

最新

高中教本

范氏大代數

潘以康題

College Algebra

H. B. Fine



1943

新文化服務社發行

最新
高中教本

范氏代數

College Algebra

H. B. Fine



1943

新文化服務社發行

代數學學習要點

代數並不是一門艱難的學科，他所涉及的大都是呆板的法則，所以祇要懂得了這些呆板的法則，明白了某些不變的原理，然後依着一定的法則和原理去練習，去演算，是不會沒有成功的，唯一的秘訣便是繼續不斷的演習。強而有恆心，能忍耐，那麼克服代數這門學科的困難是易如反掌的。

常常聽得學生們說代數難。怕代數的難往往作何學科都怕。他們大多都把這種事實的原因委之於性情。往往說：「我的性情不近於代數，所以代數對我難。」或者說：「我沒有代數的天才。」其實這是一個很大的錯誤，用着愚笨的心理，看任何學科都是難的。反過來說，如果能用克勤克儉的精神與毅力去學習，那麼代數決不是一門艱難的學科。

其次，要說到學習代數時應該注意的幾點：

(一)多做算草多看例題，代數的習題，全賴多練習，多演算。單靠方法的了解是不夠的。因為解答代數的習題大都要靠經驗，必須親自去體驗，以獲得這種解答的經驗。許多習題的解答，都須親自去思考過，演習過，才能了解其中的訣巧。各題有各題的解法，各題有各題的奧秘，非親自去演習過，是很難獲有心得的。尤其是多看例題。因為例題就是已經說出了解答的奧秘的一種演算，可以幫助讀者啓發解答的思路，促成其他各題的解答，讀者不可忽略視之。

(二)熟記公式熟練方法，有許多代數習題，解答時可依一定公式或方法。學者如果能熟記記憶這些公式，熟練這種方法，那麼逐步求解，循序前進，必可減少許多困難。更可節省許多時間與腦力。

(三)應用圖解法以求解答，圖解法不特可使難於解答之方程式，求得一近似之答數；且可幫助學者瞭解求解之原理。更可進一步而為研究解析幾何之幫助。故圖解在代數中雖僅佔有一小部份，但其性質關係亦頗重大。

(四)克服心理上之困難，前面所說一般學生對於代數愚笨的心理，必須設法去克服牠。代數原是一門涉及數字的科學，所以大部份的演算也須以數字作為根據。繁雜的地方固然比較多，但其方法還是比較呆板的，習題的性質還是比較機械的，讀者如果能耐心忍性，不思艱難，依着一定的方法去做，那麼一定會克服這種困難的。

上述諸端，僅就譯者管見所及，略資顧見。而論之處，尚希讀者更正。

譯者例言

(一)譯書當以信達流暢為主。譯者笨拙，雖未能流暢，但於信達一點，則力求與原書意義並無參差或遺漏之處。

(二)本書術語，多採吾國通行者。如一名已有數譯，則始終採用一名，以表一致。其尚無適當譯名者，則由譯者定譯。且於每一術語之初譯處附以原文，以免讀者混淆而生隔礙之弊。

(三)本書頁碼悉依原著。即每頁內容均與原書相同。以便讀者對照。

(四)原文有英文索引一項，本書亦附以中文譯名，以便查閱。

目 錄

第一編 數

	頁
I. 自然數, 一數法, 加法與乘法	1
II. 減法與負數	16
III. 除法與分數	27
IV. 無理數	39
V. 虛數與複素數	70

第二編 代數

I. 緒論	79
II. 基本演算	93
III. 一元一次方程	110
IV. 聯立一次方程系	127
V. 除法變形	155
VI. 有理整式之因式	176
VII. 最高公因式及最低公倍式	196
VIII. 有理分式	213
IX. 對稱函數	245
X. 二項式定理	252
XI. 開方	260
XII. 無理函數, 根式與分指數	271
XIII. 二次方程	298
XIV. 二次方程之討論, 極大與極小	304
XV. 用二次方程式可解之方程式	309

XYI.	聯立方程之能以二次方程解之者.....	317
XVI.	不等式.....	340
XVIII.	不定一次方程.....	342
XIX.	比及比例.變數法.....	347
XX.	等差級數.....	354
XXI.	等比級數.....	357
XXII.	調和級數.....	362
XXIII.	逐差法,高階等差級數.插入法.....	364
XXIV.	對數.....	374
XXV.	排列及組合.....	398
XXVI.	多項式定理.....	408
XXVII.	可能率.....	419
XXVIII.	算學歸納法.....	421
XXIX.	方程論.....	425
XXX.	普通三次及四次方程.....	433
XXXI.	行列式及消去法.....	432
XXXII.	無窮級數之收斂.....	521
XXXIII.	無窮級數之演算.....	539
XXXIV.	二項級數.指數級數及對數級數.....	553
XXXV.	循環級數.....	580
XXXVI.	無窮連乘積.....	564
XXXVII.	連分式.....	566
XXXVIII.	連續函數之性質.....	577
	索引.....	591
	答案.....	1-36

第一編 數

I. 自然數—數法, 加法與乘法

事物之羣及其基數

事物之羣。依吾人日常之經驗，事物之呈現於當前而引起 1
吾人之注意者，不僅單獨的，但亦有集合而成羣或團者。

如手之指，家畜之羣，多角形之頂皆為事物羣之例。

當某事物與其他事物非個別的而從其全體區別，^{且彼此}成羣且為

吾人注意之單獨目的物時，則某事物可視作構造一羣。

為便利計，構成一羣之事物，名為此羣之元素。

等羣。逐一對應。文字 ABC 及 DEF 之二羣有關係，即可由 2
一羣各元素與他羣各元素，依一元素與一元素相匹配而將其所
有元素組合成對。例如 A 與 D ， B 與 E ，及 C 與 F 可匹配。

無論何時，如二羣之一切元素，皆能如此匹配者，則稱此二
羣相等；而諸元素之匹配方法稱為使二羣成一對一關係，或逐
一對一關係。

3 定理。設二羣皆等於同一第三羣，則互相等。

因依假設，可使其羣中每一羣與第三羣逐一對應，但羣中二元素與第三羣相同元素視為成偶，則此二羣當互相逐一應。

4 基數。吾人可設想所有可能的事物之羣，係分配於等羣之類，而任何二已知羣之屬於同類或異類，依是否可能使其逐一對應而定之。

例如，文字 $ABCD$ 與 $EEGH$ 之二羣屬於同類，而二羣 $ABCD$ 及 EFG 則為異類。

一類諸羣公有之性質，而從他類諸羣分別者，為一羣事物之數或其基數。換言之，

一羣中事物之數或其基數，為其本羣及可與其逐一對應之各羣公有之性質。

或可說：“事物羣之基數，為此羣之性質，其中事物，設重行排列，或以他事物逐一代換而仍不變者”；又可說“此為羣之性質，而此羣不關係於事物本身之特性及其羣中之排列”。

因排列事物或以他事物逐一代換，則僅能變為一等羣(§2)，且當其羣中一切如此變化而性質不變，是必無關於事物之特性及其排列。

部分。第一羣之元素有若干而非全體，爲第二羣之元素時，
則稱第一羣爲第二羣之一部分。

例如，羣 ABC 爲羣 $ABCD$ 之一部分。

由此定義可得：

若第一羣爲第二羣之一部分，而第二羣又爲第三羣之一部分，
則第一羣亦爲第三羣之一部分。

有限羣及無限羣，當一羣或圖不等於其本身諸部分之一時，
則稱爲有限；當等於其本身之某一部分時，則稱爲無限。

例如，羣 ABC 爲有限，因不能使其與 BC 或其任何部分逐
一對應。

但記號或符號之任何不盡連續，例如不盡數串 $1, 2, 3, 4, \dots$ ，
爲一無限圖。

例如，可於全圖 $1, 2, 3, 4, \dots$ 及自 2 起之部分間成立一對
應關係。

即於 $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ (a)

及 $2, 3, 4, 5, 6, \dots$ (b)

之間，(a)中之 1 與(b)中之 2 匹配，(a)中之 2 與(b)中之 3 匹配，餘
類推，——對於(a)中所可任擇之數，在(b)中有其對應數。

故圖(a)等於其部分(b) 因此(a)爲無限。

小基數及大基數。令 M 及 N 表任何二有限羣，則必爲下列情
形之一。

1. M 及 N 相等，
- 或 2. M 等於 N 之一部，
- 或 3. N 等於 M 之一部，

*當然不能將一無限羣。——多稱爲圖之一切元素——計
及，當已有定則而能由此斷言已知事物是否屬於此圖時，則吾人
視如此之圖，其意爲已定。

於第一情形，謂 M 及 N 有同基數 (§4)，或等基數；於第二情形，稱 M 之基數小於 N 之基數；於第三情形，稱 M 之基數大於 N 之基數。

例如，設 M 為文字 abc 之羣，及 N 為羣 $defg$ ，則 M 等於 N 之一部分。

例如等於部分 dof 。

故 M 之基數小於 N 之基數，而 N 之基數大於 M 之基數。

- 9 註 由§7有限羣之定義，此處所定“等”，“大”及“小”之關係，不可含混。

例如，此定義不能使 M 之基數同時等於及小於 N 之基數，因如此則 M 等於 N 亦等於 N 之一部分，故 N 等於其本身之一部分 (§)，而其終， N 為無限 (§7)。

- 10 系。 設三基數之第一數小於第二數，而第二數小於第三數，則第一數亦小於第三數。

設 M, N, P 表任何事物羣之基數， M 等於 N 之一部分，而 N 等於 P 之一部分；則 M 等於 P 之一部分 (§§, 8)。

- 11 基數系。由含一元素之一羣開始，而屢次“加”一新事物，導得基數表如下：

1. 一“羣”之基數，如 $|$ ，即含一元素。
2. 一羣之基數如 $||$ ，即加一元素於第一種之羣而得者。
3. 一羣之基數如 $|||$ ，即加一元素於第二種之羣而得者。
4. 如此類推，不止。

吾人名此種連續基數為“一”，“二”，“三”，……，而記以號 $1, 2, 3, \dots$ 表之。

就此系觀察，任何有限羣之基數，名為有限基數，下列觀察，視為由上述基數表而得者：

第一，此表中之各基數，皆為有限。

如羣 I 有限，因其不能等於其一部分 (§7) 故也；而其後各羣皆有限，因加一新事物於有限羣仍為有限故也。例如 I 為有限羣，故 II 為有限羣；因 II 為有限羣，故 III 為有限羣，餘依此類推。

第二，各有限基數皆含於此表內。

蓋依定義，各有限基數為若干有限羣之基數，如 M ，但可於 M 中每一物作一標記，作成一標記羣 III I 等於任何已知有限羣 M ，此標記羣必有一最後標記，故必含於 §11 之表內，蓋若標記無盡，則其本羣為無限，而 M 亦為無限故也 (§7)。

第三，諸基數中無二因相等。

此可由 §5 定義而知之。蓋因已證明一切羣 I, II, III, 皆為有限，而其中每二羣之一等於他羣之一部分為真確故也。

*可證明如下 (G Cantor, Math. Ann; 46 卷, 49 頁)：

設 M 表一有限羣，而 e 為單一事物，則羣 Me 為加 e 於 M 而得，亦為有限。

令 $G = H$ 表羣 G 及 H 相等。

若 Me 為無限，則必等於其一部分 (§7)。

令 P 表此部分，則 $Me \equiv P$ 。

(1) 假定 P 不含 e 。

令 f 表 P 內與 Me 中之 e 四配之元素，而以 P_1 表 P 之餘部。

則因 $Me \equiv P$ ，而 $e \equiv f$ ，得 $Me \equiv P_1$ 。

但此為不可能，因 M 為有限羣而 P_1 為 M 之一部分 (§7) 故

(2) 假定 P 含 e 。

則 P 中之 e 不能與 Me 中之 e 匹配，因若能配合，則 P 之部分將等於 M 矣。但可假定 P 中之 e 與他元素

配合及 Me 中之 e 與 P 中之 f 匹配。

設 $Me \equiv P$ 在此假設為真，則設再組合諸元素 e, f, g 使 P 中之 Me 中之 e 四配及 P 中之 f 與 Me 中之 g 四配亦真。但適知， P 之一部分將等於 M 矣，故此假設亦不可能。

自然記法 方程及不等式

- 13 自然數，符號 $1, 2, 3, \dots$ 或其名“一”，“二”，“三”，……，謂之正整數或自然數。故

一自然數爲一基數之記號或符號。

自然記法14，排列此諸基數其次序對於§11所代表之已知基數，則得不盡之連續記號。

$1, 2, 3, 4, 5, \dots,$

或“一”，“二”，“三”，“四”，“五”，……，此名自然記法

或自然數之記法。

- 15 記法內各記號表其中已定部分之記號數。

例如，4表記號 $1, 2, 3, 4$ 之數，與此記號 $1, 2, 3, 4$ 之數，與第1，2，3，4之數相同，易言之，即與最後舉之標記號Ⅲ相同 (§8)，普通皆如是。

- 16 記法之次序性質。自然記法，就其本身而言，僅爲不同記號之圈，其第一記號爲1；繼其後之一定記號即2；再繼其後之一定記號即3；如此無止境。

易言之，自然記法僅爲不同記號之圈，依一定且已知次序一個隨一個而來，且有第一記號而無最後記號。

自其觀察點而論，自然數本身，僅爲有次序之標記，即當默誦此記法時——關於時間——其次序自能呈現。

- 17 顯然可見，此記法與普通一切之圈，其元素依一定且已知次序而排列者，皆有下列性質：

1. 任何二元素可稱為其一在“前”而他一在“後”，此“前”“後”之語，應用於任一對元素與應用於任何其他一對，有同一意義。

2. 設任何二元素為已知，則常可定其孰前孰後。

3. 設 a, b , 及 c 表任何三元素而 a 在 b 前，及 b 在 c 前，則 a 在 c 前。

一圖有已知其具上述性質者，或可由選擇排列方法而置之如是者。此種情形，皆稱此圖為次序系。

第一類之例，如(1)自然記法本身；(2)時間內之連續事件；(3)沿水平線由左至右排成之點列，第二類之例，為按諸人之姓名字母依次排列者之一羣。

一圖亦可有“一致”之元素，如在事物之羣，有二事或諸專可同時發生。 18

當上述關係1,2,3,保持於不一致元素中——即不一致元素之真確如下者，則稱此圖為依次序。

4. 設 a 與 b 一致，及 b 與 c 一致，則 a 與 c 一致。

5. 設 a 與 b 一致，而 b 在 c 前，則 a 在 c 前。

基數中之大小關係，用自然數依記法中次序關係表示之。 19

因任何二已知基數之一，其在自然數記法中較後者必較大。

且“設三基數之第一個小於第二個，而第二個小於第三個則第一個小於第三個”之關係，可以記法中“設 a 在 b 前，而 b 在 c 前，則 a 在 c 前”之關係代表之。

實則罕用任何別法以比較基數，吾人不用§§之方法，直接比較物羣之基數。反言之，即以合宜之自然數代表，而由其自然數在記法中之關係次序，推知孰大孰小，此事不必思索，因記法深印腦中，故當述及任何二自然數時，即可認識其孰前孰後。例如“城及A, B二城，A之人口為12000，而B為125000，則可立即斷定B城居民較多，因知125000於記法中在12000之後故也。

20 數之方程及不等式 以後凡言“數”，皆指自然數(§13)；而文字 a, b, c 表此任何數。

21 當欲使 a 及 b 表同數自然記法中之“一致之數”，應用方程。

$$a = b, \text{讀作“}a\text{等於}b\text{”} ;$$

22 但當使自然記法中表 a 在前而 b 在後時，應用不等式

$$a < b, \text{讀作“}a\text{小於}b\text{”} ;$$

$$b > a, \text{讀作“}b\text{大於}a\text{”} .$$

23 依嚴格而論，此“等於”“小於”及“大於”諸語，自不涉於記號 a 及 b 之本身，但指其所代表之基數例如“ a 小於 b ”一語，僅為“ a 所表之基數小於 b 所表之基數”之略語而已。

但一切不等式 $a < b$ 於記號 a 及 b 本身之意義，為於記法中 a 在 b 前。

24 方程及不等式之規則。由 §§ 17, 18, 及 §§ 21, 22 之定義，即得。

1. 設 $a = b$ 及 $b = c$, 則 $a = c$.

2. 設 $a < b$ 及 $b < c$, 則 $a < c$.

3. 設 $a = b$ 及 $b < c$, 則 $a < c$.



數法

算術之主旨，在論自然數中存在之次序關係，及諸數可組合者之若干演算法。 25

算術之演算，以數法為起點。

數法。欲發覺已知物羣之基數為何，則於此羣。 26

此運算為人所熟知，先取諸物之一部“一”，次取另一物體“二”如此至諸物無遺而止。——如用口述記號「一」「二」……則須依記法中次序，慎勿遺漏；但選擇諸物，則依任何次序或從其便，如此則最後所得之記號，即所求者——此羣中基數之名，蓋由於記法之基數次序，此最後記號表已數過若干記號 (§15)，從而此羣內有若干物 (§8)。

此數法之運算，可認為引導所計算之羣與自然數法之一部對應 (§2) ——此部分自“一”起而以計算時所用最後數為止。

觀察自然數用於數法，有二重目的：(1)僅用其某一羣為運算時之數碼，及(2)應用最後一字以錄此記法之結果。

前已熟知諸物之選擇，與其次序無關，此可證明如下：

定理。有限物羣無論依如何次序選擇諸物，其數法之結果皆同。 27

例如，假定依次序 P 選擇諸物時，一定羣數法之結果為 98，但依他次序 Q ，則為 97。

則在次序 P 中前 07 物所成之羣，將與次序 Q 中之全羣相等，蓋依假設，二者皆有與自然記法之前 07 數相匹配者 (§3)。

但此為不可能，因如此則將使此羣之一部分等於其全羣；然則由假設，此羣為有限羣 (§7) 故也。

28 基數之另一定義。 適所證明之定理，可作為一有限羣基數定義之基礎，即：

有限物羣之基數為此羣之性質，不論以任何次序數此羣，均可由此性質達到同一自然數。

設以如 §16 所定之自然記法，為論數之起點，則此為自然所趨之基數定義。

加 法

29 加法定義。 加 3 於 5，意即求自然記法中，5 以後何數佔第三位置。

在記法中，自 6 起，向後數三數，如：6, 7, 8，可求得此數 8。
表此演算用符號 +，讀作“加”，書作 $5+3=8$ 。

就一般而言，加 b 於 a 意即求自然記法中， a 以後何數佔第 b 位置。

因此記法中無最後之符號，故此數常可求得，稱之為 a 及 b 之和，而於其 a 與 b 之關係，以式 $a+b$ 表之。

註 求 $a+b$ 之方法。即於自然記法中，以 b 物一羣之元素逐步對應而加於 a 物之一羣，故 (1) 此方法最後之結果，為 $a+b$ 物之一羣 (§8)，及 (2) 設 a 及 b 表有限基數，則 $a+b$ 亦然，參看 § 頁脚註。

因 $a+1, a+2$ 等等, 表 a 以後之第一, 第二等數, 故連續數 $a+1, a+2, \dots$ 表記法中 a 以後之一切部分. 31

故 a 以後之任何已知數, 可以形式 $a+d$ 表之, 此處 d 表一定自然數,

演算. 用數法加大數, 必致困難, 故須記憶若干小數之和 (加法表), 而應用下節說明所謂加法“定律”者, 以導出大數之和. 32

加法定律. 加法為“交換”及“結合”之演算; 即依下列二定律: 33

交換定律. $a+b=b+a.$ 34

加 b 於 a 與加 a 於 b 之結果相同.

結合定律. $a+(b+c)=(a+b)+c.$ 35

先加 c 於 b 再加所得之和於 a . 與先加 b 於 a 再加所得之和於 c , 其結果相同.

註 實際可以 $a+b+c$ 代式 $(a+b)+c$. 蓋吾人領悟式 $a+b+c+\dots$ 表加 b 於 a . 再加 c 於所得之和等等之結果. 36

定律之發明. 吾人可證明此諸定律如下: 37

第一. 交換定律: $a+b=b+a.$

例如, $3+2$ 之和與 $2+3$ 相等.

因 $3+2$ 表自然記法中之先數三數, 再數二數; 即

所數之羣 $1, 2, 3, 4, 5,$ (a)

數號 $1, 2, 3, 1, 2,$ (b)

但於記號(a)及(b)之二羣間, 為一對一之關係, 而每一對一之關係為交互的 (§2), 故可互換(a)及(b)之工作; 則設(b)為所數之羣, 則(a)表數號之羣.

故求 $3+2$ 等於數其記號羣 $1, 2, 3, 1, 2,$ (b)

同理, 求 $2+3$ 等於數其羣 $1, 2, 1, 2, 3.$ (c)

但(b)及(c)由同記號而成, 僅其記號之排列不同, 故數法之結果相同 (§27);

即 $3+2=2+3.$

任何二自然數 a 及 b 仿此.

第二. 結合定律: $a+(b+c)=(a+b)+c.$

先於 a 以後數至第 b 記號, 即至 $a+b$, 而於其後再數至第 c 記號, 即至 $(a+b)+c$. 則已共計算 $b+c$ 個記號於 a 以後達到第 $(b+c)$ 記號, 即至第 $a+(b+c)$.

若數之觀念包含於上述之證明中, 但可舍此觀念而下加法之定義及建立其定律, 如下列圖註以明之.

著名大數學家斐亞諾氏立自然數系不用基數之觀念, 另用一種“公法”如以下所述者——其中之“數”均指“自然數”

1. 記號 1 爲一數.
2. 各數 後有一繼續數, ——稱之爲 $+$.
3. 此數 $a+$ 永不爲 1.
4. 設 $a+=b+$, 則 $a=b$.
5. 每一已知數 a 在順序 $1, 1+, (1+) +, \dots$ 中, 諸數 $2, 3, \dots$ 定之如下:

$$2 = 1 +, 3 = 2 +, \dots$$

和 $a+b$ 意謂由一串公式 $a+1=a+, a+2=(a+1)+, \dots$ 所定之數(由 5 推出).

上述一串公式, 等於簡單公式

$$6. \quad a+(b+1)=(a+b)+1,$$

由 6 用“數學歸納法”, 導出加法定律:

$$7. \quad a+(b+c)=(a+b)+c,$$

$$8. \quad a+b=b+a.$$

第一. 設 $a=k$ 時 7 爲真, 則 $c=k+1$ 時亦真, 因由 6 及 7,

$$a+[b+(k+1)] = a+[(b+k)+1] = [a+(b+k)]+1 = [(a+b)+k]+1 = (a+b)+(k+1).$$

但 $c=1$ 時由 6, 7 爲真,

故當 $c=2$ 時 7 爲真, \therefore 當 $c=3$ 時, $\dots, \therefore c$ 爲任何, a 數時, 則依 6 知 7 亦爲真.

第二. 先證 8 之特殊情形: $8'. \quad a+1=1+a.$

於 $a=k$ 設 $8'$ 爲真, 則依 6 知 $(k+1)+1=(1+k)+1=1+(k+1)$

故於 $a=k$ 而 $8'$ 爲真, 則於 $a=k+1$ 亦爲真, 因 $8'$ 於 $a=1$ 爲真, 故於 $a=2$ 亦真, $\dots, a=3, \dots$ 皆真.

最後, 設於 $b=k$ 而 8 爲真, 則於 $b=k+1$ 亦真. 由 7 及 $8'$:

$$a+(k+1) = (a+k)+1 = 1+(a+k) \\ = 1+(k+a) = (1+k)+a = (k+1)+a.$$

因 $b=1$ 時 8 爲真(由 $8'$), 故於 $b=2$ 亦真, \dots 於 $b=3, \dots$ 皆真.

參看史托耳氏及葛梅尼氏理論算術 13 頁及其後所引亞諾氏之處; 亦可參看翠亭吞氏在美國數學會之報告第 IX 編 40 頁, 格拉斯曼氏(算術譯本)首先自 6 導出 7 及 8.

關於和之一般定理，反覆應用第 34, 35 節中之定律可證 38
明

任何有限個數之數，不論依如何次序排列之，或不論依如何
方法集合之，其相加時之和當相等。 01

例如 $a+b+c+d = a+c+b+d.$

蓋因 $a+b+c+d = a+(b+c)+d$ §35

$= a+(c+b)+d$ §34

$= a+c+b+d.$ §35

和之相等及不等法則。第一。自 (§29) 和之定義，及 §24
之法則，推得

1. 設 $a=b$ ，則 $a+c=b+c.$

2. 設 $a<b$ ，則 $a+c<b+c.$

3. 設 $a>b$ ，則 $a+c>b+c.$

此處 1 已顯然，因設 $a=b$ ，則 a 及 b 表同數。

今可證 3 如下，而以同理證 2。

設 $a>b$ ，令 $a=b+d$ ， (§31)。

則 $a+c=(b+d)+c=(b+c)+d$ ， (§§31, 35)。 $\therefore b+c < a+c$

第二，自 1, 2, 3，可推得其逆。

4. 設 $a+c=b+c$ ，則 $a=b.$

5. 設 $a+c<b+c$ ，則 $a<b.$

6. 設 $a+c>b+c$ ，則 $a>b.$ 01

如設 $a+c=b+c$ ，則 $a=b$ ，

蓋不如是則必或得 $a<b$ 因而 $a+c<b+c$ (由 2)，或 $a>b$
因而 $a+c>b+c$ 由 3)。

第三。自 1, 2, 3，又可推得

7. 設 $a=b$ ，及 $c=d$ ，則 $a+c=b+d.$

8. 設 $a<b$ ，及 $c<d$ ，則 $a+c<b+d.$

9. 設 $a>b$ ，及 $c>d$ ，則 $a+c>b+d.$

例如，設 $a=b$ ，則 $a+c=b+c$ ，又設 $c=d$ ，則 $b+a =$
 $b+d.$

故 $a+c=b+d.$

$b \quad c$

乘 法

- 40 乘法定義。以 b 乘 a 即求 b 個數每數皆為 a 者之和。
今名其和為以 b 乘 a 之積，而將 a 及 b 以 $a \times b$ 或 $a \cdot b$ 或
簡書 ab 表之。
故由定義
- 41 $ab = a + a + \dots$ 至 b 項。
- 42 a 亦名為被乘數， b 為乘數，而 a 及 b 為 ab 之因數。
- 43 演算。如欲用累次加法以求積，則甚繁，故宜熟記小數之
積（乘法表），而由此藉加法定律與下節所說明之乘法定律以導
出大數之積。
- 44 乘法定律。乘法亦如加法，為交換及結合之演算，而關於
加法為分配，即依以下三定律：
45. 交換定律， $ab = ba$ ，
以 b 乘 a 之結果，與以 a 乘 b 相同。
例如， $2 \cdot 3 = 6$ 及 $3 \cdot 2 = 6$ 。
- 46 結合定律， $a(bc) = (ab)c$ 。
以積 bc 乘 a 之結果，與以 c 乘積 ab 相同。
例如， $2(3 \cdot 4) = 2 \cdot 12 = 24$ ；及 $(3 \cdot 2)4 = 6 \cdot 4 = 24$ 。
實際書 abc 以代 $(ab)c$ ，比較 §36。
- 47 分配定律， $a(b+c) = ab+ac$ 。
先加 b 及 c 而以其和乘 a 之結果，與先以 b 乘 a 及 c 乘 a
而加其所得之積相同。

例如, $3(4+5) = 3 \cdot 9 = 27$; 及 $3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 12 + 15 = 27$.

定律之證明, 此諸定律可證明如下:

48

第一. 分配定律: $ab + ac = a(b+c)$. (1)

因 $ab + ac = (a+a+\dots$ 至 b 項) $+$ $(a+a+\dots$ 至 c 項), (§41)

$= a+a+a+\dots$ 至 $(b+c)$ 項 $= a(b+c)$. (§§35, 41).

故 $a(b+c+\dots) = ab+ac+\dots$. (2)

例如, $a(b+c+d) = a(b+c) + ad$
 $= ab+ac+ad$ 由(1)及 (§35)

又有 $ac+bc = (a+b)c$. (3)

因 $ac+bc = (a+a+\dots$ 至 c 項) $+$ $(b+b+\dots$ 至 c 項)
 $= (a+b) + (a+b) + \dots$ 至 c 項 $= (c+b)c$ (§38).

第二. 交換定律 $ab = ba$.

$ab(1+1+\dots$ 至 a 項) b
 $= 1 \cdot b + 1 \cdot b + \dots$ 至 a 項 由 (3)
 $= b + b + \dots$ 至 a 項 $= ba$. (§41)

第三. 結合定律 $(ab)c = a(bc)$.

$(ab)c = ab+ab+\dots$ 至 c 項 (§41)
 $= c(b+b+\dots$ 至 c 項) $= a(bc)$. 由(2)及 (§41).

積之一般定理. 此諸定律可推廣於任何有限個因數之積, 即

任何有限個因數之積, 與相乘之因數之次序無關.

積之等式及不等式法則, 即為:

50

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1. 設 $a=b$, 則 $ac=bc$. | 4. 設 $ac=bc$, 則 $a=b$. |
| 2. 設 $a < b$, 則 $ac < bc$. | 5. 設 $ac < bc$, 則 $a < b$. |
| 3. 設 $a > b$, 則 $ac > bc$. | 6. 設 $ac > bc$, 則 $a > b$. |

其1已顯然，因設 $a=b$ ，則 a 及 b 表同數。今可證3如下而依以同理證2。

設 $a > b$ ，令 $a = b + d$ ，則 $ac = (b + d)c = ac + dc \therefore > bc$

法則4, 5, 6. 爲1, 2, 3, 之逆. 而由§39所用之理由益之

自1, 2, 3, 應用§39之理由, 而得

設 $a = b$ 及 $c = d$, 則 $ac = bd$

設 $a < b$ 及 $c < d$, 則 $ac < bd$

設 $a > b$ 及 $c > d$, 則 $ac > bd$

II, 減法與負數

完全記法

51 減法。由5減3，即求於自然記法中在5以前佔第三位置者爲何數。

在記法中，從4起，逆數三數如4, 3, 2，而求得其數2。

以符號一表此演算，讀作“減”寫作 $5 - 3 = 2$ 。

一般，自 a 減 b ，即求在 a 以前佔第 b 位置者爲何數。

此數名爲由 a 減 b 所得之餘數，而於 a 及 b 之關係，以式 $a - b$ 表之。 a 名爲被減數，而 b 名爲減數。

52 加法與減法演算相反，易知在5以前之第三數，亦爲在此加三可得5之數。

一般，可稱此餘數 $a - b$ 爲在 a 以前之第 b 數，或從 a 加 b 可得 a 之數，即爲用下列方程決定之數。

53

$$(a - b) + b = a.$$

再者，因說 7 佔 4 以後第三位置，等於說 4 佔 7 以前第三位置，故得 $4+3-3=4$ 。普通言之，

$$(a+b)-b=a. \quad 54$$

因 $a+b-b=a$ (§54)，以減法取消加法；及因 $a-b+b$ 55
 $=a$ (§53)，以加法取消減法，故斷定加法與減法為相反演算。

完全記法。自然記法不足應減法之所需；因此記法有第一 56
 數 1，而不能逆數至超出於此之數。

例如，於自然記法中不能從 2 減 4。

但逆數能如順數之自由，則甚便利。且因自然記法本身，不過為依一定次序排列之記號系統，自無理由不許推廣於逆數而於其前設新次序系統之記號者。

故另創依次相連之記號：0 置於 1 前； $\bar{1}$ 置於 0 前； $\bar{2}$ 置於 $\bar{1}$ 前；餘推類。

依此方法造成完全記法。

$$\dots, \bar{5}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

此記法中無最前無最後記號或“數”，故可逆數仍可順數至任何大小。

觀察此記法關於記號 0 為對稱，如 3 為 0 以後之第三符號， 57
 而 $\bar{3}$ 為 0 以前之第三符號；且一般皆然。

若數之意義。此新記號之一即 0，可謂有基數意義。例如 58
 自 3 逆數，相當於由任何羣之三物每次消去一個元素。

此演算可繼續至一切元素完全消去，而得 0 爲此結果無元素之“羣”之基數符號，故常視 0 爲自然數之一。

但 $-1, -2, -3, \dots$ 不論如何以無基數意義。

在他方面而言，所有此項新記號與自然數有相同次序性質。其每一記號亦在含有自然數之次序系中佔一定位置，且可將其視爲由此種位置所決定，正如將自然數視爲由其記法中之位置所決定者然。此可認作此等記號 $-1, -2, -3, \dots$ 名爲之充足理由。

- 59 正與負。新數 $-1, -2, -3, \dots$ 爲一類以與舊數一類區別起見，稱之爲負，而稱舊者爲正。

此二種數及 0 名爲整數，以與圖後所論之他數區別。

- 60 代數等式及不等式。令 a, b, c 表完全記法之任何三數，視 a 在 b 以前與 b 一致，或在 b 以後，而書作 $a < b$, $a = b$, 或 $a > b$ 。

- 61 因由定義完全記法爲一次序系 (§17)。故 §24 之法則亦同應用於此；例如

設 $a < b$ 而 $b < c$ ，則 $a < c$

- 62 當 $a < b$ 時，即在完全記法中 a 在 b 以前時，常稱爲代數的小於，或 b 爲代數的大於。

注意如此所用“小於”及“大於”二語完全記法中之“在前”及“在後”而言——此別無他意，例如“ -20 小於 -18 ”只謂“ -20 在 -18 ”以前。

- 63 絕對值或數字值。吾人名 3 爲 -3 之數字值或其絕對值，而用符號 $|-3|$ 表之，書作 $|-a| = 3$ ，任何負數均同此。

正數或 0 之數字值，爲其數之本身。例如 $|3| = 3$ 。

數的相等及不等。又完全記法之任何二數如 a 及 b ，其 a 64
稱爲數字的小於，等於，或大於 b ，依 $|a| <$ ， $=$ ，或 $> |b|$ 定之。

例如， -3 爲代數的小於 2 時，則爲數字的大於 2 ；又 -7
爲代數的小於 -3 時，則爲數字的大於 -3 。

負數之演算

新演算，吾人又創新演算，由此可將負數與 Q 互相結合及 65
與諸自然數結合，一如自然數本身之由加，乘及減法以結合者
然。

吾人以同一之名義稱此項演算，而以與所對應自然數演算
之同法表之。

如 §60，用 ρ 表完全記法之任何數，但 a 及 b 只表自然數，
則可作此新演算之定義如下：

加法及減法之定義。此爲：

1. $a+b$ 意即 a 以後之第 b 數。
2. $a-b$ 意即 a 以前之第 b 數。
3. $a+0$ 及 $a-0$ 意即與 a 相同之數。
4. $a+(-b)$ 意即與 $a-b$ 相同之數。
5. $a-(-b)$ 意即與 $a+b$ 相同之數。

言之，加正數 b 於任何數 a ，意即如前在記法上向前數 b

自 a 減之，則向後數 b 個位置；然加及減一負數，則類次

等於減及加其對應之正數。

例如由 1, $-3+2=-1$, 因 -1 爲 -3 以後之第二數,

由 2, $2-5=-3$, 因 -3 爲 2 以前之第五數.

由 4, $-5+(-2)=-5-2=-7$ (由 2).

由 5, $-6-(-2)=-6+2=-4$ (由 1).

67 乘法之定義, 此爲:

1. $0a$ 及 $a.0$ 意即 0 .

2. $a(-b)$ 及 $(-a)b$ 意即 $-ab$.

3. $(-a)(-b)$ 意即 ab .

易言之, 無一爲 0 之二因數之積, 其爲正或負, 依其因數之有同號或異號而定; 而在各情形中, 其積之數值, 爲其二因數數值之積.

例如, 由 2, $3 \times -2 = -6$, 及 $-3 \times 2 = -6$.

由 3, $-3 \times -2 = 6$.

68 諸定義之本原及意義. 觀察 §§66 及 67 所述, 既非假設, 又非須證明之定理, 僅稱之爲——新演算之定義.

例如, 欲證明 $2(-3) = -2.3$, 除由自然數之乘法定義外 (§40) 別無其他根據以開始者必不合理. 因 -3 非自然數, 其理甚明. 故“將 2 取 -3 次”爲無意義.

然則何須發明此種演算耶? 蓋欲使負數在諸數本身間及諸物間關係之研究能盡量效用也.

此新演算並非隨意發明; 反言之, 此實爲舊演算對於新數之自然推廣.

處理自然數時, 免規定加法爲——順數——方法, 而應

此方法之結果，有閉包性質，與所加數之值無關，即：

$$1. \quad a+b = 1+a. \quad 2. \quad a+(b+c) = (a+b)+c.$$

同理，證明其積有三種一般性質：

$$3. \quad ab = ba. \quad 4. \quad a(bc) = (ab)c. \quad 5. \quad a(b+c) = ab+ac.$$

用文字表敘時，此性質 1 至 5 即成爲加法及乘法演算定義之一切目的；而當然不能實際爲順數之演算，餘類推，設新數之閉包演算，爲有效用，則“定義”1-5 亦必須用之甚明，而 § 66, 67 僅敘述下面問題之解答：

欲使加法，乘法及減法之意義推廣，在完全記法上任意數之和及積可有性質 1-5，而其減法仍可繼續爲加法之逆。

例如，(1)當規定加一正數 b 於 a 爲順數，而自 a 減 b 爲逆數時，此僅爲加法及減法舊定義之重述而已。

$$(2) \quad \text{由此加法定義而得 } -b+b=0.$$

但設交換律 $a+b=b+a$ ，仍適用，則必得 $-b+b=b+(-b)$ ，故 $b+(-b)=0$ ；或因 $b=-b=0$ ，故必有 $b+(-b)=b=-b$ 。

$$\text{此即暗示定義 } a+(-b)=a-b.$$

(3) 設新加法及減法亦如舊者爲相反之演算，則必有 $a+(-b)=a-b$ 。如 § 63, 5。

(4) 次之，欲保持加法及乘法之舊關係 (§ 41)，則如 § 67, 2, 必有

$$\begin{aligned} (-a)b &= -a+(-a)+\dots\text{至 } b \text{ 項} \\ &= -a-a-\dots\text{至 } b \text{ 項}, = -ab. \end{aligned}$$

(5) 設交換律 $ab=ba$ 仍適用，則亦必有 $a(-b)=(-b)a=-ba=-a-b$ ，如 § 67, 2。

(6) 同理, $0+0+\dots$ 至 a 項 $=0$ 而此事實與定律 $ab=ba$ 二者, 以導出 § 67, 1 之定義, 即 $0 \cdot a=0$ 及 $a \cdot 0=0$.

(7) 最後, 由 (6) 得 $(-a)(-b+b)=-a \cdot 0=0$, 然設分配定律仍適用, 則亦必有

$$(-a)(-b+b) = (-a)(-b) + (-a)b = (-a)(-b) - ab, \text{ 由 (4).}$$

故得 $(-a)(-b) - ab = 0$. 且因 $ab - ab = 0$, 以定 $(-a)(-b)$ 爲 ab , 如 § 67, 3.

69 以上所定諸演算, 適合於交換, 結合, 及分配定律, 今再證明此新演算完全與前述諸定律相應:

首先有

$$a+(b+c)=a+b+c. \quad (1)$$

$$a-(b+c)=a-b-c, \quad (2)$$

$$a+b-b=a-b+b=a, \quad (3)$$

是用 § 37, 52 之理, 由加法及減法之定義爲前提及逆數而得.

1. 交換定律 $a+b=b+a$.

第一, $a < b$, $-a+b=b+(-a)$.

因設 $a < b$, 令 $a=d+b$. §§ 31, 34,

則 $-a+b = -(d+b)+b$

$$= -d-b+b = -d \quad \text{由 (2) 及 (3)}$$

及 $b+(-a) = b-(b+d),$ § 66, 4,

$$= b-b-d = -d, \quad \text{由 (2)}$$

當 $b > a$ 時, 證法相同.

第二, $-a+(-b) = -b+(-a)$.

因 $-a+(-b) = -(a+b) = -(b+a) = -b+(-a)$.

由 (2) 及 § 66, 4.

II. 結合定律, $a+(b+c) = (a+b)+c$.

第一, $a+[b+(-c)] = a+b+(-c)$.

設 $b > c$, 令 $b=d+c$. §§ 31, 34,

則 $a + [b + (-c)] = a + [d + c + (-c)] = a + d$.

及 $a + b + (-c) = a + d + c + (-c) = a + d$. 由(3)及 § 66, 4
當 $c > d$ 時, 證法相同.

第二. $a + [(-b) + c] = a + (-b) + c$.

此由 I 方才所述情形而得.

第三. $a + [-b + (-c)] = a + (-b) + (-c)$.

此由 (2) 及 § 66, 4 而得, 因 $-b + (-c) = -(b + c)$.

III. 交換定律, $ab = ba$.

第一. $(-a)b = b(-a)$.

因 $(-a)b = -ab = -ba = b(-a)$. § 45: § 67, 2

第二. $(-a)(-b) = (-b)(-a)$.

因 $(-a)(-b) = -a(-b) = ba = (-b)(-a)$, § 45, § 67, 3

IV. 結合定律, $a(bc) = (ab)c$.

第一. $(-a)[(-b)(-c)] = [(-a)(-b)](-c)$,

因 $(1a)[(-b)(-c)] = (-a)bc = -abc$.

§ 46: § 67. 2. 3

及 $[(-a)(-b)](-c) = ab(-c) = -abc$. § 67, 2, 3

第二. 其他情形, 可依同法證明.

V. 分配定律, $a(b + c) = ab + ac$.

第一. $a[b + (-c)] = ab + a(-c)$.

因 $[b + (-c)]a = [b + (-c)] + [b + (-c)] + \dots$ 至 a 項

$= b + b + \dots$ 至 a 項 $+ (-c) + (-c) + \dots$ 至 a 項

$= ba + (-c)a$. § 41: § 67; 2; II 及 III

故 $a[b + (-c)] = ab + a(-c)$. 由 III

第二. 其他情形, 易於由此推出.

例如 $(-a)[b + (-c)] = -a[b + (-c)]$
 $= -(ab + a(-c)) = (-a)b + (-a)(-c)$.

- 70 一般結果。如前 § 68 所示，於文字算術或代數中，定律 $a+b=b+a$ 等等，即當文字 a, b, c 表自然數時，等於加法及乘法之定義，今已證明此諸定義可應用於完全記法之一切數。

應用此諸定律，可變換文字式之形狀而不影響其值，不論式中所有文字表完全記法之任何數，

例如，無論 a, b, c, d 表正或負整數，得

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= (a+b)c + (a+b)d \\ &= ac + bc + ad + bd.\end{aligned}$$

- 71 和之相等及不等法則。用 § 39 同一理由，可證明

依 $a <, =$ 或 $> b$,

得 $a+c <, =$ 或 $> b+c$;

及其逆。

故此於正數及負數皆真，即如下

- 72 加同數於兩邊，或自兩邊各減同數時，則方程仍為方程，而不等式之向仍不變。

- 73 積之相等及不等法則。觀察變更任何二數 a 及 b 之記號，即顛倒其在完全記法中之順序 (§ 57)。

例如 $-3 < -2$ ，但 $3 > 2$ ； $-5 < 2$ ，但 $5 > -2$ 。

由此事實及 § 50 之理由，則

依 $a <, =$ 或 $> b$ 。

得 $ac <, =$ ，或 $> bc$ 。

但 $a(-c) >, =$ ，或 $< b(-c)$ ；

及其逆，故

以同一正數或負數乘方程之二邊，仍爲一方程。

74

以同一正數乘不等式之二邊，其向不變。

但以同一負數乘不等式之二邊，則變其向，從<變爲>，或
其逆。

由上述第一法則及用 0 乘之定義，即 $a \cdot 0 = 0$ ，導出下列重要定理。

1. 設 $a = b$ ，則 $ac = bc$ 。

75

2. 設 $ac = bc$ ，則 $a = b$ ，除 $c = 0$ 外。

於 2 之例外情形，須加以注意。

例如 由真方程 $2 \cdot 0 = 3 \cdot 0$ ，當然非 $2 = 3$ 。

零之積。 一積爲 0，則其因數之一必爲 0。

76

例如，設 $ab = 0$ ，則二者之一 $a = 0$ ，或 $b = 0$ 。

因 $0 \cdot b$ 亦等於 0。

得 $ab = 0 \cdot b$ ，

故 $a = 0$ ，除 $b = 0$ 外。

積之數字值。 二或多因數之積之數字值，爲其各因數之數字值之積。

例如， $|(-2)(-3)(-4)| = |-24| = 24$ ；及 $|(-2)| = 2$ ，
 $|(-3)| = 3$ ，
 $|(-4)| = 4$ 。

和之數字值。 二數之和之數字值，當二數爲同號時，則爲
其數字值之和；但二數爲異號時，則爲其數字值之差。

例如， $|-3 + (-5)| = |-8| = 8$ ；及 $|(-3)| + |(-5)| = 3 + 5 = 8$ 。

但 $|2 + (-5)| = |-3| = 3$ ；及 $|(-5)| - 2 = 3$ 。

整 數 應 用 於 量

79 量。應用數目，不僅記錄各物量諸物數目之結果，但亦表示所測之量之結果；如時間，直線，表面之部分等等。

80 凡測一“量”，須選同類之特別量為量之單位，與原“量”比較。

81 設此量適合單位之一定次數，則將此次數稱為測度。
特例，稱線段之測度為其線段之長。

例如，測一線段，可選單位線段稱為尺者，沿尺量之，以求其若干次。

設求得適合此尺三次，則稱之為三尺長，或其長——即其測度——為3。

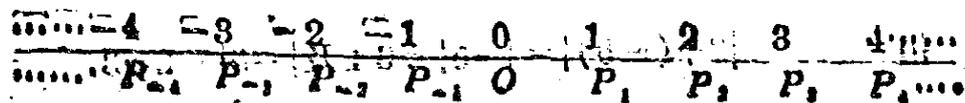
82 自然數之應用於量，即以其在自然記法中之位置關係，表示此測度之量之大小關係。

83 負數應用於量。吾人常有特別事故，須從某一定“關點”依反對“方向”以測量者。

例如，測時間在耶穌降生之前，及後之年份；測溫度在格林維基或華盛頓之西及東之度數；測溫度在零下及零上之度數。

於是可用簡單圖以區別由一方向與他方向所成之量，其一以正數表之，他——以負數表之。

84 例如觀察下圖：



此處之一定相點，或原點為 O ，其單位為 OP_1 ，而諸點 $P_2, P_3, \dots, P_{-1}, P_{-2}, \dots$ 皆依 $OP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \dots = P_{-1}O = P_{-1}P_{-2} = \dots$ 而得。

在諸點之上，依合宜次序，書完全記法之數，使 0 正在 O 上。

自 O 至各點 P 之距離，——即線段 OP 之長——以書於其上之數值表之；而自 O 至 P 之方向，以其數之符號表之。

例如， -3 在 P_{-3} 上，表 P_{-3} ，在 O 之左邊距離 3 單位。

又線上諸點之次序，以記法中對應數之次序表之。

用點描寫數目。因諸點系 $\dots, P_{-2}, P_{-1}, O, P_1, P_2, \dots$ 85
及諸數系 $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ 之間，成一對一之關係，故可用每一系以表其他系，因此常可用點描寫數目。

III. 除 法 與 分 數

除 法 為 累 減 法

除法之二種。所謂除法，有兩種演算，應用於算術及代數 86
中，其一可稱為累減法，其他稱為乘法之道，有時二者相一致，此時稱為整除。

除法為累減法。欲以 3 除 7 ，在第一種意義為答次列二問 87
題：

1. 自 7 減 3 之幾倍始得一餘數小於 3 ？
2. 其餘數如何？

吾人可累減3以求得二問題之答。例如，因 $7-3=4$ 及 $4-3=1$ ，故必須兩次減3，或減 3×2 ，可得同一結果，其餘數為1。

故此類除法，等於累減法，其關係於減法，一如乘法之於加法。

觀察四數 7, 3, 2, 1，可用方程結合如下：

$$7 = 3 \cdot 2 + 1.$$

推廣之，設 a, b 為任何二自然數，則以 b 除 a ，在觀察上之意義，

83 為求二自然數 q 及 r ，其一可為0，使合於

$$88 \quad a = bq + r \text{ 而 } r < b.$$

89 吾人稱 a 為被除數， b 為除數， q 為商，而 r 為餘數。

90 註 當 a 及 b 已知時，常可求得滿足 §88 之二數 q 及 r 。

例如，設 $a < b$ ，則得 $q = 0$ 及 $r = a$ 。

設 $a \geq b$ ，則由 § § 81, 85 可續得 $b + b + \dots$ 之和至等於 a ，或設再加一 b 則將大於 a 而止，且設 q 表此和之項數，則由 §41，得 $a = bq$ ，或 $a = bq + r$ ，其 $r < b$ 。

83 再者，當 a 及 b 已知時，則僅有適合於 § 88 之一對數 q 及 r 存在。

倘因設有如此之第二對數，如 q', r' ，則當有

$$bq + r = bq' + r', \text{ 故 } b(q - q') = r' - r.$$

78 但此為不可能，因 $r' - r$ 之數值將小於 b ，而 $b(q - q')$ 之數值不亦於 b 故也。

91 整除，設被除數 a 為除數 b 之倍數，當 $a = 12$ 而 $b = 3$ 時，餘數 r 為0，則稱 a 可以 b 整除。此時 § 88 之方程化為 $a = bq$ ，或

$$92 \quad qb = a.$$

故當 a 可以 b 整除時，亦可稱商 q 為以 b 乘之而得 a 之數。

此時可表此除法如 $a \div b$ ，而於 a 與 b 中用符號 $\frac{a}{b}$ 或 a/b 之一表其商 q ，常表為 $q = \frac{a}{b}$ ，或 $qb = a$ 。

整 除 定 理 及 公 式

定理 1. 整除及乘法為互反之演算；即 95

$$a \div b \times b = a, \text{ 及 } a \times b \div b = a.$$

此方程順次由 § 93 及 § 87 之定義而得。

定理 2. 當除法為整除時，則以同數乘被除數及除數，其商不變。 96

因設 $a = qb$ ，則 $am = q \cdot bm$ ， § § 59, 46

即設 $q = \frac{a}{b}$ ，則 $q = \frac{am}{bm}$ § 84

定理 3. 整除一如乘法，遇加法及減法而分配；即 97

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \text{ 及 } \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

因設 $a = qc$ ，及 $b = q'c$ ：

得 $a + b = qc + q'c = (q + q')c$ ， § § 89, 47

故 $\frac{a+b}{c} = q + q' = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ ， § 94

減法亦仿此。

例如 $\frac{18}{3} + \frac{9}{3} = 6 + 3 = 9$ ；及 $\frac{18+9}{3} = \frac{27}{3} = 9$ 。

加減商之公式。此圖為

98

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} ; \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

因 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$ § 96, 76

或式亦仿此。

例如 $\frac{18}{3} + \frac{10}{5} = 6 + 2 = 8$, 及 $\frac{18 \cdot 5 + 10 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{120}{15} = 8$.

99 商相乘之公式。即：

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

因設 $a=qb$, 及 $c=q'd$. 得 $ac=qq' \cdot bd$. § 10, 45, 46

故 $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = q'q' \frac{ac}{bd}$. § 91

例如 $\frac{15}{3} \cdot \frac{6}{2} = 5 \cdot 3 = 15$; 及 $\frac{15 \cdot 6}{3 \cdot 2} = \frac{90}{6} = 15$.

100 整除時一商除他商之公式。如

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

因設 $a=qb$, $c=q'd$, 且 $q=q''q'$,

則有 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = q + q' = q''$. § 94

及 $\frac{ad}{bc} = \frac{qbd}{bq'd} = \frac{q}{q'} = q''$, § 96, 94

例如 $\frac{24}{3} \div \frac{10}{5} = 4 + 2 = 2$; 及 $\frac{24 \cdot 5}{3 \cdot 10} = \frac{120}{30} = 2$.

101 負數之整除。無論何時，被除數之數值如可為除數整除。

則 a§ 93, 所述商之定義，於負數亦有意義甚明，表此諸商數 § 94,

則得下列定理：

102 定理 1, 設 a 可以 b 整除, 則

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}; \quad \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}; \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

因設 $a=qb$, 則有 $-a=(-q)b$. § 93. 67.

故 $\frac{-a}{b} = -q = -\frac{a}{b}$.

其他情形仿此.

零與整除之關係. 1. 就別方面而論; § 93 所示商之定義, 103
 義, 當除數為 0 時, 則無意義.

因無論 q 表何數, $q \times 0 = 0$. 故 (1) 各數為以 0 乘而得 0
 之數; 及 (2) 以 0 乘而得 a 者, 皆以此數.

換言之, 依 § 93 及 § 94 之定義, 符號 $0/0$ 表任意各數,
 而 $a/0$ 則非任何數.

2. 但設被除數為 0, 而除數 b 非 0. 則 § 93 之定義有
 意義. 在此事實, 以 $0/b$ 所表之商為 0

因依 § 94, $0/b$ 係表以 b 乘而得 0 之數; 而 0 即為此數(祇
 此一數), 因 $0 \cdot b = 0$ 故也.

分 數, 除 法 與 乘 法 相 反

於 § 86 所述除法之第二種為 § 93 所述整除之概括, 由此
 可導入分數於數系, 一如 § 66 之定負數, 求此新數之次序定義.

下列定理暗示其定義之一, 其 a, b, c, d 表自然數.

定理 5, 一當 a 可以 b , 及 c 可以 d 整除時, 則商 a/b 及 c/d

a/b 在自然記法中之關係次序與積 ad 及 bc 之次序相同: 即

$a/b <, =, \text{ 或 } > c/d$. 由 $ad <, = \text{ 或 } > bc$ 定之.

1. 因設 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 則 $\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot b$. § 93

但 $\frac{a}{b} \cdot b = a$ 及 $\frac{c}{d} \cdot d = c$. § 93, 94

故 $ad = bc$.

同法可證：

設 $a/b < c/d$ ，則 $ad < bc$ ；又設 $a/b > c/d$ ，則 $ad > bc$ 。

2. 由此諸式，而得下列逆定理：

設 $ad = bc$ ，則 $a/b = c/d$ 。

否則將有 (1) $a/b < c/d$ ，因此 $ad < bc$ ，或 (2) $a/b > c/d$ ，因此 $ad > bc$ 。同法可證：

設 $ad < bc$ ，則 $a/b < c/d$ ；設 $ad > bc$ ，則 $a/b > c/d$ 。

105 擴充次序數系。無論 a, b, c, d 所表諸值能否以 b 整除 a 及以 d 整除 c ，但 ad 及 bc 在記法中之關係次序可知。

故取任何二自然數 a 及 b ，若 b 不為零，可以之成一 $\frac{a}{b}$ 或 a/b 之式。

設 a 為 b 整除，則如前令 a/b 表自然數以 b 除 a 之商。設不能整除，可視 a/b 僅為一新符號，意作“ b 分之 a ”，其關係於除法者尚須另定 (§ 122)。

於是再假定此諸符號如 $a/b, c/d$ 等等，依下述法則而排列： a/b 在 c/d 以前，一致或以後，依 ad 在 bc 以前，一致或以後而定。而予此種符號以次序之性質，一如表自然數符號所具有者。

或如前用符號 $<, =, >$ 以表“在前”“一致”“在後”之意。

106 依 $ad <, =, > bc$ 令 $a/b <, =, > c/d$ 。

例如： $4/5$ 在 $7/8$ 以前，即 $4/5 < 7/8$ ，因 $4 \cdot 8 < 7 \cdot 5$ 。其次， $2/3$ 在 0 與 1 之間，或 $0 < 2/3 < 1$ 蓋 $0/1 < 2/3$ ，因 $0 \cdot 3 < 2 \cdot 1$ ；及 $2/3 < 1/1$ ，因 $2 \cdot 1 < 3 \cdot 1$ 故也。

107 對此諸符號 a/b ，此法則指定其在記法中本身之適當位置。如表自然數，其次，則更指定記法中連續諸數間之位置。

註。欲求任何特別符號 a/b 在記法中之數如前述所定之 108 位置，只須將 a 化為式 $a = bq + r$ ，其 $r < b$ (§88)。若 $r = 0$ ，因而 $a = bq$ ，則此法即使 a/b 與 q 一致，但設 r 不為 0，則依此法則， a/b 在 q 與 $q+1$ 之間。

符號 a/b 之全圖於是如此規定而排列——似成一部分之自然記法——而為一次序系。

因其有 §§ 17, 18 中列舉之次序系一切性質。

例如 設 $a/b < c/d$ ，及 $c/d < e/f$ ，則 $a/b < e/f$ 。

因設 $a/b < c/d$ ，及 $c/d < e/f$ 。

則有 $ad < bc$ ，及 $cf < ed$ 。 § 106

以第二式之二邊乘第一式之對應邊，則有。

$$adcf < bc ed. \quad \S 50$$

因此 $af < be$ 。 § 50

故 $a/b < e/f$ 。 § 106

分式。當 a/b 不表自然數，則稱為分數， a 稱為分子， b 110

稱為分母，而 a 與 b 二者皆稱為項，故

稱數為形式 a/b 之符號，以其包含自然數之次序系中之位置而定。

自次序之觀點，故可稱分數為數。^{*}

*§ 106之法則，亦可用以定形式 $1/0, 2/0$ 等之次序的符號。

例如，由法則， $1, 0$ 必在分母 b 不為 0 之 a/b 各數之後，蓋 $1/0 > a/b$ ，因 $1 \cdot b > a \cdot 0$ 故也。

次之， $1/0, 2/0$ 等等，必佔次序系中之同一位置，蓋 $1/0 = 2/0$ ，因 $1 \cdot 0 = 2 \cdot 0$ 故也。

但此法則，不能給符號 $0/0$ 以一定位置，蓋無論 a 及 b 之值如何，皆有 $0/0 = a/b$ ，因 $0 \cdot b = a \cdot 0$ 故也。

- 111 負分數，吾人亦可作一分數令其分子，分母或二者，爲負整數，如 $\frac{-a}{b}$, $\frac{a}{-b}$, $\frac{-a}{-b}$ ，定其次序如下：

$$1. \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}; \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}; \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}.$$

2. 各負分數皆在 0 之前。

3. 負分數相互之關係(及負整數)，依下法排列。

$$\frac{a}{b} <, =, \text{或} > -\frac{a}{d} \text{ 依 } -ad <, =, \text{或} > -bd \text{ 而定。}$$

- 112 有理數系，欲將整數分數與以後他種數區別，而稱整分數數爲有理數，由一切此種數所成之系，稱爲有理數系。

此系具有一重要性質，不屬於其一部分之爲整數系者，即

- 113 有理數系爲稠密的；即在每二不等有理數間另有有理數。

因令 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{c}{d}$ 爲任何二分數，使 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ，吾人可證分數

$\frac{bc+ad}{2bd}$ 在 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{c}{d}$ 之間如下：

$$\text{因 } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \text{ 則有 } ad < bc.$$

§ 106

1. 設加 ad 於 $ad < bc$ 之二邊，由 §§ 89, 50, 106,

$$2ad < bc + ad, \therefore a(2bd) < b(bc + ad), \therefore \frac{a}{b} < \frac{bc + ad}{2bd}.$$

2. 設加 bd 於 $ad < bc$ 之二邊，同法得。

$$bc + ad < 2bc, \therefore (bc + ad)d < c(2bd), \therefore \frac{bc + ad}{2bd} < \frac{c}{d}.$$

例如，在 $\frac{3}{4}$ 及 $\frac{5}{6}$ 之間，有 $\frac{0 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$ 。

故當說及有理數時，必須避免“相鄰數大於或小於已知數”之語句，因並無此數存在也。每一整數可有一相鄰整數，但於任何有理數與規定之相鄰有理數間，常有其他有理數。

分數演算。以下令 a, b, c, d 表任何已知正或負整數，
於 §§ 98 - 102 已證明，當 a/b 及 b/d 表整數時，有

$$1. \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad 2. \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

$$3. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad 4. \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \text{ 當 } \frac{ad}{bc} \text{ 爲整數時。}$$

但當 a/b 及 c/d 不爲整數時，各方程 1, 2, 3, 4 之右邊仍有意義。上列各式皆爲 §§ 110, 111 所定一類之一定分數。

故 1, 2, 3, 4 常示加減乘除意義之推廣，無使此諸算法應用於分數，即：

二分數 a/b 及 c/d 之和，即分數 $(ad+bc)/bd$ 之意。 116

由分數 a/b 減 c/d 所得之差，即分數 $(ad-bc)/bd$ 之意。 117

二分數 a/b 與 c/d 之積，即分數 ac/bd 之意。 118

以分數 c/d 除分數 a/b 所得之商，即分數 ad/bc 之意。 119

觀察諸定義，與初等算術所已知計算分數之法則相同。

交換，結合，及分配定律統原地概括演算。 120

例如 $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$ ， §§ 113, 69

121 相等及不等之法則, §§ 71, 73, 亦可用於此種演算;

例如, 設 $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$, 則 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

因設 $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$, 則 $aedf = cebf$. §§ 118, 106, 111.

故 $ad = c^2$, 因而 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. §§ 73, 106, 111.

122 分數之定義為商。分數 a/b 今可視為乘以 b 而得 a 之一數, 卽下列方程所定之一數:

$$123 \quad \frac{a}{b} \cdot b = a.$$

因 $\frac{a}{b} \cdot b = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{1} = \frac{ab}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{b} = a$. §§ 106, 111, 118.

124 除法為乘法之逆。由 §§ 118, 119, 因得

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \quad \text{及} \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b};$$

易言之, §§ 118, 119, 中規定之乘法及除法為相反演算;

比較 § 55.

因由 §§ 118, 119, 及 106, 111, 得

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad \text{及} \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

故可稱上述此種除法為乘法之逆, 而且

125 以 c/d 除 a/b . 卽求以 c/d 乘之而得積 a/b 之

數, 導入分數於數系, 使常可求得如此之數, 而除數 c/d 為 0 時

除外.

此為算術與代數中除法之普通意義，即為整除之推廣，§ 93
 化分數為最低項，不可約分數。若分數之分子及分母有 126
 一公因數，則可同時約去之，不變其分數之值。

如 $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$ 因 $am \cdot b = a \cdot bm$, §106,

當其所有公因數皆已約去，則此分數稱為最低項或不可約。

定理，設 a/b 為不可約分數，而 a'/b' 為與其相等之任何 197
 他分數，則 a' 及 b' 順次為 a 及 b 之同倍數

因 $a'/b' = a/b$ ，故 $a'b = ab'$ ， a 為 $a'b$ 之一因數。

但由假設， a 與 b 無公因數，故 a 必為 a' 之因數。§ 492, 1.

因此有 $a' = ma$ ，其 m 為整數。

但以 ma 代入於 $a'b = ab'$ 之 a' ，得 $mab = ab'$ 故 $b' = mb$ ，

§50.

系。設二不可約分數相等，則其分子必相等，而分母亦相
 等。

分 數 應 用 於 量

分數長度。§ 81所述長度之定義，僅能應用於合單位線段 129
 s 一定整倍數之線段 S 。

但設 S 不含 s 整倍數，則依然與 s 可通約，而可適合 s 之
 半，三分之一，或其他有盡部分，在此種情形，可規定其長如
 次。

設已知線段適合單位線段 b 分之一之 a 倍，則稱其長為分 130
 數 a/b 。

例如，設 S 適合 s 之 10 分之一之 7 倍，則 S 之長（以 s 表
 之）為 $7/10$

131 註 設 a/b 爲依定義以 s 所表 S 之長，則亦爲式 ma/mb 之各分數。

因設 S 適合 s 之 b 分之一之 a 倍，則亦必適合 S 之 mb 分之一之 ma 倍。

132 分數應用於量，其理由與整數應用於量相同，即以有理數系中之關係位置，表其線段長之關係大小。

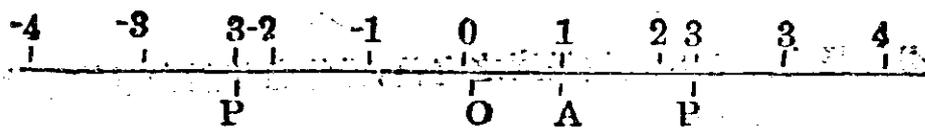
因設 a/b 及 c/d 爲以 s 所表 S 及 T 之長，則亦爲 ad/bd ，及 bc/bd (§131)；即 s 之 bd 分之一，在 S 中適合 ad 倍，在 T 中適合 bc 倍。

故 $S <, =, \text{或} > T$ ，依 $ad <, = \text{或} > bc$ 而定。

即 $S <, =, \text{或} > T$ ，依 $a/b <, =, \text{或} > c/d$ 而定。 § 106

133 註 此其所言長之定義，與初等算術中之分數定義相同，而其較大或較小分數，則依對應於較大或較小線段或其他數目定之，自不待信。

134 以點描寫有理數。分數亦如整數，可在無限長之直線上用點描寫 (§85)：



例如，欲作一點 P 表 $7/3$ ，與 A 表 1 同法，只須由原點 O 起向右截取單位 OA 三分之一之七倍。

O 左邊之對應點 P 爲 $-7/3$ 之圖形。

於任何已知正或負分數之情形，皆可施以同法。

135 凡如此之點皆依對應於圖形所表有理數之順序沿線排列。有此印象故常稱有理數在另一有理數之左或右，或在其他二有理數之間。

IV. 無 理 數

緒 論

定義，以 a^2 表積 $a \cdot a$ ，讀作“ a 平方”，以 a^3 表積 aaa ，讀作“ a 立方”；以 a^n 表 $aaa \dots$ 至 n 個因數之積，讀作“ a 之 n 次冪”。

在符號 a^2, a^3, a^n 中，諸數 $2, 3, n$ 名爲指數， a 本身稱爲底，

由 a 求 a^2 名爲將 a 平方；求 a^3 名爲將 a 立方；求 a^n 名爲

a 自乘至 n 次冪

一已知數自乘至已知乘冪之演算，亦稱爲方。

方根與對數。設假定 a 爲有理數，而 n 爲正整數，則 a^n 亦爲有理數，稱之爲 b ；則 $a^n = b$ 。

此方程暗示二新問題：

其一，定 n 及 b 之值而求 a 。

其二，定 a 及 b 之值而求 n 。

例如，(1)令 $n=2$ 及 $b=9$ ，則此方程化爲

$$a^2 = 9,$$

而求得 $a=3$ 或 -3 ；因 $3^2=9$ 及 $(-3)^2=9$ 。

其次，(2)令 $a=2$ 及 $b=8$ ，則此方程化爲

$$2^n = 8,$$

而求得 $n=3$ ；因 $2^3=8$ 。

當 $a^n = b$ 時，

139

1. a 名爲 b 之 n 次根，而於 n 及 b 之關係以符號 $\sqrt[n]{b}$ 表之，其簡單符號 \sqrt{b} 讀作“ b 之平方根”，則用於 $n=2$ 時。

2. n 名爲 a 底 b 之對數，而於 a 及 b 之關係以符號 $\log_a b$ 表之。

例如 因 $3^2=9$ 及 $(-3)^2=9$,故 3 及 -3 二者皆為 9 之平方根,而二者皆可寫作 $\sqrt{9}$;仍須參看§139.

其次, 2 為以 3 為底 9 之對數;即 $2=\log_3 9$.

139 註 9 之二平方根皆以符號 $\sqrt{9}$ 代表,吾人竟可代之以 $\sqrt{9}$ 表其一正根 3 ,而以 $-\sqrt{9}$ 表其一負根 -3 .此為初等代數中表平方根之舊法 本書仍之.

140 開方與求對數. 當 n 及 b 已知時,求 $\sqrt[n]{b}$ 之演算,名為求 b 之 n 次根或開方.

當 a 及 b 已知時,求 $\log_a b$ 之演算,名為求以 a 為底之 b 之對數.

此種演算皆與乘方相反(§§55,124).

141 註 加法與乘法各僅有一種相反演算,而乘方則有二種,其理由可比較下列三方程而知之:

$$1. a+b=c, \quad 2. ab=c, \quad 3. b^a=c.$$

因 $a+b=b+a$,及 $ab=ba$,故此問題:在1或2中,已知 c 及 b 而求 a ,與問題:已知 c 及 a 而求 b 為同類.

但因 ab 不等於 ba ,故此問題:在3中已知 c 及 b 而求 a ,與問題:已知 c 及 a 而求 b 非同類.

142 新數之需要. 今後將詳細研究新演算法,蓋在代數學中,其重要僅亞於基本四則耳,但其主要點,則為:數系有再進一步擴充之必要.

實際可知 \sqrt{a} 僅於例外情形,能表有理數.

舉一簡單之例,如 $\sqrt{-1}$ 及 $\sqrt{2}$ 皆不能表有理數,查

1. 因每一有理數之平方為正,有理數無平方為 -1 者存在,故 $\sqrt{-1}$ 不能表一有理數.

2. 有理數無平方為 2 者存在,因 2 非任何整數之平方甚明,且可如下證明 2 非任何分數之平方.

假使 p/q 爲一最低項分數，而

$$(p/q)^2 = 2, \text{ 或 } p^2/q^2 = 2/1.$$

但因 p^2/q^2 爲其最低項 (§ 492, 2)，依 § 128，得 $p^2 = 2$ ，此爲不可能，因 p 爲整數故也。

故 $\sqrt{2}$ 不能表一有理數。

設 a/b 爲任何最低項分數，同法可證 $\sqrt[n]{a/b}$ 除非 a 與 b 爲整數之 n 次冪，不能表一有理數。

吾人欲彌補數系之缺點，創立二種新數：即無理數，如 $\sqrt{2}$ 及虛數如 $\sqrt{-1}$ 。

今於本章討論無理數，而於下章討論虛數。

無理數之次序定義

本章中，文字 a, b, c 等，皆表任何有理數，爲正或負爲整數或分數。

有理數系之一般性質，有理數所成之系有下列性質： 43

1. 爲一次序系。
2. 爲稠密的；即此系中每二不等數 a 及 b 之間，仍有此系之其他諸數。
3. 此系中每二數之和，差，積及商，仍爲此系之數，以 0 除任何數之商除外。

由下列定義，吾人將創立一種擴大數系，具有與此相同三性質，且包括有理數系。

第一種之區分。 1, 數 ξ 區分有理數系之殘數爲二類：其 144

一類由 $\frac{1}{2}$ 以下 (小於) 之一切有理數而成, 其他一類由 $\frac{1}{2}$ 以上 (大於) 之一切有理數而成, 命此二類數順次爲 C_1 及 C_2 .

$$\overline{C_1 \quad \frac{1}{2} \quad C_2}$$

如圖, 在點 $\frac{1}{2}$ 左邊之半線, 含類 C_1 中一切數之圖點, 而右邊之半線, 含類 C_2 中一切數之圖點 (§ 134).

由 §§ 109, 111 及 113, 即得

1. C_1 中各數在 C_2 中每一數之前.
2. C_1 中無最後數, C_2 中無最前數.

例如, C_1 中有最後數, 則將有諸數在此數與 $\frac{1}{2}$ 之間 (§ 113) 此爲不可能, 因由假設, 小於 $\frac{1}{2}$ 之一切有理數皆在 C_1 中故也.

- 145 2. 區分有理數系爲三部分 $C_1, \frac{1}{2}, C_2$, 可代以連接 $\frac{1}{2}$ 於 C_1 , 使 C_1 及 $\frac{1}{2}$ 組成類 C_1' 而稱:

數 $\frac{1}{2}$ 區分全部有理數系爲二部分 C_1' 及 C_2 ; 如此則

1. C_1' 中各數在 C_2 中每一數之前.
2. C_1' 中有一最後數即 $\frac{1}{2}$, 但 C_2 中無最前數.

- 146 3. 或連接 $\frac{1}{2}$ 於 C_2 稱其結果爲類 C_2' , 而稱:

數 $\frac{1}{2}$ 區分全部有理數系爲二部分 C_1 及 C_2' , 如此則

1. C_1 中各數均在 C_2' 中每一數之前.
2. C_1 中無最後數, 但 C_2' 中有一最前數即 $\frac{1}{2}$.

顯然可見各個有理數, 皆可作爲有理數系之相似區分而解釋之.

- 147 反言之, 既能以任何方法區分全部有理數系爲二部 B_1 及

B_2 , 其 B_1 中各數在 B_2 中每一數之前, 而 B_1 中有一最後數, 或 B_2 中有一最前數, 則此區分足使其最前數或最後數與其他之數有所分別, 且據此意而決定之。

例如, 指定負有理數在 B_1 , 而其餘諸有理數在 B_2 , 則 B_1 中無最後數, 而 0 為 B_2 中之最前數, 當零稱為 B_2 之最前數時, 與其他一切數有所區別, 亦如用符號 0。

註. 顯然可見 B_1 中之最後數及 B_2 中之最前數, 不能同時具有, 因此二數間必有有理數也 (§ 113). 然依假設, 此每一有理數屬於 B_1 , 或屬於 B_2 , 二者必居其一。

第二種之區分, 然亦可用各種方法區分全部有理數系為無最後數之部分 A_1 , 及無最前數之部分 A_2 .

例如, 因有理數無平方為 2 者存在, (§ 142), 各有理數必有一個, 其平方小於 2 者, 或其平方大於 2 者。

令 A_1 由平方大於 2 者之一切正有理數而成, A_2 由其一切有理數而成, 則

1. A_1 中各數在 A_2 中每一數之前。

蓋令 a_1 為 A_1 中任何數, 而 a_2 為 A_2 中任何數。

設 a_1 為負或 0, 則 $a_1 < a_2$, 甚明, 又設 a_1 為正, 則 $a_1^2 < a_2^2$, 故 $a_1 < a_2$.

2. A_1 中無最後數, 而 A_2 中無最前數。

蓋當 a_1 為任何正有理數, 指定其平方小於 2 時, 可再求得一較小之有理數其平方小於 2 者 (§ 183, 2(3)); 故無一數能指定為 A_1 中之最後數, 同理無一有理數能指定為 A_2 中之最前數。

新數 $\alpha = \sqrt{2}$ 在二類數 A_1 及 A_2 間之關係, 與 § 144 中 150 所述對應於 § 所區分二類 C_1 及 C_2 間之關係, 適相同. (8) 註

但可說對應於區分 A_1, A_2 無有理數存在，或不能依此以決定之。

蓋因各有理數或屬於 A_1 或屬於 A_2 ，故無有理數存在於 A_1 及 A_2 之間，如 $\frac{1}{2}$ 之在 C_1 及 C_2 之間者然。

且因 A_1 無最後數及 A_2 無最前數，故對應於此區分無有理數存在，如 $\frac{1}{2}$ 對應於 § 145 之區分 C_1, C_2 ；或 § 146 之區分 C_1, C_2 （比較 § 147）。

故此區分 A_1, A_2 爲一新序數設立一位置，即一數必須在 A_1 中一切數之後及在 A_2 中一切數之前。

發明如此之一數，今可以文字 a 表之：關於 a 之乘法意義已明之後，將得 $a^2 = 2$ ，而可用更有意義之符號 $\sqrt{2}$ 以代 a 矣 (§ 182)。

151 於是定此新數 a 爲在平方小於 2 及平方大於 2 之一切正有理數間之一數。

亦可用下列公式表此定義：

$$a_1 < a < a_2,$$

式中 a_1 及 a_2 類次表 A_1 及 A_2 中之任何數，而 $<$ 意即“在前”。

152 註 觀察此定義與 § 56, 110 所示負數及分數之定義爲同類，如此類之數中， a 爲包含自然數諸符號之次序系中以其位置所定之一符號，故稱之爲數，實亦則一合宜。

發明此數及相似諸數之理由，亦與發明負數及分數之理由相同，此種數在已有諸數間及社會上事物關係之研究，足供應用。

* 進而由次序之觀點即言，發明比一數多之數對應於區分 A_1, A_2 中以公式 $a_1 < a < b < a_2$ 依次序決定之二數 a 及 b ，並無衝突。

但發明比一數多如此之數，則有他種衝突，參看 67 頁脚註 (3)。

無理數之一般。質數系。前面所述有理數系之特別區分，153
不過為類似性質中之無窮可可能區分之一。

於每一區分發明一新數，依照有理數系之數按次序而定其
數，遂如 § 151 定 $a = \sqrt{2}$ 者然。

欲使此種新數區別於有理數，稱之為無理數。

其次，欲使此有理數及無理數區別於尚須研究之虛數，稱之
實數。

最後，由一切有理數及無理數所成之系，名為實數系。

故用 c 表任何無理數，得此種數之一般定義如下：

決定一無理數 a ，無論何時，有一定律可以敘述，即指定已知 154
各有理數屬於二類 A_1 及 A_2 之一且僅屬於一，使 (1) A_1 中各數
在 A_2 中每一數之前，及 (2) A_1 中無最後數而 A_2 中無最前數；
於是 a 之定義為：在 A_1 中一切數與 A_2 中一切數間之一數。

此處暗示在二類 A_1 及 A_2 中，皆有數存在；亦即 A_1 及 A_2 共
合全部有理數系。

一無理數 a 稱為負或正，依其在 0 以前或以後定之。 155

實數系為次序系。即構成此系之諸數，皆按一定且已知次 156
序而排列 (§ 7)，蓋各無理數之定義，指明其與每一有理數之 157
關係如何；而由任何二已知無理數之定義，即能推知其彼此之關係
如何。

例如，令 a 及 b 表任何二已知無理數；於是

1. 設每一有理數在 a 以前亦在 b 以前，及每一有理數在 a 以後亦在 b 以後，則二數 a, b 置於有理數系之諸數佔有同一位置。故依無理數之定義 (§154) a 及 b 表同一數，可以下列公式表之：

$$a=b.$$

2. 設一類有理數，在 a 以後，其中有若干數在 b 以前，則 a 本身必在 b 以前(或 b 在 a 以後)。可以下列公式表之：

$$a < b \text{ 或 } b > a.$$

3. 設一類有理數在 a 前，其中有若干數在 b 以後，則 a 本身必在 b 以後(或 b 在 a 以前)。可以下列公式表之：

$$a > b \text{ 或 } b < a.$$

157 此甚明顯當任何二不同實數為已知，即可推知其孰先孰後；

關於三已知實數 a, b, c ，亦可推出下列之結論：

$$\text{設 } a=b, \text{ 及 } b=c, \text{ 則 } a=c,$$

$$\text{設 } a < b, \text{ 及 } b < c, \text{ 則 } a < c,$$

$$\text{設 } a=b, \text{ 及 } b < c, \text{ 則 } a < c,$$

158 實數系為稠密的。蓋因不僅在任何二不等有理數間有理數 (§113)，即在任何二不等無理數間，及任何二數一為有理數一為無理數間亦有之故也 (§ 156)。

159 實數系為連續的。故實數系實佔有 § 143 中列舉之有理

數系諸性質之第一及第二，但尚有不屬於有理數系之附加性質，即：

設全部實數系分爲二部分 R_1 及 R_2 ，使 R_1 中各數在 R_2 中每一數之前，則 R_1 中無最後數，或 R_2 中無最前數，但不能二者皆無。

蓋分實數系爲二部分 R_1 及 R_2 ，即分有理數系爲二部分 A_1 及 A_2 ，其一部分由 R_1 中一切有理數而成，他一部分由 R_2 中一切有理數而成。

各有理數或屬於 A_1 或屬於 A_2 ，而 A_1 中各有理數在 A_2 中各有理數之前。

令 a 爲區分 A_1, A_2 所定之一數 (§§147, 154)。

則 a 或爲有理數——即 A_1 中之最後數或 A_2 中之最前數 (§ 147)。——或設 A_1 無最後數而 A_2 無最前數， a 爲在 A_1 及 A_2 間之無理數 (§ 154)。

1. 設 a 爲 A_1 中之最後數，則亦爲 R_1 中之最後數；何則，若 R_1 中在 a 以後有任何數，則在此數及 a 之間將有有理數，即 A_1 中在 a 以後有有理數，此爲不可能。

2. 同理，設 a 爲 A_2 中之最前數，則亦爲 R_2 中之最前數。

3. 設 a 爲無理數，則由假設必屬於 R_1 或 R_2 。設 a 屬於 R_1 ，則爲 R_1 中之最後數；何則，若 R_1 中有任何數在 a 以後，則在此數及 a 之間將有有理數 (§ 158)，即 A_1 中在 a 以後有有理數，此爲不可能。同理，設 a 屬於 R_2 ，則爲 R_2 中之最前數。

最後 R_1 中之最後數及 R_2 中之最前數，不能同時俱有。蓋如是則此二數之間，將有有理數 (§ 158)，即有有理數不屬於 A_1 ，亦不屬於 A_2 ，此爲不可能。

欲指示實數系爲稠密的，且同時具有上述性質，故稱實數系爲連續的。

定理。無論何時，有一定律可述，依此則全部實數系，可分 160 爲二部分 R_1, R_2 ，使 R_1 中各數在 R_2 中每一數之前。以決定一實數 a 爲有理數或無理數；此數 a 或爲 R_1 中之最後數，或爲 R_2 中之最前數。

此爲 §§ 147, 159 之直接結果。

無理數之近似值

161 已知任何無理數 a ，如 § 151 所定，由以下說明之法則可求得一對有理數，其一小於 a ，又一大於 a ；使其彼此之差，小至如吾人所願，如此之有理數，名為 a 之近似值。

令 a 為無理數 $\sqrt{2}$ ，即在“平方小於2及平方大於2”之一切正有理數之

1. 逐次計算 $1, 2, 3, \dots$ 之平方，至大於 a 為止，可求得 a 在某一對連續整數之間。

2. 逐次計算 $1.1^2, 1.2^2, \dots$ 至大於2者為止，可求得 a 在一對連續一位小數之間。

即得 $1^2 < 2$ 及 $2^2 > 2$ 。

故 a 在 1 及 2 之間，或 $1 < a < 2$ 。

例如，得 $1.4^2 < 2$ 及 $1.5^2 > 2$ ；因 $1.4^2 = 1.96$ ， $1.5^2 = 2.25$ 。

故 a 在 1.4 及 1.5 之間，或 $1.4 < a < 1.5$ 。

3. 依同法繼續進行，求得

$1.41 < a < 1.42$ ， $1.414 < a < 1.415$ ，仿此至無窮。

4. 令 α_1 表如此求得連系 $1.4, 1.41, 1.414, \dots$ 中之第 n 數，及 α_2 表連系 $1.5, 1.42, 1.415, \dots$ 中之第 n 數。

則 $\alpha_1 < a < \alpha_2$ 及 $\alpha_2 - \alpha_1 = 1/10^n$ 。

選 n 大至足用，可使 $1/10^n$ 小於任何指定極小之正數 δ 。

5. 今稱 $1.4, 1.41, 1.414$ 為 $a = \sqrt{2}$ 至第一, 第二, 第三位小數之近似值；餘類推。

如此說明之方法，顯然可應用於任何已知無理數 a ；蓋此方法所需為決定某有理數小於 a 或大於 a 者之試驗，而 § 151 \bar{a} 之定義，常給與如此之試驗也，故得下列定理：

令 a 表任何已知無理數。設假定 δ 為任何正數，不論小至如何。常能求得二有理數 a_1, a_2 ，使

$$a_1 < a < a_2 \text{ 及 } a_2 - a_1 < \delta.$$

此定理顯然於有理數亦真。

例如，設 a 表已知有理數，及 $a_1 = a - 1/10^n, a_2 = a + 1/10^n$ ，已知 $a_1 < a < a_2$ ，則有 $a_2 - a_1 = 2/10^n$ ，且選 n 至足用之大，可使 $2/10^n$ 小至如願。

加法，減法，乘法，除法

欲將 § 143 中例舉有理數系之第三性質，留遺於實數系，因此需用下列定理：

定理。令 A_1 及 A_2 為二類有理數，使 163

1. A_1 中各數小於 A_2 中每一數。
2. A_1 中無最後數而 A_2 中無最前數。
3. 可假定每一正數 δ 無論小至如何，能於 A_1 中求得一

數 a_1 及 A_2 中求得一數 a_2 ，使

$$a_2 - a_1 < \delta.$$

則可斷定在 A_1 及 A_2 之間有一數而僅有一數。依 § 151，由 1 及 2 知至少有一如此之數。

由 3 而知如此之數不能多於一個。

何則，假使任 A_1 中每一 a_1 及 A_2 中每一 a_2 之間，有二有理數 d 及 d' ，如下圖所示：

$$\dots a_1 \quad d \quad d' \quad a_2 \dots$$

則於每一 a_1, a_2 將有

$$a_1 < d \text{ 及 } -a_1 > -d,$$

§ § 73, 121

故

$$a_2 - a_1 > d' - d,$$

§ § 39, 121

此與 3 衝突，故不可能。

在每一 a_1 及 a_2 之間，亦不能有二數其一或二者為無理數；蓋如是則將有二有理數在此二數之間，亦在每一 a_1 及 a_2 之間

(§ 158)，此事適已證明其不可能矣。

164 註。此定理與無理數之定義 (§ 154) 不同者，在於各有理數，或在 A_1 中或在 A_2 中，並非假設之一部分。

165 加法。令 a 及 b 表任何二已知實數，有理數或無理數，而令 a_1, a_2, b_1, b_2 表任何有理數，使

$$a_1 < a < a_2 \text{ 及 } b_1 < b < b_2 \quad (1)$$

觀察由 a_1 或 b_1 所表之一種數無最後數，而由 a_2 或 b_2 所表之一種數無最前數；又設假定任何正數如 δ ，不論小至如何，則常能選擇 a_1, a_2 及 b_1, b_2 (§ 192)，使

$$a_2 - a_1 < \delta \text{ 及 } b_2 - b_1 < \delta \quad (2)$$

當 a 及 b 皆為有理數，即假定 $a = \alpha$ 而 $b = \beta$ 時，則可依 § 116 之法則求得其和 $\alpha + \beta$ ；依 § 121 由 (1) 而得

$$a_1 + b_1 < \alpha + \beta < a_2 + b_2$$

而且無論 a 及 b 為有理與否，依 § 121 由 (1) 而得

$$a_1 + b_1 < a_2 + b_2$$

此種考慮，當 a, b 之一或二者為無理時，用以定 a, b 之和如下：

166 a 及 b 之和書作 $a + b$ ，其意為在一切數 $a_1 + b_1$ 及一切數

$a_2 + b_2$ 間之一數；換言之，即此數依下列公式而定：

$$a_1 + b_1 < a + b < a_2 + b_2$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2 表任何有理數，而

$$a_1 < a < a_2 \text{ 及 } b_1 < b < b_2$$

欲證此定義為合理，必須證明此之數 $a+b$ 有一個但祇有一個，此可由 § 163 而得，蓋因

1. 每一 $a_1 + b_1$ 小於每一 $a_2 + b_2$ 。
2. 無最後數 $a_1 + b_1$ ，且無最前數 $a_2 + b_2$ 。

例如， $a_1' + b_1'$ 不能為最後數 $a_1 + b_1$ ；因無最後數 a_1 且無最後數 b_1 故也，可選定 a_1 及 b_1 令 $a_1 > a_1'$ 及 $b_1 > b_1'$ ，故 $a_1 + b_1 > a_1' + b_1'$ 。

- (3). 設假定任何正有理數 δ ，則能選定 a_1, a_2, b_1, b_2 ，使
 $a_2 - a_1 < \delta/2$ 及 $b_2 - b_1 < \delta/2$ ， § 162

故得 $(a_2 + b_2) - (a_1 + b_1) < \delta$ ， § 121

$-a$ 之定義。令 a, a_1, a_2 ，如 § 165 中有相同意義。與 § 167 § 165 所用類似之考慮，當 a 為無理數時，可下 $-a$ 之定義如下：

符號 $-a$ 之意，為表下列公式所定之一數：168

$$-a_2 < -a < -a_1,$$

式中 a_1, a_2 表任何有理數，使

$$a_1 < a < a_2.$$

由 § 163 知如此之數 $-a$ 有一個但僅有一個；蓋

1. 每一 $-a_2$ 小於每一 $-a_1$ ，因 $a_1 < a_2$ ， § § 73, 111
2. 無最後數 $-a_2$ ，且無最前數 $-a_1$ 。例如若有一最後數 $-a_2$ ，則將有最前數 a_2 ；但無此邊數存在。
3. 常能選定 a_1, a_2 ，使

$$-a_1 - (-a_2) = a_2 - a_1 < \delta, \quad \text{§ 162}$$

減法。 a 減 b 之結果，書作 $a-b$ ，其意為數 $a+(-b)$ ；即 § 169

$$a-b = a+(-b).$$

$a+(-b)$ 本身之意義，由 § § 166, 168 可知。

由 § § 166, 168，得 $a-b$ ，亦可用下列公式定之：

$$a_1 - b_2 < a-b < a_2 - b_1.$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2 表任何有理數使

$$a_1 < a < a_2 \text{ 及 } b_1 < b < b_2$$

170 1. 二正因數之乘法。令 a 及 b 爲任何二已知正數，及 a_1, a_2, b_1, b_2 爲任何正有理數，使

$$a_1 < a < a_2, \text{ 及 } b_1 < b < b_2. \quad (1)$$

當 a 及 b 皆爲有理數，即假定 $a=A, b=B$ 時，則由(1)依 § 121, 得

$$a_1 b_1 < aB < a_2 b_2,$$

且在一切情形，而得

$$a_1 b_1 < a_2 b_2. \quad (2)$$

故當二數 a, b 之一或二者爲無理數時，而定其積爲：

171. 二正數 a, b 之積書作 ab ，其意爲任一切數 a_1, b_1 及一切數 a_2, b_2 間之一數。換言之，即 ab 爲依下列公式所定之一數：

$$a_1 b_1 < ab < a_2 b_2,$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2 表任何正有理數合於：

$$a_1 < a < a_2 \text{ 及 } b_1 < b < b_2,$$

由 § 163 而得如此之數 ab 有一而僅有一；蓋

1. 各 $a_1 b_1$ 小於每一 $a_2 b_2$ 。
2. 無最後數 $a_2 b_2$ ，且無最前數 $a_1 b_1$ (比較 § 165. 2 之證)
3. 已知任何正數 δ ；可選定 a_1, a_2, b_1, b_2 ，使

$$a_2 b_2 - a_1 b_1 < \delta,$$

因 $a_2 b_2 - a_1 b_1 = a_2(b_2 - b_1) + b_1(a_2 - a_1)$ 。

且能選定 a_1, a_2, b_1, b_2 (§ 162) 使

$$b_2 - b_1 < \delta / 2a_2 \text{ 及 } a_2 - a_1 < \delta / 2b_1. \quad (1)$$

故 $a_2(b_2 - b_1) + b_1(a_2 - a_1) < \delta$. (2)

今可使 a_1, a_2, b_1, b_2 之選擇如下：

先取一種 b_2 之任何特殊數 b_2' ，再選定 a_1, a_2 ，使

$$a_2 - a_1 < \delta / 2b_2',$$

次用求得之 a_2 , 選定 b_1, b_2 , 使

$$b_2 - b_1 < \delta / 2a_2, \quad \text{如(1)}$$

因 $b_1 < b_2'$, 故 $\delta / 2b_2' < \delta / 2b_1$, 由 (3) 而得

$$a_2 - a_1 < \delta / 2b_1, \quad \text{如(1)}$$

一或二因數為負或零者之乘法. 令 a 及 b 表任何二已 172

知正數, 則

1. $a(-b)$ 及 $(-a)b$ 之意為 $-ab$.
2. $(-a)(-b)$ 之意為 ab .
3. $a \cdot 0$ 及 $0 \cdot a$ 之意為 0 .

$1/a$ 之定義. 令 a 為任何已知正數, 而 a_1, a_2 為任何正 173
有理數, 無論何時使

$$a_1 < a < a_2.$$

與 § 165 所用之類似考慮, 當 a 為無理數時定 $1/a$ 如下:

符號 $1/a$ 之意, 為依下列公式所定之一數:

174

$$1/a_2 < 1/a < 1/a_1,$$

式中 a_1, a_2 表任何正有理數, 使

$$a_1 < a < a_2.$$

由 § 163 而得如此之數, $1/a$ 有一但僅有一; 蓋

1. 各 $1/a_2$ 小於每一 $1/a_1$ (§ 106).
2. 無最後數 $1/a_2$, 且無最前數 $1/a_1$ (比較 § 168, 2 之證).
3. 已知任何正數 δ , 能選定 a_1, a_2 , 使

175

$$1/a_1 - 1/a_2 < \delta.$$

176

設 $a_2 - a_1 < \delta \cdot a_1 a_2$, 則 $1/a_1 - 1/a_2 < \delta$. §§ 106, 117.

但設 a_1' 表一種 a_1 之任何特殊數, 則能擇定 a_1, a_2 , 使

$a_1 > a_1'$, 及 $a_2 - a_1 < \delta a_1'^2$, 故 $< \delta a_1'^2$

$1/(-a)$ 之定義. 令 a 表任何已知正數, 則 $1/(-a)$ 之 175

意為 $-1/a$.

176

176 除法。以 b 除 a 之商 (b 不為 0), 其意為 $a \cdot 1/b$, 即

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

$a \cdot 1/b$ 本身之意, 由以前諸定義可知.

當 a 及 b 為正時, 由 §§ 171, 174, a/b 可依下列公式

$$a_1/b_2 < a/b < a_2/b_1,$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2 , 表任何正有理數: 使

$$a_1 < a < a_2, \text{ 及 } b_1 < b < b_2.$$

177 交換, 結合, 及分配定律. 方才說明之演算, 為有理數對應演算之擴張, 減法依然為加法之逆, 除法依然為乘法之逆, 終則加法乘法依然服從交換, 結合, 及分配諸定律.

例如, 設 a, b 及 c 為任何三正數, 用下列公式如 § 170 所定者:

$$a_1 < a < a_2, \quad b_1 < b < b_2, \quad c_1 < c < c_2,$$

則有 $a(b+c) = ab+ac$.

蓋由 §§ 166, 171, $a(b+c)$ 及 $ab+ac$ 為依下列公式所定:

$$a_1(b_1+c_1) < a(b+c) < a_2(b_2+c_2). \quad (1)$$

$$a_1b_1+a_1c_1 < ab+ac < a_2b_2+a_2c_2. \quad (2)$$

且因 $a_1(b_1+c_1) = a_1b_1+a_1c_1$ 及 $a_2(b_2+c_2) = a_2b_2+a_2c_2$ (§ 120), 故由 (1) 及 (2) 所定之數相同.

178 相等及不等法則. 此種亦能適用於方才所定之和及積

即

故

故

又

即

$$a <, =, \text{ 或 } > b,$$

$$a+c <, =, \text{ 或 } > b+c,$$

$$ac <, =, \text{ 或 } > bc, \quad \text{設 } c > 0,$$

$$ac >, =, \text{ 或 } < bc, \quad \text{設 } c < 0.$$

例如，設 $a < b$ ，則 $a + c < b + c$ 。

何則，令 d 及 $d + a$ 為 a 及 b 間之任何二有理數，且選定 c_1 使 $c_1 < c < c_1 + a$ 。

則因 $a < d$ 及 $c < c_1 + a$ ，故有 $a + c < d + c_1 + a$ ， (1)

且因 $d + a < b$ 及 $c_1 < c$ ，故有 $d + a + c_1 < b + c$ (§ 166)。(2)

但由(1)及(2)而得 $a + c < b + c$ (§ 157)。

依此可證，設 $a < b$ 而 $c > 0$ ，則 $ac < bc$ 。

但此時可選定 c_1 使 $c_1 < c < c_1(1 + a/d)$ 。

如 § 29，由此法則而知設 $a < b$ 及 $c < d$ ，則 $a + c < b + d$ ，179。
餘類推：又如 § 50，當 a, b, c, d 為正時，設 $a < b$ 及 $c < d$ ，則 $ac < bd$ ，餘類推。

關於近似值。1. 今已定無理數減法之機於 § 169，可叙 180 述 § 162 之定義如下：

當任何無理數 a 已知時，且任何有理數 δ 假定为任何小，則能求得有理數 a_1 及 a_2 ，使其與 a 之差小於 δ 。

因依 § 162，可求得 a_1 及 a_2 ，使 $a_1 < a < a_2$ 及 $a_2 - a_1 < \delta$ 故也。

但從 $a < a_2$ 而知 $a - a_1 < a_2 - a_1$ (§ 178) 故 $a - a_1 < \delta$ 。

同法，因 $-a < -a_1$ ，可證 $a_2 - a < \delta$ 。

例如，依 § 161， $\sqrt{2} - 1.41 < .01$ 及 $1.42 - \sqrt{2} < .01$ 。

吾人謂以如此之 a_1 或 a_2 代表 a ，其誤差不超過 δ 。

2. 於實用計算，用無理數之近似值，常被用其本數或多。設 a_1 及 b_1 順次為 a 及 b 之近似值，則 $a_1 + b_1$ 為其和 $a + b$ 之近似值。但欲確保 $a_1 + b_1$ 之誤差不超過 δ ，通常須選定 c_1 及 b_1 使其相關誤差不超過 $\delta/2$ 。此可由 § 168 之證明而知之。同法求 $a - b$ ， ab ，及 a/b 之近似值，使其誤差不超過 δ ，可由 § 168，171，174 之證明引申之。

乘方與開方

1.1 乘幕。在無理數之情形，與有理數同，亦以 a^2, a^3, \dots 表 aa, aaa, \dots

1.2 根。任何已知正數 b 之 m 次根，書作 $\sqrt[m]{b}$ ，意即其 m 次方為 b 之一正數；例如 $\sqrt[m]{b}$ 表公式 $(\sqrt[m]{b})^m = b$ 所定之正數。

欲明此定義，須證其有如此之數一個但祇一個確實存在，完成之如下：

1.3 定理。實數系包含每一正實數 b 之 m 次根。

1. 設 b 為一有理數之 m 次方，則此定理之真確甚明。

例如，設 $b = 8/27 = (2/3)^3$ ，則 $\sqrt[3]{b} = 2/3$ 。

2. 設 b 非一有理數之 m 次方，則其 m 次根為實數 a ，而在 m 次方小於 b 之一切正有理數 a_1 ，及 m 次方大於 b 之一切正有理數 a_2 之間，比較§ 151。

由§ 154知如此之數 a 有一，但僅有一，因(1)每一正有理數為 a_1 或 a_2 ，(2)各 a_1 小於每一 a_2 及(3)無最後數 a_1 且無最前數 a_2 。

可證明(3)如下：

設有一最後數 a_1 稱為 p 則因 $p^m < b$ ，在 p^m 及 b 之間有諸有理數，令其一為 $p^m + \delta$ 。今僅證明可求得一有理數 $q > p$ 使 $q^m < p^m + \delta$ ，或 $q^m - p^m < \delta$ ；蓋如是則有 $p^m < q^m < b$ 使 p 非最後數 a_1 。

$$\text{但 } q^m - p^m = (q-p)(q^{m-1} + q^{m-2}p + \dots$$

$$+ qp^{m-2} + p^{m-1}) \quad \text{§ 308.}$$

$$< (q-p)ma_2^{m-1}, \quad \text{設 } a_2' \text{ 為任何特殊數 } a_2,$$

$$< \delta. \quad \text{設 } q = p + \delta / ma_2'^{m-1}.$$

同法可證其無最前數 a_2 。

此既成立，即可易於證明 $a = \sqrt[m]{b}$ 。

何則, $a_1 < a < a_2$, 則有 $a_1^m < a^m < a_2^m$. § § 171, 181.

但 b 為每一 $-a_1^m$ 及每一 $-a_2^m$ 間之惟一數.

故 $a^m \pm b$, 即 $a = \sqrt[m]{b}$.

相等及不等法則. 令 a 及 b 表任何正實數, 及 m 為任何 184
正整數, 則

依
得

$$a <, =, \text{ 或 } > b, \quad (1)$$

$$a^m <, =, \text{ 或 } > b^m,$$

及

$$\sqrt[m]{a} <, =, \text{ 或 } > \sqrt[m]{b}. \quad (2)$$

可應用 § 179 證明(1).

例如, 設 $a < b$ 則 $a \cdot a < b \cdot b$, 即 $a^2 < b^2$; 餘類推.

由(1)導得(2), 例如, 設 $a = b$, 則 $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$; 蓋若
 $\sqrt[m]{a} < \text{或 } > \sqrt[m]{b}$, 將有 $a < \text{或 } > b$ 故也.

指數法則. 令 a 及 b 表任何二實數, 而 m 及 n 表任何二 185
正整數, 則

$$1. a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad 2. (a^m)^n = a^{mn}, \quad 3. (ab)^m = a^m b^m.$$

例如, $a^3 \cdot a^2 = a a a \cdot a a = a a a a a = a^5 = a^{3+2}$, § 177

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \cdot 3}, \quad \text{由 1}$$

$$(ab)^m = ab \cdot ab \cdot ab \dots = a a a \cdot b b b \dots = a^m \cdot b^m, \quad \text{§ 177}$$

關於 m 及 n 之任何其他正整數值亦仿此.

關於根之定理. 令 a 及 b 表任何正實數, 而 m 表任何正 186
整數, 則 $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$.

因 $(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{b})^m = ab$. § § 182, 185, 3

及 $(\sqrt[m]{ab})^m = ab$. § 182.

故 $(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{ab})^m$.

及 $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$. § 184, (2)

變數與極限

變數。 設無窮數串

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots,$$

中每一特別項 a_n ，當其表示在數串之位置之標號 n 為已知時，此項之值即為已知或可計算而得，則稱此數串為已知。

吾人若有機會考察變數 x 為歷經如此已知無窮數串之值而變動者。

例如， $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ 為一如此之已知無窮數串，而設假定 x 為歷經此數串即連續取各值 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ 者，則 x 為如此一變數。

- 183 極限。 當 x 歷經數串 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ ，不絕趨近於值 1 時，在此情形，設指定任何正數如 δ ，不論如何小，則差 $1-x$ 最後必變成且永遠小於指定之數。例如 x 至此數串之第 100 項後， $1-x$ 永遠小於 .01。

吾人表明此事，稱 x 為歷經此數串 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ ，趨近於 1 為其極限。在一般。

- 189 變數 x 假定其歷經已知無窮數串之各值而變動，設差 $a-x$ 最後可變成且永遠小於能指定之每一正數 δ 者稱 x 為趨近於數 a 為其極限：

設 x 趨近於 a 為極限，僅觀察 $a-x$ 變成小於 δ ，尚嫌不足，必須永遠小於 δ 。

例如，設 x 歷經數串 $\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{3}{4}, 0, \dots$ ，而變差 $1-x$ 雖將變成小於可指定之各 δ ，但不能永遠小於 δ ，則 x 不趨近於為極限。

(2) 在特例， $a-x$ 可變成 0，即 x 可至其極限 a

欲指明 x 趨近極限 a , 書作 $x \rightarrow a$, 讀作“ x 趨近於 a 爲極 190
限”, 或 $\lim x = a$, 讀作“ x 之極限爲 a ”。

一變數 x 漸近於極限或否, 完全依照其假定爲變動時所歷 191
經諸值之數串之性質。

例如, x 當變數串 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ 而變時, 雖趨近於極限,
顯然可見, 當其歷經數串 $1, 2, 3, 4, \dots$ 或數串 $1, 2, 1, 2, \dots$
而變時, 則不趨近於極限。

故下列定理皆甚重要:

定理(1). 變數 x 不絕增大, 但在他方面常永小於某已知 192
數 c . 則 x 趨近於極限, 而此極限或爲 c 或爲小於 c 之某數。

何則, 由假設, 有 x 決不超過之常數, 指定如此諸數屬於類
 R_2 , 而一切他數即 x 最後能超過之一切數屬於類 R_1 .

則得全部實數系分爲二部分 R_1, R_2 , 之區分, 而生 R_1 中
各數小於 R_2 中各數之關係。

R_1 中顯然無最後數故由 § 160, R_2 中有一最前數, 稱此數
爲 a . 當 x 增大時, 趨近於 a 爲極限。

設 δ 可至無論如何小, 但爲正數, 則 $a - \delta$ 屬於 x 最後超過
之數 R_1 一類. 故 x 最後永在 $a - \delta$ 及 a 之間, 而與 a 之差小
於 δ . (1)

同法可證:

變數 x 不絕減小, 但在他方面, 常永大於某已知數 c , 則 193
 x 趨近於極限, 而此極限或爲 c 或爲大於 c 之某數。

194 規則數串。然設 x 趨近於極限，并非必須常增大，或常減小。

例如，常 x 歷經數串 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ ，有時增大，有時減小；但 x 趨近於 0 為極限。

設 x 是否趨近於極限，須依 x 歷經數值 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 之數串而變時，有否下列定義所述之性質而定。

195 設數串 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 中，可假定之每一試驗正數，有一對應項 a_k 可求，其與後各項之數值小於 δ 因此數串稱為規則數串。

1. 例如，數串 $1.4, 1.41, 1.414, \dots$ (1) (§ 16) 為規則的。

蓋第一項 1.4 與其後各項之差小於 $1/10$ ；第二項 1.41 與其後各項之差小於 $1/10^2$ ；第 n 項與其後各項之差小於 $1/10^n$ 故也。

今不論 δ 可至如何小，吾人能以一值予 n ，使 $1/10^n$ 更小；且設 k 指示 n 之如此一值則 1.4, 1.41, \dots 之第 k 項與其後各項之差小於 δ 。

例如，指定 δ 之值為 $1/590000$ ，則有 $1/10^6 < \delta$ ，故 1.4, 1.41, \dots 之第六項與其後各項之差，小於 δ 之此值。

2. 下列數串亦為規則的。

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots, \quad (2) \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{17}{16}, \dots, \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \quad (4) \quad 2, 1, 1, 1, \dots \quad (5)$$

觀察 (2) 中各項之定為較大項，(3) 中則為較小項，(4) 中則有時為較大項，有時為較小項。

吾人常遇規則數串在某項以後皆相同，如 (5)。顯然可見變數歷經此種數串而變，最終將變為常數，即至其極限。

3. 下列數串為不規則的：

$$1, 2, 3, 4, \dots, \quad (6) \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \quad (7)$$

因(6)中一項與其後一項之差,常可為無限大,而(7)中則可常為 $\frac{1}{n}$,故不小於能指定之數,例如 $\frac{1}{n}$,

規則數串之公式. 1. 吾人可用下列公式指示項 a_k 與其後 196 每一項 a_p 之關係 (§ 63):

$$|a_p - a_k| \geq \delta \quad \text{因每一 } p > k. \quad (1)$$

2. 其次,因任何項 a_p 可 $> a_k$,必在 a_k 及 $a_k + \delta$ 之間,而任何項 a_p 可 $< a_k$,必在 $a_k - \delta$ 及 a_k 之間,故亦可寫作

$$a_k - \delta < a_p < a_k + \delta \quad \text{因每一 } p > k. \quad (2)$$

3. 由(2)可知設 a_p 有若干項小於 a_k 及若干項大於 a_k ,則其中二項間之差可超過 δ ,但不超過 2δ .

然常能求得一項 a_l 對應於 $\delta/2$,如 a_k 對應於 δ , a_l 以後每二項之差,其值小於 $2(\delta/2)$ 或 δ ;即此諸項中每二項間之關係,可以下列公式指示之.

$$|a_p - a_q| < \delta \quad \text{因每一 } p > q > l. \quad (3)$$

定理 2. 設諸值 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 之數串為規則數 197 串,假定變數 x 沿此種數值而變時,則 x 趨近於極限.

因 x 歷經 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 之數串而變時,最後將止於諸數之右. (1)

如設 δ 及 a_k 之意同上,則 x 抵達值 a_k 之後,將止於 $a_k - \delta$ 之右. (§ 196 (2)).

指定此一切數屬於類 R_1 , 而其他一切數——即 x 不能止於其右之一切數——屬於類 R_2 .

於是可得區分全部實數爲二部 R_1, R_2 , 使 R_1 中各數小於 R_2 中每一數. 依 § 160, 此區分決定有一數 a 存在.

例如, 設數串爲 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$, 則諸負有理數組成 R_1 , 但 0 及諸正有理數組成 R_2 ; 而 a 之本身爲 0.

當 x 歷經數串 (1) 而變時, 則必趨近於 a 爲極限.

何謂, 即對任何正數 δ , 不關係於無論其如何小, 因 (1) 爲規則數串, 故能求得一項 a_m (§ 93 (a)), 使

$$|a_p - a_q| < \delta / 2 \quad \text{因每一 } p > q > m. \quad (2)$$

但如 $a - \delta / 2$ 屬於 R_1 , 則 x 之一切值在某項之後者必在 $a - \delta / 2$ 之右, 又因 $a + \delta / 2$ 屬於 R_2 , 則此諸值中必有若干項在 a_m 之後而在 $a + \delta / 2$ 之左; 否則 $a + \delta / 2$ 將屬於 R_1 , 因 x 最後能止於其右故也.

例如, 設數串爲 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ 而 $\delta = \frac{1}{10}$, 則在第四項 $\frac{1}{16}$ 以後 x 之一切值, 必在 $a - \delta / 2$ 及 $a + \delta / 2$ 之間, 即在 $-\frac{1}{20}$ 及 $\frac{1}{20}$ 之間.

令 $a_{q'}$ 表 x 如此之值, 則

$$a - \delta / 2 < a_{q'} < a + \delta / 2,$$

或 $|a - a_{q'}| < \delta / 2. \quad (3)$

由 (2) 及 (3), 因 $q' > m$, 由 §§ 78, 178, 而得

$$|a - a_p| < \delta \quad \text{因每一 } p > q'.$$

易言之, 在 x 至值 $a_{q'}$ 之後, 其差 $a - x$ 之絕對值永小於 δ .

故 x 趨近於 a 爲極限. (§ 189)

198 反言之, 設 x 趨近於極限 a , 則 x 變動時所歷經諸值 $a_1,$

$a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 之數串爲規則數串.

因差 $a - x$ 之絕對值，最後能變為且永遠小於每一指定之正數 δ (§189)，可選定 a_k 使

$$|a - a_k| < \delta/2 \text{ 及 } |a - a_p| < \delta/2 \quad \text{因每一 } p > k;$$

因此得 $|a_p - a_k| < \delta \quad \text{因每一 } p > k.$

故數串 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 為規則的, (§196(1)).

聯合 §§ 197, 198 可得簡單敘述如下：

一變數趨近於極限，其充足且必要之條件，為假定此變數變 199

隨時歷經諸值之數串為規則的。

關於極限之數個重要定理

本節中 a 及 b 表任何已知實數，而 x 及 y 表變數，假定其變動時歷經已知無窮數串之諸值者。

極限 0. 由極限定義 (§ 189)，即得： 200

1. 設變數 x 之絕對值，最後能變為且永遠小於能指定之正數 δ ，則 x 趨近於 0 為極限；其逆亦真。

2. 設 x 趨近於 a 為極限，則 $a - x$ 趨近於 0 為極限；其逆亦真。

例如 x 變動時歷經數串 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ，則趨近於極限 0；而 x 變動時歷經數串 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ ，則 $1 - x$ 趨近於極限 0。

極限為 0 之變數，名為無窮小。

定理 1. 設 $x \rightarrow 0$ 及 $y \rightarrow 0$ ，而當 x 及 y 俱變時， A 及 B 201

之絕對值永小於定數 c ，則 $Ax + By \rightarrow 0$ 。

指定任何正數 δ ，不論其小至如何。

因 $x \rightarrow 0$ 時， x 之絕對值最後能永 $< \delta/2c$ 。 § 200, 1

因 $y \rightarrow 0$ 時, y 之絕對值最後能永 $< \delta/2c$, § 200, 1

故 $Ax+By$ 之絕對值, 最後能永 $< 2c \cdot \frac{\delta}{2c} = \delta$, $\therefore < \delta$, 故趨

近於 0 為極限 (§ 200, 1).

例如, 設 $x \rightarrow 0$ 及 $y \rightarrow 0$, 則 $(xy-3)x+2y \rightarrow 0$.

202 註 此定理推廣於有限數之變數甚易.

例如, 設 $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ 及 $z \rightarrow 0$, 則 $Ax+By+Cz \rightarrow 0$.

2 3 定理 2. 各趨近於極限之二變數, 其和, 差, 積, 商為其

極限之和, 差, 積, 商; 即設 x 及 y 順次趨近其極限 a 及 b , 則

1. $x+y \rightarrow a+b$.
2. $x-y \rightarrow a-b$.
3. $xy \rightarrow ab$.
4. $x/y \rightarrow a/b$. 除非 $b=0$.

因 $a-x \rightarrow 0$ 及 $b-y \rightarrow 0$, (§ 200), 由 § 201 而得

$$A(a-x)+B(b-y) \rightarrow 0. \quad (1)$$

公式 1, 2, 3, 4, 可由 (1) 推出, 例如

$$1. a+b-(x+y) = (a-x) + (b-y) \rightarrow 0, \quad \text{由 (1)}$$

即 $x+y \rightarrow a+b$. § 200, 2

$$2. a-b-(x-y) = (a-x) - (b-y) \rightarrow 0, \quad \text{由 (1)}$$

即 $x-y \rightarrow a-b$. § 200, 2

$$3. ab-xy = (a-x)b + (b-y)x \rightarrow 0, \quad \text{由 (1)}$$

即 $xy \rightarrow ab$. § 200, 2

$$4. \frac{a}{b} - \frac{x}{y} = \left(\frac{a}{b} - \frac{x}{b} \right) + \left(\frac{x}{b} - \frac{x}{y} \right) = (a-x) \frac{1}{b} - (b-y) \frac{x}{by}, \therefore \rightarrow 0, \text{由 (1)}$$

即 $x/y \rightarrow a/b$. § 200, 2

204 系. 設 $x \rightarrow a$, 則 $x^n \rightarrow a^n$.

205 定理 3. 趨近於極限之變數, 其 n 次根之極限, 為其極限之 n 次根; 即

設 $x \rightarrow a$, 則 $\sqrt[n]{x} \rightarrow \sqrt[n]{a}$.

1. 當 $a=0$ 時, 指定任何正數 δ .

因 $x \neq 0$ 時, x 之絕對值, 最後能永 $< \delta^2$. § 200, 1

故 \sqrt{x} 之絕對值, 最後永 $< \delta$. § 184

故 $\sqrt{x} \neq 0$. § 200, 1

2. 當 a 不為 0 時, 則由後節 (§308) 可知 $x-a$ 常能以 \sqrt{x}

與 \sqrt{a} 整除, 且當 $x \neq a$ 時, 其商 Q 不趨近於極限 0 .

故由 § 203(1), 使 $A=1/Q$ 及 $B=0$, 則

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = (x-a)/Q \neq 0, \text{ 即 } \sqrt{x} \neq \sqrt{a}. \quad \text{§ 200, 2}$$

無理數之關係於量

線段之長同單位不可通約. 設一線段 S 與單位線段 s 不可 206
通約——如設當 S 及 s 為正方形之對角線, 及一邊時, 則可證 s
能分至任何小, 無有盡部分適合於 S 之內——則 § 130 所述長度
之定義不能應用於 S .

但有一定無理數 a 與 S 發生如下關係:

與單位 s 可通約之二線段, 歸屬於各異之二類, 其一類小於
 S , 又一類大於 S .

有理數之為其長者 (§ 130), 歸屬於對應二類, 可稱為 A_1
及 A_2 . 每一正有理數或屬於 A_1 或屬於 A_2 . A_1 中各數在 A_2
中每一數之前, 且其終 A_1 中無最後數, A_2 中無最前數*.

由是依 §154, 有一定無理數 a 在 A_1 中一切數及 A_2 中一切
數之間. 今稱此數 a 為 S 之長, 故有下列定義:

* 假如 A_1 中有最後數, 則與 s 可通約且小於 S 之諸線段中,
將有一極大者稱為 S' .

但無如此之線段存在, 因依下頁脚註說明之阿基米得氏公
理, 可求得 s 之有盡部分小於 $S-S'$; 且 S' 及 s 此部分之和, 將與
 S 可通約, 而小於 S 大於 S' .

207 與單位 s 不可通約之任何線段 S 之長，爲一無理數 a ，而小於 S 線段長度之一切有理數及大於 S 線段長度之一切有理數之間。

例如， $\sqrt{2}$ 爲以正方形一邊所表對角線之長。

203 設以 s 作單位以表 S 之長爲 a ，書作 $S = as$ ，其 a 爲有理數或無理數。

209 以點描寫實數。如 § 134 內之圖，任作正直線，而在其上取定點 O 爲原點；且取合宜單位 s ，以度線長。則從此直線任何點 P 至 O 之距離，可知爲以 s 表示線段 OP 之長 (§ § 130, 207,

作任何已知數 a 之圖形，可選定直線上之點 P ，使其與 O 之距離，爲 a 之絕對值，此點取於 O 之右或左，依 a 之爲正或負而定。

設 a 爲有理數，則能實際作 P (§ 134)。反之，設 a 爲無理數，則常不能作 P 。假定 P 存在，換言之，即在此線上有一單獨點 P ，在圖示有理數小於 a 一切點及圖示有理數大於 a 一切點之間*。

*幾何公理之討論，並非 本書分內之事，但下列關於度量本旨者，此時應考慮也。

1. 阿基米得氏公理設 s 及 S 表二線段，使 $s < S$ 則常能求得一整數 m 使 $ms > S$ 。

2. 連續之公理 設一直線所有諸點，分爲二類 R_1 及 R_2 ，使 R_1 中各點在 R_2 中每一點之左，則 R_1 中有一最後點或 R_2 中有一最前點。

(1) 阿基米得氏公理含於假定各線段爲能度量者，因第一步以 s 表 S 以求整數 m ，使 $(m-1)s < S < ms$ 故也。

(2) 公理 1 及 2 可證 § 200 中之假定，即每一已知無理數 a ，有一對應點 P 存在。

因 a 區分有理數系爲二部分，可順次名爲 B 及 C ，其對應於

反之，倘 P 已知時，可將 OP 以求得 a ，至少可為近似值，而將 10 加十或一號於其結果，故可在 O 之右或左而定。

例如設 P 在 O 之右，而用 s 沿 OP 量得五次，用 s 十分之一沿其餘部分量得七次，又用 s 百分之一沿其餘部分量得六次，於 5.76 為 a 之值至第二位小數。

如是於一切實數及線上一切點之間，備立一對 點 (§ 206) 且設 a 及 b 表任何二實數，而 P 及 Q 表其對應點， P 在 Q 之左或右，依 a 小於或大於 b 而定。

例如設 a 及 b 為正，而 $a < b$ ，且設 c 表 a 及 b 間之有理數，而 R 表其對應點，則有 (§ 206,)

$$OP < OR \text{ 及 } OR < OQ \text{ 故 } OP < OQ,$$

各數之點，順次名爲 B 點及 C 點，則可證在此線內有一定點 P ，將一切 O 點與一切 B 點分離。

先指定 B 點及一切中間點屬於類 R_1 ，而以其右之一切點屬於 R_2 ，且令 P 表此區分依 2 所定之點。

次指定 C 點及一切中間點屬於類 S_1 ，而以其左之一切點屬於類 S_2 ，且令 Q 表此區分依 2 所定之點。

則點 P 及 Q 必重合。設不重合，則令 PQ 表其中間線段，從 1, 可求一整數 m ，使 $m \cdot PQ > s$ ，故 $PQ > s/m$ 。

但此為不可能，因能從 B 選一數 b ，從 C 選一數 c 使 $c - b < 1/m$ 。又設 L 及 M 為順次對應於 b 及 c 之點，則有

$$LM < s/m, \text{ 及 } PQ < LM, \text{ 故 } PQ < s/m$$

即此一點 P 或 Q 依 § 209, 對應於 a 。

(3) 末後觀察實數系對應於 2 者，有 § 170 所述之性質，而對應於 1 者，有下列性質：

設 a 及 b 為任何二正實數，常能求得一整數 m ，使 $mb > a$ 。

因依 § § 108, 176, 178 能選定一整數 m ，使 $m > a/b$ ，故 $mb > a$ 。

一種有理數系之區分，欲證明對於一之無理數，則實數系將不能具此性質——至少非放棄其他若干性質不可——於 § 154 所述。

例如，設每一有理數或為 a_1 ，或為 a_2 ，而對於每一 a_1, a_2 ，有 $b_1 < a_1 < c < a_2$ ，則必有 $c - b < a_2 - a_1$ (§ 178 及 § 183 之證)

但不論指定正數 δ 至任何小，決不能求得一整數 m 大至如 $m(c - b) > \delta$ 。

如可求得，則 $c - b > \delta/m$ ，此為不可能，因 $c - b < a_2 - a_1$ ，且能選定 a_1, a_2 使 $a_2 - a_1 < \delta/m$ 故也。

212 定理。設以 T 表 S 之長為 a，又以 s 表 T 之長為 b，則以 s 表 S 之長為 ab。

1. 當 a 及 b 為有理數時。

令 $a = \frac{a}{b}$ 及 $b = \frac{c}{d}$ 。式中 a, b, c, d, 表整數。

因 S 含 T 之 $\frac{b}{a}$ 分之一 (§ 130)，故 bS 必含 T 本身 a 倍，即

$$bS = aT. \quad (1)$$

同理

$$dT = cs. \quad (2)$$

但由 (1) 及 (2)，易得

$$bdS = adT, \text{ 及 } adT = acs.$$

故

$$bdS = acs$$

即 S 之長如以 s 表之為 $\frac{ac}{bd}$ 或 $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ 。

§130

2. 當 a 及 b 有一或二者為無理數時。

令 S_1 及 S_2 表任何線段與 T 可通約者，使

$$S_1 < S < S_2,$$

而令 a_1, a_2 為以 T 所表 S_1, S_2 之長，即

$$S_1 = a_1 T \text{ 及 } S_2 = a_2 T. \text{ 式中 } a_1 < a < a_2, \quad \text{§208}$$

同法，令 T_1 及 T_2 表任何線段與 s 可通約者，使

$$T_1 < T < T_2.$$

而令 b_1, b_2 為以 s 所表 T_1, T_2 之長，即

$$T_1 = b_1 s \text{ 及 } T_2 = b_2 s. \text{ 式中 } b_1 < b < b_2.$$

因 $S_1 = a_1 T$ 及 $T > T_1$ ，及 $T_1 = b_1 s$ 。

依情形 1. 有

$$S_1 > a_1 b_1 s.$$

同理，

$$S_2 < a_2 b_2 s.$$

故

$$a_1 b_1 s < S_1 < S < S_2 < a_2 b_2 s.$$

由此得

$$a_1 b_1 s < S < a_2 b_2 s.$$

如此證明一切數 $a_1 b_1$ 及 $a_2 b_2$ 為以 s 屢次所表線段小於或大於 S 者之長，故在一切數 $a_1 b_1$ 及 $a_2 b_2$ 間之一數 ab (§ 171)，為以 s 表 S 本身之長 (§ 207)。

系。 設以 s 表 S 及 T 之長順次為 a 及 b , 則以 T 表 S 213
 之長為 a/b .

因令 T 表 S 之長為 x , 而以 s 表 T 之長為 b , 故以 s 表
 S 之長為 xb (§ 212).

但依假設, 以 s 表 S 之長為 a ,

故 $xb = a$,

由是 $x = a/b$.

連續變數。 吾人最熟知直覺之一為連續運動。

214

O	A	P	B

設 P 點沿直線 OAB 自 A 繼續運動至 B ; 而令 a, x 及 b
 順次表 OA, OP 及 OB 之長, O 為原點.

按 § 209 假定, 對於 a 及 b 間之每一數, 線段 AB 均有其
 點, 蓋當 P 自 A 向 B 運動時, 必須經過之, 於是可謂 P 自 A
 至 B 連續運動時, x 自 a 值增至 b 值而經過中間一切諸值,
 或 x 自 a 至 b 連續而變.

因對於 x 之任一已知值, 不能知其後繼之值, 自然不能描
 寫 x 之變動, 設欲 x 作數學上合理之推究, 須如下列規定方為
 滿意: (1) x 可於 a 及 b 間取每一已知值, 及 (2) 設 p 及 q 表
 此值中之任何一對, 而 $p > q$, 則 x 當先取值 p 後取值 q , 當 x
 之性質只有第一項時, 亦常稱 x 為連續變數.

此。 令 M 及 N 表同類之任何二量, 當 M 及 N 表線段 215
 時, 如 § § 11, 130, 207, 中所定為長之各數, 稱為以 N 所表 M
 之測度, 或稱 M 與 N 之比。

故 §§ 212, 213, …… 與長相關之定理, 可應用於同類任何量之測度或比, 於特例

- 216 設以同單位所表 M 及 N 之測度順次爲 a 及 b , 則 M 與 N 之比爲 a/b .

V. 虛數與複素數

虛純數

- 217 實數系不含負數之偶次根; 因一切實數之偶次乘幂均爲正數故也. 例如實數系含 -1 之平方根.

爲應付此種困難, 故發明一種符號之新系, 名爲虛數或複素數.

- 218 此種新符號之最簡者爲 i , 名爲虛數單位, 用此單位及實數 d , 成符號 oi , 此數認其係數 a 在實數系中之次序而排列之, 於是得數之新連續次序系, 名爲純虛數.

如前展開實數系時, 可先作成完全虛數記法:

$$\dots -3i, -2i, 0, i, 2i, 3i, \dots$$

次引入分數係數之虛數以擴其稠密系, 末引入無理係數之虛數以擴其連續系.

$2i$ 僅爲新數中之一名稱, 其惟一之性質, 即於新次序系中有一定位置耳. 但在乘法定義, 則此 $2i$ 亦表示 $2 \times i$ 或 $i \times 2$ 之積. 每一純虛 ai 皆如此.

在特例, 定 $0 \cdot i$ 爲 0 . 故 $0i$ 可書作 0 .

注意 0 爲實數系與純虛數系公有之唯一數。

爲此新數，吾人證明所謂加法與乘法之演算，此法可依下式定之：

$$1. ai + bi = (a+b)i, \quad 2. a \cdot bi = i \cdot a = abi, \\ 3. ai \cdot b = -ab.$$

例如，3，二純虛數 ai 與 bi 之積爲實數 $-ab$ ，此係以 ab 及 bi 之係數相乘而變其結果之符號所得者。

定乘器如 § 13. 例如 $(ai)^2 = ai \cdot ai$.

純虛數系包含實數系內一切負數之平方根，即 220

$$\sqrt{-1} = i \text{ 及 } \sqrt{-a^2} = ai.$$

此因 $i^2 = i \cdot i = 1i \cdot 1i = -1$. § 219, 3

故 i 爲 -1 之平方根 (§138). 以 $\sqrt{-1}$ 表其根，而有 $= \sqrt{-1}$.

同法可證 $-i$ 爲 -1 之平方根以 $-\sqrt{-1}$ 表之。

同理，因 $(ai)^2 = ai \cdot bi = -a^2$. 故有 $ai = \sqrt{-a^2}$

複 素 數

欲使數系包含負數之較高偶次根，遂發明複素數 此數如 221 式 $a+bi$ ，係由實數 a 與純虛數 bi 以 + 號連結而成。此數亦常名爲虛數。

在複素數加法意義未定以前，式 $a+bi$ ，可視作簡單符號，而 + 號僅爲此符號之一部分。

因 $a = a+0i$ 及 $bi = 0+bi$ ，故實數與純虛數皆含於複素數 222
中。

223 複素數可視作一切數 $a+bi$ 中依直行與橫列而排列者；其中同一之 b 在同一橫列，而依 a 之次序自左而右排成橫列；同一之 a 在同一直行，而依 b 之次序自下而上排成直行。吾人可注意任何特殊複素數，係依其在此‘二向度序列’中之位置所決定。

在後 § 133，將說明對於 a 與 b 之一切值，圖示所排列之法則，橫於 a 與 b 之整數值，可指示如下：

$$\begin{array}{cccccccc}
 \dots & \dots \\
 \dots & -2+2i & -1+2i & 2i & 1+2i & 2+2i & \dots & \dots \\
 \dots & -2+i & -1+i & i & 1+i & 2+i & \dots & \dots \\
 \dots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \dots & \dots \\
 \dots & -2-i & -1-i & -i & 1-i & 2-i & \dots & \dots \\
 \dots & -2-2i & -1-2i & -2i & 1-2i & 2-2i & \dots & \dots \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

此排列次序系其為元素之橫列(或直行)亦為敘述 (§ 17)，而各列均為在式 $a+bi$ 之記號次序數系中。

224 相等定義。當二複素數在上述二向度序列中佔有同一位置時，則此複素數稱為相等。故

225 設 $a+bi=c+di$ ，則 $a=c$ 及 $b=d$ ；反之亦真。在特例，設 $a+bi=0$ ，則 $a=0$ 及 $b=0$ ；反之亦真。

二不等複素數如 $2+3i$ 與 $3+i$ ，不能謂其一小於或大於——在前或在後——其他數，因複素數不成單一次序系故也。

226 加法減法乘法之定義。二複素數 $a+bi$ ， $c+di$ 之和，差，與積，為成下列方程右邊之複素數。

1. $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$
2. $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$
3. $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$

按 1 與 2, 加法與減法爲相反演算. 在特例, 由 1,

$$(a+0i)+(0+bi)=(a+0)+(0+b)i=a+bi;$$

即由定義 1, $a+bi$ 爲 a 與 bi 之和.

此種定義, 與交換, 結合, 分配諸定律符合. 其實可適合此諸定律與上述定義而得之. 例如

$$\begin{aligned} (a+bi)(c+di) &= (a+bi)c + (a+bi)di \\ &= ac + bi \cdot c + a \cdot i + i \cdot di \\ &= (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i, \text{ 因 } i^2 = -1. \end{aligned}$$

系. 一因數爲零時, 其積爲零.

$$\text{因 } (a+bi)(0+0i) = (a \cdot 0 - b \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 0)i = 0,$$

除法. 以 $c+di$ 除 $a+bi$ 之商, 可定義以 $c+di$ 乘之而得 $a+bi$ 之複素數. 當 $c+di$ 不爲 0 時, 如此之商有一但僅有一, 即下列方程右邊之複素數:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

當 $c+di$ 爲 0 時, 無一定之商存在.

因以 $c+di$ 乘此方程右邊之積爲 $a+bi$, 讀者用 § 226 易於證明.

吾人發見此數爲其商如次:

設有一數存在, 以 $c+di$ 乘之可得 $a+bi$, 令其爲 $x+yi$.

$$\text{則 } (x+yi)(c+di) = a+bi. \quad (1)$$

$$\text{或 } (cx-dy) + (dx+cy)i = a+bi. \quad (2)$$

$$\text{故 } cx-dy = a \text{ 及 } dx+cy = b. \quad (3) \text{ § 225}$$

解此一對方程求 x, y , 得

$$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}, y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}, \text{ 除 } c^2+d^2=0 \text{ 外. } (4)$$

且因 (4) 爲 x 與 y 滿足 (3) 之一對唯一之值，故其對應數 $x+yi$ 爲以 $c+di$ 乘之而得 $a+bi$ 之唯一數。

由 (4)，當 $c^2+d^2=0$ 時，商之定義失其意義甚明，但設 $c^2+d^2=0$ ，則必 $c=0$ 及 $d=0$ ，否則將有一正數等於 0 矣。且設 $c=0$ 及 $d=0$ ，則除數 $c+di$ 爲 0。

229 交換，結合，及分配定律，適所定之演算，顯然包含實數之對應演算，一如實數，亦適於交換，結合及分配諸定律。

$$\text{例如. } (a+a'i)(b+b'i) = ab - a'b' + (ab' + a'b)i, \quad (1)$$

$$\text{及 } (b+b'i)(a+a'i) = ba - b'a' + (b'a + ba')i, \quad (2)$$

但 (1) 與 (2) 之右邊相等 §177。

$$\text{故 } (a+a'i)(b+b'i) = (b+b'i)(a+a'i).$$

其餘定律，可依同法成立。

230 相等法則，令 a, b, c 表任何複素數。

$$1. \text{ 設 } a=b, \text{ 則 } a+c=b+c.$$

$$2. \text{ 設 } a+c=b+c, \text{ 則 } a=b.$$

$$3. \text{ 設 } a=b, \text{ 則 } ac=bc.$$

$$4. \text{ 設 } ac=bc, \text{ 則 } a=b. \quad \text{除 } c=0 \text{ 外.}$$

$$1. \text{ 因令 } a=a+a'i, b=b+b'i, \text{ 及 } c=c+c'i.$$

$$\text{設 } a+a'i = b+b'i,$$

$$\text{則 } a=b \text{ 及 } a'=b' \quad \S 225$$

$$\text{故 } a+c=b+c \text{ 及 } a'+c'=b'+c', \quad \S 178$$

$$\text{由是 } (a+c) + (a'+c')i = (b+c) + (b'+c')i, \quad \S 215$$

$$\text{即 } a+c=b+c. \quad \S 226$$

$$2. \text{ 設 } a+c=b+c,$$

$$\text{則有 } a+c+(-c) = b+c+(-c). \quad \text{由 1}$$

$$\text{故 } a=b \quad \S 226$$

3 及 4 此二法則之證明，順次與 1 及 2 相似。

系，毀積為零，則其因子之一必為零。 231

由 § 230, 4, 用 § 76 之理，即得。

複素數之絕對值，正實數 $\sqrt{a^2+b^2}$ 稱為 $a+bi$ 之絕對，232
 值以 $|a+bi|$ 表之，故由定義，

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

例如， $|2+i| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$

當 $b=0$ 時，此絕對值一定義化為 §63 所述之實數絕對值，
 對於此定義之幾何解釋，參看 § 239.

二複素數中，亦視其第一數在數值上小於，等於，或大於 233
 其第二數，依其第一數之絕對值小於，等於，或大於第二數而定。

如 $2+3i$ 之數值大於 $3+i$.

因 $|2+3i| = \sqrt{13}$ 及 $|3+i| = \sqrt{10}$, 而 $\sqrt{13} > \sqrt{10}$.

定理 1. 二複素數積之絕對值，等於其絕對值之積。 231

令此二數為 $a = a+a'i$ 及 $b = b+b'i$.

因 $ab = ab - a'b' + (ab' + a'b)i$. § 226

得 $|ab| = \sqrt{(ab - a'b')^2 + (ab' + a'b)^2}$. § 232

但實行此指定演算，則得

$$(ab - a'b')^2 + (ab' + a'b)^2 = (a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2).$$

故 $\sqrt{(ab - a'b')^2 + (ab' + a'b)^2} = \sqrt{a^2 + a'^2} \cdot \sqrt{b^2 + b'^2}$. § 186

$$\sqrt{b^2 + b'^2}.$$

即 $|ab| = |a| \cdot |b|$.

定理 2. 二複素數和之絕對值，不能超過其絕對值之和。 235

用 § 234 之同一記法。

則 $\sqrt{a^2 + a'^2} + \sqrt{b^2 + b'^2} \geq \sqrt{(a+b)^2 + (a'+b')^2}$. (1)

設 $a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + 2\sqrt{(a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2)}$

$$\equiv a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2 + 2(ab + a'b'). \quad \text{§ 184}$$

$$\therefore \text{設} \quad \sqrt{(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)} \equiv ab+a'b' \quad \S 178$$

$$\therefore \text{設} \quad a^2b^2+a'^2b'^2+a^2b'^2+a'^2b^2 \equiv a^2b^2+a'^2b'^2 + 2aba'b' \quad \S 184$$

$$\therefore \text{設} \quad a^2b'^2+a'^2b^2 \equiv 2aba'b' \quad \S 178$$

$$\therefore \text{設} \quad (ab'-a'b)^2 \equiv 0. \quad (2) \quad \S 178$$

但(2)當正確，因各實數之平方均正（或0）故也，故(1)當真確——即已證明此定理。

$$\text{如} \quad |2+i| = \sqrt{5} \text{ 及 } |1+3i| = \sqrt{10}.$$

$$\text{但} \quad |(2+i)+(1+3i)| = 5, \text{ 而 } 5 < \sqrt{5} + \sqrt{10}.$$

236 冪及根. 1. $a+bi$ 之 n 次冪，書作 $(c+di)^n$ ，其意為 n 個因數各為 $a+bi$ 者之積，由 § 226, 3 而知其積為複素數如 $c+di$

如 § 185 可證明指數定律適用於複素數之乘冪。

2. 設 $(a+bi)^n = c+di$ ，則稱 $a+bi$ 為 $c+di$ 之一個 n 次根，而可以 $\sqrt[n]{c+di}$ 表之。

後將證明每一已知複素數，有如此 n 個 n 次根：易言之，即虛數系中有 n 個不同之數其 n 次冪等於 $c+di$ 。

$$\text{例如,} \quad (1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2})^2 = 1/2 + 2i/2 - 1/2 = i,$$

故數 $1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$ 為 i 之平方根，即為 -1 之四次根， -1 之其他三四次個根為 $-1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}$ 。

237 總結論。數組無再事擴充之必要，因如 §§ 226, 236 所示，虛數系已足供一切基本四法與開方之需要。雖此外關於數之某種演算，在數學上佔有地位，——其中如 § 140 求數之對數演算，即為其一，——然此種演算容許用諸項為複素數之無窮級數如 $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ 之定義；且設如此之級數有和，則其和為一複素數。

複素數之圖示法

複素數可在平面上用點繪出，其點名為對應數之圖形。 288

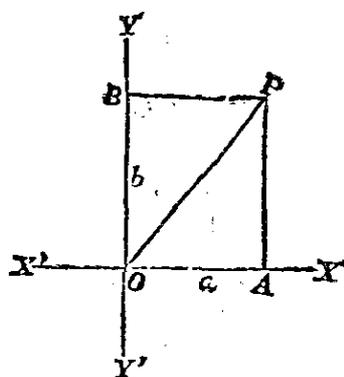
任取二直線 $X'OX, Y'OY$ 互相正交於原點 O ；而用一定單位線段 s 以量長度。

1. 用 $X'OX$ 上點 A 表各實數 a ， A 與 O 之距離以 s 表之為 $|a|$ (§209)，取 A 於 O 之右或左，依 a 為正或負而定。

2. 用 $Y'OY$ 上點 B 表各純虛數， bi ， B 與 O 之距離為 $|b|$ 取 B 於 O 之上或下，依 b 為正或負而定。

3. 用下列作圖法所得之點 P 表各複素數 $a+bi$ ：

先依 1 及 2 求得 a 及 bi 之圖形 A 及 B ，通過 A 及 B 順次作 $Y'OY$ 及 $X'OX$ 之平行線，在二線相交處之點 P ，為 $a+bi$ 之圖形



今稱 $X'OX$ 為實數軸，而 $Y'OY$ 為純虛數軸。

用此法則，使複素數系與平面內一切點之圖成逐一對應之關係 (§ 2)，更得複素數系之二向度次序性質之完全表示法 (§ 223)。

觀察一切數有同一虛數部分者之圖形，在 $X'OX$ 之同一平行線上，而有同一實數部分者之圖形，在 $Y'OY$ 之同一平行線上。

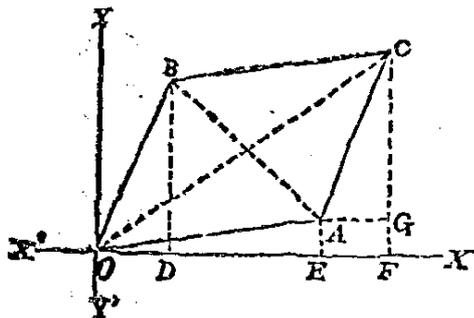
任何複素數之絕對值，為其圖形與原點之距離。 289

因 § 233 之圖中， OA 及 AP 之長，順次為 a 及 b ，故 OP 之長

$$\sqrt{a^2+b^2} \text{ 或 } |a+bi| \text{ (§ 232),}$$

210 二複素數 $a = a + a'i$, $b = b + b'i$ 之和及積之圖形, 可如下求得:

已知 A 及 B 順次為 a 及 b 之圖形, 連結 OA , 及 OB , 且完成平行四邊形 $OACB$, 則 O 為 $a+b$ 之圖形.



因作垂線 BD, AF, CF, AG , 則 a, a', b, b' 順次為 OE, EA, OD, DB 之長, 而三角形 ODB 及 AGC 為全等形.

今 $OF = OE + EF = OE + OD = a + b$ 就其長.

及 $FC = FG + GC = EA + DB = a' + b'$ 就其長.

故 C 為 $a + b + (a' + b')i$ 或 $a + b$ 之圖形 (§ 226, 1).

當 O, A, B 在一直線時, 則作 AC 等於 OB 之長且與 OB 同向, 常可得 C .

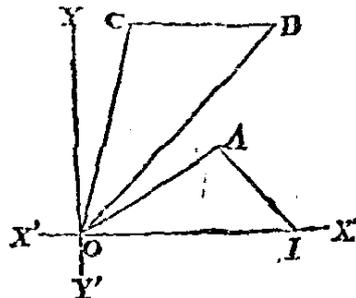
因 $OC \leq OA + AC$, 即 $\leq OA + OB$, 故得 $|a + b| \leq |a| + |b|$ 差 $a - b$ 之圖形, 為和 $a + (-b)$ 之圖形.

已知 a 及 b 之圖形為 A 及 B , 而令 I 表 1 之圖形, 連結 OA, OB, IA 而在 OB 上作三角形 OBC , 與 OIA 相似, 且使 OB 繞 O 旋轉至落於 OX 上, OC 落於

OA 上, 則 C 為 ab 之圖形.

此法則俟後證明, 且由此導出作商及乘積之圖形諸法.

當 $b = i$ 時, OC 為以 OC 繞 O (反時針方向) 轉 90° .



241 此可將複素數中之恆等關係, 轉移為幾何定理, 故虛數可表實在事物之關係.

例如, $(a+b)/2 = a + (b-a)/2$ 表示平行四邊形之對角線互相平分: 因 $(a+b)/2$ 及 $a + (b-a)/2$ 之圖形, 為第一圖中 OC 及 AB 之中點 (§ 240).

第二編 代數

I. 緒論

用文字表數

常數與變數。代數學中常用文字表任何數。例如公式 $ab = 242$ 中，文字 a 及 b 表任何二數，此公式之意為：以任何第二數乘任何第一數之積，與以其第一數乘第二數之積相同。

在許多代數討論中，有意義之文字間，例如式 $a + b$ 之二文字 b 及 a 間，如下分別，更覺便利。

第一。視其一文字 b ，首先假定有特別值任意如吾人所願，而於討論中，自始至終保留之。如此之文字，名為已知文字或已知數或常數。

第二。反言之，視其他文字 a 在自始至終討論中，可自由取任何可能之值，且由任何一值變至任何他值者。如此之文字，名為變數。

未知文字。但文字亦可用以表示所求值之特殊數。如此之文字，名為未知文字或未知數。

對於未知文字，不能如對於常數或變數文字，自由如願假定為任意值。

例如。於方程 $2x - 5 = 0$ 中， x 為未知字，其值易於求得為 $5/2$ 。在式 $2x - 5$ 中，可隨意假定 x 為任何值，但在方程 $2x - 5 = 0$ 中，則除 $5/2$ 外不能假定 x 為他值。

214 文字之選擇。文字之選擇，必須限制不可使同一文字，同時代表不同之二數。

慣例用字母之首先文字如 a, b, c 表已知數或常數；而以末後文字如 x, y, z 表未知數或變數。

除單一文字外，有時加以小號或附碼，如 a', a'', a''' 該作“ a 第一”“ a 第二”“ a 第三”；及 a_0, a_1, a_2 該作“ a 附零”“ a 附 1”，“附 2”。

245 文字計劃。常以文字 a, b 表數字。只能用算術演算，表示其連合之結果。例如加 b 於 a 之意，僅寫成式 $a+b$ ，故此式稱爲 a 及 b 之和。同法，以 b 乘 a 之積爲式 ab 。

如此所得之文字式表數，可用算術演算法計算之，但在此種計算中，不能直接用於式之值，因其值未知故也。今只能以疏算之適當符號連結諸式，而用種種變化使其結果之形式化簡，此種變化須不影響於其結果之值，不必顯其值如何。

今於 § 68 已知一切變化能施於和及積之形式而不影響其值者，皆表現於下列公式：

$$1. a+b=b+a. \quad 2. a+(b+c)=(a+b)+c.$$

$$3. ab=ba. \quad 4. a(bc)=(ab)c. \quad 5. a(b+c)=ab+ac.$$

故可說公式 1 至 5，皆爲加法及乘法之定變，或爲所罰，或能用以連結文字式時，且如此之事，在算術上其餘演算亦真，

例如，加 $2x+3y$ 及 $4x+5y$ ，其意僅為將式 $2x+3y+(4x+5y)$ ，用公式 1 至 5，且加其已知數，以求其所能化之最簡式，於是得

$$\begin{aligned} 2x+3y+(4x+5y) &= 2x+3y+4x+5y && \text{由 2} \\ &= 2x+(3y+4x)+5y = 2x+(4x+3y)+5y && \text{由 2 及 1} \\ &= 2x+4x+3y+5y = (2x+4x)+(3y+5y) && \text{由 2} \\ &= (2+4)x+(3+5)y = 6x+8y, \text{即所求之和。} && \text{由 3 及 5} \end{aligned}$$

計算之基本法則

按照以上所述，可視加法，減法，乘法，除法，乘方，及開方 246
為用下列法則及公式在代數學上所定之變，故稱之為計算之基本法則。

在此種公式中——於本書第一編中為各類數所設立者——文字 a, b, c 表任何有限數，而相等記號 $=$ ，意謂“代表同數”。

加法。加 b 於 a 之結果為式 $a+b$ ，稱此式為 a 及 b 之和。 247
此式關於 a 及 b 之任何已知值有一值，且祇有一值。在特例， $a+0=0+a=a$ 。

加法為交換及結合之演算；即適合於二定律 (§ § 34, 35): 248

$$a+b=b+a, \quad a+(b+c)=(a+b)+c.$$

下列相等之法則，在和亦真 (§ 39): 249

$$\text{設 } a=b, \quad \text{則 } a+c=b+c.$$

$$\text{設 } a+c=b+c, \quad \text{則 } a=b.*$$

減法。此為加法之反求 (§ 55)。已知任何二數 a 及 b 常 259

*以後將知當 c 為無限時此法則無效。

有一數且僅有一數能加 b 而得 a 。稱此數爲自 a 減 b 而得之餘數，而以式 $a-b$ 表之。故由定義

$$(a-b)+b=a.$$

在特例，可以 $-b$ 代 $0-b$ 。

251 乘法。以 b 乘 a 之結果爲式 ab ，稱 ab 爲以 b 乘 a 之積。

此式關於 a 及 b 之任何已知數有一值，且只有一值。

在特例， $a \cdot 0 = 0, a \cdot a = a^2$ ，無論 a 可有如何有限值。

當 b 爲正整數時， $ab = a + a + \dots$ 至 b 項。

252 乘法爲交換及結合之演算，而關於加法爲分配演算；即適合

於三定律 (§§ 45-47)：

$$ab = ba, \quad a(bc) = (ab)c, \quad a(b+c) = ab + ac.$$

253 下列相等之法則，在積亦真 (§§ 75, 76)：

$$\text{設 } a=b, \quad \text{則 } ac=bc,$$

$$\text{設 } ac=bc, \quad \text{則 } a=b, \quad \text{除 } c=0 \text{ 外}^*$$

$$\text{設 } ac=0, \quad \text{則 } a=0, \quad \text{或 } c=0.$$

254 除法。此爲乘法之反求 (§ 124)。已知任何二數 a 及 b ，除 b 爲 0 外，常有一數且僅有一數能以 b 乘之而得 a 。稱此數爲以 b 除 a 所得之商，而以式 $\frac{a}{b}$ 或 a/b 表之，故由定義

$$\left(\frac{a}{b}\right)b = a, \quad \text{除 } b=0 \text{ 外。}$$

255 乘方。此爲屢次乘法之一種情形，以 a^n 表 $a \cdot a \cdot \dots$ 至 n 因數之連乘積，而稱之爲 a 之 n 次幕。

*以後將知當 b 爲無量時此法則無效。

在符號 a^n 中， n 名爲指數，而 a 爲其底。

乘方或乘冪適合於下列三定律，名爲指數定律(§ 185): 256

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n.$$

下列相等之法則，在乘冪亦真確(§ 184): 257

$$\text{設 } a = b, \quad \text{則 } a^n = b^n. \text{ —}$$

$$\text{設 } a^2 = b^2, \quad \text{則 } a = b, \text{ 或 } a = -b.$$

此第二法則及特別情形之一般法則，俟後證明。

開方。開方爲乘方相反算法之一種(§§ 138, 140)。已知任 258
何正數 a ，必有一正數且僅有一正數其 n 次冪等於 a 。稱此數
爲 a 之 n 次主根，而以 $\sqrt[n]{a}$ 表之。當 $n=2$ 時，則以 \sqrt{a} 表之。故
由定義

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

但此正數 $\sqrt[n]{a}$ ，並非 n 次冪等於 a 者之惟一數。反之，有 n 個
不同之數，其 n 次冪等於 a ，俟後證明。且此不但當 a 爲正時
真確，即 a 爲任何他種之數時亦真。

當 a 爲正數而 n 爲奇數時，則 $-a$ 之 n 次主根爲 $-\sqrt[n]{a}$ 。

以上法則之道，吾人稱上述法則之若干種爲相等法則；餘 259
者可稱爲結合法則。

注意凡結合法則及相等法則，關於和爲可逆的，但相等法則
關於積及乘冪則並不完全可逆。

例如，依分配定律 $a(b+c) = ab+ac$ ，此爲結合法則之一，
我們可以 $ab+ac$ 代 $a(b+c)$ ，或反之，以 $a(b+c)$ 代 $ab+ac$ 。

其次，設 $a=b$ ，常可決定 $a+c=b+c$ ，且反之，設 $a+c=b+c$ ，則 $a=b$ 。

但設 $a=b$ ，雖常可決定 $ac=bc$ ，然反之，設 $ac=bc$ ，須已知 c 不為 0 始能決定 $a=b$ 。

由 $a=b$ 雖常可得 $a^2=b^2$ ，由 $a^2=b^2$ ，則僅可得 $a=b$ 或 $a=-b$ 。

250 不等法則。公式 $a \neq b$ 之意，係“ a 不等於 b ”。

二已知不等實數 a 及 b ，其一為代數的較大，而他數為代數的較小 (§ 82)。

設 a 較大而 b 較小，寫作

$$a > b \text{ 或 } b < a.$$

在特例， $a > 0$ 或 $a < 0$ ，依 a 為正或負而定。

261 關於任何已知實數 a, b, c ，有下列法則 (§§ 173, 184)：

1. 設 $a=b$ 及 $b=c$ ，則 $a=c$ 。

設 $a=b$ 及 $b < c$ ，則 $a < c$ 。

設 $a < b$ 及 $b < c$ ，則 $a < c$ 。

2. 依 $a <, =, \text{ 或 } > b$ 。

得 $a+c <, =, \text{ 或 } > b+c$ 。

及 $ac <, =, \text{ 或 } > bc$ ，設 $c > 0$ 。

但 $ac >, =, \text{ 或 } < bc$ ，設 $c < 0$ 。

及 a 及 b 為正數時。

依 $a <, =, \text{ 或 } > b$ 。

得 $an <, =, \text{ 或 } > bn$ 。

及 $\sqrt[n]{a} <, =, \text{ 或 } > \sqrt[n]{b}$ 。

如前所示，2及3內之法則只合 = 號者，亦適用於虛數。下述對於虛數及實：設 $a=b$ 及 $b=c$ ，則 $a=c$ ，故可稱為相等之一般法則。

增廣代數符號

前諸節所說明符號之意義外，尚有下開符號亦為代數學中
所常用者：

1. 各種聚合記號。如前所用之括號()及[]，{ }，指
示其所包括之式，作為單一符號之用。
2. 複號±，讀作“加或減”及∓讀作“減或加”。
例如， $a \pm b \mp c$ ，其意為 $a + b - c$ 或 $a - b + c$ ，其在上記號
須同時讀出，在下記號亦然。
3. 符號∴表故學。
4. 符號……表類推或等等。
5. 又，∵表因字；>表大於；<表不小於；≧表大於
或等於。

代 數 式

依上述諸基，聯合文字或文字與數所成之任何式，名為代數 263

註。式中所含演算之次數，可為有限，如在 $1+x+x^2$ 者 264

情形，稱其式為有限；在第二種情形，則為無限。今將僅
式而論之。

慣例將代數式依其變數(或未知數)文字在式中之情形分類
下：

假一式中不含變數文字所指示之除法，則此式名為整式，設 264
之，則名為分式。

例如，設 x 及 y 為變數文字，但 a, b, c ，為常數。

則 $ax^2 + bx + c$ 及 $\frac{y}{b} + \sqrt{x}$ 皆為整式，

但 $y + \frac{1}{x}$ 及 $\frac{2+x}{1-x}$ 皆為分式。

267 設一式中不含變數文字所指示之方根者則此式名為有理式；設其含之，則為無理式。

例如， $a + \sqrt{bx}$ 為有理式，但 $\sqrt{y} + \sqrt{y-x}$ 為無理式。

268 註. 1. 應用此種名稱於一式，須假定其已化為最簡式。

例如， $\sqrt{x^2 + 2xy + y^2}$ 為有理式，因其能化為有理式 $x+y$ 故也。

2. 整式，分式，等等名稱，與其用於式中之數值無關。

例如， $x+2$ 為有理整式，但祇可於 x 本身表整數時始表數，此式關於 x 之每一分數值，則表一分數，而關於 x 之每一無理數值，則表一無理數。

269 當一代數式 A 由 + 或 - 諸記號聯合若干部分而成時，則此諸部分連帶其前之符號，名為 A 之諸項。

例如，下式：

$$a + a^2c - (b+c) + [d+e] - \{f+g\} + \overline{h+i+j} \left| \begin{array}{l} l+m \\ +k \\ n+p \end{array} \right.$$

之諸項為 $a, a^2c, -(b+c)$ 等等，其諸項本身由若干項而成者，皆以括號或其他聚合記號括之 (§262, 1)。

270 整式名為單項式，二項式，三項式，及一般多項式，依其項數而定。

271 在任何單項式中，常數因數之積，名為變數因數之積之係數。

272 例如， $4ab^3x^2y^4$ 中， $4ab^3$ 為 x^2y^4 之係數。

同時應稱任何因數為積之其餘部分之係數。

每一單項式中，係數須先書，當係數不書時則為1。例如1為 x^2y 之係數。

同類項為諸項之至多僅有係數不同者。 272

例如， $-2x^2y$ 及 bx^2y 為同類項，

單項式之次數，為其式中所討論變數之指數和。 273

例如，設變數為 x 及 y ，則 $4ab^3x^2y^4$ 之次數為七； bx^3 之次數為三， b 之次數為零(參看 § 5.5)。

多項式之次數，為其最高次項之次數；而任何整式之次數，均可化成最簡多項式之次數。 274

例如， $ax^3+bx^2y+cy^3+dx^2+ey+f$ 之次數為三；而 $(x-1)(x-2)$ 之次數為二。

欲求便利，可將多項式之諸項依其次數之次序遞升或遞降排列，且設有同次之若干項，則依其一變數之次序排列。 275

此次序可觀察 § 274 中多項式而知之。

多項式當其諸項為同次時，名為齊次式。 276

例如， $5x^3+2x^2y+4x^2+xy^2+y^3$ 為齊次式。

一變數之多項式，含一變數如 x 之有理整式，最為特別重要，其在代數學中所任之工作，一如整數之於算術，實際上將發見其具有若干性質類似於整數之性質。此種之式，常能化為 x 之多項式，例如下列諸式之一：

$$a_0x+a_1, \quad a_0x^2+a_1x+a_2, \quad a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3, \dots$$

或可化成下式：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

式中 n 表此式之次數，而點標表作或項 $n+1$ 全部所需之諸項。

係數 a_0, a_1, \dots ，表常數，不論任何種類皆可，在特例，除 a_0 外皆可為 0，此時多項式名為零式。

所宜注意者，各項中 a 之附標與 x 之指數之和，為此多項式之次數。

例如， $5x^6 - x^4 + 2x^2 + x^2 - 3$ 中，有 $n=6$ ， $a_0=5$ ， $a_1=0$ ， $a_2=0$ ， $a_3=-1$ ， $a_4=2$ ， $a_5=1$ ， $a_6=-3$ 。

278 函數。一代數式如 $x+2$ 或 x^2+y 之含一或多變數，其本身亦為變數甚明。稱 $x+2$ 為 x 之函數，因其前依 x 之值而變，關於 x 之每一值，皆應於 $x+2$ 之一定值故也。

同理，稱 x^2+y 為 x 及 y 之函數，一般可稱每一代數式為其所含一切變數之函數。

219 以前所定 x, y 及 y 等等之整式，分式，有理式或無理式，亦可稱為 x, x 及 y 等等之整函數，分函數，有理函數或無理函數。

280 x 之已知函數，當以符號 $f(x)$ 表之，讀作“ x 之函數”，函數之對應於 $x=0, 1, b$ 之值者，以 $f(0), f(1), f(b)$ 表之。

例如，設 $f(x) = x+2$ ，則 $f(0) = 2$ ， $f(1) = 3$ ， $f(b) = b+2$ 。一般設 $f(x)$ 表含 x 之任何已知式，則 $f(b)$ 表用 b 代式中 x 所得之結果。

處設 x 之二或多函數時，可用 $f(x)$ 表其一，用相似符號如 $R(x), \phi(x), \psi(x)$ 表其他。

由同法，可以符號 $f(x, y)$ 表二變數 x 及 y 之函數，餘依此類推。

習 題 1.

1. $x^2yz^3 + 2x^3y^2z^2 + 3x^4y^3z$ 順次關於 x, y 及 z , 其次數如何? 關於 y 與 z 連合則如何? 關於 x, y, z 連合則如何?
2. $(x+1)(2x^2+3)(x^3-7)$ 之次數如何?
3. 已知 $3x^7 + x^6 - 4x^5 + x^4 = 12$, 依 § 217 之記法, $n, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ 之值如何?
4. 設 $f(x) = 2x^2 + x^2 + 8$, 求 $f(0), f(-1), f(8), f(8)$.
5. 設 $f(x) = (x^2 - 3x + 2)/(2x + 5)$, 求 $f(0), f(-2), f(6)$.
6. 設 $f(x) = x + \sqrt{x+3}$, 求 $f(1), f(4), f(8)$.
7. 設 $f(x) = 2x + 3$, 則 $f(x-2)$ 如何? $f(x^2+1)$ 如何?
8. 設 $f(x, y) = x^2 + x - y + 8$, 求以下各值:
 $f(0, 0), f(1, 0), f(0, 1), f(1, 1), f(-2, -8)$.

恆等方程或恆等式

設 A 表與 B 相同之式, 或可用計算法則 (§ § 247-258) 變形為 B , 則稱 A 恆等於 B .

記法 $A \equiv B$ 之意為 " A 恆等於 B ".

例如, $x(x+2) + 4$ 恆等於 $x^2 + 2(x+2)$

因 $x(x+2) + 4 \equiv (x^2 + 2x) + 4 \equiv x^2 + (2x+4) \equiv x^2 + 2(x+2)$, § § 248, 252.

稱 $A \equiv B$ 為恆等方程或恆等式, 故

恆等式 $A \equiv B$ 或, 較遲第一式 A 可用計算法則變形為 B 也. 282

在特別, 恆等式如

$$3 - 8 + 2 \equiv 4 + 7 = 14$$

中無文字, 稱為數目恆等式.

下列常用定理，隱含於 § 282 中。

234 定理。設含 x 之二多項式恒等，則其對應係數相等，

即

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \equiv b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n,$$

$$\text{則 } a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n.$$

因如係數不同，則二多項式亦不同，而第一式不能用計算方法變形為第二式。

例如， $3ax^2 + 3x - 3 \equiv 2x^2 + bx + c$ ，則 $a=2, b=3, c=-3$ 。

設係數 $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$ 不為常數，而表不含 x 代數式，則從恒等式 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots \equiv b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots$ 而得 $a_0 \equiv b_0, a_1 \equiv b_1, \dots$ ，易言之，即對應係數 a_0 與 b_0 (等等) 所表之代數式皆為恒等。

285 二恆等多項式，其諸項為有常數係數之二或多變數乘幕之積者，與上述之相似定理亦有效。

例如，設 $a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + \dots$

$$\equiv a' + b'x + c'y + d'x^2 + e'xy + f'y^2 + \dots,$$

$$\text{則 } a = a', b = b', c = c', d = d', e = e', f = f', \dots.$$

286 (恆等方程之性質) 在代數計算中，常用下列定理：

定理 1. 設 $A \equiv B$ ，則 $B \equiv A$ 。

何則， A 變形為 B 之方法，為可逆，因其僅含結合法則故也 (§ 259)。但其逆方法係 B 變形為 A 。

例如，可用逆算法將 § 281 之例變形。

$$\text{因 } x^2 + 2(x+2) \equiv x^2 + (2x+4)$$

$$\equiv (x^2 + 2x) + 4 \equiv x(x+2) + 4,$$

(§ § 248, 252)。

定理 2. 設 $A \equiv C$ 及 $B \equiv C$ ，則 $A \equiv B$ 。

因 $B \equiv C$ ，故有 $C \equiv B$ 。

由理定

因 $A \equiv C$ 及 $C \equiv B$ ，故 $A \equiv B$ 。

例如因 $x(x+2)+4 \equiv x^2+2x+4$, § § 248, 252
 及 $x^2+2(x+2) \equiv x^2+2x+4$, § § 248, 252
 故有 $x(x+2)+4 \equiv x^2+2(x+2)$.

定理 3. 於恆等式之二邊施行相同演算，仍得恆等式

此由 § § 249, 253, 257, 相等之法則而得。

例如，設 $A \equiv B$ ，則 $A+C \equiv B+C$ ，餘類推。

證恆等式。欲證明二已知式 A 及 B 成爲 $A \equiv B$ ，無須實 287
 行將 A 變形爲 B ，如 § 86 之 2 所示，證明設能化 A 及 B 成
同一形式 C 爲已足。

下之定理，供給其他最常用方法。

設從假定恆等式 $A \equiv B$ ，能用可逆的方法導出已知恆等式 288
 $C \equiv D$ ，則此假定恆等式 $A \equiv B$ 爲真。

因此方法爲可逆的，故能從 $C \equiv D$ 導出 $A \equiv B$ 因 $C \equiv D$
 爲真，故 $A \equiv B$ 亦真。

例。證明 $a+b-b$ 恆等於 a 。

假定 $a+b-b \equiv a$. (1)

則得 $[(a+b)-b]+b \equiv a+b$. (2) § 249

但 (2) 爲已知恆等式 (§250)，而 (1) 至(2)之步驟爲可逆的，故 (1) 爲真。若從 $A \equiv B$ 至 $C \equiv D$ 之方法不可逆，即斷定結論 $A \equiv B$ ，殊不可靠，此可舉例說明：

設假定 $x \equiv -x$. (1)

由此得 $x^2 \equiv (-x)^2$. (2)

其 (2) 爲真，但不能由此以證明 (1) 爲真，因(1)至(2)之步驟不可逆故也 (§ 259)。實則(1)爲謬誤。

恆等與相等。最須記憶者，恆等式原本爲式之關係；比其 289
 爲值之關係較當。同時

設 A 及 B 皆爲有限式，而 $A \equiv B$ ，則對於其式中所有文字
之一切值， A 及 B 有等值。

因依假設，可應用法則 $a+b=b+a$ 等有限次將 A 變形為 B 。但不論 a 及 b 之值如何， $a+b$ 及 $b+a$ 有等值，餘類推。

此定理限於有限式之理由見後。

反之，設 A 及 B 關於 A 及 B 中諸文字之一切值有等值。則 $A \equiv B$ ，此理俟後證明。

故在有限式之情形，常可用值之相等記號 $=$ ，代式之恆等記號 \equiv ，而當 $A \equiv B$ 時，寫作 $A=B$ 後而均如此通用。

符號 $=$ 之如此用法，須與 § 325 所述者小心分別。

命題之轉換

290 考察有下列形式之命題：

設 A ，則 B 。

$C \equiv D$ 則 $E \equiv F$ 由於 $C \equiv D$ 等。

或完全表明：設某敘述 A 為真，則他敘述 B 亦真。

例如，設一圓形為正方形，則此圓形為矩形。

(1) 設 $x=1$ ，則 $x-1=0$ 。

291 將交換(1)之假設 A 及結論 B ，得逆命題。

逆命題即為：設 B ，則 A 。

例如，適所述命題之逆為：

(1) 設一圓形為矩形，則此圓形為正方形。

(2) 設 $x-1=0$ ，則 $x=1$ 。

292 設(對主詞)之敘述，(一)與命題之逆可不異。

其次，如上文所說，若命題 A 及 B ，明 C ，有二重假設，則有二逆：即，設 C 及 B ，則 A ，及設 A 及 C ，則 B ，同理，設有三重假設，則有三逆：餘類推。

何當從假設 A 導出結論 B 之推論方法為可逆時，則真命題 293
 題：設 A 則 B 之通常真；蓋逆其方法，可從 B 導出 A ，易言
 之，可證明設 B 則 A 故也。

用可逆之方法證明逆命題，用此以證明原命題之法則，代
 數學中常用之，此法之證明已述於 § 288。

當一命題；設 A 則 B 為真時，則設 A 為 B 之充足條件 294
 而 B 為 A 之必要條件。

例如，命題 設 $x=1$ ，則 $(x-1)(x-2)=0$ 為真，故 $x=1$
 為 $(x-1)(x-2)=0$ 之充足條件，而 $(x-1)(x-2)=0$ 為 $x=1$
 之必要條件。

當命題設 A 則 B ，及其逆設 B 則 A 二者皆真時，則稱設 A 295
 為 B 之充足及必要條件；而 B 亦為 A 之充足及必要條件。

例如，(1) 設 $x=1$ 則 $x-1=0$ ，及 (2) 設 $x-1=0$ ，則 $x=1$
 二者皆為真，則 $x=1$ 為 $x-1=0$ 之充足及必要條件；而 $x-1$
 $=0$ ，亦為 $x=1$ 之充足及必要條件。

II. (基)本算算

加 法 與 減 法

加與除。令 A 及 B 表任何二代數式，其 A 及 B 之和及 296
 自 A 減 B 所得之餘，意謂式 $A+B$ 及 $A-B$ 能用 § § 247-258
 之計算法則化成之最簡式。

幾個常用公式，完成此種簡化法，下列公式皆甚有用， 297
 即：

1. $a+b=c \Rightarrow a=c-b$ 2. $a-(b+c) = a-b-c$
3. $a+(b-c) = a+b-c$ 4. $a-(b-c) = a-b+c$
5. $a(b-c) = ab-ac$

以上諸公式，可稱為交換，結合及分配諸律對於減法之擴張。

可用下列之法則證 1 及 2 (§ 249)：

設加同式於某二式，其結果相等，則此二式相等。

$$1. \quad a+b-c=a-c+b.$$

因加 c 於其各邊之結果皆為 $a+b$ 。

$$\text{即 } ((a+b)-c)+c=a+b. \quad \S 250$$

及 $(a-c)+b+c=(a-c)+c+b=a+b. \quad \S \S 248, 250$

$$2. \quad a-(b+c)=a-b-c.$$

因加 $b+c$ 於其各邊之結果皆為。

$$\text{即, } (a-(b+c))+(b+c)=a. \quad \S 250$$

及 $a-b-c+(b+c)=a-b-c+c+b$
 $=a-b+b=0. \quad \S \S 248, 250$

3, 4, 5 可如下證之：

$$\text{因} \quad b=(b-c)+c. \quad \S 250$$

故有， 3. $a+b-c=a+[(b-c)+c]-c$
 $=a+(b-c)+c-c \quad \S 243$
 $=a+(b-c). \quad \text{由 1 及 } \S 250$

4. $a-b+c=a-[(b-c)+c]+c$
 $=a-(b-c)-c+c \quad \text{由 2}$
 $=a-(b-c). \quad \S 250$

5. $ab-ac=a[b-c]+c]-ac$
 $=a(b-c)+ac-ac \quad \S 252$
 $=a(b-c). \quad \text{由 1 及 } \S 250$

由 § 248 及公式 2-5，即知一組加法與減法可不拘其任

何次序演算之。

$$\begin{aligned} \text{例如: } a-b+c-d+e &= a+c-b-d+e, && \text{由 1} \\ &= a+c-(b+d)+e = a+c+e-(b+d), && \text{由 2 及 1} \\ &= a+c+e-b-d. && \text{由 2} \end{aligned}$$

記號法則，此“記號法則”，為上述公式 3,4,5 之特殊情形 298

形。

1. $a+(-c)=a-c.$
2. $a-(-c)=a+c.$
3. $a(-c)=-ac.$
4. $(-a)(-c)=ac.$

於 § 297 之 2,4,5, 順次使 $b=0$, 遂得 1,2,3.

4 可如下證之:

$$\begin{aligned} (-a)(-c) &= (-a)(0-c) = (-a)0 - (-a)c \quad \text{§ 297,5} \\ &= 0 - (-ac) = ac, \quad \text{由 2 及 3} \end{aligned}$$

括號法則。從公式 § 248 及 § 297 之 2,3,4, 得下列重 299

要法則:

括弧之前用+號者，可撤去之；括弧之前用-號者，改變
括弧中各項之記號，亦可撤去之。

括號可依同一法則插入。

$$\text{例如, } a+b-c-d+e = a+b-(c+d-e).$$

欲將含括號中又有括號之式化簡，可屢次應用上法於若干

括

$$\begin{aligned} \text{例如, } a-\{b-[c-(d-e)]\} &= a-b+[c-(d-e)] \\ &= a-b+c-(d-e) \\ &= a+b+c-d+e. \end{aligned}$$

括號當然可依任何順序撤去；但先從最外一層起(如上例)。

並避免變換任何符號多於一次。

800 整式加減法則，從 § 249, 252, 297 之公^理，導出下列法則：

欲加（或減）二同類項，可加（或減）其係數，而附書其公共文字於結果。

欲加二或若干多項式，可按連書其一切項不必變記號，再合併其同類項而化簡。

欲將一多項式從他式減去，可變其被減內各項之記號而加之。

例1：加 $4ab^2$ 及 $-5ab^2$ ；又從 $4ab^2$ 減 $-5ab^2$ 。

$$4ab^2 + (-5ab^2) = (4 - 5)ab^2 = -ab^2 \quad \text{§ 248}$$

$$4ab^2 - (-5ab^2) = [4 - (-5)]ab^2 = 9ab^2 \quad \text{§ 297, 6}$$

例2. 加 $x^2 + ax^2y + 2ab^2$ 及 $bx^2y - 5ab^2$ 。

$$x^2 + ax^2y + 2ab^2 + (bx^2y - 5ab^2)$$

$$= x^2 + ax^2y + 2ab^2 + bx^2y - 5ab^2 \quad \text{§ 299}$$

$$= x^2 + ax^2y + bx^2y + 2ab^2 - 5ab^2 \quad \text{§ 248}$$

$$= x^2 + (a+b)x^2y - 3ab^2 \quad \text{§ § 252, 297, 6}$$

例3. 從 $a^2 + a^2b + b^2$ 減 $2a^2b - ab^2 + b^2$ 。

$$a^2 + a^2b + b^2 - (2a^2b - ab^2 + b^2)$$

$$= a^2 + a^2b + b^2 - 2a^2b + ab^2 - b^2 \quad \text{§ 299}$$

$$= a^2 - a^2b + ab^2 \quad \text{§ § 252, 297}$$

當所加（或減）之多項式中有同類項時，則將此諸項排列於直行，而依直行加（或減）之數便。

例4. (加) $a^4 + a^3b - 2a^2b^2 + b^3$ 及 $3a^2b^2 + 8a^3b^2 - a^3b$ 。
且從其結果減 $5a^2b^2 - ab^3$ 。

$$a^4 + a^3b - 2a^2b^2 \quad + b^3$$

$$+ 3a^2b^2 + 8a^3b^2$$

$$- 5a^2b^2 - ab^3$$

$$\hline a^4 \quad + 4a^3b^2 + 2ab^3 + b^3$$

題 II.

1. 加 $4ax^2y, -6ax^2y, 5bx^2y,$ 及 $-3bx^2y.$
2. 加 $7a^2+2a-b^2, 8a+b^2, -7a^2,$ 及 $b^2+4a-4a^2.$
3. 加 $3x^2-5x+8, 2x^2-8,$ 及 $-4x^2+3x-7.$
4. 加 $1a^2+a^2b-5b^2, 2a^2-6ab^2-a^2b, 3a^2+10b^2,$
及 $6b^2-15ab^2-4a^2b-13a^2.$
5. 從 $3a+b-c$ 減 $4a-2b+6c.$
6. 從 x^2+6x^2+5 減 $2x^2-5x+7.$
7. 須以何式加於 a^2+5a^2b 則得 $a^2+b^2?$
8. 自 $x^2+y^2-6x+5y$ 減 $-2x^2-6x+7y-8$ 及 x^2+2x^2-5y+9 之和.
9. 化簡 $-(a+b)+[a-(2a-b)]-6(a-4b).$
10. 化簡 $6x+[4x+[2x+(3x+5x+7-1)+3]+8].$
11. 化簡 $2a-[4a-a+[3a-(4b-c)-(b+3c)]]-6c.$
12. 從 $z-[3x+(y+5z)]$ 減 $x-(3y+2z).$
13. 須加 x^2+8x+5 於何式則得 $x^2-7?$
14. 須加 x^2-9x^2+3y 於何式則得 $y^2+x-7?$

乘 法

積。二代數式 A 及 B 之積。意謂式 AB 能以計算法則化爲最簡式。

如此化簡法中，特別要認者有：

1. 交換，結合，及分配定律。
2. 指數定律 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
3. 記號法則：

$a(-b) = (-a)b = -ab; (c-d)(-b) = ab.$

整式乘法。1. 欲求二項式之積，可以其數字因數之積乘 302

其文字因數之積，再依同文字乘羈之指數相加以化簡其文字因數之積。

依二單項式有同號或異號，而以十號或一號予其結果。

2. 欲求單項式或多項式乘多項式之積，可以乘式之各項乘被乘式之各項，而將其所得之積相加。

第一法則從交換及結合定律及指數定律而得。第二法則從分配定律而得。

例如， $(a+b+c)(m+n) = (a+b+c)m + (a+b+c)n$
 $= am + bm + cm + an + bn + cn.$

第一法則亦可應用於二個以上單項式之積，當單項式具一號者為奇數式時，其積之號為一，否則為十。

二個以上多項式之積，可屢次應用第三法則求之。

例 1. 求 $-4a^2b^2x^3$, $2bx^4$, 及 $-3a^2x$ 之積。

$$-4a^2b^2x^3 \cdot 2bx^4 \cdot -3a^2x = 24a^2b^2x^3 \cdot bx^4 \cdot a^2x$$

$$= 24a^4b^2x^8.$$

例 2. 求 $a-2b$ 及 $ab-b^2+a^2$ 之積。

為便利計，依 a 之降羈排列此二因式，而擇其簡因式作乘

式，則有

$$(a^2+ab-b^2)(a-2b) = a^3+a^2b-ab^2-2a^2b-2ab^2+2b^3$$

$$= a^3-a^2b-3ab^2+2b^3$$

303 關於任何文字(或文字組)之積之次數，為關於此文字(或文字組)之諸因數次數之和。

此由 § 302, 1 而得。實則在任何積中最高次之項，為其因式中最高次項之積。

例如， x^2+1 及 x^3-1 之次數順次為二及三，而其積 $(x^2+1)(x^3-1)$ 或 $x^5+x^2-x^3-1$ 之次數為五。

當二因式為齊次式 (§ 276) 時, 其積為齊次式. 304

因設各因式之一切項皆為同次, 則以一因式之一項乘他因式之一項, 所得之積皆為同次, 故此諸積之和為一齊次多項式.

計算之排列. 當二因式皆為 x 或其他單一文字之多項式, 305
或二者皆為二文字之齊次函數時, 則如下例排列計算較便.

例 1. 以 $x-3+x^2$ 乘 $2x^2-x^2+5$.

$$\begin{array}{r} 2x^2 + x^2 + 5 \\ x^2 + x - 3 \\ \hline 2x^4 - x^3 + 5x^2 \\ - 6x^3 + 3x^2 - 15 \\ \hline 2x^4 + x^3 - 7x^2 + 3x^2 + 5x - 15 \end{array}$$

依 x 之降幕(或升幕)排列二因式, 而後乘於被乘式之下. 當即將對應於乘式若干項之“部分積”書於分離各列, 令其同類項即同次項皆置同行.

最後依各行將其同類項相加.

例 2. 以 $2y+x$ 乘 x^2-y^2+2xy .

$$\begin{array}{r} x^2 + 2xy - y^2 \\ x + 2y \\ \hline x^3 + 2x^2y - xy^2 \end{array}$$

在此情形, 二因式皆為 x 及 y 之齊次函數.

$$\begin{array}{r} 2x^2y + 4xy^2 - 2y^3 \\ \hline x^3 + 4x^2y + 3xy^2 - 2y^3 \end{array}$$

依 x 之降幕即 y 之升幕排列二因式, 而後演算如例 1.

分離係數法. 在 § 305 例 1 之計算說明中, 諸項之排列, 其位置足以表示其所含 x 之乘幕如何, 實際應用, 可略去 x 而僅書其係數以簡約其演算. 當已知多項式有數字係數時, 此法頗有價值.

設其中有一多項式為不完全, 則須以係數 0 表其每一缺項.

例. 以 x^4+3x^2-2 乘 x^2-3x+2 .

$$\begin{array}{r} 1+0+0+2 \\ 1+3+0-2 \\ \hline 1-3+0+2 \\ 8-9+0+0 \\ \hline -2+6-0-4 \\ \hline 1+0+9+0+12-0-4 \end{array}$$

排列計算如 § 105 例 1, 但置其係數; 以 0 係數表其缺項.

略去其對應於乘式 0 項之部分積.

在未後結果中填入 x 之合宜方爲——由 x^6 始. 因其諸因數次數之和爲六.

——即得所求之積爲 $x^6-9x^4+12x^2-4$.

積之次數六, 亦可由其結果 $1+0-9+0+12-0-4$ 之項數爲七得之, (§ 277).

此法名爲分離係數法. 不但應用於單一文字之多項式, 二者皆依此文字之降幕或升幕排列——亦能應用於二文字之齊次式. 蓋因排列如此二多項式, 依其一文字之降幕, 同時亦依他文字之升幕, 故任何係數之位置, 將指示其二文字雙方之乘幕如何.

1070 分離係數法導出之公式. 試考下例.

例 1. 證明下列恆等式爲真.

$$(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)=a^5-b^5.$$

$$\begin{array}{r} 1+1+1+1+1 \\ 1-1 \\ \hline 1+1+1+1+1 \\ -1-1-1-1-1 \\ \hline 1+0+0+0+0-1 \end{array}$$

將左邊指示之乘法, 用分離係數法實行, 而得積之係數依 a 之降幕且依 b 之升幕排列. 預知其積之次數爲五, 此亦可由其結果中項數爲六而知之, 故其積爲

$$a^5+0 \cdot a^4b+0 \cdot a^3b^2+0 \cdot a^2b^3+0 \cdot ab^4+b^5, \text{ 或 } a^5-b^5.$$

例 2. 證明下列恆等式爲真.

$$(a^2-ab+b^2)(a+b)=a^3+b^3 \tag{1}$$

$$(a^2+a^2b+ab^2-b^3)(a+b)=a^3-b^3. \tag{2}$$

如例 1 正確進行，得

$$1-1+1 \quad (1)$$

$$\frac{1+1}{1-1+1}$$

$$\frac{1-1+1}{1+0+0+1}$$

$$\frac{1-1+1}{1+0+0+1}$$

$$1+0+0+1, \quad \text{即 } a^2+b^2.$$

$$1-1+1-1 \quad (2)$$

$$\frac{1+1}{1-1+1-1}$$

$$\frac{1-1+1-1}{1+0+0+0-1}$$

$$\frac{1-1+1-1}{1+0+0+0-1}$$

$$1+0+0+0-1, \quad \text{即 } a^2-b^2.$$

由上諸例中所說明之法則，可證明下列恆等式為真，以前諸例不過為其特殊情形耳，即：

對於 n 之每一正整數值，有

303

$$(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1})(a-b)=a^n-b^n.$$

對於 n 之每一正奇數值，有

309

$$(a^{n-1}-a^{n-2}b+\dots-ab^{n-2}+b^{n-1})(a+b)=a^n+b^n.$$

而對於 n 之各正偶數值，有

310

$$(a^{n-1}-a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}-b^{n-1})(a+b)=a^n-b^n.$$

二項式之乘幕，屢用乘法可計算 $a+b$ 之順次諸乘幕。此種乘法可用分離係數法演之。

因其乘式之係數常為 $1+1$ 故在每一乘法中，只須記其部分積及其和為已足。因得

$$(1) \quad 1+1 \quad \text{即 } a+b$$

$$(2) \quad \frac{1+1}{1+2+1} \quad \text{即 } a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2.$$

$$(3) \quad \frac{1+2+1}{1+3+3+1} \quad \text{即 } a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = (a+b)^3.$$

$$(4) \quad \frac{1+3+3+1}{1+4+6+4+1} \quad \text{即 } a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 = (a+b)^4.$$

觀察各乘法中，其第二部分積之係數為其第一部分積之係數向右移一位，故當加此二部分積之係數而得其次乘幕之係數

時，只須應用下列法則：

- 312 已知一乘幕之任何係數，以其前一係數加之；其和即爲其
乘幕中之對應係數。

其次乘幕之一切係數，除首項末項外，皆可用此法得之。此
首項末項之係數爲1及1。

例如，(4)之係數對應於(3)之3, 3, 1 者爲 3+1, 或 4, 3+3
或 6, 1+3 或 4。

應用此法於(4)，得4+1或5, 6+4或10, 4+6或10 1+4 或

5. 故 $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

$a+b$ 之任何已知乘幕之係數，顯然可由應用此法得之。

例。試順次求 $(a+b)^6, (a+b)^7, (a+b)^8$ 。

- 313 一次兩二項因式之積。 學者須使自已慣於用觀察法以求
此種之積。今有

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab. \quad (1)$$

$$(a_0x+a_1)(b_0x+b_1) = a_0b_0x^2 + (a_0b_1+a_1b_0)x + a_1b_1. \quad (2)$$

乘積(1)中， x 之係數爲 a 及 b 之和，而末項爲其積。

乘積(2)中，其首項及末項之係數，爲其因式首二係數及末
二係數之積，而中項係數爲“交錯乘積” a_0b_1 及 a_1b_0 之和。

例 1. 求 $(x+5)(x-8)$ 之積。

$$(x+5)(x-8) = x^2 + (5-8)x - 40 = x^2 - 3x - 40.$$

例 2. 求 $(x+3y)(x+10y)$ 之積。

$$(x+3y)(x+10y) = x^2 + (3+10)xy + 30y^2 = x^2 + 13xy + 30y^2.$$

例 3. 求 $(2x+3)(4x+7)$ 之積.

$$(2x+3)(4x+7) = 2 \cdot 4x^2 + (2 \cdot 7 + 3 \cdot 4)x + 3 \cdot 7 = 8x^2 + 26x + 21.$$

例 4. 用方才說明之諸法，求以下各積：

$$(x-10)(x-15), (3a+4b)(5a+6b), (7x-y)(5x-3y)$$

含 x 任何二多項式之積，觀察下列之積： 3.4

$$\begin{aligned} & (a_0x^2+a_1x+a_2)(b_0x^2+b_1x+b_2) \\ &= a_0b_0x^4 + (a_0b_1+a_1b_0)x^3 + (a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2 \\ & \quad + (a_1b_2+a_2b_1)x + a_2b_2. \end{aligned}$$

此積為 x 之多項式，其次數為二因式次數之和。而其各項之係數，可由下法得之，其中 ah 表諸數 a_0, a_1, a_2 之一，及 bk 表諸數 b_0, b_1, b_2 之一。求積之次數與項次數間之差，然後加一切乘積 $a_h b_k$ 之 $h+k$ 等於此差者。

例如，欲求 x^2 之係數，先求其差 $5-2$ 或 3 ，然後加 a_1b_1, a_2b_0, a_0b_2 ，即一切積 $a_h b_k$ 之 $h+k=3$ 者。

此法應用於 x 之任何二多項式其形狀如 $a_0x^m + \dots + a_m$ 及 $\dots + b_0x^n + b_n$ 者之積。

當諸因式有數係數時，此法亦可指示積中任何特別係數之求法。

例 1. 求下列積中 x^{100} 之係數：

$$(a_0x^{75} + a_1x^{74} + \dots + a_7x + a_7) (b_0x^{60} + b_1x^{59} + \dots + b_6x + b_6)$$

此積之次數為 $75+60$ 或 135 ；而 $135-100=35$ 。

故 x^{100} 之係數為 $a_0b_{35} + a_1b_{34} + \dots + a_3b_1 + a_5b_0$ 。

同法 x^3 之係數為 $a_7b_0 + a_6b_1 + \dots + a_7b_{20} + a_7b_{35}$ 。

例 2. 求下列積中 x^3 之係數：

$$(3x^4 - 2x^2 + x^2 - 8x + 7)(2x^3 + 5x^2 + 6x - 3).$$

所求係數為 $(-2)(-3) + 1 \cdot 6 + (-8)5 + 7 \cdot 2$ 或 -14 .

例 3. 例 1 之積中求 x^0 及 x^2 之係數.

例 4. 例 2 之積中, 各別求 x^6, x^5, x^4, x^3 , 及 x 之係數.

315 藉已知恆等式求積. 下列公式或恆等式, 均甚重要, 須用心記憶:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \quad (1)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \quad (2)$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2. \quad (3)$$

上表中尚可加入 § 308, 309, 310, 所述之公式及下列公式, (§ 311 節):

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \quad (4)$$

因文字 a 及 b 可用任何代數式代表, 故此諸公式為乘大多數乘積之簡法, 觀下列諸例自明:

例 1. 求積 $(3x-5y)^2$.

$$(3x-5y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2 = 9x^2 - 30xy + 25y^2. \quad \text{由 (2).}$$

例 2. 求積 $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

$$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) = [(x^2+y^2)+xy] [(x^2+y^2)-xy] \\ = x^4 - x^2y^2$$

$$= (x^2+y^2)^2 - x^2y^2 = x^4 + x^2y^2 + y^4. \quad \text{由 (3), (1).}$$

例 3. 解釋下列演算中之步驟:

$$\begin{aligned} & (x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(x-y-z) \\ &= [(x+(y+z))(x-(y+z))] \cdot [(x+(y-z))(x-(y-z))] \\ &= [x^2 - (y+z)^2] \cdot [x^2 - (y-z)^2] \\ &= [(x^2 - y^2 - z^2) - 2yz] \cdot [(x^2 - y^2 - z^2) + 2yz] \\ &= [x^2 - (y^2 + z^2)]^2 - 4y^2z^2 \\ &= x^4 - 2x^2(y^2 + z^2) + (y^2 + z^2)^2 - 4y^2z^2 \\ &= x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 \end{aligned}$$

須特別注意者，用此法可從 (1) 及 (4) 導出任何多項式之平方及立方。

例如，

$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

$$(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 \\ = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2b + 3a^2c + 6abc.$$

總括此諸結果之前者，得定理如下：

任何多項式之平方，等於其一切項平方之和，加每三項乘積 316 之二倍。

例 1. 求積 $(a-b+2c-3a)^2$ 。

例 2. 求積 $(1+2x+3x^2)^2$ 。

例 3. 求積 $(x^2 - x^2y + xy^2 - y^2)^2$ 。

單項積之乘幕。任何代數式 A 之 n 次幕者，意謂式 A^n 能用 317 計算法則化成之最簡式也。

從指數定律 $(a^m)^n = a^{mn}$ 及 $(ab)^n = a^n b^n$ 導出以下法則：

欲將單項式 A 自乘至 n 次幕，可將其數係數自乘至 n 次幕，而 318 以 n 乘各文字因數之指數。

若 A 之符號為一，則其結果依 n 之為偶數或奇數而定十號或 一號。

例如 $(-2ax^2y^7)^4 = (-2)^4 a^4 x^8 y^{28} = 16a^4 x^8 y^{28}$ 。

屢用定律 $(ab)^n = a^n b^n$ 得

$$(-2ax^2y^7)^4 = (-2)^4 a^4 (x^2)^4 (y^7)^4,$$

又屢用定律 $(a^m)^n = a^{mn}$ 得

$$(-2)^4 a^4 (x^2)^4 (y^7)^4 = 16a^4 x^8 y^{28}$$

習 題 III,

下列各例題，須以可能的迅速法則實行乘法，在特殊時，能用分離係數法較便者，則用之；能用§15之恆等式者亦如是，

1. $3x^5 = 2x^4 + x^3 - 7x^2 - 6x + 5$ 以 $2x^2 - 3x + 1$ 乘之，
2. $5x^3 - 3ax^2 + 2a^2x + a^3$ 以 $3x^2 - ax - 2a^2$ 乘之。
3. $x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5$ 以 $x + y$ 乘之。
4. $3x^3 - 7x^2 + 7$ 以 $2x^2 - 3x + 5$ 乘之。
5. 由觀察法，以 $4x - 5y$ 乘 $7x - 2y$ 。
6. $a^2 - ax + bx - x^2$ 以 $b + x$ 乘之。
7. $x^4 - 2x + 5x^3 - x^2$ 以 $3 + x^2 - x$ 乘之。
8. $2x^{n-2} - 3x^{n-3} + 5x^{n-4}$ 以 x^{n-2} 乘之。
9. $a^2 - ab + 3b^2$ 以 $a^2 + a^2 - 3b^2$ 乘之。
10. $x + 2y - 2z$ 以 $x - 3y + 2z$ 乘之。
11. $a^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ 以 $x - y - 1$ 乘之。
12. $a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca - ab$ 以 $a + b - c$ 乘之。
13. $3x - 2y + 5$ 以 $x - 4y + 6$ 乘之。
14. $x + 7y - 3z$ 以 $2x + y - 8z$ 乘之。
15. 求積 $(b + x)(b - x)(b^2 + x^2)$ 。
16. 又求 $(x^2 + x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$ 。
17. 又求 $(x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)$ 。
18. 試作 $x^2 + x + 1$ 起首四個乘幕之係數表。
19. 試作 $a + b$ 類次乘幕之係數表至10次幕。
20. 求 $(4x - 3y)^3$ 及 $(4x - 3y)^5$ 。
21. 求 $(x + 2y + 3z - 4x)^2$ 。
22. 求 $(x + 2y + 3z)^3$ ；及 $(x + 2y - 3z)^4$ 。
23. $(a + 2b)^3$ 以 $(a - 2b)^2$ 乘之。
24. 下列積中，求 x^{20} 及 x^{10} 之係數：
 $(a_0x^{20} + a_1x^{19} + \dots + a_{10}x + a_{11})(b_0x^{10} + b_1x^9 + \dots + b_{10}x + b_{11})$

25. 下列積中，求 x^6 ， x^5 及 x^4 之係數

$$(2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 7x + 2x - 5)(3x^5 - x^3 + 2x^2 + 3x - 8).$$

26. 證明以下恆等式：

1. $(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2) = 3(y+z)(z+x)(x+y).$

2. $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (bx-ay)^2.$

3. $(a^2-b^2)(x^2-y^2) = (ax+by)^2 - (bx+ay)^2.$

4. $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3 + 3a^2(b+c) + 3b^2(c+a) + 3c^2(a+b) + 6abc.$

27. 化簡以下乘積：

$$(2a^2x^3y^7)^5, (-x^5y^3z^9)^7, (a^2b^m c^5)^{2n}, (a^m b^n c^{2n})^n,$$

28. 化簡以下乘積：

$$(-ab^2c^3)(a^2b)^3(-ac^3)^5, (-2x^3y^4)^2(ax^5y^{11})^3.$$

除 法

商。令 A 及 B 表任何代數式，其 B 不等於0，以 B 除之之 319

商，意謂分式 A/B 能用計算法則化成之最簡式也。

公式。作如此化簡，下列公式特別有用，即

820

1. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ 當 $m > n$ 時： $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ 當 $n > m$ 時。

3. $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}, \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}, \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

4. $\frac{a+b}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d}$

用下列法則(§2:3)可證明1, 3及4。

設二式以任何第三式(不為0)乘之，其積相等，則此二式相

因在 1 中，以 bc 乘各邊之積為 ac 。

例如， $\frac{ac}{bc}bc = ac$ ；及 $\frac{a}{b}bc = \frac{a}{b}b \cdot a = ac$ 。 §§24.2

其次，在 3 中，以 b 乘第一方程各邊之積為 $-a$ ，而以 $-b$ 乘第二及第三方程各邊之積則次為 a 及 $-a$ 。

例如， $\frac{-a}{b}b = -a$ ；及 $\left(-\frac{a}{b}\right)b = -\frac{a}{b}b = -a$ 。 §§293, 254

最後在 4 中，以 b 乘各邊之積為 $a+b$ 。

例如， $\frac{a+b}{d}d = a+b$ ； $\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\right)d = \frac{a}{d}d + \frac{b}{d}d = a+b$ §§254, 252

公式 2 為公式 1 之特例。

例如，設 $m > n$ ， $a^m = a^{m-n} \cdot a^n$ §256

故 $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{m-n}a^n}{a^n} = a^{m-n}$ 由

321 化簡 A/B 法則。公式 1, 2 及 3，予吾人以下列法則化簡 A/B 。

1. 約去分子分母之一切公因數。

2. 當分子分母含有同文字(或式)之不同乘冪之因數時，可由其高次乘冪之指數減去低次乘冪之指數而約去其低次乘冪。

3. 依分子分母有同號或異號，而以 $+$ 或 $-$ 於其商。

例如， $\frac{bca^5}{ca^5} = ba^{5-5} = ba^0$ ，及 $\frac{a^7}{a^7} = \frac{1}{a^{7-7}} = \frac{1}{a^0}$

322 用單項式除之法則。由除法定義及 §320 之 4，導出下法

1. 欲以單項式除他單項式，可將被除式於除式之上，成一

分式而化簡之。

2. 欲以單項式除多項式，可用除式除被除式各項，而加其所得諸商。

例如 $-8a^2b^2c \div 6ab^2d = \frac{-8a^2b^2c}{6ab^2d} = -\frac{4a^2c}{3b^2d}$ 即約去其公因式 $2ab^2$ 而應用記號法則。

$$\text{其次, } (ax^2 - 4a^2x) \div ax = \frac{ax^2}{ax} - \frac{4a^2x}{ax} = x - 4ax.$$

然當 d 與 a 及 b 無公因式時，則吾人視 $(a+b) \div d$ 較 $a \div d + b \div d$ 爲其商之最簡式？

多項式之除法，設 A 及 B 爲有公因式之二多項式，則其商爲 A/B 約去其公因式化得之式。

例如，設 $A = x^2 - y^2, B = x^2 + 2xy + y^2$ ，則其商爲 $(x-y) \div (x+y)$ 。

$$\text{因 } \frac{A}{B} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{x-y}{x+y} \text{ 故也。}$$

求二多項式公共因式之法則，顯示於他章。其法稱爲長除法當於V章論及。

複式。觀察 $a + b \times c$ ，意謂 $\frac{a}{b} \times c$ ，然 $a + bc$ 則與 $a + (b \times c)$ 相同，意謂 a/bc 。

在分式一章中，將論及複式之含有幾個乘法及除法所表示者，在特例可得

$$a \times (b \times c + d) = a \times b \times c + d. \quad (1)$$

$$a + (b \times c + d) = a + b + c \times d. \quad (2)$$

在(1)式中，當括號解去時，其括號內之記號 \times 及 $+$ 不變；但在(2)式中，則 \times 各變爲 $+$ ，而 $+$ 各變爲 \times 。

習題 IV.

1. 以 $10ab^2c^2$ 除 $15a^3bc^2$.
2. 以 $-100ax^7z^9$ 除 $75x^3y^4z^{10}$.
3. 以 $28x^m y^{m+n}$ 除 $-35x^2 m y^n$.
4. 以 $-18\{a(b^2c)^2\}^3$ 除 $-54\{(ab^2)^2c\}^5$.
5. 以 $x^2 - y^2$ 除 $x^2y - xy^2$.
6. 以 $(x-y)(x^2 - xy + y^2)$ 除 $(x^3 - y^3)(x^2 + y^2)$.
7. 化簡 $\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a-b)(b-c)^2(a-c)^2}$.
8. 化簡 $\frac{391^2b^3c^4 - 25a^3b^2c^5 + 20a^4b^3c^7}{-5ab^2c^3}$.
9. 化簡 $\frac{3(x-y)^4 - 2(x-y)^3 + 5(x-y)^2}{(y-x)^3}$.
10. 化簡 $4a^7 \times (3ab^3c^2)^3 + (abc)^2 + 6^2c$.
11. 化簡下式(1)依指示之次序演算,(2)先解去其括弧:
 $a^7 + \{a^5 + (a^4 + a^2 \times a) \times (a^3 \times a + a^4)\}$.
12. 須用何式乘 $2a(x^2y^3)^2$ 方可得 $-4a^2(x^3y^2)^2$?

III. 一元一次方程

條件方程

- 325 式 $3x-4$ 及 $x+6$ 並非恒等式 (8281), 故其值, 對於 x 之一何值不等, 請問“對於 x 之如何值, 此二式之值始相同?” 則先假定此二式相同, 而敘述之為:

$$3x - 4 = x + 6$$

如此作成之式, 名為條件方程: 因其敘述一條件, 為“未知文字” x 所可滿足者故也. 此已足限制 x 取滿足此條件之值, 當 $3x-4$

4及 $x+0$ 之值相同時，且僅於此時為真。

同理， $x+y=0$ 為二未知文字 x 及 y 之條件方程，於一般，

當式 A 及 B 非同等式時，則 $A=B$ 為條件方程，此方程 323

之意為：“ A 及 B 假定有等值”且限制 A 及 B 中變數文字之等

值，使此假定為真。

文字之值受方程 $A=B$ 如此限制者，名為方程之未知文字。

嗣後凡“方程”一語，皆指“條件方程”。

設一方程內文字，只有未知文字如 x, y, z 者，名為數字方 327

程；設尚有已知文字如 a, b, c 者，則名為文字方程。

例如， $2x-3y=5$ 為數字方程，但則 $ax+by=c$ 為文字方程，文字方程不限制其已知文字之值。

設 A 及 B 二者為關於其未知文字之有理式及整式，則方 328
程 $A=B$ 稱為有理方程及整方程。設 A 或 B 為無理式或分式，則此
方程稱為無理方程或分式方程。

在此分類中，不計其數字及已知文字，例如 $\sqrt{2}x+y/b=c$ 為
有理整方程。

在有理整方程化為最簡式 (S310) 時，其項或最高次項之 329
次數，名為此方程本身之次數。

例如， $ax^2+bx+c=0$ 之次數為二； $x^3z^3+y^4=b$ 之次數為

五，凡次數係一切未知文字計算，但僅限於此種文字。

- 330 一次方程常稱為簡單方程或直線方程；其二次，三次，四次者，順次稱為二次方程，三次方程，四次方程。
- 331 含一未知文字 x 之方程，限制 x 取有限數之值，吾人稱此 x 之值為滿足此方程，或方程之解或根，故
- 332 含 x 之方程之根者，即任何數或已知式，設以之代 x 能令此方程成恆等式者也。
 例如，1及-2為方程 $x^2+x=2$ 之根；因 $1^2+1=2$ 及 $(-2)^2+(-2)=2$ 故也。
 其次， $a-b$ 為 $x+b=a$ 之根，因 $(a-b)+b=a$ 。
- 333 註。1. 一方程可以無根；因其可敘述之條件，無一數能滿足也。
 例如，無有限數能滿足方程 $x+2=x+8$ 。
 2. 凡含 x 之方程有根者， x 值為其諸根中一根之符號；實則方程本身僅為變用恆等式，以各根輪流代 x 可得幾個真恆等式，故方程實為恆等式之代替式。
 例如， $x^2+x=2$ 僅為二恆等式 $1^2+1=2$ 及 $(-2)^2+(-2)=2$ 之代替式。

方 程 解 法

- 334 解一未知文字之方程，即求其一切之根，或證明其無根。解法所依賴之理由，說明於下例。
- 例1. 解方程 $3x-4=x+6$ 。
 先假定 x 有一值能令此方程為真，推理如次：
- | | | |
|-----|---------------------------|----------|
| 設 | $3x-4=x+6,$ | (1) |
| 則 | $3x-4+(-x+4)=x+6+(-x+4),$ | (2) §249 |
| 或 | $2x=10,$ | (3) §360 |
| 故 | $x=5.$ | (4) §258 |
| 故，設 | $3x-4=x+6,$ 則 $x=5.$ | (5) |

前面證明之命題(a),敘述,設(1)常真,則在 $x=5$ 時,易言之,只有一數能為(1)之根即5,然尚不言及5為(1)之根,此後一句之敘述,當為

$$\text{設 } x=5, \text{ 則 } 3x-4=x+6. \quad (b)$$

而(b)與(a)不同,但為其逆(§291).

以5代入(1)中之 x ,可證明5為(1)之根;因可得真恆等式 $3 \cdot 5 - 4 = 5 + 6$ 故也。

但除證明計算之正確外,此一步並不需,因一真確命題能以可逆之方法證明時,常可決定其逆為真(§193),而(a)即合此情形,因從(1)導出(4)之方法,由可逆之步驟連結,故全體皆為可逆矣,例如

$$\text{設 } x=5, \quad (4)$$

$$\text{則 } 2x=10, \quad (3) \text{ §253}$$

$$\text{或 } 3x-4+(-x+4)=x+6+(-x+4). \quad (8) \text{ §301}$$

$$\text{故 } 3x-4=x+6. \quad (1) \text{ §249}$$

故以可逆方法證明命題(a),已同時證明其逆命題(b),即不但證明除5以外無他數能為(1)之根,且已證明5本身為(1)之根。

$$\text{例2. 解方程 } x^2=9.$$

$$\text{設 } x^2=9. \quad (1)$$

$$\text{則 } x=3, \quad (2) \quad \text{或} \quad x=-3, \quad (3) \text{ §257}$$

故(1)除3及-3以外不能有其他之根。

但3及-3均為(1)之根,因從(1)各導出方程(2)及(3),其步驟為可逆故也。例如,從(2)可得(1),從(3)亦然(§257)。

以上證例闡明下列一般原則。

求含 x 之方程之根,可先視此方程為恆等式,然後依計算方 335

法從此以求形如 $x=c$ 之一切方程。

設導出諸方程 $x=c$ 之一,此方法為可逆的,則 x 當有一

值 c 時，即可決定 c 為一根。又設此方法由可逆的步驟連結，則即為可逆的。

- 336 用計算方法從方程導出 x 之某值，祇憑此事，尙未能證明此值必為其根，此有記憶之必要，必須方法為可逆的，始能保證此結論。

例如，從 $x-2=0$, (1)

因得 $(x-2)(x-3)=0$, (2) §253

故 $x=2$, 或 $x=3$. (3) §253

但吾人不宜背理的推斷3為(1)之根，蓋當 $x=3$ 時，此方法不可逆，即不能以 $x-3$ 除(2)之二邊，因除數 $x-3$ 是時為0故也。

就他方面而言，當 $x=2$ 時，此方法為可逆，因 $x-3$ 是時不為0但為 -1 ；而2為(1)之根。

變形定理

- 837 徵諸以上所述，計算方法之任何正常應用於方程，可視為方程之合理變形；且設如此變形為可逆的，則可斷定其方程之根不變，故得下列定理：

§38 定理1，方程之如下變形，其根保留不變，即

1. 分別用結合法則 (§269) 於各邊。
2. 加有限值之任何式於二邊，或從二邊減之。
3. 以同一常數(非0)乘或除其二邊。

因含此變形之一切計算方法為可逆故也。(§25)。

2及3之證法，亦可敘述如下：

設 A 及 B 表含 x 之式，則方程 $A=B$ 之根，為以之代 A 及 B 中之 x 能令 $A=B$ 之諸數 (§332)。

然 x 之任何值能令 $A=B$ 及 C 為有限值，必能令 $A+C=B+C$ ，其逆亦然 (§19)；故 $A=B$ 之根與 $A+C=B+C$ 之根相同。

其次，設 c 表除 0 以外之任何常數，則 x 之任何值能令 $A=B$ 者，必能令 $cA=cB$ ，其逆亦然 (§253)；故 $A=B$ 之根與 $cA=cB$ 之根相同。

例如，§334 例 1，方程

$$3x-4=x+6. \quad (1)$$

$$3x-4+(-x+4)=x+6+(-x+4). \quad (2)$$

$$2x=10, \quad (3)$$

$$x=5. \quad (4)$$

皆有此同根 5。

(2) 為用變形法 2 從 (1) 導出，(3) 為用變形 1 從 (2) 導來，而 (4) 為用變形 3 從 (3) 導出。

系。方程之如下變形，其根保留不變，即：

331

1. 移一項變其號，從一邊至他邊。

2. 約去二邊中公有之任何項。

3. 悉變二邊中一切項之號。

因 3 等於以 -1 乘二邊，而 1 及 2 等於從方程二邊減去該項。

例如，設自二邊減

$$x-a+b = c+b$$

$$\text{減} \quad \quad \quad -a+b = -a+b-c \quad (1)$$

$$\text{得} \quad \quad \quad x = c+a \quad (2)$$

此減法之效力，為消去 (1) 二邊之 b ，且將 $-a$ 變號從左邊移於右邊。

藉此種變形 (§§338, 339)，凡含 x 之有理整方程，可不變其根，而化為標準式。

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

此種方程皆宜化爲標準式後，而計算其次數 (§329)。多於一未知文字之有理整方程，亦同此情形。

例如， $x^2 + 3x + 5 = x^2 - 4x + 7$ 能化爲 $7x - 2 = 0$ ，故其次數爲一，非二。

341 定理2. 當 A, B , 及 C 爲整式時，則方程

$$AC = BC$$

與下二方程有同根：

$$A = B \text{ 及 } C = 0.$$

因 x 之任何值者，能令 $AC \equiv BC$ ，必能令 $A \equiv B$ 或 $C \equiv 0$ ；及其逆之任何值能令 $A \equiv B$ 或 $C \equiv 0$ 者，必能令 $AC \equiv BC$ (§§251, 253)。

在此證明中，假定對於所述 x 之值 A, B, C 有限值，設 A, B, C 爲整式如上，假定時，此理常真；但 A, B, C 爲分式時，則未必常真。

在特例，當 A 及 C 爲整式時，則方程 $AC = 0$ 與方程 $A = 0$ 及 $C = 0$ 有同根。

例如，方程 $x^2 = 3x$ 之根，與二方程 $x = 3$ 及 $x = 0$ 之根即 3 與 0 相同。

同理 $(x-1)(x-2) = 0$ 之根，與二方程 $x-1=0$ 及 $x-2=0$ 之根即 1 與 2 相同。

342 故以同一整函數 C 乘整方程二邊之影響，爲引入增根，即方程 $C = 0$ 之根。反之，於整方程式 $AC = BC$ 之二邊消去相同整因式 C ，其影響爲失去其某根，即 $C = 0$ 之根。

就他方面而言，在分式方程，以諸分式之最低公分母乘其二邊時，常無增根引入。

例如，設方程爲 $1/x = 1/(2x-1)$ ，而以 $x(2x-1)$ 乘其二邊，得 $2x-1 = x$ ，其根爲 1，實則非 $x(2x-1) = 0$ 之根，故並無增根引入。

系。整方程 $A^2 = B^2$ 與方程 $A = B$ 及 $A = -B$ 有同根。 343

因 $A^2 = B^2$ 與 $A^2 - B^2 = 0$ 有同根 (§339), 且因 $A^2 - B^2 \equiv (A - B)(A + B)$, 故方程 $A^2 - B^2 = 0$ 與二方程 $A - B = 0$ 及 $A + B = 0$ 有同根 (§241), 故與二方程 $A = B$ 及 $A = -B$ 有同根 (§339).

例如, 方程 $(2x - 1)^2 = (x - 2)^2$ 之根與二方程 $2x - 1 = x - 2$ 及 $2x - 1 = -(x - 2)$ 有同根, 即 -1 與 1 .

故方程 $A = B$ 二邊同時平方之影響引入增根; 及方程 $A = -B$ 之根. 反之, 從 $A^2 = B^2$ 導出簡單方程 $A = B$ 之影響為失去其某根, 即方程 $A = -B$ 之根.

因 $A^n - B^n \equiv (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + B^{n-1})$, 345

(§308) 由 §343 之理, 知 $A^n = B^n$ 之根, 為 $A = B$ 及 $A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + B^{n-1} = 0$ 之根.

例如, 因 $x^3 - 1 \equiv (x - 1)(x^2 + x + 1)$, 方程 $x^3 = 1$ 與方程 $x = 1$ 及 $x^2 + x + 1 = 0$ 有同根.

以上論證之定理 (§338 - 345), 設以“解”字代“根”字, 則 346 在多於一未知文字之方程, 亦為有效 (§355).

例如, 由 §339, 方程 $x + 2y - 3 = 0$ (1) 與方程 $x = -2y + 3$ (2) 有同解, 即 x, y 能滿足 (1) 之各組值, 亦滿足 (2), 其逆亦然.

等值方程. 當二或多方程有同根 (或同解) 時, 稱之為等值 347 方程.

例如, §338 方程 $A = B$ 及 $A + C = B + C$ 為等值, 其次 §341, 方程 $AC = BC$ 與二方程 $A = B$ 及 $C = 0$ 為等值.

但 $x^2 = 9$ (1) 及 $x = 3$ (2) 雖皆有根 3, 然非等值. 因 (1) 亦有根 -3 , 而 (2) 則無之.

簡單方程之解法

348 從 §§338, 339 之變形定理, 即可導出含一未知文字 x 之簡單方程之解法如下:

欲解含 x 之簡單方程, 先化爲 $ax = b$ 之形. 因此

1. 設 $a \neq 0$, 則此方程有單純根 b/a .
2. 設 $a = 0$, 而 $b \neq 0$, 則此方程無解.
3. 設 $a = 0$ 及 $b = 0$, 則此方程爲一恆等式.

設方程有分數係數, 當先用諸分式之最小公分母乘其二邊, 此方法名爲去分數.

次移其未知項於左邊及已知項於右邊, 且於各邊中合併其項, 而化此方程爲 $ax = b$ 之形. 欲檢驗其結果, 以之代於已知方程之 x 即得.

例 1. 解 $\frac{2x}{3} - \frac{x-2}{2} = \frac{x}{6} - (4-x)$.

欲去分數先以最小公分母 6 乘其二邊.

$$4x - 3(x-2) = x - 6(4-x).$$

或 $4x - 3x + 6 = x - 24 + 6x$.

移項而合併各項, $-8x = -30$.

故 $x = 5$.

驗算: $\frac{2 \cdot 5}{3} - \frac{5-2}{2} = \frac{5}{6} - (4-5)$.

例 2. 解 $mx + n = px + q$.

移項而併項, $(m-p)x = q-n$.

設 $m \neq p$, 此方程有單一根 $(q-n)/(m-p)$.

設 $m = p$, 而 $q \neq n$, 則無根.

若 $m = p$, 及 $q = n$, 則爲恆等式, 而凡 x 之值無不滿足之.

例 3. 解

$$(x+a)(x+b) = (x-a)^2.$$

展開之,

$$x^2 + (a+b)x + ab = x^2 - 2ax + a^2.$$

消去 x^2 , 移項而併項.

則

$$(3a+b)x = a^2 - ab.$$

故

$$x = \frac{a^2 - ab}{3a + b}.$$

方程之根有時可由觀察得之。若為簡單方程, 則此方程已完 349

全解出, 因求得一根, 不能再有他根也。

例. 解 $(x-a)^2 - (x-b)^2 = (a-b)^2$

此顯然為一簡單方程, 當 $x=b$ 時, 即化為恆等式 $(b-a)^2 = (a-b)^2$. 故其根為 b .

形如 $AB=0$ 之方程之根, 其中 A 及 B 表 x 之一次整式者, 350
可解二簡單方程 $A=0$ 及 $B=0$, 而得之 (§341). 同法, 當 A, B, C 皆為一次式時, 則 $ABC=0, AC=BC$, 及 $A^2=B^2$ 之根, 可解簡單方程而得之 (§§341, 343).

例 1. 解 $(x-2)(x+3)(2x-5)(3x+2)=0$.

此方程等值於下列四方程 (§347):

$$x-2=0, x+3=0, 2x-5=0, 3x+2=0.$$

故其根為 2, -3, 5/2, -2/3.

例 2. 解 $4x^2 - 5x = 3x^2 + 7x$.

此方程與下列二方程有同根:

$$x=0 \text{ 及 } 4x-5=3x+7.$$

故其根為 0 及 12.

習 題 V,

解以下各方程:

1. $15 - (7 - 5x) = 2x + (5 - 8x).$

2. $x(x+3) - 4x(x-5) - 3x(5-x) - 16.$

3. $(x+1)(x+2) + (x+3)(x+4) = 0.$

4. $x = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16}$.
5. $x - 2\{x - 3(x+4) - 5\} = 3\{2x + [x - 8(x-4)]\} - 2$.
6. $2\{3\{4(5x-1) - 8\} - 20\} - 7 = 1$.
7. $\frac{1}{2}\{\frac{1}{2}\{\frac{1}{2}\{\frac{1}{2}x - 1\} - 6\} + 4\} = 1$.
8. $3 - \frac{5-2x}{5} = 4 - \frac{4-7x}{10} + \frac{x+2}{2}$.
9. $\frac{3x-1}{3} + 3 = -\frac{x-4}{6} + \frac{5x+5}{4} - 2\frac{1}{2}$.
10. $\frac{5x-.4}{.8} + \frac{1.3x-.05}{2} = \frac{13.95-8x}{1.2}$.
11. $3cx - 5a + b - 2^2 = 6b - (a + 3bx + 2c)$.
12. $(b-c)(a-x) + (c-a)(b-x) + (a-b)(c-x) = 1-x$.
13. $\frac{x+1}{x+1} + \frac{x}{a} = 2$. 由觀察.
14. $\frac{x+1}{a+b} + \frac{x-1}{a-b} = \frac{2x}{a^2-b^2}$.
15. $\left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m}\right)x = \frac{m}{n} - \frac{n}{m} - 2x$.
16. $(2x-1)(3x-1)(4x+1)(5x+2) = 0$.
17. $(x^2-x)(2x+5) = (x^2-x)(x+9)$.
18. $(x+2)^2 - (x-2)^2 = 32x + 16$.
19. $[(a+b)x-c]^2 = [(a-b)x-c]^2$.
20. $(x^2-2x+1)^2 - (x-1)^2(x-3)^2 = 0$.

應用問題

351 解應用題。在下列問題中，須由已知關係，以求找出某未知數之值；此種關係，名為問題之條件，即聯絡未知數與已知數及其間相互之關係。

在各情形中，常以文字如 x 代表未知數之一。則已知條件使能以 x 表其餘未知數。而聯絡所得諸式作成簡單方程。此方

程爲以代數符號敘述問題，吾人可就 x 以解之。問題有任何解答，則必爲所求 x 之值，共同爲其他未知數之對應值。

然倘有所得 x 之值，非問題可許之解答。蓋問題可於求 x 之性質加以限制，如限爲整數，而由問題之敘述轉譯於 x 之方程，則不能表此限制也。

故解得 x 之方程，在認爲此問題之解答前，必須注意其結果是否爲所求之一種數，設非此一種，則斷定此問題爲不能解。

例 1 有二位數，其數字之和爲 12。設顛倒其位置，則得一數爲原數之 $\frac{4}{7}$ 。問此數如何？

此題有四未知數，即十位數，單位數，此數之值，及顛倒其數字時之值；但此四數皆易於以單位數字或十位數字表之。

如令 $x =$ 十位數字，

則 $12 - x =$ 單位數字，

$10x + (12 - x) =$ 所求數之值，

$10(12 - x) + x =$ 位置顛倒後之值。

由此題之其餘條件，得

$$10(12 - x) + x = \frac{4}{7}[10x + (12 - x)]. \quad (1)$$

解此方程，得 $x = 8$ ，爲小於 10 之整數，即爲此題之可許解。同理， $12 - x$ 或 4 亦如此，故所求數爲 84。

注意。若少許改變此問題，即變爲不能解，例如在顛倒其位置爲二倍於原數之值，則得下列方程以代 (1)，

$$12(12 - x) + x = 2[10x + (12 - x)]. \quad (2)$$

解(2), 得 $x = 32\frac{1}{9}$, 爲一分數, 即非此問題之可許解答。
 當處理某量, 如時間等之問題時, 須注意代數的敘述問題中
 所用之文字, 非表量之本身, 僅表其用已知單位所得測度之數。
 亦宜注意表已知或未知同類一切量之測度, 必須用同一單位。

例1. 一池有進水管 A, 三時即可注滿, 及一放水管 B, 3 時
 40分可放盡。設空池時二管齊開, 則若干時後可注滿此池?

令 x 表所求之時數。

則 $1/x$ 爲 A 及 B 齊開時每時注入之量。

但 A 獨開, 一時注入量爲 $1/3$ 。

而 B 獨開(池中有水)一時放出量爲 $1/3\frac{2}{3}$ 或 $3/11$ 。

故 $\frac{1}{3} - \frac{3}{11} = \frac{1}{x}$, 或 $\frac{2}{33} = \frac{1}{x}$ 。

故得 $x = 33/2$ 時, 或 16 時 30 分。

例2. 一舟夫在某河中能於 15 分鐘逆流划行 2 哩; 順流則只
 須 10 分鐘, 問流速如何? 又此舟夫在靜水中划行速度如何?

令 $x =$ 每分鐘流速之哩數。

因此舟夫逆流之速度爲每分鐘 $2/15$ 哩, 故於靜水中當爲
 $2/15 + x$ 。

又因此舟夫順流之速度爲每分鐘 $2/10$ 或 $1/5$ 哩, 故於靜水
 中當爲 $1/5 - x$ 。

故 $\frac{2}{15} + x = \frac{1}{5} - x$,

由是得 $x = \frac{1}{30}$ (每分鐘哩數),

及 $\frac{2}{15} + x = \frac{1}{6}$ (每分鐘哩數)。

例3. 在二點鐘與三點鐘之間, 時鐘之分針與時針何時指反
 對方向?

令 $x =$ 二點鐘後所求時間之分數。

分針自 XII 起行，此時當行 x 分格。

時針在分針前 10 分格之 II 起行，但其移動僅為分針 $1/12$ 。

故分針在 XII 後 x 分格時，時針在 XII 後 $10 + x/12$ 分格。

但按此問題之條件，在所求時間，分針應在時針前 30 分格。

$$\text{故} \quad x = \left(10 + \frac{x}{12}\right) + 30,$$

$$\text{解之,} \quad x = 43\frac{7}{11} \text{ 分格.}$$

故二針指反對方向在二點鐘後 $43\frac{7}{11}$ 分，或三點前 $16\frac{4}{11}$ 分。

在問題之敘述中，有時以文字 a, b, c 表已知數，求得 x 之值 354，為 a, b, c 所表之式，此式對於諸文字若干值，可表此問題之可許解答，其餘則不能。下列追及問題之討論，當闡明此點。

例二，追及 A 及 B 沿同路依同方向， A 以每時 m 及 B 以每時 n 之速度進行，今 B 在 A 前 d 哩，問二人能否相遇設能相遇，則在何時？

令 $x =$ 至二人相遇之時數。

則 A 行 mx 哩，而 B 行 nx 哩；因今 B 在 A 前 d 哩，故有

$$mx = nx + d, \quad (1)$$

$$\text{由是} \quad (m - n)x = d, \quad (2)$$

$$\text{故} \quad x = \frac{d}{m - n} \text{ 時.} \quad (3)$$

1. 設 A 追及 B ，則 x 之值須為正，且因依假設 d, m, n 皆表正數，故必須 $m > n$ 。適應於此顯然事實，即設 A 追及 B ，則其行必須較 B 為速。

2. 同時可解釋 x 所取之負值；設假定 $m < n$ ，則其意為 A 與 B 已在 $d/(n - m)$ 時以前相遇。

3. 設 $m=n$, 則其實不能從 (1) 導出 (3), 因方法中含有以 $m-n$ 即 0 除之故也. 但設 m 與 n 完全不同, 不論 n 小至如何, 則可從 (1) 導出 (3). 設在 (3) 中視 m 為變數, 雖常大於 n 然繼續漸近而等於 n , 則分數 $d/(m-n)$ 或為變數, 繼續增大而至於無限 (§ 510). 凡此所論, 適應於下述顯然事實, 即 A 超過於 B 之速度漸小, 則 A 追及 B 之時間漸長, 若 A 與 B 之速度相同, 則 A 永不能追及 B .

4. 最後, 設假定 $m=n$, 而 $d \neq 0$, 則方程 (1) 可以 x 之任何值滿足. 適應於此顯然事實, 為設 A 與 B 以同速度進行而今同在一處, 則二人常同在一處.

習 題 VI.

1. 有二位數, 其數字和為 14, 設顛倒其位置, 則得較原數增 18, 問原數如何?

2. 須用何數除 156, 則其商為 11, 餘數為 2?

3. 有二數, 其差為 298, 設以小除大者, 則商及餘數皆為 12, 問此二數如何?

4. 有二位數, 其十位數字為個位數字之二倍, 設加 1 於十位數字, 加 5 於個位數字, 則所得之數, 三倍於顛倒其位置後從十位數字減 1, 個位數字減 5, 問此數如何?

5. 設從某數減 2 而以 4 乘其餘數, 則其結果, 與二倍某數加某數減 1 之半相同, 問某數如何?

6. 父年今為四倍於其子. 設 20 年後, 父年為子年之二倍, 問父子現年各若干, 又若干年後, 父年為其子年之三倍?

7. 一池以第一管注水, 3 時可滿, 以第二管放水, 2 時可盡, 以第三管放水, 4 時可盡. 設池中滿水, 而三管齊開, 問須若干時方能將池水放盡?

8. A與B能於10日成一工程,但7日後,A因病停工,B獨自作5日完成,問每人獨作全工程,各須幾日?

9. 在八點鐘至九點鐘間,時鐘之二針,何時在同一方向?何時在相反方向?

10. 在四時後,錶之二針何時成直角?

11. 有一不準之時鐘,察其時針與分針繼續重合,須經06分鐘,問此時鐘之錯誤如何(每時鐘秒數)?

12. 四人A,B,C,D分款1300,B所得為A之 $\frac{2}{3}$,C為B之 $\frac{3}{4}$,D為C之 $\frac{5}{6}$,問各得若干?

13. 某人將其財產之 $\frac{1}{2}$ 又1000元給長子;餘數之 $\frac{1}{3}$ 又1000元與次子;再以其餘之 $\frac{1}{4}$ 又1000元與幼子,尚餘3500元,問其全部財產之總數若干?

14. 設加二呎於某正方形之各邊上,則面積增大100方呎,問原正方形之面積如何?

15. 不知某竈竿之高;但知其繫於竿頂之繩,長於竿2呎,而繩之末端觸地時,距竿足18呎,問竿之高如何?

16. 袋中有一元貨幣若干,半元貨幣為其二倍,又一角貨幣為其三倍,設貨幣之總值為11.60元,問各種貨幣有若干?

17. 某人放款5000元,其利率一部為6%,一部為4%,放款全部之平均利率為5%,問此人以此二種利率,各放款若干?

18. 有二種咖啡,每磅之價順次為20分及30分,問須依何種比例混合,始成每磅價26分?

19. 有銀與銅之合金一磅,含銀二份,銅三份,問須加銅若干,始含銅三份,銀七份?

20. 設於一器之已知酒精中，加入某量之水，則此酒精中含酒精 30%；若加二倍某量之水，則含酒精 20%；求有次加水若干，及原酒精中含酒精之百分率？

21. 一列火車之速率，為每時 45 哩，於上午 10 時從 A 站開往 B 站，又一列，速率為每時 50 哩，於上午 10 時 30 分從 B 站開往 A 站，假定二站相距 90 哩，問二列車何時相遇，且相遇處與 B 站之距離如何？

22. 若二列車開出之時間如上題所述，而相遇於 B 站與 A 站間之半途，又若慢車之速率為快車之 $\frac{1}{2}$ ，問二列車之速率如何，又在何時相遇？

23. 有兔在距獵者於 50 步之前為狐所追，兔行 5 步時狐行 4 步，但狐行二步等於兔之三步，問兔再行若干步，為狐追及？

24. 設 10 兩，在水中提之，重 18 兩，銀 10 兩在水中提之，重 9 兩，今有此二金屬之合金，在空氣中重 337 兩，在水中重 351 兩，問合金銀各若干兩？

25. 一旅客假若干款項於囊中旅行，每日用其所有款之 $\frac{1}{3}$ 又 2 元，至第三日終，其款用盡，問其最初有款若干？

26. 某角錐體之底為一正方形，其側面所圍三角形之高，等於其底之一邊，如稜與高各增 3 吋，則角錐體之面積增 117 方吋，問此角錐體之面積如何？

27. 有二位數，其二數字之和為 a ，如轉換其數字之次序，則其數增 b ，問此數如何？試證其解答僅於 $9a \geq b$ 及 $9a + b \equiv 91 - b$ 二者為 18 所整除時方合。

28. 二人 A, B 現今順次為 a 與 b 歲，問以前或以後 A 年有為 B 年 c 倍之時否？如其有之，則在何時？

對於 a, b, c 種種之值，討論此結果，如 § 384。

IV. 聯立一次方程系

聯立方程

含二未知文字 x 及 y 之條件方程，可以此種文字之無限對值 255 滿足之。稱其如此各對之值為方程之解。多於二未知文字之方程亦如是。

例如，方程 $2x + y = 3$ (1)，設予 x 以任何值，而予 y 以 $3 - 2x$ 之對應值，即能滿足。蓋於 (1) 中以任何數 b 代 x 而以 $3 - 2b$ 代 y ，則得一真恆等式 $2b + (3 - 2b) = 3$ 故也。

例如， $x = 0, y = 3; x = 1, y = 1; x = 2, y = -1; \dots$ 俱為 (1) 之解答。

註。就二未知文字 x, y 而論之，方程 $x = 2$ 之意，為 x 有值 356 2，而 y 有無論如何之值；易言之，方程 $x = 2$ 有無限數之解。含諸未知文字中一文字之任何方程皆如是。

因此之故，當然須探究 x 及 y 是否有一對之值可滿足含此種文字之二已知方程。如此一對之值，常可存在。

例如，二方程 $2x + y = 3$ 及 $4x + 3y = 5$ ，當 $x = 2$ 及 $y = -1$ 時，俱能滿足；蓋 $2 \cdot 2 + (-1) = 3$ ，及 $4 \cdot 2 + 3(-1) = 5$ 故也。

聯立方程。二或多方程之含幾個未知文字者，當其各未知 358 文字假定為在一切方程中代表同數時，則稱為聯立方程。

例如，方程 $2x + y = 3$ (1) 及 $4x + 3y = 5$ (2)，設假定其 x 在 (1) 及 (2) 中俱表同數，而 y 亦然，則 (1) 及 (2) 為聯立方程。

各方程中，並非必須含一切未知文字。例如， $x = 2, y = 3$ 亦可設為含 x 及 y 之一對聯立方程。

359 就一般而言，若干方程為聯立之推測，僅限於方程之個數等於或少於未知文字之個數時方為正當。

① 例如，二方程 $x=2$ 及 $x=3$ 不得為聯立，蓋在此二方程中表不同之數故也。

360 聯立方程系之解，為其未知文字之任何組值，能滿足此系之一切方程者。

例如， $x=2, y=-1$ 為以下方程系之解

$$2x+y=3, 4x+3y=5.$$

361 解聯立方程系，即求其一切之解或證明其無解。

362 解法所依據之理由，與 § § 331, 335 所敘述及說明相仿，設有含 x 及 y 之一對方程，可假定 x 及 y 實有其值能滿足二方程。在此假定，可將方程如恆等式處理，而計算法則亦可應用。藉此種法則，努力將方程變形為一對或數對形如 $x=a, y=b$ 之方程。設導出如此一對 $x=a, y=b$ 之方法當 x, y 有值 a, b 則為可逆，即可決定 a, b 為所求解答之一；且設由可逆的步驟所成之方法，皆為可逆。

凡此所云，含唯一新原則如下：

363 代換原則。設假定一切已知方程確能適合，而由此得式 A, B 之若干對值為相同，則可以一式代他式於任一方程中。

例. 解一對方程 $2x + y = 12.$ (1)

$$y = 8. \quad (2)$$

由假定 x 及 y 實有其值能滿足二方程, 因在 (2) 中, y 之值, 而知在 (1) 中為 8, 以 8 代 (1) 中之 y , 得

$$2x + 8 = 12 \quad (3)$$

由是, $x = 2.$ (4)

故設 (1), (2) 有任何解, 則其解為 $x = 2, y = 8.$

反之, $x = 2, y = 8$ 為 (1), (2) 之解, 因方法從 (1), (2) 至 (4), (2) 為可逆之故也。

例如, 由 (4) 得 (3), 而由 (3) 得 (2) 得 (1).

註1. 代換原則為幾個等式法則 (§ § 249, 253, 275), 及 364 一般等式法則,

設 $a = b, b = c$ 則 $a = c$, (§ 261) 之結果。

例如, 以上代換法, 可證明其合宜如下:

設 $y = 8$, 則 $y + 2x = 8 + 2x$, 或 $2x + 8 = 2x + y$ (§ 249)。

又設 $2x + 8 = 2x + y$ 及 $2x + y = 12$, 則 $2x + 8 = 12$ (§ 261)。

註2. 此原則當然只能用於正常的假定已知方程為聯立時。 365

例如, 從 $x = 2$ 及 $x = 3$, 不能作背理結論 $2 = 3$, 因無理由以假定 $x = 2, x = 3$ 為聯立故也。

變形定理

就以上所述觀之, 計算法則之任何正常應用於一對方程可 366 視為此一對之合法變形; 且設如此變形為可逆, 即可決定此一對之解答不致變更。

故以下諸定理, 對於任何數未知文字之方程皆屬有效。

定理1. 當 § § 338, 339 之變形分別應用於方程時, 則 367 一對方程之解保留不變。

因用如此變形，每個方程之解保留不變故也。

例如，一對方程 $3x-2y=1$ 及 $y-2=5$ 與 $3x-2y=1$ 及 $y=5+2x$ 有同解。

368 定理 2. 一對方程

$$y=X, \quad f(x,y)=0,$$

與下列一對方程有同解：

$$y=X, \quad f(x,X)=0,$$

式中 X 表 y 之任何式(或常數)， $f(x,y)$ 表 x 及 y 之任何式，而 $f(x,X)$ 表 $f(x,y)$ 中以 X 代 y 之結果 (§ 280)。

此定理不過為代換原則之特殊情形。

例如，一對方程 $y=x+2$ 及 $3x-2y=1$ 與 $y=x+2$ 及 $3x-2(x+2)=1$ 有同解。

369 定理 3. 一對方程

$$A=B, \quad C=D,$$

與下列一對有同解：

$$A+C=B+D, \quad C=D.$$

因 $A=B, C=D$ 與 $A+C=B+C, C=D$ 有同解 (§ 338)，及 $A+C=B+C, C=D$ 與 $A+C=B+D, C=D$ 有同解 (§ 363)。

例如， $x+y=5$ 及 $x-y=1$

與 $x+y+(x-y)=5+1$ 及 $x-y=1$ 有同解，

故亦與 $2x=6$ 及 $x-y=1$ 有同解。

370 推論。在應用 § 369 之定理以前，用不為 0 之任何常數乘已知方程——例如各方程之二邊——其解不變，故

設 k 及 l 表不為 0 之任何常數，則一對方程

$$A=B, \quad C=D$$

與一對方程

$$kA \pm lC = kB \pm lD, \quad C=D$$

定理 4. 當 A, B 及 C 俱為該式時, 一對方程

371

$$AB=0, C=0.$$

與下列二對有同解:

$$A=0, C=0 \text{ 及 } B=0, C=0:$$

因 $AB=0$ 與二方程 $A=0$ 及 $B=0$ 有同解 (§ 341),

故一對 $AB=0, C=0$ 與二對 $A=0, C=0$ 及 $B=0, C=0$ 有同解.

例如,

$$xy=0 \text{ 及 } x+y=2 \text{ 之解}$$

為
與

$$x=0 \text{ 及 } x+y=2,$$

$$y=0 \text{ 及 } x+y=2$$

共同之解.

等值系. 聯立方程之二系, 當其有同解時, 稱為等值.

372

例如, 一對方程 $x+2y=5, 2x+y=4$ 與一對方程 $3x+y=5, 4x+3y=10$, 二者有同解 1, 2, 即為等值.

其次一對 $xy=0, x+y=2$, 與二對 $x=0, x+y=0$ 及 $y=0, x+y=2$ 為等值.

消去法. 一對簡單方程之解法

消去法. 欲從一對方程消去一未知數如 x , 即欲從此一對

373

中導出不含 x 之一方程.

今進而解釋從含 x, y 之一對簡單方程消去 x 或 y , 且從此結果導出此一對方程之解之較為有用法則.

代換法. 此法根據 § 368 之定理.

374

例. 解:

$$x+3y=3, \quad (1)$$

$$8x+5y=1. \quad (2)$$

解 (1), 以 y 表 x ,

$$x=3-3y. \quad (3)$$

在 (2) 中, 以 $3-3y$ 代 x , $3(3-3y)+5y=1$.

$$(4)$$

解 (4),

$$y=2. \quad (5)$$

在 (3) 中, 以 2 代 y ,

$$x=-3. \quad (6)$$

故 (1) (2) 之解惟一，即 $x = -3, y = 2$.

因按 § § 367, 368, 下列各對方程有同解，即 (1), (2); (3), (2); (3)(4); (3), (5); (6), (5); 而 (5), (6) 之解為 $x = -3, y = 2$.

此同一結論，可直接從 § 362 而得。蓋從 (1), (2) 至 (5), (6) 之方法為可逆故也。

檢驗 $-3 + 3 \cdot 2 \equiv 3, (1) \quad 3(-3) + 5 \cdot 2 \equiv 1. (2)$

此處之 (4) 係用代換法消去 x 而得。

欲用代換法從一對方程消去一未知文字如 x ，可從一方程

以他文字表 x 得一式，而在他方程中以此式代 x 。

375 下列解釋此法之特別形式，名為比較消去法。

例。解： $x + 5y = 7, (1)$

$x + 6y = 8. (2)$

解(1), (2)二者，以 y 表 x , $x = 7 - 5y. (3)$

$x = 8 - 6y. (4)$

二式關於 x 相等, $7 - 5y = 8 - 6y. (5)$

解 (5), $y = 1. (6)$

在 (3) 中以 1 代 y , $x = 2. (7)$

故 (1), (2) 之解為 $x = 2, y = 1$.

加減法。此法根據 § § 369, 370 之定理。

例。解： $2x - 6y = 7, (1)$

$3x + 4y = 4. (2)$

以 3 乘 (1) $6x - 18y = 21. (3)$

以 2 乘 (2) $6x + 8y = 8. (4)$

從 (3) 減 (4) $-26y = 13 (5)$

由是 $y = -\frac{1}{2}. (6)$

在 (1) 中以 $-\frac{1}{2}$ 代 y , $2x - 6(-\frac{1}{2}) = 7 (7)$

由是 $x = 2. (8)$

故 (1), (2) 之解為 $x = 2, y = -\frac{1}{2}$.

因按 §§ 367, 368, 370, 下列各對方程有同解, 即 (1), (2); (1), (5); (1), (6); (7), (6); (8), (6); 而 (8), (6) 之解為 $x=2, y=-\frac{1}{2}$.

檢驗 $2 \cdot 2 - 6(-\frac{1}{2}) \equiv 7$, (1) $3 \cdot 2 + 4(-\frac{1}{2}) \equiv 4$. (2)

此處 x 用減法消去.

直接從 (1), (2) 用加法消去 y , 亦可求得 x 之值. 如下:

以 2 乘 (1), $4x - 12y = 14$. (9)

以 3 乘 (2), $9x + 12y = 12$. (10)

加 (9) 與 (10). $13x = 26$. (11)

故, 與前相同, $x = 2$. (12)

欲用加減法從一對簡單方程消去一未知文字如 x , 可用數目乘方程, 使其結果之方程中 x 之係數絕對值相等. 其後用減法或加法, 依此種係數有同號或異號而定.

異常情形. 令 $A=0, B=0$ 為 x, y 之一對簡單方程. 以 377 前數節 (§§ 374, 37) 已明示 $A=0, B=0$ 有一解且只有一解, 苟非式 A 及 B 為於消去 x , 同時亦消去 y 者. 此惟於下列情形中能發生.

1. 設式 A 與 B 之關係為 $A \equiv kB$, 式中 k 為常數, 則稱方程 $A=0, B=0$ 不獨立.

顯然可見. 設 $A \equiv kB$, 則 $B=0$ 之每一解, 為 $A=0$ 之解, 反之亦然, 故 $A=0, B=0$ 有無限多之解.

例如, 令 $A=2x+6y-10=0$, (1) $B=x+3y-5=0$. (2)

此處 $A \equiv 2B$, 故 $A=0, B=0$ 為非獨立方程. 可見其欲消去 x 而以 2 乘 (2), 再從 (1) 減去其結果, 則同時消去 y .

2. 設 A 與 B 之關係為 $A \equiv kB+l$, 此處 k 與 l 表常數, l 非 0, 則稱方程 $A=0$ 與 $B=0$ 為不合理.

此時一對 $A=0$ 與 $B=0$ 無解；因能令 $B \equiv 0$ 之 x, y 之任何值，必令 $A \equiv 1$ 而非 $A \equiv 0$ 故也。

例如，令 $A = 2x + 6y - 9 = 0$, (3) $B = x + 3y - 5 = 0$ (4)

此處 $A \equiv 2B + 1$ ，故 $A=0$ 與 $B=0$ 為不合理。設從 (3), (4) 消去 x 則同時亦消去 y 。

378 解公等式。任何已知一對 x, y 之簡單方程，可化為下式：

$$ax + by = c, \quad (1) \quad a'x + b'y = c', \quad (2)$$

式中 a, b, c, a', b', c' ，表已知數或式。

按 § 377，一對 (1), (2) 有一解，且只有一解，異常數 c 能求得，以致 $a' = ka$ 及 $b' = kb$ ，因此而 $ab' - a'b = k(ab - ab) = 0$ 者須除外。

欲得其解，可用代換法 (§ 376) 消去 y 與 x ，其結果為

$$(ab' - a'b)x = b'c - bc', \quad (ab' - a'b)y = ac' - a'c. \quad (4)$$

故設 $ab' - a'b \neq 0$ ，則 (1)(2) 之解為

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}. \quad (5)$$

此公式設寫為下式，則較易記憶。

$$\frac{x}{bc' - b'c} = \frac{y}{ca' - c'a} = \frac{-1}{ab' - a'b}. \quad (6)$$

若預先未知一對 (1)(2)，當 $ab' - a'b \neq 0$ 時有一解，則以上所論，僅證明設一對 (1), (2) 有任何解，則其解為 (5) 也。

習 題 VII

就 x, y 解以下各對方程：

1. $\begin{cases} x + y = 62, \\ x - y = 12. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x - 5y = 25, \\ 4x - 3y = 19. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 45x - 13y = 161, \\ 18x + 11y = 32. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - 3 = 7 - x, \\ 8x - 3y - 61 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 12x = 9 - 10y, \\ 8y = 7 - 9x. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2y - 3x = 0, \\ 5x - 3y = 2 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x/3 + 5y = 3\frac{1}{2}, \\ 5x + 3y = 1.65. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2(2x + 3y) = 3(2x - 3y) + 10, \\ 4x - 3y = 4(3y - 2x) + 3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} (x+2)(y+1) = (x-5)(y-1), \\ x(4+y) = -y(8-x). \end{cases}$

10. $\begin{cases} ax + by = a^2 + 2a + b^2, \\ bx + ay = a^2 + 2b + b^2. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} ox + by = c, \\ px = qy. \end{cases}$

12. $\begin{cases} (a-b)x + (a+b)y = 2(a^2 - b^2), \\ (a+b)x + (a-b)y = 2(a^2 - b^2). \end{cases}$

13. $\begin{cases} \frac{x+y}{8} + \frac{y-x}{2} = 5, \\ \frac{x}{2} + \frac{x+y}{9} = 7. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} \frac{x+y}{4} + \frac{x+2y-5}{6} = \frac{y-3}{4} + \frac{y+2x-5}{6}, \\ 5x - 2y + 6 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{c}, \\ \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = \frac{1}{c'}. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1+x, \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1+y. \end{cases}$

17. 證明下列方程為不合理

$1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}y = 10, \quad 6x - 10y = 15.$

18. 在習題15內，試決定 a, b, c, a', b', c' 之值，

(1) 不合理 (2) 不獨立。

一對簡單方程解法在解一

對非一次方程時之應用

含 x 及 y 之一對非一次方程，而對於 x, y 之某對函數仍 379
可為一次者，可就此一對函數以解方程，再從其結果而導出 x 及
 y 本身之值。

例 1. 解 $\frac{2}{x} + \frac{5}{3y} = 1, \quad \frac{9}{x} + \frac{10}{y} = 5.$

各方程關於 $1/x$ 及 $1/y$ 為一次。

解 $1/x, 1/y$ ，求得 $1/x = 1/3, 1/y = 1/5$ ，故 $x = 3, y = 5$ 。

例 2. 解 $3x + \frac{y}{x} = 6, \quad 7x - \frac{2y}{x} = 1.$

解 x 及 y/x , 求得 $x=1$ 及 $y/x=3$, 故 $x=1, y=3$

- 380 已知一對方程可化為 $AB=0, A'B'=0$ 之形式, 其中 A, B, A', B' , 表 x, y 之一次整式, 則依 § 371 之定理, 此對方程之一切解, 可由解下列四對簡單方程而得: $A=0, A'=0; A=0, B'=0; B=0, A'=0; B=0, B'=0.$

例, 解 $x^2 - 2xy = 0, \quad (1)$

$(x+y-1)(2x+y-3) = 0. \quad (2)$

此一對與下列四對等值:

$x=0, \quad x+y-1=0, \quad (3)$

$x=0, \quad 2x+y-3=0, \quad (4)$

$x-2y=0, \quad x+y-1=0, \quad (5)$

$x-2y=0, \quad 2x+y-3=0. \quad (6)$

解此四對 (3), (4), (5), (6), 得 (1), (2) 之四解, 即: $x, y=0, 1; 0, 3; 2/3, 1/3; 6/5, 3/5.$

- 381 於一般, 設 $ABC\dots$ 及 $A'B'C'\dots$ 表 x, y 之 m 個及 n 個一次整因式之積, 則欲求一對方程 $ABC\dots=0, A'B'C'\dots=0$ 之一切解, 可使第一積之各因子等於 0 及第二積之各因子等於 0, 各各組合而成 mn 對簡單方程, 再解此 mn 對而得之.

設諸對簡單方程俱為獨立及合理, 則可得 mn 解, 即已知 方程解答之數, 為其次數之積.

習 題 XIII

解下列各對方程:

1. $\frac{7}{2x} + \frac{1}{3y} = 0, \quad \frac{8}{x} + \frac{14}{y} + 3 = 0.$

2. $10x + \frac{6}{y} = 5, \quad 15x + \frac{10}{y} = 8.$

3. $\frac{y}{x} - \frac{2(3-y)}{x} + \frac{3}{2} = \frac{y+3}{x} - \frac{3y-5}{x} + 1.$
4. $xy=0, (x+2y-1)3x-y+2=0.$
5. $xy-y=0, 3x-3y+5=0.$
6. $x(x-y)x+y=0, x+2y-5=0.$
7. $(x-1)(y-2)=0, (x-2)(y-3)=0.$
8. $y^2=(x-1)^2, 3x+3y-7=0.$
9. $(2x+y)^2=(x-3y+5)^2, (x+y)^2=1.$
10. $(x-5y+8)(x+3y+5)=0, (2x+y+5)(5x+2y)-14=0.$

一次方程含二變數者之圖形

x 及 y 一對值之圖形，變數如 x, y 之一對值，用平面上 382 一點表之甚便。

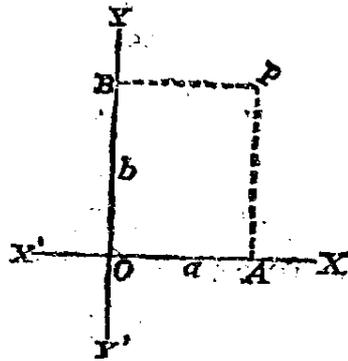
在平面上選取正交二定直線 $X'OX$ ，及 $Y'OY$ 為軸，其交點 O 名為原點；並擇適宜單位以

量長度。

設已知一對值為 $x=a, y=b$ ，

則作法如下：

在 $X'OX$ 上且依 a 之為正或負而在 O 之右或左截一線段 OA ，其長為 $|a|$ ，即 a 之絕對值。



同法在 $Y'OY$ 上依 b 之為正或負在 O 之上或下載一線段 OB ，其長為 $|b|$ ，

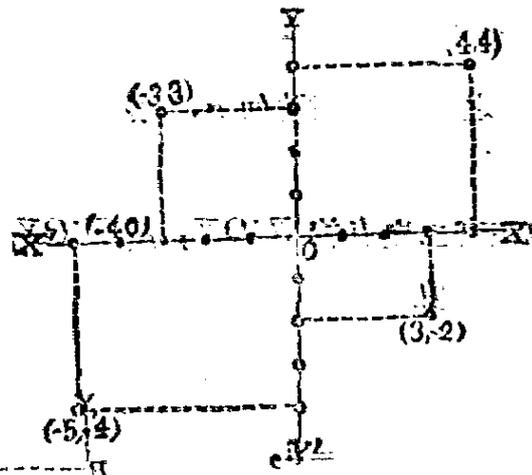
過 A 與 B 順次與 $Y'OY$ 及 $X'OX$ 之平行線，取此種平行線之交點 P ，為一對值 $x=a, y=b$ 之點或圖形，為便利計，以符

號 (a, b) 表此一對值 $x=a, y=b$ 及其圖形 P .

吾人將數或等長線段 OA, EP 之一, 爲 P 之橫坐標; 而 b 或等長線段 OB, AP 之一, 爲 P 之縱坐標; 總稱橫坐標及縱坐標爲 P 之坐標.

又稱 $X'OX$ 爲 x 軸或橫軸, 而 $Y'OY$ 爲 y 軸或縱軸.

觀察此法, 則引 (x, y) 之各對值與平面上之點成一對應 (圖 2), 即每有一對值 (a, b) 必有一點 P , 反之, 每有一點 P 必有一對值 (a, b) ; 此可從 $Y'OY$ 及 $X'OX$ 順次量點 P 之距離而予以適當符號得之, 在特例 $(0, 0)$ 之對形爲原點, $(a, 0)$ 之圖形爲 X



軸上一點, $(0, b)$ 之圖形爲 y 軸上一點.

例: 作圖表示下列各對值: $(4, 4), (-3, 3), (-4, 0), (-5, -4), (3, -2)$.

就各對值依次實行上述作法, 即得圖形如附圖所指示. 應特別注意者, 圖形位置與其坐標符號之關係.

883

含 a, y 之方程之圖形, 在普通情形, 其含 x 及 y 之一已知方程有無限多實數解, 通常含此一切解之圖形爲一定曲線, 而別無他點. 吾人稱此曲線爲此方程之圖形.

任一方程之圖形, 可由多於一之曲線而成. 又須注意於曲線中包

含直線。

定理。凡含一或二文字之簡單方程，其圖形為一直線，384

因此之故，簡單方程常稱為直線方程。

學者任意選擇幾何圖形以表其若干解，解可自信非定理之真。

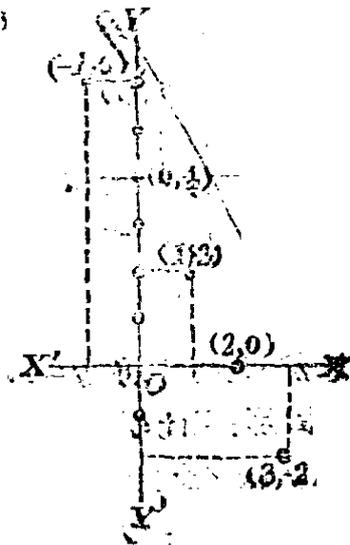
例如，取方程 $y = -2x + 4$ 。

當 $x = 0, 1, 2, \dots, 3, \dots$ 時，

有 $y = 4, 2, 0, \dots, -2, \dots$

作圖以表諸點 $(0, 4)$ ，

$(2, 0)$ ， $(3, -2)$ 。



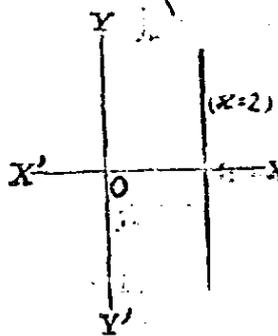
圖形在同一直線上。

吾人可證明此定理如下：

1. 當方程有形狀 $x = a$ 或 $y = b$ 時，

例，求 $x = 2$ 之圖形。

此方程為 x 之值 2 及 y 之任何值所滿足 (§ 356)，故其圖形平行於 y 軸，距離為 2 而在其右邊。蓋此



線含橫坐標為 2 之一切點，且只含如此諸點故也。

於一般， $x = a$ 之圖形，為平行於 y 軸，距離為 $|a|$ ，其在右或左，依 a 之為

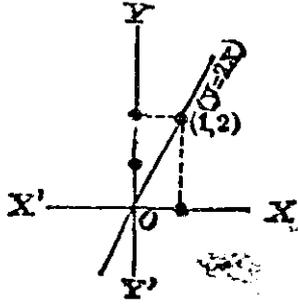
正或負而定。 $y = b$ 之圖形為平行於 x 軸，距離為 $|b|$ ，其在上方或下依 b 之為正或負而定。

在特例， $y = 0$ 之圖形為 x 軸，而 $x = 0$ 之圖形為 y 軸。

2. 當方程有形狀 $y = mx$ 時。

例。求 $y = 2x$ 之圖形。

此圖形為通過原點 $(0,0)$ 及點 $(1,2)$ 之直線：蓋此線含縱坐標二倍於橫坐標之各點，且只含如此之點故也。



於一般， $y = mx$ 之圖形為通過原點及點 $(1, m)$ 之直線。

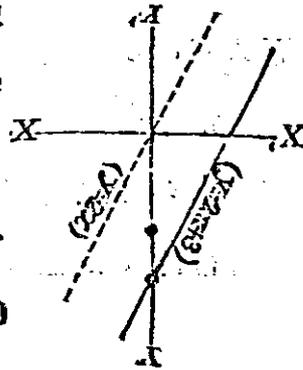
3. 當方程有形狀 $y = mx + c$ 時。

例。求 $y = 2x + 3$ 之圖形。

顯然可見，設將 $y = 2x$ 之圖形中各點之縱坐標增3，即得此方程之圖形，但此事同於將直線 $y = 2x$ 平行於其本身向上移動，直至與 y 軸之交點在原點上3單位為止。

於一般， $y = mx + c$ 之圖形為平行

於 $y = mx$ 圖形之一直線，遇 y 軸於距原點為 $|c|$ 之處，其在原點之上或下依 c 之為正或負而定。



385 求作直線。因任何二點足以定一直線，故可求任何方程 $ax + by + c = 0$ 之圖形，如下例。

例。作 $3x + y - 6 = 0$ 之圖形。

先設 $y = 0$ ，則 $x = 2$ 。次設 $x = 0$ ，則 $y = 6$ 。

故只有此二點 $(2,0)$ 及 $(0,6)$ 可作，即此二點為直線與二軸之交點，又畫此二點所決定之直線，即得此方程之圖形（觀 § 386 之圖）。

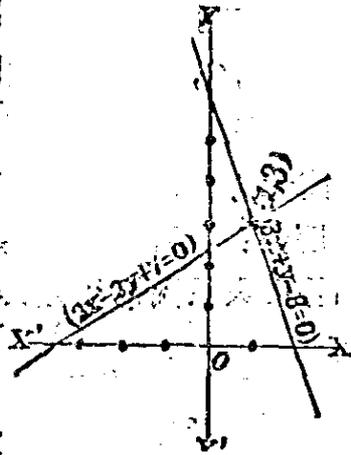
當方程形狀 $x = a$, $y = b$, $y = mx$ 之一時，此法失敗，當時須用 § 384 之 1 及 2 中說明之法則，以求其直線。

一對聯立簡單方程之圖解，此為表二方程圖形之二直線之

交點；蓋此點且只有此點同為二方程之解之圖形故也。

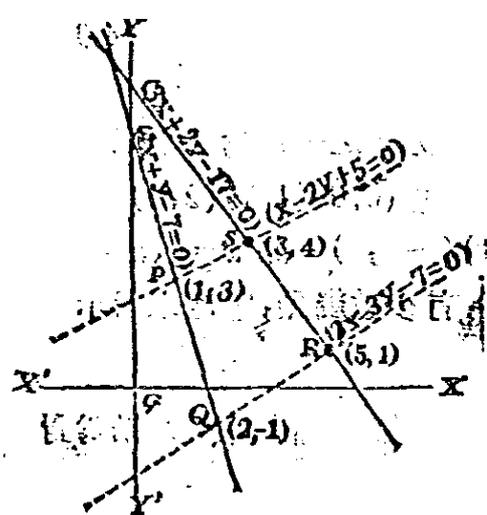
例如， $2x - 3y + 7 = 0$ (1)，及 $3x + y - 6 = 0$ (2) 之解為 $x=1, y=3$ 。又如圖示(1)及(2)之圖形相交於點(1,3)。

當已知方程為不合理時，(§377,2)，則其圖形為無一點公有之直線，即為平行線；當已知方程為不獨立時(§377,1)，則其圖形為公有一切點之直線，即為重



387

合線，



例如，方程 $y=2x$ 及 $y=2x+3$ 為不合理，而此二方程之圖形為平行線(§384,3)。甚密，方程 $y=2x$ 及 $3y=6x$ 為不獨立，有同一圖形。

形如 $AB=0$ 之方程圖形，388 由 $A=0, B=0$ 之圖形連合而成；因方程 $AB=0$ 之解為 $A=0, B=0$ 連合之解故也。(§341, 346)。

例，求下列方程之圖形及圖解：

$$(4x+y-7)(3x+2y+17)=0, \quad (1)$$

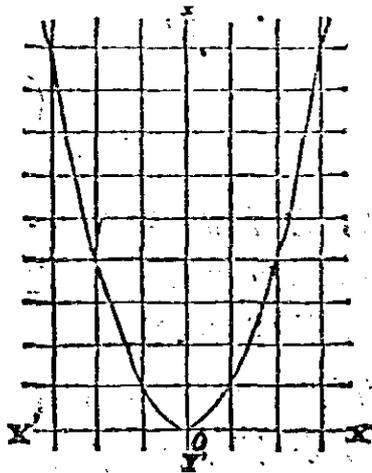
$$(x-2y+5)(2x-3y-7)=0. \quad (2)$$

(1) 之圖形由直線 PQ 及 RS 而成，此二直線順次為 $4x + y - 7 = 0$ 及 $3x + 2y - 17 = 0$ 之圖形。

(2) 之圖形由直線 PS 及 QR 而成，此二直線順次為 $x - 2y + 5 = 0$ 及 $2x - 3y - 7 = 0$ 之圖形。

點 P, Q, R, S 在一對 PQ, RS 與一對 PS, QR 之交處，為 (1) 及 (2) 之圖解。即 $(1, 3), (2, -1), (5, 1), (3, 4)$ 。

389 高次方程含 x 及 y 者之圖形，求方程之若干解，作圖以表比圖解，再徒手作一曲線，過所得一切點。如取解十分接近，則可得曲線能與真圖形相差甚微。



在此種工作用方格紙如附圖者

以便。

例。求方程 $y = x^2$ 之圖形。

當 $x = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ 時，

$$y = 0, 1, 4, 9, 16, \dots$$

而當 $x = -1, -2, -3, -4$ 時，

$$y = 1, 4, 9, 16, \dots$$

取正方形之一邊為長之單位，

畫出對應點 $(0, 0), (1, 1), (2, 4), \dots$

$(-1, 1), (-2, 4), \dots$ 除 $x = 0, x = -1$

之間外，有少數幾點，已足以指示此

圖形之大概性質，如圖中之曲線。

此曲線全在 x 軸之上面，向上伸展無限，而對於 y 軸為對稱，對應於 $x = a$ 及 $x = -a$ 而 y 有同值。

$$\text{當 } x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \dots \text{ 時}$$

$$y = \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$$

畫出其對應點之一或二，即見此圖形按圖。

習題 IX.

1. 畫下列 x 及 y 之各對值:

$$(0,0), (5,0), (0,-7), (6,2), (-7,-1), (-4,3), (5,-9).$$

2. 求下列各方程之圖形:

$$x=0, y=0, 2x+7=0, 3y+x=0, x+y+5=0.$$

$$7x+3y-18=0, 3x-4y=24.$$

3. 求以下之圖形:

$$xy=0, (x+y-3)(x-2y)=0, x^2-1=0.$$

$$x^2=4y^2, x^2+y^2=0.$$

4. 以圖解法求下列各對方程之解, 並用代數解法檢驗.

$$(1) \begin{cases} x+y-3=0, \\ x-2y=0. \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3y+2x+19=0, \\ 2y-x+4=0. \end{cases}$$

5. 同時解下列各對方程:

$$(1) \begin{cases} (x-4y+6)(x+3y+6)=0, \\ (3x+2y-10)(2x-y+5)=0, \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y-x-2)x=0, \\ y-x+2)y=0. \end{cases}$$

6. 求下列方程之圖形:

$$y = -(x+1)^2, \quad y = x^2.$$

含多未知數之聯立簡單方程系

n 個方程含 n 個未知文字者之解法, 含三未知文字之一對 300 方程, 常有無限個解.

例如, 二方程 $x=2z$, $y=z+1$ 有無限個解; 若設以任何值予 z , 而以值 $2z$ 及 $z+1$ 予 x 及 y , 則二方程均能滿足故也.

但含三未知文字之三個一次方程系, 常有一解, 且只有一 301 解, 可如下例得之.

例. 解下列方程系:

$$3x-2y+4z=13, \quad (1)$$

$$2x+5y-3z=-9, \quad (2)$$

$$6x+3y+2z=7. \quad (3)$$

在二對方程間消去 z , 如:

$$\text{以 3 乘(1),} \quad 9x - 6y + 12z = 39 \quad (4)$$

$$\text{以 4 乘(2),} \quad 8x + 20y - 32z = -36 \quad (5)$$

$$\text{相加} \quad \frac{17x + 14y}{} = 3 \quad (6)$$

$$\text{其次, (1) 爲} \quad 3x - 2y - 4z = 13 \quad (7)$$

$$\text{以 2 乘(3),} \quad 12x + 6y + 4z = 14 \quad (8)$$

$$\text{從(8)減(7)} \quad \frac{9x + 8y}{} = 1 \quad (9)$$

在結果方程(6), (9)之間消去 y , 如:

$$\text{以 4 乘(6),} \quad 68x + 56y = 12 \quad (10)$$

$$\text{以 7 乘(9),} \quad 63x + 56y = 7 \quad (11)$$

$$\text{從(10)減(11),} \quad 5x = 5 \quad (12)$$

$$\text{故} \quad x = 1.$$

$$\text{以 } x=1 \text{ 代入(9), 求得} \quad y = -1.$$

$$\text{以 } x=1, y=-1 \text{ 代入(1)求得} \quad z = 2.$$

故依 §332, 設(1), (2), (3)有解, 則爲 $x=1, y=-1, z=2$, 但從(1), (2), (3)導出 $x=1, y=-1, z=2$, 其方法爲可逆, 其實可一步一步逆推溯源頗易, 故 $x=1, y=-1, z=2$ 爲(1), (2), (8)之解.

吾人亦可證 $x=1, y=-1, z=2$ 爲(1)(2)(3)之解如下:

據 § 363, 顯然可見 $x=1, y=-1, z=2$ 爲(12), (9), (1)之解, 故只須證明系(12), (9), (1)與系(1), (2), (3)有同解可也.

將方程(1), (2), (3)之已知項移於左邊, 令代之如下:

$$A=0, (1) \quad B=0, (2) \quad C=0.$$

則從導出(9), 及(12)之法, 可表方程(1), (9), (12)如下:

$$A=0, (1) \quad -A+2C=0, (9) \quad 19A+16B-14C=0. (12)$$

顯然可見能使 $A=0, B=0, C=0$ 之 x, y, z 任何組之值, 必能使 $A=0, -A+2C=0, 19A+16B-14C=0$.

反之, 當 $A=0, -A+2C=0$, 則 $C=0$; 又當 $19A+16B-14C=0$, 則 $B=0$.

故系(1), (2), (3)與系(1), (9), (12)有同解, 即 $x=1, y=-1, z=2$.

立而共觀之，從含三未知文字 x, y, z 之三方程系可聯出含二次文字 $ax=b$ 之三方程系，再由此系可聯出含一文字 x 之簡單方程。

一般，設開始從含 n 個未知文字之 n 個簡單方程，而行此種步驟 $(n-1)$ 次，必達到含一文字如 x 形狀如 $ax=b=0$ 之簡單方程。

於是除 $a=0$ 外，此系有一解，且只有一解，其中 x 之值為 b/a ，而其他未知文字之值，可於行上法所得之諸方程中逐次用代換法而得之。此理常可如上例證明。

就他方面而言，設 $a=0$ ，當 $b=0$ 時，則此系通常有無限個解，而當 $b \neq 0$ 時則無解，俟於 §304 證明之。

解簡單方程系，尚有極省力之法則，俟於行列式章示之在某類情形，用殊巧法可省勞力。

例。解

$$\begin{aligned} x+y+z &= 8, & (1) \\ x+y+u &= 12, & (2) \\ x+z+u &= 14, & (3) \\ y+z+u &= 14, & (4) \end{aligned}$$

加(1), (2), (3), (4), $3x+3y+3z+3u=48$.

故 $x+y+z+u=16$. (5)

自(5)依次減各方程(1), (2), (3), (4), 得 $x=2, u=8,$

$z=4, u=8$.

異常情形。令 $A=0, B=0, C=0$ 表 x, y, z 之簡單方程系，而如 §302, 令 $ax=b=0$ 表已消去 y, z 所得之方程。

1. 設 $a=0, b=0$, 則必得函數 A, B, C 之一可以其他二函數表之，如： $A=kB+lC$, 其中 k 與 l 為常數。其時稱方程 $A=0, B=0, C=0$ 為不獨立。

由恆等式 $A = kB + lC$, 可得 $B = 0, C = 0$ 之各解, 爲 $A = 0$ 之解, 故若 $B = 0$ 及 $C = 0$ 爲合理 (§ 377, 2), 則三方程 $A = 0, B = 0, C = 0$, 必有無窮之解。

例如, 以下列方程系考之:

$$A = 3x - 2y + 4z - 13 = 0, \quad (1)$$

$$B = 2x + 5y - 3z + 9 = 0, \quad (2)$$

$$C = 7x + 8y - 2z + 5 = 0, \quad (3)$$

(1) 與 (2) 間消去 z .

$$3A + 4B \equiv 17x + 14y - 3 = 0 \quad (4)$$

(1) 與 (3) 間消去 z .

$$A + 2B \equiv 17x + 14y - 3 = 0 \quad (5)$$

(4) 與 (5) 間消去 y .

$$2A + 4B - 2C \equiv 0, \quad x - 0 = 0.$$

此處最後方程 $ax - b = 0$ 有形狀 $0 \cdot x - 0 = 0$, 又在導出此式時, 吾人發見式 A, B, C 係以恆等式 $2A + 4B - 2C \equiv 0$, 或 $C = A + 2B$ 連絡。

(其實檢查 (1), (2), (3), 即知 C 可以 2 乘 B 加 A 而得。

(故系 (1), (2), (3), 有無限之解。

(2) 設 $a = 0$, 而 $b \neq 0$ 則求得函數 A, B, C 之一可以其他二函數表之, 如:

$$A \equiv kB + lC + m.$$

此處 k, l, m 爲常數, 而 m 不爲 0. 其時方程 $A = 0, B = 0, C = 0$ 爲不合理。

從恆等式 $A = kB + lC + m$ 而知 $A = 0, B = 0, C = 0$ 無解。蓋 x, y, z 之任何值能使 $B \equiv 0, C \equiv 0$ 者必能使 $A \equiv m$ 非 $A \equiv 0$ 故也。

例如, 就下列方程系考之:

$$A = 3x - 2y + 4z - 13 = 0, \quad (1)$$

$$B = 2x + 5y - 3z + 9 = 0, \quad (2)$$

$$C = 7x + 8y - 2z + 5 = 0, \quad (3)$$

如上消去 z 及 y ，得

$$2A + 4B - 2C = 0, x - 2 = 0.$$

故最後方程 $ax - b = 0$ 有形狀 $a \cdot x - 2 = 0$ ，而 A, B, C 係以恆等式 $C = A + 2B + 1$ 連絡，其實檢查(1)，(2)，(3)即發見其屬於此情形。

故系(1)，(2)，(3)無解。

一般簡單方程系。從上面討論，可得結論如下：

895

通常含 n 未知文字之 m 個簡單方程系。當 $m = n$ 時有一解。當 $m < n$ 時有無限之解。當 $m > n$ 時無解。

無論何時對於此法則如有例外發見，則此二個或多個方程，為以§§377, 394所述之恆等式係結合。

在特例，含二未知文字 x, y 之三個簡單方程系 $A = 0, B = 0, C = 0$ 。當 A, B, C 係以恆等式 $A = kB + lC$ 結合，而 $B = 0, C = 0$ 為合理時，則有一解。

例如，方程系 $x - y = 1$ (1), $x + y = 7$ (2), $3x - y = 10$ (3) 無解；查(1)(2)之解即 $x = 4, y = 3$ 不能滿足(3)故也。

就他方面而言，系 $x - y = 1$ (1), $x + y = 7$ (2), $3x - y = 9$ (4) 有一解；蓋(4)為 $x = 4, y = 3$ 所滿足故也，但須注意於 $3x - y = 9 = 2(x - y - 1) + (x + y - 7)$ 。

令草者畫(1)，(2)，(4)之圖形，可見其相遇於一公共點。

習 題 X

解下列方程系：

1.	$\begin{cases} x + y = 11, \\ y + z = 13, \\ z + x = 12, \end{cases}$	2.	$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + 2y + 3z = 4, \\ x + 3y + 7z = 18, \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 3x - 5y + 7z = 19, \\ 5x - 8y - 11z = -18. \end{cases}$	4.	$\begin{cases} 5x - 2y = -33, \\ x + y - 7z = 13, \\ x + 3y = -19. \end{cases}$

$$5. \begin{cases} x+2y-4z=11, \\ 2x+3y=0, \\ y-4z=0. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{6}{z} = 9, \\ \frac{1}{z} - \frac{1}{y} + \frac{4}{z} = 5, \\ \frac{3}{y} - \frac{2}{z} - \frac{1}{z} = 4. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 4x-3z+u=9, \\ 5y+z-4u=17, \\ 3y+u=12, \\ x+2y+3u=8. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} lx=my=nz, \\ ax+by+cz=d. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x-y=3, \\ y-z=-5, \\ z-x=2. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x-5=2(x+2), \\ (x+1)(y-1)=(x+2)(y-2)+5, \\ 2x+3y+z=6. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} y+z+u=4, \\ x+z+u=3, \\ x+y+u=1, \\ x+y+z=10. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} cx+by=l, \\ by+bz=m, \\ ax+oz=n. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 2x=3y=6z, \\ (x+2y+z-16)(3x-2y+20)=0. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 3x-8y+7z=10, \\ 2x+5y-3z=12, \\ 16x+9y-z=80. \end{cases}$$

證明下列方程系爲不獨立，并求連絡各系方程之恆等式：

應用問題

396. 以下問題，可用二個或多個未知文字如 x, y, \dots 之簡單方程系解之。在任何情形，用若干文字爲最宜，須依問題之條件而定。當擇定文字 x, y, \dots 以代問題中之幾個未知數，設能以此種文字之關係表其餘未知數時，則將知問題中未用及之條件，產生以 x, y, \dots 所連絡之獨立合理之方程，其個數適與 x, y, \dots 之字數相等，其實設方程數過多，則此問題無解；設少則有無限之解(§99)。

§ 352 所論述問題本性，可限制未知數之性質上，亦適用於此。

例 1. 有三位數，其第二數字等於第一第三數字之和，第二第三數字之和為 8。設第一第三數字互換，則此數增加 99。求此數。

設 x = 百位數字， y = 十位數字， z = 個位數字。

則此數為 $100x + 10y + z$ 。

但依問題之條件有

$$x + z = y, \quad (1)$$

$$y + z = 8, \quad (2)$$

$$100z + 10y + x = 100x + 10y + z + 99. \quad (3)$$

解 (1), (2), (3), 得 $x = 2$, $y = 5$, $z = 3$ 。

故此數為 253。

例 2. 一旅客步行某距離後休息 30 分鐘，以後依原速繼續旅行，到達目的地後，知在 6 時中共行全距離 20 哩。設原速步行四哩仍休息如前，則旅行只須 5 小時。問原速如何？後起身處至休息處有若干遠？

設 x = 每時原速之哩數， y = 起身處至休息處之哩數。

(1) 實在行程及 (2) 假定行程所需時數，各以 x 與 y 之關係表之，則有

$$\frac{y}{x} + \frac{1}{2} + \frac{20-y}{7x} = 6, \quad (1) \quad \frac{y+4}{x} + \frac{1}{2} + \frac{16-y}{7x} = 5. \quad (2)$$

$$(1) \text{ 及 } (2) \text{ 就 } \frac{y}{x} \text{ 及 } \frac{1}{x} \text{ 解之，得 } \frac{y}{x} = \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{故 } x = 4, \quad y = 6.$$

例 3. 二桶 A 與 B 各盛酒精與水之混合液，如從 A 取 3 份與從 B 取 2 份混合，則含酒精 40%；如從 A 取 1 份，從 B 取 2 份混合則含酒精 52%，問 A 與 B 各含酒精之百分率如何？

設 x 及 y 表 A 及 B 所含酒精之百分率。

則依已知條件，有

$$\frac{3x}{5} + \frac{2y}{5} = \frac{40}{100}, (1) \quad \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} = \frac{32}{100}, (2)$$

解 (1), (2), 得 $x = \frac{5}{100}$ 或 5%, $y = \frac{29}{100}$ 或 22%.

習 題 XI

1. 有三數，其和為 20，而 (1) 第一數加第二數之 2 倍，再加第三數之 8 倍，等於 44；及 (2) 從第一第二數和之 2 倍，減第三數之 4 倍，等於 -14。求各數。(8) (9) (1) 73

2. 三數之和為 51。設第一數除以第三數，則得商為 2 而餘 5；設第二數除以第三數，則得商為 3 而餘 2。問各數如何？

3. 求如下所述二數字之一數，(1) 2 倍第一數字加 3 倍第二數字，等於 37；(2) 二數字交換位置，則較原數減 9。

4. A 負債 \$ 500，而 B 負債 \$ 3000， A 除其所有銀外，如再有 B 之 $\frac{1}{2}$ ，適可清償債務；而 B 除其所有銀外，如再有 A 之 $\frac{1}{2}$ 清償債務尚不足 \$ 100。問各有銀若干？

5. 三人 A, B, C 之財產如下： A 與 B 共有 p 元， B 與 C 共有 q 元， C 與 A 共有 r 元。問 p, q, r 必須滿足如何條件，始能為此解所許可？

6. 一種款項依單利放出，2 年後得本利和 \$ 2566.05 而 4 年後得本利和 \$ 2767.10。問此種款項及利率各如何？

7. 一人投資若干，一部分為照票面之 4% 公債一部分為每百市價 110 之 5% 公債，而其投資之進款為 \$ 650。設 4% 公債每百市價 80 而 5% 公債每百市價 110，則其進款將多得 100 元。問此人投資若干？

8. 從下所述求矩形面積：設一矩形之長增 6 吋，寬增 6 吋，則長變為寬之 $\frac{3}{2}$ ，而面積大 84 方吋。

9. A 以款與 B 如 B 所原有；其後 B 與 A 如 A 之餘款；最後 A 又與 B 如 B 之餘款。此時 A 有 \$ 16, B 有 \$ 24. 問 A, B 原有款各若干？
10. A 與 B 合作，能於 5 日成一工程；A 與 C 合作，則需 $4\frac{4}{5}$ 日。若三人作 2 日後，A 退出，而 B, C 又經 $1\frac{9}{17}$ 日作成。問 A, B, C 獨作，各需若干日可成？
11. 二點沿長 100 呎之圓周，依定速度而移動，依反向移動時，每 5 秒逢相遇；同向移動時，每 25 秒逢同在一處。問其速度如何？
12. 二列貨車之長，順次為 210 碼及 200 碼，當反向進行時，經 2 秒而彼此通過，當同向進行時，則快車於 $3\frac{3}{4}$ 分超越慢車，問此二車何時之速度如何？
13. 二輪船 A 與 B 往來於相距 200 哩二城 C 與 D 之間。A 輪從 C 較 B 遲 1 時起程，能於 2 時後追及 B，而至 D 後停留 4 時，可來於距 D 城 10 哩之處遇 B。問 A 與 B 之速度如何？
14. 在半哩賽跑，A 能勝 B 20 碼而勝 C 30 碼，問 B 能勝 C 若干碼？
15. A 與 B 作 44 碼之賽跑二次。第一次 A 讓 B 先行 2 碼而勝其二秒，第二次 A 讓 B 先行四秒而勝其 6 碼。問 A 與 B 之速度如何？
16. 二旅客共有行李 510 磅。因超過攜帶重量，一客付 \$ 1.25，他客付 \$ 1.75。設此行李歸一人攜帶，則須付 \$ 4。問每人免費行李若干？
17. 已知如下合成之三種合金，A 含 5 份金（按重量），2 份銀，1 份鉛；B 含 2 份金，5 份銀，1 份鉛；C 含 3 份金，1 份銀，4 份鉛。如欲得 9 盎司之合金，而合金銀鉛之量相等，問須在 A, B, C, 中各取若干盎司而鑄成？
18. A 與 B 為銀與銅之合金，一種含 5 份 A 與 3 份 B 之合金，有 52% 之銀；一種含 5 份 A, 11 份 B 之合金，有 42% 之銀，求 A 與 B 中銀之百分率如何？

19. 一平射距 500 碼開槍， $2\frac{2}{5}$ 秒鐘後聞子彈擊靶之聲，一側者距 600 碼而距射手 210 碼，開槍聲後 $2\frac{1}{10}$ 秒後聞子彈擊靶之聲，求聲之速度與彈之速，假定二者俱為常數。

20. 一池由二管 A 及 B 注水，而由第三管 C 放水，設滿池時諸管齊開，則 3 時放盡；設只開 A 及 C，則 1 時放盡；設只開 B 及 C，則 45 分鐘放盡，設每分鐘 A 較 B 多注 100 加侖，問池之容量如何，及每分鐘各管流過若干加侖。

說明未定係數法之問題

397 今進而討論關於代數本身主旨之一二簡單問題。

注目於所論變數之特別函數，可引起疑問，即此函數能否化為某種形式，設其能之，則化為此種形式時，其係數如何？

下例說明此種問題着手之法則。

例。一式 $x^2 + 4x + 6$ 能否化為 $(x+1)$ 之二次多項式之形式？若能，則化為此種形式時，其係數如何？

在問題內此形式之一般式，必可寫為 $a(x+1)^2 + b(x+1) + c$

此處 a, b, c 俱表常數。

設所論化法為則能，則必有

$$x^2 + 4x + 6 \equiv a(x+1)^2 + b(x+1) + c. \quad (1)$$

$$\text{或} \quad x^2 + 4x + 6 \equiv ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c). \quad (2)$$

按 § 234 之 (2)，當 (2) 中 x 之同次係數相等時，且在此時，(1) 為恆等式，即 $a=1, 2a+b=4, a+b+c=6$ 時，或依 a, b, c 解之，得 $a=1, b=2, c=3$ 時。

故 $x^2 + 4x + 6 \equiv (x+1)^2 + 2(x+1) + 3$

假使使已知式等於所求形式，惟用未定係數。於是假設此恆等式為真，則其係數必須滿足數個條件方程。而解此種方程可得各係數之值。

以下為包含上述之最普通問題。

398

說明某種條件且發問題如下：某種特殊形式之任何函數，能滿足此種條件能否存在，設能存在，則其係數如何？

欲解如此問題，可用未定係數作此形式之式。此種係數即為問題中之未知數，而已知條件產出方程系而為未知數所應滿足者。設方程有一解，則得滿足已知條件之單一函數；設此系無解，則無此函數存在；設此系有無限之解，則問題為不定，即有無限數函數能滿足已知條件。此處所論，假定其函數為有限式 (§ 264)。

例。設為可能，求 x 之二次多項式，當 $x=1$ 及 $x=3$ 時，使其為 0，當 $x=4$ 時，使其值為 6。

問題內之多項式，必有形狀 ax^2+bx+c 。而問題之條件

$$a+b+c=0, \quad 9a+36+c=0, \quad 16a+4b+c=6$$

依 a, b, c 解之，得 $a=2, b=-8, c=6$ 。

故所求之多項式為 $2x^2-8x+6$ 。

如問題為求一次多項式滿足已知條件，則無解；如為求三次多項式，則有無限之解。

§99 以上諸節中所說明之法則，名為未定係數法。此為代數學上研究之主要法則，以後常有應用之處。

習 題 XII.

1. 試以 $x-2$ 之多項式表 $3x^3 - x^2 + 2x - 5$.
2. 試以 $2x+3$ 之多項式表 $4x^2 + 8x + 7$.
3. 求 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 使 $f(-1) = 1$, $f(1) = -5$, $f(5) = 6$.
4. 求 $f(x) = ax^3 - bx^2 + cx + d$ 使 $f(0) = 5$, $f(-1) = 1$, $f(1) = 9$, $f(2) = 31$.
5. 求 $f(x, y) = ax + by + c$, 使 $f(0, 0) = 4$, $f(4, 4) = 0$, $f(1, 0) = 6$.
6. 求簡單方程 $ax + by + 1 = 0$, 其二解為 $x = 3, y = 1$ 及 $x = 4, y = -1$.
7. 簡單方程 $ax + by + c = 0$ 有三解為 $x = 3, y = 1; x = 4, y = -1; x = 1, y = 1$; 能求得此方程否?
8. 求簡單方程, 其圖形為通過點 $(2, 3)(-4, 5)$ 之直線
9. 定 a 之值, 使 $3x + y + a = 0$ 之圖形通過點 $(-2, 3)$.
10. 求二簡單方程, $ax + by + 1 = 0$ (1), $a'x + b'y + 1 = 0$ (2), 使二者皆能為 $x = 2, y = 3$ 所滿足, 而 (1) 能為 $x = 7, y = 5$ 所滿足, 及 (2) 能為 $x = 3, y = 7$ 所滿足; 求作此二方程之圖形.
11. 求方程 $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, 其根為 $-2, 1$ 及 3 .
12. 求形式 $a^2 + bxy + cx + dy = 0$ 之方程, 有解為 $x = 1, y = 0; x = 2, y = 1; x = -2, y = 1$.
13. 化 $3x + 2y - 3$ 為下之形式:
 $a(x + y - 1) + b(2x - y + 2) + c(x + 2y - 3)$
 此處 a, b, c 為常數.

V. 除 法 變 形

一 般 法 則

初步討論。在 § 319 內，規定以 B 除 A 之商，爲能以計 40，算法則化成如分式 A/B 之簡單形式。

當 A 及 B 爲同文字 x 之多項式，而 A 之次數不小於 B 時，則求如此規定之商，其一般法如下：

1. B 如能爲 A 之因式，換言之， A 能化爲下式

$$A \equiv QB, \quad (1)$$

此處 Q 爲 x 之整函數。

則得

$$\frac{A}{B} \equiv Q,$$

即以 B 除 A 之商爲整函數 Q ，而稱 B 能整除 A 。

例如， $A = x^3 + 4x^2 - 2x - 5$ 及 $B = x^2 + 3x - 5$ ，則得 $x^3 + 4x^2 - 2x - 5 = (x+1)(x^2 + 3x - 5)$ 此爲與(1)同形之恆等式，其 Q 爲 $x+1$ 。

故
$$\frac{A}{B} = \frac{x^3 + 4x^2 - 2x - 5}{x^2 + 3x - 5} = x+1.$$

2. 但 B 常非 A 之因式，故不能化 A 爲 QB 之形；然按 § 401，可化成下式：

$$A \equiv QB + R, \quad (2)$$

此處 Q 及 R 俱爲 x 之整函數，且 R 之次數小於 B 。

故得

$$\frac{A}{B} \equiv Q + \frac{R}{B},$$

即以之 B 除 A 之商，為一整函數 Q 與一分式 $\frac{R}{B}$ 和，此分式中

中分子之次數小於分母之次數。

在此情形， Q 稱為商之整式部分， R 稱為餘式。

例如， $A = x^3 + 2x^2 + 3x + 3$ 及 $B = x^2 + 2x + 2$ ，皆作下式，即能化 A 為形式(2)，

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 3 = x(x^2 + 2x + 2) + (x + 3),$$

此處 Q 為 x ，而 R 為 $x + 3$ ，其次數小於 B 。

故
$$\frac{A}{B} = \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 2x + 2} = x + \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 2}.$$

1. (除法變形。令須表示如何化 A 為形式 $QB + R$ ，此處之次數小於 B ，亦可為 0。通常完成此種變化之方法稱為除法變形或“長除法”。茲以下例說明之。

令 $A = 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 2$ 及 $B = x^2 - x + 1$ 。

此處 B 為二次，而此題即求一整函數 Q ，使自 A 減去 QB 所得之 R ，至多為一次或 0；設如此函數 Q 已求得，則有

$$A - QB \equiv R, \text{ 故 } A \equiv QB + R.$$

因 A 之次數為四，而 R 之次數不能大於一， Q 必須當 A 減 QB 時 A 之前三項消去。此點啓發下法以求 Q 。

$$\begin{array}{r}
 A = 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 2 \quad | \quad x^2 - x + 1 \cdot B \\
 2x^2 B = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 \quad | \quad 2x^2 + 5x + 7 = Q \\
 \hline
 A - 2x^2 B = \quad \quad \quad 5x^3 + 2x^2 + x - 2 \\
 (C) \quad 5x B = \quad \quad \quad 5x^3 - 5x^2 + 5x \\
 \hline
 A - (2x^2 + 5x) B = \quad \quad \quad 7x^2 - 4x - 2 \\
 \quad \quad \quad 7B = \quad \quad \quad 7x^2 - 7x + 7 \\
 \hline
 A \equiv (2x^2 + 5x + 7) B \equiv \quad \quad \quad 3x - 9 = R
 \end{array}$$

顯然可見設從 A 減 B 之任何倍式與 A 有同一首項者，則消之首項。此種最簡倍式為 $2x^2B$ ，此處乘式 $2x^2$ 係用 B 之首項除 A 之首項 $2x^4$ 而得。

如上從 A 減去 $2x^2B$ ，得

$$A - 2x^2B = 5x^3 + 2x^2 + x - 2. \quad (1)$$

用同法可消去餘式(1)之首項，即消去 A 之第二項。以 x^2 除 $5x^3$ 之商為 $5x$ ，而以 $5x$ 乘 B 從餘式減之，則得：

$$A - (2x^2 + 5x)B = 7x^2 - 4x - 2. \quad (2)$$

最後，以 x^2 除 $7x^2$ 得 7 ，以 $7B$ 從(2)減之，則消去餘式(2)之首項，即消去 A 之第三項，其結果為

$$A - (2x^2 + 5x + 7)B = 3x - 9. \quad (3)$$

餘式(3)為一次式，係從 A 減 $(2x^2 + 5x + 7)B$ 而得。

故求得之多項式 Q 及 R 為

$$Q = 2x^2 + 5x + 7 \text{ 及 } R = 3x - 9.$$

寫恆等式(3)為

$$A = (2x^2 + 5x + 7)B + (3x - 9).$$

得 A 成為形式 $QB + R$ ，此處 R 之次數小於 B 。

故當 A 與 B 為已知時，則求 Q 及 R 之法則如下：

依 x 之降冪排列 A 與 B 二者。

以 B 之首項除 A 之首項；其商為 Q 之第一項。

以 Q 之第一項乘 B ，從 A 減其積。

所得之餘式，依同法進行，以 B 之首項除餘式之首項，依此類推。

繼續進行，直至餘式之次數小於 B 之次數為止，於是得 Q 之一切項，而最後餘式必為 $A - QB$ 或 R 。

尋常排列演算，如上說明，以後可用分離係數法，猶如乘法，

例 1. 已知 $A = 2x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 8x^2 - 19x + 20$ ，及 $B = x^3 - 3x + 4$ ；求 Q 與 R 。

$$\begin{array}{r}
 2-6+7+8-19+20 \quad | \quad 1-3+4 \\
 2-6+8 \quad \quad \quad | \quad 2+0-1+5 \\
 \hline
 -1+8+19 \\
 -1+8-19 \quad \quad \quad \text{故 } Q = 2x^2 - x + 5 \\
 \hline
 5-15+20 \quad \text{及 } R = 0. \\
 5-15+20
 \end{array}$$

注意，代第一餘式之 $-1+8-19+20$ ；今僅書其在減法中用及之一部分 $-1-8-19$ ， Q 之第二項係數為 0，因 A 之首二項已在第一次減法消去故也。

例 2. 已知 $A = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 4$ ， $B = x^2 + 2x$ ，求 Q 及 R 。

此法應注意之點，1. 在此除法變形，其中間餘式皆作為新被除式；且設 R_1 表任何餘式， Q_1 為 Q 之已得一部，而 Q_2 為 Q 之其餘一部，則得

$$A \equiv Q_1 B + R_1, \text{ 及 } R_1 \equiv Q_2 B + R_2$$

2. 求 Q 及 R 之方法，本非以 B 除 A ，僅為乘法及減法所成之預備演算，藉此以化 A 為 $A \equiv QB + R$ 之形式而已。以 B 除 A 之法，從恆等式 $A \equiv QB + R$ 直至恆等式 $A/B \equiv Q + R/B$ ，不難言之。

求 Q 及 R 之演算，通常稱為“除法”，亦稱 Q 為“商”，以代“商之整式部分”，當 R 不為 0 時亦然。本書沿用之，但如此則“以 B 除 A ”非如 § 25.4 所言，求一式乘 B 而得 A 之餘後，乃為第一求 B 之倍式如何，方能從 A 減之得次數小於 B 之餘式，及此餘式如何。比較 § 87。

3. 將整式 A 化為整形式 $QB + R$ 之步驟中，無論 x 之值如何皆可，故 A 與 $QB + R$ 關於 x 之一切值有等值，即使 B 等於 0 者時亦如此，就他方面而言，當 $B = 0$ 時，則 $\frac{A}{B}$ 及 $Q + \frac{R}{B}$ 皆無意義。

例如，設 $A = x^2 + x + 1$ 及 $B = x - 1$ ，
依 § 401，得 $x^2 + x + 1 = (x + 2)(x - 1) + 3$ ， (1)

故 $\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = x + 2 + \frac{3}{x - 1}$ 。 (2)

當 $x = 1$ 時， $B = 0$ 。在 (1) 及 (2) 中以 1 代 x 得 $3 \neq 3$ 為真，
但 $\frac{3}{0} = 3 + \frac{3}{0}$ 則無意義。

4. A 之變形至 $QB + R$ ，只有一法，即只有一對整函數 Q 及 R 存在 (R 較 B 為低次) 可使

$$A \equiv QB + R.$$

因若有如此之第二對 Q' 及 R' ，則得

$$QB + R \equiv Q'B + R', \text{ 故 } (Q - Q')B \equiv R' - R.$$

但此為不可能，因 $R' - R$ 較 B 為低次，而 $(Q - Q')B$ 則不較 B 為低次故也。

常數乘被除式或除式之影響。以下列定理，皆皆有用。 403

1. 設以任意常數 c 乘被除式，則商及餘式皆被 c 乘。

因設 $A \equiv QB + R$ ，則 $cA = cQ \cdot B + cR$ 。

2. 設以 c 乘除式, 則以 c 除其商, 而餘式不變。

因設 $A \equiv QB + R$, 則 $A \equiv \frac{Q}{c} \cdot cB + R$

3. 設以 c 乘被除式及除式, 則以 c 乘其餘式, 而商不變。

因設 $A \equiv QB + R$, 則 $cA \equiv Q \cdot cB + cR$.

4. 設於除法變形之任何步驟中, 以 c 乘其中間餘式或除式, 則其最後餘式或有變動, 僅為 c 所乘。

此從 1 與 2, 及 § 402, 1 而來。

學者可就特例證驗以上諸定理。

(1) 例如, 先以 $B = 2x - 1$, 次以 $B = 4x - 2$ 除 $A = 4x^2 + 6x + 1$,

可驗證第二定理。

$$\begin{array}{r} 4+6+1 \mid 2-1 \\ 4-2 \quad \mid 2+4 \\ \hline 8+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8-4 \therefore Q = 2x+4, \\ 5 \quad R = 5. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4+6+1 \mid 4-2 \\ 4-2 \quad \mid 4-2 \\ \hline 8+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8-4 \therefore Q = x+2 \\ 5 \quad R = 5. \end{array}$$

494 用未定係數法消除法。當 A 及 B 為已知時, 亦可求 Q 及 R 如次:

例 1, 以 $B = x^2 - x + 1$ 除 $A = 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 2$.

因 A 為四次, 而 B 為二次, 可知 Q 為二次, R 至多為一次。

故令 $Q = c_0x^2 + c_1x + c_2$ 及 $R = d_0x + d_1$.

此處關於係數 c_0, c_1, c_2, d_0, d_1 之值, 必須使

$$2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 2 \equiv (c_0x^2 + c_1x + c_2)(x^2 - x + 1) + d_0x + d_1$$

$$\begin{array}{r} \equiv c_0x^4 + \quad -c_0 \mid x^3 + c_0 \mid x^2 + c_1 \mid x + c_2 \\ \quad + c_1 \mid \quad -c_1 \mid \quad -c_2 \mid \quad + d_1 \mid (1) \\ \quad \quad + c_2 \mid \quad + d_0 \mid \end{array}$$

但使 (1) 爲恆等式，須有 (§284)：

$$c_0 = 2,$$

$$-c_0 + c_1 = 3, \therefore c_1 = 3 + c_0 = 3 + 2 = 5,$$

$$c_0 - c_1 + c_2 = 4, \therefore c_2 = 4 - c_0 + c_1 = 4 - 2 + 5 = 7,$$

$$c_1 - c_2 + d_0 = 1, \therefore d_0 = 1 - c_1 + c_2 = 1 - 5 + 7 = 3,$$

$$c_2 + d_1 = 2, \therefore d_1 = -2 - c_2 = -2 - 7 = -9.$$

故 $Q = 2x^2 + 5x + 7$ 及 $R = 3x - 9$ 與 §41 相同。

例2. 以 $2x^2 + x - 2$ 除 $6x^5 + 13x^4 - 12x^3 - 11x^2 + 11x - 2$.

整除法. 設 A 與 B 表文字係數之 x 之多項式，而假使 B 之次數爲 m ，因 B 能整除 A ，其餘式 R 必恆爲 0，此必若 R 之諸係數皆爲 0。因 R 之次數爲 $m-1$ ，故有 m 個係數 (§277)，此諸係數顯然爲 A 與 B 之係數之函數，故

欲以 m 次多項式 B 除一多項式 A ，則 A 與 B 之係數，

必須滿足 m 個條件。

下列說明此事：

例 1. $x^2 + ax + 1$ 能整除 $x^3 + 3x^2 + bx + 2$ ，其 a 與 b 之值如何？

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + bx + 2 \\ x^3 + ax^2 + x \\ \hline (3-a)x^2 + (b-1)x + 2 \\ (3-a)x^2 + (3-a)x + (3-a) \\ \hline (b-1-3a+a^2)x + (a-1) \end{array}$$

故 a 與 b 必須滿足二條件：

$$b-1-3a+a^2=0, \quad a-1=0; \quad \text{因得 } a=1 \text{ 及 } a=3;$$

例 2. 試定 l 及 m 使 $x^2 + x - 6$ 能整除 $2x^5 + 3x^2 + lx + m$.

依 x 之升幂排列被除式及除式，令 A 與 B 表依此之升幂排列之被除式與除式，而假定 A 首項之次數不較 B 首項之次數爲低，用 §40 所言，消去首項之方法，可得 B 表 A 之整式，設

B 能整除 A , 則其結果與 A, B 依降冪排列時相同; 但設 B 不能整除 A , 則其結果全然各異. 以下例明之.

$$\begin{array}{r}
 1+3x+3x^2+x^3 \quad \left| \quad 1+x \\
 1+x \quad \quad \quad \left| \quad 1+2x-x^2 \\
 \hline
 2x+3x^2 \\
 2x+2x^2 \\
 \hline
 x^2+x^3 \\
 x^2+x^3 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad (1)
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1-2x+x^2 \quad \left| \quad 1+x \\
 1+x \quad \quad \quad \left| \quad 1-3x+4x^2 \\
 \hline
 -3x+x^2 \\
 -3x-2x^2 \\
 \hline
 4x^3+4x^2 \\
 4x^3+4x^2 \\
 \hline
 -4x^2
 \end{array}
 \quad (2)$$

依 § 401 之理由, 從上列之計算, 得

$$1+3x+3x^2+x^3 = (1+2x-x^2)(1+x) \quad (1)$$

$$1-2x+x^2 = (1-3x+4x^2)(1+x) - 4x^2. \quad (2)$$

結果 (1) 與依 x 之降冪排列除式及被除式時所得者相同. 此為在整除時必有之情形, 可從 § 402, 4 知之.

但結果 (2) 與依 x 之降冪排列 $1-2x+x^2$ 及 $1+x$ 時所得者完全不同, 於是得

$$x^2-2x+1 = (x-3)(x+1) + 4.$$

(2) 與 (3) 為真假等式, 但以 $x+1$ 表 x^2-2x+1 為不同之二式, 而因此對於以 $x+1$ 除 x^2-2x+1 之商, 亦得不同之二式, 即:

$$\begin{aligned}
 \frac{1-2x+x^2}{1+x} &= 1-3x+4x^2 - \frac{4x^2}{1+x}, \\
 \frac{x^2-2x+1}{x+1} &= x-3 + \frac{4}{x+1}.
 \end{aligned}$$

407 由此可見依升冪排列, 各餘式首項之次數, 逐漸增加, 且除

整除法外, 演算方法無自然止境; 如果逐步進行, 可得一任何項之多項式, 為商之整式部分, 從而其次數之高可如心所欲. 故

設 A 及 B 表依 x 之升幂排列之多項式， B 不能整除 A ，而 A 之首項次數不低於 B ，則以 B 除 A 之商，可化為下式：

$$\frac{A}{B} \equiv Q' + \frac{R'}{B'}$$

此處 Q' 及 R' 為依 x 之升幂排列之整函數， Q' 之末項次數之高，可如心所欲而 R' 之首項次數亦愈高。

設 Q' 之項數為 n ，則稱 Q' 為以 B 為 A 之商至 n 項，而 R' 為其對應餘式。

當 n 之值小(小至如何，將說明於後)時，則取 n 至足用之大，可使 $\frac{R'}{B}$ 之值小至如心所欲，即可求得多項式 Q' ，其值與 $\frac{A}{B}$ 相差小至如心所欲。因此之故，多項式 Q' 常稱為關於分式 $\frac{A}{B}$ 之近似整式。

例如，以 $1-x$ 除 1 至 n 個“步驟”，則得

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$$

設 x 為小於 1 之任何值，可選得 n ，使 $1+x+\dots+x^{n-1}$ 與 $\frac{1}{1-x}$ 之差小至如心所欲。例如設 $x = \frac{1}{3}$ ，則 $\frac{x^n}{1-x} = \frac{1}{18}$ ，

因此 $1+x+x^2$ 與 $\frac{1}{1-x}$ 僅差 $\frac{1}{18}$ ；同理， $1+x+x^2+x^3$ 與 $\frac{1}{1-x}$ 僅差 $\frac{1}{54}$ ；餘類推。

用未定係數法求商至 n 項。今以下例說明之：

例 1. 求商 $\frac{3-x}{1-x+2x^2}$ 至四項。

令 $\frac{3-x}{1-x+2x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ (1)

以 $1-x+2x^2$ 乘其二第，並整理。

$$3-x \equiv a_0 + a_1 \begin{vmatrix} x + a_2 \\ -a_1 \\ +2x^2 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} x^2 + a_3 \\ -a_2 \\ +2x \end{vmatrix} \quad (2)$$

但欲使 (2) 為恒等式，必有 (§ 281)，

$$a_0 = 3,$$

$$a_1 - a_0 = -1, \quad \therefore a_1 = -1 + a_0 = 2,$$

$$a_2 - a_1 + 2a_0 = 0, \quad \therefore a_2 = a_1 - 2a_0 = -4,$$

$$a^3 - a_2 + 2a_1 = 0, \quad \therefore a_3 = a_2 - 2a_1 = -8.$$

故 $(3-x)/(1-x+2x^2) = 3 + 2x - 4x^2 - 8x^3 + \dots$

例 2. 求 $\frac{2+x+3x^2}{1+x-x^2}$ 至五項。

460 含一變數以上之多項式。令 A 與 B 為二多項式各含一變數以上。關於變數之一，若非 A 之次數低於 B ，則 B 有整除 A 之可能，換言之，即有使 $\frac{A}{B} \equiv Q$ 之整函數 Q 存在，故先將 A 與 B 排列為一變數之多項式，次用 § 401 之法則以求 Q ，即可發見其是否可能。

例 1. 以 $x+y+z$ 除 $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3yzx + (y^3 + z^3) \quad \left| \begin{array}{l} x + (y+z) \\ x^2 - (y+z)x + (y^2 + yz + z^2) \end{array} \right. \\ \underline{x^3 + (y+z)x^2} \\ -(y+z)x^2 - 3yzx \\ \underline{-(y+z)x^2 - (y+z)^2x} \\ (y^2 - yz + z^2)x + (y^3 + z^3) \\ \underline{(y^2 - yz + z^2)x + (y^3 + z^3)} \end{array}$$

故 $(x^3+y^3+z^3-3xyz)/(x+y+z) = x^2+y^2+z^2 - 2x - 2y - 2z - xy$

例 3. 以 $x+y+4$ 除 $2x^2+5xy+3y^2+7x+11y-4$

設 B 不能整除 A ，則得 $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$ 之式，此處 Q 及 R

均關於排列文字之整式，而 R 關於此文字之次數低於 B ，但

此式之形式，隨其所選擇之排列文字而不同。

例。以 $2x+y$ 除 $4x^2+6xy+y^2$ 。

(1) 選擇 x 為排列文字，得——

$$\begin{array}{r} 4x^2+6xy+y^2 \quad | \quad 2x+y \quad \text{故} \\ \underline{4x^2+2xy} \quad | \quad 2x+2y \\ 4xy+y^2 \quad | \\ \underline{4xy+2y^2} \quad | \\ -y^2 \quad | \end{array} = 2x+2y - \frac{y^2}{2x+y}$$

(2) 選擇 y 為排列文字，得

$$\begin{array}{r} y^2+6yx+4x^2 \quad | \quad 2x+2x \quad \text{故} \\ \underline{y^2+2yx} \quad | \quad y+4x \\ 4yx+4x^2 \quad | \\ \underline{4yx+8x^2} \quad | \\ +4x^2 \quad | \end{array} = y+4x - \frac{4x^2}{y+2x}$$

習 題 XIII

1. 用 § 401 之法則與分數係數法，以 $3x^2+x-6$ 除 $6x^3-7x^2-3x^2+4x-20$ 。
2. 如上以 x^2+2x-7 除 $3x^4-2x^3-52x^2+66x-35$ 。
3. 如上以 x^2-2x+4 除 $3x^6-5x^4+13x^3-15x^2+22x$ 。
4. 如上以 x^3-x+5 除 $4x^7-3x^5+19x^4+2x^3+4x^2-4x+7$ 。
5. 用求定係數法 (§404) 以 x^2-3x+2 除 $2x^3-3x^2+x-5$ 。
6. 如上以 x^2-3x+2 除 $2x^5-3x^4+x^2-5$ 。
7. 已知 $A=3x^3-5x^2-7x+12$ 及 $B=3x^2+x-5$ ，化 A 為形式 $A=QB+R$ ，此處 R 之次數低於 B 。又將 A/B 之對應式寫出。
8. 試定 a 與 b 使 $x^4+ax^3+x^2+bx+1$ 可被 x^2-2x+1 整除。
9. a 與 b 為何值，則 $\frac{x^4+2x^3+3x^2+ax+b}{x^2+3x+5}$ 可化為整式。
10. 以 x^2+x+1 除 $x^6+x^5+x^4+x+1+2(x^4+x^2)$ 。

11. 以 $x+3y-4$ 除 $2x^2+5xy-3y^2-5x+13y-12$.
12. 以 $2a+b-3c$ 除 $2a^2-b^2-6c^2-ab+ac+5bc$.
13. 以 $ab+bc+ca$ 除 $x^2(b+c)+b^2(c+a)-c^2(a+b)+a^2c$.
14. 以 x^2-3x+4 除 $x^3+(a-3)x^2+(4-a)x^2-2ax+3a$.
15. 用分難係數法, 以 $2x-3y$ 除 $8x^3-27y^3$.
16. 如上, 以 $x-y$ 除 $x^3-4xy^2-3y^3$.
17. 如上, 以 $2z^2-ab+b^2$ 除 $6a^3+a^2b-a^2b^2+11a^2b^2-5ab^3+4b^3$.
18. 被除式為 $2x^3+xy^2+y^3$, 除式為 $2x+y$, 求 Q 及 R , 選擇 x 為“排列文字”時; 次選擇 y 為“排列文字”時.
19. 當被除式為 $1-3x+5x^2$, 除式為 $1+x+3x^2$ 時, 將被除式與除式皆依 x 之升幂排列, 求商至第三項及餘式.
20. 被除式為 $1+x+3x^2$, 除式為 $1-3x+5x^2$ 時, 如上求之.
21. 用未定係數法 (§408), 求 $\frac{1}{1+2x}$ 之商至四項.
22. 如上求 $(2+3x+4x^2)/(1-x+2x^2)$ 之商至四項.

綜合除法與餘式定理

410 綜合除法. 今將普通除法變形之簡捷法則, 可用

$x-b$ 即首項係數為 1 之一次二項式時,

就 $x-b$ 除 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 之結果考之,

$$\begin{array}{r}
 a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 \quad | \quad x-b \\
 \underline{a_0x^3-a_0bx^2} \\
 (a_0b+a_1)x^2+a_2x+a_3 \\
 \underline{(a_0b+a_1)x^2-a_1bx} \\
 (a_0b^2+a_1b+a_2)x+a_3 \\
 \underline{(a_0b^2+a_1b+a_2)x-a_0b^2b} \\
 a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3 = R
 \end{array}$$

其 Q 及 R 之係數為

$$a_0, a_0b+a_1, a_0b^2+a_1b+a_2, a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3,$$

應注意於第一係數為被除式之首項係數，其餘之係數可依

下法得之：

以 b 乘已得之係數，再加被除式之其次未用係數。

例如，
$$a_0b^2+a_1b+a_2=(a_0b+a_1)b+a_2,$$

及
$$a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3=(a_0b^2+a_1b+a_2)b+a_3.$$

不論被除式之次數如何，此法皆可適用。蓋因除式之首項係數為1， Q 之各個新係數，常與最近所得餘式之首項係數相同故也。故以 b 乘 Q 之前一係數，再加被除式之新係數，即得 Q 之後一係數。同理，以 b 乘 Q 之末項係數，再加被除式之末項係數即得 R 。

故除式有形式 $x+b$ ，被除式有形式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ 411

時，可求得 Q 及 R 如下，此處之 c_0, c_1, \dots, c_{n-1} 表 Q 之係數。

$$\begin{array}{r} a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n-1} \quad a_n \quad | \quad b \\ \underline{\quad c_0b \quad c_1b \quad \dots \quad c_{n-1}b \quad b_{n-1}b} \\ c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{n-1} \quad R \end{array}$$

先依固有次序書被除式之係數，而於其右書 b 。

在 a_0 之下書 c_0 ，可知 c_0 與 a_0 相等。

以 b 乘 c_0 ，書其積 c_0b 於 a_1 之下，相加得 a_1 。

同法，以 b 乘 c_1 ，書其積 c_1b 於 a_2 之下，相加得 a_2 。

如此進行，更迭相乘而加之，直至 a_0, a_1, \dots, a_n 用盡為止。

例1. 以 $x+2$ 除 $3x^3 + 5x^2 - 4x + 3 - 2$ 。

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x - 4 \quad +3 \quad -2 \quad | 2 \\ \underline{3x^2 + 6x + 12} \\ 8x - 9 \\ \underline{8x + 16} \\ -25 \\ \underline{-25x - 50} \\ 48 \\ \underline{48x + 96} \\ -98 \end{array}$$

故 $Q=3x^2+x^2-2x-1$ 及 $R=-4$ 。

此簡潔法則，名為綜合除法，習者遇除式有形式 $x+b$ 時，須

用此法以養成自己之習慣。

412 此法應注意之點。1. 用綜合除法，若被除數為不完全多項式時，須以0係數表其 x 之缺露。

2. 因 $x+b=x-(-b)$ ，故形式 $x+b$ 之二項式，亦可演綜合除法，此只須以 $-b$ 代 b 於上述計算中足矣。

例1. 以 $x+1$ 除 $x^3=1$ 。

此處 $x+1=x-(-1)$ ，以 $x-(-1)$ 除之，則有

$$\begin{array}{r} 1 \quad +0 \quad +0 \quad +0 \quad -1 \quad | -1 \\ \underline{-1 \quad +1 \quad -1 \quad +1} \\ 1 \quad -1 \quad +1 \quad -1 \quad 0 \end{array}$$

故 $Q=x^3-x^2+x-1$ ，而 $R=0$ 。

3. 欲以形式 $ax-B$ 之二項式[除之，則可書為 $a\left(x-\frac{B}{a}\right)$ 。

於是以 $\left(x-\frac{B}{a}\right)$ 施綜合除法，而令 Q 及 R 表其所得之商及餘式。

則對應於 $ax-B$ 之商及餘式必為 $\frac{Q}{a}$ 及 R (§403, 2)。

例2. 以 $3x-2$ 除 $3x^2-11x+18x-3$ 。

此處 $3x-2=3\left(x-\frac{2}{3}\right)$ ，以 $x-\frac{2}{3}$ 除之，則有

$$\begin{array}{r} 3x - 11 \quad +18 \quad -3 \quad | 2/3 \\ \underline{3x - 2} \\ 8x - 9 \\ \underline{8x - 12} \\ 3 \end{array}$$

故所求之商為 $\frac{8x^2 - 9x + 2}{3}$ 或 $x^2 - 3x + 4$ ，而餘式為 5。

例 3. 以 $x-3$ 除 $5x^2 - x^2 + x + 2$ 。

例 4. 以 $x+3$ 除 $x^2 + 6x^2 + 11x + 6$ 。

例 5. 以 x^2-3 除 $2x^2 + 3x^2 + 18x - 12$ 。

餘數定理：一含 x 之多項式除以 $x-b$ 時，則其所得之餘數 413

餘於以 b 代其除數中 x 之結果；因此設 $f(x)$ 表被除式，則 $f(b)$

表其餘數。

此定理之證明已述於 § 410；蓋因其已證明設以 $x-b$ 除 $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ ，則其商餘為 $a_0b^3 + a_1b^2 + a_2b + a_3$ ，故也。以一般言之，以 $x-b$ 除 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ，則其餘式必為 $a_0b^n + a_1b^{n-1} + \dots + a_n$ 或 $f(b)$ 。

此定理亦可用下法證明：

設 $f(x)$ 為被除式， $x-b$ 為除式， $\phi(x)$ 為商， R 為餘式，則依 § 401，

$$f(x) = \phi(x)(x-b) + R.$$

此處 R 之次數低於 $x-b$ ，即不含 x ，故對於 x 之一切值，有同值。

無論 x 為何值，此恆等式之二端有等值。於特例，當 $x=b$ 時，二端仍有等值。

故 $f(b) = \phi(b)(b-b) + R.$

但 $b-b=0$ ；且因 $\phi(x)$ 為整式， $\phi(b)$ 為有限值。

故 $\phi(b)(b-b)=0$ ，因此而

$$f(b) = R.$$

下例適應二種需要，一為表明餘式定理之真確，二則指示 414
當 b 及 $f(x)$ 之係數為已知時，普通計算 $f(b)$ 之值之最簡
法，為以 $x=b$ 除 $f(x)$ 用綜合除法所得之餘式即 $f(b)$ 。

例 1. 當 $x=4$ 時, $f(x)=5x^4-12x^3-20x^2-43x+6$ 之值如何?

1. 用直接代入法, 得

$$f(4) = 5 \cdot 4^4 - 12 \cdot 4^3 - 20 \cdot 4^2 - 43 \cdot 4 + 6 = 1280 - 768 - 320 - 172 + 6 = 26$$

2. 用綜合除法, 得

$$\begin{array}{r|rrrrr} 5 & -12 & -20 & -43 & +6 & \\ \hline & 20 & 32 & 48 & 20 & \\ \hline 5 & 8 & 12 & 5 & 26 & =f(4). \end{array}$$

例 2. 已知 $f(x)=3x^4-x^3+5x^2-8x+4$, 用綜合除法求 $f(2), f(-2), f(4), f(-2/3)$.

415 系 1. 當 $x=b$ 時, 設 $f(x)$ 爲 0; 則 $x-b$ 必能整除 $f(x)$, 其逆亦真。

依據 § 413, 因 $f(b)$ 爲 $x-b$ 除 $f(x)$ 之除式, 而當餘式爲 0 時, 即此除法爲除盡故也。

例如, $x=1$ 時, $f(x)=x^3-3x^2+2$, 即 $f(1)=1-3+2=0$.

故 $x-1$ 能整除 $f(x)$, 可實行除法證驗。

其次 $f(x)=x^n-b^n$ 可用 $x-b$ 整除, 因 $f(b)=b^n-b^n=0$ 故也。

例 1. 設 $x-2$ 能整除 x^3+3x^2-m , 則 m 之值如何?

必有 $2^3+3 \cdot 2^2-m=0$, 或 $m=20$.

例 2. 設 n 爲奇數, 則 $x+b$ 能整除 x^n+b^n , 但設 n 爲偶數則不能, 試證之。

416 系 2. 含二個或多個變數之整函數, 設其中二變數 x 及 y 假定相等時爲零, 則變數之差 $x-y$ 能整除此函數。

因此函數可化爲係數含他變數之 x 之多項式。由假設, 當 $x=y$ 時, 函數爲零, 故可用 $x-y$ 整除 (§ 415)。

例如, $x=y$ 時, $x^2(y-x)+y^2(x-x)+x^2(x-y)$ 爲零。因 $x=y$ 代 x , 則有

$$x^2(y-x)+y^2(x-x)+x^2(y-x)=0.$$

故 $x-y$ 能整除 $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$, 今可實行除法以證明此結論如下:

$$\begin{array}{r} (y-z)x^2 - (y^2-z^2)x + (y^2z-z^2y) \overline{) x^2 - y^2} \\ (y-z)x^2 - (y^2-yz)x \\ \hline -(yz-z^2)x + (y^2z-z^2y) \\ -(yz-z^2)x + (y^2z-z^2y) \\ \hline 0 \end{array}$$

例. 證明 $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$ 可用 $x-y$, $y-z$ 及 $z-x$ 整除.

定理. 當 $x=a$ 時及當 $x=b$ 時, 若多項式 $f(x)$ 爲零, 則 $f(x)$ 可用 $(x-a)(x-b)$ 整除.

因依假設, $f(a)=0$, 故 $f(x)$ 可用 $x-a$ 整除 (§415), 設其商爲 $\phi_1(x)$, 則

$$f(x) \equiv (x-a)\phi_1(x), \text{ 此處 } \phi_1(x) \text{ 爲整式.} \quad (1)$$

設在(1)中, 使 $x=b$, 則有

$$f(b) = (b-a)\phi_1(b).$$

但依假設, $f(b)=0$, 而 $b-a \neq 0$. (2)

因積爲零時, 其因數中必有一爲零 (§253), 故從 (2) 得 $\phi_1(b)=0$.

但設 $\phi_1(b)=0$, 則 $\phi_1(x)$ 可用 $x-b$ 整除 (§415), 設其商爲 $\phi_2(x)$, 則有

$$\phi_1(x) \equiv (x-b)\phi_2(x), \text{ 此處 } \phi_2(x) \text{ 爲整式.} \quad (3)$$

以此式代入(1)中之 $\phi_1(x)$, 則有

$$f(x) \equiv (x-a)(x-b)\phi_2(x), \quad (4)$$

即已證明 $f(x)$ 可用 $(x-a)(x-b)$ 整除.

續行此法, 可證明下述之一般定理

設 $f(x)$ 於 $x=a, b, c, \dots$ 爲零, 則 $f(x)$ 可用

413

$(x-a)(x-b)(x-c)\dots$ 整除.

例如, 當 $x=1$ 及 $x=-1$ 時, $2x^3+3x^2-2x-3$

即 $2+3-3-3=0$ 及 $-2+3+2-3=0$.

故 $2x^3+3x^2-2x-3$ 可用 $(x-1)(x+1)$ 及 x^2-1 整除, 可實行除法檢驗.

例 1. 求一二次多項式 $f(x)$, 當 $x=2$ 時及當 $x=3$ 時, $f(x)=0$, 而當 $x=4$ 時, $f(x)=6$.

因 $f(x)$ 爲二次式, 且可用 $(x-2)(x-3)$ 整除 (§ 417), 故此式可用形式 $f(x)=a_0(x-2)(x-3)$, 此處 a_0 爲常數.

又因 $f(4)=6$, 故有 $6=a_0(4-2)(4-3)$, 由此得 $a_0=3$.

故 $f(x)=3(x-2)(x-3)=3x^2-15x+18$.

例 2. 求一三次多項式 $f(x)$, 當 $x=2$ 時及 $x=4$ 時, $f(x)=0$, 而當 $x=1$ 時, $f(x)=6$; 當 $x=4$ 時, $f(x)=18$.

理由如前, 則有 $f(x)=(a_0x+a_1)(x-2)(x-3)$, 此處 a_0, a_1 爲常數.

其次, 因 $f(1)=6$ 及 $f(4)=18$, 故得

$$6=(a_0+a_1)(1-2)(1-3), \text{ 或 } a_0+a_1=3, \quad (1)$$

$$18=(4a_0+a_1)(4-2)(4-3), \text{ 或 } 4a_0+a_1=9 \quad (2)$$

解(1)及(2), 得 $a_0=2, a_1=1$.

故 $f(x)=(2x+1)(x-2)(x-3)=2x^3-9x^2+7x+6$.

419 定理. 次數爲 n 之多項式 $f(x)$, 能使 $f(x)$ 爲零之 x 之值, 不能多於 n 個.

設 x 之值能使 $f(x)$ 爲零者多於 n 個, 則形如 $(x-a)$ 之因式多於 n 個者之積, 可以整除 $f(x)$, (§ 451), 此顯然不可能, 因此積之次數超過 n 故也.

420 定理. 設知某多項式 $f(x)$ 之次數不能超過 n , 而 $f(x)$ 爲零之 x 之值多於 n 個, 則可斷定 $f(x)$ 之一切係數皆爲 0.

因該係數不皆爲 0, 則 x 之值能使 $f(x)$ 爲零者, 不能多於 n 個故也 (§ 419).

如此多項式, 稱爲恆等於 0.

421 定理. 設 n 次二多項式 $f(x)$ 及 $\phi(x)$, 關於 x 之值, 多於 n 個者能有等值, 則其對應係數相等.

因令 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$,

$\phi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n$,

$\psi(x) = f(x) - \phi(x)$

$= (a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + \dots + (a_n - b_n)$.

則當 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之值相同時, $\psi(x)$ 為 0, 而依假設, 關於 x 之值多於 n 個者, 此值相同。

故多項式 $\psi(x) = (a_0 - b_0)x^n + \dots + (a_n - b_n)$ 之次數不超過 n , 而對於 x 之值多於 n 個者為零, 從而其一切係數皆為 0 (§ 420).

故 $a_0 - b_0 = 0, a_1 - b_1 = 0, \dots, a_n - b_n = 0$,

即 $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$,

此即 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之對應係數相等。

例如, 當 $x=2, 4, 6$ 時, 設 $f(x) = 2x^2 + bx + 5$ 及 $\phi(x) = ax^2 + 3x + c$ 有等值, 則必有 $a=2, b=3$ 及 $c=5$.

習 題 XIV.

1. 用綜合法 $x-4$ 除 $x^3 - 3x^2 - x^2 - 11x - 4$ 之商。
2. 如上以 $x-7$ 除 $5x^5 - 6x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 6x + 3$.
3. 如上以 $x+2$ 除 $3x^3 + x^2 - 1$.
4. 如上以 $3x+1$ 除 $3x^3 + 16x^2 - 13x - 8$.
5. 如上以 $3x-1$ 除 $3x^3 - 6x^2 + x + 2$.
6. 如上以 $x-a$ 除 $x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$.
7. 如上以 $x-2y$ 除 $2x^4 - x^3y - 7x^2y^2 + 7xy^3 - 10y^4$.
8. 已知 $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$, 用 § 414 之法則求 $f(1), f(2), f(5), f(-1), f(-3), f(-6)$.
9. 用餘式定理定 m , 使 $x^3 + mx^2 - 2x + 6$ 可用 $x-3$ 整除。
10. 依同法, 定 l 及 m , 使 $2x^3 - x^2 + lx + m$ 可用 $(x+2)(x+4)$ 整除。

11. 依 § 416, 示明 $3bm+am-22n-6bn$ 可用 $m-2n$ 整除, 亦可用 $a+3b$ 整除.

12. 依 § § 416, 4177, 示明 $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2$ 能用 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 整除.

13. 求 x 之三次整函數, 當 $x=1, 4, -2$ 時, 函數之值為零, 當 $x=2$ 時, 函數之值為 -16 .

14. 求 x 之三次整函數, 當 $x=2, 3$ 時, 函數之值為零, 當 $x=0$ 時, 函數之值為 6 , 當 $x=-1$ 時, 函數之值為 12 .

15. 試證 $2x^2-ax+1$ 與 x^3+5x+2 , 對於 x 之四值不能有等值.

以另一多項式除一多項式

422 令 A 與 B 表 x 之二多項式, A 之次數高於 B .

以 B 除 A , 設其商為 Q , 餘式為 R , 則

$$A \equiv QB + R. \quad (1)$$

設 Q 之次數不低於 B , 則以 B 除 Q , 設其商為 Q_1 , 餘式為 R_1 , 則

$$Q \equiv Q_1 B + R_1. \quad (2)$$

同法, 設 Q_1 之次數不低於 B , 則以 B 除 Q_1 , 設其商為 Q_2 , 餘式為 R_2 , 則

$$Q_1 \equiv Q_2 B + R_2. \quad (3)$$

假定 Q_2 之次數低於 B , 則有

$$A \equiv QB + R \quad \text{由 (1)}$$

$$\equiv \{Q_1 B + R_1\} B + R \quad \text{由 (2)}$$

$$\equiv \{(Q_2 B + R_2) B + R_1\} B + R \quad \text{由 (3)}$$

$$\equiv Q_2 B^2 + R_2 B^2 + R_1 B + R,$$

此處一切係數 Q_2, R_2, R_1, R 之次數皆低於 B .

於一般,任何多項式 A , 已知其次數高於 B , 而依上述之法進行, 直至得一商其次數低於 B 為止, 則有

$$A = Q_{r-1}B^r + R_{r-1}B^{r-1} + \dots + R_1B + R$$

此處 $R, R_1, \dots, R_{r-1}, Q_{r-1}$ 表屢次各餘式, 及最後之商, 其次數皆低於 B .

例. 化 $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 4$ 為 $x^2 + x + 1$ 之多項式形式, 其係數之次數, 皆小於二.

用分離係數法, 可排列計算如下:

$$\begin{array}{r}
 1-4+3-1+1+4 \quad | \quad 1+1+1 \\
 1+1+1 \quad | \quad 1-5+7-3 \quad | \quad 1+1+1 \\
 \hline
 -5+2-1 \quad | \quad 1+1+1 \quad | \quad 1-6 \\
 -5-5-5 \quad | \quad -6+6-3 \\
 \hline
 7+4+1 \quad | \quad -6-6-6 \\
 7+7+7 \quad | \quad 12+3 \quad \therefore R_1 = 12x+3 \\
 \hline
 -8-6+4 \\
 -3-3-3 \\
 \hline
 -3+7 \quad \therefore R = -3x+7.
 \end{array}$$

故 $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 4$.

$$= (x-6)(x^2+x+1)^2 + (12x+3)(x^2+x+1) - (3x-7).$$

在特例, 此法能使 x 之任何多項式, 變形為 $x-b$ 之同次多項式, 具有常數係數.

例. 將 $2x^3 - x^2 + 4x - 5$ 變形為 $x-2$ 之多項式.

可屢次實行綜合除法而排列計算如下:

$$\begin{array}{r}
 2 \quad = \quad 1 \quad + \quad 4 \quad - \quad 5 \quad | \quad 2 \\
 \quad \quad \quad 4 \quad \quad 6 \quad \quad 20 \\
 \hline
 2 \quad + \quad 3 \quad + \quad 10 \quad | \quad 15 \quad \therefore R = 15 \\
 \quad \quad \quad 4 \quad \quad 11 \\
 \hline
 2 \quad + \quad 7 \quad | \quad 24 \quad \therefore R_1 = 24 \\
 \quad \quad \quad 4 \\
 \hline
 2 \quad | \quad 11 \quad \therefore R^2 = 11 \text{ 及 } Q_1 = 2.
 \end{array}$$

故 $2x^3 - x^2 + 4x - 5 = 2(x-2)^2 + 11(x-2) + 24(x-2) + 15$.

習題 XV

1. 用 § 422 之法則, 以 x^2+1 表 x^5+x^3-1 .
2. 如上用 $2x^2+1$ 表 $4x^5+x^3+2x^2+x-6$.
3. 如上用 $x^2-x^2+x^2+2x^2-3x^2$, $2x^2+5x^2-x^2+3$.
4. 如上用 x^2+xy+y^2 表 $x^5+xy^2+x^3y^2+x^2y^3+x^2$.
5. 用 § 423 之法則, 以 $x+3$ 表 $2x^2+3x^2+x+6$.
6. 如上用 $x+2$ 表 $x^3+3x^2-6x^2+2x^2-3x+7$.
7. 如上用 $x+3$ 表 $3x^2+9x^2+27x$.
8. 如上用 $x+1$ 表 x^3+3x^2+x-1 .

VI. 積與整式之因式

424 因式. 令 A 表任一係數為有理數之代數式, 舍此係數之任何有理係數而僅就 A 論, 皆為 A 之因式.

故欲使一函數 F 可於 A 之因式為充分且必要者為

1. F 關於函數 A 之因式為有理整式.
2. A 可化為形式 AG , 其中 G 亦為整式.

例 1. 因 $2x^2-2xy=2x(x-y)$, 故 x 及 $x-y$ 二者俱為 $2x^2-2xy$ 之因式.

例 2. 因 $3x^2-2y^2=(\sqrt{3}x+\sqrt{2}y)(\sqrt{3}x-\sqrt{2}y)$, 故 $\sqrt{3}x+\sqrt{2}y$ 及 $\sqrt{3}x-\sqrt{2}y$ 俱為 $3x^2-2y^2$ 之因式.

例 3. 雖 $x-y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$, 但 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 及 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 不稱為 $x-y$ 之因式, 因其關於 x 及 y 俱非有理整式也.

註1. 因式之係數不必為整數, 或有理數. 反言之, 可為任何種類之數或式, 如例 2 中, 因式之係數為無理數.

因 $x^2 - y = (x + \sqrt{y})(x - \sqrt{y})$, 故式 $x^2 - y$ 視為 x 及 y 兩者之函數, 不能式析因式; 但視為 x 單獨之函數, 則有因式 $x + \sqrt{y}$ 及 $x - \sqrt{y}$. 合多於一文字之他式亦然.

註2. 除單獨處理有理係數之合數時外, 通常不兼其“數字因數”, 如例 1 中之 2 者包括於已知函數 A 之因式內; 蓋不獨整函數係數須為整數, 則任何單獨數(或常數)皆可謂其能整除 A 故也.

同理, 若 F 為 A 之因式, 而 c 為任不常數(非 0), 則 cF 亦為 A 之因式, 但吾人視 F 與 cF 在本質上為相同因式, 而 A 之因式範圍內只合其一.

例如, 在例 1 中, 可稱 $2x$ 及 $x - y$ 或 $-2x$ 及 $y - x$ 為其因式.

定理. 設 F 為 B 之因式, 而 B 為 A 之因式, 則 F 亦為 A 之因式.

證依 § 424, A 與 B 可化為下式:

$$A \equiv GB, \text{ 及 } b \equiv HF,$$

此處 G 與 H 為整式.

故 $A \equiv G \cdot HF \equiv GH \cdot F,$

即 F 為 A 之因式 (§ 424).

質函數, 複函數. 一質函數除本身(或常數)外無其他因式, 在此情形, 名爲質函數. 若含他因式者, 則名爲複函數.

例如, $x + y$ 及 $x - y$ 為質函數, 但 $x^2 - y^2$ 為複函數.

n 次之質函數 A , 為不少於二個不多於 n 個之質函數 B, C, \dots, O 之積. 此種質函數名爲 A 之質因式.

430 因式定理：

1. 任何已知函數 A 只有一組質因式。
2. A 之一切其他因式，皆此組質因式之積。

此組質因式可有二個或多個不等，但 A 能以其不同質因式乘幕之積表之，只有一法。

此種定理之 2 及 3，為 1 之系，後當於 §§ 484, 485 中，就 A 為一變數之函數時證之，且可一般證明。

例如，因 $x^3y^3 - 2x^2y^4 = xy^2y(x-2y)$ ，而 $x^3y^3 - 2x^2y^4$ 之質因式為 $x, x, y, y, y, x-2y$ 。其他因式如 x^2, xy 等等，為此組質因式中二個或多個之積。其不同之質因式為 $x, y, x-2y$ ，而用此種因式乘幕之積表原式，只有一法即 $x^2y^3(x-2y)$ 。

431 析因式法。欲將已知函數 A ，完全析因式，意謂“分解為質因式”，即化 A 為 $A \equiv B \cdot C \cdot D \dots$ 之形，此處 $B, C, D \dots$ 表質函數。

但通常於起始時，不必逕求其質因式，可先分解 A 為二因式 F 與 G 之積，再分解 F 及 G ，如此進行，直至質因式達到為止，上法第一步名為 A 之“析因式法”。

析因式法與乘法相反，乘法含二重要步驟：(1) 分配律之數次應用，即以 $ac+bc$ 代 $(a+b)c$ 等；(2) 於所得結果內，合並同類項，欲逆其方法，必須(1) 分開所合併之項——析因式之難處在此——及(2) 用分配律以 $(a+b)c$ 代 $ac+bc$ 等。

各質函數不可假定其皆能實際析因式，例如雖可證明 $x^2+ax^2+bx^2+cx+d$ 為複式，亦可證明此式之因式不能用代數法求得；此所謂代數法則，即應用各種代數演算而有礙於此。

式之各項有一公因式者

各項皆有單項或多項公因式之式，可應用分配律以析因式，432
即

$$ab+ac+ad+\dots=a(b+c+d+\dots).$$

例1. 將 $2a^2c+2abc+4ac^2-6acd$ 析因式。

各項皆有因式 $2ac$ ，“析”出之，得

$$2a^2c+2abc+4ac^2-6acd=2ac(a+b+2c-3d).$$

例2. 將 $a(c-d)+b(d-c)$ 析因式。

各項皆有因式 $c-d$ ，析出之，得

$$a(c-d)+b(d-c)=a(c-d)-b(c-d)=(a-b)(c-d).$$

有此之因式，須先析出。

有若干式原非如上述之形式，而聯合其具有公因式之各項 433
方能化之如此者。

例1. 將 $ac+bd+ad+bc$ 析因式。

聯合 ac 與 ad ，又聯合 bc 與 bd ，得 $a(c+d)+b(c+d)$ 爲
一含公因式 $c+d$ 之二項式。

$$\text{故 } ac+bd+ad+bc=(a+b)(c+d).$$

由時觀之，用此法分原式爲各部分，每一部分須有同數之項。

例2. 將 $a^2+ab-bd-ad+ac-cd$ 析因式。

此式必有三項之二羣，或有二項之三羣，式中有四項含 a ，
如 a^2 ， ab ， $-ad$ ， ac ，餘二項含 d ，如 $-bd$ 及 $-cd$ 。欲得項數相
同之羣，可將 $-ad$ 與 d 項聯合，而有

$$\begin{aligned} a^2+ab+ac-ad-bd-cd &= a(a+b+c)-a(a+b+d) \\ &= (a-c)(a+b+c). \end{aligned}$$

習題 XVI

將下列各式折因式：

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1. $6x^2y^2z^2 - 12x^2y^2z + 3x^2y^2$, | 2. $2x^2 + (4-3)x$, |
| 3. $ax - a + b - 1$, | 4. $mx - nx - mn + n^2$, |
| 5. $3cy - 2x - 12y + 8$, | 6. $10xy + 5y^2 + 3x + 3y$, |
| 7. $x^2y^2 - x^2y^2 + 2x^2y - 2xy^2$ | 8. $x^4 + x^3 + x^2 + x$, |
| 9. $ac + bd - (bc + ad)$, | 10. $x^2c - abd - abc + n^2d$, |
| 11. $ad + ce + bd + ae + cd + be$, | 12. $a^2 + cd - ab - bd + ac + ad$, |

藉已知恆等式折因式

434 於第二章中已舉出幾個特種積，如 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 。設已知函數 A 能化為如此積之一之形式，則可立即書出其因式，下節將說明如此折因式之法則。

435 完全三項平方式。此名謂有形式 $a^2 \pm 2ab + b^2$ 之一式，此種式可藉下列公式折因式：

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)^2,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)(a-b) = (a-b)^2,$$

完全三項平方式中(正當排列)所宜注意者，中項為二外項平方根乘積之二倍，而其相反之二因式，可用其中項之記號逆轉二外項之主平方根而得之。

求完全平方之平方根，即求此種相等因式之一。

例1. 將 $9x^2 - 12xy + 4y^2$ 之因式。

此為完全平方，因 $12xy = 2 \sqrt{9x^2} \cdot \sqrt{4y^2}$

及因 $\sqrt{9x^2} = 3x$ ， $\sqrt{4y^2} = 2y$ ，其中項之記號為一，故得

$$-12xy + 4y^2 = (3x - 2y)(3x - 2y) = (3x - 2y)^2.$$

例 2. 析 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ 之因式。

集項如下，可化為三項平方之形式。

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= (a+b+c)^2 \end{aligned}$$

例 3. 將下列諸式析因式：

1. $x^2 + 14x + 49$.
2. $9 - 6x + x^2$.
3. $9x^2y^2 + 80xy + 25$.
4. $x^2 + 4x + 4y^2 + 6x + 12y + 9$.
5. $64x^2 - 48x + 9$.
6. $a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 2b - 2c$.

二平方之差，此種形式或可化為此種形式之式，可藉下列 436 公式之助以析因式：

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

例如，

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - z^2 + 2yz &= x^2 - (y^2 - 2yz + z^2) \\ &= x^2 - (y-z)^2 \\ &= (x+y-z)(x-y+z) \end{aligned}$$

化三項式為平方差之形式，其最有用之方法，即先加一適宜量於其中之一項，使成一完全平方，再從其結果之式減去。

例如

$$\begin{aligned} x^4 + x^2y^2 + y^4 &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy) \end{aligned}$$

(例 4) 析下列諸式之因式：

1. $x^2 - y^2$.
2. $61^2 - 61b^2$.
3. $121x^2 - 75xy^2 + 9y^4$.
4. $25x^{2n} - 49x^{2m}$.
5. $36x^4 - 48x^2y^2 + y^4$.
6. $x^4 - 3x^2y^2 + y^4$.

二平方之和，用虛數單位 $i = \sqrt{-1}$ (§ 3.21, 22) 則平方之和 $a^2 + b^2$ 可化為平方之差之形式，而依 § 436 析因式，其因式為虛數。

因 $a^2 + b^2 = a^2 - (-b^2) = (a+ib)(a-ib)$

故 $a^2 + b^2 = a^2 - (ib)^2 = (a + ib)(a - ib)$

從 §§ 219, 220, 已知服從一切普通計算法則, 於應用時, 只須記憶 $i^2 = -1$.

433 任何二同乘冪之和與差. 在 §§ 308, 309, 310中, 已證明第一. 不論 n 爲奇數或爲偶數,

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (1)$$

第二. 當 n 爲偶數時,

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} - b^{n-1}) \quad (2)$$

第三. 當 n 爲奇數時,

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (3)$$

故得下列定理:

1. $a^n - b^n$ 常可用 $a - b$ 除盡.
2. 當 n 爲偶數時, $a^n - b^n$ 可用 $a + b$ 除盡.
3. 當 n 爲奇數時, $a^n + b^n$ 可用 $a + b$ 除盡.
4. 在各種情形中, 各商皆由下列諸項而成

$$a^{n-1} \quad a^{n-2}b \quad \dots \quad ab^{n-2} \quad b^{n-1}$$

當 $a - b$ 爲除式時, 皆以 + 號連結, 但當 $a + b$ 爲除式時, 則輪流用 - 與 + 連結.

例如, 1. $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

2. $x^6 - 1 = (x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$.

3. $8a^3 + 27b^3c^3 = (2a)^3 + (3bc)^3$
 $= (2a + 3bc)[(2a)^2 - (2a)(3bc) + (3bc)^2]$
 $= (2a + 3bc)(4a^2 - 6abc + 9b^2c^2)$.

例. 析下列諸式之因式:

1. $64x^3 - 125y^3$. 2. $27x^3 + 1$. 3. $16x^4 - 81y^4$.

439 n 爲複數時. 下列定理, 爲 § 438 (1)(2)(3) 及 § 436 之直接結果,

1. 設 n 爲任何整數 P 之倍數, 則 $a^n - b^n$ 可用 $a^P - b^P$ 整除.

例如,
$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= (x^2)^3 - (y^2)^3 \\ &= (x^2 - y^2)(x^2 + x^2y^2 + y^4). \end{aligned}$$

2. 設 n 為任何整數 p 之偶倍數, 則 $a^n - b^n$ 可用 $a^p + b^p$ 整除.

例如,
$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= (x^3)^2 - (y^3)^2 \\ &= (x^3 + y^3)(x^3 - y^3). \end{aligned}$$

3. 設 n 為任何整數 p 之奇倍數, 則 $a^n + b^n$ 可用 $a^p + b^p$ 整除, 不論 n 本身為奇數或偶數.

例如,
$$\begin{aligned} x^6 + y^6 &= (x^2)^3 + (y^2)^3 \\ &= (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4). \end{aligned}$$

4. 設 n 為 2 之乘幂, 則應用 § 436 所說明之法, 可分解 $a^n + b^n$ 為二次之因式.

例如,
$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy)(x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy) \end{aligned}$$

其次,

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + \sqrt{2}x^2y^2 &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + \sqrt{2}x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 + (2 + \sqrt{2})x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}xy)(x^2 + y^2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}xy). \end{aligned}$$

餘類推.

此種各個“二次”因式, 可用後 § 444 之法, 化為二個一次因式 (屬數). 當 a 為 2 之乘幂時, $a^n + b^n$ 之完全析因式常為可能. 111

當 n 為複數時, 最好先分解 $a^n + b^n$ 或 $a^n - b^n$ 為二次因式, 後其次數愈近於相等為愈妙, 如是則所得因式中, 至少有一個帶根再行分解.

例如, $x^6 - y^6$ 之析因式, 如 1-2 為最佳. 續行之, 得

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= (x^2 + y^2)(x^3 - y^3) \\ &= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + x + y^2) \end{aligned}$$

例。析下列諸式之因式：

- 1. $x^4 + y^4$ 2. $x^8 - y^8$ 3. $x^3 + y^3$

440 § 433, 439 之定理，亦適用於形式如 a^m 之式，當 m 及 n 為同一整數 p 之倍數時。

例如，

$$x^m - y^m = (x^n)^{\frac{m}{n}} - (y^n)^{\frac{m}{n}} = (x^n + y^n)(x^{n(\frac{m}{n}-1)} - x^{n(\frac{m}{n}-2)}y^n + \dots - y^{n(\frac{m}{n}-1)})$$

題 XVII

在下列各式，試求其能以何因式，不可將入無理數或虛數之

因數。 $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2) =$

- 1. $4x^3y - 20x^2y^2 + 25xy^3$ 2. $28x^2 - 63xy^2$
- 3. $x^2 - 4y^2 + 9z^2$ 4. $(7a^2 + 2b^2)^2 - (2a^2 + 5b^2)^2$
- 5. $(7x^2 + 4x + 3)^2 - (x^2 + 4x + 6)^2$
- 6. $4(1 - b^2 - ab) - a^2$
- 7. $x^4 + x^2 + 1$
- 8. $a^4 - 6a^2b^2 + b^4$
- 9. $a^4 + 4a^2 + 16$ 10. $9x^4 + 15x^2y^2 + 16y^4$
- 11. $(4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2)$
- 12. $576x^2y^2 - 9y^4$ 13. $(x^2 - y^2)^2$ 14. $x^{12} - y^{12}$
- 15. $x^{10} + y^{10}$ 16. $(x^2 + y^2)^2$ 17. $x^7 + y^7$

集項求因式

441 a 之多項式各項，皆可集為若干項，每項含公共因式 F ，則此公共因式 F 為全式之因式，如 § 433 所說。

例 1. 析 $x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ 之因式。

注意於末二係數為首二係數之等倍數，故得

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = x^2(x + 3) - 2(x + 3)$$

$$= (x^2 - 2)(x + 3) = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + 3)$$

例 2. 析 $x^2 + 2x + 1$ 之因式.

集同係數之項, 得

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 &= x^2 + 1 + 2x(x+1) \\ &= (x^2 - x + 1)(x+1) + 2x(x+1) \\ &= (x^2 - x + 1 + 2x)(x+1) = (x^2 + x + 1)(x+1). \end{aligned}$$

有時先將其已知諸項中之一分開為二項, 始可實行.

例 3. 析 $x^3 + 4x^2 + 5x + 6$ 之因式.

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 + 5x + 6 &= x^3 + 3x^2 + x^2 + 3x + 2x + 6 \\ &= x^2(x+3) + x(x+3) + 2(x+3) \\ &= (x^2 + x + 2)(x+3). \end{aligned}$$

再以上例言之.

例 4. 析 $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ 之因式.

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 &= x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + 1 \\ &= (x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) + 1 \\ &= (x^2 + x + 1)^2. \end{aligned}$$

圖 XVdITa

析下列各式之因式.

1. $x^2 - 2x + 1$

2. $x^2 - 8x + 8$

3. $x^2 - 2x^2 + 2x - 1$

4. $x^2 - 7x^2 + 4x + 28$

5. $x^2 + 2x + 1$

6. $x^2 + 2x^2 + 3x + 2$

7. $x^2 + 2x + 1$

8. $x^2 + 4x^2 + 10x + 9$

用觀察法析二次式 $x^2 + px + q$ 之因式. 當 p 及 q 為整數時, 442 此法有時可能.

因 $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$.

設能求其整數 a, b , 能使 $a+b = p$ 及 $ab = q$, 則知 $x^2 + px + q$ 之因式.

如此之二數常存在，然未必為有理數 (§444)，但當為有理數時，則為整數 (§444)，而可由觀察法求得之，如下例。

例 1. 析 $x^2 + 13x + 42$ 之因子。

求二整數 a 及 b ，其積為 42，其和為 13。因 ab 及 $a+b$ 俱為正，故 a 及 b 必俱為正。在二整數中其積為 42 者——即 1 與 4，2 與 21，14 與 3，7 與 6，——求其中一對之和為 13 者，即 7 與 6。

$$\text{故} \quad x^2 + 13x + 42 = (x+7)(x+6).$$

例 2. 析 $x^2 - 13x + 22$ 之因式。

此處 a 與 b 須俱為負；因其積為正，其和為負故也。如前法試算一對負整數其積為 22 者，即 -11 與 -2，因 $-11 + (-2) = -13$ 故也。

$$\text{故} \quad x^2 - 13x + 22 = (x-11)(x-2).$$

例 3. 析 $x^2 - 9x - 22$ 之因式。

此處 ab 為負，故 a 與 b 須有相反記號；又因 $a+b$ 為負，故負數之絕對值較大。故取 $-22 = -22 \times 1 = -11 \times 2$ ；試算如前，得 $a = -11$ ，及 $b = 2$ ，因 $-11 + 2 = -9$ 故也。

$$\text{故} \quad x^2 - 9x - 22 = (x-11)(x+2).$$

例 4. 析以下諸式之因式。

$$1. x^2 + 3x + 2. \quad 2. x^2 - 16x + 15. \quad 3. x^2 - 4x - 12.$$

$$4. x^2 + x - 30. \quad 5. x^2 + 20x + 96. \quad 6. x^2 - 21x + 80.$$

443 用觀察法析二次式 $ax^2 + bx + c$ 之因式。當 a ， b 及 c 為整數時，此法有時可能。

用 a 乘而除之，可化 $ax^2 + bx + c$ 為 $((ax)^2 + b(ax) + ac)/a$ ，則括號內之式，可用上法就 ax 析其因式，即求二整數，其積為 ac ，其和為 b 者。

例 1. 析 $2x^2 + 7x + 3$ 之因式。

802

$$2x^2 + 7x + 3 = \frac{(2x)^2 + 7(2x) + 6}{2}$$

$$= \frac{(2x+6)(2x+1)}{2} = (x+3)(2x+1).$$

例 2. 析 $bx^2 + (a^2 + b^2)x + ab$ 之因式.

$$\begin{aligned} bx^2 + (a^2 + b^2)x + ab &= \frac{(abx^2 + (a^2 + b^2) \cdot abx + a^2b^2)}{ab} \\ &= \frac{(abx + a^2)(abx + b^2)}{ab} \\ &= (bx + a)(ax + b). \end{aligned}$$

例 3. 析 $16x^2 + 72x - 63$ 之因式.

在此情形, 無須以 16 乘除之, 因有

$$\begin{aligned} 16x^2 + 72x - 63 &= (4x)^2 + 18(4x) - 63 \\ &= (4x + 21)(4x - 3). \end{aligned}$$

例 4. 析以下諸式之因式.

- | | |
|-------------------------|--------------------------------|
| 1. $6x^2 - 13x + 6.$ | 2. $5x^2 + 14x - 3.$ |
| 3. $14x^2 + x - 3.$ | 4. $18x^2 - 21x + 5.$ |
| 5. $49x^2 + 105x + 36.$ | 6. $abx^2 - (ac - b^2)x - bc.$ |

用配方法析二次式 $x^2 + px + q$ 或 $ax^2 + bx + c$ 之因式, 上法 444 僅用於特殊情形, 下法則完全一般可用,

因 $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$

故加 $\frac{p^2}{4}$ 即 x 之半係數之平方於 $x^2 + px$, 可使之為一完全平方.

此法名為 $x^2 + px$ 之配方.

1. 對於 $x^2 + px + q$ 加減 $\frac{p^2}{4}$, 則不影響於其值. 但藉此能將此式變形為二平方之差, 而依 §436 析因式. 於是

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} \\ &= \left(x + \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right) \left(x + \frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right). \quad (1) \end{aligned}$$

$$2. \text{ 因 } ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

故於(1)中以 $\frac{b}{a}$ 代 x ,以 $\frac{c}{a}$ 代 y ,可得其因式,化簡其結果得

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \quad (2)$$

例 1. 析 x^2-6x+2 之因式.

$$\begin{aligned} x^2-6x+2 &= x^2-6x+9-3^2+2 \\ &= (x-3)^2-7 \\ &= (x-3+\sqrt{7})(x-3-\sqrt{7}) \end{aligned}$$

例 2. 析 $x^2+8x+20$ 之因式.

$$\begin{aligned} x^2+8x+20 &= x^2+8x+16-4^2+20 \\ &= (x+4)^2+4 \\ &= (x+4)^2-4i^2 \\ &= (x+4+2i)(x+4-2i) \end{aligned}$$

此處先得二平方之和 $(x+4)^2+4$,再以 $-4i^2$ 代變和為差

之形 (§437),此二因子為虛數.

例 3. 析 $3x^2-5x+1$ 之因式.

$$\begin{aligned} 3x^2-5x+1 &= 3\left[x^2-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}\right] \\ &= 3\left[x^2-\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\right] \\ &= 3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{36}\right] \\ &= 3\left(x-\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}\right) \end{aligned}$$

例 4. 析下列諸式之因式

- | | |
|--------------------|------------------------|
| 1. $x^2+10x+23.$ | 2. $x^2-10x+24.$ |
| (1). $x^2-12x+45.$ | 4. $x^2+x+1.$ |
| 5. $2x^2+3x+2.$ | 6. $x^2-4ax-4b^2+8ab.$ |

二變數之齊次二次函數。§§ 442-444 之法，適用於如下 445 形式之二次式

$$ax^2 + bxy + cy^2.$$

例 1. 析 $x^2 - 8xy + 14y^2$ 之因式

$$\begin{aligned} 3xy + 14y^2 &= x^2 - 8xy + 16y^2 - 3y^2 \\ &= (x - 4y)^2 - 2y^2 \\ &= (x - (4 + \sqrt{2})y)(x - (4 - \sqrt{2})y). \end{aligned}$$

例 2. 析下列諸式之因式。

1. $x^2 + 5xy + 4y^2.$

2. $x^2 + xy + y^2.$

二變數之非齊次二次函數。如此之函數，普通多為實函數，446 但當為複函數時，可如下例析因式。

例 1. 析 $x^2 + 2xy - 8y^2 + 2x + 14y - 3$ 之因式。

設 A 為複函數，必為三個一次多項式之積，再者，其二次項 $x^2 + 2xy - 8y^2$ ，必為此多項式中一次項之積。

用觀察法求得 $x^2 + 2xy - 8y^2 = (x + 4y)(x - 2y)$ 。

故設 A 為複函數，則必有二數 l 及 m ，可使

$$x^2 + 2xy - 8y^2 + 2x + 14y - 3$$

$$= (x + 4y + l)(x - 2y + m).$$

$$\text{而原式} = x^2 + 2xy - 8y^2 + (l + m)x + (4m - 2l)y + lm. \quad (1)$$

但欲使 (1) 為恆等式，必存 (§ 235)，

$$\text{即 } \begin{cases} l + m = 2 \\ 4m - 2l = 14 \\ lm = -3 \end{cases} \quad (2)$$

從 (2) 得 (3)，從 (3) 得 $l = -1, m = 3$ 。此種值滿足 (4)，因 $-1 \cdot 3 = -3$ 故也。

故 $x^2 + 2xy - 8y^2 + 2x + 14y - 3 = (x + 4y - 1)(x - 2y + 3)$ 。

註。此例示此類複函數之例外情形。設 A 無其他變數，僅以任其他變數為參數，則 A 變為實函數；因 $l = -1, m = 3$ 必不能滿足 (4) 故也。

此法可應用於三變數之齊次二次函數。

例如，欲析 $x^2 + 2xy - 8y^2 + 2xz + 14yz - 3z^2$ 之因式，可設

$$x^2 + 2xy - 8y^2 + 2xz + 14yz - 3z^2 \equiv (x + 4y + lz)(x - 2y + mz),$$

依上法行之，又得 $l = -1, m = 3$.

例 2. 析 $2x^2 - 7xy + 3y^2 + 5xz - 5yz + 2z^2$ 之因式。

例 3. 證明 $x^2 - y^2 + 2x + y - 1$ 為質函數。

- 447 n 次多項式。前已證明各二次多項式 $a_0x^2 + a_1x + a^2$ ，為一次因式之積。實則 x 之各次多項式，亦同樣真確，惟無求此種因式之一般法則存在而已；換言之。

定理。凡 x 之 n 次多項式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

俱為 n 個一次因式之積，即 n 個二項式 $x - \beta_1, x - \beta_2,$

$\dots, x - \beta_n$ ，可使

$$f(x) \equiv a_0(x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n).$$

此定理之證明見後。

- 448 系。二變數 x 與 y 之 n 次齊次式，為 n 個 x 與 y 之一次齊次因式之積。

例如，齊次式 $a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3$ ，可用 x/y 代於形式 $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ 中，再以 y^3 乘其結果而導出。

但由 § 447, $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \equiv a_0(x - \beta_1)(x - \beta_2)$

$(x - \beta_3)$ 若以 $\frac{x}{y}$ 代 x 於此恆等式中，再以 y^3 乘其二端，則得

$$a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3 \equiv a_0(x - \beta_1y)(x - \beta_2y)(x - \beta_3y).$$

習 題 XIX

析下列諸式之因式：

1. $x^2 - 14x + 48.$

2. $x^2 - 21x - 120.$

3. $5x^2 - 53x - 22.$

4. $16x^2 + 64x + 63.$

5. $64x^2 - 21x + 2.$

6. $12x^2 + 20xy - 8y^2.$

7. $x^2 - 13x + 36$. 8. $x^3y - 3x^2y^2 - 18xy^3$.
 9. $x^2 - 3x + 3$. 10. $3x^2 + 2x - 3$.
 11. $x^2 - 4xy - 2y^2$. 12. $x^2 - 6xz = 9b^2 - 18zb$.
 13. $abx^2 - (a^2 + b^2)x - (a^2 - b^2)$.
 14. $x^2 + bd + dx + bx + ax^2 + cdx$.
 15. $x^2 - 8xy + 15y^2 + 2x - 4y - 3$.
 16. $x^2 + 3xy + 2y^2 + 3zx + 5yz + 2z^2$.

餘式定理與綜合除法之應用

藉餘式定理求因式。令 $f(x)$ 表 x 之多項式，由餘式定理 (§415)，設 b 表能使 $f(b) = 0$ 之一數，則 $x - b$ 為 $f(x)$ 之一因式，有時可用觀察法求得如此之數 b 。

例。析 $f(x) = x^3 - 5x + 4$ 之因式。

1 + 0 - 5 + 4 | 1 因 $f(1) = 1 - 5 + 4 = 0$ ，故 $x - 1$ 為 $f(x)$ 之因式。

$$\begin{array}{r} \\ \underline{1} \quad \underline{1} \quad \underline{4} \\ 1 \quad 1 \quad -4 \quad 0 \end{array} \text{ 以 } x-1 \text{ 除 } f(x) \text{ 得商 } x^2+x-4 \text{ 故 } f(x) = (x-1)(x^2+x-4)$$

註。如上例，察知 $f(x)$ 之係數之代数和為 0，則 $x - 1$ 為 $f(x)$ 之因式。

整係數多項式。設欲求整係數多項式 $f(x)$ 之因式。通常 450 最好先查考其可有整係數之一次任何因式。此種因式，常可藉以下之原則求得 (§§ 451, 452)。

整係數之多項式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ，可有形 451 $x - b$ 之因式，此處 b 為整數。設其如是，則 b 必為 $f(x)$ 之常數項 a_n 之因數。

例如，令 $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ 。設欲使 $x - b$ 為 $f(x)$ 之因式，則須有 (§ 415)，

$$f(b) = a_0b^3 + a_1b^2 + a_2b + a_3 = 0.$$

故 $(a_0b^2 + a_1b + a_2)b = -a_3$

因 $a_0b^2 + a_1b + a_2$ 為整數。故 b 為 a_3 之因數。

故一切如此之因式 $x-b$ ，可如下例求之。

例 求 $f(x) = 3x^3 - 8x^2 - 13x - 11x^2 - 10x - 6$ 之因式。
常數項 -6 之因數，為 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ ，設欲使 $x-b$ 為 $f(x)$ 之因式，則 b 須有此諸值之一。用綜合除法試驗 b 之諸值如下：

$\begin{array}{r} 3 \quad -3 \quad -13 \quad -11 \quad -10 \quad -6 \quad \quad -1 \\ \underline{-3 \quad +6 \quad +7 \quad +4 \quad +6} \\ 3 \quad -6 \quad -7 \quad -4 \quad -6 \quad 0 \quad \quad -1 \\ \underline{-3 \quad +9 \quad +2 \quad +6} \\ 3 \quad -9 \quad -4 \quad -6 \quad 0 \quad \quad 3 \\ \underline{-3 \quad +9 \quad 0 \quad +6} \\ 3 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \end{array}$	<p>因 $f(1) \neq 0$，則 $x-1$ 非其一因式，故試驗 $x-(-1)$ 或 $x+1$ 此。除法簡其除盡，得商 $Q_1 = 3x^2 + 6x + 7x + 6 = 7x^2 + 4x + 6$，而餘式為 0。故 $x+1$ 為 $f(x)$ 之因式，而 Q_1 為其餘因式之積。</p>
---	---

次欲析 Q_1 之因式，亦可證明其能用 $x+1$ 除盡，得商

$$Q_2 = 3x^2 + 2x - 6 = (x+1)(3x-6)$$

欲將 Q_2 析因式，其常數項仍為 -6 ，繼續試驗 $x+1, x-2, x+2$ ，但所得各餘式皆不為 0，故此類式無一為其因式，但試驗 $x-3$ ，這能除盡 Q_2 ，得商 $Q_3 = 3x+2$ ，故

$$f(x) = (x+1)^2(x+3)(3x+2)$$

452 以諸系數之有理數 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ，可有形如 $ax-b$ 之因式，若 a 與 b ，皆為公因數之係數。設其如是，則 a 須為 a_0 之因數，而 b 須為 a_n 之因數。此定理含 § 46 之定理。

例如，令 $f(x) = 6_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ 。

設欲使 $ax-b$ 或 $a(x-\beta/a)$ 為 $f(x)$ 之一因式，由 § 416，則必有

$$f\left(\frac{\beta}{a}\right) = a_0\left(\frac{\beta}{a}\right)^3 + a_1\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 + a_2\left(\frac{\beta}{a}\right) + a_3 = 0$$

$$\text{故 } a_0\beta^3 + a_1\beta^2 + a_2\beta + a_3a = 0 \tag{1}$$

$$\text{從 (1) 得 } a_0\beta^3 = -(a_1\beta^2 + a_2\beta + a_3a) \tag{2}$$

因 $a_1\beta^2 + a_2\beta + a_3a$ 為 a 之因數，故 a 為 $a_0\beta^3$ 之因數，但 a 與 β^3 無公因數 (§ 451, 2)。故 a 為 a_0 之因數 (§ 402 註)。

$$\text{又從 (1)，} a_0\beta^3 + a_1\beta^2 + a_2\beta + a_3a = 0 \Rightarrow a_0\beta^3 = -(a_1\beta^2 + a_2\beta + a_3a) \tag{3}$$

理由同前，故決定 β 為 a_0 之因子。

故一切如此之因式 $ax - \beta$, 可如下例求得之:

例. 析 $f(x) = 6x^3 + 5x^2 + 3x - 2 = (3x - 2)$ 之因式.

設欲使 $ax - \beta$ 為 $f(x)$ 之因式, 則 a 須有諸值 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ 之一, 而 β 須有諸值 $\pm 1, \pm 2$ 之一; 故 β/a 須有諸值 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}$ 之一.

就 β/a 之各值, 可試以 $a = \beta$, 依綜合除法以 $x - \beta/a$ 除 $f(x)$, 若餘數為0, 則 $ax - \beta$ 為 $f(x)$ 之因式, 而 Q/c 為其餘因式之積 (§ 412, 4).

$$\begin{array}{r}
 6 \quad +5 \quad +3 \quad -2 \quad -2 \quad | \quad -1/2 \\
 \underline{-3 \quad -1 \quad -1 \quad 2} \\
 6 \quad +2 \quad +2 \quad -4 \quad 0 \\
 3 \quad +1 \quad +1 \quad -2 \quad | \quad 2/3 \\
 \underline{2 \quad +2 \quad -2} \\
 3 \quad +3 \quad +3 \quad 0 \\
 1 \quad +1 \quad +1
 \end{array}$$

原用 $x-1, x+1, x-2, x+2$ 試驗, 無一能除盡 $f(x)$, 惟 $x-1/2$ 能之, 得商 $Q_1/2 = 6x^2 + 3x^2 + 2x - 2$, 故 $2x+1$ 為 $f(x)$ 之一因式, 而其餘因式之積為 $Q_1/2 = 3x^2 + x^2 + x - 2$.

次進行析 $Q_1/2$ 之因式, 設欲使 $ax - \beta$ 為一因式, 則 β/a 須有諸值 $\pm 3, \pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{2}$ 等之一, 但已知 $x-1, x+1, x-2, x+2$ 非其因式, 因俱非 $f(x)$ 之因式故也. 試以 $x-3, x+3$ 皆不能除盡 $Q_1/2$; 惟 $x-1$ 能之, 得商 Q_2 為 $3x^2 + 3x + 3$, 故 $3x-2$ 為 $Q_1/2$ 之因式, 其餘因式之積為 $Q_2/3 = x^2 + x + 1$, 故

$$f(x) = (2x + 1)(3x - 2)(x^2 + x + 1).$$

註. 以 $x-b$ 或 $x = \beta/a$ 行除法, 當可在除法完竣以前, 明知其不能除盡.

例如, 此處所示之計算, 且足證明 $x+2$ 不能整除 $5x^3 - 4x^2 + x + 8$.

$$\begin{array}{r}
 5 \quad (-4) \quad +1 \quad +8 \quad | \quad 2 \\
 \underline{10} \\
 5 \quad \frac{10}{5} \\
 3 \quad +1 \quad +1 \quad +2 \quad | \quad 1/3 \\
 \underline{1} \\
 3 \quad +3 \quad +3 \quad 0
 \end{array}$$

因除後 $3x^2$ 已得 Q 之最高係數6, 而被除式之末項係數1與8, 俱為正數, 故 Q 及 R 之其餘係數, 必須為正, 於是 R 不為0.

同理, 從前處所示之計算, 可斷定 $x+1$ 不能整除 $5x^3 - 4x^2 + x + 8$, 因在計算中繼續之數, 或2或3, 或5, 為一數, 而致 Q 及 R 之其餘係數, 俱為分數, 於是 R 不為0.

454 從 § 452, 多項式 $f(x) = x^n + \dots + a_n$ 之首項係數為 1, 其他係數俱為整數者, 關於 x 之有理分數值, 不為 0.

因設 $f(\beta/a) = 0$, 則 $ax - \beta$ 必能除盡 $f(x)$, 因此而 a 必為 $f(x)$ 之因數, 此惟於 $a = \pm 1$ 時可能也.

455 多項式析因式與解方程. 從 § 350, 分解多項式 $f(x)$ 為一次因式之問題, 與解方程 $f(x) = 0$ 相同.

例 1. 解 $f(x) = 2x^4 + x^3 - 17x^2 - 16x + 12 = 0$.

由 § 452 求得 $f(x) = (2x-1)(x-2)^2(x-3)$.

故方程 $f(x) = 0$ 與以下四方程等值:

$$2x-1=0, \quad x+2=0, \quad x+2=0, \quad x-3=0.$$

故 $f(x) = 0$ 之根為 $1/2, -2, -2$, 及 3 .

例 2. 解 $x^3 + 3x^2 = 10x + 24$.

移項, $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$.

析因式, $(x+2)(x-3)(x+4) = 0$.

故所求之根為 $-2, 3$ 及 -4 .

習 題 XX

析以下各式之因式:

1. $x^3 - 7x + 6$.
2. $x^3 + 6x^2 - 11x + 6$.
3. $x^4 - 1(x^3 + 15x^2 - 50x + 24)$.
4. $x^4 - 2x^2 + 3x - 2$.
5. $6x^3 - 13x^2 - 14x - 3$.
6. $2x^3 - 5x^2y - 2xy^2 + 2y^3$.
7. $2x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x - 5$.
8. $4x^6 - 41x^4 + 46x^2 - 9$.
9. $6x^5 + 19x^4 + 22x^3 + 23x^2 + 16x + 4$.
10. $5x^6 - 7x^5 - 8x^4 - x^3 + 7x^2 + 8x - 4$.

解下列各方程:

11. $x^2 - 4x - 12 = 0$.
12. $6x^2 + 7x + 2 = 0$.
13. $x^2 - 5x = 14$.
14. $x^2 + 6x = 2$.
15. $x^3 - 8x^2 + 26x = 24$.
16. $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3 = 0$.
17. $x^3 - 1 = 0$.
18. $10x^3 - 9x^2 - 3x + 2 = 0$.

習 題 XXI

以下各式，可用本章所說明之法則析因式，實行析因式，須盡其可能，不可引入無理數或虛數係數。

1. $6xy+15x-4y-10.$
2. $a^3bc-ac^3d-ab^3d+bc^3d^2.$
3. $a^3(a-b)+b^3(b-a).$
4. $a^5-81ab^4.$
5. $a^4b-a^2b^3+a^3b^3-ab^4.$
6. $3abx^2-6axy+bxy-2y^2.$
7. $3x^6-192y^6.$
8. $(x^2+x)^2-8.$
9. $61^6y^3-y^{18}.$
10. $x^2-(a-b)x-ab.$
11. $x^{2n}-3x^n-18.$
12. $x-x^2+42.$
13. $3x^4+8x^3-24x-24.$
14. $x^6-9x^3+8x^2-72.$
15. $2xc-a^2+x^2-2ab+c^2-b^2.$
16. $x^2(x^2-20)+84.$
17. $a^3-2ab+b^2-5a+5b+6.$
18. $x^4-10c^2y^2+9y^4.$
19. $6x^2-7xy-5y^2-4x-2y.$
20. $x^4+(a^2+y^2)x^2+a^2b^2.$
21. $4(xz+uy)^2-(x^2-y^2+z^2-u^2)^2.$
22. $14x^2+19x-3.$
23. $1+19y-63y^2.$
24. $xy^2+55x^2y^2+204x^2y.$
25. $a^4-18a^2b^2c^2+81b^4c^4.$
26. $(x^2-7)^2+6x^2-42x.$
27. $8(x+y)^3-27(x-y)^3.$
28. $(x-2y)x^2-(y-2x)y^2.$
29. $x^2+a^2-bx-ab+2ax.$
30. $x^5-y^5-(x-y)^5.$
31. $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1.$
32. $b^4+b^2+1.$
33. $2c^2+7xy+3y^2+9x+2y-5.$
34. $a^2+1.$
35. $x^2-xy-2y^2+4xz-5yz+3z^2.$
35. $41^2+31^2b^2+9b^4.$
37. $x^2-8ax-10ab-25b^2.$
38. $x^6+x^4+1.$
39. $(x^2+2x-1)^2-(x^2-2x+1)^2.$
40. $(ax+by)^2-(bx+ay)^2.$
41. $x^3-ax^2-b^2x+ab^2.$
41. $x^4+bx^3-a^2x-a^3b.$
43. $a^2-9b^2+12bc-4c^2.$
44. $8x^3+12a^2+6a+1.$
45. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1.$
46. $(ax+by)^2+(bx-ay)^2.$
47. $4x^4+4x^3-37x^2-37x^2+9x+9.$
48. $x^4-4x+3.$
49. $x^2+51x+6a^2-ab-b^2.$
50. $15x^2+29c^2-8x-12.$
51. $abcx^2+(a^2b^2+c^2)x+abc.$
52. $2x^3-ax^2-51^2x-2a^3.$

53. $(a-b)x^2+2ax+(a+b)$, 54. $x^{15}-y^{16}$.
 55. $x^4-6x^3+7x^2+6x+8$, 56. $4x^3-3x-1$.
 57. $3x^5-10x^4-8x^3-3x^2+10x+8$,
 58. $5x^4+24x^3-16x^2-11x+21$,
 59. $a^2bc+ac^2+cc^2-a^2d-cd-d^2$,
 60. $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$

VII. 最高公因式與最低公倍式

最高公因式

456 最高公因式. 設 A, B, \dots 表一或多變量如 x 或 x 與 y 之有理整函數.

設 A, B, \dots 無公因式, 則稱為互質, 但設有任何公因式, 則必有一個其次數最高; 此名稱為最高公因式 (H.C.F.).

例如, x^2+y^2 與 $x+y$ 為互質.

但 $4xyz^3, 8xz^4$ 與 $4x^2yz^2$ 有公因式 $x, z, z^2, z^3, 4xz^2, xz^3$, 而其最高公因式為 xz^3 .

457 註 1. 此處不計數字公因式.

2. 互質之二或多函數, 常稱其 H.C.F. 為 1.

3. A 與 B 之 H.C.F. 之數值, 未必為 A 與 B 之整數值之最大公約數. 例如 $(2x+1)x$ 與 $(x-1)x$ 之 H.C.F. 為 x ; 而當 $x=4$ 時, $(2x+1)x$ 與 $(x-1)x$ 之值為 36 與 12, 而 36 與 12 之最大公約數, 不為 4 而為 12.

458 定理 1. A, B, \dots 之 H.C.F. 為 A, B, \dots 之一切不同公質因式, 在諸函數中所含最低次幂之乘積.

設假定各函數 $1, 2, \dots$ 係以其不同質因式之乘積, 而如 § 430, 假定其關於各質因式之指數之式, 則此定理之與確甚明.

例1. xyz^5, xz^4 與 x^2yz^3 之不同公質因式為 x 及 z , 而在
此各函數中 x 與 z 之最低幂為 x 與 z^3 , 故其 H.C.F. 為 xz^3 .

設以質因式表一已知函數有多種方法可能, 則此定理所述
之方法, 對應於表面數 A, B, \dots 之各種方法, 將可得多種結果, 而
最高公因式, 亦將多於一個矣, 此宜注意.

此定理之應用. 當已知函數能完全拆置式時, 則其 H.C.F. 459
可藉 § 453 之定理, 即得算出.

例1. 求 $x^5y^2 - 6x^4y^2 + 9x^3y^2$ 與 $x^4y - 9x^2y^2$ 之 H.C.F.

$$x^5y^2 - 6x^4y^2 + 9x^3y^2 = x^3y^2(x-3y)^2$$

及

$$x^4y - 9x^2y^2 = x^2y(x-3y)(x+3y)$$

故 H.C.F. 為 $x^3y(x-3y)$.

例2. 求以下諸式之 H.C.F.

1. $2x^4y^2z^5, 8x^5y^2z, \text{ 與 } 4x^3y^4$.

2. $x^2 - y^2, x^2 + 2xy + y^2$ 與 $x^2 + y^2$.

3. $x^2 - x - 6, x^2 + 6x + 8, \text{ 與 } x^2 + 5x + 6$.

4. $x^2 - 6x^2 + 11x - 6$ 與 $2x^2 - 9x^2 + 7x + 6$.

設諸函數 A, B, \dots 之一之質因式為已知, 則其中何者為一切 460
其他函數之因式, 可用除法或餘式定理求之. 其 H.C.F. 可
藉 § 458 求得.

例1. 求 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ 與 $\phi(x) = x^2 - 3x^2 + 5x^2 - 8x + 5$ 之 H.C.F.

由觀察法得 $f(x) = (x-1)(x-2)$, 試驗 $x=1$ 與 $x=2$ 於
 $\phi(x)$ 則得 $\phi(1) \neq 0$ 而 $\phi(2) = 0$ 故 H.C.F. 為 $x-2$.

例2. 求 $f(x) = x^2 + 4x + 4$ 及 $\phi(x) = x^2 + 4x + 4$ 之 H.C.F.

因 $f(x) = (x+2)^2$, 故不須判定 $x+2$ 是否為 $\phi(x)$ 之

一因式，又須判定其有此因式一次或二次，以 $x+2$ 除 $\phi(x)$ （綜合除法），得 $Q_1 = x^2 + 3x + 2$ 而 $R_1 = 0$ ；再以 $(x+2)$ 除 Q_1 ，得 $Q_2 = x + 1$ 而 $R_2 = 0$ 。故 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 之H.C.F. 爲 $(x+2)^2$ 。

例3. 求下列諸式之H.C.F.

1. $x^2 + x - 6$ 與 $2x^2 + 7x + 3$.

2. $x^2 + 5x + 6$ 與 $x^2 + 6x + 13x^2 + 16x + 12$.

3. $(x-1)^2(x-3)^2(3x+1)^2$ 與 $x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$.

461 定理 2. 令 A, B 表二已知整函數， M 及 N 表任何二整函數或常數，則 A 與 B 之各公因式，爲 $MA + NB$ 之因式。

因令 F 爲 A 與 B 之公因式。

則 $A \equiv GF$ 及 $B \equiv HF$,

此處 G 與 H 爲整式。

故 $MA + NB \equiv M \cdot GF + N \cdot HF \equiv (MG + NH)F$,

此處 $MG + NH$ 爲整式。

故 F 爲 $MA + NB$ 之因式 (§ 424)。

462 此定理之應用。 x 之同次二多項式，求其H.C.F. 之問題用此定理可化爲低次簡單多項式而析其因式。

例1. 求 $A = x^2 + 2x - 4$ 與 $B = x^2 + x - 3$ 之H.C.F.

從 A 減 B ，得 $A - B = x - 1$ 。

故 $x - 1$ 爲 A 與 B 僅備可能之公因式。

但當 $x = 1$ 時，因 A 不爲零，知 $x - 1$ 非 A 之因式。

故 A 與 B 爲互質。

例2. 求 $A = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ 與 $B = 3x^2 - 2x^2 - 7x - 2$ 之H.C.F.

1. 先以可使已知結果有相同首項之數乘 A 與 B ，即以3乘 A 以2乘 B 。從 $3A$ 減 $2B$ ，得

$$3A - 2B = -5x^2 + 5x + 10 = -5(x^2 - x - 2) = -5(x+1)(x-2).$$

故 A 與 B 僅備可能之公因式爲 $x+1$ 及 $x-2$ 。依餘式定

理,知二者皆為 A 與 B 之因式,

故 A 與 B 之 H.C.F. 為 $(x+1)(x-2)$.

2. 亦可加 A 與 B , 得

$$A+B=5x^2-5x^2-10x=5x(x^2-x-2)=5x(x+1)(x-2).$$

顯然可見 x 非 A 或 B 之因式, 故如前只須試驗 $x+1$ 與 $x-2$,

例3. 求以下之 H.C.F.

1. $x^4-x^2+3x^2-4x-12$ 與 $x^4-x^2+2x^2+3x-22$.

2. $6x^2+25x^2+5x+4$ 與 $4x^2+15x^2-2x+8$.

定理3. 設四個整係數 A, B, Q, R , 有 $A \equiv QB + R$ 之關係, 則 A 與 B 之公因式, 相同於 B 與 R 之公因式.

$$\text{今} \quad A \equiv QB + Q. \quad (1)$$

$$\text{故} \quad A - QB \equiv R. \quad (2)$$

從 (2) 依 § 461, A 與 B 之每一公因式為 R 之因式, 因此又為 B 與 R 之公因式.

反之, 從 (1) 依 § 461, B 與 R 之每一公因式, 為 A 之因式, 因此又為 A 與 B 之公因式.

故 A 與 B 之公因式, 相同於 B 與 R 之公因式

含 x 之二多項式求其 H.C.F. 之一般法則, 當以 x 之多項式除他之多項式時, 其被除式, 除式, 商式, 與餘式可用恆等式 $A \equiv QB + R$ 連結, 故從 § 403 得

被除式與除式之公因式, 常相同於除式與餘式之公因式。

利用此事, x 之任何二多項式, 其 H.C.F. 常可求得, 此法與算術中求二整數之最大公約法相似, 於下之方法敘述之, 此處 A 與 B 表已知多項式, 設其次數不同, 則 A 為高次式.

法則。以 B 除 A ，令其商為 q ，餘式為 R_1 。

再以 R_1 除 B ，令其商為 q_1 ，其餘式為 R_2 。

復以 R_2 除 R_1 ，如此繼續演算，以每次所得餘式除前次餘式，直至餘式不含 x 為止。

設最後餘式不為零，則 A 與 B 無公因式。若為零，則最後之餘式，即為 A 與 B 之 H.C.F.

蓋為明確計，假定最後餘式為 R_2 ，則依 (1) $R_1 \neq 0$ ，此處 c 表一常數不為零，或 (2) $R_2 = 0$ ，當有

$$(1) A \equiv qB + R_1 \quad \text{或} \quad (2) A \equiv qB + R_1$$

$$B \equiv q_1 R_1 + R_2$$

$$B \equiv q_1 R_1 + R_2$$

$$R_1 \equiv q_2 R_2 + c$$

$$R_1 \equiv q_2 R_2$$

(1) 此時 A 與 B 無公因式。

因從恆等式 (1) 依 § 463， A 與 B 及 B 與 R_1 之公因式相同， B 與 R_1 及 R_1 與 R_2 亦如此， R_1 與 R_2 及 R_2 與 c 亦如是。

故各對兩數 A 與 B ， B 與 R_1 ， R_1 與 R_2 ， R_2 及 c 皆具有相同公因式。

但 c 為常數 (不為零)， R_2 與 c 無公因式，故 A 與 B 無公因式。

(2) 此時 R_2 為 A 與 B 之公因式。

因 $R_1 \equiv q_1 R_2 + R_2$ 之每一因式，為 R_2 與 R_2 之公因式，而 R_2 本身為次數最高之公因式。

但除 R_2 與 R_2 及 A 與 B 之公因式相同， R_1 與 R_2 中所公有次數最高之因式，亦即 A 與 B 中所公有次數最高之因式，故 R_2 為 A 與 B 之最高公因式。

例 1. 求 x^2+x+1 與 x^3+x^2+2x+3 之最高公因式，
將除式於被除式之左，則有

$$B = x^2+x+1 \mid x^3+x^2+2x+3 \mid x=Q$$

$$R_1 = \frac{x^3+x^2+x}{x^3+x^2+x} \mid x+3 \mid x^2+x+1 \mid x-2=Q_1$$

$$\frac{x^2+3x}{x^2+x+1}$$

$$\frac{-2x+1}{-2x-1}$$

$$R_2 = \frac{1}{1}$$

因最後餘式 R_2 不為零，故 x^2+x+1 與 x^3+x^2+2x+3 無公因式。

例 2. 求 x^3+x^2+2x+2 及 x^3+2x^2+3x+2 之 H.C.F.

如例 1. 排列算草，得

$$B = x^3+x^2+2x+2 \mid x^3+2x^2+3x+2 \mid 1$$

$$R_1 = \frac{x^3+x^2+2x+2}{x^3+x^2+2x+2} \mid x^3+2x^2+3x+2 \mid x$$

$$R_2 = \frac{x^2+x^2}{2x+2} \mid x^2+x \mid x/2$$

$$R_3 = 0$$

此處能以 R_2 整除， R_3 為 0，故棄去 R_2 中之因數 2，而有
H.C.F. = $x+1$.

此處初次實際證明——關於一變數之函數——要二整函數 466
有任何公因式則必有一最高公因式；因每 § § 463, 465 中，未曾
如 § 458 假定已知整函數以其質因式表之，只有一法故也。

就 § 465 之證明中觀察之，可證明 (6) 467

1. 在 A, B, R_1, R_2, \dots 中，每二連續函數及 A 與 B 有
相同 H.C.F.

2. A 與 B 之每一公因式即為 A 與 B 之 H.C.F. (參閱 § 461)

此法之節略。 1. 設 A 與 B 之任何質因式一舉而知，即可 468
先抽出此質因式，再求其結果式之 H.C.F. 此所得之結果，乘

以最先抽出之因式，為A與B所共有者，即為A與B之H.C.F. (§458)；

在A, B, R₁, R₂, ... 中向二連續剩數之H.C.F., 可仿前法進行，因每二個如此函數，有H.C.F. 與A, B之H.C.F. 相同 (§467)。

例如， $A = x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x$ 與 $B = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x$ 顯然可見其有公因式x抽出之，得 $x^3 + x^2 + 2x + 2$ 與 $x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ ，其H.C.F. 已求得為 $x + 1$ (見 § 465 例 2)。故A與B之H.C.F. 為 $x(x + 1)$ 。

又在例2中，因x為R₁之因式，而非B之因式故x非B與R₁之H.C.F.之因式，從而非A與B之H.C.F.之因式故可棄去R₁之因式x，而以其餘因式 $x + 1$ 除B，如是可減少除法之次數。

2. 在任何除法中，可用一因數乘或除其餘式或被除式或任何中間餘式；因其影響所及，至多為其餘式少一因數 (§403)；而不及其H.C.F. 為也。當已知係數為有理數時，此法可避免分數係數。

3. 用分數係數法尤為便利。

例 1. 求 $A = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ 與 $B = 2x^4 + 5x^3 - x - 1$ 之H.C.F. 以2乘A，且用分數係數法，得

$$\begin{array}{r}
 2+5-1-1 \mid 2+6+ 4+ 6+2 \mid 1 \\
 \underline{2+5-1-1} \\
 1+ 6+ 7+2 \\
 2 \\
 \underline{2+10+14+4} \mid 1 \\
 2+ 5- 1-1 \\
 \underline{(5)5+15+5} \\
 1+ 3+1 \mid 3+5-1-1 \mid 2-1 \\
 \underline{2+5+2} \\
 -1-3-1 \\
 \underline{-1-3-1}
 \end{array}$$

故A與B之H.C.F. 為

$$x^2 + 3x + 1.$$

此種計算可歸列如下：

2+5-1-1	2+6+4+0+2	1+1
2+6+2	2+5-1-1	
-1-3-1	1+5+7+2	
-1-3-1	2+10+14+4	
	2+5-1-1	
	5+15+5	
	1+3+1	2-1

例 2 求以下之 H.C.F.

$$2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 1 \text{ 與 } 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 1.$$

注意。設 A 與 B 之係數為有理數，則其 H.C.F. 之係數亦為有理數；設 A 與 B 之係數為實數，則其 H.C.F. 亦為實數。

此定理有重要結論，將述其一二於後，用此以求 H.C.F. 常能節省勞力。
 例。求 $x^3 - 2$ 與 $x^3 + x^2 - 5x + 6$ 之 H.C.F.。
 此二多項式如非互質，即其 H.C.F. 為 $x^2 - 2$ ；因 $x^2 - 2$ 之因式 $x + \sqrt{2}$ 與 $x - \sqrt{2}$ ，有無理係數，故俱不能為 H.C.F.。
 但由試驗而知 $x^2 - 2$ 不能整除 $x^3 + x^2 - 5x + 6$ ，故此一式為互質。

多於二個之 x 多項式之 H.C.F. 可依下法求得。

470

先求二多項式之 H.C.F. 次求此 H.C.F. 與第三多項式之 H.C.F. 餘類推。最後結果為所求之 H.C.F.

例如，設 D_1 為 A 與 B 之 H.C.F.，而 D_2 為 D_1 與 C 之 H.C.F.，則 D_2 即為 A, B, 與 C 之 H.C.F.

因(1), D_2 爲 D_1 與 C 之因式; 而 D_1 爲 A 與 B 之因式, 故由 § 427, D_2 爲 A, B 與 C 之一因式.

(2) A, B 與 C 之每一公因式, 卽爲 D_1 與 C 之一公因式, 故亦爲 D_2 之一因式 (§ 367), 故 D_2 爲 A, B 與 C 之最高公因式.

從 § 453 可得相同之結論.

例. 求 $A = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$, $B = 2x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 7x + 2$, 與 $C = 3x^4 - x^3 - x^2 - 2$ 之 H.C.F.

由 § 465, 得 A 與 B 之 H.C.F. 爲 $D_1 = x^2 + x - 2$; 而 D_1 與 C 之 H.C.F. 爲 $x - 1$.

故 A, B 與 C 之 H.C.F. 爲 $x - 1$.

471. 含多變數之多項式之 H.C.F. 求二個如此多項式之 H.C.F., 其一般問題在此處討論太覺複雜. 然二多項式之爲二變數 x 及 y 之齊次函數者, 其 H.C.F. 卽可藉 § 465 所述之法求得.

習 題 XXII.

求以下之 H.C.F.

1. $10x^3y^2z^5, 4x^5yz^3, 6x^4y^3z^6$, 與 $8x^4y^4z^4u$.
2. $(a+b)^2(a-b), (a+b)(a-b)^2$, 與 a^3b-ab^3 .
3. y^4+y^2+1 與 y^2-y+1 .
4. a^2-1, a^2+2a+1 , 與 a^3+1 .
5. x^3-1 與 x^3+ax^2-ax-1 .
6. x^4-y^4, x^5+y^5 , 與 $x^3+x^2y+xy^2+y^3$.
7. x^2+5x+6, x^2+x-2 , 與 $x^2-14x-32$.
8. $(x-1)(x-2)$ 與 $15x^3-15x^2+8x^2+6x-4$.
9. x^3-1 與 x^3-4x^2-4x-5 .
10. $(x^2-1)^2(x+1)^2$ 與 $(x^3+5x^2+7x+2)(x^2-6x-7)$.
11. $(x-1)^2(x-2)^2$ 與 $(x^3-2x+2)(2x^3-5x^2+5x-8)$.
12. $2x^3-3x^2-11x+6$ 與 $4x^3+3x^2-9x+2$.
13. x^3-2x^2-2x-3 與 $2x^3+x^2+x-1$.

14. $3x^2 + 2x^2 - 19x + 6$ 與 $2x^3 + x^2 - 13x + 6$...
15. $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$ 與 $2x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x - 1$.
16. $3x^3 - 19x^2 + 23x - 21$ 與 $6x^3 + x^2 - 44x + 21$.
17. $3x^3 + 8x^2 - 4x - 15$ 與 $6x^4 + 10x^3 - 3x^2 - 2x + 5$.
18. $6x^5 + 7x^4 - 9x^3 - 7x^2 + 3x$ 與 $6x^5 + 7x^4 + 3x^3 + 7x^2 - 3x$.
19. $6x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 3$ 與 $2x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 3x + 9$.
20. $6x^4 - 4x^3 - 11x^2 - 3x - 1$ 與 $4x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 3x - 5$.
21. $x^3 - x^2 - 4x^2 - 3x - 2$ 與 $5x^3 - 3x^2 - 8x - 3$.
22. $3x^3 - x^2 - 12x + 4$, $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, 與 $7x^3 + 19x^2 + 8x - 4$.
23. $x^3 + ax^2 - 3x - 3a$, $x^3 - x^2 - 3x + 3$, 與 $x^3 + x^2 - 3x - 3$.
24. $7x^4y - 6x^3y^2 - 18x^2y^3 + 4xy^4$ 與 $14x^4y - 19x^3y^2 - 32xy^3 + 8y^4$.
25. $x(x-1)(x^2+4x^2+4x+3)$ 與 $(x-1)(x+3)(12x^2+x^2+x-1)$.
26. $4x^3 - 3x^2 - 3x + 9$ 與 $(2x^2 - x - 3)(2x^2 - 7x + 6)$.

最低公倍式

最低公倍式。二以上整函數 A, B, \dots 之公倍式，即為 A, B, \dots 各函數能整除之整函數。

在如此公倍式中，必有次數最低之一式，是謂 A, B, \dots 之最低公倍式 (L.C.M.).

定理 1. 二以上整函數 A, B, \dots 之 L.C.M. 為 A, B, \dots 之一切不同質因式在各函數中具有最高乘數者之積。

此定理從下述事實而起， A, B, \dots 之公倍式，必含各函數 A, B, \dots 之質因式，其次數至少須如其函數中所有者；故須有定此及之一切此種因式，而其最低次之公倍式即 L.C.M. 為不在此外因式之一式。

此處略去因數(即數字因式)如前,而假定整函數以其不同質因式乘積之積表之,僅有一法.

474 用履帶法求L.C.M. 設能分解 A, B, \dots 為諸質因式,則應用上述定理,可立得其L.C.M.

例 1. 求 $3c^2y^2z, xy^4z^3$ 與 $2c^3yz^4$ 之L.C.M.

此處不同質因式在各函數中具最高乘係者為 x^5, y^4, z^5 ,故其L.C.M.為 $x^5y^4z^5$.

例 2. 求 $x^2y^2 - 4xy^2 + 4y^2$ 與 $x^2y - 4y$ 之L.C.M.

今 $x^2y^2 - 4xy^2 + 4y^2 = y^2(x-2)^2$ 與 $x^2y - 4y = y(x-2)(x+2)$ 故其L.C.M.為 $y^2(x-2)^2(x+2)$.

475 定理2. 二整函數 A 與 B 之L.C.M.,為以此二函數之H.C.F.

F. 除其積.

因令 D 表 A 與 B 之H.C.F.而令 A_1 與 B_1 表以 D 除 A 與 B 所得之商,使

$$A \equiv A_1 D \text{ 而 } B \equiv B_1 D.$$

設 M 表 A 與 B 之L.C.M.,則

$$M \equiv A_1 B_1 D \equiv AB/D.$$

因 A 與 B 之公倍式,顯然必含(1) A 與 B 所公有之一切質因式之積如 D ; (2) A 之不屬於 B 之一切質因式之積如 A_1 ; (3) B 之不屬於 A 之一切質因式之積如 B_1 ;而其最低公倍式除含此三因式外,別無其他因式.

476 系. 二整函數 A 與 B 之積,等於其L.C.M.與H.C.F.之積.

477 含 x 之二多項式求其L.C.M.之一般法則,從 §§465, 475, 由此二多項式 A 與 B 之L.C.M.,當可依下法得之.

欲求 A 與 B 之L.C.M.,可用 A 與 B 之H.C.F.除 A ,而以 B 乘其結果.

此法等於以A中一切質因式之未呈現於B者乘之，宜注意。

例。求 $x^3+3x^2+2x+3x+1$ 與 $2x^3+5x^2-x-1$ 之 L.C.M. 由 §465, 得 H.C.F. = x^2+3x+1 .

其次 $(2x^3+5x^2-x-1)/(x^2+3x+1) = 2x-1$

故其 L.C.M. 為 $(x^3+3x^2+2x+3x+1)(2x-1)$.

含 x 之二以上多項式之 L.C.M. 此可由下法得之。

478

先求二多項式之 L.C.M., 次求其結果與第三多項式之 L.C.M.

M. 如此進行, 最後結果為所求之 L.C.M.

此法從下述事實而來, 此方法中之各步驟, 等於將上次所得之 L.C.M., 以此次函數中諸質因式之未呈現於此 L.C.M. 者乘之。

例。求 $A = x^4+3x^3+2x^2+3x+1$, $B = 2x^3+5x^2-x-1$, 及 $C = 2x^3-3x^2+2x-3$ 之 L.C.M.

已得 A 及 B 為 L.C.M. 為 (§477)

$$M_1 = (x^4+3x^3+2x^2+3x+1)(2x-1).$$

次欲求 M_1 與 C 之 L.C.M.

由除法知 $2x-1$ 與 C 為互質, 而由 §465, 得 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 與 C 之 H.C.F. 為 x^2+1 .

且又 $C/(x^2+1) = 2x-3$.

故 M_1 與 C 之 L.C.M. 亦即 A, B, C 之 L.C.M. 為

$$M = (x^4+3x^3+2x^2+3x+1)(2x-1)(2x-3).$$

求 M_1 與 C 之 H.C.F. 之前, 不可將 M_1 之因式乘為一式, 宜注意。

習 題 XXIII

求以下之 L.C.M.

1. $3x-1, 9x^2-1, 9x^2+1$.

2. $(a+b)(a^3-b^3)$, 與 $(a-b)(a^3+b^3)$.

3. a^3+a^2+a, a^3-a^2 , 與 a^3-a^2 .

4. $(x^2-y^2)(x-y)^2, (x^2-y^2)(x-y)$, 與 $(x^2+y^2)^2$.

5. $x^2 - 3x + 2, x^2 - 5x + 6, \text{與 } x^2 - 4x + 3$.
6. $x^2 = (y+z)^2, y^2 = (z+x)^2, \text{與 } z^2 = (x+y)^2$.
7. $2x^2 + 3xy - 9y^2, 3x^2 + 8xy - 3y^2, \text{與 } 6x^2 + 11xy + 3y^2$.
8. $x^3 + x^2 + x + 1, \text{與 } x^3 - x^2 + x - 1$.
9. $2a^2x + 2x^2y + 3y^2x + 3a^2y, \text{與 } (2x^2 - 3a^2)y + (2a^2 - 8y^2)x$.
10. $8x^3 - 18xy^2, 3x^3 + 8x^2y - 6xy^2, \text{與 } 3x^3 - 2xy - 15y^2$.
11. $x^2 + y^2, x^2 - y^2, \text{與 } x^4 + x^2y^2 + y^4$.
12. $x^6 - 1, 3x^3 - 5x^2 - 3x - 5, \text{與 } x^6 - 1$.
13. $6x^3 + 27, 16x^4 + 26x^2 + 81, \text{與 } 6x^2 + 5x - 6$.
14. $x^3 - 4a^2, x^3 - 2x^2 + 4x + 8a^3, \text{與 } x^3 - 2ax^2 + 4a^2x - 8a^3$.
15. $x^2 + 2x, x^2 + bx + 2c + 2^2, \text{與 } x^3 + ax^2 - b^2x - ab^2$.
16. $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12), \text{與 } (x^2 + 5x + 6)(2x^2 - 3x - 5)$.
17. $(x^3 - 8)(27x^3 + 1), \text{與 } (2x^3 - 5x^2 + 10x + 4)(x^3 - x^2 - x - 2)$.
18. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6, 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2, \text{與 } 2x^3 + x^2 - 13x + 6$.
19. $x^4 + 5x^2 + 4x + 5, 2x^4 + x^3 + 10x^2 + 4x + 5, \text{與 } 2x^4 + x^3 + 7x^2 + 3x + 3$.
20. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2, 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 13x - 6, \text{與 } x^4 + 3x^3 + x^2 + 5x + 6$.

一變數函數之質因式與不可約因式

在下列定理中， A 與 B 表 x 之多項式。

基本定理。設 A 對於 B 為互質，則可求得二整函數 M 與 N 。

$$MA + NB = 1$$

對應用 § 465 法於 A 及 B ，則得不為 0 之常數 c 為最後餘式。

如 § 465, 設數 c 為第三餘式, 而用其說明之記法, 則有

1. $A \equiv qB + R_1$, 故

4. $R_1 \equiv A - qB$,

2. $B \equiv q_1R_1 + R_2$,

5. $R_2 \equiv B - q_1R_1$,

3. $R_1 \equiv q_2R_2 + c$,

6. $c \equiv R_1 - q_2R_2$.

以(5)中已知 R_2 之值代入(6), 合併 R_1 與 B 諸項, 再以(4)中已知 R_1 之值代入於其結果, 合併 A 與 B 諸項, 則得

$$\begin{aligned} c &\equiv R_1 - q_2R_2 \\ &\equiv (1 + q_1q_2)R_1 - q_2B \\ &\equiv (1 + q_1q_2)A - (q + q_1 + q_1q_2)B. \end{aligned}$$

以 c 除此最後兩等式之二邊, 因 c 為常數, 故 $(1 + q_1q_2)/c$ 與 $-(q + q_1 + q_1q_2)/c$ 俱為整函數, 書作 M 及 N , 即得

$$1 \equiv MA + NB,$$

此處 M 與 N 為整函數如定理所云。

當常數餘式 c , 比第三次除法早得或遲得時, 此定理仍可依

同法證明。

逆定理. 設 $MA + NB \equiv 1$, 此處 M 與 N 為整函數, 則 A 對於

B 為互質。

因 A 與 B 之公因式必為 $MA + NB$ 之一因式 (§ 461), 即為 1 之因式, 此為不可能故也。

下列諸定理, 為已證明之基本定理之主系結語。

定理 1. 設 A 對於 B 為互質, 而 B 能除盡積 AC , 則 B 可除盡 C .

因 A 對於 B 為互質, 可求得 M 與 N (§ 470), 使

$$MA + NB \equiv 1.$$

$$\text{故 } M \cdot AC + NC \cdot B \equiv C.$$

但 B 為 AC 與 B 之一因式, 故亦為 C 之因式 (§ 461)。

定理 2. 設 A 對於各函數 B, C 為互質, 則亦對於其積 BC 為互質。

因 A 對於 B 爲互質，可求得 M 與 N (§ 479)，使

$$MA + NB \equiv 1,$$

故

$$MC \cdot A + N \cdot BC \equiv C.$$

設 A 與 BC 有一公因式，則此公因式必含於 C 中 (§ 461)，但此爲不可能，因 A 對於 C 爲互質故也。

483 系。設 A 對於各函數 B, C, D 爲互質，則對於 $B, C, C \dots$ 之積亦爲互質。

因如前證明 A 對於 BC 爲互質。

又因 A 對於 BC 亦對於 D 爲互質，故對於積 B, C, D 爲互質，餘類推。

484 定理 3. 一複函數有一組且僅有一質因式。

因令 P 表此已知函數，而 n 表其次數。

設 P 爲複函數，則必有因式 A ，設 A 亦爲複式，則必有因式 B 。

如此繼續進行，終可得到一質函數；因此順次諸函數 P, A, B 之次數，從有限數 n 起逐次降低，而不能低於 1 故也。

令 F 表此質函數。此爲 P 之質因式之一 (§ 427)，而有 $P \equiv FM$ ，此處 M 爲整式。

同理，設 M 爲複函數，有一質函數 F' 存在，可使 $M \equiv F'M'$ ，故 $P \equiv FF'M'$ ，此處 M' 爲一整式。

如此繼續行，可達到結論爲有一組之質函數存在，其數不能超過 n ，可使

$$P \equiv F \cdot F' \cdot F'' \dots$$

故 P 至少有一組質因式。

尤有進者， P 僅能有如此一組因式。因假定

$$P \equiv FF'F'' \equiv G \cdot G' \cdot G'' \dots$$

此處 G, G', G'' 亦表質函數。

則 G 不能對於一切函數 $E, F'F'' \dots$ 爲互質，因設爲互質，則其積 P 爲互質 (§ 483)，然彼尚爲 P 之因式也。

設 G 對於 F' 非互質，則 G 與 F' 有一公因式。而 G 與 F' 俱爲質函數，則其公因式除其本身外不能公有含 c 之因式，故 G 與 F' 之差，而有 $G \equiv cF'$

最高公因式及互素因式

俱以 G 之值代入恆等式 $F \cdot F' \cdot F'' \dots = G \cdot G' \cdot G'' \dots$ ，而以 F 除其
 二端，得 $F' \cdot F'' \dots = G' \cdot G'' \dots$

正復用前理，即知 G' 與函數 $F' \cdot F'' \dots$ 之一至多僅有一數字因
 式之差。

依此進行，可達到結論爲一積函數 $G \cdot G' \cdot G'' \dots$ 與一積函數 $F \cdot F' \cdot F'' \dots$ 至多僅有一數字因式之差，或僅其次序在排列上不同耳。

系。一複函數以其諸不同質因式乘積之積表之，僅有一法 485

從恆等式 $P \equiv F \cdot F' \cdot F'' \dots$ ，發覺其積 $F \cdot F' \cdot F'' \dots$ 中各組相等
 因式，以此等因式之一之對應乘積表之，則立得此系。

不可約因式。整函數者具有有理係數之不可約因式，通常指 476
 其最低次因式具有有理係數者而言。

例如， $(x-1)(x^2-2)$ 之質因式爲 $x-1, x-\sqrt{2}, x+\sqrt{2}$ ，其不可約
 因式爲 $x-1$ 與 x^2-2 。

由以上證明之定理及 § 469 之定理，可得 487

具有有理係數之可約整函數，可以其諸不同不可約因式乘積
 之積表之，但僅有一法。

旁涉於數論之事

類似於以上所證明之定理，適用於整數。 488

以文字 a, b 等表正或負之整數(不爲零)，凡能除 a 之任何
 整數，稱爲 a 之因數。

對於任一正整數，除其本身與1外，別無他因數者也。 489

490 設二整數 a, b , 除 1 外別無公因數者, 則稱爲對於 b 爲互質.

491 定理. 設 a 對於 b 爲互質, 常可求得二整數 m 與 n , 使

$$ma + nb = 1.$$

因 a 對於 b 爲互質, 常用普通方法求其最大公約數, 則必得其最後餘數.

由 § 479 之理由, 從此事實可得此定理.

例如, 設 $a = 325$, $b = 116$. 應用求 $G.C.D.$ 之法, 得

$$116 \overline{) 325} \underline{2}$$

232

$$r_1 = 93 \overline{) 116} \underline{1} \text{ 即 } 116 = 1 \cdot 93 + 23, \text{ 或 } 23 = 116 - 1 \cdot 93 \quad (1)$$

93

$$r_2 = 23 \overline{) 93} \underline{4} \text{ 即 } 93 = 4 \cdot 23 + 1, \text{ 或 } 1 = 93 - 4 \cdot 23 \quad (2)$$

92

$$r_3 = 1 \overline{) 93} \underline{93} \text{ 即 } 93 = 1 \cdot 93 + 0, \text{ 或 } 1 = 93 - 4 \cdot 23 \quad (3)$$

從 (3) 開始, 先以 (2) 中 23 之值代入, 次以 (1) 中 93 之值代入, 則有

$$1 = 93 - 4 \cdot 23$$

$$= 5 \cdot 93 - 4 \cdot 116$$

$$= 5 \cdot 325 - 14 \cdot 116$$

故 $5 \cdot 325 + (-14) \cdot 116 = 1.$

由此求得二整數 $m = 5$ 及 $n = -14$, 故

$$m \cdot 325 + n \cdot 116 = 1.$$

在其他情形同此.

例. 求整數 m 與 n 使 $223m + 125n = 1.$

492

系. 從此基本定理, 可導出關於整數之定理, 類似於

§ § 481-485 中寫出關於整函數者爲同一理由, 在特別可證明

1. 設 a 對於 b 爲互質, 而 b 可用 c 除盡, 則 a 可用 c 除盡.

2. 設 a 對於 b 與 c 爲互質, 則 a 對於 bc 爲互質. 這因 a 與 b 互質, 且 a 與 c 互質.

3. 複數能以其諸不同質因數乘之積表之, 但僅有一法.

VIII, 有理分式

約分

分式。設 A 與 B 表任何二代數式，其 B 不為 0。以 B 除 A 之商，以形式 A/B 表之，名爲分式，而 A 名爲分子， B 名爲

分母， A 與 B 二者爲分式之項。

當 A 與 B 俱爲有理式時， A/B 名爲有理分式。 494

當 A 與 B 俱爲整式時， A/B 名爲簡分式，但設 A 與 B 俱爲分式，則 A/B 名爲繁分式。 495

一簡分式之爲真分式或假分式，依其分子之次數小於或不小於分母之次數而定。 496

例如， $\frac{x-y}{x^2+y^2}$ 與 $\frac{2x^2-3}{x^2+1}$ 爲真分式，而 $\frac{2x^2+1}{x^2+1}$ 及 $\frac{x^3+3}{x^2+1}$ 爲假分式。

一假分式之項爲一變數函數者，可化爲一整式與一真分式之和 (§ 400)。此和名爲帶分式。

例如， $\frac{2x^2+1}{x^2+1} = 2 + \frac{1}{x^2+1}$ ， $\frac{x^3-3}{x^2+1} = x - \frac{x+3}{x^2+1}$

分式之正常變形。此須根據下列定理 (§ 32), 1)。 493

以同式 (不爲 0) 乘或除一分式之分母與分子時，其值不變。

特別時，可同時變其分子與分母之記號，此等於以 -1 乘

其分子與分母二者，變分子或分母之記號，即變此分式本身之

記號。 (§ 320, 3)

設分式之分子或分母為多項式，則變其記號，等於變其所有各項之記號。

例如，
$$\frac{a+b-c}{a-b+c} = \frac{c-a-b}{b-c-a} = -\frac{c-a-b}{a-b+c} = -\frac{a+b-c}{b-c-a}.$$

設分式之分子，分母，或二者為數個因子之積；則可變其偶數個因式之記號。但變其奇數個因式之記號，則變其分式之記號。

例如，
$$\frac{(a-b)(c-d)}{(e-f)(g-h)} = \frac{(b-a)(c-d)}{(e-f)(h-g)} = -\frac{(b-a)(d-e)}{(f-e)(g-h)}.$$

199 約分。化簡一分式，即約去其分子與分母所公有之一切因式。此法變分式之形式而不影響其值 (§ 438)。

已化簡後之分式，稱為既約或不可約。

用VII章之法可發見其公因式或證明其無公因式。先查考單項因式，及由視察法可明知，或用餘式定理可求得之其他公因式；常用此種簡單法則失敗時，則可應用 § 465 之一般法則。

下例說明此種法則。

例 1. 化簡 $(aec-ade)/(bde-ebc)$ 。

$$\frac{aec-ade}{bde-ebc} = \frac{ae(c-d)}{be(d-c)} = -\frac{a(c-d)}{b(c-d)} = -\frac{a}{b}.$$

例 2. 化簡 $(x^3+x^2+x+6)/(x^2+3x+2)$ 。

由視察法知分母之因式為 $x+1$ 與 $x+2$ ，故設分子與分母有任何公因式，則必為上二因式之一。用綜合除法試驗，知分子不能為 $x-1$ 除盡，但能為 $x+2$ 除盡，其商為 x^2-x+3 。

故
$$\frac{x^3+x^2+x+6}{x^2+3x+2} = \frac{x^2-x+3}{x+1}.$$

例 3. 化簡 $(x^2+7x+10)/(x^2+5x+6)$.

從分子減分母, 得

$$x^2+7x+10-(x^2+5x+6)=2(x+2).$$

故分子與分母有任何公因式, 則必為 $x+2$ (§ 461), 但當 $x=-2$ 時分子不為零, 故此分式已在最簡項 (§ 415).

例 4. 化簡 $\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

此處僅有可能公因式 $(a-b)$, $(b-c)$ 與 $(c-a)$; 於分子中使 $a=b$, 得 $b^2(b-c)+b^2(c-b)$ 或 0. 故分子可用 $a-b$ 除盡, (§ 417) 同理可證其亦能用 $b-c$ 與 $c-a$ 除盡.

故分子可用分母整除, 但此二式為 a, b, c 之同次式, 即三次. 故其商必為一單獨數; 又因 a^2 項有二, 當排列為 a 之多項式時, 各為 $a^2(b-c)$ 與 $-a^2(b-c)$, 故此數為 -1.

故已知分式等於 -1.

例 5. 化簡 $(2x^2+13x^2-6x+7)/(2x^4+5x^3+8x^2-2x+5)$.

由 § 456, 求得分子與分母之 H. C. F. 為 $2x^2-x+1$. 以 $2x^2-x+1$ 除分子分母, 得

$$\frac{2x^2+13x^2-6x+7}{2x^4+5x^3+8x^2-2x+5} = \frac{x+7}{x^2+3x+5}.$$

習 題 XXIV.

化以下諸式至最簡式:

1. $\frac{x^3y^3-4x^2y^4}{x^3y^2-2x^2y^3}$

2. $\frac{(x^6-y^6)(x+y)}{(x^4+y^4)(x^2-y^2)}$

3. $\frac{x^2-4x-21}{x^2+2x+68}$

4. $\frac{3x^2-8x-3}{3x^2+7x+2}$

5. $\frac{3x^2-18bx+27b^2}{2x^2-18b^2}$

5. $\frac{5x^2+6ax+a^2}{5x^2+2ax-3a^2}$

7. $\frac{(x^2-25)(x^2-8x+15)}{(x^2-9)(x^2-7x+10)}$

8. $\frac{15x^2-46x+35}{10x^2-29x+21}$

9. $\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}$
10. $\frac{x^2-y^2+z^2+2xz}{x^2+y^2-z^2+2xy}$
11. $\frac{(1+rv)^2-(r+y)^2}{1-x^2}$
12. $\frac{2mv-mv-12nr+6ny}{6mv-3ny-2nx+ny}$
13. $\frac{2x^2+7x^2-7x-12}{2x^2+3x^2-11x-15}$
14. $\frac{x^3-8x^2+10x-12}{2x^2-13x^2+19x+12}$
15. $\frac{x^4+x^2+5x^2+4x+4}{2x^4+2x^2+14x^2+12x+12}$
16. $\frac{x^3-2x^2-x-6}{x^4+6x^3+6x^2+8x+3}$
17. $\frac{(x^2+c^2)^2-4b^2x^2}{x^4+4bx^2+4b^2x^2-c^4}$
18. $\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

分式之演算

500 最低公分母。欲加減分式，可先化諸分式為有公分母之等值分式。

顯然可見已知諸分母之最低公倍式，為其最低次之公分母，故名之為已知分式之最低公分母 (L. C. D.)。

例。化 $\frac{a}{bc}, \frac{b}{ca}, \frac{c}{ab}$ 至最低公分母。

已知諸分母之 L. C. M. 為 abc 。

欲化 $\frac{a}{bc}$ 為有公分母 abc 等值分式，須以 a 乘其二項

同法須以 b 乘 $\frac{b}{ca}$ 之二項，及以 c 乘 $\frac{c}{ab}$ 之二項。

如，
$$\frac{a}{bc} = \frac{a^2}{abc}, \frac{b}{ca} = \frac{b^2}{abc}, \frac{c}{ab} = \frac{c^2}{abc}$$

501 欲化二或數分式為有最低公分母之等值分式，先求已知分母之最低公倍式。

次於各分式中，以最低公分母為分母，而以引於此分母中之新因子乘其分子。

加法與減法。關於有公分母之分式，其加法與減法之法則，602
已包括於下列公式中(§ 320, 4)。

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a+b-c}{d}.$$

故求二或多分式之代數和，

設必要時，可化之至最低公分母。

以連結已知分式之記號連接結果分式之新分子，而審其結
果於公分母之上。

最後化簡所得之結果。

當整式代替二或多分式時，此法則亦可應用，因整式可觀作
分母為 1 之分式故也。

各已知分式，苟非可約之因式存於其他一分母之中，皆以
化至最低項為最善。

應顧慮所選為分母之一式，是否為真實之最低公分母，常有
之錯誤，乃處理僅有記號相異之因式 $a-b$ 與 $b-a$ ，認為不同
而同時引入於最低公分母之中。

將已知分式成對合併，常較便利。

例 1. 化簡 $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} - \frac{2b}{a^2-b^2}$

此處最低公分母為 a^2-b^2 ，而有

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} - \frac{2b}{a^2-b^2} &= \frac{a-b}{a^2-b^2} + \frac{a+b}{a^2-b^2} - \frac{2b}{a^2-b^2} \\ &= \frac{a-b+a+b-2b}{a^2-b^2} = \frac{2a-2b}{a^2-b^2} = \frac{2}{a+b} \end{aligned}$$

當化至最低項時和之分母，可僅為最低公分母之因式，宜注
意。

例2. 化簡 $x - \frac{1}{1-x} - \frac{x^3-3x+1}{x^2-1}$

因第一分母為1，而第二分母為 $(x-1)$ ，最低公分母為 x^2-1 ，故得

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{1-x} - \frac{x^3-3x+1}{x^2-1} &= \frac{x^2-x}{x^2-1} + \frac{x+1}{x^2-1} - \frac{x^3-3x+1}{x^2-1} \\ &= \frac{x^2-x+x+1-x^3+3x-1}{x^2-1} = \frac{3x}{x^2-1} \end{aligned}$$

例3. 化簡 $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$

此處以將分式成對合併較簡。例如，

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} &= \frac{x+2-(x-2)}{x^2-4} = \frac{4}{x^2-4} \\ \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1} &= 2 \frac{x-1-(x+1)}{x^2-1} = \frac{3}{x^2-1} \\ \frac{4}{x^2-4} + \frac{3}{x^2-1} &= \frac{4}{x^2-4} + \frac{4}{(x^2-1)(x^2-4)} = \frac{4(x^2-1)+4}{(x^2-1)(x^2-4)} = \frac{4x^2+4}{x^4+5x^2+4} \end{aligned}$$

例4. 化簡 $\frac{x^3-1}{x^4+x^3-2x} + \frac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2}$

藉餘式定理 (§ 415)，知 $x-1$ 為第一分式二項之公分式，但非第二分母之因式。故化簡第一分式於其二項中約去 $x-1$ ，得 $(x+1)/(x^3+x^2+2x)$ 。

由 § 415，得 x^3+x^2+2x 及 $2x^3+x^2+3x-2$ 之 H.C.F. 為 x^2+x+2 ；而 $x^3+x^2+2x = (x^2+x+2)x$ ， $2x^3+x^2+3x-2 = (2x-1)(x^2+x+2)$ 。

在化為公分母之前，須審查 $2x-1$ 是否亦為分母 $2x^2+3x-2$ 之一因式。今知其確為因式而約去之，化第二分式為 $(x+2)/(x^2+x+2)$ 。

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{x^3-1}{x^4+x^3-2x} + \frac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2} &= \frac{x+1}{x(x^2+x+2)} + \frac{x+2}{x^2+x+2} \\ &= \frac{x+1+x^2+2}{x^2+x+2} = \frac{x^2+3x+3}{x^2+x+2} \end{aligned}$$

或分式之商。

二或半分式之積，為一分式，其分子為已知分式分子之積，而分母為已知分式分母之積。

例如， $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

因以 bd 乘各層之積為 ac 故也 (見 § 253)。

例如， $\frac{c}{bd} \cdot bd = ac$; 而 $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot bd = \frac{a}{b} \cdot b \cdot \frac{c}{d} \cdot d = ac$

§ § 252, 254.

(在特例，以一整式乘一分式，即以此整式乘其分子。

分式 ac/bd 常先化至最低項，然後實行其分子與分母所示之乘法。

(例1. 以 $(x+1)/(x-1)$ 乘 $(x^2-1)/(x^2+1)$.)

$\frac{x^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x^2-1)(x+1)}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$

以 $(x+2)/x$ 乘 $1 - (x-2)/(x^2+x-2)$. . .

$\left(1 - \frac{x-2}{x^2+x-2}\right) \cdot \frac{x+2}{x} = \frac{x^2}{x^2+x-2} \cdot \frac{x+2}{x} = \frac{x}{x^2+x-2}$

乘方。從 § 503 導出下之法則：

504

欲將分式自乘至已知幕，可將分子與分母二者各自乘至此幕。

例如， $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

因 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots$ 至 n 因式 $= \frac{a \cdot a \cdots$ 至 n 因式 $= \frac{a^n}{b \cdot b \cdots$ 至 n 因式 $= \frac{a^n}{b^n}$

例. 求 $-ab^2c^3/efg^4$ 之立方。

$\left(\frac{-ab^2c^3}{efg^4}\right)^3 = \frac{-a^3b^6c^9}{e^3f^3g^{12}}$

除法。顛倒一分式 a/b ，即交換其分子與分母也。如此所得之分式 b/a ，名為 a/b 之倒分式。 505

欲以一分式除他分式，可用除式之倒式乘彼除式。

例如，
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

因以 e/d 乘各端之積均為 a/b 故也(見 § 253)。

例如，
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} ; \text{ 而 } \frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}$$

(§ § 252, 254, 503)。

在特例，欲以一整式除一分式，可用此整式乘其分母。

例1. 以 $(x^2 + x^2y^2 + y^4)/(x^4 - y^4)$ 除 $(x^2 - xy + y^2)/(x^2 + y^2)$ 。

$$\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 - y^2} \div \frac{x^2 + x^2y^2 + y^4}{x^4 - y^4} = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x^4 - y^4}{x^4 + x^2y^2 + y^4} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

例2. 以 $x^2 + 6x + 8$ 除 $(x^2 + 5x + 6)/(x + 1)$ 。

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 1} \div (x^2 + 6x + 8) = \frac{x^2 + 5x + 6}{(x + 1)(x^2 + 6x + 8)} = \frac{(x + 2)(x + 3)}{(x + 1)(x + 2)(x + 4)} = \frac{x + 3}{x^2 + 5x + 4}$$

03 有理式一般，繁分式及連分式，前已證明二分式之和，差，積與商，仍為分式，故每一有理式(§ 257)俱能化為簡單有理分式之形。

關於化已知有理式為最簡之形，以何法為最善，本無一般法則。一切不需步驟，須竭力避免。應特別注意於利用時優化分式為最低項，直至不能化為止，方可實行多項式之乘法。

107 前已言及(§ 495)當 A 或 B 有一或二者為因式時，則分式 A/B 名為繁分式。

化簡一繁分式 A/B ，有時用 §505 之法，先以 B 除 A ，有時先以 A 與 B 中一切分母之 L. C. M. 同時，乘 A 與 B 為較善。在用此種步驟之前，最好分別化簡 A 與 B 。

例 1. 化簡 $\left(\frac{a+b}{a-b} + 1\right) \div \left(\frac{a-b}{a+b} + 1\right)$ 。

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a+b}{a-b} + 1}{\frac{a-b}{a+b} + 1} &= \frac{\frac{a+b+a-b}{a-b} = \frac{2a}{a-b}}{\frac{a-b+a+b}{a+b} = \frac{2a}{a+b}} \\ &= \frac{2a}{a-b} \cdot \frac{a+b}{2a} \\ &= \frac{a+b}{a-b} \end{aligned}$$

注意於當繁分式之各項均為分式時，可約去此種分式分子或分母所公有之任何因式，如上第三步，可先約去 $2a$ 。

例 2. 化簡 $\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}\right) \div \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b}\right)$ 。

可如例 1 進行，但其簡法為先以 $(a+b)(a-b)$ 乘其二項，如是得

$$\frac{\frac{a}{a-b} + \frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b}} = \frac{\frac{a(a+b) + b(a-b)}{a(a-b) + b(a+b)}}{\frac{a(a-b) - b(a+b)}{a(a-b) + b(a+b)}} = \frac{a^2 + ab + ba + b^2}{a^2 - ab + ba + b^2} = 1$$

例 3. 化簡 $\frac{\frac{a}{b+c} + \frac{c}{d+e}}{b + \frac{e}{d+f}}$

從下而上演算，得

$$\frac{\frac{a}{b+c} + \frac{c}{d+e}}{b + \frac{e}{d+f}} = \frac{\frac{a(df+e) + c(bd+ef)}{b(df+e) + c(bd+ef)}}{\frac{b(df+e) + ef}{b(df+e) + ef}} = \frac{a(df+e) + c(bd+ef)}{b(df+e) + ef}$$

細例 3 之繁分式，名為連分式。

習 題 XXI

化簡下列諸式：

1. $\frac{1}{2a-3b} + \frac{1}{2a+3b} = \frac{6b}{9b^2}$

2. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^3+1}$

3. $\frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-4x+3}$

4. $\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} + \frac{x+2}{(2-x)(x-3)} + \frac{x+3}{(3-x)(1-x)}$

5. $\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+c} + \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c}$

6. $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$

7. $\frac{yz(x+a)}{(x-y)(z-x)} + \frac{zx(y+a)}{(y-z)(y-x)} + \frac{xy(z+a)}{(z-x)(z-y)}$

8. $x + \frac{1}{8-x} - \frac{8x^2-33x}{8x^2-27} - \frac{2x+6}{4x^2+6x+9}$

9. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{xy}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(y + \frac{1}{y}\right) \left(xy + \frac{1}{xy}\right)$

10. $\frac{(a+b)^3 - c^3}{a+b-c} + \frac{(b+c)^3 - a^3}{b+c-a} + \frac{(c+a)^3 - b^3}{c+a-b}$

11. $\frac{x^2-4}{x^3-3x^2-x+6} - \frac{3x^3-14x-5}{3x^3-2x^2-10x-3}$

12. $\frac{1}{x^4-4x^3-x+2} + \frac{1}{2x^4-2x^3-5x^2+7x-2} + \frac{1}{2x^4+3x^3-2x^2-2x+1}$

13. $\left(a^3 - \frac{1}{a^4}\right) \div \left(a - \frac{1}{a}\right)$ 14. $\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}\right)(a^4 + a^3)$

15. $\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-4} \cdot \frac{x^2+7x+12}{x^2-8x+15} - \frac{x^2+x-6}{x^2-4x-5}$

16. $\frac{1}{a} - \left\{ 1 - \left[\frac{x-1}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{(x-2)(x-3)}{x(x+1)} \right) \right] \right\}$

$$17. \frac{ax+x^2}{2b-cx} \cdot \frac{2bx^2-cx^3}{(a+x)^2}$$

$$18. (x^2-y^2-z^2+2yz) + \frac{x-y+z}{x-y-z}$$

$$19. \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \right) \cdot \left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \right)$$

$$20. \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y-z}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y-2}} + \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{x+z}}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x+z}}$$

$$21. \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} \div \frac{\frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4}}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2}$$

$$22. \frac{x-2}{x-2} = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x-2}$$

$$23. x + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+1}{x+1}$$

不 定 式

極限。 吾變數 x 連續取諸值 $1/2, 3/4, 7/8, 15/16$ 等等 508 而無盡，顯然 x 趨近於值 1，正如此意味上，差 $1-x$ 終能變成且永久小於吾人能指定之每一正數，無論小至如何。吾人指示一切如此者稱為 x 歷經諸值 $1/2, 3/4, 7/8, 15/16, \dots$ 之數串而趨近於 1 為極限。

於一般，設 x 表一變數，假定此變數歷經若干已知值之數串而無盡者，又設有一數 a 能使差 $a-x$ 終能變成且永久為絕對值小於能指定之每一正數，則稱 x 趨近於此數 a 為極限。

欲表 x 趨近於其極限 a ，吾作 $x \rightarrow a$ ，或 $x = \lim a$ 。

須注意於此處變數一語，按 § 242 中之意義更有限制。

此種變數是否趨近於極限，須視假定其所歷經諸值之數串如何而定之，例如：

設數出為 1, 2, 1, 2, ……則此變數不趨近於極限。

變數與極限之詳論討論，已述於 § § 187—205，學者可重不重讀，至少須讀其一部分，以資明瞭。

509 極限定理。在 § 203 中，已證明若變數 x 及 y 趨近於極限，則其和，差，積，商，亦趨近於極限，而

$$\lim (x + y) = \lim x + \lim y.$$

$$\lim (x - y) = \lim x - \lim y.$$

$$\lim xy = \lim x \cdot \lim y.$$

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}, \text{ 除 } \lim y = 0 \text{ 外.}$$

從此種定理，設 $F(x)$ 表 x 之任何已知有理函數，而當 $x \rightarrow a$ 時， $F(a)$ 為其值，則當 x 趨近於 a 為極限時， $F(x)$ 必趨近於 $F(a)$ 為極限，即

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a).$$

此處 $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ 讀為“ x 趨近於 a 時 $F(x)$ 之極限”。

例如， $\lim_{x \rightarrow a} (2x^2 - 3x + 1) = 2a^2 - 3a + 1.$

710 無窮大。設 α 為任何正數出 1, 2, 3, 4, …，則終能變為且永久大於能指定之每一數 α 。

一變數 x 如上終能變為且永久為絕對值大於能指定之每一數，則稱 x 趨近於無窮大。

參關於“無窮大”一語，用符號 ∞ 而表 x 趨近於無窮大，當作 $x \rightarrow \infty$ 或 $\lim x = \infty$ 。

511 註。必須注意者，如此規定之 ∞ ，非表定數，其運算之計算法則皆不適用。此處說明，俟後述之。

“趨於無窮大”一語，即“趨於無限大且永久為大於可指定”。

有時為簡計，常將 $\lim x = \infty$ ，略去 limit 一字，當然無 §508 所述之

定則。

512

(*) 若分母趨於無窮大則分式趨於 0；若分母趨於 0 則分式趨於 0 為極限。

例如，考分式 $1/x$ 。

設 x 歷經數串 $1, .1, .01, .001, \dots$ ，趨近於 0，則 $1/x$ 必歷經數串 $1, 10, 100, 1000, \dots$ ，而趨近於 ∞ 。

又設 x 歷經數串 $1, 10, 100, 1000, \dots$ ，趨近於 ∞ ，則 $1/x$ 必歷經數串 $1, .1, .01, .001, \dots$ ，而趨近於 0 為極限。

在一般亦如是。

不定式。形如 $f(x)/\phi(x)$ 之有理分式，除 $\phi(x) = 0$ 外，對於 x 之任何已知值必有一定值，但當 $\phi(x) = 0$ 時，則分式變為形式 $0/0$ 或 ∞/∞ 之一，便無算術意義 (§103)。雖然如此，若將此分式在此二種情形各有意義，甚為便利。

分式 $0/0$ 。當 $x=1$ 時，分式 $(x^2-3)/(x-1)$

514

除 $x=1$ 時外，能以 $x-1$ 除 x^2-3 ，而得

$$(x^2-3)/(x-1) = x+1.$$

不論 x 與 1 之差小至如何，此式為真。若實際令 x 以何值，而使其趨近於 1 為極限，則得：

$$\lim(x^2-3)/(x-1) = \lim(x+1) = 2.$$

於是當 $x=1$ 時，計算法則雖對於 $(x^2-3)/(x-1)$ 無意義，然

能由此以證明當 x 趨近於1爲極限時，此分式趨近於一定極限2。

前已證明 (§509) 當 $F(x)$ 表一有理函數而 $F(a)$ 有意義時， $F(a) = \lim_{x \rightarrow a} F(x)$ 。故當計算法則對於 $F(a)$ 無意義如此處時，指

定 $F(a)$ 之值爲 $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ 頗便；換言之，取公式 $F(a) = \lim_{x \rightarrow a} F(x)$

爲 $F(a)$ 之定義。

故當 $x=1$ 時，可予 $(x^2-1)/(x-1)$ 以值2。於是對於 x 之一切值，包括1 在內，有 $(x^2-1)/(x-1) = x+1$ 。

同理，每一分式可書作 $(x-a)f(x)/(x-a)\phi(x)$ ，此處 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 爲整式，而 $\phi(x)$ 不能以 $x-a$ 除盡者，當 $x=a$ 時，可指定其值爲 $f(x)/\phi(x)$ 而對於 x 之一切值，包括 a 在內，得

$$\frac{(x-a)f(x)}{(x-a)\phi(x)} = \frac{f(x)}{\phi(x)}$$

515 $a/0$ 之形。當 $x=0$ 時，分式 $1/x$ 成 $1/0$ 之形。

1 雖不能以 0 除之，然能取 x 之一值與 0 相差小至如心所欲者。除 1。前已證明 (§512)，若使 x 趨近於 0 爲極限，則 $1/x$ 趨近於 ∞ 。

故當 $a \neq 0$ 時，可指定 $a/0$ 爲 $1/0$ ，一般爲 $a/0$ 之“值”，書爲

$$\frac{a}{0} = \infty.$$

同理，如下列形狀之每一分式

$$\frac{f(x)}{(x-a)\phi(x)}$$

此處 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 俱爲整式，而 $x-a$ 不能除盡 $f(x)$ ，當 $x=a$ 時，可指定其“值”爲 ∞ ；意謂 x 趨近於 a 爲極限時，此分式常趨近於

∞.

分式值之結論。注目於形如 $f(x)/\phi(x)$ 之簡分式，從§51 516 4, 515 可得下列結論。

1. 設 $f(x)/\phi(x)$ 為最低項，對於 x 之諸值使分子 $f(x)$ 為 0 者，則分式之值為 0；對於 x 之諸值使分母 $\phi(x)$ 為 0 者，則分式之值成 ∞ 。關於 x 之其他有限值，則此分式有不同於 0 及 ∞ 之一值。

2. 但設 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 有一公因式 $x-a$ ，而 $f(x)$ 含此因式 m 次， $\phi(x)$ 含此因式 n 次，則對於 $x=a$ ，當 $m > n$ 時， $f(x)/\phi(x)$ 為 0；當 $m < n$ 時，此分式變為 ∞ ，當 $m = n$ ，此分式有不同於 0 及 ∞ 之一值。

例如當 $x=2$ 時，則有

$$\frac{x-2}{x+1} = 0, \quad \frac{x+1}{x-2} = \infty, \quad \frac{(x-2)^3}{x(x-2)} = 0, \quad \frac{(x-2)^2}{x(x-2)^2} = \infty, \\ \frac{(x-2)^2}{x(x-2)^2} = \frac{1}{2}.$$

∞ , ∞ 之形。當 x 無限增大即當 $x = \infty$ 時， $f(x)/\phi(x)$ 之值 517 究竟趨於何種極限，此當為重大之事，不可不知。

今就下列考之。

前已證明 (§:2)，當 $x = \infty$ 時， $1/x, 1/x^2, \dots = 0$ 。

015

故當 $x = \infty$ 時， $\frac{x^2 - x + 3}{2x^2 + x - 4} = \frac{1 - 1/x + 3/x^2}{2 + 1/x - 4/x^2} = 1/2,$ (1)

$$\frac{x+2}{x^2+x+5} = \frac{1+2/x}{x+1+5/x} = 0,$$
 (2)

023

$$\frac{x^2+x-7}{2x+3} = \frac{x+1-7/x}{2+3/x} = \infty.$$
 (3)

一般，當 $x = \infty$ 時，分式

$$(a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m) / (b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n)$$

趨近於極限 a/b ，設分子分母之次數相同如(1)；趨近於極限0，設分母之次數較大如(2)；趨近於極限 ∞ ，設分子之次數較大如(3)。

且於此各情形中，其極限多為“當 $x = \infty$ 時此分式所取之值”，即當分式本身假定為不定式 ∞/∞ 時所取之值。

518. $0/\infty$ 或 ∞/∞ 之形。... x 之有理函數對於 x 之特別值可作不定式 $0/\infty$ 或 ∞/∞ 之形，但此式可化爲前所述形式 $0/0, a/0, \infty/\infty$ 之一。

1. 例如，當 $x=1$ 時， $(x^2-1) \cdot \frac{1}{x-1}$ 成 $0/\infty$ 之形，但除 $x=1$ 以

外，則得 $(x^2-1) \cdot \frac{1}{x-1} \equiv \frac{x^2-1}{x-1}$ ，故

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[(x^2-1) \cdot \frac{1}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2.$$

故當 $x=1$ 時，可指定已知式之值爲2。

2. 其次，當 $x=0$ 時， $\frac{1}{x} - \frac{2}{x(x+2)}$ 成 ∞/∞ 之形，但除 $x=$

0以外，則得 $\frac{1}{x} - \frac{2}{x(x+2)} \equiv \frac{x}{x(x+2)}$ ，故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{2}{x(x+2)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}.$$

故當 $x=0$ 時，可定已知式之值爲 $\frac{1}{2}$ 。

519 一般結論。是故設一變數之已知函數如 $F(x)$ ，當 $x=a$ 時，

(1) 則可假定爲不定式，如下進行：

(2) 先化此式爲最簡式，次求當 x 趨近於 a 極限時，此式之值趨

(3) 近於何種極限，稱此極限爲此函數當 $x=a$ 時所有之值。

520 註。此法限於單變數之函數如 $F(x)$ ，此法則所以能得一定

(4) 結果其原因，爲 $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ 之值隨 a 之值而定，不隨 a 趨近於 a

時可取之值而定；而於多變數之函數則不然故也。

$(a_1 + \dots + 1 - a_1, 1 + \dots + a_1) / \dots$

例如式(1)為無關係之數，當 $x=0$ 時，其分式 x/y 。
當 $x=0, y=1$ 時，即 x/y 為無關係之數，則此種根，視 x 及 y
所歷經諸值之數串而定。

例如數串 x 歷經以下數串趨於 0 為函數：

$$1/2, 1/3, 1/4, \dots (1); 1/2^2, 1/3^2, 1/4^2, \dots (2)$$

歷經 (1), y 歷經 (2) 則 x/y 必趨於 0。若 x 歷經 (2), y 歷經 (1), 則 x/y 必歷經數串 $1/2, 1/3, 1/4, \dots$ 而趨於 0。

若 x 及 y 為無關係之數，則當 $x=0, y=0$ 時，視 x/y 為
絕對不定式，於一般皆如是。

計算法中之無窮大。取文字之無窮大於計算內，
必於除式 $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47, 53$ 之法則如下：

1. 若 $a=0, b \neq 0$ ，則 $a/b=0$ ，除 $a=\infty$ 外。

2. 若 $ac=bc, c \neq 0$ ，則 $a=b$ ，除 $c=0$ 時之數外。

3. 若 $a+c=b+c$ ，則 $a=b$ ，除 $c=\infty$ 外。

用此法用於方程之解法時，務須留意於通例之情形。

例如，考慮乘積 $\frac{1}{x^2-1} \cdot x-1$ 當 $x=1$ 時，第二因式 $x-1$ 為 0；但

第一因式 $1/(x^2-1)$ 為 ∞ ，此乘積不隨第二因式而為 0，實則此乘
積為 1 (518)。

方程之無窮大根。今用已往工作以代說，如方程 $x+2=3$ 及他一次方程可化為 $0 \cdot x=b$ 之形者，以前則其無根今
則其根為 ∞ 。

蓋 a 雖可小如何，設實不為 0，則 $ax=b$ 之根為 b/a 。又

b 為常數而不為 0，則 b/a 趨於 ∞ 時， x 必趨近

於 ∞ (§ 512)。換言之，如 $ax=b$ 趨於 $0 \cdot x=b$ 之形時，其根
趨於 ∞ 。

b/a 趨近於值 ∞ . 故與 § 515 中所說明之實情相一致, 可稱 $ax=b$ 常有 $0x=b$ 之形時有根 ∞ .

設將 $x+2=x+3$ 視作根為 ∞ 之真方程, 則不致生出悖謬之結論 $2=3$. 蓋因 $x=\infty$, 則同時從其二邊減 x 之結果, 不能正當斷論為真方程故也 (§ 521, 3). 此宜注意.

523 聯立方程無窮大之解. 同理, 矛盾一次方程系 (§ 377, 2, § 394, 2), 以前謂其無解者, 有時可謂其有無窮大之解; 蓋從如此方程系用消去法可得一個一次方程如 $0x=b$ 之形, 而由 § 522, 此方程之根為 ∞ 故也.

例如, 一對矛盾方程 $y-x=0(1), y-x=1(2)$, 可謂其有無窮大之解.

所宜注意者, 此對 (1), (2) 當 $m=1$ 時為下列一對之極限情形.

$$y-mx=0(3), y-x=1(2).$$

(3), (2) 之解為

$$x=1/(m-1), y=m/(m-1).$$

而當 $m=1$ 時, $1/(m-1)$ 與 $m/(m-1)$ 同時趨近於無窮大.

用圖解法則 (§§ 386, 387), 可證明同一事實. 因當 $m=1$ 時 (3) 之圖形為平行於 (1) 之圖形, 而此二圖形之交點, 在此平面上無窮遠處故也.

習 題 XXVI

指定以下諸式之適當值:

1. $\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$, 當 $x=2$ 時. 2. $\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-2x+1}$, 當 $x=1$ 時.

$\frac{x^3-1}{x^2-2x+1}$, 當 $x=1$ 時. 4. $\frac{x^2-2(x+1)}{x^2-(a+b)x+10}$, 當 $x=0$ 時.

$\frac{(3x+1)(x+2)^2}{(x^2-4)(x^2+3x+2)}$, 當 $x=-2$ 時.

6. $\frac{5x^3-x^2-x+1}{x^3-8x^2+8x-1}$, 當 $x=1$ 時.

7. $\frac{3x^2-x+5}{2x^2+6x-7}, \frac{x^2+1}{x}, \frac{3x}{x^2+1}, \frac{(2x^2+1)(x^3-5)}{(x^2+1)(x-6)}$, 當 $x = \infty$ 時.

8. $\frac{x-1}{x^2-9} - \frac{x-2}{x(x-3)}$, 當 $x=3$ 時.

9. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x(x-1)}$, 當 $x=1$ 時.

10. $\frac{x^2+\frac{x+1}{x-2}}{x^2+\frac{x-1}{x-2}}$, 當 $x=2$ 時. 11. $\frac{\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1}}{\frac{3x+1}{x^2-1}}$, 當 $x = \infty$ 時.

分 式 方 程

分式方程之解法。任何已知分式方程，可以其一切分式之最低公分母 D 乘其二邊，而將分式變形為整式，此過程謂之去分母。

從 §§341, 342, 可知如此導出之整方程，有已知方程之一切根。又設此外尚有任何根，則必為方程 $D=0$ 之根，故可迅速檢見而捨棄之。

例 1. 解 $\frac{3}{x} + \frac{6}{x-1} - \frac{x+13}{x(x-1)} = 0$. (1)

去分母，以 $D=x(x-1)$ 乘之。

得 $3(x-1)+6x-(x+13)=0$. (2)

解(2), $x=2$. (3)

因 2 非 $D=x(x-1)=0$ 之根，故為(1)之根，且(1)只有此根。

例 2. 解 $\frac{3}{x} + \frac{6}{x-1} = \frac{x+5}{x(x-1)} = 0$. (1)

去分母, $3(x-1)+6x-(x+5)=0$. (2)

解(2), $x=1$. (3)

因 1 為 $D = x(x-1) = 0$ 之根，故非 (1) 之根，蓋通常 $x = 1$ 時，
 (1) 之第一項有 $3 + \frac{6}{0} + \frac{6}{0}$ 之形，而前兩項均無意義，而非 0。

故 (1) 無根。

以上說明之法則，可修訂為下列法則：

式解分式方程，可用一初等式之最低公分母 D 乘其二邊以
 便。

得所得之整方程。

此方程之根——設任一根能使 D 為 0 者則除外——即為已
 知方程之根。

516 註。亦可設立此法則如下：

移已知方程之一切項於一端而整項，其結果以 $N/D = 0$ 表
 之；則去分母後得一整方程 $N = 0$ 。

1. 設 N/D 為最低項，則 $N/D = 0$ 與 $N = 0$ 之根相同；因當分
 子為 0 時且只有此時最低項分式為 0 故也 (§53)。

例如，在 §524 例 1 中，

$$\frac{3}{x} + \frac{6}{x-1} - \frac{x+13}{x(x-1)} = \frac{8(x-2)}{x(x-1)} = \frac{N}{D}$$

此處 N/D 為最低項，而 $N/D = 0$ 之根與 $N = 0$ 之根相同，即 2。

2. 設 N/D 非最低項，則 $N = 0$ 之根有 $N/D = 0$ 之根，即有之
 根，即為使 N 與 D 之公因式為 0 之根。

(1) 例如在 §524 例 2 中，

$$\frac{3}{x} + \frac{6}{x-1} - \frac{x+5}{x(x-1)} = \frac{8(x-1)}{x(x-1)} = \frac{N}{D}$$

(2) 此處 N/D 非最低項，而 $N = 0$ 之根即 1，非 $N/D = 0$ 之根；因
 (2) $x = 1$ 時， $N/D = 8$ 故也 (§514)。

且其情形而 2 為例外證明。

(1) 例如，考慮方程 $0 = \frac{3}{x} + \frac{6}{x-1} - \frac{x+a}{x(x-1)} = 0$ ，

(2) 此處 $N/D = [8x^2 + (a+9)x + 6] / [x(x-1)]$ ，而除 $a = 6$ 或 3 外，此為
 (3) 最低項。

3. 上文所述,不能誤以謂 $N=0$ 之根,亦即 $D=0$ 之根,未曾滿足已知方程也。

例如, 思考方程 $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x(x-1)} = 0$.

此處 $N/D = (x-1)^2/x(x-1)$, 而由 § 513, 當 $x=1$ 時, 此式為 0. 但察知 $N=(x-1)^2=0$ 有根 1 之次數, 較多於 $D=x(x-1)=0$ 有此根之次數.

用 § 525 之法則, 須留意於選為最低公分母之式, 不可使引 527 入於終因式.

在方程中, 若任何分式非為最低項, 苟非其可約之式存在於其他分母中者, 須先化簡此分式.

在去分母之前, 須先合併若干分式或化為帶分式較善.

例 1. 解 $\frac{x^2-6x+5}{x^2-8x+15} - \frac{x^2-1}{6x-2x^2} = \frac{11}{5}$.

此處第一分式之各項有公因式 $(x-5)$, 而第二分式有公因式 x . 消去此種公因式, 得

$$\frac{x-1}{x-3} - \frac{x}{6-2x} = \frac{11}{5} \quad \text{或} \quad \frac{x-1}{x-3} + \frac{x}{2(x-3)} = \frac{11}{5}$$

去分母, $10x-10+5x=22x-69$

解之, $x=8$.

例 2. 解 $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+6}{x+7} = \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+5}{x+4}$

化各分式為帶分式而解之,

$$= \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4}$$

移項, 使右端之積以較簡便法

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7}$$

各端分別集項，

$$\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x^2+13x+42}$$

去分母， $x^2+13x+42 = x^2+5x+6$ 。

解之， $x = -9/2$ 。

此已知方程可先法分母而解之，為費力較多。

- 528 聯立分式方程。解如此方程系之一般法則，先去各方程之分母，設其可能，再求所得整方程組系之解，如此求得之解——設任何解可使已知方程之分母為零者須除外——即為此種方程之解 (§ 371)。

但設方程為 § 379 所述之形式，或能化成如此形式者，須用彼節所說明之法則解之。

例 1. 下列一對方程就 x, y 解之。

$$\begin{cases} \frac{x-1}{y-2} - \frac{x-3}{y-4} = 0, \\ \frac{1}{xy-2x} + \frac{1^3}{4y-2y^2} - \frac{2}{xy} = 0. \end{cases}$$

去分母而化簡之，得

$$x-y+1=0, \quad x+2y-8=0.$$

解之， $x=2, y=3$ 。

因當 $x=2, y=3$ 時，已知方程之分母無一為 0，故此種方程有解 $x=2, y=3$ 。

例 2. 下列方程系就 x, y, z 解之。

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{5}{6}, \quad \frac{yz}{y+z} = -\frac{3}{2}, \quad 2(z+x) + xz = 0.$$

此諸方程可化為如下形式 (§ 379):

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}.$$

依 $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ 解之，得 $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}, \frac{1}{y} = \frac{1}{3}, \frac{1}{z} = -1$ 。

故所求之解為 $x=2, y=3, z=-1$ 。

習 題 XXVII

下列方程統 x 解之。

1. $\frac{6x-1}{3x+2} - \frac{4x-7}{2x-5} = 0.$
2. $\frac{6x}{5x-1} + \frac{8}{3-15x} = \frac{1}{6}.$
3. $\frac{4}{x-2} - \frac{1}{x-4} = \frac{4}{x^2-6x+8}.$
4. $\frac{3}{2x+3} + \frac{1}{x-5} - \frac{3}{2x^2-7x-15} = 0.$
5. $\frac{1}{(x+1)(x-3)} + \frac{2}{(x-3)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+1)} = 0.$
6. $\frac{2}{x^2-1} - \frac{2}{x^2+4x-5} + \frac{3}{x^2+6x+5} = 0.$
7. $\frac{x+1}{3x+1} + \frac{2x}{5-6x} = \frac{5}{5+9x-18x^2}.$
8. $\frac{x+a}{b(x+b)} + \frac{x+b}{a(x+a)} = \frac{c+b}{cb}.$
9. $\frac{x^2+1}{x+1} - \frac{x^2-1}{x-1} = 20.$
10. $\frac{x^2+2x+1}{x^2+5x+4} + \frac{x-1}{x^2-3x-4} = 0.$
11. $\frac{x-8}{x-3} - \frac{x-9}{x-4} = \frac{x+7}{x+8} - \frac{x+2}{x+3}.$
12. $\frac{x+7}{x+6} + \frac{x+9}{x+8} = \frac{x+10}{x+9} - \frac{x+6}{x+5}.$
13. $\frac{x^2+2}{x-2} - \frac{x^2-2}{x+2} - \frac{15}{x^2-4} = 4x.$
14. $\frac{1}{x-1} - \frac{x-2}{x^2-1} + \frac{3x^2+x}{1-x^2} = 0.$
15. $\frac{3}{x^3-8} + \frac{2x+5}{2x^2+4x+8} - \frac{1}{x-2} = 0.$
16. $\frac{ax+c}{x-p} + \frac{bx+d}{x-q} = c+b.$

$$17. \frac{x^2+7x-8}{x-1} + \frac{x^2+x+3}{x+2} + \frac{2x^2-x+7}{x+3} = 4x$$

$$18. \frac{x^2-ax+2bx-2ab}{x-a} + \frac{b^2-x^2}{x-2b} + \frac{2c^2}{x-2c} = 0$$

$$19. \frac{(x-a)^2}{(x-b)(x-c)} + \frac{(x-b)^2}{(x-c)(x-a)} + \frac{(x-c)^2}{(x-a)(x-b)} = 3$$

$$20. \frac{3x+2}{x^2+x} - \frac{x-5}{x^2-1} - \frac{x-2}{x^2-x} = 0$$

$$21. \frac{a}{x+2} + \frac{2}{x-2} - \frac{x+6}{x^2-4} = 0$$

以下方程，就x, y或x, y, z解之。

$$22. \begin{cases} \frac{3x+y-1}{x-y+2} = \frac{6}{7}, \\ \frac{x^2+9}{y+4} = \frac{x+8}{y+3} \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} \frac{y-2}{x-3} + \frac{y-y}{x^2-9} = \frac{y-4}{x+3}, \\ \frac{2}{x^2-2} + \frac{3}{xy-2y} + \frac{9}{xy} = 0 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} \frac{xy}{x+y} = a, \\ \frac{yz}{y+z} = b, \\ \frac{zx}{z+x} = c \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} \frac{2}{x+2y} + 2y + 2z = 3, \\ \frac{y+z}{2} + \frac{5}{3} = \frac{7}{2}, \\ \frac{4}{x-3y} - \frac{2}{x+2y} = -1 \end{cases}$$

分項分式

629 由 § 506, 可知一變數如 x 之每一有理函數, 可化為形式如整函數, 或真分式, 或整函數與真分式之和。

為某種目的, 須實施進一步之化法, 即當真分式 A/B 為已知時, 求一組簡單分式而其和為 A/B 者, 此法係於次諸定理, 其中文字 A, B, \dots , 均表 x 之有理整函數。

定理 1. 二真分式 A/B 與 C/D 之和與差, 仍為真分式, 530

蓋
$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD \pm BC}{BD}.$$

因 A 之次數低於 B , 故 AD 之次數低於 BD .

又因 C 之次數低於 D , 故 BC 之次數低於 BD .

故 $AD \pm BC$ 之次數低於 BD .

定理 2. 令 I 與 I' 表整函數, 而 A/B 與 A'/B' 表真分式, 531

設 $I + A/B \equiv I' + A'/B'$, 則 $I \equiv I'$ 而 $A/B \equiv A'/B'$.

蓋依題意, $I - I' \equiv A'/B' - A/B$.

但 $I - I'$ 表整式 (或 0), 而依 § 530, $A'/B' - A/B$ 表真分式或 (0).

因一整函數不能恆等於一真分式, 故得

$$I - I' \equiv 0 \text{ 及 } A'/B' - A/B \equiv 0,$$

或 $I \equiv I'$ 及 $A/B \equiv A'/B'$.

定理 3. 令 A/PQ 表真分式, 其分母已分為互質之因式 P 及 Q .

此分式可化為形如 B/P 與 C/Q 之真分式之和.

因 Q 對於 P 為互質, 依 § 479 可求得二整式 M 與 N , 能使

$$1 \equiv MQ + NP, \text{ 故 } A \equiv AMQ + ANP.$$

故
$$\frac{A}{PQ} \equiv \frac{AMQ + ANP}{PQ} \equiv \frac{AM}{P} + \frac{AN}{Q}.$$

設 AM/P 與 AN/Q 為真分式, 則此定理已說明矣.

設 AM/P 與 AN/Q 非真分式，則各化為整式與真分式之和，而令其結果為

$$\frac{AM}{P} \equiv I + \frac{B}{P} \text{ 及 } \frac{AN}{Q} \equiv K + \frac{C}{Q}. \quad (2)$$

以此諸式代入於 (1) 中之 AM/P 與 AN/Q ，得

$$\frac{A}{PQ} \equiv \frac{B}{P} + \frac{C}{Q} + I + K. \quad (3)$$

但 $A/PQ, B/P$ ，與 C/Q 為真分式，從 (3) 依 § 530, 531,

可知 $I + K \equiv 0$ ，而

$$\frac{A}{PQ} \equiv \frac{B}{P} + \frac{C}{Q},$$

即此定理已證畢矣。

533 註 分式 A/PQ 能化為如此唯一之和 $B/P + C/Q$ 。

$$\text{假定 } \frac{A}{PQ} \equiv \frac{B}{P} + \frac{C}{Q} \equiv \frac{B'}{P} + \frac{C'}{Q}. \quad (1)$$

此處 B'/P 與 C'/Q 亦表真分式。

$$\text{則 } \frac{B-B'}{P} \equiv \frac{C'-C}{Q}, \text{ 故 } \frac{(B-B')Q}{P} \equiv C'-C. \quad (2)$$

但苟非 $B-B' \equiv 0$ 與 $C'-C \equiv 0$ ，則 (2) 為不可能；蓋不如是，則 (2) 中可以 P 除盡 $(B-B')Q$ ，而此為不可能，因 Q 對於 P 為互質，而 $B-B'$ 之次數低於 P 故也 (§ 431)。

534 分類分式。以上證明其存在之分式 B/P 與 C/Q ，名為 A/PQ 之分項分式。

欲化形如 A/PQ 之已知分式為分項分式 B/P 與 C/Q ，無須如 § 532 所指示之方法，可應用未定係數法 (§ 397)，如下例。

例 1. 化 $(2x^2+1)/(x^3-1)$ 為二分項分式之和。

此為真分式，其分母為互質二因式 $(x-1)$ 與 x^2+x+1 之積。

故 $(2x^2+1)/(x^2-1)$ 等於分母各爲 $x-1$ 與 x^2+x+1 之二真分式之和 (§ 532), 其第一分式之分子須爲常數, 第二分式之分子, 其次數至多爲 1 故得

$$\frac{2x^2+1}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} \quad (1)$$

此處 $a, b,$ 及 c 表常數.

欲求 $a, b, c,$ 先將 (1) 去分母.

$$\begin{aligned} \text{得} \quad & 2x^2+1 \equiv a(x^2+x+1) + (bx+c)(x+1), \\ \text{或} \quad & 2x^2+1 \equiv (a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a+c) \quad (2) \end{aligned}$$

因 (2) 爲恆等式, x 同次幂之係數皆相等 (§ 284).

$$\text{故} \quad a+b=2, \quad a-b+c=0, \quad a+c=1, \quad (3)$$

$$\text{解(3),} \quad a=1, \quad b=1, \quad c=0.$$

$$\text{故} \quad \frac{2x^2+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2+x+1}.$$

例 2. 化 $(5x+4)/(x^2+x^2+x^2+x)$ 爲二分項分式之和.

關於分項分式之一般定理. 從 § 532 之定理, 可得如下之結論.

1. 令 A/PQR 爲真分式, 其分母之三因式 P, Q, R 爲互質, 此分式可化爲如下形式之和

$$\frac{A}{PQR} = \frac{B}{P} + \frac{D}{Q} + \frac{E}{R}$$

此處 $B/P, D/Q$ 與 E/R 表真分式.

因 P 對於 QR 爲互質 (§ 532), 故 $A/(P)R$ 爲形式如 $B/P + C/QR$ 二真分式之和 (§ 532); 又因 Q 對於 R 爲互質, 故 C/QR 爲形式如 $D/Q + E/R$ 二真分式之和 (§ 532).

當分母爲任何個互質因式之積時, 結果仍真.

2. 就真分式 A/PQ 其 P 與 Q 爲互質者考之, 依 § 532 可化爲和之形式如

$$\frac{A}{PQ} = \frac{B}{P} + \frac{C}{Q}.$$

因因式 Q, Q, Q 非互質，故不能應用 § 532 之定理於 C/Q^3 。

但因 C 之次數低於 Q^3 ，故可化 C 為 Q 之多項式如下列之形 (§ 412)。

$$C \equiv C_1 Q^2 + C_2 Q + C_3,$$

此處 C_1, C_2 與 C_3 之次數俱低於 Q 。

以 Q^3 除此恆等式之各端，得

$$\frac{C}{Q^3} \equiv \frac{C_1}{Q} + \frac{C_2}{Q^2} + \frac{C_3}{Q^3}.$$

故已知分式可化爲和之形式如：

$$\frac{A}{PQ^3} \equiv \frac{B}{P} + \frac{C_1}{Q} + \frac{C_2}{Q^2} + \frac{C_3}{Q^3}.$$

此處 B 之次數低於 P ，而 C_1, C_2, C_3 之次數俱低於 Q 。

於一般，當分母中之因式如 Q ，其次數多於一時，俱如此。

故有下列定理：

假定已知真分式之分母已析爲因式——有一次者，有多次者——各因式皆爲互質，

此分式可化爲一組真分式之和，且僅有一組，其中 (1) 關於佔有一次之各因式 P ，有一節分式如 B/P 之形。(2) 關於佔有 r 次之各因式 Q ，有 r 個分式之一系列如 $C_1/Q + C_2/Q^2 + \dots + C_r/Q^r$ 之形，此處 C_1, C_2, C_3 之次數俱低於 Q 。

536 最簡分項分式。凡 x 之每一多項式具有實係數者，皆可證明其爲形式如 $x-a$ 與 x^2+px+q 之一或二因式之積，此處 a, p, q 俱爲實數，但 x^2+px+q 之因式有虛係數。

尤有進者，從 §§ 463, 532，可知設已知真分式之分子與所

析分母之因式，俱有實係數，則其對應分項公式之分子，亦如是。故由 § 534，得

任一分子與分母有實係數之每一真分式，等於一實係數分項公式之和，其與分母中因式 $x-a$ 及 x^2+px+q 之關係如下。

1. 關於各因式 $x-a$ 佔有一次者，有一真分式形如 $A/(x-a)$ ，此處 A 為實常數。

2. 關於各因式 $x-a$ 佔有 r 次者，有一真分式之一般形如 $A_1/(x-a) + A_2/(x-a)^2 + \dots + A_r/(x-a)^r$ ，此處 A_1, A_2, \dots, A_r 俱為實常數。

3. 關於各因式 x^2+px+q 佔有一次者，有一真分式形如 $(Dx+E)/(x^2+px+q)$ 此處 D 及 E 俱為實常數。

4. 關於各因式 x^2+px+q 佔有 r 次者，有一真分式之一般形如

$$(D_1x+E_1)/(x^2+px+q) + \dots + (D_rx+E_r)/(x^2+px+q)^r.$$

此處 $D_1, E_1, D_2, \dots, D_r, E_r$ 俱為實常數。

此種假連之分式，通常名為已知分式之真分項分式，最好

用未定係數法求之。

例 1. 化 $\frac{(1-x)^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}$ 為最簡分項分式。

$$\text{由 § 536, 得 } \frac{(1-x)^2}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \quad (1)$$

此處 A, B, C 為常數。

去(1)之分母，得

$$(1-x)^2 = A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2).$$

將(2)之右端依 x 之乘方排列而使其同乘數之係數相等，即可求得 A, B, C 值。因 A, B, C 為常數，故用下法求代同一結果，較為簡便。

在(2)中令 $x=1$, 則得 $-1=A(-1)(-2)$, $\therefore A=-1/2$;
 次令 $x=2$, 則得 $3=B(-1)\cdot 1$, $\therefore B=-3$;
 又令 $x=3$, 則得 $9=C\cdot 2\cdot 1$, $\therefore C=9/2$.

$$\text{故 } \frac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x-2} + \frac{9}{2(x-3)}$$

例 2. 化 $\frac{x+1}{x(x-1)^3}$ 為最簡分項分式.

$$\text{由 } \S 536, \text{ 得 } \frac{x+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

$$\text{故 } x+1 = A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx \quad (1)$$

在(1)中令 $x=0$, 則得 $1=A(-1)^3$, $\therefore A=-1$;

$$\text{次令 } x=1, \text{ 則得 } 2=D, \quad \therefore D=2.$$

以 A 與 D 之值代入(1), 將所得之項 $-(x-1)^3$ 與 $2x$ 移於左端而化簡之, 得

$$x^3 - 3x^2 + 2x = Bx(x-1)^2 + Cx(x-1). \quad (2)$$

以 $x(x-1)$ 除(2)之二端, 得

$$x-2 = B(x-1) + C. \quad (3)$$

在(3)中, 使 x 同乘幕之係數相等, 則得

$$1=B \text{ 而 } -2 = -B+C, \quad \therefore B=1 \text{ 而 } C=-1.$$

$$\text{故 } \frac{x+1}{x(x-1)^3} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$$

或可將(1)依 x 之乘幕排列, 則得

$$x+1 = (A+B)x^3 - (3A+2B-C)x^2 + (3A+B-C+D)x - A.$$

使 x 同乘幕之係數相等, 則得

$$A+B=0, 3A+2B-C=0, 3A+B=C+D=1, -A=1.$$

從此諸方程, 如前求得

$$A=-1, B=1, C=-1, D=2.$$

例 3. 化 $\frac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}$ 為最簡分項分式.

x^2-x+1 之因式為虛數, 故得 (§ 536),

$$\frac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)} = \frac{Ax+B}{(x^2-x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} + \frac{E}{x-3}$$

此處 A, B, C, D, E 俱為實數.

$$5x^2 - 4x + 16 \equiv (Ax + B)(x - 3) + (Cx + D)(x^2 - x + 1)(x - 3) + E(x^2 - x + 1)^2, \quad (1)$$

依 x 之乘幕排列(1), 而使其同乘幕之係數相等, 即可求得 A, B, C, D, E ; 但以下法較簡.

在(1)中令 $x = 3$, 則得 $49 = 49E$, $\therefore E = 1$.

以 $E = 1$ 之值代入(1), 將所得之項 $(x^2 - x + 1)^2$ 移於左端而化簡之, 且以 $x - 1$ 除其二端, 得

$$-(x^2 + x^2 + x + 5) \equiv Ax + B + (Cx + D)(x^2 - x + 1), \quad (2)$$

次以 $x^2 - x + 1$ 除(2)之二端, 得

$$-x - 2 - \frac{2x + 3}{x^2 - x + 1} \equiv \frac{Ax + B}{x^2 - x + 1} + Cx + D. \quad (3)$$

由 § 131, 在(3)中整式部分與分式部分各相等.

$$\text{即 } -x - 2 \equiv Cx + D, \quad \text{故 } C = -1, D = -2,$$

$$-2x - 3 \equiv Ax + B, \quad \text{故 } A = -2, B = -3.$$

$$\text{故 } \frac{5x^2 - 4x + 16}{(x^2 - x + 1)^2(x - 3)} = \frac{2x + 3}{(x^2 - x + 1)^2} - \frac{x + 2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x - 3}.$$

當已知分式之分母有 $(x - a)^n$ 之形時, 最好先以 $x - a$ 之乘幕表其分子 (§ 423). 同理, 當分母有 $(x^2 + px + q)^r$ 之形, 而 $x^2 + px + q$ 之因式為虛數時; 可以 $x^2 + px + q$ 之乘幕表其分子.

例. 化 $\frac{x^4 + x^3 - 8x^2 - 6x - 32}{(x - 2)^5}$ 為最簡分項分式.

由 § 423, 得

$$x^4 + x^3 - 8x^2 + 6x - 32 = (x - 2)^4 + 9(x - 2)^3 + 22(x - 2)^2 + 18(x - 2) - 28.$$

以 $(x - 2)^4$ 除二端, 得

$$\frac{x^4 + x^3 - 8x^2 + 6x - 32}{(x - 2)^5} = \frac{1}{x - 2} + \frac{9}{(x - 2)^2} + \frac{22}{(x - 2)^3} + \frac{18}{(x - 2)^4} - \frac{28}{(x - 2)^5}.$$

設已知一假分式, 可先化為一整式與一真分式之和; 然後再化為分項分式.

例. 應用此法於 $\frac{x^3-2x^2-6x-21}{x^2-4x-5}$

$$\frac{x^3-2x^2-6x-21}{x^2-4x-5} = x+2 + \frac{7x-11}{(x+1)(x-5)}$$

用前法求得

$$\frac{7x-11}{(x+1)(x-5)} = \frac{3}{x+1} + \frac{4}{x-5}$$

習題 XXXVII

化以下諸式為簡單分項式, 其分母互質係數.

1. $\frac{2x+11}{(x-2)(x+3)}$

2. $\frac{x^2+6x+2}{(x^2+1)(3x-1)}$

3. $\frac{4x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

4. $\frac{7x^2+15x+2}{(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-4)}$

5. $\frac{x^2+2}{1+x^2}$

6. $\frac{9x^2+2x-1}{x^2-x^2+2x-1}$

7. $\frac{x^3-x^2-5x+4}{x^2-3x+2}$

8. $\frac{2x(x^2+1)(1+x)}{(x^2+2)^2}$

9. $\frac{x^2+1}{2x^3-5x^2-12x}$

10. $\frac{x^2+6x+1}{x^2-2x^2+x^2-1}$

11. $\frac{2x^3-3x^2+x-6}{(x+3)^2}$

12. $\frac{(x^2-x)+1}{(x^2+1)(x^2+2)}$

13. $\frac{(x-3)^2(x-1)}{(x+1)^2(x-2)}$

14. $\frac{x^2+1}{(x^2-2)(x^2+1)}$

15. $\frac{2x^2+x+1}{(x^2+x+1)^2}$

16. $\frac{2x^2+x+1}{(x^2-x)^2}$

17. $\frac{3x^2-x+2}{(x^2+2)(x^2+2)}$

18. $\frac{x^2+p^2+1}{(x^2+1)(x^2+1)}$

19. $\frac{8x^2-3x+2}{x(x-1)^2(x+5)^2}$

20. $\frac{x^2+r+3}{x^2+p^2+1}$

IX. 對 稱 函 數

絕 對 對 稱 與 輪 轉 對 稱

絕對對稱。於式 $x^2 + y^2 + z^2$ 中，文字 x, y, z 包括一種意味，540
 即將其中任何二文互換，則 $x^2 + y^2 + z^2$ 變形為其恆等式如 y^2
 $+ x^2 + z^2$ ，或 $z^2 + y^2 + x^2$ 或 $x^2 + z^2 + y^2$ 。欲表明此事，稱 $x^2 + y^2 + z^2$
 為關於 x, y, z 而對稱。

於一般，一定組文字之函數，當互換其每二文字而將此函數
 變形為恆等函數時，則稱此函數關於此組文字為對稱。

對稱函數其他之例，如

$(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)(x+z-y)(x+z+y)$ 關於 x, y, z 為對稱。
 $a+b+c$ 與 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 關於 a, b, c 為對稱。

就這方面而言， $x+y-z$ 非對稱，因設將 y 與 z 互換，則得
 $x+z-y$ ，不等於 $x+y-z$ 故也。

x^2y 及 $3y^2z$ 稱為關於變數 x, y, z 之同形項，蓋其項之變數部 541
 分如 x^2y 與 y^2z ，可將其文字 x, y, z 之排列互換而無其變形故也。於
 般亦如此。

若干文字如 x, y, z 之變數，關於其變數母為對稱之充分及 542
 必要條件，為同形式之一切項有相同係數。

設一對稱函數含某形式之一項，則必含此形式之一切項；即
 一切項可從所述之項盡數互換文字而得。

例如，設欲 $ax^2 + by^2 + cz^2$ 為對稱，則必須有 $a=b=c$ 。

又設欲 $x^2y + y^2z + z^2x + x^2z + z^2x + y^2z + x^2y$ 為對稱函數，則一給定之項如 x^2y 與 y^2z

543 此定理表示已知次數關於三一組文字之對稱函數一般形。

例如，關於 x, y, z, u 之一次對稱函數，其一般形式為 $a(x+y+z+u)+b$ ，此處 a, b 表常數。

又關於 x, y, z 之一次，二次與三次之一般對稱函數為：

$$1. a(x+y+z), \quad 2. c(x^2+y^2+z^2)+b(xy+xz+yz),$$

$$3. a(x^3+y^3+z^3)+b(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y)+cxyz.$$

544 對稱函數之表示法。記法 Σx^2 意謂與同形如 x^2 之一切項之和；即 x, y, z 為討論之文字，則 $\Sigma x^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 。同理 $\Sigma x^2 y = x^2 y + y^2 x + x^2 z + z^2 x + y^2 z + z^2 y$ ；餘類推。

任何對稱函數，可從其諸項中選擇各種形式之一項，並書符號 Σ 於其和之前以表示之。

例如，

$$\Sigma(2x - x^2 y^2) = 2x + 2y + 2z - x^2 y^2 - y^2 x^2 - x^2 z^2 - z^2 x^2 - y^2 z^2 - z^2 y^2.$$

545 當書對稱函數之全部時，最好依定法排列。下例示排列對稱函數之合宜法則。

設討論之文字為 a, b, c, d ，而依其規定次序，知次序為 a, b, c, d ，於是書 Σab 與 Σabc 如下：

$$\Sigma ab = ab + ac + ad + bc + bd + cd, \quad \Sigma abc = abc + abd + acd + bcd.$$

應注意於各項依規定次序書文字。

書 Σab 應輪流取各字母 a, b, c ，而書其次文字於其後。

之諸項，可從 Σab 依同法導出。

當 $m \neq n$ 時，可排列 $\Sigma a^m b^n$ 之諸項如下：

$$\Sigma a^2 b^2 = a^2 b^2 + b^2 a^2 + a^2 c^2 + c^2 a^2 + \dots + c^2 d^2 + d^2 c^2.$$

應注意於其指數之次序為一定，而依照指數，可用各種次序

$a^2 b^2$ 書 Σab 之第一項，餘類推。

同法可得

$$\sum a^2 b^2 c^2 = a^2 b^2 c^2 + a^2 c^2 b^2 + b^2 a^2 c^2 + b^2 c^2 a^2 + c^2 a^2 b^2 + c^2 b^2 a^2$$

此(同法推 $\sum a^2 b^2 c^2$ 其餘各項得之諸項)。

關於對稱之一般定理。從對稱之定義 (§540), 可知對稱函數, 當以計算法則變其形式時, 仍為對稱函數。於特例,

二對稱函數之和, 差, 積, 與商仍為對稱。

據此定理, 可用代數演算結合已知對稱函數不必實行計算

而求得其結果。只須計算其結果之各種模範項。

例1. 求 $(\sum a)^2 = (a+b+c+\dots)^2$ 。

所求結果, 顯然為二種形式 a^2 與 $2ab$ 之項所成之二次齊次對稱函數。

故 $(\sum a)^2 = \sum a^2 + 2\sum ab$ 。

例2. 求 $\sum x^2 \cdot \sum x = (x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)$ 。

此積顯然為二種形式 x^3 與 $x^2 y$ 之項之和。

故 $\sum x^2 \cdot \sum x = \sum x^3 + \sum x^2 y = x^3 + y^3 + z^3 + x^2 y + y^2 x + z^2 x + 2x + y^2 z + z^2 y$ 。

例3. 求 $(\sum x)^3 = (x + y + z)^3$ 。

所求結果為關於 x, y, z 之三次齊次對稱函數, 故須有 (§543)

$$(x + y + z)^3 = a(x^3 + y^3 + z^3) + b(x^2 y + y^2 x + x^2 z + z^2 x + y^2 z + z^2 y) + cxyz$$

欲求常數 a, b, c 之值, 可假定以任何三組值予 x, y, z 產生 a, b, c 之方程而解之。

例如, 使 $x=1, y=0, z=0$, 則得 $1 = a$ (1)

次使 $x=1, y=1, z=0$, 則得 $8 = 2a + 2b$ (2)

終使 $x=1, y=1, z=1$, 則得 $27 = 3a + 6b + c$ (3)

解(1), (2), (3), 得 $a=1, b=3, c=6$ 。

$$\therefore (x + y + z)^3 = \sum x^3 + 3\sum^2 y + 6\sum xyz$$

547 輪換對稱。於式 $x^2y + y^2z + z^2x$ 中，文字 x, y, z 包括一種意味，即以 x 換 y ，以 y 換 z ，以 z 換 x ，則得一恆等式 $y^2z + z^2x + x^2y$ 。欲表明此事，將 $x^2y + y^2z + z^2x$ 爲關於文字 x, y, z 依次序 x, y, z 而輪換對稱。

於一般，設一式中之文字以第二換第一，第三換第二，如此進行，末以第一文字換最後文字，而此式變形爲恆等式時，則此式稱爲關於若干文字依已知次序排列者而輪換對稱。

文字之如此交換，稱爲輪換。

548 所宜注意者， $x^2y + y^2z + z^2x$ 之項，係其本身依輪換排列。當以 y 換 x ，以 z 換 y ，以 x 換 z 時，則第一項變爲第二項，第二項變爲第三項，而第三項變爲第一項也。輪換式爲常見之式，而依對換排列，於計數上有極大重要性。

549 顯然可見每一對稱函數，必爲輪換，但每一輪換式，未必爲對稱。

例如， $x^2y + y^2z + z^2x$ 雖爲輪換而非對稱。設將 x 與 y 互換，則其值即變。欲使其爲對稱，須加入一羣之項 $y^2x + z^2y + x^2z$ 。

550 如上例所示，一輪換函數常不含已知形式之一切項，但其所含之諸項，必有相同係數。

551 定理。二輪換函數之和，差，積，商仍爲輪換函數。

此理可從輪換對稱之定義得之。

例。求積 $(x^2y + y^2z + z^2x)(x + y + z)$ 。

(1) 此積爲輪換而非對稱甚明。又此積含諸項 $x^3y, x^2y^2, x^2yz,$

(2) 各一次，且只含此種形式之項。

故其積爲

$$x^3y + x^2y^2 + x^2yz + y^3x + y^2x^2 + y^2xz + z^3x + z^2x^2 + z^2xy$$

習題 XXIX。

1. 指明下式中關於何文字為對稱？

$$x^4 - 2x^2 + z^2 + 4(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(x^2 + z^2).$$

2. 寫全以下之 a, b, c 之對稱函數。

$$\Sigma a^2 b^2, \Sigma a^4 b^4, \Sigma c^2 / b, \Sigma a^2 b^3 c^4, \Sigma a^2 b^2 c^4,$$

$$\Sigma(a+b)c, \Sigma(a+b^2)c^2, \Sigma(a+2b+3c^2).$$

3. 試證明 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 關於 a, b, c 為輪換而非對稱；又 $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ 為對稱。

4. $(a-b)^2(b-c)^2(c-d)^2(d-a)^2$ 是否關於 a, b, c, d 為對稱？

5. 排列下列各組之式為輪換次序：

$$y^2 - x^2, z^2 - y^2, x^2 - z^2; a^2 b c, a b d^2, a c^2 d, b^2 c d,$$

6. 寫全 a, b, c, d 之輪換函數，其第一項為：

$$a b^2 c^3, a(b-c), (b+2c)(a+d), d^2((a-b)(a-d)).$$

7. 證明以下恆等式為真。

$$\Sigma a^4 - \Sigma a^2 = \Sigma a^4 + \Sigma a^2 b^2; \Sigma a b^2 - \Sigma a = \Sigma a^2 b + 3 \Sigma a b c.$$

對稱與輪換函數之新圖式法

藉餘式定理與上述原則，當能加較簡之計算以析複雜之 552

對稱或輪換函數之因式。

例 1. 將 $k^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$ 析因式。

當 $y=z$ 時，此函數為 0，蓋

$$-k^2(x-x) - (x^2(z-z) + z^2(z-x) + z^2(x-x)) = 0.$$

故此函數可用 $y-z$ 整除 (§ 4.6)；同理，亦可用 $z-x$ 與

$x-y$ 整除，從而可用 $(y-z)(z-x)(x-y)$ 整除。

被除式與除式俱為輪換齊次函數，而其次數各為四次與三

次。故其商必為一次輪換齊次函數，從而有 $k(x+y+z)$ 之形，

此處 k 表一常數，故

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) \equiv k(y+z)(z-x)(z-y)(x+y+z) \quad (1)$$

欲求 k , 可假定以任何一組值不使 k 之係數為 0 者予 x, y, z .

例如, 使 $x=2, y=1, z=0$, 則得 $6 = -6k$, 或 $k=-1$.

或將 (1) 之二端依 x 之多項式排列, 使其 x 同乘器之係數相等, 即可得 k .

例如 x^2 項在左端為 $x^2(y-z)$, 而在右端則為 $-kx^2(y-z)$, 因此得 $k=-1$ 如前同. 故

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = -(y+z)(z-x)(z-y)(x+y+z).$$

例 2. 將 $(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$ 析因式.

當 $x = -y$ 時此函數為零, 因

$$(-y+y+z)^5 + y^5 - y^5 - z^5 \equiv 0.$$

故此函數可用 $x+y$ 整除; 同理亦可用 $(y+z)$ 與 $(z+x)$ 整除, 從而可用 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 整除.

此被除式與除式俱為稍齊次式, 各為五次與三次. 故其商必如 $k(x^2+y^2+z^2) + l(xy+yz+zx)$ 之形 (§543).

$$\begin{aligned} & \text{故} \quad (x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 \\ & \equiv (x+y)(y+z)(z+x) \{ k(x^2+y^2+z^2) + l(xy+yz+zx) \}. \end{aligned}$$

使 $x=1, y=1, z=0$, 則得 $15 = 2k + l$.

使 $x=2, y=1, z=0$, 則得 $35 = 5k + 2l$.

就 k 及 l 解之, 求得 $k=5$, 從而

$$(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 = 5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2 + xy+yz+zx).$$

例 3. 析下式之因式

$$(x+y+z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3 - (x+y-z)^3$$

當 $x=0$ 時, 此函數為零, 因

$$(y+z)^3 - (y+z)^3 - (z-y)^3 - (y-z)^3 \equiv 0.$$

故此函數可用 x 整除; 同理, 可用 y 與 z 整除; 從而可用 xyz 整除.

因被除式與除式俱為三次, 故商為常數 k .

$$(x+y+z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3 - (x+y-z)^3 = kxyz.$$

使 $x=1, y=1, z=1$, 求得 $k=24$. 從而

$$(x+y+z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3 - (x+y-z)^3 = 24xyz.$$

上述之法則, 有時可用於化繁簡分式.

例. 化簡

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

此式關於 a, b, c 為輪換.

最低公分母為 $(b-c)(c-a)(a-b)$

化各分式至此最低公分母, 得第一分子為 $-a^3(b-c)$. 故依輪換對稱, 得第二與第三分子為 $-b^3(c-a)$ 與 $-c^3(a-b)$.

加此三分子而析其結果之因式 (§ 552 例 1), 得

$$(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b).$$

故已知式化為 $a+b+c$.

習 題 XXX.

析下列諸式之因式.

1. $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$.
2. $yz(y-z) + zx(z-x) + xy(x-y)$.
3. $(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2$.
4. $x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2$.
5. $x^3(y-z)^2 + y^3(z-x)^2 + z^3(x-y)^2$.
6. $x^4(y^2-z^2) + y^4(z^2-x^2) + z^4(x^2-y^2)$.
7. $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.
8. $(y-z)^5 + (z-x)^5 + (x-y)^5$.
9. $(x+y+z)^5 - (y+z-x)^5 - (z+x-y)^5 - (x+y-z)^5$.
10. $(y-x)(y+z)^2 + (z-x)(z+x)^2 + (x-y)(x+z)^2$.
11. $x(y+z)^2 + y(z+x)^2 + x(x+y)^2 - 4xyz$.
12. $x^5(y-z) - y^5(z-x) + z^5(x-y)$.

化簡以下諸分式.

$$13. \frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)}.$$

$$14. \frac{x+a}{(a-b)(a-c)} + \frac{x+b}{(b-c)(b-a)} + \frac{x+c}{(c-a)(c-b)}.$$

$$\begin{aligned}
 15. & \frac{a^2+1}{(a-a)(a-c)} + \frac{b^2-1}{(b-a)(b-a)} + \frac{c^2-ab}{(c-a)(c-a)} \\
 16. & \frac{(b+c)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c+a)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{(a+b)^2}{(c-a)(c-b)} \\
 17. & \frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-a)(x-b)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x-c)}
 \end{aligned}$$

X. 二項式定理

654 連乘積之構成。茲求積

$$(a+b+c+d)(e+f+g)(h+k),$$

可用 $e+f+g$ 之各項乘 $a+b+c+d$ 之各項，再用 $h+k$ 之各項乘其所得各積，則知連乘積之結果。

故若從三已知因式中各選一項而相乘，即得積之一項。而設用一切可能方法，從三已知因式中行項之此種選擇，即可得乘積之一切項。

例如從首因式選取 b ，次因式選 g ，第三因式選 k ，則得乘積之項 bkg ，餘類推。

且從 $(a+b+c+d)$ 選一項有四法，從 $(e+f+g)$ 選一項有三法，而從 $(h+k)$ 內選一項有二法，故完全乘積中之項數為 $4 \cdot 3 \cdot 2$ 或 24 。以此類推，於一般，

任何若干多項式之積，若從各因式選一項相乘，則得一切積之和。

又設第一因式有 m 項，第二因式有 n 項，第三因式有 p 項等等，則其乘積中(因式之項數——(若有任何一項尚未合併之前，為 $m \cdot n \cdot p$)

$$\frac{d+a}{(d-a)(d-b)} + \frac{d+b}{(d-a)(d-d)} + \frac{d+c}{(d-a)(d-b)} \quad \Delta C$$

此定理在乘法之正確上可供檢核之用，亦可適用於已合併 555
 別類項之式，倘此諸項代表數(即上文)字係法)諸項之係數，則項
 之係數，即表示其所代表各項合併之項有若干也。

例如，由所述定理， $(a+b+c)(a+b+c)$ 之積，必有 3 3
 或 9 項，俱為同類。且前已表明 $(a+b+c)(a+b+c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ ，因此式代表 $1+1+1+2+2+2$ 或 9 項未
 合併項之乘積，如其所需。

同理， $(a+b)(a+b)(a+b)$ 必有 $2+2+2$ 或 8 項，但此積
 化簡後則成爲 $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ，代表 $1+3+3+1$ 或 8 項
 未合併項之乘積，如其所需。

用上章方法計算到解題時，此定理須熟記。 556

例如，讀者已證明 $\sum ab \cdot \sum a = \sum a^2 b + 3 \sum abc$ 。

欲檢驗此公式可假定其值各文字 a, b, c 。

於是 $\sum ab$ 有三項， $\sum a$ 有三項， $\sum a^2 b$ 有 6 項， $\sum abc$ 有 1
 項；而

$3 \cdot 3 = 9$ 或 9 項。

一次二項因式之積，§554 之定理，能使以觀察法求得形如：

$x+b$ 任何多個因式之積，例如

$$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$$

$$= x^3 + (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x + b_1b_2b_3$$

因從各因式選 x 得項 x^3 ，

用一切可能方法，從二因式選 x ，從第三因式選 b ，得 b_1x^2 ，
 b_2x^2, x_1x^2 ，諸項。

用一切可能方法從一因式選 x ，他二因式選 b ，得 b_1b_2x ，
 b_1b_3x, b_2b_3x ，諸項。

從所有三因式選 b ，得 $b_1b_2b_3$ 項。

置注於公式中，常積之係數合併後， x^3 之係數為三文字 b_1, b_2, b_3 之和， x^2 之係數，為三文字之兩兩之積之和， x 之係數，為三文字之每一文字之積之和， $b_1b_2b_3$ 之積。

最後一項為所有三文字之積。

因 $(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$ 自身關於 b_1, b_2, b_3 為對稱故諸係數為 b_1, b_2, b_3 之對稱函數，如吾人所料。

宜注意者，因 $(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$ 關於 b_1, b_2, b_3 為對稱，故求得各種形式之一項如 $x^3, b_1x^2, a_1b_2x, b_1b_2b_3$ ，而寫全此各種形式之一切項，即可求得其積。

558 由同理可證明其一般公式為

$$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)\dots(x+b_n) \\ = x^n + B_1x^{n-1} + B_2x^{n-2} + \dots + B_n$$

此處 $B_1 = \Sigma b_i = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n,$

$$B_2 = \Sigma b_i b_j = b_1 b_2 + b_1 b_3 + \dots + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n,$$

$$B_3 = \Sigma b_i b_j b_k = b_1 b_2 b_3 + b_1 b_2 b_4 + \dots + b_{n-2} b_{n-1} b_n,$$

$$B_n = b_1 b_2 b_3 \dots b_n;$$

即， B_1, B_n 為一切文字 b_1, b_2, \dots, b_n 之和與積，其間之係數為： B_2 為此種文字中每二個之積之和； B_3 為每三個之積之和，餘類推。

例如，每次從三因式選 b ，從其餘因式選 x ，得積之一項，用一切可能方法行此種選法，則得諸項 $b_1 b_2 b_3, x^{n-1}, b_1 b_2 b_3 x^{n-1}, \dots$ ，而其和為 $B_1 x^{n-1}$ 。

觀察以上所示，知係數

$$B_1, B_2, \dots, B_n$$

為文字 b_1, b_2, \dots, b_n 之對稱函數。

559 依同法得

$$(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\dots(x-b_n) \\ = x^n - B_1x^{n-1} + B_2x^{n-2} - \dots + (-1)^n B_n$$

此處 B_1, B_2, \dots, B_n 有相同意義如 § 558，而連結各項之記號為：

一與十相間,末項 $(-1)^n B_n$ 之號,當 n 為偶數時用+,為奇數時用-。

於 § 558 之公式中,僅須變其一切文字 b_1, b_2, \dots, b_n 之號,即得此公式,因每一 B 之諸項為偶數個 b 之乘積者保持不變,而每一 B 之諸項為奇數個 b 之乘積者,則僅變其號故也

例. 由 §§ 557-559 法則,求以下各積.

1. $(x+1)(x+2)(x+3),$
2. $(x+2)(x-3)(x+4).$
3. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d).$
4. $(x-y)(x+2y)(x-3y)(x+4y).$

和 $\Sigma b_1, \Sigma b_1 b_2, \dots$ 中之項數. 令 n_1, n_2, \dots 順次表 $\Sigma b_1, \Sigma b_1 b_2, \dots$ 中之項數.

1. 因 $\Sigma b_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, 顯然 $n_1 = n$.

2. 設 n 個文字 b_1, b_2, \dots, b_n 之每一個,各以其他 $n-1$ 個文字輪流乘之,則得 $n(n-1)$ 個積,但此 $n(n-1)$ 個積為 $\Sigma b_1 b_2$ 之諸項,每項計算二次,故在 $\Sigma b_1 b_2$ 中之項數 n_2 為 $n(n-1)/2$,或

$$n_2 = n_1 \frac{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

於是得

$b_1 b_2, b_1 b_3, \dots, b_1 b_n; b_2 b_1, b_2 b_3, \dots, b_2 b_n; \dots; b_n b_1, b_n b_2, \dots, b_n b_{n-1}.$

此為 n 羣積,每羣有 $n-1$ 個積,故全數有 $n(n-1)$ 個積.

但積 $b_1 b_2$ 見二次,即一為 $b_1 b_2$ 之形,一為 $b_2 b_1$ 之形;餘類推.

3. 次將 $\Sigma b_1 b_2$ 之 n_2 項,各以 $n-2$ 文字,未見於此項中者乘之,共得 $n_2(n-2)$ 個積.但此 $n_2(n-2)$ 個積為 $\Sigma b_1 b_2 b_3$ 之諸項,每項計算三次,故在 $\Sigma b_1 b_2 b_3$ 中之項數 n_3 為 $n_2(n-2)/3$,或

$$n_3 = n_2 \frac{n-2}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

於是得

$$b_1 b_2 b_3, b_1 b_2 b_4, \dots, b_1 b_2 b_n, b_1 b_3 b_2, b_1 b_3 b_4, \dots, b_1 b_3 b_n, \dots$$

此為 n 項乘積，每項有 $n-2$ 個積，故共有 $n(n-2)$ 個積。

但積 $b_1 b_2 b_3$ 發現三次，即有三種形式 $b_1 b_2 b_3, b_1 b_3 b_2, b_3 b_1 b_2$ 。同理， $\Sigma b_1 b_2 b_3$ 中之每一項皆發現三次，蓋每次對於此三文字之前中後三種方法，可將其中心文字以其餘一文字乘之而得也。

4) 由同理，可證明

$$n_4 = n_3 \frac{n-3}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

而於一般，

$$n_r = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}$$

四項，四文字 b_1, b_2, b_3, b_4 每次取一，二，三，四相乘之積，其個數為

$$n_1 = 4, n_2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6, n_3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4, n_4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1$$

561 二項式定理。設於 § 558 之公式，即

$(x+b_1)(x+b_2) \dots (x+b_n) = x^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \dots + B_n$ ，以同文字 a 易於 n 個不同文字 b_1, b_2, \dots, b_n ，而以 a 易其 x ，則左端變為 $(a+b)^n$ 。

次因 B_1 中之 n 項皆變為 b ，而 B_2 中之 n_2 項皆變為 b^2 ，餘類推，故得 (§ 56)。

$$B_1 = nb, B_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} b^2, B_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3, \dots$$

故此公式化為如下：

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-1} b + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \dots$$

故

1. 右邊之項數為 $n+1$.
2. a 之指數逐項減一，而 b 之指數逐項增一，各項中指數之和皆為 n .
3. 首項係數為 1，第二項係數為 n ，而其餘各項係數，可用下法求得：

以任一項中 a 之指數，乘此項之係數，而以 b 之指數加 1 除之，其結果即為其次項之係數。

此公式即所謂二項式定理，在右邊之式，名為依此定理所得 $(a+b)^n$ 之展開式。

例如，

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} ab^2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

因 $a+b$ 關於 a, b 為對稱，故從 § 54 可知，在 $(a+b)^n$ 之展開式中同形之諸項——即含 a^n 與 $b^n, a^{n-1}b$ 與 ab^{n-1} ，等等——必有相同係數。但此為首項與末項，第二項與末第二項，而於一般，即為距展開式首末等遠之每二項。

故末項為 b^n ，末第二項為 nab^{n-1} ，餘類推。因項數為 $n+1$ ，故當 n 為偶數時有一中項，為奇數時有二中項，當有二中項時，則此二中項為同形且有同係數。由上所述可知中項前後各項之係數相同，但次序相反。

亦可證明各項之係數漸增，至中項以後而漸減，故中項者為最大。

此由 § 501, 3 之係數法則而得，因在中項前各項中， a 之指數較 b 之指數增一為大，而在中項後之各項中則為小故也。

564 於前公式中變 b 之號而化簡，得

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots$$

其中諸項含 b 之奇次幂者為負號，含偶次幂者為正號

例。求 $(2x-y^3)^6$ 之展開式。

於公式中，以 $2x$ 代 a ， y^3 代 b ，憶及末三係數與首三係數相同，而次序相反 (§ 562)，則得

$$\begin{aligned} (2x-y^3)^6 &= (2x)^6 - 6(2x)^5 y^3 + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} (2x)^4 (y^3)^2 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2x)^3 (y^3)^3 \\ &\quad + 15(2x)^2 (y^3)^4 - 6(2x)(y^3)^5 + (y^3)^6 \\ &= 64x^6 - 192x^5 y^3 + 240x^4 y^6 - 160x^3 y^9 - 60x^2 y^{12} - 12xy^{15} + y^{18}. \end{aligned}$$

565 一般項。從 § 561，知 $(a+b)^n$ 展開式中之第 $(r+1)$ 項為

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots \text{至 } r \text{ 個 } a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} a^{n-r} b^r$$

當 r 為奇數時，此式之符號為負號，即為 $(a-b)^n$ 展開式中之第 $(r+1)$ 項。

例 1. 求 $(x-y)^{16}$ 展開式中之第八項。

此處 $n=16$ 而 $r+1=8$ ， $r=7$ 。故所求項為

$$\frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} x^9 y^7 = -1144 x^9 y^7$$

例 2. $(x^3+1/x)^{12}$ 之展開式中，有無含 x^{10} 之項？若有之，試求此項。

令 $r+1$ 表項數。於是因 $n=12$ ， $a=x^3$ ，與 $b=1/x$ ，故必有

$$a^{n-r} b^r = (x^3)^{12-r} / x^r = x^{36-4r} = x^{10}$$

設 $36-4r=10$ ，或 $r=4$ ，則能滿足此條件。

故第五項含 x^2 ，而代入公式，求得此項為 $\frac{2 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^2$

$$= 495x^2.$$

習題 XXI.

用二項式定理，展開下列諸式：

1. $(3x+2y)^7$; 2. $(a-b)^8$; 3. $(1+2x^2)^7$

4. $(2+1/x)^4$; 5. $(x-3/x)^6$; 6. $(x/y-y/x)^5$

7. $(1-x+2x^2)^4$; 8. $(a^2+ax-x^2)^3$.

9. 求 $(1+x/2)^{11}$ 中之第六項

10. 求 $(3a-4b)^{12}$ 中之第八項

11. 求 $(a^2-2bc)^{10}$ 中之中項。

12. 求 $(1-x)^9$ 中之二中項。

13. 求 $(1+x)^8$ 中 x^5 之係數。

14. 求 $(3-2x)^7$ 中 x^4 之係數。

15. $(1-x^2)^6$ 中 x^8 之係數。

16. 求 $(1-2x)^9+(1-2x)^{11}$ 中 x^3 之係數。

17. 求 $(x+1/x)^{12}$ 中之常數項。

18. 求 $(2x-1/x)^{15}$ 中 x^7 之係數。

19. 用觀察法求 $(x+2y)(x-3y)(x-5y)$ 。

20. 用觀察法求 $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)$ 。

21. 積 $(a+b+c+d)(f+g+h)(k+l)(m+n+p+q)$ 中之項數如何？

22. 於下列各積中，求其係數之和。

1. $(1+x^2+x^3+x^4)^3$; 2. $(1+2x+x^2)^3(1+x+2x^2)^2$ 。

23. 於下列四文字 a, b, c, d 之對稱函數，當展開時，其係數之和如何？

1. $\Sigma a^2, \Sigma a$; 2. $\Sigma a^3, \Sigma abc$; 3. $\Sigma ab, \Sigma abcd$

24. 試證 $(a+b)^n$ 之展開式中，其係數之和為 2^n 。

25. 試證 $(a-b)^n$ 之展開式中，其正係數之和比於其負係數之和。

XI. 開方

完全乘幕。已知一有理函數 P ，此函數 P 有為完全 n 次力的可能；換言之，倘有第二函數 Q 存在，能使 $P = Q^n$ 。其如是，則有理式 Q 為 P 之 n 次根。

本章就此問題考之：已知一有理函數 P ，求定 P 是否為完全 n 次力，若然，則求其 n 次根 Q ，假定 n 表已知正整數。

567 單項式之方根。令 P 表已化為最簡形式之單項式。設 P 為完全 n 次力，則 P 之 n 次根之求，可用下法求得：以 n 除 P 中各字母之指數，而以 n 之商乘該字母之 n 次乘其結果。

此法則由乘方法則 (§ 316) 即可得之。

例如， $(akbl/cm)^n = a^n k^n b^n l^n / c^n m^n$ (§ 316)，故 $akbl/cm$ 為 $a^n k^n b^n l^n / c^n m^n$ 之 n 次根 (§ 556)，而由以 n 除 $a^n k^n b^n l^n / c^n m^n$ 之指數求得。

568 如是求得之根，名為 P 之 n 次主根 (比較 § 253)。當指此根： P 之 n 次根或用符號 $\sqrt[n]{P}$ 時，皆指此根。

例 1. 求 $-8a^3b^6/27x^3y^9$ 之立方根

$$\sqrt[3]{\frac{-8a^3b^6}{27x^3y^9}} = \frac{\sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6}}{\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{y^9}} = \frac{-2ab^2}{3xy^3}$$

例 2. 求以下各根。

$$1. \sqrt[4]{\frac{16a^4 \cdot 625b^{10}}{100c^3 d^{12}}} \quad 2. \sqrt[5]{\frac{81x^5 y^5 z^{15}}{32x^2 y^4 z^8}}$$

多項式之方根：應考以下諸例。

例 1. 決定 $4x^2 + 12x + 9$ 是否為完全平方，若然，試求其平方根。

設其為完全平方，則必有一形如 $2x^2 + px + q$ 之平方根，
 其 p 與 q 為常數，由是必有：

$$4x^4 + 4x^2 + 13x^2 - 6x + 9 = (2x^2 + px + q)^2$$

$$= 4x^4 + 4px^2 + (p^2 + 4q)x^2 + 2pqx + q^2.$$

即須求此 p 與 q 須滿足下列諸方程 (§ 261) :

$$4p = -6 \quad (1), \quad p^2 + 4q = 13 \quad (2), \quad 2pq = -6 \quad (3)$$

$$q^2 = 9 \quad (4).$$

從 (1) 與 (2) 得 $p = -1, q = 3$ ，又因 $2(-1)3 = -6$ ，與
 $3^2 = 9$ ，故此 p 及 q 之值滿足 (3) 與 (4)。

故 $4x^4 - 4x^2 + 13x^2 - 6x + 9$ 為完全平方，其平方根為 $2x^2 - x + 3$ 。

例 2. 求 $x^6 + 6x^5 + 21x^4 + 44x^3 + 63x^2 + 54x + 27$ 之立方根。

設其為完全立方，則必有形如 $x^2 + px + q$ 之立方根。

由是必有：

$$x^6 + 6x^5 + 21x^4 + 44x^3 + 63x^2 + 54x + 27 = (x^2 + px + q)^3$$

$$= x^6 + 3px^5 + 3(p^2 + q)x^4 + (p^3 + 6pq)x^3$$

$$+ 3(p^2q + q^2)x^2 + 3pq^2x + q^3,$$

即須求此 p 與 q 滿足以下六方程 (§ 264) :

$$3p = 6 \quad (1), \quad 3(p^2 + q) = 21 \quad (2), \quad \dots \quad q^3 = 27 \quad (6),$$

從 (1) 與 (2) 得 $p = 2, q = 3$ ，即求得 p 與 q 之此種值，滿
 足其餘方程 (3), ..., (6)。

故 $x^6 + 6x^5 + 21x^4 + 44x^3 + 63x^2 + 54x + 27$ 為完全立方，而其立方根為 $x^2 + 2x + 3$ 。

用上例所說明方法，以決定一已知 x 之多項式是否為完全 n
 次方，常為可能；且若然，則可求得其 n 次根。

令此多項式為 $a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m$ ，設此為完全 n 次
 方，則次數 m 必為 n 之倍數，而使 $m = kn$ ，此處 k 為整數，且必
 有一 n 次根如 $ax^k + A_1x^{k-1} + \dots + A_k$ 之形，此處 a_0 之
 n 次主根，而 A_1, \dots, A_k 為未知常數，今稱此根為 n 次主根。

欲定 $a_0x^m + \dots + a_m$ 是否有如此之根；設其存在，欲求此
 根，可使

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m = (ax^k + A_1x^{k-1} + \dots + A_k)^n,$$

化右端爲 x 之多項式，而令其與左端中 x 同次幕之係數相等。則得 A_1, A_2, \dots, A_k 之 nk 個方程系。前 k 個方程予 A_1, A_2, \dots, A_k 以一組值，而設 $a_0x^m + \dots + a_m$ 爲完全 n 次方，則此組值必滿足其餘方程。

例3. 求 $8x^6 - 12x^5 + 18x^4 - 13x^3 + 9x^2 - 3x + 1$ 之立方根。

570 多項式之平方根。設一多項式 P 爲完全平方，則其平方根亦可用下法求得，

如前節，令 P 表 x 之偶次多項式，而依 x 之降幕排列者。假定 P 爲完全平方，而 a, b, c, \dots 表其平方根中依 x 降幕排列之諸項，可使 $P \equiv (a + b + c + \dots)^2$ 。

則問題爲已知 P 欲求 a, b, c, \dots

今不論 a, b, c, \dots 之值如何，可有

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a+b)b.$$

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= a^2 + (2a+b)b + [2(a+b)+c]c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b+c+d)^2 &= a^2 + (2a+b)b + [2(a+b)+c]c, \\ &\quad + [2(a+b+c)+d]d, \end{aligned}$$

餘類推，左端每加一新文字，右端即增一羣之新項，即此新羣爲

加新文字於二倍原文字之和，再以新文字乘其結果而成。

因由假設 $P \equiv (a + b + c + \dots)^2$ ，故有

$$\begin{aligned} P \equiv & a^2 + (2a+b)b + [2(a+b)+c]c \\ & + [2(a+b+c)+d]d + \dots, \end{aligned}$$

例. 求 $25x^4 - 40x^3 + 46x^2 - 24x + 9$ 之平方根.

571 含多文字之多項式 P 為完全平方, 此法則亦可應用, 先依一文字之降幕排列 P , 其餘則包含其餘文字, 而如 § 570 方法進行, 須知 x 今表所排列之字母.

572 近似平方根. 此法則亦可應用於次 v 升幕排列之多項式. 惟 a, b, c, \dots 亦須依 x 之升幕排列, 而連積餘式之次數將依次遞增, 故如 § 570, 4, 設 P 非完全平方, 惟有一常數項, 則可化為如下形式:

$$P \equiv (a+b+c+\dots)^2 + R',$$

即完全平方與多項式 R' 之和. 此 R' 之最低項, 其次數之高可如心所欲.

因 x 之小值, 由盡量實指此種計算, 能使 R' 之值如選定之小. 故於此情形, 稱 $a+b, a+b+c, \dots$ 為 P 之二項, 三項, 等等 近似平方根.

求此種近似根, 用 § 569 之方法尤為敏捷.

例1. 求 $1+x^2$ 之平方根至四項.

由 § 569, 答為 $\sqrt{1+x^2} \equiv 1+px+qx^2+rx^3+\dots$

(平方之, $1+x \equiv 1+2px+(p^2+2q)x^2+2(pq+r)x^3+\dots$)

與 § 284 法同, $2p \equiv 0, p^2+2q \equiv 0, 2(pq+r) \equiv 0,$

解之, $p=1/2, q=-1/8, r=1/16.$

故所求結果為 $1+x/2-x^2/8+x^3/16.$

且以各舉應用 § 570, 571 之法檢驗之.

例2. 求 $4x^2+4x+5$ 之平方根至三項.

數之平方根。從 § 570 之公式，亦可導出求數之平方根之

常用法則。

例。求 53361 之平方根。

令 a 表平方合於 53361 中者之最大整數之有效數字，此有效數字為根之首位數字，其餘數字俱作為 0。即 $a = 200$ 。

記 a 末每有一 0， a^2 末即有二 0，故在 53361 中可從右而每二位分為一節，如 5'33'61。

各節 61 與 33 在 a 末每有一 0，餘一節 5 須有首位數字 2。

2 為平方小於 5 之最大整數故也故 $a = 200$ 。

已 a 得後，進行方法，完全與求多項式之平方根時相同。其法如下列左方所示， b 表根之第二數字乘 10，而 c 為第三位數字，右方所示，為普通實用之簡略算法。

$a + b + c$	
5'33'61 200 + 30 + 1	5'33'61 231
4 0 00 = a^2	4
2a = 400 1 33 61 = R_1	43 1 33
2a + b = 430 1 29 00 = $(2a + b)b$	1 29
2(a + b) = 460 4 61 = R_2	461 4 61
2(a + b) + c = 461 4 61 = $[2(a + b) + c]c$	4 61
$R_3 = 0$	0 1

先減去 a^2 ，再以 $2a$ 除餘式 R_1 得 b 之有效數字，復從 P_1 減 $(2a + b)b$ 得 R_2 ，最後以 $2(a + b)$ 除 R_2 得 c 。

完成全部之最簡方法，如右方所示，省寫數尾之 0，而每次只書下一節。每得新餘式後，於左方書根之已得部分之二倍為“試除數”，以試除數除餘式之次一數字，而以該數字閉書於試除數後，完成全除數，再以根之新數字，乘全除數，減之而得新餘式。若在過程之任何階段所得之數過大，即上述之積大於被減之餘數，則再試以略小之數字。

乘而與諸其乘字交時以再，表平

574 數之近似平方根。上述法則，亦能求得非完全平方數之平方根近似值。

例 求 7.342 之平方根近似值準確至小數三位。

$$7.34\overline{20}00 \mid 2.709$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 47 \overline{) 3.34} \\ \underline{37} \\ 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5409 \overline{) 52000} \\ \underline{48681} \\ 3319 \end{array}$$

故

$$\sqrt{7.342} = 2.709\dots$$

顯然可見根中每有一位小數，此數中須有二位小數，故分開此數之小數部分，從小數點起向右每二位為一節，此數之整數部分，如

§ 573，從小數點起向左分節，

段小數之位數為奇數，則此數不能為完全平方，宜注意。

575 多項式之立方根。當多項式為 P 完全立方時，對於求 P 之立方根，亦有特殊法則，類似於上述求平方根之法。

令 P 表 x 之多項式，其次數為 3 之若干倍，而依 x 之降冪排列。

假定 P 為完全立方，而 a, b, c, \dots 為其立方根之項依 x 之降冪排列者，可使 $P \equiv (a+b+c+\dots)^3$ 。

則此問題為已知 P ，欲求 a, b, c, \dots

今不論 a, b, c, \dots 之值如何，必有

$$(a+b)^3 = a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2)b,$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2)b$$

$$+ [3(a+b)^2 + 3(a+b)c + c^2]c,$$

餘類推，左方每加一新文字，右方即加一新羣之項，此新羣為 3 倍原有文字和之平方，加 3 倍原文字之和乘新文字，加新文字之平方，再以新文字乘此結果而成。

因最後餘式為零，故 $x^6 + 6x^3 + \dots + 51x + 27$ 為完全立方，而其立方根為 $x^2 + 2x + 3$ 。與 § 559, 例 2 比較。

可見求得各新除數 R_1, R_2, \dots ，以 $3a^2$ 除其首項，即得根之次項。於是在餘式之左方，書 3 倍已得根之部分之平方，3 倍此部分與根之新項相乘之積，及新項平方之和。以新項乘此和，其結果從上述餘式減之，而得其次餘式。

576 此法則亦可應用於含多文字之多項式，設其為完全立方（與例 § 571 比較）。

此法則亦可應用於按 a 升幂排列之多項式——設其不缺第六數項。設此多項式非完全平方，則知是可得其近似立方根。（與 § 572 比較）。

577 數之立方根。藉 § 575 公式之助，可求得一數之立方根。

例。求 12487168 之立方根。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 a + b + c \\
 N = 12'487'168 \mid 200 + 50 + 2 = 232 \\
 \hline
 8\ 000\ 000 \\
 \hline
 3a^2 = 120000 \mid 4\ 487\ 168 = R_1 = N - a^3 \\
 3ab = 18000 \mid \\
 b^2 = 900 \mid \\
 \hline
 138900 \mid 4\ 167\ 050 = (3a^2 + 3ab + 12)b \\
 \hline
 3(a+b)^2 = 158700 \mid 320\ 508 = R_2 = N - (a+b)^3 \\
 3(a+b)c = 1380 \mid \\
 c^2 = 4 \mid \\
 \hline
 160084 \mid 320\ 168 = [3(a+b)^2 + 3(a+b)c + c^2]c \\
 \hline
 0 = R = N - (a+b+c)^3
 \end{array}
 \end{array}$$

令 a 為立方含於 N 中者之最大數之一有效數字，為欲求 a 之故，先在 N 中從右向左每三位分為一節（當 N 中有小數位時，亦可從小數點向右分節），如 12'487'168。其 168 與 487 各節，必須在 a 末有 0，而其餘一節 12，必須有首位數字 2，因

2為12中所含立方之最大整數，故 $a=20$ 。

其餘計算，已完全指示於上。

可見根之每一新數字，係以3倍已得根之部分之平方，除上次餘數而得；如以 $3a^2$ 除 R_1 ，求得 b 之有效數字，以 $3(a+b)^2$ 除 R_1 ，求得 c ，設如是求得之數字過大，則試以略小之數字。

此算法亦可如求一數之平方根同法簡略。

非完全立方之數，其近似立方根亦可用此法求得。（與§574比較）。

多項式之高次根。完全四次方之多項式，其四次根可求其平方根之平方根而得。同理，完全六次方之多項式，其六次根可求其平方根之立方根而得。

求任何次方根，亦有創立特殊法則類似於§§570, 575之可能。

但已有§569之一般法則，此等即非必要。其實所以有求平方根及立方根之特殊法則如§§570, 575所發明者，不過由於歷史興味且與求數之平方根及立方根問題有關係而已。

習 題 XXXXII

化簡下式：

$$1. \sqrt[3]{\frac{27x^3y^{15}}{125z^{12}}} \quad 2. \sqrt{\frac{52+a^2b^2}{625c^2a^2}}$$

$$3. \sqrt[3]{(x^4y^2+2x^3y^3+x^2y^4)^3}$$

由§569或§570求以下之平方根：

$$4. x^4-2x^3+3x^2-2x+1.$$

$$5. x^2-2x+16x^3-6x^2x^6+9.$$

$$6. 4x^6+12x^5y+9x^4y^2-4x^3y^3-6x^2y^4+y^6.$$

$$7. 4x^3-20x+13+30/x+9/x^2.$$

8. $49-84x-34x^2+60x^3+25x^4$.

9. $x^6+2x^7-x^8-x^9-6x^3+5x^2-4x+4$.

10. $(x^2+1)^2-4x(x^2-1)$.

11. $4x^4+9x^2y^2-12x^3y+16x^2-24xy+16$.

12. $x^3\sqrt{y^4+y^2}/z^2+2+2x^2+2y^2+x^3y^2$.

求以下之近似平方根至第四項。

13. $1-2x$; 14. $4-x+3x^2$.

由 § 569 或 575, 求以下之立方根。

15. $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$.

16. $27x^{12}+27x^{10}-18x^8-17x^6+6^4+3x^2-1$.

17. $8x^6-36ax^5+90a^2x^4-135a^3x^3+135a^4x^2-81a^5x+27a^6$.

18. $x^3/y^3 \div y^3/x^3 + 3x^2/y^2 + 3y^2/x^2 + 6x/y \div 6y/x + 7$.

19. 求式 $1-x+x^2$ 之近似立方根至第三項。

20. 由 § 569 或 § 576, 求 $x^8-4x^7+10x^6+16x^5+19x^4-16x^3+10x^2-4x+1$ 之四次根。

21. 由 § 569, 求 $x^{10}+5x^9+15x^8+8^3x^7+45x^6+51x^5+15x^4+30x^3+15x^2+5x+1$ 之五次根。

22. 欲使 $x^4+6x^3+11x^2+ax+b$ 爲一完全平方, 須指定 a, b 何何值?

求下列各數之平方根:

23. 21859. 24. 231361. 25. 6532721.

26. 4149369. 27. 200300356. 28. 9024016.

求下列各數之近似平方根準確至第三位小數。

29. 2. 30. 55.5. 31. 234561.

求下列各數之立方根。

32. 1860867. 33. 167284151. 34. 1036433728.

XII. 無 理 函 數, 根 式 與 分 指 數

根 式 化 簡

根。此後文字 a, b, \dots 表正數或文字式之假定其有正數值 579
者。

其次 $\sqrt[n]{a}$ 表 a 之 n 次主根, 即其 n 次方為 a 之正數; 換言之, 即由公式 $(\sqrt[n]{a})^n = a$ 所限定之正數。

最後, 當 n 為奇數時, $\sqrt[n]{-a}$ 表 $-a$ 之 n 次主根, 即 $-\sqrt[n]{a}$ 。

又當用“方根”二字時, 俱指主根而言。

註: 此為方根一語用法之限制, 因 n 次幕等於 a 之何數, 580
其本身為 a 之一 n 次根; 而如此之數常有 n 個, 後將證明之。

例如, 因 $2^2 = 4$ 而 $(-2)^2 = 4$, 故 2 與 -2 俱為 4 之平方根。吾人以 $\sqrt{4}$ 表主根 2 , 以 $-\sqrt{4}$ 表他根 -2 。

當 n 為奇數, 而 a 為實數時, a 之 n 次根中, 有一為實數, 與 a 同號, 而其餘則為虛數。

當 n 為偶數, 而 a 為正數時, a 之 n 次根中, 有二根為實數, 數值相等, 但記號相反, 而其餘俱為虛數。

當 n 為偶數, 而 a 為負數時, a 之所有 n 次根俱為虛數。

於高等數學中, $\sqrt[n]{a}$ 當表 a 之任何 n 次根, 非如此處之僅表主根也。

根式。形如 $\sqrt[n]{a}$ 或 $b\sqrt[n]{a}$ 之任何式, 名為根式; 而 n 名為 631
根指數, a 為被開方數, b 為根式之係數。

當 a 與 b 俱為有理數或式時, $b\sqrt[n]{a}$ 稱為簡根式。

例如, $5\sqrt[3]{4}$ 為簡根式, 其根指數為 3 , 被開方數為 4 , 而係

數為5.

582 計算根式之公式. 關於計算根式之法則, 基於下列公式, 式中 m, n, p , 表正整數.

1. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$

2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

4. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

5. $m \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a^m}$

宜特別注意者, 由公式 1, 設根式之根指數與被開方數之指數, 以同一正整數乘之, 或約去二者之任何公因式, 則根式之值不變; 例如 $\sqrt[3]{a^6} = \sqrt[2]{a^3}$. 此法則類似於化簡分數之法則甚明

此種公式, 可藉定義 $(\sqrt[n]{a})^n = a$, 指數得 $(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^n = a^n b^n$ 及相等法則 (§261, 3) 以證明之.

設二正數之任何同次冪相等, 則此二數相等.

於是

1. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$, 因其 n 次冪相等.

蓋因 $(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$; 而 $(\sqrt[np]{a^{mp}})^n = (a^m)^p = a^{mp}$.

2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, 因其 n 次冪相等.

蓋因 $(\sqrt[n]{ab})^n = ab$; 而 $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab$.

3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, 因其 n 次冪相等.

蓋因 $(\sqrt[n]{\frac{a}{b}})^n = \frac{a}{b}$; 而 $(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}})^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$.

4. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, 因其 n 次冪相等.

蓋因 $(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$, 而 $((\sqrt[n]{a})^m)^n = ((\sqrt[n]{a})^n)^m = a^m$.

5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ 因其 mn 次幕相等。

蓋因 $(\sqrt[m]{a})^{mn} = a$ 而 $(\sqrt[mn]{a})^m = \sqrt[n]{a}$ 故 $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a}$

下例示此種公式之應用。

1. $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ 2. $\sqrt{81b^2} = \sqrt{4b^2} \cdot \sqrt{21b}$
 $= 2b\sqrt{21b}$

3. $\sqrt[3]{\frac{3c}{d^3e^6}} = \frac{\sqrt[3]{3c}}{\sqrt[3]{d^3e^6}} = \frac{\sqrt[3]{3c}}{de^2}$ 4. $\sqrt[3]{\sqrt{32x^3y^6}}$
 $= \sqrt[3]{32x^3y^6} = \sqrt{2x^3y}$

5. $(\sqrt[3]{2xy^2})^3 = \sqrt[3]{(2xy^2)^3} = \sqrt[3]{4x^3y^4} = y\sqrt[3]{4x^2y}$

化簡根式。根式之被開方數為可能的最簡整式時，則認此根式之形為最簡。故關於化簡根式，有下列法則，此即以上所證明諸公式之直接結果。

(1) 設被開方數為乘積，其幕指數與根指數有公因數，則在其幕指數與根指數中同時約去其公因數。

例如， $\sqrt[3]{27x^3y^6} = \sqrt[3]{(3xy^2)^3} = 3xy^2$

2. 設被開方數之任何因式為乘積，其幕指數可用根指數除盡，則以根指數除指數而移此因式於根號之外。

例如， $\sqrt[3]{16x^3y^9} = \sqrt[3]{2^4x^3y^9} = 2xy^3\sqrt[3]{2x}$

3. 設被開方數為分式，則盡其可能，以最簡式乘其分子，分母，使可移分母於根號之外。

例如 $\sqrt{\frac{xy}{2z^2}} = \frac{\sqrt{4xyz}}{\sqrt{8z^2}} = \frac{1}{2z}\sqrt{4xyz}$

相似根式。當諸根式化為最簡形後，只有係數不同者，則稱為相似根式。

例如 $\sqrt{4x^3y}$ 與 $\sqrt{81x^3y}$ 相似；因其最簡形 $2x\sqrt{xy}$ 與 $9x\sqrt{xy}$ 僅有係數不同故也。

685 移根式係數於根號內，即 $\sqrt[n]{na} = \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{a}$ ，故根式之係數設其指數以根指數乘之，可移入根號之內。

習題 XXXIII

化以下各根式為最簡之形：

1. $\sqrt{18}$. 2. $\sqrt{50}$. 3. $\sqrt[3]{-27}$. 4. $\sqrt[4]{100}$.

5. $\sqrt{3/2}$ 6. $\sqrt[3]{3/2}$ 7. $\sqrt[3]{3/4}$ 8. $\sqrt[4]{3/16}$.

9. $\sqrt[5]{25a^5b^5c^5d^5}$. 10. $\sqrt[5]{125a^5b^5c^5}$.

11. $\sqrt[5]{8x^5y^5z^5}$. 12. $\sqrt[5]{25y^5b^5c^5}$.

13. $\sqrt[3]{a^3b^3c^3}$. 14. $\sqrt[3]{a^{3n+1}b^{3n+1}c^{3n+1}}$.

15. $\sqrt{x^2y^2 - x^2z^2}$. 16. $\sqrt{(x^2 - y^2)(x + y)}$.

17. $\sqrt[3]{x^6 - x^3y^3}$. 18. $\sqrt[3]{a^4b^4 - 2a^2b^2 + a^2b^2}$.

19. $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{32ab^2}}$ 20. $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ 21. $\sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{9(x+1)^2}}$

22. $\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$ 23. $\sqrt{\frac{c^{n+2}}{a^{3n}b^{3n+2}}}$

24. $\sqrt{\frac{a^2x^2}{b^2} - \frac{2cx}{b^2} + \frac{1}{b}}$

將以下各係數移入根號內。

25. $3a\sqrt{3a}$. 26. $\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

27. $3ax\sqrt[3]{1/27a^3x^3}$.

試證次之各組之根式相似。

28. $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$, 與 $\sqrt{1/8}$.

29. $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[3]{162}$, 與 $\sqrt[3]{8/9}$.

30. $\sqrt{x^2 - y^2} \cdot (x - y)$ 與 $\sqrt{x^4y^2 + x^2y^4 + y^4}$.

根 式 之 運 算

加法與減法。有法則如下：

化二或多根式之代數和為最簡形，可先化簡各根式，然後將相似根式加其係數而合併之。

例。加 $\sqrt{16a^2b}$, $-\sqrt{9a^2b}$, $3\sqrt{2}$, 與 $-2\sqrt{1/2}$.

則有 $\sqrt{16a^2b} - \sqrt{9a^2b} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{1/2}$.

$$= 4a\sqrt{b} - 3a\sqrt{b} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = a\sqrt{b} + 2\sqrt{2}.$$

不相似二根式之和，不能化為一簡根式，此宜注意。

例如，除 x 或 y 為 0 時外，不能有 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+y}$ ：

蓋平方之得 $x+y+2\sqrt{xy} = x+y$. $\therefore 2\sqrt{xy} = 0$, $\therefore xy = 0$.
 \therefore 必有 $x=0$ 或 $y=0$ 故也。

化諸根式為公共根指數。由公式 $a^m = \sqrt[n]{a^{m \cdot n}}$ ，常能化 587
 二或多根式為公共根指數之等值根式，其最小公共根指數，即
 為已知諸根指數之最小公倍數

例。化 $\sqrt[5]{a^5}$ 與 $\sqrt[3]{b^3}$ 為最小公根共指數。

根指數 6 與 8 之最小公倍數為 24。而 $\sqrt[6]{1^6} = \sqrt[24]{a^{24}}$

與 $\sqrt[8]{b^8} = \sqrt[24]{b^{24}}$ 。

根式之比較。欲比較已知諸根式之大小，可先化為公共 588
 根指數。

例 1. 比較 $\sqrt[15]{16}$, $\sqrt[10]{6}$, 與 $\sqrt[6]{3}$ 。

已知根指數 15, 10, 6 之最小公倍數為 30; 而

$$\sqrt[15]{16} = \sqrt[30]{16^2} = \sqrt[30]{256}; \quad \sqrt[10]{6} = \sqrt[30]{6^3} = \sqrt[30]{216};$$

$$\sqrt[6]{3} = \sqrt[30]{3^5} = \sqrt[30]{243}.$$

因 $256 > 243 > 216$, 故 $\sqrt[15]{16} > \sqrt[6]{3} > \sqrt[10]{6}$.

例2. 比較 $2\sqrt{3}$ 與 $\sqrt[3]{41}$.

移第一根式之係數於根號內 (§585), 而化二根式為公共根指數 6, 得

$$2\sqrt{3} = \sqrt{12} = \sqrt[6]{12^3} = \sqrt[6]{1728}; \quad \sqrt[3]{41} = \sqrt[6]{41^2} =$$

$\sqrt[6]{1681}$ 因 $1728 > 1681$, 故 $2\sqrt{3} > \sqrt[3]{41}$.

589 乘法與除法 從公式

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{與} \quad \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}$$

導出以下法則:

欲以一根式乘或除他根式, 必要時可化之為最小公共指
根數之根式, 再分別求其係數與被開方數之積或商.

例 1. 以 $2\sqrt[3]{x^2y^3}$ 乘 $4\sqrt{xy}$.

$$4\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt[3]{x^2y^3} = 8\sqrt[6]{x^3y^3} \cdot \sqrt[6]{x^2y^4} = 8\sqrt[6]{x^5y^7} = 8xy\sqrt[6]{xy}$$

例 2. 以 $2\sqrt[3]{xy}$ 除 $6\sqrt{xy}$.

$$6\sqrt{xy} / 2\sqrt[3]{xy} = 3\sqrt[6]{x^2y^3} / \sqrt[6]{xy} = 3\sqrt[6]{xy}$$

590 乘方. 從公式

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{及} \quad \sqrt[n]{a^m p} = \sqrt[n]{a^m p}$$

導出以下法則

欲求形如 $\sqrt[n]{a^m p}$ 之根式之 n 次方, 先約去 n 向其積指數可
有之任何公因數, 再以 n 之其餘因數乘被開方數之指數.

例. 求 $2\sqrt[3]{xy^3}$ 之 9 次方.

$$(2\sqrt[3]{xy^3})^9 = 2^9 (\sqrt[3]{xy^3})^9 = 512 (\sqrt[3]{xy^3})^9 = 512 \sqrt[3]{x^3y^9} \\ = 512xy^3\sqrt[3]{x}$$

591 開方. 從公式

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad \text{與} \quad \sqrt[m]{a^m p} = \sqrt[mn]{a^m p}$$

導出以下法則:

欲求形如 $\sqrt[m]{a^p q}$ 之根式之 m 次根，先約去 m 與被開方數指數可有之任何公因數，以 n 之其餘因數乘根式之指數。

例 1. 求 $\sqrt[5]{a^2 y^4}$ 之六次根。

$$\sqrt[30]{5^6 a^2 y^4} = \sqrt[30]{5^2 x^2 y^4} = \sqrt[5]{xy^2}.$$

例 2. 求 $64a\sqrt{b}$ 之立方根。

$$\sqrt[3]{64a\sqrt{b}} = \sqrt[3]{8^3 \cdot 2a\sqrt{b}} = 2 \sqrt[3]{2a\sqrt{b}} = 2 \sqrt[6]{4a^2 b}.$$

簡根式代數式。所謂簡根式代數式者，意為僅含方根式 692

之任何代數式也。例如 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 為簡根式代數式，當其不含以根式為分母之分式時，則名為簡根式整式。

由上述原則，簡根式整式之和，差，積，乘方能化為簡根式之代數和。於 § 607 中，特證明其於商亦真。但通常一簡根式代數式如 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 者之根，不能化為簡根式整式。

例 1. 以 $2\sqrt{3} - \sqrt{10}$ 乘 $3\sqrt{6} + 2\sqrt{5}$ 。

$$(3\sqrt{6} + 2\sqrt{5})(2\sqrt{3} - \sqrt{10}) = 6\sqrt{18} + 4\sqrt{15} - 3\sqrt{60} - 2\sqrt{50} = 8\sqrt{2} - 2\sqrt{15}.$$

例 2. 求 $\sqrt{2} + \sqrt[3]{4}$ 之平方。

$$(\sqrt{2} + \sqrt[3]{4})^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16} = 2 + 4\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2}.$$

習 題 XXXIV.

化以下諸式為最小公若根出數。

1. $\sqrt[3]{8}, \sqrt[4]{16}, \sqrt[5]{3}$. 2. $\sqrt[3]{a^2}, \sqrt[4]{2a^3 b^2}, \sqrt[5]{7b^5}$.

3. $3\sqrt{2}$ 及 $2\sqrt[3]{2}$. 4. $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}$, 及 $\sqrt[4]{5}$.

以下各化為最簡形之簡根式。

5. $\sqrt{35} + \sqrt{715}$. 6. $10 - \sqrt{5}$. 7. $4 + \sqrt[3]{2}$.

8. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{15}$. 9. $\sqrt[3]{60} \cdot \sqrt[3]{90} \cdot \sqrt[3]{15}$. 10. $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$.

11. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2}$. 12. $8\sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{5}$. 13. $2\sqrt{35} \cdot \sqrt{65} + \sqrt{91}$.

14. $\sqrt{a^3 b^5 c^7} \cdot \sqrt[3]{a^2 b^4 c^3}$ 15. ${}^{2n}\sqrt{a} \cdot {}^{3n}\sqrt{a}$
 16. $\sqrt{a^3 b^2} + \sqrt[3]{a^5 b^6}$ 17. $\sqrt[3]{a^3 b^3 c^3} \cdot \sqrt[4]{a b^2 c^4}$
 18. $\sqrt[3]{a^{25n}} \sqrt{a}$ 19. $\sqrt[5]{a/b} + \sqrt[3]{a/b}$
 20. $\sqrt[3]{a^3 b^3} \sqrt[4]{b^4} + (\sqrt[2]{a^2 b^2} \sqrt[3]{a^3 b^3})^2$
 21. $(\sqrt{12})^3$ 22. $(\sqrt[3]{6^2})^6$ 23. $(2\sqrt[3]{xy^2z^3})^6$
 24. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}$ 25. $\sqrt[3]{\sqrt{3}}$ 26. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2 b^4 c^9}}$
 27. $\sqrt[3]{3256}$ 28. $\sqrt{2/2}$ 29. $\sqrt{2} \sqrt[3]{2}$
 30. $\sqrt{\sqrt{2}} \sqrt[3]{2}$ 31. ${}^{2m}\sqrt{n} \sqrt{a_m}$ 32. $({}^{2m}\sqrt{{}^{2n}\sqrt{a}})^{mn}$

以下各化簡盡其可能。

33. $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{48} + \sqrt{147}$ 34. $\sqrt{125} + \sqrt{175} - \sqrt{28} + \sqrt{1/20}$
 35. $\sqrt[3]{80} - \sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{1/2}$ 36. $\sqrt{a/bc} + \sqrt{b/c} + \sqrt{c/ab}$
 37. $\sqrt{59} - \sqrt{49} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{7 \frac{1}{3}}$ 38. $\sqrt{(a+b)^2 c} - \sqrt{a^2 c} - \sqrt{b^2 c}$
 39. $\sqrt{ax^3 + 6ax^2 + 9ax} - \sqrt{ax^3 - 4x^2 + 4x}$
 40. $(x+y) \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = (x-y) \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + \sqrt{\frac{1}{x^2 - b^2}}$
 41. $(\sqrt{2} \sqrt[3]{3} + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{8}$ 42. $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{14}) \div \sqrt{2}$
 43. $(\sqrt{6} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{16})$ 44. $\sqrt{3+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{5-2\sqrt{2}}$
 45. $(1+\sqrt{3})^3$ 46. $(\sqrt{a} + \sqrt[3]{a+1})(\sqrt{a} - \sqrt[3]{a+1})$

分 指 數 與 負 指 數

953

於茲種情形，應用分指數以計算最易。

以前附屬於式 a^n 之意義，僅為當 n 表正整數時。關於計算此種式之法則，即

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, 2. $(a^m)^n = a^{mn}$, 3. $(ab)^n = a^n b^n$
 為代數中之最簡單。於是自然發生疑問：當 n 不為正整數時，能否關於 a^n 求得有用意義，仍與此種法則一致。

定義 $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$; 取 $a^{1/2}$ 為例, 設其可能, 吾人欲對於此 594
符號求一意義而與法則 1, 2, 3 一致.

但欲與法則 1 一致, 必須有

$$(a^{1/2})^2 = a^{1/2} \cdot a^{1/2} = a^{1/2+1/2} = a^1 = a.$$

即 $a^{1/2}$ 必有自餘為 \sqrt{a} 或 $-\sqrt{a}$.

選擇此二意義之較便者, 而定 $a^{1/2}$ 為 \sqrt{a} .

於是已求得滿足 $a^{1/2}$ 條件之一, 足以定其意義.

同理, 定 $a^{2/3}$ 之意義為 $\sqrt[3]{a^2}$, $a^{3/5}$ 為 $\sqrt[5]{a^3}$, 而於一般, $a^{p/q}$
為 $\sqrt[q]{a^p}$, 即 a^p 之 q 次主根.

$$\text{因 } a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[qm]{a^{pm}} = a^{pm/qm}, \text{ 故當 } p/q \text{ 以同值分式}$$

代替時, $a^{p/q}$ 之值不變, 此宜注意.

例如, $a^{2/3} = a^{4/6} = a^{8/12}$; 又 $a^2 = a^{4/2} = a^{8/4}$.

定義 $a^0 = 1$. 其次, 欲與法則 1 一致, 必須有

$$a^0 a^m = a^{0+m} = a^m,$$

故

$$a^0 = a^m / a^m = 1.$$

於是定 a^0 之意義為 1.

定義 $a^{-s} = 1/a^s$. 最後, 欲與法則 1 一致, 必須有 (§ 595) 596

$$a^{-s} a^s = a^{-s+s} = a^0 = 1,$$

故

$$a^{-s} = 1/a^s.$$

於是定 a^{-s} 為 $1/a^s$.

例如, 由定義, $a^{-1} = 1/a^1$, $a^{-2} = 1/a^2$, $a^{-3} = 1/a^3$.

其餘待證明者, 為對於 $a^{p/q}$, a^p 與 a^{-s} 如是求得之意義, 與
指數諸法則完全一致.

定理 1. 定律 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 對於 m 與 n 之一切有理數 59

俱有效.

令 p, q, r, s 表任何正整數，則

1. 當 $m = p/q$ 而 $n = r/s$ 時，得 (§ 592)

$$\begin{aligned} \frac{p}{a^q} \cdot \frac{r}{a^s} &= \sqrt[q]{a^{ps}} \cdot \sqrt[s]{a^{qr}} = \sqrt[qs]{a^{ps} \cdot a^{qr}} = \sqrt[qs]{a^{ps+qr}} \\ &= \sqrt[qs]{a^{ps+qr}} = a^{\frac{ps+qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}} \end{aligned}$$

2. 當 $m = -p/q$ ，而 $n = r/s$ 時，由情形 1，得

$$\begin{aligned} \frac{a^{-p/q}}{a^s} &= \frac{1}{a^{p/q} \cdot a^s} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q} + s}} = a^{-\frac{p}{q} - s} \\ &= a^{-\frac{p}{q} - \frac{r}{s}} \end{aligned}$$

3. 當 $m = p/q$ ， $n = -r/s$ ，而 $p/q > r/s$ 時，得

$$\begin{aligned} \frac{p}{a^q} \cdot \frac{r}{a^{-s}} &= \sqrt[q]{a^{ps}} \cdot \sqrt[s]{a^{-qr}} = \sqrt[qs]{a^{ps} \cdot a^{-qr}} \\ &= \sqrt[qs]{a^{ps-qr}} = a^{\frac{ps-qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}} \end{aligned}$$

4. 當 $m = p/q$ ， $n = -r/s$ 而 $p/q < r/s$ 時，由情形 3，得

$$\begin{aligned} \frac{p}{a^q} \cdot \frac{r}{a^{-s}} &= \frac{1}{a^{\frac{r}{s} - \frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{r}{s} - \frac{p}{q}}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}} \end{aligned}$$

定理 2. 定律 $(a^m)^n = a^{mn}$ 對於 m 與 n 之一切有理數俱有效。

因令 m 表任何有理數，則

1. 當 n 為正整數時，得 (§ 597)

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ 項}} = a^{m+m+\dots+m} = a^{mn}$$

2. 當 $n = p/q$ ，此處 p 與 q 為正整數時，由情形 1，得

$$(a^m)^{p/q} = \sqrt[q]{(a^m)^p} = \sqrt[q]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{q}} = a^{m \cdot \frac{p}{q}}$$

3. 當 $n = -s$ ，此處 s 為任何正有理數時，由情形 1, 2 得

$$(a^m)^{-s} = \frac{1}{(a^m)^s} = \frac{1}{a^{ms}} = a^{-ms} = a^{m(-s)} \quad \square$$

定理 3. 定律 $(ab)^n = a^n b^n$ 對於 n 之一切有理值俱有效。 559

1. 令 $n = p/q$, 此處 p 與 q 表正整數, 則

$$(ab)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(ab)^p} = \sqrt[q]{a^p b^p} = \sqrt[q]{a^p} \sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}}.$$

2. 令 $n = -s$, 此處 s 表任何正有理數, 不論為整數或分數, 則由情形 1,

$$(ab)^{-s} = \frac{1}{(ab)^s} = \frac{1}{a^s b^s} = a^{-s} b^{-s}.$$

應用: 下列例說明分指數與負指數之用途, 當用此種記法時, 600 根式計算之繁複部分, 亦能減少其混雜。

例 1. 化簡 $\sqrt{a} / \sqrt[3]{a}$

$$\sqrt{a} / \sqrt[3]{a} = (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{2}} / (a^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{2}} = (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{2}} / (a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} / a^{\frac{2}{3}}.$$

(化簡) $\sqrt[2]{a^{\frac{1}{2}} / a^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[2]{a^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}} = \sqrt[2]{a^{-\frac{1}{6}}}$

$$\begin{aligned} \sqrt[2]{(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{2}} / (a^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{2}}} &= a^{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2}} / a^{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2}} = a^{\frac{1}{2}} / a^{\frac{2}{3}} \\ &= a^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} / a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[2]{a^{\frac{1}{2}} / a^{\frac{2}{3}}}. \end{aligned}$$

例 2. 展開 $(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}})^3$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}})^3} &= (x^{\frac{2}{3}})^3 + 3(x^{\frac{2}{3}})^2 y^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}} (y^{\frac{2}{3}})^2 + (y^{\frac{2}{3}})^3 \\ &= x^2 + 3x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{4}{3}} + y^2. \end{aligned}$$

例 3. 以 $x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$ 除 $x - y$.

排列計算如 §401, 得

$$\begin{array}{r|l} x - y & x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \\ x + 2x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} y^{\frac{2}{3}} & x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \\ \hline -x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} y^{\frac{2}{3}} - y & \\ \hline -\frac{1}{3} y^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{3} y^{\frac{2}{3}} - y & \end{array} \quad \text{故其商為 } x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}$$

習 題 XXXV

不用根號以可能之最簡式表

1. $\sqrt[3]{a^6}$, 2. $\sqrt{c^8}$, 3. $a^{\frac{2}{3}} / \sqrt[3]{a^{\frac{1}{3}}}$.

4. $b\sqrt{a^2} / \sqrt{b^2}$.

不用負指數或分指數表

5. $a^{\frac{1}{2}}$, 6. $a^{-1}b^{\frac{1}{2}}$, 7. $(a^{\frac{1}{2}})^{-1}$.

8. $(a^{-1}b^{\frac{1}{2}})^{-1}$.

用正指數而不用根號表

9. $a^{-1}b^{-2}c^{-3}$, 10. $a^{-\frac{1}{2}}\sqrt{b^{-2}}$.

11. $(1/\sqrt{x^{-5}})^{-4}$, 12. $x^{-2}\sqrt{y^{-2}} / y^{-2}\sqrt{x^{-2}}$.

不用分母以可能之最簡式表

13. $\frac{a^{-1}b^{-1}c^{-1}}{bb^{-1}c^{-2}} \cdot \frac{a^{-1}(b^{-1}+c^{-1})}{a^{-2}(b+c)} + \frac{b+c}{b^{-1}+c^{-1}}$.

以下各化為最簡指數形式

14. $(3^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{3}}$, 15. $81^{\frac{2}{3}}$, 16. $(-27)^{\frac{2}{3}}$.

17. $8^{\frac{5}{2}}$, 18. $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}$, 19. $a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{6}}$.

20. $(a^{\frac{1}{2}}b)^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$, 21. $ab^{-2} / a^{-1}b$, 22. $(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$.

23. $(a^{\frac{1}{2}}b^{-2}c^{\frac{1}{3}})^{-2}$, 24. $(-32a^{10})^{\frac{2}{5}}$, 25. $(-a^6b^{-9})^{\frac{2}{3}}$.

26. $b^{-\frac{1}{2}}\sqrt{b^{-1}} + b^{-1}\sqrt{b^{-1}}$, 27. $(a^{-\frac{1}{2}}\sqrt{bc^3})^{\frac{1}{2}}$.

28. $(8a^{-1}b / \sqrt{12a^2})^{-\frac{2}{3}}$, 29. $\sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}(bc^{-1}d^{-2})^{\frac{1}{2}}}$.

30. $\sqrt[3]{a^{-1}b/a^2}$, 31. $\sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}x/a^{-1}} / \sqrt[3]{a^{-1}b/a}$.

32. $[(ax)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$, 33. $(xx^2 + xy^2 + xy) \frac{xy}{x+y}$.

34. $(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) / (x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}})$.

35. 以 $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{6}}$ 乘 $x^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{2}}$.

36. 以 $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$ 除 $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$.

37. 展開 $(a^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}})^2$, 38. 化簡 $(e^x + e^{-x})^2 - 4$.

39. 求 $x^2 + 4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + 4xy + 6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + 12y^2 + 9x^{-1}y^2$ 之平方根.

40. 求 $x^2 + 3x^{\frac{1}{2}} + 6x + 7 + 8x^{-1} + 3x^{-\frac{1}{2}} + x^{-2}$ 之立方根.

負數與分指數之二項式定理

設於二項展開式 (§ 561)

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \dots$$

中，假定 n 為分數或負值，則右方將有無盡或無窮級數；因係數 $n, n(n-1)/2, \dots$ 無一能為 0 故也。

以後將證明若 $b < a$ ，當 n 無限增大時，則此級數首 m 項之和，趨近 $(a+b)^n$ 之值為極限；換言之，取此級數之充分項數而相加可得一結果近似於 $(a+b)^n$ 之值，至如心所欲。

此意如何，即謂二項式定理當 n 為分數或負數而 $b < a$ 時，對於 $(a+b)^n$ 為有效也。

例 1. 展開 $(8+x^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$ 至四項，

以 $n=1/3, a=8, b=x^{-1/2}$ 代入公式中，得

$$\begin{aligned} (8+x^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} &= 8^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{2} 8^{-\frac{5}{3}} (x^{-\frac{1}{2}})^2 \\ &\quad + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{2 \cdot 3} 8^{-\frac{8}{3}} (x^{-\frac{1}{2}})^3 + \dots \\ &= 2 + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{12} + \frac{x^{-1}}{288} + \frac{5x^{-\frac{3}{2}}}{20736} + \dots \end{aligned}$$

例 2. 求 $1/(a^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}})^{-2}$ 或 $(a^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}})^{-2}$ 之展開式中第六項以 $n=-2, a=a^{\frac{1}{2}}, b=x^{\frac{2}{3}}, r=5$ ，代入第 $r+1$ 項之公式中 (§ 565)，得

$$\frac{(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (a^{\frac{1}{2}})^{-2-5} (x^{\frac{2}{3}})^5 = \dots$$

例 3. 展開 $\sqrt{1+x}$ 至四項。

因 $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ ，得 $n=\frac{1}{2}, a=1, b=x$ 。

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \dots$$

此結果與§572例1所得者相同。

例4. 求 $\sqrt{10}$ 之近似值。

$$\sqrt{10} = (3^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = 3(1 + \frac{1}{9})^{\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned} \text{而 } 3(1 + \frac{1}{9})^{\frac{1}{2}} &= 3 \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2 \cdot 8} \left(\frac{1}{9}\right)^3 + \dots \right] \end{aligned}$$

$$= 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{216} + \frac{1}{3888} + \dots$$

$$= 3 + .16666 - .00462 + .00025 + \dots = 3.1623. (\text{約})$$

習 題 XXXVI

以下各展開至四項。

1. $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ 2. $(a^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}$

3. $\sqrt[3]{(27-2x)^2}$ 4. $(a^m + x)^{\frac{1}{m}}$

5. $(a^{-1} - b^{-\frac{1}{2}})^{-1}$ 6. $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y})^{-2}$

7. $\frac{1}{2+3x}$ 8. $\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}$

9. $\left(\frac{1}{\sqrt{1+3\sqrt{x}}} \right)^3$

10. 求 $(1+x)^{-2}$ 中之第十項。

11. 求 $(x^2 - 2)^{\frac{3}{2}}$ 中之第七項。

12. 求 $(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ 中含 $x^{\frac{3}{2}}$ 之項。

13. 求 $x^{-\frac{1}{2}}(2+x)^{\frac{1}{2}}$ 中含 x^{-2} 之項。

14. 用§501例4中說明之法，求以下之近似值。

1. $\sqrt[5]{99}$ 2. $\sqrt[4]{62}$ 3. $\sqrt[3]{531}$

有 理 化 因 式

有理化因式。當二已知根式之積為有理式時，則二者各 602
稱為他式之有理化因式。

例如， $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ ，故 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$
為 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ 之有理化因式，反之亦然。

此可證明含簡根式之每一有限式，僅有一有理化因式。下節
用以說明此一般定理。

平方根函數之有理化因式。關於 \sqrt{x} 之每一有理整式，能化 603
為 $A + B\sqrt{x}$ 之形，此處 A 與 B 為關於 x 之有理整式；而
 $A + B\sqrt{x}$ 有關於 x 之有理化因式 $A - B\sqrt{x}$ ，此只須變 \sqrt{x} 之
號即得。

例如， $2(\sqrt{x})^4 + 3x(\sqrt{x})^3$ 可書為 $2x^2 + 3x^2\sqrt{x}$ 。故此式
有有理化因式 $2x^2 - 3x^2\sqrt{x}$ 。

關於任何有限數個平方根如 $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ 之有理整式可屢
用上述方法求得其有理化因式。因設以關於 \sqrt{x} 之有理化因式
乘已知式，再以關於 \sqrt{y} 之有理化因式乘其積，依此類推，必得
一完全有理之結果故也。

例。求 $1 + \sqrt{x} + \sqrt{y} + 2\sqrt{xy}$ 之有理化因式。

$$1 + \sqrt{y} + \sqrt{x} (1 + 2\sqrt{y}). \quad (1)$$

乘(1)以

$$1 + \sqrt{y} - \sqrt{x} (1 + 2\sqrt{y}). \quad (2)$$

得

$$(1 + \sqrt{y})^2 - x(1 + 2\sqrt{y})^2$$

$$1 - x + y - 4xy + 2\sqrt{y}(1 - 2x). \quad (3)$$

乘(3)以

$$1 - x + y - 4xy + 2\sqrt{y}(1 - 2x). \quad (4)$$

得

$$(1 - x + y - 4xy)^2 - 4y(1 - 2x)^2. \quad (5)$$

因(5)為完全有理，故(2)與(4)之積為(1)之有理化因式。

104 二項根式之有理化因式。形如 $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ 之式，其有理化因式可如下例求得。其因式與 $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ 之乘積，其因式與 $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ 之乘積。

例。求 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 之有理化因式。

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \pm (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (a+b) \pm (a-b) \quad (1)$$

但由 § 438, $(a^2) \pm (b^2)$ 可除得有理式 $a^2 - b^2$, \sqrt{a} 與 \sqrt{b} 同乘 (\sqrt{a}) 則 (a) 與 (b) 均成有理式。

故(2)為(1)之有理化因式。

105 含根式之有理化分式。若分母為 A 與 B 之任何無理式，其 B 係含簡根式者，可用 B 之有理化因式同乘 A 與 B ，則本分式有理化分母之等值式。

例1. 有理化 $1/\sqrt{a^3}$ 之分母。

$$\frac{1}{\sqrt{a^3}} = \frac{1}{a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a\sqrt{a}\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$$

例2. 有理化 $\frac{\sqrt{x^2+a^2} + 1}{\sqrt{x^2+a^2} - 1}$ 之分母。

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2} + 1}{\sqrt{x^2+a^2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+a^2} + 1}{\sqrt{x^2+a^2} + 1} = \frac{(\sqrt{x^2+a^2} + 1)^2}{(x^2+a^2) - 1}$$

$$(1) \quad \frac{(\sqrt{x^2+a^2} + 1)^2}{x^2 + \sqrt{x^2-a^4} + 1}$$

$$(2) \quad \frac{(\sqrt{x^2+a^2} + 1)^2}{a^2 \sqrt{x^2-a^4} + 1} \quad \text{以(1)乘}$$

108 含根式之數字分式，計算此類值時，須先有理化其分母。於是可避免許多不必需要之計算。

(a) 例。求 $(1+\sqrt{8})(3-\sqrt{2})$ 之近似值，準確至三位小數。
 (b) $(1+\sqrt{8})(3-\sqrt{2}) = (1+2\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = 1+\sqrt{2} = 2.414...$
 (c) 入因式與 $(3-\sqrt{2})$ 乘 $(3+\sqrt{2})$ 則得全式與(2)因

根式除法。欲以一根式除他一根式，可先將其寫為分式之形，而有理化此分式之分母。

例：以 $1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ 除 $4+2\sqrt{5}$ 。

$$\frac{4+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{(4+2\sqrt{5})(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})} = \frac{-3+2\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{(-3+2\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{10})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$$

一般結果。從 § 592 與 § 607，可知僅含簡根式之式，可化為簡根式之代數和。

習題 XXXVII

求以下之有理化因式

1. \sqrt{a}
2. $\sqrt{a^2-b^2}$
3. $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
4. $\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}$
5. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$
6. $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$
7. $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$
8. $\sqrt{x+\sqrt{x+1}}$
9. $\sqrt{x^2+y^2}$
10. $\sqrt{a-\sqrt{b^2}}$
11. $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$
12. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$
13. $1+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}$
14. $x^{\frac{2}{5}}+x^{\frac{3}{5}}+1$
15. $3-\sqrt{3}$
16. $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$
17. $1+\sqrt[3]{2}$
18. $\sqrt[3]{9+\sqrt[3]{3}}+1$
19. $\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3}$

以下各化為有理有數或有理式作分母之分式。

20. $\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{b^2}}$
21. $\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$
22. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{3}}$
23. $\frac{1}{b+\sqrt{b^2-a^2}}$
24. $\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$
25. $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$
26. $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

$$27. \frac{x\sqrt{y+y\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}} \quad 28. \frac{1}{\sqrt[3]{3-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3+1}}$$

求以下諸式之近似值準確至第三位正確小數。

$$29. \frac{5}{\sqrt{125}}, \quad 30. \frac{2+\sqrt{28}}{\sqrt{7}}, \quad 31. \frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

無理方程

606 解無理方程，解無理方程之一般法則，如下法所述。

先有理化此方程。

次解所得之有理方程。

末將所得一切解答，於已知方程中試驗之，而棄去其不能滿足者。

因令 $P=0$ 表已知方程，而 $PR=0$ 為以 P 之有理化因式 R 乘 $P=0$ 二邊所得之有理方程。由 § 341， $PR=0$ 之根，為 $P=0$ 與 $R=0$ 連合之根，試驗之於已知方程，即發現其中何者為 $P=0$ 之根。

例 解 $x-7-\sqrt{x-5}=0$ 。

以有理化因式 $x-7+\sqrt{x-5}$ 乘二邊，得

$$(x-7)^2 - (x-5) = 0.$$

或化簡之，

$$x^2 - 15x + 54 = 0.$$

由 § 455 解之，

$$x = 9 \text{ 或 } 6.$$

以 9 代 x 於 $x-7-\sqrt{x-5}=0$ ，得 $9-7-\sqrt{9-5}=0$ 為真，故 9 為一解。

但以 6 代入，得 $6-7-\sqrt{6-5}=0$ 則誤，故 6 非其根。

但察知 6 為使有理化因式等於 0 所得方程 $x-7+\sqrt{x-5}=0$ 之一根；因 $6-7+\sqrt{6-5}=0$ 為真故也。

含根式 \sqrt{A} 之方程，可於此根式有理化，即集合含 \sqrt{A} 之諸 610
 項於一端，其餘諸項於他端，而二端同時自乘至 m 次幂，屢用此
 種方法，可將僅含平方根之方程完全有理化，從 § 345，知此法則
 等於 § 609 中所述者，但計算較簡。

例1. 解 $\sqrt{x+a} = \sqrt{b}$.

將二邊立方， $\sqrt{x+a} = \sqrt{b}$
 移項而平方之， $(\sqrt{x+a})^2 = (\sqrt{b})^2$
 以此結果代入於已知方程，知其為所求之根。

例2. 解 $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-4} = 9$.

移項， $\sqrt{x-4} = 9 - \sqrt{x+5}$
 平方之， $x-4 = 81 - 18\sqrt{x+5} + x+5$
 化簡， $\sqrt{x+5} = 5$
 平方之， $x+5 = 25$
 解之， $x = 20$.

以20代 x 於已知方程，得 $\sqrt{25} + \sqrt{16} = 9$ 為真，故20為其根。

註. 1. 如例1中，察知倘有理化關於未知文字之方程，而 611
 不消去其不合此文字之根式。

2. 又知無理方程可以無根。

例如，方程 $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-4} = 9$ 無根，因努力解之，不過
 如例2中再計算一回，仍得 $x = 20$ ；而 $\sqrt{25} - \sqrt{16} = 9$ 為謬誤故也。

3. 可附述者，形如 $\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D} = 0$ (或 \sqrt{A}
 $+\sqrt{B} + \sqrt{C} + E = 0$) 之方程，其有理化之簡法，為先移

$\sqrt{A} + \sqrt{B} = -\sqrt{C} - \sqrt{D}$ (或 $\sqrt{A} + \sqrt{B} = -\sqrt{C} - E$)
 再平方其二端，其結果方程僅含二根式，而可如例2有理化之。

聯立無理方程。欲解如此方程系，可先有理化各方程，而 612
 解所得有理方程系，最後試驗所得結果於已知方程中。

但設方程為 § 379 中所述之形，則宜用該處所說明之法則解
 之。

例1. 解 $\sqrt{x-5} + \sqrt{y+5} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ (1)
 $x+2y=17$ (2)

將(1)平方, $x-5+y+5+2\sqrt{xy+5x-5y-25}=x+y$
 $+2\sqrt{xy},$

將 $\sqrt{xy+5x-5y-25}=\sqrt{xy}.$ (3)

將(3)平方而化簡, $x-y=5.$ (4)

解(4), (2) $x=9, y=4.$ (5)

以 $x=9, y=4$ 代入於(1), 得 $\sqrt{4}+\sqrt{9}=\sqrt{9}+\sqrt{4}$ 爲真
 故 $x=9, y=4$ 爲(1), (2)之解。

例2. 解 $\sqrt{x+6}+2/\sqrt{y}=4,$ (1)

$2\sqrt{x+6}+6/\sqrt{y}=9.$ (2)

就 $\sqrt{x+6}$ 與 $1/\sqrt{y}$ 解之, 求得 $\sqrt{x+6}=3, 1/\sqrt{y}=1/2.$ (3)

從(3), 得 $x=3, y=4,$ 此爲(1), (2)之解。

習 題 XXXVIII

以下方程, 就解之。

1. $x^{\frac{3}{2}}=4.$ 2. $x^{-\frac{1}{2}}=3.$

4. $(\sqrt{2x-1})^{\frac{1}{3}}=\sqrt{3}.$

6. $\sqrt{ax}+\sqrt{bx}+\sqrt{cx}=d.$

7. $\sqrt{4x^2+x+10}=2x+1.$

8. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}=7.$

9. $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+1}-\sqrt{9x+10}=0$

10. $\sqrt{x+1}+\frac{x-\beta}{\sqrt{x+2}}=0.$

11. $\sqrt{x^2+3x-1}=\sqrt{x^2-x-1}=2.$

12. $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-7}$

13. $\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+8}-\sqrt{x-5}}=2.$

(1) 14. $\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}+\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}+\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}=2.$ 解 . 1解
 (2)

以下就 x, y 解之。

$$15. \begin{cases} \sqrt{x+17} + \sqrt{y-2} = \sqrt{x+5} + \sqrt{y+6}, \\ \sqrt{y-x} = \sqrt{3-x} + \sqrt{y-3}. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 3\sqrt{x-2y} - \sqrt{x+y-4} = 3, \\ \sqrt{x-2y} + 2\sqrt{x+y-4} = 8. \end{cases}$$

17. 試證明 $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} + \sqrt{x+c} + \sqrt{x+d} = 0$ 可化爲一次有理方程。

18. 試證 $\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} - \sqrt{ex+f} = 0$, 證以 $\sqrt{a} + \sqrt{c} - \sqrt{e} = 0$, 則可化爲一次有理方程。

二次不盡根

不盡根。數字根式如 $\sqrt{2}$ 及 $\sqrt{5}$, 其中被開方數爲有理數但根式本身爲無理數者, 名爲不盡根。不盡根名爲二次, 三次等等; 按其根指數爲 2, 3 等等定之。

定理 1. 二不相似二次不盡根之積, 爲二次, 不盡根。 614

假定當不盡根化爲最簡形時, 其根式因式爲 \sqrt{a} 與 \sqrt{b} 。

\sqrt{a} 與 \sqrt{b} 之積爲 \sqrt{ab} , 倘非 ab 爲完全平方, 則此爲不盡根。

但 ab 不能爲完全平方, 因由假設, a 與 b 爲整數, 其因數無一爲平方數, 且至少 a 之因數中, 與 b 中之任一因數不同。

例如 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, $\sqrt{6} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

定理 2. 二不相似二次不盡根之和, 亦爲無理數。 615

當不盡根爲相似時, 此理甚明。

故令 \sqrt{a} 與 \sqrt{b} 表不相似不盡根。

$$\text{設其可能, 假定 } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{p}{q} \quad (1)$$

此處 q 爲有理數。

平方(1)之二邊而移項，

$$2\sqrt{ab} = c^2 - a - b \quad (2)$$

此為不可能，因 $2\sqrt{ab}$ 為無理數 (§614)，此時 $c^2 - a - b$ 為有理數故也。

616 定理3. 設 $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ ，此處 \sqrt{b} 與 \sqrt{d} 為不盡根。
則 $a = c, b = d$ 。

因由假設， $\sqrt{b} - \sqrt{d} = c - a$ 。

但苟非 $\sqrt{b} - \sqrt{d} = 0$ 與 $c - a = 0$ ，此為不可能因不知是。

則 $\sqrt{b} - \sqrt{d}$ 為無理數 (§615)，不能等於有理數 $c - a$ 也。

故 $b = d$ ，而 $a = c$ 。

617 二項不盡根之平方根。 已知

$$(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2 = x + y \pm 2\sqrt{xy}.$$

故設 $a + 2\sqrt{b}$ 表已知二項不盡根，而能求得二正有理數 x 與 y ，可使

$$x + y = a, \text{ 而 } xy = b,$$

則 $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ 為 $a + 2\sqrt{b}$ 之平方根，而 $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ 為 $a - 2\sqrt{b}$ 之平方根，且此二根俱為二項不盡根。

當如此之數 x, y 存在，則可由觀察求得。

例1. 求 $37 - 20\sqrt{3}$ 之平方根。

化為 $a - 2\sqrt{b}$ 之形， $37 - 20\sqrt{3} = 37 - 2\sqrt{300}$

但 $300 = 25 \cdot 12$ ；而 $37 = 25 + 12$ 。

故 $\sqrt{37 - 2\sqrt{300}} = \sqrt{25} - \sqrt{12} = 5 - 2\sqrt{3}$ 。

例2. 求 $13/12 + \sqrt{5/6}$ 之平方根。

$$\frac{13}{12} + \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{13}{12} + \frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{13 + 2\sqrt{30}}{12}$$

因 $30 = 10 \cdot 3$ 而 $13 = 10 + 3$, 得 $\sqrt{13 + 2\sqrt{30}} = \sqrt{10 + 3}$.

$$\text{故 } \frac{\sqrt{13 + 2\sqrt{30}}}{12} = \frac{\sqrt{10 + 3}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{120 + 36}}{12} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

註. 今得求 x 與 y 之公式如下:

613

$$\text{由假設, } \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + 2\sqrt{b}}, \quad (1)$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{a - 2\sqrt{b}}. \quad (2)$$

$$\text{以(2)乘(1), } x - y = \sqrt{a^2 - 4b}. \quad (3)$$

$$\text{但(1) } x + y = a. \quad (4)$$

$$\text{解 (3), (4), } x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, y = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

可見此種值僅當 $a^2 - 4b$ 為完全平方時為有理數. 故僅於此情形下, $a + 2\sqrt{b}$ 之平方根為二項不盡根.

習 題) XXXIX

求以下之平方根.

$$1. \ 9 + \sqrt{56}. \quad 2. \ 20 + 2\sqrt{96} \quad 3. \ 32 - 2\sqrt{175},$$

$$4. \ 1 + \frac{\sqrt{6}}{5}. \quad 5. \ 7 - 3\sqrt{5}. \quad 6. \ 8\sqrt{2} + 2\sqrt{30}.$$

$$7. \ 2(a + \sqrt{a^2 - b^2}). \quad 8. \ b \pm 2\sqrt{ab - a^2}.$$

化簡以下

$$9. \ \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$$

$$10. \ \sqrt{9 + 4\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}.$$

虛 數 與 複 素 數

複素數. 因負數之一切偶次方俱為正數, 故無負數之偶次根能為實數者. 如此之根為虛數. 616

虛數之定義與其可結合之演算, 已見於 §§217-228, 學者可與此聯絡讀之, 依此種定義.

1. 符號 $i = \sqrt{-1}$ 名為虛數單位.

- 2. 形如 ai 之符號, 其 i 為實數者, 名為純虛數。
- 3. 形如 $a+bi$ 之符號, 其 a 與 b 為實數者, 名為複素數。
- 4. 二複素數相等, 僅限於當其實數部分與其虛數部分各

等時, 由是

設 $a+bi=c+di$, 則 $a=c, b=d$.

5. 二複素數之和, 差, 積, 或商, 仍為複素數(在特殊情形為實數或純虛數), 可應用平常計算法則與關係式 $i^2 = -1$ 求得。複素數之任何正整數乘幕亦真確: 因由定義 $(a+bi)^n = (a+bi)(a+bi) \dots$ 至 n 因式故也。

例1. 加 $5+3i$ 與 $2-4i$.

$(5+3i) + (2-4i) = (5+2) + (3-4)i = 7-i$.

例2. 從 $3+2i$ 減 $6-2i$.

$(3+2i) - (6-2i) = (3-6) + (2+2)i = -3+4i$.

例3. 以 $1+4i$ 乘 $2+3i$.

$(2+3i)(1+4i) = 2+3i+8i+12i^2 = 2+3i+8i-12 = -10+11i$

例4. 展開 $(1+i)^2$.

$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$.

例5. 求 x, y 之實數值滿足下列方程者

$(x+yi)i - 2+4i = (x-yi)(1+i)$.

實行所示之運算, 得

$-(y+2) + (x+4)i = (x+y) + (x-y)i$.

使實數與虛數部分各相等 (§6(9,4))

$-(y+2) = x+y$ 及 $x+4 = x-y$

解之, 得 $x=6, y=-4$.

於 §§233-241 中, 已述及對於以點代表複素數, 即所謂圖形者之法則, 及關於從二複素數圖形象得其和與積之圖形之法則。

令學者應正修須法則於例1,3,4.

共軛虛數. 二複數如 $a+bi$ 與 $a-bi$, 僅在結合實數與虛數部分之號不同者, 名為共軛虛數. 620

二共軛虛數之積為正實數. 621

例如, $(a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$.

故分數如 $(a-bi)/(c+di)$ 者, 可用分母之共軛虛數乘其二項化為實數之形. 622

例. 以 $2-4i/5$

$$\begin{aligned} \frac{5+7i}{2-4i} &= \frac{(5+7i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)} \\ &= \frac{-18+34i}{20} = -\frac{9}{10} + \frac{17}{10}i. \end{aligned}$$

i 之乘幕. 從方程式 $i^2 = -1$, 知 i 之偶次幕為 -1 或 1 , i 之奇次幕為 i 或 $-i$. 623

例如, $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1$; 餘類推.

對於 n 之任何已知值, 欲求 i^n 之值, 可用4除 n , 於是依其餘數為 $0, 1, 2, 3$, 定 i^n 之值為 $1, i, -1, -i$.

例如, $i^{14} = (i^4)^3 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1; i^{15} = i^2 \cdot i = -i$; 餘類推.

負數之偶次方根. 數 -4 有二平方根 $2i$ 與 $-2i$; 因 $(2i)^2 = 2^2 i^2 = -4$, 而 $(-2i)^2 = (-2)^2 i^2 = -4$ 故也. 吾人選 $2i$ 為主平方根, 而書作 $\sqrt{-4} = 2i$, 及 $\sqrt{-4} = -2i$. 624

同理, 任何已知負數 $-a$ 之主平方根為 \sqrt{ai} , 即 $\sqrt{-a} = \sqrt{ai}$.

從此主平方根之定義, 可知設 $-a$ 與 $-b$ 為任何二負數, 625

則 $\sqrt{-a} \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$.

(6) 因 $\sqrt{-a} \sqrt{-b} = \sqrt{ai} \sqrt{bi} = \sqrt{ab} i^2 = -\sqrt{ab}$.

於是二負數 $-a, -b$ 之主平方根之積，雖為其積 ab 之主平方根之一，然非此積之主平方根，與實數情形不同。

當計算虛數時須熟記法則 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 之性質修正。設最初用 \sqrt{a} 代記號 $\sqrt{-a}$ ，則混雜之一切機會，即可避免。

例1. 化簡 $\sqrt{-2} \cdot (\sqrt{-3})^5 \cdot (\sqrt{-5})^7$.

$$\begin{aligned} \sqrt{-2} \cdot (\sqrt{-3})^5 \cdot (\sqrt{-5})^7 &= \sqrt{2}i \cdot (\sqrt{3}i)^5 \cdot (\sqrt{5}i)^7 \\ &= \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3})^5 \cdot (\sqrt{5})^7 i^{12} \\ &= 1125 \sqrt{30}i. \end{aligned}$$

例2. 以 $1 + \sqrt{-1}$ 乘 $2 + \sqrt{-9}$.

$$(1+i) + (2+3i)(1+i) = (2+3i)(1+i) = -1+5i.$$

626 負數之高次偶次根為複素數，此將於後證明之。

例如， -4 之四次根之一為 $1+i$ ；因

$$(1+i)^4 = 1+4i+6i^2+4i^3+i^4 = 1+4i-6-4i+1 = -4.$$

627 複素數之平方根。此後將證明複素數之一切根亦為複素數。可求其平方根如下：

$$(\sqrt{x} \pm i\sqrt{y})^2 = x - y \pm 2i\sqrt{xy}.$$

130 因故設 $a+bi$ 表已知複素數，其 b 為正數，必能求得二正數 x 與 y ，可使

$$x - y = a, \quad (1) \quad \text{及} \quad 2\sqrt{xy} = b, \quad (2)$$

則 $\sqrt{x} + i\sqrt{y}$ 為 $a+bi$ 之平方根，而 $\sqrt{x} - i\sqrt{y}$ 為 $a-bi$ 之平方根。

可求得如此二數 x, y 如下：

230

由假設，
$$\sqrt{x} + i\sqrt{y} = \sqrt{a+bi}, \quad (3)$$

$$\sqrt{x} - i\sqrt{y} = \sqrt{a-bi}. \quad (4)$$

以(4)乘(3)，
$$x + y = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (5)$$

但由(1), $x - y = a,$ (6)

故解(5)與(6):

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

$$y = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

又因 $\sqrt{a^2 + b^2} > a,$ 故上二值皆為正數。

例, 求 $-1 + 4\sqrt{5}i$ 之平方根。

此處 $a = -1$ 及 $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (4\sqrt{5})^2} = 9.$

故 $x = (-1 + 9)/2 = 4$ 及 $y = (1 + 9)/2 = 5$

由是 $\sqrt{-1 + 4\sqrt{5}i} = 2 + \sqrt{5}i.$

習 題 XII

化簡以下。

1. $\sqrt{-49}$
2. $\sqrt{-18}$
3. $\sqrt{-8}$
4. $\sqrt{-12}$
5. $(\sqrt{-2})^3$
6. i^{12}
7. i^{-7}
8. $(1 + \sqrt{2})i^{15}$
9. $\sqrt{x-y} \cdot \sqrt{y-x}$
10. $(2\sqrt{-3})(1 + \sqrt{5}i)$
11. $(-\sqrt{-2})^7 - (i\sqrt{3})^2$
12. $(1 + 2i)^3 + (1 - 2i)^3$
13. $\frac{\sqrt{-a^2 - i\sqrt{b^2}}}{1+i} + \frac{\sqrt{-a^2 - i\sqrt{b^2}}}{1-i}$
15. $(\sqrt{3+4i} + \sqrt{3-4i})^2$
16. $(1+i^3)/(1+i)$
17. $(3 + \sqrt{2}i)(1 + \sqrt{2}i)$

19. 以 $1 + \sqrt{-3}$ 除 4
20. 求 -16 之四次根。
21. 求證 $(-1 + \sqrt{3}i)^2$ 為 1 之立方根。
22. 求證 $(1+i)/\sqrt{2}$ 為 -1 之四次根。
23. 求 x 與 y 之實數值滿足下列方程
 $3 + 2i + x(i-1) + 2yi = (3i+4)(x+iy)$
 求以下之平方根。
 $24. 5 + 12i, 25. 2i, 26. 4ab + 2(a^2 - b^2)i.$

XIII. 二次方程

628 方程之一般式，含一未知文字，如(2)之每一二次方程可化為形如

ax^2+bx+c=0.

此處 a, b, c 表已知數。

設可發生 b=0, 則此方程名為簡二次方程; 設 b≠0, 則名為難二次方程。

629 觀察求根法。方程 ax^2+bx+c=0 之根，為其特別值，此值能使多項式 ax^2+bx+c 為零 (§ 382)。此種根之個數有二。

設已知 ax^2+bx+c 之因式，則可知 ax^2+bx+c=0 之根，因此根為 x 之值，能使 ax^2+bx+c 之因式為零者故也 (§ 258, 311)。其二因式為 x-a 與 x-β, 則其二根為 a 與 β。

例 1. 解方程式 2x^2+x-6=0.

x^2+x-6=(x+3)(x-2).

因式 x+3 當 x=-3 時為零，而因式 x-2 當 x=2 時為零。故二根為 -3 與 2。

例 2. 解 abx^2-(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)=0.

由 § 443 析因式 (ax-(a+b))(bx-(a-b))=0.

故二根為 (a+b)/a 與 (a-b)/b.

於特例。因 x^2-q=(x-√q)(x+√q), 故純二次方程 x^2-q=0 之根為 √q 與 -√q.

次因 ax^2+bx=(ax+b)x, 故形如 ax^2+bx=0 之二次方程之根為 -b/a 與 0.

例如, 4x^2=9 之根為 3/2 與 -3/2; 2x^2-1=0 之根為 1/2 與 -1/2; 5x^2=0 之根為 0 與 0.

630 反之, 欲得根為二已知數如 a 與 β 之二次方程, 作成積 (x-a)(x-β) 而使此積等於 0 即得。

例如, 根為 -2 與 1/3 之二次方程為 (x+2)(x-1/3)=0 或 3x^2+5x-2=0.

例1. 解以下二次方程式 $x^2 + 2x - 8 = 0$.

1. $x^2 + 2x - 8 = 0$.

3. $(2x-1)(x-2) = x^2 + 2$ 且 $(x-1)(x-3) = (2x-1)^2$.

例2. 求作二次方程, 其根為

1. $2/3$ 及 $-3/2$, 2. a 及 b , 3. $3/4$ 及 0 .

根之一般公式. 然 $ax^2 + bx + c = 0$ 亦可析因式. 因此 (144) 631

ax^2

$$= a \left[x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right] \left[x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right]$$

因 $ax^2 + bx + c = 0$ (1)

之根, 即能使 $ax^2 + bx + c$ 之因式為零之 x 之值, 故其二根為

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

此式 (2) 必須熟記, 因任何二次方程化為形如 (1) 後, 只須用代換法以求得其根也.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

此式 (2) 必須熟記, 因任何二次方程化為形如 (1) 後, 只須用代換法以求得其根也.

例. 解 $x^2 + 105x = 81$.

化為如 (1) 之形. $4a^2 + 105x - 81 = 0$

此處 $a=4$, $b=105$, 而 $c=-81$.

故 $x = \frac{-105 \pm \sqrt{105^2 + 4 \cdot 4 \cdot 81}}{8}$, 即 $\frac{8}{4}$ 或 -27 .

與 c 亦為整數時, 用以下公式甚便, 632

$$\frac{-b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a} \quad (8)$$

此式 (8) 以 2 除 (2) 之分子分母而得.

例. 解 $3x^2 + 56x - 220 = 0$.

此處 $b/2 = 28$, 代入 (8), 得

$$x = \frac{-28 \pm \sqrt{28^2 + 3 \cdot 220}}{3}, \text{ 即 } \frac{10}{3} \text{ 或 } -22.$$

633 任何已知二次方程, 亦可如下例直接應用配成平方法解之 (詳例). 但此法含不需要之計算, 故苟非忘記 § 631 之公式時, 不用此法.

例. 解 $3x^2 - 6x + 2 = 0$.

移已知項, 而以 x^2 之係數除之,

$$x^2 - 2x = -2/3.$$

配成左邊之平方,

$$x^2 - 2x + 1 = 1/3.$$

開二邊之平方根,

$$x - 1 = \pm \sqrt{1/3}, \text{ 由是 } x = (3 \pm \sqrt{3})/3.$$

634 任何公式方程, 當去其分母而成二次方程時, 上述法則亦可解之; 但須參考 §§ 524-527.

例 1. 解 $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4}$.

去分母而化簡, $2x^2 + 10x + 11 = 0$.

解之, $x = \frac{-5 \pm \sqrt{3}}{2}$.

此 x 之二值俱為已知方程之根, 因其使分母無一為零故也.

例 2. 解 $\frac{x+3}{x^2-1} + \frac{x-3}{x^2-x} + \frac{x+2}{x^2+x} = 0$.

用最低公分母 $4(x^2-1)$ 乘之, 以去分母而化簡, 得

$$3x^2 + 2x - 5 = 0, \text{ 由是 } x = 1 \text{ 或 } -5/3.$$

(8) 1 不能為已知方程之根, 因當 $x = 1$ 時, 首二分母為零故也, 故 $-5/3$ 為此方程僅有之根.

習題 XLI

解下列方程式：

1. $x^2+2x=85.$
2. $4x^2-4x=3.$
3. $x^2=10x-13.$
4. $9x^2+6x+5=0.$
5. $2x^2+3x-4=0.$
6. $(2x-3)^2=8x.$
7. $x^2+9x-252=0.$
8. $12x^2+56x-205=0.$
9. $6x^2-2x+207=0.$
10. $15x^2-86x-64=0.$
11. $x^2-3x-1+\sqrt{3}=0.$
12. $x^2-(6+i)x+8+2i=0.$
13. $(x-2)^2(x-7)=(x+2)(x-3)(x-6).$
14. $\frac{2x}{x+2} + \frac{x+2}{2x} = 2.$
15. $\frac{x+1}{x} + 1 = \frac{x}{x-1}.$
16. $\frac{3}{2(x^2-1)} + \frac{x}{4x+4} = \frac{5}{8}.$
17. $\frac{3}{2x+1} - \frac{1}{4x-2} - \frac{2x}{1-4x^2} = \frac{7}{8}.$
18. $\frac{2x-1}{x-2} + \frac{3x+1}{x-3} = \frac{5x-14}{x-4}.$
19. $\frac{x+1}{x(x-2)} - \frac{1}{2x-2} + \frac{1}{2x} = 0.$
20. $\frac{4}{x-1} - \frac{1}{4x} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{3-x}.$
21. $\frac{x+3}{4(x+2)(3x-1)} + \frac{2x+1}{3(3x-1)(x+4)} - \frac{17x+7}{6(x+4)(x+2)} = 0.$
22. $\frac{x+7}{2x^2-7x+3} + \frac{x}{x^2-2x-3} + \frac{x+3}{2x^2+x-1} = 0.$
23. $3x^2+(9a-1)x-3a=0.$
24. $x^2-2ax+a^2-b^2=0.$
25. $a^2x^2+c(a-b)x-ab=0.$
26. $x^2-4ax+4a^2-b^2=0.$
27. $x^2-6cx+a^2(9c^2-4b^2)=0.$
28. $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+a^2-b^2=0.$
29. $1/(x-a)+1/(x-b)+1/(x-c)=0.$
30. $\frac{(x-a)^2-(x-b)^2}{(x-a)(x-b)} + \frac{4ab}{a^2-b^2} = 0.$

習題 XLII

1. 求二連續整數,其積為 506.
2. 求二連續整數,其平方之和為 481.
3. 求二連續整數,其立方之差為 91.
4. 求三連續整數,其各對乘積之和為 587.
5. 從下列條件求一二位數:兩數字之積為43,若數位位置互易則所成之數減小 18.
6. 一分數之分子較分母多2,而此分數較其倒數多 $\frac{24}{35}$,求此分數.
7. 一牛販以1260元買閩牛若干頭,除失去4頭外,餘牛每頭增價10元賣出而獲利260元求所買之牛數.
8. 一人以48元售出一宗貨物,其獲利之百分數等於二物原價元數之半,問貨物之原價若干?
9. 設有銀洋4000元以複利法存儲二年,利息每年計算複利一次,共得本利和4410元,則利率為若干?
10. 一人得遺產25,000元,但以百分之若干繳遺產稅後,又以較遺產稅率多一之百分數作為費用,故淨得22,800元,其遺產稅率為若干?
11. 一人以4500元買有折扣之50元一股之股票若干股.其後,除10股外,餘均售出,得洋5850元,售出票價超過票面價格三倍於買進時之折扣,此人共買若干股?
12. 貨車後輪周圍較前輪長8吋,後輪行1哩所轉之次數較前輪少88次.求各輪周圍之長.
13. 一鑲邊之正方形,其邊之闊度較正方形各邊之長度少一吋,而其面積之平方吋數較正方形週界之吋數多64,求正方形及所鑲之邊之面積.

14. 正方形各邊之長為2, 今截去其四角使成一正八邊形. 求該八邊形各邊之長.
15. 一酒商從裝6加侖之桶中取酒若干. 原桶用水柱滿後再取出與前同量之酒亦混合液, 然後查得桶內僅餘3加侖純酒. 求每次取出之酒量.
16. 某人乘A火車行3哩, 停留5分鐘乘B火車而返, B車較A車每小時快3哩. 全旅程共費 $2\frac{4}{9}$ 小時. 則兩火車之速度各若干?
17. 一健步者於一定時間內行6哩. 若減少 $\frac{1}{2}$ 小時則其速度每小時較前大2哩, 求原有時間及速度.
18. 一健步者以一定速度行12哩後, 復以每小時大 $\frac{1}{2}$ 哩之速度行6哩. 若以此較大速度行全程則省20分鐘. 求此人行18哩之時間.
19. 兩直路相交成直角, A, B二人從其交點同時出發, A以每時3哩之速度向一路進行, B以每時4哩之速度向他一路進行. 幾小時後兩人相距30哩?
20. 如前題所述, 若A, B二人各以每時2哩與每時3哩之速度自交點出發各行一路, 且A先B2小時起行, 則B行幾時後二人相距10哩?
21. 一物體從高 a 呎處以每秒 b 呎之速度鉛直上拋, 其 t 秒末之高度可以公式 $h = a + bt - 16t^2$ 表之. 若將此物體鉛直擲下, 則其對應公式為 $h = a - bt - 16t^2$.
- (1) 若一物體從地面以每秒22呎之速度鉛直上拋, 則何時高7呎? 16呎? 能否達17呎之高度?
- (2) 一物體從高64呎處鉛直下擲其最初速度為每秒48呎. 何時達36呎之高度?
- (3) 若一物體從高36呎處下, 何時落地?

XIV. 二次方程式之論

極 大 與 極 小

635. 根之性質. 判別式. 命 α 與 β 表 $ax^2+bx+c=0$ 之二根,
使 § 631,

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

根號內之 $b^2 - 4ac$ 式稱爲 $ax^2+bx+c=0$ 之判別式. 當係以
 a, b, c 爲實數時, α, β 二根之性質可以判別式之符號證明之. 如:

1. 當 $b^2 - 4ac$ 爲正時, 二根爲不相等之二實數.
2. 當 $b^2 - 4ac$ 爲 0 時, 二根爲相等之二實數.
3. 當 $b^2 - 4ac$ 爲負時, 二根爲共軛虛數.

下列諸事實亦應察出之:

1. $b^2 - 4ac = 0$, 則 ax^2+bx+c 爲一完全平方;
2. a 爲正而 c 爲負, 則二根必爲實數, 因斯時之 $b^2 - 4ac$ 爲正也.
3. 設 a, b, c 爲有理數, 則 $b^2 - 4ac$ 爲一完全平方時, 二根方爲有理數.

例 1. 證 $x^2 - 6x + 10 = 0$ 之二根爲虛數.

因 $b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -4$, 故二根爲虛數.

例 2. $mx^2 + 3x + 2 = 0$ 之二根相等時, m 之值爲何?

欲二根相等, 須得 $3^2 - 4 \cdot m \cdot 2 = 0$, 即 $m = 9/8$.

例 3. 求可化時, 試分解 $x^2 + xy - 2x^2 + 11x + y - 12$.

將上式依 x 之幂序排列, 且使之等於 0, 則得 $y^2 + (x+1)y$
 $(2x^2 - 11x + 12) = 0$.

解之,

$$y = \frac{(x+1) \pm \sqrt{9x^2 - 42x + 49}}{2}$$

$$y = x - 4, \quad \text{或} \quad y = -2x + 8,$$

故，從§67， $y^2 + 2y - 2x^2 + 11x + y - 12 = (y - x + 4)(y + 2x - 3)$ 。

注意，此式所以能分解者蓋因根號內之 $9x^2 - 42x + 49$ 為一完全平方也。

根與係數之關係。設 α 與 β 表 $ax^2 + bx + c = 0$ 之二根，從 §36 §631，得

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - \alpha)(x - \beta).$$

二邊各除以 a ，而將右邊乘出，則得

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \equiv x^2 - (a + \beta)x + a\beta$$

因此為恆等式，故二邊中 x 之同次幕之係數為相等，從 §264。即 $a + \beta = -b/a$ 與 $a\beta = c/a$ 。

此亦可以 §631 中 α 與 β 之值相加及相乘證明之。因 α, β 為 $x^2 + bx/a + c/a = 0$ 之根，故得以下之定理：

凡具 $x^2 + px + q = 0$ 形式之任何二次方程式，其 x 之係數變號後與其二根之和相等，而其常數項等於二根之積。

如，在 $6x^2 + x - 2 = 0$ 中，即 $x^2 + x/6 - 1/3 = 0$ ，其二根之和為 $-1/6$ ，而其常數項為 $-1/3$ 。

例1. 解 $9x^2 - 10x + 1 = 0$ 。

顯然二根之和為 1 。因 $9 - 10 + 1 = 0$ 。因二根之積為 $1/9$ ，故他一根為 $1/9 + 1$ 或 $1/9$ 。

例2. 求一方程式其根為 $3x^2 + 8x + 5 = 0$ 之根之三倍。

命 α 與 β 為 $3x^2 + 8x + 5 = 0$ 之二根。

於是 $a + \beta = -8/3$ 而 $a\beta = 5/3$ 。

故所求方程式為

$$x^2 - (3\alpha + 3\beta)x + 3\alpha \cdot 3\beta \equiv x^2 - 3(a + \beta)x + 9a\beta \equiv x^2 + 8x + 15 = 0.$$

根之對稱函數。 $a + \beta$ 與 $a\beta$ 二式為 α 與 β 二根之對稱函數 §37 (§540)， α 與 β 之其他一切有理對稱函數皆可以 $a + \beta$ 與 $a\beta$ 二函數

表之，故亦可以方程式之係數表之。

(因此兩函數皆可化爲對稱函數之整式或分式。設一整對稱函數含 $a^2b^2b^2+1$ 形式之一項，則亦必含 ka^2+pb^2 之一項 (§54?)，故得 $a^2b^2(a^2+\beta^2)$ 。但 $a^2b^2 = (a\beta)^2$ ，而連續應用二項式定理，即可證明 $a^2+\beta^2$ 能化爲 $a+\beta$ 及 $a\beta$ 之函數。

如，由 $(a+\beta)^2 = a^2+2a\beta+\beta^2$ ，得 $a^2+\beta^2 = (a+\beta)^2 - 2a\beta$ 。

同理，得 $a^3+\beta^3 = (a+\beta)^3 - 3a\beta(a+\beta)$ 。

例。 $x^2+px+q=0$ 之二根爲 a, β ，試以含 p 與 q 之式表 $1/a+1/\beta$ 及 $a^3\beta+a\beta^3$ 。

$$1/a+1/\beta = (a+\beta)/a\beta = -p/q,$$

而 $a^3\beta+a\beta^3 = a\beta(a^2+\beta^2) = a\beta[(a+\beta)^2 - 2a\beta] = q(p^2 - 2q)$ 。

- 38 無限大根。設 $ax^2+bx+c=0$ 中之係數不爲常數而爲變數，則可證明設 a 趨於0等極限時，則二根之一必趨近於 ∞ ；而設 a 與 b (但 c 則否) 趨近於0，則二根必均趨近於 ∞ 。

因根之公式爲

$$a = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

將 a 之等分式之二項均乘以 $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$ ， β 之等分式之二項均乘以 $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ ，則得：

$$a = -\frac{2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad \beta = -\frac{2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

從 §§203, 205, 設 $c \doteq 0$ ，則 $\sqrt{b^2 - 4ac} \doteq b$ 。

故 設 $a \doteq 0$ ，則 $a \doteq -c/b$ 而 $\beta \doteq \infty$ 。

又 設 $c \doteq 0$ ，與 $b \doteq 0$ ，則 $a \doteq \infty$ 與 $\beta \doteq \infty$ 。

此等結論可述之如下 (§19)：

§ 當 $ax^2+bx+c=0$ (中之 c 爲零時，則其一根成爲無限大，當 a 與 b (但 c 則否) 全爲0時，則其二根同成爲無限大。

極大與極小。命 § 273. y 爲 x 之函數，有時 x 增加時， y 漸增至 639
某定值， m ，然後漸減，或 y 漸減至某定值， m' ，然後漸增。則稱 m 謂
 y 之極大值而 m' 謂極小值。

如， $y = (x-1)^2 - 4$ ，當 $x=1$ 時， y 有一極小值， -4 。因設 x 從
小於 1 之值漸增時， $(x-1)^2$ 先漸減至 0 而後漸增。

同理， $y = 4 - (x-1)^2$ ，當 $x=1$ 時， y 有一極大值， 4 。

每一實係數之二次三項式 $ax^2 + bx + c$ 有一極大值或一極小 640
值，其求法如下例。

例 1. 求 $y = x^2 + 6x - 7$ 之極大或極小值。

配方， $x^2 + 6x - 7 = (x+3)^2 - 16$ 。

故當 $x = -3$ 時， y 有一小值， -16 。

例 2. 分一已知線段爲二份，使所成矩形有極大之面積。

命 $2a$ 表已知線段之長， x 與 $2a-x$ 各爲二份之長， y 爲矩形之
面積。

則 $y = x(2a-x) = 2ax - x^2 = a^2 - (a-x)^2$ 。

故當 $x = a$ 時， y 有一極大值，即周界一定，所成矩形爲一正方
形時，其面積爲最大。

二次三項式及某種較複雜之函數，其極大與極小值亦可用 641
下法求之。

例. 求 $y = (4x^2 - 2)/(4x - 3)$ 之極大值與極小值。

消去分母，解 c ，得

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 3y + 2}}{2} = \frac{y \pm \sqrt{(y-1)(y-2)}}{2}$$

從假設， x 限於實數值。故祇能取使根號中 $(y-1)(y-2)$ 爲
正(或 0) 時之值，即 1 與較小於 1 之值及 2 與較大於 2 之值

因此 y 之極大值爲 1 而極小值爲 2。

由觀察可知當 y 增至1時, x 之二值 即 $(y-\sqrt{y^2-3y+2})/2$ 與 $2(y+\sqrt{y^2-3y+2})/2$,各自漸增或漸減至 $1/2$.反之,當 x 漸增而過 $1/2$ 時, y 先漸增至1而後漸減.

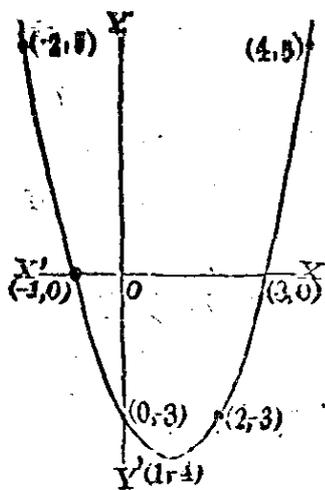
642 二次三項式之變化。已知 $y=ax^2+bx+c$,其中 a 為正。用配方法得

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right].$$

故當 $x = -b/2a$ 時, y 有一極小值,其值為 $(4ac - b^2)/4a$.

當 x 從 $-\infty$ 漸增至 $+\infty$ 時, y 先從 $+\infty$ 漸減至 $(4ac - b^2)/4a$ 而後漸增至 $+\infty$.

例如,命 $y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$.



當 x 從 $-\infty$ 漸增至 $+\infty$ 時, y 先從 $+\infty$ 漸減至 -4 ,再從 -4 漸增至 $+\infty$.

又當 $x^2 - 2x - 3 = 0$,即,當 $x = -1$ 或 3 時, $y = 0$.

在 x 遠 -1 前, y 為正;此後 y 為負,直至 $x = 3$ 後方復為正.

當
 $x = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$
 $y = \dots 12, 5, 0, -3, -4, -3, 0, 5, 12, \dots$

如§389中所述,描各對數值,過此諸點作一曲線,可得 $y = x^2 - 2x - 3$ 之圖形.

注意 x 之零值相當於此圖形截 x 軸上之諸點.又 y 之最小值相當於圖形之最低點亦即為此曲線之轉向點.

習 題 XLIII

1. 欲使 $(m+2)x^2 - 2mx + 1 = 0$ 之二根相等,則 m 之值為何?

2. 當 $m = -1$ 時, $(m^2 + m)x^2 + 3mx - 2 = 0$ 之二根為何?

答 $m = 0$ 時,其值為何?

3. 可能時, 分解 $3x^2 + 5xy - 2y^2 - 5x + 4y - 2$.
4. 欲使 $x^2 - y^2 + my + 5y - 6$ 能分解, m 之值為何?
5. $x^2 + px + q = 0$ 之二根為 α 與 β , 試以 p 與 q 表 $(\alpha - \beta)^2, \alpha^2 + \beta^2$, 與 $\alpha/\beta + \beta/\alpha$.
6. $2x^2 - 3x + 4 = 0$ 之二根為 α 與 β , 求 $\alpha/\beta^2 + \beta/\alpha^2$ 與 $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ 之值.
7. $x^2 + x + 2 = 0$ 之二根為 α 與 β , 求以 $-\alpha, -\beta; 1/\alpha, 1/\beta; 2\alpha, 2\beta; \alpha + 1, \beta + 1$ 為三根之諸方程式.
8. 求下列諸式之極大與極小值.
1. $x^2 - 8x + 3$.
 2. $2x^2 - x + 4$.
 3. $1 + 4x - x^2$.
 4. $x/(x^2 + 1)$.
 5. $1/x + 1/(1-x)$.
 6. $(x+1)/(2x^2-1)$.
9. 求內接於已知圓內之最大矩形, 又具最大周界之矩形.
10. 一人在一舟中距岸上之最近點為 2 哩, 今欲以最短時間達到岸上離最近點 6 哩處, 設該人每小時能划行 4 哩, 步行 5 哩, 則應向岸上何處划行?
11. 設以每秒 48 呎之初速將一物豎從地面鉛直上拋, 則可達之最大高度若何? 又何時能達此高度?

XV. 用二次方程式可解之高次方程式

可分解因式之方程式⁽¹⁾ 已知一整方程式其形為 $A = 0$, 設 A 能分解成一次或二次諸因式, 則使 A 之諸因式等於零之諸方程式而解之即得 $A = 0$ 之一切根. 因設 $A \equiv BC \dots$, 則 $A = 0$ 與 $B = 0, C = 0, \dots$, 之聯合式相同, §341.

例 1. 解 $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

由 §436, $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

故 $x^4 + x^2 + 1 = 0$ 與以下二方程式相當:

茲將其

$$x^2+x+1=0 \text{ 與 } x^2-x+1=0.$$

解之, $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

例 2. 解 $x^4 - x^3 - 5x^2 - 7x + 12 = 0$.

用 §451 之法分解因式, 得

$$x^4 - x^3 - 5x^2 - 7x + 12 = (x-1)(x-3)(x^2+3x+4).$$

故 $x^4 - x^3 - 5x^2 - 7x + 12 = 0$ 與下列三方程式相當:

$$x-1=0, \quad x-3=0, \quad \text{與 } x^2+3x+4=0,$$

其根爲 $1, 3, \text{與 } (-3 \pm i\sqrt{7})/2$.

例 3. 解下列諸方程式:

1. $6x^3 - 11x^2 + 8x - 2 = 0$. 2. $x^4 - 5x^3 + x^2 + 11x + 4 = 0$.

644 $au^2 + bu + c = 0$ 型之方程式, 其中 u 表 x 之函數. 設解 $au^2 + bu + c = 0$ 以求 u , 得其根爲 α 與 β , 則此方程式與 $u = \alpha$ 及 $u = \beta$ 二方程式相當, 因從 §31,

$$au^2 + bu + c \equiv a(u-\alpha)(u-\beta).$$

故解 $au^2 + bu + c = 0$ 以求 x , 祇須解 $u = \alpha$ 與 $u = \beta$ 以求 x 即得.

例 1. 解 $3x^4 + 10x^2 - 8 = 0$.

解之以求 x^2 $x^2 = 2/3$ 或 -4 .

故 $x = \pm\sqrt{6}/3$ 或 $\pm 2i$.

例 2. 解 $x^{\frac{5}{2}} + 3 - 10x^{-\frac{5}{2}} = 0$.

乘以 $x^{\frac{5}{2}}$, $x^5 + 3x^{\frac{5}{2}} - 10 = 0$.

解之以求 $x^{\frac{5}{2}}$, $x^{\frac{5}{2}} = 2$ 或 -5 .

故 $x = \pm 2\sqrt{2}$ 或 $\pm 5i\sqrt{5}$.

例 3. 解 $(x^2+3x+4)(x^2+3x+5) = 6$.

此方程式可化成 $(x^2+3x)^2 + 9(x^2+3x) + 14 = 0$ 之形式.

解之以求 x^2+3x , 得二方程式.

$$x^2+3x = -2, \text{ 與 } x^2+3x = -7,$$

其根爲 $-1 \pm 2, \text{ 與 } (-3 \pm \sqrt{19})/2$.

例 4. 解 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$.

將第一與第四因式相乘, 第二與第三因式相乘, 則此方程化

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=120$$

之形式而可用與例 3 相同之法解之.

例 5. 解 $x^4+10x^3+31x^2+30x+5=0$.

將前二項配方, 得

$$(x^2+5x)^2+6(x^2+5x)+5=0.$$

解之以求 x^2+5x , 得二方程式

$$x^2+5x=-5 \text{ 與 } x^2+5x=-1,$$

其根為 $(-5 \pm \sqrt{5})/2$ 與 $(-5 \pm \sqrt{21})/2$.

例 6. 解 $8 \frac{x^2+2x}{x^2-1} + 3 \frac{x^2-1}{x^2+2x} - 11 = 0$.

觀察得第二分式為第一分式之倒數, 今以第一分式乘方程式之兩邊, 得

$$8 \left(\frac{x^2+2x}{x^2-1} \right)^2 - 11 \left(\frac{x^2+2x}{x^2-1} \right) + 3 = 0.$$

解之以求 $(x^2+2x)/(x^2-1)$, 得二方程式

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1} = 1 \text{ 與 } \frac{x^2+2x}{x^2-1} = \frac{3}{8},$$

其根為 $-1/2$ 與 $-3, -1/5$.

由此所得之諸值皆為已知方程式之根, 因無一值可使其分母為零也.

例 7. 解下列方程式.

1. $3x^4 - 29x^2 + 13 = 0$.
2. $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 3x = 2$.
3. $(x-a)(x+2a)(x-3a)(x+4a) = 24a^4$.
4. $(4x^2+2x)/(x^2+6) + (x^2+6)/(2x^2+x) - 3 = 0$.

倒數方程式, 此等方程式如以 $\frac{1}{x}$ 代 x 則消去其分式後, 仍與

原式相同, 設將此種方程式之諸項以降幂序排列之, 則其首係數必相同, 又其第二係數與末第二係數亦然, 餘類推; 或上減首對係數之系, 對值相同而符號則相反.

如 $2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 2 = 0$
 與 $x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = 0$
 為倒數方程式。

四次倒數方程式可化作二次而解之如下。

例 1. 解 $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 8x + 2 = 0$ 。

集係數相同諸項而除以 x^2 ，則得以下之形式：

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0。$$

因 $x^2 + 1/x^2 = (x + 1/x)^2 - 2$ ，故此方程式又可化成

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0。$$

解之以求 $x + 1/x$ ，得二方程式

$$x + \frac{1}{x} = 0, \text{ 與 } x + \frac{1}{x} = \frac{3}{2}。$$

其根為 $i, -i$ ，與 $(3 \pm i\sqrt{7})/4$ 。

每一奇次倒數方程式必有一根為 1 或 -1；若將其對應因式 $x-1$ 或 $x+1$ 提出，則其“低一次”之方程式必仍為倒數方程式。故三次與五次之倒數方程式能以二次方程式解之。

例 2. 解 $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ 。

集項， $2(x^3 + 1) - 3(x^2 + x) = 0$ 。

因此方程式之各項皆可以 $x+1$ 除盡，故與下列二方程式同

$$x \pm 1 = 0, 2x^2 - 5x + 2 = 0,$$

其根為 -1 ，與 $2, 1/2$ 。

例 3. 解 $x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$ 。

集項， $(x^5 - 1) - 5x(x^3 - 1) + 9x^2(x - 1) = 0$ 。

以 $x-1$ 除之，則此方程式與下列之二方程式相當：

$$x - 1 = 0 \text{ 與 } x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0。$$

其根為 1 ，與 $(1 \pm i\sqrt{5})/2, (3 \pm \sqrt{5})/2$ 。

例4. 解下列方程式.

1. $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$. 2. $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$.

3. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

二項方程式. 此乃具 $x^n + a = 0$ 形之方程式之名稱. 當 $x^n + a$ 可分解成一次或二次諸因式時, 則此等方程式可用上述之法解之.

例1. 解 $x^3 - 1 = 0$.

因 $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, 方程式 $x^3 - 1 = 0$ 與下列方程式相當:

$x - 1 = 0$, 與 $x^2 + x + 1 = 0$.

解之. $x = 1$ 或 $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$.

例2. 解 $x^5 - 32 = 0$.

從 $x^5 - 32 = 0$, 知命 $x = \sqrt[5]{32}y = 2y$, 則得 $y^5 - 1 = 0$;

由 §§ 438, 643, $y^5 - 1 = 0$ 相當於下列二方程式

$y - 1 = 0$ 與 $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0$.

解之. $y = 1, (-1 \pm \sqrt{5} + i\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}})/4,$

或 $(-1 \pm \sqrt{5} - i\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}})/4.$

故 $x = 2y = 2, (-1 \pm \sqrt{5} + i\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}})/2,$

或 $(-1 \pm \sqrt{5} - i\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}})/2.$

應用上法, 每一二項方程式 $x^n \pm a = 0$ 皆可化作倒數式 $y^n \pm 1 = 0$.

例3. 解下列方程式.

1. $x^3 + 8 = 0$. 2. $x^6 + 1 = 0$. 3. $x^6 + 1 = 0$.

諸例可說明此定理: 每一數必有 n 個 n 次根, 如 1 之立方根為適合於方程式 $x^3 = 1$ 之任何數; 而在例 1 中求得此種數三個, 即 $1, (-1 + i\sqrt{3})/2$, 與 $(-1 - i\sqrt{3})/2$.

無理方程式. 解無理方程式時, 通常先使之有理化 (§649) 但亦可用較此更簡之法以處理之, 將說明如下, 但不論所用何法, 在確定所求得未知數之值為方程式之根之前, 須加以檢驗.

例1. 解 $\sqrt{2x-3} - \sqrt{5x-6} + \sqrt{3x-5} = 0$.

移項 $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{5x-6}$.

平方且化簡之, $\sqrt{(2x-3)(3x-5)} = 1$.

再平方而化簡之, $6x^2 - 19x + 14 = 0$,

解之, 得 $x = 2$ 或 $7/6$.

將所得 x 之值代入已知方程式而驗之, 可知 2 為根而 $7/6$ 則否.

亦可用 § 673 之法化已知方程式為有理方程式, 於是發見 $-4(6x^2 - 19x + 14)$ 相同於

$$(\sqrt{2x-3} - \sqrt{5x-6} + \sqrt{3x-5})(\sqrt{2x-3} + \sqrt{5x-6} - \sqrt{3x-5})$$

$$(\sqrt{2x-3} + \sqrt{5x-6} + \sqrt{3x-5})(\sqrt{2x-3} - \sqrt{5x-6} - \sqrt{3x-5})$$

x 祇有二值能使 $6x^2 - 19x + 14$ 等於零 其中之一值 2 能使

右邊之第一因式為零; 他值 $7/6$ 則使第二因式為零, 故 $x = 7/6$ 能使第三或第四因式為零.

例2. 解 $\sqrt{4x+3} + \sqrt{12x+1} = \sqrt{24x+10}$.

方程式之祇含一根式者能化成以此根式為元之二次方程式

於是先求此根式之值.

例3. 解 $2x^2 - 6x - 5\sqrt{x^2 - 3x - 1} - 5 = 0$.

由觀察, 知根號外諸 x 項適為根號內諸 x 項之二倍, 故可寫成下式:

$$2(x-3x-1) - 5\sqrt{x^2-3x-1} - 3 = 0.$$

解之以求 $\sqrt{x^2-3x-1} =$, 得兩方程式

$$0 = 1 + \sqrt{x^2-3x-1} = 3. \text{ 與 } \sqrt{x^2-3x-1} = -1/2.$$

第二方程式必須捨去, 因照 § 579 所規定具 \sqrt{a} 形之根式不能有負值也.

將第一方程式平方之, 得

$$x^2 - 3x - 1 = 9,$$

$$5 \text{ 與 } -2.$$

其根為

於已知方程式中驗 5 與 -2 而知二值皆為其根.

例4. 解 $2x^2 - 14x - 3\sqrt{x^2 - 7x + 10} + 18 = 0$.

有時一方程式可化成兩邊皆為完全平方之形式或一邊為一完全平方而他邊為一常數。

例5. 解 $4x^2 + x + 2x\sqrt{3x^2 + x} = 9$.

先寫作

$$3x^2 + x + 2x\sqrt{3x^2 + x} + x^2 = 9.$$

第一邊為一完全平方；兩邊各自開方，則得二方程式

$$\sqrt{3x^2 + x} + x = 3, \text{ 與 } \sqrt{3x^2 + x} = -3.$$

解之， $x = 1, -9/2$, 或 $(5 \pm \sqrt{97})/4$.

驗算所得之結果，知僅 1 與 $-9/2$ 為此已知方程式之根。

有時經適當之整理後，各項有一公共之無理因式。

例6 解 $\sqrt{x^2 - 7ax + 10a^2} - \sqrt{x^2 + ax - 6a^2} = x - 2a$.

此類各項皆有 $\sqrt{x - 2a}$ 為其公因式

將此因式提出，則此方程式相同於

$$\sqrt{x - 2a} = 0 \text{ 與 } \sqrt{x - 5a} - \sqrt{x + 3a} = \sqrt{x - 2a}$$

解此等方程式， $x = 2a, -10a/3$, 或 $6a$.

驗算之，知僅 $2a$ 與 $-10a/3$ 為此已知方程式之根。

例7. 解 $\sqrt{3x^2 - 5x - 12} - \sqrt{2x^2 - 11x + 15} = x - 3$.

設方程式之一項或多項為以無理式為分母之分式。則常先將其分母化作有理式為便利。

例8. 解 $(\sqrt{x} + \sqrt{x-3}) / (\sqrt{x} - \sqrt{x-3}) = 2x - 5$.

將分母化為有理式而化簡之，得

$$\sqrt{x^2 - 3x} = 2x - 6.$$

解之， $x = 3$ 或 4 .

驗之，得 3 與 4 皆為此方程式之根。

例9. 解 $(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}) / (\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}) = x - 3$.

習題 XLIV

解下列諸方程式：

1. $4x^4 - 17x^2 + 18 = 0.$
2. $3x^4 - 4x^2 = 7.$
3. $(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 7x^2.$
4. $(2x^2 - x - 3)(3x^2 + x - 2) = 2.$
5. $x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6 = 0.$
6. $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0.$
7. $(3x^2 - 2x + 1)(3x^2 - 2x - 7) + 12 = 0.$
8. $x^4 - 12x^3 + 33x^2 + 18x - 28 = 0.$
9. $4x^4 + 4x^3 - x^2 - x - 2 = 0.$
10. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0.$
11. $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0.$
12. $x^5 - 11x^4 + 36x^3 - 36x^2 + 11x - 1 = 0.$
13. $x^4 + 243 = 0.$
14. $(2x - 1)^3 = 1.$
15. $(1 + x)^3 = (1 - x)^3.$
16. $(x - 2)^4 - 81 = 0.$
17. $(a + x)^3 + (b + x)^3 = (a + b + 2x)^3.$
18. $(a - x)^4 - (b - x)^4 = (a - b)(a + b - 2x).$
19. $\frac{x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 6x - 1} - 3 \frac{4y^2 + 6x - 1}{x^2 + 3x + 1} - 2 = 0.$
20. $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 + \frac{1}{a^2}.$
21. $3x^2 - 2x - 5\sqrt{3x^2 - 2x + 3} + 9 = 0.$
22. $4x^2 - 2x - 1 = \sqrt{2x^2 - x}.$
23. $\sqrt{3 - x} + \sqrt{2 - x} = \sqrt{5 - 2x}.$
24. $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{3x - 5} - \sqrt{x + 1} - \sqrt{4x - 3} = 0.$
25. $\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - x = \sqrt{\frac{6}{x}}.$
26. $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1 - x}} = 1.$
27. $\sqrt{x + 3} = \sqrt{x^2 + 3x} = 0.$
28. $\sqrt{x^3} - 5\sqrt{x} + 6\sqrt{x} = 0.$
29. $\sqrt{\frac{2x - 5}{x - 2}} - 3\sqrt{\frac{x - 2}{2x - 5}} + 2 = 0.$
30. $\frac{\sqrt{x - 1} - \sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}} = x - 3.$
31. $\sqrt{5x^2 - 6x + 1} - \sqrt{5x^2 + 9x - 1} = 5x - 1.$

32. $\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x}}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x}}=0$ 33. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2-x}=2$
 34. $(x+a)^{\frac{1}{2}}+(x+b)^{\frac{1}{2}}+(x+c)^{\frac{1}{2}}=0$
 35. $x(x-1)(x-2)(x-3)=6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$
 36. $(x+a)^2+4(x+a)\sqrt{x}=a^2-4a\sqrt{x}$
 37. $\sqrt[3]{1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2-1}}=6$

XVI. 聯立方程式之能以二次方程解之者

一對含 x 與 y 之方程式，一為一次，一為二次
 一對聯立方程式之形式為

609

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

$$\phi(x, y) = a'x + b'y + c' = 0.$$

可解之如下例。

例. 解 $y^2 - x^2 + 2x + 2y + 4 = 0, \quad (1)$
 $2x - y - 7 = 0. \quad (2)$

從(2), $y = 2x - 7. \quad (3)$

將(3)代入(1)中, $3x^2 - 22x + 39 = 0. \quad (4)$

(解)4, $x = 13/3 \text{ 或 } 3. \quad (5)$

代入(3)中, $y = 5/3 \text{ 或 } -1. \quad (6)$

(1), (2)之解答為下列二對數值
 $x = 13/3, y = 5/3; x = 3, y = -1. \quad (7)$

因, 從 §§ 362, 371, 下列各對方程式皆相當:

(1), (2)與(4); (2); (1), (2)與(5); (3)與(6); (3)與(7).

(7)之解答, 可寫作 $13/3, 5/3; 3, -1$. 在寫成各對解答時,

必須取 x 與 y 之對應值. $\phi = 1$

(通常此一對方程式有互定解, 但設 $\phi(x, y)$ 內之一次諸 650

項, 即 $a'x + b'y$ 為 $f(x, y)$ 內三次諸項, 即 $ax^2 + bxy + cy^2$ 之因

式，而 $\phi(x, y)$ 自身並非 $f(x, y)$ 之一因式時，則祇有一有限根
 或無此種解答。又設 $\phi(x, y)$ 為 $f(x, y)$ 之一因式，則有無限
 個解答。

$$\text{例1. 解 } y^2 - x^2 + 2x + 2y + 4 = 0, \quad (1)$$

$$y - mx = 0. \quad (2)$$

$$\text{消去 } y, (m^2 - 1)x^2 + 2(m+1)x + 4 = 0. \quad (3)$$

設 $m^2 - 1 \neq 0$ ，則(3)有二有限根，而(1)，(2)有二有限解答。
 但設 $y - mx$ 為 $y^2 - x^2$ 之一因式，即 $m = \pm 1$ 時，(3)即無有限

根。

如，設 $m = 1$ ，則(3)化為 $x + 1 = 0$ ，祇有一有限根，其他一
 根為無限大，§ 638。又設 $m = -1$ ，則(3)化為 $4 = 0$ ，二根皆為無
 限，§ 638。

若(2)有 $y - x = 0$ 之形式，則(1)，(2)二聯立方程式祇有
 有限解答，他一解答為無限大。又設(2)有 $y + x = 0$ 之形式，則

(1)，(2)二聯立方程式無有限解答，二解答皆為無限大。

$$\text{例2. 解 } y^2 - x^2 + 2x + 2y = 0, \quad (1)$$

$$y + x = 0. \quad (2)$$

$$\text{消去 } y, x - x^2 + 2x - 2x = 0. \quad (3)$$

但(3)為一恆等式，而 x 之任何值皆能適合之。

故 $x = a, y = -a$ 之各對數值皆為(1)，(2)之解答。

此結果乃因 $y + x$ 為 $y^2 - x^2 + 2x + 2y$ 之一因式也。

651

當 A, B, C 為整函數時，則 $AB = 0, C = 0$ 此對方程式與

$A = 0$ 及 $B = 0, C = 0$ 相當 § 371。此原則與 § 649 可使

方程式 $f(x, y) = 0, \phi(x, y) = 0$ 祇須 $f(x, y)$ 能分解

成諸因式，而 $\phi(x, y)$ 能分解成一次諸因式。

$$x^2 + xy^2 - 5x = 0, \quad (1)$$

$$(2x - y)(x + y - 1) = 0. \quad (2)$$

此對方程式與下列四對相等

$$x = 0, \quad 2x - y = 0, \quad (3)$$

$$x = 0, \quad x + y - 1 = 0, \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 - 5 = 0, \quad 2x - y = 0, \quad (5)$$

$$x^2 + y^2 - 5 = 0, \quad x + y - 1 = 0. \quad (6)$$

解(3), (4), (5), (6)中各對, 得(1), (2)之解答為: 0, 0; 0, 1; 1, 2; -1, -2; 2, -1; -1, 2.

含 x, y 之一對整方程式, 祇當其有 § § 649, 651 中所述形 652 式之一時, 或從此對方程式誘導出一對相當之方程式而具此種形式之一者均能用二次方程式解之.

例如, 此對二次方程式 $y^2 - x + 1 = 0, y = x^2$ 不能用二次方程式解之. 因其解法, 除消去 y 外更無較簡之法, 而消去 y 後則得 $x^4 - x + 1 = 0$, 此四次方程式不能用二次方程式解之者.

上節說明下述重要定理之真實性:

653

一對整方程式 $f(x, y) = 0, \phi(x, y) = 0$, 其次數各為 m 與 n 者, 通常有 mn 個解答.

例如, 此對 $x^3 + xy^2 - 5x = 0, (2x - y)(x + y - 1) = 0$ 有 3, 2, 或 6 個解答, § 651. 又參閱 § 891.

應附述者, 設 $f(x, y)$ 與 $\phi(x, y)$ 中之最高次諸項, 而非 $f(x, y)$ 與 $\phi(x, y)$ 之自身, 有一公因式, 則其有限解答之數較 mn 為少. 例如, 二式中最高次諸項每有一個一次公因式, 則至少有一個無限大解答; 若每一此種公因式又為其次高次諸項之公因式, 則至少有二無限大解答; 餘應推. 設 $f(x, y)$ 與 $\phi(x, y)$ 之自身有一公因式, 則其解答之數無限.

例如, 此對 $x^3 - xy^2 + xy - y^2 - y = 0(1), x^2 - y^2 - 1 = 0(2)$ 其有限解答不能多於三; 因解答之數共有 3, 2 或 6 個, 而至少其中之一為無限大, 蓋(1)與(2)中最高次諸項, 即 $x^3 - xy^2$ 與 $x^2 - y^2$ 有公因式 $x + y$ 也. 又因(1)與(2)中最高次諸項及次高次諸項, 即 $x^3 - xy^2, x^2 - y^2$ 與 $xy - y^2, 0(x - y)$ 有公因式 $x - y$. 故至少又有二解為無限大.

習題 XLV

解下列各對方程式。

1. $\begin{cases} 7x^2 - 6xy = 8, \\ 2x - 3y = 5, \end{cases}$ 2. $\begin{cases} xy = 1, \\ 3x - 5y = 2. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x^2 + x = 4y^2, \\ 3x + 6y = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x^2 - 3xy - y^2 - 4x - 8y + 3 = 0, \\ 3x - y - 8 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + 5y^2 - 8x - 7y = 0, \\ x + 3y = 0. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 0, \\ 7x - 6y - 4 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 - 1 = 0, \\ x + y = 0, \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x + 3y = 37, \\ 1/x + 1/y = 14/45. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 1/y - 3/x = 1, \\ 7/xy - 1/y^2 = 12. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x^2 + xy + 2 = 0, \\ (3x + y)(2x + y - 1) = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8 = 0, \\ (x + 1)^2 = (y - 1)^2. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 + y = 0, \\ (x - 2y)(x + y - 3) = 0. \end{cases}$

13. 決定 m 之值使此對方程式 $y^2 + 4x + 4 = 0$, $y = mx$ 之二個解答相等。

14. 決定 m 與 c 之值使下列二方程式之根皆為無限大

$$x^2 + xy - 2y^2 + x = 0, y = mx + c.$$

15. 用 § 650, 例 2 之法, 證 $2x - y + 4$ 為 $2x^2 + xy - y^2 + 10x + y + 12$ 之因式。

16. 試證此對方程式 $xy = 1$, $xy + x + y = 0$ 無兩個以上之有限解答, 又此對方程式 $x^2y + xy = 1$, $x^2y + y^2 = 2$ 無四個以上之有限解答。

可用分解因式法, 加法, 或減法

解得之聯立方程式

655 當二方程式對於 x, y 之一對函數為一次時。可先用 § § 374 - 376 之方法解此對函數。

例 1. 解 $2x^2 - 3y^2 = -58, \quad (1)$

$3x^2 + y^2 = 111. \quad (2)$

解之以求 x^2, y^2 , 得 $x^2 = 25, y^2 = 36$,

因此, $x = \pm 5, y = \pm 6$.

從§367-372. (1), (2)相當於下列對 $x=5, y=6; x=-5, y=6; x=5, y=-6; x=-5, y=-6$.

例2. 解下列各對:

$$1. \begin{cases} ax^2 + by^2 = a, \\ bx^2 - ay^2 = b, \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 3x^2 - 17y^2 = 2, \\ 5x^2 + 31y^2 = 120. \end{cases}$$

當方程式之一能分解因式時, 當所論之方程式, 其形式為 650

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$$

時, 則常屬可能, 總之, 當其可化為

$$au^2 + bu + c = 0$$

之形式時即可能以其中 u 表 x, y 之函數.

例1. 解 $x^2 + y^2 + x - 11y - 2 = 0. \quad (1)$

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = 0. \quad (2)$$

分解(2); 以 y 表 x ,

$$x = 2y, \quad (3)$$

或

$$x = 3y. \quad (4)$$

解(1), (3)與(1), (4), 得(1), (2)之各組解答, 即 $4, 2; -2/5, -1/5; 3, 1; -3/5, -1/5$.

例2. 解 $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 3x + 3y - 2 = 0, \quad (1)$

$$3x^2 - 32y^2 + 5 = 0. \quad (2)$$

將(1)寫成 $-2(x+y)^2 + 3(x+y) - 2 = 0.$

解之, $x+y = 1/2, \quad (3)$

或

$$x+y = -2. \quad (4)$$

解(2), (3)與(2), (4), 得(1), (2)之各組解答, 即 $1, -1/2; 3/29, 23/58; -3, 1; -41/29, -17/29$.

例3. 解下列各對:

$$1. \begin{cases} x^2 + xy - 6 = 0, \\ x^2 - 5x + 6 = 0, \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \frac{x+y}{1-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{26}{6}, \\ y^2 - 2x^2 = 1. \end{cases}$$

667 當二已知方程式可用加法或減法結合成一能分解之方程式者。當二方程式皆為 $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ 之形式時，則常屬可能。

例1. 解 $6x^2 - xy - 2y^2 = 56, \quad (1)$

$$5x^2 - xy - y^2 = 49. \quad (2)$$

結合(1)與(2)以消去其常數項。

(1)乘以7, $42x^2 - 7xy - 14y^2 = 392. \quad (3)$

(2)乘以8, $40x^2 - 8xy - 8y^2 = 392. \quad (4)$

從(3)減(4), $2x^2 + xy - 6y^2 = 0. \quad (5)$

解(5)以求 x , $x = 3y/2, \quad (6)$

或 $x = -2y. \quad (7)$

解(2), (6) 與 (2), (7) 而得 (1), (2) 之各對解答, 即 $\pm 3\sqrt{35}/10, \pm \sqrt{35}/5; \pm 2\sqrt{21}/3, \mp \sqrt{21}/3.$

總之, 當已知方程式為二次而可用加法或減法以消去其(1)所含諸二次項; (2)所含二次項以外之諸項; (3)所有含 x (或 y) 諸項; 或(4)所有不含 x (或 y) 諸項者, 常得一能分解之方程式。

例2. 解 $2x^2 + 4xy - 2x - y + 2 = 0, \quad (1)$

$$3x^2 + 6xy - x + 3y = 0. \quad (2)$$

此處以3乘(1), 又以2乘(2)而相減, 能消去其所有諸二次項。

如是, 得

$$4x + 9y - 6 = 0. \quad (3)$$

解(2), (3)得 $-3, 2; -2, 14/9$; 而此為(1), (2)之有限解答,

參閱§654.

例3. 解 $x^2 + 3xy + 2y^2 + 4x + 3y - 1 = 0, \quad (1)$

$$2x^2 - 6xy + y^2 + 8x + 2y - 3 = 0. \quad (2)$$

此處以2乘(1)而減去(2)即能消去其所有含 x 諸項, 如是, 得

$$3y^2 + 4y + 1 = 0, \quad (3)$$

解(1), (3)即得(1), (2)所有之四個解答, 即

$$1/8, -1/8; -16/8, -1/4; (-7 \pm \sqrt{57})/2, -1.$$

一更以下列甲題之。

例1. 解 $x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x = 0$, (1)

$xy + y^2 + 3y + 1 = 0$. (2)

以2乘(2)而與(1)相加,得

$(x + 2y)^2 + 3(x + 2y) + 2 = 0$ (3)

解(3), $x + 2y = -1$ (4)

或 $x + 2y = -2$ (5)

解(2), (4) 與 (2), (5), 即得 (1), (2) 所有之解答, 即

$3 \pm 2\sqrt{2}, 1 \mp \sqrt{2}; -3 \pm \sqrt{5}, (1 \mp \sqrt{5})/2$.

例5 解下列各對方程式:

1. $\begin{cases} 2x^2 + xy + 5y = 0, \\ x^2 + y^2 + 10y = 0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 13 = 0, \\ xy + y - x = -1. \end{cases}$

當消去 x 或 y 而得之方程式能分解者, 從任一對二次方程 (5) 式皆可用下法以消去 x 或 y , 而最後之方程式當為四次, 不能以二次方程式解之, 但若能分解成一次或二次之因式, 則能解之而得已知二方程之解答。

例1. 解 $10x^2 + 5y^2 - 27x - 4y + 5 = 0$, (1)

$x^2 + y^2 - 3x - y = 0$. (2)

先將(2)乘以5而自(1)減之, 則消去 y^2 而得

$0 = 5x^2 - 12x + y + 5 = 0$, 或 $y = -5x^2 + 12x - 5$. (3)

將(3)代入(2)中, $5x^2 - 24x^2 + 40x^2 - 27x + 6 = 0$. (4)

用§451, 分解之, $(x-1)(x-2)(5x^2 - 9x + 3) = 0$. (5)

解(5), §643, $x = 1, 2, (9 \pm \sqrt{21})/10$. (6)

將(6)代入(3)中, $x = 2, -1, (7 \pm 3\sqrt{21})/10$. (7)

(6); (7) 之諸對應值皆為(1), (2) 之解答。

例2. 解 $x^2 - 3xy - 2y^2 + 3x - 3y = 0$,

$2x^2 + xy - y^2 + x - 2y + 3 = 0$.

習題 XLVI

解下列各對方程：

1. {x^2 + 8y^2 = 31, 7x^2 - 2y^2 = 23

2. {36x^2 + 1/y^2 = 18, 1/y^2 - 4/x^2 = 8

3. {x^2 + xy + y^2 = 1, y^2 - y - 2 = 0

5. {y^2 - x^2 - 5 = 0, 4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y = 3

6. {x^2 + 5xy + 2y^2 + 2x + 3y + 1 = 0, 2x^2 + 15xy - 7x + 8y + 4 = 0

7. {x^2 - 15xy - 3y^2 + 2x + 9y = 98, 6xy + y^2 - 3y = 21

8. {2x^2 + 3xy - 4y^2 = 25, 15x^2 + 24xy - 31y^2 = 20

10. {x^2 - 3xy + 3y^2 = 14, 7x^2 - 10xy + 4y^2 = 42x^2y^2

11. {x^2 + xy + y^2 = 37, x^2 - xy + y^2 = 14

12. {x^2 - xy + y^2 = 21(x-y), xy = 20

可用除法解出之各對方程式

(a) 解一對方程式，有時以用乘或除結合之為便；但切勿引入外來解答，亦勿失去其原有解答為要(參閱第 62, 342)。

設已知二方程式之形為 AB = CD (1) 及 B = D (2)；其中 A, B, C, D 表 x, y 之整函數，則可以 D 代 B 於 (1) 內；如是，得二方程式 AD = CD, B = D；此顯然與兩對方程式 A = C, B = D 及 D = 0, B = 0 相當。以 (2) 之兩邊除 (1) 之兩邊得二方程 A = C, B = D；但解方程式 A = C, B = D，必失去 (1), (2) 之若干解答，除與

而 $S=0, D=0$ 的一對方程式無解。

例1. 解 $x^2 + y^2 = 21, (1)$

$x^2 + xy + y^2 = 7, (2)$

以(2)除(1), $x^2 - 2y + y^2 = 3, (3)$

解(2), (3)而得(1), (2)之所有有限解答, 即 $2; 1; -2; 1; 1, -2$. 參閱 § 651.

例2. 解 $x^2 + y^2 = 3(x+1)y, (1)$

$x^2 + xy + y^2 = x + 1, (2)$

以(2)除(1), $x^2 + xy + y^2 = x + 1, (3)$

(1), (3)更有有限解答與其(前)及(後)同, $x+1$

(5)二對方程式所有者相同. 而(1), (3)與(4), (5)之解答為

$1; -2/3, 1/3; -1, (1 \pm i\sqrt{3})/2$.

例3. 解 $x^2 + y^2 = x, (1)$

$x^2 + y^2 = 6xy + 6y^2, (2)$

以(2)除(1), $x = (x+y)/(x-y) = -x/6y. (3)$

消去分母, $x^2 + 5xy + 6y^2 = 0. (4)$

(2), (4)一對方程式之解答有四對 $0, 0; 0, 0; 4, -2; 2/4, -3/4$.

從(1), (2)導得(4), 其步驟當 x, y 之值為 $4, -2$ 或 $2/4, -3/4$

時為可逆, 而當其值為 $0, 0$ 時則否. 故此種測定經證明 $4, -2$ 與

$2/4, -3/4$ 為(1), (2)之解答, § 62.

用觀察法, 顯然 $0, 0$ 亦為(1), (2)之一解答; 但祇能計算一次,

不能如在(3), (4)之情形中計算二次. 故(1), (2)祇有三對有限

解答, § 64. 亦可證明之: 以 $y = tx$ 代入(1), (2)中得(1')

$x^2 + t^2x^2 = x, (1')$

$x^2 + t^2x^2 = 6tx^2 + 6t^2x^2, (2')$

由(1')得 $x = 1/(1+t^2)$, 代入(2')得 $1 = 6t + 6t^2$

$1 = 6t + 6t^2$ 之解為 $t = 2$ 或 $t = 1/4$. 故(1), (2)之解答為

$4, -2$ 或 $2/4, -3/4$. 而 $0, 0$ 亦為(1), (2)之解答.

習題 XLVII

1. $x^2 + y^2 = 63, (1)$

$x^2 + y^2 = 98, (2)$

2. $x^2 + y^2 = 3, (1)$

$x^2 + y^2 = 70, (2)$

3. $x^2 + xy + y^2 = 49, (1)$

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 6x, (2)$

4. $x^2 + y^2 = x + 1, (1)$

$x^2 - y^2 = -5y, (2)$

以上各題之解答均在(1)或(2)中

對稱方程式組

661 所謂對稱方程式組者，即 x, y 之一對方程式內設 x, y 互易位
 保持不變者。如下列 (a), (b) 即為對稱方程式組。

例如下列 (a) 及 (b) 為對稱方程式組：

$$(a) \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 3x + 3y = 0, \\ x^2y^2 + xy + 1 = 0. \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x^2 = 2x + 3y, \\ y^2 = 3x + 2y. \end{cases}$$

(對稱方程式組可分三類) 其類 (a) 者 x, y 互易後，各方程式
 不變；類似 (b) 者 x, y 互易後二方程式易位。

662 (1) 第一類對稱方程式組，其最簡單者為 $x + y = a, xy = b$ ；
 (2) 照 §640 之解法，而手例為便捷對稱之方法。

例·解

$$\begin{aligned} x + y &= 5, & (1) \\ xy &= 6, & (2) \\ \text{本方(1),} & \quad x^2 + 2xy + y^2 = 25, & (3) \\ \text{以4乘(2),} & \quad 4xy = 24, & (4) \\ \text{(3)-(4),} & \quad x^2 - 2xy + y^2 = 1, & (5) \\ \text{故} & \quad x - y = 1, & (6) \\ \text{或} & \quad x - y = -1, & (7) \end{aligned}$$

從 (1), (6), $x = 3, y = 2$; 從 (1), (7), $x = 2, y = 3$.

663 注意，更爲繁複之方程式組，則可變各方程式爲含有 $x + y$
 及 xy 之方程式 §637，然後再解之以求其函數；或使 $x = u + v, y = u - v$
 代入已知方程式內，以解 u, v 之值。因從 $x = u + v, y = u - v$
 得 $u = (x + y)/2, v = (x - y)/2$ ，故第二法與解 $x + y$ 及 xy 之方

程式同樣重要。

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2x^2 + 5xy + 2y^2 + x + y + 1 = 0, \\ (2) \quad & x^2 + 4xy + y^2 + 12x + 12y + 20 = 0. \end{aligned}$$

於 (1) 及 (2) 內以 $(x + y)^2 - 2xy$ 代 $x^2 + y^2$

集項, $2(x+y)^2 + xy + (x+y) + 1 = 0,$ (3)

$(x+y)^2 + 2xy + 12(x+y) + 10 = 0.$ (4)

消去 $xy,$ $3(x+y)^2 - 10(x+y) - 8 = 0.$ (5)

解之, 得 $x+y=4,$ (6)

或 $x+y=-2/3.$ (7)

故從(3), $xy=-37,$ (8)

或 $xy=-11/9.$ (9)

解(6),(8)及(7),(9)二對, 求 $x, y,$ 得

$x, y = 2 \pm \sqrt{41}, 2 \mp \sqrt{41}; (-1 \pm 2\sqrt{3})/3, (-1 \mp 2\sqrt{3})/3.$

例2. 解 $x^2 + y^2 = 97,$ (1)

$x+y=5.$ (2)

設 $x=u+v, y=u-v.$

得 $(u+v)^2 + (u-v)^2 = 97,$ (3)

及 $2u=5.$ (4)

消去 $u,$ $16v^2 + 600v^2 - 151 = 0.$ (5)

解得 $v = \pm 1/2$ 或 $\pm i\sqrt{151}/2.$ (6)

以 $u=5/2$ (4)及 v 之四值(6)代入方程式 $x=u+v, y=u-v$ 得

$x, y = 2, 3; 3, 2; (5 \pm i\sqrt{151})/2, (5 \mp i\sqrt{151})/2.$

設 $(x=a, y=b)$ 為對稱方程式之一解答, 則 $x=\beta, y=a$ 顯然為其共解答, 除非 $a=\beta,$ 則此二解答不同; 但 $x+y$ 及 xy 由 $x=a, y=b,$ 及 $x=\beta, y=a$ 所得值相同, $x-y$ 之對稱值即 $a-\beta$ 及 $\beta-a$ 僅符號 \pm 之不同.

故從對稱方程式導出之 xy 或 $x+y$ 之解答數必少於 x 或 y 之解答數, 亦即如例1, 用對稱式所得 xy 或 $x+y$ 之方程式之次數小於從同一對方程式可化得 x 或 y 之方程式之次數. 若 a 為 $x-y$ 之方程式之一根, 則 $-a$ 亦必為其他一根, 故此方程式僅含 $x-y$ 之偶次幕如例2, 或僅奇次幕而無常數項.

634 注意：上法用於 x 及 $-y$ 或其他某對 x, y 函數之對稱方程式組。故 $x^2+y^2=a, x-y=b$ 可寫 $x^2+(-y)^2=a, x+(-y)=b$ 。

635 第二類對稱方程式組。此類方程式組有時可如下法解之。

例。解 $x^2 = 7x + 3y, \tag{1}$

$y^2 = 7y + 3x. \tag{2}$

(1); (2)相加, $x^2 + y^2 = 10(x + y). \tag{3}$

(1)減(2); $x^2 - y^2 = 4(x - y). \tag{4}$

從§341. (3)相當於下列二方程式：

$x + y = 0, \tag{5}$

$x^2 - 10y + y^2 = 10. \tag{6}$

(同理(4)相當於下列二方程式

$x - y = 0, \tag{7}$

(8) $x^2 + 10y + y^2 = 4. \tag{8}$

(1) 解(5), (7); (5), (8); (6), (7); (6), (8)得 $0, 0; 2, -2; -2, 2;$
 $(\pm\sqrt{10}, \pm\sqrt{10}); (1 \pm \sqrt{13})/2, (1 \mp \sqrt{13})/2; (-1 \pm \sqrt{16})/2, (-1 \mp \sqrt{16})/2.$

(2) 2, 2; -2, -2.

習題 XLVIII

解下列方程式組：

1. $\begin{cases} x+y=5, \\ xy+36=0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2+y^2=200, \\ x^2+y=12. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x^2+y^2=293, \\ xy=34. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x^2+y^2=85, \\ x+y=9. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x^2+y^2=513, \\ x+y=9. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x^2+y^2=168, \\ x+y=9. \end{cases}$
7. $\begin{cases} 27x^2+64y^2=65, \\ 3x+4y=5. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x^2+y^2=82, \\ x-y=2. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x^2+y^2=420, \\ x+y=2. \end{cases}$
10. $\begin{cases} x+y=1/2, \\ 56\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+113=0. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} xy+x+y-19=0, \\ x^2y+xy^2+20=0. \end{cases}$
12. $\begin{cases} x^2+y^2-(x^2+y^2)=72, \\ x^2+x^2y^2+y^2=19. \end{cases}$ 13. $\begin{cases} x^2y+xy^2=30, \\ 1/(x+1)+y=3/10. \end{cases}$
24. $\begin{cases} x^2+3y+y^2+2x+2y=8, \\ 2x^2+2y^2+3x+3y=14. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x^2=5y, \\ y^2=5x. \end{cases}$

含三個以上未知數之方程式

含三未知數之三個方程式當其一為二次方程式及他兩各為一次方程式時，可用二次方程求解之；又若能化其為一個或數個相當之方程式組，使其含一二次方程式，其他均為一次方程式時，亦可由此求解之。含四未知數之四個方程式，亦可用此法，類推。

設 A, B, C 為 x, y, z 之 m, n, p 次之整函數，且任何二者之中，均無公因式，則方程式 $A=0, B=0, C=0$ 有 mnp 個解答。惟解答中可有無限大者。

例 1. 解

$$z^2 - xy - 7 = 0, \tag{1}$$

$$x + y + z = 0, \tag{2}$$

$$3x - 2y + 2z + 2 = 0. \tag{3}$$

解 (2), (3) 使 x 與 y 用 z 表之，

$$x = -(4z + 2)/5, \tag{4}$$

$$y = (-z + 2)/5. \tag{5}$$

代入 (1)，并化簡之，

$$7z^2 + 2z - 57 = 0. \tag{6}$$

解 (6)，

$$z = 3 \text{ 或 } -7.$$

故從 (4), (5)，

$$\begin{cases} x = -2, y = 2, z = 3 \\ x = -10, y = 8, z = -7 \end{cases}$$

例 2. 解

$$xy = 6, \tag{1}$$

$$y + z = 12, \tag{2}$$

$$zx = 8. \tag{3}$$

以 (1) 除 (2)，

$$z/x = 2 \text{ 或 } z = 2x. \tag{4}$$

(4) 代入 (3)，

$$x^2 = 4, \text{ 故 } x = \pm 2. \tag{5}$$

從 (5), (4), (1)，得 $x, y, z = 2, 3, 4; -2, -3, -4.$

習題 XIX

解下列各組方程式：

- $$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 19 \\ y + z = 2 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x(0 + z) = 12 \\ y(z + x) = 6 \\ z(2 + y) = 10 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} (y + b)(z + c) = a^2 \\ (z + c)(x + a) = b^2 \\ (x + a)(y + b) = c^2 \end{cases}$$

題 習 I

用本章任何方法，解以下各組方程式：

$$1. \begin{cases} 7x^2 - 6xy = 8, \\ 2x - 3y = 5. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x - y = a, \\ xy = (b^2 - a^2)/4. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} = a^2 + b^2, \\ x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{3}{x} = 1, \\ \frac{7}{xy} - \frac{1}{y^2} = 12. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x + y = a + b, \\ \frac{a}{x+b} + \frac{b}{y+a} = 1. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1001}{125}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{11}{5}. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 5, \\ \frac{b}{xy} = 2. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{17}{4}xy, \\ x - y = \frac{3}{4}xy. \end{cases}$$

$$(10. a(x+y) = b(x-y) = xy. \quad 11. 40xy = 21(x^2 - y^2) = 210(x+y)$$

$$(12. \begin{cases} 4x^2 - 25y^2 = 0, \\ 2x^2 - 10y^2 - 3y = 4. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x^2 + 3xy - 9y^2 = 9, \\ x^2 - 13xy + 2y^2 = -9. \end{cases}$$

$$(14. \begin{cases} x^2 - 7y^2 - 29 = 0, \\ x^2 - 6xy + 9y^2 - 2x + 6y = 3. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{65}{28}, \\ 2(x^2 + y^2) + (x-y) = 4. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x^2y = a, \\ xy^2 = b. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x^2y + xy^2 = a, \\ x^2y - xy^2 = b. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x = a(x^2 + y^2), \\ y = b(x^2 + y^2). \end{cases}$$

$$(19. \begin{cases} (x+y)/(x-y) = 5/3, \\ (2x+3y)(3x-2y) = 110a^2. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 3(x^3 - y^3) = 13xy, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

$$(21. \begin{cases} x^4 + y^4 = a^4, \\ x + y = a. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 21(x+y) = 10xy, \\ x+y+x^2+y^2 = 63. \end{cases}$$

$$(23. x^2 + y^2 = xy = x + y.$$

$$24. x^2 + xy + y^2 = 3a^2 = x^3 - y^3.$$

$$25. \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21, \\ x + \sqrt{xy+y} = 7, \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 4x^2 - 3x^3 = 12(x-y), \\ xy = 0. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x^2 + y^2 = x + y + 20, \\ xy + 10 = 2(x+y). \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x^2 + 4x - 3y = 0, \\ y^2 + 10x - 9y = 0. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 28(x^2 + y^2) = 61(x^2 + y^2), \\ x + y = 2. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} xy - x/y = a, \\ xy - y/x = 1/a. \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 19, \\ x+y=2. \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} x^2+y=8/3, \\ x+y^2=34/9. \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} y^2-xy-1z=3, \\ x+4y+z=14, \\ x-y+2z=0. \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} x+y+z+u=0, \\ 3x+z+u=0, \\ 3y+2z=0, \\ x^2+y^2+z^2=5 \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} (y+z)(x+y+z)=10, \\ (z+x)(x+y+z)=20, \\ (x+y)(x+y+z)=20. \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ xy+yz+zx=1, \\ 2x+y-2z=-3. \end{cases}$$

習 題 III

1. 二數之立方差為 218, 其差之立方為 8, 求各數.
2. 二數和之平方較其積大 63, 又其立方之差為 189, 問二數各幾何?
3. 一分數, 分母分子之和為 11; 又此分數與分子及分母各較原分數大 3 與 4 之另一分數相乘, 其積為 $2/3$, 求此分數.
4. 分 37 為三部份, 其積為 1440, 又其中二者之積較第三者之三倍多 12; 求此三部份.
5. 長方形之對角線長 13 尺, 若每邊增 2 尺, 則面積將增加 38 方尺, 每邊幾尺?
6. 直角三角形之周圍為 36 寸, 又面積為 54 方寸, 各邊長度若干?
7. 直角三角形之弦較其他二邊, 一長 3 寸, 一長 24 寸, 求各邊之長.
8. 由下列之條件, 求一室之長寬: 此室地板之面積為 274 方尺之長方形, 又其二面牆之面積各為 126 及 144 方尺.
9. 一長方形周圍鑲以寬 5 寸之邊, 長方形面積為 168 方寸, 而所鑲面積為 360 方寸, 求長方形之長與寬.

10. A 以 135 元購煤較 B 多得 3 噸, 又 A 購 1 噸較 B 購 5 噸少付 7 元, 求各人每噸購價若干?

11. 本金若干在某種利率下按單利計算, 經一年後, 本利和為 1248 元, 若本金增 107 元, 利率增 $1\frac{1}{2}$ 倍, 2 年後之本利和為 1456 元, 問本金若干? 利率若干?

12. 某人遺 61,000 元分給子孫七人, 其子共得全額之 $\frac{1}{3}$, 每子所得較孫每人多 2,000 元, 問子孫各幾人? 每人所得若干?

13. 某人平常速率能使順流划行 15 里, 較其回程少 5 小時, 若此人倍其速率順流划行較回程僅少 1 小時, 問在靜水中之划行速度, 及水流速度.

14. A, B, C 三人合力工作一小時二十分告成, 若 C 單獨作之則需 A 所須時間之二倍, 而較 B 多需 2 小時, 問各人獨作各需幾時?

15. A, B 二物沿周長 20 尺之圓周於同一方向作等速運動, A 轉一周之時間較 B 少二秒, 又 A 與 B 每分鐘相遇一次, 求二物之速率若干?

16. 二直線正交於 O 點, 在其上二點 A, B 向 O 作等速之運動; A 現距 O 點 23 吋, B 距 9 吋, 2 秒後 A, B 相距 13 吋, 又 3 秒相距 17 吋, 問 A 與 B 速率若干?

17. A, B, C 三人同時起行某路程, A 每時行 4 里, 且可較 B 先 2 小時行完, B 較 C 每時多行 1 里, 可較 C 先 3 小時行完, 求此路程之距離.

18. A, B 二信差各從 P, Q 同時相向起行, 當相遇時 A 較 B 多行 12 里, 相遇後 A 仍用前速向 Q 進行, 4 小時後到達, 同樣 B 又經 7 小時後到 P, 求 P, Q 間距離.

含 x, y 二次方程式之圖形

各種圖形之例，任何 x, y 之二次方程式之圖形，可用下法 667

求得。

例 1. 求 $y^2 = 4x$ 之圖形。(1)

解： $y = \pm 2\sqrt{x}$ (2)

從(2)知 x 為負數時， y 為虛數；為 0 時， y 亦為 0； x 為正數時， y 有絕對值相同而符號相反之二實值，故原式之圖形完全在 y -軸之右，經過原點而與 x -軸對稱。

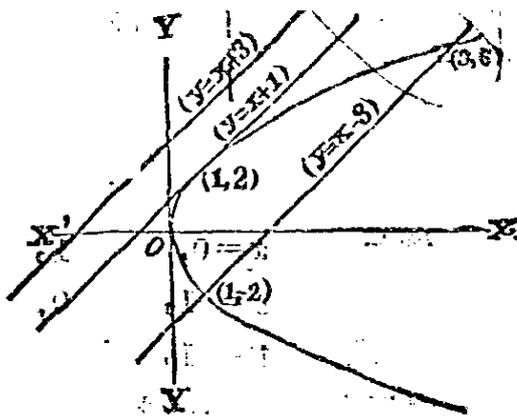
當 $x=0, 1/4, 1/2, 1, 2, 3, 4 \dots$
得 $y=0, \pm 1, \pm \sqrt{2}, \pm 2, \pm 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{3}, \pm 4 \dots$

從 $(0, 0), (\frac{1}{4}, 1), (\frac{1}{4}, -1), \dots$ 諸點，可作一曲線即如圖形所示之一部分。參看 § 389 此

曲線與 y -軸相切。

此曲線名為拋物線，含一‘無窮支’向右伸展至無限。

例 2. $y^2 = 4x$ (1) 之圖形與 $y = x - 3$ (2), $y = x + 1$ (3), $y = x + 3$ (4) 相遇於何點？



1. (1), (2) 之解答為 $1, 9, 2, 9, 6$. 故由 § 386, 如前圖所示 (1), (2) 之圖形交於 $(1, 2), (9, 6)$ 二點。

(1), (3) 之兩解答相等，即 $1, 2; 1, 2$ 是也。故 (3) 之圖形遇 (1) 之圖形於二重合點 $(1, 2)$ 。意即如圖示，(3) 與 (1) 之兩圖形切於 $(1, 2)$ 。

3. (1), (4) 之解答為虛數，即 $-1 \pm 2\sqrt{2}i, 2 \pm 2\sqrt{2}i$ 故如圖所示，(1), (4) 圖形不相交。

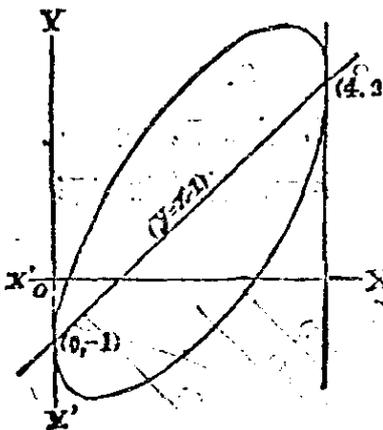
例 3. 求下面圖形

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 6x + 2y + 1 = 0. \quad (1)$$

解之得 $y = x - 1 \pm \sqrt{4x - x^2}. \quad (2)$

y 之值，從(2)所示，若根式 $4x - x^2$ 即 $x(4-x)$ 為正數(或0)，則 y 為實值；即 x 在0與4之間(或為0或4)故(1)之圖形在 $x=0, x=4$ 二線之間。

當 $x=0$ 與 $x=4$ ，則 y 之值相等。即當 $x=0, y$ 為 $-1, -1$ ；當 $x=4, y$ 為 $3, 3$ 。此意即(1)的圖與直線 $x=0$ 相切於 $(0, -1)$ 與直線



$x=4$ 切於 $(4, 3)$ 參看例2, 2, 因當 $4x - x^2$ 為零時(2)內 y 之二值相同, 如 $y = x - 1$ 所示。

以 x 在0與4間之任一值代入(2)可得 y 之二個實值。即 $x-1$ 加或減 $\sqrt{4x-x^2}$ 。故對此中 x 每一值在(1)的圖上均有二點。各點可先畫 $y = x - 1$ 之直線, 然後將直線上各點之縱坐標增或減 $\sqrt{4x-x^2}$ 即得。

例如 $x=0, 1, 2, 3, 4,$
 得直線之 $y=-1, 0, 1, 2, 3,$
 (1)圖形之 $y=-1, \pm\sqrt{3}, 1\pm 2, 2\pm\sqrt{3}, 3,$

一圖形成橢圓式, 謂之橢圓。

解(1)求 x 。且應用 § 641 之方法, 可知此曲線之最高點及最低點為 $(2+\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2})$ 及 $(2-\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2})$ 。

例 4. 求 $y^2 - x^2 + 2x + 3y + 4 = 0$ 之圖形。 (1)

解 并析其根式為因式之積。

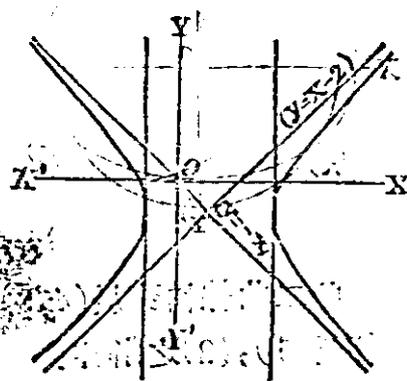
$$x = -1 \pm \sqrt{(x+1)(x-3)}. \quad (2)$$

當 $x = -1$ 或 $x = 3$, 此根式 $(x+1)(x-3)$ 為零且(2)內。

爲-1, -1. 意即(1)之圖形切 $x = -1$ 之直線於 $(-1, -1)$ 點, 切 $x = 3$ 之直線於 $(3, -1)$ 點. $y = -1$ 之直線爲過二切點之直線.

當 $x < -1$ 或 $x > 3$ 時, 根式中 $(x+1)(x-3)$ 爲正數. 對於此值中之任何一值 y 皆有不同之二值, 亦即(1)圖形內有二點. 求此諸點, 可畫 $y = -1$ 之直線, 然後以 $\sqrt{(x+1)(x-3)}$ 之值相減其不變符縱坐標-1也.

故(1)之圖形含二無窮支, 其一與直線 $x = -1$ 相切, 而向左方無限伸張, 其另一與直線 $x = 3$ 相切, 而向右方無限伸張, 如附圖所示.



此曲線稱爲雙曲線.

有二直線稱謂漸近線者雙曲線

之無窮支逐漸與之接近, 稱謂在無窮遠處相切. 此二直線爲 $y = x - 2$ 及 $y = -x$ 兩方程之圖形, 吾人求得之如下, 比較 § 650, 例1.

由(1)及方程式 $y = mx + c$ (3)

消去 y , 得 $(m^2 - 1)x^2 + 2(mc + m^2)x + (c^2 + 2c + 4) = 0$ (4)

欲(4)之二根皆爲無限大, 祇須 § 638,

$$m^2 - 1 = 0 \text{ 及 } mc + m + 1 = 0,$$

即 $m = 1, c = -2$, 或 $m = -1, c = 0$.

故欲(1), (3)解答皆爲無限大, 祇須(3)爲下面任何一式

$$y = x - 2 \quad (3') \quad \text{或} \quad y = -x \quad (3'')$$

故(3')及(3'')之圖形, 各與(1)之圖形在無窮遠相遇於二重合點.

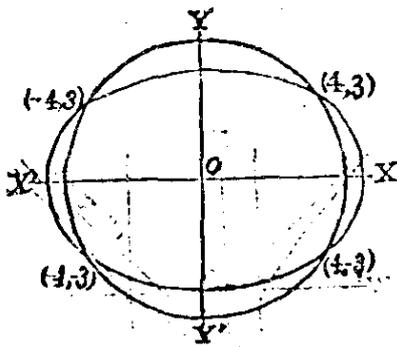
例 5. 求 $y^2 - 4xy + 3x^2 + 6x - 2y = 0$ 之圖形. (1)

解 y , 得 $y = 2x + 1 \pm \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ (2)

即 $y = 3x + 1$ 及 $y = x + 2$.

故(1)之圖形由 $y = 3x + 1$ 及 $y = x + 2$ 二直線組成. 除根數爲1, 即 $x - 1 = 0$ 時外, 此方程式常可決定二相異實數之 y , 惟當 $x - 1 = 0$ 時,

則 y 有二相等之值, $3, 3$; 故直線 $x-1=0$ 與 (1) 之圖形在重合點 $(1, 3)$ 相遇二次. 惟此若作二者在 $(1, 3)$ 相切之解釋, 當為不可. 蓋其實實為組成 (1) 之圖形之 $y=3x$ 及 $y=x^2+2$, 與直線 $x-1=0$ 之二交點相重合也.



例 6. 求下列二方程式之圖形及交點:

$$x^2 + y^2 = 25, \quad (1)$$

$$x^2/16 + y^2/9 = 2. \quad (2)$$

(1) 之圖形為圓, 其中心為原點, O , 半徑為 5. (2) 之圖形為橢圓.

此二曲線相交於 $(4, 3), (-4, 3), (-4, -3), (4, -3)$ 四點, 此諸點即為 (1), (2) 之解答.

例 7. 求下列二方程式之圖形及其交點:

$$xy - 3y - 2 = 0. \quad (1)$$

$$xy + 2y + 3 = 0. \quad (2)$$

從 (1) 得 $y = 2/(x-3); \quad (3)$

對 x 每一實值, y 亦有一實值, 故圖形上即有一點與之對應.

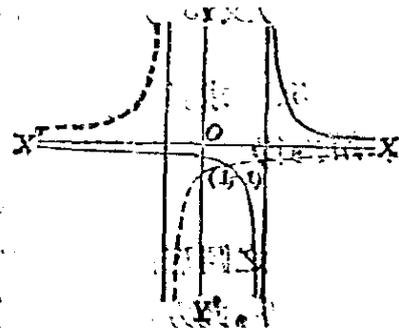
當 $x = -\infty, -1, 0, 1, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4, \infty,$
 $y = 0, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -1, -2, -8, \pm\infty, 8, 2, 0$

查諸解答, 得以實線表二無窮支之雙曲線, 其漸近線為 $y=0$ (從例 1 求得), 及 $x-3=0$ (因當 $x=3$ 時, $y=\infty$).

仿此, (2) 之圖形為一雙曲線如虛線所示而有 $y=0$ 與 $x+2=0$ 為漸近線.

方程式 (1) (2) 祇有 $x=1, y=-1$ 一個解答, 其餘三解為無限大, § 654.

(1), (2) 二圖形之雙曲線, 相交於



(1, -1), 但因其有公共之漸近線 $y=0$, 故認二者在 $(\infty, 0)$ 相交二次, 又因其漸近線 $x-3=0$, 及 $x+2=0$ 互相平行, 故認二者在 $(0, \infty)$ 相交一次。

二次方程式圖形通論。從前例所得之結果, 吾人可有下列 668 結論。

設任何二次方程式有實係數者, 如

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0. \quad (1)$$

若 b 不等於零, 而解 y 時, 得

$$by = -(hx + f) \pm \sqrt{R}, \quad (2)$$

其間 $R = (h^2 - ab)x^2 + 2(hf - bg)x + (f^2 - bc)$.

x 每有一根數 R 為正之值, y 即可由 (2) 而得二個實值 對於此二值, 圖形上有二點與之對應, 可先引直線

$$by = -(hx + f)$$

然後以 \sqrt{R}/b 之值按所設 x 之值增減其縱坐標, 參考 § 667, 例 1, 3, 4.

圖形之形式視 R 之因式之性質而定。

1. 當 $(hf - bg)^2 - (h^2 - ab)(f^2 - bc) = 0$ 時。

在此情形中根數 R 為一完全平方 § 635, 而 (1) 之左邊可分解為二一次因式 § 635, 例 3. 若因式有實係數 (1) 之圖形為二直線. 參看 § 667, 例 5.

2. 當 $(hf - bg)^2 - (h^2 - ab)(f^2 - bc) > 0$ 時。

在此種情形中, 除 $h^2 - ab = 0$ 外, 根數 R 可化為 $(h^2 + ab)(x - \alpha)(x - \beta)$ (3) 之形式, 此間 α 與 β 為實數而 $\alpha < \beta$, § 685.

設 $h^2 - ab < 0$, 則 (3) 之積為正數, 當且祇當 x 介乎 a 與 β 之間之情形時, 故 (1) 之圖形為一閉曲線, 介乎 $x-a=0$ 及 $x-\beta=0$ 二直線之間而與之相切, 故為橢圓 (或圓), 參看

§ 667, 例 3.

設 $h^2 - ab > 0$, 則 (3) 之積為正數, 且祇在 $x < a$ 或 $x > \beta$ 之情形時, 故圖形含二無窮支; 其一與直線 $x-a=0$ 相切而向左方伸展, 其另一與直線 $x-\beta=0$ 相切而向右方伸展, 故為雙曲線, 參看 § 667, 例 4.

設 $h^2 - ab = 0$, 則 $R = 2(hf - bg)x + (f^2 - bc)$, 其中 $hf - bg \neq 0$, 而 R 在, 且祇在 $x = \frac{(f^2 - bc)}{2(hf - bg)}$ 時為正, 故圖形由一無窮支而成, 全在直線 $2(hf - bg)(x - \frac{(f^2 - bc)}{2(hf - bg)}) = 0$ 之一側, 且與之相切, 此圖形為一拋物線, 參看 § 667, 例 1.

3. 當 $(hf - bg)^2 - (h^2 - ab)(f^2 - bc) < 0$ 時:

在此情形下, $R=0$ 之二根為共軛虛數, § 635, 若命之謂 λ 及 $\mu = \bar{\lambda}$, R 得化為 $R = (h^2 - ab)[(x - \lambda)^2 + u^2]$ (4).

若 $h^2 - ab > 0$, 無論 x 之值若干, (4) 之積常為正數, 故 (1) 之圖形由二無窮支而成, 二者分居直線 $bx = \frac{(h^2 - ab)(x + f)}{2}$ 之兩側, 故為雙曲線, $y^2 - x^2 = 1$ 即其一例.

設 $h^2 - ab < 0$, 無論 x 之值若干, (4) 之積常為負數, 故 (1) 之圖形全無實跡, $x + y^2 + 1 = 0$ 即其一例.

以上之討論皆以 $b \neq 0$ 為假定, 但若 $b = 0$, 而 $a \neq 0$, 則可解 (1) 中之 x 而不解 y , 亦可得相同之結論; (設 $a \neq 0$ 及 $b = 0$, 則 (1) 之圖形為雙曲線如 § 667, 例 7, 或為一對直線, 一平行於 x 軸, 一平行於 y 軸者.)

習題 LII

求下列各方程式之圖形

1. $y^2 = -8x$. 2. $y^2 = 9$. 3. $(y-x)^2 = x$.

4. $x^2 + 2cy + 2y^2 = 8$. 5. $x^2 - 4xy + 4x^2 + 4x = 0$.

6. $y^2 - 2xy + 1 = 0$. 7. $y^2 - 2xy - 1 = 0$.

8. $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6 = 0$. 9. $y^2 - x^2 - 3x + y - 2 = 0$.

10. $2x^2 + 3xy + 4y^2 + x + 4y - 5 = 0$.

11. $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 3x - 6y = 0$.

求下列各方程組及其交點。

12. $\begin{cases} xy = 1, \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$ 13. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x^2 - xy + x = 0. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ y^2 = 2x. \end{cases}$

15. $\begin{cases} y^2 - xy - 2x^2 + 2x - 2y - 2 = 0, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 2 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} (x-2y)(x+y) + x - 3y = 0, \\ (x-2y)(x-y) + 2x - 6y = 0. \end{cases}$

17. 求 $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$ 之圖形及與 x -軸, y -軸之交點

18. 求證 $(x-y)^2 - 2(x+y) + 1 = 0$ 之圖形及與 x -軸, y -軸之切點。

19. 試證直線 $y = 3x + 5$, 切 $16x^2 + y^2 - 16x = 0$ 之圖形於 $(-3/5, 16/5)$ 點。

20. 問 m 為何值方令直線 $y = mx + 3$ 切於 $x^2 - 2y^2 = 6$ 之圖形?

21. c 為何值, 則直線 $7x - 4y + c = 0$ 始與 $2x^2 - y^2 + x = 0$ 之圖形相切?

22. 證明 $y = 0$ 及 $x - 2y + 1 = 0$ 二直線為 $xy - 2y^2 + y + 6 = 0$ 之圖形之漸近線。

23. 求下列圖形之漸近線:

$2x^2 + 3xy - 2y^2 + x + 2y + 2 = 0$

24. λ 為何值, 則 $x^2 + \lambda xy + y^2 = c$ 之圖形始為橢圓? 為拋物線? 為雙曲線?

XVII. 不 等 式

669 單一不等式。絕對不等式者，對於所含文字之一切實數值皆能成立如 $x^2 + y^2 + 1 > 0$ 等是。條件不等式者對於所含文字之一切實數值不能全部成立，而有限制如 $x - 1 > 0$ 等是。

670 不等式計算之原則已見 § 251，從此原則知將某項由一邊移至他邊者變其符號；或以相同之正數乘不等式之二邊則不等式之符號 $>$ 或 $<$ 仍屬不變，但若兩邊同乘以負數，則符號 $>$ 變為 $<$ ；而 $<$ 變為 $>$ 矣。

例1. 求證 $a^2 + b^2 > 2ab$.
 因 $(a - b)^2 > 0$,
 即 $a^2 - 2ab + b^2 > 0$,
 故 $a^2 + b^2 > 2ab$.

例2. 求證 $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$.
 因 $a^2 + b^2 > 2ab$, $b^2 + c^2 > 2bc$, $c^2 + a^2 > 2ca$.

以上三不等式左端右端各相加而除以 2 即得 $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$.

例3. 解不等式 $3x + 5 > x + 11$ ，即求 x 值之限制。

移項 $2x > 6$,
 $x > 3$.

例4. 解 $x^2 - 2x - 3 < 0$.

析因式 $(x + 1)(x - 3) < 0$.

欲適合此式，二因子必一正一負，故必 $x > -1$ 而 < 3 ，即 $-1 < x < 3$.

671 聯立不等式：一個或數個形式之一組不等式

$$ax + by + c < 0$$

可用簡單圖解方法，就變數 x, y 解之，其法基於下列之討論：

作直線 $ax+by+c=0$, §385, 則對於位在直線一側之圖形其 x, y 之各組值應為 $ax+by+c \geq 0$, 而對於位在直線他一個之圖形其 x, y 之各組值應為 $ax+by+c < 0$.

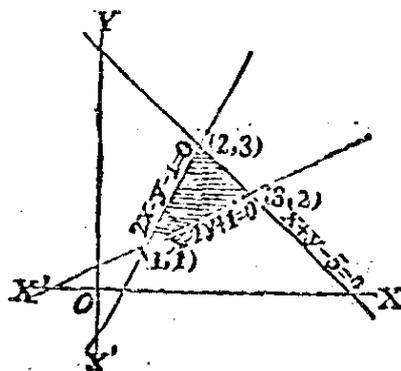
使 (x_1, y_1) 為 $y-(mx+c)=0$ 圖形上之一點，則 $y_1-(mx_1+c)=0$. 又設 $y_2 < y_1$, 則 (x_1, y_2) 點在直線下，則得 $y_2-(mx_1+c) < 0$; 又設 $y_2 > y_1$, 則 (x_1, y_2) 在線上，得 $y_2-(mx_1+c) > 0$.

例 解聯立不等式

$$k_1 = x - 2y + 1 < 0, \quad k_2 = x + y - 5 < 0, \quad k_3 = 2x - y - 1 > 0.$$

先求 $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$, 諸圖形如下：

不等式 $k_1 < 0$ 適合於位在直線 $k_1 = 0$ 與原點同側之圖形內 x, y 之數值；因置 $x=0, y=0$ 得 $k_1 = -5$ 即 < 0 , 仿此可知不等式 $k_1 < 0$ 及 $k_2 < 0$ 均適合圖形位在直線 $k_1 = 0, k_2 = 0$, 與原點異側諸組 x, y 之值。



故知位在此三線構成之三角形內的圖形其 x, y 之值，適合於不等式 $k_1 < 0, k_2 < 0$, 及 $k_3 > 0$.

習 題 LIII

下列各例內設 a, b, c 諸字母為不等之正數

1. 證 $a/b + b/a \geq 2$.
2. 證 $(a+b)(a^2+b^2) \geq (a^2+b^2)^2$.
3. 證 $a^3+t^3 \geq a^2b+ab^2$.
4. 證 $a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c \geq 6abc$.

5. 證 $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.
6. 解 $x + 7 \geq 3x/2 - 8$.
7. 解 $2x^2 + 4x > x^3 + 6x + 8$.
8. 解 $(x+1)(x-8)(x-6) > 0$.
9. 用圖解法解 $y - x - 2 < 0, x - 3 < 0, y + 1 > 0$.
10. 再以上法解 $y - x > 0, y - 2x < 0$.
11. 再解 $x + y + 3 > 0, y - 2x - 4 < 0, y + 2x + 4 > 0$.
12. 證明 $x^2 + 2x + 5 > 0$. 適合於 x 為任何值.
13. 用圖解法解 $x^2 + y^2 - 1 < 0, x^2 - 4x < 0$.

XVIII. 一次不定方程式

672 含二變數之單一方程式，設其形如

$$ax + by = c$$

之任一方程式內 a, b, c 為整數，且 a, b 無公因數。求一式用以表示適合此方程式的 x, y 之各組整數值；並求表示如是之各組正整數值之式。

673 定理 1. 凡上述之方程式 $ax + by = c$ 若有整數解答。

因 a, b 為互素數，故用 § 491 所述之法，可求正或負之整數 p 及 q 能致 $ap + bq = 1$ ，且 $a(pc) + b(qc) = c$ ；而此式證明 $x = pc, y = qc$ 為 $ax + by = c$ 之整數解答。

674 定理 2. 若 $x = x_0, y = y_0$ 為方程式 $ax + by = c$ 整數解答之一，則其一切整數解答可用公式

$$x = x_0 + bt, \quad y = y_0 - at$$

以得之， t 代表一切可能之正整數。

第一, $x = x_0 + bt, y = y_0 - at$ 為 $ax + by = c$ (1) 之解答

因代入 (1), $a(x_0 + bt) + b(y_0 - at) = c,$

化簡, $ax_0 + by_0 = c,$

假定 $x = x_0, y = y_0$ 為 (1) 之一解。

第二, 凡 (1) 之整數皆可由 $x = x_0 + bt, y = y_0 - at$ 得之。

因設 $x = x_1, y = y_1$, 表任一第二整數解答。

則 $ax_1 + by_1 = c$ 與 $ax_0 + by_0 = c,$

相減, $b(y_1 - y_0) = -a(x_1 - x_0)$ (2)

從 (2) 知 b 為整數 a 及 $x_1 - x_0$ 相乘積之因式。故因 b 與 a 為互素數, b 必含於 $x_1 - x_0$ 內, 即為 $x_1 - x_0$ 之因式, § 492, 1, 若命商為 t' , 即得

$$x_1 - x_0 = bt' \text{ 或 } x_1 = x_0 + bt', \quad (3)$$

以 (3) 代入 (2) 再化簡, 又得

$$y_1 = y_0 - at'. \quad (4)$$

由 §§ 673, 674 知上述種類之任何方程式 $ax + by = c$ 皆有 675 無窮之整數解。當 a 與 b 之符號相反時, 有無窮之正數解答。

例如, $2x + 3y = 18$ 之一解答為 $x = 3, y = 4$ 。

故普通解答為 $x = 3 + 3t, y = 4 - 2t$ 。

正數解答相當於 $t = -1, 0, 1, 2$, 者為 $x, y = 0, 6; 3, 4; 6, 2; 9, 0$ 。

從 § 647 之定理即能令人自一特別解答中寫出此方程式之 676 普通解答。特別解答可由心算求出。例如 $10x + 3y = 12$ 有一解為 $x = 0, y = 4$, 用 § 673 之指示方法亦能求得一特解, 用下列之法亦然。

例. 求 $7x + 19y = 213$ (1) 之整數解答。

解求係數較小之 x 且化簡之, 得

$$x = \frac{213 - 19y}{7} = 30 - 2y + \frac{3 - 6y}{7} \quad (2)$$

故如 v 為整數時 x 亦為整數, $(3-5v)/7$ 必為整數, 命此整數為 u , 俾 $(3-5v)/7 = u$.

$$\text{則} \quad 5v + 7u = 3 \quad (8)$$

用處理 (1) 之法, 以處理 (8), 得

$$v = \frac{3-7u}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{3+2u}{5} \quad (4)$$

$(3+2u)/5$ 必為整數, 今命其等於 v .

$$\text{則} \quad 2u + 5v = 3 \quad (5)$$

用處理 (1) 及 (3) 者以處理, 得

$$u = \frac{3-5v}{2} = 1 - 2v + \frac{1-v}{2} \quad (6)$$

當 $v=1$ 時, 分數項 $1-v/2$ 等於零而 u 為整數 $=1$.

將 $u=1$ 代入 (4), 得 $v=2$,

將 $v=2$ 代入 (2), 得 $x=25$.

故 (1) 之普通解答為

$$x = 25 + 10t, \quad y = 2 - 7t$$

有二正整解答: $x, y = 6, 9; 25, 2$ 相當於 $t = -1$, 及 $t = 0$.

觀察 (2), (4) (6) 分數項內 v, u, v 之係數適為求已知係數 7 及 19 之最大公約數時之連續係數, 因 7 與 19 無公因數, 故最後得餘數或係數 1. 以此法解 a, b 無公因數之任何方程式 $ax + by = c$ 皆為正確. 故以此法解此方程式常可得其解.

但實際上不必演算全部, 如已得 (4) 即可觀出 $u = -1$, 能使 $(3-2u)/5$ 成為整數, 故 $v=2$ 可立即得出, 而 $x=25$ 亦可由 (2) 求得.

877 應注意者方程式 $ax + by = c$ 之有整係數者, 其中 a 與 b 有公因數 d 則除 d 亦為 c 之因數外, 不能有整數解. 因 x 與 y 若為整數, d 將為 $ax + by$ 之因數, 亦即為 c 之因數也, 例如 $4x + 6y = 7$ 即無整數解答.

聯立不定方程式，聯立方程式含有整數係數之不定方程式，若有整數解時，可由下列之法求之。

例。求下列方程式之整數解。

$$3x + 6y - 2z = 22, \quad (1)$$

$$5x + 8y - 6z = 28. \quad (2)$$

先消去 z 并化簡所得之方程式，

$$\text{得} \quad 2x + 5y = 19. \quad (3)$$

再求(3)之普通解答，如 § 676，

$$\text{得} \quad x = 7 + 5t, \quad y = 1 - 2t. \quad (4)$$

復次以(4)代入(1)并化簡其結果，

$$\text{得} \quad 2z - 3t = 5. \quad (5)$$

復次求(5)之普通解答。

$$\text{得} \quad z = 1 - 3u, \quad t = -1 + 2u. \quad (6)$$

其中 u 指任何整數。

最後將 $t = -1 + 2u$ 代入(4)并化簡。

$$\text{得} \quad x = 2 - 10u, \quad y = 3 + 4u, \quad z = 1 - 3u. \quad (7)$$

所求之普通解答。

唯一之正數解為 $x = 2, y = 3, z = 1$ ，與 $u = 0$ 相應。

注意：若二變數之單來方程式之 x 如無整數解，則所設之方程式亦無整數解答，§ 677。

含理變數之三方程式，亦可用同法解之。

含兩個以上變數之單一方程式，亦可用以上之單一方程式而

解之。例如下列之法求其整數解之公式。

例。求下列方程式之整數解。

$$(1)$$

$$\text{解之求} \quad x = 2 - 10u, \quad y = 3 + 4u, \quad z = 1 - 3u. \quad (2)$$

(3u+4u)/5 須求整數，使之等於 u 。

$$\text{則} \quad 3y+4z=5u. \quad (3)$$

$$\text{解之求 } y, \quad y = u - z + \frac{2u-z}{3} \quad (4)$$

$(2u-z)/3$ 須為整數，使之等於 v 。

$$\text{則} \quad z = 2u - 3v. \quad (5)$$

$$\text{以(5)代入(1),} \quad y = u + v. \quad (6)$$

$$\text{以(5)及(6)代入(2),} \quad x = 10 - 6v + 5v. \quad (7)$$

公式(5),(6),(7),其中 u, v 均為任何整數值, 或所求之普通解答以 $u=2, v=1$ 代入公式(5),(6),(7)中, 得(1)之正整數解, 即為 $x=3, y=2, z=1$.

習題 LIV

求下列各方程式或方程組之普通整數解, 及正整數解.

$$1. \quad 6x - 17y = 18, \quad 2. \quad 43x - 12y = 168.$$

$$3. \quad 16x + 39y = 1. \quad 4. \quad 72x + 28y = 845.$$

$$5. \quad 49x - 27y = 28. \quad 6. \quad 47x - 97y = 501.$$

$$7. \quad \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 27, \\ 3x + 2y + z = 11. \end{cases} \quad 8. \quad \begin{cases} 5x + 2y = 42, \\ 3y - 7z = 2. \end{cases}$$

$$9. \quad 4x + 3y = 2z + 3. \quad 10. \quad 2x + 3y + 4z = 17.$$

11. 求方程式 $3x + 7y = 1043$ 之正整數解之個數.

12. 化分數 $41/35$ 成分子為 5 及 7 之二正分數之和.

13. 一人購牛每頭 7 元又購羊每頭 6 元, 共用 110 元, 問每種各購若干?

(1) 14. 分 23 為三部分, 令其第一部分之三倍, 第二部分之二倍及第三部分之五倍之和為 79, 求此三部分之數.

(2) 15. 求以 5, 7, 9 除之而得餘數各為 4, 6, 8 者之最小數.

16. 分等長之二棒, 各為 255 及 253 等分, 設置二棒令其一端排齊, 則相距最近之二分格為何?

XIX. 比及比例 變數法

比 與 比 例

比。算術及代數中慣將比之一詞 (§ 215) 用為數目；若 a 與 b 表示任二數，定 a 對 b 之比為商 a/b (比較 § 216)。

a 與 b 之比以 a/b 或 $a:b$ 表示之。

在比式 $a:b$ 內， a 稱前項， b 稱後項。

比之性質。故 $a:b$ 為分數，而其性質即分數之性質，由此能以同數乘或除比之兩項，則比值不變。

如 $a:b = ma:n$ 及 $b = a/n : b/n$ 。

又若比之兩項，同乘或同次幕或加以同數，除 $a=b$ 外，則 $a:b$ 之值必變。

設 a, b 及 m 為正數，如 $a < b$ 則 $a:b$ 之值，於 a, b 同加以 m 後增大，如 $a > b$ ，於同加 m 後減小。

$$\frac{a+m}{b+m} - \frac{a}{b} = \frac{m(b-a)}{b(b+m)}$$

而 $m(b-a)/b(b+m)$ 為正或負，視 $a < b$ 或 $a > b$ 而定。

比例。二比 $a:b$ 及 $c:d$ 相等時， a, b, c, d 四數稱謂成比例。

此比例可寫為

$$a/b = c/d \text{ 或 } a:b = c:d \text{ 或 } a:b::c:d$$

讀為“ a 比 b 等於 c 比 d ”。

比例 $a:b=c:d$ 內， a 及 d 稱謂外項， b 及 c 為內項，又稱 d 謂 a, b 及 c 之第四比例項。

683 定理. 比例式中兩外項之積, 等於其兩內項之積. 即

$$\text{若 } a : b = c : d \text{ 則 } ad = bc.$$

因由 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 即 $ad = bc$.

例. 有一比例, 其第一, 第二及第四項, 各為 $1\frac{1}{2}$, -3 及 5 , 求其第三項.

$$\text{命其第三項為 } x, \text{ 則 } 1\frac{1}{2} : -3 = x : 5$$

$$\text{故 } 5 \cdot 1\frac{1}{2} = -3 \cdot x,$$

$$\text{就 } x \text{ 解之 } \quad x = -5/6.$$

684 反之若二數之積與他二數之積相等, 則無論將此四數如何排列, 祇須令一組數為內項而他組數為外項, 比例常能成立.

$$\text{因令 } a \cdot d = b \cdot c.$$

以 bd 除兩端, 即得 $a/b = c/d$ 故

$$a : b = c : d \quad (1) \quad \text{及} \quad c : d = a : b \quad (2)$$

仿此, 依次以 cd , ab , 及 ac 除 $ad = bc$ 之兩端, 可得

$$a : c = b : d \quad (3) \quad \text{及} \quad b : d = a : c \quad (4)$$

$$d : b = c : a \quad (5) \quad \text{及} \quad c : a = d : b \quad (6)$$

$$d : c = b : a \quad (7) \quad \text{及} \quad b : a = d : c \quad (8)$$

685 比例項之易位. 從 §§ 683, 684 知若 a, b, c, d 對稱 (1)-

(8) 之任一組而成比例, 則依他種排列亦成比例.

1. 任何比例之兩項可以互換...

如設 $a : b = c : d$ 則 $b : a = d : c$.

2. 任何比例之兩內項或兩外項可以互換...

如設 $a : b = c : d$ 則 $a : c = b : d$.

上述變形 1 及 2 各稱謂反比變形及更比變形。

且例之其他正常變形。

636

若已知 $a : b = c : d$, 即可斷言

- 1. $a + b : b = c + d : d$.
- 2. $a - b : b = c - d : d$.
- 3. $a + b : a - b = c + d : c - d$.
- 4. $ma : mb = nc : nd$.
- 5. $ma : nb = mc : nd$.
- 6. $a^n : b^n = c^n : d^n$.

由 1 之外項相乘, 及內項相乘得 $ad + bd = bc + bd$, 即 $ad = bc$, 此為真確, 因 $a : b = c : d$ 也。故變形 1 為真。仿此得證變形 2 至 6 皆為真確。

將 $a : b = c : d$ 變其形如上述 1, 2, 3 之形式各稱爲合比變形 (Composition) 分比變形 (Division) 及合分比變形 (Composition and division)。

例. 解 $x^2 + 2x + 3 : x^2 - 2x - 3 = 2x^2 + x - 1 : 2x^2 - x + 1$.

由 3, $2x^2 : 2(2x + 3) = 4x^2 : 2(x - 1)$.

故 $x^2 = 0$. (1)

或由 4, 5, $1 : 2x + 3 = 2 : x - 1$. (2)

解(1)與(2) $x = 0, 0$, 或 $-7/3$.

定理. 連續等比之任一前項比其後項等於諸前項之和比 637

後項之和。

例如, 設 $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = \dots = r$.

則 $a_1 : b_1 = a_1 + a_2 + a_3 : b_1 + b_2 + b_3 = \dots = r$.

因設等比之公值為 r 則得

$$a^1/b_1 = r, a_2/b_2 = r, a_3/b_3 = r, \dots$$

故 $a_1 = rb_1, a_2 = rb_2, a_3 = rb_3, \dots$

或, 相加, $a_1 + a_2 + a_3 = r(b_1 + b_2 + b_3), \dots$

故 $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3} = r = \frac{a_1}{b_1}$.

例1. 設 $x:(b-c)yz = y:(c-a)zx = z:(a-b)xy$,

則 $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

因乘第一比各項以 x , 第二比各項以 y , 第三比各項以 z , 然後應用以上原理得,

$$\frac{x^2}{(b-c)xyz} = \frac{y^2}{(c-a)xyz} = \frac{z^2}{(a-b)xyz} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{0}$$

則 $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ 必屬顯然矣。

上列方法頗有助於複雜比例問題之解決。

例2. 求證設 $a:b = x:y$,

則 $a^2 + 2b^2 : ab^2 = a^3 + 2y^3 : xy^2$

使 $a/b = x/y = r$ 由是 $a = rb$ 及 $x = ry$.

於是 $(a^2 + 2b^2)/ab^2 = (r^2b^2 + 2b^2)/rb^3 = (r^2 + 2)/r$,

及 $(a^3 + 2y^3)/xy^2 = (r^3y^3 + 2y^3)/ry^3 = (r^3 + 2)/r$

688 連比例. 設 $a:b = b:c = c:d = \dots$ 則 a, b, c, d, \dots 諸數成連比例.

設 a, b, c 三數成連比例, 即 $a:b = b:c$, 則 b 稱謂 a, c 之比例中項, c 稱謂 a, b 之第三比例項.

設 a, b, c 成連比例, 則 $b^2 = ac$.

因 $a:b = b:c$, 故 $b^2 = ac$, § 683.

習題 LV

1. 求 15, 24 及 20 之第四比例項; 15 及 24 之第三比例項;

$5a^3b^3$ 及 $20ab^3$ 之比例中項; $\sqrt{12}$ 及 $\sqrt{75}$ 之比例中項.

2. 設 $3x - 2y = x - 5y$, 求 $x:y$; 及 $x+y : x-y$

3. 設 $2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0$ 求 $x:y$; 及 $2:x$,

4. 設 $ax + by + cz = 0$ 及 $a'x + b'y + c'z = 0$,

則 $x:y:z = bc' - b'c : ca' - c'a : ab' - a'b$.

5. 設 $a:b = c:d$ 則 $ab + cd$ 為 $a^2 + a^2$ 及 $b^2 + d^2$ 之比例中項.

6. 設 $(a^2 + b^2)cd = (c^2 + d^2)ab$, 則得 $a:b = c:d$ 或 $a:b = d:c$

7. 設 $a:b=c:d$ 則 $\sqrt{a}+\sqrt{b}:\sqrt{a+b}=\sqrt{c}+\sqrt{d}:\sqrt{c+d}$.

8. 設 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, 則 $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^3}$.

9. 設諸數 $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n; l_1, l_2, \dots, l_n$ 皆為正數, 則比 $l_1 a_1 + l_2 a_2 + \dots + l_n a_n : l_1 b_1 + l_2 b_2 + \dots + l_n b_n$ 之值, 介乎 $a_1 : b_1, a_2 : b_2, \dots, a_n : b_n$ 諸比之最大者與最小者之間.

10. 設 $a-b:k=b-c:l=c-a:m$, 而 a, b, c 不相等則 $k+l+m=0$.

11. 設 $x:mz-ny=y:nx-lz=z:ly-mx$, 則 $lx+my+nz=0$, 又 $x^2+y^2+z^2=0$.

12. 設 $a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3$, 則此三比各等於下比

$$(l_1 a_1^n + l_2 a_2^n + l_3 a_3^n)^{\frac{1}{n}} : (l_1 b_1^n + l_2 b_2^n + l_3 b_3^n)^{\frac{1}{n}}$$

13. 用 § 686 解下列各方程式:

(1) $\frac{x^2+ax-a}{x^2-ax+a} = \frac{2x^2+a}{2x^2-a}$.

(2) $\frac{2x^3-3x^2+2x+2}{2x^3-3x^2-2x-2} = \frac{3c^3-x^2+10x-26}{3c^3-x^2-10x+26}$.

14. 求以 2:3:5 之比分 520 為三份.

15. A, B 二酒桶貯上下兩種酒之混合物, 其混合量之比, 在 A 桶中者為 3:5, 在 B 桶中者為 3:7. 今須得上酒 6 加侖下酒 12 加侖之混合物, 二桶中各須取出幾加侖?

變 數 法

單獨自變數. 設二變數 x 及 y , 無論其值如何變動而其比 689 不變, 則稱 y 隨 x 而變或稱 y 與 x 按比例而變.

即當 $y/x=c$, 或 $y=cx$, 其中 c 指示常數時, y 稱為隨 x 而變.

記法 $y \propto x$, 即 'y 隨 x 而變' 之意.

設已知 y 隨 x 而變, 即可寫作 $y=cx$; 又設已知 y 之一 690 對相當值則可得 c , 於是求出 x 與 y 之關係方程式, 由是算出

x 為任何數時 y 之相應值。

例：若 x 變為 c 而 $y = 12$ ，且 $x = 2$ 時， $y = 12$ ，則 $x = 20$ 時 y 之值為何？

設 $y = cx$ ，

且由假設 $y = 12$ 及 $x = 2$ 適合此方程式。

故 $12 = c \cdot 2$ 即 $c = 6$ 。

由是 $y = 6x$ 。

故當 $x = 20$ 時，得 $y = 6 \cdot 20 = 120$ 。

891 y 隨 x 自身而變外，亦可隨 x 之某一個數項表，例如 y 可隨 $x^2, x+1, 1/x$ 等而變。若 y 隨 $1/x$ 而變，則稱 y 隨 x 而反變。

例：已知 y 為常數與隨 x 反變之一項之和，并知 $x = -1$ 時 $y = 1, x = 1$ 時 $y = 5$ 。求聯結 x 及 y 之方程式。

假設 $y = a + b/x$ ，其中 a, b 為常數。

因此方程式為 $x = -1, y = 1$ 及 $x = 1, y = 5$ 所適合，故得

$$1 = a - b \text{ 及 } 5 = a + b.$$

由是 $a = 3, b = 2$ ，而所求之方程式為 $y = 3 + 2/x$ 。

892 以與以上之自變數使 x 與 y 表各自獨立之二自變數，若另一變數 z 隨 xy 而變，因而 $z = cxy$ ，則稱 z 隨 x 及 y 而合變；又若 z 隨商數 x/y 而變，因而 $z = c \cdot x/y$ ，則稱 z 隨 x 正變而隨 y 反變。

例如：矩形之面積隨其底及高之長而正變；但其高則隨其面積正變而隨其底反變。

893 定理：若 x 為常數時 z 隨 y 而變， y 為常數時， z 隨 x 而變。

則 x 及 y 皆變時， z 隨積數項而變。

例：因任意 x 及 y 之三個值如 $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ 詳表之相應值，則

$$x_1, y_1, z_1, \quad (1)$$

$$x_2, y_2, z_2, \quad (2)$$

$$x_3, y_3, z_3, \quad (3)$$

為三組等比之相當值。

又因，(1)與(2)中之 x 值相同，且按假定對於 x 之任何定值 z 隨 y 而變，故由§39得

$$z_1/y_1 = z_2/y_2. \quad (4)$$

仿此，因 y 為(2)及(3)所公有，得

$$z_2/x_2 = z_3/x_3. \quad (5)$$

(4)及(5)相當邊相乘，

$$z_1/x_1 y_1 = z_2/x_2 y_2. \quad (6)$$

故 z 及 xy 之相當值成比例，即 z 隨 xy 而變，§39。

100

習 題 LVI

1. 設 y 隨 x 而變，且 $x=5$ 時 $y=-2$ ，則 $x=7$ 時 y 之值若何？
2. 設 y 隨 x^2 反變，且 $x=2$ 時 $y=1$ ，則 x 為何值時 $y=3$ ？
3. 已知 y 為常數與隨 x^2 而變之一項之和，并知 $x=1$ 時 $y=1$ ， $x=2$ 時 $y=0$ ，求 x, y 之關係方程式。
4. 設 y 隨 x^3 正變，隨 z^2 反變與 $x=-1$ 及 $z=2$ 時 $y=1$ ，問當 $x=3$ 時及 $z=-1$ 時， y 之值若干？
5. 設 y 隨 x 而正變，證明 $x^2 - y^2$ 隨 xy 而變。
6. 設 y 之平方隨 z 之立方而正變， z 隨 x 而反變，試證 xy 隨 x 之平方根反變。
7. 三人作工四星期工資為103元，則五人作工幾星期可得135元？
8. 圓盤之體積隨其厚及底面半徑平方而合變，今將厚為3及2而半徑為24與36之二盤熔化成一盤，其半徑為48，則其厚若干？
9. 一高為 a 之正圓錐體，被截於平行其底之平面 R ，設截面積為錐底之半時，問錐頂至截面之距離若干？當平面 R 等分此錐體時，其距錐頂之高為若干？

XX. 等 差 級 數

694 等差級數。此名爲給與一組時自己知數 a 之數列，連續加一已知數 d ，卽形如下式之數列

$$a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d. \quad (I)$$

因 d 爲(1)中每二連續數之差， d 稱謂此等差級數之公差。

如2, 5, 8, 11爲等差級數，其公差 $d=3$ ；又 2, -1, -4, -7爲等差級數，其公差爲 $d=-3$ 。

695 第 n 項。注意在(1)之各項， $a, a+d, a+2d, \dots$ 中， d 之係數，較項數少一。故普通項卽第 n 項爲 $a+(n-1)d$ 。若共有 n 項，命末項爲 l ，則得公式，

$$l = a + (n-1)d. \quad (II)$$

例。等差級數第七項爲15，而第十項爲21。求首項 a 及公差 d ；又若共有20項，求 l 。

$$a+6d=15, \quad a+9d=21.$$

解之求 a 及 d ， $a=3, \quad d=2.$

故 $l = 3 + 19 \cdot 2 = 41.$

696 和。顯然(1)之末第二項可書 $l-d$ ，更前一項則爲 $l-2d$ ，…首項則爲 $l-(n-1)d$ 。

故設 S 指(1)諸項之和，則得

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+(n-1)d),$$

$$\bar{S} = l + (l-d) + (l-2d) + \dots + (l-(n-1)d).$$

將此兩方程之相當數相加，得 $2S = n(a+l)$ 故

$$S = \frac{n}{2}(a+l). \quad (II')$$

例。有六項之等差級數，首項為5而公差為4，求此級數之和。

因 $n=6$ ，得 $l = 5 + 5 \cdot 4 = 25$ 。

故 $S = \frac{1}{2}(5 + 25) = 90$ 。

應用。等差級數內，設已知 n, l, d, S 中之任何三數，則可由公式(II)及(III)，求其他二數。已知數之唯一限制為 n 必須正整數。

例。已知 $d = 1/2, l = 3/2, S = -15/2$ 求 a 及 n 。

代入(II), (III), $\frac{3}{2} = a + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \quad (1)$

$$-\frac{15}{2} = \frac{n}{2} \left(a + \frac{1}{2} \right). \quad (2)$$

消去 a , $n^2 - 7n - 30 = 0. \quad (3)$

解(3), $n = 10$ 或 -3 。

$n = -3$ 之值為不可用。代 $n = 10$ 於(1)，得 $a = -3$ 。故 $n = 10, a = -3$ ，及此等差級數為 $-3, -2\frac{1}{2}, -2, -1\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}$ 。

等差中項。設三數成一等差級數，則中間數稱謂他數之等差中項。

任二數 a 及 b 之等差中項為二數和之半。

因設 x 為 a, b 之等差中項，於是列數 a, x, b 為等差級數。

由是 $x - a = b - x,$

故 $x = (a+b)/2$

任何等差級數之中間各項，皆可稱用首項及末項之等差中項，且常能插入任何數個中項於二已知數 a 及 b 之間。

例。於3與5中間插入四等差中項。

此即求一等差級數之中間項，設此級數之 $a=3, l=5$ ，及 $n=4+2$ ，即6。代 $l=5, a=3, n=6$ 入(II)，得

$$5 = 3 + 5d, \text{ 則 } d = 2/5.$$

故所求中項為 $3\frac{2}{5}, 3\frac{4}{5}, 4\frac{1}{5}, 4\frac{3}{5}$ 。

習 題 LVII

1. 求(1) $3, 6, 9, \dots$ 及(2) $-3, -1\frac{1}{2}, 0, \dots$ 之第十二項及首二十項之和。
2. 求(1) $1, 2, 3, \dots$; (2) $1, 3, 5, \dots$; 及 (3) $2, 4, 6, \dots$ 至 n 項之和之公式。
3. 有 $6r+1$ 形式之數於此，其中 r 指示0或正整數；求前首 n 個數之和。
4. 求十項之等差級數，設其第五項為1，第八項為2。
5. 於-1與2之間插入五個等差中項。
6. 已知 $n=16, a=0, d=4/3$; 求 l 及 S 。
7. 已知 $n=7, l=-7, d=-5/3$; 求 a 及 S 。
8. 已知 $n=12, a=-5\frac{3}{4}, l=31\frac{1}{4}$; 求 d 及 S 。
9. 已知 $a=2, l=-23\frac{1}{2}, S=-559$; 求 n 及 d 。
10. 已知 $n=7, a=3/7, S=43$; 求 l 及 d 。
11. 已知 $n=4, d=1/5, l=9\frac{3}{5}$; 求 n 及 S 。
12. 已知 $n=9, d=-4, S=135$; 求 a 及 l 。
13. 已知 $n=10, l=-2, S=115$; 求 a 及 d 。
14. 已知 $d=5, l=-47, S=-357$; 求 n 及 a 。
15. 已知 $a=-10, d=7, S=20$; 求 n 及 l 。
16. 試證若 a^2, b^2, c^2 為等差級數，則 $1/(b+c), 1/(c+a), 1/(a+b)$ 亦為等差級數。

17. 試證若 n 為奇數, 則任何 n 個連續自然數之和得以 n 除盡,
18. 求一等差級數, 令其首項為 1, 又期首三項之和為其大因項之和之半。
19. 三數成等差級數, 其和為 15, 其平方之和為 87. 求此三數。
20. 求 9 倍數之一切三位正整數之和。
21. 某人每年儲金 100 元, 年利 4% 以單利計算. 11 年後之儲金總額若干?
22. A, B 二人由相距 72 里之處同時相向出發, 設 A 之速度每時 4 里. B 於第一時行 2 里, 第二時行 2.5 里, 第三時行 3 里, 以此類推, 則二人何時何處相遇?

XXI. 等比級數

等比級數. 等比級數命名於已知數 a , 重複乘以已知數 999 所得之一列數, 可寫為,

$$a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1} \quad (I)$$

r 稱謂等比級數 (I) 之公比, 且使 r 之絕對值大於或等於

1, 則此級數為遞增級數或遞減級數。

如 1, 2, 4, 8 及 1, -2, 4, -8 為遞增級數, 其 $r = 2$ 及 -2 ;

而 1, 1/2, 1/4, 1/8 為遞減級數其 $r = 1/2$.

第 n 項因 (I) 內各項 r 之指數皆較其項數少 1,

等比級數中首項為 a , 公比為 r 之 n 項, 其末項之公式為

$$l = ar^{n-1} \quad (II)$$

701 和，在 S 爲等比級數 (I) 之和。

$$\text{則 } S = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1},$$

$$\text{及 } rS = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n.$$

由上式減下式得 $(1-r)S = a - ar^n$ 故

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{(III)}$$

此公式用於遞增級數時，可寫成，

$$S = a(r^n - 1)/(r - 1).$$

從 (II) 得 $rl = ar^n$ ，故 (III) 亦可寫爲，

$$S = (a - rl)/(1-r) \text{ 或 } S = (rl - a)/(r-1).$$

例：求等差級數 2, -4, 8, -16 至八項之 S 。

於此 $a = 2, r = -2$ ，而 $n = 8$ 。

$$\text{故依 (II), } l = 2(-2)^8 = -256,$$

$$\text{又依 (III), } S = 2 \frac{1 - (-2)^8}{1 - (-2)} = \frac{-510}{3}.$$

702 應用。設已知等差級數內， a, l, r, n, S 五數中之任何三數，則由公式 (II) 及 (III) 可決定其他二數。且除已知數爲 a, n, S 或 l, n, S 時外，該二數得用上述方法求出。若有一未知數爲 n 則其值須用觀察法求出；但設已知數有合理之數值時，其事常屬可能，因 n 必爲一正整數也。

例1. 已知 $r = 3, n = 6, S = 723$ ；求 a 及 l 。

以已知值代入 (II) 及 (III)，得

$$l \text{ 或 } a \cdot 3^6 = 243a, \text{ 及 } 723 = a \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 864a.$$

解之，得 $a = 2, l = 486.$

例2. 已知 $a=6, n=5, l=2/27$; 求 r 及 S .

由(II), $2/27=6r^4$, 則 $r^4=1/81$, 即 $r=\pm 1/3$.

故由 (III) 設 $r=1/3$, 則 $S=6 \frac{1-(1/3)^5}{1-1/3} = \frac{242}{27}$,
 $r=-1/3$, 則 $S=6 \frac{1-(-1/3)^5}{1-(-1/3)} = \frac{122}{27}$.

故 $a=6, n=5$, 而 $l=2/27$ 之等比級數有二種.

例3. 已知 $a=-3, l=-46875, S=-39663$ 求 r 及 n .

代入公式 $S=(a-rl)/(1-r)$ 中, § 701 即得

$$-39663 = \frac{-3-46875r}{1-r}, \text{ 故 } r=-5.$$

於是山(II), $-46875 = -3(-5)^{n-1}$, 即 $(-5)^{n-1} = 15625$.

然分解 15625 之因式, 得 $15625 = 5^8 = (-5)^8$.

故 $n-1=8$ 即 $n=9$.

例4. 已知 $a=3, n=5, S=33$; 求 r 及 l .

由(III), $33 = 3 \frac{1-r^5}{1-r} = 3(1+r+r^2+r^3+r^4)$.

故 $r^4+r^3+r^2+r+30=0$.

即此問題含有解四次方程式之手續; 故普通而論, 已知 a, n, S 求 r , 必解 $n-1$ 次方程式. 但於本問題內可由 § 705 之方法求得 r 之一值為 2.

將 $r=2$ 代入 (II) 中, 得 $l=3 \times 2^4=48$.

等比中項. 設三數成等比級數, 中間之數稱謂他二數之等比中項.

任何二數 a 及 b 之等比中項為其積之平方根.

因設 x 為 a 與 b 之等比中項, 則列數 a, x, b 成等比級數.

故 $x/a = b/x$, 即 $x = \pm \sqrt{ab}$.

任何等比級數之所有中間項, 皆可稱謂首項及末項之等

比中項，在二已給數 a 及 b 中間，可如下例插入任意若干個等比中項。

例，在 18 及 $2/27$ 之間插入四個等比中項。

此所求者為 $a=18, l=2/27, n=4+2=6$ 之等比級數之中間各項。

將已知值代入 (II)，得

$$2/27 = 18r^5, \text{ 則 } r = 1/3.$$

故所求中項為 6, 2, $2/3, 2/9$ 。

無窮遞減等比級數。形如

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots \quad (1)$$

而項數無窮之式稱謂無窮等比級數。

由公式 (III)，知 (1) 之開首 n 項和為 $a(1-r^n)/(1-r)$ 。

設 r 之絕對值小於 1，則當 n 無限增大時， r^n 漸近於 0 為其極限，§ 724；故 $a(1-r^n)/(1-r)$ 趨近 $a/(1-r)$ 為極限，吾人稱此極限為無窮級數 (1) 之和，故設 S 代表 (1) 之和，則

$$S = \frac{a}{1-r} \quad (2)$$

例 1. 求 $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ 之和，

此間 $a=1$ 而 $r=1/2$ 。

故 $S = 1/(1-1/2) = 2$ 。

例 2. 求循環小數 $0.72323\dots$ 之值。

分循環部分為 $\frac{23}{1000} + \frac{23}{100000} + \dots$ ，又從 (2)，此無窮級數之

和為 $\frac{0.023}{1-0.01}$ 或 $\frac{23}{990}$ ，加非循環部分 0.7，得已知小數之值為 $\frac{358}{495}$ 。

習題 LVIII

1. 求等比級數 2, -6, 18, ... 之第五項及首五項之和。

2. 求等比級數 4, 6, 9, ... 之第四項及首四項之和。

3. 求下列無窮等比級數之和：

$$12 - 6 + 3 - \dots; 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots; \frac{5}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots$$

4. 求下列各等項等比級數之和：

$$0.34541\dots; 0.0567272\dots; 8.45164516\dots$$

5. 已知 $a = -0.8, r = 10, n = 6$; 求 l 及 S .

6. 已知 $n = 7, a = 48, l = 8/4$; 求 r 及 S .

7. 已知 $a = 1/6, r = 2, l = 8$; 求 n 及 S .

8. 已知 $n = 5, r = -2, l = 1$; 求 a 及 S .

9. 已知 $a = 54, r = 1/3, S = 80$; 求 n 及 l .

10. 已知 $n = 4, a = -3, S = -468$; 求 r 及 l .

11. 已知 $a = -9/16, l = -16/9, S = -781/144$; 求 n 及 r .

12. 已知 $n = 6, r = -2/3, S = 665/216$; 求 a 及 l .

13. 已知 $r = 3/2, l = 8(2/3), S = 83(1/3)$; 求 n 及 a .

14. 已知 $n = 4, l = 54/25, S = 514.25$; 求 a 及 r .

15. 已知 $n = 5, l = 48, S = 93$; 求 a 及 r .

16. 求 a^3/b 及 b^3/a 之正等比中項.

17. 於 5 及 405 間插入三等比中項.

18. 等比級數之第三項為 3, 第六項為 $3/8$; 求第七項.

19. 求四項之等比級數, 設其首末二項, 其和為 158, 中二項之和為 70.

20. 求成等比級數的三項, 設其和為 7, 其平方和為 91.

21. 三數成等差級數, 其和為 36, 設於各項各加 1, 4, 48, 則成等比級數, 求三數.

22. 有四數, 首三數成等差級數, 末三數成等比級數, 第一項第四項之和為 16, 第二與第三之和為 8, 求四數.

23. 設彈性球從 15 呎之高處落下, 每次反彈之高為落下之高之 $2/3$, 則在靜止以前, 此球所經之距離若干?

XX:1. 調和級數

705 調和級數。一列數，其倒數成等差級數者，名曰調和級數。

$$1/a, 1/(a+d), 1/(a+2d), \dots, 1/[a+(n-1)d].$$

例如， $1, 1/2, 1/3, 1/4$ 及 $3/2, 3/4, 3/6, 3/8$ 均爲調和級數。

例。設 a, b, c 成調和級數，則 $a:c = a-b:b-c$ 。

因 $1/a, 1/b, 1/c$ 成等差級數，則

$$1/b - 1/a = 1/c - 1/b.$$

故 $c(a-b) = a(b-c)$ ，即 $a:c = a-b:b-c$ 。

706 欲求調和級數之任一特殊項，祇須求相當之等差級數中佔同一位置之項，而取其倒數即是。

例。求調和級數 $3/5, 3/7, 3/9, \dots$ 之第十項。

由 § 695 相當之等差級數 $5/3, 7/3, 9/3, \dots$ 之第十項爲 $23/3$ 。故 $3/5, 3/7, 3/9, \dots$ 之第十項爲 $3/23$ 。

707 調和中項。設三數成調和級數，則中間數稱爲他二數之調和中項。又任何級數之中間項可稱爲首末兩項之調和中項。

例1. 求 a, b 之調和中項。

設其中項爲 x ，則 $1/a, 1/x, 1/b$ 成等差級數。

故 $1/x - 1/a = 1/b - 1/x$ ，即 $2/x = 1/a + 1/b$ 。

故 $x = 2ab/(a+b)$ 。

例2. 求證 a, b 二數之等比中項，亦爲其等差中項及調和中項之等比中項。

令 A, G 及 H 表 a, b 之等差，等比，調和中項。

則 $A = \frac{a+b}{2}, G = \sqrt{ab}, H = \frac{2ab}{a+b}$

故 $AH = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab = G^2$

例3. 若 a 與 b 為正數, 求證 $A > G > H$.

$$A - H = \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$$

故若 $(a-b)^2 / (2(a+b))$ 為正數, 則 $A > H$.
又因, 由例2, G 之值介乎 A 與 H 之間, 故 $A > G > H$.

習題 LIX

1. 試將調和級數 $3/5, 3/7, 1/3$ 再續二項.
2. 求 $3/4$ 與 5 之調和中項.
3. 將 10 與 15 之間插入四個調和中項.
4. 調和級數之第二, 第四兩項為 $4/5$ 及 $1/3$, 求第三項.
5. 二數之等差中項為 4 , 調和中項為 $16/5$, 求此二數.
6. 二數之等比中項為 4 , 調和中項為 $16/5$, 求此二數.
7. 試證若 a, b, c 成調和級數, 則 $a/(b+c), b/(c+a), c/(a+b)$ 亦成調和級數.
8. 三數成調和級數, 求證若各數減以中項之半, 其結果成等比級數.
9. 求證若 x 為 a 與 b 之調和中項, 則 $1/(x-a) + 1/(x-b) = 1/a + 1/b$.
10. 若三角形 ABC 之頂角 C , 其角平分線交底邊 AB 於 D , 其外角之平分線交 AB 之延長線於 E , 則 AD, AB, AE 成調和級數.
11. P 點在以 O 為中心之圓外, 由 P 所引之二切線, 與圓相切於 T 及 T' . 若直線 PO 交圓於 A 及 B 又交 TT' 於 C , 試示 PO 為 TA 及 PT' 之調和中項.

XXIII. 遞差法, 高階等差級數

插入法

高階等差級數

708 各階遞差: 任何數列中, 若由各項減去其前一項, 即得一列之數, 稱為該數列之一階差, 仍此又可得該數列之二階差, 餘類推。

例如, 有數列 $1^3, 2^3, 3^3, \dots$, 則

該數列即為 $1, 8, 27, 64, 125, \dots$

一階差 $7, 19, 27, 31, 39, \dots$

二階差 $12, 18, 24, 30, 36, \dots$

三階差 $6, 6, 6, \dots$

四階差及以後者皆為 0.

709 r 階等差級數: 凡此名用於 r 階差皆為 0 之數列, 故以後階差皆為 0.

故 $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \dots$ 為三階等差級數, 因前三階差皆相等也。

(d-1) 普通等差級數 (§ 694) 為一階, 其第一階差為公差 d .

710 r 階等差級數之 n 項. 有一 r 階等差級數:

設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為各項, 則有三階 (1)

設 d_1, d_2, \dots, d_r 為各階差之首項, 欲得一以 $a_1, d_1, d_2, d_3, \dots, d_r$ 及 n 表 a_n 之公式.

(1) 之二階差

(1) 之三階差

$$a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots, a_n - a_{n-1} = 0 \quad (2)$$

(2) 之首項為 d_1 ，又因(2)之一階差為(1)之二階差，餘類推；故(2)的一、二、...階差之首項為 d_1, d_2, \dots

故當表示(1)內求得任一特項之式後，即能用此法導出(2)內相當項之式：

$$a_1, a_2, a_3, \dots \quad \text{與} \quad a_1, d_1, d_2, \dots \quad (3)$$

因 $d_1 = a_2 - a_1$ ，得 $a_2 = a_1 + d_1$ 。以求 a_3 之公式為始，可算出

a_3, a_4, \dots 如下：

$$\text{故由(3), } \begin{matrix} a_2 = a_1 + d_1 \\ a_3 - a_2 = d_1 + d_2 \end{matrix}$$

$$\text{相加, } a_3 = a_1 + 2d_1 + d_2$$

$$\text{由(3)及(4)得 } a_4 = a_1 + 3d_1 + 3d_2$$

$$\text{繼續相加, 得 } a_5 = a_1 + 4d_1 + 6d_2 + d_3$$

繼續相加，其係數的排列規則如左所示以求 a_n 之累次算，係數相同，故用 § 561，得公式(5)：

$$a_n = a_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} d_2 + \dots + \frac{(n-1) \dots (n-r)}{1 \cdot 2 \dots r} d_r \quad (1)$$

例. 由此公式(1)求 $4^1, 2^2, 3^3, n$ 之第十五項。

由 § 708, $a_1 = 1, d_1 = 7, d_2 = 12, d_3 = d_r = 6$.

$$\text{故 } a_{15} = 1 + 14 \cdot 7 + \frac{14 \cdot 13}{2} \cdot 12 + \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{2 \cdot 3} \cdot 6 = 3375$$

r 階等差級數前 n 項之和，設 S_n 為其和，數列為

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots \quad (1)$$

則 d_1, d_2, d_3, \dots 之意義同 § 710.

從以(1)為一階差之數列:

$$0, a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (2)$$

則 S_n 為(2)之第 $n+1$ 項, 又因(2)為 $r+1$ 階等差數列, 其首項為 0, 其各階差之首項為 $a_1, d_1, d_2, \dots, d_r$, 由(1), 得

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d_1 + \dots + \frac{n(n-1) \cdot (n-r)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (r+1)} d_r \quad (II)$$

例: 求 $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ 首十五項之和.

於 § 708, $n=15, a_1=1, d_1=7, d_2=12, d_3=d_r=6$.

$$\begin{aligned} \text{故 } S_{15} &= 15 + \frac{15 \cdot 14}{2} \cdot 7 + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{2 \cdot 2} \cdot 12 + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{(1 \cdot 2 \cdot 3)} \cdot 6 \\ &= 1440. \end{aligned}$$

2 彈積. $1, 3, 6, \dots$ 彈積之形為三角錐形時, 求彈丸之數.

最上一粒, 第二層有 $1+2$ 粒, 第三層有 $1+2+3$ 粒, 餘類推.

若有 n 層, 彈丸之數為數列 $1, 3, 6, 10, 15, \dots$ 之 n 項之和

此數列之一階差為 $2, 3, 4, \dots$, 二階差為 $1, 1, \dots$

故 $1, 3, 6, \dots$ 為二階等差級數, 而 $a_1=1, d_1=2, d_2=1$.

$$\begin{aligned} \text{故由(II) } S_n &= n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1 \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}. \end{aligned}$$

故二十層彈積為 $20 \cdot 21 \cdot 22 / 6 = 1540$ 粒.

2. 求底為正方形之錐時彈丸之數.

列舉各層彈丸之數, $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$

其一階差為 $3, 5, 7, \dots$, 二階差為 $2, 2, \dots$

故 $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ 為二階等差級數, 且 $a_1=1, d_1=3, d_2=2$.

故由(II),
$$S_n = n \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2$$

$$= \frac{n(n+1) \cdot 3n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

如當 $n=20$, 此彈積含 $20 \cdot 21 \cdot 41/6 = 2870$ 粒。

3. 設底為長方形, 其頂層為 p 粒, 求彈積之粒數。

列舉各層粒數, 得數列 $p, 2(p+1), 3(p+2), 4(p+3), \dots$

一階差為 $p+2, p+4, p+6, \dots$, 二階差為 $2, 2, \dots$ 。

$p, 2(p+1), 3(p+2), \dots$ 為二階等差級數, 其中 $d_1 = p, d_2 = p+2, d_3 = 2$ 。

故由(II),
$$S_n = np + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (p+2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2$$

$$= \frac{n(n+1)(3p+2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

故當 $n=20, p=53$ 時, 此彈積含 $20 \cdot 21 \cdot 53/3 = 3710$ 粒。

關於等差級數之定理。觀察等差級數第 n 項之公式, §710, (1)中之符號, 且依 n 之降級排列, §710, (1)可化為下式:

$$a_n = (nr + b_1, nr^{r-1} + b_2 + br)$$

其中係數 b_0, b_1, \dots, b_r 與 n 無關。

故如當 $r=2$, 得

$$r_n = a_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} d_2$$

$$= \frac{d_2}{2} n^2 + \left(d_1 - \frac{3}{2} d_2 \right) n + (a_1 - d_1 + d_2)$$

故任何 r 階等差數之諸項為 $n=1, 2, 3, \dots$ 各值時之某多項式

$(a_1 + b_1 n^{r-1} + \dots + b_r)$, 其中 n 之次數為 r , 今證明其逆定理如下:

714 定理9. $\phi(x)$ 代為任一 r 次有根整函數, 如

$$\phi(x) = b_0 x^r + b_1 x^{r-1} + \dots + b_r,$$

則於 $\phi(x)$ 中依次置 $x=1, 2, 3, \dots$ 所得之數列 $\phi(1), \phi(2), \phi(3), \dots$ 為 r 階等差級數.

已知之數列為

$$\phi(1), \phi(2), \phi(3), \phi(4), \dots, \quad (1)$$

而求其階差皆相等.

顯然(1)之一階差, 即

$$\phi(2) - \phi(1), \phi(3) - \phi(2), \phi(4) - \phi(3), \dots, \quad (2)$$

為 $x=1, 2, 3, \dots$ 時 $\phi(x+1) - \phi(x)$ 之諸值.

但 $\phi(x+1) - \phi(x)$ 可變為 x 之多項式, 名此多項式為 $\phi_1(x)$,

其次數為 $(r-1)$.

由二項定理 (§561), 得

$$\begin{aligned} \phi(x+1) - \phi(x) &= b_0(x+1)^r + b_1(x+1)^{r-1} + \dots - (b_0 x^r + b_1 x^{r-1} + \dots) \\ &= b_0 x^r + r b_0 x^{r-1} + \dots + b_1 x^{r-1} + \dots - (b_0 x^r + b_1 x^{r-1} + \dots) \\ &= r b_0 x^{r-1} + \dots \end{aligned}$$

仿此, 設

$$\phi_1(x+1) - \phi_1(x) = \phi_2(x), \phi_2(x+1) - \phi_2(x) = \phi_3(x),$$

餘類推, 則在 $x=1, 2, 3, \dots$ 時 $\phi_2(x), \phi_3(x), \dots, \phi_r(x)$ 之值為(1)之二, 三, \dots, r 階差.

但 $\phi_r(x)$ 為常數, 故(1)之 r 階差相等. 因 $\phi_1(x)$ 之次數為

$(r-1)-1$, 即 $r-2$; $\phi_2(x)$ 之次數為 $r-3$; 最後 $\phi_r(x)$ 之次數為 $r-r$ 即0.

例如, 設 $\phi(x) = 2x^2 - x + 1$, 得

$$\phi_1(x) = 2(x+1)^2 - (x+1) + 1 - (2x^2 - x + 1) = 6x^2 + 6x + 1,$$

$$\phi_2(x) = 6(x+1)^2 + 6(x+1) + 1 - (6x^2 + 6x + 1) = 12x + 12,$$

$$\phi_3(x) = 12(x+1) + 12 - (12x + 12) = 12.$$

故 $x=1, 2, 3, \dots$ 時, $9x^2+6x+1, 12x+12, 12$ 之值各 $2x^2$ 之相當倍之一, 二, 三階差而第三階差皆相等, 即皆為 12. 例如, 在 $x=1, 2, 3, 4, 5, \dots$ 時

$$2x^2-x+1=2, 15, 52, 125, 246, \dots \quad (1)$$

$$6x^2+6x+1=13, 37, 73, 121, 181, \dots \quad (2)$$

$$12x+12=24, 36, 48, 60, 72, \dots \quad (3)$$

$$12=12, 12, 12, 12, 12, \dots \quad (4)$$

比較(1), (2), (3), (4), 知(2), (3), (4)係(1)之一, 二, 三階

差,

系1. 連續整數之 r 次乘積必成 r 階等差級數. 715

因 $1^r, 2^r, 3^r, \dots$ 為 $x=1, 2, 3, \dots$ 時, r 次有理整函數 $\phi(x)=x^r$ 之值.

系2. r 次及 s 次二階差級數相當項之積成 $(r+s)$ 次之 716

等差級數.

因 r 次及 s 次兩有理整函數之積為 $(r+s)$ 次之有理整函數.

習 題 LX

1. 求數列 $1, 2, 4, 7, \dots$ 之第二十項及首二十項之和.
2. 求數列 $3, 15, 24, 35, \dots$ 之第八十項及首八十項之和.
3. 下列等差級數屬於何階:

(1) $3, 0, \dots, 0, 3, \dots$; (2) $10, 48, 88, 166, 278, 430, \dots$;

(3) $285, 201, 110, 01, 65, \dots$; (4) $2, 20, 90, 272, 650, 1352, \dots$.

又求 (1) 之第十八項, (2) 之第二十項, (3) 之第十二項及 (4) 之第十項.

4. $1 \cdot 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 4, 3 \cdot 4 \cdot 5, \dots$ 為何階? 第 n 項為何數? 首 n 項之和為何數?

又 $1 \cdot 4 \cdot 2^2, 2 \cdot 6 \cdot 3^2, 3 \cdot 8 \cdot 4^2, \dots$ 為何階? 第 n 項為何數?

5. 求十四層之三角錐形彈簧中之彈丸數，最下層有彈丸幾粒？
6. 若從十五層之正方形彈簧內撤去六層，問餘彈若干？
7. 最上層有一個彈丸之十二層矩形彈簧，共有彈丸幾個？
8. 最下層有彈丸 253 個之三角錐形彈簧，共有彈丸幾個？
9. 三角錐形彈簧與正方形彈簧層數相同，而前者彈丸之數為後者彈丸數之 $\frac{2}{3}$ ，各有彈丸幾個？
10. 最上層有 9 粒，最下層有 240 粒之矩形彈簧，共有彈丸若干？
11. 證明 $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$.
12. 證明 $1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+8n-1)$.
13. 級數之次數及首 n 項之和為何？設其第 n 項為 $n^2 - n + 1$ ？為 $n(n+1) \times (n+2)/6$ ？
14. 若將 $d=1, 2, 3, \dots$ 之各個一階等差級數書出，再求各個級數之一，二，三，四，... 項之和，則得
- 1, 3, 6, 10, ... ; 1, 4, 9, 16, ... ; 1, 5, 12, 22, ... ; ...
- 諸數列，各稱為三角數，四角數，五角數，...
- 求證此諸數列中之第 k 個，其第 n 項及首 n 項之和，各為 $n(kn+k+2)/2$ 及 $n(n+1)(kn-k+3)/6$.
15. 任何階之等差級數，其各項加以他一低階等差級數之常項時，證明其仍屬原階。
16. 設 n 次多項式 $f(x)$ 內，次第代 x 以一階等差級數中之各項，即得 n 階等差級數，普通言之，設代 x 以任何 n 階等差級數之各連續項，求證其所得為 n 階等差級數。

插 入 法

插入法。設 y 之值隨 x 而定，且 y 對 x 在 a 與 b 間尚有一定值。又設 y 之諸值相當於此間 x 值中之某數值，項為 x_1, x_2, \dots, x_n ；則由此諸已知值，應用所謂插入法得導出 y 之值相當於 a 與 b 間之他值。

當 x 表 y 之公式未知時，或難知之，而其式過於複雜，不便用以計算 y 之特殊值時，即可應用此法。

簡述之，其法如下：設 y 等於最簡單之 x 整式，而能適於已知各值者，然後由此方程式導出所求之 y 值，惟此法求得之值僅為其近似值也。

特定係數法。如下例：

例。一 在 $x=2, 3, 4, 5$ ，已知 $y=5, 4, 7, 34$ ；則 $x=5/2$ 時求 y 之值。

因 x 之最簡多項式，對於 x 之四已知值，能取已知值者通常為三次，故假定

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$$

然係數 b_0, b_1, b_2, b_3 如下：

$$\text{因 } x=2 \text{ 時, } y=5, \quad \therefore 5 = b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3;$$

$$\text{因 } x=3 \text{ 時, } y=4, \quad \therefore 4 = b_0 + 3b_1 + 9b_2 + 27b_3;$$

$$\text{因 } x=4 \text{ 時, } y=7, \quad \therefore 7 = b_0 + 4b_1 + 16b_2 + 64b_3;$$

$$\text{因 } x=5 \text{ 時, } y=34, \quad \therefore 34 = b_0 + 5b_1 + 25b_2 + 125b_3;$$

解上面方程式， $b_0=1, b_1=-2, b_2=4, b_3=1/8$ 。

$$\text{故 } y = 1 - 2x + 4x^2 + \frac{1}{8}x^3$$

故當 $x=5/2$ 時，得 $y = 1 - 5 + 25 - 125/8 = 43/8$ 。

一般言之，設 y 有 $r+1$ 個值已知，即 y 相當於 $x=x_1, x_2, \dots, x_{r+1}$ 之各值為 $y=y_1, y_2, \dots, y_{r+1}$ ，即假定

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_rx^r, \quad (1)$$

用上法求 $b_0, b_1, b_2, \dots, b_r$ ，於是當 x 介乎 x_1, x_2, \dots, x_{r+1} 間之各值時， y 之值可以 (1) 為公式算出。

719 遞差法。當 x_1, x_2, \dots, x_{r+1} 為連續整數時，§718 公式 (1) 可變為

$$y = y_1 + (x-x_1)d_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{1 \cdot 2} d_2 + \dots + \frac{(x-x_1) \dots (x-x_r)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r} d_r$$

其中 d_1, d_2, \dots, d_r 指 y 之各階差之各項。

因 x_1, x_2, \dots, x_{r+1} 為連續整數，故 $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_rx^r$ 之相當值，即 y_1, y_2, \dots, y_{r+1} 成 r 階等差級數，§714。故 y_1, y_2, \dots 亦可由 $n=1, 2, \dots$ 代入 §710，公式 (1) 求得之，即

$$y = y_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} d_2 + \dots + \frac{(n-1) \dots (n-r)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r} d_r$$

然在此公式中，使 $n=1, 2, 3, \dots$ 所得之結果，當相同於 (2) 使 $x=x_1, x_2, x_3, \dots, x_r, x_1+1, x_1+2, \dots$

由 (2) 之右邊與 (1) 之右邊 (§718)，對於 $r+1$ 個 x 之值相等，然二者皆為 r 次，故二者恆等，§42F。

例如，§718 中，對於 $x=2, 3, 4, 5$ 值，令 $y=5, 4, 7, 8$ 則

$$y_1, y_2, y_3, y_4 = 5, 4, 7, 8$$

$$\text{一階差} = -1, 3, 1$$

$$\text{二階差} = -10, 16$$

$$\text{三階差} = 0$$

以 $x_1=2, x_2=3, x_3=4, y_1=5, d_1=-1, d_2=10, d_3=0$ 代入 (2)，得 $y=5+(n-2)5+(n-2)(n-3)-10(n-2)(n-3)$ 可變為 $y=1-2x+4x^2-x^3$ ，如 §718。

例. 已知 $\sqrt[3]{30} = 3.1072, \sqrt[3]{31} = 3.1414, \sqrt[3]{32} = 3.1748$ 及 $\sqrt[3]{33} = 3.2075$; 求 $\sqrt[3]{31.6}$.

$$y_1, y_2, y_3, y_4 = 3, 1072, 3, 1414, 3, 1748, 3, 2075.$$

$$\text{一階差} \quad 0.0342, 0.0334, 0.0327.$$

$$\text{二階差} \quad -0.0008, -0.0007.$$

$$\text{三階差} \quad 0.0001.$$

以 $x_1 = 30, x_2 = 31, x_3 = 32, y_1 = 3.1072, d_1 = 0.0342, d_2 = -0.0008, d_3 = 0.0001$ 及 $x = 31.6$ 代入 (2), 得

$$\begin{aligned} & 3.1072 + (1.6)(0.0342) + \frac{(1.6)(0.6)}{2}(-0.0008) + \frac{(1.6)(0.6)(0.4)}{6}(0.0001) = 3.1072 + 0.05472 \\ & - 0.000384 + 0.000064 = 3.1615+. \end{aligned}$$

拉格朗其氏公式. §718 公式(1)可變為下式, 蓋為拉格朗 72(其(Lagrange)氏所發明).

$$\begin{aligned} y = & y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{r+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_{r+1})} \\ & + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{r+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_{r+1})} \\ & + \cdots + y_{r+1} \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_r)}{(x_{r+1}-x_1)(x_{r+1}-x_2)\cdots(x_{r+1}-x_r)}. \end{aligned} \quad (3)$$

因(3)之右邊為 x 之 r 次整函數, 且當 $x = x_1, x_2, \dots, x_{r+1}$ 時之值為 y_1, y_2, \dots, y_{r+1} . 故使 $x = x_1$, 除首項外, 他項皆為零而首項變為 y_1 . 故(3)之右邊與(1)之右邊 (§718) 對於 $r+1$ 個之值相等, 故二者恆等; § 21.

故如 §718, 因 $x = 2, 3, 4, 5$, 使 $y = 5, 4, -7, -34$. 代入(3), 得

$$\begin{aligned} y = & 5 \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-3)(2-4)(2-5)} \\ & + 4 \frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-2)(3-4)(3-5)} \\ & - 7 \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-2)(4-3)(4-5)} \\ & - 34 \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-2)(5-3)(5-4)} \end{aligned}$$

此式可化為 $y = 1 - 2x + 4x^2 - x^3$, 如 § 18.

習題 LXI

1. $x = -3, -2, -1, 0$ 時, 已知 $y = -20, 6, 0, 4$; 求 $x = -5/2$ 時及 $x = -1/2$ 時, y 之值若干?
2. 已知 $f(4) = 1, f(6) = -12, f(7) = -20, f(8) = -18$; 試求 $f(x)$ 然後求 $f(12)$.
3. 已知 $25^2 = 625, 26^2 = 676, 27^2 = 729$; 用遞差法求 28^2 .
4. 已知 $2^3 = 8, 27.4^3 = 64.5^3 = 125$; 用遞差法求 4.8^3 .
5. 已知 $1/22 = 0.04545, 1/23 = 0.04348, 1/24 = 0.04167, 1/25 = 0.04$; 用遞差法求 $1/23.5$.
6. (已知 $\sqrt{432} = 20.7846, \sqrt{433} = 20.8087, \sqrt{434} = 20.8327, \sqrt{435} = 20.856, \sqrt{436} = 20.8806$; 用遞差法求 $\sqrt{435.7}$.)
7. 用拉格朗日公式, 求三次多項式, 已知其對於 $x = -5, 0, 4, 5$ 之值為 $5, 3, -2, -4$.

XXIV. 對數

指數之初步定理

- 21 定理1. 若 a 為大於1之任何實數, 而 p, q 為正整數, 則
- $$\text{因 } a > 1, \therefore a^p > 1, \therefore \sqrt[p]{a^p} > 1, \therefore a^q > 1, \text{ §261.}$$
- 22 定理2. 若 a 為大於1之任何實數, r, s 為任何二有理數如 $r > s$, 則 $a^r > a^s$.
- $$\text{因 } r - s > 0, \therefore a^{r-s} > 1, \therefore a^r - s a^s > a^s, \therefore a^r > a^s, \text{ §§721, 231.}$$
- 23 定理3. 若 $a > 1, n$ 為整數, 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$.
- $$\text{因 } a > 1, \text{ 可書作 } a = 1 + d, \text{ 其中 } d \text{ 為正數.}$$
- $$\text{則 } a^n = (1 + d)^n, \text{ 又因 } (1 + d)^n > 1 + nd, \text{ §561, 故得 } a^n > 1 + nd.$$
- $$\text{因 } \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + nd) = \infty, \text{ 故得 } \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty.$$

定理4. 若 $0 < a < 1$, 而 n 為整數, 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$. 724

因令 $a = 1/b$, 其中 $b > 1$, 因 $a < 1$,
 則因 $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = \infty$, §723, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1/\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = 0$, §512.

定理5. 若 n 為整數, 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$. 725

1. $a > 1$ 時 $a^n > 1$, §721, 因而 $a^n = 1 + d_n$, 其中 d_n 為正數, 其值由 n 而定.

則 $d = (1 + d_n)^n, \therefore d > 1 + nd_n, \therefore d_n < (a - 1)/n$.
 故因 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a - 1)/n = 0$, §512, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$.

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + d_n) = 1$.

2. $0 < a < 1$ 時, 令 $a = 1/b$, 其中 $b > 1$, 因 $a < 1$.

則由1, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b^n} = 1$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n} = 1/\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b^n} = 1$.

定理6. 若 b 為有理數, a 為無理有理數, 而漸近於 b 之變數, 726

則 $\lim_{n \rightarrow h} a^x = ab$.

(8V)

1. 此定理適於 a 之極限 b 為 0 時.

因在 a 時可選定一變數 n , 此變數僅取整數值, 且如此永遠可使 $-1/n < a < 1/n$, 又當 $x \rightarrow 0$ 時, $n \rightarrow \infty$.

則 a^x 在 $a^{1/n}$ 與 $a^{-1/n}$ 之間; §722. 然 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-1/n} = 1$, §725.

故 $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1 = a^0$.

2. $b \neq 0$ 時, 此定理亦真.

因 $a^x = a^b \cdot a^{x-b}$, 由1, $\lim_{x \rightarrow b} a^x = a^b \cdot \lim_{x \rightarrow b} a^{x-b} = a^b$.

定理7. 若 b 為無理數而 x 為有理數, 而漸近於 b 之變數, 727

則 $x \rightarrow b$ 時, a^x 漸近於一極限, 其值與 x 漸近於 b 時所取之數無異.

無論 $a > 1$ 或 $a < 1$ 之理皆同,但先假定 $a < 1$.

x 於漸近於 b 為極限時,可有無限組有理數值,為其極限. 在其中選一遞增數列,使 x 依此數列變化時,以 x' 表之. 則 $x \rightarrow b$ 時,變數 $a^{x'}$ 繼續增大, §772, 然常取有限數,例如小於 a^c , 設 c 表大於 b 之任何有限數,故 $a^{x'}$ 漸近於一極限, §192, 稱之為 L .

今欲證明設 x 經過 c , 所經過外之另一有理數列時, x 將漸近於同一極限 L . 但 $a^x = a^{x'} \cdot x^{-x'}$, 故 $\lim_{x \rightarrow b} a^x = \lim_{x' \rightarrow b} a^{x'} \cdot \lim_{x \rightarrow b} x^{-x'}$ $= L$, 因 $\lim_{x \rightarrow b} x^{-x'} = 1$, §726.

728 無理指數. 使 x 經過任何有理數列, 以漸近於 b , x 所漸近之極限, 吾人以符號 a^b 表之. 故 b 為無理數時, a^b 為 $\lim_{x \rightarrow b} a^x$.

729 當 x 為無理數時, a^x 之意義已如前指定, 可證證明當 x 經一無理數列而漸近於 b 時, $\lim_{x \rightarrow b} a^x = a^b$.

因設 x', x, x'' 表示三變數, 漸近於極限 b , x' 及 x'' 經歷有理數列, x 經歷無理數列, 且 $x' < x < x''$. 於是由§§726, 727知 x 在 $a^{x'}$ 及 $a^{x''}$ 之間, 且因 $\lim_{x' \rightarrow b} a^{x'} = \lim_{x'' \rightarrow b} a^{x''} = a^b$, 故 $\lim_{x \rightarrow b} a^x = a^b$.

730 定理8. 指數定律亦可應用於無理指數.

因設 b, c 表無理數, x, y 各表漸近於 b 和 c 之二變數, 設 a 及 y 僅取有理值.

1. $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

因 $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, 得 $\lim_{x \rightarrow b} a^x a^y = \lim_{x \rightarrow b} a^{x+y}$.

但 $\lim_{x \rightarrow b} a^x a^y = \lim_{x \rightarrow b} a^x \cdot \lim_{y \rightarrow c} a^y = a^b a^c$, §§207, 728

又 $\lim_{x \rightarrow b} a^{x+y} = a^{\lim(x+y)} = a^{b+c}$, §§207, 728

2. $(a^b)^c = a^{bc}$

因 $(a^x)^y = a^{xy}$.

故 $\lim_{x \rightarrow b} (a^x)^y = \lim_{x \rightarrow b} a^{xy}$, 或 $(a^b)^y = a^{by}$, §728

故 $\lim_{y \rightarrow c} (a^b)^y = \lim_{y \rightarrow c} a^{by}$, 或 $(a^b)^c = a^{bc}$, §§728, 729

又 $\lim_{y \rightarrow c} a^{bc} = a^{bc}$.

故 $\lim_{y \rightarrow c} (a^b)^y = \lim_{y \rightarrow c} a^{by} = \lim_{y \rightarrow c} a^y \cdot \lim_{b \rightarrow b} a^b = a^c a^b = a^{cb}$, §207

故 $(a^b)^c = a^{cb}$, §729

對數。以 a 為底數，此間 a 字包括 1 以外之任何正數，則

之各實數器如 a^μ 表一有限正數，如 a^μ 可即內擬反證任一實數 m 可取 a^μ 代表之。

設 $a^\mu = m$ ，則稱 μ 為 m 以 a 為底之對數，且以符號 $\log_a m$ 表之。故 m 之 a 底對數為將 a 增大以等於 m 所需之器出數，亦即 $a^{\log_a m} = m$ 。

例如， $3^4 = 81$ ， $\therefore 4 = \log_3 81$ ； $2^{-3} = 1/8$ ， $\therefore -3 = \log_2 1/8$ 。
 因 $a^0 = 1$ ，故 $\log_a 1 = 0$ 常真；又因 $a^1 = a$ ，故 $\log_a a = 1$ 。
 若 $a > 1$ 時，依 § 722，由 $a^\mu = m$ 可知 m 之值若隨增加，其對數 μ 之值亦與之俱增；又 m 若大於 1，其對數 μ 為正數，若 m 在 1 與 0 之間，其對數 μ 為負數。

又 $a > 1$ 時，由 § 723，
 $\lim_{\mu \rightarrow \infty} a^\mu = \infty$ ，而 $\lim_{\mu \rightarrow -\infty} a^{-\mu} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} 1/a^\mu = 0$ 。

即 $a > 1$ 時， $\log_a \infty = \infty$ 又 $\log_a 0 = -\infty$ 。
 定理 1. 凡乘積以任何數為底之對數，等於各因數以同數

為底之對數之和。

因設 $m = a^\mu$ ，即 $\mu = \log_a m$ ，
 $n = a^v$ ，即 $v = \log_a n$ 。
 則 $mn = a^\mu a^v = a^{\mu+v}$ ，

故 $\log_a mn = \mu + v = \log_a m + \log_a n$ 。

定理 2. 凡商之對數，等於被除數之對數減除數之對數。

因設 $m = a^\mu$ ，與 $n = a^v$ 。
 得 $m/n = a^\mu / a^v = a^{\mu-v}$ 。
 故 $\log_a (m/n) = \mu - v = \log_a m - \log_a n$ 。

738 定理 3. 凡一數之任何幕之對數，等於此數之對數乘幕指數。

因設

$$m = a^{\mu}$$

得

$$m^r = (a^{\mu})^r = a^{\mu r}$$

即

$$\log_a m^r = r\mu = r \log_a m.$$

739 定理 4. 凡一數之任何根之對數，等於此數之對數除以根指數。

因設

$$m = a^{\mu}$$

得

$$\sqrt[s]{m} = \sqrt[s]{a^{\mu}} = a^{\mu/s}$$

即

$$\log_a \sqrt[s]{m} = \mu/s = (\log_a m)/s.$$

740 對數之實用即利用其 §§ 736—739 所求得之性質。以 10 爲底之對數已算出且列表焉。設利用此表，則積之值可用加法，商用減法，幕用乘法，根用除法得之。

$$\text{如 } \log_{10} \frac{\sqrt[7]{5} \sqrt[8]{6}}{3^{25}} = \log_{10} \sqrt[7]{5} + \log_{10} \sqrt[8]{6} - \log_{10} 3^{25} \quad \text{§§ 736, 737}$$

$$= (\log 5)/7 + (\log 6)/8 - 25 \log 3. \quad \text{§§ 738, 739}$$

故求 $\sqrt[7]{5} \sqrt[8]{6} / 3^{25}$ 之值僅需尋出表內 $\log 5$, $\log 6$, $\log 3$ 之值，再計算 $(\log 5)/7 + (\log 6)/8 - 25 \log 3$ 之值，最後再尋出以此值爲對數之值數。

習

題

LXII

1. 求 $\log_2 8$, $\log_2 2$, $\log_2 \sqrt{8}$, $\log_3 625$, $\log_3 729$, $\log_{10} 0.001$, $\log_{10} 1/64$, $\log_{10} 0.125$, $\log_a \sqrt[3]{a^2}$, $\log_a 128$, $\log_a a^3$.

2. 設 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, 求以 10 爲底 12 , $9/2$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{6}$ 之對數。

3. 以 $\log_a 2$, $\log_a 3$, $\log_a 5$ 表 $\log_a 600$.

4. 以 $\log_a b, \log_a c, \log_a d$, 表下式以 a 爲底之對數:

$$(1) b^{\frac{2}{3}} c^{-\frac{1}{2}} / d^{\frac{4}{5}}, \quad (2) \sqrt[3]{a^{-2} \sqrt{bc}} \div \sqrt{b^3 \sqrt{a^{-3}}}$$

5. 證明 $\log_3 \sqrt[3]{81 \sqrt[4]{729} \cdot 9^{-\frac{2}{3}}} = 31/18$.

6. 證明 $\log_a \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 2 \log_a (x + \sqrt{x^2 - 1})$.

常 用 對 數

常用對數之計算, 除 1 外之任何正數皆可爲底, 今爲便利計 741
算起見, 吾人採用以 10 爲底之對數, 此之謂常用對數, 故 $\log m$

即表示 $\log_{10} m$.

因 $10^0 = 1, \therefore \log 1 = 0; 10^1 = 10, \therefore \log 10 = 1; 10^2 = 100, 742$
 $\therefore \log 100 = 2, \dots$; 又 $10^{-1} = 0.1, \therefore \log 0.1 = -1; 10^{-2} = 0.01,$
 $\therefore \log 0.01 = -2, \dots$.

故其常用對數爲整數者如下表:

數... 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000...

其對數... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

觀察此表, 諸數成一公比爲 10 之等比級數, 其對數則成公差
爲 1 之等差級數.

常用對數爲有理者之有理數僅有上表中之諸數, 因 10 之分 743
數方事皆爲無理數故也. 但今將證明任何正數有皆一常用對數,
又對數之值皆可算至任意之小數位數.

設將 10 開方, 再以其結果開方, 類推而計算至第五位小數,

得下表:

$$10^{\frac{1}{2}} = 3.16228, 10^{\frac{1}{5}} = 1.674615, 10^{\frac{1}{10}} = 1.07177, \\ 10^{\frac{1}{4}} = 1.77828, 10^{\frac{1}{16}} = 1.03826, 10^{\frac{1}{32}} = 1.01189, \\ 10^{\frac{1}{8}} = 1.33352, 10^{\frac{1}{24}} = 1.01815, 10^{\frac{1}{48}} = 1.00456, \\ 10^{\frac{1}{6}} = 1.15478, 10^{\frac{1}{12}} = 1.00904, 10^{\frac{1}{24}} = 1.00050,$$

等, 如此推演, 則所得結果, 漸近於 1 為極限(比較 § 725). 此之根數 1/2, 1/4, ... 即右方相當之對數.

由此表凡數在 1 與 10 之間者, 皆可用下列之法計算其對數.

例, 求 4.26 之常用對數.
 以表內較小於 4.26 之數 3.16228 除 4.26.
 商為 1.34719. 以 4.26 = 3.16228 × 1.34719. 因
 以表內較小於 1.34719 之數 1.33352 除 1.34719.
 商為 1.0102. 故 4.26 = 3.16228 × 1.33352 × 1.0102.
 仿此繼續以表內一較小數除最後商.

設 q_n 表第 n 次除後之商, 則用此法必得 4.26, 此為表 n 數及 q_n 之積之式, 其結果為

$$4.26 = 3.16228 \times 1.33352 \times 1.00904 \times \dots \times q_n \\ = 10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{8}} \cdot 10^{\frac{1}{24}} \cdot \dots \cdot q_n = 10^{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \dots}$$

當 n 增大時, 指數 $1/2 + 1/8 + 1/24 + \dots$ 至多項漸大, 但此後漸趨於 1, 其和漸為無窮級數 $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ 之一部份, 而後者之和為 1 (§ 704, 例 1). 故此式漸近於 $10^{1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots}$ 其值較小於 1 (§ 192). 此極限可以 $1/2 + 1/8 + 1/256 + \dots$ 表示.

故 4.26 之常用對數為 $1/2 + 1/8 + 1/24 + \dots$.
 此商之除數與 1 之間, 如前例, 除後漸近於 1 為極限.
 故 $4.26 = \lim_{n \rightarrow \infty} 10^{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{n}}$

此式之極限為 $10^{1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \dots} = 10^{1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots} = 10^{1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots}$

從 1 與 10 間諸數之常用對數，可由加一正數或負數導出 745
其他正數之常用對數。

例. 求 42.6 及 0.426 之常用對數。

$$1. \quad 42.6 = 10 \times 4.26.$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \log 42.6 &= \log 10 + \log 4.26 \\ &= 1 + \log 4.26 = 1.6294. \end{aligned}$$

$$2. \quad 0.426 = 4.26/10 = 10^{-1} \times 4.26.$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \log 0.426 &= \log 10^{-1} + \log 4.26 \\ &= -1 + \log 4.26 = \bar{1}.6294. \end{aligned}$$

仿此， $\log 426 = 2.6294$ ， $\log 0.0426 = \bar{2}.6294$ ，餘類推。即
凡數之數字列與 4.26。相同者可加一正整數 或負整數於其對
數。

指標及尾數。上例所示對數，其小數部份稱為尾數，整數 746
部份稱為指標。

如 $\log 42.6 = 1.6294$ 與 $\log 0.426 = \bar{1}.6294$ ，尾數 0.6294
相同而各有指標 1 或 -1。

§ 745 內所示，設 n 為正整數，則 $\log n$ 之尾數僅依 n 之數 747
字列，而其指標則由其小數點之位置而定。

設 n 在 1 與 10 之間，則 n 整數部份僅有一位， $\log n$ 之指 748
標為 0，§ 744。若 n 之小數點，移右一位，即 n 乘以 10，則於此
 $\log n$ 之指標 0 上加 1。仿此，若小數點，移右二位，即加 2 於 \log
之指標，餘類推，§ 745。故其定律：

設 $n > 1$ ，則 $\log n$ 之指標較 n 之整數部份之位數少一，

如 $\log 426000 = 5.6294$ ， $\log 4260000 = 7.6294$ ，餘類推。

749 仿此，整數部份祇有一位數字之數 n ，若將小數點向左移 μ 位，即 n 若乘 $10^{-\mu}$ ，則 $\log n$ 之指標原為 0 者即增 $-\mu$ 。例如：
 $\log 0.426 = -1 + \log 4.26 = \bar{1}.6294$ ， $\log 0.0426 = \bar{2}.6294$ ，餘類推，§745。

實際上，將 $\bar{1}, \bar{2}, \dots$ 等負指標書作 $9-10, 8-10, \dots$ 之形式。置 $9, 8, \dots$ 等正數於尾數之前，而書 -10 於其後，較為便利。例如，
 $\bar{1}.6294$ 可書作 $9.6294-10$ ，故有下列之法：

若 $n < 1$ ，則 $\log n$ 之指標為負數，其求法可將 n 中緊接於小數點後之 0 之個數，從 9 減去，然後書 -10 於其尾數之後。

例如， $\log 0.00426 = 7.6294-10$ ， $\log 0.00000426 = 3.6294-10$ 。

設小數點後之零數多於 9 而小於 19，於是從 19 減之，寫其差於尾數之前，而為 -20 於其後，餘類推。

例，已知 $\log 2 = 0.3010$ ，求 2^{25} 所含之位數。

750 對數表。下面 384, 385 頁之對數表，包括三位數之各數之對數尾數，計算至小數四位，按其大小排列而略去小數點。

從此表亦可用下面原則，求得多於三位數之尾數：

設一數受到變化而此變化與此數之本身相較為量極小，則其對數之變化與此數所受之變化成正比例。

藉此表求得之數，如在四位以上則不可靠，如更須準確，則

1760 1880 1900 2000
 按此四位以上之對數尾數也。學生亦不難得一五位，六位，七
 位數。

從表求一數之對數。辦法如下例。

例 1. 求 0.00589 之對數。

在冠以 N 之行內，找出 58，然後沿 53 之列向右至冠以 9 之一行處，得 7761，此即為所求之尾數(前有一小數點)。其指標為 $7-10$ ，§ 749。

$$\log 0.00589 = 7.7701 - 10.$$

例 2. 求 8 及 46 之對數。

其對數之尾數各與 800 及 460 相同，故如例 1 求之，得

$$\log 8 = 0.9031, \quad \log 46 = 1.6628.$$

例 3. 求 4673 之對數。

其尾數同於 $\log 467.3$ ，故必在 $\log 467$ 之尾數與 $\log 468$ 之尾數之間。

從表上找出 $\log 467$ 之尾數 = 6693， $\log 468$ 之尾數 = 6702，二尾數之差為 9。

故設 467 加 1，則於 $\log 467$ 加 9。由是加 0.3 於 467，則加 9 之 $\frac{3}{10}$ 即近似之 3 於 $\log 467$ 之尾數。

故 $\log 467.3$ 之尾數 = 6693 + 3 = 6696，即

$$\log 0.4673 = 9.6696 - 10.$$

注意：未寫指標前，常略去寫於尾數前之小數點。

其例 3 所示求位數多於三位之數之對數方法可述之如下：

從表找得相當於前三位之尾數 m ，及該 m 與其次之較大

之尾數 d 。

以數之餘留部份冠以小數點而乘以 d ，加其積之整數(小數

四捨五入)於 m 。

對 數 表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0452	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0854	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1129	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1439
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2382	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4785	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4885	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6655	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	7008	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7151
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

對 數 表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7414	412	7419	7417	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	750	7513	7520	7527	7536	7541	7551
57	7559	7568	7574	7582	7590	7597	7601	7612	7618	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8888	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8992	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

752 已知其對數而求某數。祇須將前節所述之法逆用之。

例1. 某數之對數為 $5.9552-10$, 求某數。

從表內列中有 90 及行中有 2 者得尾數 9552, 故所求之數字列為 962.

又因指標為 $5-10$, 故此數為小數點後 9-5 即 4 個 0 後之小數, § 749, 故所求之數為 0.0060902.

例2. 某數之對數為 7.6520, 求某數。

從表內已知尾數 6520 在相當於 356 及 357 之尾數 5514 及 3527 之間, 此較小尾數與較大尾數之差為 13, 與已知尾數 6520 之差為 6.

故設尾數 5514 增 13, 則 356 增 1, 設尾數 5514 增 6, 則 356 應增 1 之 $6/13$, 即約增 0.5.

故所求數字列為 3565, 又由指標法則, § 748, 知此數為 35650000.

吾人由是可知數字列相當於表上所未載之某尾數。

從表求較小尾數 m , 相當之王位數, 及 m 與較大尾數之差 d .

從已知尾數減去 m , 并以 d 除其餘數, 并其商於所得之數之後。

753 餘對數。一數之餘對數, 為該數倒數之對數。

因 $\text{colog} m = \log 1/m = \log 1 - \log m = -\log m$, §§ 733, 767, 故求某數之餘對數, 僅需變其對數之符號即可, 然為數若負數, 必使所有對數之小數部份為正, 故可以下法做之:

例1. 求 $\text{colog} 89.2$.

得 $\log 1 = 10 \quad -10$

又 $\log 89.2 = 1.9504$

故 $\text{colog} 89.2 = 8.0496 - 10$

例2. 求 $\text{colog} 0.929$.

得 $\log 1 = 10 \quad -10$

又 $\log 0.929 = 9.9690 - 10$

故 $\text{colog} 0.929 = 0.0320$

故由某數之對數求其餘對數時，從其對數之指標起將各位數字由9減之，至末位前一位有效數字止，末位有效數字則由10減之。在此結果之後附以-10與否，視所用原對數之有否相附而定。如是則不多於三位數字之各數，其餘對數可直接從表得出也。

用對數計算。使用對數以求積，商，幕，根之近似值（比較 754 § 740）下例足以闡明其計算之迅速。

例1.， 求 $0.0325 \times 0.6425 \times 5.26$ 之積。

$$\log(0.0325 \times 0.6425 \times 5.26) = \log 0.0325 + \log 0.6425 + \log 5.26.$$

而 $\log 0.0325 = 8.5119 - 10$

$$\log 0.6425 = 9.8079 - 10$$

$$\log 5.26 = 0.7210$$

故積之對數 $= 19.0408 - 20 = 9.0408 - 10$

故積為 0.1099

例2. 求 $46.72 / 0.0998$ 之商。

$$\log(46.72 / 0.0998) = \log 46.72 - \log 0.0998.$$

而 $\log 46.72 = 11.6695 - 10$

$$\log 0.0998 = 8.9991 - 10$$

故商之對數 $= 2.6704$

故商為 468.2

吾人將 $\log 46.72$ 即 1.6695 書作 $11.6695 - 10$ 者因須記去 $8.9991 - 10$, 使前者之正數部份較後者之正數部份大也。

例3. 求 $295 \times 0.05631 \div 806$ 之值。

$$\log(295 \times 0.05631 \div 806) = \log 295 + \log 0.05631 + \text{colog} 806.$$

而 $\log 295 = 2.4693$

$$\log 0.05631 = 8.7536 - 10$$

$$\text{colog} 806 = 7.0937 - 10$$

故所求結果之對數 $= 18.3141 - 20 = 8.3141 - 10$

故其值為 0.02061 .

例4. 求 0.7929 之六次冪。

$$\log(0.7929)^6 = 6 \times \log 0.7929.$$

而 $\log 0.7929 = 9.8992 - 10$

6

故 $\log(0.7929)^6 = 59.3952 - 60 = 9.3952 - 10$

故 $(0.7929)^6 = 0.2484$.

例5. 求 0.00898 之七次根。

$$\log \sqrt[7]{0.00898} = (\log 0.00898) \div 7.$$

而 $\log 0.00898 = 7.9533 - 10$

$$\frac{7.9533 - 10}{7} = 67.9533 - 70$$

故 $\log \sqrt[7]{0.00898} = 9.7076 - 10$

$$\text{故 } \sqrt[7]{0.00898} = 0.510$$

$$01 - 2.10 \cdot e = 0.9 - 0.01 \cdot e =$$

注意：如遇將一數除負對數如上時，可先加10之倍數於其正負兩部，使負數之商適為-10。

凡負數無以10為底之實對數，蓋10之實數冪皆為正數。欲求含負因數之式之值，宜先用對數，求其式之絕對值，再將適當符號於其結果。

例如，設已知式 $456 \times (-85.96)$ ，應先用對數求 456×85.96 之值，然後附負號於其值之前。

習題 LXIII

用對數求下列各近似值：

- 1. $79 \times 470 \times 0.982$.
- 2. $(-9503) \times (-0.0006378)$.
- 3. 1375600×8799000 .
- 4. $0.0356 \times (-0.00047)$.
- 5. $\frac{8075}{361.9}$.
- 6. $\frac{0.00542}{0.04703}$.
- 7. $\frac{24317}{-0.00054}$.
- 8. $\frac{0.043 \times 7095}{67 \times 9 \times 0.462}$.
- 9. $\frac{8097 \times 5.4086}{-225 \times 598 \times 0.8668}$.
- 10. $(2.388)^5$.
- 11. $(0.57)^{-4}$.
- 12. $(19/11)^0$.
- 13. $(1.014)^{25}$.
- 14. $\sqrt{67.54}$.
- 15. $\sqrt[3]{-0.36892}$.
- 16. $8^{\frac{5}{7}}$.
- 17. $(0.001)^{\frac{3}{5}}$.
- 18. $(20\frac{9}{11})^{\frac{1}{2}}$.
- 19. $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \times \frac{7}{8} \times \frac{3}{5}}$.
- 20. $\sqrt{0.1 + (0.009)^{\frac{3}{5}}}$.
- 21. $(0.00038)^{-\frac{5}{2}}$.
- 22. $(6\frac{2}{3})3^{0.5}$.
- 23. $(-9303)^{\frac{2}{3}}$.
- 24. $(0.0037)^{2.5}$.
- 25. $(5648)^{\frac{1}{2}} \times (-0.64)^{\frac{1}{3}}$.
- 26. $28927^{\frac{1}{2}} + (0.8)^{\frac{2}{3}}$.
- 27. $\frac{\sqrt[3]{0.0476} \times \sqrt[5]{2.2}}{\sqrt[5]{5259} \times 0.0038}$.
- 28. $\frac{\sqrt[5]{943 \times 7498}}{\sqrt[3]{0.00006} \times 0.99}$.
- 29. $\sqrt{\frac{854 \times \sqrt[3]{0.042}}{7.9855 \times \sqrt[5]{0.0005}}}$.
- 30. $\sqrt[3]{\frac{7\frac{1}{2} \times 42\frac{1}{2} \times (0.01)^{\frac{1}{2}}}{(0.0002)^{\frac{1}{2}} \times 5968\frac{1}{2}}}$.

常用對數之應用

不以 10 為底之對數，由下列之定理，由一數以 10 為底 755 之對數，得求出 1 之外其他任何正數為底之對數，

m 之對數以不同之 a 及 b 為底，其關係可以公式 $\log_b m = \log_a m / \log_a b$ 表示之。

因設 $m = a^u$ ，即 $u = \log_a m$ ，
又使 $b = a^v$ ，即 $v = \log_a b$ ，

因 $a^v = b$ ，得 $a = b^{\frac{1}{v}}$ 。

故 $m = a^u = (b^{\frac{1}{v}})^u = a^{\frac{u}{v}}$ ，
 $\log_b m = \frac{u}{v} = \log_a m / \log_a b$ 。

例. 求0.586之對數, 以7為其底數.

$$\log_7 0.586 = \frac{\log 0.586}{\log 7} = \frac{9.7679-10}{0.8451} = -\frac{2321}{8451} = -0.2746.$$

將9.7679-10化為全部或負數之形式即 0.2321, 更用對數以完成最後之除法.

756 $m=a$ 時, 由公式得 $\log_b a = 1/\log_a b$.

757 除10為底數之外, 在實用上僅有一用字母 e 指示之某無理數. 此數之近似值為2.718. 用 e 為底之對數稱曰自然對數. 以後尚須論及.

758 指數方程及對數方程. 未知數在指數或對數式中之方程, 可時可解之如下.

例1. 解方程 $93^{2x+5} = 14^{x+7}$.

兩端各取對數, $(2x+5) \log 93 = (x+7) \log 14$.

$$\text{解} \quad x = \frac{7 \log 14 - 5 \log 93}{2 \log 93 - \log 14} = \frac{9.452}{1.017} = 2.209.$$

例2. 解方程 $\log \sqrt{x-21} + \log x = 1$.

從 § 736, 739, 上式可化為

$$\log_2 \sqrt{x(x-21)} = 1 = \log 10.$$

故 $x^2 - 21x = 100$.

解 $x = 25$ 或 -4 .

例3. 解方程 $x^{2 \log x} = 10x$.

取對數, $2(\log x)^2 = \log x + 1$.

解 $\log x$, $\log x = 1$ 或 $-1/2$.

故 $x = 10$ 或 $1/\sqrt{10}$.

759 複利. 設本金 P 元按複利計算, 時期 n 年, 利息每年併入本中, 而每元每年利息為 r .

則一年以後, 此款變為 $P+Pr$ 或 $P(1+r)$, 第二年以後

為 $P(1+r) \cdot (1+r)$ 亦即 $P(1+r)^2$, 餘類推, 故設 A 為 n 年末之本利和, 則得

$$A = P(1+r)^n.$$

設每半年複利一次, 則 $A = P(1+r/2)^{2n}$; 設每年四次, 則 $A = P(1+r/4)^{4n}$; 其餘類推.

P 稱為 A 之現值. 若已知 A , n 及 r , 即可由公式 $P = A(1+r)^{-n}$, 求出 P 之值.

例1. 本金2500元, 以複利計算, 年利率4%, 求十八年後之本利和.

$$A = 2500(1+0.04)^{18}$$

$$\text{即 } \log A = \log 2500 + 18 \log 1.04 = 3.7029.$$

$$\text{故 } A = 5057 \text{ 元, 約值.}$$

例2. 十年間, 於每年之始付給120元之保險費, 則十年後按複利率為4%其總值若干?

$$\text{總值為 } 120[1.04 + (1.04)^2 + \dots + (1.04)^{10}],$$

$$\text{故由 } \$ 701, \quad 120 \times 1.04 \times \frac{(1.04)^{10} - 1}{0.04}.$$

$$\text{由對數, } (1.04)^{10} = 1.479.$$

故所求值為 $120 \times 1.04 \times 0.479 \div 0.04$; 由對數計算得近似值1493元.

年金: 依固定期間, 如每年一次, 支付之款, 稱為年金. 760

今求每年支取一次, 由本年起支取 n 年之年金 A 元之現值, 設一元一年之利息為 r .

第一次支付之現值為 $A(1+r)^{-1}$, 第二次為 $A(1+r)^{-2}$, 餘類推.

故其現值為, \$ 701,

$$A \left[\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^n} \right] = \frac{A}{r} \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right].$$

設年金永遠繼續, 即 $n = \infty$, 則 $(1+r)^n = \infty$, 則現值之公

式化為 A/r .

例，求每年支付一次，繼續20年之年金1000元之現價，年利率為3%？

$$\text{現價 } P = \frac{1000}{0.03} \left[1 - \frac{1}{(1.03)^{20}} \right].$$

用對數， $(1.03)^{20} \approx 1.803$.

$$\text{故 } P = \frac{1000}{0.03} \left[1 - \frac{1}{1.803} \right] = \frac{1000 \times 0.803}{0.03 \times 1.803} = 14845 \text{ 元, 約值.}$$

習題 LXIV

1. 求 $\log_5 535$, $\log_7 0.43$, $\log_{10} 47$ 元, 之前.
2. 解下列指數方程:
 - (1) $3x = 729$.
 - (2) $a^{x^2+2} = a^{3x}$.
 - (3) $213x = 5! 6^{-x+4}$.
3. 解下列對數方程:
 - (1) $\log x + \log(x+3) = 1$.
 - (2) $\log x^2 + \log x = 2$.
 - (3) $\log(1-2x)^2 - \log(3-x)^2 = 6$.
 - (4) $x^{\log x} = 2$.
4. 本金7500元, 時期三十五年, 一年一期之5%複利率, 本利和應若干?
5. 本金5500元, 複利率3%, 半年一期, 二十年之本利和若干?
6. 試求複利率5%之本利和, 十五年後超過其本金二倍, 九十五年超過其本金百倍.
7. 照複利率3%, 存款若干元則能於十五年後得1250元之本利和?
8. 某人每年投資儲蓄銀行200元, 每年利息為全數之3%, 求二十五年末其人應得總數若干?
9. 每年1200元, 繼續三十年之年金, 設年利率4%, 問其現價若干? 又設為永續年金其現價若干?
10. 設 c 為直角三角形之弦, b 為其另二邊, $b = \sqrt{(c+a)(c-a)}$. 已知 $c = 585.4$, $a = 312$, 求 b 及此三角形面積, 應用對數計算之.

11. 設 a, b, c 指三角形三邊之長, $s = (a+b+c)/2$, 其面積為 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 若 $a=416.8, b=424, c=25.68$, 求此三角形之面積.

12. 用公式 $S=4\pi r^2, V=4\pi r^3/3, \pi=3.1416$, 求半徑 23.6 之圓球之面積及體積.

XXV. 排列及組合

排列及組合之定義. 設一羣字母共 n 個, 如 a, b, c, \dots, k , 761 指任何種之物體.

此羣 n 個字母中, 若不論其次序, 任取 r 個為一組, 則名為 n 字母中, 每次取 r 個之組合或 n 字母中 r 之組合.

其組合之數目, 用符號 C_r^n 表之.

例如, a, b, c, d 四字母中 2 之組合為

$$ab, ac, ad, bc, bd, cd.$$

共有六個組合, 即 $C_2^4 = 6$.

又若按一定次序由 n 個字母中取 r 個而排列之, 則名為 n 字母中 r 之排列.

其排列之數目, 用符號 P_r^n 表之.

例如, a, b, c, d 四字母中取 2 字母之排列為

$$ab, ac, ad, bc, bd, cd,$$

$$ba, ca, da, cb, db, dc.$$

共有十二個排列, 即 $P_2^4 = 12$.

注意: ab 與 ba 在組合中為一個, 而排列上為二個;

上述字母 a, b, \dots, k 各不相同, 而任何字母之重複在組合及

排列中皆不允許。本章內除特別說明者外，皆作此意義。

762 基本定理。§ 554 中已選用下列之原則：

設一事有 m 個作法，又設其完成後，另一事有 n 個作法，

則總計共有 mn 個作法。

其理由：在第一件之每種作法，即有 n 法作第二事，

第一事有 m 法，故作兩事共有 mn 法。

一般言之，設第一件有 m 個作法，第二件有 n 個作法，

三件有 p 個作法等等，則合成一起，共有 $m \cdot n \cdot p \dots$ 個作法。

例 用 $1, 2, 3, \dots, 9$ 諸數字，可作數字相異之三位數若干？

可取九數字之任一個佔第一位，其餘八個數字中之任一個佔第二位，取定第二位後，設餘七個數字之任一個佔第三位，故所求作法可有 $9 \cdot 8 \cdot 7$ 即 504 種。

763 n 個不同字母之 r 排列數，從前例之理論，可證明 P_r^n 可由下公式求得之。

$$P_r^n = n(n-1)(n-2) \dots \text{至 } r \text{ 個因式。} \quad (1)$$

因 n 個不同字母，每次取 r 個之排列，可取 n 字母中任何之一佔第一位，其餘 $n-1$ 個字母之任一個佔第二位，取定第二位後，其餘 $n-2$ 個之任一個可佔第三位，餘類推。

故依 § 762 取第一，第二，第三， \dots ，第 r 諸字母之法，即

個不同字母之 r 排列法 $= n(n-1)(n-2)\cdots$ 至 r 個因式,

故 a, b, c, \dots, e 諸字母, 每次取一個, 二個, 三個, 四個, 五個之排列數目為

$$P_1^5 = 5, P_2^5 = 5 \cdot 4, P_3^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3, P_4^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2, P_5^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

當然在連續 $n(n-1)(n-2)\cdots$ 中之第 r 因式為 $n-(r-1)$ 即 $n-r+1$. 故公式(1)可寫為

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1). \quad (2)$$

$r = n$ 時, 則因式 $n-r+1$ 為 $n-n+1$, 即 1, 而 $P_n^n = n(n-1)$

2.1. 即 $1 \cdot 2 \cdots (n-1)n$. 此連續乘積 $1 \cdot 2 \cdots n$ 謂之 n 階乘, 而以符號 $n!$ 或 $[n]$ 表之故以 n 個字母, 每次全取共有之排列法以下式表之

$$P_n^n = n! \quad (3)$$

無意義之符號 $0!$ 定其值為一, 將於 § 775 說明之.

例1. 以不同顏色之四旗作信號, 用三旗或數旗上下排列之, 問不同之信號有若干?

每次信號可用旗 1, 2, 3 或 4 枚排列之. 故信號數共計為 $P_1^4 + P_2^4 + P_3^4 + P_4^4$

$$= 4 + P_2^4 + P_3^4 + P_4^4 \text{ 即 } 64.$$

例2. *fancies* 中字母, 每次全取而排列之:

(1) 字首, 字尾兩子音者有幾法?

此字第一位字母之變化, 可有 4 法, 末位有 3 法, 而中間可有 5! 法, 故總計 $4 \cdot 3 \cdot 5!$ 即 1440.

(2) 母音在偶位者有幾法?

母音排在偶位者有 3! 法, 子音排在奇位若有 4! 法, 因每一子音之排列, 可與每一種母音之排列相結合, 故總共有 $3! \cdot 4!$ 即 144 法.

(3) c 不排在字母中央者，問有若干排列法？

c 排在中央之法，顯然有 $6!$ 法，因其他各字母可用可能之排列法排列之，故 c 不排在中央之排列法共有 $7! - 6!$ 即 4320 。

例3. 求證 $P_6^8 = 4 \cdot P_7^7$ ，又 $P_8^{16} = 2 \cdot P_4^8$ 。

例4. 設 $P_{(4)}^{2n} = 127 \cdot P_3^{2n}$ 求 n 。

例5. 一鐵路共分二十站，鐵路局應預備幾種車票？

例6. 用母字 a, e, i, o, n, y 排列之，取全數有若干排列法？

三字母 a, e, i 不許離開，有若干排列法？

例7. *numerical* 一字中每次取五字母排列之，其奇數位用子音時，共有排列法若干？

例8. 試證用 $0, 1, 2, \dots, 9$ 諸數字，可作數目相異之四位數共 $P_4^{10} - P_3^9$ 個。

例9. 用 $3, 4, 5, 7, 8$ 諸數字可作數目不同之數若干？

例10. 七童子排成一行，其中某童子不能排在行首或行尾，共有幾種排列法？

764 環狀排列。將 n 個不同之字母圍一圓周或一閉曲線排列之，則其排列法為 $(n-1)!$ 。

因將 n 字母沿此曲線移過同數之位置，諸字母間相互之次序不變。故祇須一字母位置固定，而將其餘之 $n-1$ 字母用可能方法排列之即為 n 字母之不同排列法。而由 § 763, (3), $n-1$ 字母可能之排列法為 $(n-1)!$ 。

例如，八不圍圓桌而坐，可有 $7!$ 即 5040 之坐法。

例1. 求證 n 個不同字母，每次取 r 個，其不同之環狀排列為 P_r^n / r 。

例2. 設有一圓環，若以直徑為軸旋轉 180° 又回原處，求
 證 n 個不同顏色之珠以線穿之，可得 $(n-1)!$ 種不同之項圈。

例3. 四男女四圍圓桌相間而坐，求共有若干坐法？

許重複時不同字母之排列。設 n 個不同字母可以重複排列 766
 時，每次取 r 個，可有 n^r 個排列法。

因欲得此種排列，可在字母中任取其一為第一字母，又因字
 母可以重複， n 字母中可再任取其一為第二字母。餘仿此。由
 §762，作此種排列之法，其總數為 $n \cdot n \cdot n \cdots$ 達 r 個因式，即 n^r 。

例如，由 1, 2, 3, ..., 9 可作 9^3 即 729 個三位數。

例1. 問用 1, 2, 3, 5, 7 可作一位，二位，三位之數若干？

例2. 三種獎品分給七童子，設每童子皆可得各種獎品，則
 試授與法有幾種？

不盡相異之 n 字母，每次全取之排列法。試問 a, a, a, b , 766
 或 a, a, a, b, c 諸字母中，其中有三字母相同，若每次全取，其排列法有幾？

此種排列法，可與相異之字母， a, a', a'', b, c (2) 之相當排
 列法比較之，設在 (1) 內之任一種排列 $abaca$ ，使 b 及 c 不動而將
 各 a 交換，其排列法仍不變。然在 (2) 內相當之一種排列，即 a, b, a'
 ca'' 得則 3! 個不同排法，即 $abca''oa''$, $abca''ca''$, $a'bca''oa''$, $a'bca''ca''$,
 $a''bca''oa''$, $a''bca''ca''$ 。故凡 (1) 之每一種排列有 3! 個 (2) 之排列與

之相當. 但(2)之排列法爲 $5! \cdot 3!$, (3). 故(1)之排列法爲 $5! \cdot 3!$.

由上述之, 則吾人可證明若 n 個字母中有 p 個相同, 另有 q 個相同, 其他仿此, 則其排列法之公式爲:

$$N = \frac{n!}{p!q!\dots}$$

例1. *independance* 中之字母有若干不同之排列法?

此12字母中有4個*e*, 3個*n*, 2個*d*.

故所求之結果爲 $12!/4! \cdot 3! \cdot 2!$ 即 1,663,200.

例2. *Antiech* 中交換其字母, 但不變母音或子音之相互位置, 問有若干排列法?

由上述之證明, 顯然知所求之排列數相同, 故應爲 $7!/3! \cdot 4!$ 即 85.

例3. $\sum x^3 y^2 z$, $\sum x^3 y^2 z^2$, $\sum x^3 y z u$ 及 $\sum x^3 y^2 z^2 u^2$ 各爲 x, y, z, u, v 五變數之對稱函數, 則每一函數之項數爲若干?

若將指數 3, 2, 1 之位置保持不變, 則 $\sum x^3 y^2 z$ 所有之項數當爲 P_5^3 , v 起 u, v 諸字母中每取三個排列於其下之排列數. 故爲 P_5^3 即 60.

若應用同法於 $\sum x^3 y^2 z^2$, 則得 $x^3 y^2 z^2$ 二次, 一次爲 $x^3 y^2 z^2$ 之形式, 另一次爲 $x^3 z^2 y^2$ 之形式. 仿此, 可得各式皆有二次, 因其字母可各依一順序而書於指數下也. 故 $\sum x^3 y^2 z^2$ 之項數爲 $P_5^3/2$ 即 30.

仿此 $\sum x^3 y z u$ 有 $P_5^3/3!$ 項即 20, 而 $\sum x^3 y^2 z^2 u^2$ 有 $P_5^3/2! \cdot 2!$ 即 30 項.

例4. 一分銅幣五枚, 五分銀幣六枚, 銀角四枚, 分與十五個童子, 每人各得一枚之分給法有若干?

例5. 某城由南至北有街十條, 由東至西有街五條, 一人由該城之西南角至東北角從捷徑而往共有幾法?

n 個不同字母之 r 個組合法。組合法 C_r^n 可用下式表之。767

$$C_r^n = P_r^n \div r! = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} \quad (1)$$

因若先取 r 個組合，再從各組合將字母依一切可能之順序排列，則顯然必能得 $r!$ 個之排列法。

然因每一組合應產生 $r!$ 個排列法，§ 763(3)，今有 C_r^n 個組合應產生 $r! \times C_r^n$ 個排列法。

故 $r! \times C_r^n = P_r^n$ ，則 $C_r^n = P_r^n \div r!$ 。

例如， a, b, c, d, e 諸字母。每次取一個，二個，三個，四個，五個之組合數為：

$$C_1^5 = \frac{5}{1}, \quad C_2^5 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}, \quad C_3^5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad C_4^5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$C_5^5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

從 § 565 二項定理 $(a+b)^n$ 之展開式中第 $(r+1)$ 項之係數即為 C_r^n ，而 § 560 之討論則僅為公式(1)之另一證明。

若於此式中將 $(n-r)!$ 乘其分子及分母，則可得較對稱之 768 公式

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (2)$$

從公式(2)可得 n 字母中取 r 個之組合法與取 $(n-r)$ 個之組 769 合法相同。

因 $C_{n-r}^n = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C_r^n$

此亦可由事實證明，因每取 r 個，則 $n-r$ 個必為遺留之個數。

例如， $C_{14}^{15} = C_1^{15} = 15 \cdot 14 / 1 \cdot 2 = 91$ ，注意直接用(1)式而

求 C_{14}^{15} 較為便捷多矣。

例1. 三津河上有十五點，其中無三點在一直線者，求聯結諸點所成三角形共有幾法？

三角形之數，顯然為諸點中每取三點之組合法，故三角形之數為 $C_3^{15} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ 亦即455。

例2. 從十人中選出三人委員會。(1) 若某人必須入選，共有選法若干？(2) 若某人必須除出，共有選法若干？

(1) 其他二人必須選入之法為 C_2^9 即 $\frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2}$ 即36法。

(2) 全體委員可由二人中選出為 C_2^9 即 $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ 即84法。

例3. 由 a, e, i, o 諸母音及 b, c, d, f, g 諸子音，每次取母音二個，子音三個之排列法有若干？

取母音之法有 C_2^4 ，取子音之法有 C_3^5 。每組選出之母音皆可與每組選出之子音相配合，即有 $5!$ 之排列法，故總計 $C_2^4 \cdot C_3^5 \cdot 5!$ 即7200。

例4. 有書十八本等分給 A, B, C 三人，各得六本，共有分法若干？

取 A 可得之書籍有 C_6^{18} 法， B 有 C_6^{12} 法，而 C 有 C_6^6 即1法。

故由 § 762，分給法為 $C_6^{18} \cdot C_6^{12} \cdot C_6^6$ 即 $18! / (6!)^3$ 。

將十八本書分為相等之三組必須將剛才所得之結果以 $3!$ 除之，蓋排列之次序不問也。

例5. *mathematical* 中之字母，每次取四個，共有選取法若干？又排列法若干？

因諸字母不盡相異，祇用 C_r^n 及 P_r^n 之公式不能求出。

其中字母 $t, a, n, m, n, t, t; h, e, i, c, l$ 。

故將可能之選取法及排列法分列於下：

1. 有三字每字同者：

將三個 a 依次與其餘七個字母配合，即得 7 種選取法： $7 \cdot 4! / 3!$ 即 28 排列法。

2. 有四字每字同者：

有三種選取法： $3 \cdot 4! / 2! \cdot 2!$ 即 18 排列法。

3. 有四字母，兩者相同，兩者不相同者：

有 $3 \cdot C_2^7$ 種即 63 個選取法： $63 \cdot 4! / 2!$ 即 756 個排列法。

4. 有四字每字不同者：

有 C_4^8 種即 70 個選取法； $70 \cdot 4!$ 即 1680 個排列法。

故選取法共有 $7+3+63+70$ 即 143；排列法為 $28+18+756+680$ 即 2482。

例6. 求 C_{15}^{17} , C_5^{10} 及 C_{19}^{23} 之值。

例7. 設 $C_8^n = C_7^n$, 求 n 。

例8. 設 $2C_4^n = 5 \cdot C_2^n$, 求 n 。

例9. 有十二點，每四點在一平面者，可求得平面若干？

例10. 從十二人中選出五人成一會，有幾個選法？某 A 選入之會有幾？某甲該撥業之會有幾？

例11. 在上例所述之各會中，有 A, B 二人在內者有幾會？A, B 二人祇有一人在內者有幾會？A, B 二人皆被撥業之會有幾？

例12. 由共和黨員 20 名，民主黨員 18 名內，選出共和黨員 4 名，民主黨員 3 名組織委員會，選法有幾種？

例13. 有母音五個，子音十四個，組成含三母音及四子音之字，共有幾法？

例14. 有 52 張撲克牌，平均分給於賭客 A, B, C, D 有若干分法？又分成相等之四堆有若干分法？

例15. 用數字 2, 3, 4, 2, 5, 2, 3, 6, 7 可作若干五位數？

770 組合之總數。設在公式 $(a+b)^n$ 內, § 561, 令 $a=b=1$, 然後將兩邊各減1, 得

$$C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n = 2^n - 1.$$

故由 n 個不同之物, 每次取一個, 二個, \dots , n 個之組合總數為 $2^n - 1$. 換言之, 由 n 物選取一物或以上之方法, 總計為 $2^n - 1$.

此理又可證之簡率: 無論何物或取或捨, 皆可以二法之一處理之. 故處理 n 物之總數為 $2 \cdot 2 \cdot \dots$ 至 n 個因式, 即 2^n , § 762. 由此除去各物皆被遺留之一種, 即得 $2^n - 1$, 如上所述者.

例1. 有一角二枚, 二角五分五枚, 半元及一元之銀幣各一枚, 以之任意付款, 有幾種方法?

例2. 由上述自由, 證明 $p+q+\dots$ 事件中, 每次取一個或一個以上之方法為 $(p+1)(q+1)\dots$, 其意 p 為一類事件, q 為他類事件, 餘類能.

例3. 有一角二枚, 二角五分五枚及半元四枚之銀幣, 以之任意付款, 有幾種方法?

771 C_r^n 之最大值, 在 C_r^n 之展開式內, 即 $n(n-1)\dots(n-r+1)/r!$, 分子中 r 個因式減少, 而分母中增多. 故 n 之值已知, 則 C_r^n 之值, 當次於 r 之較小值能將立下式時為最大.

$$(n-r+1)/r < 1$$

若 n 為偶數則 $r=n/2$ 時, C_r^n 之值為最大; 若 n 為奇數則 $r=(n-1)/2$ 或 $r=(n+1)/2$ 時, C_r^n 之值為最大. 由 § 769, 此二種

求得之 C_r^n 之值相同.

例. C_r^{12} 及 C_r^{15} 之最大值為何?

許重複時之組合數。試問由 1, 2, 3, 4 四數字中選出三個 許重複時，組合數若干

(1) 種選法可以 111, 112, 121 爲例，一則三數字皆同，二則二數字相同，三則三數字皆異。

將數 0, 1, 2 各加於 111, 112, 121 諸數字得 123, 124 及 134 此三數乃基數 1, 2, 3, 4, 5, 6 中每次取三個之組合而無重複。稍加考慮，即可知悉始列出一種選取法如 111, 112, 121 之全。使後一基數其數值不小於前者，然後在後基數前加 0, 1, 2 則得 4 + (3 - 1) 即 6 個基數 1, 2, 3, 4, 5, 6 中每三個組合之各此種一次而僅一次。後者組合數爲 C_3^6 故 C_3^{n+r-1} 爲所求之數。

(2) 數字之取一個數者，許可重複時之普通情形爲 1, 2, ..., n。又因此每數字與一個不同物相當，故得定理

每次取 r 個不同物許重複時，與 n 種不同物

每次取 r 個不許重複時之組合數相同，爲 C_r^{n+r-1} 即 $\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$

$(n+r-1)/r!$

例 1. 擲四骰子，問可得若干種結果？

因骰子之各面爲 1, 2, 3, 4, 5, 6，擲後之結果，可有四種相同，二類相同，或四類相異，故擲法之數爲 1, 2, 3, 4, 6, 8，許重複時每 4 個之組合數即 C_4^{6+3} 或 126。

例 2. $x^2 + y^2 + z^2$ 之齊次多項式，共有若干項？

有 x, y, z 各項爲因式之 r 次乘積有若干種，則多項式固然亦有若干種，故其數爲

$C_3^{2+r-1} = C_3^{r+2} = \frac{(r+2)!}{2!r!} = \frac{(r+1)(r+2)}{2}$

773 聯結組合數之公式，相當之代數恆等式，下式有特殊之興味及重要性。

$$C_r^n = C_r^{n-1} + C_{r-1}^{n-1}. \quad (1)$$

因 n 字母之 r 組合可分為二類，一類為含某特別字母如 a 者，又一類為不含此字母者。欲求得第一類組合，祇須單作其餘 $n-1$ 字母之 $r-1$ 組合，然後再以 a 加入各組合即可。故第一類組合之數為 C_{r-1}^{n-1} 。第二類組合即其餘 $n-1$ 字母之 r 組合，故其數為 C_r^{n-1} 。

$$C_r^{m+n} = C_r^m + C_{r-1}^m \cdot C_1^n + C_{r-2}^m \cdot C_2^n + \dots + C_1^m \cdot C_{r-1}^n + C_r^n \quad (2)$$

因任取 $m+n$ 個字母而分為二組，一組為 m 個，另一組為 n 個。欲求得 $m+n$ 個字母之一切 r 個組合，祇須分別之如下，計包括：

(a) 第一組 m 個字母之 r 個組合，其組合數

(b) 包含第一組 m 個中 $r-1$ 字母及第二組 n 個

之組合。因選取 $r-1$ 字母之法有 C_{r-1}^m ，選取 n 個

C_1^n ，故組合數為 $C_{r-1}^m \cdot C_1^n$ 。

(c) 包含第一組 m 個中 $r-2$ 字母及第二組 n 個中二字母之組合。選取 $r-2$ 字母之法有 C_{r-2}^m ，選取二字母之法有 C_2^n ，故

組合有 $C_{r-2}^m \cdot C_2^n$ ，仿此，最後得第三組 n 個字母中之 r 個組合，其數為 C_r^n 。

例如， $C_3^9 = 84$ 又 $C_3^5 + C_2^5 \cdot C_1^4 + C_1^5 \cdot C_2^4 + C_3^4 = 10 + 10 + 10 + 4 = 34$ 。

774 設在(1)及(2)中將各符號 C 代以 m, n, r ，§ 767, (1)，即得聯結 m, n, r 之公式。從上述證明，此等公式，當 m, n, r 為正整數

時，能適合，實則單就 m 與 n 而論，此諸公式為代數恆等式， m 及 n 之值無論若何，皆能適合，此代數方法化簡之可以證明。

例如，在 (1) 時，得

$$\begin{aligned} + C_{r-1}^{n-1} &= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r)}{1\cdot 2\cdot\dots(r-1)} + \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot\dots(r-1)} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot\dots(r-1)} \cdot \left[1 + \frac{n-r}{r}\right] \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot\dots(r-1)} = C_r^n \end{aligned}$$

但當化以證此等公式為恆等式，非無必需，蓋若以 m, n, r

(3) 之兩邊各為 m 與 n 之整函數，其對於各字母之次數

此兩函數必須恆等，否則隨意指定 m 一整數之值，使

n 之正數，則在 n 值上於一個時不能相等，§ 421 而實

兩邊對於 n 之一切整數皆相等。

習 題 LXV

1. 由甲至乙有三路，由乙至丙有二路，由丙至丁有四路，今有人由甲至丁，共有行法若干？
2. 五人坐標號之六隻椅子，有坐法若干？
3. 八人作半英里競走，第一名，第二名，第三名之獲得方法若干？
4. 由水平十人選四人划槳，共有幾法？又諸人列坐舟上有幾法？
5. 由兵士一百名中選兵三名，有選法若干？
6. 足球隊五組，共商一比賽長，欲令每組與其他各組比賽三次，則此表中應共有比賽幾次？

7. 1, 2, 1, 3, 2, 1, 5 諸數字, 分次全取, 共有幾種排法?
8. 'factoring' 一字中諸字母每次全取之排列, 其中
 (1) 以母音始以子音終者幾種? (2) 不以 *f* 爲首者幾何? (3) 母音在最先三個位置上者幾何?
9. 前題 *a, o, i* 次序不變之排列法若干? 子音 *f, c, t, r, n, g* 次序不變者若干? 母音子音次序均不變者若干?
10. 'resident' 中每次取五字母, 但第一, 第三及第五字母, 須爲母音, 排列法若干?
11. 由十五人選棒球隊員九人, 其中六人必須主外球場, 九人在內球場踢出, 選出法若干?
12. 1, 2, 3, 8, 9, 10, 數字中選出二數相加之和爲偶數者, 問有選出法若干?
13. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 中組成一位置, 二位置, 三位置有幾法, 且 (1) 數字能重複者, (2) 不能重複者?
14. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6 作五位不同數字之奇數, 作法若干?
15. 3000 至 8000 間不許重複數字之數目有若干奇數? 可以爲 5 除盡者若干?
16. 一人設宴, 問請五人中之一人或數人之方法共若干?
17. 酒櫃里有十五枚分給燈子三人, 十得六枚, 一得五枚, 得四枚, 共有分配法若干?
18. 六正號五負號寫一列, 問有書法若干?
19. 從數字 1, 2, 3, 2, 3, 4, 2, 4, 5, 3, 6, 7 可作若干四位數?
20. 十五本法文書, 十二本德文書內, 選六本德文書排列於書架上, 問排法若干? 且其德中書共四本, 夾三

21. 由全套十三張牌內，選取五張，其中必須包括王 (king) 或后 (queen) 或此兩張全取，問有取法若干？

22. 由五美人，六英人中選取四人，(1) 僅一英人，(2) 最少一英人，問各有取法若干？

23. 有十平行線與過十二平行線相交，組成平行四邊形，問可得若干？

24. 一平面內有 n 點，除 m 點在一直線外，其他無三點在一直線者，求這 n 點，作線之總數為 $C_n^2 - C_m^2$ 。

25. 以同樣五顆珠，同樣六顆打寶石及同樣五顆金鑽鑲成手鐲，問可製成幾種？

26. 十人圍坐二圓桌，每桌五人，問共有幾法？

27. 五男六女打網球，每邊需為男一人女一人，問有分配法若干？

28. 十五人中選出候補員五人，問有選舉法若干？若此十五票平分於五候補員有若干法？

29. 八人划船，需有三人划尾槳，一人划頭槳，問其坐法有若干？

30. 由十八人中選九人為一棒球隊，十八人中十人善於內場，五人善於外場，餘三人內外場皆可，共有分配法若干？

31. 證明六個不同字母每次全取而作排列，其中二字母不許排在某一位置上，則共有排法 $6! - 2 \cdot 5! + 4! - \dots$ 。

32. 有字母 p, q, r, s, t, v ，每次取四個，若允許重複，可有組合法若干？

33. 骰子五枚，有不同擲法若干？

34. 對稱函數 $\sum x^a y^b z^c u^d, \sum x^a y^b z^c u^d, \sum x^a y^b z^c u^d v^e$ ，若此等變數有十個，則各函數有若干項？

35. 證明 n 次之完全齊次函數，含四變數者，其項數為 $(n+1)(n+2)(n+3)/6$ 。

XXVI. 多項式定理

775. 多項式定理。設 $a+b+\dots+k$ 示任一多項式， n 為正整數。則

$$(a+b+\dots+k)^n = \sum \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots k!} a^\alpha b^\beta \dots k^n,$$

其中右方之和，對於 α, β, \dots, k 之各組值凡由 $0, 1, 2, \dots, n$ 選出而能使 $\alpha + \beta + \dots + k = n$ 者，皆有一項。而須認明 $\alpha = 0$ 時， $\alpha!$ 須以 1 取代，於 β, \dots, k 皆然。

因 $(a+b+\dots+k)^n$ 指示下列之連乘積：

$$(a+b+\dots+k)(a+b+\dots+k)\dots \text{達 } n \text{ 個因式,}$$

由實際相乘，若不集合同類項，每項之積，必為下述之形式：第一括弧內之一項，乘第二括弧內之一項，再乘第三括弧內之一項等等。

但因由各括弧內所選之字母必為 a, b, \dots, k 中之任一字母，其乘積之項必為 a, b, \dots, k 內取 n 個之重複排列法。設 α, β, \dots, k 表 $0, 1, \dots, n$ 之特殊值其和為 n ，則所有之乘積有 α 個因式為 a ， β 個因式為 b ， \dots ， k 個因式為 k 者，其數與 n 字母中 α 個相同， β 個相同， \dots 之重複 n 個排列法相同，故為 $n!/\alpha! \beta! \dots k!$ ，§ 766。又因諸積皆等於 $a^\alpha b^\beta \dots k^n$ ，其和為 $\frac{n!}{\alpha! \beta! \dots k!} a^\alpha b^\beta \dots k^n$ 。

二項式定理為本定理之特例。

例如， $(a+b+c+d+e)^4$ 之展開式包含五種不同之項， ab^3, a^2b^2, a^3b, a^4 其係數各為 $4!/1!1!1!1!$ 即 $24/1!1!1!1!$ 即 $12/2!2!$ 即 $6/4!8!1!$ 即 $4/4!4!1!$ 即 1。故簡化以後，得

$$(a+b+c+d+e)^4 = \sum a^4 + 4 \sum a^3 b + 6 \sum a^2 b^2 + 12 \sum a^2 b c + 24 \sum a b c d.$$

例. 求 $(2+3x+4x^2)^8$ 展開式中 x^5 之係數, 此式展開之普通形式為 $\frac{8!}{a!b!c!} 2^a 3^b 4^c x^{\beta+2r}$. 此中 $a+\beta+r=8(1)$, 而所求之項須能使 $\beta+2r=5(2)$. (1), (2) 二方程之解, 凡為正整數或 0 者乃 $a, \beta, r=3, 5, 0; 4, 3, 1; 5, 1, 2$. 故所求之係數為

$$\frac{8!}{3!5!} 2^3 \cdot 3^5 + \frac{8!}{4!3!} 2^4 \cdot 3^3 \cdot 4 + \frac{8!}{5!1!} 2^5 \cdot 3 \cdot 4^2 \text{ 即 } 850,752.$$

習 題 LXVI

1. 展開 $(a+b+c+d)^3$, 并合併其同類項.
2. 展開 $(a+b+c+d)^5$.
3. 求 $(a+b+c+d)^{12}$ 之展開式中, $a^5 b^4 c^2 d, a^4 b^3 c^4$ 與 $a^3 b^5 c^2$ 之係數.
4. 求 $(a+b+c+d)^{10}$ 展開式中 $ab^2 c^3 d^4$ 之係數.
5. 求 $(a+3b+2c)^8$ 展開式中 $a^4 b^3 c$ 之係數.
6. 求 $(1+x+x^2+x^3)^{10}$ 展開式中 x^6 之係數.
7. 求 $(1-x+3x^2)^9$ 展開式中 x^7 之係數.

XXVII. 可 能 率

簡 單 事 件

可能率, 任何未來事件, 若吾人給以一次試驗, 即發生之機會, 無論發生與否必在有限數之方法中佔其一, 而此等方法皆有相等之機會, 蓋吾人在事前不能測斷此等方法之孰優孰劣也。如骰子之擲么即其一例。因骰子擲下必有一面向上, 苟預斷其感某面初無理由也。

仿此，其得或失之情形，謂之可能情形，即有若干情形

在此中為有利情形，有若干為不利情形，吾人謂：

可能率或機會者乃有利情形與可能情形（即無論得或失之情形）之比也。

故設 m 代表可能情形， a 為有利情形， p 為可能率，由其定義，得

$$p = a/m$$

例如，擲骰子為么之可能率為 $\frac{1}{6}$ ；因 $m=6, a=1$ 故也。與 6 袋袋內有 3 白 3 黑共五球之袋中，抽出白球之可能率為 $3/5$ 。

777 系這制若某事件之發生為必然，則可能率為 1 ；若必然失敗，則可能率為 0 ；其他可能率為一正分數，介於 $1, 0$ 之間。

因設某事件必成功，則必不失敗，故 $a = m$ 且 $a/m = 1$ 。若此事必失敗，則必不發生，故 $a = 0$ 且 $a/m = 0$ 。其他 a 大於 0 而小

於 m ，是以 a/m 為一正分數。

778 系2. 若某事件發生之可能率為 p ，則不發生者為 $1 - p$ 。因一事件其有利情形中者 a 為有利，則其餘 $m - a$ 個為不利情形，故其不發生之可能率為 $(m - a)/m = 1 - a/m = 1 - p$ 。

779 優勝比。設某事件之有利情形為 a ，不利情形為 b 。當 $a > b$ 時，則優勝比為 a 比 b 有利於此事；當 $b > a$ 時，優勝比為 b

此 a 不利於此事件。當 $a=b$ 時，則優勝比相等。在第一狀況下，
 事件之可能率， $a/(a+b)$ 大於 $1/2$ ；第二狀況下小於 $1/2$ ；
 第三狀況下等於 $1/2$ 。

例 0. 袋中有三白二黑共為五球之袋中抽出一球，則優勝比為
 1 比 2 不利於白而 2 比 1 不利於黑。

§ 716 希望值：若指示某人得款 M 之可能率，則 Mp 名與關於 780
 M 於此人希望之值。

例 1. 賭者擲一骰子贏得 12 元之希望值；為 $12 \text{元} \times 1/6$ 即
 2 元。

可能率之例題。應用 § 716 可能率之定義時，吾人必須 781
 觀察相等可能性之判定。由下例說明之。

例 1. 投兩銅元擲出，其結果成二正面之機會為何？成二
 反面之機會為何？一正一反之機會為何？

吾人或以為共有三個可能情形，一為第一種情形，二為第二
 種情形，三為第三種情形；故每種機會為 $1/3$ 。(1)
 但如此論則誤矣，因相等可能情形非三面為四，因投二幣
 各名之謂 A 及 B，此相等可能情形為 A 正 B 正，A 背 B 背及 A 正
 B 背，A 背 B 正。又因利於二幣皆正或二幣皆背之情形為二，利
 於一正一背之情形為二；故其機會應各為 $1/4$ ， $1/4$ 及 $2/4$ 也。

例 2. 用二骰子投成其和為八點之機會若干？(2)
 其中可能之情形為 $6 \cdot 6$ 即 36，因二顆骰子之任一
 面與他顆骰子之任一面相加為八點者 2 為 2 或 3，3 或 4，4 或 2，5 有 2 個配

法即A之2與B之6相配或B之2與A之6,仿此3,5亦有二法,而4,4,僅有一法,故有五個有利情形,而其機會為 $5/33$.

例3, 擲三顆骰子中至少有一顆為么,而須相加為八點,則機會若干?

相等可能性之情形為 $6 \cdot 6 \cdot 6$ 即 216 .

其和為八點而又至少須有一般為么,則其所現為1,1,6或1,2,5或1,3,4,但1,1,6之順序,可以變換,故其擲法為 $3! / 2!$ 即3種(\$766)仿此,1,2,5與1,3,4之擲法各有 $3!$ 即6種情形,由此共有 $3 \cdot 6 + 6 + 6$ 即15法為有利情形,故其機會為 $15/216$ 即 $5/72$.

例4. 一器中裝六白球,四紅球及二黑球.

(1) 若抽出四球,則為全白球之機會若干?

器中有白球六枚,故取出四枚之為白球之法為六球之四球組合,即 C_4^6 .又因此器盛十二球,抽出法共為 C_4^{12} ,故其機會為 C_4^6 / C_4^{12} 即 $1/83$.

(2) 若抽出六球,則其為三白,二紅,一黑之機會若干?

取三枚白球有 C_3^6 法;取二紅球有 C_2^4 法;取一黑球有 C_1^2 法,抽此六球之法則為 C_6^{12} ,故所求機會為 $C_3^6 \cdot C_2^4 \cdot C_1^2 / C_6^{12}$ 即 $20/77$.

例5. 由十三張同套撲克牌中取出三張,問:

(1) king(王)與queen(后)皆無之機會若干?

除出王與后,此套撲克牌尚有十一張,若取三張無王與后為一組之撲克牌,則共有 C_3^{11} ,故所須之可能率為 C_3^{11} / C_3^{13} 即 $15/26$.

(2) 若王與后必須皆抽出或皆不出其中之一者,其機會若干?

上節(1)亦不難者,即此所求者,故其機會為 $1 - 15/26$ 即 $11/26$, §.778.

(3) 若王與后必須皆抽出,其機會若干?

三張牌中王與后二張已定,故祇須於其餘十一張中任取一張與之相配即可,故其機會為 $11 / C_3^{13}$ 即 $1/26$.

可能率之種種意義。1. § 776 中，吾人將分數 a/m 為某 782
種事件之可能率，若將試驗一次，或試驗次數甚少之結果而討論
之，則毫無意義，必將試驗無限次數或行之，則能指示其發生率
矣。

例如，即以擲骰子之試驗，若能繼續行之千次，則所得么點
之次數與投擲數之比，可發覺其漸漸接近 $1/6$ 。擲數愈多，則為愈
近。

2. 對於多種重疊之事——~~等數即別也~~ § 766 之定義
不能應用，因其不能列舉相等可能之方法，其中能發生或失敗
者，但在過去極多之考驗中，此種事件之發生率亦可規定之。假
如可能，吾人亦將此分數為可能率。如在擲骰子中 $1/6$ 即指屢次
擲之，則某類點數在將次試驗中有希望發生之次數。⁽¹⁾

例如，若查戶口所得之報告，在 1880 年，六十歲老人每
100,000 人中有三分之二仍能活至 1890，吾人即謂六十歲人再
活十年之可能性為 $2/3$ 。

3. 但又有用分數 a/m 表事件在一次試驗中發給之希望，
有利情形與可能情形之觀念大，即在以往試驗中同樣事件發生
之次數愈多則此種事件，亦將討論之一次試驗中發生之希望
愈大。

由此觀之，吾人可推測未來事件之一切可能率。例如，在足球隊決賽之時，吾人聞其優劣比為3比2利於A，即A勝之機會為3/5。此即A隊勝利之希望等於從某器中，其中共有五球而有三白球，抽出一白球之可能率相等也。

習 題 LXVII

1. 某事之可能率為3/5，試問其優勝比優於或功抑偏於失敗？其不發生之可能率為何？

2. 優勝比10比9利於A，A之勝利可能率為何？又失敗之可能率為何？

3. 優勝比5比3利於A之打賭60元，其希望幾若干？

4. 法國哲學家達萊貝脫曰：“對於任何未來事件僅有二種可能之結果，一為成，一為敗，故每事機會均為1/2而可能率無意義”。問其答案究應如何？

5. 某器盛十六球，其中七白，六黑，三紅。

(1) 若抽出一球，其為白球，黑球，紅球之機會各若干？

(2) 若抽出二球，其為二者皆黑，一白一紅之機會各若干？

(3) 若抽出三球，其為全屬紅色，無紅色與一白，黑，一紅之機會各若干？

(4) 若抽出四球，其為全屬紅色，三者紅色及二者白色，二者紅色之機會各若干？

(5) 若抽出十球，其為五白，三黑，二紅之機會若何？

6. 擲二骰而相同及擲三骰而皆相同之機會若何？

7. 擲二骰而相加成七點之機會若何？并證明此機會最六。

8. 擲二骰子至少為一幺之機會若何？為一幺之機會若何？

9. 從 factor 與 banter 中各任意取一字母，取出兩字母之機會若何？

10. 一匣有九票，一號，二號，...，九號，設任意抽出二張其相乘積為偶數之機會若何？為奇數之機會若何？

11. 上題，從匣中抽出五票，求下列各機會：(1) 1, 2, 3 號均被抽出；(2) 1, 2, 3 號中祇有一張被抽出；(3) 1, 2, 3 號均未被抽出。

12. 一人從撲克牌中抽取四張，抽得 ace, king, queen 及 knave 之機會若何？同花之 ace, king, queen 及 knave 之機會若何？

13. 以門whist為戲，某人手有 trump 四張，其三張各屬別花，其機會若何？

14. 三骰局協，其和為五點之機會若何？其和少於五點之機會若何？

15. 二人圍桌而坐，問某某二人相鄰之機會若何？

複雜事件 互斥事件

獨立事件。兩件或兩件以上之事件，若其一件之成功與否不為他一事所影響者，則謂之獨立事件。反之則謂之相互依賴。

例如，從袋中抽球，設抽出後仍還原袋，則第一次與第二次為獨立；若第一次抽出後不返還則謂之相互依賴。

定理1. 一組獨立事件發生之可能率為其各單獨事件可能率之積。

設二獨立事件之可能率各為 a_1/m_1 及 a_2/m_2 。

則第一事件之相等則情形為 m_1 ，而第二事件為 m_2 ，又因二事獨立，則情形之一發生時，或可與 m_1 ，情形之一同時發生，故二事發生之情形當為 $m_1 m_2$ 。由此，二事得以成功之情形為

$a_1 a_2$ ，故二者皆成功之可能率為 $\frac{a_1 a_2}{m_1 m_2}$ 即可以 $\frac{a_1}{m_1} \cdot \frac{a_2}{m_2}$ 表明之。

二件以上之事得以同理證之。

上述者僅適用於§ 776所述之事件，而依§ 782所述吾人可應用此定理於將來各種事件，如下面之例2。

例如，以一骰子連擲二么之機會為 $1/6 \cdot 1/6$ 即 $1/36$ 。

又如從一袋中抽球，此袋有五白球及四黑球，第一次抽出之球仍回袋中，則連抽白球二次之機會為 $5/9 \times 5/9$ 即 $25/81$ 。

785 定理2. 設第一事件之可能率為 p_1 ，此後第二事件之可能率為 p_2 ，則二事件依次發生之可能率為 $p_1 p_2$ 。二事以上之事件準此類推。

此定理可如定理1之證法，蓋顯然包括定理2也。

例如，從含有五白球四黑球之袋中抽球而不返原袋時，則抽第二球時其機會為 $4/8$ 。故不返原袋時，連抽二白球之機會為 $5/9 \times 4/8$ 即 $5/18$ 。

例1. 用一骰擲三次，其至少有一么之機會若何？

依出每次擲之均為失敗外，至少必有一么。一次失敗之機會為 $5/6$ ，三次均失敗之機會為 $5/6 \times 5/6 \times 5/6$ 即 $125/216$ 。故至少有一么之機會為 $1 - 125/216$ 即 $91/216$ 。

例2. A能解某題之機會為 $3/4$, B能解某題之機會為 $2/3$ 。若均自解之, 此題能解之機會若干?

除A與B皆失敗外, 則此題均能解。A失敗之機會為 $1/4$, B之機會為 $1/3$, 故二人皆不能解之機會為 $1/12$, 故此題能解之機會為 $11/12$ 。

例3. 有二袋, 第一袋有五銀幣一金幣, 他袋有三銀幣, 設從第一袋抽出四幣, 置於第二袋, 然後從第二袋抽出五幣置於第一袋, 金幣在第二袋之機會若何? 在第一袋之機會若何?

金幣從第一袋取出, 置入第二袋之機會為 C_4^5/C_6^6 即 $2/3$, §78, 例5. 第二次取抽時, 其遺留第二袋之機會為 $6/C_6^1$ 即 $2/7$, 故一次抽取後, 在第二袋之機會為 $2/3 \times 2/7$ 即 $4/21$, 故在第一袋之機會為 $1 - 4/21$ 即 $17/21$ 。

例4. 震同時擲八幣, 其至少有一幣為正面之機會若干?

例5. A, B, C, D同獵鴉鴉, 若A每獵二隻面中一隻, B每獵三隻面中二隻, C每獵五隻面中四隻, D每獵七隻面中五隻, 若同時向一鳥擊槍, 打中之機會若何?

例6. A器有五白球, 四紅球, D器有六白球, 二黑球, 則從A器抽出白球而復置, 然後又從B器抽出之機會若何?

例7. A能再活五年之機會為 $3/4$, B為 $5/6$, 則五年後A與B俱在之機會若何? A存B歿? A歿B存? A, B皆歿?

互斥事件. 若二事或二件以上之事, 僅有一事得發生, 則此等事件為互斥事件,

例如擲骰子, 在同一骰子上, 點數與兩點之出現為互斥事件,

787 定理8. 一組互斥事件, 其中成就一事件之可能率, 等於各個單獨事件可能率之和.

設有互斥事件A與B.

對於互斥事件之可能情形可分三類: (1) A成B敗; (2) A敗; (3) A敗B敗.

設此類可能情形之總數各為 l, m, n , 則

(a) A或B之任一, 得以成就之機會為 $\frac{l+m}{l+m+n}$.

因 $l+m+n$ 為可能情形而 $l+m$ 為有利情形.

(b) A單獨成就之機會為 $\frac{l}{l+(m+n)}$.

若非B未敗則A不能成功, 故A成B敗之 l 種情形, 即A之能成就之各個情形. A敗B成及A敗B敗之情形為 $m+n$ 種即A敗之各個情形.

(c) 若B成則A成之機會為 $\frac{m}{m+(l+m)}$.

但 $\frac{l+m}{l+m+n} = \frac{l}{l+(m+n)} + \frac{m}{m+(l+m)}$.

故A或B之任一得成之機會為單獨事件A與B得成之機會之和.

二件以上之事件, 可準此類推.

例如, 從袋中抽球, 此袋有四白, 五黑及七紅球, 因其為白球之機會為 $1/4$, 其為黑球為 $5/16$, 為黑或白任何之一之機會為 $1/4 + 5/16$ 即 $9/16$. 此法可直接從§776求得. 實際上此定義可認為定理3之特殊情形.

注意不可應用此定理於不互斥事件.

例如, §785, 例2所問A與B同時各自解答某題之機會, A得成功之機會為 $3/4$, B為 $2/3$, 吾人不能將其 $3/4$ 及 $2/3$ 相加, 因A

成之二事不相互斥，互斥時之情形：A成B敗，A敗B成，A成B
 敗，此等情形之機會， $\$7/4, 3/4 \times 1/3$ 即 $3/12, 1/4 \times 2/3$ 即 $2/12,$
 $4 \times 2/3$ 即 $6/12$ ；而三種機會之和為 $11/12$ ，即此題能解答之可能

例1. A器內有十球，其中三球白色，B器內有十二球，其中
 四球白色，設A, B二器取任何之一而從此抽出一球，其為白
 之機會若何？

答：人必須求下列各互斥事件之機會：(1)取A器而抽出一
 球；(2)取B器而抽出一白球。

取A器之機會為 $1/2$ 而從A器抽取白球之機會為 $3/10$ ，故(1)
 機會為 $1/2 \times 3/10$ 即 $3/20$ 。仿此，(2)之機會為 $1/2 \times 4/12$ 即 $1/6$ 。
 故兩事件之機會為 $3/20 + 1/6$ 即 $19/60$ 。

例2. 一人可隨便從袋中抽提二幣，此袋有一元幣五枚，半
 元幣七枚，其希望值若干？

抽取二枚一元幣之希望值為 $2元 \times C_2^5 / C_2^{12} = 2 \times 5/32 =$
 $0.30元$ ；抽取二枚半元幣之希望值為 $1元 \times C_2^7 / C_2^{12} = 1 \times 7/22$
 $= 0.32元$ ；抽取一枚一元幣，一枚半元幣之希望值為 $1.50元 \times$
 $5 \cdot 7 / C_2^{12} = 1.50 \times 35/66 = 0.80元$ 。

故希望值總值為 $\$0.30 + \$0.32 + \$0.80$ 即 $1.42元$ 。

例3. 設A, B二人輪流從含有三白球，二黑球之袋中抽取一
 球，抽出後不再置入，設A開始，則每人先得白球之機會若何？

A第一次抽得之機會為 $3/5$ 。

A敗後，B抽得之機會為 $2/5 \times 3/4$ 即 $3/10$ ，因當B抽時，此袋
 有四球而三球為白色。

A敗後，B復敗，然後A抽得為 $2/5 \times 1/4 \times 3/3$ 即 $1/10$ ，因此
 時，袋中之三球盡屬白球。

故A之總機會為 $3/5 + 1/10$ 即 $7/10$ ，而B為 $3/10$ 。

例4. 上題若抽取後，再復置入，則A與B之機會各為若何？
第一次抽流A之機會為 $3/5$ ，B為 $2/5 \times 3/5$ 即 $6/25$ ；而以後每
抽流之機會均與此相等。

故彼等總機會之比為 $3/5:6/25$ ，或 $5:2$ ；即A之總機會為 $5/7$ ，
 $2/7$ 。

例5. 一室中有三桌，其上各置九。十，十一冊書，今欲得某
某六冊中之任何一冊，而此六冊則散置於三桌上，第一桌上有
其二，第二桌上有其三，第三桌上有其一。設有友人任取室中之
一冊給我，則此冊為我所欲者之機會若何？

例6. 某畜馬主人以其二馬加入某次賽馬會，而此二馬得
勝之機會各為 $1/2$ 及 $1/3$ ，求馬主得勝之機會。

例7. A, B二人以二骰子為賭，以最先為擲出二點者為勝，
若A先擲，則二人得勝之機會各若何？

單獨事件之重複試驗。 下列定理論及某事件在連續試驗
中成就特定次數之機會，其已知單個試驗成就之可能率。

定理1 設單獨試驗成就之可能率為 p ，則 n 次試驗中 r 次成

就之可能率為 $C_n^r p^r q^{n-r}$ ；此處 $q=1-p$ 。

因在任何某組 r 次試驗中皆成就而其餘 $n-r$ 次試驗皆失敗
之可能率為 $p^r (1-p)^{n-r}$ ，即 $p^r q^{n-r}$ ，設 $q=1-p$ ；§784

又因其 n 次試驗，而可選 r 次者有 C_n^r 種皆為互斥。

故其可能率為 $C_n^r p^r q^{n-r}$ ，§787。

例如，以一骰子擲五次而得二次為么或五骰子同時擲得二
骰子為么者，為 $C_5^2 (\frac{1}{6})^2 (\frac{5}{6})^3$ 即 $625/888$ 。

注意 $C_r^n p^r q^{n-r}$ 為 $(p+q)^n$ 二項定理展之開式之 p^r 項. 因 $C_r^n = C_{n-r}^n$.

定理5. 在 n 次試驗中, 某事件至少成就 r 次之可能率 790
 等於 $(p+q)^n$ 之展開式中開首 $n-r+1$ 項之和, 即

$$p^n + C_1^n p^{n-1} q + C_2^n p^{n-2} q^2 + \dots + C_{n-r}^n p^r q^{n-r}.$$

蓋每舉確成就 r 次, 或雖多於 r 次謂之至少成就 r 次, 而 $p^n, C_1^n p^{n-1} q, \dots, C_{n-r}^n p^r q^{n-r}$ 各代表 $n, n-1, \dots, r$ 次成就之可能率也, § 789.

例如, 以一骰子擲五次, 至少爲么之機會爲

$$\left(\frac{1}{6}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right) + 10\left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 10\left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \text{ 即 } \frac{763}{3888}.$$

例1. A, B 二人爲某游藝, 不得成和局, 而 A 之技能倍於 B . 則 A 於五次中勝利三次之機會爲何?

每次游藝 A 贏之機會爲 $2/3$, 負之機會 $1/3$. 故五次中 A 能贏三次之機會爲 $(\frac{2}{3} + \frac{1}{3})^5$ 之始三項之和, 即 $(\frac{2}{3})^5 + 5(\frac{2}{3})^4 (\frac{1}{3}) + 10(\frac{2}{3})^3 (\frac{1}{3})^2$ 即 $64/81$.

例2. 前庭 B , 贏二次前, 贏三次之機會若何?

此乃開始四次中 A 贏至少三次之機會爲 $(\frac{2}{3})^4 + 4(\frac{2}{3})^3 (\frac{1}{3})$ 即 $1/3$.

故 A 贏 n 次前, 至贏 n 次之機會與在 $n+1$ 次中 A 贏至少 n 次之機會相同.

例3. 同時擲十幣, 六幣爲正面者之機會若何? 至少六幣爲正面者若何?

例4. 同時擲四骰子, 三骰爲么之機會若何? 至少三骰爲么之機會若何?

例5. 如例1所載, 五次游藝 A 對至少勝四次之機會若何?

例6. 上題, A 勝一次之前, A 勝四次之機會若何?

習題 LXVIII

1. 一袋有白球三, 黑球五及紅球七枚, 每次從中抽出一球而即放入, 試求下列各程抽出之機會: (1) 先爲一白球, 後爲一黑球而終爲一黑球; (2) 白, 紅, 黑各一而次序不論.
2. 上題, 設取出後不復放入, 則連續抽出三次中, 次得一白球之機會若何?
3. 一袋中有五個半元幣, 四個一元幣及三個五元幣, 意抽取二幣之希望值若干?
4. 一門鎖上之機會爲 $1/2$. 從一束八個鑰匙上, 僅有一個能開此鎖, 今隨意選出三個而往開之, 其能開門之機會若何?
5. 有三獨立事件三項, 其機會各爲 $1/2$, $2/3$ 及 $3/4$. 三事任一之機會若何? 僅有一事成就之機會若何? 僅有二事成就之機會若何? 三事皆成就之機會若何?
6. 擲二骰子, 求其不利於其和爲七點或其和爲十點之優勝比.
7. 用三骰子同擲之, 其不利於總和十點之優勝比若何? 利於總和大於五點之優勝比又若何?
8. 箱子中有券十一張, 各以 $1, 2, \dots, 11$ 標明. 從中抽取三券使其和爲十二之機會若何? 其和爲奇數之機會若何?
9. A, B 二賭徒以二骰爲賭具, 議定擲得七點時則 A 爲勝, 十點則爲 B 勝. 其餘點數, 則賭注 A, B 均分之. 比較二人之機會.
10. 上題, 二賭客議定 A 先擲得六點而後 B 得七點則 A 爲勝. 如 B 先得七點而 A 爲六點則 B 爲勝, 以 A 開始而輪流擲之. 試比較二人之機會.
11. 一袋盛有白球四枚, 黑球八枚, A, B, C 三人從中

得白球者為勝。依A, B, C次序而抽之, 若抽後不復置入, 則各人之機會若何? 若重置入又若何?

12. 一百張獎券中有100元之獎五枚, 50元之獎十枚, 5元獎廿枚, 則一券之希望值若干?

13. A袋內有五球其中一為白色, B袋內有六球其中有白者, 從A袋抽取一枚而置入B袋內, 然後從B袋抽三枚, 置A袋內白球在A袋內之機會若干?

14. A袋內有n球其中r個為白球, B袋內有m球其中s個為白球, 從任何一袋抽取一球其為白球之機會與各球均置一袋抽取一白球之機會有等否?

(S) $P = \frac{r}{n} = \frac{s}{m}$

15. 某城中十日內死去五人, 但此十日中包含一月一日, 問在(一月)內發生死亡之機會若何?

16. 三個六十歲人中普通活至七十歲者為二人, 則五人中(幾)人再活十年之機會若何?

17. 某童給予五題, 普通能解答三題, 若試驗時給予八題做出五題乃為及格, 則彼及格之機會若何?

18. 設一人擲二顆骰子, 第一次得七點, 可得一元, 第二次擲得七點, 亦可得一元, 其餘類推, 直至擲得七點為止, 其希望之總值若干?

19. A與B打翻球, A普通在四次中勝三次, 則A勝B一局, 其此數為6比8之機會若干? 若和局 (douce sets) 不論, 則A勝B (set) 之總機會若何?

20. 上題, 若A以四比三之不利情形後勝一局之機會若何?

21. 兩賭客, 各人以82元打賭, 得三點為勝, 但當A得五點及B得一點時, 即為完場, 問二人如何分此64元之款?

XXVIII. 算學歸納法

791 算學歸納法。 此章內所包括之公式可用算學歸納法證明而使之成立，用下例說明之。

例。 求證起始 n 個奇數之和為 n^2 。

今所證明者為：

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2. \quad (1)$$

從觀察所得 n 為1或2時(1)式為真。設 n 為 k 時此式仍為真，於是

$$1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2. \quad (2)$$

(2)之各端加一奇數項，即 $2(k+1)-1$ 即 $2k+1$ ，再以 $(k-1)^2$ 代 k^2+2k+1 ，則

$$1+3+5+\dots+(2k+1)=(k+1)^2. \quad (3)$$

但以 $k+1$ 代 n 於(1)內亦得(3)，故知 n 為特殊值 k 時若為真，則 n 為 $k+1$ 時，此公式仍為真也。

但已知 k 為特殊值1時為真。故 $n=1+1$ 即2時亦為真，而 $n=2+1$ 即3時，而至所有各正整數時，亦皆為真。

普遍言之，若一公式內使所含之 n 等於1時，試而為真，然後假設 $n=k$ 時其公式為真，若能證明 $n=k+1$ 時亦為真，則此式內 n 為任何正整數時皆為真。蓋可以此理申述之：因 $n=1$ ，其式為真， $n=1+1$ 即2時亦為真，故 $n=2+1$ 即3時，以至 n 為任何正整數時皆為真。

此法復用二項定理之證明以說明之。

n 為較小數目時，可用乘法得：

$$(a+b)^n = a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + \dots + C_{n-1}^n a b^{n-1} + b^n. \quad (1)$$

以 $a+b$ 乘(1)之兩端,由 § 773, 1, 得

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + C_1^n a^n b + C_2^n a^{n-1} b^2 + \dots + C_r^n a^{n-r+1} b^r + \dots + C_{r-1}^n a^{n-r+1} b^r + \dots + C_r^{n+1} a^{n+1-r} b^r + \dots \quad (2)$$

但 (2) 與 (1) 中以 $n+1$ 代 n 所得之結果相同。

故當 $n=k$ 時, (1) 為真, 則 $n=k+1$ 時亦為真。但已知(1) $n=1$ 時為真, 故當 $n=1+1$ 即 2 時亦為真, 當 $n=2+1$ 即 3 時亦為真, 以下類推。

因公式 $C_r^n + C_{r-1}^n = C_r^{n+1}$ 能單獨用組合原理以證明之, § 774, 而此處二項定理之證明與此原理無關。

習 題 (LXIX)

試以算學歸納法, 證明下列公式 § 8: 701, 702:

1. $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = a(1-r^n)/(1-r)$.
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.
3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = n^2(n+1)^2/4$.
4. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = n(n+1)(n+2)(3n^2+3n-2)/30$.

XXIX 方 程 論

基本定理 有理根

一元 n 次普通方程之二標準式 (任何有理整數方程, 含 792 有一未知數如 x 且為 n 次, 必可化成下列之標準式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x - a_n = 0, \quad (1)$$

當係數 a_0, a_1, \dots, a_n 為已知數時, (1) 謂之數字方程, 但係數未定時, 謂之 n 次之普通方程。

末項係數 a_n 常謂之絕對項。

方程(1)之完全或不完全者，按 a_1, a_2, \dots, a_n 無一個或數個為 0 而定。注意一完全方程內其項數為 $n+1$ 。

當係數 a_0, a_1, \dots, a_n 為實數時，則可假定首項 a_0 為正，若為有理數時，可假定其為無公因數之諸整數。

以 a_0 除(1)之兩邊，則可化為第二標準式

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n = 0, \quad (2)$$

在此式內第一項之係數為 1，而 $b_1 = a_1/a_0$ 等等，而用(2)往往較為便利。

此章內須認明 $f(x) = 0$ 表方程(1)或(2)。

793 方程之根。方程 $f(x) = 0$ 之根，為以 x 之值代入多項式 $f(x)$ 內為零者。有應為便利計，名此方程之根為多項式之根。

794 從根之定義，則 x 為 0 時， $f(x) = 0$ 中之 x 個根為 0；又方程 $f(x) = 0$ 若有正係數為正，則此方程有正根。且當 $f(x) = 0$ 為完全方程時，若其各項係數正負相間，則無負根。

例如， $2x^3 + x^2 + 1 = 0$ 無正根，因當 x 為正時，此多項式 $2x^3 + x^2 + 1$ 不能為 0，而 $2x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$ 不含有負根，蓋 $2x^3 - x^2 + 3x - 1$ 當 x 為負時不能為零。

795 定理 1：若 b 為 $f(x) = 0$ 之一根，則 $f(x)$ 可為 $x - b$ 所除盡；反之設 $f(x)$ 能為 $x - b$ 所除盡，則 b 為 $f(x) = 0$ 之一根。

從 §413, $f(x)$ 爲 $x-b$ 除後之餘式爲 $f(b)$, 相當 b 爲 $f(x)=0$ 之根時, $f(b)$ 爲 0, §793, 故 $f(x)$ 能爲 $x-b$ 除盡, 反之 $f(x)$ 爲 $x-b$ 除盡時, 其餘式 $f(b)$ 必爲 0, 故 b 爲 $f(x)=0$ 之根.

例. 求證 3 爲 $f(x)=x^3-2x^2-9=0$ 之根.

$$\begin{array}{r} 1 \quad -2 \quad +0 \quad -9 \quad | \quad 3 \\ \underline{3 \quad 3 \quad 9} \\ 1 \quad 1 \quad 3 \quad 0 = f(3) \end{array}$$

以 $x=3$ 除 x^3-2x^2-9 , 用綜合除法, §411, 得餘式 $f(3)$ 爲 0, 故 3 爲 $f(x)=0$ 之根.

設 b 爲 $f(x)=0$ 之一根, $f(x)$ 必可爲 $x-b$ (除盡, 商爲 $\phi(x)$) 得

$$f(x) = (x-b)\phi(x).$$

故 $f(x)=0$ 之其他各根, 仍爲以 x 值代入多項式 $\phi(x)$ 內爲零者; 即降次方程 $\phi(x)=0$ 之根, §341.

例. 解方程 $x^3-3x^2+5x-3=0$.

$$\begin{array}{r} 1 \quad -3 \quad +5 \quad -3 \quad | \quad 1 \\ \underline{1 \quad -2 \quad +3} \\ 1 \quad -2 \quad +3 \quad 0 \end{array}$$

用觀察法 1 爲其一根, 故以 $x-1$ 除 x^3-3x^2+5x-3 , 吾人得降次方程 $x^2-2x+3=0$, 此二次方程用 §631, 求其根爲 $1 \pm i\sqrt{2}$, 故此方程之根爲 $1, 1+i\sqrt{2}, 1-i\sqrt{2}$.

現先假定有這整數方程 $f(x)=0$, 至少有一根, 而此理將 797

以後證明之.

從此假定及 §795, 吾人導出下列定理, 謂之代數基本定理

定理 2. 每個 n 次方程, 必知

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

有 n 根且僅有 n 根.

由 §797 必有一 x 值代入 $f(x)$ 爲零, 設此值爲 β_1 , 則 $f(x)$ 可爲 $x-\beta_1$ 除盡, §795, 則商之第一項必爲 a_0x^{n-1} , 故

$$f(x) = (x-\beta_1)(a_0x^{n-1} + \dots). \quad (1)$$

仿此， x 又有一值 β_2 ，代入以後能使此多項式 $a_0 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ 爲 0，得 $a_0 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = (x - \beta_2)(a_0 x^{n-2} + \dots)$ ；故由 (1)，

$$f(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)(a_0 x^{n-2} + \dots) \quad (2)$$

如此繼續 n 次以後，得

$$f(x) = a_0 (x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n) \quad (3)$$

由此定理，則有 n 個一次之因式，即 $x - \beta_1, x - \beta_2, \dots, x - \beta_n$ ，

而 $f(x)$ 爲其乘積；又從 § 419, $f(x)$ 除此以外不能有他之因式。

但在乘積內，有一因式爲零時，乘積爲零，故由 (3) 可知 $x = \beta_1, \beta_2, \dots$ 或 β_n 且祇有 x 等於此各數時，乘積爲零。故由 § 793, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, n$ 個數目爲 $f(x) = 0$ 之根，而此外別無他根。

799 由此定理，則知解方程 $f(x) = 0$ 與多項式 $f(x)$ 之分析因式當屬相同。又若已知方程之根時，求此方程時祇須以 x 減去使成諸二項因式之積並設等於 0，即得。

例。 $2, 1/2, -1, 0$ 爲各根，求此方程。

$$\text{則爲 } (x-2)(x-1/2)(x+1)(x-0) = 0 \text{ 即 } 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

800 重根。注意，若方程之根 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 有時二個或多個可相等，若有二個或二個以上之根等於 β ，吾人稱 β 爲重根。又依其 β 爲二個，三個， \dots, r 個，吾人稱 β 爲二重根，三重根， \dots 通稱爲 r 重根。單根者可以謂重數 r 爲 1 之一根。顯然由 § 798，得

β 爲 $f(x) = 0$ 之 r 重根之條件爲 $f(x)$ 可爲 $(x - \beta)^r$ 除盡，

不能爲 $(x - \beta)^{r+1}$ 除盡。

故凡 n 次之方程必有 n 根，其所謂 r 重根者，乃其相同根有 r 個，故凡 n 次之方程有 n 個不同之根當為不真矣。

例如， $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ 為一三次方程；因 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$ ，其各根為 1。

數字方程之求根法。設 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ 表示整係數之方程，且設 b 表一整數而 b/c 為約簡之分數，故 § 451, 795，設 $f(x) = 0$ 中 b 為其一根，則 b 為 a_n 之一因式；又從 § 452, 792 設 b/c 為其一根， b 及 c 各為 a_n 及 a_0 之一因式。故在特殊狀況，設 $a_0 = 1$ ， b/c 不為其一根，除非 $c = \pm 1$ ，即除非 b/c 表 $\pm b$ 。故其下列定理 § 454：

凡方程之形式 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ ，其中係數 a_1, \dots, a_n 為整數，不能有有理分數根。

由上述，可知有理係數方程之有理根，可由試驗求之。此試驗可以簡單除法作之。

例。求下列方程之有理根，

$$3x^5 - 8x^4 + x^3 - 12x + 4 = 0.$$

其僅能有之有理根為 $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 1/3, \pm 2/3, \pm 4/3$ 。

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) -8 \ 4 \ 0 \ -1 \ +12 \ +4} \quad \underline{2} \\ \underline{-6} \quad \underline{-4} \quad \underline{-8} \quad \underline{-14} \quad \underline{-4} \\ 3 \overline{) -2 \ 4 \ -8 \ -14 \ -4} \quad \underline{2} \\ \underline{-6} \quad \underline{8} \quad \underline{8} \quad \underline{2} \\ 3 \overline{) 4 \ 4 \ 1 \ 0} \quad \underline{-1/3} \\ \underline{-1} \quad \underline{-1} \quad \underline{-1} \\ 3 \overline{) 3 \ 3 \ 0} \end{array}$$

由觀察則知 1 非其一根。
試驗 2，則知為一根而得其降次方程為
 $3x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 7x - 2 = 0$ 。
又知 $1/3$ 亦為此方程之根，

因此而得第二降次方程 $3x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$ 。此方程無正根，因

各項皆為正，§ 791，以 -1 試之知其非根，以 $-1/3$ 試之知其為一根，且得第三降次方程 $x^2+x+1=0$ 。

故所設方程之有理根為 $2, 2, -1/3$ 。解 $x^2+x+1=0$ ，所得其餘之根為 $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$ 。

欲使試驗之計算較簡，當牢記以下三事：第一，§ 453 所載之注意；第二，若已知一數非為原方程之根，則此數不能再為降次方程之根；第三，以下之定理：

若 b 為正，且用綜合除法，以 $x-b$ 除 $f(x)$ 所得之結果中，各係數之符號，皆為正，則 $f(x)=0$ 不能有大於 b 之根；若 b 為負，且仿前所得符號，正負相間，則 $f(x)=0$ 不能有代數上小於 b 之根。

因依綜合除法之性質，若在上述之二情形中，若增加 b 之絕對值，則結果中後於第一係數之各係數皆將增大其絕對值，而不變其符號，最後之係數亦然，即款式不為 0 也。

例 1. 求證 $2x^3+3x^2+4x+5=0$ 無大於 1 之根。

$$\begin{array}{r} 2 \quad +3 \quad +4 \quad +5 \mid 1 \\ \quad +2 \quad +5 \quad +9 \\ \hline 2 \quad +5 \quad +9 \quad +14 \end{array}$$
 以 $+1$ 除之，吾人僅得正係數，故無限大於 1。設以 $x-2$ 除之，則可得更大之正係數，即 $2+7+10, 25$ 是也。

例 2. 求證 $3x^3+4x^2-3x+1=0$ 無小於 -2 之根。

$$\begin{array}{r} 3 \quad +4 \quad -3 \quad +1 \mid -2 \\ \quad -6 \quad +4 \quad -2 \\ \hline 3 \quad -2 \quad +1 \quad -1 \end{array}$$
 以 $x+2$ 除之，其係數為正負相間，故無小於 -2 之根。

若除以 $x+3$ ，則其係數之絕對值更大，為 $3-5+12, 35$ 是也。由此可知，無論何數，若已知其代數上大於 $f(x)=0$ 之一

切實根，則可謂此諸根之上限，若已知其代數上小於 $f(x)=0$ 之一切實根，則可謂此諸根之下限。

例如，由以上之證明，1 為 $2x^3+3x^2-4x+6=0$ 諸根之上限，而 -2 為 $3x^3-4x^2-3x+1=0$ 諸根之下限。

習 題 LXX

1. 作方程，其根為：

(1) $a, -b, a+b$. (2) $3, 4, 1/2, -1/3, 0$.

2. 求證 -3 為下列方程之三重根。

$$x^4+8x^3+18x^2-27=0,$$

3. 求證 1 及 $1/2$ 為下列方程之二重根。

$$4x^5-23x^4+33x^3-17x+3=0.$$

4. 用 §80 求 $x^5-5x^4-6x^3+4x^2-7x-250=0$ 為其實根之上限及下限。

5. 求證 $2x^4-3x^3+4x^2-10x-3=0$ 無有理根。

下列各式有一個或以上之有理根，試解之：

6. $x^3-x^2-14x+24=0$. 7. $x^3-2x^2-25x+50=0$.

8. $3x^3-2x^2+2x+1=0$. 9. $2x^4+7x^3+2x^2-x=0$.

10. $x^4+4x^3+8x^2+8x+3=0$.

11. $2x^4+7x^3+4x^2-7x-6=0$.

12. $3x^4+11x^3+9x^2+11x+6=0$.

13. $x^5-9x^4+2x^3+71x^2+81x+70=0$.

14. $2x^6-8x^4+7x^3+5x^2-8x+4=0$.

15. $x^5+2x^4-15x^3-35x^2+54x+72=0$.

16. $12x^4-32x^3+13x^2+8x-4=0$.

17. $x^5-7x^4+10x^3+18x^2-27x-27=0$.

18. $2x^4-17x^3+25x^2+74x-120=0$. (8), (9) 中此

$$19. 4x^5 - 9x^4 + 6x^3 - 13x^2 + 6 = 0.$$

$$20. x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 20x^2 - 52x + 210 = 0.$$

$$21. 2x^5 + 11x^4 + 23x^3 + 25x^2 + 16x + 4 = 0.$$

$$22. 6x^4 + 89x^3 + 359x^2 + 284x + 42 = 0.$$

$$23. 10x^4 + 41x^3 + 46x^2 + 20x + 3 = 0.$$

$$24. 36x^4 - 103x^3 + 107x^2 - 43x + 6 = 0.$$

$$25. 15x^5 + 20x^4 + 23x^3 + 77x^2 + 67x + 18 = 0.$$

$$26. 2x^6 + 7x^5 + 8x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 14x - 12 = 0.$$

$$27. 2x^5 + 11x^4 + 24x^3 + 22x^2 - 8x^2 - 33x - 18 = 0.$$

$$28. 5x^6 - 7x^5 + 8x^4 - x^3 + 7x^2 + 8x - 4 = 0.$$

根與係數之關係

305 根與係數之關係：以 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 為方程之根，若化成第二標準式，§ 72, (3)，即 § 718 之恆等式，(3)，變為

$$\begin{aligned} x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + b_3x^{n-3} + \dots + b_n \\ = (x - \beta_1)(x - \beta_2)(x - \beta_3)\dots(x - \beta_n). \end{aligned}$$

上式右邊相乘，將其結果排列為 x 之多項式，§ 55。然後將兩邊同次幂之係數以等號等之，§ 224。則可得係數 b_1, b_2, \dots, b_n 與根 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 之關係如下：

$$-b_1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n, \quad (1)$$

$$b_2 = \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \dots + \beta_2\beta_3 + \dots + \beta_{n-1}\beta_n, \quad (2)$$

$$-b_3 = \beta_1\beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_2\beta_4 + \dots + \beta_{n-3}\beta_{n-2}\beta_{n-1}, \quad (3)$$

.....

$$(-1)^n b_n = \beta_1\beta_2\beta_3\dots\beta_n,$$

其中(2),(3),...之右邊代表每二或三個根相乘積之和，餘類推，

其左邊之符號須視右邊各項中根之個數而定為偶數則正，奇數則負，故其定理：

定理. 任何方程化成

806

$$x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_n = 0,$$

形式之方程中，第二項之係數 b_1 與各根之和之絕對值相等，符號相反；絕對項 b_n 與各根之積之絕對值相等，符號之同異，視 n 為偶或奇數而定，又中間各項之係數 b_r 與每 r 個根相乘積之和之絕對值相等，符號之同異，視 r 為偶或奇數而定。

在應用本定理之前，若方程之第一係數不為1，則須以此係數除全方程，若方程不完全，則須認明其缺項之係數為0。

例如，吾人可不用解方程 $3x^3 - 6x + 2 = 0$ 而知其根之關係如下。以此方程化為適當之形式，以便應用定理，則得 $x^3 + 0x^2 - 2x + 2/3 = 0$ 。故

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0, \quad \beta_1 \beta_2 + \beta_1 \beta_3 + \beta_2 \beta_3 = -2, \quad \beta_1 \beta_2 \beta_3 = 2/3.$$

設此方程之各根僅一根為未知，則欲求此根，可由 $-b_1$ 減各已知根之和；或以各已知根之乘積除 b_n 即得，但 n 若為奇數，則當先行變號。

例. $2x^3 + 3x^2 - 23x - 12 = 0$ 中3與-4為其二根，他根若何？

他根為 $-3/2 - [3 + (-4)] = -1/2$ ；亦為 $6 \div 3(-4) = -1/2$ 。

當各根間之某種關係已知，係數間之相當關係亦必存在，欲求此關係，應用§8:6之定理。

例1. $x^3+px^2+qx+r=0$, 若其根爲等比級數條件若何?
命諸根爲 $a/\beta, a, a\beta$, 則

$$\frac{a}{\beta}+a+a\beta=-p, \quad \frac{a^2}{\beta}+a^2+a^2\beta=q, \quad \frac{a}{\beta} \cdot a \cdot a\beta=r.$$

將第三方程化爲 $a^3=-r$, 則 $a=\sqrt[3]{-r}$.

將第一方程除第二方程, 以 $a=\sqrt[3]{-r}$ 代入結果, 化簡之即得 $q^3-p^2r=0$.

例2. $x^3+8x^2+5x-50=0$, 若有二重根, 試解之.

以 a, a, β 表諸根, 則

$$2a+\beta=8, \quad a^2+2a\beta=5, \quad a^2\beta=50.$$

解第一, 第二兩方程以得 a 及 β , 則 $a=-5, \beta=2$ 及 $a=-1/3, \beta=-22/3$.

$a=-5, \beta=2$ 適合此方程 $a^2\beta=50$, 但其他二值 $a=-1/3, \beta=-22/3$ 不適合此方程.

故所求之根爲 $-5, -5, 2$.

809

根之對稱函數. § 805 中根與項相等之諸式, 皆爲根之對稱函數; § 540, § 868 中將證明根之一切其他有理對稱函數, 因此又可以方程之係數表示之, 成爲有理函數.

例1. 求方程 $2x^3-3x^2-4x-5=0$ 之根之本方程.

命諸根爲 a, β, r , 得 $(a+\beta+r)^3-3(a+\beta+r)(a\beta+\beta r+ra)=0$

$$a^2+\beta^2+r^2=(a+\beta+r)^2-2(a\beta+\beta r+ra)=(3/2)^2+4=6\frac{1}{2}.$$

例2. 設 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根爲 a, β, r , 則根爲 $\beta r, ra, a\beta$ 之方程若何?

若 p', q', r' 爲所求方程之係數, 則

$$-p' = \beta r + ra + a\beta = q,$$

$$-q' = \beta r \cdot ra + ra \cdot a\beta + a\beta \cdot \beta r = r^2,$$

$$-r' = a\beta r (a + \beta + r) = (-r)(-p) = rp,$$

$$-r' = \beta r \cdot ra \cdot a\beta = (a\beta r)^2 = r^2.$$

故所求之方程爲 $x^3 - qx^2 + prx - r^2 = 0$.

習 題 LXXI

1. $2x^3 - 7x^2 + 10x - 6 = 0$ 之二根爲 $1 \pm i$; 求其第三根.
2. 設以下各方程之根皆成等差級數; 試求之.
 - (1) $8x^3 - 14x^2 - 21x + 27 = 0$.
 - (2) $x^3 + x^2 + 3x + 27 = 0$.
3. 設以下各方程之根皆成等差級數; 試求之.
 - (1) $x^3 + 6x^2 + 7x - 2 = 0$.
 - (2) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$.
4. 設 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, 其中有一根爲他一根之負數, 求證 $pq = r$.
5. 欲使 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 之一根爲他根之倒數, 其條件如何?
6. 設方程 $x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9 = 0$ 有二重根, 試解之.
7. 設方程 $14x^3 - 12x^2 - 18x + 9 = 0$ 之根成調和級數, 試解之.
8. 設方程 $x^3 - x^2 - 56x^2 + 36x + 723 = 0$ 之二根爲 $2:3$, 則二根之差爲 1, 試解之.
9. 設 α, β, γ 爲 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 之根, 試作方程使其根爲:
 - (1) $-\alpha, -\beta, -\gamma$.
 - (2) $k\alpha, k\beta, k\gamma$.
 - (3) $1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma$.
 - (4) $\alpha+k, \beta+k, \gamma+k$.
 - (5) $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$.
 - (6) $-1/\alpha^2, -1/\beta^2, -1/\gamma^2$.
10. 設 α, β, γ 爲 $2x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ 之根, 求下式各值:
 - (1) $\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha + \beta + \gamma}$.
 - (2) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.
 - (3) $1/\beta\gamma + 1/\gamma\alpha + 1/\alpha\beta$.
 - (4) $\alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2 + r\beta^3 + r\gamma^3 + r\alpha^3 + a^2r$.
11. 設 α, β, γ 爲 $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$ 之根, 求下式各值:
 - (1) $\alpha/\beta\gamma + \beta/\gamma\alpha + \gamma/\alpha\beta$.
 - (2) $\alpha\beta/\gamma + \beta\gamma/\alpha + \gamma\alpha/\beta$.
 - (3) $(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta)$.
 - (4) $(\beta^2 + \gamma^2)(\gamma^2 + \alpha^2)(\alpha^2 + \beta^2)$.

以 $(5) \alpha \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) + \beta \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha} \right) + \gamma \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right)$.

方 程 之 變 形

810 數種重要變形。有時為便利計，將已知方程 $f(x)=0$ 變形為其他方程，使其根與原方程式 $f(x)=0$ 之根有一定關係，變形之常用者如下：

811 將已知方程 $f(x)=0$ 變為他方程，其根之絕對值與原方程等而其符號相異。

所求之方程為 $f(-y)=0$ ，因代 x 以任一數，如 β 於 $f(x)$ 內所得之結果與代 y 以 $-\beta$ 於 $f(-y)$ 內之結果相同，故當 $x=\beta$ 時， $f(x)$ 為零，當 $y=-\beta$ 時， $f(-y)$ 亦將為零；即設 β 為 $f(x)$ 之根，則 $-\beta$ 即為 $f(-y)=0$ 之根。

故 $f(x)=0$ 之每個根，符號變後，為 $f(-y)=0$ 之根；又 $f(-y)=0$ 除此等外無有其他根，蓋 $f(x)=0$ 及 $f(-y)=0$ 次數相同。

原方程為

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

則所求之方程為

$$a_0(-y)^n + a_1(-y)^{n-1} + a_2(-y)^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

化簡即得

$$a_0y^n - a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n = 0.$$

故所求之方程可由原方程得之，若 n 為偶數時，變其奇次

項之符號即得，若 n 為奇數時，則變其偶次項（絕對項亦包含在內）。

（變形方程中之未知數字）可用 x 代之， $f(-y)=0$ 以 $f(-x)=0$ 代之。

例. 變化 $4x^2 - 9x + 6 = 0$ 之各根之符號.

改變二次項之符號, 即得

$$(8) \quad 4x^2 + 9x - 6 = 0$$

其實, 原方程之根為 $1/2, 3/2, -2$, 此 i 變化後之根為 $-1/2, -3/2, 2, 于 i$.

試變方程 $f(x) = 0$ 為他一方程, 而其根為 $f(x) = 0$ 諸根之

1倍.

所求之方程為 $f(y/k) = 0$. 因當 $x = \beta$ 時, $f(x)$ 為零, 當 $y/k = \beta$ 時, $f(y/k)$ 亦將為零, 即當 $y = k\beta$ 時, $f(y/k)$ 亦為零 (比較 § 811).

設已知方程為

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

所求之方程為 $a_0 (y/k)^n + a_1 (y/k)^{n-1} + a_2 (y/k)^{n-2} + \dots + a_n = 0$

$$a_0 \left(\frac{y}{k}\right)^n + a_1 \left(\frac{y}{k}\right)^{n-1} + a_2 \left(\frac{y}{k}\right)^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

化簡分變或 $a_0 y^n + k a_1 y^{n-1} + k^2 a_2 y^{n-2} + \dots + k^n a_n = 0$.

故所求之方程為將 k 乘入已知方程之第二項, 將 k^2 乘入第三項, 依此類推, 惟須注意計入其缺項.

例. 將 $x^2 + 2x^2 - x + 3 = 0$ 之根乘2, 又以2除之.

所求第一方程為 $x^2 + 4x^2 - 8x + 12 = 0$, 又因乘1/2與為2所除

相同, 第二方程為 $16x^2 + 16x^2 - 2x + 3 = 0$.

下例將說明方程變形之一重要應用.

例. 試將 $36x^2 + 18x^2 + 2x + 9 = 0$ 變形, 使其首係數為1, 其他

係數皆為整數.

以36除之, 得

$$x^2 + x^2/2 + x/18 + 1/4 = 0,$$

(1)

以 k 乘各根，

$$x^2 + kx^2/2 + k^2x/12 + k8/4 = 0. \quad (2)$$

由觀察得 k 能消去分母之最小值為6，故以6代入(2)，得

$$x^2 + 3x^2 + 2x + 64 = 0. \quad (3)$$

此為所求之方程，方程(3)之根各以6除之，即為(1)方程之各根。

814 將已知方程 $f(x)=0$ 變形，使其根為 $f(x)=0$ 各根之倒數。

引) 設原方程為 $f(x)=0$ ，因當 $x=\beta$ 時， $f(x)$ 為零，當

$1/y=\beta$ 時，即 $y=1/\beta$ 時， $f(1/y)$ 亦將為零。

設已知方程為

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

所求之方程為

$$a_0/y^n + a_1/y^{n-1} + \dots + a_{n-1}/y + a_n = 0,$$

當分數化簡變為

$$a_0y^n + a_1y^{n-1} + \dots + a_{n-1}y + a_n = 0.$$

故所求之方程可僅將已知方程中係數之順序倒轉即得。

例。試作 $2x^4 - x^2 - 3x + 4 = 0$ 之倒數根之方程。

倒轉其係數程序，得 $4x^4 - 3x^3 - x^2 + 2 = 0$ 。

815 如 $2x^2 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ 一類之方程雖經比次變形，即其係

數程序隨屬倒置，而其形不變時，名之曰倒數方程，§ 645。設 β 為

其一根，則 $1/\beta$ 亦為其一根。故若此方程為偶次方程，則其所有根

之半部為其他部之倒數，其方程次數為奇次時，則除一根外，其

(1) 他諸根亦然。但此時必有一根為其本身之倒數，即必有一根為

1或-1.例如, $2x^3 + 3x^2 - 8x - 2 = 0$ 之一根為1,而其他之根為-2及-1/2.

由此情形之性質, 即當一方程之係數為變數時, 而首項係數為零, 則其中一根變為無窮大; 當前二項係數為零, 則其二根必變為無窮大; 以此類推.

例求當 m 漸變為零時, $m x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ 之根變為無窮大.

應用§814於 $m x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$, (1)

得 $x^3 - 2x^2 + 3x + m = 0$. (2)

設(2)之各根為 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, 則(1)為 $1/\beta_1, 1/\beta_2, 1/\beta_3$.

由§886, $\beta_1 \beta_2 \beta_3 = -m$, 故當 m 漸近於0為極限, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 三根中之一根亦將以0為極限, 又設此根為 β_1 , 則(1)之相當諸根, 即 $1/\beta_1$, 必漸近於 ∞ , §512.

例求當 m 漸變為零時, $m x^3 + m^2 x^2 + x + 1 = 0$ 中 m 漸近於零為極限, 則其中二根變為無窮大.

應用§814於 $m x^3 + m^2 x^2 + x + 1 = 0$, (1)

得 $x^3 + x^2 + m^2 x + m = 0$. (2)

設(2)之各根為 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, 則(1)之根為 $1/\beta_1, 1/\beta_2, 1/\beta_3$.

又 $\beta_1 \beta_2 \beta_3 = -m, \beta_1 \beta_2 + \beta_1 \beta_3 + \beta_2 \beta_3 = m^2$. (3)

從(3)若 m 漸近於0, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 三根中之二亦將漸近於0, 又若其根為 β_1, β_2 , 則(1)之相當諸根, 即 $1/\beta_1, 1/\beta_2$ 定將漸近於 ∞ .

求變一已知方程 $f(x) = 0$ 為他方程, 而其各根為 $f(x) = 0$ 中各根減一常數 k .

所求之方程為 $f(y+k) = 0$, 因設當 $x = \beta$ 時, $f(x)$ 等於零, 則 $y+k = \beta$ 時, 即當 $y = \beta - k$ 時, $f(y+k)$ 將等於零.

設已知方程為 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$,

所求方程為 $f(y+k) = a_0 (y+k)^n + a_1 (y+k)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (y+k) + a_n = 0$,

各項用二項定理展開之，且合併共同類各項，則為

$$\phi(y) = c_0 y^n + c_1 y^{n-1} + \dots + c_{n-1} y + c_n = 0,$$

其中 $c_0 = a_0, c_1 = nka_0 + a_1, \dots$

由 $f(x)$ 求 $\phi(y)$ 之法，頗感麻煩。下法較為便捷，至少當 $f(x)$ 之係數為已知有理數時，

設 $x = y + k$ ，則 $y = x - k$ ，得

$$f(x) = f(y+k) = \phi(y) = \phi(x-k),$$

$$c_0(x-k)^n + \dots + c_{n-1}(x-k) + c_n \equiv c_0 x^n + \dots + c_n.$$

設此恆等式之兩邊各以 $x-k$ 除之，及其商又以 $x-k$ 除之，
 準此類推，則左端連續所及之餘式，即 c_n, c_{n-1}, \dots ，將與右端所得
 之餘式相同。故由 $f(x)$ 得 $\phi(y)$ 如下：以 $x-k$ 除 $f(x)$ ，再以 $x-k$
除其商，如此類推。其連續餘數為 c_n, c_{n-1}, \dots, c_1 ，而最後商將
為 c_0 (比較 § 423)。除法可用綜合除法。

例1. 將 $2x^3 - 7x^2 - 3x + 1 = 0$ 之根各減4.

第一法. 以 $y+4$ 代入 x ，得

$$\begin{aligned} 2x^3 - 7x^2 - 3x + 1 &= 2(y+4)^3 - 7(y+4)^2 - 3(y+4) + 1 \\ &= 2y^3 + 17y^2 + 37y + 5. \end{aligned}$$

第二法. 如 § 423 排列之，得

$$\begin{array}{r} 2 \quad -7 \quad -3 \quad +1 \quad | \quad x \\ \underline{ } \\ 8 \quad 4 \quad 4 \\ \underline{ } \\ 2 \quad +1 \quad +15 \quad +5 \\ \underline{ } \\ 8 \quad 36 \quad +21 \\ \underline{ } \\ 2 \quad +9 \quad +87 \\ \underline{ } \\ 2 \quad +17 \end{array}$$

$$c_1 = 17 \text{ 而 } c_0 = 2.$$

故所求之方程為

$$2y^3 + 17y^2 + 37y + 5 = 0.$$

例2. 將 $x^3 + 4x^2 + x + 3 = 0$ 之根各增4.

增各根以4即減各根以-4.故所求之方程可以 $y-4$ 代 x 而得, 或以-4用綜合法除之, 則得 $y^3 - 8y^2 + 17y - 1 = 0$.

用§817, 可將一已知方程變為他方程, 使其消去未知項之指 818 定幕.

例1. 將 $x^3 - 3x^2 + 5x + 6 = 0$ 變為他方程, 使其消去未知之二次項.

使 $x = y + k$, 得 $y^3 + (3k-3)y^2 + \dots$. 則得 $3k-3=0$, 即 $k=1$. 又將 $x^3 - 3x^2 + 5x + 6 = 0$ 之根減去1, 得 $x^3 + 2x + 9 = 0$.

例2. 將 $x^3 - 5x^2 + 8x - 1 = 0$ 變為他方程, 使其消去未知之一次項.

使 $x = y + k$, 得

$$y^3 + (3k-5)y^2 + (3k^2-10k+8)y + \dots = 0.$$

則 $3k^2 - 10k + 8 = 0$, 即 $k=2$ 或 $4/3$.

將 $x^3 - 5x^2 + 8x - 1 = 0$ 之各根減2, 得

$$x^3 + x^2 + 3 = 0.$$

設由 $f(x) = 0$ 各根中減 k , 得方程 $\phi(x) = 0$, 其中各項皆正, 819 則 k 為 $f(x) = 0$ 之諸正根之上限, §804 因當此情形, $\phi(x) = 0$ 無正根, §794 故 $f(x) = 0$ 之任何正根, 減 k 後, 均變負根, 故小於 k .

由觀察, 試驗, 用綜除法, 可得 k 之最小整數值, 而使 $\phi(x) = 0$ 之各項皆為正號. 如此作法, 恆屬便易.

求 $f(x) = 0$ 負根之下限, 可用求 $f(-x) = 0$ 諸根之上限以得之 因設 k 為 $f(-x) = 0$ 諸根之上限, 則 $-k$ 必為 $f(x) = 0$ 諸根之下

限, §811.

例. 求 $f(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 + 48x - 121 = 0$ 諸根之上限及下限.

吾人從觀察及試驗知 $k=1$ 與 $k=2$ 皆不能作一各項皆正之 $\phi(x) = 0$, 而 $k=3$ 時, 則可得之, 其實設使 $f(x) = 0$ 之各根減小 3, 則得 $\phi(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 78x + 63 = 0$. 故 3 為 $f(x) = 0$ 之上限,

方程 $f(-x) = 0$ 為 $x^4 + 6x^3 + 14x^2 - 48x - 121 = 0$. 用觀察試驗, 則知 5 為諸正根之上限, 故 -3 為 $f(x) = 0$ 諸負根之下限.

823 普通有理變形. 由 $f(x) = 0$ 及 $y = -x$ 消去 x , 則得 $f(-y) = 0$. 在 §811 已證明 $f(-y) = 0$ 之 y 與 $f(x) = 0$ 之 x 之關係為 $y = -x$. 此為普通定理之一種說明, 即設由 $f(x) = 0$ 及任一方程 $y = \phi(x)$ 中消去 x , 其中 $\phi(x)$ 為有理式, 則得一方程 $F(y) = 0$, 其根與 $f(x) = 0$ 之根之關係為 $y = \phi(x)$, 故若 $f(x) = 0$ 之根為 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, 則 $F(y) = 0$ 之諸根將為 $\phi(\beta_1), \phi(\beta_2), \dots, \phi(\beta_n)$. §§ 2, 814, 817 之變形又更為此定理之其他說明. 在第一變形中方程 $y = \phi(x)$ 為 $y = kx$, 在第二變形中 $y = 1/x$, 第三為 $y = x - k$. 設 $y = \phi(x)$ 能解出, 則 x 之消去甚便.

例1 求一方程為 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 諸根之平方.

此題之關係 $y = \phi(x)$ 為 $y = x^2$.

解 $y = x^2$ 之 x , 得 $x = \pm\sqrt{y}$. 又將 $\pm\sqrt{y}$ 代入 x , 化為有理, 則得

$$y^2 + (2q - p^2)y + (q^2 - 2pr)y - r^2 = 0.$$

例2. 若 α, β, γ 為 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 之根, 求根為 $\beta\gamma$,

方程.

第一先將 $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ 之每一根,

p, q, r 之一係數，此屬甚易，因 $-r = c\beta\gamma$ ，故得 $\beta\gamma = a\beta\gamma/a = -r/a$ ， $\gamma a = a\beta\gamma/\beta = -r/\beta$ ， $a\beta = a\beta\gamma/\gamma = -r/\gamma$ 。

故所求方程每一根 y ，與原方程之相當根 x 之關係為 $y = -r/x$ 。

解 $y = -r/x$ 求 x ，則得 $x = -r/y$ 。

將 $-r/y$ 代 x 於 $x^2 + px^2 + qx + r = 0$ 而化簡之，則得 $y^2 - qy^2 + pry - r^2 = 0$ ，此即所求之方程。

習 題 LXXII

1. 變 $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x + 7 = 0$ 各根之符號。
2. 將 $2x^4 + x^3 - 4x^2 - 6x + 8 = 0$ 各根乘 -2 ，又以 3 除其各根。
3. 求 $5x^6 - x^4 + 8x^3 + 9x + 10 = 0$ 諸根之倒數之方程。
4. 將 $2x^6 + x^4 - 3x^2 + 6 = 0$ 各根減 2 ，又各根加 1 。
5. 將 $x^4 - x^3/3 + x^2/4 + x/25 - 1/48 = 0$ 變為他方程，其係數皆為整數，首項係數為 1 。
6. 將 $3x^4 - 36x^3 + x - 7 = 0$ 變為他方程，缺其 x^3 之一項。
7. 將下列方程變形，缺其 x 項：
 (1) $x^3 + x^2 + 9x + 10 = 0$. (2) $x^3 - x^2 - x - 3 = 0$.
8. 設 $x^4 + x^3 - x + 2 = 0$ 之根為 a, β, γ, δ ，求根為 $a^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2$ 之方程。
9. 設 a, β, γ, δ 為 $x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 1 = 0$ 之根，求根為 $\beta + \gamma + \delta, a + \gamma + \delta, a + \beta + \delta, a + \beta + \gamma$ 之方程。

10. 若 a, β, γ 為 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 之根，求下列各方程，其根為：

$$(1) \frac{a\beta}{\gamma}, \frac{\beta\gamma}{a}, \frac{\gamma a}{\beta} \quad (2) \frac{a}{\beta + \gamma}, \frac{\beta}{\gamma + a}, \frac{\gamma}{a + \beta}$$

11. 若 a, β, γ 為 $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$ 之根，求下列各方程，其根為：

$$(1) \beta^2 + \gamma^2, \gamma^2 + a^2, a^2 + \beta^2, (2) a(\beta + \gamma), \beta(\gamma + a), \gamma(a + \beta)$$

$$(3) \beta\gamma + \frac{1}{a}, \gamma a + \frac{1}{\beta}, a\beta + \frac{1}{\gamma}, (4) \frac{a}{\beta + \gamma - a}, \frac{\beta}{\gamma + a - \beta}, \frac{\gamma}{a + \beta - \gamma}$$

$$(5) a\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right), \beta\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{a}\right), \gamma\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta}\right)$$

12. 求下列各方程諸實根之上限及下限:

$$(1) x^4 + 8x^3 - 13x^2 - 6x + 23 = 0. \quad (2) 2x^5 - 120x^3 - 38x + 27 = 0.$$

$$(3) x^4 - 3x^3 + 50x + 12 = 0. \quad (4) 2x^5 - 26x^3 + 60x^2 - 92x = 0.$$

$$(5) x^4 - 14x^3 + 44x^2 + 28x - 92 = 0.$$

$$(6) 8x^6 - 35x^5 + 77x^4 - 50x^3 - 110 = 0.$$

虛根 笛卡兒氏符號規則

321 定理. 使 $f(x) = 0$ 表實係數之方程, 設有虛根, 則其發現必

成對; 即若 $a + ib$ 為其一根, 則 $a - ib$ 亦為其一根.

因設 $a + ib$ 為 $f(x) = 0$ 之一根, 則 $f(x)$ 必可 $x - (a + ib)$ 除盡, §795; 且將證明 $f(x)$ 又為 $x - (a - ib)$ 除盡, 即 $a - ib$ 亦為其一根. 換言之, 設吾人能證明 $f(x)$ 能為 $[x - (a + ib)][x - (a - ib)]$ 所除盡即可.

此乘積為有理係數, 因 $i^2 = -1$,

$$\begin{aligned} (x - (a + ib))(x - (a - ib)) &= (x - a)^2 + b^2 \\ &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

因多項式 $f(x)$ 與 $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$ 有一公因式 $x - (a + ib)$, 必有一最高公因式. 此最高公因式非 $x - (a + ib)$, 即 $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$, 但不能為 $x - (a + ib)$, 因此式有虛係數, 而有實係之兩多項式, 其最高公因式須有實係數故也, §469, 故 $f(x)$ 及 $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$ 之最高公因式為 $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$; 換言之, $f(x)$ 得為 $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$ 所除盡.

例. 設 $2x^3 + 5x^2 + 46x - 87 = 0$ 之一根為 $-2 + 5i$. 試解之.

因 $-2 + 5i$ 為其一根, 則 $-2 - 5i$ 亦為其一根. 但所有之根之和為 $-5/2$, §806, 故第三根為

$$= -5/2 - (-2 + 5i - 2 - 5i) = 3/2.$$

系1. 有實係數之各多項式 $f(x)$ 皆爲一次或二次實因式 822

之積.

因 $f(x)=0$ 有一實根 c , $f(x)$ 即有一實因式 $x-c$ 與之對應, § 795; 且 $f(x)=0$ 有一對虛根 $a+ib, a-ib$, $f(x)$ 即有一實因式 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$ 與之對應, § 821.

系2. $f(x)$ 之諸因式中, 凡對應於 $f(x)=0$ 之虛根之積, 823
爲 x 之函數, 此函數於 x 爲任何實值時爲正.

因此函數得表示爲 $(x-a)^2+b^2$ 形之因式之積, § 821, 而如是各因式爲平方和, 因此 x 爲任何實值時皆爲正.

系3. 有實係數之奇次方程, 至少有一實根. 824

因若有虛根, 其個數必成偶數, § 821, 而奇次方程所有虛實根之總數爲奇數, § 798. 故至少一根爲實數.

例如, 一實係數之三次方程, 其三根皆爲實數或一根爲實數二根爲虛數.

由 § 821 可證明設 $a+\sqrt{b}$ 爲一實係數方程之根, $a-\sqrt{b}$ 825
 亦必爲其一根; 應注意, a 與 b 皆爲有理數, 但 \sqrt{b} 爲無理數.

不能約方程 設 $\phi(x)=0$ 爲有理實係數方程, 如 $\phi(x)$ 不 826
 含有理實係數之因式, 則 $\phi(x)=0$ 名之謂不能約方程 (比較 § 486).

例如, $x^2-2=0$ 及 $x^2+x+1=0$ 爲不能約方程, 但 $x^2-4=0$
 則否.

設 $f(x)=0$ 表任一有理實係數方程, 又設 $\phi(x)=0$ 827

表同次或低次之不能約方程.

設 $\phi(x)=0$ 中有一根為 $f(x)=0$ 之根，則 $\phi(x)=0$ 之諸根，

皆為 $f(x)=0$ 之根。

可由 § 82 之理證明之。因設 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 有一公根 c ， $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 有公因式 $x-c$ ，§ 795，故其最高公因式為 $x-c$ ， $\phi(x)$ 之一因式而含 $x-c$ 者，或為 $\phi(x)$ 本身。

但按假定 $\phi(x)=0$ 為一不能約方程， $\phi(x)$ 必為 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之有理係數之最高公因式，§ 469。

故 $\phi(x)$ 之本身為 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 之最高公因式；換言之， $f(x)$ 總為 $\phi(x)$ 所除盡。

由是 $f(x)$ 可寫為 $f(x)=Q\phi(x)$ ，此處 Q 為整數，而從此恆等式則知當 $\phi(x)$ 為零時， $f(x)$ 亦為零；換言之，凡 $\phi(x)=0$ 之根必為 $f(x)=0$ 之根。

828 連號及變號。在任何實係數之多項式 $f(x)$ ，或方程 $f(x)=0$ 中，設某項與其前一項同號，則謂之連號；又設某項與其前項異號，則謂之變號。

例如， $x^6-x^4-x^3+2x^2+3x-1=0$ 中，連號見於 $-x^3$ 及 $3x$ 二項，其變號見於 $-x^4$ ， $2x^2$ 及 -1 三項。

829 定理。設 $f(x)$ 得為 $x-b$ 所除盡， b 為正，且 $f(x)$ 之係數為實數，則商 $\phi(x)$ 所有之變號至少較 $f(x)$ 所有者少一。

因 b 為正，故由綜合除法之規則，§ 411，可知以 $x-b$ 除 $f(x)$ ，於到達 $f(x)$ 之一項以前，商之各係數常為正數，設其後或再後，商之一係數變為負或 0，則於到達 $f(x)$ 之次一正項以前，商之係數常為負，準此類推，故 $\phi(x)$ 之變號，或見於 $f(x)$ 中之同號項或見於其前項，此外無其他之變號，但由假

際，可由此除盡，故 $\phi(x)$ 中之最後符號，與 $f(x)$ 中之最後符號相異，因此 $\phi(x)$ 無 $f(x)$ 中之最後變號

$$\begin{array}{r} 1 \quad +1 \quad -2 \quad -10 \quad -1 \quad +12 \quad -4 \quad | \quad 2 \\ \quad +2 \quad +6 \quad +8 \quad -4 \quad -10 \quad +4 \\ \hline 1 \quad +3 \quad +4 \quad -2 \quad -5 \quad +2 \quad 0 \end{array}$$
 如 $f(x) = x^6 + x^5 - 2x^4 - 10x^3 - x^2 + 12x - 4$ 能為 $x-2$ 除盡，而其商為 $\phi(x) = x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x + 2$ 。注意 $f(x)$ 之首二變號，皆重見於 $\phi(x)$ ，但第三變號則否。

$$\begin{array}{r} 1 \quad -1 \quad +1 \quad -7 \quad +2 \quad | \quad 2 \\ \quad +2 \quad +2 \quad +6 \quad -2 \\ \hline 1 \quad +1 \quad +3 \quad -1 \quad 0 \end{array}$$
 又， $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 7x + 2$ 能以 $x-2$ 除盡，其商 $\phi(x) = x^3 + x^2 + 3x - 1$ 。此例 $f(x)$ 之四變號中，僅一變號重見於 $\phi(x)$ 中，又吾人由此可知若 $f(x)$ 之中間變號，不見於 $\phi(x)$ 中，其得失必成對。

定理(笛卡兒符號規則)。 方程 $f(x) = 0$ 所有正根之數，830

不能大於其變號之數，又其負根之數不能大於 $f(-x) = 0$ 變號之數。

1. 使 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 表 $f(x) = 0$ 之正根。

若以 $x - \beta_1$ 除 $f(x)$ ，再以 $x - \beta_2$ 除所得之商，準此類推，則所得商 $\phi(x)$ 至少比 $f(x)$ 少 r 個變號，§ 829，故因 $\phi(x)$ 有少於零個變號，故 $f(x)$ 至少必有 r 個變號，即 $f(x)$ 所正之數，至少與 $f(x) = 0$ 所有正根之數相等。

2. $f(x) = 0$ 之負根為 $f(-x) = 0$ 之正根，§ 811。如以上所述， $f(-x) = 0$ 正根之數不能大於變號數。故 $f(x) = 0$ 之負根之數不能大於 $f(-x) = 0$ 之變號數。

例如， $f(x) = x^6 - x^5 - x^3 + x - 1 = 0$ 不能有三個以上之正根，或一個以上之負根。蓋 $f(x) = 0$ 有三個變號，又 $f(-x) = 0$ ，即 $x^6 + x^5 + x^3 - x - 1 = 0$ ，有一個變號。

831 系。 一完全方程所有負根之個數不能大於其所有連號之個數。

因設 $f(x)=0$ 爲一完全方程，則其連號一一與 $f(-x)=0$ 之變號對應，蓋 $f(x)=0$ 中每有兩個相鄰項符號相同，其在 $f(x)=0$ 中必變，§ 811。

列如， $f(x)=0$ 爲 $x^5+x^4-8x^3-8x^2-7x+1=0$ ， (1)

則 $f(-x)=0$ 爲 $x^5-x^4-8x^3+8x^2-7x-1=0$ 。 (2)

(1) 式 x^4 ， $-8x^2$ ， $-7x$ 各項有連號者而(2)之對應項即 $-x^4$ ， $8x^2$ ， $-7x$ 有變號。

因(1)有二變號及三連號， $f(x)=0$ 之正根不能多於二，負根不能多於三。

832 虛根之檢查。 在一不完全方程內，吾人常可應用笛卡兒符號規則以證明虛根之存在。

設 $f(x)=0$ 爲 n 次方程，且其中無零根，又設 v 及 v' 各表 $f(x)=0$ 及 $f(-x)=0$ 之變號數。則方程 $f(x)=0$ 至少必有 $n-(v+v')$ 個虛根。

因 $f(x)=0$ 不能有 v 個以上之正根，亦不能有 v' 個以上之負根，§ 330，故其不能有 $v+v'$ 以上之實根。則 n 個根中其餘之根必爲虛根。

此定理不能指示完全方程之虛根，因在此類方程內 $v+v'$ 之和等於 n 。

例。 證明 $x^5+x^2+1=0$ 有四個虛根。

在本題內 $f(x)=0$ 爲 $x^5+x^2+1=0$ ，而 $f(-x)=0$ 爲 $x^5-x^2-1=0$ 。

因此 $n-(v+v')=5-(0+1)=4$ ，故虛根之數不能少於四。但因共有五根，其一根爲實根，且 $x^5+x^2+1=0$ 之次數爲奇數，§ 324，故不能有四個以上之虛根。故 $x^5+x^2+1=0$ 恰有

習 題 LXXIII

1. 已知 $2x^4 - x^3 + 5x^2 + 13x + 5 = 0$ 之一根為 $1-2i$ ，求解此方程。

2. 已知 $2x^4 - 11x^3 + 17x^2 - 10x + 2 = 0$ 之一根為 $2+\sqrt{2}$ ，求解此方程。

3. 一有理係數之某方程，其中二根為 $-5+2i$ 及 $-1+\sqrt{5}$ ，作此方程之最低次數者。

4. 求一不能約的方程，其一根為 $\sqrt{2}+i$ 。

5. 試用笛卡兒規則及 § 832，討論下列各方程之根：

(1) $x^4 + 1 = 0$.

(2) $x^4 - x^2 - 1 = 0$.

(3) $x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

(4) $x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1 = 0$.

(5) $x^7 + x^5 + x^3 - x + 1 = 0$.

(6) $x^7 + x^4 - x^2 - 1 = 0$.

(7) $x^5 - 4x^2 + 3 = 0$.

(8) $x^{3n} - x^{2n} + x^n + x + 1 = 0$.

6. 求證一全為實根之完全方程，其變號數與正根數同，又其連號數與負根數同。

7. 已知 $x^5 + 3x^4 - 15x^3 - 35x^2 + 54x + 72 = 0$ 之諸根皆為實數，試辨幾個正根，幾個負根。

8. 用笛卡兒符號規則證明 $x^{2n} + 1 = 0$ 無實根，又討論下列方程之根： $x^{2n+1} + 1 = 0$ ， $x^{2n} - 1 = 0$ ， $x^{2n+1} - 1 = 0$ 。

9. 求證若一方程僅含 x 之偶次項及正係數，則不能有一正根或一負根。

10. 求證一方程僅含 x 之奇次項及正係數，則除零外不能有實根。

11. 設 p 與 q 為正，證明 $x^3 + px + q = 0$ ，祇有一負數之實根。

12. 設一不完全方程無零根，求證此方程必有兩個或兩個以上之虛根，但若在異號之二項間有一缺項如 $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ 者則否。

13. 有實係數之方程 $f(x) = 0$ 中在二個不連續異符號之間，必有奇數個變號，而在二個不連續相同符號之間，有偶數個或無變號。

14. 由有實係數之方程，取 x 之正負根及虛根之因式之乘積，則積之最末項常為正，試證明之。又若此積若有變號，則其個數必為偶數。

15. 求證若變號之個數超過正根之個數，則超過之個數必為偶數。

16. 求證 $x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ 之正根數，非一即三，而負根數為一。

17. 求證凡絕對項有負之各偶次方程至少有一正根及一負根。

無理根之檢定

893 定理1. 若 $f(a)$ 與 $f(b)$ 有異號，則 $f(x) = 0$ 之根介乎 a 與 b 之間。

此可證於下例，其普通之證明則將來申述之。

例. 證明 $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ 有一根介乎 1 與 2 之間。

$f(1) = -1$ 之符號為負， $f(2) = 3$ 之符號為正。

使 $x = 1.1, 1.2, 1.3, \dots$ 而依次計算 $f(x)$ 之值，則可知 1 與 2 之間兩相鄰之小數，即 1.5 及 1.6，使 $f(x)$ 所生之符號，各與 $x = 1$ 及 $x = 2$ 時符號相同；因 $f(1.5) = -0.125$ 為負，而 $f(1.6) = 0.296$ 為正也。

仿此，可知介乎 1.5 及 1.6 之間兩相鄰之小數即 1.53 及 1.54，使 $f(x)$ 所生之符號，皆與 $x = 1$ 及 $x = 2$ 時之符號相同；蓋 $f(1.53) = -0.03423$ 為負，而 $f(1.54) = 0.032284$ 為正也。

如此推遷，而決定下列不盡數列：

(a) $1, 1.5, 1.53, 1.532, \dots$, (b) $2, 1.6, 1.54, 1.538, \dots$

其中各項，漸趨於同一之極限，參 § 192, 193. 若此極限為 c ，此為 $f(x) = 0$ 之一根，即 $f(c) = 0$ 。

因由 § 59，若在 a 與 b 之間任一數列 (a) 或 (b)， $f(x)$ 漸趨於 $f(c)$ 為極限，但因 x 趨於 (a) 時 $f(x)$ 常為負，故 $f(c)$ 不能為正，又因 x 趨於 (b) 數列時， $f(x)$ 常為正，故其極限 $f(c)$ 不能為負，故 $f(c)$ 為零。

定理2. 設 a 與 b 皆非 $f(x)=0$ 之根, 且 $f(x)=0$ 有奇數 834

個根介乎 a 與 b 之間, 則 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相反之符號; 然若無根或有偶數個根介乎 a 與 b 之間, 則 $f(a)$ 及 $f(b)$ 之符號相同。

反之, 若 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相反之符號, 則 $f(x)=0$ 有奇數個根介乎 a 與 b 之間; 然若 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相同之符號, 則 $f(x)=0$ 無根或有偶數個根介乎 a 與 b 之間。

設 $a < b, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_r$ 為 $f(x)=0$ 在 a 與 b 間所有之諸根; 則 $f(x)$ 必可為 $(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_r)$ 所整除, § 418, 且得所得之商為 $\phi(x)$, 則得

$$f(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_r)\phi(x). \quad (1)$$

先以 a , 復以 b 代入之, 以其第二結果除第一結果, 則得

$$\frac{f(a)}{f(b)} = \frac{a-\beta_1}{b-\beta_1} \cdot \frac{a-\beta_2}{b-\beta_2} \cdot \dots \cdot \frac{a-\beta_r}{b-\beta_r} \cdot \frac{\phi(a)}{\phi(b)}. \quad (2)$$

乘積 (2) 中之因式 $\phi(a)/\phi(b)$ 為正。因 $\phi(a)$ 及 $\phi(b)$ 之符號相同, 因否則按 § 883, 在 a 及 b 之間, 必有 $\phi(x)=0$ 之一根, 因此由 (1), $f(x)=0$, 除 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 之外尚須有一根。

他方面, $(a-\beta_1)/(b-\beta_1)$ 以及其他 r 個因式皆為負, 蓋 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 之 r 個根為大於 a 而小於 b 。

故當 r 為奇數時, 則 $f(a)/f(b)$ 為負, 即 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相反之符號; 但 r 為偶數或 0 時, 則 $f(a)/f(b)$ 為正, 即 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相同之符號。

反之, 若 $f(a)$ 及 $f(b)$ 符號相反, 於是 $f(a)/f(b)$ 為負, 因此從 (2) 可知 r 為奇數; 又若 $f(a)$ 及 $f(b)$ 符號相同, 則可知 r 為偶數或 0。

835 注意在證明上面定理，§§ 833, 834 時，對於每一方程 $f(x) = 0$ 必有一根之假設並未引用，又用此定理時，其一個 r 次重根，應計作 r 個單根。

由 § 834 則知 x 由 a 變為 b 時， x 經 $f(x) = 0$ 之每一單根或奇次重根之介於 a 與 b 之間者， $f(x)$ 即變其符號；且除此類變更符號外， $f(x)$ 不經其他變號。

例如，設 $f(x) = (x-2)(x-3)^2(x-4)^3$ ，使 x 由 1 變至 5，則 $f(x)$ 之符號在 $x=1$ 及 $x=2$ 之間時為正，在 $x=2$ 及 $x=4$ 之間時為負，在 $x=4$ 及 $x=5$ 之間時為正。

836 無理根之位置。由 § 833 之定理，常能決定數字方程在二連續整數之間，其分數根及無理根之所在。

例。試定 $f(x) = x^4 - 6x^3 + x^2 + 12x - 6 = 0$ 之根之位置。

由笛卡兒氏符號規則，§ 830，此方程之正根不能多於三，負根不能多於一。

若求正根之位置，可依次計算 $f(0), f(1), f(2), \dots$ ，至三根用 § 833 說明為止，或至 x 之值為其根上限為止，§ 803。

故仿 § 414，用綜合除法，得 $f(0) = -6, f(1) = 2, f(2) = -10, f(3) = -42, f(4) = -70, f(5) = -46, f(6) = 102$ 。

故由 § 833，一根在 0 與 1 之間，他一根在 1 與 2 之間，第三根在 5 與 6 之間。在以上各界限間，不能有多於一個根者，蓋總共祇有三個正根。

依同法求負根，有 $f(0) = -6, f(-1) = -10, f(-2) = 38$ 。故負根在 -1 與 -2 之間。

若有二個或二個以上之根介乎相鄰二整數之間，則僅以整數為界限而求時，當然不能將 $f(x)$ 之實根完全檢得。此類情形將於 § 844 及 § 861 中討論，故可確定在已知二鄰數間究有幾根也。

習 題 LXXIV

求下列各方程實根之位置：

1. $2x^3 - 3x^2 - 9x + 8 = 0.$
2. $x^3 + x^2 - 4x - 2 = 0.$
3. $x^3 - 8x^2 - 2x + 5 = 0.$
4. $2x^3 + 3x^2 - 10x - 15 = 0.$
5. $x^3 - 4x^2 - 4x + 12 = 0.$
6. $x^3 + 13x^2 + 54x + 71 = 0.$
7. $x^3 + 5x + 10 = 0.$
8. $x^4 - 95 = 0.$
9. $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0.$
10. $x^4 + 5x^3 + x^2 - 18x - 7 = 0.$
11. $x^4 - 11x^3 + 32x^2 - 4x - 46 = 0.$
12. $x^6 + 2x^4 - 16x^3 - 24x^2 + 48x + 32 = 0.$
13. 設 x 之絕對值甚大時, $f(x)$ 之符號為其最高次項之符號, 求證:

求證:

(1) 設 n 為偶數, b_n 為負, 凡實係數之方程 $x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n = 0$ 至少有一正根及一負根。

(2) 方程

$$k^2(x-b)(x-c) + l^2(x-c)(x-a) + m^2(x-a)(x-b) - x(x-a)(x-b)(x-c) = 0$$

之四根各介乎 $-\infty$ 與 a , a 與 b , b 與 c , c 與 ∞ 之間, 設 a, b, c, k, l, m 為實數, 又 $a < b < c$.

14. 求證凡 $x^2 + (x-1)(ax-1) = 0$ 之形式, 設 $a \geq 3$, 則有二根在 0 與 1 之間, 即一根在 $1/c$ 與 $1-1/a$ 間, 他根在 $1/a$ 與 1 之間。

15. 求證 $x^3 + (x-1)(2x-1)(ax-1) = 0$, 在 0 與 $1/c$, $1/a$ 與 $1-2/c$, $1-2/a$ 與 1 之間。

無 理 根 之 計 算

赫納氏法。正根。數字方程之無理根近似值計算法有數(37)種, 其最簡捷者為英數學家赫納氏所創, 最好以例題說明之。

1. 用 §835, 所求根在 3 與 4 之間, 若以小數表之, 則有 $3.\beta\gamma\delta\dots$ 之形式, 其中 $\beta, \gamma, \delta, \dots$ 表其小數位之數字。

$$\begin{array}{r}
 2 + 1 \quad -15 \quad -59 \mid 3 \\
 \underline{6} \quad \underline{21} \quad \underline{30} \\
 7 \quad 6 \quad -41 \\
 \underline{6} \quad \underline{39} \\
 13 \quad 45 \\
 \underline{6} \\
 1
 \end{array}$$

2. $f(x) = 0$ (1) 諸根各減去 3, 則得變形之方程

$$\phi(x) = 2x^3 + 19x^2 + 45x - 41 = 0, \quad (2)$$

其根為 $0.\beta\gamma\delta\dots$, 而介乎 0 與 1 之間。試查 $\phi(x)$, 以 $x = 0.1, 0.2, 0.3, \dots$, 則 $\phi(0.6)$ 為負, 而 $\phi(0.7)$ 為正。故 (2) 之根介乎 0.6 與 0.7 間, 即 $\beta = 6$, 而 (1) 之根祇合首位小數為 3.6。

$$\begin{array}{r}
 2 + 19 \quad +45 \quad -41 \mid 3.6 \\
 \underline{1.2} \quad \underline{12.2} \quad \underline{31.272} \\
 20.2 \quad 57.12 \quad -6.728 \\
 \underline{1.2} \quad \underline{12.84} \\
 21.4 \quad 69.96 \\
 \underline{1.2} \\
 22.6
 \end{array}$$

3. (2) 之各根減去 0.6, 則得

$$\psi(x) = 2x^3 + 22.6x^2 + 67.8x - 6.728 = 0, \quad (3)$$

其根為 $0.0\gamma\delta\dots$ 在 0 與 0.1 之間。試查 $\psi(x)$ 於 $\psi(0.09)$ 為負, $\psi(0.1)$ 為正。故其根在 0.09 與 0.1 之間, 即 $\gamma = 9$, 故 (1) 式之二位小數根為 3.69。

4. (3) 式各根減去 0.09, 準此類推。

838 以上演算, 更可如下節所示簡捷行之。但由上例入下節之前, 當注意第一, 第二變形方程, (2) 及 (3) 之絕對項 -41 及 -6.728 符號相同。此固屬是, 因 $-41 = \phi(0)$ 而 $-6.728 = \phi(0.6)$, 設 $\phi(0)$ 及 $\phi(0.6)$ 符號相異, $\phi(x) = 0$ 之根介乎 0 與 0.6 之間, §833, 故 0.6 不為第一數字。以下之變形方程亦皆如此, 故一般言之:

試已知方程僅有一根具整數部分 a , 而求此根之演算無誤, 則用以求根之各變形方程, 其絕對項將有相同符號。

在以上情形，吾人皆用代入法以求各變形方程之根之第一數字，即已知方程之各小數位之數字，但自第二以下變形方程之根之第一數字，通常僅須先將絕對項變號，再以 x 之係數除之，此謂之試除法。

例如，討論第二變形方程

$$\psi(x) = 2x^3 + 22.6x^2 + 69.96x - 6.728 = 0. \quad (3)$$

此方程有一小於 0.1 之根 c ，而 c 之二次及更高次幕小於 c 本身甚甚，即 $(0.09)^2$ 僅為 0.0081，故 c 若已知而代入 (3) 中，所得數字恆等式

$$2c^3 + 22.6c^2 + 69.96c - 6.728 = 0,$$

其第一、二兩項較之末兩項小甚。

故 c 之第一位數字與方程

$$69.96x - 6.728 = 0 \quad (3')$$

相同，但 (3') 係由 (3) 略去 x^3 及 x^2 二項而得。

解 (3')，得 $x = 6.728/96 = 0.09+$ ，即如上 (3) 之根之第一數字為 9。

此法不能正確求得第一變形方程之第一位數字，但此法至少可以指出數字之所在而減少其代入法之手續。有時即使第二變形方程之根之第一位數字亦能正確求得，但在此情形下其錯誤在下次變形中極易查出；因其數字太大，在其次一變形方程內，其絕對項將變其符號，§338；或其太小，則此方程之根之第一數字顯然太大。

欲避免在第一變形後所發生之煩雜小數，可先以十乘各變形方程之根，§812，而後再行變形，此可以一個附於該方程之第

二係數後，以二個0附於第三係數後，其餘準此，然後可視作根之數字在次一變形方程內為整數。

例如，在§837例題內，其第一變形方程

$$2x^3 + 19x^2 + 45x - 41 = 0, \quad (2)$$

且知其根呈0,6+之形式。

以10乘(2)之根，得

$$2x^3 + 190x^2 + 4500x - 41000 = 0, \quad (2')$$

其一根呈6+之形式。

使(2')之根減小6，此計算同上所已知之演算僅係小數點而已，得

$$2x^3 + 226x^2 + 6996x - 6738 = 0, \quad (3')$$

其根大於下方程之根十倍

$$2x^3 + 22.6x^2 + 69.96x - 6.728 = 0. \quad (3)$$

用試除法知0,9+為(3')之根，故0,09+為(3)之根。

841 吾人可計算 $2x^3 + x^2 - 15x - 59 = 0$ 之根，算至小數三位如下：

$$\begin{array}{r} 2 \quad + \quad 1 \quad \quad -15 \quad \quad -59 \mid 3,693 \\ \quad \quad 6 \quad \quad 21 \quad \quad 18 \\ \hline \quad \quad 7 \quad \quad 6 \quad \quad -41 \\ \quad \quad 6 \quad \quad 39 \\ \hline \quad \quad 13 \quad \quad 45 \\ \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad + \quad 190 \quad +4500 \quad -41000 \mid 6 \\ \quad \quad 12 \quad \quad 1212 \quad \quad 34272 \\ \hline \quad \quad 202 \quad \quad 5712 \quad \quad -6728 \\ \quad \quad 12 \quad \quad 1284 \\ \hline \quad \quad 214 \quad \quad 6996 \\ \quad \quad 12 \end{array}$$

$$\frac{6728}{6996} = 0,9+$$

$$\begin{array}{r} 2260 \quad +699600 \quad -6728000 \mid 9 \\ \quad \quad 18 \quad \quad 20502 \quad \quad 6480918 \\ \hline \quad \quad 2278 \quad \quad 729102 \quad \quad -247082 \\ \quad \quad 18 \quad \quad 20684 \\ \hline \quad \quad 2296 \quad \quad 740768 \\ \quad \quad 18 \\ \hline \quad \quad 2314 \end{array}$$

$$\frac{247082}{740768} = 0,3+$$

注意，此處用試除法所得各數字，皆為小數第一位之數字，如 0.9, 0.8. 然第二變形方程之最後係數若非 -6728, 而為 -672, 則得 $672/6.96 = 0.09$ 為次二數字. 如此計算則所得之根必須以 3.609 代替 3.69; 故作次變形方程之前必須以 100 乘第二變形方程之根, 即當附二個 0 於第二係數, 四個 0 於第三係數, 六個 0 於第一係數.

如此演算可推至無窮, 但吾人即遇甚大之數, 又自根之少許 842 小數位得到之後, 可依下述之簡便方法用極簡之演算求至所需之數位.

上例計算時, 最末變形方程式為

$$2x^3 + 2314x^2 + 740766x - 247082 = 0. \quad (4)$$

今不附 0 於係數而以 $x/10$ 代 (4) 中之 x , 使 (4) 之根增大十倍; 1812, 則得

$$0.002x^3 + 23.14x^2 + 74076.6x - 247082 = 0. \quad (4')$$

係數之小數部分甚小, 刪去之亦不影響根之其次諸數字, 刪去之法可依四捨五入, 得二次方程

$$23x^2 + 74077x - 247082 = 0. \quad (4'')$$

故演算可連續如下:

23	+ 74077	- 247082	0.003332
	69	222438	
	74146	- 24644	
	69		
23	+ 73225	- 24644	
		32266	
	7422	- 2378	
		2226	
	742	- 152	
		148	
			4

即, 先以 3 減二次方程 (4'') 之根, 得變形方程 $23x^2 + 74215x - 24644 = 0$ (5). 用試除法, 根之下一數字亦為 3.

在下一變形之前，先當如前刪簡其數字，於是(5)式即變爲
 次方程 $7422x - 24644 = 0$ 。欲求根之下二數字， $?$ ， $?$ 僅須用
 簡省法即不附 0 於被除數後，刪去除數末之數字，以 7422 除 24
 644 即是。

843 負根。欲求 $f(x) = 0$ 之負無理根，可求 $f(-x) = 0$ 之對應
 0 應正根而變其符號即得。

例。求 $f(x) = x^3 - x^2 - 10x + 9 = 0$ 之負根，

此處 $f(-x) = 0$ 爲 $x^3 - x^2 - 10x - 9 = 0$ 。其正根用郝納
氏法求得約爲 4.03293。故 $f(x) = 0$ 之負根約爲 -4.03293。

844 幾乎相等之根。設已知方程有二根介乎相鄰二整數間，則
 可如下例求得之。

例。 $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 9 = 0$ 如有正根，試求之。

用代入法， $f(0) = 9$ ， $f(1) = 1$ ， $f(2) = 1$ ， $f(3) = 15$ ，3 爲諸
 根之上限，§ 803。故 § 834 在 0 與 1，或 1 與 2，或 2 與 3 間，
 或無正根，或有二正根。但 $f(1)$ 與 $f(2)$ 較 $f(0)$ 與 $f(3)$ 近於 0。
 故設有二根，大約不在 0 與 1，或 2 與 3 而在 1 與 2 之間。

因此 $f(x) = 0$ 之根減 1，得

$$\phi(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0,$$

設 $f(x) = 0$ 在 1 與 2 之間有二根，則此方程有二根在 0 與 1 之
 間。

于 $x = 0.1, 0.2, 0.3, \dots$ 計算 $\phi(x)$ 之值，得 $\phi(0.2)$ 爲正而 ϕ
 (0.3) 爲負，又 $\phi(0.7)$ 爲負而 $\phi(0.8)$ 爲正。故 $\phi(x) = 0$ 在 0.2
 與 0.3 間有一根，又 0.7 與 0.8 間亦有一根。用郝納氏法，得此
 根各約爲 0.25560 及 0.77733。

故 $f(x) = 0$ 有 1.2556 與 1.77733 二個正根。

845 定大根之位置。已知方程 $f(x) = 0$ 內有一根大於十，可用
 下法以求該數部分之數字。

求第一數字時，可用 § 833 將 $x = 10, 20, \dots$ 代入 $f(x)$ 中而計算其值；必要時，或使 $x = 100, 200, \dots$ 其餘準此。例如，若知 $f(400)$ 及 $f(500)$ 有異號，則根介乎 400 與 500 之間而第一數字為 4。求其餘數字，可如求小數位數字時，依次作方程之變形。例如，適所述之情形中，吾人應將 $f(x) = 0$ 之根減去 400，則得一方程 $\phi(x) = 0$ ，其根在 0 與 100 之間。若知此根在 70 與 80 之間，則根之第二數字為 7。然後將 $\phi(x) = 0$ 之根減去 70，而得方程 $\psi(x) = 0$ ，其根介乎 0 與 10 之間。若知此根在 8 與 9 之間，可知 $f(x) = 0$ 之根，其整數部分為 473。

解數字方程。欲求已知數字方程 $f(x) = 0$ 之實根，則依 § 843 807 之方法先求有理根為最佳，至少於係數為有理數時為然。若法無效則立一次次方程 $\phi(x) = 0$ ，其中若有實根，則為無理數。用 §§ 833, 844, 845 法檢定諸根，然後用赫納氏法求其約值。

又分數根亦可用赫納氏法求得之，當分母若僅含因數，則所得為真值，此外為約值。

習 題 LXXV

求下列所示範圍內之根，計算至六位小數：

1. $x^3 + x - 3 = 0$; 根在 1 與 2 之間。
2. $x^3 + 2x^2 - 20 = 0$; 根在 2 與 3 之間。
3. $x^3 + 6x^2 + 10x - 2 = 0$; 根在 0 與 1 之間。
4. $3x^3 + 5x - 10 = 0$; 根在 2 與 3 之間。
5. $x^3 + 10x^2 + 8x - 1.0 = 0$; 根在 2 與 3 之間。

6. $2x^2 - x^2 - 9x + 1 = 0$; 根在 1 與 2 之間。
 7. $x^2 + x^2 - 5x - 1 = 0$; 根在 1 與 2 之間。
 8. $x^3 - 2x^2 - 23x + 70 = 0$; 根在 -5 與 -6 之間。
 9. $x^3 - 10x^2 - 4x + 8 = 0$; 根在 3 與 4 之間。
 10. $x^4 + 6x^3 + 12x^2 - 11x - 41 = 0$; 根在 -2 與 -3 之間。
 11. $x^3 - 3x^2 - 4x + 13 = 0$; 二根在 2 與 3 之間。

求下列方程各根至小數三位:

12. $x^3 - 3x^2 - 4x + 10 = 0$. 13. $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$.
 14. $x^3 - 8x + 1 = 0$. 15. $x^4 + 5x^3 + x^2 - 13x - 7 = 0$.
 16. 用納氏法於方程 $x^3 - 17 = 0$, 以計算 $\sqrt[3]{17}$ 至第四位小

數。

17. 用納氏法計算 $2\sqrt[3]{8}$ 及 $\sqrt[3]{87}$, 各至精三位小數。
 18. 用 § 845 及納氏法, 求 $x^3 + x^2 - 2500 = 0$ 之實根至第
 二位小數。
 19. 用 § 844 定 $x^3 + 5x^2 - 6x + 1 = 0$ 之各根之位置。
 20. 求 $3x^5 + x^4 - 14x^3 - x^2 + 9x - 2 = 0$ 之諸根。

戴勒氏定理 重根

847 導來式。獨項式, 如 ax^n 以 x 之指數 n 乘之, 再將指數減 1, 則得 nax^{n-1} , 此謂 ax^n 之導來式, 或更詳細言之, 關於 x 之導來式特例常數 a , 即 ax^0 之導來式為 0。

多項式 $f(x)$ 各項之導來式之和, 謂之多項式之導來式, 或第一導來式而以 $f'(x)$ 代表之。

$f(x)$ 之導來式謂之第二導來式, 而以 $f''(x)$ 代表之, 以此類推。

凡 n 次多項式必有一串 n 個導來式, 其最後導來式 $f^{(n)}(x)$ 為常數, 甚為顯然。

例如，設

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 4x^2 - x + 1,$$

得

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 8x - 1,$$

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 8,$$

$$f'''(x) = 72x - 48,$$

$$f^{(4)}(x) = 72.$$

以下導來式均爲0。

注意， $f(x)$ 之第二，第三，... 導來式爲 $f'(x)$ 之第一，第二，... 導來式。

戴勒氏定理。若以 $x+h$ 代 x 於 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ 中，則得

$$f(x+h) = a_0(x+h)^n + a_1(x+h)^{n-1} + \dots + a_n.$$

用二項定理展開 $(x+h)^n, (x+h)^{n-1}$ ，等等，集項後可化成 x 之 n 次多項式，其結果爲

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}, \quad (I)$$

其中 $f'(x), f''(x), \dots$ 爲 $f(x)$ 之連續導來式，此恆等式名爲戴勒氏定理。

因以二項定理，(3-561)，展開 $(x+h)^m$ 而以常數 a 乘之，且寫成

$$a(x+h)^m = ax^m + m ax^{m-1}h + m(m-1)ax^{m-2}\frac{h^2}{2!} + m(m-1)(m-2)ax^{m-3}\frac{h^3}{3!} + \dots$$

則各係數

$$m ax^{m-1}, m(m-1)ax^{m-2}, m(m-1)(m-2)ax^{m-3}, \dots,$$

後者爲前者之導來式。

故設展開

$$f(x+h) = a_0(x+h)^n + a_1(x+h)^{n-1} + \dots + a_n.$$

此式內，各展開式首項之和爲 $f(x)$ ；第二項之和爲 h 乘首項

導來式之和即 $f'(x)h$; 第三項之和為 $h^2/2!$ 乘第二項之導來式之和或 $f''(x)h^2/2!$; 以下類推。

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}.$$

例如, 設 $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$,

$$f(x+h) = a_0(x+h)^3 + a_1(x+h)^2 + a_2(x+h) + a_3,$$

$$= a_0x^3 \left| \begin{array}{l} + 3a_1x^2h \\ + 2a_1x^2 \\ + a_2x \\ + a_3 \end{array} \right. + 6a_0x \left| \begin{array}{l} h^2 \\ + 2a_1h \\ + 2a_1 \end{array} \right. \frac{h^2}{2!} + 6a_0 \frac{h^3}{3!}$$

$$= f(x) + f'(x)h + f''(x)h^2/2! + f'''(x)h^3/3!$$

849 因 $x = a + (x-a)$, 則 $f(x) = f(a + (x-a))$. 故祇用 a 代 x , $x-a$ 代 h 於恆等代 (I) 內, 得以 $x-a$ 之幕表 $f(x)$, § 423. 其結果為

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}. \quad (\text{II})$$

例. 以 $x-1$ 之幕表 x^3-1 之式.

因 $f(x) = x^3 - 1$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$.

故 $f(1) = 0$, $f'(1) = 3$, $f''(1)/2 = 3$, $f'''(1)/3! = 1$

故 $x^3 - 1 = 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$.

850 重根. $f'(x)$ 之第一, 第二... 導來式為 $f(x)$ 之第二, 第三, ... 導來式. 故 § 849, 以 $x-a$ 表多項式 $f(x)$ 及其第一導來式 $f'(x)$ 為

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2/2! + \dots, \quad (1)$$

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + f'''(a)(x-a)^2/2! + \dots, \quad (2)$$

設 $f(x)$ 不能為 $(x-a)^2$ 所除盡而能為 $x-a$ 所除盡, 由 (1) 則得 $f(a) = 0$, 但 $f'(a) \neq 0$, 故由 (2) 可知 $f'(x)$ 不能被 $x-a$

所除盡。又設 $(x-a)^r$ 能除盡 $f(x)$ 而 $(x-a)^{r+1}$ 不能除盡 $f(x)$ ，則由 (1) 可知 $f(a) = f'(a) = 0$ 而 $f^{(r)}(a) \neq 0$ ，又由 (2) 可知 $f'(x)$ 可為 $x-a$ 除盡，而不能為 $(x-a)^2$ 除盡。就一般而言，設 $f(x)$ 為 $(x-a)^r$ 所除盡，而不為 $(x-a)^{r+1}$ 所除盡，則由 (1) 可知 $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(r-1)}(a) = 0$ 而 $f^{(r)}(a) \neq 0$ 。故由 (2) 可知 $f'(x)$ 為 $(x-a)^{r-1}$ 所除盡，但不能為 $(x-a)^r$ 除盡。

故由 § 400，有下列之定理。

定理。 $f(x)=0$ 之一次根，不為 $f'(x)=0$ 之一根；但 $f(x)=0$ 之二次根為 $f'(x)=0$ 之一根，概言之， $f(x)=0$ 之 r 次重根為 $f'(x)=0$ 之 $r-1$ 次重根。

例如， $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$ 之根為 2, 2, -3 而 $f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = 0$ 之根為 2, -4/3。

故設 $f(x)=0$ 有重根，可用下法求得之。以 § 465 之方法，先求 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之最高公因式。設 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 為互質，則 $f(x)=0$ 僅有單根，但設若由是發見 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 有最高公因式 $\phi(x)$ ，則 $\phi(x)=0$ 之各單根皆為 $f(x)=0$ 之二重根， $\phi(x)=0$ 之各二重根，皆為 $f(x)$ 之三根，準此類推。蓋由 § 850，若 $\phi(x)$ 可為 $(x-a)^r$ 所除盡，則 $f'(x)$ 可為 $(x-a)^r$ 所除盡，而 $f(x)$ 可為 $(x-a)^{r+1}$ 所除盡也。

注意，設商 $f(x)/\phi(x)$ 為 $F(x)$ ，則 $F(x)=0$ 之根即 $f(x)=0$ 之根，但各根各見一次。

例。求方程 $f(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4 = 0$ 之重根。

此處 $f'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 15x^2 + 2x + 8$ ，由 § 465，求得 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之最高公因式為 $\phi(x) = x^2 - 3x - 2$ 。

$\phi(x)=0$ 之根可由 § 802 求得之而為 -1, -1, 2。故 $f(x)=0$ 有三重根 -1，二重根 2，即其根為 -1, -1, -1, 2, 2。

注意 $f(x) = (x+1)^2(x-2)^2$,
 則 $f'(x) = (x+1)^2(x-2)(5x-4)$,
 故 $F(x) = f(x)/\phi(x) = (x+1)(x-2)$.

§53 又若任意二方程 $f(x) = 0$ 及 $\psi(x) = 0$ 有一公根，則可由求 $f(x)$ 及 $\psi(x)$ 之最高公因式以得之。

例. 設 $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0$ 之一根為他根之負數，求此方程。

上述之二根顯然為 $f(x) = 0$ 及 $f(-x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = 0$ 之公根，故可由求 $f(x)$ 及 $f(-x)$ 之最高公因式以得之。

由 § 465 求得此最高公因式為 $x^2 - 4$ ，故所述二根為 2, -2，將 $x^2 - 4$ 除 $f(x)$ ，則得降次方 $x^2 - x + 1 = 0$ ，由此得其他二根為 $(1 \pm i + \sqrt{3})/2$ 。

習 題 LXXVI

1. 求 $2x^5 - 4x^4 + x^3 - 20x$ 之第一, 第二, ... 根式
2. 設 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ ，由歐勒氏定理求 $(x+h)$
3. 用公式 § 849. (II) (1) 以因式 $x+1$ 表 $x^3 + 1$; (2) 以因式 $x-2$ 表 $x^3 - 32$; (3) 以因式 $x+1$ 表 $(x^2+1)/(x^2+1)$
4. 求下列各方程之重根。解之。
 - (1) $x^4 - x^3 - 2 = 0$
 - (2) $9x^4 + 12x^3 - 11x^2 + 2 = 0$
 - (3) $4x^4 + 12x^3 + 9 = 0$
 - (4) $x^4 - 5x^3 + 8x - 4 = 0$
 - (5) $2x^4 - 12x^3 + 19x^2 - 6x + 9 = 0$
 - (6) $x^4 - x^3 - 4x^2 - 3x - 2 = 0$
 - (7) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x + 12 = 0$
 - (8) $x^5 - x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$
 - (9) $3x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = 0$
5. 求證 $a^n - a^m = 0$ 不能有一重根。
6. 設 $x^3 - 12x + a = 0$ 有一重根，求 a 。
7. 設 $3x^3 + ax^2 + a + b = 0$ 有三重根，求 a 與 b 之值，并求此根。

若該方程 $x^3 + 0x^2 + 0x + 1 = 0$ 有三重根。

9. 試求 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 有一重根之條件。

10. 設 $f(x)$ 為 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 之根，問 $f(x)$ 之形式如何？

11. 設方程 $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$ 及 $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ 有

公根，求此公根。

12. 設方程 $x^3 - 20x - 16 = 0$ 有一根為 $x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$

中一根之二倍，試解此方程。

13. 求證：設有一有理係數之三次方程有一重根，則此根必為有理數。

14. 設 $f(x)$ 為完全平方外，此根必為有理數。

15. 求證：設 a 為 n 次方程 $f(x) = 0$ 之一根，則其亦為 $f'(x)$

之根。即 $f(a) = 0, f'(a) = 0, \dots, f^{(n-1)}(a) = 0$ 諸方程之一根。

有理函數之變形

定理。設 $f(x)$ 為一多項式依 x 升幂序排列。又設 b 為首

項係數之絕對值又 g 為最大係數之絕對值。則當 x 之絕對值小於 $b/(b+g)$ 時， $f(x)$ 之首項絕對值上，必大於其他各項之和。

第一，設 $f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$ ，故 $b = |b_0|$ ，且設 x

之絕對值小於 $b/(b+g)$ ，則 $|b_0x^n| > |b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots|$

在絕對值上小於(或等於) $g|x|^{n-1} + g|x|^{n-2} + \dots$

或 $g(x + x^2 + \dots)$ ，§235，故當 $|x| < 1$ ，此式小於 $g|x|/(1-x)$

，§ 704 僅 $|x|/(1-x)$ ，當 $|x| < b/(b+g)$ 時，小於 b 。

第二，設 $f(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots$ ，則 $b = |b_0|$ ，且

當 $|x| < b/(b+g)$ 時，即當 $|x| < b/(b+g)$ 時，則 $|b_0x^n| > |b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots|$

，§ 704 僅 $|x|/(1-x)$ ，當 $|x| < b/(b+g)$ 時，即 $|x| < b/14$

，則 $|b_0x^n| > |b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots|$ 。

855 定理. $f(x)$ 表依 x 之降幂序排列之多項式, 命 a 爲其首項係數之絕對值, g 爲最大係數之絕對值. 當 x 之絕對值大於 $(a+g)/a$ 時, 對絕對值言, $f(x)$ 之首項大於其他各項之和.

設 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, 則 $a = |a_0|$, 并使 x' 表之絕對值.

得 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = x^n (a_0 + a_1/x + \dots + a_n/x^n)$. 故 $|a_0| > |a_1/x + \dots + a_n/x^n|$ 時, 則 $|a_0 x^n| > |a_1 x^{n-1} + \dots + a_n|$. 但 § 854, $|a_0| > |a_1/x + \dots + a_n/x^n|$ 當 $1/x' < a/(a+g)$ 時, 即當 $x' > (a+g)/a$ 時.

例如, 設 $f(x) = 3x^3 + x^2 - 7x + 2$, 當 $x' > (3+7)/3$ 即 $x' > 10/3$ 時, 得 $|3x^3| > |x^2 - 7x + 2|$.

從此定理, $f(x) = 0$ 之根無論爲實根或虛根, $(a+g)/a$ 一數顯較任何根之絕對值爲大.

856 定理. 設 a 爲 $f(x) = 0$ 之一根, 既 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之值在 x 略小於 a 時有相異符號, 略大於 a 時有相同符號.

因以因式 $x-a$ 表 $f(x)$ 及 $f'(x)$, § 849, 然後以第二式除第一式當 a 爲單根, 故有 $f(a) = 0$, 但 $f'(a) \neq 0$, 其結果可化爲

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = (x-a) \frac{f'(a) - f''(a)(x-a)/2! + \dots}{f'(a) + f''(a)(x-a) + \dots}$$

右端分式之分子分母, 皆爲 $x-a$ 之多項式. 故繼於任何 $x-a$ 之值小至能適應需要時, § 854, 分子分母之符號, 與其公有第一項 $f'(a)$ 之符號相同, 而分式自身爲正. $f(x)/f'(x)$ 之符號與 $x-a$ 者相同, 故視 $x < a$ 或 $x > a$ 而爲負或正. 但 $f(x)/f'(x)$ 之符號爲負時, $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之符號相反, 又當 $f(x)/f'(x)$ 之符號爲正

時, $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之符號相同.

當: 為 r 次重根時, §859,

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = (x-a) \frac{f^{(r)}(a)/r! + \text{含}(x-a)\text{之各項}}{f^{(r-1)}(a)/(r-1)! + \text{含}(x-a)\text{之各項}}$$

由是仿 a 為單根時之同一理由, 得上列定理.

洛勒氏定理. 在 $f(x)=0$ 之相隣根之間, 常有 $f'(x)=0$ §51

之一根.

因命 β_1 及 β_2 為方程之根, 命 c 表略大於 β_1 之數, d 為略小於 β_2 之數, 故而 $\beta_1 < c < d < \beta_2$.

則 $f'(c)$ 與 $f(c)$ 有相同符號, §855, 又 $f(c)$ 與 $f(d)$ 有相同符號, §534; 但 $f(d)$ 與 $f'(d)$ 符號相反, §856. 故 $f'(c)$ 與 $f'(d)$ 有異號, 因此 $f'(x)=0$ 之一根介於 c 與 d 之間, 即 β_1 與 β_2 之間, §833.

例如, 設 $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$, 則 $f'(x) = 0$ 為 $2x - 3 = 0$. 則 $f(x) = 0$ 之根為 1 與 2, $f'(x) = 0$ 之根為 $3/2$ 在 1 與 2 之間.

例 求證 $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 9 = 0$ 在 1 與 2 之間有二根 (比較 §844, 例).

因 $f(1) = 1$ 而 $f(2) = -1$. 1 與 2 之間有二根或無根. 設有二根, 則 $f'(x) = 0$ 必有一根在 1, 2 之間, 而此根必在 $f(x) = 0$ 之二根間.

但 $f'(x) = 3x^2 + 2x - 10 = 0$ 在 1, 2 之間有一根, 蓋 $f'(1) = -5$ 及 $f'(2) = 6$. 解方程, 得此根約為 1.5. 又因 $f(1.5) = -0.375$ 為負, 故因 $f(1)$ 與 $f(2)$ 均正, 故 $f(x) = 0$ 有二根介乎 1 與 2 之間, 即一在 1 與 1.5 之間, 一在 1.5 與 2 之間.

定理. 設變數 x 增大, 則當其經歷 a 值時, $f(x)$ 之值, 視 §53

$f'(a) > 0$ 或 $f'(a) < 0$ 而增加或減少.

設 $f'(a) = 0$, 但 $f''(a) \neq 0$, 當 $f''(a) < 0$ 時, $f(a)$ 為 $f(x)$ 之一極大值, 當 $f''(a) > 0$, (a) 為極小值.

由 § 849 得

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2/2! \dots$$

右邊是 $x-a$ 之多項式，一切 x 之值，能使 $x-a$ 之絕對值小至合於 § 854 之需要者，能使第一項之符號，代表全式之符號；故亦即代表 $f(x) - f(a)$ 之符號。 x 之值如此限定後，則

1. 設 $f'(a) > 0$ ，則 $f'(a)(x-a)$ 與 $(x-a)$ 有同號，從而 $f(x) - f(a)$ 與 $(x-a)$ 符號相同。故當 x 經過 a 時， $x-a$ 由負變到正， $f(x) - f(a)$ 亦同，即 $f(x)$ 由小於 $f(a)$ 之值，增加至大於 $f(a)$ 之值。

2. 設 $f'(a) < 0$ ， $f'(a)(x-a)$ 及 $(x-a)$ 之符號相反。故據 1 之理由，得證 x 經過 a 時， $f(x)$ 減小。

3. 設 $f'(a) = 0$ 而 $f''(a) \neq 0$ ， $f(x) - f(a)$ 與 $f''(a)(x-a)^2/2$ 有相同之符號，因而又與 $f''(a)$ 之符號相同；因無論 $x < a$ 或 $x > a$ ， $(x-a)^2$ 恆為正也；故 $f''(a) < 0$ 時，則在 x 對準 a 前，或在 x 經過 a 後， $f(x) < f(a)$ ，即 $f(a)$ 為 $f(x)$ 之極大值，§ 839。

仿此可證當 $f''(a) > 0$ 時， $f(a)$ 為 $f(x)$ 之極小值。

又若 $f''(a) = 0$ 而 $f'''(a) \neq 0$ ， $f(a)$ 不為 $f(x)$ 之極大或極小值（見 § 859 例 2），故一般言之， $x = a$ 時，設由第一至第 r 之諸導來式皆為零，但 $r+1$ 次導來式非為零， $f(a)$ 於 r 為奇數時，為極大或極小值，但 r 為偶數時則否。

例。當 x 漸漸經過 2 時， $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ 增乎減乎？又求 $f(x)$ 之極大與極小值。

吾人知 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ ，故 $f'(2) = -3$ 為負，故當 x 經過 2 時， $f(x)$ 正減小也。

又 $x=1$ 及 $x=3$ 時, $f'(x)=0$, 而 $f''(x)=6x-12$, 故 $f''(1)=-6$ 負而 $f''(3)=6$ 為正, 故 $f(1)=3$ 為 $f(x)$ 之極大值, 而 $f(3)=-1$ 為極小值.

$f(x)$ 之變化, 茲討論 x 由 $-\infty$ 繼續變化至 $+\infty$ 時, §214, 含實係數之多項式 $f(x)$ 之值如何變化.

例 1. 討論 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$$f(x) = 0 \text{ 之根爲 } -1, 1, 2; \text{ 而 } f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$$

故當 $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$; 當 x 在 $-\infty$ 與 -1 之間, $f(x)$ 為負; 當 $x=-1$, $f(x)=0$; 當 x 在 -1 與 1 之間, $f(x)$ 為正; 當 $x=1$, $f(x)=0$; 當 x 在 1 與 2 之間, $f(x)$ 為負; 當 $x=2$, $f(x)=0$; 當 x 在 2 與 $+\infty$ 之間, $f(x)$ 為正; 當 $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$.

求 $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1 = 0$, 其根為 $(2 \pm \sqrt{7})/3$, 即大約為 1.0 與 1.5 ; 當 $x < (2 - \sqrt{7})/3$ 及 $x > (2 + \sqrt{7})/3$ 時, $f'(x)$ 為正, 而當 x 在 $(2 - \sqrt{7})/3$ 及 $(2 + \sqrt{7})/3$ 之間, $f'(x)$ 為負.

故從§58, $f(x)$ 視 x 由 $-\infty$ 至 $(2 - \sqrt{7})/3$ 之變化而遞增, 次當 x 由 $(2 - \sqrt{7})/3$ 至 $(2 + \sqrt{7})/3$ 之變化, $f(x)$ 遞減, 而於 x 從 $(2 + \sqrt{7})/3$ 變化至 $+\infty$ 時又重復遞增.

由此 § 639, 則知當 $x = (2 - \sqrt{7})/3$ 時, $f(x)$ 為極大值, 當 $x = (2 + \sqrt{7})/3$ 時, $f(x)$ 為極小值. 此與§58相同, 因當 $x = (2 - \sqrt{7})/3$, $f''(x) = 6x - 4$ 為負, 當 $x = (2 + \sqrt{7})/3$ 時為正.

設 $y = f(x)$, 由§339之考法作

方程之圖象, 則 $f(x)$ 之變化, 即可一

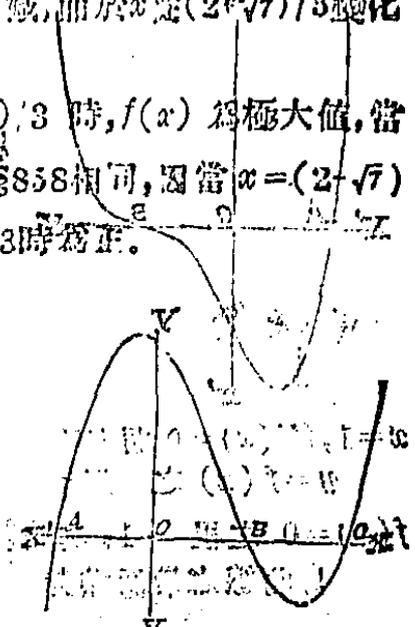
覽無遺, 此曲線如圖所示, 曲線與 x -

軸於 A, B, C 點為 $f(x) = 0$ 之根, 且

19. 曲線於 x -軸上方, $f(x)$ 為正, 在

x -軸下方為負, 在 A 與 B 間曲線最高點對應於 $f(x)$ 之極大值, B 與

C 間最低點為極小值.



常 x 由 $-\infty$ 變至 ∞ , 曲線之對態在 x -軸下無窮遠處, 向右上
方經過 A 至極大點, 然後向下經過 B 至極小點, 然後再向上經過
 C 而至 x -軸上無窮遠處.

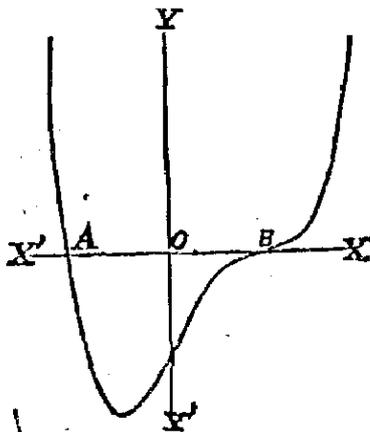
設 $f(x)$ 之絕對項逐漸增大, $y=f(x)$ 之對形, 必鉛直向上移
動, B 類及 C 點首先漸近而合於切點, 最後則消失. $f(x)=0$ 對態
之根先為等根, 而終為虛根.

例2. 討論 $f(x)=x^4-2x^3+2x-1$ 之變化.

$f(x)=0$ 之根為 $-1, 1, 1, 1$, 而 $f(x)=(x+1)(x-1)^3$.

故當 $x=\pm\infty$, $f(x)=\infty$; 當 $x=\pm 1$, $f(x)=0$; 當 $x < -1$ 又當
 $x > 1$, $f(x)$ 為正; 當 x 在 -1 與 1 之間, $f(x)$ 為負.

此處, $f'(x)=4x^3-6x^2+2=2(2x+1)(x-1)^2$, 而 $f'(x)$
 $\neq 0$ 之根為 $-1/2, 1, 1$. 當 $x < -1/2$, $f'(x)$ 為負; 當 x 在 $-1/2$ 與
 1 之間又當 $x > 1$, $f'(x)$ 為正. 故 §858, 於 x 之變化由 $-\infty$ 至 $-$
 $1/2$ 時, $f(x)$ 逐漸減小, 而於 x 變化由 $-1/2$ 至 1 , 及由 1 至 ∞ 時逐
漸增大.



故當 $x=-1/2$ 時, $f(x)$ 為極小
值, 但當 $x=1$ 時, $f(x)$ 既非極大亦非
極小值.

此與 §858 符合. 因 $f''(x)=12x^2$
 $-12x=12x(x-1)$ 而 $f'''(x)=24x-$

12 . 故當 $x=-1/2$, $f''(x)$ 為正; 但當
 $x=1$, $f''(x)=0$ 而 $f'''(x)\neq 0$.

$y=f(x)$ 之對形如圖所示. 其曲線到 x -軸之 A 點對應於
 $f(x)=0$ 之根 -1 , 其曲線切 x -軸且過 x -軸之 B 點對應於三
重根 1 . 曲線之最低點對應於 $f(x)$ 之極小值. 其座標為 $-1/2$,
 $-27/16$.

360 如以上各例情形, 若 $f(x)$ 之次數為奇數, 其首項係數為正,
則當 x 從 $-\infty$ 變至 $+\infty$, $f(x)$ 由 $-\infty$ 增大至其第一極大值,
然後減小至第一極小值等等, 而最後從末一極小值增至 $+\infty$, 端

然函數有界亦可無極大或極小值，蓋方程 $f'(x)=0$ 之次數為偶數，有時可無實根也。又 $y=f(x)$ 之圖形，由 x -軸下方之無窮遠，引至 x -軸上方之無窮遠，其截 x -軸之回數為奇數，——至少為一次。

反之，若 $f(x)$ 之次數為偶數，則 $f(x)$ 最初由 $+\infty$ 減小至第一極小值，最後由極小值增大至 $+\infty$ 。此種情形， $y=f(x)$ 之圖形不必截 x -軸。若截 x -軸，則所截之次數必為偶數。

通常可用 §189 之方法，求得 $y=f(x)$ 之充分精確之圖形，即給與 x 一系列數值，計算 y 之對應值，定所得各組 x, y 值之對應點，經此數點作一光滑之曲線。此線能約略表出真圖形截 x -軸之點，及極大與極小值諸點之所在。惟欲得真確之截點，則必須解方程 $f(x)=0$ ；欲得極大極小諸點，則須解 $f'(x)=0$ 。 $f(x)=0$ 之重根皆與圖形切橫軸之點相應。若重根之重複次數為奇數，則圖形更截 x -軸於此點。

習 題 LXXVII

1. 討論 $f(x)=(x+1)(x-2)^2=x^3-3x^2+4$ 之變化，求其極大與極小值，且畫 $f=f(x)$ 之圖形。

2. 同上題處理下列各函數：

(1) $2x^2-x+1$. (2) $(x+1)(x-2)(2x-1)$.

(3) $x^3-12x+14$. (4) x^3-5x^2+3x+9 .

(5) x^3-3x^2+5 . (6) $(x+1)^2(x-2)^2$.

(7) $(x^2+x+1)(x+2)$. (8) $x(x-1)(x+2)(x+3)$.

3. 當 $x = -1, 1/2, 0, 1/2, 1, \dots, 4$ 時定其各對應點, 而求各分式方程之圖形.

$$(1) \quad y = \frac{x(x-1)}{(x-2)(x-3)}; \quad (2) \quad y = \frac{x(x-2)}{(x-1)(x-3)}$$

史篤姆氏定理

861 史篤姆函數. 設 $f(x) = 0$ 為無重根之任何方程, 而 $f_1(x)$ 為 $f(x)$ 之第一導來式.

以 $f_1(x)$ 除 $f(x)$, 稱其商為 q_1 , 變其餘式之號而稱為 $f_2(x)$.

又以 $f_2(x)$ 除 $f_1(x)$, 稱其商為 q_2 , 變其餘式之符號而稱為

$f_3(x)$.

如此類推, 此法與 $f(x)$ 及 $f_1(x)$ 間最高公因式之通常求法不同之點, 僅為: 每一餘式皆變號. 又留意此外不得再變號.

因 $f(x) = 0$ 無重根, 故 $f(x)$ 及 $f_1(x)$ 間無公因式. § 351; 因此吾人最後所得餘式應為一異於 0 之常數, § 465. 變此餘式之符號而名之 f_m .

函數之數列

$$f(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_m$$

包括此已知之多項式, 其第一導來式, 及歷次所得變號之各餘式. 謂之史篤姆數列或史篤姆函數之數列.

862 史篤姆函數之關係. 此函數, 由定義, 而有下列各等式之關係,

$$f(x) \equiv q_1 f_1(x) - f_2(x), \quad (1)$$

$$f_1(x) \equiv q_2 f_2(x) - f_3(x), \quad (2)$$

$$f_2(x) \equiv q_3 f_3(x) - f_4(x), \quad (3)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f_{m-2}(x) \equiv q_{m-1} f_{m-1}(x) - f_m \quad \dots \quad (m-1)$$

由此等方程，可得結論：

1. x 之同一值，不能使二相鄰函數為 0。

例如，設 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 當 $x=c$ 時，為零，故由(2)可知 $f_2(x)$ 亦為零；由是從(3)可知 $f_1(x)$ 為零；從而，最後，可知 f_2 為 0，但此與假設相違。

2. 設 x 之某值使中間函數 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{m-1}(x)$ 之

一為零，則其緊接於此函數前與後之二函數有相異符號。

故，設 $f_2(c) = 0$ ，

則由(2)得 $f_1(c) = -f_2(c)$ 。

史篤姆定理，設 a 與 b 為二任意實數，但皆非 $f(x) = 0$ 863

之根。

則 $f(a), f_1(a), f_2(a), \dots, f_m$

數列中符號之變化數與

$$f(b), f_1(b), f_2(b), \dots, f_m$$

數列中符號變化數之差等於 $f(x) = 0$ 所有介乎 a 與 b 間之根

之個數。

為便於表明起見，設 $a \leq b$ ，又設 x 從 a 連續變化至 b 。

§ 214.

當 x 由 a 變化至 b ，次數 f_m 之符號始終不變，其他函數符號之可能變化，亦即該列

$$f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_m$$

中符號變化數之或有變化，僅在 x 經過方程 $f(x) = 0, f_1(x) = 0$ 等等之根時，§ 835。但

1. 除第一函數 $f(x)$ 外，任意函數改變時，全列中符號之變化數不因之而增減。

例如，設 c 為 $f_2(x)=0$ 之一根，而 $f_2(x)$ 於 x 經歷時 c 時，由正變負。

因 c 為 $f_2(x)=0$ 之根，故 c 不能又為 $f_1(x)=0$ 或 $f_3(x)=0$ 之根，§832。取一適當小之正數 h ，使 $c-h$ 與 c 間，或 c 與 $c+h$ 間無 $f_1(x)=0$ 或 $f_3(x)=0$ 之根，則 x 由 $c-h$ 變化至 $c+h$ 時， $f_1(x)$ 及 $f_3(x)$ 皆不變其符號，§835。

但當 $x=c$ ， $f_1(x)$ 及 $f_3(x)$ 有相反之符號，§832。設 $f_1(c)$ 為正；則 $f_3(c)$ 為負，而對於 x 在 $c-h$ 及 $c+h$ 數值之間，得 $f_1(x)$ ， $f_2(x)$ ， $f_3(x)$ 之符號如下表：

	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
$x=c-h$	+	+	-
$x=c$	+	0	-
$x=c+h$	+	-	-

故對於 x 之各值，三函數之符號

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$$

有一變化，故 $f_2(x)$ 之符號變化，至少在此部份僅改變變化之位置。

又 x 經歷 c 時，敘列在 $f_2(x)$ 以後之部份，其變化之數不變，因當 x 經過 c 時， $f_2(x)$ 以後之函數無變其符號者，若有之亦祇將 $f_2(x)$ 之情形重複一次，其惟一影響，僅為改變另三變化之位置而已。

2. x 由 a 變至 b ，每經過 $f(x)=0$ 之一根，則此符列失去一因變化。

設 c 為 $f(x)=0$ 之一根。

x 之值較 c 略小時，函數 $f(x)$ 及 $f_1(x)$ 有相反之符號， x 之值較 c 略大時有相同之符號，§836。

換言之， $f(x)$ 與 $f_1(x)$ 間在 x 未達 c 之前，有一變化，而當 x 經過 c 後，此變化即行消失。

故 x 由 a 變至 b 時，史篤姆 函數列不能增多一變化。反之， x 每經 $f(x)=0$ 之一根，此函數列即消失一變化且僅消失一個。

故變化數之差在

$$f(a), f_1(a), f_2(a), \dots, f_m$$

與 $f(b), f_1(b), f_2(b), \dots, f_m$

即 x 經歷 $f(x)=0$ 所有介乎 a 與 b 之間之諸根時，所失去之各變化。換言之，即所求證諸根之數。

茲將 § 801 之法，應用於有重根之方程 $f(x)=0$ ，設函數列 $f(x), f_1(x), \dots, f_m(x)$ ，(1) 其最後項為其他各項之最高公因式，§ 465，以 $f_m(x)$ 除 (1) 之各項，則得 $\phi(x), \phi_1(x), \dots, 1$ ，(2) 如前所證，仍有史篤姆 定理所有之性質。故 $\phi(x)=0$ 在 a 與 b 間諸根之數即 § 352， $f(x)=0$ 之異根之數等於在 $\phi(a), \phi_1(a), \dots, 1$ 及 $\phi(b), \phi_1(b), \dots, 1$ 中符號變化數之差。此差與 $f(a), f_1(a), \dots, f_m(a)$ 及 $f(b), f_1(b), \dots, f_m(b)$ 之變化數之差相同；因以 $f_m(a)$ 及 $f_m(b)$ 各乘 $\phi(a), \dots, 1$ 及 $\phi(b), \dots, 1$ 並不影響其變化也。

史篤姆 定理之應用。 史篤姆 定理能求已知數字方程內 § 814

有若干個相異之實根。又能至任意二連續整數間求出有若干根，故能在任何情形之下檢定根數。惟此法頗繁，故備於 § 386 簡法無效時方使用之也。

例1. 檢定 $x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$ 各根之位置.

此間 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ 又 $f_1(x) = 3x^2 + 6x - 4$

排列所計算之其餘函數, 如 § 468. 3, 得

$\begin{array}{r} 3+6-4 \quad \quad 1+3-4+1 \quad \quad 1+1 \\ 6+12-8 \quad \quad 3+9-12+3 \\ 6-3 \quad \quad \quad 3+6-4 \\ \hline 15-8 \quad \quad \quad 3-8+3 \\ 30-16 \quad \quad \quad 3+6-4 \\ 30-15 \quad \quad \quad -14+7 \\ \hline -1 \end{array}$	<p>故</p> $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 1,$ $f_1(x) = 3x^2 + 6x - 4,$ $f_2(x) = 3x - 1,$ $\therefore f_2 = 2-1 \quad 3+15$ $\therefore f_3 = 1$
--	--

注意, 式中所得之 $f_2(x)$ 及 f_3 非 § 861 之 $f_2(x)$ 及 f_3 , 乃皆以正指數乘後而得者.

設以 $f_2(x) = 2(x - 0.5)$, 依綜合除法除 $f_1(x)$, 則計算較簡. 在最後餘法內最好用綜合除法.

1. 當 x 之絕對值甚大, 多項式之符號與其最高次數項之符號同, § 855. 故得下表.

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	
$x = -\infty$	-	+	+	+, 三偶變化
$x = 0$	+	+	-	+, 三偶變化
$x = \infty$	+	+	+	+, 無變化

故 $f(x) = 0$ 有一負根與三正根.

2. 定正根之位置, 代 $x = 0, 1, \dots$ 得

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3
$x = 0$	+	+	-	+
$x = 1$	-	+	+	+

故二個正根在 0 與 1 之間. 因僅有一負根, 可用 § 356 之法定其位置. 因此得其根在 -4 與 -5 之間.

例2. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$ 有若干實根?

如例1, 得 $f_1(x) = 6x^2 - 2x + 2$ 又 $f_2(x) = 12x - 17$

$f_3(x)$ 所需者祇其符號, 不必以 $f_2(x)$ 除 $f_1(x)$.

因 $f_2(x) = 17$

$f_1(17/12)$, 但 f_1

為正, 而 f_2 為負. 因 $x = -\infty$ 時 $f(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 之符號為 -, +, -, -. $x = \infty$ 時為 +, +, +, -. 故 $f(x) = 0$ 僅有一實根.

最後函數 f_m 之唯一性質，在 § 863 中之證所引用者，為符號之不變。故計算 $f(x) = 0$ 之史篤姆函數，以求 a 與 b 間根之個數時，若計算至一函數 $f_p(x)$ ，對於一切 a 與 b 間之 x 值，其符號不變者，吾人即不必計算以後之函數。茲由 § 863 之證可知根之個數為 $f(a), \dots, f_p(a)$ 及 $f(b), \dots, f_p(b)$ 間變化數之差也。

例 3. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 有若干實根？

(1) $f_1(x) = 3x^2 + 2x + 1$ ，又因 $\frac{2}{3} < 1.3$ 即 x 為任何實數時皆為正，§ § 625, 725。故不必計算 $f_2(x)$ 及 f_3 。

$f(x), f_1(x)$ 之符號在 $x = -\infty$ 時為 $-$ ， $+$ ；在 $x = \infty$ 時為 $+$ ， $+$ 。故 $f(x) = 0$ 有一實根。

習 題 LXXVIII

用史篤姆定理，求下列各方程實根之位置：

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1. $x^3 - 6x^2 + 5x + 13 = 0.$ | 2. $x^3 - 4x^2 - 10x + 41 = 0.$ |
| 3. $x^3 + 5x + 2 = 0.$ | 4. $x^3 + 3x^2 + 3x + 8 = 0.$ |
| 5. $x^3 - x^2 - 15x + 23 = 0.$ | 6. $x^3 - 4x^2 - 5x + 18 = 0.$ |
| 7. $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0.$ | 8. $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0.$ |
| 9. $x^3 - 12x^2 + 12x - 3 = 0.$ | 10. $x^3 + 2x^2 - 6x - 8 = 0.$ |

用史篤姆定理，求下列各方程實根之個數：

- | | |
|------------------------------|--|
| (8) 11. $4x^3 - 2x - 5 = 0.$ | 12. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$ |
| 13. $x^{22} + 1 = 0.$ | 14. $x^4 - 6x^3 + x^2 + 14x - 14 = 0.$ |

注意：(設 $f(x) = 0$ 為無重根之 n 次方程) 求 $f(x) = 0$ 所有之根為實根之條件乃在史篤姆函數數列 $f(x), f_1(x), \dots, f_m(x)$ 內有 $n+1$ 項，而此等函數之第一項有相同之符號。

15. 用例 15 之定理，證明三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 之根為不同之實根之條件為 $4p^3 + 27q^2$ 為負。

諸根之對稱函數

805 定理1. 設 $f(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n = 0$ 諸根為 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, 因而 $f(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n)$, 則

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x - \beta_1} + \frac{f(x)}{x - \beta_2} + \dots + \frac{f(x)}{x - \beta_n};$$

例如, 設 $n=3$, 則

$$f(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)(x - \beta_3). \quad (1)$$

以 $x+h$ 代 x 於 (1), 則得

$$f(x+h) = [(x - \beta_1) + h][(x - \beta_2) + h][(x - \beta_3) + h]. \quad (2)$$

吾人可化 (2) 之每邊為 h 之多項式, 第一邊以戴勒氏定理, § 848, 第二邊用連續乘法, 如 § 558.

因 (2) 為一恆等式, 在所得之兩多項式內, h 之同次項係數必須相等, § 284.

但因 $f(x+h) = f'(x)h + \dots$, § 848, 在第一多項式內 h 之係數為 $f'(x)$. 在第二多項式內為 $(x - \beta_2)(x - \beta_3) + (x - \beta_3)(x - \beta_1) + (x - \beta_1)(x - \beta_2)$. 故

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - \beta_2)(x - \beta_3) + (x - \beta_3)(x - \beta_1) + (x - \beta_1)(x - \beta_2) \\ &= \frac{f(x)}{x - \beta_1} + \frac{f(x)}{x - \beta_2} + \frac{f(x)}{x - \beta_3}, \end{aligned} \quad (3)$$

蓋 $(x - \beta_2)(x - \beta_3) = f(x)/(x - \beta_1)$, 等等.

此理可應用於任何 n 次方程. 在普通狀況之下, (2) 之右邊有 n 個因式, 且當此邊化為 h 之多項式時, h 之係數為諸二項式 $x - \beta_1, x - \beta_2, \dots, x - \beta_n$ 中, 每次取 $n-1$ 個相乘積之和, § 558. 乘積中有一因式 $x - \beta_1$ 者可寫為 $f(x)/(x - \beta_1)$, 等等.

例如，設 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$ ，
得 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$ ，

而 $(x-2)(x-3) + (x-3)(x-1) + (x-1)(x-2) = 3x^2 - 12x + 11$ 。

定理 2. 方程 $f(x) = 0$ 所有諸根之同次幕之和，可以其係數之有理式表之。

例如，設方程為

$$f(x) = x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0. \quad (1)$$

設 (1) 式之根為 α, β, γ ，而 s_1, s_2, \dots, s_r 之意義為

$$s_1 = \alpha + \beta + \gamma, s_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \dots, s_r = \alpha^r + \beta^r + \gamma^r.$$

今欲證明 s_1, s_2, \dots 能以係數 b_1, b_2, b_3 之有理式表之。

1. 用上述定理，§ 835，得

$$f(x) = \frac{f(x)}{x-\alpha} + \frac{f(x)}{x-\beta} + \frac{f(x)}{x-\gamma}. \quad (2)$$

因 $f(x)$ 能為 $x-\alpha, x-\beta, x-\gamma$ 所除盡，(2) 之各分式項代表 x 之多項式可以 § 410 規則求得之。用此規則並加其結果，得

$$f(x)/(x-\alpha) = x^2 + (\alpha + b_1)x + (\alpha^2 + b_1\alpha + b_2)$$

$$f(x)/(x-\beta) = x^2 + (\beta + b_1)x + (\beta^2 + b_1\beta + b_2)$$

$$f(x)/(x-\gamma) = x^2 + (\gamma + b_1)x + (\gamma^2 + b_1\gamma + b_2)$$

$$\hline f'(x) = 3x^2 + (s_1 + 3b_1)x + (s_2 + b_1s_1 + 3b_2) \quad (3)$$

但由定義，§ 847，又得

$$f'(x) = 3x^2 + 2b_1x + b_2. \quad (4)$$

將 (3), (4) 中 x 同幕諸係數相等，而解 s_1, s_2 ，得

$$s_1 + 3b_1 = 2b_1, \quad \therefore s_1 = -b_1, \quad (5)$$

$$s_2 + b_1s_1 + 3b_2 = b_2, \quad \therefore s_2 = b_1^2 - 2b_2. \quad (6)$$

由前所得 s_1 及 s_2 之值, 能順次求得 s_3, s_4 如下:

因 α, β, γ 為 (1) 之根, 得

$$\alpha^3 + b_1\alpha^2 + b_2\alpha + b_3 = 0, \tag{7}$$

$$\beta^3 + b_1\beta^2 + b_2\beta + b_3 = 0, \tag{8}$$

$$\gamma^3 + b_1\gamma^2 + b_2\gamma + b_3 = 0, \tag{9}$$

加此等恆等式, 得

$$s_3 + b_1s_2 + b_2s_1 + 3b_3 = 0, \tag{10}$$

(1) 可得 s_3 用 b_1, b_2, b_3, s_1, s_2 之有理式表之, 依由 (5), (6) 可以 b_1, b_2, b_3 之有理式表之.

次以 α, β, γ 各乘恆等式 (7), (8), (9) 而加其結果, 則得

$$s_4 + b_1s_3 + b_2s_2 + b_3s_1 = 0, \tag{11}$$

引用 (5), (6), (10) 可得 s_4 以 b_1, b_2, b_3 之有理式表之.

(2) 仿此, 以 $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ 及 $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3$ 等乘 (7), (8), (9) 而加其結果, 則得恆等式:

$$s_5 + b_1s_4 + b_2s_3 + b_3s_2 = 0, \quad s_6 + b_1s_5 + b_2s_4 + b_3s_3 = 0, \dots$$

亦可以 b_1, b_2, b_3 之有理式表 s_5, s_6, \dots 諸式.

同理, 此定理可證明任何 n 次方程 $f(x) = 0$.

例 1. 設 α, β, γ 表 $x^3 + 2x^2 + 4x + 2 = 0$ 之根, 求

$$\Sigma 1/a = 1/\alpha + 1/\beta + 1/\gamma, \quad \Sigma 1/a^2 = 1/\alpha^2 + 1/\beta^2 + 1/\gamma^2,$$

$$\Sigma 1/a^3 = 1/\alpha^3 + 1/\beta^3 + 1/\gamma^3.$$

應用 $x = 1/y$ 之變形, 而以 y 之係數除變形後之方程, 得

$$y^3 + 2y^2 - y + 1/2 = 0. \tag{12}$$

從此式得將 $b_1 = 2, b_2 = -1, b_3 = 1/2$ 代入公式 (5), (6),

(8), (10), 得

$$\begin{aligned} (3) \quad \Sigma 1/a &= -2, \quad s_1 = -2, \quad s_2 = 6, \quad s_3 = -31/2. \\ \text{故 } \S 814, \quad \Sigma 1/a &= -2, \quad \Sigma 1/a^2 = 6, \quad \Sigma 1/a^3 = -31/2. \end{aligned}$$

例2. 設

$$s_1 + 4s_2 + 3s_3 + 2s_4 + b_1s_1 + b_2s_2 + b_3s_3 + b_4s_4 = 2b_1s_3 + b_1s_2 + b_2s_1 + 4b_3 = b_3,$$

$$s_4 + b_1s_3 + b_2s_2 + b_3s_1 + 4b_4 = 0, \quad s_5 + b_1s_3 + b_2s_2 + b_3s_1 + b_4s_4 = 0,$$

計算 s_1, s_2, s_3, s_4 時以 b_1, b_2, b_3, b_4 表之.

如(1)所示, 當首項係數為1時, 前公式證明 s_1, s_2, s_3, \dots 為867方程中各係數之整函數.

定理3. $f(x)$ 為有理係數之每一有理對稱函數, 能以其有理係數表出之. 868

設 $f(x) = 0$ 之根為 $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \nu$.
凡 $\alpha, \beta, \dots, \nu$ 之有理對稱函數, 可以此種形式 $\sum a^p, \sum a^p b^q, \sum a^p b^q \gamma^r$ 等等之有理函數表之, § 541. 故本定理之必須證明者為此種形式之函數 $\sum a^p = s_p$ 形式之函數已在 § 866 中證明, 現將 $\sum a^p b^q$ 等等亦能以 s_p 形式之有理函數表之.

$$1. \sum a^p b^q = \sum a^p b^q + \sum \beta^p a^q + \dots \text{之形式}$$

$$(a^p + \beta^p + \dots)(a^q + \beta^q + \dots) \tag{1}$$

$$= a^{p+q} + \beta^{p+q} + \dots \tag{2}$$

$$a^p \beta^q + \beta^p a^q + \dots \tag{3}$$

之兩對稱式之和.

但(1)及(2)為係數之有理係數式, § 866. 故(3), 即 $\sum a^p b^q$

可由(1)減(2)得之, 亦為此類函數.

以(1)為 $s_p s_q$ 而(2)為 s_{p+q} , 則得公式

$$\sum a^p b^q = s_p s_q - s_{p+q} \tag{4}$$

當 $p=q$ 時, (3)之各項均每對相等, 而(3)變成 $2 \sum a^p b^p$. 故

$$2 \sum a^p b^p = s_p^2 - s_{2p} \tag{5}$$

2. $\sum a^p \beta^q \gamma^r = a^p \beta^q \gamma^r + \beta^q \gamma^r a^p + \dots$ 之形式，
 乘積 $(a^p \beta^q \gamma^r + \beta^q \gamma^r a^p + \dots)(a^r + \beta^r + \gamma^r + \dots)$

爲 $a^{p+r} \beta^q \gamma^r + \beta^{q+r} a^p \gamma^r + \dots,$ (7)

$a^p \beta^{q+r} \gamma^r + \beta^q a^{p+r} \gamma^r + \dots,$ (7)

$a^p \beta^q \gamma^{r+1} + \beta^q a^p \gamma^{r+1} + \dots$ (8)

三對稱式之類。

每已知(5);(6)及(7)爲係數之有理函數，故(8)即 $\sum a^p \beta^q \gamma^r$ 可由(5)減去(6)及(7)之和而得之，亦爲此類之函數。

當 $p=q=r$ 時，(8)變爲 $2 \sum a^p \beta^q \gamma^r$ ；當 $p=q=r$ 時，則變爲 $\sum a^p \beta^p \gamma^p$ 。

3. $\sum a^p \beta^q \gamma^r$ 之形式。

吾人頗易證明重複引用 1 及 2 之方法，可作出此等係數之有理函數，首先可用 $a^u + \beta^u + \gamma^u + \dots$ 乘 $\sum a^p \beta^q \gamma^r$ 。

例。求證

$$\sum a^p \beta^q \gamma^r = spsqsr + 2sp+q+r - sp+qsr - sq+rsp - sr + p^2q.$$

習 題 LXXIX

1. 求在方程 $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$ 中，以 a_0, a_1, a_2, a_3 表 s_1 及 s_2 之值

2. 設 a, β, γ 爲 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 之諸根，求以 p, q, r 表 $\sum 1/a^3, \sum a\beta^2$ 之值。

3. 求一方程其根爲 $x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ 諸根之立方。

4. 設 a, β, γ 爲 $x^3 - x^2 - 3x + 4 = 0$ 之諸根，試用 §856, 867 之方法，求諸根之下列對稱函數之值：

(1) $s_1, s_2, s_3, s_4.$ (2) $\sum a^3 \beta^2.$ (3) $\sum a^3 \beta \gamma.$

(4) $\sum a^3 \beta^2 \gamma.$ (5) $\sum 1/a^3.$ (6) $\sum a^2 \beta^2 \gamma.$

XXX. 普通三次及四次方程

代數解答。前章內，已示凡數字方程之實根常能求出其約 869
值或確值，且能擴其方法以至應用於複根，但對文字方程不能應
用。欲解此方程必尋求以係數表根之式。

所謂方程之根可用代數法解之者，即應用有限次數之加，減，
乘，除，乘方，開方諸代數法而以係數表之也。

(1) 在 § 681 已證明普通二次方程，有此種代數解答，今將證明
者，即普通三次，四次方程亦有此解答。但四次以上之高次方程
不能有代數解答。

(2) 一之立方根。在 § 646 中已知 $x^3 = 1$ 有三根 1, $(-1+i\sqrt{3})/2$, $(-1-i\sqrt{3})/2$ 。故此三數皆為一之立方根，其第三根為
第二根之平方，故若以 ω 表第二根，則第三根可以 ω^2 表之。因 x^3
 $- 1 = 0$ 缺 x^2 一項，§ 803, 遂以 $1 + \omega + \omega^2 = 0$ 。

(3) 仿此。凡數 a 皆有三次根，即 $x^3 = a$ 之三根，設一根為 $\sqrt[3]{a}$ ，則
他二根為 $\omega \sqrt[3]{a}$, $\omega^2 \sqrt[3]{a}$ 。

普通三次方程。卡蘭氏公式。用 § 810 之法，每個三次 871

方程可以化為下列形式
即 $x^3 + px + q = 0$

$x^3 + px + q = 0$

(I)

式中缺 x^2 項。

在(1)內使 $x = y + z$. (2)

得 $y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + p(y+z) + q = 0$,

即得不變式 $(3yz + p)(y+z) + q = 0$. (3)

因變數 y 及 z 有一簡單之關係(3), 在其間每加一第二

關係

設 $3yz + p = 0$, (4)

則由(3), $y^3 + z^3 + q = 0$. (5)

從(5) $y^3 + z^3 = -q$, (6)

又由(4), $yz = -p/3$. (7)

故 § 636, y^3 與 z^3 為以下二次方程之根

$$u^2 + qu - p^3/27 = 0. \quad (8)$$

解(8)而以 A 及 B 各表所得二次方程之二根, 得

$$y^3 = A = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad z^3 = B = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \quad (9)$$

方程(9)表 y 之三值及 z 之三值, 即 §. 870,

$$y = \sqrt[3]{A}, \omega \sqrt[3]{A}, \omega^2 \sqrt[3]{A}, \quad (10)$$

$$z = \sqrt[3]{B}, \omega \sqrt[3]{B}, \omega^2 \sqrt[3]{B}. \quad (11)$$

但由(4), $yz = -p/3$, 且在(10), (11)內 y, z 之各對值適合

於此條件者為:

$$y, z = \sqrt[3]{A}, \sqrt[3]{B}; \omega \sqrt[3]{A}, \omega \sqrt[3]{B}; \omega^2 \sqrt[3]{A}, \omega^2 \sqrt[3]{B}.$$

以此各對值代入(2)內, 則得(1)之三根, 即

$$x_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}, \quad x_2 = \omega \sqrt[3]{A} + \omega^2 \sqrt[3]{B}, \quad x_3 = \omega^2 \sqrt[3]{A} + \omega \sqrt[3]{B},$$

$$\text{其中 } A = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad B = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \quad (12)$$

例1. 解 $x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 0$.

由§818則知用式 $x = y + 2$ 代入原方程內，則變原方程為 $y^3 + py + q = 0$ 之形式。故得

$$y^3 - 6y - 6 = 0.$$

此方程之根，用 $p = -6, q = -6$ 代於上公式，得

$$\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\omega + \sqrt[3]{2}\omega^2, \sqrt[3]{4}\omega^2 + \sqrt[3]{2}\omega.$$

故原方程之根為

$$2 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}, 2 + \sqrt[3]{4}\omega + \sqrt[3]{2}\omega^2, 2 + \sqrt[3]{4}\omega^2 + \sqrt[3]{2}\omega.$$

例2. 解 $x^3 + 2x^2 + 6x - 5 = 0$.

解答之討論。常 p 及 q 為實數時，根之性質依 $q^2/4 + p^3/27$ 之值而定，今討論如下：

1. 設 $q^2/4 + p^3/27 > 0$ ，則一根為實數，兩根為虛數。

因在此情形中 A 與 B 皆為實數，故 x_1 為實數， x_2 及 x_3 為共軛虛數，§870。

2. 設 $q^2/4 + p^3/27 = 0$ ，三根皆為實數且二根相等。

因在此情形中 $A = B = -q/2$ ，故 $x_1 = -2\sqrt[3]{q/2}$ ，又 $x_2 = x_3 = -(\omega + \omega^2)\sqrt[3]{q/2} = \sqrt[3]{q/2}$ ，因 $\omega + \omega^2 = -1$ ，由§370。

3. 設 $q^2/4 + p^3/27 < 0$ ，各根皆為不同之實數。

此可以史篤姆氏定理證明之（見477頁，例16）。但當 $q^2/4 + p^3/27 < 0$ ， A 及 B 皆為複素數，且雖 x_1, x_2, x_3 之簡式表實數，但不能用代數變形法化為實數式。此所謂三次方程之不可約情形（參閱§885）。

此式 $q^2/4 + p^3/27$ 謂之三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 之判別式，簡式等於零，為二根相等之條件（比較§885）。

874 普通四次方程。范拉利解法。用§ 818之方法，則知凡四次方程可化為下列形式：

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0. \quad (1)$$

加減 $x^2u + u^2/4$ ，因而(1)之第一邊可變成二平方之差，其中 u 為可求得之常數，如此可得

$$\begin{aligned} x^4 + x^2u + u^2/4 - x^2u - u^2/4 + ax^2 + bx + c &= 0, \\ \text{即 } (x^2 + u/2)^2 - [(u-a)x^2 - bx + (u^2/4 - c)] &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

欲將第二項成完全平方，則得

$$b^2 = 4(u-a)(u^2/4 - c).$$

$$\text{即 } u^3 - au^2 - 4cu + (4ac - b^2) = 0. \quad (3)$$

使 u_1 表 u 之三次方程之一根，當(2)中之 u 為 u_1 所代時，

則第二項為 $\sqrt{u_1 - a}x - b/2\sqrt{u_1 - a}$ 之平方，(2)變下列二個二次方程相等。

$$x^2 + \sqrt{u_1 - a}x + \left(\frac{u_1}{2} - \frac{b}{2\sqrt{u_1 - a}}\right) = 0, \quad (4)$$

$$x^2 - \sqrt{u_1 - a}x + \left(\frac{u_1}{2} - \frac{b}{2\sqrt{u_1 - a}}\right) = 0. \quad (5)$$

故由解(4)及(5)可得(1)之根。

例1. 解 $x^4 + x^2 + 4x - 3 = 0$.

其中 $a=1, b=4, c=-3$ ，故三次方程(3)為

$$u^3 = u^2 + 12u - 28 = 0.$$

此三次方程之一根為2, 又使 $u_1=2$ 代入(4), (5), 得

$$x^2+x-1=0 \text{ 及 } x^2-x+3=0,$$

解此兩二次方程, 得 $x=(-1 \pm \sqrt{5})/2, (1 \pm i\sqrt{11})/2$.

例2. 解 $x^4-4x^3+x^2+4x+1=0$.

因三次方程(3)有三根, 其中任何之一可取作(4)與(5)中之 u_1 , 而上述之法可得 x 為3-4或12, 但已知方程(1)內能有四根, 且
不難證明 u_1 之選擇不能影響(4), (5)共有之四個根, 不過僅在(4)與(5)內四根分配之方法不同而已。

倒數方程. 由觀察法可知一已知倒數方程內, §815, 是否 875
含有一根為1或-1, 若有之, 可由原方程得一降次方程 $\phi(x)=0$,
其根無為1或-1者, 從§815, 可知此降次方程 $\phi(x)=0$, 必為下
列之形式.

$$a_0x^{2m}+a_1x^{2m-2}+\dots+a_{m-1}x^2+a_m=0. \quad (i)$$

即其次數必為偶數, 凡與 $\phi(x)$ 之首末等距之上係數皆相等.

今應證明方程 $\phi(x)=0$, 若以 $z=x+1/x$ 代之, 則變形為 z 之
方程, 其次數為 $\phi(x)=0$ 之次數之半, 故若 $\phi(x)=0$ 之次數不大
於八, 可用§§831, 871, 874以求其根.

以 x^m 除(1), 併其各項, 得

$$a_0\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+a_1\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}\right)+\dots+a_m=0. \quad (2)$$

由演算上式, 得

$$x^{p+1}+\frac{1}{x^{p+1}}=\left(x^p+\frac{1}{x^p}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{p-1}+\frac{1}{x^{p-1}}\right); \quad (3)$$

又設 $z=x+1/x$, 又在(3)內依次使 $p=1, 2, 3, \dots$, 得

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2, \quad x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z,$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=z^4-4z^2+2, \dots \quad (4)$$

即，得 x 之 m 次式以表 x^p+1/x^q ，以此種方式代入(2)，則得 x 之 m 次方程，如欲詳欲詳明者(比較§6'5)。

例1. $2x^6-x^5-10x^4+13x^3-10x^2+x+2=0$.

此為一倒置方程，有根1及-1。

令 $x^3=y^2-1$,

$2x^6-x^5-10x^4+13x^3-10x^2-x+2=0$.

以 x^3 除之，

$2\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+13=0$.

故由(4), $2(z^3-3z)-\left(z^2-2\right)-10z+13=0$,

即

$2z^3-z^2-16z+15=0$.

解,

$z=1, -3, \text{或} 5/2$.

故

$x+1/x=1, -3, \text{或} 5/2$.

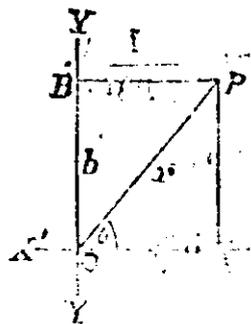
故

$x=(1\pm\sqrt{3})/2, (-3\pm\sqrt{5})/2, 2, \text{或} 1/2$.

例2. 解 $x^6-x^5+x^4+x^3-x+1=0$.

876 凡二項方程 $x^n+a=0$ 可將 $x=\sqrt[n]{ay}$ 代入，而化為倒數方程之形式，代入之結果為 $y^n+1=0$ (比較§646, 例2)。

877 (a) 以絕對值及幅角表複素數之式。在附圖中， P 為複素數 $a+bi$ 之圖形，作法與§233同。



設 r 及 θ 之值由

OP 之長為 $\sqrt{a^2+b^2}$ 為 $a+bi$ 之

絕對值，§230，以 r 表明之。

設 θ 表角 XOP 之弧度，即此角在

以 P 為中心一係 r 為半徑之圓周上，所

對之弧長，表 θ 為 $a+bi$ 之幅角。

(1) 則此 b/r 為 θ 之正弦，而寫 $b/r=\sin\theta$ 。

稱比 a/r 爲 θ 之 餘，爲 $a/r = \cos \theta$ 。

故得 $a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta,$
所以 $a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta),$

當 $\theta = 0$ 時，則 $b = 0$ 及 $a = r$ 。故 $\sin 0 = 0$ 及 $\cos 0 = 1$ 。

360° 之弧度爲 2π ，此爲單位圓周之長。故由 r, θ 所定之 878
一點 P ，亦可用 $r, \theta + 2\pi; r, \theta + 4\pi$ 表示之；故普通以 $r, \theta + 2m\pi$
表之；但此處 m 表任意整數，故 $a + bi$ 之普通幅角爲 $\theta + 2m\pi$ 。

定理。兩複數之積之絕對值，等於其絕對值之積；而其 879

幅角爲各幅角之和。

$$\begin{aligned} & \text{因 } r(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot r'(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ & = rr'[(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') \\ & \quad + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')] \\ & = rr'[\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')] \end{aligned}$$

中學中已證明

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \theta') & = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta', \\ \sin(\theta + \theta') & = \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'. \end{aligned}$$

在 § 240 之作圖法，基於此定理也。

系 1. 以 § 879 重複應用，得

880

$$\begin{aligned} & r(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot r'(\cos \theta' + i \sin \theta') \cdot r''(\cos \theta'' + i \sin \theta'') \cdots \\ & = rr'r'' \cdots [\cos(\theta + \theta' + \theta'' + \cdots) \\ & \quad + i \sin(\theta + \theta' + \theta'' + \cdots)]. \end{aligned}$$

系 2. 使 $r = r' = r'' = \cdots$ ，及 $\theta = \theta' = \theta'' = \cdots$ 於 § 880 中，881

得下列公式，謂之台毛佛定理：

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

882 系 3. 對於商式, 有下列公式

$$\frac{r(\cos \theta + i \sin \theta)}{r'(\cos \theta' + i \sin \theta')} = \frac{r}{r'} [\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')].$$

$$\begin{aligned} \text{蓋 } & \frac{r}{r'} [\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')] \cdot (\cos \theta' + i \sin \theta') \\ & = r(\cos \theta + i \sin \theta). \end{aligned} \quad \S 879$$

883 系 4. 設 k 為 $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ 等 n 個值, 則複素數之 n 個 n 次根為

$$\sqrt[n]{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{蓋 } & \left[r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]^n \\ & = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)) = r(\cos \theta + i \sin \theta). \end{aligned}$$

§§ 883, 878

884 二項方程, $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 之 n 個 n 次根為方程 $x^n - r(\cos \theta + i \sin \theta) = 0$ 之 n 個根. 故在特殊情形下, r 為實數, 因而 $\theta = 0$ 時, 方程 $x^n - r = 0$ 之根為

$$\sqrt[n]{r} (\cos 2k\pi/n + i \sin 2k\pi/n), k = 0, 1, \dots, n-1.$$

例如, $x^3 - 1 = 0$ 之根為

$$\cos 0 + i \sin 0, \cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3, \cos 4\pi/3 + i \sin 4\pi/3,$$

此等可證其等於

$$1, (-1 + i\sqrt{3})/2, (-1 - i\sqrt{3})/2,$$

885 三次方程不能約情形之三角解法. 在三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 之不可約情形中, § 872, 3, A 與 B 二式為共軛數. 因在此情形 $q^2/4 + p^3/27$ 為負, 得

$$A = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}, B = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}.$$

故 A 與 B 二式如以絕對值及幅角表之, § 877, 將為下列形式:

$$A = r(\cos \theta + i \sin \theta), B = r(\cos \theta - i \sin \theta).$$

$$\left. \begin{aligned} \text{其中} \quad -r &= \left(\frac{q^2}{4} - \frac{q^3}{4} - \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(-\frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{又} \quad \cos \theta &= \frac{-q/2}{r} = -\frac{q}{8} \left(-\frac{27}{p^3} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

當 p 與 q 為已知可由 $\cos \theta$ 之值，由表中求 θ 之值。

在 $x^3 + px + q = 0$ 之根之公式，§ 871, (12) 中以 (1) 式代 A 及 B ，並以 § 831 中所得之式表 ω 及 ω^2 ，此種結果化簡後為

$$x_1 = 2r^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta}{3}, \quad x_2 = 2r^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta + 2\pi}{3}, \quad x_3 = 2r^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta + 4\pi}{3}.$$

且其中 r 及 θ 可由 (2) 知之，此公式可得餘絃表之助，以計算根之數值。

例：解 $x^3 - x + 1/3 = 0$ 。

此間 $q^2/4 + p^3/27 = -1/108$ ，故為不可約情形。

代入公式 (2) 而簡化之，得

$$r = 1/\sqrt[3]{27}, \quad \cos \theta = -\sqrt[3]{3/27} \text{ 故 } \theta = 150^\circ.$$

故用餘絃表及對數表，得

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt[3]{27}} \cos 50^\circ = 0.7422; \quad x_2 = \frac{2}{\sqrt[3]{27}} \cos 170^\circ = -1.1371;$$

$$x_3 = \frac{2}{\sqrt[3]{27}} \cos 290^\circ = 0.3949.$$

習 題 LXXX

用 §§ 871 及 874 之方法解下列 1-10 方程：

1. $x^3 - 9x - 28 = 0.$
2. $x^3 - 9x^2 + 9x - 8 = 0.$
3. $x^3 - 3x - 4 = 0.$
4. $4x^3 - 7x - 6 = 0.$
5. $x^3 + 3x^2 + 9x - 1 = 0.$
6. $3x^3 - 9x^2 + 14x + 7 = 0.$
7. $x^3 + x^2 + 6x + 1 = 0.$
8. $x^4 - 4x^3 + x^2 + 4x + 1 = 0.$
9. $x^4 + 12x - 5 = 0.$
10. $x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 11x + 2 = 0.$
11. 解 $8x^6 - 2x^5 + 6x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 8 = 0.$

12. 解 $2x^8 - 9x^7 + 18x^6 - 30x^5 + 32x^4 - 30x^3 + 18x^2 - 9x + 2 = 0$
13. 解 $6x^7 - x^6 + 2x^5 - 7x^4 - 7x^3 + 2x^2 - x + 6 = 0$.
14. 解 $x^7 - 1 = 0$ 時，依照 § 875，所當用之 z 之三次方程式如
何？
15. 欲使 $x^4 + 3ax^2 + 3bx + c = 0$ 之根皆為實根，其條件如何？
16. 試求 $x^5 - 1 = 0$ 及 $x^6 + 1 = 0$ 諸根之三角函數式。
17. 解下列不可約三次方程：
(1) $x^3 - 3x - 1 = 0$. (2) $x^3 - 6x - 4 = 0$.
18. 在直徑 $3\sqrt{3}$ 圓球形內接一方底之直角柱，若其體積
為 27，求角柱之高。
19. 設一直圓柱之體積為 5π ，而其完全之表面積為 10
 $5\pi/2$ ，求其底之半徑及其高。
20. 一直圓錐之高為 6，其底之半徑為 4，在此圓錐內接
一直圓柱其體積為圓錐之九分之二，求此圓錐之 高。

XXXI. 行列式及消去法

行列式之定義

886 例逆。奇數及偶數之排列。當討論一組物件，如字母或數字時，吾人可定某特殊排列為其標準次序。在該排列中，若甲物件在乙物件之後，在前一標準次序中即在乙物件之前，則此排列謂有幾次之例逆，而此排列稱為奇或偶，其例逆之數為奇或偶（或 0）而定。

例如，如物件在標準次序內為 1, 2, 3, 4, 5，則在 312 之標準次序逆為 43, 41, 42, 53, 51, 52, 31, 32。故 45312 之標準次序。

定理. 在一排列內之二物互相交換, 其僭逆次數之增加 887

或減少皆為奇數.

因或相鄰之二物相交換, 其僭逆數之增或減為 1. 設用 A 及 B 表 p 及 q 之前與後, A 及 B 中所發生之任何僭逆, 皆為 (1) 及 (2) 所公有. 故於 (1) 及 (2) 中, 關於僭逆之唯一相異者, 僅為下列: 若 pq 為一僭逆, 則 qp 非僭逆, 故 (2) 較 (1) 少一個僭逆; 但若 pq 非僭逆, 則 qp 為一僭逆, 故 (2) 較 (1) 多一個僭逆.

又互換任意二物時, 可將相鄰二物, 互換奇數回以實現之.

例如, 由 $pabq$ 可將相鄰字母, 互換五次而得 $qabp$. 吾人先依式將 p 與其下每個字母互換, 於是每次 $apbq, abpq, adqp$, 然後將 q 與在其前之字母互換, 得 $aqbp, qabp$. 此手續之第二部較第一部少一步, 因第二部開始時, q 已依所須方向移過一位. 設 p, q 間有 μ 個字母, 則第一部為 $\mu+1$ 步及第二部為 μ 步, 又 $(\mu+1)+\mu$ 即 $2\mu+1$ 常為奇數.

故相鄰二物每一次交換, 其僭逆之次數變 1 或 -1, 而奇數個 1 及 -1 之和為奇數, 故本定理已發證明.

例如, 設在 21457368(1), 將 4 與 6 互相交換得 21657348(2). 可知 (1) 有五次僭逆, (2) 有八次而 $8-5$ 為奇數.

n 個物件每次盡取而排列之有 $n!$ 排列法, § 763, 半為奇數 889 而半為偶數. 蓋由其中任一排列, 每次將其二物互換, 盡得其

餘之排列，如此所得之排列輪流為奇偶數排列，反之亦然，§ 887。
故可為偶數所有排列，半數為奇而半數為偶。

茲將討論附有足數之各種字母，如 $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ ，餘類推。由選擇其字母及足數皆不同者成一組，依某種次序排列之，而後求其字母及足數階逆數之和。假此和為偶數，則此類記號排成任何他種次序，仍為偶數。若為奇數，則仍為奇數。因若將其中任二符號交換，則字母及足數二者之階逆數，各有奇數個變化，§ 887，故共有偶數變化。

在特殊情形下，當字母排成標準次序時，其足數之階逆次數及當足數在標準次序時，其字母之階逆次序，皆為奇數或皆為偶數。

例如，在 a, b, c 內，其足數之階逆次數為 2；在 a, b 字母之階逆數為 2；而在 b, a, c 字母及足數之階逆數之和為 4。

890 行列式之定義。吾人可將 $2^2, 3^2$ ，即普通言之， n^2 個數

字排成正方陣如：

	a_1	a_2	a_3	a_4
第一行	b_1	b_2	b_3	b_4
	c_1	c_2	c_3	c_4
	d_1	d_2	d_3	d_4

等等，其中字母表列，足數表行。

其各數名為此陣之元。

由此類方陣之每行每列取一元，且僅取一元，以為因式作一切所能作之積。

排列各積之因式時，令其列號（字母）成標準次序而計算行號（足數）之倍逆。設其個數為偶數或(0)，則加正號於乘積；設為奇數，加負號。

此種稱正積負積之代數和謂之方陣之行列式而以方陣自身代表之，而其兩旁須添二直線。

例如，

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

從 § 889 可定上述各積之符號，吾人可排列其因式使其行號成標準次序，而後依列號倍逆數之為偶為奇，而予其積以正號或負號。

或可將因式排成任何次序，而後依其列號或行號倍逆數之和為偶為奇，而予其積以正號或負號。

例如，乘積 $a_1 b_2 c_3$ 按第一法，應予以負號。按足數之標準次序言之，則得 $c_1 b_2 a_3$ ，且因字母 $c_1 b_2 a_3$ 有三次倍逆，故按第二法，應為負號。其乘積寫為 $b_2 c_1 a_3$ ，其字母有二次倍逆，足數有一次倍逆，其和 $2+1$ 為奇數，故按第三法，其乘積亦為負號。

方陣之行列式，行號或列號之行列式之代數。

893 前述之積，與其極有之符號，合為行列式之項。

894 展開一行列式者，即各項寫出之謂。

895 各元 a_1, b_1, c_1, \dots 所成之對角線，謂之首對角線，而其乘積 $a_1 b_1 c_1 \dots$ 謂行列式之首項。

夾以縱線之首項，如 $| a_1, b_1, c_1, \dots |$ ，常用作表示行列式本身之記號。

896 n 次行列式之項數為 $n!$ ，此項之半有正號而半有負號。

因以 n 個足數可排成 $n!$ 種非列法 § 763，而仍保存其字母之標準次序，而 $n!$ 排列法中每一排列得一行列式之項，§ 390。

又 $n!$ 個排列之半數為偶數，半數為奇數，§ 888。

例如， $n=3$ ，則有 $3!$ 即 6 項； $n=4$ ，則有 $4!$ 即 24 項。

897 其記號。須知字母及足數僅為行列次序之記號而已。

898 其他記號莫能代之者則代之。

例如行列式之各元常以一字母及二足數表之，如 a_{23} 其第一足數指行，第二足數指列。其記號 a_{ij} 謂為“ a 二三”等等。

899 三次行列式之展開式，欲得三正項，輪流取第一列之每個

元，而按可能情形內，依照首對角線之方向，例

如：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2$$

欲得三負項，則可法行之，惟取另一對角線之方向，例如：

$$-a_1 b_2 c_2, -a_2 b_1 c_3, -a_3 b_2 c_1.$$

故
$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 5(-1)(-1) + 3(-3)2 + 2(-4)4 \\ -5(-2)4 - 3(-1)(-1) - 2(-1)2 = 49.$$

此法則不能應用高於三次之行列式，故四次行列式如用此法則僅得二十四項中之八項。

習 題 LXXVI

展開下列行列式：

1.
$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ q & p & s \\ r & s & p \end{vmatrix}.$$

2.
$$\begin{vmatrix} 1 & x & a \\ 1 & y & b \\ 1 & z & c \end{vmatrix}.$$

3.
$$\begin{vmatrix} p & -q & r \\ q & p & -s \\ -r & s & p \end{vmatrix}.$$

4.
$$\begin{vmatrix} 0 & -q & -r \\ q & 0 & -s \\ r & s & 0 \end{vmatrix}.$$

求下列行列式之值：

5.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

6.
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

7.
$$\begin{vmatrix} 8 & 9 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

以展開下列行列式而證明其關係：

8.
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

9.
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

展開行列式 $|a, b, c, d, e|$ 且集合其合因式 (1) c, d, e (2) b, d, e , (3) a, d, e 之各項

并行列式 $|a, b, c, d, e|$ 之展開式，求下列各項之符號：

(1) $a_2 b_3 c_4 d_1 e_5, a_4 b_2 c_3 d_5 e_1, a_3 b_4 c_1 d_2 e_5$
 (2) $a_3 b_2 c_1 d_4 e_5, a_2 b_3 c_4 d_1 e_5, a_4 b_1 c_2 d_3 e_5$

行列式之性質

887 定理1. 設在行列式內，行變爲列，列變爲行而不變其順序時，則此行列式之值不變。

如，
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} (1) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (2)$$

在行列式(1)之展開式內每項，如 $a_2 b_3 c_1$ 含有(1)內不同行列之一元且僅含一元。故其必含有(2)內不同行列之一元且僅含一元，故又爲(2)之項，其不同者或僅符號上之不同耳。又(1)各項之符號與(2)各項之符號相同。蓋設各項因式依照 a, b, c ，而排列其足數之階逆數即可決定(1)及(2)之符號，又 § 890 定(1)中者，§ 891 定(2)中者。

反之，展開式(2)之每項爲展開式(1)之每項。

900 故對於行列式中行之定理亦即有一列之對應定理。

901 定理2. 設行列式中之一列或一行皆爲 0，則行列式之值爲 0。

蓋行列式之每一項將包含該行或該列之一元，§ 890，故行列式之值爲零。

902 定理3. 設行列式中二列(或行)互換，則行列式僅變其符號。

故
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} (1) = - \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} (2)$$

(1) 中之各項，其因式依照 (1) 中列之次序排列時，若將其第一及最後一因式互換，即成 (2) 中之項，而其因式依照 (2) 中列之次序排列；反之亦為真。但互換之後項中足數之倍道增加或減少奇數，§ 887，又因 (1), (2) 之中足數之次序為 123，故變更項之符號。

例如， a, b, c 為 (1) 之一項，而 c, b, a 為 (2) 中之對應項。因在 a, b, c 足數有一倍道，而 c, b, a 有一倍道。

例，展開 (1), (2) 兩行列式，證明前述定理。

系。 設一行列式二行(或列)全等，此等行列式為 0。

908

設 D 為行列式之值，二全等行互換以後而 D 之值不變；但從 § 902, D 變為 $-D$ 。

故 $D = -D$, 即 $2D = 0$, 或 $D = 0$ 。

例如，
$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{vmatrix} = abf + aec + abc - aec - abf - dbc = 0.$$

定理 4. 設一行(或列)之每元皆以同數乘之，如 k ，則即為行列式之值乘以 k 。

因以 k 乘任一列之各元，則行列式之每一項皆含 k 一次，則值一次，§ 850。

行列式之計算可應用此定理以簡便之

例如，

$$\begin{vmatrix} -6 & 8 & 2 \\ 15 & -20 & 5 \\ 8 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2.5 \cdot \begin{vmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2.5 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 80.$$

905 系 第三行 (或列) 之對應元成比例, 則行列式為零.

例如,
$$\begin{vmatrix} ra & a & d \\ rb & b & e \\ ao & c & f \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ o & c & f \end{vmatrix} = r \cdot 0 = 0. \quad \S\S 905, 904$$

906 定理5. 若其中一行 (或列) 有二項式之元, 則該行列式可仿下式之方法分成二行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_1+a' & a_2 & a_3 \\ b_1+b' & b_2 & b_3 \\ c_1+c' & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & a_2 & a_3 \\ b' & b_2 & b_3 \\ c' & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (1) \quad (2) \quad (3)$$

因(1)之每項為(2)及(3)之各項之和.

例如, $(a_1+a')b_2c_3 = a_1b_2c_3 + a'b_2c_3.$

注意, a, a', b, c' 任一數可為零.

任何行列式若其各元為多項式時, 可重複應用此理, 對包含單元之諸行列式之和.

例. 試將行列式 $\begin{vmatrix} a_1+a_1' & a_2+a_2' & a_3+a_3' \\ b_1+b_1' & b_2+b_2' & b_3+b_3' \\ c_1+c_1' & c_2+c_2' & c_3+c_3' \end{vmatrix}$ 化為行列式之和.

907 定理6. 若行列式中之任一行 (或列) 之各元加其他任一行 (或列) 之對應元之同倍數, 如 k , 則此行列式之值不變.

例如, 用 § 905, 906 之定理, 得

$$\begin{vmatrix} +ka_1 & a_2 & a_3 \\ +kb_1 & b_2 & b_3 \\ c_1+kc_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_1 & a_2 & a_3 \\ kb_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

這種情形仿此.

或得

由此定理可知若行列之一列, 則由其餘各列之倍數相加而成, 則此行列式為零.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

如
$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 5 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad 4, 7, 7 = 2(5, -4, 2) + 3(-2, 5, 1).$$

定理7. 若一行列式之諸元為一變數, 如 x 之有理整函數, 908
且 $x=a$ 時, 行列式之值為零, 則行列式能為 $x-a$ 所除盡。

因展開此行列式, 可化為 x 之多項式, 又因當 $x=a$ 時, 此多項式為零, 故能為 $x-a$ 所除盡, § 415.

行列式之各因式, 常應用此定理求得之。

例. 求證
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

從 § 908, 則知設 $a=b$, 或 $b=c$, 或 $c=a$, 此行列式為零, 故可為 $b-c$ 及 $c-a$ 所除盡. § 415, 從而可以為 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 所除盡, 但此積與此行列式對於 a, b, c 為同次三. 故二式至

為一常數也。

此行列式之一項為 bc^2 , 且 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 之對應項為 bc^2 , 故其係數為 1, 而此行列式等於 $(a-b)(b-c)(c-a)$.

習 題 LXXXI

1. 計算下列之行列式:

(1)
$$\begin{vmatrix} 6 & 42 & 27 \\ 8 & -28 & 36 \\ 20 & 35 & 126 \end{vmatrix}$$
 (2)
$$\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}$$
 (3)
$$\begin{vmatrix} -ab & ac & na \\ bd-cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$$

證明
$$\begin{vmatrix} a_1+ka_2+la_3 & a_1+ma_2 & a_1 \\ b_1+kb_2+lb_3 & b_1+mb_2 & b_1 \\ c_1+kc_2+lc_3 & c_1+mc_2 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

引用 § 9.7 之定理, 證明下列各行列式之值為 0:

(1)
$$\begin{vmatrix} o & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ o & a & b & d \end{vmatrix}$$
 (2)
$$\begin{vmatrix} 1 & p & q & r+s \\ 1 & q & r & r+s \\ 1 & r & s & p+q \\ 1 & s & p & q+r \end{vmatrix}$$
 (3)
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

4. 證明
$$\begin{vmatrix} 1 & p & p^2 \\ 1 & q & q^2 \\ 1 & r & r^2 \end{vmatrix} = (p-q)(q-r)(r-p)(p+q+r).$$

5. 證明
$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ab & (c+a)^2 & bc \\ ac & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^2.$$

子式 行列式之乘法

909 子式. 在任一行列式 Δ 內, 可劃除含特殊元 e 之一列及一行, 其餘之各元不變其相對位置. 此作成之新行列式, 稱之元 e 之 (餘子式, 而以 Δ_e 表之.

例如, 在 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 內, a_1 之子式為 $\Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

910 定理. 展開任一行列式 Δ , 其含 a_1 諸項之和為 $a_1 \Delta_{a_1}$.

例如, 在 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$ 內, 含 a_1 之各項之和為 $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}$

因除符號以外, Δ 中含 a_1 之各項, 乃 a_1 與 Δ 中其他列及行內各取一元所得諸元之積, 換言之, 乃 a_1 與 Δ 中各項之積. 又 Δ 項之符號, 即其對應之 Δ_{a_1} 項之符號, 因將 a_1 於後者之前, 於是數之積運算, 例如, (1) 之項 $\rightarrow c_1 b_2 d_3$ 與 $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix}$ 之項相乘得之. 故之, a_1 與 Δ_{a_1} 之各項之積為 Δ 之項也

系. 設 e 表 Δ 之第 i 行第 k 列之元, 則 Δ 內含 e 之各

項相加之和為 $(-1)^{i+k} e \Delta_e$.

因吾人可移 e 至首元之位置時, 能不紊亂 e 所在行及列以外諸元之相互位置, 即可先將 e 所在之行, 依次與其前一行互換, 然後將 e 所在之列與其前一列互換, 在逐次互換行及列時, 行列式僅變其附號 $(i-1)+(k-1)$ 或 $i+k-2$ 次, §002. 故設 Δ' 表最後化成之行列表, 則得

$$\Delta' = (-1)^{i+k-2} \Delta = (-1)^{i+k} \Delta.$$

從 § 910, Δ' 中含 e 之諸項之和為 $e \Delta' e$. 故在 Δ 中, 其和為 $(-1)^{i+k} e \Delta_e$. 因 Δ 中 e 之子式與 Δ' 中 e 之子式相等也.

例如, 在 $\Delta = [a_1, b_2, c_3, d_4]$ 中, 其元 d_4 之 $i=4, k=2$, 可移為首元位置如下:

$$\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \quad (1) = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \quad (2) = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \quad (3)$$

將(1)之第四列依次與第三, 第二及第一列互換, 則得(2), 其前置有負號者, 因列互換三次, 即 $i-1$ 故也.

然後將(2)之第三行依次與第一, 第二互換, 則得(3), 其前置符號與(2)前所置符號相同者, 因互換二次, 即 $k-1$ 次, 故也.

(1)中 d_4 之子式與(3)中 d_4 之子式相同, 故(1)中含 d_4 之諸項之和為 $d_4 \cdot |a_1, b_2, c_3|$.

定理. 一行列表可化為一列或一行之各元各乘其餘子式 912

之類，其各項之指數係正負的，故有正負號。

例如，有一因式係 $\Delta = a_1 + b_1 \Delta + c_1 \Delta^2 + d_1 \Delta^3 + \dots$

$$\Delta = a_1 \Delta^0 + b_1 \Delta^1 + c_1 \Delta^2 + d_1 \Delta^3 + \dots$$

因在 Δ 之展開式中，每項必含 a_1, a_2, a_3, \dots 之一元且係含一元。又由 §§116, 117 所含 a_1 之諸項之和為 $a_1 \Delta^0$ ，所含 a_2 諸項之和為 $a_2 \Delta^1$ ，等等。

仿此，

$$\Delta^2 = (a_1 + b_1 \Delta + c_1 \Delta^2 + d_1 \Delta^3 + \dots)^2$$

$$= a_1 \Delta^0 + b_1 \Delta^1 + c_1 \Delta^2 + d_1 \Delta^3 + \dots$$

013 餘因式。有時將某 Δ 之展開式表成下式較為便利：--)

$$\Delta = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4 + \dots$$

$$= b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3 + b_4 B_4 + \dots$$

等等。式中 $A_1 = \Delta a_1, A_2 = -\Delta a_2$ ，餘類推。吾人謂 A_1, A_2, \dots 為 a_1, a_2, \dots 之餘因式

例如，在

$$\begin{vmatrix} (G) & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_1 & b_2 & c_2 & d_2 \\ (S) & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \text{ 內, } a_1, a_2, \dots \text{ 之餘因式為 } \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} \dots$$

914 任何 $b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 + b_4 A_4 + \dots$ 之和，得自一行之元素

此 (G) 列中對應元之餘因式等於零。

因 $b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 + b_4 A_4 + \dots$ 表一行列式其末三行與 (G) 列中 (b_2, c_2, d_2) 之末三行同，而其第一行為 $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$ 。又因此行列式之第一、第二行皆為 $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$ ，故為零 §903。對於

§10 餘行列式亦然。

行列式之增大，任何行列式皆可化為一數對角線之行列式 915
式，因由 § 912, 得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

行列式之計算，凡數字行列式其值皆可由 § 912 之引理 915 及 § 898 之規則以求之。

例如，

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (2-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \\ = -2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \\ = -18 + 87 = 69.$$

但通常數字行列式之計算，可用下法較為便利。

917

由 § § 904, 907, 910, 則知

810

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} (1) = \frac{1}{a_1^{n-1}} \begin{vmatrix} a_1 & a_1 a_2 & a_1 a_3 & \dots \\ b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots \\ c_1 & a_1 c_2 & a_1 c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} (2)$$

$$= \frac{1}{a_1^{n-1}} \begin{vmatrix} a_1 b_2 - a_2 b_1 & a_1 b_3 - a_3 b_1 & \dots \\ a_1 c_2 - a_2 c_1 & a_1 c_3 - a_3 c_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} (3)$$

此間(1)表一n次行列式，(1)之第一行除第一行外以乘 a_1 ，則得(2)，從(2)之第二行減去 a_2 乘第一行；從第三行減去 a_3 乘第一行，等等，則得行列式之第一行為 $a_1, 0, \dots$ ，故此行列式等於 a_1

乘其子式而成 $(n-1)$ 次之行列式(3).

注意, (3)之每一元, 均以其乘(1)內第一行之子式之各元乘之, 再由此值減去(1)內第一行及第一列之對應元之積而得.

例如, 用前述方法之二次化簡, 得

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^2} \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & -4 \\ -10 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 10 & 1 & 7 \end{vmatrix} \\ = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} -15 & 3 \\ -17 & 11 \end{vmatrix} = -39,$$

因 $2 \cdot 1 - 2(-2) = 6$, $2 \cdot 3 - (-1)(-2) = 4$ 等等.

當首元為 0 時, 可先將他元位於首位如 § 911 之法.

例, 用前述之法, 計算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

918 行列式之乘法. 兩同次行列式 Δ 及 Δ' 之乘積, 可以第三行列式 Δ'' 代表之, 其求法如下:

以 Δ' 中第 k 列之各元, 乘 Δ 中第 i 行之各對應元所得諸積之和為 Δ'' 中第 i 行及第 k 列之元.

例如, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 p_1 + a_2 p_2 & a_1 q_1 + a_2 q_2 \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 & b_1 q_1 + b_2 q_2 \end{vmatrix}.$

因由 § 906, 此第三行列式為下列各行列式之和也.

$$\begin{vmatrix} a_1 p_1 & a_1 q_1 \\ b_1 p_1 & b_1 q_1 \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} a_1 p_1 & a_2 q_1 \\ b_1 p_1 & b_2 q_1 \end{vmatrix} + (2) \begin{vmatrix} a_2 p_1 & a_1 q_1 \\ b_2 p_1 & b_1 q_1 \end{vmatrix} + (3) \begin{vmatrix} a_2 p_1 & a_2 q_1 \\ b_2 p_1 & b_2 q_1 \end{vmatrix} + (4) \begin{vmatrix} a_2 p_2 & a_1 q_2 \\ b_2 p_2 & b_1 q_2 \end{vmatrix} + (5) \begin{vmatrix} a_1 p_2 & a_2 q_2 \\ b_1 p_2 & b_2 q_2 \end{vmatrix} + (6) \begin{vmatrix} a_1 p_2 & a_1 q_2 \\ b_1 p_2 & b_1 q_2 \end{vmatrix} + (7) \begin{vmatrix} a_2 p_2 & a_2 q_2 \\ b_2 p_2 & b_2 q_2 \end{vmatrix} + (8) \begin{vmatrix} a_2 p_2 & a_1 q_2 \\ b_2 p_2 & b_1 q_2 \end{vmatrix} + (9) \begin{vmatrix} a_1 p_2 & a_2 q_2 \\ b_2 p_2 & b_2 q_2 \end{vmatrix} + (10) \begin{vmatrix} a_1 p_2 & a_1 q_2 \\ b_2 p_2 & b_1 q_2 \end{vmatrix} + (11) \begin{vmatrix} a_2 p_2 & a_1 q_2 \\ b_1 p_2 & b_2 q_2 \end{vmatrix} + (12) \begin{vmatrix} a_2 p_2 & a_2 q_2 \\ b_1 p_2 & b_1 q_2 \end{vmatrix}.$$

但(1)與(4)等於零,因其列成比例也,§ 905,又引用 § 902, § 904,將(2)與(3)兩項加之,得

$$p_1 q_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + p_2 q_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} = (p_1 q_2 - p_2 q_1) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

又

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 & a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3 & a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 & b_1 q_1 + b_2 q_2 + b_3 q_3 & b_1 r_1 + b_2 r_2 + b_3 r_3 \\ c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 & c_1 q_1 + c_2 q_2 + c_3 q_3 & c_1 r_1 + c_2 r_2 + c_3 r_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 & a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3 & a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 & b_1 q_1 + b_2 q_2 + b_3 q_3 & b_1 r_1 + b_2 r_2 + b_3 r_3 \\ c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 & c_1 q_1 + c_2 q_2 + c_3 q_3 & c_1 r_1 + c_2 r_2 + c_3 r_3 \end{vmatrix}$$

此可仿前將第三行列式,分解為三個合單行之行列式之和。如是能得二十七個此種行列式,但其中二十二個皆成比例者,故等於 0。其他六個行列式各等於行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ 之一項,故其和等於 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}$

此種助算甚為普遍。

210.

上述之規則甚易推廣至不同次之行列式。吾人祇須將低次行列式增大, § 915, 而使其二者成同次同類。

習題 LXXXIII

共 21 題

計算下列各行列式:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 9 \\ 7 & 5 & -2 & -3 \\ +3 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

3.
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 10 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \\ 9 & 6 & 1 & 30 \\ 12 & 4 & 8 & 20 \end{vmatrix}$$

4.
$$\begin{vmatrix} 6 & -4 & 10 & 28 \\ 13 & 6 & -30 & 21 \\ 12 & 24 & 40 & 28 \\ 9 & -2 & 21 & 14 \end{vmatrix}$$

將下列之積示成行列式：

5.
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ -a & 0 & b \\ 0 & b & -a \end{vmatrix}$$

6.
$$\begin{vmatrix} p & 0 & r \\ p & q & 0 \\ 0 & q & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ a & b & 0 \\ 0 & b & c \end{vmatrix}$$

7.
$$\begin{vmatrix} a & -a & a \\ -b & b & b \\ c & c & -c \\ -d & d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

8.
$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ m & n & l \\ n & l & m \end{vmatrix}$$

9. 證明
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

10. 三當行列式首對角線任一側之元皆為零，證明此行列式之值等於其首項。

消去法 | 一次方程

919 聯立一次方程之解答。今將下列聯立方程解其 x_1, x_2, x_3 ：

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = l \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = m \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = n \end{cases} \quad (1)$$

使 Δ 表 $|a_1 b_1 c_1|$ ，將 x_1, x_2, x_3 之係數排成行列式如(1)，又仿 § 913 使 A_1, A_2, \dots 表 Δ 中 a_1, a_2, \dots 之餘因式。

若欲消去 x_2 及 x_3 ，可將 A_1 乘第一方程，以 B_1 乘第二方程，以 C_1 乘第三方程而加之；得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l & m & n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

現在方程中 x_2 及 x_3 之係數為 0，§ 914, x_1 之係數為 Δ ，

§ 918: 而其右邊表一行列式, 此行列式以 k, l, m 代 Δ 中之第一列而得. 故此方程可寫為

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} k & a_2 & a_3 \\ l & b_2 & b_3 \\ m & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (2)$$

仿此, 以 A_2, B_2, C_2 各乘原方程而加之, 則可得單含 x_2 之方程; 及以 A_3, B_3, C_3 依次乘原方程而加之, 則可得單含 x_3 之方程. 此種方程為

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_1 k & a_3 \\ b_1 l & b_3 \\ c_1 m & c_3 \end{vmatrix} \quad (3) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & k \\ b_1 & b_2 & l \\ c_1 & c_2 & m \end{vmatrix} \quad (4)$$

若 $\Delta \neq 0$, 其解法為

$$x_1 = \frac{|k b_2 c_3|}{|\Delta|}, \quad x_2 = \frac{|a_1 l c_3|}{|\Delta|}, \quad x_3 = \frac{|a_1 b_2 m|}{|\Delta|}$$

即 x_1, x_2, x_3 諸未知字母之值可以分式表出之, 其分母為 Δ , 而分子為一行列式, 此行列式其於 Δ 者僅為問題中未知數之係數, 代以對應之已知項而已.

同法, 其三元 n 個一次方程系亦然.

例 解

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 4, \\ x + y - z &= 2, \\ 4x - y + 3z &= 1. \end{aligned}$$

得

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{26}{20} = \frac{13}{10}$$

同法, 得 $y = -21/20, z = -35/20 = -7/4$

設 Δ 為 0, 而諸行列式 $|k b_2 c_3|, |a_1 l c_3|, |a_1 b_2 m|$ 中之任一行列式不為 0, 則從 (2), (3), (4) 推定原方程 (1) 無定解 (比較 § 924).

一、選擇及各種形式 $|a_1, c_1|, |a_2, c_2|, |a_3, c_3|$ 則皆稱之為在 (2), (3), (4) 並不限制 x_1, x_2, x_3 之值。在此情形下，則由 (1) 爲不獨立，除非諸子式 A_1, A_2, \dots 皆等於 0，則由 § 39A，此結果乃因 (2), (3), (4) 從 (1) 解出來者，若諸子式皆爲零，則三方程 (1) 僅當數目式相異，極顯顯然，故其中一個方程之各解答，即其他二方程之解。

以上之結果極易擴充 n 個含 n 未知數之方程系。

921 齊次一級方程。當 $b=c=m=0$ ，則 § 919 之方程 (1) 化爲含 x_1, x_2, x_3 之齊次方程系，如

$$\left. \begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

而 § 919 之方程 (2), (3), (4) 變爲

$$\Delta x_1 = 0, \Delta x_2 = 0, \Delta x_3 = 0. \quad (2)$$

顯然方程 (1) 有 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 之解，從而由 (2) 可知除非 $\Delta = 0$ ，此爲唯一之解答。

倘若 $\Delta = 0$ ，方程 (1) 能爲

$$x_1 = r_1 A_1, \quad x_2 = r_2 A_2 \quad (3)$$

所適合，其中 r 爲任何實數。

因代此值於 (1) 則化簡之，得

$$\begin{aligned} a_1 A_1 + a_2 A_2 &= 0, & b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 &= 0, \\ c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 &= 0, \end{aligned}$$

而此種方程爲恆等式，蓋第一方程因 $\Delta = 0$ ，其他二者由 § 914 可知。此事亦可證之如下：之解。1/之第二、第三方程以 x_1 及 x_2 得 $x_1/A_1 = x_2/A_2 = x_3/A_3$ 或設 r 表此等等比之值，

$r_1 = rA_1, x_2 = rA_2, x_3 = rA_3$. 又如適所證明, 設 $\Delta = 0$, 則此諸值亦能適合(1)之第一方程, 故

從第二證明, 當 $\Delta = 0$ 時, 則

$$(x_1) : (x_2) : (x_3) = A_1 : A_2 : A_3 = B_1 : B_2 : B_3 = C_1 : C_2 : C_3 \quad (1)$$

即 Δ 之行列中其對角項之子式成比例。此間假定此諸子式不為 0。

在 x, y 之三個非齊次方程:

922

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ b_1x + b_2y + b_3 &= 0 \\ c_1x + c_2y + c_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

將 $x = \frac{z}{a_1}, y = \frac{z}{b_1}$ 代入, 去分母, 則可導出 § 921 之齊次方程系(1)。

故方程(1')有公共解之條件為 $\Delta = 0$ 。

(1)

習 題 LXXXIV

用行列式解下列方程系:

$$1. \begin{cases} 2x + 3y - 5z = 3, \\ x - 2y + z = 0, \\ 3x + y + 3z = 7. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + 4y - 3z = 3, \\ 3x - 8y + 6z = 1, \\ -8x + 2y - 9z = 4. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} ax + by + cz = d, \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2, \\ a^3x + b^3y + c^3z = d^3. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x - 4y + 3z + 4t = -3, \\ 3x + 2y + 6z + 5t = -1, \\ 5x + 8y + 9z + 3t = 0, \\ 2x - 10y - 3z - 7t = 2. \end{cases}$$

證明下列方程系相因, 且求其比 $x:y:z$:

$$5. \begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 3x - y + 4z = 0, \\ 4x + y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} a_1x + b_1y + (ka_1 + lb_1)z = 0, \\ a_2x + b_2y + (ka_2 + lb_2)z = 0, \\ a_3x + b_3y + (ka_3 + lb_3)z = 0. \end{cases}$$

7. λ 為何值時, 下列方程系為相因?

$$4x + 3y + z = \lambda x,$$

$$3x - 4y + 7z = \lambda y,$$

$$x + 7y - 6z = \lambda z.$$

結式

23. 結式, Δ 二方程 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之結式; 其意示 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 中係互之整函數, 當此兩數為零時, 乃為 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 有一公根之必要而充分之條件.

例如, $a_0x^2+a_1x+a_2=0$ (1) 及 $x-b=0$ (2) 之結式為 $a_0b^2+a_1b+a_2$; 因在 $a_0b^2+a_1b+a_2=0$ 時, (1), (2) 兩方程有公根, 故也.

任意二方程 $f(x)=0, \phi(x)=0$ 之結式可用雪兒雅士脫氏 (Sylvester) 之法由二方程中消去 x 以求之.

為明瞭起見, 使 $\Delta = \Delta$

$$f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0, \tag{1}$$

$$\phi(x) = b_0x + b_1 = 0. \tag{2}$$

依次以 x 及 1 乘 (1), 以 x^2, x 及 1 乘 (2), 即得

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} a_0x^2 + a_1x + a_2 &= 0, \\ b_0x^2 + b_1x &= 0, \\ b_0x + b_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \cdot I$$

$$b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0.$$

以上可視為五個未知量 $x^2, x, 1$ 之五個齊次一次方程所聯立而成; 故由 §21, 此結式, 除非

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3}$$

不能有公根.

故 (1) 及 (2) 之有公根, (3) 為必要條件, 又為充分條件也. 若對於 D 之第五行各以 x^2, x^2, x^2, x 乘第一至第四行而加

之，則將 D 變形成等值行列式，§ 907，其末行之各元為 $x\phi(x)$ ， $f(x)$ ， $x^2\phi(x)$ ， $x\phi(x)$ ， $\phi(x)$ 故也是以 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ 若指示 D 之末行各元之餘因式，則由 § 912 得

$$D = (\mu_1 x + \mu_2) f(x) + (\mu_3 x^2 + \mu_4 x + \mu_5) \phi(x) \equiv 0.$$

由此按等式，可知 $f(x)$ 之各因式 $x - \beta$ 必為 $(\mu_3 x^2 + \mu_4 x + \mu_5) \phi(x)$ 之因式，且因 $f(x)$ 為三次式，而 $\mu_3 x^2 + \mu_4 x + \mu_5$ 僅為二次式，即 $f(x)$ 至少有一因式 $x - \beta$ 為 $\phi(x)$ 之因式，亦即 $f(x) = 0$ 中之諸根，其一必為 $\phi(x) = 0$ 之一根，§ 715。

此間假定子式 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ 皆不為零。設 D 之各元之子式皆為零，則可證明 $f(x) = 0$ 及 $\phi(x) = 0$ 有一個以上之公根。

設 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5$ 表 D 內任一行各元之因式，由 § 921 可知 925 當 $D = 0$ 時，

$$x^4 : x^3 : x^2 : x : 1 = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 : \lambda_5,$$

因此 $x = \lambda_1 / \lambda_2 = \lambda_2 / \lambda_3 = \dots = \lambda_4 / \lambda_5$ 。故當 $f(x) = 0$ 及 $\phi(x) = 0$ 有一公根時，此根之值為 λ_1 / λ_2 。

在普通情形之下，當 $f(x) = 0$ 及 $\phi(x) = 0$ 之次數各為 m 及 926 n 時，則結式 D 將為第 $(m+n)$ 次之行列式，其首 n 列為 $f(x)$ 之係數及零，而其他 m 列為 $\phi(x)$ 之係數及零，其排列次序如 § 924 (3)。故在 D 之各項中， $f(x)$ 之諸係數依 $\phi(x)$ 之幕次而排列；反之， $\phi(x)$ 之係數依 $f(x)$ 之幕次而排列。

例。試用前述方法解方程 $x^2 + 3x + 2 = 0$ 及 $x + 1 = 0$ 有一公根又解此公根。

此間 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 3 = 0$ ，故有一公根。

在 D 之第一列內 1 及 2 之餘因式之值，為 1 及 -1，故其公根為 $1 : -1$ 即 -1 。

927 用消法未知數 x, y 二者之一，可從 $f(x, y) = 0, \phi(x, y) = 0$ 之一對代數方程中消去之。

例. 解 $x^2 - 2y^2 - x = 0, \quad (1)$

$2x^2 = 5y^2 + 3y = 0, \quad (2)$

可將 (1) 及 (2) 視為 x 之二次方程，(1) 用 $1, -1, -2y^2$ 作係數，而 (2) 用 $2, 0, -5y^2 + 3y$ 作係數。

故消去 x 之結果為

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2y^2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2y^2 \\ 2 & 0 & -5y^2 + 3y & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -5y^2 + 3y \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

將此式展開而簡化之，得

$$y^4 - 6y^3 - y^2 + 6y = 0, \quad (4)$$

解 (4)，得 $y = 0, 1, -1, 6$ 。

由 § 924，當 y 有以上任何值時，(1) 及 (2) 得為 x 之同值所適用。實際上 $y = 0$ 時，(1) 與 (2) 各成爲 $x^2 - x = 0, 2x^2 = 0$ ，而有公根 $x = 0$ ； $y = 1$ 時，(1) 與 (2) 各成爲 $x^2 - x - 2 = 0, x^2 - 1 = 0$ ，而有公根 $x = -1$ ，因 $x^2 - x - 2$ 及 $x^2 - 1$ 有公因式 $x + 1$ ，§ 851，等等。故吾人得 (1) 及 (2) 之解爲 $x, y = 0, 0; -1, 1; 2, -1; 9, 6$ 。 x 之值亦可從 y 值應用 § 925 而求得之（參閱 § 925 例）。

此例足以說明 $f(x, y) = 0, \phi(x, y) = 0$ 消去 x 之結果爲 $R(y) = 0$ ，而 $R(y) = 0$ 之一根爲 β ，則 x 之對應值可由求 $f(x, \beta)$ 及 $\phi(x, \beta)$ 之最高公因式而得之。當 x 祇有一個值與 $y = \beta$ 對應時，通常此最高公因式爲一次式。但在 x 有多值對應於 $y = \beta$ 時，則可爲較高次者。

928 結式之性質。設有一對方程如下式者

$$f(x) = x^m + \dots + a_m = 0, \phi(x) = x^n + \dots + b_n = 0.$$

使 a_i 表 $f(x)=0$ 之任一根而 β_k 表 $\phi(x)=0$ 之任一根。則如 $a_i - \beta_k$ 之形式之差共有 mn 個；使 $\Pi(a_i - \beta_k)$ 表其乘積。

顯然 $\Pi(a_i - \beta_k) = 0$ 為諸根 a_i 之一與諸根 β_k 之一相等之必要且充分條件。又因 $\Pi(a_i - \beta_k)$ 為諸根 a_i 及諸根 β_k 之對稱函數，故其為 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之係數之有理整函數，§§ 867, 868。由是，設 $R(f, \phi)$ 為 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之結式，§ 9.3，得

$$R(f, \phi) = \Pi(a_i - \beta_k).$$

$\Pi(a_i - \beta_k)$ 可寫為

$$\begin{aligned} &(a_1 - \beta_1)(a_1 - \beta_2) \dots (a_1 - \beta_n), \\ &(a_2 - \beta_1)(a_2 - \beta_2) \dots (a_2 - \beta_n), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$(a_m - \beta_1)(a_m - \beta_2) \dots (a_m - \beta_n).$$

但因 $\phi(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n)$ ，故首行諸因式之乘積為 $\phi(a_1)$ ，次行諸因式之乘積為 $\phi(a_2)$ ，準此類推。故

$$\Pi(a_i - \beta_k) = \phi(a_1) \cdot \phi(a_2) \dots \phi(a_m).$$

又因 $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m)$ ，故首列諸因式之乘積為 $(-1)^m f(\beta_1)$ ，次列諸因式之乘積為 $(-1)^m f(\beta_2)$ ，準此類推。

$$\Pi(a_i - \beta_k) = (-1)^{mn} f(\beta_1) \cdot f(\beta_2) \dots f(\beta_n).$$

當原方程為下列之形式

$$f(x) = a_0 x^m + \dots + a_m = 0; \phi(x) = b_0 x^n + \dots + b_n = 0;$$

即當首係數不為 1，則第一行之因式之積為 $\phi(a_1)/b_0$ ，其他準此；又第一列因式之積為 $(-1)^m f(\beta_1)/a_0$ ，等等。故在此情形，

欲使 $\Pi(a_i - \beta_k)$ 為 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之係數之乘積，必須以 $a_0^n \cdot b_0^m$ 乘之，則得

$$\begin{aligned} R(f, \phi) &= a_0^n b_0^m \Pi(a_i - \beta_k) \\ &= a_0^n \phi(\alpha_1) \cdot \phi(\alpha_2) \cdots \phi(\alpha_m) \\ &= (-1)^{mn} b_0^m f(\beta_1) \cdot f(\beta_2) \cdots f(\beta_n). \end{aligned}$$

929 二方程 $f(x)=0$, $\phi(x)=0$ 之結式中, $f(x)=0$ 之係數, $\phi(x)=0$ 之係數而列入. 用 $\phi(x)$ 之係數依 $f(x)=0$ 之係數而列入.

蓋乘積 $\phi(\alpha_1)\phi(\alpha_2)\cdots\phi(\alpha_m)$ 包括 m 個因式, 各含 $\phi(x)=0$ 之係數至一次幕; 而乘積 $f(\beta_1)\cdot f(\beta_2)\cdots f(\beta_n)$ 包括 n 個因式, 各含 $f(x)=0$ 之係數至一次幕.

吾人由是得另一證明, 即 §§ 924, 926 所述行列式 D 為 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之結式, 即 $D=R(f, \phi)$.

930 在 $R(f, \phi)$ 之各項中, $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之係數之足數之和為 mn .

因依照 § 812, 若將 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之各係數乘以用足數表示之 r 次幕, 即得下列二方程

$$\begin{aligned} f_1(x) &= k_0^1 x^m + r a_1 x^{m-1} + r^2 a_2 x^{m-2} + \cdots + r^m a_m = 0, \\ \phi_1(x) &= b_0 x^n + r b_1 x^{n-1} + r^2 b_2 x^{n-2} + \cdots + r^n b_n = 0, \end{aligned}$$

其根為 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 中諸根之 r 倍.

$R(f_1, \phi_1)$ 各項, 等於 $R(f, \phi)$ 之對應項乘以 r 之幕, 而 r 之指數為該項所含 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 之係數之足數和. 故在各項內皆能表示此指數為 mn , 本定理已得證明. 但因乘積 $\Pi(a_i - \beta_k)$ 中有 mn 個因式, 做得

$$R(f_1, \phi_1) = a_0^n b_0^m \Pi(r a_i - r \beta_k) = r^{mn} \cdot R(f, \phi).$$

判別式。 $f(x) = a_0x^n + \dots + a_n = 0$ 之判別式為 $f(x)$ 係數之整函數，其等於零時為 $f(x) = 0$ 有重根之必要及充分之條件 (比較 §§ 635, 873)。

設 D 表 $f(x) = 0$ 之判別式，則

$$D = R(f, f') / a_0,$$

因由 § 851，僅當 $f(x) = 0$ 及 $f'(x) = 0$ ，有一有限之公根時， $f(x) = 0$ 有一有限之重根。但由 § 928， $f(x) = 0$ 及 $f'(x) = 0$ 有一公根之條件為 $R(f, f') = 0$ 。但 a_0 為 $R(f, f')$ 之一因式，因可以 $R(f, f')$ 表 § 924 之行列式形式而表明之。故當 $a_0 = 0$ 時， $R(f, f') = 0$ 。但在此情形， $f(x) = 0$ 及 $f'(x) = 0$ 之公根為 ∞ ，§ 816。又因 ∞ 非為 $f(x) = 0$ 之重根，除非 a_0 及 a_1 為零，故得 $D = R(f, f') / a_0$ 。

例如，對於 $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ ， $D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 2a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 2a_0 & a_1 \end{vmatrix} + a_0 = -(a_1^2 - 4a_0a_2)$ 。

$f(x) = 0$ 之判別式，等於 $f(x) = 0$ 中每二根之差之平方乘
以首項係數 a_0 之某次幂。

(2) 例如，設 $f(x) = a_0(x - \beta_1)(x - \beta_2)(x - \beta_3)$ ，
則 § 865， $f'(x) = a_0[(x - \beta_2)(x - \beta_3) + (x - \beta_3)(x - \beta_1) + (x - \beta_1)(x - \beta_2)]$ 。 (2)

用 § 928， $R(f, f') = a_0^2 f'(\beta_1) f'(\beta_2) f'(\beta_3)$ 。 (3)

但從 (2)， $f'(\beta_1) = a_0(\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 - \beta_3)$ ，等等。 (4)

將 (4) 代入 (3)，化簡後，得

$$R(f, f') = -a_0^2(\beta_1 - \beta_2)^2(\beta_1 - \beta_3)^2(\beta_2 - \beta_3)^2,$$

則 $D = -a_0^2(\beta_1 - \beta_2)^2(\beta_2 - \beta_3)^2(\beta_3 - \beta_1)^2$ 。 (5)

此係屬於二元方程之情形。注意，若在方程 $f(x, y) = 0$ 內，以 $x = x_1/x_2, y = y_1/x_2$ 代入，化去其分式，吾人可將

$f(x, y) = 0$ 變形為一含 x_1, x_2, x_3 之首次方程。如 $a_3 x^2 y + y^2 + 1 = 0$ 變為 $x_1^3 + x_2 x_1 x_3 + x_3 x_2^2 + x_3^3 = 0$ 。

注意，以含 x_2, x_3 之 n 次齊次方程，若不能為 x_3 除盡，則可決定其比 x_2/x_3 之 n 個有限值。例如，由 $x_2^2 - 3x_2 x_3 + 2x_3^2 = 0$ 可得 $x_2/x_3 = 1$ 或 2 也。

934⁰ $f(x, y) = 0$ 及 $\phi(x, y) = 0$

各表 m 次及 n 次之二方程。設此二方程包含 x 及 y 之項，以 $x = x_1/x_3, y = x_2/x_3$ 代入，除去分式而換項，化為

$$R(x_1, x_2, x_3) = a_0 x_1^m + a_1 x_1^{m-1} x_2 + \dots + a_n x_2^n = 0 \quad (1)$$

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = b_0 x_1^n + b_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + b_n x_2^n = 0 \quad (2)$$

其中係數 $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$ 表 x_1, x_2 之齊次函數，其次數由其足數表明之。故(1)及(2)

個 m, n 次齊次函數，§ 930。

由 § 928, (1) 及 (2) 為 x_1 之解法值適合之必須條件及充分條件為

$$R = 0 \quad (3)$$

設 R 不能為 x_3 所除盡，則 x_2/x_3 即 y 祇有 mn 個有限值 $R = 0$ (§ 933) (設 β 表此等值中之一值，則方程 $f(x, \beta) = 0$ 及 $\phi(x, \beta) = 0$ 有一公根，且設此根為 α_1) 則 $x = \alpha_1 y$ 視 β 為 $f(x, y) = 0, \phi(x, y) = 0$ 之一解答 (比較 § 927)。又此可證明對於 $R = 0$ 之單根，必有對應於 $f(x, y) = 0, \phi(x, y) = 0$ 之一解答；且對於 $R = 0$ 之 r 次重根，必對應於 $f(x, y) = 0, \phi(x, y) = 0$ 之 r 個解答，其中或全相異或有幾個相同。故 $f(x, y) = 0, \phi(x, y) = 0$ 有 mn 個解答。

設 R 能有 x_3^{μ} 所除盡，則 x_2/x_3 即 y 祇有 $mn - \mu$ 個有限值能適合 $R = 0$ ，因此 $f(x, y) = 0, \phi(x, y) = 0$ 僅有 $mn - \mu$ 個有限

解答. 但因當 $x_1 = 0$ 時, $x_2 = x_3$ 及 $y = x_2/x_3$, 其中 x 或 y , 或 x 與 y 為無窮大, 由是, 在此情形, 吾人謂 $f(x, y) = 0, \phi(x, y) = 0$ 有 m 組無窮解答.

設原方程 $f(x, y) = 0, \phi(x, y) = 0$ 缺少 x^m 項及 x^n 項, 可將其變形, 其法為取 $y = y' + cx$ 代入有比等項而同次之方程中, 繼以上之證明, x, y 之變形方程有 mn 組解答. 但若 $x = a, y' = \beta$ 為此諸解中之任一解, 則 $x = a, y = \beta + ca$ 為 $f(x, y) = 0, \phi(x, y) = 0$ 之一解, 故 $f(x, y) = 0, \phi(x, y) = 0$ 亦有 mn 組解答.

前述討論中, 假設 R 不恆等於 0. 若 R 恆等於 0. 則 $f(x, y)$ 及 $\phi(x, y)$ 有一公因式, 而 $f(x, y) = 0, \phi(x, y) = 0$ 有無窮個解.

故得下列定理;

若 $f(x, y)$ 及 $\phi(x, y)$ 各為 m 次及 n 次, 且無公因式, 則方程系 $f(x, y) = 0, \phi(x, y) = 0$ 有 mn 組解答.

習 題 LXXXV

1. 用 §§924, 925 證明二方程 $6x^2 + 5x - 6 = 0$ 及 $2x^3 + x^2 - 9x^2 - 9 = 0$ 有一公根並求此根.

2. 作 $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ 及 $b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0$ 之結式.

3. 求 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 及 $x^3 = 1$ 之結式.

4. 用 § 931 之法求方程之結式:

(1) $x^3 + px + q = 0.$

(2) $ax^3 + bx^2 + c = 0.$

5. 用 §931 證明 $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$ 有一重根並求此根.

6. 用 §927 之法解下列方程系:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 - 16x - 28y = 0,$$

$$x^2 - xy - 2y^2 - 8x + 5y = 0.$$

XXXII. 無窮級數之收斂

收斂之定義

935 無窮級數. 設 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ 為任一已知無盡數列, § 187, 則此式

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

稱為無窮級數(比較 § 701).

吾人可以 Σu_n 代表 $u_1 + u_2 + \dots$, 讀法“ u_n 達無窮項之和”.

級數 Σu_n 之各項 u_1, u_2, \dots 皆為實數時, 稱實級數, 各項皆為正數時, 稱正級數. 下述均以實級數為限.

凡級數常以公式表其第 n 項 u_n . 例如, 設 $u_n = \sqrt{n} / (n+1)$, 則此級數為 $\sqrt{1}/2 + \sqrt{2}/3 + \sqrt{3}/4 + \dots$.

有時一公式常寫其為首三項或四項以代表之. 例如, 在 $1/2 + 1 \cdot 3/2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 5/2 \cdot 4 \cdot 6 + \dots$, 則得 $u_n = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) / 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n$.

收斂及發散. 使 S_n 代表 $u_1 + u_2 + \dots$ 之為首 n 項之和, 則 $S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2$, 普遍言之, 則 $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

S_n 隨 n 之增大, 而陸續取 $u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3, \dots$ 以為值, 其性質必屬於下列情形之一, 即:

- S_n 漸近於一有限數而以此數為極限,
- 或 S_n 漸近於無窮大.
- 或 S_n 為不定數.

在第一條件之下, 此級數 $u_1 + u_2 + \dots$ 名為收斂, 而 $\lim S_n$ 稱為其和. 在第二及第三條件之下, 此級數名為發散. ○

當 $u_1 + u_2 + \dots$ 收斂時, 可將此和 $\lim S_n$ 以 S 表代之. 而

寫作 $S = u_1 + u_2 + \dots$, 即視此級數為定數 S 之另一表示方法。

例如, 幾何級數 $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots$ 為收斂級數, 而其和為 1. 因 S_n 隨 n 之增大陸續以 $1/2, 3/4, 7/8, 15/16, \dots$ 為其值, 逐漸近於 1 為其極限, §704. 注意, 如其他收斂級數, $\lim u_n = 0$.

級數 $1 + 1 + 1 + \dots$ 為發散級數. 因 S_n 陸續以 $1, 2, 3, \dots$ 為其值, 而漸近於 ∞ 也.

級數 $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ 為發散級數. 因 S_n 陸續以 $1, 0, 1, 0, \dots$ 為其值, 故為不定數.

於是得下列定義:

937

無窮級數, 其首 n 項之和, 隨 n 之無限增大而漸近於一有限值者, 名為收斂. 否則為發散.

收斂級數其首 n 項之和之極限, 稱為該級數之和.

此等和字之新意義, 以前所謂和者乃為有限數之連續相加之結果; 此間為此結果之極限, 故不必假定此有限和之特殊性質, 即交換律及結合律亦能應用於此無窮項和之內 (見 §§941, 961).

於決定一已知級數究為收斂抑發散時, 可將其諸項中之有限個數略去不論.

蓋所略去諸項之和為有限之定值.

設 $u_1 + u_2 + \dots$ (1) 為收斂級數, 其和 S , 而 c 為任一有限數, 則 $cu_1 + cu_2 + \dots$ (2) 亦為收斂級數, 而其和為 cS . 但若 (1) 為發散, (2) 亦為發散.

938

蓋若 (1) 之首 n 項之和為 S_n , 則 (2) 之首 n 項之和為 cS_n ; 而 $\lim cS_n = c \lim S_n = cS$.

收斂級數, 若既將其項結合為數羣而不變其次序, 則此級數之和不變.

940

故若已知級數為 $u_1 + u_2 + \dots$, 而 g_1, g_2, \dots 為原級數之首二項之和, 其次四項之和, \dots 等, 則級數 $g_1 + g_2 + \dots$ 與原級數有同一之和。

設 u_n 若指第 m 中之末項, 則等式

$$g_1 + g_2 + \dots + g_m = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

之二邊, 隨 m 及 n 之無限增大而趨於相同之極限。

仿此, 可證明一發散正級數當其項數無限後, 仍為發散。

941 故吾人可於收斂級

如下例, 所得結果為發散級數,

收斂級數 $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$, § 936, 可以寫作 $(1/2 - 1) + (1/4 - 1) + (1/8 - 1) + \dots$, 但此間之括號不能除去, 因 $1/2 + 1/4 - 1 + 1/8 - 1 + \dots$ 為發散級數。

942 有時級數之和可以用除積法而得之。

例如, $1/1 \cdot 2 + 1/2 \cdot 3 + 1/3 \cdot 4 + \dots$ 之和為 1。

$$\text{因 } S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{故 } S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

例。設第 n 項 u_n 為 $1/n(n+2)$, 求此級數之和。

943 n 項後之剩餘。一級數 $u_1 + u_2 + \dots$ (1) 為收斂級數, 第 n 項以後之部份, $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$ (2) 亦為收斂, §

R_n 為 (2) 之和, 則稱為 (1) 之 n 項後之剩餘。

顯然

$$R_n = 0.$$

正 級 數

定理1. 正級數 $u_1 + u_2 + \dots$ 若 S_n 隨 n 之增大而恆常小於一有限值 c , 則此級數為收斂.

因此級數為正, S_n 則隨 n 之增大而繼續增加. 但其常數 c 為小. 故由 §192, 則知其漸近於一極限. 故由 §937, 可知此為收斂級數.

定理2. 若 $u_1 + u_2 + \dots$ (1) 為一已知正級數, 又使 $a_1 + a_2 + \dots$ (2) 為一正級數, 已經確定其收斂者. 則(1)於下列情形中之一時, 斷定其為收斂:

1. 當(1)之每項較(2)之對應項為小.
2. 當(1)之各項與(2)之各對應項之比小於一有限數 c .
3. 當在(1)內其後項與其前一項之比, 小於(2)中之對應比.

1. 因使 S_n 為 $u_1 + u_2 + \dots$ 之首 n 項之和, 又使 A 為 $a_1 + a_2 + \dots$ 級數之和, 若 $u_1 \leq a_1, u_2 \leq a_2, \dots$, 則 S_n 常小於 A . 故 $u_1 + u_2 + \dots$ 為收斂級數, §944.

2. 因設 $\frac{u_1}{a_1} < c, \frac{u_2}{a_2} < c, \dots$, 則 $u_1 \leq ca_1, u_2 \leq ca_2, \dots$

則因 $ca_1 + ca_2 + \dots$ 為收斂級數, §939, 故從1款, $u_1 + u_2 + \dots$ 為收斂級數.

3. 因設 $\frac{u_2}{u_1} < \frac{a_2}{a_1}, \frac{u_3}{u_2} < \frac{a_3}{a_2}, \frac{u_4}{u_3} < \frac{a_4}{a_3}, \dots$

則 $\frac{u_2}{a_2} < \frac{u_1}{a_1}, \frac{u_3}{a_3} < \frac{u_2}{a_2}, \frac{u_4}{a_4} < \frac{u_3}{a_3}, \dots$

由上面不等式 $u_2/a_2, u_3/a_3, \dots$ 各比小於有限數 u_1/a_1 . 故 $u_1 + u_2 + \dots$ 為收斂級數, 從2款可知.

由§933,可知若1, 2, 3者其一, 對於級數(1)與(2)除有限數項外,其餘所有各項,皆能成立,則可得同一結論.

例. 證明

$$1 + 1/2 + 1/2 \cdot 3 + 1/2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots \quad (1)$$

與收斂等比級數

$$1 + 1/2 + 1/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot 2 \cdot 2 + \dots \quad (2)$$

比較,用1, 2, 3各法,證明其為收斂級數.

第一. (1)之第二項後,各項皆小於(2)之對應項.故從1款,可知其為收斂者.

第二. (1)之各項,對於(2)之對應項之比為1, 2/3, 3/4, 3/4, ... 為有限數.故從2款,斷定其為收斂者.

第三. (1)之各項與其前一項之比,與1/3, 1/3, 1/4, ... 小於(2)中之對應比,即1/2, 1/2, 1/2, ... 故依3款,斷定其為收斂者.

946 定理3. 使 $a_1 + a_2 + \dots$ (1) 為一已知正級數; 又使 $b_1 + b_2 + \dots$ (2) 為已知之發散正級數. 在下列之任一情形中, 級數(1)為發散級數:

1. (1)之各項大於(2)之對應項時.
2. (1)之各項與(2)之對應項之比, 大於一正數c時.
3. (1)中各項與其前之一項之比, 大於(2)中之對應比時.

本定理與§945之證明相仿, 學者可自為之.

947 試驗級數. 上述試驗§945, 946之實際應用, 顯然基於吾人所選定之試驗級數已知其為收斂或發散者. 其中最重要之試驗級數為等比級數 $a + ar + ar^2 + \dots$, 在§704已證明其當 $r < 1$ 時為收斂, 又當 $r \geq 1$ 時顯然為發散. 其他有用之試驗級數如下:

948 $1 + 1/2^p + 1/3^p + \dots + 1/n^p + \dots$ 當 $p > 1$ 時為收斂, 當 $p \leq 1$ 時為發散.

1. $p > 1$. 合併從 $1/2^p$ 起之二項, 從 $1/3^p$ 起之四項, 從 $1/8^p$ 起之八項, 等等, 得其相等級數, § 949, 為

$$1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \right) + \dots \quad (1)$$

第一項以後, 顯然小於級數

$$1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} \right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} \right) + \dots \quad (2)$$

即小於級數

$$1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \dots, \text{ 或 } 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \dots \quad (3)$$

之對應項,

但 $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$, 故 $1/2^{p-1} < 1$, 此等比級數(3)為收斂者, 故(1)為收斂級數, § 945, 1.

對於(2), $p = 1$ 合併以 $1/4$ 為止之二項, 以 $1/8$ 為止之四項, 以 $1/16$ 為止之八項, 等等, 得

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots \quad (4)$$

(4)之第二項後, 每項顯然大於級數

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \dots \quad (5)$$

之對應項, 即大於

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \dots, \text{ 或 } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \quad (5)(6)$$

之對應項,

但(6)為發散, 故(4)亦為發散級數, § 946, 1.

3. $p \leq 1$. 在此情形中, 級數 $1 + 1/2^p + 1/3^p + \dots$ 為發散者, 因各項大於 $1 + 1/2 + 1/3 + \dots$ 之對應項, 而此級數已證明為發散者, § 946, 1.

49 前述諸定理之應用，以例說明如何應用 §945, 946 各定理。

例1. 證明 $1/1 \cdot 2 + 1/2 \cdot 3 + 1/3 \cdot 4 + \dots$ 為收斂級數。

此級數因自第一項以後均小於收斂級數 $1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots$ 方對照項，故為收斂級數，§945, 1.

例2. 證明 $1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + \dots$ 為發散級數。

此級數之各項與發散級數 $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$ 之對應項之比，即 $1, 2/3, 3/5, 4/7, \dots, n/(2n-1)$ 皆大於 $1/2$ ，故 $1 + 1/3 + 1/5 + \dots$ 為發散級數，§946, 2.

例3. $u_n = (2n+1)/(n^2+1)$ 之級數為收斂抑或發散？

$$\text{此題} \cdot u_n = \frac{2n+1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2} \cdot \frac{2+1/n}{1+1/n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2+1/n}{1+1/n^2}$$

故 u_n 與 $1/n^2$ 之比為 $(2+1/n)/(1+1/n^2)$ ，不論 n 為任何值，此式常為有限，而當 n 增大時，此式接近於 2，因 $1/n^2$ 為收斂級數 $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots$ 之第 n 項，故此級數為收斂者，§945, 2.

950 用例3之法可證明若 u_n 之形式為 $u_n = f(n)/\phi(n)$ ，其中 $f(n)$ 及 $\phi(n)$ 皆指示 n 之精函數，則 $\phi(n)$ 之次數較 $f(n)$ 之次數大過於 1 時，此級數為收斂；否則為發散。

例1. 證明下列各級數為收斂級數：

$$(1) \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots \quad (2) \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{6}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

$$(3) \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+2b)(a+3b)} + \dots$$

例2. 證明下列各級數為發散級數：

$$(1) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots \quad (2) \frac{1}{a} + \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{3a+b} + \dots$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

$$(4) \frac{2}{1+2\sqrt{2}} + \frac{3}{1+3\sqrt{3}} + \frac{4}{1+4\sqrt{4}} + \dots$$

例3. 寫各級數開首之四項, 其 u_n 項之值如下列者, 并定其為收斂抑發散:

$$(1) u_n = \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)}, \quad (2) u_n = \frac{1}{n^2+1}, \quad (3) u_n = \frac{n^2-(n-1)^2}{n^2+(n+1)^2}.$$

定理4. 正級數 $u_1 + u_2 + \dots$ 各項與緊接其前之一項之比 951
若小於一數, 而 r 自身則小於1者, 則此級數為收斂者.

因在 $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ (1) 中, 各項與前項之比小於等比級數 $u_1 + u_1 r + u_1 r^2 + \dots$ (2) 中之對應比, 因所究之比在 (1) 中常小於 r , 而在 (2) 中則等於 r 也. 但因 $r < 1$, (2) 為收斂者. 故依 § 945, 3, 知 (1) 亦為收斂級數.

上述之比若等於1, 或大於1, 則級數為發散. 因在此情形時 $\lim u_n \neq 0$.

系. 比 u_{n+1}/u_n 若隨 n 之增大而趨於極限 λ , 則 952
 $\lambda < 1$ 時, 級數為收斂者, $\lambda > 1$ 時為發散者.

1. 若因 $\lambda < 1$, 可任取一 r 使 $\lambda < r < 1$.

因 $\lim(u_{n+1}/u_n) = \lambda$, 隨 n 之某值, 常得 $u_{n+1}/u_n - \lambda < r - \lambda$, § 189, 因而 $u_{n+1}/u_n < r$, 故此級數為收斂. (§§ 923, 951.)

2. 若 $\lambda > 1$, 則隨 n 之某值而常得 $u_{n+1}/u_n < 1$. 故此級數為發散, § 951.

$u_{n+1}/u_n > 1$ 而 $\lim(u_{n+1}/u_n) = 1$ 時, 此級數為發散; 但 $u_{n+1}/u_n < 1$ 而 $\lim(u_{n+1}/u_n) = 1$ 時, 則不能從 § 951 之定理而得其結論.

例1. 證明 $\frac{3}{5} + \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 10} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{5 \cdot 10 \cdot 15} + \dots$ 為收斂.

此級數之第 n 項為 $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1) / 5 \cdot 10 \cdot 15 \cdots 5n$, 而此項及其前一項之比为 $(2n+1)/5n$.

但 $(2n+1)/5n = 2/5 + 1/5n$, $\lim(2n+1)/5n = 2/5$, 因小於1. 故此級數為收斂.

例2. 設 x 為正值, $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+3x^3} + \dots$ 何時收斂?

此題 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+x^{n+1}}{1+(n+1)x^{n+1}} = \frac{x^{n+1}+1/n}{x^{n+1}(1+1/n)+1/n}$

故 $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{x}$

故 1. 列級數當 $1/x < 1$, 即 $x > 1$ 時為收斂級數.

例3. 證明 $\frac{1}{1} + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \dots$ 為收斂級數.

例4. 證明 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \dots$ 為收斂級數.

例5. $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$, x 為正值時, 此級數何時收斂?

例6. $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^3} + \dots$, x 為正值時, 此級數何時收斂?

933 $\lim 2(u_{n+1}/u_n) = 1$ 之級數. 此類級數中, u_{n+1}/u_n 之比可化為

$u_{n+1}/u_n = 1 + a_n/n$

其中 $\lim(a_n/n) = 0$. 今將證明, 若 n 增加, a_n 因之變為大於一某數其本身大於 1 者, 則此級數為收斂; 若 a_n 因之變為仍小於 1 之數, 則此級數為發散.

1. 因假定在 n 之某值 (可命為 k) 後, 而得 $a_n > 1 + a$, 且 a 為正數.

則 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+a_n/n} < \frac{1}{1+(1+a)/n}$, 當 $n \geq k$ 時.

但可將此不等式化作

$u_{n+1} < \frac{1}{1+a} [u_n - (n-1)u_{n+1}]$, 當 $n \geq k$ 時, (1)

(1) 此類次使 $n = k, k+1, \dots, l-1$, 又加各所得

$u_l < \frac{1}{1+a} [k u_k - (k-1)u_{k+1}]$ (2)

由 (2), 可知 l 增大時, 則正級數 $u_{k+1} + u_{k+2} + \dots$ 之首項

之和常小於有限數 ku_1/a , 此即證明其為收斂, § 944. 故此完全級數 $u_1+u_2+\dots$ 為收斂級數, § 943.

2. 假定 $n > k$ 得 $a_n < 1$.

則
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+n/n} > \frac{1}{1+1/n}, \text{ 當 } n > k \text{ 時.}$$

然 $1/(1+1/n)$ 為發散級數 $1+1/2+1/3+\dots$ 中對照項之比, 因 $1/(n+1) > 1/n = 1/(1+1/n)$.

故原級數 $u_1+u_2+\dots$ 為發散級數, § 946, 3.

若 a_n 常大於 1 而趨近於 1 為極限, 則上述試驗法不能決定此級數為收斂或為發散. 然在此情形中, a_n 可化為 $a_n = 1 + \beta_n/n$ 之形式, 其中 $\lim \beta_n/n = 0$; 若 β_n 常小於一定數 b , 則此級數發散.

因 $\beta_n < b$, 得

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\beta_n/n} = \frac{1}{1+1/n+\beta_n/n^2} > \frac{1}{1+1/n+b/n^2}$$

而 $1/(1+1/n+b/n^2)$ 又大於發散級數 $1/(1+b)+1/(2-b)+1/(3-b)+\dots$ 中對照項之比.

因
$$\frac{1}{(n+1)-b} > \frac{1}{n-b} = \frac{n-b}{(n-b)+1} = \frac{1}{1+1/(n-b)} < \frac{1}{1+1/n+b/n^2}$$

而

$$\frac{1}{n-b} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-b/n} = \frac{1}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{b^2}{n^3} + \dots$$

故原級數 $u_1+u_2+\dots$ 為發散, § 946, 3.

從上述討論, 可知某級數, 其 u_{n+1}/u_n 可化為

$$u_{n+1}/u_n = (n^p + \alpha n^{p-1} + \dots) / (n^p + \beta n^{p-1} + \dots)$$

之形式者, 在 $a' - a > 1$ 時, 此級數為收斂, $a' - a \leq 1$ 時, 則為發散級數.

因以分式之分子除其分母, 得

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p + \alpha n^{p-1} + \dots}{n^p + \beta n^{p-1} + \dots} = \frac{1}{1 + (\alpha' - \alpha)/n + \beta n/n^2}$$

其中 βn 為有限值.

例: 證明“超比級數”

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot (\gamma+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (\gamma+1)(\gamma+2)} + \dots$$

當 $\gamma - \alpha - \beta > 0$ 時為收斂, $\gamma - \alpha - \beta \leq 0$ 時為發散.

習題 LXXXVI

斷定下列各級數為收斂抑或發散：

1. $\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \dots$
2. $\frac{1}{1} + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$
3. $\frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 4} + \frac{6}{4 \cdot 5} + \dots$
4. $\frac{2}{3} - 2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 + 3 \left(\frac{2}{3} \right)^3 - \dots$
5. $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \dots$
6. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{a^2+2} + \dots$
7. $\frac{2}{4} + \frac{2 \cdot 4}{4 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots$
8. $\frac{2}{4} + \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$
9. $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots$

寫各級數開首之四項，其 u_n 之值如下，並決定其為收斂抑或發散：

10. $u_n = \frac{n+1}{n(n+2)}$
11. $u_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2+1}}$
12. $u_n = \sqrt{n^2+1}$, $n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$

u_{n+1}/u_n 如下值時，決定各級數為收斂抑或發散：

13. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n}{2n+3}$
14. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n-2n^2}{3n^2+n^2+1}$

x 須有若何之正值，則下列各級數為收斂？

15. $1 + \frac{3}{5}x + \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 8}x^2 + \frac{3 \cdot 6 \cdot 9}{5 \cdot 8 \cdot 11}x^3 + \dots$
16. $\frac{1}{1+x} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^3} + \frac{x^3}{1+x^4} + \dots$

17. 當 a 為正時，證明 $\frac{a}{1} + \frac{a(a+1)}{1 \cdot 2} + \frac{a(a+1)(a+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$ 為發散級數。

散級數：

18. 1. 使與收斂級數 $r+r^2+r^3+\dots$ 比較而證明 $\frac{1}{1+r} + \frac{r}{1+r^2} + \frac{r^2}{1+r^3} + \dots$ 其為收斂級數。

含正負項之級數

收斂之普通試驗法。從 § 937 之定義，無論何種無限級數 $u_1 + u_2 + \dots$ ，設當 n 無限增大時， S_n 趨近於某極限，則此級數為收斂。

但 §§ 95, 197, 設當 n 增大而 S_n 漸近之數列，即 S_1, S_2, S_3, \dots 有下述之特性，即對於每一不論小至如何之正已知數 δ ，可求得一對應項 S_k ，與其以後任一項 S_{k+p} 之差小於 δ ，則 S_n 將漸近於一極限。設此條件不能滿足， S_n 將不能漸近於極限，§ 198。

因 $S_k = u_1 + \dots + u_k,$
 而 $S_{k+p} = u_1 + \dots + u_k + u_{k+1} + \dots + u_{k+p},$
 則 $S_{k+p} - S_k = u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_{k+p}.$

故收斂之普通試驗法為：

任何無限級數 $u_1 + u_2 + \dots$ 若對於一不論小至如何之已知正數 δ ，能求得一項 u_k ，使其以後任何若干項之和小於 δ ；換言之，即對於 p 之一切值能使

$$|u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_{k+p}| < \delta,$$

則該級數必為收斂。若此級數不在此性質，則為發散級數。

故在特別情形之下，除非 $\lim u_n = 0, u_1 - u_2 + \dots$ 不能為收斂級數，但單有此條件不足為收斂之確據，尚須有 $\lim(u_n + u_{n+1}) = 0, \lim(u_n + u_{n+1} + u_{n+2}) = 0,$ 等等。

故 $1 + 1/2 + 1/3 + \dots$ 雖 $\lim u_n = \lim 1/n = 0$ 但仍為發散者。

因在此級數內， $1/k$ 一項後， k 項之和趨於 $1/2$ 。故

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{k+k} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \text{至 } k \text{ 項, 即 } > \frac{1}{2} \cdot k \text{ 亦即 } \frac{1}{2} k.$$

蓋吾人不能選擇一個 k 使 $u_{k+1} + \dots + u_{k+k}$ 小於每一預設之

數。故此級數為發散(比較 § 049, 2)。

合正負項之級數，若其對應之正級數為收斂，則級數

$u_1 + u_2 + \dots (1)$ 為原級數，而 $u'_1 + u'_2 + \dots (2)$ 為同級數之已變過者，則

$$|u_1 + u_2 + \dots + u_{k+p} - (u'_1 + u'_2 + \dots + u'_{k+p})| \leq u'_{k+1} + u'_{k+2} + \dots + u'_{k+p},$$

故大是使

$$u'_{k+1} + \dots + u'_{k+p} \leq \delta,$$

則 $|u_1 + u_2 + \dots + u_{k+p} - s| \leq \delta$ 亦為真。故若 (2) 為收斂，則 (1) 亦為收斂，§955。

- 957 合正負項之級數 $u_1 + u_2 + \dots$ ，若 u_1, u_2, \dots 之絕對值，§233，所成之級數即 $|u_1| + |u_2| + \dots$ 為收斂者，則此級數亦為收斂。此證與上。

例如 $1 + i/2^2 + i^2/3^2 + \dots$ 因 $1 + i/2^2 + 1/3^2 + \dots$ 為收斂者，故亦為收斂級數。

- 958 系 2. 合正負項特等之級數，若各項之絕對值皆小於緊隨其前之項。

因更級數 $a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ ，其中 a_1, a_2, a_3 為正數。用 §955 之說法，得

$$|u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_{k+p}| = |a_{k+1} - a_{k+2} + \dots + (-1)^{p-1} a_{k+p}|.$$

可將 $a_{k+1} + u_{k+2} + \dots + (-1)^{p-1} a_{k+p}$ (2)

$$\text{寫作 } (a_{k+1} - a_{k+2}) + (a_{k+2} - a_{k+3}) + \dots (2)$$

$$\text{或 } a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+3}) - \dots (3)$$

因 $a_{k+1} > a_{k+2} > a_{k+3} > \dots$ ，(2) 與 (3) 中各圓括號內之式皆為正。故由 (2) 可知 (1) 之值為正，由 (3) 可知 (1) 之代數值小於 a_{k+1} ，而 (2) 與 (3) 合而言之，可知 (1) 之絕對值小於 a_{k+1} 。

但因 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ，吾人可選取 k 使 $a_{k+1} < \delta$ 。故 $a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ 為收斂，§955。

對絕對收斂及條件收斂。一級數之實部級數若有負項，則當其 959
負項完全變號後，仍為收斂者，謂之為絕對收斂；設變號後其發
散者之為條件收斂。

例如， $1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + \dots$ 為絕對收斂，因 $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ 為收斂。

但級數 $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots$ §558，僅為條件收斂，因 $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$ 為發散。

定理：在絕對收斂級數中，將正項自成一收斂級數，諸負 960
項亦然。設此二級數之和各為 P 與 $-N$ ，則全級數之和為 $P - N$ 。

但在條件收斂級數中，諸正項及諸負項所成之級數皆為發
散者。

因使 $u_1 + u_2 + \dots$ 為一收斂級數有無限數之正負項者。

設此級數開首 n 項中， p 項為正， q 項為負。則 S_n 若為 n 項之和。
 P_p 為 p 正項之和而 $-N_q$ 為 q 負項之和，則得 $S_n = P_p - N_q$ 。

當 n 無限增大時， p 與 q 皆將為無限之增大，又因 S_n 趨近於有
限極限 S ，則必在下列情形之一中，即 (1) P_p 及 N_q 皆趨近於有限
極限 P 與 N 或 (2) P_p 與 N_q 皆以無限大為極限。

第一情形時， $\lim S_n = \lim (P_p - N_q) = \lim P_p - \lim N_q$ §203，即 $S = P - N$ 。此級數為絕對收斂。實際上各負項變號
後，此級數之和為 $P + N$ 。

第二情形時，此級數為條件收斂。因於 S_n' 為將各負項後開
首 n 項之和，得 $\lim S_n' = \lim (P_p + N_q) = \infty$ 。

系。條件收斂級數之各項重排列之，而彼此級數之和取任何預設之實數值。

因適已證明條件收斂級數中，諸正項與諸負項各自成一發散級數，其第 n 項之極限為0。

故若預設一正數 ϵ ，則不變諸正項與諸負項之次序，先加其正項，至於其和大於 ϵ ，後加其負項，至於其和小於 ϵ ，準此類推， S_n 之極限，如 n 無限增大，則

故加法之交換律不能適用於條件收斂級數。

習 題 LXXXVII

1. 決定下列級數為收斂抑或發散：

$$(1) \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \dots \quad (2) \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - \dots$$

$$(3) \frac{3}{3} - \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} + \dots$$

2. x 之實值若干時，下列級數為收斂；又當 x 之實值若干時，為發散？

$$(1) \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x} + \dots + \frac{1}{1+(-1)^{n+1}nx} + \dots$$

$$(2) \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+2x^4} + \frac{x^5}{1+3x^6} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{1+nx^{2n}} + \dots$$

3. 若 $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ 為絕對收斂，而 a_1, a_2, a_3, \dots 為一列之數，各數之絕對值皆小於 ϵ ，以§956之法證明 $a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \dots$ 亦為收斂。

4. 設 S 為§958中一類級數之和，證明 $a_1, \epsilon_1 - a_2, a_1 - \epsilon_2 + a_2, \dots$ 輪流大或小於 S 。

冪級數之收斂

冪級數。此名稱指具下式之任何級數， $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ (1)，其中 x 為變數而 a_0, a_1, \dots 為常數。 x 及 a_0, a_1, \dots 可為實數或為虛數。

從 §957，級數 (1) 為收斂者，設正級數 $|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots$ (2) 為收斂者。當 (2) 為收斂時，則 (1) 稱為絕對收斂 (見 §159)。(1) 為收斂或發散，全賴於 x 之值。故下列定理頗為重要。

(1) 定理1. 設 $x=b$ 時， $a_0 + a_1 x + \dots$ 之每一項其絕對值小於一有限正值 c ，則當 $|x| < |b|$ 時，此級數為絕對收斂。

因對於各 n ， $|a_n b^n| < c$ ，

對於各 n ，得 $|a_n x^n| = |a_n b^n| \cdot \left| \frac{x}{b} \right|^n < c \left| \frac{x}{b} \right|^n$ 。

故 $|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots$ (1) 之每項小於

$$c + c \left| \frac{x}{b} \right| + c \left| \frac{x}{b} \right|^2 + \dots$$

(2) 之各對照項。

但 (2) 為等比級數，當 $|x/b| < 1$ ，即當 $|x| < |b|$ 時為收斂級數。又當 (2) 收斂時，(1) 亦收斂，§945, 1。

例如， $1 + 2x + x^2 + 2x^3 + \dots$ 當 $|x| < 1$ 時，為收斂。

系1. 設當 $x=b$ 時， $a_0 + a_1 x + \dots$ 為收斂，則當 $|x| < |b|$ 時，

此級數為絕對收斂。

從 §963，因 $x=b$ 時， $a_0 + a_1 x + \dots$ 為收斂，則當 $x=b$ 時，各項均為有限值。

系2. 設當 $x=b$ 時， $a_0 + a_1 x + \dots$ 為發散，則當 $|x| = |b|$ 時，

此級數亦為發散。

因 $a_0 + a_1 x + \dots$ 當 x 之絕對值大於 b 值時，皆為發散，則此級數對於 $x = \pm b$ 時，亦將為收斂，§234。

收斂之極限。從 §§234, 235 可知若以 a 之一個正數在 $a_0 + a_1 x + \dots$ 為收斂者加入 A 類，而以 ∞ 發散者加入 A_1 類，則 A_1 中每一數將小於 A 中之每一數，故從 §159，知 A_1 中有一最大之數，或 A 中有一最小之數，稱此數為 λ 。則該數代表 $a_0 + a_1 x + \dots$ 之收斂之極限，當 $|x| < \lambda$ 時，此級數為絕對收斂， $|x| = \lambda$ 時則為發散。

例如，在 $x + x^2/2 + x^3/3 + \dots$ (1) 及 $x + x^2/2^2 + x^3/3^3 + \dots$ (2) 中，收斂之極限 λ 為 1。注意，當 $x = \lambda = 1$ 時，(1) 為發散，(2) 為收斂。創一 $\lambda = 0$ 之級數亦為可能；例如， $x^2 + 2!x^3 + 3!x^4 + \dots$

吾人所謂收斂之極限，通常各種收斂之數值，因若將此素數依 §238 所示在平面中畫成一圓形，圓心在源點，半徑為 λ ，則 x 在圓內之一切值，使 $a_0 + a_1 x + \dots$ 皆為收斂，而 x 之值在圓外時，此級數為發散，§239。

定理 2. 設在 $a_0 + a_1 x + \dots$ 內，其比 $|a_n/a_{n+1}|$ 趨於極限 u ，則 u 為該級數之極限。

因從 §95，當 $\lim \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| < 1$ ，即在 $|x| < \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

時，級數 $|a_n| = |a_1| |a_2| \dots$ 為收斂。

仿此，當 $|x| > \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

例 1. 求此級數之收斂極限：

$$1 + \frac{3}{5}x + \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 10}x^2 + \dots + \frac{3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{5 \cdot 10 \dots 5^n}x^n + \dots$$

因 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{5(n+1)}{2n+3} = \frac{5 \cdot 5/n}{2+3/n}$ ，得 $u = \lim \frac{5+5/n}{2+3/n} = \frac{5}{2}$

例2. 求此級數之收斂極限

$$\dots + 2^1 x^{-1} + 2^2 x^{-2} + 2^3 x^{-3} + 1 + x/6 + x^2/3^2 + x^3/3^3 + \dots$$

此時 $1 + x/3 + x^2/3^2 + \dots$ 為 x 之等比級數, 因在 $|x| < 3$ 時, 則 $a_n/a_{n+1} = 3$ 而此級數為收斂.

又 $2x^{-1} + 2^2 x^{-2} + 2^3 x^{-3} + \dots$ 為 x^{-1} 即 $1/x$ 之等比級數; 在 $|x^{-1}| < 1/2$ 即 $|x| > 2$ 時, 此級數為收斂.

故當 $2 < |x| < 3$ 時, 此級數為收斂.

例3. x 之實值為何, 則

$$x/(1+x) + 2x^2/(1+x)^2 + 3x^3/(1+x)^3 + \dots \text{ 為收斂?}$$

此為 $x/(1+x)$ 之等比級數, 當 $|x/(1+x)| < 1$ 時此級數收斂.

$$\text{因 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n/a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} n/(n+1) = 1,$$

但 $|x/(1+x)| < 1, x$ 為任何正數或 x 為大於 $-1/2$ 之負數時皆能成立. 故此級數於 $x > -1/2$ 時為收斂.

二項級數, 指數級數及對數級數. 今將應用下列各定理於 983 此三種重要級數.

1. 指數級數, § 990, 即

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

於 x 為任何有限值時, 此級數為收斂.

因此處
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(n+1)!} = n+1.$$

故
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty, \text{ 即 } \mu = \infty.$$

2. 對數級數, § 992, 即

$$\dots + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

當 $|x| < 1$ 時為收斂; 當 $|x| > 1$ 時為發散.

因此處
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{x/n}.$$

故
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = -1, \text{ 即}$$

當 $x = 1$ 時為收斂, § 95; 當 $x = -1$ 時, 為發散, §

3. 二項級數, 即

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots,$$

其中 m 不為正整數, 則於 $|x| < 1$ 時, 此級數為收斂, 當 $|x| > 1$ 時, 為發散。

因此處

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} + \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} = \frac{n+1}{m-n}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{m-n} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+1/n}{1-m/n} = -1, \text{ 即 } \rho = 1.$$

當 $x=1$ 時, 設 $m > -1$, 此級數為收斂; 設 $m \leq -1$, 為發散 (見 § 101, 例 2)。

當 $x=-1$ 時, 設 $m > 0$, 此級數為收斂; 設 $m < 0$ 為發散。

因當 $x=-1$, 使 $a_n = -a$, 可化此級數為

$$1 + a + \frac{a(a+1)}{1 \cdot 2} + \frac{a(a+1)(a+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

顯然從某項以後, 各項皆屬同號, 故 § 954 之試驗法可以適用, § 956。

$$\text{但 } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a+n-1}{n} = \frac{n+(a-1)}{n}.$$

故從 § 954, 若 $-(a-1) > 1$, 即若 $-a > 0$, 此級數為收斂; 然 $-a = m$, 故若 $m > 0$, 此級數收斂; 但若 $-(a-1) < 1$, 即若 $m < 0$, 此級數為發散。

習 題 LXXXVIII

決定下列各級數收斂之極根:

1. $1 + mx + m^2 x^2 / 2! + m^3 x^3 / 3! + \dots$
2. $2(2x)^2 + 3(2x)^3 + 2(2x)^4 + 3(2x)^5 + \dots$
3. $mx + \frac{m(m-2)}{2!} x^2 + \frac{m(m-2)(m-4)}{3!} x^3 + \dots$

x 須為若何之實數值, 下列各級數為收斂?

4. $\frac{3x}{x+4} + \frac{1}{2} \left(\frac{3x}{x+4} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{3x}{x+4} \right)^3 + \dots$
5. $\frac{x}{x^2+1} + \left(\frac{x}{x^2+1} \right)^2 + \left(\frac{x}{x^2+1} \right)^3 + \dots$
6. $\dots (3x)^{-1} + (3x)^{-2} + (3x)^{-3} + 1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + \dots$

XXXIII. 無窮級數之演算

初步定理

已知一級數 $a_0 + a_1x + \dots$ 為收斂時，其和為 x 之一定函 969
 數，此函數可以 $f(x)$ 表之，寫 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots$ 。當寫 $f(x)$
 $= a_0 + a_1x + \dots$ 時，乃假定 $a_0 + a_1x + \dots$ 有一收斂之極限 λ 大
 於 0，又假定 $|x| < \lambda$ 。

定理.1 已知級數 $\phi(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots$ ，且 x 有正值 b 970
 時， $\phi(x)$ 之每一項皆小於一有限正數 c 。

證。舉一不給小至如何之正數 δ ，則每當 $|x| < b\delta/(c+\delta)$
 時， $|\phi(x)| < \delta$ 。

因如 § 963 之證明中所示， $|x| < b$ 時，

$$|\phi(x)| < c \left| \frac{x}{b} \right| + c \left| \frac{x}{b} \right|^2 + \dots$$

故
$$\leq c \left| \frac{x}{b} \right| \frac{1}{1 - |x/b|}, \text{ 即 } \leq \frac{c|x|}{b - |x|}. \quad \text{§ 704}$$

故當 $\frac{c|x|}{b - |x|} < \delta$ 時，[即於當 $|x| < \frac{b\delta}{c + \delta}$ 時， $|\phi(x)| < \delta$

系。設 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a_0 = (0)$ 。 971

因如上述， $\lim_{x \rightarrow 0} (a_1x + a_2x^2 + \dots) = 0$ ，§ 200。

定理 2. 設在級數 $a_0 + a_1x + \dots$ 中將一切能使其為收斂之 972

值代入其中能使此級數為 0，則 $a_0 = 0, a_1 = 0, \dots$

因使 $x = 0$ ，則立得 $a_0 = 0$ 。

對於 x 之一切值能使此級數為收斂者，故

$$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = 0. \quad (1)$$

若 $x \neq 0$, 以 x 除 (1) 之各項,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = 0. \tag{2}$$

除 $x=0$ 以外, x 對於 a_n 之任何值其級數均收斂, 但由此得 $a_1=0$; 因 $a_1 \neq 0$ 則可選 x 如此之小 (但不為 0) 而使 $|a_2x + a_3x^2 + \dots| < |a_1|$, § 970, 而 x 如此之值不許 (2) 成立, 知道 $a_1=0$.

故 $a_1=0$; 同理可以證明 $a_2=0, a_3=0, \dots$.

對於 $a + bx^{\frac{1}{2}} + cx^{\frac{2}{3}} + dx^{\frac{3}{4}} + \dots$, 此定理亦為真, 即對於任何級數, 其 x 之指數為正, 且彼此互不相同, 此定理皆為真; 因通所證明之理由, 可應用於此等級數.

$a_0 + a_1x + \dots$ 中對於 x 能使其收斂之一物代入後, 此級數等於零, 此假設中所包含着, 較 $a_0=0, a_1=0, \dots$ 之證明所需者為多. 因由上述定理, 若 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 指示任何已知之無窮級列, 而 $\lim \beta_n = 0$, 且當 $x = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$ 時, 設 $a_0 + a_1x + \dots = 0$, 則 $a_0 = 0, a_1 = 0, \dots$ 在特殊情形下, β_1, β_2, \dots 可全為有理數.

973 定理 3. 設 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$, 則 x 之值能使此等級數均收斂者, 則 x 之同次幂之係數必相等, 即 $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots$.

因由已知方程之兩端, 減去第二級數, 則由 § 974, 得

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \dots = 0,$$

(乃為能使此級數均收斂者之一 x 值.)

故, § 972, $a_0 - b_0 = 0, a_1 - b_1 = 0, a_2 - b_2 = 0, \dots$

即 $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots$.

此定理名為不定係數定理, 故此定理說明為以 x 之幕級數表一已知 x 之函數, 其法僅一 (比較 § 421):

無窮級數之演算

用多項式之方程，皆可用等級數表之，故高等級數之圖象法，頗為重要。此種法則基於下述二定理，§§ 974, 976，今就一般之無窮級數證明之。

定理 1. 若級數 $u_1 + u_2 + \dots$ 及 $v_1 + v_2 + \dots$ 為收斂級數，且 974
其和為 S 及 T ，則級數 $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots$ 亦為收斂級
數，而其和為 $S + T$ 。

$$\begin{aligned} \text{因 § 203, } \lim[(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n)] \\ = \lim(u_1 + u_2 + \dots + u_n) + \lim(v_1 + v_2 + \dots + v_n) \\ = S + T. \end{aligned}$$

若加無窮級數之相當有限項，應用上述定理，亦為真確。故 975
 若有任何有限個以 x 之幕級數表示之函數相加，其和則為乃以此
 種級數之對應項相加，即以其所含 x 之同次項相加。

例如，若 $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots$ 及 $\phi(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$,

當此二原級數收斂時，即 $|x| < 1$ 時，則

$$f(x) + \phi(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

設有無限個級數，其和為 S, T, \dots ，能加此等級數之對應
 項，則即使當級數 $S + T + \dots$ 為收斂時，其結果亦常得一發散級
 數。惟在下列定理之情形中時，則得一收斂級數，而其和為
 $S + T + \dots$ 。

定理 2. 若 $U_1 + U_2 + \dots$ 為一收斂級數，其每項為一絕對收斂 976
級數之和，即

$$U_1 = u_1^{(1)} + u_2^{(1)} + \dots + u_n^{(1)}, \quad U_2 = u_1^{(2)} + u_2^{(2)} + \dots + u_n^{(2)}, \dots$$

又設 U', U'', \dots 表此等級數之和，此等級數乃將其絕對值代入(1)及(2)之各項中而得，於是

$$U'_1 = |u^{(1)}_1| + |u^{(1)}_2| + \dots, \quad U'_2 = |u^{(2)}_1| + |u^{(2)}_2|$$

+ ... 等等。

設 $U'_1 + U'_2 + \dots$ 為收斂者，則以(1), (2), ... 之對應項相加而得之各個級數，即級數 $u^{(1)}_1 + u^{(2)}_1 + \dots, u^{(1)}_2 + u^{(2)}_2$

+ ... 等等亦皆為收斂，又設諸級數之和為 V_1, V_2, \dots ，則得

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$$

因級數(1), (2), ... 中之 n 項後之餘式，表之以 $R^{(1)}_n, R^{(2)}_n, \dots$, §943, 則

$$U_1 = u^{(1)}_1 + u^{(1)}_2 + \dots + u^{(1)}_n + R^{(1)}_n,$$

$$U_2 = u^{(2)}_1 + u^{(2)}_2 + \dots + u^{(2)}_n + R^{(2)}_n,$$

$$\dots$$

$$U_k = u^{(k)}_1 + u^{(k)}_2 + \dots + u^{(k)}_n + R^{(k)}_n,$$

$$\dots$$

每一列級數 $u^{(1)}_1 + u^{(2)}_1 + \dots, u^{(1)}_2 + u^{(2)}_2 + \dots$ 等等，

為收斂者，因其各項較收斂級數 $U'_1 + U'_2 + \dots$, §945 1 之對應項為小，使此等級數之和為 $V_1, V_2, \dots, V_n, R_n$ 。

將 $n+1$ 列級數相加，得原級數 $U_1 + U_2 + \dots$ 故因 n 為無窮得 §975,

$$U_1 + U_2 + \dots + U_{k+1} + \dots = V_1 + V_2 + \dots + V_n + R_n.$$

欲證明此定理，祇需證明當 n 無窮增大時， $\lim R_n = 0$ 。

但設在 $R^{(1)}_n + R^{(2)}_n + \dots$ 中， k 項以後之餘式以 $S^{(k)}_n$ 表之，

$$\text{得 } R_n = R^{(1)}_n + R^{(2)}_n + \dots + R^{(k)}_n + S^{(k)}_n.$$

設 δ 為任何正數，無論如何之小均不妨。因 $R^{(1)}_n + R^{(2)}_n + \dots + R^{(k)}_n$ 之各項其絕對值比 $U'_1 + U'_2 + \dots + U'_k$ 中對應項之絕對值

爲小，(a)內 \$n\$ 項以後之餘式其絕對值小於 (b) 之對應餘式。但因 (b) 爲收斂，吾人可選一 \$k\$ 使其餘式小於 \$\delta/2\$，故無論 \$n\$ 之值爲何。

取 \$k\$，使數值上爲 \$S_n^{(k)} < \delta/2\$。

因又因每一列級數 \$u_1^{(1)} + u_2^{(1)} + \dots, u_1^{(2)} + u_2^{(2)} + \dots\$ 爲

收斂者，當 \$n\$ 增加時，則 \$k\$ 個餘式 \$R_n^{(1)}, R_n^{(2)}, \dots, R_n^{(k)}\$ 數值上終變爲小於 \$\delta/2k\$ 而永滯於此，故此等餘式之和，即 \$R_n^{(1)} + R_n^{(2)} + \dots + R_n^{(k)}\$ 其絕對值終變爲小於 \$(\delta/2k)k\$，即 \$\delta/2\$ 爲止。

故隨 \$n\$ 之增大，\$R_n = R_n^{(1)} + R_n^{(2)} + \dots + R_n^{(k)} + S_n^{(k)}\$ 絕對值上終變爲小於 \$\delta/2 + \delta/2\$，即 \$\delta\$ 爲止。

故 \$\lim R_n = 0\$，§ 200 是以

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots = V_1 + V_2 + V_3 + \dots,$$

如所次證者。

級數 \$U_1 + U_2 + \dots\$ 其每項亦自成一無窮級數，名爲二重無窮級數。

例如，取對於大於 \$-1/2\$ 一切 \$x\$ 實數值 (或 \$x\$ 之虛數值其實數部份須大於 \$-1/2\$) 級數爲收斂者

$$x/(1+x) - x^2/(1+x)^2 + x^3/(1+x)^3 - \dots \quad (1)$$

可變(1)之形式爲 \$x\$ 之無窮級數否？即可變(1)之形爲對於非 0 之任何 \$x\$ 值能爲收斂之級數否？

當 \$|x| < 1\$ 時，(1)之各項皆爲無窮級數之和，可以二項定理求之，§ 98，例如，

$$\left. \begin{aligned} x/(1+x) &= -x(1+x)^{-1} = -x + x^2 - x^3 + \dots, \\ -x^2/(1+x)^2 &= -x^2(1+x)^{-2} = -x^2 + 2x^3 - 3x^4 + \dots, \\ x^3/(1+x)^3 &= x^3(1+x)^{-3} = x^3 - 3x^4 + \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

以前一級數之各項代以絕對值，得 \$|x| + |x^2| + |x^3| + \dots\$，其和爲 \$|x|/(1-|x|)\$。

用同法處理其餘諸級數，得級數之和為 $|x^2|/(1-|x|)^2$
 $x^3/(1-|x|)^3$ ，等等。

故本定理之級數 $U' + U'' + U''' + \dots$ 為

$$|x|/(1-|x|)^2 + |x^2|/(1-|x|)^2 + |x^3|/(1-|x|)^2 + \dots,$$

此式當 $|x| < 1/2$ 時為收斂。

四 故於 $|x| < 1/2$ 時，將級數之用(2)中之對應項相加者，即
 $x - 2x^2 + 4x^3 - 8x^4 + \dots$ ，在 $|x| < 1/2$ 時為收斂，且等於原級數
 (1)；即 $|x| < 1/2$ 時，得

$$x/(1+x) - x^2/(1+x)^2 + x^3/(1-x)^3 - \dots = x - 2x^2 + 4x^3 - 8x^4 + \dots$$

977 交換律對於絕對收斂級數有效。交可說明絕對收斂級數
 諸項得隨意改排而不變該級數之和。

1. 吾人可改排各項而變成另一單純無窮級數。

因設 $u_1 + u_2 + \dots$ (1) 表任一絕對收斂級數，且設 $u'_1 + u'_2 + \dots$ (2) 表新排列之同一級數。又使 S_n 表(1)內首 n 項之和， S'_m 表(2)內首 m 項之和。

先為 n 取定一值，後選 m 之值使(1)之首 n 項包含在(2)之首 m 項內。最後取定 p 使(2)之首 m 項，包含在(1)之首 $n+p$ 項內。

則 $S'_m - S_n$ 之各項全在 $S_{n+p} - S_n$ 內。即在 $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}$ 之和內。

$$\text{故 } |S'_m - S_n| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}|$$

但因為絕對收斂級數， $\lim (|u_{n+1}| + \dots + |u_{n+p}|) = 0$ 。

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} |S'_m - S_n| = 0$ ，即 $\lim S'_m = \lim S_n$ 。

(2) 可將 H 級數分成任何(有限或無限)個級數，其每一級數各項次序與原級數同。因吾人可應用 §§974, 976 中諸定理之一，從此類級數中回復原來之級數。

4. 例如，設取級數 $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ 是數為奇數之各項作一級數，又是取為偶數之各項作一級數，由 §974，得

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots = (u_1 + u_3 + u_5 + \dots) + (u_2 + u_4 + u_6 + \dots).$$

或再排對 $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ 各項如下:

u_1 在此排法內有無限數之列, 每列成一無窮級數.
 $u_2 + n_2$ $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ 之和等於表中之項按行相加所得之和.
 $u_3 + u_3 + u_3$ §940. 而按行相加所得之和等於按列相加所得之
 和, §976.
 故 $u_1 + u_2 + u_3 + \dots = \dots (u_1 + u_2 + u_3 + \dots) + (u_2 + u_3 + \dots)$

其他仿此.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

各種可能之重行排列法, 可由1與2合併而得.

(一) 冪級數之積. 當 $|x| \leq \lambda$ 時, 函數 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 可用冪級數 974
 $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots$ (1) 及 $\phi(x) = b_0 + b_1 x + \dots$ (2) 表示之, 其乘
 積 $f(x) \cdot \phi(x)$ 可用一冪級數表示之, 當 $|x| \leq \lambda$ 時, 可由(1)及(2)
 用普通乘法規則求之(比較§314).

例如, $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ (1)

$\phi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$ (2)

$$f(x) \cdot \phi(x) = \begin{array}{r|l} a_0 b_0 + a_1 b_0 x + a_2 b_0 x^2 + \dots & (3) \\ + a_0 b_1 x + a_1 b_1 x^2 + \dots & \\ + a_0 b_2 x^2 + a_1 b_2 x^3 + \dots & \\ + a_0 b_3 x^3 + \dots & \end{array}$$

因當 $|x| \leq \lambda$ 而(1)及(2)為收斂之時, 從§939, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f(x) \phi(x) = f(x) b_0 + f(x) b_1 x + f(x) b_2 x^2 + \dots$$

此為§976所述之一類級數, 因若以 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之諸項盡以其絕對值代之, 仍為收斂也. 因此可將 $f(x) b_0 = a_0 b_0 + a_1 b_0 x + \dots$, $f(x) b_1 x = a_0 b_1 x + a_1 b_1 x^2 + \dots$ 等等之對應項相加, 結果即為級數(3).

例: 將 $(1+x+x^2+\dots)(1+2x+3x^2+\dots)$ 以冪級數表之.

冪級數之變形. 假使, 當 $|x| \leq \lambda$ 時, 冪級數 $a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots$ (1) 為收斂者.

又假使, 當 $|b_0| \leq \lambda$ 時, y 可由冪級數 $y = b_0 + b_1 x + \dots$ (2) 而以 x 表之.

將(2)屢次自乘,即得表 y, y^2, y^3, \dots 之諸式,而其形式為以 y 表之冪級數,當(2)收斂時亦為收斂者,設將此諸式代入(1)之諸

項 $a_0, a_1 y, a_2 y^2, \dots$ 中,得級數 $a_0 + a_1(b_0 + b_1 x + \dots) + a_2(b_0^2 + 2b_0 b_1 x + \dots) + \dots$ (3), 此級數在含 x 之同次冪之項收集後,即變為 $(a_0 + b_0 a_1 + \dots) + (a_1 b_0 + 2a_2 b_0 b_1 + \dots)x + \dots$ (4)形式之 x 之冪級數。

此最後之級數對於使 $|b_0| + |b_1 x| + \dots \leq \lambda$ 之一切 x 值能收斂,與(1)有相同之類,因在此情形時§076為二重無窮級數(3)所適合,級數 $U_0 + U_1 + \dots$ 為 $|a_0| + |a_1|(|b_0| + |b_1 x| + \dots) + \dots$, 依據假設當 $|b_0| + |b_1 x| + \dots \leq \lambda$ 時,此級數為收斂。

冪級數之商。分子分母皆為冪級數之分式,如

$$(a_0 + a_1 x + \dots) / (b_0 + b_1 x + \dots),$$

此間 $b_0 \neq 0$,可變形為一冪級數,而此冪級數,對於使 $a_0 + a_1 x + \dots$ 收斂及 $|b_1 x| + |b_2 x^2| + \dots \leq |b_0|$ 之一切 x 值能為收斂者。

因使 $y = b_1 x + b_2 x^2 + \dots$ (1)

$$\text{則 } \frac{1}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots} = \frac{1}{b_0 + y} = \frac{1}{b_0} \cdot \frac{1}{1 + y/b_0}$$

$$= \frac{1}{b_0} \left(1 - \frac{y}{b_0} + \frac{y^2}{b_0^2} - \dots \right), \quad (2)$$

因依據假定及§232, $|y| \leq |b_1 x| + |b_2 x^2| + \dots \leq |b_0|$ 。

用(1)之值代入(2)又應用§079, 因此可將(2)變形為 $-x$ 之冪級數當 $|b_1 x| + |b_2 x^2| + \dots \leq |b_0|$

時為收斂,以 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ 乘冪級數, §078。

(一) 其結果為 $-x$ 之冪級數,乃對於使 $a_0 + a_1 x + \dots$ 收斂及 $|b_1 x| + |b_2 x^2| + \dots \leq |b_0|$ 之一切 x 值能為收斂而等於此所給之分式。

用消去首項法, §406, 或用求定係數法, §408, 商級數得求至

加蓋若干項。

例：展開 $(1+2x+2^2x^2+\dots)/(1+x+x^2+\dots)$ 至四項。

用分際係數，得

$$\begin{array}{r} 1+2+4+8+\dots \\ 1+1+1+1+\dots \\ \hline 1+3+7+\dots \\ 1+1+1+\dots \\ \hline 2+6+\dots \\ 2+2+\dots \\ \hline 4+\dots \end{array}$$

故商級數為

$$1+x+2x^2+4x^3+\dots$$

當 $|x| < 1/2$ 時，級數收斂。

設分子分母非無窮級數而為 x 之多項式，商分式為 $(a_0+a_1x+\dots+a_mx^m)/(b_0+b_1x+\dots+b_nx^n)$ 之形式，此商級數對於 x 之一切值其絕對值小於 $b_0+b_1x+\dots+b_nx^n=0$ 之最小根之絕對值時為收斂者。從下列第一例即可顯然得之。第二例說明當 $b_0=0$ 時，商級數之形式，第三例說明以 $1/(1+x)$ 級數展開式之法。

例1. 求 $(3x+8)/(x^2+5x+6)$ 展開後之級數，其收斂之極限，以分項分式法，§537得

$$\frac{3x+8}{x^2+5x+6} = \frac{3x+8}{(x+2)(x+3)} = \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3}$$

但當 $|x| < 2$ 時， $\frac{2}{x+2} = \frac{1}{1+x/2} = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} - \dots$

又 $|x| < 3$ 時， $\frac{1}{x+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x/3} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{3} - \frac{x}{3^2} + \frac{x^2}{3^3} - \dots$

故 $|x| < 2$ 時， $\frac{3x+8}{x^2+5x+6} = \frac{4}{3} - \frac{11x}{18} + \frac{31x^2}{108} - \dots$

例2. 展開 $(1-x)/(x^2+4x^3)$ 為 x 之升幕式.

$$\begin{aligned} \text{解. } \frac{1-x}{x^2+4x^3} &= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+4x} = \frac{1}{x^2} (1-5x+20x^2-80x^3+\dots) \\ &= x^{-2} - 5x^{-1} + 20 - 80x + \dots \end{aligned}$$

例3. 展開 $(2x^2+x-3)/(x^2+2x+4)$ 為 $1/x$ 之幕式.

$$\frac{2x^2+x-3}{x^2+2x+4} = \frac{1}{x} \cdot \frac{2+1/x-3/x^2}{1+2/x+4/x^2} = \frac{1}{x} \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} \dots \right) = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3} \dots$$

982 反級數. 若 y 以表出之方程式 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ 可以化出 x 以 y 表出之另一方程式 $x = b_0 + b_1y + b_2y^2 + \dots$. 此手續謂之原級數 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ 之反級數. 應注意此級數常少去常數項 a_0 . 而又須 $a_1 \neq 0$. 吾人可證明若 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ 有一收斂之極限大於 0, 反級數 $b_0 + b_1y + b_2y^2 + \dots$ 亦屬實也.

例. 求 $y = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$ 之反級數.

假定 $x = b_0 + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + \dots$ (1)

從原方程式用 §978, 求 y^2, y^3, \dots 而代其結果於 (1), 得:

$$\begin{aligned} x = b_0 + 2b_1y + 3b_2y^2 + \dots & \\ + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + \dots & \\ + b_2y^2 + 4b_3y^3 + \dots & \\ + b_3y^3 + \dots & \end{aligned} \quad (2)$$

將係數立成方程式, $1 = b_0, 0 = 2b_1 + b_1, 0 = 3b_2 + 4b_2 + b_2, \dots$

而 $b_0 = 1, b_1 = -2, b_2 = 5, \dots$

故 $x = y - 2y^2 + 5y^3 + \dots$ (3)

由同法, 從方程式 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, 或 $y - a_0 = a_1x + a_2x^2 + \dots$ 可化出律式 $x = b_1(y - a_0) + b_2(y - a_0)^2 + \dots$, 又從

代數函數之展開式. 一代數方程式呈 $f(x, y) = 0$ 之形式, 而缺常數項者, 適合於 $x = 0, y = 0$. 故能假定 $f(x, y)$ 為 0,

用 x 以表示 y 之解答，則其一解或多解必為含 x 之式，且 x 為 0 時亦為 0 者。此諸式可證其能以升級數展開之而其收斂之極限大於 0。通常此諸級數得用下列各例所舉之方法求至任何項。

例 1. 方程式 $y^2 + y - 2x = 0$ 少去一常數項。試求對於 $x = 0$ 時 y 亦為 0 時之展開式。

當 $x=0$, 方程式

$$y^2 + y - 2x = 0 \tag{1}$$

變為 $y^2 + y = 0$ 。因此方程式中有一根為 0；且祇有一根為 0；故 (1) 之解答對於 x 為 0 時 y 亦為 0 者有一解，且祇限於一解，且

將此解答展開為 x 升級式之級數，其首項為 ax^μ ，因而

$$y = ax^\mu + \dots \tag{2}$$

以 (2) 代入 (1) 中，即得

$$a^2 x^{2\mu} + \dots + ax^\mu + \dots - 2x = 0. \tag{3}$$

因據假定 (2) 為恆等式，同次各項之係數之和須為 0。故至少有二項為最低次項，又因 μ 為正數，此二項須為 ax^μ 及 $-2x$ 。故 $\mu=1$ 。且 $a-2=0$ 。即 $a=2$ 。

故假定

$$y = 2x + bx^2 + cx^3 + \dots \tag{2'}$$

以 (2') 代入 (1) 中，即得 $(4+b)x^2 + (4b+c)x^3 + \dots = 0$ 。

故 $4+b=0, 4b+c=0, \dots$ 而 $b=-4, c=16, \dots$

故所求之解為 $y = 2x - 4x^2 + 16x^3 + \dots$

例 2. 求以 x 表示 y 之值，有適合於方程式 $y^3 - xy + x^2 = 0$ 且 $x=0$ 時 y 亦為 0 者，試求其展開式。

當 $x=0$, 方程式

$$y^3 - xy + x^2 = 0. \tag{1}$$

變為 $y^3 = 0$ ，其三根皆為 0，故預期所求之此種展開式有定。

使 ax^μ 指示此種展開式之一之首項，因而

$$y = ax^\mu + \dots \tag{2}$$

以 (2) 代入 (1) 中，得

$$a^3 x^{3\mu} + \dots - ax^{\mu+1} + \dots + x^2 = 0. \tag{3}$$

從例 1 之理由, $3^\mu, \mu+1$ 及 2 三指數中至少有二指數相等, 且須小於(3)中 x 之其他任何指數.

使 $3^\mu = \mu+1$, 得 $\mu = 1/2$. 因 $\mu = 1/2$ 時, 3^μ 及 $\mu+1$ 皆小於 2, 故可適用.

使 $\mu+1 = 2$, 得 $\mu = 1$. 因 $\mu = 1$ 時, $\mu+1$ 及 2 皆小於 2, 故亦可適用.

使 $3^\mu = 2$, 得 $\mu = 2/3$. 因 $\mu = 2/3$ 時, 3^μ 及 2 皆大於 $\mu+1$, 故不適用.

故 μ 須取 1 與 1/2 二者之一以為值.

當 $\mu = 1$ 時, (3) 變為 $a^3x^3 + \dots - cx^2 + \dots + x^2 = 0$, 故可知 $-a+1=0$, 即 $a=1$.

當 $\mu = 1/2$ 時, (3) 變為 $a3x^{3/2} + \dots - ax^{3/2} + \dots + x^2 = 0$, 從此可知 $a^3 - a = 0$, 因 $a \neq 0$, 而 $a = \pm 1$.

故可假定其解答之形式為 $y = x + bx^{3/2} + cx^3 + \dots, y = x^{1/2} + bx^{3/2} + cx^3 + \dots, = -x^{1/2} + 5x + cx^{3/2} + \dots$.

且代此 y 式於(1)內, 及定其係數如例 1, 得

$$y = x + x^3 + 3x^5 + \dots, y = x^{1/2} - \frac{x^3}{2} + \frac{6x^{5/2}}{8} + \dots, y = -x^{1/2} - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^{5/2}}{8} + \dots$$

在此法內假定設所求之展開式其項為 ax^b , 此展開式將為

(1) ax^b 之冪次, 例外情形時則不真確而此方法亦失敗. 雖下法為普通適用者, 既如前例求出展開式之首項 ax^b 以 $y = a^{\mu}(a+v)$ 代入原方程內, 變換成含 v 及 x 之方程式. 在此方程式求出以 x 為冪 v 之展開式首項, 餘仿此.*

例如, 在例 2 中, 使 $y = x^{1/2}(1+v)$ 代入

$$y^2 - xy + x^2 = 0 \tag{1}$$

中而化簡後, 得

$$v^2 + 3v^2 + 2\mu + x^{1/2} = 0; \tag{2}$$

其中 $v = -x^{1/2}/2 + \dots$, 故 $y = x^{1/2}(1 - x^{1/2}/2 + \dots) = x^{1/2} - \dots$

欲求其次項, 以 $v = x^{1/2}(-1/2 + v')$ 代入(2)中, 餘仿此.

*本篇諸法之較詳討論, 及其與牛頓氏法併用(或聯合應用), 可參考 Chrystal's Algebra, II, p. 543-571; 又 Frost's Curve Tracing 與 Johnson's Curve Tracing.

泰勒氏定理。當 $|x| < \lambda$ 時若 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ 984
 將 $x+h$ 代入，得

$$f(x+h) = a_0 + a_1(x+h) + a_2(x+h)^2 + \dots$$

由 § 976 可知 $|x| + |h| > \lambda$ 時，可變此級數之形式為 h 之
 廣級數，以應用二項定理展開 $(x+h)^2, (x+h)^3, \dots$ 然後合併 h
 同次數之各項。用 § 848 可以說明其結果為

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x) \frac{h^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x) \frac{h^n}{n!} + \dots,$$

其中 $f'(x), f''(x), \dots$ 為若干級數之和，此諸級乃以原級數 $a_0 +$
 $a_1x + a_2x^2 + \dots$ 各項之第一，第二， \dots 諸母來函數為項者，即

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots,$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \dots, \text{ 等等。}$$

若在前述恆等式中，以 a 代 x 而以 $x-a$ 代 h ，其條件 $|x-a| < \lambda$
 得 $f(x)$ 之展開式以 $x-a$ 為變之，即

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + \dots$$

由此最後展開式及 § 971，可知若在 $|x-a| < \lambda$ 時， $f(x) = a_0 + a_1x + \dots$
 又若 $|a| = \lambda$ 時，則

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

習 題 LXXXIX

1. 證明 $(1+x+x^2+\dots)^2 = 1+2x+3x^2+4x^3+\dots$.
2. 證明 $(1+x+x^2+\dots)^3 = 1+3x+6x^2+10x^3+\dots$.
3. 證明 $(1+x^2+x^4+\dots) / (1+x+x^2+\dots) = 1-x+x^2$.
4. 假定 $(1-x+2x^2)^{\frac{1}{2}} = 1+a_1x+a_2x^2+\dots$ ，以原方程

自乘且應用 § 973 求 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$.

5. 用上法求下列展開式之首四項:

(1) $(8-3x)^{\frac{1}{3}}$, (2) $(1+x-x^2)^{\frac{3}{2}}$

6. 以 § 98) 例中之法, 展開下列各分式爲 x 升幂序至第四項:

(1) $\frac{2+x-3x^2+5x^3}{(1+2x+3x^2)}$, (2) $\frac{x+5x^2-x^3}{1-x+x^2-x^3}$

7. 以未定係數法, 展開下列各分式爲 x 升幂序至第四項:

(1) $\frac{3x^2+x^3}{1+x+x^2}$, (2) $\frac{x+5x^2}{x^3+x^2+x+3x^4}$

8. 以 § 981 例一之法, 展開下列各分式至第五項又求其收斂之極限:

(1) $\frac{9x-22}{(x^2+4)(x-3)}$, (2) $\frac{5x^2+6}{(2x+3)(x+1)^2}$

9. 展開下列各分式爲 x 之降幂序至第四項, x 須爲何值, 則第一展開式始爲收斂?

(1) $\frac{2x+8}{2x^2+x-15}$, (2) $\frac{5x^2+1}{x^3+x^2+x+1}$

10. 反轉下列各級數:

(1) $y = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$, (2) $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

11. 從 $y = 1 + x + x^2/2 + x^3/3 + \dots$ 化出以 $y-1$ 爲幕表 x 級數之爲首四項.

12. 從 $y = x^2 + 3x^3$ 化出以 y 爲幕表 x 之級數之爲首四項.

13. 以 § 783 之法求適合於下列方程式之 y 之值並以 x 表之, 且 $x=0$ 時爲 0 者,

(1) $x^2 + y^2 - y = 3x$, (2) $x^2 + y^2 - xy = 0$

14. 以 § 976 之定理證之

$\frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{(1-x^2)^2} + \frac{x^2}{(1-x^2)^3} + \dots$

XXXIV 二項級數, 指數級數 及對數級數

二項級數. m 為正整數時,

987

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots, \quad (1)$$

為有限級數, 即有盡級數, 其和為 $(1+x)^m$.

m 非正整數時, (1) 為無窮級數, 但此級數在 $|x| < 1$ 時收斂, 即此級數有一和, § 963. 今將說明若 m 為任何有理值, 其和為 $(1+x)^m$.

級數(1)為 x 及 m 二者之函數, 但今因側重(1)與 m 之關係, 故將以 $\phi(m)$ 以代表之:

為便利起見, 使 m_r 表 x^r 在 (1) 中之係數, 於是 $m_r = m(m-1)\dots(m-r+1)/r!$

則若 m 及 n 為任何二數, 得

$$\phi(m) = 1 + m_1x + m_2x^2 + m_3x^3 + \dots, \quad (2)$$

$$\phi(n) = 1 + n_1x + n_2x^2 + n_3x^3 + \dots, \quad (3)$$

$$\phi(m+n) = 1 + (m+n)_1x + (m+n)_2x^2 + \dots. \quad (4)$$

此可證明 $\phi(m) \cdot \phi(n) = \phi(m+n)$.

因當 $|x| \leq 1$, 而(2)及(3)收斂, 故

$$\phi(m) \cdot \phi(n) = 1 + m_1 \left[\begin{array}{c} 1 + n_1 \\ + n_1 \end{array} \right] x + m_2 \left[\begin{array}{c} 1 + n_1 + n_2 \\ + m_1 n_1 \\ + n_2 \end{array} \right] x^2 + m_3 \left[\begin{array}{c} 1 + n_1 + n_2 + n_3 \\ + m_1 n_1 \\ + m_1 n_2 \\ + n_3 \end{array} \right] x^3 + \dots. \quad (5)$$

但在 § 773, 774 已證明

$$m_1 + n_1 = (m+n)_1, \quad m_2 + m_1 n_1 + n_2 = (m+n)_2, \dots,$$

$$m_{r-1} + m_{r-2} n_1 + \dots + m_1 n_{r-1} + n_r = (m+n)_r.$$

故 $\phi(m) \cdot \phi(n)$

$$\begin{aligned} &= 1 + (m+n)_1x + (m+n)_2x^2 + (m+n)_3x^3 + \dots \\ &= \phi(m+n). \end{aligned} \quad (6)$$

屢次應用(6),得

$$\phi(m) \cdot \phi(n) \cdot \phi(p) = \phi(m+n) \cdot \phi(p) = \phi(m+n+p),$$

等等,對於 $\phi(m), \phi(n), \phi(p), \phi(q), \dots$ 有限數之因式皆可

今將證明對於指數 m 為任何有理值之二項定理,即:

定理. 設 m 為任何有理數,此級數

$$\phi(m) = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots,$$

當 $|x| \leq 1$, 其和為 $(1+x)^m$.

證明如下:

第一當注意於 $m=0$ 時,此級數化為1,又當 $m=1$ 時,其級數化為 $1+x$.

$$\text{故 } \phi(0) = 1 \text{ 及 } \phi(1) = 1+x. \quad (1)$$

1. 設 m 為正整數.

$$\begin{aligned} \text{則 } \phi(m) &= \phi(1-1+\dots\text{加至 } m \text{ 項}) \\ &= \phi(1) \cdot \phi(1) \dots \text{至 } m \text{ 因式} \\ &= [\phi(1)]^m = (1+x)^m, \text{ 由 (1),} \end{aligned} \quad (2)$$

此為證明正整指數之定理.

2. 設 m 為任何有理正分式 p/q .

$$\begin{aligned} \text{則 } [\phi(p/q)]^q &= \phi(p/q) \cdot \phi(p/q) \dots \text{至 } q \text{ 因式} \\ &= \phi(p/q + p/q + \dots \text{至 } q \text{ 項}) \\ &= \phi(p) = (1+x)^p, \text{ 由 (2).} \end{aligned}$$

$$\text{故 } \phi(p/q) = (1+x)^{\frac{p}{q}}. \quad (3)$$

∵ 因由方程 $[\phi(p/q)]^q = (1+x)^p$ 及 § 986, 可知對於 x 所有之 x 值, $\phi(p/q)$ 之所有值必為 $(1+x)^p$ 之相同之 q 之 q 個根值.

又此根必為主要 q 次根, 即 $(1+x)^{1/q}$; 因於 $x=0$ 時此為 $(1+x)^{1/q}$ 之唯一 q 次根與 $\phi(p/q)$ 同值也。

3. 設 m 為任何有理負數 $-s$.

因 $\phi(-s) \cdot \phi(s) = \phi(-s+s) = \phi(0) = 1$, 由 (1)
 得 $\phi(-s) = 1/\phi(s) = 1/(1+x)^s$ 由 (3)
 $= (1+x)^{-s}$, (4)

此證明任何有理指數定理者也。

以上定理不難擴至無理指數值。

例. 展開 $(1+2x+3x^2)^{1/3}$ 為 x 之升幂序。

得 $(1+2x+3x^2)^{1/3} = [1+(2x+3x^2)]^{1/3}$
 $= 1 + \frac{1}{3}(2x+3x^2) + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})}{2 \cdot 3} (2x+3x^2)^2 + \dots$
 $= 1 + \frac{2x}{3} + \frac{5x^2}{9} - \frac{68x^3}{81} + \dots$

此展開式當 $2|x|+3|x^2| < 1$ 時收斂;

故當 $9|x^2|+6|x|+1 < 4$ 時;

故當 $3|x|+1 < 2$ 時;

故當 $|x| < 1/3$ 時皆然;

系. 設 m 為有理數及 $|x| < |a|$, 得

989

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}x^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{因 } (a+x)^m &= a^m \left(1 + \frac{x}{a} \right)^m \\ &= a^m \left[1 + m \frac{x}{a} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \dots \right] \quad (1) \end{aligned}$$

$$= a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}x^2 + \dots \quad (2)$$

其中 $|x/a| < 1$, 或 $|x| < |a|$, 則 (1) 與 (2) 皆為收斂。

指數級數。吾人只示級數

$$1 + x/1 + x^2/2! + x^3/3! + \dots + x^n/n! + \dots \quad (1)$$

對於一切 x 之有限值均收斂者，§ 968。

當 $x=1$ 時，使 e ，表其和，則

$$e = 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + \dots = 2.71828\dots$$

今欲證明者(1)對於任何 x 之實值之和為 e^x 。

因使 $f(x)$ 表 (1) 之和，則

$$f(x) = 1 + x/1 + x^2/2! + x^3/3! + \dots + x^n/n! + \dots,$$

$$f(y) = 1 + y/1 + y^2/2! + y^3/3! + \dots + y^n/n! + \dots.$$

則由無窮級數相乘之規則，§ 978，

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f(y) &= 1 + (x+y) + \left(\frac{x^2}{2!} + xy + \frac{y^2}{2!} \right) \\ &\quad + \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{y}{1} + \frac{x}{1} \cdot \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} \right) + \dots \\ &= 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \dots \\ &= f(x+y). \end{aligned}$$

由此結果，又得

$$f(x) \cdot f(y) \cdot f(z) = f(x+y) \cdot f(z) = f(x+y+z), \text{ 等等.}$$

故注意 $f(0)=1$ 及 $f(1)=e$ 可知在 § 988 內，依次證明之：

1. 當 x 為一正整數 m 時，

$$f(m) = (f(1))^m = e^m,$$

2. 當 x 為正分式 p/q 時，

$$f(p/q) = \sqrt[q]{(f(1))^p} = \sqrt[q]{e^p} = e^{p/q}.$$

3. 當 x 為有理負數 $-s$ 時，

$$f(-s) = 1/f(s) = 1/e^s = e^{-s}.$$

故當 x 為有理數時，則得 $f(x) = e^x$ ，即

$$(2) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

又對於虛數 x 之無理值 (2) 仍為真隨，因若 b 表任何之無理數，經一列之有理值以漸近於 b 為極限，則對於 x 之諸有理值 $f(x) = e^x$ ，故 $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} e^x$ 。

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b), \quad \lim_{x \rightarrow b} e^x = e^b, \quad \text{故 } f(b) = e^b,$$

$$\text{即 } 1 + b + \frac{b^2}{2!} + \dots = e^b.$$

當 x 為虛數時，(2) 之右邊仍為收斂級數，即仍有一和。故對於指數 x 之虛數值可用 (2) 以確定 e^x 。例如，依定義，

$$e^i = 1 + i + \frac{i^2}{2!} + \frac{i^3}{3!} + \dots + \frac{i^n}{n!} + \dots$$

對於 a^x 之級數。使 a 表任一正數，而 x 為任何實數。

991

$$\text{因 } a = e^{\log_e a}, \quad \text{§732, 得 } a^x = e^{x \log_e a}, \quad \text{§730.}$$

故以 $x \log_e a$ 代 x 在此級數中，§990, (2)，得

$$a^x = 1 + x \log_e a + \frac{x^2 (\log_e a)^2}{2!} + \dots + \frac{x^n (\log_e a)^n}{n!} + \dots$$

此級數對於一切 x 之有限值為收斂，如在 §968, 1 中所證。

對數級數。設於以上所得對於 a^x 之級數中以 $1+x$ 代

992

以 y^x 代 x ，得

$$(1+x)^y = 1 + \log_e(1+x) \cdot y + \frac{[\log_e(1+x)]^2 y^2}{2!} + \dots, \quad (1)$$

但從二項定理，§988，當 $|x| < 1$ 時，

$$(1-x)^y = 1 + yx + \frac{y(y-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots, \quad (2)$$

實行所示之乘法並彙合各項後，(2) 即變形為 y_0 之幕級數。之係數在此級數中將為

$$x + \frac{(-1)^{r-1} \cdot \left(\frac{(-1)^{r-2} (r-2)!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} + \dots \right) y^r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} + \dots, \quad \text{§73}$$

以此代入(1)中y之係數若|x| ≤ 1, 即得

(3) log_e(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + ... (3)

此級數之對數級數, 在 § 938 已證明若 |x| < 1, 則為收斂.

上述證明中假定級數(2)變為之新級數後, 仍與(1+x)之指數, 然|x| ≤ 1時, 則可由 § 978 得此結果. 因若 x' 及 y' 分別, § 976 之級數 U_1 + U_2 + ... 對屬於(2)者為

1 + x'y' + (x'y')^2/2 + (x'y')^3/3 + ...

若 x' < 1, 則其和為 (1-x')^{-y'} 而級數為收斂者, § 938.

因證明二項定理僅為理指數時為真, 其應注意者, 當 y 變為無理數值時, 由(1)及(2)可得(3) (參考 § 972 附註).

例. 證明 lim_{n->∞} (1 + 1/n)^n = e.

102

得

log_e(1 + 1/n)^n = n log_e(1 + 1/n) = n(x - x^2/2 + x^3/3 - ...)

= 1 - 1/2n + 1/3n^2 - ...

其中 1, 2, 3, ...

故 lim_{n->∞} log_e(1 + 1/n)^n = 1, 故 lim_{n->∞} (1 + 1/n)^n = e^1 = e.

992 升

因 lim u = lim_e log_e u = e lim(log_e u), § 9726 及 739, 781.

993 (1) 自他對數之計算法, 數之指數以 e 為底者, 稱為數之自然對數. 自然對數表可如下法求得之:

已知 log_e(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + ... (1)

又因 log_e(1-x) = -x - x^2/2 - x^3/3 - x^4/4 - ... (2)

(3) 從(1)減(2), 因

log_e(1+x) - log_e(1-x) = log_e(1+x)/(1-x)

得 log_e(1+x)/(1-x) = 2(x + x^3/3 + x^5/5 + ...). (3)

在(3)中使 $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$ 又因 $x = \frac{1}{2n+1}$

得

$$\log_e \frac{n+1}{n} = 2 \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{8(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right)$$

即 $\log_e(n+1)$

$$= \log_e n + 2 \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{8(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right) \quad (4)$$

使 $n=1$ 代入(4),

$$\log_e 2 = 2(1/3 + 1/3^3 + 1/5 \cdot 3^5 + \dots) = 0.6931\dots$$

使 $n=2$ 代入(4),

$$\log_e 3 = \log_e 2 + 2(1/5 + 1/3 \cdot 5^3 + \dots) = 1.0986\dots$$

對於 n 之其他任何整數值亦準此。

模數。從 §755, $\log_a n = \log_e n / \log_e a$. 故欲之以任何數 $a > 1$ 底者之對數, 可以 $1 / \log_e a$ 乘自然對數以得之. 吾人稱 $1 / \log_e a$ 或其相當數, $\log_e a$, §766 爲以 a 爲底之對數系之模數. 實言之, 常用對數之模數爲 $\log_e 10 = 0.43429\dots$.

習 題 XC

1. 計算 $\log_e 4$ 及 $\log_e 5$ 各至第四位小數.
2. 證明 $e^{-1} = 2/3! + 4/5! + 6/7! + \dots$
3. 用乘法證明

$$\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) = 1.$$

4. 證明 $(e^{ix} - e^{-ix})/2i = 1 - x^2/3! + x^4/5! - x^6/7! + \dots$
5. 證明 $(e^{ix} + e^{-ix})/2 = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots$
6. 用二項定理展開 $(1-x)^{-n}$ 證明其第 $(r+1)$ 項爲

$$\frac{n(n+1)\dots(n+r-1)}{r!} x^r.$$

7. 求 $(8+x)^{1/2}$ 展開式中含 x^2 之項.
8. 求 $(1-x^{1/2})^{-1/2}$ 展開式中所含 x^2 之項.

9. x 須為若何之值, 則 $(9-4x^2)^{\frac{1}{2}}$ 及 $(12+x+x^2)^{\frac{1}{2}}$ 按 x 之升幂展開式為收斂?

10. 展開 $(1-x+2x^2)^{\frac{3}{2}}$ 以 x 為幕至含 x^4 之項止.

11. $(8+3x)^{\frac{2}{3}}(9-2x)^{-\frac{1}{2}}$ 以 x 為幕之展開式中, 求其為首三項. x 須有若何之值, 此展開式為收斂?

12. 求下列各式之極限值:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-x}}{3x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+3x)^{\frac{2}{3}} - (1+4x)^{\frac{1}{4}}}$

13. 證明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = e^x$.

14. 證明 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

15. 以 x 為幕展開 $\log_e(1+x+x^2)$ 至含 x^4 之項為止. x 須為何值, 此展開式為收斂?

16. 證明 $\log_e \frac{m}{n} = \frac{m-n}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{m-n}{n}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{m-n}{n}\right)^3 - \dots$

17. 證明 $\log_e \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^4} + \frac{1}{3n^6} + \dots$

18. 證明

$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^3} + \dots = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \dots$

XXXV 循環級數

995 循環級數. 級數 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ 中, 每 $n+1$ 個連續係數, 得以

$a_n + p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \dots + p_{n+1} a_0 = 0$

形式之恆等式結合之, 其中 p_1, p_2, \dots, p_{n+1} 對於一切值為常者, 稱為 n 次之循環級數, 其恆等式為其關係式.

例如, 在 $1+3x+5x^2+7x^3+\dots+(2n+1)x^n+x^{n+1}$ (1)

每三個連續係數用公式相連 $(2n-2)a_{n-1} + 7n-3 = 0$; (2)

得 $5-2 \cdot 3+1=0, 7-2 \cdot 5+3=0, 9-2 \cdot 7+5=0, \dots, (2n-2)(2n-1)+2n-3=0$.

故(1)爲一二次循環級數,其關係式爲(2).

一等比級數爲一次循環級數.

凡幕級數爲真分式之展開式者,若此真分式之分母爲 r 次 998
則幕級數即爲 r 次循環級數.

例如,若
$$\frac{2+x}{1+2x+3x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, (1)$$

得
$$\begin{array}{r} 2+x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \\ \quad \quad \quad + 2a_0x + 2a_1x^2 + \dots + 2a_{n-1}x^n + \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad + 3a_0x^2 + 3a_1x^3 + \dots + 3a_{n-2}x^n + \dots \end{array}$$

故
$$a_0 = 2, \quad a_1 + 2a_0 = 1, \quad a_2 + 2a_1 + 3a_0 = 0,$$

而普遍言之,
$$a_n + 2a_{n-1} + 3a_{n-2} = 0. \quad (2)$$

故(1)爲一二次循環級數,其關係式爲(2).

設已知一幕級數之首若干項,則可以求其適合之關係式,用 987
此關係式,此級數可繼續至任何項,如一係數級數.

例. 已知 $1+4x+7x^2+10x^3+13x^4+\dots$. 求適合於此諸
項之關係,而更求其次二項.

因 $1+4x+7x^2+\dots$ 非爲等比級數,先試驗二次關係式,

$$a_n + pa_{n-1} + qa_{n-2} = 0.$$

設各項欲適合於此關係式,必須

$$7+4p+q=0, \quad 10+7p+4q=0, \quad 13+10p+7q=0.$$

解第一第二兩方程, $p = -2, q = 1$.

又此諸值適合於第三方程,因 $13 - 10 \cdot 2 + 7 = 0$.

故此關係式爲 $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$.

因此可得係數 a_5, a_6 如下:

$$a_5 - 2 \cdot 13 + 10 = 0, \quad \therefore a_5 = 16; \quad a_6 - 2 \cdot 16 + 13 = 0, \quad \therefore a_6 = 19.$$

設原有項爲 $1+4x+7x^2+10x^3+14x^4$, 不能適合於關係式
 $a_n + pa_{n-1} + qa_{n-2} = 0$. 然此時可留察一第六項 ax^5 , 解 p, q, r .

$$10+7p+4q+r=0, \quad 14+10p+7q+4r=0, \quad a+14p+40q+7r=0.$$

以求得此六項所適合之三次關係式 $a_n + pa_{n-1} + qa_{n-2} + ra_{n-3} = 0$

從此例中通常可知，當2_r項為已知時，此級數組成r次循環級數其共有一，而在已知2_{r+1}項時，則此級數組成(r+1)次循環級數之法為無限也。

循環級數之母函數，一切r次循環級數之級數，為一以r次式為分母之真分式展開之式(比較 § 993)。此分式稱為級數之母函數。此母函數為級數收斂時之和。

例如，使 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$, (1)

為一二次循環級數，其關係式為

$$a_n + pa_{n-1} + qa_{n-2} = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \\ px S_n &= pa_0x + pa_1x^2 + \dots + pa_{n-2}x^{n-1} + pa_{n-1}x^n \\ qx^2 S_n &= qa_0x^2 + \dots + qa_{n-3}x^{n-1} + qa_{n-2}x^n \\ &\quad + qa_{n-1}x^{n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore (1+px+qx^2)S_n = a_0 + (a_1+pa_0)x + (pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n + qa_{n-1}x^{n+1}$$

右邊其餘各項因(2)消去。

當(1)為收斂，因n增大S_n將漸近於(1)之和之極限S，又xⁿ將漸近於0。

$$(1+px+qx^2)S = a_0 + (a_1+pa_0)x$$

即 $S = \frac{a_0 + (a_1+pa_0)x}{1+px+qx^2}$ (3)

999 循環級數之普通項(如前例)并示，當母函數為已知時可求出之。

例 循環級數其關係式為 $a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$ 又第一二兩項為5+4x。求其母函數及其普通項。

此間 $p = -1, q = -2, a_0 = 5, a_1 = 4$ 。

故從 § 998, (3), $S = \frac{5 + 4x}{1 - x - 2x^2} = \frac{5 + 4x}{(1+x)(1-2x)}$ (1)

將(1)解為部份分式, § 5.7,

$$\frac{5-x}{(1+x)(1-2x)} = \frac{2}{1+x} + \frac{3}{1-2x} = 2(1+x)^{-1} + 3(1-2x)^{-1}$$

但當 $|x| < 1$, $2(1+x)^{-1} = 2(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots)$;

又當 $|x| \leq 1/2$, $3(1-2x)^{-1} = 3(1 + 2x + 4x^2 + \dots + 2^n x^n + \dots)$.

故普通項為 $((-1)^n 2 + 3 \cdot 2^n) x^n$.

習題 801

1. 設三次循環級數之首三項為 $2-3x+5x^2$, 而關係式為 $a_n + 2a_{n-1} - a_{n-2} + 3a_{n-3} = 0$, 求其第四項與第五項.

2. 求下列各級數之關係式並續增二項:

(1) $1+8x+2x^2-x^3+3x^4+\dots$

(2) $2-5x+4x^2+7x^3-26x^4+\dots$

(3) $1-x+6x^2-10x^3+15x^4-21x^5+\dots$

3. 求下列之母函數及其普通項:

(1) $2+x+5x^2+7x^3+17x^4+\dots$

(2) $3+7x+17x^2+48x^3+113x^4+\dots$

4. 證明三次循環級數 $a_1+a_2x+\dots$ 若其關係式為 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3}=0$, 其母函數為 $\frac{a_0+(a_1+pa_0)x+(a_2+pa_1+qa_0)x^2}{(1+px)(qx^2+rx+x)}$

5. 引用前公式求

$$1+2x+11x^2+24x^3+55x^4+288x^5+\dots$$

之母函數及普通項.

6. 證明 $a+(a+d)x+(a+2d)x^2+(a+3d)x^3+\dots$ 為一二次循環級數, 並求其母函數.

7. 證明 $1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\dots$ 為一二次循環級數, 其母函數為 $(1+x)/(1+x)^3$.

8. 證明 $1^2+2 \cdot 3x+3^2 \cdot 4x^2+4 \cdot 5x^3+\dots$ 為一三次循環級數, 求其母函數及普通項.

XXXVI 無窮連乘積

1000 無窮連乘積。此名稱乃用以表下式

$$\prod (1+a_r) = (1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_r)\dots$$

其中因式之數假定為無限個。

此乘積 $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)$ 當 n 無限增加時，是否漸近於一有限之極限，而定其為收斂抑或發散。

1001 定理。設諸數 a_r 皆為正，則無窮連乘積 $\prod(1+a_r)$ 為收斂

抑或發散，須視無窮級數 $\sum a_r$ 為收斂抑或發散而定。

第一，假定 $\sum a_r$ 為收斂者，且其和為 S 。

則因 x 取正值時， $1+x < e^x$ ，§980，

得 $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) < e^{a_1} \cdot e^{a_2} \dots e^{a_n}$

即 $< e^{a_1+a_2+\dots+a_n} \leq e^S$

故當 n 增加時， $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)$ 漸近於一有限數 e^S ，故必漸近於一極限，§192，即 $\prod(1+a_r)$ 為收斂。

第二，假定 $\sum a_r$ 為發散者。

在此情形 $\lim(a_1+a_2+\dots+a_n) = \infty$ 。

但 $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) > 1+(a_1+a_2+\dots+a_n)$ 。

故 $\lim(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) = \infty$ ，即 $\prod(1+a_r)$ 為發散。

例如，當 $p > 1$ ， $\prod(1+1/n^p)$ 為收斂者，當 $p \leq 1$ ，為發散者。

例1. 設 $\sum a_r$ 為一發散正級數，其中各項皆小於 1，求證

$$\prod(1-a_r) = 0$$

因 $a_r < 1$ 又 $1-a_r < 1$ ，得絕對值上 $1-a_r \leq 1/(1+a_r)$ 。

故 $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) \leq 1/[(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)]$

但 $\lim(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) = \infty$ 。

故 $\prod(1-a_r) = \lim(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) = 0$

例2. 求積當 $x=1$, 若 $m+1 > 0$, 則二項定理, §987, 爲收斂,
 $m+1 < 0$ 則爲發散.

800f

當 $x=1$, 二項定理變爲

$$1+m \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{m(m-1) \cdot (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} + \dots \quad (1)$$

在此級數內,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m-n+1}{n} = 1 - \frac{m+1}{n} \quad (2)$$

故若 $m+1 < 0$, 則 $|n+1/u_n| > 1$, 而 (1) 發散, §951.
 若 $m+1 > 0$, 在某項以後此級數爲與 §958 所述者相同, 故
 爲收斂.
 設 r 爲大於 $m+1$ 之第一個整數, 則由 (2) 可知 $n \geq r$ 時, $u_{n+1}/u_n < 1$, 且絕對值小於 1, 故 (1) 之各項從 u_r 以後均成爲正負,
 且其絕對值漸減小, 故若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 則 (1) 收斂.

$$\begin{aligned} \text{然 } u_{n+1} &= \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-n+1}{n} \\ &= (-1)^n \left(1 - \frac{m+1}{1}\right) \left(1 - \frac{m+1}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{m+1}{n}\right), \end{aligned}$$

又由例1可知右邊之積隨 n 之增大而漸近於 0 之極限.

習 題 XCII

1. 證明 $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{17}{16}, \dots$ 及 $\frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \frac{17}{16}, \frac{26}{25}, \dots$ 爲收斂.

2. x 須爲何正值, 則下列無窮乘積爲收斂:

(1) $\prod \left(1 + \frac{x^n}{n^2}\right) = \left(1 + \frac{x}{1^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{2^2}\right) \left(1 + \frac{x^3}{3^2}\right) \dots$

(2) $\prod \left(1 + \frac{x^n}{n!}\right) = \left(1 + \frac{x}{1!}\right) \left(1 + \frac{x^2}{2!}\right) \left(1 + \frac{x^3}{3!}\right) \dots$

(3) $\prod \left(1 + \frac{x^n}{3^n}\right) = \left(1 + \frac{x}{3}\right) \left(1 + \frac{x^2}{9}\right) \left(1 + \frac{x^3}{27}\right) \dots$

3. 證明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(a+1)(a+2) \dots (a+n)}{b(b+1)(b+2) \dots (b+n)}$ 爲 ∞ 或 0 視 $a > b$ 或 $a < b$

而定.

XXXVII. 連分式

1002 連分式. 此名稱乃表下式 $a + \frac{b}{c + \frac{d}{e + \dots}}$ 即普通寫作

$$\left(a + \frac{b}{c + \frac{d}{e + \dots}} \right) \text{者.}$$

此章所述僅為簡單連分式. 其形式為 $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$, 其中

a_1 為正整數或 0, 而 a_2, a_3, \dots 皆為正整數.

1003. a_1, a_2, \dots 諸數稱之連分式之第一, 第二, ... 部份商數.

連分式之有盡或無盡視此等部份商數有限或無窮而定.

1003' 有盡分式. 凡有盡之簡單連分式, 顯然皆有一正有理值.

因可以化為簡單分式也.

(例如) $2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{13 + \frac{1}{13 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{30}}}}}}}}$

反之, 凡有理數皆可化為有盡之簡單連分式. 此可在下例說明之.

例. 化 67/29 為連分式.

應用求二整數之最大公約數之法於 67 及 29, 得

$\begin{array}{r} 29)67(2=a_1 \\ \underline{58} \dots \\ \hline 9)29(3=a_2 \\ \underline{27} \dots \\ \hline 2)9(4=a_3 \\ \underline{4} \dots \\ \hline 1)2(2=a_4 \\ \underline{2} \dots \\ \hline 0 \end{array}$	$\frac{67}{29} = 2 + \frac{9}{29} = 2 + \frac{1}{29/9} \quad (1)$
---	---

$$\frac{20}{9} = 2 + \frac{2}{9} = 2 + \frac{1}{9/2} \quad (2)$$

$$\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2} \quad (3)$$

以(2)代入(1),其結果再以(3)代入,即得所求之連分式爲

$$\frac{67}{29} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}$$

因 $29/67 = 1 + 67/29$, 又得

$$\frac{29}{67} = \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}$$

注意: $\frac{c_1}{1}, \frac{c_1}{a_1} + \frac{1}{a_2}, \frac{c_1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \dots$ 諸分式稱爲 $a_1 + \frac{1}{a_2}$ 1004

之第一,第二,第三近值,

當 a_1 爲0, 第一近值爲 $\frac{0}{1}$.

定理1. 凡次序爲奇之近值皆較以後各近值爲小, 而次序爲偶之近值皆較以後各近值爲大.

此可由分母增大, 則分式必減小而推定.

例如:

1. $a_1 < a_1$

2. $a_1 + \frac{1}{a_2} < a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}$, 因 $\frac{1}{a_2} > \frac{1}{a_2 + \dots}$

3. 注意 $\frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} < \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$, 因 $a_2 + \frac{1}{a_3} < a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}$

由2數, 其他準此.

(1) 近值之簡化. 將 $\frac{c_1}{a_1} + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$ 之第一, 第二, 第三近值 1006

化爲簡單分式之形式, 得

$$\frac{a_1}{c_1}, \frac{c_1 a_2 + 1}{a_1 a_2 + 1}, \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_2}{a_1 a_2 + 1}, \dots \quad (1)$$

設 p_1, p_2, p_3, \dots 表諸近值之分子, 又 q_1, q_2, q_3, \dots 表其分母如前述之化簡, 得

$$p_1 = a_1, p_2 = a_1 a_2 + 1, p_3 = a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3, \dots, \quad (2)$$

$$q_1 = 1, q_2 = a_2, q_3 = a_2 a_3 + 1, \dots. \quad (3)$$

因 a_1, a_2, a_3, \dots 爲正整數, 則從 (2); (3) 當 n 增加時, p_n 及 q_n 繼續增加, 設已知分式爲無盡, 則二者漸趨於 ∞ .

由觀察 (2) 及 (3), 得

$$p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2} \quad \text{及} \quad q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}. \quad (4)$$

此爲下定理之說明,

1607 定理2. 任何近值之分子及分母, 與前二近值之分子分母

之關係, 爲公式

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

因假若若上述諸公式適用於第 k 個近值, 則

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \quad (1)$$

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}. \quad (2)$$

第 $(k+1)$ 個近值祇須從第 k 個用 a_{k+1}/a_{k+1} 代 a_k 即可求得

§1004. 故, 因 $p_{k-1}, p_{k-2}, q_{k-1}, q_{k-2}$ 不包含 a_k , 則從 (2):

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{(a_k + 1/a_{k+1}) p_{k-1} + p_{k-2}}{(a_k + 1/a_{k+1}) q_{k-1} + q_{k-2}}$$

$$= \frac{a_{k+1} (a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-2}}{a_{k+1} (a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-2}} = \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-2}}{a_{k+1} q_k + q_{k-2}}, \quad \text{由(1)}$$

$$\text{即 } p_{k+1} = a_{k+1} p_k + p_{k-2}, \quad q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-2}.$$

(1) 吾人前已證明若公式 $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ 及 $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$

對於任何確定近值適合者, 其對於次一近值亦爲真, 但更已經

明對於第三近值亦適合。故對於第四適合，又第五亦然，按此類推對於三以後各近值均屬適合(比較§971)。

例. 計算 $3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}}$ 之近值。

因 $3 = 3/1$ 及 $3 + 1/2 = 7/2$, 則得 $p_1 = 3, p_2 = 7, q_1 = 1, q_2 = 2$ 。

故 $p_3 = 3 \cdot 7 + 3 = 24, p_4 = 4 \cdot 24 + 7 = 103, p_5 = 5 \cdot 103 + 24 = 539,$

又 $q_3 = 2 \cdot 7 + 1 = 15, q_4 = 4 \cdot 7 + 2 = 30, q_5 = 5 \cdot 30 + 7 = 157,$

故諸近值為 $\frac{3}{1}, \frac{7}{2}, \frac{24}{7}, \frac{103}{30}, \frac{539}{157}$ 1101

定理 3. 任何二連續近值之分子及分母，其關係為公式 1008

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n.$$

當 $n=2$ 時，此公式為真。因由 §1006 得

$$p_2 q_1 - p_1 q_2 = (p_1 q_1 + 1) - p_1 q_1 = 1 = (-1)^2.$$

又設當 $n=k$ 時，可證明此公式為真，當 $n=k-1$ 時亦屬適合。

因 $p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} = (a_{k+1} p_k + p_{k-1}) q_k - p_k (a_{k+1} q_k + q_{k-1})$ 。

$$= -(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k). \quad \S 1007$$

故設 $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^k,$

則 $p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} = (-1)^{k+1}$

故，因 $n=2$ 時適合於此公式， $n=2+1$ 即 3 時亦適合，因而 $n=3+1$ 即 4，等等，以至任何正整數 n 。

系 1. 任何近值 p_n/q_n 為不能約之分式。 1009

因設 p_n 及 q_n 有公因式，由此關係 $p_n q_{n-1} q_n - p_{n-1} q_n^2 = (-1)^n$ 。此因式為 $(-1)^n$ 之除數，乃為不可能也。

1010 系2. 對於三進位之差得公式如下:

$$1. \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}} \cdot 2; \quad \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n p_{n-1}}$$

第一公式為 $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$ 之關係之直接結果.

第二式式從 § § 1007, 1008 之事實, 即

$$.2. p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2} (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) = a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = (-1)^{n-1} a_n$$

§ 1005 之定理可從此等公式化出.

1011 定理4. 無盡之簡單連分式其第 n 個近值, 視 n 之漸增而漸近於一有限之極限.

因依 § 1015, 次序為奇之近值 $p_1/q_1, q_2/q_1, \dots$ 成一無窮之遞增數列, 其中各項皆小於有限數 p_2/q_2 . 故從 § 192, 經此數列, 一變數常增大而以 λ 為極限.

仿此, 一變數經次序為偶之近值數列 $p_2/q_2, p_3/q_2, \dots$ 常變小而以 μ 為極限.

$$\text{但 } \mu = \lambda, \text{ 因 } \mu - \lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{p_{2m}}{q_{2m}} - \frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}} \right] \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2m}}{q_{2m} q_{2m-1}} = 0$$

故一變數之經近值之全數列 $p_1/q_1, p_2/q_2, p_3/q_3, \dots$ 者漸以 λ 為極限.

1012 無盡之簡單連分式之值者即 $\lim(p_n/q_n)$. 故從 § 1012 可知此數常為無理數.

有盡連分式之值, 即其末個近值也, § 1004,

在下列定理中，§§ 1013, 1014, 應了解連分式有盡時，‘近值’之意義作為除去末一個近值之任何近值。

系1. 簡單連分式之值，常在二個連續近值之值間。 1013

系2. 連分式之值，與其第 n 個近值之值差，在數值上小於 $1/q_n q_{n+1}$ ，而大於 $a_{n+1}/q_n q_{n+1}$ 。 1014

因設 λ 為分式之值，為簡便起見，并設 n 為奇數。

則
$$\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} < \lambda < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \quad \text{§§ 1005, 1013}$$

故
$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \quad \text{§ 1010, 1011}$$

又
$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \quad \text{§ 1010, 2}$$

$1/q_n q_{n+1} < 1/q_n^2$ 顯為顯明，又引用 $q_{n+1} = a_{n+1} + q_n$ ，§1007之關係，可說明 $a_{n+1}/q_n q_{n+1} \geq 1/q_n(q_n + q_{n+1})$ 。

故 λ 與 p_n/q_n 之差小於 $1/q_n^2$ 而大於 $1/q_n(q_n + q_{n+1})$ 。

系3. 各近值較其前之近值為一更逼近於連分式之值。 1015

因係 §1014，設 λ 為連分式之值， λ 與 p_n/q_n 之差在數值上小於 $1/q_n q_{n+1}$ ，而 λ 與 p_{n-1}/q_{n-1} 之差在數值上大於 $a_{n+1}/q_{n-1} q_{n+1}$ ；又 $1/q_n q_{n+1} < a_{n+1}/(q_{n-1} q_{n+1})$ ，蓋 $q_{n-1} < a_{n+1} + q_n$ 也 § 1008。

系4. 近值 p_n/q_n 較任何有理分式，其分母不超過 q_n 者 1016

直接逼近連分式之值。

因若 a/b 較 p_n/q_n 更逼近連分式之值，則 a/b 亦必較 p_{n-1}/q_{n-1} 更逼近連分式之值，§1015，故必在 p_n/q_n 與 p_{n-1}/q_{n-1} 之間，§1013。

為明證起見，假定為 n 個數。

則
$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{a}{b} < \frac{p_n}{q_n}$$

故
$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} > \frac{a}{b} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$$

即
$$\frac{1}{q_n q_{n-1}} > \frac{a q_{n-1} - b p_{n-1}}{b q_{n-1}}$$

或
$$b > q_n (a q_{n-1} - b p_{n-1})$$

但 $a q_{n-1} - b p_{n-1}$ 為正數，蓋 $a/b > p_{n-1}/q_{n-1}$ 。故 $b > q_n$ ；

即 a/b 若被 q_n 為正，則此連分式之值，其分母必大於 q_n 。

1017 循環連分式，一類之連分式，其中一部份之商或一羣連續部份之商似環不已者，稱為循環連分式。而此等循環連分式觀其開始，即為此等循環部份與否而稱為純粹或混合。

循環連分式之值可由下：

例1. 求 $2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \dots}}}$ 之值。

此為純粹循環連分式以 $2 + \frac{1}{3}$ 為循環部份，故若 x 為其值，得

$$x = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}, \therefore x = \frac{7x+2}{3x+1}, \therefore 3x^2 - 6x - 2 = 0,$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{15}}{3}$$

例2. 求 $4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \dots}}}$ 之值。

此為混合循環連分式以 $2 + \frac{1}{3}$ 為循環部份

$2 + \frac{1}{3 + \dots}$ ，而 y 為全分式之值，得，從例1，

$$y = 4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \dots}}} = \frac{71x+4}{5(3+\sqrt{15})/8+1} = \frac{75+21\sqrt{15}}{18+5\sqrt{15}}$$

通常，設 x 為純粹循環連分式之值其周為 $a_1 + \dots + \frac{1}{a_k}$ 從

§ 10079 得

$$x = a_1 + \dots + \frac{1}{a_k + x} = \frac{p_k x + p_{k-1}}{q_k x + q_{k-1}}$$

故 $q_k x^2 + (q_{k-1} - p_k)x - p_{k-1} = 0$.

因此二次方程之絕對項 $-p_{k-1}$ 為負，故此方程有一正根，且僅限於一，而此根為連分式之值。

又若 y 為混合循環連分式之值

$$y = a_1 + \dots + \frac{1}{a_r + \frac{1}{a_{r+1} + \dots + \frac{1}{a_{r+k}}}}$$

先求出循環部份 x 之值如上，後係得 § 10079

$$y = a_1 + \dots + \frac{1}{a_r + x} = \frac{p_r x + p_{r-1}}{q_r x + q_{r-1}}$$

化無理數為連分式。凡無理正數，皆為一定之商。1018

連分式之值，此連分式可用下法求至無論若干部份之商。

設 b 指示所究之數，可先求 a_1 ，即小於 b 之最大整數，於是 $b = a_1 + 1/b_1$ ，其中 b_1 為大於 1 之無理數。其次求 a_2 ，小於 b_1 之最大整數，則 $b_1 = a_2 + 1/b_2$ ，其中 b_2 為大於 1 之無理數。如此繼續，得

$$b = a_1 + \frac{1}{b_1} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{b_2}} = \dots = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$$

當 b 為二次不盡根時，如此求得之連分式，可證明其為循環連分式。

例. 化 $\sqrt{11}$ 為連分式.

小於 $\sqrt{11}$ 之最大整數為 3, 而 $3 \in \mathbb{O}$,

$$\sqrt{11} = 3 + (\sqrt{11} - 3) = 3 + \frac{2}{\sqrt{11} + 3} = 3 + \frac{1}{(\sqrt{11} + 3)/2} \quad (1)$$

小於 $(\sqrt{11} + 3)/2$ 之最大整數為 3, 而

$$\frac{\sqrt{11} + 3}{2} = 3 + \frac{\sqrt{11} - 3}{2} = 3 + \frac{2}{2(\sqrt{11} + 3)} = 3 + \frac{1}{\sqrt{11} + 3} \quad (2)$$

小於 $\sqrt{11} + 3$ 之最大整數為 6, 而

$$\sqrt{11} + 3 = 6 + (\sqrt{11} - 3) = 6 + \frac{2}{\sqrt{11} + 3} = 6 + \frac{1}{(\sqrt{11} + 3)/2} \quad (3)$$

(3) 之末個分式者 (1) 之末個分式之倒, 故從 (3) 以後將以 (2), (3) 無窮重複, 即部份商數 3 及 6 循環也. 故將 (2) 代入 (1)

中又以 (3) 代入其結果中, 按此類推, 得 $\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \dots}}$

1019 一已知無理數欲其成其成一簡單連分式, 僅有一法表示之, 此

因二無盡之簡單連分式, 非其對應部份商數均屬相等, 決不能相等也.

因設 $a + \alpha = c + \gamma$, 其中 a 及 c 為正整數而 α 及 γ 為小於 1 之正數, 則 $a = c$, 因否則由 $a - c = \gamma - \alpha$, 將有不為 0 之整數其數值上小於 1 也.

故, 設 $\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} = \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{c_3 + \dots}}}$, 其中 $a_1, a_2, a_3, \dots, c_1, c_2, c_3, \dots$ 為正整數, 得 $a_1 = c_1, \dots, \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}} = \frac{1}{c_2 + \frac{1}{c_3 + \dots}}$

$\frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}} = \frac{1}{c_2 + \frac{1}{c_3 + \dots}}, \dots, a_2 = c_2, \dots$

1020 欲計算等於已知無理數 b 之連分式, 直至第 n 個部份商數, 則即能求其第 n 個理值 p_n/q_n , 而此有理分式 p_n/q_n 為 b 之約值其誤差小於 $1/q_n^2$; § 1014 又 p_n/q_n 較諸其他有理分式, 其分母不大於 q_n 者, 更逼近於 b , § 1016.

例如, $\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3 + \dots}}}$ 之四連值為 $\frac{3}{1}, \frac{10}{3}, \frac{6}{1}, \frac{199}{60}$, 而 $\frac{199}{60}$ 以小於 $\frac{1}{60}$ 之

(一次不定方程之解法: 已知方程 $ax+by=c$ 之任何形 10^m 式, 其中 a, b, c 指示整數, 且 a 與 b 無公因式, § 67. 設將 a/b 化為連分式, 其末個連值將為 a/b 本身, 又若末第二連值為 p/q , 則得 $aq - bp = \pm 1$, § 1008. 由此結果, 吾人常能求得 x 及 y 之一組整數值適合於 $ax+by=c$ 者, 其法可以下列說明之.

例. 求 $205x+93y=7$ 之一組整數解.

如 § 1003 之例, 得 $\frac{205}{93} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}}$

如 § 1007 之例, 連值為 $\frac{2}{1}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{97}{44}, \frac{205}{63}$.

故 $205 \cdot 44 - 93 \cdot 97 = -1$,

或以 -7 乘之, $205(-44) + 93(97) = 7$.

故 $x = -308, y = 679$ 為 $205x+93y=7$ 之一解

其普通解為 $x = -303 + 93t, y = 679 - 205t$, § 674

仿此, 可說明 $205x+93y=7$ 有 $x = -308, y = -679$ 之解答.

習 題 XCII

計算下列連分式之連值:

1. $3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}$ 2. $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{10 + \frac{1}{12}}}}}$

化下列各數為連分式, 對於末後三數各計算其第四個連值并估計以此為分式之值時之誤差:

- | | | | |
|--------------------|----------------------|----------------------|---------------------------|
| 3. $\frac{10}{12}$ | 4. $\frac{457}{56}$ | 5. $\frac{142}{513}$ | 6. 9.54 |
| 7. 0.1457 | 8. $\frac{233}{177}$ | 9. $\frac{421}{972}$ | 10. $\frac{23456}{31827}$ |

化下列各數爲循環連分式，對於首四近似值計算其第五個近似值及其對應之誤差：

11. $\sqrt{17}$. 12. $\sqrt{20}$. 13. $\sqrt{6}$. 14. $\sqrt{39}$.

15. $\sqrt{105}$. 16. $1/\sqrt{23}$. 17. $\sqrt{19}$. 18. $\sqrt{71}$.

19. $\sqrt{3}$. 20. $(\sqrt{10}-2)/2$. 21. $(\sqrt{2}+1)/(\sqrt{2}-1)$

求下列各循環連分式之值：

22. $\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\dots}}}$ 23. $\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\dots}}}$ 24. $3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{2+\dots}}}$

27. 證明 $\sqrt{a^2+1} = a + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a^3} + \dots$

28. 證明 $\sqrt{a^2+2} = a + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+2} + \dots$

29. 證明

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\dots}}} = \frac{-(abc+a-b+c) \pm \sqrt{(abc+a-b+c)^2-4}}{2(a^2-1)}$$

30. 化 $x^2+x-1=0$ 之正根爲連分式。

31. 證明 $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{1}{q_1q_2} + \frac{1}{q_2q_3} + \dots + \frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}$

32. 證明 $\frac{1}{a_1+\frac{1}{b_1+\frac{1}{c_1+\dots}}} = \frac{1}{q_1q_2} + \frac{1}{q_2q_3} + \frac{1}{q_3q_4} + \dots$

33. 以分母小於 1000 之有理分數表正方形之對角線與一邊之比，則與此最接近之有理分數若何？估定以此分數爲比值時之誤差。

34. 求誤差小於 0.000001 之最簡單分數以表 $\pi = 3.14159265\dots$

35. 計算 $e = 2.71828\dots$ 之第六個近似值，又估計以此爲 e 值之誤差。

36. 求 $127x - 214y = 6$ 之一組整數解。

37. 求 $235x + 412y = 10$ 之一組整數解。

38. 求 $517x + 323y = 31$ 之一組普通整數解。

XXXVIII. 連續函數之性質

一 變數之函數

函數：設變數 y 隨變數 x 而定， x 每取一值， y 即有一定 1022 依或一組值，則吾人稱 y 為 x 之函數。

吾人謂 y 為 x 之函數時，寫 $y=f(x)$ ，其意義為 y 為單值函數；換言之，對於 x 各值， y 僅有對應之一值。又 $f(a)$ 表示 x 為 a 值時， y 所得之值。

設 y 等於 x 之代數式，例如 $y=x^2+1$ ，則顯然 y 為 x 之函數。但 y 為 x 之函數，其關係有時非方程所能表示者，如 y 為 x 之函數，設對於 x 之一切有理值時 y 為 1，對於 x 其他之一切值時 y 為 -1；則 y 即為 x 之函數，而不能將 x 與 y 之關係用方程以表示之者。

有時對於 x 之特殊例外之值，由所舉 y 與 x 間之關係，決定 y 之值雖為失敗，而吾人仍稱之為 x 之函數，§ 1024。

有時 y 為 x 之函數，僅限於 x 之一組值，設僅限於 x 在一定極限間之諸值，例如，就方程 $y=x+2x^2+3x^3+\dots$ 考之， y 之決定僅對於 x 數值上小於 1 者。

函數之連續性：設 $f(x)$ 為一 x 之已知函數，當 $x=a$ 時， 1023 若 $f(x)$ 有一定值，又若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ，則稱 $f(x)$ 連續於 a 。

在相反之情形時，吾人謂 $f(x)$ 非連續於 a 。

由此以後，記號 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 即指 x 漸近於 a 而以 a 為極限時， $f(x)$ 將漸近於 $f(a)$ 而以 $f(a)$ 為極限，至於 x 變化經何種數列，而漸近於 a 為其極限則不可論。

由連續方程 $y=f(x)$ 所決定之函數 y 有適當 $x=a$ 時， 1024 $f(x)$ 為不定形式者，§ § 513-518。就方程 $y=f(x)$ 本身而論， $x=a$ 時 y 不能尋此式所請案，但 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 有定之有限值。

則此值即為 $f(a)$ 之值, § 519, 使 $f(x)$ 連續於 a . 設 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, 則 $f(a)$ 之值為 ∞ , § 515; $f(x)$ 則於 a 為非連續者. 最後, 設 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 為不定式, 每理由可舉 $f(a)$ 為一簡單之值, 顯然 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 之值不能與 $f(a)$ 之值相等. 當此情形之下 $f(x)$ 為非連續於 a .

1. 例如, 各有理函數 $f(x)$ 為連續者, 但其中分式之分母或為 0 時, 即為例外.

例如, 取函數 $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$ 考之.

除 $x^2-1=0$, 即 $x=1$ 或 $x=-1$ 之外, 此函數為連續者.

因若 $x \neq 1$ 亦得 $f(x) = (x+1)/(x^2-1)$ 有一定之值, 而 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, § 509.

當 $x=1$, $(x-1)/(x^2-1)$ 為不定形式 $0/0$. 但 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)/(x^2-1)] = \lim_{x \rightarrow 1} [1/(x+1)] = 1/2$, 以 $1/2$ 為 $f(1)$ 之值, 則當 $x=1$ 時, 可使 $f(x)$ 為連續.

當 $x=-1$, 則因 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$, $f(x)$ 為非連續者.

2. 將下列函數討論之:

$$f(x) = \frac{1}{2^x + 3} = \frac{1 + 3/2^x}{1} = \frac{1/2^x + 3}{1} = \frac{1}{2^x + 1} = \frac{1 + 1/2^x}{1 + 1/2^x}$$

此間 $f(0)$ 為不定形 ∞/∞ , § 517.

但若以 $f(x)$ 書作第二形式, 然後使 x 經正而漸近於 0, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x = \infty, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3.$$

設以 $f(x)$ 書作第三形式, 然後使 x 經負值漸近於 0, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^x = \infty, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3.$$

最後, 若使 x 經正負兩側之值, 使漸近於 0, 則 $f(x)$ 不能漸近於任何極限.

故 $f(x)$ 於 0 為不連續者. 不能舉任何值表 $f(0)$, 使 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

1025 從 § 1023 連續性之定義, 而於可知, § 119.

$f(x)$ 於 a 爲連續者，其充要而必要之條件，爲 $f(a)$ 有一定之有限值，及對於每一可指定之 ϵ ， δ 必能求得一對應正數 ϵ 使

$$|x-a| < \delta \text{ 時, } |f(x)-f(a)| < \epsilon.$$

故在 x 值之附近，如 a ， $f(x)$ 爲連續函數，若 x 之值變化甚小，則 $f(x)$ 之值之變化亦甚小，而 x 值之變化，可使其小至足使 $f(x)$ 之對應變化值小至隨吾人之意。但有時 x 之值能使 $f(x)$ 不連續者，則在含此 x 值之區間內， $f(x)$ 不能有上述之性質，參見 § 1024 之例。

定理1. 若函數 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 在 a 時皆爲連續函數， $f(x)$ 1028
 $\pm \phi(x)$ 及 $f(x) \cdot \phi(x)$ 亦皆爲連續函數，則除 $\phi(a) = 0$ 外， $f(x)$
 $1/\phi(x)$ 亦爲連續函數。

若 $f(x)$ 於 a 時爲連續函數，則 $f(f)$ 亦然。

此由在 a 之連續定義，§ 1023 及 §§ 203-205 之定理得之，依此 $\lim[f(a) + \phi(x)] = \lim f(x) + \lim \phi(x)$ ，準此類推。

實函數。在此函數內 x 表一實變數，即 x 僅取實數值，而 1027
 x 將表一 x 之實函數，即 y 爲實數時， $f(x)$ 亦有一實數。

實數之區間，以直線上之點表實數，§ § 104, 109，爲便利起 1028
 見，茲下列之命名法。

從 a 及 b 中間所取之實數羣，而 a 及 b 亦包括在內，名之曰 a 及 b 之區間，而以符號 (a, b) 表之。

又應知者， $a < b$ 而稱 a 及 b 爲區間 (a, b) 之左端及右端。

又設 $c = (a+b)/2$, 則區間 (a, b) 被 c 分爲二相等區間 (a, c) 及 (c, b) ; 其餘類推.

② 例如, $(1, 7)$ 被 4 分爲二相等區間 $(1, 4)$, $(4, 7)$; 且後 3 及 5 分爲三相等區間 $(1, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 7)$.

1029 設在區間 (a, b) 內, x 爲任何值, 函數 $f(x)$ 皆爲連續函數時, 則此函數稱爲區間 (a, b) 內之連續函數.

1030 定理. 3 設 $f(x)$ 爲區間 (a, b) 內之連續函數, 且 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相反之符號, 則在 (a, b) 之內必有一數 x_0 即使 $f(x_0) = 0$.

爲明確起見, 假定 $f(a)$ 爲+, 而 $f(b)$ 爲-. 以 (a, b) 分爲任意等分之區間, 例如分爲二相等區間 (a, c) 及 (c, b) .

設 $f(c) = 0$, 則定理已證明 c 爲 x_0 . 但若 $f(c) \neq 0$, 則在區間 (a, c) 或 (c, b) 二者之中必有一其左端爲+, 其右端爲-. 例如, 設 $f(c)$ 爲-, 則在 (a, c) 內有真解, 又設 $f(c)$ 爲+, 則在 (c, b) 內有真解. 爲便利計, 稱此區間爲 (a_1, b_1) . 則 $f(a_1)$ 爲+, $f(b_1)$ 爲-.

依處理 (a, b) 之法以處理 (a_1, b_1) 而至無窮. 或最後得一區間其一端爲 $f(x) = 0$, 則此數即爲 x_0 . 或得一無窮之數列, 爲區間中之區間所組成者, 如

$$(a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n), \dots$$

而 $f(a), f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$ 爲+

及 $f(b), f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n)$ 爲-.

由 § 192, 198, 可知 a_n 及 b_n 隨 n 之增大, 而漸近於一同極限. 因 a_n 常小於 b 但永不減小, 而 b_n 常大於 a 但永不增大. 且 $\lim(b_n - a_n) = \lim(b - a)/2^n = 0$.

稱此極限爲 x_0 , 則 $f(x_0) = 0$.

因 $f(x)$ 在 x_0 為連續函數, $\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(x_0)$.

由因 $f(a_n)$ 常為正, 其極限 $f(x_0)$ 不能為負, 又因 $f(b_n)$ 常為負, 其極限 $f(x_0)$ 不能為正, 故 $f(x_0) = 0$.

例: $f(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots$, (即可證明 $f(1)$ 為正而 $f(2)$ 為負, 故 $f(x)$ 對於在 1 與 2 間之值必為零).

此定理之證明詳見 § 838, 836 中得之.

第六條 極小值, 極限及劣限. 今思考下列之無窮數列: (103)

$$A, 1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{8}, \dots (A), \quad B, 2 - \frac{1}{2}, 2 - \frac{3}{4}, 2 - \frac{7}{8}, \dots (B).$$

在 (A) 內有一最大數, 即 1, 亦即最小數; 而在 (B) 內有一最小數, 即 2, 但無最大數.

而且, (A) 中諸數皆小於 2, 但大於 (A) 中諸數之數, 其中有最大者, 即 1, 仍比大於 (B) 中諸數之數, 其中有最小者, 即 2.

對於其他所有有限數之無限數列, 即在二已知有限數 c 及 b 之間之數, 皆為真數, 換言之,

定理 2. 若 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots (A)$ 表任一有限數之無限數列, 則 1032

1. 或在 (A) 內之諸不同數中, 必有一最大者, 或在大於 (A) 中諸數之數中必有一最小者.

2. 或在 (A) 內之諸不同數中, 必有一最小者, 或在大於 (A) 中諸數之數中必有一最大者.

欲證明 1 款, 可將一切大於 (A) 中諸數之數, 歸屬於 R 類, 而其餘諸實數 (A) 內之數亦包括之稱為 R 類. 因在 R 內之每一數, 比在 R 內之每一數為小, 則在 R 內必有之最大數, 或在 R 內有

一極小數，§ 159，——即為在(A)內不同數中之最大數，或為大於(A)內諸數之數中之最小數。

用同理可證證明 2 款。

1088 設諸數羣中相異各數，其中有最大者，則將其數為羣之極大數；若有最小者，為極小數。

數羣之優限者，若數羣中有極大數，即為此極大數，否則為大於數羣中各數之最小數。

數羣之劣限者，若數羣中有極小數，即為此極小數，否則為小於數羣中各數之最大數。

一數羣如 $1, 2, 3, 4, \dots$ 且其含有大於能舉出之數，則謂此數羣有優限 ∞ 。仿此，一數羣如 $-1, -2, -3, -4, \dots$ 則謂其有劣限 $-\infty$ 。

顯然，設一數羣中有一限之優限 λ ，則 λ 或為其極大數，或可在此數羣中，求得與 λ 之差為隨意之小。

1034 所謂“ $f(x)$ 在 (a, b) 內之值”，意為 $f(x)$ 之值對應於 x 由 (a, b) 內之值者。且設此數羣有一極大值，或一極小值，則將其稱為在 (a, b) 內 $f(x)$ 之絕對極大值，或絕對極小值。在 § 639 中所說明之極大值與極小值不一定為絕對極大值或絕對極小值。

035 定理4. 設 $f(x)$ 在區間 (a, b) 內為連續函數，則其在 (a, b) 內，必有一絕對極大值及一絕對極小值。

因 $f(x)$ 在 (a, b) 之值為有限數，§ 1023，必有有限之優限及劣限，稱此二限各為 λ 及 μ 。

今欲證明在 (a, b) 內必有一數 x_0 ，使 $f(x_0) = \lambda$ ，且有一數 x_1 ，使 $f(x_1) = \mu$ 。

此二定理之證明大致相同，故祇述其前者如下。

分 (a, b) 為任意個相等區間，假定分為二相等區間。顯然至少在此二半區間之一中， λ 將為 $f(x)$ 之優限。為便利計，稱此半區間為 (a_1, b_1) 。

以處理 (a, b) 之法以處理新區間 (a_1, b_1) ，如此繼續進行以至無窮。

則諸區間中可得一無窮之區間數列，

$$(a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n), \dots$$

在每一區間中， λ 為 $f(x)$ 之優限。

當 n 漸次增大， a_n 及 b_n 漸近於一同數，而以此數為極限（參看§ 1030）。

設稱此極限為 x_0 ，則 $f(x_0) = \lambda$ 。

因若不然， $f(x_0)$ 及 λ 表二常數，其差必為一常數如 a ，而不為0，則

$$\lambda - f(x_0) = a. \quad (1)$$

因 $f(x)$ 在 x_0 為連續函數者，故得令區間 (a_n, b_n) 對於在 (a_n, b_n) 內 x 之各值，§ 1025，小至能得

$$|f(x) - f(x_0)| < a/2. \quad (2)$$

又因 λ 為在 (a_n, b_n) 內， $f(x)$ 諸值之優限，則在 (a_n, b_n) 及(2)內，§ 1033，選 x 使

$$\lambda - f(x) < a/2. \quad (3)$$

然由(2)及(3)可知

$$\lambda - f(x_0) < a.$$

故因(4)與(1)相違反，(1)不能成立；即 $\lambda - f(x_0) = 0$ ，或 $\lambda = f(x_0)$ ，如所欲證明者。

1036. 一函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 內連續，若 $f(x)$ 之實數介於任意兩相鄰之極大極小值者，則必在 (a, b) 之內。

因數 c 為所究之值，且以 $f(x) - c$ 為在 (a, b) 內之連續函數 § 1026.

設 $f(x_0)$ 及 $f(x_1)$ 為 $f(x)$ 在 (a, b) 內之極大極小值，則 $f(x_0) - c$ 為正， $f(x_1) - c$ 為負，故由 § 030，必有一 x_2 在 x_0 及 x_1 之間，使 $f(x_2) - c = 0$ ，即 $f(x_2) = c$ ，即 c 為 $f(x)$ 之值。

1037. 函數之極大極小值 $f(x)$ 在 (a, b) 內之振動皆小於 a 在 (a, b) 間之極限與劣限相等。

1038. 定題 5. 設 $f(x)$ 在 (a, b) 內連續，若隨 ϵ 之任意小正數 a ，必有一 δ 小至何種，必將 (a, b) 分為有限個等長之區間，而於各區間 $f(x)$ 之振動皆小於 a 。

因將 (a, b) 分為任意若干相等區間，設為其二相等區間，並以此二區間各分為二相等區間，藉此進行，良既若心，餘必必得 $f(x)$ 在其中之振動皆小於 a 者。

因若不然，至少在 (a, b) 之中區間內 $f(x)$ 之振動，不盡皆小，如此可導解求得每半區間之半，準此類推，以至無限

設此區間內之無窮數列為

$$(a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n), \dots$$

又如在 § 1050. 則 $\lim a_n = \lim b_n = a_c$.

因 $f(x)$ 在 (a, b) 內連續，必有一極大極小值及一極小極小值在各區間 $(a, b), (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n), \dots$ § 1038.

設 M_n 表示 $f(x)$ 在 (a_n, b_n) 之絕對極大值又 m_n 表示其

極小值

則，從假定， $f(a_n) - f(\beta_n) \equiv a$,

又因此 $\lim f(a_n) - \lim f(\beta_n) \equiv a$,

但此係不可信者。蓋因 a_n 及 β_n 在 (a, b) 內，而 $\lim a_n = \lim \beta_n = x_0$ ，故得 $\lim a_n = \lim \beta_n = x_0$ 。

故，因 $f(x)$ 為在 x_0 連續者， $\lim f(a_n) = \lim f(\beta_n)$ ；即， $\lim f(a_n) - \lim f(\beta_n) = 0$ ， \therefore 不 $\equiv a$ 。

二 自變數之函數

二變數之函數。若二變數 x 與 y 各取一值，變數 u 即有1038一定值或一固定值與之對應，吾人稱 u 為 x 及 y 之函數。

此間所討論者，為與 x 及 y 之一對值，僅得 u 之一個對應值。

記號 $u = f(x, y)$ 均 u 為 x 與 y 之函數，而 $f(a, b)$ 為當 $x = a$ 及 $y = b$ 時， u 之值。

例如，若 $u = f(x, y) = x^2 - 2y + 1$ ，則 u 為 x 與 y 之函數。其中當 $x = 1, y = 2$ ，得 $u = f(1, 2) = 1 - 4 + 1 = -2$ 。

§1032 之附註，在此仍屬適用。

二變數函數之連續性。設 $f(x, y)$ 為 x 及 y 之已知函數。1040若 (a, b) 有一定存在限值，且 x 及 y 若各趨於 a 及 b 為極限時， $f(x, y)$ 趨於 $f(a, b)$ 為極限，則稱 $f(x, y)$ 在 a, b ，即 $x = a, y = b$ 時，為連續者。

一：反之，則稱 $f(x, y)$ 在 a, b ，即當 $x = a, y = b$ 時，不 為連續函數。

由此定義及 § 100，可知

若 $f(x, y)$ 在 (a, b) 為連續者，則充分且必要條件，為 $f(a, b)$ 有一定之值。

正試

當 $|x - a| < \epsilon$ 與 $|y - b| < \epsilon$ 時 $|f(x, y) - f(a, b)|$

$< \delta$

1042 定理 1. 設二函數 $f(x, y)$ 及 $\phi(x, y)$ 在 a, b 皆為連續函數, 則 $f(x, y) \pm \phi(x, y)$ 及 $f(x, y) \cdot \phi(x, y)$ 亦然, 又除 $\phi(x, y) = 0$ 之外, $f(x, y) / \phi(x, y)$ 亦然。

設 $f(x, y)$ 於 a, b 為連續函數, 則 $\sqrt{f(x, y)}$ 亦然。

本定理可直接從 § 1040 及 §§ 203—205 得之。

1043 數域. 此間須認明 x, y 表實變數, 而 $f(x, y)$ 則表此二變數之實函數(比較 § 1027).

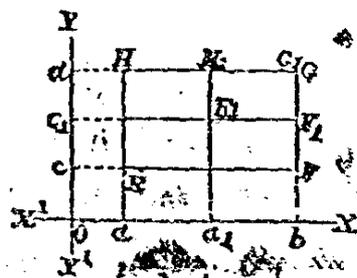
如在 § 382 之證明, x 及 y 各組之值可以在平面上繪出. 顯然用此方法作方程 $x=a, x=b, y=c, y=d$, § 383; 此諸直線

作成之長方形包含 x, y 之各對數值使 $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 者. 此長方形, 凡此 x, y 之各對數值所成之數羣可稱之為數域 $(a, b; c, d)$.

1044 設 $f(x, y)$ 在數域 $(a, b; c, d)$ 內, 對於 x, y 之每對數值為連續者, 則吾人稱 $f(x, y)$ 為在此數域之連續函數。

1045 定理 2. 設 $f(x, y)$ 在數域 $(a, b; c, d)$ 為連續者, 則在此數域內有一極大及一極小之值。

因 $f(x, y)$ 在此已知數域內為連續函數, 則在此數域內有一有限之優限及劣限, §§ 1032, 1040. 稱此二限為 λ 及 μ .



今欲證明者, 為在 $(a, b; c, d)$ 內有一組值 x_0, y_0 使 $f(x_0, y_0) = \lambda$; 同理將證明有一組值 x_1, y_1 使 $f(x_1, y_1) = \mu$.

因作此長方形 $EFGH$ 而成數域 $(a, b; c, d)$, § 1043. 則以 $f(x, y)$ 在 $EFGH$ 內之值”表示 $f(x, y)$ 在 $(a, b; c, d)$ 內,

對 x, y 所有各組值之諸對應值。

分 $EFGH$ 為四個相等之長方形如圖。四個之中至少其中之一顯然仍以 λ 為其優限。稱此小長方形為 $E_1F_1G_1H_1$ 。

用處理 $EFGH$ 之法處理 $E_1F_1G_1H_1$ 。準此類推以至無窮。吾人則可得一諸長方形之系列，

$$EFGH, E_1F_1G_1H_1, \dots, E_nF_nG_nH_n, \dots \quad (1)$$

在以上各長方形中 λ 為 $f(x, y)$ 諸值之優限。

設 E_n 之橫坐標為 a_n ，其縱坐標為 c_n 則如 § 1036 所證者，當 n 為無窮增大時， a_n 及 c_n 漸近於一定極限，

$$\text{設 } \lim a_n = x_0 \text{ 又 } \lim c_n = y_0, \text{ 則 } f(x_0, y_0) = \lambda.$$

$$\text{因否則，使 } \lambda - f(x_0, y_0) = a, \quad (2)$$

因 $f(x, y)$ 於 x_0, y_0 為連續者，可選擇 $E_nF_nG_nH_n$ 令對於在此長方形內 x, y 之各組有 § 1041，

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < a/2. \quad (3)$$

又因 λ 為 $f(x, y)$ 在 $E_nF_nG_nH_n$ 中之優限，故可在 $E_nF_nG_nH_n$ 及 (3) 內選取 x, y 之值為

$$\lambda - f(x, y) < a/2. \quad (4)$$

由 (3) 及 (4)，可知

$$\lambda - f(x_0, y_0) > a. \quad (5)$$

然 (5) 與 (2) 相違反。故 (2) 不能成立。由是 $f(x_0, y_0) = \lambda$ ，如所欲證明者。

代 數 之 基 本 定 理

今可證明凡有理整數方程，必有一根，§ 73. 證法如下：

1046 定理. 已知 $\phi(z) = 1 + bz^m + cz^{m+1} + \dots + kz^n$, 其中 b, c, \dots, k 表諸常數, 或為有理數或為複數, 而 z 為一變數; 則常可選擇 z 之值, 使 $|\phi(z)| < 1$.

設令以絕對值及幅角表 a 及 b 之式, § 877, 為

$$z = p(\cos\theta + i \sin\theta), \quad b = |b| \cdot (\cos\beta + i \sin\beta).$$

$$\text{則 } bz^m = p^m |b| \cdot [\cos(m\theta + \beta) + i \sin(m\theta + \beta)]. \quad \S\S 79, 881$$

$$\text{第一先選擇 } \theta \text{ 使 } m\theta + \beta = \pi. \quad (1)$$

$$\text{則 } bz^m = p^m |b| \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = -p^m |b|,$$

$$\text{因 } \cos \pi = -1 \text{ 又 } \sin \pi = 0. \quad \S\S 877, 878$$

次將 p 使, § 854,

$$|c| p^{m+1} + \dots + |k| p^n < |b| p^m < 1. \quad (2)$$

設 z_0 表 a 之值對於所選 θ 及 p 之值, 則 $|\phi(z_0)| < 1$.

$$\text{但因 } \phi(z_0) = (1 - p^m |b|) + cz_0^{m+1} + \dots + kz_0^n,$$

得, § 235, 由 (2)

$$|\phi(z_0)| \leq |1 - p^m |b|| + |c| p^{m+1} + \dots + |k| p^n, \therefore < 1.$$

1047 系. 已知函數為 $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$; 對於 $z = b$ 時, $f(z)$ 不為零, 則常可選擇 z 之值, 使 $|f(z)| < |f(b)|$.

(1) 對於 $f(z)$ 中視 $z = b$ 而用級數在定域內 § 843.

當 $z = b$ 時, $f'(z), f''(z), \dots$ 等為常函數, 其中常域有 θ 者; 然不

能變為0, 因 $f^{(n)}(z) = n! a_0$, 使 $f^{(m)}(z)$ 指不為 0 之第一導來函數,

$$\text{則 } f(b+h) = f(b) + f^{(m)}(b) \frac{h^m}{m!} + \dots + f^{(n)}(b) \frac{h^n}{n!},$$

$$\frac{f(b+h)}{f(b)} = 1 + \frac{f^{(m)}(b)}{f(b)} \cdot \frac{h^m}{m!} + \dots + \frac{f^{(n)}(b)}{f(b)} \cdot \frac{h^n}{n!}.$$

由 § 1046 中所證之形式者, 於適當取使 $|f(b+h)/f(b)| < 1$, 故 $|f(b+h)| < |f(b)|$.

定理. 設 $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$; 則必有一 z 值, 1408
使 $f(z)$ 為零.

因在 $f(z)$ 中, 使 $z = x + iy$, 其中 x 及 y 為實數, 用二項式定理展開之 $a_0(x+iy)^n, a_1(x+iy)^{n-1}, \dots$ 合併其結果中各實數項及各虛數項, 則化 $f(z)$ 為 $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ 之形式; 其中 $\phi(x, y)$ 及 $\psi(x, y)$ 表示 x, y 之實數多項式, 故, § 282,

$$|f(z)| = \sqrt{\phi(x, y)^2 + \psi(x, y)^2}^{\frac{1}{2}}.$$

從 § 855, 則可求得一正數 c , 使 $f(z) = 0$ 有根, 則為諸根數值上皆比 c 為小; 又若 $c' = c/\sqrt{2}$, 顯然 $|z|$, 或 $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, 對於適合於 $-c' \leq x \leq c', -c' \leq y \leq c'$ 之 x, y 各組值, 較 c 為小.

但在數域 $(-c', c'; -c', c')$ 內, $[\phi(x, y)^2 + \psi(x, y)^2]^{\frac{1}{2}}$ 為 x 與 y 之連續函數, § 1042. 故此式在此數域內有一極小值, § 1045, 譬如當 $x = x_0, y = y_0$ 時.

$$\text{設 } z_0 = x_0 + iy_0, \text{ 則 } |f(z_0)| = [\phi(x_0, y_0)^2 + \psi(x_0, y_0)^2]^{\frac{1}{2}} = 0.$$

因 $|f(z_0)|$ 為 $|f(z)|$ 之極小值, 不能使 $|f(z)| < |f(z_0)|$. 故 $|f(z_0)|$ 也.

故知

$f(z) = 0$ 之一根,

INDEX

索 引

	Page
Abscissa 橫坐標	138
Addition of integral expressions 整式加法	93
of numbers 數之加法	10, 19, 35, 50, 71, 72
of radicals 根之加法	274
of rational expressions 有理式之加法	217
of series 級數加法	541
Amplitude of complex number 幅角	488
Angle, circular measure of 角之弧度法	488
Annuities 年金	891
Approximations 近似值	48, 55, 453
Assemblage infinite 無限	3
Associative law of addition 加法結合律	11, 22, 35, 54, 74, 521
of multiplication 乘法結合律	14, 23, 35, 54, 74
Asymptote 漸近線	335
Base of power 乘冪之底	39
of system or logarithms 對數系之底	377
Binomial theorem 二項式定理	256, 293, 554
Binomials products of 二項式之積	102, 253
Biquadratics 四次方程	112, 486
Cardan's formula for cubic 三次方程之卡藤氏公式	483
Chance 機會	409
Clearing of fractions 去分母	118, 231
Coefficient 係數	86
Coefficients detached 分離係數法	99
undetermined method of 未定係數法	152
undetermined theorem of 未定係數之定理	172, 540
Cologarithms 餘對數	386
Combinations 組合	393
Commensurable 可通約	37
Commutative law 加法交換律	11, 22, 35, 54, 74, 534, 544
of addition	

of multiplication 乘法交換律... .. 14, 23, 35, 54, 74.

Completing the square 配方... .. 187, 200

Condition necessary sufficient 必要條件 充足條件... .. 92

Constants 常數... .. 73

Continuity of functions 函數之連續性... .. 577, 5. 5
of real system 實數系之連續性... .. 46

Convergence of infinite series 無窮級數之收斂... .. 520
absolute and conditional 絕對收斂, 條件收斂... .. 533
limits of 收斂級數之極限... .. 525
test of 收斂之檢法... .. 523, 31

Convergence of a continued fraction 連分式之收斂... .. 567

Converse 逆... .. 92

Coordinates 坐標... .. 133

Correspondence one-to-one 一對一關係... .. 1

Cosine 餘弦... .. 489

Counting 算法... .. 9

Cube root (See Roots) 立方根(見根)

Cubics 三次方程式... .. 112, 433
irreducible case 三次方程式之不可約情形... .. 435, 491

Cyclic-symmetric 循環對稱... .. 43

Degree of equation 方程式之次數... .. 111
of polynomial 多項式之次數... .. 87
of product 乘積之次數... .. 93

Density of rational system 有理數系之稠密性... .. 34
of real system 實數系之稠密性... .. 46

Derivatives 導數... .. 460

Descartes's rule of signs 笛卡兒之符號規則... .. 417

Determinant 行列式... .. 434
bordering a 行列式之增廣... .. 525
cofactors of 行列式之餘因式... .. 504
diagonals of 行列式之對角線... .. 436
elements of 行列式之元素... .. 434
evaluation of 行列式之計算... .. 505
minors of 行列式之minor... .. 502
orders of 行列式之級... .. 435

products 乘積式之積 496

properties of 行列式之性質 496

terms of 行列式之項 496

Differences method of 逐差法 361

Discriminant 判別式 517

Discriminant of cubic 三次方程之判別式 485

of quadratic 二次方程之判別式 404

Distributive law 分配律 14, 13, 25, 51, 54

Divergence of infinite series 無窮級數之發散 520

Divisibility, exact 整除 23, 155, 151

Division of integral expressions 整式之除法 167

of numbers 數之除法 27, 35, 54, 73, 439

of radicals 根式之除法 287

of rational expressions 有理分式之除法 219

of series 級數之除法 516

Division synthetic 綜合除法 166

Division transformation 除法變形 155

by aid of undetermined coefficients 用未定係數法之
 除法變形 160, 163

Elimination 消去法 131, 143, 317

by determinants 用行列式之消去法 108, 514

Ellipse 橢圓 334

Equality 相等 3, 8, 32, 34, 45, 72

algebraic and numerical 代數等式, 數目等式 18, 75

rules of 等式法則 13, 15, 24, 36, 54, 57

Equations, binomial 二項方程 313, 497

biquadratic 四次方程 172, 486

complete 完全方程 426, 448

conditional 條件方程 110

cubic 三次方程 112, 483

depressed 降次方程 427

equivalent 等值方程 112, 31

exponential 指數方程 399

fractional 分式方程 111, 231, 360

identical 恆等方程 89

- inconsistent 矛盾方程 133, 143
 indeterminate 無定方程 342, 575
 integral 整方程 111
 independent 獨立方程 138, 145
 irrational 無理方程 111, 288, 313
 irreducible 不能約方程 445
 linear 直線方程 112, 139
 literal 文字方程 111
 logarithmic 對數方程 390
 Equations, numerical 數字方程 111, 429, 450
 quadratic 二次方程 112, 293
 rational 有理方程 111
 reciprocal 倒數方程 311, 433, 437
 roots of (See Roots) 方程之根(見根)
 simple 一次方程 112, 118
 simultaneous simple 聯立一次方程 127, 143, 503
 simultaneous, of higher degree 高次聯立方程
 135, 317, 514
 simultaneous, symmetric 聯立對稱方程 127
 solution of 方程之解 112, 128, 423
 solution of, by factorization 析因式以解方程
 191, 319, 318
 transformation of 方程之變形 114, 129, 426
 Errors of approximation 近似值之誤差 55
 Evolution 開方 39, 58, 76, 83, 269, 270, 493
 Expectation, value of 預期值 411
 Exponents, integral 整指數 39
 irrational 無理指數 376
 laws of 指數律 57, 219, 373
 rational 有理指數 273
 Expressions, algebraic 代數式 85
 finite and infinite 有以式, 無以式 85
 integral and fractional 整式及分式 85
 rational and irrational 有理式及無理式 86
 Factor 因式 14, 176

highest common 最高公因式	196
Factor, irreducible 不可析因式	21
prime 質因式	177, 208, 212
rationalizing 有理化因式	285
Factorial $n!$ n 之階乘	95
Factorization 析因式	172, 249
Ferrari's solution of biquadratic 四次方程之范拉利解法	486
Fractions 分式	32, 213
continued 連分式	566
improper 假分式	213
irreducible 不可約分式	37
partial 分項分式	236
proper 真分式	13
reciprocal 倒分式	219
Fractions, recurring, continued 循環連分式	572
Functions 函數	83, 577, 585
defined by power series 冪級數所決定之函數	539
expansion of 函數之展開	371, 543, 551
integral 整函數	83
rational 有理函數	86
symmetric 對稱函數	246
Fundamental theorem of algebra 代數之基本定理	427, 588
Graphs of equations 方程之圖形	139, 333
of number 數之圖形	27, 38, 66
of variation of functions 函數變化之圖象	469
Groups of things 事物之羣	1
equivalence of 羣之相等	1
finite and infinite 有限羣, 無限羣	3
Homogeneity 齊次	87, 99
Horner's method 郝納氏計算無理根之方法	455
Hyperbola 雙曲線	335
Identities 恆等式	89
Imaginarics, conjugate 兩個虛數	295
Incommensurable 不可通約	65

Indeterminateness of rational functions, cases of 有
 理分式之不定性 223

Induct on mathematical 算學歸納法 424

Inequalities solution of 不等式之解法 341

Equality (See Equality) 不等 (見相等)

Infinitesimal 無窮小 (極小) 63

Infinity as limit 以無窮大為極限 224, 229

Interest, compound 複利 390

Interpolation 插法 371

Inversions 變通 492

Involution 乘方 39, 54, 70, 82, 103, 276, 439

Lagrange's formula of interpolation 插法之拉格朗其
 公式 373

Length 長 26, 37, 56

Limit of variable 變數之極限 58

Limits, superior and inferior, of assemblies 數集之優
 限及劣限 582

Logarithms 對數 39, 377
 characteristic of 對數之指數 381
 common 常用對數 379

Logarithms, mantissa of 對數之序標 381
 modulus of 對數系之商標 559
 natural 自然對數 558
 table of 對數表 334

Maximum 極大 357, 457, 582

Mean, arithmetical 等差中項 355
 geometrical 等比中項 359
 harmonical 調和中項 362

Measure 量 26, 37, 56

Minimum 極小 357, 457, 582

Multinomial theorem 多項式定理 403

Multiple, lowest common 最低公倍式 205

Multiplication of integral expressions 整式之乘法 97
 of number 數之乘法 1, 2, 3, 5, 7, 2, 439
 of radicals 根式乘法 270

transformation of 幕級數之變形	545
Probability 可能率	439
Products, continued 連乘積	252
Infinite 無窮連乘積	564
Progressions, arithmetical 等差級數	354
arithmetical, of higher order 高級等差級數	381
geometrical 等比級數	357
harmonic 調和級數	564
Proportion 比例	347
continued 連比例	350
Quadratics 二次方程	112, 298, 304
simultaneous 聯立二次方程	317
Radical expressions, simple 簡根式	277
Radicals 根式	271
index of 根指數	271
similar 相似根式	273
simple 簡根式	271
Radicand 被開方數	271
Ratio 比	69, 347
Rationalization 有理化	285
Remainder theorem 剩餘定理	169
Resultants 結式	511
properties of 結式之性質	514
Rolle's theorem 洛勒氏定理	467
Roots of equations 方程之根	117, 426
Roots, extraneous 增根	118
imaginary 虛根	444, 448
infinite 無窮大之根	229, 306, 439
irrational 無理根	458
location of 根之位置	452, 458, 476
multiple 重根	423, 463
number of 根之個數	427
rational 有理根	329
superior and inferior limits of 根之上限與下限	430, 441, 466
symmetric functions of 根之對稱函數	305, 434, 478

Roots of integral functions 整函數之根... .. 261
 cube 整函數之立方根... .. 266
 square 整函數之平方根... .. 262
 Roots of numbers 數之根... .. 39, 56, 76
 cube 數之立方根... .. 268, 483
 principal 數之主根... .. 271
 square 數之平方根... .. 265, 293, 295, 296
 trigonometric expression of 方根之三角表示法... .. 490
 Scale, complete 完全記法... .. 17
 natural 自然記法... .. 6
 Sequence of numbers 數串... .. 58
 regular 規則數串... .. 60
 Series, alternating 交錯級數... .. 532
 binomial 二項級數... .. 553, 553
 doubly infinite 二重無窮級數... .. 548
 exponential 指數級數... .. 537, 553
 geometric 等比級數... .. 360
 hypergeometric 超比級數... .. 529
 infinite 無窮級數... .. 520
 logarithmic 對數級數... .. 537, 557
 recurring 循環級數... .. 560
 Sign, rules of 記號法則... .. 95
 Simultaneous (See Equations) 聯立(見方程)... .. 127
 Sine 正弦... .. 488
 Solutions of system of equations 方程系之解... .. 128
 infinite 方程系之無限解... .. 230, 318
 integral 整數解... .. 342
 number for 解之個數... .. 517
 Square root (See Roots) 平方根(見根)
 Sturm's theorem 史篤姆定理... .. 472
 Substitution, principle of 代入原理... .. 128
 Subtraction of integral expressions 整式減法... .. 93
 of numbers 數之減法... .. 16, 19, 35, 51, 72
 of radicals 根式減法... .. 274
 Subtraction of rational expressions 有理式之減法... .. 217
 of series 級數減法... .. 511

Surd 不盡根數	291
Symmetry, absolute 絕對對稱	245
cyclic 輪換對稱	248
Taylor's theorem 戴勒氏定理	461, 551
Term 項	86
absolute 常數項	436
Transformation of equations 方程之變形	114, 129, 436
Transposition of terms 移項	115
Value, absolute or numerical 絕對值或數值	13, 75, 488
Variable 變數	53, 70
continuous 連續變化之變數	69
Variation 變數法	331
of integral function 整函數之變化	308, 460
Variations of sign 變號	446
Zero 零	17
as limit 以零為極限	68
operations with 關於零之演算	19, 25, 31

答 案

I. 第 89 頁

1. 七, 四, 八, 十, 十七. 2. 七.
3. $n=7, a_0=3, a_1=1, a_2=0, a_3=-4, a_4=1, a_5=a_6=0, a_7=-12.$
4. $f(0)=3, f(-1)=0, f(3)=48, f(8)=963.$
5. $f(0)=2/5, f(-2)=12, f(6)=20/17.$
6. $f(1)=5, f(4)=9, f(5)=8+\sqrt{5}.$
7. $f(x-2)=2x-1, f(x^2+1)=2x^2+5.$
8. $f(0,0)=8, f(1,0)=10, f(0,1)=7, f(1,1)=9, f(-2,-3)=1.$

II. 第 97 頁

1. $2c^2y(b-a).$ 2. $a^2+a+b^2.$ 3. $-9.$
4. $-4x^3-4a^3b-21ab^2+11b^3.$ 5. $-a+3b-7c.$
6. $x^3+4x^2+5x-2.$ 7. $b^3+5a^2b.$ 8. $y^3+3y-1.$
9. $-10x+24b.$ 10. $8x+11.$ 11. $-5a+5b+9c.$
12. $2y-4x-2z.$ 13. $x^3-x^2-8x-12.$
14. $-x^4+9x^2+y^2+x-3y-7.$

§ 316. 第 105 頁

1. $a^2+b^2+4c^2+9d^2-2ab+4ac-6ad-4bc+6bd-12cd.$
2. $1+4x+10x^2+12x^3+9y^4.$
3. $x^6-2x^5y+3x^4y^2-4x^3y^3+3x^2y^4-2xy^5+y^6.$

III, 第 106 頁

1. $6x^7-13x^6+7x^5+15x^4-34x^3+35x^2-21x+5.$
2. $15x^5-14x^4a-x^3a^2+7x^2a^3-5xa^4-2a^5.$
3. $a^2-y^6.$ 4. $6x^3-4x^2-9x^4+35x-10x^2-21x+35.$
5. $28x^2-43xy+10y^2.$ 6. $a^2b+(a^2-a^2+b^2)x-ax^2-x^3.$
7. $x^6-2x^5+9x^4-10x^3+17x^2-6x.$
8. $2c^2n^2-2c^2n^3-3x^2n^4+8x^2n^5-5x2n^6.$
9. $a^4-a^2b^2+6b^3-9b^4.$ 10. $x^2-9y^2-4z^2+12yz.$
11. $x^3-y^3-3xy-1.$ 12. $a^3+b^3-c^3+3abc.$

13. $3x^2 - 14xy + 8y^2 + 23x - 32y + 30$.
 14. $2x^2 + 7y^2 + 24z^2 + 15xy - 5yz - 14zx$. 15. $b^4 - x^4$.
 16. $x^6 + x^4 + 1$. 17. $2c^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4$.
 18. $1+1+1, 1+2+3+2+1, 1+3+6+7+6+3+1,$
 $1+4+10+10+6+1, 1+5+10+10+5+1$
 $1+6+15+20+15+6+1$
 $1+7+21+35+35+21+7+1$
 $1+8+28+56+70+56+28+8+1$
 $1+9+36+84+126+126+84+36+9+1$
 $1+10+45+120+210+252+210+120+45+10+1$
 20. $16x^2 - 24xy + 9y^2, 64x^3 - 144x^2y + 108xy^2 - 27y^3$.
 21. $x^3 + 4y^2 + 9z^2 + 16xz + 4xy + 6xz - 8xu + 12yz - 16yu - 24zu$.
 22. $x^3 + 8y^3 + 27z^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 9x^2z + 27xz^2 + 36y^2z + 54yz^2$
 $+ 36xyz$.
 23. $x^3 + 8y^3 + 27z^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 9x^2z + 27xz^2 + 36y^2z + 54yz^2$
 $+ 36xyz$.
 24. $a^4 - 3a^2b^2 + 16b^4$.
 25. $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_{17}b_{17}, a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} + \dots + a_{27}b_{27}$.
 26. $-4, -14, -55$.
 27. $32a^{10}x^{15}y^{15}, -x^3y^3z^3, a^n, mnc^n, amnb^n, c^n$.
 28. $a^{12}b^4c^{12}, -8u^8x^{16}y^{16}$.

VI. 第 110 頁

1. $3a^2/2b$. 2. $-3y^2/4ax^5$. 3. $=5xm/4ym$.
 4. $3a^2b^3/c$. 5. $xy/(x+y)$. 6. $(x^2+xy+y^2)(x+y)$.
 7. $(a-b)(b-c)(c-a)$. 8. $-6abc+5a^2c^2-4a^3b^2c^4$.
 9. $3(x-y)^2-2(x-y)+5$. 10. $6a^2b^3c$.
 11. v^3 . 12. $-2ax^2/y^2$.

V. 第 119 頁

1. $=1/2$. 2. -2 . 3. $-5/8$. 4. 16.
 5. 6. 7. 5. 8. $-13/4$.
 9. $=39/5$. 10. $779/1439$. 11. $(4a+5b)/3(b+c)$.
 12. 1. 13. a . 14. $(a+b)/a$.
 15. $(m-n)/(m+n)$. 16. $1/2, 1/3, -1/4, -2/5$.
 17. $a, 1, 14$. 18. $0, 8/3$. 19. $c/0, 0$. 20. $1, 1, 2$.

VI. 第 121 頁

68. 2. 14. 3. 26及324.
 84. 5. 5. 6. 40及10;5年後.
 2小時又24分. 8. A, 25日, B, 16日.

9. 同方向在8點 $43\frac{7}{11}$ 分時;異方向在8點 $10\frac{10}{11}$ 分時.
10. $5\frac{5}{11}$ 分內. 11. 每小時30秒,
12. A, \$540; B, \$360; C, \$240; D, \$160. 13. \$(2,00).
14. 576平方呎. 15. 8呎.
16. 一元幣5枚,半元幣10枚,一角幣15枚.
17. \$3750為6%, \$1250為4%. 18. 2:3之半.
19. 1磅 20. 第一次一加命,第二次二加命,原液含酒精60%.
21. 二車於11:12 $\frac{12}{19}$ 時相遇,離Jersey城 $35\frac{10}{19}$ 哩.
22. 速度一為每小時60哩,一為36哩.在上午11:15相遇.
23. 250. 24. 金57兩,銀330兩. 25. \$28.
26. 75平方吋.
27. 個位數字為 $(9a+b)/18$,十位數字為 $(9a-b)/18$.
28. 離今 $(bc-a)/(1-c)$ 年.

VII. 第 134 頁

1. $x=37, y=25$. 2. $x=10, y=7$.
3. $x=3, y=-2$. 4. $x=5, y=-7$.
5. $x=1/3, y=1/2$. 6. $x=4, y=6$.
7. $x=-3/20, y=4/5$. 8. $x=5/2, y=1$.
9. $x=-2, y=1$.
10. $x=(a^2+b^2)/(a+b)+2, y=(a^2+b^2)/(a+b)$.1
11. $x=cq/(aq+bp), y=cp/(aq+bp)$. .2
12. $x=a+b, y=a-b$. 13. $x=10, y=8$. .4
14. $x=-1, y=1/2$. .b
15. $x=(bc'+b'e)aa'/(ab'+a'b)cc', y=(ac'+a'e)bb'/(ab'+a'b)cc'$. .c
15. $x=y=ab/(a+b-ab)$. .c

VIII. 第 135 頁

1. $x=48, y=-32/7$. 2. $x=1/5, y=2$. .1
3. $x=2, y=3$. 4. $x, y=0, 1/2; 0, 2; 1, 0; -2/3, 0$. .2
5. $x, y=1, 1; -5/3, 0$. 6. $x, y=0, 5/2; 5/3, 5/3; -5, 5$.
7. $x, y=1, 3; 2, 2$. 8. $x, y=2, 1; -4, 5$.
9. $x, y=-1/3, 4/3; -3, 2; -3/5, 8/5; -7/5, 2/5$.
10. $x, y=-3, 1; 2, 2; -2, -1; 4, -3$.

X. 第 147 頁

1. $x=5, y=8, z=7$. 2. $x=1, y=2, z=3$.
3. $x=5, y=2, z=2$. 4. $x=-7, y=-1, z=-3$.
5. $x=23/5, y=22/5, z=11/10$. 6. $x=1, y=-1, z=7$.
7. $x=1/8, y=1/7, z=1$. 8. $x=2, y=3, z=5, u=-4$.
9. $x=0, y=4, z=+3, u=0$.
10. $x=\frac{l-m+n}{2a}, y=\frac{l+m-n}{2a}, z=\frac{-l+m+n}{2a}$.

11. $x = \frac{mnd}{amn+bnl+clm}, y = \frac{nl^2}{amq+nl+clm}, z = \frac{l^2}{amq+nl+clm}$
 12. $x = -12, y = -8, z = -4$
 13. $(x-y-3) + (y-z+5) + (z-x-2) \equiv 0$
 14. $2(3x-8y+7z-10) + 5(2x+5y-3z-12) - (16x+9y-z-80) \equiv 0$

XI. 第 150 頁

1. 5, 6 及 9. 2. 33, 14 及 4. 3. 87.
 4. A, \$4500; B, \$300.
 5. A, $(p-q+r)/2$; B, $(p+q-r)/2$; C, $(-p+q+r)/2$.
 6. \$245, 4 1/2%. 7. 15, 500. 8. 12 平方呎.
 9. A, \$27; 4, \$3. 10. A, 12 日; B, 9 日; C, 8 日.
 11. 每秒 18 及 2 呎. 12. 每小時 20 及 16 哩.
 13. A, 每小時 15 哩; B, 每小時 10 哩. 14. $10 \frac{1}{2}$ 磅
 15. A, 每秒 $7 \frac{1}{3}$ 碼; B, 每秒 7 碼. 16. 100 磅
 17. A, 1/8; C, 11/8; C, 8. 18. A 中, 64%; B 中 32%.
 19. 香港每秒 1100 呎; 倫敦之速每秒 $1 \frac{1}{3}$ 呎.
 20. 水桶容量 18, 000 加侖. 每秒 A 30 加侖通過, B 200 加侖通過, C 60 加侖通過.

XII. 第 154 頁

1. $3(x-3)^2 + 17(x-2)^2 + 34(x-2) + 19$.
 2. $(2x+3)^2 - 2(2x+3) + 4$. 3. $f(x) = 43x^2/24 - 8x + 29/24$.
 4. $f(x) = 3x^2 + x + 5$. 5. $f(x, y) = 2x - 3y + 4$.
 6. $2x + y - 7 = 0$. 7. 否. 8. $x + 3y - 11 = 0$.
 9. $a = 3$. 10. $2x - 5y + 11 = 0$ 及 $4x - y - 5 = 0$.
 11. $x^2 - 2x^2 - 5x + 8 = 0$. 12. $x^2 + xy - x - 4y = 0$.
 13. $3x + 2y - 8 \equiv -(x+y+1) + (2x-y+2) + 2(x+2y-3)$.

§ 101. 第 158 頁

2. $Q = x^2 + 3, R = -4x + 4$.

§ 44. 第 161 頁

2. $Q = 3x^2 + 5x^2 - 11x/2 + 9/4, R = -9x/4 + 5/2$.

§ 495. 第 161 頁

2. $l = -11, m = -6$.

§ 48. 第 164 頁

2. $2x^2 - x + 6x^2 - 7x^2 + 13x$

§ 409. 第164頁

2. $2x+3y-1.$

XIII. 第165頁

1. $Q=2x^2-3x+4, R=2x+4.$ 2. $Q=3x^2-8x+5, R=0.$
 3. $Q=2x^2-x^2+3c-5, R=20.$
 4. $Q=4x^2+x^2-x+3, R=-2x^2+4x-8.$
 5. $Q=2x+3, R=6x-11.$
 6. $Q=2x^2-3x+6, R=-13x^2+24x-17.$
 7. $3x^3-5x^2-7x+12=(x-2)(3x^2+x-5)+2.$
 8. $a=-3/2, b=-3/2.$ 9. $a=-2, b=5.$
 10. $Q=x^2+x^2+1, R=0.$ 11. $Q=2x-y+3, R=0.$
 12. $Q=a-b+2c, R=0.$ 13. $Q=a+b-c, R=0.$
 14. $Q=x^2+x+21, R=0.$
 15. $Q=4x^2+6xy+9y^2, R=0.$
 $Q=x^2+x^2y+xy^2-3y^3, R=0.$
 $Q=3x^2+2x^2b-ab^2+cb^3, R=0.$
 $Q=x^2-px/2+3y^2/4, R=y^2/4; Q'=y^2-xy+2x^2, R'=-2x^2.$
 $Q=1-4x+6x^2, R=6x^2-13x^4.$
 $Q=1+4x+10x^2, R=10x^3-50x^4.$
 1. $162x+4x^2+8x^3.$ 2. $2+5x+5x^2-5x^3.$

§ 412. 第169頁

3. $Q=5x^4+15x^3+44x^2+132x+397, R=1193.$
 4. $Q=x^2+3x+2, R=0.$ 5. $Q=x^2+4, R=0.$

§ 414. 第170頁

2. $f(2)=48, f(-2)=96, f(4)=756, f(-2/3)=112/9.$

XIV. 第173頁

1. $Q=x^3+x^2+3x+1, R=0.$
 2. $Q=5x^4+9x^3+19x^2+84x+193, R=597.$
 3. $Q=8x^3-6x^2+13x-26, R=51.$
 4. $Q=x^2+5x-6, R=0.$ 5. $Q=x^2-5x/3-2/9, R=16/9.$
 6. $Q=x^2-(b+c)x+bc, R=0.$
 7. $Q=2x^3+3x^2y-xy^2+5y^3, R=0.$
 8. $f(1)=0, f(2)=9, f(5)=-22, f(-1)=6, f(-3)=-36,$
 $f(-6)=-399.$
 9. $m=3.$ 10. $l=-22, m=-24.$ 13. $2x^3-6x^2-12x+16$
 1. $5x^3-24x^2+25x+6.$

XV. 第 176 頁

1. $(x^2+1)^2+(x-2)(x^2+1)-x$
2. $(2x^2+1)^2+x(2x^2+1)+5$
3. $(2x+1)(x^3-x^2+x+2)^2-(2x^2+8x)(x^3-x^2+xx^3)+6x^2+13$
4. $(x-2y)(x^2+xy+y^2)^2+(2x+3y)y^2(x^2+xy+y^2)-2x^4y$
5. $2(x-3)^2+10(x-3)^2+7(x-3)-9$
6. $(x+9)^2-7(x+2)^2+10(x-2)^2+30(x+2)^2-90(x+2)+85$
7. $(x+3)^2-17$
8. $(x+1)^2-2(x+1)$

XVI. 第 180 頁

1. $2x^2y^3(3x^2x^2-6yz+4)$
2. $3n(n-1)$
3. $(a+1)(b-1)$
4. $(m-n)(x-n)$
5. $(3y-2)(x-4)^2$
6. $(2x+1)(5y+2)$
7. $xy(x^2y)(xy+2)$
8. $x(x+y)(x^2+1)$
9. $(a-b)(c-d)$
10. $9a(c+d)(a-b)$
11. $(d+e)(a+b+c)$
12. $(a+d)(a-b+c)$

§ 435. 第 181 頁, 例 3

1. $(x+7)^2$
2. $(3-a)^2$
3. $(3xy+5)^2$
4. $(x-2y+3)^2$
5. $(8a^4-3)^2$
6. $(a-b+c)^2$

§ 436. 第 181 頁

1. $(x^2+y^2)(x^2-y^2)$
2. $6a(a+b)(a-b)$
3. $8ax(2ax+5y)(2ax-5y)$
4. $(5x^n+7x^m)(5x^n-7x^m)$
5. $(6x^2+1)(\sqrt{6x+1})(\sqrt{6x-1})$
6. $(x^2+xy-y^2)(x^2-xy-y^2)$

§ 438. 第 182 頁

1. $(4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2)$
2. $(1x+1)(0x^2-3x+1)$
3. $(4x^2+9y^2)(2x+3y)(2x-3y)$

§ 439. 第 184 頁

1. $(x^2+\sqrt{2}xy+y^2)(x^2-\sqrt{2}xy+y^2)$
2. $(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$
3. $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6)$

XVII. 第 184 頁

1. $xy(2x-5y)^2$
2. $7t(2x+3y)(2x-3y)$
3. $(x-2y+3z)^2$
4. $45(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$
5. $48x(x+1)^2(x-1)$
6. $(2+a+2b)(2-a+2b)$
7. $(x^2+x+1)(x^2-x-1)$
8. $(a^2+2ab-b^2)(a^2-2ab-b^2)$
9. $(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$
10. $(3x^2+3xy+4y^2)(3x^2-3xy+4y^2)$

11. $(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$.
12. $9x^3(2x+y^2)(2x-y^2)(4x^2+2xy^2+y^4)(4x^2-2xy^2+y^4)$.
13. $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^3+x^2y+y^3)$.
14. $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^3+xy+y^3)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$.
15. $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+x^2y^4-x^2y^6+y^3)$.
16. $(x-2)(x^4+x^2+4x^2+8x+16)$.
17. $(x^2+y^2)(x^3-x^2y^2+x^2y^4-x^2y^6+x^2y^8-xy^{10}+y^{12})$.

XVIII, 第 185 頁

1. $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)$
2. $(x+1)(x-1)(x-2)(x^2+2x+4)$.
3. $(x+1)(x-1)^2$
4. $(x+2)(x-2)(x-7)$.
5. $(x+y)^2(x-y)^2(x^2+y^2)$
6. $(x+1)(x^2+x+2)$.
7. $(x+1)(x^2+x^2+2x^2+x+1)$
8. $(x^2+2x+3)^2$.

§ 442. 第 186 頁, 例 1

1. $(x+1)(x+2)$
2. $(x+1)(x-15)$
3. $(x+2)(x-6)$
4. $(x+6)(x-5)$
5. $(x+8)(x+2)$
6. $(x-5)(x-6)$

§ 443. 第 187 頁, 例 1

1. $(3x-2)(2x-3)$
2. $(x+3)(5x-1)$
3. $(2x+1)(7x-3)$
4. $(3x+1)(6x+5)$
5. $(7x+4)(7x+11)$
6. $abx^2-(ac-b^2)x+bc=(ax+b)(bx-c)$.

§ 444. 第 188 頁, 例 1

1. $(x+5+\sqrt{2})(x+5-\sqrt{2})$
2. $(x-4)(x-6)$
3. $(x+7+3i)(x-6-3i)$
3. $[x+(1+\sqrt{3}i)/2][x+(1-\sqrt{3}i)/2]$
5. $2[x+(3+\sqrt{7}i)/4][x+(3-\sqrt{7}i)/4]$
6. $(x-2b)(x-4a+2b)$

§ 445. 第 189 頁, 例 2

1. $(x+y)(x+4y)$
2. $\left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}y\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}y\right)$

§ 446. 第 190 頁

2. $(2x-y+z)(x-3y+2z)$

XIX, 第 190 頁

1. $(x-6)(x-8)$
2. $[x-(21+\sqrt{921})/2][x-(21-\sqrt{921})/2]$
3. $(x-11)(5x+2)$
4. $(4x+7)(4x+9)$

5. $(6x-1)(9x-2)$. 6. $4(x+2y)(3x-y)$.
 7. $(x+2)(x+3)(x-2)(x-3)$. 8. $xy(x+3y)(x-6y)$.
 9. $[x-(3+\sqrt{3}i)/2][x-(3-\sqrt{3}i)/2]$.
 10. $3[x+(1+\sqrt{10})/3][x+(1-\sqrt{10})/3]$.
 11. $[x-(2+\sqrt{6})y][x-(2-\sqrt{6})y]$.
 12. $(x+3b)(x-6c-3b)$. 13. $(ax+a-b)(bx-a-b)$.
 14. $[(1+c)x+b][x+d]$. 15. $(x-3y-1)(x-6y+3)$.
 16. $(x+y+2z)(x+2y+z)$.

XX. 第 194 頁

1. $(x-1)(x-2)(x+3)$. 2. $(x+1)(x+2)(x+3)$.
 3. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.
 4. $(x-1)(x+2)(x^2-x+1)$.
 5. $(x-3)(2x+1)(3x+1)$.
 6. $[x-(1+\sqrt{3})y][x-(1-\sqrt{3})y](2x-y)$.
 7. $(x-1)^2(2x+5)$.
 8. $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)(2x+1)(2x-1)$
 9. $(x+2)(2x+1)(3x-2)(x^2+1)$
 10. $(x+1)(x-1)(x-2)(5x-2)(x^2+x+1)$
 11. $x=-2, 6$ 12. $x=1/2, 2, 3$. 13. $x=7, -2$.
 14. $x=3 \pm \sqrt{11}$. 15. $x=2, 3, 4$. 16. $x=1, 1, -1$.
 17. $x=1, (-1 \pm \sqrt{3})/2$. 18. $x=1, 2/5, -1/2$.

XXI. 第 195 頁

1. $(3c-2)(2y+5)$. 2. $(ac-bd)(ab-cd)$.
 3. $(a-b)(a^2+c^2+b^2)$. 4. $a(a+3b)(a-3b)(a^2+9b^2)$.
 5. $ab(a-b)(a+b)^2$. 6. $(3ax+u)(bx-2y)$.
 7. $3(x+2y)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$.
 8. $(x-1)(x+2)(x^4+2x^3+3x^2+2x+4)$.
 9. $y^2(2x+y^2)(2x-y^2)(4x^2+2xy^2+y^4)(4x^2-2xy^2+y^4)$
 10. $(x-a)(x+b)$ 11. $(x^n+7)(x^n-6)$.
 12. $-(x+6)(x-7)$. 13. $3(x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$.
 14. $(x+2)(x+3)(x-3)(x^2+2c+4)$.
 15. $(x+a+b+c)(x-a-b+c)$. 16. $(x+2)(x+4)(x-2)(x-4)$.
 17. $(a-b-2)(a-b-3)$. 18. $(x+y)(x+3y)(x-y)(x-3y)$.
 19. $(2x+y)(3x-5x+2)$ 20. $(x+a)(x-b)(x+b)(x-b)$.
 21. $(-x+y+z+u)(x-y-z-u)(x+y-z+u)(x-y+z-u)$
 22. $(2x+3)(7x-1)$. 23. $(1+22y)(1-3y)$.
 24. $xy(y+4x)(y+51x)$. 25. $(a+3bc)^2(a-3bc)^2$.

26. $x(x-1)(x-6)(x-7)$.
 27. $(5y-x)(7y^2-10xy+19x^2)$.
 28. $(x+y)(x-y)^2$.
 29. $(x+a)(x+a-b)$.
 30. $5xy(x-y)(x^2-xy+y^2)$.
 31. $(x+1)^2(x-1)^3$.
 32. $(b^2+b+1)(b^2-b+1)$.
 33. $(2x+y-1)(x+3y^2+5)$.
 34. $(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$.
 35. $(x+y+3z)(x-2y+z)$.
 36. $(2a^2+3ab+2b^2)(2c^2-3cb+2b^2)$.
 37. $(x+5^2)(x-8a-5b)$.
 38. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2-x^2+1)$.
 39. $4x^2(2x-1)$.
 40. $(a+b)(a-b)(x+y)(x-y)$.
 41. $(x-a)(x+b)(x-b)$.
 42. $(x-a)(x+b)(x^2+ax+a^2)$.
 43. $(a+3b-2c)(a-3b+2c)$.
 44. $(2a+1)^2$.
 45. $(x^2-x+1)^2$.
 46. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$.
 47. $(x+1)(x+3)(x-3)(2x+1)(2x-1)$.
 48. $(x-1)^2(x^2+2x+3)$.
 49. $(x+3a+b)(x+2a-b)$.
 50. $(x+2)(3x-2)(5x+3)$.
 51. $(cx+ab)(bx+c)$.
 52. $(x+a)(x-2a)(2x+a)$.
 53. $(x+1)[(x-b)x+(a+b)]$.
 54. $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$
 $(x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4+y^5)$.
 55. $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)$.
 56. $(x-1)(2x+1)^2$.
 57. $(x-1)(x-4)(3x+2)(x^2+x+1)$.
 58. $(x-2)(x+3)(x+4)(5x-1)$.
 59. $(ab+c+d)(c-a)$.
 60. $(x+y+z)(x-y-z)(-x+y-z)(-x-y+z)$.

§ 459. 第 197 頁. 例 2

1. x^2y^2 . 2. $x+y$. 3. $x+2$. 4. $(x-2)(x+3)$.

§ 460. 第 198 頁. 例 3

1. $x+3$. 2. $(x+2)(x+3)$. 3. $(x-1)(x-3)^2$.

§ 462. 第 199 頁. 例 3

1. $x-2$. 2. $x+4$.

§ 488. 第 203 頁

2. $2x^2+x+1$.

XXII. 第 204 頁

1. x^2yz^2 . 2. $(a+b)(a-b)$. 3. y^2-y+1 .
 4. $a+1$. 5. $x-1$. 6. x^2+y^2 .
 7. $x+2$. 8. $(x-1)(x-2)$. 9. x^2+x+1 .

10. $(x+1)^2$. 11. $(x-1)(x-2)^2$. 12. $(x+2)$.
 13. x^2+x+1 . 14. x^2+x-4 . 15. x^3+x^2-x-1 .
 16. $3x-7$. 17. $3x+5$. 18. $x(6x^2+7x-3)$.
 19. $2x^2-x+3$. 20. $2x^3-4x^2+x-1$. 21. x^2+x+1 .
 22. $x+2$. 23. x^2-3 . 24. $y(x+2y)$.
 25. $(x-1)(x+3)$. 26. $(2x-2)^2(x+1)$.

XXIII. 第 207 頁

1. $(9x^2+1)(9x^2-1)$ 2. $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$ 3. $a^2(a+1)(a^2-1)$.
 4. $(x-y)^2(x+y)^2(x^2+xy+y^2)(x^2+y^2)$
 5. $(x-1)(x-2)(x-3)$.
 6. $(x+y+z)(x-y-z)(-x+y-z)(-x-y+z)$.
 7. $(2x-3y)(x+3y)(3x-y)$. 8. $(x+1)(x-1)(x^2+1)$.
 9. $(a^2+xy)(2x+3y)(2x-3y)$.
 10. $x(2x+3y)(2x-3y)(2x-y)(4x+5y)$. 11. $(x^2+y^2)(x^2-y^2)$.
 12. $(x^2-1)(x^4+x^2+1)(3x-5)(x^2+1)$.
 13. $(2x+3)(4x^2-6x+9)(4x^2+6x+9)(3x-2)$.
 14. $(x^2+4a^2)(x+2a)(x-2a)$.
 15. $x(x+2)(x+b)(x-b)(x+a)$.
 16. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(2x-5)$.
 17. $(x-2)(x^2+2x+4)(3x+1)(9x^2-3x+1)(2x+1)(x^2+z+1)$.
 18. $(x-1)(x-2)(x-3)(x+3)(2x-1)$.
 19. $(2x^4-x^3+10x^2+4x+5)(x^2+x+1)(x^2+a)$.
 20. $(2x^3+3x^2)-4x^2+13x-6)(x+1)^2$.

§ 491. 第 212 頁

例題, $m=5, n=-14$.

XXIV. 第 215 頁

1. $xy(x+2y)$. 2. $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$. 3. $\frac{x+3}{x+9}$.
 4. $\frac{x-3}{x+2}$. 5. $\frac{3(x-3b)}{2(x+3b)}$. 6. $\frac{5x+a}{5x-3a}$.
 7. $\frac{(x+5)(x-5)}{(x+3)(x+2)}$. 8. $\frac{3x-5}{2x-3}$. 9. $\frac{1}{x^2-y^2}$.
 10. $\frac{x-y+z}{x+y-z}$. 11. $1-y^2$. 12. $\frac{m-6n}{3m-n}$.
 13. $\frac{2x^2+5x-12}{2x^2+x-15}$. 14. $\frac{x-1}{2x+1}$. 15. $\frac{x^2+4}{2(x^2+6)}$.
 16. $\frac{x-3}{x^2+2x+4}$. 17. $\frac{x^2-2bx+a^2}{x^2+2ax+a^2}$. 18. $\frac{1}{x}$.

XXV. 第 222 頁

- | | | |
|--------------------------------------|---|---------------------------------|
| 1. $\frac{2}{2a+3b}$ | 2. $\frac{x^2-x^2+2x-1}{(x^2+1)(x-1)}$ | 3. $\frac{3}{(x-1)(x+3)}$ |
| 4. $\frac{3x^2-11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ | 5. $\frac{2x(b^2-c^2)}{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}$ | 6. 0. |
| 7. a. | 8. $\frac{8x^2+6x-9}{8x^3-27}$ | 9. 4. |
| 10. $3x^2+3b^2+3c^2+4ab+4ac+4bc$ | 11. $\frac{7}{x^2-x-3}$ | |
| 12. $\frac{2}{x^4-4x^2-x+2}$ | 13. $\frac{a^6+a^4+a^2+1}{a^3}$ | 14. a^3+1 |
| 15. $\frac{1}{x-1}$ | 16. $\frac{2x-3}{x(x+1)}$ | 17. $\frac{x^3}{x+a^2}$ |
| 18. $x^2-y^2+z^2-2xz$ | 19. $\frac{4ab}{(a-b)^2}$ | 20. $\frac{-x+y+z}{x-y+z}$ |
| 21. $\frac{a^2b^2}{(a-b)^2}$ | 22. $\frac{x^2-3x+1}{x^2-4x+1}$ | 23. $\frac{x^4+3x^2+1}{x^2+2x}$ |

XXVI. 第 230 頁

- | | | | |
|----------|--------|------------------|----------|
| 1. 1/2. | 2. -3. | 3. ∞. | 4. 0. |
| 5. -5/4. | 6. ∞. | 7. 3/2, ∞, 0, 2. | 8. -1/9. |
| 9. ∞. | 10. 3. | 11. 2/3. | |

XXVII. 第 235 頁

- | | | |
|---|------------------|--------------|
| 1. x=1. | 2. x=15/31. | 3. x=6. |
| 4. x=4. | 5. x=5/6. | 6. x=-5/3. |
| 7. x=0. | 8. x=-(a+b). | 9. x=-10. |
| 10. x=-2. | 11. x=-2/3. | 12. x=-7. |
| 13. x=3/4. | 14. x=3. | 15. x=-4. |
| 16. $x = \frac{cq+ap+(a+b)pq}{a+d+ap+dq}$ | 17. x=-71/33. | |
| 18. = 2bc/(b+c). | 19. x=(a+b+c)/3. | 20. x=-5. |
| 21. 無根. | 22. x=3, y=-2. | 23. x=1, y=3 |
| 24. $x = \frac{2abc}{ab+bc-ca}, y = \frac{2ab}{-ab+bc+ca}, z = \frac{2abc}{ab-bc+ca}$ | | |
| 25. x=2, y=2, z=4. | | |

§ 584. 第 230 頁

2. $-\frac{4}{x} + \frac{4x^2+4x+0}{x^3+x^2+x-1}$

XXVIII. 第 244 頁

- | | |
|--|--|
| 1. $\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+3}$ | 2. $\frac{8}{5(2x+1)} + \frac{3}{5(3x-1)}$ |
| 3. $\frac{2}{x+1} + \frac{8}{x+2} - \frac{6}{x+3}$ | 4. $-\frac{1}{x-1} + \frac{11}{2(x-2)} - \frac{9}{x-3} + \frac{9}{2(x-4)}$ |

5. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-x+1}$ 6. $\frac{2}{x} + \frac{3}{1+x} + \frac{5}{1-x}$
 7. $x+2 + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x-2}$ 8. $\frac{2}{x-2} + \frac{11}{(x-2)^2} + \frac{20}{(x-2)^3} + \frac{13}{(x-2)^4}$
 9. $\frac{1}{12x} + \frac{3}{44(x-4)} - \frac{10}{33(2x+3)}$
 10. $-\frac{4}{2x^2+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$
 11. $\frac{2}{(x+3)^2} - \frac{21}{(x+3)^3} + \frac{76}{(x+3)^4} - \frac{93}{(x+3)^5}$
 12. $\frac{x}{x^2-1} - \frac{x-1}{x^2+2}$ 13. $\frac{3}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x-3)} + \frac{18}{(x-3)^2}$
 14. $\frac{1}{x-2} - \frac{x-1}{x^2+1}$
 15. $\frac{2x-1}{x^2+x+1} + \frac{2x+6}{(x^2+x+1)^2} - \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}$
 16. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$ 17. $\frac{1}{x^2+2} + \frac{2}{3(x-2)} - \frac{2}{3(x+1)^2}$
 18. $\frac{a^2+pa+q}{(a-b)(a-c)} \cdot \frac{1}{x-a} + \frac{b^2+pb+q}{(b-a)(b-c)} \cdot \frac{1}{x-b} + \frac{c^2+pc+q}{(c-a)(c-b)} \cdot \frac{1}{x-c}$
 19. $\frac{2}{27x} + \frac{25}{258(x-1)} - \frac{3}{64(x-1)^2} - \frac{163}{64(x+3)} + \frac{85}{258(x+3)^2}$
 20. $\frac{25}{48(x+3)^3} + \frac{2x+3}{2(x^2+x+1)} - \frac{2x-3}{2(x^2-x+1)}$

XXIX. 第 24) 頁

1. x 及 z .
 2. $\Sigma a^2 b^2 = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2$.
 $\Sigma a^3 b^3 = a^3 b^3 + b^3 a^3 + b^3 c^3 + c^3 b^3 + c^3 a^3 + a^3 c^3$.
 $\Sigma a^2 / b = a^2 / b + b^2 / a + b^2 / c + c^2 / b + c^2 / a + a^2 / c$.
 $\Sigma a^2 b^3 c^3 = a^2 b^3 c^3 + a^3 c^3 b^3 + b^3 c^3 a^3 + b^3 a^3 c^3 + c^3 a^3 b^3 + c^3 b^3 a^3$.
 $\Sigma a^2 b^2 c^4 = a^2 b^2 c^4 + a^2 c^2 b^4 + b^2 c^2 a^4$.
 $\Sigma (a+b+c) = (a+b)c + (b+c)a + (c+a)b$.
 $\Sigma (a+b^2)c^3 = (a+b^2)c^3 + (b+a^2)c^3 + (b^2c^3)^2 + (c+b^2)a^3$
 $+ (c+a^2)b^3 + (a+c^2)b^3$.
 $\Sigma (a+2b+3c) = (1+2^2+3^2) + (1+2c+3^2) + (b+2^2+3a)$
 $+ (1+2^2+c) + (c^2+a+3^2) + (c+2b+3^2)$.
 4. 否.
 5. $y^2 - x^2, x^2 - z^2, z^2 - y^2, x^2 + y^2 + z^2, a, b^2 c^2, c^2 d^2, 2ab, (a-b)(b-a),$
 $(b-b)(c-b), (c-b)(a-b)$.

$$8. \frac{ab^3c^2+bc^3d^2+cd^3a^2+da^3b^2}{a^2} + \frac{a(b-c)+b(c-d)+c(d-a)}{b^2} + \frac{a(b-c)+b(c-d)+c(d-a)}{c^2} + \frac{d(a-b)(b+2c)(a+d)+(c+2d)(b+a)^2+(d+2a)(c+2b)+(a+2b)(d+c)}{d^2}$$

XXX, 第251頁

1. $-(x-y)(y-z)(z-x)$, 2. $-(x-y)(y-z)(z-x)$
3. $2(x-y)(y-z)(z-x)$, 4. $(x-y)(y-z)(z-x)(a+y+z)$.
5. $(x-y)(y-z)(z-x) + xy + yx + zx$.
6. $-(x+y)(y+z)(z+x)(x-y)(y-x)(z-x)$.
7. $-(x+y)(y+z)(z+x)$.
8. $5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.
9. $80xyz(x^2+y^2+z^2)$.
10. $-2(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$.
11. $(x+y)(y+z)(z+x)$.
12. $-(x-y)(y-z)(z-x)(x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2x+xz^2+z^2x+y^2z+z^2y+xy^2)$.
13. $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$, 14. 0, 15. 0, 16. 1.

$$17. (x-c)(x-b)(x-a)^2$$

XXXI, 第259頁

1. $27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$.
2. $a^5-8a^3b+28a^2b^2-56a^2b^3+70a^2b^4-56a^2b^5+28a^2b^6$
3. $1+4x^2+84x^4+280x^6+560x^8+672x^{10}+448x^{12}+128x^{14}$.
4. $16 + \frac{32}{x} + \frac{24}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \frac{1}{x^4}$
5. $x^6-18x^4+125x^2-540 + \frac{1215}{x^2} - \frac{1458}{x^4} + \frac{729}{x^6}$.
6. $\frac{x^5}{y^5} - 5\frac{x^3}{y^3} + 10\frac{x}{y} - 10\frac{y}{x} + 5\frac{y^3}{x^3} - \frac{y^5}{x^5}$.
7. $1-4x+14x^2-28x^3+49x^4-56x^5+56x^6-52x^7+16x^8$.
8. $a^6+3a^5x-5a^4x^2+3a^3x^3-x^6$, 9. $231x^6/16$.
10. $-3153199104a^5b^7$, 11. $-8064a^{10}b^6c^5$.
12. $126x^4, -126x^5$, 13. 56.
14. 15120, 15. 15.
16. -648, 17. 924, 18. 2, 795, 520.
19. $x^3-6x^2y+xy^2+30y^3$.
20. $x^4-4x^3-19x^2+46x+120$.
21. 96, 22. 64, 400, 23. 16, 16, 24.

§. 568. §. 260 頁

1. $\frac{8a^2-b^2}{5c^4d^2}$, 2. $3x^2z^3$, 3. $\frac{2x^2y^3}{ax^3}$

§69. 第262頁

$$1. 2x^2-x+1$$

§ 570. 第264頁

$$5x^2 - 4x + 3.$$

§ 572. 第264頁

$$2. \quad 2 - \frac{x}{4} + \frac{15x^2}{64}.$$

XXXII. 第260頁

- | | | |
|---|-------------------------------------|--------------|
| 1. $\frac{ax^2 + b}{caz}$ | 2. $\frac{23a^2b^3}{25cd^4}$ | 3. $xy(x-y)$ |
| 4. $x^2 - x + 1$ | 5. $x^3 - x + 3$ | |
| 6. $2x^2 + 3x^2y - y^3$ | 7. $2x - 5 - 3/x$ | |
| 8. $7 - 6x - 5x^2$ | 9. $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$ | |
| 10. $x^2 - 2x - 1$ | 11. $2x^2 - 3xy + 4$ | |
| 12. $\frac{x}{y} + xy + \frac{y}{x}$ | 13. $1 - x - x^2/2 - x^3/2$ | |
| 14. $2 - x/4 + 47x^2/64 + 47x^3/512$ | | |
| 15. $x^2 + x + 1$ | 16. $8x^4 + x^3 - 1$ | |
| 17. $2x^2 - 3x + 3a^2$ | 18. $\frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x}$ | |
| 19. $1 - \frac{1}{8}x + \frac{2}{9}x^2$ | 20. $x^2 - x + 1$ | |
| 21. $x^2 + 6 + 1$ | 22. $a=6, b=1$ | |
| 23. 167. | 24. 48.1. | 25. 24, 15. |
| 26. 2037. | 27. 0.0566. | 28. 3.004. |
| 29. 1,414. | 30. 7,449. | 31. 15, 115. |
| 32. 128. | 33. 55.1. | 34. 10, 12. |

XXXIII. 第274頁

- | | | |
|---|---|--------------------------------------|
| 1. $3\sqrt{2}$ | 2. $14\sqrt{8}$ | 3. -9 |
| 4. $-\sqrt[3]{10}$ | 5. $\sqrt[3]{6/2}$ | 6. $\sqrt[3]{12/2}$ |
| 7. $\sqrt[3]{6/2}$ | 8. $\sqrt[3]{6/2}$ | 9. $\frac{ab^2c^3d\sqrt[3]{25d}}{2}$ |
| 10. $2c^5 2i^3 b^4 c^2$ | 11. $2\sqrt[3]{2x^2y^3}$ | |
| 12. $\sqrt[3]{515^2c^4}$ | 13. $\sqrt[3]{ab^2c^3}$ | |
| 14. $\frac{a^2b^3c^4\sqrt[3]{ab^2}}{2}$ | 15. $x\sqrt{y^2-z^2}$ | |
| 16. $(x+1)\sqrt{(x-y)}$ | 17. $x\sqrt[3]{x^2-y^3}$ | |
| 18. $b\sqrt{a(a-b)}$ | 19. $\frac{1}{4ab}\sqrt[3]{2a^2b(a^3+b^3)}$ | |
| 20. $\frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}$ | 21. $\frac{1}{3(x+1)}\sqrt[3]{3(a^3+1)}$ | |
| 22. $\sqrt[3]{b^3-a^3}/b$ | 23. $\frac{a}{anbn+1}\sqrt[3]{bc^n}$ | |
| 24. $\frac{ax-b}{b^2}\sqrt{b}$ | 25. $\sqrt{27a^3}$ | 26. $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ |
| 27. $\sqrt[3]{3ax}$ | 28. $3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, \sqrt{2}/4$ | |
| 29. $2\sqrt[3]{3}, 4\sqrt[3]{3}, 2\sqrt[3]{3}/8$ | | |
| 30. $(x-y)\sqrt{x^2+xy+y^2}, xy\sqrt{x^2+xy+y^2}$ | | |

XXXIV. 第277頁

- 1. $\sqrt[3]{243}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{9}$. 2. $\sqrt[3]{a^3}$, $\sqrt[3]{8a^3b^3}$, $\sqrt[3]{49b^{10}}$.
- 3. $3\sqrt{2} = \sqrt{58}$; $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{576}$. $\therefore 3\sqrt{2} > 2\sqrt[3]{3}$.
- 4. $\sqrt{3} = \sqrt[3]{729}$, $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{256}$, $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{125}$. $\therefore \sqrt{3} > \sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{5}$.
- 5. 5. 6. $2\sqrt{a}$. 7. $2\sqrt[3]{4}$. 8. 30.
- 9. $30\sqrt[3]{3}$. 10. $\sqrt[3]{5/3}$. 11. $2\sqrt[3]{2}$.
- 12. $\sqrt[3]{7578125/3}$. 13. 10. 14. $a^2b^3c^6\sqrt[3]{abc}$.
- 15. $\sqrt[3]{a^3}$. 16. $\sqrt[3]{a^2b^3}$. 17. abc^3 . 18. $\sqrt[6]{a^{2n+1}}$.
- 19. $\sqrt[3]{ab^{17}/b}$. 20. $\frac{1}{ab}\sqrt[3]{b^7}$. 21. $24\sqrt{3}$.
- 22. a^4 . 23. $64xy^3c^4\sqrt{xz}$. 24. $\sqrt[3]{a}$.
- 25. $\sqrt{2}$. 26. $\sqrt[3]{ab^2c^3/c}$. 27. $\sqrt[3]{4}$. 28. $\sqrt[3]{8}$.
- 29. $\sqrt[3]{4}$. 30. $\sqrt[3]{32}$. 31. $\sqrt[3]{a}$. 32. $\sqrt[3]{ap}$.
- 33. $10\sqrt{3}$. 34. $\frac{51}{10}\sqrt{5} + 3\sqrt{7}$. 35. $\frac{5}{2}\sqrt[3]{4}$. 36. $\frac{a+b+c}{abc}\sqrt{abc}$.
- 37. $\frac{7}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$. 38. 0. 39. $(3+2a)\sqrt{ax}$.
- 40. $\frac{1}{x^2-y^2}\sqrt{x^2-y^2}$. 41. $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 6$. 42. $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$.
- 43. $7\sqrt{3} + 4\sqrt{10}$. 44. $\sqrt{17}$. 45. $10 + 6\sqrt{3}$.
- 46. $a + \sqrt{a+1}$.

XXXV. 第252頁

- 1. $c^{\frac{2}{3}}$. 2. $c^{\frac{2}{3}}$. 3. $a^{-\frac{2}{3}}$. 4. $b^{\frac{1}{6}}$.
- 5. $\sqrt[3]{a^3}$. 6. $\frac{1}{c^2}\sqrt[3]{c}$. 7. $\frac{1}{d^4}$. 8. \sqrt{e} .
- 9. $\frac{b^3c^2}{a}$. 10. $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}$. 11. $\frac{1}{x^{10}}$. 12. $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$.
- 13. $bc - c^2b^{-1}$. 14. $1 + 5 + 2\frac{1}{32}$. 15. 27.
- 16. 9. 17. $\frac{2\frac{1}{2}}{256}$. 18. $a^{\frac{2}{3}}$. 19. 1.
- 20. $(a^3)^{\frac{2}{3}}$. 21. a^4b^{-1} . 22. $c^{\frac{1}{2}}$. 23. $a^2b^3c^{-6}$.
- 24. $-8a^6$. 25. b^6a^{-4} . 26. $b^{\frac{2}{3}}$. 27. $a^{-1}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{3}}$.
- 28. $5a^{11}/4$. 29. $a^{\frac{1}{3}}b^{-1}$. 30. $a^{-\frac{1}{2}}$. 31. $a^{\frac{1}{2}}$.
- 32. ax^3 . 33. ax^2yxy^2 . 34. $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}$.
- 35. $a^{\frac{1}{2}}x + y + z^{\frac{1}{2}}$. 36. $a^{\frac{1}{2}} + 2 + b^{\frac{1}{2}} + ab + 2 + b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}} + 1 + \frac{1}{2}$.
- 37. $a^2 - 4 + 4y + 4z + 6x + \frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}$. 38. $4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} + 4z$. 39. $a^0 - a^{-2}$.
- 40. $x + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{4}}$. 41. $x + 1 + x^{-1}$.

XXXVI. 第284頁

1. $1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$.
2. $a^{-\frac{1}{2}} \frac{a^{-1}x^{-\frac{2}{3}}}{2} + \frac{3a^{-\frac{3}{2}}x^{-\frac{4}{3}}}{8} - \frac{5a^{-\frac{5}{2}}x^{-\frac{6}{3}}}{16}$.
3. $9 \frac{4v}{3^4} - \frac{4v^2}{3^3} - \frac{32v^3}{3^{11}}$.
4. $a + \frac{1}{m}a^{1-m}x + \frac{1-m}{m^2 2!}a^{1-2m}x^2 + \frac{(1-m)(1-2m)}{m^3 3!}a^{1-3m}x^3$.
5. $a^4 + 4a^3b^{-\frac{1}{2}} + 10a^2b^{-1} + 20a^1b^{-\frac{3}{2}}$.
6. $x^{-2} - 6x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} + 21x^{-1}y^{\frac{3}{2}} - 56x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{2}}$.
7. $\frac{1}{2} - \frac{3x}{4} + \frac{9x^2}{8} - \frac{27x^3}{16}$.
8. $1 - \frac{2x}{5} + \frac{7x^2}{25} - \frac{2^3x^3}{125}$.
9. $1 - \frac{9x^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{135x}{8} - \frac{945x^{\frac{3}{2}}}{16}$.
10. $55x^9$.
11. $\frac{-63}{2^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{21}{2}}y^{\frac{1}{2}}$.
12. $-\frac{1^{\circ} 2^{\circ} 3^{\circ} 31^{\circ} 33^{\circ}}{2^{2^{\circ}}}x^{\frac{1}{2}}$.
13. $-\frac{5}{2^{\frac{1}{2}}}x^{-2}$.
14. 1, 9, 194, 8, 2, 3, 9578, 3, 1, 9, 78.

XXXVII. 第287頁

1. $a^{\frac{2}{3}}$.
2. $c^{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$.
3. $x^{\frac{1}{2}}$.
4. $\sqrt{a} - \sqrt{bc}$.
5. $(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})(x + y - z - 2\sqrt{xy})$.
6. $(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})(xy + yz - zx - 2\sqrt{xyz})$.
7. $[\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{u}][x + y + z + u - 2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zu})]$
 $[x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - 2xy - 2xz - 2xu - 2yz - 2zu - 8\sqrt{xyz}u]$.
8. $(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})(x - \sqrt{x+1})$.
9. $x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$.
10. $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$.
11. $(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})$.
12. $(x^{\circ} \frac{1}{12} (x^{\circ} \frac{1}{12} (y^{\circ} \frac{1}{12} + (x^{\circ} \frac{1}{12} (y^{\circ} \frac{1}{12} (y^{\circ} \frac{1}{12} \dots + (y^{\circ} \frac{1}{12} \frac{1}{12}$.
13. $(1 - x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})(1 + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + x^2y^{\frac{1}{2}})$.
14. $(x^{\frac{1}{2}} - 1)$.
15. $3 + \sqrt{5}$.
16. $(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})\sqrt{2}$.
17. $(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$.
18. $(1 - \sqrt[3]{3})$.
19. $\sqrt[3]{3^7}(1 - \sqrt[3]{2})$.
20. $\frac{\sqrt{a^5 b^4}}{ab}$.
21. $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$.
22. $\frac{3 - \sqrt{6}}{15}$.
23. $\frac{b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a^2}$.
24. $\frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{y}$.
25. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
26. $\frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}$.
27. $\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{x+y})}{2}$.
28. $\frac{3(\sqrt{3^2 + 3^2} + 3^2 + 1)}{4}$.
29. 0.447.
30. 2.766.
31. 1.732.

XXXVIII. 第 290 頁

1. 256. 2. $1/9$. 3. $\pm 6\sqrt{2}$ 4. 14. 5. 1.
 6. $\left(\frac{d}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}\right)^2$ 7. 2. 8. 5. 9. -1.
 10. $24/15$. 11. 2. 12. 2. 13. 6. 14. $5/4$.
 15. $\begin{cases} x = -1, y = 3, \\ x = 3, y = (73 - 10\sqrt{10})/9. \end{cases}$ 16. $x = 10, y = 3$.

XXXIX. 第 293 頁

1. $\sqrt{7} + \sqrt{2}$. 2. $2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. 3. $5 - \sqrt{7}$. 4. $(\sqrt{10} + \sqrt{15})/2$
 5. $(3\sqrt{2} - \sqrt{10})/2$. 6. $4\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$. 7. $\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$
 8. $\sqrt{a} - \sqrt{b-a}$. 9. $1 + \sqrt{2}$. 10. $1 + 2\sqrt{3}$.

XL. 第 297 頁

1. $7i$. 2. $3\sqrt{2}i$. 3. $-9\sqrt{6}$. 4. $2i$. 5. -2.
 6. 1. 7. i . 8. $-i$. 9. $(x-y)i$.
 10. $2 - \sqrt{6} + (2\sqrt{2} + \sqrt{3})i$. 11. $648\sqrt{6}$. 12. -22. 13. 0.
 14. 10. 15. 16. 16. $-i$. 17. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2}i$.
 18. $1 - \sqrt{2}i$. 19. $1 - \sqrt{3}i$. 20. $\sqrt{2}(1+i)$. 23. $x = 5/3, y = 4/3$.
 24. $3 + 2i$. 25. $1 + i$. 26. $(a+b) + (a-b)i$.

§ 630. 第 299 頁. 例 1, 2

1. 2, -4. 2. 3, $1/2$. 3. 0, 5. 4. $\pm \sqrt{6}i$.
 1. $6x^2 + 13x - 6 = 0$. 2. $x^2 - a^2 = 0$. 3. $4x^2 - x = 0$.

XLI. 第 301 頁

1. 5, -7. 2. $3/2, -1/2$. 3. $5 \pm \sqrt{7}$.
 4. $(-1 \pm 2i)/3$. 5. $(-3 \pm \sqrt{41})/4$. 6. $9/2, 1/2$.
 7. 12, -21. 8. $17/6, -15/2$. 9. $28/4, 9/2$.
 10. $32/5, 2/3$. 11. $1 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$. 12. $2, 4 + i$.
 13. 4, 4. 14. 2, 2. 15. $(1 \pm \sqrt{6})/2$.
 16. 3, 5. 17. $2/2$. 18. $5, 16/7$.
 19. $1/2$. 20. $5, 5/2$. 21. 1, $-58/97$.
 22. -2, $1/4$. 23. $1/3, -3a$. 24. $a+2, a-a$.
 25. $b/c, -a/c$. 26. $2a+b, 2a-b$. 27. $a(3c \pm 2b)$.
 28. $\frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$. $\frac{a+b+c \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}}{3}$

30. $\frac{a^2+b^2}{2a}, \frac{a^2+b^2}{2b}$

XLII. 第 302 頁

- | | | |
|--|-------------------------------|------------------------|
| 1. 22, 23. | 2. 15, 13. | 3. 5, 6. |
| 4. 13, 14, 15. | 5. 26. | 6. 7/5. |
| 7. 42. | 8. \$40. | 9. 5%. |
| 10. 4%. | 11. 100. | 12. 6 $\frac{1}{6}$ 呎. |
| 13. 141, 112平方呎. | 14. $2(\sqrt{2}-1)$. | 15. 21加侖. |
| 16. 每小時40, 45哩. | 17. 1 $\frac{1}{2}$ 小時, 每小時4哩 | 18. 4小時30分 |
| 19. 6. | 20. 2小時. | |
| 21. (1) 1/4秒; 1秒; 否. (2) 在1/2秒中. (3) 在3/2秒中. | | |

XLIII. 第 303 頁

- | | | |
|--|---|-------------------------|
| 1. 2 及 -1. | 2. $\infty, -2/3; \infty, \infty$. | 3. $(x+2y-2)(3x-y+1)$. |
| 4. ± 1 . | 5. $p^2-4q, p^4-4p^2q+2q^2, (p^2-2q)/q$. | |
| 6. $-45/32, -7/2$. | | |
| 7. $x^2-x+2=0, 2x^2+x+1=0, x^2+2x+8=0, x^2-x+2=0$. | | |
| 8. 1. 極小 = -13. | 2. 極小 = 31/8. | 3. 極大 = 5. |
| 4. 極小 = -1/2, 極大 = 1/2. | 5. 極小 = 4. | |
| 6. 極大 = $-(2+\sqrt{2})/4$, 極小 = $-(2-\sqrt{2})/4$. | | |
| 9. 一正方形. | 10. 向距最近點 2 哩之點. | |
| 11. 35呎, 3/2秒. | | |

§ 613. 第 310 頁. 例 3

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------|
| 1. $(1/2, (2 \pm i\sqrt{2})/3)$. | 2. $-1, 4, 1 \pm \sqrt{2}$. |
|-----------------------------------|------------------------------|

§ 644. 第 311 頁. 例 7

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1. $\pm 3, \pm \sqrt{6}/3$. | 2. $(3 \pm \sqrt{5})/2, (3 \pm \sqrt{17})/2$. |
| 3. $0, -a \pm a(1 \pm \sqrt{5})/2$. | 4. $-3, 2, -(1 \pm \sqrt{19})/3$. |

§ 645. 第 313 頁. 例 4

- | | |
|--|--|
| 1. 1, $(1 \pm i\sqrt{3})/2$. | 2. $(3 \pm \sqrt{5})/2, (1 \pm i\sqrt{3})/2$. |
| 3. $-1, (1 \pm i\sqrt{3})/2, (-1 \pm i\sqrt{3})/2$. | |

§ 646. 第 313 頁. 例 3

- | | |
|---|--|
| 1. $-2, 1 \pm i\sqrt{3}$. | 2. $\sqrt{2}(1 \pm i)/2, -\sqrt{2}(1 \pm i)/2$. |
| 3. $\pm i, (\sqrt{3} \pm i)/2, (-\sqrt{3} \pm i)/2$. | |

§ 643. 第 314, 316 頁

2. $1/4, -3/4.$ 4. 1, 6 7. 3, 7. 9. $(6+\sqrt{6})/3.$

XLIV. 第 316 頁

- | | |
|--|---|
| 1. $\pm 3/2, \pm \sqrt{2}.$ | 2. $7\sqrt{63}/9.$ |
| 3. $\pm 2, \pm 3\sqrt{2}.$ | 4. $-1, -1, -1, 2/3, 2/3, 3/2.$ |
| 5. $1, -2, \pm \sqrt{3}i.$ | 6. $1, 1-1, 1\pm i.$ |
| 7. $1, -1, 5/3, -1/3.$ | 8. $7, -1, 3\pm \sqrt{5}.$ |
| 9. $(-1\pm\sqrt{17})/4, (-1\pm\sqrt{7}i)/4.$ | |
| 10. $1, 1, \pm i.$ | 11. $\pm i, (-1\pm i\sqrt{3})/2.$ |
| 12. $1, 2\pm\sqrt{3}, 3\pm 2\sqrt{2}.$ | |
| 13. $3, 3(-1\pm\sqrt{5}+i\sqrt{10\pm 2\sqrt{5}})/4, 3(-1\pm\sqrt{5}-i\sqrt{10\pm 2\sqrt{5}})/4.$ | |
| 14. $1, (1\pm i\sqrt{3})/4.$ | 15. $0, \pm \sqrt{3}i.$ |
| 16. $5, -1, \pm 3i.$ | 17. $-a, -b, -(a+b)/2,$ |
| 18. $(a\pm b)/2, [a\pm b\pm\sqrt{2-(a-b)^2}]/2.$ | |
| 19. $0, -9/5, -(15\pm\sqrt{401})/22.$ | 20. $\pm a/\pm 1/a.$ |
| 21. $1, -1/3, (1\pm\sqrt{19})/3.$ | 22. $1, -1/2.$ |
| 24. $3, -2.$ | 23. $2, 3.$ |
| 25. $3/2,$ | 26. $16/25.$ |
| 27. $1, -3.$ | 28. $16/25.$ |
| 29. $3.$ | 29. $3.$ |
| 30. $(6\pm\sqrt{6})/3.$ | 30. $(6\pm\sqrt{6})/3.$ |
| 31. $1/5.$ | 31. $1/5.$ |
| 32. $-4/5.$ | 32. $-4/5.$ |
| 33. $1.$ | 33. $1.$ |
| 34. $\frac{27abc-(a+b+c)^3}{9(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$ | 34. $\frac{27abc-(a+b+c)^3}{9(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$ |
| 35. $6, -3, (8\pm i\sqrt{7}i)/2.$ | 35. $6, -3, (8\pm i\sqrt{7}i)/2.$ |
| 36. $0, -2a.$ | 36. $0, -2a.$ |

37. $\pm\sqrt{132}/14, \pm 3\sqrt{7}/7.$

XLV. 第 320 頁

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| 1. $2/3, -11/9; -4, -13/3.$ | 2. $-1, -1; 5/3, 3/5.$ |
| 3. $1/15, 2/15; -$ 無窮解. | 4. $3, 1; -1/15, -41/5.$ |
| 5. $0, 0; 51/14, -17/14.$ | 6. $1, 1/2; 12/5, 32/15.$ |
| 7. 無有限解答. | 8. $5, 9; 333/28, 185/42$ |
| 9. $1, 1/4; -12/13, -4/9.$ | 10. $1, -3; -1, 3; 2, -3.$ |

11. $2, -2; -2, 2; -1\pm\sqrt{3}, 1\pm\sqrt{3}.$

12. $0, 0; 15/8, 9/8; -$ 無窮解.

13. $m=1$ 或 $-1.$

14. $m=1, c=1/3; m=-1/3, c=-1/3.$

15. $(2x-y+4)(x+y+3).$

§ 655. 第 321 頁. 例 2

1. $0; -1, 0.$ 2. $3, 1/5; 3, -1/5; -3, 1/5; -3, -1/5;$

§ 656. 第 321 頁. 例 3

1. $2, 1; 3, -1; -$ 無窮解.

$$2. \quad 3i\sqrt{14}/11, i\sqrt{14}/7; 3i\sqrt{14}/14, -i\sqrt{14}/7; \\ -3i\sqrt{14}/14, i\sqrt{14}/7; -3i\sqrt{14}/11, -i\sqrt{14}/7.$$

§ 657. 第 323 頁例 5

$$1. \quad 0, 0; 0, 0; 5, -5; 3, -9.$$

$$2. \quad -2, 3; -3, 2; (3 \pm \sqrt{17})/2, (-3 \pm \sqrt{17})/2.$$

§ 658. 第 323 頁例 2

$$1, 2; -1, 1; (1 \pm i\sqrt{23})/4, (1 \pm i\sqrt{23})/4.$$

XLVI. 第 324 頁

1. $2, 3; 2, -3; -2, 3; -2, 3.$
2. $2, 1; 3, 2; -1/3; -2, 1/3; -2, -1/3.$
3. $7, -1; -5, 2; 二無窮解.$
4. $-5, 1, 15/2, 3, 2, 2^{1/2}, 3\sqrt{3}; 2\sqrt{3}, -3\sqrt{3}.$
5. $2, -3; 2/3, 3; (-6 \pm 2\sqrt{13})/3, (3 \mp 4\sqrt{6})/3.$
6. $1, 0; -1, 2; 二無窮解.$
7. $5, -1; 5, -21; 7, 12 \pm 2\sqrt{85}.$
8. $5, 5; -5, -5; \sqrt{5}i, -\sqrt{5}i; -\sqrt{5}i, \sqrt{5}i.$
9. $3, 1; -3, -1; 3\sqrt{5}i, -7\sqrt{5}i/5; 3\sqrt{5}i, 7\sqrt{5}i/5.$
10. $1, 1/2; -1, -1/2; \sqrt{91}/5, \sqrt{91}/16; -\sqrt{91}/5, -\sqrt{91}/16.$
 $0, 0; 0, 0; 0, 0; 0, 0; 八無窮解.$
11. $3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}; -3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}; -\sqrt{2}, -3\sqrt{2}.$
12. $5, 4; -4, -5; 10 \pm 2\sqrt{30}, -10 \pm 2\sqrt{30}.$
13. $2, 4; 3, -1; (-5 \pm \sqrt{13})/2, (-3 \pm 5\sqrt{13})/2.$

XLVII. 第 325 頁

1. $4, 1; -1, -4; 一無窮解.$
2. $1, 5, -27; -27, 125; 一無窮解.$
3. $5, 3; -5, -3; 3, 5; 3, -5; 四無窮解.$
4. $2, 3; -1 + \sqrt{3}i, 3(-1 + \sqrt{3}i)/2; 1 - \sqrt{3}i, -3(1 + \sqrt{3})/2; 六無窮解.$
5. $-2, 2; -2, -2; (2 \pm 2\sqrt{7})/3, (1 \pm \sqrt{7})/3; 二無窮解.$
6. $0, 1; 9, 9; 50/21, 20/21; 一無窮解.$

XLVIII. 第 328 頁

1. $9, 4; -4, 9.$
2. $14, -2; -2, 14.$
3. $17, 2; -17, -2; 2, 17; -2, -17.$
4. $9, 2; -2, -9.$
5. $8, 1; 1, 8; 一無窮解.$
6. $7, 5; 5, 7; 7\omega, 5\omega; 5\omega, 7\omega; 7\omega^2, 5\omega^2; 5\omega^2, 7\omega^2,$
其中 $\omega = (-1 + \sqrt{3}i)/2; 三無窮解.$

- 7. $4/3, 1/4; 1/3, 1$; 一為無窮解.
- 8. $3, 1; -1, -3; 1 \pm i\sqrt{10}, -1 \pm i\sqrt{10}$.
- 9. $2, 0; 0, 2; 1 \pm i\sqrt{3}, 1 \mp i\sqrt{3}$; 一為無窮解.
- 10. $4, -7/2; -7/2, 4$.
- 1. $5, -4; -4, -10 + 3\sqrt{11}, -10 - 3\sqrt{11}; -10 - 3\sqrt{11}, -10 + 3\sqrt{11}$; 二為無窮解.
- 2. $3, 1; 1, 3; -3, -1; -1, -3; \pm\sqrt{5}i, \pm\sqrt{6}i; \pm\sqrt{6}i, \pm\sqrt{5}i$.
- 3. $2, -5; -5, 2; (3 \pm \sqrt{3}i)/2, (3 \mp \sqrt{3}i)/2$.
- 4. $0, 2; 2, 0; (-23 \pm \sqrt{389})/12, (-23 \mp \sqrt{389})/12$.
- 5. $0, 0; \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{5}; \pm\sqrt{5}i, \mp\sqrt{5}i; \pm\sqrt{10}(1+i)/2, \mp\sqrt{10}(1-i)/2; \pm\sqrt{10}(1-i)/2, \mp\sqrt{10}(1+i)/2$.

XLIX. 第 329 頁

- 1. $4, -1, 3; -2, 5, -3$.
- 2. $4, 1, 2; -4, -1, -2$.
- 3. $-(a^2 \pm b^2)/a, -(b^2 \pm ca)/b, -(c^2 \pm ab)/c$.

L. 第 330 頁

- 1. $2/3, -11/9; -4, -13/3$.
- 2. $4, 3; -3, -4$.
- 3. $(b+a)/2, (b-a)/2; (a-b)/2, -(a+b)/2$
- 4. $\sqrt{\frac{a-b}{a^2+b^2}} \pm \sqrt{\frac{b-a}{a^2+b^2}}; -\sqrt{\frac{a-b}{a^2+b^2}} \pm \sqrt{\frac{b-a}{a^2+b^2}}$.
- 5. $1, 1/4; -12/13, -4/9$.
- 6. $a, b; 2a-b, 2b-a$.
- 7. $5, 1/2; 1/2, 5$.
- 8. $a, b/2; -a, -b/2; a/2, b; -a/2, -b$.
- 9. $4, 1; -1, -4; 0, 0; 0, 0$.
- 10. $\frac{2ab}{b-a}, \frac{2ab}{b+a}; 0, 0$.
- 11. $3, -7; 35/2, 15/2; 9, 0; 0, 0$.
- 12. $5, 2; -5, 2; 2, -4/5; -2, -4/5$.
- 13. $3, 1; -3, -1; 6, 3; -6, -3$.
- 4. $6, 1; -27, -10; (7 \pm 3\sqrt{65})/2, (3 \pm \sqrt{65})/2$.
- 5. $7/2, 2; -2, -7/2; 136/65, 238/65; -238/65, -136/65$.
- 6. $\alpha, \beta; \alpha\omega, \beta\omega; \alpha\omega^2, \beta\omega^2$; 其中 $\alpha = \frac{\sqrt[3]{a^2b^2}}{b}, \beta = \frac{\sqrt[3]{a^2b^2}}{a}$.

又 $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2$; 六無窮解.

- 7. $\alpha, \beta; \alpha\omega, \beta\omega; \alpha\omega^2, \beta\omega^2$; 其中 $\alpha = \frac{\sqrt[3]{4(a^2-b^2)^2}}{2(a-b)}, \beta = \frac{\sqrt[3]{4(a^2-b^2)^2}}{2(a+b)}$;
又 $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2$; 六無窮解.

18. $a/(a^2+b^2), b/(a^2+b^2); 0, 0$; 二種解.
 19. $4a, a; -4a, -a$.
 20. $3/2, 1/2; -1/2, -3/2$; 其一為無解.
 21. $a, 0, 0, a; (1 \pm \sqrt{7}i)/2, a(1 \mp \sqrt{7}i)/2$.
 22. $7, 3, 3, 7; (-17 \pm \sqrt{646})/5, (-17 \mp \sqrt{646})/5$.
 23. $(3 \pm i\sqrt{3}i)/2, (8 \mp \sqrt{8}i)/2; 0, 0; 0, 0$.
 24. $\pm a\sqrt{3}, 0; 2a, a; -2a, -a$.
 25. $1, 4; 1, 1$; 其一為無解.
 26. $3, 0; 0, 1; 0, 0, 0$.
 27. $5, 0; 0, 5; \sqrt{10}, -\sqrt{10}; -\sqrt{10}, \sqrt{10}$.
 28. $2, 4; -9, 1; -1, -1; 0, 0$.
 29. $3/2, 1/2; 1/2, 3/2; 1 \pm i\sqrt{1155}/36, 1 \mp i\sqrt{1155}/35$.
 30. $\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}, \sqrt{a^2+1}; \frac{-\sqrt{a^2+1}}{a}, -\sqrt{a^2+1}$.
 31. $2, 0; -3, 5$; 其一為無解.
 32. $1, 5/3; 2, -4/3; (-9 \pm \sqrt{21})/6, (-1 \pm 3\sqrt{21})/6$.
 33. $1, 3, 1; 149/5, -1/5, -15$.
 34. $1, 2, -3; 0; -1, -2, 3, 0$.
 35. $3, 1, 1; -3, -1, -1$.
 36. $1, -1, 2; -14/13, 23/13, 17/13; (-29 \pm 3\sqrt{105})/26, (-11 \mp 2\sqrt{105})/13, (-1 \pm \sqrt{105})/26$.

LI. 第 331 頁

1. 7 及 5. 2. 6 及 3. 3. 5/6.
 4. 8, 9 及 20. 5. 12 及 5 呎. 6. 15, 9 及 12 吋.
 7. 59, 36 及 15 吋. 8. 16, 14, 9 呎. 9. 14 及 12 吋.
 10. A, \$4.50; B, \$5. 11. \$1200, 4%.
 12. 子二人, 各得 \$10,000; 孫五人, 各得 \$1,000.
 13. 每小時 4 哩及 2 哩. 14. A, 3 小時; B, 4 小時; C, 6 小時.
 15. A, 每吋 24 吋; B, 每秒 20 吋.
 16. A, 每秒 8 吋; B, 每秒 2 吋. 17. 18 哩. 18. 96 哩.

LII. 第 339 頁

17. 交 x 軸於原點 $3 \pm \sqrt{8}, 0$; 切 y 軸於 $0, 1$.
 20. $m = \pm 1$. 21. $c = 1$ 或 $4/3$. 23. $y = 2x + 1$ 及 $x + 2y = 0$.
 24. 當 $|\lambda| = 2$, 拋物線; 當 $|\lambda| < 2$, 橢圓形; 當 $|\lambda| > 2$, 雙曲線.

LIII. 第 341 頁

6. $x=30$. 7. $x < -2$ 或 $x > 4$. 8. $-1 < x < 3$, 或 $x \geq 0$.

LIV. 第 346 頁

1. $x=20-17t, y=6-6t$. 對應於 $t=0, -1, -2, \dots$ 之解答為正.
 2. $x=2-12t, y=-6-43t$. 對應於 $t=-1, -2, \dots$ 之解答為正.
 3. $x=-17+39t, y=7-16t$. 無正解.
 4. $x=-2+23t, y=43-72t$. 無正解.
 5. $x=16-27t, y=28-49t$. 對應於 $t=0, -1, -2, \dots$ 之解答為正.
 6. $x=51-97t, y=21-47t$. 對應於 $t=0, -1, -2, 3, \dots$ 之解答為正.
 7. $x=2+21t, y=3-76t, z=-1-11t$ 無正解.
 8. $x=10-14t, y=-4+35t, z=-2+15t$ 無正解.
 9. $x=u, y=2v+1, z=2u+5v$. 解答之對應於 u 及 v 之正值者為正.
 10. $x=7-3u-2v, y=1+2u, z=v$. 正解答為 $7, 1, 0; 5, 1, 1; 3, 1, 2; 1, 1, 3; 4, 3, 0; 2, 3, 1; 0, 3, 2; 1, 5, 0$.
 11. 五十種正解答. 12. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$.
 13. 2 犢, 16 羊; 或 8 犢, 9 羊; 或 14 犢, 2 羊.
 14. 15, 2, 6; 12, 4, 7; 9, 6, 8; 3, 10, 10. 15. 314.
 16. 距任一編之第 167 與第 169 分段.

LV. 第 350 頁

1. $32; 192/5; 10a^2b^2; \sqrt{30}$. 2. $-3; 2; 1; 5$.
 3. $x:y = -1:2$ 或 $3:1$, $y:x = -2:1$ 或 $1:3$.
 4. (1) $0, 0, 3/2$. (2) $0, 0, 5, 8/7$.
 5. 104, 156, 260. 15. 從 A 取 8 響, 從 B 取 10 響.

LVI. 第 353 頁

1. $-14/5$. 2. $\pm 2\sqrt{3}/3$. 3. $x^2+3y-4=0$. 4. -72 .
 7. 3. 15/8. 9. $\frac{a\sqrt{a}}{2}, \frac{a\sqrt{4}}{2}$.

LVII. 第 353 頁

1. 60, 650, 25, 225.
2. $n(n+1)/2; n^2; n(n+1)$.
3. $n(3n-2)$.
4. $-1/3, 0, 1/3, 2/3, 1, 4/3, 5/3, 2, 7/3, 3/3$.
5. $-1/2, 0, 1/2, 1, 3/2$.
6. $l=2, S=160$.
7. $a=3, S=14$.
8. $a=3, S=178$.
9. $n=52, d=-1/2$.
10. $d=2, l=12\frac{3}{4}$.
11. $n=21, S=137\frac{3}{4}$.
12. $a=31, l=-1$.
13. $a=15, d=-3$.
14. $n=6, S=-72$.
15. $n=5, l=18$.
18. $1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{6}, 2, \dots$
19. 3, 5, 7.
20. 5, 39.
21. 8, 716.
22. 在 9 小時內. 兩出發點間之中途.

LVIII. 第 360 頁

1. 162, 122.
2. $13\frac{1}{2}, 32\frac{1}{2}$.
3. $8; 2/3; 25/12$.
4. $\frac{241}{999}, \frac{72}{727}, 8\frac{1116}{999}$.
5. $l=-3000, S=-3333.33$.
6. $r=1/2, S=951$.
7. $n=8, S=255/16$.
8. $a=1, S=61$.
9. $n=5, l=2/3$.
10. $r=5, l=-375$.
11. $n=5, r=4/3$.
12. $a=45, r=35, l=-20/27$.
13. $n=6, a=4$.
14. $a=10, r=35$.
15. $a=3, r=2$.
16. ab .
17. 15, 45, 135.
18. $3/16$.
19. 8, 20, 50, 125
20. 1, -3, 9.
21. 3, 12, 21 或 63, 12-39.
22. -2, 2, 6, 18.
23. 70 呎.

LIX. 第 363 頁

1. $3/11, 3/13$.
2. $30/23$.
3. $75/7, 150/13, 75/6, 150/11$.
4. 2.
5. 3 及 5.
6. 2 及 8.

LX. 第 369 頁

1. 191 及 135.
2. 6560 及 180; 360.
3. (1) 第二次; 第十八項為 224.
(2) 第三次; 第二十項為 10, 118.
(3) 第三次; 第十二項為 -1.
(4) 第四次; 第十項為 10, 109.
4. 第三次; 第 n 項為 $n(n+1)(n+2)$, 首 n 項之和為 $n(n-1)(n+2)(n+3)/4$.
第四次; 第 n 項為 $2n(n+1)$.
5. 560, 105. $0=1-6$. 119.
7. 982.
8. 2, 24.
9. 20, 385.
10. 1274.
13. 第二次; 首 n 項之和為 $n(n^2+2)/3$.
第三次; 首 n 項之和為 $n(n+1)(n+2)(n+3)/4!$

LXI. 第 374 頁

1. $y = 4 + 23x + 26x^2 + 7x^3$; 當 $x = -5/2$ 時, 則 $y = -3/8$;
當 $x = -1/2$ 時, 則 $y = -15/8$.
2. $f(x) = -90 + 73x - 16x^2 + x^3$; $f(12) = 210$.
3. 704; 3716. 4. 110.592. 5. 0.04237. 6. 29.8734.
7. $(2520 - 806x - 9x^2 - 13x^3) / 810$.

LXII. 第 378 頁

1. $2, 1/2, 0, 4, 6, -3, -6, -3, -2/3, 7/3, 3/2$.
2. 1.0701, 0.6552, 0.1505, 0.2594, 3. $(3 \log_a 2 + \log_a 3 + 2 \log_a 5) 6$.
4. (1) $\frac{1}{2} \log_a b - \frac{1}{2} \log_a c - \frac{1}{2} \log_a d$. (2) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_a b$.

LXIII. 第 389 頁

下列答數皆用四位表求得之, pp. 384, 385; 並皆依 §751 末之法則.

1. 36,430. 2. 8328. 3. 1.2108×10^{14} . 4. -1.744×10^{-5}
5. 22.13 6. 0.1161. 7. 4.553×10^7 . 8. 1638.
9. -0.4255. 10. 77. 11. 9.472. 12. 187.
13. 1.413 14. 8.218. 15. -0.676. 16. 13.46.
17. 0.01. 18. 5.461 19. 1.101. 20. 534.
21. 9108. 22. 62.8. 23. 50.22. 24. 2.458×10^{-6} .
25. 73.6. 26. 2.647×10^{13} . 27. 0.5381. 28. 96.56.
29. 15.77. 30. 2.652×10^6 .

LXIV. 第 392 頁

第 391 頁頂上之公式, 其對於總半年, 每三個月等, 須為 $A = P(1+r/2)^{2n}$, $A = P(1+r/4)^{4n}$ 等.

1. 3.925, -1.578, 0.8331.
2. (1) $x = 6$, (2) $x = 1.22$, (3) $x = 2.152$.
3. (1) $x = 2$, 5. (2) $x = 4.642$, (3) $x = 3.951$, (4) $x = 3.537$
4. \$1,410 5. \$1,010. 7. \$394.80. 8. \$3,030.
9. \$20,730, \$30,600, 10. $b = 496, 4$, 面積 = 77,500. 11. 5179
12. 表面積, 6998; 體積, 56050

§ 763. 第 396 頁

4. 65. 5. 360. 6. 144.
8. 2100. 9. 825. 10. 3150.

§ 764. 第 397 頁

8. 144.

§ 765. 第 397 頁

1. 5,25,125 2. 343.

§ 768. 第 398 頁

4. 689,689. 5. 715.

§ 769. 第 401 頁

6. 190,252,8855. 7. 15. 8. 8. 9. 220.

10. 792,380,462. 11. 120,420,840. 12. 3,950,520.

13. $10 \cdot 10 \cdot 7!$ 14. $52!/(13!)^4, 52!/(13!)^4 \cdot 4!$. 15. 2250.

§ 770. 第 402 頁

1. 15. 3. 41.

§ 771. 第 402 頁

 $C_7^{12} = 924, C_7^{18} = 6435.$

LXV. 第 405 頁

1. 24. 2. 720. 3. 336. 4. 210,5040. 5. 161,700.

6. 30. 7. 420. 8. (1)90,720.(2)832,560,(3)4320.

9. 60,480,504,84. 10. 60. 11. 1680.

12. 6. 13. (1)399.(2)259. 14. 360.

15. 1252,224. 16. 31. 17. 9,783,780.

18. 462. 19. 1446. 20. 5095520 \cdot 15!

21. 325. 22. (1)80.(2)325. 23. 2970.

24. 63,663. 25. 145,152. 26. 300.

27. $5!^2, 15!/(3!)^5$. 28. 5760. 29. 37,740.

30. 126. 31. 252. 32. 5040,840,7560.

LXVI. 第 409 頁

1. $\Sigma a^3 + 9 \Sigma a^2 b + 6 \Sigma abc.$ 2. $\Sigma a^6 + 5 \Sigma a^4 b^2 + 10 \Sigma a^3 b^3 + 20 \Sigma a^2 b^4 + 30 \Sigma a^2 b^2 c^2 + 60 \Sigma a^2 b c d.$

3. 38, 120, 31, 150, 16, 682. 4. 12, 420. 5. 15, 120.

6. 4, 405. 7. 26, 895.

LXVII. 第 414 頁

1. 5比3優於失敗: $5/5$. 2. $10/19, 9/19$. 3. $\$37.50$.
 5. (1) $7/16, 3/2, 3/16$. (2) $1/3, 7/43$. (3) $1/560, 143/289, 9/40$.
 (4) $21/65, 27/65$. (5) $45/66$.
 6. $1/6, 4/9$. 7. $1/5$. 8. $11/36, 5/18$. 9. $1/12$.
 10. $18/18, 5/18$. 11. $5/42, 5/14, 1/21$. 12. $258/270725, 4/270725$.
 13. $10/148, 13/301, 621$. 14. $1/36, 1/54$. 15. $2/7$.

§ 785. 第 417 頁

4. $255/258$. 5. $104/105$. 6. $35/81$. 7. $5/8, 1/8, 5/24, 1/24$.

§ 787. 第 420 頁

5. $607/2970$. 6. $5/6$. 7. $6/11, 5/11$.

§ 790. 第 421 頁

3. $105/512, 198/512$. 4. $5/324, 7/432$. 5. $112/243$. 6. $16/81$.

LXVIII. 第 422 頁

1. (1) $7/225$. (2) $14/75$. 2. $60/455$. 3. $\$3.58$.
 4. $11/16$. 5. $1/24, 1/4, 11/24, 1/4$. 6. 7比2.
 7. 7比1, 103比5. 8. $7/165, 16/33$. 9. 13比11.
 10. 39比31. 11. $7/15, 53/165, 7/33; 9/19, 6/19, 4/19$.
 12. $\$11$. 13. $3/5$. 14. 否.
 15. $59049/100000$. 16. $64/81$. 17. $191 \cdot 3^5/5^7$.
 18. $\$1$. 19. $5103/32768, 1012581/1048576$.
 20. $81/128$. 21. $\$18, \16 .

LXX. 第 431 頁

1. (1) $x^3 - 2ax^2 + (a^2 - ab - b^2)x + a^2b + ab^2 = 0$.
 (2) $5x^3 - 33x^2 + 78x - 5x^2 - 32x = 0$.
 4. 6及-2. 6. 2, 3, -4.
 7. 2, 5, -5. 8. $-1/3, (1 \pm \sqrt{3}i)/2$.
 9. $0, 1/2, -2 \pm \sqrt{3}$ 10. $-1, -1, -1 \pm \sqrt{2}i$.
 11. $1, -1, -2, -3/2$. 12. $-3, -2/3, \pm i$.
 13. $-2, 5, 7, (-1 \pm \sqrt{3}i)/2$ 14. $-1, 2, 2, (1 \pm i)/2$.
 15. $-1, 2, 3, -3, -4$. 16. $2, 1/2, +1/2, 2/3$.

17. $-1, -1, 3, 3, 3.$ 18. $-2, 4, 5, 3/2.$
 19. $-2, 1/2, 3/2, \pm i.$ 20. $2, 2, -3, -4, -5.$
 21. $-2, -2, -1/2, (-1 \pm \sqrt{3}i)/2.$ 22. $6, 3, 1/2, 1/3.$
 23. $-1/2, -3/5, (-3 \pm \sqrt{5})/2.$ 24. $1/2, 1/3, 2/3, 3/2.$
 25. $-1/2, -2/3, -3/2, (1 \pm \sqrt{11}i)/2.$ 26. $1, 1, 2, -3/2, \pm \sqrt{2}i.$
 27. $1, -1, -2, -3/2, 1 \pm \sqrt{2}i.$ 28. $1, -1, 2, 5, (-1 \pm \sqrt{3}i)/2.$

LXXI. 第 435 頁

1. $3/2.$
 2. (1) $1, -3/2, 9/4.$ (2) $1 + 2\sqrt{2}i, -3, 1 - 2\sqrt{2}i.$
 3. (1) $-2 - \sqrt{5}, -2, -2 + \sqrt{5}.$ (2) $1, 3, 5.$
 5. $r^2 - rp + q - 1 = 0.$ 6. $-1 \pm \sqrt{2}i, -1 \pm \sqrt{2}i.$
 7. $-1, 3/2, 3/7.$ 8. $-4, -5, 6, 5.$
 9. (1) $x^3 - px^2 + qx - r = 0.$
 (2) $x^3 + kpx^2 + k^2qx + k^3r = 0.$
 (3) $rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0.$
 (4) $x^7 + (p-3k)x^2 + (q-2kp+3k^2)x + (r-kq+pk^2-k^3) = 0.$
 (5) $r^2x^2 + (q^2-2pr)x - r^2 = 0.$
 (6) $r^2x^2 + (q^2-2pr)x - (2r-p^2)x + 1 = 0.$
 10. (1) $17/4$ (2) $-37/8$ (3) 1 (4) $5/2.$
 11. (1) $2/3.$ (2) $-1/3.$ (3) $-1.$ (4) $-3/4$ (5) $-7/3.$

LXXII. 第 433 頁

1. $x^2 - 3x^4 + 2x^2 + 6x - 7 = 0.$
 2. (1) $x^4 - x^3 - 3x^2 + 24x + 64 = 0.$
 (2) $182x^4 + 27x^3 - 36x^2 - 18x + 8 = 0.$
 3. $10x^3 + 9x^5 + 3x^2 - x^2 + 5 = 0.$
 4. (1) $x^5 + 21x^4 + 88x^3 + 131x^2 + 180x + 74 = 0.$
 (2) $2x^5 - 9x^4 + 16x^3 - 17x^2 + 12x + 2 = 0.$
 5. $x^4 - 10x^3 + 25x^2 + 10^20x - 16, 875 = 0.$
 6. $3x^4 - 162x^2 - 647x - 738 = 0.$
 7. (1) $x^3 - 3x^2 + 10 = 0,$ 或 $x^3 + 3x^2 + 6 = 0.$
 (2) $x^3 + 2x^2 - 4 = 0,$ 或 $37x^3 - 54x^2 - 76 = 0.$
 8. $x^4 - x^2 + 6x^2 - x + 4 = 0$ 9. $x^4 + 9x^3 + 29x^2 + 39x + 17 = 0.$
 10. (1) $rx^3 + (q^2 - 2pr)x^2 + r(p^2 - 2q)x - r^2 = 0.$
 (2) $(r - pq)x^3 + (p^3 - 2pq + 3r)x^2 + (2r - pq)x + r = 0.$
 11. (1) $x^2 + 4x^2 - 3x + 2 = 0.$ (2) $x^2 - 6x^2 + 17x - 8 = 0.$
 (3) $4x^3 - 9x^2 + 18x - 27 = 0.$ (4) $8x^3 + 16x^2 + 9x + 2 = 0.$
 (5) $16x^3 + 24x^2 + 27x - 8 = 0.$
 12. (1) 2 及 -6. (2) 4 及 -1. (3) 4 及 -7.
 (4) 2 及 -5. (5) 9 及 -2. (6) 2 及 -1.

LXXIII. 第 449 頁

1. $-1, -1/2, 1 \pm 2i$.
2. $1, 1/2, 2 \pm \sqrt{2}$.
3. $x^4 + 12x^3 + 44x^2 + 18x - 116 = 0$.
4. $x^4 - 2x^2 + 9 = 0$.
5. (1) 四個虛根。
 (2) 至少有二虛根。實根中，正根或負根均不能多於一。
 (3) 無正根。
 (4) 無負根。
 (5) 至少有四虛根。實根中，正根不能多於二，負根不能多於一。
 (6) 至少有四虛根。實根中，正根不能多於一，負根不能多於二。
 (7) 至少有二虛根。實根中，正根不能多於二，負根不能多於一。
 (8) 當 n 為奇數時，至少有 $3n - 3$ 虛根。實根中，正根不能多於二，負根不能多於一。當 n 為偶數時，至少有 $3n - 6$ 虛根。實根中，正根不能多於二，負根不能多於四。
7. 二正，三負。
8. $x^{2n+1} + 1 = 0$ 有一負根， $2n$ 虛根； $x^{2n} - 1 = 0$ 至少有 $2n - 2$ 虛根，正根不能多於一，負根不能多於一； $x^{2n+1} - 1 = 0$ 有一正根， $2n$ 虛根。

LXXIV. 第 453 頁

1. 在 0 與 1, 2 與 3, -1 與 -2 之間。
2. 在 1 與 2, 0 與 -1 , -2 與 -3 之間。
3. 在 1 與 2, 3 與 4, -1 與 -2 之間。
4. 在 2 與 3, -1 與 -2 , -2 與 -3 之間。
5. 在 1 與 2, 4 與 5, -1 與 -2 之間。
6. 在 -2 與 -3 , -4 與 -5 , -6 與 -7 之間。
7. 在 -2 與 -3 之間。
8. 在 3 與 4, -3 與 -4 之間。
9. 在 0 與 1, 2 與 3, 5 與 6, 0 與 -1 之間。
10. 在 1 與 2, 0 與 -1 , -1 與 -2 , -4 與 -5 之間。
11. 在 1 與 2, 4 與 5, 5 與 6, 0 與 -1 之間。
12. 在 1 與 2, 3 與 4, 0 與 -1 , -2 與 -3 , -3 與 -4 之間。

LXXV. 第 459 頁

1. 1.213411, 2. 2.46945, 3. 0.179989
4. 2.137411, 5. 2.768345, 6. -1.946841
7. 1.903211, 8. -5.181378, 9. 3.233937
10. -2.157451, 11. 2.876895 及 2.632621
12. 1.602, 3.292 及 -1.895, 13. 1.246, -0.445 及 -1.802
14. 0.347, 1.632 及 -1.879, 15. 1.553, -0.573, -1.904, 4.07
16. 2.5712, 17. 2.884 及 3.054, 18. 13.245
19. 二根在 0 與 1 間, 一根在 0 與 -1 間.
20. $2/3, -1, 0.234, 1.830, -2.114$.

LXXVI. 第 464 頁

1. $10x^4 - 16x^3 + 2x - 2, 40x^3 - 48x^2 + 2, 120x^2 - 96x, 240x - 9, 240$.
2. $(x^4 - 2x^3 + 1) + 2(2x^3 - 3x^2)h + 6(x^2 - x)h^2 + 2(2x - 1)h^3 + h^4$.
3. $(1) 3 - 6(x+1) + 7(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4$.
 $(2) 80(x-2) + 80(x-2)^2 + 40(x-2)^3 + 10(x-2)^4 + (x-2)^5$.
 $2 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$
 $(3) \frac{2 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3}{2 + 2(x-1) + (x-1)^2}$
4. $(1) -1, -1, 2, (2) 1/3, 1/3, -2$
 $(3) \pm\sqrt{6}i/2, \pm\sqrt{6}j/2, (4) 1 \pm \sqrt{3}, 1 \pm i\sqrt{3}$
 $(5) 3, 3, \pm\sqrt{2}i/2, (6) (-1 \pm \sqrt{3}i)/2, (-1 \pm i\sqrt{3})/2, 2$
 $(7) 2, 2, -1 \pm \sqrt{2}i, (8) 1, 1, 1, -1, -1$
 $(9) \pm i, \pm i, 2/3$
6. $a = \pm 16$.
7. $a = 8, b = 1/9, x = -1/3$; 或 $a = -3, b = -1/9, x = 1/3$.
9. $108p^3 = 3125r^3, 10. (ax+b)^n$.
 $11. (-1 \pm \sqrt{3}i)/2, \pm i; (-1 \pm \sqrt{3}i)/2, \pm 1$
 $12. 2 \pm 2\sqrt{2}, -4; 1 \pm i\sqrt{2}, -1$.

LXXVII. 第 471 頁

1. 極大值對應於 $x=0$ 而為 4; 極小值對應於 $x=2$ 而為 0.
2. $(1) x=1/4$ 時為極小.
 $(2) x=(1-\sqrt{3})/2$ 時極大, $x=(1+\sqrt{3})/2$ 時極小.
 $(3) x=-2$ 時極大, $x=2$ 時極小.
 $(4) x=1/3$ 時極大, $x=3$ 時極小.
 $(5) x=0$ 時極大, $x=2$ 時極小.
 $(6) x=1/3$ 時極大, $x=-1$ 或 $x=2$ 時極小.
 (7) 無一極大或極小值.
 $(8) x=-10$, 極大時 $x=(2 \pm \sqrt{10})/2$ 時極小.

LXXVIII. 第 417 頁

1. 二根在3與4間, 一根在-1與-2間。
2. 二根在3與4間, 一根在-3與-4間。
3. 一根在0與-1間, 二根爲虛根。
4. 一根在-1與-2間, 二根爲虛根。
5. 二根在2與3間, 一根在-4與-5間。
6. 二根在3與4間, 二根在-1與-2間。
7. 一根在0與1間, 一根在-1與-2間, 二根爲虛根。
8. 一根在0與1間, 二根在3與4間。
9. 二根在0與1間, 一根在2與3間, 一根在-3與-4間。
10. 0與1間一根, 1與2間一根, -2與-3間二根。
11. 有一實根。
12. 無實根。
13. n 爲偶數時, 無實根; n 爲奇數時, 有一實根。
14. 兩實根。

LXXIX 第 412 頁

1. $s_1 = -(a_1^3 - 3a_0a_1a_2 - 3a_0^2a_3) / a_0^3$
 $s_2 = -(a_1^4 - 4a_0a_1^2a_2 + 4a_0^2a_1a_3 + 2a_0^3a_2^2) / a_0^4$
2. $\sum 1/a^2 = (p^2 - 2q) / r^2$. $\sum 1/a^3 = (p^3 - 3pq + 3r) / r^3$.
 $\sum aB^2 = 3r - pq$.
3. $x^3 + 7x^2 + 12x - 1 = 0$.
4. (1) $s_1 = 1, s_2 = -5, s_3 = 20, s_4 = -9$.
 (2) 29. (3) 2. (4) -60. (5) -9/256. (6) -111/4.

§ 871. 第 485 頁

9. $-1 + \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}, -1 + \omega\sqrt[3]{A} + \omega^2\sqrt[3]{B}, -1 + \omega^2\sqrt[3]{A} + \omega\sqrt[3]{B}$,
 其中 $A = (-1 + \sqrt{5})/2$ 且 $B = (-1 - \sqrt{5})/2$

§ 871. 第 485 頁

2. $(1 \pm \sqrt{5})/2, (3 \pm \sqrt{13})/2,$

§ 875. 第 488 頁

2. $(1 \pm \sqrt{3}i)/2, \sqrt{2}(1 \pm i)/2, \sqrt{2}(-1 \pm i)/2$

LXXX. 第 491 頁

1. $4, -2 \pm i\sqrt{3}$.
 2. $8, (1 \pm i\sqrt{3})/2$.
 3. $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}, \omega \sqrt[3]{A} + \omega^2 \sqrt[3]{B}, \omega^2 \sqrt[3]{A} + \omega \sqrt[3]{B}$,
其中 $A=2+\sqrt{3}, B=2-\sqrt{3}$.
 4. $A=3/4 + \sqrt{1887/72}, B=3/4 - \sqrt{1887/72}$.
 5. $-1 + \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}, -1 + \omega \sqrt[3]{A} + \omega^2 \sqrt[3]{B}, -1 + \omega^2 \sqrt[3]{A} + \omega \sqrt[3]{B}$,
其中 $A=4+2\sqrt{6}, B=4-2\sqrt{6}$.
 6. $1 + \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}, 1 + \omega \sqrt[3]{A} + \omega^2 \sqrt[3]{B}, 1 + \omega^2 \sqrt[3]{A} + \omega \sqrt[3]{B}$,
其中 $A=-5/2 + 5\sqrt{749/51}, B=-5/25\sqrt{749/54}$.
 7. $(-\sqrt{3} \pm \sqrt{4\sqrt{3}-5})/2, (\sqrt{3} \pm i\sqrt{5+4\sqrt{3}})/2$.
 8. $(1 \pm \sqrt{5})/2, (3 \pm \sqrt{13})/2$.
 9. $-1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm 2i$.
 10. $(-5 \pm \sqrt{33})/2, (-3 \pm \sqrt{13})/2$.
 11. $(1 \pm \sqrt{3}i)/2, (-1 \pm \sqrt{3}i)/2, (1 \pm 2\sqrt{2}i)/3$.
 12. $\pm i, (1 \pm \sqrt{3}i)/2, (3(\pm\sqrt{5})/2, (1 \pm \sqrt{15}i)/4$.
 13. $1, 1, -1, (-1 \pm \sqrt{15}i)/4, (-1 \pm \sqrt{33}i)/6$.
 14. $z^2 + z^3 - 2z - 1 = 0$.
 15. $(2i^2 - 3ab + c)^2/4 - (b - a^2)^2 \equiv 0$.
 16. $\cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}, k=0, \dots, 4; \cos \frac{(2k+1)\pi}{6} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{6}, k=0, \dots, 5$.
 17. (1) $2 \cos 20^\circ, 2 \cos 140^\circ, 2 \cos 260^\circ$
(2) $2\sqrt{2} \cos 15^\circ, 2\sqrt{2} \cos 135^\circ, 2\sqrt{2} \cos 255^\circ$.
 18. 3.
 19. 底之半徑為 $2\frac{1}{2}$, 高為 8.
 20. 本題原無解。就事而論, 若能設法求其高, 可得一負結果, 可證明內接於圓錐中之最大圓柱, 其體積為圓錐之 $4/9$ 。例中所述之圓錐, 其內接之最大圓柱當為 2.
- LXXXI. 第 497 頁
1. $p^3 - p(q^2 + r^2 + s^2) + 2qrs$
 2. $(b-c)x + (c-a)y + (a-b)z$.
 3. $p(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)$.
 4. 0. 5. 18. 6. 74. 7. -30.
 10. (1) $a_1 b_2 c_3 d_4 - a_2 b_1 c_3 d_4$ (2) $a_1 b_2 c_3 d_4 - a_1 b_3 c_2 d_4$.
(3) $-a_2 b_3 c_4 d_1$.
(4) $a_1 b_2 c_3 d_4 + a_1 b_2 c_4 d_3 + a_1 b_4 c_2 d_3 - a_1 b_4 c_3 d_2 - a_1 b_3 c_4 d_2 - a_1 b_3 c_4 d_1$.
(5) $a_1 b_2 c_3 d_4 + a_2 b_4 c_3 d_1 + a_4 b_1 c_3 d_2 - a_4 b_2 c_3 d_1 - a_2 b_1 c_3 d_4 - a_1 b_4 c_3 d_2$.
 11. $a_1 b_2 c_3 d_4 e_5, -a_1 b_2 c_1 d_5 e_3, a_5 b_4 c_3 d_2 e_1 - a_1 d_2 a_3 e_4 b_5,$
 $-a_1 b_2 e_3 a_4 d_5, -d_3 a_3 e_4 b_1 c_5,$

LXXXI. 第 511 頁

1. (1) $-22,620$. (2) 0 . (3) $abcdedf$.

LXXXII. 第 517 頁

1. $0, 2, -4, 3, 0, 4, -357, 840$.

$$5. \begin{vmatrix} 0 & bc-a^2 & b^2-ac \\ b^2-ac & 0 & bc-a^2 \\ bc-a^2 & b^2-ac & 0 \end{vmatrix} \quad 6. \begin{vmatrix} ap+cr & cp & cr \\ ap & ap+bq & bq \\ cr & bq & bq+cr \end{vmatrix}$$

$$7. \begin{vmatrix} a & -a & a^2+ab & ac+ad \\ -b & c & ab+b^2 & bc+bd \\ c & d & -ac+bc & -c^2+cd \\ d & d & ad-bd & cd-d^2 \end{vmatrix}$$

$$8. \begin{vmatrix} l^2+m^2+n^2 & lm+mn+nl & ln+ml+nm \\ ml+nm+lm & m^2+n^2+l^2 & mn+nl+lm \\ nl+lm+mn & nm+ln+ml & n^2+l^2+m^2 \end{vmatrix}$$

10. 此題應讀作：“證明當一行列式之首對角線任一側之諸元為 0 時，此行列式可化成其首項。”

LXXXIV. 第 511 頁

1. $x=10/7, y=1, z=4/7$. 2. $x=1, y=1/2, z=2/3$.
 3. $x = \frac{d(d-c)(d-a)}{a(a-b)(a-c)}, y = \frac{d(d-c)(d-a)}{b(b-c)(b-a)}, z = \frac{d(d-c)(d-b)}{c(c-a)(c-b)}$
 4. $x=1, y=1/2, z=1/3, t=-1$. 5. $x:y:z=-1:1:1$.
 6. $x:y:z=k:l:-1$, 若 $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

7. $\lambda=0$ 或 $-3 \pm 2\sqrt{21}$.

LXXXV. 第 519 頁

1. 公根為 $-3/2$.

$$2. \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

3. $(a+d)^3 + b^3 + c^3 - 3bc(a+d)$.
 4. (1) $4p^3 + 27q^2$. (2) $c(4b^3 + 27a^2c)$. 5. 二重根為 -2 .
 6. $x, y=0, 0; 3, -1; 2$, 及一無窮解.

§ 950. 第 527 頁, 例 3

(1) $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{3}{3 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 5} + \frac{7}{5 \cdot 6} + \dots$ 發散.

(2) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{10} + \frac{2}{17} + \dots$; 收斂.

(3) $\frac{1}{9} + \frac{3}{35} + \frac{5}{91} + \frac{7}{189} + \dots$; 收斂.

§ 952, 第 528 頁

5. $x < 1$ 時. 6. $x < 1$ 時.

LXXXVI. 第 531 頁

- | | | |
|--------|--------|--------|
| 1. 收斂. | 2. 收斂. | 3. 發散. |
| 4. 收斂. | 5. 發散. | 6. 發散. |
| 7. 收斂. | 8. 收斂. | 9. 發散. |

10. $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{5}{4 \cdot 6} + \dots$; 發散.

11. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} + \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} + \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} + \dots$; 發散.

12. $(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-2) + (\sqrt{10}-3) + (\sqrt{17}-4) + \dots$; 發散.

13. 收斂. 14. 發散.

15. $x < 1$ 時. 16. $x < 1$ 時.

LXXXVII. 第 534 頁

- (1) 收斂. (2) 發散. (3) 收斂.
- (1) 除 $x=0, 1, -1/2, 1/3, \dots, (-1)^{n-1}/n, \dots$ 外, 其餘 x 之一切實數值皆收斂.
(2) 當 x 小於 1 時為收斂, 否則為發散.
- 應讀作: "若級數 u, u, u, \dots 絕對收斂等第."

LXXXVIII. 第 538 頁

- ∞ , 2. $1/2$, 3. $1/2$.
- 對於 $x=-1$ 又對於 x 介於 -1 及 2 之間之一切值.
- 對於 x 之一切實數值.
- 對於 x 大於 $1/3$ 及小於 $1/2$ 之值.

LXXXIX. 第 551 頁

4. $a_1 = -1/2, a_2 = 7/8, a_3 = 7/16, a_4 = -21/64$.

5. (1) $2-x/4-x^2/8+5x^3/16$, (2) $1+8x/2-9x^2/8-18x^3/16$

6. (1) $2-8x-3x^2+20x^3+\dots$, (2) $x+6x^2+4x^3-x^4+\dots$

7. (1) $3x^2-2x^3-x^4+3x^5+\dots$, (2) $x^{-1}-2x^{-2}+1+9x+\dots$

8. (1) $-11/6 + 5x/30 - 89x^2/216 + 65x^3/1296 - 761x^4/7776 + \dots$
 $|x| < 2$ 時收斂.
 (2) $2 - 11x/3 + 46x^2/9 - 173x^3/27 + 616x^4/81 + \dots$; $|x| < 1$ 時收斂.
9. (1) $x^{-1} + x^{-2} + 7x^{-3} + 4x^{-4} + \dots$; $|x| > 3$ 時收斂.
 (2) $1 - x^{-1} + x^{-4} - x^{-6} + \dots$.
10. (1) $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \dots$. (2) $x = y + y^2/2 + y^3/6 + y^4/24 + \dots$.
11. $x = (y-1) - (y-1)^2/2 + (y-1)^3/6 - (y-1)^4/24 + \dots$.
12. $x = z^{1/2} - 3z^{3/2} + 45z^{5/2}/8 - 27z^{7/2} + \dots$.
13. (1) $y = 3x - 10x^2 + 60x^3 + \dots$.
 (2) $y = x^2 + x^5 + 3x^8 + \dots$. $y = x^{1/2} - x^2/2 - 3x^{3/2}/8 + \dots$.
 $y = -x^{1/2} - x^2/2 + 3x^{3/2}/8 + \dots$.

XC. 第 559 頁

1. $\log_8 4 = 1.3862$. $\log_8 5 = 1.6993$. 7. $-7x^4/3^5 \cdot 2^{10}$.
8. $231x^3/2^{10}$.
9. 第一級數當 $|x| < 3/2$, 第二級數 $|x| < 3$ 時收斂.
10. $1 - 3x^2/4 + 45x^4/32 - 45x^6/128 + 333x^8/2048$.
11. $x^2/3 + 13x^3/27 + 53x^4/1296$; $|x| < 8/3$ 時收斂.
12. (1) $4/3$, (2) ∞ .
15. $x + x^2/2 - 2x^3/5 + x^4/4 - \dots$; $|x| < (\sqrt{5}-1)/2$ 時收斂.

XCI. 第 565 頁

1. $-19x^2 + 52x^4$.
2. (1) 標尺為 $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = 0$; 項為 $-2x^5 + x^6$.
 (2) 標尺為 $a_n + 2a_{n-1} + 3a_{n-2} = 0$; 項為 $31x^5 + 16x^6$.
 (3) 標尺為 $a_n + 8a_{n-1} + 3^2a_{n-2} + a_{n-3} = 0$; 項為 $23x^6 - 38x^7$.
3. (1) 母函數為 $(2-x)/(1-x-2x^2)$; 普通項為 $(2^n + (-1)^n)x^n$.
 (2) 母函數為 $(3-8x)/(1-5x+6x^2)$; 普通項為 $(2^{n+1} + 3^n)x^n$.
5. 母函數為 $(1+x+4x^2)/(1-x-5x^2-3x^3)$; 普通項為 $(3^{n+1} + (-1)^n)x^n$.
6. 母函數為 $(a - (a-d)x)/(1-2x+x^2)$.
8. 和為 $2/(1-3x+3x^2-x^3)$.

XCII. 第 565 頁

2. (1) $x < 1$, (2) $x < \infty$, (3) $x < 3$.

XCIII. 第 575 頁

1. $\frac{3}{1}, \frac{13}{4}, \frac{16}{6}, \frac{93}{29}$. 2. $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{41}{72}, \frac{426}{381}$.
3. $\frac{1}{1+5}, \dots, 4. \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6+4+2}$. 5. $\frac{1}{3+1+1+1+1+2+1+1+4}$.

6. $3 + \frac{1}{1+1+5+1+3} + \frac{1}{1+1+5+1+3} + \frac{1}{1+1+5+1+3} + \frac{1}{1+1+5+1+3}$
7. $\frac{1}{6+1+6+3+9+7} + \frac{1}{6+1+6+3+9+7} + \frac{1}{6+1+6+3+9+7} + \frac{1}{6+1+6+3+9+7} + \frac{1}{6+1+6+3+9+7}$
8. $1 + \frac{1}{3+0+4+2} + \frac{1}{3+0+4+2} + \frac{1}{3+0+4+2} + \frac{1}{3+0+4+2}$; 第四近值爲 $\frac{104}{79}$; 誤差 $< \frac{1}{79^2}$
(實際誤差爲 $1/79.177$.)
9. $\frac{1}{2+3+4+5+6} + \frac{1}{2+3+4+5+6} + \frac{1}{2+3+4+5+6} + \frac{1}{2+3+4+5+6} + \frac{1}{2+3+4+5+6}$; 第四近值爲 $\frac{13}{30}$; 誤差 $< \frac{1}{30^2}$
10. $\frac{1}{1+2+1+0+19+3+1+2+1+5} + \frac{1}{1+2+1+0+19+3+1+2+1+5} + \frac{1}{1+2+1+0+19+3+1+2+1+5} + \frac{1}{1+2+1+0+19+3+1+2+1+5} + \frac{1}{1+2+1+0+19+3+1+2+1+5}$; 第五近值爲 $\frac{3}{5}$; 誤差 $< 1/4 \cdot 18$.
11. $4 + \frac{1}{8+8+\dots} + \frac{1}{8+8+\dots} + \frac{1}{8+8+\dots} + \frac{1}{8+8+\dots} + \frac{1}{8+8+\dots}$; 第五近值爲 $\frac{17634}{4289}$; 誤差 $< \frac{1}{4289^2}$
12. $5 + \frac{1}{10+10+\dots} + \frac{1}{10+10+\dots} + \frac{1}{10+10+\dots} + \frac{1}{10+10+\dots} + \frac{1}{10+10+\dots}$; 第五近值爲 $\frac{5.525}{10301}$; 誤差 $< \frac{1}{10301^2}$
13. $2 + \frac{1}{2+4+\dots} + \frac{1}{2+4+\dots} + \frac{1}{2+4+\dots} + \frac{1}{2+4+\dots} + \frac{1}{2+4+\dots}$; 第五近值爲 $\frac{218}{89}$; 誤差 $< \frac{1}{89^2}$
14. $6 + \frac{1}{6+12+\dots} + \frac{1}{6+12+\dots} + \frac{1}{6+12+\dots} + \frac{1}{6+12+\dots} + \frac{1}{6+12+\dots}$; 第五近值爲 $\frac{33231}{5401}$; 誤差 $< \frac{1}{5401^2}$
15. $10 + \frac{1}{4+20} + \frac{1}{4+20} + \frac{1}{4+20} + \frac{1}{4+20} + \frac{1}{4+20}$
16. $\frac{1}{4+1+3+1+3+\dots} + \frac{1}{4+1+3+1+3+\dots} + \frac{1}{4+1+3+1+3+\dots} + \frac{1}{4+1+3+1+3+\dots} + \frac{1}{4+1+3+1+3+\dots}$
17. $4 + \frac{1}{2+1+3+1+2+3+\dots} + \frac{1}{2+1+3+1+2+3+\dots} + \frac{1}{2+1+3+1+2+3+\dots} + \frac{1}{2+1+3+1+2+3+\dots} + \frac{1}{2+1+3+1+2+3+\dots}$
18. $8 + \frac{1}{2+2+1+7+1+2+2+16+\dots} + \frac{1}{2+2+1+7+1+2+2+16+\dots} + \frac{1}{2+2+1+7+1+2+2+16+\dots} + \frac{1}{2+2+1+7+1+2+2+16+\dots} + \frac{1}{2+2+1+7+1+2+2+16+\dots}$
19. $5 + \frac{1}{5+10+\dots} + \frac{1}{5+10+\dots} + \frac{1}{5+10+\dots} + \frac{1}{5+10+\dots} + \frac{1}{5+10+\dots}$
20. $\frac{1}{1+1+2+1+\dots} + \frac{1}{1+1+2+1+\dots} + \frac{1}{1+1+2+1+\dots} + \frac{1}{1+1+2+1+\dots} + \frac{1}{1+1+2+1+\dots}$
21. $5 + \frac{1}{1+4+\dots} + \frac{1}{1+4+\dots} + \frac{1}{1+4+\dots} + \frac{1}{1+4+\dots} + \frac{1}{1+4+\dots}$
22. $(\sqrt{37}-4)/3$
23. $(\sqrt{37}-5)/3$
24. $\frac{3\sqrt{35}+50}{\sqrt{35}+15}$
25. $\frac{\sqrt{1808}+38}{34}$
26. $\frac{20+\sqrt{10}}{43+2\sqrt{10}}$
30. $\frac{1}{1+1+1+\dots} + \frac{1}{1+1+1+\dots} + \frac{1}{1+1+1+\dots} + \frac{1}{1+1+1+\dots} + \frac{1}{1+1+1+\dots}$
33. $57/493$; 誤差 $< 1/498^2$
34. $35/13$
35. $87/32$; 誤差 $< 1/32^2$
36. $x=516, y=324$
37. $x=1850, y=-770$
38. $x=155+323i, y=248+517i$

中華民國三十三年十月零版

高中
教本

范氏大代數 全一册

COLLEGE ALGEBRA

每册定價國幣十二元

原著者 H. S. FINE

譯者 新文化服務社編輯部

出版者 新文化服務社

印刷廠 復興書局印刷廠

總經理處 成都北新書局

成都開明書局

重慶開明圖書局

西安中西書局

分售處 全國各大書局

版權
所有
不准
翻印

四川省圖書館藏書在處舊在證圖字第五〇八號

10
600
\$ 12.00