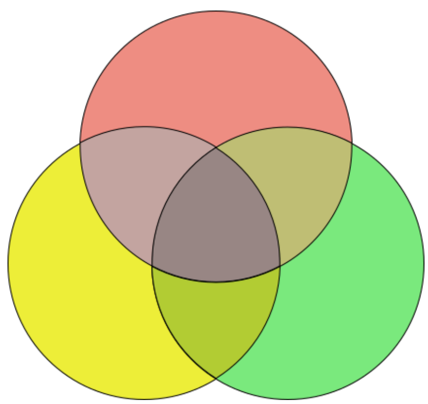
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2024/2025**

Lineare Algebra

Arbeitsblatt 1

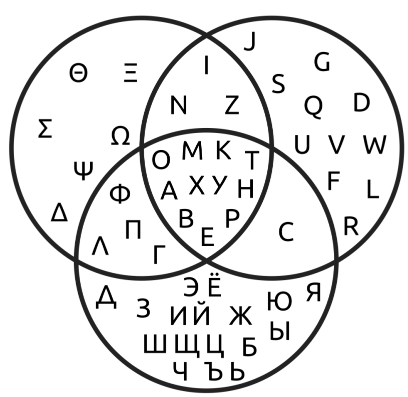
Die Pausenaufgabe

Aufgabe 1.1. Skizziere ein Mengendiagramm, das zu vier Mengen alle möglichen Schnittmengen darstellt.



Ein abstraktes und

Übungsaufgaben



Aufgabe 1.2.

ein konkretes Mengendiagramm.

Es sei LA die Menge der Großbuchstaben des lateinischen Alphabets, GA die Menge der Großbuchstaben des griechischen Alphabets und RA die Menge der Großbuchstaben des russischen Alphabets. Bestimme die folgenden Mengen.

(1) $GA \setminus RA$.
(2) $(LA \cap GA) \cup (LA \cap RA)$.
(3) $RA \setminus (GA \cup RA)$.
(4) $RA \setminus (GA \cup LA)$.
(5) $(RA \setminus GA) \cap ((LA \cup GA) \setminus (GA \cap RA))$.

Aufgabe 1.3. Bestimme für die Mengen

$$M = \{a, b, c, d, e\},\ N = \{a, c, e\},\ P = \{b\},\ R = \{b, d, e, f\}$$

die Mengen

(1) $M \cap N$,
(2) $M \cap N \cap P \cap R$,
(3) $M \cup R$,
(4) $(N \cup P) \cap R$,
(5) $N \setminus R$,
(6) $(M \cup P) \setminus (R \setminus N)$,
(7) $((P \cup R) \cap N) \cap R$,
(8) $(R \setminus P) \cap (M \setminus N)$.

Aufgabe 1.4. Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x, y) \mid x = 5\}$,
(2) $\{(x, y) \mid x \geq 4 \text{ und } y = 3\}$,
(3) $\{(x, y) \mid y^2 \geq 2\}$,
(4) $\{(x, y) \mid |x| = 3 \text{ und } |y| \leq 2\}$,
(5) $\{(x, y) \mid 3x \geq y \text{ und } 5x \leq 2y\}$,
(6) $\{(x, y) \mid xy = 0\}$,
(7) $\{(x, y) \mid xy = 1\}$,
(8) $\{(x, y) \mid xy \geq 1 \text{ und } y \geq x^3\}$,
(9) $\{(x, y) \mid 0 = 0\}$,
(10) $\{(x, y) \mid 0 = 1\}$.

Welche geometrische Gestalt haben die Mengen, in deren Beschreibung nur eine (oder gar keine) Variable vorkommt?

Aufgabe 1.5.*

Es seien A, B und C Mengen. Beweise die Identität

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Aufgabe 1.6. Es seien A, B und C Mengen. Man beweise die folgenden Identitäten.

(1)
$$A \cup \emptyset = A,$$
(2)
$$A \cap \emptyset = \emptyset,$$
(3)
$$A \cap B = B \cap A,$$
(4)
$$A \cup B = B \cup A,$$
(5)
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$$
(6)
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
(7)
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
(8)
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
(9)
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Aufgabe 1.7. Es seien M und N disjunkte Mengen und $x \in M$. Zeige, dass auch $M \setminus \{x\}$ und $N \cup \{x\}$ disjunkt sind und dass

$$M \cup N = (M \setminus \{x\}) \cup (N \cup \{x\})$$

gilt.

Aufgabe 1.8.

(1) Skizziere die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - 7y = 3\}$ und die Menge $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 5\}$.
(2) Bestimme den Durchschnitt $M \cap N$ zeichnerisch und rechnerisch.

Aufgabe 1.9. Wir betrachten die beiden Mengen

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + 2y - 6z = 0 \right\}$$

und

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 7x - 5y - 4z = 0 \right\}.$$

Finde eine Beschreibung für den Durchschnitt

$$G := E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + 2y - 6z = 0 \text{ und } 7x - 5y - 4z = 0 \right\}$$

wie in Beispiel *****.

Aufgabe 1.10. (1) Zeige, dass die Menge

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 3x + 5y = 6 \right\}$$

nicht leer ist.

(2) Zeige, dass die Menge

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 6x + 9y = 5 \right\}$$

leer ist.

Aufgabe 1.11. Beschreibe für je zwei (einschließlich dem Fall, dass das Produkt mit sich selbst genommen wird) der folgenden geometrischen Mengen ihre Produktmenge.

(1) Eine Kreislinie K.
(2) Ein Geradenstück I.
(3) Eine Gerade G.
(4) Eine Parabel P.

Welche Produktmengen lassen sich als eine Teilmenge im Raum realisieren, welche nicht?

Aufgabe 1.12.*

Es seien M und N Mengen und seien $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$ Teilmengen. Zeige die Gleichheit

$$(A \times N) \cap (M \times B) = A \times B.$$

Aufgabe 1.13. Es seien A und B disjunkte Mengen und C eine weitere Menge. Zeige die Gleichheit

$$C \times (A \uplus B) = (C \times A) \uplus (C \times B).$$

Aufgabe 1.14. Es seien A und B disjunkte Mengen. Zeige die Gleichheit

$$(A \uplus B) \times (A \uplus B) = (A \times A) \uplus (A \times B) \uplus (B \times A) \uplus (B \times B).$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.15. (2 Punkte)

Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x, y) \mid |2x| = 5 \text{ und } |y| \geq 3\}$,
(2) $\{(x, y) \mid -3x \geq 2y \text{ und } 4x \leq -5y\}$,
(3) $\{(x, y) \mid y^2 - y + 1 \leq 4\}$,
(4) $\{(x, y) \mid xy = 2 \text{ oder } x^2 + y^2 = 1\}$.

Aufgabe 1.16. (2 (1+1) Punkte)

(1) Skizziere die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -5x + 2y = 6\}$ und die Menge $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 7x - 5y = 4\}$.
(2) Bestimme den Durchschnitt $M \cap N$ zeichnerisch und rechnerisch.

Aufgabe 1.17. (1 Punkt)

Gilt für die Vereinigung von Mengen die „Abziehregel“, d.h. kann man aus $A \cup C = B \cup C$ auf $A = B$ schließen?

Aufgabe 1.18. (5 Punkte)

Beweise die mengentheoretischen Fassungen einiger aristotelischer Syllogismen. Dabei bezeichnen A, B, C Mengen.

(1) Modus Barbara: Aus $B \subseteq A$ und $C \subseteq B$ folgt $C \subseteq A$.
(2) Modus Celarent: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \subseteq B$ folgt $C \cap A = \emptyset$.
(3) Modus Darii: Aus $B \subseteq A$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \cap A \neq \emptyset$.
(4) Modus Ferio: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \not\subseteq A$.
(5) Modus Baroco: Aus $B \subseteq A$ und $B \not\subseteq C$ folgt $A \not\subseteq C$.

Aufgabe 1.19. (2 Punkte)

Es seien M und N Mengen und seien $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B_1, B_2 \subseteq N$ Teilmengen. Zeige die Gleichheit

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

Aufgabe 1.20. (4 Punkte)

Es seien A und B Mengen. Zeige, dass die folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind.

(1) $A \subseteq B$,
(2) $A \cap B = A$,
(3) $A \cup B = B$,
(4) $A \setminus B = \emptyset$,

(5) Es gibt eine Menge C mit $B = A \cup C$,
(6) Es gibt eine Menge D mit $A = B \cap D$.

Abbildungsverzeichnis