

## Grundkurs Mathematik I

### Arbeitsblatt 17

#### Die Pausenaufgabe

AUFGABE 17.1. Ersetze im Ausdruck

QZVWXYZTXUXYSRWZ

simultan die Buchstaben  $Q$  durch  $F$ ,  $R$  durch  $A$ ,  $S$  durch  $J$ ,  $T$  durch  $N$ ,  $V$  durch  $O$ ,  $W$  durch  $H$ ,  $X$  durch  $E$ ,  $Y$  durch  $S$  und  $Z$  durch  $R$ . Handelt es sich um einen Term?

#### Übungsaufgaben

AUFGABE 17.2. Diskutiere, ob es sich bei

$$n!, \binom{n}{k}, \pi, e^u, x^y, 5^x, \sqrt{x}, \heartsuit$$

um Terme handelt.

AUFGABE 17.3. Expandiere den Term  $3a^2$ .

Bei Einsetzungsaufgaben sind grundsätzlich die entstehenden Terme zu vereinfachen.

AUFGABE 17.4. Ersetze im Term  $3x^2 + 2x + 4$  die Variable  $x$  durch den Term 5 und vereinfache den entstehenden Ausdruck.

AUFGABE 17.5. Ersetze im Term  $4x^2 + 3x + 7$  die Variable  $x$  durch den Term  $y^3 + 2y + 5$  und vereinfache den entstehenden Ausdruck.

AUFGABE 17.6. Ersetze im Term  $3x^2 + 5x + 6$  die Variable  $x$  durch den Term  $4y^2 + 2y + 3$  und vereinfache den entstehenden Ausdruck.

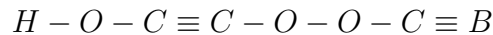
AUFGABE 17.7. Ersetze im Term

$$a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

simultan die Variablen

- (1)  $a_0$  durch 4,  $a_1$  durch 7,  $a_2$  durch 4,  $a_3$  durch 0,  $a_4$  durch 5,
- (2)  $a_0$  durch 7,  $a_1$  durch 11,  $a_2$  durch 10,  $a_3$  durch 0,  $a_4$  durch 13,
- (3)  $a_0$  durch  $b_1$ ,  $a_1$  durch  $b_3$ ,  $a_2$  durch  $b_7$ ,  $a_3$  durch  $b_1$ ,  $a_4$  durch  $b_3$ ,
- (4)  $a_0$  durch 10,  $a_1$  durch  $10^3$ ,  $a_2$  durch  $10^4$ ,  $a_3$  durch 100,  $a_4$  durch  $10^4$ .

AUFGABE 17.8. Ersetze im Molekül



jedes Sauerstoffatom ( $O$ ) durch  $O-O$  und jedes Kohlenstoffatom ( $C$ ) durch ein Siliciumatom  $Si$ .

AUFGABE 17.9. Es sei  $T(x)$  ein Term in der einen Variablen  $x$ , der ansonsten aus natürlichen Zahlen und darauf definierten Funktionssymbolen gebildet sei. Man mache sich klar, dass die Einsetzung  $a \mapsto T(a)$  eine Abbildung von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{N}$  definiert.

Die Kleine-Scheiben-Operade besteht aus Kreisen mit einem fixierten Radius, die kleinere überschneidungsfreie durchnummerierte Kreise beinhalten. Es seien  $K$  und  $L$  zwei solche Scheiben. Die Verknüpfung  $K *_i L$  (genannt die  $i$ -te *Einsetzung*), wobei  $i$  zwischen 1 und der Anzahl der inneren Kreise von  $K$  ist, erhält man, indem man den  $i$ -ten inneren Kreis von  $K$  durch den auf diese Größe geschrumpften Kreis  $L$  (ohne Drehung) ersetzt, dabei die Umrandung weglässt und die inneren Kreise neu nummeriert, und zwar so, dass die inneren Kreise von  $K$  bis zur Nummer  $i-1$  ihre Nummer behalten, die in den  $i$ -ten Kreis von  $K$  platzierten Kreise die anschließenden Nummern gemäß ihrer Reihenfolge in  $L$  bekommen und die verbleibenden inneren Kreise die anschließenden Nummern gemäß ihrer Reihenfolge in  $K$  bekommen.

Alle folgenden Einsetzungsaufgaben für die kleinen Scheiben beziehen sich auf die skizzierten Objekte.

AUFGABE 17.10. Bestimme die Einsetzungen

- (1)  $A *_1 B$ ,
- (2)  $A *_2 B$ ,
- (3)  $A *_3 B$ .

AUFGABE 17.11. Bestimme die Einsetzungen

- (1)  $A *_1 A$ ,

- (2)  $A *_2 A$ ,
- (3)  $A *_3 A$ .

AUFGABE 17.12. Bestimme die Einsetzungen

- (1)  $B *_1 A$ ,
- (2)  $A *_2 D$ ,
- (3)  $D *_3 B$ ,
- (4)  $D *_1 B$ ,
- (5)  $D *_2 B$ ,
- (6)  $D *_1 D$ ,
- (7)  $C *_1 A$ ,
- (8)  $A *_1 C$ .

AUFGABE 17.13. Bestimme die Einsetzungen

- (1)  $C *_1 C$ ,
- (2)  $(C *_1 C) *_1 C$ ,
- (3)  $((C *_1 C) *_1 C) *_1 C$ ,
- (4)  $C *_1 (C *_1 C)$ ,
- (5)  $(C *_1 C) *_1 (C *_1 C)$ .

AUFGABE 17.14. Besitzen die Einsetzungen  $*_i$  für die kleinen Scheiben ein neutrales Element?

AUFGABE 17.15. Setze in den folgenden Definitionsgleichungen den Doppelpunkt an die richtige Stelle.

$$a^3 = a \cdot a \cdot a, n! = n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, P = 4x^2 + 7x - 5$$

AUFGABE 17.16. Bestimme, von welcher Art (im Sinne der Vorlesung) die folgenden Gleichungen sind.

- (1)  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ ,
- (2)  $\prod_{i=1}^n i = n!$ ,
- (3)  $4 + 9 = 13$ ,
- (4)

$$\binom{4}{2} = 6,$$

- (5)  $x^2 = 7$ .

AUFGABE 17.17. Finde eine Lösung und eine Nichtlösung für die Gleichung

$$5x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 11x^2 + 7x + 7.$$

AUFGABE 17.18. Welche Umformungsregeln für Gleichungen kennen Sie? Handelt es sich um Äquivalenzumformungen?

AUFGABE 17.19. Bestimme sämtliche Lösungen aus  $\mathbb{N}$  für die folgenden Gleichungen.

- (1)  $2x + 3 = 5x$ ,
- (2)  $2x = x^2$ ,
- (3)  $9x = x^3$ .

AUFGABE 17.20. Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung

$$n^3 - n^2 \leq 20$$

innerhalb der natürlichen Zahlen.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 17.21. (4 Punkte)

Es sei

$$P(x) = 6x^3 + 5x^2 + 4$$

und

$$Q(y) = y^2 + 3y + 7.$$

- (1) Ersetze im Term  $Q(y)$  die Variable  $y$  durch 6. Das Ergebnis sei  $a$ .
- (2) Ersetze im Term  $P(x)$  die Variable  $x$  durch  $a$ .
- (3) Ersetze im Term  $P(x)$  die Variable  $x$  durch den Term  $Q(y)$ . Das Ergebnis sei  $R(y)$ .
- (4) Ersetze im Term  $R(y)$  die Variable  $y$  durch 6.

AUFGABE 17.22. (4 Punkte)

Bestimme die Einsetzungen

- (1)  $B *_2 A$ ,
- (2)  $D *_3 D$ ,
- (3)  $(A *_3 B) *_4 C$ ,
- (4)  $(D *_2 B) *_2 B$ .

AUFGABE 17.23. (2 Punkte)

Es seien  $v \geq u \geq 0$  natürliche Zahlen. Zeige, dass

$$x = v^2 - u^2, y = 2uv, z = u^2 + v^2$$

die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

erfüllen.

AUFGABE 17.24. (2 Punkte)

Finde in  $\mathbb{N}$  alle Lösungen der Gleichung

$$xy = 24.$$

Markiere die Lösungsmenge als Teilmenge im  $\mathbb{N}^2$ .

AUFGABE 17.25. (2 Punkte)

Es sei  $f: L \rightarrow M$  eine Abbildung. Zu jedem  $y \in M$  gehört die Gleichung

$$f(x) = y$$

in der Variablen  $x$ . Charakterisiere die Injektivität und die Surjektivität von  $f$  durch Eigenschaften des Lösungsverhalten dieser Gleichungen. Was kann man sagen, wenn  $x \in L$  fixiert ist und die Gleichung in der Variablen  $y$  betrachtet wird?



## Abbildungsverzeichnis

Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt.

5