

Pai

初等三角教科書

日本上野清著
中國蕉綠居士譯

上海

科學儀器館出版

初中三角教科書

日本上野清著
中國焦綠居士譯



上海

科學儀器館出版

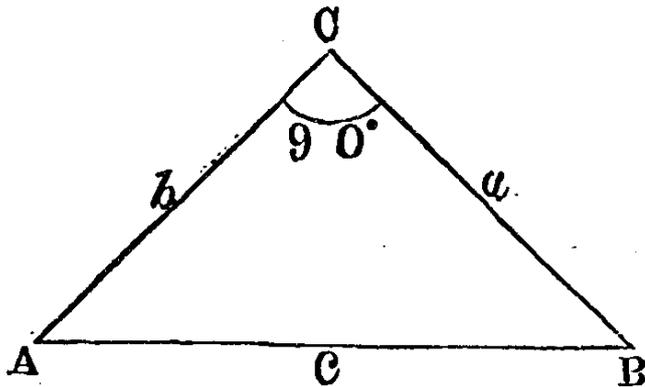
序

平面三角法有三種。第一爲六十分法。第二爲弧度法。第三爲兼用此二法者。而從來之三角法書。皆屬於第三種。而無屬於第一第二種者。此三角法之所以少簡易之教科書也。

於中學校程度。不用球面三角法。是於習平面三角法時。從第一種之組織。使知其大要已足。予之創以六十分法編成此書。職是故也。此書爲草創者。缺點定屬不少。祈大方家削而正之。

上野清識

(2)



$$\mathbf{b/c}$$

$$\cos A$$

$$\mathbf{a/c}$$

$$\sin A$$

$$\mathbf{a/b}$$

$$\tan A$$

$$\mathbf{c/a}$$

$$\operatorname{cosec} A$$

$$\mathbf{c/b}$$

$$\sec A$$

$$\mathbf{b/a}$$

$$\cot A$$

$$\mathbf{{}_3P_2 = 3 \times 2 = 6}$$

目 錄

第一編—緒言	1
第二編—銳角之三角函數.....	3
第三編—直角三角形	15
第四編—任意角之三角函數.....	23
第五編—關於兩角之函數.....	33
第六編—數及三角函數之對數	48
第七編—三角形.....	57
第八編—距離及高之測法.....	71
第九編—三角形多角形及圓.....	76
例題答	82
附 錄—外國度量衡譯名略字表	



平面三角法教科書

第一編

緒言

1. 平面三角法 平面三角法者論平面三角形之邊及其角之測度之學科也。

凡平面直線形皆可分之爲三角形故平面三角法者爲論一般之直線圖形及於此有關係之圖形且於代數學上之運算有關於角之測度者亦被含於三角法之內。

2. 角之單位 計角之法以直角爲單位。

其以直角爲單位之故則因有次三件之便利。

(壹)凡爲直角皆相等(貳)直角容易畫成(參)直角之形易於辨認。

3. 角之測度 以直角等分爲九十而取其一份以爲一度($^{\circ}$)以一度等分爲六十。

而取其一份以爲一分($'$). 以一分等分爲六十而取其一份以爲秒($''$).

$$\text{直角} = 90^\circ, \quad 1^\circ = 60', \quad 1' = 60''.$$

例 以 $18^\circ 4' 27''$. 改算爲直角之小數.

$$60 \overline{) 27''} \text{ 秒}$$

$$60 \overline{) 4 \cdot 45'} \text{ 分}$$

$$90 \overline{) 18 \cdot 0741666^\circ} \dots \text{ 度}$$

$$\cdot 20082407 \dots \text{ 直角.}$$

即 $18^\circ 4' 27''$. 等於 $\cdot 20082407$ 直角也.

題 例 壹

示於下之各題可用直角之小數改算之.

1. $15^\circ 15' 15''$. 2. $6^\circ 4' 30''$. 3. $132^\circ 6'$.

示於下之各題可用度分秒改算之.

4. $\cdot 01375$ 直角. 5. $2 \cdot 5025$ 直角. 6. $\cdot 1256$ 直角.

第 貳 編

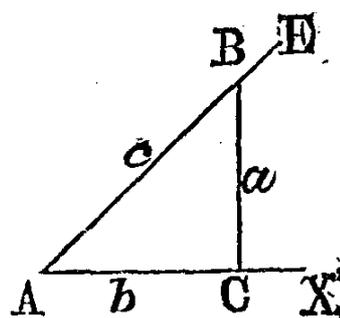
銳角之三角函數

三角函數之定義

1. 關於銳角之比 於任意之一銳角形，從其一邊上之任意一點，引垂線至他之一邊，則可得一直角三角形，其各二邊之比，稱曰關於其銳角之比。

據幾何學之定理，此直角三角形之各邊，即有變動之時，苟保有同一之銳角，則仍為相似形，故各二邊之比，凡關於同一之銳角，其價值不受變動也。

於銳角 $\angle XAE$ ，從其一邊上之一點 B ，引垂線 BC 到他之一邊 AX 上，則得直角三角形 ACB ，而定此三邊如下。



垂線 $BC=a$ 底線 $AC=b$ 斜線 $AB=c$ 。

據於代數學以上之 a, b, c 三字作二字一組之順次是 ${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6$. 即

$$ac, \quad bc, \quad ab, \quad (a)$$

$$ca, \quad cb, \quad ba, \quad (\beta)$$

之六組而 (β) 三組適為 (a) 三組之反對今以此各組順其次序而為比則

$$\text{因於 } (a) \text{ 者為 } \frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b},$$

$$\text{因於 } (\beta) \text{ 者為 } \frac{c}{a}, \frac{c}{b}, \frac{b}{a},$$

故從 (β) 所得之三比適順次為從 (a) 所得之三比之反比

今以銳角 CAB 之測角為 A. 則關於角 A 之六比附以定義如下.

$$\frac{\text{垂線}}{\text{斜線}} = \frac{a}{c} = \text{Sine } A \text{ (正弦)}$$

$$\frac{\text{底線}}{\text{斜線}} = \frac{b}{c} = \text{Cosine } A \text{ (餘弦)}$$

$$\frac{\text{垂線}}{\text{底線}} = \frac{a}{b} = \text{Tangent } A \text{ (正切)}$$

$$\frac{\text{斜線}}{\text{垂線}} = \frac{c}{a} = \text{Cosecant } A \text{ (餘除)}$$

$$\frac{\text{斜線}}{\text{底線}} = \frac{c}{b} = \text{Secant } A \text{ (正割)}$$

$$\frac{\text{底線}}{\text{垂線}} = \frac{b}{a} = \text{Cotangent } A \text{ (餘切)}$$

Sine A (正弦) 畧作 $\sin A$ (正弦)

Cosine A (餘弦) 畧作 $\cos A$ (餘弦)

Tangent A (正切) 畧作 $\tan A$ (正切)

Cosecant A (餘割) 畧作 $\operatorname{cosec} A$ (餘割)

Secant A (正割) 畧作 $\sec A$ (正割)

Cotangent A (餘切) 畧作 $\cot A$ (餘切)

2. 三角函數 以上之六比稱曰三角函數.

而此三角函數之值若其角不變時則其值亦不變也.

例如 $\frac{a}{c} = \sin A$ 之值若角 A 不變之時則 a 及 c 之值雖萬變而其函數之值不因之而變也在他之函數亦莫不皆然.

相互之關係

3. 反商之公式 由於 1 款而

$$\left. \begin{aligned} \sin A &= \frac{1}{\operatorname{cosec} A} \\ \cos A &= \frac{1}{\sec A} \\ \tan A &= \frac{1}{\cot A} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

何則蓋以 $\sin A = \frac{a}{c}$ 及 $\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}$ 而 $\frac{c}{a}$ 適為 $\frac{a}{c}$ 之反商故 $\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}$

其他之兩公式亦得以同樣之法而證之。

4. 比之公式 示之如下。

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \dots\dots\dots(2)$$

何則蓋由於 1 欸之。

$$\frac{a}{c} = \sin A \quad \text{及} \quad \frac{b}{c} = \cos A.$$

$$\therefore \tan A = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin A}{\cos A}.$$

5. 兩函數之平方。

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 A + \cos^2 A &= 1 \\ \tan^2 A + 1 &= \sec^2 A \\ \cot^2 A + 1 &= \operatorname{cosec}^2 A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

何則蓋據幾何學之定理 $a^2 + b^2 = c^2$ 用 a^2 , b^2 , c^2 順次以除上式則得

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \quad \text{即} \quad \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \quad \text{即} \quad \tan^2 A + 1 = \sec^2 A$$

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \quad \text{即} \quad 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$$

(注意) $\sin^2 A$ 爲 $(\sin A)^2$ 之畧. 餘俱倣此.

6. 函數之關係式 用前款所示之公式 (1) (2) (3). 可以證三角函數相互關係之諸例. 今示例如下.

(例一) $\tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A$. 試證明之:

$$\tan A + \cot A = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} \quad (\text{由於(2)})$$

$$= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \sin A} = \frac{1}{\cos A \sin A} \quad (\text{由於(3)})$$

$$= \sec A \operatorname{cosec} A \quad (\text{由於(1)})$$

(例二) 用 $\sin A$ 以表角 A 之正切.

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \quad (\text{由於(2)})$$

$$= \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} \quad (\text{由於(3)})$$

但據於代數學. 則最後之分母爲 $\pm \sqrt{(\sin^2 A)}$. 而在銳角之三角函數. 皆屬於正數量. 將負號省之. 職是故也. 至於銳角之三角函數. 皆正數量. 其理待第四編中說明之.

(例三) 證明 $\sin^6 A + \cos^6 A$ 之與 $1 - 3 \sin^2 A$

$\cos^2 A$ 相等.

據代數學則

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) \text{ 故}$$

$$\begin{aligned} \sin^6 A + \cos^6 A &= (\sin^2 A + \cos^2 A)^3 - 3 \sin^2 A \cos^2 A (\sin^2 A + \cos^2 A) \\ &= 1 - 3 \sin^2 A \cos^2 A \end{aligned} \quad \text{(由於(3))}$$

例 題 貳

次之各恆同式以公式證明之.

1. $\cos A \tan A = \sin A.$
2. $\cos A = \sin A \cot A.$
3. $\sec A \cot A = \operatorname{cosec} A.$
4. $\sec A = \operatorname{cosec} A \tan A.$
5. $\tan A \sin A + \cos A = \sec A.$
6. $\cot A \cos A + \sin A = \operatorname{cosec} A.$
7. $\frac{1}{\tan A \cot A} = \sin A \cos A.$
8. $\frac{\sin A + \cos A}{\sec A + \operatorname{cosec} A} = \sin A \cos A.$
9. $(\tan A - \sin A)^2 + (1 - \cos A)^2 = (\sec A - 1)^2.$
10. $(1 - \tan A)^2 + (1 - \cot A)^2 = (\sec A - \operatorname{cosec} A)^2.$
11. $(1 + \tan A)(1 + \cot A) = (\sin A + \cos A)^2 \sec A \operatorname{cosec} A.$
12. $\frac{(1 + \sin A)(1 + \sec A)}{(1 + \cos A)(1 + \operatorname{cosec} A)} = \tan A.$
13. $\frac{\tan^3 A}{1 + \tan^2 A} + \frac{\cot^3 A}{1 + \cot^2 A} = \frac{1 - 2 \sin^2 A \cos^2 A}{\sin A \cos A}.$

14. $\sin^6\theta - \cos^6\theta = (2\sin^2\theta - 1)(1 - \sin^2\theta + \sin^4\theta)$.

次之各題用 $\sin \theta$ 而表示.

15. $\sin^4\theta + \cos^4\theta$.

16. $1 + \tan^4\theta$.

17. $\sin^6\theta + \cos^6\theta$.

18. $1 - \tan^4\theta$.

次之各題用 $\tan \theta$ 而表示.

19. $1 - \cot^4\theta$.

20. $1 + \sec^2\theta$.

21. $\sin \theta \cos \theta$.

22. $1 - \sin^4\theta - \cos^3\theta$.

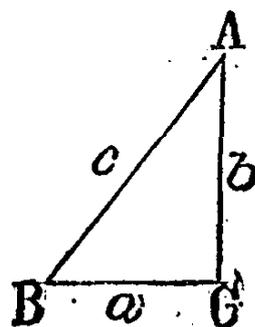
23. 角 A 六函數之和. 用 $\sin A$ 而表示.

餘 角

7. 餘角之公式 其式如下.

$$\left. \begin{aligned} \sin A &= \cos(90^\circ - A), & \cos A &= \sin(90^\circ - A) \\ \tan A &= \cot(90^\circ - A), & \cot A &= \tan(90^\circ - A) \\ \sec A &= \operatorname{cosec}(90^\circ - A), & \operatorname{cosec} A &= \sec(90^\circ - A) \end{aligned} \right\} \dots(4)$$

欲證此理. 可以 1. 欸之圖之
直角三角形 ABC. 更以 BC 爲
底邊. 則其測角 CBA 等於 B. 即
等於 $90^\circ - A$. 故由於 1. 欸而



$$\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}} = \frac{a}{c} = \cos B = \cos(90^\circ - A).$$

但 $\frac{a}{c} = \sin A$. 故 $\sin A = \cos(90^\circ - A)$.

又 $b/c = \sin B = \sin(90^\circ - A) = \cos A$.

其他餘角函數之公式亦得以同樣之法而證之.

(例) $\sin 65^\circ = \sin(90^\circ - 25^\circ) = \cos 25^\circ$,
 $\cot 60^\circ = \cot(90^\circ - 30^\circ) = \tan 30^\circ$.

三角函數之值

8. 特別之銳角 從零度至九十度各角之三角函數值多有為不可通度數量者. 欲算此等數量須用高等之數學. 今特以容易求得之三角函數之值列之如下.

9. 求四十五度 之正弦, 餘弦及正切.

於直角三角形 ABC.

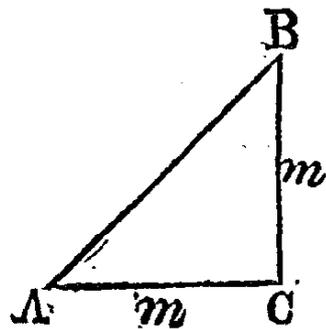
使 $AC = BC = m$. 則

角 $BAC = \text{角 } CBA = 45^\circ$.

於是 $AB = \sqrt{(m^2 + m^2)} = m\sqrt{2}$.

$$\sin 45^\circ = \sin CAB = \frac{BC}{AB} = \frac{m}{m\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

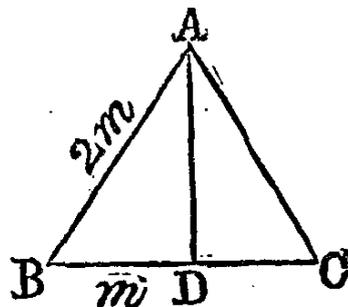
$$\cos 45^\circ = \cos CAB = \frac{AC}{AB} = \frac{m}{m\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\tan 45^\circ = \tan CAB = \frac{BC}{AB} = \frac{m}{m} = 1.$$

10. 求三十度與六十度之正弦, 餘弦及正切.

於等邊三角形 ABC. 以 AD 爲 BC 之垂線. 而以 AB 爲等於 2m. 則 BD = m, 角 DBA = 60°, 角 DAB = 30°. 故 $AD = \sqrt{(2m)^2 - m^2} = m\sqrt{3}$.



$$\sin 60^\circ = \sin DBA = \frac{AD}{AB} = \frac{m\sqrt{3}}{2m} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos 60^\circ = \cos DBA = \frac{BD}{AB} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}.$$

$$\tan 60^\circ = \tan DBA = \frac{AD}{BD} = \frac{m\sqrt{3}}{m} = \sqrt{3}.$$

$$\sin 30^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

$$\cos 30^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

11. 求零度及九十度之正弦, 餘弦及正切.

於直角三角形 ABC. 使角 A 次第減小而 b 爲不變數量. 則 a 及 $c-b$ 當次第減小. 故 A 至等於 0° 之時. 則 $a=0$, $c-b=0$ 即 $c=b$ 也.

由此而以

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \tan A = \frac{a}{b} \quad \text{故}$$

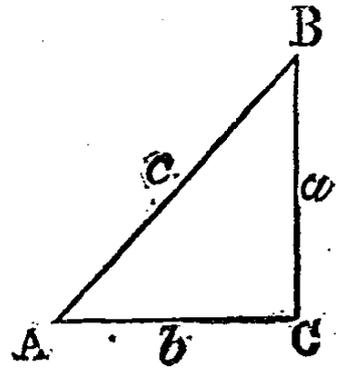
$$\sin 0^\circ = \frac{0}{b} = 0, \quad \cos 0^\circ = \frac{b}{b} = 1, \quad \tan 0^\circ = \frac{0}{b} = 0,$$

$$\text{又 } \sin 90^\circ = \sin(90^\circ - 0^\circ) = \cos 0^\circ = 1$$

$$\cos 90^\circ = \cos(90^\circ - 0^\circ) = \sin 0^\circ = 0$$

$$\tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty.$$

(註) ∞ 者無限大數量之符號也. 而 $\tan 90^\circ = \infty$. 可作圖而考察則 $\frac{1}{0}$ 之爲 ∞ . 可以知之矣.



12. 正弦, 餘弦, 正切之界限 由於前款. 則正弦餘弦及正切之界限. 可定之如下.

於角之從零度而增至九十度之間.

正弦從 0 漸增至於 1.

餘弦從 1 漸減至於 0.

正切從 0 漸增至於 ∞ .

而餘割,正割,餘切順次以爲正弦,餘弦,正切之反商故順次變其值爲從無限大至於一,從一至於無限大及從無限大至於零也。

13. 表 下表爲從前款所得之結果也。

角	0°	30°	45°	60°	90°
正弦	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
餘弦	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
正切	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

14. 三角函數表 如前諸款之三角函數,皆爲特別容易算出之數,此等之角,爲數極少,而從零度至九十度間之各角,其三角函數,亦有表以記明之,此名爲三角函數表,其角之增進,有以一度者,有以十秒及一秒者。

例如據 10 款而 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = .5$, 但 $\sin 30^\circ 1'$ 之值,查三角函數表 30° 之頁上,於 sin 欄內之 (1) 1, 其同列之數,爲

50025. 而據 12 款之說明. 正弦之數小於 1. 故

$\sin 30^{\circ}1' = .50025$ 也.

學生於計算三角法應用問題時. 函數表為必須之物. 其推算表之方法. 示之於第三編及第六編中.

例 題 參

1. 求 $\sec 30^{\circ}$, $\cot 60^{\circ}$, 及 $\operatorname{cosec} 45^{\circ}$ 之值.
2. 求 0° 及 90° 之正割, 餘切, 餘割之值.
3. 當 $\sin A = \frac{12}{13}$ 時. 求 $\cos A$.
4. 當 $\tan A = 1.05$ 時. 求 $\sin A$ 及 $\sec A$.
5. 當 $\sin A = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ 之時. 求 $\tan A$.
6. $\operatorname{cosec} A = 5$ 之時. 其 $\sin A$ 及 $\sec A$ 之值若干.
7. $\sin 60^{\circ} \cos 30^{\circ} - \sin 30^{\circ} \cos 60^{\circ} = \sin 30^{\circ}$ 試證明之.
8. $\sin 46^{\circ} \cos 44^{\circ} + \cos 46^{\circ} \sin 44^{\circ} = \sin 90^{\circ}$ 試證明之.
9. 當 $\cot \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 之時. 試求 $\sin \theta$ 及 $\cos \theta$ 之值.
10. $\sin \theta = a$ 及 $\tan \theta = b$ 之時. 試證明 $(1+b^2)(1-a^2)$ 之等於 1.

第 三 編

直 角 三 角 形

解 法

1. 三角形之邊及角 三角形者，有三邊及三角之六部分，而據幾何之定理，知其中之三部分，則其三角形可以決定，即他之三部分，可推算而得也。但既知之三部分適為三角之時，則求其不知之三邊，只能得其比而已。

2. 直角三角形 於直角三角形，其直角之為 90° ，既人所共知，故只有三邊及兩銳角之五部分。

因之而知其兩邊或一銳角一邊之時，他之三部分，可求而得。

3. 直角三角形解法 由是而直角三角形之解法，分為下之四種。

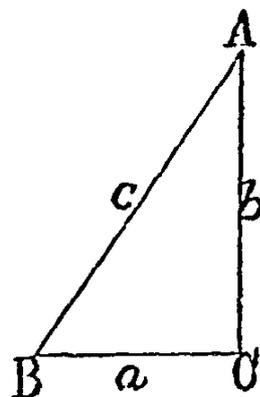
(第壹) a, b 爲已知數. 而
求其他之三部分.

據幾何學定理.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

由於第二編 1 款.

$$\tan A = \frac{a}{b}, \quad B = 90^\circ - A.$$



(第貳) 以 a, c 爲已知數. 而求他之三部分.

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad B = 90^\circ - A.$$

(第參) 以 a, A 爲已知數. 而求他之三部分.

$$b = a \cot A, \quad c = \frac{a}{\sin A}, \quad B = 90^\circ - A.$$

(第四) 以 c, A 爲已知數. 而求他之三部分.

$$a = c \cdot \sin A, \quad b = c \cdot \cos A, \quad B = 90^\circ - A.$$

(例一) $a = 15, b = 20$ 之時. 他之三部分之值若干.

$$c = \sqrt{(15^2 + 20^2)} = \sqrt{625} = 25 \quad (\text{第壹})$$

$$\tan A = \frac{15}{20} = .75 \quad \text{但檢三角函數表則得}$$

$$\tan 36^\circ 52' = .749912.$$

$$\text{故 } A = 36^\circ 52' \text{ 餘} \quad \therefore B = 90^\circ - 36^\circ 52' \text{ 餘} = 53^\circ 7' \text{ 餘}$$

(註) 精密計算之時.當至秒爲止.其計算之法.示於第六編中.此編之中.計算至分而止.

(例二) 當 $c = 75$, $a = 25$ 之時.求他三部之值若干.

$$b = \sqrt{(75+25)(75-25)} = 50\sqrt{2} \quad (\text{第貳})$$

$$\sin A = \frac{25}{75} = .333333, \quad \text{但檢三角函數表則得}$$

$$\sin 19^\circ 28' = .33326'$$

$$\text{故 } A = 19^\circ 28' \quad \therefore B = 90^\circ - 19^\circ 28' = 90^\circ 32'.$$

(例三) $a = 100$, 及 $A = 75^\circ 31'$ 之時.試求其他三部分之值.

$$b = 100 \times \cot 75^\circ 31' \quad (\text{第參})$$

$$= 100 \times .258307 = 25.8307,$$

$$c = \frac{100}{\sin 75^\circ 31'} = \frac{100}{.96822} = 133.003 \text{ 弱},$$

$$B = 90^\circ - 75^\circ 31' = 14^\circ 29'.$$

(例四) $c = 16.5$, 及 $A = 30^\circ$ 之時.則他三部

分之值應是若干。

$$a = 16.5 \sin 30^\circ = 16.5 \times \frac{1}{2} = 8.25 \quad (\text{第四})$$

$$b = 16.5 \cos 30^\circ = 16.5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{33}{4} \sqrt{3},$$

$$B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

例 題 四

1. $a=91$, 及 $c=103$ 之時求角 A 之值.
2. $b=121$ 及 $c=153$ 之時求角 A 之值.
3. $a=120$, $b=109$ 之時求角 B 之值.
4. $c=150$, $A=50^\circ$ 之時求 a 之值.
5. $b=505$, $A=52^\circ 30'$ 之時求 c 之值.
6. $c=50$, $B=40^\circ 50'$ 之時求 a 之值.
7. $a=5\sqrt{3}$, $A=60^\circ$ 之時求其他之三部分.
8. $a=10$, $A=45^\circ$ 之時求其他之三部分.

應 用

4. 高及距離 應用三角法而測物体之高與距離. 今示例如下.

欲觀物体. 必用一種之器械.

(第壹) 當測物体之時. 測者之眼. 與物体

連結成一直線.此線與水平所成之傾角.其從物體在高處而成者.名曰仰角.其從物體在低處而成者.名曰俯角.用器以測得此角即可求其高與距離.

(註) 水平者.與海面平行之線也.

(第貳) 測者之眼.與兩物體相連結.則得二直線.此二直線所夾之角.用器以求之.即可得推知其距離與高矣.

求此角所用之器械.為六分儀及經緯儀.

5. 應用之例 今示如下.

(例一) 測者在距高塔 BC 153 尺之處.其所測得之仰角.為 $33^{\circ}10'$ 問塔之高幾何.

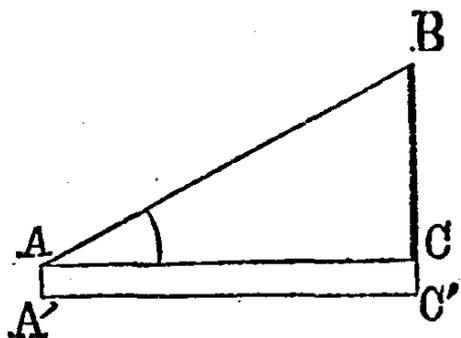
$$AC=153, \text{ 角 } A=33^{\circ}10'$$

$$BC=AC \tan A$$

$$=153 \times \tan 33^{\circ}10'$$

$$=153 \times .653551 = 100 \text{ 弱}$$

即塔之高百尺也.



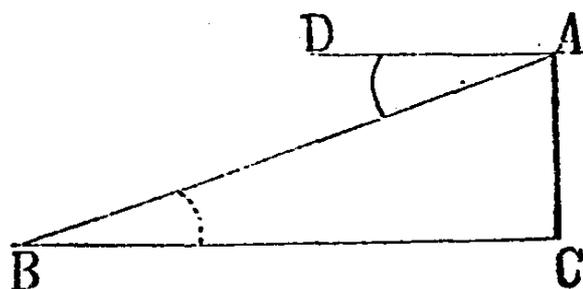
(注意) 此例之中.以測者之眼 A.假定為在地平上者.若以測者之眼高 AA'.則塔之高應為 BC'.於此之時.

$BC' = BC + CC'$. 即塔之高等於 100 尺加眼高也.

(例二) 立於高百五十尺之丘上 A 之人. 測在地平上物体 B 之俯角. 其所得之角為 30° . 問從此處至物体處之距離若干.

角 $BAD = 30' =$ 角 CBA ,

$$\begin{aligned} \therefore AB &= \frac{AC}{\sin CBA} = \frac{150}{\sin 30'} \\ &= \frac{150}{\frac{1}{2}} = 300, \end{aligned}$$



即從測者至物体之距離. 為 300 尺也.

(例三) 航海之際. 船在 C 時. 燈臺 B 在船之正西. 從此向正北航行三里之後. 再望燈臺. 在正南偏西 56° . 問船與燈臺之距離若干.

於前圖. $AC = 3$, 角 $C = 90^\circ$, 角 $CAB = 56^\circ$,

$$\therefore AB = \frac{AC}{\cos CAB} = \frac{3}{\cos 56^\circ} = \frac{3}{.55919} = 5.37$$

故船與燈臺之距離. 為五里又百分之三十七也.

例 題 五

1. 高一百二十尺之塔. 於平地上望之. 得三十六度

二十五分之仰角。問望處至塔之距離若干。

2. 人立於離塔 369.5 尺之處。望至塔頂得三十三度十二分之仰角。問此塔之高若干。但此人之眼高五尺。

3. 在高二千五百尺之輕氣球上。望至地平上之一點。測得四十度三十五分之仰角。後氣球直落至地平上。問落處與前測點之距離若干。

4. 以長六尺之棒直立於地平上。其為日光照而所生之影計長四尺。問太陽之高度若干。但言太陽之高。即為仰角之意也。

5. 在地平上之塔影(為太陽所照而生)計長 146.2 尺。而太陽之高度為 $33^{\circ}12'$ 。問此塔之高若干。

6. 在海邊測得一山之仰角計八度二十二分。而此山之高出海面計一萬二千三百七十尺。問此山與測處之水平距離幾何。

7. 在某地望一山之頂。得仰角十三度。披地圖而測此地與山頂之距離計六寸。此山之高計六千四百尺。問地高出海面若干。但此地圖實為五萬分之一。

8. 立於兩岸平行之河岸。以直角而望對岸之人家。自此沿岸而行六十丈。再望以前之人家。則其人家與眼連結之直線。卻與河岸為三十度之角。問此河之濶若干。

9. 有甲乙二島東西列置而航海者適在甲島之正南其望乙島在東方三十五度問測處之距乙島爲距甲島若干倍。

10. 太陽與月同時而觀其時月光適照半面故地月連結直線與地日連結直線爲直角又測得日月連結直線之交角爲八十八度四十二分問地球與日之距離爲與月距離之若干倍。

第 四 編

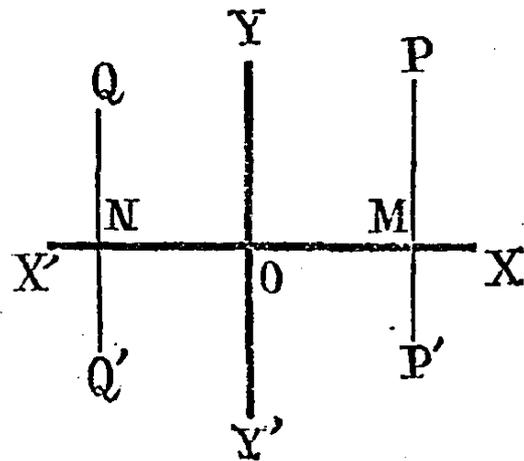
任意之角之三角函數

直線及角之正負

1. 直線之正負 直角相交兩直線 XX' 及 YY' 名之曰橫軸及縱軸而其交點 O 名曰原點。從 O 沿 XX' 而平行於 YY' 右之線為正。其在 YY' 右之線為負。又沿 YY' 而平行於 XX' 之上者為正。其在 XX' 下者為負。

例如 2 款之圖中。橫線 OM 為正。 ON 為負。又縱線 MP 及 NQ 為正。 MP' 及 NQ' 為負。

2. 象限 此圖之中。以角 XOY 為第一象限。以角 YOX' 為第二象限。以角 $X'OY'$ 為第三象限。以角 $Y'OX$



爲第四象限.故在第一象限內,橫線及縱線皆正.在第二象限內,橫線負而縱線正.在第三象限內,橫線及縱線皆負.在第四象限內,橫線正而縱線負也.

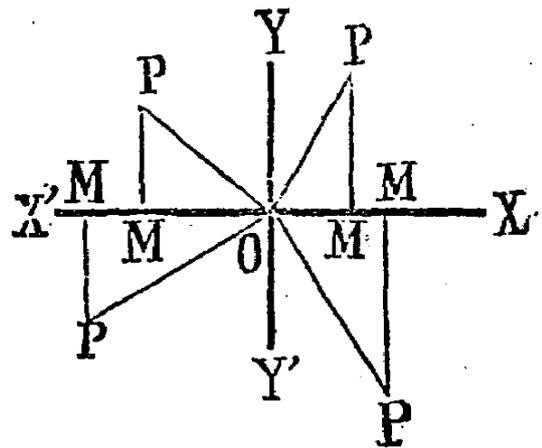
3. 三角函數之一般定義 於次之圖中.以角 MOP 爲 A.

(第壹) P 點在於第一象限之時. A 角爲銳角.而 OM 及 MP 皆正.故與第二編 1 款之定義相同.即

$$\sin A = \frac{PM}{OP}, \cos A = \frac{OM}{OP}, \tan A = \frac{MP}{OM}$$

因之而其他之 cosec A, sec A, cot A. 亦皆爲正也.

(第貳) 點 P 在第二象限內之時.角 A 爲鈍角.而 OM 負而 MP 正.故第二編 1 款之定義有如乎下.



$$\sin A = \frac{MP}{OP}, \cos A = \frac{-OM}{OP}, \tan A = \frac{MP}{-OM}$$

即 $\sin A$ 爲正, $\cos A$ 爲負, $\tan A$ 爲負,
 $\operatorname{cosec} A$ 爲正, $\sec A$ 爲負, $\cot A$ 爲負.

(第三) 點 P 在第三象限之時. 則

$$\sin A = \frac{-MP}{OP}, \quad \cos A = \frac{-OM}{OP}, \quad \tan A = \frac{-MP}{-MO},$$

即 $\sin A$ 爲負, $\cos A$ 爲負, $\tan A$ 爲正,
 $\operatorname{cosec} A$ 爲負, $\sec A$ 爲負, $\cot A$ 爲正.

(第四) 點 P 在第四象限之時. 則

$$\sin A = \frac{-MP}{OP}, \quad \cos A = \frac{OM}{OP}, \quad \tan A = \frac{-MP}{OM},$$

即 $\sin A$ 爲負, $\cos A$ 爲正, $\tan A$ 爲負,
 $\operatorname{cosec} A$ 爲負, $\sec A$ 爲正, $\cot A$ 爲負.

4. 各象限內三角函數值之界限

今示如下.

第一象限內(即從零度起至九十度止)三角函數值之界限已示於第二編 12 款中.

第二象限內(即從九十度起至百八十度止)三角函數值之界限須先求一百八十度之三角函數之值而後可得以知之.

即由於前款而角 A 等於百八十度之時. MP 等於零 OP 等於 OM.

$$\therefore \sin 180^\circ = \frac{0}{OP} = 0, \quad \cos 180^\circ = \frac{-OP}{OP} = -1,$$

$$\tan 180^\circ = \frac{0}{-OM} = 0.$$

於第三象限內以角 A 爲等於二百七十度則 OM 等於零 OP 等於 MP.

$$\therefore \sin 270^\circ = \frac{-OP}{OP} = -1, \quad \cos 270^\circ = \frac{-0}{OP} = 0,$$

$$\tan 270^\circ = \frac{-MP}{0} = \infty.$$

於第四象限內以角 A 爲等於三百六十度則 MP 等於零 OP 等於 OM.

$$\therefore \sin 360^\circ = 0, \quad \cos 360^\circ = 1, \quad \tan 360^\circ = 0.$$

5. 正負及值之界限表 從於前款之所示作示於下之表.

象限	壹	0°	90°	二	180°	三	270°	四	360°
sin	+	0	+1	+	0	-	-1	-	0
cos	+	+1	0	-	-1	-	0	+	1
tan	+	0	∞	-	0	+	∞	-	0

cosec, sec 及 cot 爲 sin, cos, tan 之反商故其正負及值之界限得以推想決定之.

6. 角之量 角之量雖曰無限.而其界限常不出於四象限之外.

例如於 3 款之圖.使 OP 在橫軸 OX 上.乃以 O 點而轉之. OP 通過 Y, OX', OY' 而再合於 OX. 是為從零度起而迄三百六十三度之角.而欲廻轉至三百六十度以上之時.則再通過於原之象限內.

例如三百六十八度.是三百六十度加八度也.即與在第一象限內八度之角相同.又如八百三十度.是兩倍三百六十度加三十度也.即與在第二象限內三十度之角相同.

7. 任意之正角 第二編之公式(1), (2), (3). 不僅於銳角之時.凡所有之正角.皆可用之者也.

例如於第二編公式(2). Δ 為鈍角.(即以為在第二象限內者)則由於前款.而

$$\tan A = \frac{MP}{-OM} = \frac{PM/OP}{-OM/OP} = \frac{\sin A}{\cos A}.$$

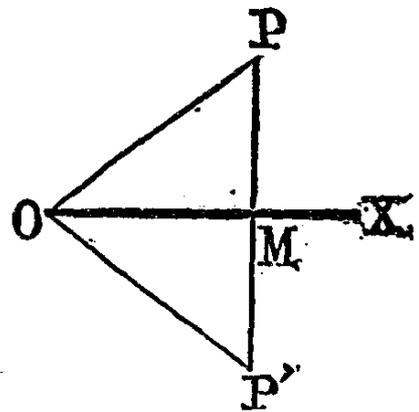
又如於第二編公式(3)以角 Δ 為在第四象限內者.則由於前款.而

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{-NP}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2 = \frac{OP^2}{OP^2} = 1.$$

其他公式之合理.可以此類推之.

8. 負角 以橫軸 OX 爲定線.以 OP 爲動線.初時使 OP 合於 OX . 從此以 OP 迴 O 點而左轉.角 XOP 乃從零度漸增至若干量之角.如以此角爲正角.則反對此而從 0° 右旋之角.謂之曰負角.

例如以圖中之角 XOP 爲正角.則關於 OX 而在於反對之角 XOP' . 即爲負角.



9. 負角之三角函數 負角三角函數之公式.今示之如下.

$$\left. \begin{aligned} \sin(-A) &= -\sin A, & \operatorname{cosec}(-A) &= -\operatorname{cosec} A \\ \cos(-A) &= \cos A, & \sec(-A) &= \sec A \\ \tan(-A) &= -\tan A, & \cot(-A) &= -\cot A \end{aligned} \right\} (1)$$

欲證以上之式.可作角 XOP' . 使等於角 XOP . 而在於反對之地位.於是 $XOP = A$. 而 $XOP' = -A$.

又使 OP' 等於 OP . 則 $P'M$ 等於 PM .

$$\therefore \sin A = \frac{PM}{OP} \quad \text{及} \quad \sin(-A) = \frac{-MP'}{OP} = \frac{MP}{OP},$$

由於此而 $\sin(-A) = -\sin A$

即 $\cos(-A)$, $\tan(-A)$ 等亦得以同樣之法而証之。

10. 任意之角 由於此而第二編中三角函數之定義及其公式(1)(2)(3)對於任意之角而合理。

11. 負角之餘角 第二編公式(4)即角 A 餘角之公式而以 A 爲 $-A$ 亦合於理也。

例如於 $\sin A = \cos(90^\circ - A)$ 式中以 A 爲 $-A$ 則

$$\sin(-A) = \cos\{90^\circ - (-A)\},$$

即
$$-\sin A = \cos(90^\circ + A).$$

證明 欲証此理於橫線 MN 上以 O 爲原點作直角三角形 OPM 又以 OQ 爲垂線於 OP 使 OQ 等於 OP QN 爲 MN 之垂線而以角 MOP 爲等於 A 則角 NOQ 等於九十度減 A \therefore 角 $NQO = A$.

故兩三角形 OPM , OQN 全相等即

$$PM = ON, \quad OM = NQ.$$

$$\therefore \sin MOP = \sin A = \frac{MP}{OP},$$

$$\cos MOQ = \cos(90^\circ + A) = \frac{-ON}{OP} = \frac{-PM}{OP},$$

由於此而
$$-\sin A = \cos(90^\circ + A),$$

即 $\sin(-A) = \cos\{90^\circ - (-A)\}$.

其他餘角之公式亦得以此法證其為合理由是下之公式可以定.

$$\left. \begin{aligned} \sin(90^\circ + A) &= \cos A, & \cos(90^\circ + A) &= -\sin A \\ \tan(90^\circ + A) &= -\cot A, & \cot(90^\circ + A) &= -\tan A \\ \sec(90^\circ + A) &= -\operatorname{cosec} A, & \operatorname{cosec}(90^\circ + A) &= \sec A \end{aligned} \right\} (2)$$

12. 補角之公式

$$\left. \begin{aligned} \sin(180^\circ - A) &= \sin A, & \cos(180^\circ - A) &= -\cos A \\ \tan(180^\circ - A) &= -\tan A, & \cot(180^\circ - A) &= -\cot A \\ \sec(180^\circ - A) &= -\sec A, & \operatorname{cosec}(180^\circ - A) &= \operatorname{cosec} A \end{aligned} \right\} (3)$$

何則以九十度減 A 為銳角故於公式(2)中用 $(90^\circ - A)$ 代 A 亦合理者也即

$$\sin\{90^\circ + (90^\circ - A)\} = \sin(90^\circ - A)$$

$$\therefore \sin(90^\circ - A) = \sin A$$

其他之公式亦得以同法明之.

13. 負角之補角 於公式(3)之中用 $-A$ 代 A . (11款之同法)則

$$\left. \begin{aligned} \sin(180^\circ + A) &= -\sin A, & \cos(180^\circ + A) &= -\cos A \\ \tan(180^\circ + A) &= \tan A, & \cot(180^\circ + A) &= \cot A \\ \sec(180^\circ + A) &= -\operatorname{cosec} A, & \operatorname{cosec}(180^\circ + A) &= -\sec A \end{aligned} \right\} (4)$$

14. 餘角及補角之推擴

$$\left. \begin{aligned} \sin(270^\circ - A) &= -\cos A, & \cos(270^\circ - A) &= -\sin A \\ \tan(270^\circ - A) &= \cot A, & \cot(270^\circ - A) &= \tan A \\ \sec(270^\circ - A) &= -\operatorname{cosec} A, & \operatorname{cosec}(270^\circ - A) &= -\sec A \end{aligned} \right\} (5)$$

何則. 蓋上之公式. 以銳角 $(90^\circ - A)$ 代 (4) 中之 A 者也.

又於公式 (5) 之中. 以 A 代 $-A$. 則

$$\left. \begin{aligned} \sin(270^\circ + A) &= -\cos A, & \cos(270^\circ + A) &= \sin A \\ \tan(270^\circ + A) &= -\cot A, & \cot(270^\circ + A) &= -\tan A \\ \sec(270^\circ + A) &= \operatorname{cosec} A, & \operatorname{cosec}(270^\circ + A) &= -\sec A \end{aligned} \right\} (6)$$

於公式 (6) 之中. 以 $(90^\circ - A)$ 代 A . 則

$$\left. \begin{aligned} \sin(360^\circ - A) &= -\sin A, & \cos(360^\circ - A) &= \cos A \\ \tan(360^\circ - A) &= -\tan A, & \cot(360^\circ - A) &= -\cot A \\ \sec(360^\circ - A) &= \sec A, & \operatorname{cosec}(360^\circ - A) &= -\operatorname{cosec} A \end{aligned} \right\} (7)$$

於公式 (7) 之中. 用 $-A$ 代 A . 則

$$\left. \begin{aligned} \sin(360^\circ + A) &= \sin A, & \cos(360^\circ + A) &= \cos A \\ \tan(360^\circ + A) &= \tan A, & \cot(360^\circ + A) &= \cot A \\ \sec(360^\circ + A) &= \sec A, & \operatorname{cosec}(360^\circ + A) &= \operatorname{cosec} A \end{aligned} \right\} (8)$$

15. 餘論 公式 (8) 之兩邊. 爲一無變動者. 學者宜加之意. 是蓋以全角之量. 超於三百六十度之時. 仍還於原象限之位置也. 可視第 6 款. 故

$$\sin(360^\circ + A) = \sin A,$$

又 n 若爲整數之時則

$$\sin(360^\circ n + A) = \sin A$$

其他之各函數亦同此理也。

例 題 六

次之各角問在第幾象限內。

1. 370° . 2. 420° . 3. 610° . 4. -40° .
5. -100° . 6. -365° . 7. -750° .

求以下各角正弦餘弦及正切之值。

8. 150° . 9. 135° . 10. -240° . 11. 330° .
12. -60° . 13. -225° . 14. 1020° .

次之各題以簡易之法書之。

15. $a \cos(90^\circ - A) + b \cos(90^\circ + A)$.
16. $\sin(90^\circ + A) \cos(90^\circ + A)$.
17. $(a + b) \tan(180^\circ - A) + (a + b) \cot(190^\circ + A)$.
18. $\frac{(a^2 + b^2) \cot(180^\circ + A)}{\cos(180^\circ + A)} + \frac{(a^2 + b^2) \tan(90^\circ - A)}{\cot 180^\circ - A}$.

第五編

關於兩角之函數

兩角之和及差

1. 正弦及餘弦 兩角之和及差之
 正弦, 餘弦之公式. 今示如下.

$$\left. \begin{aligned} \sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \sin(A-B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ \cos(A-B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \end{aligned} \right\} \dots\dots(1).$$

欲証此理. 以 $(A+B)$ 定為銳角於下圖

$$\text{角 } XO E = A, \quad \text{角 } EO F = B$$

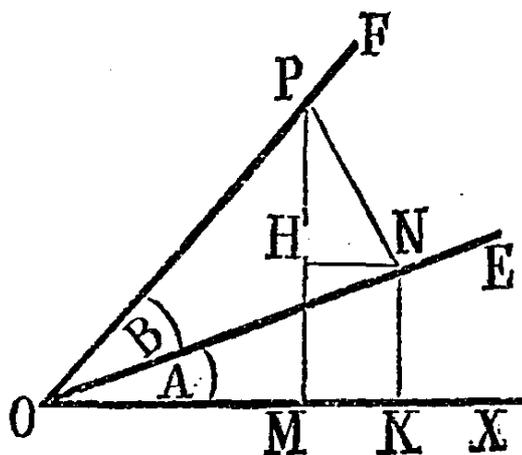
於是 角 $XO F = A + B$.

從 OF 上任意之點 P . 引垂線 PM 及 PN 至 OX 及 OE 上. 又從 N 引垂線 NK 及 NH 至 OX 及 MP 上. 於是

$$\text{角 } HPN = 90^\circ - \text{角 } HNP = \text{角 } HNO = A.$$

$$\begin{aligned} \text{由此而 } \sin(A+B) &= \sin XO F = \frac{MP}{OP} = \frac{KN + HP}{OP} \\ &= \frac{KN}{OP} + \frac{HP}{OP} = \frac{KN}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} + \frac{HP}{NP} \cdot \frac{NP}{OP} = \sin A \cos B + \cos A \sin B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(A+B) &= \cos \angle XOF = \frac{OM}{OP} \\ &= \frac{OK - HN}{OP} = \frac{OK}{OP} - \frac{HN}{OP} \\ &= \frac{OK}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} - \frac{HN}{NP} \cdot \frac{NP}{OP} \\ &= \cos A \cos B - \sin A \sin B\end{aligned}$$



於 $\cos(A+B)$ 之式中. 用
九十度減 A 而代 A . 則

$$\cos(90^\circ - A + B) = \cos(90^\circ - A) \cos B - \sin(90^\circ - A) \sin B$$

但 $\cos(90^\circ - A + B) = \cos\{90^\circ - (A - B)\} = \sin(A - B)$

$$\therefore \sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

以同理而 $\sin(A+B)$ 之式中. 用九十度減 A 代 A . 則

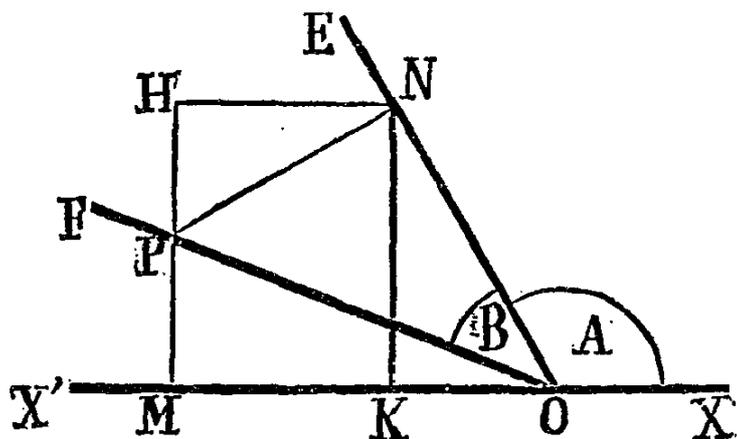
$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

2. 任意之角之和及差 於公式(1)
 A, B 之兩角. 或皆為鈍角與負角. 或一角為
鈍角與負角. 亦無不合理者也.

例如 $A+B$ 為鈍角之時. 而欲證明 $\sin(A+B)$. 可觀此
圖中各直線之關係. 皆與前圖相等. 但角 $HPN = 180^\circ - A$.

由此而

$$\sin(A+B) = \sin \angle XOF = \frac{MP}{OP} = \frac{KN - HP}{OP}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{KN}{OP} - \frac{HP}{OP} = \frac{KN}{ON} \frac{ON}{OP} - \frac{HP}{NP} \frac{NP}{OP} \\
 &= \sin(180^\circ - A) \cos B - \cos(180^\circ - A) \sin B = \sin A \cos B + \cos A \sin B
 \end{aligned}$$

又以 A, B 爲 $-A$ 及 $-B$. 則

$$\begin{aligned}
 \sin(-A - B) &= \sin -(A + B) = -\sin(A + B) \\
 &= -\sin A \cos B - \cos A \sin B,
 \end{aligned}$$

即 $\sin\{(-A) + (-B)\} = \sin(-A) \cos(-B) + \cos(-A) \sin(-B)$.

3. 正切及餘切 兩角之和及差之正切, 餘切公式今示之如下.

$$\left. \begin{aligned}
 \tan(A+B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\
 \cot(A+B) &= \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} \\
 \tan(A-B) &= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} \\
 \cot(A-B) &= \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot A - \cot B}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

證此之理如下

$$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}, \text{ (公式(1))}$$

$$= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}, \text{ (以 } \cos A \cos B \text{ 除分母及子.則)}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

取 $\tan(A+B)$ 之反商 $\cot(A+B)$. 則第二之公式可得第三第四之公式. 可以與前同樣之方法證之.

4. 以和及差改爲積之公式 今示如下.

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

求公式(1)第一及第三之和焉差. 又求第二及第四之和焉差. 今順序而示之如下.

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B,$$

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cos A \sin B,$$

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B,$$

$$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2 \sin A \sin B.$$

今 $\alpha = A+B$, $\beta = (A-B)$ 則

$A = \frac{1}{2}(a + \beta)$, $\beta = \frac{1}{2}(a - \beta)$ 以此而代用於上之四恆同式則

$$\sin a + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(a + \beta) \cos \frac{1}{2}(a - \beta),$$

以下做此。

例 題 七

證明示於下之恆同式。

$$1. \frac{\sin(A + B) + \sin(A - B)}{\cos(A + B) + \cos(A - B)} = \tan A.$$

$$2. \tan A + \tan B = \frac{\sin(A + B)}{\cos A \cos B}.$$

$$3. \tan A - \tan B = \frac{\sin(A - B)}{\cos A \cos B}.$$

$$4. \cot A + \tan B = \frac{\cos(A - B)}{\sin A \cos B}.$$

$$5. \frac{\tan A + \tan B}{\tan A - \tan B} = \frac{\sin(A + B)}{\sin(A - B)}.$$

$$6. \sec(a + \beta) = \frac{\sec a \sec \beta}{1 - \tan a \tan \beta}.$$

$$7. \frac{\tan a + \cot \beta}{\cot \beta - \tan a} = \cos(a - \beta) \sec(a + \beta).$$

$$8. \sin(A + B) \sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B.$$

$$9. \cos(A + B) \cos(A - B) = \cos^2 B - \sin^2 A.$$

$$10. \sin(a + \beta) \cos a - \cos(a + \beta) \sin a = \sin \beta.$$

$$11. \sin(A - 45^\circ) = \frac{\sin A + \cos A}{\sqrt{2}}.$$

12. $\sin(A + 45^\circ) = \frac{\sin A + \cos A}{\sqrt{2}}$.
13. $\cos A - \sin A = \sqrt{2} \cdot \cos(A + 45^\circ)$.
14. $\cos(A + 45^\circ) + \sin(A - 45^\circ) = 0$.
15. $\cos(A - 45^\circ) - \sin(A + 45^\circ) = 0$.
16. $2 \sin(\alpha + 45^\circ) \cos(\beta - 45^\circ) = \cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$.
17. $2 \sin(45^\circ - \alpha) \cos(45^\circ + \beta) = \cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)$.
18. $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} + \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin \gamma \sin \alpha} = 0$.
19. $\sin nA \cos A + \cos nA \sin A = \sin(n + 1)A$.
20. $\cos(n - 1)A \cos A - \sin(n - 1)A \sin A = \cos nA$.
21. $\cot(A - 45^\circ) = \frac{1 + \cot A}{1 - \cot A}$.
22. $\tan(A - 45^\circ) + \cot(A + 45^\circ) = 0$.
23. $\cot(A - 45^\circ) + \tan(A + 45^\circ) = 0$.
24. $\cos^2 A - \sin^2 A = \sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ + A) (1 + \sin A \cos A)$.
25. $\sin A + M) \cos(A - M) - \sin(B + M) \cos(B - M)$
 $= \cos(A + B) \sin(A - B)$.
26. $\frac{\tan(n + 1)A - \tan nA}{1 + \tan(n + 1)A \tan nA} = \tan A$.
27. $\frac{\tan(n + 1)A - \tan(n - 1)A}{1 + \tan(n + 1)A \tan(n - 1)A} = \tan 2A$.
28. $\frac{\sin(A + 3B) + \sin(3A + B)}{\sin 2A + \sin 2B} = 2 \cos(A + B)$.

29. $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{4}$ 之時.

則 $\tan(A+B) = \frac{3}{8}$, $\tan(A-B) = \frac{2}{3}$.

30. $\tan A = 1$, $\tan B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 之時. 則 $\tan(A-B) = 2 - \sqrt{3}$.

31. $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}}$, $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}$ 則 $\tan(A-B) = \cdot 375$.

32. $\tan \alpha = m$ 及 $\tan \beta = n$ 之時.

則 $\cos(\alpha + \beta) = (1 - mn) \div \sqrt{(1 + m^2)(1 + n^2)}$.

33. $\sin A + \sin B = a$, $\cos A + \cos B = b$

則 $\tan \frac{1}{2}(A-B) = \pm \sqrt{4 - a^2 - b^2} \div \sqrt{a^2 + b^2}$.

34. $\sin 29^\circ - \sin 1^\circ = 2 \sin 75^\circ \sin 14^\circ$.

35. $\cos 29^\circ + \cos 1^\circ = 2 \sin 75^\circ \cos 14^\circ$.

36. $\cos 1^\circ - \cos 11^\circ = 2 \cos 84^\circ \sin 5^\circ$.

37. $\sin 80^\circ + \sin 20^\circ = \sqrt{3} \cdot \sin 50^\circ$.

三角之和

5. 三角之和 應用兩角之和之公式

求三角之和. 則

$$\sin(A+B+C) = \sin\{(A+B)+C\}$$

$$= \sin(A+B) \cos C + \cos(A+B) \sin C$$

$$= (\sin A \cos B + \cos A \sin B) \cos C + (\cos A \cos B - \sin A \sin B) \sin C$$

$$\begin{aligned}
&= \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C \\
&\quad + \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C. \\
\cos(A+B+C) &= \cos(A+B) \cos C - \sin(A+B) \sin C \\
&= \cos A \cos B \cos C - \sin A \sin B \cos C \\
&\quad - \sin B \sin C \cos A - \sin C \sin A \cos B. \quad \downarrow
\end{aligned}$$

例 題 八

1. 證明下之恆同式.

$$\tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$$

2. $A+B+C$ 等於九十度之時則

$$\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 1.$$

3. $A+B+C$ 等於百八十度之時則

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C = 2.$$

4. $A+B+C$ 等於三百六十度之時則

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C.$$

5. 證明 $\sin(A+B+C) + \sin(A+B-C) = 2 \cos C \sin(A+B)$.

倍 角

5. 二倍角之公式 今示如下.

$$\left. \begin{aligned} \sin 2A &= 2 \sin A \cos A \\ \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A \\ &= 2 \cos^2 A - 1 \\ \tan 2A &= \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \end{aligned} \right\} (4)$$

證此之理如下

於 $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ 中，以 B 為等於 A ，則

$$\sin 2A = \sin A \cos A + \cos A \sin A = 2 \sin A \cos A.$$

又於 $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ 中，以 B 為等於 A ，則

$$\begin{aligned} \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= 1 - \sin^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A \\ &= \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) = 2 \cos^2 A - 1. \end{aligned}$$

再於 $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ 中，以 B 為等於 A ，則

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}.$$

7. 三倍角之公式 今示之如下。

$$\left. \begin{aligned} \sin 3A &= 3 \sin A - 4 \sin^3 A \\ \cos 3A &= 4 \cos^3 A - 3 \cos A \\ \tan 3A &= \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A} \end{aligned} \right\} (5)$$

於 $\sin(A+B)=\sin A \cos B + \cos A \sin B$ 中. 以 B 爲等於兩
 A . 則

$$\begin{aligned}\sin 3A &= \sin A \cos 2A + \cos A \sin 2A \\ &= \sin A(1-2\sin^2 A) + \cos A \cdot 2\sin A \cos A \\ &= \sin A - 2\sin^3 A + 2\sin A \cos^2 A \\ &= \sin A - 2\sin^3 A + 2\sin A(1-\sin^2 A) \\ &= 3\sin A - 4\sin^3 A.\end{aligned}$$

於 $\cos(A+B)=\cos A \cos B - \sin A \sin B$ 中. 以 B 爲等於兩
 A . 則

$$\begin{aligned}\cos 3A &= \cos A \cos 2A - \sin A \sin 2A \\ &= \cos A(2\cos^2 A - 1) - 2\sin^2 A \cos A \\ &= \cos A(2\cos^2 A - 1) - 2(1-\cos^2 A)\cos A \\ &= 4\cos^3 A - 3\cos A.\end{aligned}$$

於 $\tan(A+B)=\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ 中. 以 B 爲等於兩 A . 則

$$\begin{aligned}\tan 3A &= \frac{\tan A + \tan 2A}{1 - \tan A \tan 2A} \\ &= \frac{\tan A + \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}}{1 - \tan A \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}} \\ &= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}.\end{aligned}$$

例題九

證明以下之恆同式

1. $\operatorname{cosec} 2A = \frac{1}{2} \sec A \operatorname{cosec} A.$

2. $\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}.$

3. $\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}.$

4. $(\sin \frac{1}{2}A + \cos \frac{1}{2}A)^2 = 1 + \sin A.$

5. $(\sin \frac{1}{2}A - \cos \frac{1}{2}A)^2 = 1 - \sin A.$

6. $\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A} = \left(\frac{\tan \frac{1}{2}A + 1}{\tan \frac{1}{2}A - 1} \right)^2.$

7. $\frac{\sin a}{1 + \cos a} = \tan \frac{a}{2}.$

8. $\frac{\sin a}{1 - \cos a} = \cot \frac{a}{2}.$

9. $\operatorname{cosec} a - \cot a = \tan \frac{1}{2}a.$

10. $\frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta} = \frac{1 + \tan \frac{1}{2}\beta}{1 - \tan \frac{1}{2}\beta}.$

11. $\frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta} = \frac{\cot \frac{1}{2}\beta + 1}{\cot \frac{1}{2}\beta - 1}.$

12. $\cos^4 A - \sin^4 A = \cos 2A.$

13. $\cos^6 A + \sin^6 A = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2A.$

14. $\cos^6 A - \sin^6 A = \frac{1}{4} \cos 2A (3 + \cos^2 2A).$

15. $\frac{\sin 3a}{\sin a} - \frac{\cos 3a}{\cos a} = 2.$

16. $\frac{\sin 5\beta}{\sin \beta} - \frac{\cos 5\beta}{\cos \beta} = 4 \cos 2\beta.$

17. $\frac{\sin 75^\circ}{\sin 15^\circ} - \frac{\cos 75^\circ}{\cos 15^\circ} = 2 \tan 60^\circ.$

18. $\tan(45^\circ + A) - \tan(45^\circ - A) = 2 \tan 2A.$
19. $\tan(45^\circ + A) + \tan(45^\circ - A) = 2 \sec 2A.$
20. $\frac{\tan^2(45^\circ + A) - 1}{\tan^2(45^\circ + A) + 1} = \sin 2A.$
21. $\frac{\sec A + \tan A}{\sec A - \tan A} = \frac{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}A)}{\tan(45^\circ - \frac{1}{2}A)}.$
22. $\tan A = \frac{\sin A + \sin 2A}{1 + \cos A + \cos 2A}.$
23. $\frac{3 \sin A - \sin 3A}{3 \cos A + \cos 3A} = \tan^3 A.$
24. $\frac{\sin 3A - \sin A}{\cos 3A + \cos A} = \tan A.$
25. $\frac{1}{\tan 3A - \tan A} + \frac{1}{\cot A - \cot 3A} = \cot 2A.$
26. $\cot a - \tan a = 2 \sqrt{\left(\frac{1 + \cos 4a}{1 - \cos 4a}\right)}.$
27. $\sqrt{\left(\frac{1 - \cos 3\beta}{1 - \cos \beta}\right)} = 1 + 2 \cos \beta.$
28. $\left(\frac{3 \sin \gamma - \sin 3\gamma}{3 \cos \gamma + \cos 3\gamma}\right)^2 = \left(\frac{\sec 2\gamma - 1}{\sec 2\gamma + 1}\right)^3.$
29. $\sin \theta = 2^n \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} \cos \frac{\theta}{2^3} \cdots \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} \sin \frac{\theta}{2^n}.$

三角函數之值

8. 特別之角 如三十度 四十五度 六

十度之三角函數。既於第二編中求得。此處乃用本編之公式。求十五度十八度七十五度等特別角之函數。

(第一) 求十五度之三角函數。

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ,\end{aligned}$$

但 $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$

$$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\therefore \sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \div \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}.$$

(第二) 求十八度之三角函數。

$$\sin 36^\circ = \cos(90^\circ - 36^\circ) = \cos 54^\circ,$$

即 $\sin 2(18^\circ) = \cos 3(18^\circ),$

由於公式(4)及(5)而

$$2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = 4 \cos^3 18^\circ - 3 \cos 18^\circ,$$

而以餘弦十八度除此方程式之兩邊則

$$2 \sin 18^\circ = 4 \cos^2 18^\circ - 3,$$

即 $2 \sin 18^\circ = 4(1 - \sin^2 18^\circ) - 3,$

故 $4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1 = 0,$

用二次方程式之解法而 $\sin 18^\circ = \frac{\pm \sqrt{5} - 1}{4}$

而銳角之正弦爲正數量故 $\pm \sqrt{5}$ 之符號內取其正符號即

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

又 $\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \frac{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}{4}$

$$\begin{aligned} \tan 18^\circ &= \frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)}{\frac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{2(\sqrt{5} + 1)\sqrt{5}}} \\ &= \sqrt{\frac{(3 - \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)\sqrt{5}}{20}} = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{5}\sqrt{5}\right)}. \end{aligned}$$

(第三) 求七十五度之三角函數.

$$\sin 75^\circ = \cos(90^\circ - 75^\circ) = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}},$$

$$\cos 75^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ) = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}},$$

$$\tan 75^\circ = \cot(90^\circ - 75^\circ) = \cot 15^\circ.$$

$$= \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}.$$

9. 注意 特別角之三角函數之值由於和及

差或倍角之恆同式而得

$$\text{例如 } 3^\circ = 18^\circ - 15^\circ, \quad 6^\circ = 2(3^\circ) = 36^\circ - 30^\circ,$$

$$21^\circ = 3^\circ + 18^\circ = 36^\circ - 15^\circ.$$

例 題 十

證明以下之各題

$$1. \quad \sin 3^\circ = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8\sqrt{2}}.$$

$$2. \quad \cos 36^\circ = (\sqrt{5}+1) \div 4.$$

$$3. \quad \sin 36^\circ = \sqrt{(10-2\sqrt{5})} \div 4.$$

$$4. \quad \sin 9^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{3+5} - \sqrt{5-\sqrt{5}}).$$

$$5. \quad \sec 54^\circ = \sqrt{2(1+\sqrt{2})}.$$

$$6. \quad \cos 12^\circ = \frac{1}{8}(\sqrt{5}-1 + \sqrt{30+6\sqrt{5}}).$$

$$7. \quad \tan 27^\circ = \sqrt{5}-1 - \sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

$$8. \quad \tan 22^\circ 30' = \sqrt{2}-1.$$

$$9. \quad \sin^2 24^\circ - \sin^2 6^\circ = \frac{1}{8}(\sqrt{5}-1).$$

$$10. \quad \frac{\cos 27^\circ - \sin 27^\circ}{\cos 27^\circ + \sin 27^\circ} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}.$$

$$11. \quad \tan 18^\circ \tan 54^\circ = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

第 六 編

數及三角函數之對數

對 數

1. 對數 一數之某方乘等於他之一數時其方乘之指數稱爲以某數爲底數之某數對數。

例如 $a^x=y$ 一式是 x 爲以 a 爲底數之 y 對數可以 $x=\log_a y$ 記之。

2. 對數之性質 其說明如下。

(第一) $a^0=1$ 之時, $\log_a 1=0$ 。

(第二) $\log_a x=p$ 及 $\log_a y=q$ 之時, $x=a^p$,

$y=a^q$, $\therefore x \times y = a^{p+q}$,

$\therefore \log_a(x \times y) = p+q = \log_a x + \log_a y$ 。

同理 $\log_a(x \times y \times z \dots) = \log_a x + \log_a y + \log_a z + \dots$

由於此而積之對數等於其因子之對數之和。

(第三) 由於前之假定而

$$x \div y = a^p \div a^q = a^{p-q},$$

$$\therefore \log_a(x \div y) = p - q = \log_a x - \log_a y.$$

由是而商之對數等於從被除數之對數減去除數之對數之差。

(第四) $x = a^p$ 之時, $x^m = a^{mp}$,

$$\therefore \log_a x^m = \log_a a^{mp} = mp = m \times \log_a x.$$

由是而一數之某乘方之對數等於以方乘指數乘其數之對數。

(第五) 以 m 為等於 $\frac{1}{n}$ 則

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x.$$

由是而一數之某方根之對數等於用其指數除其數之對數。

(例一) 求 $\log_2 8$, $\log_8 2$, $\log_{10} \sqrt[3]{1000}$ 及 $\log_{10} 0.0001$.

$$8 = 2^3, \quad 2 = 8^{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt[3]{1000} = 10^{\frac{3}{3}}, \quad 0.0001 = 10^{-4},$$

$$\therefore \log_2 8 = 3, \quad \log_8 2 = \frac{1}{3}, \quad \log_{10} \sqrt[3]{1000} = \frac{3}{3}, \quad \log_{10} 0.0001 = -4.$$

(例二) 知 $\log_{10} 2 = .301030$ 及 $\log_{10} 3 = .477121$

求 $\log_{10}12$, $\log_{10}75$, 及 $\log_{10}\sqrt[3]{2880}$.

$$\begin{aligned}\log_{10}12 &= \log_{10}(2^2 \times 3) = \log_{10}2^2 + \log_{10}3 \\ &= 2\log_{10}2 + \log_{10}3 = 2 \times \cdot 301030 + \cdot 477121 = 1\cdot 0779181,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10}75 &= \log_{10}(10^2 \times 3 \div 2^2) = \log_{10}10^2 + \log_{10}3 - \log_{10}2^2 \\ &= 2\log_{10}10 + \log_{10}3 - 2\log_{10}2 \\ &= 2 \times 1 + \cdot 477121 - 2 \times \cdot 301030 = 1\cdot 875061.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10}\sqrt[3]{2880} &= \frac{1}{3}\log_{10}2880 = \frac{1}{3}\log_{10}(10 \times 2^5 \times 3^2) \\ &= \frac{1}{3}(\log_{10}10 + 5\log_{10}2 + 2\log_{10}3) \\ &= \frac{1}{3}(1 + 5 \times \cdot 301030 + 2 \times \cdot 477121) = 1\cdot 153131.\end{aligned}$$

例 題 十 一

求以下各題之值

1. $\log_2 32$. 2. $\log_4 32$. 3. $\log_9 3\sqrt{3}$.

知 $\log_{10}2 = \cdot 301030$ 及 $\log_{10}3 = \cdot 477121$ 而求以下各題之值.

4. $\log_{10}3\cdot 75$. 5. $\log_{10}324$. 6. $\log_{10}\sqrt[5]{\frac{5}{18}}$.

對 數 表

3. 常用對數 如示於前之對數. 得用任意之數爲底數. 而爲計算上便利. 是以十

爲底數者。故普通所用者。爲以十爲底數。因名之曰常用對數。

以下所用者。皆爲常用對數。故 \log_{10} 之符號。省作 \log 。

$$10^0=1, 10^1=10; 10^2=100, 10^3=1000, \dots\dots\dots$$

$$10^{-1}=0.1, 10^{-2}=0.01, 10^{-3}=0.001, \dots\dots\dots$$

$$\therefore \log 1=0, \log 10=1, \log 100=2, \log 1000=3, \dots\dots\dots$$

$$\log 0.1=-1, \log 0.01=-2, \log 0.001=-3, \dots\dots\dots$$

4. 示標及假數 數字及順序皆同之二數。而其值相異者。則其對數僅整數之部有異。

$$\begin{aligned} \text{例如 } \log 156.4 &= \log(1.564 \times 100) \\ &= \log 1.564 + \log 100 = \log 1.564 + 2 \end{aligned}$$

而在對數表中。常以小數爲正數。

例如 $\log 0.2 = -1.698970 = -2 + 0.301030 = \bar{2}.301030$ (對數之記法)

記對數而以其小數部爲正數時。名其小數部曰假數。名其整數部曰示標。

例如 $\log 0.2 = \bar{2}.301031$ 。是 -2 爲示標而 $.301030$ 爲假數也。

5. 求示標之法 求任意數對數之示標。如此數大於一之時。以其整數部爲 n 之位數。則此數比十之 n 方乘小。比十之 $(n-1)$ 方乘大。故此數之對數。在 n 與 $(n-1)$ 之間。故此數爲 $(n-1) +$ 假數。

由是而大於一之數之示標。比其整數之位數小一。

又如此數小於一之時。則以 n 爲在其小數首位之 0 之數。於是此數比 10^{-n} 小。比 10^{-n-1} 大。故此數之示標爲 $-(n+1)$ 。

由是而比一小之數之示標。比其小數首位之 0 之數多一。而爲負數。

(例) 百五十六之假數之示標爲 2. 15.6 之假數之示標爲 1. 1.56 之假數之示標爲 0. 156 之假數之示標爲 -1. 0156 之假數之示標爲 -2 也。

6. 反法 對數表之中。從一至百之對數。示標與假數皆記入。而百以上之對數。僅記其假數。故決定示標。爲必要者也。

例如百六十五之對數之假數爲 193125. 而百五十六之示標爲 2. 已由前欸而知之.

$$\therefore \log 156 = 2.193125$$

$$\log 1.56 = 0.193125$$

$$\log 156 = \bar{1}.193125.$$

7. 對數表用法 對數表之引法. 爲如下之兩則.

(第壹) 求任意之數之對數.

例如求 2845672 之對數

檢對數表第五頁第壹行 N 欄內 284. 於此同列與第一列 5 縱橫相會處之 4082. 而此部分之首位爲 45. 故 2845 之對數之假數爲 454082. 與此 4082 同列而差之欄爲 153. 而 672 爲 2845 之次位. 故對於 2845 之假數爲小數. $672 \times 153 = 103$ 但此積之小數位. 計算時四捨而五入. 2845 之對數之假數爲 454082. 故 2845672 之假數. 爲 $454082 + 103 = 454185$. 而原數之示標. 由於 5 欸而爲 6.

$$\therefore \log 2845672 = 6.454185.$$

又如求 44682 之對數.

如前之檢對數表第七頁第壹行 446. 與第壹列 8 相會處爲 * 113. 此處之星點爲 0 之代. 且用首位 64 之次

之首位 65. 而與 *113 同例之差之欄內爲 97. 而 4468 之次位爲 2. 故 $2 \times 97 = 19$.

故假數爲 $650113 + 19 = 650132$.

由是而 $\log 44682 = 4.650132$.

(第二) 求任意對數之原數.

知壹數之對數爲 2.535429. 而求其原數之值.

檢對數表第七頁. 假數 535421 之原數爲 343. 此假數之同列之差爲 126. 而既知假數 535429 與 535421 之差爲 8. 故 $8 \div 126 = .064$

$$\therefore 343 + .064$$

由是而 $2.535429 = \log 343.064$.

例 題 十 二

求以下各數之對數.

- | | | |
|--------------|-------------|-------------|
| 1. 2200. | 2. 24.36. | 3. 2.698. |
| 4. 3585.9. | 5. 42.6634. | 6. 331.957. |
| 7. 2519.38. | 8. .538329. | 9. .087346. |
| 10. .007389. | | |

求以下各對數之原數

11. 1.240050.	12. 2.431203.
13. 3.503780.	14. .138934.
15. $\bar{1}$.368730.	16. $\bar{2}$.448375.
17. $\bar{3}$.538630.	18. .843970.
19. $\bar{1}$.867372.	20. .003985.

三角函數對數表

8. 三角函數之對數 三角函數表已於第二編 14. 款中說明. 而其對數表. 須加十以計算. 又 \log 之符號略作 L . 又所示之差. 以 $1''$ 而計.

例如於三角函數表中.

$$\sin 30^\circ 5' = .50125$$

以此檢對數表. 則

$$\log .50126 = \bar{1}.700062 = 9 - 10 + .700062,$$

$$\therefore L. \sin 30^\circ 5' = 9.700062 - 10.$$

(例一) 求 $L \sin 30^\circ 5' 10''$ 之假數.

據表 $L \sin 30^\circ 5' = 9.700062 - 10$,

檢表 $1''$ 之差 $= 3.63$, $\therefore 10''$ 之差 $= 3.63 \times 10 = 36$.

此差為相當於對數之末位者.

由是而 $L \sin 30^\circ 5' 10'' = 9.700062 + .000036 - 10$
 $= 9.700098 - 10.$

(例二) 求 $L \cos 68^\circ 53' 35''$ 之假數.

據表 $L \cos 68^\circ 53' = 9.556620 - 10,$

$1''$ 之差 $= 5.45,$ $\therefore 35''$ 之差 $= 5.45 \times 35 = 191,$

餘弦乃從角之增而減其值故

$$L \cos 68^\circ 53' 35'' = 9.556620 - .000191 - 10 = 9.556429 - 10.$$

(注意) 餘弦餘切之時用其差以減.

(例三) 對數 9.846403 之正切之角其值幾何.

據表 $9.846302 = L \tan 35^\circ 4',$ $1''$ 之差 $= 4.48,$

又 $9.846403 - 9.846302 = .000101,$

由是而 $101 \div 4.48 = 23$ 即 $23'',$

$$\therefore 9.846403 = L \tan 35^\circ 4' 23''.$$

第 七 編

三 角 形

角 及 邊 之 關 係

1. 三角形 直角三角形之解法.既於第三編中說明.此編之中.爲論一般之三角形者也.

2. 函數之正負 於任意之三角形 ABC.

$$A + B + C = 180^\circ,$$

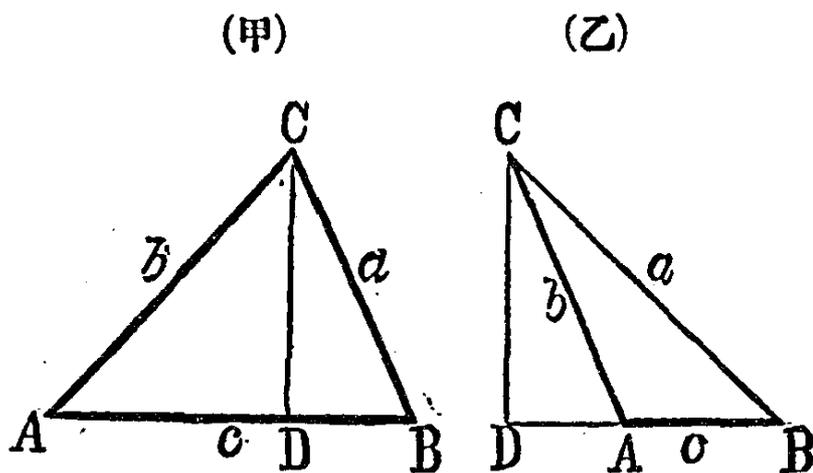
故 $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ 皆爲銳角.

由是而 A, B, C 之正弦常爲正. A, B, C 之餘弦正切.則有負有正.而 $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ 則所有之三角函數皆爲正.

3. 三角及邊之關係 於任意之三角形 ABC.

$$BC = a, CA = b, AB = c,$$

$$\text{周邊} = a + b + c = 2s, \text{面積} = S,$$



4. 二邊對角之公式.

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}, \quad \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}, \quad \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{c}{a}, \quad (1).$$

如上圖之 CD. 爲 AB 或 AB 引長線之垂線.

在甲圖 $CD = b \sin A = a \sin B,$

在乙圖 $CD = b \sin CAD = b \sin (180^\circ - A)$

$$= b \sin A = a \sin B.$$

由是而不論爲甲與乙. 皆 $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b},$

同理 $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}, \quad \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{c}{a}.$

5. 三邊一角之公式.

$$\left. \begin{aligned} 2bc \cos A &= b^2 + c^2 - a^2 \\ 2ca \cos B &= c^2 + a^2 - b^2 \\ 2ab \cos C &= a^2 + b^2 - c^2 \end{aligned} \right\} \quad (2).$$

CD 爲 AB 之垂線故 $CD^2 = l^2 - AD^2 = a^2 - BD^2$.

在甲圖 $CD^2 = b^2 - AD^2 = a^2 - (c - AD)^2$

即 $b^2 - AD^2 = a^2 - c^2 + 2cAD - AD^2$, $\therefore 2cAD = b^2 + c^2 - a^2$.

但 $AD = b \cos A$ $\therefore 2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$.

在乙圖 $CD^2 = b^2 - AD^2 = a^2 - (c + AD)^2$,

即 $b^2 - AD^2 = a^2 - c^2 - 2cAD - AD^2$, $\therefore -2cAD = b^2 + c^2 - a^2$.

但 $AD = b \cos ACD = b \cos (180^\circ - A) = -b \cos A$,

$$\therefore 2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2.$$

6. 對數之計算 以公式(2)爲對數之計算. (即僅用乘除之計算) 而導於一項式今示之如下.

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \\ \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \\ \tan \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \end{aligned} \right\} \quad (3).$$

$$\text{從 (2) } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ 即 } 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4bc}\right)} = \sqrt{\frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}}, \\ &= \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(2s-2c)(2s-2b)}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}. \end{aligned}$$

$$\text{又 } 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}} = \sqrt{\frac{2s(2s-2a)}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}. \end{aligned}$$

於是用 $\cos \frac{A}{2}$ 除 $\sin \frac{A}{2}$ 則可得 $\tan \frac{A}{2}$.

$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$, $\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$ 等可以同理推得

之。

7. 兩角之差及二邊夾角之公式
今示於下。

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2} \quad (4)$$

據公式 (1) $\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$,

$$\begin{aligned} \therefore \frac{b-c}{b+c} &= \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} \\ &= \cot \frac{B+C}{2} \tan \frac{B-C}{2} = \cot \frac{180^\circ - A}{2} \tan \frac{B-C}{2} \\ &= \cot \left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) \tan \frac{B-C}{2} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B-C}{2} \\ \therefore \tan \frac{B-C}{2} &= \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

而 $\tan \frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{B}{2}$ 等皆可以同理推得之。

8. 面積之公式.

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2} bc \sin A \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned} \right\} (5).$$

$$S = \frac{1}{2} (AB \times CD) = \frac{1}{2} c \times b \sin A, \text{ (甲乙兩圖)}$$

$$= \frac{1}{2} bc \sin A = bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{由 (3)} \quad &= bc \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \end{aligned}$$

例題十三

於直角三角形 ABC. 角 C 等於九十度之時. 則以下各題之證如何.

$$1. \tan^2\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right) = \frac{c-a}{c+a}. \quad 2. \tan^2\left(45^\circ + \frac{1}{2}A\right) = \frac{c+a}{c-a}.$$

$$3. \cos 2A = \frac{b^2 - a^2}{c^2}. \quad 4. \tan 2A = \frac{2ab}{b^2 - a^2}.$$

$$5. \sin 3A = \frac{3ab^2 - a^3}{c^3}. \quad 6. \cos 3A = \frac{b^3 - 3a^2b}{c^3}.$$

$$7. \tan \frac{1}{2}A = \frac{a}{b+c}. \quad 8. \sin^2 \frac{1}{2}A = \frac{c-a}{2c}.$$

於任意之三角形 ABC. 則以下各題之證如何.

$$9. \frac{\sin A + 2 \sin B}{\sin C} = \frac{a + 2b}{c}.$$

$$10. \frac{\sin^2 A - m \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{a^2 - mb^2}{c^2}.$$

$$11. (a+b) \cos \frac{C}{2} = c \cos \frac{A-B}{2}.$$

$$12. (b-c) \cos \frac{A}{2} = a \sin \frac{B-C}{2}.$$

$$13. a = b \cos C + c \cos B.$$

$$14. a \sin(B-C) + b \sin(C-A) + c \sin(A-B) = 0.$$

$$15. \frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{b-c}{\sin B - \sin C}.$$

$$16. \frac{b-c}{a} = \frac{\cos B + \cos C}{1 - \cos A}.$$

$$17. (b+c)\sqrt{bc \sin B \sin C} = b^2 \sin C + c^2 \sin B.$$

$$18. a+b+c = (b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C.$$

$$19. \tan A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C}. \quad 20. \frac{\tan B}{\tan C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + c^2 - b^2}.$$

$$21. c^2 = (a+b)^2 \sin^2 \frac{1}{2}C + (a-b)^2 \cos^2 \frac{1}{2}C.$$

$$22. a^2, b^2, c^2 \text{ 等爲等差級數之時. } \frac{\cos A}{a}, \frac{\cos B}{b}, \frac{\cos C}{c}$$

等亦爲等差級數. 試證明之.

$$23. C=60^\circ \text{ 之時 } \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$$

24. 三角形之三邊爲 $\frac{x}{y} + \frac{y}{z}$, $\frac{y}{z} + \frac{z}{x}$, $\frac{z}{x} + \frac{x}{y}$ 之時其面積爲 $\sqrt{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)}$. 試證明之.

三 角 形 解 法

9. 三角形之解法 三角形之三邊及三角共爲六部分. 若知其內之三部分時. (最少知一邊) 其他之各部分皆可以決定. 又當特別之時(即直角三角形)其解法已示於第三編中. 此編所論者爲任意之三角形也

邊及角之計算當非常煩雜之時，可用對數表。

10. 既知二角及一對邊

A, B 及 a 爲已知數，而求 b 之值。

據公式(1)
$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}.$$

以此爲對數式則

$$\log b = \log a + L \sin B - L \sin A.$$

(例一) $A = 30^\circ, B = 46^\circ, a = 5.$

$$b = \frac{5 \sin 46^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{5 \times .71934}{\frac{1}{2}} = 7.1934.$$

(例二) $A = 72^\circ 44' 5'' , B = 15^\circ 19' 51'' , a = 250.4$

$$\log b = \log 250.4 + L \sin 15^\circ 19' 51'' - L \sin 72^\circ 44' 5'',$$

$$\begin{array}{rcl} \therefore \log 250.4 & = & 2.398634 \\ L \sin 15^\circ 19' 51'' & = & 9.422249 - 10 \\ \hline & & 11.820883 \\ L \sin 72^\circ 44' 5'' & = & 9.979976 - 10 \\ \hline \log b & = & 1.840907, \end{array}$$

$$\therefore b = 69.328.$$

11. 既知二邊及一對角 a, b 及 A 爲已知之數，而求 B 之值。

據公式(1) $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$

此對數式 $L \sin B = b \log + L \sin A - \log a.$

$\sin B$ 之數量無論其為銳角或鈍角皆屬於正數量故欲決定 B 之值有下之二項.

第一 $b < a$ 之時 $B < A$

第二 $b > a$ 之時 $B > A$ 但此項中之 B 其值有二.

何則以 B 之值為 β 則 β 大於 A 故百八十度減 β 亦大於 A 而

$$\sin B = \sin \beta = \sin(180^\circ - \beta)$$

即 B 之值得 β 與 $(180^\circ - \beta)$ 之兩答.

(例一) $a = 10, b = 5, A = 50^\circ.$

$$\sin B = \frac{5 \sin 50^\circ}{10} = \frac{5 \times .76604}{10} = .38302.$$

$$\therefore B = 22^\circ 32'.$$

但 b 小於 a 所以 B 小於 A 由是而此題之解答僅一.

(例二) $a = 379.41, b = 483.74, A = 34^\circ 11'.$

$$L \sin B = \log 483.74 + L \sin 34^\circ 11' - \log 379.41,$$

$$\therefore \log 483.74 = 2.684612$$

$$L \sin 34^\circ 11' = 9.749615 - 10$$

$$\underline{12.434227 - 10}$$

$$\log 379.41 = 2.579109$$

$$L \sin B = 9.855118 - 10$$

$$\therefore B=45^{\circ}45'.$$

但 b 大於 a . 故 B 大於 A .

由是而有 $B=45^{\circ}45'$ }
 或 $B=180^{\circ}-45^{\circ}45'=134^{\circ}15'$ } 之兩解答

12. 三邊皆知 知 a, b, c 而求 A .

據公式(2)
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

又因用對數之計算據公式(3)

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

此對數式

$$L \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \{ \log s + \log(s-a) - \log b - \log c \}$$

(例一) $a=7, b=5, c=3.$

$$\cos A = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 3} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2},$$

但 $\cos 60^{\circ} = \frac{1}{2} \therefore \cos 120^{\circ} = \cos(180^{\circ} - 60^{\circ}) = -\cos 60^{\circ},$

$$\therefore A = 120^{\circ}.$$

(例二) $a=275.35, b=189.28, c=301.47.$

但 $s = \frac{1}{2}(275.35 + 189.28 + 301.47) = 383.05,$

$$s - a = 383.05 - 275.35 = 107.70$$

由對式而

$$\log 383.05 = 2.583256$$

$$\log 107.70 = 2.032216$$

$$\hline 4.615472$$

$$\log 189.98 = 2.277104$$

$$\hline 2.338268$$

$$\log 301.47 = 2.479241$$

$$\hline 2) 19.859024 - 20$$

$$L \cos \frac{1}{2}A = 9.929512 - 10$$

$$\therefore \frac{1}{2}A = 21^\circ 45' 28.5'' \quad \therefore A = 63^\circ 30' 57''.$$

13. 既知二邊及夾角 知 b, c, A 三部分而求他之部分.

據公式(2) $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}.$

又用對數式計算則據公式(4)

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{1}{2}A,$$

此對數式

$$L \tan \frac{B-C}{2} = \log(b-c) + L \cot \frac{1}{2}A - \log(b+c),$$

由此公式以得 $(B-C)$. 而 $(B+C)$ 等於百八十度減 A . 故 B 及 C 可推算而得.

(例一) $b = 35, c = 21, A = 120^\circ.$

$$a = \sqrt{35^2 + 21^2 - 2 \times 35 \times 21 \cos 120^\circ}$$

$$= \sqrt{1225 + 441 - 480 \times -\frac{1}{2}} = 49.$$

(例二) $b = 456.12$, $c = 296.86$, $A = 74^\circ 20'$.

故 $b - c = 456.12 - 296.86 = 159.26$,

$$b + c = 456.12 + 296.86 = 752.98.$$

由是而

$$L \tan \frac{B-C}{2} = \log 159.26 + L \cot 37^\circ 10' - \log 752.98,$$

$$\log 159.26 = 2.202107$$

$$L \cot 37^\circ 10' = 10.120259 - 10$$

$$\hline 12.322366 - 10$$

$$\log 752.98 = 2.876783$$

$$L \tan \frac{B-C}{2} = 9.445583 - 10$$

$$\therefore \frac{B-C}{2} = 15^\circ 35' 18'',$$

又 $\frac{B+C}{2} = \frac{180^\circ - A}{2} = \frac{180^\circ - 74^\circ 20'}{2} = 52^\circ 50'$,

$$\therefore B = \frac{B+C}{2} + \frac{B-C}{2} = 52^\circ 50' + 15^\circ 35' 18'' = 68^\circ 25' 18'',$$

$$C = \frac{B+C}{2} - \frac{B-C}{2} = 52^\circ 50' - 15^\circ 35' 18'' = 37^\circ 14' 42''.$$

例題十四

不用表而求以下之題

1. b 等於八. c 等於五. A 等於六十度. 則 a 之值幾何.

2. a 等於 m . b 等於 n . c 等於 $\sqrt{(m^2+mn+n^2)}$. 則最大角之值若干.

3. a 等於二. b 等於 $\sqrt{6}$. c 等於 $(1+\sqrt{3})$. 問其各角如何.

4. a 等於十七. b 等於二十五. c 等於二十六. 則問 S 之值幾何.

5. a 等於 $2(\sqrt{3}+1)$. B 等於四十五度. C 等於六十度. 問 S 之值幾何.

僅用三角函數表而解以下之各題.

6. a 等於七. b 等於八. c 等於九之時. 求其最大角之值.

7. a 等於八. b 等於十. c 等於十二之時. 求其最小角之值.

8. b 比 c 等於四比五. a 等於千. A 等三十七度十九分. 則 b 之值幾何.

9. b 等於三十五. c 等於二十一. A 等於五十度. 則 a 之值幾何.

用對數表而解以下之各題.

10. $a=374.5$, $b=576.2$, $c=759.3$, 求角 A 之值.

11. $a=4001$, $b=9760$, $c=7942$, 求角 A 之值.

12. $A=86^{\circ}19'$, $b=4930$, $c=5471$, 求角 B 之值.

13. $B=32^{\circ}58'$, $c=1873.5$, $a=764.2$, 求角 C 之值.

14. $B=74^{\circ}10'$, $C=62^{\circ}45'$, $b=3720$, 求 c 之值.

15. $B=123^{\circ}7'20''$, $C=15^{\circ}9'$, $c=9964$, 求 a 之值.

於以下之各題求其他之二角.

16. $C=100^{\circ}37'$, $b=1450$, $c=6374$,

17. $C=52^{\circ}10'$, $b=643$, $c=872$.

18. $A=76^{\circ}2'30''$, $b=1000$, $a=2000$.

19. $C=54^{\circ}23'$, $b=873.4$, $c=752.8$.

20. $C=18^{\circ}21'$, $b=674.5$, $c=269.7$.

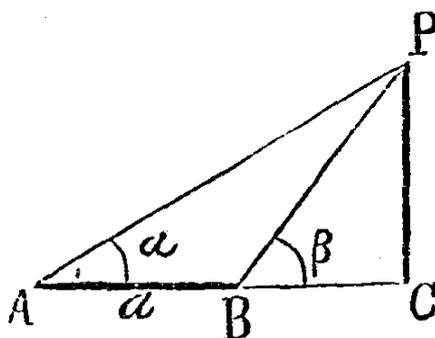
第八編

距離及高之測法

1. 距離及高之測法 此法之最簡單者已示之於第三編中此編中所示為以他之方法說明者。

2. 求隔離之點之高 以 P 為隔離之點以 PC 為其高。

(第一法) 於 A 處測 P 得仰角 α 從 A 正向 P 而前行至 B 處其所測得之仰角為 β 再測 AB 之距離為 a 於



是在三角形 ABP. 角 APB = $\beta - \alpha$. 故據第七編公式(1)而

$$AP = \frac{AB \sin ABP}{\sin APB} = \frac{a \sin(180^\circ - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

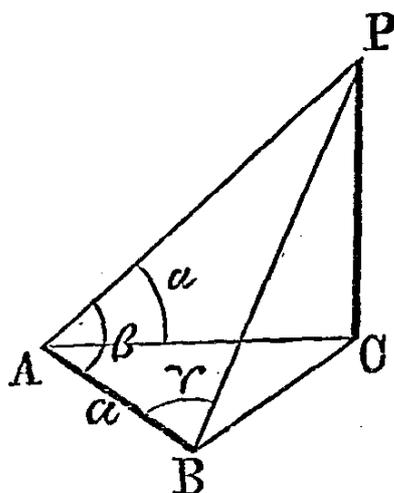
$$\therefore PC = AP \sin \alpha = \frac{a \sin \beta \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$

(第二法) 於 A 處測 P 得仰角 α 而與 AP 成 β 角之 AB 距離為 a . BP 與 AB 所成之交角為 γ . 於是三角形

APB. 由於第七編公式(1)而

$$\begin{aligned} AP &= \frac{AB \sin ABP}{\sin APB} \\ &= \frac{a \sin \gamma}{\sin(180^\circ - \beta - \gamma)} \\ &= \frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}. \end{aligned}$$

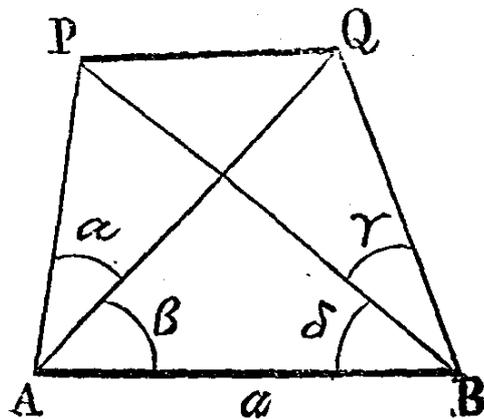
$$\therefore PC = AP \sin PAC = \frac{a \sin \gamma \sin \alpha}{\sin(\beta + \gamma)}.$$



3. 難於互視兩點之距離之測法

P 及 Q 爲兩點. PQ 爲所求之距離.

於 A 處測得 AP, AQ 之交角 α . 測得 AB, AQ 之交角 β . 再於 B 處測得 BP, BQ 之交角 γ . 測得 BP, BA 之交角 δ . 而 AB 之距離等於 a . 於是在三角 APB. 據第七編公式(1)而



$$AP = \frac{AB \sin ABP}{\sin APB} = \frac{a \sin \delta}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta - \delta)} = \frac{a \sin \delta}{\sin(\alpha + \beta + \delta)},$$

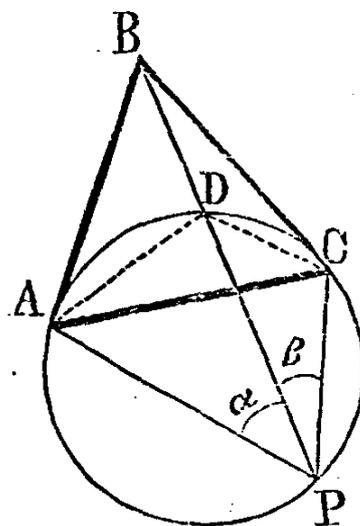
又於三角形 AQB.

$$AQ = \frac{AB \sin ABQ}{\sin AQB} = \frac{a \sin(\gamma + \delta)}{\sin(180^\circ - \beta - \gamma - \delta)} = \frac{a \sin(\gamma + \delta)}{\sin(\beta + \gamma + \delta)}.$$

於三角形 PAQ. 而有 AP, AQ 及角 PAQ 爲已知數則由第七編公式(4). 而得角 APQ 與角 AQP 之差故 PQ 可推算而得.

4. 三點問題 知 A, B, C 三點之位置在 P 而測得至各點所夾之角. 則從 P 至各點之距離. 可推算而得.

通過 A, C, P 三點而畫一圓. 以 BP 連結直線與圓周相交之處爲 D. 而 AB 等於 c. BC 等於 a. CA 等於 b. 角 APB 等於 α . 角 BPC 等於 β . 於是在三角形 ADC. 角 DCA 等於角 APD. 即等於 α . 角 DAC 等於角 DPC. 即等於 β . 由是而



$$AD = \frac{AC \sin ACD}{\sin ADC} = \frac{b \sin \alpha}{\sin \alpha (180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{b \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$$

又於三角 ABD. 角 BAD 等於 α 減 β . 及二邊 AD, AB 等於 c. 此三者皆爲已知數. 故角 ABD 可推算而得.

再於三角形 ABP. 一邊 AB 等於 c. 及二角 ABP, APB 等於 α . 此三者亦爲已知數. 故

$$PA = \frac{AB \sin ABP}{\sin APB} = \frac{c \sin ABP}{\sin A}$$

而 PB 及 PC 亦可以同理算得。

(註) 此題為據地圖或海圖而望遠隔之點距離之測法於港灣測量多用之。

例題十五

1. 從一市之 A 點至兩驛之 B 點及 C 點其所通之街道均為一直線者而 AB 等於三里 AC 等於里半兩街夾成之角為六十度問 B, C 之距離若干。

2. 在河岸測對岸樹之頂點得仰角六十度以一直線退後四十尺則測得樹之頂點為仰角三十度問樹高及河濶各若干。

3. 在塔之正南 A 處測得仰角三十度又至 A 之正西 B 處測得仰角十八度是塔之高為 $\frac{AB}{\sqrt{(2+2\sqrt{5})}}$ 試證明之。

4. 有甲乙二船同時出港而甲船每時行七里半向於從北四十五度之東方乙船每時行十里向於正北經一時半之後則兩船之距離若干。

5. 有二塔同直立於地面上其高為百八十尺及八十尺而在各塔底互測時其所得之仰角一者為他之二

倍問二塔之距離若干。

6. 有成一直線之 A, B, C, D 之四點與塔 DE 同在地平面上而在 A 處測得塔頂仰角為 θ . 在 B 處為 2θ . 在 C 處為 3θ . 又 AB 之距離等於五十尺. BC 等於二十尺. 問塔之高及 CD 之距離各幾何.

7. 兩停車場 A 及 B . 而 A 在 B 之正西. 今有汽車從 B 向從北偏西四十五度之方出發. 行六里之後. 在車上望 A 驛. 則在從南偏西四十五度之方問 AB 兩停車場之距離幾何.

8. 村外有一塔. 在離村 d 丈之處. 測得塔頂仰角為 α . 又在此村邊之壹房屋前測與塔頂相交之角. 為 β . 問此塔之高若何.

9. 有不能至之二點. 而欲測其距離. 乃定一直線於地平上. 其長計百尺. 在一端測各點與此直線他端相交之角. 得三十二度及九十八度. 又在他端測各點與前之一端之交角. 得三十七度及百十八度. 從而求此二點之距離.

10. 有三點 A, B, C . 而 AB 之距離等於八百尺. BC 等於四百尺. CA 等於六百尺. 從點 P 而測角 APC 及角 BPC . 得三十三度四十五分及二十二度三十分. 向 AP, BP, CP 之距離各幾何.

第九編

三角形多角形及圓

1. 三角形及外切圓 三角形 ABC. 其外切圓之中心爲 M. 而圓之半徑爲 R. 於是

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{abc}{4s}$$

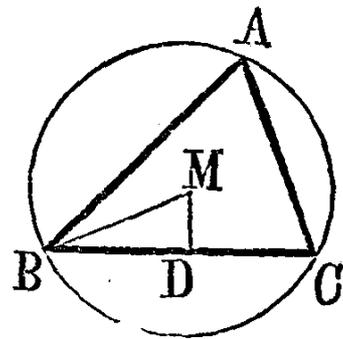
以 MD 爲 BC 之垂線. 則

$$BD = CD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} a,$$

又角 BMD 等於角 BAC. 即等於 A,

$$\therefore BM = \frac{BD}{\sin BMD},$$

$$\text{即 } R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{abc}{2bc \sin A} = \frac{abc}{4s}.$$



2. 三角形及內切圓 三角形 ABC. 其內圓之中心爲 O. 半徑爲 r. 而

$$r = \frac{a \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} A} = \frac{s}{s}$$

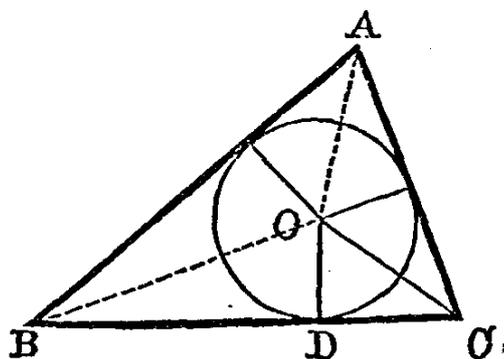
以內切圓與 BC 之切點爲 D. 於是

$$\cot OBD = \frac{BD}{OD} \text{ 及}$$

$$\cot OCD = \frac{CD}{OD}$$

$$\therefore \cot OBD + \cot OCD$$

$$= \frac{BD + CD}{OD} = \frac{BC}{OD},$$



$$\text{即 } \cot \frac{1}{2}B + \cot \frac{1}{2}C = \frac{a}{r},$$

$$\therefore r = \frac{a}{\cot \frac{1}{2}B + \cot \frac{1}{2}C} = \frac{a \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}A},$$

$$\text{又 } \triangle ABC = \triangle OBC + \triangle OCA + \triangle OAB,$$

$$\text{即 } S = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc = \frac{1}{2}(a+b+c)r = sr,$$

$$\therefore r = \frac{S}{s}.$$

3. 三角形及旁切圓 於三角形 ABC.

a , b 及 c 各傍切圓之中心為 O_1 , O_2 及 O_3 .

其半徑為 r_1 , r_2 及 r_3 , 則

$$r_1 = \frac{S}{s-a}, \quad r_2 = \frac{S}{s-b}, \quad r_3 = \frac{S}{s-c}$$

以 D, E, F 為 a 之傍切圓切於三邊之點,

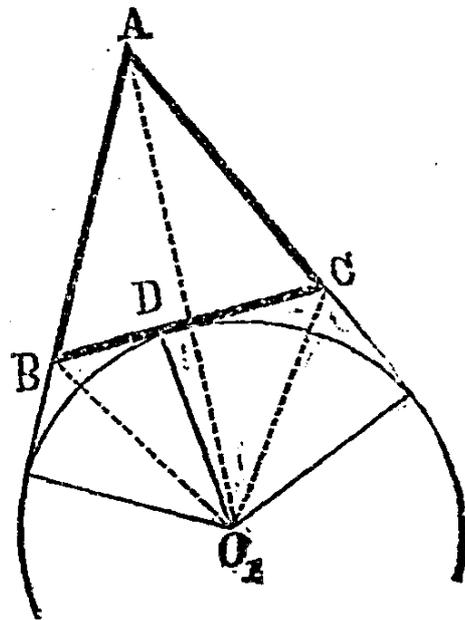
$$\triangle ABC = \triangle O_1AB + \triangle O_1AC - \triangle O_1BC$$

$$\text{即 } S = \frac{1}{2}c \cdot O_1E + \frac{1}{2}b \cdot O_1F - \frac{1}{2}a \cdot O_1D$$

$$= \frac{1}{2}(c+b-a)r_1$$

$$= (s-a)r_1$$

$$\therefore r_1 = \frac{S}{s-a}$$



4. 四角形之面積 以四角形 ABCD 之面積爲 P. 以 AB 爲 a . BC 爲 b . CD c . DA 爲 d . $a+b+c+d$ 爲等於 $2p$. 則

$$P = \sqrt{\left\{ (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{A+C}{2} \right\}}$$

於三角形 ABD

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A,$$

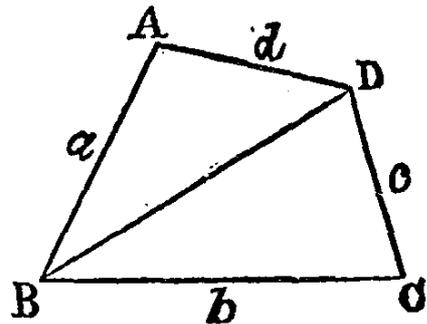
又於三角形 CBD

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C,$$

由是而

$$\frac{1}{2}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2) = ad \cos A - bc \cos C.$$

又四角形 ABCD = $\triangle ABD + \triangle CBD$,



即 $2P = ad \sin A + dc \sin C.$

由是而 $\frac{1}{4}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 + 4P^2$

$$= (ad \cos A - bc \cos C)^2 + (ad \sin A + bc \sin C)^2$$

$$= a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos A \cos C - \sin A \sin C),$$

但 $\cos A \cos C - \sin A \sin C = \cos(A + C) = 2 \cos^2 \frac{A + C}{2} - 1,$

$$\therefore \frac{1}{4}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 + 4P^2$$

$$= a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd - 4abcd \cos^2 \frac{A + C}{2},$$

$$\therefore 16P^2 = 4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcd \cos^2 \frac{A + C}{2},$$

但 $4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2$

$$= \{2(ad + bc) + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)\} \{2(ad + bc) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)\}$$

$$= \{(a + d)^2 - (b - c)^2\} \{(b + c)^2 - (a - d)^2\}$$

$$= 16(p - c)(p - b)(p - d)(p - a),$$

由是而

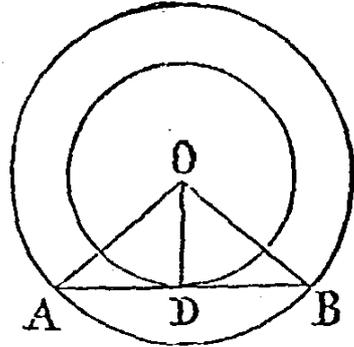
$$P = \sqrt{\{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cos^2 \frac{A + C}{2}\}}.$$

5. 內切四角形 此四角形為圓之內切四角形時則

$$A + C = 180^\circ, \quad \therefore \cos \frac{A + C}{2} = 0.$$

由是而 $P = \sqrt{\{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)\}}.$

6. 正多角形 以正多角形之邊數爲
 n . 一邊 AB 爲 a . 其內切
 圓外切圓之中心爲 O . 半
 徑爲 r 及 R . 即



$$OA = OB = R, \quad OD = r$$

$$\begin{aligned} \text{於是 } a &= 2R \sin \frac{180^\circ}{n} \\ &= 2r \tan \frac{180^\circ}{n} \end{aligned}$$

$$\text{及正多角形之面積} = \frac{1}{2} n R^2 \sin \frac{360^\circ}{n} = nr^2 \tan \frac{180^\circ}{n}.$$

$$\text{角 } \angle AOB = \frac{360^\circ}{n}, \quad \text{角 } \angle AOD = \frac{180^\circ}{n},$$

$$\text{故 } a = 2R \sin \frac{180^\circ}{n} = 2r \tan \frac{180^\circ}{n}.$$

$$\text{又 } \triangle OAB = \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{1}{2} ar = r^2 \tan \frac{180^\circ}{n},$$

\therefore 正多角形之面積 $= n \triangle OAB$.

$$= \frac{1}{2} n R^2 \sin \frac{360^\circ}{n} = nr^2 \tan \frac{180^\circ}{n}.$$

例題十六

1. 三角形之三邊爲 1·3, 1·4 及 1·5 尺時. 其內切圓及外切圓之半徑各幾何.

2. $A=73^{\circ}30'$, $B=91^{\circ}30'$, $c=\sqrt{3}-1$ 之時. 外切圓之半徑幾何.

證明以下之各題.

$$3. S = \sqrt{r r_1 r_2 r_3}. \quad 4. R = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_3 - r).$$

$$5. \frac{b-c}{r_1} + \frac{c-a}{r_2} + \frac{a-b}{r_3} = 0.$$

$$6. r = 4R \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C.$$

$$7. R = \frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{4 \sin A \sin B \sin C}.$$

$$8. r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = s^2.$$

$$9. r = 4R \left(\frac{s}{a} - 1 \right) \left(\frac{s}{b} - 1 \right) \left(\frac{s}{c} - 1 \right).$$

$$10. \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{2Rr}.$$

11. 圓之內切四角形之各邊爲六十寸·二十五寸·五十二寸·及三十九寸之時. 則其面積爲若干.

12. 以圓之內切四角形之各邊爲 a, b, c, d . 則圓之半徑爲 $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$

例 題 答

例 題 一

1. $\cdot 1694974$. 2. $\cdot 0675$ 3. $1\cdot 467$.
 4. $1^{\circ}14'15''$. 5. $225^{\circ}13'30''$. 6. $11^{\circ}18'32\frac{8''}{11}$.

例 題 二

15. $1 - 2 \sin^2 \theta + 2 \sin^4 \theta$. 16. $1 - 3 \sin^2 \theta + 3 \sin^4 \theta$.
 17. $(1 - 2 \sin^2 \theta + 2 \sin^4 \theta) \div (1 - \sin^2 \theta)^2$.
 18. $(1 - 2 \sin^2 \theta) \div (1 - \sin^2 \theta)^2$.
 19. $(\tan^4 \theta - 1) \div \tan^4 \theta$, 20. $2 + \tan^4 \theta$.
 21. $\tan \theta \div (1 + \tan^2 \theta)$. 22. $2 \tan^2 \theta \div (1 + \tan^2 \theta)^2$.
 23. $\{1 + 2 \sin A - \sin^3 A + (1 + \sin^2 A) \sqrt{1 - \sin^2 A}\} \div \sqrt{(\sin^2 A - \sin^4 A)}$.

例 題 三

1. $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1$, 2. $1, \infty, \infty; \infty, 0, 1$. 3. $\frac{5}{13}$.
 4. $\frac{21}{29}$. 5. $2mn \div (m^2 - n^2)$. 6. $\frac{5}{2\sqrt{6}}, \frac{1}{5}$.
 7. $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}$.

例 題 四

1. $62^{\circ}4'$. 2. $37^{\circ}44'$. 3. $42^{\circ}15'$. 4. 114.9.
 5. 829.6. 6. 37.83. 7. 5, 10, 30° . 8. 10, $10\sqrt{2}$, 45° .

例 題 五

1. 162.7 尺 2. 286.7 尺 3. 3843 尺 4. $56^{\circ}19'$
 5. 115 尺 6. 468 里 7. 859 尺 8. $20\sqrt{3}$ 丈
 9. 1.222 倍 10. 44 倍

例 題 六

- 1, 2. 第一. 3. 第三. 4. 第四
 5. 第三. 6, 7. 第四. 8. $\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
 9. $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, -1 . 10. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$.
 11. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$. 12. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$.
 13. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\sqrt{3}$. 14. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$.
 15. $(a-b)\sin A$. 16. $-\sin A \cos A$.
 17. $-2(a+b)\tan A$.
 18. $-(a^2+b^2)(1+\sin A)\div \sin A$.

例題十一

- | | | |
|---------------------|----------------------|------------------|
| 1. 5. | 2. $\frac{5}{8}$. | 3. $\frac{3}{4}$ |
| 4. $\cdot 574031$. | 5. $2\cdot 033423$. | 6. -111260 . |

例題十二

- | | | |
|-----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1. $3\cdot 342423$. | 2. $1\cdot 386677$. | 3. $\cdot 431042$. |
| 4. $3\cdot 554598$. | 5. $1\cdot 630056$. | 6. $2\cdot 521082$. |
| 7. $3\cdot 401294$. | 8. $\bar{1}\cdot 731047$. | 9. $\bar{9}\cdot 941243$. |
| 10. $\bar{3}\cdot 868586$. | 11. $17\cdot 38$. | 12. $269\cdot 9$. |
| 13. $3189\cdot 91$. | 14. $1\cdot 377$. | 15. $\cdot 233738$. |
| 16. $\cdot 028078$. | 17. $\cdot 003456$. | 18. $6\cdot 98184$. |
| 19. $\cdot 736837$. | 20. $1\cdot 00921$. | |

例題十四

- | | | |
|---|----------------------------|-------------------------------------|
| 1. 7. | 2. 120° . | 3. $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$. |
| 4. $6+2\sqrt{3}$. | 5. 204. | 6. $73^\circ 23' 54''$. |
| 7. $41^\circ 24' 35''$. | 8. $1319\cdot 6$. | 9. 2674 . |
| 10. $28^\circ 35' 39''$. | 11. $104^\circ 44' 39''$. | 12. $43^\circ 40'$. |
| 13. $128^\circ 23' 13''$. | 14. $3437\cdot 6$. | 15. 25376 . |
| 16. $A=66^\circ 27' 48''$, $B=12^\circ 55' 13''$. | | |

17. $A=92^{\circ}12'53''$, $B=35^{\circ}37'7''$.
 18. $B=29^{\circ}1'40''$, $C=74^{\circ}55'50''$.
 19. $B=70^{\circ}35'24''$, 或 $106^{\circ}24'36''$.
 20. $B=51^{\circ}56'17''$, 或 $128^{\circ}3'43''$.

例 題 十 五

1. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 里 2. $20\sqrt{3}$, 20 尺 4. 10.6 里
 5. 240 尺 6. $17\frac{1}{2}$ 尺, $\frac{25}{2}\sqrt{7}$ 尺 7. $6\sqrt{2}$ 里
 8. $d \sin a \div \sqrt{\sin(\beta+a)\sin(\beta-a)}$ 9. 161.868 尺
 10. $AP=710.193$, $BP=934.291$, $CP=1042.522$ 尺

例 題 十 六

1. $\frac{2}{5}$ 尺, $\frac{13}{16}$ 尺 2. $\sqrt{2}$ 11. 1764 平方寸

附錄
外國度量衡譯名及略字表

附四國尺度里數比較

定例注意

一本表計算之基礎

$$\text{一尺} = \frac{\text{一〇}}{\text{三〇九〇九}} \text{適當}$$

$$\text{百兩} = \frac{\text{一五一九八}}{\text{四}} \text{啓羅格蘭姆}$$

$$\text{一啓羅格蘭姆} = \text{二、二〇四六二磅}$$

$$\text{一適當} = \text{三九、三七〇七九吋}$$

$$\text{水銀一立特之重量自攝氏零度} = \text{一三、五九五三格蘭姆}$$

$$\text{一氣壓自攝氏零度} = \text{水銀高度七六吋}$$

$$\text{一英尺} = \text{一二吋} = \text{九六分}$$

$$\text{一英率} = \text{二二碼} = \text{六六呎}$$

$$\text{一日本尺} = \frac{\text{一〇}}{\text{三〇}} \text{適當}$$

$$\text{一貫} = \frac{\text{一五}}{\text{四}} \text{啓羅格蘭姆}$$

$$\text{一日本升} = \text{四寸九分平方深二寸七分故立積六四、八二七立方分}$$

外國度量衡略字異名表

法國尺度

密理邁當——耗	Millimetre.
生的邁當——厘	Centimetre.
得夕邁當——分	Decimetre.
邁當——尺	Metre.
待克邁當——釐	Decumetre.
黑透邁當——百	Hectometre.
啓羅邁當——千	Kilometre.

法國衡量

密理格——毫	Milligramme.
生的格——厘	Centigramme.
得夕格——分	Decigramme.
格蘭姆——瓦	Gramme.
待克格——釐	Decugramme.
黑透格——百	Hectogramme.
啓羅格——千	Kilogramme.

法 國 斗 量

生的立特——厘 Centilitre.

得夕立特——分 Decilitre.

立 特——立 Litre.

待克立特——斗 Decalitre.

黑透立特——百 Hectolitre.

英 國 尺 度

因 制——吋 Inch.

幅 地——呎 Foot.

依 亞——碼 Yard.

花當——二碼 Fathom.

布耳——一六.五呎 Pole or Perch.

フアルロング——六六〇呎 Furlong.

買爾——哩——八〇.鎖 Mile.

諾次——海哩——六〇八〇呎 Naut.

法登——六幅地

纜——百法登

鎖——六六呎 Chain.

日本尺度

日本衡量

毛—〇.〇〇〇—尺	毛—〇.〇〇〇—匁	勺—〇.〇—升
厘—〇.〇〇—尺	厘—〇.〇〇—匁	合—〇.一—升
分—〇.〇—尺	分—〇.〇—匁	升———升
寸—〇.一—尺	匁———〇匁	斗———〇.升
鯨尺— ^尺 一.二五	斤———六〇.匁	石———〇〇.升
間———六尺	貫———〇〇〇匁	
丈———〇尺		
町———三六間		
里———二九六〇尺		

四國尺度比較

中國	一 尺	三、二三五三二 ^尺	〇、九八五二二 ^尺	〇、九八〇四 ^尺
法國	〇、三〇九〇九	一 米 尺	〇、三〇四七九 ^尺	〇、三〇三〇三
英國	〇、九七四四 ^呎	三、二八〇九 ^呎	一 英 呎	〇、九九四二一 ^呎
日本	一、〇二〇〇 ^{日本尺}	三、三〇〇〇 ^{日本尺}	一、〇〇五八 ^{日本尺}	一 日 本 尺

英國 衡 量	英 國 常 用 衡	中 國 衡	法 國 衡	日 本 衡
特拉姆——它——它蘭 Dram.	〇.〇〇三九〇六二五 ^磅	〇.〇四六八七五 ^兩	一.七七—八四七三 ^{格蘭姆}	〇.四七二四九二六 ^匁
盎司——温——温士 Ounce.	〇.〇六二五 ^磅	〇〇.七五 ^兩	二八.三四九五五六八 ^{格蘭姆}	七.五五九八八一八 ^匁
磅——封——封度 Pound.	一磅	一二.兩	四五三.五九二九〇九 ^{格蘭姆}	一.二〇九五八一〇九二 ^匁
斯唐——司——司頓 Stone.	一四.磅	一六八.兩	六.三五〇.三〇〇七三 ^{格蘭姆}	一.六九三四一三五二九 ^匁
個土路——果隴 Quater.	二八.磅	三三六.兩	一二.七〇〇六〇一五 ^{格蘭姆}	三三八六八二七〇五七 ^匁
狼特威脫——罕威——罕度列威多 Hundred Weight.	一一二.磅	一三四四.兩	五〇八〇二.四〇六 ^{格蘭姆}	一三.五四七三〇八二三 ^匁
噸——噸 Ton.	二二四〇.磅	二六八八.兩	一〇一六.〇四八.一一七 ^{格蘭姆}	二七〇.九四六一六四六 ^匁

英國斗量	軋	命	日本升	立	特
治路.....	○.○三一二五		○.○七八六六六	○.一四一九〇六	
Pint. 平土.....溢脫...四治路	○.一二五		○.三一四·六三	○.五六七六二三	
Quart. 個土.....瓜脫...二平土	○.二五		○.六二九三二七	一.一三五二四七	
Pottle. 波土路...倍脫...二個土	○.五		一.二五八六五三	二.二七〇四九三	
Gallon. 瓦蘭...軋命...二波土路	一.		二.五一七三〇六	四.五四〇九八六	
Peck. 北基.....配克...二軋命	二.		五.〇三四六一三	九.〇八一·九七二	
Bushel. 婆式爾...勃衰...四北基	八.		二〇.一三八四五	三六.三二七八九	
個土路...瓜食...八婆式爾	六四.		一六·一·一〇七六	二九〇.六二三一	

軋命立方積二七七.一二三立方吋=〇.一六〇三七二立方呎

華氏六十二度之淨水一軋命之重量一〇封度

英國金銀藥劑量衡	英國常用衡	日本匁	法國衡
氏 克冷...及連 Grain.	$\frac{7000}{1}$	〇.〇一七二七九七三	〇.〇六四七九八九九
① 士古倍...斯克 錄別耳 Scruple.	〇.〇〇二八五七-四	〇.三四五五九四六	一.二九五九七九七
〇, or 本尼懷脫...片 尼威 Pint.	〇.〇〇三四二八五七一	〇.四一四七一三五	一.五五五-七五七
弓 達拉捫...它蘭 Dram.	〇 〇〇八五七一四三	一.〇三六七八四	三.八八七九三九
弓 水盎斯...温士 Ounce.	〇.〇六八五七一四三	八.二九四二七〇	三一.一〇三五-一
卣 磅......封度 Pound.	〇.八二二八五七一四	九九.五三一三四	三七三.三四三三

四國里數比較

中國	一 工部營造一八〇〇.尺 里	一、七九七四里	二、八九九七八九里	七、〇五八八八里
法國	〇.五五六三六二裡	一 裡	一六〇九三裡	三、九二七三裡
英國	〇.三四六一二九哩	〇、六二一三八哩	一 哩	二、四四〇三哩
日本	〇.一四一六六〇九日里	〇、二五四六三日里	〇.四〇九七八日里	日本 一 里

英一海里=三.二九一三里

附 表

- I. 1—2000之五桁之對數表.
- II. 十分進之三角函數表.
- III. 十分進之三角函數之對數表.
- IV. 三角法之範式一覽.

對 數 表

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	00 000	30 103	47 712	60 206	69 897	77 815	84 510	90 309	95 424	
1	00 000	04 139	07 918	11 394	14 613	17 669	20 412	23 045	25 527	27 875
2	30 103	32 222	34 212	36 173	38 021	39 791	41 497	43 136	44 716	46 240
3	47 712	49 136	50 515	51 851	53 148	54 407	55 630	56 820	57 978	59 106
4	60 206	61 278	62 325	63 347	64 345	65 321	66 276	67 210	68 124	69 020
5	69 897	70 757	71 603	72 423	73 239	74 036	74 819	75 587	76 343	77 085
6	77 815	78 533	79 239	79 934	80 618	81 291	81 954	82 607	83 251	83 885
7	84 510	85 126	85 733	86 332	86 923	87 506	88 081	88 649	89 209	89 763
8	90 309	90 849	91 381	91 903	92 428	92 942	93 450	93 952	94 448	94 939
9	95 424	95 904	96 379	96 848	97 313	97 772	98 227	98 677	99 1 3 99	564
10	00 000	00 462	00 860	01 284	01 703	02 119	02 531	02 938	03 342	03 743
11	04 139	04 532	04 922	05 308	05 690	06 070	06 446	06 8 9	07 183	07 555
12	07 918	08 279	08 636	08 991	09 342	09 691	10 037	10 380	10 721	11 059
13	11 394	11 727	12 057	12 385	12 710	13 033	13 354	13 672	13 988	14 301
14	14 613	14 922	15 229	15 534	15 836	16 137	16 435	16 732	17 0 6	17 319
15	17 609	17 898	18 184	18 469	18 752	19 033	19 312	19 590	19 866	20 140
16	20 412	20 683	20 952	21 219	21 484	21 748	22 011	22 272	22 531	2 789
17	23 045	23 300	23 553	23 805	24 055	24 304	24 551	24 797	25 042	25 285
18	25 527	25 768	26 007	26 245	26 482	26 717	26 951	27 184	27 416	27 646
19	27 875	28 103	28 330	28 556	28 780	29 003	29 226	29 447	29 667	29 885
20	30 103	30 320	30 535	30 750	30 963	31 175	31 387	31 597	31 806	32 015
21	32 222	32 4 8	32 634	32 838	33 041	33 244	33 445	33 646	33 846	34 044
22	34 242	34 439	34 635	34 830	35 025	35 218	35 411	35 603	35 793	35 984
23	36 173	36 361	36 549	36 736	36 922	37 107	37 291	37 475	37 658	37 840
24	38 021	38 202	38 382	38 561	38 639	38 917	39 094	39 270	39 445	39 620
25	39 794	39 967	40 140	40 312	40 483	40 654	40 824	40 993	41 162	41 330
26	41 497	41 664	41 830	41 996	42 160	42 325	42 488	42 651	42 813	42 975
27	43 126	43 297	43 457	43 619	43 775	43 933	44 091	44 248	44 404	44 560
28	44 716	44 871	45 025	45 179	45 332	45 484	45 637	45 788	45 939	46 090
29	46 240	46 389	46 538	46 687	46 835	46 982	47 129	47 276	47 422	47 567
30	47 712	47 857	48 001	48 144	48 287	48 430	48 572	48 714	48 855	48 995
31	49 136	49 2 6	49 415	49 554	49 693	49 831	49 969	50 106	50 243	50 379
32	50 515	50 651	50 786	50 920	51 055	51 188	51 322	51 455	51 587	51 720
33	51 851	51 983	52 114	52 244	52 375	52 504	52 634	52 763	52 892	53 020
34	53 148	53 275	53 403	53 529	53 656	53 782	53 908	54 033	54 158	54 283
35	54 407	54 531	54 654	54 777	54 900	5 023	55 145	55 267	55 388	55 509
36	55 630	55 751	55 871	55 991	56 110	56 229	56 348	56 467	56 585	56 703
37	56 820	56 937	57 054	57 171	57 287	57 403	57 519	57 634	57 749	57 864
38	57 978	58 092	58 206	58 320	58 433	58 546	58 659	58 771	58 883	58 995
39	59 106	59 218	59 329	59 439	59 550	59 660	59 770	59 879	59 988	60 097
40	60 206	60 314	60 423	60 531	60 638	60 746	60 853	60 959	61 065	61 172
41	61 278	61 384	61 490	61 595	61 700	61 805	61 909	62 014	62 118	62 221
42	62 325	62 428	62 531	62 634	62 737	62 839	62 941	63 043	63 144	63 2 6
43	63 347	63 448	63 548	63 649	63 749	63 849	63 949	64 048	64 147	64 246
44	64 345	65 444	64 542	64 640	64 738	64 836	64 933	65 031	65 123	65 225
45	65 321	65 418	65 514	65 610	65 706	65 801	65 8 6	65 992	66 087	66 181
46	66 276	66 370	66 464	66 558	66 652	66 745	66 839	66 932	67 025	67 117
47	67 210	67 302	67 394	67 486	67 578	67 669	67 761	67 852	67 943	68 034
48	68 124	68 215	68 305	68 395	68 485	68 574	68 664	68 753	68 842	68 931
49	69 020	69 108	69 197	69 285	69 373	69 461	69 548	69 636	69 723	69 810
50	69 897	69 984	70 070	70 157	70 243	70 329	70 415	70 501	70 586	70 672

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	69 897	69 984	70 070	70 157	70 243	70 329	70 415	70 501	70 586	70 672
51	70 757	70 842	70 927	71 012	71 096	71 181	71 265	71 349	71 433	71 517
52	71 600	71 684	71 767	71 850	71 933	72 016	72 099	72 181	72 263	72 346
53	72 428	72 509	72 591	72 673	72 754	72 835	72 916	72 997	73 078	73 159
54	73 239	73 320	73 400	73 480	73 560	73 640	73 719	73 799	73 878	73 957
55	74 036	74 115	74 194	74 273	74 351	74 429	74 507	74 586	74 663	74 741
56	74 819	74 896	74 974	75 051	75 128	75 205	75 282	75 358	75 435	75 511
57	75 587	75 664	75 740	75 815	75 891	75 967	76 042	76 118	76 193	76 268
58	76 343	76 418	76 492	76 567	76 641	76 716	76 790	76 864	76 938	77 012
59	77 085	77 159	77 232	77 305	77 379	77 452	77 525	77 597	77 670	77 743
60	77 815	77 887	77 960	78 032	78 104	78 176	78 247	78 319	78 390	78 462
61	78 533	78 604	78 675	78 746	78 817	78 888	78 958	79 029	79 099	79 169
62	79 239	79 306	79 379	79 449	79 518	79 588	79 657	79 727	79 796	79 865
63	79 934	80 003	80 072	80 140	80 209	80 277	80 346	80 414	80 482	80 550
64	80 618	80 686	80 754	80 821	80 889	80 956	81 023	81 090	81 158	81 224
65	81 291	81 358	81 425	81 491	81 558	81 624	81 690	81 757	81 823	81 889
66	81 954	82 020	82 086	82 151	82 217	82 282	82 347	82 413	82 478	82 543
67	82 607	82 672	82 737	82 802	82 866	82 930	82 995	83 059	83 123	83 187
68	83 251	83 315	83 378	83 442	83 506	83 569	83 632	83 696	83 759	83 822
69	83 885	83 948	84 011	84 073	84 136	84 198	84 261	84 323	84 386	84 448
70	84 510	84 572	84 634	84 696	84 757	84 819	84 880	84 942	85 003	85 065
71	85 126	85 187	85 248	85 309	85 370	85 431	85 491	85 552	85 612	85 673
72	85 733	85 794	85 854	85 914	85 974	86 034	86 094	86 153	86 213	86 273
73	86 332	86 392	86 451	86 510	86 570	86 629	86 688	86 747	86 806	86 864
74	86 923	86 982	87 040	87 099	87 157	87 216	87 274	87 332	87 390	87 448
75	87 506	87 564	87 622	87 679	87 737	87 795	87 852	87 910	87 967	88 024
76	88 081	88 138	88 195	88 252	88 309	88 366	88 423	88 480	88 536	88 593
77	88 649	88 705	88 762	88 818	88 874	88 930	88 986	89 042	89 098	89 154
78	89 209	89 265	89 321	89 376	89 432	89 487	89 542	89 597	89 653	89 708
79	89 763	89 818	89 873	89 927	89 982	90 037	90 091	90 146	90 200	90 255
80	90 309	90 363	90 417	90 472	90 526	90 580	90 634	90 687	90 741	90 795
81	90 849	90 902	90 956	91 009	91 062	91 116	91 169	91 222	91 275	91 328
82	91 381	91 434	91 487	91 540	91 593	91 645	91 698	91 751	91 803	91 855
83	91 908	91 960	92 012	92 065	92 117	92 169	92 221	92 273	92 324	92 376
	92 428	92 480	92 531	92 583	92 634	92 686	92 737	92 788	92 840	92 891
	92 942	92 993	93 044	93 095	93 146	93 197	93 247	93 298	93 349	93 399
	93 450	93 500	93 551	93 601	93 651	93 702	93 752	93 802	93 852	93 902
87	93 952	94 002	94 052	94 101	94 151	94 201	94 250	94 300	94 349	94 399
88	94 448	94 498	94 546	94 596	94 645	94 694	94 743	94 792	94 841	94 890
89	94 939	94 988	95 036	95 085	95 134	95 182	95 231	95 279	95 328	95 376
90	95 424	95 472	95 521	95 569	95 617	95 665	95 713	95 761	95 809	95 856
91	95 904	95 952	95 999	96 047	96 095	96 142	96 190	96 237	96 284	96 332
92	96 379	96 426	96 473	96 520	96 567	96 614	96 661	96 708	96 755	96 802
93	96 848	96 895	96 942	96 988	97 035	97 081	97 128	97 174	97 220	97 267
94	97 313	97 359	97 405	97 451	97 497	98 543	97 589	97 635	97 681	97 727
95	97 772	97 818	97 864	97 909	97 955	98 000	98 046	98 091	98 137	98 182
96	98 227	98 272	98 318	98 363	98 408	98 459	98 498	98 543	98 588	98 632
97	98 677	98 722	98 767	98 811	98 856	98 900	98 945	98 989	99 034	99 078
98	99 123	99 167	99 211	99 255	99 300	99 344	99 388	99 432	99 476	99 520
99	99 564	99 607	99 651	99 695	99 739	99 782	99 826	99 870	99 913	99 957
100	00 000	00 043	00 087	00 130	00 173	00 217	00 260	00 303	00 346	00 389

對 數 表

N.	L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.			
100	00	000	043	087	130	173	217	260	303	346	389	41	43	42	
101		432	475	518	561	604	647	689	732	775	817	1	4.4	4.3	4.2
102		860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242	2	8.8	8.6	8.4
103	01	284	326	368	410	452	494	536	578	620	662	3	13.2	12.9	12.6
104		703	745	787	828	870	912	953	995	*036	*078	4	17.6	17.2	16.8
105	02	119	160	202	243	284	325	366	407	449	490	5	22.0	21.5	21.0
106		531	572	612	653	694	735	776	816	857	898	6	26.4	25.8	25.2
107		938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	*302	7	30.8	30.1	29.4
108	03	342	383	423	463	503	543	583	623	663	703	8	35.2	34.4	33.6
109		743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100	9	39.6	38.7	37.8
110	04	139	179	218	258	297	336	376	415	454	493	41	40	39	
111		532	571	610	650	689	727	766	805	844	883	1	4.1	4.0	3.9
112		922	961	999	*038	*077	*115	*154	*192	*231	*269	2	8.2	8.0	7.8
113	05	308	346	385	423	461	500	538	576	614	652	3	12.3	12.0	11.7
114		690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032	4	16.4	16.0	15.6
115	06	070	108	145	183	221	258	296	333	371	408	5	20.5	20.0	19.5
116		416	453	491	528	565	603	640	677	714	751	6	24.6	24.0	23.4
117		819	856	893	930	967	*001	*041	*078	*115	*151	7	28.7	28.0	27.3
118	07	188	225	262	298	335	372	408	445	482	518	8	32.8	32.0	31.2
119		555	591	628	664	700	737	773	809	846	882	9	36.9	36.0	35.1
120		918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243	38	37	36	
121	08	279	314	350	386	422	458	493	529	565	600	1	3.8	3.7	3.6
122		635	672	707	743	778	814	849	884	920	955	2	7.6	7.4	7.2
123		991	*026	*061	*096	*132	*167	*202	*237	*272	*307	3	11.4	11.1	10.8
124	09	342	377	412	447	482	517	552	587	621	656	4	15.2	14.8	14.4
125		691	726	760	795	830	864	899	934	968	*003	5	19.0	18.5	18.0
126	10	037	072	106	140	175	209	243	278	312	346	6	22.8	22.2	21.6
127		380	415	449	483	517	551	585	619	653	687	7	26.6	25.9	25.2
128		721	755	789	823	857	890	924	958	992	*025	8	30.4	29.6	28.8
129	11	059	093	126	160	194	227	261	294	327	361	9	34.2	33.3	32.4
130		394	428	461	494	528	561	594	628	661	697	35	34	33	
131		727	760	793	826	859	893	926	959	992	*024	1	3.5	3.4	3.3
132	12	057	090	123	156	189	222	254	287	320	352	2	7.0	6.8	6.6
133		385	418	450	483	516	548	581	613	646	678	3	10.5	10.2	9.9
134		710	743	775	808	840	872	905	937	969	*001	4	14.0	13.6	13.2
135	13	033	066	098	130	162	194	226	258	290	322	5	17.5	17.0	16.5
136		554	586	618	650	681	713	745	777	809	840	6	21.0	20.4	19.8
137		672	704	735	766	799	830	862	893	925	956	7	24.5	23.8	23.1
138		988	*019	*051	*082	*114	*145	*176	*208	*239	*270	8	28.0	27.2	26.4
139	14	301	333	364	395	426	457	489	520	551	582	9	31.5	30.6	29.7
140		613	644	675	706	737	768	799	829	860	891	32	31	30	
141		922	953	983	*014	*045	*076	*107	*137	*168	*198	1	3.2	3.1	3.0
142	15	229	259	290	320	351	381	412	442	473	503	2	6.4	6.2	6.0
143		534	564	594	625	655	685	715	746	776	806	3	9.6	9.3	9.0
144		836	866	897	927	957	987	*017	*047	*077	*107	4	12.8	12.4	12.0
145	16	137	167	197	227	256	285	316	346	376	406	5	16.0	15.5	15.0
146		435	465	495	524	554	584	613	643	673	702	6	19.2	18.6	18.0
147		732	761	791	820	850	879	909	938	967	997	7	22.4	21.7	21.0
148	17	026	056	085	114	143	173	202	231	260	289	8	25.6	24.8	24.0
149		319	348	377	406	435	464	493	522	551	580	9	28.8	27.9	27.0
150		609	638	667	696	725	754	782	811	840	869				

N.	L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.	
15	17	609	638	667	696	725	754	782	811	840	869	29	28
151		898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156	1	2.9 2.8
152	18	184	213	241	270	298	327	355	384	412	441	2	5.8 5.6
153		469	498	526	554	583	611	639	667	696	724	3	8.7 8.4
154		752	780	808	837	865	893	921	949	977	*005	4	11.6 11.2
155	19	033	061	089	117	145	173	201	229	257	285	5	14.5 14.0
156		312	340	368	396	424	451	479	507	535	562	6	17.4 16.8
157		590	618	645	673	700	728	756	783	811	838	7	20.3 19.6
158		866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	*112	8	23.2 22.4
159	20	140	167	194	222	249	276	303	330	358	385	9	26.1 25.2
160		412	439	466	493	520	548	575	602	629	656	27	26
161		683	710	737	763	790	817	844	871	898	925	1	2.7 2.6
162		952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192	2	5.4 5.2
163	21	219	245	272	299	325	352	378	405	431	458	3	8.1 7.8
164		484	511	537	564	590	617	643	669	696	723	4	10.8 10.4
165		748	775	801	827	854	880	906	932	958	985	5	13.5 13.0
166	22	011	037	063	089	115	141	167	194	220	246	6	16.2 15.6
167		272	298	324	350	376	401	427	453	479	505	7	18.9 18.2
168		531	557	583	608	634	660	686	712	737	763	8	21.6 20.8
169		789	814	840	866	891	917	943	968	994	*019	9	24.3 23.4
170	23	045	070	096	121	147	172	198	223	249	274	25	
171		300	325	350	376	401	426	452	477	502	528	1	2.5
172		553	578	603	629	654	679	704	729	754	779	2	5.0
173		805	830	855	880	905	930	955	980	*005	*030	3	7.5
174	24	055	080	105	130	155	180	204	229	254	279	4	10.0
175		304	329	353	378	403	428	452	477	502	527	5	12.5
176		551	576	601	625	650	674	699	724	748	773	6	15.0
177		797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018	7	17.5
178	25	042	066	091	115	139	164	188	212	237	261	8	20.0
179		285	310	334	358	382	406	431	455	479	503	9	22.5
180		527	551	575	600	624	648	672	696	720	744	24	23
181		768	792	816	840	864	888	912	935	959	983	1	2.4 2.3
182	26	007	031	055	079	102	126	150	174	198	221	2	4.8 4.6
183		245	269	293	316	340	364	387	411	435	458	3	7.2 6.9
184		482	505	529	553	576	600	623	647	670	694	4	9.6 9.2
185		717	741	764	788	811	834	858	881	905	928	5	12.0 11.5
186		951	975	998	*021	*045	*068	*091	*114	*138	*161	6	14.4 13.8
187	27	184	207	231	254	277	300	323	346	370	393	7	16.8 16.1
188		416	439	462	485	508	531	554	577	600	623	8	19.2 18.4
189		646	669	692	715	738	761	784	807	830	852	9	21.6 20.7
190		875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081	22	21
191	28	103	126	149	171	194	217	240	262	285	307	1	2.2 2.1
192		330	353	375	398	421	443	466	488	511	533	2	4.4 4.2
193		553	578	601	623	646	668	691	713	735	758	3	6.6 6.3
194		780	803	825	847	870	892	914	937	959	981	4	8.8 8.4
195	29	003	026	048	070	092	115	137	159	181	203	5	11.0 10.5
196		226	248	270	292	314	336	358	380	403	425	6	13.2 12.6
197		447	469	491	513	535	557	579	601	623	645	7	15.4 14.7
198		667	688	710	732	754	776	798	820	842	863	8	17.6 16.8
199		885	907	929	951	973	994	*016	*038	*060	*081	9	19.8 18.9
200	30	103	125	146	168	190	211	233	255	276	298		

三角函数表

0°—12°

° /	sin.	tan.	cot.	cos.	' °
0 0	0.0000	0.0000	∞	1.0000	090
10	0.0029	0.0029	343.7737	1.0000	50
20	0.0058	0.0058	171.8854	1.0000	40
30	0.0087	0.0087	114.5887	1.0000	30
40	0.0116	0.0116	85.9398	0.9999	20
50	0.0145	0.0145	68.7501	0.9999	10
1 0	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	089

° /	sin.	tan.	cot.	cos.	' °	° /	sin.	tan.	cot.	cos.	' °
1 0	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	089	7 0	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	083
10	0.0204	0.0204	49.1039	0.9998	50	10	0.1248	0.1257	7.9530	0.9922	50
20	0.0233	0.0233	42.9641	0.9997	40	20	0.1276	0.1287	7.7704	0.9918	40
30	0.0262	0.0262	38.1885	0.9997	30	30	0.1305	0.1317	7.5958	0.9914	30
40	0.0291	0.0291	34.3678	0.9996	20	40	0.1334	0.1346	7.4287	0.9911	20
50	0.0320	0.0320	31.2416	0.9995	10	50	0.1363	0.1376	7.2687	0.9907	10
2 0	0.0349	0.0349	28.6363	0.9994	088	8 0	0.1392	0.1405	7.1154	0.9903	082
10	0.0378	0.0378	26.4316	0.9993	50	10	0.1421	0.1435	6.9682	0.9899	50
20	0.0407	0.0407	24.5418	0.9992	40	20	0.1449	0.1465	6.8269	0.9894	40
30	0.0436	0.0437	22.9038	0.9990	30	30	0.1478	0.1495	6.6912	0.9890	30
40	0.0465	0.0466	21.4704	0.9989	20	40	0.1507	0.1524	6.5606	0.9886	20
50	0.0494	0.0495	20.2056	0.9988	10	50	0.1536	0.1554	6.4348	0.9881	10
3 0	0.0523	0.0524	19.0811	0.9986	087	9 0	0.1564	0.1584	6.3138	0.9877	081
10	0.0552	0.0553	18.0750	0.9985	50	10	0.1593	0.1614	6.1970	0.9872	50
20	0.0581	0.0582	17.1693	0.9983	40	20	0.1622	0.1644	6.0844	0.9868	40
30	0.0610	0.0612	16.3499	0.9981	30	30	0.1650	0.1673	5.9758	0.9863	30
40	0.0640	0.0641	15.6048	0.9980	20	40	0.1679	0.1703	5.8708	0.9858	20
50	0.0669	0.0670	14.9244	0.9978	10	50	0.1708	0.1733	5.7694	0.9853	10
4 0	0.0698	0.0699	14.3007	0.9976	086	10 0	0.1736	0.1763	5.6713	0.9848	080
10	0.0727	0.0729	13.7267	0.9974	50	10	0.1765	0.1793	5.5764	0.9843	50
20	0.0756	0.0758	13.1969	0.9971	40	20	0.1794	0.1823	5.4845	0.9838	40
30	0.0785	0.0787	12.7062	0.9969	30	30	0.1822	0.1853	5.3955	0.9833	30
40	0.0814	0.0816	12.2505	0.9967	20	40	0.1851	0.1883	5.3093	0.9827	20
50	0.0843	0.0846	11.8262	0.9964	10	50	0.1880	0.1914	5.2257	0.9822	10
5 0	0.0872	0.0875	11.4301	0.9962	085	11 0	0.1908	0.1944	5.1446	0.9816	079
10	0.0901	0.0904	11.0594	0.9959	50	10	0.1937	0.1974	5.0658	0.9811	50
20	0.0929	0.0934	10.7119	0.9957	40	20	0.1965	0.2004	4.9894	0.9805	40
30	0.0958	0.0963	10.3854	0.9954	30	30	0.1994	0.2035	4.9152	0.9799	30
40	0.0987	0.0992	10.0780	0.9951	20	40	0.2022	0.2065	4.8430	0.9793	20
50	0.1016	0.1022	9.7882	0.9948	10	50	0.2051	0.2095	4.7729	0.9787	10
6 0	0.1045	0.1051	9.5144	0.9945	084	12 0	0.2079	0.2126	4.7046	0.9781	078
10	0.1074	0.1080	9.2553	0.9942	50	10	0.2108	0.2156	4.6382	0.9775	50
20	0.1103	0.1110	9.0098	0.9939	40	20	0.2136	0.2186	4.5736	0.9769	40
30	0.1132	0.1139	8.7769	0.9936	30	30	0.2164	0.2217	4.5107	0.9763	30
40	0.1161	0.1169	8.5555	0.9932	20	40	0.2193	0.2247	4.4494	0.9757	20
50	0.1190	0.1198	8.3450	0.9929	10	50	0.2221	0.2288	4.3897	0.9750	10
7 0	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	083	13 0	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	077

77°—89°

° /	sin.	tan.	cot.	cos.	' °	° /	sin.	tan.	cot.	cos.	' °
13 0	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	077	21 0	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	069
10	0.2278	0.2339	4.2747	0.9737	50	10	0.3611	0.3872	2.5826	0.9325	50
20	0.2306	0.2370	4.2193	0.9730	40	20	0.3638	0.3906	2.5605	0.9315	40
30	0.2334	0.2401	4.1653	0.9724	30	30	0.3665	0.3939	2.5386	0.9304	30
40	0.2363	0.2432	4.1126	0.9717	20	40	0.3692	0.3973	2.5172	0.9293	20
50	0.2391	0.2462	4.0611	0.9710	10	50	0.3719	0.4006	2.4960	0.9283	10
14 0	0.2419	0.2493	4.0108	0.9703	076	22 0	0.3746	0.4040	2.4751	0.9272	068
10	0.2447	0.2524	3.9617	0.9696	50	10	0.3773	0.4074	2.4545	0.9261	50
20	0.2476	0.2555	3.9136	0.9689	40	20	0.3800	0.4108	2.4342	0.9250	40
30	0.2504	0.2586	3.8667	0.9681	30	30	0.3827	0.4142	2.4142	0.9239	30
40	0.2532	0.2617	3.8208	0.9674	20	40	0.3854	0.4176	2.3945	0.9228	20
50	0.2560	0.2648	3.7760	0.9667	10	50	0.3881	0.4210	2.3750	0.9216	10
15 0	0.2588	0.2679	3.7321	0.9659	075	23 0	0.3907	0.4245	2.3559	0.9205	067
10	0.2616	0.2711	3.6891	0.9652	50	10	0.3934	0.4279	2.3369	0.9194	50
20	0.2644	0.2742	3.6470	0.9644	40	20	0.3961	0.4314	2.3183	0.9182	40
30	0.2672	0.2773	3.6059	0.9636	30	30	0.3987	0.4348	2.2998	0.9171	30
40	0.2700	0.2805	3.5656	0.9628	20	40	0.4014	0.4383	2.2817	0.9159	20
50	0.2728	0.2836	3.5261	0.9621	10	50	0.4041	0.4417	2.2637	0.9147	10
16 0	0.2756	0.2867	3.4874	0.9613	074	24 0	0.4067	0.4452	2.2460	0.9135	066
10	0.2784	0.2899	3.4495	0.9605	50	10	0.4094	0.4487	2.2286	0.9124	50
20	0.2812	0.2931	3.4124	0.9596	40	20	0.4120	0.4522	2.2113	0.9112	40
30	0.2840	0.2962	3.3759	0.9588	30	30	0.4147	0.4557	2.1943	0.9100	30
40	0.2868	0.2994	3.3402	0.9580	20	40	0.4173	0.4592	2.1775	0.9088	20
50	0.2896	0.3026	3.3052	0.9572	10	50	0.4200	0.4628	2.1609	0.9075	10
17 0	0.2924	0.3057	3.2709	0.9563	073	25 0	0.4226	0.4663	2.1445	0.9063	065
10	0.2952	0.3089	3.2371	0.9555	50	10	0.4253	0.4699	2.1283	0.9051	50
20	0.2979	0.3121	3.2041	0.9546	40	20	0.4279	0.4734	2.1123	0.9038	40
30	0.3007	0.3153	3.1716	0.9537	30	30	0.4305	0.4770	2.0965	0.9026	30
40	0.3035	0.3185	3.1397	0.9528	20	40	0.4331	0.4806	2.0809	0.9016	20
50	0.3062	0.3217	3.1084	0.9520	10	50	0.4358	0.4841	2.0655	0.9001	10
18 0	0.3090	0.3249	3.0777	0.9511	072	26 0	0.4384	0.4877	2.0503	0.8988	064
10	0.3118	0.3281	3.0475	0.9502	50	10	0.4410	0.4913	2.0353	0.8975	50
20	0.3145	0.3314	3.0178	0.9492	40	20	0.4436	0.4950	2.0204	0.8962	40
30	0.3173	0.3346	2.9887	0.9483	30	30	0.4462	0.4986	2.0057	0.8949	30
40	0.3201	0.3378	2.9600	0.9474	20	40	0.4488	0.5022	1.9912	0.8936	20
50	0.3228	0.3411	2.9319	0.9465	10	50	0.4514	0.5059	1.9768	0.8923	10
19 0	0.3256	0.3443	2.9042	0.9455	071	27 0	0.4540	0.5095	1.9626	0.8910	063
10	0.3283	0.3476	2.8770	0.9446	50	10	0.4566	0.5132	1.9486	0.8897	50
20	0.3311	0.3508	2.8502	0.9436	40	20	0.4592	0.5169	1.9347	0.8884	40
30	0.3338	0.3541	2.8239	0.9426	30	30	0.4617	0.5206	1.9210	0.8870	30
40	0.3365	0.3574	2.7980	0.9417	20	40	0.4643	0.5243	1.9074	0.8857	20
50	0.3393	0.3607	2.7725	0.9407	10	50	0.4669	0.5280	1.8940	0.8843	10
20 0	0.3420	0.3640	2.7475	0.9397	070	28 0	0.4695	0.5317	1.8807	0.8829	062
10	0.3448	0.3673	2.7228	0.9387	50	10	0.4720	0.5354	1.8676	0.8816	50
20	0.3475	0.3706	2.6985	0.9377	40	20	0.4746	0.5392	1.8546	0.8802	40
30	0.3502	0.3739	2.6746	0.9367	30	30	0.4772	0.5430	1.8418	0.8788	30
40	0.3529	0.3772	2.6511	0.9356	20	40	0.4797	0.5467	1.8291	0.8774	20
50	0.3557	0.3805	2.6279	0.9346	10	50	0.4823	0.5505	1.8165	0.8760	10
21 0	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	069	29 0	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	061
' °	ccs.	cot.	tan.	sin.	' °	' °	cos.	cot.	tan.	sin.	' °

° ' /	sin.	tan.	cot.	cos.	° ' /	sin.	tan.	cot.	cos.	° ' /
29 0	0.4848	0.553	1.8040	0.8746	61 37 0	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	53
10	0.4874	0.5581	1.7917	0.8732	50	10	0.6041	0.7581	1.3190	50
20	0.4899	0.5619	1.7796	0.8718	40	20	0.6065	0.7627	1.3111	40
30	0.4924	0.5658	1.7675	0.8704	30	30	0.6088	0.7673	1.3032	30
40	0.4950	0.5696	1.7556	0.8689	20	40	0.6111	0.7720	1.2954	20
50	0.4975	0.5735	1.7437	0.8675	10	50	0.6134	0.7766	1.2876	10
30 0	0.5000	0.5774	1.7321	0.8660	60 38 0	0.6157	0.7813	1.2799	0.7880	52
10	0.5025	0.5812	1.7205	0.8646	50	10	0.6180	0.7860	1.2723	50
20	0.5050	0.5851	1.7090	0.8631	40	20	0.6202	0.7907	1.2647	40
30	0.5075	0.5890	1.6977	0.8616	30	30	0.6225	0.7954	1.2572	30
40	0.5100	0.5930	1.6864	0.8601	20	40	0.6248	0.8002	1.2497	20
50	0.5125	0.5969	1.6753	0.8587	10	50	0.6271	0.8050	1.2423	10
31 0	0.5150	0.6000	1.6643	0.8572	59 39 0	0.6293	0.8098	1.2349	0.7771	51
10	0.5175	0.6048	1.6534	0.8557	50	10	0.6316	0.8146	1.2276	50
20	0.5200	0.6088	1.6426	0.8542	40	20	0.6338	0.8195	1.2203	40
30	0.5225	0.6128	1.3619	0.8526	30	30	0.6361	0.8243	1.2131	30
40	0.5250	0.6168	1.6212	0.8511	20	40	0.6383	0.8292	1.2059	20
50	0.5275	0.6208	1.6107	0.8496	10	50	0.6406	0.8342	1.1988	10
32 0	0.5299	0.6249	1.6003	0.8480	58 40 0	0.6428	0.8391	1.1918	0.7660	50
10	0.5324	0.6289	1.5900	0.8465	50	10	0.6450	0.8441	1.1847	50
20	0.5348	0.6320	1.5798	0.8450	40	20	0.6472	0.8491	1.1778	40
30	0.5373	0.6371	1.5697	0.8434	30	30	0.6494	0.8541	1.1708	30
40	0.5398	0.6412	1.5597	0.8418	20	40	0.6517	0.8591	1.1640	20
50	0.5422	0.6453	1.5497	0.8403	10	50	0.6539	0.8642	1.1574	10
33 0	0.5446	0.6494	1.5399	0.8387	57 41 0	0.6561	0.8693	1.1504	0.7547	49
10	0.5471	0.6536	1.5301	0.8371	50	10	0.6583	0.8744	1.1436	50
20	0.5495	0.6577	1.5204	0.8355	40	20	0.6604	0.8796	1.1369	40
30	0.5519	0.6619	1.5108	0.8339	30	30	0.6626	0.8847	1.1303	30
40	0.5544	0.6661	1.5013	0.8323	20	40	0.6648	0.8899	1.1237	20
50	0.5568	0.6703	1.4919	0.8307	10	50	0.6670	0.8952	1.1171	10
34 0	0.5592	0.6745	1.4826	0.8290	56 42 0	0.6691	0.9004	1.1106	0.7431	48
10	0.5616	0.6787	1.4733	0.8274	50	10	0.6713	0.9057	1.1041	50
20	0.5640	0.6830	1.4641	0.8258	40	20	0.6734	0.9110	1.0977	40
30	0.5664	0.6873	1.4550	0.8241	30	30	0.6756	0.9163	1.0912	30
40	0.5688	0.6916	1.4460	0.8225	20	40	0.6777	0.9217	1.0850	20
50	0.5712	0.6959	1.4370	0.8208	10	50	0.6799	0.9271	1.0786	10
35 0	0.5736	0.7002	1.4281	0.8192	55 43 0	0.6820	0.9325	1.0724	0.7314	47
10	0.5760	0.7046	1.4193	0.8175	50	10	0.6841	0.9380	1.0661	50
20	0.5783	0.7089	1.4106	0.8158	40	20	0.6862	0.9435	1.0599	40
30	0.5807	0.7133	1.4019	0.8141	30	30	0.6884	0.9490	1.0538	30
40	0.5831	0.7177	1.3934	0.8124	20	40	0.6905	0.9545	1.0477	20
50	0.5854	0.7221	1.3848	0.8107	10	50	0.6926	0.9601	1.0416	10
36 0	0.5878	0.7265	1.3764	0.8090	54 44 0	0.6947	0.9657	1.0355	0.719	46
10	0.5901	0.7310	1.3680	0.8073	50	10	0.6967	0.9713	1.0295	50
20	0.5925	0.7355	1.3597	0.8056	40	20	0.6988	0.9770	1.0235	40
30	0.5948	0.7400	1.3514	0.8039	30	30	0.7009	0.9827	1.0176	30
40	0.5972	0.7445	1.3432	0.8021	20	40	0.7030	0.9884	1.0117	20
50	0.5995	0.7490	1.3351	0.8004	10	50	0.7051	0.9942	1.0058	10
37 0	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	53 45 0	0.7071	1.0000	1.0000	0.7071	45

difference

°	'	L. sin.	D.	L. tan.	D.	L. cot.	L. cos.	D.	'	°
0	0	—		—		—	10.00 000		0	0 90
	10	7.46 373	30102	7.46 373	30103	12.53 627	10.00 000		1	50
	20	7.76 475	17609	7.76 476	17640	12.23 524	9.99 999		1	40
	30	7.94 084	12494	7.94 086	12495	12.05 914	9.99 998		1	30
	40	8.06 578	9690	8.06 581	9692	11.93 419	9.99 997		1	20
	50	8.16 268	7918	8.16 273	7919	11.83 7-7	9.99 995		2	10
1	0	8.24 186	6693	8.24 192	6696	11.75 808	9.99 993		2	0 89
	10	8.30 879	5799	8.30 888	5801	11.69 112	9.99 991		2	50
	20	8.36 678	5114	8.36 689	5113	11.63 311	9.99 988		2	40
	30	8.41 792	4574	8.41 807	4578	11.58 193	9.99 985		3	30
	40	8.46 366	4138	8.46 385	4142	11.53 615	9.99 982		3	20
	50	8.50 504	3778	8.50 527	3781	11.49 473	9.99 878		4	10
2	0	8.54 282	3475	8.54 300	3480	11.45 692	9.99 974		4	0 88
	10	8.57 57	3216	8.57 788	3221	11.42 212	9.99 969		5	50
	20	8.60 973	2995	8.61 009	3000	11.38 991	9.99 964		5	40
	30	8.63 968	2801	8.64 009	2807	11.35 991	9.99 959		5	30
	40	8.66 769	2631	8.66 816	2637	11.33 184	9.99 953		6	20
	50	8.69 400	2480	8.69 453	2487	11.30 547	9.99 947		6	10
3	0	8.71 880	2346	8.71 940	2352	11.28 060	9.99 940		7	0 87
	10	8.74 256	2225	8.74 292	2233	11.25 708	9.99 934		7	50
	20	8.76 451	2117	8.76 525	2124	11.23 475	9.99 926		8	40
	30	8.78 558	2017	8.78 649	2025	11.21 351	9.99 919		7	30
	40	8.80 585	19-8	8.80 674	1936	11.19 326	9.99 911		8	20
	50	8.82 515	1845	8.82 610	1854	11.17 390	9.99 903		8	10
4	0	8.84 358	1770	8.84 464	1779	11.15 536	9.99 894		9	0 86
	10	8.86 128	1701	8.86 243	1710	11.13 757	9.99 885		9	50
	20	8.87 829	1635	8.87 953	1645	11.12 047	9.99 876		9	40
	30	8.89 464	1576	8.89 598	1587	11.10 402	9.99 866		10	30
	40	8.91 040	1521	8.91 185	1531	11.08 815	9.99 856		10	20
	50	8.92 561	1469	8.92 716	1479	11.07 284	9.99 845		11	10
5	0	8.94 030	1420	8.94 195	1432	11.05 805	9.99 834		11	0 85
	10	8.95 450	1375	8.95 627	1386	11.04 373	9.99 823		11	50
	20	8.96 825	1332	8.97 013	1345	11.02 987	9.99 812		11	40
	30	8.98 157	1293	8.98 358	1304	11.01 642	9.99 800		12	30
	40	8.99 450	1254	8.99 663	1268	11.00 328	9.99 787		13	20
	50	9.00 704	1219	9.00 930	1232	10.99 070	9.99 775		12	10
6	0	9.01 923	1186	9.02 162	1199	10.97 838	9.99 761		14	0 84
	10	9.03 109	1153	9.03 361	1167	10.96 939	9.99 748		13	50
	20	9.04 262	1124	9.04 528	1138	10.95 472	9.99 734		14	40
	30	9.05 386	1095	9.05 666	1109	10.94 334	9.99 720		14	30
	40	9.06 481	1067	9.06 775	1083	10.93 225	9.99 705		15	20
	50	9.07 548	1041	9.07 858	1056	10.92 142	9.99 690		15	10
7	0	9.08 589	1017	9.08 914	1033	10.91 086	9.99 675		15	0 83
	10	9.09 606	993	9.09 947	1009	10.90 053	9.99 659		16	50
	20	9.10 599	971	9.10 956	987	10.89 044	9.99 643		16	40
	30	9.11 570	949	9.11 943	966	10.88 057	9.99 627		16	30
	40	9.12 519	928	9.12 909	945	10.87 091	9.99 610		17	20
	50	9.13 447	909	9.13 854	926	10.86 146	9.99 593		17	10
8	0	9.14 356	890	9.14 780	909	10.85 220	9.99 575		18	0 82
°	'	L. cos.	D.	L. cot.	D.	L. tan.	L. sin.	D.	'	°

三角函數之對數表

°	'	L. sin.	D.	L. tan.	D.	L. cot.	L. cos.	D.	'	°
8	0	9.14 356		9.14 780		10.85 220	9.99 575			0 82
	10	9.15 245	889	9.15 688	908	10.84 312	9.99 557	18	50	
	20	9.16 116	871	9.16 577	889	10.83 423	9.99 539	18	40	
	30	9.16 970	854	9.17 450	873	10.82 550	9.99 520	19	30	
	40	9.17 807	837	9.18 306	856	10.81 694	9.99 501	19	20	
	50	9.18 628	821	9.19 146	840	10.80 854	9.99 482	19	10	
9	0	9.19 433	805	9.19 971	825	10.80 629	9.99 462	20	0	81
	10	9.20 223	790	9.20 782	811	10.79 218	9.99 441	20	50	
	20	9.20 999	776	9.21 578	796	10.78 422	9.99 421	21	40	
	30	9.21 761	762	9.22 361	783	10.77 639	9.99 400	21	30	
	40	9.22 509	748	9.23 130	769	10.76 870	9.99 379	21	20	
	50	9.23 244	735	9.23 887	757	10.76 113	9.99 357	22	10	
10	0	9.23 967	723	9.24 632	745	10.75 368	9.99 335	22	0	80
	10	9.24 677	710	9.25 365	733	10.74 635	9.99 313	22	50	
	20	9.25 376	699	9.26 986	721	10.73 914	9.99 290	23	40	
	30	9.26 063	687	9.26 797	711	10.73 203	9.99 267	23	30	
	40	9.26 739	676	9.27 496	699	10.72 504	9.99 243	24	20	
	50	9.27 405	666	9.28 186	690	10.71 814	9.99 219	24	10	
11	0	9.28 060	655	9.28 865	679	10.71 135	9.99 195	24	0	79
	10	9.28 705	645	9.29 535	670	10.70 465	9.99 170	25	50	
	20	9.29 340	635	9.30 195	660	10.69 805	9.99 145	25	40	
	30	9.29 966	626	9.30 846	651	10.69 154	9.99 119	26	30	
	40	9.30 582	616	9.31 489	643	10.68 511	9.99 093	26	20	
	50	9.31 189	607	9.32 122	633	10.67 878	9.99 067	26	10	
12	0	9.31 788	599	9.32 747	625	10.67 253	9.99 040	27	0	78
	10	9.32 378	590	9.33 365	618	10.66 635	9.99 013	27	50	
	20	9.32 960	582	9.33 974	609	10.66 026	9.98 986	27	40	
	30	9.33 534	574	9.34 576	602	10.65 424	9.98 958	28	30	
	40	9.34 100	566	9.35 170	594	10.64 830	9.98 930	28	20	
	50	9.34 658	558	9.35 757	587	10.64 243	9.98 901	29	10	
13	0	9.35 209	551	9.36 336	579	10.63 664	9.98 872	29	0	77
	10	9.35 752	543	9.36 909	573	10.63 091	9.98 843	29	50	
	20	9.36 289	537	9.37 476	567	10.62 524	9.98 813	30	40	
	30	9.36 819	530	9.38 035	559	10.61 965	9.98 783	30	40	
	40	9.37 341	522	9.38 589	554	10.61 411	9.98 753	30	20	
	50	9.37 858	517	9.39 136	547	10.60 864	9.98 722	31	10	
14	0	9.38 368	510	9.39 677	541	10.60 323	9.98 690	32	0	76
	10	9.38 871	503	9.40 212	535	10.59 788	9.98 659	31	50	
	20	9.39 369	498	9.40 742	530	10.59 258	9.98 627	32	40	
	30	9.39 860	491	9.41 266	524	10.58 734	9.98 594	33	30	
	40	9.40 346	486	9.41 784	518	10.58 216	9.98 561	33	20	
	50	9.40 825	479	9.42 297	513	10.57 703	9.98 528	33	10	
15	0	9.41 300	475	9.42 805	508	10.57 195	9.98 494	34	0	75
	10	9.41 768	468	9.43 308	503	10.56 692	9.98 460	34	50	
	20	9.42 232	464	9.43 806	498	10.56 194	9.98 426	34	40	
	30	9.42 690	458	9.44 299	493	10.55 701	9.98 391	35	30	
	40	9.43 143	453	9.44 787	488	10.55 213	9.98 356	35	20	
	50	9.43 591	448	9.45 271	484	10.54 729	9.98 320	36	10	
16	0	9.44 034	443	9.45 750	479	10.54 250	9.98 284	36	0	74
°	'	L. cos.	D.	L. cot.	D.	L. tan.	L. sin.	D.	'	°

三角函數之對數表

°	'	L. sin.	D.	L. tan.	D.	L. cot.	L. cos.	D.	'	°
16	0	9.44 034		9.45 750		10.54 250	9.98 284			0 74
	10	9.44 472	438	9.46 224	474	10.53 776	9.98 248	36		50
	20	9.44 905	433	9.46 694	470	10.53 306	9.98 211	37		40
	30	9.45 334	429	9.47 160	466	10.52 840	9.98 174	37		30
	40	9.45 758	424	9.47 622	462	10.52 378	9.98 136	38		20
	50	9.46 178	420	9.48 030	458	10.51 920	9.98 098	38		10
17	0	9.46 594	416	9.48 534	454	10.51 466	9.98 060	38		0 73
	10	9.47 005	411	9.48 984	450	10.51 016	9.98 021	39		50
	20	9.47 411	406	9.49 430	446	10.50 570	9.97 982	39		40
	30	9.47 814	403	9.49 872	442	10.50 128	9.97 942	40		30
	40	9.48 213	399	9.50 311	439	10.49 689	9.97 902	41		20
	50	9.48 607	394	9.50 746	435	10.49 254	9.97 861	41		10
18	0	9.48 998	391	9.51 178	432	10.48 822	9.97 821	40		0 72
	10	9.49 385	387	9.51 606	428	10.48 394	9.97 779	42		50
	20	9.49 768	383	9.52 031	425	10.47 969	9.97 738	41		40
	30	9.50 148	380	9.52 452	421	10.47 543	9.97 696	42		30
	40	9.50 523	375	9.52 870	418	10.47 130	9.97 653	43		20
	50	9.50 896	373	9.53 285	415	10.46 715	9.97 610	43		10
19	0	9.51 364	368	9.53 697	412	10.46 303	9.97 567	43		0 71
	10	9.51 629	365	9.54 106	409	10.45 894	9.97 523	44		50
	20	9.51 991	362	9.54 512	406	10.45 488	9.97 479	44		40
	30	9.52 350	359	9.54 915	403	10.45 085	9.97 435	44		30
	40	9.52 705	355	9.55 315	400	10.44 685	9.97 390	45		20
	50	9.53 056	351	9.55 712	297	10.44 288	9.97 344	46		10
20	0	9.53 405	349	9.56 107	395	10.43 893	9.97 299	45		0 70
	10	9.53 751	346	9.56 498	391	10.43 502	9.97 252	47		50
	20	9.54 093	342	9.56 887	389	10.43 113	9.97 203	46		40
	30	9.54 433	340	9.57 274	387	10.42 726	9.97 159	47		30
	40	9.54 769	336	9.57 658	384	10.42 342	9.97 111	43		20
	50	9.55 102	333	9.58 039	381	10.41 961	9.97 063	48		10
21	0	9.55 433	331	9.58 418	379	10.41 582	9.97 015	48		0 69
	10	9.55 761	328	9.58 794	376	10.41 206	9.96 966	49		50
	20	9.56 085	324	9.59 168	374	10.40 832	9.96 917	49		40
	30	9.56 403	323	9.59 540	372	10.40 460	9.96 868	49		30
	40	9.56 727	319	9.59 909	369	10.40 091	9.96 818	50		20
	50	9.57 044	317	9.60 276	367	10.39 724	9.96 767	51		10
22	0	9.57 358	314	9.60 641	365	10.39 359	9.96 717	50		0 68
	10	9.57 669	311	9.61 004	362	10.38 993	9.96 665	52		50
	20	9.57 978	309	9.61 364	360	10.38 636	9.96 614	51		40
	30	9.58 284	306	9.61 722	358	10.38 278	9.96 562	52		30
	40	9.58 588	304	9.62 079	357	10.37 921	9.96 509	53		20
	50	9.58 889	301	9.62 433	354	10.37 567	9.96 456	53		10
23	0	9.59 188	299	9.62 785	352	10.37 215	9.96 403	53		0 67
	10	9.59 484	296	9.63 135	350	10.36 865	9.96 349	54		50
	20	9.59 778	294	9.63 484	349	10.36 516	9.96 294	55		40
	30	9.60 070	292	9.63 830	346	10.36 170	9.96 240	54		30
	40	9.60 359	289	9.64 175	345	10.35 825	9.96 185	55		20
	50	9.60 646	287	9.64 517	342	10.35 483	9.96 129	56		10
24	0	9.60 931	285	9.64 858	341	10.35 142	9.96 073	56		0 66
°	'	L. cos.	D.	L. cot.	D.	L. tan.	L. sin.	D.	'	°

° /	L. sin.	D.	L. tan.	D.	L. cot.	L. cos.	D.	' °
24 0	9.60 931		9.64 858		10.35 142	9.96 073		0 66
10	9.61 214	283	9.65 197	339	10.34 803	9.96 017	56	50
20	9.61 494	280	9.65 535	338	10.34 465	9.95 960	57	40
30	9.61 773	279	9.65 870	335	10.34 130	9.95 902	58	30
40	9.62 049	276	9.66 204	334	10.33 796	9.95 844	58	20
50	9.62 323	274	9.66 537	333	10.33 461	9.95 786	58	10
25 0	9.62 595	272	9.66 867	330	10.33 133	9.95 728	58	0 65
10	9.62 865	270	9.67 196	329	10.32 804	9.95 668	60	50
20	9.63 133	268	9.67 524	328	10.32 476	9.95 610	59	40
30	9.63 398	265	9.67 850	326	10.32 150	9.95 549	60	30
40	9.63 662	264	9.68 174	324	10.31 826	9.95 488	61	20
50	9.63 924	262	9.68 497	323	10.31 503	9.95 427	61	10
26 0	9.64 184	260	9.68 818	321	10.31 182	9.95 366	61	0 64
10	9.64 442	258	9.69 138	320	10.30 862	9.95 304	62	50
20	9.64 698	256	9.69 457	319	10.30 543	9.95 242	62	40
30	9.64 953	255	9.69 774	317	10.30 226	9.95 179	63	30
40	9.65 205	252	9.70 089	315	10.29 911	9.95 116	63	20
50	9.65 456	251	9.70 404	315	10.29 596	9.95 052	64	10
27 0	9.65 705	249	9.70 717	313	10.29 283	9.94 988	64	0 63
10	9.65 952	247	9.71 028	311	10.28 972	9.94 923	65	50
20	9.66 197	245	9.71 339	311	10.28 661	9.94 858	65	40
30	9.66 441	244	9.71 648	309	10.28 352	9.94 793	65	30
40	9.66 682	241	9.71 955	307	10.28 045	9.94 727	66	20
50	9.66 922	240	9.72 262	307	10.27 738	9.94 660	67	10
28 0	9.67 161	239	9.72 567	305	10.27 433	9.94 593	67	0 62
10	9.67 398	237	9.72 872	305	10.27 128	9.94 526	67	50
20	9.67 633	235	9.73 175	303	10.26 825	9.94 458	68	40
30	9.67 866	233	9.73 476	301	10.26 524	9.94 390	68	30
40	9.68 098	232	9.73 777	301	10.26 223	9.94 321	69	20
50	9.68 328	230	9.74 077	300	10.25 923	9.94 252	69	10
29 0	9.68 557	229	9.74 375	298	10.25 625	9.94 182	70	0 61
10	9.68 784	227	9.74 673	298	10.25 327	9.94 112	70	50
20	9.69 010	226	9.74 969	296	10.25 031	9.94 041	71	40
30	9.69 234	224	9.75 264	295	10.24 736	9.93 970	71	30
40	9.69 456	222	9.75 558	294	10.24 442	9.93 898	72	20
50	9.69 677	221	9.75 852	294	10.24 148	9.93 826	72	10
30 0	9.69 897	220	9.76 144	292	10.23 856	9.93 753	73	0 60
10	9.70 115	218	9.76 435	291	10.23 565	9.93 680	73	50
20	9.70 333	217	9.76 725	290	10.23 275	9.93 606	74	40
30	9.70 547	215	9.77 015	290	10.22 985	9.93 532	74	30
40	9.70 761	214	9.77 303	288	10.22 697	9.93 457	75	20
50	9.70 973	212	9.77 591	288	10.22 409	9.93 382	75	10
31 0	9.71 184	211	9.77 877	286	10.22 123	9.93 307	75	0 59
10	9.71 393	209	9.78 163	286	10.21 837	9.93 230	77	50
20	9.71 602	209	9.78 448	285	10.21 552	9.93 154	76	40
30	9.71 809	207	9.78 732	284	10.21 268	9.93 077	77	30
40	9.72 014	205	9.79 015	283	10.20 985	9.92 999	78	20
50	9.72 218	204	9.79 297	282	10.20 703	9.92 921	78	10
32 0	9.72 421	203	9.79 579	282	10.20 421	9.92 842	79	0 58
° /	L. cos.	D.	L. cot.	D.	L. tan.	L. sin.	D.	' °

°	'	L. sin.	D.	L. tan.	D.	L. cot.	L. cos.	D.	'	°
32	0	9.72 421		9.79 579		10.20 421	9.92 842		0	58
	10	9.72 622	201	9.79 860	281	10.20 140	9.92 763	79	50	
	20	9.72 823	201	9.80 140	280	10.19 860	9.92 683	80	40	
	30	9.73 022	199	9.80 419	279	10.19 581	9.92 603	80	30	
	40	9.73 219	197	9.80 697	278	10.19 303	9.92 522	81	20	
	50	9.73 416	197	9.80 975	278	10.19 025	9.92 441	81	10	
33	0	9.73 611	195	9.81 252	277	10.18 748	9.92 359	82	0	57
	10	9.73 805	194	9.81 528	276	10.18 742	9.92 277	82	50	
	20	9.73 997	192	9.81 803	275	10.18 197	9.92 194	83	40	
	30	9.74 189	192	9.82 078	275	10.17 922	9.92 111	83	30	
	40	9.74 379	190	9.82 352	274	10.17 648	9.92 027	84	20	
	50	9.74 563	189	9.82 626	274	10.17 374	9.91 942	85	10	
34	0	9.74 756	188	9.82 899	273	10.17 101	9.91 857	85	0	56
	10	9.74 943	187	9.83 171	272	10.16 829	9.91 772	85	50	
	20	9.75 128	185	9.83 442	271	10.16 558	9.91 686	86	40	
	30	9.75 313	185	9.83 713	271	10.16 287	9.91 599	87	30	
	40	9.75 496	183	9.83 984	271	10.16 016	9.91 512	87	20	
	50	9.75 678	182	9.84 254	270	10.15 746	9.91 425	87	10	
35	0	9.75 859	181	9.84 523	269	10.15 477	9.91 336	89	0	55
	10	9.76 039	180	9.84 791	268	10.15 209	9.91 248	89	50	
	20	9.76 218	179	9.85 059	268	10.14 941	9.91 158	90	40	
	30	9.76 395	177	9.85 327	268	10.14 673	9.91 069	89	30	
	40	9.76 572	177	9.85 594	267	10.14 406	9.90 978	91	20	
	50	9.76 747	175	9.85 860	266	10.14 140	9.90 887	91	10	
36	0	9.76 922	175	9.86 126	266	10.13 874	9.90 796	91	0	54
	10	9.77 095	173	9.86 392	266	10.13 608	9.90 704	92	50	
	20	9.77 268	173	9.86 656	264	10.13 344	9.90 611	93	40	
	30	9.77 439	171	9.86 921	265	10.13 079	9.90 518	93	30	
	40	9.77 609	170	9.87 185	264	10.12 815	9.90 424	94	20	
	50	9.77 778	169	9.87 448	263	10.12 552	9.90 330	94	10	
37	0	9.77 946	168	9.87 711	263	10.12 289	9.90 235	95	0	53
	10	9.78 113	167	9.87 974	263	10.12 026	9.90 139	96	50	
	20	9.78 280	167	9.88 236	262	10.11 764	9.90 043	96	40	
	30	9.78 445	165	9.88 498	262	10.11 502	9.89 947	96	30	
	40	9.78 609	164	9.88 759	261	10.11 241	9.89 849	98	20	
	50	9.78 772	163	9.89 020	261	10.10 980	9.89 752	97	10	
38	0	9.78 934	162	9.89 281	261	10.10 719	9.89 653	99	0	52
	10	9.79 095	161	9.89 541	260	10.10 459	9.89 554	99	50	
	20	9.79 256	161	9.89 801	260	10.10 199	9.89 455	99	40	
	30	9.79 415	159	9.90 061	260	10.09 939	9.89 354	101	30	
	40	9.79 573	158	9.90 320	259	10.09 680	9.89 254	100	20	
	50	9.79 731	158	9.90 578	258	10.09 422	9.89 152	102	10	
39	0	9.79 887	156	9.90 837	259	10.09 163	9.89 050	102	0	51
	10	9.80 043	156	9.91 095	258	10.08 905	9.88 948	102	50	
	20	9.80 197	154	9.91 353	158	10.08 647	9.88 844	104	40	
	30	9.80 351	154	9.91 610	257	10.08 390	9.88 741	103	30	
	40	9.80 504	153	9.91 868	258	10.08 132	9.88 636	105	20	
	50	9.80 656	152	9.92 125	257	10.07 875	9.88 531	105	10	
40	0	9.80 807	151	9.92 381	256	10.07 619	9.88 425	106	0	50
°	'	L. cos.	D.	L. cot.	D.	L. tan.	L. sin.	D.	'	°

° /	L. sin.	D.	L. tan.	D.	L. cot.	L. cos.	D.	' °
40 0	9.80807		9.92381		10.07619	9.88425		0 50
10	9.80957	150	9.92638	257	10.07362	9.88319	106	50
20	9.81106	149	9.92894	256	10.07106	9.88212	107	40
30	9.81254	148	9.93150	256	10.06850	9.88105	107	30
40	9.81402	148	9.93406	256	10.06594	9.87996	109	20
50	9.81549	147	9.93661	255	10.06339	9.87887	109	10
41 0	9.81694	145	9.93916	255	10.06084	9.87778	109	0 49
10	9.81839	145	6.94171	255	10.05829	9.87668	110	50
20	9.81983	144	9.94426	255	10.05574	9.87557	111	40
30	9.82126	143	9.94681	255	10.05319	9.87446	111	30
40	9.82269	143	9.94935	254	10.05065	9.87334	112	20
50	9.82410	141	9.95190	255	10.04810	9.87221	113	10
42 0	6.82551	141	9.95444	254	10.04556	9.87107	114	0 48
10	6.82691	140	9.95698	254	10.04302	9.86993	114	50
20	9.82830	139	9.95952	254	10.04048	9.86879	114	40
30	9.82968	138	9.96205	253	10.03795	9.86763	116	30
40	9.83106	138	9.96459	254	10.03541	9.86647	116	20
50	9.83242	136	9.96712	253	10.03288	9.86530	117	10
43 0	9.83378	136	9.96966	254	10.03034	9.86413	117	0 47
10	9.83513	135	9.97219	253	10.02781	9.86295	118	50
20	9.83648	135	9.97472	253	10.02528	9.86176	119	40
30	9.83781	133	9.97725	253	10.02275	9.86056	120	30
40	9.83914	133	9.97978	253	10.02022	9.85936	120	20
50	9.84046	132	9.98231	253	10.01769	9.85815	121	10
44 0	9.84177	131	9.98484	253	10.01516	9.85693	122	0 46
10	9.84308	131	9.98737	253	10.01263	9.85571	122	50
20	9.84437	129	9.98989	252	10.01011	9.85448	123	40
30	9.84566	129	9.99242	253	10.00758	9.85324	124	30
40	9.84694	128	9.99495	253	10.00505	9.85200	124	20
50	9.84822	128	9.99747	252	10.00253	9.85074	126	10
45 0	9.84949	127	10.00000	253	10.00000	9.84949	125	0 45
° /	L. cos.	D.	L. cot.	D.	L. tan.	L. sin.	D.	' °



角之測法
 六十分法
 直角度 分 秒
 $1 = 90 = 5400 = 324000$
 $1 = 60 = 3600$
 $1 = 60$

六十分法與弧度法之比較
 $D : 180 :: \pi$

三角函數之定義
 $\sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$
 $\cos A = \frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}$
 $\tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{底邊}}$
 $\text{cosec } A = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}$
 $\sec A = \frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}$
 $\cot A = \frac{\text{底邊}}{\text{對邊}}$

由定義而知三角函數之關係
 $\sin A \times \text{cosec } A = 1$
 $\cos A \times \sec A = 1$
 $\tan A \times \cot A = 1$
 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
 $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$
 $1 + \cot^2 A = \text{cosec}^2 A$

$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

二角之和為 90° 或 180°
 而各互為餘角或補角

餘角之三角函數
 $\sin(90^\circ - A) = \cos A$
 $\cos(90^\circ - A) = \sin A$
 $\tan(90^\circ - A) = \cot A$
 $\cot(90^\circ - A) = \tan A$
 $\sec(90^\circ - A) = \text{cosec } A$
 $\text{cosec}(90^\circ - A) = \sec A$

補角之三角函數
 $\sin(180^\circ - A) = \sin A$
 $\cos(180^\circ - A) = -\cos A$
 $\tan(180^\circ - A) = -\tan A$
 $\text{cosec}(180^\circ - A) = \text{cosec } A$
 $\sec(180^\circ - A) = -\sec A$
 $\cot(180^\circ - A) = -\cot A$

對角之三角函數
 $\sin(-A) = -\sin A$
 $\cos(-A) = \cos A$
 $\tan(-A) = -\tan A$
 $\text{cosec}(-A) = -\text{cosec } A$
 $\sec(-A) = -\sec A$
 $\cot(-A) = -\cot A$

相差 90° 二角之三角函數
 $\sin(90^\circ + A) = \cos A$
 $\cos(90^\circ + A) = -\sin A$
 $\tan(90^\circ + A) = -\cot A$
 $\text{cosec}(90^\circ + A) = \sec A$
 $\sec(90^\circ + A) = -\text{cosec } A$
 $\cot(90^\circ + A) = -\tan A$

相差 180° 二角之三角函數
 $\sin(180^\circ + A) = -\sin A$
 $\cos(180^\circ + A) = -\cos A$
 $\tan(180^\circ + A) = \tan A$
 $\text{cosec}(180^\circ + A) = -\text{cosec } A$
 $\sec(180^\circ + A) = -\sec A$
 $\cot(180^\circ + A) = -\cot A$

270° 之和或差之二角三角函數
 $\sin(270^\circ - A) = -\cos A$
 $\cos(270^\circ - A) = -\sin A$
 $\tan(270^\circ - A) = \cot A$
 $\text{cosec}(270^\circ - A) = -\sec A$
 $\sec(270^\circ - A) = -\text{cosec } A$
 $\cot(270^\circ - A) = \tan A$

$\sin(270^\circ + A) = -\cos A$
 $\cos(270^\circ + A) = \sin A$
 $\tan(270^\circ + A) = -\cot A$
 $\text{cosec}(270^\circ + A) = -\sec A$
 $\sec(270^\circ + A) = \text{cosec } A$
 $\cot(270^\circ + A) = -\tan A$

360° 之和之二角三角函數
 $\sin(360^\circ - A) = -\sin A$
 $\cos(360^\circ - A) = \cos A$
 $\tan(360^\circ - A) = -\tan A$
 $\text{cosec}(360^\circ - A) = -\text{cosec } A$
 $\sec(360^\circ - A) = \sec A$
 $\cot(360^\circ - A) = -\cot A$

二角之三角函數
 $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
 $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
 $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
 $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$
 $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$
 $\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$
 $\cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot A - \cot B}$

分角之三角函數
 $\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$
 $\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$
 $2 \cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin A} \pm \sqrt{1 - \sin A}$
 $2 \sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin A} \mp \sqrt{1 - \sin A}$
 $\sqrt{2} \sin(\frac{A}{2} + 45^\circ) = \pm \sqrt{1 + \sin A}$
 $\sqrt{2} \cos(\frac{A}{2} + 45^\circ) = \pm \sqrt{1 - \sin A}$
 $\tan \frac{A}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 A}}{\tan A} = (-1 \pm \sec A) \cot A$

A角同有三角函數之角
 $\cos(n \cdot 360^\circ \pm A) = \cos A$
 $\sin(n \cdot 180^\circ + (-1)^n A) = \sin A$
 $\tan(n \cdot 180^\circ + A) = \tan A$

75° 及 15° 之三角函數
 $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$
 $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$
 $\tan 75^\circ = \cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$

三角函數之邊與角之關係
 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
 $a = b \cos C + c \cos B$
 $b = c \cos A + a \cos C$
 $c = a \cos B + b \cos A$
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
 $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$
 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$
 $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$
 $\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$
 $\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$
 $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$
 $\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$
 $\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$
 $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$
 $\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$
 $\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$
 $(b+c) \sin \frac{1}{2} A = c \cos \frac{1}{2} (B-C)$

以任意三角函數表他之各三角函數式

	sin.	cos.	tan.	cosec.	sec.	cot.
$\sin \theta =$	$\sin \theta$	$\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$	$\frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$	$\frac{1}{\text{cosec } \theta}$	$\frac{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}{\sec \theta}$	$\frac{1}{\sqrt{\cot^2 \theta + 1}}$
$\cos \theta =$	$\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$	$\cos \theta$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$	$\frac{\sqrt{\text{cosec}^2 \theta - 1}}{\text{cosec } \theta}$	$\frac{1}{\sec \theta}$	$\frac{\cot \theta}{\sqrt{\cot^2 \theta + 1}}$
$\tan \theta =$	$\frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta}$	$\tan \theta$	$\frac{1}{\sqrt{\text{cosec}^2 \theta - 1}}$	$\sqrt{\sec^2 \theta - 1}$	$\frac{1}{\cot \theta}$
$\text{cosec } \theta =$	$\frac{1}{\sin \theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$	$\frac{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}{\tan \theta}$	$\text{cosec } \theta$	$\frac{\sec \theta}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$	$\sqrt{\cot^2 \theta + 1}$
$\sec \theta =$	$\frac{1}{\cos \theta}$	$\frac{1}{\cos \theta}$	$\frac{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}{\tan \theta}$	$\frac{\text{cosec } \theta}{\sqrt{\text{cosec}^2 \theta - 1}}$	$\sec \theta$	$\frac{\sqrt{\cot^2 \theta + 1}}{\cot \theta}$
$\cot \theta =$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta}$	$\frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$	$\frac{1}{\tan \theta}$	$\frac{\sqrt{\text{cosec}^2 \theta - 1}}{\text{cosec } \theta}$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$	$\cot \theta$

三角函數之值

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	度
sin.	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	正弦
cos.	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	餘弦
tan.	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	正切
cosec.	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	餘割
sec.	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	正割
cot.	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	餘切

三角函數之正負

分面	I.	II.	III.	IV.
sin. 與 cosec.	+	+	-	-
cos. 與 sec.	+	-	-	+
tan. 與 cot.	+	-	+	-

三角函數值之變化
 sin. 與 cos. 之絕對值在 0 與 1 之間
 tan. 與 cot. 之絕對值在 0 與 ∞ 之間
 sec 與 cosec. 之絕對值在 1 與 ∞ 之間

三角函數之邊與角之關係
 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
 $a = b \cos C + c \cos B$
 $b = c \cos A + a \cos C$
 $c = a \cos B + b \cos A$
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
 $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$
 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$
 $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$
 $\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$
 $\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$
 $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$
 $\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$
 $\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$
 $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$
 $\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$
 $\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$
 $(b+c) \sin \frac{1}{2} A = c \cos \frac{1}{2} (B-C)$

以任意三角函數表他之各三角函數式

	sin.	cos.	tan.	cosec.	sec.	cot.
$\sin \theta =$	$\sin \theta$	$\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$	$\frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$	$\frac{1}{\text{cosec } \theta}$	$\frac{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}{\sec \theta}$	$\frac{1}{\sqrt{\cot^2 \theta + 1}}$
$\cos \theta =$	$\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$	$\cos \theta$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$	$\frac{\sqrt{\text{cosec}^2 \theta - 1}}{\text{cosec } \theta}$	$\frac{1}{\sec \theta}$	$\frac{\cot \theta}{\sqrt{\cot^2 \theta + 1}}$
$\tan \theta =$	$\frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta}$	$\tan \theta$	$\frac{1}{\sqrt{\text{cosec}^2 \theta - 1}}$	$\sqrt{\sec^2 \theta - 1}$	$\frac{1}{\cot \theta}$
$\text{cosec } \theta =$	$\frac{1}{\sin \theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$	$\frac{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}{\tan \theta}$	$\text{cosec } \theta$	$\frac{\sec \theta}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$	$\sqrt{\cot^2 \theta + 1}$
$\sec \theta =$	$\frac{1}{\cos \theta}$	$\frac{1}{\cos \theta}$	$\frac{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}{\tan \theta}$	$\frac{\text{cosec } \theta}{\sqrt{\text{cosec}^2 \theta - 1}}$	$\sec \theta$	$\frac{\sqrt{\cot^2 \theta + 1}}{\cot \theta}$
$\cot \theta =$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta}$	$\frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$	$\frac{1}{\tan \theta}$	$\frac{\sqrt{\text{cosec}^2 \theta - 1}}{\text{cosec } \theta}$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$	$\cot \theta$

三角函數之值

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	度
sin.	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	正弦
cos.	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	餘弦
tan.	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	正切
cosec.	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	餘割
sec.	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	正割
cot.	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	餘切

三角函數之正負

分面	I.	II.	III.	IV.
sin. 與 cosec.	+	+	-	-
cos. 與 sec.	+	-	-	+
tan. 與 cot.	+	-	+	-

三角函數值之變化
 sin. 與 cos. 之絕對值在 0 與 1 之間
 tan. 與 cot. 之絕對值在 0 與 ∞ 之間
 sec 與 cosec. 之絕對值在 1 與 ∞ 之間



印刷所

日本

東京並木活版所

東京淺草黑舟町

發行所

上海

啓文社

望平街

總發行所

上海

科學儀器館

四馬路惠福里

譯述者

中國

蕉綠居士

著作者

日本

上野清

光緒三十二年四月再版

光緒三十年九月初版

光緒三十年八月印刷

定價大洋三角五分

