Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 27

Aufgaben

AUFGABE 27.1. Es sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$ ein nilpotentes Element. Zeige, dass $1 + f$ eine Einheit ist.

AUFGABE 27.2. a) Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Einheitengruppe von K nicht zyklisch unendlich ist.

b) Es sei R ein kommutativer Ring, dessen Charakteristik nicht zwei ist. Zeige, dass die Einheitengruppe von R nicht zyklisch unendlich ist.

c) Beschreibe einen kommutativen Ring, dessen Einheitengruppe zyklisch unendlich ist.

AUFGABE 27.3. Bestimme die zweiten Einheitswurzeln in $\mathbb{Z}/(105)$.

Zu einer kommutativen Gruppe G nennt man

$$\{g \in G \mid g \text{ hat endliche Ordnung}\}$$

die *Torsionsuntergruppe* von G.

Eine kommutative Gruppe G heißt *torsionsfrei*, wenn für jedes Element $x \in G$, $x \neq 0$, und $n \in \mathbb{N}_+$ gilt $nx \neq 0$.

AUFGABE 27.4. Zeige, dass die Torsionsuntergruppe einer kommutativen Gruppe G in der Tat eine Untergruppe ist.

AUFGABE 27.5. Es sei $T \subseteq G$ die Torsionsuntergruppe einer kommutativen Gruppe G. Zeige, dass die Restklassengruppe G/T torsionsfrei ist.

AUFGABE 27.6. Es sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass die Einheitswurzeln in R die Torsionsuntergruppe der Einheitengruppe ist.

Aufgabe 27.7.*

Zeige, dass es in der Restklassengruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ Elemente gibt, deren Ordnung gleich n ist.

Aufgabe 27.8. Zeige, dass die Restklassengruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ unendlich ist und jedes Element eine endliche Ordnung besitzt.

Aufgabe 27.9. Zeige, dass die Menge

$$S^1_{\mathbb{Q}} = \{z \in \mathbb{Q}[\mathrm{i}] \mid |z| = 1\}$$

mit der Multiplikation in $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ eine kommutative Gruppe ist.

Aufgabe 27.10. Es sei

$$S^1_{\mathbb{Q}} = \{z \in \mathbb{Q}[\mathrm{i}] \mid |z| = 1\}$$

der rationale Einheitskreis mit der aus $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]^\times$ ererbten Gruppenstruktur. Berechne die ersten vier Potenzen von $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \in S^1_{\mathbb{Q}}$.

Aufgabe 27.11. Es sei

$$S^1_{\mathbb{Q}} = \{z \in \mathbb{Q}[\mathrm{i}] \mid |z| = 1\}$$

der rationale Einheitskreis mit der aus $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]^\times$ ererbten Gruppenstruktur. Zeige, dass die Gruppen $S^1_{\mathbb{Q}}$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nicht isomorph sind.

Aufgabe 27.12.*

Bestimme für den siebten Kreisteilungsring

$$R_7 = \mathbb{Z}[X]/\big(X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1\big)$$

das Minimalpolynom für $Y = X + X^{-1} = X + X^6$. Ist Y eine Einheit?

Aufgabe 27.13. Bestimme für den neunten Kreisteilungsring

$$R_9 = \mathbb{Z}[X]/(\Phi_9)$$

das Minimalpolynom für $Y = X + X^{-1}$. Ist Y eine Einheit?

Aufgabe 27.14.*

Bestimme für den elften Kreisteilungsring $R_{11} = \mathbb{Z}[X]/(\Phi_{11})$ das Minimalpolynom für $Y = X + X^{-1} = X + X^{10}$. Ist Y eine Einheit?

Aufgabe 27.15. Bestimme für die Kreisteilungsringe $R_n = \mathbb{Z}[X]/(\Phi_n)$ mit $n = 1, 2, \ldots, 12$, ob das Element $X + X^{-1}$ eine Einheit ist oder nicht.

Aufgabe 27.16. Bestimme die Einheiten im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

Aufgabe 27.17. Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $\mu_n(L)$ (zu $n \in \mathbb{N}_+$) die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln in L. Zeige, dass es zu jedem n einen natürlichen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Gal}\,(L|K) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\mu_n(L))$$

gibt.

Aufgabe 27.18. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine endliche Galoiserweiterung und sei H der Kern des Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Gal}\,(K|\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mu(K)),\ \sigma \longmapsto (\zeta \mapsto \sigma(\zeta)),$$

aus Lemma 27.8. Zeige $K^H = K_n$, wobei n die Anzahl der Einheitswurzeln in K bezeichnet.

Aufgabe 27.19. Man gebe ein Beispiel für eine endliche Galoiserweiterung $\mathbb{Q} \subseteq K$ derart, dass der Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Gal}\,(K|\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mu(K)),\ \sigma \longmapsto (\zeta \mapsto \sigma(\zeta)),$$

aus Lemma 27.8 nicht injektiv ist.

Aufgabe 27.20. Betrachte die endlichen Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\mathrm{i}] \subseteq \mathbb{Q}[\mathrm{i}, \sqrt[3]{1+\mathrm{i}}] = K.$$

Zeige, dass der Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Gal}\,(K|\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mu(K)),\ \sigma \longmapsto (\zeta \mapsto \sigma(\zeta)),$$

aus Lemma 27.8 nicht surjektiv ist.

Aufgabe 27.21. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine endliche Körpererweiterung und R der zugehörige Zahlbereich. Zeige, dass es einen natürlichen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Gal}\,(K|\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(R^\times)$$

gibt.

Aufgabe 27.22. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine endliche Körpererweiterung und R der zugehörige Zahlbereich. Zeige, dass es Gruppenhomomorphismen

$$\operatorname{Gal}(K|\mathbb{Q}) \longrightarrow \operatorname{Aut}(R^\times) \longrightarrow \operatorname{Aut}(\mu(K))$$

derart gibt, dass die Gesamtabbildung der Homomorphismus aus Lemma 27.8 ist.

Aufgabe 27.23. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine endliche Galoiserweiterung mit zugehörigem Zahlbereich R. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Die Einheiten bilden ein Algebraerzeugendensystem von R über $\mathbb{Z}$.
(2) Für jeden Zahlbereich $S \subset R$ ist die Einheitengruppe $S^\times$ eine echte Teilmenge von $R^\times$.
(3) Die Wirkung der Galoisgruppe auf $R^\times$ ist treu.

Aufgabe 27.24.*

Man gebe ein Beispiel von zwei Zahlbereichen R und S, die als Ringe nicht isomorph sind, aber die Eigenschaft haben, dass sowohl die additiven Strukturen $(R, +, 0)$ und $(S, +, 0)$ als Gruppen isomorph als auch die multiplikativen Strukturen $(R, \cdot, 1)$ und $(S, \cdot, 1)$ als Monoide isomorph sind.

Abbildungsverzeichnis