りて其分母が空數となるときは x、y 及び z の値は $\frac{0}{0}$ なる形となります、この場合には何ぉりの設けたる方程式の吟味を致さなければなりません

$$a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)=0$$

ソコデ x、y 及び z の諸段數が右の如き關係を有するものとすれば、其の方程式は獨立せずして、其の中ち二ッの方程式をとりて一ッの方程式となして、これを變化すれば殘りたる一ッの方程式を求むることが出來ませう、ナゼと申すに設けたる方程式の第一に $b''c'-b'c''$ を乘じ、第二に $bc''-b''c$ を乘じ、第三に $b'c-bc'$ を乘じ、シテ其の結果を相合し、これを右の關係式に因て變化すれば $0=0$ なる兩同式を得るでありませう實に此の如くでありますれば、若し第一の方程式に $b''c'-b'c''$ を乘じ第二の方程式に $bc''-b''c$ を乘じて相合すれば其結果は第三の方程式に $bc'-b'c$ を乘じたるものに等しくなります、此の如くでありますから右の關係式ありと假定すれば設けたる三ッの方程式のうちドレでも二ッの方程式をとりて解すれば、其れにしてよろしく御坐いま

す、ナゼと申すに其の二ッの方程式に合ふ x、y 及び z の値は又必ず殘りたる一ッの方程式に合ふものであります、ソコデ設けたる方程式の始めの第一第二の二ッの方程式をとりて、これを x にて除すれば左の如くであります

$$\frac{by}{x}+\frac{cz}{x}+a=0,\qquad \frac{b'y}{x}+\frac{c'z}{x}+a'=0$$

$$\therefore\ \frac{y}{x}=\frac{ca'-c'a}{bc'-b'c},\qquad \frac{z}{x}=\frac{ab'-a'b}{bc'-b'c}$$

右の如くでありますから x に隨意の値を命ずるときは、これに相應する y 及び z の値を求むることが出來ます、ソコデ其結果を等勢になさんがため p を隨意なる數として x、y 及び z の値を求むる式を左の如き形に命ずれば、この値は設けたる方程式に合ふものであります

$$x=p(bc'-b'c),\quad y=p(ca'-c'a),\quad z=p(ab'-a'b).$$

また設けたる方程式の第二第三の方程式をとりて解すれば左の如き等勢の結果を得るでありませう

$$x=q(b'c''-b''c'),\quad y=q(c'a''-c''a'),\quad z=q(a'b''-a''b').$$

此式に用ひたるqは隨意の數であります、ソコデこのx、y及びzの値は皆な前のx、y及びzの値に相等しきものであります、ナゼと申すに假定したるx、y及びzの諸段數の關係式を變化すれば$\frac{bc'-b'c}{b'c''-b''c'}=\frac{ca'-c'a}{c'a''-c''a'}=\frac{ab'-a'b}{a'b''-a''b'}$の如くなりませう、ソコデこの關係式は、また左の如き關係式となすことが出來なからであります

$$\frac{p(bc'-b'c)}{q(b'c''-b''c')}=\frac{p(ca'-c'a)}{q(c'a''-c''a')}=\frac{p(ab'-a'b)}{q(a'b''-a''b')}$$

第二百一條　コンドハd、d'及びd''が皆な空數であらぬとき生ずる處の質性の吟味を致して御覽に入れませう

ソコデ先づ未知元の中ちドレでも若し其値が$\frac{N}{0}$なる形をなすときは設けたる方程式は互に矛盾して兩立し難きことを顯すものであります、たとへばxの値がりの形$\frac{N}{0}$を顯すものと致します即ち左の關係式を空數と假定致します

$$a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)$$

xの値が右の如き形をなすときは設けたる方程式は無論成立ち難きものであります、若し設けたる方程式が成立つものとすれば、この方程式より求むる處の方程式は孰レも正しきものでなければなりません、ソコデ設けたる方程式の第一に$b'c''-b''c'$を乘じ第二に$b''c-bc''$を乘じ第三に$bc'-b'c$を乘じて相合すれば所得の方程式に於てy及びzの段數は消去しシテxの段數は右に假定したる關係に因て空數となすことが出來ます、故に所得の方程式の前節は空數となります、されど後節は空數とはなりません、此の如く程式でありますから所得の方程式は不合理のものであります、故にこの方程式を得たる原の方程式即ち設けたる方程式は成立つことの出來ぬものであります

第二百二條　また若し未知元の値の中ち其一ツが$\frac{0}{0}$なる形をなすときは設けたる方程式は成立つか、成立ぬか分りません、併し成立つとすれば獨立することの出來ぬものとなります、ナゼと申すに未知元の値の一ツが$\frac{0}{0}$な

る形を生ずる場合え他の未知元の値が$\frac{N}{0}$なる形をなすときであります、シテ前の係にてお話し致しました通り未知元の値が$\frac{N}{0}$なる形を生ずるときは設けたる方程式が互に矛盾するといふことを表すものであります、たとへばりの方程式を左の如く假定致します

$$ax+by+cz=d,\quad a'x+b'y+c'z=d',\quad a''x+b''y+c''z=d''$$

設けたる方程式が右の如き形なればy及びzの値は$\frac{N}{0}$なる形をなし、シテxの値は$\frac{0}{0}$なる形をなすでありませう、されどこの方程式は$\frac{d-d'}{a-a'}$と$\frac{d-d''}{a-a''}$とが相等しからざれば互に矛盾して兩立し難きものであります、若し$\frac{d'-d''}{a-a'}$と$\frac{d-d''}{a-a''}$とが相等しきものとすれば、左の如き關係式が出來ます

$$(a'd''-a''d')+(a''d-ad'')+(ad'-a'd)=0$$

右の如き關係がありますれば設けたる三ッの方程式は獨立せぬものであります、ナゼと申すに第一に$a'd''-a''d'$を乘じ、第二に$a''d-ad''$を乘じ、第三に

$ad'-a'd$を乘じ、シテりの結果を相合しこれを右の關係式に因て變化すれば、若し$0=0$なる兩同式を得るでありませう、實に此の如くでありますれば、若し第一の方程式に$a'd''-a''d'$を乘じ、第二の方程式に$a''d-ad''$を乘じて相合すれば其結果は第三の方程式に$ad'-a'd$を乘じたるものに等しくなりますからであります

ソコデまた若し未知元の値が皆な$\frac{0}{0}$なる形をなすときも設けたる方程式は成立つか成立ぬか分りません併し成立つとすれば獨立することの出來ぬものとなります、たへとばりの方程式を左の如く假定してお話し致します

$$ax+by+cz=d,\quad ax+by+cz=d',\quad ax+by+cz=d''$$

設けたる方程式が右の如くなれば未知元の値は皆な$\frac{0}{0}$なる形をなすといふことが分ります、されどこの方程式はd、d'及びd''が皆な相等しきものでなければ互ニ矛盾して兩立し難きものでありませう、若しd、d'及びd''が

相等しければ獨立せぬ方程式であります

第二百三條　若しx、y及びzの値の分子が皆な消失して空數となるときは其分母も亦皆な消失して空數となりません、但d、d'及びd''は皆な空數であらざると假定致します、ナゼと申すにこの分子が皆な消失して空數なるときは左の如き關係を有するからであります

$$d(b'c''-b''c')+d'(b''c-bc'')+d''(bc'-b'c)=0$$

$$d(c'a''-c''a')+d'(c''a-ca'')+d''(ca'-c'a)=0$$

$$d(a'b''-a''b')+d'(a''b-ab'')+d''(ab'-a'b)=0$$

右の如き形を左の如き形に略記致します

$$Ad+Bd'+Cd''=0,\quad A'd+B'd'+C'd''=0,\quad A''d+B''d'+C''d''=0$$

右の三式にてd、d'及びd''が皆な空數でなければ第二百條にてお話し致しました通り左の如き關係式が出來ます

$$A(B'C''-B''C')+A'(B''C-BC'')+A''(BC'-B'C)=0$$

ソコデ　$B'C''-B''C'=a\{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)\}$にして$B''C-BC''$及び$BC'-B'C$も同じ様に弁することが出來ますから左の關係式は右の如き形に變化することが出來ます

$$\{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)\}^2=0$$

これにてこの條の証據ハ充分でありませう

第二百四條　若し第百九十五條にてお話し致しました如く未定乘子法を用ふるときは、其未定乘子即ちm及びnを發見すべき處の二ツの方程式が互に矛盾することが御坐いませ、今うの場合を吟味すれば左の如くであります、ソコデ先づ$b''c'-b'c''=0$と假定す此の如くなすときハ其方程式は互に矛盾致します（これハ已に第百九十二條にてお話し致しました）この場合にてはxの値は設けたる第二及び第三より求むることが出來ますから第一は不用でありませ、ナゼと申すに設けたる方程式の第二にc''を乘じ第三にc'を乘じて相減ずるときはy及びzの段數は消失して空數となりますからx

の値を決定すべき一ッの方程式が出來ます、たとへば左の如くであります

$4x+2y+3z=19,\quad x+y+4z=9,\quad x+2y+8z=15.$

設けたる方程式を右の如くすれば x の値は第二及び第三の方程式より求むることが出來ます、即ち $x=3$ となります、この x の値を第一、第二の方程式の x に代用すれば $2y+3z=7,\ y+4z=6$ となります、故に $y=2$, 及び $z=1$ となります

また m 及び n の値が $\frac{0}{0}$ なる形をなすとすれば其値を求むる二ッの方程式は獨立せぬものであります、今この塲合を吟味致しますソコデ $b''c'-b'c''=0,\ bc''-b''c=0$, 及び $b'c-bc'=0$ と假定す、此の如くなすときは $\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$ 及び $\frac{b''}{b}=\frac{c''}{c}$ なる二ッの關係式が出來ます、シテ $b'=pb$ と假定すれば $c'=pc$ となり、また $b''=qb$ と假定すれば $c''=qc$ となります

右の如くでありますから設けたる方程式は、左の如き形に變化することが出來ます

$ax+by+cz=d,\quad a'x+pby+pcz=d',\quad a''x+qby+qcz=d''$

またこれを變化すれば左の如くなります

$ax+by+cz=d,\quad \frac{a'}{p}x+by+cz=d',\quad \frac{a''}{q}x+by+cz=d''.$

右の如くでありますからこの三ッの方程式の中ちドレでも二ッの方程式を用ふれば x の値は求むることが出來ます、ソコデ二ッの方程式の組合せかたによりて x の値が相同じからざれば、この方程式は互に矛盾するものでありませう、シテ若し x の値が皆な相同じければ設けたる方程式は獨立せぬものであります、この塲合にては $by+cz$ の値を求むべき一ッの方程式を得るのみであります、故に y 及び z の値は不定であります、たとへば左の如くであります

$x+2y+3z=10,\quad 3x+4y+6z=23,\quad x+6y+9z=24,$

設けたる方程式が右の如くなれば、この中ちドレても二ッの方程式を用ふれば $x=3$ となります、この x の値を三ッの方程式の x に代用すれば三ッが三ッのも $2y+3z=7$ となります、故に y 及び z の値は不定であります、されど若し設け

たる方程式の一ッの後節の數を變換すればこの三ッの方程式は互に矛盾するでありませう

第二百五條　前の諸條に於て種々樣々の方程式を設けて其解式を作り其結果より生ずる變形に因て其設けたる方程式の性質をお話し致しました、されどコンドハ解式を用ひずして、ソの方程式が互に有する關係式を考究する一ッの例をお話し致しませう、即ち前の如く三ッの方程式を左の如く假定致します

$$ax+by+cz=d,\quad a'x+b'y+c'z=d',\quad a''x+b''y+c''z=d''$$

右の方程式の中ち其一ッの方程式は他の方程式に適當なる數を乘じて相合せれば求むることが出來るものと假定して、其已知數が互に關係する其式を求めて御覽に入れませう、則ち第一の方程式にλを乘じ、第二の方程式にμを乘じて相合すれば、其結果が第三の方程式に符合するものとすれば左の如くであります

$$(\lambda a+\mu a')x+(\lambda b+\mu b')y+(\lambda c+\mu c')z=\lambda d+\mu d'$$

これは第一の方程式にλを乘じ第二の方程式にμを乘じて相合したるものでありますから、ソの結果は

$$a''x+b''y+c''z=d''$$

と同じことでなければなりません、若し同じこととなれば

$$\frac{\lambda a+\mu a'}{\lambda d+\mu d'}=\frac{a''}{d''},\quad \frac{\lambda b+\mu b'}{\lambda d+\mu d'}=\frac{b''}{d''},\quad \frac{\lambda c+\mu c'}{\lambda d+\mu d'}=\frac{c''}{d''}.$$

となります、故に

$$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{a''d'-a'd''}{ad''-a''d},\quad \frac{\lambda}{\mu}=\frac{b''d'-b'd''}{bd''-b''d},\quad \frac{\lambda}{\mu}=\frac{c''d'-c'd''}{cd''-c''d}.$$

となります、此の如くでありますから若し第三の方程式が他の方程式より求むることが出來ますれば其已知數は互に左の如き關係なすものであります

$$\frac{a''d'-a'd''}{ad''-a''d}=\frac{b''d'-b'd''}{bd''-b''d}=\frac{c''d'-c'd''}{cd''-c''d}$$

若し右の如き關係を有するものとすればx、y及びzの値は$\frac{0}{0}$なる形になるといふことが分りませう、ナぜと申すに右の關係式の分母を拂ふときはx、y及びzの値の分子が消失する場合の關係式が出來ます、若し分子が消失すれば第二百二條にてお話し致しました通り分母も亦消失致します

故であります

雜問三

第一 $\dfrac{x^4+3x^3-7x^2-21x-36}{x^4+2x^3-10x^2-11x-12}$. 上式ヲ最簡式ニ化スベシ

第二 $(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+abc)-(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)=a^4+b^4+c^4$. 上ノ關係式ノ證ヲ問フ

第三 若シ $t=\dfrac{2}{2-u}$, $u=\dfrac{2}{2-z}$, $z=\dfrac{2}{2-y}$, $y=\dfrac{2}{2-x}$. トセバ t 及ビ x ノ關係式ヲ問フ

第四 若シ $2s=a+b+c$. トセバ左ノ關係アリ其證ヲ問フ

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}=\frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

第五 二數ノ最大公約數は其諸公約數ノ最小公倍數ナリト云フ其證ヲ問フ

第六 $(x-9)(x-7)(x-5)(x-1)=(x-2)(x-4)(x-6)(x-10)$. 上ノ方程式ヲ解スベシ

第七　$x+y+z=0,\quad ax+by+cz=0,\quad bcx+cay+abz+(a-b)(b-c)(c-a)=0.$　上ノ方程式ヲ解スベシ

第八　若シ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$　トセバ左ノ關係アリ其證ヲ問フ

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{2n+1}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}$$

第九　$\dfrac{1}{x+6a}+\dfrac{2}{x-3a}+\dfrac{3}{x+2a}=\dfrac{6}{x+a}$　上ノ方程式ヲ解スベシ

第十　$x^4-ax^3+(b-1)x^2+ax-b,\quad x^4-bx^3+(a-1)x^2+bx-a$　上ノ兩式ノ最大公約數ヲ求ムベシ

第三十三回

乘方幷開方

第二百六條　今回は乘方と開方とのお話しを致しませう、ソコデ乘方とは一ッの數の羃數に相當するものを求むる方法であります、シテ開方とはうの乘方の還原で一ッの數を或數の羃數に相當するものとなして、其根數を求むる方法であります、故に先づ乘方のお話しを致して後ちに、開方のお話しに移りませう

第二百七條　羃數のことは第十三、第十四、第十五條にてお話し致しました通り、羃數とは一ッの積が二ッ若しくは二ッ以上の乘子より成立たるものにしてうの乘子の數に從て幾乘羃と申すのであります、即ち a の二乘は a^2、a の三乘は a^3、a の四乘は a^4 等であります、シテ $a+b$ の二乘は $(a+b)^2$、$a+b$ の三乘は $(a+b)^3$, $a+b$ の四乘は $(a+b)^4$ 等であります、ソコデ a の如き式の羃數は別にうの式に相當するものもありませんが、$a+b$ の如き式の羃數は第六十二條

及び第六十七條にてお話し致しました通り、うの式に相當するものがあります、即ち $(a+b)^2$ の式に相當するものは $a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3$ に相當するものは $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ にして、$(a+b)^4$ に相當するものは $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ であります

右の如くでありますから乘方は乘法の中ちの一種であります、故にうの方法に就ては別にお話しを致す程のこともありません、されどうの中ちにて注意すべきものゝ例を左に掲げて御覽に入れませう

第二百八條　たとへば $-a$ の如き負數の羃數に相當するものを二乘羃より順次に求むるときは、左の如くであります

先づ $-a$ の二乘即ち $(-a)^2$ に相當するものを求むれば $-a\times-a=a^2$ で、$-a$ の三乘即ち $(-a)^3$ に相當するものを求むれば $-a\times-a\times-a=a^2\times-a=-a^3$ であります、シテ $-a$ の四乘即ち $(-a)^4$ に相當するものを求むれば $-a\times-a\times-a\times-a=-a^3\times-a=a^4$ であります、此の如くでありますから負數の偶次の羃數に相當するものゝ符號は總て正號にして、奇次の羃數に相當するものゝ符號は總て負號であります

第二百九條　若し a^m の如きものゝ羃數に相當するものを二乘羃より順次に求むるときは、左の如くであります

先づ a^m の二乘即ち $(a^m)^2$ に相當するものを求むれば $a^m\times a^m=a^{m+m}=a^{2m}$ にして、a^m の三乘即ち $(a^m)^3$ に相當するものを求むれば $a^m\times a^m\times a^m=a^{2m+m}=a^{3m}$ であります、ソコデ此理を推せば a^m の n 乘即ち $(a^m)^n$ に相當するものは a^{nm} 或は a^{mn} であります

若し ab の如き式の羃數に相當するものを二乘羃より順次に求むるときは、左の如くであります

先づ ab の二乘即ち $(ab)^2$ に相當するものを求むれば $ab\times ab=aabb=a^2b^2$ にして、ab の三乘即ち $(ab)^3$ に相當するものを求むれば $ab\times ab\times ab=a^2b^2\times ab=a^3b^3$ であります、ソコデ此理を推せば a^2b^3c の五乘即ち $(a^2b^3c)^5$ に相當するものは $a^{10}b^{15}c^5$ でありま

す、シテ ab の n 乘即ち $(ab)^n$ に相當するものは a^nb^n であります

若し $-a^m$ の n 乘即ち $(-a^m)^n$ に相當するものを求むれば $\pm a^{mn}$ であります、シテこの符號の $\pm$ は n の奇、偶に從て正號 $+$ とか、負號 $-$ とかに定めるのであります、また $-a^m$ は $-1\times a^m$ と見做すことが出來ますから $-a^m$ の n 乘冪に相當するものは $(-1)^n\times a^{mn}$ 即ち $(-1)^n a^{mn}$ と記きてもよろしう御坐います

右の如くでありますから一項式の冪數に相當するものは、其各乘子が有する乘指數に、所要の乘指數を乘じたるものに、前の條にてお話し致しました通りの符號を配したるものであります

第二百十條　若し分數式の冪數に相當するものを求むるには、第百四十八條にてお話し致しました通り分數乘法に因れば求むることが出來ますからこゝには略します

第二百十一條　a^m と a^n との積は a^{m+n} に相當し、シテ a^m の n 乘も a^n の m 乘もうの結果は倶に a^{mn} に相當致しますから乘方は種々樣々の方法に因て同一の

結果を求むることが出來ます

たとへば $a+b$ の六乘即ち $(a+b)^6$ に相當するものを求むるには、$a+b$ に $a+b$ を乘じて二乘即ち $(a+b)^2$ に相當するものとなし、これに $a+b$ を乘じて三乘即ち $(a+b)^3$ に相當するものとなし、此の如く次第に $a+b$ を乘ずれば六乘即ち $(a+b)^6$ に相當するものを求むることが出來ます、されど先づ $a+b$ の四乘即ち $(a+b)^4$ に相當するものを求め、シテこの結果に $(a+b)$ の二乘即ち $(a+b)^2$ に相當するものを乘じてもよろしう御坐います、ナゼと申すに $(a+b)^4$ に $(a+b)^2$ を乘じたるものは $(a+b)^{4+2}$ 即ち $(a+b)^6$ となるからであります、また $a+b$ の三乘即ち $(a+b)^3$ に相當するものを求め、シテこの結果を二乘してもよろしう御坐います、ナゼと申すに $(a+b)^3$ を二乘したるものは $(a+b)^{3\times2}$ 即ち $(a+b)^6$ となるからであります、また先づ $a+b$ の二乘即ち $(a+b)^2$ に相當するものを求め、シテこの結果を三乘してもよろしう御坐います、ナゼと申すに $(a+b)^2$ を三乘したるものは $(a+b)^{2\times3}$ 即ち $(a+b)^6$ となるからであります、まだこの外

にも筭者の工夫次第で其方法はいくらも御坐いませう

第二百十二條　$a+b+c+d$ の三乘即ち $(a+b+c+d)^3$ に相當する一ッの形を掲ぐれば、左の如くであります

$$(a+b+c+d)^3=a^3+3a^2(b+c+d)+3a(b^2+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2)+b^3+3b^2(c+d)$$
$$+3b(c^2+2cd+d^2)+c^3+3c^2d+3cd^2+d^3$$
$$=a^3+b^3+c^3+d^3+3a^2(b+c+d)+3b^2(a+c+d)+3c^2(a+b+d)+3d^2(a+b+c)$$
$$+6abc+6bcd+6cda+6dab$$

第一　左ノ問ニ答フベシ

(1)　x^3 ノ四乘羃ニ相當スルモノヲ求ムベシ

(2)　$-a^5$ ノ二乘羃ニ相當スル者、及ビ五乘羃ニ相當スル者ヲ求ムベシ

(3)　$2ax^n$ ノ三乘羃ニ相當スルモノヲ求ムベシ

(4)　$-4a^2x^n$ ノ三乘羃ニ相當スル者、及ビ四乘羃ニ相當スル者ヲ求ムベシ

(5)　a ノ n 乘羃ニ相當スル者、$2n$ 乘羃ニ相當スル者、及ビ $2n+1$ 乘羃ニ相當スル者ヲ求ムベシ但シ n ハ整數ヲ顯スモノトナス

第二　左ノ問ニ答フベシ

(1)　$a-b$ 及ビ $b-a$ ノ二乘羃ニ相當スルモノヲ求ムベシ

(2)　$a-b$ 及ビ $b-a$ ノ三乘羃ニ相當スルモノヲ求ムベシ

(3)　$(1+2x+3x^2)^2$ ニ相當スルモノヲ求ムベシ

(4)　$(1-x+x^2-x^3)^2$ ニ相當スルモノヲ求ムベシ

(5)　$(a+b-c)^3$ ニ相當スルモノヲ求ムベシ

(6)　$(1+2x+x^2)^3$ ニ相當スルモノヲ求ムベシ

(7)　$(1+3x+3x^2+x^3)^2$ ニ相當スルモノ及ビ $(1-3x+3x^2-x^3)^2$ ニ相當スルモノヲ求ムベシ又問フ其和ニ相當スルモノ及ビ其差ニ相當スルモノヲ求メバ如何

第三　$a+b$ ノ二乘羃ニ相當スルモノ及ビ $a-b$ ノ二乘羃ニ相當スルモノヲ求ムベシ又問フ其和及ビ其差ニ相當スルモノヲ求メバ如何

第四　$\dfrac{(27a^4-18a^2b^2-b^4)^2}{64a^2b^4}+\dfrac{(9a^2-b^2)^3(b^2-a^2)}{64a^2b^4}=b^2$　上式ヲ証スベシ

第五　左ノ式ヲ証明スベシ

$$(ax^2+2bxy+cy^2)(aX^2+2bXY+cY^2)=\{axX+cyY+b(xY+yX)\}^2+(ac-b^2)(xY-yX)^2$$

第六　$(x^2+pxy+qy^2)(X^2+pXY+qY^2)$　ハ左ノ両式ニ相當スルコヲ証明スベシ

$$(xX+pyX+qyY)^2+p(xX+pyX+qyY)(xY-yX)+q(xY-yX)^2$$

$$(xX+pxY+qyY)^2+p(xX+pxY+qyY)(yX-xY)+q(xY-yX)^2$$

第七　$\dfrac{(1-10x^2+5x^4)(5-30x^2+5x^4)+(5x-10x^3+x^5)(20x-20x^3)}{(5x-10x^3+x^5)^2+(1-10x^2+5x^4)^2}$　上式ノ最簡式ヲ求ムベシ

第八　$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)$　ハ左ノ式ニ相當スルコヲ証明スベシ

$$(ap-bq+cr-ds)^2+(aq+bp-cs-dr)^2+(ar-bs-cp+dq)^2+(as+br+cq+dp)^2$$

第九　若シ $a+b=12,\ ab=35$ トセバ $(a-b)^2$ ノ値何程

第十　若シ $a-b=2,\ ab=35$ トセバ $(a+b)^2$ ノ値何程

第二百十三條　これより開方のお話しを致しませう、開方とは第二百六條にてお話し致しました通り、乗方の還原にて一ッの數を或數の冪數に相當するものとして、其根數を求むる法でありますから言葉をかへて申せば、設けたる數がドンナ數の若干乗冪に相當するかを發見する法であります、たとへばa^{mn}のn乗根はa^mであります、なぜと申すにa^mのn乗冪に相當するものは、a^{mn}であります、またa^{mn}のm乗根はa^nであります、なぜと申すにa^nのm乗冪に相當するものは、a^{mn}である故であります

右の如くでありますから一項式の若干乗根を求むる法は其式が有する指數を其所要の開指數にて除するのであります

ソコデ其開指數が若し偶數なるときは其根數は復號±を有するもので即ち正若しくは負であります、なぜと申すに第二百八條にてお話し致しました通り、正數にても、負數にても、其數値が等しければ其結果は同一のものを得る故であります

第二百十四條　前の條にてれ話し致しました法は、設けたる數を正數と見倣して、お話し致したのでありますから、設けたる數が負數のときは、りの法を用ふることが出來るか出來ぬか吟味致さなければなりません

扨て設けたる數が負數にても其開指數が奇數なれば、前の條の法にて其根數を求むることが出來ます、たとへば $-a^3$ の立方根即ち $\sqrt[3]{-a^3}$ は $-a$ であります、ナゼと申すに第二百八條にてれ話し致しました通り、根數が負數なれば其奇次の冪數は負數となる故であります

されど設けたる數が負數にして、其開指數が偶數なれば、其根數を求むることは出來ません、ナゼと申すに、第二百八條にてれ話し致しました通り、ドンナ數にても偶次の冪數は正數となる故であります、ソコデ若し此の如き根數を假にあるとして論ずるときは、この根數を虚數と申します

第二百十五條　設けたる數が分數なるときは、分母子を別々に開きて根數の分母子となすのであります即ち $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\pm\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}=\pm\frac{a}{b}$ で $\sqrt[3]{-\frac{a^3}{b^3}}=-\frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{b^3}}=-\frac{a}{b}$ であります、ナゼと申すに分數の冪數を求むるには、分母子の冪數を求めて其冪數の分母子となす故であります

第二百十六條　これより多項式の平方根を求むる方法のれ致しを話しませう

扨て $a^2+2ab+b^2$ の平方根は $a+b$ でありますから、ソコデ $a^2+2ab+b^2$ より $a+b$ を發見する方法の吟味致して御覽に入れませう

運筭

$$
\begin{array}{r|l}
a^2+2ab+b^2 & a+b \\
a^2 & \\
\hline
2a+b \quad 2ab+b^2 & \\
2ab+b^2 & \\
\hline
\end{array}
$$

先づ各項を a の降冪の順に排列すれば、其第一項は a^2 でありますから其平方根は a であります、これを所要の根數の第一項となす、シテ其平方即ち a^2 を全式より減ずれば、餘りは $2ab+b^2$ となります、ソコデ $2ab$ を $2a$ にて除すれば其商は b であります、これを所要の根數の第二項となす、シテこの第二項を第一項の二倍に加へて $2a+b$ となし、これに第二項即ち b を乘ずるときは、先きの餘り即ち $2ab+b^2$ に相當致します、故に根數が二項式より成立つたものなれば、

この方法に因て其平方根を求むることが出來ます

第一　右ノ方法ニ因テ左ノ問ニ答フベシ

(1) $9a^2+12ab+4b^2$ ノ平方根ヲ求ムベシ

(2) $25x^2-40xy+16y^2$ ノ平方根ヲ求ムベシ

(3) $4x^4+4x^2+1$ ノ平方根ヲ求ムベシ

(4) $a^2(a-b)^2+2ab(a-b)+b^2$ ノ平方根ヲ求ムベシ

第二百十七條　前の條にておはなし致しました方法は其平方根が二項式より成立ちたるものとなして、お話し致したるものでありますが併しこの方法は其平方根が二項式以上より成立つたものゝ根數を發見する方法にも應用することが出來ます、ナゼと申すに二項式以上の羃數は皆な二項式の羃數と見做すことが出來るからであります則ち左の如くであります

たとへば a^2-ab+b^2 の平方は、左の如くでありますから左の式に因て其平方根を發見する方法のお話しを致しませう

$$(a^2-ab+b^2)^2=(a^2-ab)^2+2(a^2-ab)b^2+b^4$$
$$=a^4-2a^3b+3a^2b^2-2ab^3+b^4$$

運筭

$$\begin{array}{r|l}
 & a^4-2a^3b+3a^2b^2-2ab^3+b_4 \;\big|\; a^2-ab+b^2 \\
 & a^4 \\
2a^2-ab & -2a^3b+3a^2b^2-2ab^3+b^4 \\
 & -2a^3b+a^2b^2 \\
 & \quad 2a^2b^2-2ab^3+b^4
\end{array}$$

ソコデ第一項即ちa^4の平方根はa^2でありますからこれを所要の根數の第一項となす、シテ其平方即ちa^4を全式より減ずれば餘りは$-2a^3b+3a^2b^2-2ab^3+b^4$となります、次に$-2a^3b$をa^2の二倍即ち$2a^2$にて除すれば、其商は$-ab$でありますこれを所要の根數の第二項となす、シテこの第二項を第一項の二倍に加へて$2a^2-ab$となしこれに第二項即ち$-ab$を乘ずれば$-2a^3b+a^2b^2$となります(この式が先きの餘りに等しければ其平方根は二項式であります)この式を先きの餘りより減ずれば餘りは$2a^2b^2-2ab^3+b^4$となります(この式は全式よりa^2-abの平方を減じたるものであります故にa^2-abを假に第一項と見做して前の法の

運　筭

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^4-2a^3b+3a^2b^2-2ab^3+b^4 \;\Big|\; \underline{a^2-ab+b^3} \\
 & \underline{a^4} \\
2a^2-ab & -2a^3b+3a^2b^2-2ab^3+b^4 \\
 & \underline{-2a^3b+a^2b^2} \\
2a^2-2ab+b^2 & a^2b^2-2ab^3+b^2 \\
 & \underline{2a^5b^2-2ab^2+b^2}
\end{array}
$$

如くなすのであります)シテ $2a^2b^2$ を $2a^2$ にて除すれば其商は b^2 でありますこれを所要の根數の第三項となす、シテこの第三項を已に發見したる項の二倍に加へて $2a^2-2ab+b^2$ となしこれに第三項即ち b^2 を乗ずれば $2a^2b^2-2ab^3+b^4$ となります、この式は餘りし式に相當致しますゆ故に其平方根は $a^2-2ab+b^2$ であります

右の如くでありますからドンナ式にても其根數を發見せんとせば根數が二項式より成立ちてをる式の根數を發見する法をいくどもなくくりかへすまでのことであります

今一ッ $16x^6-24x^5+25x^4-20x^3+10x^2-4x+1$ の平方根を發見する運筭を御覧に入れませう

運　筭

$$
\begin{array}{r|l}
 & 16x^6-24x^5+25x^4-20x^3+10x^2-4x+1 \;\Big|\; \underline{4x^3-3x^2+2x-1} \\
 & \underline{16x^6} \\
8x^3-3x^2 & -24x^5+25x^4-20x^3+10x^2-4x+1 \\
 & \underline{-24x^5+9x^4} \\
8x^3-6x^2+2x & 16x^4-20x^3+10x^2-4x+1 \\
 & \underline{16x^4-12x^3+4x^2} \\
8x^3-6x^2+4x-1 & -8x^3+6x^2-4x+1 \\
 & \underline{-8x^3+6x^2-4x+1}
\end{array}
$$

第二百十八條　偶次の根數は復號即ち $\pm$ を有するものだといふことは、已に第二百十三條にて話し致しました、故に前の條の第一例にて a^2-ab+b^2 は其所要の平方根でありますが $-a^2+ab-b^2$ も亦其所要の平方根であるといふことが分ります、うの方法は始め a^4 の平方根を立るとき a^2 を立てずに $-a^2$ を立てゝ前の條の如く運筭を施すときは $-a^2+ab-b^2$ なる平方根を發見

することが出來ます、此理を推して前の條の第二例にても $-4x^3+3x^2-2x+1$
なる平方根を發見することが出來ます
右の如くでありますが平方根を發見する運算を施すときに、第一に立る項の符號は正を常と致します、シテ若し負も要するときは開きて後ち其根數に復號を記します、たとへば前の條の第一例の平方根にて申せば $\pm(a^2-ab+b^2)$ の如くなすのであります

第二　左ノ問ニ答フベシ

(1) $a^4-2a^3+3a^2-2a+1$ ノ平方根ヲ求ムベシ

(2) x^4-4x^3+8x+4 ノ平方根ヲ求ムベシ

(3) $4a^4+12a^3+5a^2-6a+1$ ノ平方根ヲ求ムベシ

(4) $4x^4-4x^3+5x^2-2x+1$ ノ平方根ヲ求ムベシ

(5) $4x^4-12ax^3+25a^2x^2-24a^3x+16a^4$ ノ平方根ヲ求ムベシ

(6) $25x^4-30ax^3+49a^2x^2-24a^3x+16a^4$ ノ平方根ヲ求ムベシ

第二百十九條　一ッの式の四乘根を求めんとせば先づ其平方根を求め、シテ再びこの平方根の平方根を求むればよろしう御坐います即ち二度平方に開くのであります、此理を推して一ッの式の八乘根を求めんとせば、先づ其平方根を求め、シテこの平方根の四乘根を求むればよろしう御坐ります、即ち三度平方に開くのであります、また十六乘根を求めんとせば先づ其平方根を求め、シテこの平方根の八乘根を求むれば、よろしう御坐います、即ち四度平方に開くのであります、此の如くでありますから一ッの式の n 乘根を求むるとき、若し n が二といふ乘子より成立たるものならば、その二といふ乘子のかさなりたる數ほど平方に開けば、所要の n 乘根を求むることが出來ます

たとへば $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$ の四乘根を求むるときは、左の如くであります

先づ第二百十八條にて話しました方法に因て、設けたる式を平方に

開くときは、其平方根は $a^2-2ab+b^2$ となります、シテこの平方根を、また平方根に開くときは其平方根は $a-b$ となります、これ即ち所要の四乘根であります

第三　左ノ問ニ答フベシ

(1) $81x^4-432x^3+864x^2-768x+256$ ノ四乘根ヲ求ムベシ

(2) $16a^4-96a^3x-216a^2x^2-216ax^3+81x^4$ ノ四乘根ヲ求ムベシ

第二百二十條　諸君が算術にてよく御存じの通り數に因て、ろの平方根を精密に求むることが出來ぬものがありませう、即ちろの平方根に相當する數がないことが御坐いませう、たとへば二の平方根は精密に求むることが出來ません、即ち二の平方根に相當する數はないので御坐いませう、代數學にても亦式に因てろの平方根を精密に求むることが出來ぬものがあります即ちろの平方根に相當する式がないことが御坐います、これを無窮根數と申す、ソコデ其略近數を求むるときは左の如くであります

運　算

$$
\begin{array}{l|l}
 & 1-2x \;\big|\; 1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4} \\
 & 1 \\
\hline
2-x & -2x \\
 & -2x+x^2 \\
\hline
2-2x-\frac{x^2}{2} & -x^2 \\
 & -x^2+x^3+\frac{x^4}{4} \\
\hline
2-2x-x^2-\frac{x^4}{4} & -x^3-\frac{x^4}{4} \\
 & -x^3+x^4+\frac{x^5}{2}+\frac{x^6}{4} \\
\hline
 & -\frac{5x^4}{4}-\frac{x^5}{2}-\frac{x^6}{4}
\end{array}
$$

上の如くいくら運算を施しても、設けたる式の平方根は精密には求むることは出來ません、即ちこの式の平方根に相當する式はないのでありませう、故にこの平方根は四項にて止めます、若しこの平方根を $1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4}$ となすときは其開き餘りが $-\frac{5x^4}{4}-\frac{x^5}{2}-\frac{x^6}{4}$ となります

右の如くでありますから $1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4}$ の平方は $1-2x+\frac{5x^4}{2}+\frac{x^6}{2}+\frac{x^5}{4}$ に相當するものであります

ソコデ $\sqrt{1-2x}$ の如き無窮根數の式は、またこの儘取り扱ひ方がありますが、ろの方法は後回にてお話し致すことに致しませう

第二百二十一條　コンドは多項式の立方根を求むる方法のお話しを致し

ませう

扨て $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 立方根は $a+b$ であります故にこの立方根を求むる方法は左の如くであります

運筭

$$\begin{array}{r|l} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & a+b \\ a^3 & \\ \hline 3a^2 \;\; 3a^2b+3ab^2+b^3 & \\ 3a^2b+3ab^2+b^3 & \\ \hline \end{array}$$

先づ設けたる式を a の降冪の順に排列すれば、共第一項は a^3 でありますから共立方根は a であります、これを所要の根數の第一項となす、シテこの立方即ち a^3 を全式より減ずれば餘りは $3a^2b+3ab^2+b^3$ となります、ソコデこの餘りの第一項 $3ab^2$ を $3a^2$ にて除すれば共商は b であります、これを所要の根數の第二項となす、シテこの根數の第一、第二の兩項にて $3a^2b+3ab^2+b^3$ を作るときは先きの餘りに相當致します、故に立方根が二項式なるものなればこの方法に因て共根數を求むることが出來ます

第二百二十二條　前の條にて話し致しました理に基きて、左の如く三行

に列記して運筭を施すときは繁雑なる多項式の立方根を求むるときに當りて大に便利であります

運筭

第三

$$\begin{array}{r|l} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & a+b \\ a^3 & \\ \hline 3a^2b+3ab^2+b^3 & \\ 3a^2b+3ab^2+b^3 & \\ \hline \end{array}$$

第二

$$\begin{array}{r} 3a^2 \\ (3a+b)b \\ \hline 3a^2+3ab+b^2 \end{array}$$

第一

$$3a+b$$

先づ平方根の第一項即ち a を求め、シテこの立方即ち a^3 を第三行にある設けたる式の下に記し、これを減じ、次に $3a$ を第一行に記し、$3a^2$ を第二行に記します、シテこの $3a^2$ を以て $3a^2b$ を除し共商 b を求め、これを第一行にある $3a$ に加へて $3a+b$ となす、シテこれに b を乘じて、第二行に記し先きにある $3a^2$ に加へて $3a^2+3ab+b^2$ となす、シテこれに b を乘じて $3a^2b+3ab^2+b^3$ となし、これを第三行に記し先きの餘りより減ずるのであります、ソコデ餘りがなければ開き切れたのであります、若し餘りがあれば共平方根數が三項式の若しくは三項式以上より成立つたものであります

第四　右ノ方法ニ因テ左ノ問ニ答フベシ

(1) $27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3$ ノ立方根ヲ求ムベシ

(2) $125x^3-300x^2y+240xy^2-64$ ノ立方根ヲ求ムベシ

(3) $8x^3-12x^2+6x-1$ ノ立方根ヲ求ムベシ

(4) $(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$ ノ立方根ヲ求ムベシ

第二百二十三條　前の條にてお話し致しました方法を一口に申せば設けたる式より$(a+b)^3$を減ずる方法であります、シテ二項式以上より成立つた立方根にても二項式より成立つものと見做すことが出來ずから前の條の方法を應用して二項式以上より成立つた立方根を發見することが出來ますたとへば $a+b+c$ の立方は左の如くでありますから左の式に因て其立方根を發見するお話しを致しませう

$$(a+b+c)^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$$

運算

第三　此處は略します

第二

$$\begin{array}{r} 3a^2 \\ (3a+b)b \\ \hline 3a^2+3ab+b^2 \\ b^2 \\ \hline 3a^2+6ab+3b^2 \end{array}$$

第一

$$\begin{array}{r} 3a+b \\ 2b \\ \hline 3a+3b \end{array}$$

先づ前の條にてお話し致しました通りの方法に因て運算を施すときは、その第三行に $3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$ 即ち $3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$ の式が餘ります、これは全式より$(a+b)^3$を減したるものでありますから $a+b$ を前の條の a の如く見做して同じ方法をくりかへすのであります、則ち $a+b$ 三倍を第一行に記さんとするに第一行には已に $3a+b$ がありますからその下にその不足分 $2b$ を記してこれを加ふれば $a+b$ の三倍となります即ち上圖の第一行の如くであります、また第二行に$(a+b)^2$の三倍を記さんとするに第二行には已に $3a^2$, $(3a+b)b$, $3a^2+3ab+b^2$, がありますから $2a^2$ を取りのけて $(3a+b)b$, $3a^2+3ab+b^2$ の下にその不足分 b^2 を記してこの三式を加へ合すれば $3a^2+6ab+3b^2$ となります、即ち上圖の第二行の如くであります、この餘は $3a^2+6ab+3b^2$ 即ち $3(a+b)^2$ を

以て第三行にある餘りし式を除し其商cを求めこれを所要の根數の第三項となす等皆な前の條にてお話し致しましたの通りでありますからこゝは略します

右の如くでありますからドンナ式にても其立方根を發見せんとせば只今お話し致しました方法の通り幾度ともなくくりかへすまでのことであります

第二百二十四條　たとへば $8x^6-36x^5y+66x^4y^2-63x^3y^3+33x^2y^4-9xy^5+y^6$ の立方根を求むる方法は左の如くであります

第一

$$\begin{array}{l} 6x^2-3xy \\ \quad -6xy \end{array}\Bigg\} \\ \overline{6x^2-9xy+y^2}$$

第二

$$\begin{array}{l} 12x^4 \\ \quad -3xy(6x^2-3xy) \\ \hline 12x^4-18x^3y+9x^2y^2 \\ \quad +9x^2y^2 \\ \hline 12x^4-36x^3y+27x^2y^2 \\ \quad +(6x^2-9xy+y^2)y^2 \\ \hline 12x^4-36x^3y+33x^2y^2-9xy^3+y^4 \end{array}$$

第三

この處は紙幅がたりませんから下におきました

第三

$$\begin{array}{l|l} 8x^6-36x^5y+66x^4y^2-63x^3y^3+33x^2y^4-9xy^5+y^6 & 2x^2-3xy+y^2 \\ 8x^6 & \\ \hline -36x^5y+66x^4y^2-63x^3y^3+33x^2y^4-9xy^5+y^6 & \\ -36x^5y+54x^4y^2-27x^3y^3 & \\ \hline 12x^4y^2-36x^3y^3+33x^2y^4-9xy^5+y^6 & \\ 12x^4y^2-36x^3y^3+33x^2y^4-9xy^5+y^6 & \\ \hline \end{array}$$

捌て $8x^6$ の立方根は $2x^2$ でありますからこれを所要の根數の第一項となす、シテ $8x^6$ を第三行にある設けたる式の下に記してこれを減じ次に $2x^2$ の三倍即ち $6x^2$ を第一行に記し $2x^2$ の平方の三倍即ち $12x^4$ を第二行に記し、シテ $12x^4$ にて $-36x^5y$ を除すれば $-3xy$ となります、これを所要の根數の第二項となす、これを第一行にある $6x^2$ に加へて $6x^2-3xy$ となし、これに第二項即ち $-3xy$ を乘じて第二行に記し、これを加へて $12x^4-18x^3y+9x^2y^2$ となし、これに第二項即ち $-3xy$ を乘じて第三行に記し、これを減ずればこれにて根數の第一、第二の兩項即ち $2x^2-3xy$ を求めたる運算は終りました、されば第三行にまだ

餘りがありますから左の如く致しますソコデ第二百二十二條にてお話し致しました通りの方法に因て運算を施します、則ち $-3xy$ の二倍即ち $-6xy$ を第一行の下に記しこれを加ふれば $6x^2-9xy$ となります、これは已に求めたる根數の第一、第二の兩項の三倍であります、次に $-3xy$ の平方即ち $9x^2y^2$ を第二行の下に記し下の三ッの式を加へ合すれば $12x^4-36x^3y+27x^2y^2$ となります、これは已に求めたる根數の第一、第二の兩項の平方の三倍でありますソコデ今第二行にて求めたる式にて第三行に餘りし式を除すれば其商は y^2 となります、これを所要の根數の第三項となし、シテ前の如くこれを第一行にある式に加へて $6x^2-9xy+y^2$ となし、これに第三項即ち y^2 を乘じて第二行の下に記しこれを加へて $12x^4-36x^3y+33x^2y^2-9xy^3+y^4$ となしこれに第二項即ち y^2 を乘じて第三行に記し、これを減ずれば第三項の式は盡きるでありませう故に設けたる式の平方根は $2x^2-3xy+y^2$ であります

第五　左ノ各問ノ立方根ヲ求ムベシ

(1)　$1-6a+21a^2-42a^3+63a^4-54a^5+27a^6$

(2)　$x^6-3ax^5+5a^3x^3-3a^5x-a^6$

(3)　$8x^6+48x^5+60x^4-80x^3-90x^2+108x-27$

第二百二十五條　一ッの式の六乘根を求めんとせば先づ其平方根を求め、シテこの平方根の立方根を求むるか、先づ其立方根を求め、シテこの立方根の平方根を求むるか、この二ッの中ちなればドレデもよろしう御坐います、即ち前後に係らず平方と立方とに開くのであります、此理を推して一ッの式の九乘根を求めんとせば、先づ其立方根を求め、シテこの立方根の立方根を求むればよろしう御坐います、即ち二度立方に開くのであります、また一ッの式の十二乘根を求めんとせば、先づ其四乘根を求めシテこの四乘根の立方根を求むるか先づ其立方根を求め、シテこの立方根の四乘根を求むるかこの二ッの中ちドレでもよろしう御坐います、即ち前後に係らず二度平方に開き一度立方に開くのでありますす、此の如くでありますから一ッの式の n 乘

根を求むるとき若しnが三といふ乘子か若しくば二といふ乘子と三といふ乘子とより成立ちたるものならば、その二といふ乘子がかさなりたる數ほど平方に開き、シテ三といふ乘子がかさなりたる數ほど立方に開けば所要のn乘根を求むることが出來ます

第六　左ノ問ニ答フベシ

(1)　$1+12x+60x^2+160x^3+240x^4+192x^5+64x^6$ ノ六乘根ヲ求ムベシ

(2)　$729a^6-1458a^5x+1215a^4x^2-540a^3x^3+135a^2x^4-18ax^5+x^6$ ノ六乘根ヲ求ムベシ

(3)　$(8x^3+36x^2+54x+27)^4$ ノ十二乘根ヲ求ムベシ

(4)　$(16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4)^3$ ノ十二乘根ヲ求ムベシ

第七　左ノ各ノ平方根ヲ求ムベシ

(1)　$25x^4-30ax^3+49a^2x^2-24a^3x+16a^4$.

(2)　$x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^4y^2-6xy^5+y^6$.

(3)　$(a-b)^4-2(a^2+b^2)(a-b)^2+2(a^4+b^4)$.

(4)　$4\{(a^2-b^2)cd+ab(c^2-d^2)\}^2+\{(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd\}^2$

(5)　$a^4+b^4+c^4+d^4-2a^2(b^2+d^2)-2b^2(c^2-d^2)+2c^2(a^2-d^2)$.

(6)　$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)$.　　(7)　$x^4-x^3+\frac{x^2}{4}+4x-2+\frac{4}{x^2}$.

(8)　$\frac{a^4}{4}+\frac{a^3}{x^2}+\frac{a^2}{x}-ax-2+\frac{x^2}{a^2}$.

(9)　$a^4+2(2b-c)a^3+(4b^2-4bc+3c^2)a^2+2c^2(2b-c)a+c^4$

(10)　$(a-2b)^2x^4-2a(a-2b)x^3+(a^2+4ab-6a-8b^2+12b)x^2-(4ab-6a)x+4b^2-12b+9$.

第八　左ノ各問ノ立方根ヲ求ムベシ

(1)　$x^6-9x^5y+33x^4y^2-63x^3y^3+66x^2y^4-36xy^5+8y^6$.

(2)　$1-9a+39a^2-99a^3+156a^4-144a^5+64a^6$.

(3)　$1-3x+6x^2-10x^3+12x^4-12x^5+10x^6-6x^7+3x^8-x^9$.

(4)　$8x^6-36ax^5+102a^2x^4-171a^3x^3+204a^4x^2-144a^5x+64a^6$.

第九　$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12$.　ノ四乘根ヲ求ムベシ

第十 $\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)^2-6\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+15\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ ノ六乘根ヲ求ムベシ

第十一 n 位ノ數ノ平方根ハ $\frac{1}{4}\left\{2n+1-(-1)^n\right\}$ 位ナリト云フ其証ヲ問フ

第十二 左ノ式ハ正シク平方ニ開クコトヲ得ルト云フ其証ヲ問フ

$$(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy).$$

第三十四回

二次方程式

第二百二十六條　今回は二次方程式の解法のお話しを致しませう、扨て二次方程式と申すは第九十七條にてお話し致しました通り未知元の二乘羃を有する方程式であります、即ち $8x^2-23=29-5x^2$ 若しくは $2x^2-27x+53=21-7x$ の如き形の方程式であります、シテこの第一の如く未知元の二乘のみを有する方程式を二次正方式と申し、第二の如く未知元の二乘羃及び一乘羃を有する方程式を二次雜方式と申します

或は女性の強さを知った

第二百二十七條　二次正方式即ち方程式が未知元の二乘羃のみを有するときは一次方程式の解法に因て其未知元の二乘羃の値を求むることが出來ませう、シテ未知元の二乘羃の値が求められますればその値の平方根を求むれば即ち未知元の値でありませう故に二次正方式の未知元の値を求むる法則を左の如く定めます

一次方程式解法ノ法則ニ因テ未知元ノ二乘冪ノ値ヲ求メ而シテ之ヲ平方ニ開クベシ

第二百二十八條　たとへば $8x^2-23=29-5x^2$ の二次正方式にて未知元即ちxの値を發見する方法は左の如くであります

扨て $8x^2-23=29-5x^2$ の方程式にて、未知數を前節に集め已知數を後節に集め、シテ同加異減を施せば $13x^2=52$ となります、ソコデこの方程式の兩節を x^2 の段數即ち13にて除すれば $x^2=4$ となります、故に $x=\pm2$ であります、これを記號のみにて記せば上の如くであります

$$8x^2-23=29-5x^2$$
$$13x^2=52$$
$$x^2=4$$
$$\therefore\ x=\pm2$$

右の如くでありますから未知元即ちxの値は正の二と負の二との二ッであります、ソコデ、ナゼ±2の如く2の前に複號を用ふるのだと申すに、これは第二百十三條にてお話し致しました通り一ッの數の平方根には正數と負數との二ッがある故であります

右の如く申せば $x^2=4$ 方程式の兩節を平方に開きて $x=\pm2$ となすのは其當を得ぬものと思はれませう、ナゼと申すに $x^2=4$ の方程式の兩節を平方に開ければ $\pm x=\pm2$ の如く x の前にも複號を配さなければならぬものでありませう、されど $\pm x=\pm2$ は、つまり $x=\pm2$ と同一のものとなります其理は $\pm x=\pm2$ となしたとて、これを別々にすれば第一 $+x=+2$ と、第二に $-x=-2$ と、第三 $+x=-2$ と、第四 $-x=+2$ と四ッの種類を得る理(ワケ)でありますが、この四ッの種類の中ち第一と第二とは同一のものにして $x=2$ であります、また第三と第四とは同一のものにして $x=-2$ でありますから方程式の兩節を平方に開くときは、その一節の平方根の前にのみ複號を配すれば、それでよろしく御坐います

第一　左ノ方程式ヨリ未知元 x ノ値ヲ發見スベシ

(1) $5x^2-17=3x^2+1$　　(2) $9x^2-23=47+5x^2-6$

(3) $(x-3)(x+3)=19.$　(4) $2(x-4)(x+4)=(x-9)(x+9)+98.$

(5) $a^2x^2-a^2=(a^2-x)(a^2+x).$　(6) $ax^2-4b=2bx^2+a.$

(7) $\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{5}{2}.$　(8) $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{13}{6}.$

(9) $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}=\frac{10}{3}.$　(10) $\frac{x}{4}+\frac{4}{x}=\frac{x}{9}+\frac{9}{x}.$

(11) $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{x}{b}+\frac{b}{x}.$　(12) $\frac{x^2-4}{6}=2x^2-8.$

(13) $\frac{x^2-2a^2}{3}-\frac{x^2-3a^2}{2}+4a^2=0.$　(14) $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}=\frac{2(a^2+1)}{(1+a)(1-a)}.$

(15) $\frac{3x^2}{2}-\frac{2x^2}{3}=30.$　(16) $\frac{x-4}{12}-\frac{(x-5)(x+5)}{x+4}=x-4.$

(17) $2(x-3)^2+3=15-(x-3)^2.$　(18) $5(x-1)^2-17=3(x-1)^2+1.$

(19) $(x-a)^2+2b^2=4b^2-(x-a)^2.$

第二百二十九條　最早二次正方式の解法はお分りになりましたろうからこれより二次雑方式の解法のお話しに取りかゝりませう扨て若し二次雑方式が $x^2+2px=q$ の如き形なれば、この方程式の兩節に p^2 を加ふれば $x^2+2px+p^2=q+p^2$ の如き形になりますから、ソコデこの方程式の兩節を平方に開けば $x+p=\pm\sqrt{q+p^2}$ となります、故に $x=-p\pm\sqrt{q+p^2}$ であります

第二百三十條　前の條にてお話し致しました二次雑方式の形 $x^2+2px=q$ は、この p と q とが正數にても負數にても且ツドンナ數にてもよろしきものとすればドンナ形の二次雑方式でも皆な其形に變化することが出來ます、故に $x^2+2px=q$ の二次雑方式を解する方法は總ての法則となすことが出來ます

たとへば $2x^2-27x+53=21-7x$ の如き二次雑方式なれば、この方程式に轉項法を施して同加異減すれば $2x^2-20x=-32$. この兩節を x^2 の段數即ち2にて除すれば $x^2-10x=-16$ の如くなります(これ即ち前の條の $x^2+2px=q$ の形と同じものと見做すことが出來ませう)シテこの方程式に 5^2(これ即ち前の條の p^2 にして x の段數の半の二乘)を加ふれば $x^2-10x+5^2=-16+5^2=9$ となり

$$2x^2-27x+53=21-7x$$
$$2x^2-20x=-32$$
$$x^2-10x=-16$$
$$x^2-10x+5^2=5^2-16$$
$$=9$$
$$x-5=\pm3$$
$$\therefore\ x=5\pm3$$
$$=8\ \text{或ハ}\ 2$$

ます、ソコデこの方程式の兩節を平方に開けば $x-5=\pm3$ となります故に $x=5\pm3$ であります即ち $x=8$ 或ハ 2 であります、これを記號のみにて記せば上の如くであります

また $x^2+6x+13=35-2x^2$ の如き二次雜方式なればこの方程式に轉項法を施して同加異減すれば $3x^2+5x=22$ この兩節を x^2 の段數即ち3にて除すれば $x^2+\frac{5}{3}x=\frac{22}{3}$ の如くなります(これ即ち前の條の $x^2+2px=q$ の形と同じものと見做せませう)シテこの方程式の兩節に $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ (これ即ち前の條の p^2 にして x の段數の半の二

$$x^2+6x+13=35-2x^2$$
$$3x^2+5x=22$$
$$x^2+\frac{5}{3}x=\frac{22}{3}$$
$$x^2+\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2=\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{22}{3}$$
$$=\frac{289}{36}$$
$$x+\frac{5}{6}=\pm\frac{17}{6}$$
$$x=-\frac{5}{6}\pm\frac{17}{6}$$
$$=2\ \text{或ハ}\ \frac{11}{3}$$

乘)を加ふれば $x^2+\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2+\frac{22}{3}=\frac{289}{36}$ となります、ソコデこの程方式の兩節を平方に開けば $x+\frac{5}{6}=\pm\frac{17}{6}$ となります、故に $x=-\frac{5}{6}\pm\frac{17}{6}$ であります、即ち $x=2$ 或ハ $-\frac{11}{3}$ であります、これを記號のみにて記せば上の如くであります

右の如くでありますから二次雜方式の解法の法則を左の如く定めます

方程式ヲ變化シテ未知數ヲ有スル諸項ヲ前節ニ移シ x^2 ノ段數ヲ正ノ一トナシ而シテ兩節ニ x ノ段數ノ半ノ二乘ヲ加ヘテ之ヲ平方ニ開クベシ

第二　右ノ法則ニ因テ左ノ二次雜方式ノ未知元 x ノ値ヲ發見スベシ

(1) $x^2-4x+3=0$.　(2) $3x^2-24x+50=5$.

(3) $x^2+4x+3=9-x^2$.　(4) $7x^2+17x=147-11x$.

(5) $x^2-7x+12=0$.　(6) $x^2-3x=40$.

(7) $3x^2-4x=15$.　(8) $2x^2-5x=117$.

(9) $x^2+13x-140=0$.　(10) $x^2+11x-80=0$.

(11) $6x^2+15x=9$.　(12) $5x^2+4x=204$.

(13) $3x^2-53x=-34$.　(14) $21a^2-292x=-500$.

第二百三十一條　コンドハ二次雜方式を $ax^2+bx+c=0$ なる形として、りの解法のお話しを致しませう

設けたる方程式を $ax^2+bx=-c$ の如くなし、シテこの兩節を a にて除すれば

$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ となります、ソコデこの兩節に $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ を加ふれば

$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ となります、この兩節を平方に開へときは

$x+\frac{b}{2}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ となります、故に $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ であります

この設けたる方程式に於て特別なる場合即ち $c=0$ なるときの吟味致して御覧に入れませう

ソコデ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ でありますからこの式の複號 $\pm$ にて正號 $+$ を用ふるときは $x=0$ となります、また負號 $-$ を用ふるときは $x=-\frac{b}{a}$ となります、

扨てこの場合に於ては設けたる方程式は $ax^2+bx=0$ にして $x(ax+b)=0$ の如くなすことが出來ます、この如き形なれば $x=0$ 若しくは $ax+b=0$ 則ち $x=-\frac{b}{a}$ なるときに、りの設けたる方程式が適等するといふことを顯すものであります

第二百三十二條　時によりて第二百三十條にてお話し致しました方法を用ひずして第二百三十一條にてお話し致しました公式を用ふるとが御坐います、たとへば $3x^2-13x+12=0$ の如き方程式に於てこれを前の條の公式に引合すれば $a=3, b=-13$, にして $c=12$ であります、故にこの a、b、c 等の値を前の條の公式に代用すれば x の値を求むるとが出來ます即ち左の如くであります

$b^2-4ac=(-13)^2-4\times3\times12=25$ でありますから $x=\frac{13\pm5}{2\times3}$ 即ち x の値は 3 或は $4\frac{}{}3$ であります

第二百三十三條　$x^2-6x=-2$ の如き二次方程式にて其未知元の値を求む

るときは精密にその値を求むることが出來ません即ち左の如くであります
$x^2-6x=-2$　この兩節に$\left(\frac{6}{2}\right)^2$を加ふれば $x^2-6x+9=9-2=7$ となります、ソコデこの兩節を平方に開くときは $x-3=\pm\sqrt{7}$ となります、故に $x=3\pm\sqrt{7}$ であります

右の如くでありますからxの値は精密に求むることは出來ませんされどxの略近の値は求むることが出來ます、ナゼと申すに$\sqrt{7}$は開き盡すことは出來ませんがその略近の値は求むることが出來る故であります

第二百三十四條　只今までお話し致しました二次方程式は皆な二ッの異なりたる商がありましたが時によりて只一ッの商のみ得ることが御坐います、たとへば $x^2-12x+36=0$ なる方程式にて其未知元の値を求むるため、その兩節を平方に開くときは $x-6=0$ となりますから $x=6$ であります、故にこの設けたる二次方程式の商は六のみであります、されど設けたる二次方程式がこの如き場合のときは二ッの等しき商を有つと申します

ソコデ二次方程式が二ッの等しき商を有つときはドンナ關係を有するかといふことを左に吟味致して御覽に入れませう

先づ $ax^2+bx+c=0$ の如き形とすれば、この二次方程式の二ッの商は第二百三十一條にてお話し致しました通り $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ と $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ との二ッでありませう、この二ッの商は $b^2-4ac=0$ でなければ決てその値が等しくなることはありません、ソコデ $b^2-4ac=0$ となすときはその商は二ッとも $-\frac{b}{2a}$ となります、故に二次方程式に於て二ッの等しき商を有つときは必ず $b^2-4ac=0$ の如き關係を有するものであります

第二百三十五條　コンドハ $x^2-10x+34=0$ なる二次方程式の未知元の値を發見して御覽に入れませう

設けたる方程式は $x^2-10x=-34$ の如くなすことが出來ませう、ソコデこの兩節に$\left(\frac{10}{2}\right)^2$を加ふれば $x^2-10x+25=25-34=-7$ となりますからこの兩節を平方に開くときは $x-5=\pm\sqrt{-7}$ となります、即ち $x=5\pm\sqrt{-7}$ であります、此の

如きときはxの値ハ略近數すら發見することは出來ません、ナゼと申す負數即ち-7は平方根を有たぬものにてありますから其略近數すら發見することが出來ぬものであります(このことは第二百十四條にてお話し致しました)故にこの設けたる方程式は實商を有たぬものであります、此の如き商を虚商と申します

ソコデ設けたる方程式がドンナ關係を有するときに於て虚商を得るかといふことを吟味致して御覽に入れませう

先づ $ax^2+bx+c=0$ の如き形とすれば、この二次方程式の二ッの商は第二百三十一條にてお話し致しました通りでありますから b^2-4ac が正數なるとき即ち b が $4ac$ より(代數上にて)大なるときに實商を得るといふことが分りませう、シテ b^2-4ac が負數なるとき即ち b^2 が $4ac$ より(代數上にて)小なるときに虚商を得るものであります

第五　左ノ二次雜方式ノ未知元ノ値ヲ發見スベシ

(1) $x^2-4x+3=0.$　(2) $x^2-5x+4=0.$

(3) $6x^2-13x+6=0.$　(4) $3x^2-7x=20.$

(5) $2x^2-7x+3=0.$　(6) $3x^2-53x+34=0.$

(7) $x^2+10x+24=0.$　(8) $7x^2-3x=160.$

(9) $14x-x^2=33.$　(10) $2x^2-2x-\frac{3}{2}=0.$

(11) $x^2-3=\frac{1}{6}(x-3).$　(12) $4(x^2-1)=4x-1.$

(13) $110x^2-21x+1=0.$　(14) $780x^2-73x+1=0.$

(15) $(x-1)(x-2)=6.$　(16) $(3x-2)(x-1)=14.$

(17) $(3x-5)(2x-5)=(x+3)(x-1).$　(18) $(2x+1)(x+2)=3x^2-4.$

(19) $(x+1)(2x+3)=4x^2-22.$

(20) $(x-1)(x-2)+(x-2)(x-4)=6(2x-5).$

(21) $(2x-3)^2=8x.$　(22) $(5x-3)^2-7=44x+5.$

(23) $(x-7)(x-4)+(2x-3)(x-5)=103.$

(24) $\frac{5}{7}x^2+\frac{7}{5}x+\frac{73}{140}=0.$

(25) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)=\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right).$

(26) $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}.$

(27) $\frac{5x}{21}(x+1)-\frac{1}{7}(2x^2+x-1)=\frac{4}{35}(x+1).$

(28) $8x+11+\frac{7}{x}=\frac{21+65x}{7}.$

(29) $\frac{6}{x}+\frac{x}{6}=\frac{5(x-1)}{4}.$

(30) $\frac{x}{7}+\frac{21}{x+5}=\frac{23}{7}.$

(31) $\frac{21}{5-x}-\frac{x}{7}=\frac{23}{7}.$

(32) $\frac{1}{2(x-1)}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{4}.$

(33) $\frac{3}{2(x^2-1)}+\frac{x}{4(x+1)}=\frac{3}{8}.$

(34) $\frac{x}{15}+\frac{40}{3(10-x)}=\frac{3(10+x)}{95}.$

(35) $\frac{2x}{15}+\frac{3x-50}{3(10+x)}=\frac{12x+70}{190}.$

(36) $\frac{x^2-5x}{x+3}=x-3+\frac{1}{x}.$

(37) $\frac{x+2}{x-1}-\frac{4-x}{2x}=\frac{7}{3}.$

(38) $\frac{x}{x-1}=\frac{3}{2}+\frac{x-1}{x}.$

(39) $\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{10}{3}.$

(40) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{5}{6}.$

(41) $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{13}{6}.$

(42) $\frac{x-6}{x-12}-\frac{x-12}{x-6}=\frac{5}{6}.$

(43) $\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+2}=\frac{3}{5}.$

(44) $\frac{4}{x+1}+\frac{5}{x+2}=\frac{12}{x+3}.$

(45) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{x}=\frac{14}{x+4}.$

(46) $\frac{2x-3}{3x-5}+\frac{3x-5}{2x-3}=\frac{5}{2}.$

(47) $\frac{3x-2}{2x-5}-\frac{2x-5}{3x-2}=\frac{8}{3}.$

(48) $\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-3}{x-2}=\frac{2x-3}{x-1}.$

(49) $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2(x+3)}{x-3}.$

(50) $10(2x+3)(x-3)+(7x+3)^2=20(x+3)(x-1).$

(51) $(7-4\sqrt{3})x^2+(2-\sqrt{3})x=2.$

(52) $x^2-2ax+a^2-b^2=0.$

(53) $x^2-2ax+b^2=0.$

(54) $(3a^2+b^2)(x^2-x+1)=(3b^2+a^2)(x^2+x+1).$

(55) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0.$

(56) $\dfrac{1}{(x-b)(x-c)}+\dfrac{1}{(a+c)(a+b)}=\dfrac{1}{(a+c)(x-c)}+\dfrac{1}{(a+b)(x-b)}$.

(57) $\dfrac{1}{a+b+x}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{x}$.　(58) $(ax-b)(bx-a)=c^2$.

(59) $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}=\dfrac{2c}{x-c}$.　(60) $abx^2+\dfrac{3a^2x}{c}=\dfrac{6a^2+ab-2b^3}{c^2}-\dfrac{b^2x}{c}$.

(61) $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x+b}{x-b}+\dfrac{x+c}{x-c}=3$.　(62) $\dfrac{a+c(a+x)}{a+c(a-x)}+\dfrac{a+x}{x}=\dfrac{a}{a-2cx}$.

第三十五回

指數論

第二百三十六條　今回は指數の範圍を廣めて指數が、たとへ分數であらうとも、負數であらうとも取り扱ひに於ては、正の整數なる指數の如くなして、不都合なき樣に分數なる指數即ち分指數と、負數なる指數即ち負指數との釋義を定めて御覽に入れませう

扨てこれまでお話し致しました、指數は皆な正の整數となして論じたるのでありますから、若し指數に分數だの負數だのが生ずる樣なことがありますと取り扱ふことは出來ません即ち a^m の如く記するのは、a なる乘子が共數 m かさなりたる積だと申すのは m が正の整數のときに限るのでありま す、シテ $a^m\times a^n$ なるときは a^{m+n} となり、また $a^m\div a^n$ なるときは若し m が n より大なれば a^{m-n} となり若し m が n より小なれば $\dfrac{1}{a^{n-m}}$ となると申すのも m、n が正の整數のときに限るのであります、されど此の如く正の整數にあらざる

指數が取り扱ふことが出來れば、大に便利でありませう、ソコデ分指數と負指數との釋義を設るのであります

第二百三十七條　分指數と負指數とは、いまだお話し致しませぬ、ことゆへいかやうに、釋義致さうともかまわぬ筈であれど、其指數即ち m と n とが整、分、正、負に拘らず $a^m\times a^n=a^{m+n}$ なる關係式の理合に、はづれぬ樣に致すのには左の如く定めなければなりません

第一　$a^{\frac{1}{2}}$ の意義は左の如くであります

$a^{\frac{1}{2}}$ は分指數を有するものでありますが、假定に因て整數なる指數を有するものゝ如く見做して $a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a$ となす、此の如くなれば $a^{\frac{1}{2}}$ は自乘すると其結果に a を生ずるものでありませう、故に $a^{\frac{1}{2}}$ は a の平方根で即ち

$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$ であります

第二　$a^{\frac{1}{3}}$ の意義は左の如くであります

$a^{\frac{1}{3}}$ も前の如き假定に因て $a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=a^1=a$ となす、此の如くなれば

$a^{\frac{1}{3}}$ は三乘すると其結果に a を生ずるものでありませう、故に $a^{\frac{1}{3}}$ は a の立方根で即ち $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$ であります

第三　$a^{\frac{3}{4}}$ の意義は左の如くであります

$a^{\frac{3}{4}}$ も前の如き假定に因て $a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}=a^3$ となす、此の如くなれば $a^{\frac{3}{4}}$ は四乘すると其結果に a^3 を生ずるものでありませう、故に $a^{\frac{3}{4}}$ は a^3 の四乘根で即ち $a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3}$ であります

第二百三十八條　前の條の例にて、最早分指數の意義は、よくお分りになりましたらうが、尙普通の記號を用ひてお話し致しませう

第一　$a^{\frac{1}{n}}$ の意義は左の如くであります但シ（n 正の整數でさへあればドンナ數でもよろし）

$a^{\frac{1}{n}}$ も前の條の如き假定に因て $a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times\cdots\cdots$ の乘子の數を n かさねて $=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdots\cdots\frac{n}{n}}=a^1=a$ となす、此の如くなれば $a^{\frac{1}{n}}$ は n 乘すると其結果に a を生ずるものでありませう、故に $a^{\frac{1}{n}}$ は a の n 乘根で即ち

$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ であります

第二 $a^{\frac{m}{n}}$ の意義は左の如くであります但シ（m、n は正の整數でさへあればドンナ數でもよろし）

$a^{\frac{m}{n}}$ も前の條の如き假定に因て $a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times$ ……………………の乘子の數を n かさねて $=a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots\cdots n\text{に至る}}=a^m$ となす、此の如くなれば $a^{\frac{m}{n}}$ は n 乘すると其結果に a^m を生ずるものでありませう故に $a^{\frac{m}{n}}$ は a^m の n 乘根で即ち

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ であります

右の如くでありますから $a^{\frac{m}{n}}$ は、a の m 乘冪の n 乘根を顯すものであります、即ち分指數の分子は冪數の次數を顯し、分母は根數の次數を顯すものであります

第二百三十九條　整數と分數とに拘りたる指數の意義は、已にお話し致しましたから最早ドンナ數にても正數でさへあれば取り扱ふことは出來ませう、されどもまだ負指數の意義をお話し致しませんから、これより負指數の意義のお話しに取りかゝりませう

a^{-2} の意義は左の如くであります

a^{-2} は負指數を有するものでありますが、假定に因て正數なる指數を有するもの丶如く見做し $a^3\times a^{-2}=a^{3-2}=a^1=a$ となす、故に a^{-2} は a を a^3 にて除したる商で即ち $a^{-2}=\frac{a}{a^3}=\frac{1}{a^2}$ であります

第二百四十條　前の條にて最早負指數の意義もお分りになりましたらうが尚普通の記號を用ひてお話し致しませう

a^{-n} の意義は左の如くであります

a^{-n} も前の如き假定に因て m がドンナ數でも $a^m\times a^{-n}=a^{m-n}$ となす、シテ m が正數にして n より大なれば $a^{m-n}\times a^n=a^m$ でありませう、故に a^{m-n} は a^m を a^n にて除したる商で即ち $a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}$ であります、ソコデ $a^m\times a^{-n}=\frac{a^m}{a^n}$ となす、故に $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ であります、この a^{-n} を言葉にて申すときの爲めに倒數と申す名稱を設けます、即ち二ッの數の積が一となるときうの一ッの數を他の數の倒數と申すのであります、たとへば x は $\frac{1}{x}$ の倒數であります

右の如くでありますから a^{-n} は a^n の倒數でまた a^n は a^{-n} の倒數でありませう

即ちa^{-n}がa^nの倒數でまたa^nがa^{-n}の倒數であるといふことは、左の三ッの式の中ちなればドレにても其證となすことが出來ませう

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n},\qquad a^n=\frac{1}{a^{-n}},\qquad a^n\times a^{-n}=1.$$

第二百四十一條　負指數の意義を前の條にてお話し致しました通りに致すときは、$a^m\div a^n$は、たとへmがnより小なるときもmがnより大なるときの如く其結果をa^{m-n}となしてよろしう御坐います、ナゼと申すにmがnより小なりとするも左の如く$a^m\div a^n=a^{m-n}$となる故であります

$$a^m\div a^n=\frac{1}{a^{n-m}}=a^{-(n-m)}=a^{m-n}$$

また$m=n$とすれば$a^m\div a^n$は一となるでありませう、シテ其結果をa^{m-n}の如く記するときは$a^{m-n}=a^0$となります、ソコデ零乘冪の意義を左の如く定めます

零乘冪の意義は、これまでお話しを致しませぬことゆへ、いかやうに其意義

を定めてもよろしう御坐いませう、ソコデ$a^0=1$と致します即ちドンナ數にてもその零乘冪は一となすのであります

第二百四十二條　左に二三の例を以て、今回お話し致しました分指數と負指數との釋義の應用を御覽に入れませう

$$a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2},\qquad a^{\frac{3}{2}}=\sqrt{a^3},\qquad a^{\frac{4}{2}}=\sqrt{a^4}=a^2.$$

$$a^{-3}=\frac{1}{a^3},\qquad a^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{a}},\qquad a^{-\frac{4}{2}}=\frac{1}{a^{\frac{4}{2}}}=\frac{1}{a^2}.$$

扨て代數學に於て分指數と負指數とは、なくてならぬものではありませんナゼと申すに己に他の記號を用ひて顯し來りしものに、新の記法を設けたるまでのことにて、分指數と負指數とは別に設けずともことは、充分に足るでありませう、然るにこの記號を設けたるわけは、他の記號との釣合をとるためでありますこれを一口に申せば便宜上の記號であります、この記號の便利なることは、諸君が代數學の道に進むに從て、その必要を感するであり

ませう

第二百四十三條　$a^{\frac{1}{n}}\times b^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}}$　この證を左に御覽に入れませう

$x=a^{\frac{1}{n}}\times b^{\frac{1}{n}}$ となしこの兩節を n 乘すれば $x^n=(a^{\frac{1}{n}}\times b^{\frac{1}{n}})^n=(a^{\frac{1}{n}})^n\times(b^{\frac{1}{n}})^n$ となります、シテ $(a^{\frac{1}{n}})^n\times(b^{\frac{1}{n}})^n=a\times b$ でありますから $x^n=ab$ であります、この兩節を n 乘に開くときは $x=(ab)^{\frac{1}{n}}$ となります、故に $a^{\frac{1}{n}}\times b^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}}$ であります、これにてこの証は充分でありませう

また同じ方法にて左のものを証することが出來ます

$$a^{\frac{1}{n}}\div b^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$$

第二百四十四條　前の條の理に因て $a^{\frac{1}{n}}\times b^{\frac{1}{n}}\times c^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}}\times c^{\frac{1}{n}}=(abc)^{\frac{1}{n}}$ となります、シテ此理を推せば $a^{\frac{1}{n}}\times b^{\frac{1}{n}}\times c^{\frac{1}{n}}\times\cdots\cdots\times k^{\frac{1}{n}}=(abc\cdots\cdots k)^{\frac{1}{n}}$ となります

ソコデ a、b、c、……… k なる數が m ありて、皆な a に等しきものとすれば $(a^{\frac{1}{n}})^m=(a^m)^{\frac{1}{n}}$ でありませう、シテ $(a^m)^{\frac{1}{n}}$ は第二百三十八條に因れば $a^{\frac{m}{n}}$ でありますから $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}$ でありませう

右の如くでありますから、この條と第二百三十八條とを見競(みくら)ぶると、a の m 乘の n 乘根は、a の n 乘の m 乘根に相當するといふことが分りませう

第二百四十五條　$(a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{mn}}$　この証を左に御覽に入れませう

$x=(a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}}$ となし、この兩節を n 乘すれば $x^n=a^{\frac{1}{m}}$ となります、またこの兩節を m 乘すれば $x^{mn}=a$ となります、シテこの兩節を mn 乘に開くときは $x=a^{\frac{1}{mn}}$ となります、故に $(a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{mn}}$ であります、これにてこの証は充分でありませう

第二百四十六條　$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}}$　この証を左に御覽に入れませう

$x=a^{\frac{m}{n}}$ となし、この兩節を n 乘すれば $x^n=a^m$ となります、またこの兩節を p 乘すれば $x^{np}=a^{mp}$ となります、シテこの兩節を mp 乘に開くときは $x=a^{\frac{mp}{np}}$ となります、故に $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}}$ であります、これにてこの証は充分でありませう

第二百四十七條　これまでお話し致しました証は、また分指數を用ひずと

も其証を立ることが出來ます、今二百四十三條にてお話し致しました例を第二百四十二條の意義に因て$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$の如く記き定めて、この証を左に御覽に入れませう

前の如く$x=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$となし、この兩節を$n$乘すれば$x^n=(\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\times(\sqrt[n]{b})^n=a\times b$ 故に$x^n=ab$となります、シテこの兩節をn乘に開くときは$x=\sqrt[n]{ab}$となります、故に$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$でありますこれにてこの証は充分でありませう、この餘とても皆な此の如くであります

第二百四十八條　第二百三十八條と第二百四十二條との釋義はmとnとはドンナ數にても$a^m\times a^n=a^{m+n}$、$(a^m)^n=a^{mn}$なる關係式は皆な其理合にはづれぬ樣に致さうといふ考へより作りたるものでありますが、今それを後先に𛂞して御話し致しませう即ち此の如き釋義を先に設けて後ち$a^m\times a^n=a^{m+n}$$(a^m)^n=a^{mn}$なる關係式は$m$と$n$とハドンナ數にても皆な其理合にはづれぬものであるといふことを証明して御覽に入れませう

第二百四十九條　$a^{\frac{p}{q}}\times a^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$の証は左の如くであります
$a^{\frac{p}{q}}\times a^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{ps}{qs}}\times a^{\frac{qr}{qs}}$［これは第二百四十六條に因る］$=(a^{ps})^{\frac{1}{qs}}\times(a^{qr})^{\frac{1}{qs}}$［これは釋義に因る］$=(a^{ps}\times a^{qr})^{\frac{1}{qs}}$［これは第二百四十三條に因る］$=(a^{ps+qr})^{\frac{1}{qs}}=a^{\frac{ps+qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$

また同じ方法にて、左のものを証することが出來ます
$a^{\frac{p}{q}}\div a^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$

第二百五十條　$a^m\times a^n=a^{m+n}$なる關係式は、たとへm、nが分數でも正數でさへあれば、其理合に、はづれぬものであるといふこととの証はお話し致しましたから、この關係式はm、nがドンナ數でも正數でさへあれば其理合に、はづれぬといふことは、此分りになりましたらう、ソコデ今m、nの中ち一ッが負數なるときも、また二ッとも負數なるときも、この關係式は其理合に、はづれぬものであるといふことを証明して御覽に入れませう

第一　その一ッ即ちnを負數と假定して$n=-v$となす
右の如く假定すれば$a^m\times a^n=a^m\times a^{-v}=a^m\times\frac{1}{a^v}=\frac{a^m}{a^v}=a^{m-v}$［これは第二百四十九

條に因る〕$=a^{m+n}$

第二　二ッとも負數と假定して $m=-\mu,\ n=-\nu$ となす右の如く假定すれば $a^m\times a^n=a^{-\mu}\times a^{-\nu}=\frac{1}{a^\mu}\times\frac{1}{a^\nu}=\frac{1}{a^\mu a^\nu}=\frac{1}{a^{\mu+\nu}}$〔これは第二百四十九條に因る〕$=a^{-\mu-\nu}=a^{m+n}$

第二百五十一條　前の條の理に因て $a^m\times a^n\times a^p=a^{m+n}\times a^p=a^{m+n+p}$ となります、この外いくつ乘じ合せても同じ理(わけ)であります

ソコデ m、n、p 等なる指數が r ありて皆な m に等しきものなれば m はドンナ數にても $(a^m)^r=a^{mr}$ となります

第二百五十二條　$(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{pr}{qs}}$ この證は左の如くであります

$x=(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}}$ となすときは $x^s=(a^{\frac{p}{q}})^r=a^{\frac{pr}{q}}$〔これは第二百五十一條に因る〕この兩節を q 乘ずれば $x^{qs}=a^{pr}$ となります、故に $x=a^{\frac{pr}{qs}}$ であります、これにてこの證は充分であります

第二百五十三條　$(a^m)^n=a^{mn}$ にて m、n がドンナ數にても共理合に、はづれぬものであるといふことの證を左に御覽に入れませう

前の條にて m、n がドンナ數にても正數でさへあれば、恒に共理合に、はづれぬものであるといふことを、お話し致しましたから、この條にてその一ッが負數にても、また二ッとも負數にても共理合に、はづれぬものであるといふことを證明して御覽に入れませう

第一　n を負數となし、これを $-\nu$ となすときは、左の如くであります

$(a^m)^n=(a^m)^{-\nu}=\frac{1}{(a^m)^\nu}=\frac{1}{a^{m\nu}}=a^{-m\nu}=a^{mn}.$

第二　m、を負數となし、これを μ となすときは、左の如くであります

$(a^m)^n=(a^{-\mu})^n=\left(\frac{1}{a^\mu}\right)^n=\frac{1}{a^{\mu n}}=a^{-\mu n}=a^{mn}.$

第三　m、n を、ともに負數となし $m=-\mu,\ n=-\nu$ となすときは、左の如くであります

$(a^m)^n=(a^{-\mu})^{-\nu}=\frac{1}{(a^{-\mu})^\nu}=\frac{1}{a^{-\mu\nu}}=a^{\mu\nu}=a^{mn}.$

第一 $(x^{\frac{2}{3}}\times x^{\frac{4}{7}})^{\frac{14}{13}}$ 上式ノ最簡式ヲ求ム

第二 $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{-\frac{1}{3}}$, $a^{-\frac{1}{4}}$ 及ビ $a^{-\frac{1}{5}}$ ノ積ヲ求ム

第三 $\left(\frac{ay}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{bx}{y^2}\right)^{\frac{1}{3}}$, 及ビ $\left(\frac{y^2}{a^2b^2}\right)^{\frac{1}{4}}$ ノ積ヲ求ム

第四 $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{-\frac{3}{4}}$, $\sqrt[3]{a^4}$, $a^{\frac{1}{12}}$, $\sqrt[8]{a^{\frac{25}{3}}}$ 及ビ $(a^{-\frac{7}{4}})^{\frac{7}{6}}$ ノ積ヲ求ム

第五 $\frac{\{(a^m)^{\frac{1}{r}}(a^q)^{\frac{1}{n}}\}^{nr}}{\{\sqrt[q]{b^n}(\sqrt[m]{b})^r\}^{mq}}\div\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^q\right\}^r$ ノ最簡式ヲ求ム

第六 $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}b$ ニ $ab^{-\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$ ヲ乗ズベシ

第七 $x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}}$ ニ $x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$ ヲ乗ズベシ

第八 $a^{\frac{7}{2}}-a^3+a^{\frac{5}{2}}-a^2+a^{\frac{3}{2}}-a+a^{\frac{1}{2}}-1$ ニ $a^{\frac{1}{2}}+1$ ヲ乗ズベシ

第九 $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+1-a^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}$ ニ $a^{\frac{1}{3}}+1+a^{-\frac{1}{3}}$ ヲ乗ズベシ

第十 $-3a^{-5}+2a^{-4}b^{-1}$ ニ $-2a^{-3}-3a^{-4}b$ ヲ乗ズベシ

第十一 $x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}}$ ヲ $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$ ニテ除スベシ

第十二 $x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{4}{3}}$ ヲ $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$ ニテ除スベシ

第十三 $a^{\frac{3n}{2}}-a^{-\frac{3n}{2}}$ ニ $a^{\frac{n}{2}}-a^{-\frac{n}{2}}$ ニテ除スベシ

第十四 $2x^5y^{-3}-5x^4y^{-2}+7x^3y^{-1}-5x^2+2xy$ ヲ $x^3y^{-3}-x^2y^{-2}+xy^{-1}$ ニテ除スベシ

第十五 $a^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{3}{2}}b+ab^{\frac{3}{2}}-2a^{\frac{1}{2}}b^2+b^{\frac{5}{2}}$ ヲ $a^{\frac{3}{2}}-ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b-b^{\frac{3}{2}}$ ニテ除スベシ

第十六 $\frac{a^{\frac{3}{2}}-ax^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x-x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}-a^2x^{\frac{1}{2}}+3a^{\frac{3}{2}}x-3ax^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x^2-x^{\frac{5}{2}}}$ ノ最簡式ヲ求ム

第十七 $\frac{y^2}{x}+\frac{x^2}{4y}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{(xy)^{\frac{1}{4}}}$ ノ平方根ヲ求ム

第十八 $4a-12a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}+9b^{\frac{2}{3}}+16a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}-24b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}}+16c^{\frac{1}{2}}$. ノ平方根ヲ求ム

第十九 $256x^{\frac{4}{3}}-512x+640x^{\frac{2}{3}}-512x^{\frac{1}{3}}+304-128x^{-\frac{1}{3}}+40x^{-\frac{2}{3}}-8x^{-1}+x^{-\frac{4}{3}}$. ノ平方根ヲ求ム

第二十 若シ $a^b=b^a$ ナレバ $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}-1}$ ナリ而シテ若シ $a=2b$ ナレバ $b=2$ ナリト云フ其證ヲ求ム

第三十六回

無窮根數

第二百五十四條　今回は無窮根數の取り扱ひかたのお話しを致しませう扨て無窮根數のことは、已に第二百二十條にてお話し致しましたが、あれは平方根に就て申したのであります、併し別に平方根のみに限るわけではありません、ソコデその意義を一口に申せば要する處の根數を開き出すことの出來ぬものを無窮根數と申すのであります、即ち $\sqrt[3]{a^2}$ 或は $a^{\frac{2}{3}}$ の如きものを無窮根數と申すのであります、されど $\sqrt[3]{a^6}$ 或は $a^{\frac{6}{3}}$ の如きものは無窮根數の形をなすのみで其實、無窮根數ではありません

無窮根數の取り扱ひかたは、これよりお話し致しますから追々に御承知になりませうが、其方法は皆な前回に於てお話し致しました理合より出るものであります

第二百五十五條　常數は要する處の無窮根數の形に化することが出來ます、則ち常數を要する處の開指數と同じ次數の羃數となし、これに其根數號を配するのであります

たとへば a を二次の無窮根數の形になさんとせば $\sqrt[2]{a^2}$ にして、四次の無窮根數の形になさんとせば $\sqrt[4]{a^4}$ であります、また x^2 を三次の無窮根數の形になさんとせば $\sqrt[3]{x^6}$ にして、$a+x$ を n 次の無窮根數の形になさんとせば $(a+x)^{\frac{n}{n}}$ であります

又同じ方法を以てドンナ無窮根數にても其形を變化することが出來ます

たとへば $(a+x)^{\frac{1}{2}}=(a+x)^{\frac{2}{4}}=(a+x)^{\frac{4}{6}}=$……等であります、此法は第二百四十六條に因るものであります

第二百五十六條　無窮根數の段數は、根數號の內に入るゝことが出來ます則ち先づ段數を無窮根數の形に化し、シテ第二百四十七條に因て、この二ッの無窮根數を相乘するのであります

たとへば $a\sqrt{x}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{x}=\sqrt{a^2x}$;　$ay^{\frac{3}{2}}=(a^2)^{\frac{1}{2}}\times(y^3)^{\frac{1}{2}}=(a^2y^3)^{\frac{1}{2}}$

$x\sqrt{(2a-x)}=\sqrt{(2ax^2-x^3)}$,　$a(a-x)^{\frac{3}{2}}=\{a^2(a-x)^3\}^{\frac{1}{2}}$,

$4\sqrt{2}=\sqrt{(16\times2)}=\sqrt{32}$,　$6\sqrt{3}=3\sqrt{(4\times3)}=3\sqrt{12}$.

第二百五十七條　前の條に反して根數號の内より出して無窮根數の段數となすことが出來ます、則ち其段數を開指數と同じ羃數となしこれを以て根數號内のものを除するのであります

たとへば $\sqrt{(a^3-a^2x)}=a\sqrt{(a-x)}$,　$\sqrt{(a^2-ax)}=a^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{(a-x)}$,

$(a^2-x^2)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{2}{n}}\times\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}^{\frac{1}{n}}$,　$\sqrt{60}=\sqrt{(4\times15)}=2\sqrt{15}$,

$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{b}\left(1-\frac{b^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{b^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{(x^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{xb}$.

第二百五十八條　二ッの無窮根數の和(若しくは差)を求むるとき、若し其根數號内のものが同じければ、其段數の和(若しくは差)に其根數號内のものを根數號と共に配するのであります

たとへば $a\sqrt{x}\pm b\sqrt{x}=(a\pm b)\sqrt{x}$,

$\sqrt{300}\pm5\sqrt{3}=10\sqrt{3}\pm5\sqrt{3}=15\sqrt{3}$ 若しくは $5\sqrt{3}$,

$\sqrt{3a^2b}+\sqrt{3x^2b}=a\sqrt{3b}+x\sqrt{3b}=(a+x)\sqrt{3b}$.

第二百五十九條　二ッの無窮根數の積を求むるとき、若し其開指數が同じければ、其根數號内のもの丶積を作り、シテこれに其開指數を配するのであります

たとへば $a^{\frac{1}{n}}\times b^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}}$,（これは第二百四十三條に因る）

$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$,　$(a+b)^{\frac{1}{2}}\times(a-b)^{\frac{1}{2}}=(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}$.

若し無窮根數が段數を有するときは、その積に其段數の積を段數として配するのであります

たとへば $a\sqrt{x}\times b\sqrt{y}=ab\sqrt{xy}$,　$3\sqrt{8}\times5\sqrt{2}=15\sqrt{16}=60$.

第二百六十條　二ッの無窮根數の積を求むるとき、若し其分指數の分母が同じければ、各そのものを其分指數の分子と同じ次數の羃數に作り、シテ前の條の如くなすのであります

たとへば $2^{\frac{3}{2}}\times3^{\frac{1}{2}}=8^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{2}}=(24)^{\frac{1}{2}}$,

$$(a+x)^{\frac{1}{2}}\times(a-x)^{\frac{3}{2}}=\{(a+x)(a-x)^3\}^{\frac{1}{2}}.$$

若し無窮根數の分指數の分母が同じからざるときは、第二百五十五條に因て同じ分母を有する形となし、シテ右の法に因て其積を求るのでありますたとへば $(a^2-x^2)^{\frac{1}{4}}\times(a-x)^{\frac{1}{2}}=(a^2-x^2)^{\frac{1}{4}}\times(a-x)^{\frac{2}{4}}=\{(a^2-x^2)(a-x)^2\}^{\frac{1}{4}},$

$$2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{3}{6}}\times3^{\frac{2}{6}}=8^{\frac{1}{6}}\times9^{\frac{1}{6}}=(72)^{\frac{1}{6}}.$$

第二百六十一條　二ッの無窮根數の積を求むるとき若し其根數號內のもの同じければ、そのものに其分指數の和を配するのでありますたとへば $a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$,〔これは第二百四十九條に因る〕

$$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=2^{\frac{5}{6}}.$$

第二百六十二條　一ッの無窮根數を他の無窮根數にて除するとき、若し其開指數が同じければ、其根數號內のものゝ商を作り、シテこれに其開指數を配するのでありますたとへば $(ab)^{\frac{1}{n}}\div a^{\frac{1}{n}}=b^{\frac{1}{n}}$,〔これは第二百四十三條に因る〕

$$\sqrt{6}\div\sqrt{2}=\sqrt{3},\qquad (a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\div(a-b)^{\frac{1}{2}}=(a+b)^{\frac{1}{2}},\qquad \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

若し無窮根數が段數を有するときは、其商に其段數の商を段數として配するのでありますたとへば $ab\sqrt{xy}\div a\sqrt{x}=b\sqrt{y}$,　$4\sqrt{2}\div2\sqrt{2}=2$,　$\frac{6a^{\frac{1}{n}}}{2b^{\frac{1}{n}}}=3\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}.$

第二百六十三條　一ッの無窮根數を他の無窮根數にて除するとき若し其分指數の分母が同じければ、各そのものを其分指數の分子と同じ次數の羃數に作り、シテ前の條の如くになすのでありますたとへば $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{p}{n}}}=\left(\frac{a^m}{b^p}\right)^{\frac{1}{n}}$,　$4^{\frac{1}{2}}\div2^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{4}{2^3}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{m}}\div\left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{2}{m}}=\left(\frac{ps^2}{qr^2}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

若し無窮根數の分指數の分母が同じからざるときは、第二百五十五條に因て同じ分母を有する形となしシテ右の法に因て其商を求むるのでありま

す

たとへば $(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\div(b^3-x^3)^{\frac{1}{3}}=(a^2-x^2)^{\frac{3}{6}}\div(b^3-x^3)^{\frac{2}{6}}=\left\{\frac{(a^2-x^2)^3}{(b^3-x^3)^2}\right\}^{\frac{1}{6}}$.

第二百六十四條　一ッの無窮根數を他の無窮根數にて除するとき若し其根數號內のもの同じければそのものに其分指數の差を配するのであります

たとへば $a^{\frac{1}{m}}\div a^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}$, 〔これは第二百四十三條に因る〕

$$\sqrt{2}\div\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{2}}\div2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{6}}.$$

第二百六十五條　單なる無窮根數を分母になしたる式は、ときによりて其分母を常數となすことがあります、則ち其分母子に分母が常數になる樣な乘子を乘ずるのであります

たとへば $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ でありますソコデ無窮根數なる分母を常數になすは、ナンのためでと申すに、これは實算を施すときのためであります、則ち $\frac{2}{\sqrt{3}}$ の價を求むるとき、この儘此式より算するよりは $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ の形になして後、算する方が便利でありませう

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b},\qquad \frac{3}{\sqrt[3]{2}}=\frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}}=\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}.$$

第二百六十六條　たとへばその分母が二ッの無窮平方根よりなるも、その分母を常數となすは、甚だ容易なることで則ち左の如くであります

たとへば $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{(\sqrt{b}\pm\sqrt{c})(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}=\frac{a(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{b-c}$.

また同法にて $\frac{a}{b\pm\sqrt{c}}=\frac{a(b\mp\sqrt{c})}{(b\pm\sqrt{c})(b\mp\sqrt{c})}=\frac{a(b\mp\sqrt{c})}{b^2-c}$.

此理を推せば $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\frac{14+6\sqrt{5}}{9-5}=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$.

第二百六十七條　たとへばその分母が三ッの無窮平方根よりなるも、その分母を常數となすは、前の條の法を二度施すのであります、この餘とても、これに準ずるのであります

たとへば$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$の如き分母を有するものと假定すれば、先づ分母子に$\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$を乘ずるのであります、シテその分母を$a+b-c+2\sqrt{ab}$となしソコデまた分母子に$a+b-c-2\sqrt{ab}$を乘ずれば、その分母は$(a+b-c)^2-4ab$即ち$a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca$の如き常數となります

第二百六十八條　ドンナ無窮根數にても二項式なれば、これを常數となすべき乘子を發見することが出來ます

第一　二項式を$a^{\frac{1}{p}}-b^{\frac{1}{q}}$と假定すれば、左の如くであります

$x=a^{\frac{1}{p}}$, $y=b^{\frac{1}{q}}$となし、シテ$(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots\cdots+y^{n-1})=x^n-y^n$でありますから、ソコデ$x^n-y^n$即ち$a^{\frac{n}{p}}-b^{\frac{n}{q}}$を常數となすには$n|p$、$n|q$を整數と、なさなければなりません$n|p$、$n|q$を整數になすには、$n$を$p$、$q$の最小公倍數になすのが、一ばん簡易であります、故にnをp、qの最小公倍數となせば$x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots\cdots+y^{n-1}$は$x-y$を常數となすべき乘子であります、シテその常數は$x^n-y^n$であります

第二　二項式を$a^{\frac{1}{p}}+b^{\frac{1}{q}}$と假定すれば、左の如くであります

x、yを前の如くなし、シテ$(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots\cdots\pm y^{n-1})=x^n\pm y^n$［$\pm y^{n-1}$は、若し$n$が奇數なれば$+y^{n-1}$、偶數なれば$-y^{n-1}$を用ふ］でありますから$n$を$p$、$q$の最小公倍數となせば$x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots\cdots\pm y^{n-1}$は$x+y$を常數となすべき乘子であります、シテその常數は$x^n\pm y^n$であります

たとへば二項式を$a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}$と假定すれば$x=a^{\frac{1}{2}}$, $y=b^{\frac{1}{3}}$にしてnは6であります、故にこれを常數となすべき乘子は$x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$即ち$a^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{4}{2}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{3}{3}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{5}{3}}$即ち$a^{\frac{5}{2}}-a^2b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}-ab+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{5}{3}}$であります、シテ其常數は$x^6-y^6$即ち$a^{\frac{6}{2}}-b^{\frac{6}{3}}$即ち$a^3-b^2$であります

第二百六十九條　常數の平方根は、常數と無窮平方根とを合せたるものとなすことの出來ぬものであります

たとへば假にあるとして$\sqrt{n}=a+\sqrt{m}$となしこの式の兩節を自乘すると$n=a^2+2a\sqrt{m}+m$となります、ソコデ$2a\sqrt{m}=n-a^2-m$となして、これを$2a$にて

除すれば $\sqrt{m}=\frac{n-a^2-m}{2a}$ となります、これにては無窮根數が常數と等しくなります、これは不合理でありませう、故に $\sqrt{n}=a+\sqrt{m}$ となることとは決してありません

第二百七十條　二ッの無窮平方根の積は、若しその二ッの根數號內のものを同じものとなすことの出來ぬものなれば、必ず無窮平方根であります

たとへば假に $\sqrt{x}$ と $\sqrt{y}$ とを二ッの無窮平方根として、この根數號內のものを同じものとなすことの出來ぬものとなし、シテ $\sqrt{xy}=rx$ 〔この r は整數か若しくは分數であります〕とすれば $xy=r^2x^2$ にして $y=r^2x$ でありますから $\sqrt{y}=r\sqrt{x}$ となります、これにては $\sqrt{x}$ と $\sqrt{y}$ との二ッの根數號內のものが同じものとなすことの出來るものとなりました、これでは始めの假定に背きます、故に $\sqrt{xy}$ は必ず無窮平方根であります

第二百七十一條　一ッの無窮平方根は、根數號內のもの相同じきものにあらざれば他の二ッの無窮平方根を合せたるものとなすことの出來ぬものであります

たとへば假に $\sqrt{x}=\sqrt{m}+\sqrt{n}$ となし、この兩節を自乘すれば $x=m+n+2\sqrt{mn}$ となります、即ち $\sqrt{mn}=\frac{1}{2}(x-m-n)$ となります、これにては無窮平方根が常數と等しくあります、これでは不合理でありませう、故に $\sqrt{x}=\sqrt{m}+\sqrt{n}$ となることとは決してありません

第二百七十二條　常數と無窮根數とにて成立ちたるものなれば、ドンナ方程式 $x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}$ にても常數 x は常數 a に等しく、無窮平方根 $\sqrt{y}$ は無窮平方根 $\sqrt{b}$ に等しきものでありませう

ナゼと申すに若し x が a に等しからねば、x は a より大か小でありませう

ソコデ $x=a+m$ とすれば $a+m+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}$ となりますから $m+\sqrt{y}=\sqrt{b}$ であります、これにては $\sqrt{b}$ が常數 m と無窮平方根 $\sqrt{y}$ とにて成立つものとなりますから不合理であります〔このことは第二百六十九條にてお話し致しました通り、決してある筈のなきものであります〕故に $x=a$ にして $\sqrt{y}=\sqrt{b}$ であり

ます

第二百七十三條　若し$\sqrt{(a+\sqrt{b})}$が$\sqrt{x}+\sqrt{y}$の如く開き出せるものとすれば$\sqrt{(a-\sqrt{b})}$も$\sqrt{x}-\sqrt{y}$の如く開き出すことが出來ます

ナゼと申すに $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ でありますから、この兩節を自乘すれば $a+\sqrt{b}=x+2\sqrt{xy}+y$ となります、故に $a=x+y$ にして $\sqrt{b}=2\sqrt{xy}$ であります(これは第二百七十二條に因る)此の如くでありますから $a-\sqrt{b}=x-2\sqrt{xy}+y$ となります、ソコデこの兩節を平方に開くときは$\sqrt{(a-\sqrt{b})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$であります、故に $\sqrt{(a-\sqrt{b})}$ は $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ の如く開き出すことが出來ます

此理を推せば左の如くであります

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}\\ \sqrt{(a-\sqrt{b})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}\end{array}\right\}\text{また}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+y\\ \sqrt{(a-\sqrt{b})}=\sqrt{x}-y\end{array}\right.$$

第二百七十四條　常數と無窮平方根とを合せたる二項式の平方根は、時によりて常數と無窮平方根とを合せたるもの若しくは二ッの無窮平方根を合

せたるものとなすことが出來ます、則ち其方法は左の如くであります

扨て$a-\sqrt{b}$の平方根に相當するものを求めんとして $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ と假定すれば第二百七十三條に因て $\sqrt{(a-\sqrt{b})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ となるでありませう

ソコデ此兩方程式を加へ合せて二除すれば $\sqrt{x}=\frac{1}{2}\{\sqrt{(a+\sqrt{b})}+\sqrt{(a-\sqrt{b})}\}=$

$\sqrt{\frac{1}{4}\{\sqrt{(a+\sqrt{b})}+\sqrt{(a-\sqrt{b})}\}^2}=\sqrt{\frac{1}{2}\{a+\sqrt{(a^2-b)}\}}$ となります、また同じ方法に因て

$\sqrt{y}=\sqrt{\frac{1}{2}\{a-\sqrt{(a^2-b)}\}}$ となります

右の如く $\sqrt{x}=\sqrt{\frac{1}{2}\{a+\sqrt{(a^2-b)}\}}$ にして $\sqrt{y}=\sqrt{\frac{1}{2}\{a-\sqrt{(a^2-b)}\}}$ でありますから $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$ 即ち $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ は直ち發見することが出來ませう、シテ $\sqrt{(a-\sqrt{b})}$ 即ち $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ も直ちに發見することが出來ます

たとへば$3+2\sqrt{2}$の平方根を求むるに、右の結果を用ひて筭するときは、左の如くであります

$a=3$, にて $\sqrt{b}=2\sqrt{2}$ でありますから $\sqrt{(a^2-b)}=\sqrt{(9-8)}=1$ となります、故に $x\sqrt{}=\sqrt{\frac{1}{2}(3+1)}=\sqrt{2}$ にして $\sqrt{y}=\sqrt{\frac{1}{2}(3-1)}=1$ であります、故に $\sqrt{(3+2\sqrt{2})}=\sqrt{2}+1$

となります

また $7-2\sqrt{10}$ の平方根を求むるに、右の結果を用ひずに算するときは、左の如くであります

$\sqrt{(7-2\sqrt{10})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ と假定すれば $\sqrt{(7+2\sqrt{10})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ となるでありませう、ソコデこの兩式を加へ合せて二除すれば $\sqrt{x}=\frac{1}{2}\{\sqrt{(7+2\sqrt{10})}+\sqrt{(7-2\sqrt{10})}\}=\sqrt{\frac{1}{4}\{\sqrt{(7+2\sqrt{10})}-\sqrt{(7-2\sqrt{10})}\}^2}=\sqrt{\frac{1}{2}\{7+\sqrt{(49-40)}\}}=\sqrt{5}$ となります、また同法に因て $\sqrt{y}=\sqrt{2}$ となります、故に $\sqrt{(7-2\sqrt{10})}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$ であります

第二百七十五條　前の條にてお話し致しました如く $\sqrt{x}=\sqrt{\left\{\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}\right\}}$ にして $\sqrt{y}=\sqrt{\left\{\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}\right\}}$ でありますから $\sqrt{(a^2-b)}$ が無窮平方根のときは $\sqrt{x}$ 及び $\sqrt{y}$ の値は繁雜なる無窮根數となります、故に $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ なる式は甚だ入り組みたる形になりますから却て $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$ の儘になしておく方がよろしう御坐いませう

第二百七十六條　$\sqrt{(a^2c)}+\sqrt{b}$ の如き二項式は $\sqrt{c}\left(a+\sqrt{\frac{b}{c}}\right)$ の如き形に改ることが出來ますから、若し $a^2-\frac{b}{c}$ さへ平方に開くことが出來れば $a+\sqrt{\frac{b}{c}}$ の平方根は $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ なる形となすことが出來ます、故に $\sqrt{(a^2c)}+\sqrt{b}$ の平方根は $\sqrt[4]{c}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ であります

たとへば $\sqrt{32}+\sqrt{30}$ の平方根を求むるときは、左の如くであります

$\sqrt{32}+\sqrt{30}=\sqrt{2}(4+\sqrt{15})$ でありますから $\sqrt{(\sqrt{32}+\sqrt{30})}=\sqrt[4]{2}\times\sqrt{(4+\sqrt{15})}$ となります、シテ $\sqrt{(4+\sqrt{15})}=\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}$ でありますから $\sqrt{(\sqrt{32}+\sqrt{30})}=\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ となります

第二百七十七條　$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ なる式の平方根は時によりて $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ の形となして算出することが出來ます

$\sqrt{(a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ と假定すれば $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$ となります、ソコデ $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$, $2\sqrt{xz}=\sqrt{c}$, $2\sqrt{yz}=\sqrt{d}$ となして x、y、z の價を算出し、シテこの三ッの價が $x+y+z=a$ の方程式に合ふときは、假定の如き平方根を求むることが出來ます

たとへば $8+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}$ の平方根を求むるときは、左の如くであります

$\sqrt{(8+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ とすれば $8+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$ となります、ソコデ $2\sqrt{(xy)}=2\sqrt{2}$, $2\sqrt{(xz)}=2\sqrt{5}$, $2\sqrt{(yz)}=2\sqrt{10}$ とすれば、$\sqrt{(xy)}\times\sqrt{(xz)}=\sqrt{10}$ となります、シテこの式の兩節を $\sqrt{(yz)}=\sqrt{10}$ の式の兩節にて別々に除すれば $x=1$ となります、故に $y=2$, $z=5$ となります、この三ッの價は $x+y+z=8$ の方程式に合ふものでありますから其平方根は $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ 即ち $1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ であります

また $8+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}$ の平方根を求むるとき第二百七十四條の結果を用ひて算するときは、左の如くであります

$a=8+2\sqrt{2}$ とし $\sqrt{b}=2\sqrt{5}+2\sqrt{10}$ とすれば $\sqrt{(a^2-b)}=\sqrt{\{(8+2\sqrt{2})^2-(2\sqrt{5}+2\sqrt{10})^2\}}=\sqrt{(12-8\sqrt{2})}=2\sqrt{2}-2$ となりますから $\sqrt{x}=\sqrt{\frac{1}{2}\{8+2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-2)\}}=\sqrt{(3+2\sqrt{2})}=\sqrt{2}+1$ にして $\sqrt{y}=\sqrt{\frac{1}{2}\{8+2\sqrt{2}-(2\sqrt{2}-2)\}}=\sqrt{5}$ であります

故に $\sqrt{(8+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10})}=1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ となります

第二百七十八條　コンドは無窮平方根を有する方程式の解法を二ッ三ッ左に御覧に入れませう

第一　$\sqrt{(x+2)}+\sqrt{(x-14)}=8$ の如き方程式を解するには、左の如く致します

$\{\sqrt{(x+2)}+\sqrt{(x-14)}\}\{\sqrt{(x+2)}-\sqrt{(x-14)}\}=16$ となります、シテ $\sqrt{(x+2)}+\sqrt{(x-14)}=8$ でありますから $\sqrt{(x+2)}-\sqrt{(x-14)}=2$ となります、ソコデこの兩方程式を加へ合せて、その結果を二除すれば $\sqrt{(x+2)}=5$ となります、この兩節を自乗すれば $x+2=25$ となります、故に $x=23$ であります

また左の如く致してもよろしう御坐います

設けたる方程式に轉項法を施して $\sqrt{(x-14)}=8-\sqrt{(x+2)}$ となし、この兩節を自乗すれば $x-14=64-16\sqrt{(x+2)}+x+2$ となりますから $16(x-2)=80$ であります、ソコデこれを16にて除すれば $\sqrt{(x-2)}=5$ となります、またこの兩節を自乗すれば $x+2=25$ となります、故に $x=23$ であります

第二　$x+\sqrt{(5x+10)}=8$ の如き方程式を解するには、左の如く致します

設けたる方程式に轉項法を施して $\sqrt{(5x+10)}=8-x$ となし、この兩節を自乘すれば $5x+10=64-16x+x^2$ となりますから $x^2-21x=-54$ となるでありませう、故に $x^2-21x+\left(\frac{21}{2}\right)^2=\left(\frac{21}{2}\right)^2-54=\frac{225}{4}$ となります、この兩節を平方に開けば $x-\frac{21}{2}=\pm\frac{15}{2}$ となりますから $x=\frac{21}{2}\pm\frac{15}{2}=18$ 或ハ 3 であります、ソコデこの x の價を設けたる方程式即ち $x+\sqrt{(5x+10)}=8$ の x に代用するときは 3 はこの方程式に合ふものでありますが 18 はこの方程式に合はぬものであります

されどこの 18 は $x-\sqrt{(5x+10)}=8$ なる方程式に合ふものであります

ナゼ右の如く設けたる方程式に合はぬ x の價を得るかといふに其理は、設けたる方程式即ち $x+\sqrt{(5x+10)}=8$ を轉項法に因て $\sqrt{(5x+10)}=8-x$ となし、この兩節を自乘し $5x+10=64-16x+x^2$ の如き方程式として x の價を算出致しますからであります、故にこの x の價は $5x+10=64-16x+x^2$ の方程式に合ふものでありませう、シテこの方程式は $x-\sqrt{(5x+10)}=8$ よりも得るものでありますから $5x+10=64-16x+x^2$ の方程式は $x+\sqrt{(5x+10)}=8$, と $x-\sqrt{(5x+10)}=8$

とを含むものであります、故に算出したる x の價は $x+\sqrt{(5x+10)}=8$ に合ふものと $x-\sqrt{(5x+10)}=8$ に合ふものとの二ッがあるのでありませう

右の如くでありますから算出したる x の價は皆な設けたる方程式に合ふといふことは、保証致しません、ナゼと申すに却て他の形の方程式に合ふことがありますから

第三　$x-2\sqrt{(x^2+x+5)}-14=0$ の如き方程式を解するには、左の如く致します

設けたる方程式に轉項法を施して $2\sqrt{(x^2+x+5)}=x-14$ となし、この兩節を自乘すれば $4x^2+4x+20=x^2-28x+196$ となりますから $3x^2+32x=176$ となるでありませう、これより x の價を算出致しますと $x=4$ 或ハ $-\frac{44}{3}$ となります、ソコデこの x の價が設けたる方程式に合ふか合はぬかを試むるに、この x の價は二ッとも設けたる方程式に合はぬものであります、されどこの x の價は二ッとも $x+2\sqrt{(x^2+x+5)}-14=0$ なる方程式に合ふものであります

右の如くでありますから方程式の兩節を自乘して、無窮平方根を常數の形

に化するときは算出したる商の價は、設けたる方程式に合ふものか、合はぬものかを、必ず試さなければなりません、即ち第一にお話し致しました方程式の如きものも其商は試さなければならぬものであります、此後とても亦同じ

第四 $\sqrt{(x^2+9)}+\sqrt{(x^2-9)}=\sqrt{(34)}+4$ の如き方程式なれば、左の如くであります $\{\sqrt{(x^2+9)}+\sqrt{(x^2-9)}\}\{\sqrt{(x^2+9)}-\sqrt{(x^2-9)}\}=18=34-16$ となりませう、ソコデこの兩同式の兩節を設けたる方程式の兩節にて除すれば $\sqrt{(x^2+9)}-\sqrt{(x^2-9)}=\sqrt{(34)}-4$ となります、この二ツの方程式を加へ合せて二除すれば $\sqrt{(x^2+9)}=\sqrt{(34)}$ となりますから $x^2=25$ となります、故に $x=\pm5$ であります

この方程式は運算を施すに簡易なる手續を示すために、設けたるものであります、次の方程式も亦簡易なる手續の一ツであります

第五 $\frac{x+c+\sqrt{(x^2-c^2)}}{x+c-\sqrt{(x^2-c^2)}}=\frac{9(x+c)}{8c}$ の如き方程式を解するには、左の如く致します

この如き方程式を解するに運算の手數を省く方法があります則ち其方法は第百五十四條にてお話し致しました分數式の六ツの結果の應用でありま

す、ソコデ其第五の結果を用ひて設けたる方程式を $\frac{2(x+c)}{2\sqrt{(x^2-c^2)}}=\frac{9x+17c}{9x+c}$ となしこの方程式の兩節を自乘すれば $\frac{x+c}{x-c}=\frac{(9x+17c)^2}{(9x+c)^2}$ となります、またその第五の結果を用ひて $\frac{x}{c}=\frac{(9x+17c)^2+(9x+c)^2}{(9x+17c)^2-(9x+c)^2}=\frac{(9x+17c)^2+(9x+c)^2}{16c(18x+18c)}$ となし、この方程式の分母を拂ふて變化すれば $63x^2-18xc-145c^2=0$ となります、この方程式より x の價を求むるときは $x=\frac{5c}{3}$ 或ハ $-\frac{29c}{21}$ となります

第一 $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{2}{3}}$ 上式ヲ常數ニ化スル輔乘子ヲ求ムベシ

第二 $\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$ 上式ヲ常數ニ化スル輔乘子ヲ求ムベシ

第三 $\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}$ 上式ヲ常數ニ化スル輔乘子ヲ求ムベシ

第四 $\sqrt{3}=1.7320508$ ヲ知テ $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ノ價ヲ求ムベシ

第五 $\frac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{3})}=\frac{1}{5}\sqrt{15}$. 上式ノ證ヲ問フ

第六 $\frac{15}{\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{5}-\sqrt{80}}=\sqrt{5}(1+\sqrt{2})$. 上式ノ證ヲ問フ

第七 左ノ十二式ノ平方根ヲ求ムベシ

(1) $\frac{9x}{y}-24\sqrt{\frac{x}{y}}+34-24\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{9y}{x}$.

(2) $(a+b)^2-4(a-b)\sqrt{(ab)}$. (3) $4+2\sqrt{3}$.

(4) $7-4\sqrt{3}$. (5) $7+2\sqrt{10}$.

(6) $18+8\sqrt{5}$. (7) $75-12\sqrt{21}$.

(8) $16+5\sqrt{7}$. (9) $ab+c^2+\sqrt{\{(a^2-c^2)(b^2-c^2)\}}$.

(10) $\sqrt{27}+\sqrt{15}$. (11) $-9+6\sqrt{3}$.

(12) $1+(1-c^2)^{-\frac{1}{2}}$.

第八 $\frac{1+x}{1+\sqrt{(1+x)}}+\frac{1-x}{1+\sqrt{(1-x)}}$ 上式ニ於テ $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ トスレバ其價何程

第九 $\frac{1+x}{1+\sqrt{(1+x)}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{(1-x)}}$ 上式ニ於テ $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ トスレバ其價何程

第十 左ノ三式ノ平方根ヲ求ムベシ

(1) $6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$. (2) $5+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{15}$.

(3) $15-2\sqrt{3}-2\sqrt{15}+6\sqrt{2}-2\sqrt{6}+2\sqrt{5}-2\sqrt{30}$.

第十一 左ノ方程式ノ未知元 x ノ價ヲ求ムベシ

(1) $\sqrt{(x+11)}-\sqrt{x}=1$. (2) $\sqrt{(3x+4)}+\sqrt{(3x-5)}=9$.

(3) $a\sqrt{(b-x)}=b\sqrt{(a-x)}$. (4) $\sqrt{(x+a)}+\sqrt{(x+b)}=\sqrt{c}$.

(5) $x-\sqrt{(5x-10)}=2$. (6) $x+2\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+2x+2)}=16$.

(7) $\sqrt{10+x}+\sqrt{10x}=40$. (8) $\sqrt{(x^2-9)}-\sqrt{(x^2-16)}=1$.

第十二 $x-\sqrt{x+a}=b$ 上ノ方程式ヨリ算出セシ商若シ其式ノ理ニ合ザル片ハ如何ナル方程式ノ理ニ合フヤ

第三十七回

準二次方程式

第二百七十五條　今回は準二次方程式の解法のお話しを致しませう、扨て準二次方程式と申すは、二次方程式にはあらざれど、二次方程式の形と見做すことの出來るものでありますす、此の如き方程式は許多(あまた)ありますれど、皆な二次方程式の解法に倣ふて共商を筭出するのであります、シテ二次方程式の解法は、先回即ち第三十四回にてお話し致しましたからそれにて最早準二次方程式の解法はお分りになりましたらう、されどなかには二次方程式の形と見做すまでの手續をなさなければならぬものもあり、また叙でに準二次方程式にあらざるものゝ解法もお話し致したう御坐いますから、先づ始めの中ちは私が運筭を施して御覽に入れませう

第一　$x^4-9x^2+20=0$ 上ノ方程式ノ未知元 x ノ價ヲ求ムベシ

設けたる方程式に轉項法を施して $x^4-9x^2=-20$ となし、この方程式の両節

に $\left(\frac{9}{2}\right)^2$ を加へて $x^4-9x^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2=\left(\frac{9}{2}\right)^2-20=\frac{1}{4}$ となし、この方程式の両節を平方に開けば $x^2-\frac{9}{2}=\pm\frac{1}{2}$ となりますから $x^2=\frac{9}{2}\pm\frac{1}{2}=5$ 或ハ 4 であります、故に $x=\pm\sqrt{5}$ 或ハ ± 2 でありまず

第二　$ax^{2n}+bx^n+c=0$ 上ノ方程式ノ未知元 x ノ價ヲ求ムベシ

設けたる方程式に轉項法を施して $ax^{2n}+bx^n=-c$ となし、これを x^{2n} の段數 a にて除すれば $x^{2n}+\frac{b}{a}x^n=-\frac{c}{a}$ となります、この方程式の両節に $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ を加へて $x^{2n}+\frac{b}{2a}x^n+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a}$ となし、この方程式の両節を平方に開けば $x^n+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$ となりますから $x^n=\frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$ でありませう故にこの方程式の両節を n 乗に開けば x の價となります

第三　$x+4\sqrt{x}=21$ 上ノ方程式ノ未知元 x ノ價ヲ求ムベシ

設けたる方程式の両節に 2^2 を加へて $x+4\sqrt{x}+2^2=2^2+21=25$ となし、この方程式の両節を平方に開けば $\sqrt{x}+2=\pm5$ となりますから $\sqrt{x}=2\pm5=3$ 或ハ -7

でありませう(この-7は設けたる方程式に合はぬものでありますされどこの-7は$x-4\sqrt{x}=21$なる方程式に合ふものであります)故に$x=9$であります

第四　$x^{-1}+x^{-\frac{1}{2}}=6$ 上ノ方程式ノ未知元xノ價ヲ求ムベシ

設けたる方程式の兩節に$\left(\frac{1}{2}\right)^2$を加ふればて$x^{-1}+x^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+6=\frac{25}{4}$となりますこの方程式の兩節を平方に開けば$x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}=\pm\frac{5}{2}$となりますから$x^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}=2$或ハ$-3$であります(この$-3$は設けたる方程式に合はぬものでありますされどこの$-3$は$x^{-1}-x^{-\frac{1}{2}}=6$なる方程式に合ふものであります)故に$x^{-1}=4$でありますから$x=\frac{1}{4}$となります

第五　$x^2-7x+\sqrt{(x^2-7x+18)}=24$ 上ノ方程式ノ未知元xノ價ヲ求ムベシ

設けたる方程式の兩節に18を加ふれば$x^2-7x+18+\sqrt{(x^2-7x+18)}=42$となりますからこの方程式の兩節に$\left(\frac{1}{2}\right)^2$を加へて$(x^2-7x+18)+\sqrt{(x^2-7x+18)}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+42=\frac{169}{4}$となし、この方程式の兩節を平方に開けば$\sqrt{(x^2-7x+18)}+\frac{1}{2}=\pm\frac{13}{2}$となります故に$\sqrt{(x^2-7x+18)}=-\frac{1}{2}\pm\frac{13}{2}=6$或ハ$-7$であります(この$-7$は設けたる方程式に合はぬものでありますされどこの$-7$を用ふるときは$x^2-7x-\sqrt{(x^2-7x+18)}=24$なる方程式に合ふものであります)故に$x^2-7x+18=36$となりますこの方程式より$x$の價を求むるときは$x=9$或ハ$-2$であります

第六　$x^4+x^3-4x^2+x+1=0$ 上ノ方程式ノ未知元xノ價ヲ求ムベシ

設けたる方程式をx^2にて除すれば$x^2+x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$となりますこれは$x^2+2+\frac{1}{x}+x+\frac{1}{x}=6$となすことが出來ますから$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=6$となります、この方程式の兩節に$\left(\frac{1}{2}\right)^2$を加へて$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+6=\frac{25}{4}$となし、この方程式の兩節を平方に開けば$\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}=\pm\frac{5}{2}$となりますから$\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}=2$或ハ$-3$

ソコデ先づ$x+\frac{1}{x}=2$とすれば$x^2-2x+1=0$となりますから$x=1$であります

次に$x+\frac{1}{x}=-3$とすれば$x^2+3x=-1$となりますから$x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2-1=\frac{5}{4}$となります、即ち$x+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$であります、故に$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$であります

第七　$x^4+3x+1=3x^3+\frac{4}{9}x^2$ 上ノ方程式ノ未知元xノ價ヲ求ムベシ

設けたる方程式に轉項法を施して $x^4-3x^3+3x+1=\frac{4x^2}{9}$ となせばこれは $\left(x^2-\frac{3x}{2}\right)^2-\frac{9x^2}{4}+3x+1=\frac{4x^2}{9}$ となりますから $\left(x^2-\frac{3x}{2}\right)^2-2\left(x^2-\frac{3x}{2}\right)-\frac{x^2}{4}+1=\frac{4x^2}{9}$ となります即ち $\left(x^2-\frac{3x}{2}\right)^2-2\left(x^2-\frac{3x}{2}\right)+1=\frac{x^2}{4}+\frac{4x^2}{9}=\frac{25x^2}{36}$ でありますこの方程式の兩節を平方に開けば $x^2-\frac{3x}{2}-1=\pm\frac{5x}{6}$ 此の如くなりますから二ッの二次方程式が出來ます即ち一ッハ $x^2-\frac{3x}{2}-1=\frac{5x}{6}$ にして他のものは $x^2-\frac{3x}{2}-1=-\frac{5x}{6}$ でありますこの前の式より x の價を算出するときは $x=\frac{1}{6}(7\pm\sqrt{85})$ となりますまた後の式より x の價を算出するときは $x=\frac{1}{3}(1\pm\sqrt{10})$ となります

第八　$6x\sqrt{x}-11x+6\sqrt{x}-1=0$ 上ノ方程式ノ未知元 x ノ價ヲ求ムベシ

設けたる方程式は $x^2-6x\sqrt{x}+9x+2x-6\sqrt{x}+1=x^2$ となすことが出來すから $(x-3\sqrt{x})^2+2(x-2\sqrt{x})+1=x^2$ の如き形に改むることが出來ます故に $x-3\sqrt{x}+1=\pm x$ となりますこれにて＋を用ふれば $x-3\sqrt{x}+1=x$ となりますから $3\sqrt{x}=\frac{1}{3}$ とります故に $x=\frac{1}{9}$ となりますまた－を用ふれば $x-3\sqrt{x}+1=-x$ となりますから $2x-3\sqrt{x}=-1$ でありますこの方程式より $\sqrt{x}$ の價を求むるときは $\sqrt{x}=1$ 及ビ $\frac{1}{2}$ でありますから $x=1$ 及ビ $\frac{1}{4}$ であります

只今まで御覽に入れました通り、その問題に因て工夫を致すのでありますから其方法は一樣には、まいりません即ち種々樣々の手續を致さなければならぬものであります、されどいつまで其運算を御覽に入れましたからとて、盡るものでもありませんから準二次方程式の解法ハこれまでと致してをき他の解法を二ッ三ッ御覽に入れませうこれは乘子に分開して未知數の價を發見する方法と、また特別なる形の方程式にて一見して未知元の價を發見する方法とであります

第二百七十六條　乘子分開法に因て方程式を解するには、先づ諸項を前節に集めこれを一次若しくは二次の乘子に分開するときは、一乘子毎に方程式が出來ます、シテ其方程式をこれまでお話し致しました方法に因て解するのであります

ることが出來ます

第九　$(x-c)(x^2-3ax+2a^2)=0$　上ノ方程式ノ未知元 x ノ價ヲ求ムベシ

この如き方程式は $x-c=0$ 若しくは $x^2-3ax+2a^2=0$ なる方程式に合ふ x の價が設けたる方程式の x の價に合ふものでありませう(ソコデ $x-c=0$ とすれば $x=c$ となります、また $x^2-3ax+2a^2=0$ とすれば $x=a$ 或ハ $2a$ となります故に設けたる方程式に合ふ x の價は $x=c$ 或ハ a 或ハ $2a$ であります

第十　$x(x-c)^2=a(a-c)^2$　上ノ方程式ノ未知元 x ノ價ヲ求ムベシ

この如き特別の形なるときは直ちに $x=a$ となす方が便利であります(ナゼと申すに前節の x を a に代へるときは後節と同じ形になりますから a は設けたる方程式に合ふ x の價であります)ソコデ設けたる方程式の諸項を前節に集むるときは $x-a$ は其全式の一乘子であります、ナゼと申すに

$x^3-a^3-2c(x^2-a^2)+c^2(x-a)=0$ でありますから $(x-a)\{x^2+ax+a^2-2c(x+a)+c^2\}=0$

となります故に a の外の商は $x^2+ax+a^2-2c(x+a)+c^2=0$ なる方程式より求

第十一　$x(x+1)(x+2)(x+3)=2.3.4.5$　上ノ方程式ノ未知元 x ノ價ヲ求ムベシ

この如き方程式は直ちに $x=2$ 若しくは $x=-5$ となす方がよろしく御坐います(ナゼと申すに前節の x に 2 を代へても -5 にかへても後節と同じ形が出來ますから設けたる方程式に合ふ x の價であります)ソコデ設けたる方程式を前節に集むるときは $x-2$ も $x+5$ も其全式の一乘子であります、ナゼと申すに $x^4+6x^3+11x^2+6x-2.3.4.5=0$ でありますから $(x-2)(x+5)(x^2+3x+12)=0$ となります故に 2, -5 の外の商は $x^2+3x+12=0$ より求むるときが出來ます

されど 2, -5 の外の商は皆な虚商であります

第十二　$\sqrt{\left(\frac{3a}{4}-x\right)}+\sqrt{(3a-x)}=\frac{3a}{2}\sqrt{(1-4x)}$　上ノ方程式ノ未知元 x ノ價ヲ求ムベシ

この方程式は、第二百七十八條にてお話し致しました、第一、第四の解法の如く致しますれば、x の價を求むることが出來ますが、また左の如くなして一乘子を省きてもよろしう御坐います

この方程式は $\frac{3a}{2}\sqrt{(1-4x)}-\sqrt{\left(\frac{3a}{4}-x\right)}=\sqrt{(3ax-x)}$ の如くなすことが出來ますから、この兩節を自乘して $\frac{9a^2}{4}(1-4x)-3a\sqrt{(1-4x)}\sqrt{\left(\frac{3a}{4}-x\right)}=3ax-\frac{3a}{4}=-\frac{3a}{4}(1-4x)$ の如形となし、これを $\frac{3a}{4}\sqrt{(1-4x)}$ にて除すれば $(3a+1)\sqrt{(1-4x)}=4\sqrt{\left(\frac{3a}{4}-x\right)}$ となりますから、この兩節を自乘すれば $(3a+1)^2(1-4x)=16\left(\frac{3a}{4}-x\right)$ となりますから
$4x\{(1-3a)^2-4\}=(1+3a)^2-12a=(1-3a)^2$ となります、即ち $4x(3a+3)(3a-1)=(3a-1)^2$ であります、故に $x=\frac{3a-1}{12(a+1)}$ であります

この問題は、方程式の兩節を自乘するとき諸君に御注意を願はなければならぬことがありますから、ソコデ設けたるのでありますす即ち自乘する前に必ず諸項の排列を都合よき形になすことであります若しこの如き方程式にてその儘兩節を自乘するときは一ツも消失する項はありません、されど自乘する前に諸項の排列を都合よき形になしをくときは兩節より x を生ずるとも互に消失致します

第十三 $\sqrt{(2x+4)}-2\sqrt{(2-x)}=\frac{12x-8}{\sqrt{(9x^2+16)}}$ 上ノ方程式ノ未知元 x ノ價ヲ求ムベシ

設けたる方程式は $\sqrt{(2x+4)}-2\sqrt{(2-x)}=\frac{2\{(2x+4)-4(2-x)\}}{\sqrt{(9x^2+16)}}$ の如くかきかへることが出來ますから、この方程式より $\sqrt{(2x+4)}-2\sqrt{(2-x)}$ なる乘子を省くことが出來ます、ソコデその乘子を省き分母を排ふときは $\sqrt{(9x^2+16)}=2\{\sqrt{(2x+4)}+2\sqrt{(2-x)}\}$ となります、この方程式の兩節を自乘すれば
$9x^2+16=4\{12-2x+4\sqrt{(8-2x^2)}\}$ となりますから $x^2+8x=4(8-2x^2)+16\sqrt{(8-2x^2)}$ であります、この方程式の兩節に 4^2 を加へて $x^2+8x+16=4(8-2x^2)+16\sqrt{(8-2x^2)}+16$ となし、この兩節を平方に開けば $\pm(x+4)=2\sqrt{(8-2x^2)}+4$ となります、この方程式より x の價を求むるときは $x=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 若しくは虛商二ツとなります、また先きに省きたる $\sqrt{(2x+4)}-2\sqrt{(2-x)}$ なる乘子を空數として x の價を求むるときは $x=\frac{2}{3}$ となります

あとの問題は諸君のためにのこしておきますからよろしく未知元 x の價を求めて御覽なさい

第十四 $3x+2\sqrt{x}-1=0.$　第十五 $x^{10}+31x^5=32.$

第十六 $3x^3+42x^{\frac{3}{2}}=3321.$　第十七 $x^{\frac{1}{n}}-13x^{\frac{1}{2n}}=14.$

第十八 $x^6-35x^3+216=0.$　第十九 $x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{-2}{n}}+2=0.$

第二十 $x+2\sqrt{(ax)}+c=0.$　第二十一 $3x^4-7x^2=43076.$

第二十二 $x^4-14x^2+40=0.$　第二十三 $x^{\frac{1}{3}}+\frac{5}{2x^{\frac{1}{3}}}=3\frac{1}{4}.$

第二十四 $\sqrt{(2x)}-7x=-52.$　第二十五 $3x^n\sqrt[3]{x^n}+\frac{2x^n}{\sqrt[3]{x^n}}=16.$

第二十六 $x+5-\sqrt{(x+5)}=6.$　第二十七 $2\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}=5.$

第二十八 $x^{\frac{1}{4}}+5x^{\frac{1}{2}}-22=0.$　第二十九 $3x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{3}{4}}=7.$

第三十 $2x+\sqrt{(x+8)}=\frac{7}{2}.$　第三十一 $2(x^{\frac{1}{n}}+x^{-\frac{1}{n}})=5.$

第三十二 $\sqrt{(2x+7)}+\sqrt{(3x-18)}=\sqrt{(7x+1)}.$

第三十三 $\frac{\sqrt{(x^2-16)}}{\sqrt{(x-3)}}+\sqrt{(x+3)}=\frac{7}{\sqrt{(x-3)}}.$

第三十四 $\sqrt{(a+x)}+\sqrt{(a-x)}=\sqrt{b}.$　第三十五 $\sqrt{(x+9)}=2\sqrt{x}-3.$

第三十六 $x+\sqrt{(5x+10)}=8$　第三十七 $2^{x+1}+4^x=80$

第三十八 $\frac{x^3-\text{[illegible]}}{x-2}+\frac{x^2-1}{x+1}=39.$　第三十九 $\frac{\sqrt{(a+x)}}{\sqrt{a}+\sqrt{(a+x)}}=\frac{\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{a}-\sqrt{(a-x)}}.$

第四十 $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=n(n-1).$

第四十一 $(a+b)\sqrt{(a^2+b^2+x^2)}-(a-b)\sqrt{(a^2+b^2-x^2)}=a^2+b^2.$

第四十二 $x+\sqrt{x}+\sqrt{(x+2)}+\sqrt{(x^2+2x)}=a.$

第四十三 $2x+\sqrt{(2+2x)}=c(1-x).$　第四十四 $\frac{a-x}{\sqrt{a}+\sqrt{(a-x)}}+\frac{a+x}{\sqrt{a}+\sqrt{(a+x)}}=\sqrt{a}.$

第四十五 $\frac{\sqrt{(x+2a)}-\sqrt{(x-2a)}}{\sqrt{(x-2a)}+\sqrt{(x+2a)}}=\frac{x}{2a}.$　第四十六 $\sqrt{(x+8)}-\sqrt{(x+3)}=\sqrt{x}.$

第四十七 $\sqrt{(x+3)}+\sqrt{(x+8)}=5\sqrt{x}.$　第四十八 $\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}+\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}=\frac{34}{15}.$

第四十九 $\sqrt{(a+bx^n)}-\sqrt{a}=c\sqrt{(bx^n)}.$　第五十 $\sqrt{(x+4)}-\sqrt{x}=\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)}.$

第五十一 $x^2+\frac{1}{x^2}-a^2-\frac{1}{a^2}=0.$　第五十二 $\frac{850}{931}=\frac{x^2(x^4-a^4)}{x^6-a^6}.$

第五十三 $\frac{\sqrt{(x^2+1)}+\sqrt{(x^2-1)}}{\sqrt{(x^2+1)}-\sqrt{(x^2-1)}}+\frac{\sqrt{(x^2+1)}-\sqrt{(x^2-1)}}{\sqrt{(x^2+1)}+\sqrt{(x^2-1)}}=4\sqrt{(x^2-1)}.$

第五十四 $(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=(a^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}.$　第五十五 $\frac{a^2+x^2}{a+x}+\frac{a^2-x^2}{a-x}=4a.$

第五十六 $\sqrt{(1-x+x^2)}-\sqrt{(1x++x^2)}=m.$

第五十七 $\frac{x+\sqrt{(x^2-1)}}{x-\sqrt{(x^2-1)}}+\frac{x-\sqrt{(x^2-1)}}{x+\sqrt{(x^2-1)}}=34$.

第五十八 $\sqrt{(x^2-2ax+a^2)}+\sqrt{(x^2+3x+a^2)}=\sqrt{(2x^2+2b^2)}$.

第五十九 $a\sqrt{\left(\frac{6}{x}-x\right)}=\frac{1+x^2}{\sqrt{x}}$. 第六十 $\sqrt[2pq]{c}\sqrt{(x^{p+q})}-\frac{1}{2c}(\sqrt[p]{x}+\sqrt[q]{x})=0$.

第六十一 $\sqrt{x}+\sqrt{\{x-\sqrt{(1-x)}\}}=1$. 第六十二 $(x+a)^5-(x-a)^5=242a^5$.

第六十三 $\frac{x^3+1}{x^2-1}=x+\sqrt{\frac{6}{x}}$.

第六十四 $\sqrt{(x^2+ax+b^2)}+\sqrt{(x^2+bx+a^2)}=a+b$.

第六十五 $\frac{25x^2-16}{10x-8}=\frac{3(x^2-4)x}{2x-4}$.

第六十六 $\sqrt{(2x+9)}+\sqrt{(3x-15)}=\sqrt{(7x+8)}$.

第六十七 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\left\{\frac{(b-c)(ac-bx)}{abc}\right\}}=1$.

第六十八 $\sqrt{(x^2+2x-1)}+\sqrt{(x^2+x)}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

第六十九 $\sqrt{(x^2+ax-1)}+\sqrt{(x^2+bx-1)}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

第七十 $(x^2+1)(x+2)=2$. 第七十一 $(x^2+a)(x+b)=ab$.

第七十二 $(x-a)(x-b)(x-c)+abc=0$. 第七十三 $\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}=\frac{4x}{1+x^2}$.

第七十四 $\frac{1}{x+a+b}+\frac{1}{x-a+b}+\frac{1}{x+a-b}+\frac{1}{x-a-b}=0$.

第七十五 $\frac{(a-x)(a+m)}{x+n}=\frac{(a+x)(x-m)}{x-n}$. 第七十六 $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2=1+\frac{cx}{ab}$.

第七十七 $2x+1+x\sqrt{(x^2+2)}+(x+1)\sqrt{(x^2+2x+3)}=0$.

第七十八 $x^2+3=2\sqrt{(x^2-2x+2)}+2x$.

第七十九 $x^2+5x+4=5\sqrt{(x^2+5x+28)}$.

第八十 $\sqrt{(x^2-2x+9)}-\frac{x^2}{2}=3-x$. 第八十一 $3x^2+15x-2\sqrt{(x^2+5x+1)}=2$.

第八十二 $(x+5)(x-2)+3\sqrt{\{x(x+3)\}}=0$.

第八十三 $x^2+3-\sqrt{(2x^2-3x+2)}=\frac{3}{2}(x+1)$.

第八十四 $x(x+1)+3\sqrt{(2x^2+6x+5)}=25-2x$.

第八十五 $x^2-2\sqrt{(3x^2-2ax+4)}+4=\frac{2a}{3}\left(x+\frac{a}{2}+1\right)$.

第八十六 $x^2-x+3\sqrt{(2x^2-3x+2)}=\frac{x}{2}+7$.

第八十七 $\frac{9}{1+x+x^2}=5-x-x^2$. 第八十八 $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)=c^4$.

第八十九 $16x(x+1)(x+2)(x+3)=9$. 第九十 $\frac{a^2+ax+x^2}{a^2-ax+x^2}=\frac{a^2}{x^2}$.

第九十一 $a=x^4+(1-x)^4$. 第九十二 $x^4-2x^3+x=a$.

第九十三 $x^4-2x^3+x=132$.

第九十四 $\sqrt{x}+\sqrt{(x+7)}+2\sqrt{(x^2+7x)}=35-2x$.

第九十五 $x^2-8(x+1)\sqrt{x}+18x+1=0$.

第九十六 $2(x^2+ax)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{x}+\sqrt{(a+x)}=b-2x$.

第九十七 $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$. 第九十八 $x^4+4a^3x=a^4$.

第九十九 $x^4+ax^3+bx^2+cx+\frac{c^2}{a^2}=0$. 第百 $1+\sqrt{\left(1-\frac{a}{x}\right)}=\sqrt{\left(1+\frac{x}{a}\right)}$.

第百一 $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{142}{9}$. 第百二 $\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{x-1}{x}$.

第百三 $\frac{x^4+1}{(x+1)^4}=\frac{1}{2}$. 第百四 $x^3+1=0$.

第百五 $nx^3+x+n+1=0$. 第百六 $(x-2)(x-3)(x-4)=1.2.3$.

第百七 $(x-1)(x-2)(x-3)-(6-1)(6-2)(6-3)=0$.

第百八 $(x-1)(x-2)(x-3)=24$. 第百九 $6x^3-5x^2+x=0$.

第百十 $x^3+x^2-4x-4=0$. 第百十一 $\frac{x}{a}+\frac{b}{x}+\frac{b^2}{x^2}=1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}$.

第百十二 $8x^3+16x=9$. 第百十三 $x^2-\frac{2}{3x}=1\frac{4}{9}$

第百十三 $3x^5+8x^4-8x^2=3$. 第百十五 $x(x^2-2)=m(x^2+2mx+2)$.

第百十六 $(x^2-a^2)(x+a)b+(a^2-b^2)(a+b)x+(b^2-x^2)(b+x)a=0$.

第百十七 $x^3+px^2+\left(p-1+\frac{p}{p-1}\right)x+1=0$.

第百十八 $(p-1)^2x^3+px^2+\left(p-1+\frac{1}{p-1}\right)x+1=0$.