Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 8

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 8.1. Bestimme die Dimension des Raumes der 2×2-Matrizen.

Übungsaufgaben

Aufgabe 8.2. Bestimme die Dimension des Lösungsraumes des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 4x - 3y + 7z + 5u - v &= 0 \\ y + 6z - 10u + 3v &= 0 \end{aligned}$$

in den Variablen x, y, z, u, v.

Aufgabe 8.3. Bestimme die Dimension des Raumes aller $m \times n$-Matrizen.

Aufgabe 8.4.*

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge der Diagonalmatrizen ein Untervektorraum im Raum aller $n \times n$-Matrizen über K ist und bestimme seine Dimension.

Eine $n \times n$-Matrix

$$M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

heißt *symmetrisch*, wenn $a_{ij} = a_{ji}$ für alle i, j ist.

Aufgabe 8.5. Zeige, dass die Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen einen Untervektorraum im Raum aller $n \times n$-Matrizen bildet und bestimme dessen Dimension.

Aufgabe 8.6. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge der oberen Dreiecksmatrizen ein Untervektorraum im Raum aller $n \times n$-Matrizen über K ist und bestimme seine Dimension.

Aufgabe 8.7. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension $n = \dim(V)$. Es seien n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in V gegeben. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) $v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis von V.
(2) $v_1, \ldots, v_n$ bilden ein Erzeugendensystem von V.
(3) $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

AUFGABE 8.8. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $\dim(U) = \dim(V)$. Zeige, dass dann $U = V$ ist.

AUFGABE 8.9.*

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Wir betrachten die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

Man gebe Beispiele für a, b, c derart, dass der von diesen Vektoren erzeugte Untervektorraum die Dimension $0, 1, 2, 3$ besitzt.

AUFGABE 8.10.*

Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Welche Dimension besitzt der Produktraum $V \times W$?

AUFGABE 8.11.*

Es sei W ein n-dimensionaler K-Vektorraum (K ein Körper) und seien $U, V \subseteq W$ Untervektorräume der Dimension $\dim(U) = r$ und $\dim(V) = s$. Es gelte $r + s > n$. Zeige, dass $U \cap V \neq 0$ ist.

AUFGABE 8.12. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $d \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge aller Polynome vom Grad $\leq d$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum von $K[X]$ ist. Was ist seine Dimension?

AUFGABE 8.13. Zeige, dass die Menge aller reellen Polynome vom Grad ≤ 4, für die -2 und 3 Nullstellen sind, ein endlichdimensionaler Untervektorraum in $\mathbb{R}[X]$ ist. Bestimme die Dimension von diesem Vektorraum.

AUFGABE 8.14. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über den komplexen Zahlen, und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Zeige, dass die Vektorenfamilie

$$v_1, \ldots, v_n \text{ und } iv_1, \ldots, iv_n$$

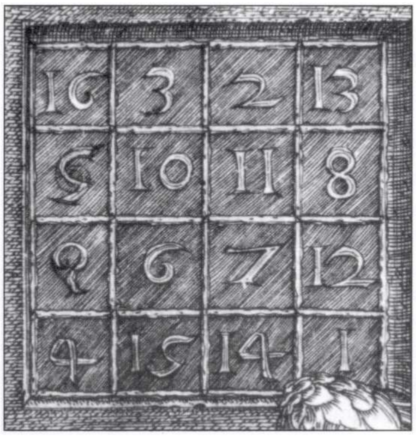
eine Basis von V, aufgefasst als reeller Vektorraum, ist.

Aufgabe 8.15. Es sei die Standardbasis e_1, e_2, e_3, e_4 im $\mathbb{R}^4$ gegeben und die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass diese Vektoren linear unabhängig sind und ergänze sie mit einem geeigneten Standardvektor gemäß Satz 8.2 zu einer Basis. Kann man jeden Standardvektor nehmen?

Aufgabe 8.16. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass V nicht zugleich eine endliche Basis und eine unendliche Basis besitzen kann.



Das magische Quadrat aus Dürers Stich Melencolia I.

Eine $n \times n$-Matrix $(a_{ij})_{ij}$ über einem Körper K heißt *magisches Quadrat* (oder *linear-magisches Quadrat* über K), wenn jede Spaltensumme und jede Zeilensumme in der Matrix gleich einer bestimmen Zahl $c \in K$ ist.

In diesem Sinne ist

$$\begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c \end{pmatrix}$$

für jedes $c \in K$ ein magisches Quadrat.

Aufgabe 8.17. Zeige, dass die Menge aller linear-magischen Quadrate der Länge n über K einen Untervektorraum im Raum aller $n \times n$-Matrizen bildet.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.18. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Familie von Vektoren in V und sei

$$U = \langle v_i,\, i = 1, \ldots, m \rangle$$

der davon aufgespannte Untervektorraum. Zeige, dass die Familie genau dann linear unabhängig ist, wenn die Dimension von U gleich m ist.

Aufgabe 8.19. (4 (3+1) Punkte)

a) Bestimme die Dimension des Lösungsraumes des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x + 5y + 7z + 4u - 3v + 2w &= 0 \\ 4x + 9y + 6z + 5u - v + w &= 0 \\ 7x + 8y - 3z + u + 3v + 3w &= 0 \\ -x + 6y + 16z + 8u - 7v &= 0 \end{aligned}$$

in den Variablen x, y, z, u, v, w.

b) Was ist die Dimension des Lösungsraumes, wenn man dieses System in den Variablen x, y, z, u, v, w, r, s auffasst?

Aufgabe 8.20. (4 Punkte)

Zeige, dass die Menge aller reellen Polynome vom Grad ≤ 6, für die -1, 0 und 1 Nullstellen sind, ein endlichdimensionaler Untervektorraum in $\mathbb{R}[X]$ ist. Bestimme die Dimension von diesem Vektorraum.

Aufgabe 8.21. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Bestimme die Dimension des Raumes aller linear-magischen Quadrate der Länge n über K.