ (b)\ h^2-ab>0\ \text{双曲線} \end{cases}$

(ii)　$h^2-ab=0$　無心二次曲線………………拋物線

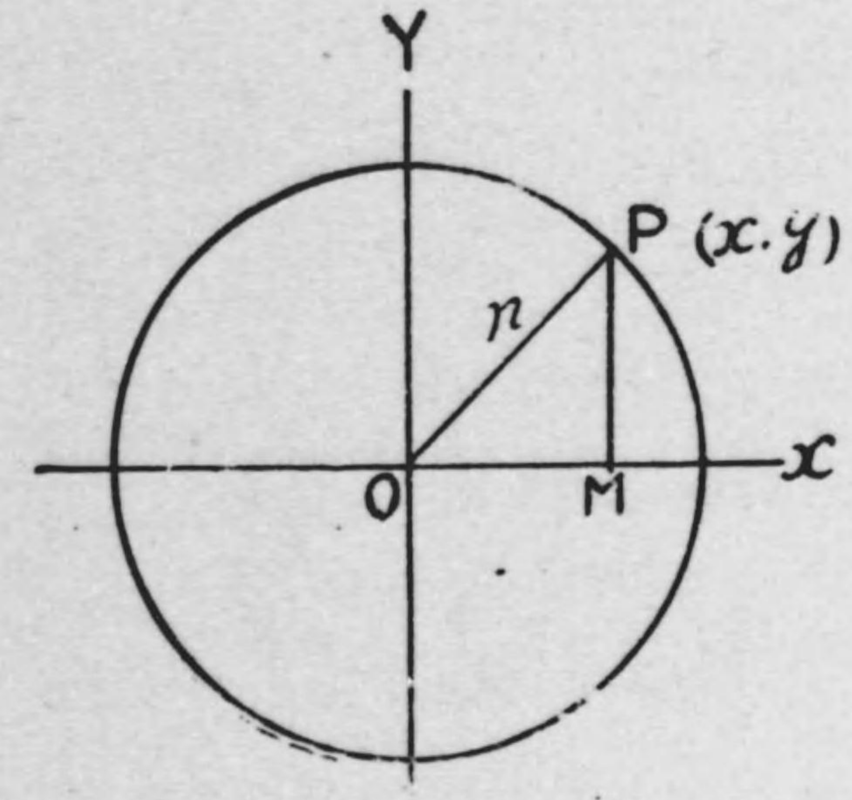
圓 circle

$$x^2+y^2=r^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

或ハ

$$ax^2+ay^2+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

等ハ原點ヲ中心トスル圓ヲ表ハス。圓ニ就イテハ既ニ幾何學デ半徑, 中心等ノ定義ヨリ其ノ幾何學的性質ヲ既ニ學ンデ來テヰルカラ, 曲線ソノモノニ就イテ說明スル要ハナイ。其ノ「グラフ」ハ始メハ一々點ヲ打ツテ描カセ, 後ニハ (1) ノ形ニ於テハ r ヲ半徑トシ, 原點ヲ中心トスル事ヨリ「コンパス」デ描カセルモヨイ。(2) ハ a デ割リ, 絕對項ヲ右邊ニ移項スル事ニ依リ (1) ノ形トナル。



(1)ガ圓ヲ表ハス證明ハヤツテミセルモヨイ。

(1)ノ表ハス曲線上ノ任意ノ點ヲ $P(x, y)$ トシ, PM ヲ x 軸ニ垂直ニ下ストキ「ピタゴラス」ノ定理ニ依リ

$$OM^2+PM^2=OP^2$$

然ルニ P ヲ(x, y) トスレバ

$PM=y$, $OM=x$. 故ニ上式ハ　$x^2+y^2=OP^2$

然ルニ與式 (1) ヨリ　$x^2+y^2=r^2$

$\therefore\quad OP^2=r^2$

$OP=r$　(負ハトラヌ。)

r ハ常數デアルカラ, OP ノ長サハ一定。而シテ O ハ定點デアルカラ一定點 O ヨリ一定ノ距離 r ニアル點 P ノ軌跡ハ O ヲ中心トシ r ヲ半徑トスル圓デアル。

82頁ニアル表ノ複號ハ四組ニ作ル事, 及ビ實數ノ範圍デアル爲ニハ x ノ値ヲ $+5$ヨリ大或ハ -5 ヨリ小ニトツテ見ル必要ノナイ事ヲ充分理解サセルガヨイ。

楕圓 ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

或ハ　$$ax^2+by^2+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ハ原點ヲ中心トスル楕圓ヲ表ハス。(2) ハ a, b ヲ以テ兩邊ヲ割ルコトニ依リ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c$ ノ形トナル。ソノ $c=1$ ナルトキガ (1) デアル。今 (1) ニ於テ述ベヨウ。便宜 $a>b$ トスル。

(1) ヲ x ノ陽函數ノ形ニ直セバ

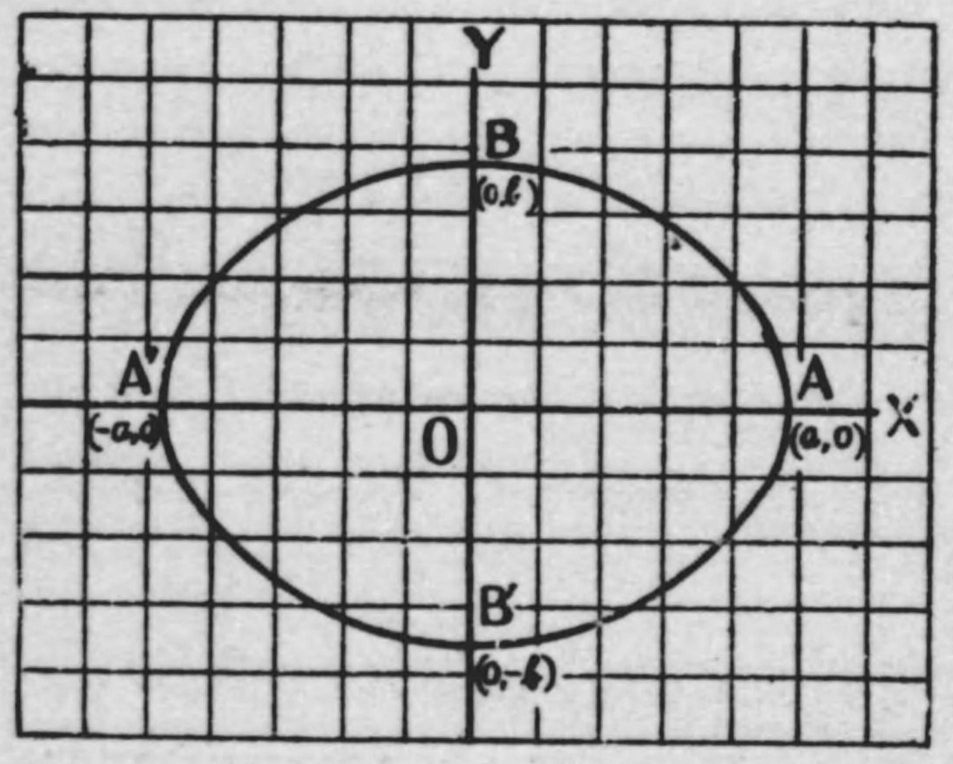
$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

然ルニ82頁ニ示シタ通リ　$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3')$

ハ a ヲ半徑, 原點ヲ中心トスル圓デアル。故ニ (3) ノ縱坐標ハ圓ノ縱坐標ノ $\frac{b}{a}$ 倍デアル。今 $a>b$ トシテキルカラ, (3′) ノ圓ヲ描キ, ソノ縱坐標ヲ常ニ其ノ $\frac{b}{a}$ 倍ダケニトレバ (3) ノ「グラフ」卽チ (1) ノ「グラフ」ヲ得ル。之レ卽チ楕圓デアル。(3′) ノ圓, 卽チ

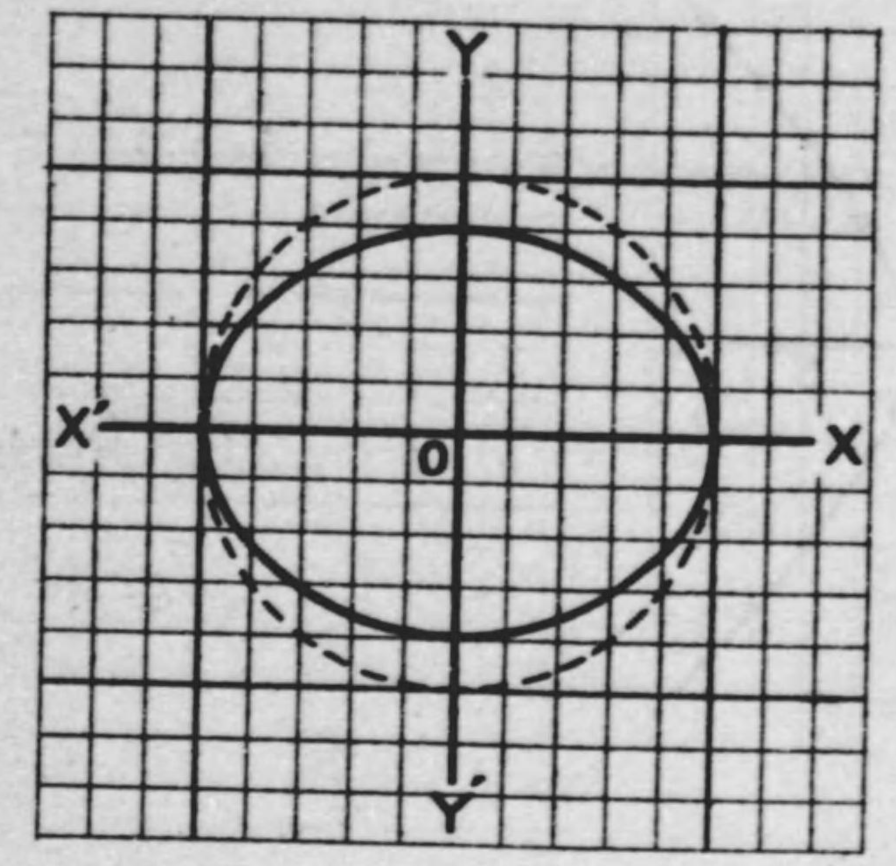
$$x^2+y^2=a\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1')$$

ヲ楕圓ノ補助圓 auxiliary circle トイフ。機械的ニ楕圓ヲ描クニハ補助圓ヲ描キ比例「コムパス」デソノ縱坐標ノ $\frac{b}{a}$ 倍ヲトレバヨイ。



楕圓ノ對稱ノ中心 O ヲ其ノ中心トイヒ, AA' ヲ其ノ長軸, BB' ヲ短軸トイフ。又長軸ノ半 OA ヲ其ノ長徑, 短軸ノ半 OB ヲ短徑トイフ。故ニ (1) ノ「グラフ」ハ a ヲ長徑トシ, b ヲ短徑, 原點ヲ中心トスル楕圓デアル。

例二　$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ヲ圖示セヨ。



解　$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$　ヲ變化スレバ

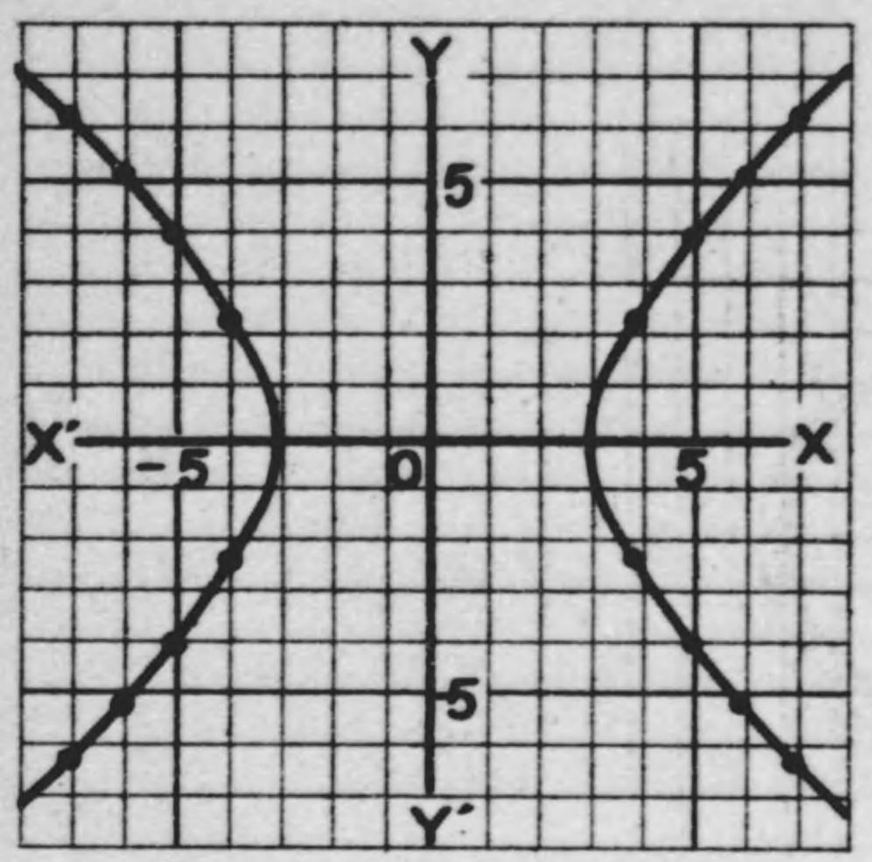
$$y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$$　トナル。

x ノ値ニ相當スル y ノ値ハ丁度例一ノ場合ノ値ノ $\frac{4}{5}$ デアル。故ニ圓ノ縱ガ $\frac{4}{5}$ ニ縮ンダ形トナッテキル。

x	0	±1	±2	±3	±4	±5
y	±4	±3.92	±3.66	±3.2	±2.4	0

圖ノヤウナ形ノ曲線ヲ楕圓トイフ。

例三 $x^2-y^2=9$ ヲ圖示セヨ。



解 $x^2-y^2=9$ ヨリ

$$y=\pm\sqrt{x^2-9}$$

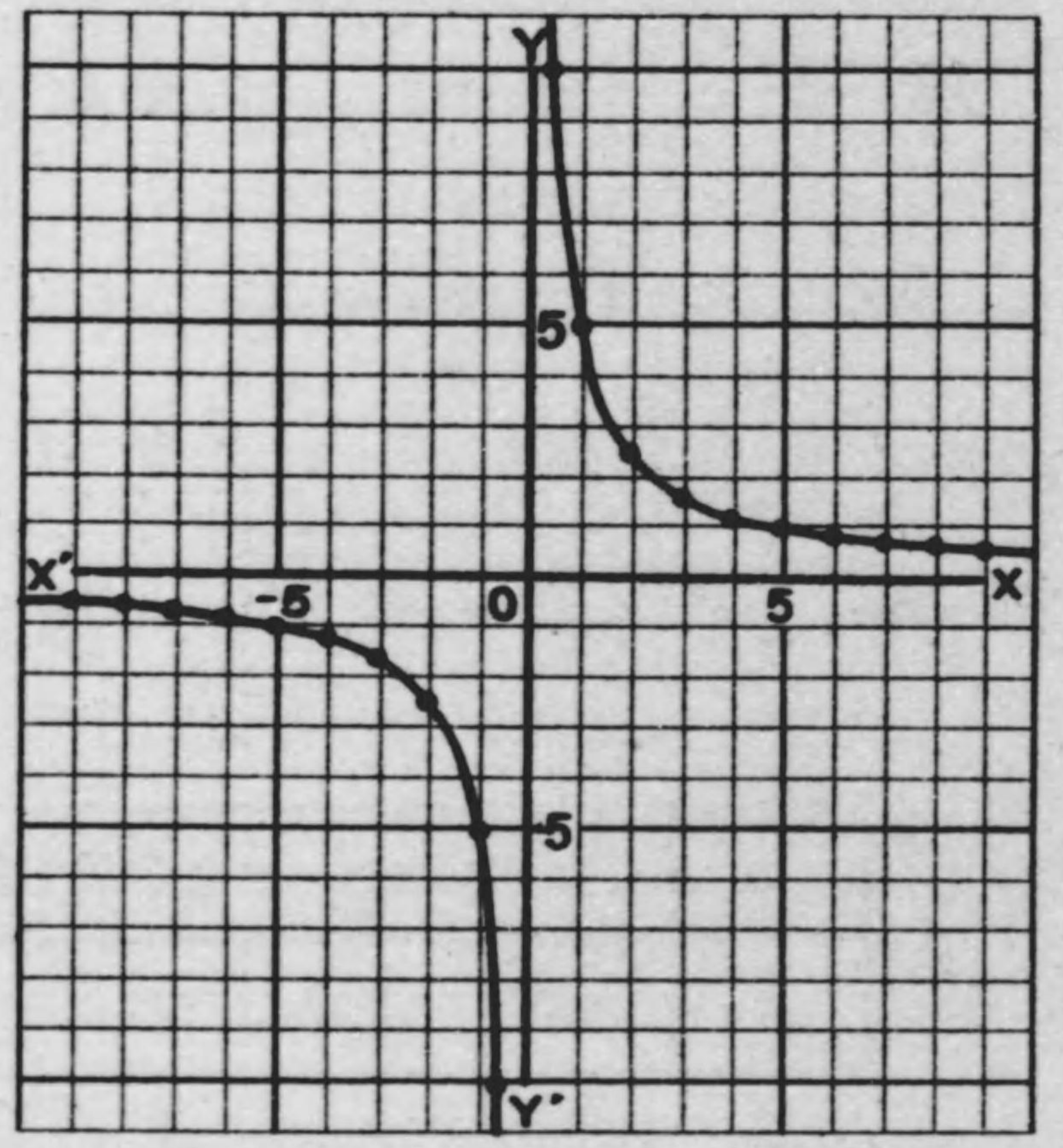
x	±3	±4	±5	±6	±7
y	0	±2.65	±4	±5.20	±6.32

カヽル形ノ曲線ヲ雙曲線トイフ。

例四 $y=\dfrac{5}{x}$ ヲ圖示セヨ。

解 變數 x ノ變化ニ伴フ函數 y ノ値ヲ求メルト

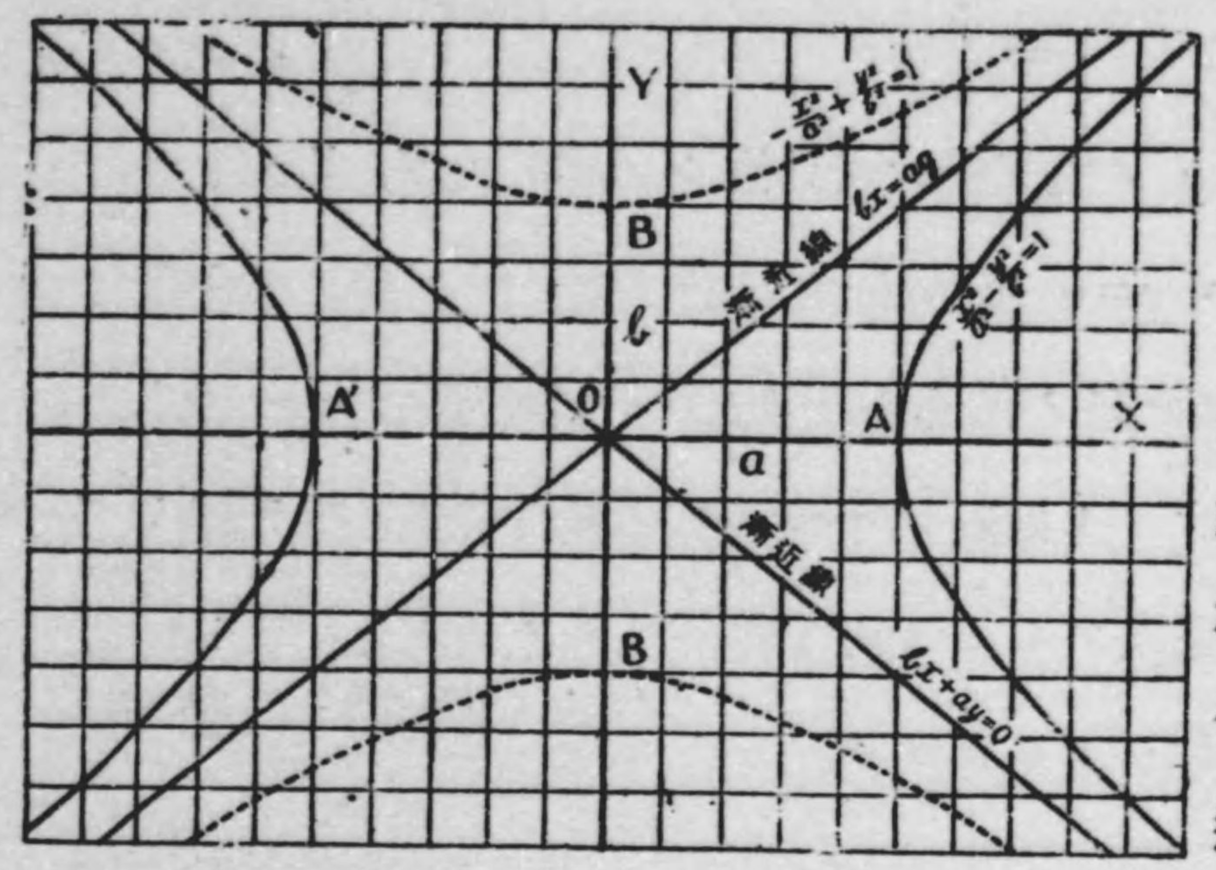
x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5	2·5	1.7	1.2	1.0	0.8	0.7	0.6



x ガ負ナルトキハ y モ亦負トナル。

此ノ曲線モ亦雙曲線デアル。

双曲線 hyperbola



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots\cdots (1)$$

ハ双曲線ヲ表ハス。双曲線ニ就テハ A, A' ヲ其ノ頂點, O ヲ中心, AA' ヲ其ノ軸トイフ事, 並ニ漸近線ノ存在スル事ヲ示スガヨイ。尙漸近線ハ曲線ト次第ニ接近シツツモ而モ有限ノ範圍デハ接スル事ノナイ事, 從ツテカクノ如キ曲線ハ次第ニ直線ニ近イ形ヲトル事ヲ教ヘルガヨイ。

(1)ノ双曲線ニ對シ $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

ヲ (1) ノ**共軛双曲線** Conjugate hyperbola トイヒ, (1) ト (2) トハ互ニ**共軛**デアルトイフ。之ハ漸近線ヲ共有スルモノデ上圖ノ點線デ示シタノガ之レデアル。

漸近線ノ直交スル双曲線ヲ**直角双曲線** Rectangular hyperbola トイフ。卽チ (1) ニ於テ $a=b$ トナルトキデ

$$x^2-y^2=a^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

デアル。之ハ圓ノ楕圓ニ於ケル關係ニ對スルモノデアル。從ツテ直角双曲線ノ共軛双曲線ハヤハリ直角双曲線デアル。例三ハ (3) ノ例デアル。

$$xy=k \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

モ亦直角双曲線デアル。之ハ (3) ノ坐標軸ヲ 45° 廻轉シテ得ラレル。其ノ漸近線ハ坐標軸デアル。算術ニ於テ反比例ノ「グラフ」トシテ取扱ツタモノハ (4) ノ中ノ第一象限ノ部分デアル。例四ハ (4) ノ例デアル。

$$xy=k$$

ニ於テハ，之ヲ

$$y=\frac{k}{x}$$

トシテ，x ノ値ニ對應スル y ノ値ヲ得テ表ヲ作ルノデアルガ，此ノトキ $x=0$ トスルト生徒ハ直チニ $y=0$ 或ハ k ナドトイフ。併シ其ノ不合理ナ事ヲ示シ，一應之ヲ預カツテ他ノ有限ノ分ヲトツテ計算シ，次ニ $x=0.1$, $x=0.01$ ト考ヘテ $x=0$ トナツタ極限ヲ考ヘサセ，無限大ノ思想ヲ導入シテ ∞ ノ記號ヲ示シテ表ヲ完成スルモヨイ。又「グラフ」ノ上ヨリ $+\infty$ ト $-\infty$ ノ一致スル事ナドモ知ラセルガヨイ。

表ハ

x	$\cdots\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots\cdots$
y	$\cdots\cdots$	-1.2	-1.7	-2.5	-5	$\pm\infty$	5	2.5	1.7	1.2	$\cdots\cdots$

トシ，之ヲ簡單ニ記ス方法トシテ

x	0	±1	±2	±3	±4	$\cdots\cdots$	$\pm\infty$
y	$\pm\infty$	±5	±2.5	±1.7	±1.2	$\cdots\cdots$	0

トスル。但シ之ハ複號ヲ同順ニトル事ヲ斷ル必要ガアル。卽チ此ノ表ノ例一，二，三マデノ表ト異ナル意義ヲ十分明ラカニ示サネバナラヌ。

(85) 頁

二次曲線ガ圓錐曲線トイハレル所以，並ニ二次曲線ガ此處ニ揭ゲタモノニ限ラレル所以(特殊ナモノハ尙アルガ)ハ實際ニ圓錐ヲ截斷シテ見セルガヨイ。尙之ヲ十分ヨク理解サセルニハ「セルロイド」製ノ中ノ空ナ圓錐ノ中ニ半分位着色シタ液體ヲ入レ，之ヲ種々ノ程度ニ倒シテ見ルガ最モヨイ。(當數學研究會考案ノ實品モ出來テキル。)

直圓錐ノ頂角ノ $\frac{1}{2}$ ヲ $\angle\alpha$ トシ，截斷スル平面ガ直圓錐ノ軸トナス角ヲ $\angle\beta$ トスレバ

(1)　$\angle\alpha<\angle\beta$　ノトキ　楕圓

(2)　$\angle\alpha=\angle\beta$　ノトキ　拋物線

(3)　$\angle\alpha>\angle\beta$　ノトキ　双曲線

ヲ生ズル。圓ノ場合ハ

$$\angle\beta=R.\llcorner$$

ノトキデアル。之ハ $\angle\alpha<R.\llcorner$ デアルカラ今 $\angle\beta=R.\llcorner$ ナラバ

$$\angle\alpha<\angle\beta$$

デ楕圓ノ中ニ含マレル。點圓，點楕圓ノ場合ハ圓錐ノ頂點ヲ過ギ (1) ノ條件ヲ有スルトキデアリ，相交二直線ノ場合ハ圓錐ノ頂點ヲ過ギ (3) ノ條件ヲ有スルトキデアル。

拋物線ノ中，$y=ax^2+bx+c$ ハ72節デヨク取扱ツタ所デアルガ，之ニ反シ $y^2=px$ ハ x 軸ヲ軸トシ，原點ヲ頂點トスルモノデアル。一般ニ $x=ay^2+by+c$ ハ x 軸ニ平行ナ直線ヲ軸トスル拋物線ヲ表ハス。$y^2=px$ ハ之ヲ

$$y=\pm\sqrt{px}$$

トスル事ニヨリ二價函數ノ例ヲ與ヘルモノデアル。併シ之ハ又

$$x=\frac{y^2}{p}$$

トシ y ノ値ニ對スル x ノ値ヲトルモヨイ。$y^2=px$ ノ形ニスルト x 軸上ノ原點ヨリ $\frac{p}{4}$ ノ所ニ拋物線ノ焦點ガアル事ガ示サレル。

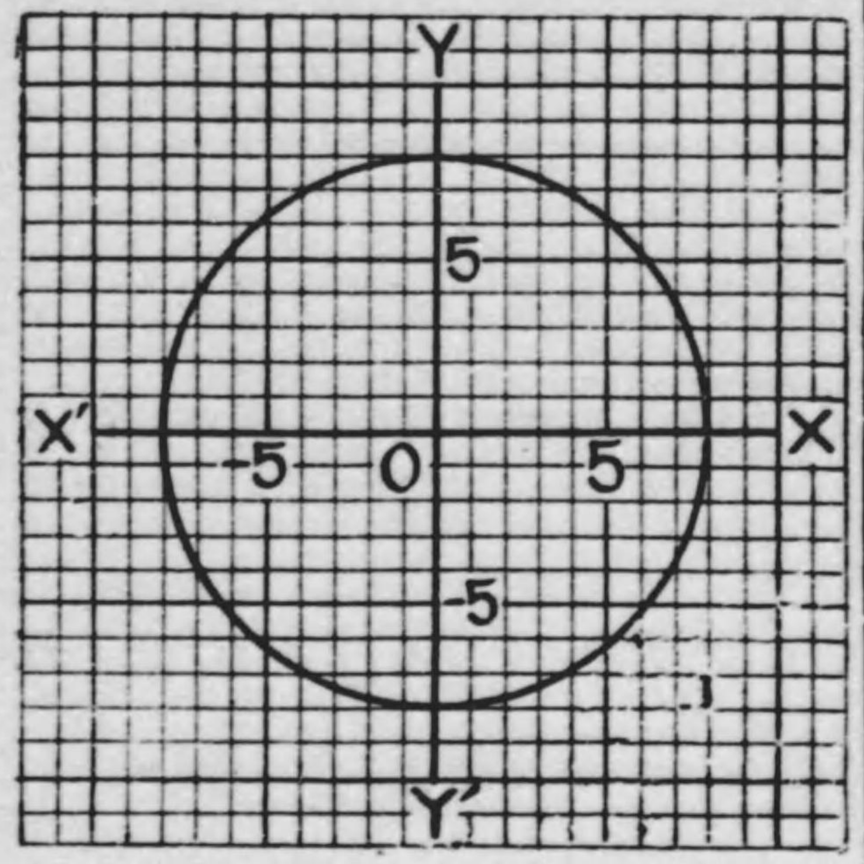
問　　題　　31

1　$x^2+y^2=64$

$$y=\pm\sqrt{64-x^2}$$

x	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8
y	±8	±7.9	±7.7	±7.4	±6.9	±6.2	±5.3	±3.9	0

半徑8, 原點ガ中心ナル圓。



2　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$

$$y=\pm\frac{2}{5}\sqrt{4-x^2}$$

x	0	±1	±2	±3	±4	±5
y	±2	±20	±1.8	±1.6	±1.2	0

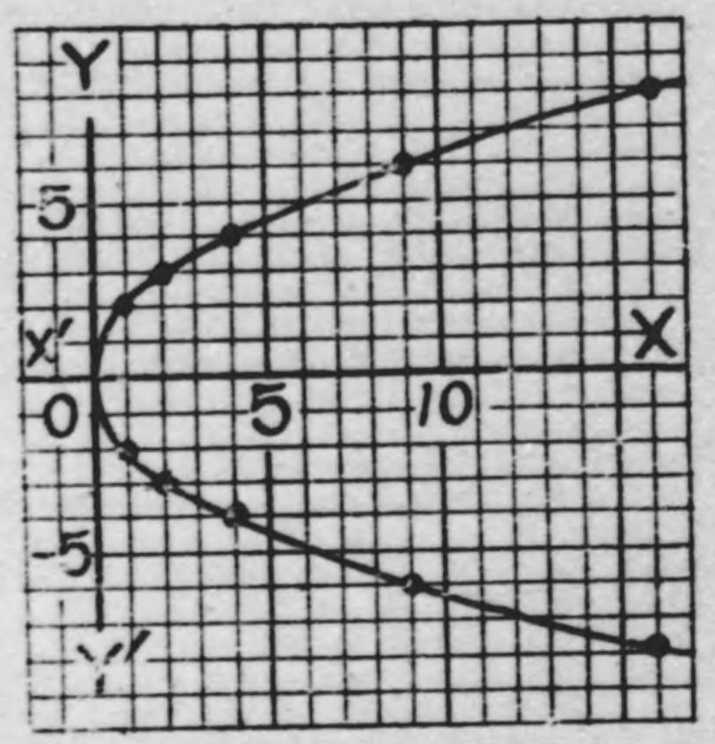
原點ヲ中心トシ, 9, 4 ヲ長徑, 短徑トスル楕圓。

(1)　$y^2=4x$

$$y=\pm2\sqrt{x}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	±2	±2.3	±3.46	±4	±4.47	±4.90	±5.29	±5.65	±6	±6.32

原點ヲ頂點トシ, x 軸ヲ軸トスル拋物線。

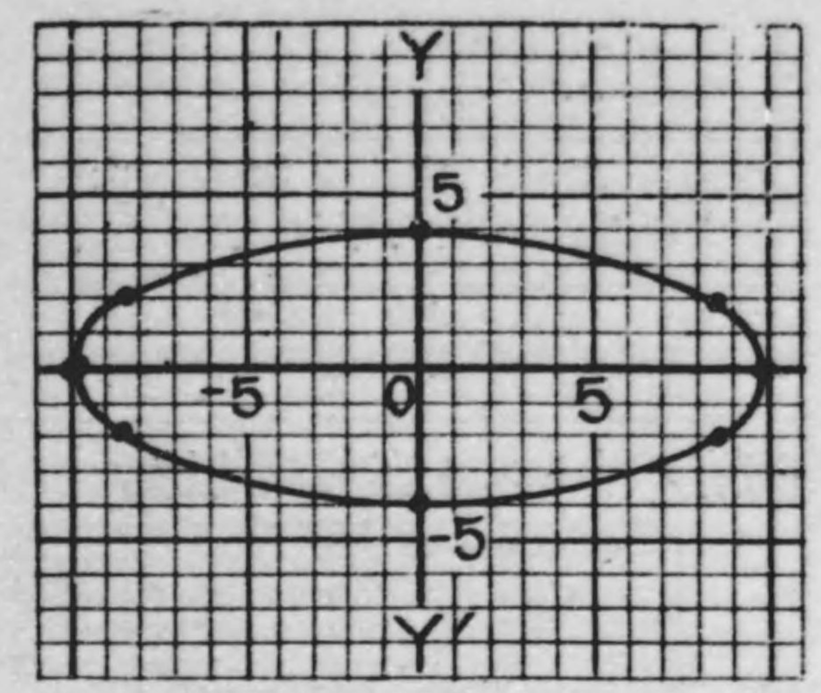


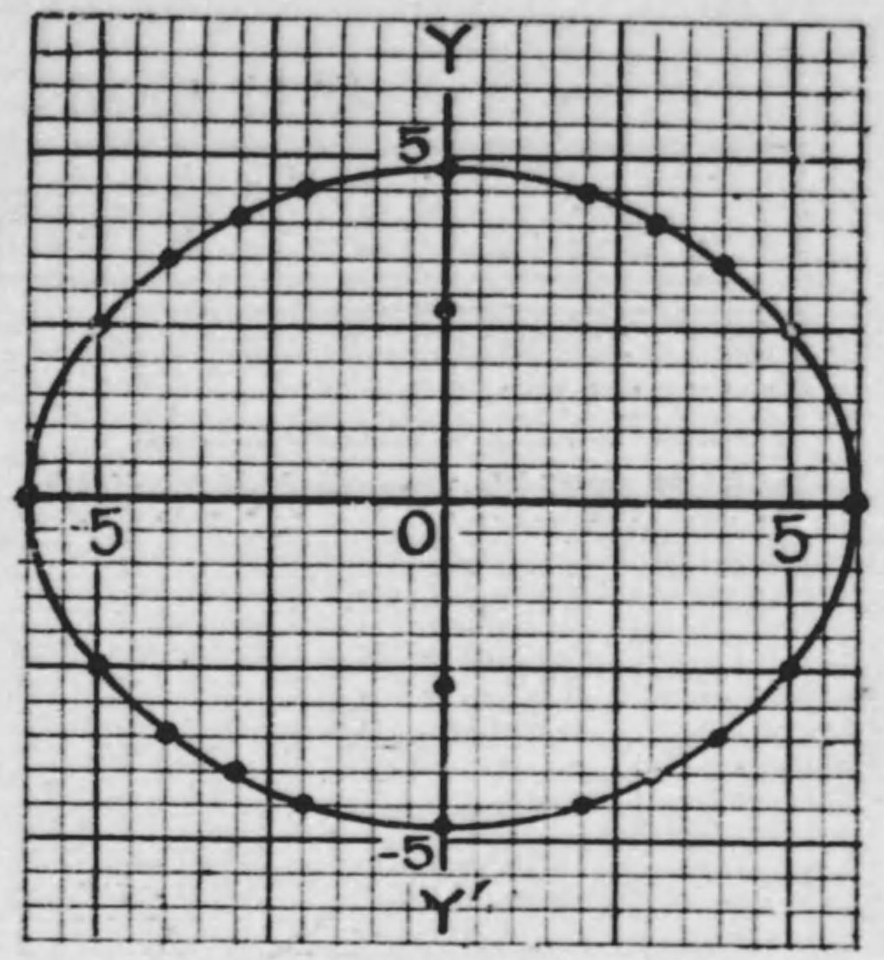
(2)　$y^2=\dfrac{16}{25}(36-x^2)$

$$y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{36-x^2}$$

x	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6
y	±4.8	±4.74	±4.53	±4.16	±3.57	±2.66	0

原點ヲ中心トシ, 6, 4.8 ヲ兩徑トスル楕圓。



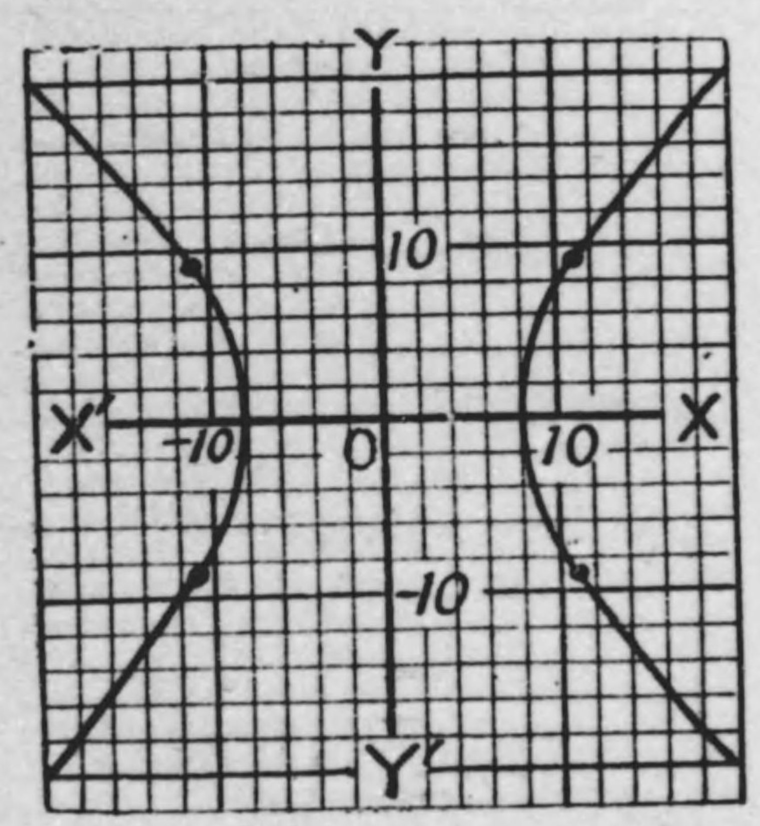


3　$\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{81}=1$

$$y=\pm\frac{9}{8}\sqrt{x^2-8}$$

x	±8	±9	±10	±12	±15	±16	±18	±20	±25
y	0	±4.35	±6.75	±10.06	±14.5	±15.7	±8.3	±20.6	±26.6

原點ヲ中心トシ, x 軸ヲ軸トスル双曲線。

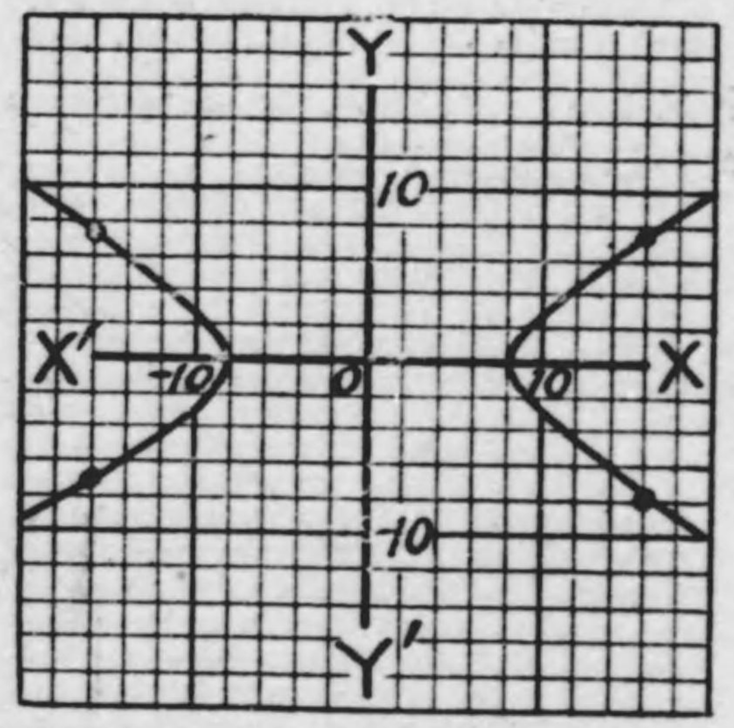


(3)　$y^2=\dfrac{25}{64}(x^2-64)$

$$y=\pm\frac{5}{8}\sqrt{x^2-64}$$

x	±8	±9	±10	±12	±15	±16	±18	±20	±25
y	0	±2.42	±3.75	±5.58	±7.93	±8.66	±10.1	±11.35	±14.8

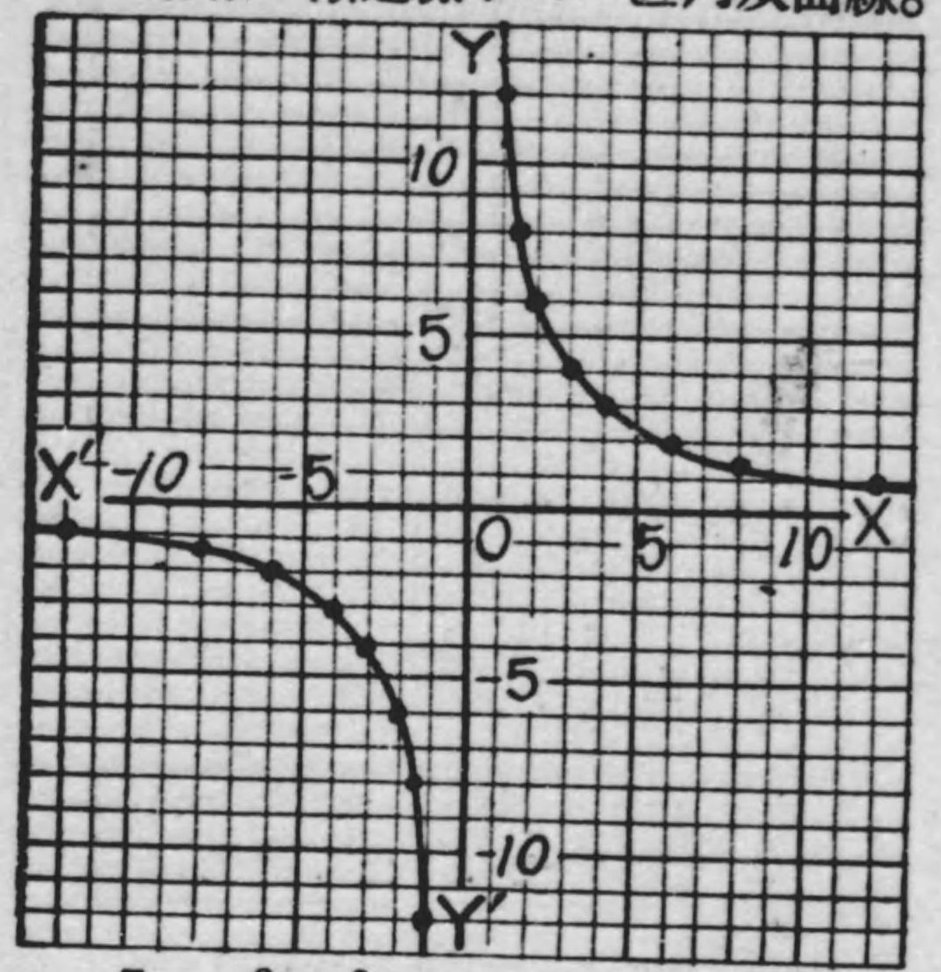
原點ヲ中心トシ, x 軸ヲ軸トスル双曲線。



4　$y=\frac{12}{x}$　　複號同順

x	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9	±10	±11	±12
y	±12	±6	±4	±3	±2.4	±2	±1.7	±1.5	±1.3	±1.2	±1.1	± 1

兩軸ヲ漸近線トスル直角双曲線。



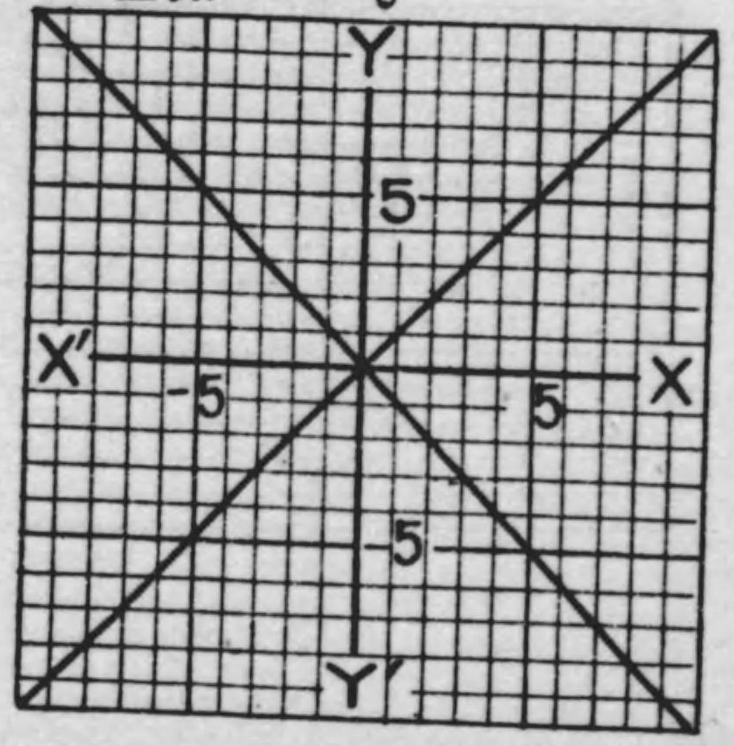
5　$x^2-y^2=0$　　$y=\pm x$

x	0	±1	±2	±5	±10	....
y	0	±1	±2	±5	±10	....

之ハ原點ニ於テ相交ル二直線デアル。與方程式ヲ因數分解シテ

$x+y=0\cdot\cdot(1)$　　$x-y=0\cdot\cdot(2)$

トスレバ二直線ハ(1)及ビ(2)ノ表ハス直線デアル。

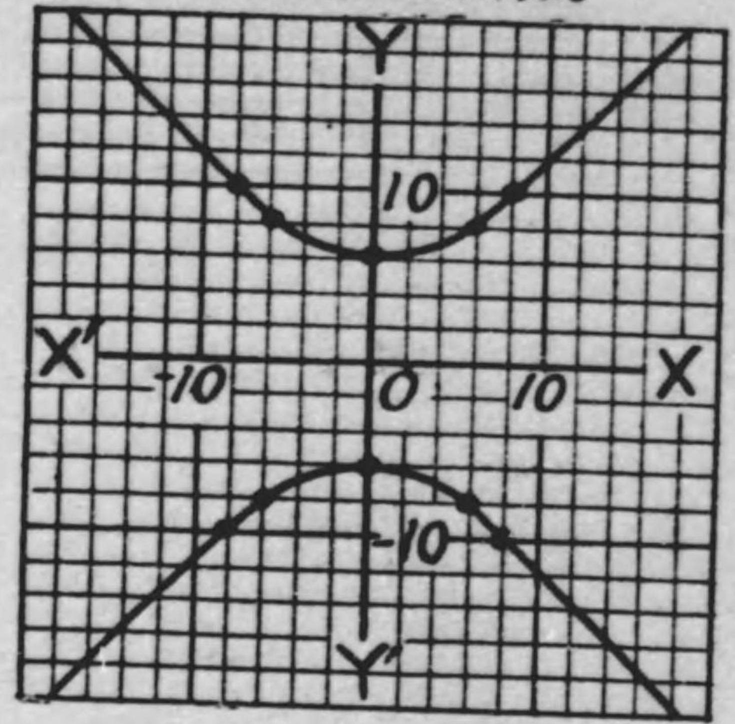


(4)　$y^2-x^2=36$

$y=\pm\sqrt{36+x^2}$

x	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9	± 10
y	±6	±6.08	±6.32	±6.71	±7.21	±7.81	±8.49	±9.22	±10	±10.82	±11.66

y 軸ヲ軸トスル直角双曲線。

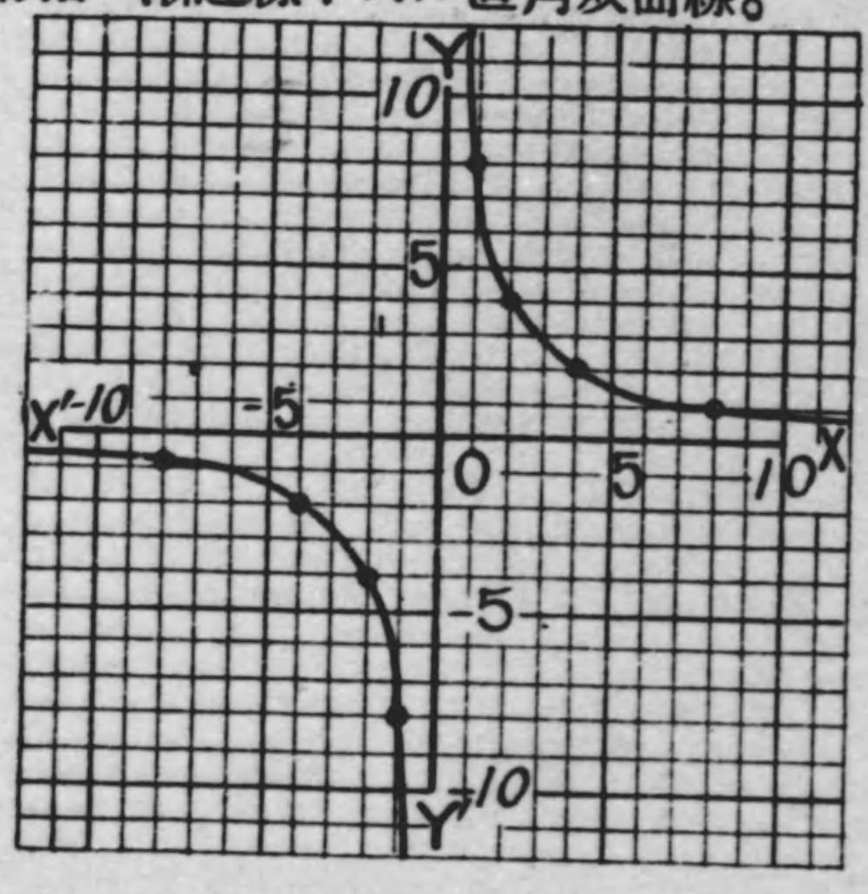


(5)　$xy=8$　　$y=\frac{8}{x}$

複號同順

x	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8
y	±8	±4	±2.67	±2	±1.6	±1.33	±1.14	±1

兩軸ヲ漸近線トスル直角双曲線。



一般ニ x, y ニ關スル二元二次方程式ヲ圖示スルトキハ或特別ノ場合ヲ除ク外圓,楕圓,拋物線又ハ雙曲線ノ何レカトナル. 此等ノ曲線ヲ二次曲圖又ハ圓錐曲線トイフ. 而シテソレ等ノ曲線ハソノ方程式ノ形ニヨッテ之ヲ知ルコトガ出來ル.

(1)　$x^2+y^2=r^2$ ……………………………圓

(2)　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ……………………………楕圓

(3)　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ y=\frac{k}{x}$ ……………………雙曲線

(4)　$y=ax^2+bx+c,\ y^2=px$ ……………拋物線

問　題　31

次ノ方程式ヲ圖示セヨ.

1　$x^2+y^2=64$

2　$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$

3　$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{81}=1$

4　$y=\frac{12}{x}$

5　$x^2-y^2=0$

(1)　$y^2=4x$

(2)　$y^2=\frac{16}{25}(36-x^2)$

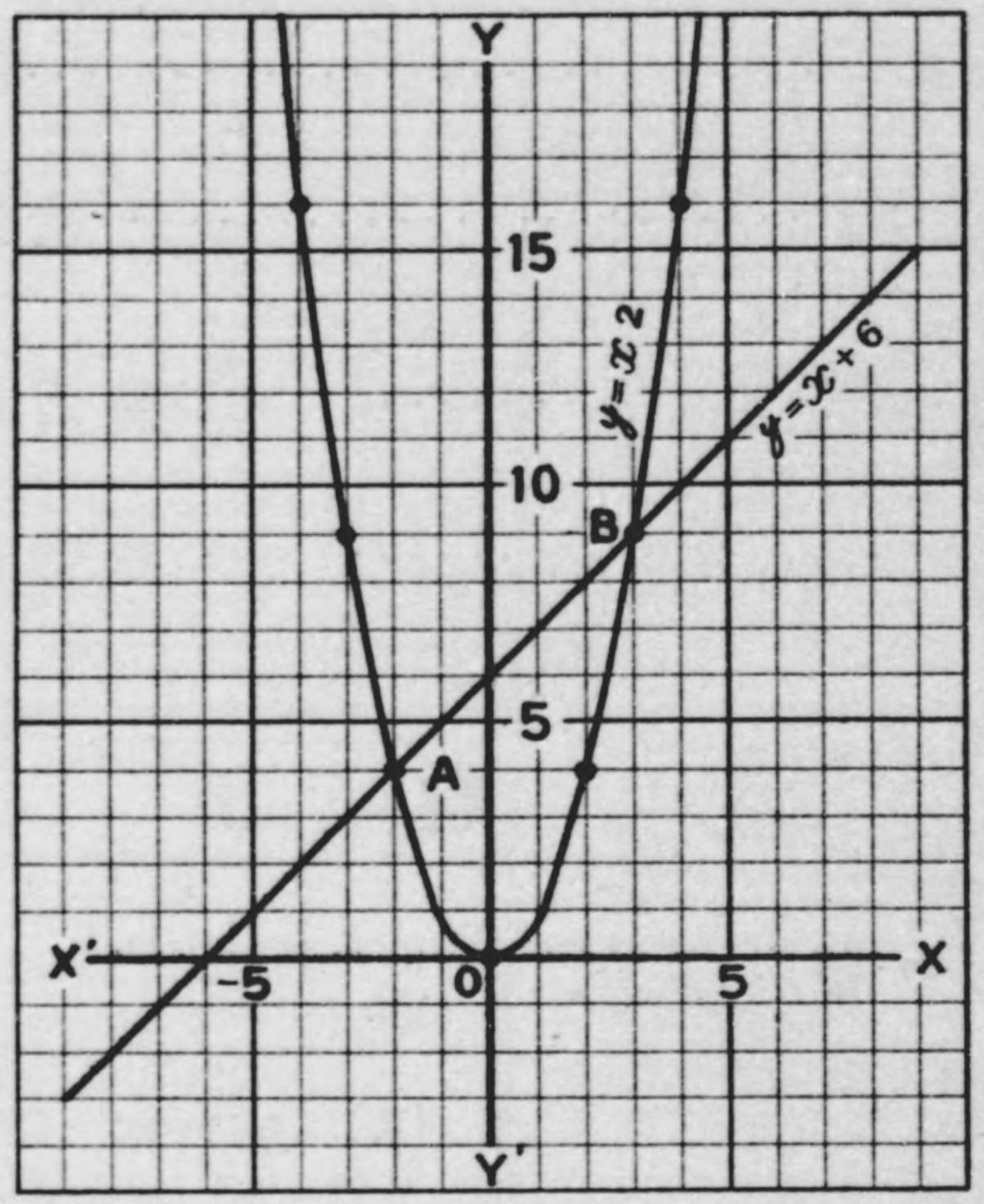
(3)　$y^2=\frac{25}{64}(x^2-64)$

(4)　$y^2-x^2=36$

(5)　$xy=8$

22 二元二次聯立方程式ノ圖示的解法

例一 $\left|\begin{array}{l} y=x^2 \cdots\cdots\cdots(1) \\ y=x+6 \quad \cdots\cdots(2) \end{array}\right.$ ヲ圖示ニヨツテ解ケ。



與式ヲ圖示スレバ

$y=x^2$ 　カラハ上ノ圖ノ如キ抛物線ヲ得,

$y=x+6$ 　カラハ直線ヲ得.

然ルニ此ノ抛物線上ノ點ノ坐標ハ悉ク方程式 $y=x^2$ ヲ滿足シ,直線上ノ點ノ坐標ハ悉ク方程式 $y=x+6$ ヲ滿足

22 二元二次聯立方程式ノ圖示的解法

Graphic solution of simultaneous equation involving quadratics with two unknown quantities

例一 ハ一次ト二次トノ聯立方程式ヲ「グラフ」ニ依ツテ解イテ示シタモノデ, 一般ニ二元聯立方程式ノ根ハ各方程式ノ「グラフ」ノ交點ノ坐標デアルコトハ上卷 107頁ニ於テ既ニ學習シタ所デアル。故ニ此處デハ唯其ノ一ツノ「グラフ」ガ曲線ニナツタ點ガ異ナルノミデアル。併シ其ノ爲ニ

(1) 曲線ハ二點ヲトルヤウナヤリ方デ簡單ニ描ケナイ事 (卽チ前節, 前々節ニ於テ習得シタ方法ニ依ルベキデアル。

(2) 交點ガ一ツニ限ラナイ事(二次ト一次ナラバ一般ニ二ツ)ノ結果ヲ生ズル。

扨テ此ノ例一ニ依リ更ニ次ノ二ツノ副次的目的ヲ派生スル。其ノ一ハ

$\left|\begin{array}{l} y=x^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y=x+6 \cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$ (1) ト (2) トヨリ $x^2=x+6$, 卽チ $x^2-x-6=0$

故ニ (1), (2) ヲ滿足スル x ノ値卽チ (1), (2) ノ根ノ中ノ x ノ値ハ $x^2-x-6=0$ ヲモ滿足スル筈デアル。換言スレバ例一ハ $x^2-x-6=0$ ノ圖示的解法ヲ示シタモノデ, 一般ニ $ax^2+bx+c=0$ ノ圖示的解法ハ

$\left|\begin{array}{l} y=x^2 \\ ay+bx+c=0 \end{array}\right.$ ナル聯立方程式ノ圖示的解法ニ歸スルコトガ出來ル。

ソコデ $ax^2+bx+c=0$ ノ圖示的解法ハ今ノ此ノ方法及ビ前ニ述ベタ $y=ax^2+bx+c$ ノ「グラフ」ヲ描イテx軸ヲ截ル點ヲ讀ム方法ト二ツアルガ前ノ方法ヨリモ此ノ方法ガ遙ニ優ツテキル。先ヅ第一ニ $y=x^2$ ノ「グラフ」ハ常ニ同ジデアルノデ一度コノ「グラフ」ヲ正確ニ描イテオケバ數題ノ問題ハ此「グラフ」上デ唯直線 $ay+bx+c=0$ ヲ引クコトニヨツテ簡單ニ求メラレルコト。

次ニ直線 $ay+bx+c=0$ ハ極メテ容易ニ且正確ニ描キ得ルコトデアル。

$y=x^2$ ノ「グラフ」ノコトヲ標準拋物線ト名付ケル。舊版ノ教科書（卽チ中等教育代數學教科書）卷末ニハ此ノ標準拋物線ガ添ヘテアル。コノ拋物線ハ縱横ノ目盛ガ同ジデアルト縱ガ長イモノトナルノデ縱横ノ目盛リガ異ツテキル。コノ「グラフ」ヲ利用セラレルナラバ一元二次方程式ノ圖示的解法ハ至ツテ容易デアル。

勿論直線ガ拋物線ニ出會ハナカツタラ二組ノ虛根デ，切スレバ二組ノ一致シタ實根デ，交ハレバ二組ノ異ナル實根デアル。

尙例一ノ解法ヲ上ノ如ク研究スルトキハ，一般ニ一元二次方程式或ハ一元高次方程式　　$f(x)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1$

ヲ解クトキニ $f(x)=0$ ノ「グラフ」ヲ描キ，之ガ x 軸ト交ル點ノ横坐標ヲ讀ム事ハ，之レ卽チ

$$\left|\begin{array}{ll} f(x)=y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (2) \\ y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (3) \end{array}\right.$$

ノ聯立方程式ヲ解ク事ニ歸スル。何トナレバ (2), (3) カラ，問題ニハナイ y ヲ消去スレバ與ヘラレタ方程式 (1) ヲ得ルカラデアル。然ルニ，此ノ (2) ハ曲線デ (3) ハ x 軸トイフ特殊ナ直線デアル。カク考察スルトキハ第20節ノ方法モ例一ト同意義デアル。

第二ニ，例一ニ就イテ言フナラバ

$$y=x^2-x-6$$

ナル拋物線ヲ描クノニ，之ヲ第20節ノ方法ニ依ラナクテ，標準拋物線 $y=x^2$ ノ定規デモ作ツテオキ（定規ハナクトモ，之ナラバ容易ニ描ケル，）之ト直線 $y=x+6$ トノ縱坐標ノ差ヲトル事ニ依ツテ $y=x^2-x-6$ ノ「グラフ」ヲ得ル。一般ニ $y=ax^2+bx+c$ ノ「グラフ」ハ標準拋物線 $y=x^2$ ト直線 $ay+bx+c=0$ トノ縱坐標ノ和ヲ作レバヨイ。此ノ事ヲ例一ハ示シテキル。

一般ニ一元二次方程式　　$ax^2+bx+c=0$
ハ標準曲線ト直線トノ聯立方程式ノ解法ニ歸スルコトガ出來ル。其ノ標準曲線トシテハ拋物線 $y=x^2$ ガ用ヒラレ，且ツ之ガ最モ便利デアルコトハ上述ノ通リデアル。併シ他ノ二次曲線，或ハ三次曲線，四次曲線モ又用ヒラレル。其ノ一例ヲ示サウ。

標準双曲線ノ利用：標準曲線トシテ　$y=\dfrac{1}{x}$ ヲ用ヒル。

與方程式　　$ax^2+bx+c=0$

ノ兩邊ヲ x デ除シ　　$ax+b+\dfrac{c}{x}=0$

之ヲ解ク方法トシテ

$$\left|\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ ax+b+cy=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$$

ヲ用ヒル，(1) ハ標準曲線デ，(2) ハ直線デアル。

標準立方拋物線ノ利用：標準曲線トシテ $y=x^3$ ヲ用ヒル。之ハ一元三次方程式ノ解法ニ最モ有利デアルガ，一元二次方程式ノトキニモ利用サレル。今與方程式ガ　　$ax^2+bx+c=0$

デアルトキニハ，主係數 a デ兩邊ヲ除シ

$$x^2+px+q=0$$

ノ形ニスル。此ノ兩邊ニ $x-p$ ヲ乘ズレバ

$$x^3+(q-p^2)x-pq=0$$

之ニ於テ $y=x^3$ トオケバ

$$y+(q-p^2)x-pq=0$$

之ハ直線デアル。之ト標準立方拋物線　$y=x^3$　トノ組合セヨリ三ツノ根ヲ得ル，其ノ x ノ値ノ中，上述ノ $x=p$ ヲ除イタ他ノ二ツガ所要ノ根デアル。

其ノ他四次拋物線 $y=x^4$ モ亦標準曲線トシテ用ヒラレル。

例二　之ハ二次曲線ガ直角双曲線トナツタ例ニ過ギナイ。勿論根ハ二組アル。

スル。

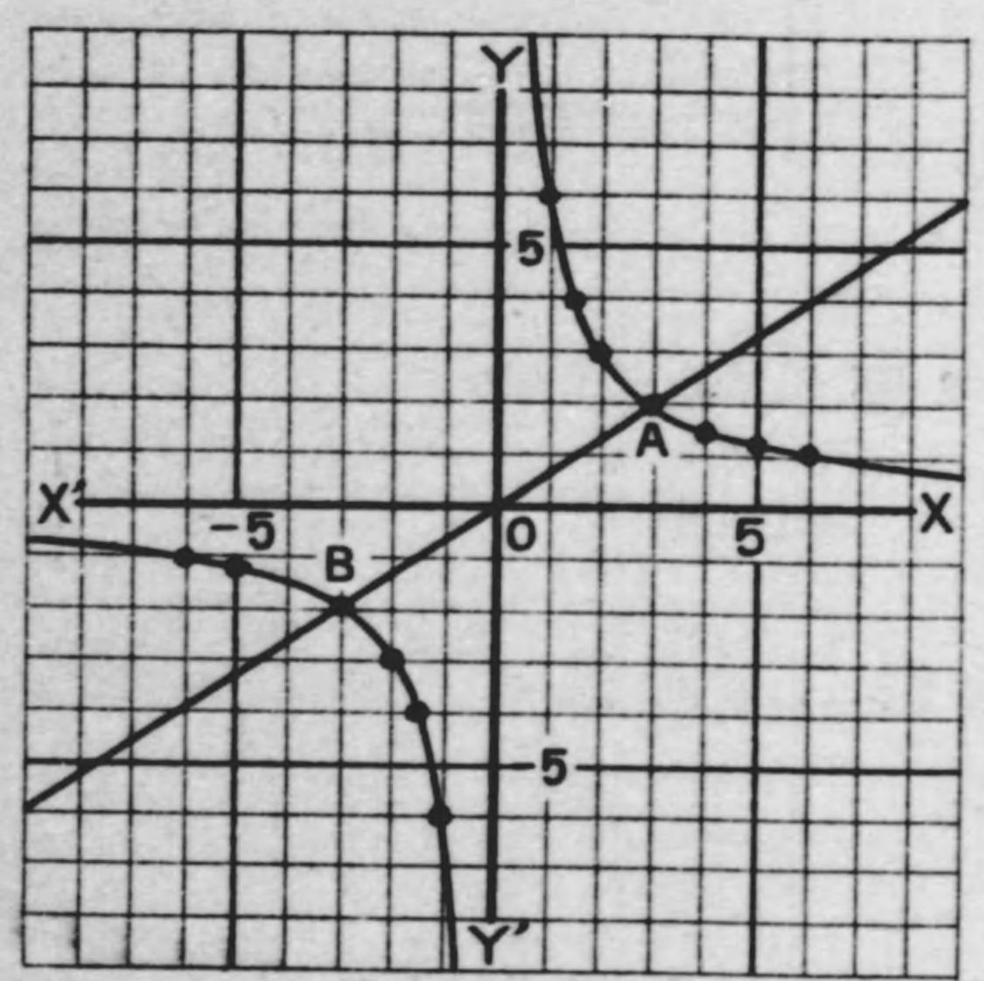
從ツテ是等ノ方程式ヲ圖示シタ拋物線ト直線トノ交點 A, B ノ坐標 $(-2,4), (3,9)$ ハ兩方程式ヲ滿足スル。

故ニ此ノ x, y ノ二組ノ値ハ求メル根デアル。

答

x	-2	3
y	4	9

例二　$\left|\begin{array}{l} xy=6\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x=3y\ \cdots\cdots(2) \end{array}\right.$ ヲ圖示的ニ解ケ。



$xy=6$ ニ於テ

x	y
1	6
1.5	4
2	3
3	2
4	1.5
5	1.2
6	1

x ガ負ナルトキハ y モ亦負トナル。

(1)ノ式ノ「グラフ」ハ雙曲線デ，(2)ノ「グラフ」ハ直線デアル。此ノ二線ノ交點ノ坐標 $A(3,2)$，$B(-3,-2)$ ガ所要ノ根デアル。

問題 32

次ノ聯立方程式ヲ圖示的ニ解ケ.

1 $\begin{cases} x+y=8 \\ xy=15 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ 4x+3y=50 \end{cases}$

3 $\begin{cases} y^2=5x \\ y=10-10x \end{cases}$

(1) $\begin{cases} x^2-y^2=64 \\ 3y=5x+32 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ x+2y+4=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x^2-9y^2=144 \\ 2x-y-2=0 \end{cases}$

例三 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=5 \\ xy=12 \end{cases}$ ヲ圖示的ニ解ケ.

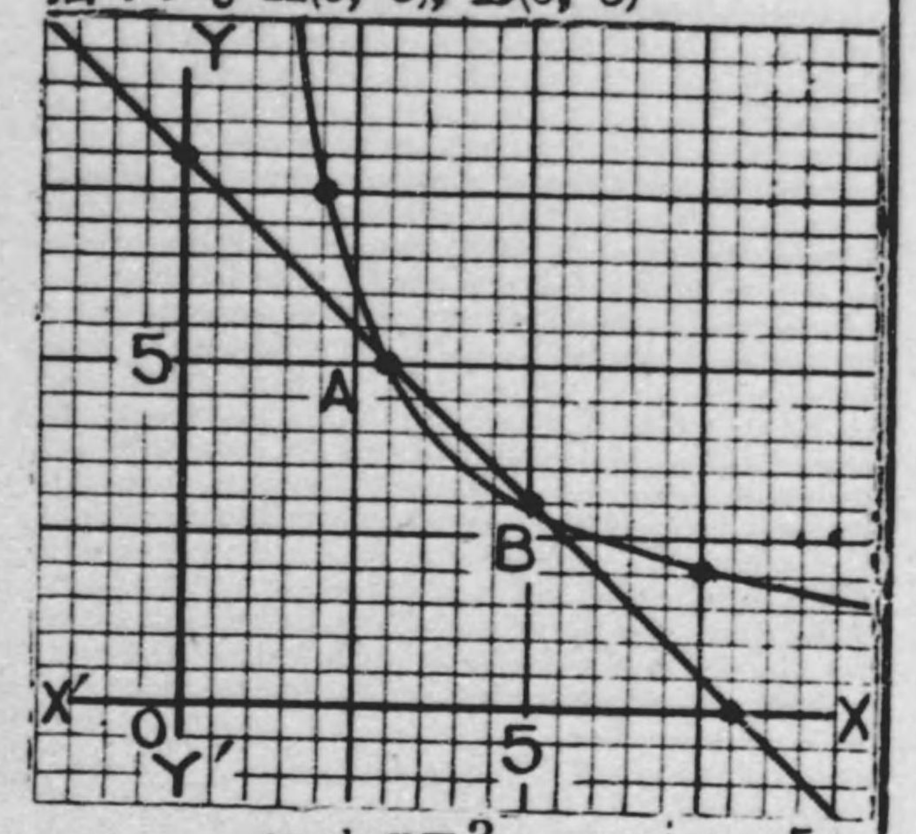
$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=5$ ヨリ83頁例二ト同樣ニシテ縱ニ長イ楕圓ヲ得ル.

$xy=12$ ヨリ本節例二ノヤウナ雙曲線ヲ得ル.

問題 32

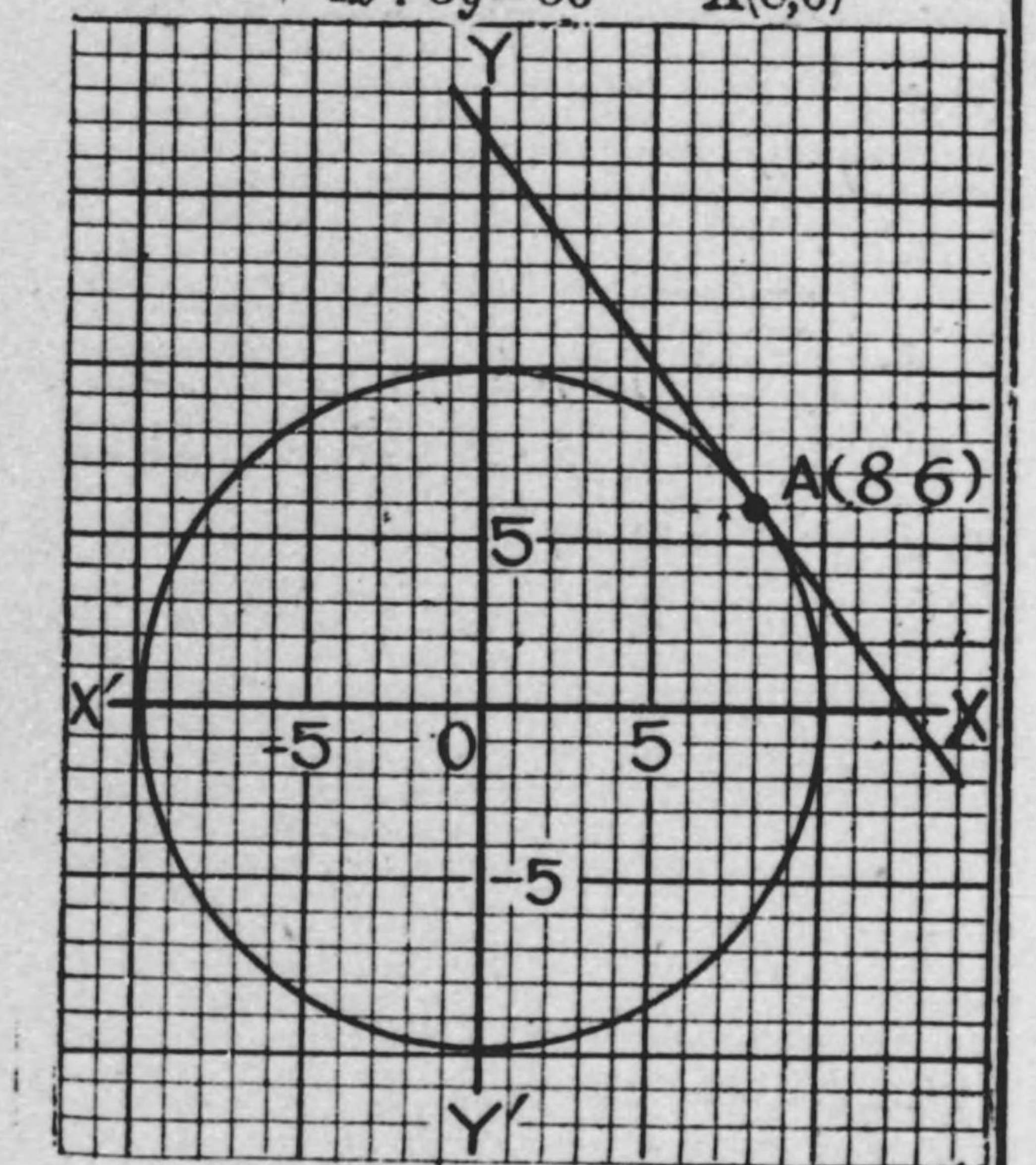
1 $\begin{cases} x+y=8 \\ xy=15 \end{cases}$

双曲線ハ一方ノ枝(branch)ダケヲ描イタ。$A(3,\ 5)$, $B(5,\ 3)$



答 $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 又ハ $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

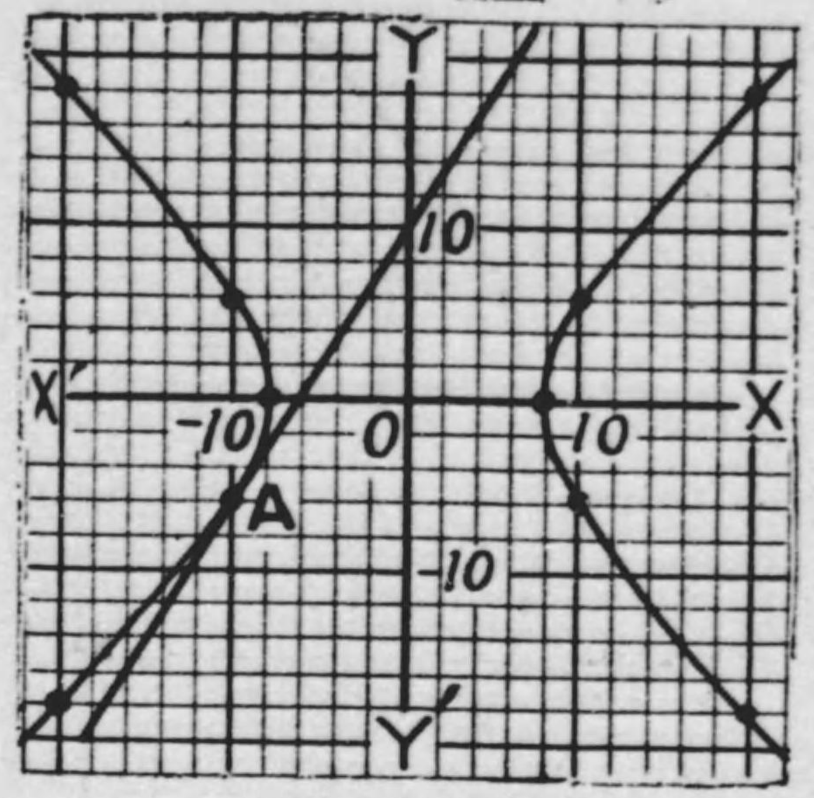
2 $\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ 4x+3y=50 \end{cases}$ $A(8,6)$



答 $\begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} x^2-y^2=64 \\ 3y=5x+32 \end{cases}$

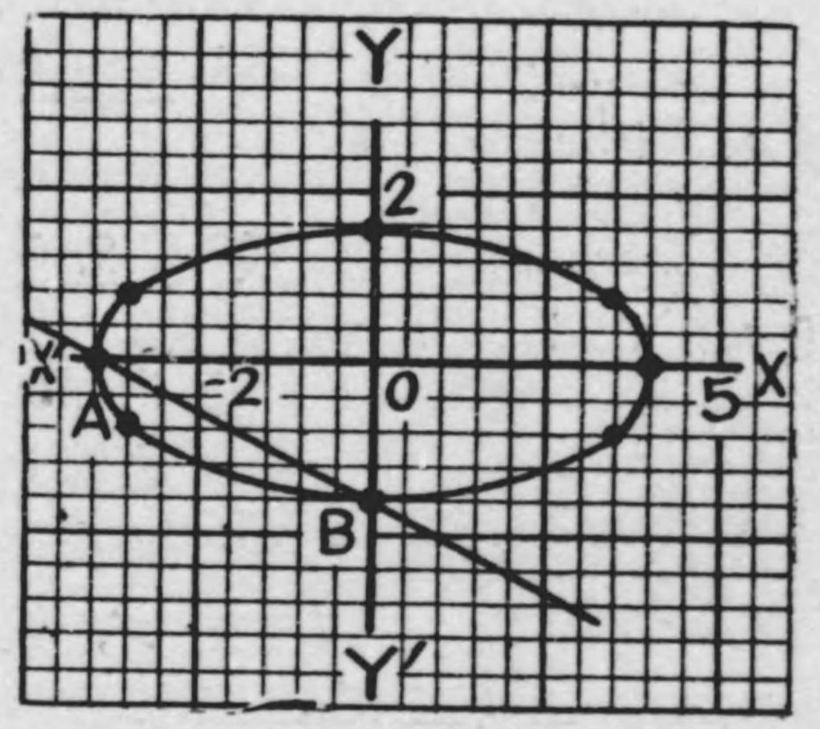
$A(-10,\ -6)$ デ切スル。



答 $\begin{cases} x=-10 \\ y=-6 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ x+2y+4=0 \end{cases}$

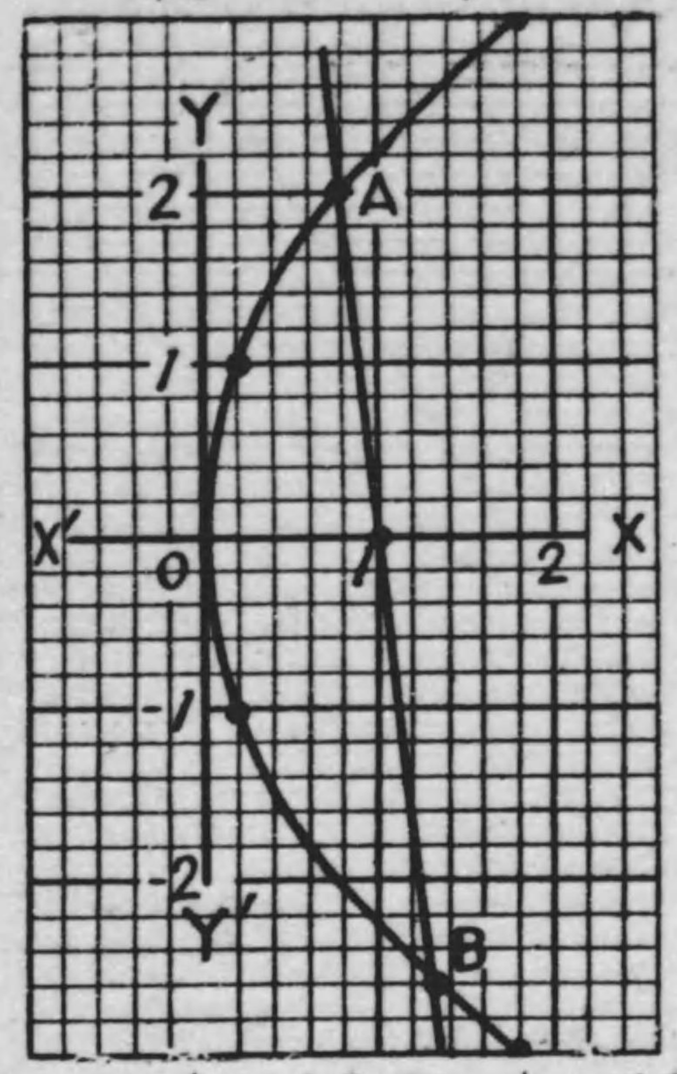
交點ハ $A(-4,0)$, $B(0,-2)$



答 $\begin{cases} x=-4 \\ y=0 \end{cases}$ 又ハ $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$

3 $\begin{cases} y^2=5x \\ y=10-10x \end{cases}$

$A\left(\frac{4}{5}, 2\right)$, $B\left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right)$



答 $\begin{cases} x=0.8 \\ y=2 \end{cases}$ 又ハ $\begin{cases} x=1.25 \\ y=-2.5 \end{cases}$

4 ▲ $x^2+x-2=0$

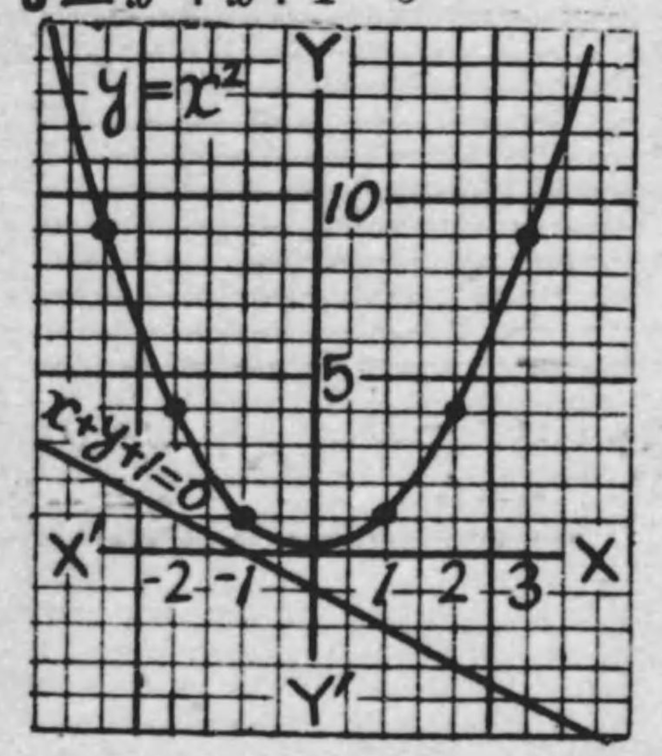
$y=x^2$ トスレバ

$\begin{cases} y=x^2 \\ x+y-2=0 \end{cases}$　答 $-2,\ 1$

5 ▲ $x^2+3x-10=0$

$\begin{cases} y=x^2 \\ y+3x-10=0 \end{cases}$　答 $-2,\ 5$

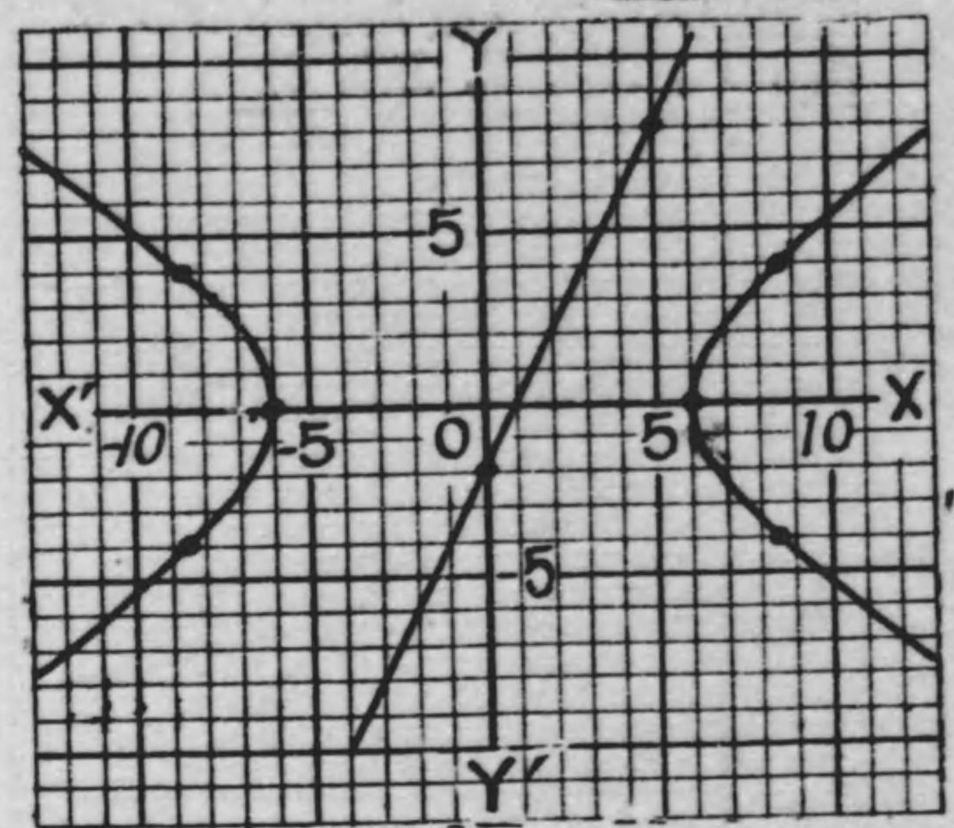
6 ▲ $x^2+x+1=0$



曲線ト直線トガ交ラズ，故ニ實根ナシ。

(3)● $\begin{cases} 4x^2-9y^2=144 \\ 2x-y-2=0 \end{cases}$

答 實根ナシ。



(3) ▲ $\begin{cases} 4x^2-9y=144 \\ 2x-y-2=0 \end{cases}$

(圖ハ次頁ニ在ル)　答

x	-3.8	8.3
y	-9.6	14.6

(4) ▲ $x^2-3x-18=0$

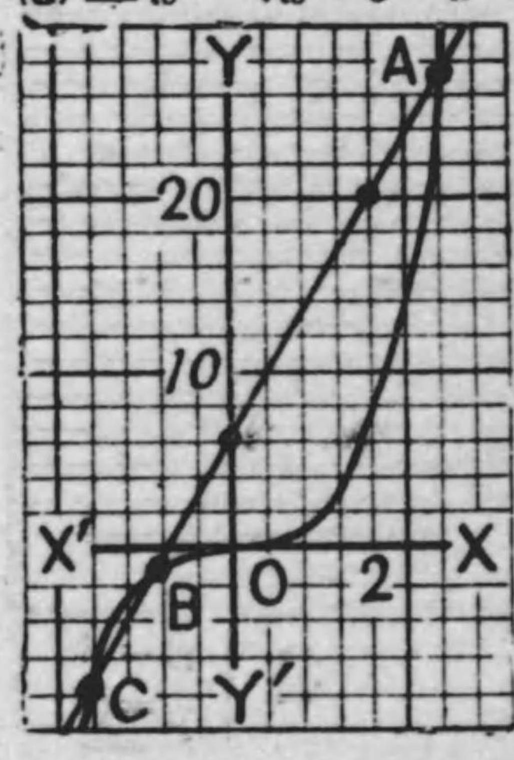
$y=x^2$ トスレバ

$\begin{cases} y=x^2 \\ y-3x-18=0 \end{cases}$　答 $6,\ -3$

(5) ▲ $4x^2-13x+3=0$

$\begin{cases} y=x^2 \\ 4y-13x+3=0 \end{cases}$　答 $3,\ \frac{1}{4}$

(6) ▲ $x^3-7x-6=0$



$y=x^3$ トオケバ

$\begin{cases} y=x^3 \\ y-7x-6=0 \end{cases}$

$A(3,\ 27)$

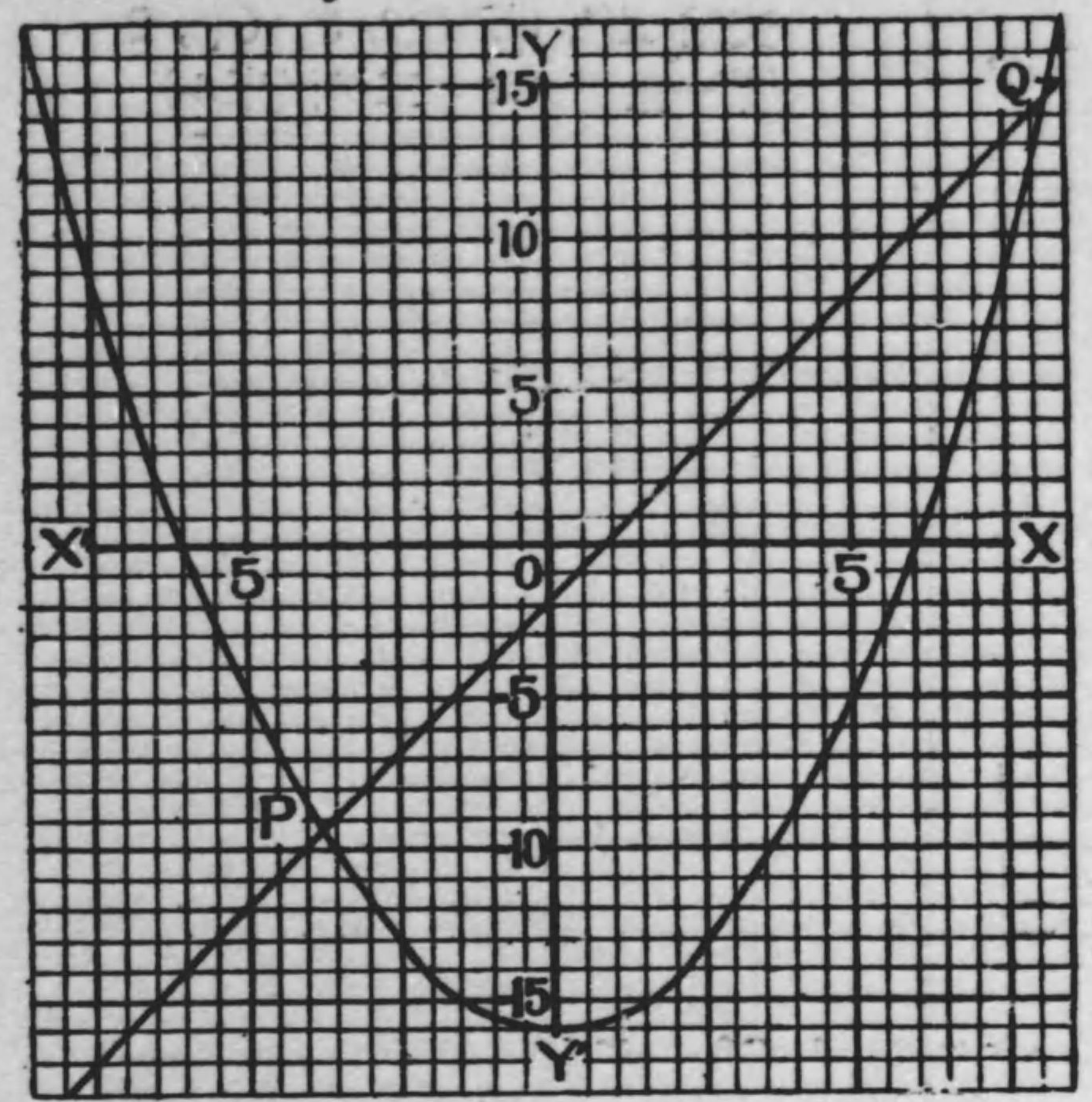
$B(-1,\ -1)$

$C(-2,\ -8)$

根ハ

$3,\ -1,\ -2$

3 ▲ $\begin{cases} 4x^2-9y=144 \\ 2x-y-2=0 \end{cases}$



交點ハ

$P\ (-3.8,\ -9.6)$

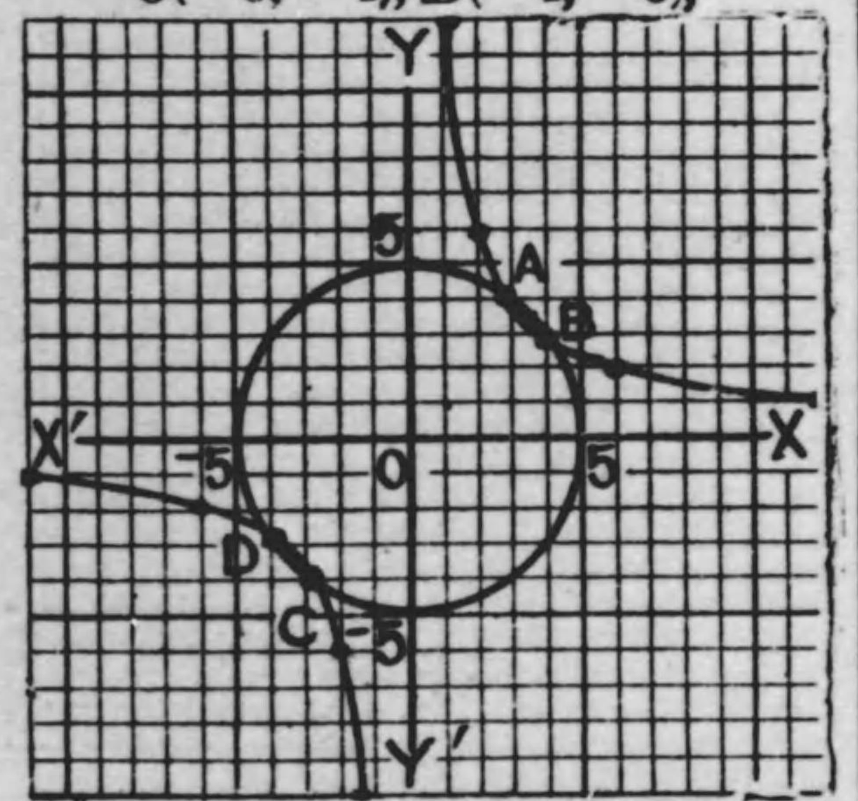
$Q\ (8.3,\ 14.6)$

〔注意〕 尙(3)●ヲ(3)▲ノ如ク訂正シテ課スル方ガヨイカト思フ。

問　　題　33 (舊教科書90頁)

1 $\begin{cases} xy=12 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

交點ハ $A(3,4)$, $B(4,3)$, $C(-3,-4)$, $D(-4,-3)$,

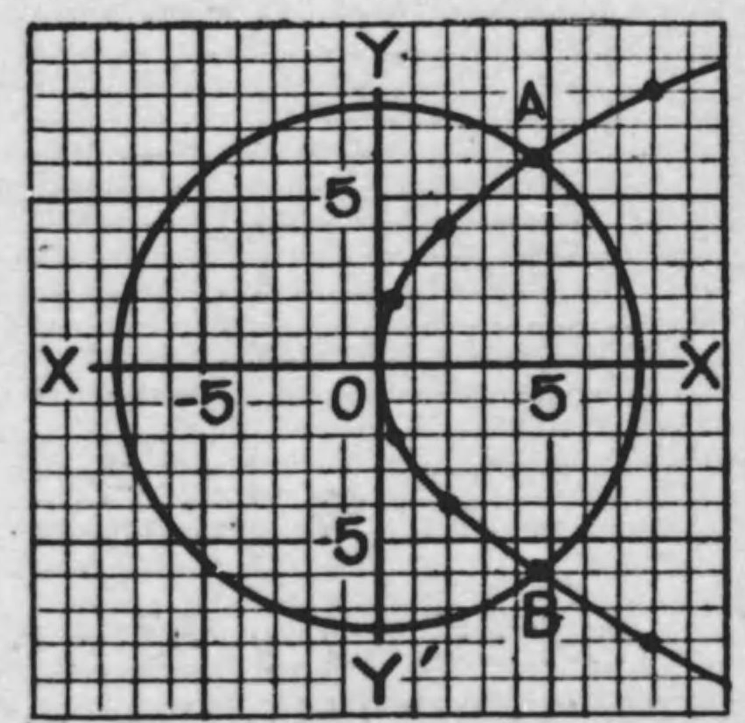


答

x	3	4	-3	-4
y	4	3	-4	-3

(1) $\begin{cases} y^2=8x \\ 4x^2+4y^2=225 \end{cases}$

交點 $A(4.5,\ 6)$ $B(4.5,\ -6)$

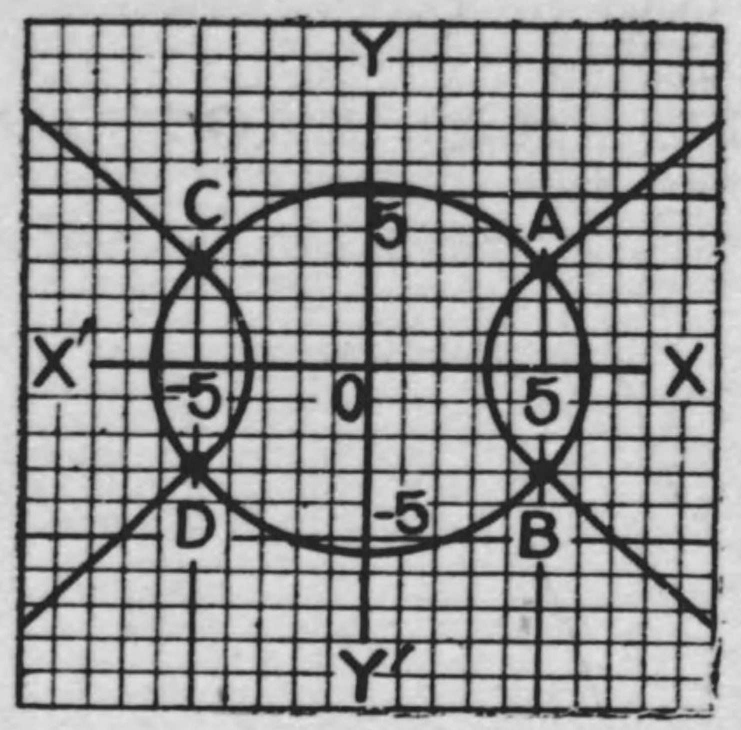


答

x	4.5	4.5
y	6	-6

2 $\left|\begin{aligned}&2x^2+3y^2=77\\&2x^2-3y^2=23\end{aligned}\right.$

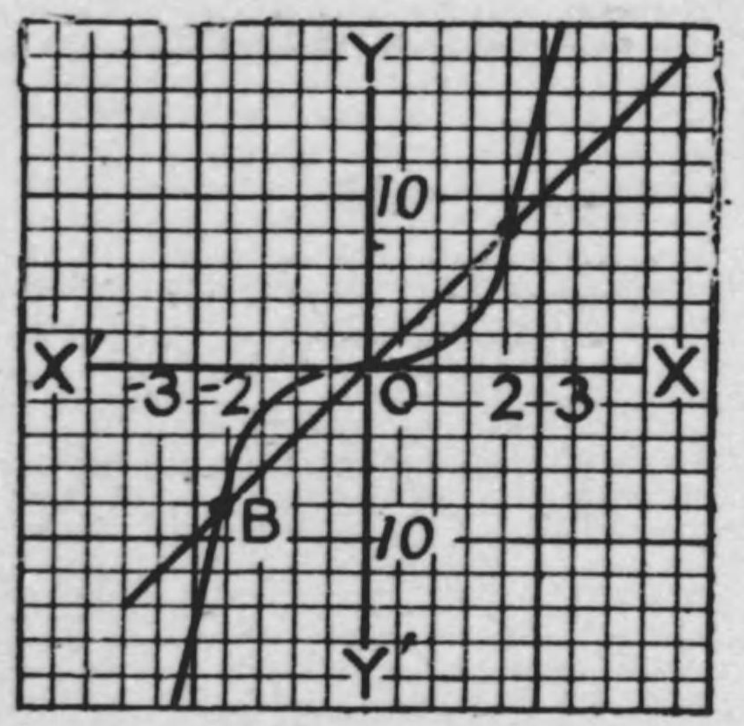
交點ハ $A(5,\ 3)$, $B(5,\ -3)$, $C(-5,\ 3)$, $D(-5,\ -3)$



答

x	5	5	−5	−5
y	3	−3	3	−3

3▲ $\left|\begin{aligned}&y=x^3\\&y=4x\end{aligned}\right.$



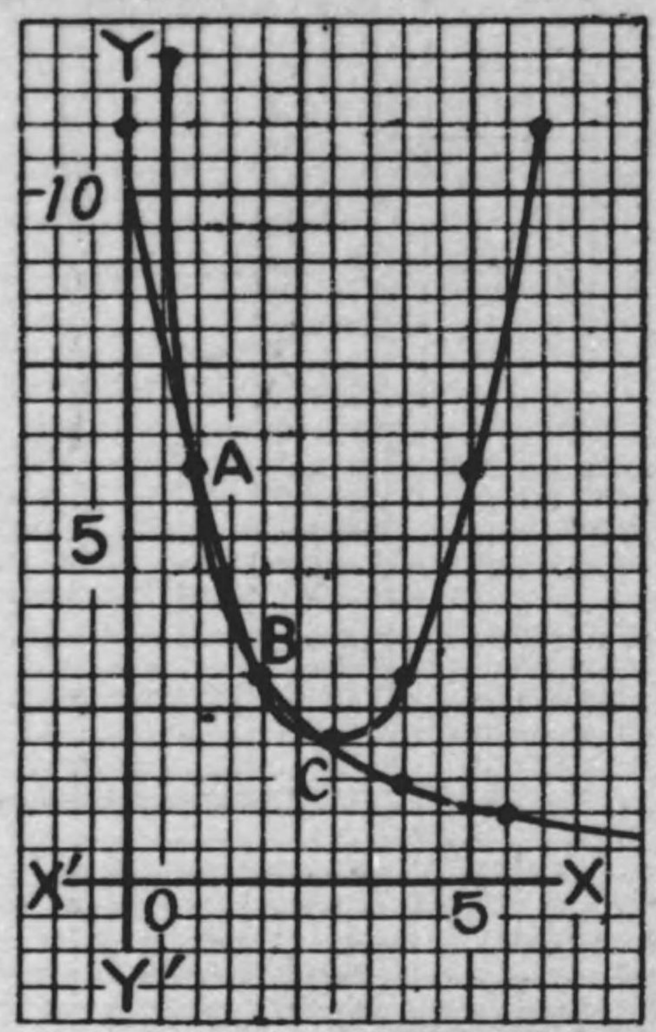
答

x	2	0	−2
y	8	0	−8

倆方程式ヨリ y ヲ消去スレバ $x^3-4x=0$ 其ノ根ハ 2, 0, −2 デアル。此ノ一元三次方程式ノ解法ヲ之ハ暗示シテヰル。

(2) $\left|\begin{aligned}&xy=6\\&y=x^2-6x+11\end{aligned}\right.$

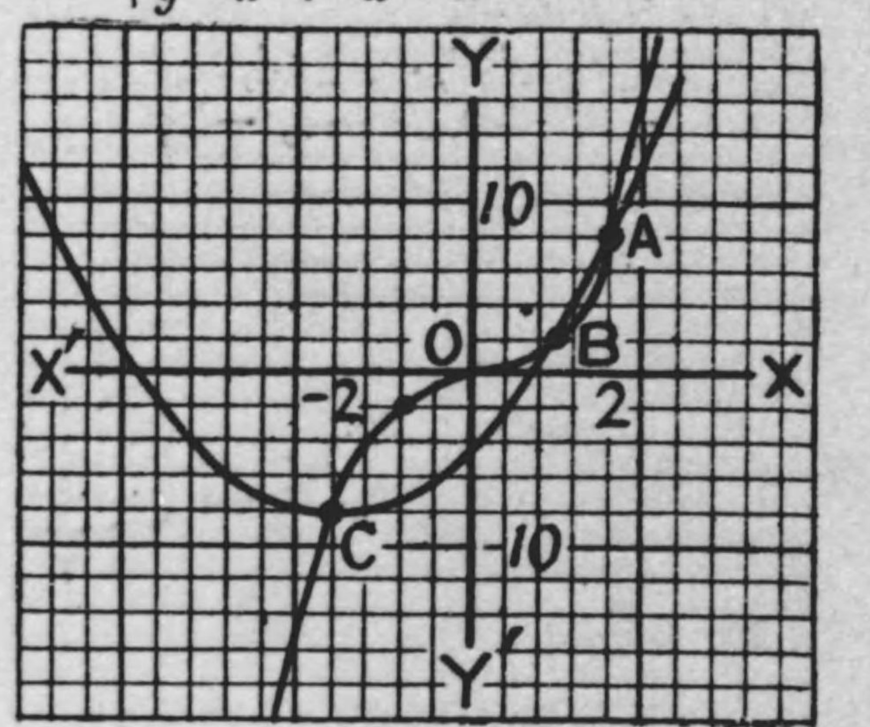
交點 $A(1,\ 6)$, $B(2,\ 3)$, $C(3,\ 2)$
(第一象限ノミニ三ツ出來ル)



答

x	1	2	3
y	6	3	2

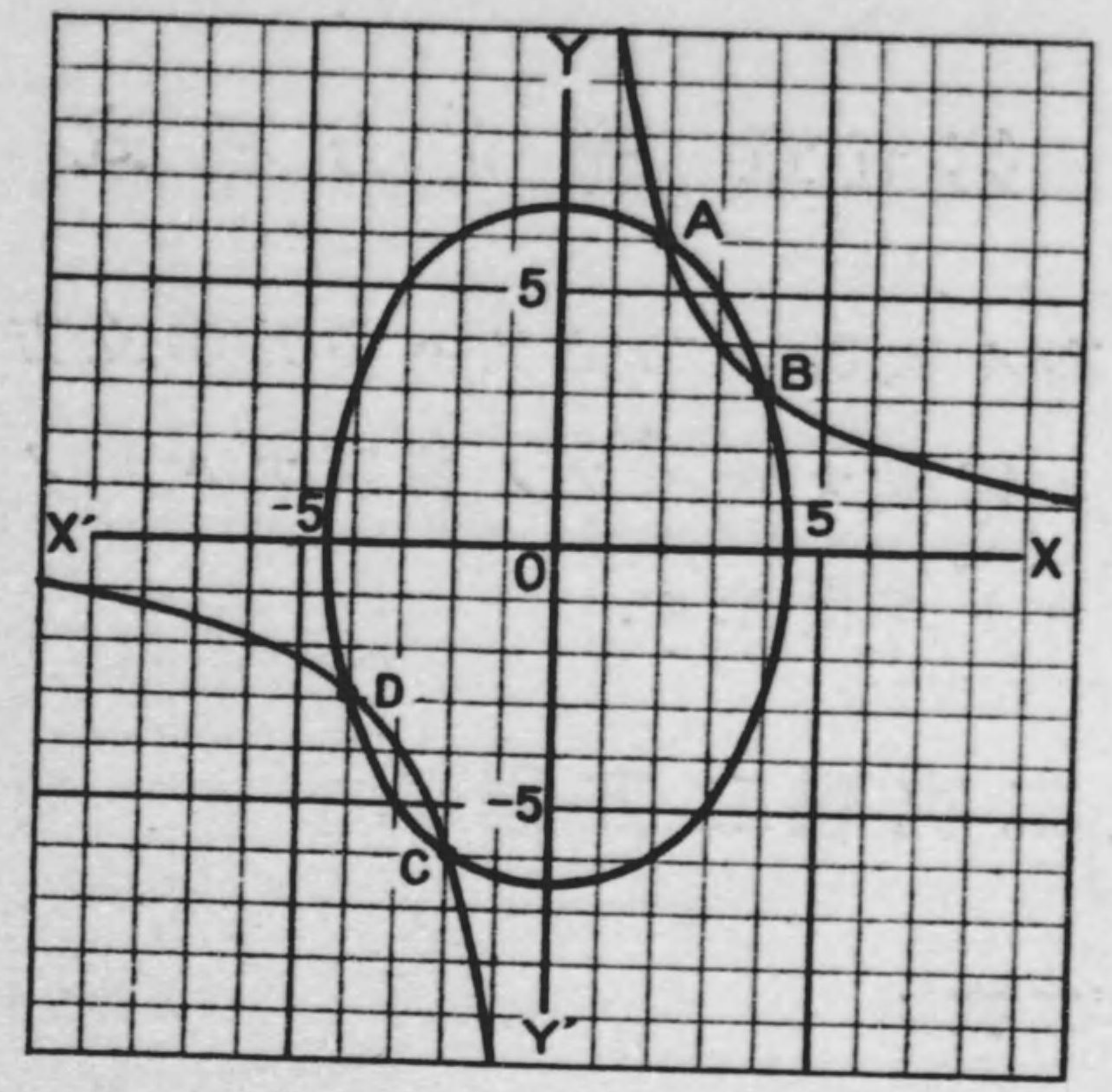
(3)▲ $\left|\begin{aligned}&y=x^3\\&y=x^2+4x-4\end{aligned}\right.$



答

x	2	1	−2
y	8	1	−8

之モ $x^3-x^2-4x+4=0$ ノ解法ノ一ツヲ暗示スルモノデアル。



此ノ二線ノ交點ノ坐標ハ此ノ聯立方程式ノ根デアツテ $A(2,6)$, $B(4,3)$, $C(-2,-6)$, $D(-4,-3)$ ノ四組アル。

答

x	2	4	−2	−4
y	6	3	−6	−3

問　題　33

次ノ聯立方程式ヲ圖示的ニ解ケ。

1 $\left|\begin{aligned}&xy=12\\&x^2+y^2=25\end{aligned}\right.$

2 $\left|\begin{aligned}&2x^2+3y^2=77\\&2x^2-3y^2=23\end{aligned}\right.$

(1) $\left|\begin{aligned}&y^2=8x\\&4x^2+4y^2=225\end{aligned}\right.$

(2) $\left|\begin{aligned}&xy=6\\&y=x^2-6x+11\end{aligned}\right.$

第五章 聯立方程式

一次ヨリ高イ次數ノ二元又ハ多元聯立方程式ヲ解クコトハ一般ニ困難ナルモソノ特別ナル形ノモノハ容易ニ之ヲ解クコトガ出來ル。

23 二元二次聯立方程式

(1) 一次ト二次

例一 $\left|\begin{array}{l} x^2-2xy+2y^2=5x \\ 4x-y=5 \end{array}\right.$ ヲ解ケ。

解 $x^2-2xy+2y^2=5x$ ……………(1)

$4x-y=5$ ……………………(2)

(2) ヨリ $y=4x-5$ ガ得ラレル。之ヲ (1) ニ代入スレバ

$$x^2-2x(4x-5)+2(4x-5)^2-5x=0$$

$$x^2-8x^2+10x+32x^2-80x+50-5x=0$$

$$25x^2-75x+50=0$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$(x-2)(x-1)=0$$

$$\left.\begin{array}{r} x-2=0 \\ x=2 \\ y=3 \end{array}\right|\begin{array}{r} x-1=0 \\ x=1 \\ y=-1 \end{array}$$

答

x	2	1
y	3	-1

第五章 聯立方程式

一次ノミノ聯立方程式ハ既ニ上巻デ述ベタ。一次ヨリ高次ノ二元又ハ多元聯立方程式ノ解法ハ一般ニ困難デ，各々ノ場合ニ應ジテ其ノ解法ハ異ナル。何トイツテモ基本ニナルノハ二元二次聯立方程式デアツテ，其ノ又基礎トナルノハ一次ト二次トノ場合デアル。

23 二元二次聯立方程式

(1) 一次ト二次

此ノ場合ハ以後ノ聯立方程式解法ノ基礎ヲナスモノデアルカラヨク徹底サセテオク必要ガアル。其ノ解法ヲ例一ニツイテ述ベテ見ヨウ。

1 一次方程式 (2) ヨリ y ヲ x ノ函數 ($y=4x-5$) トシテ表ハシ，之ヲ二次方程式 (1) ニ**代入スル**。

2 ソシテ出來タ x ニ關スル一元二次方程式ヲ解ク。

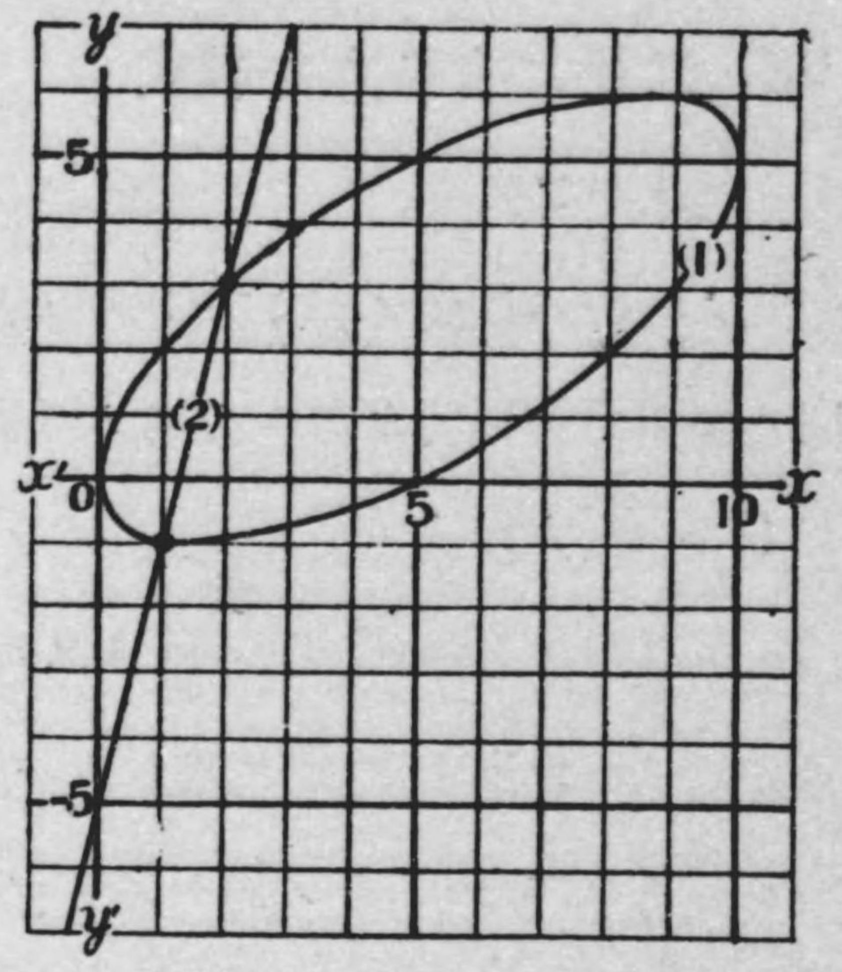
3 カクテ得タ x ノ値ハ之ヲ一次方程式 (2) ノ方ヘ代入シテ x ノ値ニ應ズル y ノ値ヲ定メル。(x ノ値ヲ二次ノ方ニ代入シテハナラヌ，注意ヲ要スル。)

斯クシテ一般ニ二組ノ根ガ定マルノデアル。何故ニ一般ニ二組カトイフニ上述ノ第二ノ階段デハ x ノ値ガ二ツアルカラコノ二ツノ x ノ値ニ對シテ夫々 y ガ一ツヅツ對應スルカラデアル。併シ y ノ値ヲ代入シタトキニ x^2 ノ項ガ消エテ仕舞ツテ第二階級ガ一元一次方程式ニナツテ仕舞ツタ場合モアリ得ルノデ，常ニ二組アルトハイヘナイ。尚「グラフ」ニヨル解法ト對照シテ見ルノモ面白イモノデ「グラフ」ノ助ニヨルト根ノ數ハヨク理解出來ル。

P. 215

例一
$$\begin{cases} x^2-2xy+2y^2=5x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 4x-y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

此ノ問題ニ對シ其ノ「グラフ」ヲ併セ示スコトハ極メテ有効デアル。是非掛圖ヲ作ツテオイテ教室ニ竄ラシテ示サレタイ。参考ノ爲次ニ描イテオク。



(1) ハ楕圓デアリ，(2) ハ直線デアル。其ノ交點 (2, 3) 及ビ (1, −1) ガ根ヲ與ヘル。此ノ解法ニ於テ先ヅ x ノ 2 及ビ 1 ヲ求メ得タトキ，之ヲ (1) ノ二次方程式ニ代入スルト，(2) ノ一次方程式ニ代入スルトハ，此ノ場合ハ複雜ニナル (1) ヲトル理由モナイガ，之ハ敢テ簡單デアツテモ，二次ノ方ヲ用ヒテハナラヌ事ヲ「グラフ」デ示スコトガ出來ル。卽チ $x=1$ ヲ (1) ニ代入スレバ $y=-1$ ノ外 $y=2$ ヲ得ル。然ルニ $x=1, y=2$ ハ根デハナイ事，「グラフ」ニ見エル通リデアル。之ニ反シ (2) ニ代入スレバ根ノ $y=-1$ ノミヲ得ル。此ノ邊ノ事ヲ「グラフ」ト併セ説明スレバ有効デアル。

因ニ舊教科書91頁ノ例一
$$\begin{cases} x^2-5xy+7y^2=x+y \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-3y+3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$
モ亦 (1) ハ細長イ楕圓デ (2) ハ直線デアルコトハ上ノ例ト同一デアル。唯此ノ方ハ楕圓ガ餘リ細長クナリ説明ニ不便デアルダケデアル。

問　題　34 (舊教科書92頁)

1
$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \cdots\cdots\cdots(1) \\ x-y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$
(2) ヨリ $x=y+1$

(1) ニ代入スレバ

$$y^2+y-12=0$$

卽チ $y=3$ | $y=-4$

從ツテ $x=4$ | $x=-3$

答

x	4	−3
y	3	−4

2
$$\begin{cases} x-3y+5=0 \cdots\cdots(1) \\ y-xy=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$
(1) ヨリ　$x=3y-5$

(2) ニ代入スレバ

$$y(2-y)=0$$

$y=0$ 又ハ $y=2$

(1) ニ代入シテ

$x=-5$ 又ハ $x=1$

答

x	−5	1
y	0	2

(1)
$$\begin{cases} x^2+y^2-40=0 \cdots\cdots(1) \\ 3x-y=0 \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$
(2) ヨリ $y=3x$

(1) ニ代入セヨ。

$x^2=4$　∴ $x=\pm 2$

$x=2$, $y=6$ | $x=-2$, $y=-6$

答

x	2	−2
y	6	−6

(2)
$$\begin{cases} 4x^2-xy=0 \cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x-3y=6 \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$
(2) ヨリ　$y=\frac{1}{3}(2x-6)$

(1) ニ代入スレバ

$$x(5x+3)=0$$

∴ $x=0$ 又ハ $x=-\frac{3}{5}$

(2) ニ代入シテ

$y=-2$ 又ハ $y=-\frac{12}{5}$

答

x	0	$-\frac{3}{5}$
y	−2	$-\frac{12}{5}$

〔注意〕 聯立方程式ノ根ハ組トシテ答ヘル必要ガアルカラ，必ズ表ニシテ答ヘルヤウニ習慣ヅケルガヨイ。以下ノ問題モ同様ニ取扱ハレタイ。

3 $\begin{cases} 4x-3y=14 \cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x^2-xy-y^2=61 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) ヨリ $y=\dfrac{4x-14}{3}$

(2) ニ代入セヨ。

$x^2-154x+745=0$

即チ $(x-5)(x-149)=0$

∴ $\left.\begin{matrix} x=5, & x=149 \\ y=2, & y=194 \end{matrix}\right\}$

答

x	5	149
y	2	194

4 $\begin{cases} \dfrac{5x-y}{4}=\dfrac{7}{4x+3y} \cdots\cdots(1) \\ 3x-2y=1 \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(2) ノ y ヲ (1) ニ代入セヨ。

$119x^2-4x-115=0$

$(x-1)(119x+115)=0$

$\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=-\dfrac{115}{119} \\ y=-\dfrac{227}{119} \end{matrix}\right\}$

検査

二根共ニ L. C. M. ヲ 0 トシナイ。

答

x	1	$-\dfrac{115}{119}$
y	1	$-\dfrac{232}{119}$

(3) $\begin{cases} (2+x)(9+y)=91 \cdots\cdots(1) \\ x+y=9 \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(2) ヨリ $y=9-x$

(1) ニ代入セヨ。

$x^2-16x+55=0$

$(x-5)(x-11)=0$

∴ $\left.\begin{matrix} x=5 \\ y=4 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=11 \\ y=-2 \end{matrix}\right\}$

答

x	5	11
y	4	-2

(4) $\begin{cases} 4x-7y=5 \cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{10}{3} \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(2) ノ分母ヲ拂ツテ因數分解スレバ

$(x-3y)(3x-y)=0$.

$x=3y \quad 3x=y$

此ノ各々ト (1) トヲ組ミ合セテ

$\begin{matrix} x=3 \\ y=1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} x=-\dfrac{5}{17} \\ y=-\dfrac{15}{17} \end{matrix}$

検査

二根共ニ分母ヲ 0 トシナイ。

答

x	3	$-\dfrac{5}{17}$
y	1	$-\dfrac{15}{17}$

カクノ如ク一方程式ガ一次式デアルトキハソレヨリ一ツノ未知數ヲ求メ之ヲ他ノ式ニ代入シ一元ノ方程式ヲ作レバヨイ。

問題 34

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

1 $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x-y=1 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x-3y+5=0 \\ y-xy=0 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 4x-3y=14 \\ 3x^2-xy-y^2=61 \end{cases}$

4 $\begin{cases} \dfrac{5x-y}{4}=\dfrac{7}{4x+3y} \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} x^2+y^2-40=0 \\ 3x-y=0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 4x^2-xy=0 \\ 2x-3y=6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} (2+x)(9+y)=91 \\ x+y=9 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 4x-7y=5 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{10}{3} \end{cases}$

(2) 二次ト二次

(a) 二次ノ項ヲ全部消去シ得ル場合

例一 $\left|\begin{array}{l} 2x^2+2y^2-x-3y=42 \\ x^2+y^2-3x+y=6 \end{array}\right.$ ヲ解ケ.

解 $2x^2+2y^2-x-3y=42 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$x^2+y^2-3x+y=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$(1)-(2)\times 2 \quad 5x-5y=30$

$x-y=6 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$x=y+6$

(2) ニ代入 $y^2+12y+36+y^2-3y-18+y=6$

$2y^2+10y+12=0$

$y^2+5y+6=0$

$(y+2)(y+3)=0$

$y+2=0$ | $y+3=0$

$y=-2$ | $y=-3$

$x=-2+6=4$ | $x=-3+6=3$

答

x	4	3
y	-2	-3

(2) 二次ト二次

二次ト二次ノ聯立方程式ハ一般ニ解ケナイ。ソコデ解キ得ル場合ヲ最モ工合ヨク分類シ，其ノ型ヲ心得テオイテ，之ヲ活用スルヤウニシタイ。之ヲ解キ得ルトイフハ要スルニ一次ト二次ノ聯立ニ直スコトデアル。コレガ出來サヘスレバ必ズ解ケルコトニナル。ソコデ工夫トイフハ如何ニシテ一次ノ式ヲ作ルカトイフコトデアル。

(a) 二次ノ項ヲ全部消去シ得ル場合

與ヘラレタ二ツノ方程式カラ二次ノ項ヲ全部消去シテ一次ノ方程式ヲ作リ，コノ一次方程式ト與ヘラレタ方程式ノ中ノ何レカ一ツトヲ組合セル，即チ一次ト二次トノ場合ニ歸スルノデアル。此ノ場合ハ方程式ノ等値トイフコトガ問題トナルガ，今例一ニ就イテ調ベテ見ルニ，

例一 $\left|\begin{array}{l} 2x^2+2y^2-x-3y=42 \\ x^2+y^2-3x+y=6 \end{array}\right.$ 即チ $\left|\begin{array}{l} 2x^2+2y^2-x-3y-2(x^2+y^2-3x+y)=42-12 \\ x^2+y^2-3x+y=6 \end{array}\right.$

更ニ $\left|\begin{array}{l} 5x-5y=30 \\ x^2+y^2-3x+y=6 \end{array}\right.$ 即チ $\left|\begin{array}{l} x=y+6 \\ x^2+y^2-3x+y=6 \end{array}\right.$ 即チ $\left|\begin{array}{l} x=y+6 \\ (y+6)^2+y^2-3(y+6)+y=6 \end{array}\right.$

故ニ $\left|\begin{array}{l} x=y+6 \\ y^2+5y+6=0 \end{array}\right.$ 故ニ $\left|\begin{array}{l} x=y+6 \\ (y+2)(y+3)=0 \end{array}\right.$ トナル。茲ニ於テ

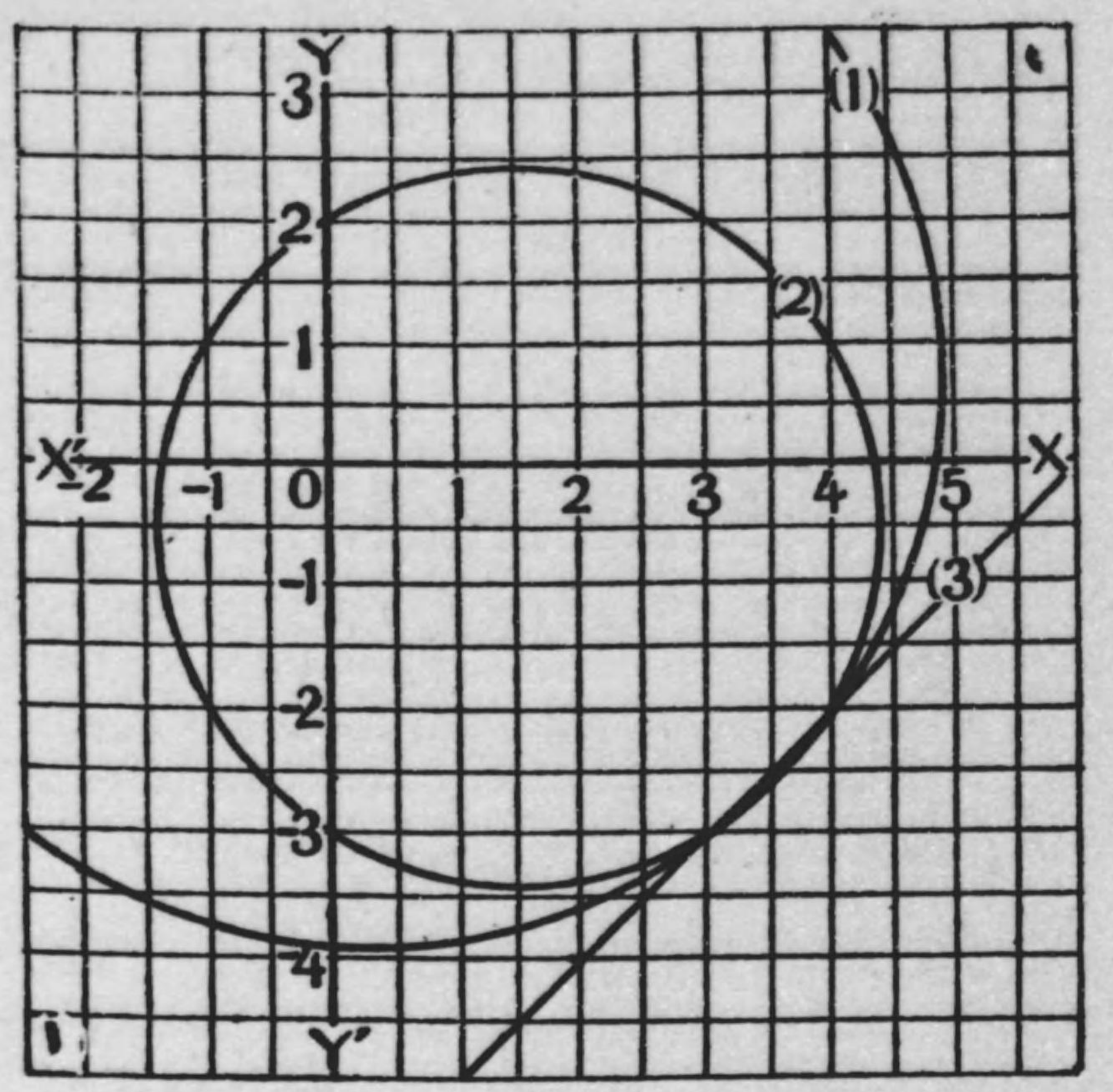
$\left\{\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} x=y+6 \\ y+2=0 \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} x=y+6 \\ y+3=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} x=y+6 \\ y=-2 \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} x=y+6 \\ y=-3 \end{array}\right. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} x=-2+6 \\ y=-2 \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} x=-3+6 \\ y=-3 \end{array}\right. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} x=4 \\ y=-2 \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} x=3 \\ y=-3 \end{array}\right. \end{array}\right.$ 之レガ答トナル。

上ノ過程ハ要スルニ一聯ノ等値ナル方程式ノ變形ヲ次々ニ行ツテ遂ニ所要ノ根ニ到達シタノデアル。

P. 221

例一
$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x-3y=42 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x^2+y^2-3x+y=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

之ガ「グラフ」ニ依ル解法ヲ示サウ。(1) ハ圓デアリ，(2) モ圓デアル。之ヲ「グラフ」ニ描ケバ右ノ如クナル。今計算ニ於テ一次ノ方程式 (3) ヲ得テキルガ，之ハ丁度 (1) ト (2) トノ交點ヲ通ル直線デアル。ソコデ，(1) ト (2) トノ組合セヲトル代リニ，(1) ト (3)，或ハ (2) ト (3) ヲトルモ同一ノ點ヲ得ルコトニナル。此ノ邊ヲ説明シテ欲シイモノデアル。



因ニ(3)ノ直線ハ(1)ト(2)ノ二圓ノ根軸デアッテ，一般ニ二ツノ二次方程式ノ結合ニ其ノ根軸ヲ表ハス。

問題 35 (舊教科書94頁)

1●
$$\begin{cases} x^2+3y=18 \cdots\cdots\cdots (1) \\ 2x^2-5y=2 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1)×2−(2)　$y=\dfrac{34}{11}$

(1) ニ代入スレバ　$x^2=\dfrac{96}{11}$

∴　$x=\pm\dfrac{4\sqrt{6}}{\sqrt{11}}=\pm\dfrac{4}{11}\sqrt{66}$

答

x	$\frac{4}{11}\sqrt{66}$	$-\frac{4}{11}\sqrt{66}$
y	$\frac{34}{11}$	$\frac{34}{11}$

1▲
$$\begin{cases} x^2+3y=18 \cdots\cdots\cdots (1) \\ 2x^2-5y=3 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1)×2−(2)　$11y=33$　$y=3$

從ツテ　$x=\pm 3$

答

x	3	−3
y	3	3

2
$$\begin{cases} x+y+2y^2=11 \cdots\cdots (1) \\ 3x-2y-2y^2=-9 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1)+(2)　$4x-y=2$

此ノ x ヲ (1) ニ代入スレバ

$$\frac{y+2}{4}+y+2y^2=11$$

∴　$8y^2+5y-42=0$

$(y-2)(8y+21)=0$

答

x	1	$-\frac{5}{32}$
y	2	$-\frac{21}{8}$

(1)
$$\begin{cases} 4x=xy+5 \cdots\cdots\cdots (1) \\ 7y=xy+6 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(2)−(1)　$y=\dfrac{4x+1}{7}$

(1) ニ代入セヨ。

$4x^2-27x+35=0$　之ヨリ

$$\left.\begin{matrix} x=5 \\ y=3 \end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} x=\frac{7}{4} \\ y=\frac{8}{7} \end{matrix}\right\}$$

答

x	5	$\frac{7}{4}$
y	3	$\frac{8}{7}$

(2)
$$\begin{cases} x^2+y^2-3x-1=0 \cdots\cdots\cdots (1) \\ x^2+y^2-3y-7=0 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1)−(2)　$y=x-2$

(1) ニ代入シテ

$2x^2-7x+3=0$

$x=3,\quad x=\dfrac{1}{2}$

$y=1,\quad y=-\dfrac{3}{2}$

答

x	3	$\frac{1}{2}$
y	1	$-\frac{3}{2}$

3 $\begin{cases} 3x+\sqrt{\dfrac{x}{y}}=30 \cdots\cdots(1) \\ 5x-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=39 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

x ト $\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ トヲ未知數ト考ヘテ　(1)×2+(2)

$11x=99$　　$x=9$

(1)ニ代入シテ　　$y=1$

檢査如何。

答 $\begin{cases} x=9 \\ y=1 \end{cases}$

$\boxed{4}$ 5 $a(x+y)=b(x-y)=xy$

$\begin{cases} a(x+y)=xy \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ b(x-y)=xy \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)−(2)　$(a-b)x+(a+b)y=0$

(1)ニ代入シテ　$(b-a)x^2=2abx$

答

x	0	$\dfrac{2ab}{b-a}$
y	0	$\dfrac{2ab}{a+b}$

〔注意〕 x y ノ項ヲ一度用ヒテ方程式ヲ作レバ一次ト二次トノ聯立トナスコトヲ得ル, 此ノ方ガ優レテヰル。

4 ▲ $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{17}{12} \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) ヨリ $x+y=5xy$

(2) ヨリ $5(x+y)=7-17xy$

xy ヲ消去セヨ。

檢査如何。

答

x	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$
y	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{2}$

(3) $\begin{cases} (x+1)(y+2)=28 \cdots\cdots(1) \\ (x+3)(y+4)=54 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) ヨリ $xy+2x+y=26$

(2) ヨリ $xy+4x+3y=42$

$2x+2y=16$

∴ $x+y=8$

之ヲ (1) ニ代入シ

$x^2-9x+18=0$

答

x	3	6
y	5	2

(4) $\begin{cases} x+y=a(x^2+y^2) \cdots\cdots(1) \\ x-y=b(x^2+y^2) \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)×b−(2)×a

$b(x+y)=a(x-y)$　$x=\dfrac{a+b}{a-b}y$

(1)ニ代入シ

$$\frac{2ay}{a-b}=\frac{2a(a^2+b^2)}{(a-b)^2}y^2$$

答

y	0	$\dfrac{a-b}{a^2+b^2}$
x	0	$\dfrac{a+b}{a^2+b^2}$

(5) ▲ $\dfrac{8y-5x+36}{3}=x^2=\dfrac{3x+4y+3}{2}$

$\begin{cases} 8y-5x+36=3x^2 \\ 3x+4y+3=2x^2 \end{cases}$

x^2 ヲ消去セヨ。

〔注意〕 $\boxed{4}$ ト同様。

答

x	5	6
y	8	$12\dfrac{3}{4}$

問題 35

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

1 $\begin{cases} x^2+3y=18 \\ 2x^2-5y=2 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x+y+2y^2=11 \\ 3x-2y-2y^2=-9 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 3x+\sqrt{\dfrac{x}{y}}=30 \\ 5x-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=39 \end{cases}$

4 $a(x+y)=b(x-y)=xy$

(1) $\begin{cases} 4x=xy+5 \\ 7y=xy+6 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2-3x-1=0 \\ x^2+y^2-3y-7=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} (x+1)(y+2)=28 \\ (x+3)(y+4)=54 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x+y=a(x^2+y^2) \\ x-y=b(x^2+y^2) \end{cases}$

(b) 一式ガ因數ニ分解シ得ル場合

例二 $\left|\begin{array}{l} 2x^2+6y^2=7xy \\ x^2-3y^2+2y=3 \end{array}\right.$ ヲ解ケ。

解 $2x^2+6y^2=7xy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$x^2-3y^2+2y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

(1) $2x^2-7xy+6y^2=0$

$(x-2y)(2x-3y)=0$

$x-2y=0$

$x=2y$

(2) ニ代入シテ

$4y^2-3y^2+2y=3$

$y^2+2y-3=0$

$(y-1)(y+3)=0$

$y-1=0$, $y=1$, $x=2$ | $y+3=0$, $y=-3$, $x=-6$

$2x-3y=0$

$x=\frac{3}{2}y$

(2) ニ代入シテ

$\frac{9}{4}y^2-3y^2+2y-3=0$

$9y^2-12y^2+8y-12=0$

$3y^2-8y+12=0$

$y=\frac{8\pm\sqrt{64-144}}{6}$

$=\frac{2(2\pm\sqrt{-5})}{3}$

$x=2\pm\sqrt{-5}$

答

x	2	-6	$2+\sqrt{-5}$	$2-\sqrt{-5}$
y	1	-3	$\frac{2(2+\sqrt{-5})}{3}$	$\frac{2(2-\sqrt{-5})}{3}$

(b) 一式ガ因數ニ分解シ得ル場合

此ノ場合ハ例二ノ第一式ニ見ルヤウニ概ネ x, y ノ二次ノ同次式ニナツテキル。從ツテ容易ニ因數ニ分解ガ出來ル。併シイツモ同次式デアルカトイフニ必ズシモサウデナイ。同次式デナクテモ一方ノ式ガ $(lx+my+n)(l'x+m'y+n')$ トイフヤウニ因數ニ分解出來ル場合モアル。所ガ一般ノ二次式（x, y ニ關スル）ノ因數分解ハ困難デアルカラ斯樣ナ例ハ餘リ採ラナク從ツテ二次ノ同次式デ與ヘテアル。

例二 $2x^2-7xy+6y^2=0$

即チ $(x-2y)(2x-3y)=0$ ハ

$x-2y=0$ ト $2x-3y=0$ トノ

二方程式ト等値デアルカラ

$\left|\begin{array}{l} 2x^2+6y^2=7xy \cdots\cdots(1) \\ x^2-3y^2+2y=3 \cdots\cdots(2) \end{array}\right.$ ハ

$\left|\begin{array}{l} x-2y=0 \\ x^2-3y^2+2y=3 \end{array}\right.$

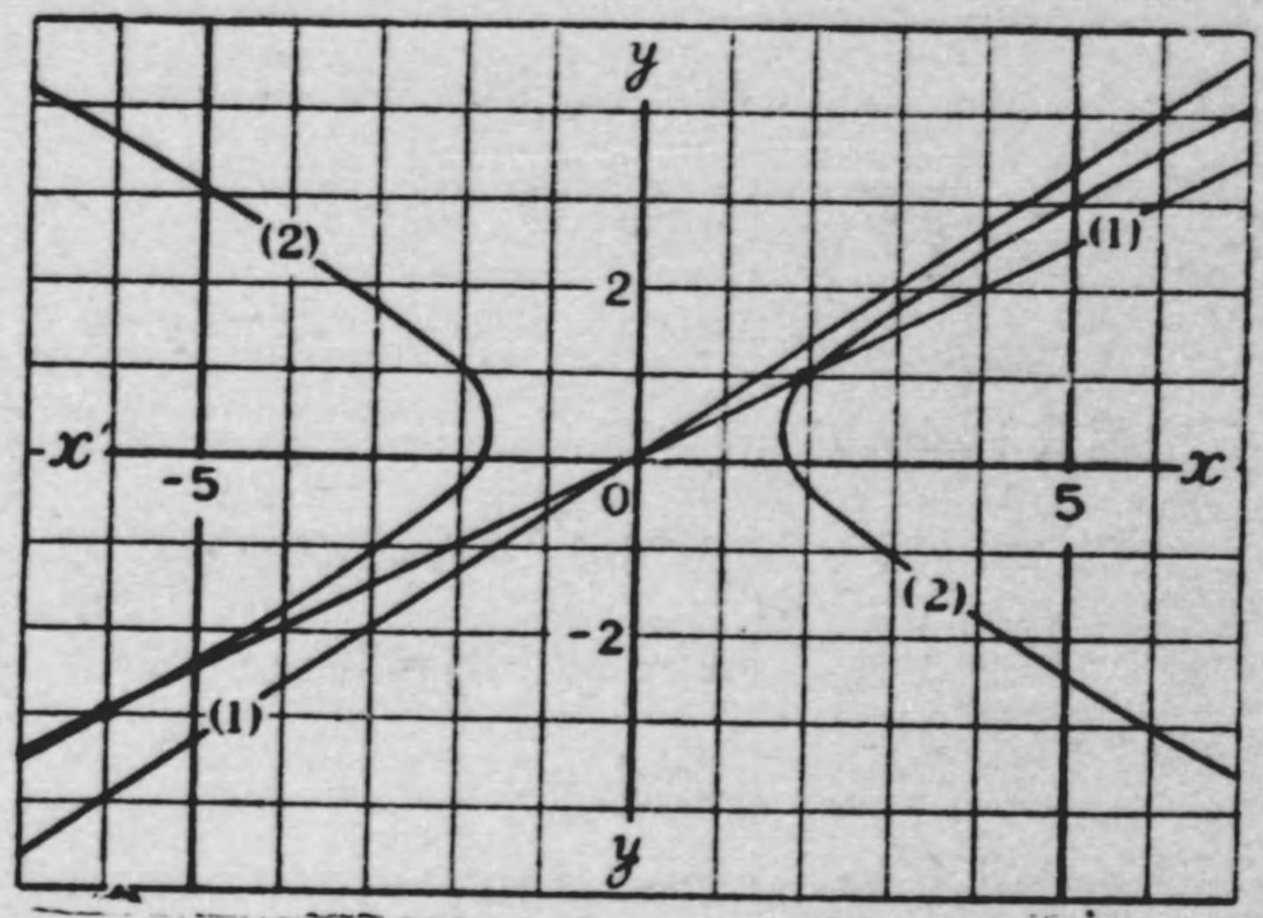
及ビ $\left|\begin{array}{l} 2x-3y=0 \\ x^2-3y^2+2y=3 \end{array}\right.$ ノ二聯立方程式ト等値デアル。

之ガ「グラフ」ニ依ル解法ハ次ノ頁ニ示ス。

之ガ「グラフ」ニ依ル解法ヲ考ヘルニ，(1) ハ一次方程式二ツニ分ツコトガ出來ル。卽チ之ハ二本ノ直線ヲ表ハス。(2) ハ双曲線デアツテ，其ノ交點ハ，二直線ノ中 $x=2y$ ガ双曲線ト二點，(2, 1), (−6, −3) ガ圖ノ上ニ現ハレテキル。直線 $2x=3y$ ト双曲線トハ虛點デ交ルカラ，圖ノ上ニハ交點ハナイ。

例二

$$\begin{cases} 2x^2+6y=7xy^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x^2-3y^2+2y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$



問　題　36 (舊教科書96頁)

1●
$$\begin{cases} 12x^2-12y^2=7xy \cdots\cdots (1) \\ x^2+y^2=100 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1) ヨリ $(4x+3y)(3x-4y)=0$

$$\begin{cases} 4x+3y=0 \\ x^2+y^2=100 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-4y=0 \\ x^2+y^2=100 \end{cases}$$

此ノ聯立方程式ヲ解イテ

$$\begin{cases} x=-6 \\ y=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=-8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-8 \\ y=-6 \end{cases}$$

答

x	6	−6	8	−8
y	−8	8	6	−6

1●
$$\begin{cases} x^2+12y^2=8xy \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 2xy=2(x+7)^2+y \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1) ヨリ $(x-2y)(x-6y)=0$

$x=2y$
(2) ニ代入シ
$4y^2+57y+98=0$
$y=-2$ 又ハ $-\dfrac{49}{4}$

$x=6y$
(2) ニ代入シ
$60y^2+169y+98=0$
$y=-2$ 又ハ $-\dfrac{49}{60}$

答

x	−4	$-\dfrac{49}{2}$	−12	$-\dfrac{49}{10}$
y	−2	$-\dfrac{49}{4}$	−2	$-\dfrac{49}{60}$

1▲
$$\begin{cases} x^2-9y^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 3xy=2x^2+2y^2-99 \cdots\cdot (2) \end{cases}$$

(1) ヨリ $(x-3y)(x+3y)=0$

各ト (2) トヲ組合セテ

答

x	9	−9	$\dfrac{9\sqrt{319}}{29}$	$\dfrac{-9\sqrt{319}}{29}$
y	3	−3	$\dfrac{-3\sqrt{319}}{29}$	$\dfrac{3\sqrt{319}}{29}$

2
$$\begin{cases} 4x^2-9y^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 6x^2+8xy=10y-x \cdots\cdot (2) \end{cases}$$

(1) ヨリ $(2x-3y)(2x+3y)=0$

$$\begin{cases} 2x-3y=0 \\ 6x^2+8xy=10y-x \end{cases}$$
$y=\dfrac{2}{3}x$
$2x^2-x=0$
$x=0$ 又ハ $\dfrac{1}{2}$

$$\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 6x^2+8xy=10y-x \end{cases}$$
$y=-\dfrac{2}{3}x$
$2x^2+23x=0$
$x=0$ 又ハ $-\dfrac{23}{2}$

答

x	0	$\dfrac{1}{2}$	0	$-\dfrac{23}{2}$
y	0	$\dfrac{1}{3}$	0	$\dfrac{23}{3}$

(2)
$$\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 \cdots\cdots (1) \\ x^2+4xy+2y^2=17 \cdots\cdot (2) \end{cases}$$

(1) ヨリ $(x-y)(2x-y)=0$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x^2+4xy+2y^2=17 \end{cases}$$
$7x^2=17$
$x=\pm\dfrac{\sqrt{119}}{7}$

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ x^2+4xy+2y^2=17 \end{cases}$$
$17x^2=17$
$x=\pm 1$

答

x	$\dfrac{\sqrt{119}}{7}$	$-\dfrac{\sqrt{119}}{7}$	1	−1
y	$\dfrac{\sqrt{119}}{7}$	$-\dfrac{\sqrt{119}}{7}$	2	−2

3 $\left|\begin{array}{l} x^2-y^2=8 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x^2-4xy+3y^2=0 \quad \cdots\cdots (2) \end{array}\right.$

(1)ヨリ $(x-y)(x-3y)=0$

$\left|\begin{array}{l} x-y=0 \\ x^2-y^2=8 \end{array}\right.$

不能

$\left|\begin{array}{l} x-3y=0 \\ x^2-y^2=8 \end{array}\right.$

$8y^2=8$

$\left|\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x=-3 \\ y=-1 \end{array}\right.$

答

x	3	-3
y	1	-1

4 $\left|\begin{array}{l} x^2+2xy+y^2=(x+y)(3x+1) \cdots (1) \\ x^2-y^2+2xy+1=0 \cdots\cdots\cdots (2) \end{array}\right.$

(1) ヨリ $(x+y)^2=(x+y)(3x+1)$

$\left|\begin{array}{l} x+y=0 \\ x^2-y^2+2xy+1=0 \end{array}\right.$

$\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$

$\left|\begin{array}{l} y-2x-1=0 \\ x^2-y^2+2xy+1=0 \end{array}\right.$

$x^2-2x=0$

$\left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x=2 \\ y=5 \end{array}\right.$

答

x	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	0	2
y	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1	5

5 ▲ $\left|\begin{array}{l} 2ab(a+b)x+y^2=abx^2+2aby \,(1) \\ abx^2+(a+b)y^2=(a+ab+b)xy \,(2) \end{array}\right.$

(2) ヨリ $(x-y)\{abx-(a+b)y\}=0$

(1) ト組合セヨ。

x	0	$\dfrac{2ab(a+b-1)}{ab-1}$	$\dfrac{2(a+b)(a+b-ab)}{a^2+ab+b^2}$
y	0	同　上	$\dfrac{2ab(a+b-ab)}{a^2+ab+b^2}$

(3) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{x}=3 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x^2-y^2-2x+1=0 \quad \cdots\cdots (2) \end{array}\right.$

(1)ヨリ $x^2-3xy+2y^2=0$

$\left|\begin{array}{l} x-y=0 \\ x^2-y^2-2x+1=0 \end{array}\right.$

$2x-1=0$

$x=y=\dfrac{1}{2}$

$\left|\begin{array}{l} x-2y=0 \\ x^2-y^2-2x+1=0 \end{array}\right.$

$\therefore\ 3y^2-4y+1=0$

$\left|\begin{array}{l} y=1 \\ x=2 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{3} \\ x=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

答

x	$\dfrac{1}{2}$	2	$\dfrac{2}{3}$
y	$\dfrac{1}{2}$	1	$\dfrac{1}{3}$

(4) $\left|\begin{array}{l} (x-y)^2-9=(x-y-3)(x+2y) \,(1) \\ x^2-4y^2=9 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{array}\right.$

(1) ヨリ　$(x-y-3)(x-y+3)$
$=(x-y-3)(x+2y)$

$\left|\begin{array}{l} x-y-3=0 \\ x^2-4y^2=9 \end{array}\right.$

$2y-y^2=0$

$y=0,\ y=2$

$\left|\begin{array}{l} y=1 \\ x^2-4y^2=9 \end{array}\right.$

$x^2=13$

$x=\sqrt{13},\quad -\sqrt{13}$

答

x	3	5	$\sqrt{13}$	$-\sqrt{13}$
y	0	2	1	1

(5) ▲ $\left|\begin{array}{l} (x+y)(x-2y)=\dfrac{1}{4}(x^2-y^2) \cdots (1) \\ 5x=4y^2-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{array}\right.$

(1) ヨリ $(x+y)(3x-7y)=0$

答

x	7	$-\dfrac{7}{36}$	$\dfrac{+5+\sqrt{41}}{8}$	$\dfrac{5-\sqrt{41}}{8}$
y	3	$-\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{-5-\sqrt{41}}{8}$	$\dfrac{-5+\sqrt{41}}{8}$

問　題　36

次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

1 $\left|\begin{array}{l} 12x^2-12y^2=7xy \\ x^2+y^2=100 \end{array}\right.$

2 $\left|\begin{array}{l} 4x^2-9y^2=0 \\ 6x^2+8xy=10y-x \end{array}\right.$

3 $\left|\begin{array}{l} x^2-y^2=8 \\ x^2-4xy+3y^2=0 \end{array}\right.$

4 $\left|\begin{array}{l} x^2+2xy+y^2=(x+y)(3x+1) \\ x^2-y^2+2xy+1=0 \end{array}\right.$

(1) $\left|\begin{array}{l} x^2+12y^2=8xy \\ 2xy=2(x+7)^2+y \end{array}\right.$

(2) $\left|\begin{array}{l} 2x^2-3xy+y^2=0 \\ x^2+4xy+2y^2=17 \end{array}\right.$

(3) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{x}=3 \\ x^2-y^2-2x+1=0 \end{array}\right.$

(4) $\left|\begin{array}{l} (x-y)^2-9=(x-y-3)(x+2y) \\ x^2-4y^2=9 \end{array}\right.$

(c) 二式ヨリ因數ニ分解シ得ベキ式ヲ得ル場合

例三 $\left|\begin{array}{l} x^2-2xy+3y^2=9 \\ x^2-4xy+5y^2=5 \end{array}\right.$ ヲ解ケ。

解 $x^2-2xy+3y^2=9 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$x^2-4xy+5y^2=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

$$
\begin{array}{ll}
(2)\times 9 & 9x^2-36xy+45y^2=45 \\
(1)\times 5 & \underline{5x^2-10xy+15y^2=45} \\
 & 4x^2-26xy+30y^2=0 \\
 & 2x^2-13xy+15y^2=0 \\
 & (2x-3y)(x-5y)=0 \cdots\cdots (3)
\end{array}
$$

$2x-3y=0$ 即チ $x=\frac{3}{2}y$

(1) ニ代入シテ

$$\frac{9}{4}y^2-3y^2+3y^2=9$$

$$y^2=4$$

$$y=\pm 2$$

$y=2$, $x=3$ | $y=-2$, $x=-3$

$x-5y=0$ 即チ $x=5y$

$$25y^2-10y^2+3y^2=9$$

$$y^2=\frac{1}{2}$$

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ | $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=-\frac{5\sqrt{2}}{2}$

答

x	3	-3	$\frac{5\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{5\sqrt{2}}{2}$
y	2	-2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) 二式ヨリ因數ニ分解シ得ベキ式ヲ得ル場合

此ノ場合ハ概ネ二次ノ項ト既知項ノミヲ含ミ一次ノ項ヲ含マナイノガ通例デアル。併シ問題37ノ (5) ノヤウナ特別ナ場合モアルガ，要スルニ何等カノ方法デ二ツノ式カラ因數分解ノ出來ル式ヲ求メテソノ式カラ更ニ一次方程式二ツヲ得テ原方程式ノ何レカト聯立サセルノデアル。例三ノヤウニ一次ノ項ヲ含マナイ場合ハ二式カラ既知項ヲ消去シテ二次ノ同次式ヲ作リ (b) ノ解法ニ歸スルノデアル。若シ二次ノ同次式ガ視察ニヨツテ因數ニ分解出來ナケレバ一元二次方程式ノ根ノ公式ヲ適用スレバヨイ。

例三 $\left|\begin{array}{l} x^2-2xy+3y^2=9 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x^2-4xy+5y^2=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{array}\right.$

之ガ「グラフ」ニ依ル解法ヲ示スニ，(1), (2) ハ共ニ楕圓デアル。今 (2)×9−(1)×5 ニ依ツテ得タ二次方程式 $2x^2-13xy+15y^2=0$ ヲ因數分解ニ依ツテ

$2x-3y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

及ビ

$x-5y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

ニナシタトキ，之ハ二本ノ直線デアリ，且ツ之ハ (1) ト (2) トノ交點ヲ通ル，故ニ (1) ト (2) トノ楕圓ノ交點ヲ求メル代リニ (3) 並ニ (4) ノ直線ト (1) 或ハ (2) トノ交點ヲトレバヨイ。

93頁ニ計算シタ所ハ (3), (4) ノ直線ト (1) ノ楕圓トノ交點ヲトツテキルガ，之ハ明ラカニ (1) ト (2) トノ交點ヲ與ヘルモノデアル。

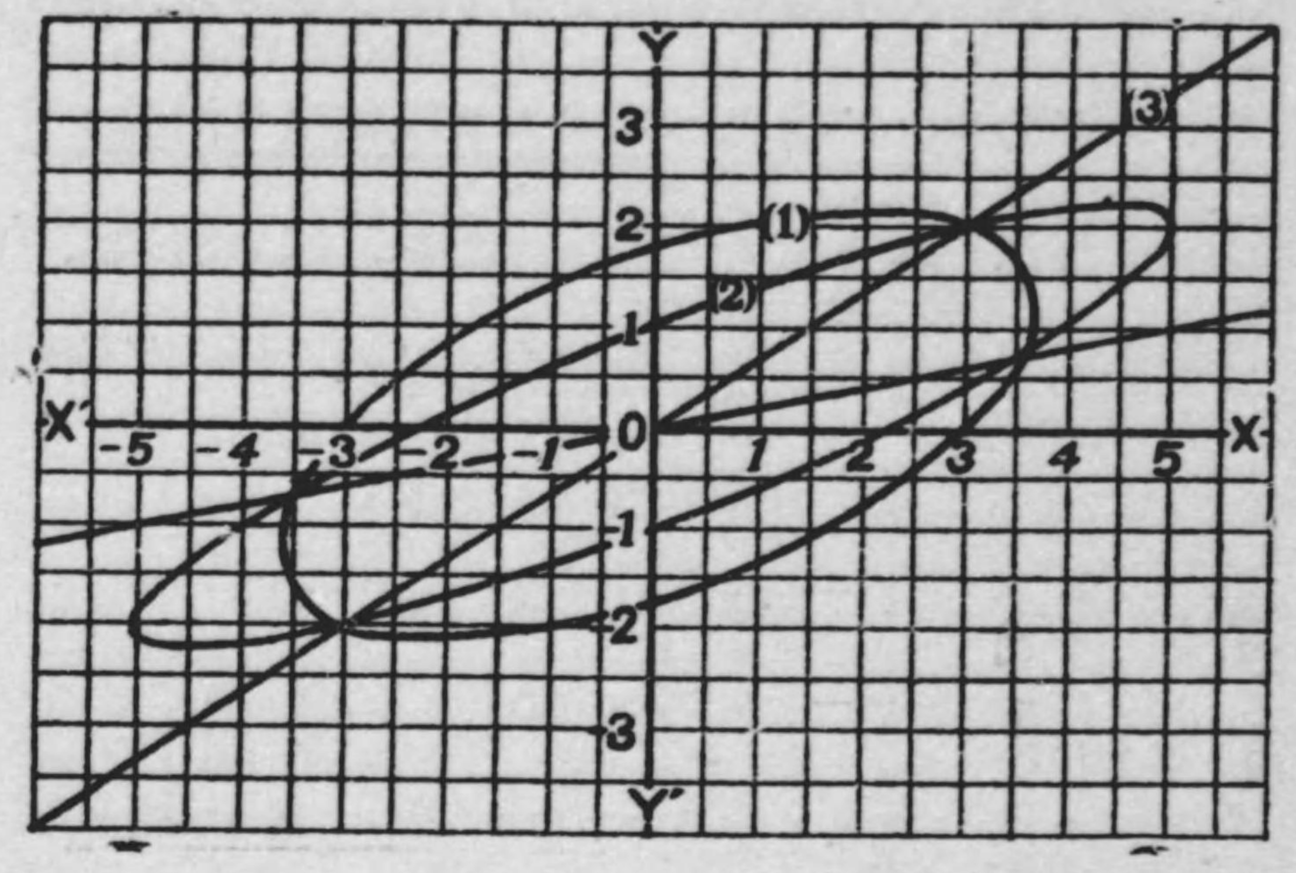
「グラフ」ハ次頁ニ示ス。

例三

$$\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9 \cdots\cdots (1) \\ x^2-4xy+5y^2=5 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

二ツノ結合ノ式

$$(2x-3y)(x-5y)=0 \cdots\cdots (3)$$



問　　題　　37 （舊教科書98頁）

$\boxed{1}$ 2

$$\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3 \cdots\cdots (1) \\ x^2+2y^2-6=0 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1)×2−(2)　$x(x-2y)=0$

(2)ト組合セヨ。

$$\begin{cases} x=0 \\ x^2+2y^2-6=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y=0 \\ x^2+2y^2-6=0 \end{cases}$$

∴　$y=\pm\sqrt{3}$ 　$y^2=1$　$y=\pm 1$

答

x	0	0	2	−2
y	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	1	−1

(1)

$$\begin{cases} x^2+2xy-3y^2=33 \cdots\cdots (1) \\ 2x^2+2xy-y^2=66 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1)×2−(2)　$y(2x-5y)=0$

$$\begin{cases} y=0 \\ x^2+2xy-3y^2=33 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-5y=0 \\ x^2+2xy-3y^2=33 \end{cases}$$

$\left.\begin{matrix} x=\sqrt{33} \\ y=0 \end{matrix}\right\}$ 　$\therefore y^2=4$

$\left.\begin{matrix} x=-\sqrt{33} \\ y=0 \end{matrix}\right\}$ 　$\left.\begin{matrix} x=5 \\ y=2 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=-5 \\ y=-2 \end{matrix}\right\}$

答

x	$\sqrt{33}$	$-\sqrt{33}$	5	−5
y	0	0	2	−2

$\boxed{2}$ (2)

$$\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3 \cdots\cdots (1) \\ x^2+2xy-3y^2=5 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1)×5−(2)×3　$x^2-3xy+2y^2=0$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x^2+2xy-3y^2=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y=0 \\ x^2+2xy-3y^2=5 \end{cases}$$

不　能　　$5y^2=5$

$y=\pm 1$

答

x	2	−2
y	1	−1

3

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=9y \cdots\cdots (1) \\ 2x^2-3xy+2y^2=4y \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1)×2−(2)　$xy-2y=0$

∴　$y(x-2)=0$

$$\begin{cases} y=0 \\ x^2+2xy+y^2=9y \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2=0 \\ x^2+2xy+y^2=9y \end{cases}$$

答

x	0	0	2	2
y	0	0	1	4

$\boxed{2}$ (3)

$$\begin{cases} 3x^2-3xy+2y^2=2x \cdots\cdots (1) \\ 2x^2+3y^2-4x=xy \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1)×2−(2)　$4x^2-5xy+y^2=0$

$$\begin{cases} 4x-y=0 \\ 2x^2+3y^2-4x=xy \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=0 \\ 2x^2+3y^2-4x=xy \end{cases}$$

$x(23x-2)=0$　　$x(x-1)=0$

$x=0$, $y=0$ | $x=\frac{2}{23}$, $y=\frac{8}{23}$ 　　$x=0$, $y=0$ | $x=1$, $y=1$

答

x	0	$\frac{2}{23}$	0	1
y	0	$\frac{8}{23}$	0	1

$\boxed{3}$ (4)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=5 \cdots\cdots (1) \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{xy}+\dfrac{1}{y^2}=9 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

分母ヲ拂ヘ。

$$\begin{cases} x^2+y^2=5x^2y^2 \cdots\cdots (1) \\ x^2+2xy+y^2=9x^2y^2 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1), (2) ヨリ x^2y^2 ノ項ヲ消去セヨ。　$2x^2-5xy+2y^2=0$

檢査如何。

答

x	1	−1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
y	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	−1

別解　$\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ ヲ一ツノ未知數ト考ヘテ解ケ。

4 ● $\begin{cases} x^2+y^2=13 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ xy=6 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

(1)+(2)×2　$(x+y)^2=25$

(1)−(2)×2　$(x-y)^2=1$

上ノ二式カラ四組ノ二元一次聯立方程式ヲ得ヨ。

答

x	3	2	−2	−3
y	2	3	−3	−2

1 ▲ $\begin{cases} 3x^2-4xy=16 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 2y^2+xy=16 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

(1)−(2)　$3x^2-5xy-2y^2=0$

$x=2y$　　$3x=-y$

此ノ各式ト (2) ト組合セテ

答

x	4	−4	$\frac{4\sqrt{15}}{15}$	$\frac{-4\sqrt{15}}{15}$
y	2	−2	$-\frac{4\sqrt{15}}{5}$	$\frac{4\sqrt{15}}{5}$

5 $\begin{cases} x^2+y^2=c^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ (ax-by)^2=c^2(a^2+b^2) \cdots\cdots (2) \end{cases}$

(1), (2) ヨリ

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2$

即チ $(bx+ay)^2=0$　$bx=-ay$

(1) ニ代入

答

x	$\frac{ca}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$-\frac{ca}{\sqrt{a^2+b^2}}$
y	$-\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\boxed{4}$ ● $\begin{cases} x^2-y^2=7 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ xy=12 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

$\left.\begin{matrix}(1)\times 12 \\ (2)\times 7\end{matrix}\right\}$減　$12x^2-7xy-12y^2=0$　$(4x+3y)(3x-4y)=0$

(2) ト組合セテ解ケ。

答

x	4	−4	$3\sqrt{-1}$	$-3\sqrt{-1}$
y	3	−3	$-4\sqrt{-1}$	$4\sqrt{-1}$

4 ▲ $\begin{cases} x^2+xy=a \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ y^2+xy=b \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

既知項ヲ消去セヨ。

$(bx-ay)(x+y)=0$

$bx=ay$, $x=-y$. (不合理)

(1) 又ハ (2) ト組合セヨ。

答

x	$\frac{a}{\sqrt{a+b}}$	$-\frac{a}{\sqrt{a+b}}$
y	$\frac{b}{\sqrt{a+b}}$	$-\frac{b}{\sqrt{a+b}}$

(5) $\begin{cases} x^2=ax+by \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ y^2=ay+bx \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

(1)−(2)　$(x-y)(x+y-a+b)=0$

(1) 又ハ (2) ト組合セヨ。

答

x	0	$a+b$	$\frac{a-b+D}{2}$	$\frac{a-b-D}{2}$
y	0	$a+b$	$\frac{a-b-D}{2}$	$\frac{a-b+D}{2}$

但シ $D=\sqrt{a^2+2ab-3b^2}$

注意　視察ニヨツテ因數分解ヲナシガタイトキハ一元二次方程式ノ根ヲ求ムル公式ヲ適用セヨ。65 頁ノ 4, 5, 6 ヲ見ヨ。

問　題　37

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

1 $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3 \\ x^2+2y^2-6=0 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3 \\ x^2+2xy-3y^2=5 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=9y \\ 2x^2-3xy+2y^2=4y \end{cases}$

4 $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$

5 $\begin{cases} x^2+y^2=c^2 \\ (ax-by)^2=c^2(a^2+b^2) \end{cases}$

(1) $\begin{cases} x^2+2xy-3y^2=33 \\ 2x^2+2xy-y^2=66 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x^2-3xy+2y^2=2x \\ 2x^2+3y^2-4x=xy \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=5 \\ \frac{1}{x^2}+\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}=9 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x^2-y^2=7 \\ xy=12 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x^2=ax+by \\ y^2=ay+bx \end{cases}$

(d) 置　換　法

例四 $\left|\begin{array}{l} x+xy+y=29 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2+xy+y^2=61 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$ ヲ解ケ。

解　$x+y=s,\ xy=t$ トスレバ原方程式ハ次ノ如キ簡單ナ形トナル。

(1)　$s+t=29 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(2)　$s^2-t=61 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)ヨリ $t=29-s$ ヲ得テ(4)ニ代入スレバ

$$s^2-(29-s)=61 \quad \text{之ヲ簡單ニシテ}$$

$$s^2+s-90=0$$

$$(s-9)(s+10)=0$$

故ニ　$s=9$　　|　$s=-10$

從ツテ　$t=20$　　|　$t=39$

即チ $\left|\begin{array}{l} x+y=9 \\ xy=20 \end{array}\right.$　　|　$\left|\begin{array}{l} x+y=-10 \\ xy=39 \end{array}\right.$

之ヲ解クト

$$x(9-x)=20 \qquad\qquad x(-x-10)=39$$

$$x^2-9x+20=0 \qquad\qquad x^2+10x+39=0$$

$$(x-4)(x-5)=0 \qquad\qquad x=\frac{-10\pm\sqrt{100-39\times4}}{2}$$

$$=-5\pm\sqrt{-14}$$

故ニ $\left|\begin{array}{l} x=4 \\ y=5 \end{array}\right.$　$\left|\begin{array}{l} x=5 \\ y=4 \end{array}\right.$　　|　$y=-5\mp\sqrt{-14}$

(d) 置　換　法

此ノ方法デハ $x+y=s,\ xy=t$ ト置換シテ解ク場合ガ非常ニ多イ。尙此ノ他ニモ置換スベキモノモアルガ，ソレハ各場合ニ教授セラレンコトヲ望ム次第デアル。今迄ノ事ヲ一括スレバ

二元 二次聯立方程式
- (1) 一次ト二次
- (2) 二次ト二次
  - a 二次ノ項ヲ全部消去シ得ル場合
  - b 一式ガ因數ニ分解サレル場合
  - c 二式ヨリ因數ニ分解サレル式ヲ得ル場合
  - d 置換法

所ガ尙置換法ノ一ツニ $y=tx$ ト置イテ解ク方法ガアル。但シ $t\fallingdotseq0$ 此ノ方法ハ既知項ヲ有シナイ場合ニ適用サレルモノデ例ヘバ問題37 (5) ヲ解クニ

$\left|\begin{array}{l} x^2=ax+by \\ y^2=ay+bx \end{array}\right.$　$y=tx$ トスレバ　$\left|\begin{array}{l} x^2=ax+btx \\ t^2x^2=atx+bx \end{array}\right.$

$\left|\begin{array}{l} x(x-a-bt)=0 \\ x(tx-at-b)=0 \end{array}\right.$　$x=0$ 及ビ　$\left|\begin{array}{l} x=a+bt \\ tx=at+b \end{array}\right.$

之ヨリ x ヲ消去セヨ。

$b(t^2-1)=0$　　$b\fallingdotseq0$ (若シ $b=0$ ナラバ聯立方程式デナクナルカラ)

$$\therefore\ t=\pm1$$

從ツテ $y=x,\ y=-x$, 及 $x=0$, カクテ前ト同樣ノ答ヲ得ル。

此ノ他聯立方程式(勿論二元二次)ノ解法ハ澤山アル。試ニ林鶴一氏數學叢書ノ方程式第二ヲ參照セラレヨ。併シ普通上ニ列擧シタ方法デ十分間ニ合フシ否之ヨリ多クノ場合ヲ教ヘルコトハ徒ニ繁雜ニ導クダケデアル。加之林氏數學叢書方程式中ノ方法モ一般二次方程式トシテ $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ ナドガ採用シテアルノデ從ツテ數種類ノ方法ガアル所以デアル。

P. 239

問　題　38　舊教科書102頁」

本問題ニ於テ, 記述ヲ簡單ニスル爲ニ $x+y=s,\ xy=t$ トスル。

1● $\left|\begin{array}{l} 2(x-1)(y-1)+3xy=0\cdots(1) \\ 2(x+y)+xy=0\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

(1)　$5t-2s+2=0$

(2)　$2s+t=0$

和　$t=-\dfrac{1}{3}$　$\therefore$　$s=\dfrac{1}{6}$

$\therefore$ $\left|\begin{array}{l} x+y=\dfrac{1}{6} \\ xy=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$　之ヲ解イテ

答

x	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$
y	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$

2● $\left|\begin{array}{l} x^2+xy+y^2=49\cdots\cdots(1) \\ x^2-xy+y^2=16\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

(1)　$s^2-t=49$

(2)　$s^2-3t=16$　$\therefore$　$t=\dfrac{33}{2}$

從ツテ　$s^2=\dfrac{131}{2}$　$\therefore$　$s=\pm\sqrt{\dfrac{131}{2}}$

$\left|\begin{array}{l} t=\dfrac{33}{2} \\ s=\sqrt{\dfrac{131}{2}} \end{array}\right.$　　$\left|\begin{array}{l} t=\dfrac{33}{2} \\ s=-\sqrt{\dfrac{131}{2}} \end{array}\right.$

答

x	$\frac{\sqrt{262}+\sqrt{-2}}{4}$
y	$\frac{\sqrt{262}-\sqrt{-2}}{4}$

$\frac{\sqrt{262}-\sqrt{-2}}{4}$	$\frac{-\sqrt{262}\mp\sqrt{-2}}{4}$
$\frac{\sqrt{262}+\sqrt{-2}}{4}$	$\frac{-\sqrt{262}\pm\sqrt{-2}}{4}$

(1)● $\left|\begin{array}{l} x^2+y^2=48+x+y\cdots(1) \\ xy+x+y=31\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

(1)　$s^2-s-2t=48$

(2)　$s+t=31$

$\therefore$　$s^2+s-110=0$

$s=10$　　$s=-11$

$\left|\begin{array}{l} s=10 \\ t=21 \end{array}\right.$　　$\left|\begin{array}{l} s=-11 \\ t=42 \end{array}\right.$

答

x	3	7	$\frac{-11+\sqrt{-47}}{2}$
y	7	3	$\frac{-11-\sqrt{-47}}{2}$

$\frac{-11-\sqrt{-47}}{2}$
$\frac{-11+\sqrt{-47}}{2}$

(2) $\left|\begin{array}{l} x^2-xy+y^2=39\cdots\cdots(1) \\ 2x^2-3xy+2y^2=43\cdots(2) \end{array}\right.$

(1)　$s^2-3t=39$　　$t=35$

(2)　$2s^2-7t=43$　$\therefore$　$s^2=144$

$\left|\begin{array}{l} x+y=-12 \\ xy=35 \end{array}\right.$　　$\left|\begin{array}{l} x+y=12 \\ xy=35 \end{array}\right.$

答

x	-7	-5	7	5
y	-5	-7	5	7

別解　$\left.\begin{array}{l} x-y=s \\ xy=t \end{array}\right\}$ トシテ考ヘヨ。

1▲ $\left|\begin{array}{l} x^2+y^2=50\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ xy=7\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

$s^2-2t=50$　及　$t=7$

$\therefore$　$s^2=64$　$s=\pm8$　　$\left|\begin{array}{l} s=8 \\ t=7 \end{array}\right.$　$\left|\begin{array}{l} s=-8 \\ t=7 \end{array}\right.$

答

x	1	7	-1	-7
y	7	1	-7	-1

2▲ ハ **2●** ト唯第二式ノ右邊ガ19ナル違ノミ。

答

x	3	5	-3	-5
y	5	3	-5	-3

$\boxed{3}$ 4 $\left|\begin{array}{l} x^2+y^2+7xy=171\cdots\cdots(1) \\ xy=2(x+y)\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

$\left|\begin{array}{l} s^2+5t=171 \\ t=2s \end{array}\right.$　$\therefore$　$\left|\begin{array}{l} s=9 \\ t=18 \end{array}\right.$　$\left|\begin{array}{l} s=-19 \\ t=-38 \end{array}\right.$

$\left|\begin{array}{l} x+y=9 \\ xy=18 \end{array}\right.$　　$\left|\begin{array}{l} x+y=-19 \\ xy=-38 \end{array}\right.$

$\left|\begin{array}{l} x=6 \\ y=3 \end{array}\right.$　$\left|\begin{array}{l} x=3 \\ y=6 \end{array}\right.$　　$\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{-19\pm\sqrt{513}}{2} \\ y=\dfrac{-19\mp\sqrt{513}}{2} \end{array}\right.$

答

x	6	3	$\frac{-19+3\sqrt{57}}{2}$
y	3	6	$\frac{-19--3\sqrt{57}}{2}$

$\frac{-19-3\sqrt{57}}{2}$
$\frac{-19+3\sqrt{57}}{2}$

(1)▲ $\left|\begin{array}{l} x^2+y^2=100\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ xy=48\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

$\left|\begin{array}{l} s^2-2t=100 \\ t=48 \end{array}\right.$

$s^2=196$

$s=\pm14$

$\left|\begin{array}{l} s=14 \\ t=48 \end{array}\right.$　$\left|\begin{array}{l} s=14 \\ t=48 \end{array}\right.$

答

x	6	8	-6	-8
y	8	6	-8	-6

$\boxed{3}$ (4) $\left|\begin{array}{l} x^2+y^2-(x-y)=20\cdots\cdots(1) \\ xy+x-y=1\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

$x-y=s,\quad xy=t$

$\left|\begin{array}{l} s^2-s+2t=20 \\ t+s=1 \end{array}\right.$　$\therefore$　$s^2-3s-18=0$

$\left|\begin{array}{l} s=6 \\ t=-5 \end{array}\right.$　　$\left|\begin{array}{l} s=-3 \\ t=4 \end{array}\right.$

$\left|\begin{array}{l} x=1 \\ y=-5 \end{array}\right.$　$\left|\begin{array}{l} x=5 \\ y=-1 \end{array}\right.$　　$\left|\begin{array}{l} x=-4 \\ y=-1 \end{array}\right.$　$\left|\begin{array}{l} x=1 \\ y=4 \end{array}\right.$

答

x	1	5	-4	1
y	-5	-1	-1	4

3 ▲ $$\left|\begin{array}{l} x^2-y^2=5 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ xy=6 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{array}\right.$$

$(1)^2+(2)^2\times 4$　$x^4+2x^2y^2+y^4=169$

故＝　$x^2+y^2=\pm 13 \cdots (3)$

(3) ト (1) トヲ組合セテ

$$\left|\begin{array}{l} x^2-y^2=5 \\ x^2+y^2=13 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} x^2-y^2=5 \\ x^2+y^2=-13 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x=-3 \\ y=-2 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x=2i \\ y=-3i \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x=-2i \\ x=3i \end{array}\right.$$

答

x	3	-3	$2i$	$-2i$
y	2	-2	$-3i$	$3i$

$\boxed{4}$ **5** $$\left|\begin{array}{l} x^2y^2-14xy+45=0 \cdots\cdots (1) \\ x+y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{array}\right.$$

(1) ヨリ　$xy=5,\quad xy=9$

$$\left|\begin{array}{l} xy=5 \\ x+y=6 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} xy=9 \\ x+y=6 \end{array}\right.$$

答

x	1	5	3	3
y	5	1	3	3

$\boxed{5}$ **6** $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6} \cdots\cdots\cdots (2) \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} x+y=5xy \\ 6x^2+6y^2-13xy=0 \end{array}\right. \quad \therefore \quad \left|\begin{array}{l} s=5t \\ 6s^2=25t \end{array}\right.$$

$\therefore$　$6s^2-5s=0$　$s=0,\quad s=\dfrac{5}{6}.$

$$\left|\begin{array}{l} s=0 \\ t=0 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} s=\dfrac{5}{6} \\ t=\dfrac{1}{6} \end{array}\right.$$

検査

$x=0,\ y=0$

ハトラズ。

答

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

(3) ▲ $$\left|\begin{array}{l} x^2-4y^2=8 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 2xy=12 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{array}\right.$$

$(1)^2+(2)^2\times 4$　$x^4+8x^2y^2+16y^4=640$

故＝　$x^2+4y^2=\pm 8\sqrt{10}$ (3)

(3) ト (1) トヲ組合セテ

$$\left|\begin{array}{l} x^2-4y^2=8 \\ x^2+4y^2=8\sqrt{10} \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} x^2-4y^2=8 \\ x^2+4y^2=-8\sqrt{10} \end{array}\right.$$

之ヲ解イテ

答

x	$2\sqrt{\sqrt{10}+1}$	$-2\sqrt{\sqrt{10}+1}$	$2\sqrt{1-\sqrt{10}}$	$-2\sqrt{1-\sqrt{10}}$
y	$\sqrt{\sqrt{10}-1}$	$-\sqrt{\sqrt{10}-1}$	$-\sqrt{-(\sqrt{10}+1)}$	$\sqrt{-(\sqrt{10}+1)}$

$\boxed{(4)}$ (5) $$\left|\begin{array}{l} x^2y^2+24xy-180=0 \cdots\cdots (1) \\ x+y=7 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{array}\right.$$

(1) ヨリ　$xy=6,\quad xy=-30$

$$\left|\begin{array}{l} xy=6 \\ x+y=7 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} xy=-30 \\ x+y=7 \end{array}\right.$$

答

x	1	6	10	-3
y	6	1	-3	10

$\boxed{(5)}$ (6) $$\left|\begin{array}{l} x^2y+xy^2=30 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \cdots\cdots\cdots (2) \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} xy(x+y)=30 \\ 6(x+y)=5xy \end{array}\right. \quad \therefore \quad \left|\begin{array}{l} st=30 \\ 6s=5t \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} s=5 \\ t=6 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} s=-5 \\ t=-6 \end{array}\right.$$

答

x	2	3	-6	1
y	3	2	1	-6

答

x	4	5	$-5+\sqrt{-14}$	$-5-\sqrt{-14}$
y	5	4	$-5-\sqrt{-14}$	$-5+\sqrt{-14}$

例四ノ如ク代數式ノ或部分ノ式ヲ一ツノ文字ニ置換ヘテ問題ヲ解クコトヲ置換法トイフ。

問　題　38

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

1 $$\left|\begin{array}{l} 2(x-1)(y-1)+3xy=0 \\ 2(x+y)+xy=0 \end{array}\right.$$

2 $$\left|\begin{array}{l} x^2+xy+y^2=49 \\ x^2-xy+y^2=16 \end{array}\right.$$

3 $$\left|\begin{array}{l} x^2+y^2+7xy=171 \\ xy=2(x+y) \end{array}\right.$$

4 $$\left|\begin{array}{l} x^2y^2-14xy+45=0 \\ x+y=6 \end{array}\right.$$

5 $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6} \end{array}\right.$$

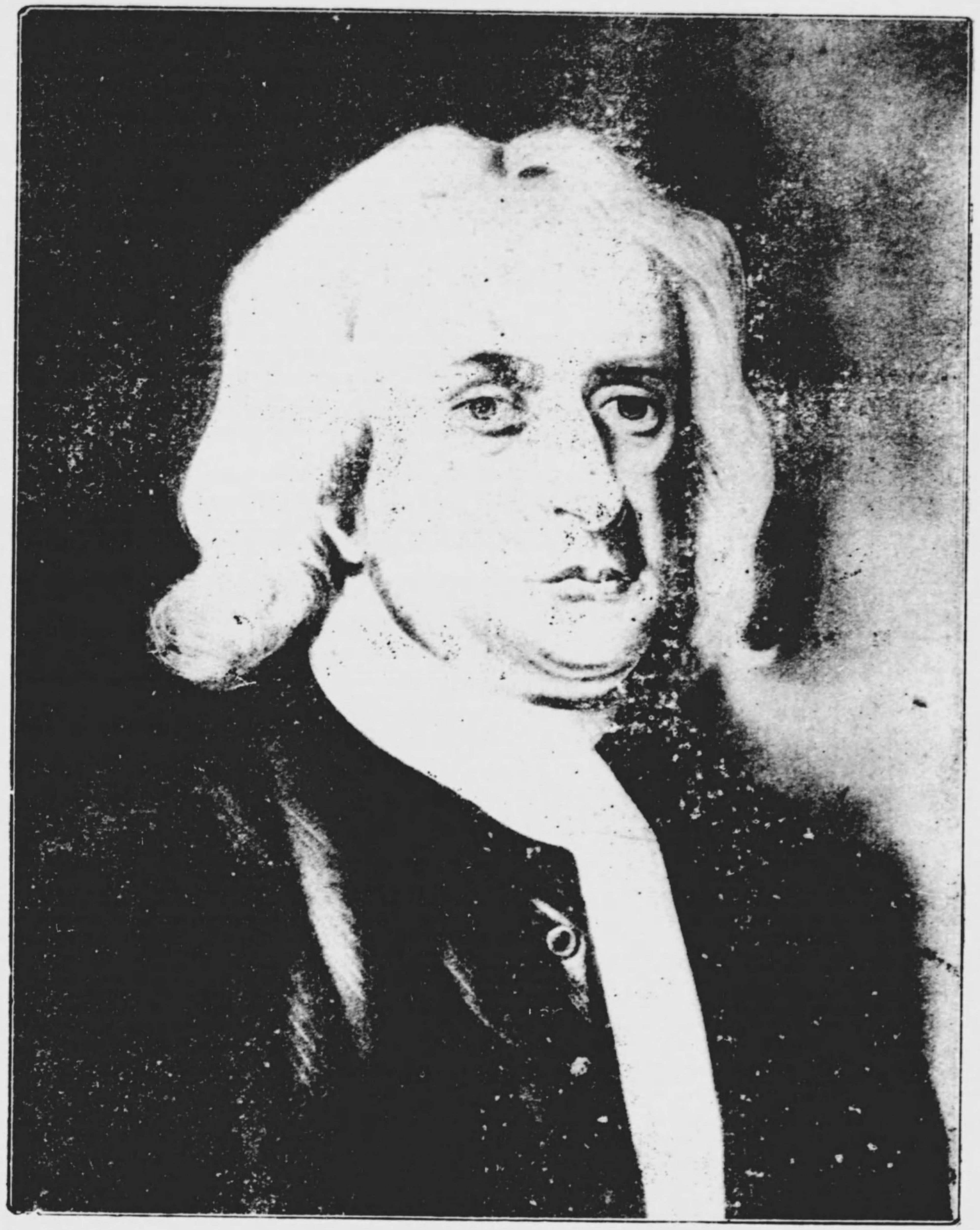
(1) $$\left|\begin{array}{l} x^2+y^2=48+x+y \\ xy+x+y=31 \end{array}\right.$$

(2) $$\left|\begin{array}{l} x^2-xy+y^2=39 \\ 2x^2-3xy+2y^2=43 \end{array}\right.$$

(3) $$\left|\begin{array}{l} x^2+y^2-(x-y)=20 \\ xy+x-y=1 \end{array}\right.$$

(4) $$\left|\begin{array}{l} x^2y^2+24xy-180=0 \\ x+y=7 \end{array}\right.$$

(5) $$\left|\begin{array}{l} x^2y+xy^2=30 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \end{array}\right.$$



SIR SAAC NEWTON

「ニウトン」 *Sir Isaac Newton*

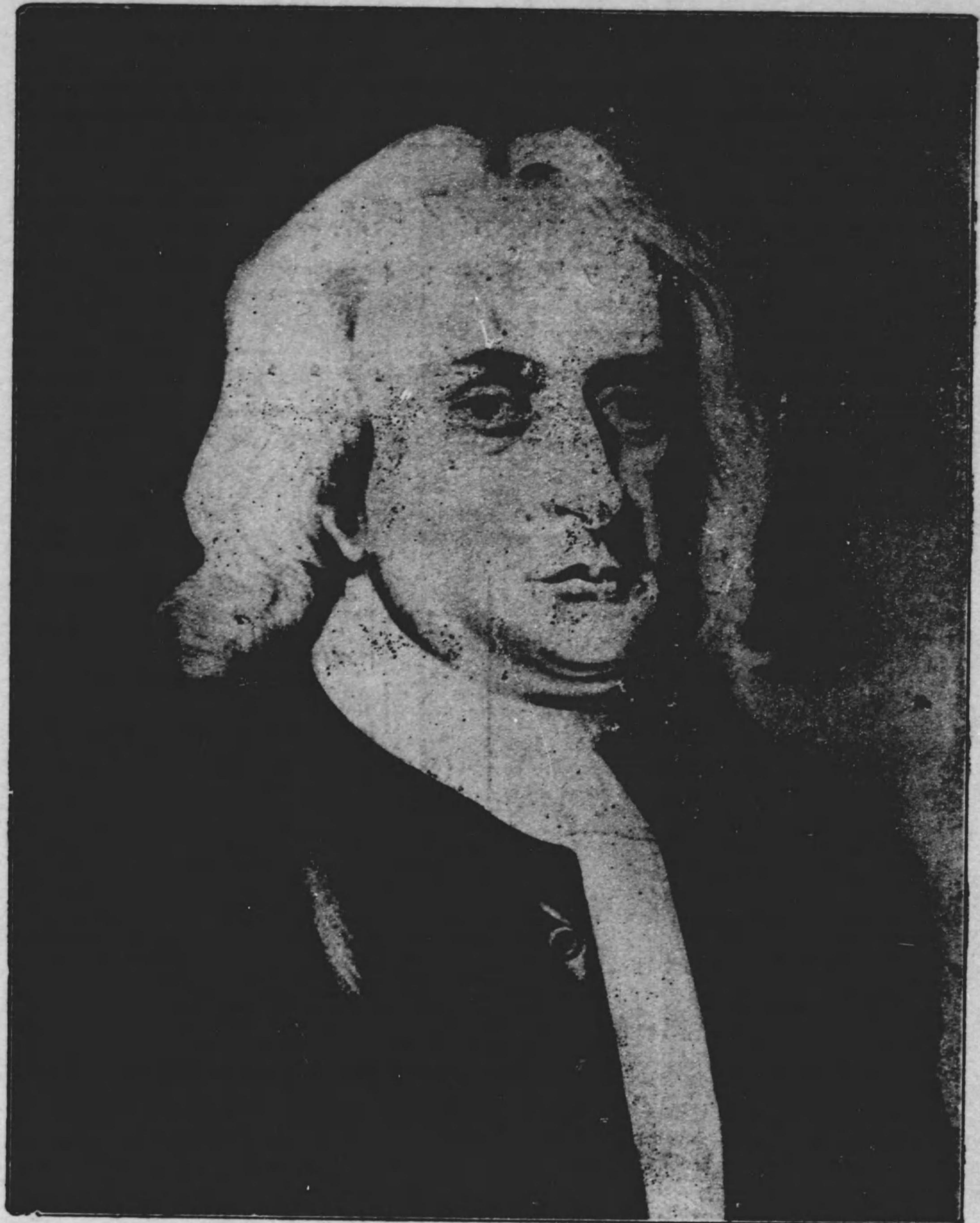
「ニウトン」ハ世界ノ大數學者デアルト同時ニ又大科學者デアリ大哲學者デアル。彼ハ西暦1642年英國ノ**「リンコルンシヤア」**ニ生レタガ,父ハ彼ガマダ生レナイ中ニ死ンダノデ母ノ手一ツデ育テラレタ。幼時ハ甚ダ虚弱デ後來非凡ノ智能ヲ發揮スル偉人トナルトモ思ハレナカツタガ18歳ノ時**「ケンブリツヂ」**大學ニ入ツテソノ天才ヲ現ハシ始メタ。彼ハ**「ユークリツド」**(平面幾何)ヲ一讀シテソノ全部ヲ理解シ爾後數學ニ對シテ非常ナ興味ヲ覺エアラユル數學書ヲ讀ミ更ニ進ンデ目ザマシイ發見ヲスルニ到ツタ。此大偉人ノ大發見中,二項定理,運動ノ法則,萬有引力ノ法則及微分法等ハ特ニソノ著シイモノデアル。初等數學ニ於テ代入法ニヨル消去法ヤ指數ニ一般文字ノ使用等ヲ始メタノモ彼デアルトイハレテ居ル。

而モ彼ハ自ラ

> 私ハ世間ニハドウ見エルカハ知ラヌガ自ラ顧ミレバ私ハ海岸デソコヽカラ比較的滑ラカデ又美シイ小石ヤ貝殼ヲ探シテ遊ンデ居ル子供ノヤウナモノデ眞理ノ大海ガ何モ發見サレズニ私ノ前ニ横タハツテ居ル。

トイツテ居ル如ク大ノ謙遜家デアツタ。

多年**「ケンブリツヂ」**大學ノ數學ノ教授ヲシテ居タガ後年ニハ重要ナ政治的ノ位置ニ置カレソノ死スルヤ(1727)**「ウエストミンスターアベー」**ニ葬ラレタ。



SIR SAAC NEWTON

「ニウトン」 *Sir Isaac Newton*

「ニウトン」ハ世界ノ大數學者デアルト同時ニ又大科學者デアリ大哲學者デアル。彼ハ西曆1642年英國ノ「リンコルンシヤア」ニ生レタガ,父ハ彼ガマダ生レナイ中ニ死ンダノデ母ノ手一ツデ育テラレタ。幼時ハ甚ダ虛弱デ後來非凡ノ智能ヲ發揮スル偉人トナルトモ思ハレナカツタガ18歲ノ時「ケンブリツヂ」大學ニ入ツテソノ天才ヲ現ハシ始メタ。彼ハ「ユークリツド」(平面幾何)ヲ一讀シテソノ全部ヲ理解シ爾後數學ニ對シテ非常ナ興味ヲ覺エアラユル數學書ヲ讀ミ更ニ進ンデ目ザマシイ發見ヲスルニ到ツタ。此大偉人ノ大發見中,二項定理,運動ノ法則,萬有引力ノ法則及微分法等ハ特ニソノ著シイモノデアル。初等數學ニ於テ代入法ニヨル消去法ヤ指數ニ一般文字ノ使用等ヲ始メタノモ彼デアルトイハレテ居ル。

而モ彼ハ自ラ

私ハ世間ニハドウ見エルカハ知ラヌガ自ラ顧ミレバ私ハ海岸デソコヽカラ比較的滑ラカデ又美シイ小石ヤ貝殼ヲ探シテ遊ンデ居ル子供ノヤウナモノデ眞理ノ大海ガ何モ發見サレズニ私ノ前ニ橫タハツテ居ル。

トイツテ居ル如ク大ノ謙遜家デアツタ。

多年「ケンブリツヂ」大學ノ數學ノ教授ヲシテ居タガ後年ニハ重要ナ政治的ノ位置ニ置カレソノ死スルヤ(1727)「ウエストミンスターアベー」ニ葬ラレタ。

24 高次及多元ノ聯立方程式

二元高次ノ聯立方程式及ビ多元二次ノ聯立方程式モ亦代入法又ハ特別ノ工夫ニヨツテ解キ得ル場合ガアル。

例一 $\left|\begin{array}{ll} x^3+y^3=72 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x+y=6 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{array}\right.$ ヲ解ケ。

解 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ ナル故

(2) ノ式ヲ (1) ニ代入スレバ

$$6(x^2-xy+y^2)=72$$

$$x^2-xy+y^2=12 \cdots\cdots (3)$$

(2) ヨリ $y=6-x$

(3) ヘ代入 $x^2-x(6-x)+(6-x)^2=12$

$$x^2-6x+x^2+36-12x+x^2-12=0$$

$$3x^2-18x+24=0$$

$$x^2-6x+8=0$$

$$(x-2)(x-4)=0$$

$x-2=0$	$x-4=0$
$x=2$	$x=4$
$y=4$	$y=2$

答

x	2	4
y	4	2

24 高次及多元ノ聯立方程式

此ノ場合ハ一般的解法ヲ示スコトハ困難デアル。併シ解法ノ順序ハ

(1) 代入法或ハ加減法ニヨツテ二元二次聯立方程式ノ解法ニ歸スルコトガ出來ル場合。

(2) 置換法ニヨツテ二元二次ノ場合或ハ多元一次ニ歸スルコトガ出來ル場合。

(3) 邊々相加ヘ又ハ相減ズルコトニヨツテ因數ニ分解シ得ル式カ，或ハ簡單ナ形ニ導クコトガ出來ル場合。

以上ノ事ヲ念頭ニ置イテ解カネバナラヌ。

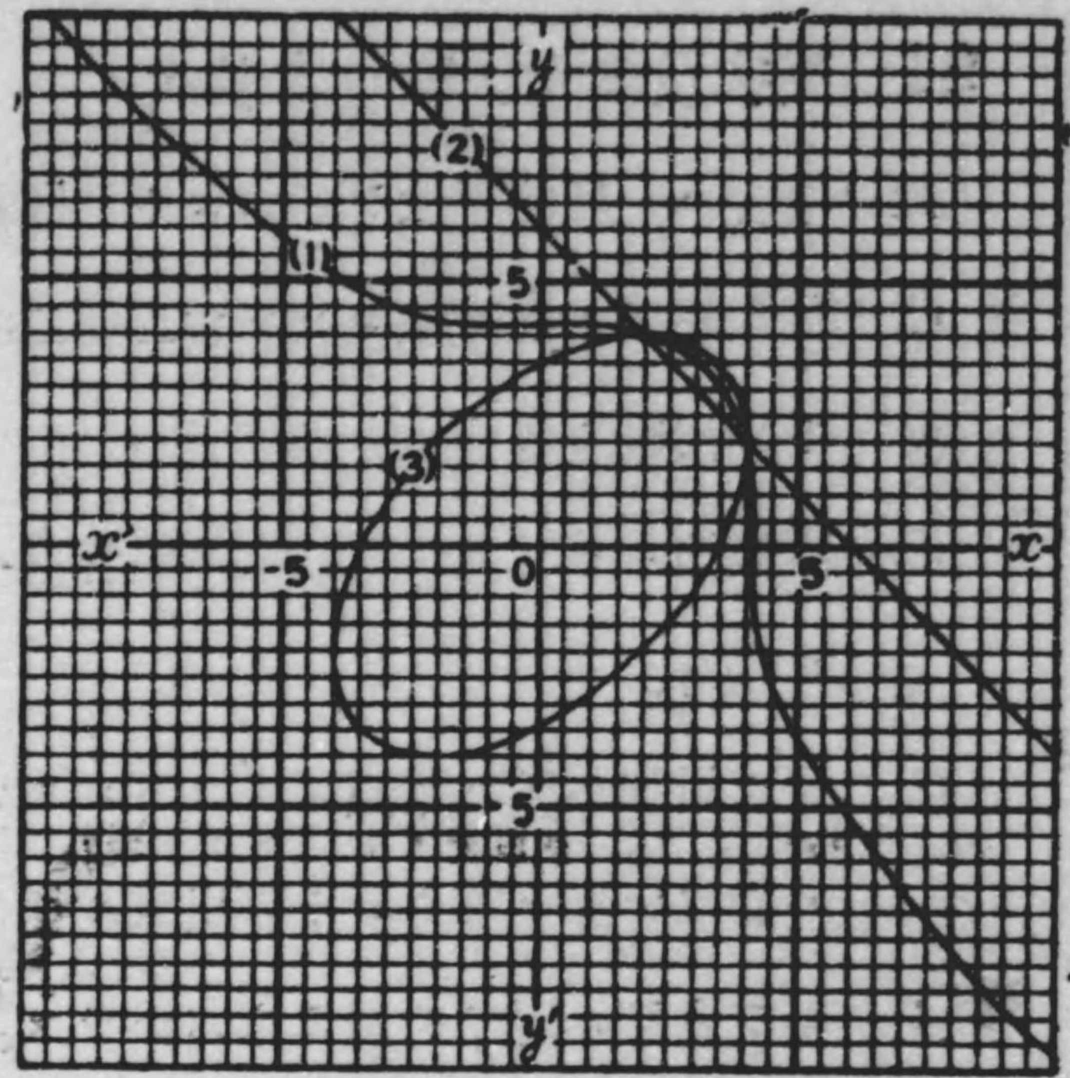
例一 ハ二元高次聯立方程式，特ニ三次ト一次ノ聯立ノ場合デアル。二次ノ場合ニハ一方ガ一次ナラバ常ニ之ヨリ一ツノ未知數ヲ他ノ未知數デ表ハシタ式ヲ得テ二次ノ方ヘ代入シタノデアルガ，高次ノ場合ニハ，イクラ一方ガ一次デモ必ズシモ此ノ方法ハトレヌ。即チ上ノ方法デ一ツノ未知數ヲ消去スルコトハ出來ルガ，之ニ依ツテ得タ式ガ三次以上ニナリ，一般ニ解ケヌ事トナル。

今此ノ解法ノ「グラフ」的意義ヲ考察スルニ，(1) ノ $x^3+y^3=72$ ハ次ノ圖ニ示スヤウナ三次曲線デアリ，(2) ノ $x+y=6$ ハ明ラカニ直線デアル。(1) ノ左邊ヲ因數分解シテ得タ式ノ中ニ (2) ヲ代入シ整理シテ得タ方程式 (3) ノ $x^2-xy+y^2=12$ ハ圖ニ示スヤウニ橢圓デアル。ソコデ (2) ト (3) トノ組合セニ依リ得ラレル根 (2, 4) 及ビ (4, 2) ハ丁度其ノ交點ヲ (1) ノ曲線ガ通ルノデ (1) ト (2) トノ聯立方程式ノ根トナツテキル。

「グラフ」ハ次頁ニ示ス。

例一 $\left|\begin{array}{l} x^3+y^3=72 \cdots\cdots(1) \\ x+y=6 \cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

$x^2-xy+y^2=12 \cdots\cdots(3)$



問　題　39

1● $\left|\begin{array}{l} x^3+y^3=28 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x+y=4 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

(2) ヲ (1) ニ代入シ

$x^2-xy+y^2=7$　之ト (2) トヲ聯立サセル。即チ　$y=4-x$　ヲ代入シ，　$x^2-4x+3=0$

$\therefore\ x=1,\ \ x=3$

答 $\left|\begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \end{array}\right|\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array}$

2● $\left|\begin{array}{l} x^3-y^3=19 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

(2) ヲ (1) ニ代入スレバ

$x^2+xy+y^2=19$

之ニ　$x=y+1$　ヲ代入スル。

$y^2+y-6=0$

答 $\left|\begin{array}{l} x=-2 \\ y=-3 \end{array}\right|\begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array}$

(1)● $\left|\begin{array}{l} x^2-xy+y^2=7 \cdots\cdots\cdots(1) \\ x^3+y^3=28 \cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

(1) ヲ (2) ニ代入スレバ

$x+y=4$

之ト (1) トハ全ク 1 ニ同ジ。

答 $\left|\begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \end{array}\right|\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array}$

(2)● $\left|\begin{array}{l} x^3-y^3=19 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2+xy+y^2=19 \cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

(2) ヲ (1) ニ代入セヨ。

$x-y=1$

之ト(2)トヲ聯立セシムレバ全ク 2 ト同ジデアル。

答 $\left|\begin{array}{l} x=-2 \\ y=-3 \end{array}\right|\begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array}$

P. 248

問　　題　39

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

1 $\left|\begin{array}{l} x^3+y^3=28 \\ x+y=4 \end{array}\right.$　　(1) $\left|\begin{array}{l} x^2-xy+y^2=7 \\ x^3+y^3=28 \end{array}\right.$

2 $\left|\begin{array}{l} x^3-y^3=19 \\ x-y=1 \end{array}\right.$　　(2) $\left|\begin{array}{l} x^3-y^3=19 \\ x^2+xy+y^2=19 \end{array}\right.$

例二 $\left|\begin{array}{l} x^2+xy+y^2=13 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^4+x^2y^2+y^4=91 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$　ヲ解ケ。

解　$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$　ナル故

(1) ト (2) ヨリ　$x^2-xy+y^2=\dfrac{91}{13}=7 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(1) ト (3) ヨリ　$xy=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(1) ト (4) ヨリ　$x^2+2xy+y^2=16$

故ニ　$x+y=\pm 4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(4) ト (5) トヲ組合セ

$\left|\begin{array}{l} x+y=4 \\ xy=3 \end{array}\right.$　　$\left|\begin{array}{l} x+y=-4 \\ xy=3 \end{array}\right.$

$\left|\begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \end{array}\right.\ \left|\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array}\right.$　　$\left|\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-3 \end{array}\right.\ \left|\begin{array}{l} x=-3 \\ y=-1 \end{array}\right.$

答

x	1	3	-1	-3
y	3	1	-3	-1

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

3 $\left|\begin{array}{l} x^4+x^2y^2+y^4=91 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{array}\right.$ (3) $\left|\begin{array}{l} x^4+x^2y^2+y^4=21 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{array}\right.$

例二 $\left|\begin{array}{l} x^4+y^4=97 \cdots\cdots\cdots(1) \\ x+y=5 \cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$ ヲ解ケ。

解 (2) ヨリ $x^2+2xy+y^2=25$

$2xy$ ヲ右邊ニ移項シテ兩邊ヲ自乘スレバ

$$x^4+2x^2y^2+y^4=625-100xy+4x^2y^2 \cdots\cdots\cdots(3)$$

(1) ト (3) ヨリ $2x^2y^2=528-100xy+4x^2y^2$

$$x^2y^2-50xy+264=0$$

$$(xy-6)(xy-44)=0$$

故ニ $xy=6$, $xy=44$ ヲ得。之ヲ (2) ト組合セテ解ケバ

$\left|\begin{array}{l} xy=6 \\ x+y=5 \end{array}\right.$

$x(5-x)=6$

$x^2-5x+6=0$

$(x-3)(x-2)=0$

故ニ $\left|\begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array}\right.$ $\left|\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array}\right.$

$\left|\begin{array}{l} xy=44 \\ x+y=5 \end{array}\right.$

$x(5-x)=44$

$x^2-5x+44=0$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{-151}}{2}$$

$$y=\frac{5\mp\sqrt{-151}}{2}$$

103頁 例二 之ハ二元高次聯立方程式ノ中，四次ト二次ノ聯立ノ場合デアル。$x^4+x^2y^2+y^4$ ノ因數分解ハ上卷ニ出テキタ所デハアルガ，一應說明スル必要ガアル。卽チ

此ノ場合ノ因數分解トイフハ，今迄ノ場合ノ如ク，之ニ依リ一ツノ方程式ヲ二ツ或ハ二ツ以上ノ方程式ニ分チ得ルノデハナク，唯他ノ式ヲソコニ代入シ得ルダケデアル (例一モ同樣)，此ノ點ヲ十分注意シ (1) ヨリ $x^2+xy+y^2=91$ ト $x^2-xy+y^2=91$ ヲ作ラヌヤウニ心ガケサセルガヨイ。

104頁 例二 此ノ例ノ解法デ(2)ノ冪ヲ高メテ得タ方程式(3)ハ

$(x+y-5)(x+y+5)(x-y-5i)(x-y+5i)=0$ ノヤウニ書クコトガ出來ル。

今之ヲ $p(x+y-5)=0$ トスレバ，吾々ハ與方程式ヲ解クタメニ

$\left|\begin{array}{l} p(x+y-5)-(x^4+y^4-97)=0 \\ x+y-5=0 \end{array}\right.$ ヲ解イタノデアル。トコロガ此ノ聯立方程式ハ與ヘラレタ聯立方程式ト等値デアルコトハ明瞭デアル。決シテ無緣根ハ這入ラナイ。併シ茲デ注意セネバナラヌコトハ $xy=6$, $xy=44$ ハ(1)ト組合セテハナラナイコトデアル。若シ(1)ト組合セタナラバ唯單ニ面倒ナバカリデナク無緣根ヲ生ズルモノデアル。

104頁 (舊教科書105頁) 問題

3 $\left|\begin{array}{l} x^4+x^2y^2+y^4=91 \cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2-xy+y^2=7 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

(1) ニ (2) ヲ代入スレバ

$x^2+xy+y^2=13$ 故ニ

$\left|\begin{array}{l} x^2-xy+y^2=7 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{array}\right.$ ヲ解ケバヨイ。

此ノ解法ハ例二ガ示シテキル。

答

x	1	3	-1	-3
y	3	1	-3	-1

(3) $\left|\begin{array}{l} x^4+x^2y^2+y^4=21 \cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2+xy+y^2=7 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

(1), (2) ヨリ $x^2-xy+y^2=3 \cdots(3)$

(2)－(3) $xy=2$

從ツテ $x+y=\pm3$

$\left|\begin{array}{l} x+y=3 \\ xy=2 \end{array}\right.$ $\left|\begin{array}{l} x+y=-3 \\ xy=2 \end{array}\right.$

答

x	1	2	-1	-2
y	2	1	-2	-1

4 $$\left|\begin{array}{l} x^4+y^4=257 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x-y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{array}\right.$$

(2) ヨリ $x^2+y^2=9+2xy$

$\therefore x^4+y^4+2x^2y^2=81+36xy+4x^2y^2$

$x^2y^2+18xy-88=0$

$xy=-22 \qquad xy=4$

$$\left|\begin{array}{l} xy=-22 \\ x-y=3 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} xy=4 \\ x-y=3 \end{array}\right.$$

答

x	$\frac{3+\sqrt{-79}}{2}$	$\frac{3-\sqrt{-79}}{2}$
y	$\frac{-3+\sqrt{-79}}{2}$	$\frac{-3-\sqrt{-79}}{2}$

4	-1
1	-4

5 $$\left|\begin{array}{l} x^4+y^4=82 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ xy=3 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{array}\right.$$

(2) ヨリ $2x^2y^2=18 \cdots\cdots (3)$

(1)+(3) $x^2+y^2=\pm 10$

$$\left|\begin{array}{l} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} x^2+y^2=-10 \\ xy=3 \end{array}\right.$$

之ヨリ

$$\left|\begin{array}{l} x+y=4 \\ xy=3 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} x+y=-4 \\ xy=3 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} x+y=2i \\ xy=3 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} x+y=-2i \\ xy=3 \end{array}\right.$$

答

x	± 3	± 1	$3i$	$-i$	i	$-3i$
y	± 1	± 3	$-i$	$3i$	$-3i$	i

(4) $$\left|\begin{array}{l} x^4+y^4=17 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x+y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{array}\right.$$

(2) ヨリ $x^2+y^2=9-2xy$

$\therefore \quad x^4+y^4=81-36xy+2x^2y^2$

$x^2y^2-18xy+32=0$

$xy=2 \qquad xy=16$

$$\left|\begin{array}{l} xy=2 \\ x+y=3 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} xy=16 \\ x+y=3 \end{array}\right.$$

答

x	1	2	$\frac{3+\sqrt{-55}}{2}$	$\frac{3-\sqrt{-55}}{2}$
y	2	1	$\frac{3-\sqrt{-55}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{-55}}{2}$

(5) $$\left|\begin{array}{l} x^4=y^4+7(x^2+y^2) \cdots\cdots (1) \\ xy=12 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{array}\right.$$

(1) ヨリ $(x^2+y^2)(x^2-y^2-7)=0$

$$\left|\begin{array}{l} x^2+y^2=0 \\ xy=12 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} x^2-y^2=7 \\ xy=12 \end{array}\right.$$

$x+y=\pm 2\sqrt{6}$

故ニ

$x=\pm(\sqrt{6}\pm\sqrt{-6}$

$y=\pm(\sqrt{6}\mp\sqrt{-6})$

$y=\frac{12}{x}$ 上式ニ代入シ

$x^4-7x^2-144=0$

$(x^2-16)(x^2+9)=0$

$x^2=16,\quad x^2=-9$

$x=\pm 4,\quad x=\pm 3i$

答

x	$\sqrt{6}+\sqrt{-6}$	$\sqrt{6}-\sqrt{-6}$	
y	$\sqrt{6}-\sqrt{-6}$	$\sqrt{6}+\sqrt{-6}$	
x	$-\sqrt{6}-\sqrt{-6}$	4	-4
y	$-\sqrt{6}+\sqrt{-6}$	3	-3

x	$-\sqrt{6}+\sqrt{-6}$	
y	$-\sqrt{6}-\sqrt{-6}$	
x	$3i$	$-3i$
y	$-4i$	$4i$

P. 252

答

x	3	2	$\frac{5+\sqrt{-151}}{2}$	$\frac{5-\sqrt{-151}}{2}$
y	2	3	$\frac{5-\sqrt{-151}}{2}$	$\frac{5+\sqrt{-151}}{2}$

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

4 $$\left|\begin{array}{l} x^4+y^4=257 \\ x-y=3 \end{array}\right.$$

5 $$\left|\begin{array}{l} x^4+y^4=82 \\ xy=3 \end{array}\right.$$

6 $$\left|\begin{array}{l} x^4-y^4=65 \\ x^2-y^2=5 \end{array}\right.$$

(4) $$\left|\begin{array}{l} x^4+y^4=17 \\ x+y=3 \end{array}\right.$$

(5) $$\left|\begin{array}{l} x^4=y^4+7(x^2+y^2) \\ xy=12 \end{array}\right.$$

(6) $$\left|\begin{array}{l} x^4-y^4=544 \\ x^2+y^2=34 \end{array}\right.$$

例三 $\left|\begin{array}{l} xy+xz+yz=11 \\ x+y=z \\ y+z=5 \end{array}\right.$ ヲ解ケ。

解 $xy+xz+yz=11 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$x+y=z \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$y+z=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(3) ヨリ $y=5-z \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(2) ヨリ $x=z-y=z-(5-z)=2z-5 \cdots(5)$

(4), (5) ヲ (1) ニ代入スレバ

$$(2z-5)(5-z)+(2z-5)z+(5-z)z=11$$

$$10z-25-2z^2+5z+2z^2-5z+5z-z^2=11$$

$$z^2-15z+36=0$$

$$(z-3)(z-12)=0$$

$z-3=0$	$z-12=0$
$z=3$	$z=12$
$x=6-5=1$	$x=24-5=19$
$y=5-3=2$	$y=5-12=-7$

答

x	1	19
y	2	-7
z	3	12

6 **1** $\left|\begin{array}{l} x^4-y^4=65 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2-y^2=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

(2) ヲ (1) ニ代入セヨ。

$x^2+y^2=13$ 之ト (2) トヨリ

$x^2=9 \quad x=\pm3$

(2) ニ代入シテ $y^2=4 \quad y=\pm2$

答

x	3	3	-3	-3
y	2	-2	2	-2

2 ▲ $\left|\begin{array}{l} x^3+y^3=72 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x+y=6 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

新代數, 102頁ノ例二參照。

答

x	2	4
y	4	2

6 (1) $\left|\begin{array}{l} x^4-y^4=544 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2=34 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

(2) ヲ (1) ニ代入シテ

$x^2-y^2=16$ 之ト (2) トヨリ

$x^2=25 \quad x=\pm5$

(2) ニ代入シテ $y^2=9 \quad y=\pm3$

答

x	5	5	-5	-5
y	3	-3	3	-3

(2) ▲ $\left|\begin{array}{l} x^3-y^3=217 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

(1)ヨリ

$(x-y)(x^2+xy+y^2)=217$

(2) ヲ上式ニ代入セヨ。

$x^2+xy+y^2=217$

$x=y+1$ トシテ代入セヨ。

答 $\left|\begin{array}{l} x=9 \\ y=8 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x=-8 \\ y=-9 \end{array}\right.$

106頁

例三 之ハ三元二次聯立方程式デアル。一般ニ三元以上ノ方程式ニナレバ, 面ヲ表ハシ, 從ツテ初等的ニ平面上ノ「グラフ」トシテ示ス事ハ出來ナイ。根ノ數ガ幾組出テ來ルカトイフヤウナ事モ一般的ニハ容易ニ決定シ難イカラ, 各問題ニ於テ論ズルヨリ仕様ガナイ。

問　題　40 (舊教科書108頁)

1 $\left|\begin{array}{ll} x+y=7 & \cdots\cdots(1) \\ x+z=8 & \cdots\cdots(2) \\ x^2+y^2=z^2 & \cdots\cdots(3) \end{array}\right.$

(1) ヨリ $y=7-x$
(2) ヨリ $z=8-x$

(3) ニ代入スレバ

$x^2+2x-15=0$ ∴ $x=3,\ -5$

答

$x=3$	$x=-5$
$y=4$	$y=12$
$z=5$	$z=13$

2 ● $\left|\begin{array}{ll} x(x+y+z)=a & \cdots\cdots(1) \\ y(x+y+z)=b & \cdots\cdots(2) \\ z(x+y+z)=c & \cdots\cdots(3) \end{array}\right.$

(1)+(2)+(3)

$x+y+z=\pm\sqrt{a+b+c}$ ····(4)

(1),(4) ヨリ $x=\dfrac{a}{\pm\sqrt{a+b+c}}$

答

$x=\dfrac{a}{\sqrt{a+b+c}}$	$x=-\dfrac{a}{\sqrt{a+b+c}}$
$y=\dfrac{b}{\sqrt{a+b+c}}$	$y=-\dfrac{b}{\sqrt{a+b+c}}$
$z=\dfrac{c}{\sqrt{a+b+c}}$	$z=-\dfrac{c}{\sqrt{a+b+c}}$

3 ● $\left|\begin{array}{ll} x^2yz=36 & \cdots\cdots(1) \\ xy^2z=12 & \cdots\cdots(2) \\ xyz^2=48 & \cdots\cdots(3) \end{array}\right.$

(1)×(2)×(3) $x^4y^4z^4=12^4$

即チ $xyz=\pm12$
$xyz=\pm12i$

之等ト (1) (2) (3) ト組合セヨ。

答

$x=3$	$x=-3$	$x=3i$	$x=-3i$
$y=1$	$y=-1$	$y=i$	$y=-i$
$z=4$	$z=-4$	$z=4i$	$z=-4i$

(1) $\left|\begin{array}{ll} x+y+z=4 & \cdots\cdots(1) \\ xy+xz+yz+4=0 & \cdots\cdots(2) \\ x-y+z=8 & \cdots\cdots(3) \end{array}\right.$

(1)+(3) $x+z=6$
(1)−(3) $y=-2$

(3)ニ代入スル。

$x^2-6x+8=0$ 　$x=2,\ 4$

答

$x=2$	$x=4$
$y=-2$	$y=-2$
$z=4$	$z=2$

(2) ● $\left|\begin{array}{ll} x^2+xy+xz=9 & \cdots\cdots(1) \\ y^2+yz+xy=27 & \cdots\cdots(2) \\ z^2+xz+yz=45 & \cdots\cdots(3) \end{array}\right.$

(1) $x(x+y+z)=9$
(2) $y(x+y+z)=27$
(3) $z(x+y+z)=45$

(1)+(2)+(3) $x+y+z=\pm9$

之ト (1), (2), (3) ト組合スレバ

答

$x=1$	$x=-1$
$y=3$	$y=-3$
$z=5$	$z=-5$

$\boxed{(3)}$ (2) $\left|\begin{array}{ll} xy=12 & \cdots\cdots(1) \\ zx=15 & \cdots\cdots(2) \\ yz=20 & \cdots\cdots(3) \end{array}\right.$

(1)×(2)×(3) 　$xyz=\pm60$

之ト (1), (2), (3) ヲ組合セヨ。

答

$x=3$	$x=-3$
$y=4$	$y=-4$
$z=5$	$z=-5$

問　題　40

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

1 $\left|\begin{array}{l} x+y=7 \\ x+z=8 \\ x^2+y^2=z^2 \end{array}\right.$

2 $\left|\begin{array}{l} x(x+y+z)=a\cdots\cdot(1) \\ y(x+y+z)=b\cdots\cdot(2) \\ z(x+y+z)=c\cdots\cdot(3) \end{array}\right.$

注意 (1), (2), (3) ヨリ

$(x+y+z)^2=a+b+c$

$x+y+z=\pm\sqrt{a+b+c}$ (4)

(1), (2), (3) ト (4) トヲ組合セヨ。

3 $\left|\begin{array}{l} x^2yz=36 \\ xy^2z=12 \\ xyz^2=48 \end{array}\right.$

注意 三ツノ式ノ左邊ヨリ $x^4y^4z^4$ ヲ作レ。

(1) $\left|\begin{array}{r} x+y+z=4 \\ xy+xz+yz+4=0 \\ x-y+z=8 \end{array}\right.$

(2) $\left|\begin{array}{l} x^2+xy+xz=9 \\ y^2+yz+xy=27 \\ z^2+xz+yz=45 \end{array}\right.$

注意 (2)ノ左邊ヲ因數分解シテ問題2ニ導ケ。

(3) $\left|\begin{array}{l} xy=12 \\ zx=15 \\ yz=20 \end{array}\right.$

注意 問題3ヲ參照セヨ。

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

4 $\begin{vmatrix} x^2+y^2=13 \\ y^2+z^2=25 \\ z^2+x^2=20 \end{vmatrix}$

注意 先ヅ x^2, y^2, z^2 ノ値ヲ出セ)

5 $\begin{vmatrix} (x+y)(x+z)=48 \\ (y+z)(y+x)=60 \\ (z+x)(z+y)=80 \end{vmatrix}$

注意 括弧内ヲ一ツノ未知數ト見ヨ。

6 $\begin{vmatrix} x+y+z=7 \\ x^2+y^2+z^2=21 \\ xy=8 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} x(y+z)=8 \\ y(z+x)=18 \\ z(x+y)=20 \end{vmatrix}$

注意 xy, yz, zx ノ値ヲ求メヨ。

(5) $\begin{vmatrix} a(x+y)(x+z)=bc \\ b(x+y)(y+z)=ca \\ c(x+z)(y+z)=ab \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2=a \\ y^2=2xz-b \\ xz=c \end{vmatrix}$

$\frac{\boxed{4}}{2}$ $\begin{vmatrix} x^2+y^2=13 \cdots\cdots(1) \\ y^2+z^2=25 \cdots\cdots(2) \\ z^2+x^2=20 \cdots\cdots(3) \end{vmatrix}$

(1)+(2)+(3) $x^2+y^2+z^2=29$

之ト (1), (2), (3) ト組合セヨ。

$\begin{cases} x^2=4 \\ y^2=9 \\ z^2=16 \end{cases}$ ∴ $x=\pm2$ 但シ複號ハ $y=\pm3$ アラユル組 $z=\pm4$ 合セヲトル。

答

x	2	2	2	2	−2	−2	−2	−2
y	3	3	−3	−3	3	3	−3	−3
z	4	−4	4	−4	4	−4	4	−4

5 ● $\begin{vmatrix} (x+y)(x+z)=48 \cdots(1) \\ (y+z)(y+x)=60 \cdots(2) \\ (z+x)(z+y)=80 \cdots(3) \end{vmatrix}$

(1)×(2)×(3)

$(x+y)(y+z)(z+x)=\pm480$

∴ $\begin{vmatrix} x+y=6 \\ y+z=10 \\ z+x=8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x+y=-6 \\ y+z=-10 \\ z+x=-8 \end{vmatrix}$

答 $\begin{vmatrix} x=2 & x=-2 \\ y=4 & y=-4 \\ z=6 & z=-6 \end{vmatrix}$

$\frac{\boxed{6}}{4}$ $\begin{vmatrix} x+y+z=7 \cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2+z^2=21 \cdots\cdots(2) \\ xy=8 \cdots\cdots(3) \end{vmatrix}$

(1) ヨリ $x+y=7-z$ 自乘スレバ

$x^2+y^2+2xy=49-14z+z^2$

之ニ (2) ト (3) ヲ代入セヨ。

$z^2-7z+6=0$

$\frac{\boxed{(4)}}{3}$ $\begin{vmatrix} x(y+z)=8 \cdots\cdots(1) \\ y(z+x)=18 \cdots\cdots(2) \\ z(x+y)=20 \cdots\cdots(3) \end{vmatrix}$

(1)+(2)+(3)

$xy+yz+zx=23$

之ト (1), (2), (3) ト組合セヨ。

$\left.\begin{matrix} xy=3 \\ yz=15 \\ zx=5 \end{matrix}\right\}$ ∴ $xyz=\pm15$

答 $\begin{vmatrix} x=1 & x=-1 \\ y=3 & y=-3 \\ z=5 & z=-5 \end{vmatrix}$

$\frac{\boxed{5}}{(3)}$ $\begin{vmatrix} a(x+y)(x+z)=bc \cdots\cdots(1) \\ b(x+y)(y+z)=ca \cdots\cdots(2) \\ c(x+z)(y+z)=ab \cdots\cdots(3) \end{vmatrix}$

(1)×(2)×(3)

$(x+y)(y+z)(z+x)=\pm\sqrt{abc}$

之ト (1), (2), (3) ト組合セヨ。

$\begin{vmatrix} y+z=\frac{a\sqrt{abc}}{bc} \\ z+x=\frac{b\sqrt{abc}}{ca} \\ x+y=\frac{c\sqrt{abc}}{ab} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y+z=-\frac{a\sqrt{abc}}{bc} \\ z+x=-\frac{b\sqrt{abc}}{ca} \\ x+y=-\frac{c\sqrt{abc}}{ab} \end{vmatrix}$

∴ $x+y+z=\frac{\pm\sqrt{abc}}{2abc}(a^2+b^2+c^2)$

答 $\begin{vmatrix} x=\pm\frac{\sqrt{abc}}{2abc}(b^2+c^2-a^2) \\ y=\pm\frac{\sqrt{abc}}{2abc}(a^2-b^2+c^2) \\ z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{2abc}(a^2+b^2-c^2) \end{vmatrix}$ 但シ複號同順 (答2組)

P. 259

$\boxed{6}$ 4 ノ續キ

$\therefore\quad z=1$ 又ハ $z=6$

故＝ $\left|\begin{array}{l} x+y=6 \\ xy=8 \end{array}\right.\quad \left|\begin{array}{l} x+y=1 \\ xy=8 \end{array}\right.$

答 $\left|\begin{array}{l} x=2 \\ y=4 \\ z=1 \end{array}\right.\ \left|\begin{array}{l} x=4 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}\right.\ \left|\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{-31}}{2} \\ y=\dfrac{1-\sqrt{-31}}{2} \\ z=6 \end{array}\right.\ \left|\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{-31}}{2} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{-31}}{2} \\ z=6 \end{array}\right.$

5 ▲ $\left|\begin{array}{ll} xy=a(x+y) & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ yz=b(y+z) & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ zx=c(z+x) & \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{array}\right.$

$x=y=z=0$ ハ視察ニヨリ所要ノ根デアル, 今 0 ノ外ノ根ヲ求メルニ (即チ $x\fallingdotseq 0, y\fallingdotseq 0, z\fallingdotseq 0$ トシテ)

(1)$\div xy$ $\quad \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{a}$

(2)$\div yz$ $\quad \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{b}$

(3)$\div zx$ $\quad \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{c}$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)$$

答 $\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{2abc}{bc-ca+ab} \\ y=\dfrac{2abc}{bc+ca-ab} \\ z=\dfrac{2abc}{ca+ab-bc} \end{array}\right|\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}$

$\boxed{6}$ (4) $\left|\begin{array}{ll} x^2+y^2+z^2=a & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y^2=2xz-b & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ xz=c & \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{array}\right.$

(2) ト (3) ヨリ $y^2=2c-b$ 之ヲ (1) ニ代入スル。

$x^2+z^2=a+b-2c$

(3)×(2) ヲ加ヘテ

$\left|\begin{array}{l} x+z=\sqrt{a+b} \\ xz=c \end{array}\right.\quad \left|\begin{array}{l} x+z=-\sqrt{a+b} \\ xz=c \end{array}\right.$

$\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{a+b}\pm\sqrt{a+b-4c}}{2} \\ z=\dfrac{\sqrt{a+b}\mp\sqrt{a+b-4c}}{2} \end{array}\right.\quad \left|\begin{array}{l} x=\dfrac{-\sqrt{a+b}\pm\sqrt{a+b-4c}}{2} \\ z=\dfrac{-\sqrt{a+b}\mp\sqrt{a+b-4c}}{2} \end{array}\right.$

此各場合ニ $y^2=2c-b$ 從ツテ $y=\pm\sqrt{2c-b}$ ヲ組合セテ合計八組ノ根ヲ得。

(5) $\left|\begin{array}{ll} \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{5}{6} & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{3}{4} & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{15}{8} & \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{array}\right.$

各式ノ逆數ヲ考ヘヨ。

$\left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{6}{5} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{8}{15} \end{array}\right.$ (x, y, z ヲ 0 ナラズシテ)

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$

$\dfrac{1}{z}=1$

答 $\left|\begin{array}{l} x=3 \\ y=5 \\ z=1 \end{array}\right.$

25 應用問題

例　直角三角形ノ面積ハ 330 平方糎デ斜邊ハ 61 糎アルトイフ。直角ヲ夾ム二邊ノ長サヲ求メヨ。

解　直角ヲ夾ム二邊ノ長サヲ夫々 x 糎, y 糎トスレバ題意ニヨツテ次ノ聯立方程式ガ出來ル。

$$\left|\begin{array}{ll} xy=660 & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2=(61)^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$$

此ノ聯立方程式ハ次ノ如クニシテ解ク事ガ出來ル。

(2)+(1)×2 $\quad x^2+2xy+y^2=5041$

$$(x+y)^2=71^2$$

故ニ $\quad x+y=\pm 71$

然ルニ二邊ノ和ガ負トナルコトガナイカラ

$x+y=-71$ ハ無意味デアル。

從ツテ $\left|\begin{array}{l} x+y=71 \\ xy=660 \end{array}\right.$ ヲ得。

之ヲ解ケバ $\left|\begin{array}{l} x=60 \\ y=11 \end{array}\right.\quad \left|\begin{array}{l} x=11 \\ y=60 \end{array}\right.$ 　答 60糎, 11糎

問題 41

1 甲乙二數ノ和ハ20デ甲數ノ平方カラ13ヲ減ジタモノト乙數ノ平方ニ13ヲ加ヘタモノトノ和ハ 272 デアルト。各數ヲ求メヨ。

2 甲乙二數ガアル。ソノ和ト積ト甲數ノ平方カラ乙數ノ平方ヲ引イタ差トガ共ニ相等シイトイフ。各二數ヲ求メヨ。

3 甲乙兩人共ニ働ク時ハ 6 日間デ或仕事ヲ仕上ゲ，各一人デナス時ハ甲ハ乙ヨリモ 5 日間多クカヽルトイフ。各一人宛デハ何日デ仕上ゲ得ルカ。

(1) 甲數カラ乙數ヲ引イタ殘ト甲數ノ平方カラ乙數ノ平方ヲ引イタ殘トノ和ハ 150 デソノ二數ノ和トソノ平方ノ和トノ和ハ330デアルトイフ。ソノ各數ヲ求メヨ。

(2) 直角三角形ノ斜邊ハ 13 cm デ他ノ二邊ノ和ハ 17 cm デアルトイフ。各邊ノ長サヲ求メヨ。

(3) 若干哩ノ鐵道ヲ等速度デ進行スル汽車ガアル。若シソノ速サヲ一時間ニ 6 哩宛增ストキハ 4 時間早ク達セラレ 6 哩宛減ズルト 6 時間遲クレルトイフ。此ノ鐵道ノ哩數ヲ求メヨ。

問題 41

1 甲數ヲ x, 乙數ヲ y トスル。

$$\begin{cases} x+y=20 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ (x^2-13)+(y^2+13)=272 \cdots (2) \end{cases}$$

(1) ヨリ $y=20-x$ (2) ニ代入シ

$$x^2-20x+64=0$$

$$x=4, \quad x=16$$

$$y=16 \quad y=4$$

題意ニ適スルカ。

答

甲	4	16
乙	16	4

2 甲數ヲ x, 乙數ヲ y トセヨ。

$$x+y=xy=x^2-y^2$$

$$\begin{cases} x+y=xy \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x^2-y^2=x+y \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(2) ヨリ $(x+y)(x-y-1)=0$

$$x=-y \qquad x=y+1$$

共ニ (1) ニ代入セヨ。

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2-y-1=0 \\ y=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

答

x	0	$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$	$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$
y	0	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

(1) 二數ヲ夫々 x, y トスル。

$$\begin{cases} x-y+x^2-y^2=150 \cdots\cdots (1) \\ x+y+x^2+y^2=330 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1)+(2) $x^2+x-240=0$

$$x=15, \qquad x=-16$$

(2) ニ代入セヨ。何レモ $y=9, -10$

答

x	15	15	−16	−16
y	9	−10	9	−10

(2) 二邊ヲ夫々 x^{cm}, y^{cm} トスル。

$$\begin{cases} x+y=17 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x^2+y^2=169 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1) ヨリ $y=17-x$ 之ヲ (2) ニ代入シ，

$$x^2-17x+60=0$$

$$\therefore \ x=5, \qquad x=12$$

$$y=12, \qquad y=5$$

答 5^{cm}, 12^{cm}

3 甲ハ x 日デ，乙ハ y 日デ完成スルモノトスレバ

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6} \cdots\cdots\cdots (1) \\ x-5=y \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(2) ヲ (1) ニ代入セヨ。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \ x^2-17x+30=0$$

$$\begin{cases} x=15 \\ y=10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$$

負根ニ意味ガアルカ。

答 甲 15日，乙 10日

P. 263

4　二圓ノ半徑ヲ夫々 x^{cm}, y^{cm} トセヨ。

$$\begin{cases} x+y=113 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \pi x^2+\pi y^2=\pi(85)^2 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1) ヨリ $y=113-x$ (2) ニ代入シテ

$$x^2-113x+2772=0$$

$$(x-77)(x-36)=0$$

$$\begin{cases} x=77 \\ y=36 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=36 \\ y=77 \end{cases}$$

答 36糎, 77糎

5　一位ノ數字ヲ x,
十位ノ數字ヲ y,
百位ノ數字ヲ z トスレバ,

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ 100x+10y+z-100z-10y-x \\ \qquad =396 \\ y^2-zx=4 \end{cases}$$

即チ
$$\begin{cases} x+y+z=9 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x-z=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ y^2-zx=4 \cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1)-(2) & y=5-2z \\ (2) \text{ヨリ} & x=4+z \end{array}\right\} (3) \text{ ニ代入シテ}$$

$$z^2-8z+7=0$$

$$\begin{cases} z=7 \\ y=-9 \\ x=11 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=1 \\ y=3 \\ x=5 \end{cases}$$

題意ニ適スルカ。

答 135

(3)　哩數ヲ x, 時速ヲ y 哩トセヨ。

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y+6}=\dfrac{x}{y}-4 \cdots\cdots\cdots (1) \\ \dfrac{x}{y-6}=\dfrac{x}{y}+6 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1)　$2y^2+12y-3x=0$

(2)　$y^2-6y-x=0$

x ヲ消去セヨ。

$$y^2-30y=0 \qquad y(y-30)=0$$

$$y=0 \qquad y=30$$

$$x=0 \qquad x=720$$

檢査セヨ。

答 720哩

(4)　A圓, B圓ノ半徑ヲ夫々 x^{cm} y^{cm} トスレバ

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \pi x^2+\pi y^2=\dfrac{3}{4}\pi(\sqrt{2})^2 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1) ヨリ $y=\sqrt{2}-x$ (2) ニ代入

$$4x^2-4\sqrt{2}x+1=0$$

$$x=\frac{\sqrt{2}\pm 1}{2}$$

$$\therefore \quad y=\frac{\sqrt{2}\mp 1}{2}$$

答 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}cm, \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}cm$

(5) 二ツノ球ノ半徑ヲ夫々 x^{cm}, y^{cm} トスルト

$$\begin{cases} x-y=18 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 4\pi x^2-4\pi y^2=4\pi(48)^2 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(2) ハ $x^2-y^2=48^2$ 之ニ (1) ヲ代入

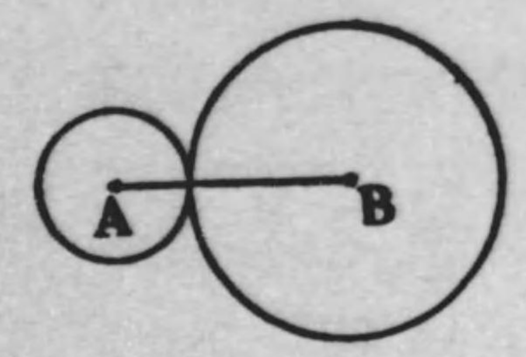
$$x+y=128 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$(1)+(3) \qquad x=73$$

$$(3)-(1) \qquad y=55$$

答 73^{cm}, 55^{cm}

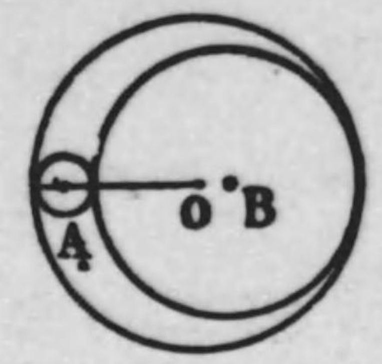
4



互ニ外切スル二圓ノ中心距離ハ 113 糎デ,ソノ面積ノ和ハ半徑85糎アル圓ノ面積ニ等シイトイフ。各圓ノ半徑ヲ求メヨ。

5　三桁ノ整數ガアル。共ノ各位ノ數字ノ和ハ9デソノ數字ノ順ヲ逆ニ書イタ數ハモトノ數ヨリ 396 多ク,且十ノ位ノ數ノ平方ハ一ノ位ノ數ト百ノ位ノ數トノ積ヨリ4ダケ大キイトイフ。モトノ三桁ノ數ヲ求メヨ。

(4)



中心ガ A, B ナル二圓ハ互ニ外切シ且ツ半徑 $\sqrt{2}$ cm ナル圓 O ニ內切シ AOB ハ一直線デアル。而シテ A, B 二圓ノ面積ノ和ハ圓Oノ面積ノ $\dfrac{3}{4}$ アルトイフ。A, B 二圓ノ半徑ヲ求メヨ。

(5)　二球ヲ作ルニ半徑ノ差ハ18糎,表面積ノ差ハ丁度半徑ガ48糎アル球ノ表面積ト等シクナルヤウニセントス。

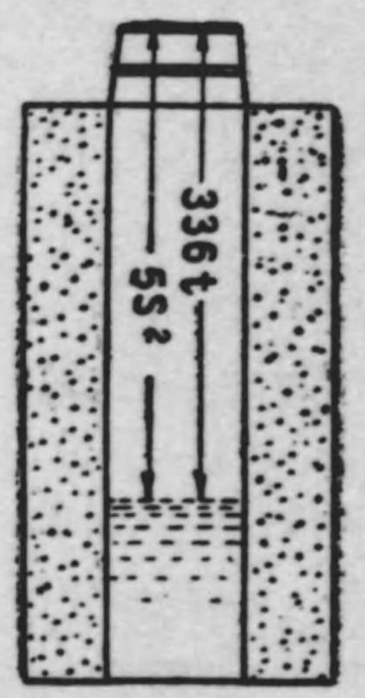
各球ノ半徑ヲ如何ニスベキカ。但シ半徑 r ナル球ノ表面積ハ $4\pi r^2$ デアル。

6　矩形ノ土地ガアル。ソノ長サハ 119 米,幅ハ 19 米アル。今長サヲ何米減ジ,幅ヲ何米增シタラバソノ面積ガ變ラズニ周圍ガ 24 米增スカ。

7　甲ハ或日數間或賃金デ働イテ 42 圓ヲ得,乙ハ之ヨリ 8 日少イ日數間異ル賃金デ働イテ 40 圓ヲ得タ。モシ甲ガ乙ノ日數間,乙ガ甲ノ日數間ダケ働クトスレバ兩人ノ賃金合計ニ於テ後ノ方ガ 4 圓多クナルトイフ。各人ノ賃金及ビ働イタ日數ヲ求メヨ。

(6)　甲乙 2 個ノ立方體ノ金屬ガアル。甲ノ稜ハ乙ノ稜ヨリモ一糎長ク,ソノ體積ハ 61 立方糎ダケ多イトイフ。各立方體ノ稜ノ長サヲ求メヨ。

(7)　或人井戸ノ深サヲ測ラウトシテソノ井戸口カラ石ヲ落シタルニ,石ガ手ヲ離レテカラ水ヲ打ツタ音ヲ聞クマデニ $4\frac{5}{21}$ 秒ヲ要シタトイフ。ソノ井戸ノ深サヲ求メヨ。



但シ音ハ t 秒間ニ $336t$ 米ノ速サデ進ミ,石ハ s 秒間ニ $5s^2$ 米落下スル。

6　長サヲ x 米減ジ幅ヲ y 米增スモノトセヨ。

$$\begin{cases}(119-x)(19+y)=119\times19\\(119+19)\times2+24=2(119-x+19+y)\end{cases}$$

卽チ $\begin{cases}119y-19x-xy=0\;\cdots\cdots(1)\\y-x=12\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

(2) ヲ (1) ニ代入セヨ。

$$y^2-112y-228=0$$

$$y=114\qquad y=-2$$

$$\therefore\quad x=102\qquad x=-14$$

答 $\begin{cases}\text{長サヲ102米減ジ}\\\text{幅ヲ114米增セバ可}\end{cases}$

7　甲ハ日給 x 圓デ y 日間働キ又乙ノ日給ヲ z 圓トスレバ

$$\begin{cases}xy=42\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\z(y-8)=40\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\yz+x(y-8)=86\cdots\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

(3) ヨリ (1) ト (2) トノ和ヲ減ズレバ

$$z-x=\frac{1}{2}\qquad z=x+\frac{1}{2}$$

(2) ニ代入シテ

$$xy-8x+\frac{1}{2}y=44\cdots\cdots(5)$$

(5) ト (1) ヨリ

$\begin{cases}y-16x=4\\xy=42\end{cases}$ 之ヨリ

$$8x^2+2x-21=0$$

$$x=\frac{3}{2}\qquad x=-\frac{7}{4}\text{(適セズ)}$$

$$y=28,\qquad z=2$$

答　甲　1.5圓デ28日
　　乙　2圓デ20日

(6)　甲ノ一稜ヲ x^{cm}, 乙ノ一稜ヲ y^{cm} トスレバ

$$\begin{cases}x-y=1\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\x^3-y^3=61\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

(2) ヨリ $(x-y)(x^2+xy+y^2)=61$

(1) ヲ上式ニ代入セヨ。

$$x^2+xy+y^2=61\cdots\cdots(3)$$

(1) ヨリ $x=y+1$ 之ヲ (3) ニ代入

$$y^2+y-20=0$$

$$y=4\qquad y=-5\quad\text{(適セズ)}$$

$$x=5$$

答　甲 5^{cm}
　　乙 4^{cm}

(7)　石ガ落チルノニ s 秒ヲ要シ,音ヲ聞クノニ t 秒ヲ要ストス。

$$\begin{cases}336t=5s^2\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\t+s=4\frac{5}{21}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

(2) ヨリ $t=\frac{89}{21}-s$

之ヲ (1) ニ代入セヨ。

$$5s^2+336s-89\times16=0$$

$$(s-4)(5s+356)=0$$

$$\therefore\quad s=4\qquad s=-\frac{356}{5}$$

負ハ之ヲ採用出來ルカ。

$$s=4$$

故ニ井戸ノ深サハ

$$5s^2=5\times16=80$$

答　80米

摘　　要

本篇ハ初等代數學中最モ重キヲナストイフモ敢テ過言デハナイ位，重要ナ篇デアツタ。從ツテ茲デハ相當ニ復習的總括ヲスル必要ガアル。次ニ判別式ト根トノ關係ヲ明瞭ニスル表ヲ擧ゲテオク。

<table>
<tr><td colspan="4">$D=b^2-4ac$</td></tr>
<tr><td colspan="2">正</td><td>0</td><td>負</td></tr>
<tr><td>完全平方ナラズ</td><td>完全平方</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>無理根</td><td colspan="2">有理根</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">實根</td><td>虛根</td></tr>
<tr><td colspan="2">不等根</td><td>等根</td><td>不等根</td></tr>
</table>

摘　　要

◎ 數
- 實數
  - 有理數
  - 無理數
- 虛數

◎ 剩餘定理及ビ因數定理

1　x ニ關スル或有理整式ヲ $ax+b$ デ割ツタトキノ剩餘ハソノ式ノ x ニ $ax+b=0$ ノ根ヲ代入シタトキノ數値ニ等シイ。

2　x ニ關スル或有理整式ニ於テ $x=m$ トシタルトキソノ式ノ數値ガ 0 トナルトキハソノ式ニハ $(x-m)$ ノ因數ガアル。

◎ 一元ナル方程式ノ解法

1　二次方程式
- 因數分解ニヨル場合
- 公式ニヨル場合

2　高次方程式
- 因數分解ニヨル場合
- 二次方程式ト見做シ得ル場台

3　$ax^2+bx+c=0$ ノ二根ハ $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ デアル。

◎ 聯立方程式ノ解法

1 二元二次聯立方程式

(一) 一ツノ方程式ガ一次ナル場合.（代入法).

(二) 二次ノ項ヲ全部消去シ得ル場合.

(三) 一ツノ方程式ガ因數ニ分解シ得ル場合.

(四) 二方程式ヲ組合セテ因數ニ分解シ得ル方程式ヲ作リ得ル場合.

(五) 置換法ニヨツテ上ノ何レカニ歸シ得ル場合.

2 二元高次ノ聯立方程式

(一) 一式ノ値ヲ他ノ式ニ代入シ得ル場合.

(二) 二方程式ヲ加減スルコトニヨツテ因數ニ分解シ得ル式ヲ作リ得ル場合.

(三) 置換法ニヨツテ二元二次方程式ノ解法ニ歸シ得ル場合.

3 多元聯立方程式

(一) 代入法又ハ加減法ニヨル場合.

(二) 置換法ニヨツテ多元一次ノ聯立方程式トナシ得ル場合.

(三) 邊々ヲ加減スルコトニヨツテ簡單ナ形ニナシ得ル場合.

雜　題　2 (舊教科書116頁)

1　$(a^6+2a^2-4a+1)\div(a-3)$

被除式＝ $a=3$ ヲ代入セヨ。

$3^6+2\times3^2-4\times3+1$

$=729+18-12+1$

$=736$　　答 $\underline{736}$

2 ● $(2m^2+5)x+12mx+3=0$

$D=144m^2-12(2m^2+5)=0$

$10m^2-5=0\qquad m^2=\frac{1}{2}$

$\therefore\quad m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

答 $\underline{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$

2 ▲ $2x^2-3x-3+k(x^2+x+2)=0$

之ヲ整頓シテ

$(k+2)x^2+(k-3)x+2k-3=0$

$D=(k-3)^2-4(k+2)(2k-3)=0$

$7k^2+10k-33=0$

$(k+3)(7k-11)=0$

$\therefore\quad k=-3,\quad k=\frac{11}{7}$

答 $\underline{k=-3,\quad k=\frac{11}{7}}$

$\boxed{3}$ 4 $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=4$

兩端ト中央トノ積ヲ作レ

$(x^2+6x+5)(x^2+6x+8)-4=0$

$\therefore\quad (x^2+6x+5)^2+3(x^2+6x+5)-4=0$

$(x^2+6x+9)(x^2+6x+4)=0$

$x^2+6x+9=0\qquad x^2+6x+4=0$

$x=-3$ (等根)　　$x=-3\pm\sqrt{5}$

答 $\underline{-3,\ -3,\ -3\pm\sqrt{5}}$

(1)　$x^2-5x+6=0,\quad x=2,\quad x=3,$

$x=2$ ヲ代入シ

$2m-n-7=0$

$x=3$ ヲ代入シ

$3m-n+8=0$

從ツテ

答 $\left|\begin{array}{l} m=-15 \\ \underline{n=-37} \end{array}\right.$

(2)　$3(x-1)(x-m)=x(7-m^2)$

整頓シテ

$3x^2-(10+3m-m^2)x+3m=0$

一根ガ 0 ナルタメニハ

$\alpha\beta=0$ デナケレバナラヌ

$\alpha\beta=m=0$

答 $\underline{m=0}$

$\boxed{3}$ (4) $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44$

因數ヲ一ツ置キニ取ツタ積ヲ作レ。

$(x^2-2x-8)(x^2-2x-15)-44=0$

$\therefore\quad (x^2-2x-8)^2-7(x^2-2x-8)-44=0$

$(x^2-2x-19)(x^2-2x-4)=0$

$x^2-2x-19=0\qquad x^2-2x-4=0$

$x=1\pm2\sqrt{5}\qquad x=1\pm\sqrt{5}$

答 $\underline{1\pm2\sqrt{5},\ 1\pm\sqrt{5}}$

注意　二次以上ノ聯立方程式ヲ解カウトスルトキハ先ヅソノ方程式ノ形ニヨツテ上ニ擧ゲタ何レノ場合ニ當テハマルカヲ考ヘヨ。

◎　根ト係數トノ關係

$ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ $\alpha,\ \beta$ トスレバ

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

判別式 $D=b^2-4ac$

1　$D\geqq0$　ナルトキハ實根。

2　$D<0$　ナルトキハ虛根。

雜　題　2

1　a^6+2a^2-4a+1 ヲ $a-3$ デ割ツタトキノ剩餘ヲ求メヨ。

2　次ノ方程式ノ二根ガ等シクナルヤウニ m ノ値ヲ定メヨ。

$(2m^2+5)x^2+12mx+3=0$

(1)　$x^2-5x^2+6=0$ ノ二根ガ次ノ方程式ヲモ滿足スルヤウニ m,n ノ値ヲ定メヨ。

$2x^3+mx^2-nx-30=0$

(2)　$3(x-1)(x-m)=x(7-m^2)$ ノ一根ガ 0 トナルヤウニ m ノ値ヲ定メヨ。

次ノ方程式ヲ解ケ。

3 $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=4$

(3) $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44$

4 $\begin{cases} x^2+y^2=8y+1-2xy \\ 2(x+y)^2=10x+9y+3 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} xy-x-2y+2=0 \\ 2x^2-3xy+5y=5 \end{cases}$

5 $\begin{cases} x+xy+y=5 \\ x^2+x^2y^2+y^2=9 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} (x-y)^2=13(x-y)-12 \\ xy=12 \end{cases}$

邊々ヲ加減スルコトニヨツテ次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

6 $\begin{cases} 2xy+y=15 \\ x^2+x+y^2=15 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x^2+xy+2x=14 \\ y^2+xy+2y=21 \end{cases}$

各式ノ兩邊ニ適當ナ數ヲ加ヘ左邊ヲ因數分解スルコトニヨツテ次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

7 $\begin{cases} xy+x+y=19 \\ yz+y+z=29 \\ zx+z+x=23 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} xy+2x+2y=8 \\ zx+2x+2z=11 \\ yz+2y+2z=16 \end{cases}$

8 二數ノ差ハ16デソノ積ハ377デアルトイフ。ソノ二數各如何。

(8) 對角線ノ總數ガ54ナル多角形ハ何邊形デアルカ。

3 ▲ $(x^2+3x)(x^2+3x-14)+40=0$

x^2+3x ヲ一ツノ未知數ト考ヘヨ。

$(x^2+3x)^2-14(x^2+3x)+40=0$

$(x^2+3x-4)(x^2+3x-10)=0$

$x^2+3x-4=0 \qquad x^2+3x-10=0$

$x=-4,\ 1 \qquad x=-5,\ 2$

答 $\underline{1,\ 2,\ -4,\ -5}$

$\boxed{4}$/5 $\begin{cases} x^2+y^2=8y+1-2xy \cdots(1) \\ 2(x+y)^2=10x+9y+3 \cdots(2) \end{cases}$

(1) $2(x+y)^2=16y+2 \cdots\cdots(3)$

(3)−(2) $7y-10x-1=0$

$\therefore\ x=\dfrac{7y-1}{10}$

之ヲ (1) ニ代入

$289y^2-834y-99=0$

$(y-3)(289y+33)=0$

$\therefore \begin{cases} y=3 \\ x=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-\dfrac{33}{289} \\ x=-\dfrac{52}{289} \end{cases}$

答

x	2	$-\frac{52}{289}$
y	3	$-\frac{33}{289}$

(3) ▲ $(x^2-x+1)^2=3x(x-1)+1$

x^2-x ヲ一ツノ未知數ト考ヘヨ。

$(x^2-x)^2-(x^2-x)=0$

$(x^2-x)(x^2-x-1)=0$

$x^2-x=0 \qquad x^2-x-1=0$

$x=0,\ 1 \qquad x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

答 $\underline{0,\ 1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$

$\boxed{(4)}$/(5) $\begin{cases} xy-x-2y+2=0 \cdots\cdots(1) \\ 2x^2-3xy+5y=5 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)\times5+(2)\times2$

$4x^2-x(5+y)=0$

$x(4x-y-5)=0$

$\therefore \left.\begin{matrix} x=0 \\ y=1 \end{matrix}\right\}$ $\quad y=4x-5$

之ヲ (1) ニ代入

$\left.\begin{matrix} x=2 \\ y=-3 \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}\right\}$

答

x	0	2	1
y	1	3	1

$\boxed{5}$ / 6

$$\left|\begin{aligned}&x+xy+y=5\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\&x^2+x^2y^2+y^2=9\cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}\right.$$

(1) $x+y=5-xy$ 自乘スレバ

$$x^2+2xy+y^2=25-10xy+x^2y^2$$

$$\therefore\quad x^2-x^2y^2+y^2=25-12xy$$

之ヨリ (2) ヲ引ケ。

$$x^2y^2-6xy+8=0$$

$$\left|\begin{aligned}&xy=2\\&x+y=3\end{aligned}\right.\qquad\left\|\begin{aligned}&xy=4\\&x+y=1\end{aligned}\right.$$

$$\therefore\quad\left|\begin{aligned}&x=1\\&y=2\end{aligned}\right.\left|\begin{aligned}&x=2\\&y=1\end{aligned}\right.\left\|\begin{aligned}&x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-15})\\&y=\frac{1}{2}(-1\mp\sqrt{-15})\end{aligned}\right.$$

答

x	1	2	$\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-15})$
y	2	1	$\frac{1}{2}(-1\mp\sqrt{-15})$

$\boxed{6}$ / 8

$$\left|\begin{aligned}&2xy+y=15\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\&x^2+x+y^2=15\cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}\right.$$

(2)−(1) $x^2-2xy+y^2+x-y=0$

$(x-y)(x-y+1)=0$

$x=y$ $\qquad$ $x=y-1$

(1)ニ代入 $\qquad$ (1)ニ代入

$2y^2+y-15=0$ $\quad$ $2y^2-y-15=0$

$y=-3,\ y=\frac{5}{2},\ y=3,\ y=-\frac{5}{2}$

答

x	-3	2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$
y	-3	3	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$

(5) / (6)

$$\left|\begin{aligned}&(x-y)^2=13(x-y)-12\cdots\cdots(1)\\&xy=12\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}\right.$$

(1) $(x-y-1)(x-y-12)=0$

$$\therefore\quad\left|\begin{aligned}&x-y=1\\&xy=12\end{aligned}\right.\qquad\left|\begin{aligned}&x-y=12\\&xy=12\end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned}&x=4\\&y=3\end{aligned}\right.\left|\begin{aligned}&x=-3\\&y=-4\end{aligned}\right.\left|\begin{aligned}&x=6\pm4\sqrt{3}\\&y=-6\pm4\sqrt{3}\end{aligned}\right.$$

答

x	4	-3	$6+4\sqrt{3}$	$6-4\sqrt{3}$
y	3	-4	$-6+4\sqrt{3}$	$-6-4\sqrt{3}$

(6) / (8)

$$\left|\begin{aligned}&x^2+xy+2x=14\cdots\cdots\cdots(1)\\&y^2+xy+2y=21\cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}\right.$$

(1)+(2) $(x+y)^2+2(x+y)-35=0$

$\therefore\quad (x+y+7)(x+y-5)=0$

$x=-y-7$ $\qquad$ $x=5-y$

何レモ (2) ニ代入セヨ。

$-5y=21$ $\qquad$ $7y=21$

$y=-\frac{21}{5}$ $\qquad$ $y=3$

答

x	$-\frac{14}{5}$	2
y	$-\frac{21}{5}$	3

$\boxed{7}$ / 9

$$\left|\begin{aligned}&xy+x+y=19\cdots\cdots\cdots(1)\\&yz+y+z=29\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\&zx+z+x=23\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{aligned}\right.$$

各式ノ兩邊ニ 1 ヲ加ヘヨ。

(1) $(x+1)(y+1)=20$

(2) $(y+1)(z+1)=30$

(3) $(z+1)(x+1)=24$

$\therefore\quad (x+1)(y+1)(z+1)=\pm120$

$x+1=\pm4$

$y+1=\pm5$

$z+1=\pm6$

答 $\left|\begin{aligned}&x=3\\&y=4\\&z=5\end{aligned}\right.\left|\begin{aligned}&x=-5\\&y=-6\\&z=-7\end{aligned}\right.$

7 ▲ $\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}+\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}=\dfrac{34}{15}$

分母ヲ拂ヘバ

$15(x^2-a^2)^2+15(x^2+a^2)^2=34(x^4-a^4)$

$x^4=16a^4$

$\therefore\quad x^2=4a^2 \qquad x^2=-4a^2$

$x=\pm2a \qquad x=\pm i2a$

答 $\underline{\pm2a,\ \pm i2a}$

檢査セヨ。

〔注意〕

$\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}=t$ トオケバ

$t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{34}{15}$ 之ヲ解クモヨシ。

$\boxed{8}$ / 10 二數ヲ夫々 x, y トスル。

$$\left|\begin{aligned}&x-y=16\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\&xy=377\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}\right.$$

(1)ヨリ $x=y+16$ (2)ニ代入

$y^2+16y-377=0$

$y=13,\ -29$

從ツテ $x=29,\ -13$

答

x	29	-13
y	13	-29

(7) / (9)

$$\left|\begin{aligned}&xy+2x+2y=8\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\&zx+2x+2z=11\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\&yz+2y+2z=16\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{aligned}\right.$$

各式ノ兩邊ニ 4 ヲ加ヘヨ。

(1) $(x+2)(y+2)=12$

(2) $(x+2)(z+2)=15$

(3) $(z+2)(y+2)=20$

$\therefore\quad (x+2)(y+2)(z+2)=\pm60$

$x+2=\pm3$

$y+2=\pm4$

$z+2=\pm5$

答 $\left|\begin{aligned}&x=1\\&y=2\\&z=3\end{aligned}\right.\left|\begin{aligned}&x=-5\\&y=-6\\&z=-7\end{aligned}\right.$

(7) ▲ $\sqrt{\dfrac{2x-5}{3x-7}}+\sqrt{\dfrac{3x-7}{2x-5}}=\dfrac{5}{2}$

$\sqrt{\dfrac{2x-5}{3x-7}}=t$ トオケバ

$t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\quad 2t^2-5t+2=0 \quad t=2,\ \dfrac{1}{2}$

$\sqrt{\dfrac{2x-5}{3x-7}}=2 \qquad \sqrt{\dfrac{2x-5}{3x-7}}=\dfrac{1}{2}$

$x=2.3 \qquad x=2.6$

檢査セヨ。

答 $\underline{2.3,\ \ 2.6}$

(8) / (10) n邊多角形ノ對角線ノ總數ハ如何ナル式ニテ與ヘラレルカ。

$\dfrac{n(n-3)}{2}=54$

$n^2-3n-108=0$

$n=12,\ \ -9$

負ヲ捨テル。 答 $\underline{12\text{邊形}}$

9 ●
$$\begin{cases} x^3-y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ y=x^2+4x-4 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1) ヨリ $y=x^3$

之ヲ (2) ニ代入スレバ

$$x^3-x^2-4x+4=0$$
$$x^2(x-1)-4(x-1)=0$$
$$(x-1)(x-2)(x+2)=0$$
$$x=1,\quad x=2,\quad x=-2$$
$$\therefore\ y=1,\quad y=8,\quad y=-8$$

答

x	1	2	-2
y	1	8	-8

今之ヲ「グラフ」デ解ケバ(89)頁〔P. 212〕問題 (3)▲ ノ結果トナル。(3)▲ ヲ参照セヨ。

(9) ●
$$\begin{cases} 10x+y^3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x+y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(2) ヨリ $x=-y$

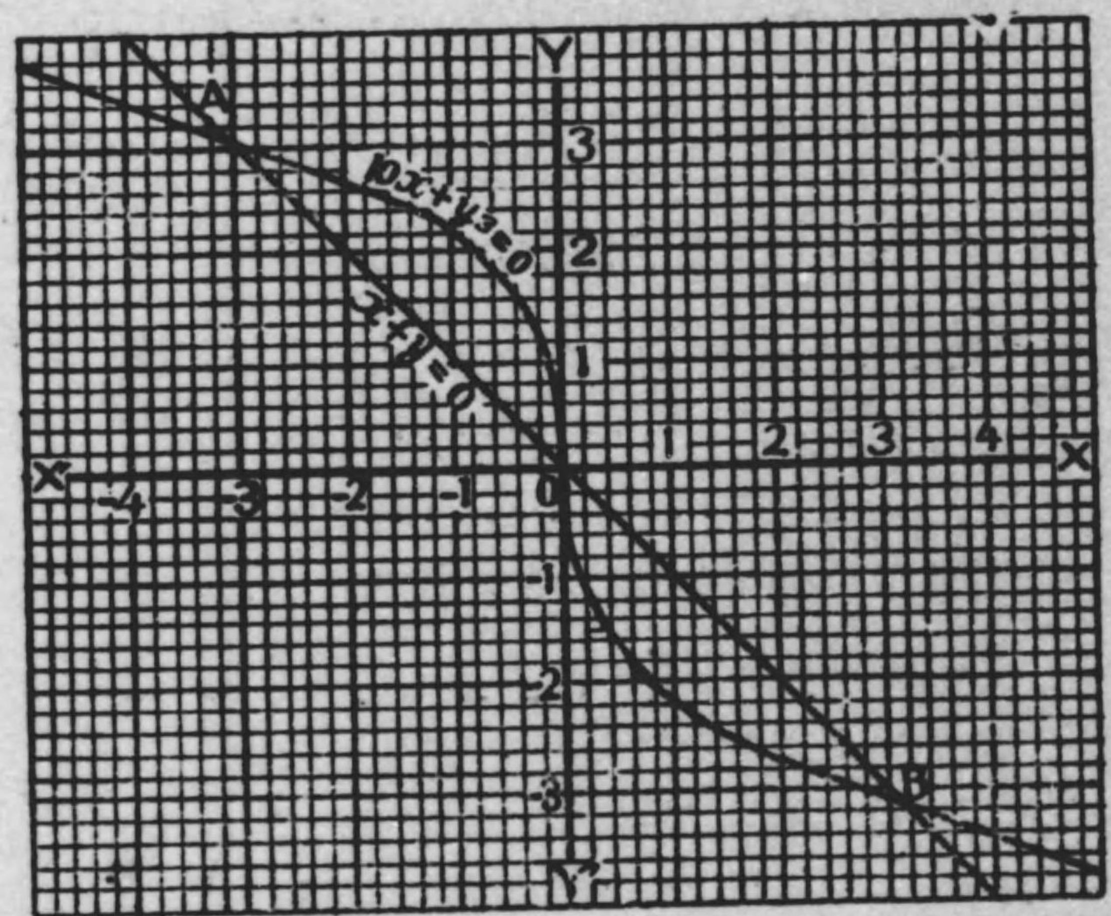
之ヲ (1) ニ代入スレバ

$$y^3-10y=0$$
$$y(y^2-10)=0$$
$$\left.\begin{matrix} y=0 \\ x=0 \end{matrix}\right\}\qquad \therefore\ \begin{matrix} y^2=10 \\ y=\pm\sqrt{10} \end{matrix}$$

答

x	0	$\sqrt{10}$	$-\sqrt{10}$
y	0	$-\sqrt{10}$	$\sqrt{10}$

今之ヲ「グラフ」デ解ケバ次ノ通リニナル。



注意　前頁ノ 5,6,7 等ハ代入法ニヨツテモ解クコトガ出來ル。

例ヘバ

7
$$\begin{cases} xy+x+y=19 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ yz+y+z=29 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ zx+z+x=23 \cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$$
ヲ解クニ

$x+1 \neq 0$ トシ

(1) ヨリ $y=\dfrac{19-x}{x+1}$, (3) ヨリ $z=\dfrac{23-x}{x+1}$

(2) ヘ代入シテ

$$\frac{(19-x)(23-x)}{(x+1)^2}+\frac{19-x}{x+1}+\frac{23-x}{x+1}=29$$
$$(19-x)(23-x)+(19-x+23-x)(x+1)=29(x+1)^2$$
$$437-42x+x^2+42+40x-2x^2-29x^2-58x-29=0$$
$$-30x^2-60x+450=0$$
$$x^2+2x-15=0$$

$$\begin{array}{c|c} x-3=0 & x+5=0 \\ x=3 & x=-5 \\ y=4 & y=-6 \\ z=5 & z=-7 \end{array}$$

答

x	3	-5
y	4	-6
z	5	-7

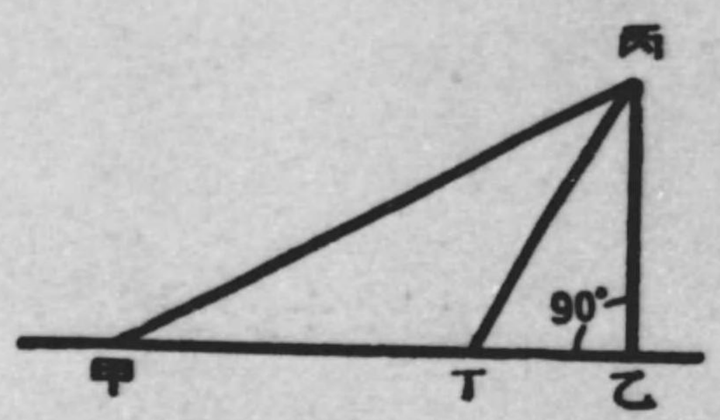
次ノ方程式ヲ解ケ。

9
$$\begin{cases} x^3-y=0 \\ y=x^2+4x-4 \end{cases}$$

(9)
$$\begin{cases} 10x+y^3=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

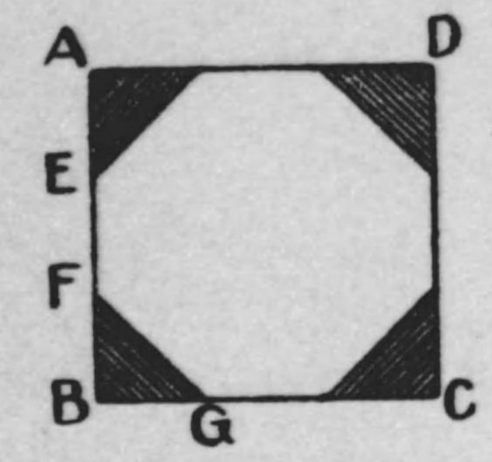
10 一邊ノ長サ a 糎アル正方形ノ四隅ヲ同樣ニ截リ落シテ正八邊形ヲ作ルニハ正八邊形ノ一邊ノ長サヲ何程トスベキカ。

(10)



甲乙丙ノ間ニ圖ノ如ク通ズル道路ガアル。甲乙ノ間ハ30粁,乙丙ノ間ハ16粁デアル。今甲乙ノ間ノ丁地カラ丙地ニ通ズル直線ノ道路ヲ作リ,甲丁丙間ヲ往復スル道程ト甲カラ乙ニ,乙カラ丙ニ,丙カラ甲ニ復ル道程トヲ等シクシヤウトスル。丁ヲ甲カラ何粁ノ處トスベキカ。

$\boxed{10}$
11



$AB=a^{cm}$

$EF=FG=x^{cm}$

$$AE=BF=BG=\frac{a-x}{2}$$

$$FG^2=BF^2+BG^2$$

$$\therefore\ x^2=2\left(\frac{a-x}{2}\right)^2$$

$$x^2+2ax-a^2=0$$

$$x=-a\pm a\sqrt{2}$$

$\therefore\ x=(\sqrt{2}-1)a,$

又ハ $-(\sqrt{2}+1)a$

負ハ捨テル。

答 $(\sqrt{2}-1)a$

$\boxed{(10)}$
(11)

丁ヲ甲カラ x^{km} 離レタ所ニオクモノトスル。

甲,丁,丙ノ往復道路ハ

甲→丁→丙→丁→甲

他ノ一ツノ道路ハ

甲→乙→丙→甲

丙丁ノ距離ハ $\sqrt{(30-x)^2+16^2}$

丙甲ノ距離ハ $\sqrt{30^2+16^2}$

$$2\{x+\sqrt{(30-x)^2+16^2}\}=30+16+\sqrt{30^2+16^2}$$

$$\sqrt{1156-60x+x^2}=40-x$$

$$10x=222$$

$$x=22.2$$

檢査セヨ。

答 22.2粁

第九篇

比　例

第一章　比及比例

26 比 ratio

問一　比較, 比率, 比例, 比重, 比熱。

問二　下ノ線分ハ上ノ線分ノ2倍デアル。

問三　甲ノ面積ハ乙ノ面積ノ三分ノ一, 即チ 1對3。

同一性質ノ二量ガアルト, 一方ノ量ガ他ノ量ヨリモ幾ラ多イ或ハ少イ即チ大小ノ比較トソレト一方ガ他ノ2倍3倍或ハ半分等トイフ比較ハ自ラ生ズルモノデアツテ, コノ後者ノ比較ヲ比トイフノデアル。

$a:b$ ノ記號ハ十八世紀ニナツテ K. Wolf クリスチヤン.ウオルフガ用キタモノデ十七世紀ニハ W. Oughtred アフトレツドガ $a:b$デ表ハシテキタ。今日ノ比及比例ノ記號ハ實ニ Wolf ニ始マルモノデアル。$a:b$ ヲ簡單ニa對bトモ呼ブ。a ト b トハ同一性質ノ量デアルガ併シ比ノ値ハ全然無名數デアル。a ヲ比ノ前項 first term or antecedent, b ヲ比ノ後項 second term or consequent トイフ。

一般ニ比ハ二數量ノ比較デアルカラ, 其ノ比ヲナス項ハ實數デナクテハナラヌ。又比ハ除法ト同意義デアルカラ, 少クトモ後項ハ零ナラザルコトヲ要スル。之ハ後ニ比例ニ關スル種々ノ定理ヲ使フ場合ニナレバ, 比ノ項ハ「零ナラザル實數」ニ定メテオクノガ最モ無難デアル。

P. 282

第九篇

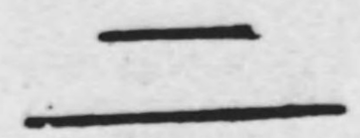
比　例

第一章　比及比例

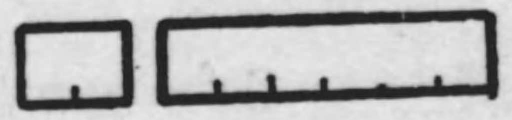
26 比

問一　比トイフ字ヲ用ヒタ例ヲアゲヨ。

問二　次ノ二線ノ長サノ比如何。



問三　次ノ圖ニ於テ甲ノ面積ノ乙ノ面積ニ對スル比如何。



甲數aガ乙數bノ幾倍ニ當ルカト云フ關係ヲaノbニ對スル比ト云ヒ,之ヲ $a:b$ 又ハ $\frac{a}{b}$ ト書ク。

aノbニ對スル比ヲ又**aトbトノ比**トモ云フ。

a, b ヲ夫々比ノ**前項**,**後項**ト云ヒ,比ノ前項ヲ後項デ割ツタ商ヲ**比ノ値**トイフ。

$a:b$ ノ比ノ値ヲ r トスレバ $\frac{a}{b}=r$ デアル。

又 $\frac{a}{b}=\frac{\text{前項}}{\text{後項}}=\frac{\text{分子}}{\text{分母}}=\frac{\text{被除數}}{\text{除數}}$ デアルカラ

$$a:b=ma:mb$$

即チ比ノ兩項ヲ0デナイ同ジ數デ乘除シテモソノ値ハ變ラナイ。

問四 比ノ前項,後項及ビ比ノ値ノ間ノ名數關係如何。

諳算 次ノ比ノ値ヲ求メヨ。

1 $3a^2b:6ab^2$　　2 $a^2-b^2:a^3-b^3$

3 $\frac{a}{b}:\frac{b}{a}$　　4 $1+\frac{b}{a}:1-\frac{b}{a}$

例一 $2a^2-9ab+10b^2=0$ ナルトキノ $a:b$ ノ値ヲ求メヨ。

解 $2a^2-9ab+10b^2=0$ ノ左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$$(a-2b)(2a-5b)=0$$

故ニ $a-2b=0$ 又ハ $2a-5b=0$

$a=2b$	$2a=5b$
$\frac{a}{b}=2$	$a=\frac{5}{2}b$
	$\frac{a}{b}=\frac{5}{2}$

答 2 又ハ $2\frac{1}{2}$

問四 比ノ前項, 後項ハ

(1) 共ニ無名數デアルカ, 又ハ

(2) 同種ノ量

デアルコトヲ要ス。同種ノ量トハ同一ノ諸等數タルヲ要スルノデハナク, 例ヘバ 5 米:3 瓦ハ不可デアルケレド, 5 米:3 尺ナラバ可ナルコトヲ知ラセルガヨイ。

諳　算；答

1. $a:2b$　　2. $a+b:a^2+ab+b^2$

3. $a^2:b^2$　　4. $a+b:a-b$

例一 一般ニ二ツノ文字ヲ含ムーツノ等式カラ, 其ノ二文字ノ比ヲ求メ得ル爲ニハ, 其ノ文字ニ關シ同次式ナルコトガ肝要デアル。特ニ絶對項ガアツテハナラヌ事ハ注意シテオクガヨイ。

尙此ノ場合, 方程式ノ根ト同樣ニ例一ノ如ク二次ノ同次式ナラバ二ツノ値ヲ得ル。尙因數分解ガ困難ナ場合或ハ不能ノ場合ニハソノ中ノ一文字ニ就イテ, 之ヲ一元二次方程式トシテ解キ $x:y$ ノ値ヲ求メ得ル事モ敎ヘルガヨイ。　$ax^2+bxy+cy^2=0$

x ニ關スル一元二次方程式ト見做シテ

$$x=\frac{-by\pm\sqrt{b^2y^2-4acy^2}}{2a}$$

$$=y\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

問　題　42

1 $2x^2-5xy+2y^2=0$

$(x-2y)(2x-y)=0$

$x=2y$　　$2x=y$

$\therefore\ x:y=2:1$ 及 $x:y=1:2$

答 2 又ハ $\frac{1}{2}$

(1) 因數分解セヨ。

$(x-ay)^2=0$

$x-ay=0$

$\therefore\ x:y=a:1$　　答 a

$\boxed{2}$ 3　$\frac{2(x+y)}{y}=\frac{7x-8y}{x-y}$

分母ヲ拂へ。

$2x^2-7xy+6y^2=0$

$(2x-3y)(x-2y)=0$

$2x=3y,\quad x=2y$

∴ $x:y=3:2,\quad x:y=2$

答 $\frac{3}{2}$ 又ハ 2

2▲ $\frac{6x+2y}{3x-y}=10$

分母ヲ拂へ。

$24x=12y$ ∴ $x:y=1:2$ 答 $\frac{1}{2}$

3● 二正方形ノ一邊ヲ夫々 x^{cm} y^{cm} トシ $x:y=3:4$ デアルトスレバ

$y=\frac{4}{3}x,\quad x=12$

∴ $y^2=\frac{16}{9}x^2=16^2=256$

答 $256cm^2$

$\boxed{4}$ 5 $x=\sqrt{5}a$

$\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}=\frac{2(x^2+a^2)}{x^2-a^2}=\frac{12a^2}{4a^2}$

答 3

$\boxed{2}$ (3)　$\frac{x-3y}{2y}=\frac{6x-5y}{5x}$

分母ヲ拂へ。

$5x^2-27xy+10y^2=0$

$(x-5y)(5x-2y)=0$

$x=5y\quad 5x=2y$

∴ $x:y=5,\quad x:y=2:5$

答 5 又ハ $\frac{2}{5}$

(2)▲ $\frac{8x+4y}{3x-2y}=5$

分母ヲ拂へ。

$7x=14y$ ∴ $x:y=2$ 答 2

(3)● 二正三角形ノ一邊ノ長サヲ夫々 x, y トスレバ各ノ面積ハ夫々

$\frac{1}{4}\sqrt{3}x^2,\quad \frac{1}{4}\sqrt{3}y^2$

$\frac{\frac{1}{4}\sqrt{3}x^2}{\frac{1}{4}\sqrt{3}y^2}=\frac{x^2}{y^2}=\frac{a^2}{b^2}$

$\left[\because \frac{a}{b}=\frac{3x}{3y}=\frac{x}{y}\right]$ 答 $a^2:b^2$

$\boxed{4}$ (5) $bx^2-(ab+a)xy+a^2y^2=0$

因數分解シテ

$(bx-ay)(x-ay)=0$

$x=\frac{a}{b}y\qquad x=ay$

$\boxed{4}$ ノ積　$\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}=\frac{\sqrt{ay-by}}{\sqrt{ay+by}}=\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}$,　$\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}=\frac{\sqrt{ay-y}}{\sqrt{ay+y}}=\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}$

答 $\sqrt{a-b}:\sqrt{a+b},\quad \sqrt{a-1}:\sqrt{a+1}$

4▲ $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}\qquad a=\frac{3}{4}b$

$\frac{2a-b}{3a-2b}=\frac{\frac{1}{2}b}{\frac{1}{4}b}=2$

答 2

(4)▲ $a=\frac{10}{3}b$

$\frac{2a-5b}{a-3b}=\frac{\frac{5}{3}b}{\frac{1}{3}b}=5$

答 5

P. 286

又與ヘラレタ式ノ左邊ヲ b^2 デ割リ

$2\left(\frac{a}{b}\right)^2-9\left(\frac{a}{b}\right)+10=0$ トシ，$\frac{a}{b}$ ヲ未知數トスル方程式ヲ解イテモヨイ。

問　題　42

次ノ式ヨリ $x:y$ ノ値ヲ求メヨ。 1──(2)

1　$2x^2-5xy+2y^2=0$

2　$\frac{2(x+y)}{y}=\frac{7x-8y}{x-y}$

3　一邊ノ比ガ3:4ナル正方形ノ小ナル方ガ144平方糎ナラバ大ナル方ノ面積ハ何程カ。

4　$x:a=\sqrt{5}$ ナルトキ $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}$ ノ値如何。

5　二數ノ比ハ2:3デ此ノ兩數ニ9ヲ加ヘルトソノ比ハ3:4トナルトイフ。二數各如何。

(1)　$x^2+a^2y^2=2axy$

(2)　$\frac{x-3y}{2y}=\frac{6x-5y}{5x}$

(3)　周ノ比ガ $a:b$ ナル正三角形ノ面積ノ比ヲ求メヨ。

(4)　$bx^2-(ab+a)xy+a^2y^2=0$ ナルトキ $\sqrt{x-y}:\sqrt{x+y}$ ノ値ヲ求メヨ。

(5)　甲乙ノ今ノ年齢ノ比ハ5:8デアルガ9年後ニハ8:11ノ比トナルトイフ。兩人ノ今ノ年齢ヲ求メヨ。

$b:a$ ナル比ヲ $a:b$ ノ**反比**(逆比)ト云ヒ,反比ニ對シテモトノ比ヲ**正比**ト云フ。

$$b:a=\frac{b}{ab}:\frac{a}{ab}=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$$

故ニ反比ハモトノ比ノ各項ノ逆數ノ比ニ等シイ。

二ツ以上ノ比ノ前項ノ積ヲ前項トシ,後項ノ積ヲ後項トスル比ヲ是等ノ比ノ**複比**ト云フ。

例ヘバ $5:6$ ト $7:8$ トノ複比ハ $(5\times7):(6\times8)$ 即チ $35:48$,

$a:b$, $c:d$, $e:f$ ノ複比ハ $ace:bdf$ デアル。

是等ヲ $\left.\begin{matrix}5:6\\7:8\end{matrix}\right\}$　$\left.\begin{matrix}a:b\\c:d\\e:f\end{matrix}\right\}$　ノ如ク書ク。

複比ニ對シテ唯一ツノ比ヲ單比トイフコトガアル。

複比ノ値ハ複比ヲ作ル單比ノ値ノ積ニ等シイ。

$a^2:b^2, a^3:b^3,$ ………… ヲ夫々 $a:b$ ノ**二乘比,三乘比,**…………等トイフ。

二乘比,三乘比ノ値ハ夫々モトノ比ノ値ノ二乘,三乘ニ等シイ。

$\boxed{\dfrac{5}{6}}$ 二數ヲ x, y トス。

$$\left|\begin{array}{l}x:y=2:3\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\(x+9):(y+9)=3:4\cdots\cdots(2)\end{array}\right.$$

(1) ヨリ $x=\frac{2}{3}y$ (2) ニ代入シ

$$\frac{\frac{2}{3}y+9}{y+9}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{8}{3}y+36=3y+27$$

$\therefore\ y=27\qquad x=18$

答 18, 27

$\boxed{5}$ (6) 甲,乙現在ノ年齡ヲ x 才, y 才トスル。

$$\left|\begin{array}{l}x:y=5:8\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\(x+9):(y+9)=8:11\cdots\cdots(2)\end{array}\right.$$

(1) ヨリ $x=\frac{5}{8}y$ (2) ニ代入シ

$9y=216\qquad y=24$

從ツテ　$x=15$

答 $\left|\begin{array}{l}\text{甲 15歳}\\\text{乙 24歳}\end{array}\right.$

注意 比ハ既ニ比ベヨウトスル二量ノ大小ヲ豫想シテキル。即チ大小ヲ豫想スル以上ハ虛量タルコトハ出來ヌ。即チ本篇デハ數ハ實數ニ限ルモノトスル。

反比 $a:b$ ノ前項ト後項ヲ入レカヘタ比 $b:a$ ハモトノ比ノ各項ノ逆數ノ比ニ等シイ。即チ　$b:a=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$

デアルカラ之ヲ反比又ハ逆比 inverse ratio or reciprocal ratio トイヒ,反比ニ對シテモトノ比ヲ正比トイフガ正比トイフ名前ハアマリ使用シナイ方ガヨイ。

$a:b$ ト $c:d$ ト $e:f$ ノ複比 compound ratio ハ $ace:bdf$ デアルガ $\frac{ace}{bdf}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}$ デアルカラ複比ハ二ツ以上ノ單比ノ積ニ等シイ。

今特ニ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ ナラバ

$$\frac{ace}{bdf}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a\times a\times a}{b\times b\times b}=\frac{a^3}{b^3}$$

又 $\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b}\right)^3$　　故ニ $\frac{a^3}{b^3}=\left(\frac{a}{b}\right)^3$

即チ相等シキ三ツノ比ノ複比ヲモトノ比ノ三乘比 triplicate ratio トイヒ,相等シキ二ツノ比ノ複比ヲモトノ比ノ二乘比 duplicate ratio トイフ。二乘比ヲ自乘比ト呼ブ事ガアル。

問 題 43

1 兩式ノ差ヲ考ヘヨ。

$$\frac{a+x}{b+x}-\frac{a}{b}$$

$$=\frac{ab+bx-ab-ax}{b(b+x)}=\frac{(b-a)x}{b(b+x)}$$

$a>b$ デアルカラ $b-a$ ハ負デ他ノ因數ハ總テ正デアル。故ニ求メタ差ハ負デアル。故ニ

$$\frac{a+x}{b+x}<\frac{a}{b}$$

2 題意ニヨリ

$$\frac{m}{n}=\frac{(m+x)^2}{(n+x)^2}$$

即チ $\frac{m}{n}-\frac{(m+x)^2}{(n+x)^2}=0$

$\therefore\quad m(n+x)^2-n(m+x)^2=0$

$(m-n)(x^2-mn)=0$

$m\neq n$ トスレバ

$$x^2=mn$$

$m=n$ ノトキハ x ハ $-n$ ヲ除イテ其ノ他ハ如何ナル値ヲモ取リ得ル。

問題ノ假設ニ $m\neq n$ トイフコトヲ補ハレタシ。

(1) 1 ニ於テ $a=b$ ナラバ求メタ差ハ 0 デアル。故ニ

$$\frac{a+x}{b+x}=\frac{a}{b}$$

注意 上ノ例及 1, (1) カラ比ノ兩項ガ正デアル時ハ, 兩項ニ正數 x ヲ加フレバ比ノ値ハ 1 ニ接近スルコトガイヘル。尙「グラフ」ニ就イテ見ラレヨ。

(2) $ab(c^2+d^2)=b^2c^2+a^2d^2$

$abc^2+abd^2=b^2c^2+a^2d^2$

$\therefore\quad (a-b)bc^2=(a-b)ad^2$

$a\neq b$

$\therefore\quad bc^2=ad^2$

兩邊ヲ bd^2 デ割レ

$$\frac{c^2}{d^2}=\frac{a}{b}$$

例 $a:b$ ニ於テ a, b ガ共ニ正數デ且ツ $a<b$ ナルトキ此ノ兩項ニ正數 x ヲ加ヘルトソノ比ノ値ハ大トナルコトヲ證セヨ。

解 $\dfrac{a+x}{b+x}$ ト $\dfrac{a}{b}$ トノ何レガ大ナルカヲ見ルタメニ兩式ノ差ヲ求メルト

$$\frac{a+x}{b+x}-\frac{a}{b}=\frac{ab+bx-ab-ax}{b(b+x)}=\frac{(b-a)x}{b(b+x)}$$

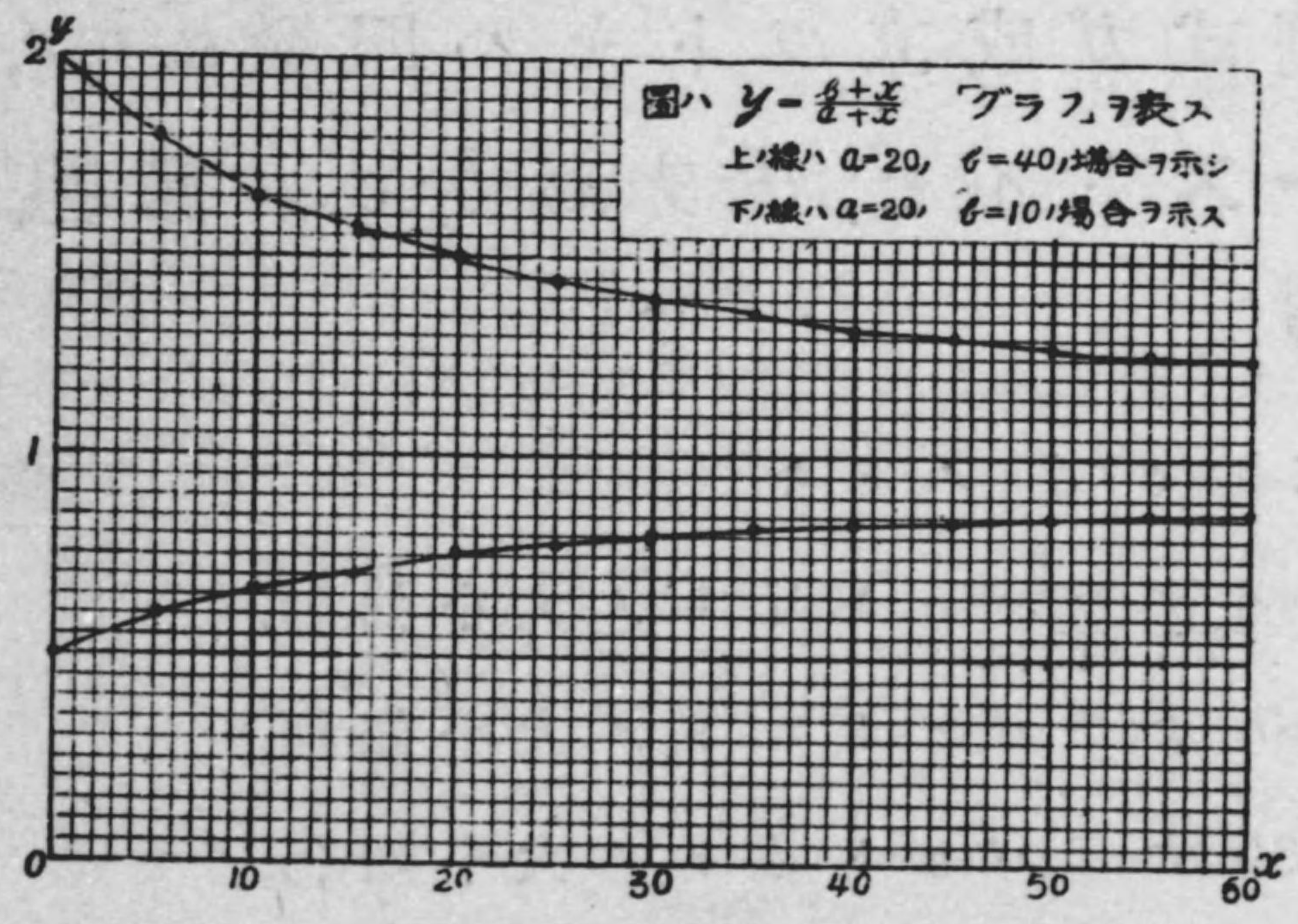
$a<b$ ナル故 $b-a$ ハ正デアル。又題意ニヨツテ他ノ因數モ正デアル。故ニ求メタ差ハ正デアル。

故ニ $\dfrac{a+x}{b+x}$ ノ方ガ大デアル。

問 題 43

1 上ノ例題ニ於テ $a>b$ ナラバ如何。

(1) 上ノ例題ニ於テ $a=b$ ナラバ如何。



2　$m:n$ ガ $\dfrac{m+x}{n+x}$ ノ二乘比ニ等シイトキハ

$$x^2=mn$$

ナルコトヲ示セ。

(2)　a, b ガ不等ニシテ $ab(c^2+d^2)=b^2c^2+a^2d^2$ ナルトキハ $a:b$ ハ c ト d トノ比ノ二乘比ニ等シイコトヲ示セ。

27 比例式及其變形

問一　比例式ハ何項ヨリナルカ。又項ノ間ニ如何ナル關係ガアルカ。

二ツノ相等シイ比ヲ等シト置イタ式ヲ比例式トイフ。

比例式ノ各項ノ名稱ハ算術ニ於ケルト同ジ。

四數 $a,b,c,d,$ ノ間ニ

$$a:b=c:d$$

ナル比例式ガ成立ツトキハ四數 a,b,c,d ハ**比例ヲナス**トイヒ，d ヲ a, b, c ノ**第四比例項**トイフ。

問二　$a:b=c:d$ ノトキ

$a=b$ ナラバ c ト d トノ大小如何。

$a>b$ ナラバ c ト d トノ大小如何。

$a<b$ ナラバ c ト d トノ大小如何。

27 比例式及其變形

48 : 12＝36 : 9　　12本 : 8本＝42錢 : 28錢

カクノ如ク二ツノ比ノ等シイコトヲ書キ表シタ式ヲ比例式トイフ，トイフコトハ算術デ習ツタコトデアル。

問一　比例式ハ四項ヨリナル。比例式ノ二ツノ比ハ等シイ。

上ノ例デ 48, 12, 36, 9 ヲ順次ニ第一項，第二項，第三項，第四項トイヒ特ニ第一項，第四項ヲ比例式ノ外項 extremes，第二項，第三項ヲ比例式ノ內項 means ト云フ。

$a:b=c:d$ ナルトキハ a, b, c, d ヲ順次ニ第一項，第二項，第三項及第四項トイヒ a ト d トヲ比例式ノ外項，b ト c トヲ比例式ノ內項トイヒ此ノ比例式ヲ〔a ノ b ニ對スル比ハ，c ノ d ニ對スル比ニ等シイ〕又ハ〔a 對 b「イクオール」c 對 d〕ト讀ム。

以上ハ總テ算術ノ復習ニ過ギナイガ $a:b=c:d$ ナル時四數 a, b, c, d ハ比例ヲナストイフコト及ビ第四比例項ハ代數ニナツテ最初ノ定義デアル。之ハ a, b, c, d ノ順序ガ大イニ關係スルカラ注意ヲ要スル。

問二　a, b, c, d ハ何レモ正トス。

$a=b$ ナラバ $c=d$，　$a>b$ ナラバ $c>d$，（比ノ値>1）

$a<b$ ナラバ $c<d$，（比ノ値 <1 ナル故）

本題ヲ一般化スレバ，a, b, c, d ハ何レモ正，p, q ハ正ノ整數デアルトキ $a:b=c:d$ ナラバ $pa \gtreqless qb$ ナルニ從ツテ $pc \gtreqless qd$ デアル。

之ヲ證明センニ

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$　ナル故 $\dfrac{pa}{qb}=\dfrac{pc}{qd}$　$\therefore$ $pa \gtreqless qb$ ナルニ從ツテ比ノ値ハ 1 ヨリ大ナルカ，等シイカ，或ハ小デアル。

故ニ　$pc \gtreqless qd$ デアル。

P. 293

然ラバ此ノ逆ハ如何。即チ p, q ガ任意ノ正ノ整數ナルトキ $pa \gtreqless qb$ ナルニ從ツテ $pc \gtreqless qd$ ナラバ, a, b, c, d ガ比例ヲナスカ否カ。

彼ノ Euclid ハ是ヲ以テ四數 (四量) ガ比例ヲナストイフコトノ定義トナシタノデアル。(幾何學原本 Elements ノ比例論)。シテ見ルト此ノ逆ガ成立シナケレバ吾人ガ現今所謂比例トイフモノト B. C. 300年ニ於テ Euclid ガ唱ヘタ比例トハ異ナルモノトナルノデアル。

今逆ノ成立スルコトヲ歸謬法ニヨツテ示シテ見ヨウ。

$\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ トスレバ何レカ一方ハ他ヨリモ大デアル。

今 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ トシヨウ。二數 $\frac{a}{b}$ ト $\frac{c}{d}$ トノ間ニハ必ズ無數ノ有理數ガ存在シテヰル(數ノ連續)。故ニソノ中ニ $\frac{q}{p}$ (p, q ハ任意ノ正ノ整數) ナル一ツノ分數ヲ選ンダナラバ,

$\frac{a}{b} > \frac{q}{p} > \frac{c}{d}$　ヲ滿足スル。茲ニ $p>0,\ q>0$

故ニ $pa>bq$ 及ビ $pc<dq$ ヲ得ル。之レ假設ニ相反スル。

故ニ $a:b=c:d$ 即チ證明サレタノデアル。

四數 a, b, c, d ガ比例ヲナス時ニ內項ノ積ハ外項ノ積ニ等シイ。即チ $ad=bc$ ナル事ハ比例式ニ於テハ極メテ簡單デハアルガ又最モ重大ナル性質デアツテ比例式解法ノ原理ハ茲ニ存シ又多クノ比例ニ關スル事項ノ說明ニ供セラレルノデアル。

$ad=bc$ ノ兩邊ヲ ab デ割レバ $d:b=c:a$ (3) ヲ得,

又兩邊ヲ ac デ割レバ $d:c=b:a$ (4) ヲ得ル。

$bc=ad$ ニ就テ (1)—(4) ニ施シタト同樣ノコトヲ行ヘバ (5)—(8) ヲ得ルノデアルガ, 之等八ツノ式ノ中カラ如何ナル關係ガ發見出來ルカ。

$a:b=c:d$　ナラバ

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$　デアツテ

兩邊ニ bd ヲ乘ズレバ

$ad=bc$　トナル。

即チ比例式ノ內項ノ積ハ外項ノ積ニ等シイ。

又逆ニ $ad=bc$ ナラバ兩邊ヲ bd デ割リ

$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

即チ二數ノ積ガ他ノ二數ノ積ニ等シイトキハ一方ノ二數ヲ內項トシ, 他方ノ二數ヲ外項トセル比例式ガ成立スル。即チ此ノ四數ハ比例ヲナス。

$ad=bc$ ノ兩邊ヲ cd デ割ルト $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ トナル。

カクシテ

(1)	$a:b=c:d$	(5)	$b:a=d:c$
(2)	$a:c=b:d$	(6)	$c:a=d:b$
(3)	$d:b=c:a$	(7)	$b:d=a:c$
(4)	$d:c=b:a$	(8)	$c:d=a:b$

ノ八ツノ比例式中ノ一ツガ成立ツトキハ必ズ他ノ七ツノ比例式ハ成立ツ。

複比ト單比,又ハ複比ト複比トヲ相等シト置イタ式ヲ**複比例式**トイフ。複比例式ニ對シテ單比ノミカラナル比例式ヲ**單比例式**トイフコトガアル。

上ニ述ベタ所ニ依リ比例式中ノ三項ヲ知ツテ他ノ一項ヲ求メルコトガ出來ル。今未知項ヲxトスレバ

$$a:b=c:x$$

$$ax=bc$$

$$x=\frac{bc}{a}.$$

カクノ如ク比例式ノ未知項ヲ求メルコトヲ**比例式ヲ解ク**トイフ。

問　題　44

次ノ比例式ヲ解ケ。

1　$96:72=4x:21$

2　$\left.\begin{matrix}25b^2:12a^2\\10a^3b^3:3c^4\end{matrix}\right\}=5b^4x:a^2c^2$

(1)　$(200-x):x=7:18$

(2)　$\left.\begin{matrix}3.1416:3\\1.25:2.75\\500:17\end{matrix}\right\}=x:7$

即チ (1) ト (2), (3) ト (4), (5) ト (7), 及ビ (6) ト (8) ヨリ

比例式ニ於テハ内項ヲ交換シテモ矢張リ比例式ハ成立スル。又(1) ト (3), (2) ト (4), (5) ト (6) 及ビ (7) ト (8) ヨリ

比例式ニ於テハ外項ヲ交換シテモ矢張リ比例式ハ成立スル。

上ノ二ツノ性質ヲ更迭ノ理トイフ。

次ニ (1) ト (5), (2) ト (6), (3) ト (7) 及ビ (4) ト (8) ヨリ

比例式ニ於テハ各比ノ反比ヲ取ツテモ比例式ハ成立スル。

此ノ性質ヲ反轉ノ理トイヒ更迭ノ理ト共ニ比例ニ於テ最モ根本的ナル性質デアル。

勿論各々ノ場合トモ新シク得タ比例式ハ前ノ比例式ト同ジモノデハナイ。一般ニ比ノ値ハ前者ト後者トハ異ナツテキル。

問　題　44 (舊教科書126頁)

1　$96:72=4x:21$

$72\times 4x=21\times 96$

$x=7$　答 7

2　$5b^4x=\frac{25b^2\times 10a^3b^3\times a^2c^2}{12a^2\times 3c^4}$

$x=\frac{25a^3b}{18c^2}$　答 $\frac{25a^3b}{18c^2}$

3▲ $x=\frac{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-2a\right)}{\frac{1}{4}-a}$

$=2\sqrt{a}$　答 $2\sqrt{a}$

(1)　$7x=18(200-x)$

$25x=18\times 200$

$x=144$　答 144

(2)　$x=\frac{3.1416\times 1.25\times 500\times 7}{3\times 2.75\times 17}$

$=98$　答 98

(3)▲ $x=\frac{(a+b)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}{a-b}$

$=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$　答 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

28 比例ニ關スル定理 其一

(1) 合比ノ理 Componendo

(2) 除比ノ理 Dividendo

(3) 合除比ノ理 Componendo and Dividendo

此等ノ外前述セル

(4) 反轉ノ理 Invertendo

(5) 更迭ノ理 Alternando

及ビ後ニ述ベントスル (132頁)

(6) 加比ノ理 Addendo 及ビ其ノ他

以上ノ六ツデアル。

除比ノ理ノ證明 (問一)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\quad\therefore\ \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$ $\quad\therefore\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

合除比ノ理ノ證明 (問二)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{b}$ ナラバ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ 及ビ $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

故ニ $\dfrac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}}=\dfrac{\frac{c+d}{d}}{\frac{c-d}{d}}$ $\quad\therefore\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

如何ナル比例式モ上ノ六ツノ定理ヲ用ヒテ種々ニ變化シ得ルノデ上ノ六ツハヨク徹底セシメナクテハナラヌ。但シ反轉ノ理，更迭ノ理ハ事實トシテダケデ名前ヲ授ケルニハ及バナイ。

28 比例式ニ關スル定理 其一

(1) 合比ノ理

$a:b=c:d$ 即チ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナラバ

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

コレヲ合比ノ理トイフ.

(2) 除比ノ理

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナラバ

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

コレヲ除比ノ理トイフ.

問一 除比ノ理ヲ證明セヨ.

(3) 合除比ノ理

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナラバ

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

コレヲ合除比ノ理トイフ.

問二 合除比ノ理ヲ證明セヨ.

例　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $\frac{2a+3b}{2c+3d}=\frac{2a-3b}{2c-3d}$ ナルコトヲ比例式ノ變形ニヨツテ證セヨ。

解　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナル故兩邊ニ $\frac{2}{3}$ ヲ乘ズレバ

$$\frac{2a}{3b}=\frac{2c}{3d}$$

合除比ノ理ニヨリ

$$\frac{2a+3b}{2a-3b}=\frac{2c+3d}{2c-3d}$$

內項ヲトリカヘルト

$$\frac{2a+3b}{2c+3d}=\frac{2a-3b}{2c-3d}$$

問題 45

1　$\frac{m}{n}=\frac{x}{y}$ ナルトキ $\frac{m+n}{x+y}=\frac{n}{y}$ ヲ證セヨ。

2　$\frac{x-a}{y-b}=\frac{a}{b}$ ヲ變形シテ $\frac{x}{y}$ ノ値ヲ求メヨ。

3　$a:b=c:d$ ナラバ $\frac{a+b+c+d}{a+b-c-d}=\frac{a-b+c-d}{a-b-c+d}$ ナルコトヲ證セヨ。

(1)　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキ。$\frac{2a-3b}{b}=\frac{2c-3d}{d}$ ヲ證セヨ。

(2)　$\frac{x+6a+8b}{y+10a-12b}=\frac{3a+4b}{5a-6b}$ ヨリ $x:y$ ノ値ヲ求メヨ。

(3)　$a:b=c\ d$ ナラバ $\frac{a}{a-b}:\frac{a+b}{b}=\frac{c}{c-d}:\frac{c+d}{d}$ ナルコトヲ證セヨ。

問題 45 (舊教科書127頁)

1　$\frac{m}{n}=\frac{x}{y}$ 合比ノ理ニヨリ

$\frac{m+n}{n}=\frac{x+y}{y}$ 內項ヲ交換シテ

$\frac{m+n}{x+y}=\frac{n}{y}$

2　$\frac{x-a}{y-b}=\frac{a}{b}$ 內項交換

$\frac{x-a}{a}=\frac{y-b}{b}$ 合比ノ理

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

3　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 合除比ノ理

$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ 內項交換

$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$ 合除比ノ理

$\frac{a+b+c+d}{a+b-c-d}=\frac{a-b+c-d}{a-b-c+d}$

(1)　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 　$\frac{2}{3}$ ヲ乘ズレバ

$\frac{2a}{3b}=\frac{2c}{3d}$ 除比ノ理

$\frac{2a-3b}{3b}=\frac{2c-3d}{3d}$ 3倍スレバ

$\frac{2a-3b}{b}=\frac{2c-3d}{d}$

(2)　$\frac{x+6a+8b}{y+10a-12b}=\frac{(3a+4b)\times 2}{(5a-6b)\times 2}$

$\frac{x+6a+8b}{6a+8b}=\frac{y+10a-12b}{10a-12b}$

$\frac{x}{6a+8b}=\frac{y}{10a-12b}$

$\frac{x}{y}=\frac{3a+4b}{5a-6b}$

(3)　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 　$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

除比ノ理 $\frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c}$

$\therefore\ \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$ ……(1)

合比ノ理 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ ……(2)

(1), (2) $\frac{a}{a-b}:\frac{a+b}{b}=\frac{c}{c-d}:\frac{c+d}{d}$

29 連　比 Continued ratio

連比モ一通リ算術デ習ツテキル。

$$a:b\cdot c=5:4:3 \qquad a':b':c'=10:8:6$$

然ルニ 10:8:6=5:4:3 卽チ連比ハソノ各項ニ共通ナ因數デ約スコトガ出來ル。

又 $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{5}{10},\ \dfrac{b}{b'}=\dfrac{4}{8},\ \dfrac{c}{c'}=\dfrac{3}{6}$ デ何レモ $\dfrac{1}{2}$ ニ等シイ。

故ニ一般ニ $a:b:c=a':b':c'$ ナラバ

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

此ノ逆ハ又成立スル。

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k \quad \text{トスレバ}$$

$$a=a'k, \qquad b=b'k, \qquad c=c'k$$

故ニ

$$a:b:c=a'k:b'k:c'k$$
$$=a':b':c'$$

甲:乙=3:2, 乙:丙=3:4 ノ時ニ甲乙丙ノ連比ヲ求メルノニ

甲	乙	丙
3	: 2	
	3	: 4
3×3	: 2×3	: 4×2

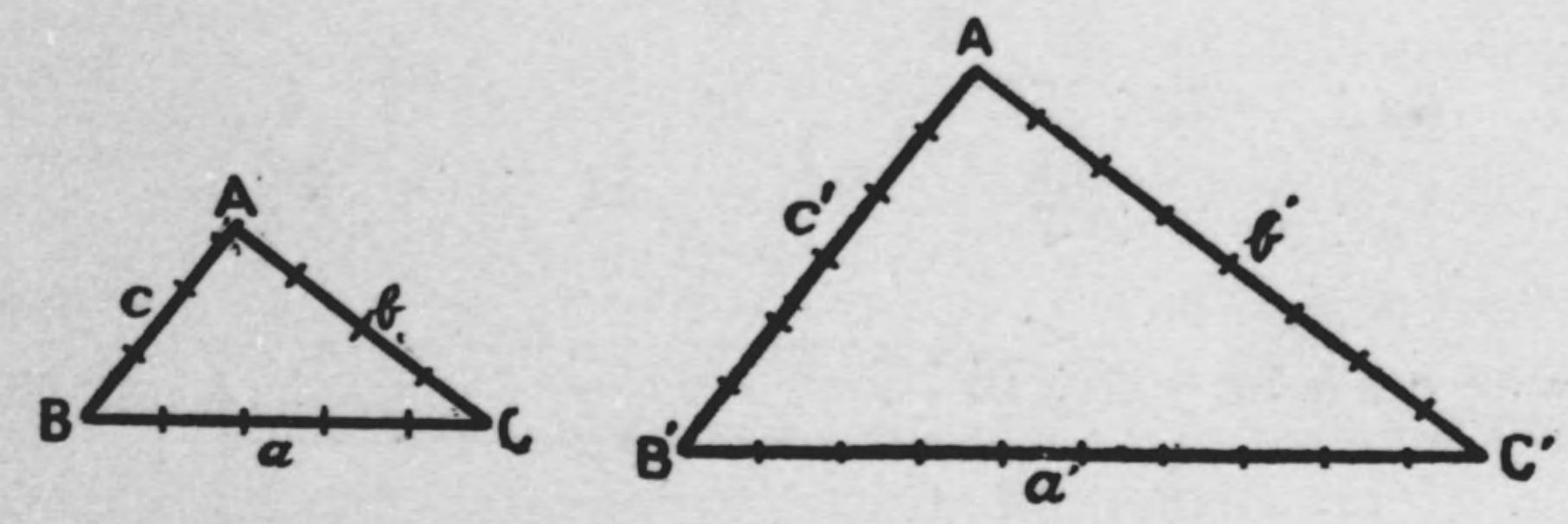
ハ既ニ知ツテ居ル筈デアルガ此ノ算法ハ今尙連比ヲ求ムル基礎トナルモノデアルカラ記憶ヲ喚起スル必要ガアル。

連比ノ相等 比ヲ等シイトオケバ比例式ヲ得，複比ヲ等シイトオケバ複比例式ヲ得ル。之ト同樣ニ連比ヲ等シイトオケバ連比例式ヲ得テ，之ニ相等スル連比例ガアルヤウニ見エルガ，連比例トハカヤウナモノヲ言ハヌ。(138頁參照)。故ニ若シ連比ヲ等シトオイタ式ヲ呼ブ必要ガアレバ連比ノ相等トイツテオクガヨイ。

P. 302

29 連　比

直角三角形 ABC ト $A'B'C'$ トガアツテ各邊ヲ夫々 a, b, c 及ビ a', b', c' デ表ストキハ



$$a:b=5:4, \quad b:c=4:3, \quad a:c=5:3$$

此ノ三ツノ比ヲ一纒メニシテ

$$a:b:c=5:4:3$$

ト表スコトガアル．之ヲ三角形ノ三邊ノ連比トイフ．

$\triangle A'B'C'$ ニテモ同樣ニシテ

$$a':b':c'=10:8:6$$

故ニ此ノ場合ハ

$$a:b:c=a':b':c'=5:4:3$$

デアル．

二ツノ單比 $a:b,\ b:c$ ヲ知ルトキハ連比 $a:b:c$ ヲ求メルコトガ出來ル．次ニ例ヲ以テ之ヲ示サウ．

例 $\left|\begin{array}{l} a:b=\ 4:5 \\ a:c=12:7 \\ c:d=21:10 \end{array}\right.$ ナルトキ $a:b:c:d$ 如何。

解 $\left|\begin{array}{l} a:b=\ 4:5 \\ a:c=12:7 \end{array}\right.$

$\left|\begin{array}{l} a:b=12:15 \\ a:c=12:\ 7 \end{array}\right.$

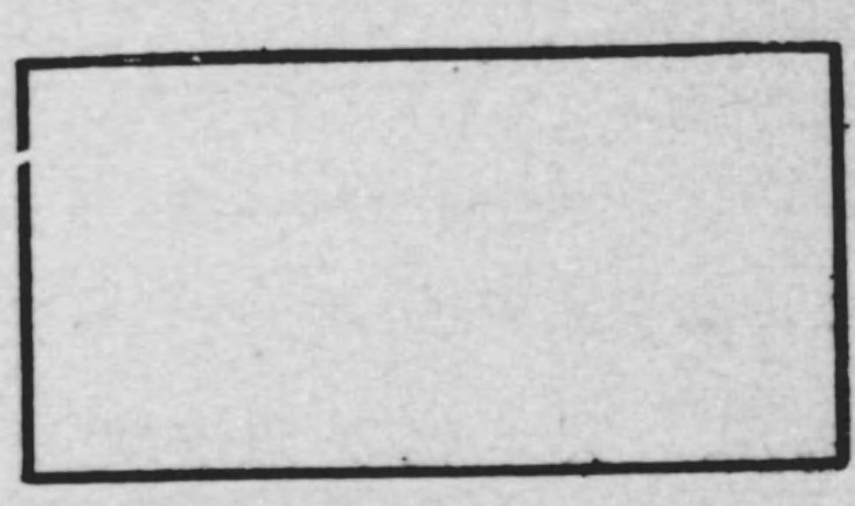
故ニ $a:b:c=12:15:7$

$\left|\begin{array}{l} a:b:c=36:45:21 \\ c:d\quad =21:10 \end{array}\right.$

故ニ $a:b:c:d=36:45:21:10$ ………答

問　題　46

1 次ノ矩形ノ面積ヲ一邊ニ平行ナ直線ニヨッテ2:3:4ノ連比ニ分テ，(實際ニ鉛筆デ紙上ニ線ヲ引ケ。)



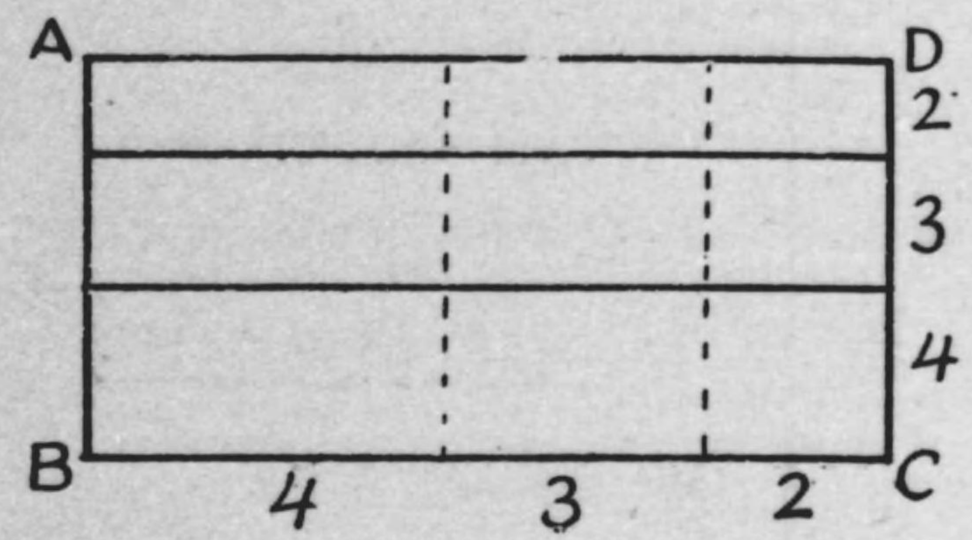
例 連比ヲ求メル例デアルガ形式ガ，算術トハ異ツテキルノミデ原理ハ少シモ異ラナイ。四數ノ連比ヲ求メルノハ，先ヅ二ツノ單比カラ，三數ノ連比ヲ求メ，次ニ四數ノ連比ヲ求メレバヨイ。

又逆ニイクツカノ數ノ連比ガ與ヘラレレバ其ノ連比ヨリ任意ノ二數ノ單比ガ求メラレル。例ヘバ

$a:b:c=12:8:3$ ガ與ヘラレルトキハ，

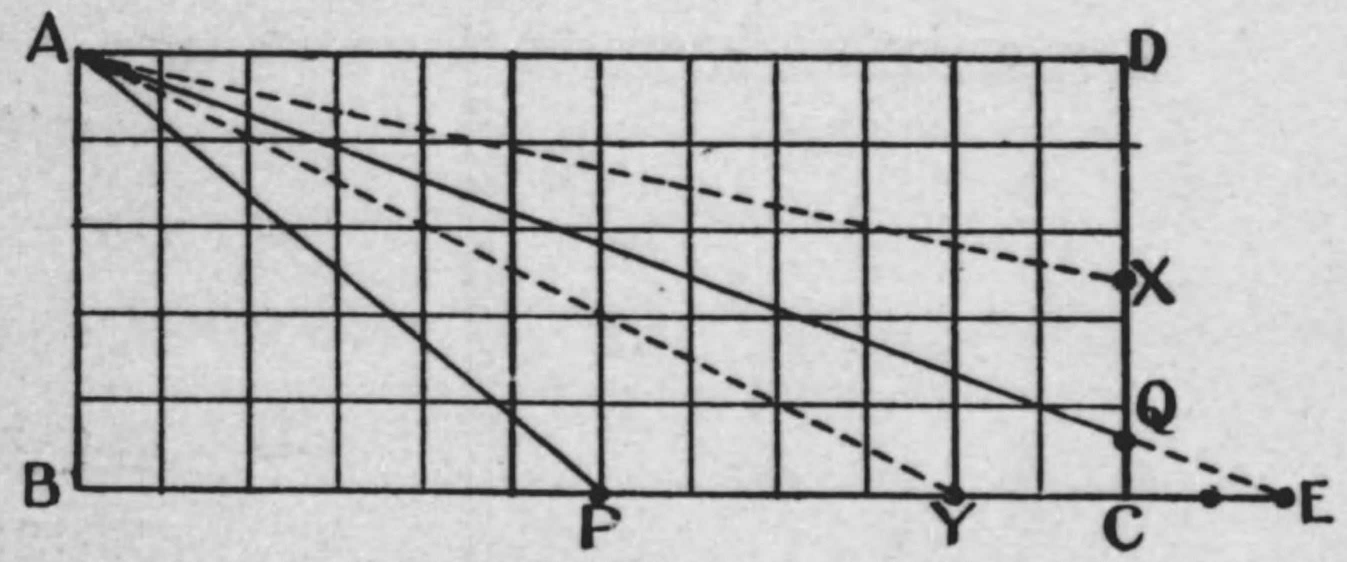
$a:b=12:8$ 即チ $3:2$ ニ等シク $a:c=4:1$, $b:c=8:3$ トイフ樣ニ總テ求メラレル。

問　題　46 (舊教科書129頁)

1● 

A ヨリ AB ヲ $2:3:4$ ニ分ツ場合ト，C ヨリ CB ヲ $2:3:4$ ニ分ツ場合トアル。

(1)● 方眼ノ數ハ $12\times5=60$, 60 ヲ3:4:5 ニ分テバ 3×5 ; 4×5 ; 5×5 AB ハ 5 デアルカラ，$BP=6$ ニスレバ $\triangle ABP$ ハ 3 ノ分，AC ヲ引ケバ $\triangle APC$ ハ15 故ニ $\triangle ACD$ ヲ 5:25 即チ 1:5 ニ分ツ線ヲ引ケバヨイ



CD ヲ $CQ:QD=1:5$ ニ分ツ點 Q ヲ求メル。AP, AQ ガ求ムル直線デアル。若シ幾何學ガ進ンデヲレバ幾何學的ノ作圖ヲサセルガヨイ。(CEハ方眼ノ二刻ミノ長サデアル)。(次頁ヘ續ク。)

次ニDノ方カラ 3:4;5 ニ分ツ場合ヲ考ヘヨウ。

前ト同様ニ$\triangle ADX$:四邊形$AXCY$:$\triangle ABY$= 3:4:5 トスレバ$\triangle ADX$ニ含マレル方眼ノ數ハ15デナケレバナラヌ。

$AD=12$ デアルカラ $DX=2.5$ 卽チ X ハCDノ中點デナケレバナラヌ。

$\triangle ACX$ ノ方眼ノ數ハ15デアルカラ $\triangle ACY$ ノ方眼ノ數ハ5デナケレバナラヌ。所ガ $AB=5$ デアルカラ $CY=2$ デナケレバナラヌ。ソノ時$\triangle ABY$ ニ含マレル方眼ノ數ハ25トナツテ AX, AY ハ與條件ヲ滿足スル。

$\boxed{2}$ 1

$$\left|\begin{array}{l} a:b=3:5 \\ b:c=10:13 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} a:b=6:10 \\ b:c=10:13 \end{array}\right.$$

$\therefore$ $\underline{a:b:c=6:10:13}$ 答

$\boxed{3}$ 2

$$\left|\begin{array}{l} a:c=3:5 \\ b:c:d=7:12:9 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} a:c=36:60 \\ b:c:d=35:60:45 \end{array}\right.$$

$\therefore$ $\underline{a:b:c:d=36:35:60:45}$

答

$\boxed{2}$ (1)

$$\left|\begin{array}{l} a:c=10:21 \\ b:c=8:9 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} a:c=30:63 \\ b:c=56:63 \end{array}\right.$$

$\therefore$ $\underline{a:b:c=30:56:63}$ 答

$\boxed{3}$ (2) 整數比ニ直セ。

$$\left|\begin{array}{l} p:q=5:6 \\ q:r=48:49 \\ r:s=44:45 \end{array}\right.$$

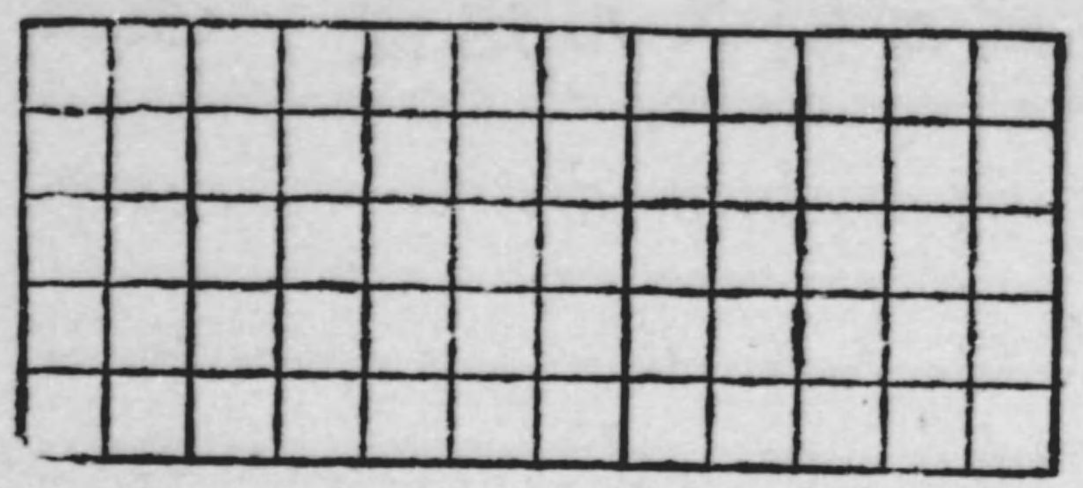
$$\therefore \left|\begin{array}{l} p:q:r=40:48:49 \\ r:s=44:45 \end{array}\right.$$

$\therefore$ $p:q:r:s$

$=40\times44:48\times44:49\times44:45\times49$

卽チ $\underline{p:q:r:s}$

$\underline{=1760:2112:2156:2205}$ 答



(1) 上ノ矩形ノ面積ヲ一頂點ヨリ出ヅル二直線ニヨツテ 3:4:5 ノ連比ニ分テ。(實際ニ鉛筆デ紙上ニ線ヲ引ケ。)

次ノ幾ツカノ比例式ヨリ一ツノ連比ヲ作レ。

2—(3)

2
$$\left|\begin{array}{l} a:b=3:5 \\ b:c=10:13 \end{array}\right.$$

(2)
$$\left|\begin{array}{l} a:c=10:21 \\ b:c=8:9 \end{array}\right.$$

3
$$\left|\begin{array}{l} a:c=3:5 \\ b:d=7:9 \\ c:d=4:3 \end{array}\right.$$

(3)
$$\left|\begin{array}{l} p:q=\frac{2}{3}:\frac{4}{5} \\ q:r=\frac{6}{7}:\frac{7}{8} \\ r:s=\frac{8}{9}:\frac{10}{11} \end{array}\right.$$

30 比例式ニ關スル定理 其二

一組ノ數 $a, b, c, d \cdots\cdots\cdots$ ニ對シテ他ノ一組ノ數 $a', b', c', d' \cdots\cdots\cdots$ ガアツテソノ間ニ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}=\dfrac{d}{d'}\cdots\cdots\cdots=k$ ナル關係ガアルナラバ

$$\left.\begin{array}{l} a:b=a':b' \\ b:c=b':c' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}$$

等トナツテ一方ノ組ノ任意ノ二數ノ比ハ他ノ一方ノ組ノ之ニ對應スル二數ノ比ニ等シイ。之ヲ一ツニ纏メテ

$a:b:c:d\cdots\cdots=a':b':c':d'\cdots\cdots$ ト書キ

$a, b, c, d\cdots\cdots$ ハ $a', b', c', d'\cdots\cdots$ **ニ比例スル**トイフ。

而シテ上ノ式ヨリ

$a=a'k,\ \ b=b'k,\ \ c=c'k\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ トナル。

故ニ $a+b+c+d+\cdots\cdots\cdots\cdots=k(a'+b'+c'+d'+\cdots\cdots)$

從ツテ $\dfrac{a+b+c+d+\cdots\cdots\cdots}{a'+b'+c'+d'+\cdots\cdots}=k$

即チ $$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}\cdots\cdots\cdots=\frac{a+b+c+d+\cdots}{a'+b'+c'+d'+\cdots}$$

之ヲ**加比ノ理**トイフ。

30 比例式ニ關スル定理 其二

其ノ一デ列擧シタ定理ハ加比ノ理ヲ入レテ六ツデアツタ。(28節參照)

茲デハ

(1) 加比ノ理 Addendo

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}\cdots\cdots\cdots=\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots}{a'+b'+c'+d'+\cdots}$$

$$\frac{a}{a'}=\frac{a+b-c-d+\cdots\cdots}{a'+b'-c'-d'+\cdots}=\frac{a-b-c+d+\cdots\cdots}{a'-b'-c'+d'+\cdots}\quad \text{等}$$

相對應スル二數ノ符號ハ同時ニ換ヘルコトガ出來ル。

(2) $$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\cdots\cdots=\frac{pa}{pa'}=\frac{qb}{qb'}=\cdots\cdots=\frac{pa+qb+rc+\cdots\cdots}{pa'+qb'+rc'+\cdots}$$

$p, q, r,\cdots\cdots$ ハ 0 以外ノ實數デアル。從ツテ負數デモヨロシイ。

今特ニ $p, q, r\cdots\cdots$ ガ ± 1 ノ何レカニ等シイナラバ此ノ定理ハ全ク(1)ノ加比ノ理トナル。即チ此ノ定理ハ加比ノ理ヲ一般化シタモノデアル。

(3) $$k^n=\frac{a^n}{a'^n}=\frac{b^n}{b'^n}=\frac{c^n}{c'^n}=\cdots\cdots=\frac{a^n+b^n+c^n+\cdots\cdots}{a'^n+b'^n+c'^n+\cdots}$$

$$k^n=\frac{a^n-b^n-c^n+\cdots\cdots\cdots}{a'^n-b'^n-c'^n+\cdots\cdots}=\frac{-a^n+b^n-c^n+\cdots\cdots}{-a'^n+b'^n-c'^n+\cdots}\quad \text{等}$$

(4) $$k=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots\cdots=\sqrt[n]{\frac{\pm a^n\pm b^n\pm c^n\pm\cdots\cdots}{\pm a'^n\pm b'^n\pm c'^n\pm\cdots}}$$

但シ複號ハ相對應スル二數ガ同符號ヲ取ル樣ニ之ヲ定メ，n ガ奇數ナラバ根號ノ符號ハソノママデアルガ，n ガ偶數ナル時ハモトノ比ノ値ノ符號ト同符號デナケレバナラヌ。

尙此ノ他ニ $k^n=\dfrac{a^n}{a'^n}=\dfrac{b^n}{b'^n}=\dfrac{c^n}{c'^n}=\cdots\cdots\cdots=\dfrac{pa^n+qb^n+rc^n+\cdots\cdot}{pa'^n+qb'^n+rc'^n+\cdots}$

從ツテ $k=\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}=\cdots\cdots=\sqrt[n]{\dfrac{pa^n+qb^n+rc^n+\cdots\cdot}{pa'^n+qb'^n+rc'^n+\cdots}}$

等ノ定理モアルガ教授スルニハ及バナイ。却ツテ混同セシムルダケデアル。

問 $k=\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{a+b+c}{a'+b'+c'}$ 加比ノ理ニヨツテ

$k=\dfrac{(a+b+c)-a-b}{(a'+b'+c')-a'-b'}=\dfrac{c}{c'}$ 卽チ $k=\dfrac{c}{c'}$

注意 生徒ノ中ニハ

$\dfrac{a+b+c}{a'+b'+c'}$ ナル式ダケカラ $\dfrac{a+b+c}{a'+b'+c'}=\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$ トスルモノガアル。之ハ全然誤リデ，加比ノ理ノ逆ヲ考ヘ違ヒシタノデアル。此ノ問ノヤウナノガ眞ノ逆デアル。コレハ丁度幾何學ノ假設ガ幾ツカアル場合ノ逆ト同樣デアル。

又 $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\cdots=\dfrac{pa}{pa'}=\dfrac{qb}{qb'}=\cdots=\dfrac{pa+qb+rc}{pa'+qb'+rc'}$

注意 p, q, r ‥‥‥‥‥‥ハ負數デモヨイ。

又 $k^n=\dfrac{a^n}{a'^n}=\dfrac{b^n}{b'^n}=\dfrac{c^n}{c'^n}=\cdots\cdots=\dfrac{a^n+b^n+c^n+\cdots}{a'^n+b'^n+c'^n+\cdots}$

$k=\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}=\cdots=\sqrt[n]{\dfrac{a^n+b^n+c^n+\cdots}{a'^n+b'^n+c'^n+\cdots}}$

但シ上ノ根號ノ符號ハモトノ比ト同一デナケレバナラヌ。

問 $k=\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{a+b+c}{a'+b'+c'}$ ナラバ $k=\dfrac{c}{c'}$ ナルカ。

例二 $\dfrac{a}{2b-c}=\dfrac{b}{2c-a}=\dfrac{c}{2a-b}$ ナルトキハ

$2a=b+c,\ \ 2b=c+a,\ \ 2c=a+b$ ヲ證セヨ。

解 $\dfrac{a}{2b-c}=\dfrac{b}{2c-a}=\dfrac{c}{2a-b}=k$ トスレバ

加比ノ理ニヨリ

$$k=\frac{a+b+c}{2b-c+2c-a+2a-b}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$$

故ニ $a=2b-c$ 從ツテ $2b=c+a$

$b=2c-a$ $2c=a+b$

$c=2a-b$ $2a=b+c$

問　題　47

1　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ ナルトキハ $\dfrac{30a+15c+5e}{30b+15d+5f}$ ハ上ノ比ニ等シイコトヲ證セヨ。

2　$\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}$ ナルトキハ

$x+y+z=0$ ヲ證セヨ。

3　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=2$ ナラバ

$\sqrt{\dfrac{pa^3+qc^3+re^3}{pb^3+qd^3+rf^3}}$ ノ値如何。

4　甲乙丙三數ノ比ハ $a:b:c$ ニ等シク,其ノ平方ノ和ハ 1 ニ等シイトイフ。三數各如何。

(1)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ ナルトキハ $\sqrt{\dfrac{4a^2-5ace+6e^2f}{4b^2-5bcf+6f^3}}$ ハ上ノ比ノ絕對値ニ等シイコトヲ證セヨ。

(2)　2 ニ於テ

$(b+c)x+(c+a)y$
$\qquad+(a+b)z=0$

ナルコトヲ證セヨ。

(3)　3 ニ於テ

$\sqrt[3]{\dfrac{a+c}{b+d}}\sqrt[3]{\dfrac{c^2+e^2}{d^2+f^2}}\sqrt[3]{\dfrac{e^3+a^3}{f^3+b^3}}$

ノ値如何。

(4)　三角形ノ三邊ノ比ガ 4:7:10 デ周ノ長サガ 1.89 米ナルトキハ三邊ノ長サ各何程カ。

問　題　47 (舊教科書132頁)

1　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=k$ トオク。

$k=\dfrac{30a}{30b}=\dfrac{15c}{15d}=\dfrac{5e}{5f}$

$\therefore\ k=\dfrac{30a+15c+5e}{30b+15d+5f}$

2　$\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}=k$ トオク。

$x=k(b-c)$

$y=k(c-a)$

$z=k(a-b)$

$\therefore\ x+y+z=k(b-c)+k(c-a)$
$\qquad+k(a-b)=k\times0=0$

別解　$k=\dfrac{x+y+z}{0}$　(加比ノ理)

或數ト 0 トノ比ガ有限値 k ナルタメニハ其ノ數ハ 0 デナケレバナラヌ。卽チ $x+y+z=0$ トスルコトハ生徒ノ理解シガタイ所デアルカラ避ケタ方ガヨイ。

3　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=2$

$\dfrac{pa^3}{pb^3}=\dfrac{qc^3}{qd^3}=\dfrac{re^3}{rf^3}=8$

$\therefore\ \sqrt{\dfrac{pa^3+qc^3+re^3}{pb^3+qd^3+rf^3}}=2\sqrt{2}$

答　$\underline{2\sqrt{2}}$

(1)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=k$　トオク。

$k^2=\dfrac{4a^2}{4b^2}=\dfrac{5ace}{5bcf}=\dfrac{6e^2f}{6f^3}$

$=\dfrac{4a^2-5ace+6e^2f}{4b^2-5bcf+6f^3}$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{\dfrac{4a^2-5ace+6e^2f}{4b^2-5bcf+6f^3}}$

但シ複號ハ k ト同符號デアルコトヲ要スル。卽チ絕對値ハ等シイ。

(2)　$\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}=k$ トオク。

$k=\dfrac{x(b+c)}{b^2-c^2}=\dfrac{y(c+a)}{c^2-a^2}=\dfrac{z(a+b)}{a^2-b^2}$

問題 2 ト全ク同樣ニシテ

$x(b+c)+y(c+a)+z(a+b)=0$

(3)　$\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}=\sqrt[3]{\dfrac{a+c}{b+d}}=\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{\dfrac{c^2}{d^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{c^2+e^2}{d^2+f^2}}=\sqrt[3]{4}$

$\sqrt[3]{\dfrac{e^3}{f^3}}=\sqrt[3]{\dfrac{e^3+a^3}{f^3+b^3}}=2$

$\therefore\ \sqrt[3]{\dfrac{a+c}{b+d}}\sqrt[3]{\dfrac{c^2+e^2}{d^2+f^2}}\sqrt[3]{\dfrac{e^3+a^3}{f^3+b^3}}=4$

答　$\underline{4}$

4　甲乙丙三數ヲ夫々 x, y, z トスレバ題意ニヨリ

$$\left|\begin{array}{ll} x:y:z=a:b:c & \cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2+z^2=1 & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$$

(1) ヨリ

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\pm\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

答 $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \dfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{array}\right.$$

(4)　三角形ノ三邊ヲ夫々 x^{cm}, y^{cm}, z^{cm} トスレバ

$$\left|\begin{array}{ll} x:y:z=4:7:10 & \cdots\cdots(1) \\ x+y+z=189 & \cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$$

(1)ヨリ $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z}{10}=\dfrac{x+y+z}{21}$

$$=\frac{189}{21}=9$$

答　<u>36糎, 63糎, 90糎</u>

例三　方程式二ツ未知數三ツデアルカラ根ハ決定出來ナイ。根ハ無數ニ存在シテ全ク不定デアル。併シ此ノ例デ見ルヤウニ，根ハ不定デハアルガ併シ其ノ間ニ何等カノ關係ヲ保ツテヰルモノデ此ノ例ハ比ガ求メラレタノデアル。之ヲ幾何學的ニ云ヘバ (1) モ (2) モ原點ヲ通ル平面ノ方程式デ之レガ聯立シテ原點ヲ通ル直線(一般ニハ其ノ二平面ノ交線)ガ求メラレタノデ，其ノ直線上ノ點ハ總テ (1), (2) ヲ滿足スルノデアル。

此ノ例ハ消去法ノ先驅ヲナスモノト見做スコトガ出來ル。(附錄參照)

又此ノ例ノ解法ニ尙二ツノ場合ガアル。

即チ先ヅ z デ兩邊ヲ割ツテ $\dfrac{x}{z}$, $\dfrac{y}{z}$ ヲ一ツノ未知數トシテ二元一次方程式ヲ解ク方法ト

之等ノ結果カラ得タ十文字法 Rule of Cross Multiplication デコレハ

$$\left|\begin{array}{l} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{array}\right. \text{ ヨリ } \frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{z}{ab'-a'b}$$

此ノ方法ハ文字方程式ニ使用スルト有効デアル。

P. 314

例三　$\left|\begin{array}{l} x+2y-3z=0 \\ 5x-6y+7z=0 \end{array}\right.$ ヨリ $x:y:z$ ヲ求メヨ。

解　$\left|\begin{array}{ll} x+2y-3z=0 & \cdots\cdots\cdots(1) \\ 5x-6y+7z=0 & \cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

z ノ項ヲ消去スルト

$$\begin{array}{lr} (1)\times 7 & 7x+14y-21z=0 \\ (2)\times 3 & 15x-18y+21z=0 \\ \hline & 22x-\ 4y\qquad =0 \end{array}$$

$$11x=\ 2y$$

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{11}.$$

又 y ノ項ヲ消去スルト

$$\begin{array}{lr} (1)\times 3 & 3x+6y-9z=0 \\ (2) & 5x-6y+7z=0 \\ \hline & 8x\qquad -2z=0 \end{array}$$

$$4x=z$$

$$\frac{x}{1}=\frac{z}{4}$$

故ニ　$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z}{8}$

即チ　$x:y:z=2:11:8$

答　<u>$x:y:z=2:11:8$</u>

問　題　48

次ノ聯立方程式ヨリ $x:y:z$ ヲ求メヨ。

1 $\left|\begin{array}{l} 3x-4y+5z=0 \\ 3x+6y-20z=0 \end{array}\right.$

2 $\left|\begin{array}{l} 3x-2y=3z \\ 10y-6z=x \end{array}\right.$

3 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ比ハ 21:20 デ周ノ長サハ 4.2 米アルトイフ。

各邊ノ長サ何程カ。

4 甲乙丙三人デ合計245圓ノ賃金ヲ得タ. 之ヲ各人ノ出勤日數ニ應ジテ分配ショウト思フガ其ノ出勤日數ノ比,甲ト乙トハ 2:3,乙ト丙トハ 4:5デアル。

各人ノ所得ハ何程カ。

(1) $\left|\begin{array}{l} 2x-y-z=0 \\ 5x-y-3z=0 \end{array}\right.$

(2) $\left|\begin{array}{l} ax+by+cz=0 \\ lx+my+nz=0 \end{array}\right.$

(3) 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ比ガ 3:4デ斜邊ノ長サガ 4 糎ナラバ二邊ノ長サ各何程カ。

(4) 甲乙丙三種ノ品ヲ瓩數ニ於テハ 3:5:7,價格ニ於テハ一瓩ニツイテ 7:8:9ノ割ニ賣ツタノニ全體デ目方ハ 6000瓩デ價格ハ 37200 圓デアルト. 一瓩ノ價各何程宛カ。

問　題　48 (舊教科書134頁)

1 $\left|\begin{array}{l} 3x-4y+5z=0 \cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x+6y-20z=0 \cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

(2)−(1)　$10y-25z=0$

$2y=5z \quad \therefore \quad y:z=5:2$

(1)×4+(2)　$15x-10y=0$

$3x=2y \quad \therefore \quad x:y=2:3$

故ニ　$x:y:z=10:15:6$

答 $\underline{10:15:6}$

2 $\left|\begin{array}{l} 3x-2y=3z \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 10y-6z=x \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

(1)×5+(2)　$14x=21z$

$\therefore \quad x:z=3:2$

(1)+(2)×3　$28y=21z$

$\therefore \quad y:z=3:4$

故ニ　$x:y:z=6:3:4$

答 $\underline{6:3:4}$

3 直角ヲ夾ム二邊ヲ x^{cm}, y^{cm} トスレバ斜邊ハ $\sqrt{x^2+y^2}^{cm}$

$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x}{21}=\dfrac{y}{20} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x+y+\sqrt{x^2+y^2}=420 \cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

(1) ヨリ $\dfrac{x}{21}=\dfrac{y}{20}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{21^2+20^2}}$

$=\dfrac{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}{21+20+29}=\dfrac{420}{70}$

$\therefore \quad \dfrac{x}{21}=\dfrac{y}{20}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{29}=6$

答 1.26米, 1.2米, 1.74米

(1) $\left|\begin{array}{l} 2x-y-z=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 5x-y-3z=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

(2)−(1)　$3x-2z=0$

$3x=2z \quad \therefore \quad x:z=2:3$

(1)×3−(2)　$x-2y=0$

$x=2y \quad \therefore \quad x:y=2:1$

故ニ　$x:y:z=2:1:3$

答 $\underline{2:1:3}$

(2) $\left|\begin{array}{l} ax+by+cz=0 \\ lx+my+nz=0 \end{array}\right.$

x ヲ消去 $(am-bl)y=(cl-an)z$

$\therefore \quad y:z=(cl-an):(am-bl)$

y ヲ消去 $(am-bl)x=(bn-cm)z$

$\therefore \quad x:z=(bn-cm):(am-bl)$

故ニ　$x:y:z$

$=(bn-cm):(cl-an):(am-bl)$

答 $\underline{(bn-cm):(cl-an):(am-bl)}$

(3) 3 ト同樣ニ

$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \sqrt{x^2+y^2}=4 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$

(1) ヨリ $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{4}{5}$

答 2.4 糎, 3.2 糎

別解 直角ヲ夾ム二邊ヲ夫々 $3k$, $4k$ トスレバ

$\sqrt{(3k)^2+(4k)^2}=4$ ヨリ k ヲ決定セヨ。

4　甲,乙,丙三人ノ取リ前ヲ夫々

x圓, y圓, z圓トスレバ

$x:y=2:3,\quad y:z=4:5$

$$\therefore \left| \begin{array}{l} x:y:z=8:12:15 \cdots\cdots (1) \\ x+y+z=245 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{array} \right.$$

(1)ヨリ $\dfrac{x}{8}=\dfrac{y}{12}=\dfrac{z}{15}=\dfrac{x+y+z}{35}$

$=\dfrac{245}{35}=7$

答　甲　56圓　乙　84圓　丙　105圓

5　甲液ヲ x 立, 乙液ヲ y 立混ズルモノトスレバ

$$\left| \begin{array}{l} x+y=7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \dfrac{8}{11}x+\dfrac{5}{6}y=\dfrac{4}{5}\times 7 \cdots\cdots (2) \end{array} \right.$$

$$\therefore \left| \begin{array}{l} x=7-y \\ 240x+275y=1848 \end{array} \right.$$

$35y=168\qquad \therefore\ y=4.8$

$x=2.2$

答　甲 2.2立　乙 4.8立

(4)●　甲ノ目方ヲ $3x$ 瓩トスレバ乙丙ノ目方ハ $5x$ 瓩, $7x$瓩

$3x+5x+7x=6000$

$x=400$

甲 1200瓩, 乙 2000瓩, 丙 2800瓩

次ニ甲, 乙, 丙各一瓩ノ價ヲ夫々 $7y$圓, $8y$圓, $9y$圓トスレバ

$1200\times 7y+2000\times 8y+2800\times 9y$

$=37200$

$\therefore\ y=0.75$

答　甲 5.25圓　乙 6圓　丙 6.75圓

(4)▲　同樣ニシテ

答　甲 21圓,　乙 24圓,　丙 27圓,

(5)　第二合金ニ於ケル銅ト錫トノ割合ヲ $a:b$ トシ第一合金ヲ x 瓦, 第二合金ヲ y 瓦混ズルトスル。

銅 $\dfrac{90}{100}x+\dfrac{a}{a+b}y=\dfrac{9(a+b)x+10ay}{10(a+b)}$

亞鉛 $\dfrac{7}{100}x$

錫 $\dfrac{3}{100}x+\dfrac{b}{a+b}y=\dfrac{3(a+b)x+100by}{100(a+b)}$

$90(a+b)x+100ay:7(a+b)x:3(a+b)x+100by=85:5:10$

$\dfrac{90(a+b)x+100ay}{17}=\dfrac{7(a+b)x}{1}$

$=\dfrac{3(a+b)x+100by}{2}$

$$故= \left| \begin{array}{l} 90(a+b)x+100ay=119(a+b)x \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 3(a+b)x+100by=14(a+b)x \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{array} \right.$$

(1)　$100ay=29(a+b)x$

(2)　$100by=11(a+b)x$

$\therefore\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{29}{11}$　　答 $\dfrac{29}{11}$

5　酒精ト水トヲ混合シタ甲乙二種ノ液ガアル。酒精ト水トノ混合ノ割合,甲液デハ8:3,乙液デハ5:1デアル。今此ノ兩種ヲ混合シテ酒精4,水1ノ割合ノ液ヲ7立造ラウトスレバ各種何程宛混ズベキカ。

注意　甲液ヲx立,乙液ヲy立トスレバソノ中ニ含マレル酒精分ハ何程アルカヲx,yヲ用ヒテ表シ之ガ$x+y$ニ對スル割合如何ヲ見ヨ。

(5)　銅,亞鉛,錫ガ90:7:3ノ割合ニ混合シテアル合金ト,銅ト錫ノミヨリナル第二ノ合金トヲ或分量宛トッテ混ジタノニソノ合金ニ於ケル銅,亞鉛,錫ノ割合ハ85:5:10デアッタ。第二ノ合金ニ於ケル銅,錫ノ割合如何。

注意　第二ノ合金ニ於ケル銅ト錫トノ割合ヲ$a:b$トシ第一ヲx瓦,第二ヲy瓦混ズルトシソノ混合シタ合金ノ中ノ銅,亞鉛,錫ノ分量ヲ求メ之ヲ85:5:10ニ等シトオイテ$a:b$ヲ求メヨ。

31 連比例

$a, b, c, d, \cdots\cdots$ナル多數ノ數ガアツテ其ノ間ニ

$$a:b=b:c=c:d=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

即チ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ノ如キ關係ガアル時ハ是等ノ數ハ**連比例ヲナス**トイフ.

三數a, b, cガ連比例ヲナストキハbヲa, cノ**比例中項**, cヲ a, b ノ**第三比例項**トイフ.

而シテ此ノ場合ハ

$$\frac{a}{c}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}$$

及 $b^2=ac$ デアル

又 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}=\cdots\cdots\cdots\cdots=\dfrac{k}{l}$ デアツテ

比ノ數ガ n 個アルトキハ

$$\frac{a}{l}=\frac{a^n}{b^n}=\frac{b^n}{c^n}=\frac{c^n}{d^n}=\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{k^n}{l^n}$$

デアル.

31 連比例 Continued proportion

比及ビ比例ヲ通ジテ單比, 複比, 連比, 四數ガ比例ヲナス等, 紛ラハシイ程語句ガ出テ來タガ, 更ニ連比例ヲナストイフコトハ混同シ易イ語デアル。又 a, b, c ガ連比例ヲナストキ c ヲ a, b ノ第三比例項 Third proportional トイフノデアルガ第四比例項ニ對應サセテソノ區別ヲサセル必要ガアル。往々生徒ハ比例式ノ第三項ト混同スル。

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ ナルトキ b ヲ a, c ノ比例中項 Mean proportional トイフノデアル。

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$ ナルトキ b, c ハ a, d ノ等比中項トイヒ,

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}=\cdots\cdots=\dfrac{l}{m}$ ナルトキ $b, c, d, \cdots\cdots, l$ ヲ a ト m トノ等比中項トイフ。ソコデ只單ニ比例中項トイヘバ二數ノ間ニ唯一個ノ比例中項ヲ有スル場合ヲ指ス。等比級數ヲナス各數ガ連比例ヲナスコト及ガ等比中項ナドノ事項ハ級數ノ所デ述ベル。

a, b, c ガ連比例ヲナストキハ

$$\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}=\frac{ab}{bc}=\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} \text{ 等}$$

尙連比ノ所デ述ベタヤウニ連比例ト連比ノ相當トヲ混同シナイヤウニ注意スルコトガ肝要デアル。

例一 a, b, c ガ連比例ヲナストイフコトカラ

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}, \qquad \therefore \frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}$$

ナル比例式ハ常ニ成立スル。コレハ假設ヲ式デ書キ表シタモノデアル。コノ式カラ出發シテ證明スルノデアルガ，二ツノ比例式ノ中何レカ一方ノ式カラ出發シテ證明スレバヨイノデ

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ カラ出發シテ證明スレバ解一トナリ

$\frac{a}{c}=\frac{b^2}{c^2}$ カラ出發スレバ解二トナル。

解一ノ方法ハ四數以上ノ數ガ連比例ヲナス場合デモ同樣デアル。此ノ方法ハ容易デアルガ機械的デアル。

解二ノ方法ハ稍困難ヲ伴フケレドモ興味アル方法デアル。解二ノ方法ヲ用ヒルトキハ成ルベク解析的ニ證明サレンコトヲ希望スル。例ヘバ $\frac{a+c}{b^2+c^2}=\frac{a-c}{b^2-c^2}$ ナルタメニ加比ノ理ニヨリ $\frac{a}{b^2}=\frac{c}{c^2}$ デナケレバナラヌ。內項ヲ交換シテ $\frac{a}{c}=\frac{b^2}{c^2}$ デナケレバナラヌ。之レ假設ヨリ明カデアル。

問　題　49 (舊教科書138頁)

1 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

$\therefore \frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}$

$\therefore \frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$

$\frac{a^2+b^2}{a}=\frac{b^2+c^2}{c}$

(1) $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

$\therefore \frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}=\frac{ab}{bc}$

$\therefore \frac{a^2}{b^2}=\frac{a^2+ab}{b^2+bc}$

$\frac{a^2+ab}{a^2}=\frac{b^2+bc}{b^2}$

P. 322

例一 a, b, c ガ連比例ヲナストキハ

$\frac{a+c}{b^2+c^2}=\frac{a-c}{b^2-c^2}$ ナルコトヲ證セヨ。

解一 a, b, c ガ連比例ヲナス故

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ 此ノ比ノ値ヲ r トスレバ

$a=br, \quad b=cr$

從ッテ $a=cr^2$

$$\frac{a+c}{b^2+c^2}=\frac{cr^2+c}{c^2r^2+c^2}=\frac{1}{c}$$

$$\frac{a-c}{b^2-c^2}=\frac{cr^2-c}{c^2r^2-c^2}=\frac{1}{c}$$

故ニ $\frac{a+c}{b^2+c^2}=\frac{a-c}{b^2-c^2}$

解二 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ ナル故

$\frac{a}{c}=\frac{b^2}{c^2}$ 內項ヲトリカヘルト

$\frac{a}{b^2}=\frac{c}{c^2}$

加比ノ理ニヨリ

$$\frac{a}{b^2}=\frac{a+c}{b^2+c^2}=\frac{a-c}{b^2-c^2}$$

即チ求メル結果ガ得ラレタ。

問　題　49

a, b, c ガ連比例ヲナストキハ次ノ式ノ成立スルコトヲ證セヨ。

1　$\dfrac{a^2+b^2}{a}=\dfrac{b^2+c^2}{c}$

2　$\dfrac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}=\dfrac{a}{c}$

(1)　$\dfrac{a^2+ab}{a^2}=\dfrac{b^2+bc}{b^2}$

(2)　$\dfrac{(a+b)^2}{(b+c)^2}=\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$

次式ヲ證セヨ。但シ a, x, y, b ハ連比例ヲナス。

3　$x^3=a^2b$

(3)　$y=\sqrt[3]{b^2a}$

次式ヲ證セヨ。但シ a, b, c, d ハ連比例ヲナス。

4　$\dfrac{(a-b)(c-a)}{(c-d)(d-b)}=\dfrac{a}{d}$

5　$\dfrac{2a+3b}{2c+3d}=\dfrac{3a-4b}{3c-4d}$

ナルトキハ a, b, c, d ハ比例ヲナスコトヲ證セヨ。

(4)　$\dfrac{(a-c)(b-d)}{b-c}=a+b-c-d$

(5)　$\dfrac{10a+b}{10c+d}=\dfrac{12a+b}{12c+d}$

ナルトキハ a, b, c, d ハ比例ヲナスコトヲ證セヨ。

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ ナルトキハ次式ノ成立スルコトヲ證セヨ。

6　$\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$

(6)　$\dfrac{(a+c+e)^2}{(b+d+f)^2}=\dfrac{ac+ce+ea}{bd+df+fb}$

2　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$

$\therefore\ \dfrac{a}{c}=\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{b^2}{c^2}=\dfrac{ab}{bc}$

$\therefore\ \dfrac{a}{c}=\dfrac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

3　$\dfrac{a}{x}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{b}$　又ハ

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a^3}{x^3}$　$\therefore\ ax^3=a^3b$

$\therefore\ x^3=a^2b$

4　左邊$=\dfrac{(a-b)(c-a)}{(c-d)(d-b)}$

$=\dfrac{ac-bc-a^2+ab}{cd-d^2-bc+bd}$

故ニ若シ

$\dfrac{ac}{dc}=\dfrac{bc}{d^2}=\dfrac{a^2}{bc}=\dfrac{ab}{bd}$

ガ成立スレバ可ナリ。

$\dfrac{a}{d}=\dfrac{a^3}{b^3}=\dfrac{a^2}{b^2}\times\dfrac{b}{c}=\dfrac{c^2}{d^2}\times\dfrac{b}{c}$

$=\dfrac{ac}{dc}=\dfrac{a^2}{bc}=\dfrac{bc}{d^2}=\dfrac{ab}{bd}$

故ニ成立スル。

又 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$ ヨリ

$\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{b-c}{c-d}=\dfrac{c-a}{d-b}$

各連比例ノ三ツノ比ヲカケ合セテ見ヨ。

5　$\dfrac{2a+3b}{2c+3d}=\dfrac{3a-4b}{3c-4d}=k$ トオク。

$k=\dfrac{6a+9b}{6c+9d}=\dfrac{6a-8b}{6c-8d}$　(加比)

$=\dfrac{17b}{17d}=\dfrac{b}{d}=\dfrac{3a-4b+4b}{3c-4d+4d}$

$=\dfrac{a}{c}$　$\therefore\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

(2)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$

$\therefore\ \dfrac{a}{c}=\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{b^2}{c^2}=\dfrac{ab}{bc}$

$\therefore\ \dfrac{a}{c}=\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{b^2+2bc+c^2}$

$\therefore\ \dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\dfrac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$

(3)　$\dfrac{a}{x}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{b}$

$\therefore\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{y^3}{b^3}$

$\therefore\ ab^3=by^3$

$y^3=ab^2$　虛根ヲ捨テテ

$y=\sqrt[3]{ab^2}$

(4)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}=r$

$c=dr$

$b=cr=dr^2$

$a=br=dr^3$

$\dfrac{(a-c)(b-d)}{b-c}=d(r+1)(r^2-1)$

$a+b-c-d=d(r+1)(r^2-1)$

故ニ成立スル。

4モ此ノ方法ニヨツテ解イテ見サセルモヨイ。

(5)　$\dfrac{10a+b}{10c+d}=\dfrac{12a+b}{12c+d}$

加比ノ理　$k=\dfrac{2a}{2c}=\dfrac{a}{c}$

即チ　$k=\dfrac{a}{c}=\dfrac{10a+b}{10c+d}=\dfrac{b}{d}$

$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$　$\therefore\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

6　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$

$\therefore\ \frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$　合除比ノ理

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$$

7 ▲ $k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$

$$k^2=\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=\frac{e^2}{f^2}$$

$$=\frac{m^2a^2+n^2c^2-p^2e^2}{m^2b^2+n^2d^2-p^2f^2}$$

$$\therefore\ |k|=\frac{\sqrt{m^2a^2+n^2c^2-p^2e^2}}{\sqrt{m^2b^2+n^2d^2-p^2f^2}}$$

従ツテ根號ノ符號ハ元ノ比ト同符號ニナルヤウニ定ムベキデアル。舊教科書ヲ教授セラルル時ハ注意セラレンコトヲ。

(6)　$k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$

$$k^2=\frac{(a+c+e)^2}{(b+d+f)^2}=\frac{ac}{bd}=\frac{ce}{df}=\frac{ae}{bf}$$

$$\therefore\ \frac{(a+c+e)^2}{(b+d+f)^2}=\frac{ac+ce+ae}{bd+df+bf}$$

(7) ▲ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=r$

$a=br,\qquad c=dr$

$$\frac{(ac-bd)^2}{\sqrt{abcd}(a^2-b^2-c^2+d^2)}$$

$$=\frac{b^2d^2(r^2-1)^2}{bdr(b^2-d^2)(r^2-1)}=\frac{(r^2-1)bd}{r(b^2-d^2)}$$

$$\frac{\sqrt{abcd}(a^2-b^2-c^2+d^2)}{(ab-cd)^2}$$

$$=\frac{bdr(b^2-d^2)(r^2-1)}{r^2(b^2-d^2)^2}=\frac{(r^2-1)bd}{r(b^2-d^2)}$$

故ニ成立スル。

第二章　比例ノ應用（變數法）

32　正　比　例

問一　1 立方糎ノ水攝氏 4 度ノ時ノ重サハ 1 瓦デ，1 立即チ 1000 立方糎ノ蒸溜水ノ攝氏 4 度ノ時ノ重サハ 1 瓩，又 1 升ノ水ノ重サハ約 480 匁デアル。水ノ量ガ 2 倍，3 倍，…． $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，…．トナルニツレテ其ノ目方ハ如何ニ變化スルカ。

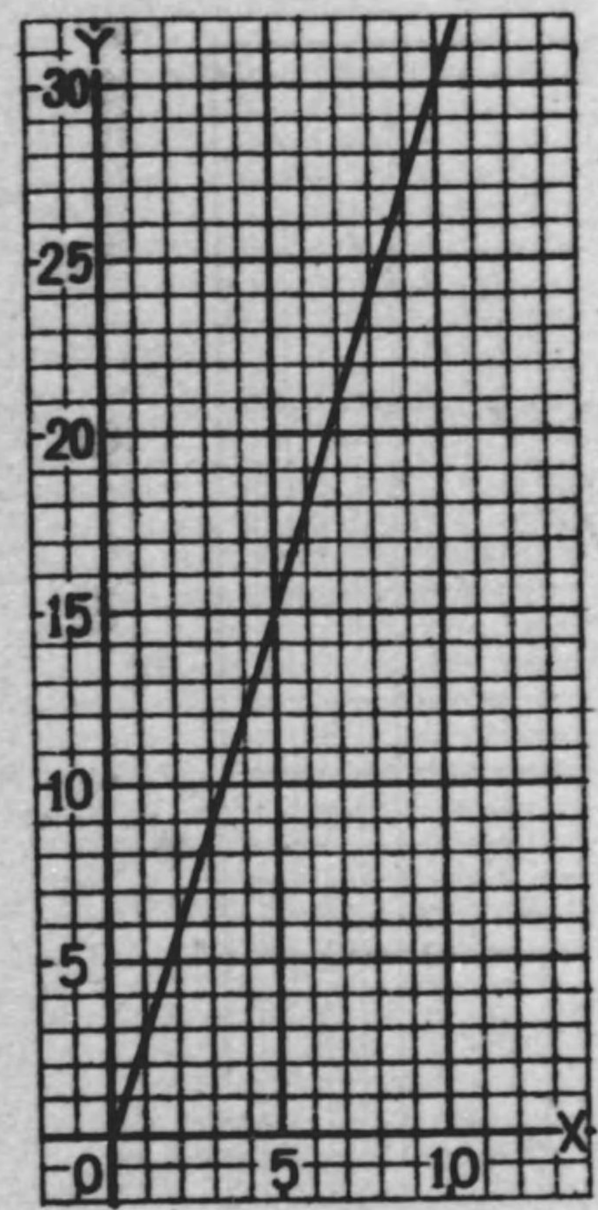
P. 326

第二章　比例ノ應用（變數法）

32　正　比　例

問一　水ノ量トソノ目方トハ如何ナル關係ニアルカ。

問二　高サヲ 3 糎トシ底邊ノ長サヲ色々ニカヘテ種々ノ矩形ヲ作ルトキハ底邊ト面積トハ如何ナル關係ニアルカ。



圖ハ高サ 3 糎ナル矩形ノ底邊ノ長サヲ x 軸ニ，其ノ面積ヲ y 軸ニトツテ底邊ト面積トノ關係ヲ表シタ[グラフ]デアル。

水ノ量トソノ目方，又ハ高サノ一定ナ矩形ノ底邊トソノ面積トノ如ク

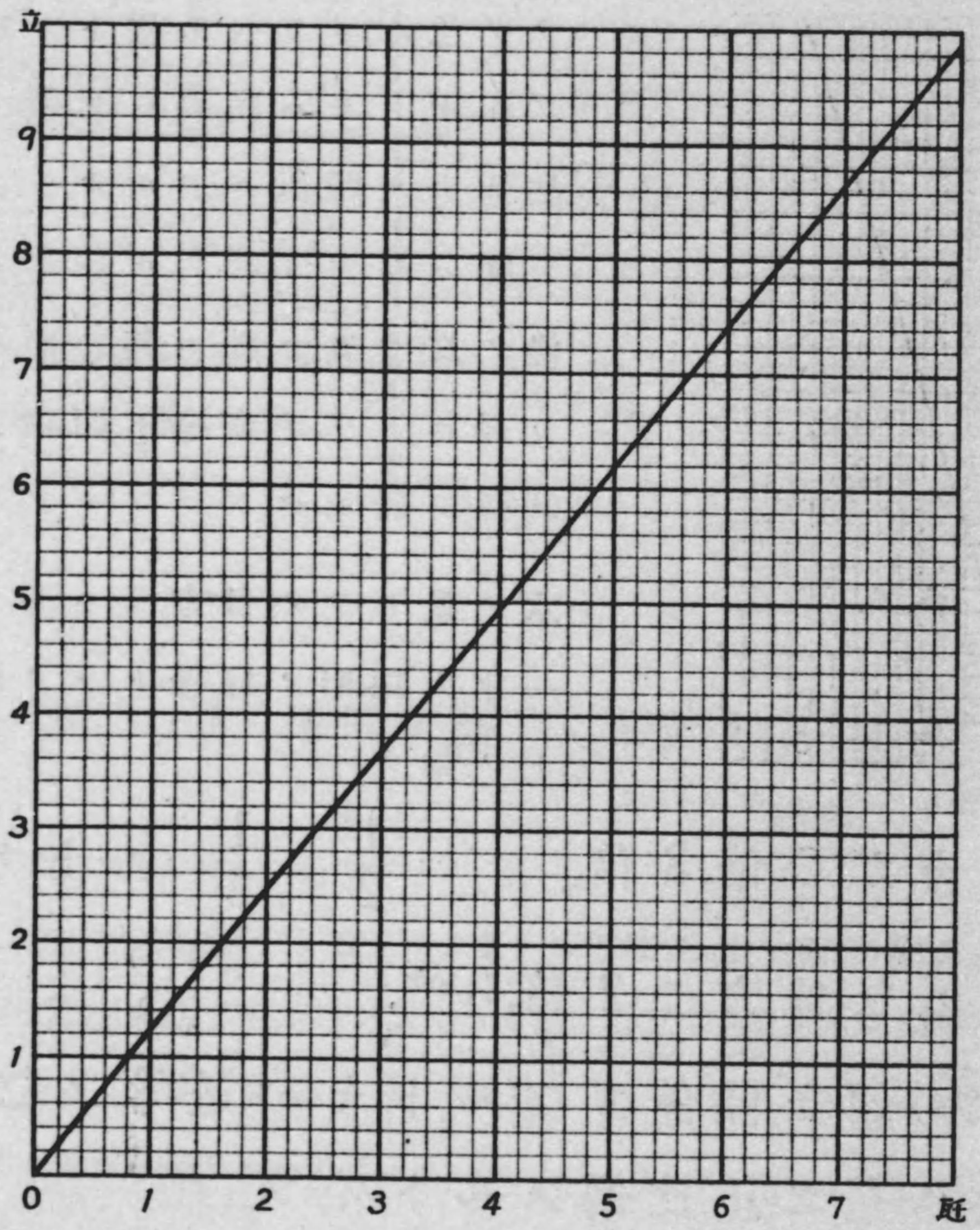
一方ガ 2 倍，3 倍，……$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$……トナルニツレテ他方モ 2 倍，3 倍，……$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$……トナル如キ關係ガアルトキハ是等ノ二ツノ量ハ互ニ(正)比例スルトイフ。

1立 810 瓦アル酒精ノ量ヲ x 立トシ,之ニ對應スル目方ヲ y 瓦トスレバ

$$\frac{y}{x}=810, \qquad y=810x$$

ノ如キ關係式ガ成立ツ。

今此ノ[グラフ]ヲ書ケバ次ノヤウニナル。



問二

底邊(糎)	1	2	3	……	10,	5	……	x
面積(平方糎)	3	6	9	……	30,	15	……	$3x$

底邊ガ 2 倍, 3 倍, ‥‥, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ‥‥トナルニツレテ, 面積モ亦 2 倍, 3 倍, ‥‥‥, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ‥‥‥ トナツテキル。換言スレバ此ノ二ツノ量ハ比例スルトイフ事ニナル。

互ニ比例スルトイフコトヲ互ニ正比例スル (vary directly as) トイフコトモアルガ之ハ次ノ反比例ニ對シタ言葉デアル。

問二ニ於テ面積ヲ y 平方糎トスレバ $y=3x$ デコノ二元一次方程式ノ「グラフ」ハ原點ヲ通ル直線デアル。

酒精ノ量ト目方トハ又互ニ正比例スル量デアルカラ酒精ノ量ヲ x 立, 共目方ヲ y 瓦トスレバ

$$\frac{y}{x}=810 \qquad y=810x$$

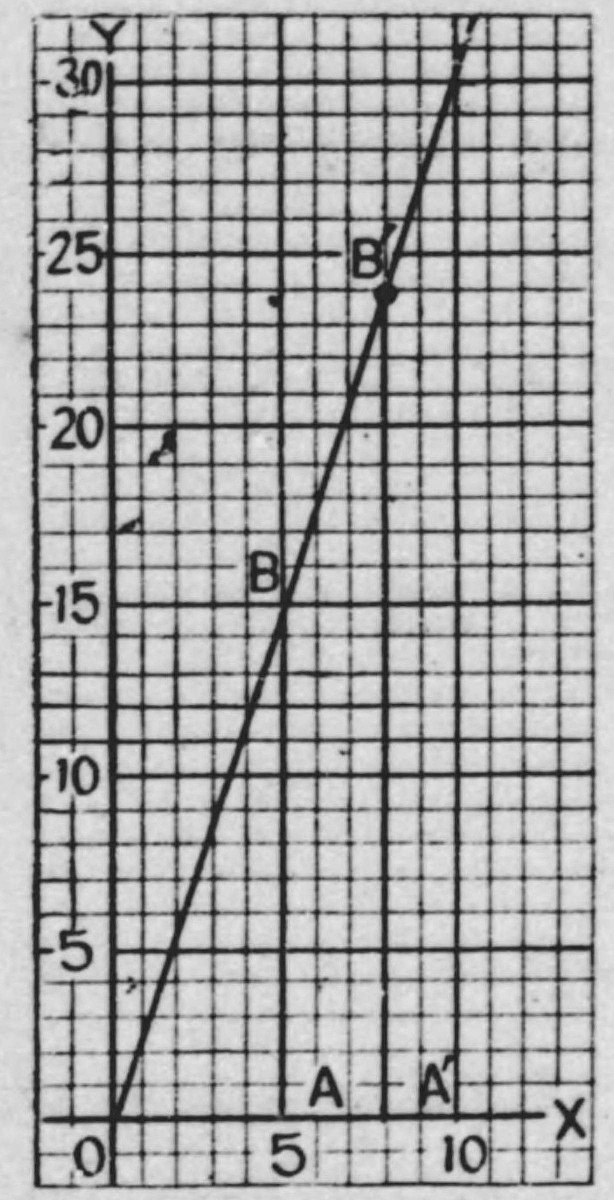
此ノ「グラフ」モ亦原點ヲ通ル直線トナル。教科書ニ畫イテアル「グラフ」ハ縱軸ニ x, 横軸ニ y ガ取ツテアルコトハ注意ヲ要スル。

注意 一. 只單ニ $y=3x$, 或ハ $y=810x$ ナル方程式ノ「グラフ」ハ原點ヲ通ツテ更ニ反對ノ方向 (第三象限) ヘ延長サレルノデアルガ y ノ表ハス量, x ノ表ハス量ヲ考ヘレバ延長ノ許サレナイコトハ明ラカデアラウ。即チ原點カラ始マル半直線トデモ云ハネバナラナイ直線デアル。

注意 二. 酒精ノ比重ハ 0.78 デアルトイフノガ正シイ。從ツテ, 此ノ式モ $\frac{y}{x}=780$ 又ハ $y=780x$ ト訂正シタ方ガヨロシイ。(「グラフ」モ訂正シ度イ。)

$y=kx$ ト $y\propto x$ トハ同一ノ事實ヲ表ハスモノデ $y\propto x$ ヲ y ハ x ニ比例スルト讀ム。

$y=kx$ ガ原點ヲ通ル直線デアル事ハヨク知ツテヰル。(證明ハ幾何學比例ノ部) 此ノ逆ハ如何。二數ノ函數關係ノ「グラフ」ガ原點ヲ通ル直線トナルトキハ其ノ二數ハ正比例ヲナスカ否カ。



OBB' ヲ原點ヲ通ル直線トスレバ

$OA=x_1$　$OA'=x_2$
$AB=y_1$　$A'B'=y_2$　ニ於テ

$\dfrac{x_1}{y_1}=\dfrac{x_2}{y_2}=\cdots\cdots\cdots$ ナレバ可。

然ルニ $\triangle OAB \backsim \triangle OA'B'$

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OA'}{A'B'}$$

即チ $\dfrac{x_1}{y_1}=\dfrac{x_2}{y_2}$

同樣ニ $\dfrac{x_1}{y_1}=\dfrac{x_2}{y_2}=\dfrac{x_3}{y_3}=\cdots\cdots\cdots$

故ニ逆ハ成立スル。從ツテ $y=kx$ ナラバ x, y ハ互ニ比例スル。

問三　半徑ヲ r, 面積ヲ s トスレバ $s=\pi r^2$ 之ヲ圖示スレバ拋物線トナルカラ此ノ二量ハ比例シナイ。次ノ頁ヲ參照。

問四　$r^2=R$ トスレバ $s=\pi R$。 π ハ圓周率デ一定ノ數デアルカラ s ト R トハ互ニ比例スル。之ヲ圖示スレバ次ノ頁ノヤウニ原點ヲ通ル直線トナル。

問二ノ場合ノ矩形ノ底邊ノ長サヲ x 糎,面積ヲ y 平方糎トスレバ

$\dfrac{y}{x}=3,$　$y=3x$　デアル.

即チ y ハ x ノ函數デアル.

上ノ場合ノ 810, 3 ヲ比例常數トイフ.

一數 y ガ他ノ數 x ニ伴フテ增減シ,ソノ二數ノ比ガ常ニ一定ナルトキハ y ハ x ニ比例スルトイヒ,

之ヲ　$y=kx$　(k ハ常數)$\cdots\cdots\cdots$(1)

又ハ　$y\propto x$　ト書ク$\cdots\cdots\cdots\cdots$(2)

(1) ノ式ニ依リ明カデアル樣ニ

一數ガ他ノ數ニ正比例スル關係ニアルトキハ一數ハ他ノ數ノ一次函數デアツテ絕對項ヲ缺ク故ニ其ノ「グラフ」ハ原點ヲ通ル直線トナル。逆ニ又二數ノ函數關係ノ「グラフ」ガ原點ヲ通ル直線トナルトキハ其ノ二數ハ互ニ正比例スル。

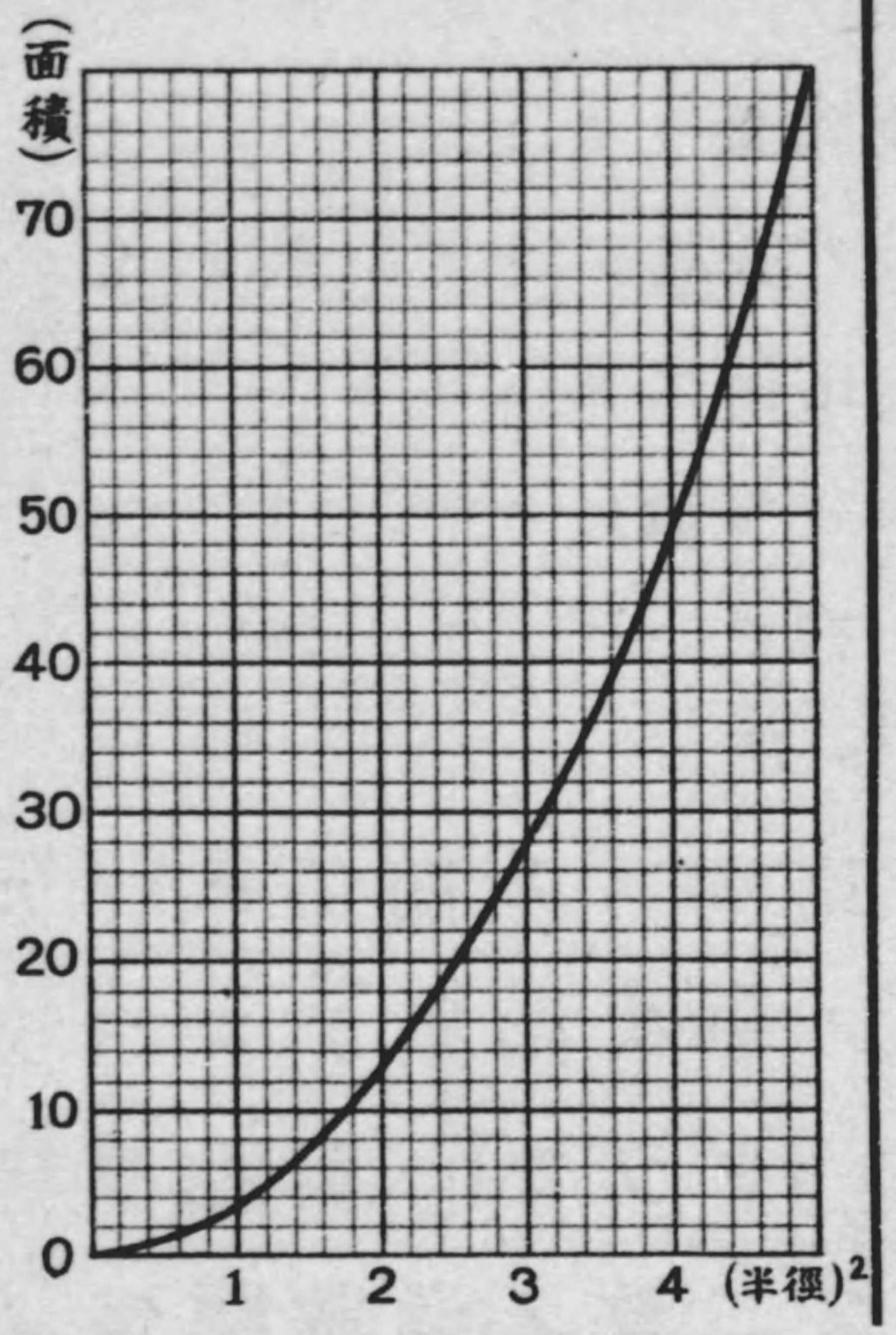
問三　圓ノ半徑トソノ面積トハ比例スルカ。

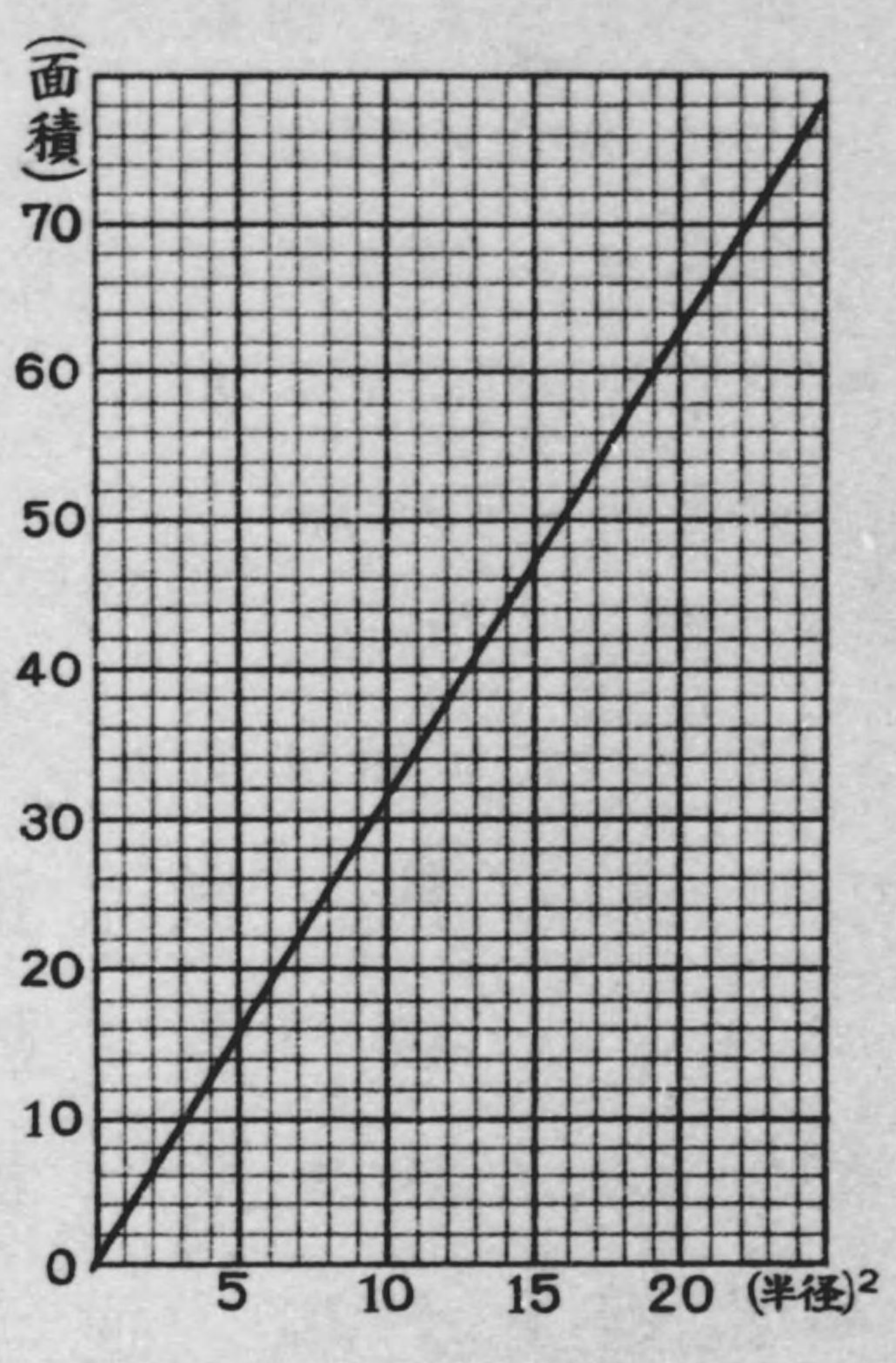
問四　圓ノ半徑ノ自乘トソノ面積トハ如何。

問五　寒暖計ノ攝氏ノ目盛ト華氏ノ目盛トハ互ニ比例スルカ。

圓ノ半徑トソノ面積トノ關係ヲ「グラフ」ニ表セバ次ノ如クナル。

圓ノ半徑ノ自乘トソノ面積トノ關係ヲ「グラフ」ニ表セバ次ノ如クナル。





溫度ヲ攝氏ノ目盛デ讀ンダ度數ヲ x, 華氏ノ目盛デ讀ンダ度數ヲ y トスレバ

$$y=\frac{9}{5}x+32$$

其ノ「グラフ」ヲ書ケバ次ノ如クナル。

問五

攝 氏	0°	5°	10°	……	50°	100°
華 氏	32°	41°	50°	……	122°	212°

攝氏ノ目盛ガ 2 倍 3 倍‥‥等トナルニツレテ華氏ノ方ハ 2 倍, 3 倍……トナツテキナイ。唯函數關係ハアルガ比例ハナサナイ。而モコノ函數關係ハ

$$y=\frac{9}{5}x+32$$

デアル。茲ニ x ハ攝氏ノ度數, y ハソレト同溫度ノ華氏ノ度數デアル。從ツテ其ノ「グラフ」ハ直線トナルガ原點ヲ通ラナイ。卽チ原點ヲ通ルトイフ條件ガ大切ナル所以デアル。（145頁參照）

144頁

此ノ「グラフ」ノ左ノ方ハ半徑ヲ x, 面積ヲ y トスレバ

$$y=\pi x^2$$

ノ「グラフ」デアツテ, 之ハ拋物線デ, y 軸ヲ軸トシ, 原點ヲ頂點トシタ上向キノモノデアル。ココニ示サレタモノハ其ノ第一象限ノ部ノミデアル。之ハ原點ハ通ルガ直線デナイ事ヲ觀察サセネバナラヌ。

之ニ反シ右ノ方ハ半徑ノ自乘ヲ x, 面積ヲ y トスレバ

$$y=\pi x$$

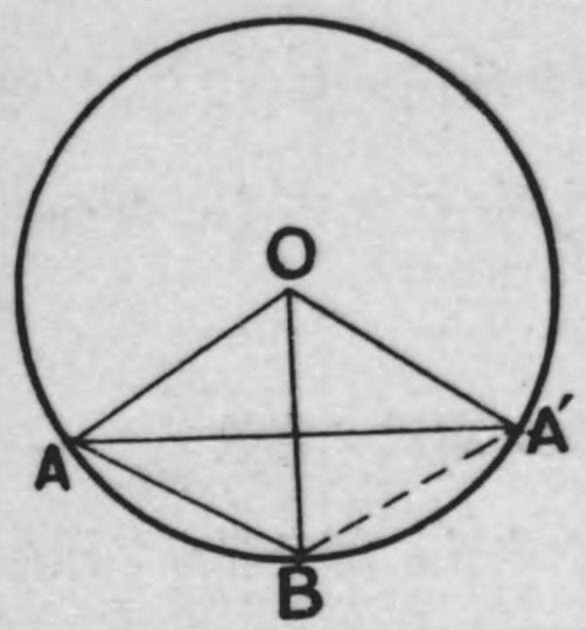
ノ「グラフ」デアル。之ハ圓ノ直徑 x ト圓周 y トノ關係ト同一デアツテ, 原點ヲ通ル直線デアリ, 正比例スル一例デアル。

卽チ, 之ヲ要スルニ

圓ノ半徑ト面積トハ比例シナイガ, 圓ノ面積ハ半徑ノ自乘ニ比例スル。

ト言ヒ得ル。

攝氏ト華氏トノ目盛リノ度數ハ比例シナイガ，倘此ノ他ニ比例スルヤウニ見エテ比例シナイノハ圓ノ中心角トソレニ對應スル弦トデアル。同圓又ハ等圓ニ於テ中心角トソレニ對スル弧トハ比例ヲナス。併シ弦ハサウデハナイ。



圖ニ於テ $\angle AOA'=2\angle AOB$ トスレバ

$$\angle AOB=\angle A'OB$$

$$\therefore \text{弦}AB=\text{弦}A'B$$

三角形 $AA'B$ ニ於テ

$$AA'<AB+A'B=2AB$$

卽チ　$AA'<2AB$

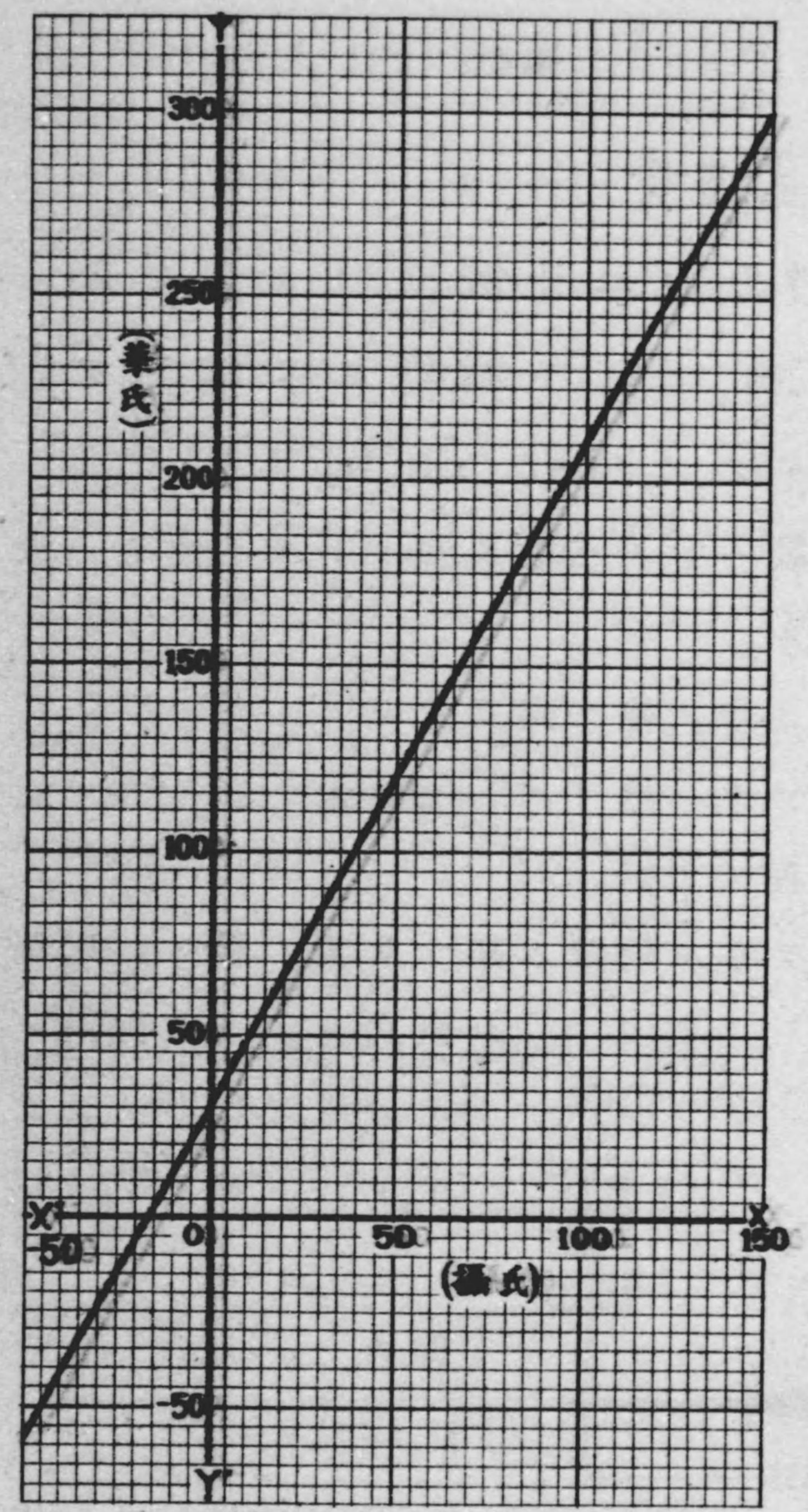
中心角ハ 2 倍 3 倍……トナツテモソレニ應ジテ弦ハ 2 倍 3 倍……トハナラナイ。卽チ同圓又ハ等圓ニ於テ中心角ハソレニ對應スル弦ト比例シナイ。今中心角ヲθ,弦ヲyトスレバ弦ト中心角トノ關係ハ

$$y=2r\sin\frac{\theta}{2}\qquad r\text{ ハ半徑}$$

倘立方體ノ體積及ビ球ノ體積ハ夫々一稜及ビ半徑ニハ比例シナイガ其ノ三乘ニ比例スル。

$y=x^3$　.　$x^3=X$　トスレバ　$y=X$

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$　$r^3=R$　トスレバ　$V=\frac{4}{3}\pi R$



$y \propto x$ ナルトキ x_1, x_2 ヲ任意ノ二數トシ,之ニ對應スル y ノ値ヲ夫々 y_1, y_2 トスレバ

$$\frac{y_1}{x_1}=k \qquad \frac{y_2}{x_2}=k$$

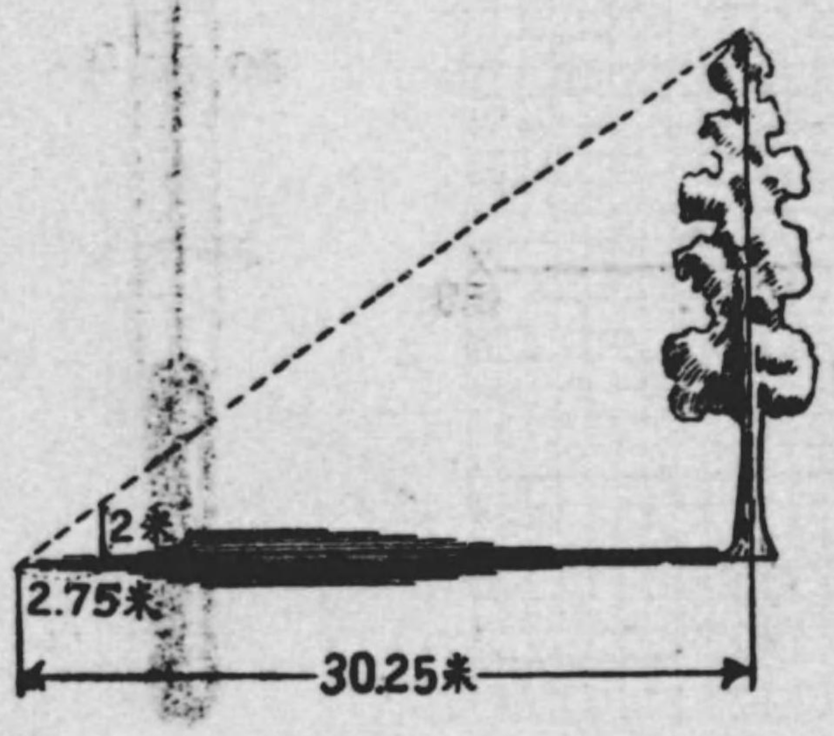
故ニ $$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$$

二組ノ數ガ互ニ比例ヲスルトキハ一方ノ任意ノ二數ト之ニ對應スル他方ノ二數トヲトレバソノ四數ハ比例ヲスル。

故ニ此ノ四數ノ中ノ三數ヲ知ルトキハ他ノ一數ヲ知ルコトガ出來ル。

例一 長サ 2 米ノ棒ヲ直立サシタトキノ影ノ長サガ 2.75 米アツタ。然ラバ 30.25 米ノ影ノアル立木ノ高サハ何程デアルカ。

解 直立シテキル物體ノ高サト其ノ影トハ比例スル。



直立シテキル物體ノ高サヲ y 米,ソノ影ノ長サヲ x 米トスレバ

$$y \propto x$$

即チ $y=kx$

而シテ $x=2.75$ ナルトキ $y=2$ ナル故

例一 此ノ種類ノ問題ハ希臘ノ七賢人ノ一人「ターレス」Thales (B.C. 640—546.) ガ埃及ニ於テ金字塔「ピラミツド」ノ高サヲ求メル時ニ既ニ使用シタモノデアル。

此ノ種類ノミデナク以下ノ變數法ノ問題ハ總テ二通リノ解答ガアル。例一デ見ルヤウニ

先ヅ $y=kx$ ニ於テ k ハ比例ノ常數デアルカラ x, y ガ如何ニ變化シテモ常ニ一定デアル。

$$y_1=kx_1, \qquad y_2=kx_2 \cdots\cdots\cdots$$

故ニ k ヲ求メテ, $y=kx$ ニ代入シテ y (或ハx) ヲ求メル方法。

次ニ $y_1=kx_1$, $y_2=kx_2$ ヨリ

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=k \qquad 即チ \quad y_1:x_1=y_2:x_2$$

$$又ハ \quad y_1:y_2=x_1:x_2$$

ナル比例式ノ解法ニヨルモノ。

ト二通リアル。代數トシテハ前者ヲトルガヨイ。

此ノ解法ニハ次ノ過程ヲ踏ムガヨイ。

I. 二變量ヲ x, y トシ, 之ガ比例スル事ガ明ラカニナレバ

$y \propto x$ トオキ, 比例常數ヲ k ト定メテ

$y=kx \cdots\cdots\cdots(1)$ トスル。

II. x, y ヲ同時ニ滿足スル値 (與條件) ヲ代入シテ

$y_1=kx_1$

トシ, 之レヨリ $k=\dfrac{y_1}{x_1}$ トスル。

III. ソコデ (1) ハ $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$ トナル, 之ガ一般ニ適用サレル公式デアル。

IV. 然ル後與ヘラレタ x_2 (或ハy_2) ヲ代入シテ之ニ對應スル特殊ナ y_2 (或ハx_2) ヲ求メル。

P. 337

問　題　50（舊教科書143頁）

1　$y=kx$　　$y=9$,　$x=3$

$\therefore$　$k=3$

今　$x=8$,　$y=3x$

$\therefore$　$y=3\times 8$,　　$y=24$

又　$9:3=x:8$

$3x=72$　　$x=24$

答　24

2　題意ニヨリ

$x=ky$　　$y=k'z$

故ニ　$x=kk'z$

kk' ハ常數　　$\therefore$　$x\propto z$

答　$x\propto z$

注意　k ト k' ヲ同一ノ k ニスルハ誤リデアル。

$\boxed{3}$ $x=k(y-a)$

4

$x=2$,　　$y=6$,　　　$2=6k-ka$

$x=0$,　　$y=5$,　　　$0=5k-ka$

之ヨリ　$k=2$　$a=5$

答　$a=5$　$k=2$

3 ▲ 圓周ヲ s 米, 直徑ヲ R 米トセヨ。　$s=\pi R$

$37.7=12\pi$　　　$\pi=\dfrac{37.7}{12}$

$s=\dfrac{37.7}{12}\times 19=59.69$ 餘

答　59.7米

(1)　題意ニヨリ　$p=kq$

p, q ノ値ヲ代入シテ

$3\dfrac{1}{2}=6k$　　　$\therefore$　$k=\dfrac{7}{12}$

$\therefore$　$p=\dfrac{7}{12}q$

$p=\dfrac{7}{12}q=\dfrac{7}{12}\times 24=14$

答　14

(2)　$7x+3y=10x+2y$

$y=3x$

3ハ常數　　　$\therefore$　$y\propto x$

答　$y\propto x$

(3)●　$y=a+kx$

$x=3$,　$y=7$　　　$7=a+3k$

$x=12$, $y=49$　　$49=a+12k$

之ヨリ　$k=\dfrac{14}{3}$,　$a=-7$

$\therefore$　$y=-7+\dfrac{14}{3}\times 9=35$

答　35

(4) ▲　上ト同樣ニシテ　　答　15

(3) ▲　$6\sqrt{3}^{cm}:3^{cm}=x^{cm}:2^{cm}$

$x=\dfrac{(6\times 2)\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$

答　$4\sqrt{3}^{cm}$ (6.93^{cm})

$2=k\times 2.75$　故ニ常數　$k=\dfrac{2}{2.75}$　デアル。

$\therefore$　$y=\dfrac{2}{2.75}x$

故ニ影ノ長サガ 30.25 米ノ時ノ木ノ高サハ

$y=\dfrac{2}{2.75}\times 30.25=22$

又比例式ヲ立テテ之ヲ解ケバ

30.25米 : 2.75米 = x米 : 2米

$x=\dfrac{30.25\times 2}{2.75}=22$　　　答　22 米

問　題　50

1　y ガ x ニ比例スル時 x ガ 3 ナラバ y ハ 9 デアル。然ラバ x ガ 8 ナルトキノ y ノ値如何。

2　x ガ y ニ比例シ, y ガ z ニ比例スルトキハ x ハ z ニ比例スルコトヲ證セヨ。

3　$x=k(y-a)$ ナル時 $x=2$ ナラバ $y=6$, $x=0$ ナラバ $y=5$ デアル。a 及ビ k ノ値ヲ求メヨ。

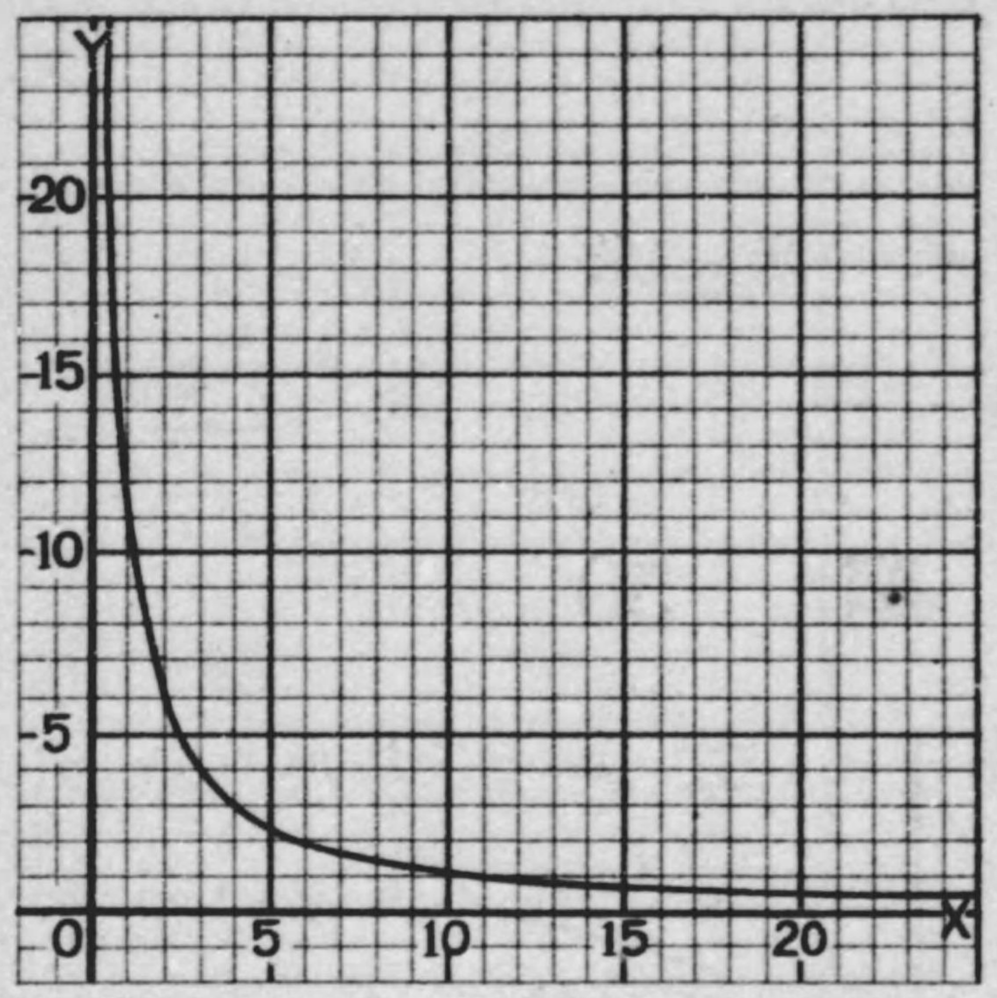
(1)　$p\propto q$ ナルトキ p ガ $3\frac{1}{2}$ ナラバ q ハ 6 デアル。然ラバ q ノ 24 ニ對スル p ノ値如何。

(2)　$7x+3y=10x+2y$ ナルトキハ $y\propto x$ ナルコトヲ證セヨ。

(3)　$y=a+kx$ ナルトキ $x=3$ ナラバ $y=7$, 又 $x=12$ トナラバ $y=49$ デアル。然ラバ $x=9$ ノ時ノ y 如何。

33 反比例

問一 一定量ノ酒(例ヘバ36立)ヲ或人數ニ分配スルトキ各人ノ受ケル分配量ト人數トノ關係如何。



問二 面積ガ12平方糎アル矩形ノ縦横ノ長サノ關係如何。

左ノ圖ハ面積ガ12平方糎ナル矩形ノ縦横ノ長サヲ兩軸ニトリ其ノ關係ヲ表シタ[グラフ]デアル。

一定量ノ品ヲ分配スル場合ノ分配量ト人數,又ハ一定ノ面積ヲ有スル矩形ノ縦横ノ長サノ如ク

一方ノ量ガ2倍,3倍,……$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ……トナルニツレテ他方ノ量ガ$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,……2倍,3倍,……トナルトキハ是等ノ**二ツノ量ハ互ニ反比例スル**トイフ。

問一ニ於テ人數ヲx,分配量ヲy立トスレバ

$$xy=36$$ トナル。

33 反比例

問一

人　數	1人	2人	3人	……	m人
各人分配量	36立	18立	12立	……	$\frac{36}{m}$立

人數ガ2倍,3倍,……,$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$……トナルニ從ツテ,各人ノ受ケル分配量ハ$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,……2倍,3倍……トナル,一般ニ人數ヲx人トスレバ一人ノ分配量ハ$y=\frac{36}{x}$ 即チ $xy=36$

問二

縱(糎)	1	2	3	4	……	6	……	8	……	12
横(糎)	12	6	4	3	……	2	……	1.5	……	1

縱ガ2倍,3倍,……,$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$……,トナルニ從ツテ横ノ長サハ$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,……,2倍,3倍……トナル。縱横ノ長サヲ夫々x糎,y糎トスレバ

$$xy=12$$ トナル。

注意 教授者ハ常ニ正比例トノ對照ヲ忘レヌ樣教授シテ貰ヒタイ。

函數關係ノ二數又ハ二量ガ反比例ヲナスコトヲ知ルニハ

　一ツノ量ガ增大スルニツレテ他ノ量ガ減小シ又

　一ツノ量ガ減小スルニツレテ他ノ量ガ增大スル

トイフコトダケデハ滿足出來ナイ。一ツノ量ノ增加ノ仕方トソレニ伴ツテ他ノ量ノ減小ノ仕方如何トイフコトガ極メテ重大デアル。必ズ

　一方ノ量ガ2倍, 3倍……トナルニツレテ他ノ量ガ$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$……

　一方ノ量ガ$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ……トナルニツレテ他ノ量ガ2倍, 3倍…

トイフ樣ニ變化スルコトヲ知ルコトガ出來テ始メテ**二量ハ互ニ反比例スル**ト斷言出來ルノデアル。

　反比例スル二數 x, y ハ

$$xy=k \qquad (1)$$

卽チ

$$y=k\frac{1}{x} \qquad (2)$$

ナル關係ガアル。

之ヲ

$$y\propto\frac{1}{x} \qquad (3)$$

ト書ク。

　(2) ニヨツテ y ト x トガ反比例スル二ツノ數デアルナラバ y ハ x ノ分數函數トシテ表ハサレ, ソレヲ圖示スレバ (1) ニヨツテ正双曲線トナル。又二數ノ函數關係ノ「グラフ」ガ正双曲線トナルトキハソノ二數ノ關係ハ $xy=k$ 卽チ其ノ二數 x, y ハ反比例スルノデアル。玆ニ注意スベキコトハ $xy=k$ ノ「グラフ」ハ第三象限內ニモ存在スル筈デアルガ併シ x, y 共ニ反比例スル量ヲ表スモノデアルカラ負量ハ表ハサナイ。勿論初等數學ノ範圍內デノ事デアル。從ツテ x モ y モ共ニ正デアルカラ第三象限內ニハ此ノ場合存在シナイ。

　問一　$\angle\alpha$, $\angle\beta$ ヲ補角ノ關係ニアル二角トスレバ

$$\angle\alpha+\angle\beta=180^\circ \qquad 卽チ \quad \alpha+\beta=180$$

此ノ「グラフ」ハ150頁ニ示ス樣ニ直線トナル。卽チ反比例シナイ。尙

　　α ガ增加スルニツレテ β ハ減小シ

　　α ガ減小スルニツレテ β ハ增加スル

ガ α ト β トハ反比例シナイ。

　問二　底邊ヲ x 米, 高サヲ y 米トスレバ三角形ノ面積ハ

$$\frac{xy}{2}=24 \qquad 卽チ \quad xy=48$$

故ニ x ト y トハ互ニ反比例スル。卽チ面積一定ナル三角形ノ底邊ト高サトハ互ニ反比例スル。從ツテ之ヲ圖示スレバ教科書ノヤウニ正雙曲線トナル。

又問二ニ於テ矩形ノ縱橫ノ長サヲ夫々 x 糎, y 糎ヲ以テ表セバ　$xy=12$　トナル。

上ノ場合ノ 36, 12 ハ常數デアル。

二ツノ數 x, y ガ互ニ反比例シテ變ズルトキハ

$$xy=k \quad (k\ ハ常數) \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

卽チ

$$y=k\frac{1}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナル關係ガアル。

之ヲ

$$y\propto\frac{1}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ト書ク。

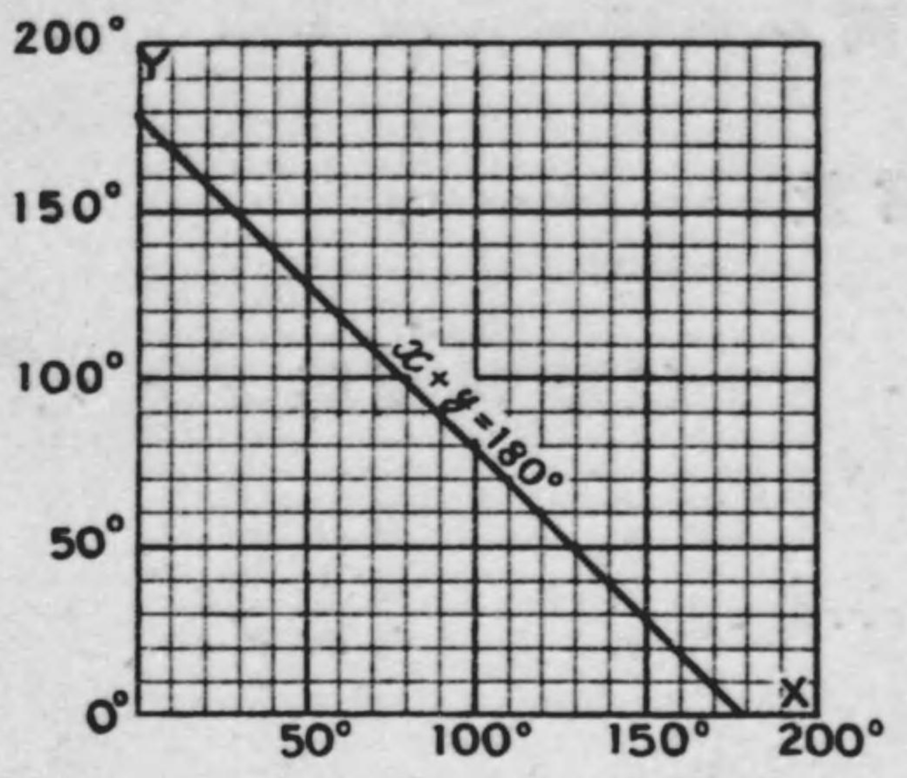
(2)ノ式ニ依ツテ明カデアル如ク反比例ノ關係ハ正比例ノ場合トハ趣ヲ異ニシ　**一數ガ他ノ數ノ分數函數デアツテ其ノ「グラフ」ハ正雙曲線トナル。逆ニ又二數ノ函數關係ノ「グラフ」ガ正雙曲線トナルトキハ其ノ二數ハ互ニ反比例スル。**

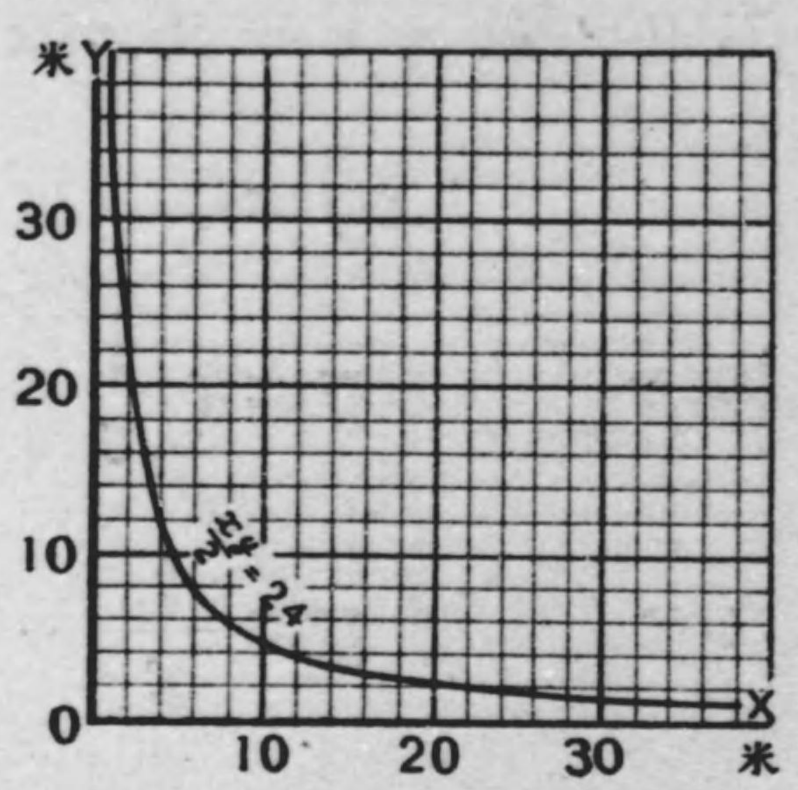
問一　補角ノ關係ニアル二角ノ大サハ反比例スルカ。

問二　一定面積ヲ有スル三角形ノ底邊ト高サトハ如何. 面積24平方米ノ場合ニツイテ考ヘヨ。

補角ノ關係ニアル二角ノ大サノ關係ハ次ノ圖ノ通リデアル。

面積24平方米ノ三角形ノ底邊ト高サトノ關係ハ次ノ圖ノ通リデアル。





相伴ツテ變ズル二數 x ト y トガアツテ x ガ y ニ反比例スルトキ x ノ任意ノ二數ヲ x_1, x_2 トシ,之ニ對應スル y ノ値ヲ夫々 y_1, y_2 トスレバ

$$x_1y_1=k$$

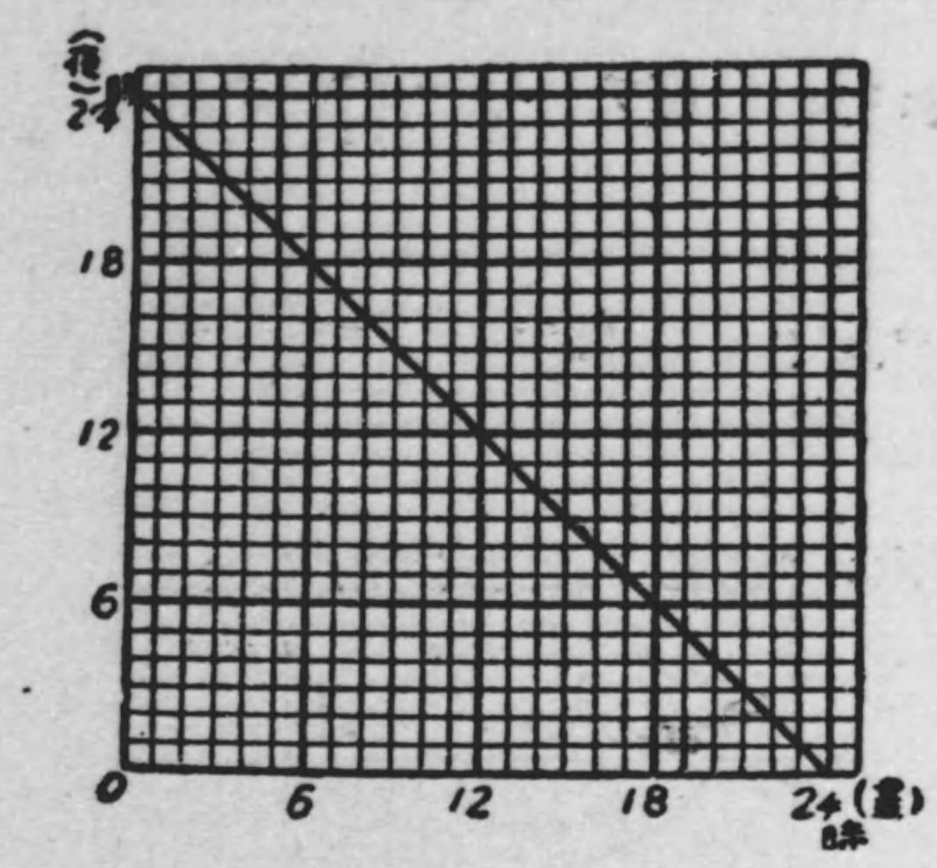
$$x_2y_2=k$$

故ニ $$x_1y_1=x_2y_2$$

即チ $$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}$$

即チ　一方ノ任意ノ二數ノ比ハ之ニ對應スル二數ノ反比ニ等シイ。

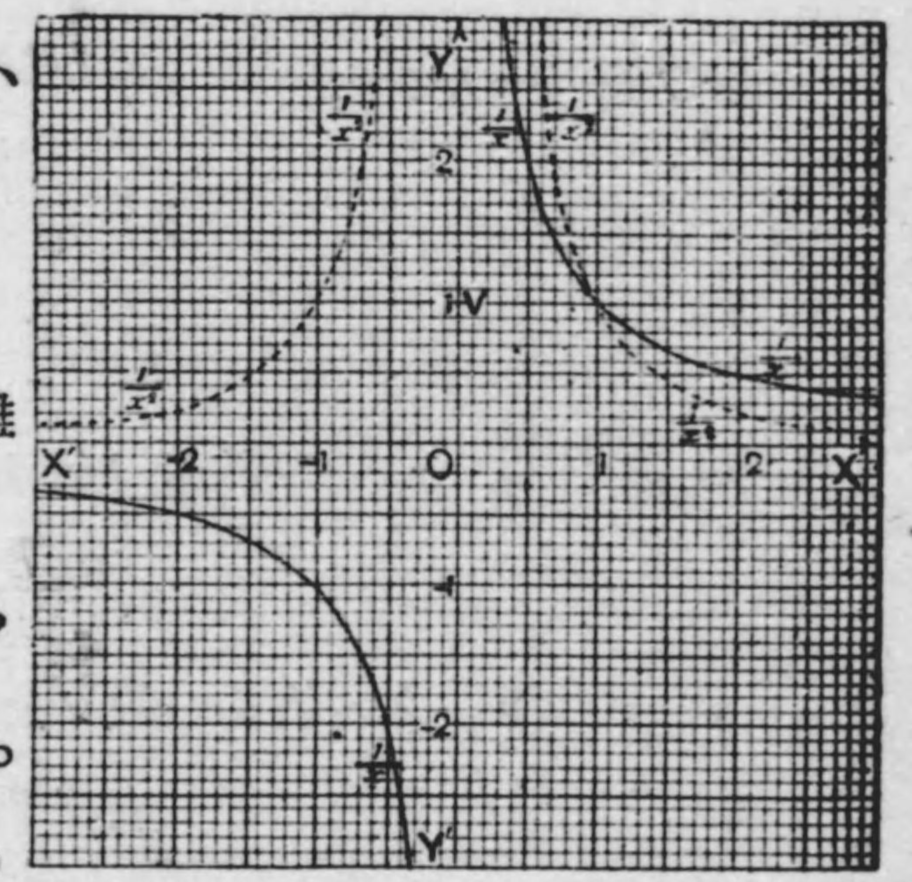
補角ノ關係ニアル二量ノヤウニ，反比例ノヤウニ見エテ實ハ反比例デナイ例ニハ晝ノ時間ト夜ノ時間トノ關係ナドアル。　之ハ $x+y=24$ ノ關係式デ表ハサレ，左ノ如クナル。



又地球ノ重力ノ强サ y ト地球ノ中心カラノ距離 x トノ如キ，或ハ光ノ明ルサ y ト，光源カラノ距離 x トノ如キハ

$$y=\frac{k}{x^2}$$

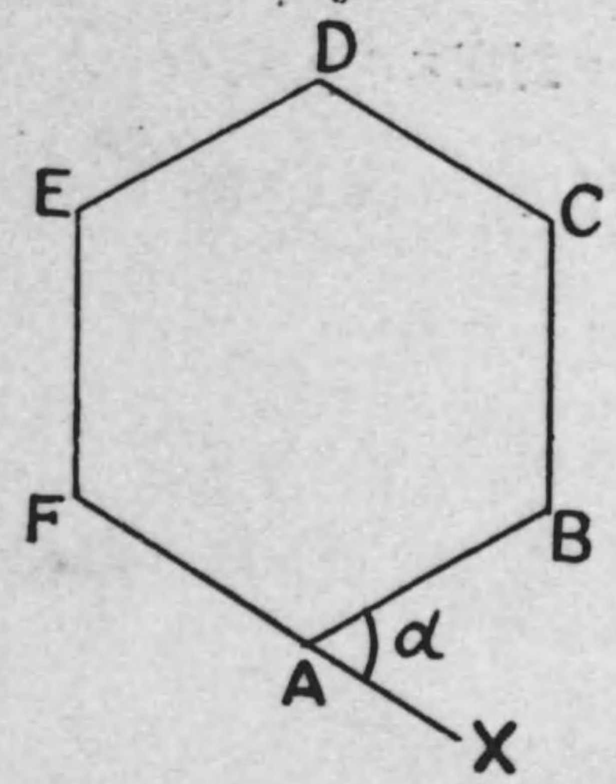
ノ關係式デ表ハサレル，即チ此ノトキハ，y ハ x ニ反比例ハシナイ。其ノ「グラフ」モ次ノヤウニナリ，正雙曲線トハナラヌ。併シ距離ノ自乘ヲ x ニトレバ



$$y=\frac{k}{x}$$

トナリ，反比例ノ例トナル。即チ「距離ノ自乘ニ反比例スル。」ノデアル。

又剛體ノ撓ミノ度ハソノ剛體ノ厚サノ三乘ニ反比例スル。即チ $y=\frac{k}{x^3}$ デアル。此ノトキモ y ハ x ニハ反比例シナイガ，x^3 ヲトレバ卽チ厚サノ三乘ニ y ハ反比例スル。



尙反比例ヲナス二量ヲ擧ゲルト

イ　一定距離ヲ行ク時ノ時間ト速度

ロ　一定量ノ仕事ヲ仕上ゲル日數ト人數

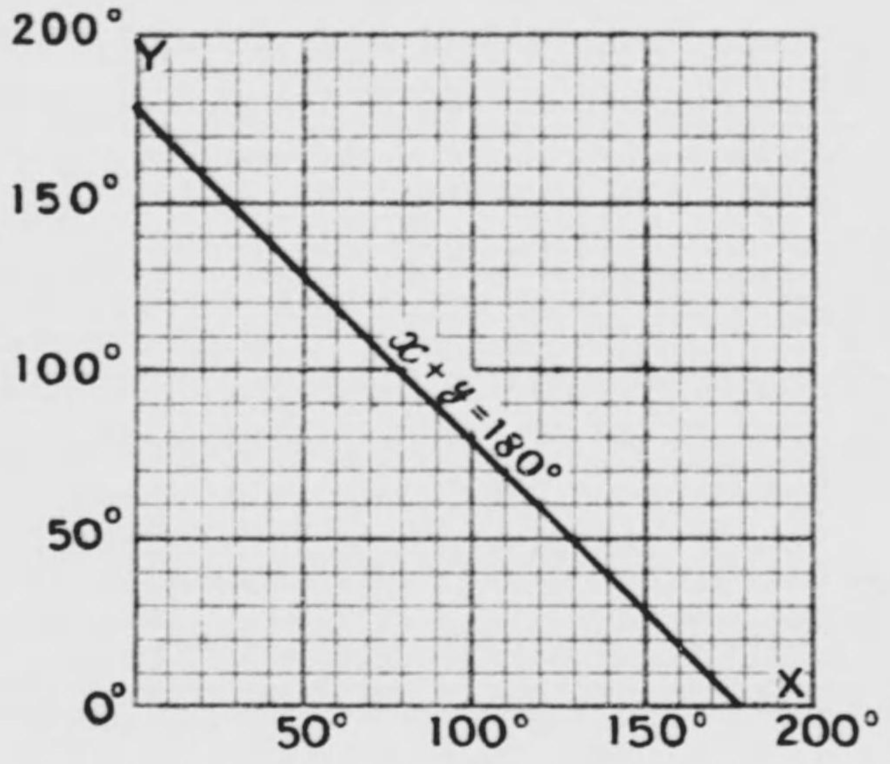
ハ　正多角形ノ邊數ト其ノ一外角

$$na=360$$

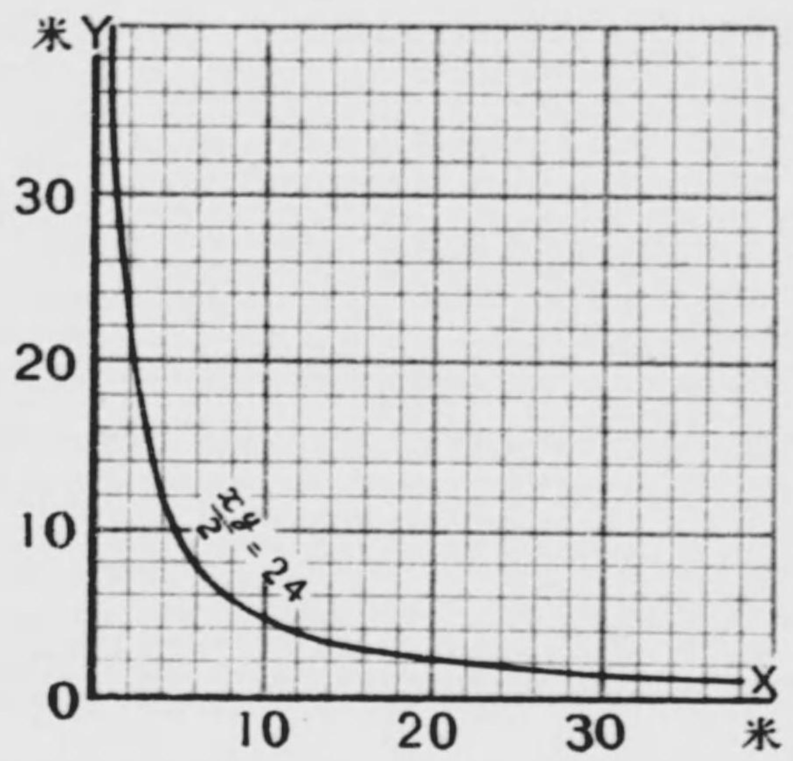
然ラバ正多角形ノ邊數ト其ノ一內角ハ如何。

P. 345

補角ノ關係ニアル二角ノ大サノ關係ハ次ノ圖ノ通リデアル。



面積24平方米ノ三角形ノ底邊ト高サトノ關係ハ次ノ圖ノ通リデアル。



相伴ツテ變ズル二數 x ト y トガアツテ x ガ y ニ反比例スルトキ x ノ任意ノ二數ヲ x_1, x_2 トシ,之ニ對應スル y ノ値ヲ夫々 y_1, y_2 トスレバ

$$x_1y_1=k$$

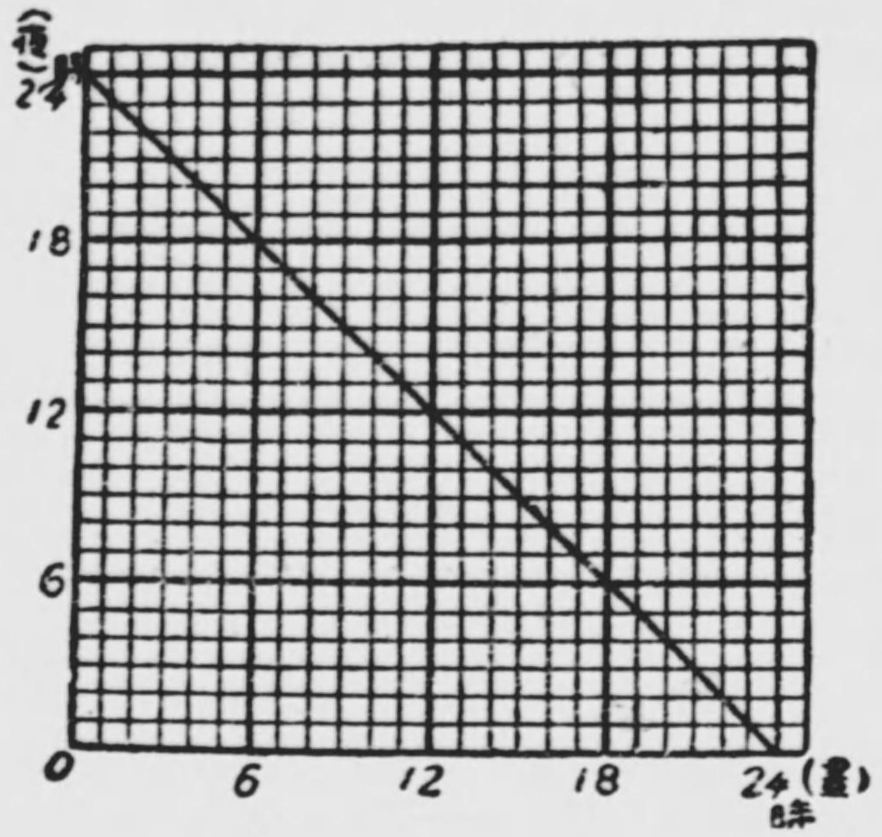
$$x_2y_2=k$$

故ニ $$x_1y_1=x_2y_2$$

即チ $$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}$$

即チ　一方ノ任意ノ二數ノ比ハ之ニ對應スル二數ノ反比ニ等シイ。

補角ノ關係ニアル二量ノヤウニ，反比例ノヤウニ見エテ實ハ反比例デナイ例ニハ晝ノ時間ト夜ノ時間トノ關係ナドアル。　之ハ $x+y=24$ ノ關係式デ表ハサレ，左ノ如クナル。



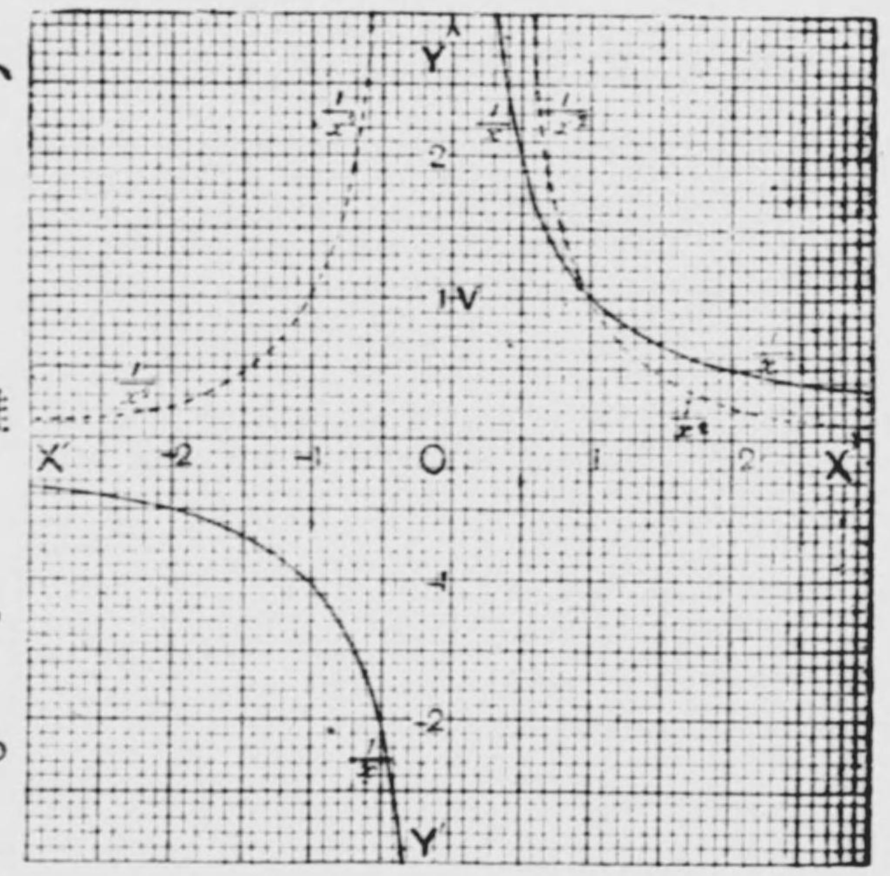
又地球ノ重力ノ強サ y ト地球ノ中心カラノ距離 x トノ如キ，或ハ光ノ明ルサ y ト，光源カラノ距離 x トノ如キハ

$$y=\frac{k}{x^2}$$

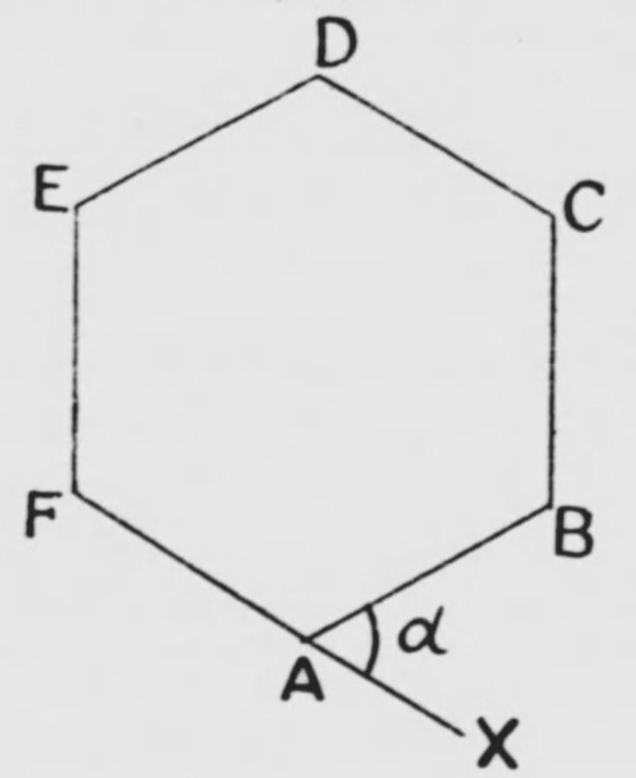
ノ關係式デ表ハサレル，即チ此ノトキハ，y ハ x ニ反比例ハシナイ。其ノ「グラフ」モ次ノヤウニナリ，正雙曲線トハナラヌ。併シ距離ノ自乘ヲ x ニトレバ

$$y=\frac{k}{x}$$

トナリ，反比例ノ例トナル。即チ「距離ノ自乘ニ反比例スル。」ノデアル。



又剛體ノ撓ミノ度ハソノ剛體ノ厚サノ三乘ニ反比例スル。即チ $y=\frac{k}{x^3}$ デアル。此ノトキモ y ハ x ニハ反比例シナイガ，x^3 ヲトレバ即チ厚サノ三乘ニ y ハ反比例スル。



尙反比例ヲナス二量ヲ擧ゲルト

イ　一定距離ヲ行ク時ノ時間ト速度

ロ　一定量ノ仕事ヲ仕上ゲル日數ト人數

ハ　正多角形ノ邊數ト其ノ一外角

$$n\alpha=360$$

然ラバ正多角形ノ邊數ト其ノ一內角ハ如何。

相伴ツテ變ズル二數 x ト y トガアツテ x ノ任意ノ二數ヲ x_1, x_2 トシ，之ニ對應スル y ノ値ヲ夫々 y_1, y_2 トスレバ

x ガ y ニ正比例スルトキハ　$x_1 : x_2 = y_1 : y_2$　卽チ　$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$　デ添數 (suffix) ハ 1, 2, 1, 2 デアルガ

x ガ y ニ反比例スルトキハ　$x_1 : x_2 = y_2 : y_1$　卽チ　$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$　デ添數 ハ 1, 2, 2, 1 デアル。

例　二量ガ反比例スル場合モ先ヅ k ヲ求メル方法ト比例式ヲ解ク方法ト二種類アル。

此ノ解法ニ於テモ

I　$y \propto \frac{1}{x}$　トオキ，比例常數ヲ k トシテ

$$y = \frac{k}{x} \qquad (\text{或ハ } xy = k)$$

II　x, y ノ特殊ノ値 (與條件) ヲ代入シテ

$$y_1 = \frac{k}{x_1} \qquad \text{卽チ} \quad k = x_1 y_1$$

III　之ニ依リ一般ノ公式ハ

$$y = \frac{x_1 y_1}{x}$$

IV　x (或ハ y) ノ特殊ノ値ヲ代入シテ之ニ對應スル y (或ハ x) ノ値ヲ求メル。

ノ順序ヲトル事ガ肝要デアル。

例一　或仕事ヲ90人デ30日間ニ仕上ゲタ。今之ト同樣ナ仕事ヲ18日間デ仕上ゲルニハ何人カカルカ。

解　一定ノ仕事ヲ仕上ゲルニ要スル日數ト人數トハ互ニ反比例スル。故ニ人數ヲ y, 日數ヲ x デ表ストキハ

$$y \propto \frac{1}{x}$$

卽チ　$xy = k$

$x = 30$ ナルトキ $y = 90$ ナル故

$$30 \times 90 = k$$

$$\therefore \quad xy = 30 \times 90$$

$x = 18$ ナルトキハ

$$18y = 30 \times 90$$

$$y = \frac{30 \times 90}{18} = 150$$

又之ヲ比例式ニヨツテ解クト

$$30\text{日} : 18\text{日} = x\text{人} : 90\text{人}$$

$$x = \frac{30 \times 90}{18} = 150$$

答　150人

問 題 51

1 y ガ x ニ反比例スルトキ $x=4$ ナラバ $y=7$ デアル。

然ラバ $x=10$ ノトキノ y ノ値如何。

(1) $x \propto \frac{1}{y}$ ナル時 $y=b^2$ ナラバ $x=4a^2$ デアル。

然ラバ $y=4ab$ ノトキハ x ノ値ハ何程デアルカ。

2 x ガ $(y-3)$ ニ反比例スルトキ $x=4$ ナラバ $y=10$ デアル。

然ラバ $y=13$ ノトキノ x ノ値如何。

(2) y ガ $(x-a)$ ニ反比例スルトキ $x=12$ ナラバ $y=10$ デ，$x=10$ ノ時ハ $y=15$ デアル。

然ラバ x ガ18ノトキノ y ノ値如何。

3 等面積ヲ有スル三角形ノ底邊ト高サトハ互ニ反比例スル。高サガ7cm, 底邊ガ 5cm アル三角形ト等面積ヲ有シ高サガ42cmアル三角形ノ底邊如何。

(3) 男子3人ノ賃銭ト女子7人ノ賃銭ト相等シイトスレバ男子1人デ4圓90銭ノ賃銭ヲ得ル間ニ女子1人デハ何程ノ賃銭ヲ得ルカ。

問 題 51 (舊教科書147頁)

1 $y=\frac{k}{x}$

今 $x=4,\ y=7$

$\therefore\ k=28$

$\therefore\ y=\frac{28}{x}$

$x=10 \qquad \therefore\ y=2.8$

答 2.8

$\boxed{2}$ / 3 $x(y-3)=k$

$x=4,\ y=10$ ヲ代入

$k=28$

$\therefore\ x(y-3)=28$

今 $y=13$ ナラバ

$x=\frac{28}{10}=2.8$

答 2.8

$\boxed{3}$ / 2 底邊ヲ x^{cm} 高サヲ y^{cm}

$xy=k$ (面積ノ二倍)

$x=5,\ y=7$ ヲ代入

$k=35$

$\therefore\ xy=35$

$y=42 \qquad x=\frac{35}{42}$

答 $\frac{5^{cm}}{6}$

(1) $xy=k \qquad y=b^2,\ x=4a^2$

$\therefore\ k=4a^2b^2 \qquad \therefore\ xy=4a^2b^2$

今 $y=4ab \qquad \therefore\ x=ab$

答 $x=ab$

$\boxed{(2)}$ / (3) $y \propto \frac{1}{x-a}$

$\therefore\ y(x-a)=k$

$x=12,\ y=10$ ヲ代入

$k=10(12-a)$ ・・・・・・・・(1)

$x=10,\ y=15$ ヲ代入

$k=15(10-a)$ ・・・・・・・・(2)

(1) ト (2) ヨリ $\left|\begin{array}{l} a=6 \\ k=60 \end{array}\right.$

$\therefore\ y(x-6)=60$

$x=18$ ヲ代入 $\quad y=5$

答 5

$\boxed{(3)}$ / (2) 女子一人ノ賃金ヲ x 圓トスレバ $\quad 4.9\times3=7x$

$\therefore\ x=0.7\times3=2.1$

答 2圓10銭

4 ● 正三角形ノ周ヲ x 糎,高サヲ y 糎トスレバ

$x=ky$

$x=6\sqrt{3}$, $y=3$ ヲ代入シ

$k=2\sqrt{3}$

$\therefore\ x=2\sqrt{3}\,y$

$y=2$ ヲ代入シ

$x=4\sqrt{3}$ 答 $4\sqrt{3}$ 糎

(4) ● 所要ノ自動車ノ時速ヲ x 粁トスレバ

$$9\frac{1}{3}^{\text{時間}}:1\frac{2}{3}^{\text{時間}}=x^{\text{粁}}:6.5^{\text{粁}}$$

$$\therefore\ \frac{5}{3}x=6.5\times\frac{28}{3}$$

$$x=36.4$$

答 36.4粁

正比例ト反比例トノ比較

此ノ考察ハ極メテ肝要デアル。即チ正比例ニ近イ函數關係ハ，既ニ第32節ニ述ベタヤウニ

正比例 $y=kx$

之ニ近イ函數關係 $y=kx^2$

〃 $y=kx^3$

⋮

又 $y=kx+b$

デアリ，反比例ニ近イ函數關係ハ第33節ニ述ベタヤウニ

反比例 $y=\dfrac{k}{x}$

之ニ近イ函數關係 $y=\dfrac{k}{x^2}$

〃 $y=\dfrac{k}{x^3}$

⋮

又 $y=k-x$

デアリ，何レニシテモ正比例ト反比例トハ似テキナイ。之ヲ比較研究サセルガヨイ。

4 正三角形ノ周ハソノ高サニ比例スル。高サ3糎ノ正三角形ノ周ガ $6\sqrt{3}$ 糎ナラバ高サ2糎ノ正三角形ノ周ノ長サハ何程カ。

(4) 一時間6.5粁ノ速サデ歩ミ行ケバ9時間20分ヲ要スル距離ヲ自動車ニテ1時間40分デ行クニハ一時間何程ノ速サヲ出スベキカ。

正比例ト反比例トノ比較

正比例ト反比例トハ極メテ類似シテキル樣デアツテ其ノ性質ハ甚ダ相距ツテ居ルモノデアル。今表示シテ之ヲ比較シテ見ヤウ。

種類	正比例	反比例
式	$y=kx$	$xy=k$
	一次方程式	二次方程式
	絶對項ガナイ	絶對項ガアル
一數ヲ他ノ函數トシテ表セバ	一次函數	分數函數
グラフ	原點ヲ通ル	原點ヲ通ラヌ
	直線	曲線(正雙曲線)

34　複　比　例

一人一日ノ賃銭ヲ1圓20銭トシ,人數,日數,賃銭ノ間ノ關係ヲ表示スルト

人數	日數	賃銭	人數ト日數ノ複比	賃銭ノ比
1人	1日	1.20円	$1^{人}:2^{人}$, $1^{日}:1^{日}$	$=\overset{円}{1.2}:\overset{円}{2.4}$
2	1	2.40		
2	2	4.80	$2^{人}:3^{人}$, $2^{日}:4^{日}$	$=\overset{円}{4.8}:\overset{円}{14.4}$
3	4	14.40		
5	7	42.00	$3^{人}:5^{人}$, $4^{日}:7^{日}$	$=\overset{円}{14.4}:\overset{円}{42}$
10	9	108.00		
⋮	⋮	⋮		
x	y	z		

今各量ノ表ス數ノ關係ヲ考ヘテ見ルト

$$\frac{z}{xy}=\frac{1.2}{1\times1}=\frac{2.4}{2\times1}=\frac{4.8}{2\times2}=\frac{14.4}{3\times4}=\cdots\cdots=1.2$$

デアル.

$z=1.2xy$　デアル.

即チ z ハ x ト y トノ函數デアル.

34　複　比　例

人數	日數	賃銭
1人	1日	1.20円
2	1	2.40
2	2	4.80
3	4	14.40
5	7	42.00
10	9	108.00
⋮	⋮	⋮
x	y	z

人數ト日數ノ複比	賃銭ノ比
$1^{人}:2^{人}$, $1^{日}:1^{日}$	$=\overset{円}{1.2}:\overset{円}{2.4}$
$2^{人}:3^{人}$, $2^{日}:4^{日}$	$=\overset{円}{4.8}:\overset{円}{14.4}$
$3^{人}:5^{人}$, $4^{日}:7^{日}$	$=\overset{円}{14.4}:\overset{円}{42}$

1人1日ノ賃銭ガ1圓20銭デアルカラ同ジ能力ノ人 x 人 y 日ノ賃銭ヲ z 圓トスレバ

$$z=1.2xy$$

併シ之ヲ各種ノ場合ニツイテ考ヘルニハ比ノ一定ナル

$\frac{z}{xy}$ ヲ考ヘタ方ガ便利デアル。

即チ賃銭ハ人數ト日數トニ關聯シテ變ズル。然ラバ其ノ變化ハ如何ナル關係ヲ保ツテヰルカトイフニ左ニ表示シテアルヤウニ人數ト日數トノ複比ハ賃銭ノ比ニ等シイ。

サウスルト斯カル複比例式ハ常ニ成立スルカ否カトイフコトハ此ノ例ニヨツテ直觀的ニ成立スルラシイト思フ丈ケデ常ニ成立スルコトヲ斷定スルニハ證明ヲ要スル。

$z=kxy$ ナルトキ x, y ガ任意ノ値 x_1, y_1 ヲ取ツタトキノ z ノ値ヲ z_1, x, y ガ他ノ任意ノ値 x_2, y_2 ヲ取ツタトキノ z ノ値ヲ z_2 トスレバ

$$\left.\begin{array}{l} x_1 : x_2 \\ y_1 : y_2 \end{array}\right\} = z_1 : z_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots A$$

ナル複比例式ノ成立スルコトハ教科書ニヨツテ證明セラレル所デアル。即チ **$z=kxy$** ナラバ A ナル複比例式ガ成立スル。ソコデ z ト x, y ノ間ニ $z=kxy$ ナル關係アルトキ **z ハ x, y ニ複比例スル**トイフ。即チ吾々ハ $z=kxy$ ヲ以テ定義ノ根本トシ，A 式ハ別ニ必要デナイヤウニ見エル。併シ A 式ガ成立スレバ z ハ x, y ニ複比例スル即チ丁度逆ガ證明出來ルノデアル。

證明 $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ ハ上ト同ジ意味ニ取ル。

$$\left.\begin{array}{l} x_1 : x_2 \\ y_1 : y_2 \end{array}\right\} = z_1 : z_2 \qquad 即チ \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1}{x_2} \times \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1 y_1}{x_2 y_2}$$

內項ヲ交換シテ

$$\frac{z_1}{x_1 y_1} = \frac{z_2}{x_2 y_2} = k \qquad 故ニ \qquad z_1 = kx_1 y_1, \qquad z_2 = kx_2 y_2$$

x, y ノ任意ノ値 x_3, y_3 ニ應ズル z ノ値ヲ z_3 トスレバ

$$\left.\begin{array}{l} x_2 : x_3 \\ y_2 : y_3 \end{array}\right\} = z_2 : z_3 \quad デアルカラ全ク同樣ニ \quad z_3 = kx_3 y_3$$

故ニ一般ニ **$z=kxy$** デアル。

併シ茲マデ深ク這入ルコトハ中學生ニハ少シ無理デアラウ。寧ロ $z=kxy$ ト A トヲ同等ニ考ヘテ二元的ニ陷ルキラヒハアルガ教科書ノヤウニ定義スベキデアラウ。

三ツノ變量甲乙丙ガアツテ丙ハ甲乙二量ニ伴ツテ變ズル。今其ノ各量ヲ x, y, z ナル數デ表ストキニ

$$z=kxy$$

ナル關係ガアルトスレバ z ノ任意ノ二數ノ比ハ **x, y** ノ之ニ對應スル二組ノ數ノ比ノ複比ニ等シイ。

之ヲ證明スルタメニ

$x=x_1, \ y=y_1$ ノ時ニ $z=z_1$ ノ値ヲトリ

$x=x_2, \ y=y_2$ ノ時ニ $z=z_2$ ノ値ヲトルトスレバ

$$z_1 = kx_1 y_1 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$z_2 = kx_2 y_2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

故ニ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{kx_1 y_1}{kx_2 y_2} = \dfrac{x_1}{x_2} \cdot \dfrac{y_1}{y_2}$

故ニ $\left.\begin{array}{l} x_1 : x_2 \\ y_1 : y_2 \end{array}\right\} = z_1 : z_2$

即チ z ノ任意ノ二數ノ比ハ x, y ノ之ニ對應スル二組ノ數ノ複比ニ等シイ。カカル場合ニハ

z ハ x, y ニ複比例スルトイヒ，

之ヲ **$z \propto xy$** ト書ク。

又 z ガ x, y ニ伴ツテ變ズルトキニ

z ハ y ガ一定ナラバ x ニ比例シ

x ガ一定ナラバ y ニ比例スルトキ

ハ z ハ x, y ニ複比例スル。

何トナレバ

$x=x_1$, $y=y_1$ ノ時ニ $z=z_1$ ノ値ヲトリ

$x=x_2$, $y=y_1$ ノ時ニ $z=z_1'$ ノ値ヲトルトスレバ

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{z_1}{z_1'}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$ デアル。

又 $x=x_2$, $y=y_2$ ノ時ニ $z=z_2$ ノ値ヲトルトセバ

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1'}{z_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$ デアル。

(1) ト (2) トヲ組合セルト

$$\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_1'}\cdot\frac{z_1'}{z_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

即チ $$\left.\begin{matrix} x_1 : x_2 \\ y_1 : y_2 \end{matrix}\right\} = z_1 : z_2$$

故ニ z ハ x, y ニ複比例スル。

左ノ定理ニ於テ, y ガ一定ナラバ z ハ x ニ比例スルトイフトキ,「y ガ一定ナラバ」トイフ條件ハ極メテ肝要デアル。コレガナクテハ無意味ニナル。十分注意シテ戴キタイ。

例一　角錐 Pyramid ノ幾何學的定義ヲ述ベルト

一點ヲ共有スル多クノ平面ト此ノ點ヲ通ラナイ一平面トニヨツテ包ム立體ヲ角錐トイフ。ソノ一點ヲ頂點，頂點ヲ通ラナイ角錐ノ面ヲ底面，頂點カラ底面ヘ下セル垂線ノ長サヲ高サトイフノデアル。

角錐ノ體積ヲ V, 底面積ヲ S, 高サヲ h トスレバ $\boldsymbol{V=\frac{1}{3}aS}$ デアル。

之ハ立體幾何學カラハ容易ニ導キ出セル公式デアル。此ノ公式ノ示スヤウニ角錐ノ體積ハ底面積ト高サトニ複比例スルトイヘルノデアル。右ノ解法ニ於ケル k ノ値ハ卽チ上述ノ公式ノ $\frac{1}{3}$ ニ相當スル。事實 k ノ値ヲ計算スレバ $\frac{1}{3}$ トナル。

此ノ例ノ解法ニモ先ヅ k ヲ定メル方法ト複比例式ニヨル方法トアル。

z ガ x, y ニ伴ツテ變ズル時ニ z ハ y ガ一定ナルトキハ x ニ正比例シ x ガ一定ナルトキハ y ニ反比例スルナラバ

$$z=k\frac{x}{y}$$ デアル。之ヲ證明スルニ

$x=x_1$, $y=y_1$ ノ時ニ $z=z_1$ ノ値ヲ取リ

$x=x_2$, $y=y_1$ ノ時ニ $z=z_1'$ ノ値ヲ取ルトスレバ

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{z_1}{z_1'}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$ デアル。

又 $x=x_2$, $y=y_2$ ノ時ニ $z=z_2$ ノ値ヲ取ルトスレバ

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_1'}{z_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$ デアル。

(1) ト (2) トヲ組合セルト

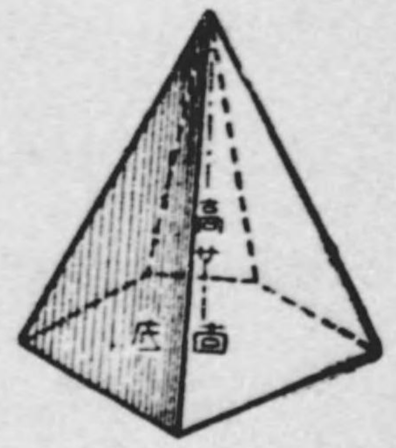
$$\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_1}{z_1'}\cdot\frac{z_1'}{z_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

卽チ $\left.\begin{matrix}x_1:x_2\\ y_2:y_1\end{matrix}\right\}=z_1:z_2$　從ツテ　$z=k\dfrac{x}{y}$

例一　角錐ノ體積ハ底面積ト高サトニ複比例スル。底面積ガ36平方糎,高サガ9糎ナル角錐ノ體積ガ108立方糎ナルトキハ底面積ガ60平方糎デ高サガ13糎ナル角錐ノ體積如何。

解　角錐ノ底面積ヲ x 平方糎,高サヲ y 糎,體積ヲ z 立方糎デ表セバ $z\propto xy$

卽チ　$z=kxy$　トナル。



$x=36$, $y=9$ ナルトキ $z=108$ デアルカラ

$$108=k\times36\times9$$

故ニ $$k=\frac{108}{36\times9}$$

故ニ $$z=\frac{108}{36\times9}xy$$

$x=60$. $y=13$ ノトキノ z ノ値ヲ求メルト

$$z=\frac{108}{36\times9}\times60\times13=260$$

答　260立方糎

複比例式ヲ以テ解ケバ

$$\left.\begin{matrix}60^{\text{平方糎}}:36^{\text{平方糎}}\\ 13^{\text{糎}}\ :\ 9^{\text{糎}}\end{matrix}\right\}=x^{\text{立方糎}}:108^{\text{立方糎}}$$

$$x=\frac{108\times60\times13}{36\times9}=260$$

z ガ x, y ニ伴ツテ變ズルトキニ

z ハ y ガ一定ナルトキハ x ニ正比例シ

x ガ一定ナルトキハ y ニ反比例ス

レバ $z=k\dfrac{x}{y}$ デ之ヲ　$z\propto\dfrac{x}{y}$ ト記ス。

證明ハ 156 頁ヲ參照シテ各自之ヲナセ。

問　題　52

1　農夫 8 人デ 3 日間ニ 144「アール」ノ田ヲ耕スト スレバ同ジ割合デ 12 日間ニ 360「アール」ノ田ヲ耕スニハ農夫何人ヲ要スルカ。

2　x ガ y, z ニ伴ツテ變ズルトキ z ガ一定ナトキハ $x\propto y$,

y ガ一定ナキトハ

$x\propto\dfrac{1}{z}$ デアル。

$y=3,\ z=5$ ナルトキニ $x=6$ ナラバ, $y=4,\ z=23$ ノトキ x ノ値ハ如何。

(1)　金 600 圓ヲ年 6 分デ 9 ケ月間預ケテ得タノト等額ノ利息ヲ年 4 分 8 厘デ 5 ケ月間預ケテ置イテ得ルノニハ元金何程ヲ要スルカ。

(2)　$z\propto\dfrac{y}{x}$　デ $x=2,\ y=12$ ノトキ　$z=2$　デアル。然ラバ　$y=7,\ z=3$ ノトキハ　x　ハ如何ナル値ヲトルカ。

一般ニ自然界或ハ人事界ニ存スル函數關係ノ中, 比例ヲナスモノヽ大部分ハ, 三量ガアツテ其ノ一量ガ一定ナルトキ, 他ノ二量ガ正比例スルカ或ハ反比例スルカデアル。例ヘバ 151 頁例一ニ於テモ, 人數ト日數ガ反比例スルガ, 併シ之ハ仕事ヲ一定ニシテアルカラデ, 若シ仕事モ變量トスレバ 158 頁ニ示ス通リ $y=k\dfrac{z}{y}$ ノ型ニナル。水ノ量ト目方ノ如キ例ハ極ク稀レデアル。併シ之トテ溫度ガ一定トイフヤウナ條件ヲ入レルトヤハリ上述ノ通リニナル。此ノ考ヘヲ以テ應用問題ニ當ラセラレタイ。

問　題　52 (舊教科書152頁)

1　農夫 x 人, 日數ヲ y, 田ノ面積ヲ z「アール」トスレバ

$$x=k\frac{z}{y}$$

$x=8,\ y=3,\ z=144$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{6}$

$y=12,\ z=360$

$$x=\frac{360}{6\times12}=5$$

答 5人

2　z ガ一定ノトキ $x\propto y$

y ガ一定ノトキ $x\propto\dfrac{1}{z}$

$\therefore\ x=k\dfrac{y}{z}$

$y=3,\ z=5$ ノ時 $x=6$

故ニ　$k=10$

$y=4,\ z=28$ ナラバ

$$x=\frac{40}{28}=\frac{10}{7}$$

答 $\dfrac{10}{7}$

(1)　元金ヲ x 圓, 年利率ヲ y, 期間數ヲ z トスレバ利息ハ如何ニナルカ, xyz デアル。

$$600\times0.06\times\frac{9}{12}=x\times0.048\times\frac{5}{12}$$

$$x=\frac{600\times60\times9}{5\times48}=1350$$

答 1350圓

(2)　$z=k\dfrac{y}{x}$

$x=2,\ y=12$ ノ時 $z=2$

故ニ　$k=\dfrac{1}{3}$

$y=7,\ z=3$

$3=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{7}{x}$　　$x=\dfrac{7}{9}$

答 $\dfrac{7}{9}$

例二 「ボイル・シヤール」ノ法則トシテ理論化學デ習フモノデアル。コノ法則ハ氣體論デ最モ有名ナモノデアル。卽チ實驗ノ結果ニヨリ

氣體ノ體積 z 立方糎ハ溫度ガ一定ノ時ハ氣壓 y ニ反比例シ

氣體ノ體積 z 立方糎ハ氣壓ガ一定ノ時ハ絕對溫度 x ニ正比例スル。

併シ之ハ實驗式ノ一ツデアルカラ，或ル範圍內デノ事デアツテ，數學上ノ公式ノ如ク，絕對的ノモノデナク，從ツテ之ヲ補正スル公式モアル。

絕對溫度 Absolute temperature トハ理論化學上重要視セラレル一ツノ溫度ノ目盛デアル。卽チ目盛ハ攝氏ノ目盛ソノモノデ（卽チ一度間ノ大サハ攝氏ソノママ），零度ヲ $-273°C$ ニシタモノデアル。勿論之ハ理論上ノ事デアツテ，カヤウナ寒暖計ガ實在スルワケデハナイ。此ノ溫度制ヲ用ヒルト，零下ノ溫度ヲ考ヘル必要ガナイ。卽チ換言スレバ，$-273°C$ ガアリ得ル最低溫度デアル事ガ理論化學デ證明サレテキル。

例二ニ於テ示シタ通リ，k ノ値ハ後デ約分ノ便宜上計算シテ了ハナイデ分數ノ形ニ殘シテオクガヨイ。

P. 362

例二 氣體ノ體積ハソノ絕對溫度※ニ比例シ壓力ニ反比例スル．今絕對溫度 250 度デ 20 氣壓ノ時 100 立方糎ノ氣體ハ絕對溫度 360 度デ 30 氣壓ノトキハ何程ノ體積トナルカ。

解 絕對溫度ヲ x 度，氣壓ヲ y 氣壓，體積ヲ z 立方糎トスレバ題意ニヨリ

$$z=k\frac{x}{y}$$

$x=250$，$y=20$ ナル時 $z=100$ ナル故

$$100=k\frac{250}{20}$$

$$k=\frac{100\times 20}{250}$$

故ニ $x=360$，$y=30$ ノ時ハ

$$z=\frac{100\times 20}{250}\times\frac{360}{30}=96$$

答 <u>96立方糎</u>

複比例式ノ解法ニヨレバ

$$\left.\begin{array}{l}360^{\text{度}}:250^{\text{度}}\\ 20^{\text{氣壓}}:30^{\text{氣壓}}\end{array}\right\}=x^{\text{立方糎}}:100^{\text{立方糎}}$$

$$x=\frac{100\times 20\times 360}{250\times 30}=96$$

※絕對溫度トハ攝氏ノ溫度ニ 273 ヲ加ヘタ溫度デアツテ攝氏ノ零下 273 度ヲ 0 度トセル溫度デアル。

3　圓筒形ノ桶ノ容積ハソノ底ノ面積ト高サトニ複比例スル。今甲乙二ツノ圓筒形ノ桶ガアツテソノ容積ノ比ハ11 : 8,高サノ比ハ3 : 4デアル。而シテ甲桶ノ底ノ面積ガ16.5平方米ナルトキハ乙桶ノ底ノ面積ハ何程カ。

4　x, y, z ガ相伴ツテ變ズル數ナルトキ次ノ如キ關係ヲ式デ表セ。

一　z ガ x ニ逆比例シ y ノ平方ニ正比例スルトキ。

二　z ガ x ノ立方根ニ正比例シ,y ノ平方根ニ反比例スルトキ。

(3)　溫度ガ攝氏13°デ,氣壓ガ754粍ノ時500立方糎アル瓦斯ハ攝氏29°,氣壓ガ784粍ノ時ニハ何程ノ體積トナルカ。

注意　絕對溫度ハ(273°+13°)デアル。

(4)　直圓錐ノ體積ハソノ高サ及ビ底面ノ半徑ノ自乘ニ複比例スル。今高サ12糎,底面ノ半徑10糎アル直圓錐ノ體積ガ1256.6立方糎アルトキハ高サ5糎,底面ノ半徑5糎アル直圓錐ノ體積ハ何程カ。

問　題　52 (ツヾキ)(舊教科書154頁)

3　底面積ヲ x 平方糎, 高サヲ y 糎,積積ヲ z 立方糎トスレバ

$$z=kxy$$

故＝ $\left.\begin{matrix} x_1 : x_2 \\ y_1 : y_2 \end{matrix}\right\} = z_1 : z_2$

$\left.\begin{matrix} 16.5 : x \\ 3 : 4 \end{matrix}\right\} = 11 : 8$

$\therefore\ x=\dfrac{16.5\times3\times8}{44}=9$

答　9平方米

4　一　$z=k\dfrac{y^2}{x}$ 或ハ $z\propto\dfrac{y^2}{x}$

二　$z\propto\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}$　　$z=k\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}$

(3)　絕對溫度ヲ x 度, 氣壓ヲ y 粍體積ヲ z 立方糎トスレバ例二ニヨツテ

$$z=k\frac{x}{y}$$

$z=500,\quad y=754,\quad x=286$

$$k=\frac{500\times754}{286}$$

$x=273+29,\quad y=784$

$$z=\frac{500\times754}{286}\times\frac{302}{784}=507.769$$

答　507.8立方糎

(4)　直圓錐トハ直角三角形ノ直角ヲ夾ム一邊ヲ軸トシテ一廻轉シタ時ニ生ズル立體デアル。體積ヲ z 立方糎, 高サヲ x 糎, 底面ノ半徑ヲ y 糎トスレバ

$$z=ky^2z$$

$x=12, y=10$ ノトキ $z=1256.6$

$$\therefore\ k=\frac{1256.6}{1200}$$

$$\therefore\ z=\frac{1256.6}{1200}y^2z$$

$y=5,\quad z=5$

$$x=\frac{1256.6}{1200}\times125=130.89\cdots$$

答　130.9立方糎

一般ニ圓錐ノ體積 z ハ

$$z=\frac{\pi}{3}y^2x$$

故ニ上述ノ k ノ値ハ $\dfrac{\pi}{3}$ ニ相當スルモノデ,其ノ値ハ1.0472デアル。

5▲ 球ノ體積ヲ V トセヨ。

$$V=KR^3$$

$$R=r,\quad V=10$$

$$K=\frac{10}{r^3}\qquad R=\frac{r}{3}$$

$$V=\frac{10}{r^3}\times\frac{r^3}{27}=\frac{10}{27}$$

答 $\frac{10}{27}$立方寸

球ノ體積ハ $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ デアル。

$\boxed{5}$/6 光源ノ强サヲ x, 光源ヨリノ距離ヲ y 米, 光ノ明ルサヲ z トスレバ

$$z=k\frac{x}{y^2}$$

$$y=10\quad\therefore\quad k=\frac{100z_1}{x_1}$$

$$\frac{1}{2}z_1=\frac{100z_1}{x_1}\times\frac{x_1}{y^2}$$

$$y^2=200\qquad y=10\sqrt{2}$$

又光源ノ强サガ x_1 ヨリ $4x_1$ ニ變ズレバ

$$\frac{1}{2}z_1=\frac{100z_1}{x_1}\times\frac{4x_1}{y^2}$$

$$y^2=800\qquad y=20\sqrt{2}$$

答 $10\sqrt{2}$米, $20\sqrt{2}$米

(5)▲ $V_1=K\times6^3$, $V_2=K\times8^3$, $V_3=K\times10^3$ 熔合シタ球ノ半徑ヲ R 體積ヲ V トスレバ

$$V=V_1+V_2+V_3=KR^3$$

$$K\times6^3+K\times8^3+K\times10^3=KR^3$$

$$R^3=6^3+8^3+10^3=1728=12^3$$

答 1尺2寸

$\boxed{(5)}$/6 發光體ノ光ノ强サヲ x 燭光, 發光體ト照サレル物體トノ距離ヲ y 米, 物體ノ照サレル强サヲ z 度トスレバ

$$z=k\frac{x}{y^2}$$

$$x=10\qquad z_1=k\frac{10}{y_1^2}$$

$$x=8,\ y=5,\ z_2=k\frac{8}{5^2}$$

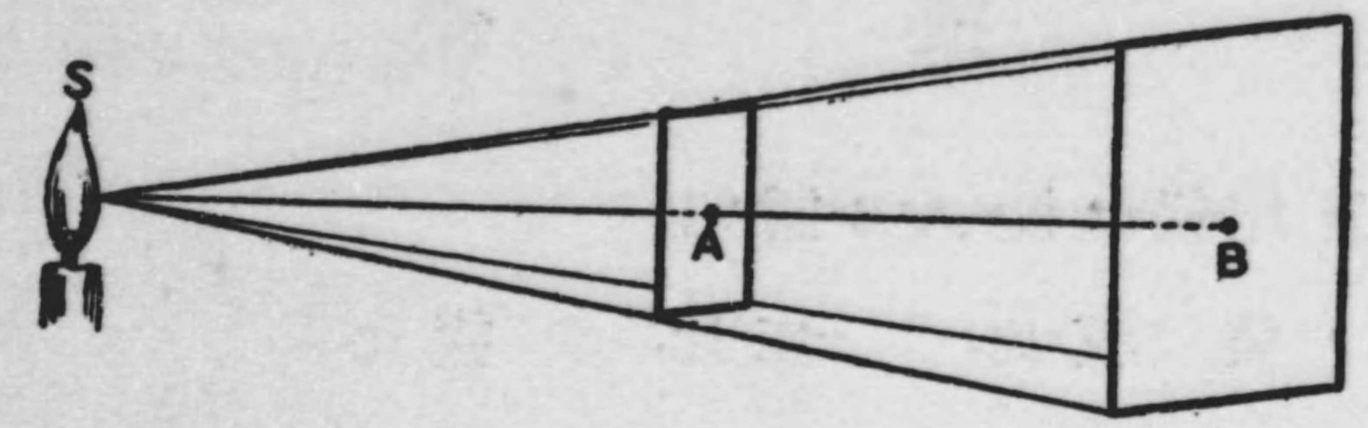
$z_1=z_2$ ナラシメヨウトスルノデアル。

$$k\frac{10}{y_1^2}=k\frac{8}{5^2}$$

$$8y_1^2=250$$

$$y_1=\frac{5}{2}\sqrt{5}=5.59\cdots$$

答 5.6米



5 光ガ或處ヲ照ス明ルサハ光體ノ光ノ强サニ比例シ,光體ヨリノ距離ノ自乘ニ反比例スル。

或物体ガ光體ヨリ10米ノ距離ニ在ル物ノ受ケル明ルサノ半分ノ强サデ照サレルタメニハソノ物體ヲ光體ヨリ何米距ツタトコロニ置クベキカ。

又此ノ問題ニ於テ光體ノ光ノ强サヲ4倍ニシテ前ノ目的通リノ明ルサヲ得ルニハ如何ニスレバヨイカ。

(5) 10燭光ノ電燈ヲ以テ8燭光ノ電燈ガ5米ノ距離ヲ照スト同樣ノ明ルサデ或物體ヲ照サシメルニハ之ヲ何程ノ距離ニ置クベキカ。

注意 發光體ノ光ノ强サヲ x 燭光,發光體ト照サレル物體トノ距離ヲ y 米,物體ノ照サレル强サヲ z 度トスレバ

$$z=k\frac{x}{y^2}$$

$$z_1=k\frac{10}{y_1^2}$$

$$z_2=k\frac{8}{5^2}$$