算學小叢書

實用圖算法

陳廷驤
范克昌 編譯

商務印書館發行

算學小叢書

實用圖算法

陳廷驤
范克昌 編譯

商務印書館發行

序

實用科學數字公式之計算，極爲繁複，往往勞心費時，一再複驗，仍難免於錯誤，偶一不愼，則毫厘之差，足使全功盡棄，何憾如之。故爲免除此弊，乃有以機械代計算者，例如算尺，算機，此種機械，苟能運用得法，固屬便利；惜其構造繁複，或刻度精微，製造殊非易易；且其應用，又僅限於單純之算式，故亦未能認爲盡美盡善。此外更有以幾何圖形，代替計算者，謂之圖解。圖解之種類頗多，例如：力學上所用之靜力圖解，及本書所論之算圖。算圖乃標有數字之幾何圖形，最初僅用於火車之行駛時間表，其後迭經兜侃(D'Ocagne)及叟柔(Soreau)兩君，以及諸學者，潛心研究，卒使算圖之應用，在學術上，獲得重要地位。此種學術，在歐美各國，均已普遍應用，而我國則尙少專著。本書大部取材於法國工商業百科全書，鳳維樂(M. Fonville)氏所著之算圖繪製法，此外更參考其他英法文專著，互相考證，着手編譯；詞句以簡明爲主，不求典雅；書中解釋，在可能範圍內，竭力避免繁複費解之高深數學，故極適用於：普通高級職業學校，及高中以上之工商業學校。本書爲供讀者需要，忽促出版，內容或有未能詳盡之處，尙期海內明達，有以正之。

民國二十八年十一月編者識

目　次

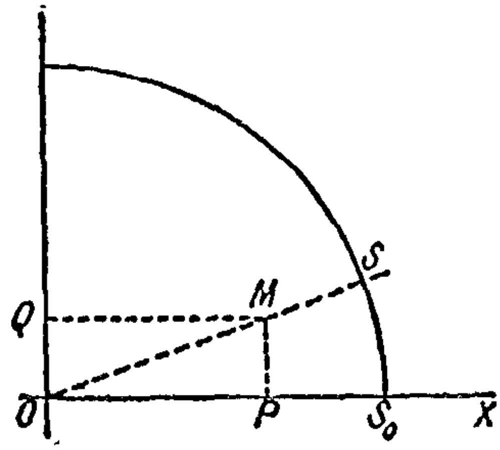
實用圖算法

第一章　輻射算圖

(Abaque rayonnant; network chart)

§1. 幾何性質：　今有正交兩軸：OX; OY, 及任意點 M。過 M 點及 O 點,作直線 OS 與 OX 軸成角度 ω (或弧度 S_0S)。則此 M 點之位置，可以此角度 ω,及縱橫之任一座標：OP 或 OQ 定之。而此三者有下列之關係：

$$\tan\omega=\frac{OQ}{OP}\cdots\cdots(1)\ (\text{圖 }1)$$



(圖 1)

如三者中已知其二，則第三者,可由計算得之。故此三者之關係,可表下列之方程式：

$$az=\frac{y}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

今以 e_x，爲 x 每單位之長度(或作 x 之倍率 echelle, scale)；e_y，爲 y 每單位之長度，

則：　$x \cdot e_x = OP$　　$\tan\omega = \dfrac{OQ}{OP} = \dfrac{y \cdot e_y}{x \cdot e_x} = \dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{e_y}{e_x}$

$y \cdot e_y = OQ$

但就原方程式(2)　　$az = \dfrac{y}{x}$　　$az \cdot \dfrac{e_y}{e_x} = \dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{e_y}{e_x}$

$$\therefore \quad \tan.\omega = az \cdot \frac{e_y}{e_x} = \left(a \cdot \frac{e_y}{e_x}\right) \cdot z$$

$$\omega = \text{arc} \tan\left(a \cdot \frac{e_y}{e_x}\right) \cdot z \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

a, e_x 及 e_y 均爲常數，如已知 z, 可求 ω。今設 x 之常用值(Valeurs utiles; useful value)，(因實用之數值不必包含自 $-\infty$至$+\infty$所有各值)係自 $x_{\min}$ 至 $x_{\max}$ (簡單作：x_n 至 x_m)；y 之常用值，係自　$y_{\min}$ 至 $y_{\max}$ (簡單作：y_n 至 y_m)。

則：　$z_m = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{y_m}{x_n}$；　$z_n = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{y_n}{x_m}$。

$\tan\omega_m = \dfrac{e_y}{e_x} \cdot \dfrac{y_m}{x_n}$；　$\tan\omega_n = \dfrac{e_y}{e_x} \cdot \dfrac{y_n}{x_m}$。

又，與 z 之常用值相當之角度，共含有$(\omega_m - \omega_n)$度。

今設　　$\omega_m - \omega_n = \theta$

則：　$\tan\theta = \dfrac{\tan\omega_m - \tan\omega_n}{1 + \tan\omega_m \cdot \tan\omega_n} = \dfrac{\dfrac{e_y}{e_x}\left(\dfrac{y_m}{x_m} - \dfrac{y_n}{x_m}\right)}{1 + \left(\dfrac{e_y}{e_x}\right)^2 \cdot \dfrac{y_m \cdot y_n}{x_m \cdot x_n}}$

由是觀之，θ 因 $\dfrac{e_y}{e_x}$ 而變，有如 e_y/e_x 之函數。爲便於使用計，應使 θ 角盡量加大。今就 θ 角，與 e_y/e_x 之增變情形，列表於後：

e_y/e_x	$-\infty$	$-\sqrt{\dfrac{x_m\cdot x_n}{y_m\cdot y_n}}$	0	$+\sqrt{\dfrac{x_m\cdot x_n}{y_m\cdot y_n}}$	$+\infty$
$\tan\theta$	$0\searrow$	$-\dfrac{y_m\cdot y_n}{2x_m\cdot x_n}\left(\dfrac{y_m}{x_n}-\dfrac{y_n}{x_m}\right)\nearrow$	$0\nearrow$	$+\dfrac{y_m\cdot y_n}{2x_m\cdot x_n}\left(\dfrac{y_m}{x_n}-\dfrac{y_n}{x_m}\right)\searrow$	0

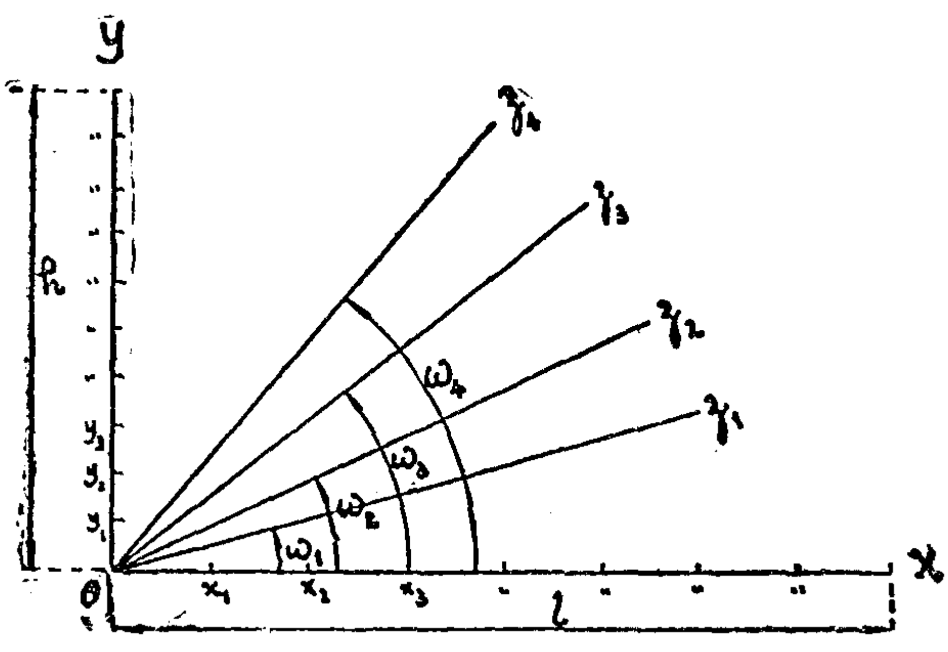
故知：當 $e_y/e_x=+\sqrt{\dfrac{x_m\cdot x_n}{y_m\cdot y_n}}$ 時，$\tan\theta$ 有最大值，同時 θ 角適佔滿 $90°$，因：$\tan\omega_m=\dfrac{e_y}{e_x}\cdot\dfrac{y_m}{y_n}=\infty$；

$$\tan\omega_n=\frac{e_y}{e_x}\cdot\frac{y_n}{x_m}=0。$$

$$\omega_m=90°;\qquad \omega_n=0°。\qquad \theta=90°-0°=90°。$$

§2.　作圖：

$$az=\frac{y}{x}$$



（圖 2）

1) $\begin{cases} e_y/e_x=\sqrt{\dfrac{x_{max}\cdot x_{min}}{y_{max}\cdot y_{max}}} \\ e_x(x_{max}-x_{min})\leqq l \\ e_y(y_{max}-y_{min})\leqq h \end{cases}$ 當 x_{min} 及 $y_{min}\neq 0$ 時，則可根據左列三式，任選 e_x, e_y 兩值。如 $x_{min}=y_{min}=0$ 時，則第一式可不必顧及。

2) 在 ox 及 oy 軸上，各甄 x_1, x_2,……及 y_1, y_2,……等常用值；且令 $\overline{ox}$, $\overline{ox_2}$ 等線分 $=x_1\cdot e_x$, $x_2\cdot e_x$,……

3) 根據：$\omega=\text{arc}\tan\left(a\dfrac{e_y}{e_x}\cdot z\right)$ 式，以 z 之常用值：z_1 z_2；……求 ω, ω_2……相當角度，過 o 點作 oz, oz_2 等線，並註 z_1, z_2 諸值於各線端；則圖告成。

§ 3. 應用：查爾斯(Charles)定律公式。

在一指定之壓力下，氣體之體積，恆依溫度而變，今設 V_0 爲 0° 時原有體積；V_t 爲 $t°$ 時體積；$t°$ 爲溫度；

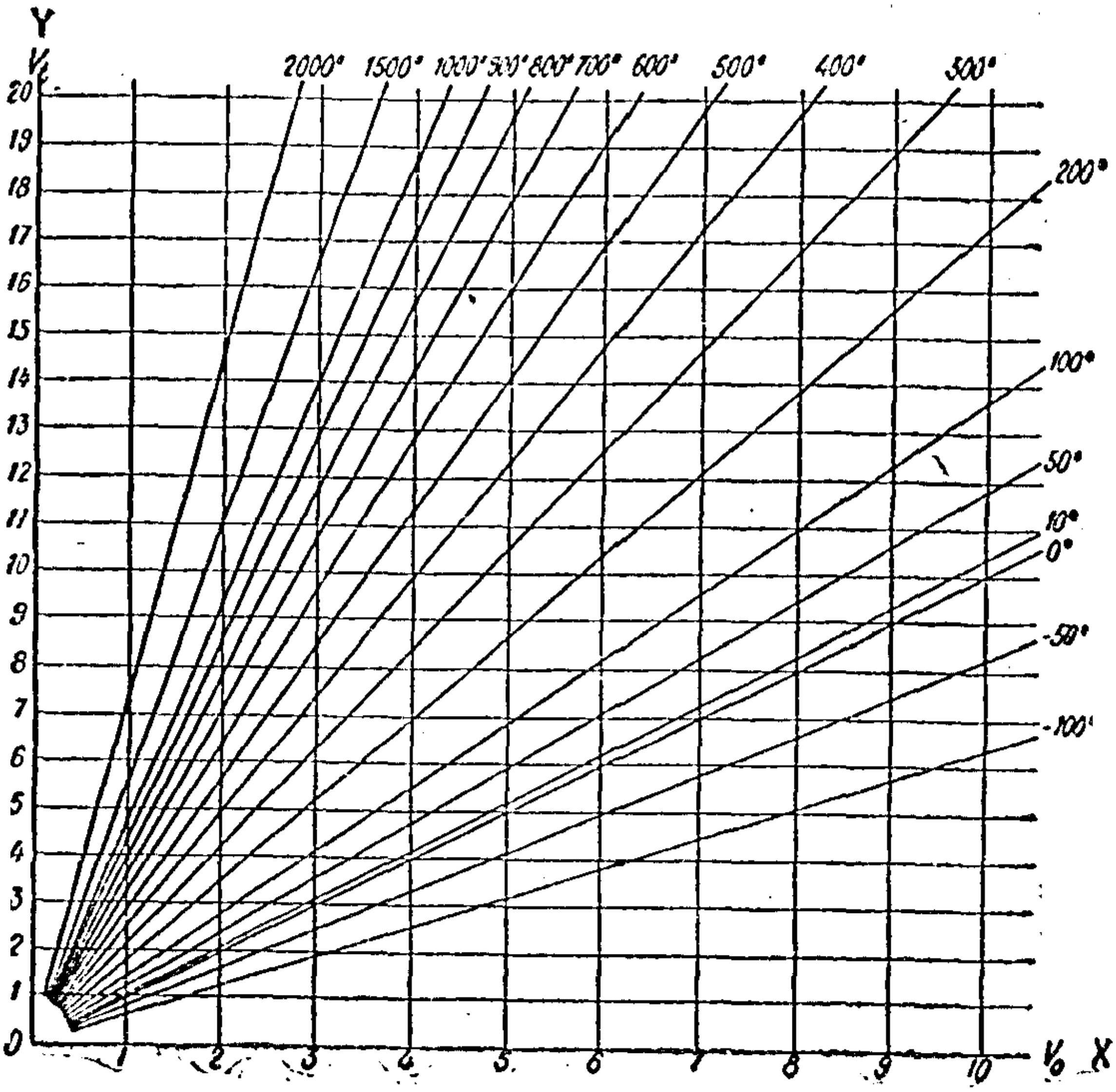
則：$V_t=V_0(1+at)$。$a=1/273$。此式可寫作 $\dfrac{V_t}{V_0}=(1+at)$

令：V_t 爲 y, V_0 爲 x; $(1+at)$ 爲 z, $a=1$。

在普通情形之下，t 多較 0° 爲高；卽：$(1+at)>1$，今如取：$e_x=e_y$，則：$e_y/e_x=1$。故當：$z=1$ 時(卽 $t=0°$ 時)。

$\tan\omega=a\dfrac{e_y}{e_x}\cdot z=1\times1\times1=1$; $\omega=45°$。故自 0° 至 45° 間 z 皆<1, t 皆<0(卽負數)。因之 t 之負值，竟佔全圖之半。今設法使其負值地位縮小，乃更設：$e_y/e_x=\dfrac{1}{2}$。當 $t=0$ 時 ($z=1$ 時)，$\tan\omega$ 減爲 $\dfrac{1}{2}$。今設圖紙之長，寬，各爲：200 mm. (卽 $l=200$, $h=200$) (圖 3)。若 V_0 之常用值自 0 至 10 (共

十個等分），每等分應佔 20 mm./unit；卽 $e_x=20$ mm./unit, $e_y/e_x=1/2$, $e_y=10$ mm./unit, $\omega=\text{arc tan}\left[\frac{1}{2}(1+at)\right]$。



（圖 3）

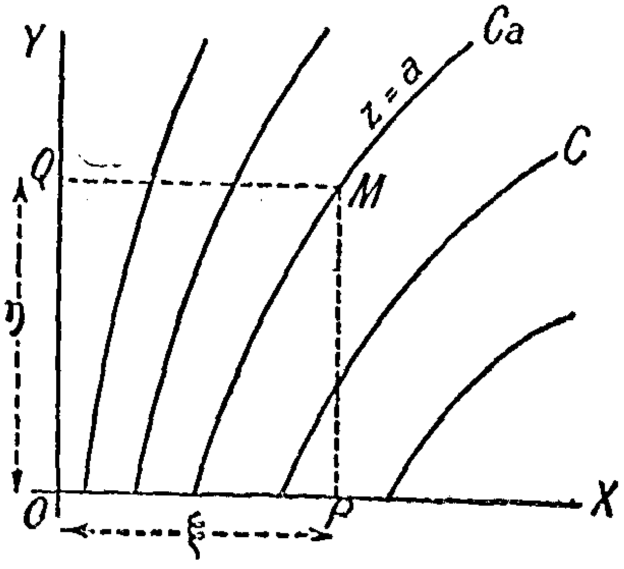
§4. 用法：　例如 0° 之原有體積為：5 m³, 求 600° 時之體積。今取通過 $V_0=5$ 之線，與 600° 之輻射線，求得交點 A；在 V_t 軸上，檢得 A 之縱坐標為 16；則 $V_t=16$ m³。

第二章　笛卡氏算圖
(Abaque cartésien. Descartes chart)

§5. 幾何性質：　笛卡算圖，係根據笛卡(Descartes)氏坐標而成者。此種算圖，可表含有三變數之公式。

例如：　　$f(x, y, z)=0$

今試與 z 以任意值 a：$z=a$。則有無數組之$\begin{cases}x\\y,\end{cases}$適合於 $f(x; y\cdot a)=0$；而適合此式之諸組$\begin{cases}x\\y,\end{cases}$可於坐標圖上以一曲線表之。今若依次令：$z=a$, $z=b$, ……則：z 之每一值，均相對一曲線 C_a，C_b，C_c，……（圖4）。故若已知 x, y, z 中之任何二值，例如：$z=a$, $x=\xi$；則第三值 $y=\eta$，不難求得。如能在圖上畫縱橫線方格，則此圖之應用，尤為便利。



（圖 4）

此種算圖，僅用於：當 C_a, C_b…… 為規則曲線，或直線之時；通常多用於一次方程式。

一次方程式：

設：　　$f(x\cdot y\cdot z)=0$ 為一次方程式

則：　　$f(x\cdot y\cdot a)=0$ 亦必為一次方程式。

今設有方程式：

$ax+by+c\cdot f(\omega)+d=0$。此方程式，可視爲一次式。

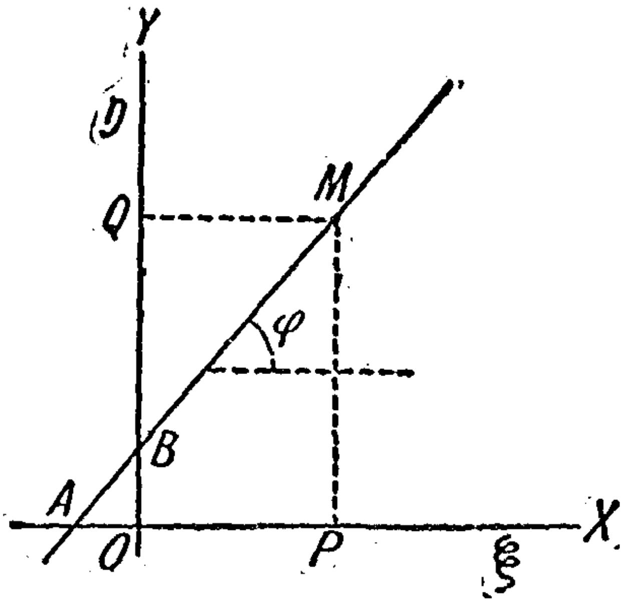
令：　$f(\omega)=z$。則原式變爲：

$$ax+by+cz+a=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

作縱橫兩軸(圖 5)，則任意點 M 之坐標，各爲：$\left\{\begin{matrix}\overline{OP}\\ \overline{OQ}\end{matrix}\right.$。

今設：$\begin{cases}\overline{OP}=\xi=e_x\cdot x, & e_x \text{ 爲 } x \text{ 每單位之長度,}\\ \overline{OQ}=\eta=e_y\cdot y. & e_y \text{ 爲 } y \text{ 每單位之長度。}\end{cases}$

則：　$x=\dfrac{\xi}{e_x}$，　$y=\dfrac{\eta}{e_y}$。



(圖 5)

代入(1)式，卽成：

$$\frac{a}{e_x}\,\xi+\frac{b}{e_y}\cdot\eta+cz+d=0$$ (此式之三變數爲 ξ,η,z)

當$(cz+d)=$常數 (卽 $z=$某一指定値)時，此式卽成直線方程式。

$\left(\dfrac{a}{e_x}\right)\xi+\left(\dfrac{b}{e_y}\right)\eta+(cz+d)=0\cdots\cdots(2)$而此直線之線坡爲：

$$\tan\varphi=-\frac{a}{b}\cdot\frac{e_y}{e_x}。$$

e_x 及 c_y, 均爲常數。若 a/b 爲常數,則此線坡 $\tan\varphi$, 亦爲常數。故不論 z 爲何值，其所對諸直線，均互相平行(線坡爲正數,則 φ 角$<90°$;線坡爲負數,則 φ 角$>90°$)。

今以 0 分別代(2)式之 ξ 及 η, 卽得此直線與兩軸之交點(A, B):

$$OA=-\frac{cz+d}{a}\cdot e_x,\qquad OB=-\frac{cz+d}{b}\cdot e_y$$

令 $z=$ 任意一値,則得 OA 及 OB 兩値;連接 AB, 卽得與此 z 値相當之直線。

§6. 作圖: 設此算圖之長爲 l, 高爲 h,

令: $$e_x=\frac{l}{x_{\max}-x_{\min}},\qquad e_y=\frac{h}{y_{\max}-y_{\min}}$$

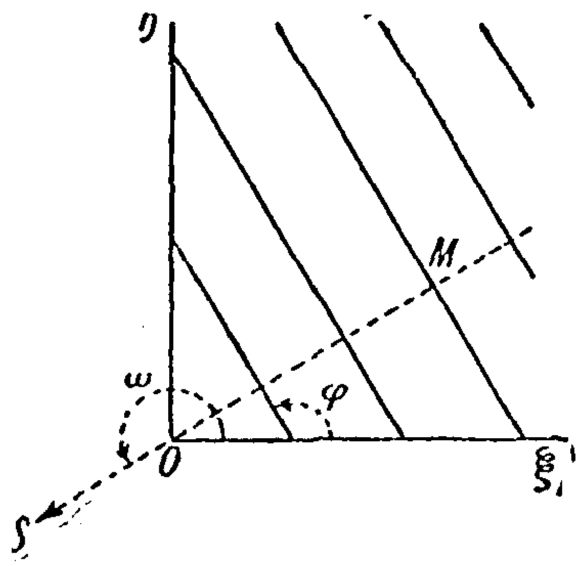
如依上述法則,求得 A, B 兩交點,固可連成直線;而適常多從直線與原點之距離着手。依解析幾何公式: $\left(D=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ 得求該直線與原點之距離:

$$\overline{OM}=D=\frac{(cz+d)}{\sqrt{\left(\frac{a}{e_x}\right)^2+\left(\frac{b}{e_y}\right)^2}}=\frac{e_xe_y(cz+d)}{\sqrt{(a^2e_y{}^2+b^2e_x{}^2)}}$$

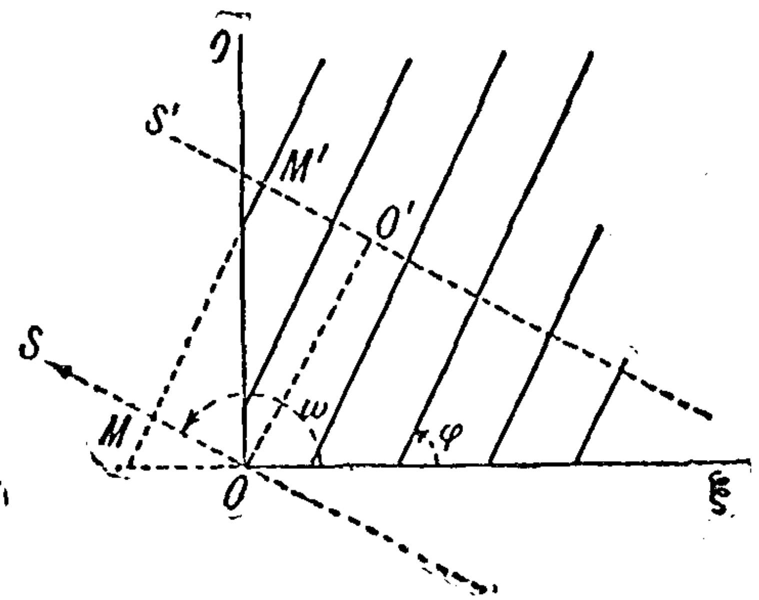
(圖6 A), 示$\frac{-a}{b}<0$ 時 φ 角$>90°$;

(圖6 B), 示$\frac{-a}{b}>0$ 時 φ 角$<90°$。作 OS 軸與 $O\xi$ 軸成角度 ω。

$$\omega=\varphi+90°。$$



（圖 6 A）



（圖 6 B）

以 z 之諸值代入：

$$D=\overline{OM}=\frac{e_x e_y(cz+d)}{\sqrt{a^2 e_y{}^2+b^2 e_x{}^2}}$$ 則得 D 之諸值。

如 D 值爲正，則 $\overline{OM}$ 依 $\overrightarrow{OS}$ 軸之向而進；如 D 值爲負，則 $\overline{OM}$ 與 $\overrightarrow{OS}$ 軸方向相反。

由是得諸點。M. 過諸 M 點，作諸直線 $\perp OS$，而於各線上註明其相對 z 之值，則此圖告成。

§7．應用：　摩尼愛(D. Monnier)氏。圓柱形導氣管公式

$$Q=\sqrt{\frac{D^5\,J}{840}}$$

Q：爲氣體流量，以每小時之方公尺數計($m^3./h.$)。
D：爲導氣管直徑，以公分 cm. 計。
J：爲氣壓降(Perte de charge; pressure drop.)之值；卽每公里所降壓力，以每公里，一公厘之水柱高計(mm. 水柱/km.)。

如化爲對數(log)式，

則成：　　$5\log D+\log J-2\log Q-\log 840=0$

令：　　$\log D=x;\ \log J=y;\ \log Q=z$。

則成：　　$5x+y-2z-2.92428=0$　此式爲三元一次式。

故可以 x 附於 ox 軸；以 y 附於 oy 軸。

D 之常用值，自 1 cm. 至 100 cm.；故 x（卽 $\log D$）自 0 至 2；

J 之常用值，自 1 mm. 至 100 mm.；故 y（卽 $\log J$）自 0 至 2。

設圖面之長寬各爲：　$l=140$ mm.，$h=200$ mm.

$$\therefore\quad e_x=\frac{140}{2}=70\text{ mm.};\qquad e_y=\frac{200}{2}=100\text{ mm.}$$

故，代表"D"值之長度爲：$e_x\cdot x=e_x\log D=70\log D$ mm.，

　　代表"J"值之長度爲：$e_y\cdot y=e_y\log J=100\log J$ mm.

設 D 之諸常用值爲：

$D=$　5；10；20；30；40；50；75：100 cm.

則 $70\log D=48.9$；70；91.1；103.4；112.1；119；131.2；140 mm.

設 J 之諸常值爲：

$J=$　5　10　20　30　40　50　60　70　80　90　100mm

則 $100\log J=69.9$　100　130　147　160　169　177.8　184.5　190.3　195.4　200mm.

$$\tan\varphi=\frac{-a}{b}\cdot\frac{e_y}{e_x}=\frac{-5}{1}\cdot\frac{100}{70}=-7.143$$

此時 $\tan\varphi<0$，故 $\varphi>90°$。今作任一直線，與 ox 軸成 φ 角以備作諸平行線之用。各線與原點之距離：

$$\overline{OM}=\frac{e_xe_y(cz+d)}{\sqrt{a^2e_y^2+b^2e_x^2}}$$

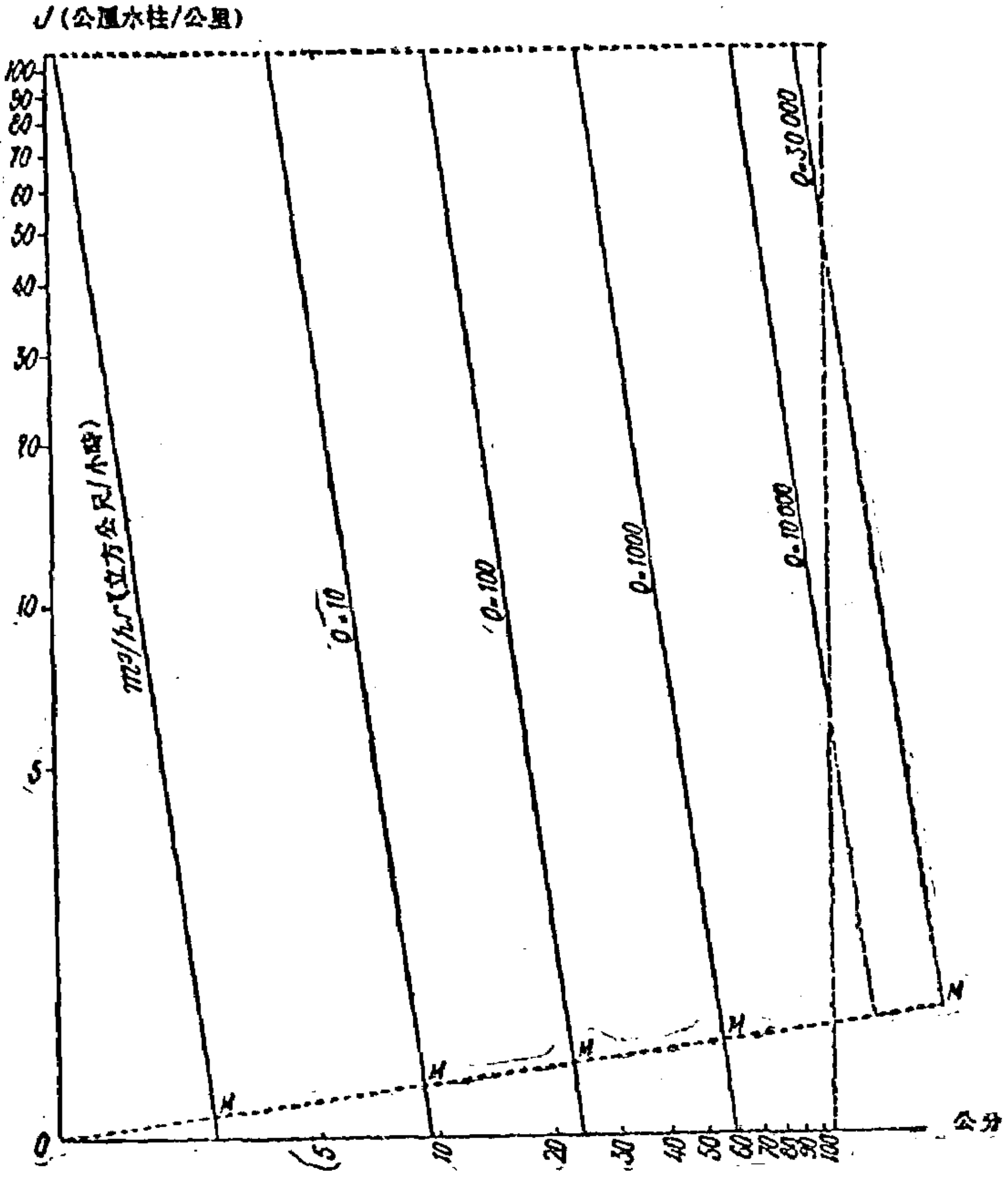
各以其實值代之：

$$OM=-13.86(2\log Q+2.92428)\text{ mm.}$$

如 $Q=$	1	10	100	1000	10000	30000
則：$\overline{OM}=$	-40.5	-68.2	-96	-123.7	-151.4	-164.7mm.

$\overline{OM}$ 之值皆爲負數，故當自 0 點取其負方向。

摩尼愛公式 $Q=\sqrt{\dfrac{D^5J}{840}}$



（圖 7）

§8. 應用： 一元三次方程式

由前證明：$ax+by+(cz+d)=0$ 直線式之線坡爲：

$$\tan\varphi=-\frac{a}{b}\cdot\frac{e_y}{e_x}。\quad e_y/e_x \text{ 爲常數。}$$

若$\frac{a}{b}$爲常數，則諸線互爲平行；若 a/b 爲變數。

例如 $a/b=f(z)$，則諸線之傾斜度，各不相同；

例如 方程式：$x^3+px+q=0$；本式含有三變數，可用此類算圖解之。

作：$o\xi, o\eta$ 兩坐標軸：$\xi=e_p\cdot p$，$\eta=e_q\cdot q$。e_p, e_q 爲 p, q 每單位之長度。

以 p,q 之值代入原式：

$$x^3+\frac{\xi}{e_p}x+\frac{\eta}{e_q}=0$$

則成：含有變數 ξ 及 η 之一次式。

其線坡：$\tan\varphi=\frac{e_q}{e_p}\cdot x$；爲 x 之函數。

且當 x 爲正數時，$\angle\varphi>90°$；x 爲負數時，$\angle\varphi<90°$。製圖之前，應先決定 p, q 之常用值。e_p 及 e_q 當選擇適當之值，俾各直線保持適當之斜度。

今設：　$e_p=8\text{ mm.}$，　$e_q=2\text{ mm}$。

則：　$x^3+\frac{\xi}{8}x+\frac{y}{2}=0$；或作 $\xi+\frac{4}{x}\eta+\frac{8}{x^2}=0$

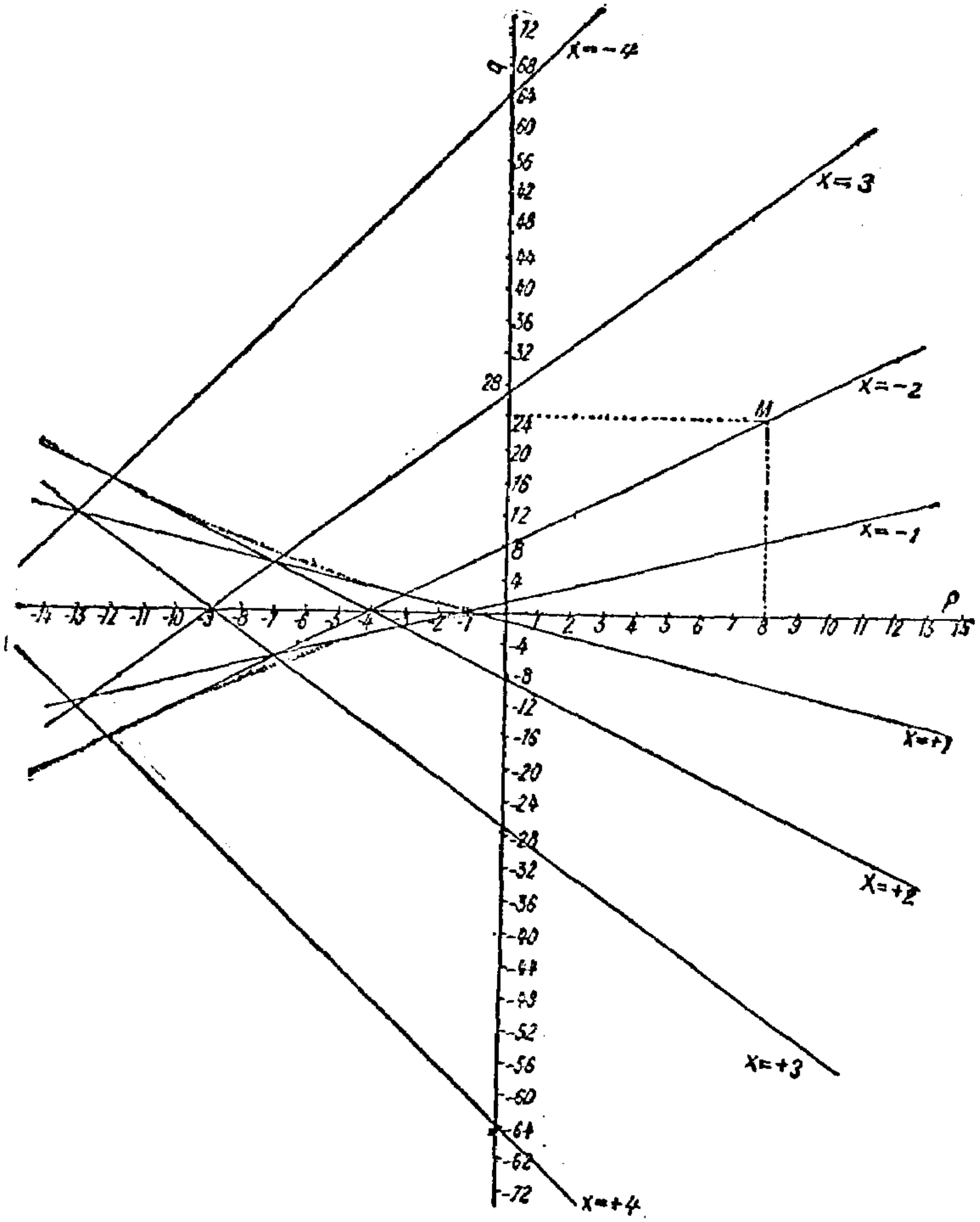
x 之每一值，相當一直線；如此畫成下列算圖(圖 8)：其 p 之值，界乎 -14 與 $+14$ 之間；q 之值，界乎 -72 與 $+72$ 之間。

例如：　$x^3+8x+24=0$

檢之圖中：　$p=8$，　$q=24$，

則：　$x=-2$ 線上之 M 點卽指此式之根；

故：　$x=-2$。



（圖 8）

圖中各直線，有一曲線爲其公共界線，而上述各直線，均爲此曲線之切線。

此曲線之方程式爲：

$4p^3+27q^2=0$，卽圖中畫虛點之曲線。

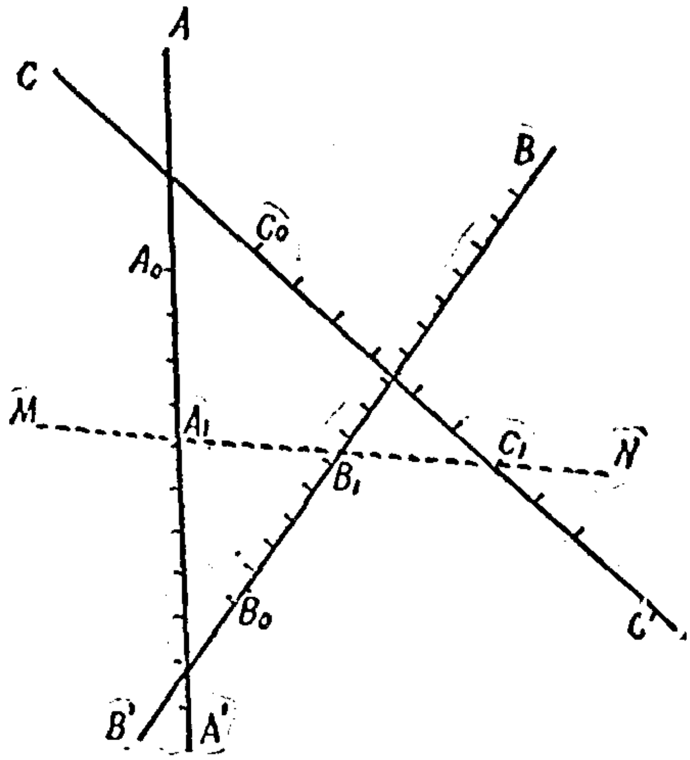
此曲線，分全圖爲兩部分：在 V 字中之部分，$4p^3+27q^2<0$，故相對各方程式，有三實根；在 V 字外之部分，$4p^3+27q^2>0$，故相對各方程式，僅有一實根。

第三章　列線算圖

(Abaque ā aliguement; aligument chart.)

§9. 概論：　過定點 A_0, B_0, C_0，作三直線(圖 9)。

今如作任一直線 MN，交各線於：$A_1B_1C_1$，則：　A_0A_1，B_0B_1，C_0C_1，三量，有一定之關係；惟視此三直線之位置距離而定；依此三値，可表三變數；如已知其二，卽可確定其第三値。



(圖 9)

§10. 列線算圖之分類：　常用之列線算圖，有下列數種：

(A)三平行軸算圖

(B)兩平行軸與一曲軸算圖

(C)一直軸與兩曲軸算圖

(D)三曲軸算圖

(E)兩平行軸與一斜軸算圖

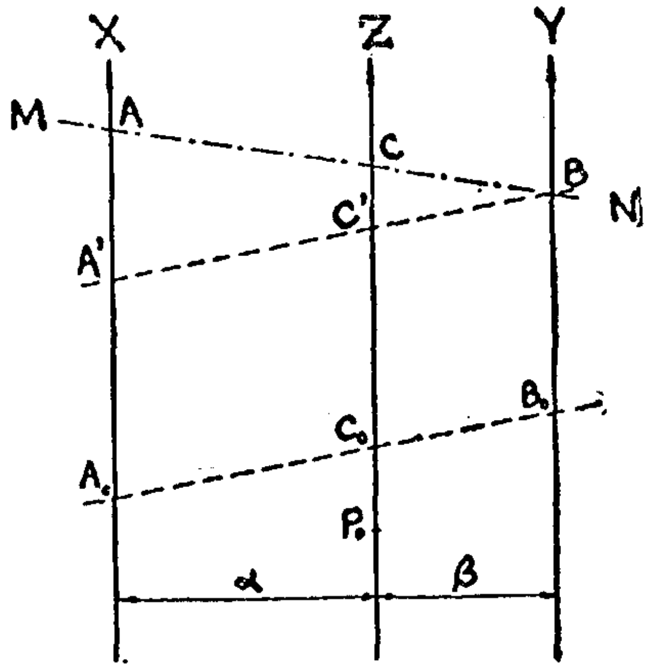
(F)三交軸算圖

(G)三角形算圖

(H)圓形算圖

(A)三平行軸算圖

§11. 幾何性質：　設三平行線之距離爲：α 及 β(圖 10)，



（圖 10）

今於三軸上取：A_0, C_0, B_0 三點於一直線上，名曰圖底線(Base de l'abaque; base of chart)作任意直線 MN，交三軸於：A, B, C。今欲求：A_0A，B_0B，C_0C 三線分之關係；過 B 點作 $A'B'/A_0B_0$（圖底線）。

則： $A_0A=A_0A'+A'A$；$C_0C=C_0C'+C'C$。

在 $\triangle ABA'$ 中：$\dfrac{A'A}{C'C}=\dfrac{A_0B_0}{C_0B_0}$

但 $$\frac{A'A}{C'C}=\frac{A_0A-A_0A'}{C_0C-C_0C'}=\frac{A_0A-B_0B}{C_0C-B_0B}$$

$(\because \quad A_0A'=C_0C=B_0B)$

化簡後： $A_0A\cdot C_0B_0+B_0B\cdot A_0C_0=C_0C\cdot A_0B_0$。

但： $$\frac{A_0C_0}{A_0B_0}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}; \qquad \frac{C_0B_0}{A_0B_0}=\frac{\beta}{\alpha+\beta};$$

$$A_0C_0=A_0B_0\frac{\alpha}{\alpha+\beta}; \qquad C_0B_0=A_0B_0\frac{\beta}{\alpha+\beta}。$$

故：　$\beta\cdot A_0A+\alpha\cdot B_0B=(\alpha+\beta)C_0C$ ………………………(1)

令：　$\beta\cdot A_0A=e\cdot a\cdot x$　　A_0 爲變數 x 之起點。

$\alpha\cdot B_0B=e\cdot b\cdot y$　　B_0 爲變數 y 之起點。

$(\alpha+\beta)C_0C=e(Z-C)$　　P_0 爲變數 z 之起點；(c 爲 $\overline{z-c}$ 之起點)故 C_0C 與$(z-c)$成正比。("c" 爲與 P_0C_0 相當之一常數)

則(1)式可表函數：

$$z=ax+by+c_{\circ}$$

e 爲任意常數，稱爲算圖之比率 (cœfficient de proportionnalité, coefficient of proportionality)

如是則：

$$A_0A=\frac{e\cdot a}{\beta}x,\quad B_0B=\frac{e\cdot b}{\alpha}y,\quad C_0C=\frac{e}{\alpha+\beta}(z-c)_{\circ}$$

或作：　$$C_0C=\frac{e}{\alpha+\beta}\cdot z-\frac{e}{\alpha+\beta}\cdot c_{\circ}$$

今於 z 軸上作 $C_0P_0=\frac{-e}{\alpha+\beta}c$ ………………………………(2)

則：　$$P_0C=P_0C_0+C_0C=\frac{e}{\alpha+\beta}\cdot z$$

$$\therefore\begin{cases}\dfrac{ea}{\beta}：\text{爲 } x \text{ 值每單位之長度}=e_x\\[2ex]\dfrac{eb}{\alpha}：\text{爲 } y \text{ 值每單位之長度}=e_y\\[2ex]\dfrac{e}{\alpha+\beta}：\text{爲 } z \text{ 值每單位之長度}=e_z\end{cases}$$

而此三者有下列關係：

$$\frac{1}{e_z}=\frac{a}{e_x}+\frac{b}{e_y}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

§12．提要：

$$C_0P_0=-e_z\cdot c, \qquad \text{由於(1)式}$$
$$A_0A=e_x\cdot x,$$
$$B_0B=e_y\cdot y,$$
$$P_0C=e_z\cdot z,$$
$$\frac{1}{e_z}=\frac{a}{e_x}+\frac{b}{e_y} \qquad \text{由於(3)式}$$

§13．作圖： 設 x 之常用值，界於 $x_{\max}$ 與 $x_{\min}$ 兩值之間（$y\cdot z$ 類推）。圖之長度爲 l，闊度爲 h。

(1) $$e_x=\frac{h}{x_{\max}-x_{\min}} \qquad \text{再用(3)式求 } e_z\text{。}$$

$$e_y=\frac{h}{y_{\max}-y_{\min}}$$

(2) $$\alpha+\beta=l; \qquad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{b}{a}\cdot\frac{e_x}{e_y}$$

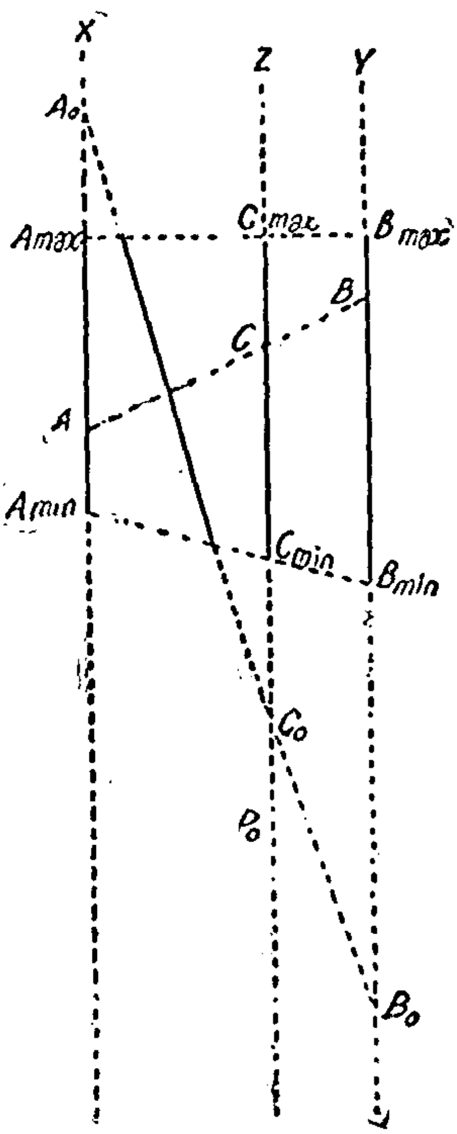
$$\therefore \quad \alpha=\frac{e_x}{e_x+\frac{a}{b}e_y}l; \quad \beta=l-\alpha\text{。}$$

由上式可知：$\frac{a}{b}$ 值小，則 α 值大；$\frac{a}{b}$ 值大，則 α 值小，故 $\frac{a}{b}$ 之值，足以影響兩軸間之距離；若距離過近，則應用時，不易得準確之結果；故宜更換 e_x，或 e_y 之值，以資調濟。

§14．定則： 如中間軸與左軸過近，則減右軸之倍率(echelle; scale)（卽 e_y）；如與右軸過近，則減左軸倍率；

減小邊軸倍率，足以影響 e_z 數值；故當注意，勿使 e_z 過小，至使運用不便。

§15．分度線之刻畫：　若 $x, y, z, =0$ 時，適在常用範圍內。則可取 A_0, B_0, P_0 三點為起點，量：e_xx，e_yy，e_zz 諸長度，而刻其相對之諸值；但在普通情形，x，y，z 之零值，多不在常用範圍內。



（圖 11）

例如（圖 11），A 為 x 軸上任意點（A_0A 所表數值為 x）。

依向量定則：

$$\overline{A_0A}=\overline{A_0A_{\min}}+\overline{A_{\min}A}$$

$$\therefore\quad \overline{A_{\min}A}=\overline{A_0A}-\overline{A_0A_{\min}}$$

$$=e_xx-e_xx_{\min}=e_x(x-x_{\min})$$

$$\therefore\quad \overline{A_0A}=e_x(x-x_{\min})。$$

同理 $\overline{B_{\min}B}=e_y(y-y_{\min})$ 依 x 諸值，求 $\overline{A_{\min}A}$ 諸長度；於各 A 點刻值，餘類推。

$$\overline{CC}=e_z(z-z_{\min})。$$

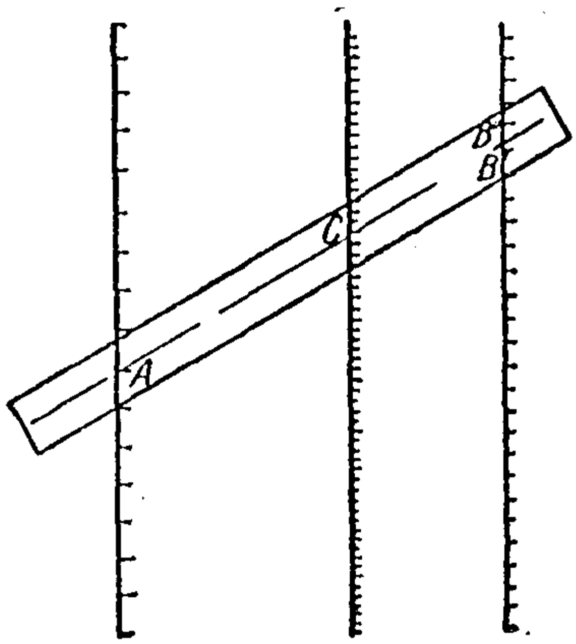
§16．軸之互換：在 $z=ax+by+c$ 式中，a 與 b 為同號，今設有 a 及 b 異號之式：$z=-ax+by+c$；亦可寫作：$z=a(-x)+by+c$，此式中以 $(-x)$ 為變數，故 x 之刻度為逆向（自上至下）。

今如將 $z=ax+by+c$ 書作：$ax=z-by-c$。則此式表示左軸（x 軸）與中軸互換；且知 y 軸之刻度為逆向。

由此得定則如下：如以一邊軸與“中軸”互換，則其他

"邊軸"之刻度爲逆向。

§17. 算圖之用法： 取透明紙，或其他透明物體，刻劃細線一條；將細線重合於已知兩變數上(例如圖 12 A, C)，則細線與第三軸之交點 B 卽表所求之第三變數，惟此交點往往在兩刻度之間，宜取其距離較近者爲得數。細線宜確實對準，蓋往往以些微之偏差，影響巨大之差誤。



(圖 12)

§18. 應用： 弗拉蒙(Flament)氏水力學公式

$$J=0.00092\sqrt[4]{\frac{V^7}{D^5}}$$

J: 爲水頭耗損 (Perte de charge; loss of head) 之值；卽每公尺之鐵管長；所降水位，以公尺計(m. 水位/m. 管長)。

V: 爲水之速度，以每秒所流公尺數計(m./sec.)。

D: 爲圓管直徑，以公尺計(m.)。

今設 Q 爲管中水之流量(Débit; flow) 以每秒所流立方公尺數計(m.^{3}/sec.)，則原式可作：

$$J^4=0.00092^4\left(\frac{4}{\pi}\right)^7\cdot\frac{Q^7}{D^{19}}$$

化爲對數式：

$$\log Q=0.5714\log J+2.714\log D+1.63005$$

以 $\log Q$, $\log J$, $\log D$ 爲三變數，故可用三軸算圖解之。

作圖之與件如下： $J_{\min}=1\text{ m.}\longrightarrow\log J=0$

$D_{\min}=0.1\text{ m.}\longrightarrow\log D=-1$

$J_{max}=100\text{ m.}\longrightarrow\log J=2,\quad D_{max}=1\text{ m.}\longrightarrow\log D=0$

設此算圖，爲每邊長 160 mm. 之正方形。

1) 倍率：

$$e_x=\frac{h}{x_{max}-x_{min}}=\frac{160}{\log 100-\log 1}=\frac{160}{2}=80\text{ mm.}$$

$$e_y=\frac{h}{y_{max}-y_{min}}=\frac{160}{\log 1-\log 0.1}=\frac{160}{1}=160\text{ mm.}$$

$$\frac{1}{e_z}=\frac{a}{e_x}+\frac{b}{e_y}=\frac{0.5714}{80}+\frac{2.714}{160}$$

$$e_z=41.4\text{ mm.}$$

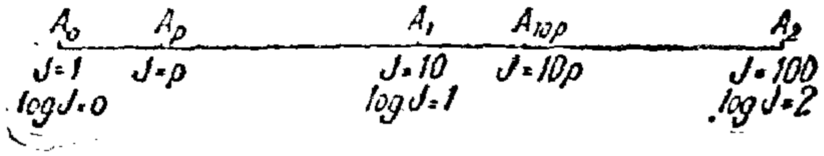
2) 軸距：

$$a=\frac{e_x}{e_x+\frac{a}{b}e_y}\cdot l=\frac{be_x}{be_x+ae_y}\cdot l$$

$$=\frac{2.714\times 80\times 160}{2.714\times 80\times 0.5714\times 160}=112.8\text{ mm.}$$

3) 刻度：在 J 軸上起點爲 $J=1$($\log J=0$ 時)，卽圖中之 A_0 點。自 A_0 點起，量各線分，其長爲：

$$e_x\ \log J=80\ \log J\text{ mm.}$$



以 J 之各値，檢得其對數，乘以 80 卽得。

例如 $J=3$，其所對線段長，應爲：$80\times 0.47712=38.17$ mm.。故在距 A_0 點 38.17 mm. 處，刻 $J=3$。

自 $J=0$ 至 $J=10$ 諸值之刻法均依此類推，惟自 $J=10$ 至 $J=100$ 諸值可無庸再算，祇須以 A_1 爲起點；再取同上之諸線段。換言之，卽

$$A_0A_p=A_1A_{10p}。\qquad \because \quad A_1A_{10p}=A_0A_{10p}-A_0A_1,$$

$$A_1A_{10p}=c_x\cdot\log 10p-c_x=c_x(\log 10p-1)=c_x\cdot\log p=A_0A_p,$$

$$\therefore \quad A_0A=A_1A_{10p}。$$

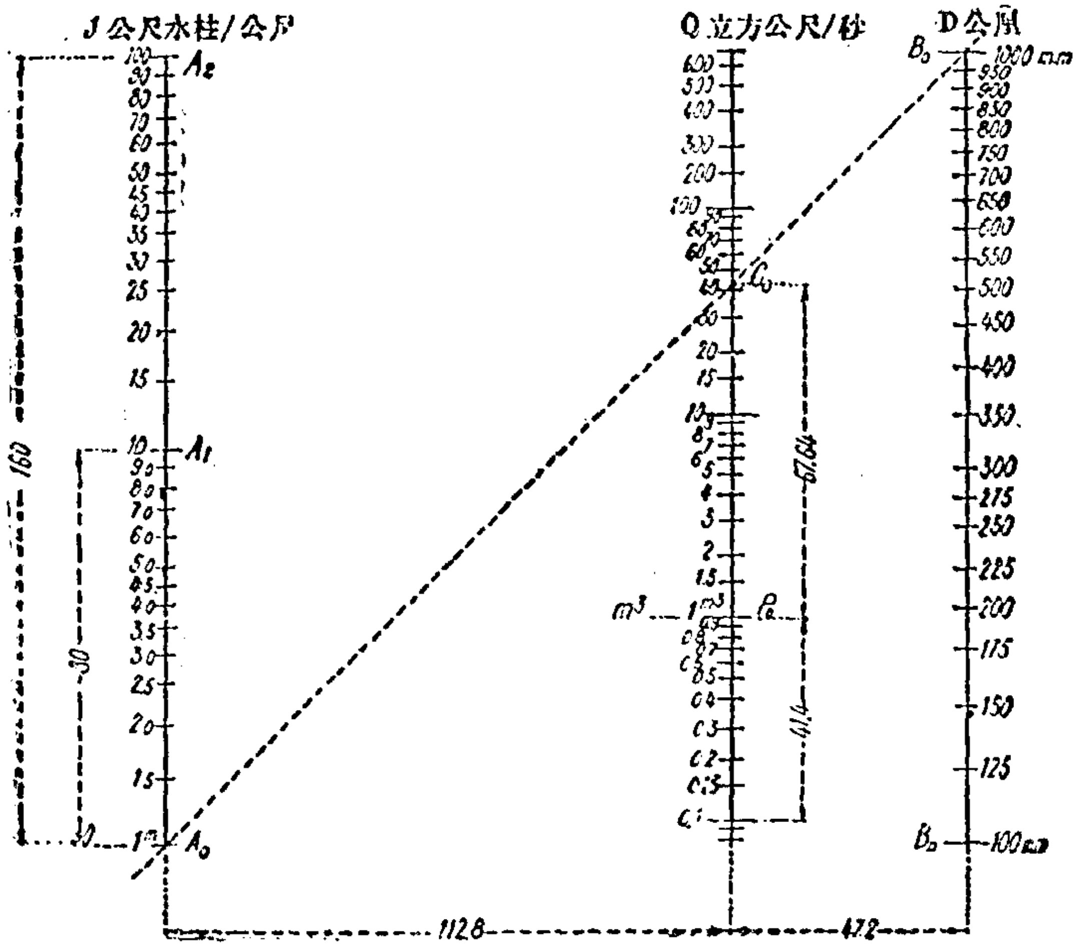
故得以 10 之每整次羃爲起點，重刻以上諸線段。

D 軸刻度應以 B_0 爲起點，取諸線分 $=c_y\cdot\log D=160\log D$。

例如：$D=0.2$ m.，則 $160\log 0.2=160\times\bar{1}.30103$

$$=-160\times0.69897=-111.8\text{ mm.}。$$

此線分之長爲負值，故當刻於 B_0 之下首（圖 13）。至於



（圖 13）

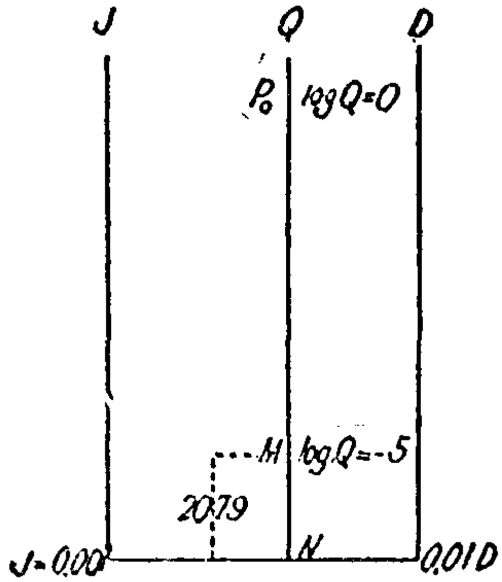
Q 軸之刻劃，應先定其起點 P_0；此 P_0 點可由

$$C_0P_0=-c\cdot e_z=-1.63005\times 41.4=-67.64\ \mathrm{mm.}$$

定之。C_0P_0 爲負值，故當向下取之，自 P_0 起每長 41.4mm.，表 10 之一羃。依前節所述，吾人可於此數段中任擇其一，刻以 $e_z\cdot\log Q$ 之諸值，再將此刻度移刻於其他各段，則算圖成矣。至於圖底線 A_0B_0，無刻劃之必要；因往往：A_0B_0 兩點，或二者之一，落於圖外，則刻度時當取另一點爲起點。設以上 Flament 氏公式之與件，改爲：

$$\begin{cases}J_{\min}=0.001 & \log J=-3\\ J_{\max}=0.1 & \log J=-1\end{cases}\qquad\begin{cases}D_{\min}=0.01 & \log D=-2\\ D_{\max}=0.1 & \log D=-1\end{cases}$$

圖紙大小仍與前同(160 mm. ×160 mm.)；則圖中各軸倍率，仍與前同：$e_x=80$ mm.，$e_y=160$ mm.，$e_z=41.4$ mm.。今仍取上圖三軸，於最下端，刻 $J=0.001$，及 $D=0.01$。則此二值所對中軸上之 N 點(圖 14)，表 Q 之最小值。此 Q 值可自下式求之：



(圖 14)

$$\log Q = 0.5314 \cdot \log 0.001 + 2.714 \log 0.01 + 1.63005$$
$$= -5.51215。$$

此 N 點與起點 P_0 之距離，為：$P_0N = -e_z \times 5.51215$ mm.。今如取 $\log Q = -5$ 所對一點 M，則 $P_0M = -5\,e_z$。

$$\therefore\ MN = P_0N - P_0M = -e_z(5.51215 - 5) = -e_z \times 0.51215$$
$$= -41.4 \times 0.51215 = -20.79 \text{ mm.}$$

今如以 M 為起點，刻 $\log Q = -5$（卽 $Q = 0.00001$），則距 M 點每長 41.4 mm.，表 10 之一冪。

§ 19. 平行多軸算圖： 前節所論，僅可應用於三變數之函數；但亦可推及於多變數者。

例如 有四變數等式：

$$w = ax + by + cz + d \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

若取輔助變數 $v = ax + by$ ……………… (2)

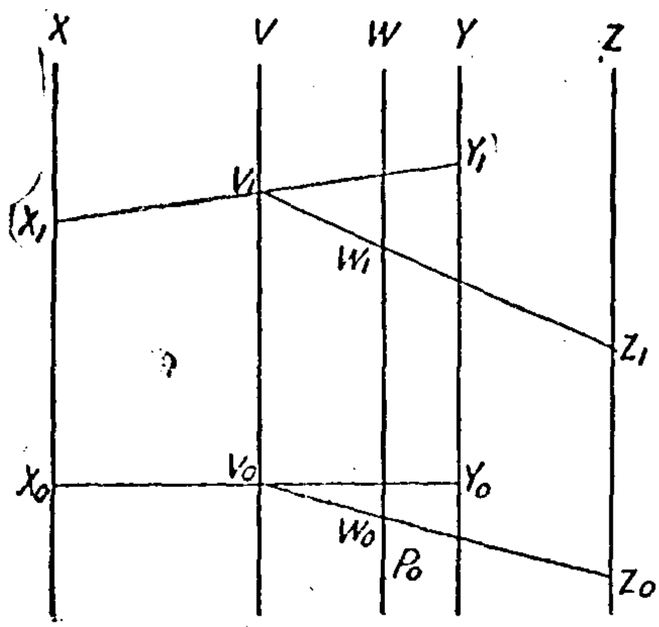
則可將(1)式化為下列之三變數式：

$$w = v + cz + d \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

今先作適合於(2)式之算圖。例如 X, V, Y, 三軸，其圖底線上，x_0, v_0, y_0, 三點，表：$x=0$, $y=0$, $v=0$（圖 15）。設 e_x 及 e_y 為 x, y 兩軸之倍率，

則 V 軸倍率為：

$$e_v = \frac{e_x \cdot e_y}{ae_y + be_x}\left(\text{卽}\ \frac{1}{e_v} = \frac{a}{e_x} + \frac{b}{e_y}\right)$$



（圖 15）

今再作(3)式之算圖，且保持上圖 V 軸之原有位置，及其倍率，設 z 軸之倍率為 e_z，

則 W 軸之倍率爲：　$c_w=\dfrac{c_v\,c_z}{c_z+cc_v}$。

用上列 c_v 值代入此式而化簡之，則得：

$$\frac{1}{c_w}=\frac{a}{c_x}+\frac{b}{c_y}+\frac{c}{c_z}。$$

今於 z 軸上，取起點 z_0，表示 $z=0$，此第二圖之圖底線：Z_0V_0，交 W 軸於 W_0；而此 W 軸之起點爲 P_0，且 $W_0P_0=-d\cdot c_w$。

如是，則(2)(3)兩算圖，卽合併爲五平行線算圖。

§20．算圖之用法：　例如：已知(1)式中，三個變數；x_1 y_1 W_1，而求 Z_1；當先於 XVY 算圖上，連 X_1Y_1 交 V 軸於 V_1；次於 VWZ 圖上連 V_1W_1 交 Z 軸於 Z_1，卽得所求 z 值。

由此觀之，此種算圖可推廣爲多變數算圖；且知每多一變數，增加兩軸；故若有 n 個變數，必有 $3+2(n-3)$ 個軸。

§21．應用：　高壓水管厚度公式：金屬高壓水管，或圓柱形蓄水池，其金屬厚度，可由下式求之：

$$E=\frac{HD}{2R\,10^3}$$

E：爲金屬厚度，以 mm. 計。

D：爲直徑，以 mm. 計。

H：爲貯水高度，以 m. 計。

R：爲每 $\mathrm{mm.}^2$，金屬所受抗力，以 kg. 計。

如將上式，化成對數式，則成：

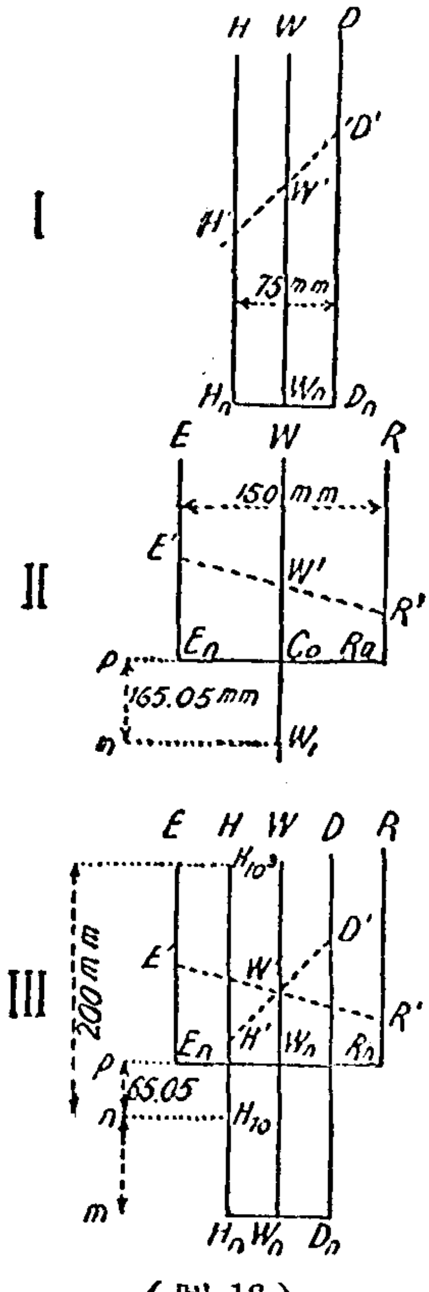
$$\log E+\log R+\log 2\times10^3=\log H+\log D$$

此式有變數：$\log E$，$\log R$，$\log H$，$\log D$。

取輔助變數：$\log W=\log H+\log D$……………………………(1)

則：$\log E+\log R+\log 2\cdot10^3=\log W$……………………………(2)

以上二式：(1)，(2)各對一算圖：(I)(II)(圖 16)，$\log H$，$\log D$ 及 $\log W$ 之 0 値在一圖底線上，但未盡於圖內；因 $\log H$ 及 $\log D$ 兩變數之係數相等(=1)，故 H 及 D 兩軸與 W 軸等距(設 $e_H=e_D$)。



(圖 16)

(公共倍率 $c=100$)

設：E_n，H_n，W_n，D_n，R_n 爲各變數之最小值(卽前作 E_{min}，H_{min}……)，在(II)圖中，$C_0W_n=-\log 2\cdot10^3\times e_w=P_m$。令(I)圖中，$H$ 及 D 兩軸之倍率同爲：$e(e_H=e_D=e)$。

則：
$$e_w=\frac{e}{2}。$$

今使圖(I)與圖(II)之 W 軸重合，則得圖(III)。

算圖用法：例如已知 H'，D'，R' 三值欲求 E'；先於 HWD 圖上，連接 $H'D'$，交 W 軸於 W'；再於 EWR 圖上，連 $W'R'$，交 E 軸於 E'，卽所求值。此兩次連線，均可於(III)圖上行之。

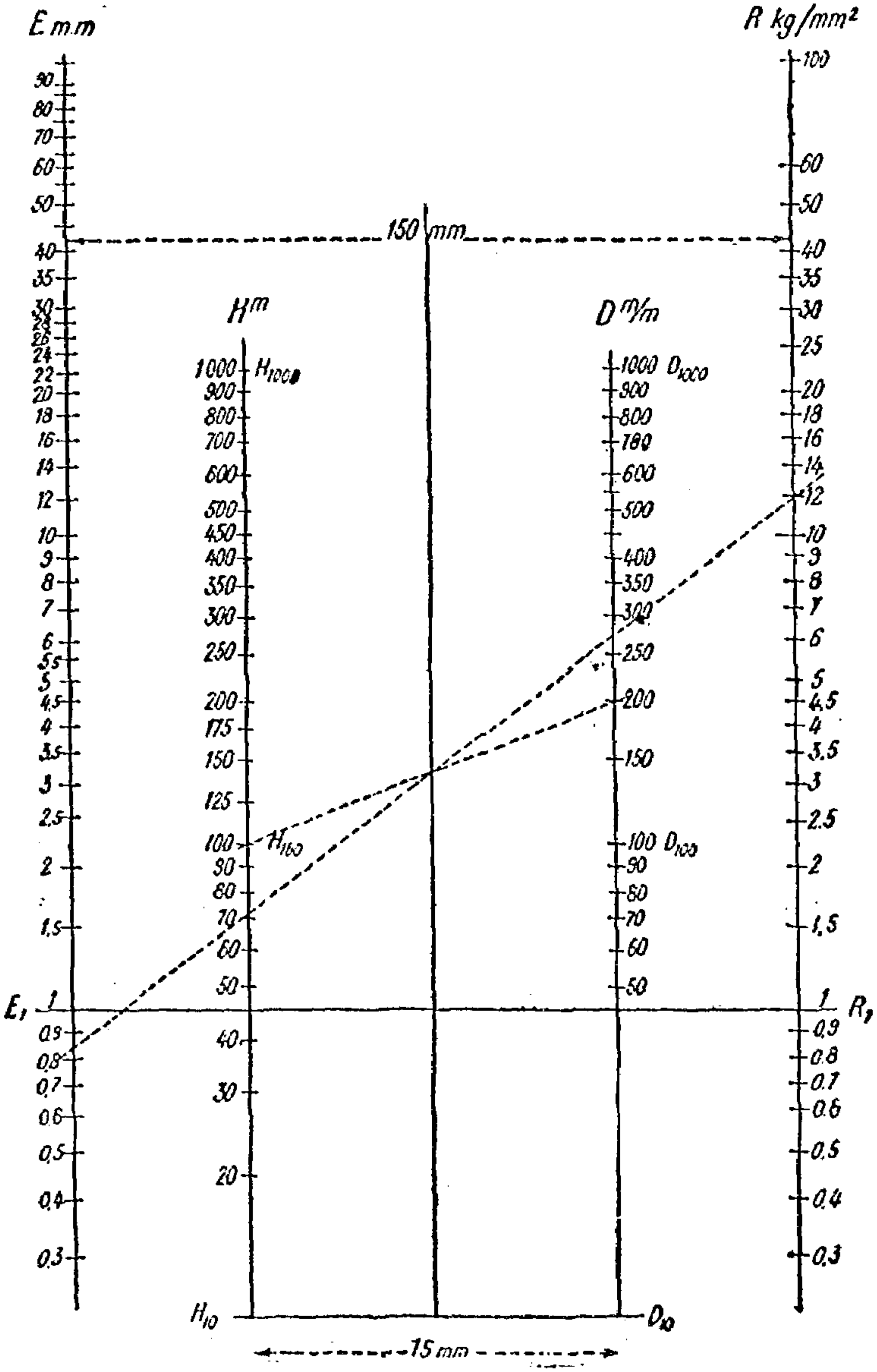
設各變數之常用值如下：

$H_{min}=10$ m. $D_{min}=1$ mm.

$H_{max}=1000$ m. $D_{max}=1000$ mm.

$E_{min}=1$ mm. $R_{min}=1$ kg.

$E_{max}=100$ mm. $R_{max}=100$ kg.


E m.m
R kg/mm²
150 mm
Hᵐ
D m/m
H1000
D1000
H100
D100
E1
R1
H10
D10
15 mm

（圖 17）

命 H 軸之長：200 mm.（卽自 $H=10$ 處至 $H=10^3$ 處長爲 200 mm.）

則其倍率： $e_H=e=\dfrac{200}{\log 1000-\log 10}=100$ mm.

C_0 與起點 W 之距離爲：

$$C_0 W_n = pm = -e_w \log 2\cdot 10^3 = -\frac{1}{2}100\times 3.30103$$

$$= -165.05 \text{ mm.}$$

np 間距離（卽 $H=10$ 處與圖底 E_1R_1 之距離）爲：

$$165.05-100=65.05 \text{ mm.}$$

以 $H=10$ 處爲起點，取以下諸長度：

$$100\log 2,\ 100\log 3,\ 100\log 4\cdots\cdots100\log 9 \text{ mm.},$$

並以此分度，照刻於 D, E, R 等軸（因各軸倍率相同 $e=100$），如是，則成圖 17。今設已知

$$H=100 \text{ m.},\quad D=200 \text{ mm.},\quad R=12 \text{ kg./mm.}^2$$

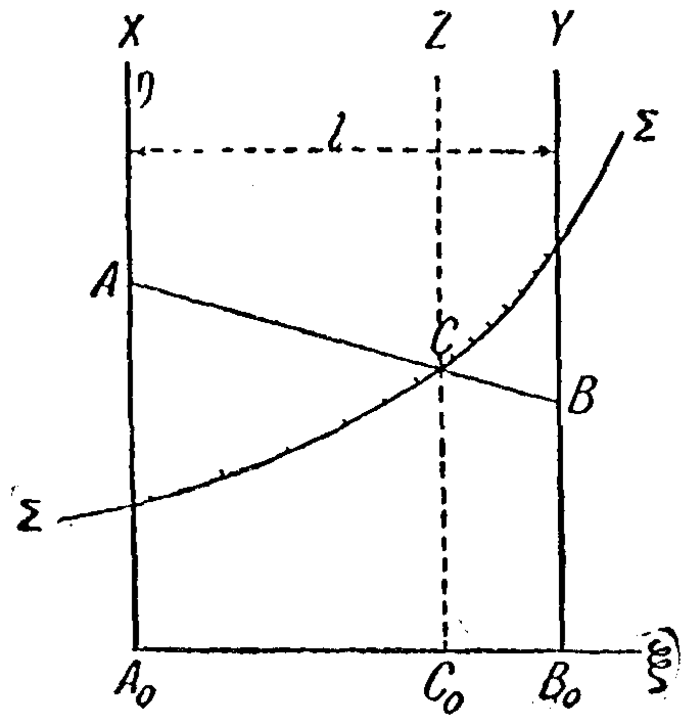
欲 E 之值，照以上連線，卽得 E 值在 0.8 mm. 與 0.9 mm. 之間。

（B）兩平行軸與一曲軸算圖

§ 22. 幾何性質： 前節所論算圖，僅適用於一次方程式；故凡不能化爲一次式者，皆不得應用此圖，今就其幾何關係，略加改變，卽可應用於高次式。

設有直線式：$z=ax+by+c$，若用上述算圖表之，

則：A_0C_0 及 C_0C 兩值，可由下式求之（圖 18）：



（圖 18）

$$\begin{cases} A_0C_0 = \dfrac{be_x}{ae_y+be_x}\cdot l \\ C_0C = \dfrac{e_x\cdot e_y}{ae_y+be_x}\cdot(z-c) \end{cases}$$

令：C_0C 及 A_0C_0，爲 C 點之縱橫兩坐標：

$$A_0C_0=\xi=\frac{be_x}{ae_y+be_x}\cdot l \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$C_0C=\eta=\frac{e_x\cdot e_y}{ae_y+be_x}(z-c) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

當 a 及 b 爲常數時，A_0C_0 有一定值，若 a 及 b 爲 z 之函數，則 A_0C_0 亦爲 z 之函數；故 z 之每一値均相對一 C 點連接諸點，卽成一曲線 Σ，此曲線之效用，與前之 z 軸同，此種算圖，可表下列等式：

$$z=f(z)\cdot x+\varphi(z)\cdot y+c \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

式中： $a=f(z)$，$b=\varphi(z)$。$f(z)$ 及 $\varphi(z)$ 均爲 z 之函數 (fonction de z; function of z)。

若於 Σ 曲線上，刻各該點相對之 z 值，則成(3)式之算圖。今設已知 $x=A$，$y=B$，欲求 z 之值；連接 AB，交 Σ 曲線於 C，則 C 點表所求 z 值。有時 Σ 曲線，更可用解析法加以研究。此曲線之方程式，可由(1)(2)兩式求得之。

§ 23. 應用： 一元二次方程式。

$$X^2+pX+q=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此式有三變數：X^2，p，q，變數 p 之係數，爲 X；亦卽所謂：變數 X^2 之函數，故(1)式可化爲直線式：

$$z=ax+by+c。$$

式中：
$$\begin{cases} X^2=z, & p=x, & q=y, \\ a=-X, & b=-1, & c=0。\end{cases}$$

令 e 爲 p，q，之公共倍率： $e_p=l_q=e$

則其曲線各點之坐標爲：

$$\begin{cases} \xi=\dfrac{be_x}{ae_y+be_x}\cdot l=\dfrac{l}{1+X}, \\ \eta=\dfrac{e_x\cdot e_y}{ae_y+be_x}(z-c)=\dfrac{eX^2}{1+X} \end{cases}$$

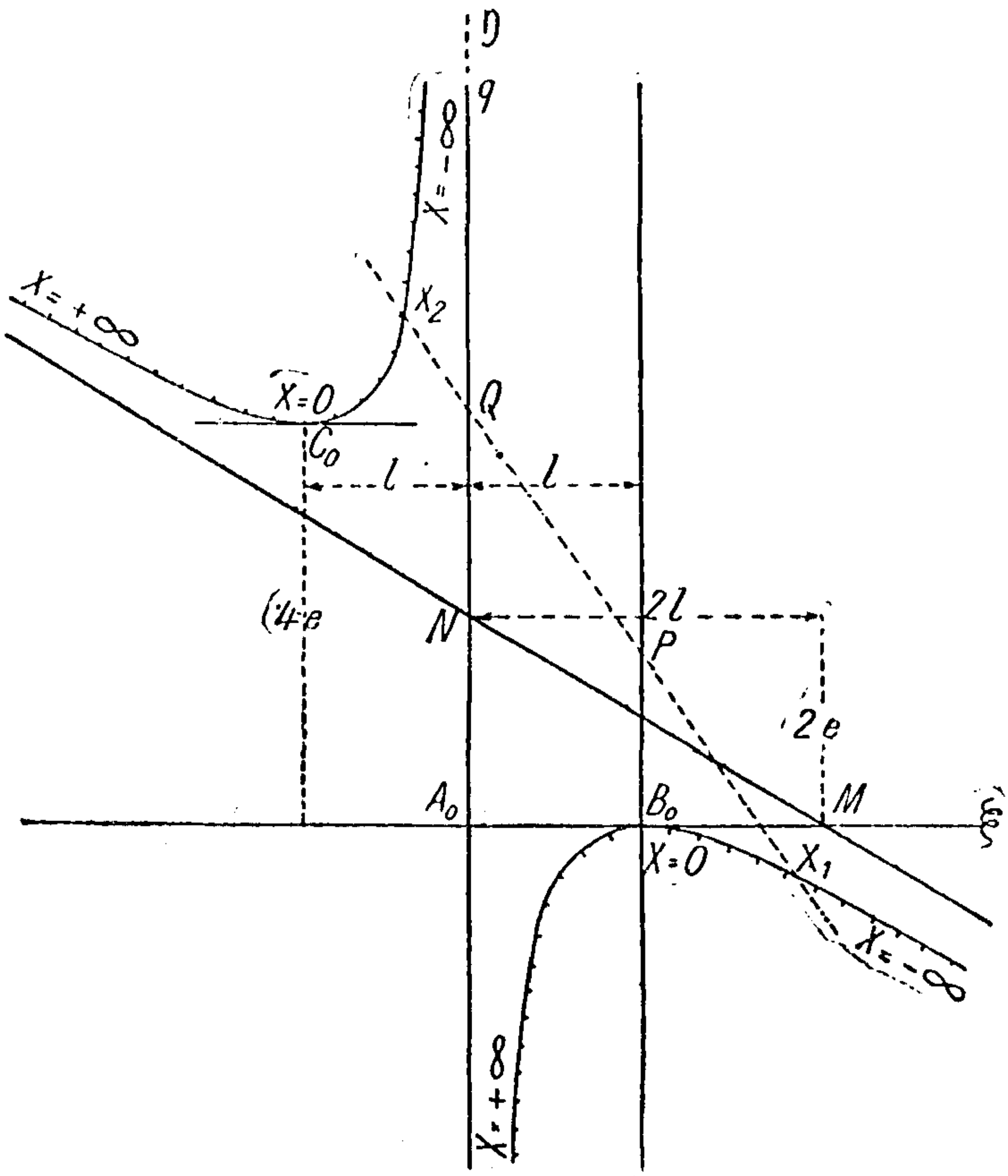
於此兩式中，提 X 之值，卽得曲線之方程式：

$$e(l-\xi)^2+l\xi\eta=0 \quad (圖\ 19)$$

此式表：通過 B_0 點而切於 $A_0\xi$ 軸之雙曲線。

其兩漸近線爲：$\xi=0$，及 $e\xi+l\eta-2el=0$（卽 $A_0\eta$ 及 MN 兩軸）在此曲線上，應刻以 X 諸值。

今已知：$\xi=\dfrac{l}{1+X}$，則 X 一值，必相對一 ξ 值；取此 ξ



（圖 19）

值所對直線與曲線之交點刻所對 X 值，則成圖 19。

§ 24．算圖之用法：　例如已知式中 p，q 兩值連接代表 p，q 之兩點；P 及 Q 交曲線於兩點 X_1，X_2，卽所求方程式之兩根。如 PQ 不與此曲線相交，則方程式無實根，此種算圖亦可應用於高次方程式：

$$X''' + pX'' + q = 0,$$

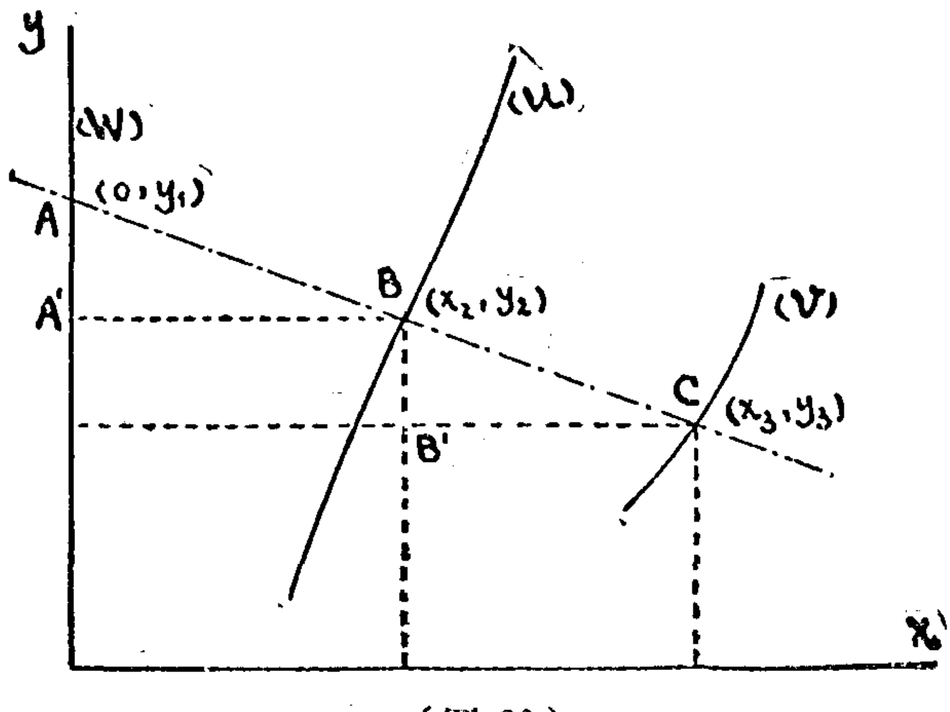
惟圖中曲線亦必爲高次曲線。

其縱橫兩標應爲：

$$\xi = \frac{l}{1+x''}, \qquad \eta = \frac{-cx'''}{1+x''}。$$

(C)一直軸與兩曲軸算圖

§ 25. 幾何性質： 今試於正坐標圖 $\begin{cases} ox \\ oy \end{cases}$ 上，畫任意兩曲線：(u), (v)，又作任意直線，交 oy 軸及 (u), (v) 兩曲線於 A, B, C，三點。作縱橫垂線如圖 20 所示：



(圖 20)

$$\triangle AA'B \sim \triangle BB'C$$

故：
$$\frac{A'A}{A'B} = \frac{B'B}{B'C}$$

設：A, B, C，三點之坐標各爲：

$$(0,\ y_1)\ ;\qquad (x_2,\ y_2)\ ;\qquad (x_3,\ .\ _3)$$

則：
$$\frac{y_1-y_2}{x_2}=\frac{y_2-y_3}{x_3-x_2}\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

簡化之，則成：

$$y_1=\frac{\dfrac{y_2}{x_2}-\dfrac{y_3}{x_3}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_3}}\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

乘以任意係數 $\frac{A}{B}$：

則：
$$y_1\cdot\frac{A}{B}=\frac{A\dfrac{y_2}{x_2}-A\dfrac{y_3}{x_3}}{B\dfrac{1}{x_2}-B\dfrac{1}{x_3}}\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

令：
$$y_1\frac{A}{B}=f(w)\quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\begin{cases}A\dfrac{y_2}{x_2}=\varphi(u)\\ b\dfrac{1}{x_2}=f(u)\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\begin{cases}A\dfrac{y_3}{x_3}=\varphi(v)\\ B\dfrac{1}{x_3}=f(v)\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots(6)$$

則(3)式可寫作：

$$f(w)=\frac{\varphi(u)-\varphi(v)}{f(u)-f(v)}\quad\cdots\cdots\cdots(7)$$

是卽此種算圖，所表之一般形式。

$f(u)$ 及 $\varphi(u)$ 均爲 u 之函數，但有時亦可爲常數。

§ 26. 作圖：

由(4)式， 得： $y_1 = f(w)\cdot\frac{B}{A}$

由(5)式， 得： $$\begin{cases} x_2 = \dfrac{B}{f(u)} \\ y_2 = \dfrac{\varphi(u)}{f(u)}\cdot\dfrac{B}{A} \end{cases}$$

由(6)式， 得： $$\begin{cases} x_3 = \dfrac{B}{f(v)} \\ y_3 = \dfrac{\varphi(v)}{f(v)}\cdot\dfrac{B}{A} \end{cases}$$

令： $$\begin{cases} \dfrac{B}{A} = e_y \\ B = e_x \end{cases}$$

則： $$y_1 = f(w)\cdot e_y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{e_x}{f(u)} \\ y_2 = \dfrac{\varphi(u)}{f(u)}\cdot e_y \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{e_x}{+(v)} \\ y_3 = \dfrac{\varphi(v)}{f(v)}\cdot e_y \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

今設有公式：

$$f(w) = \frac{\varphi(u) - \varphi(v)}{f(u) - f(v)}$$

可任擇 e_x, e_y 兩值（以各軸之長，不出圖紙之範圍爲度）。在正坐標圖之 y 軸上，作：

$$y=f(w)\cdot e_y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

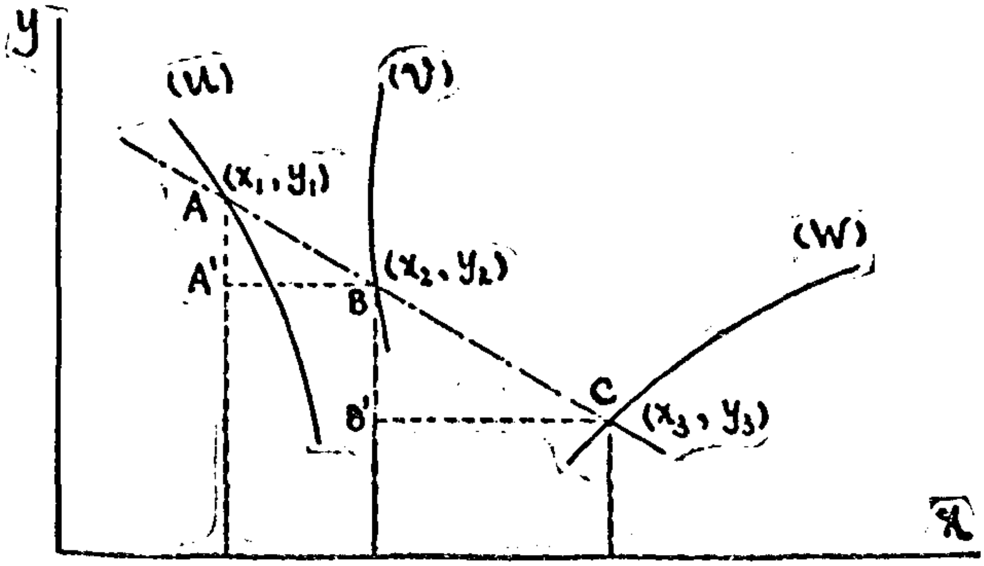
以 w 各值，依次代入(8)式。每一 w 值，相對一 A 點；於各該點，刻相對之 w 值，卽成(w)軸。

次以各 u 值依次代入(9)式。每一 u 值，相對一 B 點；連接諸 B 點，並於各該點，刻其相對之 u 值，則成(u)軸。

依同法，刻劃(v)軸，則全圖成矣。

(D)三曲軸算圖

§27. 幾何性質：　今試於坐標圖 $\begin{cases} ox \\ oy \end{cases}$ 上，畫任意三曲線：(u), (v), (w)，並作任意直線交(u), (v), (w)，於 A, B, C, 三點。如圖 21 所示。



（圖 21）

$$\triangle AA'B \sim \triangle BB'C$$

故：
$$\frac{A'A}{BA'}=\frac{B'B}{CB'}$$

設：A, B, C, 三點之坐標，各爲：(x_1, y_1)；(x_2, y_2)；(x_3, y_3)；

則：
$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - y_3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

茲今
$$\begin{cases} x_1 = f(u) \cdot e_f \\ y_1 = \varphi(u) \cdot e_\varphi \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_2 = f(v) \cdot e_f \\ y_2 = \varphi(v) \cdot e_\varphi \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_3 = f(w) \cdot e_f \\ y_3 = \varphi(w) \cdot e_\varphi \end{cases}$$

$f(u)$ 及 $\varphi(u)$，均爲 u 之函數，但亦可爲常數。

e_f 及 e_φ 爲任意常數。

則：
$$\frac{\varphi(u) - \varphi(v)}{f(u) - f(v)} = \frac{\varphi(v) - \varphi(w)}{f(v) - f(w)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

或作：
$$\varphi(u) \cdot f(v) + \varphi(v) \cdot f(w) + \varphi(w) \cdot f(u)$$
$$= \varphi(v) \cdot f(u) + \varphi(w) \cdot f(v) + \varphi(u) \cdot f(w) \cdots\cdots (3\,a)$$

或簡作：
$$\Sigma\ \varphi(u) \cdot f(v) = \Sigma\ \varphi(v) \cdot f(u) \cdots\cdots\cdots\cdots (3\,b)$$

是即三曲軸算圖所表之一般形式。

§ 28．作圖：今設有公式：
$$\frac{\varphi(u) - \varphi(v)}{f(u) - f(v)} = \frac{\varphi(v) - \varphi(w)}{f(v) - f(w)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

或：
$$\Sigma\ \varphi(u) \cdot f(v) = \Sigma\ \varphi(v) \cdot f(u) \cdots\cdots\cdots\cdots (3\,b)$$

如用是類算圖解之，可於正坐標圖上，作：(u)，(v)，(w) 三曲線，如圖 21。

$$(u):\quad \begin{cases} x=f(u)\cdot e_f \\ y=\varphi(u)\cdot e_\varphi \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$$(v):\quad \begin{cases} x=f(v)\cdot e_f \\ y=\varphi(v)\cdot e_\varphi \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$$(w):\quad \begin{cases} x=f(w)\cdot e_f \\ y=\varphi(w)\cdot e_\varphi \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

e_f: 爲 $f(u)$, $f(v)$, $f(w)$之公共倍率。

e_φ: 爲 $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, $\varphi(w)$之公共倍率。

e_f 及 e_φ 間,無相互之關係; 可視圖紙之大小, 任意選定之。

今以 u 之各値: u_1, u_2,……依次代入(4)式,得 A_1,A_2,……諸點。連接 A_1A,……並於各該點刻相對之 u_1, u_2,……諸値,則(u)軸告成。依法遞刻(v),(u)兩軸,則全圖告成。

§ 29. 上述三曲線算圖之代表形式, 亦可以行列式求之。在圖 21 中: A, B, C 三點, 同在一直線上; 依解析幾何定理,得:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

令

$$\begin{cases} x_1=f(u)\cdot e_f \\ y_1=\varphi(u)\cdot e_\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2=f(v)\cdot e_f \\ y_2=\varphi(v)\cdot e_\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = f(w) \cdot e_f \\ y_3 = \varphi(w) \cdot e_\varphi \end{cases}$$

則成:

$$\begin{vmatrix} f(u), & \varphi(u) & 1 \\ f(v), & \varphi(v) & 1 \\ f(w), & \varphi(w) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

是亦三曲線算圖所表之一般形式。

若將(8)式展開之,則成:

$$\varphi(u)\cdot f(v) + \varphi(v)\cdot f(w) + \varphi(w)\cdot f(u)$$
$$-\varphi(v)\cdot f(u) + \varphi(w)\cdot f(v) + \varphi(u)\cdot f(w) = 0$$

即:
$$\varphi(u)\cdot f(v) + \varphi(v)\cdot f(w) + \varphi(w)\cdot f(u)$$
$$= \varphi(v)\cdot f(u) + \varphi(w)\cdot f(v) + \varphi(u)\cdot f(w)$$

或作:
$$\Sigma\, \varphi(u)\cdot f(v) = \Sigma\, \dot{\varphi}(v)\cdot f(u) \cdots\cdots\cdots\cdots(8\,b)$$

殆與前節結果無異。

(E)兩平行軸與一斜軸算圖

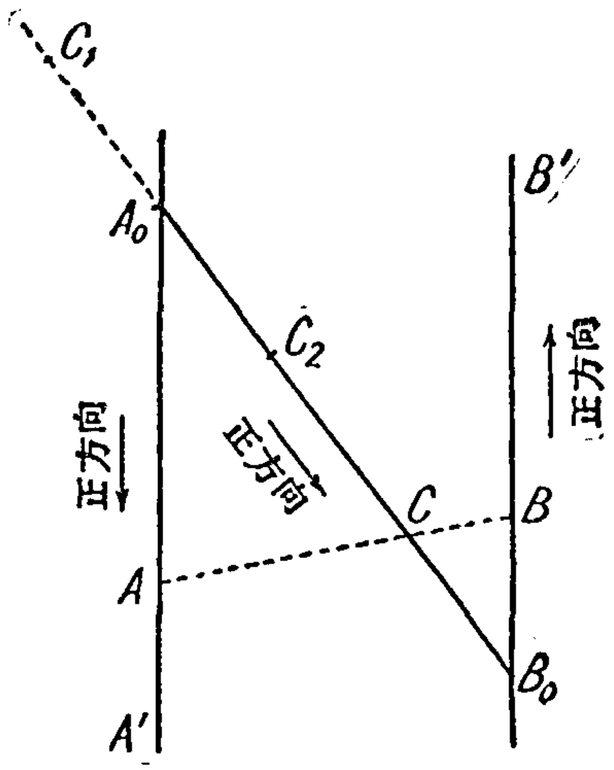
(I) N 形算圖。

§ 30. 幾何性質:　在圖 22 中 A_0A', 及 B_0B' 為兩平行軸, A_0B_0 為一斜軸;今任作一直線 AB, 交三軸於 A, B, C 三點,則 A_0A, B_0B, C_0C 三線段,有一定之關係。

$\because$　$\triangle CA_0A$ 與 $\triangle CB_0B$ 為相似三角形:

$$\therefore \quad \frac{A_0A}{B_0B} = \frac{A_0C}{CB_0} = \frac{A_0C}{A_0B - A_0C}$$

$$\therefore \quad A_0A\cdot A_0B_0 = B_0B\cdot A_0C + A_0A\cdot A_0C \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$



(圖 22)

令: $A_0A=\alpha\cdot x$, $B_0B=\beta\cdot y$, $A_0C=\gamma\cdot z$

則此三線分: A_0A, B_0B, C_0C 可表三變數 x, y, z, 茲將所設值代入(1)式而簡化之,則成:

$$x=\left(\frac{\gamma}{A_0B_0}x+\frac{B\gamma}{\alpha\cdot A_0B_0}y\right)z$$

令: $$\frac{\gamma}{A_0B_0}=A,\qquad \frac{\beta\gamma}{\alpha\cdot A_0B_0}=B,$$

則成: $$x=(Ax+By)z \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

但爲便於應用計,可將此式化爲更普遍形式,

令: $z=w+a$, 則(2)式變爲:

$$(1-aA)x=Axw+Byw=aBy$$

令更設: $$\frac{A}{1-aA}=M,\qquad \frac{B}{1-aA}=N,\qquad \frac{aB}{1-aA}=P.$$

卽成： $x=Mxw+Nyw+Py$ ……………………(3)

故凡可以化成(3)式之形式者，皆可以是類算圖表之。

§ 31. 作圖： 今設有下列公式：

$$x=Mxw+Nyw+Py \quad \cdots\cdots (3)$$

如欲以是類算圖解之，先假設一輔助變數：$z=w+a$ (a 爲任意常數)代入(3)式，卽成：

$$x=Mx(z-a)+Ny(z-a)+Py$$

卽： $(1+Ma)x=Maz+Nyz+(P-aN)y$

茲令： $$a=\frac{P}{N}$$

則成： $$\left(1+\frac{MP}{N}\right)x=Mxz+Nyz+0$$

亦卽： $$x=\left[\frac{MN}{MP+N}x+\frac{N^2}{MP+N}y\right]z \quad \cdots\cdots (4)$$

更令： $$\frac{MN}{MP+N}=A, \quad \frac{N^2}{MP+N}=B \quad \cdots\cdots (5)$$

斯成(2)式： $x=(Ax+By)z$

今欲以圖中三線分(圖 22)：A_0A, B_0B, A_0C 表 x,y,z 三值。設 e_x,e_y 爲 x 及 y 之倍率，則：

$$A_0A=e_x\cdot x, \quad B_0B=e_y\cdot y.$$

x 及 y 之零值適與 A_0A, B_0B 之零值相當；至於表示 z 值之線分：A_0C 之長，可由(1)式求之。若以 A_0A, B_0B 之值代入(1)式，

卽得： $A_0C(e_x\cdot x+e_y\cdot y)=l\cdot e_x\cdot x$, ($l$ 爲 A_0B_0 之長)

$$A_0C=l\cdot\frac{e_x\cdot x}{e_x\cdot x+e_y\cdot y}=\frac{l}{1+\dfrac{e_y\cdot y}{e_x\cdot x}}$$

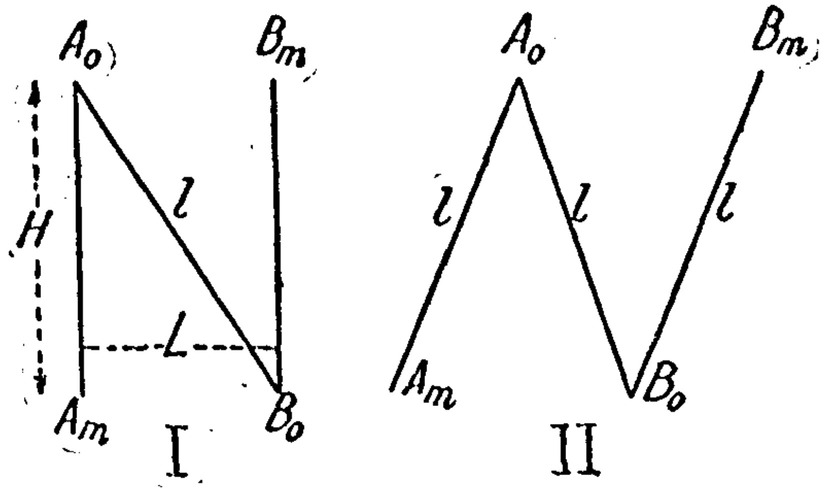
此長度A_0C，依$\frac{y}{x}$而變；玆於(4)式中，求得$\frac{y}{x}$之值，代入此式，卽成：

$$A_0C=\frac{lN^2e_x}{N^2e_x+e_y\left(\dfrac{MP+N}{z}-MN\right)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

若用(2)，求得$\frac{y}{x}$之值，代入此式則成：

$$A_0C=\frac{l}{1+\dfrac{e_y}{e_x}\cdot\dfrac{\frac{1}{z}-A}{B}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

此種算圖，可分下列二種(圖 23)：



(圖 23)

設x之常用值自x_{min}至x_{max}；y之常用值自y_{min}至y_{max}。但x_{min}及y_{min}，未必等於零；故若欲使起點A_0B_0，與變數之最底值x_{min}，y_{min}相當，須更設新變數：

$$X=x-x_{\min}, \qquad Y=y-y_{\min}.$$

此兩個新變數之界限為：

$$\begin{cases} X_{\min}=0, & Y_{\min}=0, \\ X_{\max}=x_{\max}-x_{\min}; & Y_{\max}=y_{\max}-y_{\min}. \end{cases}$$

依上述第一式樣，x, y 兩變數倍率，應為：

$$e_x=\frac{H}{x_{\max}}=\frac{H}{x_{\max}-x_{\min}}, \quad e_y=\frac{H}{Y_{\max}}=\frac{H}{y_{\max}-y_{\min}}.$$

依上述第二式樣，x, y 兩變數倍率應為：

$$e_x=\frac{l}{x_{\max}-x_{\min}}, \quad e_y=\frac{l}{y_{\max}-y_{\min}}.$$

於是，兩邊軸上之代表線段：

$$A_0A=e_x(x_{\max}-x_{\min}), \quad B_0B=e_y(y_{\max}-y_{\min}).$$

至於 A_0C 線分之長，可由(6)式中求得之。

§ 32. 應用： 複利公式：

$$a=(1+r)^n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)(圖\ 24)$$

r：為年利率，以 1%為單位。

n：為存款年數。

a：為 n 年後，本利合當本銀之倍數，(如以此 a 值乘本銀，卽得 n 年後之本合利)

化成對數式，卽得：

$$\log a=n\cdot\log(1+r)$$

此式有三變數：$\log a$, n, 及 $\log(1+r)$．且適合於上述形式：

$$x=Mxz+Nyz+Py$$

式中：

$$M=0, \quad N=1, \quad P=0;$$

$$x=\log a, \quad y=n, \quad z=\log(1+r).$$

x 之常用值自 $\log a=0$ 至 $\log a=1.51750$.（自 $a=1$ 至 $a=33.292$ 卽年利 15%，25 年後 a 之值。）

y 之常用值，自 $n=0$ 年至 $n=25$ 年。

今欲以上述第一式樣算圖解之。

已知：　$H=250$ mm.,　$L=160$ mm.;

$$l=\sqrt{H^2+L^2}=296.82 \text{ mm.};$$

$$e_x=\frac{250}{1.5175}=164.75 \text{ mm.};$$

$$e_y=\frac{250}{25}=10 \text{ mm.}.$$

於是，得各線分之長如下：

$$A_0A=e_x\cdot\log a=164.75\ \log a \text{ mm.};$$

$$B_0B=e_y\cdot n=10\ n \text{ mm.};$$

$$A_0C=\frac{296.82}{e_x+\dfrac{e_y}{\log(1+r)}}.$$

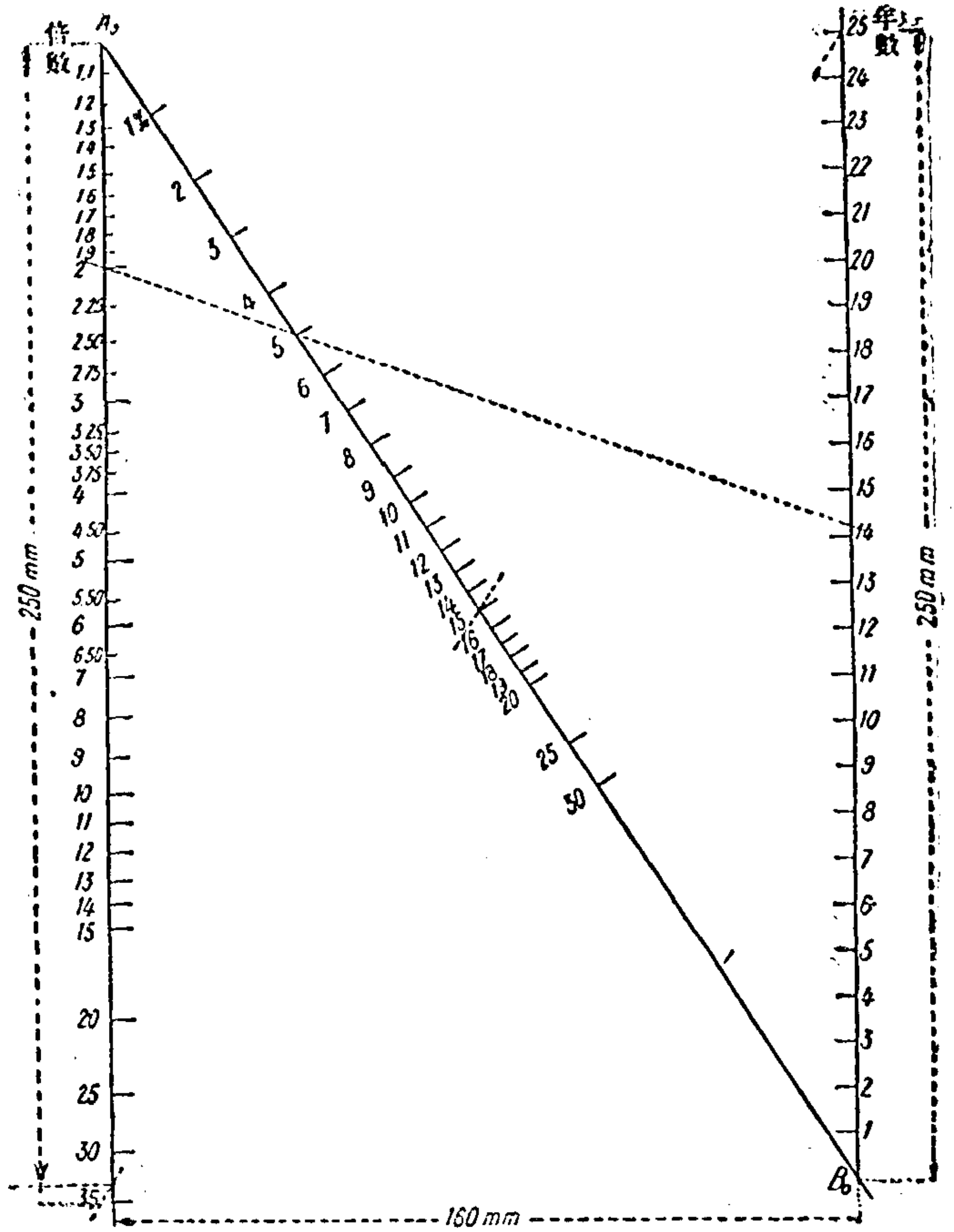
如數刻畫，則成圖 24。今例如：欲知以年利 5% 計，須歷若干年，始能使母子和爲本銀之 2 倍。先於 a 軸上尋得 2 字，次於斜軸上尋得 5% 字；連接此兩點，交 n 軸於 14 至 15 之間，故知所求數爲 14 年餘。

(II) N 形算圖之變形。

上述 N 形算圖，所表之一般公式爲：

$$x=Mxw+Nyw+Py \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

式中 M, N, P 三常數均係正數；今若遇 M, N, P 中有一個，或數個，爲負數時，可仍先用前法：



(圖 24)

(設 $z=w+a$, $a=\dfrac{P}{N}$)化(3)式爲(2)式:

$$x=(Ax+By)z.$$

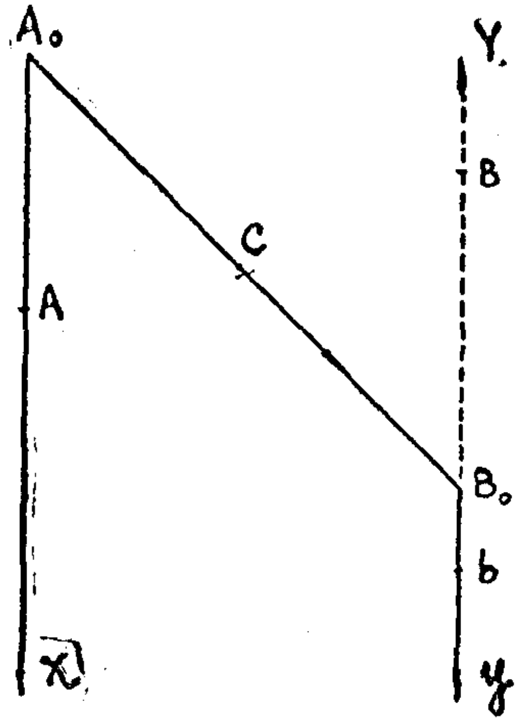
§ 33. (a)若 B 爲負數,可書作:

$$x=(Ax-B'y)z \qquad (B' \text{ 爲正}, =-B)$$

或 $$x=[Ax+B'(-y)]\cdot z.$$

令：　　$Y=-y$;　　則　$x=(Ax+B'Y)z$.

故 y 之刻度反向，如圖 25.



(圖 25)

$$A_0A=x\cdot e_x,$$

$$B_0B=Y\cdot e_y,$$

或　$$B_0b=y\cdot e_y,$$

$$A_0C=\frac{l}{1+\frac{e_y}{e_x}\cdot\frac{\frac{1}{z}-A}{B'}}.$$

上式：　$x=(Ax-B'y)z,$

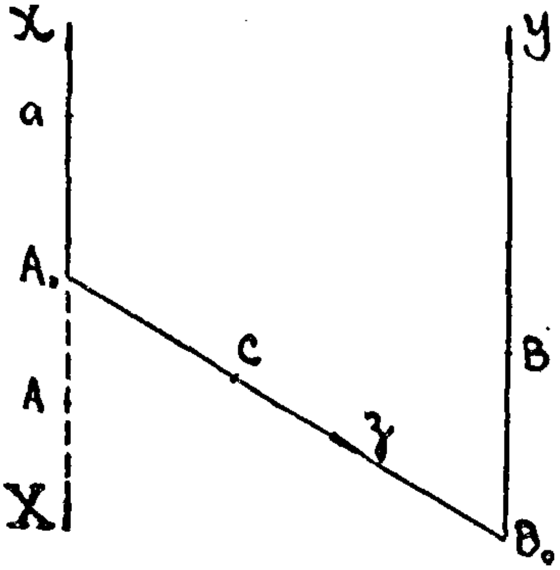
亦可書作：

$$(-x)=[A(-x)+B'y]\cdot z$$

令　$X=-x$.

則成　$X=(AX+B'y)\cdot z$

故 x 軸反向，如圖 26.



(圖 26)

$$A_0A=X\cdot e_x,$$

$$A_0a=x\cdot e_x,$$

$$B_0B=y\cdot e_y,$$

$$A_0C=\frac{l}{1+\frac{e_y}{e_x}\cdot\frac{\frac{1}{z}-A}{B'}}.$$

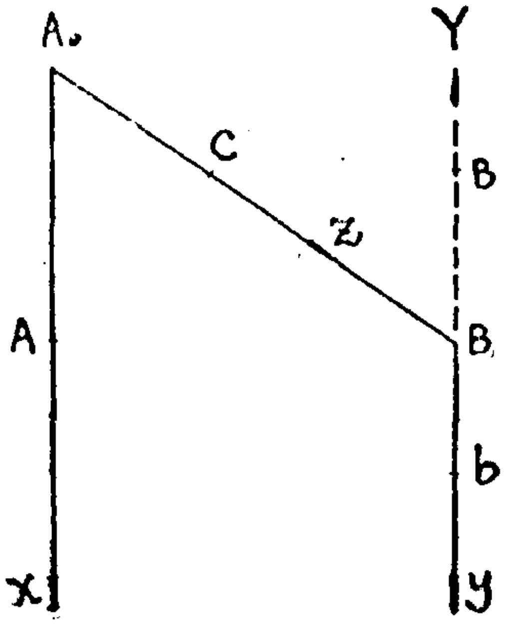
§ 34. (b)若 A 爲負數，則(2)式可書作：

$$x=(-A'x+By)\cdot z\qquad (A'=-A)$$

或作：　$$x=(A'x-By)(-z)$$

令：　　$Y=-y$；　$Z=-z$；

則成：　　$x=(A'x+BY)\cdot Z$，如圖 27.



(圖 27)

或

$$A_0A=x\cdot e_x,$$
$$B_0b=y\cdot e_y,$$
$$B_0B=Y\cdot e_y,$$

$$A_0C=\frac{l}{1+\dfrac{e_y}{e_x}\cdot\dfrac{\frac{1}{z}-A'}{B}}$$

$$=\frac{l}{1-\dfrac{e_y}{e_x}\cdot\dfrac{\frac{1}{z}+A'}{B}}.$$

圖中 y 軸爲反向；但 z 之刻度，是否反向，尙須視 $\dfrac{e_y}{e_x}$ 及 A', B 之値而定；若

$$z<\frac{e_y}{e_x\cdot B-e_y\cdot A'},$$

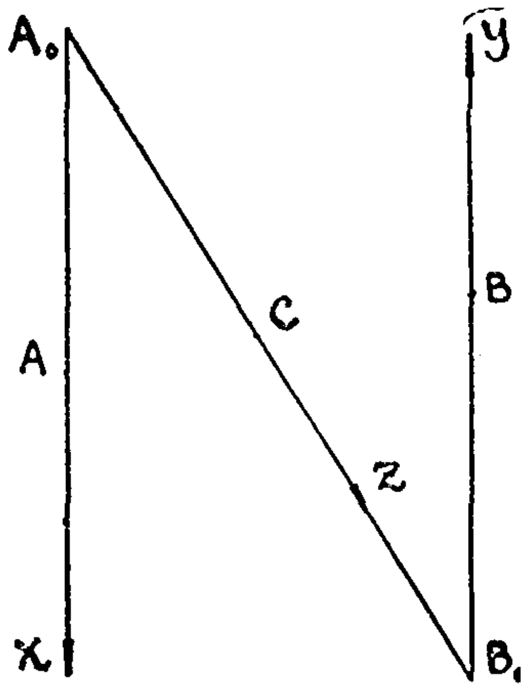
則 A_0C 爲負數(反向)；反之，則仍爲正數。

§35. (c)若 A 及 B 均係負數，可書作：

$$x=(-A'x-B'y)z$$
$$(A'=-A,\ B'=-B)$$
$$x=(A'x+B'y)\ (-z)$$

令　$Z=-z$，則成：

$$x=(A'x+B'y)\cdot Z,$$ 如圖 28.



(圖 28)

$$A_0A=x\cdot e_x,\qquad B_0B=y\cdot e_y,$$

$$A_0C=\frac{l}{1+\frac{e_y}{e_x}\cdot\frac{\frac{1}{z}-A'}{B'}}=\frac{l}{1-\frac{e_y\cdot\left(\frac{1}{z}+A'\right)}{e_x\cdot B'}}.$$

(III) 等比 N 形算圖：

§36. N 形算圖之簡化：　以上所述 N 形算圖及其變形，其 z 軸之刻度，無一定之倍率，故欲得 z 之代表長度(longueur représentative, representing length)：A_0C，須將每個 z 值分別代入(6)式或(7)式遞求之。

今若就 25 節所述，令 α,β,γ 各為 x,y,z 之倍率。

$$e_x=\alpha,\quad e_y=\beta,\quad e_z=\gamma;$$

則：
$$\frac{\gamma}{A_0B_0}=A;\quad \frac{\beta\gamma}{\alpha\cdot A_0B_0}=B.$$

可書作：
$$\frac{e_z}{l}=A;\quad \frac{e_y}{e_x}\cdot\frac{e_z}{l}=B.$$

故：
$$e_z=A\cdot l;\quad \frac{e_y}{e_x}\cdot A=B.$$

即：
$$\begin{cases} e_z = Al \\ \dfrac{e_x}{e_y}=\dfrac{A}{B}. \end{cases}$$

§37. 作圖：　今設有下列公式

$$x=Mxw+Nyw+P\cdot y \quad\cdots\cdots(3)$$

可先用 26 節方法，化作下列形式：

$$x=(Ax+By)z\quad\cdots\cdots(2)$$

決定各變數之倍率：

令：
$$\begin{cases} e_z = A\cdot l, \\ \dfrac{e_x}{e_y} = \dfrac{A}{B}, \end{cases}$$

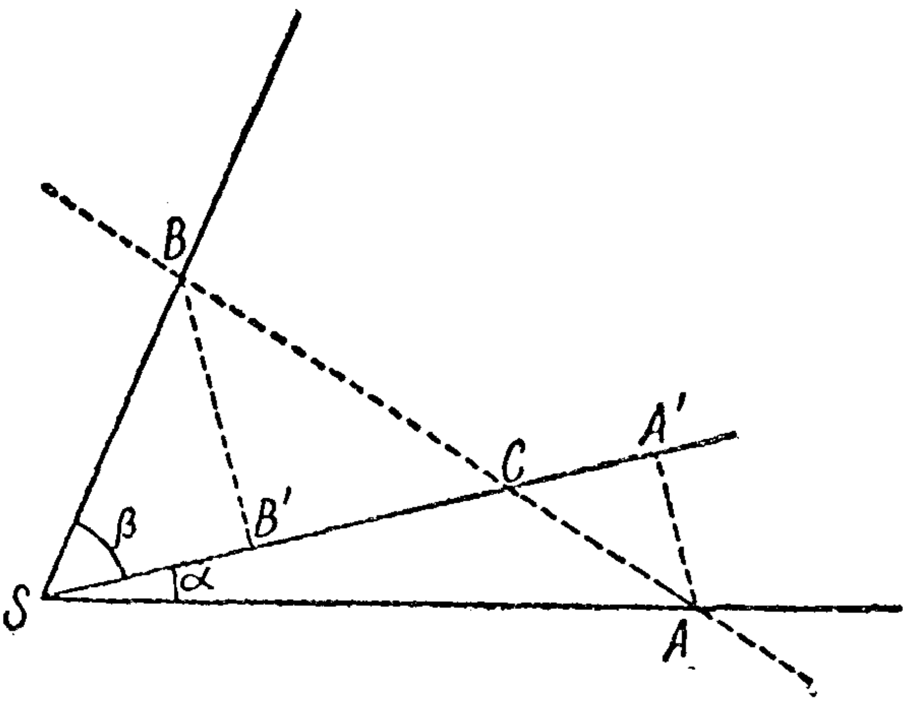
則：
$$\begin{cases} A_0A = x\cdot e_x, \\ B_0B = y\cdot e_y, \\ A_0C = z\cdot e_z. \end{cases}$$

故 x, y, z 三變數之刻度均各爲等比。

此種方法，當 A 或 $y<1$ 時頗爲適用，若兩者均 >1，則 $A_0C>l$.

(F)三交軸算圖

§38. 幾何性質： 在圖 29 中：SA, SB, SC 爲相交三軸。今取任意直線，交三軸於 A, B, C 三點；則 SA, SB, SC



（圖 29）

三線分，有一定之關係。

根據向量定則

$$\overline{B'S}+\overline{SC}=\overline{B'C}=-\overline{SB'}+\overline{SC}$$

$$\overline{CS}+\overline{SA'}=\overline{CA'}=-\overline{SC}+\overline{SA'}$$

$$\therefore\quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{CA'}}=\frac{\overline{SC}-\overline{SB'}}{\overline{SA'}-\overline{SC}}.$$

又自以上作圖，知 $\triangle CBB'$ 與 $\triangle CAA'$ 相似。

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{CA'}}=\frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}$$

故：
$$\frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}=\frac{\overline{SC}-\overline{SB'}}{\overline{SA'}-\overline{SC}}.$$

但：
$$\overline{BB'}=\overline{SB}\sin\beta,\qquad \overline{SB'}=\overline{SB}\cos\beta,$$
$$\overline{AA'}=\overline{SA}\sin\alpha,\qquad \overline{SA'}=\overline{SA}\cos\alpha.$$

代入前式而簡化之，斯成：

$$\overline{SA}\cdot\overline{SB}\sin(\alpha+\beta)-\overline{SA}\cdot\overline{SC}\sin\alpha-\overline{SB}\cdot\overline{SC}\sin\beta=0.$$

若以　$\overline{SA}\cdot\overline{SB}\cdot\overline{SC}$ 除全式，則成：

$$\frac{1}{\overline{SC}}\sin(\alpha+\beta)-\frac{1}{\overline{SB}}\sin\alpha-\frac{1}{\overline{SA}}\sin\beta=0.$$

令：　$\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ 三線段表示三個變數 x, y, z;

設：　$\overline{SA}=ax$;　$\overline{SB}=by$;　$\overline{SC}=cz$;

則：
$$\frac{1}{z}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{C}-\frac{1}{y}\cdot\frac{\sin\alpha}{b}-\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin\beta}{a}=0.$$

令：
$$\frac{-\sin\beta}{a}=A;\quad \frac{-\sin\alpha}{b}=B;\quad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{c}=C;$$

則成：
$$\frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

但爲應用便利計，可將此式化爲更普遍形式：

玆令： $x=u+h,\quad y=v+k,\quad z=w+l.$

代入(2)式而簡化之，則成下列形式：

$$Muv+Nuw+Pvw+Qu+Rv+Sw+T=0\cdots\cdots\cdots(3)$$

§ 39. 作圖： 今設有下列公式：

$$Muv+Nuw+Pvw+Qu+Rv+Sw+T=0\cdots\cdots\cdots(3)$$

如欲以是類算圖表之，先假設三個輔助變數：

$$x=u+h,\quad y=v+k,\quad z=w+l.$$

次再與 h, k, l 以適當數值，使(3)式化成(2)式：

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

前節所設：
$$\begin{cases}\overline{SA}=ax & \text{設“}\lambda\text{”爲算圖之比率，則：}\ \overline{SA}=\lambda\cdot ax \\ \dfrac{-\sin\beta}{a}=A & \dfrac{-\sin\beta}{A}=a\end{cases}$$

(比率 λ，係各變數之公共倍率；可視圖紙之大小任意選定之。)

$\therefore\quad \overline{SA}=\dfrac{-\sin\beta}{A}\cdot x\lambda$ 因之 $\dfrac{-\sin\beta\,\lambda}{A}$ 可視 x 之倍率

即：　$$e_x=\frac{-\sin\beta}{A}\lambda.$$

同理：　$$e_y=\frac{-\sin\alpha}{B}\lambda;$$

$$e_z=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{C}\lambda.$$

如 α 及 β 未經預定，$\lambda\alpha$ 係一任意値，吾人可任取 e_x，e_y，e_z 而無限制；如 α 及 β 已經預定，吾人仍可任取一 e_x 値，然後推求 e_y，e_z.

設 l 爲 x，y 兩軸之公共長度。$\begin{cases}x_{\max}\\x_{\min}\end{cases}$ 及 $\begin{cases}y_{\max}\\y_{\min}\end{cases}$ 爲兩獨立變數常用値之界限。

則：　$$e_x=\frac{l}{x_{\max}-x_{\min}};\quad e_y=\frac{l}{y_{\max}-y_{\min}}.$$

$$\sin\beta=\frac{-l}{x_{\max}-x_{\min}}\cdot\frac{A}{\lambda};\quad \sin\alpha=\frac{-l}{y_{\max}-y_{\min}}\cdot\frac{B}{\lambda}.$$

次再視圖紙之大小，予 λ 以適當之値；則 α，β 及 e_x 三値，不難決定。

§ 40. 應用：　球面鏡公式：

$$\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{2}{R}.$$

f_1：爲光體與鏡心之距離；

f_2：爲物像與鏡心之距離；

R：爲球面鏡之曲率半徑。

此公式適合於上述(2)式：

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}=0.$$

式中： $x=f_1$， $y=f_2$， $z=R$；

$A=-1$，$B=-1$，$C=2$.

今設取 f_1 及 f_2 之值自 0 公尺起至 10 公尺止；此兩軸之長各爲 100 mm..

則： $$e_x=\frac{l}{x_{\max}-x_{\min}}=\frac{100}{10}=10\text{ mm.};$$

$$e_y=\frac{l}{y_{\max}-y_{\min}}=\frac{100}{10}=10\text{ mm..}$$

e_x 與 e_y 既屬相等，可知 $\alpha=\beta$.（因該式 $A=B=-1$）至於第三軸之倍率：

$$e_z=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{C}\cdot\lambda=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2}\lambda=\lambda\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

又： $$\begin{cases} e_x=\dfrac{-\sin\beta}{A}\lambda=\lambda\cdot\sin\beta, & \text{（見前）} \\ e_x=10\text{ mm.}; \end{cases}$$

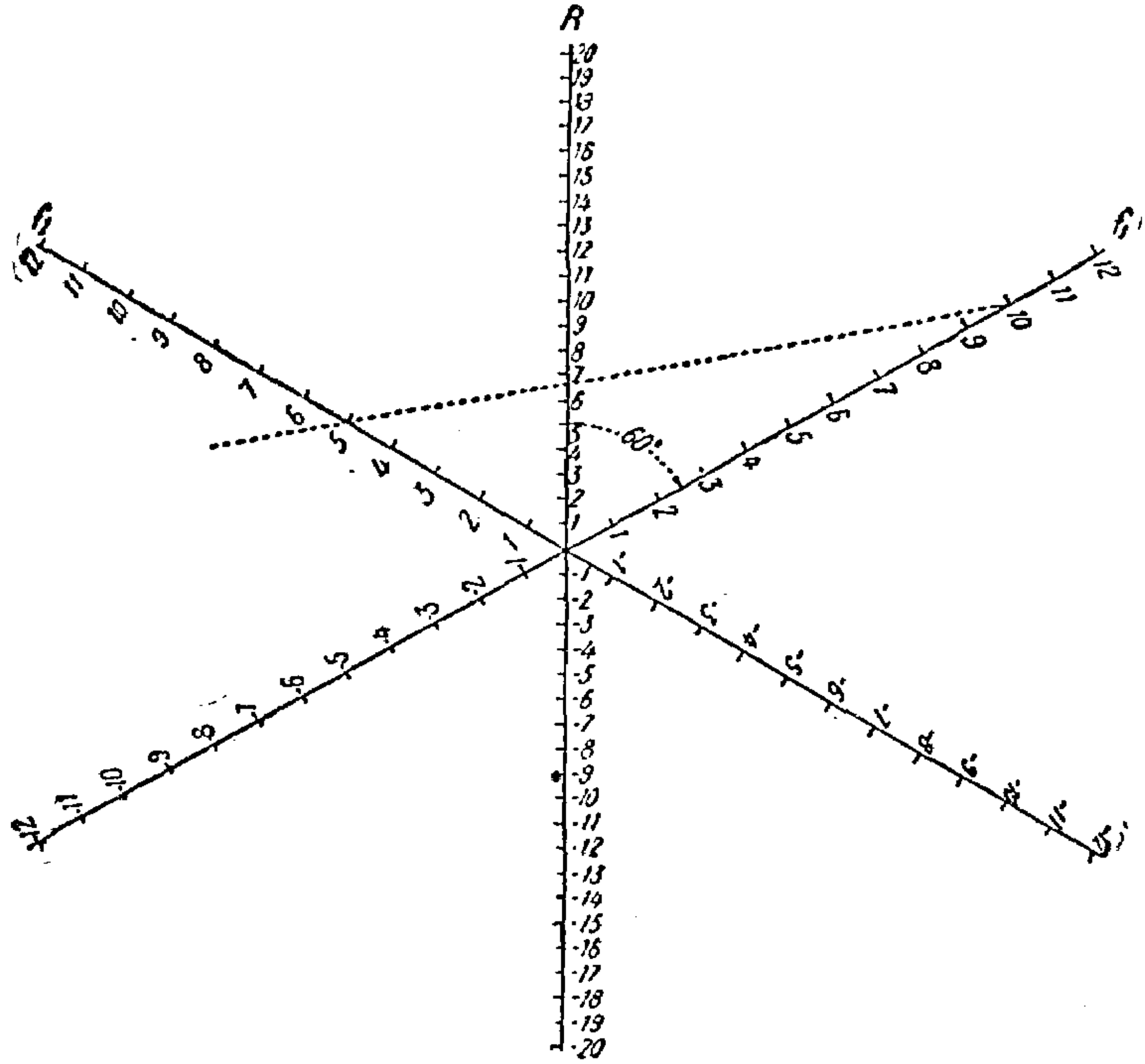
故： $\lambda\cdot\sin\beta=10$ mm.；

$e_z=\lambda\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=10\cos\alpha.$

今設： $\alpha=60°$， 則 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

$$e_z=10\times\frac{1}{2}=5\text{ mm..}$$

α, β 兩角度及 e_x, e_y, e_z 之值，均已求得；如法刻畫，卽成圖 30。



（圖 30）

舉例：　今設有凹面鏡，其曲率半徑為 6.66 m.. 如於距鏡心 5 公尺處，置一光體，則物像成於鏡前 10 公尺處。

卽圖中虛線所示。

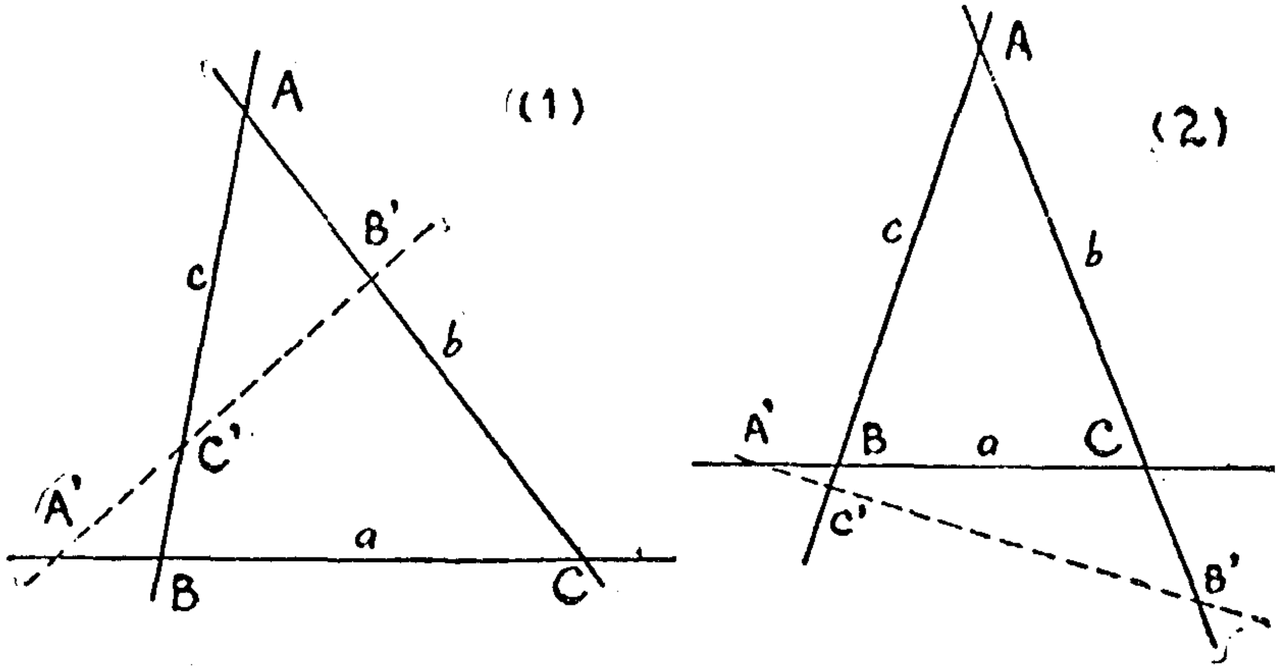
$$R=6.66\ \text{m.},\quad f_1=5\ \text{m.},\quad \text{則}\quad f_2=10\ \text{m.}.$$

(G)三角形算圖

§41. 幾何性質：　在三角形 ABC 中(圖 31)，任作一橫截線(Transversale; transveral line)交其三邊於 A',B',C' 三點；則此三點，足以確定下列線段：

$C'A$, $C'B$, $B'C$, $B'A$, $A'B$, $A'C$. 依截割理論,得以下關係:

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1.$$



(圖 31)

證: 作 $CD /\!/ A'B'$, CD 交 AB 之延長線於 D (圖 32)。

$\because\quad \triangle AB'C' \sim \triangle ACD$

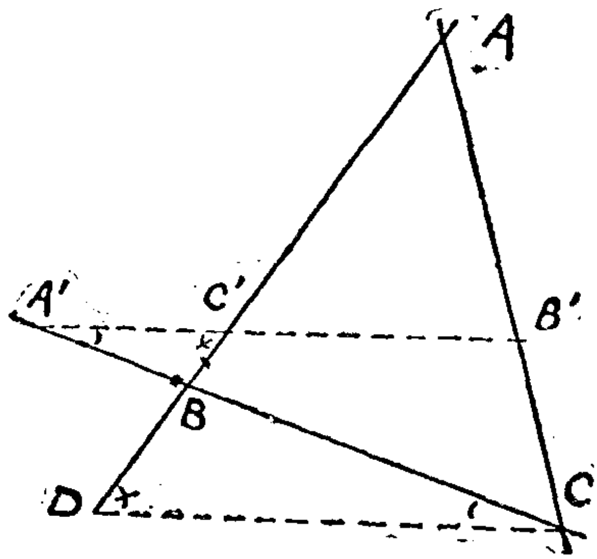
$\therefore\quad \dfrac{AC'}{AB'}=\dfrac{C'D}{B'C}$ .... (a)

又 $\triangle A'BC' \sim \triangle CBD$

$\therefore\quad \dfrac{C'B}{A'B}=\dfrac{BD}{BC}$

$=\dfrac{C'B+BD}{A'B+BC}=\dfrac{C'D}{A'C}$.

$\therefore\quad \dfrac{C'B}{A'B}=\dfrac{C'D}{A'C}$;



(圖 32)

$$C'D = \frac{C'B \cdot A'C}{A'B}.$$

代入(a)式,則成:

$$\frac{AC'}{AB'} = \frac{C'B \cdot A'C}{B'C \cdot A'B}, \quad 即 \quad \frac{A'B \cdot B'C \cdot C'A}{A'C \cdot B'A \cdot C'B} = 1.$$

在三角形 ABC 中,每邊均含有二定點,與一截點;故若能知截點與兩定點距離之比,則截點之位置不難確定。例如圖中 AB,爲無限直線;則線上任一點 C' 之位置,可由兩距離之比: $\nu = \frac{C'A}{C'B}$ 確定之。今且就此比例 ν,加以討論。設三軸之正數方向爲: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$. AB 線上僅有一 C' 點適合於此 ν 值;如 C' 在 AB 之間,則 ν 爲負數;如 C' 在 AB 之外,則 ν 爲正數。依此同理: B' 及 A' 兩點,亦可由:

$$\mu = \frac{B'C}{B'A} \text{ 及 } \lambda = \frac{A'B}{A'C} \text{ 確定之。}$$

於是: $$\nu \cdot \mu \cdot \lambda = 1 \quad \cdots\cdots(1)$$

割線 $A'B'C'$,過三角形兩邊,與他一邊之延長線(圖 1),則 $\nu \cdot \mu \cdot \lambda$ 中有兩負值,與一正值;若該線過三邊之延長線(圖 2),則 $\nu \cdot \mu \cdot \lambda$ 三值均爲正數。故此 $\nu \cdot \mu \cdot \lambda$ 之正負變化,有下列四種:

$$\begin{array}{ccc} +\lambda & +\mu & +\nu \\ -\lambda & -\mu & +\nu \\ +\lambda & -\mu & -\nu \\ -\lambda & +\mu & -\nu \end{array}$$

吾人可假設(1)式中: ν, μ, λ 爲三個變數;更設:

$$\lambda = ax, \quad \mu = by, \quad \nu = cz.$$

則： $abc \cdot xyz = 1,$

或作： $x \cdot y \cdot z = A$ ....(2)

斯卽此類算圖所表之一般形式。

但亦可將此式化爲更普遍形式：

設： $x = \dfrac{px' + h_1}{x' + h_2}, \quad y = \dfrac{py' + k_1}{y' + k_2}, \quad z = \dfrac{pz' + l_1}{z' + l_2},$

卽成： $Mx'y' + Nx'z + Py'z' + Qx' + Ry' + Sz' + T = 0.$

亦卽前節所述三交線算圖所表之一般形式。

§ 42. 作圖： 今設有公式： $x \cdot y \cdot z = A$. 吾人可假設 A 爲 p, q, r 三常數之積。

則： $\dfrac{x}{p} \cdot \dfrac{y}{q} \cdot \dfrac{z}{r} = 1$ ....(1)

令： $\dfrac{x}{p} = \lambda = \dfrac{A'B}{A'C}, \quad \dfrac{y}{q} = \mu = \dfrac{B'C}{B'A}, \quad \dfrac{z}{r} = \nu = \dfrac{C'A}{C'B}$。

茲就 x, y, z 之値，計 BA', CB', AC' 各線分之長，

例如就 x 之値，計 BA' 之長；設 BC 邊之長爲 a，依向量定則： $A'B + BC = A'C$

$$\frac{x}{p} = \frac{A'B}{A'B + BC}$$

故： $BA' = \dfrac{a}{1 + \dfrac{p}{x}}$ ....(2)

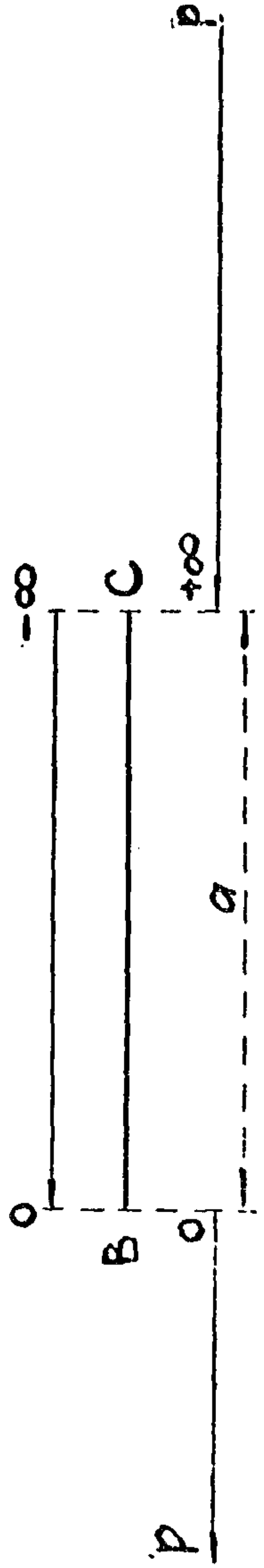
同理： $CB' = \dfrac{b}{1 - \dfrac{q}{y}}$ ....(3)

(b, c 爲 CA,AB 兩邊之長)

$$AC' = \frac{c}{1 - \frac{r}{z}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

BA', CB', AC' 三值，不依 x, y, z 而正變;故此三變數,無一定倍率。今試就 x, 與 BA' 之關係,加以討論,遂得下列結果:

$x=$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow$	p	$\nearrow +\infty$
$BA'=$	$a \searrow 0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow$	a



(圖 33)

觀察右圖 B,C 兩點之間,盡屬 x 之負值;而吾人所常用之正値，盡在 BC 之外，故此類算圖僅係三角形 ABC 之延長線所組成如圖 34 A 所示。今若改 x, y 兩變數爲 $-x$, $-y$, 則 $x \cdot y \cdot z = A$ 之關係，毫無更變，而此兩變數之正値卽在 BC 之間；惟於計算其相對線段長度時，須變此兩變數之號。圖 34 B 表示將 y,z 改爲 $-y$, $-z$.

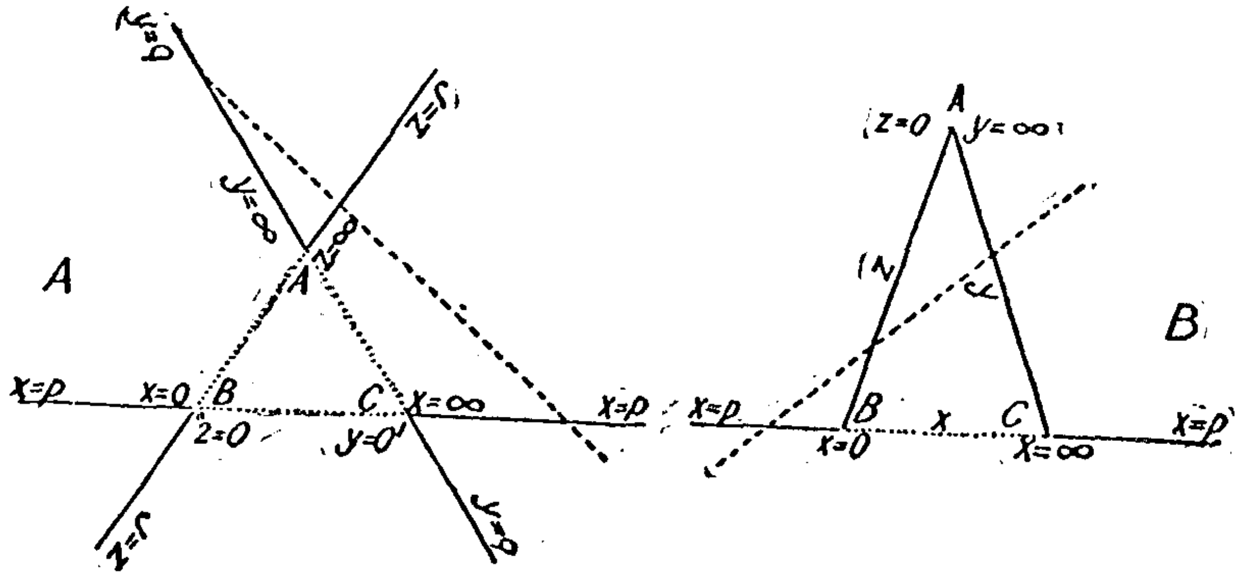
§ 43. 應用:　公式:

$$\tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \cot\gamma = 1$$

今試取一等腰三角形,其底長 60 mm.; 其腰長 150 mm..

令:　$z = \tan\alpha$, $y = \tan\beta$, $x = \cot\gamma$,

則: AB, CA, BC 三邊表 $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\cot\gamma$ 三變數。



（圖 34）

A 點爲 $\tan\alpha$ 之起點。$AC'=\dfrac{150}{1-\dfrac{1}{z}}=\dfrac{150}{1-\dfrac{1}{\tan\alpha}}$ (餘類推)

斯卽上列 A 圖式樣。

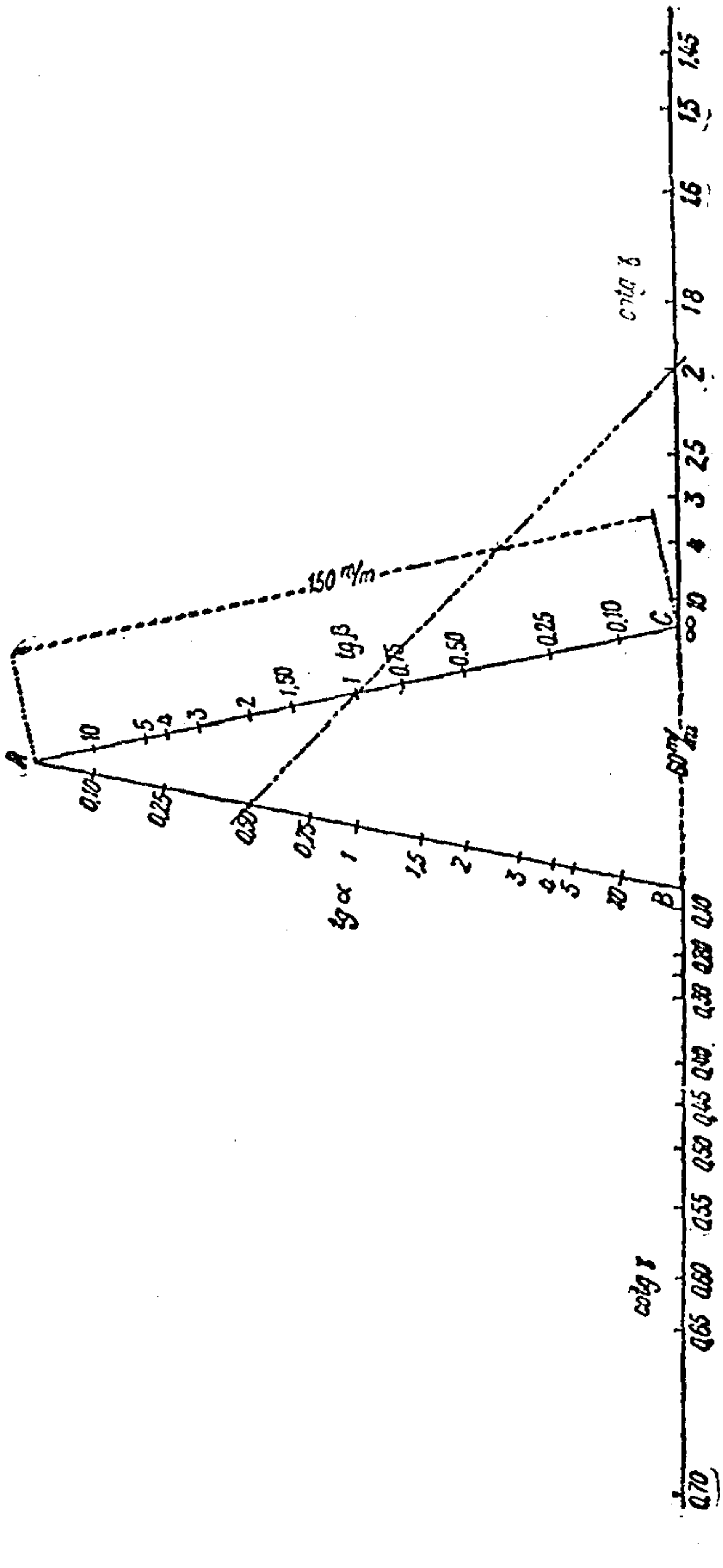
如將 $\tan\alpha$ 變爲 $-\tan\alpha$, $\tan\beta$ 變爲 $-\tan\beta$:

$$AC'=\frac{150}{1+\dfrac{1}{\tan\alpha}};\ CB'=\frac{150}{1+\dfrac{1}{\tan\beta}};$$

卽成 B 圖式樣(圖 35)。

至於 $\cot\gamma$, 仍如前述: $BA'=\dfrac{60}{1-\dfrac{1}{\cot\gamma}}$

當 $\cot\gamma<1$ 時, BA' 爲負值; 故 $\cot\gamma$ 諸値, 自 B 點逐漸向左。若 $\cot\gamma>1$, 則 A' 點在 C 點之右; $\cot\gamma$ 諸値將自右端無限遠處, 逐漸向左; 故其刻度頗爲不便。依前節所述, 吾人已知 C 點表 $\cot\gamma=+\infty$, 而 $\tan\gamma$ 爲 $\cot\gamma$ 之倒數, 故 C 點表 $\tan\gamma=0$. 今若以 C 點爲起點, 則線分:



（図 35）

三角形算圖　$\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\cot\gamma=1$

$$CA' = CB + BA' = -a + BA'.$$

$$CA' = -60 + \frac{60}{1 - \frac{1}{\cot\gamma}} = \frac{60}{1 - \tan\gamma} - 60 = \frac{60}{\frac{1}{\tan\gamma} - 1}$$

故 A' 點自 $\tan = 0$ 處(卽 C 點),逐漸向右,直至 $\tan = 1$. 嗣後再刻以相對之 $\cot\gamma$ 諸値,卽得。

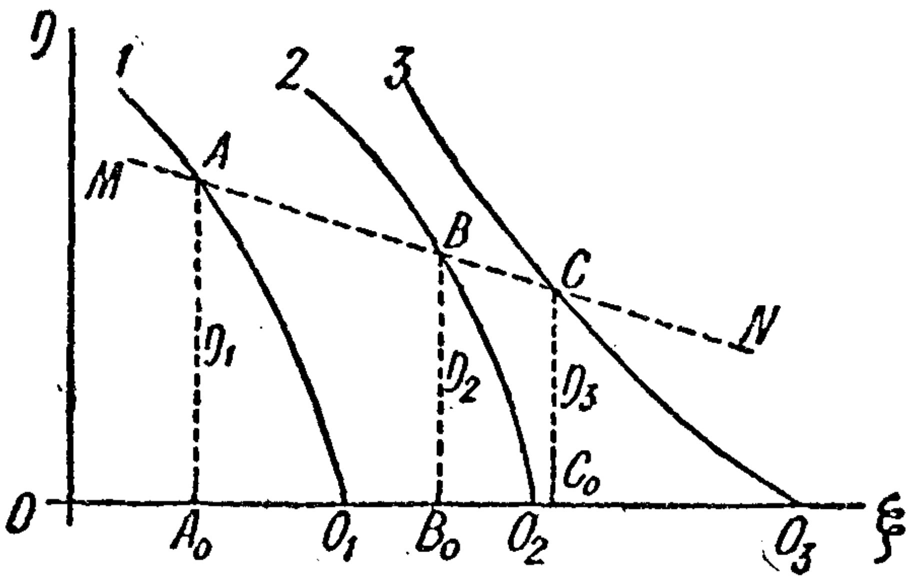
列線算圖之理論

§ 44. 由以上諸節,吾人已知若將任意三直線,與他一直線相交,其所割諸線分間之關係,均可由普通幾何學求得之。

玆將上述數種,加以普遍之討論,且更推廣所設三直線,爲三曲線。

設以 $o\xi$, $o\eta$ 爲軸之坐標圖中,有 1, 2, 3 三曲線(圖36);其方程式各爲:

$$f_1(\xi, \eta) = 0$$
$$f_2(\xi, \eta) = 0$$
$$f_3(\xi, \eta) = 0$$



(圖 36)

作横截線 MN，遇三曲線於 A, B, C 三點；今若已知此三點中之二點，則此二點所定直線，截曲線於第三點。

取 O_1, O_2, O_3 爲各曲線之起點，則 O_1A, O_2B, O_3C 三"曲線段"，足以確定 A, B, C 之位置。但亦可以各該點之縱坐標：A_0A, B_0B, C_0C 代之。

§45. 列線算圖之普遍性質：

設 $$A_0A=\eta_1,\quad B_0B=\eta_2,\quad C_0C=\eta_3,$$

則：$$f_1(\xi_1\eta_1)=0,\ f_2(\xi_2\eta_2)=0,\ f_3(\xi_3\eta_3)=0 \cdots\cdots(1)$$

割線 MN 之方程式爲：$\xi=p\eta+q \cdots\cdots(2)$

割線 MN，與曲線交點之坐標，必同時適合於此直線方程式，及所交之曲線方程式。

故：
$$f_1[(p\eta_1+q),\ \eta_1]=0;$$
$$f_2[(p\eta_2+q),\ \eta_2]=0; \cdots\cdots(3)$$
$$f_3[(p\eta_3+q),\ \eta_3]=0.$$

任意直線 MN，均各有其 p, q 兩常數；代入(3)式，卽得：η_1, η_2, η_3 三值，故無論 p, q 爲何値，η_1, η_2, η_3 三值間，必有其一定關係；是亦卽解析幾何上，三點在一直線之必要條件。今若改 MN 直線爲一指定曲線，則其割截三曲線之關係，不難類推。如此卽得三曲線算圖之一般性質。

三直線算圖：今設上述 1, 2, 3 三曲線均係直線，則代表方程式，均係一次式。

$$a_1\xi_1+b_1\eta_1+c_1=0;$$
$$a_2\xi_2+b_2\eta_2+c_2=0; \cdots\cdots(1)$$
$$a_3\xi_3+b_3\eta_3+c_3=0.$$

割線之方程式爲：$\xi=p\eta+q \cdots\cdots(2)$

以(2)式代入一式，而求 p, q 之値，卽成含有 p, q 兩變數之

三個聯立方程式:

$$\begin{cases} a_1(p\eta_1+q)+b_1\eta_1+c_1=0; \\ a_2(p\eta_2+q)+b_2\eta_2+c_3=0; \\ a_3(p\eta_3+q)+b_3\eta_3+c_3=0. \end{cases}$$

卽:

$$a_1\eta_1\cdot p+a_1\cdot q+b_1\eta_1+c_1=0;$$
$$a_2\eta_2\cdot p+a_2\cdot q+b_2\eta_2+c_2=0;$$
$$a_3\eta_3\cdot p+a_3\cdot q+b_3\eta_3+c_3=0.$$

故欲使三式,不致互相矛盾,必令此三式係數之行列式爲 0.

$$\begin{vmatrix} a_1\eta_1 & a_1 & b_1\eta_1+c_1 \\ a_2\eta_2 & a_2 & b_2\eta_2+c_2 \\ a_3\eta_3 & a_3 & b_3\eta_3+c_3 \end{vmatrix}=0.$$

解行列式,得: (3)式

$$\eta_1\eta_3\left(\frac{b_3}{a_3}-\frac{b_1}{a_1}\right)+\eta_2\eta_1\left(\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_3}\right)+\eta_3\eta_2\left(\frac{b_2}{a_2}-\frac{b_3}{a_3}\right)$$

$$+\eta_1\left(\frac{c_3}{a_3}-\frac{c_2}{a_2}\right)+\ \eta_2\ \left(\frac{c_1}{a_1}-\frac{c_3}{a_3}\right)+\ \eta_3\ \left(\frac{c_2}{a_2}-\frac{c_1}{a_1}\right)=0.$$

此卽 η_1, η_2, η_3 間之幾何關係,亦卽

$$Axz+Bxy+Cyz+Dx+Ey+Fz=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

之一般形式。

由此觀之, 以直線爲軸之列線算圖, 可表(4)式形式之公式;而此種算圖之應用,亦僅限於此種公式。由(3)式之一般結果,可以推及前述之種種特有情形。

§46. 例如: 三直線互相平行,

則：
$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.\qquad \text{(參閱解析幾何)}$$

代入(3)式，卽成：

$$\eta_1\left(\frac{c_3}{a_3}-\frac{c_2}{a_2}\right)+\eta_2\left(\frac{c_1}{a_1}-\frac{c_3}{a_3}\right)+\eta_3\left(\frac{c_2}{a_2}-\frac{c_1}{a_1}\right)=0.$$

三軸與 ξ 軸之交點，與原點之距離各爲：

$$OA_0=-\frac{c_1}{a_1},\ OB_0=-\frac{c_2}{a_2},\ OC_0=-\frac{c_3}{a_3}.\ (\text{令 } \eta=0 \text{ 卽得})$$

代入前式：

$$\eta_1(-OC_0+OB_0)+\eta_2(-OA_0+OC_0)+\eta_3(-OB_0+OA_0)=0$$

或作：　$$B_0C_0\cdot\eta_1+A_0C_0\cdot\eta_2-A_0B_0\eta_3=0.$$

是卽前節所述，三平行軸算圖之結果。

47. 今設有三直線交於一點，則：

$$\frac{c_1}{a_1}=\frac{c_2}{a_2}=\frac{c_3}{a_3}.\qquad \text{(參閱解析幾何)}$$

若此三直線互交於原點，則：

$$C_1=C_2=C_3=0.$$

代入(3)式，卽成：

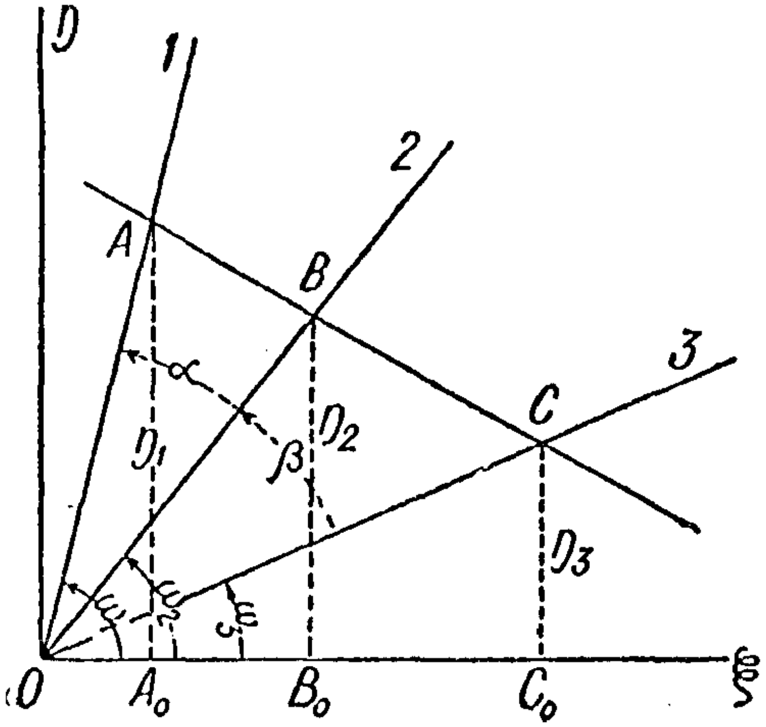
$$\frac{1}{\eta_2}\left(\frac{b_3}{a_3}-\frac{b_1}{a_1}\right)+\frac{1}{\eta_3}\left(\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}\right)+\frac{1}{\eta_3}\left(\frac{b_2}{a_2}-\frac{b_3}{a_3}\right)=0.$$

但知：　$$-\frac{b_1}{a_1}=\frac{\cos\omega_1}{\sin\omega_1},\ -\frac{b_2}{a_2}=\frac{\cos\omega_2}{\sin\omega_2},\ -\frac{b_3}{a_3}=\frac{\cos\omega_3}{\sin\omega_3}.$$

$$\eta_1=A_0A=OA\cdot\sin\omega_1\qquad(\text{圖 } 37)$$
$$\eta_2=B_0B=OB\cdot\sin\omega_2\qquad \omega_1=\omega_3+\alpha+\beta$$
$$\eta_3=C_0C=OC\cdot\sin\omega_3\qquad \omega_2=\omega_3+\beta$$

代入前式:

$$\frac{1}{OB}\sin(\alpha+\beta)-\frac{1}{OA}\sin\alpha-\frac{1}{OC}\sin\beta=0.$$



(圖 37)

是卽前節所述：三交軸算圖之一般形式。

此種演算，自較前述者更爲普遍化；惟理論較深，計算較繁；今若改三直線爲三曲線，而加以研究，卽得 η_1, η_2, η_3 三值間極複雜之關係，惟此種關係，在實際上頗少應用耳。

§ 48. 吾人所見算圖，僅此數種，故凡遇有公式，當盡力簡化爲已見之數種形式。

常用之簡化法，有下列二種:

(1)形式化簡:

令:
$$x=\frac{a_1x'+b}{x'+c_1},\quad y=\frac{a_2y'+b_2}{y'+c_2},\quad z=\frac{a_3z'+b_3}{z'+c_3}.$$

(x', y', z' 爲輔助變數，a_1 b_1 c_1……等均係所設常數。)

(2)對數公式:

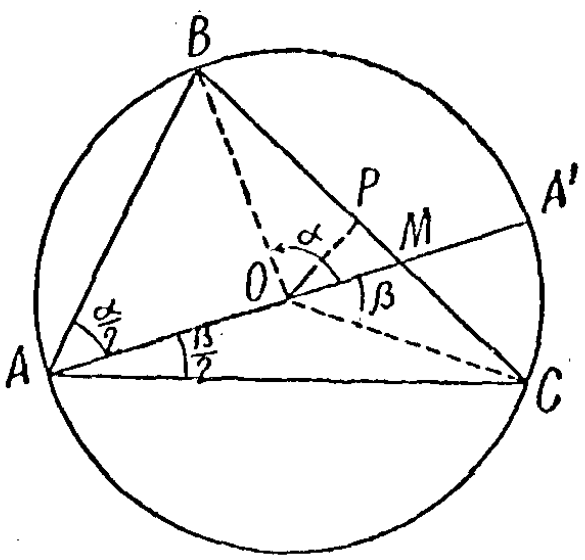
令: $x'=\log x,\quad y'=\log y,\quad z'=\log z.$

(II)圓形算圖

§ 49. 幾何性質: 今設有半徑爲 R 之圓，其直徑爲 AA';

自 A 點，作任意兩弦：AB 及 AC，與 AA' 軸各成$\angle\frac{\alpha}{2}$及$\angle\frac{\beta}{2}$兩角，則其相對 BC 弦之位置，亦因而確定。故若已知$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{AC}$ 兩弧，則 BC 與 AA' 軸之交點 M，足以確定 AM 之長。於是 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{AC}$ 與 AM 三量，有下列之關係：在圖 38 中：$AM=R+OM$。今自等腰三角形 $\triangle OBC$ 中，試求 OM 之值。自等腰三角形之頂點 O，作垂線 OP 垂直於底邊 BC；投射 OM 於 OP，則：

$$OP=OM\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$



（圖 38）

投射 OB 於 OP，則：

$$OP=OB\cdot\cos\frac{\alpha\cdot\beta}{2};$$

併解二式，得：

$$OM=R\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

故：

$$AM=R\left(1+\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

簡化之，得：

$$\frac{2R}{AM}=1+\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$\angle\alpha$, $\angle\beta$ 之值,若在 0 與 π 之間,則 M 點當在 AA' 之間,故凡可以化作下列形式: $\dfrac{A}{z}=1+Bx\cdot y$ 者,均得用是類算圖表之。

此種算圖應用尙少,因其 z 值不得超過 $2R=A$ 之範圍,故不若 N 形算圖之實用。

§50. 下例爲此種算圖之標準用法。

應用:喇栅(Lamé)公式:

$$e=\frac{D}{2}\left(\sqrt{\frac{r+p}{r-p}}-1\right)$$

D: 爲汽缸之直徑。 p: 爲缸內壓力。kg./mm.^{2}

e: 爲汽缸之厚度。 r: 爲金屬之抵抗。kg./mm.^{2}

(D 與 E 係同一單位)

設: $\dfrac{2e}{D}=m$, 則 $m=\sqrt{\dfrac{r+p}{r-p}}-1$;

$$(m+1)^2=\frac{r+p}{r-p};\quad 1+\frac{p}{r}=\frac{2(m+1)^2}{1+(m+1)^2}\cdots\cdots(1)$$

令: $p=\tan\dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{1}{r}=\tan\dfrac{\beta}{2}$,

則: $$1+\frac{p}{r}=1+\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}\cdots\cdots(2)$$

又令: $\dfrac{2(m+1)^2}{1+(m+1)^2}=\dfrac{2R}{AM}$,

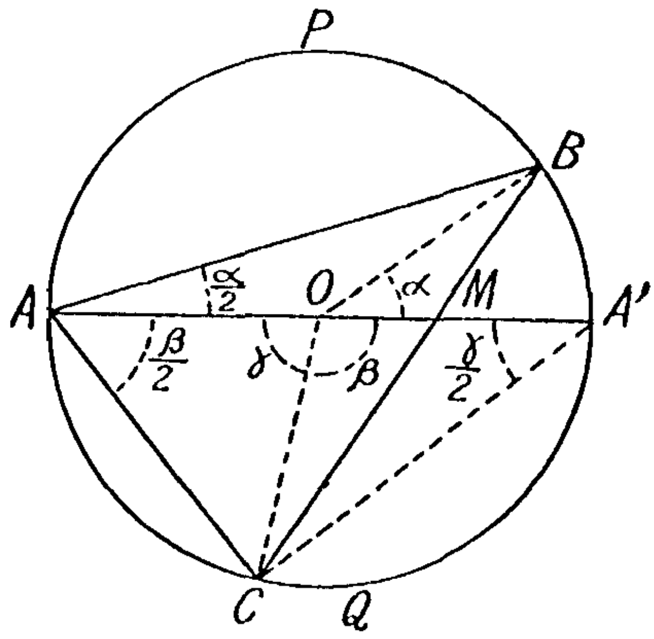
即: $$AM=R\frac{(m+1)^2+1}{(m+1)^2}.\cdots\cdots(3)$$

於是可由(2),(3)兩式,求得各變數之代表線段。在 $A'PA$ 半圓中(圖 39)自 A' 點向正方向刻:

$$p=\tan\frac{\alpha}{2}.$$

在 $A'QA$ 半圓中,自 A' 點向負方向刻:

$$r=1/\tan\frac{\beta}{2}=\cot\frac{\beta}{2}.$$



(圖 39)

圖中 A' 點,示 $\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{2}=0$,　即　$p=0$,　$r=\infty$;

A 點,示 $\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{2}$,　即　$p=\infty$,　$r=0$.

故知: p 值自 0 至 ∞,依 $A'PA$ 方向前進;
在 AA' 上可依(3)式之關係遞刻 m 值之代表線分,當 $m=0$ 時,$AM_0=2R$;而 $m=\infty$ 時,$AM_\infty=R$。故知 m 值自 0 至 ∞,所佔承軸之長,僅為:

$$AM_0-AM_\infty=2R-R=R。$$

承軸過短,則分度緊密,故宜利用下法以增承軸之長。以任意值 K,乘(1)式。

得:
$$\frac{Kp}{r}+K=\frac{2(m+1)^2K}{1+(m+1)^2},$$

兩端加 1,得: $1+\frac{Kp}{r}=\frac{(m+1)^2(K+1)-K+1}{1+(m+1)^2}$.

令: $$\frac{(m+1)^2(K+1)-K+1}{1+(m+1)^2}=\frac{2R}{AM},$$

則: $$AM=2R\cdot\frac{1+(m+1)^2}{(m+1)^2(K+1)-K+1}$$

當 $m=0$ 時，$AM_0=2R$，$m=\infty$ 時，$AM_\infty=2R\cdot\frac{1}{K+1}$.

承軸之範圍爲：$AM_0-AM_\infty=2R-2R\frac{1}{K+1}=2R\frac{K}{K+1}$.

今欲使 $2R\frac{K}{K+1}>R$，故須使 $K>1$.

若 $K=\infty$，則承軸之範圍達 AA' 全長。

令: $$1+\frac{Kp}{r}=1+\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2},$$

即: $$\frac{Kp}{r}=\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}.$$

p，r 之最大值，約爲 15 kg./mm².

$$K \text{ 須 } >1, \quad \text{令: } K=\frac{K_1}{K_2},$$

則: $$\frac{K_1p}{K_2r}=\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}$$

$$K_1\cdot p=\tan\frac{\alpha}{2},\quad \frac{1}{K_2r}=\tan\frac{\beta}{2} \text{ 或 } K_2r=\cot\frac{\beta}{2}.$$

設：$\angle\frac{\gamma}{2}$爲$\angle\frac{\beta}{2}$之餘角，（γ 爲 β 之補角）

則：$K_2 r=\tan\frac{\gamma}{2}$. （$\angle\gamma$ 自 A 點依 AQA' 向前進）

於是 $K_1 p=\tan\frac{\alpha}{2}$， $K_2 r=\tan\frac{\gamma}{2}$.

至於 K_1 及 K_2 之選定，例如先設 $K=2$， $(K>1)$

則： $K_1=2K_2$； 設 p 之最大值爲 15，其相對角度爲 α_{max}，

$15\,K_1=\tan\frac{\alpha_{max}}{2}$. 今試令 $\alpha_{max}=150°$， （近似值）

則：K_1 約爲 0.25. 令 $K_1=0.25$， $K_2=0.125$，

則：$\tan\frac{\alpha}{2}=0.25\,p$， $\tan\frac{\gamma}{2}=0.125\,r$.

設圓之半徑爲 $R=100$ mm.，

則：
$$AM=2R\frac{1+(m+1)^2}{(m+1)^2(K+1)-K+1}$$

$$=\frac{1+(m+1)^2}{3(m+1)^2-1}\times 200.$$

在喇楣(Lamé)公式中（圖 40）

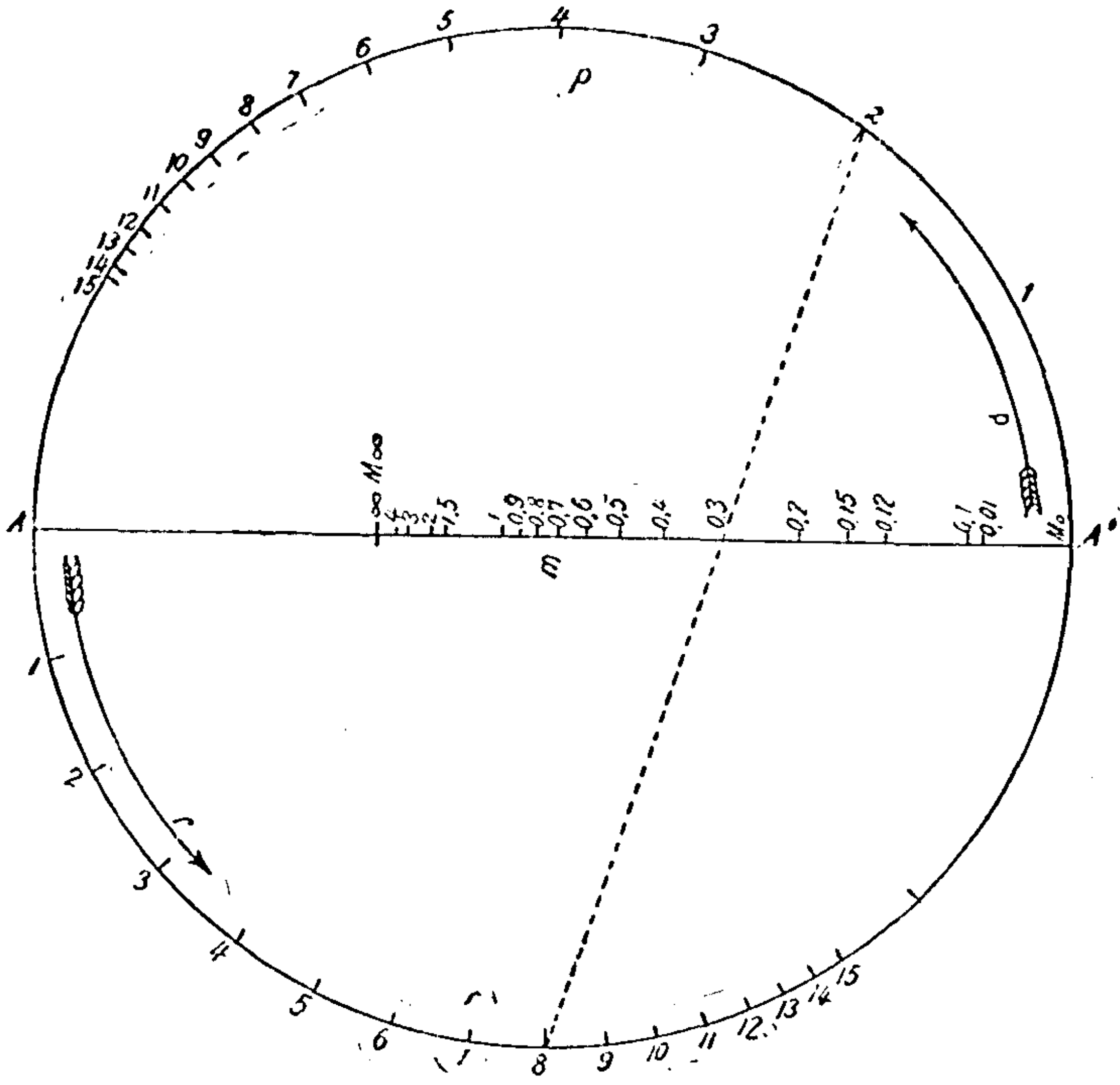
$$e=\frac{D}{2}\left(\sqrt{\frac{r+p}{r-p}}-1\right);$$

$$m=\frac{2e}{D}.$$

自 $m=0$ 至 $m=\infty$ 間之距離爲：

$$2R\frac{K}{K+1}=200\times\frac{2}{3}=133.33\text{ mm.}.$$

由下列兩種觀察，可使算圖之刻劃，製作愈趨簡易。



（圖 40）

(1)參閱上節：$K_1p=\tan\frac{\alpha}{2}$，$K_2r=\tan\frac{\gamma}{2}$．若 $\alpha=\gamma$，則 $K_1p=K_2r$，但 $K_1=2K_2$，$2p=r$．故若作任意直徑與 AA' 相交($\alpha=\gamma$)，則直徑一端所對 r 值，必為他端所對 p 值之2倍。

(2)令 $m=\infty$，則 $p=r$；故若經過 $m=\infty$ 點，作任意弦，則其一端所對 p 值，必等於他端所對 r 值。

此種算圖用法，頗為簡便；例如有汽缸，其直徑為0.5m.，其

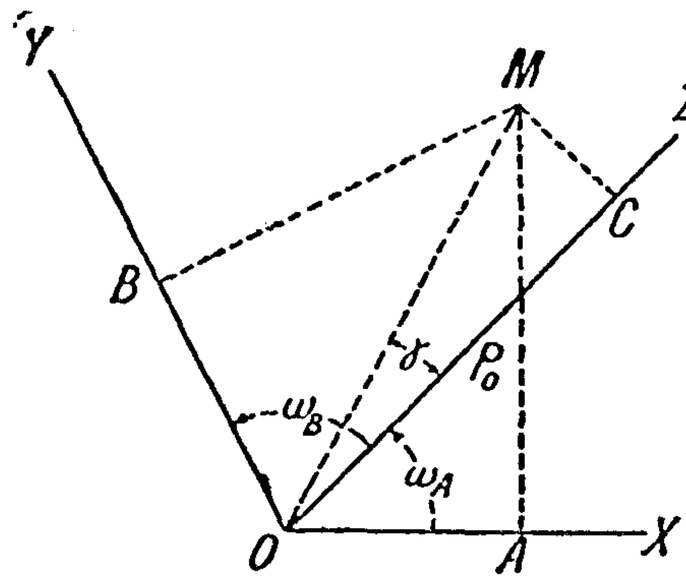
所受壓力爲 200 kg./cm²., 金屬之抵抗不得超過 8 kg./mm²., 試求其厚度。

題中：$p=2$ kg./mm²., $r=8$ kg./mm²., 連接 $p=2$ 及 $r=8$, 得 $m=0.3$.

故知：
$$e=\frac{0.3\times 0.5\ \text{m.}}{2}=0.075\ \text{m.}.$$

第四章　六角形算圖

§51. 幾何性質：　今設有相交三軸：ox, oy, oz, 與一任意點 M（圖 41）。



（圖 41）

過 M 點作 MA, MB, MC, 垂直於 x, y, z 三軸（A, B, C 三點為各垂線之垂脚）。每一 M 點，有相對三線分：OA, OB, OC.

觀察（左圖），可知 OA, OB, OC 中之任意二值，均足以確定其第三值。

投射 $OAMO$ 於 Ox 軸：　$OA = OM\cdot\cos(\omega_A+\gamma)$;

投射 $OBMO$ 於 Oy 軸：　$OB = OM\cdot\cos(\omega_B-\gamma)$;

投射 $OCMO$ 於 Oz 軸：　$OC = OM\cdot\cos\gamma$.

解三式，得：

$$OA+OB=\frac{OC}{\cos\gamma}[\cos(\omega_A+\gamma)+\cos(\omega_B-\gamma)].$$

是卽 OA, OB, OC 三線段間之幾何關係。

若令 Oz 軸，為$\angle xOy$ 之二等分角線；

則：　$OA+OB=2OC\cdot\cos\omega\ \ (\omega_A=\omega_B=\omega)$.

若　$\omega=60^\circ$, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$;

則　　$OA+OB=OC$.……………………………………(1)

此種三元一次,可表:含 x, y, z 三變數數之一次方程式:

$$z=ax+by+c.\text{……………………………………}(2)$$

命 e, 爲算圖之比率。$OA=eax$, $OB=ebx$, $OC=e(z-c)$.

OA, OB 之起點,適對 x, y 之零值;而 z 之零值,所對點爲 P_0. $OP_0=-e\cdot c$. P_0 點爲 z 之起點,

$$P_0C=OC-OP_0=e\cdot z.$$

於是: x, y, z 三值之代表線段,各爲:

$$OA=e\cdot a\cdot x,\ OB=e\cdot b\cdot y,\ P_0C=e\cdot z.$$

x, y, z 各值之代表線段,依各變數而正變。

若命:　　$x=1$, $y=1$, $z=1$,

則:　　$OA_1=e\cdot a$, $OB_1=e\cdot b$, $P_0C_1=e$.

OA_1, OB_1, OC_1 爲各變數每單位之長度;亦卽各値之倍率:

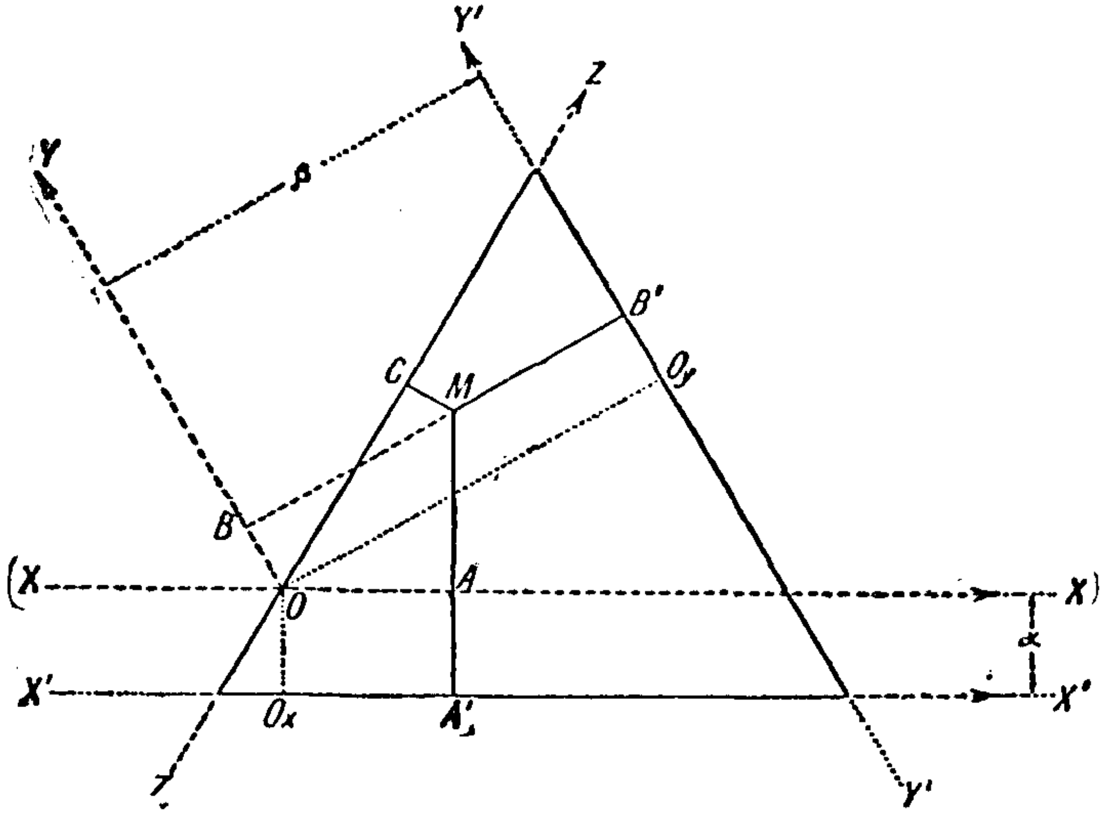
$$e_x=e\cdot a,\quad e_y=e\cdot b,\quad e_z=e.$$

觀察上式:可知三倍率中,如已知其一,卽可推求其他二值;例如已知 e_z, 則　$e_x=e_z\cdot a$, $e_y=e_z\cdot b$.

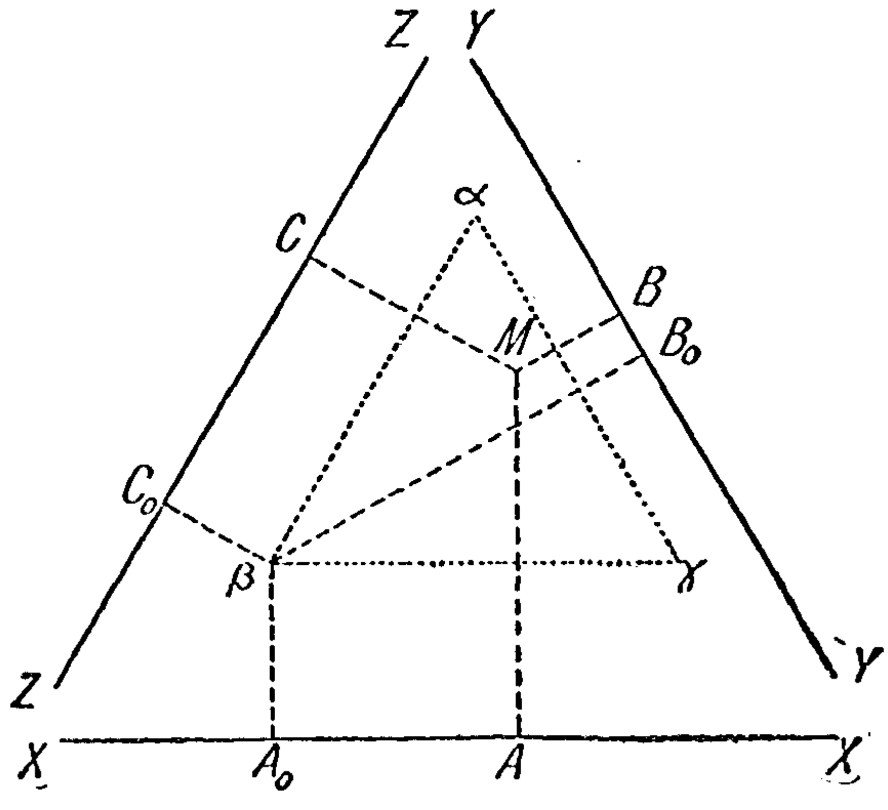
移軸:前圖式樣,應用不廣;普通常藉移軸法,平移各軸於適當位置;例如(圖 42)有 Ox, Oy, Oz 三軸; M 點與各軸之距離爲: MA, MB, MC.

平移 x 軸,至一任意距離 α, 得新軸 x'; 依法移 y 軸至一任意距離 β, 得新軸 y'.

觀察 OA 及 OB 兩線段: OA 之正投影爲 O_xA'; OB 之正投影爲 O_yB'; 且 O_xA', O_yB' 之長度與方向,一如: OA, OB; 故 x, y 兩軸,盡可以: x', y' 兩軸代之。惟吾人所須注意者,卽 x', y' 兩軸之起點: O_x, O_y 必爲原起點 O 之正投影。如是則三軸互交,成等邊三角形,如圖 42 之$\triangle\alpha\beta\gamma$. 今如任



（圖 42）



（圖 43）

作：x, y, z 三軸，平行於$\triangle\alpha\beta\gamma$ 之三邊；則 M 點各代表線段之長度，與方向，毫無變更。

在 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 中，β 爲三軸之公共起點。

射 β 點於 x, y, z 三新軸，得：A_0, B_0, C_0.

是卽各軸之起點。M 點之代表線段爲：A_0A, B_0B, C_0C，由是觀之：吾人可任取三軸，互成 $60°$ 角。
再取任意點，爲兩軸之起點；其後自二起點，各作一垂線；投射兩垂線之交點，於第三軸；是卽第三軸之起點 C_0.

§52. 軸之擴充：　今依法作：X, Y, Z 軸，與其起點：A_0, B_0, P_0；令：e_x, e_y, e_z 爲各軸之倍率；則：

$$A_0A=e_x\cdot x,\quad B_0B=e_y\cdot y,\quad C_0C=e_z\cdot z.$$

x, y 之零值，適對：A_0, B_0 兩點；而 z 之零值之相對點，爲：P_0.

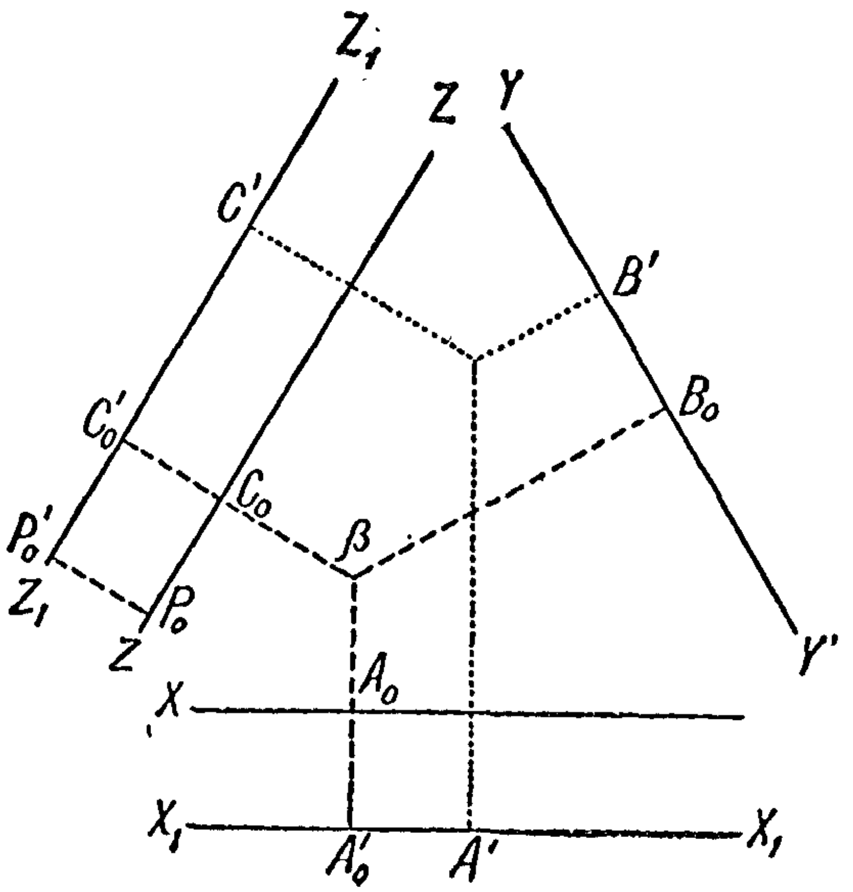
$$C_0P_0=-e_z\cdot c.$$

X 軸中，各值均在 $x_{\min}$ 與 $x_{\max}$ 之間；Y 軸中，各值均在 $y_{\min}$ 與 $y_{\max}$ 之間，今設作適合於原方程式之另一變數：x'，以代 x，則此含有新變數之方程式，仍可以原來算圖表之；惟欲使 x 與 x' 兩種刻度，不至混淆，更另作一 X_1 軸與 X 軸平行；X_1 軸之起點"A_0'"，爲原起點"A_0"之正投影。今若仍取 e_x 爲 x' 之倍率，則：$A'_0A'=e_x\cdot x'$. 變數 y，因無更動，仍延用原來 Y 軸。至於變數 z 之刻度，自與前次不同，因原來 z 值，變爲：$z'=ax'+by+c$，故爲刻畫 z' 值，作 Z_1 軸平行 Z 軸；投射 P_0 於 Z_1，得 Z_1 軸之起點 P_0'；於是得新算圖 X_1YZ_1 (圖 44)。

前節所述，並未言及 x' 與 x 之關係，今可設：

$$x'=x-x_{\max}.$$

當 $x'=0$ 時 (起點)，$x=x_{\max}$；故得於 x 軸之起點 A'_0 處，



（圖 44）

刻 $x=x_{\max}$；嗣後自 A'_0 處，刻 $x=x'+x_{\max}$. ($\because x'=x-x_{\max}$)

在 z_1 軸上，自其起點 P_0'，依次取

$$P_0'C'=e_z\cdot z'=e_z[a(x-x_{\max})+by+c]$$
$$=e_z\cdot[(ax+by+c)-ax_{\max}]$$
$$=e_z(z-ax_{\max}).$$

今依法作變數 y'. 以代 y, $(y>y_{\max})$，作 Y_1 軸，平行 Y 軸；取 B_0 之投影 B_0'，爲新軸之起點，刻 $y=y_{\max}$.

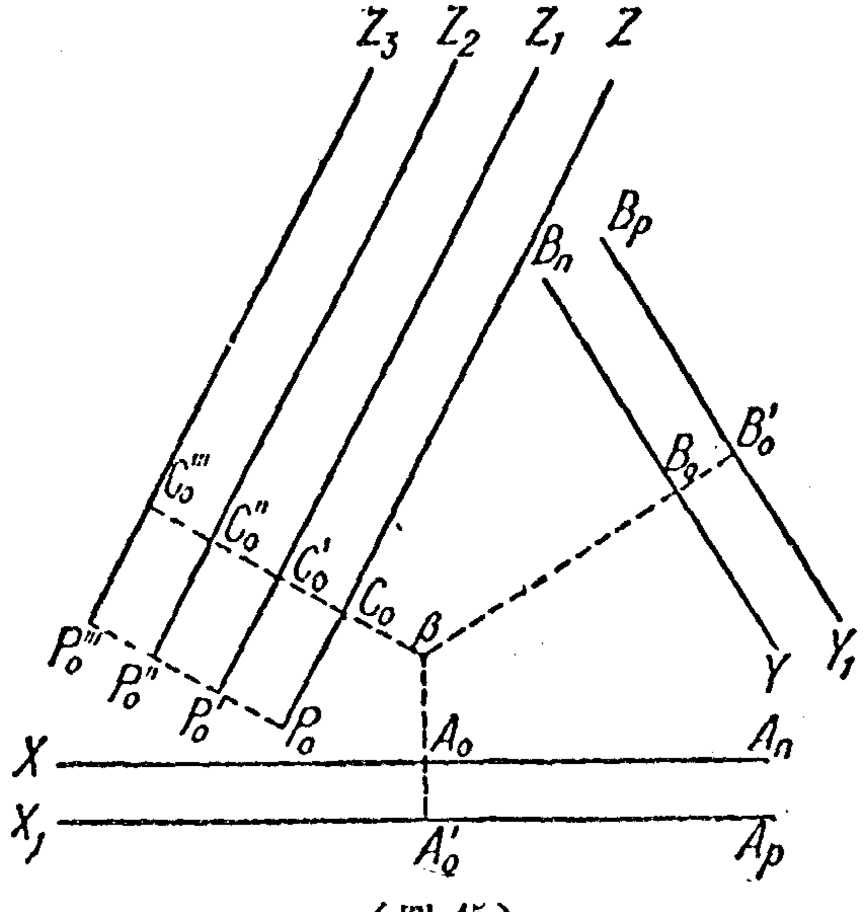
與 y' 相對之 z 值，爲：　$z''=ax+by'+c$.

刻 z'' 諸值於 Z_2 軸，取 P_0 之投影 P_0'' 爲起點，刻 $z=by_{\max}$；

嗣後遞取：　$P_0''C''=e_z\cdot z''=e_z(z-by_{\max})$.

今試併取：　$x>x_{\max}$, $y>y_{\max}$,

則：$z'''=ax'+by'+c$；刻 z''' 於 Z_3 軸，取 P_0 之投影 P_0''' 爲起點，刻 $z=ax_{\max}+by_{\max}$．次取 $P_0'''C'''=e_z\cdot z'''$，於是得下列算圖(圖 45)。



(圖 45)

各軸之應用範圍，可自下表檢得之：

變　數　值	承　軸	起點之 z 值
$x<x_{\max}$ $y<y_{\max}$	XYZ	P_0　0
$x>x_{\max}$ $y<y_{\max}$	X_1YZ_1	P_0'　$ax_{\max}$
$x<x_{\max}$ $y>y_{\max}$	XY_1Z_2	P_0''　$by_{\max}$
$x>x_{\max}$ $y>y_{\max}$	$X_1Y_1Z_3$	P_0'''　$ax_{\max}+by_{\max}$

§53．作圖： 凡可化作 $z=ax+by+c$ 形式者，均可以是類圖表之作圖之法，首於紙上任擇一點，爲原點；自原點作三軸互成 120°．作 X, Y, Z 三軸，分別垂直於以上三軸，則此 X, Y, Z 三軸，互成 60°．

投射原點於 X, Y, Z 三軸，得 x, y 之起點：A_0, B_0．取：$C_0P_0=-e_z\cdot c$，得 z 之起點 P_0．

至於各變數之倍率，宜先確定其範圍最廣者；例如 x, y, z 三值中，x 之範圍最廣，而 X 軸之長爲 l；則須令：

$$e_x\cdot x_{\max}\leqq l.$$

若因倍率過小，至使刻度過於緊密，可利用承軸擴充法，分變數之常用值爲二部分；作一平行新軸，如前節所述。

在各軸之起點：

$$P_0 \text{ 處刻 } z=0, \qquad P_0' \text{ 處刻 } z=ax_{\max};$$

$$P_0'' \text{ 處刻 } z=by_{\max}, \quad P_0''' \text{ 處刻 } z=ax_{\max}+by_{\max}.$$

自各軸之起點：A_0, A_0'；B_0, B_0'；P_0, P_0', P_0'', P_0'''；取各變數之代表線段：

$$A_0A=e_x\cdot x \qquad A_0'A'=e_x(x-x_{\max})$$

$$B_0B=e_y\cdot y \qquad B_0'B'=e_y(y-y_{\max})$$

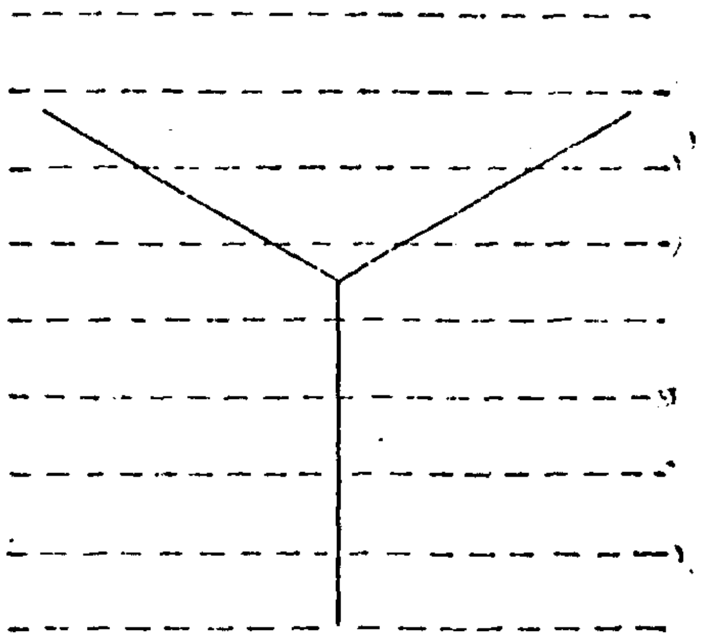
$$P_0C=e_z\cdot z \qquad P_0'P'=e_z(z-ax_{\max})$$

$$P_0''C''=e_z\cdot(z-by_{\max}) \quad P_0'''P'''=e_z\cdot[z-(ax_{\max}+by_{\max})].$$

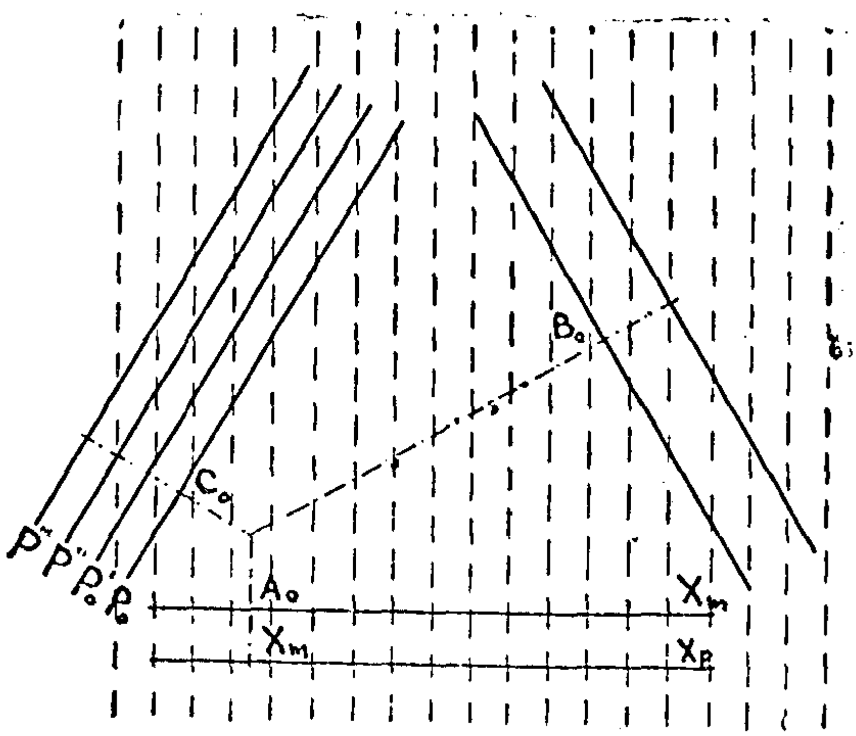
取透明紙一張（須完全透明以便透視算圖之刻度），作相交三軸，互成 120°．作諸平行線垂直於三軸中之任一軸（圖 46）。

如能於算圖上，作相類之平行線，如圖 47 虛點所示；則用時更爲便利。

§54．用法： 今設：$x<x_{\max}$，$y>y_{\max}$，欲求其相對 z 值取所備透明紙，覆於算圖上，令所畫平行線，平行於算圖中之



(圖 46)

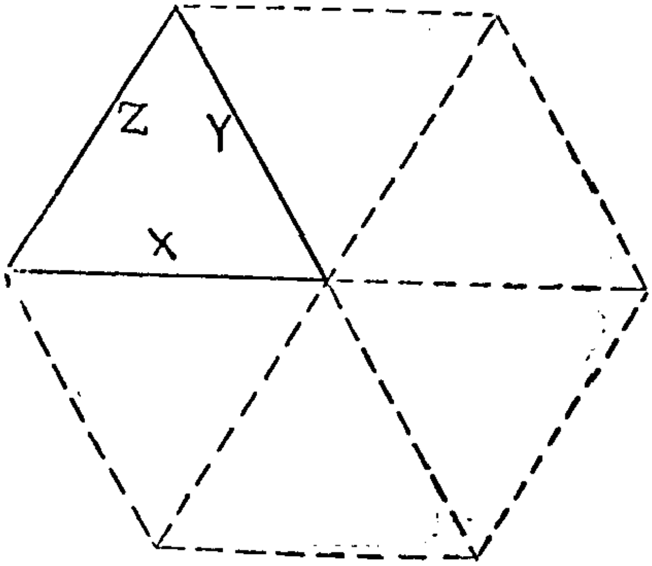


(圖 47)

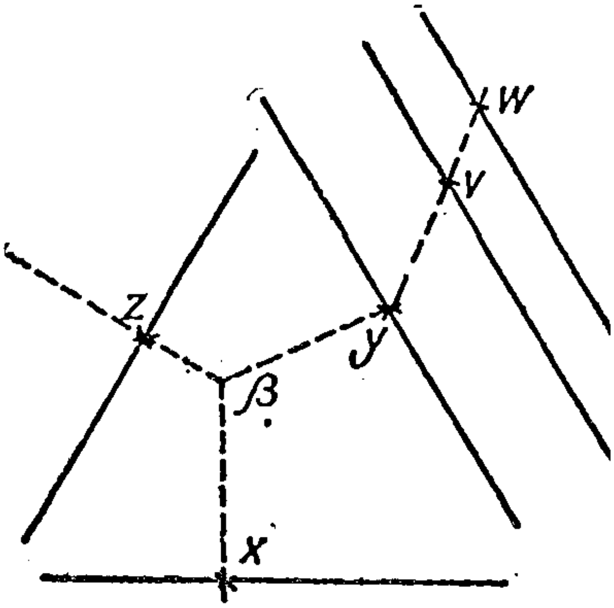
任一軸；同時令相交之三軸（即互成 120° 者），一枝通過 x 值，一枝通過 y 值；則其第三枝，與承軸 Z_2 之交點，即指所求 z 值。

六角算圖，可以應用於多變數之公式；蓋若每增加一等邊三角形，卽增加二變數；若變數繼續增加，則諸三角形相連接，而成六角形(圖 48)。

此種算圖，可與連線算圖併用，而成五個變數之混合算圖(圖 49)。



(圖 48)



(圖 49)

§ 55. 應用：　　$z=2x+3y+5$　　(圖 50)

x 之範圍自 $x=0$ 至 $x=20$;

y 之範圍自 $y=0$ 至 $y=10$.

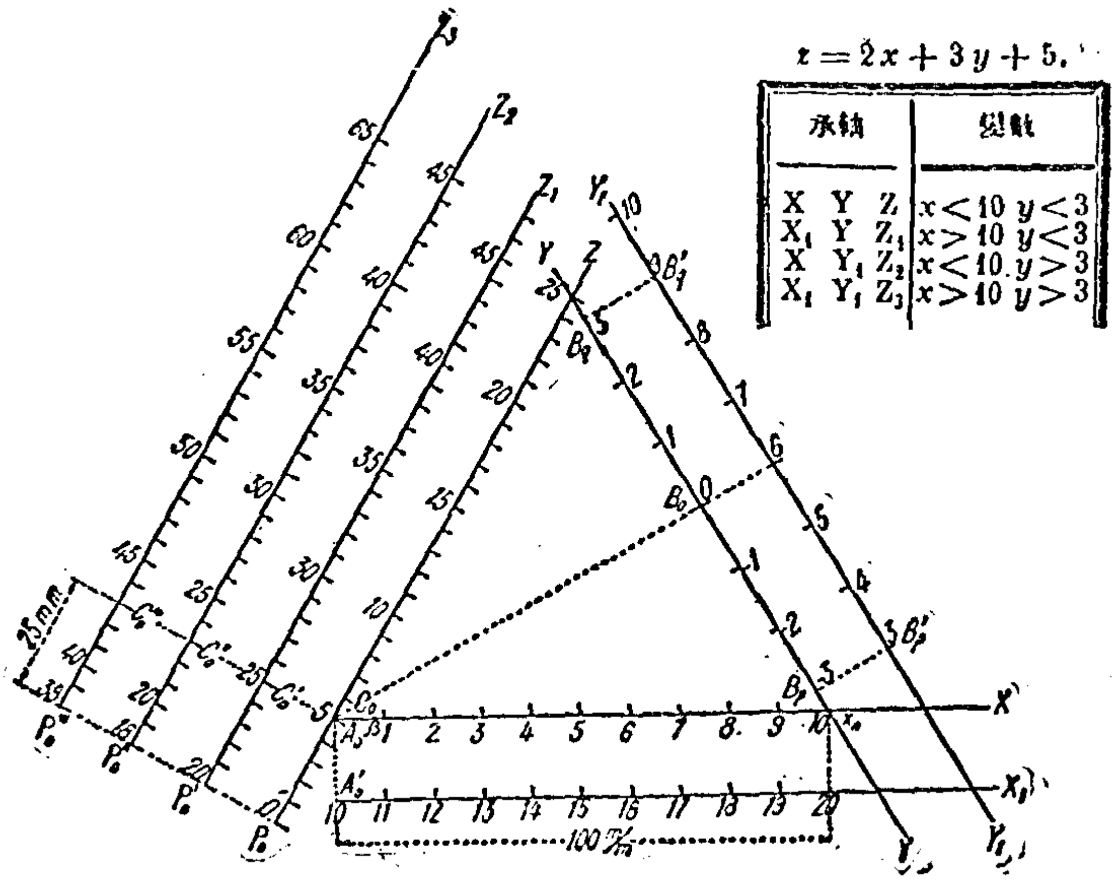
取圖紙一張，作每邊 100 mm. 之等邊三角形，以承變數：x, y, z 取 A_0 爲 x 軸之起點。x, y, z 三變數中，z 之範圍最大，故宜先定 e_z. 令 $e_z=5$ mm.,

則：　　$e_x=ae_z=2\times5=10$ mm.;

$e_y=be_z=3\times5=15$ mm..

第一算圖：(X, Y, Z) 自 X 軸之起點 A_0，取 x 値之代表線分：　　$A_0A=e_x\cdot x=10\,x$ mm..

當 $x=10$ 時，$A_0A=100$ mm.(卽軸之全長)。惟自 $x=10$



(圖 50)

至 $x=20$ 間之 x 諸值，亦吾人之所必需，故宜應用承軸擴充法，更作第二算圖 X_1YZ_1. Y 軸之起點 B_0，爲 A_0 之正投影。自 B_0 處向上，爲 y 之正值；向下，則爲負值。

今依次令：$y=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,$ 則其代表線段爲：

$$e_y\cdot y=15y=-45,\ -30,\ -15,\ 0,\ +15,\ +30,\ +45\ \text{mm.}$$

自 $y=-3$，至 $y=+3$ 共佔 90 mm.；若再續刻他值，勢將超出 100 mm. 之範圍，故宜作第三算圖：XY_1Z_2 以繼之。

Z 軸之起點，與 C_0 點之距離爲：

$$C_0P_0=-e_z\cdot c=-5\times5=-25\ \text{mm.}$$

自 C_0 點向下 25 mm. 處，刻 Z 軸之起點 P_0；自 P_0，取 $e_z\cdot z=5\,z$ mm.，刻其相當 z 值。

於是第一算圖中，x 之範圍，自 $x=0$ 至 $x=10$；y 之範圍，自 $y=-3$ 至 $y=+3$。z 則自 $z=0$ 至 $z=25$。

第二算圖：X_1YZ_1 應用範圍，自 $x=10$ 至 $x=20$；自 $y=-3$ 至 $y=+3$。作新軸 X_1，平行 X 軸，取 A_0 之正投影 A_0'，為新軸之起點，刻 $x=10$；又自 A_0' 處，取 x 之代表線分：$A_0'A=e_x(x-10)$ mm.. y 值之範圍與前圖同，故仍延用 Y 軸。z 之最低值為：$z=ax_{\max}=2\times10=20$. 作 Z_1 軸平行 Z 軸，取 P_0 之投影 P_0' 為起點，刻 $z=20$. 自 P_0' 處取 z 之代表線段：$P_0'C'=e_z(z-ax_{\max})=5(z-20)$mm.，則第二圖告成。

第三算圖：XY_1Z_2 應用範圍，自 $x=0$ 至 $x=10$；自 $y=+3$ 至 $y=+10$。作新軸 Y_1，平行 Y 軸，取 Y 軸最低值：$y=-3$ 點之投影，為起點，刻 $y=+3$；嗣自 $y=+3$ 處遞取 y 值之代表線段：$e_y(y-3)=15(y-3)$mm.. 作 Z_2 軸平行 Z 軸，取 P_0 之投影 P_0'' 為起點，刻

$$z=by_{\max}=3\times6=18.$$

($y_{\max}=6$ 係以 $y=-3$ 為起點)

嗣自 P_0'' 處，刻 z 值之代表線段：$e_z(z-18)=5(z-18)$ mm. 則第三圖告成。

第四算圖：$X_1Y_1Z_3$ 應用範圍，自 $x=10$ 至 $x=20$；自 $y=3$ 至 $y=10$。作 Z_3 平行 Z 軸，以 P_0 之正投影 P_0''' 為起點，

刻： $$z=ax_{\max}+by_{\max}=20+18=38.$$

嗣自 P_0''' 處，取 z 值之代表線段。

$$e_z(z-38)=5(z-38)\text{mm}.$$

則全圖告成。

第五章　雙列線算圖

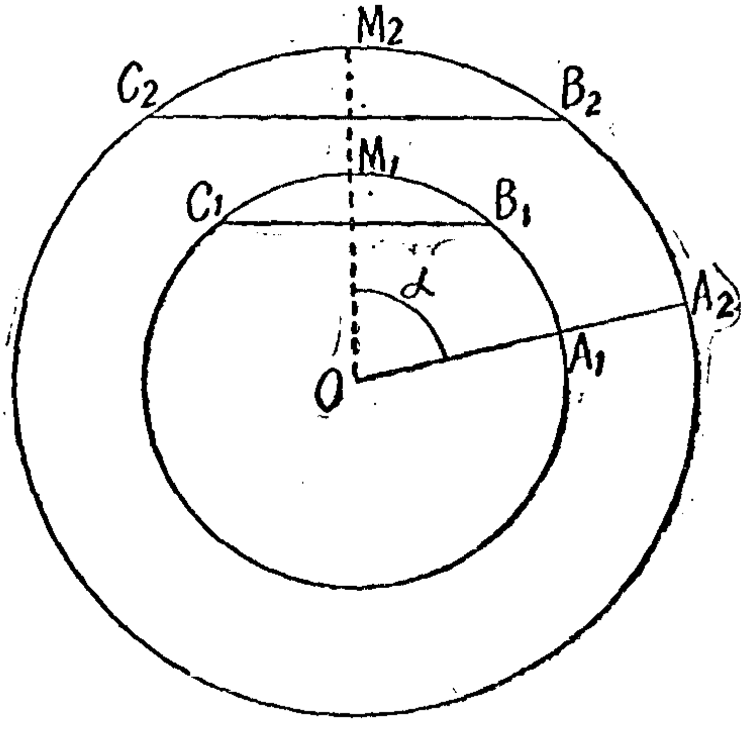
同心圓算圖

§56. 幾何性質：　今設有半徑爲：R_1 及 R_2 之兩同心圓，及固定半徑 OA_1A_2；作平行兩弦：C_1B_1，C_2B_2. 則其相對兩弦之中點：M_1 及 M_2 必在同一半徑上。　設 α 爲此半徑與 A_1A_2 直徑，所成角度，則：

$$\widehat{A_1M_1}=\alpha R_1;$$

$$\widehat{A_2M_2}=\alpha R_2.$$

〔$\angle\alpha$ 須以弳即本位弧計 (radian; radian.)〕



（圖 51）

$$\therefore\quad \frac{\widehat{A_1M_1}}{\widehat{A_2M_2}}=\frac{R_1}{R_2}.$$

但：$$\widehat{A_1M_1}=\frac{\widehat{A_1B_1}+\widehat{A_1C_1}}{2};$$

$$\widehat{A_2M_2}=\frac{\widehat{A_2B_2}+\widehat{A_2C_2}}{2};$$

$$\therefore\quad \frac{\widehat{A_1B_1}+\widehat{A_1C_1}}{\widehat{A_2B_2}+\widehat{A_2C_2}}=\frac{R_1}{R_2}.$$

即：

$$R_2\cdot\widehat{A_1B_1}+R_2\cdot\widehat{A_1C_1}-R_1\cdot\widehat{A_2B_2}-R_1\cdot\widehat{A_2C_2}=0\cdots\cdots(1)$$

是卽：　$\widehat{A_1B_1}$，$\widehat{A_2B_2}$，$\widehat{A_1C_1}$，$\widehat{A_2C_2}$　四值間之關係。

以上(1)式，可表普通之四元一次式：

$$ax+by+cz+dw+k=0. \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

令　$R_2\widehat{A_1B_1}=eax$;　　$R_1\widehat{A_2B_2}=-ecz$;

$R_2\widehat{A_1C_1}=eby$;　　$R_1\widehat{A_2C_2}=-e(dw+k)$;

(e 爲比率)

於是：

$$\widehat{A_1B_1}=\frac{ea}{R_2}x \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\widehat{A_1C_1}=\frac{eb}{R_2}y \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\widehat{A_2B_2}=\frac{-ec}{R_1}z \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\widehat{A_2C_2}=\frac{-e(dw+k)}{R_1}. \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

以上各變數，除 w 外，其零值，均對各弧之起點。w 之零值，所對點爲 P_0，　$\widehat{A_2P_0}=\frac{-ek}{R}$.

P_0 爲 w 值之起點，因：

$$\widehat{P_0C_2}=\widehat{A_2C_2}-A_2P_0=-\frac{e}{R}(dw+k)$$

$$+\frac{e}{R_1}k=-\frac{e}{R_1}dw. \quad \cdots\cdots\cdots(7)$$

依次令(3)，(4)，(5)，(7)各式之變數爲 1，則其相對各弧，表各變數之單位長度(卽倍率)，

$$e_x=\frac{ea}{R_2},\ e_y=\frac{eb}{R_2},\ e_z=\frac{-ec}{R_1},\ e_w=\frac{-ed}{R_1} \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

於是：　$\widehat{A_1B_1}=e_x\cdot x$;　$\widehat{A_2B_2}=e_z\cdot z$;

$\widehat{A_1C_1}=e_y\cdot y$;　$\widehat{A_2C_2}=e_w\cdot w$.

若 R_1 R_2 預經選定，則(7)式中之任一值，可以確定其他三值；惟弧之長度，不能直接量得，故不得不藉角度以表之；蓋一弧之長，等於其所對圓心角，與半徑之積(角度須以本位弧計)。例如半徑爲 R，其所對圓心角爲 a(以本位弧計)，則其所對弧長爲 $R\cdot a$. 若以普通角度計，設 ω 爲所對圓心角(以角度計)，則其所對弧長應爲：$R\cdot\omega\frac{\pi}{180}$.

故　$$\widehat{A_1B_1}=e_x\cdot x=\frac{\pi R_1}{180}\omega$$

(ω 爲 $\widehat{A_1B_1}$ 所對圓心角，以度計)

$$\omega=\frac{e_x\cdot x\cdot 180}{\pi\cdot R_1}.\quad 但\quad e_x=\frac{ea}{R_2},\quad 故\quad \omega=\frac{180}{\pi}\cdot\frac{e\cdot a}{R_1\cdot R_2}x.$$

令 $x=1$，　則　$\omega_x=\frac{180}{\pi}\cdot\frac{ea}{R_1R_2}$，

是卽變數 x 之單位角度。

同理　$$\omega_x=\frac{180\,ea}{\pi R_1R_2};\qquad \omega_y=\frac{180\,eb}{\pi R_1R_2};$$

$$\omega_z=\frac{-180\,ec}{\pi R_1R_2};\qquad \omega_w=\frac{-180\,ed}{\pi R_1R_2}.\ \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

觀察(9)式，可知 R_1 及 R_2 兩值，如已選定，則 e 值足以決定其他各值。設 x_m，y_m，z_m，w_m，爲各變數之最大值，由(9)式，知：

$$\omega_x \cdot x_m = \frac{180 \cdot e}{\pi R_1 R_2} \cdot a x_m, \quad \omega_y \cdot y_n = \frac{180 \cdot e}{\pi R_1 R_2} \cdot b y_m,$$

$$\omega_z \cdot z_m = \frac{-180\, e}{\pi R_1 R_2} \cdot c z_m, \quad \omega_w \cdot w_m = \frac{-180\, e}{\pi R_1 R_2} \cdot d w_m.$$

故知角度之大小，全視 ax_m, by_m, cz_m, dw_m 四量而定。今假設 ax_m 爲四值中之最大者，須令 $\omega_x \cdot x_m$ 不得超過 $360°$.

令： $\omega_x \cdot x_m = 360°, \quad \omega_x = \dfrac{360}{x_m}$ ……………………………(1)

代入(9)式： $e = \dfrac{2\pi R_1 R_2}{ax}$ ……………………………………(2)

以 e 值代入(9)式：

$$\omega_x = \frac{360}{ax_m} b, \quad \omega_y = \frac{-360}{ax_m} c, \quad \omega_w = \frac{-360}{ax_m} d.$$

各變數之最大值 y_m, z_m, w_m 所對角度，爲：

$$360 \frac{by_m}{ax_m}, \quad -360 \frac{cz_m}{ax_m}, \quad -360 \frac{dw_m}{ax_m}.$$

以上各角，均小於 $360°$，故於 $360°$ 範圍內可刻。較大於 y_m, z_m, w_m 之諸值，其能刻劃之最大值應爲：

$$y_m' = \frac{360}{w_y} = \frac{ax_m}{b}, \quad z_m' = \frac{-ax_m}{c}, \quad w_m' = \frac{-ax_m}{d}.$$

x 與 y 之起點爲 A_1，z 之起點爲 A_2，w 之起點爲 P_0。

$$\widehat{A_2 P_0} = -\frac{vk}{R_1}.$$

代以 e 值,則成:　　$\widehat{A_2P_0}=-k\cdot\frac{2\pi R_2}{ax_m}$.

設 ω_0 爲 $\widehat{A_2P_0}$ 所對圓心角,

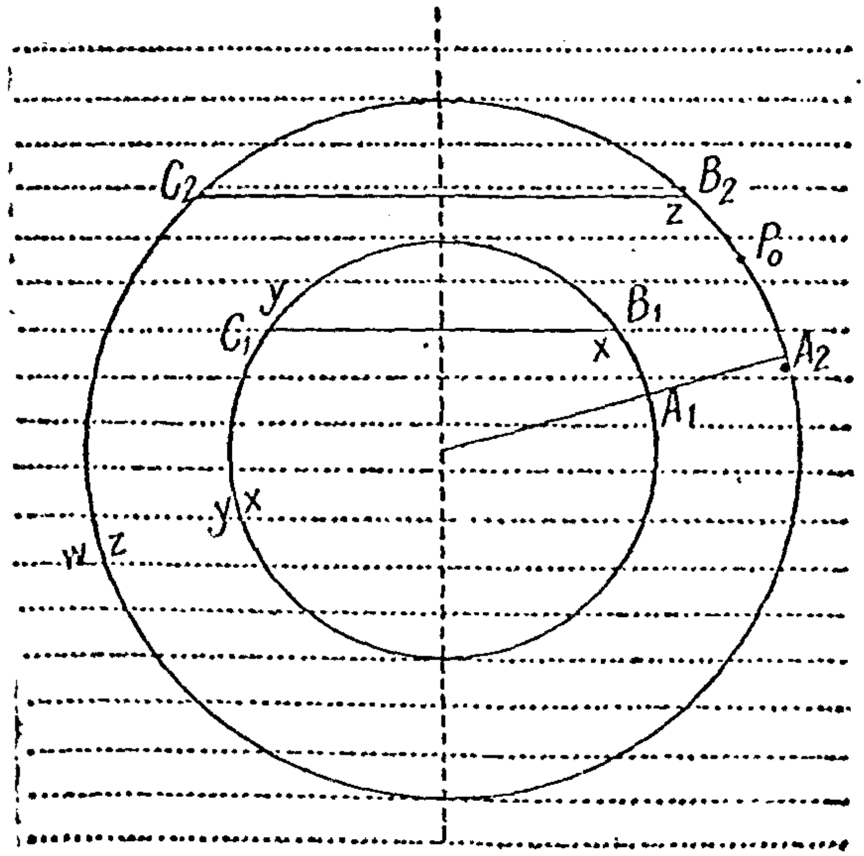
則:　　$\widehat{A_2P_0}=R_2\omega_0\frac{\pi}{180}$;　　$\omega_0=\frac{-360}{ax_m}k$.

於是自 A_1, A_1, A_2, P_0 各點,遞刻:

$$\frac{360}{x_m}x,\quad \frac{360}{ax_m}\cdot by,\quad \frac{-360}{ax_m}\cdot cz,\quad \frac{-360}{ax_m}dw.$$

爲避免刻度有混淆之弊,宜將 x 值刻於 R_1 圓周之外,y 值刻於圓周之內。z, w 兩值,亦依同法刻製(圖 52)。

算圖之用法:取透明紙一張,畫數條平行線,與一垂直線,如圖 52。



(圖 52)

今設已知 x, y, z 三值,而求 w, 移動透明紙,使已知之 x 值(B_1 點), 及已知之 y 值(C_1 點)與一平行線重合;且使其垂直線通過圓心;取 z 值所對之 B_2 點, 延其最近之平行線,尋得 C_2 點,是卽所求 w 值。

算圖擴充法:

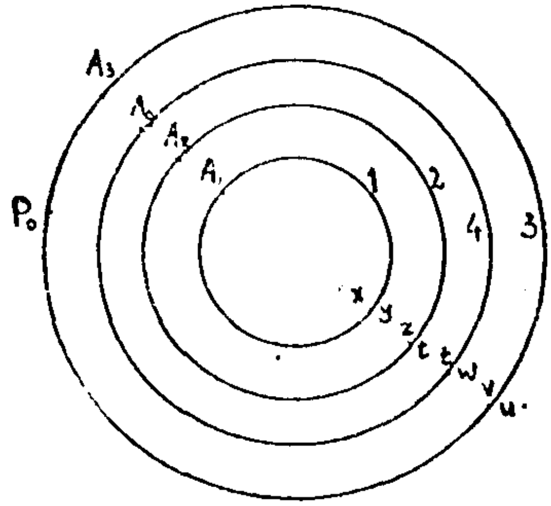
以上算圖,可以擴充為多變數算圖。今設有六變數之一次方程式:

$$ax+by+cz+dw+fv+gu+k=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

令: $$ax+by+cz=t \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

則: (1)式變為:

$$t+dw+fv+gu+k=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$



(圖 53)

於是六變數算圖,變為兩組四變數算圖:(2),及(3)。

(2)式之代表算圖,為 1, 2 兩圓周(其半徑為 R_1 及 R_2)所組成。

各變數之單位角度,應為:

$$\left\{\begin{array}{l}\omega_x=\dfrac{180\,ea}{\pi R_1R_2},\quad \omega_z=\dfrac{-180\,ec}{\pi R_1R_2};\\[2ex] \omega_y=\dfrac{180\,eb}{\pi R_1R_2},\quad \omega_t=\dfrac{180\,e}{\pi R_1R_2}.\end{array}\right. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

(3)式之代表算圖,爲: 4, 3 兩圓周(其半徑爲 R_4, R_3) 所組成。各變數之單位角度應爲:

$$\left\{\begin{array}{l}\omega_t'=\dfrac{180\,e'}{\pi R_3R_4},\quad \omega_w=\dfrac{180\,e'd}{\pi R_3R_4};\\[2ex] \omega_v=\dfrac{-180\,e'f}{\pi R_3R_4},\quad \omega_u=\dfrac{180\,e'g}{\pi R_3R_4}.\end{array}\right. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

在此算圖中, u 之 0 值,所對點爲 P_0. $\widehat{A_3P_0}$ 所對圓心角爲:

$$\omega_0=\frac{-e'\cdot 180}{R_3R_4\pi}\cdot k.$$

在決定 e 與 e' 兩值之前,應先使算圖簡化。

在第一算圖(R_1 及 R_2)中, t 值所對角度爲: $\omega=\omega_t\cdot t$;

在第二算圖(R_4 及 R_3)中, t 值所對角度爲: $\omega'=\omega_t'\cdot t$.

故在同一 t 值時,兩代表角度之比,等於兩單位角度之比:

$$\frac{\omega'}{\omega}=\frac{\omega_t'}{\omega_t}.$$

玆令兩代表角度相等,則: $\omega_t=\omega_t'$.

代入(4),(5)兩式,則: $\dfrac{360\,e}{2\pi R_1R_2}=\dfrac{360\,e'}{2\pi R_3R_4}$.

$$\frac{e}{e'}=\frac{R_1R_2}{R_3R_4}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

觀察圖 53, t 之刻度在 R_2 圓之外圈與 R_4 圓之內圈。今若令 R_4 值, 漸近於 R_2, 則 2, 4 兩圓, 合而爲一, 而算圖之

承軸,亦由四圈,減爲三圈 (1, 2, 3 三圈)。z 之刻度,在 R_2 圓之內圈, w 之刻度在 R_2 之外圈;若再於此圈上刻劃 t 値,是足使 z, w 之刻度,不易辨認,且在實際上, t 値之刻度,並無需要。今設於 R_1, R_2, R_3 三圓周上, 刻 x, y, z, w, v, u 六個變數。已知 x, y, z, w, v 五値,以求 u 値; 可先於 R_1 圓上,尋得 x, y 兩値; 連接 x, y; 後由 R_2 圓上之 z, 作 $\overline{z\cdot t}/\!/\overline{x\cdot y}$, 交圓周於 t; 次在 R_2 圓上,尋得 w 値;連接 $t\cdot w$; 於 R_3 圓上, v 値處,作 $\overline{v,u}/\!/\overline{t,w}$, 交圓周於 u; 是卽所求 u 値。

由此作法,可知 t 之實値,並無明瞭之必要。

§57. 作圖:

比較: ax_m, by_m, cz_m, dw_m, fv_m, gu_m 六値

假設 ax_m 爲六値中之最大者;可令 $\omega_x\cdot x_m=360°$ ....(1)

代入(4)式 $$c=\frac{2\pi R_1R_2}{ax_m};$$

代入(6)式 $$c'=\frac{2\pi R_2R_3}{ax_m}.$$

以 c 及 c' 値,代入(4),(5)各式:

$$\omega_y=\frac{360\,b}{ax_m};\quad \omega_z=\frac{-360\,c}{ax_m};\quad \omega_w=\frac{360\,d}{ax_m};$$

$$\omega_v=\frac{-360\,f}{ax_m};\quad \omega_u=\frac{-360\,g}{ax_m}\ \text{..............................}(2)$$

x 與 y 之起點爲 A_1, z 與 w 之起點爲 A_2, v 之起點爲 A_3; u 之起點爲 P_0; $\overparen{A_3P_0}$ 所對之圓心角爲 ω_0.

$$\omega_0=\frac{-360}{ax_m}\cdot k$$

於是,可任擇: R_1, R_2, R_3 三値爲半徑,作三同心圓;以 A_1,

A_2, A_3, P_0 爲起點,遞刻:

$$\frac{360}{ax_m}ax;\quad \frac{360}{ax_m}by;\quad \frac{-360}{ax_m}cz;$$

$$\frac{360}{ax_m}dw;\quad \frac{-360}{ax_m}fv;\quad \frac{-360}{ax_m}gu \text{ 諸值,}$$

再依前法,製透明紙一張,卽可應用。

§ 58. 應用:　茲有六變數公式

$$xy^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}w=v^{\frac{2}{3}}u.$$

若以對數式表之,則:

$$\log x+\frac{1}{2}\log y+\frac{1}{3}\log z+\log w-\frac{2}{3}\log v-\log u=0$$

是爲六個變數之一次式。

設:　$x_m=y_m=z_m=w_m=v_m=u_m=10,$

則:　$\log x_m=1,\quad \frac{1}{2}\log y_m=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3}\log z_m=\frac{1}{3},$

$$\log w_m=1,\quad \frac{2}{3}\log v_m=\frac{2}{3},\qquad \log u_m=1.$$

六值中,最大者爲 1.

於是:

$$\omega_x=\frac{360°}{\log x_m}=360°,\qquad \omega_w=360°,$$

$$\omega_y=\frac{360}{2}=180°,\qquad \omega_v=\frac{-360}{1}\times\frac{-2}{3}=240°,$$

$$\omega_z=\frac{-360}{3}=-120°,\quad \omega_u=\frac{-360}{1}\times(-1)=360°$$

六個單位角度中,除 z 外,均爲正數;故 z 値之刻度方向,應與他數相反。此方程式中,無常數項,故各變數之起點各

爲：A_1，A_2，A_3.

各變數之代表角度，爲：

$$360\ \log x,\quad 180\ \log y,\quad -120\ \log z,$$

$$360\ \log w,\quad 240\ \log v,\quad 360\ \log u.$$

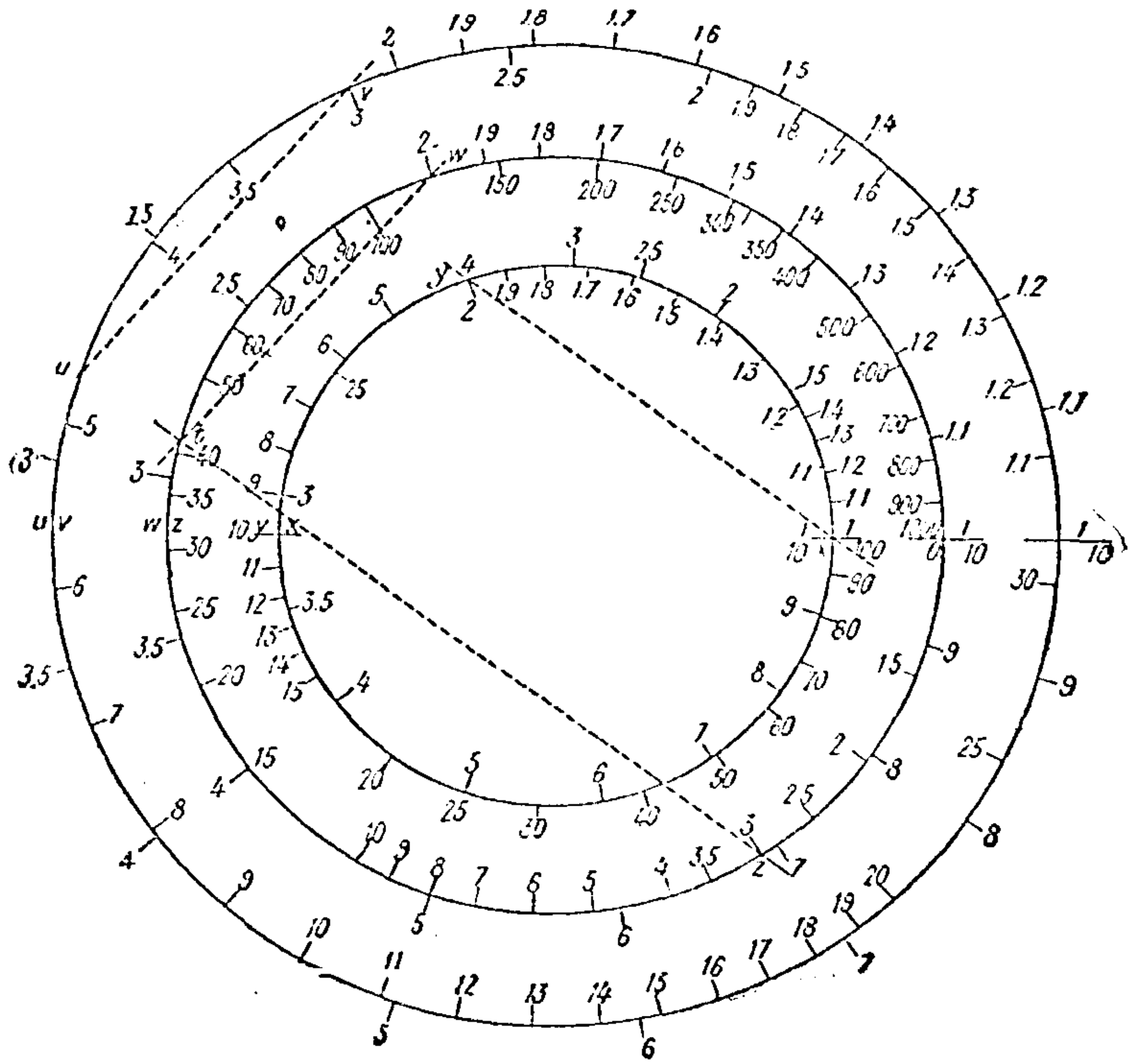
如是刻製，卽成(圖 54)：

今設已知　$x=1$，　$y=4$，　$z=3$，　$w=2$，　$v=3$，

依法作平行線(如圖)

得　　　　　$u=2.75$.

實際計算所得　　$u=2.76$.



(圖 54)

應用於三變數公式

雙連線圓形算圖，所佔之面積甚小，而承軸頗長。透明紙之用法，並無困難，故其應用頗廣。

此種算圖，多用以表偶數變數之公式；但若用以表奇數變數公式，亦無不可。例如三變數公式：

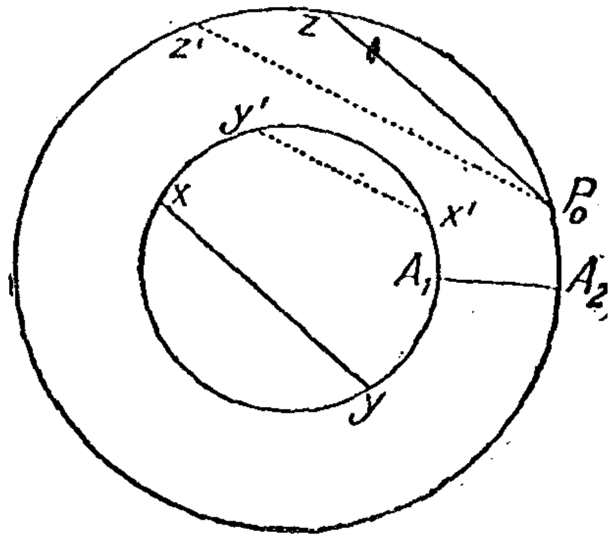
$$ax+by+cz+k=0.$$

可先假設一變數 w，作方程式

$$ax+by+cz+dw+k=0$$

再以算圖表之；

然後令 w 恆等於零。例如已知 x, y, 以求 z 值；可先連接 x, y；然後自 $w=0$ 處 (P_0 點)，作 $P_0z /\!/ xy$，交圓周於 z，是即所求 z 值(圖 55)。



(圖 55)

法文參考書

Index Bibliographique:

Beghin (Maurice)

Sur une nouvelle classe d'abaques, Génie civil, t. XXII, 1892.

Bertrand (Commandant)

Description et usage d'un abaque destiné à faciliter les problèmes relatifs à la distribution des eaux, Revue du Génie, 1895.

Clark (J.)

Théorie générale des abaques d'alignement de tout ordre, Revue de Mécanique, 1907.

Dumas (Gustave)

Note relative aux abaques à alignement, Bull. tech. de la Suisse romande, 1906.

Gercevanoff (N.)

Application des méthodes nomographiques à l'intégration graphique.

Ocagne (M. D').

Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques, Paris, 1891; Gauthier-Villars in-8°.

Traité de Nomographie, Paris, 1899; Gauthier-Villars in-8°. (On trouve en tête de cet ouvrage la liste des publications antérieures de l'auteur relatives au sujet.)

Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie, Journ. de l'Ec. Polyt., 2e série, t. VIII, 1903. (tiré à part.)

Sur la résolution nomographique de l'équation du 7e degré, C. R. de l'Ac. des Sc., 2e sem., 1900 (p. 522).

Sur quelques principes élémentaires de Nomographie, Bull. des Sc.

math., t. XXIV, 1901.

Sur la représentation nomographique des équations à quatre variables. C. R. de l'Ac. des Sc., t. CXLVIII (1909), p. 1244.

Potin (L.)

Solutions nomographiques de questions relatives aux chemins de fer, Ann. des Ponts et chaussées, 1911, fasc. III, p. 697.

Résolution nomographique des triangles rectilignes, L'Ingénieur constructeur, 1911.

Calcul à vue des lignes aériennes par l'emploi de nomogrammes à points alignés; Paris, Dunod, 1912.

Seco de la Garza (R.)

Les nomogrammes de l'ingénieur; Paris, 1912; Gauthier-Villars, in-8°.

Soreau (Rod.)

Contribution à la théorie et aux applications de la Nomographie, Mém. et comptes rendus de la Soc. des Ing. civils, 1901 (tiré à part).

Nouveaux types d'abaques. La capacité et la valence en Nomographie, Ibid., 1906 (tiré à part).

英文參考書

Howes, L. I. and H. L. Seward:

The Design of Diagrams for Engineering Formulas and the Theory of Nomography.

Hezlet (R.-K.)

Nomography or the Graphic Representation of Formulæ, Woolwich, 1913; Royal Artillery Institution, in-8°.

Keraton, W. J. and G. Wood,

Alignment Charts for Engineers and Students.

W. N. Rose: Line Charts for Engineers.

索　引

本書常用標記

x, y, z, u, v ·······	表變數
A, B, C, a, b, c····	表常數
$f(x),\ \varphi(x)$	表 x 之函數
$x_{\max}$ 或 x_m	表 x 之最大值
$x_{\min}$ 或 x_n	表 x 之最小值
e_x, e_y, e_z	表 x, y, z 之倍率(scale)
e	比率(coefficient of proportionality)
l	表圖紙之寬
h	表圖紙之高
m.	公尺(metre)
cm.	公分(centimetre)
mm.	公厘(millimetre)
km.	公里(kilometre)
m.^3	立方公尺
$\text{m.}^3/\text{hr.}$	立方公尺/小時
$\text{m.}^3/\text{sec.}$	立方公尺/秒

本書售價陸元貳角伍分

商