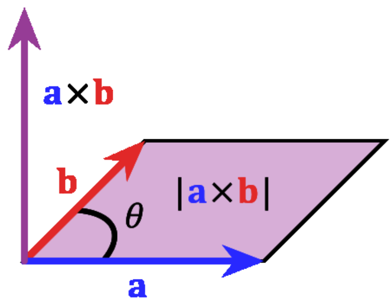
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Vorlesung 33

Das Kreuzprodukt



Eine Besonderheit im $\mathbb{R}^3$ ist das sogenannte *Kreuzprodukt*, das zu zwei gegebenen Vektoren einen dazu senkrechten Vektor berechnet.

Definition 33.1. Zu einem Körper K ist auf dem K^3 durch

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -x_1y_3 + x_3y_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

eine Verknüpfung erklärt, die das *Kreuzprodukt* heißt.

Statt Kreuzprodukt sagt man auch *Vektorprodukt*. Als Merkregel kann man

$$x \times y = \det \begin{pmatrix} e_1 & x_1 & y_1 \\ e_2 & x_2 & y_2 \\ e_3 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

verwenden, wobei e_1, e_2, e_3 die Standardvektoren sind und formal nach der ersten Spalte zu entwickeln ist. So wie es dasteht, ist das Kreuzprodukt unter Bezug auf die Standardbasis definiert.

Beispiel 33.2. Das Kreuzprodukt der beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) \\ -5 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \\ 5 \cdot 4 - 8 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -11 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Lemma 33.3. *Das Kreuzprodukt auf dem K^3 erfüllt die folgenden Eigenschaften (dabei sind $x, y, z \in K^3$ und $a, b \in K$).*

(1) *Es ist*
$$x \times y = -(y \times x).$$
(2) *Es ist*
$$(ax + by) \times z = a(x \times z) + b(y \times z)$$
und
$$z \times (ax + by) = a(z \times x) + b(z \times y).$$
(3) *Es ist*
$$x \times y = 0$$
genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

(4) *Es ist*
$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0.$$
(5) *Es ist*
$$\langle x \times y, z \rangle = \det(x\,, y\,, z),$$
wobei hier mit $\langle -, - \rangle$ die formale Auswertung im Sinne des Standardskalarproduktes gemeint ist.

(6) *Es ist*
$$\langle x, x \times y \rangle = 0 = \langle y, x \times y \rangle\,,$$
wobei hier mit $\langle -, - \rangle$ die formale Auswertung im Sinne des Standardskalarproduktes gemeint ist.

Beweis. (1) ist klar von der Definition.

(2). Es ist

$$\begin{aligned} \left(a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \\ ax_3 + by_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ax_2 + by_2)z_3 - (ax_3 + by_3)z_2 \\ -(ax_1 + by_1)z_3 + (ax_3 + by_3)z_1 \\ (ax_1 + by_1)z_2 - (ax_2 + by_2)z_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_2z_3 - ax_3z_2 \\ -ax_1z_3 + ax_3z_1 \\ ax_1z_2 - ax_2z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} by_2z_3 - by_3z_2 \\ -by_1z_3 + by_1z_3 \\ by_1z_2 - by_2z_1 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} x_2z_3 - x_3z_2 \\ -x_1z_3 + x_3z_1 \\ x_1z_2 - x_2z_1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} y_2z_3 - y_3z_2 \\ -y_1z_3 + y_1z_3 \\ y_1z_2 - y_2z_1 \end{pmatrix} \\ &= a(x \times z) + b(y \times z). \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung folgt daraus und aus (1).

(3). Wenn x und y linear abhängig sind, so kann man $x = cy$ (oder umgekehrt) schreiben. Dann ist

$$\begin{pmatrix} cy_1 \\ cy_2 \\ cy_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy_2y_3 - cy_2y_3 \\ -cy_1y_3 + cy_3y_1 \\ cy_1y_2 - cy_2y_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Wenn umgekehrt das Kreuzprodukt 0 ist, so sind alle Einträge des Vektors $\begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -x_1y_3 + x_3y_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$ gleich 0. Sei beispielsweise $y_1 \neq 0$. Wenn $x_1 = 0$, so folgt direkt

$$x_2 = x_3 = 0$$

und x wäre der Nullvektor. Sei also $x_1 \neq 0$. Dann ist $y_2 = \frac{y_1}{x_1}x_2$ und $y_3 = \frac{y_1}{x_1}x_3$ und somit ist

$$y = \frac{y_1}{x_1}x.$$

(4). Siehe Aufgabe 33.6.

(5). Es ist

$$\begin{aligned} \langle x \times y, z \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -x_1y_3 + x_3y_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= z_1x_2y_3 - z_1x_3y_2 - z_2x_1y_3 + z_2x_3y_1 + z_3x_1y_2 - z_3x_2y_1, \end{aligned}$$

was mit der Determinante wegen der Regel von Sarrus übereinstimmt.

(6) folgt aus (5). □

Der uns in (5) begegnende Ausdruck $\langle x \times y, z \rangle$, also die Determinante der drei Vektoren, wenn man diese als Spaltenvektoren auffasst, heißt auch *Spatprodukt*.

Lemma 33.4. *Es sei u_1, u_2, u_3 eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ mit*

$$\det(u_1, u_2, u_3) = 1.$$

Dann kann man das Kreuzprodukt $x \times y$ mit den Koordinaten zu dieser Basis (und den Formeln aus Definition 33.1) ausrechnen.

Beweis. Es sei

$$x = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3$$

und

$$y = d_1u_1 + d_2u_2 + d_3u_3.$$

Nach Satz 33.3 (2) ist

$$x \times y = (c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3) \times (d_1u_1 + d_2u_2 + d_3u_3) = \sum_{1 \leq i,j \leq 3} c_id_j\,(u_i \times u_j)\,.$$

Nach Satz 33.3 (3) ist
$$u_i \times u_i = 0$$
und nach Satz 33.3 (1) ist
$$u_i \times u_j = -u_j \times u_i.$$
Nach Satz 33.3 (6) steht $u_1 \times u_2$ senkrecht auf u_1 und u_2, daher ist
$$u_1 \times u_2 = \lambda u_3$$
mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$, da diese Orthogonalitätsbedingung eine Gerade definiert. Wegen Satz 33.3 (5) und der Voraussetzung ergibt sich
$$\lambda = \langle \lambda u_3, u_3 \rangle = \langle u_1 \times u_2, u_3 \rangle = \det (u_1,\, u_2,\, u_3) = 1,$$
also ist
$$u_1 \times u_2 = u_3.$$
Ebenso ergibt sich, unter Verwendung von Lemma 17.2 (3), $u_1 \times u_3 = -u_2$ und $u_2 \times u_3 = u_1$. Somit ist insgesamt
$$\begin{aligned} x \times y &= \sum_{1 \leq i,j \leq 3} c_i d_j \,(u_i \times u_j) \\ &= \sum_{i<j} (c_i d_j - c_j d_i)\,(u_i \times u_j) \\ &= (c_1 d_2 - c_2 d_1) u_3 - (c_1 d_3 - c_3 d_1) u_2 + (c_2 d_3 - c_3 d_2) u_1 \end{aligned}$$
und dies ist die Behauptung. □

Isometrien

Definition 33.5. Es seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$ mit Skalarprodukten und
$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$
eine lineare Abbildung. Dann heißt φ eine *Isometrie*, wenn für alle $v, w \in V$ gilt:
$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Eine Isometrie ist stets injektiv. Bei
$$\mathbb{K} = \mathbb{C}$$
spricht man auch von *unitären Abbildungen*. In Abgrenzung zu affinen Isometrien, die wir später behandeln werden, spricht man auch von *linearen Isometrien*.

Lemma 33.6. *Es seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $\varphi \colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *φ ist eine Isometrie.*
(2) *Für alle $u, v \in V$ ist $d(\varphi(u), \varphi(v)) = d(u, v)$.*
(3) *Für alle $v \in V$ ist $|| \varphi(v) || = || v ||$.*

(4) *Für alle* $v \in V$ *mit* $|| v || = 1$ *ist auch* $|| \varphi(v) || = 1$.

Beweis. Die Richtungen (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) und (3) $\Rightarrow$ (4) sind Einschränkungen. (4) $\Rightarrow$ (3). Für den Nullvektor ist die Aussage (3) klar, sei also $v \neq 0$. Dann besitzt $\frac{v}{||v||}$ die Norm 1 und wegen

$$\varphi(v) = \varphi\left(|| v || \frac{v}{|| v ||} \right) = || v || \, \varphi\left(\frac{v}{|| v ||} \right)$$

ist

$$|| \varphi(v) || = || v || \, .$$

(3) $\Rightarrow$ (1) folgt aus Lemma 31.10. ☐

Lemma 33.7. *Seien* V *und* W *euklidische Vektorräume und sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(1) φ *ist eine Isometrie.*
(2) *Für jede Orthonormalbasis* $u_i, i = 1, \ldots, n$, *von* V *ist* $\varphi(u_i), i = 1, \ldots, n$, *Teil einer Orthonormalbasis von* W.
(3) *Es gibt eine Orthonormalbasis* $u_i, i = 1, \ldots, n$, *von* V *derart, dass* $\varphi(u_i), i = 1, \ldots, n$, *Teil einer Orthonormalbasis von* W *ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 33.8. ☐

Die Menge der Vektoren mit Norm 1 in einem euklidischen Vektorraum nennt man auch die Sphäre. Eine Isometrie lässt sich also dadurch charakterisieren, dass unter ihr die Sphäre in die Sphäre abgebildet wird.

Satz 33.8. *Zu jedem euklidischen Vektorraum* V *gibt es eine bijektive Isometrie*

$$\varphi \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow V,$$

wobei $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standardskalarprodukt versehen sei.*

Beweis. Es sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Orthonormalbasis von V und sei

$$\varphi \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

die durch

$$\varphi(e_i) = u_i$$

festgelegte lineare Abbildung. Nach Lemma 33.7 (3) ist dies eine Isometrie. ☐

Isometrien auf einem euklidischen Vektorraum

Wir besprechen nun Isometrien von einem euklidischen Vektorraum in sich selbst. Diese sind stets bijektiv. Bezüglich einer jeden Orthonormalbasis von V werden sie folgendermaßen beschrieben.

Lemma 33.9. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $u_1, \ldots, u_n$ eine Orthonormalbasis von V. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und M die beschreibende Matrix zu φ bezüglich der gegeben Basis. Dann ist φ genau dann eine Isometrie, wenn

$$M^{\text{tr}} M = E_n$$

ist.

Beweis. Sei zunächst φ eine Isometrie. Dann ist $v_i = \varphi(u_i)$ eine Orthonormalbasis nach Lemma 33.7, und diese bilden die Spalten der beschreibenden Matrix M. Daher ist unter Verwendung von Aufgabe 33.13

$$v_i^{\text{tr}} v_j = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Als Matrixgleichung bedeutet dies

$$M^{\text{tr}} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Argument rückwärts gelesen ergibt die Umkehrung. $\square$

Die Menge der Isometrien auf einem euklidischen Vektorraum bildet eine Gruppe, und zwar eine Untergruppe der Gruppe aller bijektiven linearen Abbildungen. Wir erinnern kurz an die allgemeine und die spezielle lineare Gruppe.

Zu einem Körper K und $n \in \mathbb{N}_+$ nennt man die Menge aller invertierbarer $n \times n$-Matrizen die *allgemeine lineare Gruppe* über K. Sie wird mit $\mathrm{GL}_n(K)$ bezeichnet.

Zu einem Körper K und $n \in \mathbb{N}_+$ nennt man die Menge aller invertierbarer $n \times n$-Matrizen mit

$$\det M = 1$$

die *spezielle lineare Gruppe* über K. Sie wird mit $\mathrm{SL}_n(K)$ bezeichnet.

Definition 33.10. Es sei K ein Körper und E_n die Einheitsmatrix der Länge n. Eine Matrix $M \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit

$$M^{\text{tr}} M = E_n$$

heißt *orthogonale Matrix*. Die Menge aller orthogonalen Matrizen heißt *orthogonale Gruppe*, sie wird mit

$$\mathrm{O}_n(K) = \left\{ M \in \mathrm{GL}_n(K) \mid M^{\text{tr}} M = E_n \right\}$$

bezeichnet.

Definition 33.11. Eine Matrix $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit

$$\overline{M}^{\mathrm{tr}} M = E_n$$

heißt *unitäre Matrix*. Die Menge aller unitären Matrizen heißt *unitäre Gruppe*, sie wird mit

$$\mathrm{U}_n = \left\{ M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \,|\, \overline{M}^{\mathrm{tr}} M = E_n \right\}$$

bezeichnet.

Eigenwerte bei Isometrien

Satz 33.12. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Isometrie. Dann besitzt jeder Eigenwert von φ den Betrag 1. Bei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind nur die Eigenwerte 1 und -1 möglich.

Beweis. Es sei $\varphi(v) = \lambda v$ mit $v \neq 0$, d.h. v ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$. Wegen der Isometrieeigenschaft gilt

$$|| v || = || \varphi(v) || = || \lambda v || = |\lambda| \cdot || v || \,.$$

Wegen $|| v || \neq 0$ folgt daraus $|\lambda| = 1$. Im Reellen bedeutet dies $\lambda = \pm 1$. □

Im Allgemeinen muss eine Isometrie keine Eigenwerte besitzen, bei ungerader Dimension allerdings schon, siehe dazu die nächste Vorlesung.

Lemma 33.13. *Die Determinante einer linearen Isometrie*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

auf einem euklidischen Vektorraum V ist 1 oder -1.

Beweis. Nach Lemma 33.9 ist

$$M^{\mathrm{tr}} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Somit folgt die Aussage aus dem Determinantenmultiplikationssatz und aus Satz 17.5. □

Eigentliche Isometrien

Definition 33.14. Eine Isometrie auf einem euklidischen Vektorraum heißt *eigentlich*, wenn ihre Determinante gleich 1 ist.

Definition 33.15. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Eine orthogonale $n \times n$-Matrix mit

$$\det M = 1$$

heißt *spezielle orthogonale Matrix*. Die Menge aller speziellen orthogonalen Matrizen heißt *spezielle orthogonale Gruppe*, sie wird mit $\mathrm{SO}_n(K)$ bezeichnet.

Definition 33.16. Eine unitäre $n \times n$-Matrix $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit

$$\det M = 1$$

heißt *spezielle unitäre Matrix*. Die Menge aller speziellen unitären Matrizen heißt *spezielle unitäre Gruppe*, sie wird mit SU_n bezeichnet.

Abbildungsverzeichnis