

31-8
474

РАЗСЧЕТЪ
ШАРНИРНЫХЪ КОЛЕЦЪ
ИЗЪ ЖЕСТКИХЪ ЭЛЕМЕНТОВЪ.

Н. А. Рынина. II-4393



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
1908.



2007112239



8749-71

О Г Л А В Л Е Н И Е .

Литература	Стр. V
----------------------	-----------

А. Определе́ние оснóвныхъ понятій.

Глава 1. Введе́ние. Понятіе о пространственныхъ и плоскихъ сочлененіяхъ Шарнирные пространственные и плоскія кольца. Опорныя реакціи	1
--	---

Глава 2. Опоры равныхъ типовъ и ихъ кинематическія свойства.	4
--	---

Глава 3. Шарнирные кольца разныхъ типовъ:

а) Кольца неизмѣняющія своей формы.	
I. Неподвижныя кольца	10
II. Временно-подвижныя кольца	—
III. Подвижныя кольца	—
б) Кольца измѣняющія свою форму.	
I. Кольца съ однимъ неподвижнымъ элементомъ.	—
II. Кольца безъ неподвижнаго элемента	—

В. Расчетъ пространственныхъ шарнирныхъ колець.

Глава 4. Общія данныя. Условія статической опредѣлимости и геометрической неизмѣняемости. Простѣйшіе случаи расчета колець.	13
---	----

Глава 5. Расчетъ шарнирныхъ колець съ опорами 2-й категоріи. Составленіе уравненій равновѣсія для колець: а) съ нечетнымъ и б) съ четнымъ числомъ стержней. с) Определе́ние усилій въ элементахъ кольца, какъ функций положенія плоскости опорныхъ реакцій какой-нибудь опоры.	17
--	----

Глава 6. Частные случаи расчета. Кольца безконечно-малой подвижности кольца. Условіе подвижности колець.	32
--	----

Глава 7. Расчетъ кольца въ стереографическихъ проекціяхъ. Планъ расчета. Заданіе кольца. Определе́ние мгновенныхъ осей. Определе́ние угловъ. Примѣненіе смѣшан-	
---	--

наго метода ортогональныхъ и стереографическихъ проекцій къ опредѣленію разстояній. Разложеніе силы на три направленія. 40

Глава 8. Примѣненіе колець къ образованію новаго типа пространственныхъ фермъ.

1-й способъ 52
2-й способъ 53

Глава 9. Общій обзоръ колець другихъ типовъ 59

С. Расчетъ плоскихъ шарнирныхъ колець.

Глава 10. Обзоръ существующихъ методовъ расчета неподвижныхъ колець. Основныя условія существованія кольца. Способъ Ясинскаго. Аналогія колець съ механизмами. Критическія фигуры и картины движенія. Способъ Мюллеръ-Бреслау. 63

Глава 11. Расчетъ неподвижныхъ колець. Дальнѣйшія аналогіи колець съ механизмами. Условіе статической опредѣлимости. Построеніе картины движенія при различныхъ кинематическихъ свойствахъ опоръ. Случай дѣйствія на кольцо: а) одной силы и б) нѣсколькихъ силъ. Общій способъ опредѣленія неизвѣстныхъ усилій. Изслѣдованіе распредѣленія усилій при разныхъ линіяхъ скольженія. Линія вліянія. Опоры безъ реакціи. 71

Глава 12. Примѣненіе колець къ образованію новаго типа плоскихъ фермъ:

1-й способъ 87
2-й способъ 88

Глава 13. Кольца съ безконечно-большимъ числомъ опоръ. Картины ихъ движенія. Методъ соответственныхъ фигуръ. 90

Глава 14. Расчетъ временно-подвижныхъ колець неизмѣняемой формы. Случай дѣйствія силъ постоянныхъ: величины и направленія. Случай дѣйствія силъ измѣняющихъ свою величину и направленіе по извѣстному закону. Случай безконечно-большого числа опоръ . 93

Глава 15. Расчетъ подвижныхъ колець. Кольца неизмѣняемой формы. Кольца измѣняющія форму 100

Литература.

а) *Механика.*

- В. Л. Кирпичевъ. „Основанія графической статики“. С.-Петербургъ. 1908.
- Его-же. „Замѣтка о рѣшетчатыхъ фермахъ“. Кіевъ. 1899.
- Ф. Ясинскій. „Собраніе сочиненій“. С.-Петербургъ. 1902.
- Л. Проскуряковъ. „Строительная механика“. С.-Петербургъ. 1907.
- Н. Н. Митинскій. „Строительная механика“. С.-Петербургъ. 1908.
- Его-же. „Опредѣленіе усилій въ частяхъ статически-опредѣлимыхъ пирамидальныхъ сѣтчатыхъ покрытій (шпицовъ) при помощи разложенія ихъ на плоскія фермы“. С.-Петербургъ. 1899.
- С. И. Белзецкій. „Расчетъ верхняго строенія моста отв. 15 саж. съ ѣздою по верху (пространственная форма съ жесткими соединеніями въ узлахъ)“. Владикавказъ. 1898.
- С. Куницкій. „Введеніе въ ученія о плоскихъ статически-неопредѣлимыхъ и о пространственныхъ фермахъ“. С.-Петербургъ. 1902.
- Н. Б. Делоне. „Лекціи по практической механикѣ“. С.-Петербургъ. 1901.
- П. Л. Чебышевъ. „Сочиненія“. Т. 1-й. С.-Петербургъ. 1899.
- М. Ферстеръ. „Металлическія конструкціи гражданскихъ сооружений“. Переводъ съ нѣмецк. С.-Петербургъ. 1902.
- Мюллеръ-Бреслау. „Графическая статика сооружений“. Перев. съ нѣмецк. С.-Петербургъ. 1899.
- Его-же. „Дополненіе къ теоріи пространственныхъ сооружений“. Переводъ съ нѣмецк. С.-Петербургъ. 1903.
- А. Förrl. „Das Fachwerk im Raume“. Leipzig. 1892.
- Его-же. „Vorlesungen über technische Mechanik“. В. 2. Graphische Statik. Leipzig. 1903.
- О. Mohr. „Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik“. Berlin. 1906.
- Henneberg. „Statik des starren Systems“. Darmstadt. 1886.
- W. Fränkel. „Fachwerke, Anwendung der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes auf die Bestimmung der Formänderung von Fachwerken“. Статья въ „Der Civilingenieur“. 1875 г., стр. 515.
- Grübler. Статья въ „Riga'sche Industriezeitung“. 1887 г., №№ 4 и 5.
- F. Reuleaux. „Lehrbuch der Kinematik“. Erster Band. Braunschweig. 1875.
- Maurice Levy. „La statique graphique“. Paris. 1874.
- Luigi Cremona. „Les figures réciproques en statique graphique“. Paris. 1885.
- Его-же. „Elemente des graphischen Calculs“. Leipzig. 1875.
- Ch. Saviotti. „Nouvelles méthodes pour le calcul des travures réticulaires“. Paris. 1885.

- H. Poincaré. „Cinématique et mécanismes“. Paris. 1899.
 James Clerk Maxwell. „The scientific papers“. Vol. II. On reciprocal figures, frames and diagrams of Forces. Cambridge. 1890.
 A. del Re „La astatica e le sue rappresentazioni prospettiche“. Napoli. 1906.

б) Стереографическія и ортогональныя проекціи.

- Е. С. Федоровъ. „Новая геометрія какъ основа черченія“. СПб. 1907.
 Его-же. „Курсъ кристаллографіи“. С.-Петербургъ. 1901.
 В. Витковскій. „Картографія“. С.-Петербургъ. 1907.
 Ф. Ю. Левинсонъ-Лессингъ. „Наставленіе къ черченію стереографической проекціи кристалловъ“. Юрьевъ. 1900.
 П. Гротъ. „Физическая кристаллографія“. Переводъ съ нѣмецкаго. С.-Петербургъ. 1897.
 В. Курдюмовъ. „Курсъ начертательной геометріи“. С.-Петербургъ. 1895.
 F. Wilson. „Descriptive Geometry—pure and applied“. New-York. 1898.
 E. Geuger. „Die angewandte darstellende Geometrie“. Leipzig. 1906.
 A. Chevallier. „Exercices de cristallographie“. Paris. 1898.
 Carl Pelz. „Die Hauptsätze der stereographischen Projection als Corollarien des Satzes von Quetelet und Dondelin“. Prag. 1898.
 W. Fiedler. „Die darstellende Geometrie“. II Th. St. 260. Leipzig. 1885.
-

Разсчетъ шарнирныхъ колець изъ жесткихъ элементовъ.

Н. А. Рынина.

А. Определе́ние основныхъ понятій.

Глава 1.

Введе́ние.

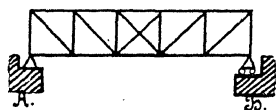
Со времени улучшенія техники добыванія и обработки желѣза возникъ особый родъ сооружений, служащихъ для той или иной цѣли и имѣющихъ въ виду облегченіе и улучшеніе жизни человѣка. Эти сооружения, благодаря значительной прочности примѣняемаго для нихъ матеріала—желѣза, по своей формѣ довольно рѣзко отличаются отъ сооружений каменныхъ и деревянныхъ.

Главнѣйшее отличіе первыхъ отъ послѣднихъ заключается въ томъ, что сооруженіе довольно большихъ размѣровъ можетъ быть сдѣлано не сплошнымъ и не со сплошными стѣнками, а сквознымъ, составленнымъ изъ отдѣльныхъ болѣе или менѣе длинныхъ элементовъ, соединенныхъ между собою въ извѣстныхъ мѣстахъ. Примѣрами такого рода сооружений могутъ служить металлическіе мосты, покрытія, башни, маяки, подъемные краны, различнаго рода механизмы и т. п. Чѣмъ лучше сортъ желѣза, тѣмъ длиннѣе могутъ быть отдѣльные элементы сооруженія и тѣмъ легче и ажурнѣе оно выгладитъ.

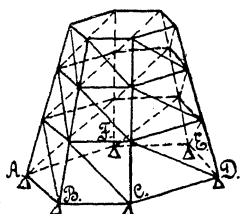
Въ желѣзномъ мосту элементами его будутъ — стойки,

раскосы, пояса, различные связи. Въ подъемномъ кранѣ — ноги, струны, стрѣлы и т. д.

Если оси всѣхъ элементовъ сооруженія лежатъ въ одной плоскости, то такое сооруженіе называютъ плоскимъ сочлененіемъ. Примѣромъ является одна изъ главныхъ фермъ раскоснаго металлическаго моста (черт. 1). Если же элементы сооруженія не лежатъ въ одной плоскости, то сооруженіе называется пространственнымъ сочлененіемъ. Напримѣръ, остовъ металлической башни (черт. 2). Каждое сочлененіе должно имѣть одну



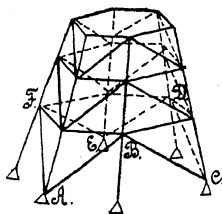
Черт. 1.



Черт. 2.

или нѣсколько точекъ опоры на землѣ или на особыхъ фундаментахъ.

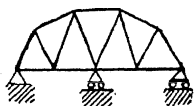
Иногда каждая опора сооруженія прикрѣпляется къ своему отдѣльному фундаменту (черт. 3),



Черт. 3.

Иногда же опоры связываются между собою при помощи особыхъ элементовъ, образуя вершины нѣкотораго многоугольника, сторонами котораго служатъ соединяющіе элементы (черт. 2). Такой многоугольникъ носитъ названіе опорнаго кольца. Если всѣ опоры, ихъ реакціи и элементы кольца находятся въ одной плоскости, то кольцо будетъ плоскимъ. Если же опоры ихъ реакціи и элементы кольца въ одной плоскости не лежатъ, то кольцо будетъ пространственнымъ.

Въ плоскомъ кольцѣ опоры могутъ лежать или а) на одной прямой линіи (черт. 4а) или б) не на одной прямой линіи (черт. 4б).



Черт. 4 а.

Какъ будетъ видно изъ дальнѣйшаго рас-



Черт. 4 б.

положеніе сооруженія на опоры по черт. 3 какъ бы не связанныхъ между собою является только кажущимся. Въ дѣйствительности всегда можно провести нѣкоторое замкнутое пространственное кольцо $ABCDEF A$, связывающее эти опоры.

Какія бы силы не передавались на опоры извнѣ или отъ самого сооруженія, каждую изъ нихъ всегда можно разложить на двѣ составляющихъ — одну перпендикулярную къ плоскости двухъ элементовъ, сходящихся въ опорѣ, а другую — лежащую въ плоскости этихъ элементовъ. Если кольцо плоское, то тогда всѣ составляющія второго рода будутъ лежать въ одной плоскости съ кольцомъ; если же кольцо пространственное, то получится нѣкоторое пространственное сочлененіе, на которое будутъ дѣйствовать силы, не лежащія въ одной плоскости. Въ первомъ случаѣ, т. е. когда внѣшнія силы и элементы кольца лежатъ въ одной плоскости, получатся отъ дѣйствія внѣшнихъ силъ нѣкоторыя давленія на опоры кольца; эти давленія должны уравниваться опорными реакціями, при чемъ послѣднія, очевидно, должны лежать въ плоскости кольца. Во второмъ случаѣ, т. е. когда кольцо является пространственнымъ, давленія на опоры, усилія въ элементахъ, внѣшнія силы и опорныя реакціи не будутъ лежать въ одной плоскости.

Можно представить еще случай, когда кольцо плоское, но какъ плоскости опорныхъ реакцій, такъ и внѣшнія силы не совпадаютъ съ плоскостью кольца.

Такого рода кольца мы будемъ причислять къ пространственнымъ кольцамъ.

Основнымъ условіемъ для многихъ сооружений ставится неизмѣняемость ихъ системы. Въ зависимости отъ этого и опорное кольцо ихъ должно быть неизмѣняемымъ. Если же сооруженіе кромѣ того должно быть неподвижнымъ, то и опорное кольцо его должно быть неподвижнымъ. Въ дальнѣйшемъ всегда будемъ предполагать, что элементы кольца соединены между собою при помощи шарнировъ.

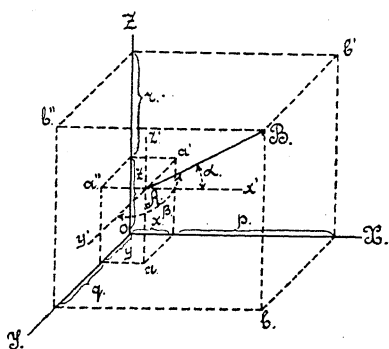
Глава 2.

Опоры разных типовъ и ихъ кинематическія свойства.

Внѣшнія силы, передаваясь при помощи элементовъ сооруженія на опоры, вызываютъ въ послѣднихъ опорныя реакціи. Для опредѣленія опорной реакціи каждой опоры необходимо знать слѣдующія ея три элемента: точку приложенія, направленіе и величину.

Предположимъ, что черезъ точку приложенія равнодѣйствующей всѣхъ дѣйствующихъ на опору силъ проведены три взаимно перпендикулярныя оси координатъ. Такъ какъ мы разсматриваемъ опоры и силы въ пространствѣ, то для опредѣленія упомянутыхъ элементовъ необходимо знать:

1. Три прямоугольныя координаты x , y и z точки A приложенія опорной реакціи (черт. 5).



Черт. 5.

2. Два угла α и β между линіей AB дѣйствія опорной реакціи и осями координатъ.

3. Три прямоугольныхъ проекціи p , q , r на оси координатъ величины AB опорной реакціи.

При этомъ слѣдуетъ упомянуть, что изъ 5 величинъ: α , β , p , q , r одновременно можно задаваться только тремя, такъ какъ остальные двѣ

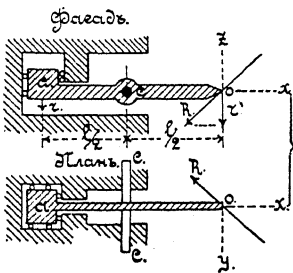
опредѣляются тремя первыми.

Выберемъ въ качествѣ элементовъ, опредѣляющихъ опорную реакцію, три координаты x , y и z точки приложенія ея и три проекціи p , q , r ея на оси координатъ.

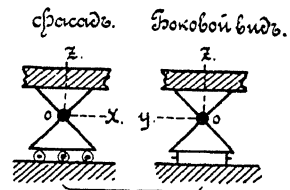
Комбинируя между собою эти 6 элементовъ различнымъ образомъ, мы получимъ всѣ возможные типы опоръ, которыя только могутъ быть въ различныхъ сооруженіяхъ и механизмахъ. Въ таблицѣ I указаны эти типы.

Въ столбцѣ 5-мъ этой таблицы указаны числа разныхъ опоръ одного типа. Опоры такого рода отличаются другъ от друга лишь комбинаціями однородныхъ элементовъ. Напримѣръ, въ опорахъ типа 6-го при возможныхъ комбинаціяхъ xy , xz , yz —получаемъ три разныхъ опоры. Въ опорахъ типа 9-го возможны комбинаціи xyp , xuq , xur , xzr , xzq , xzr , yzp , yzq , yzr —всего 9 разныхъ опоръ и т. д.

Столбцы 6—9 показываютъ знаками \times кинематическія свойства опоръ при заданной комбинаціи элементовъ, опредѣляющихъ опорную реакцію. При этомъ замѣтимъ, что если одна изъ проекцій (p , q , r) опорной реакціи, напримѣръ (r) равна опредѣленной величинѣ, то это означаетъ, что направленіе линіи скольженія опоры совпадаетъ съ направленіемъ этой проекціи (r), какъ это видно изъ черт. 6. На оси (c) вращается горизонтальный рычагъ ao . На одномъ его концѣ (a) укрѣпленъ грузъ равный (r). Неподвижныя части при-



Черт. 6.



Черт. 7.

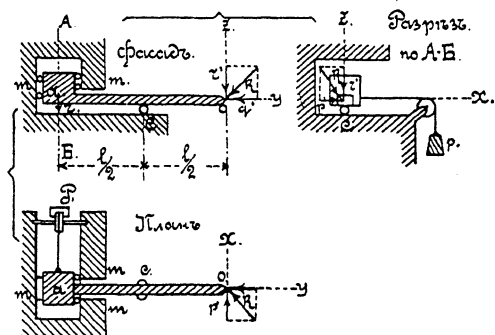
бора устроены такъ, что рычагъ можетъ только колебаться въ вертикальной плоскости около оси cc , но двигаться взадъ и впередъ, влево и вправо, т. е. параллельно линіямъ ox и oy , — не можетъ. При такомъ устройствѣ какая бы сила R не дѣйствовала на опору o , часть ея, именно вертикальная составляющая r' можетъ быть уравновѣшена силою r , если $r' = r$; если же $r' > < r$, то опора o начнетъ двигаться по линіи oz (опора № 13 таблицы 1-й).

Какъ частный случай опоры № 13 можно разсматривать опору на одномъ рядѣ катковъ (черт. 7). Такая опора предопредѣляетъ величину (p) — проекціи опорной реакціи на ось x -овъ ($p = 0$).

Разные типы опорь и ихъ кинематическія свойства.

№№ столбцовъ.	Извѣстн. элементы опорной реакціи.			Сумма Σ неизвѣстныхъ.	Число опорь при разныхъ комбинаціяхъ извѣст.	Кинематическія свойства опоръ.				Передача усилія.				14
	1	2	3			Неподвиж. опоры.	7	8	9	10	11	12	13	
№№ опоръ.	Число координатъ x, y, z .	Число проекцій p, q, r .	Сумма Σ извѣстныхъ.	Сумма Σ неизвѣстныхъ.	Число опорь при разныхъ комбинаціяхъ извѣст.	Неподвиж. опоры.	Опоры съ линіей скольженія.	Опоры съ плоскостью скольженія.	Опоры съ пространст. скольж. (свобод.).	Центральная.	Линейная.	Плоскостная.	Пространственная.	ПРИМѢЧАНІЯ.
1	0	0	0	6	1	×								<p>Опору № 10 принято называть опорю третьей категории.</p> <p>Если p или $q = 0$, то опоры № 13 принято называть опорю второй категории.</p> <p>Если $p = q = 0$, то опоры № 15 принято называть опорю первой категории.</p>
2	0	1	0	5	3		×						×	
3	1	0	0	5	3	×							×	
4	0	2	2	4	3			×					×	
5	1	1	2	4	9				×				×	
6	2	0	2	4	3				×				×	
7	0	3	3	3	1					×				
8	1	2	3	3	9						×			
9	2	1	3	3	9							×		
10	3	0	3	3	1	×								
11	1	3	4	2	3				×					
12	2	2	4	2	9					×				
13	3	1	4	2	3		×							
14	2	3	5	1	3			×						
15	3	2	5	1	3				×					
16	3	3	6	0	1					×				
16	—	—	—	—	64	4	4	4	4	4	4	4	4	

Если двѣ изъ проекцій (p, q, r) опорной реакціи, напри-
мѣръ p и r , равны опредѣленной величинѣ, то это означаетъ,
что опора имѣетъ плоскость скольженія, опредѣляемую за-
данными направленіями p и r . На черт. 8 въ точкѣ o изо-

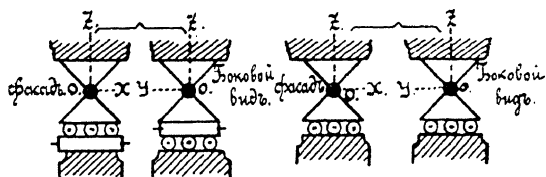


Черт. 8.

бражена опора съ плоскостью скольженія ZOX .

Рычагъ ao можетъ вращаться во всѣ стороны около ша-
ровой опоры c . Движенію точки o вдоль оси Y -новъ препят-
ствуютъ закрѣпы mt . Точка (o) находится въ равновѣсіи,
если проекціи давленія на нее r' и p' соответственнo равны
грузамъ, приложеннымъ къ концу a , т. е. если $r' = r$ и
 $p' = p$. Если же такого равенства не существуетъ, то точка
начнетъ перемѣщаться въ плоскости ZOX . (Опора № 15
таблицы 1-й.

Частный случай такой опоры представляетъ опора на
двухъ рядахъ катковъ (черт. 9) или на рядѣ шаровъ



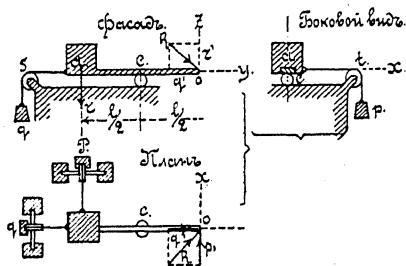
Черт. 9.

Черт. 10.

(черт. 10). Въ этомъ случаѣ предопредѣляются величины
 $p = r = 0$.

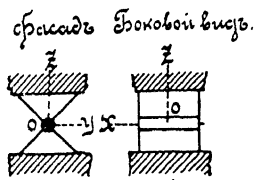
Примѣромъ опоры съ пространствомъ скольженія можетъ

служить конецъ o рычага, изображеннаго на черт. 11. Рычагъ ao опирается на шаръ c . Къ концу a прикрѣплены двѣ веревки, перекинутыя черезъ блоки t и s . На концахъ веревокъ повѣшены грузы p и q . На концѣ a рычага расположенъ грузъ r . Если на конецъ o рычага будетъ дѣйствовать какая-нибудь сила R , то равновѣсіе точки o будетъ возможно только тогда, когда проекціи p' , q' , r' силы R будутъ соответственно равны грузамъ p , q ,



Черт. 11.

будутъ соответственно равны грузамъ p , q ,



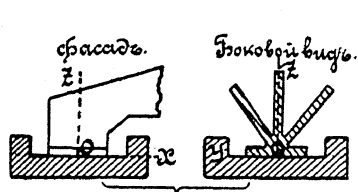
Черт. 12.

r . Если же такого равенства не будетъ, то точка o начнетъ двигаться въ пространствѣ (опора № 16 таблицы 1-й).

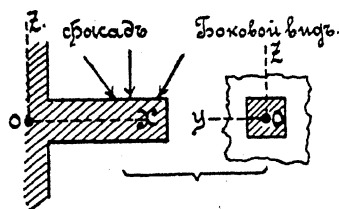
Въ случаѣ, если $p' = q' = r' = p = q = r = 0$, точка o будетъ свободной.

Примѣрами опоры съ центральной передачей усилія могутъ служить опоры, изображенныя на черт. 7, 9, 10. Примѣромъ опоры съ линейной передачей усилія можетъ служить примѣняемая часто въ мостахъ балансирующая опора (черт. 12) (опора № 6 табл. 1-й). Примѣромъ опоры съ плоскостной передачей усилія можетъ служить подвижная опора въ мостахъ и стропилахъ небольшого пролета (черт. 13). (опора № 8 табл. 1-й).

Примѣромъ опоры съ пространственной передачей уси-



Черт. 13.



Черт. 14.

лій можетъ служить мѣсто закрѣпленія балки, наглухо за-
дѣланной въ стѣну (черт. 14) (опора № 1 табл. 1-я). Комби-
нируя между собою вышеописанные типы опоръ, получимъ
всѣ остальные типы опоръ таблицы 1-й.

Глава 3.

Шарнирные кольца разныхъ типовъ.

Независимо отъ того, будетъ ли опорное кольцо, при по-
мощи котораго сооруженіе опирается на фундаментъ, плос-
кимъ или пространственнымъ, само сооруженіе, въ зависи-
мости отъ взаимнаго расположенія опоръ, ихъ устройства и
отъ характера внѣшнихъ дѣйствующихъ силъ, можетъ обла-
дать различными свойствами. Въ этомъ отношеніи всѣ со-
оруженія можно подраздѣлить на двѣ главныя группы:

А. Сооруженія, не измѣняющія своей формы при дѣй-
ствіи внѣшнихъ силъ.

Б. Сооруженія, измѣняющія свою форму при дѣйствіи
внѣшнихъ силъ.

Первую группу можно раздѣлить на слѣдующіе три
класса:

I. Сооруженія, которыя при всякомъ дѣйствіи внѣшнихъ
силъ остаются неподвижными.

II. Сооруженія, которыя при случайномъ дѣйствіи внѣш-
нихъ силъ приходятъ въ движеніе и двигаются до тѣхъ
поръ, пока не возстановится устойчивое равновѣсіе между
внѣшними силами и опорными реакціями. Условимся назы-
вать такія сооруженія временно-подвижными.

III. Сооруженія, которыя при нѣкоторомъ дѣйствіи внѣш-
нихъ силъ приходятъ въ движеніе и двигаются во все время
дѣйствія этихъ силъ. Будемъ называть такія сооруженія
подвижными.

Вторую группу можно раздѣлить на два класса:

Сооруженіе съ однимъ неподвижнымъ элементомъ. Такое

сооруженіе при дѣйствии внѣшнихъ силъ начинаетъ мѣнять свою форму до тѣхъ поръ, пока не наступитъ равновѣсіе между внѣшними силами и опорными реакціями.

II. Сооруженія безъ неподвижнаго элемента. Такое сооруженіе подѣ дѣйствиемъ внѣшнихъ силъ сначала измѣнитъ свою форму до нѣкотораго устойчиваго положенія, а затѣмъ начнетъ двигаться по направленію равнодѣйствующей внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ нему.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать, что сооруженіе можетъ мѣнять свою форму или обладать тѣми или иными кинематическими свойствами въ зависимости отъ того, обладаетъ или нѣтъ этими свойствами опорное кольцо (исключеніе см. текстъ, относящійся къ чертежу 55). Поэтому мы раздѣляемъ опорныя кольца на такіе же группы и классы, какъ и сооружеія.

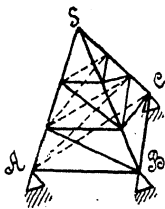
A. Кольца, не измѣняющія своей формы.

- I. Неподвижныя кольца.
- II. Временно-подвижныя кольца.
- III. Подвижныя кольца.

B. Кольца, измѣняющія свою форму.

- I. Кольца съ однимъ неподвижнымъ элементомъ.
- II. Кольца съ подвижными элементами.

Примѣромъ неподвижнаго сооружеія съ неподвижнымъ опорнымъ кольцомъ можетъ служить металлическій остовъ

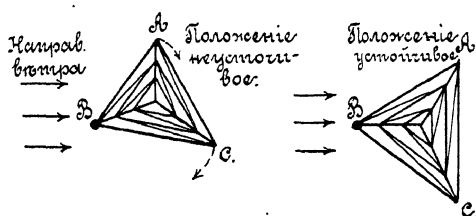


Черт. 15.

пирамидальной крыши (черт. 15). Здѣсь имѣется треугольное опорное кольцо ABC . Опоры ABC могутъ двигаться въ плоскости ABC по нѣкоторымъ направленіямъ, при чемъ эти направленія подобраны такъ, что при любомъ дѣйствии на сооруженіе внѣшнихъ силъ опорное кольцо остается неподвижнымъ. Примѣромъ временно-подвижнаго сооружеія съ временно-подвижнымъ кольцомъ неизмѣняемой формы можетъ служить то же покрытие $SABC$ (черт. 15), но съ инымъ устройствомъ опоръ. Оставляя опору B неподвиж-

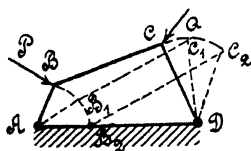
наго сооружеія съ временно-подвижнымъ кольцомъ неизмѣняемой формы можетъ служить то же покрытие $SABC$ (черт. 15), но съ инымъ устройствомъ опоръ. Оставляя опору B неподвиж-

ной, устроимъ ее такъ, что сооруженіе можетъ вращаться около неподвижной точки B этой опоры. (Опора № 10 табл. 1). Опоры же A и C расположимъ на шарахъ, которые могутъ кататься въ плоскости ABC , сохраняя свое положеніе подъ узлами A и C опорнаго кольца (опора № 15 табл. 1). При случайномъ направленіи силы вѣтра, дѣйствующаго на сооруженіе, опоры A и C будутъ двигаться въ плоскости ABC до тѣхъ поръ, пока усилія отъ вѣтра, приложенныя въ A и C не уравновѣсятся сопротивленіемъ стержней, сходящихся въ A и въ C (черт. 16 и 17). Наконецъ, если устроить всѣ три

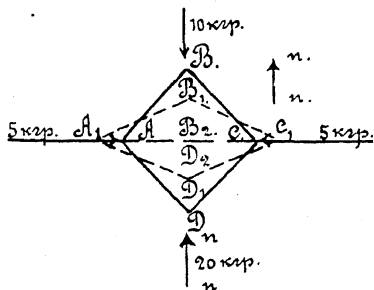


Черт. 16 и 17.

опоры A , B и C на шарахъ, то получимъ подвижное сооруженіе съ подвижнымъ опорнымъ кольцомъ. Примѣромъ кольца, измѣняющаго свою форму съ неподвижнымъ элементомъ можетъ служить шарнирный четырехугольникъ $ABCD$ (черт. 18). Если сдѣлать неподвижнымъ элементъ его AD , то точки B и C будутъ двигаться при случайномъ дѣйствіи силъ P и Q , и форма кольца будетъ измѣняться. Примѣ-



Черт. 18.

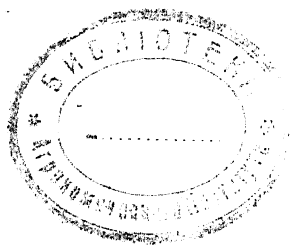


Черт. 19.

ромъ кольца, измѣняющаго свою форму съ подвижными элементами можетъ служить шарнирный четырехугольникъ $ABCD$ (черт. 19), въ узлахъ котораго приложены силы. При тѣхъ

силахъ, которыя указаны на чертежѣ, четырехугольникъ будетъ сплющиваться до тѣхъ поръ, пока всѣ его четыре стороны не совпадутъ почти въ прямую линію, послѣ этого онъ будетъ двигаться по направленію *m* — силы въ 20 кгр. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ изслѣдовать вопросъ о равновѣсіи и движеніи колецъ слѣдующимъ образомъ.

Сначала разберемъ условія равновѣсія и движенія пространственныхъ колецъ вышеописанныхъ пяти типовъ, а затѣмъ — плоскихъ колецъ.



В. Расчетъ пространственныхъ шарнирныхъ колець.

Глава 4.

Общія данныя.

Пространственнымъ шарнирнымъ кольцомъ мы называемъ систему прямолинейныхъ стержней, соединенныхъ концами другъ съ другомъ при помощи шарнировъ и образующихъ непрерывную замкнутую ломаную линію, не лежащую въ одной плоскости.

Точки соединенія концовъ стержней называемъ узлами и предполагаемъ, что подъ каждымъ узломъ расположена опора, обладающая извѣстными кинематическими свойствами.

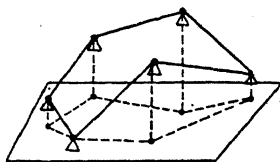
Въ зависимости отъ кинематическихъ свойствъ опоръ, послѣднія могутъ оказывать тѣ или иныя реакціи при дѣйствіи на кольцо различныхъ силъ.

Будемъ предполагать, что внѣшнія силы приложены только въ узлахъ кольца и рассмотримъ, какимъ образомъ опредѣляются усилія въ стержняхъ (элементахъ) кольца и опорныя реакціи его опоръ.

Предварительно рассмотримъ, когда кольца будутъ статически опредѣлимыми и геометрически неизмѣняемыми при дѣйствіи внѣшнихъ силъ.

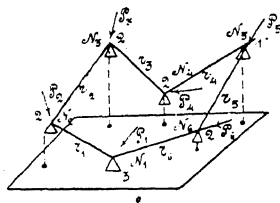
Выведемъ условіе статической опредѣлимости кольца (черт. 20) Условіе равновѣсія каждаго угла кольца заключается въ томъ, чтобы всѣ силы, приложенныя въ этомъ узлѣ, удовлетворяли 3-мъ уравненіямъ статики.

Пусть число узловъ кольца равно k . Тогда число (r) стержней его



Черт. 20.

ной. Въ послѣднемъ случаѣ необходимо, чтобы существовала еще одна опора 3-ей категоріи. Этотъ случай рассмотримъ позднѣе. Теперь же остановимся лишь на случаѣ (а). На черт. 21 изображено пространственное кольцо, отвѣчающее этому случаю. Цифры, поставленныя у опоръ, показываютъ число неизвѣстныхъ опорныхъ реакцій каждой опоры.



Черт. 21.

Число опорныхъ реакцій удовлетворяетъ равенству:

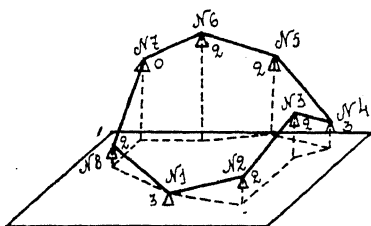
$$3 \cdot 6 = 6 + 12.$$

Слѣдовательно кольцо статически опредѣлимо. Разсчетъ начинаемъ вести съ опоры N_5 , у которой опредѣляемъ три неизвѣстныя величины r_4 , r_5' и n_5' , т. е. усилія въ элементахъ $N_4 N_5$ и $N_5 N_6$, и неизвѣстную опорную реакцію n_5' . Для опредѣленія неизвѣстныхъ слѣдуетъ разложить данную внѣшнюю силу P_5 , приложенную въ этомъ узлѣ, на 3 направленія ¹⁾. Опредѣливъ величины r_4 , r_5 и n_5' , переходимъ къ любой изъ сосѣднихъ опоръ, напримѣръ къ опорѣ N_6 . Въ этой опорѣ неизвѣстными являются двѣ опорныхъ реакціи n_6' и n_6'' и усиліе r_6 въ элементѣ N_1-N_6 . Разложивъ равнодѣйствующую извѣстныхъ силъ r_5 и P_6 на эти три направленія, опредѣлимъ n_6' , n_6'' и r_6 . Подобнымъ же образомъ опредѣляемъ неизвѣстныя величины у всѣхъ опоръ второй категоріи (N_4 , N_3 и N_2). Наконецъ у послѣдней опоры N_1 имѣемъ извѣстныя величины r_1 , r_6 , внѣшнюю силу P_1 и 3 неизвѣстныя составляющія опорной реакціи n_1' , n_1'' и n_1''' , равнодѣйствующая которыхъ будетъ равна и прямо противоположна равнодѣйствующей силъ r_1 , r_6 и P_1 .

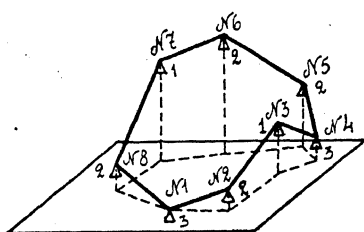
Теперь предположимъ, что въ кольцо будетъ двѣ опоры 3-ей категоріи, т. е. совершенно неподвижныхъ. Тогда этими

¹⁾ Рѣшеніе этой задачи см. В. Кирпичевъ „Основанія графической статики“ изд. 1908 г. стр. 255. Разложеніе силы на 3 направленія не лежащихъ въ одной плоскости можно весьма быстро и достаточно точно производить графически въ стереографическихъ проекціяхъ. См. главу 7-ю.

опорами кольцо разобьется на два совершенно самостоятельных незамкнутых кольца, расчеты которых можно вести независимо один от другого. Для кольца, изображенного на черт. 22, равенство 1-ое удовлетворено, такъ какъ $3 \cdot 8 = 8 + 16$. Однако кольцо это обладает слѣдующими особенностями: одна часть его №№ 1, 8, 7, 6, 5, 4 между неподвижными опорами геометрически измѣняема, т. к. свободная опора № 7 при дѣйствіи на нее внѣшней силы или подъ вліяніемъ равнодѣйствующей силъ приложенныхъ въ этомъ узлѣ, можетъ придти въ движеніе. Другая же часть кольца между неподвижными опорами, именно №№ 1, 2, 3, 4 является



Черт. 22.



Черт. 23.

статически неопредѣлимой, такъ какъ въ каждомъ изъ узловъ ея №№ 1, 2, 3, 4 по 4 неизвѣстныхъ. При иномъ распредѣленіи числа опорныхъ реакцій, нежели на черт. 22, можно бы разбить кольцо на двѣ части геометрически неизмѣняемыя и статически опредѣлимыя, какъ это и показано на черт. 23.

Расчетъ каждой изъ двухъ частей этого кольца, заключенныхъ между неподвижными опорами ведется такъ же, какъ и ранѣе упомянутого кольца (черт. 21), при чемъ расчетъ начинается съ опоры № 7 для одной части кольца и съ опоры № 7—для другой, т. е. съ опоръ, гдѣ являются только 3 неизвѣстныхъ элемента.

Для каждой изъ этихъ двухъ частей кольца очевидно удовлетворяется условіе (1) т. е.

$$3 \cdot k = r + n \text{ или } 3 \cdot 6 = 5 + 13 \text{ для части №№ 1, 8, 7, 6, 5, 4} \\ \text{и } 3 \cdot 4 = 3 + 9 \text{ для части №№ 1, 2, 3, 4.}$$

На основаніи вышеизложеннаго мы можемъ сказать слѣдующее:

Пространственное шарнирное кольцо будетъ статически

опредѣлимымъ, и въ общемъ случаѣ геометрически неизмѣняемымъ, если:

а) всѣ его опоры второй категоріи,

б) одна его опора третьей категоріи, одна—первой, а всѣ остальные—второй,

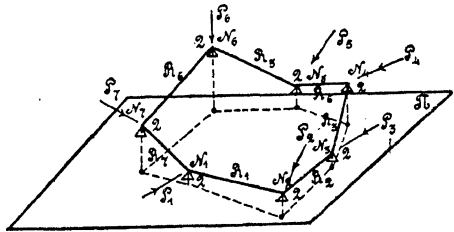
в) двѣ его опоры третьей категоріи, и если каждая часть кольца между этими опорами удовлетворяетъ условію (1),

г) нѣсколько его опоръ—третьей категоріи, и если каждая часть кольца между сосѣдними такими опорами удовлетворяетъ условію (1).

Глава 5.

Расчетъ шарнирныхъ колецъ съ опорами 2-ой категоріи.

Предположимъ, что дано пространственное шарнирное кольцо съ опорами 2-ой категоріи (черт. 24). Слѣдовательно, каждая опора кольца имѣетъ свою плоскость опорныхъ реакцій и можетъ двигаться перпендикулярно къ этой плоскости.



Черт. 24.

Условимся обозначать извѣстныя и неизвѣстныя величины слѣдующимъ образомъ.

Извѣстныя величины:

Равнодѣйствующія внѣшнихъ силъ, приложенныхъ въ узлахъ:

- N_1 — черезъ P_1
- N_2 — „ P_2
- N_3 — „ P_3
- N_4 — „ P_4
-
-
- N_7 — черезъ P_7 и т. д.

При этомъ предполагаемъ, что извѣстны и направленія этихъ силъ относительно какой-нибудь произвольно выбранной системы координатныхъ осей. Какъ выбирать эти оси—будетъ указано позднѣе.

Обозначимъ плоскости опорныхъ реакцій опоръ:

$$\begin{aligned} N_1 & \text{ — черезъ } Q_1 \\ N_2 & \text{ — „ } Q_2 \\ & \dots\dots\dots \\ N_7 & \text{ — черезъ } Q_7 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Расположеніе этихъ плоскостей также даны.

Далѣе даны положенія опоръ и направленія опорныхъ реакцій каждой опоры.

Неизвѣстныя величины:

Усилія въ стержняхъ кольца:

$$\begin{aligned} N_1 N_2 & \text{ — черезъ } R_1 \\ N_2 N_3 & \text{ — „ } R_2 \\ N_3 N_4 & \text{ — „ } R_3 \\ & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots \\ N_6 N_7 & \text{ — черезъ } R_6 \\ N_7 N_1 & \text{ — „ } R_7 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Итого k неизвѣстныхъ.

Опорныя реакціи опоръ:

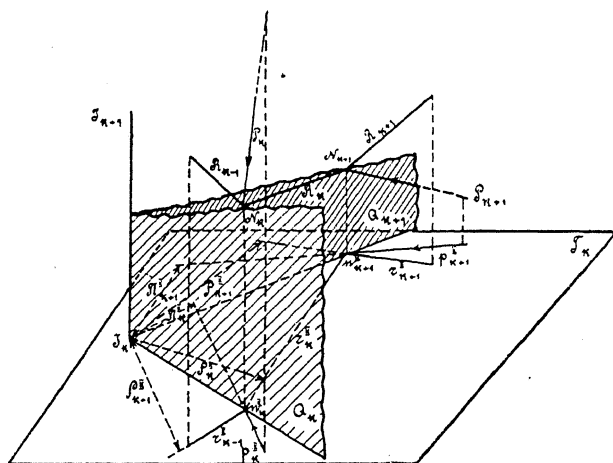
$$\begin{aligned} N_1 & \text{ — черезъ } N_1' \text{ и } N_1'' \\ N_2 & \text{ — „ } N_2' \text{ и } N_2'' \\ N_3 & \text{ — „ } N_3' \text{ и } N_3'' \\ & \dots\dots\dots \\ N_7 & \text{ — черезъ } N_7' \text{ и } N_7'' \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Итого $2k$ неизвѣстныхъ.

Хотя число неизвѣстныхъ $k + 2k = 3k$ и равно числу уравненій равновѣсія $3n$ ($n = k$), которыя можно составить для всѣхъ узловъ кольца, однако рѣшеніе совокупности $3n$ уравненій при кольцѣ съ большимъ числомъ опоръ представляетъ нѣкоторыя затрудненія, благодаря массѣ выкладокъ. Поэтому приведемъ способъ, который значительно упрощаетъ эти вычисленія.

Воспользуемся применениемъ начала возможныхъ перемѣщенийъ.

Для каждаго узла (опоры) кольца возможнымъ перемѣщеніемъ его является движеніе по нормали къ плоскости опорныхъ реакцій. Опредѣлимъ для каждаго стержня кольца ту ось, относительно которой возможно вращеніе этого стержня. По аналогіи съ механизмами, условимся называть эту ось *мгновенною осью вращенія* даннаго стержня. Очевидно, что для какого-нибудь стержня N_K N_{K+1} заключеннаго между двумя сосѣдними опорами N_K и N_{K+1} мгновенною осью будетъ являться линія сѣченія J_K J_{K+1} плоскостей Q_K и Q_{K+1} опорныхъ реакцій опоръ N_K и N_{K+1} (черт. 25). Отсѣчемъ отъ кольца три стержня R_{K-1} , R_K и R_{K+1} съ двумя опорами N_K и N_{K+1} (черт. 25) и рассмотримъ условія равно-



Черт. 25.

вѣсія стержня R_K . Зная направленія возможныхъ перемѣщеній концовъ этого стержня и имѣя въ виду, что стержень этотъ долженъ быть неподвижнымъ, т. е., что не должно быть вращенія вокругъ мгновенной оси его J_K J_{K+1} , мы можемъ написать уравненіе, выражающее, что сумма моментовъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на этотъ стержень относительно его мгновенной оси должна равняться нулю.

Стержень R_k подвергается дѣйствию слѣдующихъ силъ:

- „ въ узлѣ N_k — внѣшняя сила P_k ,
 усилие сосѣдняго стержня R_{k-1} ,
 двѣ опорныхъ реакціи N'_k и N''_k ,
 лежащихъ въ плоскости Q_k .
- „ въ узлѣ N_{k+1} — внѣшняя сила P_{k+1} ,
 усилие сосѣдняго стержня R_{k+1} ,
 двѣ опорныхъ реакціи N'_{k+1} и N''_{k+1} ,
 лежащихъ въ плоскости Q_{k+1} .

При составленіи выраженія суммы моментовъ силъ относительно оси $J_k J_{k+1}$ будемъ имѣть въ виду, что моменты силъ N'_k , N''_k , N'_{k+1} , N''_{k+1} относительно этой оси равны нулю, такъ какъ эти силы пересѣкаютъ ось $J_k J_{k+1}$.

Обозначимъ проекціи всѣхъ величинъ на плоскость T_k перпендикулярную къ оси $J_k J_{k+1}$ слѣдующимъ образомъ:

Проекцію R_{k-1} черезъ $r_{k-1}^k = R_{k-1} \cos(R_{k-1}, T_k)$

R_k „ „ „ $r_k^k = R_k \cos(R_k, T_k)$

R_{k+1} „ „ „ $r_{k+1}^k = R_{k+1} \cos(R_{k+1}, T_k)$

P_k „ „ „ $p_k^k = P_k \cos(P_k, T_k)$

P_{k+1} „ „ „ $p_{k+1}^k = P_{k+1} \cos(P_{k+1}, T_k)$

Разстоянія этихъ проекцій до точки J_k пересѣченій мгновенной оси съ плоскостью T^k обозначимъ слѣдующимъ образомъ:

Разстояніе r_{k-1}^k до J_k черезъ ρ_{k-1}^k

r_k^k „ „ „ „ ρ_k^k

r_{k+1}^k „ „ „ „ ρ_{k+1}^k

p_k^k „ „ „ „ π_k^k

p_{k+1}^k „ „ „ „ π_{k+1}^k

Составляемъ выраженіе суммы моментовъ всѣхъ силъ относительно оси $J_k J_{k+1}$:

$$r_{k-1}^k \cdot \rho_{k-1}^k + r_k^k \cdot \rho_k^k + p_k^k \cdot \pi_k^k + p_{k+1}^k \cdot \pi_{k+1}^k = 0 \quad \dots (4)$$

или

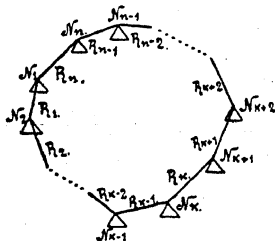
$$R_{k-1} \cos(R_{k-1}, T_k) \cdot \rho_{k-1}^k + R_{k+1} \cos(R_{k+1}, T_k) \rho_{k+1}^k + \\ + P_k \cos(P_k, T_k) \pi_k^k + P_{k+1} \cos(P_{k+1}, T_k) \pi_{k+1}^k = 0. \quad (5)$$

Для каждого стержня кольца можно составить подобное уравнение моментов относительно его мгновенной оси. Если в кольцо n стержней, то мы будем иметь n уравнений, в которых входят n неизвестных $(R_1, R_2 \dots R_k \dots R_n)$, каковыя и можно определять. При обычном же способе расчета, если бы мы составляли уравнения равновесия для каждого узла кольца, мы имели бы $3n$ уравнений с $3n$ неизвестными. При n четном число уравнений, какъ это будетъ видно изъ дальнѣйшаго, еще меньше, именно $\frac{n}{2}$. Опредѣливъ хотя бы одно R , нетрудно опредѣлить и остальные неизвестныя, применяя способъ разложенія силы на 3 направленія въ пространствѣ. Опредѣлимъ аналитически величину усилія въ какомъ-нибудь элементѣ R_k кольца. При этомъ послѣдовательно будемъ вести расчетъ въ двухъ предположеніяхъ, именно:

- а) что кольцо съ нечетнымъ числомъ стержней,
- б) „ „ съ четнымъ „ „

а) *Кольцо съ нечетнымъ числомъ стержней.*

Составимъ уравненія моментовъ для кольца съ n стержнями, при чемъ будемъ предполагать, что n — нечетное число. Схематически такое кольцо изображено на черт. 26.



Черт. 26.

Уравненія моментовъ относительно соответственныхъ мгновенныхъ осей будутъ (составляя ихъ по типу уравненія 5-го):

Для стержней

$$\begin{aligned}
 R_2 \dots R_1 \cos(R_1 T_2) \cdot \rho_1'' + R_3 \cos(R_3 T_2) \rho_3'' + \\
 + P_2 \cos(P_2 T_2) \pi_2'' + P_3 \cos(P_3 T_2) \pi_3'' = 0 \\
 R_3 \dots R_2 \cos(R_2 T_3) \rho_2''' + R_4 \cos(R_4 T_3) \rho_4''' + \\
 + P_3 \cos(P_3 T_3) \pi_3''' + P_4 \cos(P_4 T_3) \pi_4''' = 0 \\
 R_4 \dots R_3 \cos(R_3 T_4) \rho_3^{iv} + R_5 \cos(R_5 T_4) \rho_5^{iv} + \\
 + P_4 \cos(P_4 T_4) \pi_4^{iv} + P_5 \cos(P_5 T_4) \pi_5^{iv} = 0 \\
 \dots \\
 R_{k-1} \dots R_{k-2} \cos(R_{k-2} T_{k-1}) \rho_{k-2}^{k-1} + R_k \cos(R_k T_{k-1}) \rho_k^{k-1} + \\
 + P_{k-1} \cos(P_{k-1} T_{k-1}) \pi_{k-1}^{k-1} + P_k \cos(P_k T_{k-1}) \pi_k^{k-1} = 0 \\
 R_k \dots R_{k-1} \cos(R_{k-1} T_k) \rho_{k-1}^k + R_{k+1} \cos(R_{k+1} T_k) \rho_{k+1}^k + \\
 + P_k \cos(P_k T_k) \pi_k^k + P_{k+1} \cos(P_{k+1} T_k) \pi_{k+1}^k = 0 \\
 R_{k+1} \dots R_k \cos(R_k T_{k+1}) \rho_k^{k+1} + R_{k+2} \cos(R_{k+2} T_{k+1}) \rho_{k+2}^{k+1} + \\
 + P_{k+1} \cos(P_{k+1} T_{k+1}) \pi_{k+1}^{k+1} + P_{k+2} \cos(P_{k+2} T_{k+1}) \pi_{k+2}^{k+1} = 0 \\
 \dots \\
 R_{n-2} \dots R_{n-3} \cos(R_{n-3} T_{n-2}) \rho_{n-3}^{n-2} + R_{n-1} \cos(R_{n-1} T_{n-2}) \rho_{n-1}^{n-2} + \\
 + P_{n-2} \cos(P_{n-2} T_{n-2}) \pi_{n-2}^{n-2} + P_{n-1} \cos(P_{n-1} T_{n-2}) \pi_{n-1}^{n-2} = 0 \\
 R_{n-1} \dots R_{n-2} \cos(R_{n-2} T_{n-1}) \rho_{n-2}^{n-1} + R_n \cos(R_n T_{n-1}) \rho_n^{n-1} + \\
 + P_{n-1} \cos(P_{n-1} T_{n-1}) \pi_{n-1}^{n-1} + P_n \cos(P_n T_{n-1}) \pi_n^{n-1} = 0 \\
 R_n \dots R_{n-1} \cos(R_{n-1} T_n) \rho_{n-1}^n + R_1 \cos(R_1 T_n) \rho_1^n + \\
 + P_n \cos(P_n T_n) \pi_n^n + P_1 \cos(P_1 T_n) \pi_1^n = 0 \\
 R_1 \dots R_n \cos(R_n T_1) \rho_n^1 + R_2 \cos(R_2 T_1) \rho_2^1 + \\
 + P_1 \cos(P_1 T_1) \pi_1^1 + P_2 \cos(P_2 T_1) \pi_2^1 = 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

всего n уравнений съ n неизвѣстными.

Эти уравненія очевидно можно выразить въ такой формѣ:

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 R_1 + b R_3 + A &= 0 \\
 b_2 R_3 + c R_5 + B &= 0 \\
 c_1 R_5 + d R_7 + C &= 0 \\
 \dots & \\
 k_1 R_{k-2} + l R_k + K &= 0^1) \\
 l_1 R_k + m R_{k+2} + L &= 0 \\
 \dots & \\
 P_1 R_n + q R_2 + P &= 0^1) \\
 q_1 R_2 + r R_4 + Q &= 0 \\
 \dots & \\
 u_1 R_{k-1} + v R_{k+1} + U &= 0^1) \\
 v_1 R_{k+1} + w R_{k+3} + V &= 0 \\
 \dots & \\
 x_1 R_{n-3} + y R_{n-1} + X &= 0 \\
 y_1 R_{n-1} + a R_1 + Y &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Здѣсь k и n нечетныя.

Нетрудно видѣть, что при рѣшеніи этихъ уравненій и при n -нечетномъ числѣ получаемъ значеніе для R_1 :

$$R_1 = \frac{-Ab_1c_1 \dots k_1 \dots u_1 \dots y_1 + Bbc_1 \dots k_1 \dots u_1 \dots y_1 - Cbcd_1 \dots k_1 \dots u_1 \dots y_1 + \dots}{abcd \dots xy + a_1 b_1 \dots x_1 y_1} \dots \dots \dots (8)$$

На основаніи этой формулы опредѣляется величина R_1 , такъ какъ она выражается черезъ извѣстныя величины.

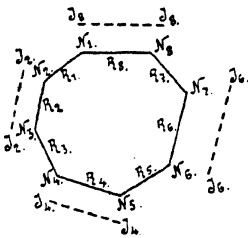
b) Кольцо съ четнымъ числомъ стержней.

Въ этомъ случаѣ число уравненій, необходимыхъ для опредѣленіе какого-нибудь неизвѣстнаго усилія R_1 , будетъ $\frac{n}{2}$.

Это ясно видно на частномъ примѣрѣ. Пусть, напримѣръ, имѣется пространственное кольцо на 8 опорахъ, схематически

¹⁾ Жирнымъ шрифтомъ обозначены величины, зависящія отъ положенія плоскости Q_k опорныхъ реакцій опоры N_k .

изображенное на черт. 27. Обозначимъ схематически мгновенныя оси для элементовъ R_2, R_4, R_6, R_8 черезъ $I_2I_2, I_4I_4, I_6I_6, I_8I_8$.



Черт. 27.

Составимъ уравненія моментовъ относительно этихъ осей по типу уравненій (7):

$$\begin{aligned}
 a_1R_1 + bR_3 + A &= 0 \text{ относительно оси } I_2I_2, \\
 b_1R_3 + cR_5 + B &= 0 \text{ " " } I_4I_4, \\
 c_1R_5 + dR_7 + C &= 0 \text{ " " } I_6I_6, \\
 d_1R_7 + aR_1 + D &= 0 \text{ " " } I_8I_8,
 \end{aligned}$$

т. е. для опредѣленія величины какого-нибудь неизвѣстнаго, напримѣръ R_1 , необходимо рѣшить всего $\frac{8}{2} = 4$ уравненія.

Для кольца съ n стержнями (n —четное) будемъ имѣть систему уравненій, составленную по типу (7):

$$\left. \begin{aligned}
 a_1R_1 + bR_3 + A &= 0 \\
 b_1R_3 + cR_5 + B &= 0 \\
 c_1R_5 + dR_7 + C &= 0 \\
 \dots &\dots \\
 x_1R_{n-3} + yR_{n-1} + X &= 0 \\
 y_1R_{n-1} + aR_1 + Y &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots \dots (9)$$

(всего $\frac{n}{2}$ уравненій).

Рѣшая эти уравненія относительно R_1 , получаемъ:

$$R_1 = \frac{Ab_1c_1d_1e_1\dots y_1 - Bbc_1d_1e_1\dots y_1 + Cbcd_1e_1\dots y_1 - \dots + \dots + Xbcd\dots xy_1 - Ybcde\dots xy}{abcd\dots xy - a_1b_1c_1\dots x_1y_1} \dots \dots (10)$$

Опредѣливъ R_1 по уравненію (8) или (10), нетрудно опредѣлить и остальные неизвѣстныя R_2, \dots, R_n , а также и опорныя реакціи кольца, ведя расчетъ съ узла N_1 и послѣдовательно разлагая равнодѣйствующую извѣстныхъ силъ, приложенныхъ въ данномъ узлѣ, на 3 данныхъ направленія. (два направленія для двухъ опорныхъ реакцій и одно—для неизвѣстнаго усилія въ стержнѣ кольца).

На основаніи уравненій 7 и 9 можно сказать, что примѣ-

неніе начала возможныхъ перемѣщеній къ опредѣленію усилія въ какомъ-нибудь элементѣ пространственнаго кольца позволяетъ сократить число уравненій, необходимыхъ для этого опредѣленія по условіямъ статики, второе для кольца съ нечетнымъ числомъ сторонъ и въ шесть разъ для кольца съ четнымъ числомъ сторонъ.

с) Опредѣленіе усилій въ элементахъ кольца, какъ функций положенія плоскости опорныхъ реакцій какой-нибудь опоры.

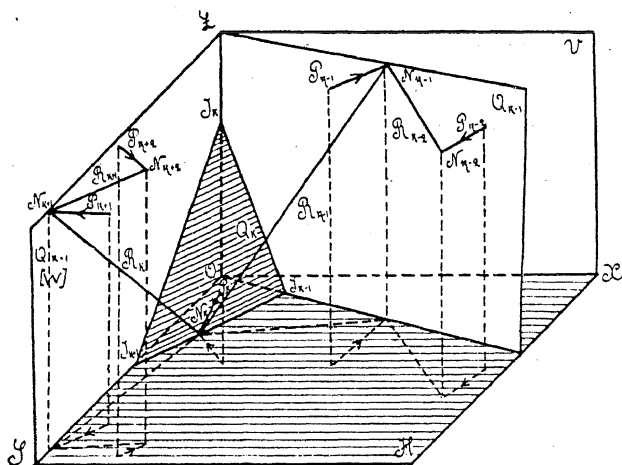
Найдемъ, по какому закону будетъ измѣняться усиліе въ какомъ-нибудь стержнѣ кольца, на примѣръ въ R_1 , если мы будемъ измѣнять положеніе плоскости Q_k опорныхъ реакцій какой-нибудь опоры, на примѣръ N_k . Для этого мы должны въ уравненіяхъ (7 или 9) отдѣлить величины, которыя не измѣняются отъ измѣненія положенія Q_k , отъ тѣхъ, которыя съ измѣненіемъ Q_k —измѣняются.

Подставляя значенія всѣхъ этихъ величинъ въ формулы 8 или 10, мы выразимъ R_1 въ функціи переменныхъ, опредѣляющихъ положеніе плоскости Q_k , и такимъ образомъ найдемъ законъ, по которому измѣняется величина усилія R_1 при измѣненіи положенія Q_k . Законъ измѣненія всѣхъ остальныхъ неизвѣстныхъ пока усилій въ элементахъ кольца и опорныхъ реакцій будетъ одинаковъ съ закономъ, найденнымъ для R_1 , такъ какъ всѣ эти величины связаны между собою линейною зависимостью.

Выдѣлимъ часть кольца (черт. 28) между его опорами N_{k-2} и N_{k+2} и отнесемъ его къ прямоугольной системѣ плоскостей координатъ, при чемъ за вертикальныя плоскости координатъ выберемъ: плоскость опорныхъ реакцій Q_{k+1} , и плоскость V , перпендикулярную къ ней и проходящую черезъ линію OZ сѣченія Q_{k-1} съ Q_{k+1} и за горизонтальную—плоскость H , проходящую черезъ точку N_k и перпендикулярную къ Q_{k+1} и V .

Такимъ образомъ заданными являются: точки N_{k-2} ,

$N_{k-1}, N_k, N_{k+1}, N_{k+2}$, длины и направления стержней $R_{k-2}, R_{k-1}, R_k, R_{k+2}$, плоскости Q_k, Q_{k-1}, Q_{k+1} , величины и направления внешних сил $P_{k-2}, P_{k-1}, P_k, P_{k+1}, P_{k+2}$.



Черт. 28.

Разсчетъ будемъ вести въ слѣдующемъ порядкѣ:

1. Составимъ уравненія мгновенныхъ осей J_k, J_{k+1} и J_k, J_{k-1} .

2. Опредѣлимъ 8 произведеній величинъ, которыя въ качествѣ коэффициентовъ при R входятъ въ уравненія 6:

$$\begin{aligned} & \cos (R_{k-1}, T_k) \rho_{k-1}^k, \cos (R_{k+1}, T_k) \rho_{k+1}^k, \cos (R_{k-2}, T_{k-1}) \rho_{k-2}^{k-1}, \\ & \cos (R_k, T_{k-1}) \rho_k^{k-1}, \cos (P_k, T_k) \pi_k^k, \cos (P_{k+1}, T_k) \pi_{k+1}^k, \\ & \cos (P_{k-1}, T_{k-1}) \pi_{k-1}^{k-1}, \cos (P_k, T_{k-1}) \pi_k^{k-1}. \end{aligned}$$

3. Подставимъ найденныя величины въ формулу 8 или 10. Предварительно выразимъ на основаніи формулъ 6, 7 и 8 R_1 въ функціи вышеупомянутыхъ величинъ, измѣняющихся при измѣненіи положенія плоскости Q_k .

Кромѣ того обозначимъ произведенія различныхъ постоянныхъ величинъ, входящихъ въ формулу 8 черезъ буквы M_1, M_2, \dots, M_7 .

Такимъ образомъ получаемъ:

$$\begin{aligned}
 R_1 = & \frac{M_1 \cos(R_{k-2} T_{k-1}) \rho_{k-2}^{k-1} \cdot \cos(R_{k-1} T_k) \rho_{k-1}^k +}{+ M_2 \cos(R_k T_{k-1}) \rho_k^{k-1} \cdot \cos(R_{k-1}, T_k) \rho_{k-1}^k +} \\
 & \frac{+ M_3 \cos(R_k T_{k-1}) \rho_k^{k-1} \cdot \cos(R_{k+1}, T_k) \rho_{k+1}^k +}{+ M_4 [P_{k-1} \cos(P_{k-1} T_{k-1}) \pi_{k-1}^{k-1} + P_k \cos(P_k T_{k-1}) \pi_k^{k-1}] \cos(R_{k-1}, T_k) \rho_{k-1}^k +} \\
 & \frac{M_5 \cos(R_k T_{k-1}) \rho_k^{k-1} \cdot \cos(R_{k+1} T_k) \rho_{k+1}^k +}{+ M_5 [P_k \cos(P_k T_k) \pi_k^k + P_{k+1} \cos(P_{k+1} T_k) \pi_{k+1}^k] \cdot \cos(R_k T_{k-1}) \rho_k^{k-1}} \\
 & \frac{+ M_7 \cdot \cos(R_{k-2}, T_{k-1}) \rho_{k-2}^{k-1} \cos(R_{k-1}, T_k) \rho_{k-1}^k}{\phantom{+ M_5 [P_k \cos(P_k T_k) \pi_k^k + P_{k+1} \cos(P_{k+1} T_k) \pi_{k+1}^k] \cdot \cos(R_k T_{k-1}) \rho_k^{k-1}}} \quad (8')
 \end{aligned}$$

или, принимая во вниманіе уравненія 6 и 7, именно, что:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \cos(R_{k-2} T_{k-1}) \rho_{k-2}^{k-1} \\
 u_1 &= \cos(R_{k-1}, T_k) \rho_{k-1}^k \\
 l &= \cos(R_k, T_{k-1}) \rho_k^{k-1} \\
 v &= \cos(R_{k+1}, T_k) \rho_{k+1}^k \\
 K &= P_{k-1} \cos(P_{k-1}, T_{k-1}) \pi_{k-1}^{k-1} + P_k^2 \cos(P_k, T_{k-1}) \pi_k^{k-1} \\
 U &= P_k \cos(P_k T_k) \pi_k^k + P_{k+1} \cos(P_{k+1} T_k) \pi_{k+1}^k,
 \end{aligned}$$

и подставляя эти величины въ формулу 8', получаемъ:

$$R_1 = \frac{M_1 k_1 u_1 + M_2 l u_1 + M_3 l v + M_4 K u_1 + M_5 U l}{M_6 l v + M_7 k_1 u_1} \quad (8'')$$

Подобнаго же вида выраженіе получится, очевидно, для усилія въ элементѣ кольца съ четнымъ числомъ стержней (сравн. формулы 9 и 10).

Переходимъ теперь къ опредѣленію различныхъ величинъ, зависящихъ отъ положенія плоскости опорныхъ реакцій Q_k опоры N_k .

1. Уравненія мгновенныхъ осей.

Пусть координаты точки N_k будутъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi_k \\ y &= \eta_k \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ точки } N_{k-1} \cdot \left. \begin{aligned} x &= \xi_{k-1} \\ y &= \eta_{k-1} \\ z &= \zeta_{k-1} \end{aligned} \right\} \text{ точки } N_{k+1} \cdot \left. \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \eta_{k+1} \\ z &= \zeta_{k+1} \end{aligned} \right\}$$

Уравнение всякой плоскости Q_k , проходящей через точку N_k , будетъ:

$$A_k(x - \xi_k) + B_k(y - \eta_k) + C_k z = 0 \dots \dots \dots (11)$$

Уравнение оси $J_k J_{k+1}$, получимъ, полагая въ уравнении (11) $x = 0$

$$\frac{y - \eta_k}{-C_k} = \frac{z - \frac{A_k}{C_k} \xi_k}{B_k} \dots \dots \dots (12)$$

Уравнение оси $J_k J_{k-1}$ получимъ, составивъ уравнение линии сѣченія плоскостей Q_{k-1} и Q_k .

Уравнение плоскости Q_{k-1} должно удовлетворять двумъ условіямъ, именно, что а) плоскость Q_{k-1} должна проходить черезъ данную точку N_{k-1} и в) плоскость Q_{k-1} должна заключать въ себѣ линію OZ . При такихъ условіяхъ уравнение плоскости Q_{k-1} будетъ:

$$\eta_{k-1} x + (-\xi_{k-1}) y = 0 \dots \dots \dots (13)$$

Уравнение оси $J_k J_{k-1}$ получаемъ, рѣшая совмѣстно два уравненія (13 и 11).

$$\frac{x}{\xi_{k-1}} = \frac{y}{\eta_{k-1}} = \frac{z - \frac{A_k \xi_k + B_k \eta_k}{C_k}}{\frac{A_k \xi_{k-1} + B_k \eta_{k-1}}{-C_k}} \dots \dots \dots (14)$$

2. Опредѣленіе 8 произведеній въ функціи отъ A_k , B_k и C_k .

Составляемъ ур-ія стержней (черт. 28)

$$R_{k-1} \dots \frac{x - \xi_k}{\xi_{k-1} - \xi_k} = \frac{y - \eta_k}{\eta_{k-1} - \eta_k} = \frac{z}{\zeta_{k-1}} \dots \dots \dots (15)$$

$$R_{k+1} \dots \frac{x}{\xi_{k+2}} = \frac{y - \eta_{k+1}}{\eta_{k+2} - \eta_{k+1}} = \frac{z - \zeta_{k-1}}{\zeta_{k+1} - \zeta_{k+1}} \dots \dots \dots (16)$$

$$R_{k-2} \dots \frac{x - \xi_{k-1}}{\xi_{k-2} - \xi_{k-1}} = \frac{y - \eta_{k-1}}{\eta_{k-2} - \eta_{k-1}} = \frac{z - \zeta_{k-1}}{\zeta_{k-2} - \zeta_{k-1}} \dots \dots \dots (17)$$

$$R_k \dots \frac{x}{\xi_k} = \frac{y - \eta_{k+1}}{\eta_k - \eta_{k-1}} = \frac{z - \zeta_{k+1}}{-\zeta_{k+1}} \dots \dots \dots (18)$$

Выписываемъ ур-ія мгновенныхъ осей

$$J_k J_{k+1} \dots \frac{y - \eta_k}{-C_k} = \frac{z - \frac{A_k}{C_k} \xi}{B_{k1}} \dots \dots \dots (12)$$

$$J_k J_{k-1} \dots \frac{x}{\xi_{k-1}} = \frac{y}{\eta_{k-1}} = \frac{z - \frac{A_k \xi_k + B_k \eta_k}{C_k}}{\frac{A_k \xi_{k-1} + B_k \eta_{k-1}}{-C_k}} \dots \dots (14)$$

Задаемъя уравненіями линій внѣшнихъ силъ — P_{k-1} , P_k , P_{k+1} , принимая во вниманіе, что силы эти приложены въ точкахъ N_{k-1} , N_k и N_{k+1} .

Ур-ія линій силъ будутъ:

$$P_k \dots \dots \frac{x - \xi_k}{m_{p_k}} = \frac{y - \eta_k}{n_{p_k}} = \frac{z}{p_{p_k}} \dots \dots \dots (19)$$

$$P_{k+1} \dots \frac{x}{m_{p_{k+1}}} = \frac{y - \eta_{k+1}}{n_{p_{k+1}}} = \frac{z - \zeta_{k+1}}{p_{p_{k+1}}} \dots \dots \dots (20)$$

$$P_{k-1} \dots \frac{x - \xi_{k-1}}{m_{p_{k-1}}} = \frac{y - \eta_{k-1}}{n_{p_{k-1}}} = \frac{z - \zeta_{k-1}}{p_{p_{k-1}}} \dots \dots \dots (21)$$

гдѣ m_{p_k} , n_{p_k} . . . $p_{p_{k-1}}$ величины извѣстныя.

Прежде чѣмъ составлять вышеупомянутыя произведенія величинъ косинусовъ на соотвѣтственныя величины разстояній, замѣтимъ, что каждый косинусъ угла между какою-нибудь линіей (въ нашемъ случаѣ, напримѣръ, стержнемъ R_{k+1}), выраженной уравненіемъ вида:

$$\frac{x - a_2}{m_2} = \frac{y - b_2}{n_2} = \frac{z - c_2}{p_2} \dots \dots \dots (a)$$

и плоскостью, перпендикулярною къ линіи, выраженной уравненіемъ:

$$\frac{x - a_1}{m_1} = \frac{y - b_1}{n_1} = \frac{z - c_1}{p_1} \dots \dots \dots (b)$$

(въ нашемъ случаѣ, напримѣръ, плоскостью T_k перпендикулярной къ мгновенной оси $J_k J_{k+1}$), можно замѣнить синусомъ угла между данными линіями (a и b).

Кромѣ того изъ аналитической геометріи извѣстно ¹⁾, что произведенія синуса угла между двумя линиями (*a* и *b*) на разстояніе между ними выражается формулой:

$$\sin (a, b) \cdot \rho_{ab} = \frac{(n_1 p_2 - p_1 n_2)(a_1 - a_2) + (p_1 m_2 - m_1 p_2)(b_1 - b_2) + (m_1 n_2 - n_1 m_2)(c_1 - c_2)}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} (c)$$

Зная это, нетрудно написать выраженіе искомымъ произведеній, пользуясь ур-ями стержней кольца (15—18), уравненіями силъ (19—21) (эти уравненія типа *a*) и уравненіями мгновенныхъ осей 12 и 14 (эти уравненія типа *b*):

$$\begin{aligned} \cos (R_{k-1}, T_k) \rho_{k-1}^k &= \\ &= \frac{[A_k (\xi_{k-1} - \xi_k) + B_k (\eta_{k-1} - \eta_k) + C_k \zeta_{k-1}] \xi_k}{\sqrt{(\xi_{k-1} - \xi_k)^2 + (\eta_{k-1} - \eta_k)^2 + \zeta_{k-1}^2} \cdot \sqrt{B_k^2 + C_k^2}} = u_1 \\ &\quad \text{(на основ. ур-ій 15 и 12)} \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos (R_{k+1}, T_k) \rho_{k+1}^k &= \\ &= \frac{[A_k \xi_k + B_k (\eta_k - \eta_{k+1}) - C_k \zeta_{k+1}] \xi_{k+2}}{\sqrt{\xi_{k+2}^2 + (\eta_{k+2} - \eta_{k+1})^2 + (\zeta_{k+2} - \zeta_{k+1})^2} \cdot \sqrt{B_k^2 + C_k^2}} = v \\ &\quad \text{(на основ. ур-ій 16 и 12)} (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos (R_{k-2}, T_{k-1}) \rho_{k-2}^{k-1} &= \\ &= \frac{[A_k (\xi_{k-1} - \xi_k) + B_k (\eta_{k-1} - \eta_k) + C_k \zeta_{k-1}] (\xi_{k-2} \eta_{k-1} - \xi_{k-1} \eta_{k-2})}{\sqrt{(\xi_{k-2} - \xi_{k-1})^2 + (\eta_{k-2} - \eta_{k-1})^2 + (\zeta_{k-2} - \zeta_{k-1})^2} \cdot \\ &\quad \cdot \sqrt{A_k^2 \xi_{k-1}^2 + B_k^2 \eta_{k-1}^2 + C_k^2 (\xi_{k-1}^2 + \eta_{k-1}^2) + 2A_k B_k \xi_{k-1} \eta_{k-1}} = k_1 \\ &\quad \text{(на основ. ур-ій 17 и 14)} \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos (R_k, T_{k-1}) \rho_k^{k-1} &= \\ &= \frac{[A_k \xi_k + B_k (\eta_k - \eta_{k+1}) - C_k \zeta_{k+1}] (\xi_k \eta_{k-1} - \xi_{k-1} \eta_k)}{\sqrt{\xi_k^2 + (\eta_k - \eta_{k+1})^2 + \zeta_{k+1}^2} \cdot \\ &\quad \cdot \sqrt{A_k^2 \xi_{k-1}^2 + B_k^2 \eta_{k-1}^2 + C_k^2 (\xi_{k-1}^2 + \eta_{k-1}^2) + 2A_k B_k \xi_{k-1} \eta_{k-1}} = l \\ &\quad \text{(на основ. ур-ій 18 и 14)} \quad (25) \end{aligned}$$

¹⁾ См. „Основной курсъ аналитической геометріи“ К. Андреева „Харьковъ“ 1888 г. часть II, стр. 88.

$$\begin{aligned}
& P_k \cos (P_k, T_k) \pi_k^k + P_{k+1} \cdot \cos (P_{k+1}, T_k) \pi_{k+1}^k = \\
& = P_k \frac{(A_k m_{p_k} + B_k n_{p_k} + C_k p_{p_k}) \xi_k}{\sqrt{m_{p_k}^2 + n_{p_k}^2 + p_{p_k}^2} \cdot \sqrt{B_k^2 + C_k^2}} + \\
& + P_{k+1} \frac{A_k \xi_k m_{p_{k+1}} + B_k (\eta_k - \eta_{k+1}) m_{p_{k+1}} - C_k \zeta_{k+1} p_{p_{k+1}}}{\sqrt{m_{p_{k+1}}^2 + n_{p_{k+1}}^2 + p_{p_{k+1}}^2} \cdot \sqrt{B_k^2 + C_k^2}} = U \\
& \text{(на основ. ур-ий 19, 12 и 20, 12)} \dots \dots \dots (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P_{k-1} \cos (P_{k-1}, T_{k-1}) \pi_{k-1}^{k-1} + P_k \cos (P_k, T_{k-1}) \pi_k^{k-1} = \\
& P_{k-1} \frac{[A_k (\xi_k - \xi_{k-1}) + B_k (\eta_k - \eta_{k-1}) - C_k \zeta_{k-1}] (\xi_{k-1} n_{p_{k-1}} - \eta_{k-1} m_{p_{k-1}})}{\sqrt{m_{p_{k-1}}^2 + n_{p_{k-1}}^2 + p_{p_{k-1}}^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{A_k^2 \xi_{k-1}^2 + B_k^2 \eta_{k-1}^2 + C_k^2 (\xi_{k-1}^2 + \eta_{k-1}^2) + 2A_k B_k \xi_{k-1} \eta_{k-1}}}{\sqrt{m_{p_k}^2 + n_{p_k}^2 + p_{p_k}^2}} + \\
& + P_k \frac{(A_k m_{p_k} + B_k n_{p_k} + C_k p_{p_k}) (\xi_{k-1} \eta_k - \xi_k \eta_{k-1})}{\sqrt{m_{p_k}^2 + n_{p_k}^2 + p_{p_k}^2}}
\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{A_k^2 \xi_{k-1}^2 + B_k^2 \eta_{k-1}^2 + C_k^2 (\xi_{k-1}^2 + \eta_{k-1}^2) + 2A_k B_k \xi_{k-1} \eta_{k-1}}}{\sqrt{m_{p_k}^2 + n_{p_k}^2 + p_{p_k}^2}} = K$$

(на основ. ур-ий 21, 14 и 19, 14). (27)

Подставляя выражения, полученные по формуламъ (22—27), въ формулу 8'', дѣлая сокращенія и приведеніе, получимъ слѣдующее значеніе R_1 :

$$R_1 = \frac{aA_k^2 + bB_k^2 + cC_k^2 + dA_k B_k + eA_k C_k + fB_k C_k}{a'A_k^2 + b'B_k^2 + c'C_k^2 + d'A_k B_k + e'A_k C_k + f'B_k C_k} \dots \dots (28)$$

гдѣ a, b, c, d, e, f и a', b', c', d', e', f' являются величинами постоянными, не зависящими отъ силъ положенія плоскости Q_k , при чемъ первыя шесть величинъ являются линейными функциями внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на опоры кольца.

На основаніи формулы 28 для каждого даннаго кольца можно изслѣдовать измѣненіе усилій въ элементахъ его при измѣненіи положенія плоскости Q_k опорныхъ реакцій любой его опоры N_k .

Примѣчаніе. Опредѣливъ по формулѣ 8 или 10 величину R_1 , можно изъ уравненій 7 или 9 легко опредѣлить усилія въ другихъ элементахъ кольца.

Глава 6.

Частные случаи расчета.

Подъ частными случаями расчета пространственных колець мы будем подразумѣвать опредѣленіе усилій въ ихъ элементахъ при частномъ случаѣ расположенія плоскостей опорныхъ реакцій.

1. Кольца бесконечно-малой подвижности.

Подъ таковыми кольцами будем подразумѣвать такія, которыя, при дѣйстви на нихъ любой системы силъ, способны допустить бесконечно-малое передвиженіе своихъ опоръ,

Аналитически условіе бесконечно-малой подвижности кольца можно выразить слѣдующимъ образомъ (форм. 8 или 10),

$$abcd \dots xy \pm a_1 b_1 \dots x_1 y_1 = 0 \dots \dots \dots (a)$$

т. е. знаменатель дроби, опредѣляющей усиліе R_1 въ какомъ-нибудь элементѣ долженъ быть равенъ нулю, иными словами усилія въ элементахъ кольца будутъ бесконечно-большими.

Какъ частный случай такого заданія можетъ служить условіе, что плоскость Q_k какой-нибудь опоры N_k заключаетъ въ себѣ три смежныхъ опоры N_{k-1} , N_k и N_{k+1} .

На основаніи ур-я 11 получаемъ при такомъ заданіи слѣдующія равенства:

$$A_k(\xi_{k-1} - \xi_k) + B_k(\eta_{k-1} - \eta_k) + C_k \zeta_{k-1} = 0 \dots \dots (29)$$

$$A_k \xi_k + B_k(\eta_k - \eta_{k+1}) - C_k \zeta_{k-1} = 0 \dots \dots (30)$$

Подставляя эти выраженія въ формулы 22—27, получимъ значеніе для R_1 вида:

$$R_1 = \frac{F(A_k, B_k, C_k, P)}{0} = \infty$$

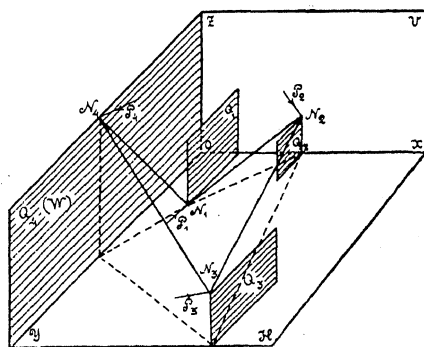
Что очевидно и должно быть, такъ какъ сила P_k , приложенная въ опорѣ N_k должна уравниваться силами, лежащими въ одной плоскости Q_k , не проходящей черезъ P_k .

2. Если плоскости опорныхъ реакцій параллельны одной какой-нибудь линіи, то о кинематическихъ свойствахъ кольца можно судить по кинематическимъ свойствамъ его проекціи на плоскость перпендикулярную къ данной линіи.

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ всѣ мгновенныя оси будутъ параллельны данной линіи, и поэтому въ ур-ія типа 7-го и 9-го войдутъ выраженія только проекцій всѣхъ силъ на плоскость перпендикулярную къ данной линіи, т. е. кинематическія свойства кольца будутъ тѣ же, что и у его проекціи на эту плоскость.

Разсмотримъ нѣсколько частныхъ заданій случая 2.

2а. Если плоскости опорныхъ реакцій параллельны другъ другу, то кольцо будетъ двигаться въ направленіи перпендикулярномъ къ этимъ плоскостямъ, не измѣняя своей формы (черт. 29).



Черт. 29.

Пусть координаты точекъ будутъ опоръ:

$$N_1; \xi_1 = 3; \eta_1 = 5; \zeta_1 = 0;$$

$$N_2; \xi_2 = 8; \eta_2 = 0; \zeta_2 = 3;$$

$$N_3; \xi_3 = 16; \eta_3 = 18; \zeta_3 = 4;$$

$$N_4; \xi_4 = 0; \eta_4 = 10; \zeta_4 = 11;$$

и пусть плоскости опорныхъ реакцій параллельны W (или Q_4).

Тогда ур-я этихъ плоскостей будутъ:

$$Q_1 \dots x - 3 = 0,$$

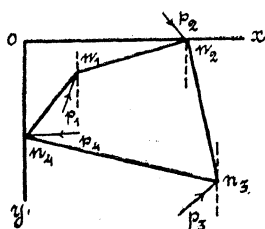
$$Q_2 \dots x - 8 = 0,$$

$$Q_3 \dots x - 16 = 0,$$

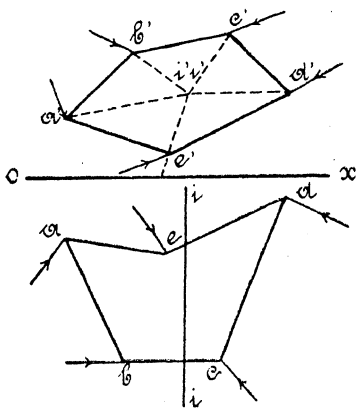
$$Q_4 \dots x = 0.$$

Въ этомъ случаѣ условія неподвижности кольца равносильны съ условіемъ неподвижности его проекцій на плоскости H и $V \perp$ къ W , такъ какъ ур-я 7 или 9 (черт. 30). придется составлять для проекцій силъ на плоскости \perp къ плоскости W .

Изъ черт. 30 нетрудно видѣть, что опорныя реакціи будутъ параллельны пл. W . Равнодѣйствующая же внѣшнихъ силъ въ общемъ случаѣ не параллельна этой плоскости. Поэтому кольцо будетъ двигаться по направлению \perp къ W .



Черт. 30.



Черт. 31.

2b. Если плоскости опорныхъ реакцій пересѣкаются по одной прямой линіи, то кольцо будетъ вращаться вокругъ этой линіи.

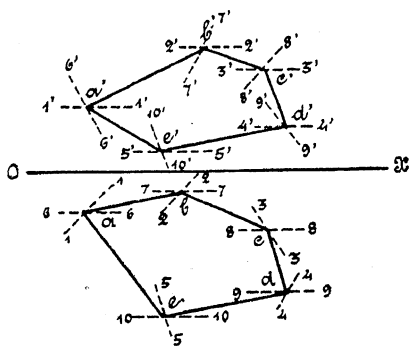
Пусть на черт. 31 изображено пространственное кольцо $ABCDE$ въ ортогональныхъ проекціяхъ, при чемъ вертикальная плоскость (V) проекцій выбрана перпендикулярно къ линіи JJ сѣченія плоскостей опорныхъ реакцій. Слѣды этихъ плоскостей изображаются на V въ видѣ прямыхъ линій, проходящихъ черезъ проекціи на V узловъ кольца и черезъ точку $i'i'$ —проекціи на V оси JJ .

Разсматривая условия равновѣсія проекціи кольца на V , видимъ, что всѣ опорныя реакціи проходятъ черезъ точку $i'i'$, проекціи же данныхъ внѣшнихъ силъ черезъ эту точку не проходятъ.

Поэтому, составивъ выраженіе суммы моментовъ всѣхъ внѣшнихъ, дѣйствующихъ на кольцо силъ, относительно оси JJ , увидимъ, что эта сумма въ общемъ случаѣ не будетъ равна нулю, т. е. что кольцо имѣетъ возможность вращаться около оси JJ .

3. Если плоскости опорныхъ реакцій кольца заданы случайно, то о кинематическихъ свойствахъ кольца въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно судить, разсматривая совмѣстно кинематическія свойства проекцій на двѣ взаимно перпендикулярныя плоскости проекцій.

Каково бы ни было движеніе въ пространствѣ каждой опоры кольца, его всегда можно разложить на два составляющихъ движенія: одно параллельное одной плоскости проекцій, напримѣръ, горизонтальной— H , и другое—параллельно вертикальной плоскости проекцій— V . Если мы въ отдѣльности опредѣлимъ возможные паправленія движенія каждой опоры относительно плоскостей проекцій H и V , то мы будемъ знать и возможные движенія каждой опоры



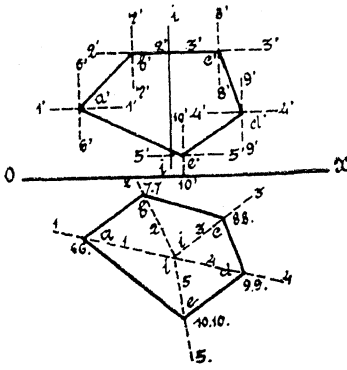
Черт. 32.

въ пространствѣ. На черт. 32 плоскости опорныхъ реакцій каждой опоры опредѣлены двумя линиями—горизонтальною и

фронталью. При случайномъ направленіи горизонталей и фронталей кольцо будетъ неподвижнымъ и неизмѣняемымъ (исключеніе см. формулу (а) главы 6-й).

Разсмотримъ эту теорему въ рядѣ частныхъ случаевъ.

за. Возможное вращеніе кольца около оси перпендикулярной къ H (черт. 33).



Черт. 33.

Пусть дано 5-ти угольное пространственное кольцо $ABCDE$.

Плоскость опорныхъ реакцій каждой опоры задана двумя линиями — горизонталью и фронталью ея. При этомъ горизонтали 11, 22, 33, 44, 55 всѣхъ этихъ плоскостей параллельны H и пересѣкаютъ линію JJ перпендикулярную къ H . Фронталі же 66, 77, 88, 99 и 10,10 всѣхъ плоскостей

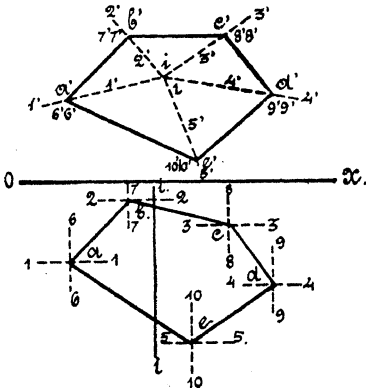
перпендикулярны къ H .

Разсмотримъ, какое движеніе допускаютъ горизонталі опорныхъ плоскостей. Такъ какъ на горизонтальной проекціи кольца всѣ проекціи горизонталей пересѣкаются въ одной точкѣ ii , то горизонтальная проекція кольца, а слѣд. и само кольцо можетъ вращаться около оси JJ . Разсматривая вертикальныя проекціи горизонталей, видимъ, что ихъ расположеніе не препятствуетъ движенію опоръ кольца въ плоскостяхъ параллельныхъ H . Кромѣ того обѣ проекціи на H и на V горизонталей допускаютъ движеніе кольца перпендикулярное къ H . Обращаясь теперь къ разсмотрѣннѣ проекціи фронталей, видимъ, что ихъ горизонтальныя проекціи допускаютъ движеніе опоръ кольца въ плоскостяхъ $\parallel H$. Вертикальныя проекціи же только это движеніе и допускаютъ. Сопоставляя всѣ эти данныя, заключаемъ, что единственнымъ возможнымъ движеніемъ кольца будетъ вращеніе около оси $JJ \perp$ къ H .

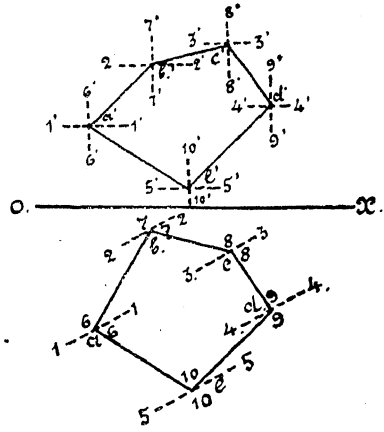
зв. Возможное вращение кольца около оси перпендикулярной къ V (черт. 34).

Этотъ случай аналогиченъ предыдущему.

Ось $JJ \perp V$. Доказательство то-же, что и для случая за, только разсужденія относимыя раньше къ горизонталямъ, теперь будутъ относиться къ фронталямъ и наоборотъ.



Черт. 34.



Черт. 35.

зс. Возможное прямолинейное движение кольца параллельно H (черт. 35).

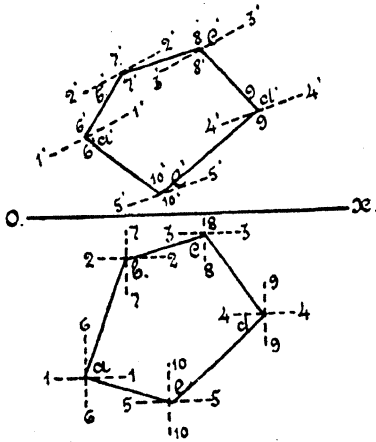
Разсматривая горизонтальныя и вертикальныя проекціи горизонталей, видимъ, что опоры кольца могутъ двигаться въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ H и въ частности перпендикулярныхъ къ направленію этихъ горизонталей.

Разсматривая вертикальныя проекціи фронталей, которыя перпендикулярны къ H , видимъ, что опоры кольца могутъ двигаться въ плоскостяхъ, параллельныхъ H . Сопоставляя оба полученныя движенія, заключаемъ, что направленіями возможныхъ движеній опоръ кольца будутъ линіи параллельныя H и перпендикулярныя плоскостямъ опорныхъ реакцій, т. е. кольцо можетъ двигаться параллельно H .

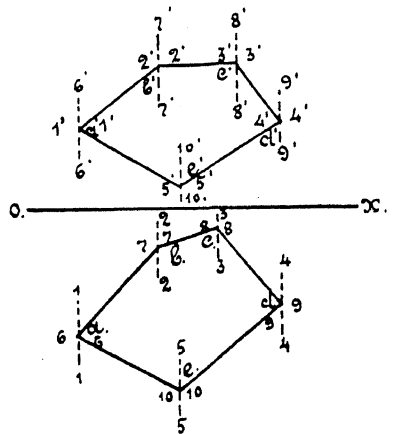
зд. Возможное прямолинейное движение кольца параллельно V (черт. 36).

Доказательство аналогично предыдущему. Движенія кольца $\parallel V$ и перпендикулярно къ линіямъ фронталей.

зе. Возможное движение кольца параллельно оси проекции OX (черт. 37).



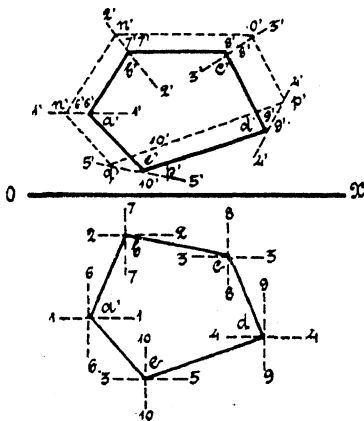
Черт. 36.



Черт. 37.

Этот случай является комбинацией случаевъ зс и зд. Плоскости опорныхъ реакцій будутъ \perp къ OX .

зф. Безконечно-малая подвижность кольца въ плоскостяхъ параллельныхъ V (черт. 38).



Черт. 38.

Пусть плоскости опорныхъ реакцій всѣхъ опоръ перпендикулярны къ V и пусть слѣды ихъ на V будутъ $1' 1'$, $2' 2'$, $3' 3'$, $4' 4'$, $5' 5'$. Если на этихъ слѣдахъ въ проекціи на V можно построить замкнутую картину движениа ¹⁾, то кольцо будетъ обладать безконечно-малой подвижностью, т. к. его вертикальная проекція обладаетъ этимъ свойствомъ, а горизонтальная проекція кольца показываетъ, что опоры кольца могутъ двигаться параллельно V .

могутъ двигаться параллельно V .

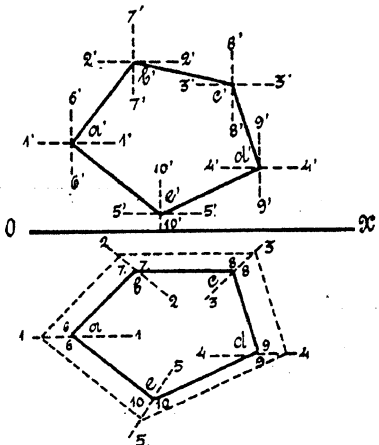
¹⁾ О картинахъ движениа см. дальше, главу 10.

зг. Безконечно малая подвижность кольца въ плоскостяхъ параллельныхъ H (черт. 39).

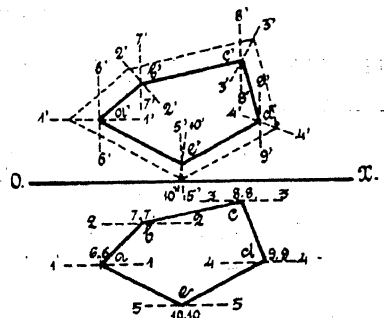
Случай аналогичный предыдущему.

Примѣчаніе 1. Замкнутая картина движенія, построенная только для одной проекціи горизонталей или фронталей еще, конечно, не указываетъ на безконечно-малую подвижность кольца, если этому противорѣчатъ другія проекціи горизонталей или фронталей плоскостей опорныхъ реакцій, напри-

мѣръ, кольцо, изображенное на черт. 40, не измѣняя своей формы можетъ двигаться \perp къ



Черт. 39.

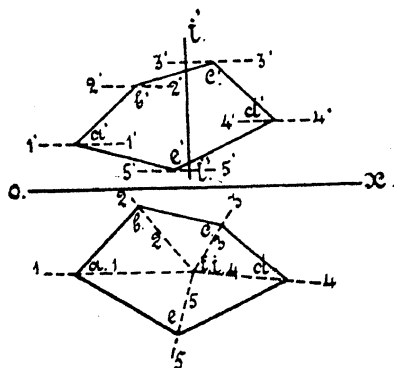


Черт. 40.

V , хотя для проекцій горизонталей и фронталей и возможно построить замкнутыя картины движенія. Это происходитъ потому, что возможныя движенія, допускаемыя каждой картиной ихъ, не совпадаютъ.

Примѣчаніе 2. Методъ изученія условій движенія колець въ ортогональныхъ проекціяхъ можно примѣнить и къ случаю, когда заданы для каждой опоры только по одной линіи опорныхъ реакцій. Изученіе сложнаго движенія опоръ такого кольца облегчается картинами его, получаемыми въ двухъ проекціяхъ. Напримѣръ, случай такого движенія опоръ кольца вокругъ оси $JJ \perp$ къ H изображенъ на черт. 41. Всѣ линіи опорныхъ реакцій пересѣкаютъ ось $JJ \perp$ къ H и параллельны H . Движеніе каждой опоры можетъ происходить въ

плоскости \perp къ H и \perp къ направленію линіи опорной реакціи этой опоры, т. е. каждая опора можетъ совершать



Черт. 41.

два движенья: одно вокругъ оси JJ , другое—параллельное этой оси.

Глава 7.

Разсчетъ кольца въ стереографическихъ проеціяхъ.

При опредѣленіи величины усилія въ какомъ нибудь элементѣ пространственнаго кольца при дѣйствіи на послѣднее внѣшнихъ силъ, приходится составлять ур-ія, выражающія условія равновѣсія стержней кольца (ур-ія 6, гл. 5). Какъ было показано раньше, неизвѣстное усиліе въ какомъ-нибудь элементѣ выражается формулой вида (фор. 8 или 10, гл. 5, стр. 23 и 24)

$$R_1 = \frac{A b_1 c_1 d_1 \dots - B b c_1 d_1 \dots + C b c d_1 c_1 \dots - M b c d e \dots l m}{abcd \dots l m - a_1 b_1 c_1 \dots l_1 m_1}$$

гдѣ величины $A, B, \dots, M, a, b, c, \dots, m, a_1, b_1, \dots, m_1$ являются функціями величинъ данныхъ внѣшнихъ силъ и взаимнаго расположенія плоскостей опорныхъ реакцій, стержней кольца и направленія дѣйствія силъ. Всѣ эти величины обозначаютъ собою коэффициенты уравненій 6 (стр. 22). Разсматривая эти коэффициенты, видимъ, что они являются произведеніемъ слѣдующихъ величинъ: 1) косинусовъ нѣкоторыхъ угловъ, 2) разстояній между нѣкоторыми направленіями и 3) для

нѣкоторыхъ коэффиціентовъ и величинами данныхъ внѣшнихъ силъ. Послѣднія величины всегда являются данными, и поэтому не требуютъ опредѣленія. Въ виду этого приходится опредѣлять лишь рядъ косинусовъ нѣкоторыхъ угловъ и рядъ разстояній между двумя линиями, въ общемъ случаѣ не параллельными и не пересѣкающимися.

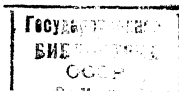
Ранѣе (глава 5) былъ изложенъ пріемъ аналитическаго опредѣленія этихъ косинусовъ и разстояній. Теперь мы изложимъ описаніе графическаго способа опредѣленія этихъ величинъ. Такъ какъ при рѣшеніи этой задачи приходится имѣть дѣло съ точками, линиями и плоскостями, расположенными случайно въ пространствѣ, то примѣнимъ одинъ изъ извѣстныхъ методовъ изображенія пространственныхъ фигуръ.

Существуетъ цѣлый рядъ методовъ изображенія пространственныхъ тѣлъ на плоскости, именно:

1. Методъ ортогональныхъ проекцій.
2. „ аксонометрическихъ.
3. „ перспективныхъ проекцій.
4. „ проекцій съ числовыми отмѣтками.
5. „ проекцій векторіальныхъ.
6. „ линейныхъ (и гномоническихъ).
7. „ (граммо- и гномо) стереографическихъ.
8. „ картографическихъ проекцій и т. д.

Среди всѣхъ этихъ проекцій, одна, именно стереографическая проекція имѣетъ для нашей цѣли преимущество передъ другими, такъ какъ при помощи ея весьма легко опредѣлять углы между линиями и плоскостями. Зная же углы, легко по таблицамъ опредѣлить и косинусы ихъ ¹⁾. Пользованіе стереографическими проекціями еще болѣе облегчается, если примѣнять стереографическія сѣтки (діам. 20 сант.), имѣющіяся уже въ продажѣ въ Спб., особый, такъ называе-

¹⁾ На удобство примѣненія этихъ проекцій для графическаго рѣшенія задачъ механики въ пространствѣ указалъ недавно профессоръ В. Л. Кирпичевъ въ своемъ сообщеніи 4 марта 1908 г. въ Спб. Политехническомъ Институтѣ, опубликованномъ въ Вѣстникѣ Общества Технологовъ за 1908 г.



мый, трехножный циркуль, стереографическую линейку и линейку для вычерчивания пологих дугъ Е. Федорова¹⁾). При неимѣннн подѣ рукой готовыхъ стереографическихъ сѣтокъ можно пользоваться приспособленіями Пенфильда для черченія стереографической проекціи и для производства на ней измѣреній графическимъ путемъ, именно: а) окружности (діам. 14 сант.), раздѣленныя на градусы, б) транспортиръ № 1 для опредѣленія угловыхъ разстояній между точками, в) транспортиръ № 2 для измѣренія дугъ большихъ круговъ, г) транспортиръ № 3 для быстрого приблизительнаго измѣренія разстоянія между двумя точками и д) транспортира № 4 для нахождения дугъ большого круга, проходящаго черезъ двѣ точки²⁾).

Не останавливаясь на описаніи извѣстныхъ свойствъ стереографической проекціи, каковое можно найти въ разныхъ сочиненіяхъ по кристаллографіи³⁾, переходимъ къ рѣшенію

1) Описаніе и способы употребленія этихъ инструментовъ и сѣтки можно найти въ соч. Е. Федорова „Новая геометрія—какъ основа черченія“ Спб. 1907 г.

2) Описаніе и способы употребленія приспособленій Пенфильда можно найти въ соч. „Exercices de cristallographie par A. Chevallier“ avec une préface de M. I. Thoulet. Paris 1898. Имѣется русскій переводъ этой книги съ нѣкоторыми измѣненіями—Ф. Левинсона-Лессинга и Н. Кулгашева.

3) Изъ многочисленныхъ учебниковъ и сочиненій, въ которыхъ описываются свойства стереографическихъ проекцій, мы можемъ указать на слѣдующія:

1) Е. С. Федоровъ. „Новая геометрія, какъ основа черченія“, Спб. 1907 годъ. Въ сочиненіи этомъ описывается стереографическая проекція съ геометрической точки зрѣнія. Указываются способы ея вычерчиванія. Опредѣляется ея положеніе въ рядѣ совокупностей геометрическихъ элементовъ, ученіе о которыхъ составляетъ главное содержаніе этой книги.

2) В. Витковскій. „Картографія“ Спб. 1907 г. Въ противоположность предыдущему сочиненію авторъ изслѣдуетъ свойства стереографическихъ проекцій аналитически, разсматривая разные виды ихъ.

3) Ф. Ю. Левинсонъ-Лессингъ. „Наставленіе къ черченію стереографической проекціи кристалловъ“. Юрьевъ 1900. Въ сочиненіи этомъ авторъ указываетъ способы рѣшенія въ стереографическихъ проекціяхъ задачъ, съ которыми приходится имѣть дѣло при изслѣдованіи свойствъ кристалловъ.

4) Е. С. Федоровъ. „Курсъ кристаллографіи“ Спб. 1904 г. Помимо

поставленной нами задачи, причем расчетъ будемъ вести по слѣдующему плану:

1. Заданіе элементовъ кольца, направленій силъ и положенія плоскостей опорныхъ реакціи въ стереографическихъ проекціяхъ.

2. Опредѣленіе положенія и направленія мгновенныхъ осей.

3. Опредѣленіе угловъ между направленіями мгновенныхъ осей и направленіями внѣшнихъ силъ и стержней кольца.

4. Опредѣленіе разстояній мгновенныхъ осей отъ внѣшнихъ силъ и соотвѣтственныхъ стержней кольца.

Данныя, полученныя на основаніи этихъ опредѣленій, позволяютъ вычислить коэффиціенты въ ур-яхъ 6 (главы 5, стр. 22) и по формуль 8 или 10, значеніе усилія въ одномъ изъ элементовъ кольца. Опредѣленіе усилій въ другихъ элементахъ кольца, а также величинъ опорныхъ реакціи сводятся къ задачѣ на разложеніе силы по тремъ даннымъ направленіямъ. Поэтому нами и будетъ показанъ примѣръ рѣшенія задачи:

5. Разложеніе силы на три направленія не лежащихъ въ одной плоскости.

При рѣшеніи вышеупомянутыхъ задачъ мы будемъ пользоваться стереографическою сѣткою (діаметромъ 20 сант. ¹⁾ Федорова, а также приборами: стереографическою линейкою, линейкою для пологихъ дугъ и трехножнымъ цирку-

рѣшенія цѣлаго ряда задачъ въ стереографическихъ проекціяхъ въ соч. этомъ приводится примѣръ примѣненія метода вращенія пространственнаго тѣла для приведенія его въ наглядное положеніе (стр. 164).

5) А. Шевалье. „Пособіе для упражненій по кристаллографіи“ Юрьевъ 1902 г. Въ этомъ сочиненіи помѣщена статья Ф. Левинсона-Лессинга, указанная раньше подъ № 3. Здѣсь же находится описаніе приспособленій Пенфильда для черченія стереографической проекціи.

6) П. Гротъ. „Физическая кристаллографія“ Спб. 1897 г. Описывается стереографическая проекція въ примѣненіи къ изображенію и вычисленію угловыхъ величинъ кристалловъ.

7) F. Willson. „Descriptive geometry pure and applied“ New-York. 1898. Описываются главнѣйшія свойства стереографическихъ проекцій.

¹⁾ На черт. 42 сѣтка, для удобства помѣщенія ея въ книгѣ, уменьшена въ 2 раза по линіи.

лемь. Въ зависимости отъ удобства рѣшенія будемъ примѣ-
нять какъ грамма-, такъ и гномостереографическую проекцію.

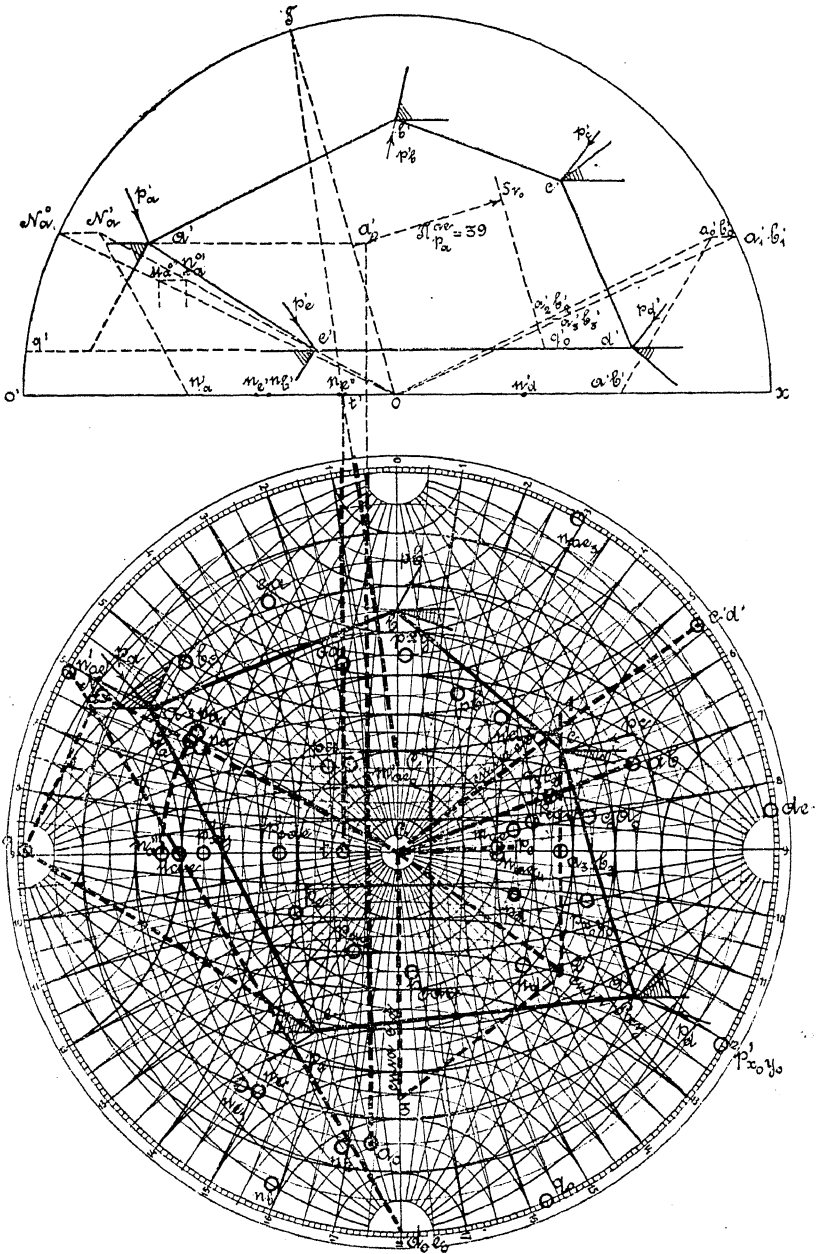
1. Заданіе элементовъ кольца, направленій силъ
и положенія плоскостей опорныхъ реакцій въ сте-
реографическихъ проекціяхъ.

Предположимъ, что дано пятиугольное пространственное
кольцо $ABCDE$; которое на черт. 42 изображено въ ортого-
нальныхъ проекціяхъ *). Положеніе плоскости опорныхъ
реакцій каждой опоры задано двумя пересѣкающимися ли-
ніями: горизонталью и фронталью каждой плоскости. На
черт. 42 части этихъ плоскостей заштрихованы. Къ каждой
опорѣ кольца приложено по одной внѣшней силѣ данной
величины и направленія. Перейдемъ отъ заданія кольца въ
ортогональныхъ проекціяхъ къ заданію его въ стереографи-
ческихъ проекціяхъ. Расположимъ центръ C проектированія
послѣднихъ такъ, чтобы все кольцо расположилось выше
экваторіальной плоскости. Наложимъ теперь стереографи-
ческую сѣтку на горизонтальную проекцію кольца и построимъ
вертикальную проекцію главнаго меридіана, параллельнаго
плоскости V .

Построимъ гномостереографическія проекціи плоскостей
опорныхъ реакцій. Для примѣра покажемъ, какъ построить
таковую проекцію для плоскости N_a опорныхъ реакцій опоры
 A . Проведемъ изъ центра шара O линію перпендикулярную
къ плоскости N_a , найдемъ точку N'_a ея пересѣченія съ по-
верхностью шара и соединимъ полученную точку съ полю-
сомъ S линіей $N'_a S$. Точка n'_a , n_a пересѣченія этого луча съ
плоскостью экватора и будетъ гномостереографической проек-
ціей плоскости N_a . Въ дальнѣйшемъ намъ придется поль-
зоваться лишь точкою n_a . Подобнымъ же образомъ строимъ
гномостереографическія проекціи n_b , n_c , n_d , n_e плоскостей
опорныхъ реакцій и другихъ опоръ.

*) Масштабъ изображенія для удобства построенія выберемъ такъ,
чтобы горизонтальная проекція кольца могла быть вписана въ кругъ
діаметра 20 сант., а вертикальная проекція—въ полукругъ—діаметра
20 сант.

Далѣ строимъ грамостереографическія проекціи напра-



Черт. 42.

вленій стержней кольца и вѣшнихъ силъ. Покажемъ, на-
 примѣръ, какъ построена таковая проекція для стержня AB
 кольца.

Проводимъ изъ центра O шара радиусъ параллельный
 линіи AB и находимъ точку A_0B_0 его пересѣченія съ по-
 верхностью шара. Соединяемъ эту точку съ полюсомъ C и
 находимъ пересѣченіе $ab, a'b'$ ¹⁾ этого луча съ экваторіальною
 плоскостью. Точка ab и будетъ искомою граммостереографи-
 ческою проекціею прямой AB . Подобнымъ же образомъ най-
 дены граммостереографическія проекціи прямыхъ: стержней
 кольца BC, CD, DE, EA , именно точки bc, cd, de, ea и силъ
 P_a, P_b, P_c, P_d, P_e — именно точки p_a, p_b, p_c, p_d, p_e . Такимъ
 образомъ получена полная стереографическая проекція за-
 данныхъ элементовъ кольца, направленій силъ и положенія
 плоскостей опорныхъ реакцій.

2. Опредѣленіе положенія и направленія мгно- венныхъ осей.

Каждая мгновенная ось опредѣляется, какъ линія сѣченія
 двухъ сосѣднихъ плоскостей опорныхъ реакцій. Покажемъ,
 на примѣръ, какъ опредѣлить мгновенную ось для стержня
 AE кольца. Плоскости реакцій опоръ A и E опредѣляются,
 какъ было выше найдено, ихъ гномостереографическими
 проекціями n_a и n_e . Найдемъ линію M_{ae} сѣченія этихъ плос-
 костей. Вмѣсто того, чтобы строить граммостереографическія
 проекціи плоскостей N_a и N_e , и, найдя точку пересѣченія
 дугъ большихъ круговъ, опредѣляющихъ эти плоскости, вос-
 пользоваться ею для опредѣленія направленія мгновенной оси,
 мы поступимъ слѣдующимъ образомъ. Такъ какъ искомая
 мгновенная ось должна быть перпендикулярна къ плоскости,
 опредѣляемой точками n_a, n_e и O , то граммостереографиче-
 ская проекція ея опредѣляется, какъ полюсъ плоскости, про-
 ходящей черезъ точки n_a, n_e и O . При помощи трехножнаго

¹⁾ При обозначеніяхъ точекъ въ ортогональныхъ проекціяхъ усло-
 вимся называть точки въ пространствѣ большими буквами алфавита, а
 ихъ проекціи — малыми буквами того же наименованія.

циркуля ¹⁾ перемѣщаемъ точки n_a и n_e такъ, чтобы онѣ очутились на одномъ изъ главныхъ меридіановъ. Напримѣръ, пусть онѣ придутъ въ положеніе n_{a1} и n_{e1} (уголь поворота 3°). Замѣчаемъ точку n_{ae} пересѣченія этого меридіана съ осью gg . Соединяемъ точку 18 съ точкою n_{ae} и продолжаемъ линію n_{ae} 18 до пересѣченія съ кругомъ контура въ точкѣ n'_{ae} . Отсчитываемъ вправо отъ этой точки по дугѣ контура 90° . Находимъ точку n_{ae2} . Соединяя эту точку съ точкою 18, получимъ искомый полюсъ n_{ae1} плоскости $n_{a1} n_{e1} O$ въ точкѣ n_{ae1} . Теперь остается повернуть обратно полюсъ n_{ae1} на тотъ же уголь (3°), на который мы вращали плоскости n_a, n_e, O . Получимъ точку m_{ae} граммостереографическую проекцію искомой мгновенной оси.

Совершенно подобнымъ же образомъ можно опредѣлить направленіе и другихъ мгновенныхъ осей.

3. Опредѣленіе угловъ между направленіями мгновенныхъ осей и направленіями внѣшнихъ силъ и стержней.

Разсмотримъ для примѣра, какъ опредѣлить уголь между направленіемъ силы p_a и осью m_{ae} . При помощи трехножнаго циркуля приводимъ точки p_a и m_{ae} на одинъ меридіанъ въ положеніе p'_a, m'_{ae} , и тогда по параллелямъ можно прочесть значеніе угла между этими линіями, именно, 59° . Подобнымъ же образомъ мы опредѣлили углы между линіями

P_e и m_{ae} . . .	63°
ab и m_{ae} . . .	38°
ed и m_{ae} . . .	60°

¹⁾ Вмѣсто трехножнаго циркуля для перемѣщенія точекъ n_a и n_e можно пользоваться хорошей прозрачной калькою, наложивъ ее на чертежъ и вращая ее на шпилькѣ, воткнутомъ въ точкѣ C . На матовой сторонѣ кальки легко карандашемъ отмѣчать точки и поворачивать кальку до тѣхъ поръ, пока онѣ не расположатся на одномъ меридіанѣ.

4. Опреѣленіе разстояній мгновенныхъ осей отъ внѣшнихъ силъ и соотвѣтствующихъ стержней кольца.

Въ виду того, что въ стереографической проекціи определеніе разстояній требуетъ сравнительно много построений, мы воспользуемся смѣшаннымъ методомъ стереографическихъ и ортогональныхъ проекцій (черт. 42) и покажемъ на примѣрѣ всѣ требуемыя построенія. Предположимъ, что требуется определитъ разстояніе силы P_a до оси m_{ae} . Если мы проведемъ въ пространствѣ черезъ дѣйствительную мгновенную ось плоскость параллельную силѣ P_a , то искомое разстояніе, очевидно, будетъ равно разстоянію линіи силы P_a до этой плоскости. Если, кромѣ того, удастся повернуть эту плоскость и точку A такъ, чтобы плоскость стала перпендикулярна къ V , то искомое разстояніе на V спроектируется безъ искаженія, т. е. будетъ равно разстоянію проекціи точки A въ ея повернутомъ положеніи до слѣда повернутой плоскости проходящей черезъ мгновенную ось m_{ae} и параллельную силѣ P_a .

Задачу эту можно расчлениить на слѣдующія части:

а) Найти направленіе слѣда вышеупомянутой плоскости (назовемъ ее буквою S) въ положеніи $S \perp$ къ V .

б) Найти положеніе хотя бы одной точки Q_0 дѣйствительной плоскости, когда послѣдняя \perp къ V .

с) Провести черезъ вертикальную проекцію q_0' точки Q слѣдъ sv_0 плоскости S .

д) Повернуть точку A на тотъ же уголъ, что и плоскость S .

е) Опуститъ изъ вертикальной проекціи a_0' повернутаго положенія точки A перпендикуляръ на слѣдъ sv_0 .

Длина этого перпендикуляра между точкой a_0' и слѣдомъ sv_0 и будетъ выражать искомое разстояніе силы P_a до мгновенной оси m_{ae} .

Въ проекціяхъ эти построенія выразятся слѣдующимъ образомъ:

а) Плоскость, параллельная линіямъ m_{ae} и P_a , опредѣ-

ляется точками p_a и m_{ae} . Поворачиваемъ эту плоскость до положенія \perp къ V . Тогда точки p_a и m_{ab} займутъ положеніе p_a, m_{ae} . Замѣчаемъ точку t пересѣченія меридіана съ линіей 99 и находимъ ея вертикальную проекцію t' . Опредѣляемъ, пользуясь точкой t' и полюсомъ, точку T , черезъ которую и пройдетъ линія OT , параллельная направленію слѣда Sv_0 плоскости S , когда послѣдняя будетъ \perp къ V . Замѣтимъ, что уголъ поворота былъ равенъ 114° .

б) Замѣчаемъ точку $Q(q, q')$ пересѣченія горизонталей плоскостей N_a и N_e . Поворачиваемъ точку Q вокругъ той же оси, на тотъ же уголъ (114°) и въ томъ же направленіи, что и плоскость $p_a m_{ae}$. Находимъ проекціи q_0, q_0' точки послѣ поворота.

с) Проводимъ черезъ точку q_0' слѣдъ Sv_0 плоскости S параллельно линіи OT .

д) Поворачиваемъ точку A такъ же, какъ и точку Q . Пусть новыя проекціи точки A будутъ a_0, a_0' .

е) Разстояніе точки a_0' до линіи Sv_0 и будетъ искомымъ ($=39$ единицамъ длины въ масштабѣ чертежа). Если предположить, что зритель расположенъ надъ экваторомъ и смотритъ на центръ O вдоль оси m_{ae}' , то нетрудно видѣть, что моментъ силы P_a будетъ положительнымъ, такъ какъ сила направлена по движенію часовой стрѣлки относительно оси m_{ae}' . Такимъ образомъ разстояніе силы P_a до мгновенной оси M_{ae} равно 39 .

Подобнымъ же образомъ нами были опредѣлены:

разстояніе силы P_e до мгновенной оси M_{ae}	. — 67
„ стержня de M_{ae} . . . 5
„ „ ab M_{ae} . . . 23

Теперь извѣстны всѣ коэффициенты для составленія перваго изъ ур-ій 6 (стр. 22).

Подставляя найденныя величины въ это уравненіе, получимъ:

$$R_{ab} \sin. 38^\circ. 23 + R_{ae} \sin. 60^\circ. 5 + P_a \sin. 59^\circ. 39 - P_e \sin. 63^\circ. 67 = 0;$$

или полагая $P_a = 30$ килогр.; $P_e = 100$ килогр., а масштабъ чертежа 1 сант. = 1 метру получимъ:

$$14,168 R_{ab} + 3,33 R_{de} - 26,274 = 0.$$

Составляя рядъ такихъ ур-ій и рѣшая, ихъ какъ было указано въ главѣ 5, получимъ значеніе R_{ab} .

Дальнѣйшее опредѣленіе усилій въ элементахъ кольца и величинъ опорныхъ реакцій производится весьма просто при помощи стереографическихъ проекцій (черт. 42) и сводится къ задачѣ на:

б) Разложеніе силы на три направленія не лежащихъ въ одной плоскости.

Для примѣра, предположимъ, что мы опредѣлили ранѣе указаннымъ способомъ величину усилія въ элементѣ cd . Требуется опредѣлить теперь усиліе въ элементѣ de и величину опорной реакціи опоры D . Для рѣшенія проведемъ въ пространствѣ черезъ центръ O плоскость T параллельную ED и CD и найдемъ ея пересѣченіе TN_a съ плоскостью N_a опорныхъ реакцій опоры D . Тогда въ плоскости T будутъ лежать линіи: CD , DE и TN_a . Разложивъ силу CD по направленіямъ DE и TN_a , получимъ искомыя величины силъ. Въ стереографическихъ проекціяхъ (черт. 42) даны направленія линіи cd точкою cd , линіи de точкою de и плоскости N_a точкою n_a . Находимъ полюсъ P_{cde} большого круга, проходящаго черезъ точки cde (при помощи треножнаго циркуля находимъ сначала полюсъ P'_{cde} , а потомъ уже и P_{cde}). Очевидно, что направленіе линіи сѣченія плоскости N_a и плоскости CDE опредѣлится полюсомъ большого круга, проходящаго черезъ точки P_{cde} и n_a .

Опредѣляемъ этотъ полюсъ (P_{xy}) при помощи треножнаго циркуля (предварительно получивъ точку P'_{xy}). Итакъ, теперь въ одной и той же плоскости лежатъ линіи P_{xy} , cd и de . Повернемъ эту плоскость вокругъ вертикальной оси, проходящей черезъ центръ O такъ, чтобы слѣдъ ея на плоскости экватора совпалъ съ линіей $o-18$ (точки P_{xy} , cd , de займутъ положеніе — $C_o d_o$, $d_o e_o$ и $P_x y_o$), и затѣмъ совмѣстимъ эту пло-

скость съ плоскостью экватора, вращая ее вокругъ оси $o-18$. Точки C_0d_0 и P_{xy0} займутъ тогда положенія $c'd'$, P'_{xy0} ; точка же d'_0e_0 , какъ лежащая на оси вращенія, останется безъ перемѣны. Теперь на плоскости чертежа мы имѣемъ 3 направленія, пересѣкающіяся въ одной точкѣ C . По одному направленію — $C'd'$ — C дѣйствуетъ данная сила cd — которая пусть въ масштабѣ силъ изображается отрѣзкомъ $C1$. Построивъ параллелеграммъ со сторонами $23 = C1$ и $C3 = 12$ получимъ значеніе $C2$ и $C3$ двухъ другихъ неизвѣстныхъ силъ. $C3 =$ усилію въ элементѣ DE , а $C2 =$ величинѣ опорной реакціи. Направленіе этой реакціи въ стереографическихъ проекціяхъ опредѣляется точкою P_{xy} .

Если бы вмѣсто плоскости опорныхъ реакцій въ опорѣ D были бы два элемента, то усиліе въ нихъ мы могли бы опредѣлить такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ. Задача тогда заключалась бы въ томъ, чтобы разложить силу P_{xy} на два направленія, причемъ P_{xy} и эти два направленія лежать въ одной и той же плоскости.

На основаніи изложеннаго въ этой главѣ можно сказать, что примѣненіе метода стереографическихъ проекцій является весьма удобнымъ для быстрого и достаточно точнаго графическаго опредѣленія угловъ между различными направленіями линій и плоскостей. Что же касается до опредѣленія разстояній между элементами, не лежащими въ одной плоскости, то въ этомъ случаѣ удобно пользоваться одновременно ортогональными и стереографическими проекціями.

Глава 8.

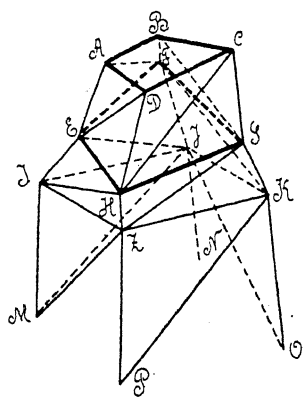
Примѣненіе колець къ образованію новаго типа пространственныхъ формъ.

Каждое пространственное статически опредѣлимое, неизмѣняемое и неподвижное кольцо можетъ быть развито путемъ прибавленія въ извѣстномъ порядкѣ и въ извѣстномъ направленіи новыхъ стержней въ пространственное статически опредѣленное, неизмѣняемое и неподвижное сочлененіе произвольной формы. Въ частности оно можетъ быть

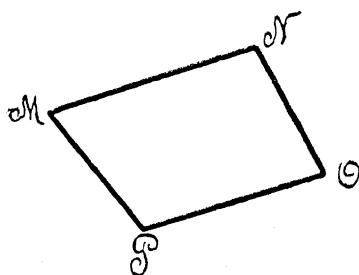
вписано въ шаръ, призму и пирамиду и послужитъ такимъ образомъ для образованія куполовъ, мостовъ, шпицовъ и др. пространственныхъ фермъ.

1-й способъ. Общій и наиболѣе удобный способъ образованія изъ пространственнаго кольца съ опорами 2-й категоріи пространственной фермы будетъ заключаться въ слѣдующемъ.

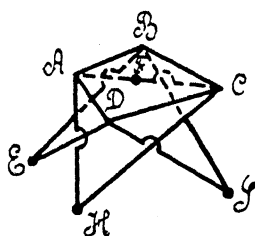
Предположимъ, что дано пространственное кольцо $ABCD$ (черт. 43). Задаемся въ пространствѣ случайными точками



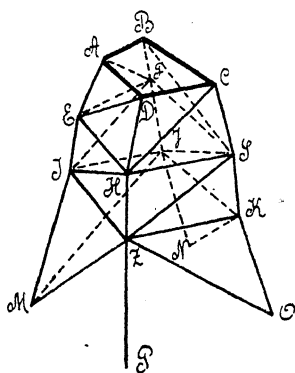
Черт. 43.



Черт. 44.



Черт. 45.



Черт. 46.

(не менѣе чѣмъ тремя E, F, G, H). Соединимъ теперь каждую опору кольца съ двумя изъ выбранныхъ точекъ, наприимѣръ A съ E и F , B съ F и G , C съ G и H , D съ H и E .

При такихъ условіяхъ плоскостью опорныхъ реакцій для опоры A будетъ служить плоскость AEF , для опоры B — BFG ; для опоры C — CGH и для опоры D — DHE .

Замѣняемъ теперь плоскости опорныхъ реакцій каждой опоры двумя стержнями, пересѣкающимися въ этой опорѣ, лежащими въ этой плоскости и проходящими черезъ ранѣе выбранныя точки,

т. е. плоскость AEF замѣняемъ стержнями AE и AF
 BFG „ „ BF и BG
 CGH „ „ CG и CH
 и DHE „ „ DH и DE

Предположимъ, что точки $EFGH$ являются опорами новаго неподвижнаго пространственнаго кольца. Повторимъ для него тѣ же построения, что и для перваго кольца. Тогда получимъ новыя точки, напримѣръ I, J, K, L и т. д.

Остановимся на одной изъ группъ полученныхъ точекъ, напримѣръ на группѣ $IJKL$. Пусть требуется соединить ее съ нѣкоторыми заданными неподвижными точками M, N, O, P (въ общемъ слѣбавъ не лежащими въ одной плоскости). Поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Каждую изъ точекъ J, J, K, L соединяемъ тремя стержнями съ остальными. Т. е.

I соединяемъ съ M, L, J стержнями IM, IL, IJ
 L „ „ M, P, K „ LM, LP, LK
 K „ „ P, O, J „ KP, KO, KJ
 J „ „ O, N, M „ JO, JN, JM

Полученное сочлененіе будетъ статически опредѣлимымъ, потому что удовлетворяетъ условію

$$3k = r + n,$$

гдѣ k — число узловъ $= 4 \cdot 4 = 16$,

„ r — „ стержней $\left\{ \begin{array}{l} \text{поясовъ} \quad 4 \cdot 3 = 12 \\ \text{стоекъ} \quad 4 \cdot 3 = 12 \\ \text{раскосовъ} \quad 4 \cdot 3 = 12 \end{array} \right\} 36$,

„ n — „ опорныхъ реакцій $= 3 \cdot 4 = 12$.

2-й способъ. Можно также не строить втораго пространственнаго кольца $IJKL$, а каждую изъ точекъ $EFGH$ соединять съ одной изъ остальныхъ и съ точками $IJKL$ тремя стержнями и т. д. На черт. 46 показано сочлененіе образованное такимъ образомъ:

$$3 \cdot 16 = 36 + 12.$$

Можно было бы соединить опоры $MNOP$ кольцомъ (черт. 44); тогда возможны такія условія закрѣпленія этихъ опоръ

- I. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Двѣ опоры неподвижныхъ (M и Q).} \\ \text{Двѣ опоры съ плоскостью скольженія N и P.} \end{array} \right.$
- II. Всѣ опоры имѣютъ по одной линіи скольженія.
- III. Одна опора неподвижная, одна съ плоскостью положенія и двѣ—съ линіями скольженія.

Примѣчаніе. При заданныхъ точкахъ $E, F, G, H, I, J \dots$ можно было образовать вышеуказаннымъ способомъ рядъ другихъ пространственныхъ сочлененій. Напримѣръ, на черт. 45 показанъ варіантъ образованія первой зоны сочлененія. Мѣсто пересѣченія двухъ раскосовъ, обозначенное дугою, показываетъ, что раскосы въ этомъ мѣстѣ не соединены.

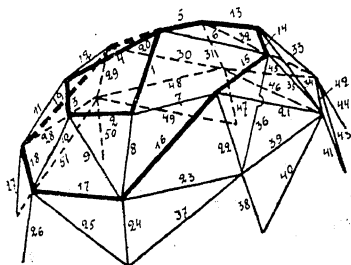
Разсчетъ пространственныхъ фермъ, образованныхъ вышеупомянутымъ способомъ, ведется такъ же, какъ и пространственныхъ колець. Напримѣръ, для сочлененія, указанного на черт. 43, слѣдуетъ начинать разсчетъ съ верхняго кольца.

Отсѣчемъ его к. н. поверхностью отъ остального сочлененія, произведя сѣченіе по ребрамъ $AE, AF, BF, BG, CG, CH, DH, DE$. Усиліе въ к. н. элементѣ полученнаго кольца опредѣляется или аналитически, по способу, указанному въ главѣ 5, или графически, при помощи метода стереографическихъ проекцій, какъ указано въ главѣ 7. Опредѣливъ усиліе въ к. н. элементѣ кольца, остается въ дальнѣйшемъ для разчета верхняго кольца производить рядъ разложеній силъ на 3 направленія, что весьма быстро дѣлается въ стереографическихъ проекціяхъ. Второе кольцо разсчитываемъ такъ же, какъ и первое.

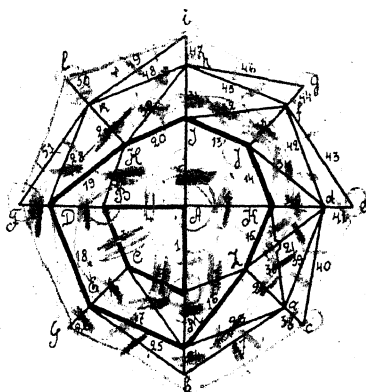
Описанный способъ разчета удобно примѣнять въ особенности тогда, когда число граней пространственнаго сочлененія велико, и разложеніе послѣдняго на рядъ плоскихъ фермъ затруднительно.

Разсмотримъ теперь нѣсколько примѣровъ образованія изъ пространственныхъ колець пространственныхъ сочлененій.

1. Куполь (черт. 47 и 48). Начальное кольцо взято четырехугольным (1, 2, 3, 4). Опорными стержнями его будут стержни от 5 до 12.



Черт. 47.



Черт. 48.

Второе кольцо будет соединять концы опорных стержней 1-го кольца. На черт. 47 и 48 оно обозначено числами 13—20. Опорные стержни второго кольца обозначены числом 21—36. Наконец те из концов этих опорных стержней, которые не попадают на экваториальную опорную плоскость кольца в места назначенные для опор, те соединены с последними при помощи стержней (каждый конец тремя). Например, конец *a* стержня 36 соединен стержнями 37, 38 с опорами *b* и *c* и стержнем 39 с неподвижным узлом *d*. Неподвижность же последнего достигается соединением его с узлами *e*, *f*. Узел *f*—соединен с *e*, *g*, *h*. Узел *h* соединен с *g*, *i*, *k* и наконец узел *k* соединен с неподвижными узлами *i*, *l*, *F*.

Куполь, изображенный на черт. 47—48 статически определим, т. к. удовлетворяется равенство:

$$3k = r + n \text{ или } 3 \cdot 25 = 51 + 24.$$

Определение усилия в одном к. н. элементъ является очень простымъ, если начать съ расчета 4-хъ угольного пространственного кольца 1234. Чтобы определить усилия в какомъ-нибудь элементъ его, достаточно составить и рѣшить всего 2 уравнения изъ числа тѣхъ (6), которыя были составлены в главѣ 5. Определение остальныхъ усилий в элементахъ верхняго кольца и его опорныхъ реакцій яв-

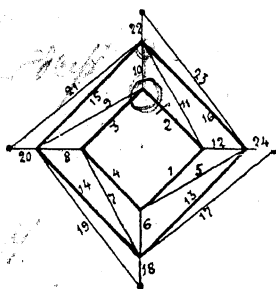
2А докупил
и 2 листа
3

ляется весьма простымъ въ стереографическихъ проекціяхъ. Для опредѣленія усилія въ к. н. элементѣ второго кольца *DHIJKLME* слѣдуетъ составить и рѣшить всего 4 уравненія. Дальнѣйшій расчетъ можно вести въ стереографическихъ проекціяхъ.

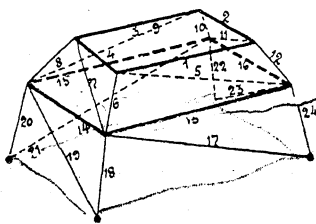
Если куполь былъ образованъ по второму способу, т. е. по типу сочлененія, показаннаго на черт. 46, то слѣдовало бы только при помощи уравненій опредѣлить усиліе въ элементѣ 1-го кольца 1234, составивъ всего 2 уравненія. Остальной расчетъ можно вести въ стереографическихъ проекціяхъ.

Куполь, показанный на черт. 47—48 имѣетъ вершину въ точкѣ *A*. Этотъ узелъ опирается на куполь въ четырехъ діаметрально противоположныхъ точкахъ. Кромѣ того въ куполѣ имѣются двѣ панели *BCDE* и *DEGF*—безъ раскосовъ. Въ этихъ панеляхъ удобно устроить окна. Вообще образованіе фермъ для покрытій по вышеизложенному способу представляетъ то преимущество, что можно въ данной панели всегда избѣгнуть раскосовъ, закрывающихъ окна.

На черт. 49—50 изображенъ куполь безъ вершины. Раз-



Черт. 49.

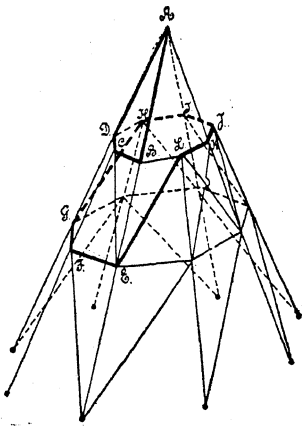


Черт. 50.

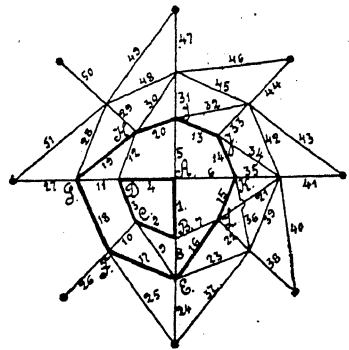
счетъ его слѣдуетъ вести, начиная съ верхняго кольца 1234. Для опредѣленія усилія въ элементѣ 1 достаточно составить и рѣшить всего два уравненія типа № 6 (стр. 22). Столько же уравненій надо рѣшить для опредѣленія усилія въ к. н. стержнѣ второго кольца (кольца показаны толстыми линиями).

Если основное пространственное кольцо для образования пространственной фермы выбрать треугольнымъ (см. стр. 3), то для опредѣленія усилія въ какомъ-нибудь элементѣ такого кольца придется составить и рѣшить всего три уравненія типа 6-го (стр. 22). Въ этомъ случаѣ плоскости опорныхъ реакцій не должны совпадать съ плоскостью кольца, въ особенности, если внѣшнія силы не совпадаютъ съ плоскостью кольца.

2. Шпиць. На черт. 51—53 изображены два шпица—одинъ съ вершиною (черт. 51—52), другой безъ вершины (черт. 53).

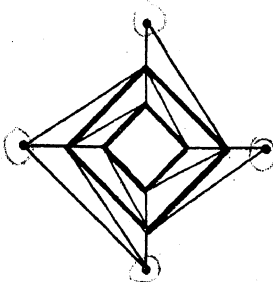


Черт. 51.

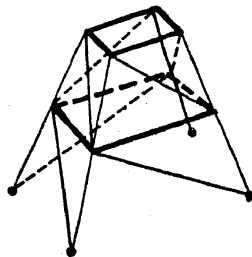


Черт. 52.

(черт. 53). Расчетъ ихъ ведется такъ же, какъ и куполовъ. Для опредѣленія усилія въ к. н. элементѣ кольца $ABCD$ шпица достаточно рѣшить всего 2 уравненія типа 6 (стр. 22).



Черт. 53 а.

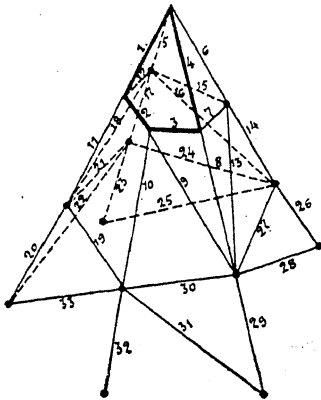


Черт. 53 б.

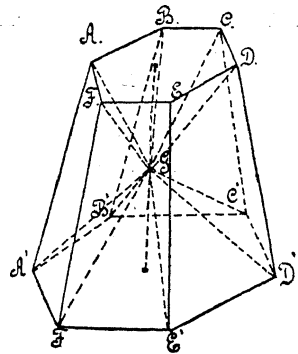
Для опредѣленія же усилія во 2-мъ кольцѣ необходимо составить и рѣшить 4 уравненія.

Если спицы образованъ не изъ двухъ а изъ одного пространственнаго кольца, то требуется составить и рѣшить только 2 уравненія (черт. 54—числа обозначаютъ порядокъ проведенія стержней); условіе статической опредѣлимости

$$3k = r + n = 3 \cdot 16 = 33 + 15 = 48.$$



Черт. 54.



Черт. 55.

На черт. 55 изображена еще одна пространственная ферма $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$. Вся ферма вписана въ пространственную усѣченную шестигранную пирамиду съ горизонтальными основаніями. На оси пирамиды выбрана случайная точка G , съ которой соединены все углы фермы. Если устроить все узлы нижняго кольца такъ, чтобы они могли сопротивляться только вертикальнымъ передвиженіямъ, узелъ G сдѣлать неподвижнымъ, то при такихъ условіяхъ нетрудно замѣтить, что, какъ верхнее $ABCDE$, такъ и нижнее $A'B'C'D'E'F'$ кольца будутъ геометрически подвижными, т. е. онѣ могутъ вращаться около оси пирамиды. Если исключить элементъ $A'B'$ нижняго кольца, а опорѣ A' придать еще линію опорныхъ реакцій, не проходящую черезъ ось пирамиды, то нижнее кольцо будетъ неподвижнымъ. Наконецъ, если какой-нибудь узелъ верхняго кольца, напримѣръ A , мы соединимъ не съ точкою G , а съ точкою, напримѣръ, B' нижняго кольца,

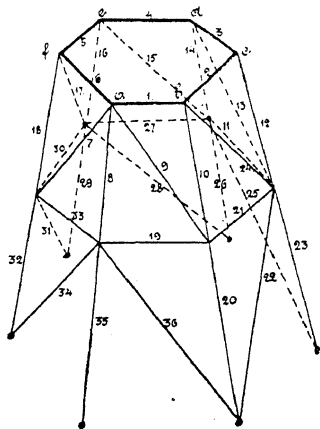
то и верхнее кольцо, а слѣдовательно и вся ферма будутъ геометрически неизмѣняемыми.

Нетрудно видѣть, что пространственныя фермы, которыя принято называть простѣйшими ¹⁾, можно образовать изъ пространственныхъ колець, разсмотрѣнныхъ въ главѣ 4-й и названныхъ нами простѣйшими.

Напримѣръ, на черт. 56 изображена пространственная ферма; опоры начальнаго кольца ея *abcdef* имѣютъ слѣдующее число степеней закрѣпленія:

- a* — 3
b, d, e, f — по 2
c — 1

Порядокъ проведенія новыхъ стержней для образованія фермы показанъ на черт. цифрами; ферма укрѣплена на неподвижныхъ опорахъ. Расчетъ такой фермы не представляетъ затрудненія. Начинать расчетъ слѣдуетъ съ узла *c*.



Черт. 56.

Въ зависимости отъ комбинацій опорныхъ закрѣпленій въ опорахъ простѣйшихъ пространственныхъ колець (замкнутыхъ или незамкнутыхъ) можно образовать различныя виды простѣйшихъ фермъ.

Глава 9.

Общій обзоръ колець другихъ типовъ.

Въ главѣ 3-ей мы подраздѣлили пространственныя кольца на слѣдующія группы и классы:

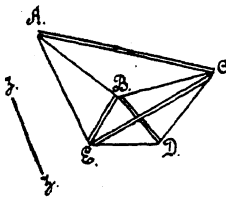
¹⁾ См. Собрание сочиненій Ясинскаго, Т. 2 стр. 130. Изданіе 1902 года. „Простѣйшими называются сочлененія, образованныя послѣдовательнымъ соединеніемъ къ неподвижнымъ точкамъ или къ вершинамъ кольца новыхъ узловъ помощью трехъ не лежащихъ въ одной плоскости стержней“.

- А. Кольца, не измѣняющія своей формы.
 - І. Неподвижныя кольца (уже разсмотрѣны выше).
 - ІІ. Временно подвижныя кольца.
 - ІІІ. Подвижныя кольца.
- Б. Кольца, измѣняющія свою форму.
 - І. Кольца съ однимъ неподвижнымъ элементомъ.
 - ІІ. Кольца съ подвижными элементами.

Въ этой главѣ мы рассмотримъ нѣкоторыя общія свойства колець классовъ ІІ и ІІІ (группы А) и І и ІІ (группы Б)

Временно подвижныя кольца постоянной формы.

Пространственными временно подвижными кольцами постоянной формы мы условились называть такія кольца, которыя при дѣйствіи на узлы ихъ внѣшнихъ силъ приходятъ въ движеніе; и двигаются, не измѣняя своей формы, до тѣхъ поръ, пока не возстановится равновѣсіе между внѣшними силами и опорными реакціями. Такъ какъ форма кольца должна оставаться неизмѣненной, то это движеніе будетъ эквивалентно движенію нѣкотораго твердаго тѣла, съ



Черт. 57.

которымъ, неподвижно связаны опоры кольца. Пусть, напримѣръ дано пространственное кольцо $ABCDEA$ (черт. 57). Соединимъ узлы его между собою такъ, чтобы образовалась неизмѣняемая жесткая система (линіи, соединяющія узлы, обозначены двойной чертой). Движеніе кольца $ABCDEA$ будетъ эквивалентно движенію неизмѣняемой фермы $ABCDEA$. Движеніе же послѣдней будетъ вполнѣ опредѣлено, если будутъ извѣстны движенія трехъ узловъ ея, не лежащихъ на одной прямой.

Въ общемъ случаѣ всякое перемѣщеніе нашей фермы эквивалентно винтовому (теорема Mozzi).

Условіе равновѣсія при винтовомъ движеніи около нѣкоторой оси z выражается, какъ извѣстно уравненіемъ

$$p R_z + M_z = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ p — параметръ винтовой скорости,

R_z — проекція на ось z равнодѣйствующей R всѣхъ данныхъ внѣшнихъ, дѣйствующихъ на кольцо, силъ.

M_z — слагающая по оси z момента M пары равнодѣйствующей съ R системѣ внѣшнихъ силъ.

Для того, чтобы ферма могла повернуться около нѣкоторой оси z , необходимо, чтобы плоскости реакцій всѣхъ опоръ ея проходили черезъ эту ось.

При неподвижной оси и при равномерномъ движеніи величина p въ уравненіи (1) будетъ постоянной.

Пусть напримѣръ (черт. 57) осью вращенія будетъ линия zz . Для случая временно подвижныхъ колець уравненія (1) обратится въ слѣдующее:

$$M_z = 0 \quad (2)$$

Примѣромъ временно подвижного кольца можетъ служить пространственная ферма, вращающаяся около нѣкоторой оси подѣ дѣйствіемъ вѣтра (или тяжести). Этими краткими соображеніями мы пока ограничимся и перейдемъ къ разсмотрѣнію слѣдующаго класса.

Подвижныя кольца постоянной формы.

Въ этомъ случаѣ уравненіе равновѣсія будетъ (1)

$$p R_z + M_z = 0.$$

Измѣняющее свою форму кольцо съ однимъ неподвижнымъ элементомъ.

Къ этому классу относятся всѣ пространственные механизмы.

Кинематическое существованіе механизма, какъ было указано въ главѣ 4, заключается въ томъ, чтобы было удовлетворено равенство

$$3k = r + n + 1,$$

гдѣ k — число его узловъ,

„ r — „ „ стержней,

„ n — „ „ опорныхъ реакцій.

Въ виду того, что условія дѣйствія силъ на пространственные механизмы весьма сложны, въ особенности если принимать во вниманіе вліяніе скоростей и ускореній, мы пока только ограничимся вышесказаннымъ. Изслѣдованіе же пространственныхъ механизмовъ будетъ предметомъ особаго труда.

Кромѣ механизмовъ къ этому же классу относится цѣлый рядъ другихъ колець удовлетворяющій неравенству

$$3k > r + n + 1.$$

Всѣ такія кольца, измѣнивъ свою форму подъ вліяніемъ внѣшнихъ силъ, будутъ находиться въ покоѣ опираясь на неподвижный элементъ, или будутъ вращаться вокругъ него въ зависимости отъ расположенія и величины внѣшнихъ силъ.

Измѣняющія свою форму кольца съ подвижными элементами.

Подъ этимъ названіемъ мы будемъ подразумѣвать такія кольца, которыя подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ сначала измѣняютъ свою форму до нѣкотораго устойчиваго положенія, а затѣмъ придутъ въ движеніе по направленію равнодѣйствующей всѣхъ внѣшнихъ силъ.

Пространственные кольца съ бесконечно-большимъ числомъ опоръ.

Подъ такимъ названіемъ мы подразумѣваемъ пространственные кольца, состоящія изъ жесткихъ прямолинейныхъ элементовъ бесконечно малой длины. Чтобы представить себѣ такое кольцо, вообразимъ гибкую замкнутую нить, изогнутую по кривой, двоякой кривизны; при этомъ всѣ точки такой нити подчинены извѣстному кинематическому условію, и на нихъ дѣйствуетъ рядъ внѣшнихъ силъ. Подобіемъ пространственнаго кольца съ бесконечно-большимъ числомъ опоръ могутъ служить ободъ и ступица велосипеднаго колеса. Картиною движенія здѣсь можетъ служить развертка очертанія ступицы (въ предѣлѣ—эвольвента круга).

С. Расчетъ плоскихъ шарнирныхъ колець.

Глава 10.

Обзоръ существующихъ методовъ расчета неподвижныхъ колець.

Плоскія шарнирныя кольца можно, конечно, разсматривать, какъ частный случай пространственныхъ колець и примѣнять ко вторымъ выводы, сдѣланные для первыхъ. Однако, въ дальнѣйшемъ, часто мы дѣлаемъ выводы для плоскихъ колець, пользуясь иными методами, нежели раньше, потому что примѣненіе послѣднихъ значительно упрощаетъ рѣшеніе различныхъ вопросовъ.

Въ настоящей главѣ мы будемъ предполагать выполненными слѣдующія условія:

1. Плоское кольцо должно быть неизмѣняемымъ.
2. Въ кольцо не должно возникать дополнительныхъ напряженій при измѣненіяхъ температуры. Таковыхъ напряженій не будетъ, если всѣ элементы кольца могутъ свободно удлиняться.
3. Въ узлахъ кольца мы предполагаемъ шарниры. Опорная реакція предполагается приложенной въ центрѣ этого шарнира.
4. Кольца мы предполагаемъ статически опредѣлимыми въ отношеніи опорныхъ реакцій, т. е. опорныя реакціи должны быть опредѣлены при помощи методовъ статики.

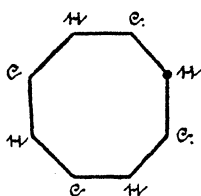
Условіе статической опредѣлимости плоскаго неподвижнаго неизмѣняемаго кольца заключается въ слѣдующемъ:

Если мы обозначимъ черезъ k — число узловъ кольца,

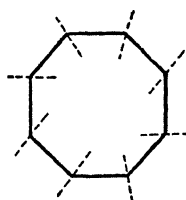
через r —число его элементовъ, a через n —число опорныхъ реакцій, то должно существовать равенство:

$$2k = r + n.$$

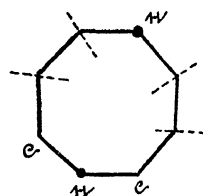
Напримѣръ, если мы имѣемъ кольцо изъ 8 стержней (черт. 58), то мы можемъ устроить или 4 неподвижныхъ опоры (черт. 58) и 4 свободныхъ, или всѣ 8 опоръ скользящими по нѣкоторымъ линиямъ (черт. 59), или часть опоръ устроить неподвижными, часть скользящими по линиямъ и часть свободными (черт. 60).



Черт. 58.



Черт. 59.



Черт. 60.

Разсмотримъ различные способы расчета колець.

1. Способъ Ясинскаго ¹⁾. Ясинскій далъ способъ расчета плоскаго опорнаго неподвижнаго кольца съ опорами, обладающими одной степенью закрѣпленія и съ силами дѣйствующими въ узлахъ кольца и въ его же плоскости. Способъ этотъ, который можетъ быть названъ способомъ ложнаго положенія, заключается въ общихъ чертахъ въ слѣдующемъ.

Предполагаемъ, что одна изъ неизвѣстныхъ опорныхъ реакцій—извѣстна, строимъ диаграмму Максвелля (Кремоны) которая очевидно не замкнется. Величина невязки показываетъ величину той внѣшней силы, которую нужно приложить къ данному узлу, чтобы онъ былъ въ равновѣсіи. Но такъ какъ этой внѣшней силы нѣтъ, то и усиліе и реакціи должны быть соответственно меньше. Опредѣливъ при помощи особаго построенія (e) усиліе въ данномъ элементѣ при дѣйствіи на кольцо только одной силы, равной вышеупомянутой невязкѣ и приложенной въ томъ же узлѣ,

¹⁾ Ясинскій, „Полное Собр. Соч.“. Т. 2 стр. 172.

вычитаемъ или прикладываемъ его, смотря по знаку, къ ранѣе опредѣленному усилію и получаемъ тогда окончательное усиліе въ данномъ элементѣ. Послѣ этого снова строимъ диаграмму Максвелля, которая должна теперь замкнуться.

Результаты, къ которымъ приходитъ Ясинскій, слѣдующіе:

1. Если линіи скользянія опоръ не перпендикулярны къ стержнямъ кольца, т. е. если опорныя реакціи направлены не по стержнямъ, то признакомъ неподвижности (неизмѣняемости) кольца служить условіе, чтобы опредѣлитель уравненій равновѣсія не былъ бы равенъ нулю. (Если при построеніи (с) диаграмма получится замкнутою, то опредѣлитель равняется нулю).

2. Если всѣ реакціи, совпадающія съ направлениемъ стержней, расположены по направленію движенія часовой стрѣлки или же всѣ—противъ движенія часовой стрѣлки, то кольцо будетъ неподвижнымъ.

3. Если часть реакцій направлена по движенію часовой стрѣлки и часть — противъ, то кольцо будетъ подвижнымъ.

4. Если кольцо представляетъ собою правильный многоугольникъ съ четнымъ числомъ сторонъ, то оно будетъ подвижнымъ, если линіи скользянія направлены по биссектрисамъ угловъ (Ясинскій. Т. 2 стр. 126).

Весьма полезными при изученіи вопроса о равновѣсіи плоскихъ колець являются нѣкоторыя положенія изъ геометрическаго ученія о движеніи ¹⁾, а также нѣкоторыя положенія кинематики механизмовъ.

¹⁾ Вопросы о примѣненіи кинематики къ теоріи рѣшетчатыхъ фермъ занимались:

Проф. В. Кирпичевъ. „Основанія графической статики“ и „Замѣтка о рѣшетчатыхъ фермахъ“.

Проф. Fränkel (Civilingenieur. 1875 г. стр. 515). Статья подъ заглавіемъ „Anwendungen der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes auf die Bestimmung der Formänderung von Fachwerken“.

Проф. Grüber (Riga'sche Industriezeitung 1887 г. №№ 4 и 5).

Проф. Müller-Breslau „Die Graphische Statik“.

Проф. O. Mohr. „Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik“. Berlin. 1906 г.

Напомним нѣкоторыя теоремы, относящіяся къ движению плоскихъ механизмовъ. Эти теоремы пригодятся намъ при дальнѣйшемъ изученіи равновѣсія плоскихъ колець ¹⁾.

1. Механизмъ есть система съ полными связями, т. е. а) каждая точка его движется по опредѣленной траекторіи и б) какъ только назначено перемѣщеніе одной точки, всѣ остальные получаютъ опредѣленные перемѣщенія.

2. Число мгновенныхъ центровъ для плоскаго механизма изъ n элементовъ равно $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

3. Три мгновенныхъ центра вращенія трехъ элементовъ механизма (a , b и c), при условіи неподвижности по порядку каждаго изъ этихъ элементовъ, лежатъ на одной прямой линіи.

4. Для равновѣсія механизма необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая всѣхъ силъ на него дѣйствующихъ проходила черезъ мгновенный центръ того звена, къ которому она приложена.

5. Каждый механизмъ можетъ быть обращаемъ, причѣмъ число обращенныхъ механизмовъ равно числу его звеньевъ.

Помимо вышеприведенныхъ теоремъ намъ придется воспользоваться изъ ученія о движеніи механизмовъ еще понятіемъ о такъ называемыхъ „критическихъ фигурахъ“.

Критическая фигура есть одна изъ картинъ, изображающихъ движеніе даннаго механизма ²⁾, именно, критическая фигура есть картина, всѣ линіи которой параллельны соотвѣтствующимъ элементамъ механизма (или фермы).

Заемствуемъ изъ графической статики слѣдующія данныя о значеніи критическихъ фигуръ:

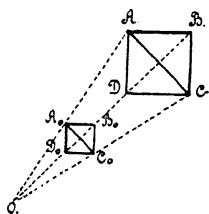
1. Если картина является фигурой, подобной данной фермѣ, то ферма будетъ двигаться, какъ неизмѣняемая фи-

¹⁾ В. Кирпичевъ „Графическая статика“.

F. Reuleaux „Lehrbuch der Kinematik“ Braunschweig 1875. I. Bd.
Н. Делоне „Лекціи по практической механикѣ“. С.-Петербургъ. 1906 г.

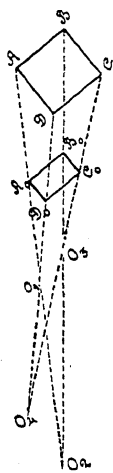
²⁾ О картинахъ движенія, обь изображающихъ фигурахъ и точкахъ и о критическихъ фигурахъ см. Müller-Breslau „Die graphische Statik“ и В. Кирпичевъ „Основанія графической статики“ С.-Петербургъ. 1908 г.

гура. Пусть дана, напримѣръ, ферма $ABCD$ (черт. 61). Если картина $A_0B_0D_0C_0$, изображающая движеніе фермы $ABCD$ имѣетъ всѣ стороны соотвѣтственно параллельными данной фермѣ, напр. $A_0B_0 \parallel AB$, $B_0C_0 \parallel BC$ и т. д., и кромѣ того картина подобна фигурѣ фермы, то послѣдняя, не измѣняя своей формы, начнетъ при дѣйствіи внѣшнихъ силъ, вращаться около мгновеннаго центра O .



Черт. 61.

2. Если картина будетъ имѣть всѣ стороны параллельными данной фермѣ, но фигуру — не подобной фигурѣ фермѣ, то ферма, при дѣйствіи внѣшнихъ силъ будетъ измѣнять свою форму. Напримѣръ, на черт. 62 изображена ферма $ABCD$ и картина движенія ея

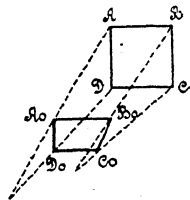


Черт. 62.

$A_0B_0C_0D_0$. Всѣ стороны картины параллельны соотвѣтственнымъ сторонамъ фермы. Но фигура картины не подобна фигурѣ фермѣ. При дѣйствіи на ферму внѣшнихъ силъ, она будетъ измѣнять свою форму, причемъ элементы ея AB , BC , CD , DA начнутъ вращаться около мгновенныхъ центровъ O_1 , O_2 , O_3 , O_4 .

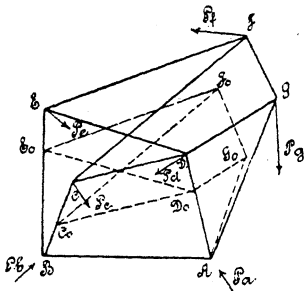
3. Если картина будетъ имѣть $n - 1$ сторонъ параллельныхъ соотвѣтственнымъ сторонамъ фермы, а n -ю сторону не параллельную n -ой сторонѣ фермы, то это будетъ служить признакомъ, что при дѣйствіи на ферму внѣшнихъ силъ, послѣдняя будетъ неподвижна и геометрически неизмѣняема.

Напримѣръ, если (черт. 63) картина $A_0B_0C_0D_0$ движенія фермы $ABCD$ будетъ имѣть стороны $A_0B_0 \parallel AB$, $A_0D_0 \parallel AD$, $D_0C_0 \parallel DC$, но B_0C_0 не будетъ параллельнымъ BC , то это служитъ признакомъ, что ферма $ABCD$ при дѣйствіи на нее внѣшнихъ силъ будетъ неподвижна и геометрически неизмѣняема.



Черт. 63.

Воспользуемся еще нижеслѣдующимися данными графической статики относительно опредѣленія усилій въ элементахъ плоской рѣшетки при дѣйствіи внѣшнихъ силъ. Пусть



Черт. 64.

рѣшетка образована слѣдующимъ образомъ ¹⁾. Данъ шарнирный четырехугольникъ $ABCD$ (черт. 64). Будемъ присоединять къ нему новые узлы такъ, чтобы каждый изъ новыхъ узловъ соединялся съ двумя прежними не принадлежащими одному и тому же элементу. Такимъ образомъ соединяемъ E съ B и D , F съ E и C , G съ F и D . Такъ какъ начальный четырехугольникъ

$ABCD$ подвиженъ, то и полученная рѣшетка будетъ подвижна. Соединимъ G съ A и построимъ картину движенія для рѣшетки $ABCDEFGA$. Для этого, задавшись точкою D_0 на линіи DD_0 , проводимъ $D_0C_0 \parallel DC$.

Далѣе проводимъ $C_0E_0 \parallel CE$ и $D_0E_0 \parallel DE$ до пересѣченія въ точкѣ E_0 . Изъ точки E_0 проводимъ $E_0F_0 \parallel EF$, а изъ $C_0 - C_0F_0 \parallel CF$ до пересѣченія съ E_0F_0 въ точкѣ F_0 . Изъ F_0 проводимъ $F_0G_0 \parallel FG$, а изъ $D_0 - D_0G_0 \parallel DG$.

Наконецъ соединяемъ A съ G_0 . Полученная фигура $C_0D_0E_0F_0G_0A$ будетъ картиною движенія данной фермы, если AB —неподвижно.

Если AG_0 не параллельно AG , то ферма при дѣйствіи случайныхъ внѣшнихъ силъ будетъ неподвижна и неизмѣняема.

Пусть на рѣшетку дѣйствуютъ внѣшнія силы $P_a, P_b, P_c, P_d, P_e, P_f, P_g$, которыя вызываютъ въ узлахъ A и B опорныя реакціи P'_a и P'_b . Опредѣлимъ эти реакціи и усилія въ элементахъ рѣшетки. Если мы найдемъ усиліе въ какомъ нибудь элементѣ рѣшетки, то тогда нетрудно будетъ при помощи діаграммы Максвелля-Кремоны опредѣлить и всѣ остальные неизвѣстныя величины. Для опредѣленія усилія въ элементѣ AG примѣнимъ начало возможныхъ перемѣщеній.

¹⁾ В Кирпичевъ. „Основанія графической статики“. С.-Петербургъ. Стр. 225.

Составимъ уравненія равновѣсія узловъ рѣшетки. Условія равновѣсія выражаются въ томъ, что сумма моментовъ силъ, дѣйствующихъ въ узлѣ, должна равняться нулю относительно любой точки фигуры. Въ качествѣ такихъ точекъ примемъ изображающія точки C_0, D_0, E_0, F_0 и G_0 . Условимся обозначать усилія въ элементахъ рѣшетки тѣми же буквами, какими обозначены концы этого элемента, на примѣръ усиліе въ элементѣ CD будемъ обозначать CD ; плечо этого усилія относительно точки C_0 обозначимъ тѣми же буквами, но малаго алфавита. При этомъ замѣтимъ, что разстояніе силы CD до точки C_0 равно разстоянію CD до точки D_0 , то же можно замѣтить и относительно другихъ элементовъ. Далѣе обозначимъ разстоянія внѣшнихъ силъ P_c, P_d, \dots до соответственныхъ изображающихъ точекъ черезъ P_c, P_d и т. д.

Составляемъ уравненія равновѣсія:

1. Узла C относительно точки C_0 $P_c p_c + CDcd_0 + CFcf_0 = 0$.
2. Узла D " " D_0 $P_d p_d - CDcd_0 + EDed_0 + DGdg_0 = 0$.
3. Узла E относительно точки E_0 $P_e p_e + EFef_0 - EDed_0 = 0$.
4. Узла F " " F_0 $P_f p_f - EFef_0 - CFcf_0 + FGfg_0 = 0$.
5. Узла G относительно точки G_0 $P_g p_g + AGag_0 - DGdg_0 - FGfg_0 = 0$.

Складывая эти уравненія и сокращая одинаковыя члены, получаемъ усиліе въ элементѣ AG

$$AG = - \frac{P_c p_c + P_d p_d + P_e p_e + P_f p_f + P_g p_g}{a g_0}$$

Зная же AG , опредѣляемъ при помощи діаграммы Максвелля-Кремоны усилія въ остальныхъ элементахъ и опорныя реакціи P_a и P_b .

Величину AG можно построить и графически при помощи веревочнаго многоугольника, принимая силы P параллельными ¹⁾. Позднѣе будетъ указано это построеніе.

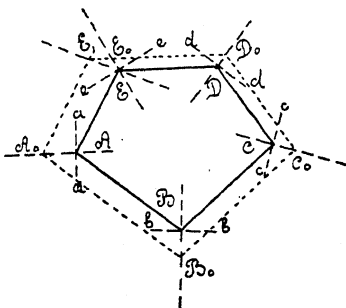
¹⁾ Мюллеръ-Бреслау. „Графическая статика сооружений“. С.-Петербургъ. 1899 г. Т. I, стр. 37.

L. Henneberg. „Die graphische Statik der starren Körper“. Leipzig. 1903. (Encyclopädie der mathem. Wissenschaften. Bd. IV, Heft 3).

Въ заключеніе обзора существующихъ способовъ расчета плоскихъ колець приведемъ еще оригинальный способъ опредѣленія неизмѣняемости формы кольца, узлы котораго могутъ скользить по прямымъ линиямъ.

Способъ этотъ предложенъ профессоромъ В. Кирпичевымъ и заключается въ слѣдующемъ ¹⁾.

Предположимъ, что требуется найти условія, при которыхъ кольцо $ABCDE$ будетъ жесткимъ. Узлы A, B, C, D, E могутъ скользить соответственно по линиямъ aa, bb, cc, dd, ee (черт. 65). Приведемъ перпендикуляры AA_0, BB_0 и т. д. къ линиямъ скольженія aa, bb и т. д. На этихъ перпендикуля-



Черт. 65.

рахъ будутъ лежать мгновенные центры возможныхъ вращеній сторонъ пятиугольника. Строимъ картину движенія $A_0B_0C_0D_0E_0$ нашей фермы, задавшись на AA_0 произвольною точкою A_0 и проводя линіи $A_0B_0 \parallel AB$ до пересѣченія съ $BB_0, B_0C_0 \parallel BC$ до пересѣченія съ CC_0 и т. д.

Если линія скольженія (ee) опоры E выбрана такъ, что перпендикуляръ къ ней EE_0 не проходитъ черезъ точку пересѣченія сторонъ A_0E_1 и D_0E_1 картины, то ферма $ABCD$ будетъ жесткой; въ противномъ же случаѣ ферма при дѣйстви внѣшнихъ силъ будетъ подвижной.

¹⁾ В. А. Кирпичевъ. „Замѣтка о рѣшетчатыхъ фермахъ“ журналъ „Инженеръ“. 1889 г.

Глава 11.

Расчетъ неподвижныхъ колець.

Разсужденія, изложенныя въ предыдущей главѣ, позволяютъ сказать, что:

„Всякое плоское неподвижное кольцо можно разсматривать какъ плоскій шарнирный механизмъ, который долженъ находиться въ покоѣ при заданныхъ направленихъ опорныхъ реакцій и при любомъ направленіи внѣшнихъ силъ“.

Это положеніе является весьма важнымъ потому, что разъ выяснится сходство кольца съ механизмомъ, мы можемъ воспользоваться указаніемъ профессора В. Л. Кирпичева, приведеннымъ въ его „Бесѣдахъ о механикѣ“, именно, на основаніи аналогіи, примѣнить къ кольцу выводы, относящіяся къ механизму.

Разсмотримъ, можно ли считать плоское неподвижное и неизмѣняемое кольцо частнымъ случаемъ механизма, т. е. примѣнимы ли къ нему условія, характеризующія механизмъ (стр. 66).

Первое требованіе всегда удовлетворяется, такъ какъ каждая точка кольца движется по вполне опредѣленной траекторіи (линіи скольженія), при чемъ а) для неподвижной опоры эта траекторія обращается въ точку; б) для опоры, скользящей по линіи, траекторія задается направлениемъ этой линіи и в) для опоры, скользящей по плоскости, движеніе ея опредѣляется длинами элементовъ, соединяющихъ ее съ сосѣдними опорами.

Что же касается второго условія существованія механизма, то для кольца его можно перефразировать такъ: „какъ только назначена неподвижность любой точки кольца, всѣ остальные дѣлаются неподвижными“.

Въ этой главѣ мы будемъ разсматривать только:

а) кольца, не испытывающія дополнительныхъ напряженій при измѣненіяхъ температуры;

- b) кольца статически опредѣлимые и
 c) кольца, не измѣняющія своей формы при дѣйстви
 виѣшнихъ силъ.

Первое условіе удовлетворяется, если удовлетворено вто-
 рое, на основаніи извѣстной теоремы.

„Опорныя давленія и усилія въ стержняхъ, возбуждаемыя
 въ статически опредѣлимомъ плоскомъ или пространствен-
 номъ шарнирномъ сочлененіи отъ измѣненія температуры,
 одинаковаго или неодинаковаго для всѣхъ стержней, равны
 нулю“ ¹⁾).

Условіе статической опредѣлимости кольца было приве-
 дено ранѣе и заключалось въ слѣдующемъ:

$$2k = r + n. \dots \dots \dots (1)$$

- гдѣ k — число узловъ кольца,
 „ r — число его элементовъ,
 „ n — число опорныхъ реакцій.

При этомъ необходимо соблюдать условіе, чтобы каждый
 отдѣльный стержень могъ измѣнять свою длину не испыты-
 вая дополнительныхъ напряженій.

Такъ какъ въ кольцахъ всегда $k = r$, то условіе первое
 можно переписать такъ:

$$r = k = n,$$

т. е. для статической опредѣлимости кольца число узловъ
 его должно равняться числу его элементовъ или числу
 опорныхъ реакцій.

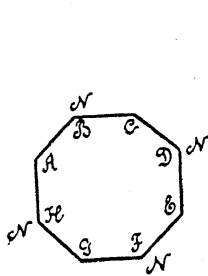
Условіе неизмѣняемости формы кольца опредѣляется, на
 основаніи предыдущей главы, слѣдующимъ образомъ:

„Если всѣ стороны картины, изображающей движеніе
 даннаго кольца, параллельны соотвѣтственнымъ сторонамъ
 кольца, за исключеніемъ одной, то кольцо будетъ геометри-
 чески неизмѣняемымъ“.

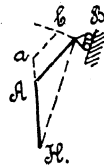
Эта теорема справедлива для колець съ различнымъ
 устройствомъ опоръ, т. е. опоры могутъ быть или неподвиж-
 ными, или съ одной линіей скользянія.

¹⁾ См. Собр. соч. Ф. Ясинскаго 1902 годъ Т. 2, стр. 137.

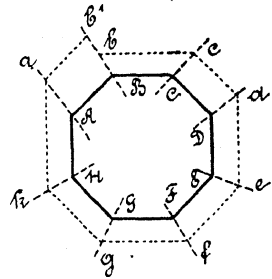
Разсмотримъ восьмиугольное кольцо съ разными комбинаціями опоръ (черт. 58—60). Строимъ для нихъ картины движенія (черт. 66—70).



Черт. 66.



Черт. 67.



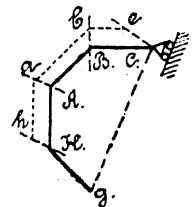
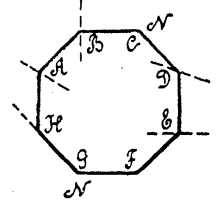
Черт. 68.

Для кольца, всё узлы котораго скользятъ по прямымъ линіямъ, картина строится такъ, какъ было указано ранѣе (стр. 70).

Если же кольцо имѣетъ часть неподвижныхъ опоръ, то тогда примѣняемъ слѣдующій способъ. Разсматриваемъ части кольца (*НАВ*—черт. 66) между двумя неподвижными опорами, какъ самостоятельное кольцо.

Вычертимъ его отдѣльно (черт. 67). Условія неподвижности точки *B* не измѣняются, если мы ее соединимъ съ точкою *H* и устроимъ подъ нею катки. При такихъ условіяхъ опорная реакція точки *B* будетъ перпендикулярна къ *HB*. Опорная же реакція узла *A* должна идти по *АН*. На основаніи этихъ данныхъ можно построить картину движенія, начиная, напримѣръ, съ точки *B*. Въ данномъ случаѣ картина получилась не замкнутой (*ba HB*), что показываетъ на неизмѣняемость фигуры *НАВ*. Подобнымъ же образомъ можно разсмотрѣть по порядку и другія части того же кольца, заключенныя между неподвижными опорами. На черт. 69—70

Черт. 69.



Черт. 70.

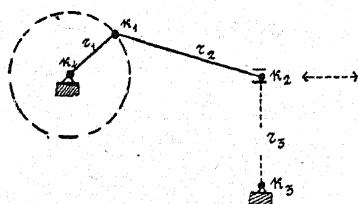
показано построение для части кольца $GHABC$ между неподвижными опорами NN . Какъ видно изъ чертежа 70, часть эта неизмѣняема, потому что критическая фигура не замкнулась.

На основаніи предыдущаго мы можемъ сказать, что въ n -угольномъ плоскомъ кольцѣ произвольной формы мы можемъ задаться направлениемъ $n-1$ реакцій. Для условія неизмѣняемости формы кольца направление n^{oi} реакціи слѣдуетъ выбрать такъ, чтобы картина, изображающая движеніе точекъ фигуры, была незамкнутой. Если же картина будетъ замкнутой, то кольцо будетъ обладать подвижностью. Наконецъ, если n^{oi} узелъ можетъ свободно скользить по плоскости, то кольцо обращается въ механизмъ. Слѣдовательно условіе существованія механизма выразится такимъ образомъ (стр. 72):

$$2k = r + n + 1 \dots \dots \dots (1)$$

Здѣсь k —число узловъ, r —число жесткихъ подвижныхъ элементовъ механизма, n —число опорныхъ реакцій.

На черт. 71 и 72 показаны примѣры механизмовъ, которые, какъ видно, удовлетворяютъ условію (1).



Черт. 71.

На черт. 71 изображенъ механизмъ, соединяющій штыкъ поршня паровой машины съ валомъ. Здѣсь

$$\Sigma_k = 4; \Sigma_n = 4; \Sigma_r = 4$$

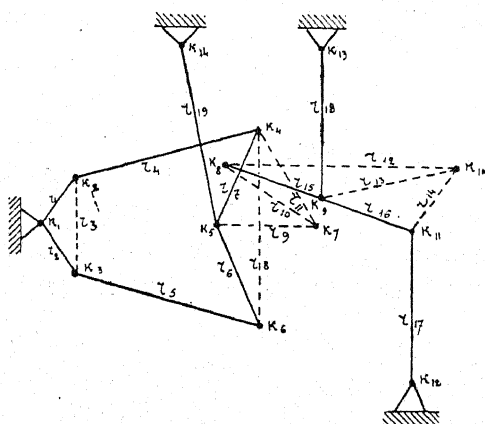
и условіе (1) выражается такъ:

$$2 \cdot 4 = 4 + 3 + 1$$

На черт. 72 показана схема переводного механизма паровой машины съ кулисою Гуча *). Здѣсь

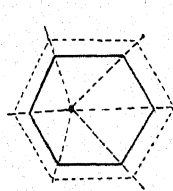
$$\Sigma_k = 14; \Sigma_r = 19; \Sigma_n = 8;$$

$$2 \cdot 14 = 19 + 8 + 1$$

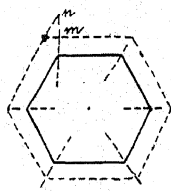


Черт. 72.

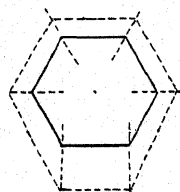
На черт. 73—77 показано одно и то же кольцо въ четырехъ случаяхъ: 1) когда оно неизмѣняемо, но подвижно (черт. 73 и 77). Въ этомъ случаѣ картина движенья подобна



Черт. 73.



Черт. 74.



Черт. 75.

кольцу, 2) когда оно неизмѣняемо и неподвижно (черт. 74). Въ этомъ случаѣ картина движенья не замыкается (невязки *nm*), 3) когда оно измѣняемо и обладаетъ безконечно малой

*) О характерѣ траекторій описываемыхъ точками механизмовъ см.

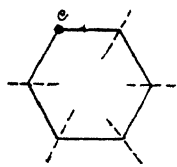
1) П. Л. Чебышевъ „Сочиненія“ Т. I, стр. 111 и 533. С.-Петербургъ 1899 г.

2) Н. Poincaré „Cinématique et mécanismes“ Paris. 1892.

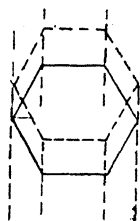
3) F. Releaux „Lehrbuch der Kinematik“ Braunschweig 1875.

4) Н. Делоне Лекціи по практической механикѣ. Спб. 1901 г.

подвижностью (черт. 75). Въ этомъ случаѣ картина движенія будетъ линіей сомкнутою, 4) когда оно будетъ представлять



Черт. 76.



Черт. 77.

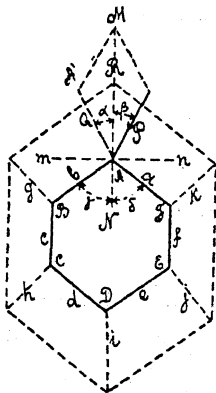
механизмъ, т. е. когда при дѣйствіи внѣшнихъ силъ всѣ точки его будутъ описывать опредѣленныя траекторіи (черт. 76). Въ этомъ случаѣ одна изъ опоръ будетъ свободной.

Фигуру черт. 75 можно также назвать механизмъ, если задаться линіей скользянія одной изъ опоръ такъ, чтобы эта линія была какъ разъ той траекторіей, которую будетъ описывать эта точка, если кольцо будетъ механизмъ.

Ислѣдованіе распредѣленія усилій въ элементахъ неподвижнаго кольца при измѣненіи направленія опорныхъ его реакцій.

Случай дѣйствія на кольцо одной силы, приложенной въ узлъ.

Пусть дано кольцо $ABCDEF$ произвольной формы. Направленія реакцій опоръ B, C, D, E, F заданы. Предположимъ, что на основаніи картины движенія найдено направленіе линіи MN опорной реакціи узла A , при которомъ кольцо будетъ обладать бесконечно малой подвижностью (черт. 78).



Черт. 78.

Назовемъ линію MN —критическою линіей. Чтобы кольцо было неизмѣняемымъ, необходимо опорную реакцію узла A направить по какой-нибудь линіи AA' , не совпадающей съ MN . Пусть на кольцо въ узлъ A дѣйствуетъ сила P . Требуется опредѣлить, какъ будутъ измѣняться усилія: Q — въ опорномъ

стержнѣ AA' и въ остальныхъ опорныхъ стержняхъ— g, h, i, j, k и элементахъ a, b, c, d, e, f —кольца, если мы будемъ:

1) мѣнять уголъ наклона α реакціи Q къ MN и 2) мѣнять уголъ наклона β силы P къ MN .

Изслѣдованіе основывается на извѣстной теоремѣ кинематики механизмовъ: „для равновѣсія механизма необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ проходила черезъ мгновенный центръ того звена, къ которому она приложена“.

Данное кольцо мы можемъ разсматривать какъ механизмъ, который долженъ находиться въ равновѣсіи, т. е. сила Q должна быть такова, чтобы при дѣйствіи силы P механизмъ находился въ покоѣ. Иными словами, равнодѣйствующая R силъ P и Q должна проходить черезъ мгновенный центръ узла A , т. е. R должна совпадать съ линіей MN . Зная это, а также зная P и направленіе Q опредѣлимъ по правилу параллелограмма силъ Q и R :

$$R = \frac{P \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}; \quad Q = \frac{P \sin \beta}{\sin \alpha}; \quad a = \frac{\sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)} \cdot \frac{P \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$$

$$b = \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma + \delta)} \cdot \frac{P \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$$

Разсматривая измѣненіе величины опорной реакціи Q при разныхъ α и при данныхъ β и P можно сказать: тѣмъ меньше уголъ между направленіемъ опорной реакціи и критической линіей въ n -мъ узлѣ, тѣмъ больше эта опорная реакція. Maximum Q равно при $\alpha = 0$; Minimum Q равно при $\alpha = 90^\circ$.

При данномъ углу β усилія въ элементахъ кольца и величины остальныхъ опорныхъ реакцій будутъ увеличиваться съ уменьшеніемъ угла α , достигая maximum'a при $\alpha = 0$ и minimum'a при $\alpha = 90^\circ$.

Въ таблицѣ 2-й показаны значенія Q и a при разныхъ значеніяхъ α и β .

На основаніи ряда 2-го мы можемъ сказать. При данныхъ направленіи и величинѣ силы P , приложенной въ одномъ узлѣ кольца, выгоднѣе всего выбирать линію скользянія этого узла совпадающей съ критической линіей, потому что тогда опорныя реакціи и усилія въ элементахъ кольца достигаютъ minimum'a.

Т а б л и ц а 2.

Величины опорных реакций и усилий в элементах колыда при изменении углов α и β .

Ряды.	Угол- числ.			
	1	2	3	4
$\beta \backslash \alpha$	0	α	$90^\circ - \beta$	90°
1	$Q = P$ или $Q = 0$ $a = 0$	$Q \text{ min} = 0$ $a = \frac{P \sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)}$	$x \rightarrow$	$Q \text{ min} = 0$ $a = \frac{P \sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)}$
2	$Q \text{ max.} = \infty$ $a \text{ max.} = \infty$	$Q = \frac{P \sin \beta}{\sin \alpha}$ $a = \frac{\sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)} \cdot \frac{P \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$	$Q = P \operatorname{tg} \beta$ $a = \frac{\sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)} \cdot \frac{P}{\cos \beta}$	$Q \text{ min} = P \sin \beta$ $a = \frac{\sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)} \cdot P \cos \beta$
3	$90^\circ - \alpha$	$Q = P \operatorname{cotg} \alpha$ $a = \frac{\sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)} \cdot \frac{P}{\sin \alpha}$	$Q = P$ $a = \frac{\sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)} \cdot 2 P \cos \alpha$	$Q = 0$ $a = \frac{\sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)} \cdot P$
4	90°	$Q \text{ max} = \infty$ $a \text{ max} = \infty$	$Q = \frac{P}{\sin \alpha}$ $a = \frac{\sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)} \cdot P \operatorname{cotg} \alpha$	$Q \text{ max} = \infty$ $a \text{ max} = \infty$ $Q = P$ $a = 0$

На основаніи же столбца 2-го можно сказать, что при выбранных направленихъ линій скольженія всѣхъ опоръ неподвижнаго кольца усилія въ элементахъ и величины опорныхъ реакцій будутъ minimum при дѣйствіи одной силы P , приложенной въ одномъ узлѣ, когда она совпадаетъ съ критической линіей этого узла.

Случай дѣйствія на кольцо нѣсколькихъ силъ, приложенныхъ въ разныхъ узлахъ.

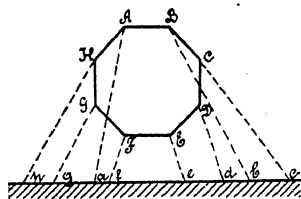
Изслѣдованія этого § раздѣлимъ на 2 части.

1) Сначала покажемъ, какъ опредѣлять усилія въ любомъ элементѣ кольца при заданныхъ внѣшнихъ силахъ и направленихъ опорныхъ реакцій.

2) Затѣмъ будемъ изслѣдовать распределеніе этихъ усилій при различныхъ измѣненіяхъ заданія.

1. Опредѣленіе усилій въ любомъ элементѣ кольца при заданныхъ внѣшнихъ силахъ и направленихъ опорныхъ реакцій.

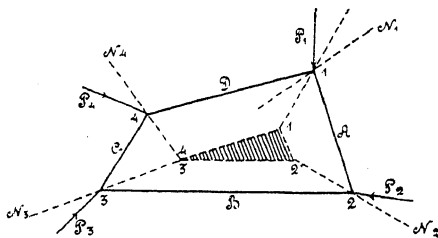
Предлагаемый ниже способъ является развитіемъ способа, приведеннаго на стр. 68. Условіе образованія кольца, разсматриваемаго нами, отличается отъ таковыхъ же кольца, разсматриваемаго на стр. 68. Дѣйствительно, въ нашемъ случаѣ каждый новый узелъ кольца соединяется однимъ стержнемъ съ к. н. точкою неподвижнаго элемента, а другимъ стержнемъ съ предыдущимъ узломъ кольца (черт. 79), между тѣмъ какъ кольца, разсматриваемыя на стр. 68 образовывались такъ, что каждый новый узелъ получался соединеніемъ его съ двумя, не принадлежащими одному элементу. Зададимся четырехугольнымъ кольцомъ произвольной формы (черт. 80), 1234. Пусть въ узлахъ его приложены силы P_1, P_2, P_3, P_4 .



Черт. 79.

Зададимся произвольно направленими реакцій опоръ 2-й, 3-й и 4-й. Вводимъ слѣдующее упрощеніе въ построеніе кар-

тины движения. Продолжаемъ опорныя реакціи N_3 и N_4 до пересѣченія въ точкѣ $3'4'$. Изъ этой точки проводимъ параллельно сторонѣ 32 линію $3'2'$ до пересѣченія съ N_2 въ точкѣ $2'$. Изъ $2'$ проводимъ $2'1' \parallel 21$, а изъ $3'$ — линію $4'1' \parallel 41$. Линіи $4'1'$ и $2'1'$ пересѣкутся въ точкѣ $1'$, кото-



Черт. 80.

рая вмѣстѣ съ точкою 1 опредѣляетъ критическую линію $11'$. Выбираемъ направление N_1 реакціи 1-й опоры такъ, чтобы N_1 не совпадало съ $11'$. Такимъ образомъ картина движения для четырехугольника является треугольной, т. е. имѣетъ сторонъ на одну меньше, нежели при обычномъ способѣ построения.

Обозначимъ далѣе разстояніе силъ:

- P_1 до точки $1'$ черезъ p_1
- P_2 " " $2'$ " p_2
- P_3 " " $3'$ " p_3
- P_4 " " $4'$ " p_4

Разстояніе опорныхъ реакцій:

- N_1 — до точки $1'$ — черезъ n_1
- N_2 — " " $2'$ — " o
- N_3 — " " $3'$ — " o
- N_4 — " " $4'$ — " o

Обозначимъ усилія въ элементахъ кольца:

- 12 — черезъ A
- 23 — " B
- 3—4 — " C
- 4—1 — " D

а разстоянія

<i>A</i>	до 1'	или до 2'	через	<i>a</i>
<i>B</i>	" 2'	" " 3'	" "	<i>b</i>
<i>C</i>	" 3'	" " 4'	" "	<i>c</i>
<i>D</i>	" 4'	" " 1'	" "	<i>d</i> .

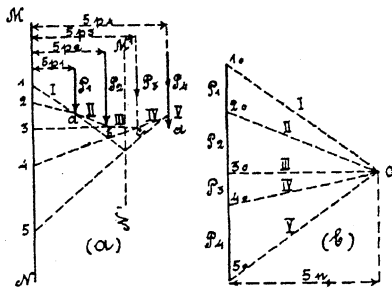
Опредѣляемъ условія равновѣсія каждаго изъ узловъ 1—4. Беремъ сумму моментовъ силъ, дѣйствующихъ въ каждомъ узлѣ, относительно точки, изображающей движеніе этого узла. Такъ какъ предполагается, что узлы находятся въ покоѣ, то и суммы моментовъ силъ будутъ соответственно равны нулю.

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Для угла 1. } & P_1 p_1 + A \cdot a + Dd - N_1 n_1 = 0 \\
 \text{"} & \text{" 2. } P_2 p_2 - A \cdot a + Bb = 0 \\
 \text{"} & \text{" 3. } P_3 p_3 + Cc - Bb = 0 \\
 \text{"} & \text{" 4. } P_4 p_4 - Cc - Dd = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Складывая уравненія (1) другъ съ другомъ, и сокращая одинаковые члены, получаемъ:

$$N_1 = \frac{P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + P_4 p_4}{n_1} \quad \dots \quad (2)$$

Величину N_1 нетрудно построить графически, на основаніи правилъ графической статики (черт. 81). Для этого проводимъ произвольную ось MN и параллельно ей проводимъ



Черт. 81.

силы P_1, P_2, P_3, P_4 въ разстояніяхъ пропорціональныхъ плечамъ p_1-p_4 , напримѣръ, увеличенныхъ противъ этихъ значеній въ 5 разъ. Строимъ планъ силъ (P) при полюсномъ

разстояніи кратномъ n_1 въ то же число разъ, что и для плечъ p . Строимъ веревочный многоугольникъ. Пусть первая сторона его пересѣкаетъ ось MN въ точкѣ 1, а послѣдняя— въ точкѣ 5. Тогда N_1 будетъ равно въ масштабѣ силъ отръзку 1—5.

Дѣйствительно, изъ подобія Δ -ковъ 12а (черт. 81а) и 1₀2₀0 (черт. 81b) имѣемъ

$$\frac{12}{5p_1} = \frac{P_1}{5n_1} \text{ или } P_1 \cdot 5p_1 = \overline{12} \cdot 5n_1;$$

разсматривая далѣе подобные треугольники чертежей (81а и b) получаемъ:

$$P_1 \cdot 5p_1 = \overline{12} \cdot 5n_1$$

$$P_2 \cdot 5p_2 = \overline{23} \cdot 5n_1$$

$$P_3 \cdot 5p_3 = \overline{34} \cdot 5n_1$$

$$P_4 \cdot 5p_4 = \overline{45} \cdot 5n_1$$

Складывая, получаемъ

$$(\overline{12} + \overline{23} + \overline{34} + \overline{45}) 5n_1 = 5Pp$$

или

$$(1 - 5) = \frac{\Sigma Pp}{n_1} = N_1,$$

что и требовалось доказать. На основаніи этого параграфа мы можемъ заключить, что:

„Построеніе критической фигуры для кольца можно упростить въ томъ смыслѣ, что число ея сторонъ сокращается на одну“, и

„Примѣненіе способа опредѣленія усилий въ элементахъ рѣшетки, образованной такъ, какъ указано на стр. 68, можно распространить и на рассматриваемыя нами кольца“. Зная величину N_1 , нетрудно аналитически, или при помощи діаграммы Кремены-Максвелля опредѣлить усилия въ остальныхъ элементахъ кольца и величины остальныхъ реакцій.

2. Изслѣдованіе распредѣленія усилий въ элементахъ кольца и опорныхъ реакцій при разныхъ линіяхъ скользянія.

Такъ какъ опредѣленіе усилий въ опорныхъ стержняхъ и въ элементахъ кольца производится при помощи діаграммы

Кремоны-Максвелля по данной величинѣ N_1 и силѣ P , то можно заключить, что „При данныхъ направлєніяхъ силъ P и реакцій N неизвѣстныя усилія суть линейныя функціи данныхъ величинъ P и N “.

Поэтому: усилія въ элементахъ кольца и въ опорныхъ стержняхъ пропорціональны величинамъ внѣшнихъ силъ и величинѣ опорной реакціи N_1 (черт. 80).

Исслѣдуемъ, какъ будетъ измѣняться величина N_1 при разныхъ направлєніяхъ ея.

Обращаясь къ формулѣ 2-й (стр. 81) мы видимъ, что N_1 будетъ тѣмъ больше, чѣмъ меньше n_1 и тѣмъ меньше, чѣмъ больше n_1 . Но максимумъ n_1 можетъ быть только равенъ величинѣ $11'$ (черт. 80); при этомъ N_1 должно быть \perp къ линіи $11'$. Minimum же n_1 будетъ равенъ 0; при этомъ N_1 совпадаетъ съ линіей $11'$. Поэтому:

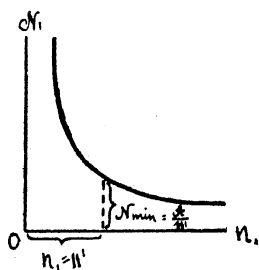
„Во всякомъ n -угольномъ кольцѣ произвольной формы при заданныхъ внѣшнихъ силахъ и направлєніяхъ опорныхъ реакцій $n-1$ опоръ, усилія въ опорныхъ и кольцевыхъ элементахъ будутъ minimum, когда направлєніе опорной реакціи $n^{\text{ой}}$ опоры перпендикулярно къ критической линіи этой опоры“.

Обозначимъ въ уравненіи (2) стр. 81 $P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + P_4 p_4$ черезъ A ; тогда

$$N_1 n_1 = A$$

Это есть уравненіе гиперболы (равнобокой), отнесенной къ ассимитатамъ, перпендикулярнымъ другъ къ другу: (черт. 82). Такъ какъ n_1 измѣняется отъ 0 до величины $11'$ (черт. 80), то N_1 будетъ измѣняться отъ $\frac{A}{11'}$ до ∞ .

Отсюда вытекаетъ, что „при вращеніи опорной реакціи N -го узла кольца вокругъ послѣдняго, усилія въ элементахъ кольца и въ опорныхъ стержняхъ измѣняются по закону гиперболы, т. е. линіями вліянія такихъ усилій будутъ гиперболы“.



Черт. 82.

опоры пойдёт по линии 23, а 4-ой опоры — по линии 34. Однако съ удаленіемъ точекъ k_2 въ безконечность, удаляются въ безконечность и точки l_2 и m_2 т. е. тогда выраженіе N_1 принимаетъ слѣдующій вѣсь.

$$N_1 = \frac{P_1 \cdot \infty + P_2 \cdot \infty + P_3 \cdot p_2 + P_4 \cdot \infty}{\infty} \dots (a)$$

Замѣтимъ, что съ измѣненіемъ n_1 будутъ измѣняться и p_1, p_2, p_4 по закону прямой линии, т. е. всегда можно предположить, что

$$(b) \left. \begin{aligned} p_1 &= \alpha_1 n_1 + \beta_1 \\ p_2 &= \alpha_2 n_1 + \beta_2 \\ p_4 &= \alpha_4 n_1 + \beta_4 \end{aligned} \right\} \text{ гдѣ } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_4 \text{ нѣкоторыя опре-} \\ \text{дѣленные числа.}$$

Подставляя значенія (b) въ уравненіе (2) стр. 81 и дѣлая приведеніе, получаемъ:

$$N_1 = P_1 \alpha_1 + P_2 \alpha_2 + P_4 \alpha_4 + \frac{P_1 \beta_1 + P_2 \beta_2 + P_3 p_2 + P_4 \beta_4}{n_1}$$

Полагая теперь $n_1 = \infty$, получимъ

$$N_1 = P_1 \alpha_1 + P_2 \alpha_2 + P_4 \alpha_4$$

т. е. N_1 получаетъ вполне опредѣленное значеніе не равное нулю. Поэтому для того, чтобы N_1 равнялось нулю, условіе (a) стр. 84 не оказывается полезнымъ.

Разсмотримъ теперь условіе (b) стр. 84 т. е. пусть

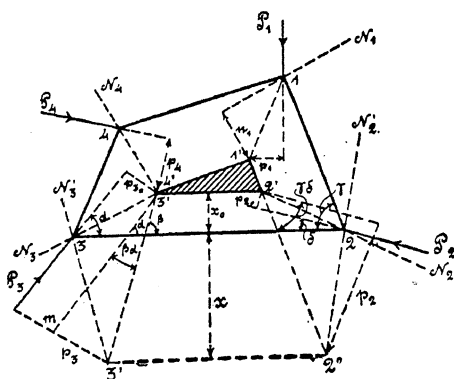
$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + P_4 p_4 = 0.$$

Построимъ картину движенія, $1'2'3'4'$ (черт. 84), вершинамъ которой пусть соотвѣтствуютъ плечи p_1, p_{20}, p_{30}, p_4 . Пусть этой картинѣ соотвѣтствуютъ направленія реакцій N_2, N_3, N_4 . Выберемъ N_1 такъ, чтобы она не проходила черезъ точку 1, а отстояла отъ нея въ разстояніи n_1 . Тогда будемъ имѣть величину N_1

$$N_1 = \frac{P_1 p_1 + P_2 p_{20} + P_3 p_{30} + P_4 p_4}{n_1} \dots (1)$$

Оставляя теперь безъ измѣненія точки $1'$ и $4'$ картины движенія, опредѣлимъ, на какое разстояніе x надо перенести сторону $2'3'$ картины отъ стороны 23 данной фигуры парал-

тельно самой себѣ, чтобы плечи p_2 и p_3 силъ P_2 и P_3 приобрѣли значенія, обращающія въ нуль числителя дроби (1).



Черт. 84.

Обозначимъ разстоянiе $2'3'$ до 23 черезъ x_0 . Обозначимъ также углы между различными данными направлениями такъ, какъ указано на чертежѣ 84.

Проектируя отрѣзки $3'3''$ и $2'2''$ на направление xx_0 , получаемъ.

$$3'3'' \sin \beta = 2'2'' \sin \gamma \dots \dots \dots (2)$$

Но изъ прямоугольныхъ треугольниковъ $3'3''m$ и $2'2''n$ имѣемъ:

$$3'3'' = \frac{p_3 - p_{30}}{\sin(\beta - \alpha)}; 2'2'' = \frac{p_2 + p_{20}}{\sin(\gamma - \delta)} \dots \dots \dots (3)$$

Подставляя значенія (3) въ уравненiе (2), получаемъ.

$$p_2 = \frac{\sin(\gamma - \delta) \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha) \sin \gamma} \cdot p_3 - \left[\frac{\sin(\gamma - \delta) \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha) \sin \gamma} p_{30} + p_{20} \right] \dots \dots \dots (4)$$

Выражаемъ дальше условiе, что N_4 должно равняться нулю (при картинѣ $1'2'3'4'$).

$$P_1 p_1 - P_2 p_2 + P_3 p_3 + P_4 p_4 = 0$$

или

$$P_2 = \frac{P_3}{P_2} \cdot p_3 + \frac{P_1 p_1 + P_4 p_4}{P_2} \dots \dots \dots (5)$$

Изъ уравненiй (4) и (5) легко опредѣлить p_2 и p_3 , а зная p_2 и p_3 легко построить и точки $2''3''$ картины, которыя опредѣлятъ направлениа N'_2 и N'_3 реакцiй опоръ 2 и 3, при

которыхъ реакція N''_1 первой опоры будетъ равна нулю.

Исходя изъ разсужденій, приведенныхъ выше, мы можемъ высказать слѣдующее.

„Если въ n -угольномъ плоскомъ кольцѣ задаться направленіями опорныхъ реакцій $n-2$ опоръ и кромѣ того условіемъ, чтобы одна изъ $(n-2)$ опорныхъ реакцій равнялась нулю, то послѣднее условіе опредѣляется выборомъ направленія двухъ послѣднихъ реакцій ($n-1^{\text{и}}$ и $n^{\text{и}}$).

Разсматривая уравненія (4) и (5) мы видимъ, что p_2 и p_3 не зависятъ отъ n_1 . Слѣдовательно направленіе N_1 не играетъ значенія для условія, чтобы величина N_1 была равна нулю. Поэтому:

„При заданныхъ направленіяхъ и величинахъ виѣшнихъ дѣйствующихъ на кольцо силъ всегда можно оставить одну опору свободной, выбравъ соотвѣтственнымъ образомъ направленія реакцій двухъ к. н. опоръ и задавшись случайными направленіями реакцій остальныхъ $(n-3)$ опоръ.

Г л а в а 12.

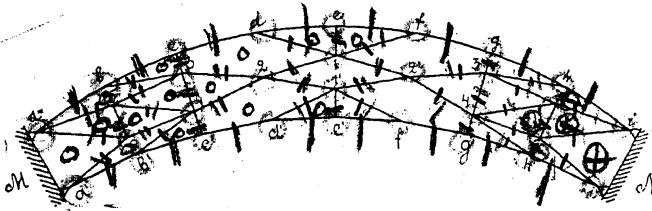
Примѣненіе колець къ образованію новаго типа плоскихъ формъ.

Имѣя плоское неподвижное кольцо, всегда можно его преобразовать въ плоскую ферму. Общій способъ такого преобразованія аналогиченъ тому, который примѣнялся нами для преобразованія пространственныхъ колець фермы и заключается въ слѣдующемъ:

1-й способъ. Задаемся линіями опорныхъ реакцій каждой опоры кольца такъ, чтобы кольцо было неподвижнымъ и геом. неизмѣняемымъ. Принимаемъ эти линіи за направленіе новыхъ элементовъ фермы. Затѣмъ выбираемъ произвольныя точки на этихъ новыхъ элементахъ и соединяемъ ихъ послѣдовательно между собою, образуя новое кольцо. Задаемся линіями реакцій новаго кольца такъ же, какъ и для перваго и выбираемъ на нихъ новые углы и т. д. Наконецъ, остановившись на к. н. кольцѣ, можемъ укрѣпить его узлы, соединяя каждый изъ нихъ двумя стержнями съ двумя случайно выбранными неподвижными точками. Эти точки будутъ служить опорами

2-й примѣръ. Пусть даны двѣ опорныя плоскости (черт. 87), на которыя опираются два кольца $abc \dots hi$ и $a'b'c' \dots h'i'$, — первое въ неподвижныхъ точкахъ a и i , второе — въ точкахъ $a'i'$. (объ условіяхъ геом. неиз. и неподвижности такого кольца см. главу 11).⁶

Выберемъ между кольцами двѣ точки 1 и 1', которыя будемъ пока считать за неподвижныя. Соединимъ съ ними узлы d, e, f и d', e', f' , какъ показано на черт. 87. Выберемъ двѣ новыя неподвижныя точки 2 и 2'. Условія неподвижности точекъ 1 и 1' не измѣнятся, если мы каждую изъ нихъ соединимъ съ двумя точками 2 и 2'. Выбираемъ въ лѣвой части фермы еще двѣ неподвижныя точки 3 и 4 и соединяемъ узлы b и c фермы съ точкою 3 и узлы $b'c'$ съ точкою 4. Кромѣ того соединяемъ точку 2 съ точками 3 и 4. Тогда ³⁹



Черт. 87.

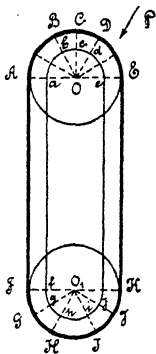
точка 2 будетъ недвижна. Далѣе соединяемъ точки 3 и 4 между собою и съ вновь выбранными неподвижными точками 5 и 6. Тогда точки 3 и 4 будутъ недвижны. Узлы же 5 и 6 соединяемъ между собою и съ заданными неподвижными точками a и a' . Тогда точки 5 и 6 будутъ недвижными. Тѣ же построения дѣлаемъ и для правой половины фермы. ^X
^{до са}
^{вост}

Расчетъ полученной фермы слѣдуетъ начинать съ расчета колець abc и hi и $a'b' \dots h'i'$ отдѣльно для каждого такъ, какъ было указано во главѣ 11. ^{реш}

Пространственныя фермы для мостовъ можно было бы получить такимъ же способомъ, опирая лишь каждый узелъ пространственнаго кольца уже не на 2, а на 3 неподвижныхъ точки, или же строя промежуточныя пространственныя кольца, какъ было указано въ главѣ 8. ^{ч.в.}
^{уши}

Кольца съ бесконечно-большимъ числомъ опоръ.

Разсмотримъ теперь кольца, прямолинейные элементы которыхъ бесконечно малы, а число опоръ которыхъ бесконечно велико. Подобіемъ такихъ колець можетъ служить веревочное кольцо, надѣтое на два блока (черт. 88).



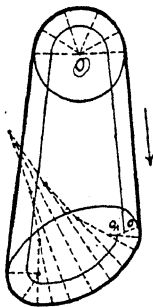
Черт. 88.

Реакція опоръ кольца въ точкахъ соприкосновенія его съ блоками нормальны къ окружности послѣдняго и проходятъ черезъ центры ихъ O и O_1 .

Строимъ картину движенія веревочнаго кольца. Для частей его $ABCDE$ — картина движенія будетъ дугою круга— $abcde$. Далѣе af и ek будутъ параллельны AF и EK и наконецъ $fghijk$ будетъ также дугою круга.

Такъ какъ картина получилась подобной данному кольцу, то очевидно послѣднее, на основаніи заключенія, приведеннаго на стр. 75, будетъ или обладать бесконечно малой подвижностью, или будетъ механизмомъ.

На основаніи того же заключенія нетрудно видѣть, что кольцо будетъ представлять собою механизмъ, т. е. при дѣйствіи на него любой силы P кольцо придетъ въ опредѣленное движеніе и будетъ вращать блоки O и O_1 . Разсмотримъ при какомъ устройствѣ кольцо при дѣйствіи любой внѣшней силы будетъ неподвижнымъ. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы картина движенія не представляла замкнутой фигуры, построенной на линияхъ дѣйствія опорныхъ реакцій. На черт. 89 показана система двухъ блоковъ—одного круговаго, другого эллиптическаго, не допускающихъ вращенія другъ друга, если вокругъ нихъ будетъ накинута веревочное кольцо.

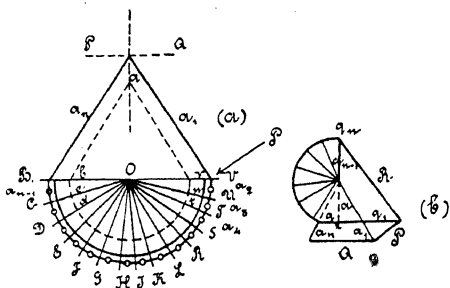


Черт. 89.

друга, если вокругъ нихъ будетъ накинута веревочное кольцо.

Въ этомъ случаѣ картина движенія не замыкается.

Разсмотримъ, какъ опредѣляются усилія въ элементахъ и опорныя реакціи въ неподвижныхъ кольцахъ съ безконечно большимъ числомъ опоръ. Пусть, на примѣръ, дана цѣпь $B\text{---}C\text{---}D$ —



Черт. 90.

TUV , подобная вышеупомянутымъ кольцамъ перекинутая черезъ зубчатое колесо, которое можетъ вращаться около центра O . Концы цѣпи B и V соединены жесткими элементами съ узломъ A .

Чѣмъ больше будетъ зубьевъ у колеса, тѣмъ больше будетъ кольцо $ABCD\text{---}TUV\text{---}A$ имѣть опоръ.

Въ предѣлѣ цѣпь обратится въ канатъ, огибающій блокъ. Реакціи для цѣпи, огибающей блокъ будутъ направлены по радиусамъ послѣдняго въ точку O . Строимъ картину движенія. Для части кольца $BC\text{---}TUV$ картина будетъ дугою въ $bcd\text{---}tuv$ круга съ центромъ въ точкѣ O . Проводимъ изъ точки b линію ba параллельную BA , а изъ v —линію va параллельную VA . Точка пересѣченія этихъ линій опредѣлитъ вмѣстѣ съ точкою A критическую линію Aa . Если опорная реакція точки A пойдетъ по линіи Aa , то система будетъ обладать безконечно малой подвижностью. Для избѣжанія этого направимъ опорную реакцію узла A по какой нибудь другой этого линіи,—на примѣръ, по линіи PQ .

Пусть на узелъ кольца v дѣйствуетъ к. н. сила P . На основаніи начала возможныхъ перемѣщеній находимъ величину реакцій Q :

$$Q = \frac{P \cdot p}{q},$$

гдѣ p —плечо силы P относительно узла v картины движенія, а q —плечо силы Q относительно точки a .

Зная величину силы Q строимъ діаграмму Кремоны-Максвелля (черт. 90b). Разсматривая многоугольникъ силъ q —опорныхъ реакцій, нетрудно видѣть, что онъ, начиная съ реакціи q_2 и кончая q_n образуетъ фигуру подобную фигурѣ кольца $U—B$, но повернутую относительно ея на 90° . Такія фигуры въ проективной геометріи называются взаимными или соотвѣтственными, т. е., если въ одной изъ нихъ извѣстныя линіи пересѣкаются въ одной точкѣ, то въ другой линіи имъ соотвѣтствующія и параллельныя образуютъ непрерывную линію и обратно ¹⁾.

Остановимся нѣсколько на разсмотрѣннн колесѣ съ безконечно большимъ числомъ опоръ и съ безконечно малыми сторонами. При этомъ будемъ имѣть въ виду слѣдующую теорему графической статики (приводимую и доказываемую проф. Saviotti въ его прибавленіяхъ къ соч. L. Cremona „Les figures réciproques en Statique Graphique“ ²⁾). „Если веревочный

¹⁾ Теорія взаимныхъ фигуръ разрабатывалась какъ въ проективной геометріи, такъ и въ графической статикѣ. Проф. В. Кирпичевъ въ своемъ сочиненіи „Графическая статика“ приводитъ краткій историческій очеркъ развитія ученія о взаимныхъ фигурахъ и указываетъ какъ на пионеровъ этого ученія, на Тэйлора, Максвелля, Кремону и Маркса Леви. На русс. яз. наиболѣе изясно изложена теорія взаимныхъ діаграммъ въ упомянутомъ соч. В. Кирпичева. По ясности изложенія это сочиненіе заслуживаетъ особаго вниманія. Дѣйствительно, теорія взаимныхъ фигуръ Максвеллемъ была выведена на основаніи изслѣдованія фигуръ полярныхъ одна другой по отношенію къ параболонду вращения (См. I. C. Maxwell „The scientific papers“ Стр. 169. Т. 2-й). Кремона при изслѣдованіи свойствъ взаимныхъ фигуръ пользуется данными проективной геометріи, а также ученіемъ Мёбиуса, о нулевой системѣ (См. L. Cremona „Les figures réciproques en statique graphique“ Paris. 1885 г.). Тэйлоръ открылъ свойства взаимныхъ фигуръ чисто практически — путемъ построенія многихъ діаграммъ. Наконецъ Морисъ Леви пришелъ къ тѣмъ же выводамъ на основаніи данныхъ Кинематической Геометріи. (M. Levy „La Statique Graphique“ Paris. 1874 г.). Кирпичевъ же излагаетъ въ своей Графической Статикѣ теорію взаимныхъ фигуръ исходя изъ понятій элементарной геометріи.

²⁾ L. Cremona „Les figures réciproques en Statique Graphique“. Appendice: „Nouvelles méthodes pour le calcul der travures réticulaires“: Paris, 1885. Стр. 42.

многоугольникъ для силъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ, является въ предѣлѣ кривой коническаго сѣченія, то соотвѣтствующій планъ силъ будетъ такъ же кривой коническаго сѣченія“.

Въ упомянутомъ своемъ сочиненіи Saviotti изслѣдуетъ формы кривыхъ, какъ плана силъ, такъ и веревочнаго многоугольника, и указываетъ на основаніи данныхъ проективной геометріи, зависимости между кривыми плана силъ и веревочной кривой. Изъ его изслѣдованій вытекаетъ, что кривыя плана силъ и веревочная—относятся къ взаимнымъ фигурамъ и подчиняются законамъ взаимныхъ фигуръ. Для насъ выводы Saviotti являются весьма цѣнными при изученіи колець съ бесконечно большимъ числомъ опоръ и съ бесконечно малыми сторонами. На основаніи черт. 90 и разсужденій къ нему относящихся можно сказать:

„Если часть очертанія кольца является кривою формы коническаго сѣченія, то часть картины его движенія является кривою подобной фигурѣ кольца, а часть плана силъ является кривою взаимной съ кривого очертанія кольца.

Замѣтимъ при этомъ, что при построеніи диаграммъ силъ для колець ограниченныхъ кривыми второго порядка можно замѣнять построеніе гиперболическаго, параболическаго и эллиптическаго плана силъ круговымъ планомъ силъ, пользуясь методомъ соотвѣтственныхъ фигуръ ¹⁾.

Глава 14.

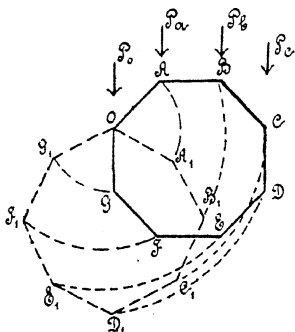
Разсчетъ временно подвижныхъ колець неизмѣняемой формы.

а) Случай дѣйствія силъ постоянныхъ: величины и направленія.

Пусть дано кольцо $ABCDEFGHI OA$ (черт. 91). Опредѣлимъ, какъ должны быть выбраны линіи скользянія его опоръ, чтобы кольцо, не измѣняя своей формы, перемѣстилось въ новое положеніе $OA_1B_1 \dots F_1G_1$, причемъ такъ, чтобы

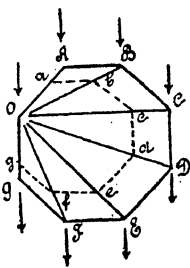
¹⁾ Ученіе о соотвѣтственныхъ фигурахъ см. 1) К. Купферъ: „Начертательная Геометрія“. Рига 1898 г. 2) F. Enriques „Lezioni di geometria des crittiva“. Bologna 1902. 3) E. Geyger. „Die angewandte darstellende Geometrie“. Leipzig, 1906. 4) Е. Федоровъ: „Новая Геометрія какъ основа черченія“. С.-Петербургъ. 1907 г.

опора O оставалась неподвижной. Очевидно, кольцо должно вращаться, как неизмѣняемое тѣло, вокругъ центра O . Поэтому радиусы вращения разныхъ опоръ кольца должны оставаться неизмѣнной величины во все время вращения, т. е. $OB = OB_1$; $OC = OC_1$ и т. д. Иными словами, такое кольцо можно замѣнить сквозной фермой (черт. 92), которая должна вращаться вокругъ центра O до тѣхъ поръ, пока между реакціями опоръ и внѣшними силами не наступитъ равновѣсія.

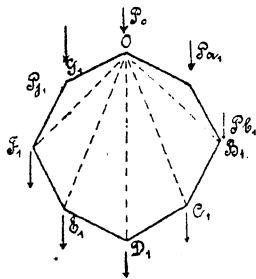


Черт. 91.

Разсматривая картину движенія для одного изъ неустойчивыхъ положеній кольца (черт. 92), мы видимъ, что картина будетъ подобна кольцу. Это, какъ мы видѣли раньше,



Черт. 92.



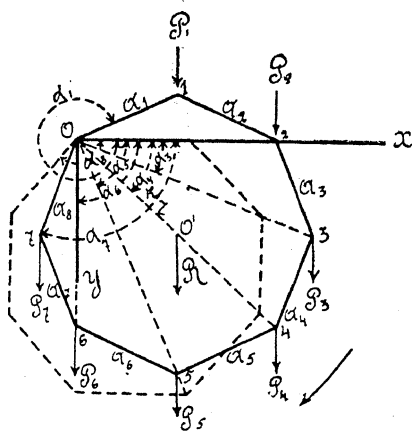
Черт. 93.

показываетъ, что кольцо неизмѣняемо, но подвижно (стр. 75). Кольцо придетъ въ устойчивое положеніе тогда, когда моменты внѣшнихъ силъ относительно точки опоры O будутъ равны нулю (черт. 93).

Пусть, напримѣръ, на кольцо дѣйствуютъ силы тяжести, а опоры его могутъ катиться по круговымъ желобамъ съ центромъ въ точкѣ O .

Опредѣлимъ, какъ будутъ измѣняться усилія въ его элементахъ и величины его реакцій при вращеніи до положенія равновѣсія (черт. 94).

Пусть начальное положеніе узловъ будетъ 0123 . . . 7. Выберемъ оси координатъ такъ, чтобы онѣ проходили черезъ центръ вращенія, и OX была перпендикулярна къ силамъ P , а OY —параллельна. Пусть равнодѣйствующая всѣхъ внѣшнихъ силъ P будетъ R и O' —ея точка приложенія. Будемъ отсчитывать углы α между радиусами вращенія



Черт. 94.

узловъ 1, 2, 3 . . . отъ Ox по направленію движенія часовой стрѣлки; обозначимъ длины радиусовъ вращенія узловъ кольца черезъ $p_1, p_2 \dots p_7$, а точки O' — черезъ r . Предположимъ, что кольцо повернулось на нѣкоторый уголъ β по часовой стрѣлкѣ, тогда моменты внѣшнихъ силъ въ любомъ узлѣ относительно точки O выразятся формулой вида

$$P_n p_n \cos(\alpha_n + \beta).$$

Когда кольцо придетъ въ положеніе равновѣсія, то сумма моментовъ внѣшнихъ силъ относительно точки O будетъ равна нулю, т. е.

$$P_1 p_1 \cos(\alpha_1 + \beta) + P_2 p_2 \cos(\alpha_2 + \beta) + \dots + P_7 p_7 \cos(\alpha_7 + \beta) = 0$$

откуда

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{P_1 p_1 \cos \alpha_1 + P_2 p_2 \cos \alpha_2 + \dots + P_7 p_7 \cos \alpha_7}{P_1 p_1 \sin \alpha_1 + P_2 p_2 \sin \alpha_2 + \dots + P_7 p_7 \sin \alpha_7}$$

или

$$Rr \cos(k + \beta) = 0; \text{ откуда } \beta = \frac{\pi}{2} (2n + 1) - k$$

или

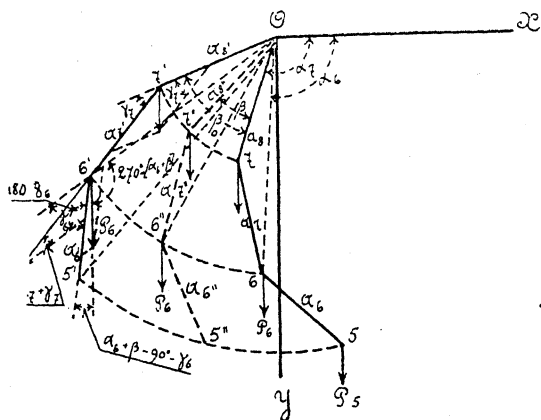
$$\beta = \frac{\pi}{2} - k.$$

Опредѣливъ положеніе устойчиваго равновѣсія, изслѣдуемъ, какъ будутъ измѣняться усилія въ отдѣльныхъ элементахъ при вращеніи кольца.

Разсматривая какой-нибудь узелъ, напр. 2-й, нетрудно замѣтить, что при вращеніи его сила P_2 разложится по направленію радіуса $O2$ и по направленію перпендикулярному къ нему, не вліяя на усилія въ элементахъ кольца a_2 и a_1 . Если же разсматривать к. н. узелъ съ другой стороны, напр. 6-й, то здѣсь сила P_6 разложится по радіусу и по элементу a_6 , не вліяя на усиліе a_7 , т. к. если бы въ a_7 было к. н. усиліе, то тогда узелъ 7 не былъ бы въ равновѣсіи. Послѣ этихъ предварительныхъ замѣчаній опредѣлимъ усилія.

Начнемъ вращать кольцо отъ положенія равновѣсія обратно до заданнаго положенія.

Разсмотримъ измѣненіе усилій въ элементѣ a_s (черт. 95).



Черт. 95.

Такъ какъ кольцо стремится придти изъ положенія $O76$ въ положеніе $O7'6'$ то, при этомъ сила P_7 производитъ работу обратную работѣ силъ вращающихъ кольцо.

Для положенія узла въ точкѣ 7' усилія въ элементахъ будутъ:

$$a_8' = + P_7 \cdot \frac{\sin(\alpha_7 + \beta_0 - \gamma_7 - 90^\circ)}{\sin \gamma_7} \dots \dots \dots (1)$$

$$a_7' = P_7 \cdot \frac{\sin [270^\circ - (\alpha_7 + \beta_0)]}{\sin \gamma_7} \dots \dots \dots (2)$$

Все время, пока узелъ 7 будетъ слѣва отъ оси y , въ элементахъ a_7 и a_8 будутъ усилія, опредѣляемыя формулами (1 и 2).

Разсмотримъ измѣненіе усилія въ элементѣ a_6 .

Во все время вращенія узелъ 6' будетъ находиться подъ вліяніемъ силъ: 1) P_2 и 2) a_7 .

Разлагаемъ каждую изъ нихъ по направленіямъ 6'0 и 6'5'. Пусть составляющія

P_2 по 6'0	будетъ	n'
	6'5'	m'
a_7 по 6'0	"	n''
	6'5'	m''

Окончательныя усилія:

$$\text{въ 6'0 будетъ } n' + n'' = n$$

$$\text{„ 6'5' „ } m' + m'' = a_6'$$

$$n' = \frac{P_6 \sin(\alpha_6 + \beta_0 - \gamma_6 - 90^\circ)}{\sin \gamma_6}; \quad m' = \frac{P_6 \sin [270^\circ - (\alpha_6 + \beta_0)]}{\sin \gamma_6};$$

$$n'' = \frac{a_7' \cdot \sin(\alpha_7 - \alpha_6 + \gamma_6 - \gamma_7)}{\sin(180^\circ - \gamma_6)}; \quad m'' = \frac{a_7' \cdot \sin(\alpha_6 - \alpha_7 + \gamma_7)}{\sin(180^\circ - \gamma_6)}$$

Окончательно

$$n = \frac{P_6 \cdot \sin(\alpha_6 + \beta - \gamma_6 - 90^\circ)}{\sin \gamma_6} +$$

$$+ \frac{P_7 \cdot \sin [270^\circ - (\alpha_7 + \beta)] \cdot \sin(\alpha_7 - \alpha_6 + \gamma_6 - \gamma_7)}{\sin \gamma_7 \cdot \sin \gamma_6}$$

Преобразуемъ это выраженіе

$$n = \frac{P_6}{\sin \gamma_6} \sin [(\alpha_6 - \gamma_6 - 90^\circ) + \beta] +$$

$$+ \frac{P_7 \cdot \sin(\alpha_7 - \alpha_6 + \gamma_6 - \gamma_7)}{\sin \gamma_7 \sin \gamma_6} \cdot \sin [(270^\circ - \alpha_7) - \beta] \text{ или,}$$

обозначая,

$$\frac{P_6}{\sin \gamma_6} = a_n; \quad \alpha_6 - \gamma_6 - 90^\circ = \delta_n;$$

$$\frac{P_7 \cdot \sin(\alpha_7 - \alpha_6 + \gamma_6 - \gamma_7)}{\sin \gamma_7 \sin \gamma_6} = b_n; \quad 270^\circ - \alpha_7 = \delta'_n$$

получаемъ

$$n = a_n \sin(\delta_n + \beta) + b_n \sin(\delta'_n - \beta) = a_n \sin \delta_n \cos \beta + \\ + a_n \cos \delta_n \sin \beta + b_n \sin \delta'_n \cos \beta - b_n \cos \delta'_n \sin \beta = (a_n \cos \delta_n - \\ - b_n \cos \delta'_n) \sin \beta + (a_n \sin \delta_n + b_n \sin \delta'_n) \cos \beta;$$

или, обозначая,

$$a_n \cos \delta_n - b_n \cos \delta'_n = A$$

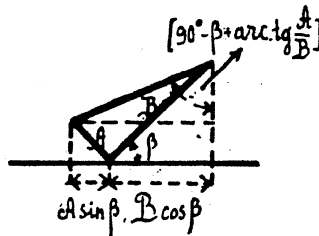
$$a_n \sin \delta_n + b_n \sin \delta'_n = B$$

получимъ

$$n = A \sin \beta + B \cos \beta.$$

Величина n можетъ быть разсматриваема какъ проекція гипотенузы прямоуг. Δ -ка, катеты котораго A и B (черт. 96) т. е.

$$n = \sqrt{A^2 + B^2} \sin\left(90^\circ - \beta + \arctg \frac{A}{B}\right) \dots (3)$$



Черт. 96.

$$a'_6 = m' + m'' = \frac{P_6 \sin [270^\circ - (\alpha_6 + \beta)]}{\sin \gamma_6} + \\ + \frac{P_7 \cdot \sin [270^\circ - (\alpha_7 + \beta)]}{\sin \gamma_7 \cdot \sin \gamma_6} \sin(\alpha_6 - \alpha_7 + \gamma_7);$$

Это выраженіе можно представить такъ же, какъ и предъидущее въ видѣ:

$$a'_6 = \sqrt{A'^2 + B'^2} \sin \left[90^\circ - \beta + \arctg \frac{A'}{B'} \right] \dots (4)$$

формулы 1—4 позволяютъ высказать, что:

„При вращеніи кольца вокругъ неподвижнаго узла при дѣйствіи постоянныхъ и одинаково направленныхъ силъ,

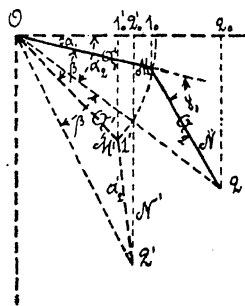
линии вліянiя усилій въ элементахъ и опорныхъ реакціи являются синусоидами“.

Теперь разсмотримъ вліяніе иныхъ силъ, напимѣрь силъ вѣтра. При этомъ предположимъ, что давленіе вѣтра можетъ дѣйствовать лишь нормально къ линіи элемента кольца.

б) Случай дѣйствiя силъ измѣняющихъ свою величину и направленіе.

Пусть на кольцо дѣйствуютъ силы вѣтра (или воды). Опредѣлимъ давленія, нормальныя къ элементамъ кольца въ каждомъ узлѣ. Пусть давленіе вѣтра на 1 пог. ед. длины элемента нормального къ направленію дѣйствiя вѣтра будетъ P .

Тогда при поворотѣ элемента изъ начальнаго положенія его (подъ угломъ $90^\circ + \alpha_1$) къ дѣйствію вѣтра (черт. 97) на уголь β давленіе нормальное къ элементу будетъ



Черт. 97.

$$\text{на узелъ } 1' \text{ отъ } O1' - \frac{Pa_1 \cos^2(\alpha_1 + \beta)}{2} = q_1$$

$$\text{„ „ } 1' \text{ „ } 1'2' - \frac{Pa_2 \cos^2(\alpha_1 + \gamma_1 + \beta)}{2} = q_2$$

Составляющей, параллельной элементамъ, мы пренебрегаемъ.

Усилія въ элементахъ будутъ

$$M = \frac{Pa_1 \cos^2(\alpha_1 + \beta)}{2} \cotg \gamma + \frac{Pa_2 \cos^2(\alpha_1 + \gamma_1 + \beta)}{2 \sin \gamma}$$

$$N = \frac{Pa_1 \cos^2(\alpha_1 + \beta)}{2 \sin \gamma} + \frac{Pa_2 \cos^2(\alpha_1 + \gamma_1 + \beta)}{2} \cotg \gamma.$$

Эти выраженія нетрудно привести къ виду

$$M = m \cos^2(\alpha_1 + \beta) + n \cos^2(\delta + \beta)$$

или къ виду

$$M = A \cos^2 \beta + B \sin \beta \cos \beta + C \sin^2 \beta$$

или, наконецъ, полагая $\operatorname{tg} \beta = x$; $M' = y$, къ виду

$$ax^2y + bx^2 + cx + dy + e = 0.$$

А это есть уравнение параболы 3-го порядка (см. Граве „Аналитич. геом.“ стр. 360).

Слѣдовательно, при условіяхъ дѣйствія силъ, указанныхъ выше:

„Линіями вліянія усилій въ элементахъ кольца будутъ параболы 3-го порядка“¹⁾.

Примѣчаніе. Всѣ тѣ выводы, которые были сдѣланы въ этой главѣ для временно подвижныхъ колець съ конечнымъ числомъ опоръ, можно распространить и на кольца съ бесконечно большимъ числомъ опоръ.

Глава 15.

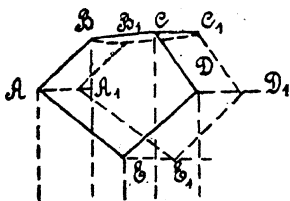
Расчетъ подвижныхъ колець.

Подвижныя кольца неизмѣняющія своей формы.

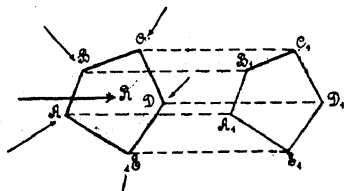
Если плоское неизмѣняемое кольцо будетъ двигаться подъ вліяніемъ внѣшнихъ силъ въ своей плоскости, то его движеніе всегда можно разложить для каждаго промежутка времени на два: а) поступательное и б) вращательное.

Для этого случая картина движенія должна быть подобна кольцу (черт. 73 и 77, стр. 75).

Разберемъ рядъ случаевъ:



Черт. 98.



Черт. 99.

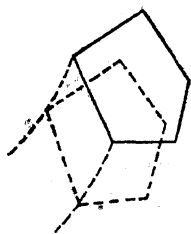
1. Пусть кольцо $ABCDE$ (черт. 98) падаетъ внизъ. Картина его $A_1 B_1 - E_1$ подобна $AB - E$.

¹⁾ Примѣръ такого распредѣленія усилій можетъ быть въ элементахъ горизонтальной фермы шлюзныхъ воротъ при открываніи или закрываніи послѣднихъ.

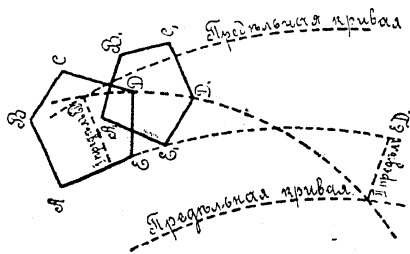
2. Пусть кольцо движется параллельно само по себѣ черт. 99.

Пусть равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ равна R и не параллельна направленію линій скольженія. Не трудно замѣтить, что въ этомъ случаѣ для опредѣленности движенія достаточно знать движеніе $(n-1)$ точекъ кольца, т. к. движеніе n -ой точки будетъ опредѣлено движеніемъ остальныхъ. Напр. достаточно знать движеніе точекъ $ABCE$, движеніе же точки D будетъ тогда извѣстно. Разложеніе силъ начинаемъ съ точки D . Если окончить разложеніе въ т. A , то мы получимъ силу, двигающую кольцо (паралл. линіямъ скольженія).

При прямолинейномъ равномерномъ движеніи плоскаго n -угольнаго кольца для сохраненія неизмѣняемости его формы достаточно задаться направлениемъ движенія $n-1$ его опоръ. N -я же опора можетъ оставаться свободной. Усилія въ элементахъ и опор. реакціи сохраняютъ во все время постоянныя величины. При криволинейномъ равном. движеніи плоскаго n -уг. кольца достаточно задаться направлениемъ движенія двухъ его опоръ. Движенія остальныхъ опоръ тогда опредѣляются сами. При этомъ движеніе будетъ или временнымъ, если заданныя двѣ линіи не параллельны другъ другу, или неопредѣленно продолжительнымъ, если обѣ линіи параллельны другъ другу (черт. 100), или заключаются между предѣльными кривыми (черт. 101).



Черт. 100.

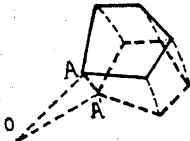


Черт. 101.

Построеніе траекторіи движенія опоръ сводится къ по-

строению картинъ движенія точекъ механизма по способу, напр., шаблона

Зная ур-я данныхъ кривыхъ, всегда возможно опредѣлить ур-я другихъ линий скольженія. Въ частномъ случаѣ, если двѣ опоры *E* и *D* двигаются по концентрическимъ кругамъ, то и остальные опоры будутъ двигаться по концентр. кругамъ. Линіи вліянія аналогичны съ линіями вліянія при вращеніи кольца около неподвижнаго центра (черт. 102).



Черт. 102.

Подвижныя кольца измѣняющія свою форму.

Если кольцо можетъ измѣнять свою форму, то оно должно удовлетворять условію

$$2k \geq r + n + 1 \text{ (стр. 74, глава 11).}$$

Если одинъ изъ элементовъ кольца неподвиженъ, то условіе $2k = r + n + 1$ выражаетъ, что кольцо обращается въ механизмъ, расчетъ которыхъ не входитъ въ нашу задачу. На черт. 103 изображенъ механизмъ, для котораго:

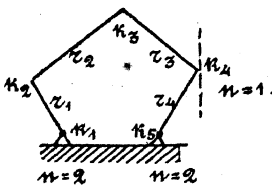
$$k = 5$$

$$n = 5$$

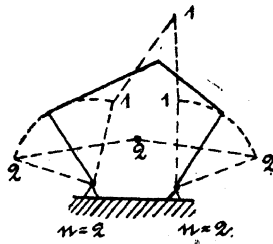
$$r = 4,$$

и упомянутое условіе выразится такъ:

$$2 \cdot 5 = 5 + 4 + 1.$$



Черт. 103.



Черт. 104.

Если же при этомъ $2k > r + n + 1$, то каждый узелъ кольца при дѣйствіи внѣшнихъ силъ будетъ описывать не-

опредѣленныя траекторіи. На черт. 104 изображено такое кольцо. Последнее можетъ принять рядъ формъ, образованіе которыхъ совершенно случайно. Подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ это кольцо приметъ въ концѣ концовъ устойчивое положеніе.

Наконецъ, кольца безъ неподвижнаго элемента подѣйствіемъ внѣшнихъ силъ сначала измѣнятъ свою форму, а потомъ будутъ двигаться въ направленіи равнодѣйствующей всѣхъ внѣшнихъ силъ.

1 марта 1908 г.

Н. Рынинъ.