地圖投影法

J. A. Steers 原著

褚紹唐譯　李長傅校

世界書局印行

世界

第一篇

第 16, 26, 32, 34、54, 55, 61, 74, 76, 77 諸圖均爲印刷上之便利起見,將縮尺略加縮小。當論述各圖時務須注意。

第一章

導言：投影圖法之性質

地圖投影法乃將地球上之經綫及緯綫表示於一平面紙上之一種方法。任何表示方法均為一種投影。其所成之網綫常稱之曰地圖之網。

吾人之地球為一球體，惟地圖乃一平面。因使一平面之紙平貼於球體上乃不可能之事，故欲作一正確之圖於平面紙上亦屬困難。此卽所以必須研究投影法之理由也。若仔細考查一優良之地圖册必可示吾人數種不同之投影法。在某圖中，其緯綫及經綫為直綫，他圖中則為曲綫或其經綫為直綫，緯綫為曲綫等。由於此數種選擇，卽可獲得某種利益，由是以某種投影法表示特殊國家當較以他法為佳也。

雖則吾人不能作一於地球各部分均能正確之圖，然在一投影法中，保持某種一定之性質，並非困難。此種性質可列舉如下：

保持面積。

保持形狀（正變形）。

保持縮尺。

保持方向。

易於繪畫。

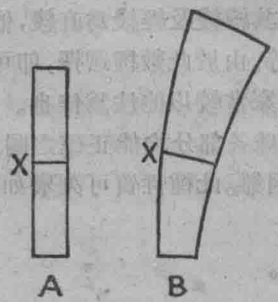
為欲使一圖（依縮尺縮小之後）與其所代表地球上某部分之面積相等，則形狀必所忽略。同形與等積，兼而有之，實非可能。若不慮及形狀之變異，使一平面之面積相等，則此事頗為簡單。例如，一長方形之邊為一吋及四吋者，其面積與一每邊長二吋之正方形相等。再二平行四邊形在同底及介於相同之平行綫之間者，其面積亦相等。由簡單之計算，可作一圓，其所圍之面積可與一圓球之面積相等。相同之例，均可列舉，惟此處已足以說明僅保持面積並非難事。

正變形 (orthomorphism) 之性質殊較難解。苟一圖在其形狀之各方面均能正確，則此圖必為正確之圖。但此點實不可能，故此詞殊易引起誤解。實際上，正變形僅適用於小面積之中。在理論上，此法僅能適用

於點，然苟如此精細區別，則吾人於此可毋庸討論。爲欲保持形狀起見，必須注意二點：(1)地球上之經綫及緯綫均相交成直角，故在正變形之投影地圖上，亦必如此。(2)在任何一點，其各方面之縮尺均相同，但此點與彼點間則可不同。

Hinks 君於其"地圖投影法"一書中舉正變形之例，如第一圖所示。

設 A 代表沿子午綫上之一狹條地區，由緯綫 X 分爲二等分。此狹條依正變形表示爲 B 及 C。在各圖式中，其角均仍爲直角，在任何各點如 X，其沿緯綫及經綫之縮尺均同等歪誤。但 C 式較 B 式爲佳，其中之經綫爲直綫，而 B 式中則否。



第一圖　示正變形（採自 Hinks 君）

縮尺之問題在下章中再詳爲討論。在此吾人可解釋縮尺乃地圖與實地之比例。再者，使縮尺正確於一圖之全部分，雖不可能；但使經綫正確，或緯綫正確，或某數經綫或緯綫之正確，則頗爲可能也。

保持方向或方位之正確常爲重要之事，尤於航海爲然。在此處固不能將此問題全部討論，但簡言之，卽最簡單之圖式爲保持自地圖中心之方向之正確。當地圖之中心與南北極相符合時，其方位角 (azimuths) 卽與經綫相符合。此種特殊應用之謀開托航海圖 (Mercator Chart) 在第十章中討論之。

最後，吾人必須考慮投影法之實際繪畫。同時亦須研究地圖網中所需要之計算方法。若其他之條件相等時，則所需要最少計算及最易繪畫之投影法選作特殊地圖時當較複雜者爲適宜。此種計算並非繪圖者所

研究之事，實為數學者之工作。顯然繪畫直綫及圓孤較複雜曲綫為易。然在實用上，此種意見之理論並不確當，因多種較複雜之投影法，繪畫時不僅美觀，同時更可適用於所描畫之國家。第七章中將進而討論之。

第二章

投影圖法之系統

由作圖學之意義言，"投影法"之字語並不必須包含透視的或"幾何學的"投影法。依吾人之目的言，此字語乃指一平面上任何事物之表示方法。吾人所研究者，卽將地球上之平行綫圈及子午綫描繪於一平面上之不同方法也。

試先由吾人討論一簡單之例式。設想於球體之中心有一光體，再設此光體可能射出子午綫及平行圈之影，或大洲及大洋之形狀於一平面紙上。爲簡單起見，吾人可假定一紙接觸於地球之北極。吾人卽可發現子午綫投射成爲直綫，平行圈則成圓圈。但在地球面上，緯度之平行圈間之距離爲相等者，在吾人之投影中，其距離則自中心向外逐漸增加。

若移動光綫或紙之位置，則圖上之影必大爲改變。例如，吾人可置光於南極，而置平面於平分球體處，卽在赤道之平面中。〔註一〕再者，此平面可使接觸於除北極之外之任何點。然則，方吾人投射地球之形狀爲陰影時，吾人卽可得在一平面上之數種透視的或幾何的投影法。

由此法作於一平面上之投影法，稱之爲方位圖法（Zenithal or Azimuthal Projection）一方位角（Azimuth）卽眞正之方向。在任何方位圖法中，自中心處之方向均係正確者。吾人已言及，平面可不必接於地球之兩極上。彼可接於赤道上之一點或在赤道與兩極之間。此三種圖式可名之爲正軸圖式（Normal 卽極圖法）赤道圖式 Equatorial）及斜軸圖式（Oblique）。

以上吾人僅論述透視方位圖法(Perspective zenithal projection)。但此僅就投影法之嚴格之字義上而言，固未能引爲滿足。爲求保持面積之正確或距離之保持，修正圖法卽以產生。關於修正圖法之性質在他處均有論及，但此處可言，此修正式或非透視式頗爲重要，亦如透視圖法之圖式然，可分正軸圖式，赤道圖式及斜軸圖式。

〔註一〕 在此種圖式中，其影乃係"倒射"於平面上者。

然則，投影尚可構成他種平面。一頁之紙可捲成一圓錐，以適當之大小覆置於地球儀上。若圓錐體之頂點置於地球軸之沿長綫上時，此圓錐體即可置於一緯綫之上。此卽係正軸圖式。一如方位圖法中之平面，可設想一圓錐體置於任何處所，惟僅正軸圖式始可作一有用之地圖。如方位圖法中，吾人可想像有透視及非透視二法，然在圓錐投影中，僅非透視圖法始有價値也。

投影法中之第三組可稱之爲圓柱圖法 (Cylindrical Projection)。在此吾人可設想一紙捲成圓筒環覆於地球儀上。如前述二例然，吾人可得透視與非透視二法及極圖式赤道圖式及斜軸圖式。但最有用者乃非透視之赤道圖式。

除此三種普通之方法外，尙有多數重要之方法不能包入此任何式之中。吾人可稱之爲便宜圖法 (Conventional Projections)，其中並包括數種修正甚大之圓錐圖法。此類投影法在作法及形狀上變異甚大，但其應用則甚廣。此乃大多由於某種圖式中之修正爲欲使地圖册中獲得等積之用。再者，此類圖中包括有適用於國際百萬分之一地圖 (International One-in-a-Million map) 之投影法及適用於地形測量之投影法。

綜上所述，吾人可將投影圖法之普通分類作一表式，尤須注意於直接應用之諸圖法。

1. 方位圖法 { 透　視 / 非透視 } { 正軸圖法 / 斜軸圖法 / 赤道圖法 }

2. 圓錐圖法　非透視　正軸圖法

3. 圓柱圖法　非透視 { 赤道圖法 / 橫軸圖法 }

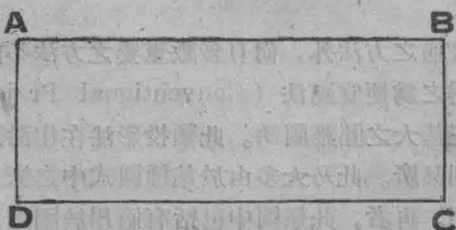
4. 便宜圖法與修正圓錐圖法

第三章

第一節　面積

在地圖投影法之研究中，吾人宜多討論面積之問題，及如何在依縮尺縮小之後，使一頁紙上之面積與地球儀，圓錐或圓柱上之面積相等。故初學者對於此問題應有若干之知識一事，殊爲重要；寫述本章之目的亦卽在此。

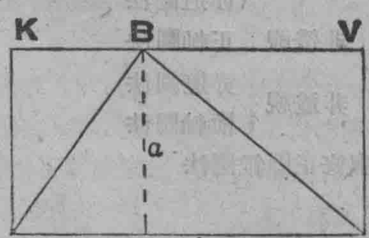
長方形之面積　最簡單之例卽爲長方形。設吾人巳知二鄰邊之長，



第二圖　長方形之面積

其面積卽可由相乘之數得之。在第二圖中，其面積卽由 AB 與 AD 或 BC 之相乘。正方形乃長方形之特例。

三角形之面積　三角形之面積亦甚簡單。其面積等於同底及高之長方形之半。在第三圖中，ABC 與 AKVC 均在同底 BC 及同高 DB 之上。

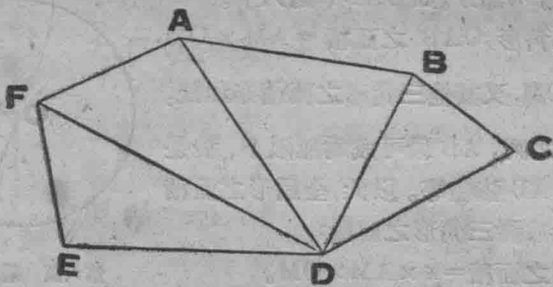


第三圖　三角形之面積

此點甚爲明瞭：$ABD=\frac{1}{2}AKBD$ 又 $DBC=\frac{1}{2}DBVC$。換言之，

$ABC=\frac{1}{2}AKVC$，或底$\times\frac{1}{2}$高 (BD)，或高 (BD)$\times\frac{1}{2}$底$=\frac{1}{2}a\times b$。

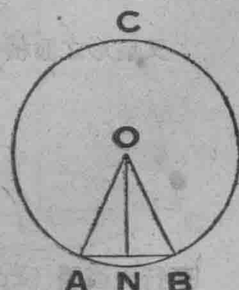
多邊形之面積　旣知三角形之面積，吾人立即可求得由直邊圍成之規則及不規則形之面積。祗須將其圖形分成多數三角形，則其全形之面積卽等於諸三角形面積之和。圖形 ABCDEF 之面積＝三角形 BCD，BDA，ADF，FDE 之總和。（第四圖）



第四圖　多邊形之面積

圓之面積　三角形之面積亦爲求圓面積之初步。設 ABC 爲一圓其圓心爲 O。將圓周等分爲任何數—n—之相等部分，AB 爲其中之一。連接 OA 及 OB。三角形 $OAB=AN\times NO$ $\left(\frac{1}{2}\text{底}\times\text{高}\right)$ 故由是而成之多

邊形之面積$=\frac{n}{2}AB\times ON$，或 $n\times AN\times ON$（第五圖）。



第五圖　圓之面積

若繞圓周之各部分變成無限小，則每弦 (chord)，如 AB，最後將變成與弧 AB 同長——易言之，多邊形與圓之周邊相符合——或 $n\times AB=2\pi r$。同時垂綫 ON 最後與半徑 OA 及 OB 相符合。

故圓之面積

$=$無限小邊之多邊形面積

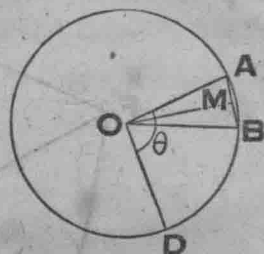
$=n\times AB\times\frac{ON}{2}$

$=2\pi r\times\frac{r}{2}$（因最後階段之 ON 變成半徑）

$=\pi r^2$

扇形 (Sector) 之面積　全圓之面積既知爲 πr^2。設 OAD 爲任何扇形，等分爲 n 部分，如 OAB（圖六）。

今，三角形 OAB 之面積 $=AM\times OM$ $=\frac{1}{2}AB\times OM$，又其他三角形之面積亦如此。但，一如圓之例，AB 段可成爲無限小，於是 AB 弧將與 AB 弦相等。以此，全扇形之面積卽等於所構成諸三角形之面積：



第六圖　扇形之面積

扇形之面積 $=n\times AM\times OM$。

又，在最後階段之 OM 變成等於圓之半徑 r 之長。

面積 $=n\times AM\times r$

$=r\times\frac{1}{2}$（弧之長）。

依三角法，設 $\theta=$ AOD 角之圓度，

吾人可得 AD 弧 $=r\theta$

又扇形之面積 $=\frac{1}{2}r\theta\times r$

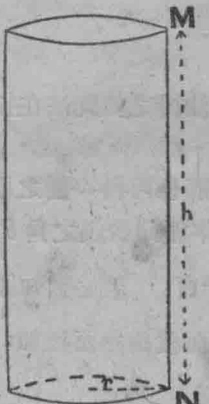
$=\frac{1}{2}r^2\theta$。（見附錄 II.）

立體之面與面積

平行六面體 (Parallelopiped) 之面積　最簡單之例卽平行六面體，——卽三對平行面所圍成之形體。立方體爲其特例。

立方體各面之面積由長與寬相乘得之。平行六面體各面之面積可由一邊與其對邊之垂直距離相乘得之。故欲求平行六面體之面積，卽可求各面之面積，然後相加。

角錐體之面積　角錐體(Pyramid，或四面體 Tetrahedron)，爲一除一面之外，其餘各面交會於一點，稱爲頂點之形體。除多數例中之底面外，其餘各面均爲三角形。其面積可求各面之面積，然後相加得之。其他由各平面圍成之複雜形體之面積亦可依同法求之。先求各面之面積，由直接之方法或分成諸三角形求之，然後再將其得數相加。



第七圖　圓柱體之面積

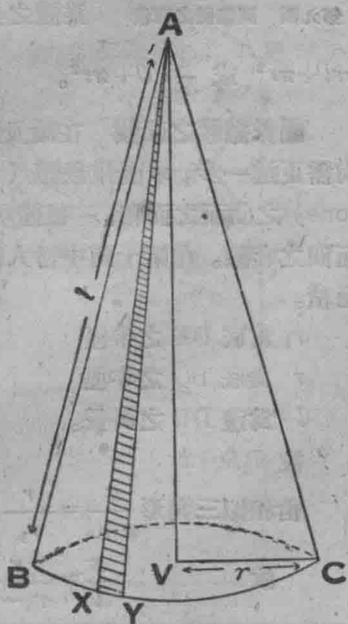
圓柱體之面積　設第七圖代表一圓柱體。其底之面積爲 πr^2。圓柱體之高爲 MN。設切割圓柱體而沿 MN 展開。顯然，吾人可得一長方形，其高爲 MN，卽與圓柱體相同者，其長卽等於底或圓柱體頂面之圓周。圓之圓周之長爲 $2\pi r$，又設圓柱體之高爲 h，則圓柱體曲面之面積爲 $2\pi rh$。

若包括兩底其面積爲

$$2\pi rh+2\pi r^2。$$

圓錐體(Cone)之面積　依據本書之目的，圓錐體之面積甚爲重要。設 ABC(圖八)爲一圓錐體。V 爲底之中心點，又 AV 爲底之垂綫。

稱 AB 爲 l，又 VC 爲 r。



第八圖　圓錐體之面積

假定圓錐體之表面爲無限數之三角形所構成，其中 AXY 爲一例。各三

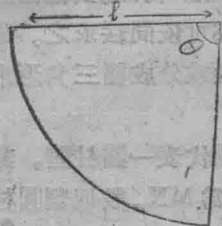
角形之共同頂點爲 A。諸三角形之高卽爲圓錐體之斜高 l。

於是此曲面卽等於諸三角形之和

$=\frac{1}{2}$含 l 及底邊之和之長方形

$=\frac{1}{2}l\times$底之圓周

$=\pi rl$，此處 r 卽底面之半徑。



第九圖　圓錐體之面積

圓錐體之面積又可以他法得之，此法在投影法中更爲常用。

將圓錐體"解開"或展開，卽可得一圓之扇形。(圖九)〔註一〕設已知兩半徑間所成之角 θ，則其面積爲 $\frac{1}{2}l^2\theta$（見第十頁）若必需知圓錐體之全面積，則可將底之面積與曲面相加：

$\pi rl+\pi r^2$ 或 $\frac{1}{2}l^2\theta+\pi r^2$。

圓錐截體之面積　在論及圓球面積之先，倘需更進一步，求圓錐截體（Frustum of a cone）之曲面之面積。一截體可解釋爲二平行面間之容體。在第十圖中吾人欲求 BCED 之面積。

r_1 爲底 DE 之半徑

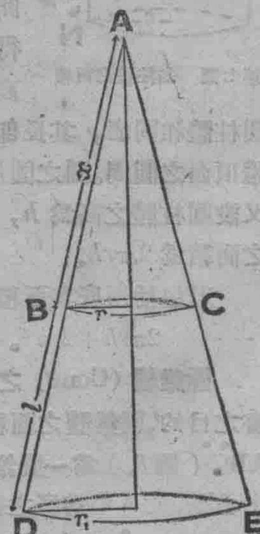
r 爲底 BC 之半徑

l 爲邊 DB 之斜長。

設 BA$=x$

由相似三角形 $\frac{x}{x+l}=\frac{r}{r_1}$

故 $\frac{x}{l}=\frac{r}{r_1-r}$。



第十圖　圓錐截體之面積

〔註一〕圓錐體可沿由頂點至底間之直線切開，然後展延之。由此而成之平面稱爲"可展面"見第四十九頁。

截體 BCED 之曲面

$=$圓錐體 ADE 之曲面$-$圓錐體 ABC 之曲面

$=\pi r_1(x+l)-\pi rx$

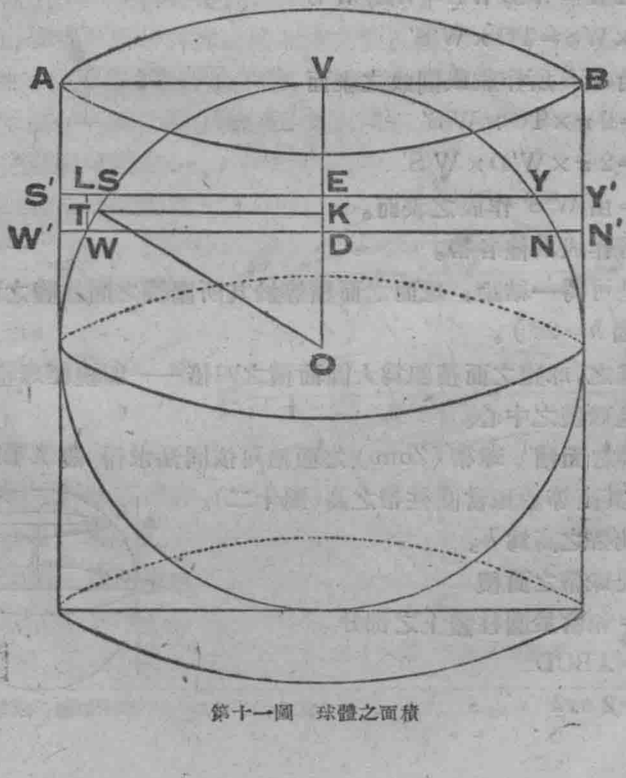
$=\pi[r_1l+x(r_1-r)]$

$=\pi(r_1l+rl)$

$=\pi l(r_1+r)$

球體之面積　因投影法爲研究球體 (Sphere) 在平面上之表現方法，故求球體一部或全部面積之法實異常重要。

在此，可證明球體之面積等於其圍繞之圓柱體，或$=4\pi r^2$。在第十一圖中，VO 爲圍繞圓柱體之軸。S'Y'N'W' 及 SYNW 爲圓柱及圓球體之相當部分。



第十一圖　球體之面積

T爲SW之中點,又TK垂直於OV。若WS爲一直綫,吾人可視WSYN爲圓錐截體,其面積等於 $\pi l(r_1+r)$,此處 l=WS,r_1=WD,又 r=SE。

因此截體之面積=$2\pi\times$TK$\times$WS,因圓錐體之曲面=$2\pi\left(\frac{r_1+r}{2}\right)l$,或 $2\pi l\times$截體兩端半徑之數學平均數——在此例中,即SE及WD,其平均數爲TK。

LW平行於S′W′,又SW垂直於TO,因T爲WS之中點。

同時 $\angle$WSL=$\angle$STK,因 LE $\parallel$ TK。

又 $\angle$STK=90°$-\angle$KTO=$\angle$TOK。

故三角形WLS與TOK相似。

故 TO/TK=WS/WL=WS/W′S′

故 TK$\times$WS=TO$\times$W′S′

故由WS所作成或圍成之表面

=$2\pi\times$TO$\times$W′S′

=$2\pi\times$W′D$\times$W′S′

=由W′S′作成之表面。

依同法可作成其他各帶。

由是可得一結論,球面之面積等於其所圍繞之圓柱體之面積,即 $4\pi r^2$(因 $h=2r$)。

易言之,球體之面積卽爲大圓面積之四倍——卽繞經球體之圓,其平面穿過球體之中心。

球帶之面積　球帶(Zone)之面積可依同法求得,設A′B′DC爲任何球帶。其高等於相當圓柱帶之高(圖十二)。

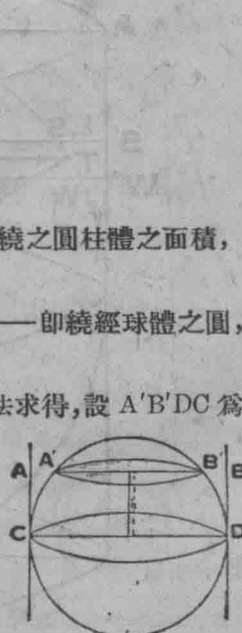
稱此帶之高爲 h。

今此球帶之面積

=相當於圓柱體上之部分

=ABCD

=$2\pi rh$



第十二圖　球帶之面積

故球帶之面積$=2\pi rh$或大圓之圓周×帶之高。參考第十四圖，說明$h=\mathrm{R}\sin\phi$

∴地球儀半徑R之球帶之面積$=2\pi\mathrm{R}\times\mathrm{R}\sin\phi=2\pi\mathrm{R}^2\sin\phi$。

第二節　緯度與經度

當吾人研究地圖及地圖投影法時，吾人卽含有緯度及經度之知識。若非先將緯綫及經綫繪成，卽不能作一地圖，因地面上之各地點均由此法決定也。

吾人試指一地在北緯50°。其意云何？吾人可繪一50°之綫，經過此地點，則卽知此綫平行於赤道，該赤道亦卽為緯度0°之一綫。設吾人取一點在緯度50°之上，另一點在緯度0°之上，該兩點均在經過地球儀地軸之平面上〔註一〕再連接此二點以達地心，吾人卽可知其間之角為50°。因此，緯度可解釋為赤道南北之角距。緯度之平行圈為一想像之綫，繪於地球之周圍，平行於赤道，並與之成一常定之角距。緯度僅有一綫——赤道——為大圓。"經度"為東向或西向所測得者。經度之子午綫為全完環繞球體之一綫，並通過兩極。凡經綫均為大圓。

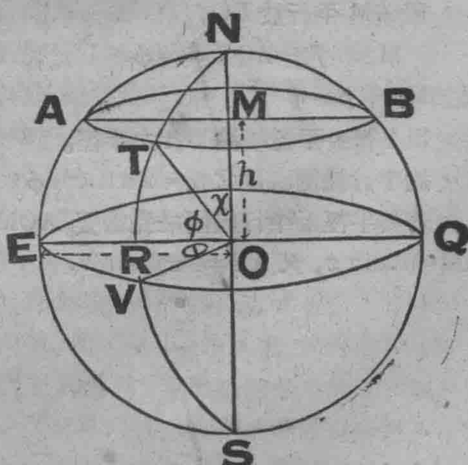
地球儀上之緯綫及經綫均相交成直角。

在第十三圖中EVQ為赤道。

EO，球體之半徑=R。

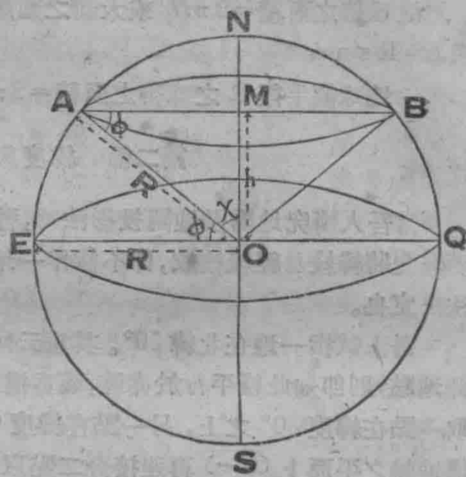
ATB為一緯綫，其與赤道之角距為TOV角$=\phi$。

TON角稱之為極距或T之餘緯度$=x=(90°-\phi)$或(90°−緯度)。



第十三圖　示緯度與經度

〔註一〕易言之，其點卽在同一經度之子午線上。



第十四圖 示緯度與經度

SANQ 及 SVTN 均爲經度之子午綫圈，其分隔之角距爲角 EOV＝θ。

AM 爲緯綫 ATB 之半徑。

ABQE 爲一球帶，其高度爲 MO＝h。

設吾人已知地球儀 R 之值，及任何平行圈之緯度，則求平行圈之長甚易。

在第十四圖中吾人有如前圖相同之字母，但後圖則更爲簡單。

平行綫圈 AB 之緯度爲 AOE 角＝ϕ

EO＝AO＝R。

因 AM 平行於 EO，

MAO 角＝AOE 角＝ϕ

故 AM＝R $\cos\phi$

但 AM＝平行綫圈 AB 之半徑。

故平行綫圈 AB 之長＝$2\pi R\cdot\cos\phi$

若其半徑及平行綫圈之長需要 AOM 角（餘緯度）解釋時，則 AM＝R $\sin x$，又 AB＝$2\pi R\sin x$。

第四章

縮　尺

除世界地圖外，〔註一〕任何地圖册，均附有縮尺，或用於地圖之縮尺之說明。縮尺可以一綫分成許多單位以代表哩，數百哩等表示之，或可以分數，稱之爲"代表分數"示之。無論由何種方法表示，吾人欲正確讀一地圖，則必須靈活運用縮尺。

吾人可解釋縮尺爲地面上已知距離與地圖上相當距離之關係。因此，設吾人稱一地圖上之縮尺爲一吋相當於一哩，其意卽指圖上一吋代表地上一哩之長。若由（代表的）分數書寫之，則爲 1/63,360，其分母卽爲一哩之吋數。此乃值得注意之事，卽 1/63,360 或任何其他分數，其意卽指地圖上之一單位（分子）代表地面上之若干——此例中爲 63,360——單位（分母）。吾人若直接應用分數以代替說明，例如以一吋代表一哩，吾人卽可不受特殊測量單位之拘束，而在無論何種單位中，均可以一比例以說明地圖與實地之關係。故 1/100,000 意卽一單位，其爲吋，生的米突或其他單位，代表實地 100,000 吋，生的米突等。

故一言以蔽之，吾人可解釋地圖爲地球儀一部或全部之縮寫表示。但地球儀爲一球形，而地圖則繪於平面紙上。此點不同將使吾人對於縮尺之問題發生迷誤之觀念。若吾人繪一東安格蘭（East Anglia）之小地圖，固無需考慮地面之曲度。此區域之面積甚小，而地球則甚大，就各種目的言，可視東安格蘭爲扁平者。但若吾人作大縮尺地圖時，卽可發現不和合之點，因在此縮尺中，可允許地球曲度之存在也。

吾人可從另一點討論此問題。若吾人有一地球儀，卽可取一小紙片置於其上，使其不能再行摺縐，（譯者註：意卽縮至最小度）。則此紙所佔之面積，依地球儀上之縮尺，幾可以紙之大小之平面表示之。今設想一較大之地球儀。如前例，此紙所佔之面積，已依某種比例展大，故如欲以紙覆之，吾人必需將此紙依相同之比例展大。但若吾人考驗第二地

〔註一〕 髏開托航海圖有時附有縮尺，可適用於每一緯線。

球儀與較大之紙片之關係，吾人卽可發現此紙必不平貼，如前例然。此小縐痕，原極微小，幾不可見，今則大爲放大，其廣袤亦增大如紙之比例，而差誤亦昭然矣。

故任何小面積之地圖，其所用之縮尺常在普通地圖册中所見者，實甚正確。反言之，若不增大地球儀，單獨將紙增大，則吾人必發現若不將紙摺縐，必不能覆蓋於一大面積之上。若試將一頁之紙置覆於任何地球儀上之亞洲，吾人卽可發現，苟不將紙大爲扭歪，必不能濟事也。

以上吾人所論述之縮尺僅係地球儀上之曲度。此外尙有一點不可忽略。一地圖乃爲實地之繪畫。吾人可將事物依縮尺縮小，但不能縮至無窮限度 (ad infinitum)。普通之繪圖員亦不能繪 1/100 吋之綫。今設以一吋代表一哩之縮繪圖，則一吋卽代表 5,280 呎或 1/100 吋代表 52.8 呎。今 1/63,360 爲一大縮尺，且爲普通地圖册中所永無者。然卽以此大縮尺繪圖，吾人亦不能將各項事物正確縮小。例如，大多數之道路均有 40 或 50 呎寬，若正確於縮尺繪於 1 吋之地圖上，則將如 1/100 吋之寬。但此事頗爲不便，又因其甚爲重要，故在地圖上必大爲歪誤。

在地圖册上僅能表示最緊要之形態，然卽如此，吾人亦覺有相同之困難。河流爲最佳之例：亞馬森河(Amazon)爲南美洲主要之自然形態之一。在地圖册上南美洲之普通縮尺爲 1/17,000,000。〔註一〕在此縮尺上，一哩由 0.00373 吋長之綫代表之。亞馬森河之上流及中流常有一哩以上之寬，但無一繪圖者能示以 3/1,000 吋之細曲綫也。

因此，吾人可得一結論，縮尺之問題實異常重要。吾人可將縮尺縮小，但不能將繪圖術進於最精度。因小縮尺之地圖較大縮尺之地圖更可以便宜法表示也。

凡此普通問題已討論甚久。今進而研究此點在地圖投影法作法上之應用。

地球儀上任何地點均由經緯度决定之。若吾人能在一紙上，以所需要之方法繪平行圈及子午綫，此地域卽可隨後繪出。在討論縮尺及投影法之問題時，當全力集中於平行圈及子午綫之上，並不必在陸地及海洋

〔註一〕 此縮尺用於巴托羅繆 (Bartholomew) 牛津地圖册 (*Oxford Atlas*) 中。

之輪廓上頒慮也。

伊拉他斯申尼斯（Eratosthenes）最先示吾人以地球之半徑及圓周，然卽至今日吾人仍不能確知其形狀。雖然，此事之關係尙小，因測地學上之更正確之修正不能示於普通地圖上也。依吾人之目的，可假定地球爲一球形，其平均半徑爲 3,960 哩或 250,905,600 吋。〔註一〕由實用上之目的言，吾人可定爲 250,000,000 吋，——此零餘之千數在普通地圖中並無明顯之差異也。

設想假若地球儀之半徑之長爲 250,000,000 吋。若吾人欲作一地球 1/250,000,000 之地球儀，吾人必需將地球之半徑分作 250,000,000 份——在此種情形下，吾人已可得一吋。易言之，一吋半徑之小地球儀卽爲地球大小之 1/250,000,000，卽可取此半徑爲量度之單位。〔圓球之面積爲 $2\pi R^2$，體積爲 $\frac{4}{3}\pi R^3$〕。

在地球赤道上經度一度爲全圓周之 1/360——或約 70 哩。在縮尺 1/250,000,000 之地球儀上，其經度一度亦必小 250,000,000 倍，又吾人必須以小單位，如一吋或一公釐（Millimetre）之分數表示其數値。因吾人假定地球爲一眞正圓球體，隨之沿子午綫上緯度之度數與沿赤道上經度之度數同長。

再者，若吾人需一縮尺 1/1,000,000 之地圖，吾人卽可知依此縮尺之地球儀之半徑爲 250 吋。在此地球儀上赤道之長爲 $2\pi R$ 或 $2\times3.1416\times250$ 吋，又此地球儀上經度一度（沿赤道上所量者）爲 $2\pi R/360$ 或 $2\times3.1416\times250/360$ 吋；其長適與沿子午綫上所量緯度一度之長相等。若吾人欲求任何緯綫之長，則可應用第 16 頁之公式：

$$\text{緯綫之長}=2\pi R\cos\text{緯度}$$

在縮尺 1/1,000,000 中五十度緯綫之長

$$=2\pi R\cos 50^\circ \quad \text{此處 } R=250\text{ 吋}$$

$$=2\times3.1416\times250\times0.6428\text{ 吋}$$

又沿此綫經度一度

〔註一〕喬維納（Chauvenet）及羅密斯（Loomis）定地球之半徑爲 20,889,000 呎。

$$=2\times3.1416\times250\times0.6428/360\text{ 吋。}$$

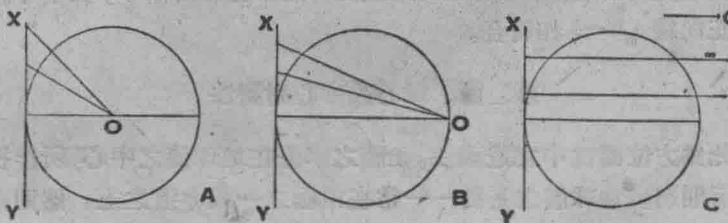
既求知吾人所需之任何綫或綫之部分之長，吾人卽可記於紙上，並依此法構作網綫。固然，由此構作之各綫並非均與縮尺相符。惟苟如此，吾人當可得一正確之圖，該圖"事實上"乃不可能也。然則下述各頁將說明此點，惟在縮尺之實際問題中，除上所論述者外，更無他事可述矣。

第五章

第一節 方位圖法

此圖法乃一平面切地球儀於任何點所成。此點取兩極之一或在赤道之任何點上,雖可任取其他各點,但其圖法則較難繪作。

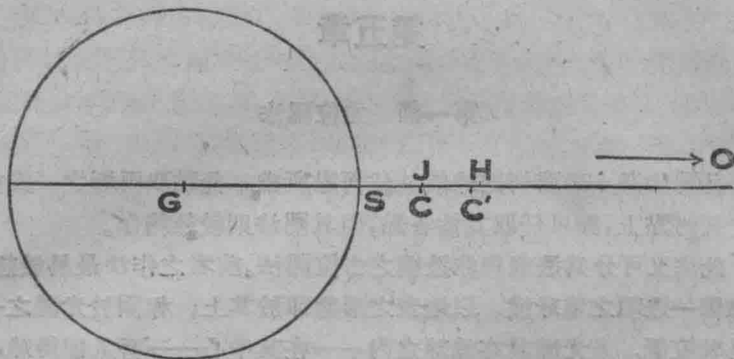
此法又可分爲透視與非透視之方位圖法。前者之作法最易於想像,設想像一透明之地球儀,以地表之形態印於其上,相關於光體之一點更易其位置。若光體其在地球之內——在其中心——吾人卽得球心法(Gnomonic),若在直徑之一端,得平射法(Stereographic),若其無限遠處,得正射法(Orthographic)。在最後一例中,所有光綫均假定爲平行綫。此種關係可以三圖解示之(圖十五, A, B, C)。(在各例中, XY爲投影之平面,又 O 爲光之來源。)



第十五圖　簡單透視方位圖法

由此可見此僅爲特殊之例:此光之來源可移至任何其他各處,如拉希爾(La Hire),詹姆士(Sir H. James),克拉克(Clarke),及其他諸例是。拉希爾取光源於地球半徑之 1.71 倍之處,詹姆士則取半徑之 1.367 倍之處,又克拉克則取半徑 1.65 及 1.35 倍間之諸點。由此種光點之移動,某種利益卽可獲得——但此種研究包括高深數學,不能於此討論。在實際上此種特殊圖法甚罕應用也(圖十六)。

非幾何方位圖法包括等距方位法及等積方位法。前者之極圖法中,沿子午綫之距離與地球儀上相等,並依縮尺而縮小;其在後者,兩平行



第十六圖 某方位之投影點

圈間之面積則與在地球儀上者相等。各方位綫 (zenithals) 均有維持方位之特點，或自地圖中心之方向正確。此法在極圖法中最易想像；因其自極放射之子午綫均以正確之角度間隔。若投影所作成之平面切於地球儀上之任何點，則亦可有相同之優點，惟僅在極圖法中，其子午綫始能與正向綫〔註一〕相符合。

第二節 球心或中心射圖法

此爲方位圖法中之透視法。光體之來源在地球儀之中心，所作投影之平面則切於地球儀之某點——常在兩極之一或赤道之上，然則亦可在任何地點。

此圖法不適用於大面積之圖，因其縮尺之歪誤自地圖之中心向外而迅速增加。此法有一最大特點——卽在投影上所有各大圓均爲直綫。其意卽指若吾人應用球心法之地圖，卽可覓得兩點間之最短距離，其法祇須將此二地點以直綫連接之。投影上大圓爲一直綫最易於極圖法中見之；子午綫均穿過兩極，一如自地球儀之中心所見者然，在投影之平面上均將如直綫也。讀者應試想其他二法：(1) 當投影之平面切於地球

〔註一〕 各種方位圖法可適用於地方之圖一如用於半球之圖，此事在開始時頗爲重要。初學者常因此誤解，卽等積方位圖在地圖册中之"世界半球圖"所常用者，不常爲其他地圖所應用。非洲——及其他地圖——可由任何方位法示之；且，某種國家必須適用此法，更較用他法爲佳良。

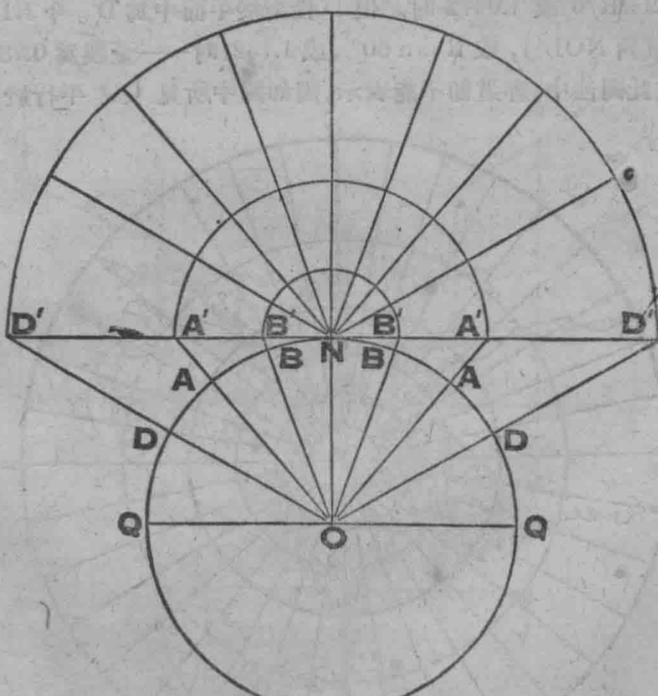
赤道上之某地點，又（2）當其切於兩極與赤道〔註一〕間之一點。

此圖法鮮用於地圖冊中，因其歪誤甚大。有時此法適用於小面積之航海圖中，近時以航空術之進步，此法已有相當應用，雖謀開托投影法常爲官方用作航空地圖。

極圖法

圖學作法

第十七圖說明此作法。依縮尺繪一圓以代表地球，又從其中心繪所需角之半徑，如 OB, OA, OD, 並延長其綫至 D′D′ 平面，該平面則切



第十七圖　球心極圖法之圖學作法

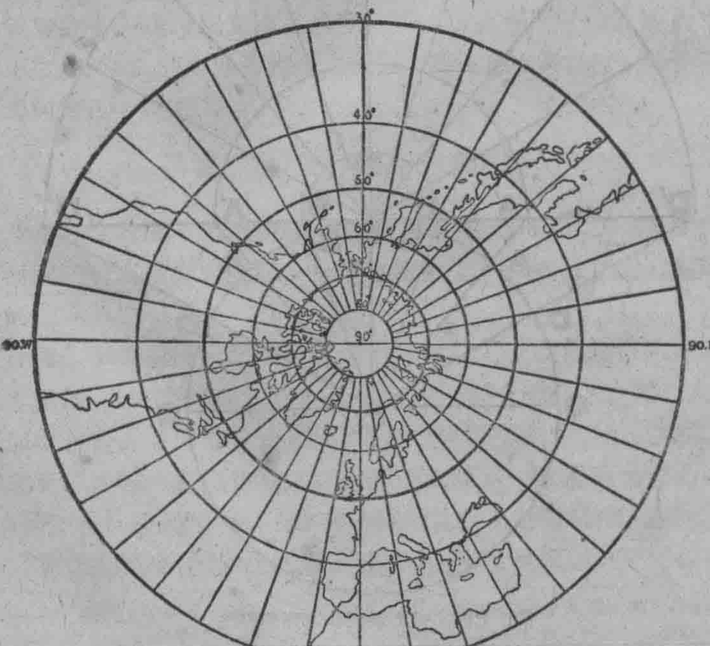
〔註一〕所有各大圓均投影成直線，故此平面中之大圓均穿過地球儀之中心，亦卽投影之中心。故大圓必投射成爲此平面與投影面之交點之線上，無需考慮此投影面位於何處。

於地球之北極，繪畫代表平行圈之同心圓之半徑，則可逕以圓規取之：NB′ 爲 70° 之半徑，因角 NOB 爲 20°，或其餘角爲 70°。其子午綫則以分角器繪之，自中心 N 將所需要之經度間隔以分其角。

三角作法

極圖法至爲簡易。設平面切於地球儀之一極，則地球面上之各點可自地球儀之中心以幾何法投射於此平面之上。

自第十七圖中得知此圖法凡遠離極之諸地點扭歪甚大。D 點離赤道 30° 或離極 60°。在圖中地球儀之半徑爲一吋；於是沿地球之距離 ND 爲 $2\pi R/6$ 或 1.0472 吋。但 D 投射於平面中爲 D′。今 ND′ 等於 NO tan (角 NOD′)，或 R tan 60°，或 1.7321吋——歪誤爲 0.6849 吋。再者，在此圖法中，赤道卽不能表示，因如圖中所見 QQ 平行於 D′D′，



第十八圖　北極區域之球心法地圖

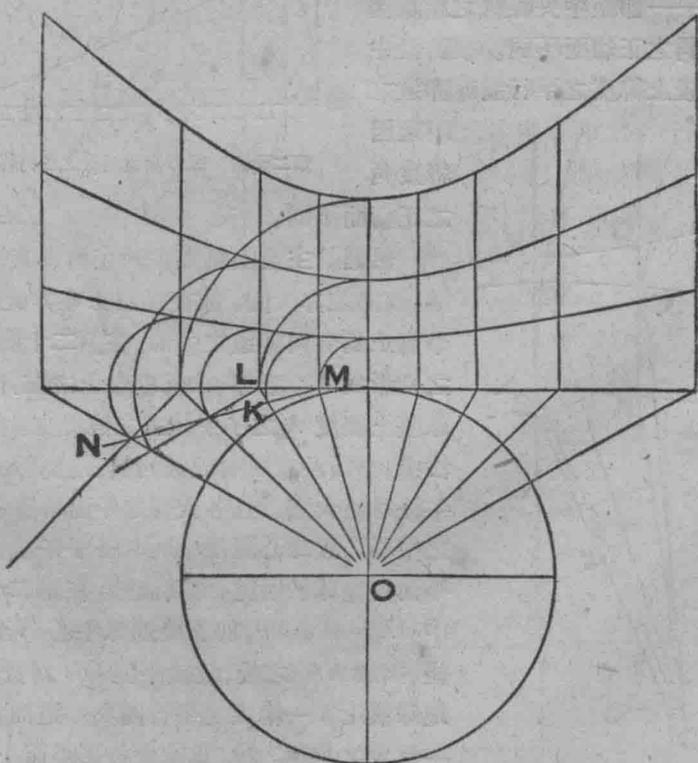
故Q之投影不能及於此平面之上。

製極圖時，僅須將角NOB, NOA等之正切(tangents)製成一表，（即餘緯度之正切或緯度之餘切），以所需要之度數乘地球之半徑，並依縮尺而縮小。沿作爲子午綫之一緯上記取之，並經此各點作同心圓。其子午綫則以量角器分之（圖十八）。

赤道圖法

圖學作法

球心赤道圖法之作法較極圖法遠爲複雜。依縮尺繪一圓以代表地

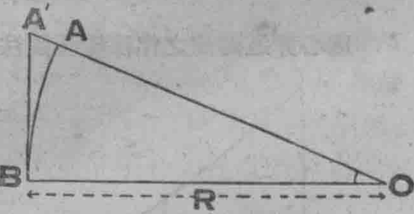


第十九圖　球心赤道圖法之圖學作法

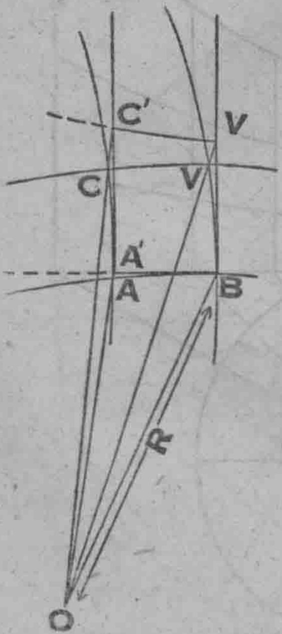
球。如前法將量角器在圓之中心分諸度數。沿赤道及中央經綫之分點一如極圖法中之方法，在任何其他子午綫上求間隔（圖十九），可在 M 點繪綫如 MN 與 OM 成直角。此間隔 MK 等，卽爲沿特殊經綫上所需要之點。每一其他子午綫亦以同法取之，卽可作一完全之網綫。

三角作法

本法相同之普通原理，亦甚佳良，一如極圖法然。若一平面切地球儀於赤道之上，則可知沿赤道上之子午綫排列適如極圖法中之平行圈——卽距中央經綫之距離因經度角之正切而不同。同理，沿中央經綫上緯度之平行圈離赤道之距離因緯度角之正切而不同。



第二十圖　球心赤道圖法之三角作法

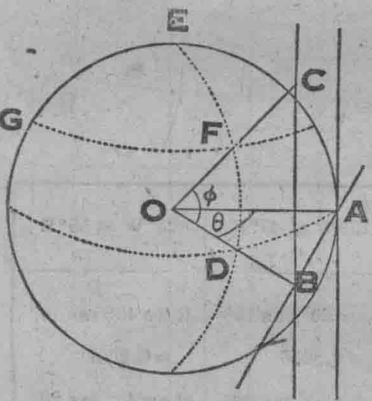


第二十一圖　球心赤道圖法之三角作法

然則其主要困難點，乃在繪畫其他平行圈，該圈並非大圓，故在投影上亦非直綫，而事實上爲突向赤道之弧形。在第二十圖中，A 之投影爲 A'，意卽 A' 爲投影上之點，代表地球儀上經度 A 之子午綫上之位置也。在極圖法中，必須注意所有經綫均爲直綫。但所有子午綫均係大圓，且各大圓之平面均穿過地球之中心。故球心圖法中所有各子午綫無論其平面切地球於何處，均爲直綫。在第二十一圖中 $OA'=R\sec\theta$，卽連接地球中心 O 至 A' 之綫，因加 AA' 之後，故較半徑 OB 爲長。但在地球儀上，一緯度之平行圈與赤道間常維持一常定之角距。故，爲欲求投影平面上 C' 之位置，（圖二十一）吾人必須以 OA' 之距離

乘角 C'OA' 之正切，即 C 之緯度。但 OA'＝OB sec A'OB＝R sec（經度）。∴C'A'＝R sec（經度）tan（緯度）。

總之，吾人可得一結論，即任何經綫及緯綫交點之位置，其離赤道或中央經綫上任何點之距離，可由公式 R sec θ tan ϕ 得之，此處 θ 為中央經綫及所求經綫間之經度之差，又 ϕ 為赤道及所求緯綫間之差。此法由第二十一圖示之。



第二十二圖　球心赤道圖法之三角作法

此問題又可以他法求之。ABC（圖二十二）為投影之平面。DE 為自中央經綫 EA 所測經度 θ 之經綫。

DE 投射為 BC。

赤道投射為 AB。

GF 為緯度 ϕ 中之平行圈。

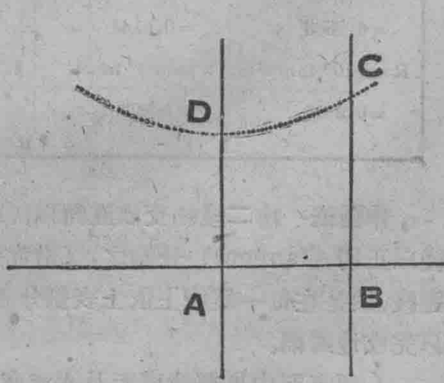
於是 F（緯度 ϕ 經度 θ）投射為 C，在 BC 綫上，又 BC＝OB tan BOC＝OB tan ϕ。

但 OB＝OA sec AOB

　　＝R sec θ

∴BC＝R tan ϕ sec θ。

結論為緯度 ϕ 經度 θ 之點投影 C，在 BC 直綫上，相當於經綫（經度 θ）。AB 相當於赤道，又 AD 相當於中央經綫，又 BC＝R sec θ tan ϕ（圖二十三）。



第二十三圖　示球心赤道圖法之緯線作法

在球心赤道圖法中，其緯綫為經子午綫與平行圈之交點所繪成之曲綫。

例之計算　以球心圖法作

一非洲地圖：縮尺爲1/250,000,000。經綫及緯綫之間隔均爲10°。中央經綫爲東經15°。

欲示之經綫爲：西經25°，15°，5°；東經5°，15°，25°，35°，45°，55°。其南北緯綫爲0°，10°，20°，30°，40°。

沿中央經綫及赤道之間隔爲

$R\tan 10° = 0.1763$ 吋。

$R\tan 20° = 0.3640$ 吋。

$R\tan 30° = 0.5774$ 吋。

$R\tan 40° = 0.8391$ 吋。

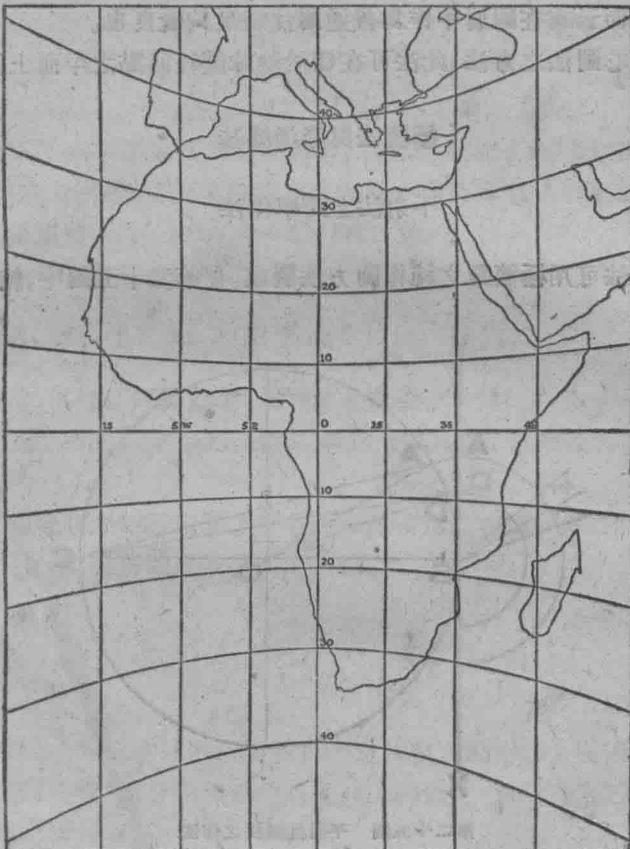
沿其他經綫上緯綫間隔之分段爲

5°E 與 25°E	5°W 與 35°E	15°W 與 45°E	25°W 與 55°E
$R\sec 10° \tan 10° = 0.1790$	$R\sec 20° \tan 10° = 0.1876$	$R\sec 30° \tan 10° = 0.2036$	$R\sec 40° \tan 10° = 0.2301$
$R\sec 10° \tan 20° = 0.3696$	$R\sec 20° \tan 20° = 0.3874$	$R\sec 30° \tan 20° = 0.4204$	$R\sec 40° \tan 20° = 0.4751$
$R\sec 10° \tan 30° = 0.5863$	$R\sec 20° \tan 30° = 0.6144$	$R\sec 30° \tan 30° = 0.6667$	$R\sec 40° \tan 30° = 0.7537$
$R\sec 10° \tan 40° = 0.8519$	$R\sec 20° \tan 40° = 0.8930$	$R\sec 30° \tan 40° = 0.9690$	$R\sec 40° \tan 40° = 1.0954$

作圖法 繪二綫相交成直角以代表赤道及中央經綫。於是沿此二綫以正切（tangent）分割之，又沿赤道上穿過此等分點繪直綫以代表經綫。於是在每一經綫上依上表劃分各距離，又經此相當點繪其他緯綫以完成地圖網。

（須牢記中央經綫東西及赤道南北諸分點均相同）

最後繪入地圖之輪廓。



第二十四圖　球心圖法上之非洲

(1/125,000,000)

第三節　平射圖法

此爲另一種透視方位圖法，其緯綫及經綫爲自直徑之一端投影於切於另一端之平面上者。在其本身，此圖法不常應用，但在某轉移圖法中頗爲有用，當在後敍述。

此圖法可適用於世界半球圖及分洲分國之圖。雖然，其正變形及易

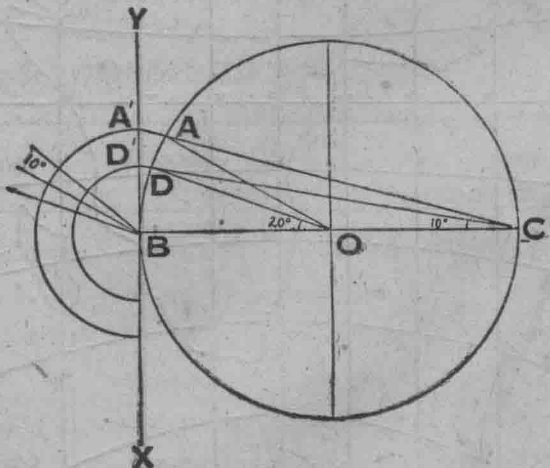
繪之點不能云爲在圖册中作爲普通圖法時足夠優良也。

如球心圖法之方法,此法可在切於地球儀任何點之平面上作成。

極圖法與赤道圖法

平射法之圖學作法

此圖法可用極簡單之純作圖方法製成。在第二十五圖中,繪畫緯綫



第二十五圖 平射極圖法之作法

(B代表北極)

之半徑可自 B 點沿 XY 量度得之。於是 BD′ 爲繪畫緯度 D 之緯綫所需之半徑。自 O 點取所需之角度並記其點於周圍經綫之上,於是從 C 繪綫如 CDD′,其所需之半徑即可求得。其經綫之繪法則一如球心圖法。

在平射赤道圖法中,中央經綫上緯綫間之間隔與赤道上經綫間之間隔相同。在各種圖法中其求法均與極圖法相同。所有其他緯綫及經綫均爲圓弧,其作法在下頁中述之。

極圖法

三角作法

設 XY 爲一平面接地球儀於 B，該點卽北極（圖二十五）。A 爲 BAC 經綫上之任何點，其餘緯度或離極之角距爲 AOB 角或 x。

由簡單幾何法，AOB 角 $=2\times$ ACB 角。

BO $=$ R，卽地球之半徑。

於是 $A'B=2\,R\tan ACB$ 角或 $2\,R\tan\frac{1}{2}x$。

同法，其他任何點如 D′ 均可依法求得。

投影之作法，以 BA′，BD′ 等爲半徑繪圓，再用量角器分隔經綫（圖二十六）。

其緯綫間之距離自圓之中心而顯著增加。赤道顯然在距離極 $2\,R\tan 45°$ 之處，適爲地球儀半徑之兩倍。

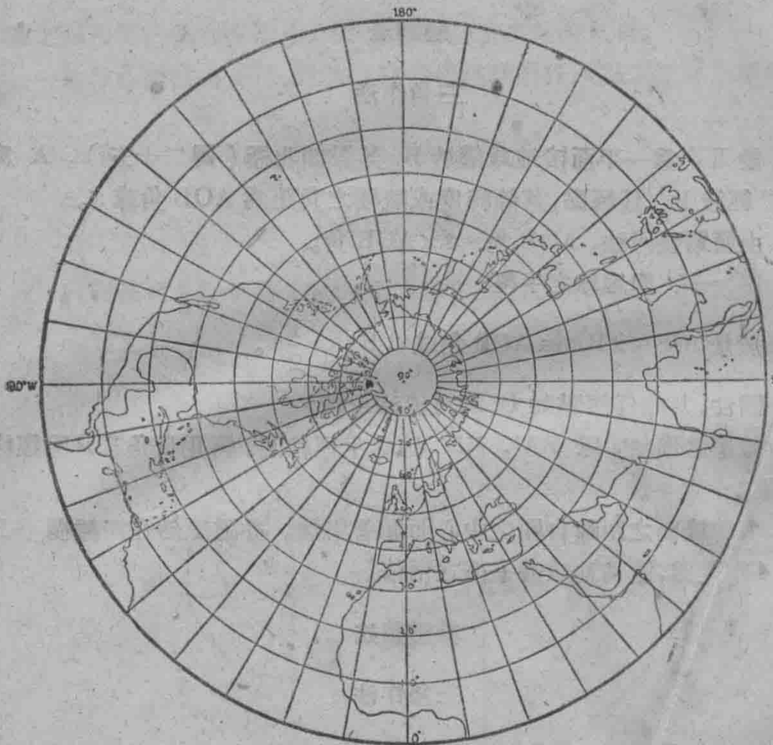
赤道圖法

三角作法

設繪一圖，以格林威治經綫與赤道相交之點中心。同理如極圖法，其沿赤道上經綫之分隔與沿中央經綫上緯綫之分隔因經度及緯度半角之正切而變化。

投影之作法，繪兩軸相交成直角以代表赤道及中央經綫。記出經綫及緯綫將相割之點。旣求得極之位置，繪一圓。此卽爲地圖之周圍經綫，將示一完全之半球。於是在圖之中心置一量角器記取所需要之角度，並記取其割周圍經綫之處。然後繪畫其他緯綫，其繪法僅需繪一經過周圍經綫上之二點及中央經綫上之相當點之圓。同法經綫爲經過兩極與赤道上相當之點所繪之圓。此法可以幾何方法作之，卽等分任何緯度之弦綫，〔註一〕再以普通方法求圓之中心。此法必須精細繪畫。

〔註一〕所述之弦線乃連接周圍經線上之兩點及中央經線上相當之點而成。



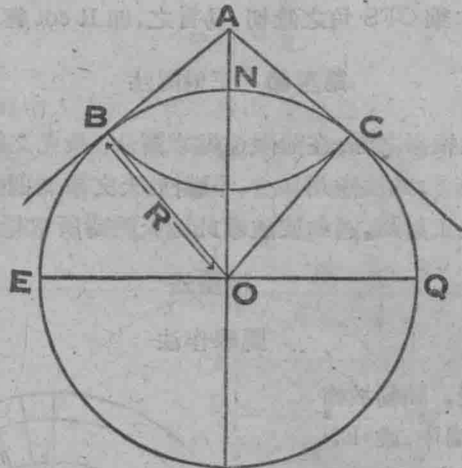
第二十六圖　北半球之平射法圖

(c. 1/260,000,000)

然則，由作圖方法以求此等圓之中心，實爲一不便之事，其三角作法至爲簡易。〔註一〕

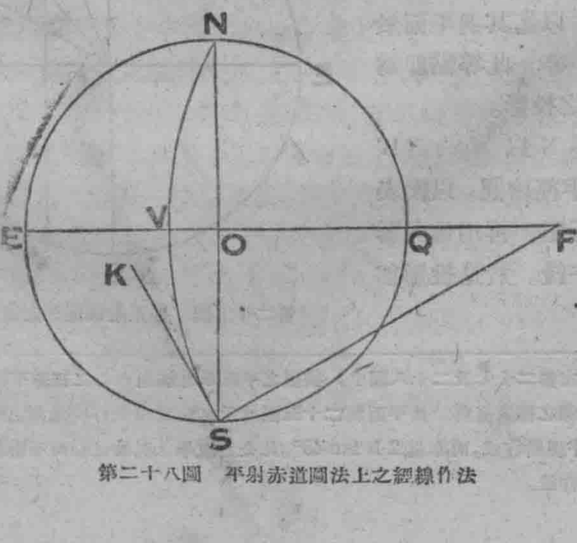
在第二十七圖中，B在北緯 50° 上，又在投影上北緯 50° 以中心爲 A 之 BC 弧代表之。但 BA＝R cot 50°，又 AO＝R cosec 50°。其意卽謂，所需要之半徑爲 R 乘緯度之餘切，又弧之中心與地圖中心 O 之距離爲 R 乘緯度之餘割。

〔註一〕 三十一頁所述之作圖方法與上節所述之方法相同，除極之位置，其周圍經線則由作圖法求之，以代替三角作法。其他各經線及緯線均以同法得之。



第二十七圖　平射赤道圖法上之緯線作法

在第二十八圖中，設 V 爲西經 20°。需要繪畫圓弧 NVS 之中心爲 F。設 KS 切經綫 NVS 於 S，於是 KSO 角等於 VSO 角（=20°），其角係正確代表。FS 爲需要之半徑，由地球之半徑及經度之關係示之，則爲 R 乘 OFS 角之餘割，又 OFS 與 KSO 爲等角，其與中心 O 之距



第二十八圖　平射赤道圖法上之經線作法

離，即 OF，爲 R 乘 OFS 角之餘切，易言之，即 R cot 經度。〔註一〕

第四節　正射圖法

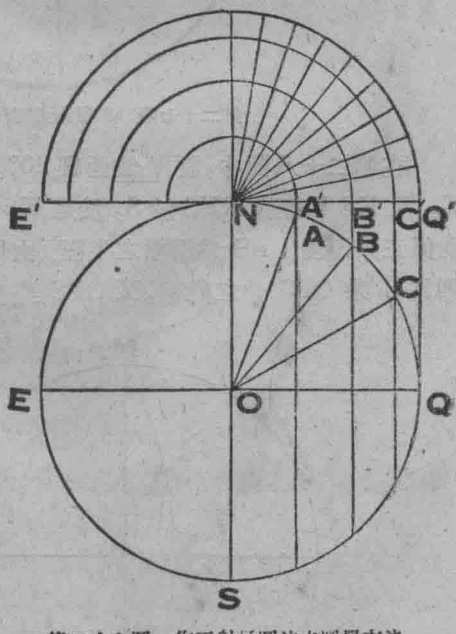
此爲光體或投影之點，在無限遠處之圖法。故光之綫爲平行綫。自地理學者之觀點言，此法應用甚少，但對於天文學者則頗爲有趣，因月亮及其他天體之正射圖，適如彼觀察此種天體時所常見也。

極圖法

圖學作法

極圖之網綫，頗易於繪作。在第二十九圖中，設 ENQS 爲一圓依縮尺代表地球儀。EQ 爲赤道，N 爲北極，E′NQ′ 爲切於北極之平面。A, B, C 爲地面上離北極各 20°，40°，與 60° 之點。自 A, B, C 等點繪綫平行於 NS，並延長之，以迄其遇平面於 A′, B′, C′ 等。此等點即爲 A, B, C 等之投影。

由中心 N 以 NA′, NB′ NC′ 等爲半徑繪圓，以代表緯度之平行圈，再用量角器分隔其子午綫。於是投影即完成。



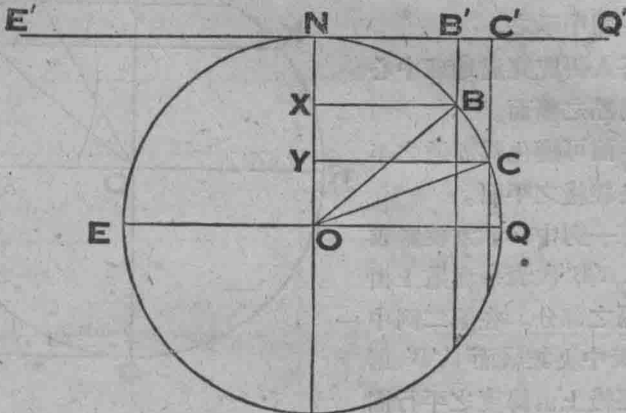
第二十九圖　作正射極圖法之圖學方法

〔註一〕在第二十七及二十八圖中，投影之平面取自經過中心之經線平面，與連接地球儀中心與光源之線成直角。此平面與二十五圖所示之切面相平行。地圖之周圍經線爲以 R tan 45° 之半徑所作成，而非爲 2 R tan 45°。此全爲數學上討論之點而不影響投影之研究及應用或圖之作法。

三角作法

在第三十圖中，E'Q' 又爲切於 N 之平面。ON, OB, OC 爲半徑。B' 與 C' 爲 B 與 C 之投影。其問題即在求繪畫緯綫之半徑。

繪 BX 及 CY 平行於 OQ。於是 BX=BO sin BOX 角，又 CY=CO sin COY 角。但 XB=NB'，又 YC=NC'。



第三十圖　作正射極圖法之三角方法

故繪畫緯綫所需之半徑，爲餘緯度之正弦（即極與所求緯綫間之角）。或——由緯度之關係說明之——半徑爲緯度之餘弦，因 XBO 角=BOQ角，又 YCO角=COQ 角，餘類推。其經綫則如圖學方法繪作之。

總之，此處所需者爲作一正射極圖法之正弦及餘弦之表。

如例，吾人可計算一極區地圖，縮尺爲 1/50,000,000。

顯然 R，即依此縮尺之地球儀之半徑爲 5 吋，因此其半徑爲：

在 90° = 5 sin 0°　或 5 cos 90° = 0.0000

在 80° = 5 sin 10°　或 5 cos 80° = 0.8680

在 70° = 5 sin 20°　或 5 cos 70° = 1.7100

在 60° = 5 sin 30°　或 5 cos 60° = 2.5000

在 50° = 5 sin 40°　或 5 cos 50° = 3.2140

餘類推。

赤道圖法

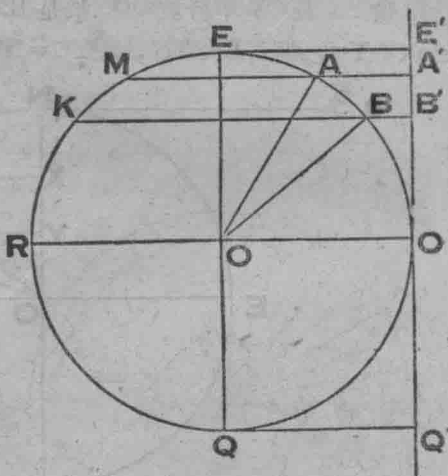
圖學作法

赤道圖以圖學法作之殊非易事。其困難點在求子午綫之曲綫。中央經綫上緯綫之間隔，與赤道上經綫間之間隔相等。此點可於第三十一圖中示之。

設吾人研究穿過地球中心與平面切點之斷面。

此平面可變化爲赤道之平面及中央經綫之平面。

在第一例中，赤道投影成 E′Q′，又 A′B′ 代表一赤道上由經綫分隔之部分。在第二例中 E′Q′ 代表中央經綫而 A′B′ 則爲中央經綫上由緯度之平行圈所分隔之部分。



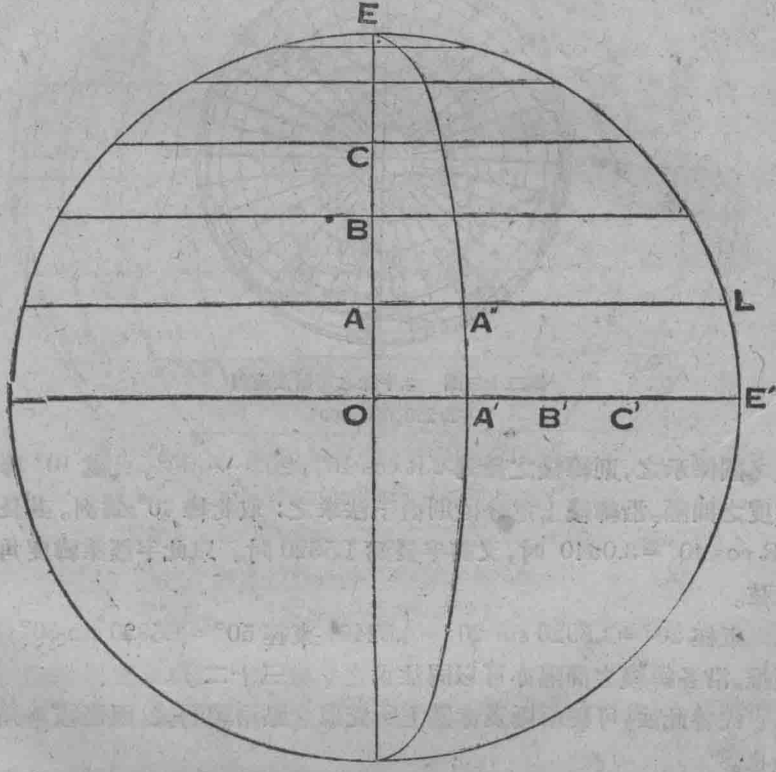
第三十一圖　正射赤道圖上之緯線與經線間隔

但其他緯綫則較赤道爲短，故其經綫之間隔較小。若參考第三十一圖，可見緯綫 A 之長在圖上爲 MA，同理 KB 爲緯綫 B 之長。若仔細繪畫此綫，則此綫量度可極準確，因此其與赤道之比例亦可求知。今已知沿赤道上之分段，又已得其他緯綫之長，又已知赤道上任何部分之分段（亦爲量知者），吾人卽可求得任何其他緯綫上之相當分段。

舉一例，作一圖，縮尺爲 1/125,000,000，示每隔 15 度之緯度及經度。

依縮尺繪一圓以代表地球（R＝2吋）。同法求得赤道及中央經綫上之分段，OA 與 OA′，AB 與 A′B′ 等段均相等（圖三十二）。今 OE＝OE′＝2吋。由量得AL＝1.94，又OA′＝0.52吋。因此在 AL 上之相當部分（AA″）可由比例$\frac{AA''}{OA'}=\frac{AL}{OE'}$得之，由此 $AA''=\frac{OA'\cdot AL}{OE'}=0.50$

吋，依今之目的言，此圖形已甚準確。同法其他各點亦可求得。最後經各緯綫上之相當點繪曲綫，卽得經綫。在實際上，此等綫均爲橢圓。（此爲應得記憶之點，卽南北緯 60° 之緯綫適爲赤道之半，故其上之分段亦爲在赤道上之半長。）

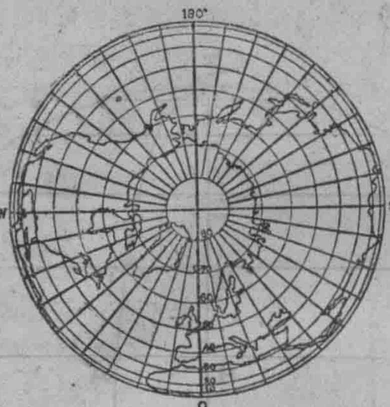


第三十二圖　正射赤道圖法上之經綫
（縮尺 1/130,000,000）

三角作法

正射赤道圖法之三角作法亦較極圖法爲困難。參考三十一圖可知中央經綫上緯綫與赤道間之間隔及赤道上經綫與中央經綫之間隔，因

緯度及經度之正弦而改變。故緯度 30° 與赤道之距離以 R sin 30° 沿中央經綫上量度之，又同法東經或西經30°與中央經綫之距離以 R sin 30° 沿赤道上量度之。緯綫則繪成如直綫。經綫爲曲綫且較難求得。以與半



第三十三圖　北半球之正射法地圖

(1/250,000,000)

徑之關係示之，則緯綫之長爲 2 R cos 10°, 20°……90°, 此處 10° 等爲緯度之間隔。沿緯綫上之分段則由下法求之：取北緯 40° 爲例。其長爲 2 R cos 40° = 3.0640 吋，又其半長爲 1.5320 吋。以此半徑乘緯度角之正弦。

東經 20° = 1.5320 sin 20° = 0.5240吋; 東經 50° = 1.5320 sin 50°, 餘類推。沿各緯綫之間隔亦可以同法求之（圖三十二）。

代替此法，可經兩極及赤道上所記取之點繪橢圓綫，因經綫爲橢圓綫也。

第五節　球心，平射與正射圖法間之關係

在第三十五圖中設 O 爲地球之中心，又 N 爲北極。P 爲地面上之任意點（在此例中設距極爲 40°）P^1, P^2, P^3 爲投影平面 XY 上之相當點，P^1 爲球心法之投影，P^2 爲平射法之投影，又 P^3 爲正射法之投影。

第三十四圖　印度洋之正射法地圖

（縮尺 1/130,000,000）

P 距 N 之眞長爲 PN 弧。

在上圖中 $R=2''$，〔註一〕因此 PN 弧 $=R\times 40°$（弧度）$=1.3962''$。

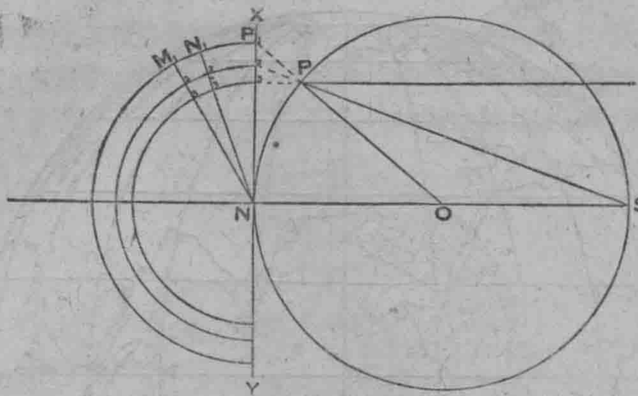
（或如，$40°=\frac{1}{9}$圓周，PN 弧 $=\frac{2\pi R}{9}$。）

在球心圖法上 $P^1N=R\tan 40°=1''.6782$。

在平射圖法上 $P^2N=2R\tan 20°=1''.4560$。

在正射圖法上 $P^3N=R\sin 40°=1''.2856$。

〔註一〕 在第三十五圖中縮尺已縮小一半。



第三十五圖　球心平射及正射圖法之極圖間之關係

因此可極易求得各特殊圖法之百分錯誤。球心圖法之求法如下：求地球儀上自 N 至 P 之眞正距離，與投影上之該段距離之差，即 $1''.6782-1''.3962=0''.2820$。於是其百分錯誤爲 $\frac{0''.282\times100}{1''.3962}=20.2\%$。

其他例可以同法計算之。

然則，注意其錯誤在球心及平射圖法中因離 N 之距離之增加而增加，此點頗爲重要。在正射圖法中其錯誤亦增加，但爲相反者。

同法沿緯綫之百分錯誤亦可求得。設 M^1N^1，M^2N^2，M^3N^3 相當於沿緯度 P 之緯綫（$P=50°$）$10°$ 之弧。沿此緯綫 $10°$ 弧之眞長爲 $\frac{2\pi R\cos50}{36}=0''.2244$。

在球心圖法中此長爲 $M^1N^1\times10°$（弧度）$=0''.2928$ 因此其差爲 $0''.2928-0''.2244=0''.0684$，又其百分錯誤爲 $\frac{0''.0684\times100}{0''.2244}=30.48\%$。〔註一〕

〔註一〕　或：地球儀上緯線之長 $=2\pi R\cos50°$

投影上緯線之長 $=2\pi R\cot50°$

$\therefore$ 錯誤 $=2\pi R\cot50°-2\pi R\cos50°=2''.4640$

又錯誤 $\%=\frac{2.4640\times100}{2\pi R\cos50}=30.48\%$

任何其他方位圖法亦相同。

同法 $M^2N^2 \times 10^{\circ}$（弧度）及 $M^3N^3 \times 10$（弧度）可示平射及正射圖法沿 50° 緯綫之弧 10° 之長，又其百分錯誤可如球心圖法計算之。

第六節　等距方位及等積方位圖法

此二圖法在多數圖册中極爲有用而普通。其法最適於兩極區域，又此等區域之網綫頗易製作。此圖法亦可以赤道及其他緯綫上之一點作爲地圖中心繪畫之。在此情形中緯綫不再爲同心圓，經綫亦非直綫。雖然，其較難之作法未爲重視，以其應用頗爲廣大也。二者之中，等積法或更爲普通，在戴克之學校圖册（Diercke's *Schulatlas*）中，爲多數地圖所採用。極圖法在此處討論之，至赤道及傾斜圖法將見於第二篇中。此處不能謂等積方位法可適用於各區域之圖，以其煩長之計算及艱難之繪法限制其在大洲及大洋地圖上之應用。

等距方位圖法

極圖法

在兩極區域中，此爲一極普通之圖法，且極易繪畫。取極爲地圖之中心，又其經綫作成如離此點之半徑。此等綫可以所需要之角度分隔之。緯綫則以眞長分隔，又均爲同心圓。故作圖所需之事，乃在求緯綫間所位處之間隔。此點頗爲簡單，因在投影上之間隔與球面上者相等，或 $2\pi R \dfrac{x^{\circ}}{360^{\circ}}$ 此處 x° 爲緯度所需要之間隔（圖三十六）。

例　北極區域之等距方位圖法。縮尺 1/125,000,000。緯度及經度之間隔爲 10°。

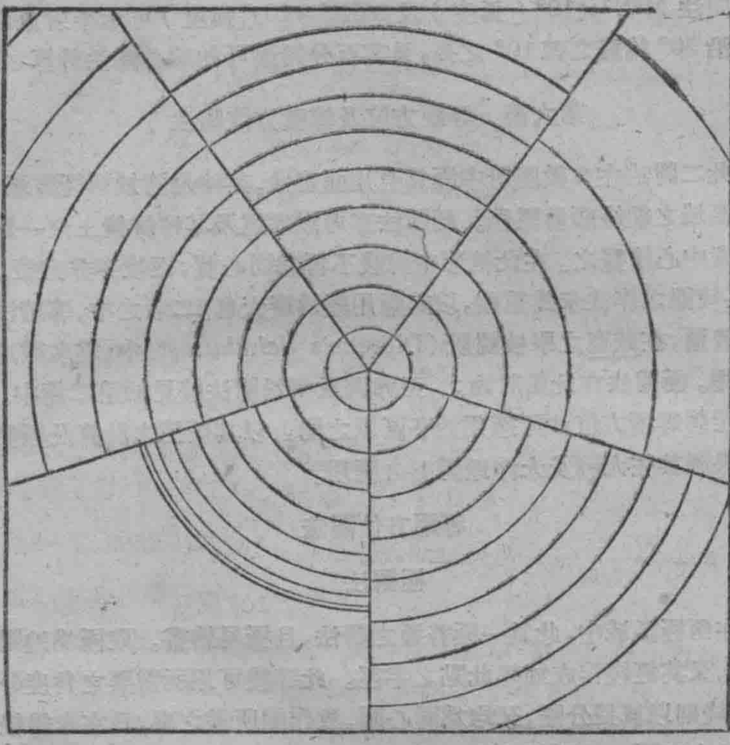
R，球體之半徑，在此縮尺中爲 2″。

球體之圓周爲

$$2\pi R = 2 \times 3.1416 \times 2 = 12''.5664。$$

緯綫之分隔距離爲

$$\frac{2\pi R}{36} = \frac{2 \times 3.1416 \times 2}{36} = 0''.349。$$



第一圖版　極圖法之比較

（縮尺 1/195,000,000）

上中　等積方位法

上左　平射法

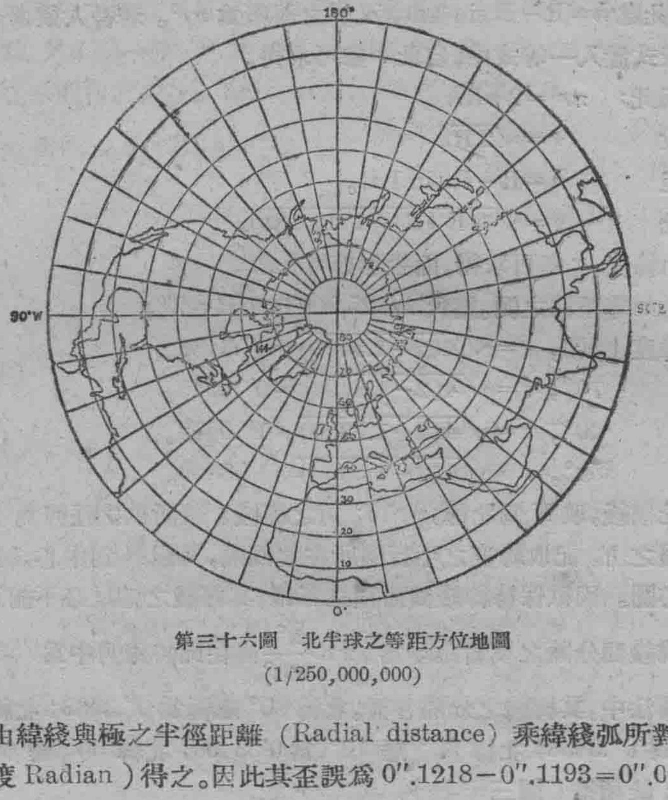
上右　球心法

下左　正射法

下右　等距方位法

在此圖中自北極至任何點之距離均甚正確。再者自極至任何點之方向亦均爲正確。沿緯綫之縮尺則太大。試研究北緯70°之弧10°之長：

在地球儀上此弧將爲$\frac{2\pi R\cos Lat}{36}=0''.1193$；在投影上將爲$0''.1218$。



第三十六圖　北半球之等距方位地圖
(1/250,000,000)

此數由緯綫與極之半徑距離 (Radial distance) 乘緯綫弧所對極之角(弧度 Radian)得之。因此其歪誤爲 $0''.1218-0''.1193=0''.0025$。又其百分錯誤爲$\frac{0''.0025\times100}{0''.1193}=2.1\%$。然則,在離極 30° 之內此圖法尙稱佳良。

(赤道及傾斜圖法較爲艱難,當在後說明之,頁 121)。

等積方位圖法

極圖法

如在等距方位圖法中,其經綫爲自極向外放射之直綫。其緯綫亦爲同心圓,但非以常定之距離分隔者,該綫離極愈遠乃愈靠近。在投影上兩緯綫間之面積使其與地球儀上相當之面積相等。但此球帶之面積爲

$2\pi Rh$，此處 $h=R-R\sin \mathrm{Lat}$，又圓之面積爲 πr^2。若吾人欲求 r，必須將此表式置入一等式中，自此 r 卽可求得。

因此：　$\pi r^2=2\pi Rh$

故　　$r=\sqrt{2Rh}$

但　　$h=R-R\sin \mathrm{Lat}$。

故　　$r=\sqrt{2R(R-R\sin \mathrm{Lat})}$。

已知緯度，r 卽可求得，而投影亦可作成。

例　如等距法之例。縮尺 1/125,000,000. $R=2''$。

緯度　$80°$，$r=\sqrt{4(2-1.9696)}=0''.3488$。

$70°$，$r=\sqrt{4(2-1.8794)}=0''.6946$。

$60°$，$r=\sqrt{4(2-1.7320)}=1''.0352$。

$50°$，$r=\sqrt{4(2-1.5320)}=1''.3680$。

作此網綫，取 N 爲北極；繪 10° 角之經綫（或所欲之任何角），又在一經綫之上，記取緯度之平行圈所在之間隔，又以 N 爲中心，經此等點繪同心圓。因欲保持緯綫間面積之正確，其經綫之縮尺必不能正確。球體上緯綫間分隔之眞實距離爲 $2\pi R\dfrac{x°}{360°}$ 或在此特殊例中爲 $0''.3490$。但在此圖法中，其緯綫之分隔各異。北緯 80° 離極爲 $0''.3488$；北緯 70° 離 80° 爲 $0''.3458$；北緯 60° 離 70° 爲 $0''.3406$；北緯 50° 離 60° 爲 $0''.3328$，餘類推（圖三十七）。

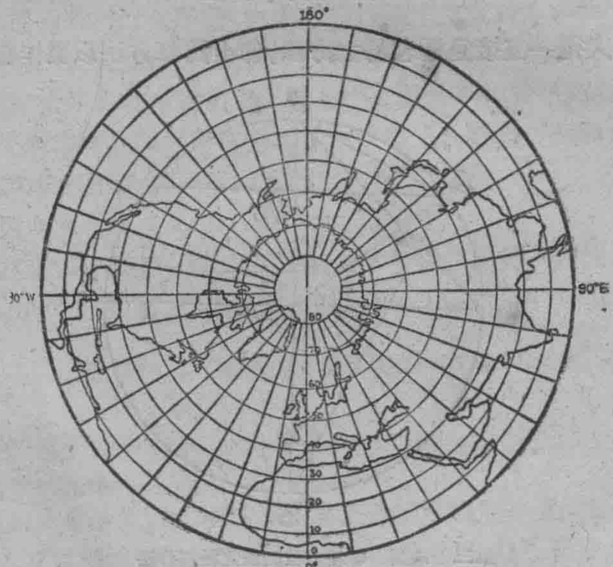
因此經綫之縮尺向外而遞減，其遞減之率因離極距離之增加而加速。在他一方面，沿緯綫之縮尺並不迅速增加如等距方位圖法。在此圖法中，已知沿北緯 70° 之弧 10° 之長爲 $0''.1218$。在等積方位圖法中此相當弧之長爲 $0''.1211$，但在球體上，此弧之眞長爲 $\dfrac{2\pi R\cos \mathrm{Lat}}{36}$ 或 $0''.1193$。因此等積方位圖法中之歪誤爲 $0''.1211-0''.1193=0''.0018$。其百分錯誤爲 $\dfrac{0''.0018\times 100}{0''.1193}=1.5\%$。自地圖中心之方位角(Azimuths)則甚正確。

（赤道及傾斜圖法在後討論，頁 121）。

此圖法之作法又可以他法得之。在第三十八圖中，設 A 爲緯度 ϕ 之一點。PA 爲一弦，P 爲其極。連結 AO 與 AS。於是 PAS 爲一直角（在半圓內之角）。AOP 角 $=x=$ ASP 角之二倍。

因此 $AP=PS\sin\frac{1}{2}x$

$$=2R\sin\frac{1}{2}x \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$



第三十七圖 北半球之等積方位地圖
(1/250,000,000)

今吾人欲表示 $AP=\sqrt{2R(R-R\sin\phi)}=r$。

在第三十八圖中 $AP^2=AM^2+PM^2$。

但 $AM=R\cos\phi$ 又 $PM=R-R\sin\phi$。

故 $AP=\sqrt{R^2\cos^2\phi+(R-R\sin\phi)^2}$。

$=\sqrt{R^2(\cos^2\phi+\sin^2\phi)+R^2-2R^2\sin\phi}$。

$=\sqrt{2R^2-2R^2\sin\phi}$。

$=\sqrt{2R(R-R\sin\phi)} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

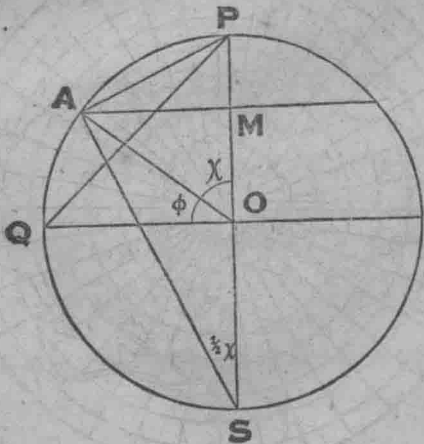
但自 (1) $AP=2R\sin\frac{1}{2}x$。

故 $\sqrt{2R(R-R\sin\phi)}=2R\sin\frac{1}{2}x$。

易言之，在投影上所需繪畫緯度之平行圈之半徑爲以半徑之兩倍乘餘緯度角之半之正弦。

極圖法之圖學作法

今吾人得一直接且極容易之方法，即由圖學方法以製作極圖。



第三十八圖　等積方位圖法之極圖作法

依縮尺繪一圓，依照在此圖法上所需要之緯度度數，自中心取半徑如 OA（第三十八圖）。於是 PA，PQ 等，即對餘緯度角之弦，即爲所需要之半徑。再以量角器分隔經綫，一如在平射法及其他方位圖法之極圖，此圖網即告完成。

第六章

球狀圖法

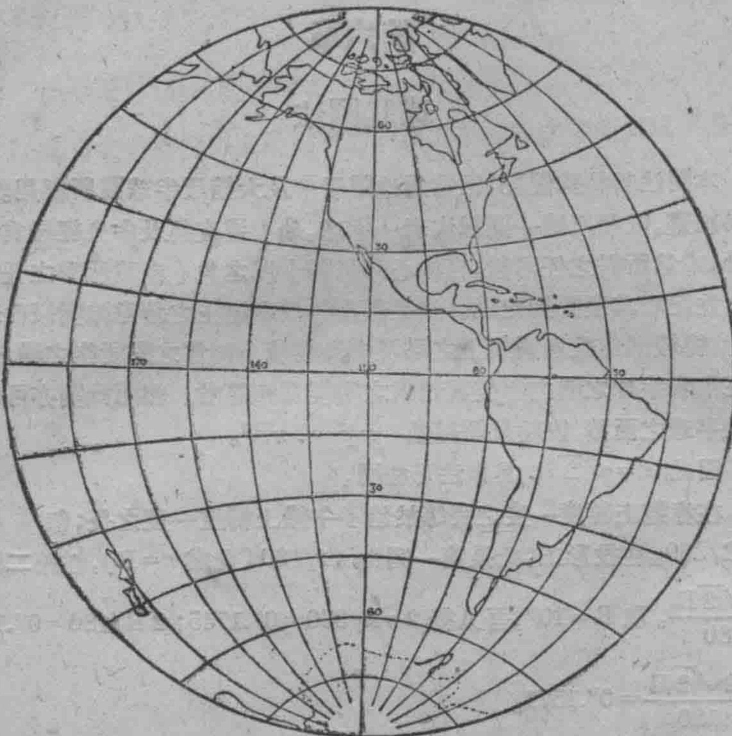
本圖法無特殊優點，但常爲地圖册中及大縮尺半球圖所應用。此法極易繪畫。依縮尺繪一圓以代表一半球。分赤道直徑及中央經綫爲十八等分，或爲所需之任何數。自中心分每隔十度之角（或爲所需之任何角度）並記取其割圓周之處。於是經兩極及赤道上之分點繪圓以代表經綫。其緯綫則爲經過圓周上之點及中央經綫上相當之點所作之圓。今已假定代表半球之圓之半徑與球體之半徑爲相等者。然而此圓亦可作成等於半球之面積，依縮尺而縮減：$\pi r^2=2\pi R^2$。

因此 $r=\sqrt{2}R$. 其作法乃相同。

在赤道上經度一度之長等於沿子午綫上緯度一度之長：即 $2\pi R/360$。在投影上，此長第一例爲 $2r/180$（此處 $r=R$），在第二例爲 $\frac{2\sqrt{2}R}{180}$。取 $R=10''$，吾人得 $2\pi R/360=0''.1745$；$2R/180=0''.1111$ 又 $\frac{2\sqrt{2}R}{180}=0''.1571$。

因此若吾人假定地球儀赤道上緯度及經度一度所包圍之區域爲長方形，其面積爲 $0''.1745^2$；在投影上則爲 $0''.1571^2$。易言之，地圖中央部分之面積僅爲地球儀上眞面積之六分之五。

但因圓之面積已使與半球之面積相等，其外部之面積必需增加以補償中部之縮小。試研究赤道上離中央經綫90°處之面積。在地球儀上，其面積與赤道上其他部分相同。在投影上其情形即不然。緯度一度之長在圖之邊緣已增加。其周圍圓之長爲 $2\pi\sqrt{2}R$，又若 $R=10''$，此圓之周長爲 $88''.844$；因此一度之弧爲 $88''.844/360$，或 $0''.247$。但，自作圖法其經度之度數仍相同。若吾人假定投影上包圍於一緯度之平行圈及一經度之子午綫間之空間爲一長方形，其面積將爲 0.247×0.1571 或 0.0388 方吋。在地球儀上此相同之區域之面積爲 0.0305 方吋。因此投



第三十九圖 球狀圖法上之美洲
（縮尺 1/129,000,000）

影上之面積已增加約 1.27 倍。

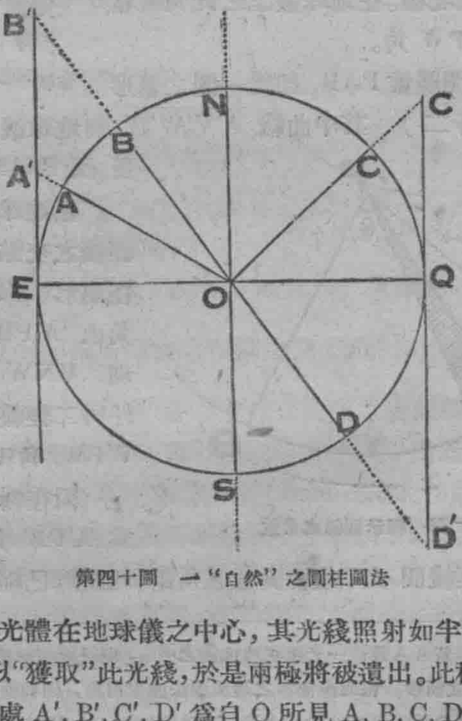
〔最早之球狀圖法似在 1645 年爲 Father G. Fournier, S. J. 所製作。其緯線之作法與上所述者相同：經線則爲經過兩極及沿赤道上相等之區分之橢圓線。1660 年 J. B. Nicolosi 簡化 Fournier 之作法，作經線爲圓弧，再至 1793 年 A. Arrowsmith 重導此圖網爲球狀圖法（見 G. T. McCaw, *Internat. Geog. Congr.*, *Cambridge*, 1928, Page 113)。〕

第七章

可展之平面 圓錐之常數 標準緯綫

此處僅有二種所謂可展之平面有待吾人之研究——圓柱與圓錐。圓柱可由捲一頁之紙作一管形所作成，於是加以解開或展開。同法圓錐亦可用一片之紙作成，然後再展開之。

設一圓柱包裹地球儀使接於赤道之上，則頗易想像假定光體在地球儀之中心，地球表面之各點與形狀卽可投射於圓柱之上。若其形狀用鉛筆記下，於是將圓柱解開，吾人卽可有一地球之圓柱法表示。然則在



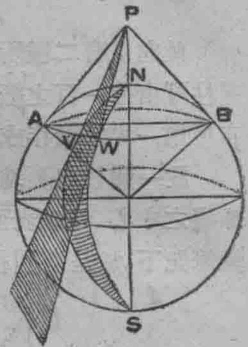
第四十圖 —"自然"之圓柱圖法

此情形之下，卽光體在地球儀之中心，其光綫照射如半徑，則吾人將需一極長之圓柱以"獲取"此光綫，於是兩極將被遺出。此種情形可參考第四十圖見之，該處 A′, B′, C′, D′ 爲自 O 所見 A, B, C, D 之投影。N 與 S 永不能投射於圓柱之上，因光綫 ON 及 OS 平行於此平面。在他方面，

EQ——赤道——將爲同長，故縮尺在投影上者適與在地球儀上相同。此爲對縮尺正確僅有之綫。如此之投影實爲地球在圓柱上之自然射影圖，但此圖則極少用途。然則代替如此簡單之投射法，頗易於將此法修改而因此導透有用之圓柱法地圖。

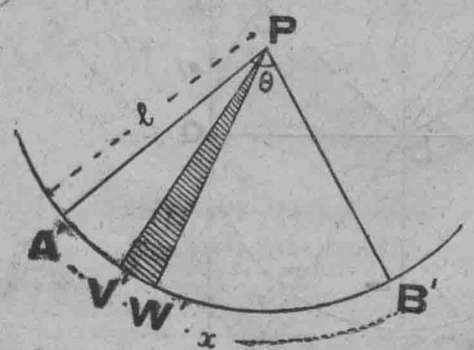
同法，置於地球儀上之圓錐亦可以解開；〔註一〕於是吾人將得一圓之扇形(Sector)。

在第四十一圖中，PAB 爲一圓錐，沿 AVWB 接地球儀。若圓錐之頂點在地球儀之軸之延長綫上，於是 AB 爲一緯度之平行圈。設 NVS 與 NWS 爲地球儀上之二經綫，作 VNW 角於北極。在地球儀上之此角相當於圓錐上之 VPW 角。



第四十一圖　圖示圓錐之常數

若吾人展開圓錐 PAB，卽得一圓之扇形 PA'B'（圖四十二），其中曲綫 A'V'W'B' 與地球儀上之 AVWB 同長，又 PA' 等於 PA。



第四十二圖　圖示圓錐之常數

在地球儀之北極，卽各經綫之交點，有四直角。但在扇形 A'PB' 中，此四直角由 A'PB' 角代表之。同理，VNW 角——卽地球儀任何二經綫間之角——則由 V'PW' 角代表之。

因在極之四直角今縮小爲 A'PB' 角，故在扇形（卽投影）上，其經綫間不再處於眞實之角距，此距離已縮小。但在兩極由

〔註一〕再者，若吾人設想一光體在地球儀之中心，則經綫與緯綫所投射之形狀適與圓柱法所述者有相同之情形。但此處簡單之透視圖法極少用途，因如圖解（圖四十三）中所示，諸緯綫間之間隔遠離圓錐接地球儀之緯綫而迅速增加。然則經綫則沿所切之緯綫附近之間隔頗正確。

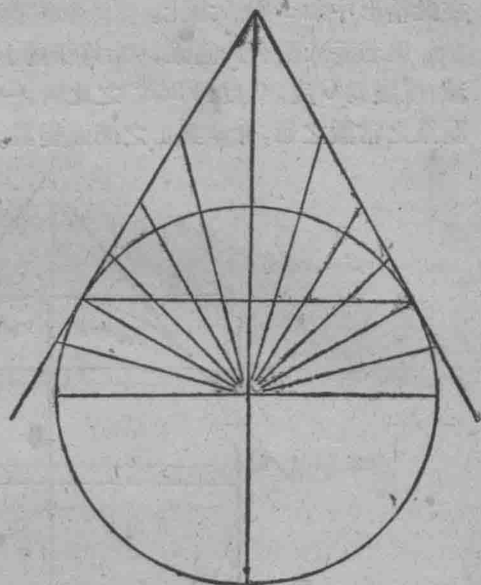
經綫夾成之所有角度均已同樣縮小，因此 V'PW' 角對 VNW 角保持相同之比率，正如全角 A'PB' 對四直角然。

論及圓錐之常數，吾人即包含此比率而言，故吾人可解釋圓錐之常數爲圓錐之全角，當展開後對四直角之比例。

吾人請進而詳論圓錐之常數(constant of the cone)。吾人可甚易求其價值在任何例中，若已知二事：

(1) 圓錐接地球儀之圓之長，又

(2) 圓錐之斜長。



第四十三圖　—"自然"之圓錐圖法

於是吾人得一圓度(circular measure)之簡單方法，若吾人稱圓錐展開後之底邊之長爲 x，又圓錐之斜長爲 l，即得 $\theta=\frac{x}{l}$，此處 θ 爲圓錐展開後之頂點之角(即圖四十二中之 A'PB' 角)。

此圓錐可使之"開"或"合"：設吾人展開之使此頂角(apical angle)當展開時大而復大，結果此角可變成等於 360°，因此圓錐已"展出"成一平面。作此之時，必須注意此圓錐〔註一〕已向北移動，直至最後，當其切於北極時，即不再爲一圓錐而變成一平面。在事實上，頂角愈變大，圓錐所切之緯度愈高(見圖四十四)。

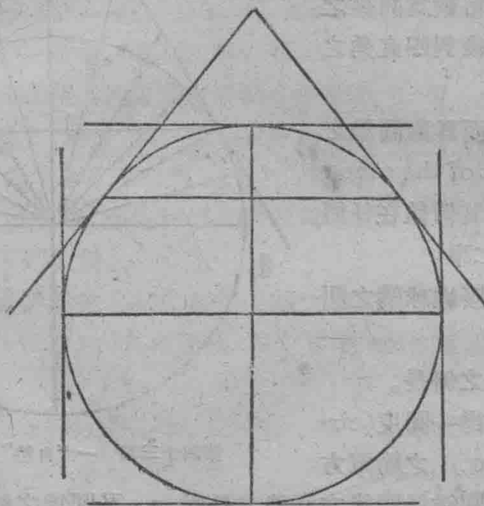
反之，若吾人閉合此圓錐，則所接切之緯綫亦愈低，直至最後當切於赤道之時，圓錐再行消失，而此時變爲一圓柱——第二限度。

當圓錐展開，使成爲一平面，其頂角變爲 360° 之時，在此平面上之

〔註一〕即接切之圓已向北移動。

經綫,將如任何方位圖法,以角度分隔。易言之,其頂角對 360° 之比例,在此情形中如 1 對 1 之比。

但若吾人閉合此圓錐,此角卽變小,直至最後在另一限度時而消滅,或變爲 0 度。0 度對 360° 之比例,一如 0 對 1 之比。因此吾人可稱圓錐之常數之値,介 0 與 1 之間而變異。



第四十四圖 平面,圓錐與圓柱

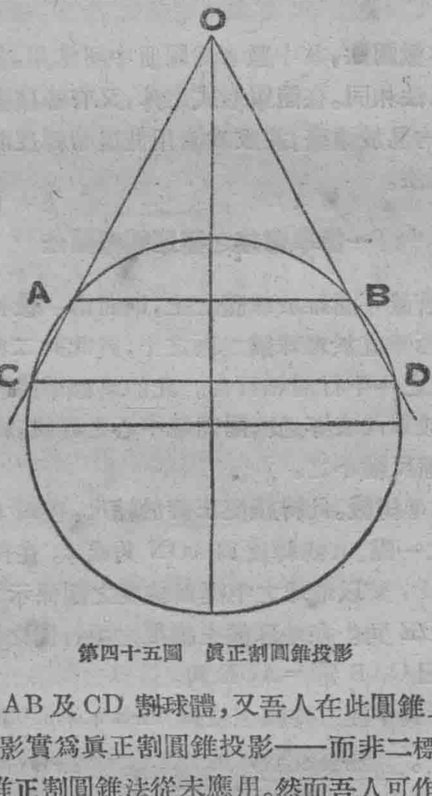
今由吾人考查圓錐接地球儀之圓。顯然一圓錐可沿任何小圓接地球儀,但若此圓爲緯度之平行圈時則更便。若以此爲例時,則如在一標準緯綫之簡單圓錐中,圓錐之極將置於地軸之延長綫上。

當圓錐展開後,扇形之弧將與接地球儀之緯綫同長。易言之,在扇形或投影上之弧之縮尺與地球儀緯綫之縮尺相同。此種緯綫,卽爲在一標準緯綫之簡單圓錐法中者,稱之爲標準緯綫 (Standard Parallel)。

下一應用於各種圖法之標準緯綫之簡單定義,頗爲不易。然則就目前而言,吾人可稱圓錐圖法中正確於縮尺之各緯綫爲標準緯綫。此定義頗爲廣泛,因此處所討論之惟一要點爲緯綫必對縮尺相正確,關於作圖之實際方法之問題,並不加以討論。此要點之相互依賴處在波納氏圖法

(Bonne's Projection) 中討論之。

但學生必不可想像各標準緯綫均爲圓錐接球體之緯綫。若吾人有二標準緯綫，圓錐沿此二綫切地球儀實爲不可能之事。在第四十五圖中



第四十五圖　眞正割圓錐投影

之 OCD 圓錐沿 AB 及 CD 割球體，又吾人在此圓錐上可作一投影。在事實上，此種投影實爲眞正割圓錐投影——而非二標準緯綫之圓錐法（見五十九頁）。惟正割圓錐法從未應用。然而吾人可作二標準緯綫正確於縮尺同時又能保持一普通之圓錐，此圓錐雖非以任何方法切地球儀或割地球儀，但爲一完全獨立之圓錐。

第八章

第一節　圓錐圖法

此類包括多數圖法，其中數者爲圖册中所常用。其可作之修改法亦與方位及圓柱圖法相同。在簡單形式之外，又有等積圓錐及正形圓錐二法。其中之各法均易於繪畫，並成爲適用於温帶緯度而無過廣緯度展延之國家之一類圖法。

一標準緯綫之簡單圓錐圖法

前已說明，若置一圓錐於球體之上，則將沿一綫相接合。在簡單圓錐法中，圓錐之極垂直於地球儀之極之上，因此此二者（即地球儀與圓錐）即可沿緯度之一平行圈相符合。此卽爲標準緯綫，並以眞長分割之。繪一中央經綫以代表穿過繪圖區域中心之經綫。緯綫卽沿此綫以眞距而分隔，並依縮尺縮小之。

首先選擇標準緯綫。此緯綫使正確於縮尺。在四十六圖上設 A 爲地球儀上緯度 ϕ 之一點。其餘緯度爲 AON 角或 x。在投影上繪畫此標準緯綫之半徑爲 AP，又以地球之半徑與緯度之關係示之，$AP=R\cot\phi$，因 APO 角 $=$ AOE 角。在地球儀上緯度之平行圈之眞半徑爲 AB，又 $AB=R\cos\phi$，因 OAB 角 $=$ AOE 角。

因之以 AB 爲半徑之緯綫之長爲 $2\pi R\cos\phi$。其長之任何部分均可求得，例如弧 $1^\circ=\dfrac{2\pi R\cos\phi}{360}$，或弧 $10^\circ=\dfrac{2\pi R\cos\phi}{36}$，餘類推。

圓錐之常數爲圓錐頂點之角當展開後對於 360° 之比例。故此處甚易說明此常數之值等於標準緯綫之緯度之正弦 (sine)。

在第四十六圖中，

$PA=R\cot\phi$。

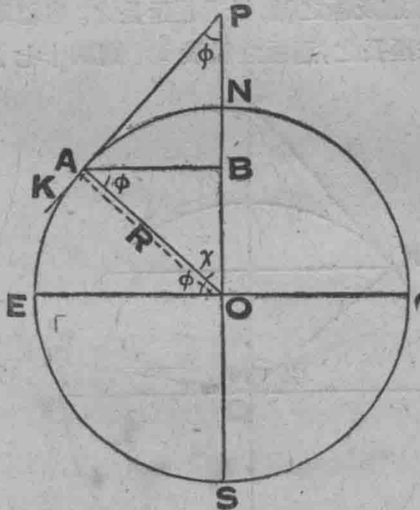
$AB=R\cos\phi$。

$\therefore$ 以 AB 爲半徑之緯綫之長 $=2\pi R\cos\phi$，又以 PA 爲半徑之圓之

長 $=2\pi R\cot\phi$。

因此 n 卽圓錐之常數 $=\dfrac{2\pi R\cos\phi}{2\pi R\cot\phi}=\dfrac{\cos\phi}{\cot\phi}=\sin\phi$。

在四十六圖中設 K 代表投影上緯度 ϕ_1 之任何其他緯綫之位置。



第四十六圖　簡單圓錐法之簡易三角

其半徑——在投影上——為 PK。其在投影上之長為 2πPK 乘圓錐之常數。但在球體上此緯綫之眞長為 $2\pi R\cos\phi$。因此求投影上長度與球體上長度之差數，其歪誤卽知，又其百分錯誤亦可立卽求得，以 100 乘此歪誤，或差數，再以球體上緯綫之眞長除之。

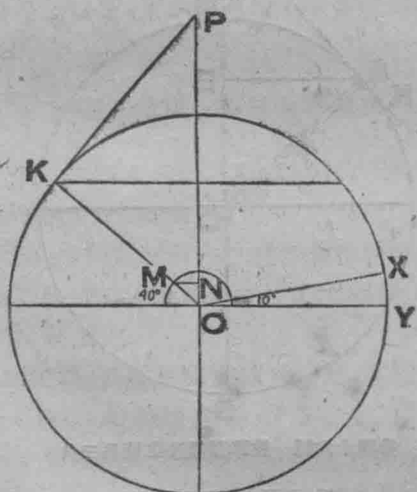
例　投影上緯綫之長為2PKπ乘圓錐之常數：其眞長為$2\pi R\cos\phi_1$；其差數為2PK$\pi\times$常數$-2\pi R\cos\phi_1$。其百分錯誤為$d\times100/2\pi R\cos\phi_1$，此處 d 卽為其差數。

在現今 PK 之長尙未知，但如在簡單圓錐法中，設沿 PA 綫上距 A 之分段等於地球儀上緯綫分隔之眞正距離，AK 將等於 R 乘圓度中所示之緯度 A 與 K 之差。易言之，若緯度為 10° 間隔，AK$=2\pi R/36$ 又 PK$=$PA$+$AK。

在各眞圓錐圖法中，其經綫爲直綫又緯綫爲圓之弧。

簡單圓錐法：近似之圖學作法

依所需之縮尺繪一圓以代表地球儀。選擇標準緯綫，可由量角器之方法繪入之。又繪赤道及極之軸，後者並延長之。自標準緯線之半徑割圓之處繪一切綫，並延長之，遇極之軸於P（圖四十七）。



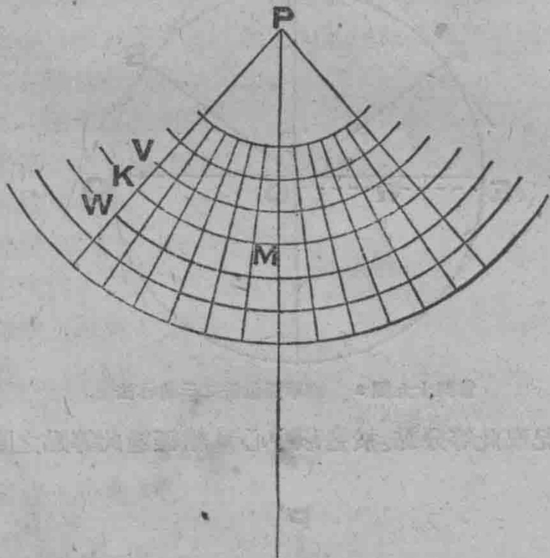
第四十七圖　簡單圓錐法之圖學作法

以一半徑PK繪標準緯綫。然後取任何綫（四十八圖中之PM）爲中央經綫。緯綫則正確分隔之——$2\pi R/360$ 爲 1° 之分隔單位。自標準緯綫及中央經綫相交之點，向上及向下記取需要之分點。

欲求取標準緯綫上之分點，如第一圖上（圖四十七）作 10° 之角。以O爲中心，XY爲半徑繪一弧。沿標準緯綫上之分段，今則以MN綫示之，該綫爲垂直於地軸及平行於赤道者。既已記出沿標準緯綫上之分段，則連接此等點至P，繪其他經綫如直綫。其他緯綫則爲以P爲中心，等於PV，PW等爲半徑所繪之同心圓。

〔注意——沿中央經線上之分段約等於XY，可依此自M向外記出〕

此近似之作法，就事實上之情形言，則頗爲準確。其錯誤在於假定XY爲一直綫而非爲圓弧。在小縮尺地圖中其影響甚小。同理MN亦非標準緯綫上經綫間之眞實距離。然而若經綫及緯綫間之間隔爲1°以代10°，則若精細繪畫時，其錯誤將大爲減小，因XY之距離，將因實用上之目的，弧與直綫相同。同時MN亦將更進於眞確。



第四十八圖　簡單圓錐法之展開

三角作法

在四十九圖a中，設ϕ爲A之緯綫。

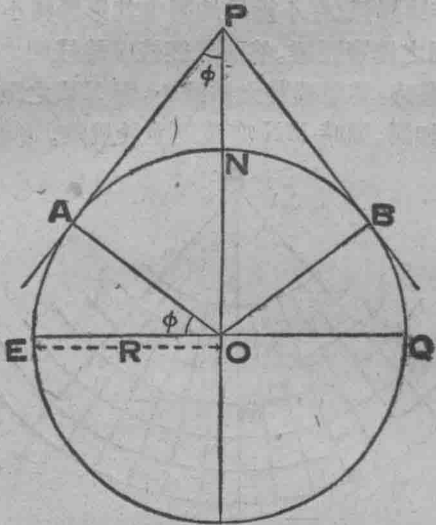
投影上需要繪畫緯綫A之半徑爲AP。但$AP=R\cot\phi$。

緯度A之眞長爲$2\pi R\cos\phi$。若吾人所需之經綫及緯綫之間隔爲10°之分隔，於是沿標準緯綫上10°之間隔可以36除全長得之：

$$\frac{2\pi R\cos\phi}{36}。$$

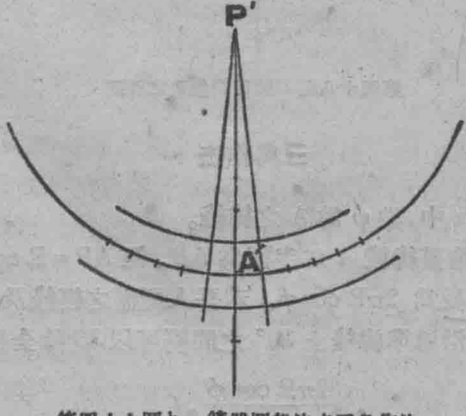
沿標準緯綫記出此等距離，自A′開始向外記出。以直綫連接此等

點至 P'。求緯綫之法，則可以正確分隔中央經綫 P'A' 即 $2\pi R/36$，又



第四十九圖 a 簡單圓錐法之三角作法

再自 A' 向外記取此等分點。於是以中心 O 繪經過此等點之圓弧（圖四十九 b）。



第四十九圖 b 簡單圓錐法之三角作法

此處須注意，即地球之極不符合於 P'，因 AP 或 AP' 較 AN 弧爲

長;易言之,地球之極與圓錐之極並不符合。

由作法得知標準緯綫及中央經綫上之縮尺均係正確。及因其他經綫爲一羣同心圓之半徑,沿此之縮尺亦係正確。沿其他緯綫之縮尺則太大。

此圖法極易繪畫,且爲小國家之無廣大緯度者所常用。在圖册中,此法實際上與二標準緯綫圓錐法不易區別;但照普通之規則,在小國家如冰島及丹麥可示以簡單圓錐法,大區域如俄羅斯斯堪的納維亞或歐洲則常以二標準緯綫圓錐法繪出。

例　作一簡單圓錐圖法。

不列顛諸島之地圖,縮尺 1/1,000,000。

標準緯綫 54°N。

中央經綫 4°W。

地球之半徑假定爲 250,000,000″。

標準緯綫上經度 1° 之長:

$$\frac{2\pi R\cos \text{Lat}}{360}\times\frac{1}{M}=\frac{2\times 3.1416\times 250{,}000{,}000\times 0.5878}{360\times 1{,}000{,}000}$$

$$=2''.56。$$

中央經綫上緯度 1° 之長:

$$\frac{2\pi R}{360}\times\frac{1}{M}=\frac{2\times 3.1416\times 250{,}000{,}000}{360\times 1{,}000{,}000}=4''.36\text{(近似數)。}$$

在投影上繪標準緯綫所需之半徑:——(見第九章)。

$$R\cot \text{Lat.}\times\frac{1}{M}=\frac{250{,}000{,}000\times 0.7256}{1{,}000{,}000}=181''.625。$$

第二節　二標準緯綫圓錐法

上述之圖法中,僅一緯綫正確於縮尺。若略加以修改,吾人可得二緯綫正確於縮尺一如各經綫然,則吾人已有一顯著之進步,而得一應用極廣之圖法。

任何二緯綫可選擇爲標準。當然該綫將因地圖而改變。然則其選擇

之方法將依全圖錯誤最少之分布而決定。例如，若吾人需一此圖法之歐洲地圖，不應選擇北緯 70° 及 35° 之緯綫，而常用北緯 60° 及 40° 之緯綫。因此洲所在之位置對於後二者較前二者為均勻。再者，歐洲之較重要部分均位於或近於此二緯綫，又若其他之條件相等時，此等部分需要更正確之表示。若在另一方面，北緯 70° 及 35° 被採用時，歐洲之中央部分將大受改相——顯然為一缺點。〔註一〕

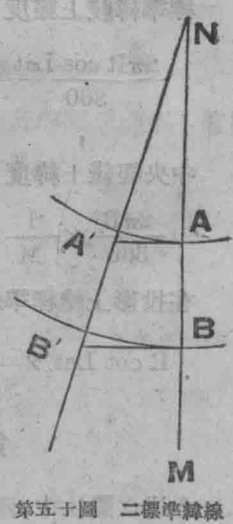
此圖法常稱為正割圓錐法。惟此名詞頗易引起誤解。圓之割綫為割圓周於二點之任何直綫。若吾人作一正割圓錐圖法，吾人應使標準緯綫間之距離等於其間割綫之距離。因在此處吾人應用弧之距離，因此投影上與地球儀上之緯綫間均以等距離而分隔，並依縮尺而縮小（見圖四十五）。

二標準緯綫簡單圓錐法之近似作法

本法一如普通之簡單圓錐法，其經綫為半徑又緯綫為同心圓。問題即在求此二標準緯綫之半徑。既求得此半徑，吾人即可以如簡單圓錐法之相同方法進行之。

先繪任何直綫 NM（圖五十），在其上記出 A 及 B 兩點。AB 距離為選擇作為標準之二緯綫間之正確距離，沿地球儀之弧綫而測量時，$=2\pi Rd$，此處 d 為緯度之差，以全圓周之分數表示之。自 A 與 B 繪 AA′ 及 BB′ 垂直於 NM。此二綫使等於沿 A 及 B 緯綫之已知長度（如謂 10°）。若 A=70°，又 B=30°N，於是

$AB=\dfrac{2\pi R}{9}$（因 70°－30°＝40°＝360° 之 1/9），又



第五十圖　二標準緯綫圓錐法之近似作法

〔註一〕 普通採取之標準緯線大約在距邊際緯線之全緯度之七分之一處已足够（Hinks.）。

$$AA' = \frac{2\pi R \cos 70^\circ}{36}$$

又 $$BB' = \frac{2\pi R \cos 30^\circ}{36}$$

連接 B'A' 並延長之使遇 MN 於 N。於是兩標準緯綫之半徑爲 NA 及 NB，又其他緯綫則可由分割 AB 爲所需要之部分得之，並自 N 及 M 繼續向外分段。

例如，若吾人假定作緯度及經度之間隔爲 10°，於是吾人必需分 AB 爲四等分。

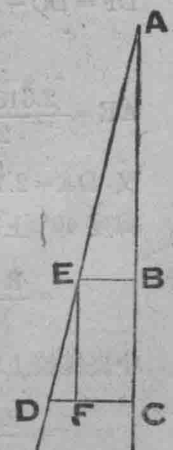
經綫則如一標準緯綫之簡單圓錐法之方法繪入之。

三角作法

在五十一圖中，設 AC 代表地球之軸之延長，又設 EB 與 DC 爲緯度 E 及 D 之平行圈之半徑。設 ED 爲兩緯綫間隔之眞距離（即此處弧距離示爲一直綫）。連接 DE 並延長之至 A，於是 AE:AD::EB:DC，或 AE:ED::EB:DF。

於是半徑 AE 與 AD 之比例相對於緯度 E 與 D 餘弦之比。

作此投影，繪一中央經綫，以半徑 AE 及 AD 繪標準緯綫並正確分割之 $\left(\frac{2\pi R \cos \text{Lat}}{360}\right)$。求其他緯綫，正確分割 ED（即設 E＝$70^\circ$ 又 D＝40°，又地圖表示緯綫之間隔爲 10°，則分 ED 爲三等分），並在標準緯綫之上及下割取此分段。然後以 A 爲中心，經此各點繪同心圓。



第五十一圖　示二標準緯綫圓錐法之作法

由作法，沿各經綫及兩緯綫之縮尺均係正確。介於標準緯綫間之縮度則太小，在其外者則太大。因此標準緯綫必須審愼選擇，以使全圖之縮尺錯誤減至最小。此爲一極有價値之圖法，其最大

優點，除前述之特點外，即此法極易繪畫。此法不宜應用於有廣大緯度之國家，但適合於任何廣展之經度。在圖册中此法常用歐洲俄羅斯及斯堪的納維亞等之地圖。亞洲圖則太大。

此法旣非正形，又非等積，但以其經綫及緯綫相互成直角，故較波納氏（Bonne）法更近於正形，而後法爲等積法之事實更爲其後所論述中所重視。

一例之計算

縮尺 1/50,000,000 之北大西洋部分地圖。經綫與緯綫之間隔爲 $10°$。標準緯綫爲 $40°N$ 及 $70°N$。中央經綫爲 $30°W$。

由公式（見圖五十一）$AE:ED::EB:DF$。

ED 爲緯綫分隔之眞距離，或 $2\pi R/12$。

$EB = R\cos 70° = 5 \times 0.3420 = 1.7100$ 吋。

$$DF = DC - EB = R\cos 40° - R\cos 70° = 3.8300 - 1.7100$$
$$= 2.1200 \text{ 吋。}$$

$$AE = \frac{2.618 \times 1.71}{2.12} = 2.112 \text{ 吋。}$$

又 $DA = 2.112 + 2.618 = 4.730$ 吋。

緯度 $40°$ 上經綫分隔之距離

$$= \frac{R\cos 40 \times 2\pi}{36} = 0.6685\text{。}$$

中央經綫上緯綫分隔之距離

$$= \frac{2.618}{3} = 0.8726\text{。}$$

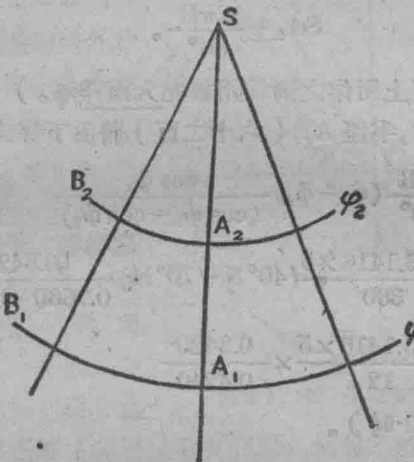
此投影之作法更可由一不同之方法得之。

選取緯綫 ϕ_1 與 ϕ_2 爲標準。

在投影上吾人之問題爲求半徑 SA_1 與 SA_2（圖五十一A）。

標準緯綫爲其眞長——$2\pi R\cos\phi_1$ 與 $2\pi R\cos\phi_2$。

再者，在經綫上緯綫爲正確之分隔，因此 $A_2A_1=\frac{2\pi R}{360}\times(\phi_1-\phi_2)$。在投影上扇形 SA_1B_1 與 SA_2B_2 完全相似。



第五十一圖 A

因此，$SA_1:SA_2::A_1B_1:A_2B_2$

但 $SA_1:SA_2::\cos\phi_1:\cos\phi_2$

$$\therefore\quad SA_1=\frac{SA_2\cos\phi_1}{\cos\phi_2}$$

又 $SA_1-SA_2=A_1A_2=\frac{2\pi R}{360}(\phi_1-\phi_2)$

代替 SA_1

吾人得 $\frac{SA_2\cos\phi_1}{\cos\phi_2}-SA_2=\frac{2\pi R}{360}(\phi_1-\phi_2)$

$$\therefore\quad \frac{SA_2(\cos\phi_1-\cos\phi_2)}{\cos\phi_2}=\frac{2\pi R}{360^\circ}(\phi_1-\phi_2)$$

又 $SA_2=\frac{2\pi R}{360^\circ}(\phi_1-\phi_2)\frac{\cos\phi_2}{(\cos\phi_1-\cos\phi_2)}$

由此吾人卽得緯綫ϕ_2之半徑。因緯綫均位於其分隔之眞距離處，吾人卽可求任何其他緯綫之半徑。

設緯綫爲 10° 之間隔，於是在 ϕ_2 之兩旁之緯綫半徑爲：

$$SA_2 \pm \frac{2\pi R}{36°}。$$

（在六十二頁上所作之例爲用於北大西洋者。）

用此交換方法，半徑 AE（六十二頁）將由下等式示之：

$$SA_2 = \frac{2\pi R}{360°}(\phi_1 - \phi_2)\frac{\cos\phi_2}{(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)}$$

$$= \frac{2\times 3.1416\times 5}{360}(40°N - 70°N)\frac{0.3420}{0.7660-0.3420}$$

$$= \frac{2\times 3.1416\times 5}{12}\times\frac{0.3420}{0.4240}$$

$$=2.111 \text{ 吋）。}$$

第三節　多圓錐圖法（一修正圓錐圖法）

在基本上此法之作法亦同於波納氏法及簡單圓錐法。然則其緯綫再非同心圓，各有其自己之中心及半徑作成之。中央經綫上之分隔則如簡單圓錐法，緯綫則如波納氏法。

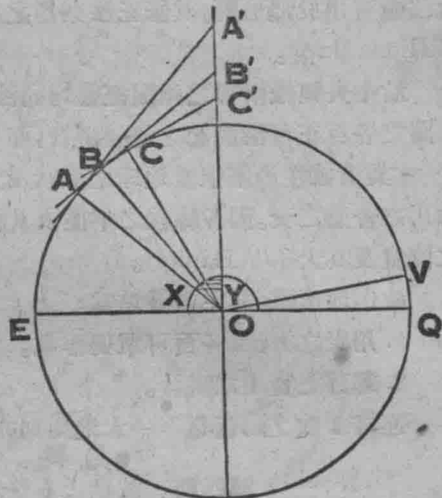
圖學作法

依縮尺作一圓以代表地球儀（圖五十二）。以所需要之緯度數用量角器分隔角度。然後在 A, B, C, 及其他此等點繪切綫 AA′, BB′, CC′ 等。若經綫及緯綫爲 10° 之分隔，作 10° 之 VOQ 角。以 VQ 半徑及中心 O 繪一弧。於是繪緯度各度之垂綫如 XY。

作此投影，繪任何中綫（圖五十三）。用量度器分等於 VQ 之間隔。繪畫緯綫，先在垂綫（卽中央經綫）上記其分點，然後以半徑 AA′, BB′, CC′ 等繪畫弧綫〔註一〕經過在中央經綫上之此等點——卽若 A 爲

〔註一〕弧之中心在中央經線之延長線上。

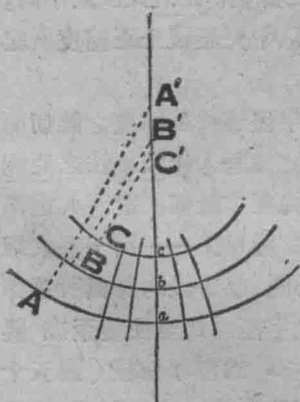
40°，於是 AA′ 必爲經過在中央經綫上 40° 記號處之弧，餘類推。其圓非同心圓。於是以量度器取 XY 等距離正確分隔各緯綫，自中央經綫開始向外分取之。最後以曲綫連接在各緯綫之相當點，卽得經綫。



第五十二圖　多圓錐圖法之圖學作法

三角作法

在第五十二圖中，繪緯綫 A, B, C 之半徑爲 AA′, BB′, CC′ ——各爲 R 乘緯度 A, B, 與 C 之餘切（cot）。先劃分中央經綫 —— $2\pi Rd$ *（縮尺爲 1/250,000,000）以正確之間隔記取其分點，然並不於任何特殊地點開始。設第五十三圖中之 a, b, c 爲其分點。今經 a, b, c 繪圓，各以 AA′, BB′, CC′ 爲半徑。於此可知以最大半徑所繪之圓爲低緯度。然後正確分割各緯綫——$\dfrac{2\pi R \cos \text{Lat}}{36}$ 對10°。於是經綫則如波納氏法繪畫之（參閱）。



第五十三圖　多圓錐圖法之展開

沿中央經綫及各緯綫之縮尺均正確。但因其再非同心圓，其等積之特性已消失（見六十九頁）。經綫之縮尺離中央經綫愈遠而迅速增大。因其經綫之縮尺已迅速增大，故此法不及波納氏法之正形。此二缺點使此法對一單頁之大區域圖頗爲無用。

* d＝所需之緯度間隔，以地球儀全圓周之分數表示之。

此法極有用於地形圖，其修正法則用之於百萬分之一地圖（One-in-a-Million Map）。

沿中央經綫兩旁之相關經綫均同法分段，又以各緯綫均正確，故地形圖之各頁正可沿南北之邊相拼合，而可沿其東西之邊捲起也。

"其價值在於僅依據地球之形狀及大小之數值，即可計算多圓錐法應用之普通之表。因各緯綫之半徑依其緯度而定，而並不在於地圖中心之位置及其大小"（Hinks）。

故作地形圖，其主要優點爲：

1. 用表之方法，各頁可單獨作成。

2. 鄰頁之實用之拼合。

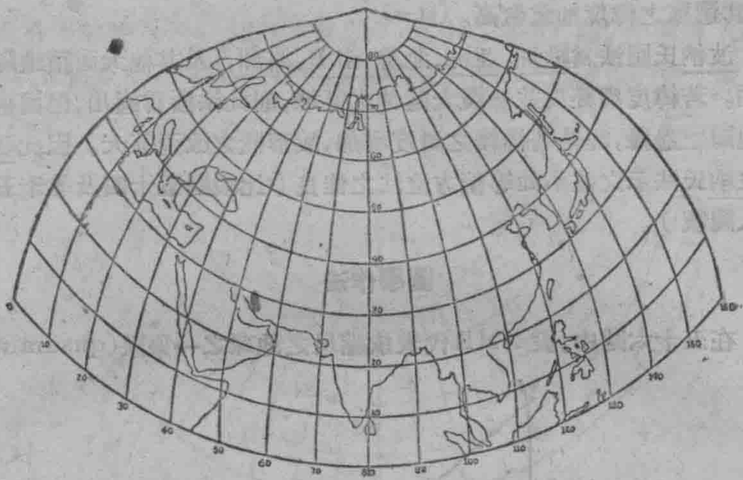
連接多數之圖頁以作一大地圖則亦不可能。

第四節　波納氏（修正）圓錐圖法

此法之一般繪法頗似一標準緯綫之簡單圓錐法。在波納氏法中，其各緯綫均正確於縮尺，故均爲標準緯綫。但在簡單圓錐及多圓錐法中，標準緯綫均以一定之半徑繪作——R×緯度之餘切。波納氏法則不同，僅一緯綫爲如此繪作者，其他均繪如同心圓。以中央經綫上正縮度所記之分段爲半徑。

然各緯綫之曲度均依照所選作之緯綫之半徑等於其緯度之餘切而定。此點之重要性可由一實例之討論說明之。設吾人作波納法之亞洲圖。吾人選擇一所作之緯綫，其半徑爲 R 乘緯度之餘切。設吾人選擇 80°N.（圖五十四）。80° 之餘切——在所採之縮尺上——將予吾人以極短之半徑，又因波納氏法中各緯綫均爲同心圓，此等綫均將與所選擇緯綫之曲度同形。若此緯綫爲 80°N，各緯綫之半徑將短至使變歪或"壓縮"地圖之形狀。若在另一方面，吾人選擇 40°N 爲標準緯綫（圖五十五）吾人開始時將有一較長之半徑，又以所有其他緯綫均係同形，故結果所成之圖將少受"壓縮"。

此二圖所示均爲縮尺 1/160,000,000 之圖網，其一爲選擇 80°N 之緯綫所支配，另一則爲 40°N。



第五十四圖　波納氏圖法上之亞洲，選取之標準緯線為 60°N

第五十五圖　波納氏圖法上之亞洲，選取之標準緯線為 40°N

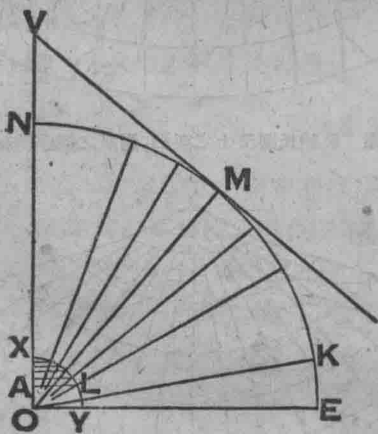
此選取支配其他各緯度曲度之緯綫將以不同之情形互異。普通凡地域之主要部分愈近於赤道，選擇之緯綫卽愈低，反之愈近於兩極之區

域，其選擇之緯度即當愈高。〔註一〕

波納氏圖法為歐洲，亞洲，北美，南美，澳洲，及其他大面積地圖所常用。若緯度與經度並無廣大延伸之區域，則此法極為適用，但因趨向於地圖之邊緣，經綫對緯綫之斜度增加，故形狀之改歪甚大。因此亞洲以波納氏法示之並不如等積方位法之佳良（比較圖五十四及五十五與第八圖版）。

圖學作法

在五十六圖中，設NME代表依縮尺之地球之一象限(quadrant)。

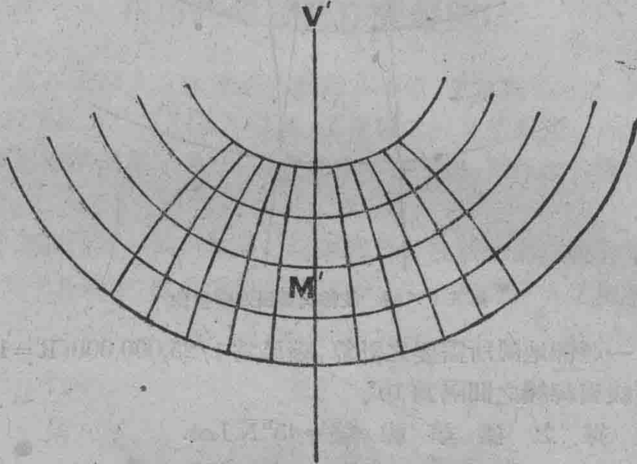


第五十六圖　波納氏圖法之圖學作法

設經綫及緯綫為 10° 之間隔，則如在簡單圓錐法然，割取 OK，與 OE 作 10° 之角。以半徑 KE，繪 XLY 弧。既選定地圖之標準緯綫，並已用量角器割分之，又依所需要之其他緯綫，繪綫如 AL 平行於 OE。然後以半徑VM繪一弧，自中央經綫向外正確分割之。（在圖五十六及五十七中，50°N 為標準緯綫。）於是在中央經綫上自M′點向外正確分割之

〔註一〕 其後將知在近赤道時，吾人將屆波納氏法之限度——一名正弦曲線法（Sinusoidal），另一方面，在近於極區時，吾人將趨於威納爾法（Werner's P.）——此法為以極為標準緯線之普通波納氏法。

（其分段等於 KE）。經此等點以 V′ 爲中心繪同心圓。今應用 AL 等分段，正確分割各緯綫。然後經過各緯綫上相同之點繪畫經綫（圖五十七）。



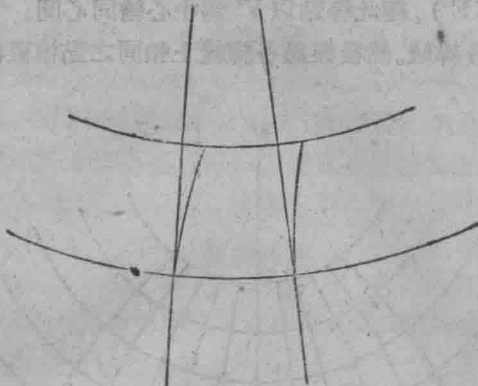
第五十七圖　波納氏圖法之展開

三角作法

選擇一緯綫，使其曲度適合於繪畫之區域；以 R 乘緯度之餘切之半徑繪作之。中央經綫爲一直綫，並如簡單圓錐法分割之 ($2\pi R\, d$)。〔註一〕其他緯綫爲與標準緯綫之同心圓，並通過中央經綫上旣得之點。各緯綫，包括選擇支配各緯綫之曲度者，均視如標準緯綫，並正確分割之 ($2\pi R \cos \text{Lat.}\, d$)（見本頁之下註）；經各緯綫上之相當點繪平滑之曲綫卽得其他經綫。

此圖法爲一等積圖法。試研究其中之一小部分（圖五十八）。緯綫間之垂直距離均係正確（彼等均爲同心圓）又緯綫之本身均正確於縮尺。事實上，地球儀上包圍於二緯綫及經綫間之正方形已使之等於投影上依縮尺等底及等高之平行四邊形。

〔註一〕 d＝緯度或經度之間隔，以地球儀全圓周之分數表示之。



第五十八圖　波納氏圖法之等積性

例　一亞洲地圖所需要之計算，縮尺為 1/25,000,000(R=10″)。

經綫與緯綫之間隔為 10°

選擇之標準緯綫 = 45° N Lat.

投影上標準緯綫之半徑 = R cot 45°

$= 10''$

中央經綫上緯度 10° 之間隔 $= 2\pi R/36$

$= 1''.7453$

標準緯綫上經度 10° 之間隔 $= \dfrac{2\pi R\cos 45^\circ}{36}$

$= 1''.2330$

任何其他緯綫上 10° 之間隔 $= \dfrac{2\pi R\cos \mathrm{Lat}}{36}$

例如　$70^\circ \mathrm{N} = \dfrac{2\pi R\cos 70^\circ}{36}$

$= 0''.5969$

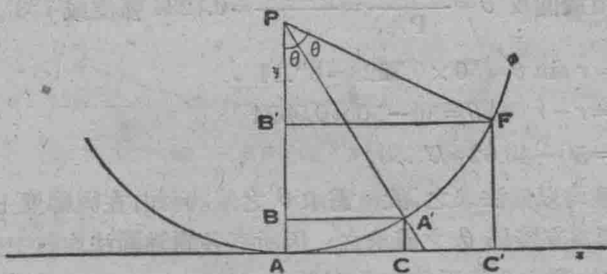
餘依此類推。

第九章

由直角坐標法作圓錐圖法

在大縮尺地圖上直接繪畫緯綫頗爲不便，並常爲不可能，因其半徑太大。然以坐標法作之則並不甚難，而坐標之表最爲有用。此原理所包含者並不更逾於簡單三角法，但若此表不在手邊，則作出各點之坐標頗爲煩厭也。

取中央經綫爲一軸，其另一軸則爲所求交於中央經綫之平行圈之切綫。在五十九圖中，設 P 爲圓錐之頂點，AA′ 爲緯度 ϕ 之標準緯綫上



第五十九圖　圓錐圖法之直角坐標

之一部分。PA（或 PA′）爲繪畫標準緯綫所需之半徑。PA 爲中央經綫。欲求 A′，吾人必須知 BA′ 及 CA′ 之長——即相當於此點之 x 及 y 坐標。APA′ 角亦必已知。

既求得其値，吾人可知

$BA' = PA' \sin\theta = r\sin\theta$。

$PB = PA' \cos\theta = r\cos\theta$。

但 $AB = PA - PB = r - r\cos\theta$。

易言之，A′ 點之坐標爲，$x = r\sin\theta$。

$$y = r - r\cos\theta。$$

θ 之値則由下法求之:

設 AA′ 爲沿任何緯綫上經度 10° 之弧，卽 $AA'=\frac{2\pi R\cos\phi}{36}$。

於是在圓度中之 $\theta=\frac{AA'\text{弧}}{PA}=\frac{\frac{2\pi R\cos\phi}{36}}{PA}$。

一例之計算 縮尺 1/50,000,000 之簡單圓錐法(R=50″)。標準緯綫爲 45°N。

於是 $r=50''\cot 45^\circ=50\times 1{,}000=50{,}000$。

$AA'=\frac{2\pi R\cos 45^\circ}{36}=6''.170$。

然後由於圓度 $\theta=\frac{AA'}{PA}=\frac{6.170}{50}=0.1234$ 弧度或 7°3′。

又 $x=r\sin\theta=50\times 0.1228=6''.14$

$y=r-r\cos\theta=50-50\times 0.9924$

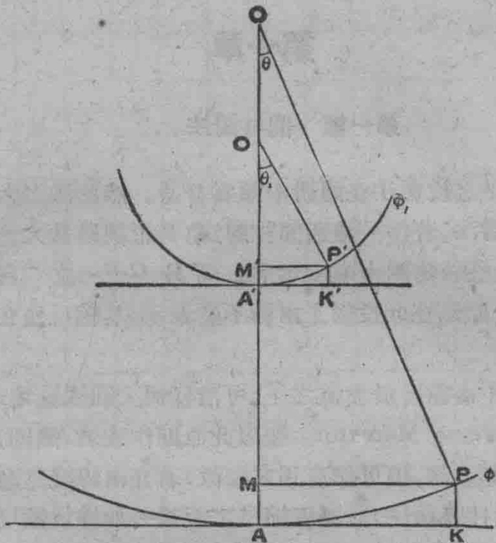
$=50-49.62=0''.38$。

其距離均以此法求之，故僅需求 θ 之值。例如，在同緯度上 A′ 點東 10° 之坐標爲直接倍 θ 之値求之。因所有各圓錐圖法均向中央經綫相對稱，其在他邊之相當點卽可立刻得之。

作其他各緯綫，必先求其在投影上之半徑，然後坐標則依前法計算之。例如，60°N 之半徑爲（在簡單圓錐法上）R cot（標準緯綫之緯度）減 $2\pi R\ d$，此處 d 爲標準緯綫與所求緯綫間之緯度之差，以地球儀全圓周之分數表示之。旣求得沿兩緯綫上之必需點，其近於地圖北邊及南邊者爲更佳，經綫卽可作成如一直綫，穿過各綫上之相當點。

此法在各圓錐法中其經綫爲直綫，緯綫爲同心圓之弧者均甚佳良。其緯綫爲經正確分割中央經綫上之點，及其他經綫上之相同點所繪之綫，因所有各經綫亦均以相同之情形分割者。

在波納氏 (Bonne) 圖法中，先依簡單圓錐圖法之畫法而畫標準緯綫。其他各緯綫亦依前法作之，然則在此情形中，每一緯綫必需繪出。然後各緯綫以正長劃分之，最後經此各點繪畫弧綫，以代表經綫。在多



第六十圖　由直角坐標之多圓錐作法

圓錐圖法中必需更多之作圖工作。因每一緯綫乃依其特殊之半徑而繪出，故必需作出每一緯綫之不同坐標（圖六十）。經綫之繪畫則如波納氏法。

第十章

第一節　圓柱圖法

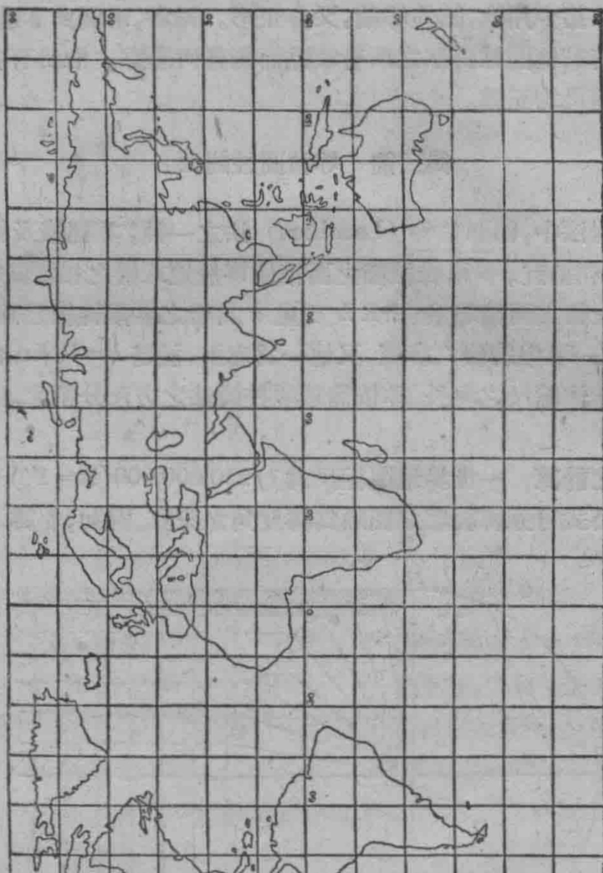
環繞圓柱上之投影法在圖册中頗爲普通。然此法之大多數均爲便宜法或非幾何圖法。若作一透視圓柱圖法，其歪誤確甚大——事實上與心射法相同。此已於第四十圖中示之。A, B, C……之"自然"投影爲A′, B′, C′……。顯然在此投影上兩極不能表示。其縮尺僅在赤道上爲正確。

此圓柱並不必需接於赤道之上，可沿任何大圓圍繞地球儀。橫軸謀開托法 (Transverse Mercator) 卽以此原則作成者。然則，在赤道圖法中略需應用計算方法，但可作有用之修改：若介兩緯綫之面積能正確保持，吾人卽得圓柱等積法；若經度縮尺之歪誤一如緯度縮尺以相同比例之增加，吾人卽得謀開托法 (Mercator) 或圓柱正變形圖法。此爲二種最普通之圖式，但簡單圓柱法，其中各緯綫間保持眞距，及"矩形圖法" (Carte parallelogrammatique) 其中沿兩緯度之縮尺爲正確者，略有理論上之趣味。事實上，此二法實簡單圓錐法與二標準緯綫圓錐法之相等者。

第二節　簡單圓柱圖法或方眼圖法

此爲相當於簡單圓錐法及等距方位法之圓柱圖法。各經綫均分隔如地球儀上者，因此緯綫亦均已正確之距離分隔。在簡單圓柱圖法中，僅需求經綫之長，以正確距離分割之，又繪赤道與之成直角，且當然爲其長之兩倍。其他緯綫均爲直綫，平行於赤道，並與赤道同長。經綫亦均爲直綫，垂直於赤道，並以正常之間隔沿此分割之。地圖網遂組成一羣之方格。

一例之計算　世界之簡單圓柱法圖，其縮尺爲 1/125,000,000。顯然 $R=2''$ 又緯度或經度 10° 等於 $\frac{2\pi R}{36}=0''.349$（圖六十一）。



第六十一圖　世界之簡單圓柱法圖

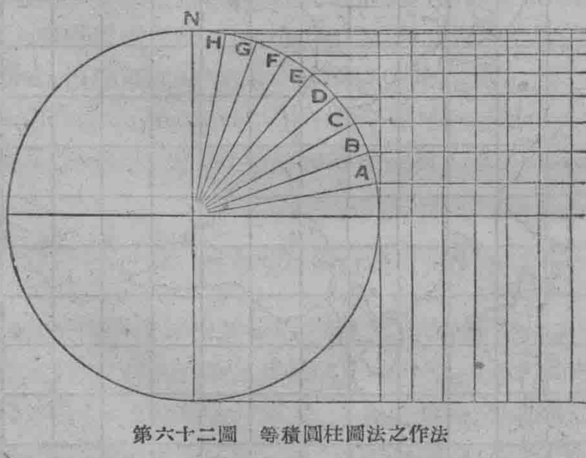
此圖法甚少用途，既非等積，又非正形。再者，兩極與赤道同大小，因此此法有其他圓柱圖法之所有缺點而無任何優點。沿所有各經綫及赤道上之縮尺均正確。

第三節 等積圓柱圖法

在此圖法中，即蘭伯特 (Lambert) 法之一種，其經綫及緯綫均爲直綫，並互相垂直。但兩緯綫間之面積使等於地球儀之相當區域。今已知地球儀上帶之面積等於 $2\pi R h$ 此處 h 爲帶之界限緯綫之垂直距離。若ϕ爲帶之一界限緯綫之緯度，又他一爲赤道，於是 $h=R\sin\phi$。

赤道爲依縮尺之眞長，並依簡單圓柱圖法之方法分割之。兩極亦與赤道同長。

一例之計算 一世界地圖縮尺爲 1/250,000,000(R＝1″)（圖六十二）。自公式可知緯綫間之間隔爲緯度角之正弦。例如，北緯 10°（或



第六十二圖 等積圓柱圖法之作法

南緯）距離赤道爲 R sin 10°，或 0″.1736，緯度 20°＝0″.3420，餘類推。故緯綫間之距離離赤道而減小。因地球儀上緯綫之眞距$=\dfrac{2\pi R}{36}$。故顯然經綫上之縮尺已縮小，但此則可以沿緯綫縮尺之歪誤補償之。故在

北緯 40° 上，經度 $10^\circ = \frac{2\pi R\cos 40^\circ}{36} = 0''.1336$，而在投影上此距離則與在赤道上者相同。

因欲保持面積，於是其形狀卽大爲扭歪，其南北方向之壓縮正與東西方向之歪誤相衡也。

此圖法有時用作世界地圖，以示分布。此並非極成功之圖法。

圖學作法

等積圓柱圖法可極易由圖學方法繪晝之。依縮尺繪一圖以代表地球儀，又用量角器分隔緯度之所需間隔之角（圖六十二）。

於是經點 A, B, C, D, E, N 繪綫平行於赤道。此卽爲緯度之平行圈。

經綫則位於如方眼圖法中沿赤道之等距離處（$2\pi R\, d$）此處 d 爲經度之間隔，以地球儀圓周之分數表示之。

第四節　謀開托（Mercator）圖法

此或爲各圖法中之最著名者，因其用於航海之目的與各地圖册中之世界全圖及掛圖。雖此法有某種最大之優點，但負有多種地理上之錯誤觀念。例如，兩極區域之錯誤形態是。當示以此種圖法時，此等區域卽大爲歪誤；南北緯度之大爲增廣，使南極洲之面積伸展遠大於赤道區域。另一反常之著例爲格林蘭與南美洲之比較。在事實上，格林蘭爲南美洲之十分之一，但在投影上似乎更大。

雖謀開托法最適用於航海之目的，其航行之路綫並不易繪出，若非地圖之應用者熟知其限度，困難卽隨之以起。在投影上，所有各緯綫均與赤道等長，故結果緯度離赤道之距離增加，其縮尺亦增大。在事實上，各緯綫上需用不同之縮尺。在他一方面，因地球上各經綫均會於二極，介非在赤道上之東西二點間之最短距離，並非在經過此二點緯度之緯綫上，其在北半球上則在此綫之北，在南半球上則在此綫之南。

此點之數學證明頗不易，但一實用上易於信服之證明則得之甚易。取一大地球儀，選取其近於相同緯度上之二點。沿其共同之緯綫，介其

間引伸一橡皮帶。然後,定橡皮帶之二端,游移其中央之自由部分迄其引伸至最短之時。〔註一〕今卽可知,當觀察在赤道之北時,此橡皮最短引伸卽爲向北移動時,又在南半球則反是。卽地點不在同一緯度上,亦可得相同之結果。此處亦可發現其最短之距離爲圓之一弧,又若此圓完成時,則將完全繞地球儀一周——在事實上卽將爲一大圓。故吾人可得一結論,卽在地球面上介任何二點間最短之距離爲沿其(較短之弧)所經之大圓。

不幸,在謀開托圖法上之大圓路綫鮮爲一直綫。在地球儀上,除赤道及經綫之外,無大圓將割經綫與緯綫於常定之角。此爲一事實,卽在謀開托法上作一大圓殊爲一困難之事。

設吾人自蘇桑泊敦(Southampton)至里約熱內盧(Rio de Janeiro)作一旅行。不必顧慮陸地,吾人將發現,如吾人在地球儀上以橡皮實驗之結果,吾人之旅程將極近馬德拉(Madeira)威得角(Cape Verdes)及伯爾能不各(Pernambuco)。在他方面,設吾人自里斯本(Lisbon)航至紐約,吾人將發現其最短之路綫爲北緯 40° 緯綫之北較佳,此綫幾乎穿過二地。

今必需檢查謀開托地圖上之最短距離。在後節當詳論其作法,此處吾人可注意,卽經綫與緯綫均爲直綫並相交成直角,又當經綫爲等距時,其緯綫所處之間隔離赤道而增加。緯綫之位置乃由此得之,卽緯綫與經綫相交之任何點,(在實用上任何小面積)其各方向之縮尺均相同。易言之,此圖法爲正變形法。故因經綫及緯綫均爲直綫,且成直角,在謀開托航海圖上繪任何方向之任何直綫,均穿過所有緯綫於常定之角,又所有經綫亦成常定之角。此種綫稱之爲"與諸子午綫交切作同角度之綫"(Rhumb line)或"等角航綫"(Loxodrome)。但因在謀開托

〔註一〕一相同之實驗可以彈簧作之。置一片之彈簧介於大約緯度相同之二地之間。——例如,舊金山與東京,——因此彈簧沿其共有之緯線鬆懈休止。執彈簧之一端不動,而緊拉彈簧使其仍經過此二點。彈簧之自由中央部分卽將向外移動。此實驗可在南半球之各地間作之,或經過赤道南北之各地點。在各種情形中,地球儀由彈簧記出之路經,當拉緊時,爲大圓之一部分。

第二圖版　謀開托圖法;大圓線;與子午線交切作同角度之線

航海圖上之經綫均南北縱貫，故穿過之直綫必有一常定之方向。〔註一〕

此爲謀開托圖法之最大優點，亦卽所以應用於航海目的之理由。一航海者，若告以常定之方向航行，但須在航海圖上記其方向，則其路程卽得。再者，沿連續之此種方向航行，則甚易，其角度點則由緯度及經度之方法決定之。

今，已知地球儀上介二地間之最短距離爲經此二地點之大圓之弧。苟稍加思索卽可知沿一圓弧綫航行，若非赤道及經綫，其方向卽隨時變動——顯然爲實際航海上之困難點。然以定向綫或等角航綫連接大圓二端並不甚難。在理論上，結果必使距離些微增加，但並不足產生嚴重之差異。在第二圖版中，設 NY，BCDE，CT 爲 NY 及 CT 間之大圓航綫。若繪連續之弦綫，如 NY—B，B—C，C—D，D—E，吾人卽得四等角航綫，又其航程上之改向必在 B，C，D 及 E 處。顯然，其弦距及弧距並不大異，致使此原則無效。

在實際應用上尙須討論另一點。大多數之大圓航綫並不全在海中。在繪作時，此航綫可在一不可能之狀況下穿割陸地或海面。故各段不同之海程必需獨立繪作，又全航綫卽各段之總和。

今吾人試比較謀開托及球心航海圖之優點。前者直綫爲定向之綫，後者其方向不再常定，但爲眞正兩點間之最短距離。初視之，似後者之利益較大，但心射圖法之過度歪誤減少此特點之價值。就事實上觀之，以後將論及兩極不能表示之於謀開托圖法上，但此點並無多大關係，因其他條件相等時，就實際航海上之觀點言，兩極區域並不爲航海圖中之重要部分。就他方面言，球心航海圖中之歪誤，自地圖之中心以同一之速率，向各方面向外增加。

再，在球心航海圖上，卽作一完全之半球圖，亦不可能，而除高緯度之外，全世界均可示之於謀開托航海圖上。惟此困難點可以環繞之立方體將球心圖展開至某種程度減除之，但其計算頗長且極不易繪作立方

〔註一〕 在任何其他圓柱圖法上介兩地間所繪之直線以同角割所有經線，但此並非等角航線（Loxodrome）。此乃因沿緯線及經線之縮尺相等及經線及緯線相互成直角之故。故謀開托航海圖上之直線爲一方向正確之線。

體各面之航行路綫。〔註一〕反之，謀開托圖法若由表作之則極爲簡易。——祗需以眞距間隔繪作直綫。最後，謀開托法在航海上有如此廣大之應用已成爲超越其他各法之偉大勢力。——此法已成"行動之指針"(Momentum of a start)。

此處僅討論作圖法之性質。其最大之難點卽在置緯綫之位置，使其在任何點沿經綫及緯綫之縮尺均屬相同。謀開托法確可當"圓柱正變形法"之名義下之一圓柱圖法。

討論此進程之最簡單方法在加納博士 (Dr. Garnetts) 之"地圖投影法小册"(*Little Book on Map Projection*)中述之。若吾人取一極狹之三角形布片——卽地球儀上兩經綫間之一帶——又將其展平之。吾人卽得一極似此帶之等積地圖，因若此三角形布片在極狹時，則平放後將無大歪誤。在另一方面，較大之三角形布片卽將有相當之歪誤也。設吾人討論其狹者。其展出之三角形布片之長爲地球儀圓周之半，又假定無歪誤時，緯綫及經綫之縮尺卽均眞實。但若吾人使北或南緯 90° 之縮尺與赤道上者相等，吾人必能想像極 (Pole) 將在東西方向伸展至三角形布片之赤道部分同寬。

此處僅論及問題之半。當以此法伸展極之面積時，則南北方向亦將有同樣之伸展，因此，例如北或南緯 60° 之三角形布片東西方向之長加倍時，該緯度上三角形布片一極狹之條帶亦必於南北之方向中加倍。如是加倍伸展之結果必使投影上之面積太大。試研究北緯 60° 之條帶：此緯綫適爲赤道長之半，故使其等長時則縮尺必須加倍。在同時此眞緯綫之本身（在實際上爲一極狹之條帶，而非一綫）必在南北方向中加倍，以保持彼與經綫縮尺之比例。旣已增加經綫及緯綫之縮尺二倍，其面積顯然爲四倍。

向南或北行愈遠，其伸展愈變大，因此面積卽巨大增加。事實上，在緯綫 75° 時，面積增加約爲十五倍，在緯度 80° 時約爲三十三倍。故在近兩極時，其延伸將至極大，致表示極高之緯度實無用處。

因在每一點，其各方面之延伸均相同，故地域之形狀已放大而非變

〔註一〕 見頁 98。

形。設吾人在地球儀上有一在北或南緯 40° 之小方形,並在各方向伸展 x 倍,吾人將仍得一方形。故此圖法爲正變形法。此爲極重要之事,卽說明正變形法之限度。設研究非在赤道上之小區域,則極顯明,在投影上此面積已展廣。同理,任何其他小區域亦將展廣。但吾人若取不在同緯度上之二區域,則此者之展廣大於或小於彼者。又此者之縮尺遂不適用於他者。

故嚴格言之,正變形僅適用於點;在實際上可應用於極小之區域。吾人可避免下述之易見之矛盾——卽吾人可謂南美洲大於格林蘭九倍或十倍,但在投影上格林蘭則大於南美洲。但若論及形狀時,卽在謀開托圖上格林蘭之一小區域之正確,固一如南美洲一相當小區域,此可確言者。

繪作謀開托圖法之一方法

產生一普通之公式以繪作此圖法頗爲不易。然則若分別考慮緯度之每一緯綫,求特殊緯綫與赤道間之距離實爲一簡單之事。已知在任何點緯度縮尺之歪誤適等於經綫之縮尺。但緯度之縮尺代之以使與沿赤道上之縮尺相等。於是,若吾人可求得任何緯綫已增加若干,吾人卽可在投影上獲得該緯綫離赤道間之距離之方法。

因每一緯度之平行圈與赤道等長,其緯度縮尺之歪誤視緯度之正割而不同:

設 x 爲其縮尺;

$$於是\ x=\frac{緯綫之投影長度}{眞長}$$

$$=\frac{2\pi R}{2\pi R\cos \mathrm{Lat}}=\frac{1}{\cos\ \mathrm{Lat}}=\sec\ \mathrm{Lat}。$$

故一正割之表將直接示在任何緯綫上歪誤之數目。然則,爲欲求得在投影上特殊緯綫與赤道間之距離,則自赤道至該緯綫之正割之值必須求得,又以 $\frac{\pi R}{180}$ 乘其得數,此處 R 爲球形依縮尺之半徑。

(注意——$\frac{2\pi R}{360}$ 或 $\frac{\pi R}{180}$ 爲赤道上經度一度之長。)

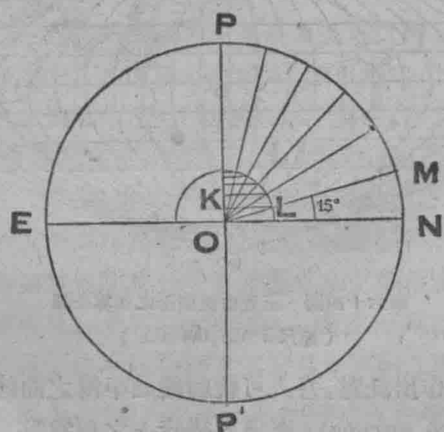
第十一章

撒遜佛蘭斯特德或正弦曲綫圖法

此爲波納氏圖法中之一特殊方法。赤道爲標準緯綫並爲一直綫正確於縮尺，中央經綫爲一直綫垂直於赤道等於其長之半。中央經綫亦以正長分割之。緯綫均爲直綫並等距，並均爲經綫正確分隔者。經綫爲弧綫，經數緯綫上之相當點繪畫之。如波納氏法有相同之理由，此圖法爲一等積法。全球均可表示，惟其形稍奇。一最大之缺點爲趨向於地圖之邊緣，其經綫對緯綫極斜，故結果形狀大爲改變。此法常用於非洲，大洋洲，南美洲及有時之澳洲。雖此法對後者並不甚適合。

圖學作法

依縮尺繪一圓以代表地球儀。用量角器分緯綫及經綫間所需要間隔之角（在六十三圖中爲 15°）。於中心 O 以 MN 半徑繪一弧。然後繪畫每一角之平行綫如 KL。



第六十三圖　正弦曲線圖法之圖學作法

繪一綫 E'N'（圖六十四）以代表地圖上之赤道。在此綫上之 O 點

繪一垂綫 POP′。沿 POP′ 及 E′N′ 記取等於 MN 之分段。因赤道及中央經綫之分段均相同。在 POP′ 上經此等所得之點繪平行綫，卽為實際上之緯綫。沿此等綫——自中央經綫向外工作——記取等於 KL 等之分段。完成此投影，繪曲綫經過在緯綫上之此等點——卽為經綫。

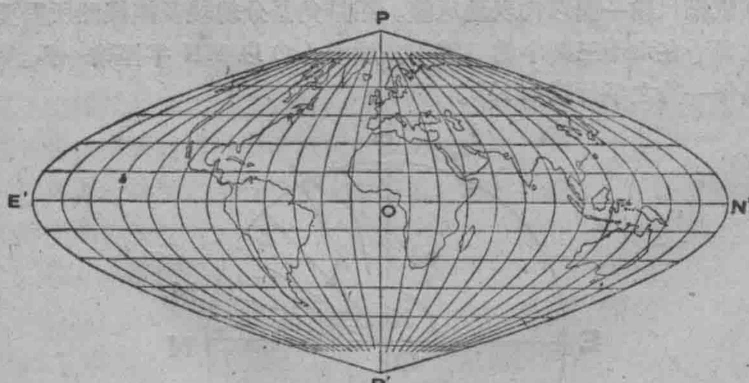
三角作法

全球之展開，縮尺為 1/125,000,000。

赤道之正確之長為 $2\pi R = 12.56$ 吋。

中央經綫之正長為 $\pi R = 6.28$ 吋。

以眞長及同法分割赤道及中央經綫，若經綫及緯綫為 15° 間隔，於是在此綫所求之間隔為 $2\pi R/24$ 吋。然則在赤道上有如在中央經綫上兩倍之間隔。在地球儀上緯綫之長為 $2\pi R \cos \text{Lat}$，因此在任何緯綫上經度 15° 為以 24 除此數得之（圖六十四）。



第六十四圖 正弦曲線法上之世界全圖

（縮尺 1/428,000,000）

既為各緯綫作出此點，吾人可繪經綫如平滑之曲綫，該綫事實上卽為正弦曲綫 (Sine curves)，穿過各緯綫上之相當點。〔註一〕

〔註一〕 第六十四圖中字母爲圖學作法所言及，此圖之本身則由三角法作之，故其字母僅可用於普通之透導。

第十二章

圖法之選擇

選擇地圖之投影法時有二事須考慮:

1. 何者爲地圖之目的?

2. 何者爲表示區域之廣袤?

圖法當實踐此二討論點。苟舉不同之例討論之,此事卽可明瞭。若吾人需要一地圖以表示世界主要產米區域之分布。一等積地圖將最爲適用,因可使讀者得一瞥各區域之比較大小之觀念。但必需要一全世界之地圖。則尋一全世界之適當等積圖法,其問題卽可解決。其主要之產米區域爲熱帶及副熱帶地帶,故若南北之高緯度區變歪,或卽空出,亦無重大關係也。同時亦常需得一易於繪畫之圖法。故當選擇等積圓柱法。各經綫及緯綫均爲直綫,赤道兩旁 30° 以內形狀之歪曲並不甚大(所有主要之產米區域均包括其內),雖兩極區域東西之歪誤巨大,然此並不影響地圖所需之眞正目的也。

但此種考慮並不適用於世界主要產麥區域之圖。此區域幾全在溫帶緯度及兩半球之中。其面積又極廣大,故可能時,其形狀應以佳良之理由維持之。在此情形中,圓柱投影法卽不適用,因其變歪處正在溫帶緯度中也。故其選擇當在正弦曲綫法,毛爾威得法(Mollweide)及安托夫法(Aitoff)之間。考慮其比較之優點及缺點之後,或選取毛爾威得法,〔註一〕因其較安托夫法易繪,又較正弦曲綫法表示一較佳之形狀也。在圖册中,亦應用其他圖法——常爲圓柱法之數種圖式——但該法並不似所謂盡如其美也。〔註二〕然如要求一國或一洲之等積地圖(例如一美國之行政地圖,或一示美國之玉蜀黍分布圖)則制馭吾人選擇之討論卽不能再行應用。一圓錐或修改圓錐法將最爲適用。此處至少有四

〔註一〕 毛爾威得及安托夫法在第二篇中討論之。

〔註二〕 在圖册中,尤其爲經濟地圖,劃一似爲分布地圖之主要因素。一部分因此理由故多用高爾(Gall)之平射圖法。

種可能之圖法：二標準緯綫之簡單圓錐法，一標準緯綫之等積圓錐法，亞爾勃斯（Alber）等積圓錐法，及波納氏法。其中第一法並非嚴格之等積法，若特別需求面積之相等時，則此法將不採用。但僅求近似之相等，則其繪法之簡單遠過於其缺點。在二圓錐等積圖法中，可採用亞爾勃斯法，因其縮尺沿兩緯綫相正確以代替一綫，又因其錯誤較一緯綫之等積圓錐法有更佳之分布。在該圖法中緯綫爲圓弧，又其經綫爲直綫。此法不常應用於現今之圖册中。然而除去數學之計算，其實際之作法頗易。今日波納氏圖法或被應用；因在一不較美國或歐洲更大之面積中，猶無極大變形，此點則頗爲著稱。再者，沿所有各緯綫之縮尺均甚正確，又以歐洲及美國在此方向廣展最大，故該地最適用於此圖法。然亞洲在此圖法上並不佳良，因其東西及南北之廣展太大，因此趨向於西北及東北角時，其經綫及緯綫相互間斜歪極大。故在該區域有極大之歪誤。是以在亞洲之等積地圖中，蘭伯特氏（Lambert）之等積方位圖法較爲適用，然此法之繪畫及計算均較難。

小面積如不列顛羣島，法蘭西等則極少困難。其廣袤甚小，故在普通地圖上，極難於尋出相似諸圖法間之差異。爲此理由，其最易於繪畫之圖網爲普通所採用。其有二標準緯綫之簡單圓錐法，爲最適用，但不常應用耳。

方位圖法通常應用於兩極區域。事實上，吾人可稱若其他條件相同時，則圓柱圖法適用於赤道區域，圓錐圖法適用溫帶區域又方位圖法適用兩極區域。但爲世界全圖——除謀開托法及可用之等積圓柱法之外——其圓柱網綫均不甚適用。便宜圖式亦常所採用——毛爾威得法或安托夫法。前法則有時展開爲〔註一〕兩半球。若地圖僅包括半球以內之事物，其切點在赤道上或除兩極以外之某點，則方位圖法亦頗適用。

有多數地圖作爲特殊目的者，對此必須有他種之討論。謀開托法卽其最著之例。數種極圖亦歸入此類。爲探險之目的則採用等距方位圖，因各經綫之距離均甚正確，亦爲對極之正向綫。因兩極區域均包括於離

〔註一〕 此法之一例見巴托羅繆（Bartholomew）牛津地圖。

極 $23\frac{1}{2}^{\circ}$ 之半徑之圓內，面積之錯誤存在極少，而在等積方位圖中，此種錯誤亦祇有極小點之存在也。

因在陸上及海上之空運極為簡單，故其中所需要之大圓路綫更較其他之運輸方法為甚。在此點上，因此球心或大圓圖法（Great circle projection）有特殊之價值。球心圖法之主要缺點為離地圖之中心愈遠，其縮尺之歪誤即愈加速。此為一重大但並非不能補救之點。若繪一連續之球心圖法，則大圓路綫可繼續於此頁及彼頁之間，一如九八頁所述之立方體展開法。此種幾何之展開並無限止：地球可在任何邊數之立體上展開，而每"邊"為其相對區域之球心圖法。再者，設將世界展開，使一大城市或一重要之空站位於或近於每邊之中心，愈近中心愈佳，因此種地方宜成為已知地區之航空或商業活動之中心，其理由頗顯著也。〔註一〕

若一地圖需表示一鐵路如開普（Cape）至開羅（Cairo）綫，則必需研究另一點。此鐵路實際上延伸於赤道南北等距之處；此路綫幾正對南北，與經綫相差甚微。故需作一南北方向等距之圖，則可採用等距方位圖法，以其中心位於赤道上之格林威治以東第三十三經綫交割之處。〔註二〕

東西方向之距離亦易於表示。在各圓錐圖法中，其縮尺至少沿一緯綫正確。故欲表示外西伯利亞鐵路及其兩旁之小區域，則簡單圓錐法最為適用。在簡單圓錐法上該緯綫（此例中為北緯 55°）之曲度與二標準緯綫圓錐法同一緯綫之曲度並無大異，與波納氏法比較亦相同。但外西伯利亞鐵路離五十五度緯綫略大，為此若用二標準緯綫圓錐法或更佳。若在加拿大與美國邊界之情形中，緯度之一平行圈或採用此邊界或極鄰近，則用簡單圓錐法亦甚佳。

人口之表示為一重要之事項。在極大之區域中，面積之相等似為表

〔註一〕英國皇家空軍隊已採用謀開托圖法為航空圖，其理由與海洋航運上應用此圖者相同。

〔註二〕正弦曲線法亦同等佳良，其中央經線為東經三十三度。

示之主要點，因此可易於比較所繪畫之區域之大小。在大縮尺之小區域之中，尙有討論之點甚多，而人口之表示又爲一極難之事。在一印度洋之四周圖中，印度及澳洲西北部之面積可表示眞實，閱者可立卽計算其人口之分布及密度。但若同區域之主要風向及洋流表示於此圖時，一等積圖法將不再適用。方向爲其最重要之點，故謀開托圖法最適用於此目的。

最後，關於表示全半球之地圖尙有一詞可贅。凡各圖册中均有此種世界之圖，但除便宜之理由外，尙無特殊之理由可資說明。略有缺點之球狀圖法仍所常用。若需一半球圖，則彼有某種一定特點之圖法當較佳。毛爾威得法可以採用，如巴托羅繆之牛津地圖册（Bartholomew's *Oxford Atlas*）卽是，等積方位法或等距方位法亦甚佳。作世界地圖，則以兩半球之表示有此種優點——形狀並不大爲變歪，如在完全之毛爾威得法或安托夫法是。在他方面，兩半球間之罅隙則甚拙劣。

第 二 篇

第一章

第一節　球心圖法之斜軸圖式

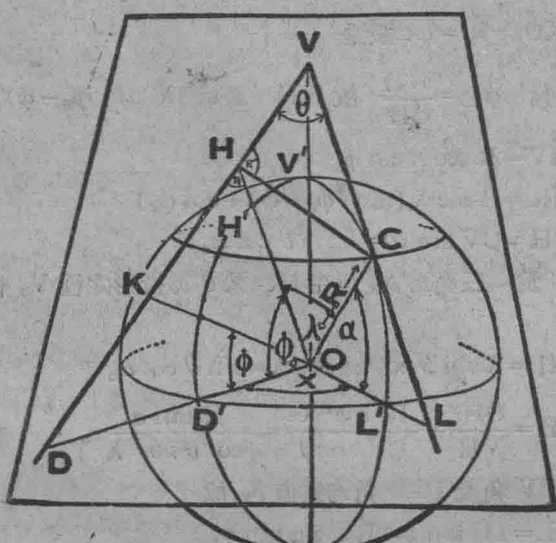
前述球心圖法之二圖式頗爲簡單。斜軸圖式則不然，且頗爲煩勞也。然瞭解此繪圖之方法，固無需高深之數學知識，其困難在當繪畫圖網之前需有一繁瑣之計算。

作投影之平面，可切於地球儀上之任何點，而不在兩極及赤道。若稍加思索將知經綫，卽大圓，將再爲直綫，又其緯綫將爲凸向於赤道之曲綫。

在第六十五圖中，平面 DLV 切地球儀於 C。

設 α 爲 C 之緯度。

可知 LCV 爲經綫 L'CV' 之投影，又 V 爲投影上極之位置。在他方面，L 爲 L' 點之投影，該點在赤道之上。赤道卽大圓，亦必爲一直綫。



第六十五圖　球心圖法之斜軸圖之作法

再 DHV 爲經綫 D'H'V' 之投影。

經綫 L'CV' 及 D'H'V' 間經度之差爲 x，又此符號用於此章中表示自中央經綫 L'CV' 測量所得之經度。

作法中之第一步爲繪一垂綫自 C 至 VD，遇 VD 於 H，此爲在任何經綫上之一點，在此例中爲 DHV。〔註一〕

於是，因 C 爲切點，又 O 爲投影之中心，則平面 HCO 將沿 HC 綫垂直於切面，又 DV 綫將垂直於此平面 HCO 之上，因 CH 爲垂直於 DV 所繪成。故 VH 垂直於 HO，在平面 VHO 之上，即 VHO 角爲一直角。

HCO 爲一直角三角形，其直角在 C 點，又 $\tan\lambda=CH/R$，此處 $R=CO$，即地球儀之半徑。

三角形VOD之直角在O點，又因OH垂直於DV，$OH^2=VH\times HD$。

設 $HOD=\phi_0$；於是

$$\tan\phi_0=\frac{DH}{OH}=\frac{OH}{HV}=\frac{DH}{R\sec\lambda}=\frac{DH\cos\lambda}{R}。$$

再，設 KOD 角 $=\phi$；於是

$$\tan(\phi_0-\phi)=\frac{KH}{OH}，\text{故 } KH=R\sec\lambda\tan(\phi_0-\phi)。$$

今 $HV=R\sec\lambda\cot\phi_0$

$VK=R\sec\lambda\,[\tan(\phi_0-\phi)+\cot\phi_0]$

又 $CH=CV\sin\theta=R\sin\theta\cot\alpha$。

（VHC 爲一三角形，直角在 H；又 θ 爲投影之極 V，由經度對成之角。）

但因 $CH=R\sin\theta\cot\alpha$；$\tan\lambda=\sin\theta\cot\alpha$。

$$DH=\frac{OH^2}{VH}=\frac{R^2\sec^2\lambda}{CV\cos\theta}=\frac{R\tan\alpha}{\cos\theta\cos^2\lambda}。$$

又因 DLV 角及 DLO 角均爲直角，故

$DL=LO\tan x=R\sec\alpha\tan x$，

〔註一〕亦見於第三圖版。

又 $LV=\dfrac{R}{\sin\alpha\cos\alpha}$,

因 $LV=LC+CV$

$$=R\tan\alpha+R\cot\alpha$$

$$=R\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

$$=\frac{R}{\sin\alpha\cos\alpha},\text{ 因 }\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1。$$

最後 $\tan\theta=\dfrac{LD}{LV}$

$$=\frac{R\sec\alpha\tan x\sin\alpha\cos\alpha}{R}$$

$$=\tan x\sin\alpha。$$

既進行至此,其第二步卽在求出各經綫及緯綫所需之交點。此點可由一迂迴之過程得之。

假定吾人需作一球心斜圖法之北美洲圖,其平面切於西經一百度及北緯四十五度之處,地圖之縮尺爲 1/50,000,000,則爲所需求之各點,下列之等式必需完全作出。

(1) 求赤道上經綫間分隔之距離(在此特殊情形中,此點並非眞正需要,惟爲淸晰起見,故加入之。)

$$DL=R\sec\alpha\tan x。$$

例(在此例中當應用四位數字表 (Four figure table) 及對數以縮短計算) 10° 之距離(中央經綫之西或東)。

$\log DL=0.6990+0.1505+\bar{1}.2463=0.0958,$

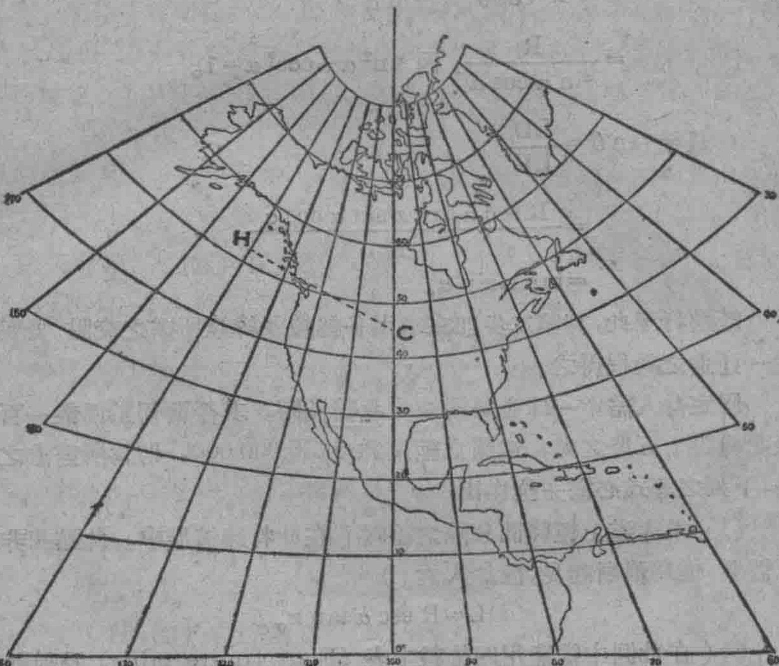
又 antilog$=1.2470$ 吋。

(2) 求 θ　$\tan\theta=\tan x\sin\alpha$。

例　$x=10°$, $\log\tan\theta=1.2463+\bar{1}.8495=\bar{1}.0958$, 又 $\theta=7°6'$。

(3) 求 CH　$CH=R\sin\theta\cot\alpha$。

例　中央經綫東或西經度 10° 之 CH。



第三圖版　北美洲之球心斜軸圖法

（縮尺 1/142,000,000）

$\log CH=0.6990+\bar{1}.0920+0.0000=\bar{1}.7910$,

又 antilog$=0.6180$ 吋。

(4) 求 λ　$\tan\lambda=\sin\theta\cot\alpha$。

例　x(long.)$=10°$; $\log\tan\lambda=\bar{1}.0920+0.0000$, 又 $\lambda=7°3'$。

(5) 求 DH　$DH=\dfrac{R\tan\alpha}{\cos\theta\cos^2\lambda}$。

例　當 $x=10°$, $\theta=7°6'$, 又 $\lambda=7°3'$。

$\log DH=0.6990+0.0000-(\bar{1}.9967+\bar{1}.9934)$

$=0.6990-\bar{1}.9901=0.7089$。

又 antilog$=5.1160$ 吋

(6) 求 $\tan\phi_0$　$\tan\phi_0=\dfrac{\cos\lambda\, DH}{R}$

例　當 $x=10°$, $\lambda=7°3'$, 又 $DH=5.1160$ 吋。

$\log\tan\phi_0=\bar{1}.9968+0.7089-0.6990$

$=0.7057-0.6990=0.0067$,

又　$\phi_0=45°26'$。

(7) 求 KH　$KH=R\sec\lambda\tan(\phi_0-\phi)$。

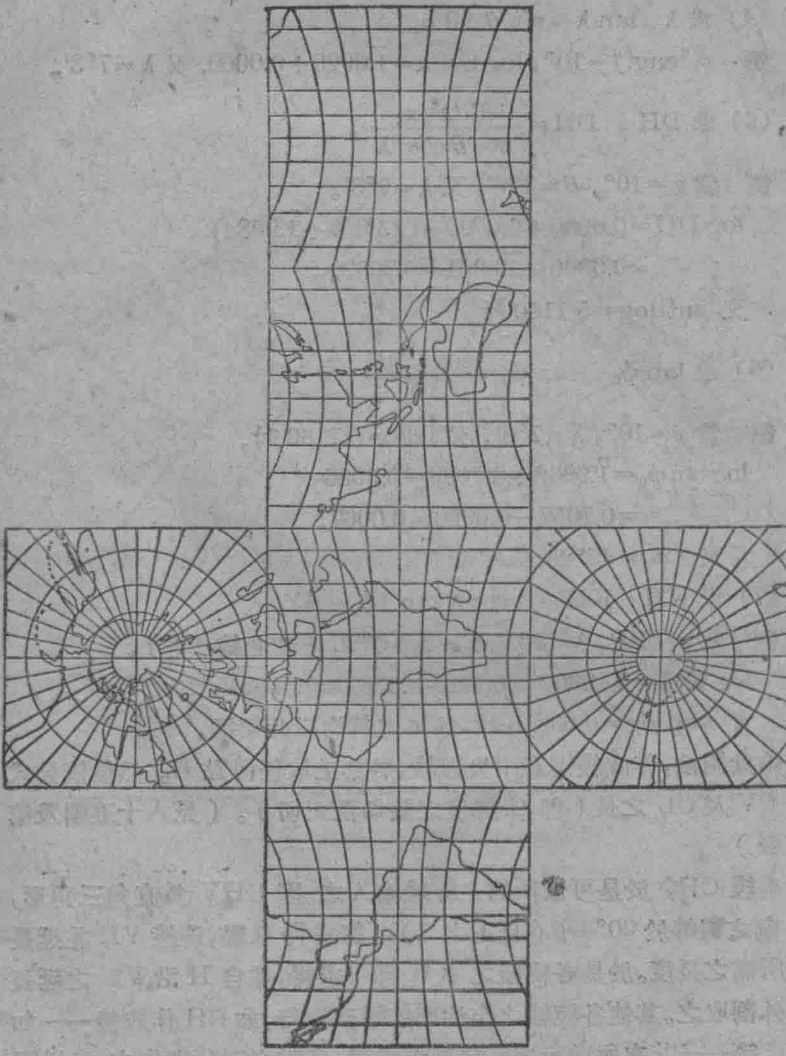
例　當 $x=10°$, $\lambda=7°3'$ $\phi_0-\phi=0°26'$（卽北緯 45°）。

$\log KH=0.6990+0.0032+\bar{3}.8787=\bar{2}.5809$,

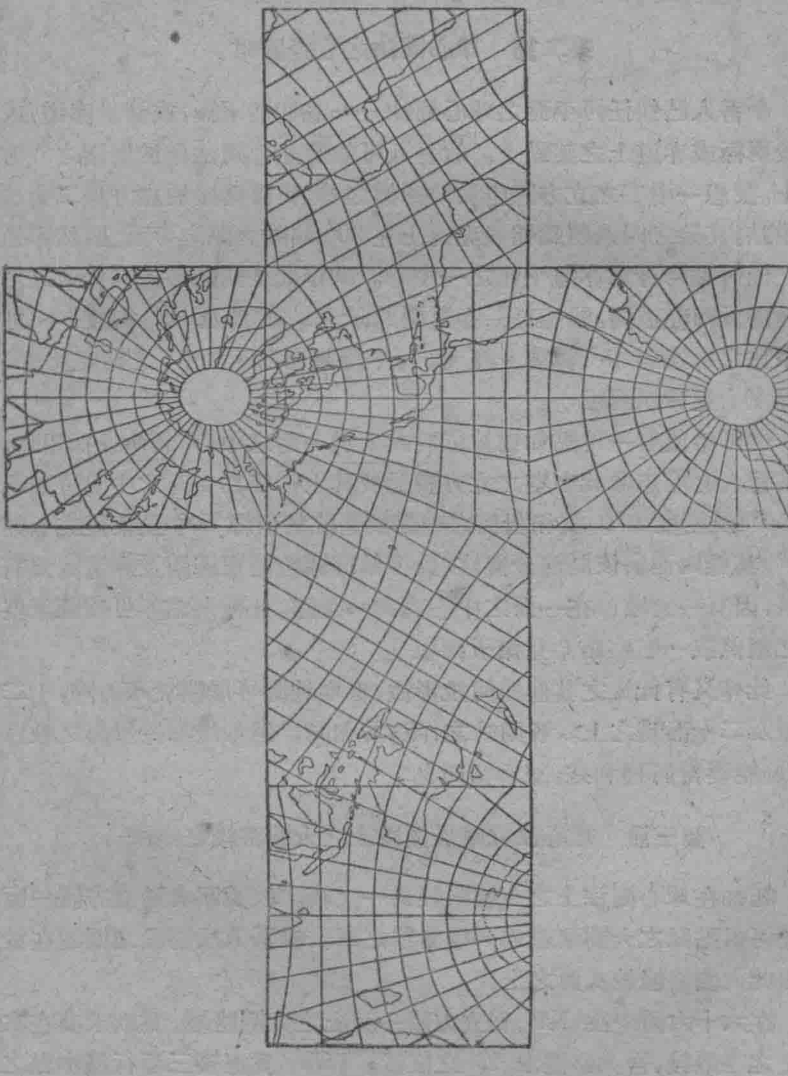
又 antilog$=0.03810$ 吋，各 x 之值均以此類推。

繪此圖法，作直綫代表中央經綫，於其上取任何點 C。然後依公式求得 CV 及 CL 之長（卽 C 緯度之餘切及正切）。（見六十五圖及第三圖版）

垂綫 CH，於是可依所需之經綫繪入之。因 CHV 爲直角三角形，在 C 處之角等於 $90°-\theta$（見上之 2）。旣求得 H 點，連接 VH 並延長之至所需之長度。於是各緯綫之 KH 卽可求得，並自 H 沿 VH 之延長綫向外割取之。其他各經綫之作法亦依同法進行，如 CH 作成後——如爲 20° 等——其次所進行之經綫卽可求得。各點必需分別作之，然以圖法向中央經綫對稱，故可立卽割取中央經綫東西諸經綫之諸點，且對此



第四圖版　球心圖法之立方體展開，當此立方體切於兩極及赤道上之四點



第五圖版　球心圖法之立方體展開，當此立方體切於北緯 30° 及西經 100°

俱屬等距，可減少些許之麻煩也。

斜軸圖法之優點與極圖法及赤道圖法者相同。（可參看）

第二節　球心圖法之立體展開

今吾人已知任何平面之球心圖法——或切於兩極，或切於赤道，或切於兩極或赤道上之某點上。故吾人可能將球心圖法作於周圍之立方體上。設想一中空之立方體包於地球儀之外，使兩極接於立方體二對邊之中點。其餘之四邊將為切於赤道上在 90° 間隔之點之平面。顯然赤道上之任何點均可為赤道平面之一中心。欲作此全圖則必需二普通之球心極圖及四赤道圖。顯然每一赤道圖將示 90° 緯度及 90° 經度——即在中點之每邊有 45° 緯度及經度。每一極圖面將示 360° 之經度及 45° 之緯度（見第四圖版）。

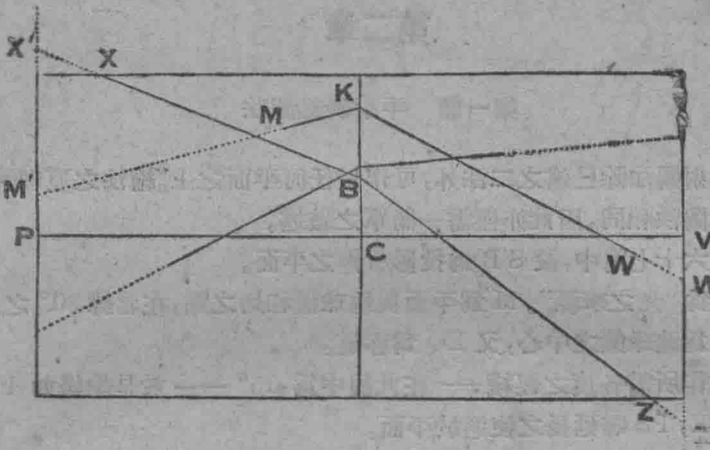
但可希望有一地點如倫敦位於或近於一面之中心。若倫敦採用時，於是吾人必能想像此中空之立方體置於其上，使其一面之中點位於北緯 50° 及經度 0°。其相對面之中點於是位於南緯 50° 及東經或西經 180°。其餘四面將依同法分置之。此種整理顯較簡單極圖及赤道圖為有價值，因有一大城市在一面之中心實為一優點。此種地點亦可為國家空軍之總部或一航空站（見第五圖版）。

此外又有此式之其他幾何投影法，世界地圖可展開於八面體，十二面體及二十面體之上。各圖式之作法均相同，但如增加投影面之數目後，眞能獲得何種利益，誠為疑問也。

第三節　球心法立體展開圖上之大圓路綫之作法

既知在球心圖法上之大圓路綫為一直綫。故說明介於立方體一面上任何兩點間之大圓路綫為一極簡單之事。但吾人所討論之問題在於繼續此大圓路綫於次面之上。

在六十六圖中設 XB 為立方體一面上之大圓路綫。為欲求其在次面上之連續綫，吾人必需求 Z′ 之位置。PCV 為連接三平行邊中點之綫。由對稱法 Z′ 必在 PV 之下如 X′ 在其上然。在此應注意者即無須限



第六十六圖　球心法立體展開圖上之大圓路線

定立方體之邊，彼可延長至所需之遠處。

若需求介於在二鄰邊上任何二點如 M 及 W 間之大圓路綫，則一點 K 必需在共同邊上求出，其位置在使截段 PM′ 與 VW′ 相等。K 點則由試驗得之。

第二章

第一節　平射斜軸圖法

平射圖法除已述之二法外，可作於任何平面之上。繪法之原理適與其他諸圖法相同，因此亦僅需一簡單之敍述。

在六十七圖中，設 S'B 爲投影所作之平面。

P 爲"光之來源"。M 爲平面與地球儀相切之點，在北緯 30° 之上。

O 爲地球儀之中心，又 EQ 爲赤道。

繪作所需各度之經綫——在此圖中爲 15° —— 於是繪綫如 PQ，PN，PE，PS 等延長之使遇於平面。

顯然，在此圖式中，北極在 M 之北 60°，故其在平面上離 M 之距離爲 $2R \tan 30°$（見頁三十一）或由幾何法，其距離爲 MN'。

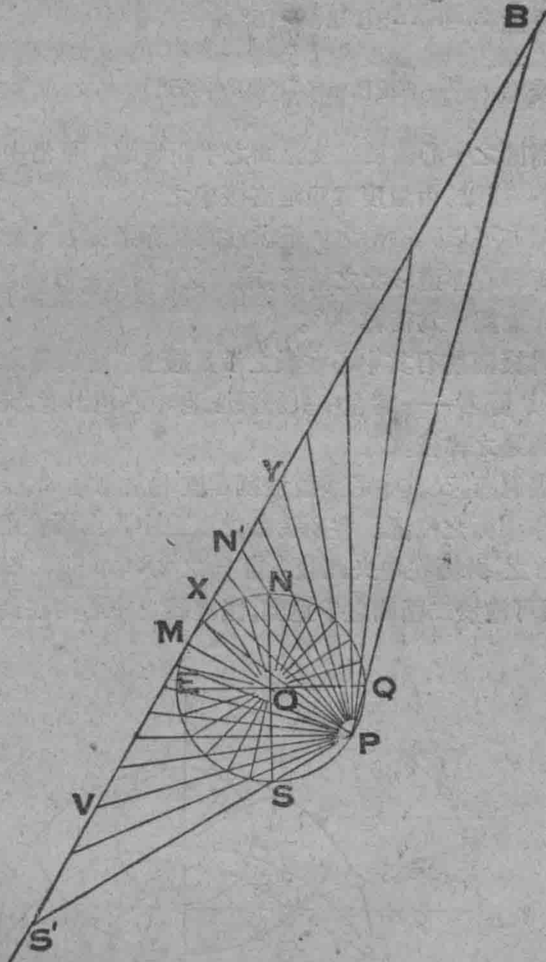
同理，在平面上任何點離 M 之距離 $= 2R \tan\frac{1}{2}d$，此處 d 爲 M 與所求之點間緯度之差。

例如，南緯 60° 之緯綫離 M 爲 90°。故在距離 $2R \tan 45°$ 之處，或由幾何法，爲 MV。

故作緯綫，先依所需之縮尺繪一圓以代表地球儀（圖六十八），繪於一垂直之軸綫之上。在此圖式中圓球之中心爲北緯 30°，又其極則自中心 O 割取等於 $2R \tan 30$ 之距離求之。

其他緯綫均依同法記於垂直軸之上，該軸綫亦卽中央經綫。

其次之問題在求此圓之中心。由幾何法此半徑可由如六十七圖之圖解中得之。例如，若需求北緯 60° 之中心，吾人必需考慮此緯綫在平面上之交點，卽在 X 及 Y。顯然此所需之半徑必爲 $\frac{1}{2}$XY。但言及第二圖解時，則頗爲不便，惟直接求此半徑，則並不難。任何緯綫之第一交點離地圖之中心之距離爲——已如上述——$2R \tan\frac{1}{2}d$。第二交點離中心



第六十七圖　平射斜軸圖法之作法

之距離爲 $2R\tan\frac{1}{2}$（地圖中心離極之角距＋所求緯綫離極之角距）例如北緯 45°。

第一交點…………$2R\tan\frac{1}{2}15°$

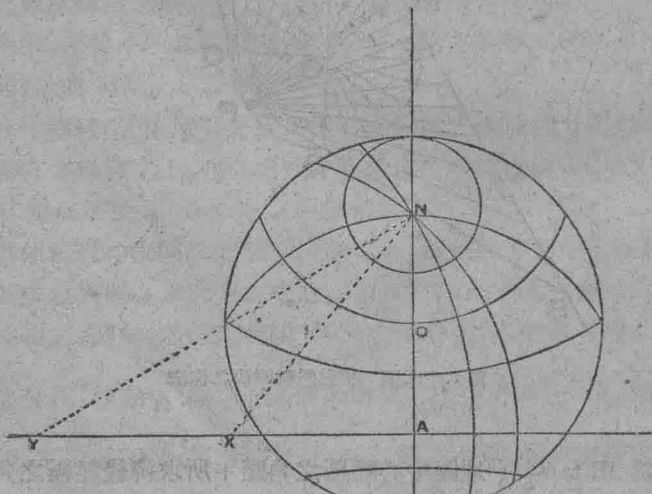
第二交點…………$2R\tan\frac{1}{2}(60°+45°)$

於是所需圓之中心位於二交點間之半距離處，可沿中央經綫之延長綫，自其第一交點，由量度其距離直接求之。

其他緯綫亦可以同法得之。惟需注意在赤道南若干度之緯綫一如平面所切之緯綫在赤道以北之情形，或反之，卽爲一直綫，因其經過視點——在六十七圖中爲南緯 30°。

更南之緯綫則將有其中心在軸之沿長綫上。直緯綫以南之諸緯綫——卽穿過 P 點者——爲在中央經綫上自中心射出者，又其曲度將反對於直緯綫對邊之緯綫。

經綫必經過極，又其中心將位於割垂直軸於兩極間之中點之綫上。故第一必需求南極之位置。在所討論之圖例中，南極在地圖中心之南 120° 處。換言之，此極在中央經綫上自 O 之 $2R\tan 60°$ 之處。既求得此點，一地平綫可繪於二極間之半途處。諸經綫之中心均在此綫上。



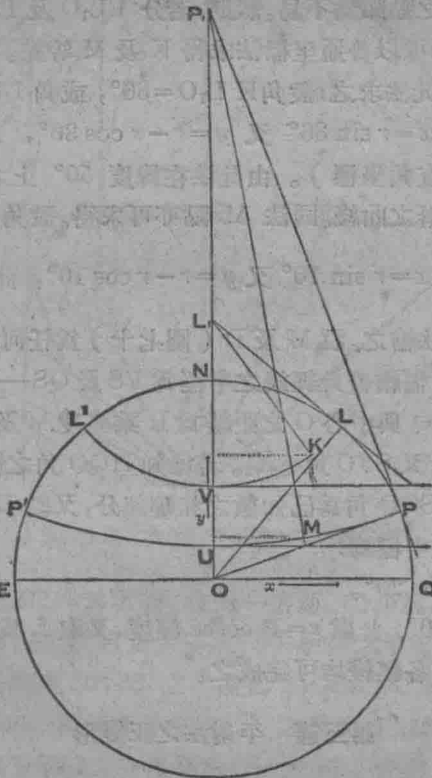
第六十八圖　半球之平射斜軸圖以投影平面切於北緯 30° 之格林威治經線上

此點已於赤道圖法中示之，即經綫之中心距離中央經綫與赤道之交點爲R乘經度之餘切〔註一〕—相同之關係可在此處示之，替代R cot經度，吾人可以NA cot經度代替之——即NA爲經過兩極之經綫之半徑。

（在六十八圖中，XA＝NA cot 50°又YA＝NA cot 30°）作經綫之半徑（XN及YN）爲NA cosec 50°及NA cosec 30°。

第二節　作大縮尺平射圖法之簡單方法（比較第九章第一節）

爲以後所述之轉移法之目的，及爲大縮尺掛圖之用，平射圖法因其



第六十九圖　大縮尺平射圖上之緯線作法

〔註一〕見三十四頁之下注。

繪畫緯綫及經綫之半徑太大，故並不能使其本身易於繪畫。下述之方法可應用於赤道圖法中，雖其法頗爲繁瑣。然則此法僅包括初步之數學知識，故可在此處討論之。

設 L 與 P 爲相當於北緯 50° 及 20° 之點（圖六十九）。

於是 $L_1L = R\cot 50°$ 又

$P_1P = R\cot 20°$。

在 L_1 及 P_1 之角亦爲 50° 及 20°。已知二緯綫上之 L, V, 及 L′ 與 P, U 及 P′ 等點。但需求此緯綫上之其他點。因經綫上之間隔並不規則，故求得眞正相交之點頗爲不易。然則，若分 LL_1O 及 PP_1O 角爲已知之若干相等部分，則可以普通坐標法求得 K 及 M 等點。

K 之位置由此法求之：設角 $KL_1O = 36°$，或角 LL_1O 之 .72 倍。於是，因 $L_1K = r$，$x = r\sin 36°$ 又 $y = r - r\cos 36°$，以 V 爲起點（如簡單圓錐法中之直角坐標）。由此法在緯度 50° 上之諸點卽可求得，於是可繪入如平滑之曲綫。同法 M 點亦可求得。設角 $MP_1O = 10°$ 或 $\frac{1}{2}PP_1O$ 角。於是 $x = r\sin 10°$ 又 $y = r - r\cos 10°$，此處 U 爲其起點。

經綫可依同法繪之。設 M 及 L（圖七十）爲任何二經綫 X_1 及 X_2 與赤道之交點。所需繪畫此經綫之半徑爲 FS 及 QS——R 乘經度〔註一〕之餘割；OF 及 OQ 與中心 O 之距離爲 R 乘經度 M 及 L 之餘切。〔註一〕

SQO 角 $= X_1$ 又 SFO 角 $= X_2$。若已知 HQO 角之値，則點如 H 卽可得之。如前例，分 SQO 角爲已知數之相等部分，又設 HQO 角 = 20°。於是決定 H 位置之坐標爲：

$x = r - r\cos 20°$。

$y = r\sin 20°$，此處 $r = R\,\mathrm{cosec}$ 經度，又取 L 爲起點。

由此法，所有各經綫均可完成之。

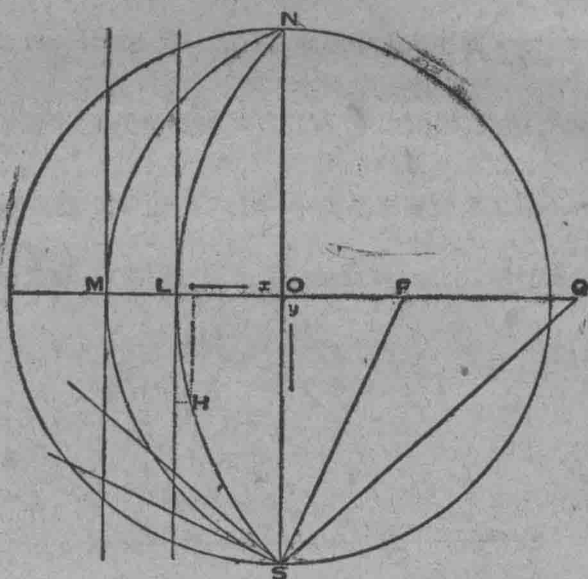
第三節 平射法之正變形

在字義之嚴格意義上，平射法爲正變形圖法頗易於說明。此處無需

〔註一〕 見三十四頁之下註。

說明經綫及緯綫係位於直角，因由作法已可明瞭。

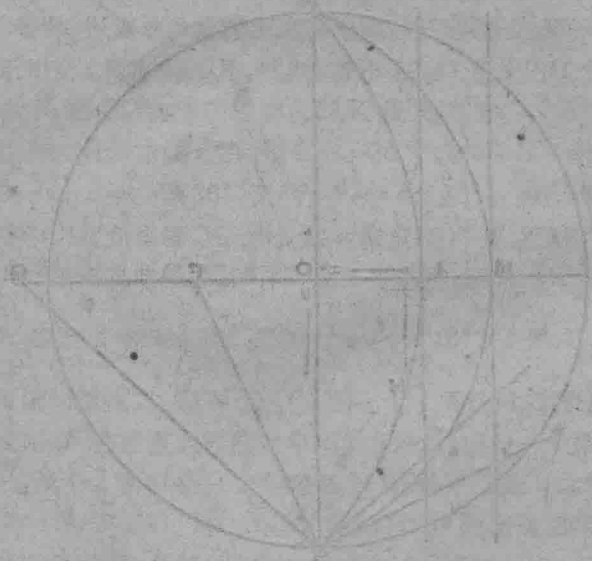
沿經綫及緯綫在任何相交點之縮尺均相同，最好可由計算法說明之，但亦可以幾何法或三角法說明之。然吾人可由極圖法之諸例說明其特質。如例，設吾人研究一小區域，在第四十緯綫與任何經綫之相交點。設吾人取一區域，其緯度及經度均為 1°。在投影上緯度 40° 之半徑（為清晰起見 R 卽半徑，如在前例中取作2″）為 2R tan 25° 或 1″.865231。



第七十圖　大縮尺平射圖上之經線作法

沿任何一緯綫之縮尺均為常數，在另一方面，沿經綫之縮尺向外增加，故在任何二點永不相同。繪畫緯度 49°30′ 所需之半徑為 2R tan 24°45′ 或 1″.844025；又緯度 50° 30′ 之半徑為 2R tan 25° 15′ 或 1″.886523。易言之，卽由第四十緯綫平分緯度 1° 之長為 1″.886523—1″.844025 =0″.042498。但沿緯綫之一度等於 $2\pi r/360$（此處 $r=1''.8652$）或 0″.0325544。故此處有一顯著之差異介於沿緯綫及經綫一度之弧內。設研究一小區域——沿經綫及緯綫 4′ 弧之小面積。因沿任何緯綫之經度

縮尺爲一常數，弧 4′（一度之 1/15）＝0.03255/15＝0″.00217029。〔註一〕介 49° 58′ 與 50° 2′ 間緯度之間隔再等於其相當半徑間之差。——或 1″.8666472—1″.8638144＝0″.0028328。〔註一〕故沿經綫及緯綫之縮尺更變近似，又若相同之進程重複於更小之弧時，則可見愈趨接近，直至最後，當最終之階段達到時——一點——彼將完全符合。在此意義上，故平射法爲正變形法。



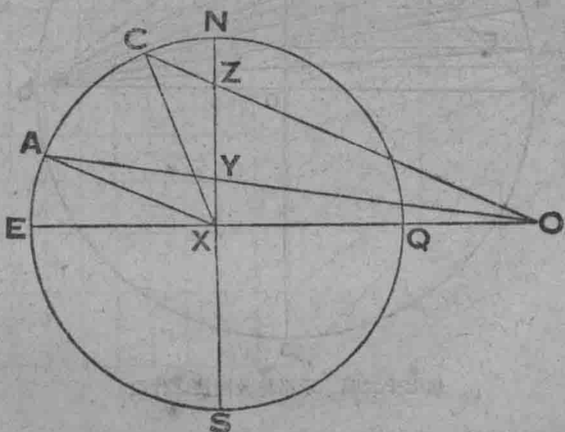
〔註一〕此計算由七位數字表得之。四位數字表不够正確。

第三章

第一節 拉希爾圖法

此圖法不常應用，而此處解釋作爲透視方位圖法之一種，其中光之來源在球體之外，而位於一介於平射及正射視點間之某點上。

拉希爾氏 (La Hire) 取一點在自地球中心之半徑 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 1.71 倍之處。若自此點繪光綫至經綫 SEACN 上之兩點，距離 N 爲 $22\frac{1}{2}°$ 及 $67\frac{1}{2}°$ 處，則距離 XY 及 XZ 爲——至小數計算之二點——XN 之 0.25 及 0.75 倍之處，故若將地圖投射於平面 NS 之上，即可產生一滿意



第七十一圖　示拉希爾圖法之作法

之地圖。作極圖時，自 O 點作每 10° 之綫（或所欲求之任何間隔）並記取其割 NS 之處，於是以半徑 XY 及 XZ 等繪同心圓，如在其他方位圖法中之例式然。其經綫則以常法繪入之。所作成之圖幾與等距方位法

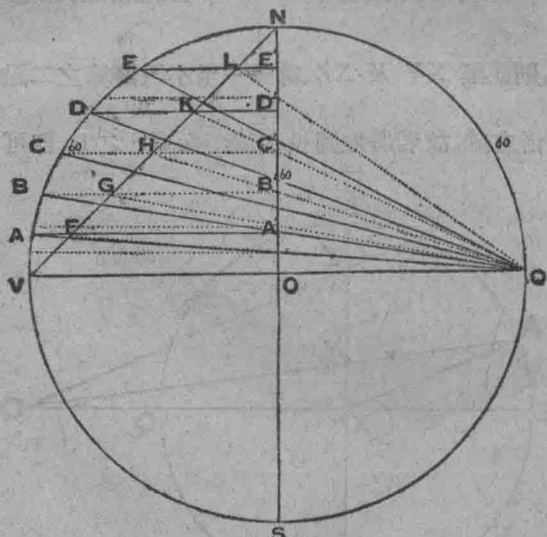
無甚區別。若不取一極爲地圖之中心，則此圖法頗難於繪畫。

第二節 格林敦圖法

此爲全球之投影法，有時在圖册中可見之。完全之球形包圍於一圓圈之中。此法無特殊優點，故實用上之重要甚微。然此法予世界一佳良之表示，既無謀開托法在高緯度之極大東西展廣，又無同緯度之壓縮，此卽正弦曲綫法及毛爾威得法之缺點也。

可以圖解（圖七十二）使其作法明瞭。

依縮尺繪一圓以代表地球儀（圖七十二）。VQ爲赤道，又NS爲



第七十二圖　示格林敦圖法之作法

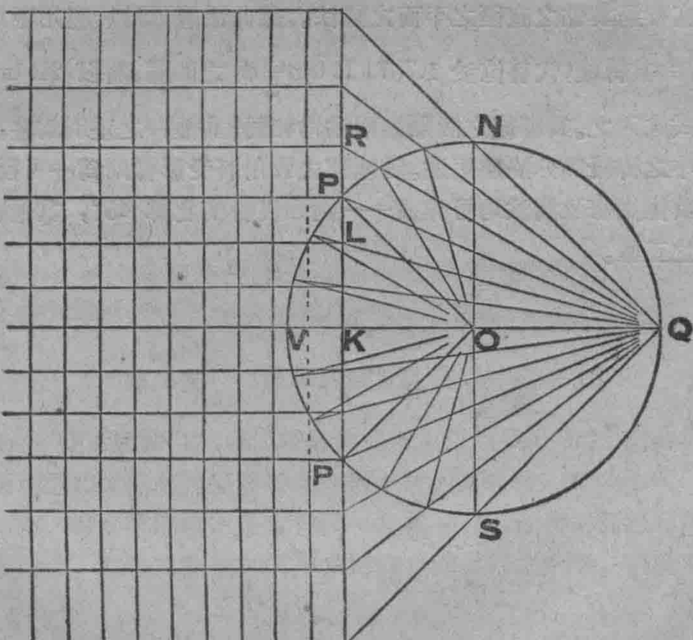
中央經綫。連接NV。分NO爲已知數之相等部分——在此例中爲六段。然後自此等點繪綫EE′, DD′平行於VQ。連接EQ及DQ等，記出此等綫割中央經綫上之點。次連接LQ，KQ等，再自此等綫割中央經綫上之點，作平行之點綫如CC′。於是緯度之平行圈由經過相同度數之點繪圓得之——例如60°與60°是。

相似之分段可沿弧 NQ 上記取之。

赤道於是以等長分割之，又經綫為經過兩極及赤道上相當之點所繪之圓。

第三節　高爾氏平射圖法

此為一圓柱式之圖法。但假定圓柱割於地球儀，因此介於南北緯 45° 間之部分在圓柱之外。此圖法於是以平射法作之。此法有時用於



第七十三圖　示高爾氏平射圖法之作法

世界地圖以示分布。巴托羅繆之經濟地理圖册（*Atlas of Economic Geography* L. W. Lyde）中之多數地圖均用此圖法。

緯綫之間隔與平射法相似。但代替應用 $2R\tan\frac{1}{2}\phi$，以 1.7071 R

$\tan\frac{1}{2}\phi$ 代入之。〔註一〕其幾何作法亦甚易。經綫則沿南北緯 45° 正確分隔之——即 $2\pi R\, d \cos 45°$，此處 d 爲經度之間隔，以南北緯 45° 圓周之分數表示之。縮尺僅沿此二綫爲正確，在赤道兩旁之四十度則太小，在極之邊則太大。經綫之縮尺各處均太大，惟標準緯綫間除外，該處則太小。此法既非等積，又非正形，惟可作一優良之世界地圖。

上述之方法似爲應用於幾種圖册中者。嚴格言之，此"平射"之形容詞並不適用於此法，若由平射之意義言，乃指自球形上之一定點投射於垂直經過其點之直徑之平面之圖法。然此法適可易於應用平射正軸之方法；其緯綫，代替位於 $1.7071\, R \tan\frac{1}{2}\phi$ 之間隔，將以 $2R \tan\frac{1}{2}\phi$ 之公式代入之。其經綫之間隔則兩法均相同。其惟一之差別爲在眞平射圖法中之緯綫間分隔將更遠。若地圖之效用將受影響則爲一可疑之事。顯然其他諸修改圖法均可作成——例如代替南北緯 45°，其他緯綫亦可使之正確。

〔註一〕 在三角形 POK 中，PO＝R，又角 POK＝45°。故 $KO = R\cos 45°$ 或 $0.7071\,R$，故 KL, KP, KR 等 $=(R+0.7071\,R)\tan\frac{1}{2}\phi = 1.7071 \tan\frac{1}{2}\phi$，此處 ϕ 爲緯度又 R 爲單位。

第四章

第一節　矩形圖法

此為一不重要而極為便利之便宜圖法，無特殊之英文名稱。與赤道等距之兩緯綫選作"標準緯綫"，並以正長分割之。

設一例，由吾人計算一世界地圖所需之圖形，其中取南北緯 30° 為標準緯綫。沿此緯綫上經度 10° 之弧之長為 $\frac{2\pi R\cos 30^\circ}{36}$ 或 0″.1511，若縮尺為 1/250,000,000。緯綫則位於經綫上相等間隔處：$\frac{\pi R}{18}=0''.174$。由此法卽可作成諸長方形，故以此得名。

此法相稱於雙標準緯綫之簡單圓錐法。此法無特殊優點，故並不應用於圖册中。在大發現時代，此法似有相當應用，以代替謀開托法，直至十九世紀之初期為止（Groll-Graf）。

第二節　二標準緯綫之等積圓柱圖法

如在"矩形圖法"中，選二緯綫作標準並以眞長分隔之。然介於任何緯綫與赤道間之面積可使等於地球儀上之相當面積，卽 $2\pi Rh$（$h=R\sin$ 緯度）。但標準緯綫之長為 $2\pi R\cos\phi$。故，若此帶之面積以標準緯綫之長除之，於是其商數卽為所求緯綫與赤道間之距離。稱此距離為 d，吾人卽得

$$d=\frac{2\pi Rh}{2\pi R\cos\phi}=\frac{h}{\cos\phi}。$$

此標準緯綫於是正確劃分之——$\frac{2\pi R\cos\phi}{360}$，則此網綫之作法為經過此等點繪畫直綫以代表經綫，又依上列之公式繪畫其餘之緯綫。設取南北緯 60° 為標準，則其與赤道之距為：

$$\frac{h}{\cos\phi}=\frac{R\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}=\frac{1\times 0.8660}{0.5000}=1''.7320。$$

同法，

緯度 40° 距赤道爲 1.285 吋。

緯度 80° 距赤道爲 1.970 吋。

緯度 90° 距赤道爲 2.000 吋。

此圖法亦不甚重要且極少應用。此爲相當於二標準緯綫之亞爾勃斯（Alber）圓錐等積圖法之圓柱圖法。此法亦稱爲培曼氏（Behrmann）圖法。

第五章

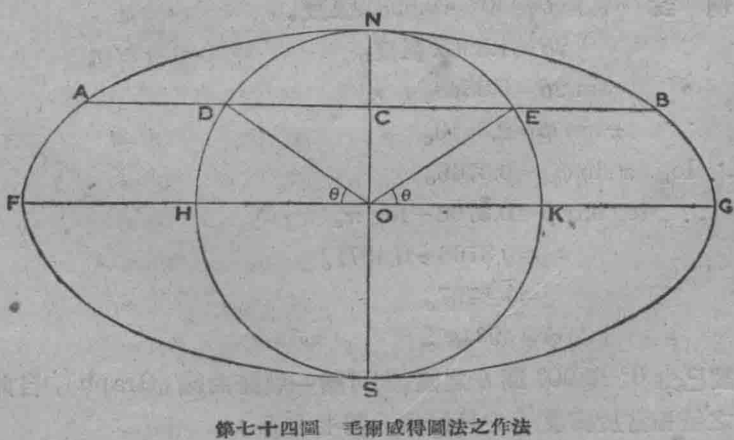
毛爾威得圖法

此法爲全球體之等積圖法，因爲一橢圓形，或別稱橢圓圖法。此爲一普通之圖法，又爲多數圖册中示分布之世界地圖所常見。此法可在半球中展開之（見巴托羅繆之牛津地圖）又可爲佳良之"斷裂圖"（頁119）。

其趨向於兩極之變形並不如正弦曲綫法之大。其緯綫爲平行之直綫，但並不沿中央經綫等距離分隔者。經綫均爲橢圓形，中央經綫爲特殊之例，此橢圓變成一直綫，又第九十經綫（自地圖之中心計算之）爲另一特例，此橢圓變成一圓。

其主要之問題爲求沿中央經綫上緯綫之正確間隔。

第一步爲作一圓，等於所需縮尺之半球之面積。圓之面積爲πr^2，半球之面積爲$2\pi R^2$，又使此二式相等吾人得$\pi r^2=2\pi R^2$。自此$r=\sqrt{2}R$。故在縮尺1/250,000,000上，R=1，又$r=1.414$。以此半徑繪一圓。於是延長赤道半徑之二端，使HF=HO，又KG=OK。然後繪橢圓形FANBGS（圖七十四）。



第七十四圖　毛爾威得圖法之作法

設 DE 為此投影上任何緯度之平行圈，又設 $\angle EOK=\theta$。

在地球儀上介於任何緯度之平行圈與赤道間之面積為 $2\pi R^2\sin\phi$（ϕ=緯度）。

然則，由作法，$2\pi R^2\sin\phi$ 使等於 FABG 之面積。

但 FABG，由橢圓之性質，等於 HDEK 面積之兩倍，又等於 $\triangle OCE$ 之兩倍加扇形 OKE 之兩倍。

扇形之面積為$\frac{1}{2}r^2\theta$（頁十）（θ 為圓度）。

三角形之面為$\frac{1}{2}r\sin\theta\, r\cos\theta=\frac{1}{4}r^2\sin 2\theta$。

$$故，\pi R^2\sin\phi=2\left(\frac{1}{2}r^2\theta\right)+2\left(\frac{1}{4}r^2\sin 2\theta\right)$$

$$=r^2\theta+\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta。$$

但 $r=\sqrt{2}R$。

$\therefore\ \pi R^2\sin\phi=2R^2\theta+R^2\sin 2\theta$。

又 $\pi\sin\phi=2\theta+\sin 2\theta$。

今，若已知 θ，ϕ 卽可求得。

例 設 $\theta=40°=0.6981$ 弧度。

$2\theta=1.3962$ 弧度。

$\sin 2\theta=0.9848$。

$\therefore\ \pi\sin\phi=2.3810$。

$\therefore\ \log(\pi\sin\phi)=0.3768$。

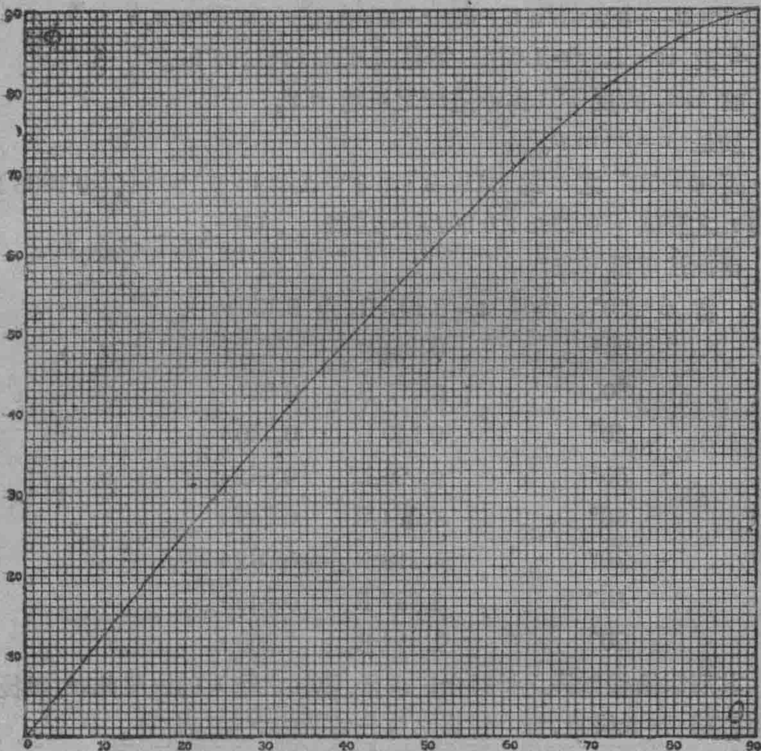
$\therefore\ \log\sin\phi=0.3768-\log\pi$。

$=0.3768-0.4971$。

$=\bar{1}.8797$。

$\therefore\ \phi=49°18'$。

設已知 0° 與 90° 間 θ 之值，則可繪一軌跡曲綫 (Graph)，自此可取 θ 之值相當於緯度 ϕ 之任何值（圖七十五）。



第七十五圖　示毛爾威得圖法 ϕ 與 θ 之值之軌跡曲線

由此法即可作成下表:

當 $\theta=10°$	$\phi=12°43'$	或當 $\phi=10°$	$\theta=8°0'$
$=20°$	$=25°16'$	$=20°$	$=15°45'$
$=30°$	$=37°31'$	$=30°$	$=24°0'$
$=40°$	$=49°18'$	$=40°$	$=32°0''$
$=50°$	$=60°22'$	$=50°$	$=40°30'$
$=60°$	$=70°30'$	$=60°$	$=49°25'$
$=70°$	$=79°18'$	$=70°$	$=59°30'$
$=80°$	$=86°18'$	$=80°$	$=71°0'$
$=90°$	$=90°0'$	$=90°$	$=90°0'$

（注意——後表係取自七十五圖之軌跡曲線，故其值僅爲近似者。）

今設 $R=1$, $r=1.414$; 於是 $1.414:1::1:0.707$。

設 OC，緯度 DE 與赤道間之距離 $=x$。

於是 $x=r\sin\theta$。

故 $\phi=10^\circ$ 之 x 爲 $1.414\,R\sin 8^\circ=1.414\times0.1392\,R=0.1968\,R$，或與 r 之關係 $=0.1968\times0.707\,r=0.1391\,r$。〔註一〕

由此法可得下表*

當 $\phi=10^\circ$，於是	$x=0.197\,R$	或 $0.139\,r$
20°	$0.384\,R$	$0.271\,r$
30°	$0.575\,R$	$0.407\,r$
40°	$0.749\,R$	$0.530\,r$
50°	$0.921\,R$	$0.652\,r$
60°	$1.074\,R$	$0.759\,r$
70°	$1.218\,R$	$0.862\,r$
80°	$1.337\,R$	$0.945\,r$
90°	$1.414\,R$	$1.000\,r$

其所需繪畫網綫之材料今已求得。緯綫之繪入卽依照此表。然後再繪畫經綫。作此綫時，每一緯綫必等分爲所需之相等部分。

由作法，赤道之長爲

$4\,r=4\times1.414\,R$。

於是，若經綫爲 20° 之間隔時，則彼所在之間隔爲 $\dfrac{4\times1.414}{18}=0''.314$。

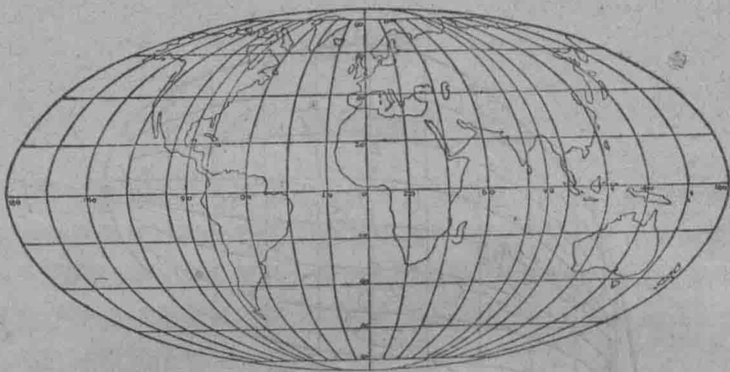
在投影上任何其他緯綫之長爲 $4r\cos\theta$。故在緯度 40° 上經度 20° 之間隔由此得之：緯度 $(\phi)\ 40^\circ$ 相當於 $(\theta)\ 32^\circ$。

〔註一〕 $x=r\sin\theta$ ……(1)

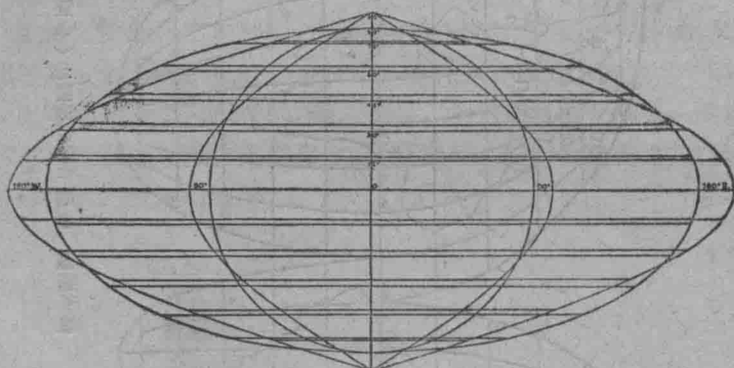
$=R\sqrt{2}\sin\theta$

$=1.414\,R\sin\theta$ ……(2)

*上表中 R 與 r 之值與他處所得者略有差異，因其取自軌跡曲線中 θ 之近似值計算者也。



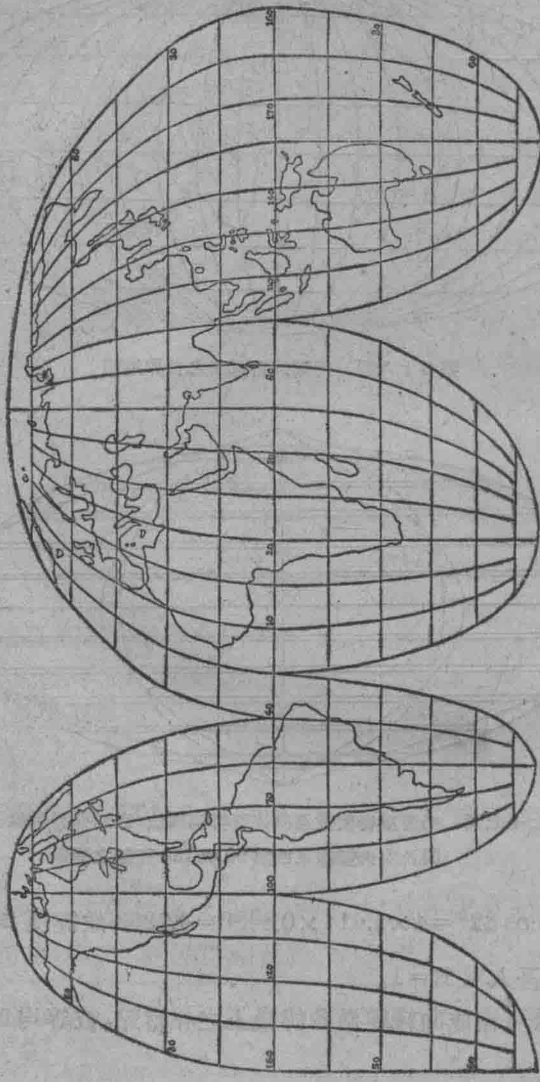
第七十六圖　毛爾威得圖法之世界地圖



第七十七圖　毛爾威得與撒遜弗拉斯特德圖法，表示介於緯線間及中央經線東西第 90 與 180 經線之關係

於是 $4r\cos 32° = 4\times 1.414\times 0.8480 = 4.7963$ 故經度 $20° = \dfrac{4.7960}{18} = 0.2665$，若吾人取 $R=1$。

於是經綫可繪成曲綫經過各緯綫上之相當點，彼等均爲橢圓形。



第六圖版 斷裂毛爾威得圖法（依照大陸塊）

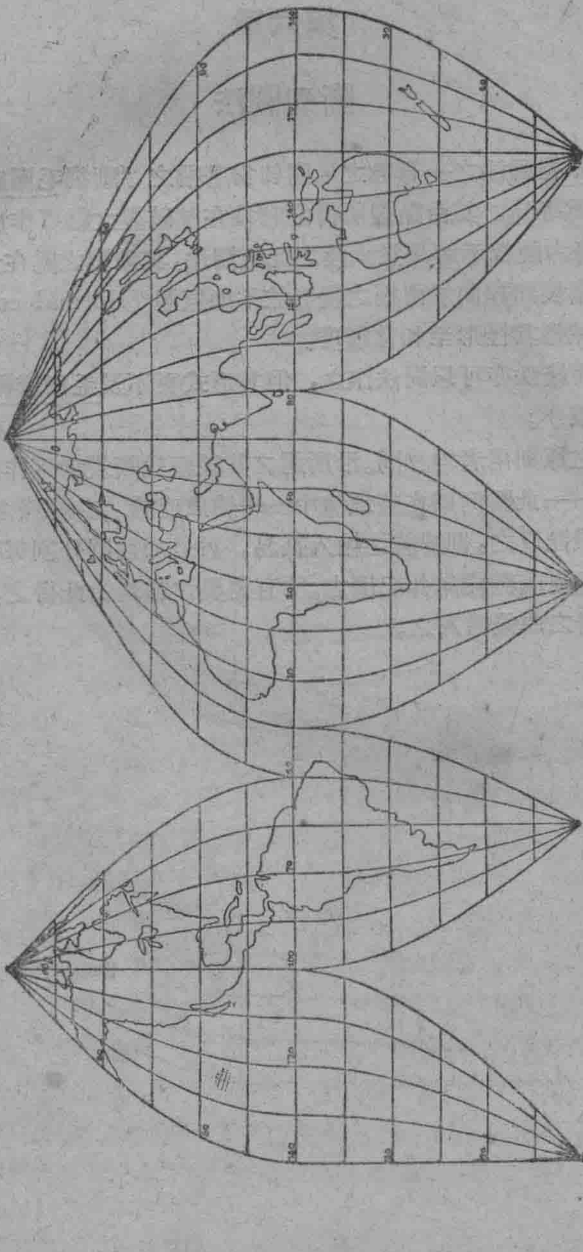
第六章

斷裂圖法

毛爾威得圖法之一有趣之展開卽爲著稱之“斷裂毛爾威得圖法”。此圖法仍爲等積，其由斷裂所得之利益在其破裂之處可作於影響最小之部分。第六圖版示適用於大陸之此種圖法，其破裂之處在大洋中。由此可見在斷裂間趨向於兩極之變形並不如原圖（Normal case）之大，故此點已減輕其怪形至相當程度。

正弦曲綫法亦可以同法作之，但其形式更不及毛爾威得法之美觀（第七圖版）。

繪法之原則兩者均相同。沿所選之某數經綫斷裂卽可作成，又選擇其他經綫——此圖例則在陸地塊中——繪成直綫。其緯綫之分隔則沿每一直經綫記取之，則緯綫之繪入甚易。於是如原圖分割每一緯綫，但此處其分段自直經綫向外記出之。所有需要之點均由此得之，其他經綫則可以平滑之曲綫繪入之。



第七圖版　斷裂撒遜弗拉斯特德圖法（依照大陸塊）

第七章

由轉移方法作較難之圖法

在圖册中普通應用之多種圖法並不易直接繪畫，因直接之作圖法包括相當之數學知識，以此將不在此討論。

然則，其法若以轉移方法則作之甚易。在某種圖法中，此法頗爲拙笨，但若避免數學計算之應用則甚有助益也。

轉移法之主要原則頗爲簡單，其法在獲得一由一圖法"轉移"入他圖法之方法。在各方位圖法之極圖法中，其經綫及緯綫構成一組輻射之直綫及同心圓。在各圖法中其經綫之間隔均相同，緯綫之間隔則互異。至論其繪法，則均甚易。然赤道及極圖法則並不簡易——除一二圖法外，平射及正射法尤然。球心圖法殊爲簡單，但其失誤，前所述者，使其應用較平射法及正射法更少。因此其採用之方法幾常爲其中之一，卽平射法。

設吾人取一普通之例。吾人可舉同一縮尺之平射極圖法及平射赤道圖法。前者之赤道及後者之周圍經綫爲相等半徑之圓。又若吾人將其一覆於他一之上，將極圖法繪於覆寫紙上，則二圓將完全相合——又極圖法中之垂直及地平二經綫亦將符合於赤道圖法之中央經綫及赤道之上。則顯然極圖法上之任何點對於極及其垂直與地平二經綫有如赤道圖法中之相等點對於中心及中央經綫與赤道有相同之關係。

今設吾人作一等距方位圖法之極圖法。此法除圓之間隔不同以外，與平射極圖法完全相似。然今吾人能作一等距赤道圖法否？吾人已知平射極圖法及赤道圖法上之任何點可由其對二軸之關係決定之。但此二軸亦存在於等距極圖法之情形中，故吾人可依下法論及二平射圖法上之任何點對於極之等距關係。可取平射赤道圖法上之某點，又當平射極圖法之覆寫紙置於其上時，此點當可求得位於極圖法之經綫及緯綫所構成之四邊形或網眼之內。於是亦易於置此點於等距極圖法之相當四邊形或網眼內之"相關"之位置。同法，其他任何點亦可如此"轉移"。

然則,若所取之點爲平射赤道圖法中之經綫與緯綫之交點,則當置於等距極圖法上之時,其相同點,將顯然代表等距赤道圖法經綫與緯綫之交點,又連接相當點以平滑之曲綫,吾人卽得由轉移方法獲得之等距赤道圖法。

先討論一簡單之例。需作一等積方位圖法之世界半球圖。最先依所需之縮尺作一平射赤道圖法(其理由於後解釋之)。於是在覆寫紙上作一平射極圖法,向外伸展使其包括赤道。然後以後者置於前者之上,使赤道圖法之周圍經綫符合於另一法之赤道之上。又使赤道圖法之赤道及中央經綫符合於極圖上之任何二經綫。其次步之工作爲記出赤道圖法上各經綫與緯綫之交點於覆寫紙上。顯然如此求得之點與極圖網綫中之經綫及緯綫保有直接之關係。又任何點均可迅速決定之。

次依相同之縮尺,如平射網綫之作法,作等積極圖之網綫。參考第四十三及三十一頁所敍述之圖法,可知後法介於緯綫間之距離,因離極而增加,但在前法中則減少。——易言之,此二組之圓並不符合。但在覆寫紙上所得之點可甚易置於等積圖網上相同之位置。例如,若覆寫紙上之一點在長方形之中央,則其在等積圖網上之新位置亦將在相關長方形之中央。旣以此法移動各點,則最後之網綫——等積方位圖法——卽可以曲綫連結由此所作成之點覆繪之。

此圖亦可應用正射圖法得之,若不需要完全之半球,則可應用球心圖法。然則由實驗卽可知在一圖法中之壓縮及他圖法中之展廣,使此等圖法極不適用。平射圖法則遠爲佳良也。

在多種圖册中——戴克(Diercke)圖尤著——大面積之地圖常以等積方位圖法示之,當其投影之平面爲斜軸。換言之,卽投影所作之平面並不切地球於赤道或兩極,而在其間之某點上。此爲一較難之圖法。苟一覽任何此類地圖卽可知經綫與緯綫二者均爲曲綫而非圓弧。

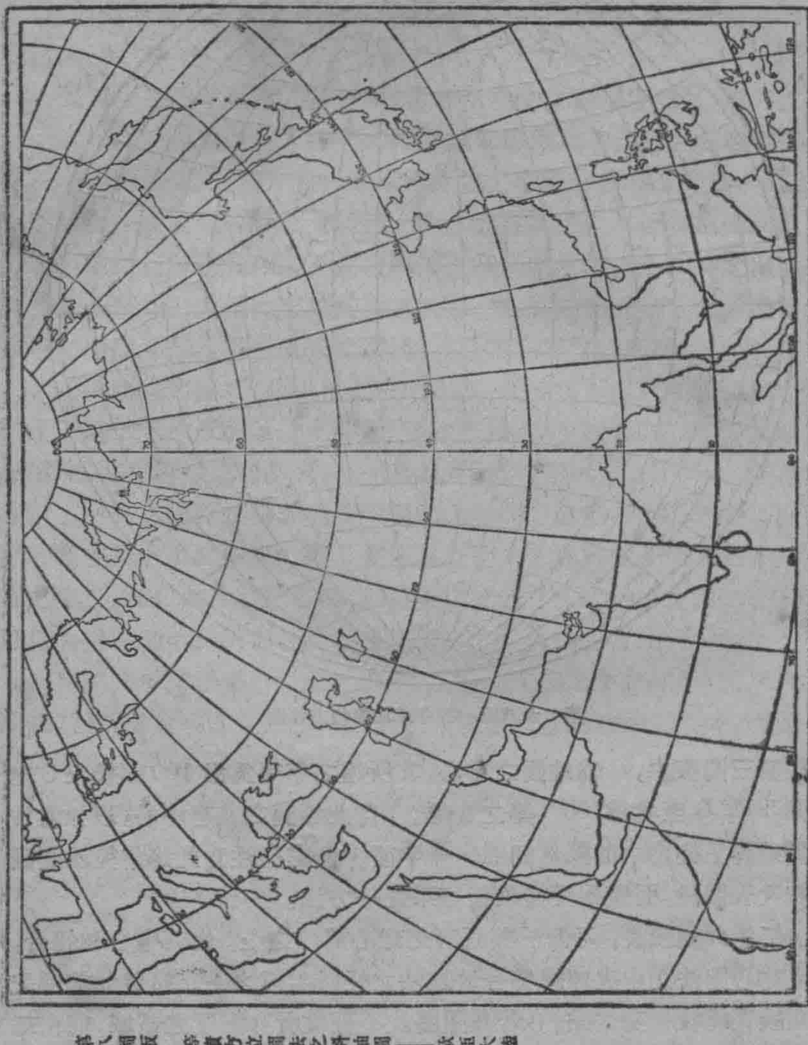
由球心斜軸圖法之方法,卽可得等積之斜軸網綫。此法頗爲煩瑣而須留意。

其步驟與已述之圖法相似。第一,依所需之平面及縮尺作一球心斜軸圖。(頁91)次,以地圖中緯度與中心之距離作半徑作一組之圓。

第七十八圖　西半球之等積方位圖

(在第三圖版中，C為地圖之中心，其所述之半徑為沿100經綫上C至北緯50°，C至北緯60°等之距離。)自此等圓之共有中心，以相當於所需地圖上經度之間隔為間隔繪作半徑。此處應注意此等半徑及圓圈並非代表圖法，而僅為獲得最後結果之一方法。

既作此網綫後，乃置於其原有之球心圖法之上，使其中心相符合，又使球心圖法之中央經綫符合於該法之任何半徑之上。然後如前法記出經綫與緯綫相交之點。(若其圓圈並不蓋覆所有需要之區域，則在球心圖法上，可將此半徑展繪使等於其次進行之半徑，苟此圖法需要包括一較大之區域。)



第八圖版　等積方位圖法之斜軸圖——歐亞大陸

其次依相同之縮尺作等積方位法之極圖網綫，並移置於其上，其相交之點則誌於臨時之網綫上。

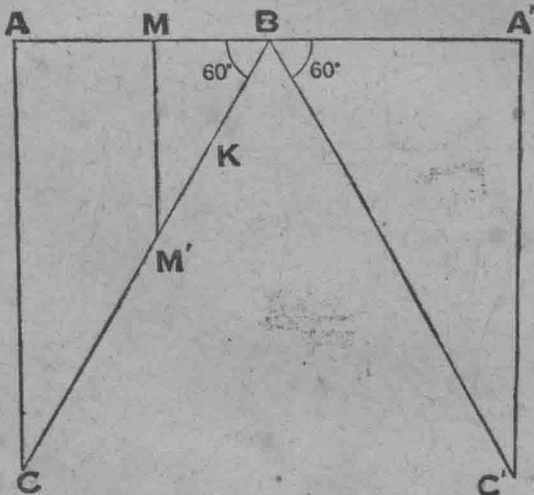
最後，連接此等點，卽可得一等積之網綫。然則在此圖法中，須大爲留意卽記出點之新位置，因其圓之間隔使此進程殊爲困難也。

同法，其他圖法之赤道及斜軸網綫亦可作成。—— 例如 Sir H. James's, Airy's, Clarke's 等圖法是。

第八章

自等積方位赤道圖法作安托夫圖法之方法

此處所應用之方法在輿克斯(Hinks)之"地圖投影法"一書中已述之。爲求赤道上之一點乃作一等積方位圖法之半球圖。與投影面作60°角之平面,於是穿過地圖上之中央經綫。結果,若等積方位圖法上之一點爲自赤道垂直投射於此平面之上,則此點將兩倍離中央經綫之距離,如此點在前之情況。



第七十九圖　安托夫圖法之作法

在七十九圖中,設 ABA′ 爲等積方位圖法中之赤道,又 BC 及 BC′ 爲二平面與之作60°之角。設 M 爲赤道上之任何點, M′ 爲其在平面 BC 上之位置,設爲自 AA′ 垂直投射者。但由三角法, $BM'=BM\sec 60°$:又因 $\sec 60°=2.000$, 故 $BM'=2BM$;其他各點之投射亦相同。

但在等積圖法上中央經綫之長與其所產生之安托夫(Aitoff)法上者仍相同。因此緯度之平行圈在各圖法之中央經綫上均爲同一之分隔。

然則，由赤道及中央經綫上之測量，等積方位圖法上之任何點之坐標頗易尋得。設吾人稱中央經綫爲 y 軸，又赤道爲 x 軸，吾人卽可決定在等積方位圖法上之點。作安托夫法倍 x 坐標而維持 y 坐標不變，其起點爲兩軸之交點。然後，連接相關之點，經綫及緯綫卽可繪入。

此圖法爲一等積圖法。——其自等積網綫之投影式樣(mode)並不影響其特質。此可於前之圖解中部分見之。設M爲西經 50°，於是稱 M′，卽 M 之投影，爲西經 100°。於是由半分經綫之縮尺——卽作 K〔註一〕(KB=KM′) 爲西經 50°——又保持一定之緯綫縮尺，此圖法仍爲等積。

此圖法有一優點佳於其相似之毛爾威得圖法——卽緯綫及經綫均爲曲綫，故緯綫與經綫之交角趨向於地圖之邊緣時並不大改歪。此法極適用於世界地圖，尤爲表示分布之圖。在今日此法不常用於不列顛之圖册中，但常爲大陸圖册所採用。

〔註一〕 在最後圖上之 K 相當於在等積圖上之 M。

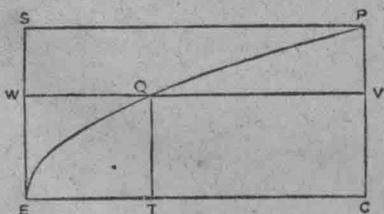
第九章

抛物綫形及相關之圖法

此全球之新而有趣之圖法爲克拉斯脫氏(Colonel Craster)所設計,彼最初敍述於"地理雜誌"(*Geographical Journal* Vol 74, 1929, P. 471)中。其投影之作法包括較本書中所應用者更多之數學知識,但其作法之主要原則殊簡易。

此爲一等積圖法,又爲介於正弦曲綫法及毛爾威得法間之中間法。其緯綫爲直綫,而經綫則爲抛物綫。其在極之附近及溫帶緯度之變歪較毛爾威得法爲小,因其經綫及緯綫並不相交成爲此種銳角,又其形狀則遠較正弦曲綫法爲美觀,故此爲可應用於世界地圖以示分布之圖法,此法並可希望應用於普通圖册中。(見第十圖版)

在第八十圖中,CP代表投影上中央經綫之半,又EC爲赤道之半。



第八十圖　作抛物綫形圖法之方法

因此CP= 緯度90°。又EC= 沿赤道上經度180°=2CP。EQP爲一抛物綫代表自CP之180°經綫。

一抛物綫之等式爲$y^2=ax$,此處a爲欲决定之常數。

EC爲x軸;ES爲y軸。

爲簡單起見,取CP長爲長之一單位。

於是,在P點,$x=2$,又$y=1$。

故欲適合之此等式$y^2=ax$,吾人必得$a=\dfrac{1}{2}$;$y^2=\dfrac{x}{2}$;$x=2y^2$。

以此 EQP 曲綫可由給 y 以任意值而計算 x 之相對值繪作之。

在投影上 EQPC 之面積必使其等於全球面積之一象限，即 πR^2，此處 R 為圓球之半徑。

因 EQP 曲綫為一拋物綫，EQPC 之面積為長方形 ESPC 之$\frac{2}{3}$。

$$或\frac{2}{3}EC\times PC。$$

但 EC=2PC，又 PC=1 單位。

$\therefore$ EQPC 之面積$=\frac{4}{3}$。

但在圓球上相對區域之面積為 πR^2。

$\therefore \pi R^2=\frac{4}{3}\cdots\cdots(1)$　又 $R=\frac{2}{\sqrt{3\pi}}$。

$\therefore R=0.65147\times PC$ 單位。

PC 之值即可自此等式中已知 R 之任何值決定之。

其次之步驟在決定緯綫離赤道間之距離。

取任何點 Q 其緯度為 ϕ。EQVC 之面積必使其等於在球體上相當區域之面積。

EQT 之面積為$\frac{2}{3}ET\times QT$ 之面積 $=\frac{2}{3}xy$，此處 x 及 y 為 Q 點之坐標。

長方形 TQVC 之面積為 TC×VC

$=(EC-ET)\times VC$

$=(2-x)y$

$=2y-xy$

故 EQVC 之面積$=\frac{2}{3}xy+2y-xy$

$$=2y-\frac{1}{3}xy$$

$$=2y-\frac{2}{3}y^3，因 x=2y^2。$$

第十圖版 拋物線形圖法 (After Craster)

球體上帶之面積爲 $2\pi Rh$

又 $h = R\sin\phi$（見頁十五）

$\therefore$ 半帶之面積 $=\pi R^2\sin\phi$

但 $\pi R^2 = \frac{4}{3}$，因此半帶之面積爲 $\frac{4}{3}\sin\phi$。

由使 EQVC 之面積與此相等，吾人得

$$2y - \frac{2}{3}y^3 = \frac{4}{3}\sin\phi。$$

但 $\sin\phi = 3\sin\frac{\phi}{3} - 4\sin^3\frac{\phi}{3}$。

故此等式變爲 $2y - \frac{2}{3}y^3 = 4\sin\frac{\phi}{3} - \frac{16}{3}\sin^3\frac{\phi}{3}$。

經審察後卽可知此等式由 $y = 2\sin\frac{\phi}{3}$ 之値解答之。

在此等式中，y 示任何緯度 ϕ 之平行圈離赤道之距離。又自等式 $x = 2y^2$ 中，各平行圈之長，若自中央經綫 CP 量度之，卽可算出。

此距離及緯度每 5° 間隔之長可由附表得之。

求其他經綫之位置，分每一緯綫爲36等分，然後繪平滑之曲綫經過每緯綫分段之相當點。

下表示緯綫與赤道之距離及各緯綫之長。取中央經綫 CP 之長爲單位。

緯度	與赤道間之距離	自中央經線所量之緯線長度	緯度	與赤道間之距離	自中央經線所量之緯線長度
5°	0.058169	1.993233	50°	0.573606	1.341951
10°	0.116290	1.972953	55°	0.629089	1.208493
15°	0.174311	1.939231	60°	0.684040	1.064178
20°	0.232186	1.892179	65°	0.738412	0.909492
25°	0.289864	1.831958	70°	0.792160	0.744966
30°	0.347296	1.758770	75°	0.845237	0.571150
35°	0.404435	1.672864	80°	0.897599	0.388634
40°	0.461232	1.574530	85°	0.949201	0.198035
45°	0.517638	1.464102	90°	1.000000	0.000000

拋物綫形圖法爲一系中之一法。全球體最簡單之等積圖法爲正弦曲綫法，但若正弦曲綫代以一雙曲綫，則此法頗可做作。此處無需企圖說明雙曲綫圖法之例：因其組成克拉斯脫圖系中之第一羣，故歸入之。在任何圖法，正弦曲綫法常爲其中之愛好者，因其較易於繪畫也。讀者可參考 135 頁上之表，該表說明在此系之圖法中所選之某種圖式上緯綫之間隔，包括雙曲綫法，該法爲正弦曲綫法之最近似者。在此圖法上經綫之間隔述之於後。

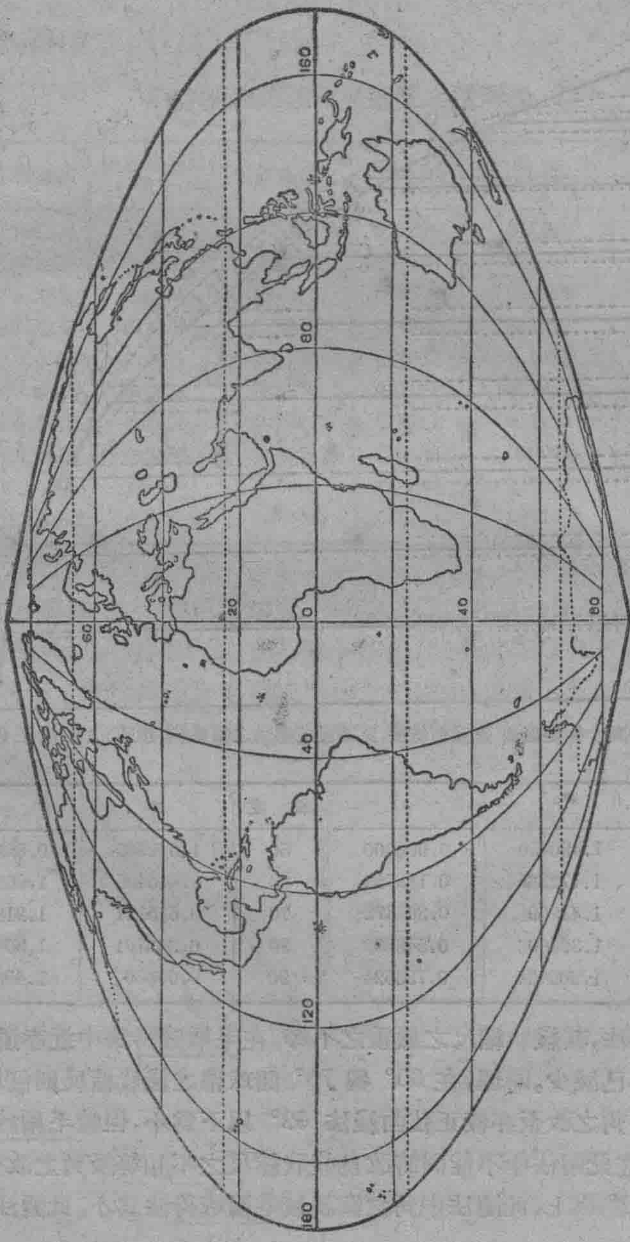
拋物綫形圖法組成此系中之第二羣。由減少雙曲綫法之離心現象，並使之和諧，則上所已述之拋物綫形之特殊圖法卽可獲得。

若再減少離心之度，此曲綫卽變爲橢圓。毛爾威得圖法，已述於第五章中者，可作爲此羣之說明，而組成此系之最後一法。又可作一橢圓形圖法(見 135 頁之表)以摹擬橢變形圖法 (Eumorphic Projection)，此法則敍述於下。

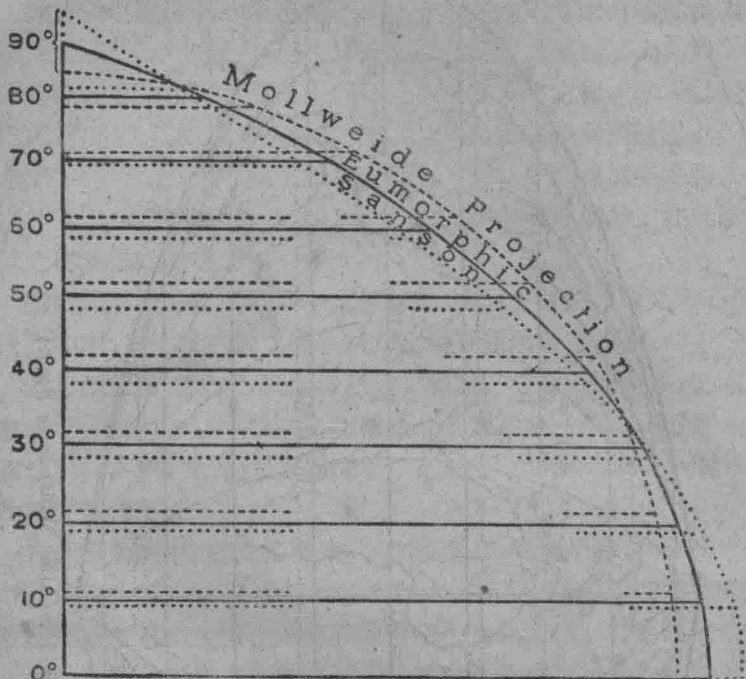
在此諸圖法中，雙曲綫形法，拋物綫形法，橢圓形法，每圖法中之所有經綫均似曲綫。"故，在雙曲綫形法中之所有各經綫均爲雙曲綫，在拋物綫形法中爲拋物綫，及在橢圓形法中爲橢圓綫。在各圖法中緯綫均以眞長分割之，故其經綫可經各分割之點繪如平滑之曲綫"（引用 Craster 語）。

若在他方面，雙曲綫形圖法中之離心現象爲無限大時，則其雙曲綫變爲二直綫，又此圖法乃爲直綫式。雖此圖法易於繪畫，但無眞正優點。

在"地理雜誌" (1929 年三月份)中，Whittemore Boggs 敍述一全球之等積圖法，彼稱之爲橢變形圖法（第十一圖版）此爲介於正弦曲綫法及毛爾威得法間之數學中數法（圖八十一）。例如，計算此圖法離中心第九十經綫，第一步在求各緯度平行圈在正弦曲綫法及毛爾威得法中之數學平均數。於是產生 x（卽東西距離）之公式，因此面積之嚴格相等卽可維持，卽被曲綫包圍之面積須準確與正弦曲綫法及毛爾威得法網綫相當之曲綫所包圍之面積相等。以此方法可得下表以繪作自球體上單位半徑之第九十經綫：



第十一圖版　橢變形圖法（After Whittemore Boggs）



第八十一圖 橢變形法，正弦曲線法，及毛爾威得法之關係(引用 Whittemore Boggs)

緯度	x	y	緯度	x	y
0	1.490450	0.000000	50	1.041960	0.895537
10	1.472335	0.183753	60	0.846496	1.061226
20	1.418091	0.366372	70	0.615121	1.218648
30	1.328006	0.546698	80	0.343191	1.364746
40	1.202494	0.723524	90	0.000000	1.490450

由此法，其綫狀縮尺之嚴重之不等，在毛爾威得法中近赤道時尤爲顯著者則已減少。同理，在 60° 與 75° 間球帶之綫狀縮尺則已增大。在此圖法中角之改歪亦較正弦曲綫法 62° 以下爲小，但較毛爾威得法則增大，因在此圖法中不能同時改良綫狀縮尺之不相等及角之改歪二者。然則在 62° 以上，此圖法中角之錯誤較毛爾威得法爲小。此圖法亦可應

用於"斷裂法"。

示各圖法緯綫與赤道間之距離表

緯度	撒遜法	雙曲線形法（近撒遜法）	拋物線形法	橢變形法	橢圓形法（近橢變形法）	毛爾威得法
10°	0.1111	0.1112	0.1163	0.1234	0.1233	0.1368
20°	0.2222	0.2224	0.2322	0.2458	0.2456	0.2720
30°	0.3333	0.3338	0.3473	0.3668	0.3662	0.4040
40°	0.4444	0.4454	0.4612	0.4854	0.4840	0.5310
50°	0.5556	0.5571	0.5736	0.6009	0.5982	0.6512
60°	0.6667	0.6688	0.6840	0.7119	0.7079	0.7624
70°	0.7778	0.7800	0.7921	0.8177	0 8122	0.8620
80°	0.8889	0.8906	0.8976	0.9159	0.9099	0.9454
90°	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
R	0.63662	0.63662	0.65147	0.67094	0.67094	0.70711

(After Craster)

在各圖法中，毛爾威得法有一特殊之點。此為一僅有之法，卽其中之經綫曲綫連續穿過兩極。在其他各法中，則在此等點有一裂縫或不連續處。習慣上此卽為愛好毛爾威得法之一理由，但吾人或願各圖法均保存於各圖册中。苟各種不同之圖法為日常所應用，則為一極佳之事。

第十章

其他圓錐圖法

有數種其他之圓錐圖法頗有趣味但非常用。其最簡單者即爲一標準緯綫之等積圓錐法。在此圖法中圓錐之極與地球之極相符合。如所有各圓錐法，除標準緯綫之外，各緯綫上之縮尺均不正確。

等積圓錐圖法爲如此修改者，即其經綫之縮尺與緯度之縮尺成相反比例之不正確。其緯綫並非等長分隔者，其由標準緯綫趨向於極邊則分隔較遠，而在赤道之邊則較近。因此其歪誤乃一方面在標準緯綫之南北方向，一方面在東西方向。因此理由，此法無大應用。

此圖法又稱爲蘭伯特氏 (Lambert) 之等積圓錐法。

有二途可說明其作法。此法可直接由簡單圓錐法產生之，在此情形中，其圓錐之頂點並不與極符合，該極（如在簡單圓錐法中）將爲一弧，其長依選作標準之緯綫而定。或此圖法可繪成使圓錐之頂點與極相符合。第一例在解釋此法使球體上帶之面積表示之於圓錐上之問題。（見頁十二與十三及下列各項）。

設 n 爲圓錐之常數，又 r_0 爲繪於圓錐任何緯綫之半徑，以頂點爲中心。

於是在圓錐上由該綫包圍之面積爲 $n\pi r_0^2$。

若 r_1 爲任何其他緯綫，於是由此綫所包圍之面積爲 $n\pi r_1^2$。

$\therefore$ 圍繞圓錐由此等緯綫所包圍之條帶爲：

$$n\pi r_0^2 - n\pi r_1^2 = n\pi(r_0^2 - r_1^2)$$

在第十五頁上，球體上一帶之面積示爲 $2\pi R^2 \sin\phi$，此處 ϕ 代表環繞緯綫之緯度。

若取二緯綫 ϕ_0 及 ϕ_1，於是其包圍條帶之面積爲：

$$2\pi R^2 \sin\phi_0 - 2\pi R^2 \sin\phi_1 = 2\pi R^2(\sin\phi_0 - \sin\phi_1)。$$

因此，爲欲作等積圖法，在圓錐及球體上之面積必使之相等：

$$n\pi(r_0^2 - r_1^2) = 2\pi R^2(\sin\phi_0 - \sin\phi_1)。$$

但n,圓錐之常數,在簡單圓錐法中 $=\sin\phi$（見頁五十五），又 r_0 標準緯綫之半徑 $=R\cot\phi_0$ 以此值代入上述之等式中,吾人得:

$$\pi\sin\phi_0(R^2\cot^2\phi_0-r_1{}^2)=2\pi R^2(\sin\phi_0-\sin\phi_1)$$

又 $$\sin\phi_0(R^2\cot^2\phi_0-r_1{}^2)=2R^2\sin\phi_0-2R^2\sin\phi_1。$$

以 $\sin\phi_0$ 除兩邊,吾人得:

$$R^2\cot^2\phi_0-r_1{}^2=2R^2-\frac{2R^2\sin\phi_1}{\sin\phi_0}$$

$$\therefore\ r_1{}^2=R^2\cot^2\phi_0-2R^2+\frac{2R^2\sin\phi_1}{\sin\phi_0}$$

又 $$r_1=\sqrt{R^2\cot^2\phi_0-2R^2+\frac{2R^2\sin\phi_1}{\sin\phi_0}}。$$

自此等式中,任何其他緯綫之半徑卽可求得。

第二例　在此例中其問題移轉於求得球體弓形(Segment)之面積與圓錐之一部分（或全部）間之等式。

球體弓形之面積爲大圓之面積乘此弓形之高（頁十四）。

故面積 $=2\pi R\times(R-R\sin\phi)$

$=2\pi R^2(1-\sin\phi)$

但 $1-\sin\phi=1-\cos x$

$$=1-(1-2\sin^2\frac{1}{2}x)$$

（因 $\cos 2A=1-2\sin^2 A$）

$$=2\sin^2\frac{1}{2}x。$$

故全弓形之面積 $=2\pi R^2\times 2\sin^2\frac{1}{2}x$

$$=4\pi R^2\times\sin^2\frac{1}{2}x。$$

但圓錐之相當區域之面積 $=n\pi r_1{}^2$ 此處 n 爲圓錐之常數。

因此吾人可得下列之等式：

$$n\pi r^2 = 4\pi R^2 \sin^2\frac{1}{2}x \cdots\cdots\cdots (1)$$

然此圖法爲有一緯綫正確於縮尺者。稱此緯綫爲 ϕ_0。

在地球儀上此緯綫之長爲 $2\pi R\cos\phi_0$。

又在圓錐上或投影上同一緯綫之長爲 $2\pi r_0 n$

使此二式相等，吾人得

$$2\pi r_0 n = 2\pi R\cos\phi_0$$

又 $$nr_0 = R\cos\phi_0$$

$$= R\sin x_0$$

$$= 2R\sin\frac{1}{2}x_0\cos\frac{1}{2}x_0 \cdots\cdots\cdots (2)$$

今吾人若以 (2) 除 (1)，卽得*：

$$\frac{n\pi r_0^2}{nr_0} = \frac{4\pi R^2\sin^2\frac{1}{2}x_0}{2R\sin\frac{1}{2}x_0\cos\frac{1}{2}x_0}$$

又 $$r_0 = \frac{4R^2\sin^2\frac{1}{2}x_0}{2R\sin\frac{1}{2}x_0\cos\frac{1}{2}x_0}$$

$$= \frac{2R\sin\frac{1}{2}x_0}{\cos\frac{1}{2}x_0}$$

$$= 2R\tan\frac{1}{2}x_0 \cdots\cdots\cdots (3)$$

吾人由以 (3) 代入 (2) 卽可求得 n：

$$n = \frac{2R\sin\frac{1}{2}x_0\cos\frac{1}{2}x_0\cos\frac{1}{2}x_0}{2R\sin\frac{1}{2}x_0}$$

$$= \cos^2\frac{1}{2}x_0。$$

---

* $r = r_0$　$x = x_0$

$\phi = \phi_0$，此處 ϕ_0 = 標準緯綫

x_0 = 標準緯綫之餘緯度

又 r_0 = 投影上標準緯綫之半徑。

最後代入 (1) 式中以求任何緯綫之半徑之普通公式：

$$\cos^2\frac{1}{2}x_0\, r^2\,\pi=4\pi R^2\sin^2\frac{1}{2}x$$

$$r^2=4R^2\sin^2\frac{1}{2}x\sec^2\frac{1}{2}x_0$$

$$r=2R\sin\frac{1}{2}x\sec\frac{1}{2}x_0。$$

亞爾勃斯（Albers）等積圓錐法有二標準緯綫。其作法較為困難。圓錐之頂點與地球之極不再符合，投影上之極由一定長之弧表示之。經綫及緯綫二者之縮尺相互間成相反之比例，以使其投影為等積。在二標準緯綫間，沿經綫之縮尺則太大，在其外者則太小，又此缺點因離標準緯綫之距離而增加。

下列繪作之方法頗為有用。

設 ϕ_1 及 ϕ_2 為兩標準緯綫之緯度，r_1 及 r_2 為其在投影上之半徑*，又 n 為圓錐之常數。第一必先以 ϕ_1 及 ϕ_2 之關係求 n 之值。

圓錐上介於代表緯度 ϕ_1 及 ϕ_2 之圓圈間之條帶之面積為：

$$n\pi r_1^2-n\pi r_2^2=n\pi(r_1^2-r_2^2)$$

介於兩緯綫 ϕ_1 及 ϕ_2 間之球體帶之面為：

$$2\pi R^2\sin\phi_2-2\pi R^2\sin\phi_1=2\pi R^2(\sin\phi_2-\sin\phi_1)$$

因此投影上作為相等之面積：

$$n\pi(r_1^2-r_2^2)=2\pi R^2(\sin\phi_2-\sin\phi_1)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

在投影上，緯綫 ϕ_1 及 ϕ_2 之長為：$n2\pi r_1$ 及 $n2\pi r_2$

此為標準緯綫，必為其真長，故：

$$n2\pi r_1=2\pi R\cos\phi_1 \text{ 又 } n2\pi r_2=2\pi R\cos\phi_2$$

$$\therefore\ r=\frac{R\cos\phi_1}{n}\text{ 又 } r_2=\frac{R\cos\phi_2}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由代此值於等式 (1) 中，吾人得：

---

*若 ϕ_2 代表較 ϕ_1 更高之緯度，於是 r_2 較 r_1 為小。

$$n\pi\left(\frac{R^2\cos^2\phi_1}{n^2}-\frac{R^2\cos^2\phi_2}{n^2}\right)=2\pi R^2(\sin\phi_2-\sin\phi_1)$$

又 $$\frac{R^2\cos^2\phi_1-R^2\cos^2\phi_2}{n}=2R^2(\sin\phi_2-\sin\phi_1)$$

$$\therefore\quad n=\frac{\cos^2\phi_1-\cos^2\phi_2}{2(\sin\phi_2-\sin\phi_1)}$$

$$=\frac{1-\sin^2\phi_1-(1-\sin^2\phi_2)}{2(\sin\phi_2-\sin\phi_1)}$$

$$=\frac{-\sin^2\phi_1+\sin^2\phi_2}{2(\sin\phi_2-\sin\phi_1)}$$

$$=\frac{\sin^2\phi_2-\sin^2\phi_1}{2(\sin\phi_2-\sin\phi_1)}$$

$$=\frac{(\sin\phi_2-\sin\phi_1)(\sin\phi_2+\sin\phi_1)}{2(\sin\phi_2-\sin\phi_1)}$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\phi_2+\sin\phi_1)。$$

代 n 之值入等式 (2) 中，吾人得：

$$r_1=\frac{R\cos\phi_1}{\frac{1}{2}(\sin\phi_1+\sin\phi_2)}\quad 又\quad r_2=\frac{R\cos\phi_2}{\frac{1}{2}(\sin\phi_1+\sin\phi_2)}$$

求其他各緯綫之半徑——如謂 ϕ_3——吾人得：

地圖上之面積 $=n\pi(r_3{}^2-r_1{}^2)$。

球體上之面積 $=2\pi R^2(\sin\phi_1-\sin\phi_3)$。

因此 $n\pi r_3{}^2-n\pi r_1{}^2=2\pi R^2(\sin\phi_1-\sin\phi_3)$

又 $nr_3{}^2=nr_1{}^2+2R^2(\sin\phi_1-\sin\phi_3)$

$$\therefore\quad r_3{}^2=\frac{nr_1{}^2+2R^2(\sin\phi_1-\sin\phi_3)}{n}$$

又 $$r_3=\sqrt{\frac{nr_1{}^2+2R^2(\sin\phi_1-\sin\phi_3)}{n}}。$$

正變形圓錐法可有一或二標準緯綫。二法均非常用。其問題在作經綫及緯綫相同之縮尺於地圖之任何點。其計算法並不易。如各圓錐法然；其在標準緯綫上之縮尺爲正確。在其他緯綫上之縮尺則太大，然可能使其縮尺正確於二緯綫，則顯爲一優點。以此二標準緯綫之正變形圓錐法（蘭伯特第二法或高斯〔Gauss〕法）爲更普通。〔註一〕若兩緯綫取爲標準，則沿中間緯綫之縮尺太小，而在其外之緯綫則太大。

所有各圓錐法普通均有二種優點：

(1) 經綫及緯綫相交成直角，及

(2) 除計算之外，均極易於繪畫。

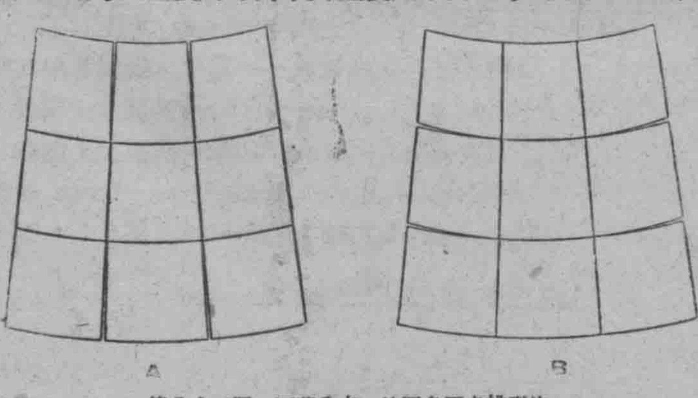
〔註一〕二標準緯線之正變形圓錐法用於"Debes's Atlas"中。

第十一章

第一節　百萬分之一地圖

此國際上重要之地圖，爲多圓錐圖法之修改式所作成。在普通多圓錐圖法中，其經綫爲曲綫，得之於繪經過各緯綫上連續之點之綫。在國際地圖中，此經綫爲直綫。緯綫爲圓弧，中心位於中央經綫之沿長綫上。此處有多種圖法其相互之差異甚小，而此差異在國際地圖單頁之界限中尋得之；爲欲使投影之本身易於繪畫，又使其連接之頁正確符合，則拋棄絕對之面積相等或精確之正變形爲較佳。此種情形可由修改普通多圓錐法使其經綫爲直綫得之。

地圖之各頁爲在其自己之中央經綫上單獨繪得者，而此經綫爲一直綫。已知一頁之頂及底之緯綫爲圓之弧，又其中心在中央經綫之延長綫上。此二緯綫由表繪作之。如在普通多圓錐法中，緯度之平行圈並非同心圓。既作已知頁之頂底二緯綫（此二緯綫相當於圖頁之南北二邊）以眞長分割之，一若其在未修改多圓錐法中之普通緯綫然。於是以直綫連接在此二緯綫上之點以代表經綫。作一更進之修改法。在簡單之多圓錐法中，其正確於縮尺之僅有經綫爲中央經綫。在國際地圖中，每頁上之經綫均正確。此經綫爲每頁中央經綫之東西 2°。爲欲使此正確，故結



第八十二圖　百萬分之一地圖各頁之排列法

果中央經綫必不再正確於縮尺。

由此法，此頁之緯綫已相互變位，使其沿兩經綫成爲正確之間隔，以代替沿中央之一經綫。故沿中央經綫之縮尺則太小。

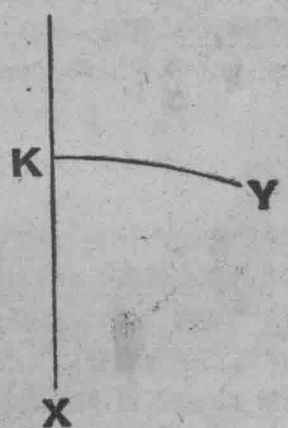
由此繪作之方法，可能使連接之頁相接合。〔註一〕若研究連續之九隣頁（排列如圖 82 a 及 82 b）可見使各圖精密接合實爲不可能，各頁可如此排列，卽其沿東西邊緣相互鄰接者相接合，因此等圖頁爲繪於相同之半徑之上者，又南北各頁亦可相互間沿其共有之邊相接合。顯然，若應用較九更多之頁時，則要求精密之接合實爲不可能。

於是國際地圖投影法之最大特點爲其易於繪畫，又因每頁在其本身之內卽已完全，如作一表應用於各可能之圖實爲一簡單之事。再者，在一單頁之界限之內，其紙之收縮及擴展之影響已足夠比較面積之確等或眞實之正變形爲重視。因此無論爲各種實用之目的，任何頁可當作爲實踐此二種情形者。

第二節　軍用測量地圖

喀西尼(Cassini)長方形坐標系統上之圖法

此法一部分爲圓錐圖法之一式；其圓柱假定切於地球儀沿其繪圖區域之中央經綫之上。爲欲作此地圖，首先選擇一中央經綫並決定某點——X——爲地圖之中心。爲欲求任何其他點之位置，如謂 Y，則可應用下列之進程。設自 Y 繪一大圓垂直於中央經綫，並使其相遇於 K。今計算地球面上 YK 與 XK 之長。此可由球面三角之方法得之，於是卽可直接繪畫 YK 與 XK 之距離。易言之，表示於地圖之上之大圓距離 YK 及 XK（圖八十三）爲相互成直角之二直綫（依縮尺）——事實上該綫卽爲 Y 點在平面上之長方形坐



第八十三圖　喀西尼圖法

〔註一〕每頁佔緯度 4° 經度 6° 又在 60° 高之緯度，則佔經度 12°。

標。經綫與緯綫之每一相交點均依此繪於一大頁之紙上。於是此頁可分割爲合用大小之部分。因所有此等部分拼合於一起以成一頁，各頁再相互沿其邊而拼合。

在大不列顛之例中，其所必需產生之錯誤並不甚大。在任何一單頁之上，其經綫之曲度並不顯著。其中央經綫正確於縮尺，但其他經綫則太長，易言之，除中央經綫之外，其南北之縮尺均已歪誤。此點甚易見之，中央經綫爲正確分割之一直綫。其他經綫則爲穿過緯綫上連續之點之綫，而由長方形坐標繪得者。因經綫間之距離向極而減少，地圖上之經綫遂成曲綫，故較中央經綫爲長。其經綫爲曲綫之事實爲其本身之一缺點。然軍用測量圖之分頁爲長方形，故其邊並不與中央經綫相平行。其頁邊與經綫之偏離因與中央經綫之距離而增加，並至多可達 4°，一吋之英格蘭圖及六吋之聯合王國圖均依此圖法作成者。（譯者註：意卽一吋或六吋代表一哩之圖。）

第十二章

幾種新式及不常用圖法之解釋

近年來在投影法上發生甚大之興味。拋物綫形及相關之圖網已敍述於前，故在下列之註釋中不再說明已述諸圖法所包含之數學之作法。然則在此類圖籍中，似應略加以簡單之敍述。雖此類圖法有數種爲已述諸法之特殊圖式，但敍述於此章之中似較加註釋於普通圖法之後爲更佳。故學生無須爲不必要之細事所困惱，可專注於更常用之導透。若讀者有志研究其詳，彼可考查其來源於括弧之內。

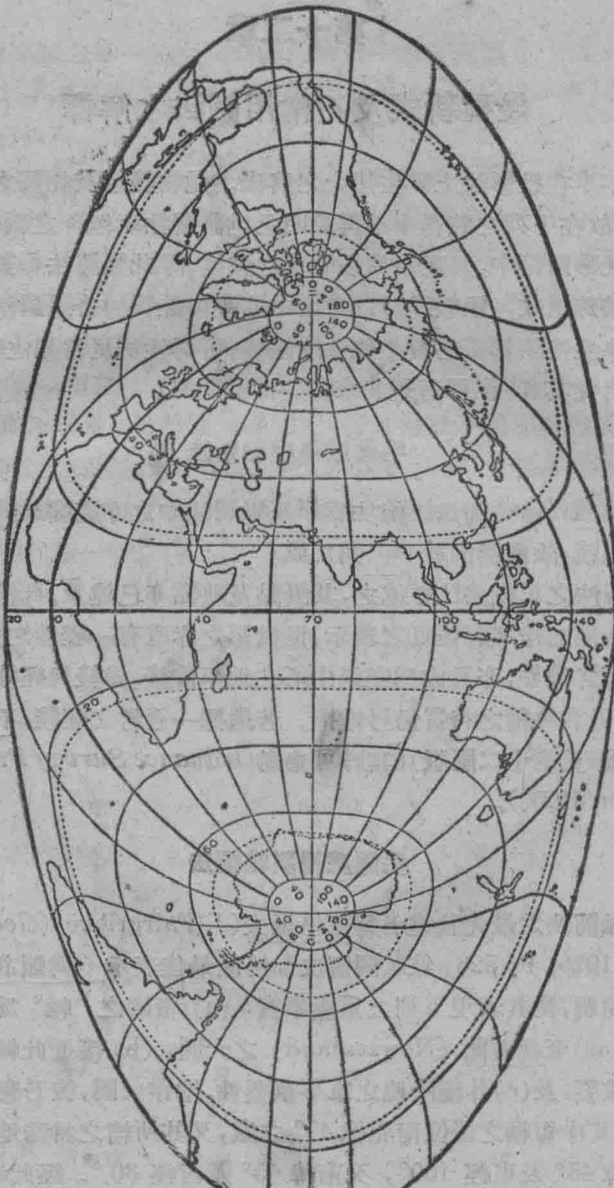
毛爾威得橫軸圖法

毛爾威得橫軸圖法之繪法爲以正軸圖法中之赤道變爲橫軸圖法中之中央經綫，故兩極位於 90° 角之處。

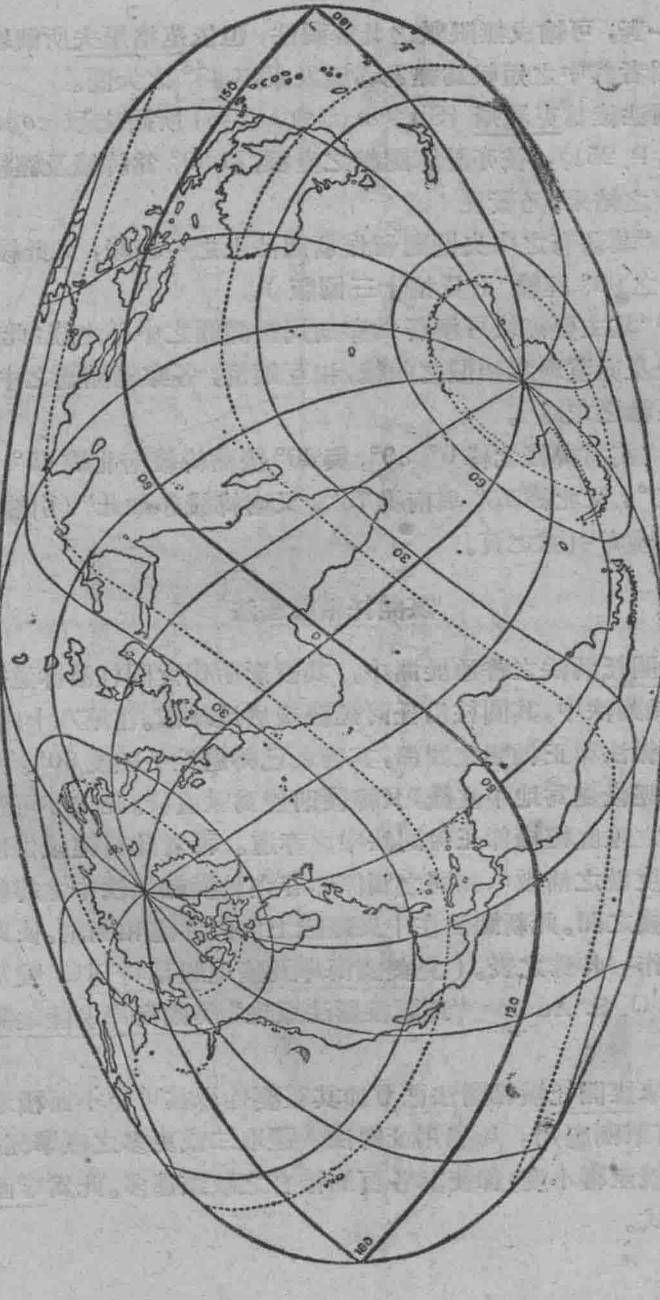
此圖法之正軸法已詳述之，其優點及缺點亦已述及。此橫軸圖法對於兩極四周之陸地有佳良之表示，但投影之赤道有一驟然之變化，不僅組成圖網之邊界，亦且成爲穿過中心之地平直綫。緯綫與經綫俱非簡單之曲綫，但其等積之特質仍可維持。若選擇一適當之經綫，不列顛帝國亦可繪出（見第十二圖版）（其詳可參考*Ordnance Survey Professional Paper* 1927.）。

毛爾威得斜軸圖法

斜軸圖法之最先敍述者爲范格里夫(J. Fairgrieve)(*Geography*, 秋季號 1928, P. 528) 彼試圖解决如何能最佳表示不列顛帝國於一頁紙上之問題，使其表現下列之重要事實：(a) 帝國之"軸"爲自巴哈麻(Bahamas)至新西蘭 (Newzealand) 之大圓；(b) 接近此軸在軍事位置上之重要；及(c)外繞陸地之軍事重要性。繪作此圖，彼乃應用毛爾威得圖法，其中短軸之端位南北緯 45° 之處，又其所繪之特殊地圖定此等點於北緯 45° 及東經 150°，又南緯 45° 及西經 30.°。經此等點，或任



第十二圖版　毛爾威得橫軸圖法（After Close）



第十三圖版　毛爾威得斜軸圖法 (After Close)

何其他一對，可繪成無限數之此等圖法，但依范格里夫所觀察之目的，其最適用者其中之短軸爲經過赤道及東經 48° 之大圓。

此圖法後爲克羅斯 (Sir Charles Close) 所研究 (*Geogr. Journ.* 73, 1929, P. 251)，彼亦計算圖網之坐標，以 30° 爲緯綫及經綫之間隔，由彼考察之結果，乃發現

(1) "其舊有之中央圓圈留作新圖法上之一經綫，又此綫爲離'主要經綫'之 90° 經綫"（見第十三圖版）。

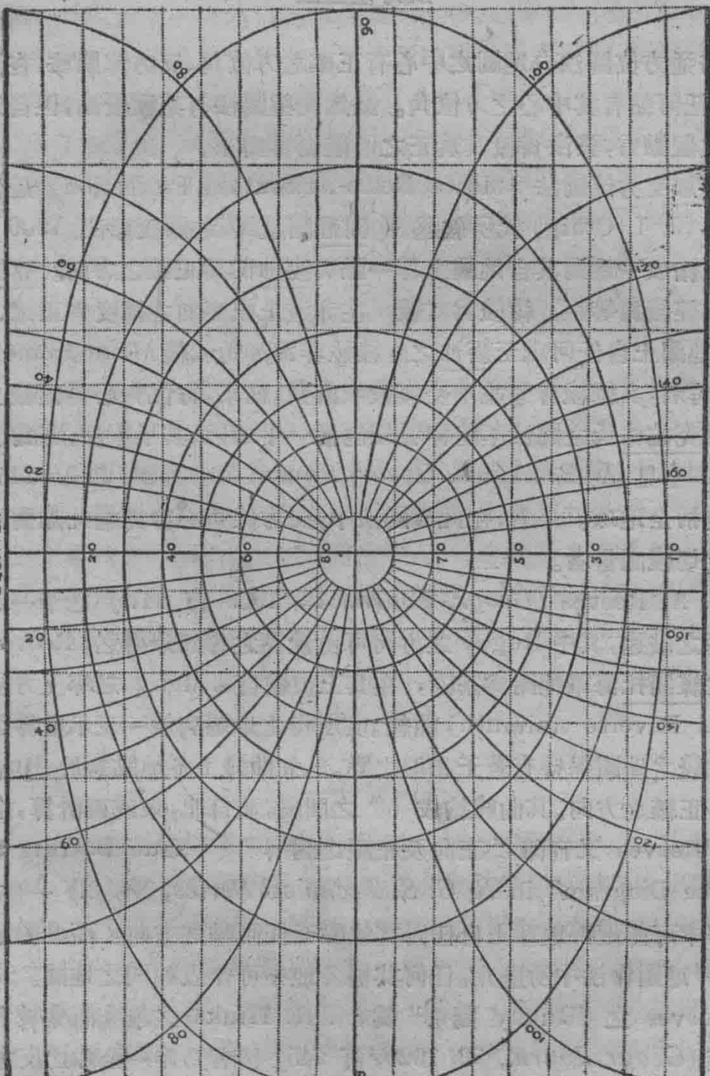
(2) "其主要經綫可解釋爲穿過周圍橢圓之中心之綫；此新圖法之主要經綫及赤道均爲相似之曲綫，相互顛倒，各穿過橢圓之中心，又各終止於長軸之末端"。

(3) "其新緯綫北緯 0°, 30°, 與 60° 接舊緯綫南北緯 45°, 南緯 15° 與北緯 75°，又北緯 15° 與南緯 75°，又南緯綫亦如此" (引據 P. 251)。其詳讀者參考引據之頁。

謀開托橫軸圖法

在謀開托圖法之普通展開中，其投影所作之圓柱沿赤道接於地球儀。在橫軸圖法中，其圓柱沿任何經綫接於地球儀。在第八十四圖中，示謀開托橫軸法與正軸間之關係，其後者已轉過地平經度 90°。因此正軸圖法中之經綫變爲地平直綫，又緯綫則變爲垂直綫。此處亦可注意卽橫軸圖法中之垂直經綫卽正軸圖法中之赤道。再者此新經綫之度數爲舊圖網緯綫度數之補數：相同之關係亦存在於橫軸圖法中之緯綫及正軸圖法中經綫之間。此新圖法在中央經綫上均向赤道相對稱。使此圖法易於繪畫可作一特殊之表。（見美國海岸及陸地測量特刊 67 號及 C. H. Deetz 與 O. S. Adams "地圖投影法原理" 美國海岸及陸地測量特刊 68 號）。

近年來謀開托橫軸圖法已增加其重要性以其可作小面積地形圖之圖法，且可單獨應用。凡應用此圖法者選取二或更多之標準經綫，因此其改歪可減至再小度，卽使其各頁間接合之缺點甚多。此爲喀西尼圖法之正變形式。



第八十四圖　謨開托橫軸圖法（After Deetz and Adams）

反方位圖法

普通方位圖法自地圖之中心有正確之方位角。反方位圖法，在他方面，自任何點有其中心之方位角。顯然此種圖法有某種優點，但自地理學者之觀點言，該法實較其眞正之價值更有興味。

麥加反方位圖法 (Mecca Retro-Azimuthal Projection) 最先爲克拉格 (J. I. Craig) 氏所敍述。(開羅測量局，地圖投影法，1909) 又此法使繪成一地圖其自地圖上每一點與麥加間爲正確之方向。克拉格氏作其經綫爲等距，緯綫爲直綫，在赤道上或麥加之緯度有正確之分隔。在地圖上自任何處至麥加之直綫並非爲等角航綫 (Loxodrome) 之投影，再者，其緯綫普通並不交經綫成直角。結果，方位角必自經綫上測量。但克拉格氏之圖法不能伸展以包括一半球，又其平射法，亦爲反方位圖法 (見 A. R. Hinks, *Geogr. Journ*, 73, 1929, Page 245)，不能包括全地球。再者，在此種圖法中，反方位角必自經過此點對彎曲經綫之切綫測量者。

E. A. Reeves (*Geogr. Journ.*, 73, 1929 頁 247) 已予一地圖以簡短之敍述，其中 Rugby 之方向可由世界之各部分得之。Reeves 以世界之謀開托海軍地圖爲基礎，在其上彼繪自 Rugby 之等反方位角 (Equal Reverse Azimuth) 曲綫。其所得之地圖對於一表示世界之等磁變化綫之地圖保持有若干相似之點。已知曲綫上各地點對於 Rugby 有同一正確之方向。其曲綫繪成 5° 之間隔，並自北，東或西計算，迄於 180°。Reeves 又刊印"正向及正距之圖解"("True Bearing and Distance Diagram" in *R. G. S. Technical Series*, No. 3.) 一書。自此圖解中可能獲得地球上自任何其他點至任何點之方向，而此圖解爲 Rugby 地圖作法中所應用。任何其他各地亦可作成相同之地圖。

Reeves 之"Rugby 圖解"爲 A. R. Hinks 之趣味而樂於考察之基礎 (*Geogr Journ.*, 73, 1929, 頁 245) 後者乃作一全球之反方位角圖法。Rugby 選作爲此投影之中心，然他圖爲以 Malabar 作中心者 (見上述頁數之圖版)。其結果則頗爲新異。Rugby 之對蹠點

(Antipodes)以一圓代表之，以 Rugby 爲中心，圍繞此投影。其南北極均爲同心圓，並有一大空白區域在投影之中，該處確一無所有也！"且更有一有趣之事，吾人有一作法可足說明地圖投影之意義，即投影法乃經綫及緯綫之有秩序之整理。雖由此吾人尙不能作一地圖，因此法中有一部分自相摺疊，又吾人乃得相反之區域而堆置於他區之上"。（根據 Hinks。）任何點可作爲此圖法之中心，但其結果亦不再奇異。例如，當此中心近赤道時，其代表南北極圈之圓結合於對遮圓（Antipodal circle）半徑之半處，又一定長之直綫代表赤道。

毛婁氏大圈航法或二點方位圖法

此爲一有趣之展開法，得之於普通球心圖法。直至 1922 年，始確信球心圖法爲其上之大圓表示如直綫之僅有圖法。然毛婁氏(Maurer) 已指示球心圖法可在任何方向"展開"或"壓縮"修正之，由於該方向之坐標依一常數比率改變。作成之後，則直綫仍留爲直綫，又球心正軸圖法之主要特質亦不變。在此新圖法中，不僅直綫所在之兩點代表大圓，且其對其他各點之方位角亦均正確。因此，在作到達二站間之無綫電波，及找尋此波之來源時則至有價値。（見 *Zeit fur Vermessungswesen*, January 1922, 又 Sir Charles Close *Geography*, Summer, 1927）。

二點等距圖法

此有趣之圖法爲 Sir Charles Close 所應用 (*Geogr. Journ.*, 57, 1921, 頁 446)。此圖法之主要特點爲介於任何任意點與兩定點間之直綫距離均爲正確者。若一水手往來於橫濱及舊金山之間，無需考慮彼迷失之航程，彼可得其眞實之距離自地圖上任一處直接測量之，自其自身之位置至此二定點。在投影上連接二定點之大圓爲正確於縮尺之直綫。當其極爲定點之一時，其緯綫爲同心圓，位於眞距離分隔之處，又其經過他點之經綫亦爲正確於縮尺之直綫。其他經綫則爲曲綫。第八十五圖示此圖法展開之北大西洋圖，紐約與地極角(Land's End)爲其二定點。

第八十五圖　北大西洋之二點等距圖法（After Close）

此作法之普通程序，Sir Charles Close 述之如下："選擇兩點，繪其隔離之距離爲一直綫，正確於縮尺。求在紙上已知緯度及經度之任何點之位置，由球體或球狀體之方法計算此點離二選擇點之距離。此二距程之交點，自兩起點測量者，將在紙上示此新點之位置。其位置亦可由坐標法作之。"（*Geography*，夏季號 1927，頁 108）。

多圓錐圖法之修正

(a) 長方形多圓錐法

此圖法，有時稱爲陸軍部圖法（War Office Projection）。其緯綫之作法適如普通多圓錐圖法。但非均爲正長分割者。赤道爲正確分割之

綫，又經綫爲經過此綫上之適當點所繪之曲綫，並割其餘之緯綫成直角。經綫之距離常太大，而沿緯綫者則太小。除一頁之地形圖外，此法絕無應用。又此法旣非正形，又非等積。

(b) 修正長方形多圓錐法

此爲上法之一改良法，乃麥可氏 (G. T. McCaw) 所計劃。若除赤道之外之他一緯綫選作正確之分段，則在緯綫上縮尺之錯誤已減少，但此種些微之改變，並不影響於經綫之縮尺。"於是變成一問題，或其緯綫上縮尺之錯誤可作成依於經綫上縮尺之錯誤，因是可作此圖法爲正變形；於是吾人可應用普通方法之縮尺因素，在全圖上減少其縮尺錯誤"。(*Geogr. Journ.* 57, 1921 Page 451)。

麥可氏解決此問題，並因此透導一長方形多圓錐圖法，並儘量使其目的爲正變形。"此修正圖法適合於子午綫的 (Meridional) 更較經度形狀 (Longitudinal configuration) 爲佳，但地域全部之廣並不超過 40° 之經度，則似乎甚少劣於所示區之最佳形式，該區之子午綫展廣稍大。其縮尺之錯誤與謀開托橫軸法甚相同（Gauss 同形法）此法可成爲埃及與英埃蘇丹普通地圖或同位置國家之優良圖法"（引證 454 頁）。

〔多圓錐圖法之更進之研究，見 G. T. McCaw, *Indernat. Geog. Congr., Cambridge,* 1928, Pages 112—117. 應用此圖法於世界地圖之可能性在該處討論。〕

附錄 I

適用諸圖法表

用途	圖式	適用諸圖法
世界半球圖	1. 等積	等積方位法 (卽 Lambert)
		Mollweide 之半球圖
	2. 正變形	平射圖法
	3. 普通	等距球心法
		球狀圖法
單頁之世界圖	1. 等積	等積圓柱圖法（近兩極東西之歪形甚大）
		正弦曲線法（怪狀;故歪尤在地圖之南北）
		拋物線形法（輪及形狀爲正弦曲線及Mollweide之中間法）
		橢變形法（正弦曲線及 Mollweide 之數學中數）
		Mollweide 法 Aitoff 法 }（作分布圖尤佳,形狀美觀）
	2. 正變形	Mercator 法（各方向均正確）
	3. 普通	Gall 平射法（歪誤較 Mercator 法爲小，佔據之地位較小）
		Van der Grinten 圖法（可用,但非極適用）
	4. 特殊目的	Mollweide 橫軸及斜軸法
		正弦曲線，Mollweide, Eumorphic（橢變形）之斷裂形（圖綱之整理使專注意於某區域或分布）
各洲地圖 A.亞洲與北美洲	1. 等積	Lambert 等積方位法（自中心之方向正確）
		Bonne 法（東北及西北角之歪誤甚大）

	2. 普通	等距方位法（自中心之方向正確）
B.歐洲與澳洲	1. 等積	Lambert 等積方位法
		Bonne 法
		Albers 二標準緯線等積圓錐法
	2. 普通	二標準緯線簡單圓錐法
C.非洲與南美洲	1. 等積	Lambert 等積方位法
		正弦曲線法（或在南美洲用 Bonne 法）
		Mollweide 法
		Aitoff 法 等積圓柱法 }（非常用，但可用，尤爲 Aitoff 法）
	2. 普通	等距方位法
		Mercator
		平射法 正射法 球狀法 }（任何此法均可用，但無特殊之優點可得）
兩極區域	1. 等積	Lambert 等積方位法 }（許多圖法——例如球心平射——頗爲適用，但上述二法爲最佳
	2. 等距	等距方位法
溫帶之大國——如美國，俄國，中國等	1. 等積	Lambert 等積方位法
		一標準緯線等積圓錐法
		Albers 二標準緯線等積圓錐法
		Bonne 法
		（等積方位法適用於大多數之國家，但因其離於繪畫，若用於大洲較小之區域則無大優點可以獲得，故較簡單之圖法用於溫帶緯度之國家較爲普通）
	2. 普通	二標準緯線簡單圓錐法
		一或二標準緯線之正變形圓錐法（Debes 圖冊中有此圖法之例）

熱帶區域之大小國家，如印度，巴西等		（若一國家爲赤道所割，或極近之，已述任何適用於非洲之圖法均可應用。如一更北或南之國家，則適用之圖法將爲應用於中國等之圖法）
小國家，其在或近赤道者除外，如西班牙，意大利，大不列顛，斯堪的那維亞等	1. 等積 2. 普通	一標準緯線之等積圓錐法 Albers 法 Bonne 法 （因用嚴格之等積圖法於小國家之地圖册無特殊之優點可得，則下列二法常十分適用 一標準緯線簡單圓錐法 二標準緯線簡單圓錐法
大縮尺地圖（地形）		由直角坐標之 Cassini 法 修正多圓錐法，如用於"百萬分之一"地圖 長方形多圓錐法（陸軍部圖法） 修正長方形多圓錐法 由錯誤平衡之 Airy 方位圖法（如在"十哩對一吋"之聯合王國地圖） Mercator 橫軸法（見頁 148—9）
特殊地圖	1. 航海 2. 航空 3. 無線方向 4. 反方位	Mercator 法（亦見 Close 二點等距圖法） Mercator 與可能之球心法 球心法；毛斐大圈航法或二點方位法 反方位圖法（見頁 150—1）

附錄 II

初步三角法

非研究數學者，當其初次進入地圖投影法之研討時，常感覺在所有此種題目之書籍中之數學符號之恐懼。然而，不僅在瞭解上，即在普通應用之多數圖法之作法上，其中所應用之數學知識如此其少，此誠可奇異者。

在開始時，由吾人研究為何僅需用三角法。由此字之意義言，意即"三角形之測量"。在實用上，此乃結合三角形之邊與角之一種方法。量度一線或一角並無困難；吾人需要更進一步：求三角形他邊之長或他角之大小，於此吾人當知一邊及二角或二邊與一角等。設吾人舉一極簡單之例。一梯依靠於垂直之牆上，與地平作一不知大小之角，該面吾人假定為一地平線。梯脚與牆脚之距離為 12 呎，又梯達牆上 30 呎之點。則梯之斜度為何角？吾人知二點——梯與牆間之距離及梯頂與地面之高。

稱牆為 BC，梯為 AB，又地為 AC 如第八十六圖。

設可能將牆移前或移後，使其佔有如線 1, 2, 及 3 之位置。但同時又不變梯之斜度（即梯與地面間之傾斜角）但允許其伸長或縮短，如此例然。

由此吾人有數個直角之三角形，均有相同值之角。

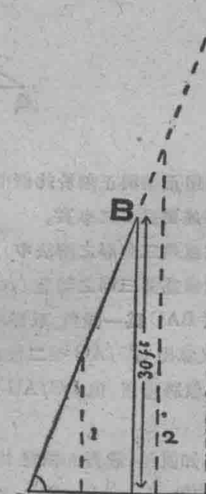
在此不同之例中，牆上梯之高互異，梯脚與牆脚之距離亦然，但其斜度則不變。

由此圖可見角 BAC 為一常數，不論其牆在何處。易言之，牆與地面之比率為一常數，又此比稱為角 BAC 之正切(Tangent)。

設吾人依縮尺繪此圖，即可以量角器量其斜度。但此法殊為拙笨——因吾人即可見之——故甚不必需。

代替此點，由吾人表示此梯延伸至牆之距離與自牆至其脚之距離為一比例，則書此為 BC/AC。吾人知 BC=30 呎，又 AC=12 呎，或 BC/AC=2.5。

設吾人稱此比率為角 BAC 之正切，吾人即可應用三角法，並觀正切表上 2.5 值所表示之角，吾人可尋得為（近似值）68°12′。——易言之，即梯與牆作 68°12′ 之角。



第八十六圖

設吾人欲求梯之長度，當其脚離牆 12 呎，其頂在牆上 30 呎之特殊例中，吾人可應用另一比例，或可由畢達哥拉斯定理(Pythagoras's Theorem)之方法求得之："直角三角形斜邊之平方等於其他二邊平方之和"。吾人可於下式示之：

$$AB^2=AC^2+BC^2$$

又 $$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$$

$$=\sqrt{12^2+30^2}$$

$$=32.31\text{ 呎。}$$

若吾人應用三角法，BAC 角之正割爲 AB/AC。

吾人知 ∠BAC＝68°12′，又自表得知此角之正割爲 2.6927。

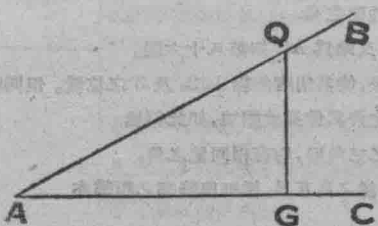
故 AB/AC＝2.6927。

又因 AC＝12 呎，AB＝AC×2.6927

＝12×2.6927＝32.3124 呎。

今吾人已求得三角形所有各邊之長及 BAC 角之值。因吾人論及一直角三角形，吾人可知 ABC 角＝90°－∠BAC＝90°－68°12′＝21°48′。

今三角形已"解出"，簡單三角法乃討論三角形之解法。



第八十七圖

引用正切與正割於此例中，吾人所希望者，乃在說明初步三角法之需要及應用。下列各段將論述更重要之事實。

在直角三角形之解法中，實際上僅有三比例須行記憶。在實際應用上則有六則，但其次之三則僅爲前三則之倒數 (reciprocals)。

設 BAC 爲一銳角。取任何點 G 於 AC 上又作垂線 QG。於是，在任何縮尺上，量 AG 及 QG，又算出 QG/AG 至二位或三位小數。當 G 取於 AC 上另一部分時，作相同之事。AG 與 QG 之值將變更，但 QG/AG 之比則不變。此比例 QG/AG 稱之爲 BAC 角之正切（圖八十七）。

已知真值，設吾人假定 BAC 角＝30°，又 AG＝2″。於是 QG/AG＝BAC 角之正切。

故 QG＝AG×30° 之正切

＝2×0.5774

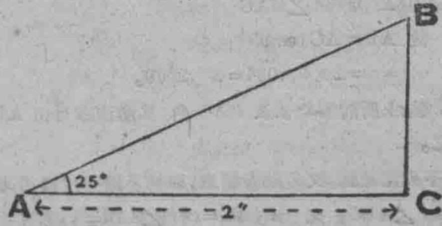
＝1.″1548。

其次之二比例爲正弦 (sine) 及餘弦 (cosine)。用前例同一之圖並繪 QG 垂直 AC。作出 QG/AQ，又 AG/AQ。試改換 QG 之位置，作相同之事。則將發現 QG/AQ 與 AG/AQ 之

比例仍相同。比例 QG/AG 稱爲 BAC 角之正弦，又比例 AG/AQ 稱爲 BAC 角之餘弦。

吾人可研究任何直角三角形，已知一邊及一角，吾人卽可求得他角及邊——易言之，吾人卽可"解"此三角形。

設 ABC 爲此種三角形，其直角在 C，又 BAC 角 $=25°$，$AC=2''$（圖八十八）。



第八十八圖

今 $BC/AC=$ BAC 角之正切。

故 $BC=AC\times\tan 25°$

$=2\times 0.4663$

$=0''.9326$。

因 BAC 角 $=25°$ 又 BCA 角 $=90°$，則 ABC 角 $=90°-25°=65°$。

今吾人可求第三邊，AB，應用幾何方法。

由歐几里德 1. 47；$AB^2=AC^2+BC^2$

$=2^2+0.9326^2$

$=4.8697$

又 $AB=\sqrt{4.8697}=2''.207$。

然則，乘方及求方根頗爲不便。此處其次之三比例可以應用。

在三角形 ABC 中，吾人得：

1. $BC/AC=\tan\angle BAC$
2. $BC/AB=\sin\angle BAC$
3. $AC/AB=\cos\angle BAC$

易言之，$\tan\angle BAC=$ 對邊/隣邊

$\sin\angle BAC=$ 對邊/斜邊

$\cos\angle BAC=$ 隣邊/斜邊

此三比例之倒數爲 BAC 角之餘切 (cotangent) 餘割 (cosecant) 及正割 (secant)。

因此 $\cot\angle BAC=$ 隣邊/對邊

$\operatorname{cosec}\angle BAC=$ 斜邊/對邊

$\sec\angle PAC=$ 斜邊/隣邊

今任何直角三角形均可由三角方法完全解決之。在三角形 ABC（圖八十八）中，吾人得 $AC=2''$，$\angle BAC=25°$ 又 $\angle BCA=90°$。

故 $\angle ABC=65°$。

又吾人已知 $BC=AC\tan\angle BAC=0.''9326$。

求 AB：由比例 $AB/AC=\sec\angle BAC$

故 $AB=AC\sec 25°$

$=2\times1.1034=2''.2068$。

一更進之點可以注意。上所討論均值及 BAC 角。其解法亦可由 ABC 角（$=90°-25°$）之方法同一簡易求得之。

在此例中，吾人得下列之比例，又若讀者願意，則極易證明可得相同之結果。

1. $AC/BC=\tan\angle ABC$，又 $BC/AC=\cot\angle ABC$。
2. $BC/AB=\cos\angle ABC$，又 $AB/BC=\sec\angle ABC$。
3. $AC/AB=\sin\angle ABC$，又 $AB/AC=\operatorname{cosec}\angle ABC$。

易言之，一角之正切（或正弦或餘弦）等於其餘角之餘切，餘類推。

圓之度量法

以上吾人已論及簡單之直角三角形。今設吾人討論三角形之另一形式——即三角形之一邊為圓之一部分，又其他二邊為半徑。此為一普通之知識，即任何圓之直徑對於其圓周保持某種之比例，此比率稱之為 π，又其眞值為 3.14159265……或近似 3.1416 或 $3\frac{1}{7}$。

若研究圓周之任何部分，又以直線（半徑）連接弧之兩端至圓之中心，吾人即得一三角形其邊之一為曲線。此種圖形（圖八十九之 AOB）稱之為圓之"扇形"（Sector）故弧 AB 之長增加或減少，因之 AOB 角之值即增加或減少——事實上，在同一圓中弧與對中心之角成比例。

今，設弧與圓之半徑同長，則彼以一常定之角對其中心。此常定之角稱為一"弧度"（Radian），又一弧度之值為 57.296 度。

此點之證法頗為簡單（圖八十九）：

O 為半徑 r 之圓之中心。

設弧 $AB=r$，

全圓周$=2\pi r$，但因$AB=r$，$AB=$全圓周之$1/2\pi$。

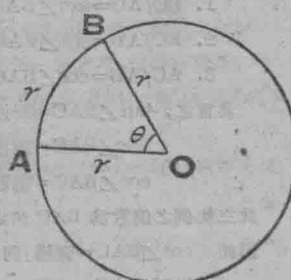
再者，因在任何圓之中心有四直角，

BOA 角$=$四直角之 $1/2\pi$

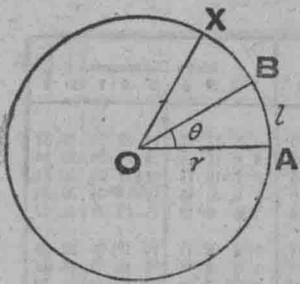
$=360°$ 之 $1/2\pi$

$$=\frac{1\times360}{2\times3.1416}$$

$=57°.296$



第八十九圖



第九十圖

易言之 θ，對中心之角，爲一常數，不論 r 爲如何大。

既求得"弧度"之值，吾人可解釋一角之圓度 (Circular measure)——此爲角所包含弧度之數。

已知 1 Radian

$$=(1/2\pi)\times 360^\circ$$
$$=(1/\pi)\times 180^\circ$$

自此故 $1^\circ=\pi/180$ Radians，又此特例：

π Radians $=180^\circ$ 或 2 直角。

今進論此式之普通概念。在第九十圖中，吾人已知 BOA 角 $=\theta$。又半徑 $OA=r$。

稱此弧 BA 爲 l。

此處需證明 $l=r\theta$。

設 $\angle XOA=1$ radain。因 1 radian 爲對等於圓之半徑之弧，$XA=r$。

因弧對其所對之角成比例，

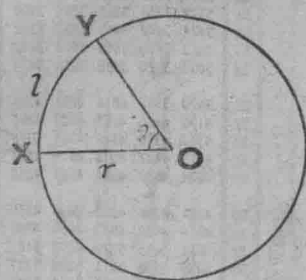
又 $\angle BOA=\theta\times\angle XOA$

故弧 $BA=\theta\times$ 弧 XA

或 $l=r\theta$

因此 $\theta=l/r$

又 $r=l/\theta$



第九十一圖

或，由另一法說明之，在圓之中心，對向圓周之一弧之角之圓度爲其弧對半徑之比。可舉數例以明之。

在第九十一圖中，設 $r=3''$ 又 $\theta=30^\circ$

於是 $l=r\theta$

$=3\times 30$ (in radians)

$=3\times 0.5236=1''.5708$

在第九十一圖中，設弧 $XY=2''.5$ 又 $r=3''$。

於是 $\theta=l/r=2.5/3=0.8333=47^\circ.73$。

最後，設（圖九十一）$\theta=50^\circ$，又 $l=4''$。

於是 $r=l/\theta=4/0.8727=4''.6$。

對 數

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

											Mean Differences.								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	2	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

Angle.	Log. Sines.	Log. Cosines.	Log. Tangents.	Log. Cotangents.	Log. Secants.	Log. Cosecants.
0°	$-\infty$	0·0000	$-\infty$	$+\infty$	0·0000	$+\infty$
1	$\bar{2}$·2419	$\bar{1}$·9999	$\bar{2}$·2419	1·7581	0·0001	1·7581
2	$\bar{2}$·5428	$\bar{1}$·9997	$\bar{2}$·5431	1·4569	0·0003	1·4572
3	$\bar{2}$·7188	$\bar{1}$·9994	$\bar{2}$·7194	1·2806	0·0006	1·2812
4	$\bar{2}$·8436	$\bar{1}$·9989	$\bar{2}$·8446	1·1554	0·0011	1·1564
5	$\bar{2}$·9403	$\bar{1}$·9983	$\bar{2}$·9420	1·0580	0·0017	1·0597
6	$\bar{1}$·0192	$\bar{1}$·9976	$\bar{1}$·0216	0·9784	0·0024	0·9808
7	$\bar{1}$·0859	$\bar{1}$·9968	$\bar{1}$·0891	0·9109	0·0032	0·9141
8	$\bar{1}$·1436	$\bar{1}$·9958	$\bar{1}$·1478	0·8522	0·0042	0·8564
9	$\bar{1}$·1943	$\bar{1}$·9946	$\bar{1}$·1997	0·8003	0·0054	0·8057
10	$\bar{1}$·2397	$\bar{1}$·9934	$\bar{1}$·2463	0·7537	0·0066	0·7603
11	$\bar{1}$·2806	$\bar{1}$·9919	$\bar{1}$·2887	0·7113	0·0081	0·7194
12	$\bar{1}$·3179	$\bar{1}$·9904	$\bar{1}$·3275	0·6725	0·0096	0·6821
13	$\bar{1}$·3521	$\bar{1}$·9887	$\bar{1}$·3634	0·6366	0·0113	0·6479
14	$\bar{1}$·3837	$\bar{1}$·9869	$\bar{1}$·3968	0·6032	0·0131	0·6163
15	$\bar{1}$·4130	$\bar{1}$·9849	$\bar{1}$·4281	0·5719	0·0151	0·5870
16	$\bar{1}$·4403	$\bar{1}$·9828	$\bar{1}$·4575	0·5425	0·0172	0·5597
17	$\bar{1}$·4659	$\bar{1}$·9806	$\bar{1}$·4853	0·5147	0·0194	0·5341
18	$\bar{1}$·4900	$\bar{1}$·9782	$\bar{1}$·5118	0·4882	0·0218	0·5100
19	$\bar{1}$·5126	$\bar{1}$·9757	$\bar{1}$·5370	0·4630	0·0243	0·4874
20	$\bar{1}$·5341	$\bar{1}$·9730	$\bar{1}$·5611	0·4389	0·0270	0·4659
21	$\bar{1}$·5543	$\bar{1}$·9702	$\bar{1}$·5842	0·4158	0·0298	0·4457
22	$\bar{1}$·5736	$\bar{1}$·9672	$\bar{1}$·6064	0·3936	0·0328	0·4264
23	$\bar{1}$·5919	$\bar{1}$·9640	$\bar{1}$·6279	0·3721	0·0360	0·4081
24	$\bar{1}$·6093	$\bar{1}$·9607	$\bar{1}$·6486	0·3514	0·0393	0·3907
25	$\bar{1}$·6259	$\bar{1}$·9573	$\bar{1}$·6687	0·3313	0·0427	0·3741
26	$\bar{1}$·6418	$\bar{1}$·9537	$\bar{1}$·6882	0·3118	0·0463	0·3582
27	$\bar{1}$·6570	$\bar{1}$·9499	$\bar{1}$·7072	0·2928	0·0501	0·3430
28	$\bar{1}$·6716	$\bar{1}$·9459	$\bar{1}$·7257	0·2743	0·0541	0·3284
29	$\bar{1}$·6856	$\bar{1}$·9418	$\bar{1}$·7438	0·2562	0·0582	0·3144
30	$\bar{1}$·6990	$\bar{1}$·9375	$\bar{1}$·7614	0·2386	0·0625	0·3010
31	$\bar{1}$·7118	$\bar{1}$·9331	$\bar{1}$·7788	0·2212	0·0669	0·2882
32	$\bar{1}$·7242	$\bar{1}$·9284	$\bar{1}$·7958	0·2042	0·0716	0·2758
33	$\bar{1}$·7361	$\bar{1}$·9236	$\bar{1}$·8125	0·1875	0·0764	0·2639
34	$\bar{1}$·7476	$\bar{1}$·9186	$\bar{1}$·8290	0·1710	0·0814	0·2524
35	$\bar{1}$·7586	$\bar{1}$·9134	$\bar{1}$·8452	0·1548	0·0866	0·2414
36	$\bar{1}$·7692	$\bar{1}$·9080	$\bar{1}$·8613	0·1387	0·0920	0·2308
37	$\bar{1}$·7795	$\bar{1}$·9023	$\bar{1}$·8771	0·1229	0·0977	0·2205
38	$\bar{1}$·7893	$\bar{1}$·8965	$\bar{1}$·8928	0·1072	0·1035	0·2107
39	$\bar{1}$·7989	$\bar{1}$·8905	$\bar{1}$·9084	0·0916	0·1095	0·2011
40	$\bar{1}$·8081	$\bar{1}$·8843	$\bar{1}$·9238	0·0762	0·1157	0·1919
41	$\bar{1}$·8169	$\bar{1}$·8778	$\bar{1}$·9392	0·0608	0·1222	0·1831
42	$\bar{1}$·8255	$\bar{1}$·8711	$\bar{1}$·9544	0·0456	0·1289	0·1745
43	$\bar{1}$·8338	$\bar{1}$·8641	$\bar{1}$·9697	0·0303	0·1359	0·1662
44	$\bar{1}$·8418	$\bar{1}$·8569	$\bar{1}$·9848	0·0152	0·1431	0·1582

Angle.	Log. Sines.	Log. Cosines.	Log. Tangents.	Log. Cotangents.	Log. Secants.	Log. Cosecants.
45°	$\bar{1}$·8495	$\bar{1}$·8495	0·0000	0·0000	0·1505	0·1505
46	$\bar{1}$·8569	$\bar{1}$·8418	0·0152	$\bar{1}$·9848	0·1582	0·1431
47	$\bar{1}$·8641	$\bar{1}$·8338	0·0303	$\bar{1}$·9697	0·1662	0·1359
48	$\bar{1}$·8711	$\bar{1}$·8255	0·0456	$\bar{1}$·9544	0·1745	0·1289
49	$\bar{1}$·8778	$\bar{1}$·8169	0·0608	$\bar{1}$·9392	0·1831	0·1222
50	$\bar{1}$·8843	$\bar{1}$·8081	0·0762	$\bar{1}$·9238	0·1919	0·1157
51	$\bar{1}$·8905	$\bar{1}$·7989	0·0916	$\bar{1}$·9084	0·2011	0·1095
52	$\bar{1}$·8965	$\bar{1}$·7893	0·1072	$\bar{1}$·8928	0·2107	0·1035
53	$\bar{1}$·9023	$\bar{1}$·7795	0·1229	$\bar{1}$·8771	0·2205	0·0977
54	$\bar{1}$·9080	$\bar{1}$·7692	0·1387	$\bar{1}$·8613	0·2308	0·0920
55	$\bar{1}$·9134	$\bar{1}$·7586	0·1548	$\bar{1}$·8452	0·2414	0·0866
56	$\bar{1}$·9186	$\bar{1}$·7476	0·1710	$\bar{1}$·8290	0·2524	0·0814
57	$\bar{1}$·9236	$\bar{1}$·7361	0·1875	$\bar{1}$·8125	0·2639	0·0764
58	$\bar{1}$·9284	$\bar{1}$·7242	0·2042	$\bar{1}$·7958	0·2758	0·0716
59	$\bar{1}$·9331	$\bar{1}$·7118	0·2212	$\bar{1}$·7788	0·2882	0·0669
60	$\bar{1}$·9375	$\bar{1}$·6990	0·2386	$\bar{1}$·7614	0·3010	0·0625
61	$\bar{1}$·9418	$\bar{1}$·6856	0·2562	$\bar{1}$·7438	0·3144	0·0582
62	$\bar{1}$·9459	$\bar{1}$·6716	0·2743	$\bar{1}$·7257	0·3284	0·0541
63	$\bar{1}$·9499	$\bar{1}$·6570	0·2928	$\bar{1}$·7072	0·3430	0·0501
64	$\bar{1}$·9537	$\bar{1}$·6418	0·3118	$\bar{1}$·6882	0·3582	0·0463
65	$\bar{1}$·9573	$\bar{1}$·6259	0·3313	$\bar{1}$·6687	0·3741	0·0427
66	$\bar{1}$·9607	$\bar{1}$·6093	0·3514	$\bar{1}$·6486	0·3907	0·0393
67	$\bar{1}$·9640	$\bar{1}$·5919	0·3721	$\bar{1}$·6279	0·4081	0·0360
68	$\bar{1}$·9672	$\bar{1}$·5736	0·3936	$\bar{1}$·6064	0·4264	0·0328
69	$\bar{1}$·9702	$\bar{1}$·5543	0·4158	$\bar{1}$·5842	0·4457	0·0298
70	$\bar{1}$·9730	$\bar{1}$·5341	0·4389	$\bar{1}$·5611	0·4659	0·0270
71	$\bar{1}$·9757	$\bar{1}$·5126	0·4630	$\bar{1}$·5370	0·4874	0·0243
72	$\bar{1}$·9782	$\bar{1}$·4900	0·4882	$\bar{1}$·5118	0·5100	0·0218
73	$\bar{1}$·9806	$\bar{1}$·4659	0·5147	$\bar{1}$·4853	0·5341	0·0194
74	$\bar{1}$·9828	$\bar{1}$·4403	0·5425	$\bar{1}$·4575	0·5597	0·0172
75	$\bar{1}$·9849	$\bar{1}$·4130	0·5719	$\bar{1}$·4281	0·5870	0·0151
76	$\bar{1}$·9869	$\bar{1}$·3837	0·6032	$\bar{1}$·3968	0·6163	0·0131
77	$\bar{1}$·9887	$\bar{1}$·3521	0·6366	$\bar{1}$·3634	0·6479	0·0113
78	$\bar{1}$·9904	$\bar{1}$·3179	0·6725	$\bar{1}$·3275	0·6821	0·0096
79	$\bar{1}$·9919	$\bar{1}$·2806	0·7113	$\bar{1}$·2887	0·7194	0·0081
80	$\bar{1}$·9934	$\bar{1}$·2397	0·7537	$\bar{1}$·2463	0·7603	0·0066
81	$\bar{1}$·9946	$\bar{1}$·1943	0·8003	$\bar{1}$·1997	0·8057	0·0054
82	$\bar{1}$·9958	$\bar{1}$·1436	0·8522	$\bar{1}$·1478	0·8564	0·0042
83	$\bar{1}$·9968	$\bar{1}$·0859	0·9109	$\bar{1}$·0891	0·9141	0·0032
84	$\bar{1}$·9976	$\bar{1}$·0192	0·9784	$\bar{1}$·0216	0·9808	0·0024
85	$\bar{1}$·9983	$\bar{2}$·9403	1·0580	$\bar{2}$·9420	1·0597	0·0017
86	$\bar{1}$·9989	$\bar{2}$·8436	1·1554	$\bar{2}$·8446	1·1564	0·0011
87	$\bar{1}$·9994	$\bar{2}$·7188	1·2806	$\bar{2}$·7194	1·2812	0·0006
88	$\bar{1}$·9997	$\bar{2}$·5428	1·4569	$\bar{2}$·5431	1·4572	0·0003
89	$\bar{1}$·9999	$\bar{2}$·242	1·758	$\bar{2}$·242	1·7581	0·0001

Angle.	Nat. Sines.	Nat. Cosines.	Nat. Tangents.	Nat. Cotangents.	Nat. Secants.	Nat. Cosecants.
0°	·0000	1·0000	0·0000	∞	1·0000	∞
1	·0175	·9998	0·0175	57·29	1·0002	57·30
2	·0349	·9994	0·0349	28·64	1·0006	28·65
3	·0523	·9986	0·0524	19·08	1·0014	19·11
4	·0698	·9976	0·0699	14·30	1·0024	14·34
5	·0872	·9962	0·0875	11·43	1·0038	11·47
6	·1045	·9945	0·1051	9·514	1·0055	9·567
7	·1219	·9925	0·1228	8·144	1·0075	8·206
8	·1392	·9903	0·1405	7·115	1·0098	7·185
9	·1564	·9877	0·1584	6·314	1·0125	6·392
10	·1736	·9848	0·1763	5·6713	1·0154	5·7588
11	·1908	·9816	0·1944	5·1446	1·0187	5·2408
12	·2079	·9781	0·2126	4·7046	1·0223	4·8097
13	·2250	·9744	0·2309	4·3315	1·0263	4·4454
14	·2419	·9703	0·2493	4·0108	1·0306	4·1336
15	·2588	·9659	0·2679	3·7321	1·0353	3·8637
16	·2756	·9613	0·2867	3·4874	1·0403	3·6280
17	·2924	·9563	0·3057	3·2709	1·0457	3·4203
18	·3090	·9511	0·3249	3·0777	1·0515	3·2361
19	·3256	·9455	0·3443	2·9042	1·0576	3·0716
20	·3420	·9397	0·3640	2·7475	1·0642	2·9238
21	·3584	·9336	0·3839	2·6051	1·0711	2·7904
22	·3746	·9272	0·4040	2·4751	1·0785	2·6695
23	·3907	·9205	0·4245	2·3559	1·0864	2·5593
24	·4067	·9135	0·4452	2·2460	1·0946	2·4586
25	·4226	·9063	0·4663	2·1445	1·1034	2·3662
26	·4384	·8988	0·4877	2·0503	1·1126	2·2812
27	·4540	·8910	0·5095	1·9626	1·1223	2·2027
28	·4695	·8829	0·5317	1·8807	1·1326	2·1301
29	·4848	·8746	0·5543	1·8040	1·1434	2·0627
30	·5000	·8660	0·5774	1·7321	1·1547	2·0000
31	·5150	·8572	0·6009	1·6643	1·1666	1·9416
32	·5299	·8480	0·6249	1·6003	1·1792	1·8871
33	·5446	·8387	0·6494	1·5399	1·1924	1·8361
34	·5592	·8290	0·6745	1·4826	1·2062	1·7883
35	·5736	·8192	0·7002	1·4281	1·2208	1·7434
36	·5878	·8090	0·7265	1·3764	1·2361	1·7013
37	·6018	·7986	0·7536	1·3270	1·2521	1·6616
38	·6157	·7880	0·7813	1·2799	1·2690	1·6243
39	·6293	·7771	0·8098	1·2349	1·2868	1·5890
40	·6428	·7660	0·8391	1·1918	1·3054	1·5557
41	·6561	·7547	0·8693	1·1504	1·3250	1·5243
42	·6691	·7431	0·9004	1·1106	1·3456	1·4945
43	·6820	·7314	0·9325	1·0724	1·3673	1·4663
44	·6947	·7193	0·9657	1·0355	1·3902	1·4396

Angle.	Nat. Sines	Nat. Cosines.	Nat. Tangents.	Nat. Cotangents.	Nat. Secants.	Nat. Cosecants.
45	·7071	·7071	1·0000	1·0000	1·4142	1·4142
46	·7193	·6947	1·0355	0·9657	1·4396	1·3902
47	·7314	·6820	1·0724	0·9325	1·4663	1·3673
48	·7431	·6691	1·1106	0·9004	1·4945	1·3456
49	·7547	·6561	1·1504	0·8693	1·5243	1·3250
50	·7660	·6428	1·1918	0·8391	1·5557	1·3054
51	·7771	·6293	1·2349	0·8098	1·5890	1·2868
52	·7880	·6157	1·2799	0·7813	1·6243	1·2690
53	·7986	·6018	1·3270	0·7536	1·6616	1·2521
54	·8090	·5878	1·3764	0·7265	1·7013	1·2361
55	·8192	·5736	1·4281	0·7002	1·7434	1·2208
56	·8290	·5592	1·4826	0·6745	1·7883	1·2062
57	·8387	·5446	1·5399	0·6494	1·8361	1·1924
58	·8480	·5299	1·6003	0·6249	1·8871	1·1792
59	·8572	·5150	1·6643	0·6009	1·9416	1·1666
60	·8660	·5000	1·7321	0·5774	2·0000	1·1547
61	·8746	·4848	1·8040	0·5543	2·0627	1·1434
62	·8829	·4695	1·8807	0·5317	2·1301	1·1326
63	·8910	·4540	1·9626	0·5095	2·2027	1·1223
64	·8988	·4384	2·0503	0·4877	2·2812	1·1126
65	·9063	·4226	2·1445	0·4663	2·3662	1·1034
66	·9135	·4067	2·2460	0·4452	2·4586	1·0946
67	·9205	·3907	2·3559	0·4245	2·5593	1·0864
68	·9272	·3746	2·4751	0·4040	2·6695	1·0785
69	·9336	·3584	2·6051	0·3839	2·7904	1·0711
70	·9397	·3420	2·7475	0·3640	2·9238	1·0642
71	·9455	·3256	2·9042	0·3443	3·0716	1·0576
72	·9511	·3090	3·0777	0·3249	3·2361	1·0515
73	·9563	·2924	3·2709	0·3057	3·4203	1·0457
74	·9613	·2756	3·4874	0·2867	3·6280	1·0403
75	·9659	·2588	3·7321	0·2679	3·8637	1·0353
76	·9703	·2419	4·0108	0·2493	4·1336	1·0306
77	·9744	·2250	4·3315	0·2309	4·4454	1·0263
78	·9781	·2079	4·7046	0·2126	4·8097	1·0223
79	·9816	·1908	5·1446	0·1944	5·2408	1·0187
80	·9848	·1736	5·671	0·1763	5·759	1·0154
81	·9877	·1564	6·314	0·1584	6·392	1·0125
82	·9903	·1392	7·115	0·1405	7·185	1·0098
83	·9925	·1219	8·144	0·1228	8·206	1·0075
84	·9945	·1045	9·51	0·1051	9·57	1·0055
85	·9962	·0872	11·43	0·0875	11·47	1·0038
86	·9976	·0698	14·30	0·0699	14·34	1·0024
87	·9986	·0523	19·08	0·0524	19·11	1·0014
88	·9994	·0349	28·64	0·0349	28·65	1·0006
89	·9998	·0175	57·29	0·0175	57·30	1·0002

弧度與度數

°	Rad.	°	Rad.	°	Rad.	′	Rad	′	Rad.
0	0·0000	30	0·5236	60	1·0472	0	·0000	30	·0087
1	0·0175	31	0·5411	61	1·0647	1	·0003	31	·0090
2	0·0349	32	0·5585	62	1·0821	2	·0006	32	·0093
3	0·0524	33	0·5760	63	1·0996	3	·0009	33	·0096
4	0·0698	34	0·5934	64	1·1170	4	·0012	34	·0099
5	0·0873	35	0·6109	65	1·1345	5	·0015	35	·0102
6	0·1047	36	0·6283	66	1·1519	6	·0017	36	·0105
7	0·1222	37	0·6458	67	1·1694	7	·0020	37	·0108
8	0·1396	38	0·6632	68	1·1868	8	·0023	38	·0111
9	0·1571	39	0·6807	69	1·2043	9	·0026	39	·0113
10	0·1745	40	0·6981	70	1·2217	10	·0029	40	·0116
11	0·1920	41	0·7156	71	1·2392	11	·0032	41	·0119
12	0·2094	42	0·7330	72	1·2566	12	·0035	42	·0122
13	0·2269	43	0·7505	73	1·2741	13	·0038	43	·0125
14	0·2443	44	0·7679	74	1·2915	14	·0041	44	·0128
15	0·2618	45	0·7854	75	1·3090	15	·0044	45	·0131
16	0·2793	46	0·8029	76	1·3265	16	·0047	46	·0134
17	0·2967	47	0·8203	77	1·3439	17	·0049	47	·0137
18	0·3142	48	0·8378	78	1·3614	18	·0052	48	·0140
19	0·3316	49	0·8552	79	1·3788	19	·0055	49	·0143
20	0·3491	50	0·8727	80	1·3963	20	·0058	50	·0145
21	0·3665	51	0·8901	81	1·4137	21	·0061	51	·0148
22	0·3840	52	0·9076	82	1·4312	22	·0064	52	·0151
23	0·4014	53	0·9250	83	1·4486	23	·0067	53	·0154
24	0·4189	54	0·9425	84	1·4661	24	·0070	54	·0157
25	0·4363	55	0·9599	85	1·4835	25	·0073	55	·0160
26	0·4538	56	0·9774	86	1·5010	26	·0076	56	·0163
27	0·4712	57	0·9948	87	1·5184	27	·0079	57	·0166
28	0·4887	58	1·0123	88	1·5359	28	·0081	58	·0169
29	0·5061	59	1·0297	89	1·5533	29	·0084	59	·0172
30	0·5236	60	1·0472	90	1·5708	30	·0087	60	·0175

Rad.	Degrees.
0·001	0·06
0·002	0·11
0·003	0·17
0·004	0·23
0·005	0·29
0·006	0·34
0·007	0·40
0·008	0·46
0·009	0·52
0·01	0·57
0·02	1·15
0·03	1·72
0·04	2·29
0·05	2·86
0·06	3·44
0·07	4·01
0·08	4·58
0·09	5·16
0·1	5·73
0·2	11·46
0·3	17·19
0·4	22·92
0·5	28·65
0·6	34·38
0·7	40·11
0·8	45·84
0·9	51·57
1	57·30
2	114·59
3	171·89
4	229·18
5	286·48
6	343·77