$$\sqrt{\wp(2\omega_1 v)-e_i}=\frac{1}{2\omega_1}\frac{1+\dfrac{\vartheta''_{i+1}}{\vartheta_{i+1}}\dfrac{v^2}{2}+\cdots\cdots}{v+\dfrac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\dfrac{v^3}{6}+\cdots\cdots}$$

$$=\frac{1}{2\omega_1 v}\left\{1+\left(\frac{\vartheta''_{i+1}}{\vartheta_{i+1}}-\frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)\frac{v^2}{2}+\cdots\right\}.$$

故ニ此右邊ヲ平方スレバ，ソノ常數項ハ $-e_i$ ニ等シカルベキナリ，依ツテ

$$e_i=\frac{1}{4\omega_1^2}\left(\frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}-\frac{\vartheta''_{i+1}}{\vartheta_{i+1}}\right) \tag{8}$$

ナル結果ヲ得。更ニ前節 (11) ニヨリテ之ヲ書キ直セバ，

$$e_i=\frac{i\pi}{\omega_1^2}\left\{\frac{1}{3}\frac{d}{d\tau}\log\vartheta_1'-\frac{d}{d\tau}\log\vartheta_{i+1}\right\} \tag{9}$$

トモナル。

例題 1. (1) ノ第一式ヨリ (5) ヲ得タル方法ニナラヒ，(1) ノ第二式以下ヲ同樣ニ所理シテ，次ノ公式ヲ誘導セヨ。

$$\wp(u+\omega_1)=\left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left\{-4\eta_1\omega_1+\frac{\pi^2}{\cos^2\pi v}-8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n nh^{2n}}{1-h^{2n}}\cos 2n\pi v\right\}$$

$$\wp(u+\omega_2)=\left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left\{-4\eta_1\omega_1-8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n nh^n}{1-h^{2n}}\cos 2n\pi v\right\},$$

$$\wp(u+\omega_3)=\left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left\{-4\eta_1\omega_1-8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nh^n}{1-h^{2n}}\cos 2n\pi v\right\}.$$

例題 2. 前題ノ結果ニヨリ，e_1, e_2, e_3 ヲ計算スベキ級數ヲ作レ。

例題 3. $\wp(u), \wp'(u)$ ヲ ϑ 函數ニテ表シタル次ノ公式ヲ證明セヨ。

(1)　$\wp(u)=e_i+\dfrac{1}{4\omega_1{}^2}\left(\dfrac{\vartheta'_1}{\vartheta_{i+1}}\right)^2\left\{\dfrac{\vartheta_{i+1}(v)}{\vartheta_1(v)}\right\}^2,\qquad i=1,2,3\quad(\vartheta_4=\vartheta_0)$

(2)　$\wp'(u)=-\dfrac{\pi\vartheta'_1{}^2}{4\omega_1{}^3}\dfrac{\vartheta_0(v)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)}{\vartheta_1(v)^3}.$

86.　Jacobi ノ諸函數

Sn, cn, dn 函數ハ σ 函數ニヨリテ表サル (第 81 節)，從ツテマタ ϑ 函數ニヨリテモ表サルベシ (第 84 節)，即チ

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn} w&=\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}=\pi\vartheta_3^2\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1'}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}\\&=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)},\\ \operatorname{cn} w&=\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)},\qquad (w=\sqrt{e_1-e_3}\,u)\\ \operatorname{dn} w&=\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

又第 81 節 (12) 及ビ第 84 節 (21) ニヨリ，

$$\left.\begin{aligned}k^2&=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=\frac{\vartheta_2{}^4}{\vartheta_3{}^4},\\ k'^2&=1-k^2=\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}=\frac{\vartheta_0{}^4}{\vartheta_3{}^4}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(2) ニヨリテ (1) ヲ書キ直セバ，

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn} w&=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)},\\ \operatorname{cn} w&=\sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)},\\ \operatorname{dn} w&=\sqrt{k'}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

サテ k ガ與ヘラレタルトキハ，之ヨリ K 及ビ K′ ヲ計算シ (第 68 節參照)，從ツテ

$$\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{iK'}{K}$$

ノ値ヲ知リ得。モシマタ逆ニ τ ガ既知ナルトキ，之ヨリ K ヲ知ラントセバ次ノ式ニヨルベシ。

$$\begin{aligned} K &= \omega_1\sqrt{e_1-e_3} = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2 \\ &= \frac{\pi}{2}(1+2h+2h^4+2h^9+\cdots\cdots)^2. \qquad (4) \end{aligned}$$

Legendre-Jacobi ノ標準形ニ於ケル第二種及ビ第三種ノ楕圓積分卽チ

$$\int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz \quad 及ビ \quad \int_0^z \frac{dz}{(1+nz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

ニ於テ，今

$$z = \operatorname{sn} u$$

ト置クトキハ，ソレゾレ

$$\int_0^u \operatorname{dn}^2 u\,du \quad 及ビ \quad \int_0^u \frac{du}{1+n\operatorname{sn}^2 u}$$

トナル。コノ後者ハ，之ヨリ u ヲ減ジ，$n = -k^2\operatorname{sn}^2 a$ (a ハ常數) ト置キ，且適當ナル常數ヲ乘ズレバ，

$$k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u\,du}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 u}$$

トナルベシ。

Jacobi ハコレラニ關聯シテ次ノ諸函數ヲ定義セリ。

$$\left.\begin{aligned} E(u) &= \int_0^u \operatorname{dn}^2 u\,du, \\ Z(u) &= E(u) - \frac{E(K)}{K}u, \\ \Omega(u) &= \exp\left\{\int_0^u E(u)du\right\}, \\ \Theta(u) &= \Theta(0)\exp\left\{\int_0^u Z(u)du\right\},\ \Theta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}, \\ \Theta_1(u) &= \Theta(u+K), \\ H(u) &= \frac{1}{i}\exp\left(\frac{2u+iK'}{4K}\pi i\right)\Theta(u+iK'), \\ H_1(u) &= H(u+K), \\ \Pi(u,a) &= k^2\operatorname{sn} a\operatorname{cn} a\operatorname{dn} a\int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u\,du}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 u} \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)} + uE(a).^* \end{aligned}\right\} (5)$$

コレラノ諸函數ト σ 及ビ ϑ トノ關係ヲ求ムルタメニ，先ヅ第 77 節 (4) ニヨレバ，

$$\wp(u+\omega_3) - e_3 = \frac{3e_3^2 - \frac{1}{4}g_2}{\wp(u)-e_3} = \frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{\wp(u)-e_3},$$

故ニ
$$\frac{\wp(u+\omega_3)-e_3}{e_1-e_3} = \frac{e_2-e_3}{\wp(u)-e_3} = k^2\operatorname{sn}^2 w$$

ナル關係ヲ得。從ツテ

---

* 之ヲ證明センニハ，本章ノ問題 14 ニアル式ヲ u ニ關シテ積分スベシ。

$$\mathrm{E}(w)=\int_0^w (1-k^2\mathrm{sn}^2 w)dw = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^u \left\{e_1-\wp(u+\omega_3)\right\}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\left\{\zeta(u+\omega_3)+e_1u-\eta_3\right\}.$$

然ルニ

$$\zeta(u+\omega_3)=\frac{\sigma'(u+\omega_3)}{\sigma(u+\omega_3)}=\frac{\sigma_3'(u)}{\sigma_3(u)}+\eta_3$$

ナルコトハ $\sigma_3(u)$ ノ定義ヨリ容易ニ證明セラル。故ニ結局

$$\mathrm{E}(w)=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\left\{\frac{\sigma_3'(u)}{\sigma_3(u)}+e_1u\right\} \tag{6}$$

ナルコトヲ知ル」

從ツテ之ヨリ逐次ニ下ノ關係ヲ得ベシ。

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Z}(w)&=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\left\{\frac{\sigma_3'(u)}{\sigma_3(u)}-\frac{\eta_1}{\omega_1}u\right\},\\
\Omega(w)&=e^{\frac{1}{2}e_1u^2}\sigma_3(u),\\
\Theta(w)&=\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta_1}{\omega_1}u^2}\sigma_3(u)=\vartheta_0(v),\\
\Theta_1(w)&=\vartheta_3(v),\\
\mathrm{H}(w)&=\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[8]{\mathrm{G}}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta_1}{\omega_1}u^2}\sigma(u)=\vartheta_1(v),\\
\mathrm{H}_1(w)&=\vartheta_2(v),\\
\Pi(w,\alpha)&=\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_3(u-a)}{\sigma_3(u+a)}+\frac{\sigma_3'(a)}{\sigma_3(a)}u.\\
&(\text{但シ}\ \alpha=a\sqrt{e_1-e_3}\ \text{トス。})
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

例題 1. Θ_1 ト σ_2 トノ關係，及ビ H_1 ト σ_1 トノ關係ヲ求メヨ。

例題 2. 次ノ式ヲ證明セヨ。

$$\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}=\frac{2h+2h^9+2h^{25}+\cdots\cdots}{1+2h^4+2h^{16}+\cdots\cdots}.$$

第十一章ノ問題

1. 第二種楕圓函數 $f(u)$ ニツイテ，

$$f(u+2\omega_i)=\mu_i f(u),\qquad i=1,3$$

ナル關係ガ成立シ，ココニ

$$\frac{\log\mu_1}{\log\mu_3}\neq\frac{\omega_1}{\omega_3},\qquad \mu_1\neq 1,\qquad \mu_3\neq 1$$

ニシテ，且一ツノ週期平行四邊形內ニテ到ル所正則ナルトキハ，實ハ $f(u)=0$ ナルコトヲ證明セヨ。

2. 第三種楕圓函數 $f(u)$ ニツイテ，

$$f(u+2\omega_k)=e^{-2\pi i a_k(u+\omega_k)-\pi i b_k}f(u),\qquad k=1,3$$

ナル關係ガ成立スルトキハ，ソノ位數ハ

$$\mathrm{N}=2(a_3\omega_1-a_1\omega_3)$$

ニ等シク，又一ツノ週期平行四邊形內ニ於ケル零點ノ和ヨリ極ノ和ヲ減ジタル差ヲ M トスレバ，

$$\mathrm{M}\equiv\mathrm{N}(\omega_1+\omega_3)+b_1\omega_3-b_3\omega_1\qquad(\mathrm{mod.}\ 2\omega_1,\ 2\omega_3)$$

ナルコトヲ證明セヨ。

3. 次ノ式ヲ證明セヨ。

$$e_1=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2(\vartheta_3^4+\vartheta_0^4),$$

$$e_2=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2(\vartheta_2^4-\vartheta_0^4),$$

$$e_3=-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4),$$

$$g_2=\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^4(\vartheta_2^8+\vartheta_3^8+\vartheta_0^8).$$

4. 次ノ式ヲ證明セヨ。

$$\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}=\frac{2}{\sqrt[4]{e_1-e_3}-\sqrt[4]{e_1-e_2}}(2h+2h^9+2h^{25}+\cdots\cdots),$$

$$\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_1-e_2}}(1+2h^4+2h^{16}+\cdots\cdots).$$

5. 週期及ビ e_3 ノ値ヲ知レリトスレバ η_1 ハ次ノ式ニヨリテモ計算セラルベシ,

$$\eta_1 = -e_3\omega_1 - \frac{1}{4\omega_1}\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}$$
$$= -e_3\omega_1 - \frac{2\pi^2}{\omega_1}\frac{h-4h^4+9h^9-\cdots\cdots}{1-2h+2h^4-2h^9+\cdots\cdots}.$$

之ヲ證明セヨ。

6. ϑ ハ v 及ビ τ ノ函數ナルガ故ニ, 之ヲ $\vartheta(v|\tau)$ ト書クコトトスレバ,

$$\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} = \frac{\vartheta_2(0|4\tau)}{\vartheta_3(0|4\tau)}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

7. $k^2=\lambda$ ト置ケバ,

$$\lambda = 16h(1-8h+44h^2-192h^3+\cdots\cdots),$$

$$h = \frac{\lambda}{16}+8\left(\frac{\lambda}{16}\right)^2+84\left(\frac{\lambda}{16}\right)^3+992\left(\frac{\lambda}{16}\right)^4+\cdots\cdots$$

ナルコトヲ證明セヨ。

8. 次ノ關係ヲ證明セヨ。

$$\vartheta_0(v)\vartheta_1'(v)-\vartheta_1(v)\vartheta_0'(v) = \pi\vartheta_0{}^2\vartheta_2(v)\vartheta_3(v).$$

9. 次ノ關係ヲ證明セヨ。

(1)　$\vartheta_0{}^2\vartheta_0(u+v)\vartheta_0(u-v) = \vartheta_0(u)^2\vartheta_0(v)^2-\vartheta_1(u)^2\vartheta_1(v)^2$
$$= \vartheta_3(u)^2\vartheta_3(v)^2-\vartheta_2(u)^2\vartheta_2(v)^2,$$

(2)　$\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3(u+v)\vartheta_1(u-v)$
$$= \vartheta_1(u)\vartheta_3(u)\vartheta_0(v)\vartheta_2(v)-\vartheta_0(u)\vartheta_2(u)\vartheta_1(v)\vartheta_3(v)$$

10. 次ノ式ヲ證明セヨ。

$$\Theta(0)^2\Theta(u+v)\Theta(u-v) = \Theta(u)^2\Theta(v)^2-\mathrm{H}(u)^2\mathrm{H}(v)^2.$$

11. 次ノ式ヲ證明セヨ。

$$\frac{\Theta(0)^2\Theta(u+v)\Theta(u-v)}{\Theta(u)^2\Theta(v)^2} = 1-k^2\,\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2v.$$

12. 前題ノ式ヨリ對數微分法ニヨリテ次ノ式ヲ誘導セヨ。

(1)　$\mathrm{Z}(u+v) = \mathrm{Z}(u)+\mathrm{Z}(v)-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v),$

(2)　$\mathrm{E}(u+v) = \mathrm{E}(u)+\mathrm{E}(v)-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v).$

(之ヲ **Z 及ビ E ノ加法定理** トイフ。)

13. 次ノ式ヲ證明セヨ。

(1)　$2\frac{\partial}{\partial u}\Pi(u,a) = k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\{\mathrm{sn}(u+a)+\mathrm{sn}(u-a)\},$

(2)　$2\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial a}\Pi(u,a) = 2\,\mathrm{dn}^2a-\mathrm{dn}^2(u+a)-\mathrm{dn}^2(u-a).$

14. 前題ノ (2) ヲ積分シテ

$$\frac{\partial}{\partial u}\Pi(u,a) = \mathrm{E}(a)-\frac{1}{2}\mathrm{E}(u+a)+\frac{1}{2}\mathrm{E}(u-a)$$

ヲ作リ, 之ヨリ E 及ビ Z ノ加法定理ヲ誘導セヨ。

15. 次ノ關係ヲ證明セヨ。

$$\Pi(v,a)-\Pi(a,u) = u\mathrm{E}(a)-a\mathrm{E}(u) = u\mathrm{Z}(a)-a\mathrm{Z}(u).$$

16. 次ノ關係ヲ證明セヨ。

$$\Pi(u,a)+\Pi(v,a)-\Pi(u+v,a)$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)\Theta(v-a)\Theta(u+v+a)}{\Theta(u+a)\Theta(v+a)\Theta(u+v-a)}.$$

(之ヲ **Π ノ加法定理** トイフ。)

17. E(K) ヲ單ニ E ト略記シ, マタ E ニ於テ k, K ヲ夫夫 k', K′ ニ變ゼルモノヲ E′ ト書クコトトスレバ,

$$\mathrm{E}(\mathrm{K}+i\mathrm{K}') = \mathrm{E}+i(\mathrm{K}'-\mathrm{E}')$$

ナルコトヲ證明セヨ。

18. 次ノ關係ハ其内容ニ於テ第 74 節ニ述ベタル Legendre ノ關係式ト同一ナルコトヲ證明セヨ。

$$\mathrm{E}\mathrm{K}'+\mathrm{E}'\mathrm{K}-\mathrm{K}\mathrm{K}' = \frac{\pi}{2}.$$

19. 次ノ諸式ヲ證明セヨ。

(1)　$\mathrm{Z}(w) = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\left\{\zeta(u+\omega_3)-\frac{\eta_1}{\omega_1}u-\eta_3\right\},$

(2)　$\mathrm{Z}'(w) = \frac{d^2}{dw^2}\log\Theta(w) = -k^2\,\mathrm{sn}^2w-\frac{1}{e_1-e_3}\left(e_3+\frac{\eta_1}{\omega_1}\right),$

(3)　$k^2\,\mathrm{sn}^2w = \mathrm{Z}'(0)-\mathrm{Z}'(w).$

20. 楕圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>b>0)$$

ノ弧ノ長サヲ求ムル積分

$$s=a\int_0^z\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz, \qquad z=\frac{x}{a}, \qquad k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

ニ於テ,

$$u=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

ト置クトキハ,

$$s=a\int_0^u \mathrm{dn}^2u\,du$$

$$=a\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}+au\left\{1-\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}\right\}$$

トナルコトヲ證明セヨ。

21. 双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

ノ弧ノ長サヲ求ムル積分

$$s=\frac{1}{b}\int_0^y\sqrt{\frac{(a^2+b^2)y^2+b^4}{y^2+b^2}}\,dy$$

ニ於テ,

$$y=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\tan\theta, \qquad k^2=\frac{a^2}{a^2+b^2}$$

ト置クトキハ

$$s=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\int_0^\theta\frac{d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

トナリ, 更ニ

$$u=\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

ト置ケバ

$$s=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\int_0^u\frac{du}{\mathrm{cn}^2u}$$

$$=-\sqrt{a^2+b^2}\int_0^u k^2\,\mathrm{cn}^2(u+\mathrm{K}+i\mathrm{K}')\,du$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left\{\left(\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}-k^2\right)u-\frac{\mathrm{H}_1'(u)}{\mathrm{H}_1(u)}\right\}$$

トナルコトヲ證明セヨ。

22. 次ノ如ク定義セラルル J 及ビ λ ハ何レモ τ ノミノ函數ナルコトヲ示セ,

$$\mathrm{J}=\frac{g_2{}^3}{16\mathrm{G}}=\frac{g_2{}^3}{g_2{}^3-27g_3{}^2},$$

$$\lambda=k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}.$$

而シテコレラノ函數ハ τ ニ夫夫次ノ如キ整係數ノ一次變換ヲ行フモ其値ヲ變ゼザルコトヲ證明セヨ。(第70,73節參照)

$$\mathrm{J}\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)=\mathrm{J}(\tau), \qquad ad-bc=1,$$

$$\lambda\left(\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}\right)=\lambda(\tau), \qquad \begin{matrix}\alpha\equiv1,\ \beta\equiv0,\ \gamma\equiv0,\ \delta\equiv1 \pmod{2},\\ \alpha\delta-\beta\gamma=1.\end{matrix}$$

注意. コレラハ何レモ所謂 **母數函數** ト稱セラルルモノノ一種ニシテ, 特ニ J(τ) ハ **絕對不變式** トモ呼バル。

23. 絕對不變式ハ次ノ如クニモ書キ表サルルコトヲ示セ。

$$\mathrm{J}(\tau)=\frac{4}{27}\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}$$

$$=\frac{\pi^8}{54}\frac{(\vartheta_2{}^8+\vartheta_3{}^8+\vartheta_0{}^8)^3}{\vartheta'_1{}^8}.$$

マタ $27\{\mathrm{J}(\tau)-1\}=\mathrm{W}(\tau)$ ト置ケバ,

$$\mathrm{W}(\tau)=\frac{(\lambda+1)^2(\lambda-2)^2(2\lambda-1)^2}{\lambda^2(\lambda-1)^2}$$

ナルコトヲ示セ。

24. $\vartheta_3(v)$ ハ次ノ二様ニ展開セラル,

$$\vartheta_3(v)=\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})(1+h^{2\nu-1}z^2)(1+h^{2\nu-1}z^{-2})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h^{n^2}z^{2n}.$$

ココニ於テ x ヲ一ノ變數トシ

$$z^2 = -x^{\frac{1}{2}}, \qquad h = x^{\frac{3}{2}}$$

ト置クコトニヨリテ, 次ノ關係ヲ證明セヨ。

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{3n^2+n}{2}}.$$

25. 次ノ各項ヲ證明セヨ。

(1) 自然數 m ヲ $m = a^2+b^2+c^2+d^2$ ノ如ク四ツノ完全平方數ノ和トシテ表ス仕方ノ數ヲ $\mathrm{T}(m)$ トスレバ,

$$\vartheta_3{}^4 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{T}(m)h^m.$$

(2) 第 84 節 (21) 及ビ第 85 節 (9) ニヨリテ,

$$\vartheta_3{}^4 = 4h\frac{d}{dh}\log\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}$$

$$= 1 + 8h\frac{d}{dh}\left\{\log\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{4n}) - \log\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^n)\right\}.$$

(3) m ノスベテノ約數ノ和ヲ $\phi(m)$, マタ m ノ約數ニシテ且 4 ノ倍數ナルモノダケノ和ヲ $\Psi(m)$ トスレバ,

$$\vartheta_3{}^4 = 1 + 8\sum_{m=1}^{\infty}\phi(m)h^m - 8\sum_{m=1}^{\infty}\Psi(m)h^m.$$

(4) 以上ノ結果ニヨリ,

$$\mathrm{T}(m) = 8\{\phi(m) - \Psi(m)\}.$$

卽チ, 任意ノ自然數ハ常ニ四ツノ完全平方數ノ和トシテ表サル。而シテ其表サルル仕方ノ數ハ元ノ自然數ノ約數ニシテ 4 ノ倍數ナラザルモノダケノ和ノ 8 倍ニ等シ。

例ヘバ $m = 3$ トスレバ, $\mathrm{T}(3) = 8(1+3) = 32$.

$$3 = 0^2+(\pm1)^2+(\pm1)^2+(\pm1)^2 = (\pm1)^2+0^2+(\pm1)^2+(\pm1)^2$$
$$= (\pm1)^2+(\pm1)^2+0^2+(\pm1)^2 = (\pm1)^2+(\pm1)^2+(\pm1)^2+0^2.$$

(此證明法ハ Jacobi ノ創意ニヨル, 整數論ニ於ケル楕圓函數ノ著名ナル一應用ナリ。)

第十二章

等角寫像

87. 總論

函數 $w = f(z)$ ガ $z = a$ ナル點ニ於テ正則ニシテ且 $f'(a) \neq 0$ ナルトキハ此函數ニヨリテ $z = a$ ノ近傍ハ $w = f(a)$ ノ近傍ニ一對一ニ且連續的ニ寫像セラレ, 而モ其寫像ガ等角性ヲ有スルコトハ既ニ之ヲ知レリ (第 29 節)。サレバ $f(z)$ ガ z 平面上ノ面分 A ニ於テ正則ニシテ且 A ニ於テ $f'(z)$ ガ 0 トナラザルトキハ, 函數 $w = f(z)$ ニヨリテ A ハ w 平面上ノ一ツノ面分 B ニ等角ニ寫像セラルベシ。

等角寫像ノ實例ハ第三章ノ問題, ソノ他本文中各所ニ屢出デタルヲ以テココニ贅セズ。

面分 A 内ノ各點ノ近傍ガ面分 B 内ノ各點ノ近傍ニ夫夫一對一ニ寫像セラルル場合ト雖, A 全體ト B 全體トガ一對一ノ對應ヲナストハ限ラズ, A ノ相異ル二點ガ B ノ同一ノ點ニ對應スルコトモアルベシ。

例ヘバ $w = z^2$ ニヨリテ $0 < |z|$ ナル面分ヲ寫像スル場合ヲ考ヘヨ。

若シ $w = f(z)$ ニヨリテ A ノ相異ル二點ガ常ニ B ノ相異ル二點ニ寫像セラルルトキハ「A ハ B ニ **一重** ニ寫像セラル」トイヒ, 又函數 $f(z)$ ハ A ニ於テ **一重** ナリトイフ。

$f(z)$ ガ一重函數ナルトキハ其逆函數ハ一價ナリ。$f(z)$ ガ一價ニシテ且一重ナルトキハ，A ト B トハ一對一ノ對應ヲナス。

既ニ知レル如ク一次函數

$$w=\frac{az+b}{cz+d},\qquad ad-bc\neq 0 \tag{1}$$

ニヨリテ z 平面上ノスベテノ點ト w 平面上ノスベテノ點トハ(無限遠點ヲモ考ニ入レテ) 例外ナク一對一ノ對應ヲナスコト明カナリ。而シテコレ實ニ一次函數ノ特徴ニシテ，吾人ハ逆ニ次ノ定理ヲ證明シ得。

定理 1. **z, w ノ兩平面上ノスベテノ點ヲ例外ナク一對一ニ連續的ニ且等角ニ對應セシムル函數 $w=f(z)$ ハ一次函數ニ限ル。**

今之ヲ證明センニ，モシ z ノ有限値 c ガ $w=\infty$ ニ對應スルモノトセバ，ココニ

$$z'=\frac{1}{z-c} \tag{2}$$

ナル一次ノ置換ヲ行ヒタリトシ，z' ヲ新ラシキ變數トシテ用キレバ，$z'=\infty$ ガ $w=\infty$ ニ對應スルコトトナルベシ。サレバ吾人ハ最初ヨリ $z=\infty$ ガ $w=\infty$ ニ對應スルモノト假定シテ本定理ヲ證明セバ足レリ。

然ルトキハ函數 $w=f(z)$ ハ z ノスベテノ有限値ニ對シテ正則ナルガ故ニ，有理整函數又ハ超越整函數ナラザル可カラズ。然レドモ，若シ後者ナラバ $z=\infty$ ハ其眞性特異點ナルヲ以テ，

$z\to\infty$ ナルトキ w ハ任意ノ値ニ限リナク接近スベシ，卽チ例ヘバ w ハ 0 ナル値ニモ近迫スベキナリ。然ルニ假定ニヨリ $w=0$ ハ z ノ或ル一ツノ有限ナル値ニ對應シ居ルベキニヨリ，$z\to\infty$ ナルトキ $w\to 0$ ナルコトハ不可能ナリ。之ニ依ツテ見レバ $f(z)$ ハ超越整函數ナルコトナク，必ズヤ有理整函數ナラザル可カラズ。

サテ $f(z)$ ガ有理整函數ナリトスレバ，其ハ必ズ一次ナリ。何トナレバ若シ高次ナリトセバ w ノ一ツノ値ニ z ノ一ツヨリ多クノ値ガ對應スベク，一對一ナリトノ假定ニ反スレバナリ。依ツテ今考フル函數ハ

$$w=az+b \qquad (a,\ b\ \text{ハ常數})$$

ナル形ノモノニ限ルベク，假令最初ニ (2) ナル置換ヲ行ヒタリトスルモ

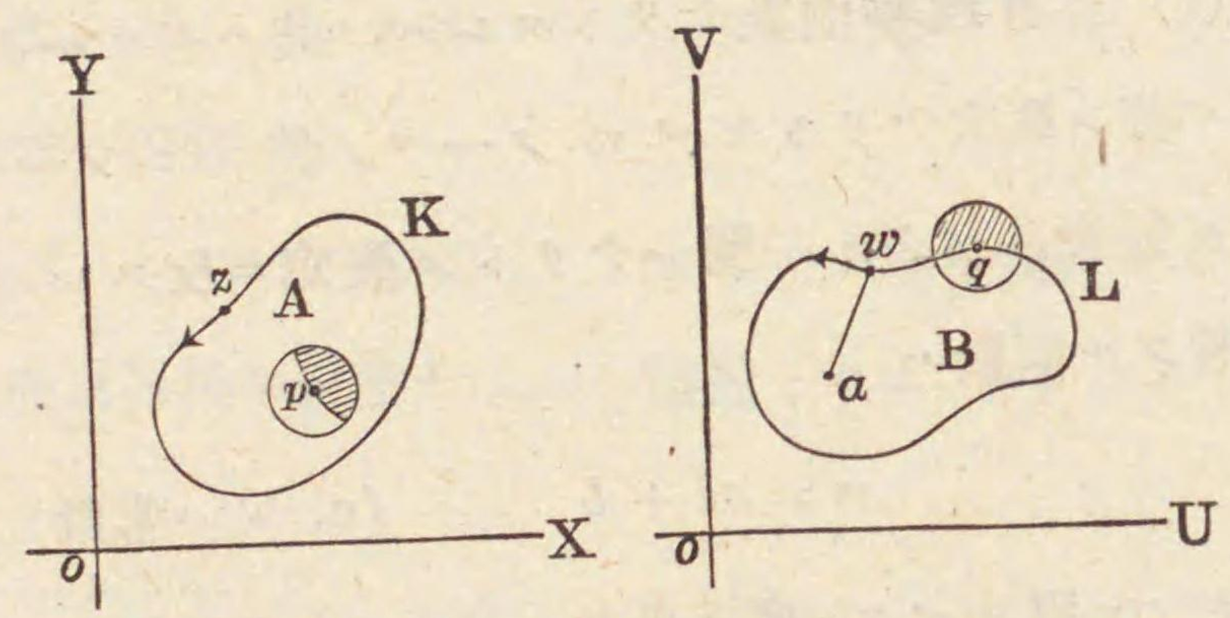
$$w=\frac{a}{z-c}+b$$

ニ過ギズ。要スルニ何レニシテモ，w ハ z ノ一次函數ナリ。

一次ナラザル任意ノ一價函數ハ必ズシモ z 平面ノ全部ヲ w 平面ノ全部ニ寫像セズ，又一般ニ其全寫像ハ一重ナラズ。然レドモ次ノ定理ガ適用セラルル場合ニハ部分的ニ一對一ノ關係ガ成立スベシ。

定理 2. **z 平面上ニ於テ一ノ單一閉曲線 K ニヨリテ圍マレタル面分ヲ A トス。今 $w=f(z)$ ハ A ノ周圍及ビ內部ヲ通ジ**

テー價連續ニシテ且 A ノ內部ニ於テハ正則ナリトシ，此ノ函數ニヨリテ K ハ w 平面上ノ一ノ單一閉曲線 L ニ一對一ニ寫像セラルルモノト假定ス。L ニヨリテ圍マルル面分ヲ B トスレバ，函數 $w=f(z)$ ニヨリテ，A ノ周圍及ビ內部ハ夫夫 B ノ周圍及ビ內部ニ一對一ニ寫像セラレ，且ソノ內部ニ於テ寫像ハ等角性ヲ有ス。



第九十七圖

之ヲ證明スルコト次ノ如シ。

今 B ノ內部ニ任意ノ一點 a ヲトルトキハ，$w-a$ ノ絕對値ハ w ガ L ノ上ヲ正ノ方向ニ一周スルトキモトノ値ニ復歸スレドモ，偏角ハ 2π ダケ增スコト明カナリ。サレバ若シ

$$w-a=f(z)-a=\mathrm{F}(z)$$

ト置キ，之ヲ z ノ函數ト考フレバ，z ガ K ノ上ヲ正ノ方向ニ一周スルトキ，w ハ L ノ上ヲ正又ハ負ノ方向ニ一周スベキニヨリ，$|\mathrm{F}(z)|$ ハモトノ値ニ復歸スレドモ $\mathfrak{A}\{\mathrm{F}(z)\}$ ハ $\pm 2\pi$ ダケ變ズベシ。從ツテ

$$\log \mathrm{F}(z)=\log|\mathrm{F}(z)|+i\mathfrak{A}\{\mathrm{F}(z)\}$$

ノ値ハ，z ガ K ノ上ヲ正ノ方向ニ一周スルトキハ $\pm 2\pi i$ ダケ變ズベシ。

ココニ於テ

$$\mathrm{I}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathrm{K})}\frac{\mathrm{F}'(z)}{\mathrm{F}(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathrm{K})}d\log \mathrm{F}(z)$$

ナル積分ヲ考フレバ，上記ノ理ニヨリ其値ハ ± 1 ニ等シキコトヲ知ル。然ルニ第 54 節ニヨリ此積分ノ値ハ A ノ內部ニ於ケル

$$\mathrm{F}(z)=0 \quad 卽チ \quad f(z)=a$$

ナル點 z ノ個數ヲ與フルモノ（假定ニヨリ $f(z)$ ノ極ハ A ノ內部ニナシ）ナルガ故ニ，其値ハ負ナルコトナク，從ツテ $\mathrm{I}=1$ ナラザル可カラズ。

之ニ依ツテ z ト w トハ夫夫 K 及ビ L ノ上ヲ同時ニ正ノ方向ニ一周スルコトヲ知ルベク，マタ $w=a$ ニ對應スル點ガ A ノ內部ニ唯一ツ存在スルコトヲ知ルベシ。

若シ a ヲ B ノ外部ニトリテ上ト同樣ニ考フレバ，其場合ニハ $w-a$ ノ絕對値モ偏角モ共ニ一周ノ後モトノ値ニ復歸スルガ故ニ，結局 a ニ對應スル點ハ A ノ內部ニ存在セザルコトガ證明セラル。

逆ニ A ノ內部ガ B ノ內部ニ對應スルコトヲ斷定センニハ，ナホ A ノ內部ノ一點（例ヘバ p）ガ B ノ周圍卽チ L 上ノ點

(例ヘバ q) ニ對應セザルコトヲ確メザル可カラズ。今若シ斯クノ如キ對應アリトセバ，假定ニヨリ $f(z)$ ハ其點ニ於テ正則ナルヲ以テ，其點ノ近傍モ亦（必ズシモ一對一ト限ラザルモ）相對應スベク，從ツテ B ノ外部ノ一點ガ A ノ內部ノ一點ニ對應スト云フ不都合ヲ生ズベシ（第九十七圖）。之ニ依ツテ見レバ A ノ內點ハ決シテ L 上ノ點ニ對應スルコトナシ。

次ニ，A 及ビ B ノ內部ニ於テ寫像ガ等角性ヲ有スルコトハ $f(z)$ ノ正則性ヨリ直チニ出ヅル性質ニシテ，ココニ $f'(z)=0$ ナル點ノ存在セザルコトニ注意スベシ。何トナレバ，モシ A ノ內部ニ $f'(z)=0$ ナル點アラバ，其點ト之レニ對スル點 w トノ對應ハ最早一對一ニアラズシテ n 對一 $(n>1)$ トナル可ケレバナリ。

最後ニ，L 上ノ點ト B ノ內點トノ關係ニツキテ考究スベシ。今 L 上ノ一點 W ニ對應スル K 上ノ點ヲ Z トシ，B ノ內部ニ於テ W ニ集積スル一ノ點列 $w_1, w_2, \cdots\cdots$ ヲトリ，之ニ對應スル A 內ノ點列ヲ $z_1, z_2, \cdots\cdots$ トス。然ルトキハ

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \mathrm{Z}$$

ナルコトガ證明セラル。何トナレバ，若シ $z_1, z_2, \cdots\cdots$ ガ Z ト異ナル集積點 Z' ヲ有ストセバ，其點列中ヨリ Z' ノミニ集積スル如キ點列例ヘバ $z_1', z_2', \cdots\cdots$ ヲ取リ出スコトヲ得ベシ。然ルトキハ之ニ對應スル點列 w' ニツイテ，

$$\lim_{n\to\infty} w_n' = \lim_{n\to\infty} f(z_n') = f(\mathrm{Z}') \neq \mathrm{W}$$

トナリ，コレ明カニ假定ニ反ス。

系.　K 又ハ L ハ無限曲線トナルモ可ナリ。但シ其場合ニハ「內部」トハ動點ガ之ヲ畫クトキ其左手ノ方ニアル部分ヲ指スモノナリトス。

（適當ナル一次ノ置換ヲ行ヘバ常ニ K 及ビ L ヲ有限ナルモノニ直スコトヲ得，從ツテ上ノ定理ガ適用セラル。）

例ヘバ

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

ナル一次函數ニ於テ，z ヲ實軸ニ沿ヒテ $-\infty$ ヨリ ∞ マデ變ゼシムルニ，先ヅ便宜上 $z=\tan\theta$ ト置キ，θ ヲ $-\dfrac{\pi}{2}$ ヨリ $\dfrac{\pi}{2}$ マデ變ゼシムルコトトスベシ。然ルトキハ

$$w = \frac{\tan\theta - i}{\tan\theta + i} = -(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

ナル關係アルニヨリ，w ハ單位圓上ヲ 1 ヨリ發シテ正ノ方向ニ一周スベシ。從ツテ z 平面ノ上半面ガ w 平面上ノ單位圓ノ內部ニ寫像セラルルコトヲ知ル。（第十九，三十一圖參照）

サテ何等カノ方法ニヨリテ z 平面上ノ面分 A ノ內部ト之ニ對スル w 平面上ノ面分 B ノ內部トノ等角寫像關係ヲ知レリトスレバ，鏡像ノ原理（第 50 節）又ハ其他ノ方法ニヨリテ其面分ノ外部ニ於ケル對應ノ狀態ヲモ考究シ得ルコト多シ。

88.　橢圓函數ニヨル寫像

前節ノ理論ヲ應用スル一例トシテ，マタソレ自身ニ於テ重要ナル價値ヲ有スル一問題トシテ，本節ニ於テハ

$$w=\wp(z)$$

ナル楕圓函數ニヨル寫像ニツキテ論ゼントス。($w=\mathrm{sn}\,z$ ニヨル寫像ニツキテハ第九章ノ問題47ヲ見ヨ)。但シ計算ヲ簡單ナラシムルタメニ,特ニ

$$\omega_3:\omega_1=i, \qquad 從ツテ \qquad g_3=0$$

ナリトシ,又 $g_2=4$ ナル様ニ ω_1 ヲ選ビタリトシ,特ニ

$$e_1=1,\qquad e_2=0,\qquad e_3=-1$$

ナリト假定スベシ。(第十章ノ問題8)

然ルトキハ,z ヲ w ニヨリテ表セバ

$$z=\int_\infty^w \frac{dw}{\sqrt{4w^3-4w}}=\frac{1}{2}\int_\infty^w\frac{dw}{\sqrt{w(w-1)(w+1)}} \qquad (1)$$

トナル。今之ニヨリテ w ガ實軸ニ沿ウテ $-\infty$ ヨリ ∞ マデ變動スルトキ,之ニ對スル z ノ變動ヲ吟味スルコト次ノ如シ。

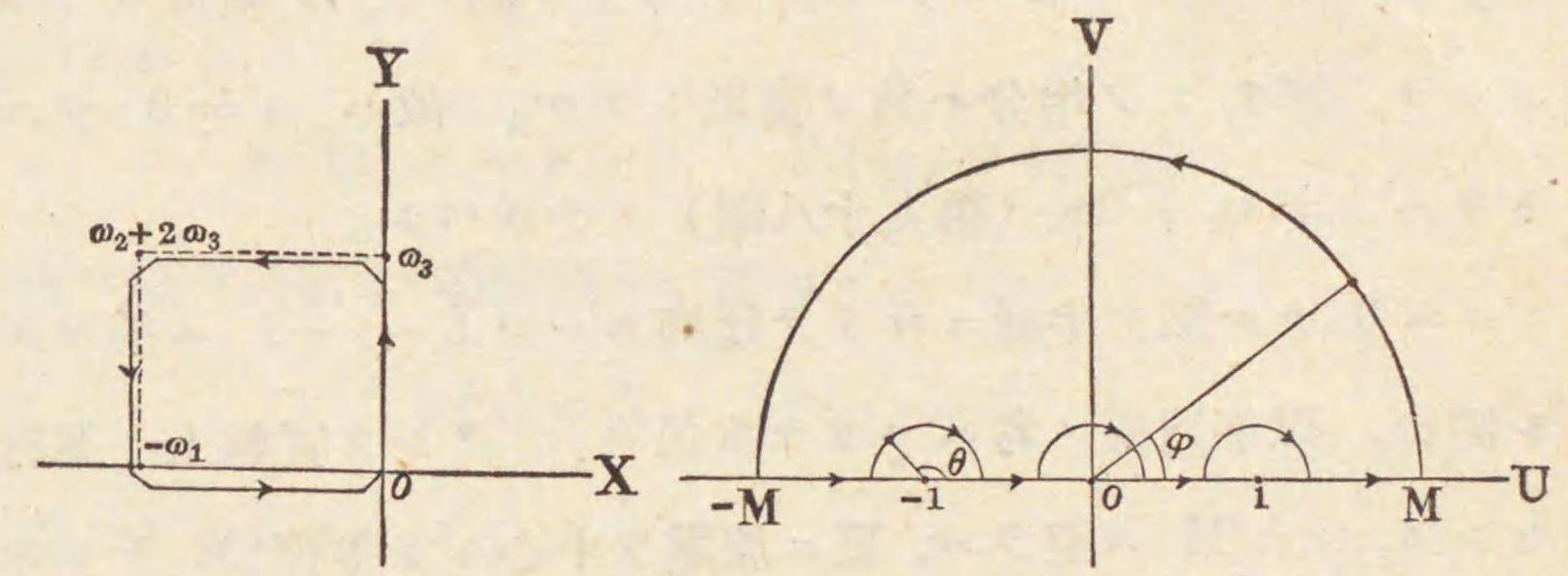
M ヲ十分大ナル正數トシ,

$$z=\frac{1}{2}\int_{-M}^w \frac{dw}{\sqrt{w(w-1)(w+1)}}$$

トスレバ,$w=-M$ ナルトキ $z=0$ ニシテ,又 $-M<w<-1$ ナルトキ $\sqrt{w}$, $\sqrt{w-1}$, $\sqrt{w+1}$ ノ偏角ヲ各 $\frac{\pi}{2}$ トスレバ,z ノ偏角ハ $-\frac{3\pi}{2}$ ニシテ即チ z ハ正ノ虚數ナリ,從ツテ w ガ大略 -1 (即チ e_3) ニ等シクナルトキ $z\doteqdot\omega_3$ トナルベシ。

サテ $w=-1$ ハ被積分函數ノ不連續點ナルガ故ニ,之ヲ回

避スルタメニ第九十八圖ニ示ス如ク點 (-1) ヲ中心トシ十分小



第九十八圖

ナル半徑 r ヲ以テ半圓ヲ畫キ,動點 w ヲシテ其上ヲ進行セシムルモノトシ,ココニ

$$w+1=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

ト置ケバ,
$$dw=(w+1)\,i\,d\theta.$$

又 w ガ此半圓周上ニアル間ハ $w\doteqdot-1$, $w-1\doteqdot-2$ ト考ヘテ可ナルガ故ニ,半圓周ニ沿ヒテノ積分ノ値ハ大略次ノ如シ。

$$\frac{1}{2}\int_\pi^0\frac{(w+1)i\,d\theta}{i.\sqrt{2}i.\sqrt{w+1}}=\frac{\sqrt{r}}{2\sqrt{2}i}\int_\pi^0\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}}(-1+i).$$

故ニ之ニ對スル動點 z ハ ω_3 ナル點ノ側ヲ虚軸ト 45° ノ角ヲナシテ極メテ短キ距離ダケ進ムベシ。

次ニ w ガ -1 ト 0 トノ間ヲ實軸ニ沿ヒテ進行スルトキハ,-1 ハ w ノ左ニアリ,$0, 1$ ハ w ノ右ニアリ,依ツテ $\sqrt{w+1}$

ノ偏角ハ 0 ニシテ, $\sqrt{w}$, $\sqrt{w-1}$ ノ偏角ハ各 $\dfrac{\pi}{2}$ ト考フベシ。從ツテ $w=-1$ ヨリ $w=0$ ニ至ル間ノ z ノ偏角ハ $-\pi$ ニシテ, 即チ z ノ增分ハ負ノ實數トナル。故ニ $w \doteqdot 0$ ナルトキハ $z \doteqdot \omega_2+2\omega_3$ (第九十八圖) トナルベシ。

$w=0$ ナル點ヲ半圓ニヨリテ迂回スルコトハ -1 ニ於ケルト同ジ。以下同樣ノ考ニヨリテ次第ニ w ヲシテ實軸上ニ進行セシメ, $w=\mathrm{M}$ ニ至ラバ, 更ニ原點ヲ中心トシ半徑 M ナル半圓周ニ沿ヒテ最初ノ出發點 $w=-\mathrm{M}$ ニ戻ラシムベシ。ココニ

$$w=\mathrm{M}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

ト置ケバ,

$$z \doteqdot \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{w\,i\,d\varphi}{(\sqrt{w})^3}=\frac{i}{2\sqrt{\mathrm{M}}}\int_0^\pi\left(\cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{M}}}(1+i).$$

之ニヨリテ z ハ實軸ト 45° ノ角ヲナス方向ニ短カキ距離ダケ動イテ其一周ヲ終了スベシ。

以上ハ略近値ヲ以テ大體ノ對應ヲ示シタルガ, 若シココニ $r\to 0$, $\mathrm{M}\to\infty$ ナラシメタル極限ヲ考フレバ, 前節ノ定理 2 ニヨリ, w 平面ノ上半全部ハ z 平面上ニ於テ正シクーノ正方形 $(0, \omega_3, \omega_2+2\omega_3, -\omega_1)$ ニ對應スベキナリ。

吾人ハ之ヨリ更ニ進ンデ此正方形ノ內部ノ點ト w ノ上半平面ノ點トガ如何ニ對應スルカヲ究ムベシ。

先ヅ $\wp$ 函數ノ加法定理 (第 77 節 (5) 參照) ニヨレバ,

$$\wp(x+iy)=\frac{2\{\wp(x)\wp(iy)-1\}\{\wp(x)+\wp(iy)\}-\wp'(x)\wp'(iy)}{2\{\wp(x)-\wp(iy)\}^2}.$$

然ルニ今

$$\wp(iy)=-\wp(y),\qquad \wp'(iy)=i\wp'(y)$$

ナルヲ以テ (第 73 節例題 5), 簡單ノタメニ

$$\wp(x)=\mathrm{X},\qquad \wp(y)=\mathrm{Y}$$

ト書クコトトスレバ,

$$\wp(x+iy)=\frac{-(\mathrm{XY}+1)(\mathrm{X}-\mathrm{Y})+2i\sqrt{\mathrm{X}(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{Y}(\mathrm{Y}^2-1)}}{(\mathrm{X}+\mathrm{Y})^2}.$$

從ツテ

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{(\mathrm{XY}+1)(\mathrm{X}-\mathrm{Y})}{(\mathrm{X}+\mathrm{Y})^2},\\ v&=\frac{2\sqrt{\mathrm{XY}(\mathrm{X}^2-1)(\mathrm{Y}^2-1)}}{(\mathrm{X}+\mathrm{Y})^2}\end{aligned}\right\}\qquad (2)$$

ナル關係ヲ得, 而シテココニ

$$1\leqq \mathrm{X}<\infty,\qquad 1\leqq \mathrm{Y}<\infty$$

ナリ。(第十章ノ問題 9)

(2) ニヨリテ見レバ, z 平面上ノ正方形 $(0, \omega_3, \omega_2+2\omega_3, -\omega_1)$ 內ニテ對角線 $x+y=0$ ニ關シテ對稱ナル二點ハ, w 平面上ニ於テハ v 軸ニ關シテ對稱ナル二點ニ寫像セラルルヲ知ルベシ。故ニ今正方形內ニテ $y=c$ (c ハ常數) ナル直線ノ w 平面上ニ於ケル寫像ヲ知ラバ, 之ヲ v 軸ニ關シテ對稱ナル位置ニ移スコトニヨリテ直チニ $x=c$ ナル直線ノ寫像ヲ得ベキナリ。

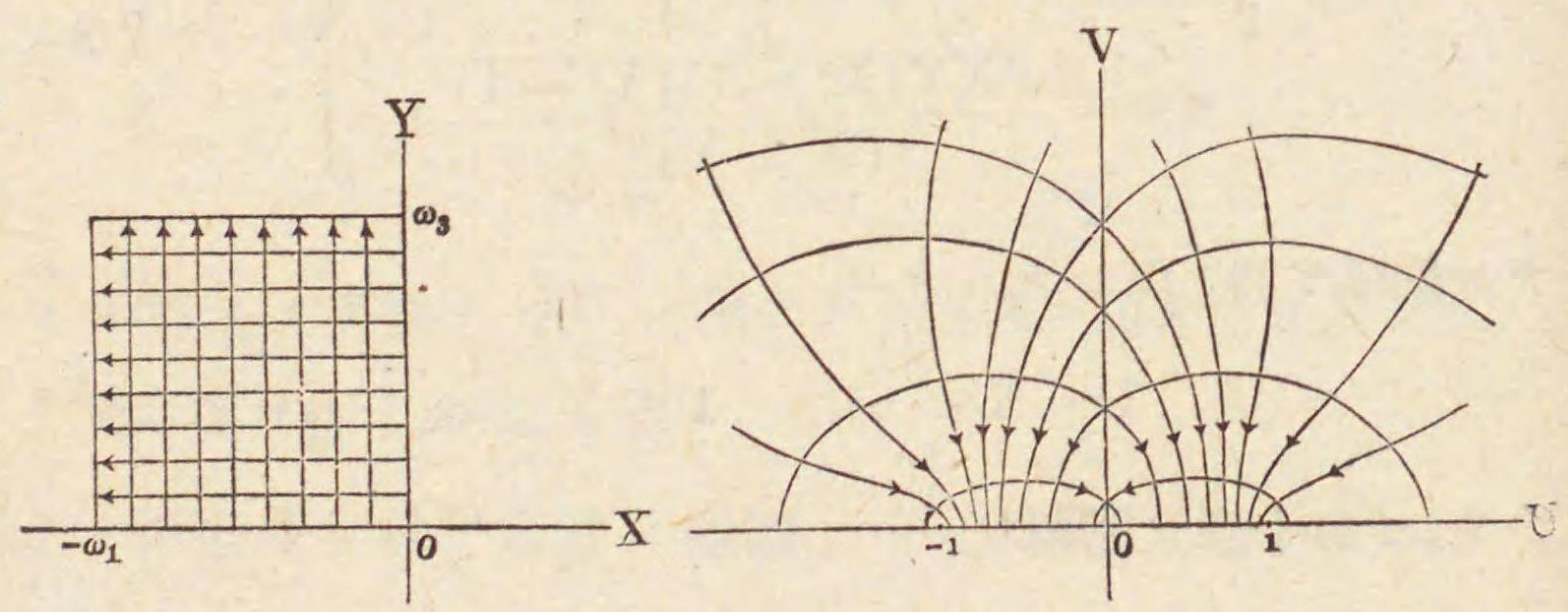
サテ $y=c$ ト置ケバ Y モ亦常數トナル, 之ヲ $Y=C$ トス。然ルトキハ (2) ハ

$$u=-\frac{(CX+1)(X-C)}{(X+C)^2},\quad v=\frac{2\sqrt{C(C^2-1)X(X^2-1)}}{(X+C)^2}$$

トナル。ココニ於テ X ヲ媒介變數ト考フレバ, コレ即チ $y=c$ ノ寫像ノ方程式ナリ。ソノ形狀ヲ明カニセンニハ點 (u,v) ノ極座標ヲ (r,θ) トシ,

$$r=\sqrt{u^2+v^2}=\frac{CX-1}{X+C},$$

$$\cos\theta=\frac{u}{r}=-\frac{(CX+1)(X-C)}{(CX-1)(X+C)}$$

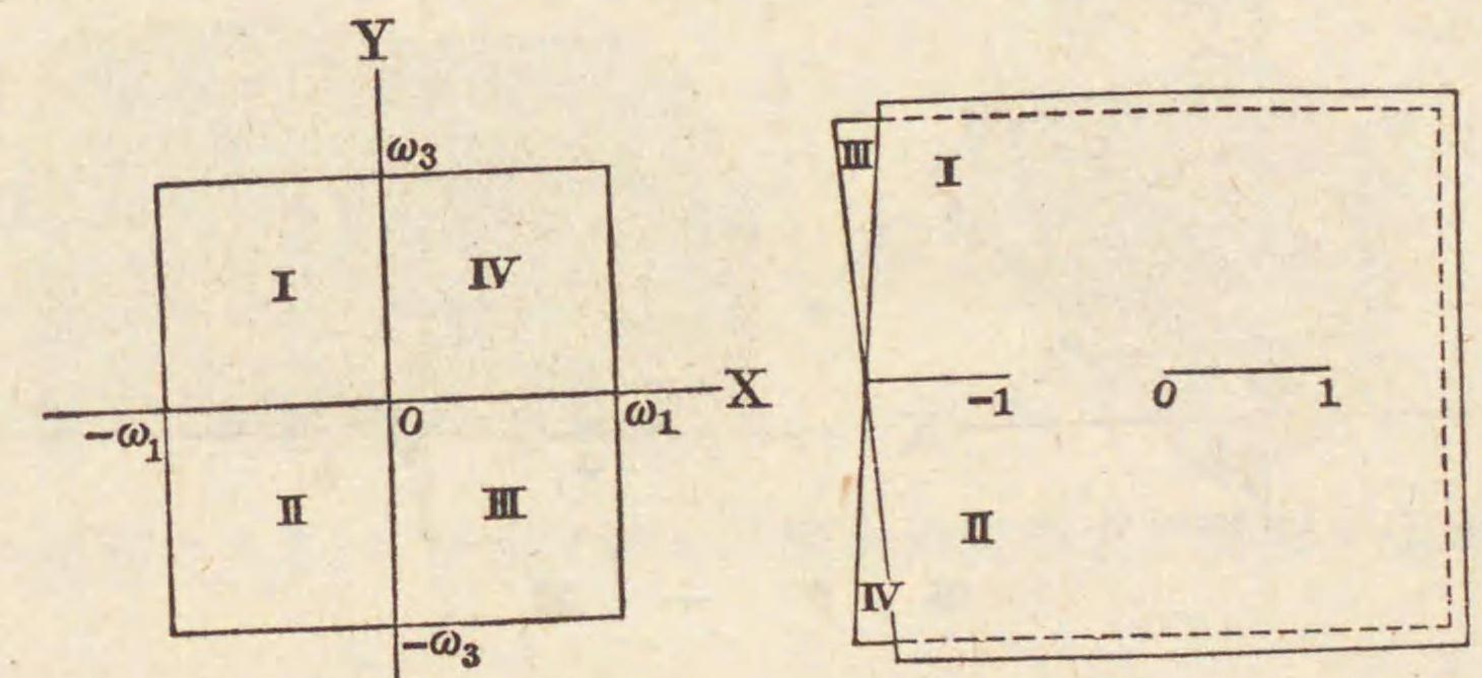


第九十九圖

ナルコトヲ利用スルヲ便トス。其結果ハ第九十九圖ニ示スガ如シ。

之ニヨリテ上記ノ正方形（週期平行四邊形ノ四分ノ一）ノ内部ト w 平面ノ上半部トノ對應ヲ明カニスルヲ得タリ。然ル後ハ鏡像ノ原理ヲ適用シテ, w ノ上半面ノ或ハ $(1,\infty)$ 或ハ

$(-\infty,-1)$ ニ關スル鏡像ヲ考ヘ之ニ應ジテ z 平面上ニ於テモ上記ノ正方形ヲ適當ニ鏡像ノ位置ニ移セバ, 之ニヨリテ w ノ Riemann 面ノ同葉又ハ異葉ノ下半面ノ寫像ヲ得ベシ。更ニ同樣ノ手續ヲ繰リ返セバ, w ノ異葉ノ上半面ノ寫像ヲ考フルコトモ容易ナリ。(第百圖)



第百圖

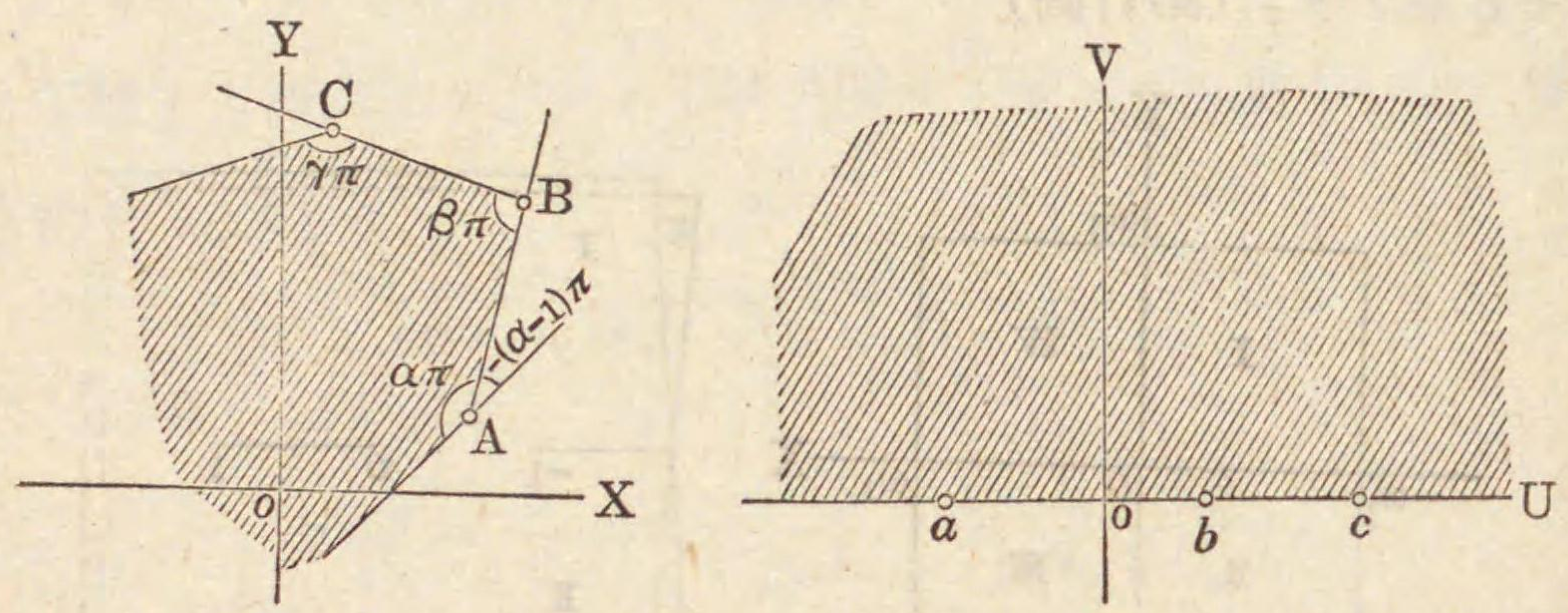
サテ上ノ理論ヲ回顧スルニ, 吾人ハ (1) ナル積分ノ値ヲ研究スルコトニヨリテ, w ノ上半面ガ z 面上ノ一ノ正方形ニ寫像セラルルヲ見タリ。而シテ此研究法ヲ更ニ一般ナル形ノ積分

$$z=C_1\int^{w}(w-a)^{\alpha-1}(w-b)^{\beta-1}\cdots(w-l)^{\lambda-1}dw+C_2 \qquad (3)$$

ニ適用スルモ何等ノ困難ヲ生ズルコトナカルベシ, 但シココニ $a, b, \cdots, l$ ハ任意ノ實數, $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ ハ正ノ實數, マタ C_1, C_2 ハ任意ノ常數ナリトス。

今 w ノ上半面ガ (3) ニヨリテ z 平面上ノ如何ナル圖形ニ寫像セラルルカヲ考フルニ, 動點 w ガ實軸上ヲ進行シ $a, b, \cdots$ 等

ノ點ヲ越ユル毎ニ $(z-a)^{\alpha-1}, (z-b)^{\beta-1}, \cdots$ 等ノ偏角ハ夫夫 $(\alpha-1)\pi, (\beta-1)\pi, \cdots$ ダケヅツ減ズベキニヨリ，之ニ對スル點 z ハ $w=a, b, \cdots$ ニ對應スル點（例ヘバ A, B, …）ヲ頂點トシ，此所ニ於テ夫夫 $\alpha\pi, \beta\pi, \cdots$ ナル頂角ヲ有スル一ノ屈折



第　百　一　圖

線ヲ畫クベシ。而シテ此屈折線ガ一ノ多角形トナルタメニハ，其内角ノ和ガ

$$\alpha+\beta+\cdots\cdots+\lambda=n-2 \qquad (4)$$

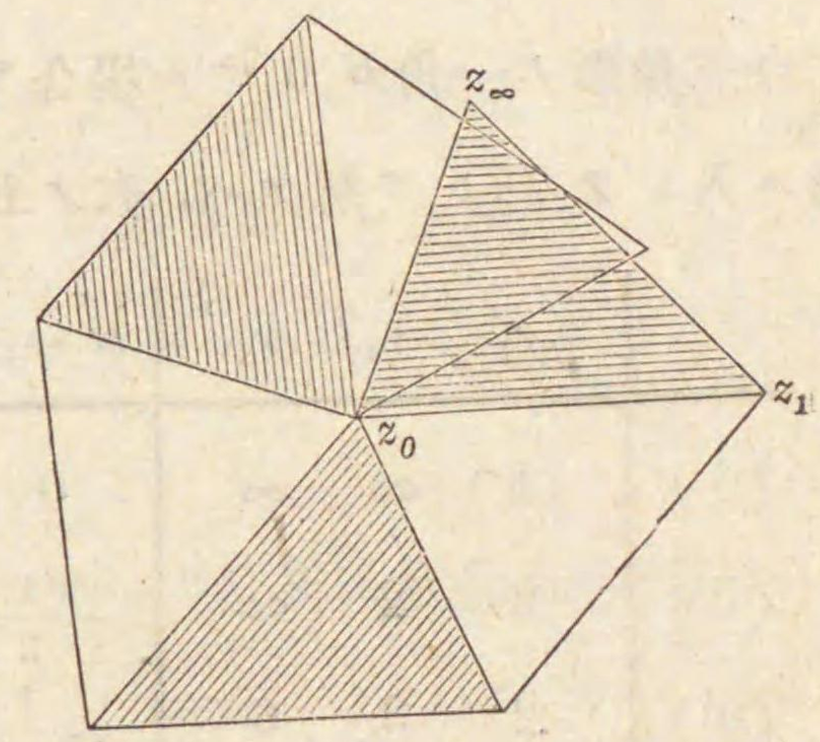
ナルコトヲ要ス，但シ n ハ $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ ノ個數ナリ。

ナホココニ注意スベキハ，或場合ニハ $w=\infty$ ニ對應スル z ノ一點モ亦上記ノ屈折線ノ一頂點トナルコトナリ，例ヘバ先キニ論ジタル (1) ノ場合ノ如キハ然リ。斯クノ如キ場合ニハ該屈折線ガ多角形トナルタメニ (4) ナル條件ヲ必要トセズ。

特ニ最簡單ニシテ且興味アル問題ハ

$$z=\int_0^w w^{\alpha-1}(1-w)^{\beta-1}\,dw \qquad (5)$$

ニヨル寫像ノ研究ナリ。此積分ニヨリテ，w ノ上半面ガ z 平面上ノ一ノ三角形ニ寫像セラルルトキハ，$w=0, 1, \infty$ ニ夫夫對應スル z ノ三點ガ其頂點トナルコト明カナリ。ココニ於テ鏡像ノ原理ニヨリテ此三角形ヲ次第ニ各邊ニ關シテ夫夫對稱ナル位置ニ反轉シツツ w 平面ノ上半部及ビ下半部ノ寫像ヲ求メ行ケバ，一般ニハ斯クノ如キ三角形ノ網ノ目ハ無數ニ相重ナリテ z 平面ヲ蔽ヒ，極メテ複雜ナル圖形ヲ生ズベシ。



第　百　二　圖

若シコノ三角形ノ網ノ目ヲシテ一重ニ z 平面ヲ蔽ハシメンニハ，三角形ノ各頂角ノ二倍ヲ丁度 2π ノ整數分ノ一ニ等シカラシムルコトヲ要スベシ。然ルニ前述ノ理ニヨリ此三角形ノ二ツノ頂角ハ $\alpha\pi$ 及ビ $\beta\pi$ ナリ。依ツテ今殘リノ一角ヲ $\gamma\pi$ トスレバ，

$$\alpha+\beta+\gamma=1 \qquad (6)$$

ニシテ，且

$$\frac{2\pi}{2\alpha\pi}=r_1, \quad \frac{2\pi}{2\beta\pi}=r_2, \quad \frac{2\pi}{2\gamma\pi}=r_3$$

ト置クトキ，r_1, r_2, r_3 ハ自然數ナラザル可カラズ。之ヲ (6) ニ代入スレバ

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=1 \tag{7}$$

ナル不定方程式ヲ得。

今三角形ノ一角ガ 0 ナル場合ヲモ許シ，從ツテ $r=\infty$ ヲモ考ニ入レテ (7) ヲ解ケバ，次ノ五種ノ根ヲ得。

	r_1	r_2	r_3	$\alpha-1$	$\beta-1$
(i)	1	∞	∞	0	-1
(ii)	2	2	∞	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
(iii)	2	3	6	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$
(iv)	2	4	4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$
(v)	3	3	3	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$

(但シ便宜上 $r_1 \leqq r_2 \leqq r_3$ ト假定ス。)

(i) ニ相當スル積分 (5) ハ

$$z=\int_0^w \frac{dw}{1-w}=-\log(1-w)$$

ニシテ，之ヲ書キ直セバ

$$w=1-e^{-z} \tag{8}$$

トナル。コレ卽チ w ノ上半面ヲ z 平面上ノ一ノ帶狀ノ部分 (二角ガ 0，一角ガ π ナル三角形ト見做ス) ニ寫像セシムル函數ナリ。

(ii) ニ對スル積分ハ

$$z=\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{w(1-w)}}=\text{arc sin}\,(2w-1)+\frac{\pi}{2}$$

ニシテ之ヲ書キ直セバ

$$w=\frac{1}{2}(1-\cos z) \tag{9}$$

トナル。コレ卽チ w ノ上半面ヲ z 平面上ニ半帶狀 (二角ガ $\frac{\pi}{2}$，一角ガ 0 ナル三角形ト見做ス) ニ寫像セシムル函數ナリ。

(iii), (iv), (v) ニ對スル積分ハ初等函數ヲ以テ表スヲ得ズ。然レドモ w ノ上半面ヲ夫夫

(iii)　$\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$　(一角ガ 30° ナル直角三角形)

(iv)　$\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$　(直角二等邊三角形)

(v)　$\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$　(正三角形)

ナル角ヲ有スル三角形ニ寫像スルモノナルガ故ニ，其逆函數ヲ考フレバ丁度當該三角形ヲ若干 (偶數) 個連ネテ得ル一ノ平行四邊形ヲ週期平行四邊形トシテ有スル如キ楕圓函數トナルコトヲ知ルベシ。

例題 1. 第九十九圖ノ曲線追跡ニ關シテ $\frac{dr}{d\theta}$ ヲ吟味セヨ。

例題 2. (8), (9) ニヨリ w ノ上半面ニ對應スベキ z 平面上ノ面分ヲ實際ニ畫ケ。

例題 3. (iii), (iv), (v) ノ各場合ニツイテ三角形ノ網ノ目ヲ畫キ，幾個ノ三角形ガ一ノ週期平行四邊形ヲ形成スルカヲ決定セヨ。

89. 單位圓ノ寫像

正則函數ハ其變域ノ各所ニ於テ夫夫冪級數ヲ以テ表示セラレ，各冪級數ハ夫夫固有ノ收斂圓ヲ有ス。然ラバ各收斂圓ハソ

ノ冪級數ニヨリテ如何ナル圖形ニ寫像セラルルカ。コレ頗重要ニシテ又興味アル問題ナリ。次ニ之ニ關シテ後ニ引用セラルル一二ノ定理ヲ述ベン。但シ任意ノ圓ハ之ヲ單位圓ニ寫像スルコト容易ナルヲ以テ（第二章ノ問題 14），吾人ハ最初ヨリ函數 $w=f(z)$ ガ單位圓内ニ於テ正則ナリトシ，之ニ依ツテ其單位圓ガ w 平面上ニ如何ニ寫像セラルルカヲ研究スベシ。

定理 1. **單位圓内ニ於テ正則ナル函數ヲ $f(z)$ トシ，$f(z)$ ニヨリテ生ズル單位圓ノ寫像ノ面積ヲ C トスレバ，**

$$C \geqq \pi |f'(0)|^2$$

ナリ。而シテ此結果ニ於テ等號ヲトルベキ場合ハ

$$f(z)=a_0+a_1 z \qquad (a_0,\ a_1 \text{ ハ常數})$$

ナル特別ノ場合ニ限ル。

之ヲ證明スルニ先立チテ，一般ニ z 平面上ノ微小面積 $dxdy$ ガ $f(z)$ ニヨリテ w 平面上ニ寫像セラルルトキ如何ニ變化スルカヲ考フルニ，第 29 節(第三十九圖)ノ記號ヲ襲用スレバ，先ヅ (x, y) 面ヨリ (ξ, η) 面ニ移ルトキニ $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 倍セラレ，次ニ (ξ, η) 面ヨリ (u, v) 面ニ移ルトキニ $\dfrac{\partial u}{\partial \xi}$ 倍セラル。依ツテ結局 A ト C トノ關係ハ次ノ如クナルヲ知ルベシ。

$$C=\iint_A \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \xi}dxdy.$$

然ルニ同節ニ計算セル如ク

$$\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{d\xi}=|f'(z)|^2$$

ナルヲ以テ，上ノ結果ハ次ノ如クニ書キ直サル。

$$C=\iint_A |f'(z)|^2 dxdy. \qquad (1)$$

サテ今單位圓内ニテ

$$f(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+\cdots\cdots+a_n z^n+\cdots\cdots$$

ナル展開式ガ成立スルモノトスレバ，

$$|f'(z)|^2=f'(z)\overline{f'(z)} \qquad \text{(上線ハ共軛數ヲ示ス)}$$
$$=(a_1+2a_2 z+3a_3 z^2+\cdots)(\bar{a}_1+2\bar{a}_2\bar{z}+3\bar{a}_3\bar{z}^2+\cdots).$$

之ヲ (1) ニ代入シ，又 A ナル面分トシテハ原點ヲ中心トシ 1 ヨリ小ナル半徑 R ノ圓ヲトルコトトシ，又計算ノ便宜上 $z=re^{\theta i}$ ナル極形式ヲ用キレバ，

$$C=\int_0^R rdr\int_0^{2\pi}(a_1+2a_2 re^{\theta i}+3a_3 r^2 e^{2\theta i}+\cdots)$$
$$(\bar{a}_1+2\bar{a}_2 re^{-\theta i}+3\bar{a}_3 r^2 e^{-2\theta i}+\cdots)d\theta.$$

此右邊ノ級數ヲ相乘ジテ積分スルニ，一般ニ

$$\int_0^{2\pi} e^{(m-n)\theta i}d\theta=\begin{cases}2\pi & (m=n \text{ ナルトキ})\\ 0 & (m\neq n \text{ ナルトキ})\end{cases}$$

ナルコトニ注目スレバ，次ノ結果ヲ得。

$$C=2\pi\int_0^R r(a_1\bar{a}_1+4a_2\bar{a}_2 r^2+9a_3\bar{a}_3 r^4+\cdots)dr$$
$$=\pi(a_1\bar{a}_1 R^2+2a_2\bar{a}_2 R^4+3a_3\bar{a}_3 R^6+\cdots)$$
$$=\pi\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 R^{2n}.$$

ココニ於テ $R\to 1$ ナラシメタル極限ヲ考フルニ，若シ級數 $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2$ ガ收斂ナラバ

$$C \to \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2, \qquad \text{(第六章ノ問題 17)}$$

若シマタ發散ナラバ

$$C \to \infty. \qquad \text{(第七章ノ問題 8)}$$

故ニ何レニシテモ

$$\lim C \geqq \pi|a_1|^2 = \pi|f'(0)|^2$$

ナリ。而シテココニ等號ヲトルベキ場合ハ

$$a_2 = a_3 = \cdots\cdots = 0,$$

即チ
$$f(z) = a_0 + a_1 z$$

ナル場合ニ限ルコト明カナリ。

注意. 單位圓ノ面積ハ π ナリ。故ニ $|f'(0)| \geqq 1$, 即チ原點ニ於ケル廓大率ガ 1 以上ナルトキハ，寫像ハ一般ニ單位圓ヨリモ大ナリ。

定理 2. 函數 $f(z)$ ガ單位圓內ニ於テ正則ニシテ且

$$|f(z)| \leqq 1, \qquad f(0) = 0$$

ナルトキハ，單位圓內ニ於テハ

$$|f(z)| \leqq |z|$$

ナリ。而シテ此結果ニ於テ等號ヲトルベキ場合ハ

$$f(z) = cz, \qquad |c| = 1$$

ナル特別ノ場合ニ限ル。

(之ヲ Schwarz ノ定理 トイフ。)

何トナレバ假定ニヨリ，單位圓內ニ於テハ

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots$$

ナル展開式ガ成立シ，從ッテ

$$\frac{f(z)}{z} = a_1 + a_2 z + \cdots\cdots$$

モ亦單位圓內ニテ一ノ正則函數ナリ。故ニ今原點ヲ中心トシ 1 ヨリ小ナル半徑 r ヲ以テ K ナル圓ヲ畫ケバ，$\left|\frac{f(z)}{z}\right|$ ハ K ノ內部ニ於テ極大値ヲトルコトナシ (第35節定理1系2)。即チ此絕對値ハ K ノ周上ノ或點ニテ最大値ヲトルベキナリ 依ッテ

$$|z| \leqq r \quad \text{ナルトキハ} \quad \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqq \frac{1}{r}$$

ナラザル可カラズ。此關係ハ，r ヲ十分 1 ニ近クトルモノト考フレバ，單位圓內ニ任意ニトリタル一ノ z ニツイテ常ニ成立ス。故ニ結局

$$|z| < 1 \quad \text{ナルトキハ} \quad \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqq 1$$

ナラザル可カラズ。

然レドモ，若シココニ z ノ一ツノ値 a ニ對シテ

$$\left|\frac{f(a)}{a}\right| = 1$$

ニシテ，且 $\frac{f(z)}{z}$ ガ常數ニアラズトセバ，之ニヨリテ $z=a$ ノ近傍ハ單位圓周上ノ一點ノ近傍ニ寫像セラルルコトトナルガ故ニ，$z=a$ ニ十分近キ部分ニ單位圓ノ外部ニ對應スル點，即チ

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| > 1$$

ナラシムル如キ z ノ値モ存在セザル可カラズ。然レドモコレ上ニ證明セル所ニ相反ス。

以上ノ結果ヲ綜合スレバ, $|z|<1$ ナルトキハ一般ニ

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|<1 \quad \text{卽チ} \quad |f(z)|<|z|$$

ニシテ, 特ニ

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|=1 \quad \text{卽チ} \quad |f(z)|=|z|$$

トナル場合ハ, $\dfrac{f(z)}{z}$ ガ常數 (其絕對値ハ 1 ナリ) ナル場合ニ限ル。

之ニ依ツテ定理 2 ハ證明セラレタリ。之ヲ應用スレバ次ノ定理ヲ證明スルコト容易ナリ。

定理 3. **z, w ノ兩平面上ノ單位圓ノ內部ヲ一對一ニ且等角ニ對應セシムル如キ解析函數 $w=f(z)$ ハ一次函數ニ限ル。**

先ヅ $w=f(z)$ ニヨリテ z 平面ノ原點ガ w 平面ノ原點ニ對應スル場合ヲ考フルニ, コノトキ $f(z)$ ハ定理 2 ノ假定ニ適合スルニヨリ,

$$|f(z)|\leqq|z|$$

ナラザル可カラズ。然ルトキハ, 單位圓內ノ一點 z ト原點トノ間ノ距離ヲ R_z トシ, z ノ寫像ナル點 w ト原點トノ間ノ距離ヲ R_w トスレバ,

$$R_w \leqq R_z$$

ナル關係アルコトトナル。然ルニ今逆函數 $z=f^{-1}(w)$ ナルモノヲ考フレバ, コレマタ定理 2 ノ假定ニ適合スルニヨリ, 上ト同樣ニシテ

$$R_z \leqq R_w$$

ナル結果ヲ得ベシ。依ツテ之ヲ綜合スレバ, 結局

$$R_w=R_z \quad \text{卽チ} \quad |f(z)|=|z|$$

ニシテ, 今考フル函數ハ實ハ一次函數

$$f(z)=cz, \qquad |c|=1$$

ナルコトヲ知ルベシ。

次ニ, 若シ $w=f(z)$ ニヨリテ $z=0$ ガ $w=\alpha\neq0$ ナル一點ニ對應ストセバ, 第 14 節 (iii) ニヨリ適當ナル一次函數 $w=g(z)$ ヲトリテ

$$W=g\{f(z)\}$$

ナル函數ヲ作レバ, z, W 兩平面ノ單位圓ノ內部ヲ相互ニ一對一ニ且等角ニ寫像セシメ, 且 $z=0$ ヲ $W=0$ ニ對應セシムルコトヲ得。然ラバ上ニ證明セル所ニヨリ

$$W=cz, \qquad |c|=1$$

ナラザル可カラズ。之ニ依ツテ見レバ, $f(z)$ ハ矢張 z ノ一次函數ニ他ナラズ。

系. **z 平面上ノ一ツノ圓ノ內部ヲ w 平面上ノ一ツノ圓ノ內部ニ一對一ニ且等角ニ對應セシムル如キ解析函數 $w=f(z)$ ハ一次函數ニ限ル。**

何トナレバ，任意ノ圓ハ一次變換ニヨリテ常ニ之ヲ單位圓ニ直シ得レバナリ。(第二章ノ問題 14)。

例題 1. z 平面上ニ於テ，中心 a，半徑 R ナル圓內ニテ正則ナル函數ヲ $f(z)$ トスレバ，$f(z)$ ニヨリテ生ズル其圓ノ寫像ノ面積ハ $\pi R^2|f'(a)|^2$ ヨリモ小ナラザルコトヲ證明セヨ。又丁度コレニ等シキ場合ヲ吟味セヨ。

例題 2. 函數 $f(z)$ ガ $|z|<R$ ナル圓內ニテ正則ニシテ且

$$|f(z)|\leqq M, \qquad f(0)=0$$

ナルトキハ，其圓內ニテハ

$$|f(z)|\leqq \frac{M}{R}|z|$$

ナルコトヲ證明セヨ。又ココニ等號ヲトルベキ場合ヲ吟味セヨ。

例題 3. z, w ノ兩平面上ノ單位圓ノ內部ニ於テ $z=0$ ヲ $w=0$ ニ對應セシメ，ソノ他ハ夫夫二對一ニ且等角ニ對應セシムル如キ正則函數ハ

$$w=cz^2, \qquad |c|=1$$

ニ限ルコトヲ證明セヨ。

90. Riemann ノ寫像定理

吾人ハコレヨリ z 平面上ノ與ヘラレタル面分 A ヲ w 平面上ノ與ヘラレタル面分 B ニ一對一ニ且等角ニ寫像セシムル解析函數 $w=f(z)$ ノ有無ヲ研究セントス，但シ簡單ノタメ A 及ビ B ハ各單一連結ニシテ且一重（ソレ自身ノ一部分ガ他ノ部分ト相重複スルコトナキモノ）ナリト假定スベシ。

今 A ヲ B ニ所題ノ如ク寫像セシムル一ノ函數アラバ之ヲ $w=f(z)$ トシ，又特別ノ場合トシテ A 及ビ B ヲ夫夫一ノ單位圓ニ一對一ニ且等角ニ寫像セシムル函數ヲ夫夫

$$Z=F_1(z) \qquad \text{及ビ} \qquad W=F_2(w)$$

トスベシ。然ルトキハ Z ト W トノ關係ハ

$$W=F_2\left[f\{F_1^{-1}(Z)\}\right]$$

ナル式ニヨリテ表サルベク，之ニヨリテ Z 及ビ W ノ兩單位圓ハ相互ニ一對一ニ且等角ニ寫像セラルベシ。然ラバ此 Z ト W トノ關係ハ前節ノ定理 3 ニヨリ必ズ一次函數ニシテ卽チ第 14 節 (iii) ニ述ベタルモノニ他ナラズ，之ヲ假リニ $W=g(Z)$ ニテ表セバ，

$$F_2\left[f\{F_1^{-1}(Z)\}\right]=g(Z)$$

トナル。之ニ依ツテ所求ノ函數 $f(z)$ ナルモノハ卽チ

$$f(z)=F_2^{-1}\left[g\{F_1(z)\}\right] \qquad (1)$$

ナル形ニ合成セラルルコトヲ知ル。

又逆ニ斯クノ如クニ合成セラレタル函數ヲ用キレバ，A ガ B ニ所題ノ如ク寫像セラルルコト明カナリ。但シ (1) ニ於テ F_1，F_2 ハ夫夫 A 及ビ B ヲ單位圓ニ一對一ニ且等角ニ寫像セシムル或ル一ツノ函數ニシテ，g ハ第 14 節 (iii) ニ擧ゲタル一般ナル一次函數ナルコトニ注意スベシ。

故ニ A ヲ B ニ所題ノ如ク寫像セシムル最一般ナル函數ヲ求ムル問題ハ畢竟 A（又ハ B）ヲ單位圓ニ一對一ニ且等角ニ寫像セシムル或ル一ツノ函數ヲ求ムル問題ニ歸著ス。吾人ハ後者ノ問題ヲ次ノ五段ニ分チテ考究セントス。

(I) 今單位圓ニ一對一ニ且等角ニ寫像セントスル面分ヲ A トスレバ，A ハ全平面（點 ∞ ヲモ含ム）ナル可カラズ，又唯一

點ニヨリテ限界セラレタル面分ナル可カラズ。何トナレバ，若シ斯クノ如キ A ガ $w=f(z)$ ニヨリテ單位圓ニ寫像セラルルナラバ，$f(z)$ ハ全平面又ハ其限界タル點以外ニ於テハ $|f(z)|<1$ ナルヲ以テ，第51節定理1ニヨリ，結局 $f(z)$ ハ全平面上ニテ正則ナルコトトナリ從ツテ一ノ常數ニ等シキコトトナル。然レドモ $f(z)$ ガ常數トナリテハ所要ノ寫像ハ不可能ナルコト明カナリ。之ニ依ツテ見レバ A ナル面分ハ少クモ二ツノ界點ヲ有スルモノト假定セザル可カラズ。

然ルトキハ其二ツノ界點ヲ α, β トシ，今

$$\zeta=\sqrt{\frac{z-\alpha}{z-\beta}} \tag{2}$$

ナル二價函數ニ於ケル z ヲ表示スル Riemann 面ヲ作成シ，ソノ面上ニ A ヲ置キタリト考フベシ。假定ニヨリ A ハ單一連結ナルヲ以テ，z ガ A 內ニアル限リ (2) ナル函數ハ二價性ヲ發揮スルコトナク (一價定理)，從ツテ z ノ一ツノ價ニ對シテ ζ ハ二價ノ中ノ何レカ一方ノ價ノミヲ取ルニ過ギズ。故ニ ζ 平面上ニ於ケル A ノ寫像ハ多クトモ全平面ノ半分ニ過ギザルベシ。サレバ吾人ハ最初ヨリ A ガ斯クノ如キモノナリト假定スルモ差支ナシ。(今 α, β ハ共ニ有限ナリト考ヘタルガ，若シ例ヘバ $\beta=\infty$ ナラバ (2) ノ代リニ $\zeta=\sqrt{z-\alpha}$ トスベシ。)

サテココニ於テ面分 A ノ外部ニ一點 c ヲトリ，

$$z_0=\frac{1}{z-c}$$

ナル一次函數ニヨリテ A ヲ z_0 平面上ニ寫像スレバ，其寫像ハ原點ヲ中心トスル一ノ圓內ニ全部含マルベシ。而シテナホ z_0 ニ適當ナル常數ヲ乘ズレバ，其圓ヲ單位圓ナラシムルコトモ容易ナリ。

サレバ結局吾人ノ問題ハ，z 平面上ノ單位圓內ニ含マルル一面分 A ヲ w 平面上ノ單位圓ニ一對一ニ且等角ニ寫像セシムル如キ函數 $w=f(z)$ ヲ求ムルコトニ歸ス。

(II) 第14節 (iii) ニヨリテ知レル如ク，吾人ハ單位圓ヲ單位圓ニ寫像シ，且前者ノ內部ノ任意ノ一點ヲ後者ノ中心ニ對應セシムルコトヲ得。故ニ今モシ A ガ原點ヲ含マズトスレバ，適當ナル一次置換ヲ一度行フコトニヨリテ，A 內ノ任意ノ一點ヲ原點ニ寫像セシメ，從ツテ A ノ寫像ヲシテ原點ヲ含ム一ノ面分ナラシムルコトヲ得。サレバ吾人ハ便宜上最初ヨリ既ニ A ガ原點ヲ含ムモノト假定スベシ。

今 A ノ周圍ニ於テ原點ニ最近キ一點ヲ a_0 トシ，

$$t=\frac{z-a_0}{\bar{a}_0 z-1} \quad (\bar{a}_0 \text{ ハ } a_0 \text{ ノ共軛數}) \tag{3}$$

ナル一次變換ヲ行ヘバ，z ノ單位圓ハ t ノ單位圓ニ寫像セラレ，A ノ寫像ハ t ノ單位圓內ニアリテ原點ヲ周圍ノ上ニ有スル一ノ面分ナルベシ。ココニ於テ更ニ

$$t_1=\sqrt{t} \tag{4}$$

ナル變換ヲ行ヒ,* 然ル後マタ

$$t_1 = \frac{z_1 - \sqrt{a_0}}{\sqrt{\bar{a}_0}\,z_1 - 1} \tag{5}$$

ナル一次變換ヲ行ヘバ, 結局 z 平面上ノ單位圓及ビ A ハ z_1 平面上ノ單位圓及ビ其内ニ含マルル一面分 A_1 ニ寫像セラレ, A ノ周上ノ點 a_0 ハ A_1 ノ周上ノ點 $\sqrt{a_0}$ ニ寫像セラルベシ。

(3), (4), (5) ヲ綜合スレバ,

$$z = \frac{z_1(z_1 - C)}{\bar{C}\,z_1 - 1} \qquad \left(C = \frac{2\sqrt{a_0}}{|a_0| + 1}\right) \tag{6}$$

トナル。サテ z ヲ z_1 ノ函數ト考フレバ, z_1 ノ單位圓内ニ於テ正則ニシテ且 $|z| < 1$, マタ $z_1 = 0$ ナルトキ $z = 0$ ナリ。而シテ上記ノ如ク z ハ明カニ z_1 ノ一次函數ニアラザルガ故ニ, 前節ノ定理 2 ニヨリ,

$$|z_1| < 1 \quad ナルトキハ \quad |z| < |z_1|$$

ナリ。即チ換言スレバ, A_1 ノ周上ノ各點ハ A ノ周上ノ之ニ對應スル各點ヨリモ原點ニ遠ザカレル位置ニアルモノナリ。故ニ A_1 ノ周圍ニ於テ原點ニ最近キ點ヲ a_1 トスレバ, 明カニ

$$|a_0| < |a_1|$$

ナリ。

終ニ臨ミ吾人ハ更ニ (6) ヲ修正シ, 原點ニ於テ $\dfrac{dz}{dz_1}$ ガ正ノ實數ナル樣ニ (從ツテ原點ニ於テ z 及ビ z_1 ノ實軸ノ正ノ方向ガ互ニ對應スル樣ニ) スベシ。ソレガ爲ニハ例ヘバ

* A ノ寫像ハ分岐點 (原點) ヲ周上ニ有スルニヨリ, 二ツニ切リ離サルルコトナクシテ此變換ガ行ハル。

$$z = \sqrt{\frac{\bar{C}}{C}}\,\frac{z_1(z_1 - C)}{\bar{C}z_1 - 1}$$

トセバ可ナリ。

(III) A ヨリ A_1 ヲ得タルト同樣ノ手續ヲ更ニ繰リ返シテ逐次ニ $A_2, A_3, \cdots\cdots$ 等ノ寫像ヲ求ムレバ, コレラハ次第ニ限リナク單位圓ノ周圍ニ向ツテ近迫シ行クベシ, 之ヲ證明スルコト次ノ如シ。

今一般ニ A_n ト A_{n+1} トノ關係ヲ示ス式ヲ

$$z_n = \sqrt{\frac{\bar{C}_n}{C_n}}\,\frac{z_{n+1}(z_{n+1} - C_n)}{\bar{C}_n z_{n+1} - 1} \tag{7}$$

トスベシ, 但シココニ

$$C_n = \frac{2\sqrt{a_n}}{|a_n| + 1}$$

ニシテ, a_n ハ A_n ノ周圍ニ於テ原點ニ最近キ點トス。

(7) ニ於テ z_{n+1} ヲ z_n ノ函數ト考ヘタルトキノ分岐點ノ位置及ビ原點ニ於ケル微係數ヲ次ニ求ムベシ。

分岐點ヲ求ムルニハ (7) ヲ z_{n+1} ニ關スル二次方程式ト見タルトキノ判別式ヲ 0 ニ等シト置キ, 之ヲ z_n ニ關シテ解ケバヨシ。其計算ハ全然初等的ナレバ略ス, 而シテ其結果ハ

$$z_n = \sqrt{\frac{\bar{C}_n}{C_n}}\,a_n \quad 又ハ \quad \sqrt{\frac{\bar{C}_n}{C_n}}\,\frac{1}{\bar{a}_n}$$

ナリ。故ニ $|z_n|$ ヲ考フレバ, 一ハ $|a_n|$ ニシテ, 一ハ 1 ヨリ大

ナリ。故ニ原點ヲ中心トシテ a_n ヲ過ル圓ヲ考フレバ，ソノ內部ニテハ z_{n+1} ハ z_n ノ函數トシテ特異點ヲ有セズ。

次ニ微係數ヲ求ムルタメニ，(7) ノ兩邊ヲ z_{n+1} ニ關シテ微分スレバ，

$$\frac{dz_n}{dz_{n+1}}=\sqrt{\frac{\overline{C}_n}{C_n}}\,\frac{\overline{C}_n z_{n+1}^2-2z_{n+1}+C_n}{(\overline{C}_n z_{n+1}-1)^2}.$$

故ニ $z_n=z_{n+1}=0$ ニ於テハ

$$\left(\frac{dz_n}{dz_{n+1}}\right)_0=\sqrt{\frac{\overline{C}_n}{C_n}}\,C_n=|C_n|=\frac{2r_n}{r_n^2+1},\quad \text{但シ } r_n=\sqrt{|a_n|}.$$

依ツテ今 A ヲ A_n ニ寫像スル函數ヲ $z_n=f_n(z)$ トスレバ，

$$f_n'(0)=\left(\frac{dz_n}{dz_{n-1}}\right)_0\left(\frac{dz_{n-1}}{dz_{n-2}}\right)_0\cdots\left(\frac{dz_1}{dz}\right)_0$$

$$=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{r_k^2+1}{2r_k}.$$

サテ上ニ吾人ノ主張セル所ヲ證明センニハ

$$\lim_{n\to\infty} r_n=1$$

ナルコトヲ示セバ足レリ。今モシ假リニ然ラズトスレバ，スベテノ k ニ對シテ

$$r_k<1-\varepsilon$$

ナル正數 ε ガ存在スベシ。然ルトキハ

$$\frac{r_k^2+1}{2r_k}=1+\frac{(1-r_k)^2}{2r_k}>1+\frac{\varepsilon^2}{2},$$

從ツテ

$$f_n'(0)>\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)^n$$

トナルベシ。

ココニ於テ A ノ內部ニ，原點ヲ中心トシ a_0 ヲ過ル圓ヲ考ヘ，ソレノ $f_n(z)$ ニヨリテノ寫像ノ面積ヲ C_n トスレバ（前節ノ定理 1 及ビ例題 1），

$$C_n\geqq \pi r_0^2|f_n'(0)|^2>\pi r_0^2\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)^{2n}$$

ナル關係アリ。然ラバ n ヲ大ナラシムルコトニヨリテ C_n ハ何程ニテモ大トナラザル可カラズ，コレ不都合ナリ，何トナレバ該寫像ハ單位圓ノ外ニ出ザル筈ナレバナリ。

之ニ依ツテ $r_n\to 1$ ナルコトヲ知ルベシ。

(IV) 次ニ，A ヲ $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n, \cdots\cdots$ ニ寫像セシムル函數ヲ夫夫

$$z_1=f_1(z),\quad z_2=f_2(z),\quad \cdots\cdots,\quad z_n=f_n(z),\quad \cdots\cdots$$

トシ，ココニ

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z)=f(z) \tag{7}$$

ナル極限函數ノ存在スルコトヲ證明セントス。

先ヅ函數列 $f_1(z), f_2(z), \cdots\cdots$ ガ A ニ於テ一樣ニ有界ナルコトハ勿論ナリ，何トナレバ $|z|<1$ ナルトキハ常ニ $|f_n(z)|<1$ ナレバナリ。

依ツテ第 45 節定理 2 ニヨリ該函數列ハ正規族ヲ形成スベク，適當ニ

$$f_{n_1}(z),\ f_{n_2}(z),\ \cdots\cdots\cdots \qquad (8)$$

ヲ原函數列ノ中ヨリ選出スレバ (8) ナル函數列ハ A ニ於テ一樣收斂ニシテ，其極限函數ヲ $f(z)$ トスレバ，$f(z)$ ハ A ニ於テ正則ナリ。

此函數 $f(z)$ ニヨリテ最初ノ面分 A ト單位圓トガ一對一ニ對應セシメラルルコトハ次項ニ示スガ如シ。而シテナホ (II) ニ述ベタル所ニヨリ A 內ニアル原點ハ單位圓ノ中心ニ對應シ，且兩點ニ於ケル實軸ノ正ノ方向モ亦互ニ對應シ居ルベキナリ。

サテ (8) ハ一般ニハ原函數列 $f_1(z), f_2(z), \cdots\cdots$ ノ一部分ナルベキガ，(8) ニツイテ以上ノ事實ガ成立スルコトヲ知レバ之ヨリ原函數列ノ全部ニツイテモ矢張同樣ノコトガ結論セラルベシ。何トナレバ，若シ原函數列ガ A ニ於テ一定ノ函數ニ收斂セズトスレバ，ソノ中ヨリ少クモ二ツノ相異ル函數ニ收斂スル如キ二ツノ函數列，例ヘバ

$$f_{l_i}(z), \qquad i=1,2,3,\cdots\cdots$$

及ビ

$$f_{m_i}(z), \qquad i=1,2,3,\cdots\cdots$$

ナルモノヲ選出シ得ベク，其極限函數ヲ夫夫 $f_l(z)$ 及ビ $f_m(z)$ トスレバ，此兩函數ハ何レモ A ヲ單位圓ニ寫像シ且ソノ原點及ビ原點ニ於ケル實軸ノ正ノ方向ヲ不變ニ保ツモノナリ。依ツテ本節ノ冒頭ニ述ベタル所及ビ第 14 節 (iii) ニヨリ $f_l(z)$ ト $f_m(z)$ トハ全然同一ノ函數ナラザル可カラズ。

之ニ依ツテ見レバ，$f_1(z), f_2(z), \cdots\cdots$ ノ極限函數ハ唯一ニシテ，(8) ノ極限函數ニ他ナラザルコトヲ知ルベシ。

(V) 以上ノ研究ヲ完結セシムルタメニ，吾人ハ最後ニ次ノ一問ヲ解決セザル可カラズ。曰ク，函數 $f_1(z), f_2(z), \cdots\cdots$ ニヨリテ面分 A ガ $A_1, A_2, \cdots\cdots$ ニ一對一ニ且等角ニ寫像セラルルコトハ既ニ知レリ，マタ此函數列ガ一ノ極限函數 $f(z)$ ヲ有スルコト及ビ $A_1, A_2, \cdots\cdots$ ナル面分ガ限リナク單位圓ニ接近スルコト等モ之ヲ知レリ，然ラバ果シテ此 $f(z)$ ナル函數ニヨリテ A ハ單位圓ニ一對一ニ且等角ニ寫像セラルルカ。

今 $A_1, A_2, \cdots\cdots$ 等ヲスベテ同一ノ w 平面上ニ畫キタリトシ，其平面上ノ單位圓ノ內部ニ任意ノ同心圓 K ヲトレバ，n ガ十分大ナルトキ，卽チ例ヘバ一定數 n_0 ニ對シテ $n \geqq n_0$ ナルトキハ，A_n ハスベテ皆 K ヲ其內部ニ含ムト考フルコトヲ得ベシ。ココニ於テ A_n ノ周圍ト K ノ周圍トノ間ニ一ノ閉曲線 L ヲ畫キ，函數 $w=f_n(z)$ ニヨリテ z 平面上ノ A ガ w 平面上ノ A_n ニ對應スルトキ，z 平面上ニ於テ L ニ對應スル曲線ヲ C ト名ヅクベシ。

K 內ニ一點 a ヲトレバ，A 內ニ於テ之ニ對應スル點ハ必ズ C ノ內部ニアリ，コノコトハ $f_n(z)$ ガ單位圓內ニ於テハ一價正則函數ナルヲ以テ第 87 節ノ定理 2 ヨリ直チニ出ヅ。サテ $w=f_n(z)$ ハ A ヲ一對一ニ A_n ニ寫像セシムルモノナルガ故ニ，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)-a}dz=1 \qquad (9)$$

ナリ。ココニ於テ C ヲ一定ナラシメ置キテ n ヲ増大セシムレバ，之ニ對應スル L ノ形ハ種種ニ變ズベキモ，トニカク K ナル圓ヲ常ニソノ内部ニ含ムガ故ニ，(9) ハ常ニ成立スベシ。

然ルニ既ニ知レル如ク，$f_1(z), f_2(z), \cdots\cdots$ ナル函數列ハ面分 A 内ノ任意ノ閉面分ニ於テ一樣ニ $f(z)$ ニ收斂スルガ故ニ，$f_1'(z)$，$f_2'(z), \cdots\cdots$ ハ $f'(z)$ ニ一樣ニ收斂スベシ（第 40 節定理 5，第 45 節參照）。從ツテ (9) ハ $n\to\infty$ ナル極限ニ於テ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz=1$$

トナル。

コレ卽チ $w=f(z)$ ナル函數ニヨリテ生ズル A ノ寫像ガ空隙ナク且唯一重ニ K ヲ蔽フコトヲ示スモノナリ。而シテココニ K ハ單位圓内ニ於ケル任意ノ同心圓ナルガ故ニ，結局 A ガ單位圓ノ内部全體ト一對一ノ對應ヲナスコトヲ知ルベク，其寫像ガ等角性ヲ有スルコトハ $f(z)$ ノ正則性ヨリ生ズル當然ノ結果ナリトス。

注意. 上ノ證明ニ於ケル $f(z)$ ヲ完成シテ得ルモノハ一般ニハ一價解析函數ニアラズ，然レドモソノ一ツノ分枝ガ A 内ニテハ一價ニシテ所要ノ寫像ヲナサシムルモノナリ。

以上ニヨリテ吾人ハ次ノ定理ヲ樹立スルコトヲ得タリ。

定理 1. **單一連結且一重ニシテ少クモ二ツノ界點ヲ有スル任意ノ面分ヲ單位圓ニ一對一ニ且等角ニ寫像セシムル如キ解析函數ハ常ニ存在ス。**

依ツテ本節ノ冒頭ニ述ベタル所ニヨリ直チニマタ次ノ定理ヲ得ベシ。

定理 2. **單一連結且一重ニシテ少クモ二ツノ界點ヲ有スル任意ノ二ツノ面分ノ一方ヲ他方ニ一對一ニ且等角ニ寫像セシムル如キ解析函數ハ常ニ存在ス。**

之ヲ Riemann ノ定理トイフ。

定理 3. **前定理ニ謂フ所ノ函數ハ無數ニ多クアリ。其中ノ適當ナル一ツヲトレバ，一方ノ面分内ノ任意ノ一點及ビ其點ニ於ケル一ノ方向ヲ夫夫他方ノ面分内ノ任意ノ一點及ビ其點ニ於ケル一ノ方向ニ寫像セシムルコトヲ得。而シテ斯クノ如キ函數ハ唯一ツニ限ル。**

蓋シ二ツノ單位圓ヲ一次函數ニヨリテ相互ニ寫像スルトキ，ソノ中ノ一點及ビ其點ニ於ケル一ツノ方向ヲ夫夫相對應セシムレバ一次函數ハ唯一ツニ定マル。故ニ本節ノ冒頭ニ述ベタル如ク任意ノ面分相互ノ寫像ヲ分解シ中途ニ單位圓ノ寫像ヲ挿入スルコトトシテ考フレバ，直チニ本定理ヲ得。

例題. 試ニ次ノ各函數ヲ圖形ノ對應ニヨリテ定義セヨ。

$$w=\frac{z-i}{z+i}, \qquad w=e^z, \qquad w=z^2.$$

91. 調和函數

二ツノ實變數 x, y ノ函數ニシテ Laplace ノ微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (1)$$

ニ適合スル u ノ如キモノハ物理學ノ問題ニ屢出現スル所ナリ。斯クノ如キ函數ヲ總稱シテ **調和函數** トイフ。**任意ノ複素函數ノ實部及ビ虛部ハ常ニ各一ツノ調和函數ナリ。**(第27節)

特ニ實用上屢解決ヲ要求セラルル問題ハ，xy 面上ノ與ヘラレタル面分內ニ於テ (1) ニ適合シ且ソノ周上ノ各點ニ於テ夫夫指定セラレタル値ヲトル如キ調和函數ヲ求ムルコトナリ。

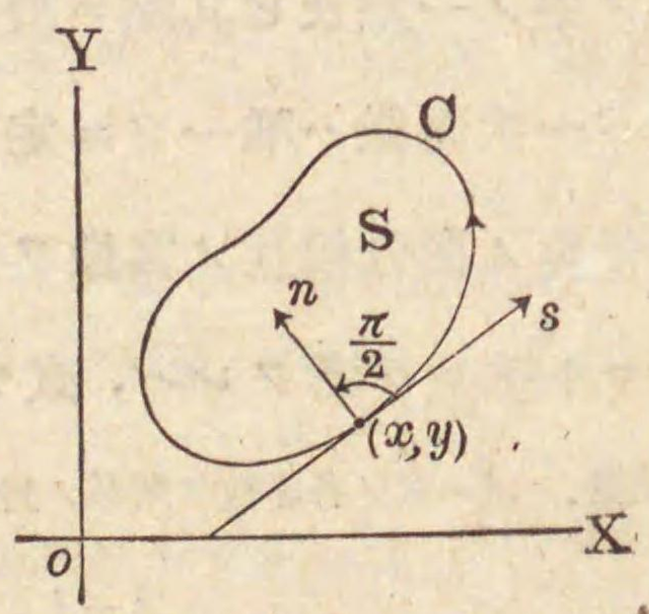
抑カクノ如キ函數ガ存在スルヤ否ヤ，若シマタ存在セバ之ヲ求ムル方法如何。スベテコレラノ問題ハ等角寫像論ト密接ノ關係ヲ有スルガ故ニ，本節ニ於テ其理論ノ一斑ヲ窺ハントス。

今 $u(x, y)$ ヲ一ノ調和函數トシ，(1) ナル方程式ヲ略記シテ

$$\Delta u=0 \qquad (2)$$

トスベシ。

xy 面上ニ於テ一ノ單一閉曲線ヲ C, 之ニヨリテ圍マレタル面分ヲ S トシ，C 上ニテソノ正ノ方向ニ沿ヒテノ u ノ微係數ヲ $\dfrac{\partial u}{\partial s}$, マタ C 上ノ一點ヨリ S ノ內部ニ向ヘル法線ニ沿ヒテノ微係數ヲ



第百三圖

$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ ニテ表スベシ。然ルトキハ切線 (s ノ正ノ方向) ガ x 軸及ビ y 軸トナス角ノ餘弦ハ夫夫

$$\frac{\partial x}{\partial s} \quad 及ビ \quad \frac{\partial y}{\partial s},$$

マタ法線 (n ノ正ノ方向) ハ切線ヲ正ノ向キニ $\dfrac{\pi}{2}$ ダケ回轉シタル方向ヲ有スルガ故ニ，ソノ兩軸トナス角ノ餘弦ハ夫夫

$$-\frac{\partial y}{\partial s} \quad 及ビ \quad \frac{\partial x}{\partial s}$$

ナリ。故ニ

$$\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial s} \qquad (3)$$

ナル關係アリ。

今 u, v ヲ共ニ S ノ內部及ビ周圍ニ於テ存在スル二ツノ調和函數トシ，第32節定理3ニ於テ，

$$\mathrm{P}=u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \mathrm{Q}=v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}$$

ト置ケバ，次ノ式ヲ得，

$$\int_{(C)}\left\{\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx+\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy\right\}$$
$$=\iint_{S}(v\Delta u-u\Delta v)\,dx\,dy.$$

然ルニ $\Delta u=0, \Delta v=0$ ナルヲ以テ，此右邊ハ 0 ナリ。而シテ左邊ヲ (3) ニヨリテ書キ直セバ，

$$\int_{(C)}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds=0 \qquad (4)$$

ナル結果ヲ得。

サテココニ於テ吾人ハ次ノ如キ特殊ナル一ツノ調和函數ヲ考フベシ,

$$g(x, y|\xi, \eta) = \log\frac{1}{r} + \omega. \qquad (5)$$

但シ (ξ, η) ハ S ノ内部ノ一定點, r ハ動點 (x, y) ト定點 (ξ, η) トノ間ノ距離, 即チ

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

ニシテ, 又 ω ハ S ノ内部及ビ周圍ニテ有限ナル任意ノ調和函數トス。

然ルトキハ此 g ナル函數自身モ亦一ノ調和函數ナルコトハ容易ニ驗證セラル。但シ g ハ S ノ内部ニ於テ其値ガ有限ナラザル點ヲ有ス, 即チ $x \to \xi$, $y \to \eta$ ナルトキハ g ハ對數的ニ ∞ トナルベシ。然レドモ此一點ヲ除ケバ S 内ニ於テ到ル所有限ナル値ヲ有ス。

サレバ g ナル函數ヲ (4) ニ於ケル v ノ代リニ用キンニハ, 先ヅ S ノ内部ヨリ (ξ, η) ナル點ヲ除去シ置クコトヲ要ス。依ツテ今此點ヲ中心トシ十分小ナル半徑 ρ ヲ以テ圓ヲ畫キ, 此圓ト C トノ間ノ面分ヲ S トシ, 之ニ對シテ (4) ヲ利用スレバ,

$$\rho\int_0^{2\pi}\left(u\frac{\partial g}{\partial r} - g\frac{\partial u}{\partial r}\right)d\theta + \int_{(C)}\left(u\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds = 0 \qquad (6)$$

トナル。(θ ヲ計ル方向ガ通常ト反對ナルコトニ注意スベシ。)

然ルニ

$$\frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{1}{r} + \frac{\partial \omega}{\partial r}$$

ナルヲ以テ,

$$\lim_{\rho\to 0}\rho\int_0^{2\pi} u\frac{\partial g}{\partial r}d\theta = \lim_{\rho\to 0}\int_0^{2\pi}\left(-u + \rho u\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)d\theta = -2\pi.u(\xi, \eta)$$

(本節ノ例題 1 參照), マタ

$$\lim_{\rho\to 0}\int_0^{2\pi}\rho g\frac{\partial u}{\partial r}d\theta = 0.$$

依ツテ (6) ヨリ次ノ式ヲ得,

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\left(u\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds. \qquad (7)$$

サテ一般ニ (5) ノ如キ函數 $g(x, y|\xi, \eta)$ ニシテ特ニ面分 S ノ周圍ニ於テ到ル所ソノ値ガ 0 ナルモノアルトキハ, 之ヲ S ニ於ケル **Green ノ函數** ト稱ス。(7) ニ於テ g ガ Green ノ函數ナルトキハ,

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} u\frac{\partial g}{\partial n}ds$$

トナル。故ニ面分 S ニ於テ Green ノ函數ガ存在スル場合ニハ, S ニ於ケル調和函數ニシテ其周圍 C 上ノ各點ニテ夫夫指定セラレタル値 (假リニ之ヲ U(s) トス) ヲ有スル如キ函數ハ次ノ式ニヨリテ與ヘラルルコトヲ知ルベシ。

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \mathrm{U}(s)\frac{\partial g(x, y|\xi, \eta)}{\partial n}ds, \qquad (8)$$

但シ (ξ, η) ハ S 内ノ任意ノ一點, (x, y) ハ C 上ノ動點トス。

之ニ依ツテ見レバ吾人ガ最初ニ提出セル問題ハ畢竟 Green ノ函數ヲ求ムル問題ニ歸著ス。之ヲ解決スル方法種種アレドモ等角寫像ノ理論ヲ應用シテ次ノ如ク考フルモ亦一法ナリ。

今與ヘラレタル面分 S ハ單一連結且一重ニシテ少クモ二ツノ界點ヲ有スルモノト假定ス。然ルトキハ其平面ヲ z ノ數平面ト考フレバ, 前節ニ證明セル如ク一ノ解析函數 $w = f(z)$ ニヨリテ S ヲ w 平面上ノ單位圓ニ一對一ニ且等角ニ寫像スルコトヲ得ベシ。ココニ於テ

$$\Re(-\log w) \qquad 即チ \qquad -\log|f(z)|$$

ナルモノヲ考フレバ, 此ハ x 及ビ y ノ實函數ニシテ, 且 $w=0$ ニ對應スル一點ヲ除クノ他ハ正則函數 $-\log w$ ノ實部ナルガ故ニ確カニ Laplace ノ方程式ヲ滿足セシムベシ。而シテ $w=0$ ニ相當スル點ニ於テハ對數的ニ無限大トナルコトモ明カナリ。更ニ z ガ S ノ周上ニアルトキニモ $f(z)$ ノ連續性ヲ假定スレバ, 之ニ對スル w ハ單位圓ノ周上ニアルガ故ニ

$$-\log|f(z)| = -\log|w| = -\log 1 = 0$$

トナル。

依ツテ以上ヲ綜合スレバ, $-\log|f(z)|$ ガ即チ面分 S ニ於ケル Green ノ函數ナルコトヲ知ルベシ。

一例トシテ特ニ S ガ單位圓ナル場合ニツイテ上ノ理論ヲ適用スレバ次ノ如シ。

單位圓ヲ單位圓ニ寫像スル函數ハ (第 14 節 (iii))

$$f(z) = \gamma \frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z - 1}, \qquad |\gamma| = 1, \qquad |\alpha| < 1$$

ナリ。故ニ今求ムル Green ノ函數ヲ $g(x, y|\xi, \eta)$ トシ, 點 (x, y) 及ビ (ξ, η) ノ極座標ヲ夫夫 (r, θ) 及ビ (ρ, ω) トスレバ,

$$|f(z)| = \left|\frac{r(\cos\theta + i\sin\theta) - \rho(\cos\omega + i\sin\omega)}{r\rho(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\omega - i\sin\omega) - 1}\right|$$

$$= \sqrt{\frac{r^2 - 2r\rho\cos(\theta-\omega) + \rho^2}{1 - 2r\rho\cos(\theta-\omega) + r^2\rho^2}}.$$

依ツテ

$$g(x, y|\xi, \eta) = -\log|f(z)|$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1 - 2r\rho\cos(\theta-\omega) + r^2\rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos(\theta-\omega) + \rho^2}. \qquad (9)$$

單位圓ニ於ケル調和函數ニシテ其周上ノ點 $(1, \theta)$ ニ於テ $\mathrm{U}(\theta)$ ナル値ヲ有スル如キ函數 $u(\rho, \omega)$ ヲ求メンニハ, 今得タル g ヲ (8) ニ代入スレバヨシ。其結果ハ次ノ如シ,

$$u(\rho, \omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{U}(\theta)\left[-\frac{\partial g}{\partial r}\right]_{r=1} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{U}(\theta)\frac{1-\rho^2}{1 - 2\rho\cos(\theta-\omega) + \rho^2} d\theta. \quad (10)$$

之ヲ **Poisson ノ積分** トイフ。

例題 1. 一ノ調和函數ハ或ル正則函數ノ實部ト見做シ得ルコトヨリシテ, 次ノ各定理ヲ誘導セヨ。

(1) 調和函數 u ノ或ル一點ニ於ケル値ヲ u_0 トスレバ, u_0 ハ其點ヲ中心トスル一ノ圓周上ニ於ケル u ノ値ノ平均値ニ等シ。即チ

$$u_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u d\theta.$$

(2) 調和函數ハ極値ヲ有セズ。

(3) 一ノ面分ニ於ケル調和函數ガ其周上ノ各點ニ於テ常ニ 0 ナルトキハ，其函數ハ實ハ常數 0 ニ等シ。從ツテ同一ノ面分ニ於ケル二ツノ調和函數ガ其周上ノ各點ニ於テ常ニ相一致スルトキハ，兩函數ハ實ハ同一ノ函數ナリ。

例題 2. 單位圓ノ代リニ半徑 a ナル圓ヲ用キ，之ニ就イテ (9) 及ビ (10) ニ相當スル式ヲ作レ。

例題 3. x 軸ニヨリテ分タレタル上半面 ($y\geqq 0$ ナル點ノ集合) ニ關スル函數 $g(x,y|\xi,\eta)$ ノ一ツヲ作レ。

第十二章ノ問題

1. z 平面上ノ單位圓ノ內部ハ

$$w=\frac{z}{(1-z)^2}$$

ニヨリテ如何ニ w 平面上ニ寫像セラルルカ。

2. 函數 $w=z+\dfrac{1}{z}$ ニヨル寫像ヲ參考シ，z 平面上ノ單位圓周ヲ w 平面上ノ楕圓

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1 \qquad (w=u+vi)$$

ニ寫像スル如キ一ツノ解析函數ヲ求メヨ。

3. z 平面上ノ二點 a, b ヲ過ル圓ノ一群及ビコレラト垂直ニ交ル他ノ圓ノ一群ハ

$$w=c\frac{z-a}{z-b} \qquad (c \text{ ハ常數})$$

ナル一次變換ニヨリテ w 平面上ノ如何ナル圖形ニ寫像セラルルカ。

4. 前題ノ結果ニヨリ，z 平面上ノ相交ラズ且同心ナラザル二ツノ圓ヲ w 平面上ノ同心圓ニ寫像スル如キ一次變換ヲ求メヨ。

5. 前題ノ一次變換ガ存在スルコトヲ利用シ，次ノ幾何學的定理ヲ證明セヨ。

圓 A ノ內部ニ之ト同心ナラザル圓 B アリ。今兩圓周ノ間ニ圓 $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n$ ヲ畫キ，一般ニ C_k $(k=1,2,\cdots\cdots,n)$ ヲシテ A ニ內切シ且 C_{k-1}, C_{k+1} 及ビ B ニ外切スル樣ニセントス。(但シ $C_{n+1}=C_0$, $C_{-1}=C_n$ トス。)

斯クノ如キコトガ若シ或ル一通リノ仕方ニテ可能ナラバ，第一ノ圓 C_1 ヲ兩圓周間ノ何所ニトリテモ常ニ上記ノ性質ヲ有スル樣ニ n 個ノ圓ヲ完成スルコトヲ得。

6. $0<k<1$ トスレバ，第一種ノ楕圓積分

$$w=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

ニヨリテ，z ノ上半面ハ w 平面上ニ如何ニ寫像セラルルカ。

7. e_1, e_2, e_3 ヲスベテ實數トスレバ，第二種ノ楕圓積分

$$w=\int_0^z \frac{zdz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$$

ニヨリテ, z ノ上半面ハ w 平面上ニ如何ニ寫像セラルルカ。

8. 第三種ノ楕圓積分

$$w=\int_{-\infty}^z \frac{dz}{(z-a)\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}} \qquad (a \neq e_i)$$

ヲ用キテ前題ト同樣ノ問題ヲ考ヘヨ, 但シ a ハ一ノ實數トス。

9. 二ツノ函數 $f(z)$, $g(z)$ ガ若シ一ノ閉面分ニ於テ一價正則ニシテ, 且ソノ周上ニ於テハ

$$|g(z)|<|f(z)|$$

ナリトスレバ, $f(z)$ ト $f(z)+g(z)$ トハ該面分内ニ同數ダケノ零點ヲ有スルコトヲ證明セヨ。(之ヲ **Rouché ノ定理** トイフ。)

10. 函數

$$f(z)=z+c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots\cdots+\frac{c_n}{z^n}+\cdots\cdots$$

ガ單位圓ノ外部ニ於テ點 ∞ ヲ除クノ他ハ正則ニシテ且一重ナリトスレバ,

$$|c_1|^2+2|c_2|^2+\cdots\cdots+n|c_n|^2+\cdots\cdots \leqq 1$$

ナルコトヲ證明セヨ。(之ヲ **面積定理** トイフ。)

11. 函數

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$$

ガ單位圓内ニテ正則且一重ナラバ, 函數

$$w=\mathrm{F}(z)=f(z^2)^{\frac{1}{2}}$$

モ亦然ルコトヲ示シ, 更ニ $z=\dfrac{1}{z_1}$, $w=\dfrac{1}{w_1}$ ト置キ,

$$w_1=\frac{1}{\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}$$

ニ前問ノ結果ヲ適用シテ $|a_2|\leqq 2$ ナルコトヲ證明セヨ。

12. 前問ノ函數 $f(z)$ ニヨリテ單位圓ヲ寫像スルトキ, ソノ寫像ノ内部ニアラザル一點ヲ c トシ,

$$w_2=\frac{cf(z)}{c-f(z)}$$

ナル函數ニ對シテ前問ノ結果ヲ適用シ, $|c|\geqq\dfrac{1}{4}$ ナルコトヲ證明セヨ。

注意. 即チ斯クノ如キ $f(z)$ ニヨリテ生ズル單位圓ノ寫像ハ常ニ原點ヲ中心トシ半徑 $\dfrac{1}{4}$ ナル圓ヲ全部ソノ中ニ含ムモノナリ。(問題 1 參照)

13. 面分 A ヲ一對一ニ且等角ニ單位圓ニ寫像スル一ツノ函數ヲ $f(z)$ トスレバ, ソノ最一般ナル函數ハ

$$\frac{af(z)+\bar{c}}{cf(z)+\bar{a}}, \qquad a\bar{a}-c\bar{c}=1$$

ニヨリテ與ヘラルルコトヲ證明セヨ。

14. 周圍ニ少クモ一點（二點ニアラズ）ヲ有スル單一連結且一重ナル面分ヲ一ノ圓（特別ノ場合トシテ一點ナル場合ヲモ含ム）ノ外部ニ一對一ニ且等角ニ寫像セシムル如キ解析函數ハ常ニ存在スルコトヲ證明セヨ。

15. 第 91 節ノ記號ヲ襲用シ,

$$\int_{(C)}\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

16. 逆ニ, 一ノ面分 S 内ニ畫ケル任意ノ閉曲線 C ニツイテ常ニ前題ノ式ガ成立スルトキハ, u ハ S ニ於ケル調和函數ナルコトヲ證明セヨ。

17. z 平面上ノ面分 A ニ關スル Green ノ函數ヲ既知ナリトスレバ, 之ヲ用キテ A ヲ w 平面上ノ單位圓ニ寫像スル如キ解析函數ヲ作リ得ルコトヲ示セ。

18. z 平面上ノ面分 A ニ關スル Green ノ函數, 及ビ A ヲ w 平面上ノ面分 B ニ寫像スル解析函數ガ既知ナルトキハ; 之ニヨリテ面分 B ニ關スル Green ノ函數ヲ求メ得ルコトヲ示セ。

19. Poisson ノ積分ハ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{U}(\theta)\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}d\theta \qquad (\zeta=\rho e^{i\omega})$$

ノ實部ニ等シキコトヲ示セ。

20. $\mathrm{U}(\theta)=\cos n\theta$ トシテ Poisson ノ積分ヲ計算セヨ, 但シ n ハ正ノ整數トス。

問　題　答　數

第 一 章 ノ 問 題

5. 可附番ナラズ。

13. 對等ナリ。

14. 上端 2, 下端 0. 上限 1, 下限 0. 但シ 1, 2 ハモトノ集合ニ屬シ, 0 ハ屬セズ。

15. 稠密ナラズ, 連續ナラズ。上端 $0.\dot{2}$, 下端 0.1. 無限位數ノモノダケガスベテ集積點ナリ。

16. 「n 個」トスルモ可附番ナリ。

第 二 章 ノ 問 題

1. 求ムル極形式ヲ $\mathrm{R}(\cos\Theta + i\sin\Theta)$ トスレバ,

$$\mathrm{R}^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2 \pm 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1),$$

$$\mathrm{R}\sin\Theta = r_1 \sin\theta_1 \pm r_2 \sin\theta_2, \qquad \mathrm{R}\cos\Theta = r_1\cos\theta_1 \pm r_2\cos\theta_2.$$

10. 前者ノ二根ヲ α_1, α_2, 後者ノ二根ヲ β_1, β_2 トスレバ, $\alpha_1, \beta_1. \alpha_2, \beta_2$ ハ此順序ニテ同一圓周上ニアリ, 且

$$\overline{\alpha_1\beta_1} : \overline{\alpha_2\beta_1} = \overline{\alpha_1\beta_2} : \overline{\alpha_2\beta_2}.$$

11. r ハ元ノ値ニ復歸ス。θ ハ點 a ガ其閉曲線ノ内ニアルカ外ニアルカニ從ツテ或ハ $\theta \pm 2\pi$ トナリ或ハ θ ニ復歸ス。a ガ曲線上ニアルトキハ不定。

13. $w = \gamma\dfrac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}$, $|\gamma| = 1$, $|\alpha| > 1$,

又ハ $w = \dfrac{\gamma}{z}$, $|\gamma| = 1$.

14. 第 14 節 (iii) ニ於テ $z = \dfrac{z-c}{r}$ ヲ代入スベシ。

15. 二圓ノ切點ヲ a トスレバ, 一ツノ函數ハ $w = \dfrac{1}{z-a}$ ナリ。

16. 三圓ガ點 a ニ於テ相會スルコト。

19. $z=\pm 1,\ 2,\ \frac{1}{2}$ ナルトキ, 二ツヅツ相等シクナリ, $z=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ ナルトキ, 三ツヅツ相等シクナル。

21. $|k|=1$ 又ハ k ガ實數ナルトキ, 一方ノ集合ニ屬スル各圓ガソレ自身ニ變位セラル。

22. $z=x+yi,\ \alpha=\beta+\gamma i,\ k=p+qi$ トシ, 點 α ヲ過リ直線 $A(x-\beta)+B(y-\gamma)=0$ ニ切スル圓ノ集合ヲ考フレバ, $Ap=Bq$ ナル如キ k ヲ有スル一次函數ガ各圓ヲソレ自身ニ變位ス。

26. 共ニ週期的ナリ。(1) ハ三度ニテ, (2) ハ四度ニテ循環ス。

第三章ノ問題

1. $\exp\left[-(4n+1)(8m+1)\frac{\pi^2}{8}+i(4n+1)\frac{\pi}{4}\log_e 2\right]$.

7. $a=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ トシテ,

$\exp x$ ノ意味ナラバ, $x=\log_e r+i(\theta+2n\pi)$,

e ノ x 乘ノ意味ナラバ, $x=\frac{\log_e r+i(\theta+2n\pi)}{1+2m\pi i}$.

第四章ノ問題

1. $z=x+yi$ トシテ, $y=0$ ナラバ不定, $y>0$ ナラバ i, $y<0$ ナラバ $-i$.

3. $z=x+yi$ トシテ, $y=0$ ナラバ 0, $y\neq 0$ ナラバ ∞.

4. 直線ガ y 軸ニ平行ナルトキハ不定, 平行ナラザルトキハ $x\to\infty$ ナラバ ∞, $x\to-\infty$ ナラバ 0.

8. $v=\frac{1}{2}\log_e\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}+c$, ($c$ ハ實常數)

20. (1) z^2, (2) $\frac{z}{2z-1}$, (4) ze^z. 其他ハ不能。

21. $u=3x^2y-y^3+c,\ v=3xy^2-x^3+c$, ($c$ ハ實常數).

22. $(1-i)z^3+ic$, (c ハ實常數).

23. $\cot\frac{z}{2}+ic$, (c ハ實常數).

第五章ノ問題

2. $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

3. $0<a<1$ ナラバ $2\tan^{-1}a$, $a>1$ ナラバ $2\tan^{-1}a-\pi$.

4. (1) $-\frac{31}{6}+15i$,

(2) $\frac{2\sqrt{2}}{e}\left\{\cos\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right\}-2$,

(3) $-\frac{1}{2}\log_e 2+i\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$,

(4) $-\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\log_e 10+i\left(\frac{\pi}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)\right\}$.

5. (1) $\begin{cases} 0<r<1 \text{ ナラバ } 0, \\ 1<r<\sqrt{3} \text{ ナラバ } \frac{\pi i}{3}, \\ \sqrt{3}<r \text{ ナラバ } -2\pi i. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 0<r<1 \text{ ナラバ } -\frac{3\pi i}{4}, \\ 1<r<2 \text{ ナラバ } -\frac{\pi i}{12}, \\ 2<r \text{ ナラバ } 0. \end{cases}$

7. (1) $-\frac{\pi^5 i}{12}$, (2) $i\sqrt{2}\,\pi\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.

18. (1) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4a^3}$, (2) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}\exp\left(-\frac{m\sqrt{3}}{2}\right)\sin\left(\frac{m}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$,

(3) $\frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-a})$, (4) $\frac{\pi}{2a^2}\exp\left(-\frac{ma}{\sqrt{2}}\right)\sin\frac{ma}{\sqrt{2}}$,

(5) $0<a<1$ ナラバ $\frac{\pi}{\sin\pi a}$, $a\geqq 1$ ナラバ ∞,

(6) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2}$, (7) 0,

(8) $\frac{16\pi^3}{81\sqrt{3}}$.

第六章ノ問題

4. $b>a+1$ ナラバ收斂, $b\leqq a+1$ ナラバ發散。

8. (1) $z=x+iy$ トスレバ, $\sinh^2 y=\cos^2 x$ ナル曲線ノ上及ビ其内部, 但シ $x=\frac{4n+1}{2}\pi$ ナル點ヲ除ク。

(2) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ トスレバ, $r^2=-2\cos 2\theta$ ナル連珠形ノ外部及ビ原點。

10. $\theta=A_0+A_1h+A_2h^2+A_3h^3+\cdots\cdots$ トスレバ,

$$A_0=\frac{1}{2},\qquad A_1=\frac{1}{24}\frac{f'''}{f''},$$

$$A_2=\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{24}\frac{f''''}{f''}-\frac{1}{24}\frac{f'''^2}{f''^2}\right),$$

$$A_3=\frac{1}{3!}\left(\frac{11}{320}\frac{f'''''}{f''}-\frac{3}{32}\frac{f'''f''''}{f''^2}+\frac{11}{192}\frac{f'''^3}{f''^3}\right).$$

11. $f(z)=e^z$ ナルトキハ,

$$A_0=\frac{1}{2},\quad A_1=\frac{1}{24},\quad A_2=0,\quad A_3=-\frac{1}{3!}\frac{1}{480}.$$

$f(z)=\sin z$ ナルトキハ,

$$A_0=\frac{1}{2},\quad A_1=\frac{1}{24}\cot z,\quad A_2=-\frac{1}{2!24}(1+\cot^2 z),$$

$$A_3=\frac{1}{3!}\left(\frac{19}{320}\cot z+\frac{11}{192}\cot^3 z\right).$$

22. (1) $\lambda=l=\infty$, (2) $\lambda=l=\infty$,

(3) $\lambda=l=1$, (4) $\lambda=0,\ l=1$.

25. $z+2z^2+2z^3+3z^4+\cdots\cdots+T(n)z^n+\cdots\cdots$,

但シ $T(n)$ ハ n ノスベテノ約數ノ個數ヲ示ス。

第七章ノ問題

2. A_1 内ニテハ $f_1(z)$ ヲ, A_2 内ニテハ $f_2(z)$ ヲ, A_1 及ビ A_2 ノ外ニテハ 0 ヲ表ス。

3. 單位圓ノ內ニテハ $f(z)$ ヲ, 外ニテハ $g(z)$ ヲ表ス。

7. $f(z)=e^z$, 接續シ得。

11. ζ^n ノ係數ハ $a_1+(n-1)a_2+\binom{n-1}{2}a_3+\cdots\cdots+a_n$.

12. $f(z)=0$, 又ハ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6a)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$, 又ハ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\,2^n a^{n-1}}$, ($a$ ハ常數)

13. $-k$ ニ於ケル留數ハ $(-1)^k\frac{f(1)}{k!}$.

第八章ノ問題

1. $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ ガ一位ノ極, ∞ ガ眞性特異點ナリ。

3. $|z|<1$ ナルトキハ,

$$-\frac{3}{2z}+\frac{1}{4}-\frac{7}{8}z+\frac{9}{16}z^2-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n2^{n+3}-5}{2^{n+2}3}z^n+\cdots\cdots,$$

$1<|z|<2$ ナルトキハ,

$$-\frac{5}{12}-\frac{5}{24}z-\frac{5}{48}z^2-\cdots\cdots-\frac{5}{2^{n+2}3}z^n-\cdots\cdots$$

$$-\frac{5}{6}\frac{1}{z}-\frac{2}{3}\frac{1}{z^2}+\cdots\cdots-(-1)^n\frac{2}{3}\frac{1}{z^n}+\cdots\cdots,$$

$|z|>2$ ナルトキハ,

$$\frac{1}{z^2}+\frac{4}{z^3}+\frac{6}{z^4}+\cdots\cdots+\frac{2^{n-2}5-(-1)^n2}{3z^n}+\cdots\cdots,$$

4. $1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{6z^3}+\frac{1}{24z^4}+\frac{19}{120z^5}+\cdots\cdots,$

一般ニ $\frac{1}{z^n}$ ノ係數ハ

$$n=0 \text{ ナラバ } 1,\ n>0 \text{ ナラバ } \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n-1}{k-1}.$$

5. (1) 正則, $f(\infty)=1$. (2), (3), (4) 眞性特異點。

9. $f(z)\pm g(z)$ ニ於テハ,

$m>n$ ナラバ m 位ノ極, $m<n$ ナラバ n 位ノ極,

$m=n$ ナラバ m (即チ n) 位ヲ越エザル極又ハ正則。

$f(z)g(z)$ ニ於テハ, $(m+n)$ 位ノ極。

$\frac{f(z)}{g(z)}$ ニ於テハ,

$m>n$ ナラバ $(m-n)$ 位ノ極, $m<n$ ナラバ $(n-m)$ 位ノ零點,

$m = n$ ナラバ正則ニシテ零ナラズ。

10. $F_1(z)$ ハ $(m+1)$ 位ノ零點ヲ, $F_2(z)$ ハ $(m-1)$ 位ノ極ヲ有ス。

12. $a \neq b$ ナラバ $-\dfrac{a}{(a-b)^2}$, $a = b$ ナラバ 0.

13. 共ニ 0.

15. (1) $\dfrac{3\pi}{8}$, (2) $\dfrac{5\pi\sqrt{2}}{128|a|^9}$.

16. $\dfrac{\pi}{8}\left(1+\dfrac{3}{e^2}\right)$.

18. (1) $\dfrac{\pi}{4}$, (2) $a \geqq 2$ ナラバ $\dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqq a < 2$ ナラバ $\dfrac{\pi a}{2}\left(1-\dfrac{a}{4}\right)$.

27. $c_1 = \dfrac{e}{2}$, $c_2 = -\dfrac{1}{2e}$.

$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots$ トスレバ,

$$a_{2n} = \frac{e}{2} + \frac{1}{2e} - \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \cdots\cdots + \frac{1}{(2n)!}\right),$$

$$a_{2n+1} = \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} - \left(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \cdots\cdots + \frac{1}{(2n+1)!}\right).$$

28. $$f(z) = c\left\{1 - z + az^2 - a^3 z^3 + \cdots\cdots + (-1)^n a^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n + \cdots\cdots\right.$$

$$\left. - \frac{a}{z} + \frac{a^3}{z^2} - \cdots\cdots + (-1)^n \frac{a^{\frac{(n+1)n}{2}}}{z^n} + \cdots\cdots\right\},$$

但シ c ハ任意ノ常數トス。

第九章ノ問題

1. $a \neq 0$ トスレバ, 0 及ビ ∞ ガ各一位ノ極, $\pm a$ ガ一位ノ代數分岐點。$a = 0$ トスレバ, ∞ ノミガ一位ノ極。

3. $w = z + 3z^2 + 12z^3 + 84z^4 + \cdots\cdots$,

$$w = \pm z^{\frac{1}{2}} - z - \frac{3}{2}z^{2} \mp 3z^{\frac{5}{2}} + \cdots\cdots.$$

22 $-\mathrm{cs}\,u.\,\mathrm{ds}\,u$, $\quad \mathrm{sc}\,u.\,\mathrm{dc}\,u$, $\quad k^2\,\mathrm{sd}\,u.\,\mathrm{cd}\,u$,

$\mathrm{dc}\,u.\,\mathrm{nc}\,u$, $\quad -k'^2\,\mathrm{sd}\,u.\,\mathrm{nd}\,u$, $\quad -\mathrm{cs}\,u.\,\mathrm{ns}\,u$,

$-\mathrm{ds}\,u.\,\mathrm{ns}\,u$, $\quad k'^2\,\mathrm{sc}\,u.\,\mathrm{nc}\,u$, $\quad \mathrm{cd}\,u.\,\mathrm{nd}\,u$.

25. $$\mathrm{sn}\,3u = \frac{3x - 4(1+k^2)x^3 + 6k^2x^5 - k^4x^7}{1 - 6k^2x^4 + 4k^2(1+k^2)x^6 - 3k^4x^8},$$

$$\frac{\mathrm{cn}\,3u}{\mathrm{cn}\,u} = \frac{1 - 4x^2 + 6k^2x^4 - 4k^4x^6 + k^4x^8}{1 - 6k^2x^4 + 4k^2(1+k^2)x^6 - 3k^4x^8},$$

$$\frac{\mathrm{dn}\,3u}{\mathrm{dn}\,u} = \frac{1 - 4k^2x^2 + 6k^2x^4 - 4k^2x^6 + k^4x^8}{1 - 6k^2x^4 + 4k^2(1+k^2)x^6 - 3k^4x^8}.$$

34. $-\dfrac{1}{k}\log(k\,\mathrm{cn}\,u + \mathrm{dn}\,u)$.

35. (1) $\log\dfrac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u + \mathrm{dn}\,u}$ 又ハ $\log\dfrac{\mathrm{sn}\dfrac{u}{2}}{\mathrm{cn}\dfrac{u}{2}\,\mathrm{dn}\dfrac{u}{2}}$.

(2) $\dfrac{1}{k'}\log\dfrac{\mathrm{dn}\,u \mp k'}{\mathrm{cn}\,u}$.

(3) $\log\dfrac{1-\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$. (4) $\dfrac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$.

46. 留數ハ次表ノ如シ。

極 ＼ 函數	sn	cn	dn
iK'	$\dfrac{1}{k}$	$-\dfrac{i}{k}$	$-i$
$2K + iK'$	$-\dfrac{1}{k}$	$\dfrac{i}{k}$	
$3iK'$			i

第十章ノ問題

1. e^z ノ端値ハ ∞, 0; $\sin z$ ノハ ∞, ∞.

22. 第四位。極ハ 0 ニ相合ナル點, マタ零點ハ a, b, c, $-(a+b+c)$ ニ相合ナル點ノ全部ナリ。

26. $\dfrac{1}{k}\left\{-\eta_1 u + \log\dfrac{\sigma(u-\omega_3)}{\sigma(u+\omega_2)}\right\}$.

28. $\dfrac{1}{k^2}\left[e_1 u - 2\zeta(u) - \dfrac{2\{\wp(u)-e_1\}\{2\wp(u)+e_1\}}{\wp'(u)}\right]$.

第十二章ノ問題

2. $w = \dfrac{a+b}{2} z + \dfrac{a-b}{2} \dfrac{1}{z}.$

4. 與ヘラレタル二圓ヲ前題ニ於ケル第二ノ圓群ニ屬スルモノト見做スベシ。

20. $\rho^n \cos n\omega.$

學用語(和英獨)對照表

第一章

有理數	rational number	rationale Zahl
稠密ナル	dense	dicht
切斷	cut, section	Schnitt
無理數	irrational number	irrationale Zahl
連續ナル	continuous	stetig
集合	set, aggregate	Menge
原素	element	Elemente
一對一	one-to-one	umkehrbar eindeutig
對等ナル	equivalent	gleicher Mächtigkeit, äquivalent
可附番ナル	countable, denumerable	abzählbar
點集合	set of points	Punktmenge
上界	upper bound	obere Schranke
下界	lower bound	untere Schranke
有界ナル	bounded	beschränkt
上端	upper limit	obere Grenze
下端	lower limit	untere Grenze
近傍	neighbourhood, vicinity	Umgebung, Nähe
集點	point of accumulation	Häufungsstelle
上限	superior limit	oberer Limes
下限	inferior limit	unterer Limes
內點	inner (interior) point	innerer Punkt
外點	outer (exterior) point	Aussenpunkt
界點	boundary (frontier) point	Randpunkt
正則曲線	regular curve	reguläre Kurve
單一曲線	simple curve	einfache Kurve
閉曲線	closed curve	geschlossene Kurve
(開)面分	domain, region	Bereich, Gebiet
閉面分	closed domain	abgeschlossener Bereich

n重連結ナル	n-ply connected	n-fach zusammenhängend
單一連結ナル	simply connected	einfach zusammenhängend
重複連結ナル	multiply connected	mehrfach zusammenhäng-end

第二章

複素數	complex number	komplexe Zahl
虛數單位	imaginary unit	imaginäre Einheit
虛數	imaginary number	imaginäre Zahl
實部	real part	reeller Bestandteil
虛部	imaginary part	imaginärer Bestandteil
純虛數	purely imaginary number	rein imaginäre Zahl
絕對值	absolute value	absoluter Betrag
偏角	amplitude, phase	Arcus, Amplitude
極形式	polar form	Polarform
共軛ナル	conjugate	konjugiert
數平面	complex (Gaussian) plane	Zahlene ene
實軸	real axis	reelle Achse
虛軸	imaginary axis	imaginäre Achse
變數	variable	Variable, Veränderliche
變域	interval, region	Intervall, Gebiet
函數	function	Funktion
寫像	representation	Abbildung
一次函數	linear function	lineare Funktion
單位圓	unit-circle	Einheitskreis
圓圓對應	circle-transformation	Kreisverwandtschaft
等角寫像	conformal representation	Konforme Abbildung
鏡像	reflected image	S iegelbild
鏡像ノ原理	principle of reflection	Spiegelungsprinzip
無限遠點	point at infinity	unendlich ferner Punkt
數球面	complex (Neumann's) sphere	Zahlenkugel

第三章

有理整函數	rational integral function	ganze rationale Funktion
代數函數	algebraic function	algebraische Funktion

有理分數	rational fraction	rationaler Bruch
超越函數	transcendental function	transzendente Funktion
指數函數	exponential function	Exponentialfunktion
三角函數	trigonometrical function	trigonometrische Funktion
對數函數	logarithmic function	logarithmische Funktion
逆三角函數	inverse trigonometrical function	inverse trigonometrische Funktion

第四章

極限值	limiting value	Grenzwert
收斂ス	to converge	konvergieren
無限小	infinitesimal	Unendlichkleine
無限大	infinity	Unendlichgrosse
連續ナル	continuous	stetig
一樣連續性	uniform continuity	gleichmässige Stetigkeit
微係數	differential coefficient	Differentialquotient
正則ナル	regular, analytic, holomorphic	regulär, analytisch, holomorph
調和函數	harmonic function	harmonische Funktion

第五章

定積分	definite integral	bestimmtes Integral
積分路	path of integration	Integrationsweg
振幅	fluctuation	Schwankung
線積分	curvilinear integral	Kurvenintegral
留數	residue	Residuum
積分表示	integral representation	Integralformel
不定積分	indefinite integral	unbestimmtes Integral

第六章

實級數	real series	reelle Reihe
複素級數	complex series	komplexe Reihe
收斂ナル	convergent	konvergent
和	sum	Summe

發散ナル	divergent	divergent
絕對值級數	absolute-value-series	Reihe der absoluten Beträge
絕對收斂ナル	absolutely convergent	absolut konvergent
半收斂ナル	semiconvergent, conditionally convergent	bedingt konvergent
收斂域	region of convergency	Konvergenzgebiet
一樣收斂ナル	uniformly convergent	gleichmässig konvergent
冪級數	power-series	Potenzreihe
收斂圓	circle of convergency	Konvergenzkreis
收斂半徑	radius of convergency	Konvergenzradius
展開式	expansion	Entwicklung
優級數	majorant-series	Majorantenreihe
一致ノ定理	theorem of identity	Identitätssatz
零點	zero-point	Nullstelle
無限乘積	infinite product	unendliches Produkt
一樣ニ有界ナル	un'formly bounded	gleichmässig beschränkt
同等ニ連續ナル	equally continuous	gleichmässig stetig
正規族	normal family	normale Familie

第七章

解析接續	analytic prolongation	analytische Fortsetzung
解析函數	analytic function	analytische Funktion
原素	element	Elemente
存在區域	domain of existence	Existenzbereich
領域	domain, region	Bereich, Gebiet
自然限界	natural boundary	natürliche Grenze
一價函數	one-valued (uniform) function	eindeutige Funktion
多價函數	many-valued (multiform) function	mehrdeutige Funktion
鏡像ノ原理	principle of reflection	Spiegelungsprinzip

第八章

特異點	singular point	singuläre Stelle
孤立特異點	isolated singular point	isolierte singuläre Stelle

集積特異點	non-isolated singular point	nichtisolierte singuläre Stelle
除去可能ナル	removable	hebbar
極	pole	Pol
眞性特異點	essentially singular point	wesentliche singuläre Stelle
主部	principal part	Hauptteil
n 位ノ	of the n-th order	n-ter Ordnung
整函數	integral (entire) function	ganze Funktion
超越整函數	transcendental integral function	ganze transzendente Funktion

第九章

一價函數	one-valued (uniform) function	eindeutige Funktion
多價函數	many-valued (multiform) function	mehrdeutige Funktion
二價函數	two-valued function	zweideutige Funktion
無限多價函數	infinitely many-valued function	unendliche vieldeutige Funktion
Riemann 面	Riemann's surface	Riemannsche Fläche
分岐點	branch-point	Verzweigungspunkt
代數分岐點	algebraic branch-point	algebraischer Verzweigungspunkt
對數分岐點	logarithmic branch-point	logarithmischer Verzweigungspunkt
留數	residue	Residuum
週期母數	periodicity-modulus	Periodizitätsmodul
楕圓積分	elliptic integral	elliptisches Integral
超楕圓積分	hyperelliptic integral	hyperelliptisches Integral
示性數	genus	Geschlecht
標準形	normal form	Normalform
第一(二,三)種ノ	of the first (second, third) kind	erster (zweiter, dritter) Gattung
母數	modulus	Modul
塡補母數	complementary modulus	komplementärer Modul
變換	transformation	Transformation
虛變換	imaginary transformation	imaginäre Transformation

第 十 章

週期函數	periodic function	periodische Funktion
週期	period	Periode
單一週期函數	simply periodic function	einfach periodische Funktion
基本週期	primitive period	primitive Periode
二重週期函數	doubly periodic function	doppelt periodische Funktion
週期平行四邊形	period-parallelogram	Periodenparallelogram
楕圓函數	elliptic function	elliptische Funktion
基本週期平行四邊形	fundamental period-parallelogram	fundamentales Periodenparallelogram
相合ナル	congruent	kongruent
位數	order	Ordnung
判別式	discriminant	Diskriminante

第 十 一 章

第二(三)種ノ	of the second (third) kind (sort)	zweiter (dritter) Art
同類ナル	having the same multipliers	gleichändrig

第 十 二 章

等角寫像	conformal representation	konforme Abbildung
一重ナル	monovalued トイフコトアリ	schlicht
調和函數	harmonic function	harmonische Funktion

索 引

I. 事項索引

ア 行
(ヰ,ヱ ヲ含ム)

カ 行

サ 行

タ　行

ナ 行

ハ 行

マ 行

ラ 行

II. 人 名 索 引

著　者　竹内端三
發行者　東京都麴町區四番町八番地ノ一　野口健吉
印刷者　東京都牛込區市谷加賀町一丁目十二番地　小坂孟

日本出版會　會員番號 112509

出版會承認 い 230139

增訂改版 函數論 下巻
定價金參圓 ㊝

發行元　東京都麴町區四番町八番地ノ一　電話九段(33)二〇一〇 一〇一五　振替口座東京百七番　合名會社 裳華房
印刷所　東京都牛込區市谷加賀町一ノ十二　大日本印刷株式會社 (東東一)
製本所　東京都神田區錦町三ノ十三　牧製本所
配給所　東京都神田區淡路町二ノ九　日本出版配給株式會社

大正十五年六月一日　創刊印刷　　大正十五年六月五日　創刊發行
大正十五年十二月五日　第二版發行　　昭和三年五月十日　修正第三版發行
昭和七年二月二十日　增訂改版第四版印刷　　昭和七年二月二十五日　增訂改版第四版發行
昭和十三年九月十五日　增訂改版第五版發行　　昭和十四年十一月十日　增訂改版第六版發行
昭和十六年六月十五日　增訂改版第七版發行　　昭和十七年八月二十日　增訂改版第八版發行
昭和十八年三月二十日　增訂改版第九版2,000部發行
昭和十九年一月二十日　增訂改版第十版2,000部發行

29. 2. 25