Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2023/24**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 14

Übungsaufgaben

Aufgabe 14.1. Skizziere das Steigungsdreieck und die Sekante zur Funktion

$$f(x) = x^2 - 3x + 5$$

in den Punkten 1 und 3.

Aufgabe 14.2. Bestimme die affin-lineare Abbildung

$$\alpha \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

deren Graph durch die beiden Punkte $(2,5)$ und $(4,9)$ verläuft.

Aufgabe 14.3.*

Bestimme direkt (ohne Verwendung von Ableitungsregeln) die Ableitung der Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3,$$

in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 14.4. Zeige, dass die reelle Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto |x|\,,$$

im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 14.5. Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion, die im Punkt x differenzierbar sei. Zeige, dass f auch im Punkt $-x$ differenzierbar ist und dass die Beziehung

$$f'(-x) = -f'(x)$$

gilt.

Die folgende Aufgabe löse man sowohl direkt als auch mittels der Ableitungsregeln.

Aufgabe 14.6. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^n,$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 14.7. Zeige, dass ein Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$ genau dann einen Grad $\leq d$ besitzt (oder $P = 0$ ist), wenn die $(d+1)$-te Ableitung von P das Nullpolynom ist.

Aufgabe 14.8. Bestimme zu einem Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

die lineare Approximation (einschließlich der Restfunktion $r(x)$) im Nullpunkt.

Aufgabe 14.9. Zeige über eine Betrachtung von Funktionslimiten, dass eine in einem Punkt $a \in D$ differenzierbare Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ in diesem Punkt insbesondere stetig ist.

Aufgabe 14.10.*

Beweise die Produktregel für differenzierbare Funktionen über die Funktionslimiten für die Differenzenquotienten.

Aufgabe 14.11. Zeige, dass die Exponentialfunktion $\exp x$ in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimme die Ableitung.

Man verwende die Definition über den Funktionslimes der Differenzenquotienten. Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion hilft.

Aufgabe 14.12. Bestimme zur Exponentialfunktion $\exp x$ die lineare Approximation (einschließlich der Restfunktion $r(x)$) im Nullpunkt.

Aufgabe 14.13. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^n$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 14.14. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \frac{x^2+1}{x^3}.$$

Aufgabe 14.15. Zeige, dass die Ableitung einer rationalen Funktion wieder eine rationale Funktion ist.

Aufgabe 14.16.*

Es seien

$$g, h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

differenzierbare Funktionen und

$$f(x) := \frac{g(x)}{h(x)^n}$$

mit $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass man die Ableitung von f als einen Bruch mit $h^{n+1}(x)$ im Nenner schreiben kann.

Aufgabe 14.17.*

Es seien

$$g_1, g_2, \ldots, g_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

differenzierbare Funktionen. Beweise durch Induktion über n die Beziehung

$$\left(\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n}\right)' = \frac{-1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \left(\frac{g_1'}{g_1} + \frac{g_2'}{g_2} + \cdots + \frac{g_n'}{g_n}\right).$$

Aufgabe 14.18. Es sei $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$ und $g(y) = y^2 - y + 2$. Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$ direkt und mittels der Kettenregel.

Aufgabe 14.19.*

Es sei $f(x) = \frac{x^2-3}{x+2}$ und $g(y) = \frac{y+4}{y^2-5}$. Wir betrachten die Hintereinanderschaltung $h(x) := g(f(x))$.

(1) Berechne h (das Ergebnis muss als eine rationale Funktion vorliegen).
(2) Berechne die Ableitung von h mit Hilfe von Teil 1.
(3) Berechne die Ableitung von h mit Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe 14.20.*

Es seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen und sei

$$h(x) = (g(f(x)))^2 f(g(x)).$$

a) Drücke die Ableitung h' mit den Ableitungen von f und g aus.

b) Es sei nun

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ und } g(x) = x + 2\,.$$

Berechne $h'(x)$ auf zwei verschiedene Arten, einerseits über $h(x)$ und andererseits über die Formel aus Teil a).

Aufgabe 14.21. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^{\frac{1}{n}},$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe 14.22.*

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine bijektive differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und der Umkehrfunktion f^{-1}. Was ist an folgendem „Beweis“ für die Ableitung der Umkehrfunktion nicht korrekt?

Es ist

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) \;=\; y.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir durch beidseitiges Ableiten die Gleichung

$$f'\left(f^{-1}(y)\right)\left(f^{-1}\right)'(y) \;=\; 1.$$

Also ist

$$\left(f^{-1}\right)'(y) \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Aufgabe 14.23.*

Man gebe ein Beispiel einer stetigen, nicht differenzierbaren Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft, dass die Funktion $x \mapsto f(|x|)$ differenzierbar ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.24. (2 Punkte)

Bestimme die affin-lineare Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

deren Graph durch die beiden Punkte $(-2, 3)$ und $(5, -7)$ verläuft.

Aufgabe 14.25. (2 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade differenzierbare Funktion. Zeige, dass die Ableitung f' gerade ist.

Aufgabe 14.26. (3 Punkte)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und seien

$$f_i\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n,$$

differenzierbare Funktionen. Beweise die Formel

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i \right)' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \cdot \prod_{j=1, j \neq i}^{n} f_j .$$

Aufgabe 14.27. (4 Punkte)

Bestimme die Tangenten an den Graphen zur Funktion $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, die parallel zu $y = x$ sind.

Aufgabe 14.28. (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x + 2},$$

wobei D die Menge sei, auf der das Nennerpolynom nicht verschwindet.

Aufgabe 14.29. (7 (2+2+3) Punkte)

Es sei $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{x+1}$ und $g(y) = \frac{y-2}{y^2+3}$ und es sei $h(x) := g(f(x))$ die Hintereinanderschaltung.

(1) Berechne h (das Ergebnis muss als eine rationale Funktion vorliegen).
(2) Berechne die Ableitung von h mit Hilfe von Teil 1.
(3) Berechne die Ableitung von h mit Hilfe der Kettenregel.

Abbildungsverzeichnis