Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2017**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 41

Die Pausenaufgabe

AUFGABE 41.1. Es seien G und H Gruppen und $\varphi\colon G \to H$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass $\varphi(e_G) = e_H$ und $(\varphi(g))^{-1} = \varphi(g^{-1})$ für jedes $g \in G$ ist.

Übungsaufgaben

AUFGABE 41.2.*

Bestimme, ob die durch die Gaußklammer gegebene Abbildung

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z},\, q \longmapsto \lfloor q \rfloor,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist oder nicht.

AUFGABE 41.3. Es sei K ein Körper und sei

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in K,\, ad - bc \neq 0 \right\}$$

die Menge aller invertierbaren 2×2-Matrizen.

a) Zeige (ohne Bezug zur Determinante), dass M mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

b) Zeige (ohne Bezug zur Determinante), dass die Abbildung

$$M \longrightarrow K^{\times},\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ad - bc,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

AUFGABE 41.4. Sei G eine (multiplikativ geschriebene) kommutative Gruppe und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Potenzieren

$$G \longrightarrow G,\, x \longmapsto x^n,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

AUFGABE 41.5.*

Sei G eine Gruppe. Zeige, dass sich Gruppenelemente $g \in G$ und Gruppenhomomorphismen φ von $\mathbb{Z}$ nach G über die Korrespondenz

$$g \longmapsto (n \mapsto g^n) \text{ und } \varphi \longmapsto \varphi(1)$$

entsprechen.

Aufgabe 41.6. Bestimme die Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Q}, +, 0)$ nach $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Aufgabe 41.7. Es sei K ein Körper. Zeige, dass es außer der trivialen Abbildung keinen weiteren Gruppenhomomorphismus von $(K, +, 0)$ nach $(\mathbb{Z}, +, 0)$ gibt.

Aufgabe 41.8. Es bezeichne $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ die (multiplikative) Einheitengruppe von $\mathbb{Q}$. Man gebe einen nichttrivialen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Q}^\times$ nach $(\mathbb{Z}, +, 0)$ an.

Aufgabe 41.9. Sei $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Wir betrachten die Restklassengruppe

$$\mathbb{Z}/(d) = \{0, 1, \ldots, d-1\}.$$

Zeige, dass die Abbildung

$$\psi \colon \mathbb{Z}/(d) \longrightarrow \mathbb{Z},\, r \longmapsto r,$$

kein Gruppenhomomorphismus ist.

Wie in der Vorlesung erwähnt, sind lineare Abbildungen insbesondere Gruppenhomomorphismen. Den Kern kann man wie folgt auch für einen Gruppenhomomorphismus definieren.

Seien G und H Gruppen und sei $\varphi \colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann nennt man das Urbild des neutralen Elementes den *Kern* von φ, geschrieben

$$\operatorname{kern} \varphi = \varphi^{-1}(e_H) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}.$$

Es gilt auch wieder das Kernkriterium, also die Aussage, dass ein Gruppenhomomorphismus genau dann injektiv ist, wenn der Kern trivial ist, d.h. nur aus 0 besteht.

Aufgabe 41.10.*

Beweise das Kernkriterium für die Injektivität eines Gruppenhomomorphismus $\varphi \colon G \to H$.

Aufgabe 41.11. Seien G und H Gruppen und sei $\varphi \colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Bild von φ eine Untergruppe von H ist.

Aufgabe 41.12.*

Es sei G eine kommutative Gruppe und $\varphi \colon G \to H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass H ebenfalls kommutativ ist.

Aufgabe 41.13. Es sei d ein Teiler von n. Zeige, dass es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus $\psi \colon \mathbb{Z}/(n) \to \mathbb{Z}/(d)$ derart gibt, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(n) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbb{Z}/(d) \end{array}$$

kommutiert. Warum lassen sich die Reste modulo 2 und modulo 5 besonders einfach berechnen?

AUFGABE 41.14. Es seien G und F kommutative Gruppen und sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe mit der zugehörigen Äquivalenzrelation $\sim$ auf G. Es sei $\varphi\colon G \to F$ ein Gruppenhomomorphismus mit $H \subseteq \operatorname{kern} \varphi$. Zeige, dass es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi}\colon G/\sim \to F$ mit $\tilde{\varphi} \circ p = \varphi$ gibt.

AUFGABE 41.15. Zeige direkt und unter Verwendung von Satz 20.4, dass jede Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ein Ideal ist.

AUFGABE 41.16. Zeige, dass $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ eine Untergruppe, aber kein Ideal ist.

AUFGABE 41.17.*

Zeige, dass ein kommutativer Ring genau dann ein Körper ist, wenn er genau zwei Ideale enthält.

AUFGABE 41.18.*

Zeige, dass der Kern eines Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to S$ ein Ideal in R ist.

AUFGABE 41.19. Erstelle für $n = 2, 3, \ldots, 10$ Operationstafeln für die Addition und die Multiplikation für die Restklassenringe $\mathbb{Z}/(n)$. Was haben diese Tabellen mit dem Rechnen im n-System zu tun?

AUFGABE 41.20.*

(1) Gibt es eine Primzahl x derart, dass auch $x + 10$ und $x + 20$ Primzahlen sind?
(2) Gibt es mehr als eine Primzahl x derart, dass auch $x+10$ und $x+20$ Primzahlen sind?

AUFGABE 41.21. Bestimme den Rest von $36!$ modulo 31.

AUFGABE 41.22. Bestimme den Rest von $12!$ modulo 143.

AUFGABE 41.23. Sei p eine Primzahl. Beweise durch Induktion den kleinen Fermat, also die Aussage, dass $a^p - a$ ein Vielfaches von p für jede ganze Zahl a ist.

AUFGABE 41.24.*

Bestimme das inverse Element zu $\overline{44}$ in $\mathbb{Z}/(97)$.

AUFGABE 41.25. Bestimme das inverse Element zu $\overline{57}$ in $\mathbb{Z}/(139)$.

AUFGABE 41.26.*

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}/(n)$ der zugehörige Restklassenring. Zeige, dass $a \in \mathbb{Z}$ eine Einheit modulo n genau dann ist, wenn a und n teilerfremd sind.

Aufgabe 41.27. Löse die lineare Gleichung

$$3x = 5$$

für die folgenden Körper K

a) $K = \mathbb{Q}$,

b) $K = \mathbb{R}$,

c) $K = \{0, 1\}$, der Körper mit zwei Elementen aus Beispiel 11.4,

d) $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, der Körper mit sieben Elementen aus Beispiel 41.11.

Aufgabe 41.28. Löse das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aus Beispiel 41.11.

$$5x = 4.$$

Aufgabe 41.29. Löse das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aus Beispiel 41.11.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 41.30. (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass der Betrag

$$K^\times \longrightarrow (K_+, \cdot, 1),\ x \longmapsto |x|,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Was ist der Kern?

Aufgabe 41.31. (3 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass diese Matrix einen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Q}^2$ nach $\mathbb{Q}^2$ und ebenso von $\mathbb{Z}^2$ nach $\mathbb{Z}^2$ definiert. Untersuche diese beiden Gruppenhomomorphismen in Hinblick auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 41.32. (3 Punkte)

Erstelle Operationstafeln für die Addition und die Multiplikation für den Restklassenring $\mathbb{Z}/(13)$.

Aufgabe 41.33. (3 Punkte)

Berechne über $\mathbb{Z}/(5)$ das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 41.34. (3 Punkte)

Löse das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aus Beispiel 41.11.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$