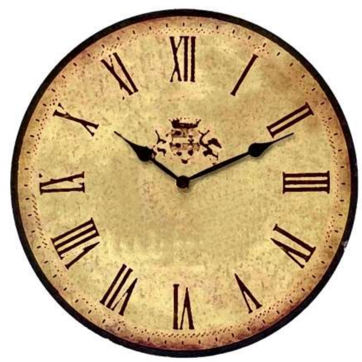
কাটায় কাটায় যত কল্পগল্প

মো. মাহামুদ-উল-হাসান

গণিত উৎসবে কিংবা বলতে পারো কমপ্লিকেটেড ম্যাথমেটিক্স রিলেটেড কোনো কম্পিটিশন, পরীক্ষাতে একটা খুব কমন ম্যাথ হলো, "H টা M মিনিট সময়ে কোনো একটা ঘড়ির ঘন্টার কাটা এবং মিনিটের কাটার অন্তর্ভুক্ত কোণের মান কত?"। এই প্রকার অংক তোমাদের সামনে একবার হলেও এসেছে। কিন্তু এটা সমাধান করবো কি ভাবে? ঘড়ির কাঁটার হিসাব করে আমাদের বাস্তব জীবনে কি কাজে লাগবে? তো চলো! আজকে আমাদের আলোচনা এই ঘড়ির কাটা নিয়েই শুরু করি।

গণিতপ্রেমী রাইমা একদিন তার বান্ধবী তুলিকে তাদের বাসায় নিমন্ত্রণ করলো। তুলি কখনো রাইমাদের বাসায় যায়নি। মজার ব্যাপার হলো, তুলি এবং রাইমার বাসার মাঝে একটা সোজা রাস্তা, কোনো মোড় নিতে হয়না। তুলিকে শুধু রাইমার বাসায় যেতে কত স্টেপ হাটা লাগবে, সেটা বলে দিলেই সে চলে যেতে পারবে। তুলির বাসার আগে হলো সিয়ামের বাসা। ঠিকানা জানতে চাওয়ায় রাইমা তুলিকে বললো, সিয়াম আমার বাসায় আসতে 995 স্টেপ হাটে। এদিকে, তুলি যেবার সিয়ামের বাসায় গিয়েছিল, সেবার তুলিকে 89 স্টেপ যেতে হয়েছিল। প্রশ্ন হলো, তুলি কি রাইমার বাসায় পৌঁছাতে পারবে? অবশ্যই পারার কথা। খুব সহজেই তুলি বিয়োগ করে বের করে ফেললো যে, রাইমার বাসায় যেতে তার 906 স্টেপ হাটা লাগবে।

এই ঘটনাটা কিন্তু আমাদের খুব মজার একটা জিনিসের সাথে পরিচয় করিয়ে দিলো। তুলি এবং রাইমা দুইজনই সিয়ামকে আদর্শ ধরে সমাধান করে নিজেদের বাসার দুরত্ব বের করে ফেলেছে। ঠিক এভাবেই আমরা ঘড়ির ঘন্টা, মিনিট, সেকেন্ড কাটার অন্তর্ভুক্ত কোণ বের করে ফেলতে পারি। প্রথমে ঘড়ির যেকোনো একটা পয়েন্টকে আদর্শ ধরে নিতে হবে। সাধারণত 12 চিহ্নিত পয়েন্টকে আদর্শ করে নিই। এবার, ঘন্টার কাটা এই 12 থেকে কতটা দূরে গিয়েছে এবং মিনিটের কাটা কতটা দূরে গিয়েছে, সেটা হিসাব করে অতিক্রান্ত দুরত্বের পার্থক্য বের করলেই হয়ে গেলো। তবে এখানে আমরা অতিক্রান্ত দূরত্বের বদলে অতিক্রান্ত কৌণিক দুরত্ব নিয়ে কাজ করবো। কৌণিক দুরত্ব বলতে 0° অবস্থান বা আদি অবস্থান থেকে কত কোণে আবর্তিত হয়েছে, সেটা। এখানে 12 হলো আমাদের আদর্শ পয়েন্ট তথা 0° অবস্থান।



ঘন্টার কাটার হিসাব: সাধারণত অ্যানালগ ক্লকগুলোতে 12 ঘন্টার জন্য 12 টা পয়েন্ট চিহ্নিত থাকে। ঘন্টার কাটা ঠিক 12 থেকে শুরু করে আবার 12 তে ব্যাক করলে আমরা বলি, 12 ঘন্টা হয়েছে। অর্থাৎ সময় অতিক্রম হয়েছে 12 ঘন্টা। কিন্তু আমাদের তো দরকার কোণের হিসাব। সেক্ষেত্রে, যেহেতু একবার প্রদক্ষিণ করেছে, ফলে কৌণিক দূরত্ব 360° বললে খুব একটা অপরাধ হবেনা। তাহলে, 12 ঘন্টা সময়ের জন্য কৌণিক দূরত্ব হলো 360°। এক ঘন্টার জন্য কত হবে? সেই ক্লাস ফাইভের ঐকিক নিয়ম খাটিয়ে বলে দিলাম 30°! অর্থাৎ ঘন্টার কাটা কোনো এক পয়েন্ট থেকে পরবর্তী পয়েন্টে যেতে 30° কোণ ঘুরে যায়, বলতে পারো 30° কোণ উৎপন্ন করে। কিন্তু, একটা জিনিস খেয়াল করেছো? যখন সময় ঠিক 1 টা বাজবে, তখন ঘন্টার কাটা 1 চিহ্নিত পয়েন্টে থাকে এবং মিনিটের কাটা কিন্তু 0 তে, এখানে আমাদের আদর্শ পয়েন্ট 12 বোঝানো হয়েছে। এবার, মিনিটের কাটা একটু একটু করে ক্লকওয়াইজ ঘুরতে থাকে এবং ঠিক 60 মিনিট পরেই কিন্তু মিনিটের কাটা আবার আদর্শ তে ফিরে আসলে আমরা দেখি ঘন্টার কাটা পরবর্তী পয়েন্ট চলে গিয়েছে। এখান থেকে বলা যায় যে, 60 মিনিট সময়ের জন্য ঘন্টার কাটার অতিক্রান্ত কৌণিক দুরত্ব হবে সেই 30°। আবারো ঐকিক নিয়ম, পেয়ে গেলাম 1 মিনিট সময়ের জন্য ঘন্টার কাটার অতিক্রান্ত কৌণিক দুরত্ব, সেটা হলো 0.5°।

এদিকে আরেকটু গভীরে গেলে আমরা কিন্তু সেকেন্ড কাটাকেও হিসাব করে ফেলতে পারি। 1 ঘন্টা সময়ের জন্য সেকেন্ড কাটাকে মোট 3600 একক যেতে হয়, অর্থাৎ 3600 সেকেন্ড গেলে আমরা বলতে পারি ঘন্টার কাটা এক একক গিয়েছে। তাহলে প্রতি সেকেন্ডের জন্য ঘন্টার কাটার অতিক্রান্ত কৌণিক দুরত্ব হবে 0.0083°। এটা এতটাই ক্ষুদ্র যে, আমরা হিসাব করি না। এখান থেকে আমরা বলতে পারি, ঘন্টার কাটার মোট অতিক্রান্ত কৌণিক দুরত্ব হবে ঘন্টা কাটার নিজস্ব অতিক্রান্ত কৌণিক দুরত্ব, মিনিট কাটার জন্য ঘন্টার কাটার অতিক্রান্ত কৌণিক দুরত্ব, সেকেন্ড কাটার জন্য ঘন্টার কাটার অতিক্রান্ত কৌণিক দুরত্বের সমষ্ঠির সমান।

অর্থাৎ, কোনো একটা সময় $H(hours) : M(minute) : S(second)$ এর জন্য ঘন্টার কাটার অতিক্রান্ত মোট কৌণিক দুরত্ব
$= (\frac{360}{12} \times H) + (\frac{30}{60} \times M) + (\frac{30}{3600} \times S)^{\circ}..........(1)$
যেহেতু, আমরা সেকেন্ড কাটার জন্য ঘটিত সরণ হিসাব করিনা, সেক্ষেত্রে বলা যায় মোট অতিক্রান্ত কৌণিক দুরত্ব
$= (30H + \frac{M}{2})^{\circ}..........(2)$

মিনিটের কাটার হিসাব: একই নিয়মে মিনিটের কাটা ঘড়িকে একবার প্রদক্ষিণ করলে অতিক্রান্ত সময় হয় 60 মিনিট এবং অতিক্রান্ত কৌণিক দুরত্ব হয় 360°। অর্থাৎ প্রতি মিনিটের জন্য মিনিটের কাটা অতিক্রম করবে 6° করে। যেহেতু আমরা সেকেন্ড কাটাকে হিসাব করছি না, সেক্ষেত্রে এটাই মিনিটের কাটার মোট কৌণিক দুরত্ব হবে এবং এই দূরত্ব হলো $= 6M^{\circ}..........(3)$

যদি সেকেন্ড কাটাকে হিসাব করতাম, তাহলে কি হতো? তখন আমরা বলতাম যে, ঠিক ঠিক 60 সেকেন্ডের জন্যই তো মিনিটের কাটার এই 6° কৌণিক দুরত্ব অতিক্রম করতো। তাহলে, এক সেকেন্ড সময়ের জন্য মিনিটের কাটার অতিক্রান্ত কৌণিক দুরত্ব হতো 0.1°।
তাহলে, মিনিটের কাটার অতিক্রান্ত মোট কৌণিক দুরত্ব হতো $= (\frac{360}{60} \times M) + (\frac{6}{60} \times S)^{\circ}..........(4)$

এখন সবথেকে মজার আলোচনা। যেহেতু কোনো এক সময় ঘন্টার কাটার পরে মিনিটের কাটা থাকে (যেমন: দুপুর 3 টা 50 মিনিট), আবার কোনো এক সময় মিনিটের কাটার আগে ঘন্টার কাটা থাকে (যেমন: রাত 10 টা 20 মিনিট), তাহলে কোন কাটার থেকে কোন কাটার অতিক্রান্ত দুরত্ব বিয়োগ করলে মধ্যবর্তী দুরত্ব পাবো? একটু ভেবে দেখো। 5 এবং 8 এর মধ্যে সম্পর্ক হলো 8>5, অর্থাৎ পার্থক্য বের করতে সর্বদা (8-5) করতে হবে। কিন্তু, ঘড়ির ক্ষেত্রে দুইটি কাটা কর্তৃক অতিক্রান্ত দুরত্ব বের করার পরে আমরা বুঝতে পারবো কোনটা থেকে কোনটা বিয়োগ করতে হবে। আলোচিত উপাত্ত থেকে একটা সূত্র জেনারেট করতে হলে আমরা এভাবে রেখে দিতে পারি না। সেক্ষেত্রে যেহেতু দুরত্ব সংবলিত রাশিতে শুধুমাত্র ধনাত্মক মানটা লাগবে, আমরা এখানে মডুলাস বা পরমমান ব্যবহার করে এই সমস্যা সমাধান করে ফেলতে পারি।

সেকেন্ড কাটার জন্য ঘটিত সরণ হিসাব না করে,
(2) থেকে (3) বিয়োগ করে পাই,
$= (30H + \frac{M}{2} - 6M)^{\circ}$
$= (\frac{60H + M - 12M}{2})^{\circ}$
$= (\frac{60H - 11M}{2})^{\circ}$

সেকেন্ড কাটার জন্য ঘটিত সরণ হিসাব করে,
(1) থেকে (4) বিয়োগ করে পাই,
$= (\frac{360}{12} \times H + \frac{30}{60} \times M + \frac{30}{3600} \times S)^{\circ} - (\frac{360}{60} \times M + \frac{6}{60} \times S)^{\circ}$
$= (30H + \frac{M}{2} + \frac{S}{120})^{\circ} - (6M + \frac{S}{10})^{\circ}$
$= (30H + \frac{M}{2} + \frac{S}{120} - 6M - \frac{S}{10})^{\circ}$
$= (\frac{3600H + 60M + S - 720M - 12S}{120})^{\circ}$

$$= (\frac{3600H - 660M - 11S}{120})^{\circ}$$

আমি এখানে প্রতিবার ঘন্টা কাটার অতিক্রান্ত দুরত্ব থেকে মিনিট কাটার অতিক্রান্ত দুরত্ব বিয়োগ করেছি (ঘন্টা কাটার সম্মান রক্ষার্থে)। তোমরা চাইলে উল্টোটাও করতে পারো। এবার দুইদিকে দুই তালগাছ (অর্থাৎ ঋণাত্মক মানকে নাকচ করার জন্য মডুলাস), আর আমাদের সূত্র রেডি!

সেকেন্ড কাটার জন্য ঘটিত সরণ হিসাব না করে সূত্রটা হলো,

$$|\frac{60H - 11M}{2}|^{\circ}$$

সেকেন্ড কাটার জন্য ঘটিত সরণ হিসাব করে সূত্রটা হতো,

$$|\frac{3600H - 660M - 11S}{120}|^{\circ}$$

বিশেষ নোট: এই সূত্রগুলো দিয়ে সবক্ষেত্রেই তুমি ক্লকওয়াইজ কোণের মান নির্ণয় করতে পারবে, এবং সেটি হবে $0^{\circ}<a<360^{\circ}$ রেঞ্জে। কিন্তু, হাতে কলমে করতে গেলে, যদি কোণের মান 180° থেকে বেশি আসে, আমরা সেটি 360° থেকে বিয়োগ করে বিয়োগফল আকারে লিখবো। কেবলমাত্র প্রবৃদ্ধ কোণের টার্মটা ইগনোর করার জন্য এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ সূক্ষ্ম বা স্থূল এর মাঝেই সীমাবদ্ধ রাখতে এই ব্যবস্থা। 360° থেকে বিয়োগ করার ফলে কেবলমাত্র তুমি আগের ক্লকওয়াইজ কোণের মানকে অ্যান্টিক্লকওয়াইজ করে প্রকাশ করছো। এতে অ্যাকচুয়াল মানের কোনো তারতম্য ঘটবে না।

এবার এই দুইক্ষেত্রের একটা করে উধাহরন দিয়ে যদি তোমাদের বুঝিয়ে দেই, তাহলে বোধহয় বিষয়টা আরো সহজ হবে তোমাদের জন্য। আমি একটা যেকোনো সময় ধরলাম বিকাল 5 টা বেজে 48 মিনিট 30 সেকেন্ড। এটা আমার জন্য একটা স্পেশাল সময়, কারণটা অজানা থাকুক। এই সময়ে কোনো একটা ঘড়ির তিনটা কাটার অবস্থান তোমরা একটু কল্পনা করলেই বুঝে যাবে ঘন্টার কাটা মোটামুটি 6 এর ঠিক আগের ছোট্ট দাগে, মিনিটের কাটা থাকবে 10 এর থেকে দেড়টা দাগ আগে, মানে 48 এবং 49 এর মাঝের দাগে, আর সেকেন্ডের কাটা তো 6 এর ঠিক উপরে। এবার আসো, অংক করি।

আমরা জানি, সেকেন্ড কাটার জন্য ঘটিত কৌণিক সরণ হিসাব করা হলে,

$$= |\frac{3600H - 660M - 11S}{120}|^{\circ}$$
$$= |\frac{3600 \times 5 - 660 \times 48 - 11 \times 30}{120}|^{\circ}$$
$$= |\frac{18000 - 31680 - 330}{120}|^{\circ}$$
$$= |\frac{-14010}{120}|^{\circ}$$
$$= |-116.75|^{\circ}$$
$$= 116.75^{\circ}$$

এবং, সেকেন্ড কাটার জন্য ঘটিত সরণ হিসাব করা না হলে,

$$= |\frac{60H - 11M}{2}|^{\circ}$$
$$= |\frac{60 \times 5 - 11 \times 48}{2}|^{\circ}$$
$$= |\frac{300 - 528}{2}|^{\circ}$$
$$= |\frac{300 - 528}{2}|^{\circ}$$

$$= |\frac{-228}{2}|^\circ$$
$$= |-114|^\circ$$
$$= 114^\circ$$

লক্ষ করো, সেকেন্ড কাটার সরণ হিসাব না করে আমরা যদি উত্তর করে দিতাম, তাহলে আমাদের সিস্টেম লস হিসাবে খুব কম একটা কোণ ইগনোর হয়ে যেত। এইক্ষেত্রে সেটার মান $(116.75^\circ - 114^\circ) = 2.75^\circ$ এর মত। তোমরা ঘন্টা আর মিনিটের কাটার মধ্যের কোণ নির্ণয়ের পদ্ধতি তো জেনে নিলে, এবার যদি ঘন্টা এবং সেকেন্ড কাটা বা মিনিট এবং সেকেন্ড কাটার মধ্যবর্তী কোণ বের করতে বলে? আমি জানি তোমরা সেটা একটু মাথা খাটিয়ে বের করে ফেলতে পারবে। তোমরা তোমাদের মত বের করে আমার সাথে মিলিয়ে দেখে ফেলো নিজেদের ক্রিয়েটিভিটির সলিউশন।

কোনো একটা সময় $H(hours) : M(minute) : S(second)$ এর জন্য,

ঘন্টা এবং সেকেন্ড কাটার মধ্যবর্তী কোণ,

$$= (\frac{360}{12} \times H + \frac{30}{60} \times M + \frac{30}{3600} \times S)^\circ - \frac{360}{60} \times S)^\circ$$
$$= (30H + \frac{M}{2} + \frac{S}{120})^\circ - \frac{S}{10}^\circ$$
$$= (30H + \frac{M}{2} + \frac{S}{120} - \frac{S}{10})^\circ$$
$$= (\frac{3600H + 60M + S - 12S}{120})^\circ$$
$$= (\frac{3600H + 60M - 11S}{120})^\circ$$
$$= |\frac{3600H + 60M - 11S}{120}|^\circ$$

মিনিট এবং সেকেন্ড কাটার মধ্যবর্তী কোণ,

$$= (\frac{360}{60} \times M + \frac{6}{60} \times S)^\circ - \frac{360}{60} \times S)^\circ$$
$$= (6M + \frac{S}{10})^\circ - 6S^\circ$$
$$= (\frac{60M + S - 60S}{10})^\circ$$
$$= (\frac{60M - 59S}{10})^\circ$$
$$= |\frac{60M - 59S}{10}|^\circ$$

এই টপিক নিয়ে আশা করা যায় আর কোনো সমস্যা নেই। আজকের আলোচনা এখানেই শেষ করছি তবে। তোমাদের সকলের সেকেন্ড ডিফারেনশিয়াল নেগেটিভ হোক। গণিত উৎসবের এই মৌসুমে, সকলকে অভিনন্দন। জয়তু গণিত।