NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. XVIII.

pro Anno MDCCLXXIII.

PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLXXIV.

SVMMARIVM DISSERTATIONVM,

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS XVIII.

MATHEMATICA.

I.

Theoria Elementaris ſerierum, ex ſinibus atque coſinibus arcuum arithmetice progredientium diuerſimode compoſitarum, dilucidata.

Auctore Dan. Bernoulli pag. 3.

Duas de conſimili argumento diſſertationes, ab Ill. *Bernoullio* ad Academiam transmiſſas, praecedentibus Commentariorum noſtrorum tomis inſeruimus, in quarum vna ſerierum quarundam incongrue verarum iuſta interpretatio atque vſus, in altera vero ſerierum infinitarum, quas arcuum arithmetice progredientium ſinus vel coſinus formant, ſummatio traditur. Editis ab eo inde tempore Commentariis Academiae Pariſinae ad annum 1769. nouam de eodem hoc argumento meditandi anſam ex eo adeptus eſt Ill. Auctor, quod in iſto volumine egregiam methodum a Dn. Abbate

 Boſſut

Boſſut expoſitam cerneret, determinandi pro dato quocunque terminorum numero ſummas ſerierum, quas angulorum arithmetice progredientium ſinus coſinusue eorumue poteſtates ſimiles exhibent. Primum problema a Cel. *Boſſut* reſolutum conſiſtit in ſummatione huius ſeriei

$$\text{ſin.}\,q + \text{ſin.}\,2\,q + \text{ſin.}\,3\,q + \text{ſin.}\,4\,q + \ldots\ldots \text{ſin.}\,n\,q$$

cuius inuenit ſummam $S = \frac{\text{ſin.}\,q\,(1 + \text{coſ.}\,q - \text{coſ.}\,n\,q - \text{coſ.}(n+1)q)}{1 - \text{coſ.}\,2\,q}$

vbi numerus integer n determinatum exprimit terminorum ſummandorum numerum. Hanc eandem ſeriem Ill. *Bernoullius* in priori ſuo ſchediasmate eſt contemplatus, ſed ita, vt *in infinitum continuata* ſupponeretur, qui quippe ſolus caſus ambiguitate a nemine adhuc explicata intricabatur; oſtenditque eſſe

$$\text{ſin.}\,q + \text{ſin.}\,2q + \text{ſin.}\,3q + \text{ſin.}\,4\,q + \ldots\,\text{ſin.}\,\infty\,q = \frac{\frac{1}{2}\text{ſin.}\,q}{\text{ſin.vers.}\,q}$$

quae ſumma ex formula Boſſutiana colligitur eſſe

$$\frac{\text{ſin.}\,q\,(1 + \text{coſ.}\,q - \text{coſ.}\,\infty\,q - \text{coſ.}\,(\infty + 1)\,q)}{1 - \text{coſ.}\,2\,q};$$

hanc vero expreſſionem prima fronte aenigma videri inſolubile, nemo inficiabitur, cum, quid pro coſ. $\infty\,q$ et coſ. $(\infty + 1)\,q$ ſit intelligendum, plane non pateat; dum contra formula Bernoulliana ab omni aequiuocatione prorſus eſt libera. Quo vero formulae vtriusque veritas et conſenſus pateſceret, Ill. Auctor ex principiis metaphyſicis hic oſtendit, ambos iſtos terminos combinatos in formula Boſſutiana, nempe coſ. $\infty\,q$ + coſ. $(\infty + 1)\,q$, nihilo aequari;

quari; quo demonſtrato, aequatisque duabus iſtis ſummae eiusdem expreſſionibus, requiritur inſuper, vt ſit

$$\frac{1}{2\,\text{ſin. vers.}\,q} = \frac{1+\text{coſ.}\,q}{1-\text{coſ.}\,2\,q}$$

quod ſtatim adparet, cum ſit

$$1-\text{coſ.}\,2\,q = 2\,\text{ſin.}\,q^2 \text{ et ſin. verſ.}\,q = 1-\text{coſ.}\,q;$$

ſic enim habebitur

$$\tfrac{1}{2} = \frac{1-\text{coſ.}\,q^2}{2\,\text{ſin.}\,q^2} = \frac{\text{ſin.}\,q^2}{2\,\text{ſin.}\,q^2} \text{ aut denique } 1 = 1.$$

Seriei coſinibus arcuum arithmetice progredientium formatae ſummam noua et eleganti methodo Cel. *Boſſut* indagauit; reperitque eſſe

$$\text{coſ.}\,q + \text{coſ.}\,2\,q + \text{coſ.}\,3\,q + \text{coſ.}\,4\,q + \ldots\,\text{coſ.}\,n\,q = \frac{\text{coſ.}\,q\,(\text{ſin.}\,n\,q + \text{ſin.}\,(n+1)\,q - \text{ſin.}\,q)}{\text{ſin.}\,2\,q}$$

vbi quidem notiſſimum eſt, ſi ſit $n = \infty$, hanc ſummam fore $= -\frac{1}{2}$. Docet itaque Ill. *Bernoullius*, etiam hoc caſu pariter fore

$$\text{ſin.}\,\infty\,q + \text{ſin.}\,(\infty + 1)\,q = 0;$$

quo ſubſtituto iſta formula abit in hanc

$$\frac{-\text{coſ.}\,q\,\text{ſin.}\,q}{\text{ſin.}\,2\,q} = -\tfrac{1}{2} \text{ ob ſin.}\,q\,\text{coſ.}\,q = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,2\,q.$$

Eodem modo etiam reliquae formulae ſummatoriae a Cel. *Boſſut* ad datum quemcunque terminorum ſummandorum numerum exhibitae caſui, quo ſeries ſupponuntur in infinitum progredi, poſſunt adcommodari; vnde principii, quo Illuſtr. Auctor vtitur, metaphyſici veritas et vſus abunde colligitur, praeſertim cum hae meditationes Cel. *Boſ-*

ſutii

ſutii commodam Ill. Auctori occaſionem praebuerint, quid de ipſo termino infiniteſimo ſtatuendum ſit, vberius explicandi, quo demum facto formulas Bosſutianas a finito perfecte determinato ad infinitum quodammodo indeterminatum extendere licet. Theoria haec Ill. *Bernoulli* cum duobus innitatur principiis; primo, quod propoſita ſeries infinita compoſita ſit ex periodis, quae perfecte ſine fine recurrunt eaedem; ſecundo, quod ſumma omnium terminorum in vna eademque periodo contentorum aequetur nihilo; de vtroque hoc principio complures obſeruationes ad rem illuſtrandam perutiles in hac diſſertatione ſuperadduntur.

II.

Summatio progreſſionum

$$\text{ſin.}\ \phi^\lambda + \text{ſin.}\ 2\ \phi^\lambda + \text{ſin.}\ 3\ \phi^\lambda \ldots\ldots + \text{ſin.}\ n\ \phi^\lambda$$

$$\text{coſ.}\ \phi^\lambda + \text{coſ.}\ 2\ \phi^\lambda + \text{coſ.}\ 3\ \phi^\lambda \ldots\ldots + \text{coſ.}\ n\ \phi^\lambda.$$

Auctore L. Eulero pag. 24.

Ill. *Bernoullii* praecedens diſſertatio anſam praebuit Ill. *Eulero*, eiusmodi progreſſionum, quae ex ſinibus vel coſinibus arcuum arithmetice progredientium eorumue ſimilibus poteſtatibus componuntur, naturam et ſummationem penitius inueſtigandi. Principio Ill. Auctor iſtas progreſſiones ad ſeries geometricas reuocare docet; poſito enim

coſ-

$\cos.\Phi+\sqrt{-1}\sin.\Phi=p$ et $\cos.\Phi-\sqrt{-1}\sin.\Phi=q$; vt ſit

$$\cos.n\Phi=\frac{p^n+q^n}{2} \text{ et } \sin.n\Phi=\frac{p^n-q^n}{2\sqrt{-1}};$$

tum vero etiam $pq=1$; euidens eſt, eas reduci poſſe ad has duas geometricas

$$p^\alpha+p^{2\alpha}+p^{3\alpha}\ldots+p^{n\alpha} \text{ et } q^\alpha+q^{2\alpha}+q^{3\alpha}\ldots+q^{n\alpha}$$

vbi quidem ſumma prioris $=\frac{p^\alpha(1-p^{n\alpha})}{1-p^\alpha}$; poſterioris vero $=\frac{q^\alpha(1-q^{n\alpha})}{1-q^\alpha}$. His conſtitutis, ſi hae duae ſeries ad ſe inuicem addantur, habebitur, reſtitutis pro p et q valoribus, ſumma

$$=-1+\frac{\cos.n\alpha\Phi-\cos.(n+1)\alpha\Phi}{1-\cos.\alpha\Phi};$$

ſi vero vna ſubtrahatur ab altera, prodit earundem differentia

$$=\frac{\sin.\alpha\Phi+\sin.n\alpha\Phi-\sin.(n+1)\alpha\Phi}{1-\cos.\alpha\Phi}\sqrt{-1}.$$

Ex his formulis duabus omnes caſus propoſiti facili negotio deriuantur; id quod Ill. Auctor pro caſibus, vbi $\lambda=1$; $\lambda=2$; $\lambda=3$; $\lambda=4$ perſpicue docet. Praecipuus vero quaeſtionis nodus in eo verſatur, cuiusmodi prodituræ ſint ſummae, ſi iſtae ſeries in infinitum continuentur, ſiue ponatur $n=\infty$. Duos hic caſus diſtingui conuenit: ſi λ fuerit numerus par; nullum eſt dubium, iſtas ſummas fore infinite magnas; ſin vero λ fuerit numerus impar; tum Ill. *Eulero* nihil certi de his ſummis affirmari

 poſſe

posse videtur, quae vero per rationes metaphysicas perquam ingeniose ab Ill. *Bernoullio* assignantur, ita, vt iis in Analysi plene aequiescere queamus; accedit huc, quod iam pridem Ill. Auctor adnotauit, eiusmodi casibus voci *summae* significatum ad Analysin magis adcommodatum esse tribuendum, quo admisso omnia circa eiusmodi summationes dubia sponte euanescunt, vt scilicet vox *summae* formulam eam designet analyticam, ex cuius euolutione istae series nascuntur. Ita v. c. si sit

$$s = \sin.\,\phi + \sin.\,2\,\phi \ldots\ldots + \sin.\,n\,\phi$$

colligitur $s = \frac{\sin.\,\phi + \sin.\,n\,\phi - \sin.\,(n+1)\,\phi}{2\,(1 - \cos.\,\phi)}$

vbi formulae $\sin.\,n\,\phi$ et $\sin.\,(n+1)\,\phi$ propter *vltimum* seriei terminum ingrediuntur, si igitur sit $n = \infty$, ita, vt *vltimus* terminus sit *nullus*, etiam istae formulae $\sin.\,n\,\phi$ et $\sin.\,(n+1)\,\phi$ sponte excidunt; vnde fit $s = \frac{\sin.\,\phi}{2\,(1 - \cos.\,\phi)}$, ex cuius formulae euolutione series proposita resultat.

Simili modo pro altera serie

$$t = \cos.\,\phi + \cos.\,2\,\phi \ldots\ldots + \cos.\,n\,\phi$$

inuenitur $t = -\frac{1}{2} + \frac{\cos.\,n\,\phi - \cos.\,(n+1)\,\phi}{2\,(1 - \cos.\,\phi)}$

siue posito $n = \infty$ simili ratiocinio colligitur $t = -\frac{1}{2}$; vt itaque praecedens summae notio etiam huic casui queat adplicari, notandum est, valorem $-\frac{1}{2}$ natum esse ex hac formula $t = \frac{\cos.\,\phi - 1}{2\,(1 - \cos.\,\phi)}$, quem valorem aequalem esse seriei propositae, Ill. Auctor ostendit. Adiungitur sub finem dissertationis supplementum de *summatione generali infinitarum aliarum progressionum*

num ad hoc genus referendarum, quod ſequens continet theorema: ſi huius progreſſionis

$$A z + B z^2 + C z^3 + D z^4 \ldots + N z^n$$

cognita fuerit ſumma, tum ſemper etiam has progreſſiones ſummare licebit:

$$A x \,\text{ſin.}\, \Phi + B x^2 \,\text{ſin.}\, 2\Phi + C x^3 \,\text{ſin.}\, 3\Phi \ldots + N x^n \,\text{ſin.}\, n\Phi$$

et $A x \,\text{coſ.}\, \Phi + B x^2 \,\text{coſ}\, 2\Phi + C x^3 \,\text{coſ.}\, 3\Phi \ldots + N x^n \,\text{coſ.}\, n\Phi$

id quod ipſis exemplis oſtenditur.

III.

Obſeruationes variae circa ſeries, ex ſinibus vel coſinibus arcuum arithmetice progredientium formatas.

Auctore A. I. Lexell p. 37

Occaſione eorum, quae Illuſtr. *Bernoulli* de his ſeriebus in noſtris Commentariis docuit, Clar. huius diſſertationis Auctor earum contemplationem ſuſcepit, quam heic adumbrandam iudicauit. In hoc vero argumento ita verſatus eſt, vt primum quaereret ſummam binarum ſerierum

$$\text{ſin.}z + \text{ſin.}(z+v) + \text{ſin.}(z+2v) + \text{ſin.}(z+3v) \ldots + \text{ſin}\,(z+nv)$$
$$\text{coſ.}z + \text{coſ}\,(z+v) + \text{coſ.}(z+2v) + \text{coſ.}(z+3v) \ldots + \text{coſ.}(z+nv)$$

pro terminorum numero finito, facillima autem reductio, quae hunc in finem adhiberi poteſt, ea eſt qua vtraque ſeries multiplicatur per $2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}v$, hoc enim facto fiet ex priori

$2\,S.\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}v = \text{coſ.}\,(z - \frac{1}{2}v) - \text{coſ.}\,(z + (n+\frac{1}{2})v)$ et ex poſteriori ſerie

$2\,S.\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}v = -\text{ſin.}\,(z - \frac{1}{2}v) + \text{ſin.}\,(z + (n+\frac{1}{2})v)$.

Quod ſi nunc ponatur numerus terminorum infinitus, dubium eſſe poterit, quomodo ſumma ſeriei ſit exprimenda, quia nimirum membrum $\text{coſ.}\,(z + (n+\frac{1}{2})v)$ varios immo nonnunquam infinitos valores recipere poteſt, nec proprie quidem loquendo dici poteſt, hunc terminum $\text{coſ.}\,(z + (n + \frac{1}{2})\,v)$ euaneſcere. Si vero in ſerie propoſita ſinuum, ita aſſumtum fuerit v, vt ad circumferentiam circuli rationem habeat rationalem, tum in hac ſerie certae dabuntur periodi, poſt quas iidem termini denuo recurrunt, ſumma autem terminorum in ſingulis periodis, aequabitur nihilo. Hoc igitur caſu pro ſumma totius ſeriei etiam numero terminorum infinito compoſitae, recte habebitur medius valor inter ſummas, quae pro aliqua periodo locum habere poſſunt, hic autem medius valor erit $= \frac{\text{coſ.}\,(z - \frac{1}{2}v)}{2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}v}$, ideoque pro caſu $v = z$ fiet $= \frac{1}{2}\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}v$. Quum igitur hoc valeat pro quocunque numero terminorum periodi, valebit etiam ſi iſte numerus ponatur infinitus, ita vt in genere ſtatui queat, ſummam ſeriei ſupra propoſitae in infinitum continuatae eſſe $\frac{\text{coſ.}\,(z - \frac{1}{2}v)}{2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}v}$.

Singularis tamen heic ſtatuenda eſt exceptio ſi fuerit vel $v = 0$, vel $v =$ multiplo cuidam circumferentiae

rentiae circuli, tum enim summa seriei fiet $= n$ sin. z, hinc que pro numero infinito, infinita. Explicatis iis quae ad summationes serierum supra propositarum, pertinent, progreditur Auctor huius dissertationis ad summationes serierum, quae formantur ex potestatibus quibuscunque sinuum vel cosinuum pro arcubus arithmetice progredientibus, quod quidem vix vllum facessit negotium, quia nimirum cognitum est quamcunque potestatem sinus vel cosinus alicuius arcus, per sinus vel cosinus arcuum multipsorum exprimi posse. Inuentis autem his summis pro termino numerorum finito, etiam facile erit summas pro numero infinito inuenire, vbi quidem id notatu dignum occurrit quod summae quarumcunque potestatum imparium cosinuum eundem habeant valorem, quippe quae inueniuntur $= -\frac{1}{2}$. His meditationibus subiungit denique Cl. Auctor summationes aliarum quarundam serierum, quae ex prius propositis facile deriuantur.

IV.

Noua series infinita maxime conuergens perimetrum Ellipsis exhibens.

Auctore L. Eulero pag. 71.

In Commentariis Academiae nostrae, vti et in Actis Berolinensibus, passim iam Ill. Auctor series dedit infinitas, quibus ellipsis cuiuscunque perimerimeter exprimitur, tam concinnas et ſimplices, vt, dari alias adhuc commodiores, vix ſuſpicari licuerit. Haec tamen ſeries, quam Ill. Auctor in praeſenti diſſertatione proponit, ceteris concinnitate ſua anteferenda videtur; eſtque plane noua. Quadrantis elliptici ponantur ſemiaxes a et b; hisque parallelae coordinatae x et y; habebitur ex natura ellipſis $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; ex qua aequatione Ill. Auctor peringenioſe totius arcus ſeu quartae partis perimetri longitudinem determinat. Ponatur ſcilicet

$$x = a \sqrt{\frac{1+z}{2}} \text{ et } y = b \sqrt{\frac{1-z}{2}};$$

vnde

$$dx = \frac{a\, dz}{2.\sqrt{2(1+z)}} \text{ et } dy = \frac{-b\, dz}{2\sqrt{2(1-z)}};$$

ex quo ſi arcus ponatur $= s$; habebitur

$$ds^2 = dz^2 \frac{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)z}{8(1-z^2)}$$

hincque

$$s = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int dz \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)z}{1 - z^2}}$$

ſi itaque hoc integrale ita ſumatur, vt poſito $x = 0$ euaneſcat, et vsque ad terminum $x = a$ extendatur: obtinebitur quaeſitus arcus ellipticus. In huius itaque formulae differentialis euolutione Ill. Auctor verſatur ex eaque ſeriem hanc ſimplicem et maxime conuergentem elicit

$$s = \frac{c\pi}{2\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1.1}{4.4}.n^2 - \frac{1.1}{4.4}.\frac{3.5}{8.8}.n^4 - \frac{1.1}{4.4}.\frac{3.5}{8.8}\frac{7.9}{12.12}n^6 \text{ etc.}\right)$$

vbi $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ et $n = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

Si ſit $a = b$; quadrans hic ellipticus in circularem abit et, ob $n = 0$ et $c = a.\sqrt{2}$, prodit, vti quidem

dem notiſſimum eſt, $s = \frac{a\pi}{2}$. Si vero ponatur $b = 0$; curua abit in lineam rectam alteri ſemiaxi aequalem; ita autem eſt $n = 1$ et $c = a$; vnde ſequens reſultat aequatio:

$$a = \frac{a\pi}{2\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1.1}{4.4} - \frac{1.1}{4.4} \cdot \frac{3.5}{8.8} - \text{etc.}\right)$$

adeoque ſeriei infinitae

$$1 - \frac{1.1}{4.4} - \frac{1.1}{4.4} \cdot \frac{3.5}{8.8} \text{ etc.}$$

quae quidem minime conuergit, adcurate aſſignari poteſt ſumma $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Hac occaſione oblata Ill. Auctor operae pretium cenſet, in ſummam huius ſeriei etiam a poſteriori inquirere; ad quod praeſtandum methodo ſua iam ſaepius explicata potiſſimum vtitur, dum nimirum quaeſtionem ad aequationem differentialem reuocat, cuius integrale per ipſam ſeriem propoſitam exprimatur.

V.

Demonſtrationes circa reſidua ex diviſione poteſtatum per numeros primos reſultantia.

Auctore L. Eulero pag. 85.

Continet haec diſſertatio varia Theoremata, in quibus plures nouae veritates ex principiis prorſus ſingularibus demonſtrantur, ad quas per methodos

dos adhuc vſitatas vix vllus patere aditus videtur. Placet iſtorum theorematum praecipua hic ante oculos ponere, quorum vberior euolutio in ipſa diſſertatione traditur. Primum theorema ita ſe habet: ſi P deſignet numerum primum, ſitque $x < P$; forma $x^n - 1$ non, niſi n modis, per P diuiſibilis reddi poteſt; vnde problema reſultat, quo pro omnibus exponentibus n numerus caſuum propriorum quaeritur, quibus formula $x^n - 1$ per P diuiſibilis reddi queat, alios pro x valores non admittendo, niſi qui diuiſore ſint minores. Haec etſi omni fere vſu videntur deſtituta; ideo tamen erant praemittenda, quod viam muniunt demonſtrationibus ſequentium theorematum; v. c. ſi diuiſor primus ſit $P = 2n + 1$ et a radix primitiua: tum progreſſionis geometricae $1, a, a^2, a^3$ etc. terminus a^n reſiduum praebet $2n$ ſeu -1. Porro: ſi diuiſor fuerit numerus quicunque primus P: tot dantur radices primitiuae, quot reperiuntur numeri ad $P - 1$ primi eoque minores, quandoquidem tantum radices diuiſore minores conſiderantur. Elegantia inprimis ſunt ſequentia: Propoſito numero primo formae $4n + 1$, ſemper ſumma duorum quadratorum ad eum primorum exhiberi poteſt, quae ſit per eum diuiſibilis, atque alterum quidem quadratum pro lubitu accipere licet. Nulla vero ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum per vllum numerum primum formae $4n - 1$ diuiſibilis exiſtit. Hiſce expeditis Ill. Auctor etiam ad poteſtates cubicas progreditur, atque ſi omnes numeri cubici $1, 2^3; 3^3; 4^3$

3^{λ}; 4^{λ} etc. per numerum quemcunque primum P diuidantur: reſiduorum inde naſcentium indolem inveſtigat; et hoc ipſum problema etiam pro poteſtatibus quartis reſoluit; tandem in fine diſſertationis ſequens ſubiungitur theorema: ſi omnium numerorum poteſtates exponentis λ, ſcilicet $1, 2^{\lambda}; 3^{\lambda}; 4^{\lambda}; 5^{\lambda}$ etc. per numerum primum formae $\lambda n + 1$ diuidantur; multitudo reſiduorum diuerſorum erit n ideoque multitudo non-reſiduorum $= (\lambda - 1) n$.

VI.

Noua ratio quantitates irrationales proxime exprimendi.

Auctore L. Eulero pag. 136.

Notiſſimum eſt, omnem quantitatem irrationalem ſimplicem ad hanc formam $(1 + x)^n$ reduci poſſe. Sit enim N numerus quicunque ad poteſtatem exponentis fracti $\frac{\mu}{\nu} = n$ eleuandus; ei ſemper hanc formam tribuere licebit $N = a^{\nu} + b$; vnde fit $N^{\frac{\mu}{\nu}} = a^{\mu}\left(1 + \frac{b}{a^{\nu}}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$; ſicque ſola expreſſio $\left(1 + \frac{b}{a^{\nu}}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$ irrationalitatem continet, quae, ſi ponatur $\frac{b}{a^{\nu}} = x$, ad formam $(1 + x)^n$ reducitur, quae more conſueto per euolutionem binomii Newtonianam in ſeriem infini-

infinitam conuertitur; idque duplici modo, primum ſcilicet directe

$$(1+x)^n = 1 + \tfrac{n}{1}. x + \tfrac{n.n-1}{1.2}. x^2 + \text{etc.}$$

ſecundo autem ob

$$(1+x)^n = \frac{1}{(1+x)^{-n}}$$

erit quoque

$$(1+x)^n = \frac{1}{1 - n. x + \frac{n.n-1}{1.2} x^2 - \text{etc.}},$$

ex quarum duarum expreſſionum multiplicatione poſito n pro $2n$ deriuatur tertia:

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{n}{2}. x + \frac{n.n-2}{2.4} x^2 + \text{etc.}}{1 - \frac{n}{2}. x + \frac{n.n+1}{2.4} x^2 - \text{etc.}}$$

cui quidem poſtremae formulae infinite multae aliae ſimiles, formulam $(1+x)^n$ exprimentes poſſunt exhiberi.

Fingatur enim $(1+x)^n = \frac{1 + A x + B x^2 + C x^3 + etc.}{1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 + etc.}$,

atque euidens eſt, ſi vel numerator vel denominator pro lubitu aſſumatur, alterius coëfficientes inde determinari. Quanquam vero problema hoc intuitu eſt indeterminatum atque infinitas admittit ſolutiones: ad id tamen inprimis eſt attendendum, vt vtraque ſeries reddatur quam maxime conuergens. Id vt obtineatur, denominatori finitum quendam terminorum numerum tribuere licebit atque ita quidem, vt inde vnus pluresue numeratoris termini ordine ſeſe excipientes plane euaneſcant. Hoc igitur negotium

tium Ill. Auctor in hac dissertatione vberius pertractat, atque in tribus primis problematibus formulam propositam $(1 + x)^n$ in series maxime conuergentes ita resoluere docet, vt denominator sit vel binomium $1 - \alpha x$ vel trinomium $1 - \alpha x + \beta x^2$ vel quadrinomium $1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3$; ex quorum casuum particularium consideratione facile deriuare licet solutionem generalem, si scilicet pro denominatore assumatur multinomium quodcunque. Resultant ex hac inuestigatione formulae, notatu quam maxime dignae, quarum ope Ill. Auctor radicem quadraticam ex quouis numero proposito non quadrato similique modo radicem cubicam ex quouis numero non cubo proxime assignare et pro extractione radicum altiorum potestatum analogas formulas quantumuis exactas formare docet. Immo vlterius quoque earundem vsus patet, siquidem non logarithmum modo numeri cuiuscunque propositi, sed quantitatem quoque exponentialem e^x harum formularum ope proxime exprimere licet, designante e istum numerum, cuius logarithmus hyperbolicus vnitati aequatur. Quod vt perspicuum fiat, sufficit perpendisse, quantitatis $1 + x$ logarithmum hyperbolicum esse $\frac{(1 + x)^n - 1}{n}$ existente $n = 0$; et $e^x = (1 + \frac{x}{n})^n$, si pro n sumatur numerus infinitus.

VII.

Solutio problematis de inueniendo triangulo, in quo rectae ex singulis angulis latera opposita bisecantes sint rationales.

Auctore L. Eulero pag. 171.

Problematis huius euolutio ad resolutionem trium sequentium formularum reducitur: $2b^2+2c^2-a^2=f^2$; $2c^2+2a^2-b^2=g^2$ et $2a^2+2b^2-c^2=h^2$, si scilicet $2a$, $2b$ et $2c$ sint latera trianguli a rectis f, g et h bisecta. Ex hisce tribus formulis ternae aliae resultant: $2g^2+2h^2-f^2=9.a^2$; $2h^2+2f^2-g^2=9.b^2$ et $2f^2+2g^2-h^2=9.c^2$; ex quarum cum prioribus similitudine concludit Illustr. Auctor, pro lateribus $2f$, $2g$ et $2h$ fore rectas bisecantes $3a$, $3b$ et $3c$ adeoque pro f, g et h istas fore $\frac{3}{2}a$; $\frac{3}{2}b$ et $\frac{3}{2}c$ vnde colligitur, inuento vno huiusmodi triangulo, si rectae bisecantes pro lateribus noui trianguli accipiantur, id eadem praeditum fore proprietate. His praemissis, Ill. Auctor ipsum problema aggreditur, cuius resolutio cum meris absoluatur artificiis analyticis; nihil hic in epitome de ea adferre licet, nisi quod pendeat ab huiusmodi forma:

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

ad

ad quadratum reuocanda, pro cuius resolutione naturalis et simplex methodus adhuc desideratur.

VIII.

Resolutio aequationis

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0$$

per numeros tam rationales, quam integros.

Auctore L. Eulero pag. 185.

Forma huius aequationis tam late patet, vt insignem Analyseos Diophanteae partem complecti censenda sit. Prouti coëfficientibus A, B, C etc. varii diuersae indolis valores tribuuntur; plures quoque inde resultant casus, diuersis vulgo methodis pertractati. In hac dissertatione Ill. Auctor singularem explicat modum, istam aequationem resoluendi, atque ita quidem, vt solutio non ad rationales modo, sed integros quoque numeros possit adplicari; et ab omni radicis extractione sit libera. Casus dantur haud pauci, quibus haec aequatio fit impossibilis; vnde Ill. Auctor vnicum saltem casum, quo illi satisfiat, supponit esse cognitum, ex quo qua ratione alii siue numero finiti siue infiniti erui queant, deinceps explicat. Peculiari autem iudicio opus est, vtrum aequatio proposita solutionem admittat

mittat in numeris integris, nec ne? consideretur hunc in finem formula $B^2 - AC$, quae si fuerit numerus positiuus non quadratus, semper impetrari possunt bini numeri integri aequationi satisfacientes, idque adeo infinitis modis. Duplicem Ill. Auctor resolutionem tradit aequationis propositae, quarum posterior ideo potissimum peculiari attentione digna est, quod ex doctrina irrationalium est petita, quae quomodo in Analysi indeterminata seu Diophantea in vsum possit vocari, minime obuium est. Eximiam vero eius in eiusmodi problematibus adplicationem iam pridem vberius docuit Ill. Auctor in Algebra sua rhutenice et germanice apud nos typis impressa. Casibus particularibus aequationis datae euoluendis Ill. Auctor non censuit esse immorandum, vtpote qui iam passim satis superque sunt pertractati.

IX.

Insignes proprietates serierum sub hoc termino generali contentarum:

$$x = \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{b}{\sqrt{k}}\right)(p + q\sqrt{k})^n + \tfrac{1}{2}\left(a - \frac{b}{\sqrt{k}}\right)(p - q\sqrt{k})^n.$$

Auctore L. Eulero pag. 198.

Series ex hac formula resultantes ad genus recurrentium secundi ordinis pertinent, siquidem quilibet terminus per binos praecedentes determinatur.

Nouas

Nouas quasdam et insignes earundem proprietates Ill. Auctor hic explicat atque id potissimum dat operam, vt, dum alias eiusmodi inuestigationes ad calculos perducunt intricatissimos, omnia hic succincte et facile expediantur. Si in vtroque termino priores factores ponantur f et g; posteriores v et u; formula proposita statim ita contrahetur, vt sit $x = f.v^n + g.u^n$; et loco x scribit Ill. Auctor $[n]$, quippe quo terminus designatur ex exponente n oriundus; ita, vt ipsa series sequentibus constet terminis

$$[0]; [1]; [2]; [3] \text{ etc.}$$

Hisce praenotatis principio Ill. Auctor legem inuestigat, qua termini huius seriei immediate sese insequentes

$$[n]; [n+1]; [n+2] \text{ etc.}$$

a se inuicem pendent; qua detecta pro terminis quoque non immediate, sed per saltum sese insequentibus, veluti

$$[n]; [n+\nu]; [n+2\nu] \text{ etc.}$$

scalam relationis determinat; ita, vt hoc modo termini ab initio seriei quantumuis remoti satis expedite queant assignari, quorum determinatio, si seriem per singulos terminos actu continuare quis vellet, calculos requireret operosissimos. Inuenta hac relatione, facile iam dato quocunque seriei termino $[n]$ eius immediate sequentem $[n+1]$, immo quoque terminum dato interuallo a dato termino remotum inuenire docet, vnde dato seriei termi-

termino quocunque [n] ex ſequentibus eum quoque definire licet, qui ab illo tantum diſtat, quantum ipſe ab initio, hoc eſt terminum [$2n$]; hisque alia analoga problemata plura in hac diſſertatione reſolvuntur.

X.

De reſolutione irrationalium per fractiones continuas, vbi ſimul noua quaedam ſingularis ſpecies minimi exponitur.

Auctore L. Eulero pag. 218.

Cohaeret diſſertationis huius argumentum cum reſolutione aequationis

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0$$

quam Ill. Auctor in antecedentium diſſertationum vna pertractauit. Totum iſtud negotium eo rediit, vt eiusmodi pro x et y inueſtigarentur valores in numeris integris, quibus formulae $A x^2 + 2 B x y + C y^2$ minimus valor induceretur. Tres autem hic caſus occurrunt diſtinguendi; aut enim formae iſtius factores ſunt reales et diuerſi inter ſe, id eſt, $B^2 - A C$ poſitiuum; aut reales, ſed inter ſe aequales, quod fit, ſi $B^2 - A C = 0$; aut denique imaginarii, ſi $B^2 - A C$ fuerit negatiuum. Secundus et tertius caſus ab Ill. Auctore eſt praetermiſſus, quandoquidem

dem quaestio minimi in vtroque nulla plane difficultate laborat. Solus ergo relinquitur ille casus, vbi factores sunt reales et inter se diuersi; vbi quidem haec superaddenda est conditio, vt $B^2 - A C$ non sit numerus quadratus; quod si acciderit, factores euaderent rationales, et nulla de minimo quaestio locum haberet, cum formulae propositae valor adeo ad nihilum posset redigi. Numerus itaque $B^2 - A C$ debet esse formae $m x^2 - n.y^2$, denotantibus litteris m et n numeros integros; atque hic iam quaestio notatu digna occurrit, quinam valores integri litteris x et y sint tribuendi, vt ipsa formula minimum omnium adipiscatur valorem. Notum est, si vel m vel n ponatur $= 1$, istam formulam adeo ad vnitatem vsque posse deprimi; ex theoremate enim celebri Pelliano constat, semper effici posse $x^2 - ny^2 = 1$; dummodo n non fuerit numerus quadratus. Dantur insuper praeter hos duos et alii casus, quibus formulae propositae valor in vnitatem abit; veluti $3 x^2 - 2 y^2 = 1$, positis $x = 1$ et $y = 1$ vti et $9 x^2 - 5 y^2 = 1$, posito $x = 3$ et $y = 4$. Euenire autem vtique potest, vt formulae valor minimus vnitatem superet; ac tum difficillima plerumque est determinatio minimi quaesiti, veluti fit in formula $13. x^2 - 7. y^2$ quae deprimitur ad binarium, posito $x = 15$ et $y = 11$; quod quidem de minimo iudicium calculos eo operosiores postulat, quo maiores fuerint numeri m et n. Ex hactenus allatis abunde perspicitur, expositionem methodi, in his casibus minimum inuestigandi, haud exiguum

Analysi incrementum adferre; atque id ipsum est, in quo explicando Ill. Auctor hic versatur.

Ante quam ipsius methodi explicationem traderet, e re fore censuit, ostendere, semper infinitis modis idem minimum posse obtineri; ipsa vero methodus ex eo est petita, quod casu minimi valor formulae $m x^2 - n y^2$ propius ad nihilum, quam vllo alio, accedat; quocirca negotium eo iam est perductum, vt valores quaerantur, quibus proxime fiat $\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{n}{m}}$ siue vt quaerantur fractiones rationales $\frac{x}{y}$, quae tam prope aequentur formae irrationali $\sqrt{\frac{n}{m}}$, quam quidem fieri potest, non maioribus pro x et y numeris adhibendis. Hunc in finem Ill. Auctor formulam $\frac{\sqrt{nm}}{m}$ in fractiones continuas conuertit; omnes enim fractiones hoc modo formatae hac gaudent proprietate, vt quaelibet valorem $\frac{\sqrt{mn}}{m}$ propius exhauriat, quam vllo alio modo fieri posset numeris non maioribus adhibendis, vbi quidem notum est, inter has fractiones eas quam maxime adpropinquare, quae maximos indices habent. Ill. Auctor hic methodum explicat, qua operationes, quibus isti quoti continui reperiuntur, haud mediocriter contrahi possunt, et quam exemplo dilucidat. His explicatis ad ipsum problema progreditur et primo quidem si formula $A x^2 - 2 B x y + C y^2$ casu $x = a$ et $y = b$ praebeat valorem c, infinitos alios valores pro x et y substituendos inuestigare docet; qui eundem formulae valorem c sint praebiturae; et tum porro

porro, quod erat principale, in eos inquirit valores, quibus ipſa formula euadat minimum; quam autem facilis et concinna ſit Ill. Auctoris regula, ex ſubiunctis exemplis abunde perſpicitur, quae deſumuntur a formulis ſequentibus:

$5x^2-6xy-7y^2$; $7x^2-20xy+14y^2$; $25x^2-70xy+46y^2$.

Regula quoque propoſita feliciſſime adhiberi poteſt in ſoluendo celebri illo problemate Pelliano, in quo notum eſt, quaeri duos numeros x et y tales, vt ſit $y=\sqrt{(kx^2+1)}$; tum enim oportet vtique, vt ſit proxime $\frac{y}{x}=\sqrt{k}$.

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

Noua Determinatio Centri oſcillationis in corporibus qualibuscunque filo flexili ſuſpenſis, eiusque a regula communi diſcrepantia.

Auctore Daniele Bernoulli p. 245.

Eos, qui in diſquiſitionibus phyſico-mechanicis verſati ſunt, haud latent multifariae et ſubtiles cautelae, quas ſibi praeſcribunt philoſophi, dum experimentorum ope longitudinem penduli ſimplicis ad minuta ſecunda vibrantis in diuerſis terrae locis inueſtigant. Recenſet eas Ill. *Bernoullius* in initio huius diſſertationis atque ſuam cuique acuminis et in experimentando ſcrupuloſitatis laudem ſaluam relinquit. Vnum eſt, quod Ill. Viro in his operationibus ſcrupulum mouet. Scilicet ſolent phyſici in pendulo, quo vtuntur ad experimentandum, inquirere in centrum oſcillationis atque ad hoc determinandum regulam ſequuntur communem a magno Hugenio primum prolatam tumque diſtantiam inter hoc centrum oſcillationis et punctum ſuſpenſionis pro vera aſſumunt longitudine penduli ſimplicis iſochroni. In huius operationis examine conſi-

consistit praesentis dissertationis argumentum. In theoria oscillationum Hugeniana systemata oscillantia supponuntur rigida; quo fit, vt omnes totius systematis partes communi motu angulari circa rotationis axem ferantur. In experimentis vero, de quibus modo diximus, fila adhibentur flexibilia; ita, vt filum cum axe corporis inter oscillandum angulum efformet certe lege variabilem; id quod ingens harum oscillationum ab Hugenianis discrimen non producere non potest. Etsi itaque pro hypothesi rigiditatis in toto systemate oscillante negotium facile expeditur: haud tamen exigua problemati difficultas inducitur, si filum corpus suspendens in puncto suspensionis aliquam inflexionem pati posse supponitur. Ill. Auctor itaque huius casus resolutionem suscipit, ex qua ipsa patescit, oscillationes pro filo flexili toto coelo differre ab oscillationibus communiter assumtis pro filo rigido. Quantitatis radicalis solutionem ingredientis signum ambiguum duplex innuit oscillationum genus, quorum alterum confitente Ill. Auctore, parum differt duratione sua ab oscillationibus Hugenianis; quo sine dubio factum est, vt nemo adhuc diuersitatem fuerit suspicatus. Vt itaque haec omnia penitus excutiantur, Ill. Auctor ex instituto suo vtrumque id genus examini subiicit et primo quidem de oscillationibus principalibus tardioribus, et deinceps de oscillationibus accessoriis celerioribus ac tandem de oscillationibus vtriusque generis coëxistentibus agit; quae vero omnia cum ad figuras ipsas multum referantur: cupidos profundae huius disquisitionis lectores ad ipsam dissertationem Ill. Viri ablegamus.

II.

Determinatio motus oscillatorii in praecedente dissertatione pertractati, ex primis mechanicae principiis petita.

Auctore L. Eulero pag. 268.

Argumenti in superiore dissertatione ab Ill. *Bernoullio* tractati resolutionem Ill. Auctor hic pariter suscipit, eamque a primis inde mechanicae legibus repetit; vbi quidem ambae solutiones, ex diversissimis licet principiis deriuatae, in fine tamen perfecto inter se inuicem consensu conspirare deprehenduntur. Principio Ill. Auctor vires inuestigat, corpus, de cuius motu oscillatorio quaestio instituitur, sollicitantes; quarum vna est vis grauitatis ponderi corporis aequalis, et in centro grauitatis adplicata; altera autem in puncto suspensionis et aequalis tensioni ipsius fili. In ipso autem corpore duplex motus est considerandus; alter *progressiuus*, quo fertur centrum grauitatis ipsum; alter *gyratorius* qui fit circa centrum grauitatis. His explicatis Ill. Auctor vtrumque hunc motum per prima mechanicae principia determinat; atque hoc modo tres aequa-

aequationes differentio-differentiales adipiſcitur, quae omnia determinant, quae ad motus cognitionem, vtcunque etiam is fuerit irregularis, deſiderari poſſunt, ſiquidem iſtae formulae ita ſunt comparatae, vt tempus in minutis ſecundis exprimant, indeque ad quoduis tempus in minutis ſecundis expreſſum ſtatum ipſum ipſius corporis definiant. Hiſce aequationibus differentialibus ſecundi ordinis generatim euolvendis Ill. Auctor hic non immoratur; cum enim tantum de oſcillationibus quam minimis in diſſertatione Ill. *Bernoullii* ſermo fuerit, anguli iſtas aequationes ingredientes ſemper ſpectari poſſunt tanquam infinite parui adeoque ſinus angulorum ipſis angulis, coſinus vero vnitati aequantur; quo compendio iſtae aequationes ad formas multo ſimpliciores reducuntur; ex quarum euolutione Ill. Auctor plenam problematis reſolutionem elicit. Inprimis vero in eo haud exiguum vtriusque methodi, Eulerianae et Bernoullianae, diſcrimen cernitur, quod quaeſtionem de oſcillationibus *finitis* methodo Bernoulliana ne tentare quidem liceat; cum prima motus principia Ill. *Eulero* iam initio huius diſquiſitionis tres ſuppeditauerint aequationes, quibus plena huius quaeſtionis reſolutio continetur; quarum euolutio ſi minus ſuccedat, id Analyſeos, non mechanicae, defectibus erit tribuendum. Quanquam igitur plena huius problematis ſolutio adhuc deſideratur: examinare tamen licuit Ill. Auctori, quantum minimae huius generis oſcillationes a motu pendulorum ſimplicium diſcrepare poſſint; quod diſcrimen etiam in

prae-

praecedente dissertatione fuerat exploratum; ex his itaque calculis colligi potest, oscillationes minimas penduli flexilis tam parum ab oscillationibus eiusdem penduli, si foret rigidum, differre posse, vt tempore 1028 oscillationum vnica tantum oscillatione aberret; vnde porro perspicitur, in aestimatione initii siue finis cuiusque oscillationis errari posse parte circiter septuagesima vnius minuti secundi; quare cum huiusmodi tantilli errores ne percipi quidem queant, ob hanc rationem ne minima quidem motus oscillatorii perturbatio erit pertimescenda, idque eo minus, si, vti in eiusmodi experimentis fieri assolet, fili longitudo ad magnitudinem globi rationem notabilem v. c. 3 : 1 teneat.

III.

De pressione ponderis in planum, cui incumbit.

Auctore L. Eulero pag. 289.

Argumentum, quod Ill. Auctor in hac dissertatione pertractat, etsi iam in elementis physico-mathematicis passim occurrere videtur; tantum tamen abest, vt obuium et ab omni difficultate liberum sit, vt potius plena huius quaestionis resolutio omni Geometrarum attentione sit dignissima; in elementis scilicet de tota tantum pressione, quam planum

planum a pondere incumbente ſuſtinet, agitur; intacta vero relinquitur quaeſtio, quantis viribus ſingula plani puncta vrgeantur; atque in illo quidem caſu notum eſt, preſſionem, ſi planum fuerit horizontale, ipſi ponderi eſſe aequalem; ſin vero planum ad horizontem inclinetur, tum preſſionem in ratione ſinus totius ad coſinum inclinationis eſſe minuendam; vtroque vero caſu preſſionis directionem ad planum eſſe normalem et per centrum grauitatis corporis tranſire. Ill. Auctor in hac diſſertatione orditur a caſu ſimpliciſſimo, quo pondus ternis pedibus plano inſiſtit, quem ſatis concinne expedire licet; ſi vero quatuor ſint pedes, quibus pondus plano inſiſtit; quaeſtio iam euadit maxime ardua; immo prorſus lubrica et incerta; quae difficultas augetur, ſi maior ſtatuatur pedum numerus; ſtatim enim ac iſti pedes non ſunt exactiſſime inter ſe aequales, manifeſtum eſt, eos, qui ſunt ceteris breviores, eſſe ſuperfluos; vti et, ſi corpus baſi quadam continua incumbat plano, et leuiſſimae promineant aſperitates, corpus plerumque in tribus tantum punctis ſuſtentari facile perſpicitur. Haec igitur perfectiſſima pedum aequalitas ne faceſſat negotium, Ill. Auctor planum ſupponit non ita durum, ſed panno quaſi obductum, vt pedes ponderis ipſi ſe immergere queant et impreſſionem aliquam efficere proportionalem vi, qua ſinguli ſolo innituntur. Quo tanquam principio conceſſo, quemadmodum pro omnibus caſibus preſſionem in ſingulis baſis punctis definire oporteat, Ill. Auctor in hac diſſertatione exponit. Solutio generalis ad formulas deducit duplicatis integralibus intricatas; qualibus vero integrationibus tum tantum opus est, quando corpus basin habet per spatium aliquod continuum extensam; quo quidem casu saepenumero calculi ob basin figurae irregularem euadere possunt inextricabiles; quando autem corpus aliquot pedibus plano insistit, plane nulla integratione opus est, dum formulae ad terminos singulorum pedum, tanquam ad totidem puncta, sunt adcommodandae. Hanc ob caussam hic casus posterior primo resoluitur atque pressiones definiuntur in singulis plani punctis, si pondus ipsi insistat in tribus, quatuor vel octo punctis. His euolutis Auctor ad casus progreditur, vbi pondus plano incumbit basi per spatium aliquod continuum extensa; ante vero, quam hanc inuestigationem suscipit, casus quasi intermedios examinat, quibus corpus deorsum desinit in limbum quempiam linearem siue rectilineum siue curuilineum; veluti si hic limbus fuerit perimeter trianguli vel parallelogrammi rectanguli vel circuli; et tum demum eos contemplatur casus, quibus ista basis duas habet dimensiones, veluti si fuerit triangulum vel parallelogrammum vel circulus; atque ex tot casibus specialibus hactenus euolutis solutionem maxime generalem elicit, qua, qualemcunque figuram habeat basis ponderis prementis, pressiones in singulis plani punctis definiuntur.

IV.

IV.

De Harmoniae veris principiis per ſpeculum muſicum repraeſentatis.

Auctore L. Eulero pag. 330.

Vniuerſa muſica quatuor conſonantiis innititur; *Vniſono*, *Octauae*, *Quintae*, et *Tertiae maiori*; quibus conſuetudo recentiorum nouam, *Septimae* titulo inſignitam addidiſſe videtur. Has quinque conſonantias, tanquam totidem vniuerſae harmoniae columnas, ad examen exactius, quam communiter fieri ſolet, reuocat Ill. Auctor huius diſſertationis. Vniſonus conſtat perfecta duorum pluriumue tonorum muſicorum aequalitate, qui ſcilicet vno minuto ſecundo eundem vibrationum numerum edunt; dum contra, qui eodem tempore vibrationes peragunt frequentiores, ſoni vocantur aliis acutiores; qui vero pauciores, ſoni aliis grauiores adpellantur. Vniſoni perceptio non iucunda ſolum auditui eſt, ſed ita quoque nobis a natura videtur ingenita, vt eum et agnoſcere et efficere facillime queamus. Numeri vibrationum a ſonis interuallo octauae diſtantibus editarum inter ſe rationem duplam tenent, ita, vt, dum grauior centum, acutior ducentas vibrationes peragat; quae ratio cum ab intellectu facillime percipiatur, auditum inſigni ſuauitate permulcet. Ratio inter numeros vibrationum eodem tempore editarum tripla tertiam conſonantiam principalem ſeu *Quintam* progenerat; quae, cum ratio 1 : 3 poſt duplam facillime percipiatur, etiam poſt *Octauam* eſt ſuauiſſima. *Tertia* denique *maior* continetur ratione minus ſimplici 4 : 5 et vltimo loco conſonantia a recentioribus adoptata ſeu *Septima* ratione 4 : 7. His conſtitutis Auctor examinat, cuiusmodi ſonos in inſtrumenta muſica recipere conveniat, ſiquidem ſoni diuerſi, quos Muſica, ars variationi amica, poſtulat, non niſi per vera harmoniae principia ſunt definiendi, quae harmonia in perceptione conſonantiarum principalium, de quibus modo diximus, eſt quaerenda. Atque hanc ob cauſſam a quolibet ſono ad quemlibet alium in muſica tranſilire non licet, ſed ad eos tantum, qui a priori remoti ſunt vel Octauae, vel Quintae vel Tertiae maioris interuallo; atque in his ſaltibus, quos ſimplices adpellare licet, prima vtique compoſitionis regula continetur; quando autem a quopiam ſono per aliud quodcunque interuallum fuerit vel aſcendendum vel deſcendendum; id ſimplici ſaltu exſequi non licet; vnde ſaltuum compoſitorum neceſſitas reſultat; quos tranſitus ab vno ſono ad alium Ill. Auctor compluribus exemplis egregie illuſtrat. Conſtruxit hunc in finem peculiarem ſchematismum quendam, quem adpellat *ſpeculum muſicum*, quoniam ſcilicet hoc ſpeculum inſpicienti ſtatim patet, quinam ſaltus a quolibet ſono ad quemlibet alium perducant ſimulque quot modis quilibet tranſitus inſtitui poſſit. Eius ope quaeſtio etiam haud parum in muſicis

muſicis curioſa poteſt reſolui, quemadmodum ſcilicet omnes duodecim ſonos ſcalae muſicae percurri oporteat per ſaltus ſimplices, Quintam nempe et Tertiam maiorem, vt ſingulis ſemel tantum impulſis reuerſio fiat ad primum ſonum, a quo curſus fuit inceptus; porro pro quibusnam ſcalae ſonis trias detur harmonica, ſiue duri ſiue mollis modi; et quae ſunt egregia huius generis alia.

V.

Noua methodus motus planetarum principalium ad tabulas aſtronomicas reducendi.

Auctore L. Eulero pag. 354.

Methodus, qua Ill. Auctor in hac diſſertatione ad motus planetarum principalium tabulis aſtronomicis comprehendendos vtitur, ea ipſa eſt, quam principio cum praeclarum opus ſuum: Theoria motuum Lunae noua methodo pertractata; haud ita pridem elaboraret, vni motuum lunarium theoriae adplicauerat; quam cum cerneret ad reliquorum quoque planetarum motus feliciſſimo ſucceſſu adhiberi poſſe; omnem eius indolem et ſingularia calculi artificia in eius adplicatione adhibenda hic iam diſtincte ob oculos ponit. In eclipticae plano concipiatur linea recta e centro Solis ad punctum aequinoctii vernalis directa quae pro linea abſciſſarum aſſumatur; a planeta autem extra eclipticam verſante demittatur ad hanc perpendiculum, atque ab hoc in ipſo plano ordinata ad lineam abſciſſarum normalis; quo fit, vt locus planetae tribut coordinatis inter ſe normalibus definiatur. His conſtitutis, cum vis, qua planeta ad ſolem vrgetur, ſit cognita, ſtatim mechanicae principia tres ſuppeditant aequationes differentiales ſecundi gradus, quibus, quicquid ad motus determinationem pertinet, contineri eſt cenſendum. Totum itaque negotium eo iam eſt deductum, vt ad quoduis tempus propoſitum harum trium coordinatarum quantitas ex iſtis aequationibus determinetur; his enim cognitis, facile perſpicitur, ſi ordinata illa modo memorata per ſuam abſciſſam diuidatur, prodire tangentem anguli verae planetae longitudini aequalis; ſi vero perpendiculum, a planeta ad planum eclipticae dimiſſum, per diſtantiam eius a ſole curtatam, quae pariter iſtis coordinatis exprimitur, diuidatur; haberi tangentem anguli latitudinem planetae definientis. Cum vero ſuperiorum aequationum reſolutio ad calculos quam maxime complicatos deduceret; huic difficultati Ill. Auctor egregio artificio medelam attulit, introducendis nouis coordinatis, commodioribus et in priorum locum ſubſtituendis; ducta ſcilicet concipiatur linea, quae cum aſſumta linea abſciſſarum angulum conſtitueret mediae longitudini planetae aequalem; et in hac ſumatur portio diſtantiae planetae mediae a ſole aequalis; vnde ſi ad hanc

hanc lineam agatur coordinata normalis; haec et respondens ipsi abscissa semper futura est satis exigua; ita, vt altiores vtriusque potestates in seriebus convergentibus tuto queant negligi. Primo itaque Ill. Auctor omnes terminos duas pluresue dimensiones trium istarum coordinatarum continentes reiicit sicque tres aequationes adipiscitur multo concinniores, et facile integrabiles. Euoluto hoc casu, quo termini duarum pluriumue dimensionum negliguntur, si iis admissis inuenti valores pro binis coordinatis substituantur, et producta sinuum et cosinuum ad simplices sinus et cosinus reuocentur; ex vna aequationum propositarum series nascetur certorum cosinuum; ex altera series similis certorum sinuum; propter quos terminos tam vnius, quam alterius coordinatae, expressio similes sinus et cosinus complectatur necesse est, qui quomodo facile definiri queant Ill. Auctor generatim ostendit, et singulare pro hac resolutione ac ingeniosum artificium, integrationis quasi vicem sustinens, explicat. His expeditis Ill. Auctor primo istum casum contemplatur, quo planeta in ipso plano eclipticae versatur; vbi cum perpendiculum a planeta ad eclipticam ductum sit nullum, duae tantum habentur coordinatae; sit igitur prior

$$= k\mathfrak{P} + k^2\mathfrak{Q} + k^3\mathfrak{R} + k^4\mathfrak{S} \text{ etc. atque altera}$$

$$kP + k^2Q + k^3R + k^4S \text{ etc.}$$

designante littera k excentricitatem orbitae, quae adcurate cognita supponitur; atque nunc Ill. Auctor

artifi-

artificii modo memorati ope ex aequationibus differentialibus valores litterarum 𝔓, 𝔔, ℜ etc. et P, Q, R etc. determinat; ita, vt, definitis hisce valoribus, facile sit tabulas construere, quae ad quamvis planetae anomaliam mediam valores vtriusque coordinatae exhibeant; quibus cognitis statim innotescit tangens aequationis centri planetae ad longitudinem mediam adplicandae; innotescit quoque statim distantia planetae a sole, si modo cognita fuerit media eius distantia. Hoc casu absoluto Auctor ad alium, quo planetae orbita parumper ad eclipticam inclinatur, progreditur eumque seorsim et omni cura euoluit; neque tamen, monente ipso Auctore, erit consultum, planetarum motus secundum hunc posteriorem casum exigere, praecipue si orbitae inclinatio haud fuerit ita parua; quandoquidem terminorum multitudo nimiis ambagibus calculum esset intricatura, quibus feliciſſime obuiam itur, si cuiusque planetae motum statim ad ipsum planum, in quo mouetur, referatur, sicque tota motus determinatio ad priorem casum reducatur.

VI.

VI.

Disquiſitio de lentibus obiectiuis triplicatis, quae vel nullam confuſionem pariant vel etiam datam confuſionem a reliquis lentibus ortam deſtruere valeant.

Auctore L. Eulero pag. 377.

Iam paſſim et inprimis in praeclaro de Dioptrica opere Ill. *Eulerus* id ipſum argumentum, cuius titulum praeſens prae ſe fert diſſertatio, ſummo ſtudio pertractauit; plerumque vero ternas lentes ſibi iungendas ita proxime inter ſe adaptari aſſumſit, vt earum diſtantia pro nulla in calculo haberi poſſet; id quod in ipſa praxi locum habere neutiquam poteſt, cum lentium centra ad minimum interuallo craſſitiei ipſarum remota inter ſe eſſe debeant. Tanti vero haec vna res in toto hoc negotio eſt momenti, vt ob hanc vnam praxis a thoria aberrationem lentes compoſitae, deſtruendae confuſioni deſtinatae, eam multo maiorem efficere poſſint, quam ſi earum loco lentes ſimplices adhiberentur. Id intuens Ill. Auctor hoc inprimis in hac diſquiſitione ſibi proponit, vt in determinatione huiusmodi lentium triplicatarum etiam craſſitiei vitri rationem habeat, iisque ſimul aperturam quam maximam conciliet,

 quan-

quandoquidem per hanc minima longitudo, quae in tubis dioptricis tantopere solet desiderari, determinatur. Assumitur autem lens triplicata ita ex tribus aliis componi, vt prima et tertia ex vitro coronario, pro quo est ratio refractionis 153 ad 100, media vero ex vitro chrystallino ab Anglis Flint-Glass vocato, cui respondet ratio refractionis 158 ad 100 parari debeant; vbi distantia inter lentem primam et secundam vel secundam et tertiam vni parti duodecimae distantiae focalis lentis mediae, vtpote quae maximam aperturam habere censetur, aequalem statuere oportebit. Hoc itaque constituto Ill. Auctor secundum praecepta dioptrica formulas, quae dispositionem lentium in genere respiciunt, huic casui accommodat et tum ad confusionem a radiorum diuersa refractione oriundam e medio tollendam progreditur; totamque calculi euolutionem ob oculos ponit. In fine dissertationis subiungitur descriptio lentis obiectiuae triplicatae perfectissimae, quae etiam confusionem a reliquis lentibus natam destruere valeat. Accedit appendix de lentibus duplicatis, quarum duae describuntur species: vna, vbi prior lens ex vitro coronario, posterior ex crystallino est parata; altera pro qua prior lens est crystallina; posterior coronaria; quanquam postremum hoc lentium duplicatarum genus nullius vsus esse videtur, nisi praegrandem distantiam focalem admittere quis velit, quod vero a Dioptricae scopo maxime est alienum.

VII.

VII.

De adplicatione lentium obiectiuarum compositarum ad omnis generis telescopia.

Auctore L. Eulero pag. 415.

In calculis pro constructione telescopiorum secundum methodum Ill. *Euleri* instituendis singulae lentes, ex quibus instrumentum componitur, separatim ad computum sunt reuocandae. Fieri itaque non potest, quin formularum, quibus satisfieri oportet, multitudo, praesertim si lentes compositae adhibeantur, ita increscat et formulae ipsae tam euadant intricatae, vt omnibus conditionibus ad telescopii perfectionem requisitis satisfacere molestissimum sit. Huic incommodo sine dubio posset occurri, si lentis compositae loco adhiberi posset lens simplex, quae omni respectu vicem illius gereret eundemque prorsus effectum produceret. Qua quam vero manifestum est, talem lentem simplicem esse impossibilem: siquidem ipsa haec impossibilitas lentibus compositis originem dedit; censet tamen Ill. *Eulerus*, lentem eiusmodi simplicem etsi imaginariam, tamen vtilissime in calculo posse admitti, quandoquidem, calculo absoluto, quicquid erat imaginarium, ex eo prorsus eliditur. Hunc in finem sequens problema resoluendum suscipit: Proposita lente obiectiua du-

 plicata

plicata siue triplicata, inuenire lentem simplicem, in se quidem imaginariam, ex data vitri specie confectam, quae omni respectu in compositione telescopii eundem plane effectum esset praestitura, et quam idcirco tanquam lentem vicariam spectare liceret. Inuentis omnibus eiusmodi lentis determinationibus Ill. Auctor generatim pro quouis telescopiorum genere lentem triplicatam loco obiectiuae adhibendam ita determinare docet, vt omnis plane confusio ab apertura lentium oriunda penitus destruatur; et quae hactenus in genere exposuit, ea tam ad lentes triplicatas in priori dissertatione, quam ad duplicatas in appendice descriptas adplicat, et quomodo omnis generis telescopia ope talium lentium obiectiuarum ad summum perfectionis gradum possint perduci, ordine exponit; vbi vero ea tantum telescopiorum genera, in quibus lens obiectiua simplex est, adhiberi conuenit, quandoquidem hic fuit ostensum, quomodo lentes compositae ad simplicem vicariam sint reducendae.

Hisce generatim expositis Ill. Auctor singula telescopiorum genera separatim meditationibus suis subiicit; posuit vero in dioptrica sua fundamentum diuisionis telescopiorum in numero imaginum realium in iis occurrentium; quare in theoriae hic propositae generalis adplicatione iam speciatim agit

I. De

I. De perfectione Telescopiorum primi generis, nullam imaginem realem continentium. pag. 432.

Vbi post euolutos casus aliquot speciales traditur constructio generalis horum telescopiorum pro quacunque multiplicatione. Duplici autem defectu, etsi lens obiectiua fuerit perfecta, haec telescopia laborant; primo enim lens ocularis non potest non quantumuis exiguam aliquam confusionem ob diuersam radiorum refrangibilitatem producere: deinde campus nimis est exiguus, quam vt pro maioribus multiplicationibus consultum sit, eiusmodi telescopia conficere.

II. De perfectione telescopiorum secundi generis seu astronomicorum, vnicam imaginem realem continentium. pag. 448.

Vbi simili ordine aliquot exemplis datae multiplicationis subiunguntur formulae generales pro constructione horum telescopiorum ad quamcunque multiplicationem adplicabiles; vnde tandem constructio generalis tuborum astronomicorum *perfectissimorum*, sex lentibus instructorum et ad quamlibet multiplicationem extensa deducitur.

III. De perfectione telescopiorum tertii generis, duas imagines reales continentium pag. 472.

Haec telescopia vocantur *terrestria* et ad minimum quatuor lentibus instruuntur. Species aliquot huius generis notatu prae ceteris dignas Ill. Auctor vberius pertractat et calculos pro telescopio eiusmodi sex lentibus constante et obiecta centies multiplicante in omni suo ambitu ob oculos ponit, cuius tubi longitudo erit 32 digitorum; semidiameter campi apparentis 23 minutorum, qui instar spatii circularis in coelo spectabitur, cuius semidiameter est 34 graduum 10 minut.

Additamenti huius dissertationis occasionem praebuit Celeb. *Jeaurat*, qui nouissimo Commentar. Parisinorum volumini amplam lentium obiectiuarum compositarum descriptionem inseruit, quibus vero non, nisi confusioni a diuersa radiorum refrangibilitate oriundae occurritur. Attulit idem egregia experimenta pro definienda tam refractione, quam dispersione radiorum pro vitro tam coronario, quam crystallino; pro hoc posteriori inuenit rationem refractionis 160 : 100, et dispersionem vitri coronarii ad crystallum vt 18 : 31. Operae itaque pretium Ill. *Eulero* visum est, calculos suos circa constructionem lentium triplicatarum etiam ad hanc vitri speciem in hoc additamento accommodare.

PHYSI-

PHYSICA.

I.

Descriptio Piscis, e Coregonorum genere, russice Riapucha dicti, historico-anatomica.

Auctore I. T. Koelreuter pag. 503.

Descriptionem in hac Dissertatione Cl. Auctor exhibet piscis, in Russia haud rari, nec tamen hactenus satis descripti, ad genus Coregonorum pertinentis, cui etiam internarum partium, praecipue abdominalium, zootomica descriptio adiungitur. Maior hepatis pars in hypochondrio sinistro, minor in dextro, comparuit, quod pylori appendices potius occupabant. Ventriculus in medio abdomine situs; lien huic non modo et duodeno, sed etiam peculiari tractui pinguedineo vasorum et membranarum ope annexus erat. Cl. Auctor singularem obseruationem addit. In tunica externa ventriculi nonnullorum indiuiduorum tubercula apparebant lentiformia subrubella, quae dissecta totidem habitacula ostenderunt vermis *Gordii marini*, in spiram conuoluti. Et radiis quoque branchiarum similia tubercula, Gordium fouentia, innata Cl Auctor vidit.

II.

II.

Descriptio Piscis e Gadorum genere Russis Saida dicti p. 512. nec non.

III.

Descriptio Cyclopteri Lineati p. 522.

Auctore I. Lepechin.

Pisces duos in hac dissertatione proponit Auctor, quos in itinere suo per mare album obseruauit. Horum alter est *Gadus dorso tripterygio ore cirro minimo, cauda bifurca, radio ventralium secundo in longam setam producto, linea laterali recta*; alter vero: *Cyclopterus corpore nudo castaneo, lineis longitudinalibus trium parium pallidioribus, pinnis dorsali, anali caudali que vnitis.* Prioris non modo partes externae, ad stabiliendum characterem necessariae, verbis delineantur, sed internae etiam concinne describuntur, et denique subiunguntur partium externarum dimensiones. In nota ad hunc piscem ostendit Auctor *Gadum Callariam* Illustr. LINNAEI, vel *Callariam* V. Clariss. KLEINII male confundi cum *Gado Nauaga*, quem Clariss. KOELREVTER in Nouor. Comment. Acad. Scient. Petrop. T. XIV. p. 484. descripsit et icone Tab. XII. expressit, quem que nouam speciem constituere noster putat. *Cyclopteri Lineati* ob vnicum indiuiduum, quod Auctor obtinere potuit, habitus atque dimensio modo partium externarum proponitur.

III.

IV.

Deſcriptionum plantarum ſibiricarum continuatio.

Auctore Erico Laxmanno p. 526.

Initium harum deſcriptionum in Tomo Commentariorum noſtrorum XV. iam occurrit Quae in praeſenti diſſertatione traduntur plantae, alpinis omnino annumerandae ſunt. Prima earum eſt Gentiana *grandiflora* corolla quinquefida, foliis radicalibus plurimis, lanceolatis, compactis horizontalibus, ſummorum tantum cacuminum altaienſium eximium ornamentum. Secunda eſt Sibbaldia *altaica* foliorum radicalium apicibus tripartitis, calycibus quinquefidis, petalis retuſis, in monticulis praedictarum alpium inferioribus occurrens. Tertia Illuſtr. a *Linne* nomen debet Ornithogalum ſcilicet *vniflorum* foliis caulinis alternis, vaginantibus, pedunculo vnifloro, ſummorum montium *Sinie Sopka*, *Reunoua* aliorumque incola. Quarta eiusdem eſt generis Ornithogalum puta *altaicum* ſcapo tereti, quadriphyllo, petalis ouatis, trinervibus, ſtaminibus ſubulatis, nusquam niſi in altiſſimus montibus altaicis inuentum. Quinta eſt Polygonum *ſibiricum* floribus octandris, foliis haſtatis caule inermi, per totam auſtraliorem Sibiriam in alpinis haud infrequens. Sexta numeroſum Ranunculorum gregem auget foliis lobatis, radicalibus petiolatis, caulinis ſeſſilibus, calyce hirſuto, longitudine fere petalorum, in fiſſuris praedictarum alpium vmbroſis habitans.

ASTRONOMICA.

I.

Comparatio inter Theoriam Lunae Illuſtr. *Euleri* et Tabulas recentiores Celeb. *Mayeri.*

Auctore A. I. Lexell pag. 537.

Comparatio inter Theoriam Lunae *Euleri* et Tabulas *Mayeri* adornata heic habetur, ad exemplum eius quam ipſemet Illuſtr. *Eulerus* inſtituit inter ſuam Theoriam et Tabulas Lunares Cel. de *Clairaut* eo imprimis fine, vt inde valores ſaltem proxime veros pro excentricitate et inclinatione media Lunae eliceret. Vt vero haec comparatio eo commodius inſtitui poſſet, praeprimis neceſſum fuit argumenta Tabularum a *Mayero* adhibita ad denominationes conſimiles iis, quas Illuſtr. *Eulerus* in ſua Theoria in vſum vocauit, reuocare. Scilicet omnes aequationes ab *Eulero* allatae, hos quatuor angulos inuoluunt, elongationem mediam Lunae a Sole, anomaliam mediam Lunae, diſtantiam loci Lunae medii a loco nodi medio et anomaliam mediam Solis, qui anguli litteris p, q, r, t apud *Eulerum* deſignantur. In Tabulis vero *Mayeri* partim hi anguli, partim etiam eorum valores certis aequationibus correcti adhibentur, quos igitur litte-

ris

ris $p^{I}, p^{II}, p^{III}, q^{I}, r^{I}, r^{II}$ exprimendos cenſuit huius diſſertationis auctor; quo obſeruato omnes inaequalitates pro longitudine Lunae a *Mayero* allatae in quatuor ordines diſpeſci poſſunt, quorum primus complectitur aequationem annuam, euectionem et nonnullas alias minores inaequalitates, pro hoc ordine argumenta ex angulis t, p^{I}, r^{I} et q componuntur, deſignante p^{I} diſtantiam loci Lunae medii a loco vero Solis. Secundus ordo inuoluit aequationem orbitae Lunae et pro argumento habet angulum q^{I}, vbi q^{I}, deriuatur ex q, ſi huic adplicentur aequationes ordinis primi et aequatio quaedam pro argumento habens t. Tertius ordo inuoluit inaequalitatem, quae variatio Lunae dicitur, huiusque argumentum eſt angulus p^{II}, vbi p^{II} deſignat diſtantiam loci Lunae medii per binos priores ordines correcti a loco vero Solis. Quartus denique ordo continet reductionem ad eclipticam, vbi occurrit angulus r^{II}, ſiue diſtantia loci Lunae medii per tres priores ordines correcti a loco nodi correcto. Comparatio ipſa Theoriae Lunae cum Tabulis *Mayeri*, eum in modum inſtituta habetur, vt pro certis poſitionibus principalibus Lunae, vti ſi $p = 0$, $q = 0$, $r = 90°$, ex Tabulis *Mayeri* quaerantur valores elongationis loci Lunae medii a loco vero, et Latitudinis Lunae, qui valores comparantur cum ſimilibus ex Theoria Lunae deductis, in quibus tamen poſterioribus, valores excentricitatis et inclinationis mediae Lunae pro incognitis ſpectantur, qua ratione inuenientur aequationes his incognitis determinandis inſeruiseruientes. Positiones autem praecipue vtiles pro determinanda excentricitate eae sunt, quibus statuuntur

I°. $p = 0$; $r = 0$; $q = 90$; II°. $p = 0$; $r = 90$; $q = 90$
III°. $p = 90$; $r = 0$; $q = 90$; IV°. $p = 90$; $r = 90$; $q = 90$

pro singulis autem bini casus speciales considerari possunt, prouti statuitur vel $t = 0$ vel $t = 180°$. Pro determinanda inclinatione, hae quatuor positiones inprimis cum vsu adhiberi possunt:

I°. $p = 0$; $q = 0$; $r = 90°$; II°. $p = 0$; $q = 90$; $r = 90°$
III. $p = 90°$; $q = 0$; $r = 90°$; IV. $p = 90$; $q = 90°$; $r = 90°$.

Huiusmodi igitur facta comparatione inuenit Clar. Auctor praesentis dissertationis pro excentricitate valorem 0,0545 proxime et pro inclinatione 0,08961, qui valores quidem egregie consentiunt, cum iis, quos Illustr. *Eulerus* in construendis suis Tabulis adhibuit, ibi enim excentricitas supposita fuit 0,05445 et inclinatio 0,08964, at haud parum discrepant ab iis quos *Mayerus* in vsum vocauit, cuius discrepantiae ratio inde sine dubio potissimum prouenit, quod coefficientes aliarum atque aliarum aequationum apud *Eulerum*, multum sint diuersae ab iis, quos *Mayerus* partim ex Theoria, partim ex obseruationibus collegit.

Vt vero vnicuique facile sit iudicium de consensu vel dissensu Tabularum Lunae nostro tempore celebratissimarum, Illustr. *Euleri*, *Mayeri* et de *Clairaut*, placet sequentibus Schematibus huius rei specimen exhi-

exhibere, ab Auctore praesentis dissertationis praecipuis quibusdam Lunae positionibus adcommodatum:

Elongatio loci Lunae medii a loco vero ex Tabulis

Pro positione		Euleri	Mayeri	de Clairaut
$p=0;\ q=90$, $r=0$	$t=0$	$-5^\circ.\ 5'.32''$	$-5^\circ.\ 5'.35''$	$-5^\circ.\ 5'.20''$
	$t=180$	$-5.\ 0.\ 55$	$-5.\ 0.\ 44$	$-5.\ 1.\ 30$
$p=0;\ q=90$, $r=90$	$t=0$	$-5.\ 6.\ 14$	$-5.\ 5.\ 14$	$-5.\ 4.\ 51$
	$t=180$	$-5.\ 1.\ 32$	$-5.\ 0.\ 22$	$-5.\ 0.\ 59$
$p=90;\ q=90$, $r=0$	$t=0$	$-7.\ 28.\ 0$	$-7.\ 27.\ 20$	$-7.\ 26.\ 51$
	$t=180$	$-7.\ 34.\ 0$	$-7.\ 34.\ 0$	$-7.\ 33.\ 3$
$p=90;\ q=90$, $r=90$	$t=0$	$-7.\ 28.\ 6$	$-7.\ 28.\ 4$	$-7.\ 27.\ 29$
	$t=180$	$-7.\ 34.\ 9$	$-7.\ 34.\ 48$	$-7.\ 33.\ 44$

Latitudo Lunae ex Tabulis

Pro positione		Euleri	Mayeri	de Clairaut
$p=0;\ q=0$, $r=90$	$t=0$	$4^\circ.59'.37''$	$4^\circ.59'.31''$	$4^\circ.59'.35''$
	$t=180$	$4.\ 58.\ 58$	$4.\ 59.\ 3$	$4.\ 59.\ 9$
$p=0;\ q=90$, $r=90$	$t=0$	$4.\ 59.\ 35$	$4.\ 59.\ 26$	$4.\ 59.\ 46$
	$t=180$	$4.\ 59.\ 11$	$4.\ 59.\ 2$	$4.\ 59.\ 20$
$p=90;\ q=0$, $r=90$	$t=0$	$5.\ 16.\ 58$	$5.\ 16.\ 59$	$5.\ 17.\ 23$
	$t=180$	$5.\ 17.\ 28$	$5.\ 17.\ 19$	$5.\ 17.\ 49$
$p=90;\ q=90$, $r=90$	$t=0$	$5.\ 15.\ 28$	$5.\ 15.\ 18$	$5.\ 15.\ 29$
	$t=180$	$5.\ 15.\ 46$	$5.\ 15.\ 34$	$5.\ 15.\ 49$

Ex hoc specimine liquet pro Latitudine Lunae definienda tantum esse Tabularum consensum vt vix maior sperari possit, pro Longitudine autem Lunae dissensus aliquanto maiores adsunt, vnde vix fieri

 potest,

poteſt, vt hae Tabulae ſaltem pro caſibus, quibus locus Lunae medius a vero aliquantum diſtat, aeque bene cum coelo conſentiant. Quare etiamſi vel maxime Tabulae *Mayeri* recentiores cum obſervationibus reperiantur conſentientes, tamen quia pro his Tabulis nonnullae aequationes theoriae ſuperſtructae, aliae ex obſeruationibus correctae, nonnullae quoque quas Theoriae praebuerat prorſus neglectae ſunt, optandum eſt vt Theoria adhuc magis excoli poſſet, quo maior acquireretur certitudo de iis aequationibus, quarum valores empirice quaſi hucusque determinati fuerunt.

II.

Eclipſis ſolaris d. $\frac{12}{23}$. Martii 1774. viſae obſeruatio Petropoli inſtituta.

Auctore W. L. Krafft pag. 568.

Quae recenſetur hic a Cl. Auctore, eclipſis ſolaris obſeruatio in priuatis aedibus, a ſpecula academica vix ad trium minutorum ſecundorum differentiam verſus occaſum remotis, ab ipſo eſt inſtituta; praeſtantibus inſtrumentis, tubo inprimis achromatico decem pedum *Dollondiano*; et fauente coelo. Aſtronomis in obſeruatorio huic ſolis eclipſi inuigilantibus ob inopina obſtacula initium eius cernere non licuit; cuius momentum, cum Auctor, quantum quidem ſolis ad horizontem vicinia conceſſit, admo-

admodum praecife obferuauerit; ifte defectus commode hac obferuatione poterit fuppleri. Accidit fcilicet initium $18^h. 3'. 14''$ et finis $20^h. 19'. 28''$. Adiungit Auctor parallaxes tam longitudinis, quam latitudinis, pro vtroque momento ab ipfo computatas.

III.

Obferuatio Eclipfis Solis facta Petropoli die $\frac{12}{23}$. Martii 1773.

Auctore A. I. Lexell pag. 571.

Continet haec differtatio expofitionem obferuationis circa Eclipfin Solis A. 1773. ab Auctore inftitutae, vna cum adumbratione nouae Methodi obferuationes Eclipfium Solis computandi et conclufionibus quae ex obferuatione praefentis Eclipfis, tam pro loco Lunae, quam Longitudinibus nonnullorum locorum deducere licuit. De ipfis obferuationibus notare conuenit, quod initium Eclipfis a Cl. *Lexell* non fuerit obferuatum, finem vero fatis exacte obferuauit Temp. vero $8^h. 19'. 23''$, praeter quam obferuationem plurimas inftituit menfuras tam partium lucidarum Solis, quam diftantiae cornuum, quarum tamen non nifi praecipuas et quae ipfi prae reliquis certae videbantur, heic attulit. Noua methodus, quam heic adhibuit Cl. Auctor huius differtationis pro computandis obferuationibus Eclipfium Solis,

lis, in eo consistit vt pro certis interuallis temporum intra quae Eclipsis cadit, computentur Latitudo, Ascensio recta, declinatio et angulus positionis pro Luna, nec non ascensio recta Solis, quo facto ex tempore obseruationis et differentia ascensionum rectarum Solis atque Lunae cognoscetur angulus horarius Lunae. Porro si in meridiano concipiatur punctum quod cum loco obseruatoris et centro telluris in directum iacet, ex cognita telluris figura habebitur distantia huius puncti a Polo aequatoris, tum vero si breuitatis gratia hoc punctum nomine zenith indicetur, resoluendum est triangulum cuius duo latera cognita sunt, distantia zenith a Polo, complementum declinationis Lunae et angulus eius horarius, quaerendo nimirum distantiam Lunae veram a zenith et angulum parallacticum Lunae pro Polo aequatoris, quare ex cognito angulo positionis Lunae dabitur etiam angulus parallacticus pro Polo eclipticae. Haec autem duo elementa, distantia nimirum Lunae a zenith et angulus parallacticus sufficiunt pro adornandis formulis, quae parallaxes Longitudinis et Latitudinis exprimunt, scilicet si parallaxis distantiae a zenith quaesita fuerit, eaque per p exprimatur, angulus autem parallacticus per α, Latitudo autem apparens Lunae per l erit:

$$\text{Parall. Latit.} = p \cos. \alpha \text{ et Parall. Longit.} = \frac{p \sin. \alpha}{\cos. l}.$$

Hae autem formulae licet rigore Geometrico verae non sunt, tamen pro obseruationibus imprimis eclipsium Solis non magis quam vna vel altera parte decima

decima ſcrupuli ſecundi a vero aberrabunt. Caetera quae ad hanc Methodum pertinent ſimilia ſunt iis, quae de hoc argumento in Tomo XV. docuit Cl. Auctor. Concluſiones ex obſeruatione Eclipſis An. 1774. deductae eo redeunt, vt verum tempus coniunctionis Solis et Lunae fuerit pro Petropoli Temp. Aſtron. d. 22 Martii $19^h. 22'. 4''$, exiſtente Longitudine Lunae $0^s. 2^\circ. 54'. 33''$ et Latitudine $42'. 35'', 1$. Quod Longitudinem attinet, illa ſiquidem Longitudo Solis recte eſt definita, non multum incerta eſſe poteſt, nam in tempore coniunctionis vix plusquam $5''$ error ineſſe poterit, at Latitudo Lunae magis eſt dubia. Correctionem Latitudinis Cl. Auctor definiuit potiſſimum ex obſeruationibus circa partes lucidas tempore maximae Eclipſeos, ex quibus eam collegit $15''$, ob incertitudinem vero circa diametrum Lunae et Parallaxin non niſi $10''$ correctionem adhibendam iudicauit. In ipſis quidem obſervationibus hunc in finem adhibitis vix plusquam $5''$ error ineſſe poterit, vti ex earum conſenſu facile perſpicitur, ſi autem in Eclipſibus Solis contingat, vt imago Lunae obſcura augeatur, vti nonnullis viſum eſt, vel ſi ex vitio quodam in conſtructione inſtrumenti valores partium lucidarum iuſto minores exhibiti fuerunt, fieri poteſt vt correctio Latitudinis nequidem ad 5 ſcrupula ſecunda pro hac obſeruatione aſſurgat, quod valde probabile redditur ex obſeruatione circa initium et finem huius Eclipſis Pekini Sinarum inſtituta. Comparatio obſeruationum circa finem Petropoli et Wiennae inſtitutarum

rum praebet differentiam Longitudinum inter haec loca $55'. 46''$ haud multum diuersam ab ea, quam iam aliunde cognitam esse constat; at ex comparatione obseruationis Schwezingensis circa finem cum prius commemoratis fit Longitudo Schwezingae a Lutetia Parisiorum $25'. 0''$ circiter, quam hucusque supposuerunt $25'. 15''$.

IV.

Obseruationes Astronomicas ab Astronomis Academiae Imperialis Scientiarum *Stephano Rumovski* et *Andr. I. Lexell*, A. 1773. institutas, recensuit.

A. I. Lexell pag. 602.

In hac dissertatione obseruationes Astronomicae Ao. 1773. Petropoli institutae recensentur. Praecipuae autem harum sunt. I°. Eclipsis Solis die $\frac{12}{23}$. Martii, cuius finem Cel. *Rumovski* obseruauit Temp. vero $8^h. 19'. 19''$. II°. Eclipsis Lunae partialis die $\frac{19}{30}$. Sept. pro qua momenta initii et finis sequentia assignata habentur

	Initium	Finis
D. *Lexell*	$6^h. 31'. 51''$	$9^h. 33'. 28''$
D. *Rumovski*	34. 27	35. 27
D. *Schröter*	34. 36	34. 58.

III°.

III°. Occultationes fixarum a Luna ſequentes:

Occult. ſtellae fixae quintae magnit. in Capric. die $\frac{14}{25}$. Sept. $7^h. 19'. 3''$
Stellae ζ in conſtellatione arietis immerſio $\frac{21.}{2.}$ $\frac{\text{Sept.}}{\text{Oct.}}$ 11. 53. 56 dub.
Emerſio 13. 10. $30\frac{1}{2}$
Stellae ϱ Sagittarii immerſio . . . . $\frac{10}{21}$. Oct. 7. 52. $16\frac{1}{2}$
Emerſio Palilicii . . . . $\frac{21.}{1.}$ $\frac{\text{Oct.}}{\text{Nou.}}$ 12. 56. 47.

His obſeruationibus accedunt immerſiones et emerſiones Satellitum Iouis. Quum praeter emerſionem Palilicii Cl. huius diſſertationis Auctor diſtantias quoque eiusdem a limbo Lunae lucido menſurauerit, operae pretium iudicauit inquirere quid de loco Lunae ex his obſeruationibus cum emerſione collatis colligi poſſet, ſaltem vt inde perſpiceret quousque diſtantiarum menſurae huic fini aptae et accommodatae haberi queant. Inuenit autem coniunctionem Palilicii cum Luna contigiſſe die 1 Nov. $10^h. 24'. 29''$ Temp. med. Pariſ. exiſtente Longitudine Lunae $2^s. 6°. 38'. 3'', 9$ et Latitudine Lunae Auſtrali $4°. 42'. 9''$. Methodus qua in computandis his obſeruationibus vſus eſt, quum diuerſa ſit ab antea cognitis immo ab ea, quam in priori diſſertatione pro Eclipſi Solis vſus eſt, nonnulla de eius indole monuiſſe haud praeter rem erit. Si igitur concipiamus triangulum Sphaericum cuius vertices ſint Polus aequatoris, Polus Eclipticae et punctum iſtud quod ſupra zenith adpellauimus, pro hoc triangulo ex datis obliquitate eclipticae, et diſtantia zenith a Polo aequatoris, nec non angulo hos arcus interiacente, quaeratur diſtantia Poli Eclipticae a zenith et angulus qui hunc arcum et arcum binos Polos iungentem interiacet. Hoc facto, ſi arcus per Polum Eclipticae et zenith productus occurrat Eclipticae in puncto, quod Nonageſimum adpellare licebit, dabitur diſtantia Nonageſimi a zenith, et Longitudo Nonageſimi, ex quo cognoſcetur etiam differentia inter Longitudines Lunae et Nonageſimi. Tum vero ſi denotaverit Π parallaxin horizontalem Lunae aequatoream, ε rationem inter ſemidiametrum telluris pro loco ſpectatoris et ſemidiametrum aequatoris, D diſtantiam Nonageſimi a zenith, d differentiam inter Longitudines Lunae et Nonageſimi, L latitudinem Lunae veram et l Latitudinem apparentem, parallaxis autem Longitudinis indigitetur per p, ſequentes obtinebuntur formulae

$$\text{Tang.}\, p = \frac{\varepsilon\, \text{ſin.}\, \Pi\, \text{coſ.}\, D .\, \text{ſin.}\, d}{\text{coſ.}\, L - \varepsilon\, \text{ſin.}\, \Pi\, \text{coſ.}\, D .\, \text{coſ.}\, d};\ \text{Tang.}\, l = \frac{\text{ſin}\,(d + p)}{\text{ſin.}\, d}\, \text{Tang.}\, L \left(1 - \frac{\varepsilon\, \text{ſin.}\, \Pi\, \text{ſin.}\, D}{\text{ſin.}\, L}\right)$$

quarum vtraque exacte vera eſt, et rigori Geometrico plane conformis. Neque computus harum formularum vllo modo pro moleſto haberi poteſt, ſaltem aeque commodae ſunt ac formulae ab aliis Auctoribus adhibitae, quae non niſi valores approximatos exhibent, imprimis vero vſum habent ſingularem, dum in computo verae figurae telluris ratio habenda eſt, quem in finem correctiones minus commodas hucusque adhibitas fuiſſe conſtat; dum hae formulae pro figura telluris Sphaeroidica maiorem non faceſſunt moleſtiam, quam ſi eadem ſupponatur ſphaerica.

V.

V.

Determinatio Longitudinis et Latitudinis quorundam Moldauiae et Walachiae locorum deducta ex obseruationibus a *Iohanne Islenieff* institutis.

Auctore Stephano Rumovski p. 631.

Cum victricia Russiae arma tutum in Moldauiam et Walachiam aditum aperuissent, e re esse iudicauit Academia Scientiarum ablegare in illas regiones Virum Cl. *Iohannem Islenieff*, vt ibi vacaret obseruationibus Astronomicis, positioni praecipuarum vrbium definiendae idoneis. Ille egregie munere sibi demandato functus ansam praebuit dissertationi, de qua hic sermo est.

Vt autem illa incompendium redigatur, sufficiet apponere tabulam, quae exhibeat positionem Geographicam eorum locorum, in quibus obseruationes institutae sunt.

	Latitudo	Longit. a merid. Partis. in temp.	in grad.
Bender	46°. 50'. 24"	1h. 49'. 3½"	27°. 15'. 52"
Akerman	46. 12. 0	1. 53. 35	28. 23. 45
Kilia Noua	45. 26. 23		
Ismail	45. 21. 0	1. 46. 0	26. 30 0
Bukorest	44. 26. 45	1. 35. 12	23. 28 0
Foktzani	45. 38. 50	1. 38. 50	24. 42. 30
Iassi	47. 8. 30	1. 40. 39	25. 9. 45

His determinationibus menſuriſque a Caſtrametatoribus captis ſuperſtructa eſt mappa horum principatuum nuper eulgata, quae omnibus, quae hucusque prodiere, plenior et exactior eſſe videtur.

Pag. 640. vltima linea. loco $10^h. 39'. 39''$ legendum eſt $10^h. 58'. 2''$.

VI.

Obſeruationes Pekini Chinarum inſtitutae exceptae ex litteris a Rev. Patr. *Collas* ad *Stephanum Rumovski* anno 1772. die 5. Maii datis p. 647.

In ipſo initio litterarum occurrit nota, quam R. P. *Collas* de obſeruatione vltimi tranſitus Veneris per diſcum Solis Pekini habita, et iam diuerſis in ſcriptis prolata communicat; ea ſcilicet non omnimodam fidem meretur, quippe qui in pendulo aſtronomico, cuius motum R. P. *Dollieres* per multas altitudines Solis indagauerat, fato quodam ſubita perturbatio eſt deprehenſa, cauſam que huius perturbationis illis ignotam fuiſſe perhibet.

Poſt modum indicat inſtrumenta et cautelas, quibus in obſeruationibus vſi ſunt: Obſeruationes quae hic referuntur ſunt ſequentes; Quinque occultationes ſtellarum fixarum a Luna Anno 1772. Dein momenta quaedam Eclipſis Lunae, quae contigit die

23.

23 Octobr. Anno 1771. hanc excipit finis Eclipseos Solis Anno 1770. die 25 Maii, et denique obseruationes a R. P. *Dollieres* super cometam institutae, qui visibilis fuit Anno 1769.

Sollicite R. P. *Collas* enumerat circumstantias, quae quamuis obseruationem concomitabantur, eoque ipso pretium earum extollit; Enumeratione enim ista, quanta cuique obseruationi praecisio sit adiudicanda indigitat.

VII.

Epitome obseruationum meteorologicarum Petropoli anno MDCCLXXIII. secundum Calendarium correctum institutarum.

Auctore I. A. Euler pag. 656.

Obseruationes meteorologicae, quas Cel. Auctor singulis annis Commentariis nostris inserit, methodo iam in praecedentibus descripta sunt institutae. Primo loco describuntur altitudines barometricae, quas Cel. Auctor ad morem *Muschenbroeckii* sub schematismo lineae curuae, cuius adplicatae ipsis altitudinibus, abscissae temporibus obseruationum respondent, contemplari assolet. Fuit hoc anno maxima Mercurii altitudo 28. 88; minima autem

26. 85

26. 85 poll. quorum duodecim conſtituunt pedem regium pariſinum. Comparatione facta patuit, ſtatum Mercurii hoc anno generatim multo altiorem fuiſſe illo anni praeteriti. Adiunguntur quoque obſeruationes aliquot aſcenſuum et deſcenſuum Mercurii ſubitaneorum. In obſeruationibus thermometricis Cel. Auctor vtitur thermometro mercuriali delisliano verſus boream ſito et a radiis ſolaribus prorſus libero; minima altitudo fuit 203; maxima 104 graduum; et comparatione cum anni praeterlapſi obſeruationibus facta adparuit, praeſente et frigoris et caloris gradum fuiſſe illo minores. Sequuntur porro tabulae ventorum vim et directionem et reliquam coeli conſtitutionem ob oculum ponentes, vt et recenſio phaenomenorum praecipuorum. Sub finem adiungit Cel. Auctor tres tabulas, quarum vna reductionem graduum deslislianorum ad Reaumurianos, altera comparationem pollicum pariſinorum cum Londinenſibus, tertia denique reductionem partium pollicis centeſimarum ad partes duodecimales ſeu lineas complectitur.

INDEX

INDEX DISSERTATIONVM.

Mathematica.

Physico-Mathematica.

Phyſica.

Aſtronomica.

W. L.

MATHE-

MATHEMATICA.

THEORIA ELEMENTARIA SERIERVM, EX SINIBVS ATQVE COSINIBVS ARCVVM ARITHMETICE PROGREDIENTIVM DIVERSIMODE COMPOSITARVM, DILVCIDATA.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Ab eo tempore, quo duo Academiae transmisi schediasmata, alterum de summationibus serierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione atque vsu, alterum de indole singulari serierum infinitarum, quas sinus vel cosinus angulorum arithmetice progredientium formant earumque summatione et vsu; ab eo, inquam, tempore, peruenit ad manus meas nouum volumen Commentariorum Academiae scientiarum Parisinae A. 1769. inde post triennium publici iuris factum. Egregiam in hoc volumine D. Abb. *Bossut* pag. 453. nobiscum communicauit methodum determinandae ſummae, pro quocunque numero terminorum dato, ſerierum; quas ſinus vel coſinus arcuum arithmetice progredientium eorumue potentiae ſimiles exhibent. Quae hac de re protulit ſagaciſſimus Geometra, mihi anſam dederunt de argumento, quod in ambobus ſchediasmatis meis ſecundum vera principia, ſed metaphyſica potius quam geometrica, pertractaui, nouas non nullas ſuperaddendi obſeruationes easque, ni fallor, nec ſteriles nec iniucundas.

§. 2. Ea eſt ſinuum atque coſinuum indoles, vt vna eademque quantitas ex illis compoſita plures admittat expreſſiones ſub alia atque alia facie, quae inter ſe comparatae totidem ſubminiſtrant theoremata plus minus elegantia, aliquando etiam faſtidioſa, ſi velimus in diuerſis expreſſionibus identitatem valoris demonſtrare, quia non aliter differunt, quam forma, quae arbitraria eſt multiplicique modo diuerſa eſſe poteſt: oportet itaque omnes et ſingulas quantitates ad eandem denominationem reducere, ſi id fieri poſſit, priusquam de aequalitate vel inaequalitate quantitatum ſigno *Sinus* vel *Coſinus* inuolutarum iudicium ferre liceat, niſi ea de re per theoremata iam demonſtrata conſtet. Hoc ideo in anteceſſum monendum eſſe duxi, ne huiusmodi diſcuſſiones, quae ſolis principiis pure geometricis atque analyſi vulgari conficiuntur, ad communem referantur cenſum cum illis, de quibus mox ſermo erit et quae neceſſario requirere videntur principium illud quaſi metaphyſicum, cuius vſum feci in ſchediasmate de

ſumma-

ſummationibus ſerierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione, nec proprie differt principium iſtud a decantato *principio* metaphyſico *ſufficientis rationis*. Meminerimus autem, ſeries noſtras pertinere ad ſeries recurrentes ſuasque habere periodos, poſt quas ſingulas perfecte recurrunt eaedem, ſimulque ipſos periodi terminos, modo affirmatiuos modo negatiuos, ſe ipſos deſtruere, quae circuli proprietas eſt, ita vt integra periodus ad nihilum reducatur; ſi porro vnaquaeuis periodus compoſita ſit ex dato numero terminorum, manifeſtum eſt, fore, vt ſumma totidem terminorum ſe inuicem in ſerie ſubſequentium ſit ſemper $= 0$, vbicunque horum terminorum primus accipiatur.

§. 3. His praemonitis iam propius ad praeſens inſtitutum meum accedo: Poſtquam nimirum in allegatis ſchediasmatis meis ſummam ſerierum noſtrarum, ſi hae infinitae ponantur, exhibui atque abunde demonſtraui, quam incongrua ſit ſumma, etſi legitime inuenta pluribusque methodis longe a ſe inuicem diuerſis conſtanter confirmata; in memoriam reuocaui veram totius myſterii explicationem, quam olim, cum Petropoli agerem, obſeruatam habueram eaque arrepta occaſione argumentum iſtud metaphyſicum, meaque ſententia in geometria pura haud demonſtrabile, vberius aperui: Poſt haec omnia incidi in nouas formulas Boſſutianas, §. 1. allegatas, easque noua methodo erutas pro quocunque terminorum numero determinato, quem vocat Auctor *n*, quas cum inſpicerem, protinus me cupido inceſſit

 explo-

explorandi, quid formulae iſtae indicent, ſi numerus terminorum n infinitus ſtatuatur, vt Boſſutiana cum meis conferre liceret, inflammataque cupido fuit, cum viderem ſubeſſe aliquid, in hoc examine, quod omnem ſolutionem pure geometricam eludat, rurſusque ad principia noſtra metaphyſica, ſed alio modo, recurrendum eſſe. En nunc quod res eſt.

§. 4. Primum, quod Cel. *Boſſut* ſoluit problema, conſiſtit in ſummanda ſerie ſinuum, quorum arcus arithmeticam formant progreſſionem, nimirum ſerie

$$\text{ſin.}\,q + \text{ſin.}\,2q + \text{ſin.}\,3q + \text{ſin.}\,4q + \text{ſin.}\,5q + \ldots \text{ſin.}\,nq$$

in qua numerus n, qui ſemper integer eſt, exprimit determinatum terminorum ſummandorum numerum. Inuenit autem laudatus Author quaeſitam ſeriei ſummam

$$ſ = \frac{\text{ſin.}\,q\,[1 + \text{coſ.}\,q - \text{coſ.}\,nq - \text{coſ.}\,(n+1)\,q]}{1 - \text{coſ.}\,2q}$$

vbi litera q denotat datum arcum in circulo, cuius radius vnitate exprimitur; haec autem formula ſummatoria toto coelo differt ab ea, quam theoria ſerierum recurrentium ſubminiſtrat, quamuis vtriusque valor perfecte ſit vnus idemque, nec vnquam vlla laborant amphibolia hae formulae, qualiscunque numerus accipiatur integer pro litera n: ſemper enim termini ſummatorii valorem exhibent perfecte eundem, qui ab additione reali terminorum oritur, qualiscunque pro n accipiatur numerus integer et qualiscunque ſit arcus q. Sic itaque dubium non eſt, quin etiam vera ſit ſummatio Boſſutiana in caſu,

quo

quo ſeries in infinitum continuatur, quem ego ſolum caſum in primo ſchediasmate §. 1. allegato *de ſummationibus ſerierum quarundam incongrue veris* ſcrupuloſe examinaui, quia ſolus mirabili illa ambiguitate inuolutus eſt, cuius veram interpretationem nemo adhuc, quantum quidem ſcio, expoſuerat.

§. 5. Notetur vera formula ſeriei, quam pro ſummatione eius dedi in praefato ſchediasmate in fine §. 13. pro theoria ſerierum recurrentium atque vt conſenſus tandem formulae noſtrae cum Boſſutiana tanto clarius pateſcat, ſubſtituatur litera q literae x a nobis adhibitae; ſic dabit formula noſtra ſummam ſeriei infinitae

$$\text{ſin.}q + \text{ſin.}2q + \text{ſin.}3q + \text{ſin.}4q + \text{ſin.}5q \ldots\ldots + \text{ſin.}\infty q = \frac{\frac{1}{2}\text{ſin.}q}{\text{ſin.verſ.}q}.$$

At vero inſignis Geometra noſter hanc eandem ſummam facit aequalem

$$\frac{\text{ſin.}q[1 + \text{coſ.}q - \text{coſ.}\infty q - \text{coſ.}(\infty + 1)q]}{1 - \text{coſ.}2q}.$$

Igitur requirit vtriusque methodi conſenſus, vt ſtatuatur

$$\frac{\text{ſin.}q[1 + \text{coſ.}q - \text{coſ.}\infty q - \text{coſ.}(\infty + 1)q]}{1 - \text{coſ.}2q} = \frac{\frac{1}{2}\text{ſin.}q}{\text{ſin.verſ.}q}.$$

Equidem formula mea ad dextram poſita ab omni aequiuocatione libera eſt: at vero Boſſutiana prima fronte aenigma videtur inſolubile: Quid enim, quaeſo, ponendum erit pro $\text{coſ.}nq$ vel pro $\text{coſ.}(n+1)q$, ſi per n intelligatur numerus abſolute infinitus?

hoc

hoc viderint illi, qui noluerint mecum ad principium metaphyſicum ſufficientis rationis confugere. Ego vero in hoc examine eandem valere methodum, quam adhibui in ſchediasmate meo primo §. 8. non potui non primo quaeſtionis intuitu cognoſcere.

§. 6. Si ſcilicet (in quacunque periodo id demum fieri mente concipias) terminum numero n indicatum conſideres, perſpicuum eſt, hunc terminum non variari a numero periodorum variato; ſit numerus omnium periodorum praecedentium $= m$, numerus omnium terminorum in quauis periodo $= f$, erit generaliter $n = mf + g$, vbi nunc g exprimit indicem termini quaeſiti, ſi hunc terminum numeres ab initio periodi, in qua eum exiſtere fingis; ergo terminus ipſe idem erit pro indice n et pro indice g et cum id conſtantiſſime ita ſe habeat, verum manebit, etiamſi numeros n et m vere infinitos aſſumas. Videamus nunc, quis in abſtracto valor ponendus ſit in vna eademque periodo pro termino, cuius index eſt g; is vero valor vnice deducendus eſt ex natura infiniti, quae poſtulat, ſecundum ſana axiomata metaphyſica, vt aequum ius cadat in ſingulos eiusdem periodi terminos; vnde ſequitur, quod verus valor quaeſitus in abſtracto ſtatuendus ſit aequalis ſummae omnium eiusdem periodi terminorum diuiſae per numerum horum terminorum; ſed in ſeriebus noſtris ſumma omnium terminorum eiusdem periodi $= 0$; ergo *in abſtracto* erit etiam cof. nq vel cof. $\infty q = 0$. Eodem modo demon-

demonſtratur, quod in formula Boſſutiana valor termini coſ. $(\infty + 1)q$ ſit $= 0$; fateor tamen hic aliquid ſubeſſe, quod vlteriori explicatione opus habet: etenim formula haec proprie indicat duos ſeriei terminos ſe inuicem ſubſequentes, ſimulque exigit theoria noſtra, vt ambo termini eidem periodo ſint incluſi. Vt ambo momenta inter ſe conſiſtere posſint, res hunc in modum pertractanda erit. Sit rurſus n numerus infinitus ponaturque quaeuis ſeriei propoſitae periodus compoſita ex terminis

$$A + B + C + D \ldots\ldots + M + N + P + Q = 0.$$

Sit iterum numerus horum terminorum $= f$; inquiramus iam in omnes valores poſſibiles quantitatis compoſitae coſ. nq + coſ. $(n + 1)q$ combinando terminos, donec perfecte recurrant. Sic obtinebimus

$$A + B;\ B + C;\ C + D \ldots\ldots M + N;\ N + P;\ P + Q;\ Q + A$$

poſt quos tota periodus perfecte recurrit; ſic numerus horum terminorum coniugatorum ſit iterum $= f$ ſimulque eorum ſumma

$$= 2A + 2B + 2C \ldots\ldots 2N + 2P + 2Q,$$

quae cum adhuc ſit $= 0$, ſequitur, ambos terminos combinatos in formula Boſſutiana, nempe coſ. nq + coſ. $(n + 1)q$ eſſe $= 0$, poſito pro n numero vere infinito, eodem iure, quo idem demonſtrauimus pro vnico termino coſ. nq: haec metaphyſice vera ſunt, non geometrice, quia numerus n non eſt ſpecifice determinatus.

§. 7. Praemiſſa hacce noſtra theoria, cuius principia plane eadem ſunt, quibus vſus ſum in ſchedias-

 mate

mate de ſummationibus incongrue veris, facile nunc nobis erit inuenire verum valorem formulae Boſſutianae § 4. recenſitae pro caſu, quo ponitur numerus n vere infinitus, eiusque aequalitatem cum formula noſtra $\frac{\frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,q}{\text{ſin. vers.}\,q}$ demonſtrare, facto enim $\text{coſ.}\,nq + \text{coſ.}\,(n+1)\,q = 0$, formula ſummatoria Boſſutiana §. 4. expoſita mutatur in hanc ſimpliciorem abſque vlla amphibolia

$$\int = \frac{\text{ſin.}\,q\,[1+\text{coſ.}\,q]}{1-\text{coſ.}\,2\,q}.$$

Igitur nunc aliud non ſupereſt, quam vt demonſtremus quod ſit

$$\frac{\text{ſin}\,q\,[1+\text{coſ.}\,q]}{1.-\text{coſ.}\,2\,q} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,q}{\text{ſin.vers.}\,q}\ \text{ſiue}\ \frac{1+\text{coſ.}\,q}{1-\text{coſ.}\,2q} = \frac{1}{2\,\text{ſin.vers.}\,q}.$$

Eſt vero ſinus verſus $q = 1 - \text{coſ.}\,q$ ſimulque $\text{coſ.}\,2\,q = (\text{coſ}\,q)^2 - (\text{ſin.}\,q)^2$, hisque ſubſtitutis valoribus aequiualentibus factaque multiplicatione per crucem, prodit $2 - 2\,(\text{coſ.}\,q)^2 = 1 - (\text{coſ.}\,q)^2 + (\text{ſin.}\,q)^2$ ſiue $1 = (\text{coſ.}\,q)^2 + (\text{ſin}\,q)^2$ aut denique $1 = 1$. Ergo ambae nunc formulae perfecte inter ſe conueniunt.

§. 8. Ex principio, quod §. 6. explicui, facillimum nunc erit deducere quoque ſummam ſeriei in infinitum continuatae pro coſinibus arcuum arithmetice progredientium, quam Auctor noſter (§. 3.) problemate ſecundo pertractat; vbi noua et eleganti ſua methodo demonſtrat, quod ſit

$$\text{coſ.}\,q + \text{coſ.}\,2\,q + \text{coſ.}\,3\,q + \text{coſ.}\,4\,q + \ldots\ldots + \text{coſ.}\,nq$$
$$= \frac{\text{coſ.}\,q\,[\text{ſin.}\,n\,q + \text{ſin.}\,(n+1)\,q - \text{ſin.}\,q]}{\text{ſin.}\,2\,q}.$$

Notiſſi-

Notiſſimum autem eſt theorema, quod ſeries propoſita, ſi pro n ſumatur numerus vere infinitus, fiat $= -\frac{1}{2}$, quamuis theorema iſtud longe diuerſo ſenſu accipiendum ſit, quam communiter accipitur, nec tamen vnquam aliquid falſi ſiue directe ſiue indirecte inde deduci poſſit. Cum vero ſolutio Boſſutiana ſit pure geometrica pro omni numero terminorum finito, res iterum erit Geometrarum attentione digna, ſi inquiratur, quid iſta ſolutio indicet, cum pro n numerus vere infinitus ſupponitur, praeſertim quod iſta inquiſitio argumento noſtro propria ſit nec eius modus alias locum habere poſſit.

§. 9. Patet autem, hanc ſeriem coſinuum, cuius modo mentio facta fuit, iterum pertinere ad illas ſeries recurrentes, quae ſuis periodis perpetuo regeneratis, perfecte iisdem, gaudeant, et aggregatum ex omnibus vniuscuiusuis periodi terminis ſemper ad nihilum reduci; igitur idem adhuc ſubſiſtet principium, cuius ope, pro ſerie ſinuum in infinitum continuata, inuenimus §. 6. quod ſtatuendum ſit $\text{coſ.}\, nq + \text{coſ.}\,(n+1)q = 0$. Quodſi nunc pro ſummanda ſerie coſinuum in infinitum continuata iisdem veſtigiis inſiſtamus, reperiemus pariter $\text{ſin.}\, nq + \text{ſin.}\,(n+1)q = 0$. His vero ſubſtitutis valoribus in aequatione Boſſutiana inuenimus pro ſerie in infinitum continuata, vocatis in ſubſidium noſtris principiis, ſequentem

$$\text{coſ.}\, q + \text{coſ.}\, 2q + \text{coſ.}\, 3q + \text{coſ.}\, 4q + \text{etc.} = \frac{-\text{coſ.}\, q \times \text{ſin.}\, q}{\text{ſin.}\, 2q}$$

notum autem eſt, quod ſit $\cos. q \times \sin. q = \frac{1}{2} \sin. 2q$ ergo habemus

$$\cos. q + \cos. 2q + \cos. 3q + \cos. 4q + \text{etc.} = -\tfrac{1}{2}$$

plane vt a Geometris haec ſeries definiri ſolet, vtcunque paradoxa haec determinatio videri debeat.

§. 10. Eodem plane modo, quo vſi ſumus, licebit formulas ſummatorias reliquas, quas Geometra gallus exhibuit pro numero terminorum determinato n, ita reſtringere, vt ſummam ſerierum earundem ſed ſine fine continuatarum indicent, nec, ſi recte iudico, id alio modo praeſtari poterit: totum negotium in eo ſimpliciter conſiſtit, vt deleantur ſinguli termini ſigno $\sin. \infty q$ vel $\cos. \infty q$ affecti; Ego vero aliud non intendi, quam vt principii metaphyſici, quod nos eo perduxit, veritatem et vſum tanto magis manifeſtarem atque amplificarem. In primo ſchediasmate, ante aliquot abhinc annos communicato, principium iſtud vberius explicui atque adhibui pro ſummandis ſeriebus noſtris infinitis iisque ſummationibus prorſus heteroclitis genuine interpretandis: nunc vero oſtendere volui, quid de ipſo termino infiniteſimo ad mentem eiusdem principii ſtatui et quomodo in abſtracto determinari debeat, quo demum facto liceat formulas Boſſutianas a finito perfecte determinato ad infinitum quodammodo indeterminatum extendere. Si habeatur quantitas $\frac{1}{m}$, haec vtique perfecte erit determinata, ſi m fuerit numerus determinatus qualiscunque; quid vero ſtatuendum erit, ſi ponatur $m = 0$ et $\frac{1}{m} = \infty$? an tunc valor

valor emergens pariter erit perfecte determinatus? mihi non videtur in abstracto. Attamen requirit argumentum nostrum, vt pro numero n accipiatur numerus infinitus simulque exacte determinatus nec meo iudicio, huic postulato satisfieri potest, quam cum pro n sumantur omnes numeri in vna eademque periodo et pro quouis numero n determinetur valor termino conueniens ac denique inter omnes hos valores sumatur medius: hac operatione metaphysice obtinetur, quod geometrice fieri non potest, perinde ac si sorti res committeretur, quisnam valor ponendus sit pro formulis sin. nq, cos nq, sin. $(n+1)q$, cos. $(n+1)q$ etc. quando supponitur $n=\infty$; erit nimirum valor expectationis pariter medius inter omnes valores possibiles eosdemque aeque probabiles, atque in hoc solo valore consistit *sufficiens ratio*, quam natura non potest non sequi.

§. 11. Patet ex praemissis, theoriam nostram duobus inniti principiis; *primum* est, vt proposita series infinita composita sit ex periodis, quae perfecte sine fine recurrant eaedem, *secundum* vt summa omnium terminorum vnam eandemque periodum constituentium sit $=0$; Primo principio subiiciuntur omnes series sinuum vel cosinuum, vel eorundem quadratorum, cuborum aliarumue dignitatum, si modo arcus arithmetice progrediantur, quod quidem non apparet in seriebus analytice expressis, qualis, verbi gratia, est

$$\text{sin.}\, q + \text{sin.}\, 2q + \text{sin.}\, 3q + \text{sin}\, 4q \ldots\ldots + \text{sin.}\, nq,$$

ſed quod manifeſtum ſit pro ſingulis exemplis, quia ſemper ſit, vt arcus aliquoties repetitus tandem expleat peripheriam ſiue ſemel ſiue pluries ſumtam, quo facto termini iidem eodem ordine neceſſario recurrunt, hinc numerus terminorum ſingulis periodis communis eorumque ſumma conſtanter eadem.

Quod attinet ad ſecundum principium, quo hanc ſummam terminorum in quauis periodo aequalem nihilo ſtatuimus, id quidem obtinet in ſeriebus ſinuum atque coſinuum, at vero ſi eorum dignitates accipiantur, quod Academicus Pariſinus acute fecit, non ſine modificatione principium accipiendum erit. De vtroque principio pauca quaedam ſuperaddam.

§. 12. Sit integra circuli peripheria $= p$ atque per f et g intelligantur duo numeri qualescunque inter ſe primi; tum in propoſito exemplo numerico ponatur $fq = gp$; hoc modo recurret ſeries poſt quosuis terminos, qui vnam efficient periodum. Denotentur hi termini literis $a, b, c \ldots d, e$, quorum aliqui erunt affirmatiui caeteri negatiui; His poſitis docet theoria noſtra, fore ſummam ſeriei propoſitae in infinitum continuatae

$$= \frac{fa + (f-1)b + (f-2)c \ldots\ldots 2d + e}{f}.$$

Quamuis autem haec ſumma appareat incongrua, attamen egregie conſpirat cum ſummatione ex quibuscunque aliis principiis legitime deducta, quod plus ſatis demonſtraui. Mirabilis iſta proprietas ex vera infiniti abſoluti natura deducitur.

Quod

Quod si iam arcus q et peripheria p incommensurabiles ponantur, erit numerus f simul infinitus et vnica periodus ex infinitis terminis constabit: verum hoc non obstante series proposita censenda est composita ex infinitis periodis, quia est absolute infinita et nullo modo a numero terminorum vniuscuiusque periodi limitatur. Ita fit vt summa seriei infinitae $\cos q + \cos 2q + \cos 3q + \cos 4q +$ etc. sit constanter $= -\frac{1}{2}$, etiamsi ponatur v. gr. $q\sqrt{7} = p$, quo in casu nunquam satis continuari potest series, vt perfecte resurgat periodosque formet: nihil tamen impedit, quo minus mente periodos concipiamus easque infinities repetitas putemus.

§. 13. Sunt et non nulla de periodis euanescentibus monenda. Proprietas est serierum nostrarum, quae a sinibus vel cosinibus formantur, vt omnes termini affirmatiui in quauis periodo destruant omnes negatiuos atque adeo summam terminorum ad nihilum reducant, haeque series solae proprie ad institutum nostrum pertinent. At D. Abb. *Bossut* alias superaddit series summabiles, si modo numerus terminorum fuerit finitus; hae vero nouae series non sunt sine grano salis accipiendae; suasque periodos quidem formant easdem, sed non euanescentes; summa harum serierum infinitarum necessario simul infinita est nec adeoque ad censum nostrum pertinent: huiusmodi series formantur a quadratis aliisue dignitatibus paribus sinuum cosinuumue ad arcus arithmetice progredientes pertinentium, quia scilicet omnes termini in serie fiunt

posi-

poſitiui; videantur problemata Boſſutiana 3. 4. 7 et 8, quae ipſa tamen ſub alia facie cum theoria noſtra egregie conſpirant. Aliter ſe res habet in ſeriebus, quae a dignitatibus formantur imparibus: hae enim periodis gaudent, quae certa cum reſtrictione iterum annihilantur; huc pertinent problemata Boſſutiana 5 et 6, quibus alia ſimilia ſuperaddi posſent. Ipſa vero annihilatio plerumque ex ſola terminorum geneſi per ſe patet. Ita in ſerie ſinuum, nempe ſin. q + ſin. 2 q + ſin. 3 q + etc., quiuis terminus eiusdem periodi in omni exemplo numerico ſuum habet terminum ſocium ſub ſigno contrario, ſiue numerus termiorum f fuerit par ſiue impar, et quoniam ſi impar eſt, terminus ſocio orbus ſemper fit $= 0$, patet neceſſario quamuis periodum ad nihilum reduci. Imo etiamnum annihilabitur periodus, ſi cuiusuis termini ſimilis functio accipiatur, quae ſignum termino praefixum non mutet; Ergo et annihilantur periodi in ſerie $(\text{ſin.}\, q)^3 + (\text{ſin.}\, 2\, q)^5 + (\text{ſin.}\, 3\, q)^5 +$ etc. Aliter ſe res habet, ſi dimenſionibus imparibus ſubſtituantur pares, quia tunc omnes termini neceſſario fiunt affirmatiui, vnde periodi, quamuis eaedem recurrant, non annihilantur ſed potius eandem vbique ſummam formant; ergo hae ſeries in infinitum continuatae, ſummam faciunt infinitam, nec porro ad argumentum noſtrum pertinent. Sic in problemate 3 et 7 authoris noſtri, in quorum altero ſumuntur quadrata terminorum in altero biquadrata, ſummae indicatae fiunt infinitae, ſi pro n ponatur numerus infinitus.

§. 14.

§. 14. Quae modo monui de feriebus finuum, pertinent etiam ad feries cofinuum, fiue per fe confiderentur fiue vt feries generatrices aliarum ferierum, modo numerus f fit par.; verum quoties pro f fumitur numerus impar, recedit exemplum a norma praefcripta atque termini eiusdem periodi equidem fe deftruunt, at non contraria identitate repetitorum terminorum, fed valore extincto terminorum collectorum fignis contrariis affectorum. Non immorabor hifce extricationibus, quia iftud negotii facilius ex ipfis formulis Boffutianis conficitur, etiamfi Auctor nullam harum periodorum earumque annihilationum mentionem faciat: tanto praeftantior videbitur methodus geometrica, qua vfus eft, tantoque magis natura ferierum noftrarum eluceffit.

§. 15. Quoniam fingulae periodi perfecte refurgunt eaedem, fufficiet primam indicaffe periodum; haec femper ex formulis fummatoriis Auctoris noftri deducetur, fi ponatur $n = f$; tum vero erit vbique (ob $fq = gp$ §. 12) fin. nq fiue fin. $fq = 0$; cof. $nq = 1$; fin. $(n+1)q =$ fin q; cof. $(n+1)q =$ cof. q; fin. $3nq = 0$; cof. $3nq = 1$; fin. $3(n+1)q =$ fin. $3q$ etc. Quod fi iam per n intelligatur numerus terminorum vnamquamuis periodum conftituentium atque per f fumma cuiusuis periodi, facile erit hanc fummam ex formulis Auctoris noftri deducere. Percurram praecipua eius problemata ponendo vbique $n = f$.

I. $f = \sin. q + \sin. 2q + \sin. 3q \ldots\ldots + \sin. nq = \frac{\sin. q[1 + \cos. q - \cos. nq - \cos.(n+1)q]}{1 - \cos. 2q} = \frac{\sin. q[1 + \cos. q - 1 - \cos. q]}{1 - \cos. 2q} = 0.$

II. $f = \cos. q + \cos. 2q + \cos. 3q \ldots + \cos. nq = \frac{\cos. q[\sin. nq + \sin.(n+1)q - \sin. q]}{\sin. 2q} = 0.$

III. $f = (\sin. q)^2 + (\sin. 2q)^2 + (\sin. 3q)^2 \ldots\ldots + (\sin. nq)^2 = \frac{1}{2}n$
$- \frac{1}{2}\cos. 2q\left(\frac{\sin. 2nq + \sin.(n+1)2q - \sin. 2q}{\sin. 4q}\right) = \frac{1}{2}n - 0 = \frac{1}{2}f.$

Ergo summa periodi, cuius finguli termini per constructionem hic sunt affirmatiui, in quauis periodo semper est aequalis dimidio numero terminorum.

IV. $f = (\cos. q)^2 + (\cos. 2q)^2 + (\cos. 3q)^2 \ldots\ldots (\cos. nq)^2 = \frac{1}{2}n$
$+ \frac{1}{2}\cos. 2q\left(\frac{\sin. 2nq + \sin.(n+1)2q - \sin. 2q}{\sin. 4q}\right) = \frac{1}{2}n + 0 = \frac{1}{2}f.$

Ergo summa periodi eadem, quae in articulo praecedente.

V. $f = (\sin. q)^3 + (\sin. 2q)^3 + (\sin. 3q)^3 \ldots\ldots + (\sin. nq)^3 = \frac{3}{4}\sin. q$
$\left(\frac{1 + \cos. q - \cos. nq - \cos.(n+1)q}{1 - \cos. 2q}\right) - \frac{1}{4}\sin. 3q\left(\frac{1 + \cos. 3q - \cos. 3nq - \cos. 3(n+1)q}{1 - \cos. 6q}\right) = 0.$

VI. $f = (\cos. q)^3 + (\cos. 2q)^3 + (\cos. 3q)^3 \ldots\ldots + (\cos. nq)^3 = \frac{3}{4}\cos. q$
$\left(\frac{\sin. nq + \sin.(n+1)q - \sin. q}{\sin. 2q}\right) + \frac{1}{4}\cos. 3q\left(\frac{\sin. 3nq + \sin. 3(n+1)q - \sin. 3q}{\sin. 6q}\right) = 0.$

Eodem modo demonstratur annihilatio periodorum in reliquis problematibus ab Auctore solutis, si modo signa conseruentur, qualia sunt in simplici serie generatrice; secus fiunt series sine fine continuatae valore suo infinitae, quia periodos habent numero infinitas easque omnes inter se aequales. Haec de natura periodorum; quod ad summam serierum sine fine progredientium attinet, hanc determinaui §. 12. Equidem problema tertium et quartum proprie ad argumentum nostrum non pertinent, quia summam obti-

obtinent infinitam: nil tamen impedit, quo minus omne id, quod indeterminati habent, in solam periodum, quam vt vltimam quodam modo considerare licet, reiiciamus, quia si in genere numerus periodorum integrarum dicatur m, summa seriei semper censeri potest

$$= \tfrac{1}{2} m f + \frac{f a + (f-1) b + (f-2) c \ldots\ldots + 2 d + e}{f}.$$

§. 16. Notetur denique, fieri in casu peculiari posse, vt periodi reuera non annihilentur, etiamsi in genere annihilatio earum locum habeat. Id contingere potest in seriebus, quae ex dignitatibus cosinuum formantur, cum numerus f est impar simulque formula denominatorem habet aequalem nihilo, sic, vt fractio habeatur, in qua tam denominator quam numerator sit nihilo aequalis. Dabo huius obseruationis exemplum. In problematibus praecedentis paragraphi accipiatur sextum, in quo series supponitur, quae conflatur ex cubis cosinuum. Ponatur in hac serie generali $q = \frac{1}{3} p$ siue $q = 120°$ habebitur pro hoc casu $f = 3$ et quaeuis periodus formabitur ex terminis $- \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + 1$, qui sunt cubi ex cosinibus 120°, 240° et 360°. Est vero summa horum trium terminorum, ex quibus periodus quaeuis componitur $= \frac{3}{4}$ nec adeoque annihilatur. Attamen hic casus minime contradicit formulae problematis sexti, quia denominator secundi membri, nempe sin. $6 q$, siue sin. 720°. simul etiam euanescit, vnde aliqua suboritur amphibolia in membro posteriori formulae sextae, dum prius membrum aperte

 manet

manet $= 0$. Verus valor poſterioris membri eruitur, ſi in fractione

$$\frac{\sin. 3nq + \sin. 3(n+1)q - \sin. 3q}{\sin. 6q}$$

ſubſtituatur loco arcus q alius arcus a priori infinite parum diuerſus, nempe arcus $q + \alpha$, retento valore $n = f = 3$, quia valor verus q mox reſtituitur: hoc poſito mutatur praefata fractio in hanc alteram

$$\frac{\sin. 9(q+\alpha) + \sin. 12(q+\alpha) - \sin. 3(q+\alpha)}{\sin. 6(q+\alpha)} = (\text{ob } 3q = p)\ \frac{\sin. 9\alpha + \sin. 12\alpha - \sin. 3\alpha}{\sin. 6\alpha}.$$

Quia vero arculus α eſt infinite paruus, non differt ſinus ab arcu; ergo habebitur

$$\frac{9\alpha + 12\alpha - 3\alpha}{6\alpha} \text{ ſiue } 3.$$

vnde fit pro noſtro exemplo

$$\frac{\sin. 3nq + \sin. 3(n+1)q - \sin. 3q}{\sin. 6q} = 3,$$

atque hic valor multiplicandus erit per $\frac{1}{4}\cos.(3q + 3\alpha)$ ſiue ſimpliciter per $\frac{1}{4}$; vnde tandem verus periodi valor fit $= \frac{3}{4}$ plane vt res ipſa poſtulat. Atque ſic in hoc caſu ſpeciali contingit, vt ſeries iſta in infinitum continuata veram ſummam habeat infinitam, quae tamen in genere ſpectata eſſe deberet finita, haec contradictio apparens exinde oritur, quod in hoc exemplo ſpeciali periodi non annihilentur nec adeoque hypotheſes noſtrae locum habere poſſint; taceo alia huiuscemodi corollaria ſiue aequiuoca ſiue minus clara.

§. 17. Praeter praememoratum caſum, quo formulae ſummatoriae Boſſutianae ſimul numeratorem ac denominatorem ad nihilum reducunt, non video

video alios, qui vlla laborent difficultate; minus obvia haec est proprietas, quando numerus f est impar atque series formatur ex cosinibus eorumue dignitatibus imparibus, vtpote in quibus non sunt bini atque bini termini, qui se mutuo destruant, sed demum omnes termini collecti in vnoquouis cyclo vel periodo se destruunt, quod patet ex paragrapho decimo quinto. Totam hanc rem vnico illustrabo exemplo. Sit series formata ex cubis cosinuum, nempe $(\text{cos}. q)^3 + (\text{cos}. 2q)^3 + (\text{cos}. 3q)^3 +$ etc. Ponatur in hac serie $q = \frac{1}{5}p$ atque adeo $f = 5$; habebitur series numerica $(\text{cos}. 72^\circ)^3 + (\text{cos}. 144^\circ)^3 + (\text{cos}. 216^\circ)^3 +$ etc. in qua periodus quaeuis constat ex quinque terminis, post quos vsque recurrit eadem: radices cubicae istorum terminorum siue ipsi cosinus in tabulis habentur

$$0,30901 - 0,80901 - 0,80901 + 0,30901 + 1,00000$$

ergo radices in quauis periodo perfecte annihilantur. Egregia est haec proprietas iam diu cognita, quia generalis est pro omni numero f; sed et cubi horum terminorum, si aggregantur, ad nihilum reducuntur; quod §. 15. exposui atque ex formulis summatoriis Bossutianis deduxi. Sunt autem cubi fractionibus decimalibus expressi

$$0,02951 - 0,52951 - 0,52941 + 0,02951 + 1,00000,$$

quorum aggregatum rursus $= 0$, quod exemplum confirmat annihilationem periodorum in proposita serie ex cubis cosinuum, qui arcubus arithmetice progredientibus respondent, formata. Superest vt

 osten-

oſtendam modum, quo ſumma ſeriei propoſitae in infinitum continuatae definiatur. Dico autem id obtineri, ſi in formula ſexta §. 15. ab D. *Abbate Boſſut* demonſtrata termini $\sin. nq$; $\sin. (n+1)q$; $\sin. 3nq$ et $\sin. 3(n+1)q$ deleantur (§. §. 9 et 10.), quo facto inuenitur ſumma modo dicta

$$\int = \tfrac{3}{4}\cos. q \times \frac{-\sin. q}{\sin. 2q} + \tfrac{1}{4}\cos. 3q \times \frac{-\sin. 3q}{\sin. 6q} = -\tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{8} = -\tfrac{1}{2}:$$

Ergo eadem eſt ſumma pro ſerie coſinuum et pro ſerie eorundem cuborum.

Iam vero imprimis notatu dignum puto, quod plane eadem ſumma proueniat, ſi ad ductum §. 12. determinetur; poſito enim

$f = 5$; $a = 0{,}02951$; $b = -0{,}52951$; $c = -0{,}52951$; $d = 0{,}02951$ et $e = 1{,}00000$ fit $\frac{5a+4b+3c+2d+e}{5} = -\frac{1}{2}$.

Mirabilem iſtum conſenſum, methodum inter geometricam et metaphyſicam, equidem iam abunde manifeſtaui in ſchediasmate de ſummatoribus ſerierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione, nunc autem amplificaui dum oſtendi interpretationem, quae ſecundum eadem principia noſtra facienda ſit de ſinubus aut coſinubus arcuum infinities ſumtorum pro ratione circumſtantiarum.

§. 18. Denique notari meretur diſcrimen inter poſitionem $fq = p$ et poſitionem generaliorem $fq = gp$ intelligendo per f et g numeros integros qualeſcunque inter ſe primos; totum nempe diſcrimen in eo conſiſtit, quod termini iidem ordinem ſaltem varient in ſingulis periodis: ſic ſi, verbi gratia

tia ponatur $5q = 3p$ siue $q = \frac{3}{5}p$, dabit series $(\cos. q)^3 + (\cos. 2q)^3 + (\cos. 3q)^3 +$ etc. seriem numericam, cuius periodi sunt

$$0,52951 + 0,02951 + 0,02951 - 0,52951 + 1,00000,$$

vbi termini non aliter quam ordine locationis differunt a terminis in praecedente paragrapho expositis; Equidem in his exemplis eadem oritur summa pro serie in infinitum continuata, quae antea; attamen, si generalius res examinatur, fieri potest, vt a solo terminorum ordine mutato, alia atque alia exoriatur summa, etiamsi quaeuis periodus ex iisdem terminis sit composita. Potest etiam theoria nostra de seriebus ex sinibus vel cosinibus aut eorum dignitatibus, applicari ad quasuis series recurrentes, in quibus periodi annihilantur atque sic sub facie infinities generaliori vsui venire.

SVM-

SVMMATIO PROGRESSIONVM

$$\sin.\Phi^{\lambda}+\sin.2\Phi^{\lambda}+\sin.3\Phi^{\lambda}+\ldots\ldots+\sin.n\Phi^{\lambda}$$
$$\cos.\Phi^{\lambda}+\cos.2\Phi^{\lambda}+\cos.3\Phi^{\lambda}+\ldots\ldots+\cos.n\Phi^{\lambda}.$$

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Posito $\cos.\Phi+\sqrt{-1}\sin.\Phi=p$ et $\cos.\Phi-\sqrt{-1}\sin\Phi=q$ notum est fore

$$\cos.n\Phi=\frac{p^n+q^n}{2} \text{ et } \sin.n\Phi=\frac{p^n-q^n}{2\sqrt{-1}}$$

tum vero etiam esse $pq=1$. His positis euidens est, summationem harum serierum semper reduci posse ad has duas series vel progressiones geometricas

$$p^{\alpha}+p^{2\alpha}+p^{3\alpha}+\ldots\ldots+p^{n\alpha}=\frac{p^{(n+1)\alpha}-p^{\alpha}}{p^{\alpha}-1}=\frac{p^{\alpha}(1-p^{n\alpha})}{1-p^{\alpha}}$$

$$q^{\alpha}+q^{2\alpha}+q^{3\alpha}+\ldots\ldots+q^{n\alpha}=\frac{q^{(n+1)\alpha}-q^{\alpha}}{q^{\alpha}-1}=\frac{q^{\alpha}(1-q^{n\alpha})}{1-q^{\alpha}}$$

§ 2. Quod si iam hae duae progressiones inuicem addantur, vt prodeat ista

$$\left.\begin{array}{l} p^{\alpha}+p^{2\alpha}+p^{3\alpha}+\ldots\ldots+p^{n\alpha} \\ +q^{\alpha}+q^{2\alpha}+q^{3\alpha}+\ldots\ldots+q^{n\alpha}\end{array}\right\} \text{ eius summa erit } \begin{array}{l}\dfrac{p^{\alpha}-p^{(n+1)\alpha}}{1-p^{\alpha}} \\ +\dfrac{q^{\alpha}-q^{(n+1)\alpha}}{1-q^{\alpha}}\end{array}$$

$=$

$$=\frac{p^\alpha - p^{(n+1)\alpha} - p^\alpha q^\alpha + p^{(n+1)\alpha} q^\alpha + q^\alpha - q^{(n+1)\alpha} - p^\alpha q^\alpha + p^\alpha q^{(n+1)\alpha}}{1 - p^\alpha - q^\alpha + p^\alpha q^\alpha}$$

quae expreſſio ob $pq = 1$ transformatur in hanc

$$\frac{p^\alpha - p^{(n+1)\alpha} - 1 + p^{n\alpha} + q^\alpha - q^{(n+1)\alpha} - 1 + q^{n\alpha}}{2 - p^\alpha - q^\alpha}$$

quae porro ob

$p^\alpha + q^\alpha = 2 \cos. \alpha \Phi$ et $p^{(n+1)\alpha} + q^{(n+1)\alpha} = 2 \cos. (n+1) \alpha \Phi$
et $p^{n\alpha} + q^{n\alpha} = 2 \cos. n \alpha \Phi$

reducitur ad hanc formam:

$$\frac{\cos. \alpha \Phi - \cos. (n+1) \alpha \Phi - 1 + \cos. n \alpha \Phi}{1 - \cos. \alpha \Phi} = -1 + \frac{\cos. (n \alpha \Phi) - \cos. (n+1) \alpha \Phi}{1 - \cos. \alpha \Phi}$$

quae ergo eſt ſumma ſeriei propoſitae.

§. 3. Sin autem altera noſtrarum progreſſionum ab altera ſubtrahatur, vt habeatur iſta

$$\begin{array}{l} +p^\alpha + p^{2\alpha} + p^{3\alpha} + \ldots\ldots + p^{n\alpha} \\ -q^\alpha - q^{2\alpha} - q^{3\alpha} + \ldots\ldots - q^{n\alpha} \end{array} \quad \text{eius ſumma erit} \quad \begin{array}{l} \dfrac{p^\alpha - p^{(n+1)\alpha}}{1 - p^\alpha} \\ \dfrac{-q^\alpha + q^{(n+1)\alpha}}{1 - q^\alpha} \end{array}$$

quae partes ad eundem denominatorem reductae producent

$$\left\{\begin{array}{l} +p^\alpha - p^{(n+1)\alpha} - p^\alpha q^\alpha + p^{(n+1)\alpha} q^\alpha \\ -q^\alpha + q^{(n+1)\alpha} + p^\alpha q^\alpha - q^{(n+1)\alpha} p^\alpha \end{array}\right\} : 1 - p^\alpha - q^\alpha + p^\alpha q^\alpha$$

ob $pq = 1$ vero haec expreſſio ad hanc reducitur

$$\begin{array}{l} p^\alpha - p^{(n+1)\alpha} - 1 + p^{n\alpha} \\ -q^\alpha + q^{(n+1)\alpha} + 1 - q^{n\alpha} \end{array} : 2 - p^\alpha - q^\alpha$$

 et

et porro ob

$$p^{\alpha}-q^{\alpha}=2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi \text{ et } p^{(n+1)\alpha}-q^{(n+1)\alpha}=2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,(n+1)\alpha\Phi$$
$$\text{et } p^{n\alpha}-q^{n\alpha}=2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\alpha\Phi$$

in hanc transformatur expreſſionem

$$\frac{(\text{ſin.}\,\alpha\Phi-\text{ſin.}\,(n+1)\alpha\Phi)+\text{ſin.}\,(n\alpha\Phi)}{1-\text{coſ.}\,\alpha\Phi}\sqrt{-1}.$$

§. 4. Deſignemus breuitatis gratia ſummas harum ſerierum, vltimo termino ſeu generali praefigendo ſignum ſummationis $\int$, ita vt bini caſus euoluti praebeant ſequentes ſummationes

$$\int(p^{n\alpha}+q^{n\alpha})=-1+\frac{\text{coſ.}\,(n\alpha\Phi)-\text{coſ.}\,(n+1)\alpha\Phi}{1-\text{coſ.}\,\alpha\Phi}, \text{ et}$$
$$\int(p^{n\alpha}-q^{n\alpha})=\frac{(\text{ſin.}\,\alpha\Phi+\text{ſin.}\,(n\alpha\Phi)-\text{ſin.}\,(n+1)\alpha\Phi)}{1-\text{coſ.}\,\alpha\Phi}(\sqrt{-1})$$

ex quibus formulis facile erit omnes caſus propoſitos deducere.

§. 5. Sit igitur primo $\lambda=1$, vt habeantur hae duae ſeries ſummandae:

$$s=\text{ſin.}\,\Phi+\text{ſin.}\,2\Phi+\text{ſin.}\,3\Phi+\ldots\ldots+\text{ſin.}\,n\Phi \text{ ſiue } s=\int\text{ſin.}\,n\Phi \text{ et}$$
$$t=\text{coſ.}\,\Phi+\text{coſ.}\,2\Phi+\text{coſ.}\,3\Phi+\ldots\ldots+\text{coſ.}\,n\Phi \text{ ſiue } t=\int\text{coſ.}\,n\Phi$$

cum igitur ſit

$$\text{ſin.}\,n\Phi=\frac{p^n-q^n}{2\sqrt{-1}} \text{ et } \text{coſ.}\,n\Phi=\frac{p^n+q^n}{2}$$

habebimus

$$2s\sqrt{-1}=\int(p^n-q^n) \text{ et } 2t=\int(p^n+q^n)$$

vnde ex paragrapho praecedente ſtatim nanciſcimur ob $\alpha=1$

$$2s\sqrt{-1}=\frac{(\text{ſin.}\,\Phi+\text{ſin.}\,n\Phi-\text{ſin.}\,(n+1)\Phi}{1-\text{coſ.}\,\Phi}\sqrt{-1} \text{ et}$$
$$2t=-1+\frac{\text{coſ.}\,n\Phi-\text{coſ.}\,(n+1)\Phi}{1-\text{coſ.}\,\Phi} \text{ ideoque}$$

$s=$

$$s = \frac{\sin.\Phi + \sin.n\Phi - \sin.(n+1)\Phi}{2(1-\cos.\Phi)} \text{ et } t = -\tfrac{1}{2} + \frac{\cos.n\Phi - \cos.(n+1)\Phi}{2(1-\cos.\Phi)}.$$

§. 6. Sit nunc $\lambda = 2$ et ſtatuamus iterum

$s = \sin.\Phi^2 + \sin.2\Phi^2 + \ldots\ldots + \sin.n\Phi^2$ ſiue $s = \int \sin.n\Phi^2$ et

$t = \cos.\Phi^2 + \cos.2\Phi^2 + \ldots\ldots + \cos.n\Phi^2$ ſiue $t = \int \cos.n\Phi^2$

cum nunc ſit

$$\sin.n\Phi^2 = \frac{p^{2n} - 2p^n q^n + q^{2n}}{-4} = \tfrac{1}{2} - \frac{p^{2n} - q^{2n}}{4} \text{ et}$$

$$\cos.n\Phi^2 = \frac{p^{2n} + 2p^n q^n + q^{2n}}{4} = +\tfrac{1}{2} + \frac{p^{2n} + q^{2n}}{4}$$

habebimus has formulas

$$4s = 2\int 1 - \int (p^{2n} + q^{2n}) \text{ et } 4t = 2\int 1 + \int (p^{2n} + q^{2n})$$

vbi cum numerus terminorum ſit n, manifeſtum eſt fore $\int 1 = n$; hinc quia $\alpha = 2$, ex ſuperioribus erit

$$\int (p^{2n} + q^{2n}) = -1 + \frac{\cos.2n\Phi - \cos.2(n+1)\Phi}{1 - \cos.2\Phi}$$

quibus valoribus ſubſtitutis, facta diuiſione per 4 obtinebimus

$$s = \tfrac{n}{2} + \tfrac{1}{4} - \frac{\cos.2n\Phi + \cos.2(n+1)\Phi}{4(1-\cos.2\Phi)} \text{ et } t = \tfrac{n}{2} - \tfrac{1}{4} + \frac{\cos.2n\Phi - \cos.2(n+1)\Phi}{4(1-\cos.2\Phi)}$$

atque hinc ſtatim liquet fore

$s + t = n$, prorſus vti rei natura poſtulat.

§. 7. Statuamus nunc $\lambda = 3$ et ſeries ſummandas ita repraeſentemus

$s = \sin.\Phi^3 + \sin.2\Phi^3 + \ldots\ldots + \sin.n\Phi^3$ ſiue $s = \int \sin.n\Phi^3$ et

$t = \cos.\Phi^3 + \cos.2\Phi^3 + \ldots\ldots + \cos.n\Phi^3$ ſiue $t = \int \cos.n\Phi^3$.

 Cum

Cum nunc ſit

$$\sin.\, n\Phi^3 = \frac{p^{3n} - 3p^{2n}q^n + 3p^nq^{2n} - q^{3n}}{-8\sqrt{-1}} \text{ et}$$

$$\cos.\, n\Phi^3 = \frac{p^{3n} + 3p^{2n}q^n + 3p^nq^{2n} + q^{3n}}{8}.$$

vnde ob $pq = 1$ conſequimur

$$s = \frac{-1}{8\sqrt{-1}}\int(p^{3n} - q^{3n})\frac{-3p^n + 3q^n}{-8\sqrt{-1}} = \frac{-1}{-8\sqrt{-1}}\int(p^{3n} - q^{3n}) + \frac{3}{8\sqrt{-1}}\int(p^n - q^n)$$

tum vero

$$t = +\tfrac{1}{3}\int(p^{3n} + q^{3n}) + \tfrac{3}{8}\int(p^n + q^n)$$

quod ſi nunc valores ſupra inuentos hic ſubſtituamus, ambae ſummae quaeſitae ita prodibunt expreſſae

$$s = -\frac{\sin.\, 3\Phi - \sin.\, 3n\Phi + \sin.\, 3(n+1)\Phi}{8(1 - \cos.\, 3\Phi)} + \frac{3\sin.\, \Phi + 3\sin.\, n\Phi - 3\sin.\, (n+1)\Phi}{8(1 - \cos.\, \Phi)}$$

$$t = -\tfrac{1}{2} + \frac{\cos.\, 3n\Phi - \cos.\, 3(n+1)\Phi}{8(1 - \cos.\, 3\Phi)} + \frac{3\cos.\, n\Phi - 3\cos.\, (n+1)\Phi}{8(1 - \cos.\, \Phi)}.$$

§. 8. Sit nunc $\lambda = 4$ ita vt quaerantur hae ſummae

$s = \sin.\, \Phi^4 + \sin.\, 2\Phi^4 + \ldots\ldots + \sin.\, n\Phi^4$ ſiue $s = \int \sin.\, n\Phi^4$ et
$t = \cos.\, \Phi^4 + \cos.\, 2\Phi^4 + \ldots\ldots + \cos.\, n\Phi^4$ ſiue $t = \int \cos.\, n\Phi^4$.

Cum igitur ſit

$$\sin.\, n\Phi^4 = \frac{p^{4n} - 4p^{3n}q^n + 6p^{2n}q^{2n} - 4p^nq^{3n} + q^{4n}}{+16}$$

$$\text{et} \quad \cos.\, n\Phi^4 = \frac{p^{4n} + 4p^{3n}q^n + 6p^{2n}q^{2n} + 4p^nq^{3n} + q^{4n}}{16}$$

ob $pq = 1$ ſequuntur hi valores

$$s = \tfrac{1}{16}\int(p^{4n} + q^{4n}) - \tfrac{1}{4}\int(p^{2n} + q^{2n}) + \tfrac{3}{8}\int 1 \text{ et}$$
$$t = \tfrac{1}{16}\int(p^{4n} + q^{4n}) + \tfrac{1}{4}\int(p^{2n} + q^{2n}) + \tfrac{3}{8}\int 1$$

valo-

valoribus igitur quos ſupra dedimus ſubſtitutis erit

$$s = \frac{3n}{8} + \frac{3}{16} + \frac{\cos. 4n\Phi - \cos. 4(n+1)\Phi}{16(1 - \cos. 4\Phi)} - \frac{\cos. 2n\Phi + \cos. 2(n+1)\Phi}{4(1 - \cos. 2\Phi)} \text{ et}$$

$$t = \frac{3n}{8} - \frac{5}{16} + \frac{\cos. 4n\Phi - \cos. 4(n+1)\Phi}{16(1 - \cos. 2\Phi)} + \frac{\cos. 2n\Phi - \cos. 2(n+1)\Phi}{4(1 - \cos. 2\Phi)}$$

ſicque facile erit etiam maiores valores exponentis λ euoluere.

§. 9. Quod ſi iam quaeratur, cuiusmodi ſummae hinc ſint proditurae, ſi iſtae ſeries in infinitum continuentur, non exigua circumſpectione erit vtendum. Primo enim ſi exponens λ fuerit numerus par, euidens eſt, ſumto pro n numero infinito, ſummas harum ſerierum etiam fore infinite magnas; verum ſi λ fuerit numerus impar, tum nihil eſt, quod has ſummas in infinitum augere poſſit, tota autem quaeſtio huc redigitur, vt valores formularum ſinus $n\alpha\Phi$ et coſ. $n\alpha\Phi$ aſſignentur quando pro n numeri infinite magni accipiuntur, perſpicuum autem eſt hos valores hoc caſu aeque a termino vsque ad terminum -1 variari poſſe, ac ſi n eſſet numerus finitus, vnde ſi res in ſe ſpectetur, nihil certi de his ſummis affirmari licet, cum quaecunque ſumma proferretur, ſi inſuper vnus pluresue termini adderentur, prorſus alia ſumma eſſet proditura; Interim tamen ab illuſtri Auctore precedentis diſſertationis ſummae hoc caſu per rationes metaphycas perquam ingenioſe aſſignantur, quibus in analyſi perfecte acquieſcere queamus.

§ 10. Cum autem in his ſeriebus aeque ac in omnibus aliis non conuergentibus, notio ſummae

 pro-

proprie locum inuenire nequeat, quandoquidem quotcunque etiam termini actu addantur tamen nunquam ad summam determinatam peruenitur; Iam pridem validissimis rationibus innixus admonui his casibus voci summae alium significatum ad analysin magis accommodatum tribui debere, quam nouam notionem ita constitui debere censeo, vt summa cuiusque seriei infinitae, siue fuerit conuergens siue divergens, vocetur ea formula analytica, ex cuius euolutione eae series nascantur, hacque admissa definitione omnia dubia circa huiusmodi summationes sponte euanescunt.

§. 11. Quod quo clarius appareat, consideremus primam seriem supra exhibitam

$$s = \sin.\Phi + \sin.2\Phi + \sin.3\Phi + \ldots\ldots + \sin.n\Phi$$

pro qua inuenimus

$$\frac{\sin.\Phi + \sin.n\Phi - \sin.(n+1)\Phi}{2(1-\cos.\Phi)}$$

in quam expressionem formulae $\sin.n\Phi$ et $\sin.(n+1)\Phi$ propter vltimum terminum ingrediuntur, quod si ergo series reuera in infinitum continuetur; ob nullum terminum vltimum etiam hae formulae sponte excedunt, ita vt hoc casu fiat $s = \frac{\sin.\Phi}{2(1-\cos.\Phi)}$, quae etiam ea ipsa est formula, ex cuius euolutione ista series elicitur, vnde vi meae definitionis haec formula in analysi recte pro summa istius seriei haberi potest, quod idem de altera serie

$$t = \cos.\Phi + \cos.2\Phi + 3\Phi + \ldots\ldots + \cos.n\Phi$$

est

est tenendum, pro qua inuenimus

$$t = -\tfrac{1}{2} + \frac{\cos. n\Phi - \cos. (n+1)\Phi}{2(1-\cos.\Phi)}$$

omisso enim postremo membro vtpote a termino vltimo pendente, summa per meam definitionem vtique erit $t = -\tfrac{1}{2}$ quod cum non tam facile pateat, notandum est, hunc valorem natum esse ex formula $t = \frac{\cos.\Phi - 1}{2(1-\cos.\Phi)}$, quem valorem seriei propositae esse aequalem ita ostendi potest: Multiplicetur vtrinque per $2 - 2\cos.\Phi$ fierique debebit

$$\cos.\Phi - 1 = \begin{cases} 2\cos.\Phi + 2\cos.2\Phi + 2\cos.3\Phi + 2\cos.4\Phi \\ -2\cos.\Phi^2 - 2\cos.\Phi\cos.2\Phi - 2\cos.\Phi\cos.3\Phi \end{cases}$$

cum nunc sit in genere

$$2\cos.a\cos.b = \cos.(a-b) + \cos.(a+b) \text{ erit}$$

$$\begin{array}{ll} 2\cos.\Phi^2 = 1 + \cos.2\Phi & 2\cos.\Phi\cos.4\Phi = \cos.3\Phi + \cos.5\Phi \\ 2\cos.\Phi\cos.2\Phi = \cos.\Phi + \cos.3\Phi & 2\cos.\Phi\cos.5\Phi = \cos.4\Phi + \cos.6\Phi \\ 2\cos.\Phi\cos.3\Phi = \cos.2\Phi + \cos.4\Phi & 2\cos.\Phi\cos.6\Phi = \cos.5\Phi + \cos.7\Phi \\ & \text{etc.} \end{array}$$

quibus valoribus substitutis aequalitas manifesto in oculos incurrit, prodibit enim

$$\begin{array}{l} \cos.\Phi - 1 = 2\cos.\Phi + 2\cos.2\Phi + 2\cos.3\Phi + 2\cos.4\Phi \\ \qquad - 1 - \cos.\Phi - \cos.2\Phi - \cos.3\Phi - \cos.4\Phi \text{ etc.} \\ \qquad\qquad - \cos.2\Phi - \cos.3\Phi - \cos.4\Phi \end{array}$$

§. 12. Iisdem obseruatis cautelis etiam pro casu $\lambda = 3$ quo posueramus

$$s = \sin.\Phi^3 + \sin.2\Phi^3 + \sin.3\Phi^3 + \text{etc. in infinitum}$$

et $t = \cos.\Phi^3 + \cos.2\Phi^3 + \cos.3\Phi^3 + \cos.4\Phi^3 + \text{etc. in infinitum}$

sum-

ſumma harum ſerierum infinitarum ita erunt expreſſae

$$s = -\frac{\sin.3\Phi}{8(1-\cos.3\Phi)} + \frac{3\sin.\Phi}{8(1-\cos.\Phi)} \text{ et } t = -\tfrac{1}{2}$$

hic quidem non tam facile apparet, harum formularum euolutionem ad ipſas has ſeries perducere, nihilo vero minus certum eſt, perfectam aequalitatem locum habere, id quod, qui in hoc calculi genere ſatis ſunt exercitati, perſpicient. Interim tamen veritatem poſterioris ſummationis hoc modo oſtendiſſe iuuabit, cum ſit

$$\cos.a^3 = \tfrac{3}{4}\cos.a + \tfrac{1}{4}\cos.3a$$

ſeries haec in duas ſequentes reſoluitur

$$t = \tfrac{3}{4}(\cos.\ \Phi + \cos.2\Phi + \cos.4\Phi \text{ etc.})$$
$$+ \tfrac{1}{4}(\cos.3\Phi + \cos.6\Phi + \cos.9\Phi \text{ etc.})$$

prioris autem ſeriei ſumma ex precedentibus eſt $\frac{3}{4}.-\frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$ poſterioris vero ob eandem rationem ſumma eſt $\frac{1}{4}.-\frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$ vnde ambae coniunctim faciunt ſummam $-\frac{1}{2}$.

SVMMATIO GENERALIS

INFINITARVM ALIARVM PROGRESSIONVM AD HOC GENVS REFERENDARVM.

Theorema.

Si cognita fuerit ſummatio huius progreſſionis

$$Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 \ldots\ldots + Nz^n$$

tum

tum semper etiam has progressiones summare licebit

$$S = A x \sin.\Phi + B x^2 \sin.2\Phi + C x^3 \sin.3\Phi + \ldots N x^n \sin.n\Phi$$

et $T = A x \cos.\Phi + B x^2 \cos.2\Phi + C x^3 \cos.3\Phi + \ldots N x^n \cos.n\Phi.$

Demonstratio.

Cum summa progressionis

$$A z + B z^2 + C z^3 \ldots + N z^n$$

sit certa quaedam functio quantitatis variabilis z, designetur ea hac formula $\Delta : z$; tum vero ponendo vt ante

$$p = \cos.\Phi + \sqrt{-1} \sin.\Phi \quad \text{et} \quad q = \cos.\Phi - \sqrt{-1} \sin.\Phi,$$

vt fiat

$$\sin.n\Phi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(p^n - q^n) \quad \text{et} \quad \cos.n\Phi = \tfrac{1}{2}(p^n + q^n);$$

si hae formulae in propositis seriebus substituantur, earum summae ita expressae obtinebuntur

$$2S\sqrt{-1} = \Delta : px - \Delta : qx \quad \text{et} \quad 2T = \Delta : px + \Delta : qx,$$

vbi notandum, in vtraque formula quantitates imaginarias litteris p et q inuolutas sponte se destruere, ita, vt pro summis S et T valores reales sint prodituri; atque haec summatio perinde succedet, siue propositae series in infinitum progrediantur, siue alicubi terminentur.

Exempl. 1.

Sint omnes coëfficientes A, B, C .. = 1 et series in infinitum continuetur; eritque $\Delta : z = \frac{z}{1-z}$; hinc ergo pro serie priore

$S = x \sin.\Phi + x^2 \sin.2\Phi + x^3 \sin.3\Phi + x^4 \sin.4\Phi + \ldots$ in infi-

 habe-

habebitur

$$2 S \sqrt{-1} = \frac{px}{1-px} - \frac{qx}{1-qx} = \frac{(p-q)x}{1-(p+q)x+pqx^2}$$

quae expreſſio ob $p-q = 2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi$ et $p+q = 2\,\text{coſ.}\,\Phi$ et $pq = 1$ praebebit

$$S = \frac{x\,\text{ſin.}\,\Phi}{1-2x\,\text{coſ.}\,\Phi + x^2}.$$

Pro altera vero ſerie

$$T = x\,\text{coſ.}\,\Phi + x^2\,\text{coſ.}\,2\Phi + x^3\,\text{coſ.}\,3\Phi + \ldots\ldots \text{ in infinit.}$$

fiet $2T = \frac{px}{1-px} + \frac{qx}{1-qx} = \frac{(p+q)x - 2pq.x^2}{1-(p+q)x+pq.x^2}$

ſiue $T = \frac{x\,\text{coſ.}\,\Phi - x^2}{1-2x\,\text{coſ.}\,\Phi + x^2}.$

Coroll. 1.

Hinc igitur ſi $x = 1$, oriuntur ſummationes ſupra datae, ſcilicet

$$S = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{2(1-\text{coſ.}\,\Phi)} = \tfrac{1}{2}\,\text{cotang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi$$

et $T = -\frac{1}{2}$

qui caſus eo magis eſt notatu dignus, quod ſinguli termini ſunt quantitates variabiles, cum tamen ſumma ſit quantitas conſtans.

Coroll. 2.

Semper autem in genere quantitatem x ita aſſumere licebit, vt ſumma ſeriei datae quantitati a fiat aequalis; pro priore ſerie ſinuum autem erit

$$\frac{x\,\text{ſin.}\,\Phi}{1-2x\,\text{coſ.}\,\Phi + x^2} = a;$$

ac ſi hinc littera x determinetur, certo erit

$$a = x\,\text{ſin.}\,\Phi + x^2\,\text{ſin.}\,2\Phi + x^3\,\text{ſin.}\,3\Phi + \ldots\ldots;$$

ſimi-

similique modo si statuatur

$$\frac{x \cos.\Phi - x^2}{1 - 2x\cos.\Phi + x^2} = a$$

ex eaque valor litterae x eruatur; etiam erit

$$a = x\cos.\Phi + x^2\cos.2\Phi + x^3\cos.3\Phi + \ldots\ldots$$

Exempl. 2.

Sit nunc

$$\Delta : z = z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{4}z^4 + \ldots\ldots \text{ in infinit.}$$

$= \log.\frac{1}{1-z}$; ita, vt series propositae iam sint

$$S = x\sin.\Phi + \tfrac{1}{2}x^2\sin.2\Phi + \tfrac{1}{3}x^3\sin.3\Phi + \ldots\ldots$$

et $T = x\cos.\Phi + \tfrac{1}{2}x^2\cos.2\Phi + \tfrac{1}{3}x^3\cos.3\Phi + \ldots\ldots$

habebimus

$$2S\sqrt{-1} = \log.\frac{1}{1-px} - \log.\frac{1}{1-qx} = \log.\frac{1-qx}{1-px}$$

siue

$$2S\sqrt{-1} = \frac{1 - x\cos.\Phi + x\sqrt{-1}\sin.\Phi}{1 - x\cos.\Phi - x\sqrt{-1}\sin.\Phi}$$

pro cuius formulae reductione consideretur haec forma

$$\log.\frac{f + g\sqrt{-1}}{f - g.\sqrt{-1}}$$

de qua constat, si ponatur $\frac{g}{f} = \operatorname{tang.}\omega$, hunc logarithmum fore $= 2\omega.\sqrt{-1}$; hinc ergo quaeratur angulus ω, vt sit

$$\operatorname{tang.}\omega = \frac{x\sin.\Phi}{1 - x\cos.\Phi};$$

vnde protenus sequitur $S = \omega$; pro altera progressione cum sit

$$2T = \log.\frac{1}{1-px} + \log.\frac{1}{1-qx} = -\log.(1 - 2x\cos.\Phi + x^2)$$

 habe-

habetur

$$T = -\tfrac{1}{2}\log.(1 - 2x\,\mathrm{cof.}\,\Phi + x^2).$$

Coroll.

Pro priore ergo progreſſione cum ſit

$$\frac{x\,\mathrm{fin.}\,\Phi}{1 - x\,\mathrm{cof.}\,\Phi} = \mathrm{tang.}\,\omega$$

hinc elicitur

$$x = \frac{\mathrm{tang.}\,\omega}{\mathrm{fin.}\,\Phi + \mathrm{cof.}\,\Phi\,\mathrm{tang.}\,\omega} = \frac{\mathrm{fin.}\,\omega}{\mathrm{fin.}\,(\Phi + \omega)}$$

qua valore ſubſtituto nanciſcimur hanc ſummationem attentione maxime dignam

$$\omega = \frac{\mathrm{fin.}\,\omega\,\mathrm{fin.}\,\Phi}{\mathrm{fin.}\,(\Phi + \omega)} + \frac{\mathrm{fin.}\,\omega^2\,\mathrm{fin.}\,2\Phi}{2\,\mathrm{fin.}\,(\Phi + \omega)^2} + \frac{\mathrm{fin.}\,\omega^3\,\mathrm{fin.}\,3\Phi}{3.\,\mathrm{fin.}\,(\Phi + \omega)^3} + \frac{\mathrm{fin.}\,\omega^4\,\mathrm{fin.}\,4\Phi}{4.\,\mathrm{fin.}\,(\Phi + \omega)^4} + \ldots\ldots$$

vbi ſi $\omega = \frac{\pi}{2}$, vt ſit $\mathrm{fin.}\,\omega = 1$; et $\mathrm{fin.}\,(\Phi + \omega) = \mathrm{cof.}\,\Phi$ oritur haec ſummatio maxime concinna

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\mathrm{fin.}\,\Phi}{1.\,\mathrm{cof.}\,\Phi} + \frac{\mathrm{fin.}\,2\Phi}{2.\,\mathrm{cof.}\,\Phi^2} + \frac{\mathrm{fin.}\,3\Phi}{3.\,\mathrm{cof.}\,\Phi^3} + \ldots\ldots$$

quam feriem iam olim in calculo differentiali ex diuerſiſſimis principiis ſum adeptus; quae eo magis memorabilis erat viſa, quod vtcunque angulus Φ accipiatur, ſumma feriei ſemper maneat eadem $= \frac{\pi}{2}$.

OBSER-

OBSERVATIONES VARIAE CIRCA SERIES, EX SINIBVS VEL COSINIBVS ARCVVM ARITHMETICE PROGREDIENTIVM FORMATAS.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

1.

Quae ab Illustr. *Bernoulli* in Commentariis nostris nuper commentata inuenimus, de summatione serierum quas sinus vel cosinus arcuum arithmetice progredientium formant, meditationibus hisce meis occasionem suppeditarunt, quas quidem primum penitus supprimere decreui, quum non solum non satis digestae mihi viderentur, sed etiam particulares tantum quasdam continere obseruationes super argumento, quod latissimam habere extensionem videtur. At tamen quum ex vltima dissertatione Illustr. *Bernoulli* certior factus sim, Celeb. *de Bossut* in Actis Academiae Scientiarum Parisinae pro Anno 1769. varia proposuisse Theoremata iis analoga, quae ipse inueneram, et Illustr. *Eulerus* in Dissertatione cum Illustr. Academia nostra nuper communicata, elegantissimam proposuerit Methodum summandi series, quae ex quibuscunque sinuum vel cosinuum arcuum arith-

arithmetice progredientium, conflantur; veniam me facile impetraturum existimaui, si ea quae de hoc argumento meditata habui euulgauerim, licet cum inuentis tantorum virorum vix comparari mereantur.

2. Theorema 1. *Proposita progressione sinuum, pro arcubus arithmeticam progressionem constituentibus*
$\sin. z + \sin.(z+v) + \sin(z+2v) + \sin.(z+3v) + \ldots + \sin.(z+nv)$, *eius summa erit*

$$= \frac{\cos.(z-\frac{1}{2}v) - \cos.(z+(n+\frac{1}{2})v)}{2\sin.\frac{1}{2}v} = \frac{\sin.(z+\frac{1}{2}nv)\sin.\frac{n+1}{2}v}{\sin.\frac{1}{2}v}.$$

Demonstratio.

Ponatur summa progressionis propositae $= S$ et multiplicando vtrinque per $2\cos. v$ prodibit:

$$2S\cos.v = 2\sin.z\cos.v + 2\sin.(z+v)\cos.v + 2\sin(z+2v)\cos.v \ldots$$
$$+ 2\sin(z+nv)\cos.v =$$
$$= \sin.(z-v) + \sin.z + 2\sin.(z+v) + 2\sin.(z+2v) \ldots.$$
$$+ 2\sin.(z+(n-1)v) + \sin.(z+nv) + \sin.(z+(n+1)v),$$

ex quo deducitur

$$2S(1-\cos v) = \sin.z - \sin.(z-v) + \sin.(z+nv) - \sin.(z+(n+1)v),$$

hincque

$$S = \frac{\cos(z-\frac{1}{2}v) - \cos.(z+(n+\frac{1}{2})v)}{2\sin.\frac{1}{2}v} = \frac{\sin.(z+\frac{1}{2}nv)\sin.\frac{1}{2}(n+1)v}{\sin.\frac{1}{2}v}.$$

Idem vero et hoc modo demonstrari potest, multiplicetur progressio nostra per $2\sin. v$, vt prodeat

$$2S\sin.v = 2\sin.z\sin.v + 2\sin.(z+v)\sin.v + 2\sin.(z+2v)\sin v$$
$$\ldots + 2\sin.(z+nv)\sin.v$$
$$= \cos.(z-v) + \cos.z - \cos.(z+nv) - \cos.(z+(n+1)v).$$

Hinc

Hinc igitur fiet

$$S = \frac{\text{cof.}(z-\tfrac{1}{2}v)-\text{cof.}(z+(n+\tfrac{1}{2})v)}{2\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}v} \text{ vti fupra, ob}$$

$\text{fin.}v = 2\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}v\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}v$; $\text{cof.}(z-v)+\text{cof}\,z = 2\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}v\,\text{cof.}(z-\tfrac{1}{2}v)$ et $\text{cof.}(z+nv)+\text{cof.}(z+(n+1)v) = 2\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}v\,\text{cof.}(z+(n+\tfrac{1}{2})v)$.

Omnium autem facillima merito habenda eft fequens demonftratio. Multiplicetur progreffio propofita per $2\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}v$, fietque

$$2S\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}v = 2\,\text{fin.}z\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}v + 2\,\text{fin.}(z+v)\text{fin.}\tfrac{1}{2}v + 2\,\text{fin.}(z+2v)\text{fin.}\tfrac{1}{2}v \ldots + 2\,\text{fin.}(z+nv)\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}v$$

$$= \text{cof.}(z-\tfrac{1}{2}v) - \text{cof.}(z+\tfrac{1}{2}v) - \text{cof.}(z+\tfrac{3}{2}v) \ldots + \text{cof.}(z+\tfrac{1}{2}v) + \text{cof.}(z+\tfrac{3}{2}v) \ldots - \text{cof.}(z+(n+\tfrac{1}{2})v)$$

ideoque

$$S = \frac{\text{cof.}(z-\tfrac{1}{2}v)-\text{cof.}(z+(n+\tfrac{1}{2})v)}{2\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}v} = \frac{\text{fin.}(z+\tfrac{1}{2}nv)\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}(n+1)v}{\text{fin.}\tfrac{1}{2}v}.$$

3. Cel. *Boffut* fequentem exhibet fummam progreffionis noftrae

$$S = \frac{\text{fin.}\,v\,(\text{cof.}(z-v)+\text{cof.}\,z-\text{cof.}(z+nv)-\text{cof.}(z+(n+1)v))}{1-\text{cof.}\,2v}$$

at ob $1-\text{cof.}\,2v = 2\,\text{fin.}\,v^2$, ea redire inuenitur ad hanc

$$S = \frac{\text{cof.}(z-v)+\text{cof.}\,z-\text{cof.}(z+nv)-\text{cof.}(z+(n+1)v)}{2\,\text{fin.}\,v},$$

quam in fecunda demonftratione exhibuimus. Et confenfus quidem binarum harum expreffionum

$$\frac{\text{fin.}\,z-\text{fin.}(z-v)+\text{fin.}(z+nv)-\text{fin.}(z+(n+1)v)}{2(1-\text{cof.}\,v)} = S \text{ et}$$

$$S = \frac{\text{cof.}(z-v)+\text{cof.}\,z-\text{cof.}(z+nv)-\text{cof.}(z+(n+1)v)}{2\,\text{fin.}\,v},$$

tam

tam perſpicuus eſt, vt eidem explicando, immorari non ſit neceſſe.

4. Ex Theoremate noſtro iam quidem intelligitur, quaenam ſit ſumma progreſſionis noſtrae, ſi ea cum termino aliquo ſin. $(z + n v)$ deſinere ſupponatur, at ſi haec progreſſio ex infinito terminorum numero conflata intelligatur, ita vt ſit $n = \infty$, ſtatui quidem poſſet

$$S = \frac{\text{coſ.}(z - \tfrac{1}{2} v) - \text{coſ.}(z + (\infty + \tfrac{1}{2}) v)}{2 \,\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} v},$$

quum vero $z + (\infty + \frac{1}{2}) v$ plurimos valores, immo nonnunquam infinitos recipere poſſit, proprie quidem loquendo ſumma progreſſionis noſtrae pro numero terminorum infinito manebit indeterminata; at ſi per ſummam intelligamus cum Illuſtr. *Bernoulli* valorem, qui inter omnes poſſibiles valores ſummae medium tenet, pro caſu noſtro propoſito ſumma progreſſionis

$$\text{Sin.}\, z + \text{ſin.}\,(z + v) + \text{ſin.}\,(z + 2 v)$$

in infinitum continuatae ſtatuenda erit $\dfrac{\text{coſ.}\,(z - \frac{1}{2} v)}{2 \,\text{ſin.}\, \frac{1}{2} v}$, vnde ſi $v = z$ fiet ſumma progreſſionis

$$\text{ſin.}\, z + \text{ſin.}\, 2 z + \text{ſin.}\, 3 z + \text{ſin.}\, 4 z \text{ etc.} = \tfrac{1}{2} \cot.\, \tfrac{1}{2} z,$$

cui valor prorſus coincidit cum eo, quem Illuſtr. *Bernoulli* in ſuis Diſſertationibus exhibet. Quoties arcus v ad circumferentiam circuli rationem habuerit rationalem, ita vt ſit $(n + 1) v = 2 m \pi$ deſignante π ſemiperipheriam circuli, toties progreſſio noſtra

$$\text{ſin.}\, z + \text{ſin.}\,(z + v) + \text{ſin.}\,(z + 2 v) \text{ etc.}$$

ſuas

ſuas habebit periodos poſt quas iidem termini denuo recurrunt, cum enim peruentum fuerit ad $\text{ſin.}(z+nv)$ hunc inſequentes coincident cum terminis $\text{ſin.}\,z$, $\text{ſin.}(z+v)$ etc., erit enim

$$\text{ſin.}(z+(n+1)v)=\text{ſin.}(2m\pi+z)=\text{ſin.}\,z$$
$$\text{ſin.}(z+(n+2)v)=\text{ſin.}(2m\pi+z+v)=\text{ſin}(z+v) \text{ etc.}$$

Hoc autem caſu facile demonſtrari poterit, ſummam pro vnaquaque periodo, ſenſu ab Illuſtr. *Bernoulli* adoptato, ſtatui debere $\frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v)}{2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v}$, ſcilicet vt habeatur valor medius ſummarum pro periodo quauis, eae omnes in vnam colligi debent ſummam quam diuidendo per numerum terminorum periodi, reſultabit valor iſte medius. Habebuntur autem hinc ſequentes ſummae

1. $\frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v)-\text{coſ.}(z+\frac{1}{2}v)}{\text{ſin.}\frac{1}{2}v}$

2. $\frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v)-\text{coſ.}(z+\frac{3}{2}v)}{2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v}$

3. $\frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v)-\text{coſ.}(z+\frac{5}{2}v)}{2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v}$

$n+1$ $\frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v)-\text{coſ.}(z+\frac{2n+1}{2}v)}{2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v}$

quare valor medius quaeſitus erit

$$\frac{\text{coſ.}(z-\frac{1}{2}v)}{2\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v}-\frac{\text{coſ.}(z+\frac{1}{2}v)-\text{coſ.}(z+\frac{3}{2}v)-\text{coſ.}(z+\frac{5}{2}v)\ldots-\text{coſ.}(z+\frac{2n+1}{2}v)}{2(n+1)\,\text{ſin.}\frac{1}{2}v},$$

At infra demonſtrabitur eſſe

$$\operatorname{cof.}(z+\tfrac{1}{2}v)+\operatorname{cof.}(z+\tfrac{3}{2}v)+\operatorname{cof.}(z+\tfrac{5}{2}v)\ldots+\operatorname{cof.}(z+\tfrac{2n+1}{2}v)$$

$$=\frac{\operatorname{cof.}(z+\frac{n+1}{2}v)\operatorname{fin.}\frac{n+1}{2}v}{\operatorname{fin.}\frac{1}{2}v},$$

et quum pro noſtro caſu ſit $\frac{n+1}{2}v=m\pi$, erit $\operatorname{fin.}\frac{n+1}{2}v=0$; ex quo omnino liquet, ſummam progreſſionis in infinitum continuatae

$$\operatorname{fin.}z+\operatorname{fin.}(z+v)+\operatorname{fin.}(z+2v)+\operatorname{fin.}(z+3v)\,\text{etc.}=\frac{\operatorname{cof.}(z-\frac{1}{2}v)}{2\operatorname{fin.}\frac{1}{2}v}.$$

Quamuis haec quae iam demonſtrata ſunt, valeant tantummodo pro caſu quo v ad circumferentiam circuli rationem habuerit rationalem, tamen rite quoque adplicari poterunt ad eum caſum, quo haec ratio ſit irrationalis, ſcilicet in iſto caſu periodus recurrens non niſi poſt infinitum terminorum numerum locum habere intelligitur, at per ſe quidem patet demonſtrationis noſtrae vim eandem manere ſiue numeri m et n ſtatuantur finiti, ſiue infiniti. Dum Illuſtr. *Bernoulli* ex valore

$$S=\frac{\operatorname{fin.}v\,(\operatorname{cof.}(z-v)+\operatorname{cof.}z-\operatorname{cof.}(z+nv)-\operatorname{cof.}(z+(n+1)v))}{1-\operatorname{cof.}2v}$$

qui progreſſioni noſtrae cum termino $\operatorname{fin.}(z+nv)$ definenti reſpondet, eum eruit qui pro valore numeri n infinito locum habet; dicit terminos $\operatorname{cof.}(z+nv)$ et $\operatorname{cof.}(z+(n+1)v)$ vel potius $\operatorname{cof.}(z+nv)+\operatorname{cof.}(z+(n+1)v)$ ponendos eſſe nihilo aequales. Facile autem perſpicitur hoc ſenſu proprio accipiendum non eſſe; nam poſito $\operatorname{cof.}(z+nv)=0$, ſimul

cof.

cos. $(z + (n + 1) v)$ non statui debet $= 0$, neque cos. $(z + n v) +$ cos $(z + (n + 1) v)$ aequalis nihilo statui poterit; sed dictum Illustr. Viri ita interpretandum videtur, vt hi termini cos. $(z + n v) +$ cos. $(z + (n + 1) v)$ negligi debeant, quia multifarios agnoscunt valores, et de quibus insuper iam demontum iuimus eorum summam nihilo aequalem esse censendam.

5. Ex Theoremate nostro generali infinita alia particularia deduci poterunt, quorum tantum nonnulla quae attentionem potissimum merentur, heic adponam. Si igitur ponatur $v = m z$ summa progressionis

$$\sin. z + \sin.(m+1)z + \sin.(2m+1)z + \sin.(3m+1)z \ldots + \sin.(mn+1)z \text{ erit}$$

$$= \frac{\sin. \frac{nm+2}{2}. z \sin. \frac{m(n+1)}{2} z.}{\sin. \frac{m}{2} z}$$

Hinc si

$$m = 1 \text{ erit } \sin. z + \sin. 2z + \sin. 3z + \sin. 4z \ldots + \sin.(n+1)z = \frac{\sin. \frac{n+2}{2} z \sin. \frac{n+1}{2} z}{\sin. \frac{1}{2} z}$$

$$m = 2 \quad \sin. z + \sin. 3z + \sin. 5z + \sin. 7z \ldots + \sin.(2n+1)z = \frac{\sin. \frac{2n+2}{2} z \sin. \frac{2(n+1)}{2} z}{\sin. \frac{2}{2} z}$$

$$m = 3 \quad \sin. z + \sin. 4z + \sin. 7z + \ldots + \sin.(3n+1)z = \frac{\sin. \frac{3n+2}{2}. z \sin. \frac{3(n+1)}{2} z}{\sin. \frac{3}{2} z}$$

$$m = 4 \quad \sin. z + \sin. 5z + \sin. 9z + \ldots + \sin.(4n+1)z = \frac{\sin. \frac{4n+2}{2}. z \sin. \frac{4(n+1)}{2} z}{\sin. \frac{4}{2} z}.$$

Porro si statuatur $z = \eta x$ et $v = \theta x$, erit quoque

$$\sin. \eta x + \sin.(\eta + \theta)x + \sin.(\eta + 2\theta)x \ldots + \sin(\eta + n\theta)x = \frac{\sin. \frac{2\eta + n\theta}{2}. x \sin. \frac{\theta(n+1)}{2} x}{\sin. \frac{\theta}{2} x}$$

quare

quare si $\eta = 2$, $\theta = 1$ fiet

$$\text{ſin.}\,2x + \text{ſin.}\,3x + \text{ſin.}\,4x \ldots + \text{ſin.}\,(2+n)x = \frac{\text{ſin.}\,\frac{4+n}{2}.x\,\text{ſin.}\,\frac{n+1}{2}.x}{\text{ſin}\,\frac{1}{2}x}$$

si $\eta = 2$; $\theta = 3$ erit

$$\text{ſin.}\,2x + \text{ſin.}\,5x + \text{ſin.}\,8x \ldots + \text{ſin.}\,(3n+2)x = \frac{\text{ſin.}\,\frac{4+3n}{2}.x\,\text{ſin.}\,\frac{3(n+1)}{2}x}{\text{ſin.}\,\frac{3}{2}x}$$

si $\eta = 3$; $\theta = 1$ erit

$$\text{ſin.}\,3x + \text{ſin.}\,4x + \text{ſin.}\,5x \ldots + \text{ſin.}\,(n+3)x = \frac{\text{ſin.}\,\frac{6+n}{2}.\,x\,\text{ſin.}\,\frac{n+1}{2}x}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}x}$$

si $\eta = 3$; $\theta = 2$ erit

$$\text{ſin.}\,3x + \text{ſin.}\,5x + \text{ſin.}\,7x \ldots + \text{ſin.}\,(2n+3)x = \frac{\text{ſin.}\,\frac{6+2n}{2}x\,\text{ſin.}\,\frac{2(n+1)}{2}x}{\text{ſin.}\,x}.$$

6. Pro caſu quo numerus terminorum in progreſſione noſtra ſtatuitur infinitus, habebitur poſito $v = mz$

$$\text{ſin.}\,z + \text{ſin.}\,(m+1)z + \text{ſin.}\,(m+2)z + \text{etc.} = \frac{\text{coſ.}\,\frac{2-m}{2}.z}{2\,\text{ſin.}\,\frac{m}{2}z}.$$

Hinc si $m = 1$

$$\text{ſin.}\,z + \text{ſin.}\,2z + \text{ſin.}\,3z + \text{ſin.}\,4z\ \text{etc.} = \tfrac{1}{2}\cot.\tfrac{1}{2}z$$

si $m = 2$; $\text{ſin.}\,z + \text{ſin.}\,3z + \text{ſin.}\,5z + \text{etc.} = \dfrac{1}{2\,\text{ſin.}\,z}$

si $m = 3$; $\text{ſin}\,z + \text{ſin.}\,4z + \text{ſin.}\,7z + \text{etc.} = \dfrac{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}z}{2\,\text{ſin.}\,\frac{3}{2}z}$

si $m = 4$; $\text{ſin.}\,z + \text{ſin.}\,5z + \text{ſin.}\,9z + \text{etc.} = \dfrac{\text{coſ.}\,z}{2\,\text{ſin.}\,2z} = \dfrac{1}{4\,\text{ſin.}\,z}$

Deinde ex combinatione harum progreſſionum, aliae pro-

proprietates pro huiusmodi progreſſionibus delegi potuerunt, ſic quum ſit

$$\sin. z + \sin. 5z + \sin. 9z + \text{etc.} = \frac{1}{4\sin. z},$$

ſi ex huius progreſſionis duplo, ſubtrahatur

$$\sin. z + \sin. 3z + \sin. 5z + \text{etc.} = \frac{1}{2\sin. z},$$

patebit eſſe

$$\sin. z - \sin. 3z + \sin. 5z - \sin. 7z + \sin. 9z - \text{etc.} = 0,$$

quod etſi haud parum paradoxon videtur, tamen notioni ſummae ab Illuſtr. *Bernoulli* adhibitae optime conſentit. Porro ſi ponatur $z = \eta x$ et $v = \theta x$ generatim habebitur

$$\sin. \eta x + \sin. (\eta + \theta) x + \sin. (\eta + 2\theta) x + \sin. (\eta + 3\theta) x + \text{etc.} = \frac{\cos. \frac{2\eta - \theta}{2} x}{2 \sin. \frac{\theta}{2} x}$$

ſic ſi $\eta = 2$ et $\theta = 1$ fiet

$$\sin. 2x + \sin. 3x + \sin. 4x + \text{etc.} = \frac{\cos. \frac{3}{2} x}{2 \sin. \frac{1}{2} x}$$

ſi $\eta = 3$ et $\theta = 1$ habebitur

$$\sin. 3x + \sin. 4x + \sin. 5x + \text{etc.} = \frac{\cos. \frac{5}{2} x}{2 \sin. \frac{1}{2} x}$$

ſi $\eta = 3$ et $\theta = 2$ erit

$$\sin. 3x + \sin. 5x + \sin. 7x + \text{etc.} = \frac{\cos. \frac{4}{2} x}{2 \sin. x} = \frac{\cos. 2x}{2 \sin. x}$$

quibus plures huiusmodi expreſſiones addi poſſent, ſi opus foret.

7. Theorema II. *Propoſita progreſſione coſinuum pro arcubus arithmeticam progreſſionem conſtituentibus*

$$\cos. z + \cos.(z+v) + \cos.(z+2v) + \cos.(z+3v) \ldots + \cos.(z+nv);$$

eius summa erit $= \dfrac{\cos.(z+\frac{1}{2}nv)\sin.\frac{(n+1)}{2}v}{\sin.\frac{1}{2}v}.$

Demonſtratio.

Variae quidem demonſtrationes huius Theorematis adſerri poſſent conſimiles iis, quas pro Theoremate primo in medium adduxi, breuitatis tamen gratia, ſimpliciſſimam tantum proponere licebit. Poſita igitur ſumma quaeſita S, ſi progreſſio noſtra multiplicetur per $2\sin.\frac{1}{2}v$, fiet

$$2S.\sin.\tfrac{1}{2}v = 2\cos. z\sin.\tfrac{1}{2}v + 2\cos.(z+v)\sin.\tfrac{1}{2}v + 2\cos.(z+2v)\sin.\tfrac{1}{2}v \ldots + 2\cos.(z+nv)\sin.\tfrac{1}{2}v$$
$$= -\sin.(z-\tfrac{1}{2}v) + \sin.(z+\tfrac{1}{2}v) + \sin.(z+\tfrac{3}{2}v) \ldots - \sin.(z+\tfrac{1}{2}v) - \sin.(z+\tfrac{3}{2}v) \ldots + \sin.(z+(n+\tfrac{1}{2})v),$$

ideoque

$$S = \frac{-\sin.(z-\frac{1}{2}v) + \sin.(z+(n+\frac{1}{2})v)}{2\sin.\frac{1}{2}v} = \frac{\cos.(z+\frac{1}{2}nv)\sin.\frac{1}{2}(n+1)v}{\sin.\frac{1}{2}v}.$$

Si in formula allata tam numerator quam denominator multiplicentur per $\sin.\frac{1}{2}v$ vel $\cos.\frac{1}{2}v$ ſequentes prodibunt expreſſiones:

$$S = \frac{\cos. z - \cos.(z-v) + \cos.(z+nv) - \cos.(z+(n+1)v)}{2(1-\cos. v)}$$

$$S = \frac{-\sin.(z-v) - \sin. z + \sin.(z+nv) + \sin.(z+(n+1)v)}{2\sin. v}$$

quarum poſterior in ſequentem transmutari poterit

$$S = \frac{\sin. v(-\sin.(z-v) - \sin. z + \sin.(z+nv) + \sin.(z+(n+1)v))}{1-\cos. 2v}.$$

8. Pro

8. Pro caſu n infiniti, fiet ſumma progreſſionis noſtrae $S = -\frac{\sin.(z-\frac{1}{2}v)}{2\sin.\frac{1}{2}v}$, quae igitur ſi $z = v$, euadet $= -\frac{1}{2}$ omnino vti Illuſtr. *Bernoulli* hanc ſummam aſſignauit. Vt vero pateat, ſummam modo dictam veritati eſſe conſentaneam; ſimile ratiocinium adhibere licebit, ac id quo ſupra vſi ſumus ad demonſtrandum, quod ſumma progreſſionis $\sin. z + \sin. (z+v)$ etc. in infinitum continuatae ſit $= \frac{\cos.(z-\frac{1}{2}v)}{2\sin.\frac{1}{2}v}$. Scilicet ſi ponatur $(n+1)v = m\pi$, in ſerie noſtra coſinuum poſt terminum $\cos.(z+nv)$, recurrent iidem termini qui in Periodo $\cos. z$, $\cos.(z+v)$, $\cos.(z+2v)$ habebantur, erit enim

$$\cos.(z+(n+1)v) = \cos.(2m\pi+z) = \cos. z$$

$$\cos.(z+(n+2)v) = \cos.(2m\pi+z+v) = \cos.(z+v)$$

et ſic in ſequentibus. Pro hac autem Periodo valor generalis ſummae, qui medius erit inter omnes valores poſſibiles, inuenietur $=$

$$\frac{-\sin.(z-\frac{1}{2}v)}{2\sin.\frac{1}{2}v} + \frac{\sin.(z+\frac{1}{2}v)+\sin.(z+\frac{3}{2}v)+\sin.(z+\frac{5}{2}v)\ldots+\sin.(z+\frac{2n+1}{2}v)}{2(n+1)\sin.\frac{1}{2}v}$$

Ex ſupra demonſtratis autem liquet eſſe

$$\sin.(z+\tfrac{1}{2}v)+\sin.(z+\tfrac{3}{2}v)+\sin.(z+\tfrac{5}{2}v)+\sin.(z+(n+\tfrac{1}{2})v) = \frac{\sin.(z+\frac{n+1}{2}v)\sin.\frac{n+1}{2}v}{\sin.\frac{1}{2}v}$$

quocirca quum ſit $(n+1)v = 2m\pi$, erit omnino $\sin.\frac{n+1}{2}.v = \sin. m\pi = 0$, ita vt valor iſte medius ſummarum pro Periodo

cof.

$$\operatorname{cos}. z + \operatorname{cos}.(z+v) + \operatorname{cos}.(z+2v) \ldots + \operatorname{cos}.(z+nv)$$

ſtatui debeat

$$= -\frac{\operatorname{sin}.(z - \frac{1}{2}v)}{2\operatorname{sin}.\frac{1}{2}v}.$$

9. Ex Theoremate noſtro II^{do} generali, plurima particularia deduci poſſunt, quorum potiora quaedam heic recenſere iuuabit. Poſito itaque $v = mz$ erit ſumma progreſſionis

$$\operatorname{cos}.z + \operatorname{cos}.(m+1)z + \operatorname{cos}.(2m+1)z + \operatorname{cos}.(3m+1)z \ldots + \operatorname{cos}.(mn+1)z =$$

$$\frac{\operatorname{cos}.\frac{nm+2}{2}.z\operatorname{sin}.\frac{m(n+1)z}{2}}{\operatorname{sin}.\frac{mz}{2}}.$$

Hinc ſi

$m = 1$ erit $\operatorname{cos}.z + \operatorname{cos}.2z + \operatorname{cos}.3z + \operatorname{cos}.4z \ldots + \operatorname{cos}.(n+1)z$

$$= \frac{\operatorname{cos}.\frac{n+2}{2}z\operatorname{sin}.\frac{n+1}{2}.z}{\operatorname{sin}.\frac{1}{2}z}$$

$m = 2$ $\operatorname{cos}.z + \operatorname{cos}.3z + \operatorname{cos}.5z + \operatorname{cos}.7z \ldots + \operatorname{cos}.(2n+1)z$

$$= \frac{\operatorname{cos}.\frac{2n+2}{2}.z\operatorname{sin}.\frac{2(n+1)}{2}.z}{\operatorname{sin}.\frac{2}{2}z}$$

$m = 3$ $\operatorname{cos}.z + \operatorname{cos}.4z + \operatorname{cos}.7z + \operatorname{cos}.10z \ldots + \operatorname{cos}.(3n+1)z$

$$= \frac{\operatorname{cos}.\frac{3n+2}{2}.z\operatorname{sin}.\frac{3(n+1)}{2}.z}{\operatorname{sin}.\frac{3}{2}z}.$$

Deinde ſi ponatur $z = \eta x$ et $v = \theta x$, fiet

$$\operatorname{cos}.\eta x + \operatorname{cos}.(\eta+\theta)x + \operatorname{cos}.(\eta+2\theta)x \ldots + \operatorname{cos}.(\eta+n\theta)x = \frac{\operatorname{cos}.\frac{2\eta+n\theta}{2}x\operatorname{sin}.\frac{\theta(n+1)}{2}x}{\operatorname{sin}.\frac{\theta x}{2}}$$

quamobrem fiet

pro

pro $\eta = 2$; $\theta = 1$; $\operatorname{cos}. 2x + \operatorname{cos}. 3x + \operatorname{cos}. 4x \ldots + \operatorname{cos}. (n+2)x = \dfrac{\operatorname{cos}. \frac{4+n}{2} x \operatorname{sin}. \frac{n+1}{2} x}{\operatorname{sin}. \frac{1}{2} x}$

$\eta = 2$; $\theta = 3$; $\operatorname{cos}. 2x + \operatorname{cos}. 5x + \operatorname{cos}. 8x + \ldots + \operatorname{cos}. (3n+2)x = \dfrac{\operatorname{cos}. \frac{4+3n}{2} x \operatorname{sin}. \frac{3(n+1)}{2} x}{\operatorname{sin}. \frac{3}{2} x}$

$\eta = 3$; $\theta = 1$; $\operatorname{cos}. 3x + \operatorname{cos}. 4x + \operatorname{cos}. 5x \ldots + \operatorname{cos}. (n+3)x = \dfrac{\operatorname{cos}. \frac{6+n}{2} x \operatorname{sin}. \frac{n+1}{2} x}{\operatorname{sin}. \frac{1}{2} x}$

$\eta = 3$; $\theta = 2$; $\operatorname{cos}. 3x + \operatorname{cos}. 5x + \operatorname{cos}. 7x \ldots + \operatorname{cos}. (2n+3)x = \dfrac{\operatorname{cos}. \frac{6+2n}{2} x \operatorname{sin}. \frac{2(n+1)}{2} x}{\operatorname{sin}. x}$,

Pro caſu autem n infiniti, ſequentes ſerierum infinitarum obtinebimus ſummationes

$$\operatorname{cos}. z + \operatorname{cos}. 2z + \operatorname{cos}. 3z + \operatorname{cos}. 4z \text{ etc.} = -\tfrac{1}{2}.$$

$$\operatorname{cos}. z + \operatorname{cos}. 3z + \operatorname{cos}. 5z + \operatorname{cos}. 7z \text{ etc.} = 0$$

$$\operatorname{cos}. z + \operatorname{cos}. 4z + \operatorname{cos}. 7z + \operatorname{cos}. 10z \text{ etc.} = \frac{\operatorname{sin}. \frac{1}{2} z}{2 \operatorname{sin}. \frac{3}{2} z}$$

$$\operatorname{cos}. z + \operatorname{cos}. 5z + \operatorname{cos}. 9z + \operatorname{cos}. 13z \text{ etc.} = \frac{\operatorname{sin}. z}{2 \operatorname{sin}. 2z} = \frac{1}{4 \operatorname{cos}. z}.$$

10. Licet ex ſuperioribus perſpicue intelligatur ſerierum

$$\operatorname{sin}. z + \operatorname{sin}. (z+v) + \operatorname{sin}. (z+2v) + \operatorname{sin}. (z+3v) \text{ etc. et}$$
$$\operatorname{cos}. z + \operatorname{cos}. (z+v) + \operatorname{cos}. (z+2v) + \operatorname{cos}. (z+3v) \text{ etc.}$$

ſummas ſtatuendas eſſe

$$\frac{\operatorname{cos}. (z - \frac{1}{2} v)}{2 \operatorname{sin}. \frac{1}{2} v} \text{ et } \frac{-\operatorname{sin}. (z - \frac{1}{2} v)}{2 \operatorname{sin}. \frac{1}{2} v},$$

quicunque valores angulis z et v tribuantur, memorabilis tamen heic locum habet exceptio, pro caſu quo ſtatuitur $v = 0$, pro iſto ſcilicet caſu nullum eſt dubium, quin vtriusque ſeriei valor fiat infinitus, et prioris quidem $= \infty\, \mathrm{fin.}\, z$, poſterioris vero $= \infty\, \mathrm{cof.}\, z$. Vt vero pateat expreſſiones ſupra allatas, pro caſu $v = 0$ locum non habere, regrediendum eſt ad ea ratiocinia quorum ope easdem eruimus. Et in §. 4. primum inuenimus ſummam progreſſionis

$$\mathrm{fin.}z + \mathrm{fin.}(z+v) + \mathrm{fin.}(z+2v) + \mathrm{fin.}(z+3v) \text{ etc.}$$

ſtatuendam eſſe

$$\frac{\mathrm{cof.}(z-\frac{1}{2}v)}{2\,\mathrm{fin.}\frac{1}{2}v} - \frac{\mathrm{cof.}(z+\frac{1}{2}v) - \mathrm{cof.}(z+\frac{3}{2}v) - \mathrm{cof.}(z+\frac{5}{2}v) \ldots - \mathrm{cof.}(z+\frac{2n+1}{2}v)}{2(n+1)\,\mathrm{fin.}\frac{1}{2}v}$$

$$= \frac{\mathrm{cof.}(z-\frac{1}{2}v)}{2\,\mathrm{fin.}\frac{1}{2}v} - \frac{\mathrm{cof.}(z+\frac{n+1}{2}v)\,\mathrm{fin.}\frac{n+1}{2}v}{2(n+1)\,\mathrm{fin.}\frac{1}{2}v^2}.$$

Quum igitur pro caſu praeſenti ob $v = 0$ et $(n+1)v = 2m\pi$ ſit tam $\mathrm{fin.}\frac{1}{2}v = 0$, quam $\mathrm{fin.}\frac{n+1}{2}v = 0$ expreſſio

$$\frac{\mathrm{fin.}\frac{n+1}{2}v}{\mathrm{fin.}\frac{1}{2}v} \text{ abibit in } (n+1)\frac{\mathrm{cof.}\frac{n+1}{2}v}{\mathrm{cof.}\frac{1}{2}v} = (n+1)\,\mathrm{cof.}\frac{n+1}{2}v,$$

quo valore ſupra ſubſtituto, prodibit ſumma noſtrae ſeriei

$$= \frac{\mathrm{cof.}(z-\frac{1}{2}v) - \mathrm{cof.}(z+\frac{n+1}{2}v)\,\mathrm{cof.}\frac{n+1}{2}v}{2\,\mathrm{fin.}\frac{1}{2}v},$$

vbi quum iterum tam numerator, quam denominator euaneſcant, habebitur fractionis quaeſitae valor

$$= \frac{\mathrm{fin.}(z-\frac{1}{2}v) + (n+1)\,\mathrm{fin.}(z+(n+1)v)}{2\,\mathrm{cof.}\frac{1}{2}v} = \frac{n+2}{2}\,\mathrm{fin.}z = \infty\,\mathrm{fin.}z.$$

Caete-

Caeterum haec explicatio tantum locum habet pro notione ſummae ab Illuſtr. *Bernoulli* adhibitae, eoque reſpectu quod pro ſerie

$$\sin. z + \sin.(z+v) + \sin.(z+2v) + \sin.(z+3v) \text{ etc.}$$

dentur periodi poſt quas iidem termini recurrunt et quarum periodorum ſummae euaneſcunt, quod quidem pro caſu $v = 0$ locum non habet, niſi ſimul ſit $z = 0$. Quod ſi igitur retineamus generalem expreſſionem ſummae

$$S = \frac{\cos.(z - \frac{1}{2}v) - \cos.(z + (n + \frac{1}{2})v)}{2 \sin. \frac{1}{2}v}$$

pro caſu $v = 0$ et $n = \infty$ eadem in hanc abibit

$$S = \frac{\sin.(z - \frac{1}{2}v) + (2n+1)\sin.(z + (n+\frac{1}{2})v)}{2 \cos. \frac{1}{2}v} = (n+1)\sin. z = \infty \sin. z,$$

prorſus vti rei natura poſtulat. Similiter autem euinci poteſt, cur pro caſu $v = 0$, expreſſio

$$\cos. z + \cos.(z+v) + \cos.(z+2v) + \cos.(z+3v) \text{etc.} = -\frac{\sin.(z - \frac{1}{2}v)}{2 \sin. \frac{1}{2}v}$$

rite ſibi conſtare nequeat. Praeterea obſeruari quoque meretur, expreſſiones ſupra allatas pro ſeriebus infinitis ſinuum vel coſinuum, admittendas non eſſe pro caſibus $v = 2m\pi$ denotante π circumferentiam circuli, per ſe enim patet ſeriem

$$\sin. z + \sin.(2m\pi + z) + \sin.(4m\pi + z) + \sin.(6m\pi + z) + \text{etc.}$$

prorſus congruere cum hac

$$\sin. z + \sin. z + \sin. z \text{ etc.}$$

11. Quoniam progreſſio ſinuum in Theoremate I^{mo} conſiderata, in has binas reſoluitur

$$\text{ſin.}\, z(1 + \text{coſ.}\, v + \text{coſ.}\, 2v + \text{coſ.}\, 3v \ldots + \text{coſ.}\, nv)$$
$$+ \text{coſ.}\, z(\text{ſin.}\, v + \text{ſin.}\, 2v + \text{ſin.}\, 3v \ldots\ldots + \text{ſin.}\, nv),$$

progreſſio autem coſinuum in Theoremate II^{do} exhibita ex his duabus componatur

$$\text{coſ.}\, z(1 + \text{coſ.}\, v + \text{coſ.}\, 2v + \text{coſ.}\, 3v \ldots + \text{coſ.}\, nv)$$
$$- \text{ſin.}\, z(\text{ſin.}\, v + \text{ſin.}\, 2v + \text{ſin.}\, 3v \ldots\ldots + \text{ſin.}\, nv),$$

euidens eſt, ſummam progreſſionum in binis noſtris Theorematibus conſideratarum ſponte innoteſcere, ſi cognitae fuerint ſummae harum progreſſionum

$$\text{ſin.}\, v + \text{ſin.}\, 2v + \text{ſin.}\, 3v + \ldots\ldots + \text{ſin.}\, nv \quad \text{et}$$
$$1 + \text{coſ.}\, v + \text{coſ.}\, 2v + \text{coſ.}\, 3v \ldots\ldots\ldots + \text{coſ.}\, nv.$$

Quamuis autem in harum progreſſionum ſummis indagandis, eosdem ſequi liceat procedendi modos, quos in Theorematibus ſuperioribus adhibuimus, taman aliam haud parum elegantem adiiciam Methodum, illi analogam quam ab Illuſtr. *Eulero* adhibitam inueni. Primum igitur pro inueſtiganda ſumma

$$\text{ſin.}\, v + \text{ſin.}\, 2v + \text{ſin.}\, 3v \ldots\ldots + \text{ſin.}\, nv$$

notare conuenit eſſe;

$$\text{ſin.}\, v = \frac{(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^2 - (\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^2}{2\sqrt{-1}};$$

$$\text{coſ.}\, v = \frac{(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^2 + (\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^2}{2}$$

$$\text{ſin.}\, 2v = \frac{(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^4 - (\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^4}{2\sqrt{-1}};$$

$$\text{coſ.}\, 2v = \frac{(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^4 + (\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^4}{2};$$

et

et in genere

$$\text{ſin.}\, nv = \frac{(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^{2n} - (\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^{2n}}{2\sqrt{-1}};$$

$$\text{coſ.}\, nv = \frac{(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^{2n} + (\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1})^{2n}}{2}.$$

Hinc ſi ſtatuatur

$$(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1}) = p \quad \text{et} \quad (\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{-1}) = q,$$

habebimus

$$\text{ſin.}\, v + \text{ſin.}\, 2v + \text{ſin.}\, 3v \ldots + \text{ſin.}\, nv =$$

$$\frac{p^2 + p^4 + p^6 \ldots + p^{2n}}{2\sqrt{-1}} - \frac{q^2 + q^4 + q^6 \ldots + q^{2n}}{2\sqrt{-1}}$$

harum prior pars ſic exprimi poterit:

$$\frac{p^{n+1}}{2\sqrt{-1}}(p^{n-1} + p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 \ldots + q^{n-1}), \text{ ob } pq = 1$$

poſterior autem ad hanc redibit formam:

$$-\frac{q^{n+1}}{2\sqrt{-1}}(q^{n-1} + q^{n-2}p + q^{n-3}p^2 \ldots + p^{n-1})$$

vtramque autem multiplicando per $(p-q)$, obtinebimus

$$\frac{(p^{n+1} - q^{n+1})(p^n - q^n)}{2\sqrt{-1}(p-q)} = \frac{\text{ſin.}\frac{n+1}{2}v\, \text{ſin.}\frac{n}{2}v}{\text{ſin.}\frac{1}{2}v}.$$

Hinc vero ſimul perſpicitur, ſi loco v ſubſtituatur quodcunque eius multiplum mv, ſummationem huiusmodi progreſſionis

$$\text{ſin.}\, mv + \text{ſin.}\, 2mv + \text{ſin.}\, 3mv + \ldots + \text{ſin.}\, mnv$$

 aeque

aeque facile inſtitui, inuenietur enim ſumma huius progreſſionis

$$= \frac{\text{ſin}\, \frac{m(n+1)}{2} v \,\text{ſin.}\, \frac{mn}{2} v}{\text{ſin.}\, \frac{m}{2} v}.$$

Deinde ſi propoſita fuerit progreſſio

$$\text{coſ.}\, v + \text{coſ.}\, 2v + \text{coſ.}\, 3v \ldots + \text{coſ.}\, nv,$$

ea ad hanc redibit

$$\frac{p^2 + p^4 + p^6 \ldots + p^{2n}}{2} + \frac{q^2 + q^4 + q^6 \ldots + q^{2n}}{2},$$

quae iterum ob $pq = 1$, in ſequentem transformatur

$$\frac{p^{n+1}}{2}(p^{n-1} + p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 \ldots + q^{n-1})$$

$$+ \frac{q^{n+1}}{2}(p^{n-1} + p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 \ldots + q^{n-1}).$$

Vnde ſi haec expreſſio multiplicetur per $(p-q)$ prodibit ſumma progreſſionis noſtrae

$$= \frac{(p^{n+1} + q^{n+1})(p^n - q^n)}{2(p-q)} = \frac{\text{coſ.}\, \frac{n+1}{2} v \,\text{ſin.}\, \frac{n}{2} v}{\text{ſin.}\, \frac{1}{2} v}.$$

At ſi proponatur progreſſio

$$1 + \text{coſ.}\, v + \text{coſ.}\, 2v + \text{coſ.}\, 3v \ldots + \text{coſ.}\, nv,$$

ea ſic exprimi poterit

$$\frac{1 + p^2 + p^4 + p^6 \ldots + p^{2n}}{2} + \frac{1 + q^2 + q^4 + q^6 \ldots + q^{2n}}{2},$$

quae ob $pq = 1$, in iſtam transformatur:

$$\frac{p^n}{2}(p^n + p^{n-1}q + p^{n-2}q^2 \ldots + q^n)$$

$$+ \frac{q^n}{2}(p^n + p^{n-1}q + p^{n-2}q^2 \ldots + q^n),$$

ex

ex quo obtinetur ſumma progreſſionis propoſitae

$$=\frac{(p^n+q^n)(p^{n+1}-q^{n+1})}{2(p-q)}=\frac{\operatorname{cof.}\frac{nv}{2}\operatorname{fin.}\frac{n+1}{2}v}{\operatorname{fin.}\frac{1}{2}v}.$$

12. Eodem modo quo iam ſummas indagauimus ſerierum, quae ex ſinubus vel coſinubus arcuum arithmetice progredientium formantur, etiam inueſtigari poterunt ſummae progreſſionum, quae ex quadratis, cubis vel quibuscunque aliis poteſtatibus huiusmodi ſinuum vel coſinuum componuntur. Quum enim quaecunque poteſtas ſinus vel coſinus alicuius arcus, per ſinus vel coſinus huius arcus et eius multiplorum explicetur, ſummatio poteſtatum ex ſinubus et coſinubus, ad ſummationem ſinuum vel coſinuum ſponte reduci intelligitur. Si ſcilicet ponatur

$\operatorname{cof.}z+\operatorname{fin.}z\sqrt{-1}=p$ et $\operatorname{cof.}z-\operatorname{fin.}z\sqrt{-1}=q$ erit $\operatorname{cof.}z=\frac{p+q}{2}$ et $\operatorname{fin.}z=\frac{p-q}{2\sqrt{-1}}$, tumque in genere

$$\operatorname{cof.}nz=\frac{p^n+q^n}{2} \text{ et } \operatorname{fin.}nz=\frac{p^n-q^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Hinc igitur patet eſſe

$$\pm 2^{2n}\operatorname{fin.}z^{2n+1}=\frac{(p-q)^{2n+1}}{2\sqrt{-1}}=\frac{p^{2n+1}+(2n+1)p^{2n}q+\frac{(2n+1)(2n)}{1.2}p^{2n-2}q^2\ldots-q^{2n-1}}{2\sqrt{-1}}$$

quae aequalitas ob $pq=1$, ad hanc reduci poteſt

$$\pm 2^{2n}\operatorname{fin.}z^{2n+1}=\frac{p^{2n+1}-q^{2n+1}}{2\sqrt{-1}}-2n+1\frac{(p^{2n-1}-q^{2n-1})}{2\sqrt{-1}}+\frac{(2n+1)(2n)}{1.2}\frac{(p^{2n-3}-q^{2n-3})}{2\sqrt{-1}}$$

$$\ldots\ldots\pm\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)\ldots(n+2)}{1.2.3\ldots n}\frac{(p-q)}{2\sqrt{-1}}$$

vnde

vnde deducitur

$$\pm 2^{2n} \sin. z^{2n+1} = \sin.(2n+1)z - (2n+1)\sin.(2n-1)z + \frac{(2n+1)2n}{1.2}\sin.(2n-3)z$$
$$\ldots \pm \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)\ldots(n+2)}{1.2.3.n}\sin. z$$

quae aequalitas etiam hoc modo exprimi poterit:

$$2^{2n}\sin. z^{2n+1} = \frac{2n+1.2n.2n-1\ldots n+2}{1.2.3\ldots n}\sin. z - \frac{2n+1.2n.2n-1\ldots n+3}{1.2.3\ldots n-1}\sin. 3z$$
$$+ \frac{2n+1.2n.2n-1\ldots n+4}{1.2.3\ldots n-2}\sin. 5z \ldots \pm \sin.(2n+1)z;$$

vbi notare conuenit signum superius pro vltimo termino locum habere, si n fuerit numerus par, inferius vero si n impar esse supponatur. Simili modo fiet

$$\pm 2^{2n-1}\sin. z^{2n} = \frac{(p-q)^{2n}}{2} = \frac{p^{2n} - 2np^{2n-1}q + \frac{2n(2n-1)}{1.2}p^{2n-2}q^2 \ldots \pm q^{2n}}{2}$$

quae aequatio sequentem induit formam:

$$\pm 2^{2n-1}\sin. z^{2n} = \frac{p^{2n}+q^{2n}}{2} - \frac{2n(p^{2n-2}+q^{2n-2})}{2} + \frac{2n(2n-1)}{1.2}\frac{(p^{2n-4}+q^{2n-4})}{2}$$
$$\ldots \pm \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots n+1}{1.2.3\ldots n}$$

et in hanc abit

$$\pm 2^{2n-1}\sin. z^{2n} = \cos. 2nz - 2n\cos.(2n-2)z + \frac{2n.2n-1}{1.2}\cos.(2n-4)z$$
$$\ldots \pm \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots n+1}{1.2.3\ldots n.2}.$$

Vnde ordine terminorum immutato nanciscimur

$$2^{2n-1}\sin. z^{2n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots n+1}{1.2.3\ldots n.2} - \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots n+2}{1.2.3\ldots n-1}\cos. 2z$$
$$+ \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots n+3}{1.2.3\ldots n-2}\cos. 4z \ldots \pm \cos. 2nz$$

vbi signum $+$ valebit pro n pari, $-$ vero pro n impari. Haec si ad casus speciales adplicemus, obtinebimus

2°. sin.

$2^0.\sin.z = \sin.z$
$2.\sin.z^2 = 1-\cos.2z$
$2^2.\sin.z^3 = 3\sin.z-\sin.3z$
$2^3.\sin.z^4 = 3-4\cos.2z+\cos.4z$
$2^4.\sin.z^5 = 10\sin.z-5\sin.3z+\sin.5z$
$2^5.\sin.z^6 = 10-15\cos.2z+6\cos.4z-\cos.6z$
$2^6.\sin.z^7 = 35\sin.z-21\sin.3z+7\sin.5z-\sin.7z$
$2^7.\sin.z^8 = 35-56\cos.2z+28\cos.4z-8\cos.6z+\cos.8z$
$2^8.\sin.z^9 = 126\sin.z-84\sin.3z+36\sin.5z-9\sin.7z+\sin.9z$
$2^9.\sin.z^{10} = 126-210\cos.2z+120\cos.4z-45\cos.6z+10\cos.8z-\cos.10z.$

13. Simili modo procedere licebit, pro inueniendis valoribus $\cos.z^m$. Scilicet fiet

$$2^{2n}\cos.z^{2n+1} = \frac{(p+q)^{2n+1}}{2} = \tfrac{1}{2}\left(p^{2n+1}+2n+1.p^{2n}q+\frac{(2n+1)2n}{1.2}p^{2n-1}q^2\ldots+q^{2n+1}\right)$$
$$= \frac{p^{2n+1}+q^{2n+1}}{2}+(2n+1)\frac{(p^{2n-1}+q^{2n-1})}{2}+\frac{(2n+1)2n}{1.2}\frac{(p^{2n-3}+q^{2n-3})}{2}$$
$$\ldots\ldots+\frac{(2n+1)2n(2n-1)\ldots(n+2)}{1.2.3\ldots n}\frac{(p+q)}{2}$$
$$= \cos.(2n+1)z+(2n+1)\cos.(2n-1)z+\frac{(2n+1)2n}{1.2}\cos.(2n-3)z$$
$$\ldots\ldots+\frac{(2n+1)2n(2n-1)\ldots(n+2)}{1.2.3\ldots n}\cos.z.$$

Quae aequalitas etiam sic exprimi potest

$$2^{2n}\cos.z^{2n+1} = \frac{(2n+1)2n(2n-1)\ldots n+2}{1.2.3\ldots n}\cos.z+\frac{(2n+1)2n(2n-1)\ldots n+3}{1.2.3\ldots n-1}\cos.3z$$
$$+\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)\ldots n+4}{1.2.3\ldots n-2}\cos.5z\ldots+\cos.(2n+1)z.$$

Denique fiet

$$2^{2n-1}\cos.z^{2n} = \frac{(p+q)^{2n}}{2} = \tfrac{1}{2}\left(p^{2n}+2np^{2n-1}q+\frac{2n(2n-1)}{1.2}p^{2n-2}q^2\ldots\ldots+q^{2n}\right)$$

$$= \frac{p^{2n}+q^{2n}}{2} + 2n\frac{(p^{2n-2}+q^{2n-2})}{2} + \frac{2n.\,2n-1}{1.\,2}(p^{2n-4}+q^{2n-4})$$

$$\ldots\ldots \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots\ldots n+1}{1.\,2.\,3\ldots n.\,2}$$

$$= \text{cos.}\,2nz + 2n\,\text{cos.}\,(2n-2)z + \frac{2n(2n-1)}{1.\,2}\text{cos.}\,(2n-4)z \ldots + \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.\,2.\,3\ldots n.\,2}$$

vel mutato ordine terminorum

$$2^{2n-1}\,\text{cos.}\,z^{2n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots n+1}{1.\,2.\,3\ldots n.\,2} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots n+2}{1.\,2.\,3\ldots n-1}\text{cos.}\,2z$$
$$+ \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots n+3}{1.\,2.\,3\ldots n-2}\text{cos.}\,4z \ldots + \text{cos.}\,2nz.$$

Hinc pro caſibus ſpecialibus, ſequentes conſequemur expreſſiones

$2^0.\,\text{cof.}\,z = \text{cof}\,z$
$2\ \text{cof.}\,z^2 = 1 + \text{cof.}\,2z$
$2^2.\,\text{cof}\,z^3 = 3\,\text{cof.}\,z + \text{cof.}\,3z$
$2^3.\,\text{cof}\,z^4 = 3 + 4\,\text{cof.}\,2z + \text{cof.}\,4z$
$2^4.\,\text{cof.}\,z^5 = 10\,\text{cof.}\,z + 5\,\text{cof.}\,3z + \text{cof.}\,5z$
$2^5.\,\text{cof.}\,z^6 = 10 + 15\,\text{cof}\,2z + 6\,\text{cof.}\,4z + \text{cof.}\,6z$
$2^6.\,\text{cof.}\,z^7 = 35\,\text{cof.}\,z + 21\,\text{cof.}\,3z + 7\,\text{cof.}\,5z + \text{cof.}\,7z$
$2^7.\,\text{cof.}\,z^8 = 35 + 56\,\text{cof.}\,2z + 28\,\text{cof.}\,4z + 8\,\text{cof.}\,6z + \text{cof.}\,8z$
$2^8.\,\text{cof.}\,z^9 = 126\,\text{cof.}\,z + 84\,\text{cof.}\,3z + 36\,\text{cof.}\,5z + 9\,\text{cof.}\,7z + \text{cof.}\,9z$
$2^9.\,\text{cof.}\,z^{10} = 126 + 210\,\text{cof.}\,2z + 120\,\text{cof.}\,4z + 45\,\text{cof.}\,6z + 10\,\text{cof.}\,8z + \text{cof.}\,10z.$

14. Hiſce praeſuppoſitis facillimum erit aſſignare ſummas progreſſionum ex quibuscunque poteſtatibus ſinuum vel coſinuum pro arcubus arithmetice progredientibus. Sic ſi propoſita fuerit progreſſio:

$\text{ſin.}\,z^2 + \text{ſin.}\,2z^2 + \text{ſin.}\,3z^2 + \text{ſin.}\,4z^2 \ldots + \text{ſin.}\,nz^2$

ob $\text{ſin.}\,nz^2 = \frac{1-\text{cof.}\,2nz}{2}$, progreſſio iſta in hanc mutabitur

$\frac{n}{2} - \frac{1}{2}$

$\frac{n}{2} - \frac{1}{2}(\text{cof.}\, 2z + \text{cof.}\, 4z + \text{cof.}\, 6z + \ldots + \text{cof.}\, 2nz)$, cuius igitur fumma ex praecedentibus deducitur $\frac{n}{2} - \frac{\text{cof.}\,(n+1)z\,\text{fin.}\,nz}{2\,\text{fin.}\,z}$. Similiter ob $4\,\text{fin.}\,nz^3 = 3\,\text{fin.}\,nz - \text{fin.}\,3nz$ progreffio

$$\text{fin.}\,z^3 + \text{fin.}\,2z^3 + \text{fin.}\,3z^3 + \text{fin.}\,4z^3 \ldots + \text{fin.}\,nz^3$$

in has binas refoluetur

$$\tfrac{3}{4}(\text{fin.}\,z + \text{fin.}\,2z + \text{fin.}\,3z + \text{fin.}\,4z \ldots + \text{fin.}\,nz)$$
$$-\tfrac{1}{4}(\text{fin.}\,3z + \text{fin.}\,6z + \text{fin.}\,9z + \text{fin.}\,12z \ldots + \text{fin.}\,3nz)$$

quarum fumma ex praecedentibus fit

$$\frac{3}{4}\,\frac{\text{fin.}\,\frac{n+1}{2}z\,\text{fin.}\,\frac{nz}{2}}{\text{fin.}\,\frac{1}{2}z} - \frac{1}{4}\,\frac{\text{fin.}\,\frac{3(n+1)}{2}z\,\text{fin.}\,\frac{3n}{2}z}{\text{fin.}\,\frac{3}{2}z}.$$

Tum vero et hinc colligitur

$$\text{fin.}\,z^4 + \text{fin.}\,2z^4 + \text{fin.}\,3z^4 + \text{fin.}\,4z^4 \ldots + \text{fin.}\,nz^4 =$$
$$\frac{3n}{8} - \frac{4}{8}(\text{cof.}\,2z + \text{cof.}\,4z + \text{cof.}\,6z + \text{cof.}\,8z + \text{cof.}\,2nz)$$
$$+ \frac{1}{8}(\text{cof.}\,4z + \text{cof.}\,8z + \text{cof.}\,12z + \text{cof.}\,16z + \text{cof.}\,4nz)$$
$$= \frac{3}{8}n - \frac{4}{8}\,\frac{\text{cof.}\,(n+1)z\,\text{fin.}\,nz}{\text{fin.}\,z} + \frac{1}{8}\,\frac{\text{cof.}\,2(n+1)z\,\text{fin.}\,2nz}{\text{fin.}\,2z}.$$

In genere vero erit

$$\text{fin.}\,z^{2m+1} + \text{fin.}\,2z^{2m+1} + \text{fin.}\,3z^{2m+1} \ldots + \text{fin.}\,nz^{2m+1} =$$
$$\frac{(2m+1)(2m)(2m-1)\ldots m+2}{1.\ 2.\ 3 \ldots m}\,\frac{\text{fin.}\,\frac{n+1}{2}z\,\text{fin.}\,\frac{n}{2}z}{2^{2m}\,\text{fin.}\,\frac{1}{2}z}$$
$$-\frac{(2m+1)(2m)(2m-1)\ldots m+3}{1.\ 2.\ 3 \ldots m-1}\,\frac{\text{fin.}\,\frac{3(n+1)}{2}z\,\text{fin.}\,\frac{3n}{2}z}{2^{2m}\,\text{fin.}\,\frac{3}{2}z}$$
$$+\frac{(2m+1)(2m)(2m-1)\ldots m+4)}{1.\ 2.\ 3 \ldots m-2}\,\frac{\text{fin.}\,\frac{5(n+1)}{2}z\,\text{fin}\,\frac{5n}{2}z}{2^{2m}\,\text{fin.}\,\frac{5}{2}z}$$
$$\ldots\ldots \pm \frac{\text{fin.}\,\frac{(2m+1)(n+1)}{2}z\,\text{fin.}\,\frac{n(2m+1)}{2}z}{2^{2m}\,\text{fin.}\,\frac{2m+1}{2}z}.$$

Nec non

$$\text{fin.}z^{2m}+\text{fin.}2z^{2m}+\text{fin.}3z^{2m}+\text{fin.}4z^{2m}\ldots+\text{fin.}nz^{2m}=$$

$$\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots m+1}{1.\ 2.\ 3\ldots m}\cdot\frac{n}{2^{2m}}$$

$$-\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots m+2}{1.\ 2.\ 3\ldots m-1}\cdot\frac{\text{cof.}(n+1)z\,\text{fin.}nz}{2^{2m-1}\,\text{fin.}z}$$

$$+\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots m+3}{1.\ 2.\ 3\ldots m-2}\,\frac{\text{cof.}2(n+1)z\,\text{fin.}2nz}{2^{2m-1}\,\text{fin.}2z}$$

$$\ldots\pm\frac{\text{cof.}m(n+1)z\,\text{fin.}mnz}{2^{2m-1}\,\text{fin.}mz}.$$

Deinde pro fummis poteftatum ex cofinubus habebimus

$$\text{cof.}z^{2m+1}+\text{cof.}2z^{2m+1}+\text{cof.}3z^{2m+1}+\text{cof.}4z^{2m+1}+\ldots\text{cof.}nz^{2m+1}=$$

$$\frac{(2m+1)(2m)(2m-1)\ldots m+2}{1.\ 2.\ 3\ldots m}\,\frac{\text{cof.}\frac{n+1}{2}z\,\text{fin.}\frac{n}{2}z}{2^{2m}\,\text{fin.}\frac{1}{2}z}$$

$$+\frac{(2m+1)2m(2m-1)\ldots m+3}{1.\ 2.\ 3\ldots m-1}\,\frac{\text{cof.}\frac{3(n+1)}{2}z\,\text{fin.}\frac{3n}{2}z}{2^{2m}\,\text{fin.}\frac{3}{2}z}$$

$$+\frac{(2m+1)(2m)(2m-1)\ldots(m+4)}{1.\ 2.\ 3\ldots m-2}\,\frac{\text{cof.}\frac{5(n+1)}{2}z\,\text{fin.}\frac{5n}{2}z}{2^{2m}\,\text{fin.}\frac{5}{2}z}$$

$$\ldots+\frac{\text{cof.}\frac{(2m+1)(n+1)}{2}z\,\text{fin.}\frac{n(2m+1)}{2}z}{2^{2m}\,\text{fin.}\frac{2m+1}{2}z}$$

et

$$\text{cof.}z^{2m}+\text{cof.}2z^{2m}+\text{cof.}3z^{2m}+\text{cof.}4z^{2m}\ldots+\text{cof.}nz^{2m}=$$

$$\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots m+1}{1.\ 2.\ 3\ldots m}\cdot\frac{n}{2^{2m}}+\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots m+2}{1.\ 2.\ 3\ldots m-1}\cdot\frac{\cos.(n+1)z\sin.nz}{2^{2m-1}\sin.z}+$$

$$\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots m+3}{1.\ 2.\ 3\ldots m-2}\cdot\frac{\cos.2(n+1)z\sin.2nz}{2^{2m-1}\sin.2z}\ldots+\frac{\cos.m(n+1)z\sin.mnz}{2^{2m-1}\sin.mz}.$$

Adplicatione igitur harum formularum ad casus speciales facta consequemur

$$\sin.z\ldots+\sin.nz=\frac{\sin.\frac{n+1}{2}z\sin.\frac{nz}{2}}{\sin\frac{1}{2}z}$$

$$\sin.z^3\ldots+\sin.nz^3=\tfrac{3}{4}\frac{\sin.\frac{(n+1)}{2}z\sin.\frac{nz}{2}}{\sin.\frac{1}{2}z}-\tfrac{1}{4}\frac{\sin.\frac{3(n+1)}{2}z\sin.\frac{3nz}{2}}{\sin.\frac{3}{2}z}$$

$$\sin.z^5\ldots+\sin.nz^5=\tfrac{10}{16}\frac{\sin.\frac{n+1}{2}z\sin.\frac{nz}{2}}{\sin.\frac{1}{2}z}-\tfrac{5}{16}\frac{\sin.\frac{3(n+1)}{2}z\sin.\frac{3nz}{2}}{\sin.\frac{3}{2}z}$$

$$+\tfrac{1}{16}\frac{\sin.\frac{5(n+1)}{2}z\sin.\frac{5nz}{2}}{\sin.\frac{5}{2}z}$$

$$\sin.z^7\ldots+\sin.nz^7=\tfrac{35}{64}\frac{\sin.\frac{(n+1)}{2}z\sin.\frac{nz}{2}}{\sin.\frac{1}{2}z}-\tfrac{21}{64}\frac{\sin.\frac{3(n+1)}{2}z\sin.\frac{3nz}{2}}{\sin.\frac{3}{2}z}$$

$$+\tfrac{7}{64}\frac{\sin.\frac{5(n+1)}{2}z\sin.\frac{5nz}{2}}{\sin.\frac{5}{2}z}-\tfrac{1}{64}\frac{\sin.\frac{7(n+1)}{2}z\sin.\frac{7nz}{2}}{\sin.\frac{7}{2}z}$$

$$\sin.z^2\ldots+\sin.nz^2=\tfrac{n}{2}-\frac{\cos.(n+1)z\sin.nz}{2\sin.z}$$

$$\sin.z^4\ldots+\sin.nz^4=\tfrac{3n}{8}-\tfrac{4}{8}\frac{\cos.(n+1)z\sin.nz}{\sin.z}+\tfrac{1}{8}\frac{\cos.2(n+1)z\sin.2nz}{\sin.2z}$$

$$\sin.z^6\ldots+\sin.nz^6=\tfrac{10n}{32}-\tfrac{15}{32}\frac{\cos.(n+1)z\sin.nz}{\sin.z}+\tfrac{6}{32}\frac{\cos.2(n+1)z\sin.2nz}{\sin.2z}$$

$$-\tfrac{1}{32}\frac{\cos.3(n+1)z\sin.3nz}{\sin.3z}.$$

 Pari

Pari modo

$$\text{coſ.}\,z\,..+\text{coſ.}\,nz=\frac{\text{coſ.}\frac{n+1}{2}z\,\text{ſin.}\frac{nz}{2}}{\text{ſin.}\frac{1}{2}z}$$

$$\text{coſ.}\,z^3\,..+\text{coſ.}\,nz^3=\tfrac{3}{4}\frac{\text{coſ.}\frac{(n+1)}{2}z\,\text{ſin.}\frac{nz}{2}}{\text{ſin.}\frac{1}{2}z}+\tfrac{1}{4}\frac{\text{coſ.}\frac{3(n+1)}{2}z\,\text{ſin.}\frac{3nz}{2}}{\text{ſin.}\frac{3}{2}z}$$

$$\text{coſ.}\,z^5\,...+\text{coſ.}\,nz^5=\tfrac{10}{16}\frac{\text{coſ.}\frac{(n+1)}{2}z\,\text{ſin.}\frac{nz}{2}}{\text{ſin.}\frac{1}{2}z}+\tfrac{5}{16}\frac{\text{coſ.}\frac{3(n+1)}{2}z\,\text{ſin.}\frac{3nz}{2}}{\text{ſin.}\frac{3}{2}z}$$
$$+\tfrac{1}{16}\frac{\text{coſ.}\frac{5(n+1)}{2}z\,\text{ſin.}\frac{5nz}{2}}{\text{ſin.}\frac{5}{2}z}$$

nec non

$$\text{coſ.}\,z^2\,...+\text{coſ.}\,nz^2=\tfrac{n}{2}+\frac{\text{coſ.}\,(n+1)\,z\,\text{ſin.}\,nz}{2\,\text{ſin.}\,z}$$

$$\text{coſ.}\,z^4\,...+\text{coſ.}\,nz^4=\tfrac{3n}{8}+\tfrac{4}{8}\frac{\text{coſ.}\,(n+1)\,z\,\text{ſin.}\,nz}{\text{ſin.}\,z}+\tfrac{1}{8}\frac{\text{coſ.}\,2\,(n+1)\,z\,\text{ſin.}\,2nz}{\text{ſin.}\,2z}$$

$$\text{coſ.}\,z^6\,...+\text{coſ.}\,nz^6=\tfrac{10n}{32}+\tfrac{15}{32}\frac{\text{coſ.}\,(n+1)\,z\,\text{ſin.}\,nz}{\text{ſin.}\,z}+\tfrac{6}{32}\frac{\text{coſ.}\,2\,(n+1)\,z\,\text{ſin.}\,2nz}{\text{ſin.}\,2z}$$
$$+\tfrac{1}{32}\frac{\text{coſ.}\,3\,(n+1)\,z\,\text{ſin.}\,3nz}{\text{ſin.}\,3z}.$$

15. Ex iis quae iam docuimus, facile perſpicitur quales aſſignari debeant ſummae poteſtatum ex huiusmodi ſinubus vel coſinubus in infinitum continuatis. Pro poteſtatibus enim paribus nullum eſt dubium, quin hae ſummae reapſe euadant infinitae. Quod ſummas ex poteſtatibus imparibus ſinuum attinet, illae pro ratione exponentis qua poteſtates exprimuntur, alios atque alios recipient valores, erit enim

$$\int\text{ſin.}\,z=\tfrac{1}{2}\,\text{cot.}\,\tfrac{z}{2}$$
$$\int\text{ſin.}\,z^3=\tfrac{3}{8}\,\text{cot.}\,\tfrac{z}{2}-\tfrac{1}{8}\,\text{cot.}\,\tfrac{3}{2}z$$
$$\int\text{ſin.}\,z^5=\tfrac{10}{32}\,\text{cot.}\,\tfrac{z}{2}-\tfrac{5}{32}\,\text{cot.}\,\tfrac{3}{2}z+\tfrac{1}{32}\,\text{cot.}\,\tfrac{5}{2}z.$$

At

At aliter ſe res habet cum ſummis ex poteſtatibus imparibus coſinuum, quippe quae eundem continuo retinent valorem $= -\frac{1}{2}$, erit enim

$$\int \cos. z = -\tfrac{1}{2}$$
$$\int \cos. z^3 = -\tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{8} = -\tfrac{1}{2}$$
$$\int \cos. z^5 = -\tfrac{10}{32} - \tfrac{5}{32} - \tfrac{1}{32} = -\tfrac{1}{2}.$$

Sed hoc ipſum tamen *in abſtracto* tantum verum eſt, ſcilicet infinitae ab hac lege dantur exceptiones. Quemadmodum enim facile demonſtrari poteſt, ſummam ſeriei infinitae

$$\cos. z + \cos. 2z + \cos. 3z + \cos. 4z \text{ etc.}$$

non ſtatui debere $= -\frac{1}{2}$, ſi fuerit $z = 2m\pi$, denotante π ſemiperipheriam circuli; ita pro

$$\cos. z^3 + \cos. 2z^3 + \cos. 3z^3 + \cos. 4z^3 \text{ etc.}$$

haec ſumma $-\frac{1}{2}$ non valebit, ſi fuerit vel $z = 2m\pi$, vel $3z = 2m\pi$, tum vero pro

$$\cos. z^5 + \cos. 2z^5 + \cos. 3z^5 + \cos. 4z^5 \text{ etc}$$

exceptio a regula allata ſtatui debet, ſi fuerit vel $z = 2m\pi$, vel $3z = 2m\pi$ vel $5z = 2m\pi$.

16. Eodem modo quo ſummas progreſſionum

$$\sin. z^m + \sin. 2z^m + \sin. 3z^m \ldots + \sin. nz^m$$
$$\cos. z^m + \cos. 2z^m + \cos. 3z^m \ldots + \cos. nz^m$$

indagauimus, erui poſſunt ſummae progreſſionibus aliquanto generalius expreſſis reſpondentes:

$$\sin. z^m + \sin. (z+v)^m + \sin. (z+2v)^m + \sin. (z+3v)^m \ldots + \sin. (z+nv)^m$$
$$\cos. z^m + \cos. (z+v)^m + \cos. (z+2v)^m + \cos. (z+3v)^m \ldots + \cos. (z+nv)^m.$$

Sic

Sic si quaeratur summa progressionis

$$\sin. z^2 + \sin.(z+v)^2 + \sin.(z+2v)^2 + \sin.(z+3v)^2 + \ldots + \sin.(z+nv)^2$$

ea inuenietur

$$\frac{n+1}{2} - \frac{\cos.(2z+nv)\sin.(n+1)v}{2\sin. v}$$; tum vero erit

$$\sin. z^3 + \sin.(z+v)^3 + \sin.(z+2v)^3 + \sin.(z+3v)^3 \ldots + \sin.(z+nv)^3 =$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin.(z+\frac{1}{2}nv)\sin.\frac{(n+1)}{2}v}{\sin.\frac{1}{2}v} - \frac{1}{4}\frac{\sin.(3z+\frac{3}{2}nv)\sin.\frac{3}{2}(n+1)v}{\sin.\frac{3}{2}v}$$

In genere autem habebitur

$$\sin. z^{2m+1} + \sin.(z+v)^{2m+1} + \sin.(z+2v)^{2m+1} + \ldots + \sin.(z+nv)^{2m+1} =$$

$$A.\frac{\sin.(z+\frac{1}{2}nv)\sin.\frac{n+1}{2}v}{\sin.\frac{1}{2}v} - B\frac{\sin.(3z+\frac{3}{2}nv)\sin.\frac{3(n+1)}{2}v}{\sin.\frac{3}{2}v} + C\frac{\sin.(5z+\frac{5}{2}nv)\sin.\frac{5(n+1)}{2}v}{\sin.\frac{5}{2}v}$$

$$\pm\frac{\sin.((2m+1)z+\frac{n(2m+1)}{2}v)\sin.\frac{(n+1)(2m+1)}{2}v}{2^{2m}\sin.\frac{2m+1}{2}v};$$

$$\sin. z^{2m} + \sin.(z+v)^{2m} + \sin.(z+2v)^{2m} + \sin.(z+3v)^{2m} \ldots + \sin.(z+nv)^{2m} =$$

$$\alpha. n - \beta\frac{\cos.(2z+nv)\sin.(n+1)v}{\sin. v} + \gamma\frac{\cos.(4z+2nv)\sin. 2(n+1)v}{\sin. 2v}$$

$$\ldots \pm \frac{\cos.(2mz+mnv)\sin. m(n+1)v}{2^{2m-1}\sin. mv};$$

$$\cos. z^{2m+1} + \cos.(z+v)^{2m+1} + \cos.(z+2v)^{2m+1} + \cos.(z+3v)^{2m+1} \ldots \cos.(z+nv)^{2m+1} =$$

$$A.\frac{\cos.(z+\frac{1}{2}nv)\sin.\frac{n+1}{2}v}{\sin.\frac{1}{2}v} + B\frac{\cos.(3z+\frac{3}{2}nv)\sin.\frac{3(n+1)}{2}v}{\sin.\frac{3}{2}v} + C\frac{\cos.(5z+\frac{5}{2}nv)\sin.\frac{5(n+1)}{2}v}{\sin.\frac{5}{2}v}$$

$$+\frac{\cos.((2m+1)z+\frac{n(2m+1)}{2}v)\sin.\frac{(n+1)(2m+1)}{2}v}{2^{2m}\sin.\frac{2m+1}{2}v};$$

$$\cos. z^{2m} + \cos.(z+v)^{2m} + \cos.(z+2v)^{2m} + \cos.(z+3v)^{2m} \ldots + \cos.(z+nv)^{2m} =$$

$\alpha n + \beta$.

$$\alpha n+\beta\frac{\text{cof.}(2z+nv)\,\text{fin}\,(n+1)v}{\text{fin.}\,v}+\gamma\frac{\text{cof.}(4z+2nv)\,\text{fin.}\,2(n+1)v}{\text{fin.}\,2v}$$
$$\ldots+\frac{\text{cof.}(2mz+mnv)\,\text{fin}\,m(n+1)v}{2^{2m-1}\,\text{fin.}\,mv}.$$

Heic autem notandum eſt, valores coefficientium, A, B, C etc. α, β, γ ex §. 14. deſumendos eſſe. Ex generalibus vero his expreſſionibus nunc facile perſpicitur, quomodo aſſignari queant ſummae progreſſionum, quae formantur ex quibusuis poteſtatibus ſinuum vel coſinuum pro huiusmodi ſeriebus, quarum exempla attulimus in §§. 5 et 9. Superuacaneum autem eſſet, ad caſus huiusmodi ſpeciales heic deſcendere velle, id tantum obſeruare licebit, quod vti ſupra demonſtrauimus eſſe

$$\text{cof.}\,z+\text{cof.}\,3z+\text{cof.}\,5z+\text{cof.}\,7z+\text{etc.}=0,$$

etiam in genere eſſe debere

$$\text{cof.}\,z^{2m+1}+\text{cof.}\,3z^{2m+1}+\text{cof.}\,5z^{2m+1}+\text{cof.}\,7z^{2m+1}\,\text{etc.}=0.$$

17. Ex principiis ſupra ſtabilitis etiam adornari poſſunt ſummationes huiusmodi ſerierum

$$\text{fin.}\,z+2\,\text{fin.}(z+v)+3\,\text{fin.}(z+2v)+4\,\text{fin.}(z+3v)\ldots+(n+1)\,\text{fin.}(z+nv)$$
$$\text{cof.}\,z+2\,\text{cof.}(z+v)+3\,\text{cof.}(z+2v)+4\,\text{cof.}(z+3v)\ldots+(n+1)\,\text{cof.}(z+nv).$$

Quod enim priorem attinet poſita eius ſumma S, totaque ſerie in $2\,\text{fin.}\,\frac{1}{2}v$ ducta, prodibit

$$2\,S\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}v=\text{cof.}(z-\tfrac{1}{2}v)+\text{cof.}(z+\tfrac{1}{2}v)+\text{cof.}(z+\tfrac{3}{2}v)\ldots+\text{cof.}(z+(n-\tfrac{1}{2})v)$$
$$-(n+1)\,\text{cof}\,(z+(n+\tfrac{1}{2})v)$$

at terminorum poſitiuorum ſumma ex Theor. II. deducitur

$$\frac{\sin.(z+nv)-\sin.(z-v)}{2\sin.\frac{1}{2}v}=\frac{\cos.(z+\frac{n-1}{2}v)\sin.\frac{n+1}{2}v}{\sin.\frac{1}{2}v},$$

vnde consequimur

$$S=\frac{\sin.(z+nv)-\sin.(z-v)}{4\sin.\frac{1}{2}v^2}-\frac{(n+1)\cos.(z+(n+\frac{1}{2})v)}{2\sin.\frac{1}{2}v}=\frac{\cos.(z+\frac{n-1}{2}v)\sin.\frac{n+1}{2}v}{2\sin.\frac{1}{2}v^2}$$
$$-\frac{(n+1)\cos.(z+(n+\frac{1}{2})v)}{2\sin.\frac{1}{2}v}.$$

Pro posteriori habebimus, posita iterum eius summa S et multiplicando per $2\sin.\frac{1}{2}v$

$$2S\sin.\tfrac{1}{2}v=-\sin.(z-\tfrac{1}{2}v)-\sin.(z+\tfrac{1}{2}v)-\sin.(z+\tfrac{3}{2}v)\ldots-\sin.(z+(n-\tfrac{1}{2})v)$$
$$+(n+1)\sin.(z+(n+\tfrac{1}{2})v)$$

vbi terminorum negatiuorum summa per Theor. I.

$$=-\frac{\cos.(z-v)+\cos.(z+nv)}{2\sin.\frac{1}{2}v}=-\frac{\sin.(z+\frac{n-1}{2}v)\sin.\frac{n+1}{2}v}{\sin.\frac{1}{2}v},$$

quare fiet

$$S=\frac{\cos.(z+nv)-\cos.(z-v)}{4\sin.\frac{1}{2}v^2}+\frac{(n+1)\sin.(z+(n+\frac{1}{2})v)}{2\sin.\frac{1}{2}v}=-\frac{\sin.(z+\frac{n-1}{2}v)\sin.\frac{n+1}{2}v}{2\sin.\frac{1}{2}v^2}$$
$$+\frac{(n+1)\sin.(z+(n+\frac{1}{2})v)}{2\sin.\frac{1}{2}v}.$$

Quin etiam hinc summationes adornari possunt, serierum ex potestatibus sinuum compositarum

$\sin.z^m+2\sin(z+v)^m+3\sin.(z+2v)^m\ldots+(n+1)\sin.(z+nv)^m$ vel

$\cos.z^m+2\cos.(z+v)^m+3\cos.(z+2v)^m\ldots+(n+1)\cos.(z+nv)^m$

quibus tamen explicandis breuitatis gratia omnino supersedemus. De summis tantum serierum superiorum

rum in infinitum continuatarum notare iuuat, quod hae ex superioribus expressionibus facile deducantur, si ii termini negligantur quos numerus n ingreditur. Sic pro priori serie habebimus

$$\sin. z + 2\sin.(z+v) + 3\sin.(z+2v) + 4\sin.(z+3v) + \text{etc.} = -\frac{\sin.(z-v)}{4\sin.\tfrac{1}{2}v^2}$$

et pro posteriori

$$\cos. z + 2\cos.(z+v) + 3\cos.(z+2v) + 4\cos.(z+3v) + \text{etc.} = -\frac{\cos.(z-v)}{4\sin.\tfrac{1}{2}v^2}$$

Si ponatur $z = v$, erit ex priori

$$\sin. z + 2\sin. 2z + 3\sin. 3z + \text{etc.} = 0$$

et ex posteriori

$$\cos. z + 2\cos. 2z + 3\cos. 3z + \text{etc.} = \frac{-1}{4\sin.\tfrac{1}{2}v^2},$$

quorum prius saltem haud parum paradoxon videtur.

18. Porro his principiis insistendo, assignari possunt summae sequentium serierum

$$\sin. z + 3\sin.(z+v) + 6\sin.(z+2v) + 10\sin.(z+3v) \ldots + \frac{(n+1)(n+2)}{1.\,2}\sin.(z+nv)$$

$$\cos. z + 3\cos.(z+v) + 6\cos.(z+2v) + 10\cos.(z+3v) \ldots + \frac{(n+1)(n+2)}{1.\,2}\cos.(z+nv)$$

Posita scilicet prioris summa $= S$, eamque in $2\sin.\tfrac{1}{2}v$ ducendo, fiet

$$2S\sin.\tfrac{1}{2}v = \cos.(z-\tfrac{1}{2}v) + 2\cos.(z+\tfrac{1}{2}v) + 3\cos.(z+\tfrac{3}{2}v) \ldots + (n+1)\cos.(z+\tfrac{2n-1}{2}v)$$
$$-\frac{(n+1)(n+2)}{1.\,2}\cos.(z+(n+\tfrac{1}{2})v)$$

$$= \frac{\cos.(z+(n-\tfrac{1}{2})v) - \cos.(z-\tfrac{3}{2}v)}{4\sin.\tfrac{1}{2}v^2} + \frac{(n+1)\sin.(z+nv)}{2\sin.\tfrac{1}{2}v}$$
$$-\frac{(n+1)(n+2)}{1.\,2}\cos.(z+(n+\tfrac{1}{2})v)$$

$$= -\frac{\sin.(z+\frac{n-2}{2}v)\sin.\frac{(n+1)}{2}v)}{2\sin.\frac{1}{2}v^2} + \frac{(n+1)\sin.(z+nv)}{2\sin.\frac{1}{2}v}$$
$$-\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}\cos.(z+(n+\tfrac{1}{2})v)$$

proinde

$$S = -\frac{\sin.(z+\frac{n-2}{2}v)\sin.\frac{(n+1)}{2}v}{4\sin.\frac{1}{2}v^3} + \frac{(n+1)\sin.(z+nv)}{4\sin.\frac{1}{2}v^2}$$
$$-\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}\frac{\cos.(z+(n+\frac{1}{2})v)}{2\sin.\frac{1}{2}v}.$$

Pro posteriori ducta eius summa S in $2\sin.\frac{1}{2}v$ fiet,

$$2S\sin.\tfrac{1}{2}v = -\sin.(z-\tfrac{1}{2}v) - 2\sin.(z+\tfrac{1}{2}v) - 3\sin.(z+\tfrac{3}{2}v) \ldots - (n+1)\sin.(z+(n-\tfrac{1}{2})v)$$
$$+\tfrac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}\sin.(z+(n+\tfrac{1}{2})v)$$

$$= +\frac{\sin.(z-\frac{3}{2}v)-\sin.(z+(n-\frac{1}{2})v)}{4\sin.\frac{1}{2}v^2} + \frac{(n+1)\cos.(z+nv)}{2\sin.\frac{1}{2}v}$$
$$+\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}\sin.(z+(n+\tfrac{1}{2})v)$$

$$= -\frac{\cos.(z+\frac{n-2}{2}v)\sin.\frac{n+1}{2}v}{2\sin.\frac{1}{2}v^2} + \frac{(n+1)\cos.(z+nv)}{2\sin.\frac{1}{2}v}$$
$$+\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}\sin.(z+(n+\tfrac{1}{2})v),$$

ex quo fit

$$S = -\frac{\cos.(z+\frac{n-2}{2}v)\sin.\frac{n+1}{2}v}{4\sin.\frac{1}{2}v^3} + \frac{(n+1)\cos.(z+nv)}{4\sin.\frac{1}{2}v^2}$$
$$+\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}\frac{\sin.(z+(n+\frac{1}{2})v)}{2\sin.\frac{1}{2}v}.$$

Pro

Pro numero terminorum infinito fiet prioris summa $S = -\frac{\operatorname{cos}(z-\frac{3}{2}v)}{8\operatorname{sin}.\frac{1}{2}v^3}$ et posterioris $S = \frac{\operatorname{sin}.(z-\frac{3}{2}v)}{8\operatorname{sin}.\frac{1}{2}v^3}$, quarum prior posito $z = v$, abit in $-\frac{\operatorname{cos}.\frac{1}{2}v}{8\operatorname{sin}.\frac{1}{2}v^3}$, posterior vero in $\frac{-1}{8\operatorname{sin}.\frac{1}{2}v^2}$.

19. Ope eorum quae in praecedentibus docuimus, etiam summae assignari poterunt serierum, quae compositae sunt ex binis vel pluribus eius generis, quas in nostris Theorematibus tractauimus, sic series

$$\operatorname{sin}.z - \operatorname{sin}.(z+v) + \operatorname{sin}.(z+2v) - \operatorname{sin}.(z+3v) \ldots \mp \operatorname{sin}.(z+nv)$$

considerari poterit tamquam composita ex binis

$$\operatorname{sin}.z + \operatorname{sin}.(z+2v) + \operatorname{sin}.(z+4v) \text{ etc.}$$
$$-(\operatorname{sin}.(z+v) + \operatorname{sin}.(z+3v) + \operatorname{sin}.(z+5v) \text{ etc.}),$$

quarum summae cum ex praecedentibus constent, etiam seriei nostrae summa dabitur. Verum iuuabit tamen in eandem summam immediate inquirere, posita scilicet hac summa $= S$ et in $2\operatorname{cos}.\frac{1}{2}v$ ducta fiet

$$2S\operatorname{cos}\tfrac{1}{2}v = \operatorname{sin}.(z-\tfrac{1}{2}v) + \operatorname{sin}.(z+\tfrac{1}{2}v) + \operatorname{sin}.(z+\tfrac{3}{2}v) \ldots$$
$$-\operatorname{sin}.(z+\tfrac{1}{2}v) - \operatorname{sin}.(z+\tfrac{3}{2}v) \ldots \mp \operatorname{sin}.(z+(n+\tfrac{1}{2})v)$$

quare erit

$$S = \frac{\operatorname{sin}.(z-\frac{1}{2}v) \mp \operatorname{sin}.(z+(n+\frac{1}{2})v)}{2\operatorname{cos}.\frac{1}{2}v},$$

vbi ſignum $+$ obtinet ſi n fuerit par, $-$ vero ſi n ponatur impar. Pro priori caſu erit

$$S = \frac{\text{ſin.}\,(z + \tfrac{1}{2}nv)\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(n+1)v}{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}v}$$ et pro poſteriori

$$S = -\frac{\text{coſ.}\,(z + \tfrac{1}{2}nv)\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(n+1)v}{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}v}.$$

Pro caſu autem n infiniti fiet $S = \frac{\text{ſin.}\,(z - \frac{1}{2}v)}{2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}v}$ ideoque ſi ſtatuatur $z = v$; $S = \frac{1}{2}\,\text{Tang.}\,\frac{1}{2}z$, quod etiam cum ſuperioribus bene conſentit, docuimus enim eſſe

$\text{ſin.}\,z + \text{ſin.}\,2z + \text{ſin.}\,3z + \text{etc.} = \frac{1}{2}\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}z$ et
$\text{ſin.}\,2z + \text{ſin.}\,4z + \text{ſin.}\,6z + \text{etc.} = \frac{1}{2}\,\text{cot.}\,z$, quare erit
$\text{ſin.}\,z - \text{ſin.}\,2z + \text{ſin.}\,3z - \text{ſin.}\,4z\,\text{etc.} = \frac{1}{2}\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}z - \text{cot.}\,z = \frac{1}{2}\,\text{Tang.}\,\frac{1}{2}z.$

Simili modo ſi proponatur ſeries coſinuum

$$\text{coſ.}\,z - \text{coſ.}\,(z+v) + \text{coſ.}\,(z+2v) - \text{coſ.}\,(z+3v) \ldots \mp \text{coſ.}\,(z+nv)$$

habebitur eius ſumma

$$S = \frac{\text{coſ.}\,(z - \frac{1}{2}v) \mp \text{coſ.}\,(z + (n + \frac{1}{2})v)}{2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}v}.$$

Quare pro n impari erit

$$S = \frac{\text{ſin.}\,(z + \frac{1}{2}nv)\,\text{ſin.}\,\frac{(n+1)}{2}v}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}v};$$ pro n pari $$S = \frac{\text{coſ.}\,(z + \frac{1}{2}nv)\,\text{coſ.}\,\frac{n+1}{2}v}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}v}$$

et pro n infinito $S = \frac{\text{coſ.}\,(z - \frac{1}{2}v)}{2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}v}$, et quidem pro caſu $z = v$, $S = +\frac{1}{2}$.

NOVA

NOVA SERIES INFINITA MAXIME CONVERGENS PERIMETRVM ELLIPSIS EXPRIMENS.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Postquam olim multum fuissem occupatus, vt plures series infinitas, quibus cuiusque ellipsis perimeter exprimeretur, inuestigarem, vix eram suspicatus adhuc simpliciores atque ad calculum magis accommodatas huiusmodi series erui posse, quam passim dedi, siue in Comment. Petrop. siue in Actis Berolin.

§. 2. Nunc autem cum forte cogitationes meae in idem argumentum inciderent, alia ac, ni fallor, multo simplicior et commodior series se mihi obtulit, cuius inuestigationem ita animo institui.

Considero scilicet quadrantem ellipticum ACB, cuius semiaxes sint $CA = a$; $CB = b$, quibus coordinatae parallelae vocentur $CP = x$; et $PM = y$, ita, vt ex natura ellipsis habeatur ista aequatio

$$bbx^2 + aay^2 = aa.bb$$ Tab. I.

siue $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ Fig. 1.

ex

ex qua ſingulari modo definio longitudinem totius arcus A M B ſiue quartae partis perimetri.

§. 3. Cum igitur eſſe debeat

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nouam variabilem z in calculum introduco, ſtatuendo $\frac{x^2}{a^2} = \frac{1+z}{2}$; vt fiat $\frac{y^2}{b^2} = \frac{1-z}{2}$; vnde prodit $x = a \sqrt{\frac{1+z}{2}}$ et $y = b \sqrt{\frac{1-z}{2}}$, hincque differentiando

$$dx = \frac{a\,dz}{2\sqrt{2(1+z)}}; \text{ et } dy = \frac{-b\,dz}{2\sqrt{2(1-z)}}$$

ex quo ſi vocemus arcum B M $= s$, ſtatim colligimus

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{a^2\,dz^2}{8(1+z)} + \frac{b^2\,dz^2}{8(1-z)}$$

ſiue $ds^2 = \frac{dz^2}{8}\left(\frac{a^2}{1+z} + \frac{b^2}{1-z}\right)$

$$= \frac{dz^2(a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)z)}{8(1-z^2)}$$

hincque integrando

$$s = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int dz \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)z}{1 - z^2}}$$

integrali ita ſumto, vt euaneſcat poſito $x = 0$ ſiue $z = -1$ tum vero integrale extendatur vsque ad terminum $x = a$, vbi fit $z = +1$ ſicque obtinebitur quaeſitus quadrans ellipticus A M B.

§. 4. Quo hanc formulam tractabiliorem reddamus, ponamus breuitatis gratia

$$a^2 + b^2 = c^2; \text{ et } \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = n.$$

Hoc enim modo conſequimur

$$s = \frac{c}{2\sqrt{2}} \int dz \frac{\sqrt{(1 - nz)}}{\sqrt{(1 - z^2)}}$$

vbi

vbi superius radicale more solito in seriem convertamus:

$$V(1-nz)=1-\tfrac{1}{2}nz-\frac{1.1}{2.4}n^2z^2-\frac{1.1.3}{2.4.6}n^3z^3$$
$$-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}n^4z^4-\frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}n^5z^5 \text{ etc.}$$

qui singuli termini nos ad singulares integrationes perducunt; ac bini quidem priores secundum legem datam integrati, vt scilicet euanescant sumto $z=-1$ dabunt

$$\int.\frac{dz}{V(1-z^2)}=\text{A. sin. }z-\text{A. sin. }(-1)=\text{A. sin. }z+\tfrac{1}{2}\pi$$
$$\int.\frac{zdz}{V(1-z^2)}=-V(1-z^2)+0$$

hinc ergo si sumamus $z=+1$ prodibit

$$\int.\frac{dz}{V(1-z^2)}=\pi \text{ et } \int.\frac{zdz}{V(1-z^2)}=0.$$

§. 5. Pro reliquis terminis consideremus reductionem consuetam generalem

$$\int.\frac{z^{\lambda+2}dz}{V(1-z^2)}=\text{A.}\int.\frac{z^\lambda dz}{V(1-z^2)}+\text{B. }z^{\lambda+1}V(1-z^2)$$

vbi esse oportet

$$\text{A}=+\frac{\lambda+1}{\lambda+2}; \text{ et B}=\frac{-1}{\lambda+2}$$

ita, vt sit

$$\int.\frac{z^{\lambda+2}dz}{V(1-z^2)}=\frac{\lambda+1}{\lambda+2}\int.\frac{z^\lambda dz}{V(1-z^2)}-\frac{1}{\lambda+2}z^{\lambda+1}V1-z^2$$

vbi constantem non adiicimus, quia haec formula iam euanescit sumto $z=-1$; vnde si iam ponatur $z=+1$ obtinebitnr

$$\int.\frac{z^{\lambda+2}dz}{V(1-z^2)}=\frac{\lambda+1}{\lambda+2}\int.\frac{z^\lambda dz}{V(1-z^2)}.$$

§. 6. Ex hac reductione ſtatim liquet, omnia integralia ex poteſtatibus imparibus ipſius z oriunda per ſe euaneſcere; pro poteſtatibus autem paribus ad ſcopum noſtrum adipiſcimur

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \pi; \quad \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \tfrac{1}{2}\pi$$

$$\int \frac{z^4\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{1.\,3}{2.\,4}\pi; \quad \int \frac{z^6\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6}\pi$$

etc.

§. 7. His igitur valoribus ſubſtitutis longitudo quadrantis elliptici colligitur fore

$$AMB = \frac{c\pi}{2\sqrt{2}} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1.\,1}{2.\,4} n^2 . \frac{1}{2} - \frac{1.\,1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6.\,8} n^4 . \frac{1.\,3}{2.\,4} \\ - \frac{1.\,1.\,3.\,5.\,7.\,9}{2.\,4.\,6.\,8.\,10.\,12} n^6 . \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6} - \text{etc.} \end{array} \right.$$

Pro hac autem forma ſcribamus tantisper breuitatis gratia

$$AMB = \frac{c.\pi}{2\sqrt{2}} [1 - \alpha n^2 - \beta n^4 - \gamma n^6 - \delta n^8 - \varepsilon n^{10} \text{ etc.}$$

qui coëfficientas ſequenti modo ſuccinctius exprimi poterunt

$$\alpha = \frac{1.\,1}{2.\,4} . \frac{1}{2} = \frac{1.\,1}{4.\,4}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3.\,5}{8.\,8}; \quad \frac{\gamma}{\beta} = \frac{7.\,9}{12.\,12}; \quad \frac{\delta}{\gamma} = \frac{11.\,13}{16.\,16}.$$

§. 8. Cum igitur inuenti coëfficientes tam ſimplicem et egregiam conſtituant ſeriem, haec expreſſio, quam eruimus, vtique maxime videtur attentione digna, cum termini vehementer conuergant idque pro omnibus plane ellipſibus, propterea quod ſemper $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = n$ fractio eſt vnitate minor. Habebimus ſcilicet

AMB

$$A M B = \frac{c.\pi}{2\sqrt{2}} \begin{cases} 1 - \frac{1.1}{4.4} n^2 - \frac{1.1}{4.4}.\frac{3.5}{8.8} n^4 \\ - \frac{1.1}{4.4}.\frac{3.5}{8.8}.\frac{7.9}{12.12} n^6 \\ - \frac{1.1}{4.4}.\frac{3.5}{8.8}.\frac{7.9}{12.12}.\frac{11.13}{16.16} n^8 \\ \text{etc.} \end{cases}$$

§. 9. Contemplemur hinc caſum, quo ellipſis noſtra fit circulus radii $= a$; tum enim erit $b = a$ hinc $c = a\sqrt{2}$ et $n = 0$, ex quo quadrans circularis prodit, vti quidem notiſſimum eſt, $= \frac{1}{2}\pi a$.

§. 10. Deinde vero etiam caſus occurrit maxime notatu dignus, quo ſemiaxis $CB = b = 0$; tum enim quadrans ellipticus PMB ipſi ſemiaxi $CA = a$ fit aequalis; at pro noſtra formula erit $c = a$ et $n = 1$ quibus valoribus ſubſtitutis nanciſcimur ſequentem aequationem

$$a = \frac{\pi.a}{2\sqrt{2}} \begin{cases} 1 - \frac{1.1}{4.4} - \frac{1.1}{4.4}.\frac{3.5}{8.8} \\ - \frac{1.1}{4.4}.\frac{3.5}{8.8}.\frac{7.9}{12.12} \text{ etc.} \end{cases}$$

qui praeciſe ipſe ille caſus eſt, quo ſeries noſtra quam minime eſt conuergens, et qui propterea noſtram attentionem eo magis meretur, quod huius ſeriei ſumma adcurate aſſignari poteſt, cum ſit

$$1 - \frac{1.1}{4.4} - \frac{1.1}{4.4}.\frac{3.5}{8.8} \text{ etc. in infin.} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

§. 10. Si cui lubuerit ſuper hac ſerie calculos numericos inſtituere, ſubiungamus hic valores litterarum α, β, γ etc. in fractionibus decimalibus, qui ita ſe habent

 $\alpha = 0$,

$$\alpha = 0,0625000$$
$$\beta = 0,0146484$$
$$\gamma = 0,0064087.$$
$$\delta = 0,0035798$$
$$\varepsilon = 0,0022821$$
$$\zeta = 0,0015808$$
etc.

ſerie autem hucusque tantum continuata prodit $1 - \alpha - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon - \zeta = 0,9090002$; iam vero reperitur $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0,9003200$; vnde videmus, ſequentium litterarum η, ϑ, ι, $\varkappa$ etc. omnium ſummam efficere debere $0,0086802$.

§. 11. Ceterum pro calculo numerico non parum notaſſe iuuabit, noſtros coëfficientes etiam ſequenti modo concinnius exprimi poſſe

$$\alpha = \frac{1}{16}$$
$$\beta = \frac{1}{64} \cdot \frac{15}{16}$$
$$\gamma = \frac{1}{144} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{63}{64}$$
$$\delta = \frac{1}{256} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{63}{64} \cdot \frac{145}{144}$$
$$\varepsilon = \frac{1}{400} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{63}{64} \cdot \frac{143}{144} \cdot \frac{255}{256}$$
etc.

§. 12. Occaſione huius ſeriei, quam inuenimus, operae pretium erit, in eius ſummam a poſteriore inquirere, id quod duplici modo fieri poteſt; prior modus, quem iam olim propoſui ac deinceps ſaepiſſime ad vſum accommodaui, nos deducit ad aequationem differentialem, cuius integrale per ipſam ſeriem propoſitam exprimatur. Quo nunc haec

haec methodus facilius adhiberi queat, ponamus $n = 2v$, vt feries fummanda fiat

$$s = 1 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} \cdot v^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot v^4 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{7 \cdot 9}{6 \cdot 6} v^6 \text{ etc.}$$

§. 13. Differentiemus hanc feriem, tum vero iterum per v multiplicemus, vt prodeat

$$\frac{v\,ds}{dv} = -\frac{1 \cdot 1}{2} \cdot v^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4} \cdot v^4 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{7 \cdot 9}{6} \cdot v^6 \text{ etc.}$$

quae denuo differentiata praebet

$$\frac{d.v\,ds}{dv^2} = -1 \cdot 1\, v - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2}\, 3 \cdot 5\, v^3 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4}\, 7 \cdot 9\, v^5 \text{ etc.}$$

hoc fcilicet modo ex fingulis denominatoribus duos factores fuftulimus.

§. 14. Nunc vero denuo ope differentiationis numeratores binis nouis factoribus augeamus; hunc in finem primam aequationem in $\sqrt{v}$ ductam differentiemus, prodibitque

$$\frac{2\,d.s\sqrt{v}}{dv} = +v^{-\frac{1}{2}} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2}\, 5 \cdot v^{\frac{3}{2}} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4}\, 9 \cdot v^{\frac{7}{2}} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{7 \cdot 9}{6 \cdot 6}\, 13 \cdot v^{\frac{11}{2}} \text{ etc.}$$

haec denuo differentietur et per 2 iterum multiplicando fit

$$\frac{4.\,dd.s\sqrt{v}}{dv^2} = -v^{-\frac{3}{2}} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2}\, 3 \cdot 5 \cdot v^{\frac{1}{2}} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4}\, 7 \cdot 9 \cdot v^{\frac{5}{2}} \text{ etc.}$$

quae per $v^{\frac{3}{2}}$ multiplicata producit

$$\frac{4. v^{\frac{5}{2}} dd. s \sqrt{v}}{dv^2} = -v - \tfrac{1.1}{2.2} 3.5. v^3$$
$$- \tfrac{1.1}{2.2}. \tfrac{3.3}{4.4} 7.9. v^5 \text{ etc.}$$

ſupra vero iam inuenimus

$$\frac{d. v ds}{dv^2} = -v - \tfrac{1.1}{2.2} 3.5. v^3 - \tfrac{1.1}{2.2}. \tfrac{3.3}{4.4} 7.9. v^5 \text{ etc.}$$

quae ſeries cum ſint aequales, inde deducimus hanc aequationem

$$4. v^{\frac{5}{2}} dd. s \sqrt{v} = d. v ds$$

quae aequatio continet relationem ſummae quaeſitae s ad variabilem v.

§. 15. Haec ergo aequatio euoluta fit differentiale 2^{di} gradus; ſumto enim elemento dv conſtante ob

$$d. s\sqrt{v} = ds\sqrt{v} + \frac{s dv}{2\sqrt{v}}; \text{ erit } dd. s\sqrt{v} = dds. \sqrt{v}$$
$$+ \frac{dv ds}{\sqrt{v}} - \frac{s dv^2}{4v\sqrt{v}}; \text{ ergo}$$

$$4v^{\frac{5}{2}} dd. s\sqrt{v} = 4v^3 dds + 4v^2 dvds - svdv^2$$

tum vero ob $d. v ds = v dds + dv ds$, habebitur haec aequatio

$$vdds(1 - 4v^2) + dvds(1 - 4v^2) + svdv^2 = 0$$

ſiue

$$v dds + dv ds + \frac{s v dv^2}{1 - 4v^2} = 0.$$

§. 16. Huius igitur aequationis differentialis ſecundi gradus conſtructio in noſtra eſt poteſtate; fiat

fiat enim ellipsis, cuius semiaxes sint a et b; eiusque peripheriae quarta pars $= q =$ A M B; tum vero capiatur $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ et $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = n = 2v$; vnde cum sit

$$q = \frac{\pi c}{2\sqrt{2}} s; \quad \text{fiet } s = \frac{2q\sqrt{2}}{\pi c}.$$

Iam ob

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ et } a^2 - b^2 = 2c^2 v$$

erit $a^2 = \frac{c^2(1 + 2v)}{2}$; et $b^2 = \frac{c^2(1 - 2v)}{2}$.

Quocirca nostra constructio ita erit comparata, sumtis ellipsis semiaxibus

$$a = c\sqrt{\left(\frac{1 + 2v}{2}\right)} \text{ et } b = c\sqrt{\frac{1 - 2v}{2}}$$

fit q quarta pars perimetri huius ellipsis eritque pro resolutione nostrae aequationis $s = \frac{2q\sqrt{2}}{\pi c}$.

Haec aequatio si ponamus $s = \frac{z}{\sqrt{v}}$, induet hanc formam simpliciorem

$$ddz + \frac{z\,dv^2}{4v^2(1 - 4v^2)} = 0$$

pro qua erit $z = \frac{2q\sqrt{2v}}{\pi c}$.

§. 17. Haec porro aequatio ad differentialem primi gradus reducetur, ponendo $z = e^{\int t\,dv}$ tum enim resultabit

$$dt + t^2 dv + \frac{dv}{4v^2(1 - 4v^2)} = 0$$

vnde, si liceret t per v definire, ita, vt innotesceret integrale $\int t\,dv$, foret $z = e^{\int t\,dv}$.

§. 18. Hic erat primus modus ex proposita serie infinita in eius summam inquirendi, vbi scilicet loco numeri constantis n quantitatem variabilem v in-

v introduximus; altero autem modo idem praestandi, cuius plurima specimina iam passim occurrunt, quantitas constans n talis relinquitur, ponamus autem $n = 2m$; ita, vt nostra series summanda sit

$$1 - \frac{1.1}{2.2} m^2 - \frac{1.1}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} m^4$$
$$- \frac{1.1}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{7.9}{6.6} m^6 \text{ etc.}$$

§. 19. Nunc fingamus esse

$$s = \int dz \sqrt[4]{(1 - 2m^2 p)}$$

postquam scilicet absoluta integratione quantitati variabili z certus valor determinatus fuerit tributus, litteram vero p etiam vt variabilem spectemus, quae cuiusmodi functio ipsius z capi debeat, vt haec integratio ad nostram seriem infinitam perducatur, sequenti modo inuestigabimus.

§. 20. Euoluta autem formula irrationali $(1 - 2m^2 p)^{\frac{1}{4}}$ in hanc seriem infinitam

$$1 - \tfrac{1}{2} m^2 p - \frac{1.3}{2.4} m^4 p^2 - \frac{1.3.7}{2.4.6} m^6 p^3$$

quantitas s sequenti serie formularum integralium definietur

$$s = z - \tfrac{1}{2} m^2 \int p\, dz - \frac{1.3}{2.4} m^4 \int p^2\, dz$$
$$- \frac{1.3.7}{2.4.6} m^6 \int p^3\, dz \text{ etc.}$$

Nunc vero statuamus, si post singulas integrationes variabili z certus valor determinatus tribuatur, tum fore

$$\int p\, dz = \tfrac{1}{2} z; \int p^2\, dz = \tfrac{5}{4} \int p\, dz$$
$$\int p^3\, dz = \tfrac{9}{8} \int p^2\, dz; \int p^4\, dz = \tfrac{13}{9} \int p^3\, dz$$

etc. sic

ſic enim fiet

$$s = z\left(1 - \frac{1.1}{2.2} m^2 - \frac{1.1}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} m^4 - \frac{1.1}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{7.9}{6.6} m^6 \text{ etc.}\right.$$

quae eſt ipſa noſtra ſeries propoſita.

§. 21. Nunc igitur tota quaeſtio huc redit, cuiusmodi functionem ipſius z pro p ſumi oporteat, vt ſtabilita illa ratio integralium, dum ſcilicet variabili z certus valor tribuitur, obtineatur, iſta autem relatio generatim ita exprimitur,

$$\int. p^\lambda dz = \frac{4\lambda - 3}{2\lambda} \int. p^{\lambda - 1} dz$$

ponamus igitur integralibus adhuc indefinite ſumtis fore

$$\int. p^\lambda dz = \frac{4\lambda - 3}{2\lambda} \int. p^{\lambda - 1} dz + \frac{p^\lambda . Q}{2\lambda}$$

facta ergo differentiatione prodibit

$$p^\lambda dz = \frac{4\lambda - 3}{2\lambda} p^{\lambda - 1} dz + \tfrac{1}{2} p^{\lambda - 1} Q dp + \frac{p^\lambda}{2\lambda} dQ$$

quae per $p^{\lambda - 1}$ diuiſa et per 2λ multiplicata praebet

$$2\lambda p dz = (4\lambda - 3) dz + \lambda Q dp + p dQ$$

et cum haec aequatio ſubſiſtere debeat, quicquid ſit λ, ſuppeditat nobis has duas aequationes

$$2 p dz - 3 dz - Q dp = 0$$
$$- 3 dz + p dQ = 0$$

ex quibus vtramque functionem p et Q definire licebit.

§. 22. Perinde autem hic eſt, ſiue p et Q ſint functiones ipſius z ſiue z et Q ipſius p, dum-

 modo

modo earum relatio inter ſe ſtabiliatur; ex poſteriore autem ſtatim habemus

$$dz = \tfrac{1}{3} p\, dQ$$

qui valor in priore ſubſtitutus praebet

$$\tfrac{2}{3}(p-2)p\,dQ - Q\,dp = 0$$

ex qua fit

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{3\,dp}{2p(p-2)} = -\frac{3\,dp}{4p} + \frac{3\,dp}{4(p-2)}$$

vnde integrando oritur

$$\log. Q = -\tfrac{3}{4}\,l.\,p + \tfrac{3}{4}\,l.\,(p-2)$$

$$= +\tfrac{3}{4}\,l.\,\frac{p-2}{p}$$

vnde fit $Q = 2\left(\frac{p-2}{p}\right)^{\frac{3}{4}}$

tum vero quia ex prima aequatione eſt $dz = \frac{Q\,dp}{2(p-2)}$; hinc fit

$$dz = \frac{dp}{p^{\frac{3}{4}}(p-2)^{\frac{1}{4}}} = \frac{dp}{\sqrt[4]{p^3(p-2)}}.$$

Nunc autem inprimis obſeruari oportet, vt pro vtroque integrationis termino formula algebraica ibi adiecta $p^\lambda Q = 2.\, p^{\lambda - \frac{3}{4}}(p-2)^{\frac{3}{4}}$ euaneſcat, ſicque manifeſtum eſt, integrationis terminos ſtatui debere $p = 0$ et $p = 2$.

§. 23. Ecce ergo formulam noſtram integralem initio introductam hoc modo repraeſentatam

$$s = \int \frac{dp\,\sqrt[4]{(1-2m^2p)}}{\sqrt[4]{p^3(p-2)}}$$

quare

quare cum sit

$$z = \int \frac{dp}{\sqrt[4]{p^3(p-2)}}$$

ipsa nostra series proposita

$$1 - \frac{1.1}{2.2} m^2 - \frac{1.1}{2.2} . \frac{3.5}{4.4} m^4 \text{ etc.}$$

aequabitur fractioni $\frac{s}{z}$, postquam scilicet haec integralia ita fuerint sumta, vt euanescant posito $p = 0$ tum vero statuatur $p = 2$; quamobrem illas duas formulas integrales ita exprimi conueniet

$$s = \int . \frac{dp \sqrt[4]{(1 - 2m^2 p)}}{\sqrt[4]{p^3(2-p)}}$$

et $z = \int . \frac{dp}{\sqrt[4]{p^3(2-p)}}$.

§. 24. Ex his igitur series nostra supra inventa

$$1 - \frac{1.1}{4.4} n^2 - \frac{1.1}{4.4} . \frac{3.5}{8.8} n^4 \text{ etc.}$$

cuius summam iam vidimus esse $\frac{2q\sqrt{2}}{\pi . c}$, etiam hoc modo per duas formulas integrales repraesentari potest, quae facta leui mutatione $p = 2r$ erunt, ea, quae numeratorem constituit

$$s = \int . \frac{dr \sqrt[4]{(1 - nn . r)}}{\sqrt[4]{r^3(1-r)}}$$

altera vero, quae constituit denominatorem

$$z = \int . \frac{dr}{\sqrt[4]{r^3(1-r)}}$$

ipſa autem fractio noſtram ſeriem exhibebit; nunc autem termini integrationis ſunt $r = 0$ et $r = 1$.

§. 25. Adhuc ſuccinctius hae formulae transformari poſſunt, ſumendo $r = t^4$; tum enim ambae formulae integrales erunt

$$s = \int \frac{dt\sqrt[4]{(1 - n^2 t^4)}}{\sqrt[4]{(1 - t^4)}}; \text{ et } z = \int \frac{dt}{\sqrt[4]{(1 - t^4)}}$$

terminis integrationis exiſtentibus etiamnunc $t = 0$ et $t = 1$, quo obſeruato fractio $\frac{s}{z}$ aequabitur noſtrae ſeriei, ſiue erit

$$\frac{s}{z} = \frac{2q\sqrt{2}}{\pi . c}$$

vbi q denotat quartam partem peripheriae ellipſis, cuius ſemiaxes ſunt

$$c\sqrt{\left(\frac{1+n}{2}\right)} \text{ et } c\sqrt{\left(\frac{1-n}{2}\right)}.$$

§. 26. Hinc caſu $n = 0$ manifeſto fit $\frac{s}{z} = 1$ caſu vero $n = 1$ ob $s = t = 1$ fiet

$$\frac{1}{z} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \text{ ſiue } z = \int \frac{dt}{\sqrt[4]{(1 - t^4)}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}};$$

quod quidem iam aliunde conſtat.

DE-

DEMONSTRATIONES CIRCA RESIDVA EX DIVISIONE POTESTATVM PER NVMEROS PRIMOS RESVLTANTIA.

Auctore

L. EVLERO.

Hypothesis.

1.

Si termini progressionis geometricae ab vnitate incipientis per numerum primum P diuidantur, residua inde nata litteris 1, α, β, γ, δ etc. denotabo, hoc modo:

Progr. Geom.	$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$ etc.
Residua.	$1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$ etc.

Conclusiones.

2. Omnia haec residua sunt minora diuisore P; quamdiu enim termini progressionis geometricae diuisore P sunt minores, residua ipsis sunt aequalia; cum autem diuisorem P superant, auferendo ab iis diuisorem P, quoties fieri potest, residua tandem ipso P minora relinqui necesse est.

3. Si numerus a sit primus ad diuisorem P, hoc est si neque ipsi sit aequalis, neque eius mul-

 tiplo

tiplo cuipiam, nulla quoque eius poteſtas per P erit diuiſibilis; neque ergo in reſiduis cyphra vnquam occurret.

4. Cum omnia reſidua ſint diuiſore P minora, multitudo autem numerorum diuiſore P minorum ſit $= P - 1$, plura reſidua diuerſa occurrere nequeunt quam $P - 1$. Quare cum ſeries reſiduorum ſit infinita, eadem reſidua in ea ſaepius recurrere debent.

5. Ex quolibet reſiduo veluti ε ſequens ζ facile definitur. Cum enim ſit $\varepsilon = a^5 - mP$ et $\zeta = a^6 - nP$, erit $\zeta - a\varepsilon = (ma - n)P$, hincque $\zeta = a\varepsilon - (n - ma)P$. Quare a producto $a\varepsilon$ auferatur diuiſor P quoties fieri poteſt, ac relinquetur reſiduum ſequens ζ.

6. Reſpectu numeri primi P omnes numeri in certos ordines diſtribui poſſunt, ad eundem ordinem referendo omnes eos numeros, qui per P diviſi idem relinquunt reſiduum, hi ergo ordines erunt:

I.	0,	P	2P,	3P,	4P	mP
II.	1,	P+1,	2P+1,	3P+1,	4P+1	mP+1
III.	2,	P+2,	2P+2,	3P+2,	4P+2	mP+2
IV.	3,	P+3,	2P+3,	3P+3,	4P+3	mP+3

etc.

7. Pro quolibet ergo numero primo P tot habentur numerorum ordines, quot vnitates in numero P continentur; et quilibet ordo determinatur reſiduo, quod omnibus numeris eius ordinis eſt commune; hocque reſiduum in quouis ordine locum occupat primum.

8. Cum

8. Cum cuiusque ordinis natura residuo ipsi proprio determinetur, quilibet cuiusque ordinis numerus eius naturam perinde declarat, ac primus, qui ipsum residuum exhibet. Hinc nihil impedit, quominus idem residuum ε per quemlibet alium numerum eiusdem ordinis $mP + \varepsilon$ denotetur.

9. Ita idem residuum ε non solum per numeros positiuos $\varepsilon + P$, $\varepsilon + 2P$ etc. indicare licebit, sed etiam per negatiuos $\varepsilon - P$, $\varepsilon - 2P$ etc. Cum igitur, si ε sit diuisoris P semisse maius, $\varepsilon - P$ eodem sit minus, patet numeros negatiuos admittendo, omnia residua numeris, qui diuisoris P semissem non superent, exprimi posse.

Obseruationes.

10. Proposito diuisore primo P, prout progressionis geometricae radix a constituatur, fieri potest, vt in residuis vel omnes numeri ipso P minores occurrant, vel non omnes. Si enim sumatur radix $a = 1$, omnia residua in vnitatem abeunt, ac si sumatur $a = P - 1$, series residuorum prodit:

$$1,\ P-1,\quad 1,\ P-1,\quad 1,\ P-1 \text{ etc.}$$
$$\text{vel } +1,\ -1,\ +1,\ -1,\ +1,\ -1 \text{ etc. } (9).$$

11. Quod autem interdum omnes numeri diuisore P minores in residuis occurrunt, vnico exemplo declarasse sufficiat; sit scilicet $P = 7$ et sumatur radix $a = 3$, habebitur:

progr. geom.	1,	3,	3^2,	3^3,	3^4,	3^5,	3^6,	3^7,	3^8,	3^9	etc.
Residua	1,	3,	2,	6,	4,	5,	1,	3,	2,	6	etc.

12. Si

12. Si pro eodem diuisore $P = 7$ radici a alii valores tribuantur, series residuorum se habebunt vt sequitur:

Progr. geom.	$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9$ etc.
Residua	$1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 1$ etc.
Progr. geom.	$1, 4, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5, 4^6, 4^7, 4^8, 4^9$ etc.
Residua	$1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1$ etc.
Progr. geom.	$1, 5, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, 5^6, 5^7, 5^8, 5^9$ etc.
Residua	$1, 5, 4, 6, 2, 3, 1, 5, 4, 6$ etc.

13. Vt omnes variationes, quae in serie residuorum locum habere possunt, obtineantur, sufficit radici a omnes valores diuisore P minores tribuisse; si enim loco a sumatur $a + P$, ex progressione geometrica $1, a + P, (a + P)^2, (a + P)^3$ etc. eadem residuorum series recurrit, quae ex progressione geometrica $1, a, a^2, a^3, a^4$ etc.

14. Quemadmodum in residuis etiam numeros negatiuos admittimus (9) vt ea infra semissem diuisoris P deprimamus, ita etiam pro radice progressionis geometricae a numeros negatiuos assumere licet, ac tum habebitur:

Progr. geom.	$1, -a, +a^2, -a^3, +a^4, -a^5, +a^6, -a^7$ etc.
residua	$1, -\alpha, \beta, -\gamma, \delta, -\varepsilon, \zeta, -\eta$ etc.

15. Sumta autem radice $-a$, eadem residua oriuntur, ac si radix poneretur $P - a$; vnde patet pro casibus, quibus radix a semissem diuisoris P superat, residua ex casibus quibus est $a < \frac{1}{2} P$ facile colligi.

16. Quodsi loco radicis a successiue omnes numeri diuisore P minores substituantur, series residuorum inde natae vel erunt completae vel incompletae: *completas* scilicet appello, in quibus omnes numeri diuisore P minores occurrunt, *incompletas* vero, vbi quidam horum numerorum ex serie residuorum excluduntur.

17. Quoniam vidimus pro quouis diuisore P dari eiusmodi valores radicis a, veluti si $a = 1$ et $a = P - 1$, ex quibus series residuorum incompletae resultant; hinc nascitur quaestio; *an semper eiusmodi progressiones geometricae exhiberi queant, vnde series residuorum completae oriantur.*

18. Huiusmodi radices progressionis geometricae, quae series residuorum completas producunt, *primitiuas* appellabo. Ita supra vidimus pro diuisore $P = 7$ radices *primitiuas* esse 3 et 5. Num autem pro omnibus diuisoribus primis dentur radices primitiuae, quaestio est altioris indaginis, infra decidenda.

Lemmata.

19. Cum in serie residuorum termini praecedentes tandem recurrere debeant, *primus qui recurrit semper est vnitas. Demonstratio.* Ponamus enim aliud quoduis residuum ε ex potestate a^{μ} natum recurrere, antequam vnitas recurrat, idque secunda vice ex potestate $a^{\mu+\nu}$ prodire. Cum igitur sit $\varepsilon = a^{\mu} - mP$ et $\varepsilon = a^{\mu+\nu} - nP$, erit $a^{\mu+\nu} - a^{\mu} = (n-m)P$ ideoque $a^{\mu}(a^{\nu} - 1)$ multiplum ipsius P; at quia a^{μ} per

 nume-

numerum primum P diuidi nequit, (radix enim a diuiſore P minor ideoque ad eum prima ſtatuitur), neceſſario alter factor $a^\nu - 1$ per P diuiſionem admittet, hincque poteſtas a^ν per P diuiſa vnitatem relinquet; quae poteſtas cum inferior ſit quam $a^{\mu+\nu}$ euidens eſt, reſiduum ε ante recurrere non poſſe, quam vnitas recurrerit.

20 Statim atque in ſerie reſiduorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. vnitas iterum occurrit, deinceps eadem reſidua eodem ordine vti ab initio iterum recurrent.

Dem. Oriatur enim vnitas ſecunda vice ex poteſtate a^ν ac ſequens reſiduum erit a, 1 (5) $= a$, idem quod ex ſecundo termino a naſcebatur, ideoque α, poſt quod denuo ſequentur reſidua β, γ, δ etc. eodem ordine vti ab initio.

21. Si a ſit radix primitiua, eius poteſtas a^{P-1} per diuiſorem primum P diuiſa vnitatem relinquet.

Dem. Quia a eſt radix primitiua in ſerie reſiduorum omnes numeri diuiſore P minores occurrunt, quorum multitudo eſt $P-1$; ex totidem ergo progreſſionis geometricae terminis $1, a^1, a^2, a^3$ etc. quorum vltimus erit a^{P-2} oriantur neceſſe eſt; ſequens ergo terminus a^{P-1} aliquod ex reſiduis praecedentibus reproducet, quod autem neceſſario eſt vnitas (19).

22. Si progreſſio geometrica $1, a, a^2, a^3, a^4$ etc. ſeriem reſiduorum *incompletam* producat; numerus reſiduorum diuerſorum erit pars aliquota numeri $P-1$ hoc eſt diuiſoris primi P vnitate minuti.

Dem.

Dem. Sit numerus residuorum diuersorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. ex hac progressione geometrica natorum $= r$, qui ergo per hypothesin minor est quam $P - 1$, ita vt quidam numeri, qui sint $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ etc. eorumque multitudo $= P - 1 - r$, ex serie residuorum excludantur. Iam dico, quia $\mathfrak{A}$ in serie residuorum non reperitur, ibidem quoque nec $\alpha\mathfrak{A}$, nec $\beta\mathfrak{A}$, nec $\gamma\mathfrak{A}$ etc. occurrere posse. Si enim $\varepsilon\mathfrak{A}$ esset residuum, quia ε ex certa potestate radicis a, quae sit a^{ν}, nascitur, loco $\varepsilon\mathfrak{A}$ spectare licet $a^{\nu}\mathfrak{A}$, vnde sequentia residua forent $a^{\nu+1}\mathfrak{A}$, $a^{\nu+2}\mathfrak{A}$, $a^{\nu+3}\mathfrak{A}$ etc. et in genere $a^{n}\mathfrak{A}$, quia autem datur potestas a^{n} vnitatem relinquens, hoc residuum foret $\mathfrak{A}$ contra hypothesin. Hinc dato vno non-residuo $\mathfrak{A}$, simul dantur r non-residua; quae si nondum multitudinem numerorum $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ etc. quorum numerus est $P - 1 - r$ exhauriant, de nouo r non-residua accedunt, sicque porro; vnde numerus $P - 1 - r$ necessario erit multiplus ipsius r, sit ergo $P - 1 - r = nr$, fiet $r = \frac{P-1}{n+1}$, ac propterea numerus residuorum r semper est pars aliquota numeri $P - 1$.

23. Quicunque valor diuisore primo P minor radici a tribuatur, potestas a^{P-1} per P diuisa vnitatem relinquit, seu formula $a^{P-1} - 1$ per P erit diuisibilis.

Dem. Sit r numerus omnium residuorum diuisorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. quae ergo nascuntur ex progressione geometrica

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4 \ldots\ldots a^{r-1}$$

ſequens igitur poteſtas a^r vnitatem pro reſiduo habebit, eritque forma $a^r - 1$ per diuiſorem P diuiſibilis. Quia vero r eſt pars aliquota numeri $P - 1$, illa forma $a^{P-1} - 1$ per hanc $a^r - 1$ erit diuiſibilis, ideoque etiam per ipſum diuiſorem P.

24. In ſerie reſiduorum 1, α, β, γ, δ etc. ſiue fuerit completa ſiue incompleta, ſimul producta ex binis, ternis quaternis etc. hincque etiam ſingulorum poteſtates quaecunque, ſiquidem per diuiſorem P deprimantur, occurrunt.

Dem. Si enim poteſtas a^m reſiduum relinquat μ, et poteſtas a^n reſiduum ν, erit $a^m = ..P + \mu$ et $a^n = ..P + \nu$ vbi duo puncta .. loco cuiusuis indicis integri ſcribo; hincque $a^{m+n} = ..P + \mu\nu$, ita vt poteſtas a^{m+n} reſiduum $\mu\nu$ ſit relictura. Quare cum productum binorum quorumcunque reſiduorum in ſerie reſiduorum occurrat, propoſitum eſt manifeſtum.

25. Datis duobus reſiduis μ et ν in ſerie reſiduorum etiam aliquod reperietur ω vt ſit $\nu = \mu\omega$ vel $\nu = \mu\omega - ..P$.

Dem. Oriantur enim reſidua μ et ν a poteſtatibus a^m et a^n ac ſit ω reſiduum a poteſtate a^{n-m} vel hac $a^{P-1+n-m}$ ſi forte fuerit $n < m$, eritque poteſtatis $a^n = a^m . a^{n-m}$ reſiduum $= \mu\omega - ..P$ ideoque $\nu = \mu\omega - ..P$.

26. Cum vnitas ſemper in ſerie reſiduorum contineatur, cuique reſiduo μ reſpondebit ibidem aliud

aliud quoddam ω vt fit $\mu\omega = 1$ seu $\mu\omega = 1 + ..P$. Huiusmodi bina residua *socia* appellabo. Vnde patet, in omni serie residuorum terminos ita sociatim exhiberi posse, vt bina quaeque sibi sint socia. Hoc tantum notetur, vnitatem sibi ipsi esse *sociam*, ac si -1 occurrat, socium quoque ipsi esse aequalem.

27. His praemissis, quae alibi fusius pertractavi, ad sequentia Theoremata progredior; in quibus plures nouae veritates ex principiis prorsus singularibus demonstrabuntur, ad quas per methodos adhuc vsurpatas accessus nimis difficilis videtur.

Theorema.

28. Vt forma $x^n - 1$ per numerum primum P diuisibilis euadat, sumendo $x < P$, id pluribus quam n modis fieri nequit.

Demonstratio.

A casibus simplicissimis inchoemus, ac primo statim manifestum est formam $x^1 - 1$ per numerum primum P vnico modo diuisibilem esse posse sumendo $x = 1$, cum valores ipsius x diuisore P maiores excludantur.

Vt forma $x^2 - 1$ diuisionem per numerum primum P admittat vel $x - 1$ vel $x + 1$ diuisionem admittere debet; priori casu fit $x = 1$ posteriori $x = P - 1$: neque vllo alio modo id euenire potest, siquidem casus $x > P$ excluduntur. Forma $x^3 - 1 = (x - 1)(xx + x + 1)$ per P diuisibilis est

 primo

primo si $x = 1$, tum vero si $xx + x + 1 = mP$. quod si eueniat casu $x = a$, etiam casu $x = a^2$ succedet, altiores enim potestates ob $a^3 - 1$ diuis. per P ideoque residuum ipsius $a^3 - 1$ ad praecedentes reducuntur. Iam vero dico praeter hos tres casus alios dari nullos; si enim diuisio succederet quoque casu $x = b$, ob $aa + a + 1$ et $bb + b + 1$ per P diuisibiles differentia $(a - b)(a + b + 1)$ etiam esset diuisibilis hoc est vel $a - b$ vel $a + b + 1$, prius daret $b = a$, posterius ab $aa + a + 1$ ablatum praeberet $aa - b = mP$ hoc est $b = aa$, qui sunt casus iam enumerati. Vnde pluribus quam tribus modis diuisio non succedit.

Iam pro forma $x^n - 1$ in genere obseruo, si ea per numerum primum P fuerit diuisibilis casu $x = a$; vt sit $x - a$ diuisor formae $x^n - 1 - mP$, tum facta diuisione oriri formam vno gradu inferiorem per P diuisibilem reddendam; quod si praestet valor $x = b$ denuo ad formam inferiorem peruenietur, ex quo perinde atque in resolutione aequationum concluditur, pluribus quam n modis quaesitum obtineri non posse; qui si $x = a$ fuerit vnus valor idoneus, erunt

$$x = 1,\ x = a,\ x = a^2,\ x = a^3,\ x = a^4 \ldots x = a^{n-1}$$

quandoquidem a^n iterum vnitati aequiualet.

Scholion.

29. Theorema hoc ita accipi debet, vt forma $x^n - 1$ certe non pluribus quam n modis per numerum primum P diuisibilis reddi queat, aliis pro x valo-

valoribus non admittendis, nifi qui ipfo P fint minores. Cum enim fi quispiam valor $x = a$ id praeftet, omnes in hac formula $x = a + m$P idem fint praeftaturi, hos omnes pro vnico cafu haberi convenit. Hac lege conftituta faepius euenire poteft, vt numerus cafuum fit minor quam exponens n; veluti fi quaeftio fit, quot cafibus forma $x^5 - 1$ per 7 diuifibilis exiftat, hoc non 5 fed vnico modo $x = 1$ fieri poffe deprehenditur, dum reliqui 4 cafus quafi fiunt imaginarii. Ex fequentibus autem patebit, femper quasdam folutiones fieri impoffibiles; quoties exponens n non fuerit pars aliquota ipfius P $- 1$: dum contra, quoties n eft pars aliquota ipfius P-1 omnes folutiones funt reales. Ac fi $n =$ P $- 1$ tum manifefto totidem habentur folutiones, quia omnes numeri ipfo P minores, quorum multitudo eft P-1, loco x pofiti formulam $x^n - 1$ per numerum primum P diuifibilem reddunt (22). Quando autem exponens n maior eft quam P-1, veluti $n =$ P$-1+k$ tum forma $x^{P-1+k} - 1$, reducitur ad $x^k - 1$, quoniam poteftas x^{P-1} ratione refiduorum vnitati aequiualere eft cenfenda.

Definitio.

30. Cafus proprii, quibus formula $x^n - 1$ per quempiam numerum primum diuifibilis effe poteft, funt ii, qui ipfi cum nulla forma inferiori, vbi exponens n eft minor, funt communes.

Coroll.

Coroll. 1.

31. Quia casus $x = 1$ formulae $x^n - 1$ cum omnibus inferioribus est communis, hunc semper a casibus formulae isti propriis excludi oportet; vnde cum numerus omnium casuum sit n, numerus casuum propriorum saltem vnitate est minor.

Coroll. 2.

32. Si exponens n fuerit numerus primus, formula $x^n - 1$ per nullam inferiorem eiusdem formae diuisibilis est praeter $x^1 - 1$, vnde numerus casuum propriorum est $n - 1$.

Coroll. 3.

33. Sin autem exponens n fuerit numerus compositus puta $n = \mu\nu$, tum formula $x^n - 1$ iisdem casibus est diuisibilis, quibus formulae $x^\mu - 1$ et $x^\nu - 1$, quandoquidem ipsa per has diuisibilis existit; vnde casus harum formularum a casibus propriis formulae $x^n - 1$ sunt segregandi.

Problema.

34. Pro omnibus exponentibus n numerum casuum propriorum definire, quibus formula $x^n - 1$ per quempiam numerum primum P diuisibilis reddi potest, alios pro x valores non admittendo, nisi qui diuisore sint minores.

Solutio.

Solutio.

A numero omnium caſuum, qui eſt $= n$ excludantur caſus, quibus formulae inferiores in propoſita contentae ſimul fiunt diuiſibiles; aliae autem formulae inferiores veluti $x^\nu - 1$ in propoſita $x^n - 1$ non continentur, niſi quarum exponens ν eſt pars aliquota exponentis n. Verum ſi plures huiusmodi formulae inferiores dentur, ne iidem caſus bis vel pluries excludantur, tantum caſus cuique proprii excludi debent, quo facto remanebunt caſus formulae propoſitae $x^n - 1$ proprii; hoc modo ab exponentibus minoribus ad continuo maiores facile progredi licet:

formula	numerus caſuum propriorum
$x^1 - 1$	1
$x^2 - 1$	$2 - 1 = 1$
$x^3 - 1$	$3 - 1 = 2$
$x^4 - 1$	$4 - 1 - 1 = 2$
$x^5 - 1$	$5 - 1 = 4$
$x^6 - 1$	$6 - 2 - 1 - 1 = 2$
$x^7 - 1$	$7 - 1 = 6$
$x^8 - 1$	$8 - 2 - 1 - 1 = 4$
$x^9 - 1$	$9 - 2 - 1 = 6$
	etc.

Hinc in genere ſi α, β, γ, δ etc. ſint numeri primi, res ita ſe habebit:

formula	numerus casuum propriorum
$x^1 - 1$	1
$x^\alpha - 1$	$\alpha - 1$
$x^\beta - 1$	$\beta - 1$
$x^\gamma - 1$	$\gamma - 1$
$x^{\alpha\alpha} - 1$	$\alpha\alpha - \alpha = \alpha(\alpha - 1)$
$x^{\alpha\beta} - 1$	$\alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = (\alpha - 1)(\beta - 1)$
$x^{\beta\beta} - 1$	$\beta\beta - \beta = \beta(\beta - 1)$
$x^{\alpha\gamma} - 1$	$\alpha\gamma - \alpha - \gamma + 1 = (\alpha - 1)(\gamma - 1)$
$x^{\beta\gamma} - 1$	$\beta\gamma - \beta - \gamma + 1 = (\beta - 1)(\gamma - 1)$
$x^{\gamma\gamma} - 1$	$\gamma\gamma - \gamma = \gamma(\gamma - 1)$
$x^{\alpha\alpha\alpha} - 1$	$\alpha^3 - \alpha\alpha + \alpha - \alpha + 1 - 1 = \alpha\alpha(\alpha - 1)$
$x^{\alpha\alpha\beta} - 1$	$\alpha\alpha\beta - \alpha\alpha + \alpha - (\beta - 1)(\beta - 1) - \alpha - \beta + 1 = \alpha(\alpha - 1)(\beta - 1)$

vnde colligimus, si fuerit $n = \alpha^\lambda \beta^\mu \gamma^\nu$, pro formula $x^n - 1$ fore numerum casuum propriorum

$$\alpha^{\lambda - 1}(\alpha - 1)\,\beta^{\mu - 1}(\beta - 1)\,\gamma^{\nu - 1}(\gamma - 1).$$

Quae si attentius contemplemur, mox deprehendemus pro qualibet formula $x^n - 1$ tot dari casus proprios, quot infra exponentem n dantur numeri ad ipsum primi.

Coroll. 1.

35. Diuisore primo existente $= P$, si exponens n sumatur $= P - 1$, quia formula $x^{P-1} - 1$ certo habet $P - 1$ casus eosque omnes reales, cum x omnes valores ipso P minores recipere queat; si inde expungantur ii, qui huic formulae cum simplicioribus sunt communes, casus proprii, qui relinquuntur, omnes certo erunt reales.

Coroll.

Coroll. 2.

36. Hinc semper eiusmodi dantur numeri diuisore P minores, qui casus formulae $x^{p-1}-1$ proprios exhibent, ita, vt iidem casus nulli formulae inferiori conueniant.

Scholion.

37. Quamuis haec nimis abstracta et omni vsu destituta videantur; tamen equidem iis supersedere non potui in sequentibus demonstrationibus adornandis, vbi imprimis ante omnia est ostendendum, quicunque numerus primus pro diuisore P accipiatur, semper eiusmodi progressiones geometricas 1, a, a^2, a^3, a^4 etc. exhiberi posse, vnde series residuorum completae resultent, in quibus scilicet omnes numeri diuisore P minores occurrant, antequam idem residuorum ordo reuertatur. Plerisque forte haec res ita manifesta videbitur, vt demonstratione non egeat, cum pro minoribus diuisoribus primis huiusmodi progressiones geometricae series residuorum completas praebentes, actu exhiberi queant, pro maioribus autem ratio dubitandi continuo decrescere videatur. Verum quoniam hoc secus euenit pro diuisoribus non-primis, haec numerorum primorum proprietas vtique demonstrationem postulare est visa.

Theorema.

38. Quicunque numerus primus pro diuisore P accipiatur; semper eiusmodi progressio geometrica

1, a, a^2, a^3, a^4 etc. exhiberi poteſt, ex qua ſeries reſiduorum completa oriatur.

Demonſtratio.

Cum poſita in genere progreſſionis geometricae radice x, minore ſemper quam diuiſor P, terminus x^{P-1} per P diuiſus vnitatem relinquat, indeque reſidua eodem ordine vti ab initio reuertantur; oſtendi oportet pro x eiusmodi numerum a aſſumi poſſe, vt a^{P-1} ſit eius infima poteſtas, quae per P diuiſa vnitatem relinquat; quia enim tum in ſerie reſiduorum vnitas ante hunc terminum non occurrit, omnia antecedentia reſidua inter ſe diuerſa ſint neceſſe eſt, quorum numerus cum ſit $= P-1$, omnes numeri diuiſore P minores in ſerie reſiduorum reperientur, eaque propterea erit completa. Res itaque huc redit, vt oſtendatur, non omnes numeros diuiſore P minores ita eſſe comparatos, vt eorum inferior quaepiam poteſtas per P diuiſa vnitatem relinquat. Verum ſi hoc eueniat in poteſtate x^n exiſtente $n < P-1$; iam oſtendimus (§. 21.), eius exponentem n eſſe neceſſario partem aliquotam ipſius $P-1$; cum iam §. 34. docuerim, formam $x^{P-1}-1$ ſemper habere caſus ſibi proprios puta $x=a$, vt nulla inferior diuiſionem per P admittat; perſpicuum eſt poteſtatem a^{P-1} fore infimam, quae per P diuiſa vnitatem relinquat; vnde ſumto tali numero a pro radice progreſſionis geometricae, ex ea ſeries reſiduorum completa oriatur neceſſe eſt.

Scho-

Scholion.

39. Quo haec clarius intelligantur, conueniet pro simplicioribus diuisoribus primis tales series residuorum completas conspectui exponi, vbi quidem progressiones geometricas, vnde nascuntur, non opus est exponi, quia radix semper secundo termino seriei residuorum est aequalis; sed sufficiet generalem progressionem in capite posuisse, vt inde exponentes, quibus singuli termini in seriebus residuorum respondent, perspiciantur:

<table>
<tr><td rowspan="9">Diuisor primus</td><td></td><td>$a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}, a^{13}, a^{14}, a^{15}, a^{16}, a^{17}, a^{18}, a^{19}, a^{20}$ etc.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1, 2 | 1, 2 | 1, 2 | 1, 2 | 1, 2 | 1, 2 | 1, 2 | 1, 2 | 1, 2 | 1, 2 | 1, etc.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1, 2, 4, 3 | 1, 2, 4, 3 | 1, 2, 4, 3 | 1, 2, 4, 3 | 1, 2, 4, 3 | 1, 2 etc.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1, 3, 2, 6, 4, 5 | 1, 3, 2, 6, 4, | 1, 3, 2, 6, 4, 5 | 1, 3, 2, 6 etc.</td></tr>
<tr><td>11</td><td>1, 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6 | 1, 2, 4, 8, 5 10, 9, 7, 3, 6 | 1, 2 etc.</td></tr>
<tr><td>13</td><td>1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7 | 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, etc.</td></tr>
<tr><td>17</td><td>1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6 | 1, 3, 9, 10, 13, 5 etc.</td></tr>
<tr><td>19</td><td>1, 2, 4, 8, 16, 13, 7, 14, 9, 18, 17, 15, 11, 3, 6, 12, 5, 10 | 1, 2, 4, 8 etc.</td></tr>
<tr><td>23</td><td>1, 5, 2, 10, 4, 20, 8, 17, 16, 11, 9, 22, 18, 21, 13, 19, 3, 15, 6, 7, 12, 14 | etc.</td></tr>
</table>

Radices igitur, quibus hic pro istis diuisoribus primis sumus vsi, sunt primitiuae, quia earum potestates omnia diuersa residua diuisore minora suppeditant, quibus exhaustis demum vnitas recurrit, et series eodem ordine vti ab initio progrediuntur. Via quidem adhuc non patet, tales radices primitiuas pro quouis diuisore primo inueniendi, neque etiam demonstratio, qua tales radices primitiuas semper dari euici, methodum eas inueniendi declarat.

Pro quouis autem diuisore primo radix huiusmodi primitiua tentando non difficulter elicitur. Veluti pro diuisore 23, primum radicem $a = 2$ assumo, vnde haec series residuorum nascitur:

$$1, 2. 4, 8, 16, 9, 18, 13, 3, 6, 12, 1$$

quae cum sit incompleta, iam inde patet radicem primitiuam inter numeros exclusos quaeri debere, quorum minimus qui 5 negotium conficere deprehenditur; nisi hoc accidisset; denuo inter numeros exclusos radicem primitiuam quaesiuissem.

Theorema.

40. Si diuisor primus sit $P = 2n + 1$, et a radix primitiua; tum progressionis geometricae $1, a, a^2, a^3$ etc. terminus a^n residuum praebet $2n$ seu -1.

Demonstratio.

Cum a sit radix primitiua, eius potestas a^{2n} per diuisorem $2n+1$ diuisa vnitatem relinquit, neque vlla datur potestas inferior idem praestans; formula ergo $a^{2n} - 1$ per eundem diuisorem erit diuisibilis, neque vlla alia inferior. Cum igitur sit $a^{2n} - 1 = (a^n - 1)(a^n + 1)$, et factor $a^n - 1$ non sit per diuisorem $2n+1$ diuisibilis, alterum factorem $a^n + 1$ diuisibilem esse necesse est, seu erit $a^n + 1 = m(2n+1)$ hincque $a^n = m(2n+1) - 1$ vel $a^n = (m-1)(2n+1) + 2n$; vnde manifestum est potestatem a^n per diuisorem $2n+1$ diuisam relinquere -1 seu $2n$.

Coroll.

Coroll. 1.

41. Si ergo residua ex initio progressionis geometricae $1, a, a^2, a^3$ etc. nata sint $1, \alpha, \beta, \gamma$ etc. residua ex terminis $a^n, a^{n+1}, a^{n+2}, a^{n+3}$ etc. nata erunt $-1, -\alpha, -\beta, -\gamma$ etc. seu $2n, 2n+1-\alpha, 2n+1-\beta, 2n+1-\gamma$ etc. cum sit $\alpha = \alpha$, $\beta = a.\alpha$, $\gamma = a\beta$ etc. semperque sequens terminus oriatur ex praecedente per radicem a multiplicato.

Coroll. 2.

42. Series ergo residuorum completa, cuius terminorum numerus est $= 2n$, antequam iidem termini recurrant, in duas partes dispescitur $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. et $-1, -\alpha, -\beta, -\gamma, -$ etc. cuius posterioris termini sunt complementa terminorum prioris; seu residua ex terminis a^λ et $a^{n+\lambda}$ nata simul sumta sunt $= 0$ siue diuisorem $2n+1$ praebent.

Scholion.

43. Quae de binis residuis sociis super sunt obseruata, quorum productum vnitate superat multiplum diuisoris, ea hic ita sunt disposita, vt a medio, quod est -1 vel $2n$ aequidistent. Si enim r et s sint residua ex potestatibus $a^{n+\nu}$ et $a^{n-\nu}$ nata; productum rs erit residuum ex potestate a^{2n} natum, quod cum sit vnitas, erit $rs = 1$ vel $1 + m(2n+1)$. Ipsum autem residuum medium -1 seu $2n$ sibi ipsum est socium, omnino vti primum $+1$ se ipsum habet pro socio. Reliqua residua

sidua sociata omnia sunt inaequalia, et quocunque proposito r, alterum sibi socium s erit $= \frac{1 + m(2n+1)}{r}$; semper enim m ita definire licet, vt $m(2n+1)+1$ per r diuisionem admittat, siquidem, vti assumimus $2n+1$ fuerit numerus primus, et r numerus ipso minor, vel saltem ad eum primus. Quemadmodum autem in nostra serie residua sunt disposita; cuiusque socium expedite reperitur, cum ambo a medio -1 aequidistent.

Theorema.

44. Si diuisor fuerit numerus quicunque primus P, tot dantur radices primitiuae, quot reperiuntur numeri ad $P-1$ primi eoque minores, quandoquidem tantum radices diuisore minores consideramus.

Demonstratio.

Ponamus $P-1=Q$, et cum certe detur radix primitiua, sit ea $=a$, ita vt a^Q sit minima potestas ipsius a per P diuisa vnitatem relinquens. Tum vero sit n numerus quicunque primus ad Q, ac potestas a^n per diuisorem P diuisa relinquat residuum b, quod vtique ab a erit diuersum; eritque b itidem radix primitiua, seu quod eodem redit ipsa potestas a^n vti radix primitiua spectari potest. Ad quod demonstrandum ostendi debet in progressione Geometrica

$$1, a^n, a^{2n}, a^{3n}, \ldots \ldots a^{Qn}$$

ante

ante terminum a^{Qn} nullum occurrere, qui per P diuisus vnitatem relinquat. Iam quia a eſt radix primitiua, nullae aliae eius poteſtates per P diuiſae vnitatem relinquunt, niſi quarum exponentes ſint vel Q, vel 2 Q, vel 3 Q vel multiplum quodcunque ipſius Q, vnde quidem manifeſtum eſt poteſtatem a^{Qn} vnitatem relinquere. Simul vero patet, quia numerus n ad Q eſt primus, nullum multiplum ipſius n minus quam Qn ſimul eſſe multiplum ipſius Q, ſi enim mn exiſtente $m < Q$ eſſet multiplum ipſius Q puta $= k$Q, ob $mn = k$Q foret $m : Q = k : n$, ideoque numeri n et Q non forent inter ſe primi. Quare cum in ſuperiori progreſſione geometrica ante terminum a^{Qn} nullus alius occurrat, qui per diuiſorem P diuiſus vnitatem relinquat, ſeries reſiduorum inde nata Q terminos diverſos complectetur eritque propterea completa; et a^n ſeu reſiduum inde natum b erit radix primitiua. Cum igitur ex quolibet numero n ad Q ſeu P − 1 primo obtineatur radix primitiua, admiſſa vna ſaltem primitiua a, manifeſtum eſt, ſemper tot dari radices primitiuas, quot dantur numeri ad numerum Q = P − 1 primi, eoque minores, quandoquidem radices maiores ab hac conſideratione excludimus.

Coroll. 1.

45. Pro diuiſore ergo P = 3 et Q = 2, vnica datur radix primitiua 2 ex poteſtate a^1 nata; pro diuiſore P = 5 et Q = 4 duae dantur 2 et 3 ex

ex poteſtatibus a^1 et a^5 natae. Pro diuiſore $P = 7$ et $Q = 6$, iterum duae dantur 3 et 5 ex poteſtatibus a^1 et a^5 natae. Pro diuiſore $P = 11$ et $Q = 10$, ad quem numerum Q primi ſunt 1, 3, 7, 9 radices primitiuae ſunt 2, 8, 7, 6 ex poteſtatibus a^1, a^3, a^7, a^9 natae, vti ex ſeriebus reſiduorum completis §. 38. allatis perſpicitur.

Coroll. 2.

46. Pro quouis ergo diuiſore primo P multitudo radicum primitiuarum multitudini numerorum ad numerum $Q = P - 1$ primorum eoque minorum eſt aequalis, ideoque ex compoſitione numeri Q eſt iudicanda. Ita ſi fuerit $Q = \alpha^\lambda\, \beta^\mu\, \gamma^\nu$ etc. exiſtentibus α, β, γ, etc. numeris primis, conſtat numerum radicum primitiuarum fore =

$$\alpha^{\lambda - 1}(\alpha - 1).\, \beta^{\mu - 1}(\beta - 1).\, \gamma^{\nu - 1}(\gamma - 1)\text{ etc.}$$

Coroll. 3.

47. Ipſi autem numeri ad Q primi facile reperiuntur, dum ex numeris omnibus ipſo Q minoribus expunguntur ii, qui ad Q ſunt compoſiti: qui enim reſtant, inter quos ſemper vnitas reperitur, erunt ad Q primi.

Scholion.

48. Ex data theorematis demonſtratione autem ſimul intelligitur, plures non dari radices primitivas, quam aſſignauimus. Sumta enim quacunque alia poteſtate radicis primitiuae iam cognitae a puta a^m, cuius

cuius exponens m non ſit primus ad Q, ſed cum Q communem habeat diuiſorem, qui ſit d, vt tam $\frac{Q}{d}$ quam $\frac{m}{d}$ ſit numerus integer; in progreſſione geometrica $1, a^m, a^{2m}, a^{3m}, a^{4m}$ occurret poteſtas, cuius ſcilicet exponens $= \frac{Q}{d} m$, antequam ad a^{Qm} perueniatur, qui cum ſit quoque $= \frac{m}{d} Q$ ideoque multiplum ipſius Q, ex ea poteſtate iam orietur reſiduum 1, ac propterea ſeries reſiduorum prodibit incompleta. Talis ergo poteſtas a^m ſeu reſiduum inde reſultans certe non erit radix primitiua.

Coroll. 4.

49. Si reſiduum r praebeat radicem primitiuam, etiam eius ſocium s dabit radicem primitiuam. Poſito enim diuiſore primo $P = 2n + 1$ vt ſit $Q = 2n$, ſit $a^{n-\lambda}$ poteſtas praebens reſiduum r, et ſocium s reſultat ex poteſtate $a^{n+\lambda}$. Euidens autem eſt ſi $n - \lambda$ fuerit ad $Q = 2n$ primus, tum etiam exponentem alterum $n + \lambda$ fore ad Q primum.

Scholion.

50. Haud abs re fore arbitror, ſi pro ſimplicioribus diuiſoribus primis P tam numeros ad $Q = P - 1$ primos, quam radices primitiuas iis reſpondentes conſpectui expoſuero:

Diuisor primus	
3	1 ad 2 primus 2 radix primitiua
5	1, 3 primi ad 4 2, 3 Rad. prim.
7	1, 5 primi ad 6 3, 5 Rad. prim.
11	1, 3, 7, 9 primi ad 10 2, 8, 7, 6 Rad. prim.
13	1, 5, 7, 11 primi ad 12 2, 6, 11, 7 Rad. prim.
17	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 primi ad 16 3, 10, 5, 11, 14, 7, 12, 6 Rad. prim.
19	1, 5, 7, 11, 13, 17 primi ad 18 2, 13, 14, 15, 3, 10 Rad. prim.
23	1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 17, 19, 21 primi ad 22 5, 10, 20, 17, 11, 21, 19, 15, 7. 14 Rad. prim.
29	1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 27 primi ad 28 2, 8, 3, 19, 18, 14, 27, 21, 26, 10, 11, 15 Rad. prim.
31	1, 7, 11, 13, 17, 19. 23, 29 primi ad 30 3, 17, 13, 24, 22, 12, 11, 21 Rad. prim.
37	1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35 primi ad 36 2, 32, 17, 13, 15, 18, 35, 5, 20, 24, 22, 19 Rad. prim.

Nullam autem hic inter quemque numerum primum et radices primitiuas ipsi conuenientes relationem deprehendere licet, ex qua pro quouis diuisore primo saltem vnica radix primitiua colligi posset ;

ſet; atque adeo ordo inter iſtas radices aeque abſconditus videtur, ac inter ipſos numeros primos.

Theorema.

51. Si numeri quadrati per quempiam diuiſorem primum P diuidantur, reſidua inde orta, niſi ſint o, in ſerie reſiduorum completa poteſtatibus parium exponentum reſpondent.

Demonſtratio.

Sit pro diuiſore primo P radix quaedam primitiua a, vt haec progreſſio geometrica

$$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7 \text{ etc.}$$

ſeriem reſiduorum completam praebeat, in qua omnes numeri diuiſore minores occurrant. Sit iam xx quadratum quodcunque per P diuidendum, et r reſiduum ex diuiſione radicis x ortum, vt ſit $x = mP + r$; ac ſi $r = 0$, ſeu x multiplum diuiſoris P, etiam reſiduum ex quadrato xx natum erit $= 0$, quos caſus, cum per ſe ſint perſpicui, hic non conſideramus. At ſi r ſit numerus quicunque diuiſore P minor, quia in ſerie reſiduorum completa certe continetur, ex certa quadam poteſtate ipſius a, quae ſit a^λ naſcatur neceſſe eſt, tum autem reſiduum ex diuiſione quadrati xx oriundum conueniet cum eo, quod ex diuiſione poteſtatis $a^{2\lambda}$ naſcitur; ſicque ex diuiſione quadratorum alia reſidua reſultare nequeunt, niſi quae ex poteſtatibus formae $a^{2\lambda}$, hoc eſt, quarum exponentes ſunt numeri pares, oriuntur.

Coroll. 1.

52. Reſidua ergo, quae ex diuiſione quadratorum per diuiſorem primum P naſcuntur, conuenient cum iis reſiduis, quae ex hac progreſſione geometrica naſcuntur

$1, a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}, a^{12}$ etc.

exiſtente a radice primitiua.

Coroll. 2.

53. Si ergo diuiſor primus ſit $P = 2n + 1$, quam formam omnes numeri primi praeter binarium habent, quia 2 non eſt numerus primus ad $P - 1 = 2n$, etiam a^2 non erit radix primitiua, ideoque ſeries reſiduorum ex quadratis oriunda non erit completa.

Coroll. 3.

54. Quia autem a^{2n} eſt minima poteſtas radicis a vnitatem relinquens, multitudo reſiduorum, quae ex numeris quadratis reſultare poſſunt, certo eſt $= n$, cyphra excluſa totidemque numeri nunquam poſſunt eſſe reſidua quadratorum, quos proinde *non-reſidua* appellaui.

Scholion 1.

55. Hoc etiam ex ſerie reſiduorum completa facillime perſpicitur, quae ſi progreſſioni geometricae ſubſcripta fuerint

$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7 \ldots\ldots a^{2n}$
$1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta \ldots\ldots 1$ ex

ex diuiſione quadratorum naſcitur haec ſeries reſiduorum

$$1, \beta, \delta, \zeta \ldots\ldots 1$$

quorum multitudo manifeſto eſt ſemiſſis illorum, quoniam ſerie etiam continuata eadem eodem ordine recurrunt.

Hinc vti reſidua quadratorum ſunt $1, \beta, \delta, \zeta$ etc. ita *non-reſidua* erunt $\alpha, \gamma, \varepsilon, \eta$ etc. numero totidem, niſi ſcilicet binarius pro diuiſore primo accipiatur. Quare cum ex ſerie quadratorum $1, 4, 9, 16$ vsque ad $4nn$ continuata omnia reſidua diuerſa oriri debeant, horumque quadratorum numerus ſit $2n$, reſiduorum vero numerus tantum $= n$, neceſſe eſt ex binis horum quadratorum aequalia reſidua naſci, quod adeo per ſe eſt perſpicuum, cum quadrata bb et $(2n + 1 - b)^2$ per diuiſorem $2n + 1$ diuiſa idem reſiduum relinquant.

Scholion.

56. Simili modo oſtendi poteſt, reſidua, quae ex diuiſione cuborum naſcuntur, non diſcrepare ab iis, quae progreſſioni geometricae $1, a^3, a^6, a^9, a^{12}$ etc. conueniunt, denotante a ſemper radicem primitiuam: Atque in genere ſi poteſtates numerorum quaecunque:

$$1,\ 2^\lambda,\ 3^\lambda,\ 4^\lambda,\ 5^\lambda,\ 6^\lambda,\ 7^\lambda \text{ etc.}$$

per numerum primum P diuidantur, reſidua inde oriunda eadem erunt atque ea, quae ex hac progreſſione geometrica naſcuntur:

$$1,\ a^\lambda,\ a^{2\lambda},\ a^{3\lambda},\ a^{4\lambda},\ a^{5\lambda},\ a^{6\lambda} \text{ etc.}$$

exiſten-

existente a radice primitiua pro diuisore primo P; vnde patet, si exponens λ fuerit numerus ad $P-1$ primus, seriem residuorum fore completam; at si exponens λ ad $P-1$ non sit primus, ac maximus eorum communis diuisor fuerit $= d$, tum vtique in residuis non omnes numeri occurrent, sed tot tantum, vt eorum multitudo sit $= \frac{P-1}{d}$, cuius ratio ex hactenus allatis satis est manifesta. Sed antequam altiores potestates accuratius scrutemur, quasdam insignes proprietates circa residua quadratorum explicasse iuuabit.

Theorema.

57. Diuisore primo posito $P = 2n + 1$ in residuis quadratorum occurret numerus -1 seu $2n$, quoties n fuerit numerus par; sin autem n sit numerus impar, tum -1 seu $2n$ certe non reperietur in residuis, sed erit *non-residuum.*

Demonstratio.

Cum progressio geometrica $1, a^2, a^4, a^6, a^8$ etc. omnia producat residua quadratorum, euidens est in ea occurrere terminum a^n si quidem n sit numerus par, at supra vidimus potestatem a^n semper dare residuum -1 seu $2n$; ex quo manifestum est, quoties n fuerit numerus par, toties in residuis quadratorum reperiri -1 seu $2n$, contra vero si n fuerit impar, $2n$ seu -1 erit non-residuum.

Coroll.

Coroll. 1.

58. Pro omnibus ergo diuiforibus primis formae $4n+1$ in refiduis quadratorum certe occurrit -1 feu $4n$, et cum productum ex binis refiduis iterum fit refiduum, fi refiduum quodcunque fuerit α, etiam $-\alpha$ in refiduis reperietur: fcilicet cuiusque refidui complementum quoque eft refiduum.

Coroll. 2.

59. Pro diuiforibus autem primis formae $4n-1$, in refiduis quadratorum certe non occurrit -1 fed erit *non-refiduum*; hinc cum productum ex refiduo et non-refiduo femper fit *non-refiduum*, omnium refiduorum complementa erunt *non-refidua*.

Theorema.

60. Propofito numero primo formae $4n+1$ femper fumma duorum quadratorum ad eum primorum exhiberi poteft, quae fit per eum diuifibilis atque alterum quidem quadratum pro lubitu accipere licet.

Demonftratio.

Sumto enim quadrato quocunque bb, quod per $4n+1$ diuifum relinquat refiduum β, dabitur femper aliud quadratum xx quod per $4n+1$ diuifum relinquet refiduum $-\beta$ feu $4n+1-\beta$, ex quo fumma horum duorum quadratorum $bb+xx$ per numerum primum $4n+1$ diuifibilis fit ne-

 ceffe

cesse est; et cum neutrum per se diuisionem admittat, ea vtique ad $4n+1$ erunt prima.

Coroll. 1.

61. Euidens quoque est quadratum xx infinitis modis accipi posse, cum omnia quadrata in hac forma $(m(4n+1)\pm x)^2$ idem residuum, quod xx praebeant: vnde pro x dabitur valor non solum minor quam $4n+1$, sed etiam minor eius semisse $\frac{4n+1}{2}$ seu minor quam $2n+1$.

Coroll. 2.

62. Semper ergo tales summae binorum quadratorum:

$1+pp$, $4+qq$, $9+rr$, $16+ss$, $25+tt$ etc.

exhiberi possunt, quae omnes sint per numerum primum $4n+1$ diuisibiles; atque ita vt singulorum radices sint minores quum $2n+1$.

Coroll. 3.

63. Cum multitudo numerorum minorum quam $2n+1$ sit $=2n$ ac semper bina quadrata disparia iungantur, multitudo harum formularum erit n: et quia talis summa binorum quadratorum minor est quam $2(2n+1)^2 = 8nn+8n+2$, quotus erit minor quam $2n+\frac{3}{2}$ seu $2n+2$.

Scholion.

64. Quo has summas binorum quadratorum pro quouis numero primo formae $4n+1$ facilius elice-

elicere queamus, residua ex quadratis orta pro simplicioribus apponamus:

num. primi formae $4n+1$	Quadrata
	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256 etc.
	Residua
5	1, −1, −1, 1, 0
13	1, 4, −4, 3, −1, −3, −3, −1, 3, −4, 4, 1, 0
17	1, 4. −8, −1, 8, 2, −2, −4, −4, −2, 2, 8, −1, −8, 4, 1
29	1, 4, 9, −13, −4, 7, −9, 6, −6, 13, 5, −1, −5, −7, −7, −5
37	1, 4, 9, 16, −12, −1, 12, −10, 7, −11, 10, −4, −16, 11. 3, −3, −7, −9, −9.

Hinc pro his diuisoribus formae $4n+1$ sequentes habebimus binorum quadratorum summas per eos diuisibiles:

Diuisor 5 1

$\frac{4}{5}$ quotus 1.

Diuisor 13			
	1	4	16
	25	9	36
summa	26	13	52
quotus	2	1	4

Diuisor 17 ...				
	1	4	9	36
	16	64	25	49
summa	17	68	34	85
quotus	1	4	2	5

Diuisor 29 ...							
	1	4	9	16	36	64	121
	144	25	49	100	196	81	169
summa ..	145	29	58	116	232	145	290
quotus	5	1	2	4	8	5	10

 Diui-

Diuisor 37 . . .	1	4	9	16	25	64	81	100	225
	36	144	324	169	49	121	289	196	256
summa	37	148	333	185	74	185	370	296	481
quotus	2	4	9	5	2	5	10	8	13.

Si igitur demonstrari posset in his quotis semper vnitatem reperiri, haberetur demonstratio completa Theorematis Fermatiani, quod omnis numerus primus formae $4n+1$ sit summa duorum quadratorum. Quoniam vero alibi demonstraui summam duorum quadratorum inter se primorum alios diuisores non admittere, nisi qui ipsi sint summae duorum quadratorum, demonstratio iam pro absoluta est habenda, quae multo concinnior est ea, quam olim per plures ambages elicueram. Sin autem simul perpendamus, in quotis illis nullos numeros primos formae $4n-1$ occurrere posse, vti mox demonstrabitur, haec demonstratio forte multo magis contrahi poterit.

Theorema.

65. Nulla summa duorum quadratorum inter se primorum per vllum numerum primum formae $4n-1$ diuisibilis existit.

Demonstratio.

Quia sumto quocunque quadrato bb, quod per $4n-1$ diuisum praebeat residuum $\mathfrak{E}$, numerus $-\mathfrak{E}$ seu $4n-1-\mathfrak{E}$ ex residuis quadratorum prorsus excluditur (58) nullum datur quadratum quod ipsi bb addi-

additum summam producat per numerum primum $4n - 1$ diuisibilem.

Coroll. 1.

66. Summa ergo duorum quadratorum nullum diuisorem admittit formae $4n - 1$; etiamsi hic diuisor non sit primus, quoniam tum inter eius factores semper vnus saltem primus formae $4n - 1$ contineretur; nisi forte ambo quadrata seorsim per eum fuerint diuisibilia.

Coroll. 2.

67. Quando ergo summa duorum quadratorum per numerum primum formae $4n + 1$ est diuisibilis, quotus inde resultans neque erit formae $4n - 1$, neque vllum habebit factorem primum huius formae, nisi forte ambo quadrata huiusmodi habuerint communem diuisorem, quo casu quotus adeo quadratum talis numeri contineret.

Coroll. 3.

68. Ex ordine quotorum ergo, qui supra ex diuisione summae binorum quadratorum per numerum primum formae $4n + 1$ sunt orti, excluduntur hi numeri

3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31 etc.

ac propterea relinquuntur isti tantum:

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32 etc.

Problema.

69. Si omnes numeri cubici $1, 2^3, 3^3, 4^3$ etc. per numerum quemcunque primum P diuidantur, inueſtigare indolem reſiduorum, quae inde naſcentur.

Solutio.

Sit a radix primitiua reſpectu diuiſoris primi P, et cum progreſſio geometrica $1, a, a^2, a^3, a^4$ etc. ſeriem reſiduorum completam exhibeat, quilibet numerus x per P diuiſus idem dabit reſiduum, quod quaepiam poteſtas ipſius a quae ſit a^λ. Hinc eius numeri cubus x^3 idem dabit reſiduum quod poteſtas $a^{3\lambda}$ vnde ex cubis eadem naſcentur reſidua, atque ex progreſſione geometrica:

$$1, a^3, a^6, a^9, a^{12}, a^{15} \text{ etc.}$$

ac ſumto λ ita vt 3λ ſit vel $P-1$ vel eius multiplum; poteſtas $a^{3\lambda}$ vnitatem relinquet. Quare ſi pro λ minimus numerus accipiatur, cuius triplum ſit per $P-1$ diuiſibile, numerus λ ſimul multitudinem omnium reſiduorum diuerſorum, quae ex diviſione cuborum reſultare poſſunt, indicabit.

Cum iam omnis numerus primus ſit vel formae $3n+1$ vel $3n+2$, pro vtraque forma iudicium ſeorſim eſt inſtituendum.

I. Sit ergo $P=3n+1$, et quia $P-1=3n$, fiet $\lambda=n$, et reſidua cuborum omnia ex hac progreſſione geometrica naſcentur:

$$1, a^3, a^6, a^9 \ldots\ldots . a^{3n-3}$$

quia

quia ſequens terminus a^{3n} iterum vnitatem producit. Hinc non plures quam n numeri in reſiduis occurrent ac reliqui duplo plures excluduntur, eruntque non reſidua.

II. Si diuiſor primus ſit $P = 3n + 2$, ideoque $P - 1 = 3n + 1$ minor numerus pro λ accipi nequit, quam $\lambda = 3n + 1$, vt 3λ pro $P - 1$ fiat diuiſibile, vnde omnia reſidua diuerſa ex hac progreſſione geometrica naſcentur:

$$1, a^3, a^6, a^9 \ldots\ldots a^{9n}$$

quorum numerus cum ſit $= 3n + 1$, in reſiduis omnes plane numeri diuiſore P minores occurrent, nullique excluduntur, ſeu nulla dabuntur *non-reſidua*.

Coroll. 1.

70. Si ergo diuiſor primus P fuerit formae $3n + 1$, cuiusmodi numeri ſunt:

7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97 etc.

in reſiduis cuborum tantum n numeri diuerſi occurrunt indeque $2n$ numeri excluduntur.

Coroll. 2.

71. Quare ſi haec cuborum progreſſio

$$1, 2^3, 3^3, 4^3 \ldots\ldots (3n)^3$$

vnde omnia reſidua diuerſa prodire debent, per numerum primum $3n + 1$ diuidantur, quia terminorum numerus eſt $= 3n$, quodlibet reſiduum ter occurrat neceſſe eſt, ſeu ſemper terni cubi, minores

qoum

quam $(3n)^3$, exhiberi poſſunt qui idem reſiduum producant.

Scholion. 1.

72. Reſpectu ergo cuborum numeri primi formae $3n+1$ praecipue notari merentur; operaeque pretium erit reſidua in caſibus ſimplicioribus notaſſe:

Diu. pr. $3n+1$	$1, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3, 11^3, 12^3, 13^3, 14^3, 15^3, 16^3, 17^3, 18^3$ Reſidua
7	$1, 1, -1, 1, -1, -1, 0$
13	$1, -5, 1, -1, -5, -5, 5, 5, 1, -1, +5, -1, 0$
19	$1, 8, 8, 7, -8, 7, 1, -1, 7, -7, 1, -1, -7, 8, -7, -8, -8, -1, 0$

vbi manifeſto quoduis reſiduum ter occurrit; totiesque idem ſigno $-$ affectum: cuius ratio inde eſt perſpicua, quod poſtremus cuiusque ordinis cubus $(3n)^3$ pro reſiduo dat -1, et producta ex binis reſiduis ſemper quoque inter reſidua reperiantur. Cum igitur praeter cubum $(3n)^3$ ſemper dentur duo minores pariter reſiduum -1 habentes, qui ſint f^3 et g^3, erunt formulae $1+f^3$ et $1+g^3$ per $3n+1$ diuiſibiles, et quia neque $1+f$ neque $1+g$ diuiſionem admittit, neceſſe eſt vt hae $1-f+ff$ et $1-g+gg$ ſint diuiſibiles; vbi quidem obſeruare licet ſemper eſſe debere $g=-ff$ vel $g=m(3n+1)-ff$ quia tum fit $1+g^3=1-f^6$, quae aeque ac $1+f^3$ eſt diuiſibilis.

Scholion 1.

73. Sint f^3, g^3, h^3 terni cubi minores quam $(3n+1)^3$, qui per numerum primum $3n+1$ diuiſi

diuisi idem relinquant residuum, et quia binorum differentiae g^3-f^3, h^3-f^3 et h^3-g^3 diuisionem admittunt dum factores $g-f$, $h-f$, $h-g$ diuisore sunt minores, hae tres formae $ff+fg+gg$, $ff+fh+hh$, $gg+gh+hh$ singulae per $3n+1$ diuisibiles sint necesse est, hincque etiam binarum differentiae $hh-gg+fh-fg=(h-g)(f+g+h)$. Vnde patet quoque summam radicum $f+g+h$ per diuisorem $3n+1$ esse diuisibilem: quae proprietas illi est analoga, qua inuenimus si bina quadrata ff et gg per numerum quempiam primum P diuisa idem residuum relinquant, dum ambo sunt minora quam P^2, tum summam radicum $f+g$ per P esse diuisibilem. Pro casu nostro trium cuborum erit quoque

$$h(ff+fg+gg)-g(ff+fh+hh)=ff(h-g)-gh(h-g)$$

ideoque formula $ff-gh$ per $3n+1$ diuisibilis, similique modo $gg-fh$ et $hh-fg$; hinc istas duas formulas ab illa $gg+gh+hh$ auferendo relinquitur haec $fg+fh+gh$ pariter per $3n+1$ diuisibilis; et haec combinatio $(ff+fg+gg)+(hh-fg)$ praebet hanc $ff+gg+hh$ itidem per $3n+1$ diuisibilem. Quocirca hoc habebimus Theorema satis memorabile.

Theorema.

74. Si f^3, g^3, h^3 fuerint terni cubi minores quam $(3n+1)^3$, qui per numerum primum $3n+1$ diuisi idem relinquant residuum, tum sequentes formulae

$f+g+h$; $fg+fh+gh$; $ff+gg+hh$ singulae diuisionem per $3n+1$ admittent.

Coroll.

75. Ita pro diuisore 19 videmus hos tres cubos 4^3, 6^3 et 9^3 idem residuum 7 dare; vnde ob $f=4$, $g=6$, $h=9$ fit $f+g+h=19$; $fg+fh+gh=114=6.19$ et $ff+gg+hh=133=7.19$.

Theorema.

76. Semper numeri huius formae $pp+3qq$ exhiberi possunt per numerum primum huius formae $3n+1$ diuisibiles. At vero nulla eiusmodi datur formula $pp+3qq$, quae per vllum numerum primum huius formae $3n-1$ sit diuisibilis.

Demonstratio.

Si $3n+1$ est numerus primus, tum tres adeo cubi f^3, g^3, h^3 quorum radices ipso sunt minores, exhiberi possunt, qui per $3n+1$ diuisi idem residuum relinquant; vnde g^3-f^3 per $3n+1$ diuisionem admittet hincque etiam $ff+fg+gg$. At haec forma est vel $(f+\frac{1}{2}g)^2+3(\frac{1}{2}g)^2$ si g sit numerus par, vel $(\frac{1}{2}f+g)^2+3(\frac{1}{2}f)^2$ si f sit par, vel $(\frac{f-g}{2})^2+3(\frac{f+g}{2})^2$, si ambo sint impares, vnde forma $ff+fg+gg$ semper ad hanc $pp+3qq$ reducitur.

At si $3n-1$ sit diuisor primus, omnes cubi, quorum radices ipso sunt minores, diuersa praebent

bent residua, neque ergo binorum differentia, vel numerus huius formae $ff + fg + gg$ exhiberi potest, qui per $3n - 1$ diuidi posset; quod proinde etiam de numeris huius formae $pp + 3qq$ locum habet. Atque hoc adeo de omnibus numeris formae $3n - 1$ valet, quoniam si non fuerint primi, factorem saltem primum istius formae inuoluunt.

Coroll. 1.

77. Si igitur forma $pp + 3qq$ per numerum primum $3n + 1$ sit diuisibilis, et quadratum qq per eundem diuisum relinquat residuum γ, alterum quadratum pp relinquet residuum -3γ. Vnde si omnes numeri quadrati per numerum primum $3n + 1$ diuidantur, in residuis certe reperitur -3 vel $3n - 2$.

Coroll. 2.

78. Sin autem omnes numeri quadrati per numerum primum formae $3n - 1$ diuidantur, in serie residuorum certe non erit numerus -3; ideoque -3 vel $3n - 4$ erit non-residuum.

Scholion.

79. Hinc si numeri quadrati per numerum quemcunque primum diuidantur, de binis numeris $+3$ et -3 iudicari poterit, vtrum in ordine residuorum an *non-residuorum* occurrant. Omnes enim numeri primi praeter 2 et 3 qui hic non spectantur in aliqua harum quatuor formarum continentur:

$12m + 1$ $12m + 5$; $12m + 7$; $12m + 11$

quas singulas contemplemur.

I. Si diuisor primus sit formae $12m+1$, quatenus haec forma est $4n+1$, tam $+1$ quam -1 erit residuum; quatenus vero est $3n+1$, residuum quoque erit -3, hincque etiam $+3$. Hoc ergo in ordine residuorum occurrent $+3$ et -3

II. Si diuisor primus sit formae $12m+5$, quatenus haec forma est $4n+1$, in residuis erunt $+1$ et -1; quatenus vero est $3n-1$ in residuis non reperitur -3, seu -3 erit non-residuum, hincque etiam $+3$. Quare hoc casu neuter numerorum $+3$ et -3 inter residua reperietur.

III. Si diuisor primus sit formae $12m+7$, quatenus haec forma est $4n-1$ erit -1 non-residuum, quatenus vero est $3n+1$ erit -3 residuum, ideoque $+3$ non-residuum. Vnde hoc casu erit -3 residuum at $+3$ non-residuum.

IV. Si diuisor primus sit formae $12m+11$, quatenus haec forma est $4n-1$, erit -1 non-residuum, quatenus vero est formae $3n-1$ erit quoque -3 non-residuum, vnde $+3$ vtpote productum ex duobus non-residuis inter residua occurret. Quare hoc casu erit $+3$ residuum at -3 non-residuum.

Ad hanc ergo egregiam proprietatem consideratio cuborum nos perduxit, quae via cum satis sit obliqua, alia magis naturalis maxime desideratur.

Proble-

Problema.

80. Si omnes poteſtates quartae per numerum quemcunque primum P diuidantur, inueſtigare indolem reſiduorum, quae inde naſcentur.

Solutio.

Poſita a radice primitiua reſpectu diuiſoris P, vt a^{P-1} ſit infima poteſtas vnitatem relinquens, ac reſidua quaeſita orientur quoque ex hac progreſſione geometrica $1, a^4, a^8, a^{12}, a^{16}$ etc. eousque continuanda, donec exponens per $P-1$ fiat diuiſibilis, quod ſi eueniat in exponente 4λ, erit λ multitudo reſiduorum.

I. Sit diuiſor primus $P = 4n+1$, vt ſit $P-1 = 4n$; vnde vt 4λ per $4n$ diuidi queat, erit $\lambda = n$, hocque caſu reſidua quaeſita omnia ex hac progreſſione geometrica naſcentur

$$1, a^4, a^8, a^{12} \ldots\ldots\ldots a^{4n-4}$$

quorum multitudo eſt n.

II. Sit diuiſor primus $P=4n+3$, vt ſit $P-1 = 4n+2$; vnde ſumi debet $\lambda = 2n+1$, et haec progreſſio geometrica

$$1, a^4, a^8, a^{12} \ldots\ldots\ldots a^{8n}$$

dabit omnia reſidua quaeſita; cum, autem a^{4n+2} vnitatem relinquat vti a^0, termini

$$a^{4n+4}, a^{4n+8}, a^{4n+12} \text{ etc.}$$

 eadem

eadem residua praebent atque a^2, a^6, a^{10} etc. vnde his interpolatis oritur progressio

$$1,\ a^2,\ a^4,\ a^6,\ a^8\ \ldots\ldots\ldots\ a^{2n}$$

quae eadem residua dat, ac progressio numerorum quadratorum. Ex biquadratis ergo hoc casu eadem plane residua omnia nascuntur atque ex ipsis quadratis.

Coroll. 1.

81. Si ergo numeri biquadrati per numerum primum formae $4n+1$ diuidantur, tantum n residua diuersa oriuntur, vnde semper quaterna biquadrata dantur p^4, q^4, r^4, s^4, quorum radices diuisore sunt minores, quae per $4n+1$ diuisa idem praebeant residuum; vbi quidem perspicuum est fore $s=-p$ et $r=-q$ seu quod eodem redit $s=4n+1-p$ et $r=4n+1-q$. Hinc istae formulae $p+q+r+s$; $p^2+q^2+r^2+s^2$ et $p^3+q^3+r^3+s^3$ per $4n+1$ erunt diuisibiles.

Coroll. 2.

82. Quaterna ergo biquadrata, quae per numerum primum $4n+1$ diuisa vnitatem relinquent, erunt valores ipsius x, quibus formula x^4-1 per $4n+1$ fit diuisibilis, vnde primo est $x=1$, tum si alius valor sit $x=b$, erit quoque $x=b^2$ et $x=b^3$; neque vltra progredi opus est, quia b^4 vnitati aequiualet.

Coroll. 3.

83. Cum potestas a^{2n} per $4n+1$ residuum det -1, patet si n sit numerus par, in residuis biqua-

biquadratorum ſemper reperiri -1, et quoduis reſiduum quoque ſigno $-$ affectum occurrere; quod ergo euenit, ſi diuiſor primus ſit formae $8m+1$; ſin autem ſit formae $8m+5$, tum -1 erit non-reſiduum.

Coroll. 4.

84. Si ergo diuiſor primus ſit formae $8m+1$, pro quouis biquadrato b^4 ſemper dabitur aliud p^4, vt ſumma b^4+p^4 ſit per $8m+1$ diuiſibilis, atque adeo quaterna huiusmodi biquadrata p^4 aſſignari poterunt, quorum radices diuiſore ſint minores, ſin autem diuiſor ſit formae $8m+5$, tum nulla ſumma binorum biquadratorum per eum diuiſibilis exhiberi poteſt.

Scholion.

85. Cum ſumma binorum biquadratorum ſit $b^4+p^4=(bb-pp)^2+2(bp)^2$ itemque $b^4+p^4=(bb+pp)^2-2(bp)^2$, pro quouis diuiſore primo formae $8m+1$, numeri tam huius formae $xx+2yy$ quam huius $xx-2yy$ exhiberi poſſunt per $8m+1$ diuiſibiles, vnde ſi numeri quadrati per talem numerum primum $8m+1$ diuidantur, in reſiduis occurrent numeri $+2$ et -2. Cum igitur demonſtrari poſſit, numeros huius formae $xx+2yy$ alios diuiſores non admittere, niſi qui ipſi ſint eiusdem formae, hinc ſequitur, omnes numeros primos formae $8m+1$ ſimul in forma $xx+2yy$ contineri. Quod eſt inſigne Theorema Fermatii, cuius demonſtrationem nunc primum mi-

hi

hi cruere contigit Huic autem aliud affine Fermatius proposuit, quod etiam omnes numeri primi huius formae $8m+3$ in eadem forma $xx+2yy$ contineantur, cuius demonstrationem ex hac speculatione petere non licet, sequentem ergo ab amico mecum communicatam hic apponam.

Theorema.

85. Nullus numerus huius formae $2pp-qq$, siquidem p et q sint numeri inter se primi, vllum admittit diuisorem siue huius formae $8m+3$ siue huius $8m-3$.

Demonstratio.

Si numerorum p et q ambo sint impares, numerus $2pp-qq$ habebit formam $8n+1$, sin p sit par et q impar, formam habebit $8n-1$; sin autem p sit impar et q par $=2r$, forma erit $2(pp-2rr)$, ideoque vel $2(8n+1)$ vel $2(8n-1)$; semissis vero $pp-2rr$ iterum in forma $2pp-qq$ continetur, cum sit $pp-2rr=2(p+r)^2-(p+2r)^2$. Hoc praemisso si forma $2pp-qq$ diuisorem haberet $8m\pm3$, per eundem diuisibilis esset numerus formae $8n\pm1$, quotusque ergo foret iterum formae $8m\pm3$, atque minor diuisore; quoniam p et q non solum diuisore, sed etiam eius semisse minores statuere licet. Cum igitur forma $2pp-qq$ per quotum ideoque numerum minorem formae $8m\pm3$ esset diuisibilis, vbi iterum p et q infra eius semissem deprimere licet, quotus denuo minor diuisore oriretur, et numeri p et et q ſemper primi inter ſe manerent, ita vt neuter vnquam ad nihilum redigeretur. Tandem ergo ad numerum minimum formae $2pp-qq$ perueniretur, qui foret per numerum formae $8m \pm 3$ hoc eſt vel 3 vel 5 diuiſibilis, quod autem fieri non poſſe per ſe eſt perſpicuum.

Coroll. 1.

87. Quod ſi ergo omnes numeri quadrati per diuiſores primos formae $8m \pm 3$ diuidantur, in reſiduis certe non occurret $+2$, quia alioquin eiusmodi forma $2pp-qq$ diuiſibilis exhiberi poſſet: ideoque pro talibus diuiſoribus erit $+2$ non-reſiduum.

Coroll. 2.

88. Pro diuiſoribus autem primis formae $8m+3$, etiam -1 eſt non-reſiduum, vnde cum producta ex binis non-reſiduis quadratorum tranſeant in reſidua, inter reſidua certe reperietur -2, hincque ſemper numeri formae $2pp+qq$ exhiberi poterunt per numerum primum $8m+3$ diuiſibiles, ex quo numerus primus $8m+3$ ipſe eiusdem formae $2pp+qq$ ſit neceſſe eſt, quod eſt alterum Theorema Fermatii.

Coroll. 3.

89. Pro diuiſoribus autem primis formae $8m-3$, in reſiduis quadratorum reperitur -1, vnde cum productum ex reſiduo in non-reſiduum

 ſit

ſit non-reſiduum, tam $+2$ quam -2 erunt non-reſidua; ideoque neutra harum formarum $2pp+qq$ et $2pp-qq$ vnquam erit diuiſibilis per vllum numerum primum formae $8m-3$.

Scholion 1.

90. Eodem modo demonſtrari poteſt nullum numerum formae $2pp+qq$, quoniam huiusmodi numeri omnes ſunt vel $8n+1$ vel $8n+3$, per vllos numeros formae vel $8m-1$ vel $8m-3$ eſſe diuiſibiles, quoniam quoti eiusdem forent formae et cum ſint diuiſore minores, perueniendum eſſet ad minores numeros $2pp+qq$ qui forent per $8n-1$ vel $8n-3$ hoc eſt per 7 vel 5 diuiſibiles, quod autem euenire nequit. Hinc porro ſequitur pro diuiſoribus primis formae $8m-1$ vel $8m-3$ neceſſario eſſe -2 non-reſiduum: ideoque pro diuiſoribus $8m-1$ erit $+2$ reſiduum, et pro diuiſoribus $8m-3$ non-reſiduum. Quod autem pro diuiſoribus primis formae $8m+1$ tam $+2$ quam -2 in reſiduis quadratorum occurrant, ſimili ratiocinio vix oſtendi poſſe videtur.

Scholion 2.

91. Quae hactenus de reſiduis quadratorum ſunt eruta, vtrum numeri ± 2, ac ſupra etiam ± 3 in iis occurrant nec ne? ita conſpectui expoſuiſſe iuuabit:

Diui-

Diuiſor primus

$4n+1$	$+1$	reſiduum
	-1	reſiduum
$4n-1$	$+1$	reſiduum
	-1	non-reſid.
$8n+1$	$+2$	reſiduum
	-2	reſiduum
$8n-1$	$+2$	reſiduum
	-2	non-reſid.
$8n+3$	$+2$	non-reſid.
	-2	reſiduum
$8n-3$	$+2$	non-reſid.
	-2	non reſid.
$12n+1$	$+3$	reſiduum
	-3	reſiduum
$12n-1$	$+3$	reſiduum
	-3	non-reſid.
$12n+5$	$+3$	non-reſid.
	-3	non-reſid.
$12n-5$	$+3$	non-reſid.
	-3	reſiduum.

Hinc per inductionem vlterius progredi licet hoc modo

Erit	ſi diuiſor primus ſit
$+5$ reſiduum -5 reſiduum	$20n+1$; $20n+9$
$+5$ reſiduum -5 non-reſid.	$20n-1$; $20n-9$

$+5$ non-resid. -5 residuum	$20n+3$; $20n+7$
$+5$ non-resid -5 non-resid.	$20n-3$; $20n-7$
$+7$ residuum -7 residuum	$28n+1, -3, 9$
$+7$ residuum -7 non resid.	$28n-1, +3, -9$
$+7$ non-resid. -7 residuum	$28n+11, +15, +23$
$+7$ non-resid -7 non resid.	$28n+5, +13, +17$
$+11$ residuum -11 residuum	$44n+1, +9, +25, +5, +37,$
$+11$ residuum -11 non-resid.	$44n-1, -9, -25, -5, -37,$
$+11$ non-resid. -11 residuum	$44n+3, +15, +23, +27, +31,$
$+11$ non-resid. -11 non-resid.	$44n+13, +17, +21, +29, +41$

quorum Theorematum demonstrationes scientiam numerorum haud mediocriter promouerent.

Theorema.

92. Si omnium numerorum potestates exponentis λ scilicet

$$1, 2^\lambda, 3^\lambda, 4^\lambda, 5^\lambda, 6^\lambda \text{ etc.}$$

per

per numerum primum formae $\lambda n + 1$ diuidantur, multitudo residuorum diuersorum erit $= n$, ideoque multitudo non-residuorum $= (\lambda - 1) n$.

Demonstratio.

Sit a radix primitiua pro diuisore primo $\lambda n + 1$, cuius ergo potestates omnia plane suppeditant residua, et quilibet numerus diuisore minor x erit residuum certae potestatis a^m, vnde eius potestas x^λ idem praebebit residuum quod $a^{\lambda m}$; quare omnia residua quaesita oriuntur ex hac progressione geometrica:

$$1,\ a^\lambda,\ a^{2\lambda},\ a^{3\lambda},\ a^{4\lambda} \ldots\ldots a^{(n-1)\lambda}$$

quoniam potestas sequens $a^{\lambda n}$ per numerum primum $\lambda n + 1$ diuisa iterum vnitatem relinquit, eaque est minima hoc praestans; ex quo multitudo residuorum inde resultantium est $= n$, et cum multitudo omnium numerorum diuisore minorum sit $= \lambda n$, reliquorum ex serie residuorum exclusorum multitudo erit $= (\lambda - 1) n$.

Coroll. 1.

93. Quare si series potestatum $1, 2^\lambda, 3^\lambda, 4^\lambda$ etc. vsque ad $(\lambda n)^\lambda$ continuetur, in ea semper totidem termini, quot exponens λ continet vnitates, reperientur, qui per numerum primum $\lambda n + 1$ diuisi idem residuum relinquant. Totidem ergo erunt qui vnitatem relinquunt, ac si vnius radix sit $= r$, reliquorum radices erunt

$$r^2,\ r^3,\ r^4 \ldots\ldots r^{\lambda - 1}.$$

Coroll. 2.

94. Semper ergo plures huiusmodi numerorum formae $p^\lambda - q^\lambda$ exhiberi possunt per numerum primum $\lambda n + 1$ diuisibiles, ita vt factor $p - q$ non sit diuisibilis; atque adeo alterum numerorum p et q pro lubitu accipere licet.

Coroll. 3.

95. Si n sit numerus par, in progressione geometrica $1, a^\lambda, a^{2\lambda}$ etc. occurret terminus $a^{\frac{1}{2}n\lambda}$, cui residuum -1 respondet; quare si diuisor primus sit $2m\lambda + 1$ in residuis reperietur -1, sin autem sit $(2m+1)\lambda + 1$ tum -1 erit non-residuum: euidens autem est si λ sit numerus impar, posteriorem formam locum habere non posse.

Scholion 1.

96. Si omnes numerorum potestates quaesitae $1, 2^5, 3^5, 4^5$ etc. per numeros primos formae $5n+1$ qui sunt: 11, 31, 41, 61, 71 etc. diuidantur, tantum n residua diuersa resultabunt, inter quae vtique reperietur -1. Huiusmodi ergo numerorum formae $p^5 \pm q^5$ dabuntur per numerum primum $5n + 1$ diuisibiles, ita factor $p \pm q$ diuisionem non admittat. Hinc alter factor qui est $p^4 \mp p^3 q + p^2 q^2 \mp p q^3 + q^4$ per eundem erit diuisibilis, qui cum sit $(pp \pm \frac{1}{2}pq + qq)^2 - 5(\frac{1}{2}pq)^2$, dabitur huiusmodi forma $ff - 5gg$ per $5n + 1$ diuisibilis; vnde sequitur si quadrata diuidantur per numerum primum formae $5n + 1$, tum inter residua certe

repe-

reperiri $+5$, quod cum coniectura ante allata congruit.

Scholion 2.

97. Simili modo si potestates septimae per numerum primum $7n+1$ diuidantur, dabuntur huiusmodi formae p^7-q^7 seu $p^6+p^5q+p^4q^2+p^3q^3+p^2q^4+pq^5+q^6$ per eum diuisibiles; haec vero expressio reducitur ad hanc formam:

$$(p^3+\tfrac{1}{2}ppq-\tfrac{1}{2}pqq-q^3)^2+7(\tfrac{1}{2}ppq+\tfrac{1}{2}pqq)^2.$$

Vnde semper numeri huius formae $ff+7gg$ exhiberi possunt per numerum primum $7n+1$ diuisibiles Ex quo sequitur si omnia quadrata per numerum primum formae $7n+1$ diuidantur inter residua certe repertum iri -7, quo etiam coniectura supra data confirmatur.

NOVA

NOVA RATIO QVANTITATES IRRATIONALES PROXIME EXPRIMENDI.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Omnem quantitatem irrationalem ſimplicem ad hanc formam $(1+x)^n$ reduci poſſe conſtat, ſiquidem exponens n numerum quemcunque fractum deſignare aſſumatur; quicunque enim numerus N ad exponentem fractum $n = \frac{\mu}{\nu}$ eleuandus proponatur, eum ſemper ad hanc formam $a^\nu + b$ reuocare licet, vnde formula propoſita fit $(a^\nu + b)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^\mu\left(1+\frac{b}{a^\nu}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$; ſicque irrationalibus continetur in expreſſione $\left(1+\frac{b}{a^\nu}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$, quae cum formula propoſita $(1+x)^n$ congruit ponendo $\frac{b}{a^\nu} = x$ et $\frac{\mu}{\nu} = n$. Ac ſi pro a fractiones velimus admittere, ac b aeque negatiue ac poſitiue ſumere, quantitas $\frac{b}{a^\nu}$ hoc modo iam quouis caſu ſatis parua effici poteſt, vnde etiam more conſueto formula $(1+x)^n$ in ſeriem admodum conuergentem reſoluitur.

2. Per

2. Per euolutionem ſcilicet binomii Neutonianam haec formula $(1+x)^n$ duplici modo in ſeriem infinitam conuertitur, primum nempe directe:

$$(1+x)^n = 1 + \tfrac{n}{1}x + \tfrac{n(n-1)}{1.\ 2}x^2 + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \text{etc.}$$

tum vero quia eſt $(1+x)^n = \frac{1}{(1+x)^{-n}}$ erit quoque

$$(1+x)^n = \frac{1}{1 - \frac{n}{1}x + \frac{n(n+1)}{1.\ 2}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \text{etc.}}$$

Hinc vero porro has expreſſiones inuicem multiplicando, et pro $2n$ ſcribendo n deriuabitur tertia expreſſio multo magis conuergens:

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{n}{2}x + \frac{n(n-2)}{2.\ 4}x^2 + \frac{n(n-2)(n-4)}{2.\ 4.\ 6}x^3 + \text{etc.}}{1 - \frac{n}{2}x + \frac{n(n+2)}{2.\ 4}x^2 - \frac{n(n+2)(n+4)}{2.\ 4.\ 6}x^3 + \text{etc.}}$$

3. Attendenti autem facile patebit, infinitas expreſſiones huic poſtremae ſimiles exhiberi poſſe, quae ſingulae aequales ſint formulae propoſitae $(1+x)^n$, ſi enim ponamus:

$$(1+x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + etc.}{1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 + \delta x^4 - \varepsilon x^5 + \zeta x^6 - etc.}$$

determinatio coëfficientium praebet problema indeterminatum, atque adeo ſi vel numerator vel denominator ad lubitum aſſumitur, alterius coëfficientes inde determinantur. Hinc quaeſtio naſcitur maximi momenti, quomodo tam numerator quam denominator determinari debeant, vt ambo ſimul maxime conuergant: atque hic quidem denominatori finitum terminorum numerum tribuere licet, vbi quaeſtio huc redit, quomodo coëfficientes denominatoris aſſumi oporteat, vt pro numeratore reſultet ſeries maxime conuergens.

4. Quodſi autem in denominatore datus terminorum numerus conſtituatur, numerator erit ſeries maxime conuergens, ſi vnus pluresue eius termini ſe ordine excipientes plane euaneſcant; tum enim ſequentes termini tam fient exigui, ſi quidem fuerit $x < 1$, vt ſine notabili errore reiici queant. Atque hic notari conuenit, ſi pro denominatore ſumatur binomium $1 - \alpha x$, quemlibet numeratoris terminum ad nihilum redigi poſſe; ſin autem denominator ſtatuatur trinomium, bini termini ſucceſſiui numeratoris in nihilum redigi poterunt; terni vero et ita porro, ſi pro denominatore quadrinomium vel multinomium aſſumatur. Tum vero etiam perſpicuum eſt aduergentiam eo fore maiorem, quo longius numeratoris termini euaneſcentes ab initio diſtent; vnde ſequentia problemata reſoluenda occurrunt.

Problema I.

5. *Binomii poteſtatem $(1 + x)^n$ transformare in talem expreſſionem maxime conuergentem:*

$$(1 + x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + etc.}{1 - \alpha x}$$

denominatore exiſtente binomio.

Solutio.

Si poteſtas $(1 + x)^n$ in ſeriem euoluatur, eaque per denominatorem $1 - \alpha x$ multiplicetur, orietur ſequens aequatio conficienda:

$$0 = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.\,2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}x^4 + \text{etc.}$$
$$-\alpha - \frac{n}{1}\alpha - \frac{n(n-1)}{1.\,2}\alpha - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}\alpha - \text{etc.}$$
$$-1 - A - B - C - D - \text{etc.}$$

Iam prouti numeratoris terminus vel ſecundus vel tertius vel quartus etc. euaneſcere debet, ſequentes coëfficientium determinationes obtinebuntur:

I. Si $A = 0$, habetur ſtatim $\alpha = \frac{n}{1}$; et ſequentes numeratoris termini erunt:

$$B = -\frac{n(n+1)}{1.\,2};\ C = -\frac{2n(n-1)(n+1)}{1.\,2.\,3};\ D = -\frac{3n(n-1)(n-2)(n+1)}{1.\,2.\,3.\,4}\ \text{etc.}$$

II. Si $B = 0$, habetur ſtatim $\alpha = \frac{n-1}{2}$, et pro numeratore:

$$A = \frac{n+1}{1.\,2};\ C = -\frac{1(n+1)n(n-1)}{2.\,1.\,2.\,3};\ D = -\frac{2(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.\,1.\,2.\,3.\,4}\ \text{etc.}$$

III. Si $C = 0$; habetur $\alpha = \frac{n-2}{3}$ et pro numeratore:

$$A = \frac{2(n+1)}{3.\,1};\ B = \frac{1(n+1)n}{3.\,1.\,2};\ D = -\frac{1(n+1)n(n-1)(n-2)}{3.\,1.\,2.\,3.\,4}\ \text{etc.}$$

IV. Si $D = 0$; habetur $\alpha = \frac{n-3}{4}$ et pro numeratore:

$$A = \frac{3(n+1)}{4.\,1};\ B = \frac{2(n+1)n}{4.\,1.\,2};\ C = \frac{1(n+1)n(n-1)}{4.\,1.\,2.\,3}\ \text{etc.}$$

Hinc iam in genere patet, ſi quilibet alius ſequentium terminorum in numeratore debeat euaneſcere, haberi primo:

$\alpha = \frac{n-\omega}{\omega+1}$ et pro numeratore:

$$A = \frac{\omega(n+1)}{(\omega+1)1};\ B = \frac{(\omega-1)(n+1)n}{(\omega+1)\ 3.\,2};\ C = \frac{(\omega-2)(n+1)n(n-1)}{(\omega+1)\ 1.\,2.\,3}$$
$$D = \frac{(\omega-3)(n+1)n(n-1)(n-2)}{(\omega+1)\ 1.\,2.\,3.\,4};\ E = \frac{(\omega-4)}{\omega+1}.\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}$$

cuius progressionis lex est manifesta.

Coroll. 1.

6. Quodsi iam in numeratore termini, qui euanescentem sequuntur, omittantur, habebuntur expressiones finitae ac rationales continuo propius valorem $(1+x)^n$ exhibentes; ita si primo ponatur $A=0$, habebitur ista appropinquatio:

$$(1+x)^n = \frac{1}{1-nx}$$

quae etsi a veritate parum recedit, tamen magis aberrat quam sequentes.

Coroll. 2.

7. Sit $B=0$, et secundus casus praebebit hanc appropinquationem:

$$(1+x)^n = \frac{1+\frac{n+1}{2.\,1}x}{1-\frac{(n-1)}{2}x} = \frac{1+\frac{(n+1)}{2}x}{1-\frac{(n-1)}{2}x}.$$

Hinc si sit $n=\frac{\mu}{\nu}$ erit:

$$(1+x)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1+\frac{(\mu+\nu)}{2\nu}x}{1-\frac{(\mu-\nu)}{2\nu}x}.$$

Coroll. 3.

8. Sit $C=0$, et tertius casus dabit:

$$(1+x)^n = \frac{1+\frac{2(n+1)}{3.\,1}x+\frac{1(n+1)n}{3.\,1.\,2}x^2}{1-\frac{(n-2)}{3}x}$$

vnde

vnde ſi fuerit $n=\frac{\mu}{\nu}$ erit:

$$(1+x)^{\frac{\mu}{\nu}}=\frac{1+\frac{2(\mu+\nu)}{3.1\nu}x+\frac{1(\mu+\nu)\mu}{3.1.2\nu^2}x^2}{1-\frac{(\mu-2\nu)}{3\nu}x}.$$

Coroll. 4.

9. Sit $D=0$, et quartus caſus dat:

$$(1+x)^n=\frac{1+\frac{3(n+1)}{4.1}x+\frac{2(n+1)n}{4.1.2}x^2+\frac{1(n+1)n(n-1)}{4.1.2.3}x^3}{1-\frac{(n-3)}{4}x}$$

ideoque ſi $n=\frac{\mu}{\nu}$ erit:

$$(1+x)^{\frac{\mu}{\nu}}=\frac{1+\frac{3(\mu+\nu)}{4.1\nu}x+\frac{2(\mu+\nu)\mu}{4.1.2\nu^2}x^2+\frac{1(\mu+\nu)\mu(\mu-\nu)}{4.1.2.3\nu^3}x^3}{1-\frac{(\mu-3\nu)}{4\nu}x}$$

vnde perſpicuum eſt, quomodo huiusmodi formulae vlterius continuari debent; quamobrem plures hic non exhibeo.

Coroll. 5.

10. In genere autem habebitur haec forma:

$$(1+x)^n=\frac{1+\frac{(\omega-1)(n+1)}{\omega.1}x+\frac{(\omega-2)(n+1)n}{\omega.1.2}x^2+\frac{(\omega-3)(n+1)n(n-1)}{\omega.1.2.3}x^3+\text{etc.}}{1-\frac{(n-\omega+1)}{\omega}x}$$

vbi pro ω ſumi poteſt numerus quicunque; haecque expreſſio ſi in infinitum continuetur, non ſolum ad veritatem appropinquat, ſed ipſum verum valorem formulae $(1+x)^n$ exhibebit.

Coroll. 6.

11. Si ſumatur $\omega=n+1$ denominator in vnitatem abibit, orieturque nota ſeries Neutoniana:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \text{etc.}$$

Sin autem pro ω capiatur numerus infinitus, erit:

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{(n+1)}{1}x + \frac{(n+1)n}{1.\ 2}x^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \text{etc.}}{1+x}$$

cuius ratio quoque ex binomio Neutoniano eſt manifeſta.

Coroll. 7.

12. Si ponatur $\omega = n$ habebitur: $(1+x)^n =$

$$\frac{1 + \frac{(n+1)(n-1)}{1.\ n}x + \frac{(n+1)(n-2)}{1.\ 2}x^2 + \frac{(n+1)(n-1)(n-3)}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \frac{(n+1)(n-1)(n-2)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^4 + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{n}x}$$

vel numeratorem et denominatorem per n multiplicando:

$$(1+x)^n = \frac{n + (n+1)(n-1)x + \frac{(n+1)n(n-2)}{1.\ 2}x^2 + \frac{(n+1)n(n-1)(n-3)}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \text{etc.}}{n-x}$$

Coroll. 8.

13. Si ponatur $\omega = x$, fiet denominator $= x - n$, et obtinetur: $(1+x)^n =$

$$\frac{1 + \frac{(n+1)}{1}(x-1) + \frac{(n+1)n}{1.\ 2}x(x-2) + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}x^2(x-3) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^3(x-4) + \text{etc.}}{x-n}$$

ſimilique modo ex hac expreſſione innumerabiles ſeries deduci poſſunt, quarum ratio aliunde non tam facile perſpici poterit; vnde haec inueſtigatio doctrinam ſerierum non mediocriter amplificare videtur.

Proble-

Problema II.

14. *Binomii poteſtatem* $(1+x)^n$ *transformare in huiusmodi ſeriem maxime conuergentem:*

$$(1+x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + etc.}{1 - \alpha x + \beta x^2}$$

denominatore exiſtente trinomio.

Solutio.

Reſoluta poteſtate $(1+x)^n$ in ſeriem more conſueto, confici oportebit ſequentem aequationem:

$$\begin{array}{llllll}
o = 1 & + \frac{n}{1}x & + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 & + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 & + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^4 & + etc. \\
 & -\alpha & - \frac{n}{1}\alpha & - \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha & - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\alpha & - etc. \\
 & & + \beta & + \frac{n}{1}\beta & - \frac{n(n-1)}{1.2}\beta & + etc. \\
-1 & - A & - B & - C & - D & - etc.
\end{array}$$

atque hic denominatorem $1 - \alpha x + \beta x^2$ ita definire licet, vt in numeratore bini termini ſucceſſiue euaneſcant, vnde is eo magis conuergens reddetur:

I. Sit $A = o$ et $B = o$, erit $\alpha = \frac{n}{1}$ et $\beta = \frac{n(n+1)}{1.2}$, vnde habetur

$$C = \frac{n}{1}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2.3} - \frac{(n-1)n}{2.1} + \frac{(n+1)n}{1.2}\right) = \frac{1(n+2)(n+1)n}{3.1.2.1}$$

$$D = \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{(n-2)(n-3)}{3.4} - \frac{(n-2)n}{3.1} + \frac{n(n+1)}{1.2}\right) = \frac{2(n+2)(n+1)n(n-1)}{4.1.2.1.2}$$

$$E = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{(n-3)(n-4)}{4.5} - \frac{(n-3)n}{4.1} + \frac{(n+1)n}{1.2}\right) = \frac{3(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{5.1.2.1.2.3}$$

et in genere erit:

$$N = \ldots\ldots\left(\frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{(\nu+1)(\nu+2)} - \frac{(n-\nu)n}{(\nu+1)1} + \frac{(n+1)n}{1.2}\right) = \ldots\ldots\frac{\nu(n+2)(n+1)}{1.2.(\nu+2)}$$

ex quo generali valore illi ſpeciales facile deriuantur.

II.

II. Sit $B = 0$ et $C = 0$, erit pro α et β:

$$\left.\begin{aligned} &\beta - \tfrac{n}{1}\alpha + \tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2} = 0; \\ &\beta - \tfrac{(n-1)}{2}\alpha + \tfrac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 3} = 0; \end{aligned}\right\} \text{ hinc } \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{2(n-1)}{3} \\ \beta &= \tfrac{n(n-1)}{2\cdot 3}. \end{aligned}$$

Pro numeratore vero habebitur:

$$A = \tfrac{n}{1} - \tfrac{2(n-1)}{3} = \tfrac{n+2}{3}$$

$$D = \tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\tfrac{(n-2)(n-3)}{3\cdot 4} - \tfrac{2(n-2)(n-1)}{3\cdot 3} + \tfrac{n(n-1)}{2\cdot 3}\right) = \tfrac{1\cdot 2(n+2)(n+1)n(n-1)}{3\cdot 4\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}$$

$$E = \tfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\tfrac{(n-3)(n-4)}{4\cdot 5} - \tfrac{2(n-3)(n-1)}{4\cdot 3} + \tfrac{n(n-1)}{2\cdot 3}\right) = \tfrac{2\cdot 3(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{4\cdot 5\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}$$

$$F = \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\tfrac{(n-4)(n-5)}{5\cdot 6} - \tfrac{2(n-4)(n-1)}{5\cdot 3} + \tfrac{n(n-1)}{2\cdot 3}\right) = \tfrac{3\cdot 4(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5\cdot 6\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

et in genere:

$$N = \ldots\ldots\left(\tfrac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{(\nu+1)(\nu+2)} - \tfrac{2(n-\nu)(n-1)}{(\nu+1)\,3} + \tfrac{n(n-1)}{2\cdot 3}\right) \ldots\ldots \tfrac{\nu(\nu-1)}{(\nu+2)(\nu+1)}\,\tfrac{(n+2)(n+1)}{2\cdot 3}$$

III. Sit $C = 0$ et $D = 0$, ac pro denominatore erit:

$$\left.\begin{aligned} &\beta - \tfrac{(n-1)}{2}\alpha + \tfrac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 3} = 0 \\ &\beta - \tfrac{(n-2)}{3}\alpha + \tfrac{(n-2)(n-3)}{3\cdot 4} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ hinc } \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{n-2}{2} \\ \beta &= \tfrac{(n-1)(n-2)}{3\cdot 4} \end{aligned}$$

hincque pro numeratore:

$$A = \tfrac{n}{1} - \tfrac{(n-2)}{2} = \tfrac{n+2}{2}$$

$$B = \tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2} - \tfrac{n(n-2)}{1\cdot 2} + \tfrac{(n-1)(n-2)}{3\cdot 4} = \tfrac{(n+2)(n+1)}{3\cdot 4}$$

$$E = \tfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\tfrac{(n-3)(n-4)}{4\cdot 5} - \tfrac{(n-3)(n-2)}{4\cdot 2} + \tfrac{(n-1)(n-2)}{3\cdot 4}\right) = \tfrac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1\cdot 2\cdot 3}.$$

Quia autem ſufficit terminos, qui euaneſcentes antecedant, noſſe, ſequentes non determino, quia eorum lex deinceps patebit.

IV. Sit $D = 0$ et $E = 0$, erit pro denominatore:

$$\left.\begin{aligned} &\beta - \tfrac{(n-2)}{3}\alpha + \tfrac{(n-2)(n-3)}{3\cdot 4} = 0 \\ &\beta - \tfrac{(n-3)}{4}\alpha + \tfrac{(n-3)(n-4)}{4\cdot 5} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ hinc } \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{2(n-3)}{5} \\ \beta &= \tfrac{(n-2)(n-3)}{4\cdot 5} \end{aligned}$$

at

at pro numeratore reperietur:

$$A = \frac{n}{1} - \frac{2(n-3)}{5} = \frac{3(n+2)}{5}$$

$$B = \frac{n(n-1)}{1.\,2} - \frac{2n(n-3)}{1.\,5} + \frac{(n-2)(n-3)}{4.\,5} = \frac{3(n+2)(n+1)}{5.\,4}$$

$$C = \frac{n}{1}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2.\,3} - \frac{2(n-1)(n-3)}{2.\,5} + \frac{(n-2)(n-3)}{4.\,5}\right) = \frac{(n+2)(n+1)n}{5.\,4.\,3}.$$

V. Sit $E = 0$ et $F = 0$, atque ex allatis facile concludimus fore primo

$$\alpha = \frac{2(n-4)}{6};\ \beta = \frac{(n-3)(n-4)}{5.\,6} \text{ tum vero}$$

$$A = \frac{4(n+2)}{6};\ B = \frac{6(n+2)(n+1)}{6.\,5};\ C = \frac{4(n+2)(n+1)(n+0)}{6.\,5.\,4} \text{ et}$$

$$D = \frac{1(n+2)(n+1)(n+0)(n-1)}{6.\,5.\,4.\,3}.$$

Generaliter ergo denique has eliciemus determinationes:

$$\alpha = \frac{2(n-\omega)}{\omega+2};\quad \beta = \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)}{(\omega+2)(\omega+1)}$$

$$A = \frac{\omega}{1}.\frac{(n+2)}{\omega+2}$$

$$B = \frac{\omega(\omega-1)}{1.\,2}.\frac{(n+2)(n+1)}{(\omega+2)(\omega+1)}$$

$$C = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.\,2.\,3}.\frac{(n+2)(n+1)n}{(\omega+2)(\omega+1)\omega}$$

$$D = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{1.\,2.\,3.\,4}.\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{(\omega+2)(\omega+1)\omega(\omega-1)}$$

$$E = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)(\omega-4)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}.\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{(\omega+2)(\omega+1)\omega(\omega-1)(\omega-2)}$$

etc.

vnde etiam coëfficientes terminorum post euanescentes sequentium facile formantur.

Coroll. 1.

15. Quando pro denominatore in genere est:

$$\alpha = \frac{2(n-\omega)}{\omega+2} \text{ et } \beta = \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)}{(\omega+2)(\omega+1)}$$

 pro

pro numeratore habebimus:

$$A = \frac{\omega}{\omega + 2} \cdot \frac{n+2}{1}$$

$$B = \frac{\omega(\omega - 1)}{(\omega + 2)(\omega + 1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)}{1 \cdot 2}$$

$$C = \frac{(\omega - 1)(\omega - 2)}{(\omega + 2)(\omega + 1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$D = \frac{(\omega - 2)(\omega - 3)}{(\omega + 2)(\omega + 1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$E = \frac{(\omega - 3)(\omega - 4)}{(\omega + 2)(\omega + 1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

etc.

quorum valorum analogia ad eos, qui in primo problemate ſunt inuenti, iam ſatis luculenter ordinem ſequentium, vbi denominator pluribus conſtabit terminis, declarat.

Coroll. 2.

16. Neglectis terminis in numeratore poſt euaneſcentes ſequentibus, habebimus approximationes ſequentes:

$$\text{ſi } \omega = 0 \text{ erit } (1+x)^n = \frac{1}{1 - nx + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} xx}$$

quae quidem in hoc genere plurimum a veritate diſcrepat.

Coroll. 3.

17. Ponamus $\omega = 1$, eritque proxime:

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{n+2}{3} x}{1 - \frac{2(n-1)}{3} x + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 3} xx}$$

ſin

ſin autem $\omega = 2$ erit adhuc propius:

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{2(n+2)}{4}x + \frac{(n+2)(n+1)}{4\cdot 3}xx}{1 - \frac{2(n-2)}{4}x + \frac{(n-2)(n-1)}{4\cdot 3}xx}$$

et ſi $\omega = 3$ erit

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{3(n+2)}{5}x + \frac{3(n+2)(n+1)}{5\cdot 4}xx + \frac{(n+2)(n+1)n}{5\cdot 4\cdot 3}x^3}{1 - \frac{2(n-3)}{5}x + \frac{(n-3)(n-2)}{5\cdot 4}xx}$$

ſi $\omega = 4$ erit

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{4(n+2)}{6}x + \frac{6(n+2)(n+1)}{6\cdot 5}xx + \frac{4(n+2)(n+1)n}{6\cdot 5\cdot 4}x^3 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}x^4}{1 - \frac{2(n-4)}{6}x + \frac{(n-4)(n-3)}{6\cdot 5}xx}$$

ſi $\omega = 5$ erit $(1+x)^n =$

$$\frac{1 + \frac{5(n+2)}{7}x + \frac{10(n+2)(n+1)}{7\cdot 6}x^2 + \frac{10(n+2)(n+1)n}{7\cdot 6\cdot 5}x^3 + \frac{5(n+2)(n+1)n(n-1)}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}x^4 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}x^5}{1 - \frac{2(n-5)}{7}x + \frac{(n-5)(n-4)}{7\cdot 6}xx}$$

Quae expreſſiones ex coëfficientibus poteſtatum binomii expedite vlterius continuantur. Quo longius vero continuantur, eo minus a veritate aberrabunt.

Coroll. 4.

18. Generaliter autem hanc formulae $(1+x)^n$ transformationem commodius exhibere non licet, quam vt dicamus eſſe

$$(1+x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + etc.}{1 - \alpha x + \beta xx}$$

exiſtentibus coefficientium valoribus:

$$A = \frac{(\omega+1)\omega}{(\omega+2)(\omega+1)} \cdot \frac{n+2}{1} \qquad \alpha = \frac{2(n-\omega)}{\omega+2}$$

$$B = \frac{\omega(\omega-1)}{(\omega+2)(\omega+1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)}{1. \quad 2} \qquad \beta = \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)}{(\omega+2)(\omega+1)}$$

$$C = \frac{(\omega-1)(\omega-2)}{(\omega+2)(\omega+1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n}{1. \quad 2. \quad 3}$$

$$D = \frac{(\omega-2)(\omega-3)}{(\omega+2)(\omega+1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4}$$

$$E = \frac{(\omega-3)(\omega-4)}{(\omega+2)(\omega+1)} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5}$$

etc.

Coroll. 5.

19. Hic iterum patet, cum quantitas ω ab arbitrio noſtro pendeat, ſi capiatur $\omega = n$, prodire $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1. \quad 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1. \quad 2. \quad 3}x^3 + \text{etc.}$$

Sin autem ſit $\omega = \infty$ erit $\alpha = -2$ et $\beta = 1$; vnde

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{n+2}{1}x + \frac{(n+2)(n+1)}{1. \quad 2}x^2 + \frac{(n+2)(n+1)n}{1. \quad 2. \quad 3}x^3 + \text{etc.}}{1 + 2x + xx}$$

ſeu $(1+x)^n = \dfrac{(1+x)^{n+2}}{(1+x)^2}$, cuius ratio eſt manifeſta.

Problema III.

20. *Binomii poteſtatem* $(1+x)^n$ *transformare in huiusmodi ſeriem maxime conuergentem:*

$$(1+x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Cx^6 + etc.}{1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3}$$

denominatore exiſtente quadrinomio.

Solutio

Solutio.

Sequens ergo aequatio conſtrui debet:

$$\begin{array}{rcccccccl}
0 = 1 & + \frac{n}{1}x & + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^2 & + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^3 & + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^4 & + \text{etc.} \\
- \alpha & - \frac{n}{1}\alpha & - \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\alpha & - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\alpha & - \text{etc.} & \\
 & + \beta & + \frac{n}{1}\beta & + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\beta & + \text{etc.} & \\
 & & - \gamma & - \frac{n}{1}\gamma & - \text{etc.} & \\
-1 - A & - B & - C & - D & - \text{etc.} &
\end{array}$$

Hic iam effici poteſt, vt in ſerie coefficientium A, B, C, D etc. terni ſucceſſiui euaneſcant: Sumantur ergo terni quicunque ſucceſſiue euaneſcentes, et obtinebuntur tres huiusmodi aequationes:

$$\gamma - \frac{(n-\omega+2)}{\omega-1}\beta + \frac{(n-\omega+2)(n-\omega+1)}{(\omega-1)(\omega+0)}\alpha - \frac{(n-\omega+2)(n-\omega+1)(n-\omega)}{(\omega-1)(\omega-0)(\omega+1)} = 0$$

$$\gamma - \frac{(n-\omega+1)}{\omega}\beta + \frac{(n-\omega+1)(n-\omega)}{\omega(\omega+1)}\alpha - \frac{(n-\omega+1)(n-\omega)(n-\omega-1)}{\omega(\omega+1)(\omega+2)} = 0$$

$$\gamma - \frac{(n-\omega)}{\omega+1}\beta + \frac{(n-\omega)(n-\omega-1)}{(\omega+1)(\omega+2)}\alpha - \frac{(n-\omega)(n-\omega-1)(n-\omega-2)}{(\omega+1)(\omega+2)(\omega+3)} = 0.$$

Hinc differentiis ſumendis habebitur:

$$\frac{(n+1)}{(\omega-1)\omega}\beta - \frac{2(n+1)(n-\omega+1)}{(\omega-1)\omega(\omega+1)}\alpha + \frac{3(n+1)(n-\omega+1)(n-\omega)}{(\omega-1)\omega(\omega+1)(\omega+2)} = 0$$

$$\frac{(n+1)}{\omega(\omega+1)}\beta - \frac{2(n+1)(n-\omega)}{\omega(\omega+1)(\omega+2)}\alpha + \frac{3(n+1)(n-\omega)(n-\omega-1)}{\omega(\omega+1)(\omega+2)(\omega+3)} = 0$$

ſiue:

$$\beta - \frac{2(n-\omega+1)}{\omega+1}\alpha + \frac{3(n-\omega+1)(n-\omega)}{(\omega+1)(\omega+2)} = 0$$

$$\beta - \frac{2(n-\omega)}{\omega+2}\alpha + \frac{3(n-\omega)(n-\omega-1)}{(\omega+2)(\omega+3)} = 0$$

quarum aequationum differentia dat:

$$\frac{2(n+2)}{(\omega+1)(\omega+2)}\alpha - \frac{2.\ 3(n+2)(n-\omega)}{(\omega+1)(\omega+2)(\omega+3)} = 0$$

hincque fit:

$$\alpha = \frac{3(n-\omega)}{\omega+3};\ \beta = \frac{3(n-\omega)(n-\omega+1)}{(\omega+3)(\omega+2)};\ \text{et}\ \gamma = \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)}{(\omega+3)(\omega+2)(\omega+1)}.$$

His autem valoribus pro denominatore inuentis pro numeratore reperientur:

$$A = \frac{\omega}{\omega+3}\cdot\frac{n+3}{1}$$
$$B = \frac{\omega(\omega-1)}{(\omega+3)(\omega+2)}\cdot\frac{(n+3)(n+2)}{1\cdot 2}$$
$$C = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{(\omega+3)(\omega+2)(\omega+1)}\cdot\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$D = \frac{(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{(\omega+3)(\omega+2)(\omega+1)}\cdot\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$
$$E = \frac{(\omega-2)(\omega-3)(\omega-4)}{(\omega+3)(\omega+2)(\omega+1)}\cdot\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$
$$F = \frac{(\omega-3)(\omega-4)(\omega-5)}{(\omega+3)(\omega+2)(\omega+1)}\cdot\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$
etc.

ac denominator formabitur ex his valoribus:

$$\alpha = \frac{3(n-\omega)}{\omega+3}$$
$$\beta = \frac{3(n-\omega)(n-\omega+1)}{(\omega+3)(\omega+2)}$$
$$\gamma = \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)}{(\omega+3)(\omega+2)(\omega+1)}$$

quibus fubftitutis erit

$$(1+x)^n = \frac{1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+etc.}{1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3}$$

Coroll. 1.

21. Manifeftum hic eft, quicunque numerus integer pofitiuus pro ω affumatur, in numeratore femper terminos ternos fucceffiuos in nihilum abire. Ita fi fit $\omega = 0$ erit:

$(1+x)^n$

$$(1+x)^n = \frac{1 + * + * + * - \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \frac{4(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \text{etc.}}{1 - \frac{n}{1}x + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3}$$

vnde reiectis in numeratore terminis, qui post euanescentes sequuntur, erit proxime:

$$(1+x)^n = \frac{1}{1 - \frac{n}{1}x + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3}.$$

Coroll. 2.

22. Simili modo ponendo $\omega = 1$ erit proxime:

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{n+3}{4}x}{1 - \frac{3(n-1)}{4}x + \frac{3(n-1)n}{4\cdot 3}x^2 - \frac{(n-1)n(n+1)}{4\cdot 3\cdot 2}x^3}$$

at si sumatur $\omega = 2$ erit

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{2(n+3)}{5}x + \frac{(n+3)(n+2)}{5\cdot 4}x^2}{1 - \frac{3(n-2)}{5}x + \frac{3(n-2)(n-1)}{5\cdot 4}x^2 - \frac{(n-2)(n-1)n}{5\cdot 4\cdot 3}x^3}$$

posito vero $\omega = 3$ erit

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{3(n+3)}{6}x + \frac{3(n+3)(n+2)}{6\cdot 5}x^2 + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6\cdot 5\cdot 4}x^3}{1 - \frac{3(n-3)}{6}x + \frac{3(n-3)(n-2)}{6\cdot 5}x^2 - \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6\cdot 5\cdot 4}x^3}.$$

Coroll. 3.

23. Postrema haec formula ideo est notatu digna, quod numerator et denominator pari terminorum numero constat, et quod alter in alterum abit, si exponens n sumatur negatiue. Haec ergo expressio conferenda est cum similibus ex problematibus superioribus ortis:

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{(n+1)}{2}x}{1 - \frac{(n-1)}{2}x} \;..\; (\S.\ 7.)$$

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{2(n+2)}{4}x + \frac{(n+2)(n+1)}{4 \cdot 3}x^2}{1 - \frac{2(n-2)}{4}x + \frac{(n-2)(n-1)}{4 \cdot 3}x^2} \ldots (\S.\ 17)$$

vnde ſimul ordo huiusmodi formularum facile colgitur.

Problema IV.

24. *Binomii poteſtatem $(1+x)^n$ transformare in huiusmodi progreſſionem maxime conuergentem:*

$$(1+x)^n = \frac{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + etc.}{1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 + \delta x^4 - \varepsilon x^5 + \zeta x^6 - etc.}$$

denominatore exiſtente multinomio quocunque.

Solutio.

Si ſolutiones praecedentium problematum conſulamus, leui attentione adhibita inde ſequentem ſolutionem generalem colligimus:

$$A = \frac{\omega}{\omega+\Phi} \cdot \frac{n+\Phi}{1}$$

$$B = \frac{\omega(\omega-1)}{(\omega+\Phi)(\omega+\Phi-1)} \cdot \frac{(n+\Phi)(n+\Phi-1)}{1 \cdot 2}$$

$$C = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{(\omega+\Phi)(\omega+\Phi-1)(\omega+\Phi-2)} \cdot \frac{(n+\Phi)(n+\Phi-1)(n+\Phi-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$D = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{(\omega+\Phi)(\omega+\Phi-1)(\omega+\Phi-2)(\omega+\Phi-3)} \cdot \frac{(n+\Phi)(n+\Phi-1)(n+\Phi-2)(n+\Phi-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

etc.

deinde vero pro denominatore:

$$\alpha = \frac{\Phi(n-\omega)}{1(\omega+\Phi)}$$

$$\beta = \frac{\Phi(\Phi-1)}{1 \cdot 2} \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)}{(\omega+\Phi)(\Phi+\Phi-1)}$$

$$\gamma = \frac{\Phi(\Phi-1)(\Phi-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)}{(\omega+\Phi)(\omega+\Phi-1)(\omega+\Phi-2)}$$

$$\delta = \frac{\Phi(\Phi-1)(\Phi-2)(\Phi-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)(n-\omega+3)}{(\omega+\Phi)(\omega+\Phi-1)(\omega+\Phi-2)(\omega+\Phi-3)}$$

etc.

qui

qui valores ad praecedentium formam propius reducuntur vt ſit:

$$\alpha = \frac{\Phi}{\Phi+\omega} \cdot \frac{n-\omega}{1}$$

$$\beta = \frac{\Phi(\Phi-1)}{(\Phi+\omega)(\Phi-\omega+1)} \cdot \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)}{1. \quad 2}$$

$$\gamma = \frac{\Phi(\Phi-1)(\Phi-2)}{(\Phi+\omega)(\Phi+\omega-1)(\Phi+\omega-2)} \cdot \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)}{1. \quad 2. \quad 3.}$$

$$\delta = \frac{\Phi(\Phi-1)(\Phi-2)(\Phi-3)}{(\Phi+\omega)(\Phi+\omega-1)(\Phi+\omega-2)(\Phi+\omega-3)} \cdot \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)(n-\omega+2)(n-\omega+3)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4.}$$

etc.

Etſi autem ex hac lege etiam denominator in infinitum continuari poſſit; tamen ex principio, vnde eum deduximus, patet eum non vltra terminos euaneſcentes produci debere, ſiquidem pro Φ ſumatur numerus poſitiuus integer.

Coroll. 1.

25. Denominator ergo ex numeratore formari poteſt, ſi numeri Φ et ω inter ſe permutentur, et loco n ſcribatur $-n$. At poſito $-n$ pro $+n$ formula $(1+x)^n$ abit in $(1+x)^{-n}$, vnde ſi fuerit $(1+x)^n = \frac{P}{Q}$ erit $(1+x)^{-n} = \frac{Q}{P}$, ex quo ratio huius conuerſionis eo clarius perſpicitur.

Coroll. 2.

26. Cum igitur numerator et denominator inter ſe permutari poſſint, etiam numeratorem apud terminos euaneſcentes abrumpere licet; tum vero denominatorem in infinitum continuari oportet, vt fractio obtineatur poteſtati $(1+x)^n$ aequalis.

Coroll. 3.

27. Si ſumatur $\Phi = \omega$, numerator et denominator multo magis inter ſe aſſimilantur, ac tantum ratione ſigni exponentis n a ſe inuicem diſcrepabunt. Erit autem tunc:

$$A = \frac{\omega}{2\omega} \cdot \frac{n+\omega}{1}$$

$$B = \frac{\omega(\omega-1)}{2\omega(2\omega-1)} \cdot \frac{(n+\omega)}{1} \cdot \frac{(n+\omega-1)}{2}$$

$$C = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{2\omega(2\omega-1)(2\omega-2)} \cdot \frac{(n+\omega)}{1} \cdot \frac{(n+\omega-1)}{2} \cdot \frac{(n+\omega-2)}{3}$$

$$D = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{2\omega(2\omega-1)(2\omega-2)(2\omega-3)} \cdot \frac{(n+\omega)}{1} \cdot \frac{(n+\omega-1)}{2} \cdot \frac{(n+\omega-2)}{3} \cdot \frac{(n+\omega-3)}{4}$$

etc.

$$\alpha = \frac{\omega}{2\omega} \cdot \frac{n-\omega}{1}$$

$$\beta = \frac{\omega(\omega-1)}{2\omega(2\omega-1)} \cdot \frac{(n-\omega)}{1} \cdot \frac{(n-\omega+1)}{2}$$

$$\gamma = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{2\omega(2\omega-1)(2\omega-2)} \cdot \frac{(n-\omega)}{1} \cdot \frac{(n-\omega+1)}{2} \cdot \frac{(n-\omega+2)}{3}$$

$$\delta = \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{2\omega(2\omega-1)(2\omega-2)(2\omega-3)} \cdot \frac{(n-\omega)}{1} \cdot \frac{(n-\omega+1)}{2} \cdot \frac{(n-\omega+2)}{3} \cdot \frac{(n-\omega+3)}{4}$$

etc.

Coroll. 4.

28. Hinc formulae ſuperiores (23) ad approximandum perquam idoneae deriuantur:

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{1} x}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{1} x}$$

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{2}{4} \cdot \frac{n+2}{1} x + \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 3} \cdot \frac{(n+2)(n+1)}{1 \cdot 2} x^2}{1 - \frac{2}{4} \cdot \frac{n-2}{1} x + \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 3} \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{1 \cdot 2} x^2}$$

$(1+x)$

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{3}{6}\cdot\frac{(n+3)}{1}x + \frac{3\cdot 2}{6\cdot 5}\cdot\frac{(n+3)}{1}\frac{(n+2)}{2}x^2 + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4}\cdot\frac{(n+3)}{1}\frac{(n+2)}{2}\frac{(n+1)}{3}x^3}{1 - \frac{3}{6}\cdot\frac{(n-3)}{1}x + \frac{3\cdot 2}{6\cdot 5}\cdot\frac{(n-3)}{1}\frac{(n-2)}{2}x^2 - \frac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4}\cdot\frac{(n-3)}{1}\frac{(n-2)}{2}\frac{(n-1)}{3}x^3}$$

quae quomodo vlterius continuari debeant ſponte patet.

Scholion I.

29. Hae formulae eo magis ſunt notatu dignae, quo minus earum ratio patet; nam etſi tam in numeratore quam denominatore lex progreſſionis eſt perſpicua, ſecundum quam vterque in infinitum continuatur, tamen iam animaduertimus, alterutrum tantum in infinitum produci oportere, altero ex finito terminorum numero conſtante, ibi ſcilicet quouis caſu terminari debet, vbi termini aliquot euaneſcere incipiunt; etiamſi deinceps iterum termini finitae magnitudinis occurrant. Haec autem ita ſunt interpretanda, ſi in valoribus litterarum A, B, C, etc. α, β, γ etc. factor numeratoris euaneſcens a factore denominatoris euaneſcente tolli cenſeatur, ita vt fractio $\frac{\omega - m}{2\omega - 2m}$ caſu $\omega = m$ vnitati aequalis ſtatuatur. Sin autem, vti calculi ratio exigit, haec fractio tantum ſemiſſi vnitatis aequalis capiatur, tum continui ratio non amplius infringitur; ac ſi hac lege retenta tam numerator quam denominator etiam vltra terminos euaneſcentes in infinitum continuatur, fractio reſultans formulae $(1+x)^n$ perfecte erit aequalis. Quod idem in genere eſt tenendum, dummodo inter numeros Φ et ω certa ratio ſtatuatur, ita vt ſi $\Phi = \lambda\omega$ fractionis $\frac{\omega - m}{(\lambda+1)\omega - (\lambda+1)m}$

 etiam

etiam casu $\omega = m$ sumatur $= \frac{1}{\lambda + 1}$ ex quo haec cautio neutiquam principio continuitatis aduersari est putanda.

Scholion 2.

30. Quo haec clarius perspiciantur, consideremus casum $\omega = 0$, et ob $\frac{\omega}{2\omega} = \frac{1}{2}$, erit numerator nostrae fractionis:

$$1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{1}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \text{etc.}$$

et denominator:

$$1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{1}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \text{etc.}$$

manifestum autem est numeratoris valorem esse $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+x)^n$ denominatoris vero $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+x)^{-n}$, illumque ergo per hunc diuisum praebere $(1+x)^n$. Simili modo si ponatur $\omega = 1$, erit

pro numeratore	pro denominatore
$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{1}$	$\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{1}$
$B = 0$	$\beta = 0$
$C = -\frac{1}{4}\cdot\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\gamma = -\frac{1}{4}\cdot\frac{(n-1)n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}$
$D = -\frac{2}{4}\cdot\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$	$\delta = -\frac{2}{4}\cdot\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$
$E = -\frac{3}{4}\cdot\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$	$\varepsilon = -\frac{3}{4}\cdot\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$
etc.	etc.

atque hinc colligitur fore

numeratorem $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(n+1)x + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(n-1)x)(1+x)^n$

denominatorem $= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(n-1)x + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(n+1)x)(1+x)^{-n}$

quorum ille per hunc diuisus manifesto praebet formulam propositam $(1+x)^n$. Sin autem in denominatore termini litteris γ, δ, ε etc. affecti omitterenterentur, tum in numeratore loco fractionis $\frac{\omega - 1}{2\omega - 2} = \frac{0}{0}$ vnitas statui deberet ob legem supra stabilitam, vnde valores C, D, E etc. duplo prodirent maiores; foretque numeratoris valor $= (1 - \frac{1}{2}(n-1)x)(1+x)^n$, denominator vero $= 1 - \frac{1}{2}(n-1)x$ qua fractione iterum veritas obtinetur. Videamus ergo, quomodo per huiusmodi formulas tam quantitates radicales, quam exponentiales et logarithmi commode vero proxime exhiberi queant; quando quidem constat tam logarithmos quam exponentiales quantitates ad formam $(1+x)^n$ reuocari posse.

Problema V.

31. Radicem quadratam ex quouis numero nonquadrato proposito per formulas ante exhibitas proxime assignare.

Solutio.

Sit numerus propositus non quadratus $= aa + b$, et ponatur $\frac{b}{aa} = x$ erit $aa + b = aa(1+x)$ ideoque $\sqrt{(aa+b)} = a(1+x)^{\frac{1}{2}}$. Habebimus ergo $n = \frac{1}{2}$, et ex praecedente problemate formulae continuo magis ad $\sqrt{(aa+b)}$ appropinquantes erunt:

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{b}{a^2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a^2}} a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + \frac{2}{4} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{b}{a^2} + \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{b^2}{a^4}}{1 + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{b}{a^2} + \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{b^2}{a^4}} a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + \frac{3}{6}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{b}{a^2} + \frac{3\cdot 2}{6\cdot 5}\cdot\frac{7\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{b^2}{a^4} + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4}\cdot\frac{7\cdot 5\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{b^3}{a^6}}{1 + \frac{3}{6}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{b}{a^2} + \frac{3\cdot 2}{6\cdot 5}\cdot\frac{5\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{b^2}{a^4} + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{b^3}{a^6}}\, a$$

etc.

Euolutis autem his factoribus et posito breuitatis ergo $\frac{b}{aa} = x$ consequemur formas sequentes:

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + \frac{3}{4}x}{1 + \frac{1}{4}x}\, a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + \frac{5}{4}x + \frac{5}{16}xx}{1 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{16}xx}\, a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + \frac{7}{4}x + \frac{7}{8}xx + \frac{7}{64}x^3}{1 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}xx + \frac{1}{64}x^3}\, a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + \frac{9}{4}x + \frac{27}{16}xx + \frac{15}{32}x^3 + \frac{9}{256}x^4}{1 + \frac{7}{4}x + \frac{15}{16}xx + \frac{5}{32}x^3 + \frac{1}{256}x^4}\, a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + \frac{11}{4}x + \frac{11}{4}xx + \frac{77}{64}x^3 + \frac{55}{256}x^4 + \frac{11}{1024}x^5}{1 + \frac{9}{4}x + \frac{7}{4}xx + \frac{35}{64}x^3 + \frac{15}{256}x^4 + \frac{1}{1024}x^5}\, a$$

etc.

Sin autem ponamus $\frac{x}{4} = y$ seu $y = \frac{b}{4aa}$ erit

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + 3y}{1 + y}\, a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + 5y + 5yy}{1 + 3y + yy}\, a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + 7y + 14yy + 7y^3}{1 + 5y + 6yy + y^3}\, a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + 9y + 27yy + 30y^3 + 9y^4}{1 + 7y + 15yy + 10y^3 + y^4}\, a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{1 + 11y + 44yy + 77y^3 + 55y^4 + 11y^5}{1 + 9y + 28yy + 35y^3 + 15y^4 + y^5}\, a$$

etc.

Coroll.

Coroll. 1.

32. Si formularum harum numeratores et denominatores attentius contemplemur, non difficulter obseruabimus, vtrosque constituere progressionem recurrentem secundi ordinis, et quemlibet terminum ita dependere a binis praecedentibus, vt si terni termini ordine sint P, Q, R, semper sit $R = (1 + 2y)Q - yyP$ seu scala relationis habeatur $1 + 2y, -yy$.

Coroll. 2.

33. Si pro y statuamus valorem $\frac{b}{4aa}$, et numeratorem denominatoremque a fractionibus liberemus, habebimus sequentes formulas:

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{4a^2 + 3b}{4a^2 + b}a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{16a^4 + 20a^2b + 5bb}{16a^4 + 12a^2b + bb}a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{64a^6 + 112a^4b + 56a^2b^2 + 7b^3}{64a^6 + 80a^4b + 24a^2b^2 + b^3}a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{256a^8 + 576a^6b + 432a^4b^2 + 120a^2b^3 + 9b^4}{256a^8 + 448a^6b + 240a^4b^2 + 40a^2b^3 + b^4}$$

etc.

Coroll. 3.

34. In his formulis iterum tam numeratores quam denominatores seriem constituunt recurrentem, cuius scala relationis est $2(2aa + b), -bb$, ita vt, si P, Q, R denotent tres terminos se inuicem excipientes, futurum sit

$$R = 2(2aa + b)Q - bbP.$$

At

At feriei numeratorum duo termini initiales funt 1, et $4aa + 3b$ denominatorum vero 1 et $4aa + b$, vnde reliqui facile reperiuntur.

Coroll. 4.

35. Si fractio $\frac{b}{4aa}$ ad minores terminos reduci poteft, his potius loco ipforum b et $4aa$ vti conueniet. Ponatur ergo in minimis terminis: $\frac{b}{4aa} = \frac{y}{z}$, atque habebimus:

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{z+3y}{z+y}\,a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{zz+5yz+5yy}{zz+5yz+yy}\,a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{z^3+7yz^2+14y^2z+7y^3}{z^3+5yzz+6y^2z+y^3}\,a$$

hincque erit $R = (z+2y)Q - yyP$.

Coroll. 5.

36. Hae fractiones adhuc commodius exprimi poffunt hoc modo:

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{z+2y+y\cdot 1}{z+2y-y\cdot 1}\,a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{z^2+4yz+3yy+y(z+2y)}{z^2+4yz+3yy-y(z+2y)}\,a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{z^3+6yz^2+10y^2z+4y^3+y(z^2+4yz+3y^2)}{z^3+6yz^2+10y^2z+4y^3-y(z^2+4yz+3y^2)}\,a$$

$$\sqrt{(aa+b)} = \frac{z^4+8yz^3+21y^2z^2+20y^3z+5y^4+y(z^3+6yz^2+10y^2z+4y^3)}{z^4+8yz^3+21y^2z^2+20y^3z+5y^4-y(z^3+6yz^2+10y^2z+4y^3)}\,a$$

etc.

Coroll. 6.

37. Pro his fractionibus formandis fufficit vnicam hanc feriem conftituiffe:

$1.\ z+2y;\ z^2+4yz+3y^2;\ z^3+6yz^2+10y^2z+4y^3 \ldots P; Q; R$

quae

quae pariter eſt recurrens ad legem $R = (z + 2y)Q - yyP$. Formata autem hac ſerie erit proxime $\sqrt{(aa + b)} = \frac{Q + yP}{Q - yP} a$, quae ſcilicet fractio ex binis terminis ſe immediate ſequentibus illius ſeriei facillime formatur.

Exemplum 1.

38. *Radicem quadratam ex 2 proxime exhibere.*

Cum ſit $aa + b = 2$ erit $a = 1$ et $b = 1$, vnde $\frac{b}{4aa} = \frac{1}{4} = \frac{y}{z}$; ergo $y = 1$ et $z = 4$, atque $z + 2y = 6$. Quare ex ſcala relationis $R = 6Q - P$ formetur haec ſeries recurrens:

$$1;\ 6;\ 35;\ 204;\ 1189;\ 6930;\ 40391 \ldots\ P, Q, R$$

et fractiones $\frac{Q + P}{Q - P}$ ad $\sqrt{2}$ continuo magis appropinquantes ſunt:

$$\sqrt{2} = \tfrac{7}{5};\ \tfrac{41}{29};\ \tfrac{239}{169};\ \tfrac{1393}{985};\ \tfrac{8119}{5741};\ \tfrac{47321}{33461}.$$

Exemplum 2.

39. *Radicem quadratam* ex 3 *proxime exhibere.*

Cum ſit $aa + b = 3$, ſtatuatur $a = 1$, erit $b = 2$; et $\frac{b}{4aa} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ vnde fit $y = 1$ et $z = 2$; ergo $z + 2y = 4$. Quare ex ſcala relationis $R = 4Q - P$ formetur haec ſeries recurrens:

$$1;\ 4;\ 15;\ 56;\ 209;\ 780;\ 2911;\ 10864 \ldots\ P, Q, R$$

eritque proxime $\sqrt{3} = \frac{Q + P}{Q - P}$; ſiue

$$\sqrt{3} = \tfrac{5}{3};\ \tfrac{19}{11};\ \tfrac{71}{41};\ \tfrac{265}{153};\ \tfrac{989}{571};\ \tfrac{3691}{2131};\ \tfrac{13775}{7953}\ \text{etc.}$$

Aliter. Vel ſtatuamus $a = 2$; vt ſit $b = -1$; erit $\frac{b}{4aa} = -\frac{1}{16} = \frac{y}{z}$ vnde $y = -1$; $z = 16$ et $z + 2y = 14$.

Quare ex ſcala relationis; $R = 14\,Q - P$ formetur ſeries recurrens:

$1;\ 14;\ 195;\ 2716;\ 37829;\ 526890 \ldots P,\ Q,\ R$

eritque proxime $\sqrt{3} = \frac{Q-P}{Q+P}\,2$ ſiue

$\sqrt{3} = \frac{13}{15}.\,2;\ \frac{191}{209}.\,2;\ \frac{2521}{2911}.\,2;\ \frac{35113}{40545}.\,2;$ etc. vel

$\sqrt{3} = \frac{26}{15};\ \frac{362}{209};\ \frac{5042}{2911};\ \frac{70226}{40545};$ etc.

Problema VI.

40. *Radicem cubicam ex quouis numero non-cubo propoſito per formulas ante exhibitas proxime aſſignare.*

Solutio.

Sit numerus propoſitus non cubus $= a^3 + b$, et ponatur $\frac{b}{a^3} = x$ erit $a^3 + b = a^3(1+x)$ ideoque $\sqrt[3]{(a^3+b)} = a(1+x)^{\frac{1}{3}}$. Habemus ergo $n = \frac{1}{3}$; vnde ex §. 28. nanciſcemur has approximationes:

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a.\,\frac{1 + \frac{1}{2}.\,\frac{4}{3}x}{1 + \frac{1}{2}.\,\frac{2}{3}x}$$

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a.\,\frac{1 + \frac{2}{4}.\,\frac{7}{3}x + \frac{2.1}{4.3}.\,\frac{7.4}{3.6}xx}{1 + \frac{2}{4}.\,\frac{5}{3}x + \frac{2.1}{4.3}.\,\frac{5.2}{3.6}xx}$$

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a.\,\frac{1 + \frac{3}{6}.\,\frac{10}{3}x + \frac{3.2}{6.5}.\,\frac{10.7}{3.6}xx + \frac{3.2.1}{6.5.4}.\,\frac{10.7.8}{3.6.9}x^3}{1 + \frac{3}{6}.\,\frac{8}{3}x + \frac{3.2}{6.5}.\,\frac{8.5}{3.6}xx + \frac{3.2.1}{6.5.4}.\,\frac{8.5.2}{3.6.9}x^3}$$

etc.

Euolu-

Euolutis autem his coefficientibus habebimus:

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a.\ \frac{1+\frac{3}{2}x}{1+\frac{1}{3}x}$$

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a.\ \frac{1+\frac{7}{6}x+\frac{7}{27}xx}{1+\frac{5}{6}x+\frac{5}{54}xx}$$

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a.\ \frac{1+\frac{5}{3}x+\frac{7}{9}xx+\frac{7}{81}x^3}{1+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}xx+\frac{2}{81}x^3}$$

etc.

Coroll. 1.

41. Si loco x valorem $\frac{b}{a^3}$ ſubſtituamus, et fractiones implicatas tollamus, obtinebimus formulas ſequentes:

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = \frac{3a^3+2b}{3a^3+b}a$$

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = \frac{54a^6+63a^3b+14bb}{54a^6+45a^3b+5bb}a$$

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = \frac{81a^9+135a^6b+63a^3b^2+7b^3}{81a^9+108a^6b+36a^3b^2+2b^3}a$$

etc.

vbi autem commodam progreſſionis legem definire non licet.

Coroll. 2.

42. Sufficit autem, forma vti priori; inde enim cubus ad numerum propoſitum propius accedens colligitur, cuius radix pro a poſita nouum

 dabit

dabit valorem pro b et x. Sic si radix cubica ex 2 quaeratur, erit statim $a = 1$, et proxime $\sqrt[3]{2} = \frac{5}{4}$. Sit iam $a = \frac{5}{4}$; et fit $b = 2 - a^3 = \frac{3}{64}$; et $x = \frac{3}{125}$; vnde erit denuo per formam priorem:

$$\sqrt[3]{2} = \frac{125+2}{125+1} \cdot \frac{5}{4} = \frac{127}{126} \cdot \frac{635}{504}$$

cuius fractionis cubus est $2 - \frac{1}{2 \cdot 63^3}$, qui ergo a veritate tantum parte $\frac{1}{500094}$ deficit.

Coroll. 3.

43. Simili modo formulae pro extractione radicum altiorum potestatum formari possunt. Ita si quaeratur $\sqrt[m]{(a^m + b)}$, ponatur $x = \frac{b}{a^m}$ et $n = \frac{1}{m}$, hincque habebitur:

$$\sqrt[m]{(a^m + b)} = \frac{2ma^m + (m+1)b}{2ma^m + (m-1)b} a$$

quae etiam sufficere potest ad radices quantumuis exacte definiendas.

Problema VII.

44. *Per formulas supra inuentas proxime exprimere logarithmum cuiusque numeri propositi.*

Solutio.

Sit $1 + x$ numerus propositus, et constat eius logarithmum hyperbolicum esse $l(1+x) = \frac{(1+x)^n - 1}{n}$

existen-

existente $n = 0$. Quodsi iam in formulis supra inventis n spectemus vt numerum infinite paruum; habebimus:

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{1}{2}(1+n)x}{1 + \frac{1}{2}(1-n)x}$$

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{2}{4}(2+n)x + \frac{2.1}{4.3}(1+\frac{3}{2}n)xx}{1 + \frac{2}{4}(2-n)x + \frac{2.1}{4.3}(1-\frac{3}{2}n)xx}$$

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{3}{6}(3+n)x + \frac{3.2}{6.5}(3+\frac{5}{2}n)x^2 + \frac{3.2.1}{6.5.4}(1+\frac{11}{6}n)x^3}{1 + \frac{3}{6}(3-n)x + \frac{3.2}{6.5}(3-\frac{5}{2}n)x^2 + \frac{3.2.1}{6.5.4}(1-\frac{11}{6}n)x^3}$$

$$(1+x)^n = \frac{1 + \frac{4}{8}(4+n)x + \frac{4.3}{8.7}(6+\frac{7}{2}n)x^2 + \frac{4.3.2}{8.7.6}(4+\frac{13}{3}n)x^3 + \frac{4.3.2.1}{8.7.6.5}(1+\frac{25}{12}n)x^4}{1 + \frac{4}{8}(4-n)x + \frac{4.3}{8.7}(6-\frac{7}{2}n)x^2 + \frac{4.3.2}{8.7.6}(4-\frac{13}{3}n)x^3 + \frac{4.3.2.1}{8.7.6.5}(1-\frac{25}{12}n)x}$$

etc.

Quodsi iam hic ponatur $n = 0$, habebimus pro $l(1+x)$ sequentes approximationes:

$$l(1+x) = \frac{x}{1 + \frac{1}{2}x}$$

$$l(1+x) = \frac{x + \frac{1}{2}xx}{1 + x + \frac{1}{6}xx}$$

$$l(1+x) = \frac{x + xx + \frac{11}{60}x^3}{1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{20}x^3}$$

$$l(1+x) = \frac{x + \frac{3}{2}xx + \frac{13}{21}x^3 + \frac{5}{84}x^4}{1 + 2x + \frac{9}{7}xx + \frac{2}{7}x^3 + \frac{1}{70}x^4}$$

etc.

Vel si ponatur $x = \frac{m}{n}$, quoniam fractionum logarithmos

 rithmos

rithmos potiſſimum indagare conuenit, et fractiones partiales tollantur, fiet

$$l\left(1+\frac{m}{n}\right)=\frac{2m}{2n+m}$$

$$l\left(1+\frac{m}{n}\right)=\frac{6mn+3mm}{6nn+6mn+mm}$$

$$l\left(1+\frac{m}{n}\right)=\frac{60mn^2+60m^2n+11m^3}{60n^3+90mn^2+36m^2n+3m^3}$$

$$l\left(1+\frac{m}{n}\right)=\frac{420mn^3+630m^2n^2+260m^3n+25m^4}{420n^4+840mn^3+540m^2n^2+120m^3n+6m^4}$$

etc.

haeque fractiones tam prope accedunt ad verum valorem $l\left(1+\frac{m}{n}\right)$, vt ſeriei vulgaris

$$l\left(1+\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}-\frac{m^2}{2n^2}+\frac{m^3}{3n^3}-\frac{m^4}{4n^4}\text{ etc.}$$

ingens terminorum numerus capi deberet ad parem approximationem obtinendam.

Coroll. 1.

45. Ita ſi logarithmum hyperbolicum binarii deſideremus, ob $m=1$ et $n=1$, ſequentes prodibunt approximationes:

$$l\,2=\frac{2}{3};\ \frac{9}{13};\ \frac{131}{189};\ \frac{1335}{1926};\ \left[\frac{445}{642}\right]$$

quibus fractionibus in decimales conuerſis, cum ſit

$$l\,2=0{,}6931471805599453$$

erit proxime

$$l\,2=0{,}666666$$
$$l\,2=0{,}692307$$
$$l\,2=0{,}693121$$
$$l\,2=0{,}69314635$$

vere $l\,2=0{,}69314718$

ſicque

ſicque quarta fractio a veritate tantum parte $\frac{83}{1000000000}$ deficit.

Coroll. 2.

46. Numerorum autem binario minorum logarithmi multo adhuc exactius reperiuntur. Ita cum ſit $l\frac{3}{2} = 0,4054651081081 64$ ponamus $m = 1$ et $n = 2$, noſtraeque formulae dabunt proxime

$$l\frac{3}{2} = \frac{2}{5} = 0,40000000$$
$$l\frac{3}{2} = \frac{15}{37} = 0,405405405$$
$$l\frac{3}{2} = \frac{371}{915} = 0,405464481$$
$$l\frac{3}{2} = \frac{6425}{15846} = 0,4054651016$$

error ſcilicet huius vltimae fractionis eſt $\frac{65}{10000000000}$ ideoque plus quam centies minor quam caſu praecedente.

Coroll. 3.

47. Quando ergo fractio $\frac{m}{n}$ adeo ſemiſſe eſt minor, tum erit tam exacte

$$l\left(1+\frac{m}{n}\right) = \frac{420mn^3 + 630m^2n^2 + 260m^3n + 25m^4}{420n^4 + 840mn^3 + 540m^2n - 120m^3n + 6m^4}$$

vt error in fractione decimali poſt decimam demum notam percipiatur. Aliis autem methodis vix tam facile ad veritatem appropinquare licet.

Coroll. 4.

48. Si fractio $\frac{m}{n}$ fuerit valde parua, tum ſufficiet vti prima vel ſecunda formula, ita ſi $\frac{m}{n} = \frac{1}{8}$; prima formula dat $l\frac{9}{8} = \frac{2}{17} = 0,11764$, et ſecunda:

$$l\frac{9}{8} = \frac{51}{433} = 0,11778291 \text{ at reuera eſt}$$
$$l\frac{9}{8} = 0,11778303$$

vnde

vnde secunda formula circiter $\frac{1}{10000000}$ a veritate deficit.

Problema VIII.

49. *Quantitatem exponentialem* e^x *per formulas inuentas proxime exprimere, existente* e *numero, cuius logarithmus hyperbolicus aequatur vnitati.*

Solutio.

Notum est esse $e^x = (1 + \frac{x}{n})^n$, si pro n sumatur numerus infinitus. Scribamus ergo in formulis §. 28, $\frac{x}{n}$ loco x et simul ponamus $n = \infty$; atque obtinebimus sequentes approximationes

$$e^x = \frac{1 + \frac{1}{2}x}{1 - \frac{1}{2}x}$$

$$e^x = \frac{1 + \frac{2}{4}x + \frac{1}{4.3}xx}{1 - \frac{2}{4}x + \frac{1}{4.3}xx}$$

$$e^x = \frac{1 + \frac{3}{6}x + \frac{3}{6.5}xx + \frac{1}{6.5.4}x^3}{1 - \frac{3}{6}x + \frac{3}{6.5}xx - \frac{1}{6.5.4}x^3}$$

$$e^x = \frac{1 + \frac{4}{8}x + \frac{6}{8.7}xx + \frac{4}{8.7.6}x^3 + \frac{1}{8.7.6.5}x^4}{1 - \frac{4}{8}x + \frac{6}{8.7}xx + \frac{4}{8.7.6}x^3 + \frac{1}{8.7.6.5}x^4}$$

etc.

vnde lex, qua sequentes huiusmodi formulae confici debent, est manifesta. Si fractiones partiales tollere velimus, habebimus:

$e^x =$

$$e^x = \frac{2+x}{2-x}$$

$$e^x = \frac{12+6x+xx}{12-6x+xx}$$

$$e^x = \frac{120+60x+12xx+x^3}{120-60x+12xx-x^3}$$

$$e^x = \frac{1680+840x+180xx+20x^3+x^4}{1680-840x+180xx-20x^3+x^4}$$

Coroll. 1.

50. Hinc ergo erit ipſe numerus e in fractionibus proximis:

$e = \frac{3}{1};\ \frac{19}{7};\ \frac{193}{71};\ \frac{2721}{1001};$ etc.

quarum fractionum hanc legem obſeruari conuenit, vt ſi ponatur:

$e = \frac{A}{\mathfrak{A}};\ \frac{B}{\mathfrak{B}};\ \frac{C}{\mathfrak{C}};\ \frac{D}{\mathfrak{D}};\ \frac{E}{\mathfrak{E}}$ etc. ſit

$A=3$; $B=6A+1$; $C=10B+A$; $D=14C+B$; $E=18D+C$; etc.
$\mathfrak{A}=1$; $\mathfrak{B}=6\mathfrak{A}+1$; $\mathfrak{C}=10\mathfrak{B}+\mathfrak{A}$; $\mathfrak{D}=14\mathfrak{C}+\mathfrak{B}$; $\mathfrak{E}=18\mathfrak{D}+\mathfrak{C}$; etc.

vbi multiplicatores 6, 10, 14, 18, etc. ſunt numeri impariter pares.

Coroll. 2.

51. Cum igitur ſit $e = 2,718281828459045236$ videamus quam prope fractiones inuentae accedant ad veritatem:

$e = \frac{3}{1} = 3,0000$
$e = \frac{19}{7} = 2,714285714$
$e = \frac{193}{71} = 2,718309859$
$e = \frac{2721}{1001} = 2,718281718$
etc.

vbi primi in partibus decimis, ſecunda in milleſimis, tertia in centies milleſimis, et quarta in centies centenis milleſimis aberrat.

Coroll. 3.

52. Talis lex progreſſionis etiam in formulis generalibus pro e^x deprehenditur: Si enim noſtras fractiones ponamus:

$e^x = \frac{A}{\mathfrak{A}};\ \frac{B}{\mathfrak{B}};\ \frac{C}{\mathfrak{C}};\ \frac{D}{\mathfrak{D}};\ \frac{E}{\mathfrak{E}}$ etc. ſumtis $A=1$ et $\mathfrak{A}=1$, erit:

$$B=2+x;\ C=6B+Axx;\ D=10C+Bxx;\ E=14D+Cxx;\ \text{etc.}$$

$$\mathfrak{B}=2-x;\ \mathfrak{C}=6\mathfrak{B}+\mathfrak{A}xx;\ \mathfrak{D}=10\mathfrak{C}+\mathfrak{B}xx;\ \mathfrak{E}=14\mathfrak{D}+\mathfrak{C}xx;\ \text{etc.}$$

vnde ſeries tam numeratorum, quam denominatorum facile continuatur.

SOLV-

SOLVTIO PROBLEMATIS
DE
INVENIENDO TRIANGVLO
IN QVO RECTAE EX SINGVLIS ANGVLIS LATERA OPPOSITA BISECANTES SINT RATIONALES.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Vocatis ternis lateribus $2a$, $2b$, $2c$ et rectis haec latera bisecantibus f, g, h; quaestio reducitur ad resolutionem trium sequentium formularum

$$2bb + 2cc - aa = ff$$
$$2cc + 2aa - bb = gg$$
$$2aa + 2bb - cc = hh.$$

2. Hinc differentiis sumendis sequitur fore:

$$3(bb - aa) = ff - gg;\quad 3(cc - bb) = gg - hh;\quad 3(cc - aa) = ff - hh$$

seu $ff + 3aa = gg + 3bb = hh + 3cc$,

Cum autem sit $ff = 2bb + 2cc - aa$, habebimus,

$$ff + 3aa = gg + 3bb = hh + 3a = 2(aa + bb + cc).$$

3. Summa porro nostrarum trium formularum praebet:

$$2(ff + gg + hh) = 3ff + 9aa = 3gg + 9bb = 3hh + 9cc$$

ita vt hinc iſtae ternae formulae reſultent:

$$2gg + 2hh - ff = 9aa$$
$$2hh + 2ff - gg = 9bb$$
$$2ff + 2gg - hh = 9cc.$$

4. Quae cum ſimiles ſint ipſis propoſitis, concludimus ſi pro lateribus $2a$, $2b$, $2c$ ſint rectae biſecantes f, g, h tum pro lateribus $2f$, $2g$, $2h$ fore rectas biſecantes $3a$, $3b$, $3c$, ideoque pro lateribus f, g, h rectas biſecantes $\frac{3}{2}a$, $\frac{3}{2}b$, $\frac{3}{2}c$. Quare inuento vno huiusmodi triangulo, ſi rectae biſecantes pro lateribus noui trianguli accipiantur, hoc eadem gaudebit proprietate, quia in hoc rectae biſecantes ſunt tres quadrantes laterum praecedentis.

5. His obſeruatis ſolutionem quaeſtionis ſequenti modo aggredior. Primo binis tantum formulis ſatis facturus eas ita exhibeo:

$$(b-c)^2 + (b+c)^2 - aa = (b-c)^2 + (b+c+a)(b+c-a) = ff$$
$$(a-c)^2 + (a+c)^2 - bb = (a-c)^2 + (a+c+b)(a+c-b) = gg$$

ſtatuo igitur:

$$f = b - c + (b+c+a)p \quad \text{et} \quad g = a - c + (a+c+b)q$$

vt facta ſubſtitutione diuiſio per $a+b+c$ ſuccedat, hoc modo obtinetur:

$$b + c - a = 2(b-c)p + (b+c+a)pp$$
$$a + c - b = 2(a-c)q + (a+c+b)qq.$$

6. Ex vtraque aequatione definiatur valor ipſius c:

$$c = \frac{a(1+pp) - b(1-2p-pp)}{1+2p-pp} = \frac{b(1+qq) - a(1-2q-qq)}{1+2q-qq}$$

vnde

vnde fit

$$a+b+c=\frac{2a(1+p)+4bp}{1+2p-pp}=\frac{2b(1+q)+4aq}{1+2q-qq}$$

ex quo duplici valore ratio inter numeros a et b colligitur:

$$a(1+p)(1+2q-qq)-2aq(1+2p-pp)=$$
$$b(1+q)(1+2p-pp)-2bp(1+2q-qq)$$

quamobrem ſtatuo:

$$a=1+q-pp-2pq-ppq+2pqq$$
$$b=1+p-qq-1pq-pqq+2ppq$$

hincque fit

$$\frac{a+b+c}{2}=\frac{1+3p+q+pp-pq-7ppq-p^3+3p^3q}{1+2p-pp}$$

ſeu $a+b+c=2p+2q-6pq.$

7. Cum igitur ſit:

$$a+b=2+p+q-pp-qq-4pq+ppq+pqq$$

erit $\quad c=p+q+pp+qq-2pq-ppq-pqq$

ſicque binis formulis ſatisfit, numeris a, b, c ſequentes valores tribuendo:

$$a=1+q-pp-2pq-ppq+2pqq$$
$$b=1+p-qq-2pq-pqq+2ppq$$
$$c=p+q+pp+qq-2pq-ppq-pqq$$

vnde cum fiat

$$a+b-c=2+2p+2q-6pq$$
$$b-c=1-q-pp-2qq+3ppq$$
$$a-c=1-p-qq-2pp+3pqq$$

 habe-

habebimus:

$$\begin{matrix} f=1+2p-q+pp-2qq+2pq-3ppq \\ g=1+2q-p+qq-2pp+2pq-3pqq \end{matrix} \text{ et } \begin{matrix} b-c+f=2(1+q)(1+p-2q) \\ a-c+g=2(1+p)(1+q-2p). \end{matrix}$$

8. Iuuabit hinc etiam ſequentes valores elicuiſſe:

$$\begin{aligned} a+b-c&=2-2pp-2qq-2pq+2ppq+2pqq=2(1-p)(1-q)(1+p+q)\\ b+c-a&=2p+2pp-2pq-4pqq+2ppq \quad =2p(1+q)(1+p-2q)\\ a+c-b&=2q+2qq-2pq-4ppq+2pqq \quad =2q(1+p)(1+q-2p)\end{aligned}$$

vbi cauendum eſt, ne harum vlla euaneſcat, quia alioquin triangulum periret, excluduntur ergo ſequentes valores:

$$p=0,\ q=0,\ p=\pm 1,\ q=\pm 1,\ p+q=-1,\ q=\tfrac{p\pm 1}{2},\ p=\tfrac{q\pm 1}{2}.$$

Praeterea vero etiam excludi oportet $1+p+q=3pq$ ne ſumma laterum euaneſcat. Tum vero etiam notetur eſſe:

$$\begin{aligned} a-b&=q+p+qq-pp+3pqq-3ppq=(q-p)(1+p+q+3pq)\\ g-f&=3q-3p+3qq-3pp-3pqq+3ppq=3(q-p)(1+p+q-pq)\end{aligned}$$

tandem vero eſt

$$aa+bb+cc=2(1-p-q+p-q+pp-pq+qq)(1+2(p+q)+(p+q)^2+3ppqq)$$

ſeu $aa+bb+cc=\frac{1}{2}((2-p-q)^2+3(p-q)^2)(1+p+q)^2+3ppqq)$.

9. Supereſt igitur vt tertia conditio impleatur, quae in hac formula continetur:

$$hh=(a+b)^2+(a-b)^2-ac=(a-b)^2+(a+b+c)(a+b-c)$$

vbi ſi valores modo indicati ſubſtituantur, colligitur:

$$hh=(q-p)^2(1+p+q+3pq)^2+4(1-p)(1-q)(1+q)(1+p+q-3pq)$$

quae

quae euoluitur in hanc formam:

$$hh = 9ppqq(q-p)^2 + 6pq(p+q)(pp-4pq+qq)$$
$$+p^4 + 22p^3q + 6ppqq + 22pq^3 + q^4$$
$$-2(p+q)^3 - 3(pp+6qq) + 4(p+q) + 4$$

quae ſecundum poteſtates ipſius q diſpoſita fit

$$hh = (1+3p)^2q^4 - 2(1-11p+9pp+9p^3)q^3$$
$$-3(1+2p-2pp+6p^3-3p^4)q^2$$
$$+2(2-9p-3pp+11p^3+3p^4)q$$
$$+(2+p-pp)^2.$$

10. Alia methodus hanc aequationem reſolvendi non patet, niſi vt more ſolito pro h eiusmodi expreſſio aſſumatur, qua ſubſtituta valor ipſius q per aequationem ſimplicem determinetur. Tum vero conſtat, quomodo vno valore inuento ex eo continuo plures elici queant. Ad minores autem valores eruendos, generatim notetur ſi fuerit

$$hh = AAq^4 + 2Bq^3 + Cqq\,2Dq + EE$$

ſequentibus poſitionibus negotium confectum iri:

1°. ſi $h = Aqq + \frac{B}{A}q \pm E$ fit $q = \frac{2A(AD \mp BE}{BB - AA(C \mp 2AE)}$

2°. ſi $h = \pm Aqq + \frac{D}{E}q + E$ fit $q = \frac{DD - EE(C \mp 2AE)}{2E(BE \mp AD)}$

3°. ſi $h = Aqq + \frac{B}{A}q + \frac{C}{2A} - \frac{BB}{2A^3}$ fit $q = \frac{(BB-AAC)^2 - 4A^4EE}{4BA(B(BB-AAC)+2A^4D)}$

4°. ſi $h = \frac{CEE-DD}{2E^3}qq + \frac{D}{E}q + E$ erit $q = \frac{4EE(D(DD-CEE)+2BE^4)}{(DD-CEE)^2 - 4AAE^4}$

11. Cum autem caſus ſupra excluſi noſtrae aequationi ſponte ſatis faciant, et pro hh quadratum producant, ex iis nouas formas ſimiles elicere licet, vnde deinceps noui valores idonei pro q erui queant.

Sit

Sit ergo primo $q = 1 + x$ eritque

$$bb = (1-p+x)^2(2+4p+(1+3p)x)^2 - 4x(1-p)(2+p+x)(2-p+(1-3p)x)$$

quae euoluta praebet hanc formam

$$\begin{aligned} bb = (1+3p)^2x)^4 &+ 2(1+23p+9pp-9p^3)x^3 \\ &+ (-3+92p+10pp-72p^3+9p^4)xx \\ &+ 4(1-p)(-1+12p+10pp-6p^3)x^2 \\ &+ 4(1-p)^2(1+2p)^2 \end{aligned}$$

tum vero est

$$\begin{aligned} a+b-c &= -2x(1-p)(2+p+x) \\ b+c-a &= -2p(2+x)(1-p+2x) \\ a+c-b &= 2(1+p)(1+x)(2-2p+x). \end{aligned}$$

Praestabit autem quouis casu, quo loco p determinatus valor assumitur, substitutionem in priori forma facere, ac tum denique euolutionem instituere.

12. Sit igitur secundo $q = -1 - p + x$, eritque

$$bb = (1+2p-x)^2(3p(1+p)-1+3p)x)^2 + 4x(1-p)(2+p-x)(3p(1+p) + (1-3p)x)$$

atque

$$\begin{aligned} a+b-c &= 2x(1-p)(2+p-x) \\ b+c-a &= -2p(p-x)(3+3p-2x) \\ a+c-b &= 2(1+p)(1+p-x)(3p-x). \end{aligned}$$

Sit tertio $q = -1 + x$ eritque

$$bb = (1+p-x)^2(2p-(1+3p)x)^2 + 4(1-p)(2-x)(p+x)(4p-(1-3p)x)$$

atque

$$\begin{aligned} a+b-c &= 2(1-p)(2-x)(p+x) \\ b+c-a &= 2px(3+p-2x) \\ a+c-b &= 2(1+p)(1-x)(2p-x). \end{aligned}$$

Sit

Sit quarto $q = \frac{1+p+x}{2}$ eritque

$$16\,bb = (1-p+x)^2 (3(1+p)^2 + (1+3p)x)^2 + 8(1-p)(1-p-x)(3+3p+x)(3(1-pp)+(1-3p)x)$$

atque
$$a+b-c = \tfrac{1}{2}(1-p)(1-p-x)(3(1+p)+x)$$
$$b+c-a = -px(3+p+x)$$
$$a+c-b = \tfrac{1}{2}(1+p)(1+p+x)(3(1-p)+x).$$

Sit denique quinto $q = \frac{1+p+x}{3p-1}$ erit

$$(3p-1)^4\,bb = ((1-p)(1+3p)+x)^2 (6p(1+p)+(1+3p)x)^2 + 4(3p-1)^2 x(1-p)(2(1-p)+x)(3p(1+p)+x)$$

atque
$$a+b-c = \frac{-2(1-p)(2(1-p)+x)(3p(1+p)+x)}{(3p-1)^2}$$
$$b+c-a = \frac{-2p(4p+x)(3(1-pp)+2x)}{(3p-1)^2}$$
$$a+c-b = \frac{2(1+p)(1+p+x)(6p(1-p)+x)}{(3p-1)^2}$$

ſemper autem eſt

$$f = b-c+(a+b+c)p \quad \text{et} \quad g = a-c+(a+b+c)q.$$

13. Hinc ergo ſatis patet innumerabiles ſolutiones noſtri problematis inueniri poſſe. Inuento enim pro q valore quocunque $q = n$, ſtatuatur $q = n + x$, et aequatio reſultans iterum huiusmodi formam habebit

$$bb = AAx^4 + 2Bx^3 + Cxx + 2Dx + EE$$

vnde nouos valores pro x et b eruere licet methodo ante indicata. Cum autem hic potiſſimum ſolutiones in minoribus numeris deſiderentur, litterae p valores ſimpliciores tribuamus, vnde quidem valores o et ± 1 excludi conueniet.

Casus I. $p = -2$.

14. Ob $p = -2$, habemus:

$$a = -3 + q - 4qq; \quad f = 1 - 17q - 2qq$$
$$b = -1 + 12q + qq; \quad g = -5 - 2q + 7qq$$
$$c = 2 + q + 3qq; \quad a + b + c = -2 + 14q$$

vnde fieri oportet

$$bb = (q+2)^2 (5q+1)^2 - 12(q-1)^2 (7q-1)$$

quae euoluta abit in hanc formam:

$$25q^4 + 26q^3 + 321qq - 64q + 16 = bb.$$

Hic igitur est $A = 5$, $B = 13$, $C = 321$, $D = -32$, et $E = 4$ ideoque sequentes solutiones nascuntur:

1°. si $b = 5qq + \frac{13}{5}q \pm 4$ fit $q = \frac{10(40 \pm 13)}{1964 \mp 250}$

2°. si $b = \pm 5qq - 8q + 4$ fit $q = \frac{-257 \pm 40}{26 \pm 80}$

vbi tertiam et quartam, quia numeros nimis magnos praebent, omitto.

15. Prioris solutionis signum superius praebet:

$$q = \frac{10 \cdot 53}{1714} = \frac{5 \cdot 53}{857},$$

vnde nascuntur numeri nimis magni, signum vero inferius

$$q = \frac{10 \cdot 27}{2214} = \frac{15}{123} = \frac{5}{41} \text{ ergo } b = \frac{-6066}{1641}.$$

Posterioris vero solutionis signum superius dat

$$q = \frac{-217}{105}$$

signum vero inferius:

$$q = \frac{-207}{-54} = \frac{11}{2} \text{ ergo } b = \frac{765}{4}$$

vnde

vnde etiam reliquas litteras definiamus

$$a = -\tfrac{237}{2};\quad b = \tfrac{381}{4};\quad c = \tfrac{393}{4}$$
$$f = -153;\quad g = \tfrac{783}{4};\quad h = \tfrac{765}{4}.$$

Hos numeros multiplicemus per 4 ac diuidamus per 3 vt obtineamus hanc ſolutionem ſatis ſimplicem:

$$a = 158;\quad b = 127;\quad c = 131$$
$$f = 204;\quad g = 261;\quad h = 255$$

et quia litterae f, g, h quae communem habent diuiſorem 3, in locum litterarum a, b, c ſubſtitui poſſunt, prodibit haec ſolutio multo ſimplicior

$$a = 69;\quad b = 87;\quad c = 85$$
$$f = 158;\quad g = 127;\quad h = 131$$

vnde fit $aa + bb + cc = 2.\,7.\,19.\,73$, qui factores vtique ſunt numeri formae $xx + 3yy$, vti natura rei poſtulat,

16. Cum loco q ſatisfaciat tam $+1$ quam -1, vtamur hac ſubſtitutione $q = \frac{y+1}{y-1}$ fietque

$$\tfrac{1}{4}(y-1)^4 hh = 81y^4 + 54y^3 - 99yy - 36y + 100$$

vnde ob

$$A = 9,\ B = 27,\ C = -99,\ D = -18,\ E = 10$$

habebimus has reſolutiones:

1°. ſi $\frac{1}{2}(y-1)^2 h = 9yy + 3y \pm 10$, erit $y = \frac{-9(3 \pm 5)}{27(3 \pm 5)} = -\frac{1}{3}$

2°. ſi $\frac{1}{2}(y-1)^2 h = \pm 9yy - \frac{9}{5}y + 10$ erit $y = \frac{9 + 25(11 \pm 20)}{30(5 \pm 3)}$

quarum prior dat $q = -\frac{1}{2}$, qui eſt caſus excluſus forma $q = \frac{p+1}{2}$; altera vero ſuppeditat

ſub ſigno ſuperiori $y = \frac{784}{245} = \frac{49}{15}$ et $q = \frac{32}{17}$
ſub ſigno inferiori $y = \frac{-24.9}{60} = \frac{-18}{5}$ et $q = \frac{15}{23}$.

17. Sit ergo $y = \frac{49}{15}$ et $q = \frac{32}{17}$ eritque $\frac{2.17^2}{15^2} b = \frac{2504}{25}$ hinc $b = \frac{9.1252}{289}$, porro

$$a = -3 + \frac{32}{17} - \frac{4096}{289} = -\frac{4419}{289}$$
$$b = -1 + \frac{12.32}{17} + \frac{1024}{289} = \frac{7263}{289}$$
$$c = 2 + \frac{32}{17} + \frac{3072}{289} = \frac{4194}{289}$$
$$f = 1 - \frac{17.32}{17} - \frac{2048}{289} = -\frac{11007}{298}$$
$$g = -5 - \frac{2.32}{17} + \frac{7.1024}{289} = \frac{4635}{289}.$$

Omnes hi valores per 289 multiplicati per 9 deprimantur, et habebitur iſta ſolutio

$$a = 491;\quad b = 807;\quad c = 466$$
$$f = 1223;\quad g = 515;\quad h = 1252$$

quae eadem reſultat ex altero caſu inuento $q = \frac{15}{23}$, vnde eſt $aa + bb + cc = 2.7.19\ 43.97$.

Caſus 2. $p = 2$.

18. Pro hoc ergo caſu primo habemus:

$$a + b - c = -2(1-q)(3+q);\quad b - c + f = \frac{b+c-a}{2}$$
$$b + c - a = 4(1+q)(3-2q);$$
$$a + c - b = -6q(3-q)\quad;\quad a - c + g = \frac{a+c-b}{q}$$

vnde fit

$$hh = (q-2)^2(7q+3)^2 - 4(1-q)(3+q)(3-5q)$$

quae euoluta praebet hanc formam:

$$hh = 49q^4 - 174q^3 + 99qq + 216q\ .$$

haec-

haecque facto $q = 3r$ tranſit in hanc ſimpliciorem

$$\tfrac{1}{81} hh = 49 r^4 - 58 r^3 + rr + 8 r$$

caſus autem excludendi ſunt $q = \pm 1$; $q = -3$; $q = \tfrac{3}{2}$; $q = 3$ et $q = \tfrac{3}{5}$.

19. Cum hic ſit $A = 7$, $B = -29$, $C = 1$, $D = 4$, $E = 0$ erit ex ſolutione prima ſumto $\tfrac{1}{9} h = 7rr - \tfrac{29}{7} r$

$$r - \frac{14.28}{841 - 9} = \tfrac{49}{99} \text{ et } q = \tfrac{49}{33}, \text{ hincque } h = -\frac{7.470}{11.99}$$

tum vero porro

$$a + b - c = \frac{2.16.148}{33.33}; \quad b - c + f = \frac{4.41}{33.33}$$

$$b + c - a = \frac{4.82.1}{33.33}; \quad a - c + g = -\frac{6.50}{33}$$

$$a + c - b = -\frac{6.49.50}{33.33}$$

multiplicentur hi valores omnes per $\frac{33.33}{4}$ erit

$$a+b-c = 1184;\ 2c = -3593;\ 2f = -4777$$

$$b+c-a = 82;\ 2a = -2491;\ 2g = -6092$$

$$a+c-b = -3675;\ 2b = +1266;\ 2h = -1645$$

$$a+b+c = -2409.$$

Duplicatis ergo valoribus prodit haec ſolutio

$$a = 2491;\quad b = 1266;\quad c = 3593$$

$$f = 4777;\quad g = 6092;\quad h = 1645$$

hinc vero eſt $aa + bb + cc = 2.19.31.43.409$.

20. Transformemus aequationem noſtram ponendo $r = \frac{y+1}{y-1}$ orieturque

$$\tfrac{1}{324} hh (y-1)^4 = 25 + 82 y + 73 yy + 16 y^3$$

 ſtatua-

ſtatuatur $\frac{1}{18}h(y-1)^2 = 5 + \frac{41}{5}y$, ſitque $y = -\frac{9}{25}$ hinc $r = -\frac{8}{17}$ et $q = -\frac{24}{17}$; ideoque $h = \frac{45.128}{289}$; Porro

$$a+b-c = -\frac{2.41.27}{289}; \quad b-c+f = -\frac{2.7.99}{289}$$
$$b+c-a = -\frac{4.7.99}{289}; \quad a-c+g = -\frac{6.17.75}{289}$$
$$a+c-b = \frac{6.24.75}{289}.$$

Multiplicentur omnes hi valores per $\frac{289}{9}$ et habebitur

$$a+b-c = -246;\ 2c = 892;\ h = 640$$
$$b+c-a = -308;\ 2a = 954;\ b-c+f = -154;\ f = 569$$
$$a+c-b = \underline{1200};\ 2b = -554;\ a-c+g = -850;\ g = -881$$
$$a+b+c = 1646$$

vnde colligitur haec ſolutio:

$$a = 477;\quad b = 277;\quad c = 446$$
$$f = 569;\quad g = 881;\quad h = 640.$$

21. In aequatione per q expreſſa ſtatuatur $q = \frac{y+1}{y-1}$ ac reperietur

$$\tfrac{1}{4}hh(y-1)^4 = 25y^4 - 146y^3 + 69yy + 244y + 4$$

vbi $A = 5$, $B = -73$, $C = 69$, $D = 122$, $E = 2$.

Ergo

1°. ſi $\frac{1}{2}h(y-1)^2 = 5yy - \frac{73}{5}y \pm 2$ fit

$$y = \frac{10(610 \pm 146)}{73^2 - 25(69 \mp 20)} = \frac{5(305 \pm 73)}{901 \pm 125}$$

2°. ſi $\frac{1}{2}h(y-1)^2 = 5yy + 61y + 2$ fit

$$y = \frac{4.61^2 - 4(69 \mp 20)}{4(-146 \mp 610)} = \frac{1826 \pm 10}{-73 \mp 305}.$$

Ex priori dat ſignum ſup. $y = \frac{5.378}{1026} = \frac{35}{19}$ et $q = \frac{27}{8}$

at ſignum inf. $y = \frac{5.232}{776} = \frac{145}{97}$ et $q = \frac{121}{24}$.

Ex

Ex ſecunda dat ſignum ſup. $y = \frac{1836}{-378} = -\frac{34}{7}$ et $q = \frac{27}{41}$
at ſignum inf. $y = \frac{1816}{232} = \frac{227}{29}$ et $q = \frac{128}{99}$.
Ex valore $q = \frac{27}{8}$ colligimus hanc ſolutionem

$$a = 404;\quad b = 377;\quad c = 619$$
$$f = 3.314;\quad g = 3.325;\quad h = 3.159$$

vbi fit $aa + bb + cc = 2.\,3.\,7.\,13^2.\,97.$
Ex valore autem $q = \frac{27}{41}$ naſcitur iſta ſolutio

$$a = 134;\quad b = 823;\quad c = 607.$$
$$f = 3.480;\quad g = 3.103;\quad h = 3.337$$

vbi eſt $aa + bb + cc = 2.\,3.\,7.\,19.\,31.\,43$
notandumque eſt hic bina latera tertio non eſſe maiora.

22. Pluribus caſibus inuoluendis hic non immoror, ſed potius animaduerto, methodum qua hic ſum vſus, non ſatis videri naturalem et ad ſcopum accommodatam, propterea quod nulla ſuppeditat criteria ſolutiones ſimpliciores diſtinguendi. Deſideratur ergo tam pro hoc problemate, quam pro aliis ſimilibus, quarum ſolutio ad huiusmodi formam

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

ad quadratum reducendam, reuocatur. Atque in hoc quidem problemate ſolutio a quantitate $aa + bb + cc$ inchoanda videtur, quae huiusmodi numero $2(xx + 3yy)$ certe eſt aequalis; et cum debeat eſſe

$$4(xx + 3yy) = ff + 3aa = gg + 3bb = hh + 3cc$$

euidens

euidens eſt numerum $xx+3yy$ factores habere debere, quos conſtat eiusdem eſſe formae. Statui igitur poterit

$$xx+3yy=(mm+3nn)(pp+3qq)(rr+3ss) \text{ et } 4(xx+3yy)$$

octo modis ad formam $AA+3BB$ referri poteſt, vnde ternas illas eligi oportet. Foret nempe

$$a=2m(ps+qr)+2n(3qs-pr)$$
$$b=m((3q+p)s\pm(q-p)r)\pm n(3(q-p)s\mp(3q+p)r)$$
$$c=n((3q-p)s\pm(q+p)r)\pm n(3(q+p)s\mp(3q-p)r)$$

et effici reſtat $aa+bb+cc=4(xx+3yy)$.

Verum hoc modo calculus fit ſatis prolixus, niſi forte certis artificiis tractabilior reddi poteſt.

RESO-

RESOLVTIO AEQVATIONIS

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

PER NVMEROS TAM RATIONALES, QVAM INTEGROS.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Haec forma latiſſime patens, quae inſignem partem Analyſeos Diophanteae complectitur, pro varia indole numerorum A, B, C, D, E, F plures in ſe continet caſus, qui vulgo diuerſis methodis tractari ſolent. Hic autem ſingulari modo eius reſolutionem ſine radicis extractione ita docebo, vt ſolutio non ſolum ad numeros rationales, ſed etiam integros accommodari poſſit.

1. In genere quidem reſolutionem huius aequationis tradere non licet, quia ſaepe vſu venire poteſt, vt ea ſit impoſſibilis, certiſſimum autem criterium poſſibilitatis ſolutionis ſine dubio eſt, ſi vnicus ſaltem caſus, quo huic aequationi ſatisfiat, fuerit cognitus. Ponamus igitur hoc contingere caſu quo $x = a$ et $y = b$, ita vt reuera ſit:

$$Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F = 0$$

et quemadmodum ex hoc caſu cognito, alii ſiue

 nume-

numero finiti, siue infiniti, erui queant, hic sum ostensurus.

2. Subtrahatur ista aequatio ab ipsa proposita generali, vt obtineatur haec:

$$A(x^2-a^2)+2B(xy-ab)+C(y^2-b^2)+2D(x-a)+2E(y-b)=0$$

cuius singula membra praeter secundum factorem habent vel $x-a$, vel $y-b$, at membrum secundum pluribus modis in duas partes resolui potest, quarum altera habeat factorem $x-a$, altera $y-b$,

$$xy-ab=x(y-b)+b(x-a)=y(x-a)+a(y-b)$$

vt autem ambae litterae x et y, parem rationem ineant, hac resolutione vtamur:

$$2(xy-ab)=(x-a)(y+b)+(x+a)(y-b);$$

quo facto aequatio nostra sequentem induet formam

$$A(x-a)(x+a)+B(x-a)(y+b)+B(x+a)(y-b)+C(y-b)(y+b)+2D(x-a)+2E(y-b)=0.$$

3. Consideretur nunc ratio quantitatum $x-a$ et $y-b$ tamquam data, ac statuatur

$\frac{x-a}{y-b}=\frac{p}{q}$, ita vt sit: $qx-aq=py-bp$,

qua ratione introducta nostra aequatio euadet:

$$Ap(x+a)+Bp(y+b)+Bq(x+a)+Cq(y+b)+2Dp+2Eq=0$$

ex quibus binis aequationibus vtramque quantitatem quaesitam x et y definire licebit. Quum enim posterior sit

$$(x+a)(Ap+Bq)+(y+b)(Bp+Cq)+2Dp+2Eq=0,$$

prior

prior vero praebeat:

$$y = \frac{qx - aq + bp}{p};$$

hic valor in illa fubftitutus dat:

$$(Ap^2 + 2Bpq + Cq^2)x + Aap^2 + 2Cbpq - Caq^2 + 2Dp^2 + 2Epq = 0$$
$$+ 2Bbp^2$$

vnde colligitur

$$x = -\frac{a(Ap^2 - Cq^2) - 2b(Bpp + Cpq) - 2Dp^2 - 2Epq}{Ap^2 + 2Bpq + Cq^2}$$

hincque

$$y = +\frac{b(Ap^2 - Cq^2) - 2a(Bqq + Apq) - 2Dpq - 2Eq^2}{Ap^2 + 2Bpq + Cq^2}.$$

4. Ecce ergo iam fumus affecuti folutionem generaliffimam aequationis propofitae in numeris rationalibus, quia enim ambos numeros p et q pro arbitrio affumere licet, euidens eft, omnes plane folutiones in his formulis contineri debere. Quod autem folutiones in numeris integris attinet, manifeftum eft tales exhiberi non poffe nifi ambo numeratores illarum fractionum diuifionem admittant per communem denominatorem $Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$, id quod fieri nequit nifi hic denominator ad numerum fatis exiguum fe reduci patiatur. Statim ergo hinc excludi oportet cafus, quibus $B^2 < AC$, fiue quibus $AC - B^2$ eft numerus pofitiuus, tum enim quicunque valores loco p et q accipiantur; formulam $Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$, non infra certum valorem deprimere licebit.

5. Quod fi ergo numeri A, B et C ita fuerint comparati, vt per certos numeros p et q for-

mula $Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$ ad exiguum numerum, ſiue vnitatem, ſiue binarium tam poſitiue quam negatiue ſumtum redigi queat, omnes partes binarum formularum pro x et y inuentarum abibunt in numeros integros. Poſito autem iſto numero $= \omega$, ita vt his caſibus ſit ω vel ± 1; vel ± 2, ob $Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 = \omega$, reperitur

$$p = -\frac{Bq \pm \sqrt{((BB - AC)q^2 + A\omega)}}{A};$$

ſic formula

$$(BB - AC)q^2 + A\omega$$

debebit eſſe quadratum, quod quidem plerumque fieri poterit, quia pro ω ſumi poteſt vel $+1$, vel -1, vel $+2$, vel -2, dummodo $BB - AC$ fuerit numerus poſitiuus non quadratus, etiamſi ſine dubio dantur caſus, quibus ω maiorem ſortitur valorem. Tum vero habebitur:

$$x = \frac{a}{\omega}((q^2 - Ap^2) - \frac{2b}{\omega}(Bpp + Cpq) - \frac{2D}{\omega}p^2 - \frac{2E}{\omega}pq$$

$$y = \frac{b}{\omega}(Aq^2 - Cp^2 - \frac{2a}{\omega}(Bqq + Cpq) - \frac{2D}{\omega}pq - \frac{2E}{\omega}q^2:$$

6. Vtrum igitur noſtra aequatio admittat ſolutiones in numeris integris, nec ne? iudicium facillime inſtituitur; conſideretur enim formula BB-AC, quae ſi fuerit numerus poſitiuus non quadratus, ſemper adeo infinitis modis numerum q aſſignare licebit, vt formula illa radicalis abeat in numerum rationalem, indeque definietur alter numerus p, quibus adhibitis impetrabimus binos numeros ſatisfacientes x et y. Sufficiet autem pro q vnicum valorem idoneum inueniſſe, dum ex eo pro x et y ſucceſſi-

ſucceſſiue innumerabiles valores ſatisfacientes deduci poſſunt, id quod operae pretium erit clarius oſtendiſſe. Ponamus ſcilicet ex numeris primo ſatisfacientibus a et b, hoc modo prodiiſſe ſequentes:

$$x = \zeta a + \eta b + \theta \quad \text{et} \quad y = \lambda a + \mu b + \nu$$

atque ſi iam hi pro a et b adhibeantur, per easdem formulas nouos deducemus valores pro x et y, qui denuo loco a et b aſſumti praebebunt iterum alios idoneos valores pro x et y, et ita porro.

7. Sint numeri qui hoc modo ſucceſſiue pro x reperiuntur,

$$a, a', a'', a''', a'''' \text{ etc.}$$

numeri autem pro y reſpondentes ſint:

$$b, b', b'', b''', b'''' \text{ etc.}$$

atque habebimus ſequentes aequationes:

$$\begin{array}{ll} a' = \zeta a + \eta b + \theta; & b' = \lambda a + \mu b + \nu \\ a'' = \zeta a' + \eta b' + \theta; & b'' = \lambda a' + \mu b' + \nu \\ a''' = \zeta a'' + \eta b'' + \theta; & b''' = \lambda a'' + \mu b'' + \nu \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Ex his relationibus eliminando litteras b, b', ſatis ſimplex relatio concluditur, inter valores continuos, a, a', a'', quae ita ſe habet:

$$a'' = (\mu + \zeta) a' + (\eta\lambda - \mu\zeta) a + \theta(1 - \mu) + \eta\nu.$$

Simili modo eliminando litteras a, a'

$$b'' = (\mu + \zeta) b' + (\eta\lambda - \zeta\mu) b + \lambda\theta + \nu(1 - \zeta),$$

vnde patet vtramque ſeriem eſſe recurrentem ſecundi ordinis, ſecundum eandem ſcalam relationis:

$$\zeta + \mu, \quad \eta\lambda - \zeta\mu$$

vtrinque autem inſuper numerum quendam abſolutum addi oportet.

8. Cognita hac ſcala relationis formetur haec aequatio quadratica

$$z^2 = (\zeta + \mu) z + (\eta\zeta - \zeta\mu)$$

cuius binae radices ſunt:

$$z = \frac{\zeta+\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{\zeta-\mu}{2}\right)^2 + \eta\lambda\right)}$$

quarum poteſtatibus exprimi poſſunt termini generales vtriusque ſeriei. Quo hoc clarius reddatur, ſit prioris ſeriei

$$a, \; a', \; a'', \; a''' \text{ etc.}$$

terminus quotuscunque $= x$, alterius vero ſeriei:

$$b, \; b', \; b'', \; b''' \text{ etc.}$$

terminus generalis y, et poſito breuitatis gratia

$$\frac{\zeta+\mu}{2} = r \quad \text{et} \quad \sqrt{\left(\left(\frac{\zeta-\mu}{4}\right)^2 + \eta\lambda\right)} = \sqrt{s},$$

pro priori ſerie ſtatuatur

$$x = f(r + \sqrt{s})^n + g(r - \sqrt{s})^n + b,$$

eritque valor ſequens

$$x' = f(r + \sqrt{s})(r + \sqrt{s}) + g(r - \sqrt{s})(r - \sqrt{s})^n + b$$

huncque ſequens

$$x'' = f(r + \sqrt{s})^2 (r + \sqrt{s})^n + g(r - \sqrt{s})^2 (r - \sqrt{s})^n + b.$$

Quare cum ex lege progreſſionis eſſe debeat;

$$x'' = (\zeta + \mu) x' + (\eta\lambda - \zeta\mu) x + \theta(1 - \mu) + \eta\nu$$

vbi

ſi illi valores ſubſtituantur, poteſtates ſponte ſe deſtruunt, ac reſultat

$$b = \frac{\theta(1-\mu)+\eta\nu}{(1-\mu)(1-\zeta)-\zeta\lambda}.$$

Pro coëfficientibus autem f et g conſiderentur termini initiales ante definiti, et facto quidem $n = 0$, prodeat $x = a$, hincque erit

$$a = f + g + b,$$

tum vero ponatur $n = 1$ vt prodeat

$$x = a' = \zeta a + \eta b + \theta$$

fiatque ea

$$= f(r + \sqrt{s}) + g(r - \sqrt{s}) + b,$$

et quia

$$f + g = a - b, \text{ erit } a' = (a-b)r + (f-g)\sqrt{s} + b),$$

hincque

$$f - g = \frac{a'}{\sqrt{s}} - \frac{(a-b\,r}{\sqrt{s}} - \frac{b}{\sqrt{s}} = \frac{a' - ar - b(1-r)}{\sqrt{s}}.$$

Eodem modo pro altera ſerie recurrente terminus generalis y reperietur, ita vt in genere nihil amplius deſiderari poſſit.

9. Caeterum vti iam innuimus, dantur caſus, quibus formula $App + 2Bpq + Cqq$, neque ad vnitatem, neque ad binarium deprimi poteſt, conveniet igitur litteras p et q ita aſſumi, vt huic formulae minimus valor concilietur, vnde non parum egregium naſcitur Problema, quo datis numeris A, B, C quaeruntur valores litterarum p et q in integris, vt formula $App + 2Bpq + Cqq$ minimum omnium accipiat valorem.

Alia

Alia Resolutio eiusdem aequationis.

10. Quum tres termini initiales per A multiplicati, factores habeant

$$(Ax+By+y\sqrt{(C^2-AC)})\ ;\ (Ax+By-y\sqrt{(B^2-AC)})$$

totam aequationem sub tali forma repraesentare licebit:

$$(Ax+By+M+(y+N)\sqrt{(B^2-AC)})(Ax+By)+M$$
$$-(y+N)\sqrt{(B^2-AC)})=O,$$

quae euoluta praebet

$$A^2x^2+2ABxy+ACy^2+2AMx+(2MB-2NB^2+2ACN)y$$
$$+M^2-B^2N^2+ACN^2-O=0$$

qua cum forma proposita comparata assequimur:

$$2AD=2AM\ ;\ D=M$$
$$2AE=2MB-2N(B^2-AC)$$
$$AF=M^2-N^2(B^2-AC)-O\text{, hincque}$$
$$M=D;\ N=\frac{BD-AE}{B^2-AC};\ O=D^2-AF-\frac{(BD-AE)}{B^2-AC}.$$

11. Inuentis igitur valoribus M, N et O, ponatur breuitatis gratia $BB-AC=k$, vt aequatio nostra per factores irrationales expressa sit

$$(Ax+By+D+(y+N)\sqrt{k})(Ax+By+D-(y+N)\sqrt{k})=O.$$

Et quia assumimus vnam solutionem iam esse cognitam, qua sit $x=a$ et $y=b$, habebimus quoque

$$(Aa+Bb+D+(b+N)\sqrt{k})(Aa+Bb+D-(b+N)\sqrt{k})=O$$

quocirca bina haec producta inter se aequalia esse debebunt; statuamus hinc breuitatis gratia:

$$Ax+By+M=P\ ;\ (y+N)=Q$$
$$Aa+By+M=G;\ b+N=H$$

ita

ita vt noſtra binorum productorum aequalitas fiat:

$$(P+Q\surd k)(P-Q\surd k)=O=(G+H\surd k)(G-H\surd k),$$

vbi notandum, ſi prior factor illius producti, alterutri factori iſtius aequalis ponatur, tum quoque poſteriorem factorem illius ſponte alteri huius aequalem eſſe futurum, quoniam diſcrimen tantum in ſigno quantitatis radicalis $\surd k$ eſt ſitum. Manifeſtum autem eſt, ſi factores priores inter ſe aequales ſtatuantur et partes tam rationales, quam irrationales ſeorſim aequentur, ſcilicet $F=G$ et $Q=H$, inde ipſum caſum cognitum eſſe proditurum, nempe $x=a$ et $y=b$.

12. Sin autem hoc modo prior factor illius producti, poſteriori huius aequetur, vt ſit

$$P+Q\surd k=G-H\surd k,$$

noua ſolutio hinc elicietur, aequalitas enim

$$Q=-H \text{ dabit } y+N=-b-N, \text{ ſiue } y=-b-2N,$$

vnde altera conditio $P=G$ dabit

$$Ax-Bb-2NB+M=Aa+Bb+M \text{ ſeu}$$

$$Ax=Aa+2Bb+2NB, \text{ hincque } x=a+\tfrac{2B(b+N)}{A}.$$

Ergo ex qualibet ſolutione iam inuenta, puta $x=a$ et $y=b$, alia quaſi ſociata ex ea facillime concluditur; quippe quae ſi loco M et N valores aſſumti reſtituantur, praebebit

$$x=a+\tfrac{2B}{A}\left(b+\tfrac{BD-AE}{(B^2-AC)}\right) \quad y=-b-\tfrac{2(BD-AE)}{B^2-AC}.$$

Quae quidem ſolutio numeris fractis continetur, niſi forte numeratores fuerint per denominatores ſuos diuiſibiles.

13. Quo autem hinc plures atque adeo infinitas ſolutiones eliciamus, in ſubſidium vocemus formulam $s = \sqrt{(kr^2 + 1)}$, quippe quae methodo Pelliana ſemper infinitis modis reſolui poteſt, dummodo k non fuerit vel numerus negatiuus, vel numerus quadratus. Quum enim hinc fiat $ss - kr^2 = 1$, noſtram aequationem hac forma repraeſentare poterimus:

$$P^2 - kQ^2 = (G^2 - kH^2)(ss - kr^2).$$

Hincque per factores irrationales ſtatuamus

$$P + Q\sqrt{k} = (G + H\sqrt{k})(s + r\sqrt{k}) = Gs + kHr + (Gr + Hs)\sqrt{k}$$

ſic enim ſimul toti aequationi ſatisfiet, ſi quidem partes rationales et irrationales ſeorſim aequantur. At irrationales praebent:

$$Q = Gr + Hs,\ y + N = Aar + Bbr + Mr + bs + Ns;$$
$$y = Aar + Bbr + Mr + bs + Ns - N.$$

At partes rationales dant:

$$P = Gs + kHr; \text{ ſeu } Ax + By + D = Aas + Abs + Ds + kr + kNr$$

vnde

$$x = s\left(a + \frac{D - BN}{A}\right) + r\left(\frac{kb + kN - B^2b - BD}{A} - Ba\right) + \frac{BN - D}{A}.$$

14. Nunc igitur loco litterarum M et N reſtituantur valores ſupra inuenti, atque pro noſtris quantitatibus quaeſitis x et y ſequentes reperiuntur formulae, ſi ſcilicet loco k ſcribatur $B^2 - AC$:

$$x = \left(a + \frac{EB - CD}{B^2 - AC}\right)s + Ba + Cb + E)(-r) + \frac{D - EB}{B^2 - AC}$$
$$y = \left(b + \frac{BD - AE}{B^2 - AC}\right)s + (Bb + Aa + D)r + \frac{AE - BD}{B^2 - AC}$$

vbi

vbi permutatio, quae inter litteras x et y locum habet, manifesto elucet.

15. Quod si hi valores pro x et y inuenti loco a et b substituantur in istis formulis, pro x et y inde noui valores eruentur, qui denuo loco a et b sumti alios nouos pro x et y praebebunt, et ita porro in infinitum. Verum omnes istos valores simul in formulis generalibus complecti licebit, vti iam supra fecimus. Sequenti autem modo idem negotium multo commodius et succinctius conficietur.

16. Quoniam $ss - krr = 1$ atque adeo omnes potestates ipsius $ss - krr$ etiam vnitati aequantur, ponere poterimus

$$P^2 - kQ^2 = (G^2 - kH^2)(ss - krr)^n,$$

hincque per factores irrationales

$$P + Q\sqrt{k} = (G + H\sqrt{k})(s + r\sqrt{k})^n$$

quia autem huius potestatis aliae partes sunt rationales, aliae irrationales per $\sqrt{k}$ affectae, statuamus

$$(s + r\sqrt{k})^n = S + R\sqrt{k}$$

atque vt ante hinc sequentes valores pro x et y eliciemus

$$x = \left(a + \frac{EB - CD}{B^2 - AC}\right)S + (Ba + Cb + E)(-R) + \frac{CD - EB}{B^2 - AC}$$
$$y = \left(b + \frac{BD - AE}{B^2 - AC}\right)S + (Bb + Aa + D)R + \frac{AE - BD}{B^2 - AC}.$$

17. Quum autem sit $S + R\sqrt{k} = (s + r\sqrt{k})^n$ erit eodem modo $S - R\sqrt{k} = (s - r\sqrt{k})^n$

vnde deducimus

$$S = \tfrac{1}{2}(s + r\sqrt{k})^n + \tfrac{1}{2}(s - r\sqrt{k})^n \text{ et}$$
$$R = \frac{1}{2\sqrt{k}}(s + r\sqrt{k})^n - \frac{1}{2\sqrt{k}}(s - r\sqrt{k})^n$$

 quibus

quibus valoribus ſubſtitutis, obtinebimus

$$x = \left(\frac{EB - CD}{2(B^2 - AC)} + \frac{a\sqrt{k} - Ba - Cb - E}{2\sqrt{k}}\right)(s + r\sqrt{k})^n$$

$$+ \left(\frac{EB - CD}{2(B^2 - AC)} + \frac{a\sqrt{k} + Ba + Cb + E}{2\sqrt{k}}\right)(s - r\sqrt{k})^n + \frac{CD - EB}{B^2 - AC}$$

$$y = \left(\frac{BD - AE}{2(B^2 - AC)} + \frac{b\sqrt{k} + Bb + Aa + D}{2\sqrt{k}}\right)(s + r\sqrt{k})^n$$

$$+ \left(\frac{BD - AE}{2(B^2 - AC)} + \frac{b\sqrt{k} - Bb - Aa - E}{2\sqrt{k}}\right)(s - r\sqrt{k})^n + \frac{AE - BD}{B^2 - AC}$$

et quia $k = B^2 - AC$ hae formulae ita ſimpliciores euadent:

$$x = \frac{1}{2k}(EB - CD + ak - (Ba + Cb + E)\sqrt{k})(s + r\sqrt{k})^n$$

$$+ \frac{1}{2k}(EB - CD + ak + (Ba + Cb + E)\sqrt{k})(s - r\sqrt{k})^n$$

$$+ \frac{1}{2k}(CD - EB)$$

$$y = \frac{1}{2k}(BD - AE + bk + (Bb + Aa + D)\sqrt{k})(s + r\sqrt{k})_n$$

$$+ \frac{1}{2k}(BD - AE + bk - (Bb + Aa + D)\sqrt{k})(s - r\sqrt{k})^n$$

$$+ \frac{1}{2k}(AE - BD).$$

18. Ante iam vidimus, quamlibet ſolutionem $x = a$ et $y = b$ ſuppeditare aliam ſibi quaſi ſociam:

$$x = a + \frac{2B}{A}\left(b + \frac{BD - AE}{B^2 - AB}\right) \text{ et } y = -b - \frac{2(BD - AE)}{B^2 - AC},$$

quia autem ex ipſa indole noſtrae aequationis, litterae x et y inter ſe permutari poſſunt, dummodo 1°. litterae a et b, 2°. litterae A et C et 3^tio^ litterae D et E inter ſe permutentur, haec conſideratio nobis adhuc aliam ſolutionem ſuppeditabit, ſcilicet

$$x = -a - \frac{2(BE - CD)}{B^2 - AC}; \quad y = +b + \frac{2B}{C}\left(a + \frac{BE - CD}{B^2 - AC}\right):$$

Sicque ex eadem ſolutione duae nouae ſociae obtinentur.

19. Haec methodus posterior aequationem nostram resoluendi eo magis est notatu digna, quod ex doctrina irrationalium est petita, cuius alioquin nullus videtur esse vsus in Analysi Diophantea. Eximium autem huius doctrinae vsum iam pridem in Algebra mea Ruthenice et Germanice edita fusius ostendi. Caeterum ad casus particulares nostrae aequationis propositae hic descendere non opus videtur, quum huiusmodi casus iam passim, satis superque sint pertractati.

INSIGNES PROPRIETATES SERIERVM SVB HOC TERMINO GENERALI CONTENTARVM

$$x = \tfrac{1}{2}\left(a+\tfrac{b}{\sqrt{k}}\right)(p+q\sqrt{k})^n + \tfrac{1}{2}\left(a-\tfrac{b}{\sqrt{k}}\right)(p-q\sqrt{k})^n.$$

Auctore

L. EVLERO.

Statim adparet, has ſeries eſſe recurrentes ſecundi ordinis et quemlibet terminum per binos praecedentes determinari; cuiusmodi ſeries etſi iam ſatis ſuperque ſunt pertractatae, tamen nonnullas earum inſignes proprietates hic proponam; inprimis autem operam dabo, vt omnia calculo ſuccincto facillime expediantur, dum alias ad calculos non parum complicatos perueniri ſolet.

§. 1. Breuitatis autem gratia ſtatim ponamus

$$\tfrac{1}{2}\left(a+\tfrac{b}{\sqrt{k}}\right)=f;\quad \tfrac{1}{2}\left(a-\tfrac{b}{\sqrt{k}}\right)=g$$

$$p+q\sqrt{k}=v;\quad p-q\sqrt{k}=u$$

tum vero ſit etiam $p^2-kq^2=r$; ita, vt ſit $p=\sqrt{(kq^2+r)}$. Hoc modo formula noſtra ita contrahetur

$$k=fv^n+gu^n$$

inde autem mox ſequentes fluunt relationes:

$f+g$

$f+g=a$; $f-g=\frac{b}{\sqrt{k}}$ et $fg=\frac{1}{4}(a^2-\frac{b^2}{k})$

$v+u=2p$; $v-u=2q\sqrt{k}$; $vu=p^2-kq^2=r$.

§. 2. Praeterea quo terminos huius feriei facilius menti repraefentare poffimus; loco x fcribamus hoc fignum $[n]$, quippe quo terminus ex exponente n oriundus defignatur, ficque ipfa feries fequentibus conftabit terminis:

$[0]$; $[1]$; $[2]$; $[3]$ etc.

vnde hic faltem termini initiales notentur, fcilicet

$[0]=a$; $[1]=ap+bq$; $[2]=a(p^2+kq^2)+2bpq$.

His igitur praenotatis fequentia problemata tractemus.

Problema Primum.

§. 3. *Definire legem, qua terni termini huius feriei immediate fe infequentes* $[n]$; $[n+1]$; $[n+2]$ *a fe inuicem pendent.*

Solutio.

Cum fit $[n]=f.v^n+g.u^n$; eodemque modo $[n+1]=f.v^{n+1}+g.u^{n+1}$ et $[n+2]=f.v^{n+2}+g.u^{n+2}$; confideretur haec formula $v^{n+1}(v+u)$, quae ob $v+u=2p$ fit $=2p.v^{n+1}$; eadem vero ob $vu=r$ fiue $u=\frac{r}{v}$ abit in $v^{n+2}+r.v^n$, ita vt nunc habeamus $2pv^{n+1}=v^{n+2}+r.v^n$ fiue $v^{n+2}=2p.v^{n+1}-r.v^n$; eodemque modo reperitur $u^{n+2}=2p.u^{n+1}-r.u^n$. Nunc igitur fi hae duae formulae addantur, $fv^{n+2}=2fp.v^{n+1}-fr.v^n$ et $g\ u^{n+2}=2gp.u^{n+1}-gr.u^n$

fumma

ſumma erit

$$[n+2] = 2p[n+1] - r[n];$$

vnde patet, noſtram ſeriem eſſe recurrentem, ſcala relationis exiſtente $2p, -r$.

Coroll. 1.

§. 4. Si ergo dentur bini quicunque termini ſucceſſiui huius ſeriei, qui ſint P et Q, ſequens terminus ſemper erit $= 2pQ - rP$.

Coroll. 2.

§. 5. Quodſi ergo pro hac ſcala relationis $2p, -r$ dentur duo termini initiales, A et B, erit, vti ante oſtendimus,

$$A = a \text{ et } B = ap + bq$$

ideoque $a = A$ et $b = \frac{B - Ap}{q}$, exiſtente $kq^2 = p^2 - r$, ita, vt ſit $\frac{b}{\sqrt{k}} = \frac{B - Ap}{\sqrt{(p^2 - r)}}$ hincque ipſe terminus generalis huius ſeriei innoteſcit, quippe qui eſt ipſa noſtra formula propoſita.

Coroll. 3.

§. 6. Ex formulis inuentis patet etiam fore

$$v^{n+2} + u^{n+2} = 2p(v^{n+1} + u^{n+1}) - r(v^n + u^n)$$

vnde deducuntur ſequentes relationes

ſi	erit
$n = 0$	$v^2 + u^2 = 2p(v+u) - 2r$
$n = 1$	$v^3 + u^3 = 2p(v^2 + u^2) - r(v+u)$
$n = 2$	$v^4 + u^4 = 2p(v^3 + u^3) - r(v^2 + u^2)$
$n = 3$	$v^5 + u^5 = 2p(v^4 + u^4) - r(v^3 + u^3)$
$n = 4$	$v^6 + u^6 = 2p(v^5 + u^5) - r(v^4 + u^4)$
	etc.

Coroll.

Coroll. 4.

§. 7. Hinc si valores inuenti successiue substituantur, reperiemus sequentem progressionem

$$v^0 + u^0 = 2$$
$$v^1 + u^1 = 2p$$
$$v^2 + u^2 = 4p^2 - 2r$$
$$v^3 + u^3 = 8p^3 - 6pr$$
$$v^4 + u^4 = 16p^4 - 16p^2r + 2r^2$$
$$v^5 + u^5 = 32p^5 - 40p^3r + 10pr^2$$
$$v^6 + u^6 = 64p^6 - 96p^4r + 36p^2r^2 - 2r^3$$

etc.

Coroll. 5.

§. 8. Hae expressiones simpliciores reddentur si loco $2p$ scribamus litteram simplicem s tum enim ista progressio resultat

$$v^0 + u^0 = 2$$
$$v^1 + u^1 = s$$
$$v^2 + u^2 = s^2 - 2r$$
$$v^3 + u^3 = s^3 - 3rs$$
$$v^4 + u^4 = s^4 - 4rs^2 + 2r^2$$
$$v^5 + u^5 = s^5 - 5rs^3 + 5r^2s$$
$$v^6 + u^6 = s^6 - 6rs^4 + 9r^2s^2 - 2r^3$$

etc.

quae series cum iam satis sit pertractata aliunde nouimus, fore in genere

$$v^n + u^n = s^n - n.\,r\,s^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.\;2}\,r^2.\,s^{n-4}$$
$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{1.\;2.\;3}\,r^3.\,s^{n-6}$$
$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\;2.\;3.\;4}\,r^4.\,s^{n-8}$$

etc.

atque hinc etiam ſequens problema reſolui poterit.

Problema Secundum.

§. 9. *Definire legem, qua terni termini huius ſeriei per ſaltum ſe inuicem inſequentes inter ſe cohaerent, ſcilicet hi termini* $[n]$; $[n+\nu]$; et $[n+2\nu]$, *denotante* ν *indicem ſaltus, quo termini ſumuntur.*

Solutio.

Cum ergo ſit

$$[n] = f v^n + g.\, u^n, \text{ et } [n+\nu] = f.\, v^{n+\nu} + g.\, u^{n+\nu},$$

atque

$$[n+2\nu] = f.\, v^{n+2\nu} + g.\, u^{n+2\nu};$$

conſideretur haec formula $v^{n+\nu}(v^\nu + u^\nu)$, ac ponamus per legem ante aſſignatam eſſe $v^\nu + u^\nu = 2\pi$, exiſtente $v^\nu.\, u^\nu = r^\nu$; et formula iſta primo fiet $2\pi.\, v^{n+\nu}$ et quatenus $u^\nu = \frac{r^\nu}{v^\nu}$ eadem dat $v^{n+2\nu} + r^\nu v^n$ ita, vt iam ſit

$$v^{n+2\nu} = 2\pi.\, v^{n+\nu} - r^\nu.\, v^n$$

eodemque modo

$$u^{n+2\nu} = 2\pi.\, u^{n+\nu} - r^\nu.\, u^n$$

quare ratiocinium, vt ante, inſtituendo nanciſcimur iſtam relationem quaeſitam

$$[n+2\nu] = 2\pi[n+\nu] - r^\nu.[n]$$

ope cuius legis termini ſecundum eundem ſaltum procedentes

$$[n+3\nu];\ [n+4\nu];\ [n+5\nu] \text{ etc.}$$

facile reperiuntur.

Coroll.

Coroll. 1.

§. 10. Cum etiam, vti vidimus, formulae $v^n + u^n$ ſecundum eandem legem progrediuntur ac ſi breuitatis gratia loco 2π ſcribamus σ, progreſſio poſtremi corollarii etiam ad hos ſaltus adcommodabitur, ſi modo loco r ſcribatur r^ν; ſic enim obtinebimus

$$v^0 + u^0 = 2$$
$$v^\nu + u^\nu = \sigma$$
$$v^{2\nu} + u^{2\nu} = \sigma^2 - 2.r^\nu$$
$$v^{3\nu} + u^{3\nu} = \sigma^3 - 3.r^\nu.\sigma$$
$$v^{4\nu} + u^{4\nu} = \sigma^4 - 4.r^\nu.\sigma^2 + 2r^{2\nu}$$
$$v^{5\nu} + u^{5\nu} = \sigma^5 - 5.r^\nu\sigma^3 + 5.r^{2\nu}\sigma$$
$$v^{6\nu} + u^{6\nu} = \sigma^6 - 6.r^\nu\sigma^4 + 9.r^{2\nu}\sigma^2 - 2r^{3\nu}.$$

Coroll. 2.

§. 11. Hoc ergo modo facile eſt, ſaltum ſiue numerum ν tantum efficere, quam quis voluerit, atque adeo ope huius problematis in ſerie noſtra termini quantumuis ab initio remoti ſatis expedite definiri poterunt; id quod ſi ſeriem per ſingulos terminos actu continuare vellemus, nimis operoſum calculum poſtularet.

Problema Tertium.

§. 12. Dato quocunque termino ſeriei noſtrae $[n]$, inuenire eius immediate ſequentem $[n+1]$.

Solutio.

Cum ſit

$$[n] = fv^n + g.u^n \text{ et } [n+1] = fv.v^n + g.u.u^n,$$

 ſi

si haec a priore in u ducta subtrahatur, remanet

$$u[n]-[n+1]=f(u-v)v^n;$$

at si haec ab illa in v ducta subtrahatur, remanebit

$$v[n]-[n+1]=g(v-u)u^n.$$

Iam hac duae aequalitates in se inuicem ducantur et ob $v^n . u^n = r^n$ proueniet ista aequatio

$$r[n]^2-2p[n][n+1]+[n+1]^2=-fg.(v-u)^2 r^n.$$

At vero est

$$(v-u)^2=v^2+u^2-2vu=4p^2-4r;$$

sicque habebimus

$$r[n]^2-2p[n][n+1]+[n+1]^2-4fg(p^2-r)r^n=0.$$

Quare terminus sequens $[n+1]$ per aequationem quadraticam ex praecedente $[n]$ ita determinatur, vt sit

$$[n+1]=p.[n]+\sqrt{((p^2-r)[n]^2-4fg(p^2-r)r^n)}.$$

Supra autem vidimus esse

$$fg=\tfrac{1}{4}(a^2-\tfrac{b^2}{k}) \text{ et } p^2-r=kq^2,$$

quibus valoribus substitutis solutio nostra ita se habebit

$$[n+1]=p[n]+q\sqrt{(k[n]^2-(ka^2-b^2)r^n)}.$$

Coroll. 1.

§. 13. Quilibet ergo terminus nostrae seriei ita est comparatus, vt valor formulae

$$k[n]^2-(ka^2-b^2)r^n$$

certe sit numerus quadratus, quandoquidem omnes termini nostrae seriei sunt rationales.

Coroll.

Coroll. 2.

§. 14. Si ponamus feriei binos terminos initiales A et B, ita, vt iis respondeant exponentes $n=0$, et $n=1$ supra vidimus esse

$$a = A \text{ et } b = \frac{B - Ap}{q}, \text{ ideoque}$$

$$ka^2 - b^2 = -\frac{B^2 + 2AB.p - A^2 r}{q^2};$$

quare habebimus

$$[n+1] = p[n] + \sqrt{(kq^2[n]^2 + (B^2 - 2AB.p + A^2 r)r^n)}.$$

Problema Quartum.

§. 15. *Dato quocunque feriei termino* $[n]$, *inuenire terminum dato interuallo ipsum fequentem scilicet* $[n+\nu]$.

Solutio.

Ambo hi termini ita repraesententur

$$[n] = fv^n + g.u^n \text{ et } [n+\nu] = fv^\nu.v^n + gu^\nu.u^n$$

quarum prior nunc in u^ν, nunc in v^ν ducatur indeque posterior subtrahatur, et sequentes binae aequationes resultabunt:

$$u^\nu[n] - [n+\nu] = f(u^\nu - v^\nu)v^n \text{ et}$$

$$v^\nu[n] - [n+\nu] = g(v^\nu - u^\nu)u^n$$

si iam vt ante fuerit $v^\nu + u^\nu = 2\pi$

vnde sequitur $v^{2\nu} + u^{2\nu} = 4\pi^2 - 2r^\nu$

duas illas aequationes inuicem multiplicando adipiscimur

$$r^\nu[n]^2 - 2\pi.[n][n+\nu] + [n+\nu]^2 = -fg(v^\nu - u^\nu)^2 r^n.$$

Quia autem est

$$(v^\nu - u^\nu)^2 = v^{2\nu} + u^{2\nu} - 2r^\nu = 4\pi^2 - 4r^\nu \text{ et } fg = \tfrac{1}{4}(a^2 - \tfrac{b}{k})$$

relatio inuenta erit

$$[n+\nu]^2 - 2\pi[n][n+1] + r^\nu[n]^2 + (\pi^2 - r^2)(a^2 - \tfrac{b^2}{k})r^n = 0,$$

vnde iterum per extractionem radicis quadratae elicimus

$$[n+\nu] = \pi[n]\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(\pi^2 - r^\nu)[n]^2 \\ -(a^2 - \tfrac{b^2}{k})(\pi^2 - r^\nu)r^n\end{array}\right\}}$$

cuius indoles quo clarius perspiciatur, statuamus $v^\nu = \pi + \xi\sqrt{k}$, eritque $u^\nu = \pi - \xi\sqrt{k}$, vnde vtique erit $v^\nu + u^\nu = 2\pi$, at vero

$$v^\nu u^\nu = r^\nu = \pi^2 - k\xi^2, \text{ ita, vt sit } \pi^2 - r^\nu = k\xi^2;$$

quo valore substituto fit

$$[n+\nu] = \pi[n] + \xi\sqrt{(k[n]^2 - (ka^2 - b^2)r^n)}.$$

Coroll. 1.

§. 16. Hic ergo denuo proprietas ante obseruata inuoluitur, quod nempe ista formula

$$(k[n]^2 - (ka^2 - b^2)r^n)$$

semper debeat esse quadratum.

Coroll. 2.

§. 17. Ex terminis autem initialibus

A et B, ob $ka^2 - b^2 = \frac{-B^2 + 2AB.p - A^2r}{q^2}$

vti ante inuenimus, habebimus

$$[n+\nu] = \pi[n] + \xi\sqrt{(k[n]^2 + (\tfrac{B^2 - 2ABp + A^2r}{q^2})r^n)}.$$

Coroll.

Coroll. 3.

§. 18. Si capiamus $n = 0$, vt ſit $[n] = a$ aequatio noſtra ita ſe habebit

$$[\nu] = \pi a + \xi b;$$

quae eſt inſignis proprietas noſtrae formulae, quae autem ſponte ſe prodit ex eius indole; cum enim ſit

$$[\nu] = f v^\nu + g.\, u^\nu = f(\pi + \xi \sqrt{k}) + g.(\pi - \xi \sqrt{k}); \text{ erit}$$

$$[\nu] = \pi(f + g) + \xi \sqrt{k}(f - g) = ,$$

quae formula ob $f + g = a$ et $f - g = \frac{b}{\sqrt{k}}$ reducitur ad $\pi a + \xi b$.

Problema Quintum.

§. 19. *Dato termino ſeriei quocunque* $[n]$ *ex ſequentibus inueſtigare eum, qui ab illo tantum diſtat, quantum ipſe ab initio, hoc eſt inuenire terminum* $[2n]$.

Solutio.

Cum ſit $[n] = f v^n + g.\, u^n$; quadratis ſumendis erit

$$[n]^2 - f g.\, r^n = f^2 v^{2n} + g^2.\, u^{2n}$$

tum vero eſt

$$[2n] = f v^{2n} + g.\, u^{2n};$$

haec primo in g ducta ab illa ſubtrahatur et remanet

$$[n]^2 - 2 f g\, r^n - g[2n] = f(f - g) v^{2n}$$

deinde poſterior aequatio in f ducta et a priore ſubtracta relinquit

$$[n]^2 - 2 f g\, r^n - f[2n] = g(g - f) u^{2n}$$

hae

hae iam duae aequationes in se ducantur et prodibit

$$[n]^4 - (f+g)[2n][n]^2 + fg[2n]^2 - 4fgr^n[n]^2$$
$$+ 2fgr^n(f+g)[2n] + 4f^2g^2.r^{2n} = -fg(f-g)^2r^{2n};$$

cum igitur sit

$$f+g = a;\ fg = \tfrac{1}{4}(a^2 - \tfrac{b^2}{k});\ f-g = \tfrac{b}{\sqrt{k}}$$

his valoribus substitutis aequatio hanc induet formam:

$$[n]^4 - a[2n][n]^2 + \tfrac{1}{4}(a^2 - \tfrac{b^2}{k})[2n]^2$$
$$-(a^2 - \tfrac{b^2}{k})r^n[n]^2 + \tfrac{1}{4}(a^2 - \tfrac{b^2}{k})a.r^n[2n]$$
$$+ \tfrac{1}{4}a^2(a^2 - \tfrac{b^2}{k})r^{2n} = 0$$

vnde eliciamus $[2n]$, subductoque calculo, tandem reperitur, breuitatis gratia loco $a^2 - \frac{b^2}{k}$ scribendo c

$$[2n] = \tfrac{2a}{c}[n]^2 - ar^n + \tfrac{2b[n]}{ck}\sqrt{([n]^2k - ck.r^n)}$$

et substituto valore ipsius c

$$[2n] = \frac{2ak}{a^2k - b^2}[n]^2 - ar^n$$
$$- \frac{2b[n]}{a^2k - b^2}\sqrt{(k[n]^2 - (a^2k - b^2)r^n)}.$$

Scholion.

§. 20. Quia haec solutio ad calculos non parum taediosos est perducta, hoc negotium non modo multo facilius, sed etiam generalius expediri posse obseruaui. Quae methodus quo clarius percipiatur, sequentia praemitto.

Hypothesis.

§. 21. Quemadmodum formulae $fv^n + g.u^n$ charactere designauimus; ita istam formulam $fv^n - g.u^n$ illi

illi adfinem hoc caractere $[\acute{n}]$ indicemus; quae ergo quantitas ex illa nascitur, si littera g negatiue capiatur.

Corollarium.

§. 22. Cum sit

$$f v^n - g.u^n = \sqrt{([n]^2 - 4fg.r^n)}$$

erit nouus noster caracter

$$[\acute{n}] = \sqrt{([n]^2 - 4fg.r^n)},$$

quae formula ita est irrationalis, vt per $\sqrt{k}$ multiplicata fiat rationalis; tum autem resultat formula illa

$$\sqrt{(k[n]^2 - 4fg.kr^n)},$$

quam ante iam obseruauimus semper esse rationalem, cui ergo aequatur caracter $[\acute{n}]\sqrt{k}$.

Lemma.

§. 23. Cum ergo sit

$$f v^n + g.u^n = [n] \text{ et } f v^n - g.u^n = [\acute{n}], \text{ erit}$$

$$v^n = \frac{[n]+[\acute{n}]}{2f} \text{ et } u^n = \frac{[n]-[\acute{n}]}{2g},$$

atque hinc adipiscimur

$$v^n + u^n = \frac{(f+g)[n]-(f-g)[\acute{n}]}{2fg}$$

quae est ea ipsa formula, quam supra, vbi loco n adhibuimus ν, per 2π indicauimus; tum erit

$$v^n - u^n = \frac{-(f-g)[n]+(f+g)[\acute{n}]}{2fg}$$

quae formula conuenit cum ea, quam casu $n = \nu$ supra per $2 \xi \sqrt{k}$ denotauimus.

Problema Sextum.

§. 24. *Datis in serie nostra duobus quibuscunque terminis* $[n]$ *et* $[\nu]$ *inuenire terminum* $[n+\nu]$ *simulque eius adfinem* $\overset{\prime}{[n+\nu]}$, *siquidem etiam datae erunt formulae* $\overset{\prime}{[n]}$ *et* $\overset{\prime}{[\nu]}$.

Solutio.

Cum sit

$$[\nu] = f v^{\nu} + g . u^{\nu} \text{ et } \overset{\prime}{[\nu]} = f v^{\nu} - g u^{\nu}$$

multiplicetur illa aequatio per $v^n + u^n$, haec vero per $v^n - u^n$, et obtinebimus binas sequentes aequationes:

$$[\nu](v^n + u^n) = f v^{n+\nu} + g . u^{\nu} v^n + f v^{\nu} u^n + g u^{n+\nu}$$

$$\overset{\prime}{[\nu]}(v^n - u^n) = f v^{n+\nu} - g . u^{\nu} v^n - f v^{\nu} u^n + g . u^{n+\nu}$$

quae duae additae praebent

$$[\nu](v^n + u^n) + \overset{\prime}{[\nu]}(v^n - u^n) = 2(f v^{n+\nu} + g . u^{n+\nu}) = 2[n+\nu]$$

sicque iam assecuti sumus terminum quaesitum $[n+\nu]$; cum autem per lemma praemissum sit

$$v^n + u^n = \frac{(f+g)[n] - (f-g)\overset{\prime}{[n]}}{2fg}$$

et $$v^n - u^n = \frac{-(f-g)[n] + (f+g)\overset{\prime}{[n]}}{2fg};$$

per formulas mere cognitas consequimur

$$[n+\nu] = \frac{(f+g)([n][\nu] + \overset{\prime}{[n]}\overset{\prime}{[n]}) - (f-g)(\overset{\prime}{[n]}[\nu] + [n]\overset{\prime}{[\nu]})}{4fg}.$$

Quia

Quia igitur

$$f+g=a \text{ et } f-g=\frac{b}{\sqrt{k}}, \text{ et } 4fg=a^2-\frac{b^2}{k}=\frac{ka^2-b^2}{k},$$

erit his valoribus ſubſtituendis terminus quaeſitus

$$[n+\nu]=\frac{ak[n][\nu]-b([n][\nu]'\sqrt{k}-b([\nu][n]')\sqrt{k}+ak[n]'[\nu]'}{ka^2-b^2}$$

quod ad formulam adfinem $[n+\nu]'$ attinet, iam innuimus eam ex priore naſci, dummodo loco g ſcribatur $-g$, atque hinc orietur

$$[n+\nu]'=\frac{-(f-g)([n][\nu]+[n]'[\nu]')+(f+g)([n]'[\nu]+[n]'[\nu]}{4fg}$$

quae in $\sqrt{k}$ ducta et loco f et g valoribus ſubſtitutis dabit

$$[n+\nu]'\sqrt{k}=\frac{-kh[n][\nu]+ak[n][\nu]'\sqrt{k}+ak[\nu][n]'\sqrt{k}-kb[n]'[\nu]'}{ka^2-b^2}.$$

Coroll. I.

§. 25. Quo facilius hanc ſolutionem ad formam ſolitam reducere queamus; recordemur eſſe

$$[n]'\sqrt{k}=\sqrt{(k[n]^2-(ka^2-b^2)r^n)}$$

$$[\nu]'\sqrt{k}=\sqrt{(k[\nu]^2-(ka^2-b^2)r^\nu)}$$

et

$$[n+\nu]'\sqrt{k}=\sqrt{(k[n+\nu]^2-(ka^2-b^2)r^{n+\nu})}.$$

Coroll. 2.

§. 26. Si hic ſumamus $\nu=n$, vt prodeat caſus praecedente problemate tractatus, ſtatim reperimus

$$[2n]=\frac{ak[n]^2-2b[n][n]'\sqrt{k}+ak[n]'^2}{ka^2-b^2}$$

 et

et formulis affinibus elifis

$$[2n] = \frac{2ak[n]^2 - a(ka^2-b^2)r^n - 2b[n]\sqrt{(k[n]^2-(ka^2-b^2)r^n)}}{ka^2-b^2}$$

quae cum ante inuenta congruit.

Coroll. 3.

§. 27. Eodem cafu $\nu = n$ formula affinis colligitur:

$$[2\acute{n}]\sqrt{k} = \sqrt{(k[2n]^2-(ka^2-b^2)r^{2n})} =$$
$$-2kb[n]^2 + 2a[n]\sqrt{(k[n]^2-(ka^2-b^2)r^n)}$$
$$+b.(ka^2-b^2)r^n$$
$$= \frac{-2kb[n]^2 + b(ka^2-b^2)r^n + 2a[n]\sqrt{(k[n]^2-(ka^2-b^2)r^n)}}{ka^2-b^2}.$$

Coroll. 4.

§. 28. Ope harum formularum iam facile erit terminos feriei ab initio quantumuis remotos affignare, quandoquidem ex binis quibuscunque $[n]$ et $[\nu]$ reperitur ftatim terminus $[n+\nu]$; interim tamen ex lege, quam fupra iam dedimus, pro terminis $[n]$, $[n+\nu]$, $[n+2\nu]$; $[n+3\nu]$, $[n+4\nu]$ etc. haec feries multo facilius, quousque libuerit, continuari poteft; fi enim ponatur $v^\nu + u^\nu = 2\pi$; ita, vt fit

$$2\pi = \frac{(f+g)[n]-(f-g)[\acute{n}]}{2fg}$$

$$= \frac{2ak[n]-2b[\acute{n}]\sqrt{k}}{ka^2-b^2};$$

lex progreffionis ita fe habet

$$[n+2\nu] = 2\pi[n+\nu] - r^\nu[n]$$
$$[n+3\nu] = 2\pi[n+2\nu] - r^\nu[n+\nu]$$

etc.

Proble-

Problema Septimum.

§. 29. *Si fuerit*

$$x = \tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{b}{\sqrt{k}}\right)(p + q\sqrt{k})^n$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(a - \tfrac{b}{\sqrt{k}}\right)(p - q\sqrt{k})^n$$

similique modo

$$y = \tfrac{1}{2}\left(\alpha + \tfrac{\beta}{\sqrt{k}}\right)(p + q\sqrt{k})^n$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\alpha - \tfrac{\beta}{\sqrt{k}}\right)(p - q\sqrt{k})^n$$

inuenire aequationem inter x *et* y, *cui isti valores rationales et integri satisfaciant, quicunque integer pro* n *accipiatur.*

Solutio.

Ponamus iterum breuitatis gratia

$$\tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{b}{\sqrt{k}}\right) = f;\quad \tfrac{1}{2}\left(a - \tfrac{b}{\sqrt{k}}\right) = g$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\alpha + \tfrac{\beta}{\sqrt{k}}\right) = \zeta;\quad \tfrac{1}{2}\left(\alpha - \tfrac{\beta}{\sqrt{k}}\right) = \eta$$

porro $p + q\sqrt{k} = v$; $p - q\sqrt{k} = u$; $p^2 = kq^2 + r$ et nunc habebimus

$$x = f v^n + g.\, u^n$$
$$y = \zeta v^n + \eta.\, u^n$$

vnde eliminemus litteras v et u, ac primo quidem habebimus

$$\eta x - g y = (\eta f - \zeta g)\, v^n$$

et $$\zeta x - f y = (\zeta g - \eta f)\, u^n$$

quae duae formulae in se inuicem ductae ob $vu = r$ dabunt

$$\eta\zeta x^2 - (\zeta g + \eta f) xy + fg y^2 = -(\eta f - \zeta g)^2 r^n.$$

 Nunc

Nunc reſtituantur valores aſſumti ſcilicet

$$\zeta\eta = \tfrac{1}{4}(\alpha^2 - \tfrac{\beta^2}{k}); \quad fg = \tfrac{1}{4}(a^2 - \tfrac{b^2}{k})$$

$$\zeta g + \eta f = \tfrac{1}{2}(a\alpha - \tfrac{b\beta}{k})$$

et

$$(\eta f - \zeta g)^2 = \tfrac{1}{4k}(a^2\beta^2 - 2ab\alpha\beta + \alpha^2 b^2)$$

atque noſtra aequatio quaeſita erit

$$\tfrac{1}{4}(\alpha^2 - \tfrac{\beta^2}{k})x^2 - \tfrac{1}{2}(a\alpha - \tfrac{b\beta}{k})xy + \tfrac{1}{4}(\alpha^2 - \tfrac{b^2}{k})y^2$$
$$+ \tfrac{1}{4k}(a^2\beta^2 - 2ab\alpha\beta + \alpha^2 b^2)r^n = 0$$

ſiue per $4k$ multiplicando

$$(\alpha^2 k - \beta^2)x^2 - 2(a\alpha k - b\beta)xy + (a^2 k - b^2)y^2$$
$$+ (a\beta - \alpha b)^2 r^n = 0$$

quae tota eſt rationalis, eique ſatisfaciunt ipſi valores pro x et y aſſumti.

Corollarium.

§. 30. Comparetur haec aequatio inuenta cum forma generali

$$Ax^2 - 2Bxy + Cy^2 + Dr^n = 0$$

atque ſatisfieri oportet ſequentibus conditionibus

$$1^\circ.\ (a\beta - \alpha b)^2 \tfrac{A}{D} = (k\alpha^2 - \beta^2)$$

$$2^\circ.\ (a\beta - \alpha b)^2 \tfrac{B}{D} = (ka\alpha - b\beta)$$

$$3^\circ.\ (a\beta - \alpha b)^2 \tfrac{C}{D} = (ka^2 - b^2)$$

quarum prima per tertiam diuiſa ſtatim ſuppeditat

$$k = \frac{Ab^2 - C\beta^2}{Aa^2 - C\alpha^2}.$$

Coroll.

Coroll. 2.

§. 31. Subſtituatur hic valor tam in prima, quam in ſecunda aequatione ac perueníetur ad iſtas aequalitates

$$(a\beta - \alpha b)^2 \frac{A}{D} = \frac{A\alpha^2 b^2 - a^2\beta^2}{A a^2 - C\alpha^2}$$

$$(a\beta - \alpha b)^2 \frac{B}{D} = \frac{A a \alpha b^2 - C a \alpha \beta^2 - A a^2 b \beta + C \alpha^2 b \beta}{A a^2 - C\alpha^2}$$

quarum haec per illam diuiſa praebet

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{C\beta - Bb}{B\beta - Ab}.$$

Coroll. 3.

§. 32. Statuamus nunc $a = \gamma\alpha$, et $b = \delta\beta$ vt prodeat

$$\gamma = \frac{C - B\delta}{B - A\delta};$$

vnde ſequitur

$$\gamma - \delta = \frac{A\delta^2 - 2B\delta + C}{B - A\delta}$$

et $\gamma + \delta = \frac{C - A\delta^2}{B - A\delta}$;

prima aequatio transformatur in hanc:

$$\frac{\gamma - \delta}{D} = \frac{-\gamma - \gamma}{A\alpha^2\gamma^2 - C\alpha^2}$$

vnde fit

$$a^2 = \frac{-D(\gamma + \delta)}{(A\gamma^2 - C)(\gamma - \delta)}.$$

Coroll. 4.

§. 33. Valorem autem ipſius γ ſubſtituendo reperitur

$$A\gamma^2 - C = \frac{-(B^2 - AC)(C - A\delta^2)}{(B - A\delta)^2}$$

hinc-

hincque colligitur

$$\alpha^2 = \frac{D.(B - A\delta)^2}{(B^2 - AC)(A\delta^2 - 2B\delta + C)}$$

ſicque omnibus conditionibus eſt ſatisfactum et nunc quaeſtio huc reducitur, vt quaeratur numerus δ talis, vt iſta forma reuera fiat quadratum, quod fit, ſi quadratum reddatur haec forma

$$D.(B^2 - AC)(A\delta^2 - 2B\delta + C).$$

Coroll. 5.

§. 34. Tali autem numero pro δ inuento habebitur numerus α, nec non γ; numerus autem β arbitrio noſtro permititur; hincque porro deducitur $a = \gamma\alpha$ et $b = \delta\beta$; tum vero prodit

$$k = \beta^2 \frac{A\delta^2 - C}{A a - C\alpha^2}; \text{ indeque}$$

$$\frac{\beta^2}{k} = \frac{A a^2 - C\alpha^2}{A\delta^2 - C}$$

$$\text{et } \frac{b^2}{k} = \frac{\delta^2\beta^2}{k} = \frac{A\alpha^2\delta^2 - C\alpha^2\delta^2}{A\delta^2 - C}.$$

Quia ergo formulae $\frac{\beta}{\gamma k}$ et $\frac{b}{\gamma k}$ in calculo noſtro tantum occurrunt, nihil amplius arbitrarii reſtat.

Scholion.

§. 35. Hoc autem modo pro quouis valore exponentis n vnica tantum reperitur ſolutio, eos ſcilicet valores ipſarum x et y complectens, qui huic exponenti n reſpondent; verum quia numeri p et q adhuc arbitrio noſtro ſunt permiſſi, eos infinitis modis ita definire licet, vt fiat $p^2 - kq^2 = r$, quod quo facilius perſpiciatur, quaeruntur numeri s et t, vt ſit $s^2 - kt^2 = 1$ quibus inuentis vbique loco

loco $(p + q\sqrt{k})^n$ scribatur $(p + q\sqrt{k})^n (s + t\sqrt{k})^\lambda$ et loco $(p - q\sqrt{k})^n$ scribatur

$$(p - q\sqrt{k})^n (s - t\sqrt{k})^\lambda,$$

vbi exponens λ pro quouis numero n infinitis modis variari potest, sicque pro quouis exponente n infinitae solutiones nostris formulis exhibebuntur.

Scholion. 2.

§. 36. Inprimis autem hic mirandum videtur, quod littera δ, qua vniuersa solutio adstruitur, neque a numero r neque ab exponente n pendeat, sed ex solis litteris, A, B, C et D definiatur; interim tamen numerum r non omnino pro lubitu assumere licet, ita enim comparatus esse debet, vt fieri possit $p^2 - k q^2 = r$, id quod ab indole numeri k pendet. Supra autem inuenimus valorem $\frac{\beta^2}{k}$, vnde oritur

$$\frac{\beta}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{A\alpha^2 - C\alpha^2}{A\delta^2 - C}} = \alpha . \sqrt{\frac{A\gamma^2 - C}{A\delta^2 - C}}$$

$$= \frac{\alpha}{B - A\delta} \sqrt{(BB - AC)}$$

$$= \frac{\alpha}{B - A\delta} \sqrt{(B^2 - AC)} = \frac{\alpha(B^2 - AC)}{(B - A\delta)\sqrt{(B^2 - AC)}}$$

quae si capiatur $\beta = \frac{\alpha(B^2 - AC)}{B - A\delta}$

erit $\sqrt{k} = \sqrt{B^2 - AC}$,

sicque per hunc numerum k determinatur indoles numerorum, quos pro r assumere licet.

DE RESOLVTIONE IRRATIONALIVM PER FRACTIONES CONTINVAS, VBI SIMVL NOVA QVAEDAM ET SINGVLARIS SPECIES MINIMI EXPONITVR.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

In ſuperiore diſſertatione de reſolutione aequationis $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, totum negotium praecipue ad hanc quaeſtionem erat deductum, vt pro litteris x et y valores in numeris integris inueſtigentur, quibus formulae $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ minimus valor inducatur. Tres autem hic potiſſimum conſiderandi ſunt caſus, prouti haec formula vel duos factores habet imaginarios, quod fit ſi $BB - AC$ fuerit numerus negatiuus, vel factores inter ſe aequales, quod fit ſi $BB - AC = 0$, vel denique ſi eius factores fuerint reales, quod fit ſi $BB - AC$ numerus poſitiuus. Primo autem caſu haec quaeſtio minimi nullam attentionem meretur, quoniam ſolutio nulla plane difficultate laborat. Secundus vero caſus multo minus negotium faceſſit, quum formula abeat in quadratum cuius radicem facillime minimam reddere licet. Solus ergo

ergo tertius casus superest, qui accuratiorem inuestigationem postulat, vnde quidem insuper excludi conuenit casus, quibus formula $BB - AC$ est numerus quadratus, et ambo factores adeo rationales euadunt, tum enim valor formulae propositae adeo ad nihilum redigi poterit, ita vt quaestio minimi hic ne locum quidem habeat.

2. Soli ergo nobis relinquuntur casus, quibus numerus $BB - AC$ est numerus positiuus sed non quadratus, cuiusmodi est ista formula: $mxx - nyy$, denotantibus litteris m et n numeros integros positiuos, eiusmodi tamen vt non vterque sit quadratus, tum enim euidens est istam formulam ad nihilum reduci non posse, nisi tam x quam y euanescat, quem casum tamen vtpote obuium excludi oportet. Cum ergo haec formula $mxx - nyy$ ad nihilum redigi se non patiatur, quaestio sine dubio notatu digna est censenda, qua litterarum x et y ii valores in integris quaeruntur, quibus ipsa formula $mx^2 - ny^2$ minimum omnium adipiscatur valorem. Si alter numerorum m et n vnitati aequetur, semper formulam ad vnitatem vsque deprimere licebit, qui certe est minimus valor cyphra excepta. Si enim fuerit $m = 1$ ex Theoremate Pelliano notissimo constat, semper effici posse $xx - nyy = 1$, siue $x = \sqrt{(nyy + 1)}$, dummodo n non fuerit numerus quadratus, atque adeo hoc non solum vnico modo praestari potest, sed etiam infinitis, quemadmodum iam ab ipso Pellio est demonstratum. Sin autem alter numerus n vnitati aequetur, formula

$m\,x\,x - y\,y$ hac methodo ad -1 deprimitur, qui casus aeque pro minimo est habendus ac $+1$, dum in ea inuestigatione, quae ad hanc quaestionem ansam dedit, discrimen signi non spectatur.

3. His ergo casibus remotis, quo alter numerus m vel n vnitati aequatur, quaestio nostra potissimum versatur circa formulam $m\,x\,x - n\,y\,y$, quippe ad quam semper formulam generalem $A\,x\,x + 2\,B\,x\,y + C\,y^2$ reuocare licet. Si enim in genere statuatur $x = t + B\,u$ et $y = A\,v$, facta substitutione formula generalis abit in hanc formam:

$$A\,t\,t - A\,(B^2 - A\,C)\,u\,u$$

sicque formula nostra assumta $m\,x\,x - n\,y\,y$ aeque late patere est censenda, atque ipsa proposita trinomialis. Etiamsi autem neque m, neque n vnitati aequetur, saepenumero vsu venire potest, vt formulam nostram quoque ad vnitatem vsque deprimere liceat, idque vel statim manifesto occurrit, veluti in hac forma: $3\,x\,x - 2\,y\,y$, quae ad vnitatem redigitur sumtis $x = 1$ et $y = 1$, vel non statim se offert, vti fit in $9\,x\,x - 5\,y\,y$ quae posito $x = 3$ et $y = 4$ ad vnitatem redit, quicquid autem sit, vtique euenire potest, vt minimus valor nostrae formulae vnitatem excedat, ac tum iudicium de minimo plerumque summis difficultatibus inuolutum deprehenditur ceu fit in hac formula $13\,x\,x - 7\,y\,y$, quam vsque ad binarium deprimi posse non facile perspicitur, si scilicet ponatur $x = 15$ et $y = 11$. At si m et n fuerint numeri praegrandes, iudicium multo

multo operosiores calculos requirit, quamobrem methodus certa etiam in his casibus minimum inuestigandi analysin haud contemnendo incremento locupletare videtur.

4. Antequam autem hanc ipsam methodum explicare adgrediar; plurimum ostendisse iuuabit, semper infinitis modis idem minimum obtineri posse. Atque hoc adeo generalius ita demonstrari potest: Quodsi vnicus casus constet, quo formula $mxx-nyy$ aequalis fiat dato numero k, tum semper infiniti valores pro x et y reperiri possunt, qui ad eundem numerum k deducant. Sit enim casu illo cognito $x=a$ et $y=b$, ita vt sit $maa-nbb=k$ et nunc numeros x et y ita definiri oportet, vt fiat $mxx-nyy=maa-nbb$, id quod sequenti modo commodissime praestabitur. Ante omnia quaerantur numeri p et q, vt fiat $pp-mnqq=1$, id quod infinitis modis semper fieri posse constat, dummodo mn non fuerit numerus quadratus, vti hic assumimus, atque nunc quaesito satisfieri manifestum est, si statuatur

$$mxx-nyy=(maa-nbb)(pp-mnqq)^{\lambda},$$

quod quo facilius fieri possit, sumamus factores etsi irrationales et ponamus

$$x\sqrt{m}+y\sqrt{n}=(a\sqrt{m}+b\sqrt{n})(p+q\sqrt{mn})^{\lambda}$$

tum enim mutato signo radicalis $\sqrt{n}$, sponte fiet

$$x\sqrt{m}-y\sqrt{n}=(a\sqrt{m}-b\sqrt{n})(p-q\sqrt{mn})^{\lambda},$$

sicque alteri tantum harum duarum aequationum satisfetisfecisse sufficiet. Quia autem euolutio formulae $(p + q\sqrt{mn})^\lambda$ alternatim terminos rationales et irrationales radicali $\sqrt{mn}$ affectos praebet, sit P summa terminorum rationalium et $Q\sqrt{mn}$ summa irrationalium, ita vt sit

$$(p + q\sqrt{mn})^\lambda = P + Q\sqrt{mn}$$

similique modo

$$(p - q\sqrt{mn})^\lambda = P - Q\sqrt{mn}.$$

Nunc igitur aequatio nostra erit

$$x\sqrt{m} + y\sqrt{n} = (a\sqrt{m} + b\sqrt{n})(P + Q\sqrt{mn}) \text{ siue}$$

$$x\sqrt{m} + y\sqrt{n} = (aP + nbQ)\sqrt{m} + (bP + maQ)\sqrt{n}$$

vbi tam partes signo $\sqrt{n}$, quam partes signo $\sqrt{m}$ affectae, seorsim sunt inter se aequandae, atque hinc statim elicimus sequentes valores

$$x = aP + nbQ;\ y = bP + maQ,$$

simulque patet multitudinem harum solutionum reuera esse infinitam.

5. His praemissis ipsam nostram quaestionem adgrediamur, quaesituri valores litterarum x et y, quibus formula $mxx - nyy$ minimum sortiatur valorem, qui sit $= k$, ac statim quidem euidens est his casibus formulam $mxx - nyy$ propius ad nihilum redigi, quam vllis aliis casibus, sicque pro x et y eiusmodi inuestigandi sunt valores, quibus proxime fiat $\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{n}{m}} = \frac{\sqrt{mn}}{m}$, quocirca negotium iam huc est perductum, vt quaerantur fractiones rationales $\frac{x}{y}$, quae tam prope aequentur formae irrationali

nali $\frac{\sqrt{mn}}{m}$, quam quidem fieri poteſt, non maioribus numeris pro x et y adhibendis.

6. Hoc autem Problema iam olim a Walliſio propoſitum expeditiſſime reſoluitur, ſi formula $\frac{\sqrt{mn}}{m}$ in fractionem continuam conuertatur, ſimili ſcilicet operatione, qua vulgo maximus communis diuiſor duorum numerorum quaeri ſolet. Si enim hoc modo peruentum fuerit ad hanc fractionem continuam:

$$\frac{\sqrt{mn}}{m} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cfrac{1}{\varepsilon + \text{etc.}}}}}$$

continui hi quoti in ſeriem diſponantur, ac primo quidem ipſi α ſubſcribatur fractio $\frac{1}{0}$, ipſi β vero $\frac{\alpha}{1}$, ac deinceps ex binis fractionibus continuo ſequens formatur, dum vltimae tam nominator quam denominator per indicem ſupra ſcriptum multiplicetur hisque productis, tam numerator quam denominator penultimae fractionis reſpectiue addantur. Sequenti ſcilicet modo

$$\begin{array}{cccccc} \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon & \\ \frac{1}{0}, & \frac{\alpha}{1}, & \frac{\alpha\beta+1}{\beta}, & \frac{\alpha\beta\gamma+\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1}, & \frac{\alpha\beta\gamma\delta+\gamma\delta+\alpha\delta+\alpha\beta+1}{\beta\gamma\delta+\delta+\beta} & \text{etc.} \end{array}$$

7. Omnes iſtae fractiones hac gaudent proprietate, vt quaelibet valorem formulae $\frac{\sqrt{mn}}{m}$ propius exhauriat, quam fieri poterit numeris non maioribus adhibendis. Verum etiam inter has ipſas fractiones

ctiones ingens intercedit discrimen, quod aliae aliis, caeteris quidem paribus magis appropinquent. Eae autem maxime adpropinquare sunt compertae, quae maximos indices sibi habent inscriptos, si ergo illae pro $\frac{x}{y}$ accipiantur, iam certi sumus istis numeris pro x et y assumtis, formulae nostrae $mxx - nyy$ minimum valorem induci. Simul vero notari oportet inter hos quotos successiuos α, β, γ, δ, ε etc. semper dari periodos, in quibus idem quotorum ordo recurrit, omnes ergo fractiones iisdem maxime quotis suscriptae omnes quoque valores idoneos pro x et y suppeditabunt, quibus formula nostra $mxx - nyy$ eundem minimum valorem nanciscitur.

8. Quo autem operationes quibus isti quoti facillime eruuntur, clarius explicare valeam, exemplum primo determinatum expediamus, quo formula proposita sit $7xx - 13yy$, ita vt iam proxime fieri debeat $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{91}}{7}$, vbi tantum notetur esse $\sqrt{91} > 9$ et < 10. Nunc ergo operatio vti pro maximo divisore instituatur: ac primo diuidi oportet $\frac{\sqrt{91}}{7}$ per 7, vnde primus quotus prodit $= 1$, residuum vero $= \sqrt{91} - 7$ per quod praecedens diuisor 7 debet diuidi, multiplicetur vterque numerus per $\sqrt{91} + 7$, ac diuisor iam erit 42, diuidendus autem $7(\sqrt{91} + 7)$, qui per septenarium depressi, praebent diuisorem $= 6$ et diuidendum $= \sqrt{91} + 7 > 16$, vnde secundus quotus colligitur 2, ac residuum fiet $\sqrt{91} - 5$, per quod 6 debet diuidi. Multiplicando per $\sqrt{91} + 5$, diuisor erit 66 et diuidendus $6(\sqrt{91} + 5)$, ac per 6 depri-

deprimendo, iam per 11 diuidi debet $\sqrt{91}+5$, vnde tertius quotus fit 1, residuo manente $\sqrt{91}-6$, per quod praecedens diuisor 11 debet diuidi. Quae operatio vlterius hic repraesentatur

multipl. per	diuid. per	Quot.
$\frac{11}{\sqrt{91}-6}$ $\sqrt{91}+6$ fit	$\frac{11(\sqrt{91}+6)}{55}$ 11	$\frac{\sqrt{91}+6}{5}$ 3 N. 4
$\frac{5}{\sqrt{91}-9}$ $\sqrt{91}+9$	$\frac{5(\sqrt{91}+9)}{10}$ 5	$\frac{\sqrt{91}+9}{2}$ 9 N. 5
$\frac{2}{\sqrt{91}-9}$ $\sqrt{91}+9$	$\frac{2(\sqrt{91}+9)}{10}$ 2	$\frac{\sqrt{91}+9}{5}$ 3 N. 6
$\frac{5}{\sqrt{91}-6}$ $\sqrt{91}+6$	$\frac{5(\sqrt{91}+6)}{55}$ 5	$\frac{\sqrt{91}+6}{11}$ 1 N. 7
$\frac{11}{\sqrt{91}-5}$ $\sqrt{91}+5$	$\frac{11(\sqrt{91}+5)}{66}$ 11	$\frac{\sqrt{91}+5}{6}$ 2 N. 8
$\frac{6}{\sqrt{91}-7}$ $\sqrt{91}+7$	$\frac{6(\sqrt{91}+7)}{42}$ 6	$\frac{\sqrt{91}+7}{7}$ 2 N. 9
$\frac{7}{\sqrt{91}-7}$ $\sqrt{91}+7$	$\frac{7(\sqrt{91}+7)}{42}$ 7	$\frac{\sqrt{91}+7}{6}$ 2 N. 10

Vlterius calculum producere non est opus, quia haec postrema diuisio cum secunda conuenit et iam periodus secunda incipit, vbi notandum loco primi quoti 1 hic eius duplum occurrere, id quod in huiusmodi diuisionibus semper vsu venit.

9. Quoti ergo ordine inuenti sequenti modo progrediuntur:

1, 2, 1, 3, 9, 3, 1, 2 | 2, 2, 1, 3, 9, 3, 1, 2

inter quos maxime eminent 9 ideoque nullum amplius est dubium, quin illae fractiones, quae his quotis subiiciuntur, formulae $7xx-13yy$ omnium valorum minimum concilient. Adponamus igitur has fractiones sequenti modo

1.	2.	1.	3.	9
$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{15}{11}$

 vnde

vnde patet fractionem nobis satisfacientem fore $\frac{x}{y}=\frac{15}{11}$ siue $x=15$ et $y=11$. Hinc autem $7xx=1575$ et $13xx=1573$, vnde minimus valor sine vllo dubio est binarius, quem diuinando non tam facile quisquam detexerit.

10. Si has operationes, quibus illi quoti continui reperiuntur, attentius perpendamus, calculum non mediocriter contrahi posse facile perspicere licet. Sit enim $\sqrt{k}$ quantitas illa irrationalis, quam formula in fractionem continuam conuertenda inuoluit, numerus autem integer proxime minor, quam $\sqrt{k}$, sit $=e$ et ponamus peruentum iam esse ad diuisionem, qua formula $\sqrt{k}+r$ diuidi debet per numerum p, ita vt quotus hinc oriundus sit $q < \frac{e+r}{p}$ eritque residuum $=\sqrt{k}+r-pq$ et quia $pq > r$ (saltem quando operationes iam ordine progrediuntur), vocemus $pq-r=r'$ ita vt iam residuum sit $\sqrt{k}-r'$, vnde pro sequente diuisione habebimus diuisorem $=\sqrt{k}-r'$ et diuidendum $=p$, multiplicetur vterque per $\sqrt{k}+r'$ et fiat $\frac{k-r'r'}{p}=p'$ (vidimus enim semper in decursu operationum, formulam $k-r'r'$ diuisibilem fore per p) et iam sequens diuisio ita erit comparata, vt sit diuisor $=p'$ et diuidendus $\sqrt{k}+r'$, vnde nascetur quotus $q' < \frac{e+r'}{p'}$ atque hinc simili modo tertia et sequentes diuisiones conficientur.

11. Ex prima igitur illa operatione, qua formulam $\sqrt{k}+r$ diuidi oportet per numerum p, notentur tantum numeri r et p, vnde deducitur

quotus

quotus $q < \frac{e+r}{p}$; deinde ſumatur $r' = p\,q - r$ et $p' = \frac{k - r'r'}{p}$, hincque fiet $q' < \frac{e+r'}{p'}$; ſimili modo capiatur porro $r'' = p'\,q' - r'$ et $p'' = \frac{k - r''r''}{p'}$, hincque $q'' < \frac{e+r''}{p''}$. Quas operationes ſequente ſchemate repraeſentamus:

r	p	$q < \frac{e+r}{p}$
$r' = p\,q - r$	$p' = \frac{k - r'r'}{p}$	$q' < \frac{e+r'}{p'}$
$r'' = p'\,q' - r'$	$p'' = \frac{k - r''r''}{p'}$	$q'' < \frac{e+r''}{p''}$
$r''' = p''\,q'' - r''$	$p''' = \frac{k - r'''r'''}{p''}$	$q''' < \frac{e+r'''}{p'''}$
etc.	etc.	etc.

Hocque modo progreſſio quotorum q, q', q'', q''' etc. facillime inueniri poſſe videtur.

12. Dilucidemus hanc regulam exemplo, quo formula $5xx - 38yy$ minimum ſit reddenda, ſeu fractio $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{190}}{5}$ per fractionem infinitam euoluenda. Hic igitur erit $k = 190$, $e = 13$, $p = 5$ et $r = 0$, vnde totus calculus ſequenti modo inſtituetur:

$r = 0$	$p = 5$	$q = 2 < \frac{13+0}{5}$
$r' = 10$	$p' = \frac{190-100}{5} = 18$	$q' = 1 < \frac{13+10}{18}$
$r'' = 8$	$p'' = \frac{190-64}{18} = 7$	$q'' = 3 < \frac{13+8}{7}$
$r''' = 13$	$p''' = \frac{190-169}{7} = 3$	$q''' = 8 < \frac{13+13}{3}$
$r'''' = 11$	$p'''' = \frac{190-121}{3} = 23$	$q'''' = 1 < \frac{13+11}{23}$
$r''''' = 12$	$p''''' = \frac{190-144}{23} = 2$	$q''''' = 12 < \frac{13+12}{2}$
$r^{\cdots} = 12$	$p^{\cdots} = \frac{190-144}{2} = 23$	$q^{\cdots} = 1 < \frac{13+12}{23}$
$r^{\cdots} = 11$	$p^{\cdots} = \frac{190-121}{23} = 3$	$q^{\cdots} = 8 < \frac{13+11}{3}$
$r^{\cdots} = 13$	$p^{\cdots} = \frac{190-169}{3} = 7$	$q^{\cdots} = 3 < \frac{13+13}{7}$
$r^{\cdots} = 8$	$p^{\cdots} = \frac{190-64}{7} = 18$	$q^{\cdots} = 1 < \frac{13+8}{18}$
$r = 10$	$p^{\cdots} = \frac{190-100}{18} = 5$	$q^{\cdots} = 4 < \frac{13+10}{5}$
etc.	etc.	etc.

Calculum vlterius proſequi non eſt opus, quum iam pateſcat quotorum ordo

2, 1, 3, 8, 1, 12, 1, 8, 3, 1 | 4, 1, 3, 8, 1, 12, 1, 8

vnde fractio continua oritur

$$\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{38}{5}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8.}}}}}}}$$

Tum vero quum maximus horum quotorum ſit 12, ei reſpondebit valor minimus formulae propoſitae $5xx - 38yy$, at fractio $\frac{x}{y}$ ita definietur 2, 1,

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 1, & 3, & 8, & 1, & 12 \\ \frac{1}{0} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{11}{4} & \frac{91}{33} & \frac{102}{37} \end{array}$$

ſicque pro caſu minimi habemus $x = 102$ et $y = 37$, vnde $5\,xx = 52010$ et $38.\,yy = 52022$, ergo differentia $= -2$, quia autem inter quotos etiam eminet 8, eique ſubiacet fractio $\frac{11}{4}$, ſumendo $x = 11$ et $y = 4$, colligitur valor formulae $5\,xx - 38.\,yy = 605 - 608 = -3$, qui valor poſt illum ſine dubio eſt minimus.

13. Plura huius generis exempla non afferimus, ſed quo haec methodus ſuccincta ad vſum ampliorem accommodetur, inueſtigemus fractiones continuas pro ſingulis multiplis ipſius $\sqrt{2}$, plurimum enim iuuabit, relationem inter hos valores perpendiſſe, ſiquidem hoc argumentum de fractionibus continuis neutiquam adhuc ſatis eſt exploratum. Quotos autem tantum pro ſingulis his multiplis adpoſuiſſe ſufficiet:

Pro $\sqrt{2}$

Quoti 1, 2, 1, 2, 1, 2

Pro $2\sqrt{2}$

Quoti 2, 1, 4, 1, 4, 1, 4

Pro $3\sqrt{2}$

Quoti 4, 4, 8, 4, 8, 4, 8

Pro $4\sqrt{2}$

Quoti 5, 1, 1, 1, 10, 1, 1

Pro $5\sqrt{2}$

Quoti 7, 14, 14, 14, 14, 14, 14

Pro $6\sqrt{2}$

Quoti 8, 2, 16, 2, 16, 2, 16

Pro $7\sqrt{2}$.

Quoti 9, 1, 8, 1, 18, 1, 8.

14. Hae progreſſiones eo magis ſunt notatu dignae, quod tantopere a ſe inuicem diſcrepant, etiamſi ipſae quantitates iis expreſſae tam ſimplicem rationem inter ſe teneant. Neque vero tantum multipla tantam gignunt differentiam in fractionibus continuis, ſed etiam ipſa additio adhuc maius diſcrimen parit, ſi ſcilicet ad $\sqrt{2}$ quaepiam fractio rationalis addatur, id quod exemplo formulae $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$ illuſtremus, vbi adeo vſu venit, vt primae operationes peculiarem euolutionem requirant, dum quotos a ſequentibus periodis diuerſos praebent. Ponatur ergo $\frac{x}{y}=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\sqrt{8}}{2}$. Primo igitur per 2 diuidatur $1+\sqrt{8}$ et quotus erit 1; reſiduum vero $\sqrt{8}-1$ per quod diuidi debet 2, multiplicetur vtrinque per $\sqrt{8}+1$, vt per 7 diuidi debeat $2\sqrt{8}+2=\sqrt{32}+2$, et nunc operatio in ordinem ſubit, hic ſcilicet eſt $k=32$; $e=5$; $r=2$ et $p=7$ et operationes ita ſe habebunt:

$r=2$	$p=7$	$q=1$
$r=5$	$p=1$	$q=10$
$r=5$	$p=7$	$q=1$
$r=2$	$p=4$	$q=1$
$r=2$	$p=7$	$q=1$
$r=5$	$p=1$	$q=10$
$r=5$	$p=7$	$q=1$
$r=$ etc.	etc.	etc.

Quum

Quum igitur primus quotus fuerit 1 a prioribus prorſus ſeparandus, ſeries quotorum erit:

1 | 1, 10, 1, 1, 1, 10, 1 | 1, 10

quae ſeries eo maiorem attentionem meretur, quod a praecedentibus toto coelo diſcrepat.

15. Sumamus aliud exemplum $\frac{x}{y} = \frac{1}{3} + \sqrt{2} = \frac{1 + \sqrt{18}}{3}$, vnde reſultat primus quotus $= 1$ et reſiduum eſt $\sqrt{18} - 2$ per quod diuidi oportet 3, ſiue multiplicando per $\sqrt{18} + 2$, diuiſor fit 14 diuidendus autem $3\sqrt{18} + 6 = \sqrt{162} + 6$, cuius euolutio ſequenti modo repraeſentatur:

$k = 162$; $e = 12$;

$r = 6$	$p = 14$	$q = 1$
$r = 8$	$p = 7$	$q = 2$
$r = 6$	$p = 18$	$q = 1$
$r = 12$	$p = 1$	$q = 24$
$r = 12$	$p = 18$	$q = 1$
$r = 6$	$p = 7$	$q = 2$
$r = 8$	$p = 14$	$q = 1$
$r = 6$	$p = 9$	$q = 2$
$r = 12$	$p = 2$	$q = 12$
$r = 12$	$p = 9$	$q = 2$
$r = 6$	$p = 14$	$q = 1$
$r = 8$	$p = 7$	$q = 2$
$r = 6$	$p = 18$	$q = 1$
$r = 12$	$p = 1$	$q = 24$
$r = 12$	$p = 18$	$q = 1$
$r = 6$	$p = 7$	$q = 2$
$r = 8$	$p = 14$	$q = 1$
$r = 6$	$p = 9$	$q = 2$
$r = 12$	$p = 2$	$q = 12$

etc.

Series

Series igitur quotorum eſt

$1 \mid 1, 2, 1, 24, 1, 2, 1, 2, 12, 2 \mid 1, 2, 1, 24, 1, 2$

vbi excluſo primo, reliqui ſecundum denos periodum conſtituunt.

16. Quum hic ſit $\frac{x}{y} = \frac{1 \pm \sqrt{18}}{3}$, habebimus $3x - y = y\sqrt{18}$ reddamus hanc aequationem rationalem et prodibit

$xx - 6xy = 17yy$; ſiue $9xx - 6xy - 17yy = 0$.

Hinc ergo diſcimus, ſi propoſita fuerit haec formula trinomialis $9xx - 6xy - 17yy$, cuiusmodi valores litteris x et y tribui debeant, vt haec formula minimum nanciſcatur valorem. Scilicet quotis modo inuentis ſubſcribantur fractiones more ſolito, atque ea, cui maximus quotus eſt inſcriptus, dabit valores ipſarum x et y, quocirca has fractiones hic ſubiiciamus:

1,	1,	2,	1,	24
$\frac{1}{0}$,	$\frac{1}{1}$,	$\frac{2}{1}$,	$\frac{5}{3}$,	$\frac{7}{4}$.

Pro caſu ergo minimi habemus $\frac{x}{y} = \frac{7}{4}$, ſiue $x = 7$ et $y = 4$ vnde fit

$9xx = 441$; $6xy = 168$; $17yy = 272$

ergo ipſa formula abit in $+1$, qui valor vtique eſt omnium minimus.

17. Quod ſi autem hanc formulam modo ſupra expoſito tractare et ad duos terminos redigere velIemus, ob $A = 9$ $B = -3$; $C = -17$, ponendo $x = t + 3u$ et $y = 9u$, prodiret haec formula $9tt - 1458uu = 9(tt - 162uu)$, quae formula certe nunquam

quam minor euadere poteſt quam nouem, ex quo intelligimus, ſi huiusmodi formularum valores minimos inueſtigare voluerimus, neutiquam licere eas ad duos terminos reducere, quandoquidem hoc modo earum natura penitus mutaretur, quocirca neceſſe eſt, tales formulas, data opera euoluere, id quod in ſequentibus problematibus ſumus expedituri.

Problema I.

Si formula $A x^2 - 2 B x y + C y^2$, caſu quo $x = a$ et $y = b$ praebeat valorem $= c$, inuenire infinitos alios valores pro x et y, qui eundem valorem c producant, ſiquidem quantitas $B^2 - A C$ fuerit numerus poſitiuus non quadratus.

Solutio.

18. Quum igitur ſit

$$A a^2 - 2 B a b + B b^2 = c,$$

requiritur, vt fiat

$$A x^2 - 2 B x y + C y^2 = A a^2 - 2 B a b + C b^2.$$

Iam quaerantur ante omnia numeri p et q, vt fiat

$$p p - 2 B p q + A C q q = 1,$$

id quod ſemper fieri licet, quum hinc ſit

$$p = B q + \sqrt{((B^2 - A C) q q + 1)}$$

cuius reſolutio a Problemate Pelliano pendet, dummodo $B^2 - A C$ fuerit numerus poſitiuus non quadratus. Statuamus ergo $B^2 - A C = k$, vt fieri debeat

$$p = B q + \sqrt{(k q^2 + 1)},$$

ita vt quaeri oporteat numerum q, vt formula kq^2+1 fiat quadratum. Hoc ergo facto statuamus:

$$Ax^2-2Bxy+Cy^2=(Aa^2-2Bab+Cbb)(pp-2Bpq+ACqq)$$

quod productum cum ipsa forma proposita conuenire, ita per factores irrationales ostendimus. Quum enim sit

$$Ax^2-2Bxy+Cy^2=\tfrac{1}{A}(Ax-By+y\surd k)(Ax-By-y\surd k)$$

et $$Aa^2-2Bab+Cy^2=\tfrac{1}{A}(Aa-Bb+b\surd k)(Aa-Bb-b\surd k)$$

et

$$pp-2Bpq+ACq^2=(p-Bq+q\surd k)(p-Bq-q\surd k)$$

statuamus

$$Ax-By+y\surd k=(Aa-Bb+b\surd k)(p-Bq+q\surd k)$$

tum enim sponte fiet sumendo $\surd k$ negatiue

$$Ax-By-y\surd k=(Aa-Bb-b\surd k)(p-Bq-q\surd k)$$

vnde sufficiet alteram aequationem tantum euoluisse, si modo partes rationales et irrationales seorsim inter se aequentur. Prodibit igitur

$$Ax-By=(Aa-Bb)(p-Bq)+bq(B^2-AC)$$
$$y=q(Aa-Bb)+b(p-Bq)$$

qui valor in priori aequatione substitutus praebet

$$Ax=By+(Aa-Bb)(p-Bq)+kbq$$

hincque $x=ap-Cbq$, ita vt valores quaesiti sint

$$x=ap-Cbq;\ y=bp+Aaq-2Bbq,$$

atque hinc adhuc alia solutio formari potest, quoniam permutatis litteris A et C tam litterae x et y, quam

quam a et b inter se permutantur, litterae vero p et q eaedem manent, scilicet

$$x = ap + Cbq - 2Baq;\ y = bp - Aaq.$$

Inuenta autem vnica solutione, valores pro x et y reperti scribentur in locum litterarum a, et b, sicque denuo noua solutio eruitur atque hinc simili modo infinitas alias successiue elicere licebit.

Coroll. 1.

19. Quin etiam adhuc alias solutiones impetrare licet, si alii factores inter se combinentur, veluti si ponamus

$$Ax - By + y\sqrt{k} = (Aa - Bb - b\sqrt{k})(p - Bq + q\sqrt{k})$$

hinc orientur istae aequationes

$$Ax - By = (Aa - Bb)(p - Bq) - kbq$$
$$y = q(Aa - Bb) - b(p - Bq) = Aaq - bp$$

hincque $Ax = Aap - 2Bbp + ACbq$

seu $\quad x = ap + Cbq - \frac{2B}{A}bp,$

quae autem solutio non est integra, nisi $2Bbp$ per A sit diuisibile. Permutatio autem porro hanc suppeditat solutionem:

$$x = Cbq - ap;\ y = bp + Aaq - \frac{2B}{C}ap.$$

Coroll. 2.

20. Vtemur nunc etiam hac combinatione

$$Ax - By + y\sqrt{k} = (Aa - Bb + b\sqrt{k})(p - Bq - q\sqrt{k})$$

hincque obtinebimus

$$Ax-By=(Aa-Bb)(p-Bq)-kbq$$
$$y=-(Aa-Bb)q+b(p-Bq)=bp-Aaq$$
$$x=ap-2Baq+Cbq.$$

Quae solutio iam permutatione in problematis solutione est eruta.

Coroll. 3.

21. Eodem modo si hos factores adhibeamus

$$Ax-By+y\sqrt{k}=(Aa-Bb-b\sqrt{k})(p-Bq-q\sqrt{k})$$

easdem solutiones reperimus, quas in primo Corollario iam inuenimus, permutatione scilicet adhibita.

Coroll. 4.

22. Verum adeo infinitas solutiones simul exhibere poterimus, si loco factorum $p-Bq\pm q\sqrt{k}$, eorum potestates quascunque vsurpamus, quarum quidem exponentes sunt numeri integri. Si enim euoluta formula $(p-Bq+q\sqrt{k})^n$, terminos irrationales ponamus $=Q\sqrt{k}$, rationales vero $P-BQ$, ita vt iam P et Q infinitos valores in se inuoluant, omnes praecedentes solutiones generales reddentur, si modo litterarum p et q loco, scribantur litterae P et Q.

Problema II.

Proposita formula $Ax^2-2Bxy+Cy^2$, in qua $BB-AC$ sit numerus positiuus non quadratus, inuenire eos valores pro litteris x et y, quibus ipsa formula ad minimum valorem perducatur.

Solutio.

23. Hoc problema simili modo soluetur, quo supra formulam binomialem tractauimus, scilicet ipsa nostra formula aequetur nihilo ex eiusque resolutione quaeratur fractio $\frac{x}{y}$, quae posito vt ante $B^2 - AC = k$, reperitur $\frac{x}{y} = \frac{B \pm \sqrt{k}}{A}$ quocirca istam formulam irrationalem in fractionem continuam resolui oportet, quaerendo scilicet seriem quotorum continuorum, quibus si more solito fractiones subscribantur, eae quae maximis quotis respondent, loco $\frac{x}{y}$ sumtae, formulae propositae minimum valorem inducent et quia hic $\sqrt{k}$ tam negatiue, quam positiue accipere licet, geminas solutiones assignare licebit, quae quidem plerumque inter se conuenient. Id quod clarissime exemplis ostendetur.

Exemplum.

24. Sit proposita ista formula $5xx - 6xy - 7yy$, vnde fit $\frac{x}{y} = \frac{3 \pm \sqrt{44}}{5}$. Valeat primo signum superius et formula $\frac{3 + \sqrt{44}}{5}$ dabit primum quotum $= 1$, ex quo oritur residuum $\sqrt{44} - 2$, per quod diuidi oportet 5. Multiplicetur vtrinque per $\sqrt{44} + 2$ vt prodeat diuisor 40 et diuidendus $5(\sqrt{44} + 2)$, qui deprimuntur ad 8 et $\sqrt{44} + 2$ nunc iam regula supra data vti poterimus, vti hic videre licet

$k = 44; \quad e = 6$

$r = 2$	$p = 8$	$q = 1$
$r = 6$	$p = 1$	$q = 12$
$r = 6$	$p = 8$	$q = 1$
$r = 2$	$p = 5$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 7$	$q = 1$
$r = 4$	$p = 4$	$q = 2$
$r = 4$	$p = 7$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 5$	$q = 1$
$r = 2$	$p = 8$	$q = 1$
$r = 6$	$p = 1$	$q = 12$

qui quoti cum ante inuento hanc feriem conftituunt

$1, 1, 12, 1, 1, 1, 2, 1 \mid 1, 1, 12$ etc.

vnde fractiones quotis 12 fubfcriptae quaefito fatisfacient, quarum prima eft $\frac{2}{1}$ ita vt fit $x = 2$ et $y = 1$ vnde formula propofita acquirit valorem $+ 1$.

At fi fumamus

$$\frac{x}{y} = \frac{3 - \sqrt{44}}{5}, \text{ fiue } \frac{-y}{x} = \frac{5}{\sqrt{44} - 3} = \frac{5(\sqrt{44} + 3)}{35} = \frac{\sqrt{44} + 3}{7}$$

vnde pofito vt ante $k = 44$ et $e = 6$, habemus

$r = 3$	$p = 7$	$q = 1$
$r = 4$	$p = 4$	$q = 2$

atque hic fubfiftimus, quia eaedem diuifiones iam fupra occurrerunt et nunc feries quotorum erit

$1, 2, 1, 1, 1, 12, 1, 1 \mid 1, 2, 1$ etc.

prima autem fractio quoto 12 refpondens hic fit $\frac{11}{8}$, fumatur ergo $x = 8$ et $y = -11$, atque noftrae formulae valor euadit $+ 1$.

Exem-

Exemplum II.

25. Propofita formula $7xx - 20xy + 14y^2$ minimum reddenda, cuius valor cafu $x = 1$ et $y = 1$ ftatim fit $+ 1$ certe minimum. Hic ergo fractio $\frac{x}{y}$ proxime debet effe aequalis formulae $\frac{10 + \sqrt{2}}{7}$, vnde ftatim primus quotus oritur $= 1$ et refiduum erit $3 + \sqrt{2}$ vnde pro fecundo quoto habemus $\frac{7}{3 + \sqrt{2}} = \frac{7(3 - \sqrt{2})}{7} = \frac{3 - \sqrt{2}}{1}$ ficque quotus $= 1$, et refiduum $= 2 - \sqrt{2}$. Pro tertio quoto habemus $\frac{1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$, ficque quotus $= 1$, et refiduum $\sqrt{2}$ quare pro quarto habemus $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$, vnde fequentes quoti funt vti fupra inuenimus 1, 2, 2, 2 etc., integra ergo feries quorum erit

$$1,\quad 1,\quad 1 \mid 1,\quad 2,\quad 2,\quad 2,\quad 2.$$

Quamquam hae operationes initio irregulares videntur, eas tamen fecundum regulam praefcriptam euoluere licet, hic enim eft ftatim $k = 2$ $e = 1$, $r = 10$ et $p = 7$, vnde calculus ita procedet:

$r = +10$	$p = +7$	$q = 1$
$r = -3$	$p = -1$	$q = 1$
$r = +2$	$p = +2$	$q = 1$
$r = +0$	$p = +1$	$q = 1$
$r = +1$	$p = +1$	$q = 2$
$r = +1$	$p = 1$	$q = 2$

hincque fuperior feries quotorum oritur, vnde valores fractionis $\frac{x}{y}$ fequenti modo procedent:

1, 1,

$$\begin{array}{cccccccc} 1. & 1. & 1. & 1. & 2. & 2. & 2. & 2 \\ \frac{1}{0}. & \frac{1}{1}. & \frac{2}{1}. & \frac{3}{2}. & \frac{5}{3}. & \frac{13}{8}. & \frac{31}{19}. & \frac{75}{46} \end{array}$$

quarum ſecunda ſtatim dat caſum minimi ante memoratum. Tertia dat $+2$, quarta -1, quinta dat $+1$, ſexta -1 etc. Iidem valores ſine dubio prodire debent, ſi in fractione pro $\frac{x}{y}$ capiatur $\sqrt{2}$ negatiue, vt habeatur $\frac{10-\sqrt{2}}{7}$, quam etiam per regulam noſtram euoluere licebit, dummodo ita repraeſentetur: $\frac{\sqrt{2}-10}{-7}$, ita vt ſit $r=-10$ et $p=-7$, vnde calculus erit

$$k=2,\ e=1$$

$$\begin{array}{l|l|l} r=-10 & p=-7 & q=+1 \\ r=+\ 3 & p=+1 & q=+4 \\ r=+\ 1 & p=+1 & q=\ \ 2 \\ r=+\ 1 & p=+1 & q=\ \ 2. \end{array}$$

Ex quibus quotis ſequentes fractiones formantur

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 4, & 2, & 2, & 2 \\ \frac{1}{0} & \frac{1}{1} & \frac{5}{4} & \frac{11}{9} & \frac{27}{22} \end{array} \text{ etc.}$$

quarum ſecunda formulam reducit ad $+1$, tertia ad -1, quarta ad $+1$ etc. Notatu dignum hic occurrit, quod hae fractiones a praecedentibus tantopore diſcrepent, atque nihilo ſecius eadem minima producant. Sed ſupra iam oſtendimus huiusmodi formulam eosdem valores recipere poſſe, dum loco x et y diuerſi valores ſubſtituuntur.

Exem-

Exemplum III.

26. Sit propofita formula $25xx - 70xy + 46yy$ minimum reddenda, hic ergo proxime effe oportet $\frac{x}{y} = \frac{7+\sqrt{3}}{5}$, vnde primus quotus fit $= 1$ et refiduum $= 2 + \sqrt{3}$ ergo pro fecundo quoto habetur fractio $\frac{5}{2+\sqrt{3}} = \frac{5(2-\sqrt{3})}{1} = \frac{10-\sqrt{75}}{1}$ hincque quotus $= 1$. Tota autem operatio per regulam noftram expediri poteft, fi fractio noftra per 5 multiplicando ad hanc formam reducatur $\frac{35+\sqrt{75}}{25}$, vbi eft $k = 75$, $e = 8$, $r = 35$ et $p = 25$, vnde calculus fequitur

$r = 35$	$p = 25$	$q = +1$
$r = -10$	$p = -1$	$q = +1$
$r = +9$	$p = +6$	$q = 2$
$r = 3$	$p = +11$	$q = 1$
$r = 8$	$p = +1$	$q = 16$
$r = 8$	$p = 11$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 6$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 11$	$q = 1$
$r = 8$	$p = 1$	$q = 16$
etc.		

Quoti ergo cum fractionibus ita fe habebunt:

$$\begin{array}{ccc|cccc|ccc} 1, & 1, & 2, & 1, & 16, & 1, & 1 & 1, & 16 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{3}, & \frac{7}{4}, & \frac{117}{35}, & \frac{124}{39}, & \frac{241}{74}, & \frac{365}{113} & \text{etc.} \end{array}$$

euidens eft ergo fractiones indicibus 16 fubfcriptas quaefito fatisfacere debere, quod fit fi $x = 7$ et $y = 4$

$y = 4$ tum autem formula noſtra abit in $+1$; ſi in prima formula radicali tribuatur ſignum -1, vt prodeat $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{75} - 35}{-25}$, quae per regulam euoluta praebet ob $k = 75$ et $e = 8$, $r = -35$, $p = -25$, q

$r = -35$	$p = -25$	$q = 1$
$r = +10$	$p = +1$	$q = 18$
$r = 8$	$p = +11$	$q = 1$
$r = 3$	$p = +6$	$q = 1$
$r = 3$	$p = +11$	$q = 1$
$r = 8$	$p = +1$	$q = 16$
$r = 8$	$p = 11$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 6$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 11$	$q = 1$
etc.	etc.	etc.

Hinc autem quoti cum fractionibus ita procedent

$$\begin{array}{cccccccc} 1; & 18 \mid & 1; & 1; & 1; & 16 \mid & 1; & 1 \\ \frac{1}{0}; & \frac{1}{1}; & \frac{19}{18}; & \frac{20}{19}; & \frac{39}{37}; & \frac{59}{56}; & \frac{98}{93}; & \frac{157}{149}. \end{array}$$

Secunda fractio indici 18 reſpondens ſine dubio producit valorem minimum ſcilicet $+1$, quod ex priori caſu concludi nequit, quum ibi haec fractio $\frac{1}{1}$ exiguo quoto ſit ſubſcripta, verum hoc neutiquam eſt mirandum, propterea quod hi valores litterarum x et y ſunt valde exigui, principium autem ſupra ſtabilitum, quo fractiones maximis quotis reſpondentes accipere iubemur proprie numeris maioribus conuenit atque vtique euenire poteſt, vt

valo-

valores minimis numeris expreſſi ab hac regula recedant.

27. Ex his exemplis abunde perſpicitur, quo modo regula noſtra aeque facili ac concinna in omnibus caſibus vti conueniat, imprimis autem ea optimo ſucceſſu adhiberi poterit in Problemate illo Pelliano famoſiſſimo ſoluendo, vbi quaeruntur numeri x et y vt ſit $y = \sqrt{(kxx + 1)}$, tum enim vtique oportebit eſſe proxime $\frac{y}{x} = \sqrt{k}$, quandoquidem formula $yy - kxx$ minima fieri debet, minimum autem iam ſponte conſtat eſſe $= 1$, prodiens ſi $x = 0$ et $y = 1$. Veluti ſi fuerit $k = 13$, cui conuenit $e = 3$ ac primo fit $r = 0$, $p = 1$, ſicque calculus ita progredietur:

$r = 0$	$p = 1$	$q = 3$
$r = 3$	$p = 4$	$q = 1$
$r = 1$	$p = 3$	$q = 1$
$r = 2$	$p = 3$	$q = 1$
$r = 1$	$p = 4$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 1$	$q = 6$
$r = 3$	$p = 4$	$q = 1.$

Vnde quoti cum fractionibus $\frac{y}{x}$ erunt

3,	1,	1,	1,	1	6,	1,	1,	1,	1	6	etc.
$\frac{1}{0}$,	$\frac{3}{1}$,	$\frac{4}{1}$,	$\frac{7}{2}$,	$\frac{11}{3}$	$\frac{18}{5}$,	$\frac{119}{33}$,	$\frac{137}{38}$,	$\frac{256}{71}$,	$\frac{393}{109}$,	$\frac{649}{180}$	etc.

vbi maximi quoti ſunt ſex, quia autem $\frac{y}{x}$ maius eſſe debet quam $\sqrt{k}$ fractiones autem hic reſultantes alternatim ſuperant et deficiunt ab iſto valore, pro caſu noſtro eas accipi oportet, quae locis imparibus conſiſtunt, ergo vndecima harum fractionum, quae dat $y = 649$ et $x = 180$ quaeſito ſatisfacit, fractio autem priori 6 ſubſcripta reſoluit aequationem $y = \sqrt{(13xx - 1)}$.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

VERA DETERMINATIO CENTRI OSCILLATIONIS IN CORPORIBVS QVALIBVSCVNQVE FILO FLEXILI SVSPENSIS EIVSQVE AB REGVLA COMMVNI DISCREPANTIA.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Solent Philoſophi huius ſaeculi, longitudinem penduli ſimplicis ad minuta ſecunda vibrantis in diuerſis terrae locis inquiſituri, globulum aliudue corpus filo tenuiſſimo atque flexiliſſimo ſuſpendere minimasque eiusdem oſcillationes cum oſcillationibus penduli in horologio, ſollicite prius exploratis, comparare indeque de accurata longitudine penduli ſimplicis ad minuta ſecunda vibrantis iudicare idque cum tentant nihil negligunt, quod vel centeſima vnius lineae parte iſtam longitudinem alterare poſſit: ponduſculum fili ad pondus corporis ſuſpenſi applicatum ſcrupuloſe inquirunt, excurſionum penduli rationem habent, quia maiores paullo tardius abſoluuntur in circulo quam minores, actionem quoque aëris in corpus ſuſpenſum et quis inde expectari debeat effectus examinant, caloris itidem effectum

effectum in longitudine menſurae, qua vtuntur ad dimetiendam longitudinem fili accurate determinandam aliasque huiuscemodi circumſtantias, vtcunque exigui momenti, quisque pro ſuo ingenii modulo et in experiundo ſcrupuloſitate, probe perpendunt. His omnibus adhibitis cautelis denique cognoſcitur, non ſolum quotnam pendulum propoſitum confecerit dato tempore oſcillationes ſed et quotnam perfecturum fuiſſet, ſi filum adhiberi potuiſſet omnis gravitatis expers, ſi excurſiones penduli re vera veluti infinite paruae fuiſſent, ſi calor datum habuiſſet gradum, ſi aër omnis abfuiſſet etc. Haec omnia vtique rectiſſime ſe habent; at quod, reliquum eſt, id potiſſimum ſcrupulum mouet. Scilicet in pendulo propoſito inquirunt in centrum oſcillationis, ſecundum leges communes a magno Hugenio primum inuentas et demonſtratas tumque diſtantiam inter punctum ſuſpenſionis praefatumque centrum oſcillationis pro vera longitudine penduli ſimplicis iſochroni aſſumunt. Quid vero de hac vltima operatione cenſendum ſit, conſtitui in hac diatriba ad accuratam trutinam perpendere.

§. 2. In theoria Oſcillationum Hugeniana ſyſtemata oſcillantia ſupponuntur, quae in ſingulis punctis figuram ſuam perfecte conſeruant ita, vt omnes totius ſyſtematis partes communi motu angulari circa axem rotationis ferantur, inter oſcillandum id idem contingeret in noſtris, quas examinabimus, oſcillationibus, ſi loco fili flexilis adhiberetur filum rigidum corpori ita infixum, vt ſimul filum et

corpus

corpus ipsi annexum communi motu angulari ferri cogantur atque vt ipsum filum cum axe corporis appensi constanter in directum sit positum; voco autem axem corporis lineam, quae a puncto suspensionis per centrum grauitatis ducta censetur. Iam vero apparet, hanc hypothesin in systemate nostro minime praesupponi posse nec debere; fieri enim potest et reuera ita fit, vt filum flexile cum axe corporis angulum efformet inter oscillandum data lege variabilem, vnde oscillationes oriantur toto coelo diuersae ab oscillationibus Hugenianis. Reuera in vtroque oscillationum genere formulae pro pendulis simplicibus isochronis, ex veris legibus mechanicis deductae, nihil plane inter se commune habent, quamuis in fine calculi numerici plerumque parum a se inuicem differant, nimium tamen semper quam vt discrepantia negligi possit, nisi corpus filo appensum exiguum valde volumen occupet, quo quidem in casu ambae theoriae eodem recidere censeri poterunt. Haec vt tanto melius intelligantur, liceat in memoriam reuocare, quae olim in Commentariis veteribus Academiae demonstraui, quaeque ad praesens nostrum institutum imprimis pertinent.

§. 3. Omne corpus, quod circa axem per centrum grauitatis transeuntem rotatur, punctum habet, quod vocaui centrum virium viuarum, in quo si tota massa concentrata putetur, eadem a rotatione vis viua generetur, quae corpori rotato in est; hoc punctum non difficulter pro omni systemate determinatur; demonstraui autem egregiam eius

 pro-

proprietatem, quod nempe oſcillationes corporis, circa axem horizontalem per centrum virium viuarum tranſeuntem priorique axi parallelum, ſint brachyſtochronae atque adeo citius perficiantur, quam ſi in quocunque alio axe perficiantur. Vocetur iam diſtantia centri virium viuarum a centro grauitatis $= a$; tum ſi corpus ſuper omni alio axe praefatis parallelo et horizontali oſcilletur, cuius diſtantia a centro grauitatis dicatur A, demonſtraui fore diſtantiam centri oſcillationis, pro hypotheſi communis velocitatis angularis $= A + \frac{aa}{A}$: haec ſimpliciſſima formula omnium eſt commodiſſima atque per ſe indicat, quod centrum oſcillationis et punctum ſuſpenſionis ſint duo puncta conuertibilia ita, vt vtroque modo oſcillationes eiusdem durationis perficiantur.

Si pro corpore ſphaera homogenea accipiatur, cuius radius $= r$, fit $a = r\sqrt{\frac{2}{5}}$ et diſtantia centri oſcillationis $= A + \frac{2rr}{5A}$ atque ſi eadem ſphaera in ipſa ſua ſuperficie fuerit ſuſpenſa, erit diſtantia centri oſcillationis $= \frac{7}{5} r$. Pro virga recta vniformiter graui fit $a = l\sqrt{\frac{1}{3}}$, vbi l ſemilongitudinem virgae denotat, adeoque diſtantia centri oſcillationis a puncto ſuſpenſionis pro virga verticaliter ſuſpenſa $= A + \frac{ll}{3A}$ ſi virga recta a ſummitate ſua fuerit ſuſpenſa, fiet haec diſtantia $= \frac{4}{3} l$.

§. 4. Sic igitur, pro hypotheſi rigiditatis in toto ſyſtemate, res tota breuiſſime expeditur; at vero cum filum corpus ſuſpendens in puncto, quo ad ſe inuicem connectuntur, inflexionem patitur, proble-

problema noſtrum aliter eſt aggrediendum; facilius fere eſt ſolutionem mente concipere, quam conceptam plane atque dilucide exponere, praeſertim cum hic ſermo ſit de oſcillatiunculis minimis ſimulque variationibus momentaneis infinities minoribus. Concipiatur in vtraque figura noſtra filum $a\,c$ grauitatis expers, cui in puncto c annexum ſit corpus graue cuiuscunque figurae: fuerit $c\,r$ axis corporis filo $a\,c$ annexi: fuerit centrum grauitatis corporis in t; conſideretur praeterea in axe corporis aliud punctum f, in quo poſitum putetur centrum oſcillationis pro corpore circa punctum c oſcillante, quaſi ſublato filo $a\,c$, quod adeoque centrum oſcillationis ad theoriam communem Hugenianam redit. Tab. I. Fig. 2. 3.

Ponatur nunc ſyſtema propoſitum $a\,c\,r$ inter oſcillandum perueniſſe in ſitum $a\,b\,q$ atque puncta c, t, f deſcripſiſſe arculos valde paruos $c\,b$, $t\,g$, $f\,d$ qui pro lineolis rectis horizontalibus haberi poterunt, ſi iisdem conuenienter vtamur.

Si vero integra corporis maſſa in puncto t vel g ceu centro grauitatis ponatur concentrata eiusque pondus exprimatur linea verticali $g\,l$: haecque potentia reſoluatur in $g\,h$ tantum non verticalem et potentiolam valde paruam $g\,m$ veluti horizontalem; apparet filum $a\,b$ ſic tendi veluti a toto corporis pondere et ob reactionem ſuam originem dare potentiae contrariae, quam exprimam linea $b\,n$ in ipſa fili longitudine ſumta, eritque $b\,n$ proxime aequalis ipſi $g\,l$. Producatur axis $q\,b$ vsque in s atque re-

 ſolua-

ſoluatur potentia $b\,n$ in duas laterales $b\,p$ et $b\,o$, ſic fiet, vt potentiae $b\,p$ et $g\,h$ ſint inter ſe aequales et contrariae, ſolae itaque remanent potentiolae $g\,m$ et $b\,o$, a quibus motus oſcillatorius quouis tempuſculo ſiue accelerari ſiue retardari poſſit: directiones autem harum potentiolarum poterunt cenſeri veluti horizontales ſimulque ad axem $b\,q$ perpendiculares ob paruitatem inſignem oſcillationum. Notetur autem haſce duas potentiolas horizontales, prouti ſunt diuerſimode applicatae ita etiam diuerſos exercere effectus: prior $g\,m$, in centro grauitatis applicata, cenſenda eſt omnibus et ſingulis elementis corporis eandem vim acceleratricem veluti horizontalem imprimere ſicque pro quouis tempuſculo, ſi ſola agat, parallelismum in axe $b\,q$ conſeruare. Licebit igitur, ratione potentiolae $g\,m$, fingere integram corporis maſſam concentratam atque translatam in punctum b huicque puncto applicatam potentiam $g\,m$ ſub directione horizontali $b\,c$; Idem quoque licebit pro omni alio puncto in axe $b\,q$ ſumto.

Progredior ad alteram potentiolam $b\,o$ explicandam: haec vtique vnico puncto b tota applicata eſt atque in diuerſa elementa corporis diuerſas impreſſiones facit. Hic iterum vſu venit vtiliſſimum theorema meum ante plurimos annos cum Academia communicatum, quod haec potentia impendatur in rotationem corporis circa punctum d, quod foret centrum oſcillationis corporis ſi in puncto b ſuſpenſum eſſet. Ergo potentiola $b\,o$ nullam impreſ-

impreſſionem facit in punctum d, quod hic tanquam centrum rotationis conſiderari debet; verum vt appareat, quanta inde oritura ſit vis acceleratrix in ſummitate b, quoduis elementum corporis diminui debet in ratione quadratica diſtantiae $b\,d$ ad diſtantiam elementi a puncto d poſteaque aggregatum elementorum hac lege diminutorum maſſam formabit, quae integra in punctum b translata cenſenda eſt; ſic potentiola $b\,o$ ad hanc maſſam applicata efficiet vim acceleratricem pro puncto b.

Denique ex combinatione vtriusque potentiolae $g\,m$ et $b\,o$ deriuabitur vis acceleratrix abſoluta tam pro puncto b quam pro puncto d; tum tandem poſtulat iſochronismus, vt ambae vires iſtae acceleratrices fiant diſtantiis $b\,c$ et $d\,f$ proportionales. Atque his principiis integra problematis noſtri ſolutio ſuperinſtruenda eſt.

§. 5. Sit longitudo fili $a\,c = l$; diſtantia $c\,f = \lambda$ (eſt autem punctum f centrum oſcillationis pro corpore ex ſe ipſo in puncto c ſuſpenſo) atque diſtantia inter centrum grauitatis corporis eiusque praefatum centrum oſcillationis ſiue $t\,f = L$: ex hiſce tribus longitudinibus datis erit longitudo penduli ſimplicis, cum oſcillationibus noſtris iſochroni, determinanda. Sit $b\,c = \alpha$ ductaque verticali $b\,e$ ponatur $d\,e = \beta$ erit ante omnia relatio inter β et α definienda; haec vero maxima parte pendet a diverſitate diuerſoque agendi modo potentiolarum horizontalium $g\,m$ et $b\,o$: poſito igitur pondere cor-

 poris

poris oscillantis $= p = g\,l$; fiet (ob similitudinem triangulorum $b\,e\,d$ et $g\,l\,m$) $g\,m = \frac{\beta}{\lambda} p$, quae potentiola cum aequaliter agat in singula corporis elementa sub directione horizontali, erit vis acceleratrix vbique $= \frac{\beta}{\lambda} \times \frac{p}{m}$, intelligendo per m massam corporis, nominatimque in punctis d et b.

Ad dignoscendam alteram potentiolam bo, producenda erit linea ab vsque in u: sic fiet $u\,e = \frac{\lambda}{l}\alpha$ atque $d\,u = \beta - \frac{\lambda}{l}\alpha$. Est vero potentia $b\,n = p$; ergo, ob similitudinem trianguli $b\,d\,u$ cum triangulo $n\,o\,b$ fit potentiola $b\,o = (\frac{\beta}{\lambda} - \frac{\alpha}{l})p$. Ista potentia impenditur in rotationem corporis circa punctum d, in quo adeoque nullum exercet effectum sic vt integra vis acceleratrix pro puncto d maneat $= \frac{\beta}{\lambda} \times \frac{p}{m}$. Verum enim vero in puncto b noua oritur vis acceleratrix, ad cuius determinationem requiritur vt secundum praecedentem paragraphum definiatur massa in b substituenda, quae si dicatur μ, docent leges mechanicae esse $\mu = \frac{L}{\lambda} m$; igitur vis acceleratrix genita a potentiola $(\frac{\beta}{\lambda} - \frac{\alpha}{l})p$, ad massam $\frac{L}{\lambda} m$ applicata, fit $= (\frac{\beta}{L} - \frac{\lambda\alpha}{L\,l})\frac{p}{m}$, estque haec vis acceleratrix contraria illi, quae a potentia $g\,m$ antea orta fuerat, vnde nunc vis acceleratrix absoluta pro puncto b fit $= (\frac{\beta}{\lambda} - \frac{\beta}{L} + \frac{\lambda\alpha}{L\,l})\frac{p}{m}$, quam vidimus esse pro puncto d simpliciter $= \frac{\beta}{\lambda} \times \frac{p}{m}$.

Quoniam in systemate nostro oscillationes supponuntur regulares, oportet vt ambo puncta b et d simul

ſimul perueniant in c et f, quod vt fiat requiritur vt vires acceleratrices in b et d ſint proportionales viis ſimul perficiendis bc et df ſiue α et $\alpha + \beta$, vnde ſequens deducitur analogia:

$$\left(\frac{\beta}{\lambda} - \frac{\beta}{L} + \frac{\lambda\alpha}{Ll}\right)\frac{p}{m} : \frac{\beta}{\lambda} \times \frac{p}{m} :: \alpha : \alpha + \beta \text{ ſiue } Ll\beta - \lambda l\beta + \lambda\lambda\alpha : Ll\beta = \alpha : \alpha + \beta,$$

quae in aequationem conuerſa dat

$$\beta\beta + \frac{\lambda l - \lambda\lambda}{\lambda l - Ll}\alpha\beta = \frac{\lambda\lambda}{\lambda l - Ll}\alpha\alpha:$$

Hinc denique

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\lambda\lambda - \lambda l \pm \sqrt{(4\lambda\lambda \times (\lambda l - Ll) + (\lambda l - \lambda\lambda)^2)}}{2\lambda l - 2Ll}.$$

Haec aequatio paullo fit concinnior ſi ponatur $\lambda - L = L'$, ita vt ſit linea ct ſiue diſtantia centri grauitatis a puncto $c = L'$ hoc modo obtinetur

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\lambda\lambda - \lambda l \pm \sqrt{(4\lambda\lambda L' l + (\lambda l - \lambda\lambda^2)}}{2L'l}.$$

§. 6. Inuento valore $\frac{\beta}{\alpha}$ facile nunc eſt determinare longitudinem quaeſitam penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus noſtris. Scilicet iam innoteſcit vis acceleratrix pro ſingulis punctis in axe bq ſumtis vna cum eorum diſtantia ab axe verticali cr: hinc ſtatim reperitur ratio inter pendulum ſimplex et inter pendulum datum: ſeligatur, verbi gratia, punctum d, pro quo diſtantia ab axe verticali eſt $df = \beta + \alpha$ et vix acceleratrix, vi praecedentis paragraphi, $= \frac{\beta}{\lambda} \times \frac{p}{m}$ vel ſimpliciter $= \frac{\beta}{\lambda}$, quando quidem pondus corporis p poteſt exprimi per ipſam maſſam m: foret itaque pendulum quaeſitum $= bd = \lambda$, ſi loco diſtantiae df haberetur diſtantia de; vnde ſequitur eſſe longitudinem λ multiplitiplicandam per rationem $\frac{df}{de}$, id eſt, per $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$. Eſt igitur vera penduli noſtri ſimplicis longitudo $\frac{\alpha+\beta}{\beta}\lambda$, quae eſt ipſa longitudo sf vel sd, ſubſtituto autem pro quantitate $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$ valore in fine paragraphi praecedentis indicato, inuenitur denique longitudo penduli ſimplicis iſochroni

$$=\lambda+\frac{2L'l}{\lambda-l\pm\surd[4L'l+(l-\lambda)^2]}.$$

Idem inuenitur valor ſi loco puncti d aſſumatur punctum b, pro quo inuenimus in praecedente paragrapho vim acceleratricem

$$=\left(\frac{\beta}{\lambda}-\frac{\beta}{L}+\frac{\lambda\alpha}{Ll}\right)\frac{p}{m}:$$

ponatur rurſus $\lambda-L=L'$ atque $p=m$: ſic fiet vis acceleratrix pro puncto $b=$

$$\frac{\lambda\lambda\alpha-L'l\beta}{\lambda\lambda l-\lambda L'l};$$

vnde nunc longitudo penduli ſimplicis iſochroni

$$=\frac{\lambda\lambda l\alpha-\lambda L'l\alpha}{\lambda\lambda\alpha-L'l\beta}=\frac{\lambda\lambda l-L'l}{\lambda\lambda-L'l\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Subſtituatur pro $\frac{\beta}{\alpha}$ valor eius in fine paragraphi praecedentis expreſſus, atque ſic inuenietur longitudo penduli ſimplicis iſochroni

$$=\frac{2l\lambda-2lL'}{\lambda+l\mp\surd 4L'l+(l-\lambda)^2},$$

quam pro puncto d inueneramus

$$=\lambda+\frac{2L'l}{\lambda-l\pm\surd 4L'+(l-\lambda)^2}:$$

Equidem diuerſi ab inuicem prima fronte videntur ambo valores; attamen, recte inſtituto calculo, perfecte inter ſe aequales deprehenduntur. §. 7.

§. 7. In vtraque formula, longitudinem penduli ſimplicis exprimente, eadem occurrit quantitas radicalis, quae vtique tam affirmatiue quam negatiue accipi poteſt. Patet exinde, corpora e filo flexili ſuſpenſa duobus modis oſcillationes ſuas perficere poſſe, quarum configurationes ab inuicem valde diverſae ſint quaeque ſingulae ratione temporis, in quamuis oſcillationem inſumti, inſigniter differant, ſi non ad vnum eundemque modum pertineant: tanto magis exinde eluceſcit, quod ſua indole toto coelo differant oſcillationes noſtrae pro filo flexili ab oſcillationibus communiter aſſumtis pro filo rigido ſeu inflexibili, quod nempe in ſolo puncto ſuſpenſionis a flexionem admittat. Attamen, hac non obſtante diuerſitate, primum oſcillationum noſtrarum genus, ad normam figurae primae formatarum, parum admodum differt ſua duratione ab oſcillationibus Hugenianis, quae ratio eſſe videtur, quod nemo adhuc, quantum quidem ſcio, vllam diuerſitatem ſuſpicatus ſit, praeſertim in corporibus quorum integer axis multo minor fuerit longitudine fili. Atque haec me mouit ratio, vt id examinis in me ſuſciperem, viſurus quid calculus diſcriminis indicet et an vlla in determinanda vera longitudine penduli ſimplicis iſochroni ad minuta ſecunda vibrantis diuerſitas ſenſibilis inde pro globulis ſuſpenſis minoribus oriri debeat nec ne? Poſtulat hoc inſtitutum meum, vt ſeorſim prius agam de oſcillationibus principalibus tardioribus, quibus inſeruit ſignum ſuperius, quando ſigna ambigua, $\mp$ vel $\pm$ occurrunt.

De oſcillationibus principalibus tardioribus.

§. 8. Duo ſunt caſus, qui oſcillationes noſtras per ſe reddunt obuias, quosque adeo formulae praemiſſae, ſi ratae ſint, indicare debent: *primus* eſt quo ponitur longitudo fili ſiue $l = 0$, et qui longitudinem penduli facere debet $= \lambda$: Id vero ex formula noſtra primo loco poſita deducitur ſi pro quantitate radicali ſubſtituatur $\lambda + \frac{2L'l}{\lambda} - l$ neglectis nimirum altioribus dimenſionibus longitudinis l: hoc facto fit denominator huius formulae $= \lambda + l - \lambda - \frac{2L'l}{\lambda} + l = 2l - \frac{2L'l}{\lambda}$ atque integra formula fit $= \lambda$; altera vero formula immediate eandem dat concluſionem. *Secundus* caſus eſt, quo ponuntur quantitates λ et L' veluti infinite paruae habita ratione ad longitudinem fili; tunc vero pro quantitate radicali ponenda eſt quantitas $l - \lambda + 2L'$ quae ſi ſubtrahatur ab quantitate $\lambda + l$ relinquit $2\lambda - 2L'$; vnde prior formula in fine paragraphi ſexti poſita fit in hoc caſu ſimpliciter $= l$, plane vt prouideri poterat, quia hic caſus repraeſentat pendulum, quod dicitur ſimplex. Id idem indicat quoque altera formula.

§. 9. Deſcendamus ad exempla theoriae noſtrae vere accommoda 1°. ponatur $l = \lambda$, dabit vtraque noſtra formula longitudinem penduli ſimplicis iſochroni $= l + \sqrt{L'l}$: at vero pro theoria communi fit eadem longitudo $= l + \frac{2lL'}{l + L'}$; prior excedit alteram, quaecunque fuerit corporis conformatio, quia diſtantia L' ſemper minor eſt quam λ ſiue, in hoc

hoc exemplo, minor quam l: fuerit, verbi gratia, $L' = \frac{3}{4} l$ fiet longitudo penduli iſochroni pro hypotheſi flexibilitatis $= l + \frac{1}{2} l \sqrt{3} = 1.866\, l$, in hypotheſi rigiditatis $= l + \frac{6}{7} l = 1.857\, l$; igitur exceſſus prioris ſuper alteram fit $= \frac{9}{1000} l$ ſiue $=$ ducenteſimae ſeptimae parti longitudinis penduli ſimplicis iſochroni.

Si fuerit $l = 3\frac{1}{2}$; $\lambda = 4$ et $L' = 3$, fit $\sqrt{4 L' l + (l - \lambda)^2} = 6\frac{1}{2}$ atque ambae formulae paragraphi ſexti faciunt longitudinem penduli ſimplicis iſochroni $= 7$, in altera vero hypotheſi haec longitudo fit $= 6\frac{25}{26}$: hic igitur differentia inter vtrumque pendulum fit $= \frac{1}{26}$, quae facit centeſimam octuageſimam ſecundam partem longitudinis penduli ſimplicis iſochroni.

§. 10. Ex ambobus exemplis patet, paruulam inter vtramque hypotheſin interuenire differentiam, etiamſi corpora appenſa dimenſiones habeant praegrandes. Etenim ſi de pendulis ad minuta ſecunda vibrantibus ſermo ſit, differentia inter ambo pendula in allatis exemplis vix duas lineas cum dimidia attingit; facile autem eſt prouidere, multo minoris momenti fore diſcrimen, ſi corpuſcula minora filis longioribus appendantur; quod profecto faciunt Phyſici, cum in longitudinem veram penduli pro minutis ſecundis omni, qua fieri poteſt arte accuratiſſime inquirunt. Ipſa haec a magnis Viris adhibita diligentia atque accuratio, qua momentoſiſſimum argumentum ad centeſimas vsque partes vnius lineae conficere ſatagunt, aliquid, ni fallor, ponderis hiſce diſcuſſionibus impertiet. Exemplo vtar, quod experimentum inſtitui ſolitum perfecte imitetur.

§. 11. Aſſumatur pro corpore globus metallicus homogeneus, cuius radius ſit $= 5$ lin. Paris. isque ſuſpenſus fuerit filo 435 lin. longo. Hae poſitiones faciunt $l = 435$; $L' = 5$: $\lambda = 7$: eritque quantitas radicalis $\sqrt{4 L' l + (l - \lambda)^2} = 438,04566$ totusque denominator in prima formula finali paragraphi ſexti $= 3,95434$ et ipſa longitudo penduli ſimplicis quaeſiti $= \frac{1740000000}{395434} = 440,0229$ lin. Hic idem valor oritur, ſi vtamur altera formula in fine paragraphi ſexti expoſita, niſi quod vltima figura numeri fere vnitate deficiat, quia nimirum quantitas radicalis nondum ſufficiente accuratione adhibita fuit.

Supereſt vt iſtum valorem penduli ſimplicis iſochroni, ſecundum veras mechanicae leges inuentum, comparemus cum ea longitudine penduli, qualis methodo communiter adhibita determinatur, quaeque exprimitur formula $l + L' + \frac{L'}{l + L'} \times \overline{\lambda - L'}$ ſiue numero $435 + 5 + \frac{5}{440} \times 2 = 440\frac{1}{445} = 440.0227$ lin. vbi notandum, quod prior numerus tantillum exceſſu, alter defectu peccet, et quod vera differentia, inter vtramque theoriam, decies milleſimam vnius lineae particulam parum excedat, quae differentia longe minima intra trimeſtre vix vnum minutum ſecundum valeret iniicere, tantam equidem conformitamitatem inter vtrumque oſcillationum genus plane diuerſum ab inuicem atque formulis algebraicis, omni ſimilitudine deſtitutis, expreſſum ante inſtitutum calculum non expectaſſem. Nunc autem nemo tam ſcrupuloſus erit, vt vllam in corporibus minoribus filo ſuſpenſis correctionem adhibere velit: Aliter interim ſe res habet in corporibus maioribus, filo breuiori ſuſpenſis, pro quibus theoria Hugeniana nullo modo admitti poteſt, niſi debita correctio ad ductum theoriae noſtrae adhibeatur. Progredior ad alterum oſcillationum genus, quod argumentum praeſens admittit.

De oſcillationibus acceſſoriis celerioribus.

§. 12. Oſcillationes, de quibus nunc ſermo eſt, ſe componunt ad conformationem figurae ſecundae, vbi puncta analoga iisdem deſignantur literis, quibus pro figura prima vſi ſumus: lineas autem punctatas vna cum litteris ad eas pertinentibus apponere non neceſſe duxi. In hac itaque figura ſecunda denotat rurſus ac vel ab longitudinem fili; cr vel bq axem corporis oſcillantis, cuius centrum grauitatis in t vel g; centrum vero oſcillationis, pro ſuppoſita ſuſpenſione in puncto c vel b, iterum eſt in f vel d; ambae figurae in eo eſſentialiter differunt, quod in prima figura puncta b et d ſint ad easdem partes, in figura ſecunda ſint ad partes contrarias poſita et cum in figura prima recta sf et sd deſignet longitudinem penduli ſimplicis iſochroni, erit etiam pro figura ſecunda linea sf vel sd lon-

 gitu-

gitudo penduli ſimplicis iſochroni pro oſcillationibus, quas nunc commentor. Notetur imprimis, quod pro hac oſcillationum claſſe ſignum inferius ſit ſeligendum, quoties in formulis §. §. 5 et 6. expoſitis quantitas radicalis occurrit.

§. 13. Notari hic meretur ſitus puncti s, quo axis corporis oſcillantis perpetuo axem verticalem interſecat. Ponatur primo longitudo fili $l = 0$ tum indicant ambae formulae paragraphi quinti longitudinem penduli iſochroni $= 0$, plane ac ſi rapiditate infinita oſcillationes perficiantur; verum enim vero aduertatur, oſcillationes ſupponi veluti infinite paruas: oportet itaque vt ſit arculus $b\,c$ veluti infinities minor longitudine fili, quod ipſum cum ponatur $= 0$, ſimul arculus $b\,c$ ponendus erit $= 0$; ergo totus motus oſcillatorius ad perfectam reductus erit quietem.

Melius nobis conſulemus, ſi filo mediocris ſupponatur longitudo, dum quantitates λ et L' ſtatuantur veluti infinitae; tunc autem intelligemus ex formulis noſtris, fore pendulum iſochronum $s\,d = \frac{\lambda - L'}{\lambda} \times l$ atque adeo veluti infinities breuius ac ſunt longitudines L' et λ: hinc ſequitur oſcillationes proxime ita fieri, ac ſi corpus minimas perficiat rotatiunculas reciprocas circa punctum d ſiue propemodum circa centrum oſcillationis, quod corpus habet, ſi ex puncto c ſuſpenſum fuerit. Si e contrario corpus filo infinite longo ſuſpenſum putetur, dabit vtraque formula in paragrapho ſexto demonſtramonſtrata, longitudinem penduli ſimplicis iſochroni ſiue $ds = \lambda - L' = db - gb = dg$: Igitur punctum s cadit in punctum g ſiue in centrum grauitatis corporis. Hinc diſcimus, centrum rotationum minimarum reciprocarum ſemper fieri circa punctum medium inter extremos limites d et g, nec vnquam pendulum iſochronum maius fieri longitudine $\lambda - L'$ vel longitudine, quam §. 5. vocaui L.

§. 14. Conſideremus ambo exempla, paragrapho nono aſſumpta pro oſcillationibus primi ordinis explicandis. Quod ſi itaque rurſus ponatur $l = \lambda$, obtinetur pendulum iſochronum, pro oſcillationibus noſtris ſecundi ordinis, $= l - \sqrt{L' l}$ atque ſi porro ponatur $L' = \frac{3}{4}\lambda$, fiet hoc pendulum $= l - \frac{1}{2} l \sqrt{3} = 0,134\, l.$ in caſu ſpecialiſſimo, quo longitudo fili poneretur duorum pedum, foret pendulum quaeſitum $= 0,268$ ped. atque formaret propemodum ducentas oſcillationes intra tempus vnius minuti primi, id quod reuera ita ſe habere experimento cognoui in virga terete vniformiter craſſa tres pedes longa et filo duorum pedum ſuſpenſa, vbi oſcillationes binas quasque numerabam. In altero, quod §. 9. attuli exemplo, vbi $l = 3\frac{1}{2}$; $\lambda = 4$ et $L' = 3$, quod foret pro virga terete vniformiter craſſa, ſex pedes longa et filo $3\frac{1}{2}$ ped. longo, fit $s d$ ſiue pendulum iſochronum $= \frac{1}{2}$ ſiue $=$ quartae parti diſtantiae ft vel dg. Caeterum commode id fit, cum pro corpore ſuſpenſo teres aſſumitur virga ſiue bacillus cylindricus, ideo quod in his minimae oſcillationes celerrime repetitae melius diſtinguantur.

§. 15. Attentione imprimis dignum puto in hoc argumento, quod indicaui paragrapho decimo tertio de effectu fili modo breuioris modo longioris pro eodem corpore ſuſpenſo. Scilicet quod euaneſcente filo punctum s incidat in ipſum punctum d vel f et quod poſito filo veluti infinitae longitudinis, idem interſectionis punctum s incidat in punctum g vel t; igitur pendulum iſochronum cum oſcillationibus, de quibus hic ſermo eſt, ſimper breuius eſt diſtantia a centro grauitatis ad centrum oſcillationis, quod reſpondet corpori ex puncto c ſuſpenſo id eſt, ſemper minor quantitate paruula L § 5. definita, vnde intelligitur in omni experimento celerrimas fore huiusmodi oſcillationes, niſi quis corpora praegrandia adhibere velit. Sic in poſteriori exemplo praecedentis paragraphi, vbi $\lambda = 4$ et $L' = 3$ atque $L = 1$, ſi pro longitudine l accipiatur $\frac{1}{4}$, quae paruula eſt, reperitur pendulum iſochronum $= \frac{20}{303}$ ſiue paullo minus quam $\frac{1}{15}$; ergo ds vel $fs < \frac{1}{15}$ ſiue minor decima quinta parte diſtantiae ft. Verum etiamſi filum adhibeatur longiſſimum, veluti ſi ponatur $l = 100$, pendulum iſochronum nondum attingit longitudinem tf; et enim fit iſtud pendulum proxime $= \frac{100}{103}$.

§. 16. Sequitur nunc *Theorema*, quod viſum eſt quam maxime elegans, ſcilicet quod ſumma amborum pendulorum, vtrique oſcillationum generi reſpondentium, ſit ſemper $= l + \lambda$ ſiue $=$ longitudini af ſiue in prima ſiue in ſecunda figura. Demonſtratio huius theorematis in eo poſita eſt; quod

quod ſi in formula priori paragraphi ſexti, ſi primo ſignum ſuperius quantitati radicali praefixum, atque deinde ſignum inferius ſumatur, ſit ſumma ambarum quantitatum reſultantium ſemper $= l + \lambda$; et enim inſtituto calculo reperitur

$$\frac{2 l \lambda - 2 l L'}{\lambda + l - \sqrt{4 l L' + (l-\lambda)^2}} + \frac{2 l \lambda - 2 l L'}{\lambda + l + \sqrt{4 l L' + (l-\lambda)^2}} = l + \lambda.$$

Exinde ceu *corollarium* deducitur, quod ſit diſtantia $a s$ in figura prima ſemper aequalis diſtantiae $s f$ in figura ſecunda ſiue aequalis longitudini penduli iſochroni pro oſcillationibus ſecundi ordinis. Igitur, in figura prima, indicat $s f$ longitudinem penduli iſochroni pro oſcillationibus poſterioribus.

De oſcillationibus vtriusque generis coexiſtentibus.

§. 17. In vtroque genere oſcillationes erunt ſimplices, ſi elongationes initiales punctorum d et b a punctis e et c rationem inter ſe habeant, quam indicat aequatio finalis paragraphi quinti. Quid autem erit ſi praefata puncta d et b alias habuerint diſtantias initiales? Id genus quaeſtionum a nemine, quod ſciam, tractatum fuerat, cum in actis Berolinenſibus theoriam de oſcillationibus coëxiſtentibus in ſyſtemate determinato exponerem eiusque praeſertim vſum oſtenderem, cum ſyſtema propoſitum ex numero partium finito, vtcunque tamen magno vel paruo, componitur; Dico autem fore tunc, vt ambo oſcillationum genera ſimul exiſtant in ſyſtemate propoſito et ita quidem coëxiſtant, vt pro ratione,

tione, qua puncta d et b ab initio diducta fuerint, fiant vel oscillationes de primo genere vel etiam de secundo genere sensibiliores: at vero semper eadem orietur ratio inter ambo pendula isochrona, illa nempe, quae intercedit inter

$$\lambda + l + \sqrt{4L'l + (l-\lambda)^2} \text{ atque } \lambda + l - \sqrt{4L'l + (l-\lambda)^2}$$

conf. §. 6. permixtio huiusmodi oscillationum efficiet, vt motus oscillatorius absolutus appareat valde irregularis atque perturbatus, etiamsi sit ex duabus oscillationum speciebus perfecte regularibus compositus. Duo tamen in systemate sunt puncta litera s indicata, quae motu simplici oscillant, alterum in figura prima conspicuum, quod simpliciter oscillationes de secundo genere format, alterum in figura secunda notatum, quod simplices facit oscillationes primi generis.

§ 18. Patet ex proportione inter ambo pendula simplicia isochrona, quam modo indicaui, fieri posse, vt tempore vnius oscillationis de prima classe, absoluatur datus numerus integer N oscillationum de secunda classe: tunc vero oscillationes primae classis erunt veluti irregulariter-regulares, quandoquidem post quamlibet oscillationem fundamentalem omnia simul ad quietem momentaneam erunt reducta; satisfiet huic conditioni, si sequens instituatur analogia

$$\lambda + l + \sqrt{4L'l - \lambda\sqrt{(l-\lambda)^2}} : \lambda\sqrt{l - \sqrt{L' + (l-\lambda)^2}} :: NN : 1:$$

haec analogia suppeditat talem aequationem

$$(NN-1)(\lambda + l) = (NN+1)\sqrt{4L'l + (l-\lambda)^2},$$

cui

cui innumeris modis ſatisfieri poteſt: Abſit tunc vt huiusmodi oſcillationes coëxiſtentes in ſyſtemate pro ſimplicibus oſcillationibus primi generis accipiamus, cum liberum ſit etiam numerum fractum pro N accipere, in quo caſu ridiculum foret, motum vibratorium compoſitum pro ſimplici habere: fuerit, verbi gratia $N = \frac{13}{3}$, tunc vno eodemque tempore abſoluentur tres oſcillationes primi generis atque tredecim ſecundi generis. Argumentum iſtud vnico illuſtrabo exemplo.

§. 19. Sumatur pro corpore ſuſpendendo bacillus teres, vniformiter craſſus et grauis, pro quo habetur $L' = \frac{3}{4}\lambda$ et quaeratur longitudo fili l hac conditione, vt quatuor praeciſe abſoluantur vibrationes ſecundi generis, dum vnica perficitur vibratio primi generis: tunc talis orietur aequatio $15(\lambda + l) = 17\sqrt{lL + l\lambda + \lambda\lambda}$ ſiue $225\lambda\lambda + 450\lambda l + 225 ll = 289 ll + 289\lambda l + 289\lambda\lambda$ ſiue $64 ll - 161\lambda l = -64\lambda\lambda$, vnde oritur $l = \frac{161}{128}\lambda \pm \frac{\sqrt{9537}}{128}\lambda$: Igitur duobus modis quaeſtioni ſatisfieri poteſt; primus proxime eſt cum ſumitur $l = 2.02\lambda$, alter cum fit $l = 0,495\lambda$. Pro minoribus numeris N fiunt radices imaginariae. Caeterum ambas vibrationum claſſes facile eſt diſtinguere atque numerare.

DETERMINATIO MOTVS OSCILLATORII, IN PRAECEDENTE DISSERTATIONE PERTRACTATI, EX PRIMIS MECHANICAE PRINCIPIIS PETITA.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Tab. I. Fig. 4. 5. Figura concipiatur in plano verticali descripta, cui axis girationis in A sit normalis, vnde ducta notetur recta verticalis A V, a qua pro dato tempore $= t$ filum A B declinet angulo B A V $= \vartheta$. Filo autem in B alligatum sit corpus B M N, cuius centrum grauitatis reperiatur in C, ex quo per B recta C B D producta verticali occurrat in puncto D, cum ea faciens angulum C D V $= \Phi$, tum vero vocetur longitudo fili A B $= a$ et interuallum B C $= b$, ipsum autem filum A B concipiatur grauitatis expers, corporis autem annexi B M N pondus seu massa vocetur $=$ M, iam in hoc corpore concipiatur axis ad planum verticale normalis per centrum grauitatis C ductus, cuius respectu sit corporis momentum inertiae $=$ M $c c$, vnde si corpus fuerit globus radio B C $= b$ descriptus, notum est fore $c c = \frac{2}{5} b b$, generatim autem calculum ad alia quae-

quaecunque corpora accommodare licet, dummodo memoratus axis per C ductus simul fuerit vnus ex axibus principalibus cuiusque corporis, quia aliter corpus circa eum libere girari non posset sed motum quendam turbinatorium acciperet.

§. 2. His positis, vt in motum huius corporis B M N quatenus filo A B est allegatum, inquiramus, vires illud sollicitantes perpendere debemus, duae autem tantum occurrunt huiusmodi vires, altera vis grauitatis ponderi corporis M aequalis, directionem habens verticalem C E ipsi centro grauitatis C applicata, altera vero vis corpori in puncto B est applicata tensioni fili A B aequalis quam litteram T designemus. Iam in corpore B M N duplex motus est considerandus, alter progressiuus, quo centrum grauitatis C fertur, quem secundum directiones fixas C E et C Q commodissime resoluimus: Alter est cuius motus giratorius circa centrum grauitatis C, quem ex variabilitate anguli C D V $= \Phi$ diiudicari oportet; quemadmodum igitur vterque motus per vires sollicitantes determinari debeat, prima mechanicae principia luculenter declarant.

§. 3. Primo igitur motum progressiuum centri grauitatis C inuestigemus, quem in finem vocemus coordinatas A Q $= x$ et Q C $= y$, ac manifestum est fore $x = a \operatorname{cos}. \vartheta + b \operatorname{cos}. \Phi$ atque $y = a \operatorname{sin}. \vartheta + b \operatorname{sin}. \Phi$, tum vero tensio fili $=$ T pro directione verticali P A, dat vim $=$ T $\operatorname{cos}. \vartheta$ at pro directione horizontali B P vim $=$ T $\operatorname{sin}. \vartheta$, grauitas autem

 seu

seu pondus corporis $= M$ pro sola directione verticali suppeditat vim $= M$ deorsum tendentem, pro directione autem horizontali nullam. Hinc autem principia mechanicae sumto elemento temporis dt constante ac denotante g altitudinem, per quam grauia vno minuto secundo libere delabuntur, sequentes duas aequationes suppeditant

$$\frac{ddx}{2g\,dt^2} = \frac{M - T\,cos.\,\vartheta}{M}, \quad \frac{ddy}{2g\,dt^2} = \frac{-T\,sin.\,\vartheta}{M}$$

quae formulae ita sunt comparatae, vt tempus iam in minutis secundis exprimant, indeque ad quoduis tempus in minutis secundis expressum, status corporis clarissime definiatur, vtcunque etiam motus fuerit irregularis.

§. 4. Pro motu autem giratorio corporis circa axem in centro grauitatis C conceptum, vis grauitatis $CE = M$ nullum plane praebet momentum; tensio autem fili T, qua corpus in directione BA vrgetur ob angulum $ABD = \Phi - \vartheta$ respectu istius axis praebet momentum $= Tb\,\sin.(\Phi - \vartheta)$ quod angulum girationis $BDP = \Phi$ imminuere tendit, hoc vero momentum per momentum inertiae Mcc diuisum, exhibebit retardationem motus giratorii, quae ergo hac aequatione exprimetur

$$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-Tb\,sin.(\Phi - \vartheta)}{Mcc}$$

quae aequatio cum duabus praecedentibus coniuncta, omnia determinat, quae ad motus cognitionem desiderari possunt, ex his enim tribus aequationibus ad quoduis tempus t ternas nostras incognitas angulos scilicet

scilicet ϑ et Φ cum tensione T definire licebit, quantaecunque etiam fuerint penduli excursiones, quibus autem generatim euoluendis hic non immoror.

§. 5. Contemplabor enim, cum illustri Auctore superioris dissertationis, tantum oscillationes quam minimas, ita vt bini anguli ϑ et Φ semper spectari queant tanquam infinite parui, hinc sinus istorum angulorum ipsis aequales, cosinus vero vnitati aequales censeri poterunt, ideoque habebimus nostras coordinatas $x = a + b$ et $y = a\vartheta + b\Phi$, ex quo ternae nostrae aequationes sequentes induent formas

I. $0 = \frac{M - T}{M}$

II. $\frac{a\,dd\vartheta + b\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-T\vartheta}{M}$

III. $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-T b(\Phi - \vartheta)}{Mcc}$,

ex quarum prima statim sponte innotescit quantitas tensionis fili $T = M$, semper scilicet ipsi ponderi corporis M erit aequalis, hoc igitur valore substituto duae reliquae nostrae aequationes erunt

prior $\frac{a\,dd\vartheta + b\,dd\Phi}{2g\,ds^2} = -\vartheta$ et altera $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-b\Phi + b\vartheta}{cc}$

ac si ex posteriore loco $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2}$ eius valor in priore substituatur, fiet

$$\frac{a\,dd\vartheta}{2g\,dt^2}\;\frac{-bb\Phi + bb\vartheta}{cc} = -\vartheta \text{ siue } \frac{dd\vartheta}{2g\,dt^2} = \frac{bb\Phi - bb\vartheta - cc\vartheta}{acc}$$
$$= \frac{bb\Phi - (bb + cc)\vartheta}{acc}$$

quae combinata cum altera

$$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-b\Phi + b\vartheta}{cc}$$

omnia

omnia continet quae, ad solutionem problematis requiruntur.

§. 6. Quo autem harum aequationum differentialium integralia indagemus, eas inter se ita combinemus, vt talis forma prodeat

$$\frac{A\,dd\vartheta + B\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{N(A\vartheta + B\Phi)}{acc},$$

reuera autem prodit

$$\frac{A\,dd\vartheta + B\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{Abb\Phi - A(bb+cc)\vartheta}{acc} - \frac{Bab\Phi + Bab\vartheta}{ac}$$

necesse est igitur, vt fiat.

I. $AN = -A(bb+cc) + Bab$ et II. $NB = Abb - Bab$

ex priore ergo

$$ABN = -AB(bb+cc) + BBab$$

ex altera vero

$$ABN = AAbb - ABab$$

qui duo valores inter se aequati praebent

$$AAbb + AB(bb+cc-ab) = BBab$$

vnde per resolutionem colligimus

$$\frac{A}{B} = \frac{ab - bb - cc \pm \sqrt{(aabb + 2ab^3 - 2abcc + (bb+cc)^2}}{2bb};$$

ponamus iam breuitatis gratia

$$\frac{ab - bb - cc}{2bb} = p \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{(aabb + 2ab^3 - 2abcc + (bb+cc))^2}}{2bb} = q,$$

quandoquidem ex tribus quantitatibus cognitis a, b et c hinc litterae p et q facile determinantur, atque hinc pro fractione $\frac{A}{B}$ geminum valorem adipiscimur alterum $\frac{A}{B} = p + q$, alterum $\frac{A}{B} = p - q$, quorum vtrumque seorsim euoluamus.

§. 7.

§. 7. Ex priore igitur habemus $A = p + q$ et $B = 1$ vnde obtinemus

$ABN = (p+q)^2 bb - (p+q)ab$, ergo $N = (p+q)bb - ab$ atque hinc aequatio differentio differentialis prior euadet

$$\frac{(p+q)dd\vartheta + dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{((p+q)bb - ab)((p+q)\vartheta + \Phi)}{acc}$$

atque hinc sumendo q negatiue, statim formatur altera aequatio

$$\frac{(p-q)dd\vartheta + dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{((p-q)bb - ab)((p-q)\vartheta + \Phi)}{acc}.$$

§ 8. Introducamus nunc loco angulorum ϑ et Φ duos alios angulos u et v ponendo

$(p+q)\vartheta + \Phi = u$ et $(p-q)\vartheta + \Phi = v$ vt fiat $\vartheta = \frac{u-v}{2q}$

et $\Phi = \frac{u+v}{2} - p\frac{(u-v)}{2q}$

quo facto impetramus sequentes duas aequationes differentio differentiales

$$\frac{ddu}{2g\,dt^2} = \frac{-u(ab-(p+q)bb)}{acc} \text{ et } \frac{ddv}{2g\,dt^2} = \frac{-v(ab-(p-q)bb)}{acc}$$

quarum altera inseruit quantitati u determinandae, altera vero ipsi v, quandoquidem hae duae quantitates u et v non amplius inuicem sunt permixtae.

§ 9. Ad has aequationes integrandas introducamus duas nouas litteras subsidiarias, statuamusque

$$\frac{2g(ab-(p+q)bb)}{acc} = mm \text{ et } \frac{2g(ab-(p-q)bb)}{acc} = nn.$$

vt aequationes nostrae integrandae ad has formas simplicissimas reuocentur

$$\frac{ddu}{dt^2} = -mmu, \quad \text{et } \frac{ddv}{dt^2} = -nnv$$

quarum integralia bis ſumta reperiuntur per methodos cognitas

$u = C \sin. mt + D \cos. mt$ et $v = E \sin. nt + F \cos. nt$

vbi litterae C, D, E, F quantitates conſtantes quascunque ex circumſtantiis motus determinandas deſignant; quia autem per hypotheſin anguli u et v perinde ac principales ſemper manere debent quaſi infinite parui, etiam has conſtantes infinite paruas eſſe oportet.

§. 10. His igitur conſtantibus rite conſtitutis, quia numeri m et n dantur, ad quoduis tempus t ab initio elapſum et in minutis ſecundis expreſſum ambo anguli u et v definiuntur, atque ex his porro ipſi anguli ϑ et Φ concludentur, quibus ſtatus penduli hoc tempore determinatur.

§. 11. His igitur probe perpenſis, manifeſtum eſt, Problema quod hic tractamus maxime eſſe complicatum, ſi quidem ſolutio maxime generalis deſideretur. Solutiones autem particulares inde fieri poterunt plus vel minus ſimplices prouti literarum C, D, E et F vna pluresue capiantur euaneſcentes, quibus autem euoluendis hic non immoror, cum in ſuperiori diſſertatione omnia quae huc pertinent feliciſſime ſint euoluta.

§. 12. Caeterum hic obſeruaſſe iuuabit, hanc ſolutionem eatenus ſemper locum habere poſſe, quatenus formulae $ab-(p+q)bb$ et $ab-(p-q)bb$ ambae habeant valores poſitiuos, quod ſi enim ponatur $ab - pbb = rbb$, hae formulae in ſequentes transmutanmutantur $(r-q)bb$ et $(r+q)bb$, existente $r = \frac{ab+bb+cc}{2bb}$, quare quum sit $rr > qq$, ob $r+q$ quantitatem positiuam, positiuum quoque nanciscetur valorem $r-q$; perpetuo autem tenendum est longitudinem fili A B non pro lubitu diminui posse, si enim nimis breue statuatur, angulus ϑ non amplius spectari poterit vt valde exiguus, sed potius ingentem obliquitatem accipere posset, etiamsi alter angulus Φ maneat infinite paruus. Neque vero casum quo corpus B M N immediate ex axe A suspenditur ita interpretari licet, quasi filum A B esset quam breuissimum, quam ob caussam consideratio pendulorum consuetorum ex A suspensorum toto coelo a praesente Problemate discrepare est censenda, vnde nemini mirum videri debet, si iste casus ex nostra analysi deriuari nequit, interim tamen etiam ex nostris formulis generalibus non difficulter deducitur, dummodo angulus ϑ non tanquam infinite paruus spectetur.

Euolutio concinnior huius solutionis.

§. 13. Cum tota solutio ex tribus quantitatibus datis a, b, c sit repetenda, statuatur primo $\frac{b+cc}{b} = f$ quae est ea ipsa quantitas, quam illustris Auctor superioris dissertationis littera a designauit, dum longitudinem fili A B posuit $= b$ quae hic est $= a$, hinc statim modo simpliciori habebimus

$$p = \frac{a-f}{2b} \text{ et } q = \frac{\sqrt{(a-f)^2 + 4ab)}}{2b},$$

 vnde

vnde deducimus

$$mm = \frac{bg(a+f-\sqrt{(a-f)^2+4ab})}{acc} \text{ et}$$

$$nn = \frac{bg(a+f+\sqrt{(a-f)^2+4ab}}{acc}.$$

Ponamus autem porro breuitatis gratia $\sqrt{((a-f)^2+4ab)} = h$, vt fit $q = \frac{h}{2b}$ fietque

$$mm = \frac{bg(a+f-h)}{acc} \text{ et } nn = \frac{bg(a+f+h)}{acc},$$

tum verò bina membra quibus anguli u et v exprimebantur fuccinctius ita contrahi poffunt, vt fit

$$u = \text{C fin.} (mt+\mu) \text{ et } v = \text{E fin.} (nt+\nu),$$

vbi litterae C, E et μ, ν denotant conftantes per integrationem ingreffas, quas ex motu initiali definiri oportet vti mox videbimus.

§. 14. Quia deinde habuimus:

$$\vartheta = \frac{u-v}{2q} \quad \text{et } \Phi = \frac{u+v}{2} - \frac{p(u-v)}{2q}$$

nunc erit

$$\vartheta = \frac{b(u-v)}{h} \text{ et } \Phi = \frac{u+v}{2} - \frac{a-f(u-v)}{2h} \text{ fiue } \Phi = \frac{(h-a+f)u}{2h} + \frac{(h+a-f)v}{2h}$$

vnde fi loco v et u valores ante dati fubftituantur nancifcimur

$$\vartheta = \frac{Cb}{h} \text{fin.} (mt+\mu) - \frac{Eb}{h} \text{fin.} (nt+\nu) \text{ et}$$

$$\Phi = \frac{C(h-a+f)}{2h} \text{fin.} (mt+\mu) + \frac{E(h+a-f)}{2h} \text{fin.} (nt+\nu)$$

ex quibus formulis ad datum quoduis tempus t ambo anguli ϑ et Φ affignari poterunt, vnde totus penduli motus innotefcet.

§. 15. Vt vero etiam ipfa celeritas angularis vtriusque motus patefcat, notandum eft celeritatem angu-

angularem, qua bini anguli ϑ et Φ increſcunt, eſſe $\frac{d\vartheta}{dt}$ et $\frac{d\Phi}{dt}$ quae igitur ex noſtris formulis fient

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{mCb}{b} \text{coſ.}\,(mt + \mu) - \frac{nEb}{b} \text{coſ.}\,(nt + \nu)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{mC(b - a + f)}{2b} \text{coſ.}\,(mt + \mu) + \frac{nE(b + a - f)}{2b} \text{coſ.}\,(nt + \nu)$$

atque hinc iam pro ipſo motus initio, quo erat tempus $t = 0$, non ſolum ipſos angulos ϑ et Φ ſed etiam eorum celeritates angulares tam filo quam corpori primum impreſſas aſſignare poterimus, erat enim ipſo motus initio vbi $t = 0$

$$\vartheta = \frac{Cb}{b} \text{ſin.}\,\mu - \frac{Eb}{b} \text{ſin.}\,\nu$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{mCb}{b} \text{coſ.}\,\mu - \frac{nEb}{b} \text{coſ.}\,\nu$$

$$\Phi = \frac{C(b - a + f)}{2b} \text{ſin.}\,\mu + \frac{E(b + a - f)}{2b} \text{ſin.}\,\nu$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{mC(b - a + f)}{2b} \text{coſ.}\,\mu + \frac{nE(b + a - f)}{2b} \text{coſ.}\,\nu$$

quae quatuor quantitates cum ex dato motu initiali ſint cognitae, hinc quatuor noſtras conſtantes C, E et angulos μ et ν definire licebit, ita vt deinceps pro quouis tempore t noſtrae formulae determinatos valores ſint exhibiturae.

§. 16. Cum in has determinationes gemini anguli $(mt + \mu)$ et $(nt + \nu)$ ingrediantur, qui adeo inter ſe incommenſurabiles eſſe poſſunt; motus vtique maxime complicatus exſurget, niſi forte alteruter angulus ex calculo egrediatur, id quod vſu venit, ſi fuerit vel $C = 0$ vel $E = 0$, quibus caſibus motus regularis motui pendulorum ſimplicium ſimilis exorietur.

§. 17. Sit igitur primo $E = 0$ ita vt motus determinatio tantum a ſolo angulo $(mt + \mu)$ pendeat atque manifeſtum eſt, poſt tempus $t = \frac{\pi}{m}$ ſec. vbi π denotat ſemiperipheriam circuli, cuius radius $= 1$. ſinum anguli $(mt + \mu)$ priori fore aequalem at ſigno diuerſo affectum, vnde hoc tempore $t = \frac{\pi}{m}$ pendulum vnam oſcillationem peregiſſe cenſendum erit; ſimili modo ſi fuerit $C = 0$, oſcillationes iterum euadent regulares et ſingulae abſoluentur tempore $t = \frac{\pi}{m}$ ſecund.

§. 18. Sin autem neque $E = 0$ neque $C = 0$, motus maxime erit irregularis, interim tamen cum mente ſaltem tanquam ex duplici motu regulari compoſitum ſpectare licebit, quorum altero oſcillationes peragantur tempore $\frac{\pi}{m}$ ſec. altero vero tempore $t = \frac{\pi}{n}$ ſec. prorſus vti Illuſtris Auctor ſuperioris diſſertationis ingenioſiſſime ex ſuis principiis concluſit, atque hoc obſeruato facile erit pulcherrimum conſenſum inter vtramque ſolutionem agnoſcere, etiamſi ex diuerſiſſimis principiis ambae ſint erutae.

Digreſſio ad oſcillationes finitas.

§. 19. Hanc quaeſtionem methodo Bernoulliana ne tentare quidem licet, prima autem motus principia iam initio tres nobis ſuppeditauerunt aequationes, quibus plena huius quaeſtionis ſolutio continetur, quae poſito

$x = a \operatorname{coſ.} \vartheta + b \operatorname{coſ.} \phi$ et $y = a \operatorname{ſin.} \vartheta + b \operatorname{ſin.} \phi$ erant

I.

I. $\frac{ddx}{2g\,dt^2} = \frac{1 - T\cos.\vartheta}{M}$ II. $\frac{ddy}{2g\,dt^2} = \frac{-T\sin.\vartheta}{M}$

III. $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-Tb\sin.(\Phi - \vartheta)}{Mcc}$

totum ergo negotium huc redit, vt iſtae aequationes per integrationem eo perducantur, vt ſingula motus phaenomena inde definiri queant, quae inueſtigatio ſi minus ſuccedat, imperfectioni Analyſeos potius quam mechanicae erit tribuendum.

§. 20. Statim autem hinc vnam integrationem exſequi licet, ſi enim prima multiplicetur per

$$dx = -a\,d\vartheta\,\text{ſin.}\,\vartheta - b\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$$

ſecunda vero per

$$dy = a\,d\vartheta\,\text{coſ.}\,\vartheta + b\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi$$

aggregatum colligitur fore

$$\frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{2g\,dt^2} = dx \begin{cases} +\frac{T}{M}(ad\vartheta\,\text{ſin.}\vartheta\,\text{coſ.}\vartheta + bd\Phi\,\text{coſ.}\vartheta\,\text{ſin.}\Phi) \\ -\frac{T}{M}(ad\vartheta\,\text{ſin.}\vartheta\,\text{coſ.}\vartheta + bd\Phi\,\text{coſ.}\Phi\,\text{ſin.}\vartheta) \end{cases}$$

vbi in terminis fractionem $\frac{T}{M}$ continentibus partes priores ſe deſtruunt, poſteriores vero contrahuntur in $b\,d\Phi\,\text{ſin.}\,(\Phi - \vartheta)$ ita vt habeamus

$$\frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{2g\,dt^2} = dx\,\frac{T}{M}\,(b\,d\Phi\,\text{ſin.}\,(\Phi - \vartheta)$$

cui ſi addatur tertia aequatio per $cc\,d\Phi$ multiplicata, reſultabit ita aequatio integrabilis

$$\frac{dx\,ddx + dy\,ddy + cc\,d\Phi\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = dx$$

cuius integrale eſt

$$\frac{dx^2 + dy^2 + cc\,d\Phi^2}{4g\,dt^2} = x + k$$

deno-

denotante k constantem integratione ingressam, haecque aequatio inuoluit conseruationem virium viuarum.

§. 21. Quia tensio fili T nondum constat, eam ex nostris aequationibus eliminemus, vbi

I^{ma} sin. ϑ — II^{da} cos. ϑ praebet

$$\frac{ddx \sin.\vartheta - ddy \cos.\vartheta}{2g\,dt^2} = \sin.\vartheta$$

vt autem insuper aliam aequationem a tensione fili liberam obtineamus, euoluamus hanc combinationem

I^{ma} sin. Φ — II^{da} cos. Φ vnde fit

$$\frac{ddx \sin.\Phi - ddy \cos.\Phi}{2g\,dt^2} = \sin.\Phi - \frac{T}{M}\sin.(\Phi - \vartheta)$$

cum nunc ex tertia aequatione sit

$$\frac{ccd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{T}{M}\sin.(\Phi - \vartheta)$$

haec ab illa in b ducta, subtracta relinquet

$$\frac{bddx \sin.\Phi - bddy \cos.\Phi - ccdd\Phi}{2g\,dt^2} = b\sin.\Phi$$

in quibus duabus aequationibus integralis ante inventa iam continetur.

§. 22. Eliminemus autem insuper litteras x et y, vt binos tantum angulos variabiles ϑ et Φ cum tempore t in calculum introducamus et cum sit

$dx = -ad\vartheta \sin.\vartheta - bd\Phi \sin.\Phi$ et $dy = ad\vartheta \cos.\vartheta + bd\Phi \cos.\Phi$ erit

$ddx = -add\vartheta \sin.\vartheta - ad\vartheta^2 \cos.\vartheta - bdd\Phi \sin.\Phi - bd\Phi^2 \cos.\Phi$ et

$ddy = add\vartheta \cos.\vartheta - ad\vartheta^2 \sin.\vartheta + bdd\Phi \cos.\Phi - bd\Phi^2 \sin.\Phi$

vnde colligitur fore

$$ddx \sin.\vartheta - ddy \cos.\vartheta = -add\vartheta - bdd\Phi \cos.(\Phi - \vartheta) + bd\Phi^2 \sin.(\Phi - \vartheta)$$

$$ddx \sin.\Phi - ddy \cos.\Phi = -add\vartheta \cos.(\Phi - \vartheta) - ad\vartheta^2 \sin.(\Phi - \vartheta) - bdd\Phi$$

his

his igitur valoribus substitutis binae nostrae aequationes has induent formas:

I. $\frac{add\vartheta - bdd\Phi \cos.(\Phi-\vartheta) + bd\Phi^2 \sin.(\Phi-\vartheta)}{2g\,dt^2} = \sin.\vartheta$

II. $\frac{abdd\vartheta \cos.(\Phi-\vartheta) - abd\vartheta^2 \sin.(\Phi-\vartheta) - bbdd\Phi - ccdd\Phi}{2g\,dt^2} = b\sin.\Phi$

aequatio autem integrata quam supra inuenimus hanc induet formam

$$\frac{aad\vartheta^2 + 2abd\vartheta d\Phi \cos.(\Phi-\vartheta) + (bb+cc)d\Phi^2}{4g\,dt^2} = \cos.\vartheta + b\cos.\Phi + k.$$

§. 23. Hic ante omnia notatu digna occurrit haec combinatio

$\mathrm{I}^{ma}\; b \sin.\Phi - \mathrm{II}^{da}\; (-\sin.\vartheta)$

quae praebet hanc formam

$$-abdd\vartheta(\cos.\vartheta \sin.(\Phi-\vartheta)) + abd\vartheta^2 \sin.(\Phi-\vartheta)\sin.\vartheta$$
$$-bbdd\Phi(\cos.\Phi \sin.(\Phi-\vartheta) + bbd\Phi^2 \sin.\Phi \sin.(\Phi-\vartheta) + ccdd\Phi \sin.\vartheta : 2g\,dt^2$$

$= 0$ et per $\sin.(\Phi-\vartheta)$ diuidendo

$$-abdd\vartheta \cos.\vartheta + abd\vartheta^2 \sin.\vartheta - bbdd\Phi \cos.\Phi + bbd\Phi^2 \sin.\Phi + \frac{ccdd\Phi \sin.\vartheta}{\sin.(\Phi-\vartheta)} = 0$$

interim tamen fateri cogor me hinc nullam aliam aequationem integralem elicere posse, vnde vlteriorem harum aequationum euolutionem aliis suscipiendam relinquo. Missa igitur hac speculatione, examinemus accuratius quantum minimae saltem huius generis oscillationes a motu pendulorum simplicium discrepare possint.

 Com-

Comparatio iſtarum oſcillationum minimarum cum motu penduli ſimplicis per euolutionem caſus determinati inſtituta.

§. 24. Ante omnia igitur neceſſe eſt, vt motum penduli ordinarii ad ſimilem formam analyticam reuocemus. Concipiamus igitur filum A B $= a$ tanquam virgam rigidam etiamnum grauitatis expertem, cui corpus B M N in B ita ſit affixum vt A B C ſit linea recta neque in B vlla inflexio oriri queat; quod ſi iam ad tempus datum t declinatio huius penduli V A B dicitur $= \eta$ ob momentum inertiae corporis B M N reſpectu axis girationis A $=$ M $((a+b)^2 + cc)$ habebitur iſta aequatio differentialis

$$\frac{dd\eta}{2g\,dt^2} = -\frac{(a+b)\,\text{ſin.}\,\eta}{(a+b)^2+cc}$$

vbi ob oſcillationes minimas loco ſin. η ſcribere licet ipſum angulum η, hinc igitur ſi breuitatis gratia faciamus

$$\frac{2g(a+b)}{(a+b)^2+cc} = ll,$$

poſt duplicem integrationem reperitur fore

$$\eta = \text{A ſin.}\,(lt+\lambda)$$

vbi A et λ ſunt conſtantes arbitrariae, ex qua formula intelligitur tempus vnius cuiusque oſcillationis fore $= \frac{\pi}{l}$ ſec.

§. 25.

§. 25. Vt iam casum determinatum ad calculum reuocemus, sit corpus annexum B M N globus ex materia homogenea confectus et statuamus

I°. Longitudinem fili $AB = a = 3$ digit.

II°. Radium globi $BC = b = 1$ digit.

III°. Hinc autem fiet $cc = \frac{2}{5}bb = \frac{2}{5}$

hic autem digitos intelligamus decimales pedis rhenani ita vt fiat altitudo $g = 156\frac{1}{4}$ digit. his positis pro motu penduli rigidi colligimus fore $ll = \frac{6250}{82} = 76,21951$ hincque $l = 8,73038$ vnde tempus vnius oscillationis prodit $= 0,35984$ sec.

§. 26. Faciamus nunc etiam calculum pro nostro pendulo flexili, quod non differt a praecedente nisi quod globus hic etiam circa punctum B girari possit ex §. 13. deriuemus valores

I°. $f = \frac{b + cc}{b} = \frac{7}{5} = 1,40000$

II°. $a - f = 1,60000$ et

III°. $h = \sqrt{((a-f)^2 + 4ab)} = 3,81575$

vnde porro colligimus

$$mm = \frac{bg(a + f + h)}{acc} = \frac{(156,250)(0,58424)}{1,20000} = 76,07332$$

hinc $m = 8,72200$ porro

$$nn = \frac{bg(a + f + h)}{acc} = \frac{(156,250)(8,21575)}{1,20000} = 1069,768 \text{ et}$$

hinc $n = 32,70730$

pro ipsis autem angulis ϑ et Φ habemus

$\frac{b}{h} = 0,26207$, $\frac{h - a + f}{2h} = 0,29036$ et $\frac{h + a - f}{2h} = 0,70967$

 hinc-

hincque anguli ϑ et Φ ita definientur

$$\vartheta = 0,26207\, C \sin. (mt + \mu) - 0,26207\, E \sin. (nt + \nu) \text{ et}$$
$$\Phi = 0,29036\, C \sin. (mt + \mu) + 0,70967\, E \sin. (nt + \nu)$$

denique pro vtroque motu angulari inuenimus

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 2,28578\, C \cos. (mt + \mu) - 8,57160\, E \cos. (nt + \nu) \text{ et}$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = 2,53253\, C \cos. (mt + \mu) + 23,21159\, E \cos. (nt + \nu)$$

his inuentis ſumamus primo pendulum initio huiusmodi motum accepiſſe, vt fuerit $E = O$ et euidens eſt motum oſcillatorium fore regularem, et vnamquamque oſcillationem abſolui tempore $= \frac{\pi}{m} = 0,36019$, quod tempus ergo paulisper maius eſt quam in pendulo rigido, quod erat 0,35984 ſec. idque in ratione 1029 : 1028 ita vt dum pendulum rigidum abſoluit 1029 vibrationes, flexile tantum abſoluat 1028. Vt nunc definiamus quomodo pendulum ad talem motum regularem ſit incitandum, ponamus initio vbi $t = O$ totum motum a quiete incepiſſe ſicque fuerit neceſſe eſt $\mu = \nu = 90$ gr. ex quo initio ob $E = O$ erat $\vartheta = 0,26207\, C$ et $\Phi = 0,29036\, C$ vnde patet ratio inter hos duos angulos initiales quae erat $\vartheta : \Phi = 9 : 10$. Caeterum ſi filum A B prae radio globi B C adhuc longius acciperetur differentia inter vtrasque oſcillationes multo minor eſſet proditura ita vt pro longioribus filis pro euaneſcente haberi poſſit.

§. 27 Conſideremus etiam alterum motum regularem quo $C = O$ et tempus vnius cuiusque oſcil-

oscillationis $= \frac{\pi}{n} = 0,09605$ ideoque fere quater breuius quam casu praecedente; ad talem autem motum pendulum initio ex quiete incitabitur si ob $C = O$ et $b = 90$ gr. capiatur angulus $\vartheta = -0,26207\,E$ et $\Phi = 0,70967\,E$ penduli igitur figura ipso initio ita comparata fuerit necesse est, vt producto radio B C vsque ad verticalem in o sit proxime $BO = 1,1079$ ita vt centrum globi durante hoc motu vix a linea verticali recedat quandoquidem rectae A B et B O eandem inter se teneant rationem quam anguli Φ et ϑ.

§. 28. Contemplemur vero etiam alium motum mixtum et quidem eum, qui oritur, si initio centrum globi C in ipsam directionem fili A B productam incidat hincque pendulum subito demittatur, vt vterque motus a quiete incipiat, fueritque declinatio penduli $VABC = \alpha$ ideoque $\vartheta = \Phi = \alpha$. Quia igitur initio sit $t = O$ et $\mu = \nu = 90$ gr. habebimus

$$\alpha = 0,26207\,C - 0,26207\,E \quad \text{et}$$
$$\alpha = 0,29036\,C + 0,70967\,E$$

ex priore fit

$C = E + 3,81575\,\alpha$ qui valor in altera substitutus dat $E = -0,10795\,\alpha$ hinc $C = 3,70780\,\alpha$.

§. 29. Quia nunc litteras C, E per angulum minimum α datum determinauimus et anguli μ et ν inuenti sunt recti vnde fit

$$\sin.(mt+\mu)=\cos.mt \text{ et } \sin.(nt+\nu)=\cos.nt$$

tum vero

$$\cos.mt+\mu)=-\sin.mt \text{ et } \cos.(nt+\nu)=-\sin nt.$$

Pro motu penduli ſequentes formulas penitus determinatas habebimus

I°. $\vartheta=0,97172\,\alpha\cos.mt+0,02829\,\alpha\cos.nt$

II°. $\Phi=1,07625\,\alpha\cos.mt-0,07661\,\alpha\cos.nt$

III°. $\frac{d\vartheta}{dt}=-8,47539\,\alpha\sin.mt-0,92533\,\alpha\sin.nt$

IV°. $\frac{d\Phi}{dt}=-9,39031\,\alpha\sin.mt+2,50572\,\alpha\sin nt$

vbi vti inuenimus eſt $m=8,72200$ et $n=32,70717$.

§. 30. Ex his ergo formulis ad datum tempus quodcunque t in minutis ſecundis expreſſum, non ſolum poſitio fili A B et corporis annexi B M N ſed etiam vtriusque motus angulis definiri poterit. Statim autem manifeſtum eſt ob terminos poſteriores angulum nt inuoluentes motum oſcillatorium aliquantisper perturbari debere; interim tamen quia haec membra prioribus multo ſunt minora, haec perturbatio ſatis erit exigua; quantopere autem ob hanc cauſam in dinumerandis oſcillationibus aberrari poſſit, aliquanto accuratius inueſtigemus, ſi quidem iam ſupra obſeruauimus oſcillationes huius penduli flexilis tam parum ab oſcillationibus eiusdem penduli, ſi eſſet rigidum, diſcrepare, et tempore 1028 oſcillationum vnica tantum oſcillatione errari.

§. 31.

§. 31. Quo autem facilius in has perturbationes inquiramus, obferuemus fi posteriora membra deeffent motum ita futurum effe regularem; vt tempus vnius cuiusque ofcillationis futurum fit $t = \frac{\pi}{m}$ $= 0,36019$ fec. concipiamus igitur totum tempus in huiusmodi interualla diuifum et ob membra posteriora in initio cuiusque horum interuallorum neque filum A B neque ipfum corpus B M N in maxima digreffione a fitu verticali A V reperietur fed interdum vel iam praeteriiffe vel nondum eo pertigiffe deprehendetur, tum vero etiam neque filum neque corpus ad quietem erit redactum quia tum neque $\frac{d\vartheta}{dt}$ neque $\frac{d\Phi}{dt}$ penitus euanefcent; quod quo clarius pateat elapfa iam fint λ huiusmodi interualla temporis ita vt fit $mt = \lambda\pi$ fierique poterit vt tum prodeat

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0,92533\,\alpha \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = 2,50572\,\alpha$$

ponamus igitur fumto $mt = \lambda\pi + \omega$ pendulum penitus ad quietem reduci, eritque pro filo

$$\text{fin.}\,\omega = \frac{0,92533}{8,47589} = \frac{1}{9}$$

proxime, cui tempus refpondet $= \frac{1}{78}$ fec. ita vt in aeftimatione fiue initii fiue finis cuiusque ofcillationis errari poffit, parte circiter feptuagefima vnius minuti fecundi, quare cum huiusmodi tantilli errores in numeratione ofcillationum ne quidem percipi queant, ob hanc rationem ne minima quidem perturbatio motus ofcillatorii refultare eft cenfenda;

omnes

omnes autem aberrationes penitus ad nihilum redigentur, si longitudo fili prae magnitudine globi adhuc maior accipiatur, quemadmodum in experimentis fieri solet, vbi etiam prior error memoratus $\frac{1}{1538}$ multo magis diminuitur, vnde concludimus dummodo longitudo fili ad radium globi maiorem teneat rationem quam 3 : 1 tum in motu oscillatorio nullum plane errorem a flexibilitate penduli esse metuendum.

DE

DE PRESSIONE PONDERIS IN PLANVM CVI INCVMBIT.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Quantam pressionem planum a pondere incumbente sustineat, in elementis doceri solet, scilicet si planum fuerit horizontale pressionem ipsi ponderi esse aequalem, sin autem ad horizontem sit inclinatum, eam pressionem in ratione sinus totius ad cosinum inclinationis esse minuendam; tum vero vtroque casu directionem pressionis in planum esse normalem, et per centrum grauitatis corporis transire. Hoc autem de tota tantum pressione, quam planum sustinet, est intelligendum; neutiquam vero ab Auctoribus definitur, quantis viribus singula plani puncta, quibus pondus sustinetur, vrgeantur.

2. Haud equidem memini simplicissimum casum, quo pondus ternis pedibus plano insistit, euolutum videre; quem autem sequenti modo satis concinne expedire licet: Insistant plano terni pedes in punctis A, B, C et recta ex centro grauitatis ad planum normaliter ducta cadat in punctum O, tum Tab. II. Fig. 1.

ductis rectis O A, O B, O C, item lateribus A B, B C, C A; tota pressio se habebit ad pressionem in puncto A, vel B, vel C, quemadmodum area totius trianguli A B C ad aream trianguli, siue B O C, siue A O C, siue A O B; ex quo intelligitur pressiones singulorum pedum inter se aequales non fore, nisi punctum O in ipsum centrum grauitatis trianguli A B C incidat.

3. Verum si pondus quatuor pedibus plano insistat, determinatio singularum pressionum non solum multo magis ardua deprehenditur, sed etiam prorsus incerta et lubrica videtur; statim enim ac illi pedes, non exactissime inter se fuerint aequales, ita vt omnes plano pariter innitantur, manifestum est totum pondus a ternis tantum pedibus sustentari et quartum penitus fore superfluum; atque haec incertitudo multo magis locum habet, si numerus pedum adhuc fuerit maior, vel si pondus basi quadam continua plano incumbat, tum enim nisi tam ipsum planum, quam basis corporis perfecte inter se congruant et leuissimae asperitates in iis promineant plerumque totum pondus in tribus tantum punctis sustentabitur.

4. Ne autem perfectissima illa pedum aequalitas, qualem vix admittere licet, negotium facessat, concipiamus planum siue solum cui pondus incumbit, non adeo esse durum, vt nullam plane impressionem recipere possit, sed quasi panno esse obductum, cui pedes illi aliquantillum se immergere queant;

queant; vbi quidem tuto aſſumere licet impreſſionem cuiusque pedis proportionalem eſſe vi, qua ſolo innititur, atque hoc principio conceſſo, totum hoc negotium facile expediri poterit. Neminem autem pannus ille preſſioni cedens offendat, etſi enim illi mollitiem quandam tribuimus, eam tamen quousque libuerit, diminuere licebit; ita vt tandem indolem ſoli illius, cui pondus reuera inſiſtit, adipiſcatur.

5. Conſideremus igitur quatuor pedes, quorum extremitates A, B, C, D in plano terminentur, qui ſolo innixi in pannum illum per ſpatiola A α, B β, C γ, D δ penetrent, quae ſpatiola quidem adeo tamquam infinite parua ſpectare licebit. Hoc autem poſito, primum puncta α, β, γ, δ tanquam pedum extremitates, etiamnunc in eodem plano erunt poſita; deinde vero ipſa iſta ſpatiola A α, B β, C γ, D δ preſſionibus quibus ſinguli pedes ſolo innituntur, cenſenda ſunt proportionalia. Hinc igitur viciſſim ſi in punctis A, B, C, D ſuper plano erigantur perpendicula A α, B β, C γ, et D δ quae ſint ipſis preſſionibus in his punctis proportionalia, neceſſe eſt, vt puncta α, β, γ, δ reperiantur in eodem plano, atque hoc eſt principium, cui totam noſtram inueſtigationem tuto ſuperſtruere poterimus, idque eo magis, quod iam non amplius idea illius panni, neque impreſſiones in eo factae, in cenſum veniunt, hae enim ideae, hic tantum in ſubſidium noſtrae imaginationis ſunt vocatae.

Principium Generale.

Tab. II. Fig. 3. 6. Siue pondus pluribus pedibus innitatur, siue basi incumbat plana cuiuscunque figurae, sit punctum M siue extremitas cuiuspiam pedis, siue elementum quodpiam basis pro quo pressio quaeritur. Concipiatur ibi perpendiculariter erecta linea $M\mu$ ipsi pressioni proportionalis, atque necesse est, omnia ista puncta μ in quopiam plano terminari; hoc igitur principio stabilito, quemadmodum pro omnibus casibus pressionem in singulis basis punctis definiri oporteat, hic sum expositurus.

7. Primum igitur in indolem plurium atque adeo infinitorum punctorum in eodem plano existentium inquiramus, quem in finem sit recta FG intersectio, qua planum cui pondus incumbit, a plano illo per omnia puncta μ transeunte intersecatur, quae quia vti incognita spectari debet, sumamus pro lubitu axem quendam fixum AB, ad quem positionem punctorum M referamus ope normalium MN ad hunc axem ductarum, ac vocemus coordinatas $AN = x$, $NM = y$ et ipsum perpendiculum $M\mu$ pressionem referens $= z$, ita vt punctum μ more solito ternis coordinatis x, y et z inter se normalibus definiatur. Tum vero pro intersectione ante memorata FG, ponamus spatium $AF = f$, angulum $AFG = \zeta$, inclinationem autem binorum planorum $= \theta$. Iam ex puncto M, pariterque ex N ad hanc rectam FG ducantur normales MV, NL, et NT paralela ipsi FG, ac iungatur recta μV. Nunc igitur

igitur ex triangulo N F L, obtinemus ob

$$TN = f + x,\ FL = (f + x)\,\text{cof.}\,\zeta,\ NL = (f + x)\,\text{fin.}\,\zeta;$$

tumvero ex triangulo M N T vbi angulus N M T itidem eſt ζ, colligimus

$$NT = y\,\text{fin.}\,\zeta,\ MT = y\,\text{cof.}\,\zeta,$$

hinc itaque concludimus

$$MV = y\,\text{cof.}\,\zeta + (f + x)\,\text{fin.}\,\zeta \text{ et}$$
$$FV = (f + x)\,\text{cof.}\,\zeta - y\,\text{fin.}\,\zeta;$$

quare quum ſit angulus $MV\mu = \theta$, conſequimur

$$z = (f + x)\,\text{fin.}\,\zeta.\,\text{Tang.}\,\theta + y\,\text{cof.}\,\zeta.\,\text{Tang.}\,\theta.$$

8. Hinc igitur intelligitur relationem ternarum coordinatarum x, y et z ſemper huiusmodi aequatione expreſſum iri $z = \alpha + \beta x + \gamma y$, vbi ſcilicet litterae α, β, γ ſunt conſtantes; comparatione autem huius formulae cum ante inuenta, inſtituta, adipiſcimur hos valores

$$\alpha = f\,\text{fin.}\,\zeta.\,\text{Tang.}\,\theta;\ \beta = \text{fin.}\,\zeta\,\text{Tang.}\,\theta;\ \gamma = \text{cof.}\,\zeta\,\text{Tang.}\,\theta$$

vnde viciſſim ex cognitis α, β, et γ innoteſcunt valores

$$f = \frac{\alpha}{\beta};\ \text{Tang.}\,\zeta = \frac{\beta}{\gamma};\ \text{Tang.}\,\theta = \frac{\beta}{\text{fin.}\,\zeta} = \frac{\gamma}{\text{cof.}\,\zeta},$$

quibus poſitio plani per puncta μ tranſeuntis determinatur.

Problema Generale.

9. Quaecunque fuerit figura baſis $f g h k$, qua corpus quodpiam ſolo plano incumbit, inueſtigare omnes preſſiones, quas ſingula baſis elementa, ſuſtinent. Tab. II. Fig. 4.

Oo 3 Solutio.

Solutio.

Denotet G pressionem totalem corporis incumbentis, et recta ex eius centro grauitatis in planum perpendiculariter demissa, incidat in punctum O, ac sumtis pro arbitrio binis axibus A B ac A C inter se normalibus, ad eos ex O agantur perpendiculares O F et O G, vocenturque $AF = f$ et $AG = g$, tum vero pro puncto basis quocunque M ponantur coordinatae $AX = x$ et $XM = AY = y$, ipsa autem pressio quaesita in puncto M vocetur $= z$, modo autem vidimus, poni oportere $z = \alpha + \beta x + \gamma y$. Quum autem haec pressio z respondeat elemento basis Mm cuius areola $= dx\,dy$, ipsa pressio quam haec areola sustinet, erit $z\,dx\,dy$, cuius integrale ob geminam variabilem x et y bis sumtum, pressioni totali hoc est ponderi G aequale statui debet, hoc autem integrale duplicatum more recepto repraesentemus per $\iint z\,dx\,dy$, ita vt esse debeat $\iint z\,dx\,dy = G$ ideoque loco z eius valore substituto habebimus hanc aequationem:

$$\alpha \iint dx\,dy + \beta \iint x\,dx\,dy + \gamma \iint y\,dx\,dy = G.$$

10. Hac aequatione autem effectus pressionis nondum exhauritur, sed insuper necesse est, vt etiam summa omnium momentorum Elementarium respectu cuiusuis axis, aequetur momento pressionis totalis G in puncto O applicatae, respectu eiusdem axis; sufficit autem hanc aequalitatem pro binis tantum axibus A B et A C constituisse, quandoquidem demonstratum est, eam ad omnes axes vtcunque assum-

assumtos extendi. Referamus ergo haec momenta primo ad axem A B, pro quo momentum pressionis totalis fit $= Gg$, pressionis autem elementaris $= zy\,dx\,dy$, ita vt integralibus duplicatis, vt ante sumendis, esse debeat $\int\int yz\,dx\,dy = Gg$, siue

$$\alpha\int\int y\,dx\,dy + \beta\int\int xy\,dx\,dy + \gamma\int\int yy\,dx\,dy = Gg.$$

Simili modo respectu axis A C, momentum pressionis totalis est Gf, pressionis vero elementaris $= xz\,dx\,dy$, ita vt esse debeat $\int\int zx\,dx\,dy = Gf$, siue euoluendo:

$$\alpha\int\int x\,dx\,dy + \beta\int\int xx\,dx\,dy + \gamma\int\int xy\,dx\,dy = Gf.$$

11. Quod si ergo singula haec integralia per totam basin $fghk$, cuiuscunque fuerit figurae, extendantur, tres resultabunt aequationes:

$$\text{I.}\quad \alpha\int\int dx\,dy + \beta\int\int x\,dx\,dy + \gamma\int\int y\,dx\,dy = G$$

$$\text{II.}\quad \alpha\int\int y\,dx\,dy + \beta\int\int xy\,dx\,dy + \gamma\int\int yy\,dx\,dy = Gg$$

$$\text{III.}\quad \alpha\int\int x\,dx\,dy + \beta\int\int xx\,dx\,dy + \gamma\int\int xy\,dx\,dy = Gf$$

ex quibus ternas nostras incognitas α, β, γ expedite definire licebit, quibus inuentis, pro quocunque baseos puncto M, pressio quam planum ibi sustinet, erit $z = \alpha + \beta x + \gamma y$, hocque modo pressio in singulis baseos punctis innotescet.

Scholion.

12. Talibus integrationibus autem duplicatis, tum tantum opus est, quando corpus basin habet, per spatium aliquod continuum extensam, quo quidem casu saepenumero euenire potest, vt calculus

ob

ob figuram basis irregularem, nequidem euolui possit, quando autem corpus aliquot pedibus plano insistit, tum nulla plane integratione erit opus, dum terminos singulorum pedum, tamquam puncta spectare licet et formulae nostrae tantum ad singulos pedes seorsim sunt accommodandae, cuiusmodi quidem casus ante sumus tractaturi, quam ad bases continuae extensionis progrediamur. Neque vero absolute opus est, vt bini illi axes A B et A C ad quos momenta retulimus, sint inter se normales, sed iis quoque obliquitatem quamcunque tribuere licet; dum modo etiam coordinatae x et y eandem obliquitatem inter se seruent. Quia enim tum vniuersus calculus ad praecedentem casum reduceretur, singulas distantias oblique sumtas per sinum obliquitatis multiplicando; euidens est aequationes nostras tum per eundem sinum diuisibiles fore, ita vt totus calculus nullam inde mutationem sit subiturus.

Problema I.

13. Si pondus plano incumbat in tribus punctis A, B, C definire pressionem in singulis his punctis.

Solutio.

Tab. II. Fig. 5. Directio pressionis totalis, quae sit $= G$, cadat in punctum O ex quo binis lateribus A B et A C agantur parallelae O P et O Q et secundum has directiones, constituamus nostras coordinatas x et y initio sumto in puncto A. Pro hoc ergo puncto

puncto A erit $x = 0$ et $y = 0$, ideoque pressio $= \alpha$. Pro puncto B habebimus $x = AB$ et $y = 0$, hincque pressio in hoc loco $= \alpha + \beta . AB$, at pro puncto C ob $x = 0$ et $y = AC$ pressio erit $= \alpha + \gamma AC$, quamobrem prima aequatio erit

$$G = 3\alpha + \beta AB + \gamma AC.$$

Momenta autem respectu axis AB oblique sumta, praebent hanc secundam aequationem

$$G . OP = \alpha AC + \gamma AC^2.$$

Tertia denique aequatio ex momentis respectu lateris AC colligitur

$$G . OQ = \alpha . AB + \beta . AB^2.$$

Ex tertia colligimus

$$\beta . AB = \frac{G . OQ}{AB} - \alpha,$$

ex secunda vero

$$\gamma . AC = \frac{G . OP}{AC} - \alpha,$$

qui valores in prima substituti praebent

$$G = \frac{G . OQ}{AB} + \frac{G . OP}{AC} + \alpha,$$

hincque

$$\alpha = G\left(1 - \frac{OQ}{AB} - \frac{OP}{AC}\right) = G\left(1 - \frac{AP}{AB} - \frac{AQ}{AC}\right)$$

quae est pressio in ipso puncto A, pressio autem in puncto B, quae erat

$$\alpha + \beta . AB, \text{ fit } = \frac{G . OQ}{AB} = \frac{G . AP}{AB};$$

ac denique pressio in C quae erat

$$\alpha + \gamma . AC \text{ nunc fit } = \frac{G . AQ}{AC}.$$

Coroll.

14. Haec ſolutio cum ſupra data egregie convenit, cum enim preſſio totalis G, ſit ad preſſionem in puncto B : : A B : A P, hoc eſt vt area trianguli A B C ad aream trianguli A P C, iam vero triangulum A O C = triangulo A P C, erit ergo tota preſſio G ad preſſionem in B, vt area totius trianguli A B C ad aream trianguli A O C.

Problema 2.

15. Si pondus plano incumbat in quatuor punctis A, B, C, D ſecundum angulos parallelogrammi diſpoſitis, definire preſſionem in ſingulis his punctis.

Solutio.

Incidat vis totalis = G perpendiculariter in puncto O in planum, capiantur noſtrae coordinatae ſecundum latera parallelogrammi A B et A D quibus ex O parallelae ducantur O P et O Q, ac ſumto initio in A, pro hoc puncto A ambae coordinatae x et y euaneſcent. Pro puncto B habebimus $x = AB$ et $y = 0$, tum pro puncto C erit $x = AB$ et $y = BC = AD$, denique pro quarto puncto D fit $x = 0$ et $y = AD$, vnde preſſiones quaeſitae in his quatuor punctis erunt:

pro puncto $A = \alpha$; pro puncto $B = \alpha + \beta . AB$

pro puncto $C = \alpha + \beta . AB + \gamma . AD$; pro puncto $D = \alpha + \gamma . AD$

ſicque

ſicque prima aequatio ita ſe habebit:

$$G = 4\alpha + 2\beta.AB + 2\gamma.AD.$$

Iam reſpectu axis AB momentum totale eſt G.OP, preſſionum autem in A et B momenta euaneſcunt, in punctis autem C et D duci debent in AD vel CB, vnde noſtra ſecunda aequatio erit:

$$G.OP = 2\alpha AD + 2\gamma.AD^2 + \beta.AB.AD.$$

Tertia autem aequatio ex momentis reſpectu axis AD ſumtis fiet:

$$G.OQ = 2\alpha.AB + 2\beta.AB^2 + \gamma.AB.AD.$$

Quum igitur binae poſteriores coniunctae praebeant:

$$G\left(\frac{AP}{AB} + \frac{AQ}{AD}\right) = 4\alpha + 3\beta.AB + 3\gamma.AD,$$

cuius duplum a triplo primae ſubtractum relinquit:

$$G\left(3 - \frac{2AP}{AB} - \frac{2AQ}{AD}\right) = 4\alpha;$$

ſicque iam inuenimus fore preſſionem in puncto

$$A = \frac{G}{4}\left(3 - \frac{2AP}{AB} - \frac{2AQ}{AD}\right),$$

quae expreſſio facile in hanc transformatur:

$$\frac{G}{4}\left(\frac{2BP}{AB} + \frac{2DQ}{AD} - 1\right).$$

Pro reliquis punctis producamus rectas PO et QO in R et S, et omnes quatuor preſſiones quaeſitae ita commodiſſime exprimi videntur:

I. Preſſio in $A = \frac{1}{4}G\left(\frac{2BP}{BA} + \frac{2DQ}{DA} - 1\right)$

II. Preſſio in $B = \frac{1}{4}G\left(\frac{2AP}{AB} + \frac{2CS}{CB} - 1\right)$

III. Preſſio in $C = \frac{1}{4}G\left(\frac{2BS}{BC} + \frac{2DR}{DC} - 1\right)$

IV. Preſſio in $D = \frac{1}{4}G\left(\frac{2CR}{CD} + \frac{2AQ}{AD} - 1\right)$.

Coroll. 1.

16. Fieri igitur poteſt, vt in vno horum quatuor punctorum preſſio euaneſcat, etiamſi punctum O non extra parallelogrammum cadat, in puncto namque A preſſio fiet nulla ſi $\frac{BP}{BA} + \frac{DQ}{DA} = \frac{1}{2}$, id quod innumerabilibus modis fieri poteſt, inter quos ſimpliciſſimus eſt, vbi $BP = \frac{1}{4} AB$ et $DQ = \frac{1}{4} DA$, hoc ſcilicet caſu punctum O ita ſitum erit in diagonali A C, vt eius diſtantia a puncto C, ſit quarta pars ipſius diagonalis A C.

Coroll. 2.

Tab. II. Fig. 7. 17. Operae autem pretium eſt, omnia loca O inueſtigare, quibus preſſio in puncto A euaneſcit, ex ipſa autem aequatione $\frac{2BP}{BA} + \frac{2DQ}{DA} = 1$, patet facto $BP = 0$, vt punctum O in rectam B C incidat, et quia tum $DQ = \frac{1}{2} DA$, punctum O praeciſe in punctum medium E lateris B C incidere. Similique modo ſumto $DQ = 0$, patet punctum O in medium lateris D C quod ſit F incidere, quum igitur locus omnium punctorum O ſit ad lineam rectam, omnia haec puncta cadent in rectam E F, vnde manifeſtum eſt, quoties punctum O inciderit in rectam E F, tum preſſionem in puncto A ſemper fore nullam, atque hinc ſimul intelligitur, ſi punctum O vltra hanc rectam E F ſiue intra triangulum C E F cadat, tum preſſionem in puncto A, adeo prodire negatiuam.

Scho-

Scholion.

18. Hic casus eo ma is est memorabilis, quod in praxi, nullam certe pressionem negatiuam concipere licet. Quocirca imprimis nobis erit inquirendum, quid huiusmodi casibus sit reuera euenturum. Hunc in finem incipiamus a casu, quo punctum O in ipsam rectam E F incidit, et quia tum pressio in puncto A plane fit nulla, res eodem vtique redit, ac si pes huic puncto insistens plane abesset, et pondus in tribus tantum punctis B, C, D sustentaretur. Hoc idem vero multo magis eueniet, si punctum O intra triangulum C E F vbicunque inciderit, et quia tum certi sumus, totum pondus a tribus tantum punctis B, C, D sustineri; pressio in his punctis eodem prorsus modo se habebit, vti in Problemate praecedente est definita. Hic igitur notasse iuuabit, tum demum omnes quatuor pedes ad onus sustentandum concurrere, si punctum O intra parallelogrammum inscriptum E F G H cadat, vbicunque enim extrinsecus veluti in triangulo C E F reperiatur, pes oppositus pro superfluo haberi debebit.

Problema 3.

Fulciatur pondus octo pedibus, quorum quatuor in angulis A, B, C, D parallelogrammi plano insistant, reliqui vero E, F, G, H in puncta media inter illos cadant, ita vt latera parallelogrammi in his punctis bifariam secentur; definire pressiones in singulis his punctis. Tab. II. Fig. 8.

 Solutio.

Solutio.

19. Ducamus rectas EG et FH se mutuo in I secantes, quas pro nostris axibus assumamus, et ex puncto O iis parallelas agamus OP et OQ, atque initio in puncto I constituto, abscissas positivas x dextrorsum, negatiuas vero sinistrorsum, tum vero applicatas positiuas y sursum, at negatiuas deorsum capiamus. His positis pressiones in singulis punctis ita se habebunt:

I. Pressio in $A = \alpha - \beta . IH - \gamma . IE$
II. Pressio in $B = \alpha + \beta . IF - \gamma . IE$
III. Pressio in $C = \alpha + \beta . IF + \gamma . IG$
IV. Pressio in $D = \alpha - \beta . IH + \gamma . IG$
V. Pressio in $E = \alpha \qquad - \gamma . IE$
VI. Pressio in $F = \alpha + \beta . IF$
VII. Pressio in $G = \alpha \qquad + \gamma . I . G$
VIII. Pressio in $H = \alpha - \beta . IH$.

Quarum pressionum omnium summa est $G = 8 . \alpha$, vnde si pressio totalis fuerit $= G$, statim habemus $\alpha = \frac{1}{8} G$, quae est nostra aequatio prima. Nunc spectemus singula momenta respectu axis FIH, ac primo coniunctim consideremus vires in A et D, quarum vtraque tribus constat partibus, ac primae quidem partes α, se mutuo in aequilibrio tenentes, eodem modo partes secundae $\beta . IH$ se mutuo destruunt, vnde momentum tantum ex tertiis partibus est aestimandum, priorem ducendo in $- IE$, posteriorem vero in $+ IG$, vnde nascitur momentum $2 \gamma . IG^2$. Eodem modo ex viribus in B et C resul-

resultabit quoque idem momentum $2\gamma . IG^2$. Deinde ex viribus E et G illam in $-EI$, hanc vero in $+IE$ ducendo, emergit momentum $+2\gamma . IG^2$. Ex postremis viribus F et H autem nullum oritur momentum. Quum ergo pressionis totalis G momentum respectu eiusdem axis sit $G.OP = G.IQ$, inde colligimus hanc aequationem secundam:

$$G.IQ = 6\gamma . IG^2 \text{, ideoque } \gamma = \frac{G.IQ}{6IG^2}.$$

Respectu autem alterius axis per simile ratiocinium deducimur ad hanc aequationem:

$$G.IP = 6\beta . IF^2 \text{, vnde } \beta = \frac{G.IP}{6IF^2}.$$

Quibus inuentis pressiones in singulis octo punctis se habebunt, vt sequuntur:

I. Pressio in $A = \frac{1}{2}G\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{PI}{IF} - \frac{1}{3}\frac{IQ}{IG}\right)$

II. Pressio in $B = \frac{1}{2}G\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{PI}{IF} - \frac{1}{3}\frac{IQ}{IG}\right)$

III. Pressio in $C = \frac{1}{2}G\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{PI}{IF} + \frac{1}{3}\frac{IQ}{IG}\right)$

IV. Pressio in $D = \frac{1}{2}G\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{PI}{IF} + \frac{1}{3}\frac{IQ}{IG}\right)$

V. Pressio in $E = \frac{1}{2}G\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{IQ}{IG}\right)$

VI. Pressio in $F = \frac{1}{2}G\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{PI}{IF}\right)$

VII. Pressio in $G = \frac{1}{2}G\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{IQ}{IG}\right)$

VIII. Pressio in $H = \frac{1}{2}G\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{PI}{IF}\right)$.

Coroll.

20. Si breuitatis gratia ponatur $IF = a$; $IG = b$; $IP = p$; $IQ = q$ istae vires succinctius ita repraesentari possunt.

I.

I. Pressio in $A = \frac{1}{24} G(3 - \frac{4p}{a} - \frac{4q}{b}) = \frac{1}{24} G(\frac{4(a-p)}{a} + \frac{4(b-q)}{b} - 5)$

II. Pressio in $B = \frac{1}{24} G(3 + \frac{4p}{a} - \frac{4q}{b}) = \frac{1}{24} G(\frac{4(a+p)}{a} + \frac{4(b-q)}{b} - 5)$

III. Pressio in $C = \frac{1}{24} G(3 + \frac{4p}{a} + \frac{4q}{b}) = \frac{1}{24} G(\frac{4(a+p)}{a} + \frac{4(b+q)}{b} - 5)$

IV. Pressio in $D = \frac{1}{24} G(3 - \frac{4p}{a} + \frac{4q}{b}) = \frac{1}{24} G(\frac{4(a-p)}{a} + \frac{4(b+q)}{b} - 5)$

V. Pressio in $E = \frac{1}{24} G(3 - \frac{4q}{b}) = \frac{1}{24} G(\frac{4(b-q)}{b} - 1)$

VI. Pressio in $F = \frac{1}{24} G(3 + \frac{4p}{a}) = \frac{1}{24} G(\frac{4(a+p)}{a} - 1)$

VII. Pressio in $G = \frac{1}{24} G(3 - \frac{4p}{a}) = \frac{1}{24} G(\frac{4(a-p)}{a} - 1)$

VIII. Pressio in $H = \frac{1}{24} G(3 + \frac{4q}{b}) = \frac{1}{24} G(\frac{4(b+q)}{b} - 1)$.

Scholion.

21. Huiusmodi casibus, quibus pondus pluribus pedibus plano insistit, susius non immoramur; antequam autem bases per spatium aliquod planum extensas, consideremus, casus quosdam quasi intermedios examinemus, quibus pondus deorsum desinit in limbum quempiam siue rectilineum, siue curuilineum, vbi quidem a rectilineis incipere conuenit, quae inuestigatio, quo minorem difficultatem, ob figuram talis basis polygonae facessat; exordiamur ab vnica linea recta per cuius singula puncta tam pressiones, quam momenta respectu binorum axium fixorum inuestigemus in sequenti Lemmate.

Lemma.

Tab. II. Fig. 9. Constitutis binis axibus A B et A C inter se normalibus, quorum respectu momenta sunt aestimanda, sit recta Ff portio limbi, quo pondus plano no innititur; inuestigare pressiones per totam hanc lineam, earumque momenta respectu binorum axium A B et A C.

Solutio.

22. Pro puncto huius rectae quocunque Y, vocemus nostras coordinatas $AX = x$ et $XY = y$ et per principium supra stabilitum pressio in hoc puncto erit $\alpha + \beta x + \gamma y$, iam quum haec linea Ff sit recta, inter has coordinatas dabitur huiusmodi aequatio $y = e + nx$, ita vt sit $dy = n\,dx$. Quia nunc praefata pressio per elementum Yy extenditur, ob

$$Yy = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{(1 + nn)},$$

posito $\sqrt{(1+nn)} = m$,

tota pressio per elementum Yy erit

$$= m\,dx(\alpha + \beta x + \gamma y),$$

cuius ergo integrale est

$$m(\alpha x + \tfrac{1}{2}\beta x^2 + \gamma \int y\,dx) + C,$$

quod vt per totam datam rectam extendatur, primo talis constans adiici debet, vt posito $x = AE$, euanescat, tum vero statuatur $x = Ae$, quo facto summa pressionum per Ff erit:

$$m\alpha Ee + \tfrac{1}{2}m\beta(Ae^2 - AE^2) + m\gamma.\,\text{Area}.\,EFef,$$

quae area quum sit

$\tfrac{1}{2}Ee(EF + ef)$, et ob $Ae^2 - AE^2 = Ee(Ae + AE)$

fiet summa pressionum per lineam Ff

$$= m\,Ee(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta(AE + Ae) + \tfrac{1}{2}\gamma(EF + ef)).$$

 Quum

Quum porro pressio per elementum Yy sit

$$= m\,dx(\alpha + \beta x + \gamma y)$$

ducatur ea in y, vt eius momentum prodeat respectu axis AE, quod ergo erit

$$my\,dx(\alpha + \beta x + \gamma y),$$

pro huius integratione iam vidimus per totam rectam Ff fore

$$\int y\,dx = \tfrac{1}{2}Ee(EF + ef),$$

bina reliqua integralia ob $y = e + nx$ seorsim euolvamus:

Pro littera β

$$\int yx\,dx = e\int x\,dx + n\int x^2\,dx$$

quod integrale per totam rectam Ff extensum praebet

$$\tfrac{1}{2}e(Ae^2 - AE^2) + \tfrac{1}{3}n(Ae^3 - AE^3) = Ee(\tfrac{1}{2}e(Ae + AE) + \tfrac{1}{3}n(Ae^2 + Ae.AE + AE^2))$$

Pro littera γ

$$\int yy\,dx = ee\int dx + 2en\int x\,dx + nn\int x^2\,dx,$$

quod integrale per totam rectam extensum dat

$$ee.Ee + en.(Ae^2 - AE^2) + \tfrac{1}{3}n^2(Ae^3 - AE^3),$$

quae forma in hanc contrahitur:

$$Ee(ee + en(Ae + AE) + \tfrac{1}{3}nn(Ae^2 + Ae.AE + AE^2)).$$

Hinc ergo concludimus momentum respectu axis AB:

$$mEe\tfrac{1}{2}\alpha(EF + ef) + mEe(\tfrac{1}{2}e\beta(Ae + AE) + \tfrac{1}{3}n\beta(Ae^2 + Ae.AE + AE^2)) + mEe(\gamma ee + \gamma en(Ae + AE) + \tfrac{1}{3}\gamma nn(Ae^2 + Ae.AE + AE^2)).$$

Calculus autem concinnior reddetur, si hinc litteras in in subsidium vocatas e et n eliminemus, quum enim sumto

$$x = \mathrm{A\,E},\ \text{fiat}\ y = \mathrm{E\,F} = e + n.\,\mathrm{A\,E},$$

posito autem

$$x = \mathrm{A}\,e,\ \text{fiat}\ y = ef = e + n\,\mathrm{A}\,e,$$

subtrahendo elicimus

$$n.\,\mathrm{E}e = ef - \mathrm{EF},\ n = \frac{ef - \mathrm{EF}}{\mathrm{E}e},\ \text{indeque}\ e = \frac{\mathrm{A}e.\,\mathrm{EF} - \mathrm{AE}.ef}{\mathrm{E}e},$$

at ex hoc valore n colligimus

$$m = \sqrt{(1 + nn)} = \frac{\mathrm{F}f}{\mathrm{E}e};$$

ex quo valore summa ipsarum pressionum per rectam $\mathrm{F}f$ ita concinnius exprimitur:

$$\mathrm{F}f(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta(\mathrm{A}\,e + \mathrm{A\,E}) + \tfrac{1}{2}\gamma(ef + \mathrm{E\,F})).$$

Tum vero pro momento respectu axis A B, singulae partes litteris α, β et γ affectae ita exprimentur:

Pro littera α habebimus

$$\tfrac{\alpha}{2}\mathrm{F}f(\mathrm{E\,F} + ef).$$

Pro littera β habebimus

$$\frac{\beta.\,\mathrm{F}f}{6}(ef(2\,\mathrm{A}e + \mathrm{AE}) + \mathrm{EF}(2\,\mathrm{AE} + \mathrm{A}e))$$

Pro littera γ fiet:

$$\frac{\gamma.\,\mathrm{F}f}{3}(ef^2 + ef.\,\mathrm{E\,F} + \mathrm{E\,F}^2).$$

Denique pro momento respectu alterius axis A C, nouo calculo non est opus, sed sufficit in forma praecedenti, primo litteras β, γ, tum vero etiam rectas A E et E F, item A e et ef inter se permutasse, sicque reperietur.

Momentum respectu axis A C

$$+\tfrac{\alpha}{2}\,Ff(AE+Ae)$$
$$+\tfrac{\beta}{3}\,Ff(Ae^2+Ae.AE+AE^2)$$
$$+\tfrac{\gamma}{6}\,Ff(Ae(2ef+EF)+AE(2EF+ef)).$$

Problema 4.

Tab. III. Fig. 10. Si pondus plano insistat, limbo triangulari A B D, definire pressionem in singulis punctis huius limbi.

Solutio.

23. Sit pressio totalis $=G$, cuius directio normaliter incidat in puncto O, vnde ad axem A B ducatur perpendiculum O P, itemque ex angulo D perpendiculum D G. Quum iam limbus constet tribus lateribus trianguli A B, A D et B D, ad vnumquodque calculum Lemmatis praemissi seorsim accommodemus, ac quidem pro latere A B habebimus

$$Ff=AB;\ AE=0;\ Ae=AB;\ EF=0 \text{ et } ef=0$$

vnde colligitur

I°. pressio per $AB=AB(\alpha+\tfrac{1}{2}\beta.AB)$

II°. Momentum respectu axis $AB=0$

III°. Momentum respectu axis $AC=AB(+\tfrac{\alpha}{2}AB+\tfrac{\beta}{3}AB^2)$.

Deinde pro latere A D habebimus

$$Ff=AD,\ AE=0,\ Ae=AG;\ EF=0;\ ef=DG$$

vnde tria nostra momenta erunt:

1°. Ipsa pressio in latere $AD=AD(\alpha+\tfrac{\beta}{2}.AG+\tfrac{1}{2}\gamma DG)$

2^{do}

2do Momentum respectu axis $AB = AD(\frac{\alpha}{2}.DG + \frac{1}{3}DG.AG + \frac{\gamma}{3}DG^2)$
$= AD \times DG(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}\beta\, AG + \frac{1}{3}\gamma\, DG)$

3io Momentum respectu axis $AC = AD(\frac{\alpha}{2}AG + \frac{1}{3}\beta\, AG^2 + \frac{1}{3}\gamma.AG.DG)$
$= AD \times AG(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}\beta.AG + \frac{1}{3}\gamma.DG)$.

Pro tertio autem latere B D erit

$Ff = BD$, $AE = AG$; $Ae = AB$; $EF = DG$; $ef = 0$

vnde colligimus

1°. Pressionem per latus $BD = BD(\alpha + \frac{1}{2}\beta(AB + AG) + \frac{1}{2}\gamma.DG)$

2do Momentum respectu axis $AB = BD(\frac{\alpha}{2}DG + \frac{\beta}{6}(DG(2AG + AB) + \frac{\gamma}{3}DG^2)$
$= BD \times DG(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}AG + \frac{1}{6}\beta\, AB + \frac{\gamma}{3}DG)$

3io Momentum respectu axis $AD = \frac{1}{2}\alpha\, BD(AG + AB)$
$+ BD(\frac{\beta}{3}(AB^2 + AB.AG + AG^2) + \frac{1}{6}\gamma(AB.DG + 2AG.DG))$
$= BD \times AG(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}(\frac{1}{2}AB + AG) + \frac{1}{3}\gamma.DG)$
$+ BD.AB(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}(AB + \frac{1}{2}AG) + \frac{1}{6}.DG)$.

Quum igitur pressio totalis sit $= G$, eiusque momentum respectu axis $AB = G.OP$, at respectu axis $AC = G.AP$, consequimur tres sequentes aequationes:

I. $G = \alpha(AB + BD + DC) + \frac{1}{2}\beta(AB^2 + AD \times AG + AB \times BD + AG \times BD)$
$+ \frac{1}{2}\gamma(DG.AD + DG \times BD)$
$= \alpha(AB + BD + DC) + \frac{1}{2}\beta(AB(AB + AD + BD) + AG.BD - BG.AD)$
$+ \frac{1}{2}\gamma\, DG(AD + BD)$

II. $G \times OP = \frac{\alpha}{2}(AD.DG + BD \times DG) + \frac{1}{3}\beta.DG(AG(AD + BD) + \frac{1}{2}BD.AB)$
$+ \frac{1}{3}\gamma\, DG^2(AD + BD)$.

$$\text{III. } G.\,AP = \tfrac{\alpha}{2}(AB^2 + AG.BD + AB.BD + AG \times AD)$$
$$+ \tfrac{\beta}{3}(AB^3 + AD.AG^2 + AB^2.BD + AB.AG.BD + AG^2.BD)$$
$$+ \tfrac{\gamma}{3}(AG.AD.DG + 2AB.DG.BD + AG.DG.BD).$$

Ex quibus ternas litteras α, β, γ determinare licebit, quibus inuentis, pressiones singulorum laterum totas cognoscemus, at pro quolibet puncto perimetri binis coordinatis x et y indicato, pressio vti assumsimus, erit $\alpha + \beta x + \gamma y$.

Coroll.

24. Si triangulum ABD fuerit aequilaterum, vnumque latus vocetur $= a$, erit $AG = \frac{1}{2}a$ et $DG = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, hocque casu ternae aequationes inventae, sequentes induent formas

$$\text{I. } G = 3\alpha a + \tfrac{3}{2}\beta a^2 + \tfrac{1}{2}\gamma.\,aa\sqrt{3}.$$
$$\text{II. } G.\,OP = \tfrac{\alpha}{2}aa\sqrt{3} + \tfrac{1}{4}\beta.\,a^3\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\gamma a^3.$$
$$\text{III. } G.\,AP = \tfrac{3}{2}\alpha.\,a^2 + \beta.\,a^3 + \tfrac{1}{2}\gamma a^3\sqrt{3},$$

hinc fit ex prima

$$\text{I}^\circ.\quad \alpha a = \tfrac{1}{3}G - \tfrac{1}{2}\beta a^2 - \tfrac{1}{6}\gamma a^2\sqrt{3}$$

qui valor in binis reliquis substitutus praebet

$$\text{II}^\circ.\ \frac{G.\,OP}{a} = \frac{1}{2\sqrt{3}}G + \tfrac{1}{4}\gamma aa$$
$$\text{III}^\circ.\ \frac{G.\,AP}{a} = \frac{G}{2} + \frac{\beta}{4}aa + \tfrac{1}{4}\gamma aa\sqrt{3}.$$

Harum prior statim dat $\gamma aa = 4.G\left(\frac{OP}{a} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$,

tum vero ex postrema deducitur

$$\beta aa = \frac{4G}{a}(AP - OP\sqrt{3})$$

consequenter

$$\alpha a = G\left(\frac{2}{3} - \frac{2AP}{a} + \frac{4}{\sqrt{3}}.\frac{OP}{a}\right).$$

Ex

Ex his valoribus colligitur pressio lateris

$AB = G\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{OP}{a}\right)$

pressio lateris $AD = G\left(\frac{1}{6} - \frac{AP}{a} + \frac{4}{\sqrt{3}}.\frac{OP}{a}\right)$

pressio lateris $DB = G\left(\frac{1}{6} + \frac{AP}{a} - \frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{OP}{a}\right)$.

Problema 5.

Sit limbus quo pondus plano incumbit, parallelogrammum rectangulum $ABCD$, et directio totius pressionis incidat in punctum O, inuenire pressionem in singulis lateribus.

Solutio.

25. Vocemus latera $AB = CD = b$ et $AC = DB = c$, tum vero $AP = f$ et $PO = g$, existente tota pressione $= G$, nunc igitur ex Lemmate habebimus:

I°. Pro latere AB, $AE = 0$, $Ae = b$, $EF = 0$, $ef = 0$ et $Ff = AB = b$

ideoque,

I°. pressionem ipsam $= AB(\alpha + \frac{1}{2}\beta.AB) = b(\alpha + \frac{1}{2}\beta b)$

II°. Moment. pro $AB = 0$

III°. Moment. respectu axis $AC = AB(\frac{\alpha}{2}.AB + \frac{\beta}{3}.AB^2)$
$= \frac{\alpha}{2}b^2 + \frac{1}{3}\beta.b^3$

II. Pro latere CD, $AE = 0$; $Ae = b$; $EF = ef = c$ et $Ff = AB = b$

I°.

I°. pressio ipsa $= AB(\alpha + \frac{1}{2}\beta . AB + \gamma . AC)$
$= ab + \frac{1}{2}\beta . bb + \gamma bc$

II°. Moment. pro $AB = abc + \frac{1}{2}\beta bbc + \gamma bc^2$

III°. Moment. pro $AC = \frac{\alpha}{2}bb + \frac{1}{3}\beta b^3 + \frac{\gamma}{2}bbc.$

III. Pro latere AC, $AE = 0$; $Ae = 0$; $EF = 0$; $ef = 0$; et $Ff = c$

I. Ipsa pressio $= \alpha c + \frac{1}{2}\gamma cc$

II. Moment. respect. lateris $AB = \frac{1}{2}\alpha cc + \frac{1}{3}\gamma c^3$

III. Moment. respect. axis $AC = 0$,

IV. Pro latere BD; $AE = Ae = b$; $EF = 0$, $ef = c$, et $Ff = 0$.

I. Ipsa pressio $= \alpha c + \beta cb + \frac{1}{2}\gamma cc$

II. Moment. resp. lateris $AB = \frac{\alpha}{2}c^2 + \frac{1}{2}\beta bcc + \frac{1}{3}\gamma c^3$

III. Moment. resp. lateris $AC = \alpha bc + \beta cbb + \frac{\gamma}{2}cbb.$

Atque hinc colligimus tres sequentes aequationes

I. $2\alpha(b+c) + \beta(bb+bc) + \gamma(bc+cc) = G$

II. $G . OP = \alpha(bc+cc) + \frac{1}{2}\beta\, cb(b+c) + \gamma c(bc + \frac{2}{3}c^2)$

III. $G . AP = \alpha(bb+bc) + \beta . bb(\frac{2}{3}b + c) + \frac{1}{2}\gamma . bc(b+c).$

Ex quibus manifesto sequitur, posito $OP = g$ et $AP = f$

$\alpha(b+c) = \frac{G}{2} - \frac{\beta}{2}b(b+c) - \frac{\gamma c}{2}(b+c)$ ideoque

$\gamma cc(\frac{1}{2}b + \frac{1}{6}c) = G(g - \frac{c}{2})$; hinc $\gamma cc = \frac{G(2g-c)}{(b+\frac{1}{3}c)} = \frac{3G(2g-c)}{3b+c}$

$\beta bb(\frac{1}{2}c + \frac{1}{6}b) = G(f - \frac{b}{2})$ et $\beta bb = \frac{G(2f-c)}{(c+\frac{1}{3}b)} = \frac{3G(2f-b)}{3c+b}.$

Inuentis autem hiis valoribus α, β, γ, facile erit tam pro singulis lateribus, quam pro singulis eorum punctis, pressionem quam sustinent assignare.

Pro-

Problema 6.

Si limbus quo pondus plano incumbit, fuerit peripheria circuli centro A, radio $AB = Ab = a$ descripti, et directio pressionis totalis incidat in punctum O, pressiones in singulis peripheriae punctis assignare.

Solutio.

26. Diuidamus circulum in suos quatuor quadrantes, diametris BAb et CAc, qui simul vices nostrorum axium gerant, et consideremus primo solum quadrantem BAC, in quo sumamus punctum quodcunque Y, cuius vocemus abscissam $AX = x$ et applicatam $XY = y$, ita vt sit $y = \surd(aa - xx)$, et arcus CY elementum

$$= \frac{a\,dx}{\surd(aa - xx)} = \frac{a\,dx}{y},$$

iam per hoc elementum, pressio erit in Y

$$= \alpha + \beta x + \gamma y,$$

cum hoc autem puncto in reliquis quadrantibus simul coniungamus puncta analoga, Z, y et z, atque euidens est, pressionem fore in Z

$= \alpha + \beta x - \gamma y$; in $y = \alpha - \beta x + \gamma y$ et in $z = \alpha - \beta x - \gamma y$,

quarum pressionum summa est $= 4\alpha$, quae ducta in elementum arcus et per totum quadrantem CYB integrata, praebet nostram primam aequationem:

I. $G = 2\pi . \alpha a$.

Nunc colligamus momenta respectu axis A B, quae ita se habebunt:

$$
\begin{array}{lrl}
\text{ex puncto} & Y = & \alpha y + \beta x y + \gamma . y y \\
 & Z = & -\alpha y - \beta x y + \gamma . y y \\
 & y = & +\alpha y - \beta x y + \gamma . y y \\
 & z = & -\alpha y + \beta x y + \gamma . y y \\
\text{summa} & = & 4 \gamma . y y
\end{array}
$$

quae ducta in elementum arcus $\frac{a\,dx}{y}$, dat formulam integrandam $4 \gamma a y d x$, at pro toto quadrante fit $\int y d x = \frac{1}{4} \pi a a$, vnde quum momentum totius pressionis sit G. O P = G. g (posito O P = g) habebimus hanc secundam aequationem $G. g = \pi \gamma a^3$. Denique pro axe A C, momenta nascuntur

$$
\begin{array}{lrl}
\text{ex momento} & Y = & \alpha x + \beta x x + \gamma x y \\
 & Z = & \alpha x + \beta x x - \gamma x y \\
 & y = & -\alpha x + \beta x x - \gamma x y \\
 & z = & -\alpha x + \beta x x - \gamma x y \\
\text{summa} & = & + 4 \beta x x,
\end{array}
$$

quae in elementum $\frac{a\,dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ ducta, dat formulam integrandam

$\frac{4 \beta a x^2 d x}{\sqrt{(aa - xx)}}$, at $\int \frac{x^2 d x}{\sqrt{(a^2 - xx)}} = a \int \frac{a\,d x}{\sqrt{(aa - xx)}} - \int d x \sqrt{(aa-xx)}$.

Iam vero pro totum quadrantem fit

$$\int \frac{a\,d x}{\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{\pi}{2} a, \text{ et } \int d x \sqrt{(aa - xx)} = \int y d x = \frac{1}{4} \pi a a$$

vnde colligitur

$$\int \frac{x^2 d x}{\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{\pi}{4} a a,$$

vnde quum totum momentum sit G. A P = G. f posito A P = f, tertia aequatio nostra prodibit, $G. f = \pi . \beta . a^4$. Ergo

Ergo hinc ſtatim deducimus

$$\beta = \frac{G.f}{\pi.a^3}; \quad \gamma = \frac{G.g}{\pi.a^4} \quad \text{et } \alpha = \frac{G}{2\pi aa},$$

quocirca pro puncto peripheriae quocunque Y, preſſio erit

$$\frac{G}{2\pi aa} + \frac{Gfx}{\pi.a^4} + \frac{Ggy}{\pi.a^4} = \frac{G}{\pi aa}\left(\tfrac{1}{2} + \frac{fx+gy}{aa}\right),$$

vnde pro ſingulis punctis preſſio eſt manifeſta.

Scholion.

27. Hactenus ponderi plano incumbenti eiuſmodi dedimus baſin, quae vel tantum ex aliquot conſtaret punctis, vel in limbum linearem deſineret, nunc igitur eiusmodi baſes aggrediamur, quae ſecundum binas dimenſiones ſint extenſae, ac primo quidem pro huiusmodi caſibus, quibus baſis eſt vel triangulum, vel alia figura rectilinea, ſequens Lemma praemittamus.

Lemma.

Si trapezium E F ef fuerit portio baſis cuiuscunque, qua pondus plano incumbit, definire tam totam preſſionem, quam hoc trapezium ſuſtinet, quam eius momenta reſpectu binorum axium inter ſe normalium A B et A C.

Solutio.

28. Quum rectae F E et fe ſumantur ad axem A B normales, conſideretur quaecunque intermedia Y X illis parallela, itemque huic proxima xy, et conſideretur elementum quodcunque V v U u Tab. III. Fig. 13.

 rectan-

rectangulum, et pro puncto V statuantur coordinatae $AX = x$ et $XV = v$, eritque pressio in puncto $V = \alpha + \beta x + \gamma v$, quae quia per totum rectangulum $VvUu$, cuius area est $dx\,dv$, valere concipitur, erit pressio quam hoc elementum sustinet

$$= \alpha\, dx\, dv + \beta\, x\, dx\, dv + \gamma\, v\, dx\, dv,$$

tum vero eius momentum respectu axis A B

$$= \alpha\, v\, dx\, dv + \beta\, x\, v\, dx\, dv + \gamma\, v\, v\, dx\, dv$$

et respectu axis A C momentum

$$= \alpha\, x\, dx\, dv + \beta\, x^2\, dx\, dv + \gamma\, v\, x\, dx\, dv$$

quas singulas partes, duplici integratione tractari oportet, primo igitur abscissam x vt constantem spectemus, et integralia per totam fasciolam elementarem $XYxy$ extendamus, quod fit faciendo post integrationem $v = XY = y$, hocque modo colligemus:

Pro fasciola $XYxy$

I. Pressionem $= \alpha y\, dx + \beta y x\, dx + \frac{1}{2}\gamma y y\, dx$
II. Momentum respectu axis $AB = \frac{1}{2}\alpha y y\, dx + \frac{1}{2}\beta y y x\, dx + \frac{1}{3}\gamma y^3\, dx$
III. Momentum respectu axis $AC = \alpha y x\, dx + \beta y x^2\, dx + \frac{1}{2}\gamma y^2 x\, dx$

tantum igitur superest, vt singulas has formulas altera vice integremus, et per totam aream trapezii extendamus quod fiet, si integralia euanescentia reddantur, ponendo $x = AE$ et $y = EF$, tum vero statuatur $x = Ae$ et $y = ef$, in hunc finem, quia linea Ff est recta, statuatur $dy = n\, dx$ eritque $n = \frac{ef - EF}{Ee}$, integralia autem ita per notam reductionem expediamus, secundum formulam.

$\int p\,d q = p q - \int q\,d p.$

Hoc praenotato erit:

1°. $\int y\,d x = y x - \frac{1}{2} n x^2$, ergo pro toto trapezio

$$\int y\,dx = Ae.\,ef - AE.\,EF - \tfrac{1}{2}n(Ae^2 - AE^2)$$

quam formulam quo facilius euoluamus, statuamus

$$AE = E;\ EF = F;\ Ae = e \text{ et } ef = f,$$

ita vt sit $n = \frac{f-F}{e-E}$. Ideoque

$$\int y\,d x = \tfrac{1}{2}(e - E)(f + F)$$

2°. $\int y x\,d x = \frac{1}{2} y x^2 - \frac{n}{2}\int x^2\,d x = \frac{1}{2} y x^2 - \frac{n}{6} x^3$, ergo

$$\int y x\,d x = \tfrac{1}{2} e e f - \tfrac{1}{2} E E F - \frac{(f-F)}{6(e-E)}(e^3 - E^3)$$

$$= \tfrac{1}{2} e e f - \tfrac{1}{2} E E F - \frac{(f-F)}{6}(e e + e E + E^2), \text{ ergo}$$

$$\int y x\,d x = \tfrac{1}{6}(e - E)(f(2e + E) + F(2E + e))$$

3tio. $\int y y\,d x = \frac{1}{n}\int y^2\,d y = \frac{1}{3n} y^3$. Ideoque

$$\int y y\,d x = \tfrac{1}{3}(e - E)(f f + f F + F^2)$$

4to. $\int y y x\,d x = \frac{x y^3}{3n} - \frac{y^4}{12 n^2}$. Ideoque

$$\int y y x\,d x = \tfrac{1}{12}(e - E)(e(3f^2 + 2fF + F^2) + E(3F^2 + 2Ff + f^2))$$

siue $\frac{1}{12}(e - E)(2 e f^2 + 2 E F^2 + (e + E)(f + F)^2)$

5to. $\int y^3\,d x = \frac{1}{n}\int y^3\,d y = \frac{1}{4n} y^4$. Ideoque

$$\int y^3\,d x = \tfrac{1}{4}(e - E)(f^3 + f f F + f F^2 + F^3)$$

6to. $\int y x^2\,d x = \frac{1}{3} y x^3 - \frac{1}{3}\int x^3\,d y = \frac{1}{3} y x^3 - \frac{n}{12} x^4$. Ideoque

$$\int y x^2\,d x = \tfrac{1}{12}(e - E)(f(3e^2 + 2eE + E)^2 + F(3E^2 + 2Ee + e^2))$$

siue $\frac{1}{12}(e - E)(2 f e^2 + 2 F E^2 + (f + F)(e + E)^2)$.

Quocirca tres formulae principales quas inuenimus ſequenti modo exprimentur:

$$\text{I. Preſſio} = \tfrac{1}{2}\alpha(e-\mathrm{E})(f+\mathrm{F})+\tfrac{1}{6}\beta(e-\mathrm{E})(f(2e+\mathrm{E})+\mathrm{F}(2\mathrm{E}+e)) + \tfrac{1}{6}\gamma(e-\mathrm{E})(ff+f\mathrm{F}+\mathrm{F}^2)$$

$$\text{II. Momentum reſpectu AB} = \tfrac{1}{6}\alpha(e-\mathrm{E})(ff+f\mathrm{F}+\mathrm{F}^2) + \tfrac{1}{24}\beta(e-\mathrm{E})(2ef^2+2\mathrm{EF}^2+(e+\mathrm{E})(f+\mathrm{F})^2) + \tfrac{1}{12}\gamma(e-\mathrm{E})(f^3+ff\mathrm{F}+f\mathrm{F}^2+\mathrm{F}^3)$$

$$\text{III. Moment. reſpectu axis AC} = \tfrac{1}{6}\alpha(e-\mathrm{E})(f(2e+\mathrm{E})+\mathrm{F}(2\mathrm{E}+e)) + \tfrac{1}{12}\beta(e-\mathrm{E})(2fe^2+2\mathrm{FE}^2+(f+\mathrm{F})(e+\mathrm{E})^2) + \tfrac{1}{24}\gamma(e-\mathrm{E})(2ef^2+2\mathrm{EF}^2+(e+\mathrm{E})(f+\mathrm{F})^2).$$

Problema 7.

Fig. 10. Si baſis qua pondus plano incumbit, fuerit triangulum A B D et media directio preſſionis totalis G cadat in punctum O, inuenire preſſionem in ſingulis baſeos punctis.

Solutio.

29. In baſin A B demiſſo perpendiculo D G vocentur A G $= a$ et B G $= b$ et D G $= c$, tum vero ſit A P $= p$ et P O $= q$ et quia baſis conſtat partibus A G D et G D B, ad vtramque Lemma praecedens accommodemus, ac primo pro ſpatio A D G, habebimus $\mathrm{E} = 0$, $\mathrm{F} = 0$, $e = a$, $f = c$, hincque tres formulae noſtrae erunt

$$\text{I. Preſſio} = \tfrac{1}{2}\alpha.ac+\tfrac{1}{3}\beta a^2c+\tfrac{1}{6}\gamma acc$$

$$\text{II. Moment. reſpect. AB} = \tfrac{1}{6}\alpha aacc+\tfrac{1}{8}\beta aacc+\tfrac{1}{12}\gamma ac^3$$

$$\text{III. Moment. reſpect. AC} = \tfrac{1}{3}\alpha aac+\tfrac{1}{4}\beta a^3c+\tfrac{1}{8}\gamma a^2c^2.$$

Pro

Pro altero autem triangulo GDB, quia $E = a$, $F = c$, $e = a + b$ et $f = 0$, habebimus

I. Pressionem $= \frac{1}{2}\alpha . bc + \frac{1}{6}\beta . bc(3a+b) + \frac{1}{6}\gamma bcc$

II. Moment. resp. $AB = \frac{1}{6}\alpha bcc + \frac{1}{24}\beta . bcc(4a+b) + \frac{1}{12}\gamma bc^3$

III. Moment. resp. $AC = \frac{1}{6}\alpha bc(3a+b) + \frac{1}{12}\beta bc(6aa+4ab+bb)$
$+ \frac{1}{24}\gamma bcc(4a+b)$.

His igitur coniungendis nanciscimur tres sequentes aequationes:

I°. $G = \frac{1}{2}\alpha c(a+b) + \frac{1}{6}\beta c(2a^2+3ab+bb) + \frac{1}{6}\gamma cc(a+b)$
$= (a+b)(\frac{1}{2}\alpha c + \frac{1}{6}\beta c(2a+b) + \frac{1}{6}\gamma cc)$

II. $Gq = \frac{1}{6}\alpha cc(a+b) + \frac{1}{24}\beta cc(3aa+4ab+bb) + \frac{1}{12}\gamma c^3(a+b)$

III. $Gp = \frac{1}{6}\alpha c(2a^2+3ab+bb) + \frac{1}{12}\beta c(3a^3+6aab+4abb+b^3)$
$+ \frac{1}{24}\gamma cc(3aa+4ab+bb)$
$= \frac{1}{6}\alpha c(a+b)(2a+b) + \frac{1}{12}\beta c(a+b)(3aa+3ab+bb)$
$+ \frac{1}{24}\gamma cc(a+b)(3a+b)$.

Quarum secunda in $\frac{3}{c}$ ducta subtrahatur a prima, et remanebit

$$G - \frac{3Gq}{c} = G(1 - \frac{3q}{c}) = -\frac{\beta c}{24}(a+b)(a-b) - \frac{1}{12}\gamma cc(a+b)$$

Deinde tertia ducta in 3 a prima in $2a+b$ ducta subtrahatur et prodibit

$$G(2a+b-3p) = -\frac{1}{12}\beta c(a+b)(aa+ab+bb) - \frac{1}{24}\gamma cc(a+b)(a-b).$$

Quarum prior ducta in $(a-b)$ si a duplo posterioris subtrahatur relinquet:

$$G(4a+2b-6p-(a-b)(1-\frac{3q}{c})) = -\frac{1}{8}\beta c(a+b)^3 \text{ siue}$$
$$G(a+b-2p+(a-b)\frac{q}{c})) = -\frac{1}{24}\beta c(a+b)^3$$

vnde

vnde β determinatur ex quo deinceps et γ et α innotescent.

Est vero

$$-\tfrac{1}{24}\gamma cc(a+b)^3 = G'b(a+b)+p(a-b)-2(aa+ab+bb)\tfrac{q}{c})$$

et $+\tfrac{1}{6}\alpha c(a+b)^2 = G(3(a+b)-4p-\tfrac{4bq}{c})$.

Corollarium I.

30. Si basis fuerit triangulum rectangulum A G D, quod fit si $b=0$ ternae nostrae aequationes erunt:

I. $G = \tfrac{1}{2}\alpha ac + \tfrac{1}{3}\beta a^2 c + \tfrac{1}{6}\gamma acc$

II. $\tfrac{Gq}{c} = \tfrac{1}{6}\alpha ac + \tfrac{1}{8}\beta a^2 c + \tfrac{1}{12}\gamma acc$

III. $\tfrac{Gp}{a} = \tfrac{1}{3}\alpha ac + \tfrac{1}{4}\beta a^2 c + \tfrac{1}{8}\gamma acc.$

Hinc

$$\tfrac{1}{6}\alpha ac = G(3-\tfrac{4p}{a})$$

$$\tfrac{1}{24}\beta aac = G(\tfrac{2p}{a}-\tfrac{q}{c}-1)$$

$$\tfrac{1}{24}\gamma acc = G(\tfrac{2q}{c}-\tfrac{p}{a})$$

atque hinc pro quouis puncto huius basis, binis coordinatis x et y determinato, pressio erit

$$=\alpha+\beta x+\gamma y.$$

Coroll. 2.

31. Si basis fuerit triangulum Isosceles quod euenit si $b=a$, ternae aequationes nostrae sunt

$$G = \alpha ac + \beta aac + \tfrac{1}{3}\gamma acc$$

$$\tfrac{Gq}{c} = \tfrac{1}{3}\alpha ac + \tfrac{1}{3}\beta aac + \tfrac{1}{6}\gamma acc$$

$$\tfrac{Gp}{a} = \alpha ac + \tfrac{7}{6}\beta aac + \tfrac{1}{3}\gamma acc$$

Hinc

Hinc fit

$$\tfrac{1}{4}\beta aac = G\left(\tfrac{p}{a} - 1\right);\ \tfrac{1}{6}\gamma acc = G\left(\tfrac{3q}{c} - 1\right);\ \tfrac{1}{3}\alpha ac = G\left(3 - \tfrac{2q}{c} - \tfrac{2p}{a}\right).$$

Si praeterea fuerit $p = a$, ita vt punctum O cadat in perpendiculum D G, erit

$$\beta = 0;\ \tfrac{1}{3}\alpha ac = G\left(1 - \tfrac{2q}{c}\right) \text{ fiue}$$

$$\alpha = \tfrac{3G}{ac}\left(1 - \tfrac{2q}{c}\right);\ \beta = 0;\ \gamma = \tfrac{6G}{acc}\left(\tfrac{3q}{c} - 1\right).$$

Si fuerit $q = c$ erit

$$\alpha = -\tfrac{3G}{ac};\quad \beta = 0;\quad \gamma = +\tfrac{12G}{acc}.$$

Sin autem fuerit $q = \frac{1}{3}c$ quo cafu punctum O in ipfum grauitatis trianguli cadit, fiet etiam $\gamma = 0$, $\alpha = \frac{G}{ac}$, et preffio vbique erit conftans.

Coroll. 3.

32. Quodfi vero in formulis generalibus ftatim ponamus $\beta = 0$ et $\gamma = 0$; quia tum eft $\alpha = \frac{2G}{c(a+b)}$, reperiemus $p = \frac{2a+b}{3}$ et $q = \frac{1}{3}c$, ficque punctum O incidet in ipfum centrum grauitatis trianguli.

Problema.

Si bafis qua pondus plano incumbit, fuerit parallelogrammum rectangulum A B C D et directio preffionis totalis incidat in punctum O, affignare preffionem in fingulis punctis. Fig. 10.

Solutio.

33. Ponamus vt fupra $AB = b$ et $AC = c$, item $AP = p$ et $PO = q$ vnde pro noftro Lem-

 mate

mate erit $E = 0$; $e = b$; $F = c$ et $f = c$, hincque statim obtinentur sequentes tres aequationes

$$\text{I.}\quad G = \alpha b c + \tfrac{1}{2}\beta b b c + \tfrac{1}{2}\gamma b c c$$

$$\text{II.}\quad \frac{Gq}{c} = \tfrac{1}{2}\alpha b c + \tfrac{1}{4}\beta b b c + \tfrac{1}{3}\gamma b c c$$

$$\text{III.}\quad \frac{Gp}{b} = \tfrac{1}{2}\alpha b c + \tfrac{1}{3}\beta b b c + \tfrac{1}{4}\gamma b c c$$

vnde statim concludimus, a tertia bis sumta subtrahendo primam

$$G\left(\frac{2p}{b} - 1\right) = \tfrac{1}{6}\beta b b c;\ \text{ergo}\ \beta b b c = 6G\left(\frac{2p}{b} - 1\right).$$

At si a secunda bis sumta subtrahatur prima, reperitur

$$G\left(1 - \frac{2q}{c}\right) = \tfrac{1}{6}\gamma b c c;\ \text{ideoque}\ \gamma b c c = 6G\left(\frac{2q}{c} - 1\right),$$

hincque

$$\alpha b c = G\left(7 - \frac{6p}{b} - \frac{6q}{c}\right).$$

Nunc pro puncto quocunque coordinatis x et y definito, pressio erit $\alpha + \beta x + \gamma y$.

Coroll. 1.

34. Hinc in puncto A vbi $y = 0$ et $x = 0$ pressio erit

$$= \frac{G}{bc}\left(7 - \frac{6p}{b} - \frac{6q}{c}\right).$$

In angulo vero B pressio prodit

$$\alpha + \beta b = \frac{G}{bc}\left(1 + \frac{6p}{b} - \frac{6q}{c}\right),$$

porro pressio in C erit $= \alpha + \gamma c = \frac{G}{bc}\left(1 - \frac{6p}{b} + \frac{6q}{c}\right)$, denique

pressio in puncto D erit $= \alpha + \beta b + \gamma c = \frac{G}{bc}\left(\frac{6p}{b} + \frac{6q}{c} - 5\right)$.

Coroll.

Coroll. 2.

35. Si fuerit $p = \frac{1}{2} b$ et $q = \frac{1}{2} c$, quo casu punctum O in medium rectanguli incidit, fiet

$$\alpha = \frac{G}{bc}; \quad \beta = 0; \quad \gamma = 0$$

vnde hoc casu per totam basin pressio aequaliter distribuetur.

Problema.

Si basis, qua corpus plano incumbit fuerit circulus radio $AB = a$ descriptus, et directio pressionis totius G, cadat in punctum O, vt sit $AP = p$ et $PO = q$, inuenire pressionem in singulis punctis. Tab. III. Fig. 12.

Solutio.

36. Diuiso vt supra circulo in suos quatuor quadrantes, in primo consideretur punctum quodcunque V, pro quo ponatur $AX = x$ et $XV = v$, ibique erit pressio $= \alpha + \beta x + \gamma v$, simul vero considerentur in reliquis quadrantibus, puncta analoga v, U, u, ac primo quidem pressiones in his punctis ita se habebunt:

I. Pressio in $V = \alpha + \beta x + \gamma v$
in $v = \alpha - \beta x + \gamma v$
in $U = \alpha + \beta x - \gamma v$
in $u = \alpha - \beta x - \gamma v$

Summa $= 4 \alpha$.

II. Secundo momenta respectu axis A B erunt sequentia

$$\begin{array}{lrl}
\text{pro puncto} & V = & \alpha v + \beta x v + \gamma v v \\
 & v = & \alpha v - \beta x v + \gamma v v \\
 & U = & -\alpha v - \beta x v + \gamma v v \\
 & u = & -\alpha v + \beta x v + \gamma v v. \\
\text{Summa} & = & +4\gamma v v
\end{array}$$

III. Momenta respectu axis A C erunt

$$\begin{array}{lrl}
\text{pro puncto} & V = & \alpha x + \beta x x + \gamma x v \\
 & v = & -\alpha x + \beta x x - \gamma x v \\
 & U = & +\alpha x + \beta x x - \gamma x v \\
 & u = & -\alpha x + \beta x x + \gamma x v \\
\text{Summa} & = & +4\beta x x.
\end{array}$$

Hae formulae ducantur in elementum areae quod est $d x d v$ ac primo sumatur x constans et facta integratione ponatur

$$v = XY = y = \sqrt{(a a - x x)}$$

et habebimus

$$4\alpha \int d x d v = 4\alpha d x \sqrt{(a a - x x)}$$
$$4\gamma \int v v d v d x = \tfrac{4}{3}\gamma y^3 d x = \tfrac{4}{3}\gamma d x (a a - x x)^{\frac{3}{2}}$$
$$4\beta \int x x d x d v = 4\beta y x^2 d x = 4\beta x^2 d x (a a - x x)^{1:2}.$$

Hae formulae denuo integrentur per totum quadrantem B A C, ac reperietur

$$\int y d x = \tfrac{1}{4}\pi a a \text{; hincque } 4\alpha \int y d x = \alpha \pi a a$$
$$\int y^3 d x = \tfrac{1}{4} x (a a - x x)^{3:2} + \tfrac{3}{4} a^2 \int d x \sqrt{(a a - x x)},$$

per totum quadrantem

$$\int y^3 d x = \tfrac{3}{16}\pi . a^4 \text{, hinc } \tfrac{4}{3}\gamma \int y^3 d x = \tfrac{1}{4}\gamma \pi a^4$$

deni-

denique

$$\int yx^2 dx = \tfrac{1}{16}\pi a^4 \text{ et } 4\beta \int yx^3 dx = \tfrac{1}{4}\beta\pi a^4,$$

atque hinc tres noſtrae aequationes erunt:

I. $G = \alpha\pi aa$; II. $Gq = \tfrac{1}{4}\gamma\pi a^4$; III. $Gp = \tfrac{1}{4}\beta\pi a^4$.

Ideoque

$$\alpha = \frac{G}{\pi aa}; \quad \beta = \frac{4Gp}{\pi a^4}; \quad \gamma = \frac{4Gq}{\pi a^4}.$$

Coroll. 1.

37. Si punctum V incidat in ipſum centrum circuli ſeu punctum A, habebitur preſſio in iſto puncto $= \frac{G}{\pi aa}$, euaneſcentibus ſcilicet x et v. Hinc vero patet punctum A eandem ſuſtinere preſſionem, vbicunque demum inciderit punctum O.

Coroll. 2.

38. Si punctum V cadat in ipſum punctum O, hincque fuerit $x = p$, $y = q$, habebitur preſſio in puncto

$$O = \frac{G}{\pi aa}\left(1 + \frac{4(pp+qq)}{aa}\right) = \frac{G}{\pi aa}\left(1 + \frac{4AO^2}{AB^2}\right)$$

Scholion.

39. Tot caſibus ſpecialibus hactenus euolutis, quibus hoc nouum argumentum haud mediocriter illuſtratur, nunc demum conueniet, ſolutionem maxime generalem tradere, quae principiis in Mechanicae meae Tractato Tertio expoſitis innititur.

Problema Generale.

Quamcunque figuram habuerit basis, qua pondus plano incumbit, determinare pressionem in singulis baseos elementis.

Solutio.

Tab. III. Fig. 14. 40. Repraesentet figura $E F e f$ basin propositam, cuius centrum grauitatis sit in puncto G, per quod ducti sint bini axes principales eiusdem figurae $E G e$ et $F G f$, quemadmodum in Mechanicae loco citato sunt constituti. Deinde secundum principia ibidem stabilita, quaerantur momenta inertiae respectu eorundem axium, quae scilicet reperiuntur, si singula baseos elementa in quadrata distantiarum ab iisdem axibus multiplicentur. Denotet igitur A aream totius huius basis $E F e f$ et respectu axis $E e$ sit momentum inertiae $= A . e e$ respectu autem alterius axis sit $= A f f$, tum vero media directio pressionis totalis incidat in punctum O, cuius distantiae ab axibus principalibus sint $O P = p$ et $O Q = q$. His praemissis, consideremus areae quodcunque elementum in y, pro quo vocentur coordinatae $G X = x$ et $X Y = y$, ex quibus ipsum areae elementum fit $d x . d y$. Iam quia G est centrum grauitatis totius figurae, bina haec integralia duplicata $\int\int x\, d x\, d y$ et $\int\int y\, d x\, d y$ per totam figuram extensa euanescunt. Deinde natura axium principalium in hoc consistit, vt haec formula $\int\int x y\, d x\, d y$ per totam figuram sumta etiam euanescat. Porro autem

autem formulae integrales per totam figuram extensae praebent:

I°. $\int\int dx\,dy = A$; II°. $\int\int yy\,dx\,dy = Aee$ et tertio $\int\int xx\,dy\,dx = Aff$.

Quodsi ergo secundum principia supra stabilita, pressionem in puncto Y ponamus

$$= \alpha + \beta x + \gamma y,$$

ita vt pressio in ipsum elementum $dxdy$ sit

$$\alpha\,dx\,dy + \beta x\,dx\,dy + \gamma y\,dx\,dy,$$

eius integrale ipsi pressioni totali, quae sit $= \Pi$, aequari debet, vnde quum sit

$$\int\int dx\,dy = A;\ \int\int x\,dx\,dy = 0 \text{ et } \int\int y\,dx\,dy = 0,$$

assequimur hanc aequationem primam $\Pi = \alpha A$. Momentum autem pressionis istius elementaris respectu axis Ee, quod est

$$= \alpha y\,dx\,dy + \beta xy\,dx\,dy + \gamma yy\,dx\,dy,$$

per duplicem integrationem dare debet momentum totius $= \Pi . OP = \Pi p$, vnde deducitur haec aequatio $\Pi . p = \gamma A . ee$. Eodem denique modo pro altero axe Ff colligitur tertia nostra aequatio, $\Pi q = \beta A . ff$, atque hinc sponte prodeunt sequentes valores

$$\alpha = \frac{\Pi}{A};\quad \beta = \frac{\Pi q}{A . ff};\quad \gamma = \frac{\Pi p}{A . ee},$$

ita vt iam pro puncto y pressio sit

$$= \frac{\Pi}{A}\left(1 + \frac{qx}{ff} + \frac{py}{ee}\right).$$

Quo indolem et varietatem harum pressionum, pro diuersis locis clarius perspiciamus, quaeramus

ramus primo omnia loca, vbi pressio plane euanescit, quae quum in hac aequatione generali $1 + \frac{qx}{ff} + \frac{py}{ee} = 0$ contineantur, euidens est, ea in linea recta esse disposita, ad quam inuestigandam, faciamus primo $x = 0$, eritque $y = -\frac{ee}{p}$, sumto autem $y = 0$, fit $x = -\frac{ff}{q}$. Quocirca si capiamus
Tab. III. Fig. 15. $GM = \frac{ee}{p}$ et $GN = \frac{ff}{q}$, in punctis M et N pressio erit nulla, ideoque etiam per totam rectam MN. Plerumque haec recta MN extra ipsam basin corporis cadit, sin autem per ipsam basin transiret, tum casus supra memoratus locum esset habiturus, vbi in quapiam basis portione pressio negatiua est inuenta, quod cum in praxi euenire nequeat, nostra solutio etiam ad praxin accommodari non poterit. Sumamus igitur totam rectam MN extra basin propositam cadere, atque euidens est, si in ipsa basi, vbicunque ducatur recta huic MN parallela mn, per totam hanc chordam mn pressionem vbique eandem fore, atque si per ipsum punctum G huiusmodi parallela agatur, per eam vbique similis pressio regnabit, tanta scilicet quanta est in ipso G, vbi $x = 0$ et $y = 0$, ita vt per hanc rectam pressio futura sit $= \frac{\Pi}{A}$. Egregie haec conueniunt cum iis quae initio, circa principium nostrum generale sunt proposita, haec enim recta MN vbi pressiones euanescunt, est ipsa illa intersectio (Fig. 3. FG), vbi planum omnes pressiones repraesentans, planum Tabulae intersecat, atque hinc manifestum est, per omnes rectas huic MN parallelas, pressiones eo fore

fore maiores quo magis fuerint a recta MN remotae. Sic quum in M pressio esset nulla, in G vero $\frac{\Pi}{A}$, in alio puncto μ erit $\frac{\Pi . N\mu}{A . MG}$, vnde manifesto sequitur in eo basis puncto, pressionem omnium fore maximam, quod a recta MN maxime fuerit remotum, quandoquidem pressiones per totam basin in ratione distantiarum a recta MN increscunt.

Coroll. 1.

41. Si punctum O incidat in ipsum centrum grauitatis basis, vt sit $p = o$ et $q = o$, tum puncta M et N in infinitum elongabuntur, ideoque per totam basin aequabiliter distribuetur, in singulis quippe punctis erit $= \frac{\Pi}{A}$ ob $\beta = o$ et $\gamma = o$.

Coroll. 2.

42. Quodsi punctum O in alterum axem principalem cadat veluti in P, vt sit $OP = p = o$ et $GP = q$, tum punctum M in infinitum distabit at $GN = \frac{ff}{q}$ ipsa ergo recta MN alteri axi principali Ff erit parallela, vbi scilicet pressio euanescit, et quia pressio per totum istum axem Ee est $= \frac{\Pi}{A}$, hinc pressio per omnes rectas huic axi parallelas facile definitur.

DE HARMONIAE VERIS PRINCIPIIS PER SPECVLVM MVSICVM REPRAESENTATIS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Omnis harmonia atque adeo vniuersa Musica, quatuor vel quinque consonantiis simplicibus, innititur, quibus Tirones huius artis aures assuescere et quas vel voce, vel instrumentis quam exactissime edere, sunt instruendi. Hae autem consonantiae sunt sequentes:

I°. Vnisonus; II°. Octaua siue Diapason; III^{tio} Quinta siue Diapente; IV^{to} Tertia maior; quibus quatuor antiqua Musica erat superstructa, recentior vero insuper quintam, quae nomine *septimae* insigniri solet, adoptasse videtur. Has igitur quinque consonantias, quasi columnas harmoniae aliquanto accuratius perpendamus, quandoquidem plerique, qui hanc scientiam tradere sunt conati, haec elementa nimis negligenter pertractarunt.

Vnisonus. 2. Incipiamus igitur ab vnisono, qui constat perfecta aequalitate duorum pluriumue sonorum musicorum; quum enim omnis sonitus motu vibratorio

torio siue tremore in aere excitato producatur, siue iste tremor fuerit aequabilis, siue inaequabilis, in Musica alii soni non admittuntur, nisi vbi omnes vibrationes inter se sunt isochronae, siue aequalibus tempusculis absoluuntur. Ita cuiuslibet soni Musici notionem adaequatam habebimus, quando nouerimus quot vibrationes dato tempore verbi gratia vno minuto secundo edantur; duo ergo pluresue soni qui vno minuto secundo eundem vibrationum numerum edunt, erunt vnisoni; ac cum soni ex numero vibrationum, quas dato tempore edunt, aestimari soleant, natura vnisoni in ratione aequalitatis erit constituenda, ii autem soni diuersi censentur, qui non aeque multas vibrationes eodem tempore edunt. Qui enim eodem tempore frequentiores vibrationes edunt, acutiores, qui autem pauciores, grauiores appellari solent.

3. Sonos autem eatenus tantum percipimus, quatenus illae vibrationes in aere excitatae, per aurem in organon auditus transmittuntur, auditus noster totidem quoque vibrationibus ad sentiendum ciebitur, vnde quando duo soni aequales simul offeruntur, hac ipsa ratione aequalitatis sensus noster svauitate quapiam afficietur, dum contra si ab hac ratione tantillum aberretur, molestiam quandam sentit. Perceptio autem sonorum aequalium omnibus hominibus ita a natura videtur ingenita, vt non solum hanc aequalitatem facillime agnoscant; sed etiam vel viua voce producere, vel in instrumentis efficere valeant; nihil enim facilius est, quam duas

chordas ita intendere, vt ſonos aequales edant, et minima aberratio auditui quaſi eſt intolerabilis.

Octaua. 4. Secunda conſonantia principalis octaua ſeu diapaſon dicta, tam prope ad naturam vniſoni accedit, vt qui datum ſonum vel ob grauitatem vel acumen aſſequi nequeunt, ſponte ſua ſonum octaua ſuperiorem vel inferiorem edant, vnde fit, vt in Muſica ſoni vna pluribusue octauis diſcrepantes pro ſimilibus habeantur, et paribus ſignis ſiue litteris deſignari ſoleant, ita ſi ſonus quispiam grauior littera A ſignetur, acutiores vna pluribusue octauis illum ſuperantes litteris a, $\bar{a}$, $\bar{\bar{a}}$, $\bar{\bar{\bar{a}}}$ etc. indicari ſolent.

5. Duo autem ſoni huiusmodi interuallo octauae diſtantes auditum gratiſſima harmonia afficiunt, ac tam egregio conſenſu gaudere videntur, vt propemodum pro vno eodemque ſono habeantur. Cauſſa autem huius pulcherrimae conſonantiae in eo eſt poſita, quod numeri vibrationum his ſonis editarum inter ſe rationem duplam teneant, vt ſi grauior vno minuto ſecundo centum vibrationes abſoluat, alter eodem tempore ducentas peragat, quae ratio vti ab intellectu facillime percipitur, ita etiam duo ſoni hanc inter ſe rationem tenentes auditum inſigni ſuauitate permulcent; quin etiam leuiſſima aberratio ab hac ratione ſenſum auditus maxime offendit, vnde etiam tirones facillime naturam huius conſonantiae addiſcunt. Quare quum omnes ſoni aptiſſime per numeros vibrationum, quas certo tempore edunt, repraeſententur, ſi ſonus A edat *a* vibra-

vibrationes, ſoni ſequentes a, $\bar{a}$, $\bar{\bar{a}}$, $\bar{\bar{\bar{a}}}$, edent, $2n$, $4n$, $8n$, $16n$ vibrationes.

6. Tertia conſonantia principalis quinta ſeu diapente dicta auribus quoque ſuauiſſimam harmoniam offert, etiamſi eius indoles a natura octauae plurimum diſſideat, atque etiam facultas hanc conſonantiam percipiendi et dignoſcendi, maiorem exercitationem poſtulat, vnde Tirones diligenter ſunt exercendi, vt hanc conſonantiam dignoſcere atque accurate ſiue voce ſiue inſtrumentis proferre addiſcant. Cauſſa autem huius conſonantiae in ratione tripla continetur, quae vti poſt rationem duplam facillime percipitur, ita etiam auribus poſt octauam gratiſſimam harmoniam exhibet; quum autem ratio $1:3$ maius interuallum vna octaua complectatur, ſi ſonus grauior fuerit A et numero vibrationum n deſignetur, is ſonus qui eodem tempore $3n$ vibrationes edit acutior erit ſono a, ſed tamen grauior quam $\bar{a}$, ſicque inter ſonos a et $\bar{a}$ incidet, atque ad illum a tenebit interuallum diapente dictum, ad ipſum autem ſonum A relatus interuallum ex vna octaua et quinta compoſitum conſtituet. Hinc igitur duo ſoni interuallo vnius quintae diſtantes, rationem tenent $2:3$. Quinta

7. Quum in ſcala ſonorum Muſicorum recepta, grauiſſimus littera C deſignari ſoleat, eiusque octauae litteris c, $\bar{c}$, $\bar{\bar{c}}$, $\bar{\bar{\bar{c}}}$, ſonus ipſo C vna quinta ſuperior deſignatur littera G eiusque octauae ſequen-

tes g, $\bar{g}$, $\bar{\bar{g}}$, $\bar{\bar{\bar{g}}}$ etc. Quodſi iam ſonum C numero quocunque n repraeſentemus, omnes iſti ſoni ſequentibus numeris ſubſcriptis exhibebuntur:

C,	G,	c	g,	$\bar{c}$,	$\bar{g}$,	$\bar{\bar{c}}$,	$\bar{\bar{g}}$,	$\bar{\bar{\bar{c}}}$,	$\bar{\bar{\bar{g}}}$
n,	$\frac{3}{2}n$,	$2n$,	$3n$,	$4n$,	$6n$,	$8n$,	$12n$,	$16n$,	$24n$.

Quum autem ratio 1 : 3 ſine dubio ſimplicior ſit ac facilius percipiatur, quam ratio 2 : 3, etiam in Muſica facilius erit, ad datum ſonum C, ſonum g producere, quam G, atque etiam auribus facilius erit interuallum ſonorum C : g agnoſcere et vel minimam aberrationem a vera ratione 1 : 3 quam in ipſo quintae interuallo C : G, vnde ſi inſtrumentum Muſicum chordis vel intendendis vel relaxandis, iuſte ſit inſtruendum, conſtituto ſono C formetur ſtatim ſonus g hincque per vnam octauam deſcendendo peruenietur ad ſonum G. Interim tamen exiguum exercitium ſufficiet, vt Tirones etiam immediate, ipſum interuallum vnius quintae C : G accurate efformare diſcant et quoniam ſonus G a ſono c interuallo vnius quartae diſtat, etiam merito poſtulamus, vt tirones quoque hoc interuallum quod ratione 3 : 4 continetur pernoſcant eiusque indolem auribus diiudicare aſſueſcant.

Tertia maior.

8. Quarta vero conſonantia principalis *tertia maior* dicta ſingularem quandam ſuauitatis ſpeciem auditui exhibet ad quam accurate dignoſcendam et ſiue voce, ſiue inſtrumentis producendam, Tirones inſigni ſtudio exerceri conueniet; continetur autem haec

haec conſonantia ratione 4 : 5, quae vti minus eſt ſimplex, quam praecedentes, ita etiam maiori exercitatione eſt elaborandum, vt ſenſus auditus illi agnoſcendae et diiudicandae aſſuefiat; in ſcala autem ſonorum ſolita, ſonus tanto interuallo ſuperans fundamentalem C littera E inſigniri ſolet, vnde ſi ſono C tribuatur numerus n huic E conueniet $\frac{5}{4}n$, hunc ergo cum ſuis octauis ſuperiori ordini inſuper adiungamus

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} C, & E, & G, & c, & e, & g, & \bar{c}, & \bar{e}, & g, & \bar{\bar{c}}, & \bar{\bar{e}}, & \bar{\bar{g}}, & \bar{\bar{\bar{c}}}, & \bar{\bar{\bar{e}}}, & \bar{\bar{\bar{g}}} \\ n, & \frac{5}{4}n, & \frac{3}{2}n, & 2n, & \frac{5}{2}n, & 3n, & 4n, & 5n, & 6n, & 8n, & 10n, & 12n, & 16n, & 20n, & 24n. \end{array}$$

9. Quia ratio 4 : 5 ab intellectu non tam facile percipitur quam ratio 2 : 5 vel adeo 1 : 5, etiam ſimili modo in Muſica pro dato ſono C facilius excitabitur ſonus e quam E, ac fortaſſe adhuc facilius ſonus $\bar{e}$, qui ſe habet ad C vt 5 : 1 ſiue autem ſonum e, ſiue $\bar{e}$ effecerimus, inde ſponte reliqui vel grauiores vel acutiores exhibebuntur.

10. Atque hae ſunt quatuor illae conſonantiae principales, quibus vniuerſa Muſica quondam fuit ſuperſtructa; recentiores autem inſuper quintam conſonantiam principalem introduxerunt quam ſeptimam minorem adpellare liceat, etiamſi in ſyſtemate ſonorum, quo inſtrumenta Muſica inſtitui ſolent, non occurrat. Continetur autem haec noua conſonantia ratione 4 : 7, quae quum parum diſcrepet a ratione 5 : 9 vel 9 : 16, alterutra harum loco illius 4 : 7 abuti ſolent, interim tamen imprimis vtile erit,

tirones

tirones in hac ratione 4 : 7 tam dignoſcenda quam diiudicanda exercere, vtrum ſcilicet ſoni hanc rationem accurate teneant nec ne, quocirca cum tales ſoni nondum in inſtrumentis habeantur, neceſſe erit huiusmodi ſonos rationem 4 : 7 tenentes ſuper monochordo excitare, atque aures iis aſſueſcere, quae inde non exiguam voluptatis ſpeciem perſentient.

11. Conſtitutis iam conſonantiis principalibus, quibus vniuerſa Muſica ſuperſtruitur, videamus cuiusmodi ſonos in inſtrumenta Muſica recipi conueniat, quandoquidem variatio qua haec ars plurimum delectatur p ures diuerſos ſonos requirit ſecundum vera principia harmoniae ſtabiliendos. Ac primo quidem aſſumto pro lubitu quopiam ſono F, quippe ex quo inſtrumentis Muſicis reliqui ſoni plerumque deducti videntur, quem numero $= n$ deſignemus, qui indicet quot vibrationes vno minuto ſecundo peragantur, ex eo per octauas aſcendendo nanciſcimur ſequentes ſonos ſuis numeris inſignitos:

$$f = 2n;\ \bar{f} = 4n;\ \bar{\bar{f}} = 8n;\ \bar{\bar{\bar{f}}} = 16n;\ \text{etc.}$$

At ſi liceat adhuc ad grauiores ſonos deſcendere, eos ita repraeſentare licet

$$\underline{F} = \tfrac{1}{2} n;\ \underline{\underline{F}} = \tfrac{1}{4} n;\ \underline{\underline{\underline{F}}} = 8\, n \ \text{etc.}$$

Tum vnicuique horum ſonorum adiungamus quintam ratione 2 : 3 contentam, atque ex F orietur ſonus numero $\frac{3}{2} n$ expreſſus quem Muſici littera c deſignare ſolent, vnde ſonus octaua grauior C numero

mero $\frac{3}{4}n$ exprimetur, ſicque adipiſcimur ſonorum ſeriem:

$$C = \tfrac{3}{4}n;\ c = \tfrac{3}{2}n;\ \bar{c} = 3n;\ \bar{\bar{c}} = 6n;\ \bar{\bar{\bar{c}}} = 12n \text{ etc.}$$

hoc ſcilicet modo a ſono fundamentali F per intervallum quintae aſcendimus, ſi iam ab his ſonis denuo per interuallum quintae aſcendamus, impetrabimus ſequentes nouos ſonos

$$G = \tfrac{9}{8}n;\ g = \tfrac{9}{4}n;\ \bar{g} = \tfrac{9}{2}n;\ \bar{\bar{g}} = 9n;\ \bar{\bar{\bar{g}}} = 18n \text{ etc.}$$

hinc denuo per tantum interuallum quintae aſcendamus ac prodibit ſequens nouorum ſonorum ſeries:

$$D = \tfrac{27}{32}n;\ d = \tfrac{27}{16}n;\ \bar{d} = \tfrac{27}{8}n;\ \bar{\bar{d}} = \tfrac{27}{4}n;\ \bar{\bar{\bar{d}}} = \tfrac{27}{2}n \text{ etc.}$$

Poſtquam autem per interuallum vnius quintae ter repetitum aſcenderimus, hic vlteriorem progreſſionem ſiſti oportet, ſi enim ſupra D denuo per quintam aſcendere vellemus, perueniremus ad ſonum numero $\frac{81}{64}$ expreſſum, qui nimis parum a ſono A per numerum $\frac{5}{4}n$ expreſſo diſcrepat, quam vt ambo ſimul in Muſicam introduci et a ſe inuicem diſtingui poſſent; at vero iſte ſonus $A = \frac{5}{4}n$, qui ad interuallum fundamentale tertiae maioris ſtat, neceſſario in Muſica inſignem occupat locum, quia alioquin haec egregia conſonantia penitus exſularet; quocirca a ſingulis ſonis iam conſtitutis inſuper per interuallum tertiae maioris aſcendamus, vnde reſultabunt ſequentes ſoni

ex F	$A = \frac{5}{4} n$;	$a = \frac{5}{2} n$;	$\bar{a} = 5 n$;	$\bar{\bar{a}} = 10 n$ etc.
C	$E = \frac{15}{16} n$;	$e = \frac{15}{8} n$;	$\bar{e} = \frac{15}{4} n$;	$\bar{\bar{e}} = \frac{15}{2} n$ etc.
G	$H = \frac{45}{32} n$;	$b = \frac{45}{16} n$;	$\bar{b} = \frac{45}{8} n$;	$\bar{\bar{b}} = \frac{45}{4} n$ etc.
D	$Fs = \frac{135}{128} n$;	$fs = \frac{135}{64} n$;	$\overline{fs} = \frac{135}{32} n$;	$\overline{\overline{fs}} = \frac{135}{16} n$ etc.

12. Hoc igitur modo ipſis harmoniae principiis ducti, peruenimus ad genus Muſicum, quod vulgo Diatonicum adpellari ſolet, niſi quod hic ſonus F*s* inſuper acceſſit, quem veteres omiſerunt, qui tamen nihilominus, in hoc genus neceſſario ingreditur, hos igitur ſonos genus diatonicum conſtituentes, cum ſuis numeris ordine conſpectui exponamus:

Sumamus numerum $= 128$, vbi commode vſu venit, vt ſonus F, cui numerum *n* tribuimus praeciſe 128 vibrationes vno minuto ſecundo abſoluit, quemadmodum experimenta chordis inſtituta docuere, hoc modo omnes numeri in ſequenti Tabula exhibiti ſimul oſtendent, quot vibrationibus quisque ſonus vno minuto ſecundo editis contineatur:

C =

C = 96	c = 192	$\bar{c}$ = 384	$\bar{\bar{c}}$ = 768	$\bar{\bar{\bar{c}}}$ = 1536
D = 108	d = 216	$\bar{d}$ = 432	$\bar{\bar{d}}$ = 864	$\bar{\bar{\bar{d}}}$ = 1728
E = 120	e = 240	$\bar{e}$ = 480	$\bar{\bar{e}}$ = 960	$\bar{\bar{\bar{e}}}$ = 1920
F = 128	f = 256	$\bar{f}$ = 512	$\bar{\bar{f}}$ = 1024	$\bar{\bar{\bar{f}}}$ = 2048
Fs = 135	fs = 270	$\overline{fs}$ = 540	$\overline{\overline{fs}}$ = 1080	$\overline{\overline{\overline{fs}}}$ = 2160
G = 144	g = 288	$\bar{g}$ = 576	$\bar{\bar{g}}$ = 1152	$\bar{\bar{\bar{g}}}$ = 2304
A = 160	a = 320	$\bar{a}$ = 640	$\bar{\bar{a}}$ = 1280	$\bar{\bar{\bar{a}}}$ = 2560
H = 180	b = 360	$\bar{b}$ = 720	$\bar{\bar{b}}$ = 1440	$\bar{\bar{\bar{b}}}$ = 2880
c = 192	$\bar{c}$ = 384	$\bar{\bar{c}}$ = 768	$\bar{\bar{\bar{c}}}$ = 1536	$\bar{\bar{\bar{c}}}$ = 3072

Atque ex hoc genere desumtae sunt denominationes'

I°. *Octauae* quia omiſſo ſono F s a C ad c octo numerantur ſoni, II^do *Quintae* quia a C ad G numerantur quinque ſoni, III^tio *Quartae* quia a C ad F numerantur quatuor ſoni, IV^to *Tertiae* quia a C ad E numerantur tres ſoni.

13. Quemadmodum hic ex quatuor ſonis primo conſtitutis F, C, G, D per interuallum tertiae maioris aſcendimus; ita ſi hunc ſaltum duplicemus denuo quatuor nouos ſonos adipiſcimur, quibus adiunctis genus Muſicum etiamnunc vſu receptum reſultat, quod genus diatonico-chromaticum adpellari ſolet, cuius originem ex hoc ſchematismo perſpicere licet:

Per tertiam ascend.	Per quintam ascendendo			
	F.	C.	G.	D
	A.	E.	H.	Fis
	Cis	Gis	Dis	B
	100	150	$112\frac{1}{2}$	$168\frac{3}{4}$.

Hic ſcilicet quatuor nouis ſonis debitos numeros ſubſcripſimus.

14. Ex hoc ſchemate luculenter perſpicitur, quemadmodum inſtrumenta Muſica ad iſtud ſonorum genus facillime accommodari oporteat, conſtituto ſcilicet ſono fundamentali F, ab eo per binas tertias maiores aſcendatur ad ſonos A et Cis, tum vero a quolibet horum trium ſonorum aſcendatur per ternas quintas ſicque omnes duodecim ſoni vnius octauae obtinebuntur, vnde facillime reliquae octauae omnes ſuis ſonis implebuntur, ſicque totum inſtrumentum ad veram harmoniam optime erit adtemperatum.

15. Conſpectui igitur omnes ſonos huius generis diatonico-chromaticos cum debitis numeris exponamus, atque vt fractiones euitemus praecedentes numeros quadruplicemus, tum vero etiam eosdem numeros per factores ſimplices repraeſentemus, quo ratio quam ſinguli inter ſe tenent facilius perſpiciatur, ſufficiet autem vnicam octauam hoc modo euoluiſſe:

ſigna

ſigna ſonorum	numeri debiti	per factores euoluti
C	384	$2^7 . 3$
Cis	400	$2^4 . 5^2$
D	432	$2^4 . 3^3$
Dis	450	$2 . 3^2 . 5^2$
E	480	$2^5 . 3 . 5$
F	512	2^9
Fis	540	$2^2 . 3^3 . 5$
G	576	$2^6 . 3^2$
Gis	600	$2^3 . 3 . 5^2$
A	640	$2^7 . 5$
B	675	$3^3 . 5^2 .$
H	720	$2^4 . 3^2 . 5$
c	768	$2^8 . 3 .$

16. Stabilitis igitur his ſonis vniuerſa Muſica eo reducitur, vt variis huiusmodi ſonis inter ſe coniungendis auditui grata harmonia offeratur, cuius natura atque indoles in perceptione conſonantiarum principalium ſupra expoſitarum eſt quaerenda, quandoquidem ab auribus ad Muſicam accommodatis plus non requiritur, quam vt conſonantias illas principales probe pernoſcant et vtrum ſint accuratae nec ne, diiudicare valeant. Vt primum enim hanc facultatem crebro exercitio ſuerint adepti, ab ipſa natura ſingularem quandam voluptatem perſentient. Initio autem quintam illam conſonantiam principalem ratione 4 : 7 contentam merito praetermittimus, cum in Muſicam ſoni illi ad eas pro-

 ducen-

ducendas apti nondum ſint introducti, ſed eorum loco Muſici aliis ſonis ab illis quidem parum diſcrepantibus, abuti ſoleant, ſed quia hoc modo puritas Harmoniae negligitur, merito dubitare licet an Muſica hoc modo ad maiorem perfectionis gradum ſit euecta. Caeterum vſum harum nouarum conſonantiarum, quemadmodum ab artificibus adhiberi ſoleant fuſius in Actis Regiae Academiae Boruſſicae explicaui.

17. A quolibet ergo ſono huius generis Muſici immediate ad alios ſonos tranſilire non licebit, niſi qui ab illo ſiue interuallo octauae, ſiue quintae vel etiam quartae, ſiue tertiae maioris fuerint remoti, quos ſaltus idcirco ſimplices adpellare liceat, in quo ipſo prima regula compoſitionis contineri eſt cenſenda; ſupra autem iam innuimus cum rationes 1 : 3 et 1 : 5 facilius percipiantur quam rationes 2 : 3 et 4 : 5 quibus propria interualla quintae et tertiae exprimuntur, ſaltum per haec interualla ſubleuari poſſe, id quod plenius oſtendiſſe iuvabit. Ita ſi a ſono f per quintam ad $\bar{c}$ ſit aſcendendum, id facilius fiet interpolando vel ſonum F, vel ſonum $\bar{c}$, hoc modo:

$f : F : \bar{c} :: 2 : 1$ vel etiam $f : \bar{\bar{c}} : \bar{c} :: 1 : 3$

$1 : 3$ $2 : 1$

Sin autem a ſono c per quartam ad ſonum f ſit tranſeundum, id commodiſſime ita fieri poterit:

$c : \bar{c} : F : f$

$1 : 2$

$3 : 1$

$1 : 2.$

Si

Si denique a ſono f per tertiam maiorem in a tranſilire oporteat, id hoc modo commodiſſime efficietur

$$\begin{array}{l} f : F : \bar{a} : a \\ \quad 2 : 1 \\ \qquad 1 : 5 \\ \qquad\quad 2 : 1. \end{array}$$

18. Merito autem ſenſum auditus iam ita perpolitum eſſe aſſumimus, vt immediate interualla quintae, quartae et tertiae maioris aſſequi et ſentire valeat, ita vt hos ſaltus tamquam ſimplices ſpectare queamus. In genere autem Muſico diatonico-chromatico non ab omnibus ſonis per haec interualla tranſire licet, quoniam ii ſoni ad quos eſſet perueniendum in noſtra ſcala non occurrunt, ita per interuallum quintae ab his tribus ſonis D, F s et B aſcendere non licet, tum vero per interuallum quartae a ſonis F, A et Cis aſcendere non licet, tumque per interuallum tertiae maioris ab his quatuor ſonis, Cis, Gis, Dis et B aſcendere non licet, neque vero per idem interuallum deſcendere a ſonis F, C, G et D; a reliquis vero omnibus praeter hos memoratos iſti tranſitus ſuccedunt.

19. Quando igitur a quopiam ſono per aliud quodcunque interuallum fuerit vel aſcendendum vel deſcendendum, id ſimplici ſaltu neutiquam exſequi licet, ſed tranſitum per duos pluresue ſaltus ſimplices inſtitui oportebit. Quo autem huiusmodi ſaltus compoſitos clarius ob oculos ponamus, ſignis idoneis vtamur:

vtamur: denotemus ſcilicet aſcenſum per interuallum quintae hoc modo + V, deſcenſum vero hoc modo − V, ſimilique modo hoc ſignum + III denotet aſcenſum per interuallum tertiae maioris, at − III deſcenſum per idem interuallum, atque his ſignis omnes tranſitus a quolibet ſono noſtrae ſcalae ad quemlibet alium, ſuccincte repraeſentare poterimus, proinde igitur hi tranſitus vel duobus, vel tribus, pluribusue ſaltibus ſiue per quintam, ſiue per tertiam fuerint expediendi, ordine euoluamus.

I. Tranſitus per + V + V ſeu per interuallum 8 : 9.

10. Iſtud interuallum 8 : 9 Tonus maior adpellari ſolet atque in noſtra ſcala ſequentia talia interualla occurrunt:

F : G : C : D

A : H : E : Fs

Cs : Ds : Gs : B.

Saltus ergo quibus haec interualla produci oportet ita ſe habebunt

F : G = (F : C) (C : G); C : D = (C : G) (G : D)

A : H = (A : E) (E : H); E : Fs = (E : H) (H : Fs)

Cs : Ds = (Cs : Gs) (Gs : Ds); Gs : B = (Gs : Ds) (Ds : B).

Hoc ſcilicet modo iſta interualla binis ſaltibus ſimplicioribus abſoluuntur. In Praxi quidem Muſica non ſemper opus eſt hos ſonos medios actu interpolare, nam ſi concentus pluribus vocibus conſtet, ſuffi-

ſufficit vt alia vox ſonum interpolandum edat, id quod a Practicis plerumque obſeruari ſolet. Sequeretur nunc tranſitus $-V-V$, interuallo $9:8$ conueniens, euidens autem eſt praecedentes tranſitus retro ſumtos huc eſſe referendos, vnde ſuperfluum foret eum ſeorſim euoluere, quod etiam de ſequentibus eſt intelligendum.

II. Tranſitus $+V+III$ ſeu per interuallum $16:15$.

21. Hoc interuallum $16:15$ ſemitonium maius adpellari ſolet atque in ſcala noſtra inter ſequentes ſonos occurrit:

F : E; C : H; G : Fs
A : Gs; E : Ds; H : B.

Singula autem haec interualla duplici modo reſolui poſſunt prouti bini ſaltus capiuntur, vel $+V+III$, vel ordine inuerſo:

	$+V+III$	$+III+V$
F : E =	(F : C) (C : E)	= (F : A) (A : E)
C : H =	(C : G) (G : H)	(C : E) (E : H)
G : Fs =	(G : D) (D : Fs)	(G : H) (H : Fs)
A : Gs =	(A : E) (E : Gs)	(A : Cs)(Cs : Gs)
E : Ds =	(E : H) (H : Ds)	(E : Gs)(Gs : Ds)
H : B =	(H : Fs)(Fs : B)	(H : Ds)(Ds : B)

Sin autem per ſemitonium maius deſcendere velimus, tantum opus eſt ſonos hic exhibitos ordine inuerſo collocare; quum igitur hi tranſitus duplicis ſint generis, in concentibus Muſicis haec ſemitonia Maiora duplici modo vſurpari poſſunt, dum ſcilicet ſoni hic interpolati, in aliis vocibus exprimuntur, atque hic diuerſus vſus etiam ad diuerſos modos Muſicos pertinere cenſetur, prout ſcilicet haec vel illa interpolatio adhibetur etiam ipſa harmonia aliam ſpeciem induit.

III. Tranſitus +V−III ſeu per interuallum 5:6 vel etiam 5:3.

22. Interuallum 5 : 6 vocatur tertia minor, alterum 5 : 3 ſexta maior, talia interualla in ſcala Muſica reperiuntur

A : C; E : G; H : D
Cs : E; Gs : H; Ds : Fs.

Tranſitus autem hic duplex datur, ſcilicet

	+V	−III	−III	+V
A : C	(A : E)	(E : C)	(A : F)	(F : C)
E : G	(E : H)	(H : G)	(E : C)	(C : G)
H : D	(H : Fs)	(Fs : D)	(H : G)	(G : D)
Cs : E	(Cs : Gs)	(Gs : E)	(Cs : A)	(A : E)
Gs : H	(Gs : Ds)	(Ds : H)	(Gs : E)	(E : H)
Ds : Fs	(Ds : B)	(B : Fs)	(Ds : H)	(H : Fs)

Hic duplex tranſitus ad tertiam minorem a Muſicis manifeſto ad diuerſos modos referri ſolet.

IV. Tranſitus +III+III ſeu per interuallum 16 : 25.

23. Hoc interuallum in Muſica parum conſuetum, ſub nomine quintae redundantis comprehendi

hendi ſolet, talia autem interualla in ſcala noſtra quatuor tantum ſequentia occurrunt:

$$F:Cs;\quad C:Gs;\quad G:ds;\quad D:B$$

quae ſingula vnico tantum modo reſoluuntur

$$F:Cs=(F:A)(A:Cs);\quad C:Gs=(C:E)(E:Gs)$$
$$G:ds=(G:H)(H:ds);\quad D:B=(D:Fs)(Fs:B).$$

Si prior ſonus octaua exaltetur vt interuallum fiat 32 : 25 id in Muſica ſiue tertia ſuperflua, ſiue quarta diminuta adpellari ſolet, caeterum denominatio in hoc negotio nullius plane eſt momenti. Si bini illi ſoni inuertantur, formulae hae ordine retrogrado tantum ſunt legendae.

V. Tranſitus $+V+V+V$ ſeu per interuallum 32 : 27 vel etiam 16 : 27.

24. Interuallum 32 : 27 etiam nomen tertiae minoris in Muſica obtinet, quod autem a praecedente, vno commate deficit. Talia interualla reperiuntur tria:

$$F:D;\quad A:Fs;\quad Cs:B$$

per quae datur vnicus tranſitus

$$F:D=(F:C)\ (C:G)\ (G:D)$$
$$A:Fs=(A:E)\ (E:H)\ (H:Fs)$$
$$Cs:B=(Cs:Gs)\ (Gs:Ds)\ (Ds:B).$$

VI. Tranſitus $+V+V+III$ ſeu per interuallum 32 : 45 vel 45 : 64.

25. Prius interuallum 32 : 45 dicitur quarta abundans, alterum 45 : 64 quinta deficiens, cuius-

iusmodi interualla in ſcala occurrunt ſequentia per quae triplices dantur tranſitus

F : H ; C : Fs ; A : Ds ; E : B

	+ V, + V, + III	+ V, + III, + V
F : H	(F : C)(C : G) (G : H)	(F : C)(C : E) (E : H)
C : Fs	(C : G)(G : D) (D : Fs)	(C : G)(G : H) (H : Fs)
A : Ds	(A : E)(E : H) (H : Ds)	(A : E)(E : Gs)(Gs : Ds)
E : B	(E : H)(H : Fs)(Fs : B)	(E : H)(H : Ds)(Ds : B)

+ III, + V, + V
(F : A) (A : E) (E : H)
(C : E) (E : H) (H : Fs)
(A : Cs)(Cs : Gs)(Gs : Ds)
(E : Gs)(Gs : Ds)(Ds : B)

VII. Tranſitus + V + V − III ſeu per interuallum 5 : 9 vel etiam 10 : 9.

26. Interuallum 5 : 9 vocatur ſeptima minor perinde ac 9 : 16, at vero interuallum 10 : 9 nomen habet toni minoris, talia interualla ſunt :

A : G ; E : D ; Cs : H ; Gs : Fs

per quae ſingula tranſitus etiam datur triplex

	+ V + V − III	+ V − III + V
A : G	(A : E) (E : H) (H : G)	(A : E) (E : C)(C : G)
E : D	(E : H) (H : Fs) (Fs : D)	(E : H) (H : G)(G : D)
Cs : H	(Cs : Gs)(Gs : Ds)(Ds : H)	(Cs : Gs)(Gs : E)(E : H)
Gs : Fs	(Gs : Ds)(Ds : B) (B : Fs)	(Gs : Ds)(Ds : H)(H : Fs)

− III + V + V
(A : F) (F : C)(C : G)
(E : C) (C : G)(G : D)
(Cs : A)(A : E)(E : H).
(Gs : E)(E : H)(H : Fs)

Qui

Qui tranſitus manifeſto ad ternos diuerſos modos ſunt referendi.

VIII. Tranſitus +III+III+V ſeu per intervallum 64 : 75.

27. Hoc interuallum denuo tertia minor vocatur, cum tamen fere duobus commatibus deficiat, a vera ratione 5 : 6. Talia interualla ſunt tria

F : Gs; C : Ds; G : B

tranſitus autem triplici modo inſtitui poteſt vt ſequitur:

	+III	+III	+V	+III	+V	+III
F : Gs	(F : A)	(A : Cs)	(Cs : Gs)	(F : A)	(A : E)	(E : Gs)
C : Ds	(C : E)	(E : Gs)	(Gs : Ds)	(C : E)	(E : H)	(H : Ds)
G : B	(G : H)	(H : Ds)	(Ds : B)	(G : H)	(H : Fs)	(Fs : B)

+V	+III	+III
(F : C)	(C : E)	(E : Gs)
(C : G)	(G : H)	(H : Ds)
(G : D)	(D : Fs)	(Fs : B).

IX. Tranſitus +III, +III−V ſeu per intervallum 24 : 25.

28. Hoc interuallum minus eſt ſemitonio et Limma minus vocari ſolet, cuiusmodi ſunt tria ſequentia:

C : Cs, G : Gs; D : Ds

vbi quodlibet admittit ternos ſaltus:

	+III	+III	−V	+III	−V	+III
C : Cſ	(C : E)	(E : Gſ)	(Gſ : Cſ)	(C : E)	(E : A)	(A : Cſ)
G : Gſ	(G : H)	(H : Dſ)	(Dſ : Gſ)	(G : H)	(H : E)	(E : Gſ)
D : Dſ	(D : Fſ)	(Fſ : B)	(B : Dſ)	(D : Fſ)	(Fſ : H)	(H : Dſ)

−V	+III	+III
(C : F)	(F : A)	(A : Cſ)
(G : C)	(C : E)	(E : Gſ)
(D : G)	(G : H)	(H : Dſ).

29. Simili modo tranſitus magis complicatos, qui ſunt

$$+V+V+V\pm III\,;\ +V+V\pm III\pm III$$
$$+V+V+V\pm III\pm III,$$

facile euoluere liceret, verum omnes huiusmodi tranſitus multo clarius et concinnius obtutui repraeſentari poſſunt per ſchematiſmum ſupra § 13. allatum, quem ergo ad hunc ſcopum accommodatum ob eximium eius vſum *ſpeculum Muſicum* adpellare liceat:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & G \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & D \arrow[d, dash] \\
A \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & E \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & H \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & F\mathit{s} \arrow[d, dash] \\
C\mathit{s} \arrow[r, dash] & G\mathit{s} \arrow[r, dash] & D\mathit{s} \arrow[r, dash] & B.
\end{tikzcd}$$

Hoc ſcilicet ſpeculum inſpicienti, ſtatim patet, quinam ſaltus a quolibet ſono, ad quemlibet alium perducant, ſimulque quot modis quilibet tranſitus inſtitui poſſit, tantum enim ſecundum ductum linearum ſiue horizontalium ſiue verticalium eſt procedendum, vbi horizontales ſaltum per quintam, verti-

verticales autem per tertiam declarant. Ita ſi a ſono F ad ſonum B eſſet tranſeundum, id decem diuerſis modis fieri poſſe facile patet, qui ſunt

I°. F : C : G : D : Fs : B
II°. F : C : G : H : Fs : B
III. F : C : G : H : Ds : B
IV. F : C : E : H : Fs : B
V. F : C : E : H : Ds : B
VI. F : C : E : Gs : Ds : B
VII. F : A : E : H : Fs : B
VIII. F : A : E : H : Ds : B
IX. F : A : E : Gs : Ds : B
X. F : A : Cs : Gs : Ds : B.

30. Ope huius ſpeculi etiam quaeſtio in Muſica non parum curioſa reſolui poteſt, quemadmodum ſcilicet omnes duodecim ſonos ſcalae Muſicae percurri oporteat per ſaltus ſimplices quintam nempe et tertiam maiorem, vt ſingulis ſemel tantum impulſis, reuerſio fiat ad primum ſonum a quo curſus fuit inceptus, talis autem progreſſio in ſe rediens duplici modo inſtitui poteſt

I. Circulatio F:C:G:D:Fs:B:Ds:H:E:Gs:Cs:A:F
II. Circulatio F:C:E:H:G:D:Fs:B:Ds:Gs:Cs:A:F.

Ex eodem quoque ſpeculo ſtatim patet pro quibusnam ſonis ſcalae Muſicae detur trias harmonica, ſiue modi duri, ſiue modi mollis, terni enim ſoni triadem primi generis conſtituent, qui tali gnomone exprimuntur, qui autem tali gnomone indicantur,

tur, triadem mollem conſtituunt. Ecce ergo ſequentes triades modi duri:

F, A, C; C, E, G; G, H, D;
A, Cs, E; E, Gs, H; H, Ds, Fs.

Triades autem modi mollis erunt

A, C, E; E, G, H; H, D, Fs
Cs, E, Gs; Gs, H, Ds; Ds, Fs, B

vtriusque ſcilicet modi tres dantur triades harmoniae purae.

31. Dum autem hic alias conſonantias ſimplices praeter octauam, quintam et tertiam maiorem non admittimus, neutiquam conſonantias magis compoſitas, neque etiam diſſonantias vt quidem a Muſicis vocantur, reiicimus; quin potius earum reſolutionem in ſaltus ſimplices eum in finem hic docuimus, vt pateret quo modo iſtae conſonantiae vel etiam diſſonantiae in vſum vocari atque ab auribus percipi ac diiudicari queant; eatenus enim tantum conſonantiis magis compoſitis et diſſonantiis locus in Muſica conceditur, quatenus eas in conſonantias ſimplices reſoluere licet. At qui regulis hic traditis vti voluerit, ante omnia curare debet, vt inſtrumentum Muſicum exacte ad eos ſonos ſit attemperatum, quos harmonia poſtulat, et quemadmodum in noſtro ſpeculo Muſico ſunt repraeſentati.

32. Omni autem iure aſſumere videmur, cunctas conſonantias hic expoſitas in inſtrumentis Muſicis tam exacte exhiberi, vt ne minima quidem

aberra-

aberratio ſentiri poſſit. Ab hac ergo regula ad harmoniam producendam maxime neceſſaria ii Muſici plurimum receſſerunt, qui interuallum vnius octauae in duodecim partes aequales, diſtribuendum eſſe putarunt; quoniam hoc modo concentum Muſicum in omnes alios ſonos transponere liceret. Quum autem hoc modo in tota ſcala Muſica, nulla quinta pura daretur, et omnes tertiae maiores a vera ratione non mediocriter aberrarent, etiam haec opinio nunc quidem a plerisque Muſicis eſt exploſa, quippe qui facile agnouerunt a veris harmoniae principiis in gratiam transpoſitionis, nullatenus recedi oportere. Denique conſuetus modus pueros in Muſica inſtruendi a principiis harmoniae maxime eſt alienus, quomodo enim poſtulari poteſt vt Tirones ſonos *vt re mi fa ſol la* intonare addiſcant; quum in hac progreſſione *vt* : *re* ſit tonus maior, ſequens *re* : *mi* tonus minor, tum vero *mi* : *fa* ſemitonium maius, quae interualla nequidem exercitatiſſimi Muſici edere valent, niſi vel inſtrumentis vel reſolutione in ſaltus ſimplices adiuti; quin potius ergo Tirones ſtatim ab initio eſſent omni ſtudio exercendi, vt conſonantias ſimplices ſcilicet octauam, quintam et tertiam maiorem efferre addiſcerent, ſic enim hoc ipſo exercitio iudicium aurium acuent et voluptati ex his conſonantiis percipiendae magis magisque aſſueſcerent.

NOVA METHODVS MOTVS PLANETARVM PRINCIPALIVM AD TABVLAS ASTRONOMICAS REDVCENDI.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Tab. III. Fig. 16. Repraesentet Tabula planum eclipticae, in quo punctum S sit centrum Solis, et recta SA ad fixa et ad punctum aequinoctiale vernum directa. Versetur iam Planeta in loco quocunque Z extra eclipticam, vnde eo demittatur perpendiculum ZY, et ex Y ad rectam SA agatur normalis YX, ita vt locus planetae determinetur his tribus coordinatis

$$SX = x, \; XY = y \;\text{ et }\; YZ = z;$$

tum vero ponatur breuitatis gratia distantia a Sole

$$= \sqrt{(xx + yy + zz)} = v.$$

2. Quodsi iam massa Solis sit $= S$, et elementum temporis dt constans assumatur, quoniam vis, qua Planeta ad Solem vrgetur, est $= \frac{S}{vv}$, pro motu Planetae habebimus tres sequentes aequationes:

$$\text{I. } \frac{ddx}{dt^2} + \frac{Sx}{v^3} = 0; \quad \text{II. } \frac{ddy}{dt^2} + \frac{Sy}{v^3} = 0; \quad \text{III. } \frac{ddz}{dt^2} + \frac{Sz}{v^3} = 0$$

vbi

vbi notasse iuuabit, si tempus t per motum anomaliae mediae Solis exprimatur, et distantia media terrae a Sole vnitate designetur, tum fore $S = 1$.

3. Ad tempus propositum exhibeat recta S B longitudinem mediam Planetae, ac ponatur angulus $ASB = p$, qui quum sit tempori proportionalis, statuatur $dp = m\,dt$, ducta ex Y ad hanc directionem S B normali Yx vocentur nouae coordinatae

$$Sx = X,\ Yx = Y \quad \text{et} \quad Yz = Z$$

eritque itidem

$$vv = XX + YY + ZZ,$$

tum vero erit

$$X = x\cos.p + y\sin.p;\ \text{et}\ Y = y\cos.p - x\sin.p\ \text{et}\ Z = z$$

hinc erit differentiando

$$dX = dx\cos.p + dy\sin.p + m\,dt(y\cos.p - x\sin.p) = dx\cos.p + dy\sin.p + mY\,dt$$

$$\text{et}\ dY = dy\cos.p - dx\sin.p - mX\,dt,$$

ita vt sit

$$dx\cos.p + dy\sin.p = dX - mY\,dt;\ dy\cos.p - dx\sin.p = dY + mX\,dt$$

quae formae denuo differentiatae praebent

$$ddx\cos.p + ddy\sin.p + m\,dt(dY + mX\,dt) = ddX - m\,dY\,dt$$

$$ddy\cos.p - ddx\sin.p - m\,dt(dX - mY\,dt) = ddY + m\,dX\,dt.$$

4. Quum nunc ex superioribus formulis posito $S = 1$, sit

$$ddx = -\frac{x\,dt^2}{v^3} \quad \text{et} \quad ddy = -\frac{y\,dt^2}{v^3}$$

si hi valores ibi substituantur ob

$$x^2 + y^2 = XX + YY$$

Yy 2 habe-

habebimus has aequationes

$$-\frac{X\,dt^2}{v^3}+m^2 X\,dt^2 = ddX - 2m\,dY\,dt$$

$$-\frac{Y\,dt^2}{v^3}+m^2 Y\,dt^2 = ddY + 2m\,dX\,dt$$

quae redigantur ad sequentes formas

$$\frac{ddX}{dt^2}-\frac{2m\,dY}{dt}-m^2 X+\frac{X}{v^3}=0$$

$$\frac{ddY}{dt^2}+\frac{2m\,dX}{dt}-m^2 Y+\frac{Y}{v^3}=0.$$

Vbi natura motus medii postulat, vt Y nunquam vltra certum terminum excrescat, atque etiam ipsa quantitas x intra certos limites contineatur pro magnitudine excentricitatis, tertia vero aequatio manet vt ante

$$\frac{ddZ}{dt^2}+\frac{Z}{v^3}=0.$$

5. Designet a distantiam mediam Planetae a Sole et quia X non multum ab ea discrepat, statuamus

$$X=a(1+x) \quad \text{et} \quad Y=ay,$$

similique modo $Z=az$, hic scilicet assumo harum litterarum x, y, z valores superiores iam obliuioni esse traditos, atque hinc statim habemus

$$v=a\sqrt{((1+x)^2+yy+zz)},$$

ex quo tres nostrae aequationes ita se habebunt

$$\text{I.}\quad \frac{ddx}{dt^2}-\frac{2m\,dy}{dt}-m^2(1+x)+\frac{(1+x)}{a^3((1+x)^2+yy+zz)^{\frac{3}{2}}}=0$$

$$\text{II.}\quad \frac{ddy}{dt^2}+\frac{2m\,dx}{dt}-m^2 y+\frac{y}{a^3((1+x)^2+yy+zz)^{\frac{3}{2}}}=0$$

$$\text{III.}\quad \frac{ddz}{dt^2}+\frac{z}{a^3((1+x)^2+yy+zz)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

6. Quo-

6. Quoniam quantitates x, y et z ſpectantur vt valde paruae prae vnitate; formula irrationalis

$$\frac{1}{((1+x)^2+yy+zz)^{3:2}}$$

commode reſoluitur in hanc ſeriem conuergentem:

$$\frac{1}{(1+x)^3} - \frac{3(yy+zz)}{2(1+x)^5} + \frac{15(yy+zz)^2}{8.(1+x)^7} \text{ etc.}$$

et euolutis poteſtatibus negatiuis $1+x$, terminisque ſecundum dimenſiones diſpoſitis habebimus

$$1, -3x, +6x^2 - \tfrac{3}{2}yy - \tfrac{3}{2}zz, +10x^3 + \tfrac{15}{2}xyy + \tfrac{15}{2}xzz,$$
$$+15x^4 - \tfrac{45}{2}xxyy - \tfrac{45}{2}xxzz + \tfrac{15}{8}y^4 + \tfrac{15}{4}yyzz + \tfrac{15}{8}z^4, \text{etc.}$$

pro qua expreſſione breuitatis gratia ſcribamus $1-3x+W$ ita vt ſit

$$W = +6xx - \tfrac{3}{2}yy - \tfrac{3}{2}zz - 10x^3 + \tfrac{15}{2}xyy + \tfrac{15}{2}xzz + 15x^4$$
$$- \tfrac{45}{2}xxyy - \tfrac{45}{2}xxzz + \tfrac{15}{8}y^4 + \tfrac{15}{4}yyzz + \tfrac{15}{8}z^4 \text{ etc.}$$

ſicque noſtrae aequationes erunt

$$\text{I. } \frac{ddx}{dt^2} - \frac{2mdy}{dt} - m^2(1+x) + \frac{1}{a^3}(1+x) - \frac{3x}{a^3}(1+x) + \frac{1+x.W}{a^3} = 0$$

$$\text{II. } \frac{ddy}{dt^2} - \frac{2mdx}{dt} - m^3 y + \frac{1}{a^3}y - \frac{3xy}{a^3} + \frac{yW}{a^3} = 0$$

$$\text{III. } \frac{ddy}{dt^2} + \frac{1}{a^3}z - \frac{3}{a^3}.xz + \frac{1}{a^3}.zW = 0.$$

7. Hactenus quantitas a aliter non eſt definita, niſi quod valorem quendam medium inter omnes abſciſſas X deſignet, ita vt quantitas x valores modo poſitiuos modo negatiuos ſortiretur, id quod infinitis modis fieri poſſet, dummodo a non multum a diſtantia media diſcreparet. Nunc autem conueniet ſtatui $\frac{1}{a^3} = mm$, quandoquidem hoc modo termini maiores in noſtris aequationibus deſtruuntur, calculusque ad noſtram hypotheſin, qua x ſumitur quantitas

valde parua modo positiua modo negatiua reuocatur, hoc modo nostrae aequationes in formas sequentes contrahentur

$$\text{I.}\ \frac{ddx}{dt^2} - \frac{2m\,dy}{dt} - 3m^2x(1+x) + mm(1+x)W = 0$$

$$\text{II.}\ \frac{ddy}{dt^2} + \frac{2m\,dx}{dt} - 3m^2xy \quad + mmyW = 0$$

$$\text{III.}\ \frac{ddz}{dt^2} + mmz - 3m^2xz + mmzW = 0.$$

8. Quoniam quantitates x, y et z per hypothesin prae vnitate sunt valde paruae, reiiciamus primo omnes terminos duas pluresue dimensiones harum quantitatum continentes sicque consequemur tres sequentes aequationes

$$\text{I.}\ \frac{ddx}{dt^2} - \frac{2m\,dy}{dt} - 3m^2x = 0$$

$$\text{II.}\ \frac{ddy}{dt^2} + \frac{2m\,dx}{dt} \quad = 0$$

$$\text{III.}\ \frac{ddz}{dt^2} + mmz \quad = 0$$

quarum duas priores, quoniam non amplius continent z, seorsim tractare licet, atque adeo commode vsu venit, vt secunda per se sit integrabilis, dum eius integratio praebet $\frac{dy}{dt} + 2mx = \text{Const.}$, quam constantem quemadmodum comparatam esse oportet, hic accuratius est inuestigandum. Maneat ea primo indeterminata, vt sit

$\frac{dy}{dt} = C - 2mx$ qui valor in prima substitutus praebet

$\frac{ddx}{dt^2} + mmx - 2mC = 0$, cuius integrale completum est

$x = \frac{2C}{m} + \alpha \cos. q$ existente $dq = m\,dt$,

iam hic valor in altera surrogatus praebebit

$\frac{dy}{dt} = -3C - 2m\alpha \cos. q$ et et integrando

$$y = -3Ct - 2\alpha \sin. q + D,$$

vbi ſtatim liquet conſtantem C euaneſcere debere, quia alioquin quantitas y continuo maior eſſet euatura, quod indoli motus medii aduerſaretur, ex quo ſequitur, ſi poſitio rectae S B rite fuerit conſtituta, neceſſario eſſe oportere $C = 0$, deinde etiam perſpicuum eſt, et alteram conſtantem D tuto ſumi poſſe $= 0$, quippe quod in idea longitudinis mediae pariter inuoluitur, ſicque pro hoc caſu habebimus

$$x = \alpha \operatorname{cof.} q \quad \text{et} \quad y = -2\alpha \sin. q.$$

9. Euoluto hoc caſu, quo termini duarum, pluriumue dimenſionum negliguntur, ſi iis admiſſis, loco x et y hos inuentos valores

$$x = \alpha \operatorname{cof.} q \quad \text{et} \quad y = -2\alpha \sin. q$$

exiſtente $dq = m\,dt$ ſubſtituamus et producta Sinuum et Coſinuum ad ſimplices Sinus vel Coſinus reuocemus, in prima aequatione termini hactenus neglecti deducent ad ſeriem certorum Coſinuum, in altera autem aequatione ad ſimilem ſeriem certorum Sinuum, propter quos deinde tam x, quam y ſimiles Sinus Coſinusue complecti debebunt, qui quomodo facile definiri queant, generatim oſtendiſſe iuuabit.

10. Ponamus igitur per approximationem iam pro x et y, quin etiam pro z certos huiusmodi valores eſſe inuentos, eosque in terminis minoribus, ſeu iis qui duas pluresue continent dimenſiones, tam primae quam ſecundae aequationis ſubſtitui,

ſtitui, atque in priore quidem aequatione occurrere terminum $+ M \operatorname{cof.} \omega$, in altera vero talem $N \operatorname{fin.} \omega$ exiſtente $d\omega = \mu\, dt$ et quoniam quicquid de his terminis trademus ſimul quoque ad quotcunque ſimiles extendi poteſt, conſideremus primo ſecundam aequationem:

$$\frac{ddy}{dt^2} + \frac{2m\,dx}{dt} + N \operatorname{fin.} \omega = 0$$

quae integrata dat

$$\frac{dy}{dt} + 2mx - \frac{N}{\mu} \operatorname{cof.} \omega = 0 \quad \text{fiue} \quad \frac{dy}{dt} = -2mx + \frac{N}{\mu} \operatorname{cof.} \omega$$

qui valor in prima ſubſtitutus praebet

$$\frac{ddx}{dt^2} + mmx - \frac{2mN}{\mu} \operatorname{cof.} \omega + M \operatorname{cof.} \omega = 0$$

vnde colligitur

$$x = \frac{M - \frac{2mN}{\mu}}{\mu\mu - mm} \operatorname{cof.} \omega,$$

quo inuento erit

$$\frac{dy}{dt} = -2mL \operatorname{cof.} \omega + \frac{N}{\mu} \operatorname{cof.} \omega$$

exiſtente

$$L = \frac{M - \frac{2mN}{\mu}}{\mu\mu - mm}$$

vnde fit

$$y = \left(-\frac{2mL}{\mu} + \frac{N}{\mu\mu}\right) \operatorname{fin.} \omega$$

hos ſcilicet terminos, praeter iam inuentos ad x et y adiici oportet.

11. Vt argumentum hoc ordine pertractemus, quoniam in terminis ſecundae dimenſionis iam occurrit zz, cuius valorem demum ex tertia aequatione

tione elici oportet, primo ſtatuamus $z = 0$, vt hoc modo tertia aequatio prorſus ex calculo eliminetur; ſeu quod eodem redit, primo caſum quo Planeta in ipſo plano Eclipticae mouetur euoluamus.

Caſus prior quo Planeta in ipſo plano Eclipticae mouetur.

12. Quum igitur hic ſit $z = 0$ motus Planetae his duabus aequationibus euolutis, continebitur

$$\text{I. } \frac{ddx}{dt^2} - \frac{2m\,dy}{dt} - 3mmx, + 3mmxx - \tfrac{3}{2}mmyy$$
$$- 4mmx^3 + 6mmxyy, + 5mmx^4 - \tfrac{15}{2}mmxxyy + \tfrac{15}{8}mmy^4$$
$$\text{II. } \frac{ddy}{dt^2} + \frac{2m\,dx}{dt};\ - 3m^2yx, + 6m^2xxy - \tfrac{3}{2}m^2y^3, - 10m^2x^2y + \tfrac{15}{2}mmy^4$$

quibus aequationibus iam proxime ſatisfieri vidimus, ſumendo

$$x = k\cos q \quad \text{et} \quad y = -2k\sin q,$$

exiſtente $dq = m\,dt$; ob ſequentes vero terminos euenire poſſet, vt $\frac{dq}{dt}$ non foret $= m$ ſed alii cuipiam numero ita comparato, vt omnes plane termini formae $\cos q$, etiam ex minoribus membris oriundi deſtruerentur. Verum ex natura huius motus iam conſtat lineam apſidum quieſcere ideoque motum anomaliae mediae quae eſt q ipſi motui medio eſſe aequalem. De caetero quia hic q exprimit anomaliam mediam, littera k exhibet excentricitatem orbitae.

13. Hic autem aſſumimus excentricitatem k ſatis eſſe exiguam, quia alioquin coordinatae x et y,

 nimis

nimis augeri possent. Admittamus iam etiam terminos secundae dimensionis et pro prima aequatione habebimus

$$1+3mmxx = 3mmk^2\cos. q = \tfrac{3}{2}mmkk + \tfrac{3}{2}mmkk\cos. 2q$$

$$-\tfrac{3}{2}mmyy = -3mmkk + 3mmkk\cos. 2q \text{ ideoque coniunctim}$$

$$-\tfrac{3}{2}mmkk + \tfrac{9}{2}mmkk\cos. 2q.$$

Pro secunda aequatione autem

$$-3m^2xy = +3mmkk\sin. 2q.$$

Hic primo notandum terminum illum constantem $-\frac{3}{2}mmkk$ per principalem $-3mmx$ tolli debere, vnde hinc fit $x = -\frac{1}{2}kk$, pro angulo autem $2q$, comparatione cum superiori regula instituta erit

$$\omega = 2q,\; M = +\tfrac{9}{2}mmkk,$$

$N = +3mmkk$, atque $\mu = 2m$, vnde colligimus $x = \frac{kk}{2}\cos. 2q$ ideoque $L = +\frac{kk}{2}$ ex quo denique fit

$$y = +\tfrac{1}{4}kk\sin. 2q.$$

14. Vocemus has partes, quas modo tam pro x, quam pro y inuenimus, secundi ordinis; siquidem quadratum excentricitatis k inuoluunt, ita vt nunc coniunctim habeamus

$$x = k\cos. q,\; -\tfrac{1}{2}kk + \tfrac{1}{2}kk\cos. 2q \text{ et}$$
$$y = -2k\sin. q,\; +\tfrac{1}{4}kk\sin. 2q.$$

Quod si iam simili modo sequentes partes indagare velimus, quo eas a se inuicem clarius distinguamus, statuamus in genere

$$x = k.\mathfrak{P} + kk\,\mathfrak{Q} + k^3.\mathfrak{R} + k^4\,\mathfrak{S} \text{ etc.}$$
$$y = k.P + kkQ + k^3.R + k^4S \text{ etc.}$$

vbi

vbi quidem iam conſtat eſſe

$$\mathfrak{P} = \text{coſ. } q; \quad \mathfrak{Q} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\text{coſ. } 2q; \quad P = -2 \text{ ſin } q; \quad Q = +\tfrac{1}{4}\text{ ſin. } 2q.$$

15. Subſtituamus autem valores iſtos aſſumtos in vtraque aequatione et membris ſecundum dimenſionem ipſius k a ſe inuicem disiunctis nanciſcemur ſequentes aequationes.

I. Ordo

$$k \begin{cases} \frac{dd\mathfrak{P}}{mmdt^2} - \frac{2dP}{mdt} - 3\mathfrak{P} = 0 \\ \frac{ddP}{mmdt^2} + \frac{2d\mathfrak{P}}{mdt} = 0 \end{cases}$$

II. Ordo

$$kk \begin{cases} \frac{dd\mathfrak{Q}}{mmdt^2} - \frac{2dQ}{mdt} - 3\mathfrak{Q} + 3\mathfrak{P}^2 - \frac{3}{2}P^2 = 0 \\ \frac{ddQ}{mmdt^2} + \frac{2d\mathfrak{Q}}{mdt} - 3\mathfrak{P}P = 0 \end{cases}$$

III. Ordo

$$k^3 \begin{cases} \frac{dd\mathfrak{R}}{mmdt} - \frac{2dR}{mdt} - 3\mathfrak{R} + 6\mathfrak{P}\mathfrak{Q} - 3PQ - 4\mathfrak{P}^3 + 6\mathfrak{P}P^2 = 0 \\ \frac{ddR}{mmdt^2} + \frac{2d\mathfrak{R}}{mdt} - 3\mathfrak{P}Q - 3P\mathfrak{Q} + 6\mathfrak{P}^2P - \frac{3}{2}P^3 = 0 \end{cases}$$

IV. Ordo

$$k^4 \begin{cases} \frac{dd\mathfrak{S}}{mmdt^2} - \frac{2dS}{mdt} - 3\mathfrak{S} + 6\mathfrak{P}\mathfrak{R} + 3\mathfrak{Q}^2 - 3PR - \frac{3}{2}Q^2 - 12\mathfrak{P}^2\mathfrak{Q} + 12\mathfrak{P}PQ \\ \qquad + 6\mathfrak{Q}P^2 + 5\mathfrak{P}^4 - 15\mathfrak{P}^2.P^2 + \frac{15}{8}P^4 = 0 \\ \frac{ddS}{mmdt^2} + \frac{2d\mathfrak{S}}{mdt} - 3\mathfrak{P}R - 3\mathfrak{Q}Q - 3P\mathfrak{R} + 12\mathfrak{P}P\mathfrak{Q} + 6\mathfrak{P}^2Q - \frac{9}{2}P^2.Q \\ \qquad - 10\mathfrak{P}^3.P + \frac{15}{2}P^3\mathfrak{P} = 0. \end{cases}$$

16. Quoniam aequationes primi et ſecundi ordinis iam expediuimus, aggrediamur binas aequationes tertii ordinis, et quia iam habemus

$$\mathfrak{P} = \text{coſ. } q; \qquad \mathfrak{Q} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\text{coſ. } 2q$$
$$P = -2\text{ ſin. } q; \quad Q = \qquad +\tfrac{1}{4}\text{ ſin. } 2q$$

 pro

pro priore aequatione inueniemus

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = -\tfrac{1}{4}\operatorname{cos.} q + \tfrac{1}{4}\operatorname{cos.} 3q$$

$$PQ = -\tfrac{1}{4}\operatorname{cos.} q + \tfrac{1}{4}\operatorname{cos.} 3q;$$

$$\mathfrak{P}^3 = +\tfrac{3}{4}\operatorname{cos.} q + \tfrac{1}{4}\operatorname{cos.} 3q; \quad \mathfrak{P}P^2 = \operatorname{cos.} q - \operatorname{cos.} 3q.$$

hinc iunctim $\frac{9}{4}\operatorname{cos.} q - \frac{25}{4}\operatorname{cos.} 3q$

Simili modo pro posteriori aequatione

$$\mathfrak{P}Q = +\tfrac{1}{8}\operatorname{sin.} q + \tfrac{1}{8}\operatorname{sin.} 3q; \quad P\mathfrak{Q} = +\tfrac{3}{2}\operatorname{sin.} q - \tfrac{1}{2}\operatorname{sin.} 3q$$

$$\mathfrak{P}^2 P = -\tfrac{1}{2}\operatorname{sin.} q - \tfrac{1}{2}\operatorname{sin.} 3q; \quad P^3 = -6\operatorname{sin.} q + 2\operatorname{sin.} 3q$$

iunctim $\frac{9}{8}\operatorname{sin.} q. - \frac{39}{8}\operatorname{sin.} 3q.$

17. Consideremus hic primo angulum q, vt sit $\omega = q$ et $\mu = m$, tum vero

$$M = +\tfrac{9}{4}mm \quad \text{et} \quad N = +\tfrac{9}{8}mm,$$

vnde quia quod ante erat x vel y; hic est vel $\mathfrak{R}$ vel R, elicimus

$$\mathfrak{R} = \frac{\frac{9}{4}mm - \frac{9}{4}mm}{mm - mm}\operatorname{cos.} q = \tfrac{0}{0}\operatorname{cos.} q$$

sicque coefficiens huius termini est arbitrarius in se; quando ergo k designat totam excentricitatem hunc coefficientem $= 0$ statui oportet, ita vt sit $L = 0$ hinc autem fiet $R = +\frac{9}{8}\operatorname{sin.} q$. At vero pro altero angulo $3q$ vbi

$$\mu = 3m; \; M = -\tfrac{25}{4}mm \;\text{et}\; N = -\tfrac{39}{8}mm$$

fiet $\mathfrak{R} = -\frac{3}{8}\operatorname{cos.} 3q$; ita vt sit $L = -\frac{5}{8}m$

hincque porro

$$R = -\tfrac{7}{24}\operatorname{sin.} 3q,$$

quocir-

quocirca pro hoc ordine omnino habemus

$$\mathfrak{R} = \qquad\qquad - \tfrac{3}{8} \cos 3q$$
$$R = + \tfrac{9}{8} \sin q - \tfrac{7}{24} \sin 3q.$$

18. Progrediamur eodem modo ad binas aequationes ordinis quarti et pro prima quidem aequatione colligimus

				multipl. per
$\mathfrak{P}\mathfrak{R}$	$=$	$-\frac{3}{16}\cos 2q$	$-\frac{3}{16}\cos 4q$	$+6$
$\mathfrak{Q}^2$	$=+\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{8}$	$+3$
PR	$=-\frac{9}{8}$	$+\frac{17}{12}$	$-\frac{7}{24}$	-3
Q^2	$=+\frac{1}{32}$		$-\frac{1}{32}$	$-\frac{3}{2}$
$\mathfrak{P}^2\mathfrak{Q}$	$=-\frac{1}{8}$		$-\frac{1}{8}$	-12
$\mathfrak{P}PQ$	$=+\frac{1}{8}$		$+\frac{1}{8}$	$+12$
$\mathfrak{Q}P^2$	$=-\frac{3}{2}$	$+2$	$-\frac{1}{2}$	$+6$
$\mathfrak{P}^4$	$=+\frac{3}{8}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{8}$	$+5$
$\mathfrak{P}^2.P^2$	$=+\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	-15
P^4	$=+6$	-8	$+2$	$+\frac{15}{8}$

iunctim $+\frac{69}{64} - \frac{59}{8}\cos 2q + \frac{579}{64}\cos 4q.$

At pro altera aequatione habebimus

			multipl. per
$\mathfrak{P}R$	$=+\frac{5}{12}\sin 2q$	$-\frac{7}{48}\sin 4q$	-3
$\mathfrak{Q}Q$	$=-\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{16}$	-3
$P\mathfrak{R}$	$=-\frac{3}{8}$	$+\frac{3}{8}$	-3
$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}P$	$=+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$+12$
$\mathfrak{P}^2 Q$	$=+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{16}$	$+6$
$P^2 Q$	$=+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{2}$
$\mathfrak{P}^3 P$	$=-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	-10
$\mathfrak{P}P^3$	$=-2$	$+1$	$+\frac{15}{2}$

iunctim $-\frac{21}{4}\sin 2q + \frac{61}{8}\sin 4q.$

19. Quod hic primum ad terminum constantem attinet in aequatione priori, quoniam y per terminum principalem $-3\mathfrak{S}$ tolli debet, erit $\mathfrak{S} = +\frac{23}{64}$, deinde pro angulo $2q$ habemus

$$\mu = 2m;\ M = -\tfrac{59}{8}mm \text{ et } N = -\tfrac{21}{4}mm$$

atque hinc

$$\mathfrak{S} \doteq \tfrac{17}{24}\cos.\,2q,$$

ita vt sit

$$L = -\tfrac{17}{24}.\,mm$$

ex quo denique colligitur

$$S = -\tfrac{29}{48}\sin.\,2q.$$

Eodem modo pro angulo $4q$ ob

$$\mu = 4m;\ M = +\tfrac{59}{64}mm \quad \text{et } N = +\tfrac{61}{8}m^2$$

fiet $\mathfrak{S} = +\frac{67}{194}\cos.\,4q$,

ita vt sit

$$L = +\tfrac{67}{192}mm,$$

vnde tandem concluditur

$$S = +\tfrac{29}{96}\sin.\,4q,$$

consequenter valores quarti ordinis $\mathfrak{S}$ et S sequenti modo determinantur

$$\mathfrak{S} = +\tfrac{23}{64} - \tfrac{17}{24}\cos.\,2q + \tfrac{67}{192}\cos.\,4q$$
$$S = \qquad -\tfrac{29}{48}\sin.\,2q + \tfrac{29}{96}\sin.\,4q.$$

20. His igitur coniunctis valores binarum coordinatarum x et y sequenti modo se habebunt:

$$x = \begin{matrix} -\frac{1}{2}kk \\ -\frac{23}{64}k^4 \end{matrix} + k\cos.q + \begin{matrix} +\frac{1}{2}kk \\ -\frac{17}{24}k^4 \end{matrix}\cos.2q - \tfrac{3}{8}k^3\cos.3q + \tfrac{67}{192}k^4\cos.4q$$

$$y = \begin{matrix} -2k \\ +\frac{9}{8}k^3 \end{matrix}\sin.q \begin{matrix} +\frac{1}{4}kk \\ -\frac{29}{48}k^4 \end{matrix}\sin.2q - \tfrac{7}{24}k^3\sin.3q + \tfrac{29}{96}k^4\sin.4q.$$

Harum

Harum igitur formularum ope facile erit, tabulas construere, quae ad quamuis anomaliam mediam Planetae q, exhibeant valores vtriusque quantitatis x et y dummodo excentricitas k orbitae accurate fuerit cognita, inuentis autem ad quoduis tempus propositum numeris x et y, fractio $\frac{y}{1+x}$ dabit tangentem aequationis centri Planetae ad longitudinem mediam addendae vel subtrahendae, prout ista fractio $\frac{y}{1+x}$, fuerit vel positiua vel negatiua, tum vero si haec aequatio centri dicatur E ob $\frac{y}{1+x} = \text{Tang. E}$ distantia Planetae a Sole erit

$$a\sqrt{((1+x)^2 yy)} = \frac{a(1+x)}{\text{cos. E}},$$

vbi a denotat distantiam mediam planetae a Sole, ita vt sit $a = \sqrt[3]{\frac{1}{nm}}$ si scilicet distantia media Solis a terra vnitate referatur, id quod omnino consentaneum est regulae Kepleri, qua cubi distantiarum mediarum quadratis temporum periodicorum sunt proportionales.

21. Quanquam hic sumsimus $z = 0$, tamen haec solutio ad omnes plane planetas primarios patet, quatenus scilicet a perturbatione eorum mutua animum abstrahimus; quoniam enim nulla necessitate vrgente planum eclipticae in plano Tabulae constituimus, id tantum opus est, vt cuiusque planetae motus ad id ipsum planum, in quo mouetur, referatur, quippe quo casu etiam semper habebitur $z = 0$, interim tamen vt pateat, quomodo calculum tractari conueniat, si statim Planetarum motus

ad

ad planum Eclipticae referre velimus, etiam hunc casum seorsim et omni cura euoluamus.

Casus posterior quo orbita Planetae ad Eclipticam parumper inclinatur.

22. Seruatis valoribus, quos casu praecedente pro x et y inuenimus, quandoquidem illi parum ob zz immutantur, propterea quod z, vt valde paruum spectatur, incipiamus a tertia aequatione, vbi primo terminos duarum pluriumue dimensionum negligamus, ita vt habeamus hanc aequationem:

$$\frac{ddz}{dt^2} + mmz = 0$$

cuius integratio statim praebet $z = \text{C} \sin. r$ existente $dr = mdt$, vbi manifesto, angulus r exprimit argumentum latitudinis Planetae medium, quod reperitur, si a loco medio Planetae in orbita, locus nodi ascendentis subtrahatur. Ex quo quum linea nodorum etiam quiescat, manifestum est vtique esse debere $\frac{dr}{dt} = m$. Porro autem coefficiens constans conuenit cum inclinatione orbitae Planetae ad Eclipticam, seu potius eius tangente quae si ponatur $= i$, habebimus pro hac prima approximatione $z = i \sin. r$.

23. Quodsi iam in terminis sequentibus minoribus loco z iste valor substituatur, simulque pro x et y valores inuenti scribantur, ex his terminis orietur series certorum sinuum, quorum si quilibet fuerit $= \text{K} \sin. \omega$ existente $d\omega = \mu dt$ inde redundabit similis terminus in valorem z, qui si statua-

tur

tur $= \lambda$ fin. ω, erit $-\lambda\mu^2 + \lambda mm + K = 0$ vnde fequitur $\lambda = \frac{K}{\mu\mu - mm}$, hoc praemiffo, confideremus terminum tantum fecundae dimenfionis $-3mmxz$, vbi etiam loco x tantum eius valorem principalem k cof. q ftatuamus, ficque prodibit haec aequatio

$$\frac{ddz}{dt^2} + mmz - \tfrac{3}{2}mmki\,\text{fin.}(r-q) - \tfrac{3}{2}mmki\,\text{fin.}(r+q) = 0$$

ex priore angulo $r-q$ nafcetur pro z terminus

$$+\tfrac{3}{2}ki\,\text{fin.}(r-q)$$

vbi manifefto angulus $r-q$ eft conftans, exhibens diftantiam inter lineam apfidum et lineam nodorum, qui angulus fi dicatur $\varkappa$ habebimus hinc

$$z = \ldots\ldots + \tfrac{3}{2}ik\,\text{fin.}\,\varkappa$$

ex altero autem angulo $r+q$ refultat

$$z = \ldots\ldots - \tfrac{1}{2}ik\,\text{fin.}(r+q)$$

hactenus ergo peruenimus ad hunc valorem

$$z = i\,\text{fin.}\,r + \tfrac{3}{2}ik\,\text{fin.}\,\varkappa - \tfrac{1}{2}ik\,\text{fin.}(r+q).$$

24. Admittamus nunc etiam terminos trium dimenfionum ac ponamus breuitatis gratia vt fupra

$$x = k\mathfrak{P} + kk\mathfrak{Q} + k^3.\mathfrak{R} + k^4\mathfrak{S} \text{ etc.}$$

$$y = kP + kkQ + k^3.R + k^4S \text{ etc.}$$

Simili autem modo ftatuamus

$$z = i\,\text{fin.}\,r + ikX + ik^2Y + ik^3Z \text{ etc.}$$

atque noftra aequatio refoluetur in fequentes ordines

I. Ordo

$$i\,k\,\left(\frac{ddX}{m^2\,dt^2} + X - 3\,\mathfrak{P}\,\text{ſin.}\,r\right) = 0$$

II. Ordo

$$i\,k\,k\left(\frac{ddY}{m^2\,dt^2} + Y - 3\,\mathfrak{Q}\,\text{ſin.}\,r - 3\,\mathfrak{P}\,X + 6\,\mathfrak{P}^2.\,\text{ſin.}\,r - \tfrac{3}{2}\,P^2.\text{ſin.}\,r\right) = 0$$

III. Ordo

$$i\,k^3\left(\frac{ddZ}{m\,m\,dt^2} + Z - 3\,\mathfrak{R}\,\text{ſin.}\,r - 3\,\mathfrak{Q}\,X - 3\,\mathfrak{P}\,Y + 12\,\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\,\text{ſin.}\,r\right.$$
$$\left. + 6\,\mathfrak{P}^2.X - 3\,PQ\,\text{ſin.}\,r - \tfrac{3}{2}P^2.X - 10\,\mathfrak{P}^3\,\text{ſin.}\,r + \tfrac{15}{2}\,\mathfrak{P}P^2\,\text{ſin}\,r\right) = 0.$$

25. Harum aequationum primam iam expediuimus, atque inuenimus

$$X = +\tfrac{3}{2}\,\text{ſin.}\,\varkappa - \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(r+q),$$

vbi angulus conſtans $\varkappa = r - q$, hoc ergo valore ſubſtituto, pro ſecundo ordine habemus

$-3)$	$\mathfrak{Q}\,\text{ſin.}\,r =$	$-\frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,r$	$-\frac{1}{4}\,\text{ſin.}\,(2q-r)$	$+\frac{1}{4}\,\text{ſin.}\,(2q+r)$
$-3)$	$\mathfrak{P}\,X =$	$+\frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,r$	$-\frac{3}{4}\,\text{ſin.}\,(2q-r)$	$-\frac{1}{4}\,\text{ſin.}\,(2q+r)$
$+6)$	$\mathfrak{P}^2\,\text{ſin.}\,r =$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{4}$
$-\frac{3}{2})$	$P^2\,\text{ſin.}\,r =$	$+2$	$+1$	-1

iunctim $K = 3\,\text{ſin.}\,(2q+r)$ atque ob $\mu = 3m$, fit

$$Y = \tfrac{3}{8}\,\text{ſin.}\,(2q+r)$$

26. Hinc eodem modo determinemus ordinem Z

$3)$	$\mathfrak{R}\,\text{ſin.}\,r =$			$+\frac{3}{16}\,\text{ſin.}\,(3q-r)$	$-\frac{1}{16}\,\text{ſin.}\,(3q+r)$
$-3)$	$\mathfrak{Q}\,X =$	$\frac{7}{8}\,\text{ſin.}\,(q-r)$	$+\frac{5}{8}\,\text{ſin.}\,(q+r)$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$
$-3)$	$\mathfrak{P}\,Y =$		$+\frac{3}{16}$		$+\frac{3}{16}$
$+12)$	$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\,\text{ſin.}\,r =$	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{8}$
$+6)$	$\mathfrak{P}^2\,X =$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$
$-3)$	$PQ\,\text{ſin.}\,r =$	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{8}$
$-\frac{3}{2})$	$P^2\,X =$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$+\frac{3}{2}$	$+\frac{1}{2}$
$-10)$	$\mathfrak{P}^3\,\text{ſin.}\,r =$	$-\frac{3}{8}$	$+\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{8}$
$+\frac{15}{2})$	$\mathfrak{P}P^2\,\text{ſin.}\,r =$	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$

iunctim

iunctim $K = +0\,\text{fin.}(q-r) + \frac{15}{16}\text{fin.}(q+r) - \frac{1}{16}\text{fin.}(3q-r) - 5\,\text{fin.}(3q+r)$

et $\mu = 0 \qquad 2m \qquad 2m \qquad 4m$

consequenter

$$Z = +\tfrac{5}{16}\text{fin.}(q+r) - \tfrac{1}{48}\text{fin.}(3q-r) - \tfrac{1}{3}\text{fin.}(3q+r).$$

Hos ordines euoluisse sufficiat, quibus collectis reperimus

$$z = i\,\text{fin.}r - \tfrac{3}{2}ik\,\text{fin.}(q-r) - \tfrac{1}{2}ik\,\text{fin.}(q+r) + \tfrac{3}{8}ikk\,\text{fin.}(2q+r)$$
$$+\tfrac{5}{16}ik^2$$

$$-\tfrac{1}{48}ik^3\,\text{fin.}(3q-r) - \tfrac{1}{3}ik^3\,\text{fin.}(3q+r).$$

27. Inuento hoc valore ipsius z, nunc etiam correctiones, quae hinc in quantitates x et y redundant, inuestigari oportet, quem in finem definiamus primo quadratum zz, quod autem non vltra indicem $iikk$ extendamus, quod ergo sequenti modo reperietur expressum:

$$zz = ii\,\text{fin.}r^2 + 2iik.\,X.\,\text{fin.}r + 2iikk\,Y\,\text{fin.}r$$
$$+ iikk.\,XX$$

quae forma euoluitur in hanc

$$zz = ii(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\text{cof}\,2r) + iik(+\text{cof}\,q - \tfrac{3}{2}\text{cof.}(q-2r) + \tfrac{1}{2}\text{cof.}(q+2r)$$
$$+ iikk(+\tfrac{5}{4} - \tfrac{3}{8}\text{cof.}2q + \tfrac{3}{4}\text{cof.}2r - \tfrac{9}{8}\text{cof.}(2q-2r) - \tfrac{1}{2}\text{cof.}(2q+2r))$$

cuius loco scribamus

$$zz = ii\,A + iik.\,B + iikk\,C,$$

ita vt sit

$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{cof.}\,2r$; $B = \text{cof}\,q - \frac{3}{2}\text{cof.}(q-2r) + \frac{1}{2}\text{cof.}(q+2r)$;

$C = +\frac{5}{4} - \frac{3}{8}\text{cof.}2q + \frac{3}{4}\text{cof}\,2r - \frac{9}{8}\text{cof.}(2q-2r) - \frac{1}{2}\text{cof.}(2q+2r)$.

Deinde pro quaesitis correctionibus ipsarum x et y, statuamus

 $x = k$

$$x = k\mathfrak{P} + kk\mathfrak{Q} + k^3\mathfrak{R} + k^4\mathfrak{S} + ii\mathfrak{T} + iik\mathfrak{U} + iikk\mathfrak{V}$$
$$y = k\,P + kk\,Q + k^3 R + k^4 S + ii T + iik U + iikk V$$

quibus valoribus in prima et ſecunda aequatione ſubſtitutis, pro nouis ordinibus, ſignis ii; iik et $iikk$ notatis obtinebimus ſequentes aequationes:

Ordo ii
$$\begin{cases} \dfrac{dd\mathfrak{T}}{mm\,dt^2} - \dfrac{2\,dT}{m\,dt} - 3\mathfrak{T} - \tfrac{3}{2}A = 0 \\ \dfrac{ddT}{mm\,dt^2} + \dfrac{2\,d\mathfrak{T}}{m\,dt} = 0 \end{cases}$$

iik
$$\begin{cases} \dfrac{dd\mathfrak{U}}{mm\,dt^2} - \dfrac{2\,dU}{m\,dt} - 3\mathfrak{U} + 6\mathfrak{P}\mathfrak{T} - 3PT - \tfrac{3}{2}B + 6\mathfrak{P}A = 0 \\ \dfrac{ddU}{mm\,dt^2} + \dfrac{2\,d\mathfrak{U}}{m\,dt} - 3\mathfrak{P}T - 3P\mathfrak{T} - \tfrac{3}{2}AP = 0 \end{cases}$$

$iikk$
$$\begin{cases} \dfrac{dd\mathfrak{V}}{mm\,dt^2} - \dfrac{2\,dV}{m\,dt} - 3\mathfrak{V} + 6(\mathfrak{P}\mathfrak{U} + \mathfrak{Q}\mathfrak{T}) - 3(PU + QT) - 12\mathfrak{P}^2\mathfrak{T} \\ \qquad + 6P^2\mathfrak{T} + 12\mathfrak{P}PT - \tfrac{3}{2}C + 6\mathfrak{P}B + 6A\mathfrak{Q} = 0 \\ \dfrac{ddV}{mm\,dt^2} + \dfrac{2\,d\mathfrak{V}}{m\,dt} - 3\mathfrak{P}U - 3P\mathfrak{U} - 3\mathfrak{Q}T - 3Q\mathfrak{T} \\ \qquad + 6\mathfrak{P}^2T + 12\mathfrak{P}P\mathfrak{T} - \tfrac{9}{2}P^2T - \tfrac{3}{2}BP - \tfrac{3}{2}AQ = 0. \end{cases}$$

28. Euoluamus nunc terminos minores pro his ordinibus, ac pro primo ordine

$$-\tfrac{3}{2}A = \tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{1}{2}\operatorname{cof.} 2r$$
ergo $M = -\tfrac{3}{4} \qquad + \tfrac{3}{4}\operatorname{cof.} 2r$ at vero N erit $= 0$

vnde quia terminus conſtans per terminum principalem $-3\mathfrak{T}$ tolli debet, hinc fit $\mathfrak{T} = -\tfrac{1}{4}$; deinde pro angulo $2r$, habemus $\mu = 2m$, tum vero $M = +\tfrac{3}{4}$ et $N = 0$ vnde $\mathfrak{T} = +\tfrac{1}{4}\operatorname{cof.} 2r$, ideoque $L = +\tfrac{1}{4}mm$ vnde porro fit $T = -\tfrac{1}{4}\operatorname{fin.} 2r$, quocirca pro hoc ordine nacti ſumus

$$\mathfrak{T} = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\operatorname{cof.} 2r; \quad T = -\tfrac{1}{4}\operatorname{fin.} 2r.$$

29.

29. Pergamus ad ſecundum ordinem et euolvamus terminos minores vtriusque aequationis :

	coſ. q	coſ. $(q-2r)$	coſ. $(q+2r)$
6) $\mathfrak{P}\mathfrak{T} =$	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{8}$
$-$ 3) $PT =$		$+\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$-\frac{3}{2}$) $B =$	$+1$	$-\frac{3}{2}$	$+\frac{1}{2}$
$+$ 6) $\mathfrak{P}A =$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
iunctim $M =$	0	$+\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$
	ſin. q	ſin. $(q-2r)$	ſin. $(q+2r)$
$-$ 3) $\mathfrak{P}T =$		$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
$-$ 3) $P\mathfrak{T} =$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$-\frac{3}{2}$) $AP =$	-1	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
ergo $N =$	0	$-\frac{3}{8}$	$+\frac{3}{8}$
hinc $\mu =$	m	$-m$	$+3m$
$-\frac{2mN}{\mu} =$	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$+M =$	0	$+\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$
Numer. $=$	0	0	-1
Demon. $=$	0	0	8
$L =$	0	0	$-\frac{1}{8}$
$\frac{N}{\mu\mu} =$	0	$-\frac{3}{8}$	$+\frac{1}{24}$
$-\frac{2mL}{\mu} =$	0	0	$+\frac{1}{12}$
$U =$	0. ſin. q	$-\frac{3}{8}$ ſin. $(q-2r)$	$+\frac{1}{8}$ ſin. $(q+2r)$
at $\mathfrak{U} =$	0. coſ q	$+0$ coſ. $q-2r)$	$-\frac{1}{8}$ coſ. $(q+2r)$.

29. His duobus ordinibus acquieſcamus, quoniam facile patet, quemadmodum etiam aequationes tertii ordinis reſolui queant, quare pro quantitatibus x et y, praeter valores iam in praecedente caſu euolutos, habebimus nunc inſuper

$$x = \ldots\ldots - \tfrac{1}{4}ii + \tfrac{1}{4}ii\,\mathrm{cos}.\,2r + 0.iik\,\mathrm{cos}.(q-2r)$$
$$- \tfrac{1}{8}iik\,\mathrm{cos}.\,(q+2r)$$
$$y = \ldots\ldots - \tfrac{1}{4}ii\,\mathrm{sin}.\,2r - \tfrac{3}{8}iik\,\mathrm{sin}.(q-2r) + \tfrac{1}{8}iik\,\mathrm{sin}.(q+2r)$$

quibus adiungi poteſt valor pro z iam ante adhibitus.

30. His correctionibus pro x et y inuentis, nunc demum etiam valorem pro z accuratius definire poterimus, ſiquidem hactenus in tertia aequatione, terminum z^3 neglexinus, perſpicuum autem eſt inde ad valorem z, acceſſuros inſuper terminos indicibus i^3 et $i^3 k$ affectos, ad quos inueniendos, ſtatuamus

$$z = i\,\mathrm{sin}.\,r + ikX + ikkY + ik^3Z,\ + i^3\text{♄} + i^3k\text{♃}$$

I. Ordo

$$i^3)\quad \frac{dd\text{♄}}{mmdt^2} + \text{♄} - 3\mathfrak{T}\,\mathrm{sin}.\,r - \tfrac{3}{2}\,\mathrm{sin}.\,r^3 = 0$$

II. Ordo

$$i^3k)\quad \frac{dd\text{♃}}{mmdt^2} + \text{♃} - 3\mathfrak{T}X - 3\mathfrak{U}\,\mathrm{sin}.\,r + 12\mathfrak{P}\mathfrak{T}\,\mathrm{sin}.\,r - 3PT\,\mathrm{sin}.\,r$$
$$- \tfrac{9}{2}X\,\mathrm{sin}.\,r^2 = 0.$$

31. En igitur duas nouas aequationes, methodo ſupra tradita reſoluendas, ac pro priori quidem charactere i^3 inſignita minores termini praebent vt ſequitur

$$\begin{array}{rlcc} -3) & \mathfrak{T}\,\mathrm{sin}.\,r = & -\tfrac{3}{8}\,\mathrm{sin}.\,r & +\tfrac{1}{8}\,\mathrm{sin}.\,3r \\ -\tfrac{3}{2}) & \mathrm{sin}.\,r^3 = & +\tfrac{3}{4}\,\mathrm{sin}.\,r & -\tfrac{1}{4}\,\mathrm{sin}.\,3r \\ & K = & 0 & 0 \end{array}$$

vnde hinc nulla correctio ad valorem ipſius z accedit, ſeu fit $\text{♄} = 0$.

32. Pro altera aequatione charactere $i^3 k$ signata euolutio terminorum minorum praebet

	fin.$(q-r)$	fin.$(q+r)$	fin.$(q-3r)$	fin.$(q+3r)$
$-3)\,\mathfrak{T}X =$	$+\frac{5}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$
$-3)\,\mathfrak{U}$ fin. $r =$		$+\frac{1}{16}$		$-\frac{1}{16}$
$+12)\,\mathfrak{P}\mathfrak{T}$ fin. $r =$	$+\frac{5}{16}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$+\frac{1}{16}$
$-3)\,PT$ fin. $r =$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
$-\frac{9}{2})\,X$ fin. $r^2 =$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{3}{8}$	$+\frac{1}{8}$

ergo $K = +\frac{15}{4}$ fin.$(q-r) - \frac{51}{16}$ fin.$(q+r) - \frac{3}{2}$ fin.$(q-3r) + \frac{15}{16}$ fin.$(q+3r)$

$\mu =$	0	$+2m$	$-2m$	$+4m$
hinc Denom.	-1	$+3$	$+3$	$+15$

consequenter

$$\mathfrak{Y} = -\tfrac{15}{4}\,\text{fin.}(q-r) - \tfrac{17}{16}\,\text{fin.}(q+r) - \tfrac{1}{2}\,\text{fin.}(q-3r) + \tfrac{1}{16}\,\text{fin.}(q+3r).$$

33. Colligamus nunc omnes partes, quibus coordinatae nostrae x, y et z pro casu posteriore definiuntur, ac prodibunt sequentes expressiones:

$$\begin{array}{l} x = -\tfrac{1}{2}kk + k\,\text{cof.}\,q + \tfrac{1}{2}kk\,\text{cof.}\,2q - \tfrac{3}{8}k^3\,\text{cof.}\,3q + \tfrac{67}{192}k^4\,\text{cof.}\,4q \\ \qquad \tfrac{23}{64}k^4 \qquad\qquad - \tfrac{17}{24}k^4 \\ \hline \quad -\tfrac{1}{4}ii \qquad\qquad + \tfrac{1}{4}ii\,\text{cof.}\,2r - \tfrac{1}{8}iik\,\text{cof.}(q+2r) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y = -2k\,\text{fin.}\,q + \tfrac{1}{4}kk\,\text{fin.}\,2q - \tfrac{7}{24}k^3\,\text{fin.}\,3q + \tfrac{29}{96}k^4\,\text{fin.}\,4q \\ \quad + \tfrac{9}{8}k^3 \qquad\quad - \tfrac{29}{48}k^4 \\ \qquad - \tfrac{1}{4}ii\,\text{fin.}\,2r - \tfrac{3}{8}iik\,\text{fin.}(q-2r) + \tfrac{1}{8}iik\,\text{fin.}(q+2r) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} z = i\,\text{fin.}\,r - \tfrac{3}{2}ik\,\text{fin.}(q-r) - \tfrac{1}{2}ik\,\text{fin.}(r+q) + \tfrac{3}{8}ikk\,\text{fin.}(2q+r) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \tfrac{5}{16}ik^3 \\ \qquad - \tfrac{15}{4}i^3k \qquad\qquad - \tfrac{17}{16}i^3k \\ \quad - \tfrac{1}{48}ik^3\,\text{fin.}(3q-r) - \tfrac{1}{6}ik^3\,\text{fin.}(3q+r) - \tfrac{1}{2}ik^3\,\text{fin.}(q-3r) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \tfrac{1}{16}ik^3\,\text{fin.}(q+3r) \end{array}$$

Verum

Verum vti iam notauimus neutiquam consultum erit motus planetarum secundum hunc posteriorem casum exigere; praecipue si eorum orbitae ad eclipticam notabiliter fuerint inclinatae, tum enim nequidem multitudo terminorum ab inclinatione i pendentium forte sufficeret, has autem ambages felicissime euitabimus, si motum cuiusque planetae statim ad ipsum planum in quo mouetur referamus, hocque pacto totam determinationem ad casum priorem perducamus.

DIS-

DISQVISITIO DE LENTIBVS OBIECTIVIS TRIPLICATIS,

QVAE VEL NVLLAM CONFVSIONEM PARIANT, VEL ETIAM DATAM CONFVSIONEM A RELIQVIS LENTIBVS ORTAM DESTRVERE VALEANT.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum hoc argumentum 'a me iam saepius, ac praecipue in *Dioptrica* esset pertractatum, plerumque ternas lentes sibi iungendas ita proxime adaptare assumsi, vt earum distantiae inter se pro nihilo haberi possent: Id quod in praxi nullo modo exsequi licet, cum omnes certam distantiam focalem habentes necessario certam quandam crassitiem obtinere debeant, ita vt centra lentium ad minimum tanto interuallo a se inuicem sint remota; hinc autem effectus nullius confusionis quem in his lentibus intendebam tantopere perturbatur, vt saepe adhuc maiorem confusionem producere queant, quam si earum loco lentes simplices adhiberentur. Nunc

 mihi

mihi hoc imprimis erit propositum, vt in determinatione huiusmodi lentium triplicatarum etiam crassitiei rationem sim habiturus, hoc enim facto demum tales lentes ad Praxin cum successu accommodare licebit.

§. 2. Praeterea vero, in id mihi potissimum esse incumbendum, arbitror, vt huiusmodi lentibus quam maximam aperturam conciliem, quandoquidem hoc imprimis desiderari solet, vt tubi dioptrici quam minimam longitudinem adipiscantur, quem scopum commodissime attingemus, si pro data distantia focali lentes triplicatae maximam aperturam admittunt: Quare cum apertura maximam partem a lente concaua crystallina pendere soleat, ei pro data distantia focali talem figuram tribui conueniet quae maximae aperturae sit capax, id quod sine dubio obtinetur, si illi vtrinque eadem curuatura inducatur, tum enim diameter aperturae semissi radii curuaturae aequalis accipi poterit: Tum autem praecipue cauendum erit, ne vel in prima vel in tertia lente adhuc minor radius curuaturae occurrat.

§. 3. His igitur conditionibus principalibus praemissis, lentem triplicatam ita ex tribus lentibus componi assumo, vt prima et tertia ex vitro coronario dicto, cui ratio refractionis respondet vt 1, 53 ad 1, media vero ex vitro crystallino ab Anglis *Flint-Glass* vocato, cui ratio refractionis respondeat vt 1, 58 ad 1. parari debeat. Pro his igitur tribus lentibus, earum distantias focales contemtemplari oportet, quarum prima nobis ſit $= p$, ſecunda $= q$ ac tertia $= r$: Vbi intelligi debet, primam p ac tertiam r, fore poſitiuas, mediam vero q negatiuam, quae cum vtrinque eſſe debeat aequaliter concaua, radius vtriusque faciei erit $= 1,16.q$, vnde haec lens admittet aperturam cuius ſemidiameter quaſi erit $0,29 q$; ex quo iam patet lentes triplicatas eo fore perfectiores quo maior prodierit quantitas q, pro data ſcilicet diſtantia focali totius lentis triplicatae quam perpetuo deſignabimus littera Π, ita vt obiecta maxime remota poſt talem lentem ad diſtantiam $= \Pi$ repreſententur.

§. 4. Quoniam igitur diſtantiae focales p, q, r ad iſtam quantitatem Π certam relationem tenere debent, ponamus ſtatim eſſe

$$p = \frac{\Pi}{f}; \quad q = \frac{\Pi}{g} \quad \text{et } r = \frac{\Pi}{h},$$

tum vero diſtantias inter lentem primam et ſecundam pariter atque inter ſecundam et tertiam, commode inter ſe aequales ſtatuere licebit; ſit igitur vtraque haec diſtantia $= \frac{\Pi}{k}$, quam inter centra ſeu puncta media binarum lentium contiguarum accipi eſt intelligendum. At quia in nulla harum lentium maiores arcus quam triginta graduum ad ſummum admittere fas eſt, lens autem media maximam aperturam habere cenſetur; eius tota craſſities minor eſſe nequit quam $\frac{1}{15} q$, hinc ne lentes ſe mutuo plane contingant ſufficiet hanc diſtantiam ſtatuiſſe $= \frac{1}{10} q$: hoc enim modo libertas nobis relinquetur, iſtam diſtantiam paulisper ſiue augendi ſiue minuendi; id

 quod

quod in praxi maximam afferet vtilitatem; hinc igitur cum g ſit quantitas negatiua in poſterum ſtatuemus $k = -12g$.

§. 5. Nunc igitur ſi ſecundum praecepta dioptrica diſtantias determinatrices pro prima lente ponamus a et α, pro ſecunda b et β et pro tertia c et γ: Statim erit $a = \infty$ et $\gamma = \Pi$, tum vero erit $\alpha = p = \frac{\Pi}{f}$, ac pro ſecunda lente $\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{q} = \frac{g}{\Pi}$ pro tertia autem lente $\frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{r} = \frac{h}{\Pi}$. Praeterea vero diſtantiae inter lentes ſtabilitae dabunt

$$\alpha + b = \frac{\Pi}{k} \quad \text{et} \quad \beta + c = \frac{\Pi}{k},$$

hinc igitur cum ſit

$$\alpha = \frac{\Pi}{f} \text{ erit } b = \frac{\Pi(f-k)}{fk} \text{ et } \frac{1}{b} = \frac{fk}{\Pi(f-k)};$$

deinde quia eſt

$$\frac{1}{c} = \frac{h-1}{\Pi} \text{ ideoque } c = \frac{\Pi}{h-1}$$

vnde ex poſtrema aequalitate prodit

$$\beta = \frac{\Pi(h-k-1)}{k(h-1)} = \frac{fk}{fg-gk-fk} \text{ ideoque } \frac{1}{\beta} = \frac{k(h-1)}{\Pi(h-k-1)};$$

cum igitur ſit $\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} = \frac{g}{\Pi}$ hinc erit

$$\frac{1}{\beta} = \frac{fg+fk-gk}{\Pi(f-k)} = \frac{k(h-1)}{\Pi(h-k-1)}$$

vnde conſequimur

$$\frac{h-k-1}{k(h-1)} = \frac{f-k}{fg-fk-gk} = \frac{1}{k} - \frac{1}{h-1}$$

hincque porro

$$\frac{1}{h-1} = \frac{1}{k} - \frac{f+k}{fg-fk-gk} = \frac{fg-2fk-gk+kk}{k(fg-fk-gk)}$$

conſequenter erit

$$h-1 = \frac{k(fg-fk-gk)}{fg-2fk-gk+kk}$$

vnde

vnde colligimus

$$f+g+h-1=\frac{fg(f+g)-k(2ff+2fg+gg)}{fg-2fk-gk+kk},$$

qui denominator etiam ita exprimi poterit

$$(k-f)(k-g)-fk;$$

hae igitur expressiones, posito $k=-12g$ sequentes induent formas

$$h-1=\frac{-12g(13fg+12gg)}{13g(f+12g)+12fg}=\frac{-12g(13f+12g)}{25f+156g} \text{ et}$$

$$f+g+h-1=\frac{25ff+25fg+12gg}{25f+156g}.$$

§. 6. Praeterea vero secundum praecepta in dioptrica tradita formentur hinc sequentes quantitates

I°. $P=\frac{-\alpha}{b}=\frac{k}{k-f}$; II°. $Q=\frac{-\beta}{c}=\frac{k+1-h}{k}=1-\frac{h-1}{k}=\frac{k(k-f)}{fg-2fk-gk+kk}$ ita vt sit $PQ=\frac{kk}{(k-f)(k-g)-fk}$: III°. $\frac{+f(h-k-1)}{(h-1)(f-k)}=\frac{f}{f-k}-\frac{fk}{(h-1)(f-k)}$; IV°. $\mathfrak{B}=\frac{q}{b}=\frac{fk}{g(f-k)}$; V°. $C=\frac{\gamma}{c}=h-1$ VI°. $\mathfrak{C}=\frac{r}{c}=\frac{h-1}{h}$

sumto igitur $k=-12g$ erit

$P=\frac{12g}{f+12g}$; $PQ=\frac{144g}{25f+156g}$; $B=\frac{-12f}{13f+12g}$ et $\mathfrak{B}=\frac{-12f}{f+12g}$.

§. 7. His valoribus constitutis qui dispositionem lentium in genere respiciunt, confusionem a radiorum diuersa refractione oriundam e medio tollere aggrediamur. Sit igitur pro vitro coronario ratio refractionis radiorum mediorum $=n:1$ radiorum vero extremorum vt $n+dn:1$; simili modo sit pro vitro crystallino refractio radiorum mediorum $=n':1$ extremorum autem vt $n'+dn':1$, ita

ita vt formulae differentiales dn et dn' dispersionem radiorum exprimant. Iam si ponamus $\frac{dn}{n-1} : \frac{dn'}{n'-1} = \zeta : \eta$, in dioptrica demonstraui, confusionem hinc natam penitus tolli, si satis fiat huic aequationi

$$\zeta . p + \frac{\eta q}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\zeta r}{B^2 \mathfrak{C}^2} = 0$$

quae ob

$$p = \frac{\pi}{f};\ q = \frac{\pi}{g} \text{ et } r = \frac{\pi}{h}$$

abit in hanc formam

$$\frac{\zeta}{f} + \frac{\eta}{\mathfrak{B}^2 g} + \frac{\zeta}{B^2 \mathfrak{C} h} = 0.$$

§. 8. *Dollondus* autem per experimenta inuenit, esse proxime $dn : dn' = 2 : 3$, cum ergo sit $n - 1 : n' - 1 = 53 : 58$ erit $\zeta : \eta = \frac{2}{53} : \frac{3}{58}$ ideoque proxime $\zeta : \eta = 3 : 4$; cum enim ratio illa dollondiana $2 : 3$ vt pote ex experimentis conclusa neutiquam pro exacta haberi queat, aliquantillum ab ea recedere licebit, et ratio $\zeta : \eta = 3 : 4$ veritati aeque consentanea haberi potest, ac ipsa dollondiana $= 2 : 3$; hinc igitur per ζ diuidendo aequatio nostra, confusionem tollens erit

$$\frac{1}{f} + \frac{4}{3 \mathfrak{B}^2 g} + \frac{1}{B^2 \mathfrak{C}^2 k} = 0$$

haecque aequatio etsi tantam confusionem ex ipsa lente obiectiua oriundam destruit, tamen quia lentes sequentes in hac expressione valores vix sensibiles producerent, eos eo magis omittere licebit, quod ipsa ratio $3 : 4$ vero tantum proxima est censenda; Interim tamen necesse est reliquas lentes ita disponi, vt maimargini colorato occurratur, quem in finem regulae in dioptrica traditae sollicite erunt obseruandae.

§. 9 Quo igitur hanc aequationem euoluamus ex praecedentibus esse patet

$$\mathfrak{B} = \frac{-12f}{f+12g} = -\frac{f}{g} \cdot \frac{12g}{f+12g},$$

hincque

$$\frac{1}{\mathfrak{B}} = -\frac{g}{f} \cdot \frac{f+12g}{+12g},$$

ponamus autem

$$\frac{1}{\mathfrak{B}} = -\frac{g}{f} \cdot G, \text{ ita vt fit } G = \frac{f+12g}{12g}$$

ita vt secundus terminus nostrae aequationis fiat

$$= \frac{4g}{3ff} GG,$$

pro tertio autem termino quia habemus

$$B = \frac{-12f}{13f+12g} \text{ et } \mathfrak{C} = \frac{h-1}{h} = \frac{-12g(13f+12g)}{h(25f+156g)}$$

erit $B\mathfrak{C} = \frac{144fg}{h(25f+156g)} = \frac{f}{h} \cdot \frac{144g}{25f+156g}$

hincque

$$\frac{1}{B\mathfrak{C}} = \frac{h}{f} \cdot \frac{25f+156g}{144g}.$$

Ponatur autem

$$\frac{1}{B\mathfrak{C}} = \frac{h}{f} \cdot H \text{ ita vt fit } H = \frac{25f+156g}{144g}$$

vnde terminus tertius euadet $= \frac{h}{ff} HH$, quare per ff multiplicando aequatio nostra erit

$$f + \tfrac{4}{3} g GG + h HH = 0.$$

§. 10. Cum ante esset

$$h - 1 = \frac{-12g(13f+12g)}{25f+156g},$$

nunc

nunc nacti sumus duas aequationes quibus satisfieri oportet; quarum prior est

$$h = 1 - \frac{12g(15f + 12g)}{25f + 156g}$$

altera vero

$$f + \tfrac{4}{3}g\,GG + h.HH = 0$$

existente

$$G = \frac{f + 12g}{12g} \quad \text{et} \quad H = \frac{25f + 156g}{144g},$$

in quibus cum tantum tres litterae f, g et h occurrant binas quasque per tertiam definire licebit.

§. 11. Nunc autem imprimis attendamus ad eam conditionem, qua requiritur, vt, neque in prima, neque tertia lente vlla occurrat curuatura, quae maior sit quam secundae lentis, vnde statim manifesto sequitur, distantias focales p et r maiores esse debere quam q, quia ergo distantiae reciproce sunt proportionales litteris f, g et h, necesse est vt f et h minores sint quam g, seu potius quam $-g$, quia g est vt vidimus numerus negatiuus, cui conditioni quemadmodum satisfieri poterit, ex casu quo crassities lentis plane negligitur, facillime colligere poterimus, tum autem erit

$$f + g + h = 1 \quad \text{et} \quad f + \tfrac{4}{3}g + h = 0,$$

vnde statim fit

$$g = -3 \quad \text{et} \quad f + h = 4$$

quod si iam ponamus $g = -\vartheta f$, vtique debet esse $\vartheta > 1$, et quia hinc est $f = \frac{3}{\vartheta}$ erit $h = \frac{4\vartheta - 3}{\vartheta}$; quia igitur $h < 3$ necesse est vt sit $\vartheta < 3$ quocirca haec con-

conditio postulat vt numerus ϑ intra limites 1 et 3 accipiatur.

§. 12. Ponamus nunc in genere esse $g = -\vartheta f$ et quia crassities vere tam est parua, quam circumstantiae permittunt, iidem limites pro ϑ dati, etiamnunc locum habebunt; Introducto autem hoc valore fiet

$$G = \frac{12\vartheta - 1}{12\vartheta} \quad \text{et} \quad H = \frac{156\vartheta - 25}{144\vartheta}$$

pro aequatione posteriore

$$h = 1 + 12\vartheta f \left(\frac{12\vartheta - 13}{156\vartheta - 25}\right).$$

Ponamus autem breuitatis gratia $h = 1 + Ff$ vt sit

$$F = 12\vartheta \left(\frac{12\vartheta - 13}{156\vartheta - 25}\right)$$

qui valor in altera aequatione substitutus dabit

$$f - \tfrac{4}{3}\vartheta f GG + HH + Ff HH = 0$$

ex qua concludimus

$$f = \frac{HH}{\frac{4}{3}\vartheta GG - FHH - 1};$$

Quo valore inuento bini reliqui erunt

$$g = -\vartheta f \quad \text{et} \quad h = 1 + Ff.$$

§. 13. Hic igitur numerus ϑ arbitrio nostro relinquitur, dummodo intra limites praescriptos 1 et 3 accipiatur, tum vero pro sequenti calculo reliquae litterae istos induent valores

$$P = \frac{12\vartheta}{12\vartheta - 1} \quad \text{siue} \quad P = \frac{1}{G}, \quad PQ = \frac{144\vartheta}{156\vartheta - 25} \quad \text{ideoque}$$

$$PQ = \frac{1}{H} \quad \text{praeterea vero}$$

$$\mathrm{B} = \frac{12}{12\vartheta - 13} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = \frac{12}{12\vartheta - 1}; \quad C = h - 1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{C} = \frac{h-1}{h}.$$

§. 14. Progrediamur igitur vlterius, ac videamus, quomodo etiam alteram conditionem, ex apertura lentium oriundam destrui conueniat, et quia duo vitri genera hic in considerationem veniunt, pro vtroque certos numeros, quibus in calculo est opus apponamus

Pro vitro coronario	Pro vitro crystallino
$\mu = 0,9875$	$\mu' = 0,8724$
$\nu = 0,2194$	$\nu' = 0,2529$
$\varrho = 0,2266$	$\varrho' = 0,1413$
$\sigma = 1,6602$	$\sigma' = 1,5827$
$\tau = 0,9252$	$\tau' = 0,8775$
$\sigma - \varrho = 1,4336$	$\sigma' - \varrho' = 1,4414$
$l(\sigma - \varrho) = 0,1564280$	$l(\sigma' - \varrho') = 0,1587845$
$l\tau = 9,9662356$	$l\tau' = 9,9432471$

vnde porro in subsidium calculi sequentis, colligantur hi logarithmi

$$l\frac{\mu'}{\mu} = 9,9461786$$

$$l\nu = 9,3412366$$

$$l\nu' = 9,4029488.$$

§. 15. Quia lens secunda crystallina vtrinque supponitur aeque concaua, si eius numerus arbitrarius ponatur $= \lambda'$ erit

$\sqrt{\lambda' - 1} = \frac{(\sigma' - \varrho')}{\tau'}(\mathfrak{B} - \frac{1}{2})$, vbi est $l\frac{(\sigma' - \varrho')}{\tau'} = 0,2155374$

vnde elici debet valor numeri λ', deinde si pro lente prima ponatur numerus arbitrarius $= \lambda$, erit eius

Radius faciei anterioris $= \frac{p}{\sigma - \tau\sqrt{\lambda - 1}}$

Radius faciei posterioris $= \frac{p}{\varrho + \tau\sqrt{\lambda - 1}}$. At

At pro lente tertia, ſi eius numerus arbitrarius vocetur λ'' erit eius

Radius faciei anterioris $= \frac{r}{\sigma - \mathfrak{C}(\sigma - \varrho) + \tau\sqrt{\lambda'' - 1}}$

Radius faciei poſterioris $= \frac{r}{\varrho + \mathfrak{C}(\sigma - \varrho) - \tau\sqrt{\lambda'' - 1}}$.

Pro media autem lente cryſtallina iam ſupra vidimus, radium vtriusque faciei eſſe debere $= 1,16\,q$ denique meminiſſe oportet, eſſe

$p = \frac{\Pi}{f}$; $q = \frac{\Pi}{g}$ et $r = \frac{\Pi}{h}$.

§. 16. His de forma lentium praenotatis, in Dioptrica demonſtratum eſt, confuſionem inde natam proportionalem eſſe ſequenti formulae

$$\lambda - \frac{\mu'}{\mu P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu'}{B\mathfrak{B}}\right) + \frac{1}{B^3 PQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right)$$

quae ſi ponamus breuitatis gratia

$\frac{\mu'}{\mu P} = M$ et $\frac{1}{B^3 PQ} = N$ induet hanc formam

$$\lambda - \frac{M\lambda'}{\mathfrak{B}^3} - \frac{M\nu'}{B\mathfrak{B}} + \frac{N\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{N\nu}{C\mathfrak{C}}.$$

§. 17. Quod ſi ergo ex ſequentibus lentibus oriatur confuſio ſimili modo determinanda $= O$, vt vniuerſa confuſio tollatur, fieri oportet

$$\lambda - \frac{M\lambda'}{\mathfrak{B}^3} - \frac{M\nu'}{B\mathfrak{B}} + \frac{N\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{N\nu}{C\mathfrak{C}} + O = 0$$

§. 18. Statim ergo ac pro ϑ numerus determinatus et intra praeſcriptos limites 1 et 3 contentus accipiatur, totus calculus reſiduus nulla laborabit difficultate: inde enim primo colligantur valores litterarum F, G et H, hincque litterarum f, g et h, vnde innoteſcunt diſtantiae focales p, q et r, tum

 vero

vero eliciantur valores litterarum P, PQ, B, $\mathfrak{B}$, C et $\mathfrak{C}$, hincque porro litterae M et N; Quod autem ad numerum ϑ attinet, conueniet pro eo aliquot hypotheses accipi, vt intelligamus, vnde distantia focalis q maximum obtineat valorem, quippe qui pro data distantia focali Π ipsius lentis triplicatae maximam admittet aperturam, id quod omnis generis telescopiis maximum inducet perfectionis gradum.

Hypothesis prima

$g = -2f$ seu $\vartheta = 2$.

§ 19. Incipiamus ab hypothesi $\vartheta = 2$, qua distantiae focales extremae, fere aeque superabunt mediam q, eritque

$F = \frac{264}{287}$	$l F = 9,9637220$	
$G = \frac{23}{24}$	$l G = 9,9815166$	$l GG = 9,9630332$
$H = \frac{287}{288}$	$l H = 9,9984894$	$l HH = 9,9969788$

vnde porro fit

$f = 1,85415$	$l f = 0,2681455$
$g = -3,70830$	$l g = (-)0,5691755$
$h = 2,70556$	$l h = 0,4322572$

$p = 0,53933\,\Pi$	$l p = 9,7318545$
$q = -0,26966\,\Pi$	$l q = (-)9,4308245$
$r = 0,36961\,\Pi$	$l r = 9,5677428$

praeterea vero habebimus

$P = \frac{24}{23}$	$l P = 0,0184834$	
$PQ = \frac{288}{287}$	$l PQ = 0,0015106$	
$B = \frac{12}{11}$	$l B = 0,0377885$	$l B^3 = 0,1133655$
$\mathfrak{B} = \frac{12}{23}$	$l \mathfrak{B} = 9,7174534$	$l \mathfrak{B}^3 = 9,1523602$
$C = 1,7055$	$l C = 0,2318675$	$l C^3 = 0,6956025$
$\mathfrak{C} = \frac{h-1}{h}$	$l \mathfrak{C} = 9,7996103$	$l \mathfrak{C}^3 = 9,3988309$

Porro

Porro vero

$l\,B\,\mathfrak{B} = 9,7552419$ et $l\,C\,\mathfrak{C} = 0,0314778$

tandem igitur

$l\,M = 9,9275952$ et $l\,N = 9,8851239.$

§. 20. Cum nunc fit $\mathfrak{B} = \frac{12}{23}$ erit $\mathfrak{B} - \frac{1}{2} = \frac{1}{46}$ vnde colligitur

$l\,\sqrt{\lambda' - 1} = 8,5527796$, hinc $l(\lambda' - 1) = 7,1055592$

vnde fit

$\lambda' = 1,00127$

at bini reliqui numeri λ et λ'' maneant indeterminati, hinc igitur calculus pro confusione sequenti modo instituatur

I.	II.	III.
$l\,M = 9,9276952$	$l\,M = 9,9276952$	$l\,N = 9,8851239$
$l\,\lambda = 0,0005510$	$l\,\nu' = 9,4029488$	$l\,\mathfrak{C}^3 = 9,3988309$
$9,9282462$	$9,3306440$	$0,4862930$
$l\,\mathfrak{B}^3 = 9,1523602$	$l\,B\,\mathfrak{B} = 9,7552419$	
l. p. I. $0,7758860$	l. part. II $= 9,5754021$	
$5,9688 =$ part. I.	pars II $= 0,3761$	pars III $= 3,0640\lambda''$

IV.

$$
\begin{array}{rl}
l\,N & = 9,8851239 \\
l\,\nu & = 9,3412366 \\
\hline
 & 9,2263605 \\
l\,C\,\mathfrak{C} & = 0,0314778 \\
\hline
 & 9,1948827
\end{array}
$$

p. IV $= 0,1566$

 hinc

hinc igitur $I + II + IV = -6,1883$, quare confusio ex lente triplicata nata erit

$$\lambda + 3,0640\,\lambda'' - 6,1883\,,$$

ergo si confusio ex reliquis lentibus nata fuerit $= O$ omnis confusio tolletur faciendo

$$\lambda + 3,0640\,\lambda'' = 6,1883 - O.$$

§. 21. Quia distantia focalis tertiae lentis r non multum superat q, imprimis cauendum est, ne vllus radius curuaturae huius lentis minor euadat quam secundae lentis qui est $1,16\,q = -0,3127$. Quia igitur est

$\mathfrak{C}(\sigma - \varrho) = 0,9037$ erit

$\sigma - \mathfrak{C}(\sigma - \varrho) = 0,7565$ et $\varrho + \mathfrak{C}(\sigma - \varrho) = 1,1303$

hincque pro lente tertia erit

radius faciei anterioris $= \dfrac{r}{0,7565 + \tau\sqrt{\lambda'' - 1}}$

et radius faciei posterioris $= \dfrac{r}{1,1303 - \tau\sqrt{\lambda'' - 1}}$.

Hic igitur adeo statui poterit $\lambda'' = 1$, vnde pro lente tertia prodibit

$$\text{Radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = 0,4886\,\Pi \\ \text{posterioris} = 0,3270\,\Pi. \end{cases}$$

Tum autem pro confusione tollenda capi debebit

$$\lambda = 3,1243 - O$$

vnde pro constructione primae lentis erit,

Radius faciei anterioris $= \dfrac{0,5393\,\Pi}{\sigma - \tau\sqrt{\lambda - 1}} = \dfrac{0,5829\,\Pi}{1,7944 - \sqrt{\lambda - 1}}$

Radius faciei posterioris $= \dfrac{0,5393\,\Pi}{\varrho + \tau\sqrt{\lambda - 1}} = \dfrac{0,5829\,\Pi}{0,2449 + \sqrt{\lambda - 1}}$.

Hinc igitur si confusio destruenda esset nulla, seu $O = 0$ foret

$\lambda = 3,$

$\lambda = 3,1243$, ideoque $\sqrt{\lambda - 1} = 1,4575$.

Quare tum fieri deberet

$$\text{Radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 1,7302\ \Pi \\ \text{posterioris} & = 0,3432\ \Pi \end{cases}$$

sin autem confusio tollenda O fuerit maxima $= 2,1243$ ideoque $\lambda = 1$, in prima lente erit

$$\text{Radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 0,3248\ \Pi \\ \text{posterioris} & = 2,3746\ \Pi \end{cases}$$

sicque tales lentes triplicatae ad omnes confusiones tollendas a minima scilicet $O = 0$, vtque maximam $O = 2,1243$ erunt accommodatae.

§. 22. Cum autem tanta confusio tollenda nunquam occurrat, in gratiam praxeos statuamus lentem tertiam vtrinque aequaliter conuexam, ita vt habeamus

$$0,7565 + \tau\sqrt{\lambda'' - 1} = 1,1303 - \tau\sqrt{\lambda'' - 1} \text{ hincque}$$

$$\tau\sqrt{\lambda'' - 1} = 0,1869,$$

vnde concluditur $\lambda'' = 1,0408$, vnde fit

$$3,0640\,\lambda'' = 3,1890,$$

consequenter

$$\lambda = 2,9993 - O.$$

Hoc autem casu pro tertia lente fiet

$$\text{Radius vtriusque faciei} = \frac{r}{0,9474} = 0,3917\ \Pi$$

existente lentis mediae

$$\text{radio vtriusque faciei} = -0,3127\ \Pi;$$

Constructio autem lentis primae ex formulis paragr. precedentis est petenda, statim atque valor ipsius λ fuerit

fuerit cognitus; maxima autem confusio quae per tales lentes destrui poterit erit $O = 1,9993$. Interualla autem inter binas lentes in hac hypothesi vbique sunt $\frac{1}{12}q = 0,0225\,\Pi$.

Hypothesis secunda

$$\vartheta = \tfrac{3}{2} \text{ siue } g = -\tfrac{3}{2}f$$

§. 23. In hac ergo hypothesi habebimus sequentes valores, primo:

$F = \frac{90}{209}$	$lF = 9,6340962$	
$G = \frac{17}{18}$	$lG = 9,9751764$	$lGG = 9,9503528$
$H = \frac{209}{216}$	$lH = 9,9856925$	$lHH = 9,9713850$

vnde porro

$f = 2,4592$	$lf = 0,3908021$
$g = -3,6888$	$lg = (-)0,5668851$
$h = 2,0590$	$lh = 0,3136563$
$p = 0,4066\,\Pi$	$lp = 9,6091979$
$q = -0,2711\,\Pi$	$lq = (-)9,4331149$
$r = 0,4857\,\Pi$	$lr = 9,6863437$

Ex his valoribus porro consequimur,

$P = \frac{18}{17}$	$lP = 0,0248236$	
$PQ = \frac{216}{209}$	$lPQ = 0,0143075$	
$B = \frac{12}{5}$	$lB = 0,3802112$	$lB^3 = 1,1406336$
$\mathfrak{B} = \frac{12}{17}$	$l\mathfrak{B} = 9,8487323$	$l\mathfrak{B}^3 = 9,5461969$
	$lB\mathfrak{B} = 0,2289435$	
$C = h - 1$	$lC = 0,0248983$	$lC^3 = 0,0746949$
$\mathfrak{C} = \frac{h-1}{h}$	$l\mathfrak{C} = 9,7112420$	$l\mathfrak{C}^3 = 9,1337260.$
	$lC\mathfrak{C} = 9,7361403$	

Tandem

Tandem vero

$$lM = 9,9213550 \text{ et } lN = 8,8450589.$$

§. 24. Cum nunc fit $\mathfrak{B} = \frac{12}{17}$ erit $\mathfrak{B} - \frac{1}{2} = \frac{7}{34}$, vnde colligitur

$l\sqrt{\lambda' - 1} = 9,5291565$, hinc $l(\lambda' - 1) = 9,0583130$ et $\lambda' = 1,11437$, bini reliqui numeri λ et λ'' maneant indeterminati; hinc igitur calculus pro confusione sequenti modo instituatur

I.	II.	III.
$lM = 9,9213550$	$lM = 9,9213550$	$lN = 8,8450589$
$l\lambda' = 0,0460294$	$l\nu' = 9,4029488$	$l\mathfrak{C}' = 9,1337260$
$9,9673844$	$9,3243038$	$9,7113329$
$l\mathfrak{B}' = 9,5461969$	$lB\mathfrak{B} = 9,2289435$	
$\text{l.p.I} = 0,4211875$	$\text{l.p II} = 9,0953603$	
Pars I $= 2,6375$	pars II $= 0,1245$	pars III $= 0,5144\lambda''$

IV.

$$\begin{aligned} lN &= 8,8450589 \\ l\nu &= 9,3412366 \\ \hline &\, 8,1862955 \\ l\mathfrak{C}C &= 9,7361403 \\ \hline &\, 8,4501552 \\ \text{pars IV} &= 0,0282 \end{aligned}$$

hinc igitur

$$I + II + IV = -2,7338,$$

quare confusio ex lente triplicata nata erit

$$\lambda + 0,5144\lambda'' - 2,7338,$$

ſi ergo confuſio ex reliquis lentibus nata eſſet $= O$ omnis confuſio tolleretur, faciendo

$$\lambda + 0,5144\,\lambda'' = 2,7338 - O.$$

§. 25. Quia hic coefficiens ipſius λ'' multo minor eſt quam caſu precedente, parum refert, vtrum numerus λ'' aliquanto maior minorue accipiatur, praecipue, cum vnitatem non multum ſuperare debeat, quare in commodum praxis ſtatuamus tertiam lentem vtrinque aeque conuexam, vt ſit radius vtriusque faciei

$$= 1,06\,r = 0,5145\,\Pi;$$

tum vero debet eſſe

$$\sqrt{\lambda'' - 1} = \left(\frac{\sigma - \varrho}{\tau}\right)\left(\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2}\right).$$

Quia igitur

$$\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2} = 0,0143 \quad \text{et} \quad l\frac{\sigma - \varrho}{\tau} = 0,1901924 \text{ erit}$$

$$l\sqrt{\lambda'' - 1} = 8,3455284 \quad \text{et} \quad l(\lambda'' - 1) = 6,6910568$$

hincque $\lambda'' = 1,0005$ ideoque $0,5144\lambda'' = 0,5147$, vnde pro omni confuſioni tollenda erit

$$\lambda = 2,2191 - O.$$

Pro lente ſecunea autem radius vtriusque faciei

$$= 1,16\,q = 0,3144\,\Pi,$$

ſimulque internalla inter binas lentes $= 0,0226\,\Pi$.

§. 26. Supereſt igitur ſola lens prima, pro qua eſſe debet $\lambda = 2,2191 - O$, tum vero erit radius faciei anterioris $= \frac{p}{\sigma - \tau\sqrt{\lambda - 1}}$, poſterioris vero ro $= \frac{p}{\varrho + \tau\sqrt{\lambda - 1}}$; vbi notandum, si sumeretur $\lambda = 1$, priorem radium minorem esse proditurum quam secundae lentis, quare cum sit $p = -\frac{5}{4}q$, quaeramus λ, vt hi radii aequentur, debet esse

$$\frac{3}{2,32} = \sigma - \tau\sqrt{\lambda - 1} = 1,2931 \text{ hincque } \tau\sqrt{\lambda - 1} = 0,3671$$

atque hinc patet, numerum λ minorem capi non posse quam 1, 1574 sicque maxima confusio quam hoc casu tollere licebit erit $O = 1, 0617$ quae pro omnis generis telescopiis abunde sufficit. Haec igitur hypothesis precedenti longe anteferenda videtur, propterea quod distantia focalis lentis mediae aliquanto maior est inuenta quam ante, ex quo operae pretium erit inquirere, an numerum ϑ vlterius diminuendo, lucrum adhuc magis increscat, vnde sequentem hypothesin euoluamus.

Hypothesis tertia

$$\vartheta = \frac{4}{3} \text{ siue } g = -\frac{4}{3}f.$$

§. 27. Primo igitur hinc quaeramus litteras F, G et H sequentem in modum

$F = \frac{16}{61}$	$lF = 9,4187902$	
$G = \frac{15}{16}$	$lG = 9,9719713$	$lGG = 9,9439426$
$H = \frac{61}{64}$	$lH = 9,9791498$	$lHH = 9,9582996$

vnde porro colliguntur

$f = 2,8013$	$lf = 0,4473527$
$g = -3,7350$	$lg = (-)0,5722906$

$p = 0,3570\ \Pi$	$lp = 9,5526473$
$q = -0,2678\ \Pi$	$lq = (-)9,4277094.$

Quia

Quia igitur q iam minor eſt quam caſu precedente, hanc hypotheſin vlterius non proſequimur, ſed potius videamus, an valorem ipſius ϑ aliquantillum augendo vltra $\frac{5}{4}$, maius lucrum conſequamur.

Hypotheſis quarta

$$\vartheta = \tfrac{5}{3} \text{ ſiue } g = -\tfrac{5}{3}f.$$

§. 28. Statim igitur quaeramus valores ſequentes

$F = \frac{28}{47}$	$lF = 9,7750601$	
$G = \frac{19}{20}$	$lG = 9,6777236$	$lGG = 9,9554472$
$H = \frac{47}{48}$	$lH = 9,9908567$	$lHH = 9,9817134$

vnde porro colligitur

$f = 2,2076$	$lf = 0,3439236$
$g = -3,6793$	$lg = (-)0,5657652$
$h = 2,3152$	$lh = 0,3645885$
$p = 0,4529\,\Pi$	$lp = 9,6560764$
$q = -0,2718\,\Pi$	$lq = (-)9,4342346$
$r = 0,4319\,\Pi$	$lr = 9,6354115.$

Quoniam hic valor ipſius q maior prodiit quam ante: intelligimus, hunc propemodum caſum eſſe omnium maximum, ac ſi valores in precedentibus caſibus erutos inter ſe comparamus, haud difficulter inde concludere licet, ipſum maximum valorem hypotheſi $\frac{59}{38}$ reſpondere, quem ergo euoluere operae pretium erit.

Hypo-

Hypothesis quinta

$$\vartheta = \tfrac{59}{36} \text{ siue } g = -\tfrac{59}{36} f.$$

§. 29. Cum igitur sit $12\,\vartheta = \frac{59}{3}$ reperiemus

$F = \frac{295}{519}$	$lF = 9{,}7546546$	
$G = \frac{56}{59}$	$lG = 9{,}9773360$	$lGG = 9{,}9546720$
$H = \frac{173}{177}$	$lH = 9{,}9900728$	$lHH = 9{,}9801456$

ex quibus consequimur,

$f = 2{,}24457$	$lf = 0{,}3511328$
$g = -3{,}67860$	$lg = (-)\,0{,}5656823$
$h = 2{,}27581$	$lh = 0{,}3561360$

$p = 0{,}44550\,\Pi$	$lp = 9{,}6488672$
$q = -0{,}27184\,\Pi$	$lq = (-)\,9{,}4343177$
$r = 0{,}44042\,\Pi$	$lr = 9{,}6438640.$

Praeterea vero $lP = 0{,}0226640$ et $lPQ = 0{,}0099272$

$B = \frac{9}{5}$	$lB = 0{,}2552725$	$lB^3 = 0{,}7658175$
$\mathfrak{B} = \frac{9}{14}$	$l\mathfrak{B} = 9{,}8681145$	$l\mathfrak{B}^3 = 9{,}4243435$
	$lB\mathfrak{B} = 0{,}0633870$	
$C = h - 1$	$lC = 0{,}1057874$	$lC^3 = 0{,}3173622$
$\mathfrak{C} = \frac{h-1}{h}$	$l\mathfrak{C} = 9{,}7496514$	$l\mathfrak{C}^3 = 9{,}2489542$
seu $\mathfrak{C} = 0{,}56189$	$lC\mathfrak{C} = 9{,}8554388$	

Tandem igitur Log. $M = 9{,}9235146$ et $lN = 9{,}2242553.$

§. 30. Iam quia secunda lens sumitur aeque concaua vtrinque, erit

$$\sqrt{\lambda - 1} = \frac{(\sigma' - \varrho')}{\tau'}\left(\mathfrak{B} - \tfrac{1}{2}\right),$$

tum vero ob rationes supra allegatas, faciamus etiam tertiam lentem aeque conuexam vtrinque, et ob

$$\mathfrak{B} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{7} \text{ et } \mathfrak{C} - \tfrac{1}{2} = 0{,}06189$$

calculus ita ſe habebit

à $l\frac{\sigma' - \varrho'}{\tau'} = 0,2155374$	$l\frac{\sigma - \varrho}{\tau} = 0,1901924$ add.
ſubtr. $l\,7 = 0,8450980$	$l(\mathfrak{C} - \frac{1}{2}) = 8,7916205$
$l\sqrt{\lambda' - 1} = 9,3704394$	$l\sqrt{\lambda'' - 1} = 8,9818129$
$l(\lambda' - 1) = 8,7408788$	$l(\lambda'' - 1) = 7,9636258$
ideoque $\lambda' = 1,05506$	ideoque $\lambda'' = 1,00919$

vnde calculus pro confuſione ita inſtituetur,

Pro parte priore	*Pro parte ſecunda*
$l\,M = 9,9235146$	$l\,M = 9,9235146$
$l\,\lambda' = 0,0232792$	$l\,\nu' = 9,4029488$
$9,9467938$	$9,3264634$
$l\,\mathfrak{B}^3 = 9,4243435$	$l\,B\,\mathfrak{B} = 0,0633870$
l. p. I $= 0,5224503$	l. p. II $= 9,2630764$
ideoque pars I $= -3,33005$	pars II $= -0,18326$
pars II $= -0,18326$	
$-3,51331$	

Pro parte tertia	*Pro quarta parte*
$l\,N = 9,2242553$	$l\,N = 9,2242553$
$l\,\lambda'' = 0,0039731$	$l\,\nu = 9,3412366$
$9,2282284$	$8,5654919$
$l\,\mathfrak{C}^3 = 9,2489542$	$l\,C\,\mathfrak{C} = 9,8554388$
l. part. III $= 9,9792742$	l. p. IV $= 8,7100531$
pars III $= 0,95340$	pars IV $= 0,051293$
pars IV $= 0,05129$	
$+1,00469$	

Ergo

Ergo confusio lentis triplicatae $\lambda - 2, 50862$; vnde si confusio ex reliquis lentibus nata, fuerit $= O$, capi debebit $\lambda = 2, 50862 - O$, sicque intelligitur, sumto $\lambda = 1$ confusionem tolli posse $O = 1, 50682$.

§. 31. Definito autem numero λ, pro lente prima debet esse radius faciei

$$\text{Anterioris} = \frac{p}{\sigma - \tau\sqrt{\lambda - 1}} = \frac{0,48154\,\Pi}{1,7944 - \sqrt{\lambda - 1}}$$

$$\text{Posterioris} = \frac{p}{\varrho - \tau\sqrt{\lambda - 1}} = \frac{0,48154\,\Pi}{0,2449 + \sqrt{\lambda - 1}}.$$

Pro lente secunda autem, iam vidimus esse,

Radium vtriusque faciei $= - 0, 31532\,\Pi$.

At pro lente tertia,

Radium vtriusque faciei $= 0, 46684\,\Pi$.

Interualla autem inter binas lentes debent esse

$= 0, 02265\,\Pi$

vnde si haec lens aperturam admittat, cuius semidiameter $= 0, 0788\,\Pi$, tum applicari poterit, ad multiplicationem m producendam, sumendo $\Pi = \frac{m}{4}$.

DESCRIPTIO

lentis obiectiuae triplicatae, perfectissimae, quae etiam confusionem, a reliquis lentibus natam destruere valeat.

Ex hypothesi quinta $\vartheta = \frac{59}{36}$ petita.

---

§. 32. Componitur igitur haec lens obiectiua ex tribus lentibus, quarum prima et tertia, quae ambae

ambae ſunt conuexae, ex vitro coronario ſunt parandae, media vero concaua ex vitro cryſtallino: tum ante omnia definiatur per formulas ſupra datas confuſio, ex lentibus reliquis oriunda, quae ſit $= \mathrm{O}$ capiaturque numerus $\lambda = 2,50862 - \mathrm{O}$, et lentis primae (cuius diſtantia focalis debet eſſe $= 0,44550\, \Pi$ vbi Π denotat diſtantiam focalem totius lentis triplicatae) conſtructio ita inſtituatur, vt ſit.

Radius faciei anterioris $= \frac{0,48154\, \Pi}{1,7944 - \sqrt{\lambda - 1}}$ et

Radius faciei poſterioris $= \frac{0,48154\, \Pi}{0,3445 + \sqrt{\lambda - 1}}$.

A medio huius lentis vsque ad medium ſecundae ſtatuatur diſtantia $= 0,02265\, \Pi$, tum lentis ſecundae cryſtallinae vtrinque aequaliter concauae cuius diſtantia focalis eſt $= -0,27184\, \Pi$ ſtatuatur

Radius vtriusque faciei $= -0,31532\, \Pi$,

ab huius lentis medio vsque ad medium lentis tertiae diſtantia etiam ſtatuatur $= 0,02265\, \Pi$. Denique lentis tertiae diſtantia focalis $= 0,44042\, \Pi$ quae etiam vtrinque aequaliter conuexa fiat ſumendo

Radium vtriusque faciei $= 0,46684\, \Pi$.

Quod ſi iam apertura definiri queat ex parte quarta minimi radii curuaturae, haec lens obiectiua aperturam admittet cuius ſemidiameter ſit $= 0,07883\, \Pi$, ſicque adhiberi poterit ad multiplicationem $= m$ producendam, ſi capiatur $\Pi = \frac{m}{4}$ dig.

§. 33. Quod ſi ergo nulla confuſio fuerit tollenda, ita vt ipſa haec lens obiectiua iam puriſſimam imaginem repreſentet, ſumi debebit

$\lambda = 2,$

$\lambda = 2,50862$ vnde fit $\sqrt{\lambda - 1} = 1,22826$ vnde pro lente prima colligitur

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,85045\ \Pi \\ \text{posterioris} = 0,32689\ \Pi. \end{cases}$

Eodem modo aliquot casus pro confusionibus minoribus tollendis, cuiusmodi saepissime occurrunt, euoluamus.

I°. Si confusio tollenda $O = 0,10$.

Erit ergo $\lambda = 2,40862$ et $\sqrt{\lambda - 1} = 1,1868$ vnde colligitur

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,79253\ \Pi \\ \text{posterioris} = 0,33634\ \Pi. \end{cases}$

II°. Si confusio tollenda $O = 0,20$.

Erit ergo $\lambda = 2,30862$ et $\sqrt{\lambda - 1} = 1,1439$ vnde fit

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,74026\ \Pi \\ \text{posterioris} = 0,34673\ \Pi. \end{cases}$

III°. Si confusio tollenda $O = 0,30$.

Erit $\lambda = 2,20862$ et $\sqrt{\lambda - 1} = 1,0993$ vnde habebimus

Radium faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,69276\ \Pi \\ \text{posterioris} = 0,35823\ \Pi. \end{cases}$

IV°. Si confusio tollenda $O = 0,40$.

Erit $\lambda = 2,10862$ et $\sqrt{\lambda - 1} = 1,0528$ vnde colligitur

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,64933\ \Pi \\ \text{posterioris} = 0,37193\ \Pi. \end{cases}$

V°. Si confusio tollenda sit $O = 0,50$.

Erit $\lambda = 2,00862$ et $\sqrt{\lambda - 1} = 1,0043$ hincque

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,60947\ \Pi \\ \text{posterioris} = 0,38548\ \Pi. \end{cases}$

§. 34. Si quis forte suspicetur, discrimen in prima lente pro variis confusionibus tollendis nimis esse paruum, quam vt accurate in praxi exsequi liceat, ei fortasse hypothesis secunda supra euoluta magis arridebit, quoniam valor ipsius $\lambda = 2,2191 - O$ notabiliter minor est quam nostro casu; quanquam enim pro hac hypothesi distantia focalis q aliquanto minor est inuenta, tamen differentia tam est exigua, vt in apertura vix vllum decrementum inde nascatur; quamobrem etiam lentes obiectiuas, ex hac hypothesi deductas, hic subiungamus.

DESCRIPTIO

alius lentis obiectiuae triplicatae ex hypothesi secunda $\vartheta = \frac{3}{2}$ petita.

§. 35. Lens haec obiectiua componitur ex tribus lentibus, quarum prima et tertia, conuexae, ex vitro coronario, media vero concaua, ex vitro crystallino sunt parandae. Ante omnia igitur confusio ex lentibus reliquis oriunda, per formulas supra datas definiri debet, quae sit $= O$, capiaturque numerus $\lambda = 2,21913\ \Pi - O$ et primae lentis, distantiam focalem $= 0,40663\ \Pi$ habentis (vbi Π denotat,

tat distantiam focalem totius lentis triplicatae) ita instituatur constructio, vt sit

$$\text{Radius faciei anterioris} = \frac{0,43950\,\Pi}{1,79142 - \sqrt{\lambda - 1}}$$

$$\text{Radius faciei posterioris} = \frac{0,43950\,\Pi}{0,24492 + \sqrt{\lambda - 1}}.$$

Inter medium huius lentis atque medium secundae, statuatur interuallum $= 0,02260\,\Pi$, tum, lentis secundae crystallinae vtrinque aequaliter concauae cuius distantia focalis $= -0,27109\,\Pi$, statuatur radius vtriusque faciei $= -0,31446\,\Pi$, distantia autem a medio huius lentis vsque ad medium tertiae etiam statuatur $= 0,02260\,\Pi$.

Denique lentis tertiae distantia focalis

$= 0,48567\,\Pi$

quae etiam vtrinque aequaliter conuexa fiat, sumendo

Radium vtriusque faciei $= 0,51485\,\Pi$

Quod si iam apertura definiri queat ex parte quarta minimi radii curuaturae, haec lens obiectiua aperturam admittet, cuius semidiameter sit $0,07861\,\Pi$, sicque adhiberi poterit ad multiplicationem $= m$ producendam, si capiatur $\Pi = \frac{m}{4}$ dig.

§. 36. Quodsi ergo tollenda confusio fuerit nulla, ita, vt haec ipsa lens obiectiua iam purissimam imaginem repraesentet, sumi debebit

$\lambda = 2,21913$ vnde fit $\sqrt{\lambda - 1} = 1,10414$ fietque

$$\text{Radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = 0,63817\,\Pi \\ \text{posterioris} = 0,32578\,\Pi. \end{cases}$$

 Eodem

Eodem modo pro minoribus tollendis confusionibus aliquot casus, cuius modi saepissime occurrunt euolvamus.

I°. Si confusio tollenda fuerit $O = 0,10$.

Erit $\lambda = 2,11913$ ideoque $\sqrt{\lambda - 1} = 1,05789$ vnde consequimur

Radium faciei $\begin{cases} \text{anterioris} & = 0,59672\ \Pi \\ \text{posterioris} & = 0,33735\ \Pi. \end{cases}$

II°. Si confusio tollenda fuerit $O = 0,20$.

Erit $\lambda = 2,01913$ ideoque $\sqrt{\lambda - 1} = 1,00951$ vnde colligitur

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} & = 0,55994\ \Pi \\ \text{posterioris} & = 0,35036\ \Pi. \end{cases}$

III°. Si confusio tollenda fuerit $O = 0,30$.

Erit $\lambda = 1,91913$ ideoque $\sqrt{\lambda - 1} = 0,95871$ vnde fit

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} & = 0,52590\ \Pi \\ \text{posterioris} & = 0,36514\ \Pi. \end{cases}$

IV°. Si confusio tollenda fuerit $O = 0,40$.

Erit $\lambda = 1,81913$ ideoque $\sqrt{\lambda - 1} = 0,90505$ vnde oritur

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} & = 0,49417\ \Pi \\ \text{posterioris} & = 0,38213\ \Pi. \end{cases}$

V°. Sit confusio tollenda $O = 0,50$.

Et erit $\lambda = 1,71913$ ideoque $\sqrt{\lambda - 1} = 0,84801$ hincque

Radius

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,46438\ \Pi \\ \text{posterioris} = 0,40213\ \Pi. \end{cases}$

VI°. Sit denique confusio tollenda $O = 0,60$.

Eritque $\lambda = 1,61913$ ideoque $\sqrt{\lambda - 1} = 0,78684$ vnde colligitur

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,43619\ \Pi \\ \text{posterioris} = 0,42597\ \Pi. \end{cases}$

APPENDIX

de lentibus obiectiuis duplicatis.

§. 1. Posita ipsius lentis duplicatae distantia focali $= \Pi$, sint distantiae focales, primae lentis $= p$ et secundae $= q$, fiatque vt ante $p = \frac{\Pi}{f}$ et $q = \frac{\Pi}{g}$, tum vero interuallum inter has duas lentes statuatur $= \frac{\Pi}{k}$. Vtra autem harum lentium sit ex vitro vel coronario vel crystallino paranda, hic in limine nondum definimus, sed sufficiat notasse, lentem coronariam semper fore conuexam, eiusque distantiam focalem minorem quam alterius lentis crystallinae, quae semper erit concaua; hinc, vt lens duplicata maximam admittat aperturam, conueniet lentem coronariam vtrinque fieri aeque conuexam, vt eius curuaturae radii pars quarta praebeat semidiametrum aperturae; tum vero vtique erit cauendum, ne alterius lentis crystallinae alteruter radius curuaturae minor prodeat.

§. 2. Sint iam harum lentium distantiae determinatrices, pro prima a et α, pro secunda autem b et β, eritque statim $a = \infty$ et $\mathfrak{G} = \Pi$, tum vero habebitur

$$\alpha = p = \frac{\Pi}{f}, \text{ et } \frac{1}{b} + \frac{1}{\mathfrak{G}} = \frac{1}{q} = \frac{g}{\Pi} \text{ vnde ob}$$

$$\mathfrak{G} = \Pi \text{ fiet } \frac{1}{b} = \frac{g-1}{\Pi} \text{ ideoque } b = \frac{\Pi}{g-1}.$$

Cum igitur esse debeat distantia lentium $\alpha + b = \frac{\Pi}{k}$ habebitur ista aequatio

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{g-1} = \frac{1}{k} \text{ ideoque } g - 1 = \frac{fk}{f-k}$$

ex his autem valoribus deducantur sequentes

$$P = -\frac{\alpha}{b} = \frac{1-g}{f} = \frac{k}{k-f} \text{ et } B = \frac{\mathfrak{G}}{b} = g - 1 = \frac{fk}{f-k}$$

hincque

$$\mathfrak{B} = \frac{B}{1+B} = \frac{g-1}{g} \text{ sicque erit } \mathfrak{B}\, b = \frac{\Pi}{g} = q.$$

§. 3. Quod si nunc $\zeta : \eta$ exprimat rationem dispersionis primae lentis, quae ergo, vt supra ostendimus erit vel 3 : 4 vel 4 : 3, destructio confusionis, a diuersa radiorum refractione oriunda postulat hanc aequationem

$$\zeta p + \frac{\eta q}{\mathfrak{B}^2} = q \text{ siue } \frac{\zeta}{f} + \frac{\eta}{\mathfrak{B}^2 q} = 0$$

quia vero est

$$\mathfrak{B} = \frac{g-1}{g} = \frac{fk}{g(f-k)} = -\frac{f}{g}\left(\frac{k}{k-f}\right)$$

haec aequatio induet hanc formam

$$\zeta f + \eta g \left(\frac{k-f}{k}\right)^2 = 0,$$

quod si iam k per f determinatur, eiusque multiplo cuipiam aequetur, vt sit $k = if$, erit haec aequatio

$$\zeta f + \eta g \left(\frac{i-1}{i}\right)^2 = 0$$

pre-

precedens vero aequatio dat

$$g - 1 = \frac{if}{1 - i} \text{ ita vt fit } f = \frac{(g-1)(1-i)}{i}$$

quo valore in altera aequatione fubftituto erit

$$\frac{\zeta(1-i)(g-1)}{i} + \eta g \left(\frac{i-1}{i}\right)^2 = 0 \text{ fiue}$$

$$\zeta i (g - 1) + \eta g (1 - i) = 0$$

vnde colligitur fore

$$g = \frac{\zeta i}{\zeta i - \eta i + \eta} \text{ confequenter } f = \frac{-\eta(i-1)^2}{i(\zeta i - \eta i + \eta)}$$

quocirca duos cafus euolui oportet, prouti prima lens fuerit vel coronaria vel cryftallina.

CASVS PRIMVS

quo prima lens ex vitro coronario, fecunda vero ex vitro cryftallino parantur.

§. 4. Hic igitur erit $\zeta = 3$ et $\eta = 4$, vnde valores inuenti prodibunt

$$f = \frac{4(i-1)^2}{i(i-4)} \quad \text{et} \quad g = \frac{-3i}{i+4}$$

cum iam prima lens fit coronaria et conuexa, ex ea interuallum lentium ita definiatur, vt fit $k = 12f$ ideoque $i = 12$, confequenter omnia iam perfecte funt determinata, fcilicet

$f = \frac{121}{24}$	$p = \frac{24}{121}\Pi$	$P = \frac{78}{121}$
$g = -\frac{9}{4}$	$q = -\frac{4}{9}\Pi$	$B = -\frac{15}{4}$
		$\mathfrak{B} = \frac{13}{9}$

et diftantia inter binas lentes erit $= \frac{1}{12} p = \frac{2}{121}\Pi$.

§. 5. Confideremus nunc confufionem ab apertura

tura lentium natam, quae ex hac formula debet definiri

$$\lambda - \frac{\mu'}{p\,\mu}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu'}{B\mathfrak{B}}\right)$$

vbi pro prima lente vſurpari debent numeri ſupra indicati $\mu, \nu, \xi, \sigma, \tau$, pro ſecunda autem lente iſti $\mu', \nu', \xi', \sigma', \tau'$; iam quia prima lens debet vtrinque eſſe aeque conuexa, radius vtriusque faciei erit $= 1,06\,p$ numerus autem arbitrarius λ ita determinari debet vt ſit

$$\sqrt{\lambda - 1} = \frac{(\sigma - \rho)}{\tau}\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

vnde colligitur

$$\lambda = 1,60024,$$

pro altero membro ſupputando eſt

$$l\tfrac{1}{p} = 0,1906908 \text{ hincque } l\tfrac{\mu'}{\mu\,p} = 0,1368694$$

porro

$$lB = (-)\,0,5118834 \text{ et } l\mathfrak{B} = 0,1597008 \text{ ergo}$$

$$lB\mathfrak{B} = (-)\,0,6715842$$

vnde calculus ita ſe habebit

$l\frac{\mu'}{\mu\,p}$	$= 0,1368694$	$l\frac{\mu'}{p\,\mu}$	$= 0,1368694$
$l\mathfrak{B}^3$	$= 0,4791024$	add. $l\nu$	$= 9,3412366$
l primae p.	$= 9,8897670$		$9,4781060$
		ſubtr. $lB\mathfrak{B}$	$= 0,6715842(-)$
		l. part. ſec.	$= 8,8065218(-)$
pars prima	$= -0,77583\,\lambda'$	pars ſecunda	$= +0,06405.$

Hinc igitur confuſio ex lente duplicata nata erit

$$1,66429 - 0,77583\,\lambda'$$

vnde

vnde si confusio ex reliquis lentibus nata fuerit $= O$ debet esse

$$1,66429 - 0,77583\,\lambda' - O = 0$$

ex qua colligitur

$$\lambda' = 2,14520 + 1,28894\,O.$$

§. 6. Inuento autem hoc numero λ' constructio secundae lentis ita est dirigenda, vt fiat

Radius faciei anterioris $= \frac{q}{\sigma' - \mathfrak{B}(\sigma' - \varrho') + \tau'\sqrt{\lambda' - 1}}$ et

Radius faciei posterioris $= \frac{q}{\varrho' + \mathfrak{B}(\sigma' - \varrho') - \tau'\sqrt{\lambda' - 1}}$

vbi erit

$\mathfrak{B}(\sigma' - \varrho') = 2,08202$ hinc $\sigma' - \mathfrak{B}(\sigma' - \varrho') = -0,4993$ et
$\varrho' + \mathfrak{B}(\sigma' - \varrho') = 2,2233$

quocirca habebimus

Radium faciei anterioris $= \frac{-0,4444\,\Pi}{-0,4493 + \tau'\sqrt{\lambda' - 1}}$

Radium faciei posterioris $= \frac{-0,4444\,\Pi}{2,2233 - \tau'\sqrt{\lambda' - 1}}$

vbi est $l\lambda' = 0,2041851$, praeterea vero erit in partibus decimalibus

$p = 0,19835\,\Pi$	$lp = 9,2974322$
$q = -0,44444\,\Pi$	$lq = (-)\,9,6478131$

hinc pro prima lente, radius vtriusque faciei

$$= 0,21022\,\Pi$$

vnde cauendum est, ne posterioris lentis vllus radius fiat minor, interuallum autem inter binas lentes erit

$$= \tfrac{1}{12}\,p = 0,01653\,\Pi.$$

§ 7. Nunc igitur videamus, qualem formam ſecunda lens ſit habitura, ſi confuſio deſtruenda O fuerit nulla, tum autem erit

$\lambda' = 2,14520$ vnde fit $\tau' \sqrt{\lambda'} - 1 = 0,93905$

ex quo pro ſecunda lente obtinebitur

Radius faciei anterioris $= \frac{-0,4444\,\Pi}{0,4897} = -0,90758\,\Pi$

Radius faciei poſterioris $= \frac{-0,4444\,\Pi}{1,2843} = -0,34606\,\Pi$

vnde manifeſtum eſt, neutrum huius lentis Radium vnquam proditurum fore nimis paruum; quo maior enim fuerit confuſio deſtruenda O, eo maior fiet numerus λ', ideoque ambo radii adhuc propius ad aequalitatem conuergent.

Coeterum, quia haec lens aperturam admittit ſemidiametri $= 0,05256\,\Pi$, pro multiplicatione $= m$ producendam ſtatui debet $0,05256\,\Pi = \frac{m}{50}$, vnde ſequitur $\Pi = \frac{m}{2,628}$ dig. ſiue proxime $\Pi = \frac{3}{8} m$ digitor: ita, vt multiplicatio centupla requiret diſtantiam focalem $= 37\frac{1}{2}$ dig.

DESCRIPTIO

Lentis obiectiuae duplicatae, cuius prior lens ex vitro coronario, poſterior vero, ex cryſtallino eſt paranda.

§. 8. Quod ſi ipſius lentis duplicatae diſtantia focalis eſſe debeat $= \Pi$, prioris lentis diſtantia focalis capienda erit $= 0,19835\,\Pi$, et quia vtrin-

que

que aequae conuexa eſt formanda, vtriusque faciei radius capiatur $= 0,21023\,\Pi$; a medio huius lentis, vsque ad medium poſterioris ſtatuatur interuallum $= 0,01653\,\Pi$; poſterior autem lens, ex vitro cryſtallino conſtans et concaua, habeat diſtantiam focalem $= -0,4444\,\Pi$, tum ſi confuſio a reliquis lentibus oriunda fuerit $= O$ capiatur numerus

$$\lambda' = 2,14520 + 1,28894\,O$$

hincque computetur valor formulae

$$\tau' \sqrt{\lambda' - 1} = 0,8775 \sqrt{\lambda' - 1}$$

quo facto ſtatuatur

$$\text{Radius faciei anterioris} = \frac{-0,4444\,\Pi}{-0,4493 + \tau' \sqrt{\lambda' - 1}} \text{ et}$$

$$\text{Radius faciei poſterioris} = \frac{-0,4444\,\Pi}{2,2233 - \tau' \sqrt{\lambda' - 1}}.$$

Tum vero, ſi huic lenti duplicatae apertura detur, cuius ſemidiameter $= 0,05256\,\Pi$ ea adhiberi poterit, ad multiplicationem $= m$ producendam, ſi accipiatur $\Pi = \frac{3}{4} m$ dig.

CASVS SECVNDVS

quo prima lens ex vitro cryſtallino, ſecunda vero ex coronario paratur.

§. 9. Hic ergo erit $\zeta = 4$ et $\eta = 3$, vnde valores prodibunt ſequentes

$$f = -\frac{3(i-1)^2}{i(i+3)} \quad \text{et} \quad g = \frac{4i}{i+3}.$$

Cum nunc ſecunda lens fieri debeat vtrinque aequaliter conuexa, ſtatui poſſet $k = 12\,g$; verum quia

 prae-

praeſtat k ad f referre, cuius valor hic erit negatiuus et minor quam g, ſumamus $k = -16f$ vt ſit $i = -16$, ex quo impetrabimus

$$f = -\tfrac{167}{251}$$
$$g = \tfrac{64}{17}$$

ſin autem ſumamus $i = -15$ habebimus

$$f = -\tfrac{64}{15}$$
$$g = 5.$$

§. 10. Retineamus autem valores poſteriores

$$f = -\tfrac{64}{15} \text{ et } g = 5,$$

vnde ſequitur

$$p = -\tfrac{15}{64}\Pi = -0,23437\Pi \text{ et } q = \tfrac{1}{5}\Pi = 0,2000\Pi$$

quae poſterior lens, quia fieri debet vtrinque aeque conuexa, radius vtriusque faciei erit $= 0,21200\Pi$, ſicque aperturam admittet cuius ſemidiameter $= 0,0530\Pi$; diſtantia autem inter binas lentes

$$= -\tfrac{1}{15}p = +0,01562\Pi$$

deinde vero reliquae litterae erunt

$$P = \tfrac{15}{16}; \quad B = +4 \quad \text{et } \mathfrak{B} = \tfrac{4}{5}.$$

§. 11. Nunc pro confuſione tollenda, quia prima lens eſt cryſtallina et concaua, formula eam exprimens erit

$$-\tfrac{\mu'}{\mu}\lambda + \tfrac{1}{P}\left(\tfrac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \tfrac{\nu'}{B\mathfrak{B}}\right)$$

vbi, cum ſecunda lens ſit vtrinque aeque conuexa erit

$$\sqrt{\lambda' - 1} = \left(\tfrac{\sigma - \varrho}{\tau}\right)\left(\mathfrak{B} - \tfrac{1}{2}\right)$$

quia

quia igitur eſt

$\mathfrak{B} = \frac{4}{5}$ erit $\mathfrak{B} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0,300$

vnde colligitur

$\lambda' = 1,21609.$

Deinde eſt

$l\frac{1}{p} = 0,0280287$ et $lB = 0,6020600$ et

$l\mathfrak{B} = 9,9030900$ hincque $lB\mathfrak{B} = 0,5051500$

vnde calculus pro ſecunda lente ita ſe habebit

$l\frac{1}{p} = 0,0280287$	$l\frac{1}{p} = 0,0280287$
$l\lambda' = 0,0849660$	$l\nu = 9,3412366$
$0,1129947$	$9,3692653$
$l\mathfrak{B}^3 = 9,7092700$	$lB\mathfrak{B} = 0,5051500$
l. p. I $= 0,4037247$	l. p. II $= 8,8641153$
pars I $= +2,53352$	pars II $= 0,07016$

ergo ambae partes faciunt $2,60368$, vnde cum ſit

$\frac{\mu'}{\mu} = 0,88344$

erit confuſio lentis duplicatae

$-0,88344\lambda + 2,60368,$

ſi confuſio ex reliquis lentibus nata ſit $= O$ debebit eſſe.

$-0,88344\lambda + 2,60368 + O = 0$ hincque

$\lambda = \frac{2,60368 + O}{0,88344} = 2,94720 + 1,13194\,O.$

§. 12. Hinc ergo inuento numero λ erit pro prima lente, Radius faciei anterioris $= \frac{p}{\sigma' - \tau' \sqrt{\lambda - 1}} = - \frac{0,23437\,\Pi}{1,5827 - \tau' \sqrt{\lambda - 1}}$

Radius faciei posterioris $= \frac{p}{\varrho' + \tau' \sqrt{\lambda - 1}} = - \frac{0,23437\,\Pi}{0,1413 + \tau' \sqrt{\lambda - 1}}$.

Hinc autem radius faciei posterioris multo prodit minor quam radius vtriusque faciei primae lentis, etiamsi confusio plane nulla esset superanda, quod incommodum multo magis vsu veniet, si etiam maior confusio deberet tolli; vnde hoc genus lentium duplicatarum penitus repudiandum videtur, nisi forte voluerimus multo maiorem distantiam focalem admittere, id quod scopo Dioptricae maxime est alienum.

DE

DE APPLICATIONE LENTIVM OBIECTIVARVM COMPOSITARVM AD OMNIS GENERIS TELESCOPIA.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Methodus, qua ſum vſus in dioptrica, conſtructionem teleſcopiorum pertractandi, poſtulat, vt ſingulae lentes, ex quibus haec inſtrumenta componuntur ſeorſim in calculum introducantur, vnde pro multitudine lentium, formulae quibus ſatisfieri oportet, continuo magis fiunt complicatae; quare ſi loco lentis obiectiuae ſimplicis, ſiue duplicata ſiue etiam triplicata adhibere velimus, numerus litterarum omnium, quae ob ſingulas lentes in calculum ingrediuntur, ita increſcit, vt moleſtum ſit omnibus conditionibus quae ad perfectionem teleſcopiorum requiruntur, ſatisfacere.

§. 2. Vt igitur huic incommodo occurramus, maxime eſt optandum, vt loco lentis ſiue duplicatae triplicatae, vna lens tantum ſimplex in calculum induci poſſit, quae omni reſpectu illius vicem gerat, atque eundem plane effectum producat; facile

autem

autem intelligitur talem lentem ſimplicem per ſe ſemper eſſe impoſſibilem, quandoquidem ſi talem lentem conſtruere liceret, non opus foret ad lentes compoſitas confugere. Verum nihil impedit, quo minus lente adeo imaginaria in calculo vtamur, dummodo easdem proprietates inuoluat, qua lentes compoſitae ſunt affectae, quandoquidem, calculo abſoluto, id quod erat imaginarium, iterum inde eliditur: Hunc infinem ſequens Problema reſoluendum ſuſcipio.

Problema.

§. 3. *Propoſita lente obiectiua, ſiue duplicata ſiue triplicata, inuenire lentem ſimplicem etſi imaginariam, ex data vitri ſpecie confectam, quae omni reſpectu in compoſitione teleſcopii eundem plane effectum eſſet proditura, et quam idcirco tanquam lentem vicariam ſpectare liceat.*

§. 4. Primo igitur lentem triplicatam qua vti voluerimus, ſecundum omnes circumſtantias accurate deſcribamus, quae ergo compoſita ſit ex tribus lentibus P P, Q Q, R R, quarum prima P P et tertia R R ex vitro coronario, media vero Q Q ex vitro cryſtallino ſit parata, et quae, obiectorum infinite quaſi remotorum imaginem, inuerſam I η repraeſentet; vocemus igitur diſtantiam huius imaginis $c\,I = \Pi$, quae ergo eſt diſtantia focalis ipſius lentis triplicatae, tum vero ſit primae P P diſtantia focalis $= p$, ſecundae lentis Q Q $= q$ et tertiae R R $= r$; praeterea vero ſint interualla, quibus centra

Tab. IV. Fig. 1.

tra harum lentium a se inuicem sunt remota $ab = bc = \frac{\Pi}{k}$, quod internallum supra statuimus $= \frac{1}{15} q$; tum vero sit semidiameter aperturae primae harum lentium $ax = x$, sitque Ex radius a centro obiecti per extremitatem lentium transiens, qui ergo post triplicem refractionem in centrum imaginis I pertingat, postquam secundam lentem in x', tertiam autem in x'' traiecerat; ponamus autem semidiametrum aperturae secundae lentis $bx' = x$, tertiae vero $cx'' = x''$; quod autem ad figuram singularum lentium attinet, eam deinceps ita assumemus, quemadmodum pro quauis specie in precedentibus dissertationibus determinauimus.

§. 5. Praeterea vero meminisse oportet, si, vti in Dioptrica est factum, distantiae determinatrices harum lentium vocentur a et α pro prima lente PP, pro secunda lente b et β et pro tertia lente c et γ, tum fore $a = \infty$ et $\gamma = \Pi$, atque notentur sequentes aequationes,

$$\alpha = p, \ \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{q} \text{ et } \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{r}$$

tum vero ob internalla data

$$\alpha + b = \frac{\Pi}{k} \text{ et } \beta + c = \frac{\Pi}{k},$$

etiam considerentur istae quantitates deriuatae

$$P = -\frac{\alpha}{b} \text{ et } Q = -\frac{\beta}{c} \text{ porro } \frac{\beta}{b} = B \text{ et } \frac{\gamma}{c} = C$$

vnde formatae sunt istae

$$\mathfrak{B} = \frac{B}{1+B} \text{ et } \mathfrak{C} = \frac{C}{1+C}$$

 ex

ex quibus deduximus

$$p = \alpha, \; q = \mathfrak{B}\, b \text{ et } r = \mathfrak{C}\, c.$$

§ 6. Sit nunc ΠΠ lens illa ſimplex vicaria, ad ſpeciem vitri coronariam referenda, quae omni reſpectu eundem effectum producat atque illa lens triplicata, ac primo quidem ſtatuamus iſtius lentis
Tab. IV. diſtantiam focalem $e\,l = \Phi$, eique tribuamus aper-
Fig. 2. turam cuius ſemidiameter $e\,X = X$, ita, vt radius a centro obiecti emanans E X, per extremitatem huius lentis tranſiens, cum axe concurrat in ipſo puncto l; tum vero pro indole huius lentis ſit numerus arbitrarius, ex quo haec lens formari deberet $= \Lambda$, qui cum aequalis ſit o, vel adeo valorem habeat negatiuum, in cauſa eſt cur haec lens ſit imaginaria: quandoquidem talem lentem actu efficere non licet, niſi hic numerus arbitrarius ſit poſitiuus, et vnitate maior. At vero pro ſingulis lentibus lentis triplicatae, ſint ſimiles numeri arbitrarii λ, λ' et λ'', quos vtique vnitatem ſuperare oportet; cum iam haec lens vicaria iſtis tribus elementis, primo diſtantia focali Φ, ſecundo ſemidiametro X et tertio numero arbitrario Λ penitus determinetur, noſtra quaeſtio huc reducitur. quemadmodum haec tria elementa Φ, X et Λ ex ſuperioribus elementis, quibus lens triplicata definitur, determinari opporteat, vt in compoſitione cum reliquis lentibus, quodcunque etiam adiungere viſum fuerit, eundem plane effectum eſſet praeſtatura.

§. 7.

§. 7. Hunc in finem ante omnia requiri manifestum est, vt imago $I\eta$, per lentem vicariam repraesentata, eandem prorsus habeat magnitudinem, quam imago per lentem triplicatam repraesentata; at si semidiametrum apparentem obiecti vocemus $= \phi$, semidiameter imaginis per lentem vicariam repraesentatae erit $I\eta = \Phi\phi$. Verum semidiameter imaginis per lentem triplicatam exhibita erit

$$= \alpha \frac{\beta}{b} \cdot \frac{\gamma}{c} \phi = \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta}{c} \gamma \phi.$$

Quia ergo est

$$\frac{\alpha}{b} = -P; \quad \frac{\beta}{c} = -Q \quad \text{et } \gamma = \Pi,$$

haec quantitas erit $PQ\Pi\phi$, cui ergo illa $\Phi\phi$ debet esse aequalis, vnde colligimus esse debere $\Phi = PQ\Pi$, quae est prima conditio pro lente vicaria requisita, vnde patet: lentem vicariam non in ipsum locum lentis triplicatae substitui posse, sed cum locus primae imaginis $I\eta$ respectu sequentium lentium fuerit definitus, lentem vicariam ante hanc imaginem, ad distantiam $eI = \Pi QP$ constitui concipiendum est.

§. 8. Prima hac conditione expedita porro efficiendum est, vt vtroque casu extremi radii per lentes trasmissi cum axe in I eundem angulum constituant, quandoquidem per hunc angulum apertura sequentium lentium, atque adeo campus apparens determinatur. Cum igitur pro lente triplicata, tangens huius anguli CIx'' sit $= \frac{x''}{\Pi}$ pro lente autem vicaria huius anguli tangens sit $= \frac{x}{\Phi} = \frac{x}{PQ\Pi}$ necesse

 est

eſt vt fiat $X = x'' P Q$. Cum igitur ſit $a\,b = \frac{\pi}{k}$ erit primo

$$x' = x - \frac{x\,\pi}{\alpha\,k} = x\left(1 - \frac{\pi}{\alpha\,k}\right).$$

Hincque porro ſimili modo

$$x'' = x'\left(1 - \frac{\pi}{\beta\,k}\right)$$

quam ob rem habebimus

$$x'' = x'\left(1 - \frac{\pi}{\alpha\,k}\right)\left(1 - \frac{\pi}{\beta\,k}\right) = x\left(1 - \frac{\pi}{k}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{\pi\,\pi}{\alpha\,\beta\,k\,k}\right)$$

vnde per formulas ſupra datas colligitur

$$x'' = x\left(\frac{13}{12} + \frac{25\,q}{144\,p}\right)$$

poſito $\frac{\pi}{k} = -\frac{1}{12}q$ quia ſcilicet q eſt quantitas negatiua, conſequenter pro lente vicaria habebimus

$$X = P\,Q\,x\left(\frac{13}{12} + \frac{25\,q}{144\,p}\right)$$

haecque eſt ſecunda conditio pro determinatione lentis vicariae.

§. 9. Praecipua autem conditio adimplenda in hoc conſiſtit, vt lens vicaria in calculo confuſionis eundem plane obtineat valorem, quem pro lente triplicata inuenimus; ſupra quidem tantum formulis vſi ſumus quibus haec confuſio erat proportionalis, quia hoc ad propoſitum noſtrum ſufficiebat; nunc autem veram expreſſionem pro ſemidiametro confuſionis conſiderare debemus. In dioptrica autem pro ſemidiametro confuſionis quatenus ad noſtram lentem triplicatam refertur, dum ad multiplicationem m producendam adhi-

adhibetur, ſemidiameter confuſionis reperitur expreſſus

$$\frac{\mu m x^3}{4 p^3}\left(\lambda - \frac{\mu'}{\mu P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu'}{B \mathfrak{B}}\right) + \frac{1}{B^3 P Q}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C \mathfrak{C}}\right)\right)$$

quae formula ſi ad noſtram lentem referatur dabit ſemidiametrum confuſionis

$$\frac{\mu m X^3}{4 \Phi^3} \Lambda$$

quare vt confuſio vtrinque fiat eadem, neceſſe eſt vt ſit

$$\Lambda = \frac{\Phi^3 x^3}{p^3 X^3}(\lambda - \text{etc.})$$

vbi ſimul adiungendi ſunt termini λ' et λ'' inuolventes: quod ſi ergo loco Φ et X valores inuentos ſubſtituamus, reperiemus

$$\Lambda = \frac{\Pi^3}{p^6\left(\frac{13}{12} + \frac{25 q}{144 q}\right)^3}(\lambda - \text{etc.})$$

in hac ergo formula etiam tertia conditio continetur, qua lens noſtra vicaria penitus determinatur, atque pro quouis teleſcopiorum genere loco lentis triplicatae in calculum introduci poteſt, vnde ad ſequens Problema principale progredimur.

Problema.

§. 10. *Pro quouis teleſcopiorum genere, lentem triplicatam loco obiectiuae adhibendam, ita determinare, vt omnis plane confuſio a lentium apertura oriunda prorſus deſtruatur.*

 Solutio.

Solutio.

§. 11. Loco lentis obiectiuae triplicatae, in computum introducatur lens obiectiua simplex vicaria modo determinata, quasi ex vitro coronario esset parata, et tum ex data multiplicatione $= m$ et elementis huius lentis vicariae, quae sunt Φ X et Λ, secundum praecepta in *Dioptrica* data, colligantur sequentium lentium omnium confusiones, vnde prodeat semidiameter confusionis totalis

$$= \frac{\mu m X^3}{4\Phi^3}(\Lambda + \Omega)$$

ita vt Ω contineat formulas pro reliquis lentibus confusionem exhibentes; quo facto omnis confusio penitus tolletur, si fiat $\Lambda + \Omega = 0$ cum igitur sit

$$\Lambda = \frac{\Pi^3}{p^3\left(\frac{13}{12} + \frac{25q}{144p}\right)^3}(\lambda - [\lambda'] + [\lambda''])$$

vbi scilicet loco terminorum

$$\frac{\mu'}{\mu P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu'}{B\mathfrak{B}}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{BPQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right)$$

scribamus simpliciter

$$[\lambda'] \quad \text{et} \quad [\lambda'']$$

tum vero sit etiam breuitatis gratia

$$\frac{\Pi^3}{p^3\left(\frac{13}{12} + \frac{25q}{144p}\right)^3} = \Delta$$

vt habeamus

$$\Lambda = \Delta(\lambda - [\lambda'] + [\lambda''])$$

sicque habebimus hanc aequationem adimplendam

$$\Delta(\lambda - [\lambda'] + [\lambda'']) + \Omega = 0 \text{ siue}$$

$$\lambda - [\lambda'] + [\lambda''] + \frac{\Omega}{\Delta} = 0.$$

Supra

Supra autem, vbi lentes triplicatas tractauimus, ſuppoſuimus confuſionem a reliquis lentibus oriundam eſſe $= O$ ita vt ſatisfieri oporteret huic aequationi

$$\lambda - [\lambda'] + [\lambda''] + O = o$$

qua aequatione cum illa comparata intelligimus eſſe $O = \frac{\Omega}{\Delta}$; cum igitur quantitas Ω per praecepta dioptricae fuerit definita, determinationem lentis triplicatae obtinebimus per hanc formulam

$$\lambda = [\lambda'] - [\lambda''] - \frac{\Omega}{\Delta};$$

quo facto lentem triplicatam ante locum primae imaginis ad diſtantiam $= \Pi$ collocare oportebit.

§. 12. Quae igitur hactenus in genere expoſuimus, ea tam ad lentes illas triplicatas, quas in ſuperiore diſſertatione deſcripſimus, quam ad lentem duplicatam in appendice deſcriptam accommodemus; in ipſa autem illa diſſertatione binas lentes triplicatas dedimus, alteram ex hypotheſi $\vartheta = \frac{59}{30}$, alteram vero ex hypotheſi $\vartheta = \frac{7}{4}$ deductam, vnde tres caſus nobis erunt euoluendi, quos ordine inuerſo pertractemus, et quomodo omnis generis teleſcopia ope talium lentium obiectiuarum ad ſummum perfectionis gradum perduci queant, oſtendamus.

I. DE TELESCOPIIS
Lente obiectiua duplicata inſtruendis.

§. 13. Poſita huius lentis duplicatae diſtantia focali $= \Pi$, prioris lentis quae ex vitro coronario eſt paranda diſtantia focalis inuenta eſt

$p = 0,19835\,\Pi$, quae

quae cum esse debeat vtrinque aequaliter conuexa, radius vtriusque faciei erit

$$= 0,21023\,\Pi,$$

posterioris vero lentis crystallinae distantia focalis negatiua assignata est

$$q = -0,4444\,\Pi,$$

pro cuius constructione, si numerus arbitrarius eo pertinens inuentus fuerit $= \lambda'$, radium faciei anterioris esse opportet

$$= \frac{-0,4444\,\Pi}{-0,4493 + \tau'\sqrt{\lambda' - 1}} = \frac{-0,50649\,\Pi}{-0,51201 + \sqrt{\lambda' - 1}}$$

faciei autem posterioris

$$= \frac{-0,4444\,\Pi}{2,2233 - \tau'\sqrt{\lambda' - 1}} = \frac{-0,50649\,\Pi}{2,53359 - \sqrt{\lambda' - 1}}$$

distantia autem inter has binas lentes constituta est $0,01653\,\Pi$. Quod si iam hac lente vti velimus ad multiplicationem $= m$ producendam, eam ad tantam aperturam recipiendam parari opportet, cuius semidiameter in facie anteriore sit $x = \frac{m}{50}$ digitor. tum vero obseruauimus, distantiam focalem capi posse $= \Pi = \frac{3}{8} m$ dig.

§. 14. Pro hac vero lente duplicata erat $P = \frac{78}{121}$, qui valor sufficit, dum duae tantum habeantur lentes, et hoc valore loco PQ vti conueniet. Tum vero pro semidiametro aperturae secundae lentis crystallinae erit

$$x' = x\left(1 - \tfrac{1}{12}\right) = \tfrac{11}{12}\,x,$$

ita vt iam loco formulae $\frac{13}{12} + \frac{25\,q}{144\,p}$ hic tantum $\frac{11}{12}$ scribi oporteat; praeterea vero pro confusione huius lentis

lentis obiectiuae, quam in praeceptis ante traditis hac formula $\lambda - [\lambda'] + [\lambda'']$ designauimus, nunc habebimus istum valorem

$$1,66429 - 0,77583\,\lambda'.$$

§. 15. His de nostra lente duplicata definitis, in calculum pro telescopiis cuiusque generis loco istius lentis duplicatae, introducamus lentem simplicem ex vitro coronario factam, cuius distantia focalis sit Φ et semidiameter aperturae $= X$, atque ex iis quae ante sunt demonstrata habebimus

$$\Phi = P\,\Pi = \tfrac{78}{121}\,\Pi = 0,6446\,\Pi$$

tum vero

$$X = \tfrac{78}{121}\cdot\tfrac{11}{12}\,x = \tfrac{13}{22}\,x = 0,5909\,x$$

denique hac lente obiectiua simplici in calculum introducta colligantur singularum lentium reliquarum confusiones, secundum formulas in dioptrica traditas, sitque earum confusio $= \Omega$ et cum debeat esse

$$\lambda - [\lambda'] + [\lambda'']\,\tfrac{\Omega}{\Delta} = 0 \text{ ob } \Delta = \frac{\Pi^3}{(\frac{11}{12})^3\,p^3} \text{ erit}$$

$$\sqrt[3]{\Delta} = \frac{12\,\Pi}{11\,p} = \frac{12}{2,18185}$$

vnde fit

$$l\Delta = 2,2210692 \text{ hincque } l\tfrac{1}{\Delta} = 7,7789308$$

ergo

$$\tfrac{1}{\Delta} = 0,00601$$

sicque aequatio pro confusione tollenda erit

$$1,66429 - 0,77583\,\lambda' + 0,00601\,\Omega = 0$$

 vnde

vnde reperitur

$$\lambda' = \frac{1,66429 + 0,00601\,\Omega}{0,77563} = 2,14520 + 0,00775\,\Omega.$$

Nunc igitur ex hoc valore λ', lens posterior crystallina construatur, quo facto lens ista duplicata ante imaginem collocetur ad distantiam $= \Pi$, manentibus reliquis lentibus vti fuerint determinatae, et telescopium erit perfectum.

II. DE TELESCOPIIS

Lente triplicata obiectiua posteriore instruendi.

§. 16. Posita huius lentis triplicatae distantia focali $= \Pi$, primae lentis ex vitro coronario parandae distantia focalis assignata est

$$p = 0,40663\,\Pi,$$

cuius si numerus arbitrarius sit $= \lambda$, constructio ita se habet

$$\text{Radius faciei anterioris} = \frac{0,43950\,\Pi}{1,79442 - \sqrt{\lambda - 1}}$$

$$\text{Radius faciei posterioris} = \frac{0,43050\,\Pi}{0,24492 + \sqrt{\lambda - 1}}.$$

Lens vero secunda crystallina distantiam focalem habet

$$q = -0,27109\,\Pi,$$

quae cum esse debeat vtrinque aequaliter concaua, vtriusque faciei radius erit $= -0,31446\,\Pi$; tertiae denique lentis iterum coronariae distantia focalis erat $= 0,48567\,\Pi$, quae cum sit etiam vtrinque aequaliter conuexa, radius vtriusque faciei erit $0,51483\,\Pi$;

tum

tum vero diſtantia, tam a prima lente ad ſecundam, quam a ſecunda ad tertiam conſtituta eſt $= 0,02260\,\Pi$; quod ſi iam haec lens adhiberi debeat ad multiplicationem $= m$ producendam, ſemidiameter aperturae in prima lente debet eſſe $x = \frac{m}{50}$ dig. tum vero capi poterit diſtantia focalis $\Pi = \frac{m}{4}$ dig.

§. 17. Pro hac porro lente triplicata inuenimus fore

$$PQ = \tfrac{216}{209} \text{ et } l\,PQ = 0,0143075$$

deinde pro calculo ſequente notetur eſſe

$$l\,\frac{\Pi}{p} = 0,3908021,$$

tum vero pro formula

$$\tfrac{13}{12} + \tfrac{25\,q}{144\,p} \text{ reperitur } \tfrac{25\,q}{144\,p} = -0,11574$$

vnde fit

$$\tfrac{13}{12} + \tfrac{25\,q}{144\,p} = 0,96759.$$

Cum porro ſit

$$\sqrt[3]{\Delta} = \frac{\Pi}{p\left(\frac{13}{12} + \frac{25\,q}{144\,p}\right)} \text{ erit } l\sqrt[3]{\Delta} = 0,4051107$$

hinc

$$l\Delta = 1,2153321 \text{ et } l\tfrac{1}{\Delta} = 8,7846679 \text{ ergo}$$
$$\tfrac{1}{\Delta} = 0,06091.$$

§. 18. In calculo igitur, pro teleſcopiis cuiusque generis, loco lentis noſtrae triplicatae, mente ſaltem ſubſtituatur lens ſimplex coronaria, cuius diſtantia focalis ſit Φ, et ſemidiameter aperturae $= X$, eritque vti ſupra oſtendimus

$$\Phi = PQ\,\Pi = 1,03349\,\Pi \text{ et } X = 0,99999\,x.$$

Hinc pro reliquis lentibus computentur confusiones, quarum summa sit $= \Omega$, et quia confusio ex lente triplicata oriunda inuenta est $\lambda - 2,2191$, vt omnis confusio tollatur huic aequationi est satisfaciendum

$$\lambda - 2,2191 + 0,06091\,\Omega = 0,$$

vnde reperitur

$$\lambda = 2,2191 - 0,06091\,\Omega,$$

quo valore inuento prima lens erit perfecte determinata; tantum igitur superest, vt tota lens triplicata ante primam imaginem ad distantiam $= \Pi$ constituatur.

III. DE TELESCOPIIS Lente obiectiua triplicata priori instruendis.

§. 18. Primae lentis ex vitro coronario parandae distantia focalis est

$$p = 0,44550\,\Pi,$$

cui si conueniat numerus arbitrarius λ

Radius faciei anterioris esto $= \dfrac{0,48154\,\Pi}{1,79442 - \sqrt{\lambda - 1}}$ et

Radius faciei posterioris $= \dfrac{0,49154\,\Pi}{0,24452 + \sqrt{\lambda - 1}}$

secundae autem lentis distantia focalis debet esse $q = -0,27184$, quae cum effici debeat vtrinque aequaliter concaua, radius vtriusque faciei capiatur

$$= -0,31532\,\Pi.$$

Tertiae autem lentis iterum coronariae atque aequaliter vtrinque conuexae distantia focalis assignata est

$$r = 0,44042\,\Pi$$

et

et radius vtriusque faciei

$$= 0,46684\,\Pi\,;$$

tum vero interualla inter bina harum lentium constituta sunt

$$= 0,02265\,\Pi,$$

quae scilicet interualla a puncto medio seu centro cuiusque lentis sunt sumenda. Quod si iam haec lens ad multiplicationem $= m$ producendam adhibeatur, eius aperturae semidiameter erit $x = \frac{m}{50}$ dig., distantia autem eius focalis sumi poterit $\frac{\Pi}{4}$ digitor; Confusio vero huic lenti triplicatae conueniens reperta est

$$= \lambda - 2,50862.$$

§. 19. Pro hac porro lente erat

$$l\,P\,Q = 0,0099272$$

deinde vero colligitur

$$\frac{25\,q}{144\,p} = \frac{q}{5,76.\,p} = -0,10593$$

vnde fit formula

$$\frac{13}{12} + \frac{25\,q}{144\,p} = 0,97740\,;$$

cum postea sit

$$l\frac{\Pi}{p} = 0,3511328 \text{ et } l\sqrt[\nu]{\Delta} = 0,3610605$$

ideoque

$$l\Delta = 1,0831815,\ l\tfrac{1}{\Delta} = 8,9168185 \text{ et } \tfrac{1}{\Delta} = 0,08257.$$

§. 20. Iam in calculo teleſcopiorum, loco huius lentis triplicatae, mente ſaltem ſubſtituatur lens coronaria ſimplex, cuius diſtantia focalis ſit $= \Phi$ et ſemidiameter aperturae $= X$, eritque vti ſupra demonſtrauimus

$$\Phi = PQ\Pi = 1,02311\,\Pi \text{ et } X = 1,0000\,x$$

ita vt ſit $X = x$: quo facto reliquarum lentium confuſiones colligantur, quarum ſumma ſi ponatur $= \Omega$, tota confuſio cenſenda erit

$$= \lambda - 2,50862 + 0,08257\,\Omega,$$

quae ergo penitus deſtruetur ſi capiatur

$$\lambda = 2,50862 - 0,08257\,\Omega$$

vnde prima lens iam penitus erit determinata et conſtrui poterit.

§. 21. Caeterum quia in Dioptrica formulae pro confuſione lentium variis modis ſunt repreſentatae, dum factor communis alio atque alio modo aſſumitur, hic iis formulis erit vtendum quae hac forma ſunt exhibitae

$$\lambda - \frac{1}{P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\right) + \text{etc.}$$

cuius ſcilicet primum membrum eſt ſimpliciter numerus λ, primae lenti obiectiuae reſpondens. Beneficio igitur horum praeceptorum, omnia teleſcopiorum genera in Dioptrica pertractata, ad ſummum perfectionis gradum reduci poterunt. Hunc in finem autem eas tantum ſpecies adhiberi conueniet, in in quibus lens obiectiua ſimplex eſt vſurpata, quandoquidem hic lentes compoſitas ad ſimplicem vicariam reducere docuimus. Denique circumſtantia hic ſe offert notatu maxime digna: quod confuſio a requis lentibus nata Ω, in noſtris formulis valde exiguum obtinuerit coefficientem, vnde intelligitur, ob lentes ſequentes, conſtructionem lentis obiectiuae ſiue duplicatae ſiue triplicatae parum immutari.

DE

DE PERFECTIONE TELESCOPIORVM PRIMI GENERIS NVLLAM IMAGINEM REALEM CONTINENTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Hic igitur contemplemur ſimpliciſſimam ſpeciem horum teleſcopiorum, in Dioptricae tomo ſecundo, pagina 73[a] deſcriptam; quae tantum duabus lentibus conſtat, priore obiectiua, cuius diſtantia focalis ibi ponitur $= p$, altera oculari concaua cuius diſtantia focalis eſt $= q$, vbi pro data multiplicatione $= m$ debet eſſe $q = -\frac{p}{m}$, diſtantia autem harum lentium $= (\frac{m-1}{m}) p$; Tum vero oculum lenti oculari immediate applicari oportet, vt maximum campum apparentem contueatur, cuius ſemidiameter erit $\Phi = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{\omega}{p}$, denotante ω ſemidiametrum pupillae, qui cum aeſtimari ſoleat $= \frac{1}{20}$ dig., diſtantiam focalem lentis ocularis minorem ſtatui non licet quam $\frac{1}{4}$ dig. vel ad ſummum $\frac{1}{5}$ dig.

§. 2. Hic igitur lens obiectiua vti eſt ſimplex, nobis vicem gerat lentis perfectae, ſiue duplicatae, ſiue

ſiue triplicatae, quales ſupra deſcripſimus; ſicque p denotat id, quod ibi vocauimus Φ, quemadmodum X deſignat ſemidiametrum aperturae iſtius lentis obiectiuae vicariae, pro qua ſupra numerum arbitrarium poſuimus $= \Lambda$, quo autem non amplius opus erit, quando eius loco lentem ſiue duplicatam ſiue triplicatam ſubſtituemus. His igitur praenotatis, vtramque lentem tanquam ex eadem vitri ſpecie paratam ſpectamus, quae ſit coronaria.

§. 3. Sit iam numerus arbitrarius lenti oculari reſpondens λ', et quia hanc lentem vtrinque aequaliter concauam fieri conuenit, vt maximam aperturam admittat, erit $\sqrt{\lambda' - 1} = \left(\frac{\sigma - \varrho}{\tau}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$, vnde colligitur numerus $\lambda' = 1,60024$. Hinc autem ob $\mu' = \mu$ formula pro confuſione inuenta eſt $\frac{\mu m x^3}{4 p^3}\left(\Lambda - \frac{\lambda'}{m}\right)$, vnde cum ſupra ad confuſionem, ex omnibus lentibus natam, deſignandam, exhibuerimus hanc formulam $\Lambda + \Omega$, erit noſtro caſu

$$\Omega = -\frac{\lambda'}{m} = -\frac{1,60024}{m}$$

vnde prout alia atque alia lens obiectiua compoſita in vſum vocatur, conſtructio totius teleſcopii omnino determinatur, dummodo ſemidiameter aperturae X ſiue x, vna cum diſtantia focali Π, ita accipiatur, vti multiplicatio m poſtulat. Pro ternis igitur lentibus perfectis, quae ſupra ſunt deſcriptae, tres caſus euoluamus.

CASVS PRIMVS

quo pro lente obiectiua accipitur lens duplicata supra descripta.

§. 4. Pro data igitur multiplicatione m primo accipiatur

$$x = \tfrac{m}{55}\,\text{dig.} \quad \text{et} \quad \Pi = \tfrac{3}{8}\,m\,\text{dig.},$$

quibus valoribus constitutis erit

$$\Phi = 0,6446\,\Pi = p,$$

vnde colligitur

$$q = -\frac{0,6446\,\Pi}{m},$$

tum vero quia imago realis post lentem hanc obiectiuam cadit, ad distantiam $= \Pi$, lens ocularis autem ad distantiam

$$= 0,6446\,\frac{\Pi}{m}$$

erit distantia inter lentem obiectiuam et ocularem

$$= \Pi\left(1 - \frac{0,6446}{m}\right)$$

quae erit longitudo telescopii; deinde vero ob

$$\Omega = -\frac{1,6002}{m}$$

pro constructione lentis crystallinae habebimus numerum arbitrarium

$$\lambda' = 2,14520 - \frac{0,00775 \cdot 1,60024}{m} \text{ siue } \lambda' = 2,14520 - \frac{0,01240}{m}.$$

Praeterea vero etiam notetur esse $X = 0,5909\,x$.

§. 5. Nunc igitur constructio lentis obiectiuae duplicatae ita se habebit.

1°. Prior

1°. Prior eius lens ex vitro coronario paranda, distantiam focalem habeat $= 0,19835\,\Pi$, radium vero vtriusque faciei conuexae $= 0,21023\,\Pi$.

2°. A medio huius lentis ad lentem sequentem statuatur interuallum $= 0,01653\,\Pi$.

3°. Lentis porro crystallinae concauae, distantia focalis assignata est $= -0,4444\,\Pi$ et pro eius constructione

Radius faciei anterioris $= \frac{-0,50649\,\Pi}{-0,51202 + \sqrt{\lambda' - 1}}$

Radius faciei posterioris $= \frac{-0,50649\,\Pi}{2,53768 - \sqrt{\lambda' - 1}}$.

Existente $\lambda' = 2,14520 - \frac{0,01240}{m}$.

4°. Post hanc lentem, ad distantiam $\Pi\left(1 - \frac{0,6446}{m}\right)$ statuatur lens ocularis coronaria concaua, cuius distantia focalis $= -0,6446\,\frac{\Pi}{m}$ et radius vtriusque faciei $= -0,6833\,\frac{\Pi}{m}$, cui oculum immediate applicari oportet.

5°. Tum vero pro semidiametro campi apparentis erit $\Phi = \frac{m}{m-1}\,\frac{\omega}{0,6446\,\Pi}$, vbi ω est circiter $\frac{1}{55}$ dig. quae expressio, cum ad radium referatur, multiplicari debet per numerum 3437, vt reperiantur minuta prima.

6°. Quod ad aperturas attinet, lenti oculari quidem maxima tribuitur, quam capere potest. At pro lente obiectiua dubium nasci potest, vtrum capi debeat $x = \frac{m}{50}$ dig. an $X = \frac{m}{55}$ dig. quia inter X et x tam insigne discrimen intercedit, vtique autem praestabit sumsisse $X = \frac{m}{55}$, vnde fit $x = \frac{X}{0,60} = \frac{m}{33}$. Tum autem quantitas Π in eadem ratione $3:5$ erit augenda, ita vt fiat $\Pi = \frac{5}{8} m$; hoc enim modo certe maior claritatis gradus obtinebitur. Hinc igitur vnicum exemplum computemus.

Exemplum.

§. 6. Sit primo multiplicatio $m = 5$, capiatur ergo $x = \frac{1}{6}$ dig. et $\Pi = \frac{25}{8}$, seu proxime $\Pi = 3$ dig. tum erit $\lambda' = 2,14272$ hinc

$$\lambda' - 1 = 1,14272 \text{ et } \sqrt{\lambda' - 1} = 1,069$$

vnde constructio huius telescopii sequenti modo se habebit.

1°. Prior eius lens ex vitro coronario paranda distantiam focalem habeat $= 0,595$ dig. radium vtriusque faciei $= 0,631$ dig. et semidiametrum aperturae $= \frac{1}{8}$ dig.

2°. A medio huius lentis vsque ad medium sequentis, statuatur interuallum $= 0,059$ digit.

3°. Lentis porro crystallinae concauae, distantia focalis assignata est $= -1,3333$ dig.

Radius faciei anterioris $= -\frac{1,519}{0,557} = -2,727$ dig. et

Radius faciei posterioris $= -\frac{1,519}{1,465} = -1,037$ dig.

4°. Post hanc lentem, ad distantiam $2,613$ dig. statuatur lens ocularis coronaria concaua, cuius distantia focalis $= -0,387$ dig. et radius vtriusque faciei $= -0,410$ digit. cui oculum immediate applicari oportet.

5°.

5°. Tum vero pro ſemidiametro campi adparentis erit $\Phi = \frac{3437}{31} = 111$ minut.

CASVS SECVNDVS
quo pro lente obiectiua accipitur lens triplicata, priore loco deſcripta.

§. 7. Pro data igitur multiplicatione m, accipiatur

$$x = \frac{m}{50} \text{ et } \Pi = \frac{m}{4} \text{ dig.}$$

quibus valoribus conſtitutis erit

$$\Phi = 1,03349\,\Pi = p, \text{ et } X = 1,00.x, \text{ ſiue } X = x$$

porro colligitur

$$q = -1,03349\,\frac{\Pi}{m}$$

vnde diſtantia inter lentem obiectiuam et ocularem erit

$$= \Pi\left(1 - \frac{1,03349}{m}\right); \text{ deinde ob } \Omega = -\frac{1,6002}{m} \text{ erit}$$

$$\lambda = 2,2191 + \frac{0,0609.\,1,6002}{m} \text{ ſiue } \lambda = 2,2191 + \frac{0,0975}{m}.$$

§. 8. Nunc igitur conſtructio, tam lentis obiectiuae triplicatae, quam totius teleſcopii ita ſe habebit.

1°. Primae lentis ex vitro coronario parandae, diſtantia focalis debet eſſe $= 0,40663\,\Pi$, et ex numero λ modo inuento ita formari debet iſta lens, vt ſit

$$\text{Radius faciei anterioris} = \frac{0,43950\,\Pi}{1,79442 - \sqrt{\lambda - 1}}$$

$$\text{Radius faciei poſterioris} = \frac{0,43950\,\Pi}{0,24492 + \sqrt{\lambda - 1}}.$$

2°. A medio huius lentis vsque ad medium secundae, statuatur interuallum $= 0,02260\,\Pi$.

3°. Secundum locum obtinet lens crystallina, vtrinque aeque concaua, cuius distantia focalis est $= -0,2711\,\Pi$ et

Radius vtriusque faciei $= -0,31446\,\Pi$.

4°. Ab huius medio vsque ad medium tertiae, iterum statuatur interuallum $= 0,02260\,\Pi$.

5°. Tertiae vero lentis ex vitro coronario, et vtrinque aeque conuexe parandae distantia focalis debet esse $= 0,48567\,\Pi$ et

Radius vtriusque faciei $= 0,51483\,\Pi$.

6°. Ab hac lente vsque ad lentem ocularem statuatur interuallum $= \Pi(1 - \frac{1,03349}{m})$.

7°. At lens haec ocularis, ex vitro coronario, et aequaliter vtrinque concaua paranda, habeat distantiam focalem $= -1,0335\,\frac{\Pi}{m}$ et radium vtriusque faciei $= -1,1136\,\frac{\Pi}{m}$.

8°. Tum vero pro semidiametro campi adparentis erit $\Phi = \frac{m}{m-1}\left(\frac{\omega}{1,03349\,\Pi}\right)$ existente ω circiter $= \frac{1}{20}$ dig. qui, sumto igitur $\omega = \frac{1}{20}$ et $\Pi = \frac{m}{4}$ dig. in minutis primis ita exprimitur, vt sit $\Phi = \frac{665}{m-1}$ min. vnde sequentia exempla euoluamus.

Exemplum primum.

§. 8. Incipiamus a multiplicatione $m = 10$, et sumto semidiametro aperturae in lente obiectiua

$x = \frac{m}{50} = \frac{1}{5}$ dig. $= 0,200$ dig.

et

et diſtantia focali

$\Pi = \frac{m}{4} = 2,500$ dig. erit $\lambda = 2,2288$

et $\sqrt{\lambda - 1} = 1,108$

vnde conſtructio teleſcopii ita ſe habebit.

1°. Primae lentis ex vitro coronario parandae, diſtantia focalis debet eſſe $= 1,016$ dig. tum vero

Radius faciei anterioris $= \frac{1,090}{0,680} = 1,603$ dig.

Radius faciei poſterioris $= \frac{1,090}{1,353} = 0,813$ dig.

2°. A medio huius lentis vsque ad medium ſecundae, ſtatuatur interuallum $= 0,056$ dig.

3°. Secundum locum tenet lens cryſtallina, vtrinque aeque concaua, cuius diſtantia focalis eſt $= -0,678$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= -0,786$ digit.

4°. Ab huius lentis medio, ad medium tertiae ſtatuatur iterum interuallum $= 0,056$ digit.

5°. Tertiae vero lentis ex vitro coronario, et vtrinque aeque conuexe parandae, diſtantia focalis debet eſſe $= 1,214$ dig. et

Radins vtriusque faciei $= 1,287$ dig.

6°. Ab hac lente vsque ad lentem ocularem, ſtatuatur interuallum $= 2,242$ dig.

7°. Haec lens ocularis ex vitro coronario et aequaliter vtrinque concaua parari debet, ita vt ſit diſtantia focalis $= -0,258$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= -0,278$ dig.

8°. Tum vero ſemidiameter campi apparentis

tis $= 66\frac{1}{2}$ mir. coeterum campus apparens maxime eſt incertus, ob variationem pupillae.

Exemplum ſecundum.

§. 9. Sit iam multiplicatio $m = 20$, et ſumto ſemidiametro aperturae in lente obiectiua

$$x = \frac{m}{50} = 0,400 \text{ dig.}$$

et diſtantia focali $\Pi = 5$ digit. erit

$$\lambda = 2,2240 \text{ ergo } \sqrt{\lambda - 1} = 1,1063$$

vnde conſtructio teleſcopii ita ſe habebit.

1°. Primae lentis ex vitro coronario parandae, diſtantia focalis debet eſſe $= 2,033$ digit.; tum vero

Radius faciei anterioris $= \frac{2,1975}{0,6881}$ dig. $= 3,193$ dig.

Radius faciei poſterioris $= \frac{2,1975}{1,3512}$ dig. $= 1,626$ dig.

2°. A medio huius lentis vsque ad medium ſecundae, ſtatuatur interuallum $= 0,113$ digit.

3°. Secundum locum obtinet lens cryſtallina, vtrinque aeque concaua, cuius diſtantia focalis eſt $= -1,355$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= -1,572$ digit.

4°. Ab huius medio, vsque ad medium tertiae, ſtatuatur interuallum $= 0,113$ digit.

5°. Tertiae vero lentis ex vitro coronario parandae et vtrinque aeque conuexae, diſtantia focalis debet eſſe $= 2,428$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= 2,574$.

6°. Ab

6°. Ab hac lente, vsque ad lentem ocularem ſtatuatur interuallum $= 4, 742$ dig.

7°. Quae lens ocularis ex vitro coronario et aequaliter vtrinque concaua parari debet, ita vt diſtantia focalis $= -0, 258$ dig. et

Radius vtrivsque faciei $= -0, 278$ dig.

8°. Tum vero ſemidiameter campi adparentis erit 35 min.

EVOLVTIO GENERALIS
pro multiplicationibus maioribus.

§. 10. Pro multiplicatione quacunque $= m$, capiatur ſemidiameter aperturae $x = \frac{m}{50}$, et diſtantia focalis lentis triplicatae $\Pi = \frac{m}{4}$ dig. tum vero cum ſit

$\lambda = 2, 2191 + \frac{0, 0975}{m}$ erit

$\lambda - 1 = 1, 2191 + \frac{0, 0975}{m} = 1, 2191 (1 + \frac{2}{25\, m})$

hincque

$\sqrt{\lambda - 1} = 1, 1041 (1 + \frac{1}{25\, m}) = 1, 1041 + \frac{0, 0441}{m}$

hinc pro primae lentis facie anteriore erit denominator

$= 0, 6903 - \frac{0, 0442}{m} = 0, 6903 (1 - \frac{0, 0640}{m})$

vnde cum numerator ſit $0, 10987\, m$, erit radius faciei anterioris

$= \frac{0, 10987\, m}{0, 6903} (1 + \frac{0, 0640}{m}) = 0, 159163\, m + 0, 010;$

ſimili modo pro facie poſteriore erit denominator

$1, 3490 + \frac{0, 0442}{m} = 1, 3490 (1 + \frac{0, 0328}{m})$

 hinc

hinc ergo radius faciei poſterioris erit

$$= \frac{0,\,0087\,m}{1,\,490}\left(1 - \frac{0,\,0328}{m}\right) = 0,\,081446\,m - 0,\,003$$

quae particulae extremae ſubiunctae tam ſunt paruae vt in praxi prorſus ſentiri nequeant.

CONSTRVCTIO TELESCOPIORVM pro multiplicatione quacunque $= m$.

§. 11. Cum igitur hic ſit $x = \frac{m}{55}$ et $\Pi = \frac{m}{4}$, conſtructio ita eſt exſequenda.

1°. Primae lentis ex vitro coronario parandae, diſtantia focalis debet eſſe $= 0,\,10166\,m$ dig. et

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris } = 0,\,159163.m + 0,010 \text{ dig.} \\ \text{poſterioris } = 0,\,081446.m - 0,\,003 \text{ dig.} \end{cases}$

2°. A medio huius lentis vsque ad medium ſecundae, ſtatuatur interuallum $= 0,\,00565.\,m$ dig.

3°. Secundum locum tenet lens cryſtallina, vtrinque aequaliter concaua, cuius diſtantia focalis debet eſſe $= -0,\,0678.\,m$ et

Radius vtriusque faciei $= -0,\,07861.\,m$ dig.

4°. Iterum ſtatuatur diſtantia inter hanc lentem et ſequentem $= 0,\,00565.\,m$ dig.

5°. Tertiae lentis ex vitro coronario, et vtrinque aequaliter conuexe parandae, diſtantia focalis eſſe debet $= 0,\,12142\,m$. dig. et

Radius vtriusque faciei $= 0,\,12871\,m$ dig.

6°. Ab huius lentis medio, vsque ad lentem ocularem ſtatuatur interuallum

$= \frac{m}{4}\left(1 - \frac{1,\,0324}{m}\right) = \frac{m}{4} - 0,\,258$ dig.

7°. At

7°. At haec lens ocularis, ex vitro coronario et aequaliter vtrinque concaua paranda, habeat distantiam focalem $= -0,258$ dig. et

Radium vtriusque faciei $= -0,278$ dig.

8°. Tum vero erit semidiameter campi visi $= \frac{665}{m-1}$ min.

Exemplum
pro multiplicatione $m = 200$.

§ 12. Cum sit $x = 4$ dig. et $\Pi = 50$ dig. haec constructio obtinetur.

1°. Pro prima lente, ex vitro coronario paranda debet esse distantia focalis $= 20,332$ dig.

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 31,842 \text{ dig.} \\ \text{posterioris} = 16,293 \text{ dig.} \end{cases}$

2°. A medio huius lentis vsque ad medium secundae statuatur interuallum $= 1,130$ dig.

3°. Secundum locum tenet lens crystallina vtrinque aequaliter concaua, cuius distantia focalis esse debet $= -12,560$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= -15,722$.

4°. Statuatur iterum, distantia inter hanc lentem et sequentem $= 1,130$ dig.

5° Tertiae lentis ex vitro coronario et vtrinque aequaliter conuexe parandae, distantia focalis esse debet $= 24\ 284$ dig.

Radius vtriusque faciei $= 25,742$ dig.

6°. Ab hac lente vsque ad ocularem, interuallum $= 49, 742$ dig.

7°. At haec lens ocularis, ex vitro coronario et aequaliter vtrinque concaua paranda, habeat distantiam focalem $= -0, 258$ dig. et

Radium vtriusque faciei $= -0, 278$.

8°. Tum vero semidiameter campi apparentis $= 3'. 20''$.

CASVS TERTIVS

quo pro lente obiectiua accipiatur lens triplicata *tertio loco descripta.*

§. 13. Pro data multiplicatione m accipiatur $x = \frac{m}{50}$ et $\Pi = \frac{m}{4}$ dig. quibus valoribus constitutis erit

$$\Phi = 1,02311\,\Pi = p \text{ et } X = x$$

porro colligitur

$$q = -1,02311\,\frac{\Pi}{m}$$

vnde distantia inter lentem obiectiuam et ocularem erit

$$= \Pi\left(1 - \frac{1,02311}{m}\right)$$

deinde ob

$$\Omega = -\frac{1,6002}{m} \text{ erit } \lambda = 2,50862 + \frac{0,08257 \cdot 1,6002}{m}$$

siue $\lambda = 2,50862 + \frac{0,13213}{m}$.

Quoniam autem in casu precedente vidimus, ob hanc partem posteriorem, constructionem lentis vix vllam muta-

mutationem ſubire, quaequidem in praxi obſeruari queat, hic eam ſtatim negligamus, vt ſit

$$\lambda = 2,50862 \text{ ideoque}$$

$$\lambda - 1 = 1,50862 \text{ et } \sqrt{\lambda - 1} = 1,2282$$

vnde pro prima lente habebimus

Radium faciei anterioris $= \frac{0,48154\,\Pi}{0,5662} = 0,85048\,\Pi$

Radium faciei poſterioris $= \frac{0,48154\,\Pi}{1,4731} = 0,32689\,\Pi.$

Lentis ſecundae cryſtallinae concauae, diſtantia focalis $= 0,27184\,\Pi$ et

Radius vtriusque faciei $= -0,31532\,\Pi$;

lentis vero tertiae coronariae vtrinque aeque conuexae, diſtantia focalis eſt $= 0,44042\,\Pi$ et

Radius vtriusque faciei $= 0,46684\,\Pi$;

diſtantiae autem inter binas harum lentium ſunt $= 0,02265\,\Pi$; tum vero erit ſemidiameter campi adparentis $= \frac{m}{m-1} \cdot \frac{\omega}{1,0231\,\Pi}$ et ſumto $\omega = \frac{1}{20}$ dig. et $\Pi = \frac{m}{4}$ erit is, in minutis primis expreſſus $= \frac{9.3437}{46(m-1)}$ $= \frac{672,45}{m-1}$ min.

CONSTRVCTIO GENERALIS

horum Teleſcopiorum pro quacunque multiplicatione $= m$.

§. 14. Tribuatur igitur lenti obiectiuae apertura, cuius ſemidiameter $= \frac{m}{50}$ dig. et ſumatur $\Pi = \frac{m}{4}$ dig. tum vero pro prima lente adiungantur particulae minimae abſolutae, pro precedenti caſu inuentae.

1°. Primae lentis coronariae, cuius diſtantia focalis $= 0,11138\,m$ dig.

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,21262\,m + 0,010 \text{ dig.} \\ \text{poſterioris} = 0,08172\,m - 0,003 \text{ dig.} \end{cases}$

2°. A medio huius lentis, vsque ad medium ſecundae ſtatuatur interuallum $= 0,00564\,m$ dig.

3°. Secundae lentis cryſtallinae, vtrinque aeque concauae, diſtantia focalis $= -0,06796\,m$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= -0,07883\,m$.

4°. A medio huius lentis, ad medium ſequentis interuallum $= 0,00564\,m$ dig.

5°. Tertiae lentis coronariae, vtrinque aeque conuexae diſtantia focalis debet eſſe $= 0,11011\,m$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= 0,11671\,m$ dig.

6°. Hinc vsque ad lentem ocularem ſtatuatur interuallum $= 0,250\,m - 0,256$ dig.

7°. Lentis autem ocularis, vtrinque aequae concauae diſtantia focalis $= -0,256$ et

Radius vtriusque faciei $= -0,271$ dig.

8°. Semidiameter campi adparentis $= \frac{672,45}{m-1}$ min.

§. 15. In his autem teleſcopiis primi generis non licuit marginem coloratum penitus deſtruere; quanquam enim lens obiectiua eſt perfecta, ideoque nullam confuſionem, ob diuerſam radiorum refractionem producit, tamen lens ocularis exiguam quandam confu-

confusionem huius generis generare debet, quae autem plerumque vix percipi poterit; interim tamen id telescopiorum genus hoc defectu etiam laborat, quod campus apparens multo minor sit, quam in sequentibus generibus, vnde vix consultum videtur; huiusmodi telescopia, praecipue pro maioribus multiplicationibus conficere. Nostras ergo lentes obiectiuas triplicatas ad sequentia telescopiorum genera accommodemus.

DE PERFECTIONE TELESCOPIORVM SECVNDI GENERIS SEV ASTRONOMICORVM, VNICAM IMAGINEM REALEM CONTINENTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum vnica lens ocularis non sufficiat, vt margo coloratus tolli possit, statim duas lentes oculares introducamus, ita, vt cum lente obiectiua vicaria tres habeamus lentes, ex eadem vitri specie, puta coronaria formatas, quarum distantiae focales sint p, q et r, ideoque $p = \Phi$ et semidiameter aperturae primae lentis $= X$, at semidiameter aperturae secundae lentis $= \pi q$, tertiae vero $= \pi' r$; vbi litterae π et π' denotant denotant fractiones, siue positiuas, siue negatiuas, quadrantem vnitatis non superantes; vnde pro campo apparente et multiplicatione $= m$ statim habebimus, semidiametrum campi $\Phi = \frac{\pi - \pi'}{m + 1}$. Hinc autem si ξ denotet maximam fractionem, quam litterae π et π' habere possunt, ponamus breuitatis gratia $\frac{\pi - \pi'}{m + 1} = M \xi$.

§. 2. Sint iam pro nostris tribus lentibus, distantiae determinatrices a, α; b, β; et c, γ eritque

1°.

1°. $a = \infty$; $\alpha = p = \Phi$ et $\gamma = \infty$

hincque fiet

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} \quad \text{siue } r = c,$$

hinc autem porro sequentes litterae definiantur

$$P = -\frac{\alpha}{b} \quad \text{et} \quad Q = -\frac{\beta}{c}$$

vnde pro data multiplicatione $= m$, ob situm inuersum erit $PQ = -m$, ita, vt litterarum P et Q altera debeat esse positiua, altera negatiua; praeterea vero ponatur

$$B = \frac{\beta}{b} \quad \text{et} \quad C = \frac{\gamma}{c} = \infty \quad \text{vnde fit}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{B}{1+B} \quad \text{et} \quad \mathfrak{C} = \frac{C}{1+C} = 1,$$

hinc autem viciſſim erit

$$b = -\frac{\alpha}{P}, \; \beta = -\frac{B\alpha}{P}; \; c = +\frac{B\alpha}{PQ} = -\frac{B\alpha}{m}$$

hincque porro

$$q = \mathfrak{B}b = -\frac{\mathfrak{B}\alpha}{P} \quad \text{et} \quad r = \mathfrak{C}c = -\frac{B\alpha}{m}$$

ex quibus valoribus deducuntur interualla lentium

I°.; $\mathrm{I} - \mathrm{II} = \alpha + b = \alpha\left(1 - \frac{1}{P}\right)$ et

II°; $\mathrm{II} - \mathrm{III} = \beta + c = -B\alpha\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{m}\right)$

quae ambo neceſſario debent eſſe poſitiua.

§. 3. Iam conſideremus campum adparentem, quem vt reddamus maximum ſtatim ſumamus

$$\pi = \xi \quad \text{et} \quad \pi' = -\xi$$

vt fiat

$$\Phi = \frac{2\xi}{m+1} \quad \text{ideoque} \quad M = \frac{2}{m+1}$$

 qui

qui valor cum in partibus radii sit expressus, ob radium $1 = 3437$ min. sumto $\xi = \frac{1}{4}$ erit $\Phi = \frac{1718}{m+1}$ minutis primis; nunc vero, pro margine colorato destruendo satisfieri opportet huic aequationi

$$0 = \frac{\pi}{P} - \frac{\pi'}{PQ} \text{ siue } \frac{1}{P} + \frac{1}{PQ} = 0$$

vnde fit

$$Q = -1 \quad \text{et} \quad P = m$$

hinc autem deductae sunt istae aequationes

$\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = -P$ et $\frac{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = PQ$ quae ob $\pi = \xi$; $\pi' = -\xi$ et $\Phi = M\xi$ abeunt in has

$$\frac{\mathfrak{B} - M}{M} = -P \text{ et } -\frac{\mathfrak{C} - 1 + M}{M} = PQ = -m$$

quae posterior, ob $\mathfrak{C} = 1$ praebet $M = \frac{1}{1+m}$ prorsus vt ante; ex illa vero reperitur

$$\mathfrak{B} = (1 - P)M = -\frac{2(m-1)}{m+1}$$

vnde fit

$$B = \frac{\mathfrak{B}}{1 - \mathfrak{B}} = -\frac{2(m-1)}{3m-1}$$

denique distantia oculi post vltimam lentem est

$$\frac{r}{Mm} = \frac{m+1}{2m} r.$$

§. 4. Nunc igitur omnia elementa, quibus constructio telescopii continetur, penitus sunt determinata, quae ita se habebunt

$$a = \Phi;\ b = -\frac{\alpha}{m};\ \mathfrak{b} = +\frac{2(m-1)\alpha}{m(3m-1)};\ c = \frac{2(m-1)\alpha}{m(3m-1)}$$

vnde statim prodeunt interualla lentium

$$\text{I} - \text{II} = \alpha\left(1 - \frac{1}{m}\right);\ \text{II} - \text{III} = \frac{4(m-1)\alpha}{m(3m-1)}$$

distan-

diſtantiae denique focales erunt

$$p = \alpha;\ q = \frac{2(m-1)\alpha}{m(m+1)} \text{ et } r = \frac{2(m-1)\alpha}{m(3m-1)}.$$

§. 5. Formula autem pro confuſione tollenda quae ex apertura lentium oritur, ſi λ, λ' et λ'' denotent numeros arbitrarios, ſingulis lentibus reſpondentes, ita ſe habet

$$\lambda - \frac{1}{P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\right) + \frac{1}{B^3 PQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right)$$

vbi eſt vti vidimus

$$P = m \text{ et } PQ = -m,\ \mathfrak{B} = -\frac{2(m-1)}{m+1};\ B = -\frac{2(m-1)}{3m-1}$$

$$\mathfrak{C} = 1 \text{ et } C = \infty;$$

Quibus valoribus ſubſtitutis prodit iſta formula

$$\lambda + \frac{1}{m}\left(\frac{\lambda'(m+1)^3}{8(m-1)^3} - \frac{\nu(m+1)(3m-1)}{4(m-1)^2}\right) + \frac{\lambda''(3m-1)^3}{8m(m-1)^3}.$$

Hinc ergo confuſio ex ſecunda et tertia lente nata quam littera Ω ſumus complexi erit

$$\Omega = \frac{1}{m}\left(\frac{\lambda'(m+1)^3}{8(m-1)^3} - \frac{\nu(m+1)(3m-1)}{4(m-1)^2}\right) + \frac{\lambda''(3m-1)^3}{8m(m-1)^3}.$$

Quia autem his lentibus maximam aperturam tribuimus, cuius ſint capaces, numeri λ' et λ'' ex his formulis definiri debent

$$\sqrt{\lambda' - 1} = \frac{(\sigma - \varrho)}{\tau}\left(\mathfrak{B} - \frac{1}{2}\right) \text{ et } \sqrt{\lambda'' - 1} = \left(\frac{\sigma - \varrho}{\tau}\right)\frac{1}{2}$$

vbi pro vitro coronario eſt

$$l\frac{\sigma - \varrho}{\tau} = 0{,}1901924 \text{ et } l\nu = 9{,}3412366$$

inuento autem hoc numero Ω, ſupra oſtendimus, quemadmodum lens compoſita ſiue duplicata ſiue triplicata, loco lentis primae ſubſtituenda, determinari debeat; quo facto teleſcopium omnibus numeris erit abſolutum. Quia autem hic in genere nihil definire licet, caſus aliquot pro datis multiplicationibus euolvamus.

Exemplum primum.

§. 6. Sit multiplicatio $m = 50$, erunt primo litterae

$$P = 50;\; Q = -1;\; \mathfrak{B} = -\tfrac{91}{51};\; \text{et}\; B = -\tfrac{91}{149}$$

hincque

$$l\mathfrak{B} = (-)\,0,2836559;\; lB = 9,8180389\,(-)$$

hinc igitur erunt diſtantiae determinatrices

$$\alpha = \Phi;\; b = -\tfrac{\alpha}{50} = -0,020.\alpha;\; \mathfrak{C} = 0,01316.\alpha;$$
$$c = 0,01316\,\alpha$$

vnde interualla lentium colliguntur

$$\mathrm{I} - \mathrm{II} = 0,980.\alpha \;\text{et}\; \mathrm{II} - \mathrm{III} = 0,02632.\alpha$$

diſtantiae denique focales

$$p = \alpha;\; q = 0,03843.\alpha \;\text{et}\; r = 0,01316.\alpha.$$

Quia igitur binae lentes poſteriores vtrinque ſunt aeque conuexae, erit radius vtriusque faciei ſecundae lentis

$$= 1,06\,q = 0,04071\,\alpha$$

et tertiae lentis

$$= 1,06\,r = 0,01394.\alpha,$$

at locus oculi poſt lentem tertiam

$$= 0,00671.\alpha,$$

denique ſemidiameter campi adparentis $= 33'.\,41''$.

§ 7.

§. 7. Nunc igitur quaerantur numeri λ' et λ'', et quia est

$\mathfrak{B} = -1,92157$ erit $\mathfrak{B} - \frac{1}{2} = -2,42157$

vnde calculus ita se habebit:

$l\left(\frac{\sigma - \varrho}{\tau}\right) = 0,1901924$	$l\left(\frac{\sigma - \varrho}{\tau}\right) = 0,1901924$
$l\left(\mathfrak{B} - \frac{1}{2}\right) = 0,3830971$	$l\,2 = 0,3010300$
$l\sqrt{\lambda' - 1} = 0,5732895$	$l\sqrt{\lambda'' - 1} = 9,8891624$
$l(\lambda' - 1) = 1,1465790$	$l(\lambda'' - 1) = 9,7783248$
hinc $\lambda' = 15,01455$	hincque $\lambda'' = 1,60024$

quia igitur est

$l\frac{1}{p} = 8,3010300$; $l\,\mathfrak{B}^2 = 0,8509677\,(-)$

et $l\,B\,\mathfrak{B} = 0,1016957$ tum vero $l\frac{-1}{\mathfrak{B}^3 m} = 8,8469806$

hinc calculus pro littera Ω ita instituatur

$l\frac{1}{m} = 8,3010300$	$l\frac{1}{p} = 8,3010300$	$l\frac{-1}{B^3 m} = 8,8469806$
$l\,\lambda' = 1,1765112$	$l\,\nu = 9,3412366$	$l\,\lambda'' = 0,2041851$
$9,4775412$	$7,6422666$	$9,0511657$
$l\,\mathfrak{B}^2 = 0,8509677$	$l\,B\,\mathfrak{B} = 0,1016957$	Pars III $= 0,11250$
$8,6265735$	$7,5405709$	
Pars I $= 0,04232$	Pars II $= -0,00347$	

vnde colligitur numerus $\Omega = 0,15135$.

§. 8. Adhibeamus statim lentem obiectiuam triplicatam postremam, vtpote perfectissimam, cuius distantia focalis sit $= \Pi$, ac supra vidimus fore

$\Phi = 1,02311\,\Pi = \alpha$

et $X = x$; tum vero pro prima lente erit numerus arbitrarius

$$\lambda = 2,50862 - 0,08257\,\Omega = 2,49612,$$

vnde patet, ob confusionem ω, numerum λ tam parum immutari, vt effectus in constructione lentis prorsus euadat insensibilis, vnde tuto assumere poterimus

$$\lambda = 2,50862$$

ita vt huius lentes constructio futura sit

Radius faciei anterioris $= 0,85048\ \Pi$
Radius faciei posterioris $= 0,32689\ \Pi$.

Cum igitur hic sit $m = 50$, si capiamus

$\Pi = 12\frac{1}{2} = 12,50$ dig. erit $a = 12,789$ dig.

hincque deducitur sequens.

CONSTRVCTIO

Tubi astronomici pro multiplicatione $m = 50$.

Tab. IV. Fig. 3.

I°. Lens igitur obiectiua est triplicata, distantiam focalem habens $= 12\frac{1}{2}$ dig. et aperturae semidiametrum $= 1$ dig.

1°. Eius prima lens coronaria distantiam focalem habet $= 5,569$ dig. et ita construatur vt sit

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 10,631 \text{ dig.} \\ \text{posterioris} = 4,086 \text{ dig.} \end{cases}$

2°. Ab huius medio, ad medium secundae statuatur interuallum $= 0,283$ dig.

3°. Secunda lens crystallina vtrinque aeque concaua, distantiam focalem habet $= -3,398$ dig. et radium vtriusque faciei $= -3,942$.

4°.

4°. Ab huius medio, vsque ad medium lentis tertiae ſtatuatur interuallum = 0, 283.

5°. Tertiae lentis coronariae diſtantia focalis eſt = 5, 505 dig. et

Radius vtriusque faciei = 5, 836 dig.

II. Ab hac lente vsque ad lentem quartam ſeu primam ocularem interuallum eſt = 12, 244.

1°. Iſtius lentis coronariae vtrinque aequaliter conuexae diſtantia focalis = 0, 491 dig.

Radius vtriusque faciei = 0, 520 dig. et ſemidiameter aperturae = 0, 123 dig.

2°. Hinc vsque ad lentem vltimam diſtantia = 0,337 digitor.

III. Haec autem lens coronaria vtrinque, aeque conuexa diſtantiam habet focalem = 0, 168 dig.

Radium vtriusque faciei = 0, 178 dig.

et ſemidiametrum aperturae = 0, 042 dig.

Ab hac lente vsque ad oculum diſtantia = 0, 086 dig.

Longitudo totius teleſcopii = 13, 516.

Semidiameter campi adparentis = $33\frac{2}{3}'$, qui apparebit inſtar ſpatii circularis in coelo, cuius radius = $26°. 3'$ ideoque diameter = $52°. 6'$.

§. 9. Circa tubum autem ſequentia ſunt notanda: primo quod lens ocularis prodierit nimis parva, id quod in praxi non ſatis commodum videtur; deinde lens penultima nimis videtur propinqua foco lentis obiectiuae, ſcilicet vnius tantum quadrantis digiti

giti; vnde verendum eſt, ne maculae vel ſtriae huius lentis cum repreſentatione obiecti miſceantur. Praeterea vero, vt totus campus apparens vbique aeque lucidus videatur, non ſufficit vt ſemidiameter huius lentis ſit $= \pi q$, ſed requiritur vt is ſit $= \pi q + \frac{x}{m}$. His igitur incommodis, vt remedium, afferatur de campo adparente aliquid eſt remittendum quod, fit ſi loco π non valorem maximum ξ accipiamus, ſed tantum eius partem quandam, veluti $\pi = \frac{1}{2}\xi$, manente $\pi' = -\xi$ ſicque erit

$$\Phi = \frac{\frac{3}{2}\xi}{m+1} \text{ et } M = \frac{\frac{3}{2}}{m+1} = \frac{3}{2(m+1)}.$$

§. 10. Poſito igitur $\pi = \frac{1}{2}\xi$ et $\pi' = -\xi$, aequatio pro margine colorato tollendo erit

$$0 = \frac{1}{2P} + \frac{1}{PQ}, \text{ vnde fit } Q = -2 \text{ ergo } P = \frac{m}{2}$$

deinde reperitur

$$\frac{\pi}{\Phi} = \frac{m+1}{3} \text{ ideoque } \frac{\mathfrak{B}(m+1)}{3} - 1 = -\frac{m}{2} \text{ ideoque}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{3 - \frac{3}{2}m}{m+1} = \frac{6-3m}{2(m+1)} \text{ hincque } B = \frac{6-3m}{5m-4}$$

ſequentes igitur habebimus determinationes

$$b = -\frac{2\alpha}{m};\ \mathfrak{C} = \frac{(6m-12)}{m(5m-4)}\alpha;\ c = \frac{(3m-6)\alpha}{m(5m-4)}$$

diſtantiae focales

$$p = \alpha;\ q = \frac{(3m-6)\alpha}{m(m+1)} \text{ et } r = \frac{(3m-6)\alpha}{m(5m-4)}$$

hinc autem, etſi ſecundae lenti conſulitur, tamen lens ocularis adhuc fit minor quam ante, vnde hac emendatione ſuperſedebimus.

§. 11.

§. 11. Quia confuſio a lentibus ocularibus oriunda, vix quicquam in lente obiectiua immutat, vel ſaltem in praxi obſeruari nequit: conſtructionem horum teleſcopiorum pro omni multiplicatione in genere tradere poterimus. Vtamur igitur iterum lente triplicata poſtrema, cui tribuimus ſtatim diſtantiam focalem $\Pi = \frac{m}{4}$, et ſemidiametrum aperturae $= \frac{m}{50}$ dig. vnde colligimus

$$\Phi = \alpha = 0,25578\, m \text{ dig.}$$

qui numerus cum in ſequentibus lentibus vbique occurrit, ponamus breuitatis gratia

$$\vartheta = 0,25578 \text{ vt ſit } \alpha = \vartheta m \text{ et } l\vartheta = 9,4078666.$$

Quia igitur eſt $\frac{\alpha}{m} = \vartheta$, et ſecunda lens tanto intervallo ante primam imaginem conſtituitur, erit diſtantia a lente obiectiua vsque ad primam ocularem $= \frac{m}{4} - \vartheta$ digitis; tum vero haec lens ocularis habebit diſtantiam focalem $= \frac{2\vartheta(m-1)}{m+1}$, quae expreſſio, ob m numerum praegrandem, reducitur ad hanc $2\vartheta - \frac{4\vartheta}{m}$ quae in 1,06 ducta, dabit radium vtriusque faciei; deinde interuallum ab hac lente ad ipſam ocularem erit $\frac{4\vartheta(m-1)}{3m-1} = \frac{4}{3}\vartheta - \frac{8\vartheta}{9m}$ dig. tum vero diſtantia focalis vltimae lentis $= \frac{2}{3}\vartheta - \frac{4\vartheta}{9m}$, quae denuo in 1,06 ducta, praebet radium faciei huius lentis, poſt quam oculus collocari debet ad diſtantiam $= \frac{m+1}{2m} r = \frac{1}{3}\vartheta + \frac{2\vartheta}{9m}$, campi autem adparentis ſemidiameter erit $= \frac{1718}{m+1}$ min.

CONSTRVCTIO GENERALIS
horum telescopiorum pro multiplicatione quacunque $= m$.

I. Lens obiectiua constat ex tribus lentibus, habens distantiam focalem $= \frac{m}{4}$ dig. et aperturam semidiametri $= \frac{m}{50}$ dig. ternae autem eius lentes ita determinantur.

1°. Primae lentis coronariae distantia focalis sit $= 0,11137\, m$ dig.

Tum vero radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0,21262.m \\ \text{posterioris} = 0,08172.m \end{cases}$

2°. A medio huius lentis ad sequentem, statuatur interuallum $= 0,00566.\, m$.

3°. Secundae lentis crystallinae concauae distantia focalis est $= -0,06796.\, m$ et

Radius vtriusque faciei $= -0,07883.\, m$ dig.

4°. A medio huius lentis ad tertiam, interuallum esto $= 0,00566.\, m$ dig.

5°. Tertiae lentis coronariae conuexae distantia focalis $= 0,11010.\, m$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= 0,11671.\, m$ dig.

II. Ab hac lente obiectiua vsque ad lentem quartam, statuatur interuallum $= \frac{1}{4} m - \vartheta$ dig.

III. Quartae lentis coronariae conuexae distantia focalis est $= 2\vartheta - \frac{4\vartheta}{m}$ et

Radius vtriusque faciei $= 1,06\,(2\vartheta - \frac{4\vartheta}{m})$.

IV.

IV. Hinc vsque ad lentem vltimam eſt interuallum $= \frac{4}{3}\vartheta - \frac{8\vartheta}{9m}$.

V. Vltimae lentis coronariae conuexae diſtantia focalis eſt $= \frac{2}{3}\vartheta - \frac{4\vartheta}{9m}$ et radius vtriusque faciei $= 1,06\,(\frac{2}{3}\vartheta - \frac{4\vartheta}{9m})$.

VI. Ab hac lente ad oculum diſtantia $= \frac{1}{3}\vartheta + \frac{\vartheta}{9m}$.

VII. Semidiameter campi apparentis $= \frac{1718}{m+1}$ min.

VIII. Longitudo tubi $= \frac{1}{4}m + \frac{2}{3}\vartheta - \frac{7\vartheta}{9m}$ dig.

§. 12. Quoniam in conſtructione lentis obiectiuae triplicatae menſuras praeſcriptas exactiſſime exſequi vix licet, imprimis autem interualla harum lentium accuratiſſime in praxi definiri nequeunt, maxime conſultum erit: has ternas lentes ita capſulae idoneae includere, vt, ope cochlearum tantillum promoueri, vel a ſe inuicem remoueri queant, donec repreſentatio diſtinctiſſima obtineatur. Caeterum per ſe intelligitur, etiam vltimam lentem mobilem relinqui debere, vt ad indolem cuiusque oculi adcommodari poſſit.

DE VLTERIORI
horum teleſcopiorum perfectione, vnica inſuper lente oculari adiiciendo.

§. 13. Praeter primam igitur lentem vicariam, cuius diſtantia focalis $\Phi = p = \alpha$, tres habebimus lentes, quarum diſtantiae focales ſint q, r et s, quibus reſpondeant diſtantiae determinatrices

b, β, c, γ et d, δ; vbi $\delta = \infty$

ita vt ſit

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta};\ \frac{1}{r} = \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} \text{ et } \frac{1}{s} = \frac{1}{d} \text{ ſiue } s = d$$

tum vero ponatur

$$P = -\frac{\alpha}{b};\ Q = -\frac{\beta}{c} \text{ et } R = -\frac{\gamma}{d}$$

atque ob multiplicationem datam $= m$, debebit eſſe $PQR = -m$, ſicque litterarum P, Q et R vna debet eſſe negatiua; praeterea ponatur

$$\beta = Bb;\ \gamma = Cc$$

hincque porro

$$\mathfrak{B} = \frac{B}{1+B} \text{ et } \mathfrak{C} = \frac{C}{1+C}$$

ita vt ſit

$$q = \mathfrak{B}b;\ r = \mathfrak{C}c \text{ et } s = d$$

ex his autem litteris viciſſim erit

$$b = -\frac{\alpha}{P};\ c = \frac{B\alpha}{PQ};\ d = -\frac{BC\alpha}{PQR}$$

$$\beta = -\frac{B\alpha}{P};\ \gamma = \frac{BC\alpha}{PQ};\ \delta = \infty$$

vnde interualla lentium erunt

$$I - II = \alpha\left(1 - \frac{1}{P}\right);\ II - III = -\frac{B\alpha}{P}\left(1 - \frac{1}{Q}\right);$$
$$III - IV = \frac{BC\alpha}{PQ}\left(1 - \frac{1}{R}\right).$$

§. 14. Quod ſi iam ſemidiametri aperturarum ternarum lentium ſtatuantur:

$$\pi q;\ \pi' r \text{ et } \pi'' s \text{ erit}$$

ſemidiameter campi adparentis $\Phi = \frac{\pi - \pi' + \pi''}{m+1}$

tum vero erit

$\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi}$

$$\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = P \quad \text{fiue} \quad \mathfrak{B} = \frac{\Phi(1 - P)}{\pi}$$

$$\frac{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = P\,Q \quad \mathfrak{C} = \frac{\Phi(P\,Q - 1) + \pi}{\pi'}$$

$$\frac{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\Phi} = -P\,Q\,R; \quad \mathfrak{D} = \frac{\Phi(1 - P\,Q\,R) - \pi + \pi'}{\pi''}$$

ex quibus valoribus viciſſim colligimus

$B = \frac{\mathfrak{B}}{1 - \mathfrak{B}}$; $C = \frac{\mathfrak{C}}{1 - \mathfrak{C}}$; $D = \frac{\mathfrak{D}}{1 - \mathfrak{D}} = \infty$, ob $\mathfrak{D} = 1$ ſicque omnia elementa per litteras P, Q et R erunt expreſſa; vbi aute omnia requiritur vt interualla lentium prodeant poſitiua.

§. 15. Iam ſi ξ fuerit maximus valor, quem litteris π, π' et π'' tribuere licet, pro quo aſſumi poteſt $\xi = \frac{1}{4}$; vt maximum campum adparentem obtineamus, ſtatuamus

$$\pi = \xi; \; \pi' = -\xi \text{ et } \pi'' = +\xi$$

vt prodeat

$$\Phi = \frac{3\xi}{m+1} \text{ vnde fit } M = \frac{3}{m+1} \text{ et } \Phi = M\xi$$

hinc igitur ſumendo $\xi = \frac{1}{4}$, in minutis primis fiet

$$\Phi = \frac{3 \cdot 3437}{4(m+1)} \text{ min.} = \frac{2578}{m+1} \text{ min.}$$

Ex his igitur valoribus nanciſcimur

$$\mathfrak{B} = (1-P)M; \; \mathfrak{C} = M(1-PQ) - 1; \; \mathfrak{D} = M(m+1) - 2 = 1$$

vti primae conditiones requirunt.

§. 16. Pro margine autem colorato tollendo huic aequationi ſatisfieri opportet

$$\frac{\pi}{P} - \frac{\pi'}{PQ} + \frac{\pi''}{PQR} = 0$$

quae ergo abit in hanc

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{PQ} + \frac{1}{PQR} = 0 \text{ fiue in hanc } 1 + \frac{1}{Q} + \frac{1}{QR} = 0$$

 cum

cum nunc litterarum P, Q et R vna debeat esse negatiua, sit

$$Q = -k, \text{ eritque } 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{kR} = 0$$

vnde reperitur

$$R = \frac{1}{k-1}; \text{ sicque fiet } PQR = -\frac{Pk}{(k-1)} = -m$$

ideoque $P = \frac{m(k-1)}{k}$, vbi notandum, vt R fiat positiuum esse debere $k > 1$; qua conditione etiam littera P fiet positiua; hinc igitur nanciscimur

$$\mathfrak{B} = M\left(1 - \frac{m(k-1)}{k}\right) = \frac{3k - 3m(k-1)}{k(m+1)}.$$

$$\mathfrak{C} = M\left(1 + m(k-1)\right) - 1 = \frac{2 + m(3k-4)}{m+1}.$$

§. 17. Hic primo patet, litteram $\mathfrak{B}$ esse negatiuam, vnde etiam B erit numerus negatiuus; deinde etiam numerus $\mathfrak{C}$ erit positiuus, dummodo non fuerit $3k < 4$, hincque erit

$$C = \frac{2 + m(3k-4)}{m(5-3k) - 1}$$

qui numerus est positiuus si fuerit $3k < 5$, siue $k < \frac{5}{3}$ attamen $k > \frac{4}{3}$; sin autem esset $k < \frac{4}{3}$, numerator foret negatiuus, et denominator maneret positiuus, ideoque hoc casu C fieret negatiuum; hinc interualla lentium ita se habebunt

$$I - II = \alpha\left(1 - \frac{k}{m(k-1)}\right)$$

quod certe est positiuum ob $k > 1$

$$II - III = -\frac{Bk\alpha}{m(k-1)}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

quod vt fiat positiuum, littera B debet esse negatiua, quod fit si fuerit $k > \frac{4}{3}$

$$III - IV = -\frac{BC\alpha}{m(k-1)}(2 - k)$$

quia

quia nunc $-\mathrm{B}$ eſt quantitas poſitiua, relinquitur vt ſit $C(2-k)$ poſitiuum, vnde patet ſi fuerit $k<2$ tum C debere eſſe poſitiuum; ſin autem eſſet $k>2$ tum C eſſe debere negatiuum, id quod ſponte accidit.

Caſus I. §. 18. Hic ergo duo caſus occurrunt, prout k fuerit vel <2 vel >2; ſit igitur primo $k<2$ atque vt C fiat poſitiuum, eſſe debebit

$$k>\tfrac{4}{3} \quad \text{et} \quad k<\tfrac{5}{3}.$$

Caſus II. At ſi $k>2$, tum C fiat negatiuum. Operae igitur pretium erit hos caſus exemplo illuſtraſſe.

Caſus prior

quo $k>\frac{4}{3}$ et $<\frac{5}{3}$.

§. 19. Sumamus igitur $k=\frac{3}{2}$ erit $\mathrm{P}=\frac{1}{3}m$; $\mathrm{Q}=-\frac{3}{2}$ et $\mathrm{R}=2$; porro

$$\mathfrak{B}=\frac{3-m}{m+1}=-\frac{(m-3)}{m+1} \text{ et } \mathrm{B}=\frac{3-m}{2m-2}\quad \mathfrak{C}=\frac{4+m}{2(m+1)}$$
$$\text{et } \mathrm{C}=\frac{4+m}{m-2}$$

hinc autem interualla lentium prodeunt:

$$\mathrm{I}-\mathrm{II}=\alpha\left(1-\frac{3}{m}\right)$$
$$\mathrm{II}-\mathrm{III}=\frac{5(m-3)}{2m(m-1)}\alpha$$
$$\mathrm{III}-\mathrm{IV}=\frac{(m-3)(m+4)}{2m(m-1)(m-2)}\alpha$$

quae ergo omnia ſunt poſitiua; deinde vero habebimus

$$b=-\frac{3\alpha}{m};\quad \mathfrak{b}=+\frac{3(m-3)\alpha}{2m(m-1)};\quad c=\frac{(m-3)\alpha}{m(m-1)};$$
$$\gamma=\frac{(m-3)(m+4)\alpha}{m(m-1)(m-2)};\quad d=-\frac{(m-3)(m+4)\alpha}{2m(m-1)(m-2)}$$

hinc-

hincque colliguntur diſtantiae focales

$$q = \frac{3(m-3)}{m(m+1)}\alpha; \quad r = \frac{(m-3)(m+4)\alpha}{2m(m-1)(m+1)}; \quad s = -\frac{(m-3)(m+4)\alpha}{2m(m-1)(m-2)}$$

ſicque vltima lens fieret concaua, vnde diſtantia oculi etiam prodiret negatiua, ita, vt campum adparentem nequidem tueri liceret.

Caſus poſterior

quo $k > 2$.

§. 20. Sit igitur $k = \frac{5}{2}$ erit $P = \frac{3m}{5}$; $Q = -\frac{6}{5}$ et $R = \frac{2}{3}$ porro fit

$$\mathfrak{B} = \frac{15-9m}{5m+5} \text{ et } B = \frac{15-9m}{14m-10}; \quad \mathfrak{C} = \frac{4+7m}{2m+2}; \quad C = -\frac{(4-7m)}{5m+2}$$

deinde vero

$$b = -\frac{5\alpha}{3m}; \quad \mathfrak{C} = \frac{5(3m-5)}{m(14m-10)}\alpha; \quad c = \frac{(3m-5)}{m(7m-5)}\alpha;$$

$$\gamma = -\frac{(3m-5)(7m+4)}{m(7m-5)(5m+2)}\alpha; \quad d = +\frac{3(3m-5)(7m+4)}{2m(7m-5)(5m+2)}\alpha$$

hinc interualla lentium

$$\text{I} - \text{II} = \alpha\left(1 - \frac{5}{3m}\right); \quad \text{II} - \text{III} = \frac{7(3m-5)}{m(14m-10)}\alpha;$$

$$\text{III} - \text{IV} = \frac{(m-5)(7m+4)}{2m(7m-5)(5m+4)}\alpha$$

denique diſtantiae focales

$$q = \frac{3m-5)}{m(m+1)}\alpha; \quad r = \frac{(7m+4)(3m-5)}{2m(m+1)(7m-5)}\alpha; \quad s = \frac{3(3m-5)(7m+4)}{2m(7m-5)(5m+2)}\alpha.$$

§. 21. Quoniam igitur hic caſus ad praxin videtur accommodatus, ſumamus quoque $k = 3$ eritque

$P = \frac{2m}{3}$; $Q = -3$ et $R = \frac{1}{2}$ hinc

$$\mathfrak{B} = \frac{3-2m}{m+1}; \quad B = \frac{3-2m}{3m-2}; \quad \mathfrak{C} = \frac{2+5m}{m+1}; \quad C = -\frac{(2+5m)}{4m+1}$$

porro

porro vero

$$b = -\frac{3\alpha}{2m}; \quad \mathfrak{b} = \frac{3(2m-1)}{2m(3m-2)}\alpha; \quad c = \frac{(2m-1)}{2m(3m-2)}\alpha;$$

$$\gamma = -\frac{(2+5m)(2m-3)}{2m(4m+1)(3m-2)}\alpha; \quad d = \frac{(2+5m)(2m-1)}{m(4m+1)(3m-2)}\alpha$$

et interualla lentium

$$\mathrm{I}-\mathrm{II} = \alpha\left(1-\frac{3}{2m}\right); \quad \mathrm{II}-\mathrm{III} = \frac{2(2m-1)}{m(3m-2)}\alpha;$$

$$\mathrm{III}-\mathrm{IV} = \frac{(2+5m)(2m-3)}{2m(4m+1)(3m-2)}\alpha$$

at diſtantiae focales erunt

$$q = \frac{3(2m-3)}{2m(m+1)}\alpha; \quad r = \frac{(2+5m)(2m-1)}{2m(m+1)(3m-2)}\alpha; \quad s = \frac{(5m+2)(2m-1)}{m(4m+1)(3m-2)}\alpha.$$

§. 22. Huic autem caſui poſtremo, precedens quo $k = \frac{5}{3}$ merito antefertur; quia pro vltima lente maiorem praebet diſtantiam focalem, vnde operae pretium erit eum ad praxin accommodare; id quod facile vt ſupra in genere praeſtabitur: dum loco lentis obiectiuae lens illa triplicata perfectiſſima praefigitur. Sumta ſcilicet diſtantia focali $\Pi = \frac{m}{4}$ dig. et $x = \frac{m}{50}$ dig. tum vero poſito vt ante $\vartheta = 0,25578$ capi debet $\alpha = \vartheta m$ dig. exiſtente $l\vartheta = 9,4078666$; quia autem ex ternis lentibus poſterioribus maior confuſio naſci poteſt, prima lens quadam correctione egebit, vnde pro eius conſtructione ſtatuamus

$$\text{Radium faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = 0,21262.\,m + \mathfrak{f} \\ \text{poſterioris} = 0,08172.\,m + \mathfrak{g} \end{cases}$$

vbi quantitates $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{g}$ ex vnico exemplo definire licebit.

§. 23. Sumamus igitur multiplicationem $m = 50$, indeque computentur ſequentes valores numerici

$P = 30$	$lP = (+)1,4771213$	
$PQ = -75$	$lPQ = (-)1,8750613$	
$PQR = -50$	$lPQR = (-)1,6989700$	
	$l\mathfrak{B} = (-)0,2319491$	$l\mathfrak{B}^3 = (-)0,6958473$
$\mathfrak{B} = -\frac{29}{17}$	$lB = (-)9,7996402$	$lB^3 = (-)9,3989206$
	$lB\mathfrak{B} = (+)0,0315893$	
$B = -\frac{29}{45}$	$l\mathfrak{C} = (+)0,5404031$	$l\mathfrak{C}^3 = (+)1,6212093$
$\mathfrak{C} = \frac{59}{17}$	$lC = (-)0,1476027$	$lC^3 = (-)0,4428081$
$C = -\frac{59}{42}$	$l\mathfrak{C}C = (-)0,6880058$	

§. 24. Iam pro tribus lentibus postremis, quia vtrinque debent esse aeque conuexae, quaerantur numeri respondentes λ', λ'' et λ''' ex formulis

$$\sqrt{\lambda'-1} = \frac{(\sigma-\varrho)}{\tau}\left(\mathfrak{B}-\frac{1}{2}\right);\ \sqrt{\lambda''-1} = \frac{(\sigma-\varrho)}{\tau}\left(\mathfrak{C}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{et } \sqrt{\lambda'''-1} = \frac{(\sigma-\varrho)}{\tau}\,\frac{1}{2},$$

quia igitur

$$\mathfrak{B}-\frac{1}{2} = -\frac{75}{34} \quad \text{et} \quad \mathfrak{C}-\frac{1}{2} = \frac{101}{34}$$

inde calculus ita se habebit

$l\left(\frac{\sigma-\varrho}{\tau}\right)$	$= 0,1901924$	$l\left(\frac{\sigma-\varrho}{\tau}\right)$	$= 0,1901924$	At pro vltima lente erit vt ante
$l\,75$	$= 1,8750613$	$l\,101$	$= 2,0043214$	$\lambda''' = 1,60024$
	$2,0652537$		$2,1945138$	
$l\,34$	$1,5314789$	$l\,34$	$= 1,5314789$	
$l\sqrt{\lambda'-1}$	$= 0,5337748$	$l\sqrt{\lambda''-1}$	$= 0,6630349$	
$l(\lambda'-1)$	$= 1,0675496$	$l(\lambda''-1)$	$= 1,3260698$	
hinc λ'	$= 12,68290$	hinc λ''	$= 22,18700$	

§. 25.

§. 25. Nunc autem pro calculo confuſionis ponamus breuitatis gratia

$$\frac{1}{B^3 P Q} = M \quad \text{et} \quad \frac{-1}{B^3 C^3 P Q R} = N$$

vt fiat

$$\Omega = -\frac{1}{P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\right) + M\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right) + N\lambda'''$$

vbi ergo erit

$l\frac{1}{P} = 8,5228787$; $lM = 8,7260181$; $lN = 8,4593013$

vnde calculus ita ſe habebit

$l\frac{-1}{P} = (-)\,8,5228787$	$lM = 8,7260181$	$lN = 8,4593013$
$l\lambda' = 1,1032186$	$l\lambda'' = 1,3450986$	$l\lambda''' = 0,2041851$
$(-)\,9,6260973$	$0,0711167$	$8,6634864$
$l\mathfrak{B}^3 = (-)\,0,6958473$	$l\mathfrak{C}^3 = 1,6212093$	ideoque $0,04608$
$(+)\,8,9302500$	$8,4499074$	
ergo $+\,0,08516$	ergo $+\,0,02818$	

$l-\frac{1}{P} = (-)\,8,5228787$	$lM = 8,7260181$
$l\nu = (+)\,9,3412366$	$l\nu = 9,3412366$
$(-)\,7,8641153$	$8,0672547$
$lB\mathfrak{B} = (+)\,0,0315893$	$lC\mathfrak{C} = (-)\,0,6880058$
$(-)\,7,8325260$	$(-)\,7,3792489$
ergo $(-)\,0,00680$	ideoque $= (-)\,0,00239$

hinc igitur erit $\Omega = 0,15023$.

§. 26. Hoc igitur valore inuento erit pro prima ternarum lentium obiectiuarum

$$\lambda = 2,50862 - 0,08257\,\Omega \quad \text{ſiue} \quad \lambda = 2,49622$$

 hinc

hinc

$$\lambda - 1 = 1,49622 \text{ et } \sqrt{\lambda - 1}, 22320,$$

quocirca pro radio faciei anterioris istius lentis erit denominator $= 0,57122$; numerator autem erat

$$= 0,48154\,\Pi = 6,0190$$

vnde radius huius faciei fit $= 10,5371$, quem supra supposuimus

$$= 0,21262 . m + \mathfrak{f} = 10,631 + \mathfrak{f}$$

vnde concludimus $\mathfrak{f} = -0,094$ dig.

§. 27. Simili modo pro facie posteriore erit denominator $1,46812$; numerator vero manet vt ante $= 6,0190$, vnde ipse radius colligitur $= 4,0998$ dig. quem supposuimus ante

$$= 0,08172 . m + \mathfrak{g} = 4,086 + \mathfrak{g}$$

vnde concluditur fore $\mathfrak{g} = 0,0138$. Nunc igitur demum certi sumus, hanc correctionem tam esse paruam, vt omnem industriam artificis effugiat.

§. 28. Prosequamur igitur constructionem huius telescopii, quod omnibus numeris absolutum videri potest; et cum sit $\alpha = \vartheta m$, existente $\vartheta = 0,25578$: secunda lens ante imaginem lentis obiectiuae statui debet interuallo $= -b = \frac{5}{7}\vartheta$ dig. ideoque post lentem obiectiuam triplicatam secunda lens collocari debet ad distantiam $= \frac{1}{4} m - \frac{5}{3}\vartheta$; deinde distantia huius secundae lentis a tertia erit

$$= \frac{7\vartheta(3m - 5)}{14m - 10} = \frac{3}{2}\vartheta - \frac{10\vartheta}{7m}$$

at

at diſtantia tertiae lentis ad quartam

$$= \frac{(3m-5)(7m+4)\vartheta}{2(7m-5)(5m+4)} = \tfrac{3}{10}\vartheta - \frac{62}{175m}\vartheta$$

tum vero erit ſecundae lentis diſtantia focalis

$$= \frac{(3m-5)\vartheta}{m+1} = 3\vartheta - \frac{8\vartheta}{m}\ \text{dig.}$$

tertiae autem lentis diſtantia focalis

$$= \frac{(7m+4)(3m-5)}{2(m+1)(7m-5)}\vartheta = \tfrac{3}{2}\vartheta - \frac{29}{14m}\vartheta$$

vltimae denique lentis diſtantia focalis eſt

$$= \frac{3\vartheta(3m-5)(7m+4)}{2(7m-5)(5m+2)} = \tfrac{9}{10}\vartheta - \frac{186}{175m}\vartheta$$

denique diſtantia oculi

$$= \frac{m+1}{3m}s = \tfrac{3}{10}\vartheta - \frac{19}{350m}\vartheta$$

et ſemidiameter campi adparentis $= \frac{2578\,m}{m+1}$; qui apparebit inſtar ſpatii circularis in coelo, cuius ſemidiameter eſt $36^\circ. 33'$ ideoque diameter $= 73^\circ. 6'$.

CONSTRVCTIO GENERALIS
Tuborum Aſtronomicorum, perfectiſſimorum, ſex lentibus inſtructorum, pro multiplicatione quacunque *m*.

I. Lens obiectiua conſtat ex tribus lentibus, habens diſtantiam focalem $= \frac{m}{4}$ dig. et aperturam ſemidiametri $= \frac{m}{50}$ dig. ternae autem lentes ita determinantur. Tab. IV. Fig. 4.

1°. Primae lentis coronariae diſtantia focalis ſit $= 0{,}11137.\,m$ dig.

Tum vero radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 0{,}21262.\,m - 0{,}094\ \text{dig.} \\ \text{poſterioris} = 0{,}08172.\,m + 0{,}014\ \text{dig.} \end{cases}$

 2°.

2°. A medio huius lentis vsque ad medium sequentis, statuatur interuallum $= 0,00566.\,m$.

3°. Secundae lentis crystallinae distantia focalis $= -0,06796.\,m$ et

Radius vtriusque faciei $= -0,07883.\,m$ dig.

4°. A medio huius, ad sequentem interuallum $= 0,00566\,m$.

5°. Tertiae lentis coronariae distantia focalis $= 0,11010\,m$ et

Radius vtriusque faciei esto $= +0,11671\,m$ digit.

II. Ab hac lente obiectiua vsque ad lentem quartam, statuatur interuallum $\frac{1}{4}m - 0,426$ digit.

III. Quartae lentis coronariae conuexae distantia focalis est $= 0,767 - \frac{2,045}{m}$ dig. et radius vtriusque faciei $= 0,813 - \frac{2,167}{m}$ dig.

IV. Hinc vsque ad quintam, interuallum esto $= 0,383 - \frac{0,365}{m}$ dig.

V. Huius lentis coronariae conuexae distantia focalis est $= 0,383 - \frac{0,529}{m}$ dig. et radius vtriusque faciei $= 0,406 - \frac{0,561}{m}$ dig.

VI. Hinc, ad lentem vltimam interuallum $= 0,076 - \frac{0,090}{m}$ dig.

VII. Vltimae lentis coronariae conuexae distantia focalis $= 0,230 - \frac{0,270}{m}$ dig. et radius vtriusque faciei $= 0,244 - \frac{0,286}{m}$ dig.

VIII.

VIII. Hinc, vsque ad oculum interuallum ſtatuatur $= 0,076 - \frac{0,005}{m}$.

IX. Semidiameter campi adparentis $= \frac{2578}{m+1}$ min. qui inſtar ſpatii circularis in coelo cernetur, cuius diameter $= 73^{\circ}. 6.$ min.

Caeterum tribus lentibus poſtremis tanta tribuatur apertura, quantam per figuram admittunt, cuius ſemidiameter circiter eſt pars quarta diſtantiae focalis cuiusque lentis. Denique, quia hic binae lentes poſtremae reuera vicem gerunt lentis ocularis: conſultum erit, eas ambas eidem capſulae mobili includere quae ad indolem cuiusque oculi adcommodari poſſit.

DE

DE PERFECTIONE TELESCOPIORVM TERTII GENERIS, DVAS IMAGINES REALES CONTINENTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Quia pro hoc genere tres lentes non sufficiunt, statim consideremus quatuor: quarum distantiae focales sint p, q, r, s et ex earum distantiis determinatricibus vt ante formemus has quantitates:

$$P = -\frac{\alpha}{b}; \; Q = -\frac{\beta}{c} \quad \text{et} \quad R = -\frac{\gamma}{d}$$

quarum productum PQR aequetur multiplicationi m positiue sumtae, quia repraesentatio debet esse erecta, ita vt sit $PQR = m$; et quia duae imagines requiruntur reales, litterarum P, Q et R, duas negatiuas esse oportet. Porro autem statuamus vt ante

$$B = \frac{\beta}{b}; \; C = \frac{\gamma}{c} \quad \text{et} \quad D = \frac{\delta}{d} = \infty, \text{ ob } \delta = \infty$$

hincque fiat

$$\mathfrak{B} = \frac{B}{1+B}; \; \mathfrak{C} = \frac{C}{1+C} \text{ et } \mathfrak{D} = \frac{D}{1+D} = 1$$

ex quibus colliguntur vicissim distantiae determinatrices

$b = -$

$$b = -\frac{\alpha}{P}; \quad c = \frac{B\alpha}{PQ}; \quad d = -\frac{BC\alpha}{PQR} = -\frac{BC\alpha}{m}$$

$$\beta = -\frac{B\alpha}{P}; \quad \gamma = \frac{BC\alpha}{PQ}; \quad \delta = \infty$$

vnde colliguntur interualla lentium

$$\mathrm{I} - \mathrm{II} = \alpha + b = \alpha\left(1 - \frac{1}{P}\right)$$

$$\mathrm{II} - \mathrm{III} = \beta + c = -\frac{B\alpha}{P}\left(1 - \frac{1}{Q}\right)$$

$$\mathrm{III} - \mathrm{IV} = \gamma + d = \frac{BC\alpha}{PQ}\left(1 - \frac{1}{R}\right)$$

quae omnia debent esse positiua,

denique distantiae focales hinc ita definiuntur

$$p = \alpha; \quad q = \mathfrak{B}\, b; \quad r = \mathfrak{C}\, c \quad \text{et} \quad s = d.$$

§ 2. Cum nunc primae lentis semidiameter aperturae sit $= X$, ponatur semidiameter aperturae secundae lentis $= \pi q$, tertiae lentis $= \pi' r$, et quartae lentis $= \pi'' s$: vbi litterae π, π' et π'' denotant fractiones, quartam partem vnitatis non superantes, siue positiuas siue negatiuas; hincque semidiameter campi apparentis Φ statim ita determinatur, vt sit $\Phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi''}{m - 1}$; ab his autem porro vicissim superiores litterae ita pendent vt sit

$$\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = -P \quad \text{seu} \quad \mathfrak{B} = \frac{\Phi(1 - P)}{\pi}$$

$$\frac{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = PQ \quad \text{hinc} \quad \mathfrak{C} = \frac{\Phi(PQ - 1) + \pi}{\pi'}$$

$$\frac{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\Phi} = -PQR = -m \quad \text{vnde fit}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{\Phi(1 - m) - \pi + \pi'}{\pi''}$$

quia igitur $\mathfrak{D} = +1$ hinc sequitur

$$\Phi = \frac{\pi - \pi' + \pi''}{1 - m} \quad \text{siue} \quad \Phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi''}{m - 1}$$

vti opportet: vt autem repraesentatio ab omni margine colorato liberetur, satisfieri opportet huic aequationi

$$\frac{\pi}{P} - \frac{\pi'}{PQ} + \frac{\pi''}{PQR} = 0.$$

§. 3. Statim nunc videamus, an campo apparenti maximum valorem conciliare liceat, id quod praestaretur, si denotante ξ maximum valorem, quem litterae π, π' et π'' recipere possunt, poneretur

$$\pi = -\xi,\ \pi' = +\xi \text{ et } \pi'' = -\xi$$

tum enim prodiret

$$\Phi = +\frac{3\xi}{m-1} = M\xi \text{ sumto } M = \frac{3}{m-1}$$

ex quo valore determinatur distantia oculi post vltimam lentem $= \frac{s}{Mm}$, quam ergo pariter positiuam esse necesse est, quia alioquin campus assignatus ab oculo conspici non posset; His igitur positis destructio marginis colorati hanc exigit aequationem

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{PQ} + \frac{1}{PQR} = 0 \text{ siue } 1 + \frac{1}{Q} + \frac{1}{QR} = 0.$$

Casus quo $P > 0$ §. 4. Quia litterarum P, Q et R binae debent esse negatiuae, sumamus primo litteram P esse positiuam, vnde tam Q quam R negatiuas esse oportet; quocirca ponamus $Q = -k$ atque reperietur $R = \frac{1}{k-1}$, sicque debet esse $k < 1$ vt fiat

$$R = \frac{-1}{1-k} \text{ ideoque } PQR = \frac{Pk}{1-k} = m$$

consequenter $P = \frac{m(1-k)}{k}$; quia igitur

$$P = \frac{(1-k)}{k} m \text{ et } PQ = -(1-k)m \text{ ob}$$

$$\pi = -\xi,\ \pi' = +\xi,\ \pi'' = -\xi \text{ et } \Phi = M\xi;$$

repe-

reperiemus

$$\mathfrak{B} = M\left(\frac{m(1-k)}{k} - 1\right) = \frac{3m(1-k) - 3k}{k(m-1)}$$

$$B = \frac{3m(1-k) - 3k}{m(4k-3) + 2k} \text{ deinde}$$

$$\mathfrak{C} = -M((1-k)m + 1) - 1 = -\frac{m(4-3k) - 2}{m-1}$$

$$C = -\frac{m(4-3k) - 2}{m(5-3k) + 1}.$$

§. 5. Nunc igitur ad interualla lentium respiciamus, ac primum quidem erit $= \alpha\left(1 - \frac{k}{m(1-k)}\right)$ quod semper est positiuum ob $k < 1$, secundum autem erit $= -\frac{B\alpha}{P}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, quod positiuum esse nequit nisi B sit numerus negatiuus. Cum igitur numerator ipsius B sit positiuus, denominator negatiuus esse opportet, vnde sequitur $4k < 3$ et $k < \frac{3}{4}$, tertium autem interuallum est $= -\frac{BC\alpha}{(1-k)m}(2-k)$ vnde patet BC esse debere negatiuum; quia igitur B iam est negatiuum, opportet esse C positiuum; ob numeratorem vero ipsius C negatiuum, videamus an denominator etiam negatiuus reddi possit: quod cum fieri nequeat, patet hunc casum locum habere non posse, quo erat $P > 0$.

§. 6. Tribuamus igitur litterae P valorem negatiuum, et nunc vel Q vel R debet esse negatiuum. Sit primo Q negatiuum et ponamus $Q = -k$ erit $1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{kR} = 0$, vnde fit $R = \frac{1}{k-1}$ sicque R debet esse positiuum; erit igitur

Casus quo $P < 0$ et $Q > 0$.

$$PQR = -\frac{Pk}{k-1} = +m$$

ideoque

$$P = -\frac{m(k-1)}{k} \quad \text{et} \quad PQ = +m(k-1)$$

 vnde

vnde colligimus

$$\mathfrak{B} = -M\left(1 + \frac{m(k-1)}{k}\right) = -\frac{3m(k-1)-3k}{k(m-1)}$$

$$B = -\frac{3m(k-1)-3k}{m(4k-3)+2k} \quad \text{deinde}$$

$$\mathfrak{C} = M\left(m(k-1)-1\right)-1 = \frac{m(3k-4)-2}{m-1} \quad \text{et}$$

$$C = \frac{m(3k-4)-2}{m(5-3k)+1}.$$

§. 7. Examinemus nunc pariter fingula interualla, ac primum quidem $\alpha\left(1-\frac{1}{P}\right)$ certe eſt poſitiuum, ſecundum $-\frac{B\alpha}{P}\left(1+\frac{1}{k}\right)$ vbi ob P negatiuum B debet eſſe poſitiuum, cuius numerator cum ſit negatiuus etiam denominator debet eſſe negatiuus, quod autem fieri nequit: vnde etiam hic caſus $P < 0$ et $Q < 0$ locum habere nequit, quare tertium caſum euoluamus quo $P < 0$ et $R < 0$.

Caſus quo $P < 0$ et $R < 0$.

§. 8. Hic igitur nil aliud opus eſt niſi vt loco k ſcribamus $-k$ eritque

$$P = -\frac{m(k+1)}{k}; \quad Q = +k \quad \text{et} \quad R = \frac{-1}{k+1} \quad \text{hincque}$$

$$PQ = -m(k+1)$$

ex his porro colligitur

$$\mathfrak{B} = \frac{-3m(k+1)-3k}{k(m-1)}; \quad B = \frac{-3m(k+1)-3k}{m(4k+3)+2k}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{-m(3k+4)-2}{m-1}; \quad C = \frac{-m(3k+4k)-2}{m(5+3k)+1}$$

iam quia primum interuallum nulla laborat difficultate; ſecundum interuallum eſt $-\frac{B\alpha}{P}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ vbi duo caſus occurrunt prout fuerit $k > 1$ vel $k < 1$. Sit

I°. $k > 1$ et quia P eſt negatiuum neceſſe eſt vt ſit $B > 0$ quod autem fieri nequit.

II°.

II°. Sit igitur $k < 1$ et fieri debet B negatiuum quod fponte euenit; tertium autem interuallum eft $\frac{B C \alpha}{-m(k+1)}(2+k)$ vnde patet C effe debere pofitivum, cuius numerator cum fit manifefto negatiuus denominator vero pofitiuus, etiam hic cafus locum habere nequit: quocirca nunc quidem certum eft, in hoc genere per quaternas lentes campum apparentem $\Phi = \frac{3\xi}{m-1}$ obtineri non poffe.

§. 9. Hinc igitur intelligimus omnes tres lentes fimul adhiberi non poffe ad campum apparentem augendum, quocirca affumamus effe

$$\pi = +\tfrac{1}{2}\xi \text{ et } \pi' = +\xi \text{ et } \pi'' = -\xi$$

eritque pro campo apparente

$$\Phi = \frac{3\xi}{2(m-1)} \text{ hinc } M = \frac{3}{2(m-1)}$$

tum vero erit

$$\mathfrak{B} = \frac{3(1-P)}{m-1}; \quad \mathfrak{C} = \frac{3PQ+m-4}{2(m-1)}$$

aequatio autem pro margine colorato erit

$$\frac{1}{2P} - \frac{1}{PQ} - \frac{1}{PQR} = 0 \text{ fiue } 1 - \frac{2}{Q} - \frac{2}{QR} = 0$$

vbi notandum, trium litterarum P, Q et R duas effe debere negatiuas; ponamus primo P et R effe negatiuas et fit $Q = +k$ eritque $1 - \frac{2}{k} - \frac{2}{kR} = 0$ vnde reperitur $R = \frac{-2}{2-k}$

hinc patet effe $k < 2$ vnde erit

Cafus

$$PQR = -\frac{2kP}{2-k} = m \text{ ideoque } P = -\frac{m(2-k)}{2k} \text{ et } P < 0 \text{ et}$$

$$PQ = -\frac{m(2-k)}{2} \quad R < 0.$$

ex his iam valoribus habebimus

$$\mathfrak{B} = \frac{3(2k + m(2 - k))}{2k(m - 1)}; \quad \mathfrak{C} = \frac{m(3k - 4) - 8}{4(m - 1)}$$

vnde ſequitur

$$B = \frac{3(2k + m(2 - k))}{m(5k - 6) + 8k} \text{ et } C = \frac{m(3k - 4) - 8}{m(2 - 3k) + 4}.$$

§. 10. Quod ad interualla attinet, primum per ſe eſt poſitiuum

$$a\left(1 - \frac{1}{P}\right) = \alpha\left(1 + \frac{2k}{m(2 - k)}\right)$$

ſecundum autem interuallum $= -\frac{B\alpha}{P}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ vbi duo caſus conſiderandi veniunt prout fuerit vel $k > 1$ vel $k < 1$.

I°. Primo ſit $k > 1$, ideoque $1 - \frac{1}{k} > 0$, quia P eſt negatiuum, B debet eſſe poſitiuum, quod vt eueniat, eſſe debet $k > \frac{6}{5}$ attamen $k < 2$.

II. Sin autem ſit $k < 1$; B debet eſſe negatiuum, cuius numerator cum ſit poſitiuus, deberet eſſe $k < \frac{6}{5}$ quod per ſe euenit.

§. 11. Tertium interuallum erat $\frac{BC\alpha}{PQ}\left(\frac{4 - k}{2}\right)$; vnde patet ob PQ negatiuum etiam BC negatiuum eſſe debere; quare binos caſus praecedentes percurramus.

I. Priore caſu $k > \frac{6}{5}$ quo B poſitiuum, debet eſſe C negatiuum, cuius denominator cum ſit per ſe poſitiuus, numerator debet eſſe negatiuus quod fit ſi ſit $k < \frac{4}{3}$, vnde hos duos limites habemus $k < \frac{4}{3}$ et $k > \frac{6}{5}$. Praeterea erat $s = -\frac{BC\alpha}{m}$ ideoque ob $B > 0$ et $C < 0$ vti requiritur.

§. 12.

§. 12. Examinemus quoque alterum casum vbi ob $k < 1$ et B negatiuum, debet esse C positiuum cuius denominator cum per se sit positiuus debet esse $k > \frac{4}{3}$; quod quia fieri nequit hic casus secundus locum habere nequit.

Euolutio casus prioris.

quo $k > \frac{6}{5}$ et $k < \frac{4}{3}$.

§. 13. Sumamus igitur $k = \frac{5}{4}$ et sequentes nanciscemur determinationes:

$$P = -\tfrac{3}{10}m;\quad Q = \tfrac{5}{4};\quad R = -\tfrac{8}{3}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{9m+30}{10(m-1)};\quad B = \frac{9m+30}{m-40};\quad \mathfrak{C} = \frac{-m-32}{16(m-1)};\quad C = \frac{-m-32}{17m+16}$$

vnde elementa deriuantur

$$b = \frac{10\alpha}{3m};\quad \mathfrak{b} = \frac{10(3m+10)}{m(m-40)}\alpha;\quad c = -\frac{8(3m+10)}{m(m-40)}\alpha;$$

$$\gamma = +\frac{8(3m+10)(m+32)}{m(m-40)(17m+16)}\alpha;\quad d = \frac{3(3m+10)(m+32)}{m(m-40)(17m+16)}\alpha$$

hinc interualla lentium

$$\mathrm{I-II} = \alpha + b = \frac{(3m-10)}{3m}\alpha$$

$$\mathrm{II-III} = \mathfrak{b} + c = \frac{2(3m+10)}{m(m-40)}\alpha$$

$$\mathrm{III-IV} = \gamma + d = \frac{11(3m+10)(m+32)}{m(m-40)(17m+16)}\alpha$$

distantiae focales

$$p = \alpha;\ q = \frac{3m+10}{m(m-1)}\alpha;\quad r = +\frac{(m-32)(3m+10)}{2m(m-1)(m-40)}\alpha;$$

$$s = \frac{3(3m+10)(m+32)}{m(m-40)(17m+16)}\alpha$$

distantia autem oculi $= \frac{25(m-1)}{3m}$ et semidiameter campi apparentis

$$\Phi = \frac{3\xi}{2(m-1)} = \frac{1289}{m-1}\ \text{min.}$$

§. 14.

§ 14. Haec igitur ſpecies locum habere nequit niſi multiplicatio m multo ſit maior quam 40, tum autem vt ſupra loco lentis obiectiuae ſubſtituatur lens noſtra triplicata perfecta iam aliquoties deſcripta, ſumendo $\Pi = \frac{m}{4}$ dig. et $\alpha = 0,25578. m$. Interuallum autem inter hanc lentem obiectiuam et lentem q debet eſſe $= \frac{1}{4} m + b$; reliquae determinationes hinc facile deducuntur, quandoquidem ob confuſionem ſequentium lentium conſtructio lentis obiectiuae vix quicquam immutatur.

Euolutio caſus

quo $P > 0$ ideoque Q et R negatiuae.

§. 15. Quia igitur Q negatiuum loco k ſcribamus $-k$ eritque

$$P = + \frac{m(2+k)}{2k}; \quad R = \frac{-2}{2+k}$$

exiſtente $Q = -k$

vnde erit vt ante $\Phi = \frac{3\xi}{2(m-1)}$, porro vero erit

$$\mathfrak{B} = \frac{-3m(2+k)+6k}{2k(m-1)}; \quad B = \frac{-3m(2+k)+6k}{m(5k+6)-8k}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{-m(3k+4)-8}{4(m-1)}; \quad C = \frac{-m(3k+1)-8}{m(8+3k)+4}.$$

§. 16. Nunc igitur ſecundum interuallum erit $-\frac{B\alpha}{P}(1+\frac{1}{k})$, ob P poſitiuum hoc interuallum poſtulat vt B ſit negatiuum, quod ſponte euenit, tertium autem interuallum $\frac{BC\alpha}{PQ}(\frac{4+k}{2})$, vnde C debet eſſe poſitiuum, quod plane fieri nequit.

EVO-

EVOLVTIO TELESCOPIORVM pro casu in tomo secundo Dioptricae pag. 393. exposito.

§. 17. Haec telescopiorum species imprimis memorabilis sequenti modo est determinata: proposita multiplicatione quacunque m quaeratur numerus $k = -m + \sqrt{2m(m-1)}$ et distantiae focales lentium ita determinabuntur

$$p = \alpha;\quad q = \frac{\alpha}{k};\quad r = \frac{\vartheta\alpha}{k} \text{ et } s = \frac{\vartheta\alpha}{m}$$

vbi numerum ϑ pro arbitrio assumere licet; tum vero interualla lentium ita se habebunt

$$\mathrm{I} - \mathrm{II} = p + q = \alpha\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$\mathrm{II} - \mathrm{III} = \eta\alpha = \left(\frac{k+1}{k^2}\right)\alpha + \frac{\vartheta\alpha(\sqrt{2m(m-1)})}{2kk}$$

$$\mathrm{III} - \mathrm{IV} = r + s = \vartheta\alpha\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m}\right)$$

oculi autem distantia est $= \frac{s(m-1)}{\sqrt{2m(m-1)}}$.

§. 18. Nunc igitur ad perfectionem huius speciei telescopiorum nihil aliud requiritur nisi vt loco lentis obiectiuae P nostra lens triplicata substituatur sumendo $\Pi = \frac{m}{4}$ digit. eamque ante lentem secundam statuendo ad distantiam $\frac{1}{4}m + q$, tum vero erit $\alpha = 0,25578\,m$. Praeterea, vt lentes oculares maximam aperturam admittant eas vtrinque aequaliter conuexas parari conuenit, ex quo radius vtriusque faciei pro lente q erit $1,06\,q$, pro lente $r = 1,06.\,r$ et pro lente $s = 1,06\;s$. Denique campi apparentis semidiameter in minutis primis erit

$$\Phi = \frac{1717}{\sqrt{m(m-1)}} = \frac{1718}{\sqrt{2m(m-1)}} \text{ siue } \Phi = \frac{1718}{m+k}.$$

§. 19. Quo autem facilius haec formulae ad calculum reuocari possint, sequentem tabulam subiungamus:

m	$\sqrt{2m(m-1)}$	k	η
10	13,416	3,416	$0,3784 + 1,1497 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
20	27,568	7,568	$0,1495 + 0,4813 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
30	41,713	11,713	$0,0927 + 0,3040 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
40	55,857	15,857	$0,0670 + 0,2221 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
50	70,000	20,000	$0,0525 + 0,1750 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
75	105,357	30,357	$0,0340 + 0,1143 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
100	140,712	40,712	$0,0252 + 0,0849 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
150	211,424	61,424	$0,0165 + 0,0560 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
200	282,135	82,135	$0,0123 + 0,0418 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
300	423,556	123,556	$0,0081 + 0,0277 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$
400	564,978	164,978	$0,0061 + 0,0207 \cdot \frac{1}{2}\vartheta$

APPLICATIO
ad eam telescopiorum speciem, quae in Dioptricae tomo 2^do^ pag. 448. est exposita.

§. 20. Haec species prae caeteris omni attentione digna videtur, quia campus apparens pro lubitu augeri potest, ita vt eius semidiameter fiat $\Phi = \frac{1\xi}{m + \sqrt{m}}$ quia autem ibi lens obiectiua assumta est duplicata hic pro instituto nostro lente simplici vicaria vtamur, vnde litterae P, B et C penitus ex formulis ibi datis sunt excludendae, sequentes vero vno gradu du remouendae; hinc igitur ex loco citato ſequentes habebimus valores

$$P = \frac{2i\sqrt{m}}{1+i};\quad Pk = \sqrt{m};\quad Pkk' = im;\quad Pkk'S = \frac{im}{2};$$

$$Pkk'ST = \frac{im}{3};\quad Pkk'STU = \frac{im}{4} \text{ etc.}$$

ita vt horum productorum vltimum ſit $= \frac{im}{i} = m$ ſicque omnium lentium numerus erit $= i + 3$.

§. 21. Praeterea habebimus ſequentes numeros

$\mathfrak{B} = \frac{-2i\sqrt{m}+i+1}{(1+i)(1+\sqrt{m})}$	$B = \frac{-2i\sqrt{m}+i+1}{(1+3i)\sqrt{m}}$
$\mathfrak{C} = \frac{\vartheta}{1+\theta}$	$C = \vartheta$
$\mathfrak{D} = \frac{i(1+i\sqrt{m})}{1+\sqrt{m}}$	$D = \frac{-(i+ii\sqrt{m})}{(i-1)(1+(i+1)\sqrt{m})}$
$\mathfrak{E} = \frac{i(2+i\sqrt{m})}{2(1+\sqrt{m})} - 1$	$E = \frac{-(2(i-1)+(ii-1.2)\sqrt{m})}{(i-2)(2+(i+2)\sqrt{m})}$
$\mathfrak{F} = \frac{i(3+i\sqrt{m})}{3(1+\sqrt{m})} - 2$	$F = \frac{-(3(i-2)+(ii-2.3)\sqrt{m})}{(i-3)(3+(i+3)\sqrt{m})}$
$\mathfrak{G} = \frac{i(4+i\sqrt{m})}{4(1+\sqrt{m})} - 3$	$G = \frac{-(4(i-3)+(ii-3.4)\sqrt{m})}{(i-4)(4+(i+4)\sqrt{m})}$
etc.	etc.

Pro priori columna littera penultima erit $\frac{2(i-1)+(3i-2)\sqrt{m}}{(i-1)(1+\sqrt{m})}$ vltima vero $= 1$.

§. 22. Ex his litteris diſtantiae determinatrices ſingularum lentium ſequentibus formulis exprimentur

$b = -\frac{\alpha}{P}$	$\beta = -\frac{B\alpha}{P}$
$c = -\frac{B\alpha}{Pk}$	$\gamma = -\frac{BC\alpha}{Pk}$
$d = -\frac{BC\alpha}{Pkk'}$	$\delta = -\frac{BCD\alpha}{Pkk'}$
$e = +\frac{BCD\alpha}{Pkk'S}$	$\varepsilon = +\frac{BCDE\alpha}{Pkk'S}$
$f = -\frac{BCDE\alpha}{Pkk'ST}$	$\zeta = -\frac{BCDEF\alpha}{Pkk'ST}$
$g = +\frac{BCDEF\alpha}{Pkk'STU}$	$\eta = +\frac{BCDEFG\alpha}{Pkk'STU}$
etc.	etc.

23. Hinc porro diſtantiae focales ſingularum lentium ita definientur

$$p = \alpha;\ q = \mathfrak{B}\,b;\ r = \mathfrak{C}\,c;\ s = \mathfrak{D}\,d;\ t = \mathfrak{E}\,e \text{ etc.}$$

quarum vltima ſi vocetur $= z$ poſt eam oculus teneri debet ad diſtantiam

$$= \frac{m + \sqrt{m}}{i\,m}\,z = \frac{1 + \sqrt{m}}{i\sqrt{m}}\,z$$

vnde tantus campus conſpicietur cuius ſemidiameter in minutis primis erit $\frac{859\,i}{m + \sqrt{m}}$

caeterum littera ϑ quae hic eſt introducta penitus arbitrio noſtro relinquitur, eamque ita aſſumi convenit vt diſtantiae focales vltimarum lentium ſatis modicae magnitudinis euadant, ſcilicet ne minores fiant quam vnus digitus vel ad ſummum $\frac{1}{2}$ digit.

§. 24. Denique ſi $\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda''', \lambda''''$ etc. denotent ordine numeros arbitrarios ad formationem ſingularum lentium pertinentes, confuſio illa Ω ex qua lentem obiectiuam ſiue duplicatam ſiue triplicatam determinari opportet ſequenti modo expreſſa prodibit

$\Omega =$

$$\Omega = -\frac{1}{P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\,\mathfrak{B}}\right) - \frac{1}{B^3\,P\,k}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\,\mathfrak{C}}\right)$$

$$- \frac{1}{B^3\,C^3\,P\,k\,k'}\left(\frac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^3} + \frac{\nu}{D\,\mathfrak{D}}\right) + \frac{1}{B^3\,C^3\,D^3\,P\,k\,k'\,S}\left(\frac{\lambda''''}{\mathfrak{E}^3} + \frac{\nu}{E\,\mathfrak{E}}\right) \text{ etc.}$$

vbi pro ſecunda lente ſumi poteſt $\lambda' = 2$ et $\lambda'' = 1$ reliquae autem ita debent eſſe comparatae, vt ſingulae lentes prodeant vtrinque aequaliter conuexae. Caeterum hi termini valorem Ω praebentes plerumque tam erunt exigui vt inde in conſtructionem lentis obiectiuae multiplicatae vix vlla mutatio ſenſibilis ingrediatur, ob quam cauſam etiam parum referet, vtrum lentes ſecunda et tertia etiam parentur aequaliter conuexae nec ne.

§. 24. Quod denique ad aperturas lentium attinet, ſi primae obiectiuae ſemidiameter aperturae fuerit $= X$, ſecundae ſemidiameter debet eſſe

$$= \frac{i}{\sqrt{m}}\frac{q}{4} \pm \frac{X(1+i)}{2\,i\sqrt{m}}; \text{ tertiae } = 0.\frac{r}{4} \pm \frac{X}{\sqrt{m}};$$

$$\text{quartae } = \frac{s}{4} \pm \frac{X}{i\,m}; \text{ quintae } = \frac{t}{4} \pm \frac{2X}{i\,m};$$

$$\text{ſextae } = \frac{u}{4} \pm \frac{3X}{i\,m} \text{ etc.}$$

vbi notandum eſt: partes poſteriores nihil ad campum augendum conferre, ſed ideo tantum eſſe adiectas, vt aequabilis claritas per totum campum obtineatur, quam conditionem non adeo neceſſe eſt adimpleri. Hinc igitur pro variis valoribus litterae i ſequentes caſus euoluamus.

CASVS I.

quo $i = 1$, numerus lentium $= 4$ et ſemidiameter campi $\Phi = \frac{859}{m + \sqrt{m}}$ min.

§. 25. Pro hoc igitur caſu habebimus ſequentes valores principales, ex quibus omnes determinationes facile deducuntur:

$P = \sqrt{m}$	$\mathfrak{B} = \frac{-\sqrt{m} + 1}{1 + \sqrt{m}}$	$B = \frac{-\sqrt{m} + 1}{2\sqrt{m}}$
$Pk = \sqrt{m}$	$\mathfrak{C} = \frac{\vartheta}{1 + \vartheta}$	$C = \vartheta$
$Pkk' = m$	$\mathfrak{D} = 1$	$E = \frac{-\sqrt{m} - 1}{0(1 + 2\sqrt{m})} = \infty.$

CASVS II.

quo $i = 2$, numerus lentium $= 5$ et ſemidiameter campi $\Phi = \frac{1718}{m + \sqrt{m}}$ min.

§. 26. Pro hoc igitur caſu noſtrae litterae principales ſequentes accipiunt valores

$P = \frac{4\sqrt{m}}{3}$	$\mathfrak{B} = \frac{-4\sqrt{m} + 3}{3(1 + \sqrt{m})}$	$B = \frac{-4\sqrt{m} + 3}{7\sqrt{m}}$
$Pk = \sqrt{m}.$	$\mathfrak{C} = \frac{\vartheta}{1 + \vartheta}$	$C = \vartheta$
$Pkk' = 2m$	$\mathfrak{D} = \frac{2 + 4\sqrt{m})}{1 + \sqrt{m}}$	$D = \frac{-2 - 4\sqrt{m}}{1 + 3\sqrt{m}}$
$Pkk'S = m$	$\mathfrak{E} = 1$	$E = \infty.$

CASVS III.

Quo $i = 3$, numerus lentium 6 et ſemidiameter campi $= \frac{2577}{m + \sqrt{m}}$ min.

§. 27. Pro hoc igitur caſu noſtrae litterae principales ſequentes accipiunt valores

P =

$P = \frac{3\sqrt{m}}{2}$	$\mathfrak{B} = \frac{-3\sqrt{m}+2}{2(1+\sqrt{m})}$	$B = \frac{-3\sqrt{m}+2}{5\sqrt{m}}$
$Pk = \sqrt{m}$	$\mathfrak{C} = \frac{\vartheta}{1+\vartheta}$	$C = \vartheta$
$Pkk' = 3m$	$\mathfrak{D} = \frac{9\sqrt{m}+3}{1+\sqrt{m}}$	$D = \frac{-9\sqrt{m}-3}{2(1+4\sqrt{m})}$
$Pkk'S = \frac{3m}{2}$	$\mathfrak{E} = \frac{7\sqrt{m}+4}{2(1+\sqrt{m})}$	$E = \frac{-7\sqrt{m}-4}{2+5\sqrt{m}}$
$Pkk'ST = m$	$\mathfrak{F} = 1$	$F = \infty.$

CASVS IV.

Quo $i = 4$, numerus lentium 7 et campi ſemidiameter $= \frac{3436}{m+\sqrt{m}}$ min.

§. 28. Pro hoc igitur caſu ſequentes conſequimur valores principales

$P = \frac{8\sqrt{m}}{5}$	$\mathfrak{B} = \frac{-8\sqrt{m}+5}{5(1+\sqrt{m})}$	$B = \frac{-8\sqrt{m}+5}{13\sqrt{m}}$
$Pk = \sqrt{m}$	$\mathfrak{C} = \frac{\vartheta}{1+\vartheta}$	$C = \vartheta$
$Pkk' = 4m$	$\mathfrak{D} = \frac{16\sqrt{m}+4}{1+\sqrt{m}}$	$D = \frac{-16\sqrt{m}-4}{3(1+5\sqrt{m})}$
$Pkk'S = 2m$	$\mathfrak{E} = \frac{7\sqrt{m}+3}{1+\sqrt{m}}$	$E = \frac{-7\sqrt{m}-3}{2+6\sqrt{m}}$
$Pkk'ST = \frac{4m}{3}$	$\mathfrak{F} = \frac{16\sqrt{m}+6}{3(1+\sqrt{m})}$	$F = \frac{-10\sqrt{m}-6}{3+7\sqrt{m}}$
$Pkk'STU = m$	$\mathfrak{G} = 1$	$G = \infty.$

§. 29. In hoc teleſcopiorum genere tertia lens ſingularia ſuppeditat phaenomena; cum enim primo quam minimam requirat aperturam, ea commodiſſime vicem geret diaphragmatis, quo radii peregrini ab introitu in lentes ſequentes arceantur; deinde vero quia portio confuſionis ex hac lente nata eſt

$$= -\frac{1}{B^2\sqrt{m}}\left(\frac{\lambda'(1+\vartheta)^3}{\theta^3} + \frac{\nu(1+\vartheta)}{\theta^2}\right)$$

non

non ſolum ob $\frac{(1+\theta)^3}{\theta^4}$ numerum ſatis notabilem ac vnitate ſemper maiorem haec quantitas vnitatem non mediocriter ſuperabit etiamſi capiatur $\lambda'' = 1$, ſed etiam quia $\frac{1}{B^3}$ ſit numerus plerumque ſatis magnus; cum enim primo caſu quo $i = 1$ ſit

$$B = \frac{-\sqrt{m}+1}{2\sqrt{m}} \text{ erit } -\frac{1}{B} = \frac{2\sqrt{m}}{\sqrt{m}-1} \text{ et } -\frac{1}{B^3\sqrt{m}} = \frac{8m}{(\sqrt{m}-1)^3}.$$

Caſu autem ſecundo quo $i = 2$ eſt

$$B = \frac{-4\sqrt{m}+3}{3\sqrt{m}} \text{ hinc } -\frac{1}{B} = \frac{7\sqrt{m}}{4\sqrt{m}-3} \text{ et } -\frac{1}{B^3\sqrt{m}} = \frac{343m}{(4\sqrt{m}-3)^3}$$

tertio vero caſu quo eſt

$$B = \frac{-3\sqrt{m}+2}{5\sqrt{m}} \text{ erit } -\frac{1}{B^3\sqrt{m}} = \frac{125m}{(3\sqrt{m}-2)^3};$$

Quarto denique caſu ob

$$B = \frac{-8\sqrt{m}+5}{13\sqrt{m}} \text{ erit } -\frac{1}{B^3\sqrt{m}} = \frac{2197m}{(8\sqrt{m}-5)^3} \text{ etc.}$$

hinc igitur littera noſtra Ω tantum accipere poterit augmentum, vt lens obiectiua triplicata ſatis notabilem mutationem ſubire queat, quam in praxi negligere nequaquam licebit, id quod vnico exemplo oſtendiſſe ſufficiet.

EXEMPLVM TELESCOPII

ex ſex lentibus compoſiti quod obiecta centies multiplicet.

§. 30. Hic igitur erit $i = 3$, vnde valores ex caſu tertio depromere opportet; tum vero ſemidiameter campi erit $\Phi = 23\frac{1}{3}$ min. ideoque inſtar ſpatii circularis in coelo ſpectabitur cuius ſemidiameter erit $= 34^\circ. 10'$ ideoque diameter $68^\circ. 20'$; tum vero ro assumamus $\vartheta = 3$, vnde sequentes prodibunt valores:

$P = 15$	$\mathfrak{B} = -\frac{14}{11}$	$B = -\frac{14}{25}$
$Pk = 10$	$\mathfrak{C} = \frac{3}{4}$	$C = 3$
$Pkk' = 300$	$\mathfrak{D} = \frac{93}{11}$	$D = -\frac{93}{82}$
$Pkk'S = 150$	$\mathfrak{E} = \frac{37}{11}$	$E = -\frac{37}{26}$
$Pkk'ST = 100$	$\mathfrak{F} = 1$	$F = \infty$

horum igitur numerorum logarithmos in subsidium calculi adponamus

logar. $P = 1,1760913$	$l\mathfrak{B} = (-)0,1047358$	$lB = (-)9,7481883$
logar. $Pk = 1,0000000$	$l\mathfrak{C} = (+)9,8750613$	$lC = (+)0,4771213$
log. $Pkk' = 2,4771213$	$l\mathfrak{D} = (+)0,9270902$	$lD = (-)0,0546690$
$lPkk'S = 2,1760913$	$l\mathfrak{E} = (+)0,5268090$	$lE = (-)0,1532284$
$lPkk'ST = 2,0000000$	$l\mathfrak{F} = (+)0,0000000$	$lF = \infty$.

§. 31. Ex his igitur valoribus definiamus singularum lentium distantias determinatrices, quas cum suis logarithmis singulas hic apponamus

$b = -0,0666\,\alpha$	$lb = (-)8,8239087$	$\mathfrak{b} = +0,0373.\alpha$
$c = +0,0560\,\alpha$	$lc = (+)8,7481883$	$\gamma = +0,1680.\alpha$
$d = +0,0056\,\alpha$	$ld = (+)7,7481883$	$\delta = -0,0063.\alpha$
$e = +0,0127\,\alpha$	$le = (+)8,1038873$	$\varepsilon = -0,0181.\alpha$
$f = +0,0271\,\alpha$	$lf = (+)8,4332070$	$\zeta = \infty \dots$

$l\mathfrak{b} = (+)\ 8,5720970$

$l\gamma = (+)\ 9,2253096$

$l\delta = (-)\ 7,8028573$

$l\varepsilon = (-)\ 8,2571157$

$l\zeta = \infty \dots$

§. 32. Ex his porro valoribus deriuemus interualla lentium, tum vero etiam diſtantias focales cum ſuis logarithmis:

$I - II = \alpha + b = 0,9333.\alpha$	$q = 0,0848.\alpha$	$lq = 8,9286445$
$II - III = \beta + c = 0,0933.\alpha$	$r = 0,0420.\alpha$	$lr = 8,6232496$
$III - IV = \gamma + d = 0,1736.\alpha$	$s = 0,0473.\alpha$	$ls = 8,6752785$
$IV - V = \delta + e = 0,0064.\alpha$	$t = 0,0427.\alpha$	$lt = 8,6306963$
$V - VI = \varepsilon + f = 0,0090.\alpha$	$u = 0,0271.\alpha$	$lu = 8,4332070$

diſtantia oculi ab vltima lente $= \frac{u(m+1)}{3\sqrt{m}} = 0,010\,\alpha.$

§. 33. Nunc igitur videamus quanta confuſio ex tertia lente oriatur, quae, vt tam parua oriatur quam fieri poteſt ſumamus $\lambda'' = 1$, et cum ſit

$$l - \frac{1}{\mathfrak{B}^3 \mathfrak{P} k} = 9,7554351 \text{ erit } \frac{\lambda''}{\mathfrak{B}^3 \mathfrak{C}^3 \mathfrak{P} k} = 1,3497$$

vnde, ſi pro reliquis lentibus circiter vnam partem quartam vnitatis computemus, fiet $\Omega = 1,60$; hinc igitur, pro conſtructione lentis triplicatae quam ſupra tertio loco deſcripſimus, habebimus

$$\lambda = 2,37 \text{ hinc } \lambda - 1 = 1,37 \text{ et } \sqrt{\lambda - 1} = 1,17$$

quocirca pro lente obiectiua compoſita lentis primae coronariae

radius faciei anterioris erit $= \frac{0,48\,\Pi}{0,62}$ et poſterioris $= \frac{0,48\,\Pi}{1,41}$; hinc igitur ſi ſumamus $\Pi = \frac{m}{4} = 25$ pro hac lente reperietur

Radius

$$\text{Radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = 19\tfrac{1}{5}\ \text{dig.} \\ \text{posterioris} = 8\tfrac{1}{2}\ \text{dig.} \end{cases}$$

binae reliquae lentes ad obiectiuam pertinentes manent vti supra sunt assignatae, sumto $\Pi = \frac{m}{4} = 25$ dig. Tum vero vt reliquae lentes cum hac obiectiua debite iungantur, sumi debet

$$\alpha = 0,2558\, m = 25,58 \text{ dig.}$$

et lens obiectiua ante nostram sequentem lentem q constitui debet ad distantiam

$$\Pi + b = \tfrac{1}{4} m - 0,066\, \alpha = 23,31 \text{ digit.}$$

§. 34. Cum igitur sit $\alpha = 25,58$ digit. erit $l\alpha = 1,40790$ vnde colligimus distantias focales sequentium lentium in digitis

$$q = 2,170 \text{ dig.};\ r = 1,074 \text{ dig.};\ s = 1,211 \text{ dig.};$$
$$t = 1,092 \text{ dig.};\ u = 0,693.$$

tum vero interualla harum lentium omisso primo quippe quod iam est assignatum erunt

$$\text{II} - \text{III} = 2,39 \text{ dig.};\quad \text{III} - \text{IV} = 4,45 \text{ dig.};$$
$$\text{IV} - \text{V} = 0,16 \text{ dig.};\quad \text{V} - \text{VI} = 0,23 \text{ dig.}$$

quibus accedit distantia oculi ab vltima lente $= 0,23$ dig. interim tamen etiam primum interuallum quod hic erat $\alpha + b = 23,91$ ideo notari meretur: quoniam, si in hoc loco obiectum constituatur, eius imago per secundum lentem q proiecta in locum tertiae lentis cadere debet.

§. 35. Restat igitur vt adhuc constructionem sequentium lentium doceamus. Pro secunda quidem lente q supra notauimus sumi posse $\lambda' = 1$; vt autem haec lens etiam alteram partem aperturae a litera X pendentem recipere possit, statuamus $\lambda' = 2$ et eius constructio ita si habebit

Radius faciei anterioris $= \frac{q}{\sigma - \mathfrak{B}(\sigma - \varrho) - \tau} = \frac{q}{1,0614} = 1,16$ dig.

Radius faciei posterioris $= \frac{q}{\varrho + \mathfrak{B}(\sigma - \varrho) + \tau} = \frac{q}{0,0025} = 869,71$ d.

vbi est $\mathfrak{B}(\sigma - \varrho) = -1,1264$.

Patet ergo hanc lentem conuexo-planam confici posse, dummodo distantiam focalem assignatam obtineat: tanto maiorem autem industriam adhibere oportet in formatione tertiae lentis pro qua sumsimus $\lambda' = 1$ vnde hinc erit pro ista lente

Radius faciei anterioris $= \frac{r}{\sigma - \mathfrak{C}(\sigma - \varrho)} = \frac{r}{0,5350} = 1,836$ dig.

Radius faciei posterioris $= \frac{r}{\varrho + \mathfrak{C}(\sigma - \varrho)} = \frac{r}{1,3019} = 0,825$ dig.

vbi est $\mathfrak{C}(\sigma - \varrho) = 1,07520$.

Reliquae tres lentes debent esse aequaliter conuexae vnde erit

Radius vtriusque faciei

Pro lente quarta $s = 1,283$ dig.

Pro lente quinta $t = 1,157$ dig.

Pro lente sexta $u = 0,734$ dig.

CON-

CONSTRVCTIO TELESCOPII

pro multiplicatione $m = 100$.

§. 36. Conſtabit igitur hoc teleſcopium ex ſex lentibus, quarum prima autem eſt triplicata: conſtructio ſequentibus articulis continetur.

I°. Lentis obiectiuae diſtantia focalis eſt $= 25$ dig. et ſemidiameter aperturae $= 2$ dig.

1°. Eius primae lentis coronariae conuexae diſtantia focalis eſt $= 11, 137$ dig. et

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 19\frac{1}{3} \text{ dig.} \\ \text{poſterioris} = 8\frac{1}{2} \text{ dig.} \end{cases}$

2°. A medio huius lentis ad medium ſequentis, interuallum eſt $= 0, 566$ dig.

3°. Secundae lentis conuexae et ex vitro cryſtallino parandae diſtantia focalis eſt $= -6,296$ dig. et

Radius vtriusque faciei $= -7, 883$ dig.

4°. A medio huius ad medium tertiae, interuallum eſto $= 0, 566$ dig.

5°. Tertiae lentis coronariae diſtantia focalis eſt $= 11, 010$ digit. et

Radius vtriusque faciei $= 11, 671$.

II. A lente obiectiua vsque ad ſecundam lentem ſtatuatur diſtantia $= 23, 31$.

III. Secundae lentis ex vitro coronario parandae diſtantia focalis $= 2, 170$ dig. et

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 1,160 \text{ dig.} \\ \text{posterioris} = 869,710 \text{ dig.} \end{cases}$

Tum vero eius semidiameter aperturae $= 0,163 + \frac{1}{15}$ dig.

IV. Ab hac lente vsque ad tertiam statuatur interuallum $= 2,39$ dig.

V. Tertiae lentis itidem coronariae distantia focalis est $= 1,074$ dig.

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 1,836 \text{ dig.} \\ \text{posterioris} = 0,825 \text{ dig.} \end{cases}$

Et semidiameter aperturae $= 0, + \frac{1}{5}$ dig.

VI. A lente tertia vsque ad quartam statuatur interuallum $= 4,45$ dig.

VII. Quartae lentis coronariae distantia focalis $= 1,211$ dig.

Radius vtriusque faciei $= 1,283$ dig.

Et semidiameter aperturae $= 0,303 + \frac{1}{15}$. dig.

VIII. Ab hac lente vsque ad quintam interuallum $= 0,16$ dig.

IX. Quintae lentis coronariae distantia focalis $= 1,092$ dig.

Radius vtriusque faciei $= 1,157$ dig. et

Semidiameter aperturae $= 0,273 + \frac{1}{75}$ digit.

X. Ab hac lente ad vltimam statuatur interuallum $= 0,23$ dig.

XI. Vltimae lentis distantia focalis est $= 0,693$

Radius vtriusque faciei $= 0,734$ et

Semi-

Semidiameter aperturae $= 0,173 + \frac{1}{55}$ dig.

XII. Ab hac lente vsque ad oculum diſtantia ſit $= 0,23$ dig.

XIII. Tum vero ſemidiameter campi apparentis erit $= 23\frac{1}{3}$ min. qui inſtar ſpatii circularis in coelo ſpectabitur cuius ſemidiameter eſt $= 34$ gr. 10 min.

XIV. Tandem longitudo totius tubi erit 32,47 dig.

Quia tres lentes vltimae proprie lentem ocularem conſtituunt, eae ſimul capſulae mobili inſerantur, vt pro indole oculi pauliſper vel admoueri vel remoueri poſſint.

ADDI-

ADDITAMENTVM.

§. 1.

Postquam haec iam scripsissem, in manus incidit nouissimum volumen Comment. Acad. Reg. Paris. in quo satis ampla descriptio lentium obiectiuarum compositarum reperitur, a Dno. *Jeaurat* elaborata, vbi autem tantum confusioni a diuersa radiorum refractione oriundae occurritur, altera confusione ab apertura oriunda penitus neglecta, vnde ab his lentibus obiectiuis neutiquam fructus speratus exspectari potest.

§. 2. Egregia autem experimenta affert, quibus tam refractionem quam dispersionem radiorum pro vtraque vitri specie, coronaria scilicet, cui vitrum venetum aequiualere censet, et crystallo anglica seu Flintglaff determinat. Inuenit autem pro hac postrema specie refractionem mediam vt 160 : 100, dispersionem autem vitri veneti ad crystallum vt 18 : 31. quae determinationes, siue omni vitro huius speciei conueniant siue secus, omnino merentur vt meos calculos circa constructionem lentium triplicatarum etiam ad hanc vitri speciem accommodem. Nunc ergo erit

$n' = 1,60$ et ratio $\zeta : \eta =$ siue $\frac{dn}{n-1} : \frac{dn'}{n'-1} = 100 : 153.$

§. 3. Introducamus igitur has determinationes in hypothesin quintam, qua assumsimus $\vartheta = \frac{59}{36}$; vbi omnes valores iidem manent, vsque ad valorem litterae

terae f vbi loco fractionis $\frac{4}{3}$ ſcribi debet 1, 53 ita vt ſit

$$f = \frac{HH}{1,53\, 9GG - FHH - 1} \text{ vnde reperitur}$$

$$\begin{array}{lll} f = 1,3342 & & lf = 0,1252326 \\ g = -2,1867 & \text{hinc} & lg = (-)\, 0,3397821 \\ h = 1,7583 & & lh = 0,2450930 \end{array}$$

hincque

$$\begin{array}{l|l} p = 0,7495.\,\Pi & lp = 9,8747674 \\ q = -0,4573.\,\Pi & lq = (-)\, 9,6602179 \\ r = 0,5687.\,\Pi & lr = 9,7549070 \end{array}$$

praeterea vero erit

$$lP = 0,0226640; \text{ et } lPQ = 0,0099272$$

$$\begin{array}{l|l|l} B = \frac{9}{5} & lB = 0,2552725 & lB^3 = 0,7658175 \\ \mathfrak{B} = \frac{9}{14} & l\mathfrak{B} = 9,8081145 & l\mathfrak{B}^3 = 9,4243435 \\ & lB\mathfrak{B} = 0,0633870 & \\ C = h - 1 & lC = 9,8798411 & lC^3 = 9,6395233 \\ \mathfrak{C} = \frac{h-1}{h} = & l\mathfrak{C} = 9,6347481 & l\mathfrak{C}^3 = 8,9042443 \\ = 0,4313 & lC\mathfrak{C} = 9,5145892 & \end{array}$$

tandem

$$lM = 9,9036003 \text{ et } lN = 9,2242553$$

hic enim pro refractione $n' = 1,60$ ſequentes habentur valores

$$\begin{aligned} \mu' &= 0,8333 \\ \nu' &= 0,2666 \\ \varrho' &= 0,1111 \\ \sigma' &= 1,5555 \\ \tau' &= 0,8607. \end{aligned}$$

§. 4. Hinc igitur, quia lens cryſtallina aſſumitur vtrinque aeque concaua: erit pro ea

$$\sqrt{\lambda' - 1} = \left(\frac{\sigma' - \varrho'}{\tau'}\right)(\mathfrak{B} - \tfrac{1}{2})$$

deinde, quia etiam tertia lens eſt vtrinque aeque conuexa: pro ea erit

$$\sqrt{\lambda'' - 1} = \left(\frac{\sigma - \varrho}{\tau}\right)(\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2})$$

vnde numeri λ' et λ'' ob

$$\mathfrak{B} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{7};\quad \mathfrak{C} - \tfrac{1}{2} = -0,0687,$$

ſequenti modo determinantur

a $l\left(\frac{\sigma' - \varrho'}{\tau'}\right)$	$= 0,2248357$	ad $l\left(\frac{\sigma - \varrho}{\tau}\right)$	$= 0,1901924(+)$
ſubtr. $l\,7$	$= 0,8450980$	add. $l(\mathfrak{C} - \frac{1}{2})$	$= 8,8369567(-)$
$l\sqrt{\lambda' - 1}$	$= 9,3797377$	$l\sqrt{\lambda'' - 1}$	$= 9,0271491(-)$
hinc $l(\lambda' - 1)$	$= 8,7594754$	hinc $l(\lambda'' - 1)$	$= 8,0542982(+)$
ideoque λ'	$= 1,0575$	ideoque λ''	$= 1,0113$

quibus inuentis calculus pro confuſione ita inſtituatur.

Pro parte prima		*Pro ſecunda parte*	
$l\,M$	$= 9,9036003$	$l\,M$	$= 9,9036003$
$l\,\lambda'$	$= 0,0242804$	$l\,\nu'$	$= 9,4258601$
	$9,9278807$		$9,3294604$
$l\,\mathfrak{B}^3$	$= 9,4243435$	$l\,B\,\mathfrak{B}$	$= 0,0633870$
log. p. I	$= 0,5035372$	l. p. II.	$= 9,2660734$
ideoque pars I	$= -3,1881$	ideoque pars II	$= -0,1845$

Pro

Pro parte tertia.		*Pro parte quarta.*	
$l\,N$	$= 9{,}2242553$	$l\,N$	$= 0{,}2242553$
$l\,\lambda''$	$= 0{,}0048800$	$l\,\nu$	$= 9{,}3412366$
	$9{,}2291353$		$8{,}5654919$
$l\,\mathfrak{C}^{2}$	$= 8{,}9042443$	$l\,C\,\mathfrak{C}$	$= 9{,}5145892$
l. p. III	$= 0{,}3248910$	l. p. IV	$9{,}0509027$
hincque pars III	$= 2{,}1130$	hinc pars IV	$= 0{,}1124$

confuſio igitur a lente triplicata nata erit $\lambda - 1{,}1472$ vnde ſi confuſio a reliquis lentibus nata fuerit $= O$ tum capi debet $\lambda = 1{,}1472 - O$, hincque patet: confuſionem maiorem tolli non poſſe quam $O = 0{,}1472$.

§. 5. Definito autem numero λ conſtructio primae lentis coronariae ita ſe habebit

Radius faciei anterioris $= \frac{p}{\sigma - \tau\sqrt{\lambda - 1}} = \frac{0{,}8101\,\Pi}{1{,}7944 - \sqrt{\lambda - 1}}$ et

Radius faciei poſterioris $= \frac{p}{\varrho + \tau\sqrt{\lambda - 1}} = \frac{0{,}8101\,\Pi}{0{,}2449 + \sqrt{\lambda - 1}}$

quocirca ſi confuſio a reliquis lentibus nata pro nihilo reputari poſſit, vt ſit $\lambda = 1{,}1472$, erit

$$\sqrt{\lambda - 1} = 0{,}3837$$

ſicque pro prima lente habebimus

$$\text{radium faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = 0{,}5742.\,\Pi \\ \text{poſterioris} = 1{,}2887.\,\Pi \end{cases}$$

cuius lentis conſtructio eo tutius ſuccedit, quod valor ipſius λ vnitatem parum ſuperat.

§. 6. Quia ſecunda lens cryſtallina, cuius diſtantia focalis reperta eſt $q = -0{,}4573\,\Pi$ vtrinque debet esse aeque concaua, radius vtriusque faciei erit $= 1, 20. q = -0, 5488$ Π. Tertiae denique lentis coronariae cuius distantia focalis est $r = 0, 5687$ Π quia etiam vtrinque ponitur aeque conuexa, radius vtriusque faciei debet esse $1, 06. r = 0, 6028$ Π. Interuallum tandem lentis mediae ab vtraque extrema sumatur $= \frac{1}{12} q = 0, 0381$ Π.

§. 7. Quia lentis crystallinae radius vtriusque faciei est $= 0, 5488$ Π, eius pars quarta semidiametrum dabit aperturae $= 0, 1372$. Π vnde talis lens composita ad multiplicationem $= m$ producendam adhiberi poterit sumendo $0, 1372\,\Pi = \frac{m}{50}$, vnde fit $\Pi = \frac{m}{6, 86}$; quae circumstantia summum lucrum affert in telescopiis contrahendis. Si enim ex. gr. multiplicatio $m = 100$ desideretur, hoc praestari poterit ope talis lentis, cuius distantia focalis $\Pi = 14, 58$ dig. siue nondum 15 dig. cum ante requirerentur 25 dig. Quod si autem etiam in his lentibus sumere velimus $\Pi = \frac{m}{4}$ et semidiametrum aperturae $= \frac{m}{50}$ dig. istae lentes felicissimo cum successu loco praecedentium substitui poterunt, quandoquidem laeues aberrationes a mensuris praescriptis hic multo minus sunt pertimescendae.

PHYSICA.

PHYSICA.

DESCRIPTIO PISCIS, E COREGONORVM GENERE, RVSSICE RIAPVCHA DICTI, HISTORICO-ANATOMICA.

I. T. KOELREVTER.

Salmo (Albula) maxillis edentulis: inferiore longiore. LINN. *Syst. Nat. ed.* 12. *p.* 512. *n.* 16. *Fn. Suec.* 353.

Coregonus edentulus, maxilla inferiore longiore. Art. gen. 9. *Syn.* 18. *Spec.* 40.

Albula minima GESN. *pisc.* 34. *Aldrov. ichth.* 660 *Ionst. pisc.* 173. *t.* 30. *f.* 7. *Charl. onom.* 164. WILL. *ichth.* 186. *Raj. pisc.* 61.

Corpus totum cathetoplateum. Caput exiguum, ac, a latere adſpectum, fere triangulare: angulo antico, ad os ſc. ceteris acutiori. Ab maxillae ſuperioris ora angulus eminens, latior, ad verticem anguſtior paullo, in medium caput excurrebat, ab alio transuerſo, minus notabili, in vnius, circiter lineae diſtantia a dorſi principio, exceptus. Ductus oſſei, cauernoſi, muciferi in vtroque capitis latere varii. Ore clauſo, maxilla inferior

rior ſuperiore paullo longior, aperto autem ſuper eandem notabiliter exporrecta. Oculi, pro magnitudine piſcis, inprimis vero capitis ratione, grandes. Iris argentei coloris. Operculum branchiarum tribus conſtare mihi videbatur laminis, quarum ſuperior maxima, ſuperne rotundata, inferne ſubacuta, media minor, acinaciformis ſ. cultrata, infima vero minima, antrorſumque acuminata. Margo inſuper operculi branchiarum, ad aperturam firmius claudendam, membrana auctus. Oſſicula membranae branchioſtegae ſeptem. Hiatus branchiarum, operculo diducto, ampliſſimus.

Dorſum ſubconuexum, ante pinnam dorſualem vero in acumen elatius deſinens. Abdomen circa pinnas pectorales conuexum, ad pinnas ventrales fere planum, circa anum iterum conuexum, inter pinnae ani finem et caudae principium vero planiuſculum.

Prona corporis facies e virideſcenti fuſca, eiusque latera argentei ſplendoris.

Squamae tenues, ſubrotundae, integrae, ſat denſe conſtipatae, a corpore tamen facile ſeparabiles.

Linea longitudinalis, ab ortu ſuo ad aliquot linearum diſtantiam leuiter tantum deorſum flexa, recto abhinc tramite in caudam vsque excurrebat, dorſo, quam ventri, vndique propior. Punctorum vel tubulorum linearium, lineam hanc conſtituentium, numerus circiter LXX ad LXXX.

Pinna

Pinna dorſi prima radiorum duodecim; quorum tres primi ſimplices, ceteri vero omnes ramoſi. Longitudo primi, ſecundo arcte adpreſſi, $1\frac{2}{3}'''$, ſecundi $6'''$, tertii, omnium longiſſimi, $11'''$; ſequentes ex ordine iterum breuiores.

Pinna dorſi ſecunda, adipoſa, ſubfalcata, a principio fixo ad finem ipſius liberum $5\frac{1}{2}'''$ longa, et $2'''$ circiter lata.

Pinnae pectorales radiorum quindecim, quorum primus longior reliquis, fortiorque.

Pinnae ventrales radiorum vndecim, quorum primus omnium fortiſſimus ac ſimplex, ſecundus iſto parum longior, ſubramoſus omniumque longiſſimus, reliqui ex ordine iterum breuiores ac ramoſi, vltimo excepto, ſimplici.

Pinna ani radiorum quindecim, quorum primus omnium breuiſſimus.

Pinna caudae radiorum circiter XXXIII.

Pinnae dorſi ac caudae, itidemque ſquamae, lineae longitudinali proximae, punctis nigricantibus pluribus conſperſae; ceterae pinnae pallidae, albeſcentes, punctisque tantum rarioribus notatae.

Anatome.

Abdomine aperto, viſcera in conſpectum veniebant ſequentia. Hepatis pars in hypochondrio ſiniſtro, longitudine ſex linearum, verſus ſuperiora latior et craſſior, inferiora verſus tenuior ac anguſtior. In hypochondrio dextro appendices pylori, quarum plurimae non ſolum totam ventriculi ſummitatem obtegebant, ſed etiam ad latus eius ſiniſtrum deflectebantur. Maximus tamen earum numerus dextrum ventriculi latus occupabat, ex abdominis imo antrorſum ac oblique deorſum flexarum, inque ſitu naturali apicibus tantum caecis prominentium. Appendicum harum, maxime inferiorum extremitates in decimae vel vndecimae coſtarum vicinia, ad ventriculi baſin conſpiciendae. Latus autem ventriculi anticum et, quoad maximam partem quoque ſiniſtrum, nudum apparebat. Ipſe ventriculus in medio abdomine ſitus.

Infra huius baſin ſubſtantia quaedam e fuſco rubens, lien ſc. eminebat, cuius interno lateri tractus pinguedineus, recta ſuper veſicam aeream extenſus, contiguus erat. In hypochondrio ſiniſtro lactes eiusdem lateris, ſub lobo hepatis ſupra deſcripto primo in conſpectum veniebant, initio quidem craſſae, ſenſim vero ſenſimque attenuatae, iterumque tandem mole increſcentes, forma quodammodo triangulares. Lactium dextrarum minima tantum pars viſui patebat, earumque lateri interno inteſtinum recta deorſum extenſum parallelo ſub ſitu proxime adiacebat. Haecque ſunt, quae de viſceribus in ſitu naturali relictis dicenda habeo.

Viſceribus exemtis, ſingulisque ſeorſim conſideratis, hepar primo in duas partes, dextram ſc. mino-

minorem, ſiniſtramque paullo maiorem diuiſum, et quaſi cordatum erat. Concaua ipſius facies, membranae ope, radicibus appendicum primarum, quae pyloro proxime adſtant, annexa.

Veſicula fellis valde oblonga. Ductus choledochus ſatis amplus, ſiniſtrae hepatis portioni arctiſſime adhaerens, ac inter appendices pylori ſuperiores deflexus, duodenum, in diſtantia vnius circiter lineae ab eius principio, intrabat.

Oeſophagus ſub diaphragmate $10'''$ longus, $1\frac{1}{2}'''$ latus, ac inferius, ſub ingreſſu ſuo in ventriculum, incuruatus.

Ventriculus ſubſtantiae firmioris ac rubicundioris, $7\frac{1}{2}'''$ longus ac $2\frac{1}{3}'''$ latus, diaphragma verſus reflectebatur, oeſophagoque incumbebat. Summitas ipſius circa pylorum obtuſa et coarctata. Vtriusque, tam oeſophagi, quam ventriculi ſuperficies interior rugis quinque longitudinalibus diſtincta, quae, muco tenaci, quo obtectae erant, abſterſo, optimae conſpiciebantur. Principium pylori ruga e contrario transuerſa munitum.

Appendices pylori LXXI, longitudine $2 - 3'''$; harum triginta circiter illi ipſi circumſitae, ceterae vero omnes ad ſex lineas vsque duodeni ſummitati a latere appenſae.

Duodenum circa initium amplius, inde vero ſenſim ſenſimque anguſtius, pone poſticam ventriculi faciem paululumque dextrorſum flexum, recto dein tramite, ſub vlteriori tractus inteſtinalis ſpecie, ad anum vsque excurrebat.

Lien tam fundo ventriculi ac duodeno, quam tractui pinguedineo, membranarum vaſorumque ſanguineorum ope, connexus.

Lactes vtriusque lateris, ſupra mediam ipſarum partem, craſſiores varioque modo ſinuoſae, faciei ventriculi poſticae, aereaeque veſicae ſummitati cohaerebant: dextrae ſiniſtris latiores ac craſſiores, flauoque colore, ob veſiculae felleae viciniam, tinctae. Ita ſc. erant conformatae menſe Nouembri, quo anatomen hanc ſuſceperam.

Veſica aerea ſimplex, vtramque extremitatem verſus anguſtior. Ductus aereus tres circiter quatuorue lineas longus, vix vltra quartam lineae partem latus, oeſophagum, in diſtantia $6\frac{1}{2}'''$ ab eiusdem fine, intrabat; ſub ipſo ingreſſu notabiliter conſtrictus.

Renes ſecundum totam abdominis longitudinem extenſi, a ſumma ad imam vsque partem ſenſim decreſcentes, ac a ſpina dorſi in duos quaſi diſtinctos diuiſi, extremitate inferiore in vrethram ſeu ductum vrinarium communem, orificio ſuo pone veſicularum ſeminalium oſtium patentem, deſinebant. Veſica vrinaria, qua vere caret piſcis, improprie iſte diceretur, cum valde anguſtus, nec vlla parte liber ſit.

Peri-

Peritoneum, argentei splendoris, punctis nigricantibus, minoribus rarius adspersum, leuissimique cum renum substantia nexus.

Costae viginti nouem, in vtroque latere.

In Pisce *Foemina*, 7'', 2''' longo, indiuiduo sc. huius speciei facile omnium maximo, Decembris initio ouarium maximum, simplex siue vnicum, totum fere abdominis cauum replens. Ouula innumera, e ruso flauescentia, diametri $\frac{2}{3}$''', vix amplius inter se cohaerentia, adeoque maturitati ac emissioni proxima. Lien ouato-lanceolatus, ex atro rubens, $4\frac{1}{2}$''' longus, superne $1\frac{2}{3}$''' latus, cum ventriculi fundo, dextri lateris appendicibus ouarioque lacertulorum carneorum vel vasorum sanguineorum ope coniunctus. Ouiductus post anum, vrethrae vero orificium pone ouiductum conspiciendum.

Obseru. Tunica ventriculi exterior in vno alteroue harum piscium indiuiduo hinc inde in tubercula aliquot lentiformia, duriuscula ac subrubella erat eleuata, quibus caute dissectis, comparuit, singulum eorundem habitaculum fuisse vermis Gordii *marini* vel *lacustris*, (vtrumque enim vnum eundemque esse, nullus dubito;) in spiram conuoluti. LINN. Syst. Nat. ed. 12. p. 1076. n°. 4 et 5. Semel atque iterum etiam eiusmodi tubercula, Gordium includentia, radiis branchiarum vasculosis innata vidi.

Menſura.

	Poll.	Lin. Paris.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad apices pinnae caudae longior - - -	6	2
Ab oris extremo ad oculi medium - -	—	$4\frac{1}{2}$
—— —— —— ad marginem operc. branch. poſticum - - - - - - -	1	1
—— —— —— ad pinnas pectorales - -	1	1
—— —— —— ad pinnam dorſi primam	2	$4\frac{1}{2}$
—— —— —— ad pinnam dorſi ſecundam	4	$3\frac{1}{2}$
—— —— —— ad pinnas ventrales - -	2	$5\frac{1}{2}$
—— —— —— ad pinnae ani principium	3	8
Longitudo pinnarum pectoralium - - -	—	11
—— —— pinnae dorſi primae, ad baſin -	—	$6\frac{2}{3}$
—— —— —— —— ſecundae ad baſin -	—	3
—— —— pinnarum ventralium - - -	—	$10\frac{1}{3}$
—— —— pinnae ani, ad baſin - - -	—	9
—— —— pinnae caudae, tota - - -	1	3
A fine fixo pinnae dorſ. primae ad pinnae dorſ. ſecundae principium - -	1	$4\frac{1}{2}$
—— —— pinnae dorſi ſecundae ad pinnae caudae principium - - - -	—	$5\frac{1}{2}$
A principio pinnarum pectoralium ad principium pinnarum ventralium -	1	6
—— —— pinnarum ventralium ad pinnae ani principium - - - - -	1	3
A fine fixo pinnae ani ad pinnae caudae principium - - - - - - -	—	6

Dia-

	Poll.	Lin.
	paris.	
Diameter oculi perpendicular. - - - - -	—	3
—— —— —— horizontalis - - - - - -	—	$3\frac{1}{2}$
Latitudo horizontalis per oculorum axes -	—	$3\frac{1}{2}$
—— —— —— —— ad dorsi initium - -	—	$5\frac{1}{2}$
—— —— —— —— sex lin. ante pinn. dors. primam - - - - - - - -	—	$6\frac{2}{3}$
—— —— —— —— ad pinn. dors. secundae principium - - - - - -	—	$3\frac{1}{3}$
—— —— —— —— ad pinnae caudae principium - - - - - - - -	—	$1\frac{1}{2}$
Latitudo perpendicularis per oculi medium	—	6
—— —— —— —— iuxta dorsi initium	—	9
—— —— —— —— per pinnae dors. primae principium - - - -	1	$2\frac{1}{2}$
—— —— —— —— —— —— —— finem	1	2
—— —— —— —— per pinnae ani principium - - - - - - - -	—	$10\frac{2}{3}$
—— —— —— —— —— finem fixum -	—	$6\frac{1}{2}$
—— —— —— —— pinnae caudae principium - - - - - - - -	—	5

DESCRIPTIO
PISCIS, E GADORVM GENERE,
RVSSIS *SAIDA* DICTI.

Auctore

I. LEPECHIN.

Mare album, cuius ambitum mihi perlustrare licuit, varia animantium et vegetabilium marinorum genera conspicienda et colligenda praebuit, ex quorum penu nunc duos pisciculos in medium proferre placet. Primus eorum esto.

Descriptio.
Tab. V.

Gadus saida.

Ratione trunci et formae externae plurimum conuenit cum gado *Nauaga* Koelreuteri (*). Capitis pars anterior a rostro ad oculos non nihil compressa, posterior magis rotundata et cathetoplatea.

Maxilla

(*) Vid. Nov. Comment. Acad. Scientiar. Petropol. T. XIV. p. 484. Dedita opera citaui Clariss. KOELREVTER ad nomen ruthenum; non confundendus enim est ipsius gadus cum *gado callaria* Illustr. LINNAEI, licet Clariss. dissertationis Auctor eundem esse putet. *Callarias* Celeb. LINN. dicitur cirratus et est idem, quem Clariss. KLEIN in historia piscium miss. V. p. 6. n. 5. sub nomine *callariae barbati lituris maculisque fuscis varii, gula ventreque albi.*

Maxilla inferior acutiuſcula paululum longior ſuperiore; in medio ipſius exiguus vixque conſpicuus reperitur cirrus. Maxilla ſuperior magis obtuſa et rotundata, vtraque per totum marginem inſtructa denticulis plurimis, acutis, ſetaceis, retrorſum hamatis; horum duplex quoque obſeruatur ordo in cartilagine palatina arcum referente. Ad introitum faucium, vbi finis ſuperior branchiarum implan-

albicantibus iride flauicante nigro mixta deſcripſit et icone T. I. f. 2. ſat bene expreſſit. Quamuis non eſt inficiendum gadum *Nauaga* itidem eſſe cirratum, ſed cirro minimo, et vix vltra lineam longo, quod et Clariſſ. Koelreuter l. c. p. 488. obſeruat. In mari albo praeſertim ſinu ipſius Candalakſcoy (кандалакская губа) capitur gadi ſpecies, quae ſub nomine rutheno мелкая треска (Morrhua minor) venit et ratione liturarum ac conformationis externae cum gado *Nauaga* haud parum conuenit, et iconem ſuccinctam que deſcriptionem Clariſſ. Kleinii ex amuſſim refert. Sed ſi vterque recens inter ſe confertur piſcis, magnum omnino occurrit discrimen. 1) Cirrus mentalis, vt antea dictum, in *Nauaga* exiguus, in *Morrhua* minori ſat euidens. 2) Pondus Morrhuae minoris non raro ad libras quinque increſcit, *Nauagae* vero intra vnam libram conſiſtit. 3) Color in *Morrhua* minori magis oliuaceus, in *Nauaga* obſcurior vel albidor. 4) Pinna caudae ipſa in Morrhua minori magis abrupta, in *Nauaga* autem rotundata. His collatis nullus inferre dubito, *Morrhuam* minorem eſſe gadum *Callariam* Illuſtr. Linnaei, *Callariam* V. Clariſſ. Kleinii; *Nauagam vero* Clariſſ. Koelreuteri, nouam, aut certe non ſufficienter ab Auctoribus deſcriptam ſpeciem cenſeri debere. Deſcriptio Koelreutiana optima, ſed icon, ratione colorum, mala.

implantatur, adſunt vtrinque duo corpuſcula dura, lentiformia, denticulis aſpera. Lingua craſſa, nigris punctis irrorata, ſoluta, rictus amplus.

Vertex capitis glaber, ſordide niger, nares vnico foramine rotundo peruiae, oculis quam roſtro propiores. Oculi ampli, membrana nictitans ſemilunaris, irides coeruleſcentes, pupilla ſordide alba.

Opercula branchiarum tribus conſtant laminis offeis: harum baſin conſtituens lunata; radios membranae branchioſtegae reſpiciens elliptica; ad angulum aperturae ſuperiorem ſita triangularis, biciſpidata. Omnes ſunt coloris argentei, punctulis nigris adſperſae, tectae cuti fuſca in medio tantillum coeruleſcente. Membrana branchioſtega alba, radiis ſex non nihil arcuatis ſuffulta.

Branchiae vtrinque quatuor, ſuperius ad angulum obtuſum geniculatae, inferius tantillum arcuatae. In parte conuexa omnium reperiuntur plumae duplicis ordinis laxae; in parte concaua margo exterior primae ſetis longioribus inſtruitur, interior vero, vt et reliquarum pars concaua, faſciculis breuibus per interualla diſpoſitis adornantur.

Dorſum non multum ſupra planitiem capitis eleuatum, conuexum, fere in linea recta ad caudam vsque percurrens, inter caput et pinnam dorſi anteriorem leuiter ſulcatum. Venter valde arcuatus, craſſus vsque ad anum, inde ſenſim ſenſimque ad pinnam caudae anguſtatur. Anus capiti propior quam caudae.

Linea

Linea lateralis recta propior dorſo. Color piſcis varius: dorſum vndique ad lineam lateralem ſorditum, punctis nigricantibus inuicem confluentibus adſperſum; latera ventris coeruleſcunt, cum tranſparente albedine, imus venter, gula et reliquus truncus albent.

Pinnae dorſi tres malacopterygiae, triangulares, fuſcae, radiis albicantibus.

Pinna prima medio fere ventri opponitur et cônſtat radiis 10 — 11.

Secunda reſpondet pinnae ani primae et radiis 16 — 17 ſuſtentatur, quorum vltimi breuiſſimi.

Tertia e diametro opponitur pinnae ani ſecundae, habet que 20. oſſicula; eorum quartum longiſſimum, reliqua ſenſim decreſcunt.

Pinnae anales duae, quarum baſes verſus anteriora obſcure-coeruleae.

Pinna ani prima ex triangulari oblonga, radiorum 18. quinto reliquis longiore.

Secunda itidem trigona, ſuffulta radiis 20.

Pinnae ventrales ad iugulum ſitae, baſi albicantes, 5 — 6 radiis ſuſtentatae, eorum ſecundus in ſetam ſat longam terminatur.

Pinnae pectorales reliquis concolores radiorum 16. horum ſeptimus, numerando a ſuperioribus, longior, reliqui ſecundum ordinem vtrinque decreſcunt.

Ttt 2 Pinna

Pinna caudalis bifurca radiorum 24 — 26.

Ichthyotomia. Peritoneum tenue, extus argenteum, intus innumeris punctis nigris adſperſum. Cauitas abdominis repleta erat copioſa pinguedine, ita vt omnia viſcera adipe ſepulta viderentur. Gula (*a*) ampla 5''' in diametro, terminata in ventriculum (*b*) longum ſaccum formantem, ſecundum abdominis longitudinem protenſum, et tantulum ad hypochondrium ſiniſtrum inclinatum.

Longitudo ventriculi a diaphragmate ad fundum 11'' et 11''', Latitudo maxima XI'''; in diſtantia I'' et VII''' a fundo ventriculi in ſuperficie anteriori prorumpit canalis arcuatus V'''. longus IV''' craſſus, qui facta inſigni plica terminatur in inteſtinum duodenum et loco pylori inſeruit. Extremum ipſius vndique ambiunt appendices coecae, vermiformes dictae, quarum numerus inter XXXV et IL. variare ſolet. Appendices quaedam ſimplices, quaedam vero coagmentatae, et quaſi per faſciculos diſpoſitae videbantur. In proceſſibus his corpuſcula innumera, ſubrotunda, ſucco viſcido flauicanti turgidula, cernere licuit (*).

Inte-

(*) Ex hac ſimplici ventriculi fabrica magna Naturae induſtria in temperanda huius generis piſcium voracitate apparet. Ventriculus ſimplex fere ad perpendiculum dependens, non ſat habet virium ad retinendos diutius cibos; hinc duo obſtacula effinxit Natura 1) exortum canalis ſub angulo acuto, plica recluſum 2) finem ipſius itidem intortum

Inteſtinum duodenum, ab initio largius, ſurſum ad diaphragma, et parum ad hypochondrium dextrum inclinatum per $V_{2}^{1'''}$ aſſurgit, ibique facta plica in eodem hypochondrio deſcendit ſub forma inteſtinorum tenuium. Inde interuallo IV''' ab ano ſurſum flectitur et in medio fere abdomine percurrit vsque ad appendices coecas inferiores, vbi vltima inflexione facta iuxta fundum ventriculi et latus ſiniſtrum ima petebat ad anum.

Oeſophagi interior tunica rugis longitudinalibus et transuerſalibus quam plurimis obſita erat, quae in ventriculum deſcendens naturam ſuam non immutauit quidem; ſed rugarum numerus erat imminutus. Pylorus (*c*) modo oſculis ex appendicibus coecis hiantibus, et quodammodo protuberantibus, erat obſitus. Reliquus inteſtinorum tractus nihil praecipui habebat, praeter orificium ductus cholidochi, quod tenui membranula tegebatur. Longitudo omnium inteſtinorum vna cum ventriculo vix longitudinem piſcis ſuperabat.

Hepar magnam abdominis partem adimplebat, diuiſum in partes duas, quarum altera breuior et mole minor, ſiniſtrum occupabat hypochondrium, altera in dextro erat ſita. Huius extremitas inferior

tortum formauit ne cibi cito elabi poſſent. Capacitatem ipſius adauxit proceſſibus vermiformibus, quibus et fontes liquoris ſuponacei addidit, vt hic ciborum natura in ſuccum nutritiuum mutaretur, ſic breuitatem primarum viarum obſtaculis dictis ſuppleuit.

rior iterum in duos fubdiuifa lobos, quorum fuperior multo breuior inferiore antrorfum transuerfimque in abdomine flexus, finiftrum ventriculi latus leuiter tangebat, inferior vero ipfam fuperficiem pofticam fubibat. Media atque anterior hepatis portio incumbebat ventriculi fummitati, a fummo ad imum 7''' longa; poftica vero magno fulco, ad vtrumque oefophagi latus reperiundo immerfa, cohaerebat diaphragmati per innumera vafa fanguinea. Veficula fellea ex coeruleo viridis delitefcebat in fovea confpiciunda fub dextra ac poftica portione hepatis. Subftantia infignis huius vifceris fat erat firma atque tenax, color fubrubellus, circa veficulam felleam autem liuidus. Lien itidem rubellus, et prouti in pifcibus femper obferuatur, admodum longus, lobulo triangulari terminatus.

Ouaria duo, longa, albida, ouis turgida, in principio in vnum corpus coalita, extremitatibus denuo feiuncta. Quodlibet eorum proprio orificio in communem ouiductum patebat. Lactes maris variis lobis confpicuae erant.

Vefica aërea, fimplex, longa, albida, glutinofa, mollis, ad fummitatem bicornis.

Vifcus renale fanguinolentum, fpinae dorfi, retro veficam aeream, adhaerens, in vnum corpus coalitum, mediante tela celulofa ligatum. Vreteres variis furculis orti, ad fines renum confpicui, fundum veficae vrinariae oblique patebant. Vefica vrinaria ad coniunctionem ouariorum fita, collo lo ſuo oſtium horum commune, fundo vero abdominis finem reſpiciebat.

Cor validum, quadrilaterum, angulis obtuſis, cui ſuperius et quodammodo ad latus inſidet auricula rugoſa, ventriculo multo debilior. Aorta ſat firma, magna. Squammae ſunt minutiſſimae, et valde tenaciter corpori adhaerent.

Gadorum hiſtoria manca et imperfecta, bonisque iconibus vt plurimum deſtituta, ſynonima Auctorum ad noſtrum gadum pertinentia ſicco pede tranſire iubet. Interim piſcem noſtrum ſequentibus definiamus verbis.

Gadus dorſo tripterygio, ore cirro minimo, cauda bifurca; radio ventralium ſecundo in longam ſetam producto, linea laterali recta.

Menſe octobri et Nouembri gadus Nauaga magna in copia littora maris albi ſalutat, et hamo capitur. Eius tanta dictis menſibus vbique eſt frequentia, vt communem quotidianumque incolarum conſtituat cibum, et viliori pretio, prae reliquis piſcium generibus, venit. Inter aceruos *Navagae* et noſter apportatur gadus, qui alias ſedulo perquiritur et reiicitur. Caro ipſius flaccida, macilenta, et exſucca, minus palato arridet, et ob colorem tetrum luridumque *ſaida* ab omnibus ſpernitur.

Lon-

Dimenſio ſecundum pedum Pariſinum.	Longitudo ab apice roſtri ad caudae extremum	$8''$	$10'''$
	—— —— —— —— ad initium P. D. vltim.	5	8
	—— —— —— —— —— —— P. D. ſec.	3	8
	—— —— —— —— —— —— P. D. prim.	2	8
	Longitudo ab apice mandibulae inferioris ad P. A. ſec.	5	6
	—— —— —— —— —— ad P. A. Prim.	3	6
	—— —— —— —— —— —— ad P. Pect.	2	-
	—— —— —— —— —— —— ad. P. Abd.	1	8
	Ab apice roſtri ad canthum oculi anteriorem	-	8
	—— —— —— ad nares	-	5
	Latitudo pinn. I. dorſalis ad baſin	1	-
	Longitudo maxima	-	7
	Latitudo P. D. ſecundae	1	-
	Longitud.	-	5
	Latitudo P. D. tertiae	-	10
	Longitudo	-	9
	Latitudo P. A. ſecund.	1	1
	Longitudo	-	$5\frac{1}{2}$
	Latitudo P. A. prim.	1	2
	Longitudo	-	6
	Latitudo pinn. abdom.	-	1
	Longitudo ſumma	-	9
	Circumferentia rictus	1	6
	Craſſities capitis ad oculos	3	-
	—— —— —— in medio	3	4
	—— —— —— ad nucham	3	8

Craſſi-

Craſſities corporis ad P. An. primam -	2'' – 10'''
—— —— —— ad P. An. ſecund. -	1 – 8
—— —— —— ad P. Caud. - - -	- – 10
—— —— —— ad P. D. primam -	3 – 6
—— —— —— pone P. Pect. - -	3 – 8
Longitudo caudae maxima - - -	1 – 4
—— —— ad bifurcationem caud. - -	- – 4.

CYCLOPTERVS LINEATVS.

Cyclopterorum gens numeroſa quoque in mari albo obſeruatur, et praecipue *Cyclopteri Lumpi*, qui incolis *Pinogor* (пиногорь) audit. Vidi etiam et *Cyclopterum Liparem* circa inſulam ab vrſo denominata (мѣдвежїй островъ); his addo nouam minusque cognitam ſpeciem, quae coloribus ſuis ad piſces exoticos accedit, quam que *Cyclopterum Lineatum* vocabo.

Deſcriptio. Tab. V. Fig, 2. 3.

Caput plagioplateum, decliue ad mandibulas rotundatum, obtuſum, corpore paulo latius. Nares foraminulo rotundo protuberante aperiuntur. Oculi mediam capitis partem occupant; irides pallide coerulcae, pupilla alba.

Mandibula ſuperior vltra inferiorem prominet, labra cuti craſſa tecta; rictus amplus, dentes duplici ordine per vtramque mandibulam diſpoſiti, minimi, conferti, acuti; lingua parua, ſoluta. Vtrumque labrum obſitum eſt verrucis cutaneis paruis, quae per opercula branchiarum continuantur et quidem a labro ſuperiore per mediam partem, ab inferiore vero per marginem inferiorem.

Opercula branchiarum ad angulum ſuperiorem terminantur in proceſſum vtcunque triangularem. Membrana branchioſtega vndique clauſa, vnico radio ſuffulta.

Cor-

Corpus a capite ad anum teres ferme cum ventre parum prominente; ad pinnas pectorales crassissimum, ab ano ad extremum caudae e lateribus compressum et attenuatum. Anus capiti propior quam caudae.

Dorsum a capite ad pinnam dorsalem eleuatum, gibbum et latum est.

Pinnae Pectorales maximae radiorum XXVI, horum sex anteriores ad medium fere soluti, in sequentes 7, 8, 9 atque 10, multo sunt breuiores, reliqui numero XIV sensim sensimque iterum longitudine crescunt, vnde incisura lunaris in pinnis conspicitur.

Pinnae ventrales inter bases pinnarum pectoralium sitae sunt, et, prouti huius generis piscium conditio fert, concrescunt in orbiculum sat robustum et carnosum, marginibus protuberantem, medio cauum. Cauitas exaratur V. rugis transuersalibus cum intersecante vna ruga longitudinali. Margo vero obsidetur tuberculis, papillosis, rubicundis; quorum auxilio piscis saxis et aliis corporibus duris adhaerere solet.

Pinna dorsalis vnica 1'' et 11''' longa 1''' lata sustentur radiis XXXVI. quorum vltimi breuiores, cum radiis pinnae caudalis confunduntur.

Pinna ani ab ipso ano per corpus excurrens constat radiis XXVIII, quorum vltimi itidem breuiores cum radiis caudae coniunguntur.

Cauda minima radiis IV et VIII, mediis longioribus. Squammae nullae, ſed integrum corpus copioſo muco obducitur.

Color totius piſcis caſtaneus, excepto ventre cum vicina gula pallidioribus, tuberculisque labri inferioris dilute roſeis. Per caput atque latera corporis ducuntur lineae longitudinales, ſat latae, et partim rectae, partim vndulatae, ad caudam conuergentes, exalbidae. Harum tria paria numerantur: primum par per capitis verticem ducitur, et iuxta pinnam dorſi vtrinque decurrit; ſecundum par tranſit per oculos et medium corpus exornat; tertium atque vltimum per capitis latera et tractum pinnae analis ſequitur. Pinna analis et dorſalis corpori ſunt concolores, cum tranſparentibus hinc inde faſciolis transuerſalibus pallidioribus. Pinnarum pectoralium color ad colorem ventris accedit.

Ad oſtium maris albi circa tres Inſulas piſcandis ſertulariis aliis que corporibus marinis intentus deſcriptum piſciculum obtinui. Ruthenum nomen neque mihi, neque incolis conſtat. Non poſſum etiam praedicare vtrum perfectae aetatis vel iunior piſciculus ſit captus. Ichthyotomiam itidem exhibere non valeo ob vnicum indiuiduum, quod poſſideo, ſed coronidis loco dimenſionem partium externarum addo.

Lon-

Dimenſio ad pedem pariſianum.

Longitudo totius piſciculi - - - - -	$2'' - 1'''$
Ab apice medii roſtri ad oculos - - - -	- — 2
—— —— —— ad angulum inciſurae branchiarum	- — 6
Inter aperturam narium et oculos - -	- — 1
—— —— —— ad pinnam dorſi - - -	- — 7
—— —— —— ad pinnas pectoral. - -	- — $6\frac{1}{2}$
A mandibula inferiore ad orbiculum pinn. ventr.	- — $3\frac{1}{2}$
—— —— —— ad pinnam Ani - - -	- — 9
Diameter orbiculi pinnar. ventral. - -	- — 2
Latitudo pinnar. pectoral. ad baſin - -	- — $3\frac{1}{2}$
Longitudo ſumma - - - - -	- — 6
Circumferentia rictus oris - - - -	- — 5
Oculi diſtant - - - - - - -	- — 3
Inter foramina narium - - - -	- — 2
Craſſities capitis circulo per oculos ducto	1 — 2
—— —— —— —— per nares - -	1 — $2\frac{1}{3}$
—— —— —— —— ad nucham - -	1 — 6
—— —— —— retro orbicul. pinar pectoral.	1 — 5
—— —— —— —— —— ad anum - -	1 — -
Longitudo capitis - - - - - -	- — 5

Piſciculus magnitudine naturali Fig. 2. ſiſtitur pronus, Fig. 3. vero ſupinus.

DESCRIPTIONVM PLANTARVM SIBIRICARVM CONTINVATIO.

Auctore

E. LAXMANN.

In deſcribendis plantis ſibiricis pergens, nonnullas illarum tantum nunc botanicis offerre volui, quas in ſummis altaicorum montium aeterna niue tectorum cacuminibus legi, quaeque mihi maxime ſingulares viſae ſunt.

I.

Tab. V. Fig. 1. GENTIANA *grandiflora* corolla quinquefida, maxima, foliis radicalibus, plurimis, lanceolatis, compactis, horizontalibus.

DESR. RADIX fibroſa, inter muſcos repens, perennis.

EOLIA radicalia, plurima, lanceolata, compacta, glabra, margine membranacea, horizontalia.

CAVLIS florente adhuc planta nullus, poſt floreſcentiam vero exſurgens pollicaris, ſuſtentans par foliorum vaginantium, erectorum, membranula albida cinctorum.

FLOS

FLOS e medio foliorum exſurgens, vnicus, erectus, inter congeneres maximus.

CALYCIS *perianthium* tubulatum, quinquangulare, corolla dimidio breuius, quinquefidum, laciniis lanceolatis, integerrimis membrana cinctis.

COROLLA infundibuliformis pulcherrimae coerulea; *tubo* calyce duplo longiore verſus faucem ampliore; *limbo* quinquefido plano; *laciniis* ouatis integerrimis; *fauce* plicata, plicarum laciniis lanceolatis adeo magnis, vt putes ipſum limbum decemfidum eſſe.

Habitat in ſummi cacuminis alpium Maloi Altai dictarum planitie muſcoſa prope niuem. Circa finem Iunii florentem inueni.

II.

SIBBALDIA *altaica* foliorum radicalium apicibus tripartitis, calycibus quinquefidis petalis retuſis. Tab V. Fig. 2.

DESCR. RADIX lignoſa, in rupium fiſſuris repens, fibroſa, plurimos cauliculos et amplum foliorum ceſpitem fundens.

CAVLES plures, pollicares, obliqui, teretes in ramos ſparſos ſe diuidentes.

FOLIA

FOLIA *radicalia* plurima, vsque ad apicem linearia; apicibus dilatatis tripartitis; laciniis tribus linearibus integerrimis; *caulina* plerumque integra, rarius paruula incisura notata.

FLORES solitarii, magni, terminantes ramos.

CALYCIS *perianthium* cylindricum, quinquefidum, laciniis lanceolatis, acutis, integerrimis, patentibus.

COROLLAE petala quinque, ouata, retusa, patentissima, laetissime purpurea, calycis laciniis duplo longiora.

STAMINVM *filamenta* quinque, breuia, cylindro perianthii adnata; *antherae* simplices lineares in diuisuris laciniarum.

PISTILLI *Germina* quinque ouata glabra in fundo calylis pappo piloso repleto; *styli* et *stigmata* vt in congeneribus.

Tota planta exceptis petalis pilis raris validis adspersa est.

Habitat in fissuris orientalibus inque collibus glareosis altissimqrum rupium. Floret circa initium Iulii.

NB. Circa genus Sibbaldiae notare licet: Differt a nostra planta *Sibbaldia procumbens* in Florae daniae Fasc. I. Tab. XXXII. optime delineata, foliis petiolatis ternatis, foliolis truncatis tridentatis, caule simplici, floribus in capitulum

tulum congestis, calycibus decemfidis, petalis luteis. *Sibbaldia* autem *erecta*, quae iam ad Wolgam occurrit, quaeque a STELLERO Ircutiae lecta, toto coelo diuersa ab illa est, cuius iconem Ammanni Tab. XV. continet. Haec Ammanniana planta in transbaicalensibus tantum regionibus occurrit, caule gaudet ramosissimo fere prostrato, foliis parcius diuisis axillaribus et floribus in varietate praesertim alpina maioribus; illius autem caulis simplex est summitate tantum ramosa; foliis ornatur per totum caulem confertissimis, multifidis, laciniis linearibus, floribus semper minoribus. Putarem itaque Botanicis non ingratum fore, si huius plantae exactam figuram quis traderet.

III.

ORNITHOGALVM *vniflorum* foliis caulinis alternis, vaginantibus, pedunculo vnifloro. Ornithogalum scapo diphyllo, pedunculo vnifloro. LINN. Mant. pag. 62. Tab. VI. Fig. 2.

DESCR. RADIX bulbosa, ouata, oui hirundinis magnitudine, plurimas fibras filiformes emittens.

CAVLIS e bulbo adulto vel trienni liliaceus, spithamaeus, teres, in medio crassior versus vtramque extremitatem attenuatus.

FOLIA bina rariſſime tria, validiori caulis parti affixa, alterna, vaginantia, lanceolata, obtuſa, patentia, dimidiam longitudinem caulis aequantia.

FLOS vnicus, terminans caulem, luteus, inter maiores in ſuo genere numerandus; vel vt Illuſtris LINNAEI verbis vtar: eſt Tulipae ſylueſtris flore dimidio minor, ſed Ornithogali lutei triplo maior.

COROLLAE *petala* ſex lanceolata, obtuſa, patentia, ſubtus ad baſin virideſcentia. Reliquae fructificationis partes congeneribus ſimiles.

Habitat in ſummis montium Maloi Altai et Sinie Sopka fiſſuris rupeſtribus verſus ſeptentrionem ſitis. Floret circa medium Iunii, illa autem ſpecimina, quae in horto Barnaulenſi colui, primo vere cum reliquis liliaceis floruere.

IV.

Tab. VII. Fig. 1. ORNITHOGALVM *altaicum* ſcapo tereti quadriphyllo, petalis ouatis trineruibus, ſtaminibus ſubulatis.

DESCR. RADIX bulboſa, bulbo oblongo paruo, fibras longiſſimas emittente.

CAVLIS liliaceus, ſimpliciſſimus, teres, ſpithamaeus, erectus, foliolis quatuor cinctus.

FOLIA

FOLIA *radicalia* bina, teretia, erecta, caule paulo breuiora; *caulina* in ſuperiori ſemiſſe caulis, alterna, amplexicaulia, lineari lanceolata, patentiſſima, verſus apicem ſenſim minora.

FLOS plerumque vnicus, terminans caulem, magnitudine floribus Ornithogali narbonenſis aequalis; rariſſime caulis biflorus occurrit.

COROLLA hexapetala, patens, *petalis* ouatis albidis, trineruibus, baſi neruisque fuſcis.

STAMINVM *filamenta* ſex ſubulata, corolla dimidio breuiora, *antherae* oblongae.

PISTILLI *germen* oblongum, trigonum; *ſtylus* ſubulatus, perſiſtens, germine paulo breuior; *ſtigma* capitatum triangulare.

Habitat in ſummis fiſſuris altiſſimarum rupium ipſorum montium altaienſium. Poſtremis diebus Iunii menſis florentem legi.

V.

POLYGONVM *ſibiricum* floribus octandris, foliis haſtatis, caule inermi. Tab. VII. Fig. 2.

DESCR. RADIX perennis, ramoſo fibroſa, articularis, ſtoloniferus, inter ſaxa muſcosque repens.

CAVLIS herbaceus, adſcendens, geniculatus, vaginatus, ramoſus, ſpithamaeus, ramis cauliformibus e geniculis.

FOLIA *caulina* e geniculis, alterna, patentia, petiolata, lanceolata, haſtata, glabra, plana; *petioli* breues alati, *ſtipulis* vaginantibus, membranaceis, ferrugineis affixi.

SPICAE plures, caules ramosque terminantes, interruptae, ſtipulis amplectentibus munitae, capitulum interdum conſtituentes, longitudine plerumque bipollicari.

CALYCIS *perianthium* turbinatum, flauum, profunde quinquepartitum, *laciniis* ouatis, obtuſis, concauis, perſiſtentibus.

STAMINVM *filamenta* octo, ſubulata, incurua, calyce paulo breuiora, lutea, *antherae* ouatae, magnae, flauae.

PISTILLI *germen* triquetrum, flauum, *ſtylus* vnicus, *ſtigmata* tria, ſimplicia, lutea.

SEMEN vnicum triquetrum, nitidum, nigrum, calyce inuolutum; ſemine Polygoni fagopyri duplo minus.

Habitat in muſcoſa planitie ſummarum alpium altaicarum cum Anemone faſciculata, Doronico pardalianthe, Sibbaldia procumbente et ſequenti Ranunculo

culo parcius; occurrit etiam in regionibus transbaicalensibus ad Selengam ornans valles montosas praesertim Vbucunenses. Floret initio Iulii.

VI.

RANVNCVLVS *altaicus* foliis lobatis, radicalibus petiolatis caulinis sessilibus, calyce hirsuto, longitudine fere petalorum. Tab. VII.

DESCR. RADIX ex multis napulis fibrisque validis fasciculata, perennis.

CAVLIS erectus, teres, glaber, simplicissimus, palmaris, succulentus.

FOLIA lobata, lobis inaequalibus, plerumque tribus rarius pluribus, lanceolatis integris; *radicalia* saepissime tria, petiolata, *petiolis* dimidiam caulis longitudinem aequantibus; *caulina* bina vel tria, sessilia, amplexicaulia, subfloralia.

FLOS terminalis, magnus aureo luteus, saepissime tantum vnicus, rarissime bini.

CALYCIS *perianthium* pentaphyllum, fuscum, lanuginosum, foliolis lanceolatis, concauis, longitudine fere petalorum.

COROLLA pentapetala, *petalis* obtusis, ad basin fulcis; *nectarii* foueola squamula fusca tecta.

Reliquae fructificationis partes vt in congeneribus. Circa finem Iunii in alpium niuosarum planitie muscosa florentem inueni.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

COMPA-

COMPARATIO INTER THEORIAM LVNAE ILLVSTR. *EVLERI* ET TABVLAS RECENTIORES CELEB. *MAYERI.*

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

1.

Opus incomparabile de Theoria Lunae ab Illuſtr. *Eulero* haud ita pridem editum, comparationem exhibet aequationum pro motu Lunae in iſta Theoria allatarum, cum Tabulis Lunaribus Celeb. *de Clairaut*, eo imprimis fine inſtitutam, vt inde valores ſaltem prope veri excentricitatis et inclinationis mediae Lunae deduci poſſent. Similem comparationem Theoriae ſuae, cum Tabulis antiquioribus Celeb. *Mayeri*, Illuſtr. *Eulerus* inſtituere quidem tunc temporis decreuiſſet, niſi eandem maxime operoſam, remque multi et taediosi laboris plenam ratus fuiſſet; quia ſcilicet in Tabulis Celeb. *Mayeri* non elongatio media Lunae a Sole, ſed vera inducitur. Poſtmodum vero quum ad nos peruenerint nouae Tabulae Celeb. *Mayeri* ab Illuſtr. Societate Scientiarum Londinenſi euulgatae, quae ſi teſtimoniis plurimorum Aſtronomorum fidem habere fas ſit, a coelo vix vnquam vno minuto primo diſſen-

diſſentiunt; operam Aſtronomis haud ingratam me ſuſcepturum exiſtimaui, dum comparationem Theoriae *Eulerianae* cum laudatis his Tabulis iniuerim; ſic enim pro poſitionibus Lunae ſaltem principalibus, conſenſus vel diſſenſus Tabularum Lunae noſtro tempore celebratiſſimarum facile aeſtimari poterit.

2. Quoniam argumenta Tabularum Celeb. *Mayeri* diuerſa ſunt ab iis, quae in Tabulis Illuſtr. *Euleri* occurrunt, ante omnia neceſſum eſt, vt rationem iſtorum argumentorum dilucide explicemus. Quemadmodum igitur in Tabulis Illuſtr. *Euleri* elongatio media Lunae a Sole, ſeu diſtantia loci Lunae medii a loco medio Solis littera p expreſſa vbique occurrit; ita in Tabulis Celeb. *Mayeri* triplex argumentum ex elongatione Lunae a Sole oriundum reperitur. Primum enim occurrunt anguli, qui diſtantiam loci Lunae medii a loco Solis vero involuunt, quam Celeb. *Mayerus* littera ω expreſſit, hanc igitur vt ſimilitudo quaedam cum Tabulis *Eulerianis* obſeruetur littera p' inſigniemus. Deinde argumenta quoque adhibentur, ex diſtantia loci Lunae aequati a loco Solis vero deſumta, haec autem diſtantia a Celeb. *Mayero* littera $\bar{\omega}$ expreſſa, nobis p'' nuncupabitur. Quid autem per locum Lunae aequatum apud *Mayerum* intelligatur, infra perſpicue exponemus. Denique in aequationibus pro Latitudine Lunae *Mayerianis* occurrit angulus $\tilde{\omega}$ qui deſignat diſtantiam loci Lunae veri in orbita a loco Solis vero, quem nos p''' adpellabimus. Praeter ano-

maliam

maliam Lunae mediam a *Mayero* littera $\dot{p}$ expressam, argumenta in Tabulis ipsius occurrunt, quae anomaliam Lunae correctam inuoluunt, hanc igitur anomaliam littera $\tilde{p}$ designat, quae nobis erit q'. Qua ratione autem haec correctio anomaliae mediae Lunae sit instituenda, mox quoque perspicue explicabimus. Loco argumenti latitudinis medii in Tabulis *Eulerianis* adhibiti, Celeb. *Mayerus* in suas Tabulas introduxit distantiam medii loci Lunae a loco nodi correcto, tumque vero distantiam loci Lunae in orbita a loco nodi correcto, quas distantias litteris δ et $\tilde{\delta}$ designauit, hae igitur nobis erunt r' et r''. Anomalia denique media Solis ab Illustr. *Eulero* littera t designata, *Mayero* s dicitur.

3. Inaequalitates Lunae, quae loco eius medio adplicari debent, secundum Tabulas Celeb. *Mayeri*, commode in quatuor dispesci possunt ordines, quorum primus aequationem annuam Lunae, euectionem et nonnullas alias minores inaequalitates inuoluit, in hoc autem ordine omnia argumenta ex litteris, t, p', r' et q componuntur. Secundus ordo aequationem orbitae Lunae continet, et pro argumento habet angulum q'. Tertius ordo inaequalitatem continet, quae variatio Lunae dici consueuit et pro argumento habet angulum p''. Quartus denique ordo absoluitur reductione ad eclipticam, huncque ingreditur angulus r''. Locus Lunae medius per binos priores ordines inaequalitatum correctus, *Mayero* dicitur locus Lunae aequatus, cui si adpli-

 cetur

cetur variatio, habebitur locus Lunae in orbita. Quodſi nunc locus Lunae medius exprimatur littera ζ, inaequalitates vero ex ſingulis ordinibus oriundae litteris η, θ, κ et ϱ, reſpectiue deſignentur, habebitur longitudo Lunae vera

$$=\zeta+\eta+\theta+\kappa+\varrho, \text{ quare fiet angulus } \Phi=\eta+\theta+\kappa+\varrho.$$

4. Pro inaequalitatibus ad primum ordinem pertinentibus ſequens ex Tabulis Cel. *Mayeri* elicitur expreſſio:

$$\begin{array}{rlll}
\eta = & +\ 11'.\ 16''. & \text{ſin.}\, t & \rbrace\ \text{I.} \\
& -\ 4. & \text{ſin.}\, 2t & \\
& -\ 54. & \text{ſin.}(2p'+t) & \text{II.} \\
& -\ 1.\ 9. & \text{ſin.}(2p'-t) & \text{III.} \\
& +\ 54. & \text{ſin.}(2p'+q) & \text{IV.} \\
& -\ 1^{\circ}.\ 20.\ 33. & \text{ſin.}(2p'-q) & \rbrace\ \text{V.} \\
& +\ 36. & \text{ſin.}(4p'-2q) & \\
& +\ 2.\ 9. & \text{ſin.}(2p'-q+t) & \text{VI.} \\
& +\ 49. & \text{ſin.}(2p'-q-t) & \text{VII.} \\
& +\ 34. & \text{ſin.}(q-t) & \text{VIII.} \\
& +\ 58. & \text{ſin.}(2p'-2r') & \text{IX.} \\
& +\ 16. & \text{ſin.}(p'-q) & \rbrace\ \text{X.} \\
& -\ 1.\ 0. & \text{ſin.}(2p'-2q) &
\end{array}$$

Notandum vero heic eſt, loco nodi medio adplicandam eſſe correctionem $+8'.50''.\,\text{ſin.}\,t-2''.\,\text{ſin.}\,2t$; ita vt ſit $r'=r+8'.\ 50''.\,\text{ſin.}\,t-2''.\,\text{ſin.}\,2t$. Iam ſi anomaliae mediae Lunae q adplicetur correctio η, itemque haec $+23'.\ 12''.\,\text{ſin.}\,t-6''\,\text{ſin.}\,t$, ita vt fiat

$$q'=q+\eta+23'.\ 12''\,\text{ſin.}\,t-6''.\,\text{ſin.}\,2t$$

inae-

inaequalitas θ apud Mayerum ſic habetur expreſſa:

$$\left.\begin{aligned}\theta = -6^{\circ}.\ 18'.\ 15''.\ \text{ſin.}\ q' \\ +13.\ \ 0.\ \text{ſin.}\ 2q' \\ -37''.\ \text{ſin.}\ 3q'\end{aligned}\right\}\ \text{XI.}$$

Porro ſi diſtantiae loci medii Lunae a loco vero Solis p' adplicentur inaequalitates η et θ, habebitur diſtantia loci aequati Lunae a loco vero Solis $= p'' = p' + \eta + \theta$, tum vero inaequalitas tertii ordinis hoc modo apud Mayerum exprimitur

$$\left.\begin{aligned}\varkappa = -1'.\ 55''.\ \text{ſin.}\ p'' \\ +35.\ 43.\ \text{ſin.}\ 2p'' \\ +2.\ \text{ſin.}\ 3p'' \\ +10.\ \text{ſin.}\ 4p''\end{aligned}\right\}\ \text{XII.}$$

hocque facto locus Lunae in orbita fiet $= \zeta + \eta + \theta + \varkappa$. Diſtantia inter locum nodi correctum et locum Lunae in orbita, quum exhibeat angulum r'', patet eſſe

$$r'' = r' + \eta + \theta + \varkappa = r + \eta + \theta + \varkappa + 8'.50''.\text{ſin.}\,t - 2''.\ \text{ſin.}\ 2t,$$

hincque habebitur quartus ordo inaequalitatum Lunae apud Mayerum

$$\begin{aligned}\varrho = +1'.\ 23''.\ \text{ſin.}\ (2r'' - q')\ \ &\text{XIII.} \\ -6.\ 43.\ \text{ſin.}\ 2r''\ \ &\text{XIV.}\end{aligned}$$

His vero inaequalitatibus vltimam ſuperaddit Celeb. *Mayerus*, aequationem punctorum aequinoctialium, quae habetur $= -18''$. ſin. Long. ☊. Aequationem demum ſecularem motui medio Lunae adplicandam adſert Cel. *Mayerus*, cuius quantitas interuallo pri-

 mi

mi ſeculi 9″, ideoque annis 1000 elapſis ad 15′ minuta prima aſſurgit.

5. Vt omnes inaequalitates Lunae ex Tabulis *Mayeri* deſumtae, vno obtutu repraeſentari poſſint, placet easdem heic denuo repetere, ſimulque adiungere valores harum inaequalitatum per ipſam Theoriam a Celeb. *Mayero* deductos, vt eo facilius ſit iudicium quantum Tabulae *Mayeri* a computo ipſius diſcrepent. Praeter inaequalitates vero heic allatas, Theoria alias atque alias ſubminiſtrauit, quas *Mayerus* in ſuas Tabulas introducendas non cenſuit, partim quod minimae eſſent, partim quod per Theoriam non ſatis exacte ipſi videbantur definitae, tum vero praecipue quod ex obſeruationibus certo concludere ſibi viſus eſt, has inaequalitates impune negligi poſſe.

Inaequalitates Longitudinis Lunae ſecundum Cel. *Mayerum*.

	ex Theoriae deductae	ex Tabulis
I.	$+0°.11'.39''$	$+0°.11'.16''.$ ſin. t
	-10	$-4.$ ſin. $2t$
II.	-58	$-54.$ ſin. $(2p'+t)$
III.	-1.13	$-1.\ 9.$ ſin. $(2p'-t)$
IV.	$+55$	$+54.$ ſin. $(2p'+q)$
V.	$-1.\ 20.\ 8$	$-1.\ 20.\ 33.$ ſin. $(2p'-q)$
	$+38$	$+36.$ ſin. $(4p'-2q)$
VI.	$+2.\ 11$	$+2.\ 9.$ ſin. $(2p'-q+t)$
VII.	$+44$	$+49.$ ſin. $(2p'-q-t)$
VIII.	$+40$	$+34.$ ſin. $(q-t)$
IX.	$+1.\ 26$	$+58.$ ſin. $(2p'-2r')$
X.	$+8$	$+16.$ ſin. $(p'-q)$
	$-1.\ 2$	$-1.\ 0.$ ſin. $(2p'-2q)$

XI.

	ex Theoriae deductae	ex Tabulis
XI.	$-6^\circ.18'.11''$	$-6^\circ.18'.15''.\sin.q'$
	$+13.\ 2$	$+13.\ 0.\ \sin.2q'$
	-36	$-37.\ \sin.3q'$
XII.	$-1.\ 55$	$-1.\ 55.\ \sin.p''$
	$+35.\ 42$	$35.\ 43.\ \sin.2p''$
	$+\ 1$	$+\ 2.\ \sin.3p''$
	$+\ 5$	$+10.\ \sin.4p''$
XIII.	$+1.\ 15$	$+1.\ 23.\ \sin.(2r''-q')$
XIV.	$-6.\ 51$	$-6.\ 43.\ \sin.2r''$
XV.		$-18.\ \sin.$ Long. ☊.

6. Pro Latitudine vera Lunae, sequens ex novis Celeb. *Mayeri* Tabulis elicitur expressio:

$$\psi = \text{I.}\ \begin{cases} +5^\circ.8'.46''.\sin.r'' \\ \quad -6.\ \sin.3r'' \end{cases}$$

II.	$+8.\ 49.\ \sin.(2p'''-r'')$
III.	$+2.\ \sin.(r''-t)$
IV.	$-17,4.\ \sin.(r''-q)$
V.	$-24,1.\ \sin.(r''-2q)$
VI.	$+\ 2,7.\ \sin.(r''-3q)$
VII.	$-\ 8,3.\ \sin.(2p'''-r''+t)$
VIII.	$-\ 3,7.\ \sin.(2p'''-r''-t)$
IX.	$-\ 2,2.\ \sin.(2p'''-r''+q)$
X.	$+15,0.\ \sin.(2p'''-r''-q)$
XI.	$-\ 6,0.\ \sin.(2p'''-r''-2q)$.

Quantitatem Parallaxeos ex Tabulis *Mayeri* deducendam, hoc loco adferre praeter rem erit; quum nullum

nullum ſit dubium, quin circa eandem perfectus habeatur conſenſus harum Tabularum cum Theoria Lunae *Euleriana.*

7. Superfluum omnino foret, ſi omnes iſtos calculos, qui in Theoria Lunae Illuſtr. *Euleri* Lib. II. Capit. III et IV. inſtituti habentur, heic repetere vellemus; ſufficiet vero nobis ad iſtas poſitiones Lunae potiſſimum animum aduertiſſe, pro quibus anguli Φ et ψ maximos recipiunt valores; quippe quum nullum ſit dubium ope harum poſitionum valores excentricitatis et inclinationis mediae pro orbita Lunae certiſſime definiri poſſe, quae quantitates ab Illuſtr. *Eulero* litteris k et i deſignantur.

I. Caſus quo $p = 0$; $q = 0$; $r = 90$.

1. Caſus particularis $t = 0$.

Pro hoc caſu ex formulis Eulerianis deducitur

$$x = -0{,}0065128 + 1{,}176795.k + 0{,}00043k^2 - 0{,}6239.k^3 - 0{,}46726.ii + 0{,}2154.iik$$

$$y = 0$$

$$z = +0{,}965762.i + 1{,}12451.ik + 0{,}0317.ikk + 0{,}0159.i^3.$$

Ex Tabulis vero *Mayeri* inuenitur

$$\Phi = 0 \quad \text{et} \quad \psi = 4^\circ.\ 59'.\ 31''.\ 4.$$

Quum igitur eſſe debeat

$$\text{Tang.}\ \psi = \frac{z\ \text{coſ.}\ \Phi}{1+x}, \quad \text{ſeu} \quad \frac{(1+x)\ \text{Tang.}\ \psi}{\text{coſ.}\ \Phi} = z,$$

multiplicando valorem ipſius $1 + x$ ex formula Euleriana deſumtum, per Tang. ψ ex Tabulis *Mayeri*

Mayeri elicitum, sequentem consequemur aequationem:

$$+0,0867801-0,965762.i-0,04081.ii-0,0159i^3=0$$
$$+0,102792.k-1,12451.ik+0,0188.iik$$
$$+0,00004.k^2-0,0317.ik^2$$
$$-0,0545k^3.$$

II. Caf. particularis $t=180°$.

Formulae Eulerianae praebent:

$$x=-0,0072166+1,192281.k+0,03405.k^2-0,6239k^3$$
$$-0,4650.ii+0,2154.iik$$

$$y=0$$

$$z=+0,963736.i+1,12451.ik+0,0317\,ikk+0,0159.i^3$$

Ex Tabulis vero *Mayeri* deducitur:

$$\phi=0 \quad \text{et} \quad \psi=4°.\,59'.\,3'',4,$$

ex quo sequens orietur aequatio:

$$+0,0865828-0,963736\,i-0,04060\,ii-0,0159.i^3=0$$
$$+0,103981.k-1,12451.ik+0,0187.iik$$
$$+0,00297.k^2-0,0317.ik^2$$
$$-0,0544.k^3.$$

Additis igitur inuicem his aequationibus, sequentem obtinebimus.

$$+0,1733629-1,929498\,i-0,08141\,ii-0,0318.i^3=0 \quad \text{(I)}$$
$$+0,206773.k-2,24902.ik+0,0375.iik$$
$$+0,00301.k^2-0,0634.ikk$$
$$-0,1089.k^3.$$

8. II. Casus quo $p = 0$; $q = 90$; $r = 0$.

I. Cas. part. $t = 0$.

Ex formulis Eulerianis fit:

$$x = -0,0065128 - 0,65051.k^2 + 0,00458.ii$$
$$y = -1,619012.k + 1,0176.k^3 - 0,3402.iik$$

quum latitudo pro hoc casu sit valde parua, valorem ipsius z heic adferre nihil attinet. At Tabulae *Mayeri* praebent:

$$\phi = -5^\circ.\ 5'.\ 35'',$$

quare ob

$$(1 + x)\ \text{Tang.}\ \phi - y = 0,$$

sequens elicitur aequatio:

$$+0,0885449 - 1,619012.k - 0,057977.k^2 + 1,0176k^3 = 0$$
$$+0,00041.ii - 0,3402.iik.$$

II. Cas. partic. $t = 180$.

Pro hoc casu formulae Eulerianae dant:

$$x = -0,0072166 - 0,65589.k^2 + 0,00462.ii$$
$$y = -1,598110.k + 1,0176.k^3 - 0,3402.iik.$$

At ex Tabulis Mayerianis habetur

$$\psi = -5^\circ.\ 0'.\ 44'',$$

quare sequens prodibit aequatio:

$$+0,0870707 - 1,598110.k - 0,057524.k^2 + 1,0176.k^3 = 0$$
$$+0,00041.ii - 0,3402.iik.$$

Addita igitur hac aequatione ad superiorem, consequemur:

+0,

$+0,1756156-3,217122.k-0,115501.k^2+2,0352.k^3=0$
$+0,00081.ii-0,6804.iik.$

9. III. Casus quo $p=0$; $q=90°$; $r=90°$.

I. Casus partic. $t=0$.

Formulae Eulerianae dant:

$$x=-0,0065128-0,65051k^2-0,46726.ii$$
$$y=-1,619012.k+1,0176.k^3-0,0214.iik$$
$$z=+0,965762.i+0,2135.ik^2+0,0159.i^3.$$

Ex Tabulis *Mayeri* autem obtinuimus

$\Phi=-5°.5'.14''$ et $\psi=4°.59'.26'',2$,

vnde sequentes binae deducuntur aequationes

$+0,0884431-1,619012.k-0,057910.k^2+1,0176.k^3=0$
$-0,04160.ii-0,0214.iik$

$+0,0870978-0,965762.i-0,04096.ii-0,0159.i^3=0$
$-0,05703.k-0,2135\ ik^2.$

II. Casus partic. $t=180$.

Per formulas Eulerianas fit:

$$x=-0,0072166-0,65589.k^2-0,46550.ii$$
$$y=-1,598110.k+1,0176.k^3-0,0214.iik$$
$$z=+0,963736.i+0,2135\,ik^2+0,0159.i^3.$$

Quum igitur Tabulae Mayerianae dent:

$\Phi=-5°.0'.22''$ et $\psi=4°.59'.1'',2$,

sequentes prodibunt aequationes:

$+0,0869640-1,598110.k-0,057454.k^2+1,0176.k^3=0$
$-0,04078.ii-0,0214.iik$

 +0,

$+0,0869036-0,963736\,i-0,04074.ii-0,0159.i^3=0$
$-0,05740.k^2-0,2135.ik^2.$

Quodsi igitur binae hae aequationes binis superioribus respectiue addantur, sequentes prodibunt aequationes:

$+0,1754071-3,217122.k-0,115364.k^2+2,0352.k^3=0$ II.
$-0,08238.ii-0,0428.iik$

$+0,1740014-1,929498.i-0,08170.ii-0,0318.i^3=0$ (II)
$-0,11443.k^2-0,4270\,ik^2.$

10. IV. Casus quo $p=90^\circ$; $q=0$; $r=90^\circ$.

I. Cas. partic. $t=0$.

Formulae Eulerianae dant:

$x=+0,0066607+0,818942.k-0,01819.k^2-0,2933.k^3$
$-0,52760.ii+0,1594.iik$

$y=-0,0036821+0,004602.k$

$z=+1,034303.i+0,83815.ik+0,0431.ik^2-0,0131.i^3.$

Ex Tabulis autem *Mayeri* prodit

$\phi=-1'.\,43''$ et $\psi=5^\circ.\,16'.\,59'',0$

quare sequens elicitur aequatio:

$+0,0930848-1,034303.i-0,04879\,ii+0,0131.i^3=0$
$+0,075727.k-0,83815.ik+0,0147.iik$
$-0,00168.k^2-0,0431.ik^2$
$-0,0271.\,k^3.$

II. Cas. partic. quo $t=180^\circ$.

Ex formulis Eulerianis obtinetur:

$x=+$

$x = +0,0077595 + 0,810004.k - 0,03497.k^2 - 0,2933.k^3$
$\quad - 0,52944.ii + 0,1594.iik$

$y = -0,0005651 + 0,004602.k$

$z = +1,036553.i + 0,83815.ik + 0,0431.ik^2 - 0,0131.i^3.$

Tabulae igitur *Mayeri*, quum praebeant

$\Phi = -1'.43''$ et $\psi = 5^\circ.17'.19''$

consequemur:

$$\begin{aligned}&+0,0932849 - 1,036553.i - 0,04901.ii + 0,0131.i^3 = 0\\&+0,074982.k - 0,83815.ik + 0,0147.iik\\&-0,00324.k^2 - 0,0431.ik^2\\&-0,0271.k^3.\end{aligned}$$

Addita igitur hac aequatione ad proxime praecedentem, istam consequemur:

$$\begin{aligned}&+0,1863697 - 2,070856.i - 0,09780.ii + 0,0262.i^3 = 0\\&+0,150709.k - 1,67630.ik + 0,0294.iik \qquad \text{(III)}\\&-0,00492.k^2 - 0,0862.ik^2\\&-0,0542.k^3.\end{aligned}$$

11. V. Casus quo $p = 90^\circ$; $q = 90^\circ$; $r = 0.$

I. Caf. partic. $t = 0.$

Pro hoc casu formulae Illustr. *Euleri* suppeditant hos valores

$x = +0,0066607 - 0,000491.k - 1,47117.k^2 - 0,00976.ii$

$y = -0,0006521 - 2,401344.k + 2,3692.k^3 - 0,3998.iik.$

At ex Tabulis *Mayeri* habetur

$\Phi = -7^\circ.27'.20''$,

elicietur igitur hinc sequens aequatio:

$+0,1310530-2,401408.k-0,192522k^2+2,3692.k^3=0$
$-0,00128.ii-0,3998.iik.$

II. Caſ. partic. $t=180$.

Ex formulis *Euleri* obtinemus

$x=+0,0077595-0,000491.k-1,49983.k^2-0,01100.ii$
$y=-0,0005651-2,438594.k+2,3692.k^3-0,3998.iik.$

Quum igitur Tabulae *Mayeri* dent

$$\Phi=-7^\circ.34'.0'',$$

obtinebimus hanc aequationem:

$+0,1333022-2,438659.k-0,199232.k^2+2,3692.k^3=0$
$-0,00146.ii-0,3998.iik.$

Addita vero iſthac aequatione ad priorem, prodit ſequens

$+0,2643552-4,840067.k-0,391754.k^2+4,7384.k^3=0$
$-0,00274.ii-0,7996.iik$ III.

12. VI. Caſus quo $p=90$; $q=90$; $r=90$.

I. Caſus partic. $t=0$.

Ex formulis *Eulerianis* deducitur:

$x=+0,0066607-0,000491.k-1,47117.k^2-0,52762.ii$
$y=-0,0006821-2,401344.k+2,3692.k^3+0,7670.iik$
$z=+1,034303.i-0,2883.ik^2-0,0131.i^3.$

Tabulae vero Mayerianae quum dent

$$\Phi=-7^\circ.28'.4'' \text{ et } \psi=5^\circ.15'.18'',3,$$

binae ſequentes hinc prodibunt aequationes:

$+0,1312714-2,401408.k-0,192842.k^2+2,3692.k^3=0$
$-0,06916.ii+0,7670.iik$

+0,

$+0,0933726-1,034303.i-0,04894\,ii+0,0131.i^3=0$
$-0,000045.k+0,2883.ik^2$
$-0,13645.k^2.$

II. Casus partic. quo $t=180°$.

Theoria Lunae Euleriana hos suppeditat valores:

$x=+0,0077595-0,000491.k-1,49983.k^2-0,52944\,ii$
$y=-0,0005651-2,438594.k+2,3692.k^3+0,7670.iik$
$z=+1,036553.i-0,2883.ik^2-0,0131.i^3.$

At ex Tabulis *Mayeri* elicitur

$\Phi=-7°.\,34'.\,48''$ et $\psi=5°.\,15'.\,33'',6,$

vnde ad sequentes perducimur aequationes:

$+0,1335407-2,438659.k-0,199587.k^2+2,3692.k^3=0$
$-0,07045.ii+0,7670.iik$

$+0,0935834-1,036553.i-0,04917.ii+0,0131.i^3=0$
$-0,000045.k+0,2883.ik^2$
$-0,13928.k^2.$

Quodsi nunc binae hae aequationes, binis aequationibus superioribus addantur, prima primae et secunda secundae, sequentes prodibunt:

$+0,2648121-4,840067.k-0,392429.k^2+4,7384.k^3=0$
$-0,13961.ii+1,5340\,iik$ IV.

$+0,1869560-2,070856.i-0,09811.ii+0,0262.i^3=0$ (IV)
$-0,000090.k+0,5766.ik^2$
$-0,27573.k^3.$

13. Quatuor aequationes supra inuentae determinando valori quantitatis k inseruientes, sequentes erant:

I.

I. $+0,1756156-3,217122.k-0,11550.k^2+2,0352k^3=0$
$+0,00081.ii-0,6804.iik$

II. $+0,1754071-3,217122.k-0,11536.k^2+2,0352.k^3=0$
$-0,08238.ii-0,0428.iik$

III. $+0,2643552-4,840067.k-0,39175.k^2+4,7384.k^3=0$
$-0,00274.ii-0,7996.iik$

IV. $+0,2648121-4,840067.k-0,39243.k^2+4,7384.k^3=0$
$-0,13961.ii+1,5340.iik.$

Vt vero ex his aequationibus valores ipſius k eliciantur, ante omnia quantitatem i ex ipſis eliminare conuenit; quumque tentamine quodam facto iam nobis innotuerit i proxime accedere ad 0,08961, hunc valorem pro i in aequationibus ſuperioribus eo tutius ſubſtituere licebit, quod exigua variatio ipſius i multo minorem producat in quadrato eiusdem quantitatis. Facta igitur hac ſubſtitutione aequationes modo allatae in ſequentes transformantur:

I. $+0,1756221-3,222584.k-0,11550.k^2+2,0352.k^3=0$

II. $+0,1747458-3,217466.k-0,11536.k^2+2,0352.k^3=0$

III. $+0,2643332-4,846486.k-0,39175.k^2+4,7384\,k^3=0$

IV. $+0,2636913-4,827752.k-0,39243\,k^2+4,7384\,k^3=0.$

14. Ad has aequationes eo commodius reſolvendas, in ipſis ſubſtituere licebit loco k valorem aliquem eius proxime verum vti $k=0,0545$. Nam ſi verus valor quantitatis k ponatur $0,0545(1+\omega)$, vbi certo conſtat ω eſſe fractionem valde exiguam, conſequemur

$$k^2=\overline{0,0545}^2\,(1+2\,\omega) \text{ et } k^3=\overline{0,0545}^3(1+3\,\omega),$$

quibus

quibus igitur valoribus in aequationibus noſtris introductis, ſequentes obtinebimus aequalitates:

I. $0 = -0{,}0000224 - 0{,}1753285.\omega$, hinc
$\omega = -0{,}0001277$ et $k = 0{,}0545(1+\omega) = 0{,}0544930$

II. $0 = -0{,}0006194 - 0{,}1750489.\omega$; hinc
$\omega = -0{,}003581$ et $k = 0{,}0545(1+\omega) = 0{,}0543072$

III. $0 = -0{,}0001968 - 0{,}2641594.\omega$; hinc
$\omega = -0{,}0007450$ et $k = +0{,}0544594$

IV. $0 = +0{,}0001803 - 0{,}2631424.\omega$; hinc
$\omega = +0{,}0006852$ et $k = 0{,}0545374$.

Si valorem ſecundum litterae k excipiamus, reliqui tres ſatis bene inter ſe conſentiunt, et medium quidem omnium quatuor valorum erit $k = 0{,}0544493$ ſiue numero rotundo $0{,}05445$, ſin vero ſecundus excludatur valor, medium reliquorum inuenietur $= 0{,}0544966$, ſeu numero rotundo $0{,}054497$, qui valor omnino congruit cum eo, cuius vſus in Tabulis *Eulerianis* conſtruendis adhibitus eſt. Interim tamen notare quam maxime conuenit, *Mayerum* in computo ſuo excentricitatem orbitae Lunaris primum ſuppoſuiſſe $= 0{,}05454$, deinde vero ex obſeruationibus concludiſſe hanc quantitatem parte $\frac{1}{300}$ eſſe augendam, ita vt verus valor quantitatis k a Cel. *Mayero* adhibitus ſit $0{,}05472$. Hinc autem quum conſtet variationem vnius partis decies milleſimae, in fractione quantitatem k exprimente, locum Lunae quadraginta ſecundis immutare; patet omnino ob differentiam valorum pro k a Celebb. Viris *Eulero* et *Mayero* ſuppoſitorum, inter ipſorum Tabulas 1′. 30″ adesse posse discrepantiam, quae tamen insignis discrepantia per alias rationes destrui poterit, de quo prolixius infra agemus.

15. Aequationes determinandae quantitati i inseruientes in superioribus ita habebantur expresse:

I. $+0{,}1733629 - 1{,}929498.i - 0{,}08141\,ii - 0{,}0318.i^3 = 0$
$+0{,}206773\,k - 2{,}24902.ik + 0{,}0375.iik$
$+0{,}00301.k^2 - 0{,}0634.ikk$
$-0{,}1089.k^3$

II. $+0{,}1740014 - 1{,}929498.i - 0{,}08170.ii - 0{,}0318.i^3 = 0$
$-0{,}11443.k^2 - 0{,}4270.ikk$

III. $+0{,}1863697 - 2{,}070856.i - 0{,}09780.ii + 0{,}0262.i^3 = 0$
$+0{,}150709\,k - 1{,}67630.ik + 0{,}0294.iik$
$-0{,}00492.k^2 - 0{,}0862.ikk$
$-0{,}0542.k^3$

IV. $+0{,}1869560 - 2{,}070856.i - 0{,}09811.ii + 0{,}0262.i^3 = 0$
$-0{,}000090.k + 0{,}5766.ik^2$
$-0{,}27573.k^2.$

Vt nunc ex his aequationibus quantitas i determinari queat, pro k valorem eius supra inuentum substituere licebit, quo facto, sequentes aequationes adipiscemur, quas praeter quantitates absolutas incognita i tantum ingreditur:

I. $0 = +0{,}1846128 - 2{,}052143.i - 0{,}07936.ii - 0{,}0318.i^3$
II. $0 = +0{,}1736621 - 1{,}930764.i - 0{,}08170.ii - 0{,}0318.i^3$
III. $0 = +0{,}1945523 - 2{,}162385.i - 0{,}09620.ii + 0{,}0262.i^3$
IV. $0 = +0{,}1861337 - 2{,}069146.i - 0{,}09811.ii + 0{,}0262.i^3.$

16.

16. Vt has aequationes eo commodius resolvere liceat, pro i valorem quendam proxime verum adoptare conueniet, vti $i = 0,0896$, posito igitur vero valore ipsius

$i = 0,0896\,(1 + \omega)$, fiet

$i^2 = \overline{0,0896}^2\,(1 + 2\,\omega)$ et $i^3 = \overline{0,0896}^3\,(1 + 3\,\omega)$,

his autem valoribus pro i, i^2 et i^3 in aequationibus nostris substitutis, obtinebimus aequationes valorem quantitatis ω exprimentes, ex quibus deinde verus valor ipsius i facile colligitur:

I. $0 = +0,0000808 - 0,1852149.\omega$; vnde
$\omega = +0,0004363$ et $i = +0,0896391$

II. $0 = -0,0000131 - 0,1743769.\omega$; hincque
$\omega = -0,0000751$ et $i = 0,0895933$

III. $0 = +0,0000492 - 0,1952376.\omega$; vnde
$\omega = +0,0002520$ et $i = +0,0896225$

IV. $0 = -0,0000305 - 0,1869140.\omega$; proinde
$\omega = -0,0001632$ et $i = 0,0895854$.

Si ex his quatuor valoribus ipsius i medium sumatur, prodibit $i = 0,0896101$ seu numero rotundo $= 0,08961$; vbi quum discrepantia inter maximum et minimum valorem 0,00005 vix excedat, inde intelligitur in Latitudinem Lunae vix discrimen maius quam decem scrupulorum secundorum induci, quale discrimen hoc in negotio omnino nullam facessere debet moram. Interim tamen duo heic obseruanda veniunt, quorum prius est, quod

 valor

valor hic inuentus 0, 08961, ſatis egregie conſentiat cum valore ipſius i, qui in vſum vocatus fuit circa conſtructionem Tabularum Illuſtr. *Euleri*, in iſtis etenim Tabulis ſupponitur $i = 0,08964$. Alterum vero quod obſeruari meretur, eſt quod valor modo inuentus $i = 0,08961$ aliquantum diſcrepet a valore inclinationis mediae, quem Cel. *Mayerum* in vſum vocaſſe reperimus, ſcilicet quum tangens huius inclinationis ab ipſo ſuppoſitus fuerit $= 0,09$, ipſa inclinatio i inuenietur $= 0,08976$, et ex hoc capite quidem inter Tabulas Lunae *Eulerianas* et *Mayerianas* adeſſe deberet pro Latitudine Lunae definienda diſcrepantia 30″, niſi ex aliis cauſſis haec diſcrepantia vel diminui, vel prorſus adeo deſtrui poſſet.

17. Quae ſupra inſtituta fuit comparatio Theoriae Illuſtr. *Euleri* cum Tabulis *Mayeri*, eo imprimis valuit, vt valores ipſorum k et i elicerentur, quibus adhibitis aequationes ab *Eulero* allatae cum Tabulis *Mayeri* quam maxime redderentur conſentientes. Hi autem valores tam parum diſcrepant ab iis quos Illuſtr. *Eulerus* in his Tabulis conſtruendis adhibendos cenſuit, vt certiſſime cognoſcatur in his litteris inſigniores mutationes admitti vix poſſe, niſi diſſenſus Tabularum adhuc magis augeantur. Iam vero operae pretium erit diſpicere, quales differentiae ſe prodant inter Tabulas *Euleri*, de *Clairaut* et recens éditas *Mayeri*, pro iis ſaltem poſitionibus principalibus quas ſupra contemplati ſumus. Sequenti igitur Tabula valores anguli Φ pro his poſitionibus

nibus; ex Tabulis modo commemoratis deductos, vna cum differentiis horum valorum, repraesentaturi erimus:

Pro positione		Valor anguli Φ			different. a Tab. *Euleri*	
		Euleri	*de Clairaut*	*Mayeri*	de *Clair.*	*Mayeri*
$p=0$; $q=90$; $r=90$	$t=180$	$-5°. 5'. 32''$	$-5°. 5'. 20''$	$-5°. 5'. 35''$	$-12''$	$+3''$
	$t=0$	$-5. 0. 55$	$-5. 1. 30$	$-5. 0. 44$	$+35$	-11
$p=0$; $q=90$; $r=90$	$t=0$	$-5. 6. 14$	$-5. 4. 51$	$-5. 5. 14$	$-1'. 23$	$-1'. 0''$
	$t=180$	$-5. 1. 32$	$-5. 0. 59$	$-5. 0. 22$	$-33''$	$-1. 10$
$p=90$; $q=90$; $r=0$	$t=0$	$-7. 28. 0$	$-7. 26. 51$	$-7. 27. 20$	$-1. 9$	-40
	$t=180$	$-7. 34. 0$	$-7. 33. 3$	$-7. 34. 0$	-57	-0
$p=90$; $q=90$; $r=90$	$t=0$	$-7. 28. 6$	$-7. 27. 29$	$-7. 28. 4$	-37	-2
	$t=180$	$-7. 34. 9$	$-7. 33. 44$	$-7. 34. 48$	-25	$+39$

Hic autem obseruare conuenit, si valores anguli Φ per expressiones ipsorum x et y supra allatas, exquirantur; eos aliquantum diuersos prodire ab iis, quos hic adposuimus, quod imprimis euenit propter correctionem aequationum 𝔙 et V, de qua Theoria Lunae Illustr. *Euleri* §. 633. consuli potest. Quamuis autem valores pro 𝔙 et V quorum supra vsum fecimus, non sint prorsus exacti, id tamen nihil obstat, quin valores quantitatum k et i saltem proxime ad veritatem accedant, quod hoc in negotio nobis omnino sufficit.

18. Comparatio modo allata quum ostendat inter Tabulas a Celeb. *Eulero* et *Mayero* conditas, pro prima et secunda positione perfectum esse consensum, pro tertia vero et quarta positione inter istas Tabulas haud contemnendum se exhibere dissensum;

ſum; diſpicere iuuabit quaenam huius diſcrepantiae eſſe poſſit ratio. Quamquam vero ſingulas inaequalitates Lunae ab Illuſtr. *Eulero* ſtabilitas, cum ſimilibus inaequalitatibus a Celeb. *Mayero* exhibitis non ſine operoſiſſimo labore conferre liceat, tum quod in *Mayeri* Tabulis argumenta adhibeantur diuerſa ab argumentis quae in Tabulis *Euleri* occurrunt, cum etiam quod priores Tabulae exhibeant valores anguli Φ, poſteriores vero valorem tangentis huius anguli per fractionem $\frac{y}{1+x}$ expreſſum; facile tamen diiudicari poterit, cur pro tertia poſitione inter Tabulas adſit diſcrepantia vnius minuti, cum pro prima perfectus adeſſet conſenſus. Scilicet nulla alia re hae duae poſitiones inter ſe differunt, quam quod in prima poneretur $r = 0$ in tertia vero $r = 90$, ex quo patet iſtas inaequalitates, quae a longitudine nodi dependent, heic praecipue in cenſum venire; quod etiam ex formulis pro x et y ſupra allatis confirmatur, ſcilicet pro prima et tertia poſitione valores ipſorum x et y eatenus tantum differunt, quatenus ipſos ingrediuntur quantitates multiplicatoribus ii vel iik affectae. Quum igitur ab Illuſtr. *Eulero* aſſumta fuerit:

$$x = \mathfrak{O} + k\mathfrak{P} + k^2\mathfrak{Q} \ldots + ii\mathfrak{X} + iik\mathfrak{Y}$$
$$y = \mathrm{O} + k\mathrm{P} + k^2\mathrm{Q} \ldots + ii\mathrm{X} + iik\mathrm{Y}$$

et pro noſtro caſu eas inaequalitates imprimis conſiderare oporteat, quae multiplicatore iik efficiuntur, habebimus ſaltem ſatis exacte

$$\text{Tang.}\,\Phi = \frac{y}{1+x} = iik(\mathrm{Y} - \mathfrak{O}\mathrm{Y} - \mathrm{O}\mathfrak{Y} - \mathfrak{P}\mathrm{X} - \mathrm{P}\mathfrak{X}),$$

vel

vel etiam quia non nisi anguli valde parui heic occurrunt

$$\Phi = iik(\mathrm{Y} - \mathfrak{O}\,\mathrm{Y} - \mathrm{O}\,\mathfrak{Y} - \mathfrak{P}\,\mathrm{X} - \mathrm{P}\,\mathfrak{X}).$$

Euolutione autem huius formulae facta, sequentem inuenimus inaequalitatem formulis *Eulerianis* conformem:

$$-45'',5\,\text{sin.}\,q + 7'',2\,\text{sin.}(2p-q) + 3'',6\,\text{sin.}(2p+q)$$
$$-33,5\,\text{sin.}(q-2r) + 9,3\,\text{sin.}(2p-q+2r) + 13,6\,\text{sin.}(2p+q-2r)$$
$$+44,9\,\text{sin.}(q+2r) - 3,5\,\text{sin.}(2p-q-2r).$$

In hac autem formula sufficiet ad eas tantum attendere expressiones, quae $2r$ inuoluunt, quoniam reliquae coniunctim sumendae sunt, cum aliis consimilis argumenti. In Theoria Lunae Celeb. *Mayeri* formula habetur valorem anguli Φ exprimens, per sola argumenta media et ex ista quidem formula, hae pro nostro casu eliciuntur inaequalitates

$$-29'',5\,\text{sin.}(q-2r) - 1'',6\,\text{sin.}(2p+q-2r)$$
$$+45,\ 4\,\text{sin.}(q+2r) + 2,\ 8\,\text{sin.}(2p-q-2r)$$

vbi illae saltem quae maximi sunt momenti, sat bene cum *Eulerianis* consentiunt. Pro prima ergo positione habebitur ex formulis *Euleri* inaequalitas $+19''$ ex istis vero *Mayeri* $+11'',5$, ita vt dissensus non sit nisi $7''$ circiter. At postquam Celeb. *Mayerus* Longitudinem nodi correctam in suas formulas introduxisset, sequentes pro nostro casu inuenit inaequalitates

$$-1'.14'',8\,\text{sin.}(q'-2r'') + 2'',5\,\text{sin}\,(2p''+q'-2r'')$$
$$-1,\ 5\,\text{sin.}(2p''-q'-2r'')$$

quae

quae non solum prioribus dissimiles sunt, sed etiam ab iis haud parum diuersae, ex his enim inaequalitatibus coniunctim sumtis, cum ista $-6, 51''$, 2 sin. $2r''$, prodit aequatio $+ 3''$, quae iam haud parum ab illa supra allata $+ 11'', 5$ differt. Denique vero Celeb. *Mayerus* dum Tabulas suas adornauit, minores istas inaequalitates plane omisit, in locum vero $- 1'. 14'', 8$ sin. $(q' - 2 r'')$ ex obseruationibus substituendum esse conclusit $- 1'. 23''$ sin. $(q' - 2 r'')$, similique modo inaequalitatem $- 6'. 51''$ sin. $2 r''$, in hanc immutari debere $- 6'. 43''$. sin. $2 r''$. His igitur vltimis inaequalitatum valoribus pro nostra positione prima adhibitis, eruitur aequatio $- 10''$ adeo vt hoc respectu inter Tabulas *Eulerianas* et *Mayerianas* sit discrepantia $30''$ circiter.

19. Verum enimvero quum non obstante hac discrepantia $30''$, ex inaequalitatibus quae Longitudinem nodi pro argumento habent, redundante, pro prima nostra positione, valores anguli Φ tantum non exacte conueniant; ex eo omnino intelligitur discrimen ex reliquis inaequalitatibus oriundum $30''$ quoque circiter aestimari posse, hocque discrimen prius illud proxime destruere. Quum igitur pro tertia positione haec discrepantia, quae ex inaequalitatibus apud Illustr. *Eulerum* litteris P, R, T. V designatis, resultat, prorsus inuariata maneat, diuersitas autem ex inaequalitate Y oriunda iam signum sortiatur negatiuum, dubitari omnino non potest, quin dissensus qui pro priori positione erat valde

de exiguus, iam valore vnius minuti primi abſolui debeat. Quum ſcilicet habeatur ex Tabulis *Euleri* pro prima poſitione $\Phi = -5^\circ.\ 5'.\ 32''$ et pro tertia $\Phi = -5^\circ.\ 6'.\ 14''$, differentia horum valorum eſt $42''$, quae non multum differt a $2.\ 19 = 38''$, prouti eſſe deberet, ſi valores inaequalitatum ex Y oriundi et in ſuperiori §. allati, omnino ſummam prae ſe ferrent exactitudinem. Apud *Mayerum* autem habetur pro prima poſitione $\Phi = -5^\circ.\ 5'.\ 35''$ et pro tertia poſitione $\Phi = -5^\circ.\ 5'.\ 14''$, quorum valorum diſcrepantia eſt -21, perinde vt eſſe debet, vi §. praecedentis. Quomodo vero reliquae inaequalitates P, R, T, V concurrant ad diſcrimen iſtud $30''$ circiter producendum, inter Tabulas ſaepius commemoratas, heic fuſius examinare non licet, talis enim diſquiſitio non ſine operoſo admodum labore ſuſcipi poterit. Interim tamen comparatione inaequalitatum ab Illuſtr. *Eulero* allatarum, cum iis quas *Mayerus* propoſuit obiter facta, diſcrepantias inueni, quae ad ſemiminutum primum et vltra aſſurgunt. Maxime autem inſignis ſe prodit diuerſitas pro angulo $(p-q)$, quippe ex quo ſecundum *Eulerum* oritur inaequalitas $+52''$, cum apud *Mayerum* inaequalitas hinc oriunda ne duo quidem ſcrupula ſecunda excedat. Quum igitur inter ſingulas quasdam inaequalitates tantus harum Tabularum eſſe poſſit diſſenſus, minime mirum erit, ſi coniunctis pluribus inaequalitatibus, licet diſcrepantiae hae ſe aliquatenus deſtruant, tamen vltimo remanere queat diuerſitas 30 ſcrupulorum ſecundorum. Quod vero inaequalitatem V praecipue attinet, pro ea egregius satis habetur consensus Tabularum, et hac quidem de caussa fit, vt pro prima et secunda positione, dissensus Tabularum tantum in diuersitate versentur 14″, quum hae duae positiones solum in eo discrepent, quod pro prima sit $t = 0$ et pro secunda $t = 180°$.

20. Quae supra de differentia Tabularum circa inaequalitates quae longitudinem nodi inuoluunt, attuli; etiam valent ad rationem reddendam, cur inter valores angulorum Φ pro quinta positione sit discrimen 40″, pro sexta autem positione anguli Φ prorsus egregie conueniant, nec non qui fiat, vt valores ipsius Φ, pro positione sexta pulcerrime consentiant, dum pro positione octaua dissensus quadraginta fere secundorum se prodit. Scilicet pro his positionibus expressiones inaequalitatum *Eulerianae*, quae angulum r inuoluunt, vix quicquam momenti habent, cum contra ex Tabulis *Mayerianis* deducatur aequatio 22″. Reliquus dissensus 20″ pro positionibus V^{ta} et $VIII^{va}$ ex reliquis aequalitatum speciebus, P, Q, R, S etc. sine dubio originem ducit et vario modo ex iis conflatus esse poterit, quare huic dissensui explicando vlterius immorari nihil refert.

21. Vt vero et nunc pateat, quid iudicandum sit de Tabularum Lunarium Illustr. *Euleri* et Celeb. *Mayeri* consensu vel dissensu, pro definienda Latitudine Lunae, sequenti Tabula valores angulorum

rum ψ ex his Tabulis vt et illis Cel. *de Clairaut* elicitos ob oculos ponamus:

Pro Positione		Valor anguli ψ *Euleri*	*de Clairaut*	*Mayeri*	Differ. a Tab. *Euleri* *Clair.*	*Mayeri*
$p=0; q=0;$	$t=0$	4°. 59′. 37″	4°. 59′. 35″	4°. 59′. 31″	+ 2″	+ 6″
$r=90$	$t=180$	4. 58. 58	4. 59. 9	4. 59. 3	− 11	− 5
$p=0; q=90;$	$t=0$	4. 59. 35	4. 59. 46	4. 59. 26	− 11	+ 9
$r=90$	$t=180$	4. 59. 11	4. 59. 20	4. 59. 2	− 9	+ 10
$p=90; q=0;$	$t=0$	5. 16. 58	5. 17. 23	5. 16. 59	− 25	− 1
$r=90$	$t=180$	5. 17. 28	5. 17. 49	5. 17. 19	− 21	+ 9
$p=90; q=90;$	$t=0$	5. 15. 28	5. 15. 29	5. 15. 18	− 1	+ 10
$r=90$	$t=180$	5. 15. 46	5. 15. 49	5. 15. 34	− 3	+ 10

Haec igitur Tabula declarat Tabulas *Euleri* hac in re tam bene cum *Mayeri* Tabulis consentire, vt maior harmonia vix voto praecipi potuerit; interim tamen quum pleraeque differentiae sint positiuae, nullum est dubium, quin hac aliquantum diminui queant, si valor ipsius i in Tabulis *Euleri* adhibitus aliquantulum diminuatur, vti si loco $i = 0,08964$ adhibeatur $i = 0,08962$.

22. Valor ipsius k ab Illustr. *Eulero* in vsum vocatus, ponitur $= 0,0545$, cum Celeb. *Mayerus* istum 0,05468 adhibuisse inuenitur, ex hac discrepantia igitur valoris pro k, sane insignis dissensus in loco Lunae prodiret, nisi eueniret vt coefficientes numerici earum inaequalitatum, quae maxime a k dependent, imprimisque principalis illius, quae Sinum anguli q pro argumento habet, tali adfician-

ciantur diuerſitate, quae iſtam ex k orituram diminuant, ſi non prorſus deſtruant. Euidens igitur eſt inaequalitates iſtas principales a q dependentes pro diuerſis Tabulis ad conſenſum omnimodum reduci, ſi pro ſingulis valores ipſius k adhibeantur, qui in coefficientes numericos harum inaequalitatum ducti, eadem praebeant producta. Vtrum vero conſultum fuerit pro praeſenti caſu, huiusmodi conciliandi rationem adhibere, vix dicere poſſum, quia et alii termini quantitate k adficiuntur, et quidem praeprimis $2p-q$, quorum diſcrepantia ſi in alium ſenſum vergat, fieri poteſt vt inde magis reddantur diſſoni. Deinde inuenimus quoque apud Illuſtr. *Eulerum* inclinationem i ſuppoſitam fuiſſe $=0,08964$, quae *Mayero* eſt $0,08976$, heic autem eadem de principali inaequalitate ex angulo r oriunda valent, quae ſupra de inaequalitate pro longitudine Lunae ex q deriuata, monuimus. Eo autem tutius heic iſta conciliandi ratio adhibebitur, quod reliquae inaequalitates pro Latitudine, reſpectu principalis pro exiguis merito haberi queant.

23. In Tabulis Illuſtris *Euleri* inaequalitates ordinis $\varkappa kk$ plane praetermiſſae fuerunt, quum eaedem maxime ſuſpectae ipſi viderentur, et quod angulum $2p-2q+t$ quidem attinet, ipſius coefficiens Cap. IX. §. 355. Theoriae Lunae praegrandis inuentus eſt, adeo vt merito dubitare licet, an iſta inaequalitas ad duo fere minuta aſſurgens per obſeruationes confirmari poſſit; ſecus autem res ſe habe-

habere videtur cum inaequalitate ex angulo t reſultante, ſi enim haec inaequalitas $+ 2,6319 . \varkappa k^2$ ſin. t ad reliquas cognomines adiiciatur, obtinebitur pro Longitudine Lunae aequatio $+ 11'. 22''$ ſin. t. Hanc inaequalitatem *Mayerus* ope Theoriae elicuit $+ 11'. 39''$, poſtmodum vero obſeruationes in conſilium adhibendo inuenit eam ad $11'. 16''$ eſſe deprimendam; valde igitur probabile hinc fit iſtam ab Illuſt. *Eulero* inuentam inaequalitatem $+ 11'. 22''$ ſin. t ſaltem proxime ad veritatem accedere, quum ab obſeruationibus non niſi $6''$ differat, praetereaque calculus pro hoc angulo inſtitutus non tantis videatur obnoxius difficultatibus, ac qui pro angulo $2p - 2q + t$ locum obtinet. De caetero ex hoc ordine quoque angulum $2p - 2q - t$ adſciſcere liceret, qui ſcilicet in loco Lunae effectum $17''$ fere producit. Haec autem correctio in Tabulas Lunares *Euleri* facile introduci poterit, ſi pro Tab. IX. et coordinata y, loco 31643 legatur 32954, et licet propter hanc correctionem Tabulae ab aliis atque aliis obſeruationibus magis redderentur diſſentientes, quam antea erant, non inde ſtatim concludere licebit hanc correctionem praeter rem eſſe adhibitam.

24. Ex ſuperiori §. 5 iam patet, quomodo Celeb. *Mayerus* ſuos numeros pro Longitudine Lunae ex obſeruationibus corrigendos et emendandos eſſe cenſuit, principales autem correctiones ab ipſo adhibitae ſunt hae ſequentes: pro angulo $t, - 23''$; pro angulo $2p' - q, - 25''$; pro angulo $2p' - 2t', - 28''$;

 reli-

reliquae exiguae ſunt et plerumque infra 10″ ſubſiſtunt. Quod reliquas inaequalitates attinet quas in cenſum non duxit, dantur inter easdem omnino plurimae quas vix negligere licet, niſi certiſſime per obſeruationes conſtet has inaequalitates ex Theoria deductas minime cum coelo conciliari poſſe. Heic autem contenti erimus eas tantum adponere, quae 10 ſcrupula ſecunda excedunt:

$$- 25,6 \text{ ſin. } (2p' + 2q)$$
$$+ 11,7 \text{ ſin. } (q + t)$$
$$+ 22,5 \text{ ſin. } (2p' - 3q)$$
$$+ 12,1 \text{ ſin. } (4p' - 3q)$$
$$- 21,1 \text{ ſin. } (p' + t)$$
$$+ 12,8 \text{ ſin. } (2p' - 2r' + t)$$
$$+ 37,0 \text{ ſin. } (2q - 2r').$$

Quod vero has inaequalitates attinet, ex Theoria Lunae Illuſtr. *Euleri* vix diiudicari poterit, an eaedem quicquam in loco Lunae immutare valeant, quia introducta elongatione Lunae a loco vero Solis, formulae Mayerianae maxime inſignes ſubierunt mutationes. De duabus tamen vltimis certiſſime conſtat, eas merito inter dubias referri, quum calculus vix ad eam exactitudinem redigi queat, vt aliquam de iis certitudinem ſuppeditare valeret.

25. His itaque bene perpenſis, vix quisquam erit qui in eam inducatur opinionem vt credat Theoriam Lunae a Celeb. *Mayero* conditam, praeferendam eſſe Theoriae ab Illuſtr. *Eulero* recens euulgatae, licet Tabulae *Mayeri* cum coelo identidem magis reperirentur

tur consentientes, quam *Eulerianae*. Hoc enim probe considerandum est, Celeb. *Mayerum* suas Tabulas non ex Theoria tantum elicuisse, sed iisdem varias et insignes correctiones ex obseruationibus deriuatas adplicasse; quare insignem sine dubio obseruationum numerum consulendo, pro quibus argumenta inaequalitatum plurimis diuersissimis modis habebantur combinata, dum pro casibus his a se consideratis, ita Tabulas suas corrigere valuit, vt cum coelo probe consentirent; mirum omnino non erit si pro aliis obseruationibus non multum abludentes a veritate reperiantur. Tabulas vero Illustris *Euleri* quod attinet, eae fere tales sunt, quales per computum Theoriae superstructum deductae, quare si simili modo ac *Mayerianae* per obseruationes corrigantur et emendentur, non dubitamus quin aliquando praestiturae sint exactitudinem quae hoc in negotio desideratur, maximam.

ECLIPSIS

ECLIPSIS SOLARIS

DIE $\frac{12}{23}$. MARTII 1773 VISAE OBSERVATIO PETROPOLI FACTA.

Auctore

W. L. KRAFFT.

Penduli, quo vſus ſum, aſtronomici motum ope altitudinum Solis correſpondentium exploraui, quas hic ob oculos ponere conuenit:

Die $\frac{11}{22}$. Martii Limb. ⊙ ſuper.

Diſt. a Zenith	Ante merid.	Poſt merid.	Merid. $0^h. 2'$
63°. 40′	9^h. 55′. 48″	2^h. 9′. 7″	27″. 5
— 30	— 58. 5	— 6. 51	28. 0
— 20	10. 0. 30	2. 4. 25	27. 5
63. 0	— 5. 20	1. 59. 34	27. 0
62. 40	— 10. 13	— 54. 42	27. 5
— 20	— 15. 21	— 49. 31	26. 0
62. 0	— 20. 42	— 44. 13	27. 5
61. 40	— 26. 18	— 38. 35	26. 5
		Medium	27″. 2

Die $\frac{14}{25}$. Martii Limb. ⊙ ſuper.

Diſt. a Zenith	Ante merid	Poſt merid.	Merid. $0^h. 0'$
59°. 20′	10. 47′. 38″	1^h. 14′. 12″	55″. 0
— 10	— 51. 28	— 10. 21	54. 5
59. 0	— 55. 21	— 6. 28	54. 5
		Medium	54″. 7.

vnde

vnde habita ratione correctionum meridiei $27''. 8$ et $26''. 3$, quarum vtraque eſt ſubtractiua, concluditur meridies verus

d. $\frac{11}{22}$. $0^h. 1'. 59''. 4$.

d. $\frac{14}{25}$. $0^h. 0'. 28''. 4$.

Eſt vero ad hos ipſos dies tempus medium inſtante meridie vero $0^h. 6'. 54''. 0$ et $0^h. 5'. 58''. 4$; vnde concluditur retardatio penduli diurna ſuper tempus medium $= 11''. 8$ et die $\frac{12}{23}$. Martii merid. verus $0^h. 1'. 29''. 1$.

In ipſa obſeruatione vſus ſum praeſtanti tubo *Dollondiano* decem pedum. Eclipſis initium obſeruaui monſtante horologio $6^h. 5'. 21''$; attamen, cum ſol vix ſuper horizontem fuerit eleuatus, hoc momentum circiter 30 ſecundis citius accidiſſe ſuſpicabar. Obſeruationem in aedibus priuatis inſtitui, vbi machinae parallacticae collocandae locus non erat; hinc nec diſtantias cornuum Lunae nec partes diſci ſolaris lucidas micrometro dimetiri licuit. Finem eclipſis diſtincte vidi contigiſſe monſtrante horologio $8^h. 21'. 2''$, de cuius momenti praeciſione non habeo, quod dubitem. Haec itaque obſeruatio ad tempus verum reducta ita ſe habet:

Eclipſis ☉ d. $\frac{11}{22}$. Martii 1773.

Temp. ver. merid. Petrop.

Initium . . . $18^h. 3'. 14''$

Finis . . . . $20^h. 19'. 28''$.

Pro obſeruatione hac ad vſum reuocanda notaſſe iuvabit, poſita parallaxi ☾ horizontali aequatorea $= 54'. 39''$ ex Tabulis Cel. *Mayeri*, prodire in hypotheſi telluris ſphaeroidicae parallaxin

	Longit.	Latit.
Pro initio	$6'. 31''. 0$	$53'. 53''$
Pro fine	$2'. 16''. 7$	$51'. 41''. 8$
	add. ad long. ver. vt fiat adpar.	ſubtr. a lat. vera vt fiat adpar.

OBSER-

OBSERVATIO ECLIPSIS SOLIS

FACTA PETROPOLI DIE $\frac{12}{23}$ Martii 1773.

Auctore

A. I. LEXELL.

Obſeruationes Eclipſium Solis eo maiorem merentur attentionem, quod ex iis non ſolum loca Lunae cum ſumma exactitudine definiri queant, ſed etiam quia medium praebent certiſſimum definiendi differentias meridianorum inter loca, vbi iſtiusmodi obſeruationes inſtitutae ſunt. Licet enim nonnullis perſuaſum ſit, ex obſeruationibus Eclipſium Solis nihil certi ſtatui poſſe de Longitudinibus locorum; multiplici tamen experientia edoctus ſum, omnia quae contra vſum harum obſeruationum mouentur dubia, leuiſſima eſſe, exceptisque occultationibus fixarum a Luna, alias non dari obſeruationes certiores, quarum ope Longitudines locorum definiri poſſent. Ex obſeruatione igitur Eclipſis Solis die 23 Martii Petropoli facta, quum non ſolum veram Lunae cum Sole coniunctionem ſatis exacte determinare mihi licuit; ſed etiam ex eius comparatione cum nonnullis obſeruationibus alibi factis, pro differentiis meridianorum concluſiones admodum probabiles elicuerim; haud praeter rem eſſe, iudicaui, breuem huius obſeruationis expoſitionem heic communicare. Hanc autem ita adornabo, vt primum recensionem ipsius obseruationis adferam, deinde Methodum exponam admodum facilem et succinctam, qua in hac obseruatione computanda vsus sum, et demum conclusiones ex obseruationibus deductas breviter recenseam.

Expositio obseruationum circa Eclipsin Solis factarum.

1. Antequam de ipsa obseruatione quicquam monere liceat, quaedam dicenda erunt de motu Penduli, ad quod haec obseruatio instituta est, nec tamen necessum duxerim, singulas obseruationes altitudinum correspondentium, quas diebus proxime ante et post 23 Martii cepi, ad motum Penduli inuestigandum, heic fuse exponere, sufficiet momenta meridierum ex his obseruationibus conclusa, adduxisse:

		Temp. Pend.
Die 21. Martii	Mer. ex altit. ☉ corresp.	$0^h. 21'. 46'', 3$
	correct. Merid.	$- 29, 2$
	Merid. verus	0. 21. 17, 1
22.	Merid. ex altit. corresp.	0. 21. 21, 0
	corr. Merid.	$- 28, 0$
	Merid. verus	0. 20. 53, 0
22.	Media nox ex altit. corresp.	0. 20. 35, 3
25.	Meridies ex altit. correspond.	0. 19. 53, 3
	corr. Merid:	$- 27, 1$
	Merid. verus	0. 19. 26, 2.

2. Facta

2. Facta iam comparatione horum momentorum inter se, pro retardatione Penduli diurna respectu motus medii Solis, sequentes obtinebimus conclusiones:

		Retard. Pend.
ex merid. 21	cum Merid. 22	5″, 6
	media nocte 22	9, 5
	merid. 25	9, 2
22	media nocte 22	16, 8
	merid. 25	10, 3
media nocte 22	merid. 25	9, 1.

Ex his quidem probabile redditur motum Penduli inter 21 et 23 Martii non admodum fuisse vniformem, tamen dissensus conclusionum ex meridiebus dierum 21, 22 et media nocte 22, maior non est, quam vt ex leuiusculis erroribus in assignando tempore meridiei die 22 et mediae noctis item pro 22 Martii, qua potiorem saltem partem explicari possit; si enim statuamus tempus meridiei die 22 incidisse in $0^h. 20'. 52''$ et mediae noctis in $0^h. 20'. 37''$, retardatio Penduli interuallo duodecim horarum habebitur 6 secundorum. Hac de caussa tutissimum iudicaui ex valoribus retardationum supra inuentis medium sumere, quo ipso obtinetur retardatio inter meridies 22 et 23 Martii $10''$, 4, quae ex conclusionibus optime consentientibus tantum habetur $9''$, 6. Posito igitur quod meridies die 22 inciderit in $0^h. 20'. 52''$ et adoptata retardatione Penduli diurna $10''$, erit Meridies pro die 23 Martii,

 temp.

temp. Pend. $0^h. 20'. 23'', 5$. Quicquid autem ſit de incertitudine circa determinationem temporis veri pro noſtris obſeruationibus, ex motu Penduli oriunda, facile patet eam duo ſcrupula ſecunda non excedere, ideoque vix vllius eſſe momenti.

3. Quia tempore initii Eclipſeos, Sol horizonti admodum erat vicinus, et obſeruatio mea inſtituta eſt in inferiori conclaui noſtrae ſpeculae Aſtronomicae, vnde in Horizontem non prorſus liber eſt proſpectus, id incommodum expertus ſum, vt denſiſſimus fumus ex caminis aſſurgens, ante diſcum Solis propelleretur, praeciſe circa eam diſci regionem, vbi contactus Lunae cum Sole contingere debebat. Sole autem ex fumo emergente Tempore Penduli $6^h. 24'. 40''$ ſeu Tempore vero $6^h. 4'. 9''$ vidi Eclipſin iam incoepiſſe et admodum ſenſibilem eſſe, quantum vero ex magnitudine partis obſcuratae coniectura aſſequi potui, aeſtimaui quidem verum initium 30 ſecundis citius contigiſſe, at poſtquam reliquas meas obſeruationes calculo ſubieci, perſuaſus mihi eſſe videor, initium Eclipſis integro fere minuto primo citius, factum eſſe. Finem Eclipſis ſatis exacte obſeruaui Tempore Penduli $8^h. 39'. 51''$, ideoque Tempore vero $8^h. 19'. 23''$. Obſeruatio autem facta eſt Teleſcopio Gregoriano Shortii, micrometro obiectiuo munito.

4. Ex obſeruationibus, quas inſigni numero circa diſtantias cornuum Lunae et partes lucidas diſci Solis, micrometro obiectiuo inſtituere licuit, eas

eas tantum heic adponam, quae sua exactitudine praeprimis se commendare videntur:

Die 22 Martii temp. Astr.	Temp. pend.	Temp. vero	Distant. cornuum
I.	$18^h. 29'. 17$	$18^h. 8'. 47''$	$10'. 57'', 1$
II.	30. 36	10. 6	12. 23. 3
III.	31. 48	11. 8	13. 10, 3
IV.	32. 56	12. 26	14. 10, 8
	a { 44. 0	23. 30	20. 42, 4
	a { 45. 14	24. 44	21. 6, 1
	b { 46. 16	25. 46	21. 30, 6
	c { 47. 17	26. 47	21. 41, 1
	d { 50. 52	30. 22	23. 4, 4
	d { 53. 21	32. 51	24. 15, 3
			Part. lucid.
	19. 28. 53	19. 8. 23	11. 9, 3
	30. 38	10. 8	11. 4, 9
	32. 30	12. 1	11. 9, 4
	33. 42	13. 13	11. 15, 5
			Distant. corn.
6.	20. 17. 35	57. 7	21. 6, 6
5.	19. 2	58. 34	20. 34, 5
4.	20. 8	59. 40	20. 8, 2
3.	21. 22	20. 0. 54	19. 26, 5
2.	22. 41	2. 13	18. 58, 4
1.	24. 4	3. 36	18. 17, 9
Finis Eclipſ.	39. 51	19. 23	

De mensuris autem his Micrometricis notasse sufficiat, eas hic tales exhiberi, quales per ipsas obser-

vationes

vationes inuentae ſunt, debitae enim correctiones ex refractione oriundae ipſis adhucdum adplicatae non ſunt.

5. Menſurae circa diſtantias cornuum modo allatae, variis ob rationes dubiis obnoxiae eſſe poſſunt. 1°. Ob inſignem refractionem ex nimia Solis ad horizontem vicinia, oriundam; hinc enim factum eſt, vt diſtantiae cornuum multo minores ſe viſui offerrent, quam ſepoſita refractione inueniri debuiſſent. Vt tamen incertitudo circa refractionem has menſuras quam minime dubias redderet, certis temporum interuallis, Diametrum Solis menſuraui in eadem directione, ac diſtantias cornuum metitus ſum, et hoc quidem remedio id obtinuiſſe mihi perſuaſus ſum, vt propter incertitudinem refractionis, vix maius quam trium aut quatuor ſecundorum dubium his menſuris ineſſe poſſit. 2°. Plurimae harum menſurarum Sole nubeculis obtecto inſtitutae ſunt, quae igitur aliquanta incertitudine laborant, et hanc quidem ob cauſſam obſeruationes ſupra allatae ab $18^h. 23'$ vsque ad $18^h. 33'$, minus apte inter ſe conſentire deprehenduntur. 3^io^. Denique ex minus commoda inſtrumenti conſtructione, circa has obſeruationes aliquod dubium irrepere potuit. Nam vt in Teleſcopiis recentius a Cel. *Skortio* conſtructis, Micrometrum obiectiuum circumagi poteſt, Teleſcopio immobili manente, ita hoc Teleſcopium quo vſus ſum vna cum ipſo Micrometro, manubrio circumagendum eſt, quo ipſo fieri neceſſum eſt, vt non ſine aliqua difficultate, is praeciſe

ſitus

ſitus inſtrumento conciliari poſſit, in quo cornua Lunae exacte ſe decuſſant. Quicquid autem de incertitudine harum obſeruationum fuerit, ex infra dicendis conſtabit, concluſiones ex ipſis deductas melius conſentire, quam quidem primum ſuſpicari auſus fuiſſem.

6. Circa inſtituendas menſuras diſtantiae cornuum, tam ex his meis obſeruationibus, quam ex iis, quas ab aliis Aſtronomis inſtitutas offendi, hanc regulam vt puto non ſine vtilitate obſeruandam deduxi: vt huiusmodi menſurae potiſſimum ſtatim poſt initium et ante finem Eclipſis inſtituantur, idque duplicem ob rationem; tum quod hae diſtantiae tunc citiſſime creſcant vel decreſcant, quod ſecus eſt circa medium Eclipſis; cum etiam quod errores in his diſtantiis commiſſi, non eundem habeant influxum ad immutandos valores pro diſtantiis centrorum, ex ipſis deducendos, ac pro medio Eclipſis, vbi ſaepenumero accidit, vt error vnius ſecundi in diſtantia cornuum dimetienda commiſſus, pro diſtantia centrorum errorem duorum, trium vel plurium ſecundorum producere valeat. Circa medium Eclipſis vero praeſtabit menſuras partium lucidarum inſtituere, ex quibus deinde diſtantiae centrorum facile concludentur.

Methodus facilis et expedita computandi obſeruationes circa Eclipſes Solis factas.

7. In nouorum Commentariorum Tomo XV. Methodum quidem iam propoſui computandi obſer-

vationes Eclipſium Solis, quae prae vulgari Methodo-Nonageſimi multis nominibus commendari meretur; poſtmodum tamen inueni, hanc Methodum ad multo maiorem facilitatem et breuitatem redigi poſſe, praeſertim vbi plurimarum obſeruationum computus ineundus eſt. Quemadmodum enim pro vna vel altera obſeruatione computanda, arbitrarium fere haberi poterit, quam quis eligere voluerit Methodum; ita dum obſeruationes numero plures in computum ducendae, in eo praecipue elaborandum eſſe videtur, vt ii calculi, qui pro omnibus obſeruationibus vſui eſſe poſſunt, ſeorſim inſtruantur; ne ſcilicet neceſſum ſit pro ſingulis obſeruationibus, inutiles et taedioſas calculorum repetitiones inſtituere. In eo igitur praecipuum meritum Methodi iam adumbrandae conſiſtit, vt certis praeſuppoſitis calculis Elementaribus, qui pro omnibus obſeruationibus valent, totus computus parallaxeos ad reſolutionem vnius trianguli Sphaerici reducatur, vtque formulae pro Parallaxibus Longitudinis et Latitudinis ſingulari ſimplicitate ſe commendent.

Tab. IX. Fig. 1. 8. Sit PZz Meridianus loci, in quo obſeruatio aliqua Eclipſeos Solis facta habetur, P polus aequatoris, Z zenith huius loci et z punctum vbi recta per centrum telluris et locum obſeruatoris ducta meridiano coeleſti occurrit. Sit praeterea Π polus Eclipticae, L locus Lunae verus, ☽ locus eius apparens propter effectum Parallaxeos, B M N Ecliptica et ducti concipiantur arcus circulorum maxi-

maximorum P L, Π L M, Π ☽ N, tumque ex ☽ in Π L demiſſus intelligatur arcus normalis ☽ λ. In Tomo Nouor. Comment. XV. formulas iam attuli, quarum ope, certa aſſumta proportione inter axem Telluris et diametrum aequatoris, pro dato quouis Telluris loco, cognita eius Latitudine, definiri poſſunt arcus P z, nec non valor radii ex centro Telluris ad locum ſpectatoris ducti. Si ſcilicet ratio inter axem Telluris et diametrum aequatoris exprimatur littera n, ε vero deſignet rationem radii Telluris ad ſemidiametrum aequatoris, ibidem oſtendi fore:

$$\text{Cot. P } z = n^2 \text{ Cot. P Z} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{\text{sin. P Z}}{\text{sin. P } z \text{. cos. Z } z}}$$

de quibus formulis tenendum, quod poſita figura Telluris Sphaeroidica rigore Geometrico prorſus ſint verae, nec vllam omnino inuoluant approximationem. Caeterum breuitatis gratia, cum Illuſtr. *Eulero* punctum Z zenith apparens et punctum z zenith verum adpellare liceret, niſi aliter viſum fuisſet alii cuidam Mathematico, qui hanc adpellationem incongruam iudicare videtur.

9. Pro ſingulis horis intra quas duratio Eclipſis per totum orbem terrarum cadit, computentur Latitudo, Aſcenſio recta, Declinatio Lunae cum angulo poſitionis huius Aſtri Π L P, nec non Aſcenſio recta Solis; hinc enim per variationes horum Elementorum ſingulis horis correſpondentes, facile eruentur eorum valores pro qualibet obſeruatione propoſita. Eadem vero Elementa quoque pro ſin-

 gulis

gulis ſemihoris vel quadrantibus horarum computare liceret, ſed abunde ſufficiet ea pro ſingulis horis noſſe. Poſtquam igitur ope horum Elementorum, pro dato obſeruationis tempore inuenta fuerint, Aſcenſio recta Solis et pro Luna, eius Aſcenſio recta, Declinatio, Latitudo et angulus poſitionis, reſoluendum eſt triangulum Sphaericum z P L, in quo latera P z, P L cum angulo interiacente z P L ſunt cognita. Inuenitur autem angulus z P L ſumendo differentiam inter aſcenſiones rectas Solis et Lunae, hancque differentiam vel addendo ad angulum horarium Solis, vel ab eo ſubtrahendo, prout circumſtantiae requirunt. Scilicet pro obſeruationibus ante meridiem factis, ſi Luna maiorem habuerit aſcenſionem rectam, quam Sol, addi debet differentia aſcenſionum, ſin vero minorem ſubtrahi. Pro obſeruationibus autem poſt meridiem inſtitutis, contrarium vſu valebit. Datis igitur in triangulo z P L, lateribus z P, L P et angulo z P L, quaeratur latus z L cum angulo P L z. Quum itaque detur etiam angulus Π L P, dabitur neceſſum eſt $\Pi L z = \pm PLz \mp \Pi L P$ et facile quidem erit diiudicatu, quaenam ſigna pro quouis caſu oblato, locum obtinere debeant. Caeterum hac de re conſuli poterit Aſtronomia Cel. *de la Lande* Tom. II. nov. Edit. pag. 500. §. 1884.

10. Computetur parallaxis diſtantiae a puncto z, per ſequentem formulam:

$$L☽ = \frac{\varepsilon\,\Pi\, fin.\, zL}{1 - \varepsilon\,\Pi\, cof.\, zL},$$

vel

vel etiam si placet exactius per hanc

$$\text{Tang. L} \text{☽} = \frac{\varepsilon \text{ sin. } \Pi \text{ sin. } z \text{ L}}{1 - \varepsilon \text{ sin. } \Pi . \text{ cos. } z \text{ L}},$$

in quibus formulis Π indigitat differentiam parallaxium horizontalium aequatorearum Lunae et Solis. Demonstrationem harum formularum heic adducere, eo minus erit necesse, quod in Tomo XV. Comment. iam allata sit, caeterumque sine vllo negotio inueniri possit. Notare autem conuenit, inuestigandae Parallaxi ☽ L etiam formulam sequentem inseruire:

$$\text{Tang.}(\text{L☽} + \tfrac{1}{2} z \text{L}) = \text{Tang.} \tfrac{1}{2} z \text{L}. \text{Tang.}(45° + \tfrac{1}{2}\Phi)^2,$$

posito ε sin. Π = sin. Φ, vel etiam:

$$\text{Tang.}(\text{L☽} + \tfrac{1}{2} z \text{L}) = \text{Tang.} \tfrac{1}{2} z \text{L} \, \text{Tang.}(45° + \psi),$$

posito ε sin. Π = Tang. ψ. Conf. Tom XV. Nouor. Comment. et Cel. *Bernoulli* Recueil pour les Astronomes P. II. p. 311. 314. Sin autem cui placuerit approximationibus vti, sequentes adhiberi poterunt:

$$\text{L☽} = \varepsilon \Pi \left(\text{sin. } z \text{L} + \tfrac{\varepsilon \Pi}{2} . \text{ sin. } 2 z \text{L}\right) \text{ vel}$$

$$\text{Tan. L☽} = \varepsilon \text{ sin. } \Pi \left(\text{sin. } z \text{L} + \tfrac{1}{2} \varepsilon \text{ sin. } \Pi \text{ sin. } 2 z \text{L}\right),$$

quae posterior formula, si statuatur

$$\varepsilon \text{ sin. } \Pi \text{ cos. } z \text{L} = \text{Tang. } \theta,$$

in hanc abit:

$$\text{Tang. L☽} = \frac{\varepsilon \text{ sin. } \Pi \text{ sin. } (z \text{L} + \theta)}{\text{cos. } \theta}.$$

Facile autem patet formulas supra allatas, aeque commodas et elegantes esse, ac has quas modo proposuimus.

11. Pro computandis Parallaxibus Longitudinis et Latitudinis sequentes adhibeantur formulae:

$$\text{Paral. Latit.} = L\lambda = L☽ . \text{cos. } \Pi L z$$

$$\text{Paral. Longit.} = M N = \frac{☽\lambda}{\text{sin. }\Pi ☽} = L☽ \frac{\text{sin. }\Pi L z}{\text{sin. }\Pi ☽}.$$

De his autem formulis notandum, quod rigori Geometrico non prorsus sint accommodatae, supposuimus enim ☽ λ ex ☽ in ΠL normaliter esse demissum, cum pro Parallaxi Latitudinis desinienda, polo Π interuallo Π☽ describi deberet circulus Eclipticae parallelus arcui ΠL in puncto l occurrens, sic enim habebitur Parallaxis Latit. $= \Pi ☽ - \Pi L = Ll$. Constat autem puncta λ et l non coincidere, ideoque non esse $L\lambda = Ll$, nec arcus circuli paralleli ☽ l, arcui perpendiculari ☽ λ perfecte aequalis censeri potest. Interim tamen formulae iam propositae, pro vsu Astronomico praecipue in calculo eclipsium Solis abunde sufficiunt, quia tam prope ad veritatem accedunt, vt pro parallaxi latitudinis Lunae, aberratio vix vnquam tres decimas partes scrupuli secundi excedat. Caeterum si inuestigatio Parallaxium Longitudinis et Latitudinis omni rigore esset perficienda, eam variis quidem modis instituere licebit. Sic pro parallaxi Latitudinis determinanda, quaeri poterit Π ☽ ope huius formulae:

$$\text{cos. }\Pi ☽ = \text{cos. }\Pi L \,\text{cos. } L☽ - \text{sin. }\Pi L . \text{sin. } L☽ \,\text{cos. }\Pi L z,$$

tum enim fiet Parallaxis Latitudinis $= \Pi ☽ - \Pi L$. Vel adhiberi poterit haec formula:

$$\text{cos }\Pi ☽ - \text{cos.}(\Pi L + L☽) = 2.\text{sin. }\Pi L \,\text{sin. } L☽ \,\text{sin } \tfrac{1}{2} \Pi L z^2,$$

ex

ex qua porro deducitur

$$\text{fin.}\left(\frac{\Pi L + L☽ - \Pi☽}{2}\right)\text{fin.}\left(\frac{\Pi L + L☽ + \Pi☽}{2}\right) = \text{fin.}\,\Pi L\,\text{fin.}\,L☽\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}\Pi L z^2,$$

$$\text{fin.}\left(\frac{\Pi L + L☽ - \Pi☽}{2}\right) = \frac{\text{fin.}\,\Pi L.\ \text{fin.}\,L☽.\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}\Pi L z^2}{\text{fin.}\left(\frac{\Pi L + L☽ + \Pi☽}{2}\right)}$$

vbi in expreſſione fin. $\left(\frac{\Pi L + L☽ + \Pi☽}{2}\right)$ pro $\Pi☽$ eius valor proxime verus ſupra inuentus

$$\Pi L + L☽\ \text{coſ.}\ \Pi L z\ ,$$

adhiberi poterit, ita vt ſit

$$\frac{\Pi L + L☽ + \Pi☽}{2} = \Pi L + L☽\frac{(1 + \text{coſ.}\,\Pi L z)}{2} = \Pi L + L☽\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Pi L z^2.$$

Vltima haec formula pro parallaxi Latitudinis, valorem tanto magis approximatum ſuppeditat, quo certius liquet $\Pi L + L☽ - \Pi☽$ eſſe arcum quam minimum, cuius igitur ſinum exactiſſime definire licet. Caeterum quoque immediate parallaxis Latitudinis per ſequentem formulam proxime veram erui poterit:

$$\text{fin.}\frac{\Pi☽ - \Pi L}{2} = \frac{\text{fin.}\tfrac{1}{2}☽L}{\text{fin.}\frac{\Pi☽ + \Pi L}{2}}(\text{coſ}\,\Pi L.\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}☽L + \text{fin.}\,\Pi L\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}☽L\ \text{coſ.}\,\Pi L z).$$

Pro Parallaxi Longitudinis quoque inueſtiganda, aliae atque aliae formulae adduci poterunt, cuiusmodi ſunt:

$$\text{Tang.}\,p = \frac{\text{fin.}\,\Pi L z}{\text{fin.}\,\Pi L\ \text{cot.}\,L☽ + \text{coſ.}\,\Pi L z\,\text{coſ.}\,\Pi L};$$

$$\text{fin.}\tfrac{1}{2}p^2 = \frac{\text{fin.}\frac{\Pi☽ + ☽L - \Pi L}{2}\ \text{fin.}\frac{\Pi L + ☽L - \Pi☽}{2}}{\text{fin.}\,\Pi L.\,\text{fin.}\,\Pi☽}.$$

12.

12. Diameter Lunae apparens computetur per formulam $\frac{D}{1 - \varepsilon\, \Pi\, cof.\, z\, L}$ significante D quantitatem diametri Lunae e centro Telluris spectandam. Exactius vero habebitur diameter Lunae apparens, per istam formulam $\frac{D}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2 fin.\, \Pi^2 - 2\, \varepsilon fin.\, \Pi\, cof.\, z\, L)}}$. Caeterum tamen prior formula valorem adeo adproximatum praebere censenda est, vt aberratio tres decimas partes secundi nunquam excedat. Maxime scilicet aberratio locum habebit, quando $z\, L = 90°$, pro eo autem casu prior formula praebet Diametrum apparentem $= D$, et posterior $= \frac{D}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2 fin.\, \Pi^2)}} = D\, cof.\, \psi$ conf. §. 10. Si igitur statuatur $\varepsilon = 1$, $\Pi = 61'$; $D = 33'.\, 18''$, habebitur per posteriorem formulam diameter apparens $33'.\, 17'', 7$, quae a priori tantum $\frac{3}{10}$ secundi differt.

Tab. IX. Fig. 2. 13. Resoluatur iam triangulum ☽ ⊙ N, vbi ⊙ ☽ distantia apparens centrorum Solis et Lunae, ☽ N Latitudo apparens Lunae seu differentia inter Latitudinem Lunae, eiusque parallaxin Latitudinis, eritque

$$⊙ N = \sqrt{(⊙ ☽ + ☽ N)(⊙ ☽ - ☽ N)},$$

si scilicet triangulum ⊙ ☽ N vt rectilineum consideretur, quod quidem sine errore sensibili fieri potest. Sin autem quis hoc triangulum vt Sphaericum tractare velit, inuestigare poterit ⊙ N per hanc formulam:

$$Tang\, ⊙ N = \sqrt{Tang.\, \tfrac{1}{2}(⊙ ☽ + ☽ N)\, Tang.\, \tfrac{1}{2}(⊙ ☽ - ☽ N)}.$$

Notari autem conuenit, dari ⊙ ☽ seu distantiam appa-

apparentem centrorum Solis et Lunae pro vnaquaque obſeruatione ex quantitate Phaſeos. Pro initio ſcilicet et fine Eclipſis, habetur ☉ ☽ aequalis ſummae ſemidiametrorum Solis et Lunae. Pro alia vero obſeruatione ex data quantitate partis illuminatae diſci Solis, diſtantia centrorum facile colligetur, quippe quae inuenietur, ſi ad partem lucidam diſci Solis addatur differentia ſemidiametrorum Lunae et Solis. Poſtquam autem inuentum fuerit latus ☉ N, quum quoque detur parallaxis Longitudinis, facile inueniri poterit tempus, quod ad datum tempus obſeruationis vel addendum vel ab eo ſubtrahendum eſt, vt habeatur tempus coniunctionis Solis et Lunae.

14. Tempus hoc coniunctionis ſic inuentum, veritati exacte conueniens eſſe non poteſt, niſi omnia Elementa quibus eius inueſtigatio ſuperſtruitur, rite ſe habeant; haec autem Elementa vti facile conſtat, praeprimis ſunt, valores diametrorum Solis et Lunae, Latitudo Lunae et eius Parallaxis aequatorea. Quod ſi proinde his Elementis aliquis inſit error, neceſſum omnino eſt, vt is ſaepe numero ad tempus coniunctionis haud parum immutandum, valeat; quare operae pretium eſt, vt inueſtigetur quantam mutationem ſubire debeat expreſſio pro tempore coniunctionis, ob correctiones Elementorum modo dictorum. Exprimatur igitur correctio diſtantiae centrorum Solis et Lunae per δ, correctio Latitudinis Lunae per y et correctio parallaxeos per π, parallaxis vero Latitudinis Lunae deſignetur per p et paral-

laxis Longitudinis per p', nec non angulus ☽ ⊙ N per Φ, fietque correctio pro tempore coniunctionis

$$= \pm m\delta \sec.\Phi \mp my \operatorname{Tang.}\Phi \pm m\pi \left(\tfrac{p}{\Pi} \operatorname{Tang.}\Phi \pm \tfrac{p'}{\Pi}\right),$$

vbi m designat numerum, in quem datum spatium duci debet, vt habeatur tempus, quod Luna motu suo relatiuo huic spatio percurrendo impendit. Demonstrationibus huius formulae heic adornandis, eo potius supersedimus, quod in Tomo XV. Commentar. iam allatae sunt, nec de variationibus signorum in hac formula occurrentibus prolixiora adducere necessum est praecepta, quum pro quouis casu proposito facile dignosci queat, quaenam obtinere debeant signa.

15. Praeter methodum iam expositam, pro computandis obseruationibus Eclipsium Solis, alia quoque in vsum vocari poterit, de qua ob magnam eius affinitatem cum priori, breuiter quaedam indigitasse, haud inutile censebitur. Consistit autem haec Methodus in eo, vt tempus coniunctionis Solis et Lunae secundum ascensionem rectam, hoc est momentum quo Sol et Luna eandem habuerint ascensionem rectam, inuestigetur. Ad hoc vero tempus inueniendum, imprimis opus est nosse Parallaxes Lunae secundum ascensionem rectam et declinationem, quae ex data Parallaxi distantiae zL, hoc est arcu L☽ et angulo zLP facile deducuntur, erit enim Parallaxis declinationis = L☽ cos. zLP et Parallaxis ascensionis rectae = L☽ $\frac{\sin. zLP}{\sin. P☽}$. Ex datis vero distantia centrorum apparenti et declinatione

tione Lunae apparenti, quae aequalis habetur differentiae inter declinationem veram et Parallaxin declinationis, cognoſcetur differentia aſcenſionum rectarum apparens, cum qua ſi Parallaxis aſcenſionis rectae vel addendo vel ſubtrahendo, prout circumſtantiae poſtulant, combinetur; inuenietur differentia aſcenſionum rectarum vera. Hac autem cognita, ope motus relatiui Lunae in aſcenſionem rectam, dabitur tempus, quod ad ipſum tempus obſeruationis addi, vel ab eo ſubtrahi debet, vt habeatur tempus coniunctionis Solis et Lunae ſecundum aſcenſionem rectam. Si igitur hoc modo locum Lunae verum ſecundum aſcenſionem rectam et declinationem definire liceat, inde facile eruetur idem locus ſecundum Longitudinem et Latitudinem definitus. Porro ſi expreſſiones pro tempore coniunctionis ex obſeruationibus in duobus diuerſis locis inſtitutis, erutae, inter ſe combinentur, habebitur differentia meridianorum pro his locis. Caeterum quia locus Lunae ex Tabulis ſecundum Longitudinem et Latitudinem definiatur, ipſaque Latitudo Lunae temporibus Eclipſium ſemper ſit exigua, cum declinatio ſatis magna eſſe poſſit, commodius omnino videtur priorem adhibere Methodum, quippe quae huic iam adumbratae concinnitate et breuitate vix quicquam cedit. Tenendum autem eſt, praeter Methodos iam commemoratas infinitas alias excogitari poſſe, pro computandis obſeruationibus Eclipſium Solis, in genere enim omnis Methodus huic inſtituto adcommoda eſt, per quam inueſtigari poteſt con-

coniunctio Solis et Lunae respectu circuli cuiusdam fixi, modo is circulus talem habuerit situm, vt haec coniunctio prope ad ipsum tempus Eclipseos obseruatae contigerit. Sic loco Eclipticae et aequatoris, eligi poterit ipsa orbita Lunae, tunc scilicet quaestio eo redit, vt quaeratur tempus, quo recta per centra Solis et Lunae ducta, orbitae Lunae erat perpendicularis. Ad hoc autem problema soluendum, supponamus esse L locum Lunae verum, ☽ locum apparentem ob effectum Parallaxeos, ⊙ locum Solis et quaeramus angulum, quem circulus declinationis Lunae P L facit cum orbita eius M L, sic enim ex datis duobus angulis z L P, P L M inuenietur M L ☽. Deinde ob datum angulum M F ⊙, quaestio eo reducitur, vt in quadrilatero F ⊙ ☽ L, ex datis duobus angulis ⊙ F M, ☽ L M et tribus lateribus, L ☽, ☽ ⊙ et F ⊙, quaeratur quartum latus L F, quo cognito per motum horarium Lunae relatiuum in orbita, facile determinari poterit tempus, quod Luna percurrendo arcui L M impendit, ideoque et ipsum momentum quo Luna in M erat. Sed de hac Methodo plura heic adferre, minus e re est.

Tab. IX. Fig. 3.

16. Vt de vsu et adplicatione nostrae Methodi eo facilius sit iudicium, exemplum adferre placet computi ad praescriptum huius Methodi adornati; ex hoc enim exemplo quiuis facile perspicere poterit, quanta elegantia se commendet Methodus nostra prae iis, quas hucusque ab Astronomis adhibitas esse constat:

Calcu-

Calculus pro fine Eclipsis die 22. Martii 1773. Temp. Astr. Petropol. obseruato.

Finis obseruatus T. vero $20^h. 19'. 23''$, hinc ang. hor. ☉lis $= 55°. 9'. 15''$, erat vero Asc. ☉ recta $= 2°. 42'. 20''$, Asc. ☽ $= 2°. 50'. 28''$ Differ. Ascens. $= 8'. 18''$, proinde $zPL = 55°. 17'. 33''$. Est vero quoque $PL = 88°. 2'. 29''$; $\Pi LP = 23°. 26'. 15''$ et Lat. ☽ $= 39'. 53'', 9$.

Resolutio trianguli zPL

L. sin. $Pz = 9{,}7029966$	L. Tang. $Pz = 9{,}7668249$
L. sin. $zPL = 9{,}9149086$	L. cos. $zPL = 9{,}7554077$
L. sin. $zQ = 9{,}6179052$	L. Tang. $PQ = 9{,}5222326$
	$PL = 88°. 2'. 29''$
	$PQ = 18. 24. 34$
	$QL = 69. 37. 55$
L. cos. $zQ = 9{,}9589855$	L. Tang. $zQ = 9{,}6589216$
L. cos. $LQ = 9{,}5416410$	L. sin. $LQ = 9{,}9719603$
L. cos. $zL = 9{,}5006265$	L. Tang. $zLP = 9{,}6869613$
	$zLP = 25°. 56'. 12''$
	$\Pi LP = 23. 26. 15$
	$zL\Pi = 2. 29. 57.$

 Calcu-

Calculus pro Parallaxi Longitudinis et Latitudinis, nec non Diametro Lunae adparenti:

L. coſ. z L = 9,5006265
L. ε Π = 3,5130928
L. Conſt. = 4,6855749

L. ε Π coſ. z L = 7,6992942

ε Π coſ. z L = 0,0050037
1 − ε Π coſ. z L = 0,9949963

L Δ = 2,9511858
L. Compl. = 0,0021785

L. Diam. ☽ = 2,9533643
Semidiam. ☽ = 898, 2
⊙ = 961, 8

⊙ ☽ = 1860, 0

L. (1 − ε Π coſ. z L) = 9,9978215

L. Compl. = 0,0021785
L. ε Π = 3,5130928
L. ſin. z L = 9,9770516

L. L ☽ = 3,4923229
L coſ. z L Π = 9,9995868
L. ſin. z L Π = 8,6395349

L. Paral. Lat. = 3,4919097
L. L ☽ ſin. z L Π = 2,1318578
L. coſec. Π ☽ = 0,0000026

L. Par. Long. = 2,1318604
Par. Lat. = 3103, 9
Long. = 135, 5.

Calculus pro inueſtigando tempore coniunctionis.

Parall. Lat. = 3103,9
Lat. ☽ = 2393,9

☽ N = 710,0
⊙ ☽ = 1860,0
⊙ ☽ + ☽ N = 2570,0
⊙ ☽ − ☽ N = 1150,0

L. (⊙☽ + ☽N) = 3,4099331
L. (⊙☽ − ☽N) = 3,0606978

L. ⊙ N^2 = 6,4706309
L. ⊙ N = 3,2353154
⊙ N = 1719,1
Par. Long = 135,5

Differ. = 1583,6

L. 1583,

$L. 1583,6 = 3,1996455$	T. obseru. $= 20^{\circ}. 19'. 23''$
$L. m = 0,3362991$	subt. $3435'' = \quad 57. 15$
$L. 3435'' = 3,5359446$	Temp. coni. $= 19. 22. 8.$

Calculus pro correctionibus temporis coniunctionis.

$L. ☽ N = 2,85126$	$L. \frac{p'}{\Pi} = 8,6188$
$L. \odot N = 3,23531$	$L. Sec. \Phi = 0,0342$
$L. Tan. \Phi = 9,61595$	$L. m = 0,3363$
$L. m = 0,33630$	$L. m \frac{p'}{\Pi} = 8,9551$
$L. m Tan. \Phi = 9,95225$	$L. m Sec. \Phi = 0,3705$
$L. \frac{p}{\Pi} = 9,97882$	
$L. \frac{m p}{\Pi} Ta. \Phi = 9,93107$	

hinc ergo elicitur tempus coniunctionis verum:

$$19^h. 22'. 8'' - 2,35\,\delta - 0,90.\,y + 0,94.\,\pi.$$

17. Ex sola inspectione huius calculi iam satis euidens esse confido, eum multo breuiorem esse illis, qui hucusque apud Astronomos vsu inualuerunt. Sic ex. gr. calculus noster vix plures requirit operationes, quam quae in Methodo vulgari Nonagesimi, tantum ad inueniendas Parallaxes Longitudinis et Latitudinis institui debent. Conf. *Cel. de la Lande Astronomia* Tom. II. pp. 374. 375. Quemadmodum autem ad Methodum Nonagesimi faciliorem reddendam, Tabulae altitudinum et Longitudinum Nonagesimi construi solent, ita computus iuxta nostram

noſtram Methodum inſtituendus ad ſummam redigetur breuitatem, ſi pro loco vbi obſeruatio facta, conſtructae fuerint Tabulae, quae pro dato angulo horario Solis, dataque eius declinatione, exhibeant diſtantiam aſtri a puncto z, nec non angulum zLP. Praeterea vbi correctiones δ, y et π ſemel definitae fuerint, eorum valoribus introductis, calculus pro correctione temporis coniunctionis plane omitti poteſt; praeſtat tamen calculum ita inſtruere, vt huius correctionis ſemper habeatur reſpectus, ſaltem dum obſeruationum in diuerſis locis factarum inſtituitur comparatio pro inueſtiganda differentia meridianorum, ſic enim facile erit iudicium, vtrum haec correctio aliquid efficere valeat, ad concluſiones immutandas, vel non. Denique haud obſcurum eſt, Methodum noſtram cum vſu adhiberi poſſe, ad computandas occultationes fixarum a Luna, vel alias quaſcunque obſeruationes circa coniunctiones fixarum cum Luna.

Concluſiones ex obſeruationibus ſupra allatis deductae.

18. Dum concluſiones ex meis obſeruationibus elicitas, iam propoſiturus ſum, haud inutile erit, delineationem Elementorum Aſtronomicorum ex Tab. *Mayeri* deſumtorum, praemittere.

Elemen-

Elementa Aſtronomica ex nouis Cel. *Mayeri* Tabulis Lunaribus deducta, pro Eclipſi Solis d. 22 Martii 1773.

	Temp. Pariſ. vero $16^h. 0$	$17^h.$	$18^h.$	$19^h.$
Longit. ☉	$0^s.2^\circ.50'.51'',9$	$0^s.\ 2^\circ.53'.20'',4$	$0^s.\ 2^\circ.55'.48'',9$	$0^s.\ 2^\circ.58'.17'',4$
Aſc. rect. ☉	2. 36. 41	2. 39. 0	2. 41. 18	2. 43. 34
Log. mot. hor. ☉ in aſcenſ.	8, 5898	8, 5836	8, 5772	
Semid. ☉	16. 1, 8			
Longit. ☽	0. 2. 9. 15, 5	0. 2. 39. 23, 6	0. 3. 9. 31, 7	0. 3. 39. 39, 8
Latit. ☽	Bor. 46. 22, 5	43. 44, 3	41. 6, 1	38. 27, 9
Aſc. rect. ☽	1. 40. 8	2. 8. 50	2. 37. 32	3. 6. 14
Compl. Decl. ☽	88. 25. 59	88. 16. 25	88. 6. 51	87. 57. 17
ang. poſit. Π☽P	23. 27 30	23. 27. 4	23. 26. 32	23. 25. 54

Log. variat. hor.		Paral. ☽ — Par. ☉	54. 31, 2
pro Lat. ☽	8, 6429040	Log. Π	3, 5147071
Aſc. ☽	9, 6797306	Semid. ☽	14. 53, 7
Dec. ☽	9, 2026094	L Δ =	2, 9511858
		L *m* =	0, 3362991

Caeterum obſeruare iuuat, iuxta nouas has *Mayeri* Tabulas, tempus coniunctionis Solis et Lunae ſecundum Eclipticam contingere debuiſſe die 22 Martii $17^h.29'.56''$ Temp. vero Pariſino, ſeu $17^h.36'.38''$ Temp. medio, Longitudine Solis et Lunae exiſtente $0^s.2^\circ.54'.33''$ et Latitudine Lunae Boreali $42'.25'',5$. Quod diametrum Solis attinet, talem eius quantitatem heic adhibendam iudicaui, quae menſuris Cel. *Shortii* congruit, quibus nimirum

 diame-

diameter Solis in Apogeo inuenta eſt 31′. 28″, 0. Reliqua vero omnia Elementa ſupra allata ex Tabulis *Mayerianis* deſumta ſunt.

19. Quoniam obſeruationes litteris *a*, *b*, *c*, *d* inſignitae non admodum bene inter ſe conſentiunt, ad earum diſſenſum imminuendum, momenta ex obſeruatis media eligere placuit, quibus diſtantiae quoque cornuum inter obſeruatas mediae reſponderent. Hoc igitur tantum notato, ſummarium calculi pro his obſeruationibus, ſequenti Tabula commode repraeſentari poteſt:

Temp. obſ. ver.		Diſt. corn. obſ.	Diſt. corn. vera	☉ ☽	☽ ☊	☉ ☊	Parall. Longit.
I.	18h. 8′. 47″	10′. 57″, 1	11′. 53″, 4	1713″, 3	495″, 9	1640″, 0	388, 4
II.	10. 6	12. 23, 3	13. 21, 6	1673, 9	499, 1	1597, 8	388, 2
III.	11. 8	13. 10, 3	14. 8, 8	1650, 4	501, 6	1572, 3	387, 8
IV.	12. 26	14. 10, 8	15. 8, 5	1618, 4	504, 8	1537, 7	387, 4
a	24. 7	20. 55, 2	21. 39, 7	1323, 7	531, 5	1212, 3	381, 8
b	25. 15	21. 18, 3	22. 0	1304, 0	534, 0	1189, 6	380, 9
c	26. 16	21. 36, 1	22. 20	1283, 4	536, 2	1166, 0	380, 2
d	31. 36	21. 39, 9	24. 16	1149, 5	547, 5	1010, 7	376, 1
6	19. 57. 7	21. 6. 6	21 11	1356, 3	688, 0	1168, 8	209, 1
5	58. 34	20. 34. 5	20. 39	1385, 7	689, 7	1201, 8	204, 3
4	59. 40	20. 8. 2	20. 12	1409, 4	690, 8	1228, 5	200, 8
3	20. 0. 54	19. 26. 5	19. 30, 5	1444, 3	691, 7	1267, 9	197, 0
2	2. 13	18. 58. 4	19. 4, 4	1465, 2	693, 6	1290, 7	193, 1
1	3. 36	18. 17. 9	18. 21, 0	1498, 1	695, 1	1327, 1	188, 6
Finis Eclipſ.	20h. 19′. 23″			1860, 0	710, 0	1719, 1	135, 5

20.

20. Hinc vero ſequentes eliciuntur expreſſiones pro tempore coniunctionis Solis et Lunae:

I.	$19^h. 22'. 7''$	$+2,27\delta$	$+0,65\,y$	$-0,39.\pi$
II.	21. 54	+2,28	+0,68	−0,41
III.	22. 0	+2,28	+0,69	−0,42
IV.	22. 2	+2,29	+0,71	−0,44
Med. A	19. 22. 1	$+2,28\,\delta$	$+0,68.y$	$-0,41.\pi$
a	19. 21. 45	$+2,37\delta$	$+0,95.y$	$-0,67.\pi$
b	22. 1	+2,38	+0,97	−0,70
c	22. 10	+2,39	+0,99	−0,73
d	21. 44	+2,47	+1,18	−0,91
med. B	19. 21. 55	$+2,40\delta$	$+1,02.y$	$-0,75.\pi$
1.	19 22. 26	$-2,45\delta$	$-1,14\,y$	$+0,96.\pi$
2.	22. 32	−2,46	−1,17	+0,98
3.	22. 11	−2,47	−1,19	+1,00
4.	22. 30	−2,49	−1,22	+1,03
5.	22. 30	−2,50	−1,25	+1,06
6.	22. 25	−2,52	−1,28	+1,08
med. C	19. 22. 26	$-2,48\,\delta$	$-1,20.y$	$+1,02.\pi$

Finis Eclipſeos $19^h. 22'. 8'' - 2,35\cdot\delta - 0,90.y + 0,94\,\pi$.

Si nunc concluſio ex fine Eclipſis deducta combinetur cum mediis A et B, mediumque B cum medio C, nouae hae orientur expreſſiones pro tempore coniunctionis:

I. $19^h. 22'. 4'' - 0,03\,\delta - 0,11.y + 0,26.\pi$
II. $22. 2 + 0,02\,\delta + 0,06.y + 0,09.\pi$
III. $22. 10 - 0,04\,\delta - 0,09.y + 0,14.\pi$ hincque
Med. $19. 22. 5 - 0,02\,\delta - 0,05.y + 0,16.\pi$. —

In hac postrema conclusione coefficientes correctionum, δ, y, π, tam sunt exigui, vt tuto negligi queant, interim si pro y ponatur $+10''$ et $\pi = -3''$, fiet tempus coniunctionis verum Solis et Lunae pro Petropoli $19^h.\ 22'.\ 4''$, quod saltem cum praecisione quinque secundorum verum esse, adfirmare haud dubitamus.

21. Quoniam Tabulae Lunares Cel. *Mayeri* exhibeant tempus coniunctionis pro Petropoli die 22 Martii $19^h.\ 21'.\ 56''$ Temp. vero, posita Longitudine Petropolis a Parisiis $1^h.\ 52'.\ 0''$, fiet hinc correctio Tabularum pro Longitudine Lunae $4''$ subtractiua; sin vero statuatur Longitudo Petropolis $1^h.\ 51'.\ 58''$, haec correctio vno scrupulo secundo augebitur. Tabulae vero antiquiores Cel. *Mayeri*, quum Longitudinem Lunae praebeant 11 secundis minorem ea, quae ex nouis Tabulis deducitur, correctionem requirent 6 secundorum additiuam. Denique Tabulae recens editae Illustr. *Euleri*, quae a nouis Tabulis *Mayerianis* $4''$ in defectu differunt, pro casu nostro proposito vix vlla correctione opus habent. Probe autem notandum est, dum ex Tabulis *Eulerianis* inuestigatur locus Lunae, argumenta ex veteribus Tabulis *Mayeri* esse desumenda; sciendum enim est in nouis Tabulis *Mayeri*, non solum loca media Lunae, sed etiam locum Apogaei, paulo aliter assignari, ac in Tabulis Cel. Viri primum editis; quare quum Tabulae Illustr. *Euleri* argumentis motus medii ex veteribus Tabulis *Mayeri* desumtis

sint

ſint accommodatae, non licebit haec argumenta ex nouis *Mayeri* Tabulis deſumere. Haec tamen non eo valent, quaſi contendere vellem, correctiones iſtas quas Cel. *Mayer* nouis ſuis Tabulis attulit, recte ſe non habere, ſed neceſſaria tantum eſſe exiſtimaui, pro vſu Tabularum Illuſtr. *Euleri* explicando.

22. Quod latitudinis correctionem attinet, eius inueſtigatio, hoc modo inſtitui poſſe videtur. Ex valore partis lucidae Temp. vero $19^h. 10'. 8''$ obſeruato $11'. 4'', 9$, hincque per refractionem correcto $11'. 12''$, diſtantia minima centrorum Solis et Lunae facile colligitur. Quum enim pro eodem tempore ſit ſemidiameter Lunae apparens $896'', 2$, ob ſemidiametrum Solis $961'', 8$ fiet diſtantia centrorum Solis et Lunae $606'', 4$. At differentia inter Parallaxin Latitudinis et Latitudinem Lunae, huic tempori reſpondens ex Tabulis colligitur $621'', 2$, quae igitur quum maior ſit diſtantia centrorum obſeruata, omnino ſubſiſtere nequit; patet enim hanc differentiam 15 ſaltem ſecundis imminuendam eſſe. Nec tamen hinc inferre licet, hanc $15''$ diminutionem originem tantum ducere ex totidem ſecundorum augmento, quod Latitudini Lunae ex Tabulis deductae adtribuendum eſſet, niſi certo demonſtrari poſſit, valores ſemidiametrorum Solis et Lunae, nec non quantitatem Parallaxeos Lunae aequatoreae pro exactiſſimis haberi debere. Quum vero omnis correctio, quae circa ſemidiametrum Lunae admitti poterit vix duo aut tria ſecunda excedat et de Pa-

rallaxi incertitudo saltem 5 scrupula secunda non exsuperet; satis tuto statuere poterimus, quod correctio Latitudinis Lunae sit 10″ additiua, quamuis negare non velimus eandem forsan duobus aut tribus secundis augendam esse; Parallaxin autem Lunae aequatoream 3 secundis imminui debere, satis probabile mihi videtur; Elementa igitur Astronomica correcta pro hac Eclipsi habebuntur sequentia:

Tempus coniunctionis Solis et Lunae Petropoli die 22 Martii $19^h. 22'. 4''$ T. vero quo tempore erat.

I. Longitudo Solis et Lunae $0^s. 2^o. 54'. 33''$.

II. Latit. Lunae $42'. 35'', 1$.

III. Parallaxis Lunae aequatorea $54'. 37'', 1$

23. Restat denique vt paucis exponam, quas pro differentiis meridianorum ex hac Eclipsi deducere licuit conclusiones, vbi primum meminisse iuvat, finem huius Eclipsis Petropoli obseruatum quoque esse a Celeb. *Rumovski* Temp. vero $20^h. 19'. 19''$ et a Celeb. *Krafft* Temp. $20^h. 19'. 27''$, quod postremum momentum ad meridianum obseruatorii nostri reductum praebet $20^h. 19'. 29''$ proxime. Cum hisce obseruationibus iam eas conferre licebit, quas pro fine Eclipsis Wiennae et Schwezingae factas, Rev. Pat. *Mayer* litteris mecum communicare dignatus est. Obseruationes vero hae ita se habent:

Finis

Finis Eclipſis obſeruatus *Wiennae*	Temp. vero
a D. *Piderit* Tub. *Newt.* 4. ped.	$18^h. 53'. 58''$
a Rev. Pat. *Hell* Tub. *Newt.* $4\frac{1}{2}$ ped.	54. 4
a Rev. Pat. *Pilgram* Tub. *Newt.* 6 ped.	54. 10
a D. *Sambach* Tub. Diopt. 9 ped.	54. 11
Schwezingae	
a Rev. Pat. *Mayer* Tub. *Dollondi* 7 ped. Micromet. obiect. inſtructo	18. 23. 4
a Rev. Pat. *Metzger* Tub. *Dollond* 10 ped.	23. 8.

Hinc deducuntur ſequentes valores temporis coniunctionis pro Wienna

$$18^h.\ 26.\ 15$$
$$21 - 2{,}29.\delta - 0{,}72.y + 1{,}33.\pi$$
$$27$$
$$\text{med. } 18.\ 26.\ 22 - 2{,}29.\delta - 0{,}72.y + 1{,}33.\pi$$

pro Schwezinga

$$17.\ 55.\ \ 9 - 2{,}30.\delta - 0{,}76.y + 1{,}38.\pi$$
$$13$$
$$\text{med. } 17.\ 55.\ 11 - 2{,}30.\delta - 0{,}76.y + 1{,}38.\pi.$$

24. Ex obſeruationibus Petropoli factis pro fine Eclipſis, medio ſumto fit tempus coniunctionis ad Meridianum Petropolitanum

$$19^h.\ 22'.\ 9'' - 2{,}35.\delta - 0{,}90.y + 0{,}94.\pi$$

hoc igitur comparato, cum concluſione pro Wienna inuenta, fiet differentia meridianorum inter haec loca

$$55'.\ 47'' - 0{,}06.\delta - 0{,}18.y - 0{,}39.\pi$$

ideoque

ideoque si pro y substituatur $+ 10$ et pro $\pi - 3$, fiet $= 55'. 46''$. Quódsi ergo Longitudo Wiennae a Parisiis statuatur esse $56'. 10''$ erit differentia meridianorum inter Lutetias Parisiorum et Petropolin $1^h. 51'. 56''$, vel si contra Longitudo Petropolis a Parisiis ponatur $1^h. 51'. 58''$, erit Longitudo Wiennae $56'. 12''$. Facile autem patet ob errorem vnius vel alterius secundi, vtrinque obseruationibus adhaerentem fieri posse, vt conclusio haec inuenta aliquot secundorum correctionem admittat. Quicquid autem sit, admodum tamen probabile hinc redditur Longitudinem obseruatorii Petropolitani a meridiano obseruatorii Parisini esse $1^h. 51'. 57''$ vel $58''$, saltem maior quam $3''$ aberratio ab hac determinatione metuenda non videtur. Facta comparatione conclusionis pro Schwezinga cum Petropolitana, obtinebimus differentiam meridianorum:

$$1^h. 26'. 58'' - 0,05.\delta - 0,14.y - 0,44.\pi$$

seu posito $y = + 10$, $\pi = - 3$, $1^h. 26'. 58''$, quare obtinebitur Longitudo Schwezingae a Parisiis $25'\ 0''$. Porro si conclusiones pro Schwezinga et Wienna inter se conferantur, prodibit differentia meridianorum pro his locis:

$$31'. 11 + 0,02.\delta + 0,06.y + 0,06.\pi = 31'. 11''$$

proinde Longitudo Schwezingae a Parisiis $24'. 59''$. Ex obseruationibus circa Eclipses Satellitum Iouis, Longitudo Schwezingae conclusa est $25'. 15''$; at admodum probabile videtur nostram determinationem ex Eclipsi Solis deductam rectius se habere, quod etiam

etiam obseruatione Eclipsis Solis 1 Aprilis A. 1764 Schwezingae facta comprobatur. Nam si supponamus finem Eclipsis Schwezingae obseruatum fuisse Temp. vero $0^h. 44'. 0''$, habebitur tempus coniunctionis pro Schwezinga

$$22^h. 55'. 51'' - 2,40.\delta + 0,96.y - 1,45.\pi$$

at ex obseruatione Rev. Pat. *Hell* pro fine Eclipsis, tempus coniunctionis pro Wienna fiet:

$$23.\ 27.\ 8 - 2,58.\delta + 1,34.y - 1,78.\pi$$

ideoque differentia meridianorum

$$31'.\ 17'' - 0,18.\delta + 0,38.y - 0,33.\pi,$$

quae expressio posito $y = -5$, $\delta = -2$ et $\pi = -3$, abit in $31'. 16''$, hincque fiet Longitudo Schwezingae $24'. 54''$. Ipsum momentum pro fine Eclipsis A. 1764. a Rev. Pat. *Mayer* assignatum quidem habetur Tempore $0^h. 43'. 0''$, at si hoc momentum in vsum vocetur, Longitudo loci pro Schwezinga fere vno minuto primo adhuc diminuenda erit, quae diminutio quum omni destituatur verisimilitudine, in eam omnino maxime procliuis sum opinionem, vt credam, momentum a Rev. Pat. *Mayer* exhibitum pro fine Eclipsis 1764, vno minuto primo esse augendum. Donec igitur Longitudo Schwezingae a Parisiis aliis obseruationibus certius stabiliri queat, videtur eam absque sensibili errore assumi posse $25'. 0''$.

OBSERVATIONES ASTRONOMICAS AB ASTRONOMIS ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARVM

STEPHANO RVMOVSKI ET *AND. I. LEXELL*, ANNO 1773. INSTITVTAS, RECENSVIT

AND. IOH. LEXELL.

Obſeruationes Aſtronomicas Anno 1773. factas, tam proprias, quam eas quas Cel. *Rumovski* benigne mecum communicare voluit, breuiter heic exponere conſtitui. In obſeruationibus autem Celeb. *Rumovski* recenſendis, iisdem vtar verbis, quibus a Celeb. hoc Aſtronomo conceptae ſunt. In genere quoque monuiſſe ſufficiat obſeruationes Cel. *Rumovski* in ſpecula Aſtronomica ſuperiori, meas vero in conclaui inferiori factas eſſe.

Eclipſis Solis die $\frac{11}{23}$. *Martii a Cel.* Rumovski *obſeruata.*

Ex altitudinibus Solis correſpondentibus captis

Die $\frac{8}{19}$. Martii prodiit meridies verus -	$0^h.38'.$	$8'',6$
$\frac{10}{21}$. Martii - - - -	0. 39.	3, 5

vnde

vnde acceleratio horologii ſupra diem ſo-
larem medium concluditur 45″, 7.

Die $\frac{14}{25}$. Martii meridies verus ex altitud.
Solis correſp. - - - - - $0^h. 40'. 42''$

vnde acceleratio horologii ſupra diem ſo-
larem medium prodit 43″, 2.

„Ob viciniam Solis horizonti de initio
„Eclipſeos obſeruando non fui ſollici-
„tus; finem vero eiusdem limbo Solis
„leuiuſcula vndulatione inquinato, ob-
„ſeruaui ad horologium - - - 20. 59. 8

„Vnde adhibita acceleratione horol. 43″, 2
„prodit tempus verum finis Eclipſeos $20^h. 19'. 19''$.

„Hanc potius quam illam accelerationem adhibere „placuit ideo, quod a meridie illius diei, in quem „Eclipſis Solis incidit, ob frigus imminutum, acce- „leratio quoque horologii imminui debuit.

„Durante Eclipſi in decem diuerſis quadrantis „poſitionibus obſeruaui appulſus limborum Solis et Lu- „nae ad fila Micrometri quadranti affixi, verum „iis referendis ſuperſedeo.

„Obſeruatio haec inſtituta eſt Teleſcopio Gre- „goriano 24 pollic. quam proxime.

Obſeruatio Eclipſis Lunae partialis die $\frac{19}{30}$. Sept.

Obſeruationi huius Eclipſis a me inſtitutae quum Cl *Schröter* honeſtiſſimus huius vrbis ciuis et qui in obſeruationibus Aſtronomicis inſtituendis

 egre-

egregie verſatus eſt, intereſſe voluerit, momenta immerſionum vel emerſionum macularum ab ipſo adnotata, noſtris interſerenda eſſe exiſtimaui, licet nonnulla diſcrepantia obſeruationum ab ipſo factarum ab iis quas Cel. *Rumovski* et ego inſtituimus oriri debuiſſet, inde quod D. *Schröter* Tubo vſus ſit multo fortiori iis, quos Cel. *Rumovski* et ego adhibuimus. Nos enim Tubis *Dollondianis* 3 pedum duplici vitro obiectiuo praeditis vſi ſumus, qui obiecta vix plusquam 20 aut 25 vicibus multiplicant, ille vero Tubum adhibuit *Dollondianum* trium pedum ſed triplici vitro obiectiuo inſtructum et obiecta 60 circiter multiplicantem. Vt vero momenta a ſingulis obſeruatoribus notata, inter ſe diſcerni queant, notaſſe conueniet obſeruationes a Celeb. *Rumovski* factas littera R, quas Cl. *Schröter* inſtituit littera S measque littera L indicari.

		Temp. vero
Penumbra apparet in limbo Lunae	R	$6^h. 29'. 0''$
Initium Eclipſeos - - - -	L	31. 51
- - - -	R	34. 27
- - - -	S	34. 36
Vmbra ad Ariſtarchum - -	R	40. 2
Ariſtarchus immergit - - -	L	40. 7
- - - - - -	S	40. 49
Vmbra ad Galileum - - -	R	41. 47
Heraclides immergit - - -	L	42. 26
Harpalus immergit - - -	L	43. 48
Helicon immergit - - -	L	45. 14
Vmbra ad Heliconem - - -	R	46. 2

Vmbra

		Temp. vero	
Vmbra ad Grimaldum - -	S	$6^h. 46'. 32''$	
- - - -	R	46. 37	
- - - -	L	47. 5	
Helicon in vmbra - - - -	R	47. 27	
Grimaldus immergit - - -	S	49. 6	
- - - - -	L	49. 10	
- - - - -	R	52. 0	dubia
Vmbra ad Platonem - - -	L	51. 14	
- - - - -	R	52. 21	
Copernicus immergere incipit -	S	52. 19	
totus tegitur - -	S	53. 6	
Eratoſthenes immergit - -	L	53. 24	
Vmbra ad Keplerum - - -	R	53. 28	
Plato immergit - - -	R	54. 2	
Vmbra ad Copernicum - -	R	56. 47	
Copernicus immergit - -	L	56. 54	
Vmbra ad Archimedem - -	R	7. 0. 27	
ad Capuanum - -	R	2. 37	
ad mare Serenitatis -	S	3. 54	
Immergit mare Imbrium - -	R	4. 20	
Vmbra ad mare humorum -	L	10. 24	
Vmbra ad Manilium - - -	S	7. 10. 59	
- - - - -	R	12. 23	
Manilius immergit - - -	S	12. 12	
Vmbra ad Gaſſendum - -	R	13. 5	
Manilius immergit - -	L	14. 2	
- - - - -	R	14. 29	
Vmbra ad Poſidonium - -	R	15. 12	
Menelaum - -	S	15. 14	

		Temp. vero
Menelaus immergit - -	L	7h. 15'. 46 dubia
Vmbra ad Menelaum - - -	R	16. 22
Posidonius immergit - -	L	17. 8
Menelaus immergit - -	R	18. 7
- - - - -	S	18. 59
Vmbra ad Plinium - -	R	21. 21
Plinius immergit - -	R	22. 17
Vmbra ad Dyonysium - -	S	24. 30
Bulialdum - - -	R	24. 37
Dyonysius immergit - -	S	25. 13
Vmbra ad Dyonysium - -	R	25. 52
Bulialdus immergit - - -	L	26. 15
Dyonysius immergit - -	L	26. 33
- - - - -	R	27. 27
Cleomedes immergit - -	L	27. 38
Bulialdus immergit - -	R	28. 23
Vmbra ad Proclum - -	S	30. 13
Vmbra ad mare crisium - -	L	31. 31
- - - - -	R	32. 9
Marc humorum totum tegitur -	L	32. 8
Proclus immergit - - -	L	33. 1
Vmbra ad promontorium acutum	R	37. 7
Promontorium acutum immergit	S	40. 12
Mare crisium totum in vmbra	S	43. 0
- - - -	L	43. 1
- - - -	R	43. 22
Vmbra ad mare nectaris - -	R	48. 27
ad Petauium - - -	S	8. 0. 45
Petauius immergit - -	S	1. 5

Mare

		Temp. vero
Mare humorum totum emergit -	L	8^h. $4'$. 11
Gassendus emergere incipit -	S	8. 44
Petauius emergit - - -	L	10. 2
Grimaldus emergere incipit -	L	14. 32
- - - -	S	15. 41
Grimaldus totus emergit - -	L	17. 2
- - - - -	S	20. 42
Landsbergius emergit - -	L	22. 26
Galileus emergit - - -	L	31. 33
Keplerus emergere incipit -	L	35. 6
Keplerus emergit - - -	S	40. 6
Copernicus emergere incipit -	L	43. 21
Ariſtarchus emergit - -	L	44. 2
Copernicus totus extra vmbram	L	44. 47
Cyrillus emergit - - -	L	45. 37
Ariſtarchus emergere incipit -	S	46. 1
totus extra vmbram - -	S	46. 19
Promontorium acutum emergit -	L	55. 59
Dyonyſius emergit - - -	L	57. 17
Manilius emergit - - -	L	9. 2. 1
Menelaus emergit - - -	L	4. 37
Heraclides extra vmbram -	L	5. 57
Harpalus emergere incipit -	L	6. 27
Timocharis emergit - -	L	8. 19
Mare criſium emergere incipit -	L	16. 27
- - - -	R	16. 47
Eudoxus emergit - - -	L	18. 33
Poſidonius emergere incipit -	R	19. 37
Ariſtoteles emergit - - -	L	19. 42

Poſi-

		Temp. vero
Poſidonius emergit - - -	L	$9^h. 21'. 7''$
- - - - -	R	22. 27
Proclus emergit - - -	L	21. 37
Meſſala emergit - - -	L	24. 58
Mare criſium totum extra vmbram	L	25. 18
- - - -	R	26. 9
Hermes emergit - - -	L	27. 18
Finis Eclipſeos - - -	L	33. 28
- - - -	S	34. 58
- - - -	R	35. 27.

Durante hac Eclipſi coelo vſi ſumus ſatis ſudo, aere tamen non prorſus ſicco.

Quemadmodum in Eclipſibus Lunae totalibus ſaepius obſeruari ſoleat, vt Luna poſtquam totalem Eclipſin paſſa eſt, colore ſubruſo conſpiciatur, ita in hac Eclipſi Lunae partiali inexſpectatum id mihi ſe obtulit phaenomenon, quod pars Lunae in vmbram immerſa ſatis diſtincte videri potuerit, colore primum cinereo deinde magis magisque in ſubruſum abeunte.

Praeter obſeruationes circa immerſiones et emerſiones macularum iam expoſitas, nonnullas quoque partium lucidarum Lunae menſuras cepi micrometro obiectiuo, quod Teleſcopio Gregoriano duorum pedum adaptatur; verum quod hae menſurae non admodum bene inter ſe conſentire mihi viſae ſunt, eas hoc loco plane praetereundas eſſe, exiſtimaui. Ex hoc autem ſpecimine ſatis euidenter conuictus victus sum, huiusmodi obseruationes non minus quam immersiones vel emersiones macularum dubias esse, ita vt ex iis vix maiori cum certitudine quidquam concludi possit de veris Elementis Lunae, quam ex obseruationibus macularum vel etiam initio et fine Eclipsis Lunaris.

Occultationes fixarum a Luna et congressus Lunae cum stellis fixis.

	Temp. Pend.
Die $\frac{12}{23}$. Sept. Meridies verus ex altitud. correfp. - - - -	$11^h. 25'. 16'',3$
$\frac{21. \text{ Sept.}}{2. \text{ Oct.}}$ Meridies - - -	$11. 19. 56, 7$

hinc colligitur retardatio penduli diurna inter hos meridies $15'', 8$ et tempus meridiei die $\frac{14}{25}$. Sept. ad Pendulum $11^h. 24'. 4''$. Eodem vero die $\frac{14}{25}$. Sept. obferuaui *occultationem ftellae fixae quintae magnitudinis in conftellatione Capricorni*, quae contigit ad limbum Lunae obfcurum Temp. Pend. $6^h. 42'. 57''$ feu $7^h. 19'. 3''$ Temp. vero. Obferuatio quidem haec certiffima eft, fed ex ea parum vtilitatis fperare licet, quum valde dubium fit vtrum locus ftellae in quodam Catalogo confignatus habeatur, nec mihi quidem vacauit eius fitum obferuationibus poftmodum factis, explorare.

Die $\frac{23. \text{ Sept.}}{4. \text{ Oct.}}$ Meridies ex altitud. Solis correfpond. $11^h. 18'. 47''. 4$ hinc retardatio Penduli diurna inter 21 et 23 Septemb. $16'', 6$.

Die $\frac{21.}{2.}$ $\frac{Sept.}{Oct.}$ obſeruatus eſt congreſſus *Stellae* ξ *in conſtellatione arietis cum Luna. Occultatio* ſtellae contigit tempore Penduli $11^h. 13'. 35''$ hincque Tempore vero $11^h. 53'. 56''$. Haec obſeruatio aliquantum dubia eſt, quia immerſio ad limbum Lunae lucidum obſeruata eſt, maiorem tamen quam dimidii minuti primi errorem ipſi ineſſe non ſuſpicor. *Emerſio* eiusdem ſtellae ad limbum Lunae obſcurum obſeruata eſt Temp. Pend. $12^h. 30'. 8''$ ſeu Temp. vero $13^h. 10'. 30''\frac{1}{2}$. Obſeruatio admodum certa.

Caeterum tam haec quam ſuperior obſeruatio facta Teleſcopio Gregoriano duorum pedum.

Occultatio ϱ ♐ *a Luna die* $\frac{10}{21}$. *Octob. a Cel.* Rumovski *obſeruata.*

„Die $\frac{10}{21}$. Octob. Merid. verus ex altitud. Solis „correſpond. $0^h. 24'. 56''$, 9. Eodem die Luna limbo obſcuro occultauit ſtellam ϱ Sagittarii horologio „monſtrante $8^h. 17'. 14''\frac{1}{2}$. Obſeruatio certa eſt ad „dimidium ſecundum temporis.

„Die $\frac{11}{22}$. Octob. Merid. verus ex altit. corre„ſpond. $0^h. 24'. 59''$, 9 vnde colligitur tempus ve„rum diſparitionis ſtellae 7. 52. $16''$, $\frac{1}{2}$ obſeruatio fa„cta eſt Teleſcopio Gregoriano ſupra memorato.„

Tranſitus Lunae per Hyades die $\frac{21.}{1.}$ $\frac{Octob.}{Novemb.}$

Hoc die primum varias Lunae a ſtellis I et II θ Tauri diſtantias micrometro obiectiuo menſuravi, vi, tum vero etiam praeter diſtantias Palilicii a limbo Lunae lucido circa tempus occultationis menſuratas, exactam obſeruationem emerſionis Stellae ad limbum Lunae obſcurum inſtituere mihi licuit, obſeruatio enim immerſionis ob nubes impedita fuit. Fateri autem cogor has obſeruationes quoad vera momenta temporum in aliquali incertitudine eſſe poſſe, quum proximae obſeruationes meridierum ex altitudinibus correſpondentibus inter quas haec obſervatio inciderit, interuallo 21 dierum diſtent, quo tempore de regulari motu Penduli omnimoda certitudo ſperari non poteſt. Interim quum ex praecedentibus et inſequentibus obſeruationibus pro motu horologii explorando inſtitutis, retardatio eius colligatur haud multum diſpar ab ea, quam obſeruationes pro meridiebus dier. $\frac{13}{24}$. Octob. et $\frac{3}{14}$. Nov. dederunt, incertitudo quae momentis temporum die $\frac{21.\ Octob.}{1.\ Nou.}$ ad Pendulum obſeruatis circa reductionem eorum ad tempus verum inducitur, vix quinque ſcrupula ſecunda ſupergredi poterit.

Inuentus autem eſt

pro $\frac{13}{24}$. Oct. Merid. ex altit. correſp.		$11^h.\ 9'.\ 48'',0$
$\frac{3}{14}$. Nou. Meridies	- - -	$11.\ 6.\ 56,4$

hincque retardatio Penduli diurna $9'',6$, ratione autem habita obſeruationum praecedentium, retardationem inter 13 et 21 Octob. $10'',2$ adhibendam eſſe cenſui.

 Con-

Coniunctio Lunae apparens cum stellis θ Tauri

	Distant. Stellae a limbo Lunae	Temp. Pend.	Temp. vero	
1 θ . . .	$16'.\ 0''$	$6^h.32'.30''$	$7^h.24'.37''$	
. . .	14. 16	35. 28	27. 35	
. . .	18. 47	37. 39	29. 46	dubia
. . .	16. 8	45. 42	37. 49	dubia
. . .	15. 51	47. 13	39. 20	
. . .	15. 24	48. 58	41. 5	
2 θ . . .	15. 9	50. 45	42. 52	
. . .	14. 37	52. 49	44. 56	
. . .	14. 15	54. 22	46. 29	
. . .	14. 0	56. 2	48. 9	
. . .	13. 34	59. 2	51. 9	
1 θ	7. 7	7. 0. 48	52. 55	
. . .	12. 45	3. 9	7. 55. 16	
2 θ . . .	12. 15	8. 20	8. 0. 27	
. . .	11. 25	14. 48	6. 55	
1 θ . . .	5. 54	16. 27	8. 33	
. . .	11. 16	18. 16	10. 23	
. . .	11. 14	20 33	12. 40	
2 θ . . .	11. 36	24. 32	16. 39	
. . .	12. 9	26. 46	18. 53	
. . .	12. 26	28. 41	20. 48	
1 θ	6. 58	30. 28	22. 35	
2 θ . . .	13. 12	33. 18	25. 25	dubia
. . .	13. 32	37. 51	29. 58	

Con-

Coniunctio Lunae apparens cum Palilicio.

	Distant. Stellae a limbo Lunae	Temp. Pend.	Temp. vero	
I.	21'. 50"	10^h. 2'. 54"	10^h. 55'. 3"	dubia
II.	20. 59	5. 26	57. 35	dubia
III.	19. 48	8. 0	11. 0. 9	
IV.	18. 16	11. 20	3. 29	
V.	17. 32	12. 56	5. 5	
VI.	17. 4	14. 31	6. 40	
VII.	16. 18	17. 23	9. 32	
VIII.	12. 24	26. 22	18. 31	
IX.	11. 50	27. 57	20. 6	
X.	11. 15	29. 13	21. 22	
XI.	10. 47	30. 32	22. 41	
XII.	10. 8	32. 6	24. 15	
XIII.	9. 32	34. 10	26. 19	
XIV.	8. 36	36. 3	28. 12	
XV.	7. 40	37. 47	29. 56	dubia
XVI.	7. 13	39. 36	31. 45	
XVII.	4. 56	45. 17	37. 26	dubia
XVIII.	4. 43	47. 8	39. 17	
XIX.	2. 23	52. 57	45. 6	
Stella adhuc videtur, sed nubes interueniunt quae eam vi sui eripiunt - -		58. 40	50. 49	
Nubibus aliquantulum dissipatis Stella videtur limbo Lunae quasi iuncta, ideoque immersioni valde propinqua		59. 30	51. 39	

	Temp. vero	Temp. vero
Nubibus demum difpulfis, nullum amplius adparet indicium ftellae - -	$11^h. 0'. 32''$	$11^h. 52'. 41''$
Emerfio ftellae fatis exacta ad limbum Lunae obfcurum	12. 4. 37	12. 56. 47

Licet obferuationibus diftantiarum Palilicii a limbo Lunae illuftrato, omnimodam certitudinem vindicare non audeam, partim ob aliquantas difficultates, quibus huiusmodi obferuationes premuntur, partim ob coelum nubibus inquinatum; calculo tamen inftituto inueni easdem melius quam quidem fperare fas fuiffet inter fe confentire. Quid autem ex his obferuationibus cum emerfione ftellae combinatis colligatur de vero momento coniunctionis Lunae cum Palilicio infra pluribus exponam.

Eclipfes Satellitum Iouis.

Immerfio I. Satellitis die $\frac{5}{16}$. Iulii	Temp. vero
Lumen Satellitis debilitari incipit -	$11^h. 25'. 18''$
Senfibiliter decreuit - - - -	25. 56
Satelles difficulter videtur - - -	27. 1
Totalis immerfio - - - -	27. 8
Coelum fudum. Obferuatio bona.	
Immerfio I. die $\frac{12}{23}$ Iulii.	
Nubes interueniunt, quae Satellitem vifui eripiunt - - - -	13. 18.
Difpulfis nubibus Satelles adhuc confpicitur fed lumine valde debili -	13. 19. 57
Immerfio totalis - - - -	20. 20

Me-

Temp. vero

Mediocris obſeruatio. Immerſionem ſecundi Satellitis eodem die ob nubes obſeruare non licuit.

Immerſio II. Satellitis die $\frac{19}{30}$. Iulii

Lumen Satellitis diminui incipit -	14. 49. 12
Satelles vix videtur - - - - -	50. 26
Totalis immerſio - - - - -	50. 38

Obſeruatio ſatis bona niſi quod lumen diluculi fortiſſimum.

Immerſio I. Satellitis eodem die

Satelles immergit - - - - -	15. 14. 40

Obſeruatio aliquantum dubia, nam ob lumen crepuſculare reliqui Satellites difficulter videbantur.

Immerſio I. Satellitis die $\frac{11.\ \text{Iulii}}{8.\ \text{Aug.}}$ *a Cel. Rumovski obſeruata.*

Lumen Satellitis diminutum - - -	11. 36. 45
Immerſio totalis - - - - -	37. 36

Obſeruatio bona, ſplendor tamen Lunae exactitudini eius officere potuit.

Eiusdem immerſionis obſeruatio mea

Lumen Satellitis decreſcere incipit -	11. 36. 7
Satelles difficulter videtur - - -	37. 30
Immerſio totalis - - - - - -	37. 37

Immerſio III. Satellitis eodem die

Lumen Satellitis diminutionem patitur	13. 29. 8
Satelles difficulter videtur - - -	31. 23
Immerſio totalis - - - - - -	31. 34

Im-

Immersio I. Satellitis die $\frac{4}{15}$. Aug.
a Cel. Rumovski obseruata. Temp. vero

Lumen Satellitis diminutum -	$13^h. 32'. 0''$
Immersio totalis - - - -	32. 48

Obseruatio exacta.

Eiusdem immersionis obseruatio mea.

Lumen Satellitis decrescit - - -	31. 23
Sensibiliter decreuit - - - -	32. 10
Satelles difficulter videtur - - -	32. 48
Immersio totalis - - - -	32. 58

Coelum sudum. Obseruatio bona.

Immersio I. Satellitis die $\frac{11}{22}$. Aug.

Satellites debili lumine videtur -	15. 27. 53
Immersio totalis - - - -	28. 20

Obseruatio aliquantum dubia, tam ob lumen diluculi, quam nubes Ioui propinquas.

Immersio I. Satellitis die $\frac{13}{24}$. Aug.
Auctore Cel. Rumovski.

Totatis immersio - - - - -	9. 56. 49

Coelo humido, fasciis Iouis non distincte conspicuis.

Eiusdem immersionis obseruatio mea

Satelles exiguo lumine videtur -	9. 56. 21
Immersio totalis - - - - -	56. 51

Obseruatio dubia ab aerem vaporibus repletum.

Immersionem II. Satellitis ob pluuiam obseruare non licuit.

Im-

Immerſio I. Satellitis die $\frac{27.}{7.}$ $\frac{Aug.}{Sept.}$

Auctore Cel. Rumovski.	Temp. vero
Lumen Satellitis diminutum -	$13^h. 47' 20''$
Immerſio totalis - - - - -	48. 30

Obſeruatio dubia ob vapores, faſciis Iouis vix conſpicuis.

Immerſio III. Satellitis die $\frac{2.}{13.}$ Sept.

Lumen Satellitis decreſcere incipit -	9. 45. 23
Satelles vix videtur - - - - -	48. 23
Immerſio totalis - - - - - -	48. 35

Immerſio I. Satellitis die $\frac{3.}{14.}$ Sept.

Satelles difficulter videtur - -	15. 46. 6
Totalis immerſio - - - - -	46. 14

Obſeruatio dubia ob nubes in regione Iouis vagantes.

Immerſio IV. Satellitis die $\frac{8.}{19.}$ Sept.

Immerſio Satellitis - - -	16. 27. 22

Obſeruatio aliquantum dubia.

Emerſio I Satellitis die $\frac{21.}{2.}$ $\frac{Sept.}{Oct.}$

Emerſio Satellitis - - - -	10. 49. 49

Obſeruatio nonnihil dubia partim ob nubes Iouem paulo ante obſeruationem tegentes, partim ob Iouis cum Luna viciniam.

Emerſio IV. Satellitis die $\frac{25.}{5.}$ $\frac{Septemb.}{Octob.}$

Primum indicium Satellitis - -	12. 52. 58
Multum inclaruit - - - -	53. 53

Haec obſeruatio ſatis bona mihi eſt viſa.

Pro emersione II. Satellitis eodem die et Immersione IV. momenta maxime dubia inueni, quae igitur heic referre nihil attinet.

Temp. vero

Emersio I. Satellitis die $\frac{28.\ Sept.}{9.\ Octob.}$

Obseruata a Cel. Rumovski.

Satelles prope Planetam prodit ex vmbra - - - - - -	12^h.47$'$. 8$''$

Idcirco obseruatio ad aliquod secunda dubia esse potest.

Eiusdem emersionis obseruatio mea.

Primum indicium Satellitis - -	12. 46. 30
Clarius videtur - - - - -	36
Lumine multum inclaruit - -	47. 40
Aeque bene videtur ac reliqui Satellites	48. 7

Coelum admodum sudum et fasciae Iouis bene visibiles.

Emersio I. Satellitis die $\frac{30.\ Sept.}{11.\ Oct.}$

Satelles primum in conspectum prodit	7. 15. 30
Clarius videtur - - - -	15. 47
Multum inclaruit - - - - -	16. 35
Aeque bene videtur ac reliqui Satellites	17. 19

Coelum sudum et fasciae Iouis optime visibiles.

Emersio II Satellitis die $\frac{9}{20}$. Octob.

a Celeb. Rumovski obseruata - -	11. 59. 56

Eiusdem emersionis obseruatio mea

Primum indicium Satellitis - -	11. 59. 26
Melius videtur - - - - -	59. 36

Lumi-

	Temp. vero
Lumine multum inclaruit - -	$12^h. 0'. 41''$
Pleno ſplendore fulget - - -	1. 28

Obſeruatio bona. Coelum ſudum, faſciae Iouis bene viſibiles.

Emerſio III. Satellitis die $\frac{15}{26}$. Octob.

Auctore Celeb. Rumovski - -	12. 36. 23

Eiusdem emerſionis obſeruatio a me facta

Satelles primum emicat - -	12. 36. 54
Certus ſum adeſſe - - - -	37. 3
Multum inclaruit - - - -	37. 57
Aeque bene videtur ac reliqui - -	39. 5

Coelum ſudum.

Emerſio II. Satellitis die $\frac{2}{14}$. Nouemb.

Primum indicium Satellitis - -	9. 10. 52
admodum inclaruit - - -	11. 55
Nullum incrementum lucis animaduertitur - - - - - -	13. 18

Coelum ſudum, ſed ventus fortiſſimus.

Emerſio I. Satellitis die $\frac{6}{17}$. Nouemb.

Auctore Cel. Rumovski - -	11. 22. 10

Eiusdem emerſionis obſeruatio mea.

Satelles primum emicare videtur -	11. 22. 21
Melius videtur - - - -	22. 30
Multum inclaruit - - - -	23. 21
Vix vllum luminis incrementum -	24. 24

Ventus fortiſſimus, faſciis Iouis non bene conſpicuis.

Emerſio I. Satellitis die $\frac{8}{19}$. Nouemb.

Auctore Cel. Rumovski.

	Temp. vero
Satelles ipſi adeſſe videtur, ſed dubitat vtrum is fuerit - - - -	$5^h.50'.27''$
Certo eundem adeſſe videt - -	50. 48

Eiusdem emerſionis obſeruatio mea.

Primum indicium Satellitis mihi viſum	50. 52
Melius videtur - - - -	50. 57
Multum inclaruit - - - -	51. 51
Aeque bene videtur ac reliqui -	52. 21

Emerſio III. Satellitis die $\frac{11}{24}$. Nov.

Satelles primum emicare videtur -	4. 39. 12
Certus ſum eum adeſſe - - -	39. 17
Admodum inclaruit - - - -	41. 3
Vix vllum luminis incrementum -	41. 37

Coelum ſudum ſed Luna Ioui valde propinqua.

Emerſio I. Satellitis die $\frac{15}{26}$. Nov.

Satelles primum emicat - - -	7. 44. 8
Senſibiliter inclaruit - - - -	44. 32
Aeque bene videtur ac reliqui -	7. 45. 22

Emerſio I. Satellitis die $\frac{15}{26}$. Decemb.

Satellitis primum indicium - -	9. 43. 42
Certus ſum eum adeſſe - - -	52
Lumine multum creuit - - -	44. 48

Coe-

Coelum ſudum, ſed Luna pleno ſplendore fulgebat. Temp. vero

Emerſio I. Satellitis die $\frac{17}{28}$. Decemb.

Satelles emergere viſus - -	4. 10. 57
Lumine inclaruit - - - -	11. 42
Vix vllum luminis incrementum obſervari poteſt - - - -	12. 34

Obſeruatio vt videbatur bona.

Expoſitio calculi pro coniunctione Lunae cum Palilicio die $\frac{21}{1}$. *Octob. Nouemb.*

In diſſertatione de Eclipſi Solis huius anni 1773, Methodum expoſui, qua obſeruationes Eclipſium Solis ſatis expedite computari poſſunt, leui autem mutatione haec Methodus quoque adhiberi poterit, ad computandas occultationes fixarum a Luna, vel etiam quascunque earum a Luna diſtantias. Interim quum haec Methodus ideo forſan quibusdam minus probata reddi poſſit, quod in ea requiratur, vt aſcenſio recta Lunae pro ſingulis obſervationibus ad quas calculus adplicatur, exploretur, quod Elementum alioquin in aliis Methodis vt cognitum ſupponi non ſolet; iam nouam propoſiturus ſum rationem huiusmodi computos ineundi, quae illi, quam in modo dicta Diſſertatione propoſui, facilitate vix quidquam cedit, caeterumque ſumma ſe commendat exactitudine. Sit P Z meridianus loci, in quo obſeruatio inſtituta eſt, P polus aequatoris, Z punctum in quo recta per centrum tellu- Tab. IX. Fig. 4.

 ris

ris et locum obſeruatoris ducta meridiano occurrit, Π polus Eclipticae, L locus Lunae verus et M locus eius apparens ob Parallaxin, atque ducantur arcus circulorum maximorum ΠP, ΠZ, ΠL, ΠM et $Z L M$. Ex dato igitur tempore obſeruationis et aſcenſione recta Solis primum innoteſcet angulus $\Pi P Z$, tumque reſoluatur triangulum $\Pi P Z$ ex datis nimirum ΠP, ΠZ et angulo $\Pi P Z$ quaerendo arcum ΠZ et angulum $P \Pi Z$, quare quum angulus $P \Pi L$ quoque cognitus ſit, innoteſcet $Z \Pi L$. Quum igitur in triangulo $Z \Pi L$, dentur ΠZ, ΠL aequalis complemento latitudinis Lunae et angulus $Z \Pi L$, reliquum eſt, vt quaerantur Parallaxes Lunae in Longitudinem et Latitudinem. Si itaque Π deſignet Parallaxin Lunae horizontalem aequatoream et ε exprimat rationem inter radium telluris pro loco dato et ſemidiametrum telluris, inueſtigatio Parallaxium ſequentibus perficietur formulis:

$$\text{Tang. } M \Pi L = \frac{\varepsilon \,\text{ſin. } \Pi \,\text{ſin. } \Pi Z \,\text{ſin. } Z \Pi L}{\text{ſin. } \Pi L - \varepsilon \,\text{ſin. } \Pi \,\text{ſin. } \Pi Z \,\text{coſ. } Z \Pi L} \text{ et}$$

$$\text{Cot. } \Pi M = \frac{\text{ſin. } Z \Pi M}{\text{ſin. } Z \Pi L} \text{Cot. } \Pi L \left(1 - \frac{\varepsilon \,\text{ſin. } \Pi \,\text{coſ. } \Pi Z}{\text{coſ. } \Pi L}\right)$$

Tab. IX. Fig. 5. vbi $M \Pi L$ dabit Parallaxin Longitudinis et ΠM deſignat complementum Latitudinis apparentis. Sit iam S locus ſtellae et producantur arcus ΠL, ΠM, ΠS vsque dum Eclipticae occurrant in punctis l, m et s, atque iungatur $M S$ arcu circuli maximi, tum vero ex S in arcum $\Pi M m$ normalis ducatur $S Q$. Quum Latitudo Lunae ſit ſatis parua, ſeu arcus ΠM proxime ad $90°$ accedat, ſique diſtantia

ſtantia M S fuerit valde exigua, ita vt triangulum M Q S pro rectilineo haberi poſſit, ſtatuere licebit

$$MQ = Mm - Ss \text{ vel } Ss - Mm,$$

tumque inuenietur in triangulo rectangulo M S Q,

$$QS = \sqrt{(MS + MQ)(MS - MQ)},$$

hincque deducetur $ms = \frac{QS}{\sin.\, \Pi S}$. Probe autem obſeruandum eſt, hoc compendium tantum in vſum vocari poſſe, quando arcus M S eſt valde paruus, imprimis ſi arcus M Q exiguus ſit etiam reſpectu ipſius M S; dum autem M S exprimit diſtantiam ſatis notabilem, exacta reſolutione trianguli Sphaerici M Π S in quo dantur tria latera Π M, Π S, et M S quaeri debet ang. M Π S = arcui ms. Ex datis autem arcubus ms et lm capiendo eorum ſiue ſummam ſeu differentiam, innoteſcet pro tempore obſeruationis diſtantia Lunae vera ſecundum longitudinem a ſtella, quod interuallum ob cognitum motum horarium Lunae, praebebit quantitatem temporis, quae ad momentum obſeruatum vel addi, vel ab eo ſubtrahi debet, vt inueniatur verum momentum coniunctionis Lunae cum ſtella. Quia autem elementa in calculo ſuppoſita, diſtantia ſcilicet M S, latitudo Lunae et Parallaxis Lunae aequatorea, plerumque aliqua correctione opus habere ſoleant, variationum, quae inde in tempus coniunctionis ſtellae cum Lunae inducuntur, ſequenti modo haberi poterit ratio. Dicatur correctio diſtantiae M S = δ, correctio Latitudinis Lunae γ, et Parallaxeos aequatoreae π, praeterea deſignetur angu-

angulus M S Q per Φ, arcus Π S per s et rationes parallaxium in Latitudinem et Longitudinem ad Parallaxin horizontalem aequatoream exprimantur fractionibus $\frac{p}{\Pi}$ et $\frac{p'}{\Pi}$, tumque designet m tempus quod Luna impendit percurrendo spatio vnius minuti secundi; eritque correctio ex variatione δ oriunda $= m\,\delta$ Sec. Φ cosec. s, ea quae ex y oritur $= m\,y$ Tang. Φ Cosec. s et demum quae ex π resultat $= m\,\pi\,(\frac{p}{\Pi}$ Tang. Φ Cosec. $s \pm \frac{p'}{\Pi})$, de signis autem quibus hae correctiones adficiuntur heic quidquam monere nihil attinet, quum signorum ratio pro casu quouis singulari, leui adhibita attentione innotescat.

His de ipsa Methodo qua computum iniui, praemonitis, subiungam Elementa, quae pro ineundo calculo parallaxium ex nouis Tabulis Lunae Cel. *Mayeri* deduxi:

A. 1773 die 31. Oct. / 1. Nov. Temp. medio Parisino

	$8^h.48'.30''$	$10^h.48'.30''$
Ascensio Solis recta - -	$217°.21'.51''$	$217°.26'.45''$
Longitudo ☽ - - - -	$2^s.\ 5°.51'.\ 3'',0$	$2^s.\ 6°.50'.18'',8$
Latitudo ☽ australis - -	4. 40. 24, 2	4. 42. 36, 0
Longitudo stellae α Tauri	2. 6. 38. 3, 9	- - -
Latitudo eiusdem - -	5. 28. 47, 8	- - -
Parallaxis ☽ horizont. aequatorea	54'. 6, 0	
Semidiameter ☽ - -	14. 44, 0	
Mot. hor ☽ in Longitudinem	29. 37, 5	
Mot. hor. ☽ in Latitudinem	65, 0	67, 0
Log. ϵ pro Petropoli	9,9983857	

His

His adhibitis elementis pro obſeruationibus diſtantiarum Palilicii a limbo Lunae illuſtrato et emerſione eiusdem ſtellae, ſequentes inueni quantitates, pro Parallaxi Longitudinis, differentia apparenti Latitudinum ſtellae et Lunae, nec non ſemidiametro Lunae.

	Paral. Longit.	Diff. app. Latit.	Semid. ☽ appar.	Diſtant. limbi ☽ a ſtella
I. - - -	12'. 2", 9	6'. 29", 4	14'. 52", 3	21'. 50"
II. - - -	11. 51, 1	32, 4	52, 3	20. 59
III. - - -	11. 39, 2	35, 4	52, 4	19. 48
IV. - - -	11. 23, 4	39, 2	52, 4	18. 16
V. - - -	11. 15, 8	41, 0	52, 5	17. 32
VI. - - -	11. 8, 2	42, 7	52, 5	17. 4
VII. - - -	10. 54, 2	45, 9	52, 6	16. 18
VIII. - - -	10. 9, 5	55, 7	52, 7	12. 24
IX. - - -	10. 1, 4	57, 4	52, 7	11. 50
X. - - -	9. 55, 8	58, 6	52, 7	11. 15
XI. - - -	9. 48, 0	7. 0, 2	52, 8	10. 47
XII. - - -	9. 40, 0	1, 9	52, 8	10. 8
XIII. - - -	9. 29, 2	4, 1	52, 8	9. 32
XIV. - - -	9. 19, 3	6, 1	52, 9	8. 36
XV. - - -	9. 10, 1	8, 0	52, 9	7. 40
XVI. - - -	9. 0, 4	10, 0	53, 0	7. 13
XVII. - - -	8. 29, 9	15, 6	53, 1	4. 56
XVIII. - -	8. 20, 0	17, 5	53, 1	4. 43
XIX. - - -	7. 48, 6	22, 8	53, 2	2. 23
Pro emerſione ſtellae	32, 7	8. 16, 6	54, 0	- -

Hinc ergo sequentes eliciuntur expressiones pro tempore coniunctionis Lunae cum Palilicio.

Tempus coniunctionis verum Petropoli:

I.	$12^h. 32'. 53''$	$+2,06.\delta$	$-0,37.y$	$+0,67.\pi$
II.	33. 18	+2,06	−0,38	+0,68
III.	33. 0	+2,07	−0,40	+0,70
IV.	32. 36	+2,07	−0,41	+0,73
V.	32. 24	+2,08	−0,42	+0,74
VI.	32. 45	+2,08	−0,43	+0,75
VII.	33. 32	+2,08	−0,44	+0,76
VIII.	32. 46.	+2,10	−0,52	+0,79
IX.	32. 52	+2,10	−0,53	+0,79
X.	32. 42	+2,10	−0,54	+0,80
XI.	32. 45	+2,11	−0,56	+0,80
XII.	32. 40	+2,11	−0,57	+0,81
XIII.	33. 4	+2,12	−0,59	+0,81
XIV.	32. 27	+2,12	−0,61	+0,82
XV.	32. 1	+2,13	−0,64	+0,83
XVI.	32. 27	+2,14	−0,67	+0,83
XVII.	32. 9	+2,17	−0,74	+0,85
XVIII.	32. 50	+2,18	−0,77	+0,85
XIX.	32. 40	+2,20	−0,87	+0,94.

Ex Emersione

$$12^h. 32'. 41'' - 2,33.\delta + 1,13.y - 0,77.\pi$$

Si ex omnibus expressionibus pro tempore coniunctionis, quas mensurae distantiarum praebuerunt, medium colligatur, prodibit haec expressio:

$$12^h. 32'. 44'' + 2,11.\delta - 0,56.y + 0,80.\pi$$

quae

quae combinata cum expreſſione ex tempore emerſionis deducta, dat tempus coniunctionis Lunae cum α Tauri:

$$12^h.\ 32'.\ 42'' - 0,11.\ \delta + 0,28.\ y - 0,01.\ \pi.$$

Ex his autem valoribus pro tempore coniunctionis, colligi poteſt correctiones δ, y, π tuto negligi poſſe et correctionem quidem Latitudinis cui maximum plerumque momentum tribuendum eſt, nullius fere eſſe momenti, ſaltem haec concluſio rite ſibi conſtabit ſi expreſſio ex menſuris diſtantiarum elicita veritati ſit conformis. Quum vero inter valores ex quibus medium ſumendo deducta eſt, nonnullae plus iuſto diſcrepent, excludamus *primo* obſeruationem VII et XV, quo facto medium ex reliquis dabit tempus verum coniunctionis: $12^h.\ 32'.\ 43''$ ad Meridianum Petropolitanum. Licet autem alicui videretur, ne hoc quidem momentum omnimodam mereri fiduciam, hincque excludendas cenſeret obſeruationes II et XVII; medium reliquarum quindecim nihilominus dabit idem tempus coniunctionis $12^h.\ 32'.\ 43''$, de quo quidem iam nullum amplius dubium ſupereſſe poterit; ex quo omnino colligere licet momentum pro tempore coniunctionis ſupra exhibitum $12^h.\ 32'.\ 42$ vix in vllam ſuſpicionem erroris venire poſſe, niſi ſi forſan circa reductionem momentorum obſeruatorum ad tempus verum, error vnius vel alterius ſcrupuli ſecundi induci potuerit.

 Quum

Quum igitur tempus coniunctionis Palilicii cum Luna contigerit Petropoli die 1. Nouemb. $12^h. 32'. 42''$ Temp. vero, seu tempore medio Parisino $10^h. 24'. 29''$, si Longitudo Palilicii supposita $2^s. 6^\circ. 38'. 3'', 9$ rite se habeat, quum Tabulae Lunares *Mayeri* pro hoc tempore dent Longitudinem Lunae $2^s. 6^\circ. 38'. 27'', 3$, inde inferre liceret has Tabulas peccare in excessu $23''$ scrupulis secundis. At quod Latitudinis correctionem attinet, facile liquet modo Latitudo α Tauri $5^\circ. 28'. 47'', 8$ rite sibi constet, Latitudini Lunae sensibilem errorem vix inesse posse, ideoque ex nostris obseruationibus hanc deducimus conclusionem:

Coniunctionem Palilicii cum Luna contigisse
A. 1773. die 1 Nov. $10^h. 24'. 29''$ Temp. med. Paris.
existente *Longitudine Palilicii et Lunae* $2^s. 6^\circ. 38'. 3'', 9$
et *Latitudine Lunae Australi* 4. 42. 9, 2.

Praeterea hinc patet immersionem Palilicii contigisse Temp. vero Petropolitano $11^h. 52'. 3''$, quo tempore Luna nubibus tegebatur.

Si demum loco Lunae ex Tabulis desumto, adplicentur perturbationes ex actionibus Planetarum oriundae, quae loco Solis adplicari solent; quod omnino fieri necesse est, dum locus Lunae ad stellam fixam refertur; correctio Longitudinis quae supra est inuenta $23''$, non amplius fiet maior quam 7 scrupulorum secundorum.

In

In expreſſionibus ſupra allatis pro tempore coniunctionis Lunae cum Palilicio, quas ex menſuris diſtantiarum elicuimus, quantitas δ inuoluit non ſolum correctionem ſemidiametro Lunae tribuendam, ſed etiam correctionem qua vnaquaeque diſtantia a limbo obſeruata opus habere poterit, ex quo intelligitur quantitatem hanc δ pro diuerſis obſeruationibus, valde diuerſos valores ſortiri poſſe; ſumto autem medio plurimarum obſeruationum confidimus fore, vt correctiones ipſis menſuris diſtantiarum tribuendae proxime ſe deſtruant, ſolaque remaneat correctio ſemidiametri Lunae, ſaltem ſi obſeruationes inſtrumento omni rigore verificato inſtitutae ſint. Caeterum quod nonnullae diſtantiarum menſurae a nobis captae in maiori quam 20 ſecundorum fuerint errore, nubibus, quibus Luna paſſim tegebatur adſcribendum. Immo ſi duo aut quatuor harum obſeruationum ſeponantur, reliquarum conſenſus tantus eſt, vt iure dubitare liceat, an menſurae diſtantiarum micrometris ordinariis captae ad tantam pertingere queant praeciſionem.

Obſeruationes diſtantiarum I et II θ Tauri a limbo Lunae, computo ſubiicere minus neceſſarium duxi, quippe quum hae menſurae captae ſint prope ad coniunctiones apparentes harum fixarum cum Luna, quare ex iſtis obſeruationibus ipſum tempus coniunctionis Lunae cum his ſtellis fixis minus fe-

 liciter

liciter determinatur, ſiquidem minimus error in diſtantiis menſuratis commiſſus, inſignem errorem in tempore coniunctionis producet; valde tamen vtiles haberi poterunt hae obſeruationes ad determinandam Latitudinem Lunae, quae ſatis exacte concludetur ex diſtantia minima apparente ſtellarum a limbo Lunae.

DETER-

DETERMINATIO LONGITVDINIS ET LATITVDINIS QVORVNDAM MOLDAVIAE ET WALACHIAE LOCORVM DEDVCTA EX OBSERVATIONIBVS A *IOHANNE ISLENIEFF* INTSITVTIS.

Auctore

STEPHANO RVMOVSKI.

Redeuntem ab obſeruatione Tranſitus Veneris per diſcum Solis *Iohannem Islenieff* Academia Scientiarum Moldauiam ablegandam eſſe cenſuit, vt ibi perficiendae Geographiae incumberet. Quanto ſtudio et diligentia munere hoc functus ſit Vir Cl. ex obſeruationibus referendis lectores perſpicient.

Obſeruationes in Bender inſtitutae Anno 1771.

Pro Latitudine definienda.

Defuit occaſio Viro Cl. errorem quadrantis hic definiendi; quaeſiuit eum ante hac Tobolii et dein Moldauia redux Kiouiae; ibi errorem quadrantis ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendum reperit 5'. 43'', hic vero 5'. 40''. Quare omnes altitudines infra recenſitas quantitate 5'. 42'' mulctatas ſiſtimus.

Alti-

Altitudines Solis meridianae.

Dies obſeru.	Alt. limb. ☉ ſuper. corr.	Refr. Br. — parall.	½ Diam. ☉lis	Declin. ☉lis Auſtralis	Latitudo
4/15. Oct.	34°. 56'. 38"	1'. 14", 7	16'. 5",	8°. 31'. 8", 0	46°. 49'. 33"
5/16. —	34. 33. 47	1. 15	16. 5, 3	8. 53. 19, 2	46. 50. 13
6/17. —	34. 11. 37	1. 17	16. 5, 6	9. 15. 25.	46. 50. 20
24. Oct. 4. Nov.	28. 3. 13	1. 39, 2	16. 10, 2	15. 23. 41.	46. 50. 54
25/5. —	27. 45. 18	1. 40, 3	16. 10, 4	15. 42. 15.	46. 50. 17

Pro definienda declinatione Solis meridiei competente aſſumta eſt differentia meridianorum inter Lutetiam Pariſiorum et Bender $1^h. 49'$.

Reiecta prima determinatione, quippe quae ab omnibus reliquis nimium diſſentit, medium reliquarum dat 46°. 50'. 24".

Altitudines meridianae ſtellarum fixarum.

Dies obſeru.	Nomin. Stellar.	Altit. Stell. correct.	Refr. Bradl.	Decl. Stell. ad 1771.	Praec.	Aberr.	Nut.	Latitudo
3/14. Oct	Phomahan	12°. 23'. 55"	−4'. 16"	30°. 49'. 46", 6 a.	−14" 8	+ 0", 0	−6", 8	46°. 50'. 56"
4/15. —	α Aquilae	51. 27. 24	45	8. 16. 40, 6 b.	+ 6, 5	+ 10	+ 7, 9	46. 50. 26
- -	Phomahan	12. 23. 54	4. 16	30. 49. 46, 6	− 14, 9	+ 0, 3	− 6, 8	46. 50. 57
5/16. Oct.	Phomahan	12. 23. 54	- - -	- - - -	− 14, 9	+ 0, 5	− 6, 8	46. 50. 56
6/17. Oct.	Phomahan	12. 23. 54	- - -	- - - -	− 19, 9	+ 0, 7	− 6, 8	46. 50. 56
7/18. —	α Aquilae	51. 27. 35	- 45	8. 16. 40, 6	+ 6, 9	+ 9, 8	+ 8, 0	46. 50. 15
24. Oct. 4. Nou.	Phomahan	12. 23. 55	- - -	- - - -	− 15, 7	+ 3, 8	− 6, 8	46. 50. 53
——	α Andr.	71. 0. 7	19, 5	27. 49. 16, 3 b.	+ 17	+ 11, 4	+ 4, 7	46. 50. 2
——	ζ Arietis	62. 51. 29	29, 1	19. 41. 1, 7 b.	+ 15, 2	+ 7, 7	+ 1, 8	46. 50. 27
					Medium			46. 50. 38.

Hinc Latitudo vrbis Bender ſtatui deberet 46°. 50'. 32". Verum ex infra referendis eam aliquot ſecundis minuendam eſſe videbimus.

Obſer-

Obſeruationes pro Longitudine definienda.

Obſeruationes Satellitum Iouis inſtitutae ſunt tubo *Dollondiano* decem pedes longo, eodem ſcilicet quo Vir Cl. tranſitum Veneris per diſcum Solis in Iakutsk obſeruauerat.

Die $\frac{15}{26}$. Oct. obſeruata eſt Imm. III. Sat. ♃. 8^h. $11'$. $54''$ t. v.
$\frac{16}{27}$. — Em. I. Sat. ♃ 6. 24. 32
$\frac{25. \text{Oct.}}{5. \text{Nou.}}$ Em. I. Sat. ♃ 8. 20. 40.

Media harum obſeruationum praeſtantior vltima aſſeritur; verum cum huic reſpondens detur Tyrnauiae obſeruata, ab ea initium faciam.

Die $\frac{25. \text{Oct.}}{5. \text{Nou.}}$ Em. I. Satell. ♃	7^h.	$32'$.	$32''$	Tyrnauiae
	8.	20.	40	Bender
Different. merid.	0.	48.	8	
Long. Tyrnauiae a Lutet. Par.	1.	0.	55	
Longitudo Bender	1.	49.	3.	

Obſeruatio Tyrnauienſis demonſtrat momentum Tabulare a Cel. *Wargentino* computatum a coelo aberrare $-18''$; aſſumere igitur licebit ſimile momentum ad diem $\frac{16}{27}$. Oct. a Cel *Wargentino* computatum 7^h. $35'$. $10''$, totidem minutis ſecundis aberraturum; Quare

erit correctum - - -	4^h.	$35'$.	$28''$	Pariſ.
Obſeruatum eſt in Bender	6.	24.	32	
Longitudo Bender	1.	49.	4.	

 Vnde

Vnde apparet Longitudinem vrbis Bender a meridiano Parisino computatam esse $1^h.\ 49'.\ 3\frac{1}{2}''$ siue in gradibus $27°.\ 15'.\ 52''$, et a meridiano primo $47°.\ 15'.\ 52''$.

Obseruationes in Akerman institutae.

Altitudines meridianae stellarum Anno 1771.

Dies obseru.	Nomina Stellar.	Altit. Stell. correct.	Refr. Bradl.	Decl Stell. ad 1771.	Praec.	Aberr.	Nut.	Latitudo
$\frac{22}{3}$. Nou. Dec.	α Orionis	51° 9'. 30''	45'',6	7°. 20'. 50'' b	+ 1'',4	+ 2'',0	− 6'',4	46°. 12'. 1''
$\frac{23}{4}$. —	Aldebaran	59 50. 28	34, 0	16. 1. 58	+ 7, 6	+ 3, 0	− 4, 0	46. 12. 11
— —	Rigel	35. 20. 20	1. 20,	8. 28. 51,2 a	− 4, 5	− 2, 6	+ 5, 4	46. 12. 11
— —	ε Orionis	42. 27. 8	1. 2,	1. 21. 54,7 a	− 2, 5	− 2, 7	+ 5, 9	46. 12. 0
— —	α Orionis	51. 9. 32	45,	7. 20. 50	+ 1, 4	+ 2, 0	− 6, 6	46. 11. 59
							Medium	46. 12. 4.

Altitudines Solis meridianae Anno 1771.

Dies obseru	Alt. limb. ☉ super. corr.	Refr. Bradl. — parall.	½ Diam. ☉lis	Decl. ☉lis Boreal.	Latitudo
$\frac{8}{19}$. Apr.	55°. 30'. 10½''	34'',2	15'. 55'',8	11°. 25'. 47''	46°. 12'. 6'',5
$\frac{10}{21}$. —	56. 11. 15	33, 1	15. 55, 3	12. 6. 32	46. 11. 46, 0
$\frac{18}{29}$. —	58. 46. 8	30, 0	15. 53, 6	14. 41. 26	46. 11. 42, 0
$\frac{21}{2}$. Apr. Maii	59. 40. 8	29,	15. 52, 9	15. 35. 42	46. 11. 56
				Medium	46. 11. 52.

Quamobrem Latitudo vrbis Akerman rotunde statui potest $46°.\ 12'.\ 0''$.

Obser-

Obſeruationes pro Longitudine definienda.

Die $\frac{18}{29}$. April. Imm. III. Satell. ♃ $16^h. 13'. 56''$ t. v.
$\frac{20. Apr.}{1. Maii}$ Imm. II. Satell. ♃ 15. 59. 42.

Prior obſeruatio ex mente Cl. *Islenieff* praeſtantior quidem eſt poſteriori, verum deficientibus vtrique correſpondentibus poſterioris tutior eſt comparatio cum momento tabulari. Obſeruationes ſecundi Satellitis hoc anno inſtitutae et a Cel. *Wargentino* cum Tabulis collatae monſtrant menſe Iunio, Iulio et Auguſto illas a coelo aberrare $1\frac{1}{2}'$ in exceſſu, menſe vero Septembri et Octobri $2'$ et vltra. Vt igitur ex obſeruatione II. Satellitis certam quodammodo determinationem impetremus, momento tabulari ad meridianum Pariſinum a Celeberr. *Wargentino* computato $14^h. 7'. 37''$ applicemus correctionem $- 1'. 30''$, et prodibit Longitudo Akerman a meridiano Pariſino computata $1^h. 53'. 35''$ ſiue in gradibus $28°. 23'. 45''$ et a meridiano primo $48°. 23'. 45''$.

Determinatio iſta vni eidemque non ſatis certae obſeruationi ſuperſtructa eſt; in conficiendis igitur mappis Geographicis, ſi illa cum Longitudinibus aliorum locorum minus quadrare reperiatur, procul omni dubio ab ea aliquantum recedere licebit.

Declinatio acus magneticae diebus $\frac{14}{25}$ et $\frac{19}{30}$. Aprilis obſeruata eſt $9°. 25'$ verſus occidentem.

Obseruationes in Kilia Noua institutae Anno 1772.

Pro definienda Latitudine.

Dies obseru.	Altit. limb ☉ super. corr.	Refr. Bradl. — parall.	$\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis	Declinat. ☉lis	Latitudo
$\frac{2}{13}$. Maii	63°. 23′. 59″	24″, 6	15′. 50″, 4	18. 33. 57	45°. 26′. 13″
$\frac{3}{14}$. —	63. 37. 9,5		15. 50, 2	18. 48. 22	45. 26. 18

Die $\frac{2}{13}$. Maii altitudo meridiana Antaris obseruata est 18°. 47′. 41″, quae errore quadrantis — 5′. 42″ et Refractione 2′. 46″ correcta fit 18°. 39′. 13″. Declinatio Antaris ad 1772. est 25°. 54′. 23″ Austr. et ad diem obseruationis + 3″, 3 Praec. + 3″, 1 Aberr. — 5″, 1 Nut. Hinc declinatio apparens 25°. 54′. 24″, 3 et Latitudo quaesita 45°. 26′. 23″.

Quare Latitudo Kiliae Nouae rotunde statui potest 45°. 26$\frac{1}{3}$′.

Obseruationes in Ismail institutae. Anno 1772.

Pro definienda Latitudine Ismail multae institutae sunt obseruationes, ex quibus ad scopum, quem nobis proponimus, obtinendum eas tantum adhibebimus, quae nota bonitatis a Cl. *Islenieff* insignitae sunt. Ad computandam Declinationem pro meridie Ismailensi assumta est differentia meridianorum Parisiensis et Ismailiensis 1^h. 45′.

Alti-

Altitudines Solis meridianae.

Dies obferu.	Alt. limb. ☉ fuper. corr.	Refr. Bradl. — parall.	½ Diam. ☉lis	Decl ☉lis Boreal.	Latitudo
11/22. Maii	65°.27'.31''	22'', 5	15'.48'', 8	20. 32. 1''	45°.20'.41''
16/27. —	66. 21. 3	21, 5	15. 48, 0	21. 25. 33	45. 20. 39
17/28. —	66. 30. 12	21, 3	15. 47, 9	21. 35. 9	45. 21. 6
19/30. —	66. 48. 35	21, 0	15. 47, 6	21. 53. 12	45. 20. 46
22. Maii 2. Iun.	67. 13. 16	20, 6	15. 47, 2	22. 17. 34	45. 20. 27
23/3. —	67. 20. 24,5	20, 4	15. 47, 1	22. 24. 52	45. 20. 35
				Medium	45. 20. 42

Altitudines meridianae ftellarum fixarum.

Dies obferu.	Nomina Stellarum	Altit. Stell. correct.	Refr. Bradl.	Decl. Stell. ad 1772.	Praec.	Aberr.	Nut.	Latitudo
11/22. Maii	α Virginis	34°.42'.30''	1'.22'', 4	9°.57'.49'', 6 a.	+7'', 4	+6'', 2	+1'', 3	45°.30'.47''.
	ϐ Librae	36. 8. 36	1. 18, 5	8. 31. 35, 5 a.	+5, 2	+4, 8	−2, 9	45. 21. 0.
	ϐ Scorpii	25. 31. 0	1. 58, 9	19. 9. 48, 3 a	+4, 0	+3, 7	−4, 5	45. 21. 7.
	α Scorpii	18 47. 3	2. 46, 0	25. 54. 22, 9 a.	+3, 3	+3, 4	−5, 2	45. 21. 19.
19/30. Maii	α Virginis	34. 42. 10	1. 22, 4		+7, 8	+5, 5	+1, 2	45. 21. 8.
21. Maii 1. Iun.	α Virginis	34. 42. 8	1. 22, 4		+7, 9	+5, 3	+1, 2	45. 21. 10.
	α Librae	29. 35. 23	1. 40, 0	15. 4. 49, 7	+6, 2	+5, 4	−2, 1	45. 21. 18.
	ϐ Librae	36. 8 23	1. 18, 5		+5, 8	+4, 0	−3, 0	45. 21. 13.
	ϐ Scorpii	25. 21. 7	1. 58, 9		+4, 2	+4, 2	−4, 6	45. 21. 0.
	α Scorpii	18. 47. 3	2. 46, 0		+3, 7	+3, 7	−5, 3	45. 21. 18.
					Medium	-	-	45. 21. 14.

Notari hic meretur, quod Latitudo ex altitudinibus ftellarum deducta maior prodeat quam ex altitudinibus Solis; et fi omnium rationem habere velimus Latitudo Ismail media prodit 45°. 21'.

Obſeruationes pro definienda Longitudine.

Die $\frac{22.}{8.}\frac{Maii}{Iun.}$	Imm. I. Satell. ♃	$15^h. 0'. 33''$
——	Imm. II. Satell. ♃	15. 37. 44.

Prior obſeruatio praeſtantiori eſt poſteriori; nam huic obfuit lumen crepuſculare iam ſatis intenſum et ros deciduus vitrum obiectiuum tantiſper obfuſcans, quamobrem momentum Immerſionis II. Satellitis iuſto citius obſeruatum ſit neceſſe eſt.

Immerſio I. Satellitis die $\frac{22.}{2.}\frac{Maii}{Iun.}$ iuxta computum Celeberr. *Wargentini* ad meridianum Pariſinum eſt $13^h. 14'. 17''$. Vnde Longitudo Ismail a Lutetia Pariſiorum computata foret $1^h. 45'. 16''$, ſi certi eſſemus de conſenſu Tabularum cum coelo. Proxima huic Immerſioni obſeruata Pariſiis die $\frac{29.}{9.}\frac{Iun.}{Iul.}$ $15^h. 7'. 32''$ indicat Tabulas peccare integro minuto primo in defectu; quare applicata hac correctione Immerſioni ad diem 22 Maii e Tabulis depromtae, prodibit differentia meridianorum Pariſienſis et Ismailenſis $1^h. 46'. 16''$. Verum ſi conſulamus obſeruationes eiusdem Satellitis per integrum annum diverſis in locis inſtitutas, et a Celeberr. *Wargentino* cum Tabulis ſuis collatas, videbimus eas vt plurimum paucis ſecundis nunc in exceſſu nunc indefectu a coelo aberrare, et rariſſime errorem ad dimidium minuti primi aſſurgere; crediderim itaque correctionem ſupra adhibitam eſſe iuſto maiorem, et differentiam meridianorum Pariſienſis et Ismailenſis aliquot ſecundis eſſe minuendam.

Die

Die $\frac{22.}{2.}$ $\frac{Maii}{Iun.}$ Immerſio II. Satellitis Iouis iuxta Tabulas Celeberr. *Wargentini* ad meridianum Pariſinum eſt $13^h. 53'. 15''$, applicata vero correctione $- 1'. 30''$, prout videre eſt, vbi de Longitudine Akerman egimus, fit momentum Tabulare Immerſionis II. Satellitis correctum $13^h. 51'. 45''$, quod collatum cum momento in Ismail obſeruato $15^h. 37'. 44''$, dat differentiam meridianorum $1^h. 45'. 59''$.

Vnde concludere eſt Longitudinem Ismail a meridiano Pariſio computatam ſatis tuto ſtatui poſſe $1^h. 46'. 0''$ ſiue in gradibus $26°. 30'$ et a meridiano primo $46°. 30'$.

Obſeruationes in Bukoreſt inſtitutae Anno 1772.

Pro determinanda Latitudine ex obſeruationibus Solis Longitudo Bukoreſt aſſumta eſt $1^h. 34'$.

Dies obſeru.	Alt. limb. ☉ ſuper. corr.	Refr. Bradl. — parall.	$\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis	Decl. ☉lis Boreal.	Latitudo
$\frac{15}{26}$. Iun.	$69°. 11'. 5''$	$18'', 8$	$15'. 45'', 5$	$23°. 21'. 51''$	$44°. 26'. 50''$
$\frac{17}{28}$. —	69. 5. $40\frac{1}{2}$	18, 8	15. 45, 5	23. 16. 32	44. 26. 56
$\frac{19}{29}$. —	69. 2. $20\frac{1}{2}$	18, 8	15. 45, 5	23. 13. 17	44. 27. 1
$\frac{19}{30}$. —	68. 58. 50	18, 8	15. 45, 5	23. 9. 35	44. 26. 49
$\frac{22.}{2.}$ $\frac{Iun.}{Iul.}$	68. 45. 32	19, 1	15. 45, 5	22. 56. 5	44. 26. 37
$\frac{23}{4}$. —	68. 40. 22	19, 2	15. 45, 5	22. 50. 46	44. 26. 28
$\frac{1.}{12.}$ Iulii	67. 43. 55	20	15. 45, 8	21. 54. 23	44. 26. 35
				Medium	44. 26. 45.

Alti-

Altitudines meridianae ſtellarum fixarum.

Dies obſer.	Nomina Stellarum	Altit. Stell. correct.	Refr. Bradl.	Decl. Stell. ad 1772.	Praec.	Aberr.	Nut.	Latitudo
$\frac{16}{27}$. Iun.	ζ Librae	37°. 2′.14″	1′.15″,7	8°.31′.35″,6 A	+6″, 8	+1″, 5	−3″,2	+44°. 27′.21″
—	ζ Scorpii	26. 24. 39	1. 53, 7	19. 9. 48, 3	+5, 2	+3, 5	−4, 7	44 27. 23
—	α Scorpii	19. 40. 49	2. 38,	25. 54 22, 9	+4, 4	−3, 5	−5, 4	44. 27. 31
—	α Aquilae	53. 50. 52	41,	8 16. 49, B	+4, 1	+0, 2	+8, 6	+44. 26. 50
$\frac{18}{29}$. Iun	ζ Scorpii	26. 24. 38	1. 53, 7	19. 9. 48, 3	+5, 3	+3, 4	−4, 7	+44. 27. 24
	α Scorpii	19. 40. 51½	2. 38,	25. 54. 22, 9	+4, 4	+3, 8	−5, 5	44. 27. 28
	α Aquilae	53. 50. 49	41,	8. 16. 49	+4, 1	+0, 4	+8, 6	44 26. 54
					Medium			44. 27. 16

Obſeruationes ſtellarum fixarum praeſertim eae, quae in minoribus altitudinibus ſunt captae, conſtanter minorem dant Latitudinem, quam obſeruationes in maioribus altitudinibus inſtitutae; vnde concludere licet aut Tabulam refractionis a me adhibitam his locis non conuenire, aut, quod veroſimilius eſt, errorem quadrantis non in omnibus punctis eſſe eundem. Deficientibus vero obſeruationibus, ex quibus certi quid hac de re concludere liceat, illam Latitudinem pro vera aſſumere conſultius eſt, quae prodit ex obſeruationibus captis in maioribus altitudinibus.

Obſeruationes pro definienda Longitudine.

Die $\frac{16}{27}$. Iun. Imm. II. Satell. ♃ 12^h. 31$'$. 4$''$ t. v.

$\frac{30. \text{Iun.}}{11. \text{Iul.}}$ Imm. I. Satell. ♃ 13. 6. 53 obſeru. bon.

Obſeruatio II. Satellitis collata cum momento Tabulari a Celeb. *Wargentino* computato 10^h. 39$'$. 39$''$ dat

dat differentiam meridianorum Parisiensis et Bukorestensis $1^h. 33'. 2''$; quodsi momento Tabulari $10^h. 58'. 2''$ applicemus correctionem $- 1'. 30''$, prodit differentia meridianorum quaesita $1^h. 34'. 32''$. Tutior tamen erit determinatio petita ab obseruatione primi Satellitis; nam eadem Immersio obseruata est Parisiis $11^h. 31'. 38''$; in Clugny $11^h. 31'. 57''$, vel ad meridianum Parisinum reducta $11^h. 31'. 55''$; Tyrnaviae $12^h. 32'. 25''$ vel ad meridianum Parisinum $11^h. 31'. 29''$. Ex his ternis momentis sumto medio prodit

Imm. I. Sat. die $\frac{30.\ Iun.}{11.\ Iul.}$	$11^h. 31'. 41''$	Parisiis
Eadem obseruata est	13. 6. 53	Bukoresti
Differentia meridianorum	1. 35. 12,	

Ex his sequitur Latitudinem Bukoresti statui debere $34°. 26'. 45''$; Longitudinem vero a meridiano Parisino computatam $23°. 48'$, vel a meridiano primo $43°. 48'$.

Declinatio acus magneticae Bukoresti die $\frac{24.\ Iun.}{5.\ Iul.}$ obseruata est $11°. 36\frac{1}{2}'$ versus occidentem.

Determinatio Latitudinis Brahilow.

Die $\frac{8}{19}$. Iulii obseruata est maxima altitudo Lucidae Lirae $83°. 20'. 23''$, quae refractione correcta $- 7''$ fit $83°. 20'. 16''$. Est autem declinatio stellae ad initium Anni 1772. $38°. 34'. 57'',6$ Bor. Praec. ad diem obseruationis $+ 1',7$ Aberr. $+ 6'',7$ Nut. $+ 8'',5$, hinc declinatio apparens $38°. 35'. 14'',5$, vnde Latitudo Brahilow $45°. 14'. 58\frac{1}{2}''$.

Eodem die obſeruata eſt maxima altitudo Lucidae Aquilae 53°. 2'. 18'', quae refractione 42'', 6 correcta fit 53°. 1'. 35'', 4. Declinatio ſtellae ad initium Anni 1772. eſt 8°. 16'. 48'', 9 Bor. cui applicata Praec. + 4'', 4, Aberr. + 3'', 8 Nut. + 8'', 7 prodit declinatio apparens ad diem obſeruationis 8°. 17'. 5'', 8 et Latitudo quaeſita 45°. 15'. 31'', 4.

Die $\frac{9}{20}$. Iulii maxima altitudo limbi Solis ſuperioris obſeruata eſt 65°. 35'. 10'' quae refract. — parall. 33'' correcta prodit 65°. 34'. 47''; hinc demta ½ Diam. ☉lis 15'. 46'' fit altitudo centri ☉lis 65°. 19'. 1''; et cum declinatio ☉lis pro meridie Brahilow fit circiter 20°. 34'. 3'' Bor. prodit Latitudo Brahilow 45°. 15'. 2''.

Sumto medio fit Latitudo Brahilow, 45°. 15'. 20''.

Obſeruationes in Foktzani inſtitutae Anno 1772.

Pro definienda Latitudine.

Dies obſeru.	Altit. limb. ☉ ſuper. correct.	Refr. Bradl. — parall.	½ Diam. ☉lis	Decl. ☉lis Boreal.	Latitudo
$\frac{19}{30}$. Iulii	63°. 0'. 3''	25, 3	15'. 47'', 6	18°. 22'. 48''	45°. 38'. 58''
21. Iul. 1. Aug.	62. 30. 3	25, 8	15. 47, 6	17. 52. 42	45. 38. 53
$\frac{23}{3}$. —	61. 58 55,5	26, 4	15. 47. 9	17. 21. 24	45. 38. 43
$\frac{24}{4}$. —	61. 42. 57	26, 7	15. 48, 1	17. 5. 23	45. 38. 41
$\frac{25}{5}$. —	61. 26. 18	27, 0	15. 48, 2	6. 49. 5	45. 39. 3
$\frac{26}{6}$. —	61. 10. 20	27, 6	15. 48, 3	16. 32. 30	45. 38. 26
31. Iul. 11. Aug.	59. 43. 0,5	29, 1	15. 49, 3	15. 5. 42	45. 39. 0

Reiecta penultima prodit Medium 45 38. 53

Altitu-

Altitudines Stellarum meridianae.

Dies obſeru	Nomin. Stellar.	Altit. Stell. correct.	Refr. Bradl.	Decl. Stell. ad 1772.	Praec.	Aberr.	Nut.	Latitudo
18/29. Iul	α Aquil.	52°. 39′. 5″,5	43″	8°. 16′. 49.	+ 4″, 8	+ 5″, 4	+ 8″, 7	45°. 38′. 46″
21. Iul. 1. Aug	α Lirae	82. 56. 38, 0	7	38. 34. 55, 8	+ 1, 4	+ 9, 8	+ 8, 6	46. 38. 45
	α Aquil.	52. 39. 2.	45	8. 16. 49.	+ 4, 8	+ 5, 7	8, 7	45. 38. 49
26. Iulii 6. Aug.	α Lirae	82. 56. 23.	7	38. 34. 55, 8	+ 1, 4	+ 11, 0	8, 6	45. 39. 0
						Medium		45. 38. 50.

Vnde concludere licet Latitudinem Foktzani ſtatui poſſe 45°. 38′. 50″.

Obſeruationes pro Longitudine definienda.

Die 18/29. Iulii Imm. II. Satell. ♃ 12^h. 18′. 22″ *bon.*
23. Iul. / 3. Aug. Imm. I. Satell. - - - 14. 20. 50 *opt.*
25/5. — Imm. II. Satell. - - - 14. 56. 4 *bon.*
30/10. — Imm. I. Satell. - - - 15. 15. 28 *ſubdub.*

Cum omnibus hic recenſitis obſeruationibus dentur correſpondentes, facile erit ex iis colligere Longitudinem, quam quaerimus.

		diff. mer.
Die 18/29. Iul. Imm. II. Sat. obſeru. eſt Pariſiis	10^h. 39′. 39″	
Clugny	10. 39. 55	1″, 8 or.
Stockholmiae	11. 31. 35	1^h. 2′. 58″ or.
Petropoli	12. 31. 35	1. 51. 58. or.

Momentis his reductis ad meridianum Pariſinum, et ex omnibus ſumto medio prodit

Imm. II. Sat. die 18/29. Iulii 10. 39. 41. Pariſiis
Eadem obſeruata eſt 12. 18. 22. Foctzani

I. Differentia meridianorum 1. 38. 41.

Die $\frac{27.}{3.}$ $\frac{\text{Iul.}}{\text{Aug.}}$ Imm. I. Sat. obseruata est	$13^h. 33'. 29''$	Petropoli
	13. 20. 50	Foctzani
Differentia meridianorum	0. 12. 39	
Longitudo Petropolis	1. 51. 58	
II. Different. merid. Paris. et Foctzan.	1. 39. 19.	

Die $\frac{25.}{5.}$ $\frac{\text{Iul.}}{\text{Aug.}}$ Imm. II. Sat. obseruata est Paris.	$13^h. 17. 26''$	Diff. mer.
Clugny	13. 17. 36	
Greifswaldiae	14. 1. 25	$0^h. 44'. 15''$
Stockholmiae	14. 20. 19	

Ope differentiae meridianorum reductis his obseruationibus ad meridianum Parisinum, et ex omnibus momentis sumto medio prodit.

Imm. II. Sat. die $\frac{25.}{5.}$ $\frac{\text{Iul.}}{\text{Aug.}}$	$13^h. 17'. 26''$	Parisiis
Eadem obseruata est	14. 56. 4	Foctzani
III. Diff. merid. Paris. et Foctzan.	1. 38. 38.	

Die $\frac{30.}{10.}$ $\frac{\text{Iul.}}{\text{Aug.}}$ Imm. I. Sat. obseruata est	$13^h. 36'. 56''$	Parisiis
	13. 37. 11	Clugny
	15. 28. 26	Petropoli.

Facta reductione ad meridianum Parisinum et ex omnibus momentis sumto medio prodit

Imm. I. Sat. die $\frac{30.}{10.}$ $\frac{\text{Iul.}}{\text{Aug.}}$ ..	$13^h. 36'. 48''$	Parisiis
Eadem obseruata est	15. 15. 28	Foctzani
IV. Differ. mer. Paris. et Foctzan.	1. 38. 40.	

Sumto denique ex his quatuor determinationibus medio resultat Longitudo Foctzani a meridiano Parisino

Parisino versus ortum numerata $1^h. 38'. 50''$ et in partibus circuli $24°. 42\frac{1}{2}'$ et a meridiano primo $44°. 42\frac{1}{2}'$.

Obseruationes in Iassi institutae Anno 1772.

Pro definienda Latitudine altitudines Solis meridianae.

Dies obseru.	Alt. limb. ☉ super. corr.	Refr. Br. – parall.	$\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis	Declin. ☉lis Australis	Latitudo
$\frac{10}{21}$. Aug.	55°. 2'. 29''	43'', 8	15'. 51'', 5	11°. 54'. 39''.	47°. 8'. 37''
$\frac{12}{23}$. —	54. 21. 56	35, 8	15. 51, 7	11. 13. 59.	47. 8. 31
$\frac{13}{24}$ —	54. 1. 29	36, 1	15. 51, 9	10. 53. 23.	47. 8. 23
$\frac{16}{27}$. Aug.	52. 58. 35	37, 5	15. 52,	9. 50. 35.	47. 8. 30
				Medium	47. 8. 30

Altitudines meridianae stellarum fixarum.

Dies obseru.	Nomin. Stellar.	Altit. Stell. correct.	Refr. Bradl.	Decl. Stell. ad 1772.	Praec.	Aberr.	Nut.	Latitudo
$\frac{10}{21}$. Aug.	α Lirae	81°. 27'. 17''	8'', 6	38°. 34'. 55'', 8	–1'', 5	+ 14'', 0	+ 8'', 6	47°. 8'. 12''
——	α Aquilae	51. 9. 18	45, 7	8. 16. 49,	+ 5, 3	+ 8 0	+ 8, 7	47. 8. 39
	α Capricor.	29. 38. 55	1'. 39'', 8	13. 14. 13, 7	– 6, 6	– 4, 8	– 8, 5	47. 8. 52
$\frac{12}{23}$. Aug.	α Lirae	81. 27. 19	- - -	- - - -	+ 1, 5	+ 14, 3	+ 8, 6	47. 8. 10
	α Aquilae	51. 9. 18	- - -	- - - -	+ 5, 4	+ 8, 4	+ 8, 7	47. 8. 38
	α Capricor.	29. 38. 56	- - -	- - - -	– 6, 7	– 4, 8	– 8, 5	47. 8. 50

Hic rursum idem euenit, quod supra de obseruationibus in minoribus altitudinibus captis notauimus; reiectis itaque determinationibus ab obseruationibus α Capricorni petitis, Latitudo Iassi ex obseruationibus stellarum prodit $47°. 8'. 25''$. Hinc Latitudo Iassi rotunde statui potest $47°. 8\frac{1}{2}'$.

Obſeruationes pro Longitudine definienda.

Die $\frac{18}{29}$. Aug. Em. III. Sat. Iouis $15^h. 32'. 15''$ t. v.
— $\frac{19}{30}$. Aug. Em. II. Sat. Iouis 15. 4. 7.

Cum obſeruationi II. Satellitis detur reſpondens Tyrnauiae inſtituta, obſeruationi III. hic non immorabimur.

Die $\frac{19}{30}$. Aug. Em. II. Sat.	$14^h. 24'. 23''$	Tyrnauiae
Eadem obſeruata eſt	15. 4. 7	in Iaſſi
Differ. meridian.	$0^h. 39' 44''$	
Longitudo Tyrnauiae	1. 0. 55	
Longitudo Iaſſi a Lut. Par.	1. 40. 39.	

Eadem in partibus circuli $25°. 9'. 45''$ et a meridiano primo computata $45°. 9'. 45''$.

OBSER-

OBSERVATIONES PEKINI CHINARVM INSTITVTAE EXCERPTAE EX LITTERIS A R. P. *COLLAS* AD *STEPHANVM RVMOVSKI* ANNO 1772. DIE 5. MAII DATIS.

Mitto tibi obſeruationes, quas ab initio huius Anni R. PP. *Dollierus*, *Bourgeois* et ego inſtituimus, vna cum obſeruationibus a P. *Dolliero* ſuper Cometam habitis, qui viſibilis fuit Anno 1769. menſe Auguſto, et ſub finem Octobris eiusdem Anni denuo apparuit. R. P. *Dollierus* gratias tibi agit pro litteris, quas nomine Academiae Scientiarum ad eum dediſti.

Exitum Veneris e diſco Solis Anno 1769. obſeruauimus ad Vnum idemque horologium, et in momentis contactuum ad 6'' conſenſimus. P. *Dollierus* magno numero altitudinum Solis correſpondentium in motum horologii inquiſiuit; verum facto quodam tanta perturbatio in illo eſt deprehenſa, vt nequaquam omnimoda fides obſeruationi ſit habenda. Horologium hoc ſemper pro excellenti reputauimus, et P. *Dollierus* obſeruationes inſtituens ad hunc vsque diem nihil ſimile in illo obſeruauit. Neſcimus cuinam cauſae ſubita mutatio eſt adſcribenda.

Cum Europae degerem, et Lotharingiae Muſſiponti in Vniuerſitate munere Profeſſoris Matheſeos fungerer, in obſeruatorio nouiter ibi exſtructo licet non nullas

las inſtituerim obſeruationes, verum per triennium, quod hic tranſegi, iisdem nusquam vacare mihi licuit; a laboribus Aſtronomicis detinuit me praecipue ſtudium linguae Chinarum, cuius cognitio a viro iam triginta quinque annos nato, non niſi magno cum labore acquiritur. P. *Dolliero* muneri miſſionarii praecipue intento, itidem non ſuppedit tempus quod Aſtronomiae impendat.

Occupationes noſtrae non permiſere nobis obſeruationibus iſtis reductiones adiungere, nec ex iisdem conſequentias elicere, curabo impoſterum, ſi otium ſuppetat, vt melius officio meo fungar. Venio nunc ad ipſas obſeruationes, quae ſunt quinque occultationes ſtellarum fixarum a Luna.

In obſeruationibus his vſi ſumus horologio a *Iuliano le Roi* elaborato, et collocato in conclaui meo ad ſuperficiem ſoli pro more Chinarum exſtructo: ante conclaue eſt area domus, ſatis commoda ad obſeruationes inſtituendas. Ibi poſitus eſt quadrans circuli trium pedum inſeruiens ad capiendas altitudines Solis correſpondentes, et nulla obſeruatio facta eſt, quin ſtatus horologii per altitudines Solis correſpondentes fuerit exploratus, ex quibus nunc meridies ipſius diei, in quem obſeruatio cadit et diei praecedentis, nunc meridies et media nox fuere concluſi. Praeterea interuallo, quod ab vna obſeruatione ad alteram intercedebat, capiebam multoties altitudines Solis correſpondentes, vt certior euaderem de vniformitate motus horologii, ex quibus per-

perſpexi horologium non niſi leuibus pro ratione temperiei mutationibus eſſe obnoxium. Meliori igitur cum cucceſſu tranſitum Veneris per diſcum Solis obſeruauiſſemus, ſi hoc, non illo, quod virga effectum a dilatione proficiſcentem corrigente inſtructum eſt, vſi fuiſſemus, et quod id circo P. *Dollierus* praeferendum eſſe cenſuit.

Occultatio Spicae Virginis 1772. die 26. Ian. mane.

Immerſionem poſt limbum Lunae lucidum P. *Bourgeois* et ego obſeruauimus $5^h. 28'. 49''$. t. v. In momento Immerſionis ad ſecundum vsque conſenſimus, et vterque vidimus ſtellam interuallo aliquot ſecundorum limbo Lunae inhaeſiſſe, poſtmodum ſubito diſparuiſſe. Emerſio iuxta obſeruationem P. *Dollieri* contigit $6^h. 33'. 37''$ t. v. P. *Bourgeois* et ego obſeruationem tubis 15 pedum inſtituimus.

Occultatio γ Scorpionis die 29. Ian. mane.

Immerſio ſtellae non eſt obſeruata; Emerſio vero ad limbum Lunae obſcurum ſecundum obſervationem P. *Bourgeois* et meam contigit $5^h. 34'. 10''$. t. v.

Occultatio α Librae die 23. Februarii.

Immerſionem P. *Dollierus* tubo 15 pedum obſeruauit $11^h. 46'. 54''\frac{1}{2}$, Luna prope horizontem exiſtente et limbo eius vndulante, interim tamen exiſtimat veram Immersionem tardius aliquot secundis euenisse; nam tempus immersionis annotatum est illud quo stellam conspicere desiit. Emersionem ad limbum Lunae obscurum P. *Dollierus*, *Bourgeois* et ego obseruauimus euenisse $12^h. 45'. 18\frac{1}{2}''$. t. v.

Occultatio γ Geminorum die 10. Aprilis.

P. *Dollierus Bourgeois* et ego Immersionem post limbum Lunae obscurum obseruauimus euenisse $10^h. 59'. 0\frac{1}{4}''$. t. v. Fractiones secundorum originem ducunt a reductione temporis horologii ad tempus verum; interim tamen non difficile est, vt bini obseruatores ad dimidium secundi consentiant, praesertim cum Immersionem aut Emersionem ad limbum Lunae obscurum et ad idem horologium obseruant.

Emersionem ad limbum Lunae lucidum obseruaui telescopio 30 pollicum nuper a ministro status *Bertino* ad nos misso; stellam conspexi $11^h. 46'. 12''$. t. v. a limbo Lunae iam seiunctam, sed tam exiguo interuallo, vt credam veram Emersionem contigisse certe post $11^h. 46'. 4''$ Idem sentit P. *Dollierus*, ille tubo 15 ped. stellam tardius prae me conspexit $17''$, partim ob aberrationem luminis, cui tubi antiqui sunt obnoxii, partim ob incommoditatem longos tubos tractandi.

Occultatio exiguae Stellae Piscium die 29. Aprilis mane.

Immersio non est obseruata, aut illa euenit ante ortum Lunae, aut vapores fecere, quo minus stella

ſtella prope limbum Lunae conſpici potuerit. Poſt ortum Lunae ob crepuſculum matutinum intenſius credidimus Emerſionem quoque obſeruari non poſſe: Id circo ſepoſui tubum 14 aut 15 pedes longum, cum laſſus iam eſſem ſuſtinendo illum per quartam partem horae. P. *Dollierus* obſeruans teleſcopio 30 pollicum, cum itidem de relinquendum illud in animo haberet, vidit ſtellam ad limbum Lunae obſcurum prodire $4^h. 25'. 9''$. t. v. Non obſtantibus debili ſtellae lumine et diluculo ſatis diſtincte illa conſpiciebatur, vt Emerſio cum praecisione obſeruari potuerit, et P. *Dollierus* obſeruationi non maiorem quam vnius ſecundi incertitudinem in eſſe mihi aſſeuerabat.

Obſeruaui nonnullas phaſes Eclipſeos Lunae, quae contigit die 23. Oct. Anni 1771. mediam noctem concluſi ex altitudinibus Solis correſpondentibus. En quatuor phaſes quas aſſeruandas eſſe exiſtimaui.

Initium Eclipſeos - - -	$11^h. 23'. 17''$. t. v.
Dimidium Tychonis in vmbra	11. 41. 11.
Dimidium Tychonis ex vmbra	13. 9. 47.
Finis - - - - - -	13. 39. 48.

Notum eſt initium et finem Eclipſeos magnae praecisionis non eſſe capaces, verum obſeruationem Tychonis pari fiducia, ac obſeruationem ſecundi Satellitis, adhibendam eſſe exiſtimauerim.

Finem Eclipſeos Solis, quae contigit mane die 25. Maii 1770, obſeruaui $9^h. 15'. 55\frac{1}{2}''$. t. v.

Ex altitudinibus Solis correſpondentibus die 23 et 25 captis concluſi tempus verum et motum horologii, quo nunc et poſtea vſus ſum. Initium Eclipſeos eueniſſe aeſtimaui intra $7^h. 32'$ et $7^h. 33'$. Obſeruationem inſtitui tubo 14 pedes longo.

Obſeruationes a P. *Dolliero* ſuper cometam Anno 2769. inſtitutae ſunt micrometro Anglicano nunc tubo ſex pedum, nunc quatuor pedum adaptato. Obſeruationes inſequenti tabula conſcriptae, excepta vltima, prodiere ſumendo medium duarum aut trium et interdum quatuor obſeruationum ſeſe inuicem excipientium. Durante ſecunda apparatione repetitis vicibus obſeruationes inſtituere non licuit. In prima columna indicaui numerum obſeruationum, quarum confectarium tantum a P. *Dolliero* aſſeruatum hic appono.

Dies obſeru.	*Tempus ver. ad quod refertur poſitio Cometae hic allata*	*Min. et Sec. temp. quibus Cometa ante aut poſt ſtellam appellit ad filum hor.*	*Grad. Min. et Sec. quibus Cometa Borealior aut Auſtralior eſt ſtella.*	*Stellae, cum quibus comparatio eſt inſtituta ex Tabulis Flamſtedii deſumtae.*
28. Aug. 3. *obſeru.*	$14^h. 30'. 14''\frac{1}{4}$	praec. $9'. 50''$	Bor. $0°. 19'. 26''$	Stella paulo Borealior, quam eſt binarum *u* ♉ verſus Boream ſita; deeſt in Catalogo.
29 4. *obſ.*	$13^h. 53'. 38''$	praec. $0'. 38''$	Bor. 1. 4. 22	Auſtralior et lucidior binarum *u*.
30 4. *obſ.*	12. 52. $25\frac{1}{4}$	ſequ. $1'. 5''$	Bor. 0. 3. 5	*r* Tauri
31 4. *obſ.*	12. 53. 19	ſequ. 0. 36	Auſtr. 1. 13. 5	*d* Tauri

3. Sept.

3. Sept 2. *obs.*	$15^h.\ 47'\ 33''\frac{1}{2}$	praec. $7'.\ 12''$	Bor. $0°.\ 16'.\ 6''$	γ hum. occid. Orionis
4. Sept. 4. *obs.*	14. 20. 58	sequ. 1. 51	Austr. 0. 8. 24	A Orionis sequens γ.
6. Sept. 4. *obs.*	14. 14. 28	sequ. 2. 31	Austr. 0. 29. 30	Australis binarum sub brachio sequenti Orionis.
8. 2. *obs.*	15. 29. 24	praec. 0. $17\frac{1}{2}$	Austr. 1. 21. $51\frac{1}{2}$	Gula monocerotis.
8. 2. *obs.*	15. 56. 27	sequ. 0. $10\frac{1}{2}$	Austr. 1. 22. 56	
9. - - 3. *obs.*	15. 12. 28	praec. 4. $0\frac{1}{2}$	Bor. 0. 19. 12	De quatuor in humero monocerotis omnium Australior
11. Sept. 2. *obs.*	15. 52. 57	praec. 9. 17	Bor. 0. 38. 11	Omnium Australior trianguli.
12. - - 1. *obs.*	15. 53. 32	sequ. 11. 20	Austr. 0. 33. 42	eadem.
26. Oct.	$6^h.\ 35'.\ 4''$	sequ. $4'.\ 24''$	Bor. 0. 39. 42	μ Serpentis.
31 —	6. 25. 1.	sequ. 3. 46	Bor. 0. 43. 35	Stella intra λ et ε Ophiuci, in mappa non designata.
1. Nov.	6. 37. 55	praec. 3. 50	Bor. 1. 4. 16	Stella cuius declin. in mappa posita est $1°.\ 40'$ Austr. sub brachio praecedenti Ophiuci.
3. Nov.	6. 17. 30	sequ. 7. 30	Bor. 1. 7. 11	Eadem stella quae fuit 1. Nov.

5. —	6. 34. 12	praec. 22. 37	Auſtr. 0. 28. 22	Stella Ophiuci
6. —	6.^{h} 34$'$. 12$''$	praec. 17$'$. 32$''$	Auſtr. 0 26. 28	eadem {in aequatore, cuius aſcenſio ponitur 17^h. 3$'$. Poſitio eius in Catalogo Flamſtedii et in mappis videtur minime exacta.
8. —	6. 16. 54	praec. 7. 45	Auſtr. 0. 23. 59	eadem
10. —	6. 2. 40	ſequ. 1. 23	Auſtr. 0. 21. 3	eadem
11. —	6. 7. 10	ſequ. 5. 53	Auſtr. 0. 19. 53	eadem
12. —	6. 14. 17	ſequ. 10. 7	Auſtr. 0. 18. 21	eadem
15.	6. 10. 32	ſequ. 22. 24	Auſtr. 0. 14. 0	eadem
16.	6. 6. 33	ſequ. 26. 18$\frac{1}{2}$	Auſtr. 0. 12. 18	eadem
18.	6. 4. 34	ſequ. 33. $^{48}_{58}$	Auſtr. 0. 9. 22	eadem
19.	6. 13. 47	ſequ. 37. 35	Auſtr. 0. 8. 15	eadem
20.	6. 24. 14	ſequ. 41. 12	- - - - -	eadem, declinatio non eſt obſeruata, aſcenſio vero proxime tantum
22.	6. 19. 27	ſequ. 3. 6	Auſtr. 1. 33. 8	*k* inter humerum Ophiuci et caudam Serpentis
24.	6. 21. 33$\frac{1}{2}$	ſequ. 9. 43$\frac{1}{2}$	Auſtr. 1. 28. 9	eadem
25.	6. 5. 34	ſequ. 12. 54$\frac{1}{2}$	Auſtr. 1. 27. 26	eadem
26.	6. 40. 11	ſequ. 15. 59	Auſtr. 1. 24. 57	eadem. Cometa difficile conſpiciebatur, id circo obſ. non eſt praeciſa.

In obſeruatione die 18. Nou. inſtituta dubium P. *Dolliero* ſubortum eſt, vtrum 48$''$ aut 58$''$ fuerint notanda, nam eo ipſo momento, quo obſeruatio fuerat inſcribenda, aliquis ſuperuenit. Vt ex obſeruatiovationibus P. *Dollieri* Elementa Cometae determinentur, neceſſe eſt noſſe poſitionem ſtellarum, cum quibus Cometa fuit comparatus. Nulli e nobis vacauit hoc operis ſuſcipere, tantoque minus in Cometae Elementa inquirere; procul dubio ab Aſtronomis per Europam diſperſis iam illa fuerunt definita.

EPITO-

EPITOME

OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM PETROPOLI ANNO MDCCLXXIII. SECVNDVM CALENDARIVM CORRECTVM INSTITVTARVM.

Auctore

IOANNE ALBERTO EVLER.

I. Barometrum.

Vſus ſum barometro ſimplici. Diameter tubi aliquantillum partem decimam pollicis ſuperat, et ſcala diuiſa eſt in pollices, quorum duodecim pedem regium pariſinum conſtituunt: quiuis autem iterum in viginti partes aequales ſubdiuiſus eſt; ita vt partes adeo centeſimas proxime aeſtimare facile mihi contigerit. Barometrum hoc porro in hypocauſto ad altitudinem circiter 18 pedum ſupra ſuperficiem mediam fluminis Neuae in diſtantia 5000 propemodum pedum ab eius oſtio ſuſpenſum fuerat. Pro quouis autem menſe variationes ipſas altitudinum barometricarum per lineam curuam in charta deſignaui, cuius applicatae altitudinibus ipſis, abſciſſae vero temporibus, quibus obſeruatae fuerant, correſpondent.

Menſe autem quouis elapſo, ex linea curua delineata ſequentia facillime concludere potui: ſcili-

cet

cet 1) altitudinem barometri maximam et 2) minimam: hinc 3) variationem ſeu differentiam inter altitudinem maximam et minimam; porro 4) medium ſeu ſemiſummam altitudinis maximae et minimae; denique 5) altitudinem barometri mediam, ſiue ſummam omnium altitudinum diuiſam per numerum earum.

Haec quinque momenta in tabulam ſequentem diſpoſui: vbi notandum eſt, duas priores figuras altitudinum barometricarum pollices integros deſignare, poſteriores vero partes centeſimas vnius pollicis. Tum vero monendum eſt a. m. ſignificare *ante meridiem*, p. m. vero *poſt meridiem*.

Huic tabulae adſtruxi ſecundam, quae oſtendit, per quod interuallum temporis ſtatus Barometri in quolibet menſe ſuperabat altitudines $28\frac{10}{100}$; $28\frac{5}{100}$; 28; $27\frac{95}{100}$ et $27\frac{90}{100}$ pollicum; quibus interuallis per dies et horas expreſſis adiecta eſt inſuper columna, quae indicat altitudinem, quam ſtatus barometri ſuperabat praeciſe per dimidium menſis.

Colligitur ex his tabulis, pro toto anno.

1. Altitudo maxima barometri 28. 88: menſe Nouembris die 23. hora 10' veſperi. Thermom. Delisl. 168. Coelum ſerenum. Vent. N.

2. Altitudo minima barometri 26. 85: menſe Decembris die 31. hora 6 mane. Thermom. Delisl. 152: coelum nubibus obductum. Nix copioſa et ventus valde vehemens ex regione S – W.

3. Variatio maxima 2. 03 vel $2\frac{3}{100}$ pollicum.

4. Medium inter maximam altitudinem et minimam 27. 86.

5. Altitudo media inter omnes obferuatas 28. 13.

6. Porro mercurius in tubo barometri fe fuftentabat fupra

$28\frac{10}{100}$ poll. per dies 207
$28\frac{5}{100}$ poll. per dies $227\frac{1}{2}$
28 poll. per dies $251\frac{1}{2}$
$27\frac{95}{100}$ poll. per dies $272\frac{1}{2}$ et fupra
$27\frac{90}{100}$ poll. per dies 292.

Vnde concluditur mercurium fe fuftentaffe per interuallum dimidii anni vel $182\frac{1}{2}$ dierum fupra altitudinem $28\frac{16}{100}$ poll. quae altitudo non valde differt a media.

Comparatione autem facta cum conclufionibus quae ex obferuationibus praeterito anno 1772. factis erutae fuerunt, deprehendimus ftatum barometri hoc 1773. anno generatim multo altiorem fuiffe, illo praecedenti 1772. anni.

I. Baro-

I. Barometri altitudines maximae, minimae et mediae vna cum variatione maxima et ſtatu medio, pro ſingulis menſibus anni 1773, ſecundum Calendarium Gregorianum.

	Altitudo maxima		Altitudo minima		Variatio	Medium	Altitudo medi
Menſe	Dig.p.c.	die hora	Dig.p.c.	die hora	D. p. c.	Dig. p. c	Dig. pc.
Ianuar.	28. 35	6 III. a.m.	26. 98	12 meridie	1. 37	27. 67	27. 82
Februar.	28. 78	10 III.p.m.	27. 77	25 meridie	1. 01	28. 27	28. 34
Mart.	28. 55	4 IX.p m.	27 07	17 VII.p.m.	1. 48	27. 81	28. 07
April.	28. 72	18 VI. a.m.	27. 90	30 VI. a.m.	0. 82	28. 31	28. 37
Maii	28. 63	23 IX. a m.	27. 83	7 IX. p.m.	0. 80	28. 23	28. 22
Iunii	28. 52	13 IX.a.m.	27. 48	4 meridie	1. 04	28. 00	28. 03
Iulii	28. 39	20 meridie 21 VI.a. m.	27. 70	5 X. p. m.	0. 69	28. 05	28. 04
Auguſt.	28. 32	16 IX.a.m.	27. 80	1 III. p.m.	0. 52	28. 06	28. 05
Sept.	28. 48	30 II. p. m.	27. 67	13 meridie	0. 81	28. 07	28. 06
Octobr.	28. 83	9 IV. p. m.	27. 24	25 IX. p.m.	1. 59	28. 04	28. 12
Nouemb.	28. 88	23 X. p. m.	27. 97	1 X. p. m. 2 IX a. m.	0. 91	28. 43	28. 43
Decembr	28. 79	14 VI. p.m.	26. 85	31 VI. a. m.	1. 94	27. 82	28. 06
Anno 1773.	28. 88	Menſe Nouembr.	26. 85	Menſe Decembr.	2. 03	27. 86	28. 13

II. Numerus dierum quibus altitudo Barometri ſuperabat terminos quosdam circa altitudinem 28. poll.

	ſupra 28. 10		ſupra 28. 05		ſupra 28. 00		ſupra 27. 95		ſupra 27. 90		per dimidium menſis ſupra	
Menſe	Dies	horae	Dies	horae	Dies	horae	Dies	horae	Dies	horae	Dig.	p. c.
Ian.	7.	0	7.	15	10.	3	13.	12	14.	21	27.	87
Febr.	25.	18	26.	3	26.	12	26.	21	27.	3	28.	30
Mart.	17.	3	17.	15	18.	15	20.	9	22.	6	28.	16
April.	25.	15	27.	12	28.	3	29.	6	30.	0	28.	42
Maii	23.	21	24.	9	27.	18	28.	18	29.	12	28.	27
Iun.	14.	0	16.	0	17.	0	18.	3	19.	3	28.	07
Iul.	11.	15	14.	18	16.	3	18.	15	23.	6	28.	02
Aug.	10.	0	14.	12	22.	6	25.	21	28.	6	28.	04
Sept.	12.	21	14.	9	15.	15	17.	9	19.	18	28.	03
Oct.	18.	15	21.	9.	23.	0	24.	3	26.	9	28.	13
Nov.	28.	3	28.	18	29.	3	30.	0	30.	0	28.	37
Dec.	12.	12	14.	15	17.	6	19.	15	21.	15	28.	03
Anno 1773	207.	3	227.	12	251.	12	272.	12	292.	3	28.	16

Adiungam hic denique obſeruationes nonnullas deſcenſuum et aſcenſuum Barometri ſubitaneorum.

Menſe Ianuario.

d. 1. hora 9. p. m. 27. 30.

d. 2. hora 10. p. m. 27. 85.

Ergo

Ergo interuallo temporis 25 horarum barometrum ascendit $\frac{55}{100}$ pollicis. Coelum nubibus obductum, nix copiosa et procella e regione W.

d. 6. hora 3 mane 28. 35

d. 7. hora 9 p. m. 27. 50.

Hinc per tempus 42 horarum descendit barometrum interuallo $\frac{85}{100}$ poll. Coelum obductum, nix et ventus vehemens ex N — W.

d. 11. hora 6 p. m. 27. 53

d. 12. meridie 26. 98

d. 13. hora 9 p. m. 27. 95.

Primo ergo barometrum tempore 18 horarum per spatium $\frac{55}{100}$ poll. descendit, coelo nubibus obducto, et vento vehementer flante ex plaga N-W; vna cum pluuia ac niue abundante. Tum vero iterum per 33 horas ascendit interuallo $\frac{97}{100}$ poll. coelo existente sereno et vento e regione N — O flante.

Mense Martio.

d. 10. meridie 27. 98

d. 11. meridie 28. 50.

Consequenter tempore 24 horarum ascendit barometrum per spatium $\frac{52}{100}$ poll. Coelum erat serenum et ventus flabat ex septentrione.

d. 16. hora 9 p. m. 27. 67

d. 17. hora 8 p. m. 27. 07

d. 19. hora 9 p. m. 27. 87.

Primum ergo interuallo 23 horarum barometrum per ſpatium $\frac{6}{10}$ poll. deſcendit. Nix cecidit copioſa et procella fuit occidentalis. Tum autem tempore 49. horarum iterum per $\frac{8}{10}$ poll. aſcendit: coelo exiſtente ſereno et vento flante e ſeptentrione.

d. 27. hora 3 p. m. 27. 42
d. 29. meridie 28. 33.

Per interuallum temporis 45 horarum aſcendit igitur mercurius in barometro $\frac{91}{100}$ poll. coelum nubibus obductum, nix et ventus e regione N – O.

Menſe Aprili.

d. 27. hora 6 p. m. 28. 54
d. 29. hora 3 mane 27. 97.

Ergo tempore 33 horarum deſcendit mercurius per $\frac{57}{100}$ poll. coelum obductum, pluuia et ventus e regione W.

Menſe Iunio.

d. 7. hora 6. a. m. 28. 05
d. 8. hora 9. a. m. 27. 52.

Hinc interuallo 27 horarum deſcenſus fuit $\frac{55}{100}$ poll. Pluuia copioſa et ventus vehementiſſimus ex occcidente.

Menſe Septembri.

d. 23. media nocte 27. 68
d. 25. hora 6. p. m. 28. 38.

Aſcen-

Afcendit igitur mercurius in tubo barometri interuallo 42 horarum, per fpatium $\frac{7}{10}$ poll. Pluvia decidit et ventus e regione S — W vehementisfimus fuit.

Menfe Octobri.

d. 24. meridie 28. 20
d. 25. hora 9 p. m. 27. 24
d. 27. hora 6 a. m. 28. 35
d. 28. hora 6. a. m. 27. 88.

Primum ergo Barometrum interuallo temporis 33 horarum defcendit per $\frac{96}{100}$ poll. Pluuia copiffima, grando, et ventus occidentalis vehementiffimus: Deinde tempore 33 horarum iterum afcendit per $\frac{111}{100}$ poll. niue cadente et vento vehementer flante ex feptentrione. Denique interuallo 24 horarum rurfus defcendit per $\frac{47}{100}$ poll. nix et procella e regione N — W.

Menfe Decembri.

d. 26. hora 10 a. m. 27. 90
d. 26. hora 12 p. m. 28. 43
d. 27. hora 6 p. m. 28. 03
d. 31. hora 6. a. m. 26. 85.

Primum igitur interuallo 14 horarum afcendit barometrum $\frac{53}{100}$ poll. Deinde interuallo 18 horarum defcendit $\frac{4}{10}$ poll. Tum autem tempore 84 horarum adhuc defcendit per $\frac{118}{100}$ poll. Coelum nubibus obductum; nix copiofa, et ventus vehementiffimus tiſſimus primo e ſeptentrione, deinde e regione N – W et vltimum ad finem anni e regione S – W.

II. Thermometrum.

Adhibui Thermometrum mercurio impletum deslislianum, Petropoli factum, cuius conſtructionis principium ſatis notum eſt: indicatur ſcilicet in ſcala eius, calor aquae bullientis per ciphram et punctum congelationis naturalis per numerum 150. Tum hoc Thermometrum aëri expoſitum et in tali loco verſus boream ſemper collocatum fuit, vt ſol id nec directe nec per reuerberationem irradiare potuerit. Obſeruationes autem hoc Thermometro inſtitutas iterum in duas tabulas redigere conatus ſum, quarum prior altitudinem maximam et minimam vna cum differentia inter easdem indicat, poſterior vero ſpeciatim ſtatum frigoris et caloris pro ſingulis menſibus exhibet. Vbi monendum eſt, per ſtatum frigoris illam altitudinem minimam Thermometri intelligi, quae pro vnoquoque die plerumque tempore matutino et veſpertino obſeruatur. Similique modo ſtatus caloris cuiusuis diei ſignificabit altitudinem maximam Thermometri, vel eam quae maxima parte meridie aut ſtatim poſt meridiem notatur. His iam monitis oſtendit tabula ſecunda pro quouis menſe numerum dierum, quibus ſtatus frigoris et caloris ſuperabat terminos nonnullos in Thermometro deslisliano. Vnde patet hoc 1773 anno fuiſſe dies 148 frigidiores gradu 150, inter quos

quos 83 reperti ſunt frigidiores gradu 160, et 43 frigidiores gradu 170. Tum vero inter hos 21 dies fuiſſe, quibus frigus ſuperabat gradum 180; inter quos tandem 6 dies fuerunt frigidiores gradu 190 et 2 tantum dies frigidiores gradu 200. Sic et de ſtatu caloris.

Ex tabula priori autem intelligitur, per totum annum fuiſſe:

Altitudinem Thermometri minimam ſeu gradum frigoris maximi 203 menſe Ianuarii die 29. hora matutina VII^{ma}, Barometro $28\frac{26}{100}$; coelo exiſtente ſereno et vento leniter flante ex plaga N—O.

Altitudinem Thermometri maximam ſeu gradum caloris maximi 104 die 24 menſis Iulii, hora II^{da} poſt meridiem. Barometrum $28\frac{18}{100}$; coelum ſerenum: ventus e regione S — O.

Vnde variatio Thermometri maxima per totum annum fuit 99 grad. Deslisl.

Speciatim frigus obſeruatum fuit intra gradus

		dies
210 et 200	die 29 et 30 Ianuarii - - - -	2
200 et 190	die 23, 28, 31, Ian. et die 1 Febr.	4
190 et 180	die 2. 4. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 24. 27. Ian. die 2. 3. 4. Febr. et die 24 Decembris - - - -	15
180 et 170	die 1. 3. 5. 6. 12. 22. 26. Ian. die 12. 22. 23. 24 Febr. die 14. 19. 20. 21. 23. 29 Mart. die 23. 24 Nov. et die 15. 23. 27. Dec.	22

 Calor

Calor autem deprehensus fuit intra gradus

100 et 110	die 15. Iun. die 22. 23. 24. 25. 27. 28. 29. 31. Iulii, et die 18. 22. 23. Aug. - - - - - - -	dies 12
110 et 120	die 14. 17. Maii: die 3. 4. 13. 14. 16. 19. 20. 22. 24—30 Iunii; die 1—4. 12. 14. 18. 19. 20. 21. 26. 30. Iulii; die 1. 5. 8. 9. 14. 16. 17. 19. 20. 21. 28. 29. 31. Augusti - - - - - - -	42
120 et 130	die 15. 16. 17. 19. 20. Aprilis; die 2. 5. 6. 7. 8. 11. 12. 13. 16. 18. 20. 21. 26. 27. 28. 30. 31. Maii; die 1. 2. 5. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 17. 18. 21. 23. Iunii; die 5—11. 13. 15. 16. 17. Iulii; die 2. 3. 4. 6. 7. 10. 11. 12. 13. 15. 24. 25. 26. 27. 30. Augusti; die 1—5. 7—12. 14. 16. 18. 21. 23. 24. 25. 27 Septembris; denique die 2. 5. 6 et 7. Octobris -	84

I. Ther-

I. Thermometri altitudines minimae et maximae pro ſingulis menſibus anni 1773, ſecundum Calendarium Gregorianum.

Menſe	Altitudo minima		Altitudo maxima		Differentia
	Gradus	die hora	Gradus	die hora	Gradus
Ianuar	203	29. VII. a. m.	146	10 II. p. m.	57
Februar.	193	1. VI. a. m.	151	15, 20, 21 II. p. m.	42
Mart.	178	20. VI. a. m.	144	12, 24 II. p. m	34
April.	153	1. VI. a. m.	127	20. II. p. m.	26
Maii	148	1 VI. a. m.	118	14. II. p. m.	30
Iunii	138	5, 7, 9 VI. a. m.	108	15. II. p. m.	30
Iulii	136	8. VI. a. m.	104	24. II. p. m	32
Auguſt.	134	7, 28 VI. a. m.	107	22. II. p. m.	27
Septembr.	143	6, 7 VI. a. m.	121	10, 23 II. p. m.	22
Octobr.	160	24. VI a m.	124	7. II. p. m.	36
Nouembr.	172	24. VII. a. m.	136	1. II. p. m.	36
Decembr.	181	24. VI. a. m.	146	6. II. p. m.	35
Anno 1773.	203	Menſe Ian.	104	Menſe Iulio	99

 II.

II. Status frigoris et caloris.

Menſe	Dies quibus frigus ſuperabat gradus							Dies calidiores gradibus				
	200	190	180	170	160	150	140	110	120	130	140	150
Ian.	2	5	16	23	27	29	31					4
Febr.		1	4	8	20	28	28					
Mart.				6	15	31	31					15
Apr.						5	30			5	23	30
Maii							12		2	19	31	31
Iun.							-	1	16	29	30	30
Iulii							-	8	20	31	31	31
Aug.							-	3	16	31	31	31
Sept.							6			19	30	30
Oct.					1	7	27			4	19	28
Nov.				2	10	19	30				1	14
Dec.			1	4	10	29	31					12
Anno 1773.	2	6	21	43	83	148	226	12	54	138	196	256

Hinc comparatione facta cum ſtatu frigoris et caloris anno praecedente 1772 obſeruato, concluditur, hoc 1773 anno et frigus et calorem minorem fuiſſe illo 1772 anno. Nam anno praeterito annotauimus 236 dies frigidiores gradibus 140; 144 dies frigidiores gradibus 150; 89 dies frigidiores gradibus 160; 56 dies frigidiores gradibus 170; 25 dies frigidiores gradibus 180; 14 dies frigidiores gradibus 190 et 3 dies frigidiores gradibus 200. Similique modo deprehendimus illo anno praeterito 19 dies calidiores fuiſſe gradibus 110; 61 dies calidiolidiores gradibus 120; 121 dies calidiores gradibus 130; 205 dies calidiores gradibus 140 et 267 dies calidiores gradibus 150.

Deinde frigus maximum praeterito anno fuit 208, cum hoc anno tantum 203 graduum obseruatum fuerit; vnde propositum satis constat, quamvis differentia non magna deprehendatur.

III. Ventus et Ventorum Directiones.

Mense	Malacia	Vent. lenis	Vent. fortis	Procellosus	Nord	N-O	Ost	S-O	Süd	S-W	West	N-W	Variabilis
	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies
Ian.	6	20	3	2	6	14	—	—	—	—	3	7	1
Febr.	4	12	9	3	9	3	—	3	—	—	4	9	—
Mart.	4	14	11	2	8	2	1	2	2	6	2	5	3
Apr.	13	8	6	3	4	1	—	4	10	6	1	2	2
Maii	6	14	9	2	—	3	7	4	2	4	3	5	3
Iunii	3	13	6	8	—	1	9	1	1	5	5	7	1
Iulii	11	11	5	4	4	2	6	3	1	2	3	3	7
Aug.	7	12	8	4	2	9	1	3	3	2	4	7	—
Sept.	4	10	9	7	1	6	1	2	4	3	8	3	2
Oct.	5	7	14	5	4	2	1	1	11	3	6	3	—
Nov.	5	15	9	1	5	7	2	3	5	5	1	1	1
Dec.	—	20	7	4	5	4	1	2	1	5	9	4	—
Anno 1773	68	156	96	45	48	54	29	28	40	41	49	56	20

Vnde patet, hoc anno maxime regnasse ventum e regione N-W, tum vero ventum e regione N-O; deinde zephyrum et boream. Porro perspicitur hunc

 annum

annum aliquantillum ventosiorem fuisse anno praeterlapso 1772.

Speciatim autem hoc anno procellae flabant e regione

	dies
Nord d. 24. 25 Febr. d. 26. Octobr. d. 27. Decembr.	4
N–O d. 4. Augusti	1
Ost d. 6. Maii d. 5. 6. Iulii	3
S–O d. 19. Apr. d. 7. Maii d. 3. Iun. d. 24 Iul. d. 9. Sept. d. 16. Nov.	6
Süd d. 14. Apr. d. 23. Aug. d. 23. Sept. d. 31. Oct.	4
S–W d. 17. Mart. d. 15. Apr. d. 4. 9. Iun. d. 17. Aug. d. 10. 24. Sept. d. 11. 31. Decembr.	9
West d. 3. Ian. d. 5. 6. Iunii d. 15. Iul. d. 11. 18. 21. Sept. d. 25. Oct. d. 28 Decembr.	9
N–W d. 11. Ian. d. 13. Febr. d. 10. Mart. d. 1. 2. 30. Iun. d. 15. Aug. d. 24. 27. Oct.	9

IV.

IV. Conſtitutio coeli.

Menſe	coelum ſerenum	coelum obductum	Nebuloſum	Pluuia	Nix
	dies	dies	dies	dies	dies
Ianuar.	12.	13.	5.	2	11.
Februar.	3.	18.	8.	—	11.
Mart.	13.	10.	6.	—	9.
April.	16.	8.	3.	4	1.
Maii	11.	4.	1.	13	—
Iunii	10.	11.	1.	14	—
Iulii	17.	3.	3.	12	—
Auguſt	11.	8.	2.	15	—
Sept.	9.	10.	5.	19	—
Octobr.	12.	8.	7.	9	4.
Nouembr.	11.	14.	5.	6	7.
Decembr.	2.	17.	2.	2	14.
Anno 1773.	127.	124.	48.	96	57.

Plures igitur dies ſereni fuerunt, quam anno praeterito, vbi eorum tantum 102 numerabantur. Ac numerus dierum, quibus pluuia et nix cecidit, multo minor deprehenditur illo, anno praeterlapſo: pluit ſcilicet tunc per 114 dies et ninxit per 61 dies.

V. Reliqua phaenomena.

Grando decidit diebus 3; die ſcilicet 6 Maii; porro die 17 Auguſti et die 25 Octobris.

Aurorae

Aurorae boreales obſeruatae fuerunt 31; et quidem 18 perlucidae d. 16. 17. 18. 28. 30 Ianuarii; d. 1. 21 Febr. d. 13. 16 Martii, d. 27 Aprilis, d. 15 Auguſti, d. 27 Sept. d. 20 Octobris d. 15. 17. 18 Nouembris et d. 3. 14. Decembris. Porro 13 aurorae boreales debiliores d. 15. 27 Ianuar. d. 12. 21 Martii, d. 12. 18. 23. 24 Aprilis; d. 10. Sept. d. 9. 21 Octobris et d. 14. 16. Nouembris.

Tonuit 16es; die 7 Maii; d. 15. 16. 27. 28. 29 Iunii; d. 4. 24. 25. 26. 29. 31 Iulii; d. 1 17. 18 et 23 Auguſti.

Parhelia obſeruata fuerunt 5, ſcilicet d. 2. 15. 26. 31 Ianuarii; et d. 24 Februarii.

Halo Lunae bis; d. 27 Ianuarii et d. 1 Februarii.

Flumen Neua a glacie liberatum fuit die 16 Aprilis; et die 19 Nouembris maxima parte, die 23 Nouembris vero vbique glacie obducebatur.

I. Ta-

I. Tabula exhibens comparationem Thermometri Deslisliani cum Reaumuriano, cuius ope gradus Deslisliani facillime reducuntur ad reaumurianos et vice versa.

Deslisle	Reaum	Deslisle	Deslisle	Reaum.	Deslisle	Deslisle	Reaum.	Deslisle
150 −	0	150 +	170	10.7	130	190	21.3	110
151	0.5	149	170.6	11	129.3	191	21.9	109
151.9	1	148.1	171	11.2	129	191.2	22	108.8
152	1.1	148	172	11.7	128	192	22.4	108
153	1.6	147	172.5	12	127.5	193	22.9	107
153.7	2	146.3	173	12.3	127	193.1	23	106.9
154	2.1	146	174	12.8	126	194	23.5	106
155	2.7	145	174.4	13	125.6	195	24	105
155.6	3	144.4	175	13.3	125	196	24.5	104
156	3.2	144	176	13.9	124	196.9	25	103.1
157	2.7	143	176.2	14	123.8	197	25.1	103
157.5	4	142.5	177	14.4	123	198	25.6	102
158	4.3	142	178	14.9	122	198.7	26	01.3
159	4.8	141	178.1	15	121.9	199	26.1	101
159.4	5	140.6	179	15.5	121			
160	5.3	140	180	16	120	200	26.7	100
161	5.9	139	181	16.5	119	200.6	27	99.4
161.2	6	138.8	181.9	17	118.1	201	27.2	99
162	6.4	138	182	17.1	118	202	27.7	98
163	6.9	137	183	17.6	117	202.5	28	97.5
163.1	7	136.9	183.7	18	116.3	203	28.3	97
164	7.5	136	184	18.1	116	204	28.8	96
165	8	135	185	18.7	115	204.4	29	95.6
166	8.5	134	185.6	19	114.4	205	29.3	95
166.9	9	133.1	186	19.2	114	206	29.9	94
167	9.1	133	187	19.7	113	206.2	30	93.8
168	9.6	132	187.5	20	112.5	207	30.4	93
168.7	10	131.3	188	20.3	112	208	30.9	92
169	10.1	131	189	20.8	111	208.1	31	91.9
170	10.7	130	189.4	21	110.6	209	31.5	91
			190	21.3	110	210	32	90

Gradus Deslisliani ad partem finistram respondent gradibus reaumurianis infra punctum congelationis naturalis, ad dextram vero gradibus iisdem supra punctum congelationis.

II. Reductio pollicum Parisinorum ad Londinenses.

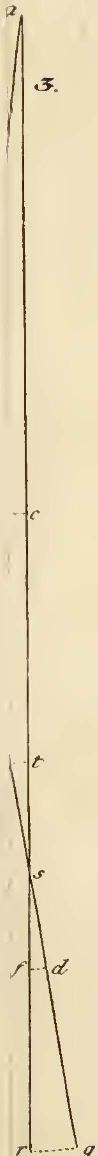
Parisin poll. lin.	Londin. poll. lin.
26. 9	28. 8. 4
26. 10	28. 8. 5
26. 11	28. 8. 5
27. 0	28. 9. 6
27. 1	28 10. 7
27. 2	28. 11. 7
27. 3	29. 0. 8
27. 4	29. 1 9
27. 5	29. 2. 9
27. 6	29. 4. 0
27. 7	29. 5. 1
27. 8	29 6. 1
27. 9	29. 7. 2
27. 10	29. 8. 3
27. 11	29. 9. 3
28. 0	29. 10. 4
28. 1	29. 11. 4
28. 2	30. 0. 4
28. 3	30. 1. 5
28. 4	30. 2. 5
28. 5	30. 3. 6
28. 6	30. 4. 7
28. 7	30. 5. 8
28. 8	30. 6. 9
28. 9	30. 7 9
28. 10	30. 9. 0
28 11	30. 10. 1
29. 0	30. 11. 2

Parisin. poll.	Londin. poll.	Parisin. poll.	Londin. poll.
26. 85	28. 64	28. 05	29. 92
26. 90	28. 69	28 10	29. 97
26. 95	28. 74	28. 15	30. 02
27. 00	28. 80	28. 20	30. 08
27. 05	28. 85	28. 25	30. 13
27. 10	28. 90	28. 30	30. 19
27. 15	28. 96	28. 35	30. 24
27. 20	29. 01	28. 40	30. 29
27. 25	29. 06	28. 45	30. 35
27. 30	29. 12	28. 50	30. 40
27. 35	29. 17	28. 55	30. 45
27. 40	29. 22	28. 60	30. 51
27. 45	29. 28	28. 65	30. 56
27. 50	29. 33	28. 70	30. 61
27. 55	29. 38	28. 75	30. 67
27. 60	29. 44	28. 80	30. 72
27. 65	29. 49	28. 85	30. 77
27. 70	29. 54	28 90	30. 82
27. 75	29. 60	28. 95	30. 88
27. 80	29. 65	29. 00	30. 93
27. 85	29. 70	29. 05	30. 98
27. 90	29. 76	29. 10	31. 04
27. 95	29. 81	29. 15	31. 09
28. 00	29. 87	29. 20	31. 14

III.

III. Reductio partium centeſimarum pollicis ad lineas ſiue partes duodecimales pollicis.

Partes centes.	Lineae	Partes centes.	Lineae	Partes centes.	Lineae	Partes centes.	Lineae	Partes centes.	Lineae
1	0. 1	21	2. 5	41	4. 9	61	7. 3	81	9. 7
2	0. 2	22	2. 6	42	5. 0	62	7. 4	82	9. 8
3	0. 3	23	2. 7	43	5. 1	63	7. 5	83	9. 9
4	0. 5	24	2. 9	44	5. 3	64	7. 7	84	10. 1
5	0. 6	25	3. 0	45	5. 4	65	7. 8	85	10. 2
6	0. 7	26	3. 1	46	5. 5	66	7. 9	86	10. 3
7	0. 8	27	3. 2	47	5. 6	67	8. 0	87	10. 4
8	0. 9	28	3. 3	48	5. 7	68	8. 1	88	10. 5
9	1. 1	29	3. 5	49	5. 9	69	8. 3	89	10. 7
10	1. 2	30	3. 6	50	6. 0	70	8. 4	90	10. 8
11	1. 3	31	3. 7	51	6. 1	71	8. 5	91	10. 9
12	1. 4	32	3. 8	52	6. 2	72	8. 6	92	11. 0
13	1. 5	33	3. 9	53	6. 3	73	8. 7	93	11. 1
14	1. 7	34	4. 1	54	6. 5	74	8. 9	94	11. 3
15	1. 8	35	4. 2	55	6. 6	75	9. 0	95	11. 4
16	1. 9	36	4. 3	56	6. 7	76	9. 1	96	11. 5
17	2. 0	37	4. 4	57	6. 8	77	9. 2	97	11. 6
18	2. 1	38	4. 5	58	6. 9	78	9. 3	98	11. 7
19	2. 3	39	4. 7	59	7. 1	79	9. 5	99	11. 9
20	2. 4	40	4. 8	60	7. 2	80	9. 6	100	12. 0



3.

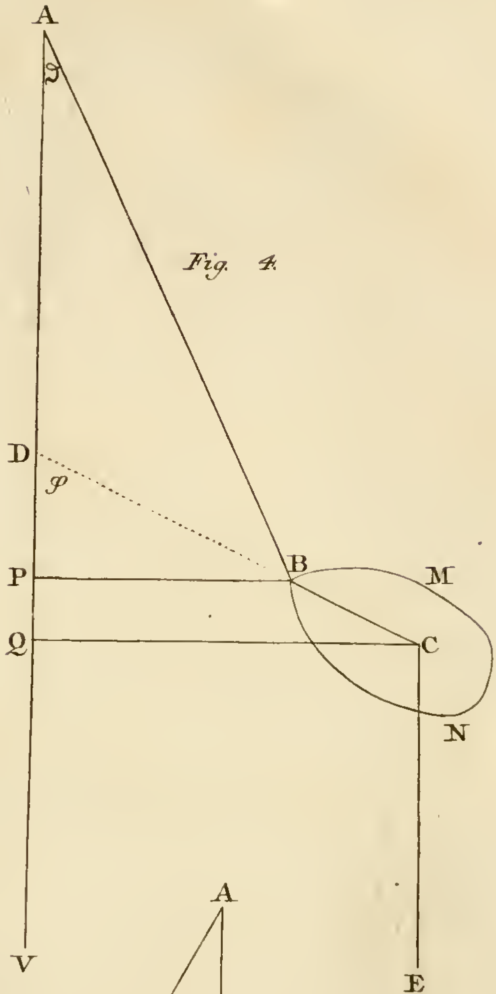


Fig. 4.

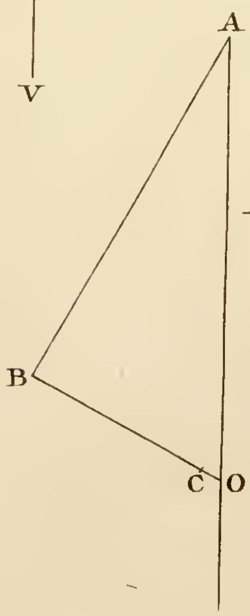


Fig. 5.

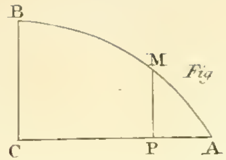


Fig 1.

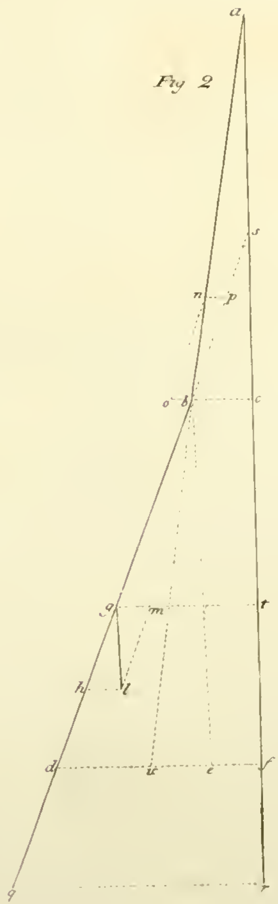


Fig 2.

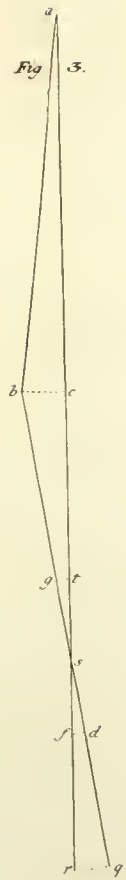


Fig 3.

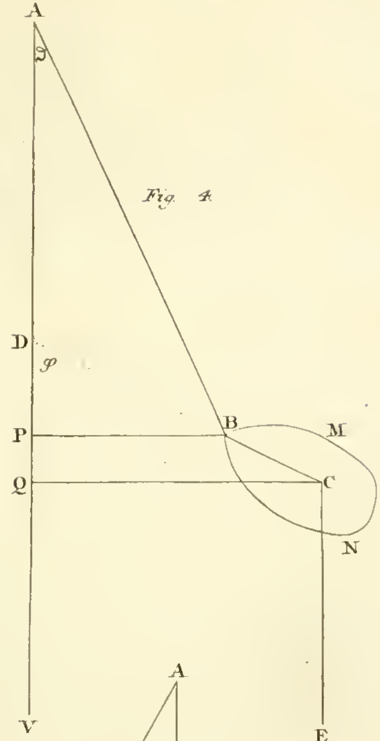


Fig. 4.

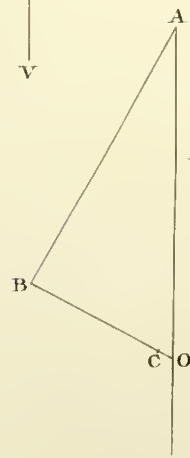


Fig 5.

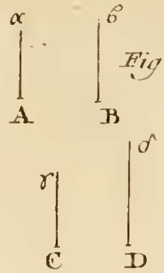
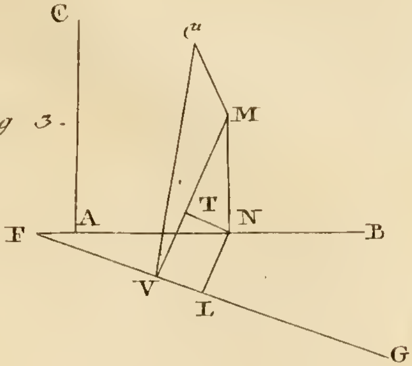


Fig 2.

Fig 3.


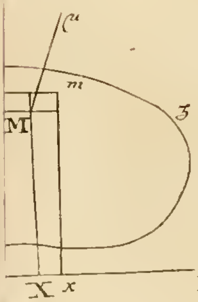


Fig 4.

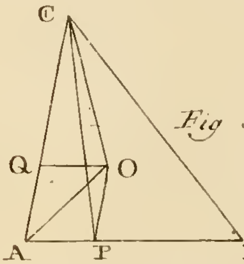
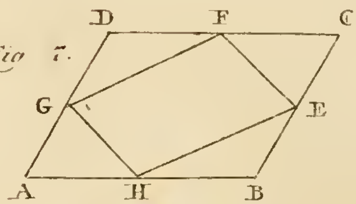


Fig 5.

Fig 6.

Fig 7.


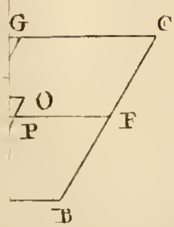


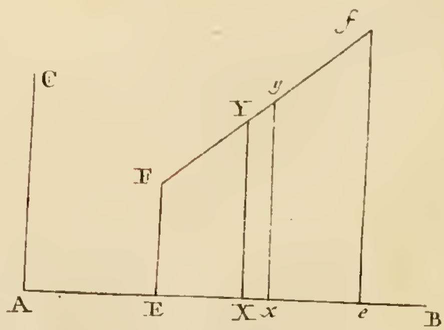
Fig 9.


Fig. 1.

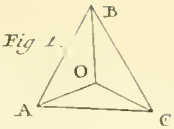


Fig. 2.

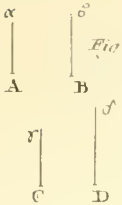


Fig. 3.

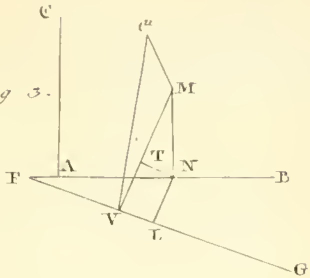


Fig. 4.

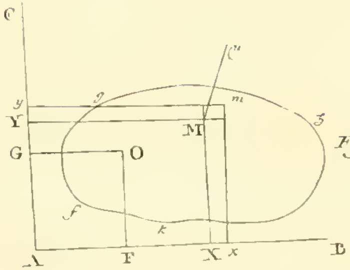


Fig. 5.

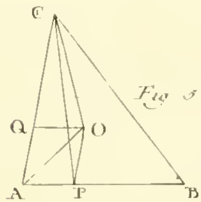


Fig. 6.

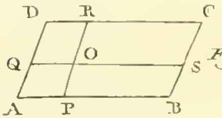


Fig. 7.

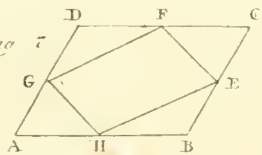


Fig. 8.

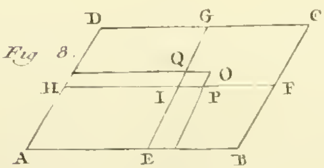
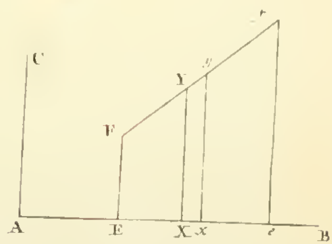


Fig. 9.



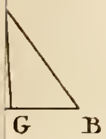
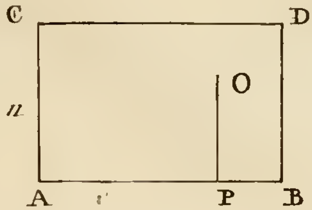
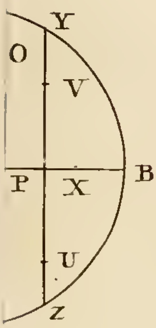


Fig. 11





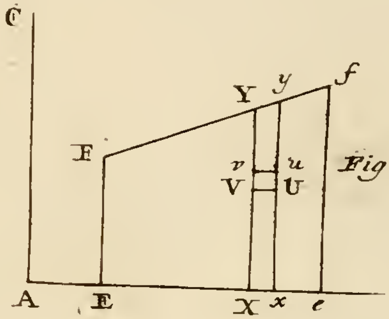
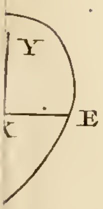


Fig. 18



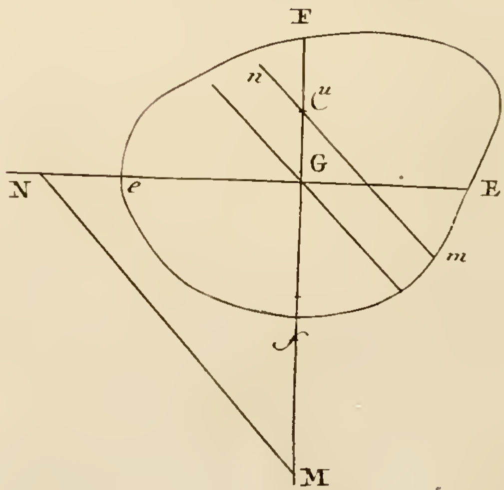


Fig. 15

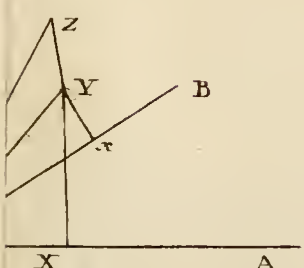


Fig 10

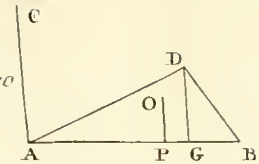


Fig. 11

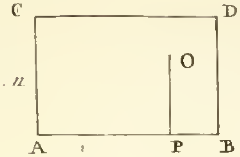


Fig. 12

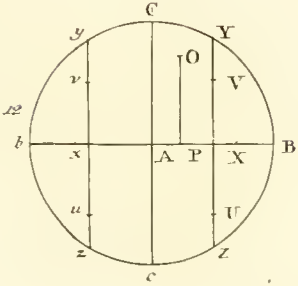


Fig. 13

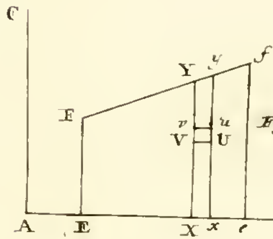


Fig. 14

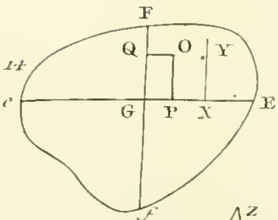


Fig. 15

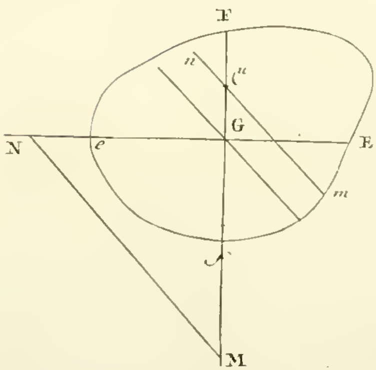


Fig 16

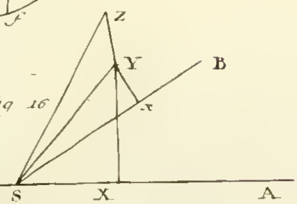


Fig. 1.

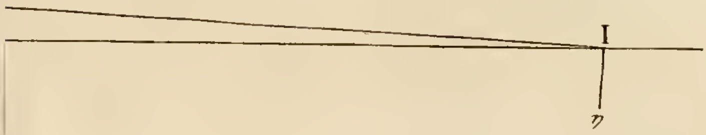


Fig. 2.

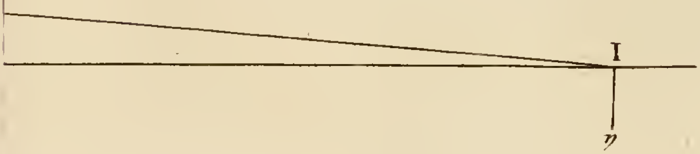


Fig. 3.

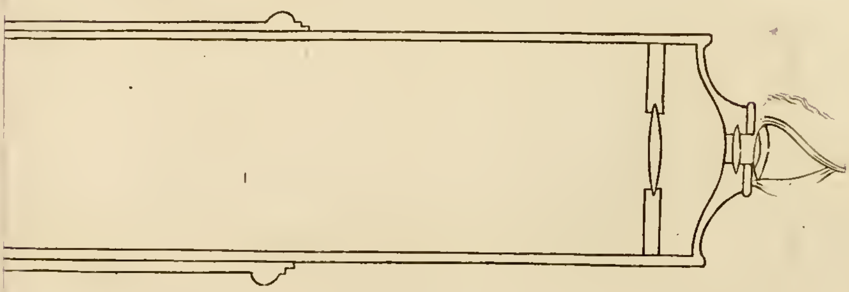


Fig. 4.

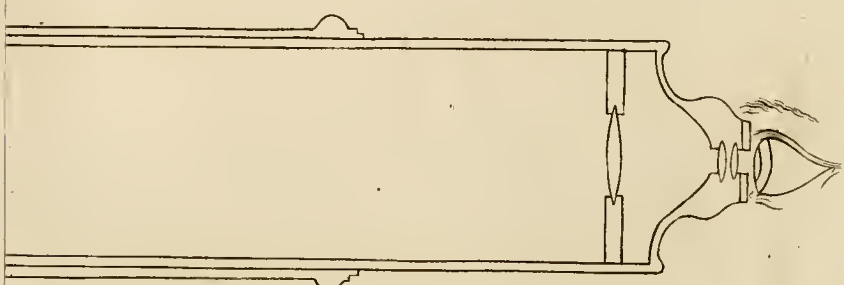


Fig. 1.

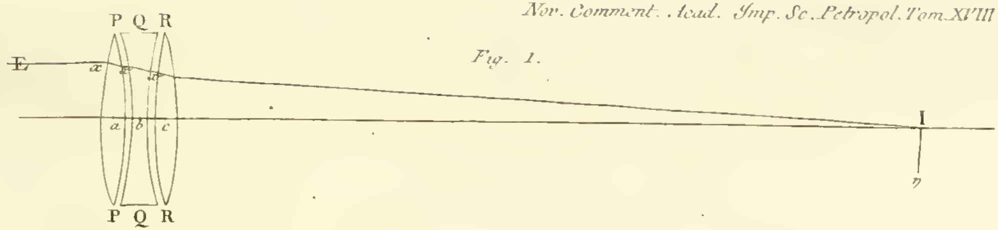


Fig. 2.

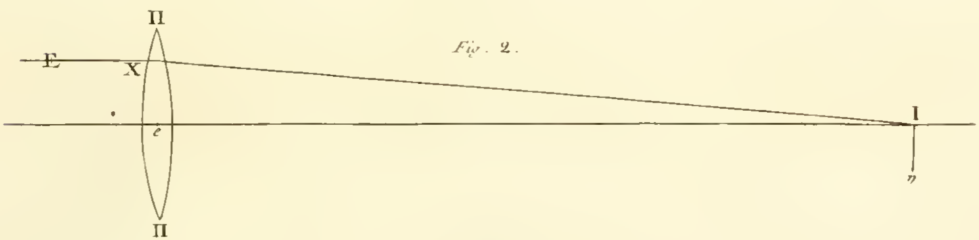


Fig. 3.

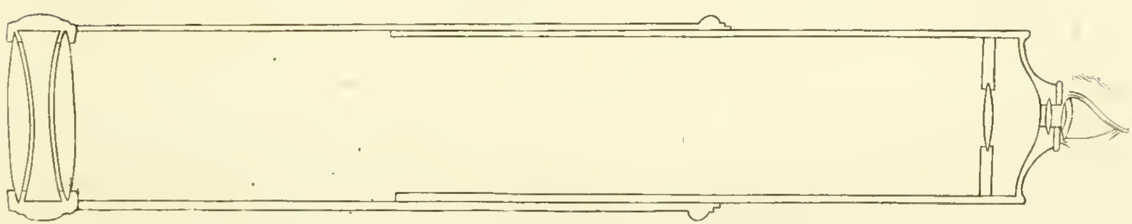


Fig. 4.

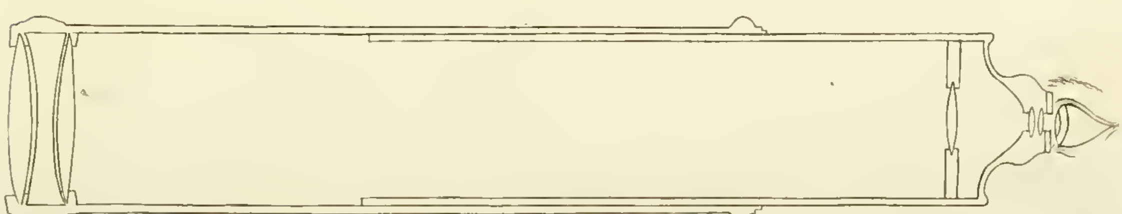
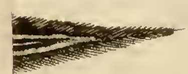


Fig. 3.



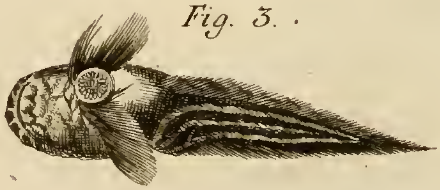
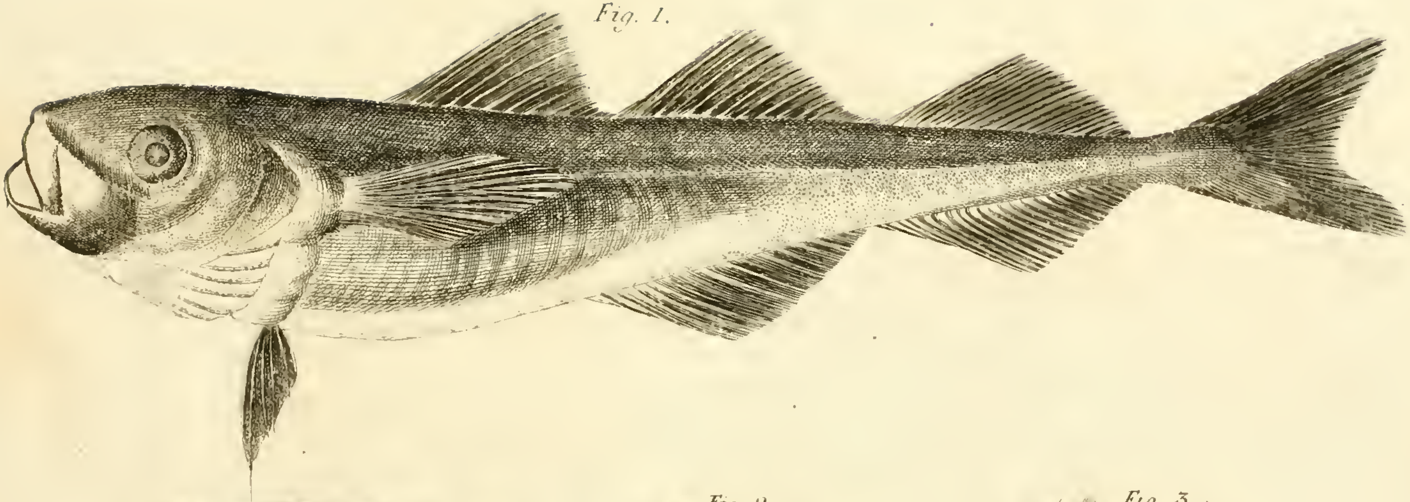


Fig. 1.



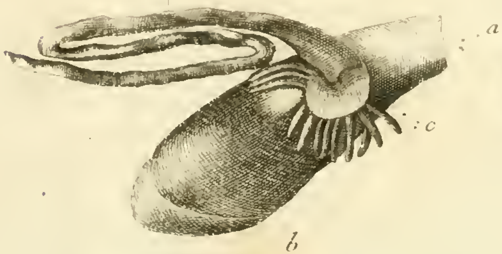


Fig. 2.

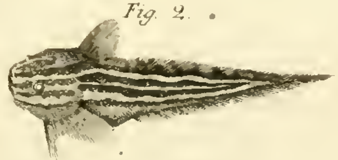


Fig. 3.

Fig. 1

Fig. 2

Fig 3

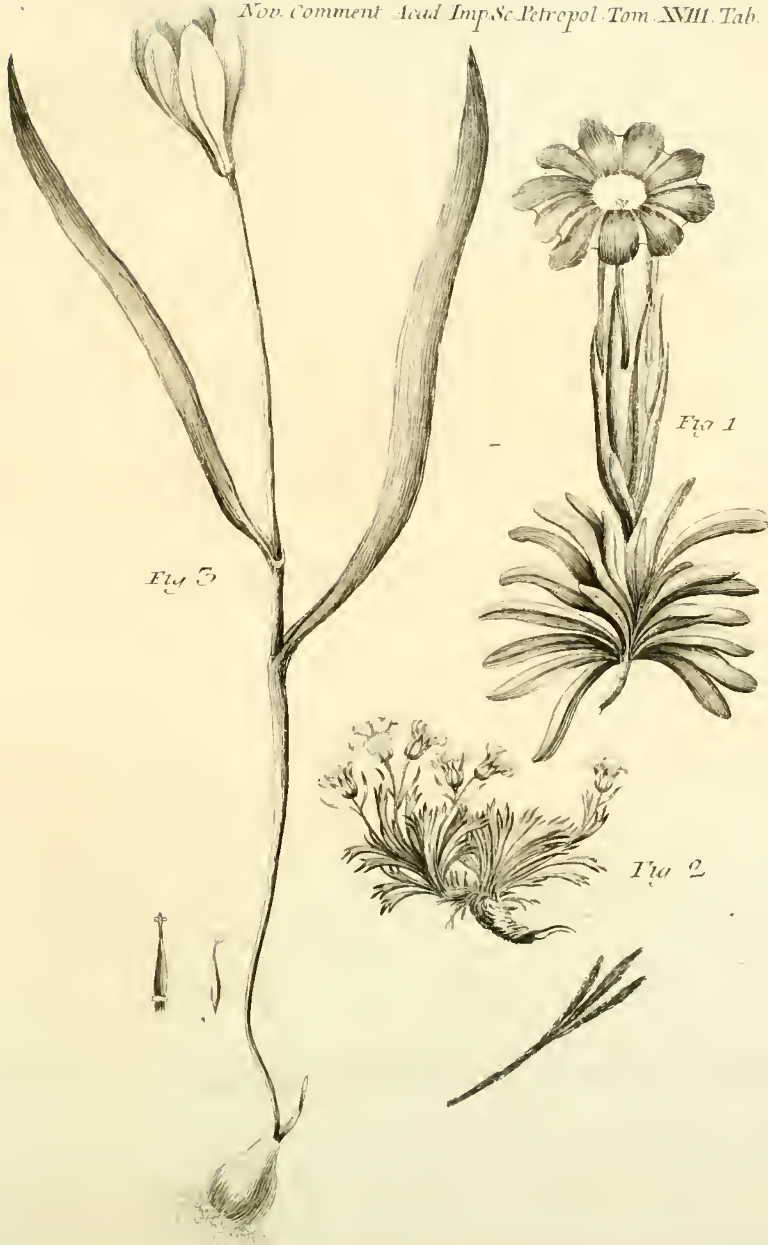


Fig. 1
Fig. 3
Fig. 2

1.

Fig. 2.


Fig. 1.
Fig. 2.

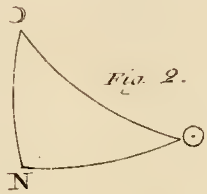
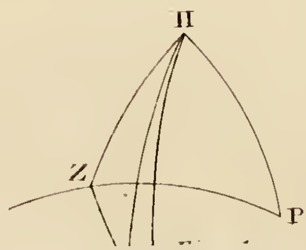


Fig. 2.



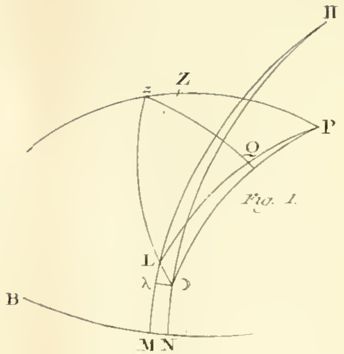


Fig. 1.

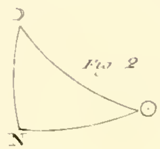


Fig. 2.

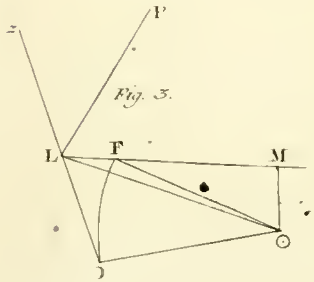


Fig. 3.

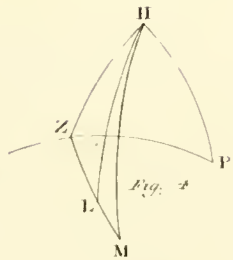


Fig. 4.

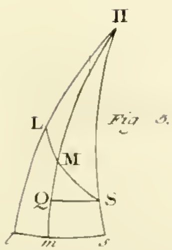


Fig. 5.