Выданьне Беларускае Цэнтральнае Школьнае Рады.

Н. Л. Цыгельман.

АСНАЎНЫЯ ПАЧАТКІ АРЫТМЭТЫКІ.

СЫСТЭМАТЫЧНЫ КАНСПЭКТ

ДЛЯ ПАЎТАРЭНЬНЯ АРЫТМЭТЫКІ

Ў НІЖЭЙШЫХ І СЯРЭДНІХ ШКОЛАХ.

З 30-га расейскага выданьня

ПЕРАКЛАЎ

Настаўнік Ю. Лістапад.

МЕНСК
Друкарня Я. Грынблята.
1920

Прадмова.

Друкаваньне гэтага падручніка было пачата Цэнтральнай Беларускай Школьнай Радай і скончана Літ.-Выдавецкім Аддзелам Камісарыяту Асьветы Беларусі. Хоць гэты падручнік і ня ў поўнай меры адказвае прынцыпам сучаснае працоўнае школы, аднак Выдавецкі Аддзел лічыў патрэбным закончыць друкаваньне гэтае кніжкі, развaжаючы, што яна ў многіх адносінах будзе карысна для сучаснага моманту. Не гаворачы аб тым, што гэта кніга можа служыць, як прыклад беларускай арытмэтычнай тэрміналёгіі, яна можа яшчэ ўжывацца настаўнікамі, як і падручнік, асабліва, калі прыняць пад увагу поўную адсутнасьць беларускіх падручнікаў па арытмэтыцы.

Заканчываючы друкаваньнем гэтае кнігі, Літ.-Выдавецкі Аддзел лічыўся і з тым, што на гэтае заканчэньне яму прышлося затраціць невялікія сумы, так як кніжка ў значнай сваёй частцы была надрукована Цэнтральнай Беларускай Школьнай Радай.

Літ.-Выдав. Аддзел Камісар. Асьветы Беларусі.

У верасьні 1920 году
Менск.

ЗЬМЕСТ КАНСПЭКТУ.

Аб дзельніках.

Дробязныя лікі.

Адносіны і прапорцыі.

Дадатак.

Уводзіны.

1. **Арытмэтыкаю** наз навука, каторая вучыць нас зазначаць (пісаць), выгаварываць лікі і рабіць над імі рожныя дзееньні.

2. **Зьлічаньнем**, або **нумэрацыяю**, наз. тая частка арытмэтыкі, каторая вучыць нас выгаварываць і зазначаць лікі.

3. **Лікам** наз. адна адзінка або збор некалькіх адзінак.

Лікам канца няма.

4. Для зручнасьці выгавара і зазначываньня лікі дзеляцца на клясы, а клясы на парадкі.

5. Першы кляс ёсьць *адзінкі*, другі—*тысячы*,—трэйці—*мільёны*, чацьверты—*більёны*, пяты—*трыльёны* і г. д.

6. Наагул, у клясе тры парадкі. Першы парадак кожнага кляса ёсьць *адзінкі*, другі—*дзесяткі*, трэйці—*соткі*.

Адна адзінка якога-небудзь парадка мае ў сабе дзесяць адзінак суседняга з ім ніжэйшага парадку; адна адзінка якога-небудзь клясу мае ў сабе тысячу адзінак суседняга з ім ніжэйшага клясу.

Дзеля таго, што лік *дзесяць* паложаны ў аснову ўсяго нашага рахунку нашая сыстэма зьлічаньня наз. *дзесяцічнаю**).

Каб даведацца, колькі ў ліку маецца ўсіх адзінак дадзенага парадку, трэба закасаваць лічбіны, каторыя азначаюць ніжэйшыя парадкі, і прачытаць астаўшыйся лік. Напр.: лік 89765 адзінак маець у сабе 8976 дзесяткаў або 897 сотак і г. д.

7. **Лікі зазначваюцца** асобнымі знакамі, каторыя наз. *лічбінамі або цыфрамі*.

---

*) Гэта сыстэма зьлічаньня узята намі у французаў. Немцы-ж і англійцы лічаць у кожным клясе шэсьць парадкаў: адзінкі, дзесяткі, соткі, тысячы, дзесяткі тысяч і соткі тысяч, так што клясаў тысяч у іх няма, а есьць клясы адзінак, мільёнаў, більёнаў і г. д. Намі прынята французская сыстэма, як болей лёгкая.

8. **Лічбіны** дзеляцца на дзевяць значных (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) і адну нязначную (0), каторую завуць нулём.

9. *Па колькасьці лічбінаў* лікі дзеляцца на адназначныя, двухзначныя, трохзначныя і г. д.

10. **Адназначным лікам** наз. такі лік, каторы абазначаны адною лічбінаю (толькі ня нулём): 1, 2....9.

11. **Двухзначным лікам** наз. такі лік, каторы абазначаны дзьвёма лічбінамі (толькі ня дзьвёма нулямі): 10, 11......99.

12. **Трохзначным лікам** наз. такі лік, каторы абазначаны трома лічбінамі (толькі ня трома нулямі): 100, 101....., 999.

13. *Па найменьню адзінак* лікі дзеляцца на іменныя і бязыменныя.

14. **Іменным лікам** наз. такі лік, пры каторым ёсьць найменьне (імя) адзінак, з каторых ён зложаны; прыкладам, 5 кароў.

15. **Бязыменным лікам** наз. такі лік, пры каторым няма найменьня адзінак: 5.

16. **Па складу** лікі дзеляцца на цэлыя, дробязныя і мяшаныя.

17. **Цэлым лікам** наз. адна адзінка або збор некалькіх цэлых адзінак.

18. **Дробязным лікам** наз. такі лік, каторы зложаны з аднолькавых частак адзінкі.

19. **Мяшаным лікам** наз. такі лік, у складзе каторага ёсьць цэлыя адзінкі і аднолькавыя часткі адзінкі.

Розьніца паміж лічбінаю і лікам тая, што: 1), лічбіна ёсьць толькі ўмоўна прыняты знак для зазначаньня ліку; 2), лічбінаў толькі дзесяць, а лікам канца няма.

20. **Задачаю** ў арытмэтыцы наз. пытаньне, ў каторым трэба знайсьці адзін, або некалькі невядомых лікаў па двух, або некалькіх дадзеных ліках.

21. **Дзееньнем** наз. спосаб па дадзеных ліках знаходзіць невядомы лік; у арытмэтыцы ўжываюцца чатыры дзееньні: **складаньне, адыманьне, множаньне** і **дзяленьне**.

Цэлыя лікі.

СКЛАДАНЬНЕ.

22. **Складаньнем** наз. дзееньне, пры падмозе каторага два або некалькі лікаў злучаюцца ў адзін лік.

(Лікі дзееньня складаньня: *складанкі* і *зьлічво* або *сума*).

23. **Складанкамі** наз. лікі, каторыя дадзены для складаньня.

24. **Зьлічвом** або **сумаю** наз. лік, каторы адтрымліваецца ад складаньня.

Знак дзееньня складаньня называецца *плюсам*:

[(просты крыжык) +].

Плюс ставіцца паміж складанкамі, калі яны пішуцца ў адзін радок; калі-ж складанкі напісаны адзін пад адным, то плюс становіцца з боку (зьлева). У першым выпадку, посьле апошняй складанкі трэба паставіць знак роўнасьці (=) і ўровень з ім напісаць зьлічво (суму), ў другім выпадку, пад апошняй складанкай працягваюць паземную рысу і зьлічво (суму) пішуць пад ёю, напрыклад:

$12+27+36=75$

$345+478+69=892$

$$\begin{array}{r} 12 \\ +27 \\ 36 \\ \hline 75 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 345 \\ +478 \\ 69 \\ \hline 892 \end{array}$$

Правіла складаньня.

Каб скласьці цэлыя лікі, трэба спачатку, для зручнасьці, напісаць іх адзін пад адным так, каб адзінкі стаялі пад адзінкамі, дзесяткі пад дзесяткамі, соткі пад соткамі і г. д.; пад апошняй складанкай працягнуць рысу. Пасьля гэтага, павінна скласьці спачатку простыя адзінкі, потым дзесяткі, потым соткі і г. д.

Калі ад складаньня якога-небудзь парадку дастаецца ў зьлічве (суме) адназначны лік, то яго пішуць пад рысаю ў тым-жа слупку; калі-ж дастаецца ў зьлічве лік большы за 9, дык адзінкі яго пішуцца пад рысаю, а дзесяткі прылучаюць да зьлічва (сумы) чарговага вышэйшага парадку.

Прыклады:

$$1)\quad \begin{array}{r} 20134 \\ +\ 3201 \\ 14560 \\ \hline 37895 \end{array} \qquad\qquad 2)\quad \begin{array}{r} 76954 \\ 487 \\ +\ 8605 \\ 37049 \\ \hline 123095 \end{array}$$

Калі-ж у дадзеным складаньні зьлічво (сума) лічбінаў кожнага слупка ня больш за 9, то ўсё роўна, ў якім парадку рабіць дзееньне: ад ніжэйшых парадкаў да вышэйшых, або наадварот; у праціўным-жа выпадку, пачаць складаньне з вышэйшага парадку нязручна, бо ад складаньняў адзінак ніжэйшага парадку можа дастацца адна або некалькі адзінак чарговага вышэйшага парадку, і тагды прыдзецца перамяніць раней напісаную лічбіну.

25. Калі трэба скласьці шмат складанак, дык, для зручнасьці, можна скласьці спачатку некалькі з іх, потым з астатніх некалькі і г. д., а затым ужо скласьці ўсе адтрыманыя зьлічвы (сумы).

Няхай патрэбна скласьці 345, 56, 78, 320, 72, 48, 435, 830 26, 79, 16. Падзелім гэтыя складанкі на тры групы, напр., так:

$$\begin{array}{r} 345 \\ +\ 56 \\ 78 \\ 320 \\ \hline 799 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 72 \\ +\ 48 \\ 435 \\ \hline 555 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 830 \\ 26 \\ +\ 79 \\ 16 \\ \hline 951 \end{array}$$

Склаўшы тры зьлічвы (сумы) ў адно, адтрымаем 2305.

26. **Зьлічво** не мяняецца ад перамены мейсца складанак ($9+7=7+9$).

27. Для пераверкі складаньня можна зрабіць гэта дзееньне ў другім парадку. Калі абодва разы дзееньне складаньня зроблена праўдзіва, то павінна дастацца адно і тое-ж самае зьлічва.

28. Складаньне ўжываецца пры разьвязваньні гэткіх задач: 1) Калі патрэбна знайсьці зьлічво дадзеных лікаў, 2) Калі дадзены лік патрэбна павялічыць на некалькі адзінак і г. д.

Увага. Пры складаньні зьлічво заўсёды мае адно найменьне з дадзенымі лікамі.

АДЫМАНЬНЕ.

29. **Адыманьнем** наз. дзееньне, пры падмозе каторага па зьлічву дзьвюх складанак і аднэй з іх знаходзіцца другая невядомая складанка.

(Лікі дзееньня адыманьня—*зьмяншаны*, *адыманы* і *астача*, або *розьніца*).

30. **Зьмяншаным** наз. дадзенае зьлічво, ад каторага адымаюць.

31. **Адыманым** наз. дадзеная складанка, каторая адымаецца.

32. **Астачаю**, або **розьніцаю**, наз. шуканая складанка, каторая дастаецца ад адыманьня.

Знак дзееньня адыманьня наз. *мінусам* (—).

Мінус пішацца паміж зьмяншаным і адыманым, калі яны напісаны ў адзін радок; калі-ж яны напісаны адзін пад адным, то мінус ставіцца збоку (зьлева). У першым выпадку посьле адыманага трэба паставіць знак роўнасьці і ўпоравень з ім напісаць астачу; ў другім выпадку—пад адыманым працягваюць паземную рысу і астачу пішуць пад ёю, напрыклад:

$$200-45=155 \qquad \begin{array}{r} 200 \\ -45 \\ \hline 155 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 442 \\ -248 \\ \hline 194 \end{array}$$

$$442-248=194$$

33. Астача паказвае, чым або на колькі адзінак зьмяншаны большы за адыманы або адыманы меншы за зьмяншаны.

Правіла адыманьня.

Каб зрабіць адыманьне цэлых лікаў, трэба адыманы падпісац пад зьмяншаным так, каб адзінкі стаялі пад адзінкамі, дзесяткі па дзесяткамі і г. д., пад адыманам працягнуць рысу. Пасьля гэтага павінна вылічыць адзінкі з адзінак, дзесяткі з дзесяткаў, соткі з сотн і г. д.

Калі лічбіна зьмяншанага большая за лічбіну адыманага, астачу падпісываюць пад рысаю ў тым-жа слупку, калі-ж лічбіна якога-небудзь парадку ў зьмяншаным меншая за лічбіну таго-ж парадку ў адыманым, то пазычаюць адну адзінку ў чарговае лічбіны зьмяншанага, прыбаўляюць да лічбіны зьмяншанага дзесяць і потым адымаюць; калі-ж гэта чарговая лічбіна ёсьць нуль, то пазычаюць адзінку ў бліжэйшае значнае лічбіны, нуль лічаць за дзевяць, а да зьмяншанай лічбіны прыбаўляюць дзесяць.

Лішнія лічбіны зьмяншанага пераносяць у астачу без перамены.

Прыклады: 1) $\begin{array}{r} 7986 \\ -5462 \\ \hline 2524 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 500328 \\ -423465 \\ \hline 76863 \end{array}$

Калі ў дадзеным адыманьні ўсе лічбіны зьмяншанага большыя за адпаведныя лічбіны адыманага, то ўсё роўна, аткуль рабіць дзееньне: ад ніжэйшых парадкаў да вышэйшых, або наадварот; у праціўным-жа выпадку зручней рабіць адыманьне ад ніжэйшых парадкаў да вышэйшых, бо пры такім парадку заўсёды можна, калі патрэбна будзе, ўзяць адну адзінку вышэйшага парадку для раздрабленьня яе ў адзінкі ніжэйшага парадку.

34. Каб праверыць адыманьне, трэба або адыманы скласьці з астачаю, або ад зьмяншанага адлічыць астачу; калі дзееньне зроблена праўдзіва, то ў першым выпадку павінна дастацца зьмяншаны, а ў другім—адыманы.

35. Адыманьне ўжываецца пры разьвязваньні гэтакіх задач: 1) Калі патрэбна знайсьці астачу паміж двома лікамі, ці патрэбна даведацца, чым адзін лік большы або меншы другога ліку; 2) калі трэба паменшыць лік на колькі-небудзь адзінак; 3) калі па дадзенаму цэламу (зьмяншанаму) і аднэй частцы (адыманаму або астачы) патрэбна знайсьці другую яго частку (астачу) або адыманы і г. д.

Увага: Пры адыманьні астача заўсёды мае адно найменьне з дадзенымі лікамі.

Залежнасьць паміж дадзенымі і шуканымі пры складаньні і адыманьні.

З разуменьня складаньня выходзіць, што:

36. Зьлічво роўна ўсім складанкам, ўзятым разам.

37. Адна з складанак роўна зьлічву бяз рэшты складанак.

З разуменьня адыманьня выходзіць, што:

38. Астача роўна зьмяншанаму без адыманага.

39. Зьмяншаны роўны адыманаму разам з астачаю.

40. Адыманы роўны зьмяншанаму без астачы.

Ведаючы аснаўныя асаблівасьці дадзеных і шуканых у складаньні, можна так праверыць складаньне пры падмозе адыманьня.

Закасаваць адну складанку, скласьці астатнія і гэтае новае зьлічво адняць ад ранейшага; калі ў астачы будзе закасованая складанка, складаньне зроблена праўдзіва.

Зьмены зьлічва і астачы.

Зьмены зьлічва.

Дзеля таго, што ў зьлічве маецца столькі адзінак, колькі іх знаходзіцца ў ва ўсіх складанках, то:

41. Калі адна з складанак павялічыцца на які небудзь лік, то зьлічво павялічыцца на той жа лік.

42. Калі адна з складанак паменшыцца на які-небудзь лік, то зьлічво паменшыцца на той-жа лік.

43. Калі-ж адна з складанак павялічыцца, а другая паменшыцца ў адзін і той-жа час на адзін і той-жа лік, то зьлічво астанецца бяз зьмены.

Зьмены астачы.

Дзеля таго, што зьмяншаны ёсьць зьлічво, а адыманы і астача—складанкі, то:

44. Калі зьмяншаны павялічыцца на які-небудзь лік то астача павялічыцца на той-жа лік.

45. Калі зьмяншаны паменшыцца на які-небудзь лік, то астача паменшыцца на той-жа лік.

46. Калі адыманы павялічыцца на які-небудзь лік, то астача паменшыцца на той-жа лік.

47. Калі адыманы паменшыцца на які-небудзь лік, то астача павялічыцца на той-жа лік.

48. Калі зьмяншаны і адыманы адначасна павялічыцца або паменшыцца на адзін і той-жа лік, то астача ня зьменіцца.

МНОЖАНЬНЕ.

49. **Множаньнем** наз. дзееньне, пры падмозе каторага адзін лік бярэцца складанкай столькі разоў, колькі адзінак маецца ў другім ліку.

(Лікі дзееньня множаньня—*множаны*, *множнік* і *множыва*).

50. **Множаным** наз. той лік, каторы памнажаецца, або каторы бярэцца складанкай.

51. **Множнікам** наз. той лік, на каторы памнажаецца, або каторы паказвае, колькі разоў множаны бярэцца складанкай.

52. **Множывам** назыв. той лік, каторы дастаецца ад множаньня.

53. Множыва не зьмяняецца, калі множаны ўзяць множнікам, а множніка множаным ($7 \times 8 = 8 \times 7$).

Дзеля таго:

54. Множаны і множнік назыв. так сама адным найменьнем—*сумножнікамі*, або *чыньнікамі*.

Знакамі множаньня служаць ускосны крыжык [$\times$] або кропка [.].

Пры множаньні адназначнага ліку на адназначны множаны і множнік пішуцца ў адзін радок, а паміж імі знак множаньня [$7\times9=63$ або $7.9=63$].

Пры множаньні-ж многазначнага ліку на адназначны або на многазначны, сумножнікі пішуцца або ўпоравень або адзін пад адным, напрыклад:

$$\begin{array}{r}375\times7\\ \hline 2625\end{array}\qquad\begin{array}{r}375\\ \times7\\ \hline 2625\end{array}\qquad\begin{array}{r}375\times25\\ \hline 1875\\ 750\\ \hline 9375\end{array}\qquad\begin{array}{r}375\\ \times25\\ \hline 1875\\ 750\\ \hline 9375\end{array}$$

Каб скора і бяз труднасьці рабіць дзееньне множаньня, патрэбна добра ведаць на памяць множывы ўсіх адназначных лікаў парамі. Усе гэтыя множывы зьмяшчаюцца на ніжэйшай табліцы, каторая называецца табліцаю множаньня.

ТАБЛІЦА МНОЖАНЬНЯ.

1.1=1	2.1= 2	3.1= 3	4.1= 4	5.1= 5
1.2=2	2.2= 4	3.2= 6	4.2= 8	5.2=10
1.3=3	2.3= 6	3.3= 9	4.3=12	5.3=15
1.4=4	2.4= 8	3.4=12	4.4=16	5.4=20
1.5=5	2.5=10	3.5=15	4.5=20	5.5=25
1.6=6	2.6=12	3.6=18	4.6=24	5.6=30
1.7=7	2.7=14	3.7=21	4.7=28	5.7=35
1.8=8	2.8=16	3.8=24	4.8=32	5.8=40
1.9=9	2.9=18	3.9=27	4.9=36	5.9=45

6.1= 6	7.1= 7	8.1= 8	9.1= 9
6.2=12	7.2=14	8.2=16	9.2=18
6.3=18	7.3=21	8.3=24	9.3=27
6.4=24	7.4=28	8.4=32	9.4=36
6.5=30	7.5=35	8.5=40	9.5=45
6.6=36	7.6=42	8.6=48	9.6=54
6.7=42	7.7=49	8.7=56	9.7=63
6.8=48	7.8=56	8.8=64	9.8=72
6.9=54	7.9=63	8.9=72	9.9=81

Правіла множаньня многазначнага ліку на адназначны.

Каб памножыць многазначны лік на адназначны, трэба падпісаць множнік пад адзінкамі множанага, працягнуць рысу і зьлева паставіць знак множаньня. Множаньня пачынаюць з звычайных адзінак і затым паступова множаць дзесяткі, соткі, тысячы і г. д.

Калі множаньня якой-небудзь лічбіны дастаецца адназначны лік, то яго пішуць ў множыве, як ён ёсьць, калі-ж множыва выражана двухзначным лікам, то адзінкі яго пішуць у множыве, а дзесяткі дадаюць да ліку, каторы дастаецца ад множаньня чарговай лічбіны множанага на множнік.

55. Каб памножыць які-небудзь лік на 10,100,1000 і, наагул, на лік, каторы абазначаны адзінкай з нулямі, трэба да множанага прыпісаць столькі нулёў, колькі іх ёсьць пры адзінцы.

Няхай, напрыкад, патрэбна 756 памножыць на 100; гэта значыць, што дадзены лік трэба ўзяць складанкай 100 разоў, або павялічыць яго ў 100 разоў, значыцца, адзінкі яго павінны зьмяніцца ў соткі, дзесяткі, ў тысячы і г. д., а гэта зробіцца само сабой, калі да дадзенага ліку прыпісаць два нулі ($756.100=75600$).

56. Каб памножыць лік на адну значную лічбіну з нулямі, трэба множаны памножыць на значную лічбіну і да множыва прыпісаць столькі нулёў, сколькі іх знаходзіцца ў множніку.

Няхай, напр., патрэбна 365 памножыць на 700.

Дзеля таго, што $700=7.100$, дык $365.700=365.7.100$; але $365.7=2555$, дык $365.700=2555.100=255500$.

57. Калі множаны або множаны і множнік канчаюцца нулямі, дык лікі трэба перамножыць так, як калі-б гэтых нулёў зусім ня было; потым да адтрыманага множыва прыпісываюцца ўсе нулі, каторымі канчаюцца множаны і множнік.

Прыклады:

$$\begin{array}{r} \times\; 7500 \\ 15 \\ \hline 375 \\ 75 \\ \hline 112500 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\; 3700 \\ 1800 \\ \hline 296 \\ 37 \\ \hline 6660000 \end{array}$$

Калі множнік можна, пры падмозе павялічаньня або памяншэньня на які-небудзь адназначны лік, перавярнуць у лік, каторы абазначаецца адзінкаю з нулямі, то памнажаюць на апошні лік і дастанае множыва ў першым выпадку памяншаюць, а ў другім выпадку павялічываюць множывам множанага на гэты адназначны лік ($4375.2998 + 4375.3000 - 4375.2; 4375.3005 = 4375.3000 + 4375.5$).

Правіла множаньня многазначнага ліку на многазначны.

Каб памножыць многазначны лік на многазначны, трэба падпісаць множніка пад множаным так, каб адзінкі былі пад адзінкамі, дзесяткі пад дзесяткамі і г. д.; пад множнікам працягнуць рысу.

Потым памножыць множаны на кожную лічбіну множніка, першую лічбіну кожнага паасобнага множыва пішуць пад тою лічбінаю множніка, на каторую памнажаюць, і множывы складываюць*).

Пры множаньні многазначнага ліку ад левай рукі да правай сустракаецца тая нязручнасьць, каторая заўважана вышэй пры складаньні. Але, для адтрыманьня множыва многазначных лікаў, можна пачаць множаньне з лічбінаў вышэйшага парадку *множніка*, сьцерагучы толькі, каб адзінкі аднакіх парадкаў былі ў адным вэртыкальным слупку. Напрыклад:

$$\begin{array}{r} 3764 \\ \times\ 576 \\ \hline 18820 \\ 26348 \\ 22584 \\ \hline 2168064 \end{array}$$

58. **Множывам некалькіх множнікаў** наз. лік, каторы дастанецца, калі множыва двух з іх памножыць на трэйці, дастанае множыва на чацьвёрты і г. д.

Множыва роўных множнікаў наз. *ступеньню.* Ступені адтрымліваюць свае найменьні ад ліку роўных множнікаў. Так: 5.5 або 5^2 наз. *другою ступеньню* ліку 5-ці, або *квадратам* 5-ці; 5.5.5 або 5^3

*) Калі у множніку сустракаецца лічбіна 1, дык, для скарочаньня часу, прымаюць множаны за адпаведнае множыва.

Прыклады: 1) $\begin{array}{r} 575\times321 \\ 1150 \\ 1725 \\ \hline 184575 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 575\times312 \\ 1150 \\ 1725 \\ \hline 179400 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 575\times132 \\ 1725 \\ 1150 \\ \hline 75900 \end{array}$

наз. *трэцьцяю ступеньню* 5-ці, або *кубам* 5-ці; 5.5.5.5 або 5^4 наз. *чацьвёртаю ступеньню* 5-ці і г. д.

Дзеля таго, што множыва не зьмяняецца ад перамены парадка сумножнікаў, то:

59. Каб пераверыць множаньне, трэба множаны замяніць множнікам, а множнік множаным. Калі абодвы разы дзееньне множаньня было зроблена праўдзіва, дык дастаные множывы будуць роўны паміж сабой.

60. Множаньне ўжываецца пры разьвязваньні гэтакіх задач: 1) калі патрэбна знайсьці лік, каторы быў-бы большы за дадзены ў некалькі разоў; 2) калі адзін дадзены лік трэба павялічыць у столькі разоў, колькі адзінак у другім дадзеным ліку і г. д.

Увага. Пры множаньні множнік павінен быць заўсёды лікам бязыменным, а множыва аднаназоўна з множаным.

ДЗЯЛЕНЬНЕ.

61. **Дзяленьнем** наз. дзееньне, пры падмозе каторага па дадзенаму множыву і аднаму з сумножнікаў знаходзіцца другі сумножнік.

(Лікі дзееньня дзяленьня— *дзельны, дзельнік* і *дзель*).

62. **Дзельным** наз. дадзенае множыва, каторае дзеліцца.

63. **Дзельнікам** наз. дадзены сумножнік, на каторы дзельны дзеліцца.

64. **Дзельлю** наз. шуканы сумножнік, каторы дастаецца ад дзяленьня.

Знак дзяленьня ёсьць два пункты [:], каторыя ставяцца паміж дзельным і дзельнікам. Упоравень з дзельнікам ставяць знак роўнасьці, а за ім пішуць дзель; напр. 35 : 7 = 5. Дзяленьне пішацца яшчэ і гэтак: $\frac{35}{7} = 5$ або $35 \left| \frac{7}{5} \right.$

65. Дзель паказывае: 1) колькі разоў дзельнік паўтараецца ў дзельным, 2) у колькі разоў дзельны большы за

дзельнік, або дзельнік меншы за дзельны, 3) якую частку дзельнага зложвае дзельнік і г. д.

66. Каб падзяліць які-небудзь лік на 10, 100, 1000..... і, наагул, на лік, каторы абазначаны адзінкаю з нулямі, трэба ў дзельным *справа* аддзяліць коскаю столькі лічбінаў, сколькі ў дзельніку пры адзінцы нулёў; тады лічбіны, каторыя стаяць з *левага* боку ад коскі, азначаюць *дзель*, а з *правага*—*астачу*.

Няхай, напр., патрэбна разьдзяліць 8576 на сто; гэта значыць, што дадзены лік трэба паменшыць у сто разоў; значыцца, соткі яго станаць адзінкамі, тысячы дзесяткамі і г. д., а робіцца аддзяленьнем у дадзеным ліку справа 2 лічбінаў (8576 : 100 = 85 і ў астачы 76).

67. Калі дзельны і дзельнік канчаюцца нулямі, то закасоўваюць у іх справа па роўнаму ліку нулёў і робяць дзееньне, як калі-б гэтых нулёў ня было. Калі-ж дзееньне выйшло з астачаю, дык да астачы прыпісваюць столькі нулёў, сколькі іх было закасована ў дзельным.

Напрыклад: 375400 : 4700 = 3754 | 47
```
3754 | 47
329  | 79
----
 464
 423
----
 4100
```

Тут у дзельным і ў дзельніку закасована па 2 нулі, бо 47 адзінак паўтараюцца ў 3754 адзінках столькі разоў, колькі разоў 47 сотак паўтараецца ў 3754 сотках. Астача-ж 41 ня ёсьць звычайныя адзінкі, а соткі, дзеля таго прыбаўляюць да яе два нулі.

68. Калі ж дзельнік канчаецца нулямі, то гэтыя нулі закасоўваюць, а ў дзельніку аддзельваюць з правага боку столькі лічбінаў, колькі нулёў закасована ў дзельніку. Да адтрыманай посьле дзяленьня астачы прыпісваюць з правага боку аддзеленыя лічбіны дзельнага бяз зьмены.

Напрыклад: 376584 : 4500 = 3765,84 | 45
```
3765,84 | 45
360     | 83
----
 165
 135
----
 3084
```

Правіла дзяленьня.

Каб разьдзяліць многазначны лік на адназначны, або на многазначны, аддзельваюць у дзельным ад левае рукі да правае столькі лічбінаў, колькі іх ёсьць у дзельніку. Калі дзельнік ня зьмяшчаецца, аддзельваюць у дзельным аднэю лічбінаю больш. Даведваюцца, колькі разоў у аддзеленым ліку зьмяшчаецца дзельнік і дастаную лічбіну пішуць у дзелі. Памнажаюць затым дзельнік на знойдзеную лічбіну дзелі і множыва адымаюць з аддзеленае часткі дзельнага.

Да астачы зносяць чарговую ўправа лічбіну дзельнага і посьле зносу лік дзеляць на дзельнік; лічбіну ад гэтага дзяленьня пішуць у дзелі направа ад раней напісанай лічбіны. Памнажаюць потым дзельнік на другую лічбіну дзелі і множыва адлічаюць з таго ліку, каторы быў падзелены для адтрыманьня другое лічбіны дзелі.

Так робяць датуль, пакуль у дзельным ня будзе зусім лічбінаў для зносаў. Калі ў астачы, па зносу да ёй лічбіны дзельнага, дастанецца лік, меншы за дзельнік, пішуць у дзелі 0, а да астачы зносяць чарговую лічбіну дзельнага*).

Прыклады:

1)
```
67374 | 9
 43   | 7486
  77
   54
    0
```

2)
```
51517620 | 567
5103     | 90860
  4876
  4536
   3402
   3402
      0
```

З вытлумачэньня дзяленьня выходзіць, што дзельны роўны дзельніку, памножанаму на дзель, а дзеля гэтага:

69. Каб праверыць дзяленьне, трэба дзельнік памножыць на дзель і да множыва дабавіць астачу, калі яна ёсьць; калі ўсе дзееньні зроблены праўдзіва, дык дастаецца абавязкова дзельны.

70. Дзяленьне ўжываецца пры разьвязваньні гэткіх задач: 1) калі патрэбна даведацца, колькі разоў адзін лік паўтараецца ў другім; 2) калі трэба даведацца, ў колькі разоў адзін лік большы або меншы за другі лік; 3) калі трэ-

*) Для скарочаньня часу, пры дзяленьні на адназначны лік, пад дзельным не падпісываюць множыва дзельніка на кожную лічбіну, а, робячы множаньне і адыманьне на памяць, пад дзельным пішуць толькі астачы. (глядзі прыклад 1).

ба лік падзяліць на некалькі роўных частак, каб даведацца, колькі адзінак будзе ў кожнай частцы; 4) калі дадзены лік трэба паменшыць у столькі разоў, колькі адзінак у другім дадзеным ліку; 5) калі па дадзенаму множыву (дзельнаму) і аднаму з сумножнікаў (дзельніку або дзелі) знаходзіцца другі сумножнік (дзельнік або дзель) і г. д.

Увага. Пры дзяленьні могуць быць два выпадкі: 1) дзяленьне бязыменнага ліку на бязыменны (або іменнага на іменны) і 2) дзяленьне іменнага ліку на бязыменны. У першым выпадку дзель-заўсёды бязыменны лік і паказвае колькі разоў дзельнік паўтараецца ў дзельным, а ў другім выпадку — іменны і паказвае, як вяліка кожная частка.

Залежнасьць паміж дадзеных і шуканых у множаньні і дзяленьні.

71. Множыва роўна множанаму, памножанаму на множніка.

72. Множаны роўны множыву, падзеленаму на множніка.

73. Множнік роўны множыву, падзеленаму на множны.

Дзеля таго, што адзін з сумножнікаў роўны множыву, падзеленаму на другі сумножнік, то, каб праверыць множаньне, трэба множыва разьдзяліць на адзін з сумножнікаў; калі адтрыманая дзель роўна другому сумножніку, то можна сьмела сказаць, што множыва справедліва.

74. Дзель роўна дзельнаму, падзеленаму на дзельніка.

75. Дзельны роўны дзельніку, памножанаму на дзель.

76. Дзельнік роўны дзельнаму, падзеленаму на дзель.

Калі дзяленьне сталася з астачаю, то залежнасьць паміж дадзеных і шуканых у дзяленьні вытлумачваецца гэтак:

Дзель роўна дзельнаму без астачы, падзеленаму на дзельнік.

Дзельны роўны астачы, складзенай з множывам дзельніка на дзель.

Астача пры дзяленьні роўна дзельнаму бяз множыва дзельніка на дзель.

Зьмены множыва і дзелі.

Зьмены множыва.

Дзеля таго, што множыва ёсьць зьлічво, адтрымавая ад складаньня аднаго з множнікаў столькі разоў, колькі ў другім ёсьць адзінак, дык:

77. Калі множнік або множаны павялічыцца ў колькінебудзь разоў, множыва павялічыцца ў столькі-ж разоў, бо ў гэтым выпадку складваецца лік у некалькі разоў большы за стары лік.

78. Калі множаны або множнік паменшыцца ў колькінебудзь разоў, дык множыва паменшыцца ў столькі-ж разоў, бо ў гэтым выпадку складваецца лік у некалькі разоў меншы за стары лік.

79. Калі-ж адзін з сумножнікаў павялічыцца ў некалькі разоў, а другі ў той-жа час паменшыцца ў столькі-ж разоў, дык множыва ня зьменіцца.

Калі адзін з сумножнікаў павялічыцца або паменшыцца на які-небудзь лік, дык множыва павялічыцца або паменшыцца на той-жа лік, памножаны на другі сумножнік.

Зьмены дзелі.

Дзеля таго, што дзельны разглядваецца, як множыва, а дзельнік і дзель, як сумножнікі, дык:

80. Калі дзельны павялічыцца ў некалькі разоў, дык дзель павялічыцца ў столькіж разоў, бо калі пакінем бяз зьмены адзін з сумножнікаў (дзельнік), то множыва (дзельны) можа быць павялічана ў некалькі разоў толькі пры варунку павялічаньня другога сумножніка (дзелі) ў столькі-ж разоў.

81. Калі дзельны паменшыцца ў некалькі разоў, дык дзель паменшыцца ў столькі-ж разоў, бо, пакідаючы бяз зьмены адзін з сумножнікаў (дзельнік), множыва (дзельны) можа быць паменшана ў некалькі разоў, толькі пры варунку паменшаньня другога сумножніка (дзелі) ў столькі-ж разоў.

82. Калі дзельнік павялічыцца ў некалькі разоў, дык дзель паменшыцца ў столькі-ж разоў, бо, пакідаючы бяз зьме-

ны множыва (дзельны), адзін з множнікаў (дзельнік) можа быць павялічаны ў некалькі разоў, толькі пры варунку паменшаньня другога сумножніка (дзелі) ў столькі-ж разоў.

83. Калі дзельнік паменшыцца ў некалькі разоў, дык дзель павялічыцца ў столькі-ж разоў, бо, пакідаючы, бяз зьмены множыва (дзельны), адзін з множнікаў (дзельнік) можа быць паменшаны толькі пры варунку павялічаньня другога сумножніка (дзелі) ў столькі-ж разоў.

84. Калі дзельны і дзельнік аднача́сна павялічацца, або паменшацца ў адзін і той самы лік разоў, дык дзель ня зьменіцца.

Знакі, дужкі, формуля.

Апроч ведамых ужо нам знакаў, служачых для абазначаньня дзеяньняў ($+$, $-$, $\times$, . , :, $\vdash$) і знака роўнасьці ($=$), ў арытмэтыцы ўжываюцца яшчэ знакі: $>$ *больш* [$9>7$], $<$*менш* [$7<9$] і *дужкі*. Дужкі маюць чарговы выгляд: ( ) *круглыя*, [ ] *квадратныя* і { } *фігурныя*.

Дужкі паказваюць, што патрэбна спачатку вылічываць выраз паміж дужкамі, а потым над адтрыманым рэзультатам зрабіць чарговае паказанае дзеяньне.

Калі пры разьвязваньні задач патрэбныя дзеяньні ня робяцца сапраўды, а паказваюцца толькі знакамі, дык дастаецца *арытмэтычны выраз* або *формуля*.

Каб з формулы адтрымаць рэзулатат, трэба раскрыць ўсе дужкі, каторыя ў ёй ёсьць, і зрабіць паказаныя знакамі дзеяньні, пры чым раскрыцьцё трэба пачынаць з сярэдніх дужак.

Увага. Пры разьвязваньні задач вельмі карысна, раней скончаньня дзееньняў, паказаць формулай (дзе гэта можна), якія дзеяньні, пад якімі лікамі і ў якім парадку трэба зрабіць для адтрыманьня адказу на задачу.

Складаныя іменныя лікі
(многаіменныя лікі).

85. **Вялічынёю** наз. ўсё, што ў рэчах і зьявах можа быць большым або меншым, напр.: даўжыня, шырыня, глыбіня, вышыня, пляц, паверхнасьць, зьмест (аб'ём), вага, розум, адвага, радасьць, гора і г. д.

Каб ведаць якую-небудзь вялічыню, трэба яе вымерыць, ці параўняць з другою аднароднаю вялічынёю, каторая прыймаецца за адзінку.

86. **Адзінкаю** або **меркаю** наз. вялічыня, з катораю раўняюць—другую.

Вялічыні, каторыя могуць быць пунктуальна (дакладна) вымераны наз. *матэматычнымі вялічынямі*. Адцягнутыя—ўласьцівасьці (якасьці), напр.: розум, дабрата, адвага і г. д., хоць бываюць большыя, або меншыя, але дзеля таго, што ня могуць быць пунктуальна (дакладна) зьмераны, называюцца *нематэматычнымі вялічынямі*.

Рэзультат пунктуальнага вымеру выражаецца *іменным лікам*.

87. Рэзультат вымеру вызначаецца *цэлым лікам*, калі мерка ўкладваецца ў вымерванай рэчы цэлы лік разоў.

88. Рэзультат вымеру зазначаецца *дробязьзю*, калі вымерваная рэч меншая за мерку.

89. Рэзультат вымерваньня зазначаецца *мяшаным лікам* (цэлым лікам з дробязьзю), калі мерка паўтараецца ў вымерванай рэчы цэлы лік разоў і яшчэ ёсьць астача ў каторай мерка не ўкладаецца ні аднаго цэлага разу.

90. **Адзінкавымі адносінамі** дзьвёх меркаў аднэй і тэй-жа сыстэмы назв. лік, каторы паказвае, колькі меншых меркаў укладваецца ў якой-небудзь большай мерцы.

91. **Табліцамі меркаў** назыв. такія табліцы, каторыя паказваюць ўзаемныя адносіны паміж аднароднымі адзінкамі.

Табліцы меркаў.

Меры даужыні або лінейныя (працяжныя).

	Міля (географічная)	мае	7 вёрст.
	Вярста	» »	500 сажняў.
	Сажань	» »	3 аршыны.
	Аршын	» »	16 вяршкоў.
Або:	Сажань	» »	7 стопаў, (футаў).
	Стапа (фут)	» »	12 цаляў.
	Цаля, цаль	» »	10 лініяў.

[1 арш. $= 2^1/_3$ стапы (фута) $=$ 28 цалям].

Лінейныя меркі ўжываюцца для вымерваньня даўжыні, шырыні, вышыні, глыбіні, таўшчыні і інш.

З чужаземных меркаў даўжыні найбольш ужываецца *мэтр*, (мэтр ёсьць адна дзесяцімільённая доля чверці мэрыдыяна, які праходзіць цераз Парыж), роўны 22 вяршкам з паловаю $= 1^2/_5$ арш. $=$ 3 ст. 3 ц. 2 л.

Дэкамэтр роўны 10 мэтрам, *гэктамэтр*—100 мэтрам, *кілёмэтр*—1000 мэтрам, *мірыямэтр*—10000 мэтрам, *дэцымэтр* —$^1/_{10}$ мэтра, *сантымэтр*—$^1/_{100}$ мэтра і *мільлімэтр*—$^1/_{1000}$ мэтра. Гэта сыстэма меркаў назыв. *францускаю* або *мэтрычнаю*, а так сама *дзесятычнаю*.

Меры паверхні або квадратныя.

	Кв. міля	мае	49 кв. верст (7.7).
	Кв. вярста	»	250000 кв. сажняў (500.500).
	Кв. сажань	»	9 кв. аршынаў (3.3).
	Кв. аршын	»	256 кв. вяршкоў (16.16).
Або:	Кв. сажань	»	49 кв. стопаў (футаў) (7.7).
	Кв стапа(фут)	»	144 кв. цалі (12.12).
	Кв. цаля, цаль	»	100 кв. лініяў (10.10).

Меркі новапольскія.

Меркі даужыні.

Міля	мае	7 вёрстаў.
Вярста	»	500 сажняў.
Сажань	»	3 локці.
Локаць	»	2 стапы.
Стапа	»	12 цаляў.
Цаль	»	12 лініяў.

Меркі землямерныя (каморніцкі).

Ланцуг землямерны = 10 прутом.
Прут » = 10 пруткоm.
Пруток » = 10 лаўком або цалям землямерным.

Прут мае 15 стопаў польскіх.

Меркі паверхні.

Кв. міля	мае	49 кв. вёрстаў (7.7).
Кв. вярста	»	250000 кв. сажняў (500×500).
Кв. сажань	»	9 кв. локцяў (3.3).
Кв. локаць	»	4 кв. стапы (2.2).
Кв. стапа	»	144 кв. цалі (12.12).
Кв. цаль	»	144 кв. лініі (12.12)

Квадратныя меркі азначаюцца або маленькім квадрацікам справа ўгары ад назвы меркі або маленькай двойкай, напр.: 1 кв. цаль= 1 цаль^2=1 цаль$^\square$.

92. **Квадратам** наз. чатырохкутнік, у каторага ўсе чатыры бакі роўныя простыя лініі і ўсе куты роўныя паміж сабой.

Квадратныя меры ўжываюцца для вымерваньня пляцаў і паверхняў і наагул, для вымеру такіх прадметаў, каторыя маюць толькі два вымеры—даўжыню і шырыню.

93. Для вымерваньня палёў ужываецца на Беларусі асобная мера, каторая называецца *дзесяцінаю*. Дзесяціна мае 2400 кв. сажняў; яны бываюць двух радоў; адны маюць 80 саж. у даўжыню і 30 саж. у шырыню, другія—60 саж. у даўжыню і 40 саж. у шырыню.

Француская меркаю паверхні служыць кв. мэтр, роўны 100 кв. дэцым =10000 кв. сантымэтр. і г. д. Пазямельнаю меркаю ў Францыі служыць *ар* [кв. дэкамэтр], роўны трохі ні 22 кв. саж. [гэктар= 100 арам, мірыар=10000 арам...].

Меркі зьместу або кубічныя.

Куб. міля	мае	343 куб. вярсты (7.7.7).
Куб. вярста	»	125000000 куб. саж. (500.500.500).
Куб. саж.	»	27 куб. аршынаў (3.3.3).
Куб. аршын	»	4096 куб.варшкаў (16.16.16).

Або: Куб. саж.	»	343 куб. стопы (футы) (7.7.7).
Куб. стапа (фут)	»	1728 куб. цаляў (12.12.12).
Куб. цаль	»	1000 куб. лін. (10.10.10).

Для памеру грунтоў у Польшчы служаць:

Валока = 30 маргом.
Морг = 300 кв. прутом.
Кв. прут = 225 кв. стопам польскім (15.15) = 56 кв. локц. 1 кв. ст.

94. **Кубам** наз. цела, каторае мае выгляд скрынкі, маючай 6 роўных квадратных сьценаў.

95. Лінія перацінаньня двох квадратаў назыв. *рубам*.

Кубічныя меры ўжываюцца для вымеру аб'ёма, зьместу, ёмкасьці, і, наагул, для вызначэньня вялічыні такіх прадметаў, каторыя маюць ўсе тры вымеры— даўжыню, шырыню і вышыню або глыбіню.

Меркаю зьместу ў Францыі служыць кубічны мэтр, за ім ідуць меншыя меры: куб. дэцымэтр, куб. сантымэтр і г. д.

Для вымеру аб'ёмаў будаўляных матэр'ялаў і паліва служыць *стэр*, роўны блізка 35 куб. футам. Ужываецца яшчэ *дэкастэр* і *дэцыстэр*.

Новапольскія меркі зьместу.

Куб. міля	мае	343 куб. вярсты (7.7.7).
Куб. вярста	»	125000000 куб. сажн. (500.500.500).
Куб. сажань	»	27 куб. локцяў (3.3.3).
Куб. локаць	»	8 куб. стопаў (2.2.2).
Куб. стапа	»	1728 куб. цаляў (12.12.12).
Куб. цаль	»	1728 куб. лініяў (12.12.12).

Кубічныя меркі азначаюцца маленькай тройкай справа ўгары ад назвы меркі, напр.: 1 куб. цаль = 1 цаль^3.

Меркі сыпкіх целаў.

Бочка (чэцьвярць) мае 2 корцы або 8 асьмінаў (чацьвярыкоў).

Корац мае 4 асьміны (чацьвярыкі).

Асьміна (чацьвярык) мае 8 гарцаў.

Асьміна ёсьць кубічная мера, каторая мае ў сабе 1600 кубічных цаляў.

Меркі плыўніх цел.

Бочка мае 40 вёдзер.
Вядро » 10 конавак (штофаў).
Конаўка (штоф) мае 2 кварты (бутэлькі).
Конаўка » » 10 чарак. Кварта (бутэлька) мае 2 поўкварты або 2 паўбутэлькі. Поўкварта мае 2 кручкі.

Вядром наз. кубічная мера, каторая мае 750 кубічных цаляў і зьмяшчае ў сабе 30 хунтаў чыстае вады.

Для вымеру сыпкіх і плыўкіх цел у Францыі аснаўною мераю служыць літр, роўны блізка аб'ёму $^1/_{26}$ долі куб. фута; (дэцылітр, дэкалітр, гэкталітр).

Меры гандлёвае вагі.

Беркавец мае 10 пудоў.
Пуд » 40 хунтаў.
Хунт » 32 лоты або 96 залатнікоў.
Лот » 3 залатнікі.
Залатнік » 96 доляў.

За адзінку вагі ў Францыі прыняты грам, роўны з лішкаю $^1/_5$ залатніка, (дэкаграм, гэктаграм, кілёграм (2 х. 13 л.), мірыаграм, дэцыграм, сантыграм, мільліграм).

Меркі аптэкарскае вагі.

Аптэк. хунт мае 12 унцыяў (блізка 84 залат.).
Унцыя » 8 драхмаў.
Драхма » 3 скрупулы.
Скрупул » 20 гранаў.

Меркі паперы.

Бэля мае 10 рэзаў.
Рэза » 20 лібраў.
Лібра » 24 аркушы.

Навапольскія меркі сыпкіх целаў.

Корац мае 4 чверці.
Чверць » 8 гарнцаў.

---

[1]) Грам есьць вага аднаго куб. сантыметра чыстае вады пры тэмпэратуры 3,2° Рэамюра, або 4° Цэльзія у беспаветравым прасторы.

[2]) Кілеграм есьць вага аднаго літра чыстае вады (літр—гэта аб'ем, маючы 1000 куб. сантымэтрау).

[3]) Тонна—вага кубічнага мэтра вады.

Гарнец мае 4 кварты.
Кварта » 4 кватэркі.
Кватэрка » 2 поўкватэркі.

Новапольскія меркі плыўкіх целаў.

Бочка мае 25 гарцаў.
Гарнец » 4 кварты.
Кварта » 4 кватэркі.
Кватэрка » 2 поўкватэркі.

Новапольскія меркі вагі або цяжару.

Цэнтнар мае 4 каменьні або 100 хунтаў.
Камень » 25 хунтаў.
Хунт » 32 лоты.

Некаторыя увагі аб мерках.

У штодзенным жыцьці ўжываюцца яшчэ пэўныя меркі, якія трымаюцца ад старых часаў, а ўласна:

12 штук прадметаў аднолькавых складае 1 *тузін,*
12 тузінаў » » » *вялікі тузін* або *грос.*
Агуркі, галоўкі капусты, снапы і г. д. лічуць на *копы*.
Капа мае 60 штук.
Снапы яшчэ лічаць на *мэндлі* (або *мэтлі*):
Капа мае 4 мэндлі.
Мэндаль мае 15 штук.

Адносіны некаторых меркаў паміж сабой.

Кілёмэтр крыху меншы за *вярсту*; прыблізна ён роўны $^{14}/_{15}$ вярсты.

Мэтр блізка роўны $1^3/_4$ *локця*; наадварот *локаць* роўны 57 см. 6 мм.

Цаль=2 см. 4 мм.; звычайна бярэцца цаль за $2^1/_2$ см.

Гэктар=блізка 2 *маргом*.

Літр=крыху болей, чым *кварта*.

Грам важыць крыху болей, чым 15 *гранаў* аптэкарскіх.

Меркі часу.

Век або стогодзьдзе, сталецьце мае 100 гадоў.
Год » 12 месяцаў.
Год звычайны » 52 тыдні і адзін дзень або 365 дзён.

Год прыбытовы, высакосны, перастунны	»	52	тыдні і два дні або 366 дзён.
Месяц	»	30	дзён.
Тыдзень	»	7	дзён.
Пара (суткі)	»	24	гадзіны.
Гадзіна	»	60	хвілін (мінутаў).
Хвіліна (мінута)	»	60	сэкундаў.

96. **Парою** (суткамі) наз. працяг часу, ў каторым зямля скончвае свой абарот кругом свае восі (24 гадзіны).

97. **Месяцам** наз. працяг часу, ў каторым месяц (луна) скончвае поўны абарот кругом зямлі (29 дзён 12 гадзін 44 хвіліны).

У вылічаньні часу, аднак, згадзіліся лічыць за месяц дванаццатую частку соўнечнага году, ці 30 дзён.

98 **Годам** наз. працяг часу, у каторым зямля скончвае поўны абарот кругом сонца (365 дзён 5 гадзін 48 хвілін 50 сэкундаў).

У нашым годалічэньні годы лічацца ад Нараджэньня Хрыста (Каляд). Усякі чацьвёрты год ад Н. Х. назыв. прыбытовым, або высакосным, перастунным.

Каб даведацца, ці будзе дадзены год прыбытовы (высакосны), трэба яго дзяліць на 4; калі ён разьдзеліцца на 4 без астачы, дык ён прыбытовы (высакосны).

Годалічэньне, па катораму кожны чацьвёрты год прымаецца за прыбытовы (высакосны), наз. *юліянскім годалічэньнем* або *старым стылем*. Яно было заведзена Юліем Цэзарам (45 г. да Н. Х.), каторы пастанавіў лічыць у годзе 365 дзён і 6 гадзін роўна.

У заходняй Эўропе прынята годалічэньне, па катораму ня кожны чацьвёрты год бывае прыбытовым (высакосным). Гэта годалічэньне наз. *грыгорыянскім* або *новым стылем*. Яно было заведзена папаю Грыгорам XIII (у 1582 г. па Н. Х.), каторы лічыць больш праўдзіва год у 365 дзён 5 гадзін 48 хвілінаў 50 сэкундаў.

Розьніца паміж старым і новым стылем у тым, што па *юльянскаму* годалічэньню ўсе гады вякоў бываюць прыбытовымі (высакоснымі); па *грыгорыянскаму-жа* годалічэньню толькі тыя годы вякоў прыбытовыя (высакосныя), ў каторых лік вякоў дзеліцца без астачы на чатыры.

У цяперашні час *юльянскае* годалічэньне адстае ад *грыгорыянскага* на 13 дзён, а таму, каб адтрымаць час па новаму стылю, трэба дабавіць да старога стылю 13 дзён.

Пара пачынаецца ад 12-й гадзіны ночы. Звычайна пару дзеляць на чатыры часткі: поўдзень (12-я гадзіна дня), поўнач (12-я гадзіна ночы), раніца (ад часу ўсходу сонца да поўдня) і вечар (з часу заходу сонца да поўначы). Але ў навуцэ прынята ўсе 12 гадзін ад поўначы да поўдня называць гадзінамі папоўначы, а ўсе 12 гадзін па поўдню да поўначы-гадзінамі папоўдню.

Месяцы ідуць у гэтакім парадку:

1. Студзень [31 д.].
2. Люты [ў звычайным г. 28 дз., у прыбытовым [высак.] 29 дзён].
3. Марац-сакавік [31 дз.].
4. Красавік [30 дз.].
5. Май-травень [31 дз.].
6. Чэрвень [30 дз.].
7. Ліпень [31 дз.].
8. Жнівень [31 дз.].
9. Верасень [30 дз.].
10. Кастрычнік [31 дз.].
11. Лістапад [30 дз.].
12. Сьнежань [31 дз.].

Меркі кругоў (колаў).

Круг (кола)	мае	360 градусаў.
Градус	»	60 хвілінаў.
Хвіліна	»	60 сэкундаў.

Градус—360-я частка круга (кола). Градус большага круга (кола) большы за градус меншага круга (кола).

Меркі грошаў.

Залатыя манэты або чырвонцы:

ў 15 руб.
ў 10 руб.
ў 5 руб.

Сярэбраныя манэты:

Рубель	мае	100	кап.
Паўрубель	»	50	»
Пяцьдзесятка	»	25	»
Саракоўка	»	20	»
Залатоўка	»	15	»
Грыўня	»	10	»
Дзесятка	»	5	»

Манэтная адзінка ў Франціі ёсьць франк—сярэбраная манэта ў 5 грамаў. Дзесятая доля франка назыв. дэцымам, а сотая—сантымам.

Сярэбраныя і залатыя манэты ня робяцца з чыстага серабра і золата, бо гэтыя мэталы мяккія. Для большай моцы золата і серабро сплаўляюць з медзьдзю, свінцом і другімі недарагімі мэталамі.

99. Колькасьць залатнікоў чыстага золата або серабра ў хунце (або колькасьць доляў у залатніку) сплава называецца *пробаю*.

100. Танны мэтал, каторы сплаўляюць з дарагім мэталам для большай моцы апошняга, наз. *лігатураю*.

Медныя манэты:

Дзесятка	мае	5	кап.
Шастак	»	3	»
Чацьвяртак	»	2	»
Капейка	»	1	»
Грош	»	$^1/_2$	»
Паўгроша	»	$^1/_4$	»

Папяровыя грошы, або крэдытныя білеты:

500 р.—	Колер	зялёнаваты.	Патрэт	Імпэратара Пятра Вялікага.
100 р.—	»	пясочны.	»	Імпэратр. Кацярыны II.
50 р.—	»	сіняваты.	»	Імпэратара Мікалая I.
25 р.—	»	ліловы.	»	» Аляксандра III.
10 р.—	»	чырвоны.	Двуглавы арол уверсе.	
5 р.—	»	сіні.	Жаноцкая фігура з шчытом.	
3 р.—	»	зялёны.	Двуглавы арол пасярэдзіне.	
1 р.—	»	жоўты.	» » »	

Гэта ўсё грошы расейскія мірнага (спакойнага) часу, выпушчаныя расейскімі царамі.

Апроч гэтых паперовых грошаў, ёсьць шмат іншых, выпушчаных пасьля рэвалюцыі 1917 году, як напр.: думскія, керанкі і др.

Але ўсё гэта грошы расейскія, бо сваіх уласных беларускіх грошаў пакуль што на Беларусі няма.

Польскія грошы.

Марка польская мае 100 фэнігаў.

Часьцей усяго сустракаюцца білеты Польскае Краёвае Касы Пазычковай ў $^1/_2$ маркі, 1 марку, 2 маркі, 5 марак, 10 марак, 20 марак, 50 марак, 100 марак, 500 марак і 1000 марак.

Апрача таго бываюць і дробныя мэталёвыя грошы, як напр. ў 10 фэнігаў, 20 фэнігаў і інш.

101. **Аднаіменным або простым іменным лікам** наз. такі іменны лік, каторы выражаны ў мерках толькі аднаго найменьня.

102. **Многаіменным лікам або складаным іменным лікам** наз. такі іменны лік, каторы выражаны ў мерках розных найменьняў.

103. **Драбленьнем** наз. спосаб прывядзеньня ўсякага іменнага ліку (аднаіменнага або многаіменнага) большага найменьня ў аднаіменны лік меншага найменьня.

104. Каб зрабіць драбленьне, трэба меркі вышэйшага найменьня падрабіць у суседнія меркі ніжэйшага найменьня цераз памножаньне на іх адзінкавыя адносіны.

Да дастаных у множыве меркаў трэба дабавіць аднолькавыя з імі меркі, калі яны знаходзяцца ў дадзеным многаіменным ліку.

Дастанае зьлічво трэба ізноў падрабіць у чарговыя меркі і рабіць драбленьне датуль, пакуль не дастанецца лік патрэбнага найменьня.

Няхай, напр., 3 вярсты 50 саж. 2 арш. 14 вяршкоў трэба падрабіць у вяршкі.

Маем:

$$\begin{array}{rl}
500 & \\
\times 3 & \\
\hline
1500 & \\
+50 & \\
\hline
1550 & \text{саж.} \\
\times 3 & \\
\hline
4650 & \\
+2 & \\
\hline
4652 & \text{арш.} \\
\times 16 & \\
\hline
27912 & \\
4652 & \\
\hline
74432 & \\
+14 & \\
\hline
74446 & \text{вяршк.}
\end{array}$$

Адказ: 74446 вярш.

105. **Збуйненьнем** наз. спосаб зварочваньня аднаіменнага ліку меншага найменьня ў аднаіменны або многаіменны лік большага найменьня.

106. Каб зрабіць збуйненьне, трэба спачатку дадзеныя меркі зьвярнуць у суседнія меркі вышейшага найменьня цераз дзяленьне на іх адзінкавыя адносіны. Дзель выражае лік меркаў вышэйшага найменьня, а астача паказвае лік меркаў ніжэйшага найменьня, каторыя ня могуць складсьці ні аднэй вышэйшай.

З дастанаю дзельлю трэба рабіць гэтак-жа сама датуль пакуль не дастануцца патрэбныя меры.

Апошняя дзель з усімі астачамі выражаюць шуканы многаіменны лік.

Няхай, напр., 71295912 сэк. трэба выразіць у мерах вышэйшых найменьняў. Маем:

71295912 сэк.	60					
112	1188265	60				
529	588	19804	24			
495	482	60	825	30		
159	265	124	225	27	12	
391	25 хв.	4 г.	15 дз.	3 м.	2 гады.	
312						
12 с.						

Адказ: 2 г. 3 мес. 15 дз. 4 гадз. 25 хв. 12 сэк.

Дзеля таго, што збуйненьне ёсьць дзеяньне, адваротнае драбленью, дык абодва гэтыя дзеяньні могуць служыць праверкаю адно аднаму.

Складаньне іменных лікаў.

107. Каб зрабіць складаньне аднародных многаіменных лікаў, трэба, для зручнасьці, падпісаць складанкі адну пад аднэй так, каб меркі аднаго найменьня былі ў адным слупку і пачаць складаньне з меркаў меншага найменьня.

Калі ў зьлічве дастанецца лік, меншы за адзінкавыя адносіны да гэтых меркаў чарговых большых, дык яго падпісваюць пад тым-жа слупком.

Калі ў зьлічве дастанецца лік, большы за адзінкавыя адносіны гэтых меркаў да чарговых большых, дык яго зва-

105. **Збуйненьнем** наз. спосаб зварочваньня аднаіменнага ліку меншага найменьня ў аднаіменны або многаіменны лік большага найменьня.

106. Каб зрабіць збуйненьне, трэба спачатку дадзеныя меркі зьвярнуць у суседнія меркі вышейшага найменьня цераз дзяленьне на іх адзінкавыя адносіны. Дзель выражае лік меркаў вышэйшага найменьня, а астача паказвае лік меркаў ніжэйшага найменьня, каторыя ня могуць скласьці ні аднэй вышэйшай.

З дастанаю дзельлю трэба рабіць гэтак-жа сама датуль пакуль не дастануцца патрэбныя меры.

Апошняя дзель з усімі астачамі выражаюць шуканы многаіменны лік.

Няхай, напр., 71295912 сэк. трэба выразіць у мерах вышэйшых найменьняў. Маем:

```
71295912 сэк. | 60
112           |-----------
 529           1188265 | 60
  495           588    |---------
   159           482    19804 | 24
    391           265    60   |--------
     312          25 хв. 124   825 | 30
      12 с.                4 г. 225 |------
                                15 дз. 27 | 12
                                      3 м.  2 гады.
```

Адказ: 2 г. 3 мес. 15 дз. 4 гадз. 25 хв. 12 сэк.

Дзеля таго, што збуйненьне ёсьць дзеяньне, адваротнае драбленьню, дык абодва гэтыя дзеяньні могуць служыць пераверкаю адно аднаму.

Складаньне іменных лікаў.

107. Каб зрабіць складаньне аднародных многаіменных лікаў, трэба, для зручнасьці, падпісаць складанкі адну пад аднэй так, каб меркі аднаго найменьня былі ў адным слупку і пачаць складаньне з меркаў меншага найменьня.

Калі ў зьлічве дастанецца лік, меншы за адзінкавыя адносіны да гэтых меркаў чарговых большых, дык яго падпісваюць пад тым-жа слупком.

Калі ў зьлічве дастанецца лік, большы за адзінкавыя адносіны гэтых меркаў да чарговых большых, дык яго зварочваюць у меркі чарговага найменьня, дзелячы на адзінкавыя адносіны. Астачу пішуць пад тым-жа слупком, а дзель прыбаўляюць да зьлічва чарговага слупка. Так робяць да апошняга слупка к левай руце.

Напрыклад:

1	1	1	
5 пуд.	15 хунт	25 л.	2 з.
2 »	26 »	18 »	1 »
3 »	20 »	7 »	2 »
11 пуд.	22 хунт.	19 л.	2 з.

5 зал.	3	51 лот.	32	62 х.	40
2 зал.	1 л.	19 лот.	1 х.	22 х.	1 п.

108. *Задачы на вылічэньне часу* спосабам складаньня разьвязваюцца такія, ў каторых даецца *час першага здарэньня і працяг часу* паміж гэтым здарэньнем і чарговым, і трэба ведаць *час другога здарэньня.*

Адыманьне іменных лікаў.

109. Каб зрабіць адыманьне аднародных многаіменных лікаў, трэба, для зручнасьці, адыманы падпісаць пад зьмяншаным так, каб меркі аднаго найменьня былі ў адным слупку; потым пачынаць адыманьне з меркаў меншага найменьня.

Калі якія-небудзь меркі адыманага большія адпаведных меркаў зьмяншанага, дык трэба ў суседніх большых меркаў пазычыць адну адзінку, драбіць яе ў меншыя, дабавіць да тых меркаў, з каторых нельга было адняць. Так робяць да апошняга слупка к левай руцэ.

Напрыклад:

		599	3	16
1)	7 вёрст.	100 саж.	1 арш.	0 вяршк.
	— 3 »	200 »	2 »	5 »
	3 вяр.	399 саж.	1 арш.	11 вяршк.

		7	24	60	60
2)	8 тыд.	0 пар.	0 гад.	0 хвіл.	0 сэк.
	— 3 »	6 »	15 »	34 »	15 »
	4 тыд.	0 пар.	8 гад	25 хвіл.	45 »

110. *Задачы на вылічэньне часу* спосабам адыманьня разьвязваюцца такія: 1) калі даецца *час першага здарэньня*

і час другога здарэньня, а трэба ведаць *працяг*, прайшоўшы паміж двома здарэньнямі або 2) калі даецца *час другога здарэньня і працяг часу* паміж другім і першым здарэньнем, а трэба ведаць *час першага здарэньня*.

Множаньне іменных лікаў.

111. Каб зрабіць множаньне многаіменага ліку на безыменны, трэба множнік напісаць пад множаным і пачынаць множаньне з меркаў самага меншага найменьня.

Калі ў множыве дастанецца лік меншага за адзінкавыя адносіны гэтых меркаў да чарговых большых, дык яго пішуць пад тымі меркамі, каторыя памнажалі.

Калі множыва большае за адзінкавыя адносіны, дык яго дзеляць на адзінкавыя адносіны. Астачу пішуць пад тымі меркамі, каторыя памнажалі, а дзель дадаюць да множыва чарговых меркаў і г. д.

Напрыклад: 15 пуд. 25 хун. 56 зал.

$$\begin{array}{r} 15 \text{ пуд. } 25 \text{ хун. } 56 \text{ зал.} \\ \times\ 25 \\ \hline 390 \text{ пуд. } 39 \text{ хун. } 56 \text{ зал.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \text{ зал.} \\ \times\ 25 \\ \hline 280 \\ 112 \\ \hline 1400 \text{ з.} \\ 440 \\ \hline 56 \text{ зал.} \end{array} \quad \begin{array}{|l} 96 \\ \hline 14 \text{ х.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \text{ х.} \\ \times\ 25 \\ \hline 125 \\ 50 \\ \hline 625 \\ +\ 14 \\ \hline 639 \text{ х.} \\ 239 \\ \hline 39 \text{ х.} \end{array} \quad \begin{array}{|l} 40 \\ \hline 15 \text{ п.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \text{ п.} \\ \times\ 25 \\ \hline 75 \\ 30 \\ \hline 375 \\ +\ 15 \\ \hline 390 \text{ пуд.} \end{array}$$

Дзяленьне іменных лікаў.

112. Пры дзяленьні іменных лікаў бываюць два выпадкі: 1) дзяленьне іменнага ліку на бязыменны і 2) дзяленьне іменнага ліку на іменны.

Разьдзяліць многаіменны лік на безыменны значыць— разьдзяліць дадзеную вялічыню на некалькі роўных частак; дзель у гэтым выпадку заўсёды аднаіменная з дзельным, г. з. *іменная*, і паказвае, якой вялічыні кожная частка.

Разьдзяліць многаіменны лік на іменны значыць—даведацца, колькі разоў адна вялічыня зьмяшчаецца ў другой; дзель у гэтым выпадку заўсёды лік *бязыменны* і паказвае, колькі разоў дзельнік паўтараецца ў дзельным.

113. Каб разьдзяліць многаіменны лік на бязыменны, трэба пачынаць дзяленьне з меркаў самага большага найменьня.

Калі дзельнік не паўтараецца ў дзеленым, або калі пры дзяленьні бывае астача, дык большыя меркі дробяцца ў суседнія меркі меншага найменьня, дадаюць да іх аднаіменныя меркі з дзельнага і дастанае зьлічво дзеляць на дзельнік. Так робяць з усімі астачамі, каторыя могуць быць адтрыманы пры дзяленьні меркаў кожнага найменьня.

Напрыклад: 111 вёр. 80 с. 4 ст. | 24
15 вёр. ў астачы. — 4 вяр. 315 саж. 6 стоп.
×500
7500
\+ 80
7580 саж.
38
140
20 саж. ў астачы.
× 7
140
\+ 4
144 стапы.
0

114. Каб разьдзяліць многаіменны лік на аднародны іменны лік, трэба дзельны і дзельнік драбіць у аднолькавыя меркі і потым зрабіць дзяленьне па агульнаму правілу.

Напр.: 111 вёр. 80 саж. 4 стапы: 4 вяр. 315 саж. 6 стопаў = 24

×500
55500
+80
55580
×7
389060
+4
389064 стапы.

×500
2000
+315
2315
×7
16205
+6
16211 стопаў.

389064 | 16211
32422 | 24
64844
64844
0

і час другога здарэньня, а трэба ведаць *працяг*, прайшоўшы паміж двома здарэньнямі або 2) калі даецца *час другога здарэньня і працяг часу* паміж другім і першым здарэньнем, а трэба ведаць *час першага здарэньня*.

Множаньне іменных лікаў.

111. Каб зрабіць множаньне многаіменага ліку на безыменны, трэба множнік напісаць пад множаным і пачынаць множаньне з меркаў самага меншага найменьня.

Калі ў множыве дастанецца лік меншага за адзінкавыя адносіны гэтых меркаў да чарговых большых, дык яго пішуць пад тымі меркамі, каторыя памнажалі.

Калі множыва большае за адзінкавыя адносіны, дык яго дзеляць на адзінкавыя адносіны. Астачу пішуць пад тымі меркамі, каторыя памнажалі, а дзель дадаюць да множыва чарговых меркаў і г. д.

Напрыклад: 15 пуд. 25 хун. 56 зал.

$$\begin{array}{r} \times\ 25 \\ \hline 390\ \text{пуд.}\ 39\ \text{хун.}\ 56\ \text{зал.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56\ \text{зал.} \\ \times\ 25 \\ \hline 280 \\ 112 \\ \hline 1400\ \text{з.} \\ \hline 440 \\ \hline 56\ \text{зал.} \end{array} \quad \begin{array}{|l} 96 \\ \hline 14\ \text{х.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25\ \text{х.} \\ \times\ 25 \\ \hline 125 \\ 50 \\ \hline 625 \\ +\ 14 \\ \hline 639\ \text{х.} \\ \hline 239 \\ \hline 39\ \text{х.} \end{array} \quad \begin{array}{|l} 40 \\ \hline 15\ \text{п.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15\ \text{п.} \\ \times\ 25 \\ \hline 75 \\ 30 \\ \hline 375 \\ +\ 15 \\ \hline 390\ \text{пуд.} \end{array}$$

Дзяленьне іменных лікаў.

112. Пры дзяленьні іменных лікаў бываюць два выпадкі: 1) дзяленьне іменнага ліку на бязыменны і 2) дзяленьне іменнага ліку на іменны.

Разьдзяліць многаіменны лік на безыменны значыць — разьдзяліць дадзеную вялічыню на некалькі роўных частак; дзель у гэтым выпадку заўсёды аднаіменная з дзельным, г. з. *іменная*, і паказвае, якой вялічыні кожная частка.

Разьдзяліць многаіменны лік на іменны значыць—даведацца, колькі разоў адна вялічыня зьмяшчаецца ў другой; дзель у гэтым выпадку заўсёды лік *бязыменны* і паказвае, колькі разоў дзельнік паўтараецца ў дзельным.

113. Каб разьдзяліць многаіменны лік на бязыменны, трэба пачынаць дзяленьне з меркаў самага большага найменьня.

Калі дзельнік не паўтараецца ў дзеленым, або калі пры дзяленьні бывае астача, дык большыя меркі дробяцца ў суседнія меркі меншага найменьня, дадаюць да іх аднаіменныя меркі з дзельнага і дастанае зьлічво дзеляць на дзельнік. Так робяць з усімі астачамі, каторыя могуць быць адтрыманы пры дзяленьні меркаў кожнага найменьня.

Напрыклад: 111 вёр. 80 с. 4 ст. | 24

4 вяр. 315 саж. 6 стоп.

15 вёр. ў астачы.
×500
7500
+ 80
7580 саж.
38
140
20 саж. ў астачы.
× 7
140
+ 4
144 стапы.
0

114. Каб разьдзяліць многаіменны лік на аднародны іменны лік, трэба дзельны і дзельнік драбіць у аднолькавыя меркі і потым зрабіць дзяленьне па агульнаму правілу.

Напр.: 111 вёр. 80 саж. 4 стапы: 4 вяр. 315 саж. 6 стопаў = 24

×500
55500
+80
55580
×7
389060
+4
389064 стапы.

×500
2000
+315
2315
×7
16205
+6
16211 стопаў.

389064 | 16211

24

32422
64844
64844
0

Аб дзельніках.

115. Лік, на каторы другі дзеліцца без астачы, назы-
ваецца пунктуальным *дзельнікам* гэтага другога ліку.

116. Лік, каторы дзеліцца на другі без астачы, назы-
ваецца *многаразавым* (кратным) гэтага другога ліку, напры-
клад: 15 многаразавы лік 3-х, 5-ці.

Усякі лік дзеліцца сам на сябе і на адзінку без астачы.

117. Лікі, каторыя дзеляцца без астачы толькі самі на
сябе і на адзінку, назыв. **прапачаткавымі**, *простымі*, або
першымі (1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 . . . . .).

118. Лікі, каторыя, апроч адзінкі і самых сябе, могуць
дзяліцца без астачы і на другія лікі, называюцца *складаны-
мі* (4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15...).

Каб даведацца, ці будзе дадзены лік прапачаткавы або складаны,
яго трэба дзяліць на ўсе прапачаткавыя лікі па парадку, пачынаючы
з 2. Дзяленьне павінна рабіцца датуль, пакуль у дзелі дастанецца
лік, меншы за дзельнік; калі і тады будзе астача, дык можна пэўна
сказаць, што дадзены лік прапачаткавы, а не складаны.

Дзеля таго, што прапачаткавых лікаў без канца многа, а дастаюц-
ца яны доўгімі вылічаньнямі, дык вельмі карысна мець пад рукою
гатовую табліцу прапачаткавых лікаў. Самая вялікая табліца скла-
дзена *Бухардтам*; яна мае прапачаткавыя лікі ад 1 да 3036000.
Ніжэй ідучая табліца мае ў сабе ўсе прапачаткавыя лікі ад 1 да
2000.

ТАБЛІЦА

прапачаткавых лікаў ад адзінкі да двух тысяч аў

1	163	383	619	881	1151	1439	1699
2	167	389	631	883	1153	1447	**1709**
3	173	397	641	887	1163	1451	1721
5	179	**401**	643	**907**	1171	1453	1723
7	181	409	647	911	1181	1459	1733
11	191	419	653	919	1187	1471	1741
13	193	421	659	929	1193	1481	1747
17	197	431	661	937	**1201**	1483	1753
19	199	433	673	941	1213	1487	1759
23	**211**	439	677	947	1217	1489	1777
29	223	443	683	953	1223	1493	1783
31	227	449	691	967	1229	1499	1787
37	229	457	**701**	971	1231	**1511**	1789
41	233	461	709	977	1237	1523	**1801**
43	239	463	719	983	1249	1531	1811
47	241	467	727	991	1259	1543	1823
53	251	479	733	997	1277	1549	1831
59	257	487	739	**1009**	1279	1553	1847
61	263	491	743	1013	1283	1559	1861
67	269	499	751	1019	1289	1567	1867
71	271	**503**	757	1021	1291	1571	1871
73	277	509	761	1031	1297	1579	1873
79	281	521	769	1033	**1301**	1583	1877
83	283	523	773	1039	1303	1597	1879
89	293	541	787	1049	1307	**1601**	1889
97	**307**	547	797	1051	1319	1607	**1901**
101	311	557	**809**	1061	1321	1609	1907
103	313	563	811	1063	1327	1613	1913
107	317	569	821	1069	1361	1619	1931
109	331	571	823	1087	1367	1621	1933
113	337	577	827	1091	1373	1627	1949
127	347	587	829	1093	1381	1637	1951
131	349	593	839	1097	1399	1657	1973
137	353	599	853	**1103**	**1409**	1663	1979
139	359	**601**	857	1109	1423	1667	1987
149	367	607	859	1117	1427	1669	1993
151	373	613	863	1123	1429	1693	1997
157	379	617	877	1129	1433	1697	1999

119. **Прыметам падзельнасьці лікаў** наз. спосабы, пры падмозе каторых можна, ня робячы запраўды дзяленьня, даведацца—на якія лікі дадзены лік дзеліцца без астачы.

Прызнакі падзельнасьці лікаў маюць аснову на чарговых дзьвёх уласьцівасьцях лікаў: 1) зьлічво некалькіх складанак дзеліцца на які-небудзь лік без астачы, калі ўсе складанкі дзеляцца на той-жа лік без астачы, 2) множыва двох або некалькіх лікаў дзеліцца на кожны з сваіх сумножнікаў без астачы.

120. Усякі лік дзеліцца на 2 без астачы, калі ён канчаецца нулём або лічбінаю, каторая можа дзяліцца на 2 без астачы (напр.: 2, 4, 6, 8), бо адзін дзесятак і любы лік дзесяткаў, або наагул лік, які канчаецца нулём, дзеліцца на 2; з адзінак-жа дадзенага ліку толькі 2, 4, 6, 8 дзеліцца на 2.

Лікі кратныя (разавыя) двох, наз. *чотнымі* або *цотамі*; лікі, някратныя двох, наз. *нячотнымі* або *лішкамі*.

121. Усякі лік дзеліцца на 4 без астачы, калі ён канчаецца двома нулямі, або калі дзесяткі з адзінкамі дзеляцца на 4 без астачы, бо адна сотка і любы лік сотак, або наагул лік, які канчаецца двома нулямі, дзеліцца на 4; значыцца, калі ў якім-небудзь ліку дзесяткі з адзінкамі дзеляцца на 4, дык увесь лік разьдзеліцца на 4.

Заўважым, што пры чотным (цотным) ліку дзесяткаў хваце (старчыць) даведацца, ці дзеляцца адзінкі дадзенага ліку на 4.

122. Усякі лік дзеліцца на 8 без астачы, калі ён канчаецца трома нулямі, або калі соткі з дзесяткамі і адзінкамі дзеляцца на 8 без астачы, бо адна тысяча і любы лік тысячаў, або наагул лік, які канчаецца трома нулямі, дзеліцца на 8; значыцца, калі ў якім-небудзь ліку соткі з дзесяткамі і адзінкамі дзеляцца на 8, дык увесь лік разьдзеліцца на 8.

Заўважым, што пры чотным (цотным) ліку сотак хваціць даведацца, ці дзеляцца дзесяткі з адзінкамі дадзенага ліку на 8.

123. Усякі лік дзеліцца на 5 без астачы, калі ён канчаецца нулём, або лічбінаю 5, бо адзін дзесятак і які-небудзь лік дзесяткаў, або наагул лік, які канчаецца нулём, дзеліцца на 5; з адзінак-жа толькі 5 дзеліцца на 5.

124. Усякі лік дзеліцца на 10 без астачы, калі ён канчаецца нулём, бо адзін дзесятак і які хочаш лік дзесяткаў дзеліцца на 10, адзінкі ніколі ня могуць дзяліцца на 10, бо ўсе яны меншыя за 10.

125. Усякі лік дзеліцца на 25 без астачы, калі ён канчаецца двома нулямі, або лікамі 25, 50, 75, бо адна сотка і які хочаш лік сотак, або наагул лік, які канчаецца двома нулямі, дзеліцца на 25; значыцца, калі лік канчаецца на 25, 50, 75, дык ён дзеліцца на 25.

Увага. Усякі лік, абазначаны адзінкаю з нулямі, можа быць раскладзены на 2 складанкі, з каторых адна мае лічбіну 9 столькі разоў, колькі знаходзіцца нулёў у дадзеным ліку, а другая складанка роўна простай адзінцы.

Так: $10=9+1$, $100=99+1$, $1000=999+1$ і г. д.

Далей—усякі лік, абазначаны дзевяткамі, дзеліцца на 3 і на 9 без астачы.

Ведаючы гэта, раскладзём які-небудзь лік, напрыклад, 2367 на адзінкі розных парадкаў:

$$
\begin{aligned}
2367 = {} & 1000+1000 \\
& +100+100+100 \\
& +10+10+10+10+10+10 \\
& +7
\end{aligned}
$$

Раскладзём кожную тысячу, кожную сотку і кожны дзесятак на 2 складанкі, адтрымаем:

$$
\begin{aligned}
2367 = {} & 999+999 && +2 \\
& +99+99+99 && +3 \\
& +9+9+9+9+9+9 && +6 \\
& && +7
\end{aligned}
$$

Складанкі 999, 99 і 9 дзеляцца на 3 і на 9; значыцца, падзельнасьць дадзенага ліку на 3 і на 9 залежыць толькі ад складанкі $[2+3+6+7]$, каторай выражаецца зьлічво лічбінаў дадзенага ліку 2367.

Дзеля таго, што зьлічво $2+3+6+7=18$ дзеліца на 3 і на 9, дык дадзены лік 2367 павінен дзяліцца на 3 і на 9.

На аснове вышэй—напісанага, можам сказаць:

126. Усякі лік дзеліцца на 3 без астачы, калі зьлічво лічбінаў яго дзеліцца на 3 без астачы.

127. Усякі лік дзеліцца на 9 без астачы, калі зьлічво лічбінаў яго дзеліцца на 9 без астачы.

128. Усякі лік дзеліцца на 6 без астачы, калі ён дзеліцца на 2 і на 3, т. е. на ўзаемна-першыя множнікі 6-ці.

Няхай лік 342 дзеліцца на 2 і на 3; давядзём, што ён разьдзеліцца на 6. Разьдзелім 342 на 3 роўныя часткі [342:3—114] і злучым дзьве часткі ў адну (114+114—228); тагды 342 можна выразіць зьлічвом дзьвюх складанак [228+114—342], з каторых першая складанка зложаная з дзьвюх роўных частак, дзеліцца на 2, а калі зьлічво дзьвюх складанак і адна з іх дзеліцца на 2, дык і другая складанка павінна дзяліцца на два, але другая складанка ёсьць трэйцяя частка ліку 342; калі-ж трэйцяя частка дзеліцца на два, дык увесь лік, як відаць, разьдзеліцца на 6.

Так сама можна давесьці, што:

на 12 дзеліцца ўсякі лік, калі ён дзеліцца на 3 і на 4; на 15,—калі ён дзеліцца на 3 і на 5; на 18 —калі ён дзеліцца на 2 і на 9: на 24,—калі ён дзеліцца на 8 і на 3: на 36,—калі ён дзеліцца на 4 і на 9; на 40,—калі ён дзеліцца на 5 і на 8: на 45,—калі ён дзеліцца на 5 і на 9: на 50,—калі ён дзеліцца на 2 і на 25: на 72,—калі ён дзеліцца на 8 і на 9; на 75,—калі ён дзеліцца на 3 і на 25 і г. д.

На 11 дзеліцца ўсякі лік без астачы, калі розьніца паміж зьлічвом лічбінаў, стаячых на чотных мяйсцох, і зьлічвом лічбінаў, стаячых на нячотных (лішкавых) мяйсцох, ёсьць нуль або лік, разавы (кратны) адзінаццаці.

Прымета падзельнасьці лікаў на 7 або на 13 ёсьць у тым, каб дадзены лік разьбіць, лічучы ад правае рукі да левае, на грані, па 3 лічбіны ў кожнае; потым знаходзіць розьніцу намі: зьлічвом лікаў, напісанных гранямі, стаячымі на чотных мяйсцох, зьлічвом лікаў, напісанных гранямі, стаячымі на нячотных мяйсцох; калі гэта розьніца ёсьць нуль або лік, разавы 7 і 13, дык і самы лік разьдзеліцца на гэтыя дзельнікі.

Прымета падзельнасьці лікаў на 37 ёсьць у тым, каб лік разьдзяліць, па старому, на грані; калі зьлічво лікаў, выражаных гранямі яго, дзеліцца на 37, дык і лік разьдзеліцца на 37.

Раскладаньне лікаў на прапачаткавыя дзельнікі.

129. **Раскладаньнем ліку на прапачаткавыя дзельнікі** (чыньнікі, сумножнікі) наз. спосаб знаходзіць усе прапачаткавыя (простыя) лікі, множыва каторых было-б роўна гэтаму ліку.

130. Каб раскласьці лік на прапачаткавыя дзельнікі, трэба яго спачатку разьдзяліць на самы меншы (посьле адзінкі) прапачаткавы лік, на каторы ён дзеліцца, дастаную дзель зноў разьдзяліць на самы меншы прапачаткавы лік, на каторы ён дзеліцца і г. д. датуль, пакуль у дзелі будзе адзінка.

Няхай патрэбна, напр. раскласьці 2520 на прапачаткавыя дзельнікі.

Для зручнасьці, дзеяньне пішуць гэтак:

2520	2
1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

з правага боку ад ліку працягваюць адвесную (старчавую) рысу. З правага боку ад рысы пішуць дзельнікі, а з левага пад дадзеным лікам,—дзелі.

Або так:

2	2	2	3	3	5	7	
2520	1260	630	315	105	35	7	1

Зробленым дзеяньнем даведаемся, што $2520—2.2.2.3.3.5.7—2^3.3^2.5.7$.

Лікі 10, 100, 1000..... зложаны з множнікаў 2 і 5, ўзятых столькі разоў, колькі нулёў пры адзінцы.

Ведаючы гэта, мы пры шуканьні прапачаткавых дзельнікаў ліку, які канчаецца нулямі, можам ускорыць дзеяньне.

Няхай патрэбна, напр., раскласьці на простыя дзельнікі 105000. Прадставіўшы дадзены лік, як множыва 105.1000, раскладзём 105 па агульнаму правілу і знойдзем: 105—3.5.7. Дзеля таго, што множнік 1000—2.2.2.5.5.5, то $105000—2.2.2.3.5.5.5.5.7—2^3.3\ 5^4.7$.

Супольны найвялікшы дзельнік.

131. **Супольным дзельнікам** некалькіх лікаў наз. лік, на каторы кожны з гэтых лікаў дзеліцца без астачы, напр. лікі: 18, 24, 30 маюць супольныя дзельнікі 2, 3, 6.

132. **Супольным найвялікшым дзельнікам** некалькіх лікаў наз. самы вялікі дзельнік, на каторы дадзеныя лікі дзеляцца без астачы, напр. лікі: 18, 24, 30 маюць супольны найвялікшы дзельнік 6.

Лікі, ў каторых, апроч адзінкі, няма супольнага дзельніка, наз. ўзаемна-простымі або першымі паміж сабою, напр.: 8 і 9, 12 і 37 і г. д.

133. Супольны найвялікшы дзельнік знаходзіцца па двом спосабам: 1) па спосабу раскладаньня на прапачатковыя дзельнікі і 2) па спосабу паступовага дзяленьня.

134. Каб знайсьці супольны найвялікшы дзельнік некалькіх лікаў па спосабу раскладаньня на прапачатковыя дзельнікі, трэба дадзеныя лікі раскласьці на прапачатковыя дзельнікі, потым выдзяліць прапачатковыя дзельнікі, каторыя *супольны* ўсім лікам у найменшай ступені, і іх перамножыць; дастанае множыва і будзе супольным найвялікшым дзельнікам дадзеных лікаў.

Няхай патрэбна знайсьці супольны найвялікшы дзельнік лікаў: 324, 360 і 540.

Раскладзём кожны з дадзеных лікаў на простыя множнікі:

324	2	360	2	540	2
162	2	180	2	270	2
81	3	90	2	135	3
27	3	45	3	45	3
9	3	15	3	15	3
3	3	5	5	5	5
1		1		1	

Супольны найвялікшы дзельнік $= 2.2.3.3 = 36$.

Пры шуканьні супольнага найвялікшага дзельніку раскладаньне дадзеных лікаў можа быць зроблена прасьцей: пішуць дадзеныя лікі ўпоравень, аддзельваючы іх адзін ад другога коскамі, з правага боку ад апошняга ліку праводзяць старчовую рысу і лікі дзеляць на супольныя дзельнікі да таго часу, пакуль у дзелях ня будуць лікі узаемна-першыя. Множыва ўсіх дзельнікаў і будзе супольным найвялікшым дзельнікам усіх дадзеных лікаў.

Знойдзем супольны найвялікшы дзельнік лікаў: 540, 420, 360.

540,	420,	360	2
270,	210,	180	2
135,	105,	90	3
45,	35,	30	5
9,	7,	6	

Супольны найвялікшы дзельнік$=2.2.3.5=60$.

135. Каб знайсьці супольны найвялікшы дзельнік двох лікаў па спосабу паступовага дзяленьня, трэба большы з іх разьдзяліць на меншы, меншы на першую астачу, першую астачу на другую, другую на трэйцюю і г. д. да таго часу, пакуль дастанецца ў астачы нуль; апошні дзельнік і будзе супольным найвялікшым дзельнікам двох дадзеных лікаў.

Патрэбна, напр., знайсьці супольны найвялікшы дзельнік лікаў 1050 і 455.

Вылічэньне пішуць гэтак:

		1050	455	
		910	2	
	455	140		
	420	3		
140	35			
140	4			
0				

Альбо гэтак:

	2	3	4
1050 :	455 :	140 :	35
910	420	140	—
140	35	0	—

Супольны найвялікшы дзельнік$=35$.

136. Каб знайсьці супольны найвялікшы дзельнік некалькіх лікаў па спосабу паступовага дзяленьня, трэба спачатку знайсьці супольны найвялікшы дзельнік двох якіх-не-

будзь лікаў. потым супольны найвялікшы дзельнік трэйцяга ліку і першага супольнага найвялікшага дзельніку, потым супольны найвялікшы дзельнік чацьвёртага ліку і другога супольнага найвялікшага дзельніку і г. д.; апошні дзельнік і будзе супольным найвялікшым дзельнікам усіх дадзеных лікаў.

Найменшы многаразавы лік.

137. **Найменшым многаразавым лікам** двох або некалькіх лікаў наз. самы меншы з усіх лікаў, каторы дзеліцца на дадзеныя лікі без астачы. напр.: 36 ёсьць найменшы многаразавы лікаў: 4, 6, 9, 12: 42 — найменшы многаразавы 6, 14, 21.

138. Каб знайсьці найменшы многаразавы некалькіх лікаў, трэба ўсе гэтыя лікі раскласьці на прапачаткавыя дзельнікі, потым выпісаць усе прапачаткавыя дзельнікі дадзеных раскладваньняў у іх вышэйшых ступенях і ўсе гэтыя дзельнікі перамножыць; дастанае множыва і будзе найменшым многаразавым дадзеных лікаў.

Няхай патрэбна знайсьці найменшы многаразавы лікаў: 36, 45, 54 60, 72.

Раскладзём дадзеныя лікі на простыя дзельнікі.

36—2.2.3.3.
45—3.3.5.
54—2.3.3.3.
60—2.2.3.5.
72—2.2.2.3.3.

Найменшы многаразавы іх = 2.2.2 3 3.3.5 = 1080.

Пры шуканьні найменшага многаразавага лікаў на прапачаткавыя дзельнікі спрошчываецца гэтак: пішуць дадзеныя лікі ўпоравень і з правага боку ад апошняга ліку працягваюць старчовую рысу; пры гэтым лікі, уваходзячыя сумножнікамі ў апошнія лікі прапускаюць, а дастаныя дзелі, якія ёсьць у аднэй з апошніх дзелей, закасоўваюць, лікі-ж, якія ня дзеляцца, перапісваюць бяз зьмены. Множыва ўсіх дастаных дзельнікаў і будзе найменшым многаразавым усіх дадзеных лікаў.

Знойдзем найменшы многаразавы 40, 36, 54, 120 і 180.

40,	**36**,	54,	120,	180	2
		27,	60,	90	2
		27,	30,	45	3
		27,		15	3
		9,		5	3
		3,		5	5
		1,		1	

Найменшы многаразавы —2.2.2.3.3.3.5—1080.

Найменшы многаразавы двох або некалькіх прапачаткавых або ўзаемна-першых лікаў роўны множыву гэтых лікаў.

Найменшы многаразавы можна яшчэ знайсьці пры дапамозе супольнага найвялікшага дзельніка.

Няхай, напр. патрэбна знайсьці найменшы многаразавы 782 і 170. Знойдзем спосабам паступовага дзяленьня іх супольны найвялікшы дзельнік, каторы будзе 34. Потым разьдзелім адзін з дадзеных лікаў, напр. 170 на 34; атдрымаем 5. Памножыўшы 5 на другі лік—на 782, будзем мець лік 3910, каторы і ёсьць найменшы многаразавы 782 і 170.

Каб знайсьці гэтым спосабам найменшы многаразавы трох, чатырох і больш лікаў, трэба спачатку знайсьці найменшы многаразавы двох якіх-небудзь лікаў, потым знайсьці найменшы многаразавы знойдзенага найменшага многаразавага і трэйцяга ліку і г. д., апошні найменшы многаразавы і будзе найменшым многаразавым усіх дадзеных лікаў.

ДРОБЯЗНЫЯ ЛІКІ.

Звычайныя дробязі.

Даставаньне і абазначэньне дробязяў.

139. Дробязь дастаецца: 1) ад дзяленьня меншага ліку на большы, 2) ад мераньня якой-небудзь рэчы такою меркаю, каторая не паўтараецца ў ёй ні аднаго цэлага разу.

140. **Дробязьзю** або **дробязным лікам** наз. адна або збор некалькіх аднолькавых частак адзінкі.

Другое вытлумачэньне дробязі. Дробязьзю наз. лік, каторы паказвае, колькі разоў якая-небудзь частка (доля) адзінкі паўтараецца ў зьмерваемай рэчы.

141. Дробязь абазначаецца двома лікамі, каторыя пішуцца адзін пад адным і аддзельваюцца адзін ад аднаго паземнаю рысаю. ($\frac{3}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{5}{9}$).

Падчас замест паземнай рысы ставяць нахіленую ($3/5$, $6/7$, $5/9$ ....).

142. **Назоўнікам** наз. лік, які стаіць пад рысаю і паказвае, на колькі роўных частак адзінка была падзелена.

143. **Лічнікам** наз. лік, які стаіць над рысаю і паказвае, колькі ў дадзеным выпадку ўзята частак.

Лічнік і назоўнік дробязі наз. *складамі* (*суставамі*) яе.

Усякая дробязь можа быць разгледжана, як дзель, якая дастаецца ад дзяленьня лічніку на столькі роўных частак, колькі адзінак у назоўніку; наадварот, усякая дзель можа быць прадстаўлена, як дробязь, лічнік каторае роўны дзельнаму, а назоўнік—дзельніку. Такім чынам, лічнік дробязі можа быць названы так-сама дзельным, а назоўнік—дзельнікам.

Параўнаньне дробязяў з адзінкаю.

144. У адносінах вялічыні дробязяў да адзінкі, дробязі бываюць большыя за адзінку (калі лічнік большы за назоўнік, напр.: $7/5$, $3/2$, $9/7$); роўны ёй (калі лічнік роўны назоўніку, напр.: $6/6$, $8/8$, $11/11$), і меншыя за яе (калі лічнік меншы за назоўнік, напр.: $5/6$, $7/9$, $11/13$).

145. **Праведнаю (праўдзіваю)** наз. дробязь, меншая за адзінку ($\frac{7}{9} < 1; \frac{5}{8} < 1$).

146. **Няправеднаю (непраўдзіваю)** наз. дробязь, роўная адзінцы або большая за адзінку ($\frac{6}{6} = 1; \frac{8}{5} > 1$).

Мяшаным лікам наз. цэлы лік з дробязьзю [$3\,^3/_4$, $6\,^7/_8$, $9\,^5/_7$].

Ператварэньне (зьвярненьне) мяшанага або цэлага ліку ў няправедную (непраўдзівую) дробязь. Выключаньне цэлага ліку з няправеднае (непраўдзівае) дробязі.

Усякі мяшаны або цэлы лік можа быць зьвернены ў няправедную (непраўдзівую) дробязь, наадварот, усякая няправедная (непраўдзівая) дробязь можа быць зьвернена ў мяшаны або цэлы лік.

147. Каб зьвярнуць цэлы лік у няправедную (непраўдзівую) дробязь, трэба цэлы лік памножыць на жадаемы назоўнік і пад множывам падпісаць гэты назоўнік $\left(5=\frac{5.7}{7}=\frac{35}{7}; 4=\frac{4.8}{8}=\frac{32}{8}\right)$.

148. Каб зьвярнуць мяшаны лік у няправедную (непраўдзівую) дробязь, трэба цэлую частку гэтага ліку памножыць на назоўнік дробязнай яе часткі, да адтрыманага множыва дадаць лічнік і пад зьлічвом падпісаць той-жа назоўнік. $\left(5\frac{4}{7}=\frac{5.7+4}{7}=\frac{39}{7}; 9\frac{7}{8}=\frac{9.8+7}{8}=\frac{79}{8}\right)$.

149. Каб выключыць цэлы лік з няправеднае (непраўдзівае) дробязі, трэба лічнік разьдзяліць на назоўнік, і калі будзе астача, дык яе дадаць да дзелі, як дробязь, лічнікам каторае будзе астача, а назоўнікам—назоўнік дадзенае дробязі. $\left(\frac{54}{9}=6; \frac{75}{8}=9\frac{3}{8}\right)$.

Павялічаньне і паменшаньне дробязяў.

150. Ад павялічаньня лічніку ў некалькі разоў дробязь папавялічыцца ў столькі-ж разоў $\left(\frac{8.2}{9}=\frac{16}{9}\right)$, бо лік доляў павялічваецца.

151. Ад паменшаньня лічніку ў некалькі разоў дробязь паменшыцца ў столькі-ж разоў $\left(\frac{8:2}{9}=\frac{4}{9}\right)$, бо лік доляў памяншаецца.

152. Ад павялічаньня назоўніку ў некалькі разоў, дробязь памяншаецца ў столькі-ж разоў $\left(\frac{8}{9\times3}=\frac{8}{27}\right)$, бо вялічыня доляў памяншаецца.

153. Ад паменшаньня назоўніку ў некалькі разоў, дробязь павялічваецца ў столькі-ж разоў $\left(\frac{8}{9:3}=\frac{8}{3}\right)$, бо вялічыня доляў павялічваецца.

154. Ад адначаснага павялічаньня або паменшаньня лічніку й назоўніку ў аднолькавы лік разоў дробязь зьменьвае толькі свой выгляд, а вялічыня яе ня зьменьваецца.

Скарочаньне дробязяў.

155. **Скарочаньнем дробязяў** наз. прадстаўленьне дадзенай дробязі ў дробязь з меншым лічнікам і меншым назоўнікам, ня зьменьваючы вялічыні і дробязі.

156. Дробязі скарочваюцца для таго, каб прадставіць іх у прасьцейшым выглядзе, а так-сама, каб зручней было выявіць іх вялічыню

157. Скарочаньне дробязяў аснована на асаблівасьці іх не мяняцца ад аднач.снага паменьшаньня лічніку й назоўніку ў аднолькавы лік разоў.

158. Каб скараціць дробязь, трэба лічнік і назоўнік яе паступова дзяліць на ўсе супольныя іх дзельнікі да таго часу, пакуль у лічніку і назоўніку ня будуць лікі ўзаемна-першыя.

$$\left(\overset{10}{\frac{60480}{105840}} = \overset{9}{\frac{6048}{10584}} = \overset{8}{\frac{672}{1176}} = \overset{7}{\frac{84}{147}} = \overset{3}{\frac{12}{21}} = \frac{4}{7}\right)$$

Скараціць дробязь можна так-сама пры падмозе дзяленьня лічніку й назоўніку на іх супольны найвялікшы дзельнік, каторы знаходзяць па спосабу паступовага дзяленьня.

159. **Нескарочальнаю** наз. дробязь, у каторае лічнік і назоўнік—лікі ўзаемна-простыя і каторая дзеля гэтага ня можа быць скарочана.

Параўнаньне дробязяў паміж сабою.

160. З некалькіх дробязяў з аднолькавымі лічнікамі тая большая, у каторай назоўнік меншы, бо долі гэтае дробязі буйнейшыя, а лік іх аднолькавы з другімі дробязямі ($^4/_7$, $^4/_9$, $^4/_{11}$ – найв. $^4/_7$).

161. З некалькіх дробязяў з аднолькавымі назоўнікамі тая большая, лічнік каторае большы, бо долі гэтае дробязі аднолькавыя з другімі дробязамі, а лік іх большы ($^4/_7$, $^5/_7$, $^6/_7$,—найвял. $^6/_7$).

162. Калі дадзеныя дробязі з рознымі лічнікамі й рознымі назоўнікамі, дык для параўнаньня іх паміж сабою трэба спачатку ўсе дробязі прывесьці або да аднаго лічніку або да аднаго назоўніку і потым разважаць па вышэйшаму.

Прывядзеньне дробязяў да аднаго назоўніку.

163. **Прывядзеньнем дробязяў да аднаго назоўніку** наз. спосаб, пры падмозе каторага дадзеныя дробязі ператвараюцца ў дробязі з аднолькавымі назоўнікамі, пры чым вялічыні дробязяў ня зьменьваюцца.

164. Дробязі прыводзяцца да аднаго назоўніку для таго, каб даведацца, якая з іх большая і якая меншая, а так сама для таго, каб складваць і адымаць дробязі.

165. Прывядзеньне дробязяў да аднаго назоўніка аснована на асаблівасьці дробязяў ня зьменьвацца ад адначаснага павялічаньня лічніку й назоўніку ў аднолькавы лік разоў.

166. Пры прывядзеньні дробязяў да аднаго назоўніку могуць быць два выпадкі: 1) калі ўсе назоўнікі ўзаемнапростыя, 2) калі назоўнікі маюць супольныя дзельнікі. У абодвых выпадках трэба спачатку знайсьці найменшы многаразавы ўсіх назоўнікаў, знойдзены найменшы многаразавы і будзе супольным назоўнікам; яго трэба дзяліць на кожны назоўнік і на дастаную дзель (на дадатковы множнік) памножыць лічнік і назоўнік адпаведнай дробязі.

[1]) На практыцы трэба толькі лічнікі памножыць на адпаведныя дадатковыя множнікі, а назоўнікам усіх дробязяў падпісваецца знойдзены найменшы многаразавы.

[1]) Дадатковымі множнікамі дадзеных назоунікау да іх найменшага многаразавага нав. лікі, на каторыя трэба памножыць кожны назоунік, каб дастаць найменшы многаразавы.

Прыклады:

1) Прывясьці да аднаго назоўніку дробязі: $^2/_7$, $^5/_8$. $^4/_9$.

Найменшы многаразавы назоўнікаў дадзеных дробязяў, як лікаў узаемна-простых, роўны іх множыву:—$7.8.9=504$. Дадатковы множнік першага назоўніку да найменшага многаразавага ўсіх назоўнікаў будзе $8.9=72$, другога назоўніку—$7.9=63$, трэйцяга назоўніку—$7.8=56$.

Знаходзім:
$$\frac{2}{7}=\frac{2.72}{504}=\frac{144}{504}$$
$$\frac{5}{8}=\frac{5.63}{504}=\frac{315}{504}$$
$$\frac{4}{9}=\frac{4.56}{504}=\frac{224}{504}$$

2) Прывясьці да аднаго назоўніку дробязі: $^4/_{15}$, $^3/_8$, $^5/_9$.

Знойдзем найменшы многаразавы 15, 8, 9.

$15=3.5$	Дадатковыя множнікі: для	15	будзе	$2^3.3=24$;
$8=2.2.2.$	» »	» 8	»	$3^2.5=45$;
$9=3.3$	» »	» 9	»	$2^3.5=40$;

Найменшы многаразавы$=2^3.3^2.5=360$.

Знаходзім:
$$\frac{4}{15}=\frac{4.24}{360}=\frac{96}{360}$$
$$\frac{3}{8}=\frac{3.45}{360}=\frac{135}{360}$$
$$\frac{5}{9}=\frac{5.40}{360}=\frac{200}{360}$$

3) Прывясьці да аднаго назоўніку дробязі $^{13}/_{24}$, $^{31}/_{72}$, $^5/_{18}$.

У дадзеным прыкладзе найбольшы назоўнік (72) ёсьць найменшым многаразавым усіх назоўнікаў; значыцца, ён павінен быць супольным назоўнікам.

Дадатковы множнік 24-х роўны 3; дадатковы множнік 18 роўны 4.

Знаходзім:
$$\frac{13}{24}=\frac{13.3}{72}=\frac{39}{72}$$
$$\frac{5}{18}=\frac{5.4}{72}=\frac{20}{72}$$
$$\frac{31}{72}=\frac{31}{72}$$

Пры правядзеньні дробязяў да аднаго лічніку трэба знайсьці найменшы многаразавы ўсіх лічнікаў, знайдзены найменшы многаразавы разьдзяліць на кожны лічнік і на дастаную дзель помножыць лічнік і назоўнік адпаведнае дробязі.

Знаходжаньне часткі якога-небудзь ліку і знаходжаньне ўсяго ліку, калі вядомы якія-небудзь яго часткі.

167. Каб знайсьці *некалькі частак* ад якога-небудзь цэлага ліку, трэба спачатку знайсьці адну жаданую частку гэтага ліку, разьдзяліўшы яго на назоўнік, потым знойдзеную частку памножыць на лічнік.

Няхай, напрыклад, трэба знайсьці $^5/_6$ ад 24. Разважаем:

$$\frac{1}{6}(24)=\frac{24}{6}=4.$$

$$\frac{5}{6}(24)=4.5=20.$$

Няхай яшчэ патрэбна знайсьці $^3/_8$ ад $^9/_5$. Разважаем:

$$\frac{1}{8}\left(\frac{9}{5}\right)=\frac{9}{5.8}=\frac{9}{40}.$$

$$\frac{7}{8}\left(\frac{9}{5}\right)=\frac{9.7}{40}=\frac{63}{40}=1\frac{23}{40}.$$

Знайсьці некалькі частак ад дадзенага цэлага усё роўна, што памножыць дадзены цэлы на дадзеную дробязь.

168. Каб знайсьці *ўвесь лік*, калі вядомы якія-небудзь яго часткі, трэба спачатку знайсьці адну частку шуканага ліку, разьдзяліўшы дадзены лік на лічнік, потым знойдзеную частку шуканага ліку памножыць на назоўнік.

Няхай, напр., патрэбна знайсьці лік, каторага $^3/_4$ складваюць 18.

Разважаем: $\frac{3}{4}X=18;$

$$\frac{1}{4}X=\frac{18}{3}=6;$$

$$\frac{4}{4}X=6.4=24.$$

Няхай яшчэ патрэбна знайсьці лік, каторага $^5/_7$ складваюць $^2/_3$.

Разважаем: $\frac{5}{7}X\frac{2}{3};$

$$\frac{1}{7}X=\frac{2}{3.5}=\frac{2}{15};$$

$$\frac{7}{7}X=\frac{2.7}{15}=\frac{14}{15}.$$

Знайсьці ўвесь лік па дадзеных частках усё роўна, што разьдзяліць дадзеныя часткі на дадзеную дробязь.

Складаньне дробязяў.

169. Пры складаньні дробязяў могуць быць два выпадкі: 1) складаньне дробязяў з аднолькавымі назоўнікамі і 2) складаньне дробязяў з рознымі назоўнікамі.

170. Каб скласьці дробязь з аднолькавымі назоўнікамі, трэба пад зьлічвом лічнікаў падпісаць супольны назоўнік ($\frac{9}{13}+\frac{5}{13}+\frac{6}{13}+\frac{8}{13}=\frac{9+5+6+8}{13}=\frac{28}{13}=2^2/_{13}$).

171. Каб скласьці дробязі з рознымі назоўнікамі, трэба спачатку іх прывясьці да аднаго назоўніка, потым рабіць па правілу складаньня дробязяў з аднолькавымі назоўнікамі ($\frac{5}{6}+\frac{9}{14}+\frac{4}{7}=\frac{35+27+24}{42}=\frac{86}{42}=2^1/_{21}$).

172. Каб скласьці мяшаныя лікі, трэба спачатку складаваць дробязі, а потым цэлыя лікі: ($2\frac{3}{4}+5\frac{5}{12}+6\frac{3}{8}$; $\frac{3}{4}+\frac{5}{12}+\frac{3}{8}=\frac{37}{24}=1\frac{13}{24}$; $2+5+6=13$; $13+1\frac{13}{24}=14\frac{13}{24}$).

Адыманьне дробязяў.

173. Пры адыманьні дробязяў могуць быць два выпадкі: 1) адыманьне дробязяў з аднолькавымі назоўнікамі і 2) адыманьне дробязяў з рознымі назоўнікамі.

174. Каб зрабіць адыманьне дробязяў з аднолькавымі назоўнікамі, трэба ад лічніка зьмяншанае дробязі адняць лічнік адыманае дробязі і пад дастанаю астачаю падпісаць супольны назоўнік ($^7/_{12}-{}^5/_{12}={}^2/_{12}={}^1/_6$).

175. Каб зрабіць адыманьне дробязяў з рознымі назоўнікамі, трэба спачатку дробязі прывесьці да аднаго назоўніка і потым рабіць па правілу адыманьня дробязяў з аднолькавымі назоўнікамі ($\frac{23}{30}-\frac{5}{9}=\frac{69-50}{90}=\frac{19}{90}$).

176. Каб зрабіць адыманьне мяшаных лікаў, трэба спачатку адняць дробязі, а потым цэлыя лікі. Калі-ж, прывёўшы дробязі да аднаго назоўніка, знаходзяць, што лічнік адыманае дробязі большы за лічнік зьмяншанае, дык трэба пазычыць адзінку ў цэлага зьмяншанага ліку і, зьвярнуўшы

яе ў тыя долі, каторыя дадзены для адыманьня, дадаць да зьмяншанае дробязі. Гэта-ж сама трэба рабіць і пры адыманьні дробязі ад цэлага ліку ($7\frac{5}{6} - 2\frac{3}{4} = 5\frac{10-9}{12} = 5\frac{1}{12}$; $7 - 3\frac{2}{5} = 6\frac{5}{5} - 3\frac{2}{3} = 3\frac{3}{5}$; $8\frac{3}{4} - 5\frac{5}{6} = 7\frac{7}{4} - 5\frac{5}{6} = 2\frac{21-10}{12} = 2\frac{11}{12}$).

Множаньне дробязяў.

177. Пры множаньні дробязяў могуць быць тры выпадкі 1) множаньне дробязі на цэлы лік — 2) множаньне цэлага ліку на дробязь і 3) множаньне дробязі на дробязь.

Памножыць дробязь на цэлы лік значыць—паўтарыць множаны складанкай столькі разоў, колькі адзінак у множніку.

Памножыць цэлы лік або дробязны лік на дробязь значыць—знайсьці гэту дробязь множанага.

Напрыклад: $^5/_7 . 3$ азначае $^5/_7 + {^5/_7} + {^5/_7}$, а гэта азначае $^5/_7$ 3-х адзінак або адну сёмую 3-х, паўтораную складанкай 5 разоў.

Множаньне дробязі на цэлы лік. Няхай патрэбна памножыць $^5/_6$ на 3. Гэта значыць—паўтарыць $^5/_6$ складанкай 3 разы, іначай гаворучы, павялічыць $^5/_6$ у тры разы, а каб павялічыць дробязь у тры разы, трэба або лічнік яе павялічыць або назоўнік паменшыць у тры разы. А таму: $\frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{5.3}{6} = \frac{15}{6} = 2^1/_2$; або: $\frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{5}{6:3} = \frac{5}{2} = 2^1/_2$.

Адсюль:

178. Каб памножыць дробязь на цэлы лік, трэба або лічнік памножыць або назоўнік разьдзяліць на гэты цэлы лік.

Множаньне цэлага ліку на дробязь. Дадзена памножыць 4 на $^2/_3$. Гэта значыць—знайсьці $^2/_3$ чатырох адзінак.

Дзеля таго, што $^2/_3$ ліку $4 = {^4/_3}$,
дык $^2/_3$ ліку $4 = \frac{4.2}{3}$.

А таму: $4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4.2}{3} = 2^2/_3$. Адсюль:

179. Каб памножыць цэлы лік на дробязь, трэба цэлы лік памножыць на лічнік і дастанае множыва разьдзяліць на назоўнік.

Множаньне дробязі на дробязь. Няхай патрэбна памножыць $^3/_4$ на $^5/_7$. Гэта значыць—знайсьці $^5/_7$ ліку $^3/_4$.

Дзеля таго, што $\frac{1}{7}$ ліку $\frac{3}{4} = \frac{3}{4.7}$,

Дык $\frac{5}{7}$ ліку $\frac{3}{4} = \frac{3.5}{4.7}$,

А таму: $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3.5}{4.7} = \frac{15}{28}$. Адсюль:

180. Каб памножыць дробязь на дробязь, трэба множыва іх лічнікаў разьдзяліць на множыва іх назоўнікаў.

181. Калі ў ліку сумножнікаў ёсьць мяшаныя лікі, дык спачатку іх ператвараюць у няправедныя дробязі і потым робяць па вышэйшым правілам. $\left(3^4/_5 . 5^2/_3 = \frac{19}{5} \cdot \frac{17}{3} = \frac{323}{15} = 21^8/_{15}\right)$.

Увага. З вышэйшага вытлумачэньня множаньня на дробязь відаць, што знаходжаньне частак дадзенага цэлага можа быць зроблена пры падмозе множаньня на дробязь.

182. Пры множаньні можна скарачаць цэлы множнік з назоўнікам дробязнага множніка і лічнік аднаго множніка з назоўнікам другога.

Ад множаньня лік павялічваецца толькі тагды, калі мы яго памнажаем на цэлы лік або на няправедную дробязь; ад множаньня-ж на праведную дробязь лік памяншаецца $(12.3 = 36;\ 12.^3/_2 = 18;\ 12.^2/_3 = 8)$.

Множыва некалькіх дробязяў. Калі дадзена перамножыць некалькі дробязяў, трэба множыва іх лічнікаў разьдзяліць на множыва іх назоўнікаў. Калі ў ліку сумножнікаў ёсьць мяшаныя лікі, іх спачатку зьменьваюць у няправедныя дробязі: $\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} = \frac{3.5.7}{4.6.8} = \frac{105}{192} = \frac{35}{64};\ 2\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot 4\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{2} \cdot 3 = \frac{8.2.9.3}{3.5.2} = \frac{144}{5} = 28\frac{4}{5}\right)$.

Дзяленьне дробязяў.

183. Пры дзяленьні дробязяў, як і пры множаньні, могуць быць тры выпадкі: 1) дзяленьне дробязі на цэлы лік, 2) дзяленьне цэлага ліку на дробязь і 3) дзяленьне дробязі на дробязь.

Разьдзяліць які-небудзь лік на цэлы або дробязны лік значыць— па дадзенаму множыву (дзельнаму) і аднаму з сумножнікаў (дзель-

Напрыклад: $3 : {}^4/_5$ значыць— знайсьці такі лів, каторы, памножавы на ${}^4/_5$, зложыць 3; або: знайсьці лік, на каторы трэба памножыць ${}^4/_5$, каб ядтрымаць 3.

Дзяленьне дробязі на цэлы лік. Няхай дадзена разьдзяліць ${}^6/_7$ на 3. Гэта значыць—знайсьці лік, каторы, памножаны на 3, зложыць ${}^6/_7$, г. е. шуканая дзель, павялічаная ў тры разы, складвае ${}^6/_7$. Значыцца, каб знайсьці яе, трэба ${}^6/_7$ памножыць у тры разы, а каб паменшыць, дробязь у тры разы, трэба або лічнік яе паменшыць, або назоўнік павялічыць у тры разы.

А таму: $\frac{6}{7} : 3 = \frac{6:3}{7} = \frac{2}{7}$ або $\frac{6}{7} : 3 = \frac{6}{7.3} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$. Адсюль:

184. Каб разьдзяліць дробязь на цэлы лік, трэба або лічнік разьдзяліць, або назоўнік памножыць на гэты цэлы лік.

Дзяленьне цэлага ліку на дробязь. Няхай патрэбна разьдзяліць 5 на ${}^3/_4$. Гэта значыць—знайсьці лік, каторы, будучы памножаны на ${}^3/_4$, зложыць 5. Дзеля таго, што памножыць дзель на ${}^3/_4$ значыць— знайсьці ${}^3/_4$ дзелі, дык:

$$\frac{3}{4} \text{ шуканае дзелі} = 5;$$
$$\frac{1}{4} \text{ шуканае дзелі} = \frac{5}{3};$$
$$\text{а } \frac{4}{4} \text{ шуканае дзелі} = \frac{5.4}{3}$$

А таму: $5 : {}^3/_4 = \frac{5.4}{3} = \frac{20}{3} = 6\,{}^2/_3$. Адсюль:

185. Каб разьдзяліць цэлы лік на дробязь, трэба цэлы лік памножыць на назоўнік і дастанае множыва разьдзяліць на лічнік.

Дзяленьне дробязі на дробязь. Няхай патрэбна разьдзяліць ${}^3/_4$ на ${}^5/_7$. Гэта значыць—знайсьці лік, каторы, памножаны на ${}^5/_7$, дае ${}^3/_4$. Дзеля таго, што памножыць дзель на ${}^5/_7$ значыць—знайсьці ${}^5/_7$ дзелі, дык:

$$\frac{5}{7} \text{ шуканае дзелі} = \frac{3}{4};$$
$$\frac{1}{7} \text{ шуканае дзелі} = \frac{3}{4.5};$$
$$\frac{7}{7} \text{ шуканае дзелі} = \frac{3.7}{4.5}$$

Дзеля таго: $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3.7}{4.5} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$. Адсюль:

186. Каб разьдзяліць дробязь на дробязь, трэба лічнік дзельнае дробязі памножыць на назоўнік дзельніка, лічнік дзельніка на назоўнік дзельнага і першае множыва разьдзяліць на другое.

187. Калі пры дзяленьні адзін з дадзеных (або абодва) лікаў ёсьць лік мяшаны, дык спачатку трэба мяшаны лік зьмяніць у няправедную дробязь і потым рабіць дзяленьне на вышэйшых правілах.

Увага. З вышэйшага тлумачэньня дзяленьня выходзяць, што знаходжаньне ўсяго ліку па дадзеным часткам можа быць зроблена спосабам дзяленьня на дадзеную дробязь.

188. Пры дзяленьні можна скарачаць цэлы лік з лічнікам і лічніка з лічнікам, назоўнік з назоўнікам.

Ад дзяленьня лік памяншаецца толькі тагды, калі мы яго дзелім на цэлы лік, або на няправедную дробязь; ад дзяленьня на праведную дробязь, лік павялічваецца ($12:3=4$; $12:{}^3/_2=8$; $12:{}^2/_3=18$).

Дзяленьне ўжываецца пры разьвязваньні такіх задач, калі адзін з дадзеных лікаў можна разглядваць, як множыва, а другі—як множнік або множаны.

Напр.:

Задача 1. *Колькі аршынаў аксаміту можна купіць за $46^3/_4$ руб., калі адзін аршын яго каштуе $5^1/_2$ руб.?*

Для разьвязваньня задачы трэба даведацца, колькі разоў $5^1/_2$ трэба паўтарыць складанкай, або: якую дробязь трэба ўзяць ад $5^1/_2$, каб адтрымаць $46^3/_4$, г. зн. трэба знайсьці, на які (цэлы або дробязны) лік трэба памножыць $5^1/_2$, каб адтрымаць у множыве $46^3/_4$. У гэтай задачы дадзена множыва ($46^3/_4$) і множаны ($5^1/_2$), а патрэбна знайсьці *множнік*, што робіцца пры падмозе дзяленьня:

$$46^3/_4 : 5^1/_2 = \frac{187}{4} : \frac{11}{2} = \frac{17}{2}.$$

Дзель паказвае, што калі $^1/_2$ часткі $5^1/_2$ руб. паўтарыць складанкай 17 разоў, дык дастанецца $46^3/_4$. Дзеля таго, што на $^1/_2$ часткі $5^1/_2$ р. можна купіць $^1/_2$ арш., дык на 17 такіх доляў—$^{17}/_2$, г. зн. $8^1/_2$ арш.

Задача 2. *За $6^1/_3$ хунта тытуню заплачана $21^8/_{15}$ руб. Колькі каштуе адзін хунт?*

Раней мы $6^1/_3$ ператвараем у няправедную дробязь і знаходзім $^{19}/_3$, потым разважаем:

Для разьвязваньня задачы, трэба знайсьці лік, каторага $^{19}/_3$, складваюць $21^8/_{15}$, г. зн. такі лік, каторы, будучы памножаны на $^{19}/_3$, злажыць $21^8/_{15}$. У гэтай задачы дадзена множыва $[21^8/_{15}]$ і множнік $[^{19}/_3]$, а патрэбна знайсьці *множаны*, каторы знаходзіцца дзяленьнем:

$$21\frac{8}{15} : 6\frac{1}{3} = \frac{323}{15} : \frac{19}{3} = \frac{323.3}{19.15} = \frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}.$$

Хунт тытуню каштуе $3^2/_5$ руб. $=$ 3 руб. 40 кап.

Задача 3. *Колькі аршынаў шоўку можна купіць на 2 руб. калі адзін аршын каштуе $3^3/_4$ руб.?*

Як відаць, на 2 рублі можна купіць толькі частку аршына кошам у $3^3/_4$ руб. Каб даведацца, якую частку, патрэбна знайсьці, на якую дробязь трэба памножыць $3^3/_4$ каб адтрымаць 2. У гэтае задачы дадзены множыва [2] і множаны $[3^3/_4]$, а трэба знайсьці *множнік*.

$$2 : 3\frac{3}{4} = 2 : \frac{15}{4} = \frac{8}{15}.$$

Дзель паказвае, што $^8/_{15}$ ліку $3^3/_4$ складваюць 2, г. зн. на 2 рублі можна купіць $^8/_{15}$ аршына шоўку коштам у $3^3/_4$ рубля арш.

Задача 4 *За $^5/_8$ хунта гарбаты заплачана 3 руб.: Колькі каштуе 1 хун?*

Для разьвязваньня задачы трэба знайсьці лік, $^5/_8$ каторага складваюць 3, г. зн., лік, каторы трэба памножыць $^5/_8$, каб адтрымаць 3. У гэтай задачы дадзены множыва [3] і множнік $[^5/_8]$, а знаходзіцца *множаны*.

$$3 : {}^5/_8 = \frac{3.8}{5} = \frac{24}{5} = 4^4/_5.$$

Хунт гарбаты каштуе $4^4/_5$ руб. $=$ 4 руб. 80 кап.

Дзеяньні з дробязнымі іменнымі лікамі.

Драбленьне дробязных іменных лікаў робіцца, падобна цэлым лікам, спосабам множаньня на адзінкавыя адносіны.

1) $^4/_7$ *вярсты драбіць у вяршкі.*

Разважаем: 1 вярста мае 500 саж.; значыцца, $^4/_7$ вярсты маюць $^4/_7$ частак 500 саж. або $500 . ^4/_7 = ^{2000}/_7$ саж.

1 саж. мае 3 арш.; значыцца $^{2000}/_7$ саж. маюць $^{2000}/_7$ частак 3 аршын або $3 . ^{2000}/_7 = ^{6000}/_7$ арш.

1 арш. мае 16 вяршк.; значыцца, $^{6000}/_7$ аршына маюць $^{6000}/_7$ частак 16 вярш. або $16 . ^{6000}/_7 = ^{96000}/_7$ вярш. $= 13714^2/_7$ вярш.

2) $2^3/_5$ *пуда* $^3/_4$ *хун.* $1^5/_8$ *лота драбіць у лоты.*

Разважаючы па вышэйшаму, вылічваем: 40 х. $. 2^3/_5 = 104$ хунты; 104 хунт. $+ ^3/_4$ х. $= 104^3/_4$ хунт.; 32 лот. $. 104^3/_4 = 3352$ лот. $+ 1^5/_8$ л. $= 3353^5/_8$ лота.

3) $^8/_{11}$ *пары выразіць многаіменным лікам.*

$^8/_{11}$ пары дробім у гадзіны: $24 . ^8/_{11} = ^{192}/_{11} = 17^5/_{11}$ гадзіны. Пакідаючы 17 гадз. у боку, дробім $^5/_{11}$ гадзіны ў часіны; $60 . ^5/_{11} = ^{300}/_{11}$ часіны $= 27^3/_{11}$ часіны. Пакідаючы 27 часін у боку, дробім $^3/_{11}$ часіны ў сэкунды: $60 \times ^3/_{11} = ^{180}/_{11} = 16^4/_{11}$ сэк.

Значыцца, $^8/_{11}$ пар. $= 17$ гадз. 27 часін. $16^4/_{11}$ сэк.

Збуйненьне дробязных іменных лікаў робіцца, падобна цэлым лікам, спосабам дзяленьня на адзінкавыя адносіны.

Прыклады:

1) *Зьвярнуць,* $^4/_5$ *аркуша ў рэзы.*

Зьвернем раней аркушы ў лібры, г. зн. даведаемся, якую частку лібры, або 24 аркушаў, складваюць $^4/_5$ аркуша. Для гэтага трэба разьдзяліць $^4/_5$ на 24 і адтрымаць $^4/_5 : 24 = ^1/_{30}$ (лібры). Потым даведаемся, якую частку рэзы, або 20 лібраў, складвае $30 = ^1/_{30}$ лібры. Для гэтага мы $^1/_{30}$ дзелім на $20 : ^1/_{30} : 20 = ^1/_{600}$ (рэзы).

2) *22 хун. 20 лот.* $1^1/_3$ *зал. зьвярнуць у пуды.*

Разважаючы па вышэйшаму, вылічваем: $1^1/_3 : 3 = ^4/_9$ лот., $^4/_9$ лот. $+ 20$ лот. $= 20^4/_9$ лот.; $20^4/_9 : 32 = ^{23}/_{36}$ хун.; $^{23}/_{36}$ хун. $+ 22$ хунт. $= 22^{23}/_{36}$ хун.; $22^{23}/_{36}$ х. $: 40 = ^{163}/_{288}$ пуд.

Чатыры аснаўныя дзеяньні з дробязнымі іменнымі лікамі робяцца двуякім парадкам: або дадзеныя лікі прыводзяцца ў адно найменьне і робяць з імі як з бязыменнымі дробязямі, або дадзеныя лікі звара-чваюць у многаіменныя і робяць з імі, як з цэлымі іменнымі лікамі.

Напрыклад:

1) *Складаць*: $13^{6}/_{25}$ гадз. $+ 17^{5}/_{8}$ гадз. $+ 1^{37}/_{50}$ пар. $+ 2$ г. $1^{1}/_{4}$ час.

Выразім складанкі многаіменнымі лікамі:

$13^{6}/_{25}$ гадз. $= 13$ гадз. $14^{2}/_{5}$ часіны.
$17^{5}/_{8}$ гадз. $= 17$ гадз. $37^{1}/_{2}$ часіны.
$1^{37}/_{50}$ пар. $= 1$ пар. 17 гадз. $45^{3}/_{5}$ часіны.
2 гадз. $1^{1}/_{4}$ часіны $= 2$ гадз. $1^{1}/_{4}$ часіны.

Маем: 3 пар. 2 гадз. $38^{3}/_{4}$ часіны.

2) *Адняць 1 пуд. $33^{1}/_{2}$ хун. ад $10^{1}/_{8}$ пуд.*

Выразім зьменшаны і адыманы многаіменнымі лікамі:

$10^{1}/_{8}$ пуд. $= 10$ пуд. 5 хунт. 0 лот.
1 пуд. $33^{1}/_{2}$ ф. $= 1$ пуд. 33 хунт. 16 лот.

Маем: 8 пуд. 11 хунт. 16 лот.

3) *Памножыць 4 пуды $5^{1}/_{3}$ хун. на $^{8}/_{5}$.*

Гэта множаньне робіцца па правілу множаньня цэлага ліку на дробязі, г. зн. дадзены многаіменны лік трэба раней помножыць на 3 і потым дастанае множыва разьдзяліць на 5.

4 пуд. $5^{1}/_{3}$ хунта
$\times 3$

12 пуд. 16 хунт. | 5
2 пуд. 19 хунт. $6^{2}/_{5}$ лота.

2 пуд. $= 80$ хунт.
$+16$
96 хунт.
1 х. $= 32$ лот.
2 лот.

4) *Разьдзяліць 5 рэзаў $4^5/_6$ лібры на $^4/_5$.*

Каб разьдзяліць дадзены лік на $^4/_5$, трэба яго памножыць на 5 і дастанае множыва разьдзяліць на 4:

5 рэзаў $4^5/_6$ лібр.
$\times$ 5

26 рэз. $4^1/_6$ лібр. | 4
6 рэз. $11^1/_{24}$ лібр.

2 рэз. $=$ 40 лібр.
$+$ $4^1/_6$ лібр.
$44^1/_6$ лібр. $= {}^{265}/_6$

$^{265}/_6 : 4 = {}^{265}/_{24} = 11^1/_{24}$.

Пры дзяленьні іменнага ліку на іменны, трэба дзельны і дзельнік зьвярнуць у меры аднаго найменьня і пасьля пачынаць рабіць дзеяньні па вышэйшых правілах.

Дзесяцёрныя дробязі.

Абазначваньне і чытаньне дзесяцёрных дробязяў.

189. *Дзесяцёрнаю дробязьзю* называецца такая, у каторай назоўнікам служыць 10,100,1000,... і, наагул, толькі лік, абазначаны адзінкаю з нулямі.

190. Пяршынство дзесяцёрных дробязяў перад простымі ёсьць у тым, што іх можна напісаць без назоўніка, дзеля гэтага і дзеяньні над імі могуць рабіцца падобна таму, як робяцца над цэлымі лікамі.

191. Каб напісаць якую-небудзь дзесяцёрную дробязь, можна спачатку напісаць яе лічнік, гледзячы, каб у ім было *роўна* столькі лічбін, колькі нулёў павінна быць у падразумеваным назоўніку; калі пры гэтым значных лічбінаў нястача, дык на мейсца іх трэба прыпісаць *з левага* боку нулі; потым *зьлева* ад лічніку паставіць коску і *зьлева* ад яе цэлы лік або нуль, калі цэлага ліку няма.

192. Каб прачытаць дзесяцёрную дробязь, трэба спачатку прачытаць цэлы лік, потым лічнік, дадаць да яго дзесяцёрнае значэньне толькі апошняе лічбіны яго.

Правільныя і няправільныя дзесяцёрныя дробязі. Параўнаньне дзесяцёрных дробязяў паміж сабою.

193. *Правільнаю* (можна казаць таксама *праведнаю*) называецца такая дзесяцёрная дробязь, пры якой няма цэлага ліку (0,5; 0,35...).

194. *Няправільнаю* (можна казаць таксама *няправеднаю*) называецца такая дзесяцёрная дробязь, пры якой ёсьць цэлы лік (1,075; 3,6).

195. З некалькіх дзесяцёрных дробязяў тая большая, ў каторае цэлых адзінак больш; калі-ж цэлых у ва ўсіх дробязях аднолькава, дык трэба глядзець на дзесятыя долі, а калі і дзесятых пароўну, дык на соценныя долі і г. д. (0,21>0,185; 0,354<0,356).

Павялічаньне і паменшаньне дзесяцёрных дробязяў. Скарочаньне і прывядз ньне десяцёрных дробязяў да аднага назоўніка.

196 Каб павялічыць дзесяцёрную дробязь у 10, 100, 1000 і г. д. разоў, трэба перанесьці коску *ўправа* цераз адну, дзьве, тры... і наагул, цераз столькі лічбінаў, колькі нулёў у множніку; калі-ж лічбінаў не хапае, дык трэба, да лічніку *справа* прыпісаць патрэбны лік нулёў і справа ад іх паставіць коску, бо ад пераносу коскі цераз адну, дзьве... лічбінаў значэньне кожнае лічбіны павялічваецца ў 10, 100... разоў.

197. Каб паменшыць дзесяцёрную дробязь у дзесяць, сто, тысячу і г.д. разоў, трэба перанесьці коску *ўлева* цераз адну, дзьве, тры.... і, наагул, цераз столькі лічбінаў, колькі нулёў у дзельніку; калі-ж лічбінаў не хапае, дык трэба да дзельніку зьлева прыпісаць патрэбны лік нулёў і зьлева ад іх паставіць коску, бо ад пераносу коскі ўлева цераз 1,2,3... лічбінаў значэньне кожнае лічбіны паменшаецца ў 10, 100,.... разоў.

198. Калі ў дзесяцёрнае дробязі адкінуць коску, дык яна павялічваецца ў столькі разоў, колькі адзінак (усіх парадкаў) у яе падразумеваным назоўніку.

199. Калі да дзесяцёрнае дробязі прыпісаць *справа* які хочаш лік нулёў, або ад яе адкінуць стаячыя справа нулі, дык вялічыня яе ня зьменіцца, бо з павялічаньнем або з паменшаньнем лічніку ў сколькі-небудзь разоў, павялічваецца або памяншаецца назоўнік у столькі-ж разоў (3, 75=3, 7500).

На гэтай апошняй асаблівасьці дзесяцёрных дробязяў грунтуецца скарочаньне і прывядзеньне іх да аднаго назоўніка.

200. Каб скараціць дзесяцёрную дробязь, якая канчаецца нулямі, трэба гэтыя нулі адкінуць (0,760=0,76).

201. Каб прывесьці дзесяцёрныя дробязі да аднаго назоўніка, трэба да некатарых з іх прыпісаць справа па столькі нулёў, каб лік дзесяцёрных знакаў ува ўсіх дробязях быў роўны.

Складаньне дзесяцёрных дробязяў.

202. Каб скласьці дзесяцёрныя дробязі, трэба іх падпісаць адну пад аднэй так, каб цэлыя былі пад цэлымі, дзесятыя пад дзесятымі, сотыя пад сотымі і г.д., потым складваць, як цэлыя лікі, і ў зьлічве, посьле цэлага, паставіць коску.

Напрыклад:
$$\begin{array}{r} 0{,}367 \\ 5{,}05 \\ 0{,}8 \\ 3{,}3754 \\ \hline 9{,}5924 \end{array}$$

Адыманьне дзесяцёрных дробязяў.

203. Каб адняць дзесяцёрную дробязь ад дзесяцёрнае, трэба спачатку прывесьці іх да аднаго назоўніка, потым адымаць, як цэлыя лікі і ў астачы, пасьля цэлага, паставіць коску.

Прык. $4{,}75 - 0{,}8675 = \begin{array}{r} 4{,}7500 \\ -0{,}8675 \\ \hline 3{,}8825 \end{array}$ $\quad 9 - 0{,}565 = \begin{array}{r} 9{,}000 \\ -0{,}565 \\ \hline 8{,}435 \end{array}$

Множаньне дзесяцёрных дробязяў.

204. Каб памножыць дзесяцёрную дробязь на дзесяцёрную, трэба, не зьвяртаючы ўвагі на коскі, множыць іх, як цэлыя лікі, і ў множыве аддзяліць коскаю *справа* столькі лічбінаў, колькі іх было ў *абодвух лічніках разам*.

Напрыклад:
$$\begin{array}{r} 2{,}55 \\ \times\ 0{,}7 \\ \hline 1{,}785 \end{array}$$

Адкінуўшы коскі, множаны павялічваем у 100 разоў, а множнік у 10 разоў, адчаго множыва павялічваецца ў $100 \times 10 = 1000$ разоў. Каб адтрымаць шуканае множыва, трэба 1785 паменшыць у 1000 разоў, г. зн. аддзяліць у ім 3 дзесяцёрныя знакі.

Дзяленьне дзесяцёрных дробязяў.

205. Пры дзяленьні дзесяцёрных дробязяў бываюць два выпадкі: 1) калі дзельнік—лік цэлы і 2) калі дзельнік—дзесяцёрная дробязь.

206. Каб разьдзяліць дзесяцёрную дробязь на цэлы лік, трэба разьдзяліць спачатку цэлы лік, паставіць у дзелі коску і потым паступова дзяліць дзесятыя, сотыя, тысячныя долі і г. д. Калі пры дзяленьні дастанецца астача, дык яе зварочваюць у дзесятыя долі, прыпісаўшы да яе справа нуль, і робяць дзяленьне; з новымі астачамі (калі гэтыя дастануцца) робяць гэтак-жа сама, г. зн. зварочваюць у сотыя, тысячныя і г. д. да таго часу, пакуль зусім не дастанецца астачы, або пакуль ня будзе ясна, што дзяленьне ня можа скончыцца без астачы.

Калі ў дзельным, замест цэлага, знаходзіцца нуль, або калі дзельны меншы за дзельнік, дык у дзелі замест цэлага, трэба паставіць нуль, а з дзельным рабіць, як з астачаю, па вышэйшаму.

Прыклады:

$$\begin{array}{l|l} 57{,}65 & 8 \\ \hline \underline{16} & 7{,}20625 \\ \quad\underline{50} & \\ \qquad\underline{20} & \\ \qquad\;\underline{40} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 0{,}3 & 4 \\ \hline \underline{30} & 0{,}075 \\ \quad\underline{20} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

Калі дзяленьне дзесяцёрных дробязяў ня можа кончыцца без астачы, дык у дзелі можна застанавіцца на якім—небудзь парадку, а астатнія лічбіны адкінуць і, такім чынам, дастанецца прыблізная дзель; але калі першая з адкідваемых лічбінаў будзе абазначана шасьцёркаю, сямёркаю, васьмёркаю або дзевяткаю, дык папярэднюю трэба павялічыць на адзінку, каб памылка была меней значная.

Трэба заўважыць, што прыблізныя дзелі заўсёды пунктуальны да $^1/_2$ дзесяцёрнае долі таго парадку, якім яны канчаюцца.

207. Каб разьдзяліць цэлы лік на дзесяцёрную дробязь або дзесяцёрную дробязь на дзесяцёрную, трэба адкінуць у дзельніку коску і павялічыць дзельны ў столькі разоў, у колькі павялічыўся дзельнік, і затым рабіць па правілу дзяленьня на цэлы лік.

Напрыклад: $35{,}48 : 0{,}24 = 3548 : 24$; $0{,}375 : 0{,}25 = 37{,}5 : 25$; $0{,}54 : 0{,}0032 = 5400 : 32$ і г. д.

Пераробка звычайных дробязяў у дзесяцёрныя.

Дзесяцёрныя дробязі ў дзелі дастаюцца ня толькі пры дзяленьні дзесяцёрных дробязяў, але і пры дзяленьні цэлых лікаў. Так, калі пры дзяленьні аднаго цэлага ліку на другі дастаецца астача, то гэтая астача зварочваецца ў дзесятыя долі і дзеліцца на дзельнік, адчаго ў дзелі дастаюцца дзесятыя долі. Гэтак—жа сама робяць з новаю астачаю, выражанаю ў дзесятых долях і г. д. Усякая звычайная праведная або няправедная дробязь можа быць выражана ў дзесяцёрных долях, калі мы разьдзелім лічнік на назоўнік па вышэйшаму правілу, дзеля таго, што ўсякая дробязь можа быць разгледжана, як дзель, якая дастаецца ад разьдзяленьня лічніка на назоўнік.

208. Каб перарабіць звычайную дробязь у дзесяцёрную, трэба лічнік разьдзяліць на назоўнік, а калі ён ня дзеліцца, дык ў дзелі, замест цэлага, паставіць нуль і справа ад яго коску, а лічнік зьвярнуць у дзесятыя долі, памножаўшы яго на 10, і разьдзяліць на назоўнік, астачу ізноў памножыць на 10 і г. д. ($^{17}/_{25}=17 : 25=0,68$; $^{3}/_{4}=3 : 4=0,75$; $^{6}/_{7}=6 : 7=0,85714..$).

Для спрошчаньня вылічэньня, трэба, раней зварочваньня звычайнае дробязі ў дзесяцёрную, дадзеную звычайную дробязь скараціць, калі гэта можна.

Дзесяцёрныя дробязі скончаныя (з канцом) і безканечныя (без канца)

Дзесяцёрныя дробязі бываюць скончаныя і безканечныя.

209. **Дробязьзю скончанаю** наз. такая дзесяцёрная дробязь, каторая абазначана вядомымі лікамі лічбінаў і вялічыня яе *вядомая (зусім вызначаная).*

210. **Дробязьзю безканечнай** наз. такая дзесяцёрная дробязь, каторая абазначана нявызначаным лікам лічбінаў і вялічыня яе *ня зусім абмяжованая (ня зусім вызначаная).*

Каб паказаць, што дадзеная дробязь безканечная, ставяць посьле некалькіх яе лічбінаў пункты [....]. Безканечныя дзесяцёрныя дробязі бываюць пэрыодычныя і непэрыодычныя.

211. **Пэрыодычнаю** наз. такая безканцовая дзесяцёрная дробязь, у каторай адны і тыя—ж самыя лічбіны паўтараюцца ў адным і тым—жа парадку (0,333...; 2,5454...).

212. **Непэрыодычнаю** наз. такая безканцовая дзесяцёрная дробязь, каторая абазначана нявызначаным лікам лічбінаў, напісаных бяз усякага парадку (0,7531...).

213. Пэрыодам наз. група лічбінаў, якія паўтараюцца ў адным і тым самым парадку безканцовы лік разоў.

Усякая безканцовая дробязь, якая дастаецца ад зьвярненьня звычайнае дробязі, абавязкова будзе пэрыодычнаю, бо, робячы дзяленьне, мы абавязкова адтрымаем адну з ранейшых астачаў, а значыць, і лічбіны дзелі пачнуць паўтарацца і ствараць пэрыод.

Каб даведацца, ў якую дзесяцёрную дробязь зьвернецца дадзеная нескарачальная звычайная, трэба назоўнік раскласьці на прапачатковыя множнікі. Калі ў склад назоўніка ўходзяць толькі множнікі 2 або 5, або абодва разам, дык дадзеная дробязь зьвернецца ў дзесяцёрную з канцом. Калі—ж ў склад назоўніка 2 або 5 *зусім не ўваходзяць*, або, калі, апроч 2 і 5, ўваходзяць і другія прапачатковыя множнікі, дык дадзеная звычайная дробязь зьвернецца ў дзесяцёрную без канца.

Чыстыя і мяшаныя пэрыодычныя дробязі.

Пэрыодычныя дробязі бываюць *чыстыя і мяшаныя.*

214. **Чыстымі** наз. пэрыодычныя дробязі, ў которых пэрыод пачынаецца з першае лічбіны посьле коскі (0,8181...).

215. **Мяшанымі** наз. пэрыодычныя дробязі, ў каторых пэрыод пачынаецца ня з першае лічбіны посьле коскі (0,12323 ..).

Каб даведацца, ў якую пэрыодычную дробязь зьвернецца дадзёная нескарачальная звычайная, трэба назоўнік раскласьці на прапачатковыя множнікі. Калі ў склад назоўніка множнікі 2 і 5 *зусім ня ўваходзяць*, дык дадзеная дробязь зьвернецца ў пэрыодычную чыстую. Калі—ж у склад назоўніка нескарачальнае дробязі ўваходзяць 2 або 5 разам з другімі прапачатковымі множнікамі, дык дадзеная звычайная дробязь зьвернецца ў пэрыодычную мяшаную, і да пэрыода будзе столькі лічбінаў, колькі разоў уваходзіць множнікам 2 або 5, гледзючы на тое, які з іх уваходзіць больш.

Пераробка (зварочваньне) дзесяцёрных дробязяў у звычайныя.

216 Каб зьвярнуць скончаную дзесяцёрную дробязь у звычайную, трэба толькі пад лічнікам падпісаць яе падразумеваны назоўнік і потым дастаную дробязь, калі можна, скараціць ($0{,}5=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$; $2{,}75=2\frac{75}{100}=2\frac{3}{4}$).

217. Каб чыстую пэрыодычную дробязь зьвярнуць у звычайную, трэба напісаць такую дробязь, у каторае лічнікам будзе пэрыод, а назоўнікам—лічбіна 9, напісаная столькі разоў падрад, колькі лічбінаў ў адным пэрыодзе, і потым дастаную звычайную дробязь, калі можна, скараціць.

Довад. Заўважым раней, што, зьвярнуўшы дробязі: $^1/_9$, $^1/_{99}$, $^1/_{999}$, $^1/_{9999}$, у дзесяцёрныя, знойдзем:

$^1/_9=0,111...$ і наадварот: $0,\ [1]=^1/_9$
$^1/_{99}=0,010101...$ » $0,\ [01]=^1/_{99}$
$^1/_{999}=0,001001001...$ » $0,\ [001]=^1/_{999}$
$^1/_{9999}=0,000100010001...$ » $0,\ [0001]=^1/_{9999}$.

Значыць усякая пэрыодычная дробязь, пэрыод каторае ёсьць адзінка (0,1) або адзінка з папярэднімі нулямі (0,001), роўна такой звычайнай дробязі, лічнікам каторае ёсьць адзінка, а пазоўнікам—столькі дзевятак разам, колькі лічбінаў у пэрыодзе дадзенае дробязі.

Цяпер няхай, напр., патрэбна зьвярнуць 0,5454... у звычайную дробязь. Разьдзелім яе на пэрыод [54]:

$0,5454...: 54=0,0101..,$ што$=^1/_{99}$.

Але 0,5454... [дзельны] роўны 54 [дзельніку], памножанаму на 0,0101...[дзель], знаходзім: $0,5454...=54.0,0101...=54.^1/_{99}=^{54}/_{99}=^6/_{11}$.

218. Каб мяшаную пэрыодычную дробязь зьвярнуць у звычайную, трэба спачатку перанясьці коску да першага пэрыода, потым дастаную чыстую пэрыодычную дробязь зьвярнуць у звычайную. па вышэйшаму правілу, і пасьля дастаны лік паменшыць у столькі разоў, у колькі цадзеная мяшаная дробязь павялічана пераносам коскі.

Няхай, напр., патрэбна 0,31818... зьвярнуць у звычайную дробязь.

Перанясём коску да пачатку першага пэрыода, тагды адтрымаем чыстую пэрыодычную дробязь 3, [18], каторая, па ранейшаму, роўна $3^{18}/_{99}$. Але пераносам коскі да пэрыода мы павялічым значэньне кожнае лічбіны ў 10 разоў; значыцца, дробязь $3^{18}/_{99}$ трэба паменшыць у 10 разоў.

Такім чынам, $0,31818..=3,\ [18] : 10=^{18}/_{99} : 10=^7/_{22}$.

Гэта вылічаньне можна прэдставіць яшчэ:

$$0,3\ [18]=3,\ [18]\ :\ 10=3^{18}/_{99}\ :\ 10=\frac{3.100-3+18}{990}=\frac{318-3}{990}=\frac{7}{22}.$$

Адсюль выводзіцца яшчэ наступнае правіла зварочваньня мяшаных пэрыодычных дробязяў у звычайныя: трэба ад ліку, які стаіць ад коскі да другога пэрыода, адняць лік, які стаіць да першага пэрыода, дастаная розьніца і будзе лічнікам, а назоўнікам будзе лічбіна 9, напісаная столькі разоў падрад, колькі лічбінаў у пэрыодзе, і з гэтулькімі нулямі, колькі лічбінаў да пэрыода.

Зусім зразумела, што непэрыодычная дробязь без канца ня можа быць зьвернута ў звычайную.

АДНОСІНЫ І ПРАПОРЦЫІ.

Адносіны.

219. **Адносінамі** наз. рэзультат, дастаны ад параўнаньня двох аднаіменных лікаў.

Лікі можна раўняць двояка: або способам адыманьня (каб даведацца, на колькі адзінак адзін лік большы за другі), або способам дзяленьня (каб даведацца, ў колькі разоў адзін лік большы за другі), а таму адносіны разьдзельваюцца на *арытмэтычныя*, або *розьніцавыя*, і на *гэомэтрычныя*, або *разавыя*.

Арытмэтычныя адносіны.

220. **Арытмэтычнымі** або **розьніцавымі адносінамі** наз. арытмэтычнае выражэньне, якое патрабуе шуканьня розьніцы двох лікаў ($13-5$; $7-2\frac{3}{4}:1{,}2-\frac{5}{6}\ldots$).

221. Лікі, паміж каторымі разглядаюцца адносіны, наз. *складамі* (суставамі) яе; зьмяншаны наз. першым або **пярэднім**, адыманы другім або *наступным* складам (суставам), а розьніца паміж гэтымі лікамі — **розьніцаю** адносінаў.

Дзеля таго, што пярэдні склад арытмэтычных адносін ёсьць зьмяншаны, а наступны — адыманы, дык залежнасьць паміж складамі і розьніцаю адносінаў павінна быць такая-ж, якая ёсьць паміж зьмяншаным, адыманым і розьніцаю. А дзеля таго:

222. Пярэдні склад арытмэтычных адносін роўны наступнаму, складзенаму з розьніцаю адносін ($x-7=5$, адкуль: $x=7+5=12$).

223. Наступны склад арытмэтычных адносін роўны пярэдняму бяз розьніцы адносін ($13-x=7$, адкуль: $x=13-7=6$).

Розьніца адносінаў роўна пярэдняму складу без наступнага.

224. З павялічаньнем пярэдняга склада або з паменшаньнем наступнага якім—небудзь лікам розьніца адносін павялічваецца.

225. З паменшаньнем пярэдняга або з павялічаньнем наступнага склада якім—небудзь лікам розьніца адносін памяншаецца.

226. З адначасным павялічаньнем або паменшаньнем пярэдняга і наступнага складоў аднолькавым лікам розьніца адносін ня зьменьваецца.

Гэомэтрычныя адносіны.

227. **Гэомэтрычнымі** або **разавымі** адносінамі наз. арытмэтычнае выражэньне, якое патрабуе даведацца, ў колькі разоў адзін лік большы, або меншы за другі ($20 : 5$; $^3/_4 : {}^5/_6$; $1 : 2{,}5$...).

228. Лікі, паміж каторымі разглядваюцца адносіны, наз. *складамі* іх; дзельны наз. *пярэднім*, дзельнік—*наступным* складам, а дзель—*назоўнікам* (або *зьместам* адносін).

Дзеля таго, што пярэдні склад гэомэтрычных адносін ёсьць дзельны, а наступны—дзельнік, дык залежнасьць паміж складамі і назоўнікам (зьместам) адносін павінна быць такая-ж, якая ёсьць паміж дзельным, дзельнікам і дзельлю. А дзеля таго:

229. Пярэдні склад гэомэтрычных адносін роўны наступнаму, памножанаму на назоўнік (зьмест) адносін ($x : 7 = 9$, адкуль $x = 7 \cdot 9 = 63$).

230. Наступны склад гэомэтрычных адносін роўны пярэдняму, падзеленаму на назоўнік (зьмест) адносін ($63 : x = 9$; $x = 63 : 9 = 7$).

Назоўнік (зьмест) адносін роўны пярэдняму складу, падзеленаму на наступны.

231. З павялічаньнем пярэдняга або з паменшаньнем наступнага склада гэомэтрычных адносін у колькі-небудзь разоў, назоўнік (зьмест) адносін павялічваецца ў столькі-ж разоў.

232 З паменшаньнем пярэдняга або з павялічаньнем наступнага склада гэомэтрычных адносін у колькі-небудзь разоў, назоўнік (зьмест) адносін памяншаецца ў столькі-ж разоў.

233. З адначасным павялічаньнем або паменшаньнем пярэдняга й наступнага складоў у аднолькавы лік разоў, назоўнік (зьмест) адносін ня зьменьваецца.

На асаблівасьці назоўніка (зьместа) адносін ня зьменьваць свае вялічыні ад адначаснага паменшаньня пярэдняга й наступнага складоў у аднолькавы лік разоў аснована скарочаньне гэомэтрычных адносін.

234. Каб скараціць гэомэтрычныя адносіны, трэба абодва іх склады разьдзяліць на адзін і той-жа лік

$(\overset{6}{\smile}\!\!30 : \overset{6}{\smile}\!\!18 = 5 : 3)$.

На асаблівасьці назоўніка адносін ня зьменьваць свае вялічыні
ад адначаснага павялічаньня пярэдняга й наступнага складоў у адноль-
кавы лік разоў аснована замена адносін дробязных або мяшаных
лікаў адносінамі цэлых лікаў.

235. Каб замяніць адносіны мяшаных лікаў адносінамі
цэлых лікаў, трэба спачатку мяшаныя лікі зьвярнуць у дро-
бязі, потым дробязі прывесьці да аднаго назоўніка і гэты
назоўнік адкінуць: $[3^3/_4 : 2^5/_6 = \frac{15}{4} : \frac{17}{6} = \frac{45}{34} : \frac{34}{12} = 45 : 34]$.

Адносіны дзьвюх дробязяў з роўнымі лічнікамі роўны адваротным
адносінам іх назоўнікаў $[^{15}/_{18} : {}^{15}/_{25} = 25 : 18]$.

236. Двое гэомэтрычных адносін наз. *адваротнымі адны
да другіх*, калі пярэдні склад адных з іх ёсьць наступным
для другіх і наадварот (12 : 4 і 4 : 12, або 3 : 9 і 9 : 3).

Множыва назоўнікаў (зьместаў) двох адваротных паміж сабой
гэомэтрычных адносінаў роўна адзінцы $(^9/_8 \times {}^8/_9 = 1)$.

Прапорцыі.

237. **Прапорцыяй** наз. роўнасьць двох адносін.

238. Прапорцыі дзеляцца на **арытмэтычныя**, або **розьні-
цавыя**, і **гэомэтрычныя**, або **разавыя**.

Арытмэтычная прапорцыя.

239. **Арытмэтычнаю** або **розьніцаваю** прапорцыяй наз. роўнасьць двох арытмэтычных адносін ($8-5=10-7$).

240. Лікі, складаючыя арытмэтычную прапорцыю, наз складамі яе, пярэдні склад першых адносін наступны другіх наз. *канцавымі*, а наступны склад першых і пярэдні другіх — *сярэднімі*.

241. Асноўная асаблівасьць арытмэтычнае прапорцыі ёсьць у тым, што зьлічво канцавых складоў роўны зьлічву яе сярэдніх складоў.

Каб давесьці гэта, возьмем прапорцыю $a-b=c-d$, дзе над літарамі a, b, c, d можна разумець якія хочаш лікі, складаючыя арытмэтычную прапорцыю.

Абазначыўшы розьніцу адносін літараю адтрымаем:

$$a=b+r \text{ [гл. § 222]}.$$
$$d=c-r \text{ [гл. § 223]}.$$

Значыцца, $a+d=b+c+r-r$, або $a+d=b+c$.

242. Невядомы канцавы склад арытмэтычнае прапорцыі роўны зьлічву сярэдніх без вядомага канцавога ($x-5=6-4$, адкуль $x=5+6-4=7$).

243. Невядомы сярэдні склад арытмэтычнае прапорцыі роўны зьлічву канцавых без вядомага сярэдняга ($9-x=12-7$, адкуль $x=9+7-12=4$).

244. Арытмэтычная прапорцыя наз. неперарыўнаю, калі канцывыя або сярэднія склады яе роўныя паміж сабою ($20-13=13-6$; $9-5=13-9$).

245. Невядомы з роўных паміж сабою складоў неперарыўнае арытмэтычнае прапорцыі роўны палавіне зьлічва астатніх двох яе складоў ($24-x=x-6$, адкуль $2x=24+6$, а $x=\frac{24+6}{2}=15$).

Кажны з роўных паміж сабою складоў неперарыўнае арытмэтычнае прапорцыі наз. *сярэднім арытмэтычным*, або *арытмэтычнаю сярэдзінаю* двох другіх складоў.

Сярэднім арытмэтычным або арытмэтычнаю сярэдзінаю некалькіх лікаў наз. дзель, адтрыманая ад дзяленьня зьлічва дадзеных лікаў на лік іх (арытм. сярэдзіна 5, 6, 7, 8, 9 $= \frac{5+6+7+8+9}{5} = 7$).

Гэомэтрычная прапорцыя.

246. *Гэомэтрычнаю прапорцыяю* наз. роўнасьць дзьвёх гэомэтрычных адносін ($6:3=8:4$; $^6/_3={}^8/_4$).

247. Лікі, складаючыя гэомэтрычную прапорцыю, наз. складамі яе; пярэдні склад першых адносін і наступны другіх наз. *канцавымі*, а наступны склад першых і пярэдні другіх — *сярэднімі*.

248. Асноўная асаблівасьць гэомэтрычнае прапорцыі ёсьць у тым, што множыва канцавых роўна множыву сярэдніх яе складоў.

Каб давесьці гэта, возьмем прапорцыю $a:b=c:d$ і напішам яе ў выглядзе дзьвёх роўных дробязяў: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Памножыўшы абедзьве дробязі на множыва іх назоўнікаў, г. зн. на $b \cdot d$, адтрымаем:

$$\frac{a \cdot b \cdot d}{b} = \frac{c \cdot b \cdot d}{d}.$$

Скараціўшы першую дробязь на b, а другую на d, адтрымаем: $a \cdot d = c \cdot b$. З роўнасьці двох множываў, складзеных кожнае з двох множнікаў, можна ўкласьці прапорцыю, у каторай множнікі аднаго множыва будуць яе канцавымі складамі, а множнікі другога множыва — сярэднімі ($3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$, можам укласьці з іх такую прапорцыю: $8:4=6:3$).

Лікі, з каторых можна скласьці гэомэтрычную прапорцыю, наз. *прапарцыянальнымі*.

249. Невядомы канцавы склад гэомэтрычнае прапорцыі роўны множыву сярэдніх, падзеленаму на вядомы канцавы ($x:3=12:2$, адкуль $x=\frac{3 \cdot 12}{2}=18$).

250. Невядомы сярэдні склад гэомэтрычнае прапорцыі роўны множыву канцавых, падзеленаму на вядомы сярэдні ($20:x=12:3$, адкуль $x=\frac{20 \cdot 3}{12}=5$).

251. У кожнай прапорцыі можна пераставіць: 1) канцавыя склады, 2) сярэднія склады і 3) канцавыя і сярэднія. Пераставіўшы потым у кожнай з дастаных 4 прапорцыяў сярэднія на мейсца канцавых і, наадварот, адтрымаем яшчэ 4 прапорцыі. Такім чынам, дзякуючы розным перастаноўкам, гэомэтрычная прапорцыя можа мець восем выглядаў.

Напрыклад:

1) $8:2=12:3$; 2) $3:2=12:8$; 3) $8:12=2:8$; 4) $3:12=2:8$; 5) $2:8=3:12$; 6) $2:3=8:12$; 7) $12:8=3:2$; 8) $12:3=8:2$.

У кожнай гэомэтрычнай прапорцыі можна памножыць або разьдзяліць на адзін і той-жа лік: яе пярэднія і заднія склады, або склады першых адносін, або склады другіх адносін.

На гэтаі асаблівасьцій аснована скарочаньне складоў, а таксама зьнішчэньне дробзяў у гэомэтрычнай прапорцыі.

252. Каб скараціць склады гэометрычнае прапорцыі, трэба кожны канцавы з кожным сярэднім паменшыць у аднолькавы лік разоў.

253. Каб зьнішчыць дробзі ў гэомэтрычнай прапорцыі, складзенай зьмяшаных або дробязных лікаў, трэба мяшаныя лікі зьвярнуць у дробзі, потым дробзі прывесьці да аднаго назоўніка і гэты назоўнік адкінуць ($8:{}^7/_9=10:\frac{35}{36}$; $8:28=10:35$.

254. Гэомэтрычная прапорцыя наз. *неперарыўнаю*, калі абодва сярэднія або абодва канцавыя яе склады роўныя паміж сабою ($16:8=8:4$; $8:4=16:8$).

Невядомы канцавы склад неперарыўнае гэомэтрычнае прапорцыі роўны квадратнаму корню з множыва сярэдніх складаў, а невядомы сярэдні роўны квадратнаму корню з множыва канцавых складоў. Напрыклад: $x:4=9:x$, адкуль $x^2=4.9$, а $x=\sqrt{4.9}=\sqrt{36}=6$ або: $27:x=x:3$, адкуль $x^2=27.3$, а $x=\sqrt{27.3}=\sqrt{81}=9$.

Кожны з роўных паміж сабою складоў неперарыўнае гэомэтрычнае прапорцыі наз. *сярэднім гэомэтрычным лікам* двох другіх складоў.

Сярэднім гэомэтрычным дадзеных лікаў наз. корань n-ае ступені з множыва гэтых лікаў.

255. Гэомэтрычная прапорцыя наз. *вывадная*, калі яна дасталася з аднае дадзенае прапорцыі спосабам некатарых дзеяньняў: або цераз складаньне або цераз адыманьне наступных яе складоў з пярэднімі і г.д.

Напрыклад:

Дадзена прапорцыя $9 : 3 = 12 : 4$; з гэтае прапорцыі можна ствараць наступныя вывадныя прапорцыі, каторыя будуць здавольваць галоўнай асаблівасьці гэомэтрычнае прапорцыі:

$$1)\ (9 \pm 3) : 3 = (12 \pm 4) : 4,$$

г. зн. зьлічво або розьніца складоў першых адносін адносіцца да свайго наступнага склада, як зьлічво або розьніца складоў другіх адносін адносіцца да свайго наступнага складу.

$$2)\ (9 \pm 3) : 9 = (12 \pm 4) : 12,$$

г. зн. зьлічво або розьніца складоў першых адносін адносіцца да свайго пярэдняга склада, як зьлічво або розьніца складоў другіх адносін да свайго пярэдняга склада.

Пераставіўшы ў папярэдніх прапорцыях (1 і 2) сярэднія склады, адтрымаем:

$$3)\ (9 \pm 3) : (12 \pm 4) = 3 : 4 = 9 : 12,$$

г. зн. зьлічво або розьніца складоў першых адносін адносіцца да зьлічва або розьніцы складоў другіх адносін, як наступны склад да наступнага або як пярэдні да пярэдняга.

$$4)\ (9 \pm 3) : (12 \pm 4) = (9 \mp 3) : (12 \mp 4),$$

г. зн. зьлічво або розьніца складоў першых адносін адносіцца да зьлічва або розьніцы складоў другіх адносін, як розьніца або зьлічво складоў першых адносін адносіцца да розьніцы або зьлічва складоў другіх адносін

$$5)\ (9 + 12) : (3 + 4) = 9 : 3 = 12 : 4,$$

г. зн. у ва ўсякай прапорцыі зьлічво пярэдніх складоў адносіцца да зьлічва наступных, як адзін з пярэдніх да свайго наступнага.

256. Ґэомэтрычная прапорцыя назыв. складанаю (зложанаю), калі яна дасталася або посьле паскладнага множаньня, або посьле паскладнага дзяленьня дзьвёх або некалькіх дадзеных гэомэтрычных прапорцыяў.

Назоўнік (зьмест) адносін адтрыманнае складанае прапорцы, посьле множаньня або дзяленьня, роўны множыву або дзелі старых назоўнікаў.

Прыклады: а) $6 : 3 = 10 : 5 \quad [2]$

$9 : 3 = 12 : 4 \quad [3]$

$6.9 : 3.3 = 10.12 : 5.4$, або,

$54 : 9 = 120 : 20$ (зьмест $6 = 2.3$).

б) $18 : 3 = 54 : 9 \quad [6]$

$6 : 2 = 9 : 3 \quad [3]$

$^{18}/_{6} : {}^{3}/_{2} = {}^{54}/_{9} : {}^{9}/_{3}$ (зьмест $2 = 6 : 3$).

Увага. Складваць і адымаць можна толькі такія прапорцы, ў каторых аднолькавыя назоўнікі адносін. Назоўнік, адтрыманы посьле складаньня або адыманьня такіх прапорцыяў, роўны кожнаму з старых назоўнікаў.

а) $\left.\begin{array}{l} 12 : 4 = 9 : 3 \\ 15 : 2 = 6 : 2 \end{array}\right\}$ назоўнік—3

$[15+12] : [5+4] = [6+9] : [2+3]$, або

$27 : 9 = 15 : 5$ [назоўнік—3].

б) $\left.\begin{array}{l} 18 : 9 = 12 : 6 \\ 10 : 5 = 8 : 4 \end{array}\right\}$ назоўнік—2

$[18-10] : [9-5] = [12-8] : [6-4]$ або

$8 : 4 = 4 : 2$ [назоўнік—2].

Простая і адваротная прапарцыянальнасьць.

257. Дзьве вялічыні наз. *проста прапарцыянальнымі*, калі яны знаходзяцца ў такой залежнасьці адна ад аднэй, што з павялічаньнем значэньня аднае адпаведнае значэньне другой таксама павялічваецца, а з паменшаньнем значэньня

аднэй—адпаведнае значэньне другой таксама памяншаецца ў столькі-ж разоў, напр.: колькасьць матар'яла і яго кошт; даўжыня і час, патрэбны да таго, каб прайсьці яе і г. д.

258. Дзьве вялічыні наз. *адваротна прапарцыянальнымі*, калі адпаведныя іх значэньні знаходзяцца ў такой залежнасьці адна ад аднэй, што з павялічаньнем значэньня аднае з іх у некалькі разоў—значэньне другой з іх памяншаецца ў столькі-ж разоў, а з паменшаньнем аднае вялічыні ў некалькі разоў—другая вялічыня павялічваецца ў столькі-ж разоў, напр.: лік работнікаў і час работы; даўжыня абводу кола і лік яго абаротаў і г. д.

Тройныя правілы.

Тройнымі правіламі наз. спосабы разьвязываць такія задачы, ў каторых па некатарых дадзеных ліках адшукваецца лік ім прапарцыянальны. Гэтымі спосабамі разьвязваюцца задачы: на звычайнае тройнае правіла, на складанае тройнае правіла, на правіла працэнтаў, на правіла ўчоту вэксаляў, на правіла таварыства (падчас), на правіла зьмяшаньня і на ланцужнае правіла.

Задачы на тройныя правілы разьвязваюцца двома спосабамі: спосабам прапорцыі і спосабам прывядзеньня да адзінкі.

Пры разьвязываньні задач на тройныя правілы шуканы лік аба значваецца якою-небудзь літараю латынскае або францускае абэцэды (азбукі).

Звычайнае тройнае правіла.

259. **Звычайным тройным правілам** наз. спосаб разьвязваць такія задачы, ў каторых дадзены тры лікі, а адшукваецца чацьвёрты, ім прапарцыянальны.

Тры дадзеныя вялічыні наз. *умоўнымі*, чацьвёртая—(шуканая) наз. *шуканым рэзультатам*.

260. Лікі, якія знаходзяцца па ўмове задачы ў цеснай сувязі паміж сабою, назыв. **адпаведнымі**, або **аднароднымі**.

Перад разьвязаньнем задачы на звычайнае тройнае правіла, трэба спачатку яе *раскласьці* так, каб аднародныя вялічыні былі адна пад аднэй і каб гэтыя аднародныя вялічыні зьвярнуць у аднайменныя;

потым патрэбна выявіць сабе, якая залежнасьць ёсьць паміж дадзенымі вялічынямі і адпаведнай шуканай—простая ці адваротная прапарцыянальнасьць.

Задача 1. Колькі каштуе 5 хунтаў цукру, калі 3 хунты яго каштуюць 45 кап?

Раскладваем задачу: 3 хунты—45 кап.
5 хунт. —X кап.

У гэтай задачы даецца лік хунтаў цукру і іх кошт. Гэтыя дзьве вялічыні знаходзяцца ў *проста* прапарцыянальнай залежнасьці адна ад аднае, бо з павялічаньнем ліку хунтаў у столькі-ж разоў павялічыцца і кошт іх; з паменшаньнем ліку хунтаў, у столькі-ж разоў паменшыцца і кошт іх. Вялічыні, якія знаходзяцца ў падобнай залежнасьці, наз. *проста прапарцыянальнымі.*

Дамо прыклад ходу разьвязаньня задачы двума спосабамі:

1) Спосабам прапорцыі:

$$X : 45 = 5 : 3;$$

адсюль: $X = \frac{45.5}{3} = 75$ [кап.]

2) Спосабам прывядзеньня да адзінкі:

3 хунты каштуюць 45 [кап.];
1 » » $\frac{45}{3}$ »
5 » » $\frac{45.5}{3} = 75$ [кап.].

Задача 2. У колькі дзён 6 работнікаў скончаць некатарую работу, калі 15 работнікаў могуць скончыць яе ў 8 дзён?

Раскладаем задачу: 15 работ.—8 дзён;
6 » —X дзён.

У гэтай задачы гаворыцца аб ліку работнікаў і аб ліку дзён. Гэтыя дзьве вялічыні знаходзяцца ў *адваротна* прапарцыянальнай залежнасьці адна ад аднае, бо з павялічаньнем ліку работнікаў, у столькі-ж разоў зьменшыцца лік дзён; з паменшаньнем ліку работнікаў, у столькі-ж разоў павялічыцца лік дзён. Вялічыні якія, знаходзяцца ў падобнай залежнасьці, наз. *адваротна прапарцыянальнымі.*

Дамо прыклад ходу разьвязаньня задачы двома спосабамі:

1) Спосабам прапорцы:

$$X : 8 = 15 : 6;$$

адсюль: $X = \frac{8.15}{6} = 20$ [дзён].

2) Спосабам прывядзеньня да адзінкі:

15 работ. — 8 дзён;
1 „ — 8.15 „
6 „ — $\frac{8.15}{6} = 20$ (дзён).

Складанае тройнае правіла.

261. Складаным тройным правілам наз. спосаб разьвязываць такія задачы, ў каторых дадзены 5, 7, 9,... і г. д. лікаў, а знаходзіцца 6-ы, 8-ы, 9-ы і г. д. лікі, ім прапарцыянальныя.

Перад разьвязаньнем задачы на складанае тройнае правіла, трэба спачатку яе *раскласьці*, потым аднародныя вялічыні зьвярнуць у аднайменныя, потым, калі можна, стаячыя адны пад аднымі лікі скараціць, разьдзяліўшы іх на супольны дзельнік. Апрача таго, раней разьвязаньня задачы, ці то па способу прапорцы, ці то па способу прывядзеньня да адзінкі, патрэбна адрозьніць вялічыні проста прапарцыянальныя ад адваротна прапарцыянальных.

Няхай потрэбна даведацца, колькі муляроў трэба, каб збудаваць сьцяну ў 150 стопаў даўжынёю пры рабоце ў працягу 15 дзён, па 12 гадзін штодня, калі 36 муляроў, працуючы кожны дзень па 10 гадзін, збудавалі ў 8 дзён сьцяну ў 80 стопаў даўжынёю.

Каб разьвязаць гэтую задачу способам прапорцы, патрэбна прывесьці яе да некалькіх задачаў на звычайнае тройнае правіла шляхам выключэньня кожны раз двох якіх-небудзь аднародных дадзеных, не мяняючы рэшты дадзеных.

Самае разьвязаньне задачы трэба раскласьці гэтак:

36 муляр. 8 дзён 10 гадз. 80 стопаў;
X „ 15 „ 12 „ 150 „

8 дзён — 36 муляр. 15 „ — У „	$У : 36 = 8 : 15;$
У муляр. — 10 гадз. Z „ — 12 „	$Z : У = 10 : 12;$
Z муляр. — 80 стопаў. X „ — 150 „	$X : Z = 150 : 80.$

Перамножыўшы гэтыя прапорцыі, адтрымаем:

$$У . Z . X : 36 . У . Z = 8 . 10 . 150 : 15 . 12 . 80.$$

Скараціўшы першыя адносіны на УZ, адтрымаем:

$$X : 36 = 8 . 10 . 150 : 15 . 12 . 80.$$

Адсюль: $X = \frac{36.8.10.150}{15.12.80} = 30$ (муляроў).

Для большае відавочнасьці, ход разьвязаньня задачы пры падмозе прапорцыі раскладваюць гэтак:

36 муляр.	8 дзён.		10 гадз.		80 стопаў		
X	» 15	»	12	»	150	»	

8 дзён	10 гадз.	80 стопаў	36 муляр.	
15 »	— »	— »	X_1 »	$X_1 : 36 = 8 : 15;$
— »	12 »	— »	X_2 »	$X_2 : X_1 = 10 : 12;$
— »	— »	150 »	X »	$X : X_2 = 150 : 80.$

Значыцца : $X_1 . X_2 . X : 36 . X_1 . X_2 = 8.150 : 15.12.80.$
Або —$X : 36 = 8.10.150 : 15.12.80.$

Адсюль: $X = \frac{36.8.10.150}{15.12.80} = 30$ муляроў.

Каб разьвязаць гэтую задачу спосабам прывядзеньня да адзінкі, трэба раскласьці, для зручнасьці, яе дадзеныя і шуканы лік так, каб X стаяў у *апошнім слупку.*

8 дзён 10 гадз. 80 стопаў 36 муляроў;
15 дзён 12 гадз. 150 стопаў X муляроў.

Дамо прыклад ходу разьвязаньня задачы радкамі:

8 дзён		10 гадз.		80 стопаў		36	муляроў
1	»	10	»	80	»	36.8	»
1	»	1	»	80	»	36.8.10	»
1	»	1	»	1	»	$\frac{36.8.10}{80}$	»

Цяпер будзем паступова замяняць адзінкі лікамі, зьмешчанымі ў умове задачы:

1 дзёнь 1 гадз. 1 ст. $\frac{36.8.10}{80}$ муляроў.

15 » 1 » 1 » $\frac{36.8.10}{80.15}$ »

15 » 12 » 1 » $\frac{36.8.10}{80.15.12}$ »

15 » 12 » 150 » $\frac{36.8.10.150}{80.15.12}=30$ муляроў.

Шмат прасьцей адразу напісаць формулу для X у толькі што разьвязанай задачы, разважаючы гэтак:

Пры 8 днях працы патрэбна для скончаньня работы 36 муляроў; пры адным працоўным дню трэба будзе 36.8 (у 8 разоў больш.), а пры 15 працоўных днях $\frac{36.8}{15}$ (у 15 разоў менш.); гэтулькі трэба муляроў пры 10 гадз. працы ў дзень; пры 1 гадзіне патрэбна будзе $\frac{36.8.10}{15}$ (у 10 разоў, больш.) а пры 12 гадзінах—$\frac{36.8.10}{15.12}$ (у 12 разоў менш.); гэты лік муляроў, трэба для складкі сьцяны ў 80 ст.; знаходзіцца, для складкі сьцявы ў 1 стапу даўжыні патрэбна будзе $\frac{36.8.10}{15.12.80}$ (у 80 разоў менш.), а для сьцяны ў 150 стопаў $\frac{36.8.10.150}{15.12.80}=30$ муляр.

Задачы на складанае тройнае правіла разьвязваюцца таксама *практычным спосабам*: Напісаўшы ў два радкі зьмест задачы, адзначваем, якая залежнасьць істнуе паміж дадзенымі і шуканым.

	адвар.	адвар.	прост.
36 муляр.	8 дзён	10 гадз.	80 стоп.
X »	15 »	12 »	150 »

Каб укласьці выраз для X, працягваем паземную рысу і пішам у лічніку раней за ўсё аднародны з X лік, які знаходзіцца ў верхнім радку, а потым усе вялічыні, абазначаныя «прост. залежн.», ставім з верхняга радку множнікамі ў назоўнік, а з ніжняга радку ў лічнік; усе-ж вялічыні, адзначаныя «адвар. залеж.», пішам з верхняга радку множнікамі ў лічнік, а з ніжняга—ў назоўнік.

$$X=\frac{36.8.10.150}{15.12.80}=30.$$

Правіла звычайных працэнтаў.

262. **Працэнтам** наз. сотая доля ўсякага (іменнага або бязыменнага) ліку ў аднасінах да гэтага ліку.

263. У камэрцыі *працэнт* азначае прыбытак (або страту) дастаную з ста рублёў, або з ста капеек у адзін год. (камэрцыйны год=12 мес.=360 дням).

Слова „працэнт“ ўзята ад латынскіх словаў pro і centum, азначаючых за сто, або ад ста.

Слова «працэнт» абазначваецца на пісьме знакам °/₀ (5 працэнтаў=5°/₀).

264. Прыбытак (або страта), дастаная на ўвесь капітал у які-небудзь час наз. *працэнтнымі грашыма* або проста *працэнтамі*.

Слова «працэнты» абазначваецца на пісьме знакамі °/₀ °/₀.

Працэнты могуць лічыцца ня толькі на капітал, каторы быў адданы ў рост, але і на працэнтныя грошы, якія стварыліся ад прошлых гадоў. Працэнты, дастаныя толькі з пачатковага капіталу, называюцца *звычайнымі*, працэнты-ж, каторыя лічацца ня толькі з пачатковага капіталу, але і з наросшых раней на яго працэнтаў, наз. *складанымі*.

265. Той, хто пазычае грошы другому, наз. *заімадаўцам*, або *крэдытарам*, а той, хто пазычае грошы ў другога— *даўжнікам*, або *дэбітарам*.

266. Капітал, аддадзены на працэнты, наз. пачатковым капіталам, а пачатковы капітал разам з прылічанымі да яго працэнтнымі грашыма наз. *наросшым* (збуйнеўшым) капіталам.

267. Капітал, аддадзены на працэнты ў банк, наз. *укладным*.

Працэнтныя ўклады, прыманыя банкамі і г. п. крэдытнымі ўстановамі, бываюць: 1) *вечныя*, з каторых укладчык і яго спадчыкі могуць карыстацца аднымі працэнтамі, самы-ж капітал астаецца ў банку назаўсёды; 2) *тэрміновыя* (срочныя)—на вядомы лік месяцаў або гадоў, па праходу каторых можа быць дастаны ізноў, а да таго ўкладчык адтрымлівае толькі працэнты; 3) да *патрабаваньня*—ўклады, каторыя могуць быць узяты ў ва ўсякі час.

268. *Правілам працэнтаў* наз. спосаб разьвязываць такія задачы, ў каторых дадзены тры (або пяць) лікі, а знаходзіцца чацьвёрты (або шосты), ім прапарцыянальны.

269. Пры разьвязаньні задач на правіла звычайных працэнтаў могуць быць наступныя чатыры выпадкі:

1) Калі знаходзяцца *працэнтныя грошы*, якія павінны дастацца ў вядомы тэрмін з дадзенага капіталу.

2) Калі знаходзіцца *працэнт* (за год) па дадзенаму капіталу і тэрміну.

3) Калі знаходзіцца *капітал*, з каторага можна адтрымаць вядомую суму працэнтных грошаў у вядомы тэрмін па дадзенаму працэнту.

4) Калі знаходзіцца *час*, на які павінна аддаць некатары вядомы капітал, каб ён прынёс вядомую суму працэнтаў па дадзенаму працэнту.

Задача 1. Як вялікія *працэнтныя грошы* з 1657 руб. аддадзеных у рост па 4%?.

Раскладваем задачу так:

За 100 руб., 4 руб. працэнтных грошаў, а з
1657 » X » »

Разьвяжам задачу спосабам прывядзеньня да адзінкі:

100 руб. — 4 руб.
1 » — $^{4}/_{100}$.
1657 » $\frac{4.1657}{100}$ = 66 руб. 28 кап.

Задача 2. Па колькі *працэнтаў* аддадзены ў рост капітал у 1800 руб., калі ён кожны год прыносіць прыбытку 36 руб.?

Раскладываем задачу так:

1800 руб. — 36 руб.
100 » — X »

Разьвяжам задачу спосабам прапорцыі:

$$X : 36 = 100 : 1800.$$
$$X = \frac{36.100}{1800} = 2 \text{ (працэнтам)}.$$

Задача 3. Як вялікі *капітал*, каторы, пушчаны ў рост па 4%, прыносіць кожны год прыбытку 240 руб.?

Раскладваем задачу так:

100 руб.— 4 руб.
X » —240 »

Разьвяжам задачу спосабам прывядзеньня да адзінкі:

$$4-100$$
$$1-{}^{100}/_{4}$$
$$240=\frac{100.240}{4}=6000 \text{ [руб.]}.$$

Задача 4. У колькі гадоў некатары капітал прынясе 184 руб. 50 кап. працэнтных грошаў, калі ён у 7 гадоў прыносіць 86 руб. 10 кап?

Раскладваем задачу так:

7 гад.— 86 р. 10 к.
X » —184 » 50 »

Разьвязваем задачу спосабам прапорцыі:

$$X:7=18450:8610$$
$$X=\frac{7.18450}{8610}=15 \text{ [гадоў]}.$$

Задача 5. Капітал у 5000 руб., аддадзены ўрост, праз 9 месяцаў зьвярнуўся ў 5300 руб. Колькі працэнтаў прыбытку прыносіць капітал?

Спачатку знаходзім прыбытак на ўвесь капітал:

5300 р.—5000 р.=300 руб.

Затым разьвязваем задачу звычайным тройным правілам, раскладваючы яе на дзьве задачы:

Спачатку знаходзім працэнтныя грошы з капіталу ў 5000 руб. за адзін год, а потым з 100 руб. за адзін год, раскладваючы разьвязаньне гэтак:

1) 9 м.—300 руб.
$1 \text{ »} -\frac{300}{9}$ руб.
$12 \text{ »} -\frac{300.12}{9}=400$ р.

2) 5000 руб.—400 руб.
100 » —X »
$$X=\frac{400.100}{5000}=8\%.$$

Задача 6. Некатары капітал, аддадзены ў рост па $8^0/_0$., праз 9 мес. зьвярнуўся ў 5300 руб. Знайсьці гэты капітал?

Спачатку знаходзім працэнтныя грошы з 100 руб. за 9 мес., лічучы па $8^0/_0$.

$$\begin{array}{l|l} \text{За } 12 \text{ м.} - 8^0/_0 & X : 8 = 9 : 12 \\ \;\;\text{"}\;\; 9 \text{ "} - X \text{ "} & \end{array}$$

Адкуль $X = \frac{8.9}{12} = 6$ руб.

Затым, прылічваючы 6 руб. прац. да 100 руб., разважаем:

$$\begin{array}{l|l} 100 \text{ руб. зьвяр. ў } 106 \text{ р.} & X : 100 = 5300 : 106. \\ X \;\;\text{"}\;\;\;\; \text{"} \;\; \text{у } 5300 \text{ р.} & \end{array}$$

Адкуль $X = \frac{100 . 5300}{106} = 5000$ руб.

Задача 7. Капітал у 5000 руб , аддадзены ў рост па $8^0/_0$ зьвярнуўся ў 5300 р.

Колькі часу капітал быў у абароце?

Спачатку знаходзім прыбытак на ўвесь капітал:

5300 р. — 5000 р. = 300 руб.

Затым, па вышэйшаму, раскладваем задачу на дзьве: перш знаходзім прыбытак за 12 мес. з 5000 руб., а потым—праз колькі месяцаў дастанецца прыбытак у 300 руб , пры гэтым разьвязаньне раскладваем так:

1) З 100 руб. — 8 р.
» 5000 » — X р.

Адкуль $X = \frac{8 . 5000}{100} = 400$ руб.

$$2)\;\; \begin{array}{l|l} 400 \text{ руб.} - 12 \text{ м.} & X : 12 = 300 : 400. \\ 300 \;\text{"} - X \text{ "} & \end{array}$$

Адкуль $X = \frac{12 . 300}{400} = 9$ мес.

Задача 8. У які капітал зьвернуцца праз 9 месяцаў 5000 руб., аддадзеныя ў рост па $8^0/_0$?

Спачатку знаходзім працэнтныя грошы на 100 руб. за 9 мес.

$$\begin{array}{l|l} 12 \text{ м.} — 8 \text{ р.} & \\ 9 \text{ »} — X \text{ »} & X : 8 = 9 : 12. \end{array}$$

$$\text{Адкуль } X = \frac{8 . 9}{12} = 6 \text{ руб.}$$

Затым, прылічваючы 6 руб. прац. грошаў да 100 руб. разважаем:

$$\begin{array}{l} 100 \text{ руб. звар. ў } 106 \text{ руб.} \\ 5000 \text{ » » у } X \text{ »} \end{array}$$

$$\text{Адкуль } X = \frac{106 . 5000}{100} = 5300 \text{ руб.}$$

Увага. Задачы на звычайныя працэнты разьвязваюцца таксама спосабам складанага тройнага правіла, але пры гэтым патрэбна мець на ўвазе, што *наросшы капітал не прапарцыянальны ні працэнту ні часу*, а таму складаным тройным правілам нельга разьвязваць такіх задачаў, у каторых дадзены наросшы капітал і знаходзіцца пачатковы капітал.

Усе задачы на правіла працэнтаў, як мы бачылі вышэй, могуць быць разьвязаны спосабам прапорцыі і спосабам прывядзеньня да адзінкі, але ў камэрцыйных установах, дзе патрэбна хуткасьць вылічэньня, задачы першых трох радоў разьвязваюцца формуламі, аснованымі на законах дакладнага вылічэньня.

270 Каб вылічыць *працэнтныя грошы*, трэба капітал памножыць на працэнт і на час (лік гадоў, месяцаў або дзён) і разьдзяліць на 100.

271. Каб валічыць *працэнт*, трэба працэнтныя грошы памножыць на сто і разьдзяліць на капітал.

272 Каб вылічыць *капітал*, трэба працэнтныя грошы памножыць на сто і разьдзяліць на працэнт.

Разглядваючы залежнасьць, каторая ёсьць паміж пачатковым капіталам, працэнтам, працэнтнымі грашыма і часам, мы прыходзім да наступных вынікаў:

Працэнтныя грошы знаходзяцца ў простай прапарцыянальнай залежнасьці ад капіталу (пры роўных, пэўна, другіх умовах), ад працэнту і ад часу, ў каторым капітал знаходзіўся ў абароце.

Капітал знаходзіцца ў простай залежнасьці ад працэнтных грошаў і ў адваротнай залежнасьці ад працэнту і ад часу.

Працэнт знаходзіцца ў простай залежнасьці ад працэнтных грошаў і ў адваротнай залежнасьці ад капіталу і ад часу.

Час, у каторы капітал быў у абароце, знаходзіцца ў простай залежнасьці ад працэнтных грошаў і ў адваротнай залежнасьці ад капіталу і ад працэнту.

Наросшы капітал, проста прапарцыянальны як свайму пачатковаму капіталу, так і працэнтным грошам, у іх заключаным.

Правіла дысконту (учоту) вэксалёў.

Пры адтрыманьні ў доўг грошаў даўжнік дае заімадаўцу асобнага роду расьпіску, пісьменны абавязак, завомы *вэксалям*. У вэксалю ні ўспамінаецца ні аб суме, якая пазычана запраўды, ні аб працэнту, а абазначваецца толькі тэрмін выплаты і ўся сума грошау, якую даўжнік павінен выплаціць у гэты тэрмін заімадаўцу.

Форма вэксаля.

Слуцак, 20 студзеня 1920 году.

Вэксаль на 2000 руб. сер.

Двацатага чэрвеня тысяча дзевяцьсот двацатага году па гэтаму майму вэксалю павінен я заплаціць у Слуцку (званьне, імя, па бацьку і прозьвішча крэдытара) дзьве тысячы рублёў.

(Імя, па бацьку і прозьвішча даўжніка).

273. Сума, напісаная на вэксалю, называецца *вэксальнаю сумаю,* або *валютаю.*

Крэдытар ня мае права патрабаваць ад даўжніка выплаты па вэксалю раней тэрміна, абазначанага на вэксалю. Але калі даўжнік сам захоча выплаціць па вэксалю раней тэрміну, або калі крэдытар да тэрміну захоча, замест вэксаля, мець гатовыя грошы (рэалізаваць вэксаль), дык паміж імі робіцца згода, якая выражаецца ў форме працэнту, каторы крэдытар дазваляе даўжніку ўтрымаць з кожных 100 руб. валюты вэксаля за рэшту часу да тэрміна.

274. Сума, якая адлічаецца ад валюты пры выплаце па вэксалю да тэрміна, наз. *учотам* (вылікам), або *дысконтам* вэксаля.

Дысконтаваць, г. зн. прымаць да ўчоту, можа ўсякі як свой уласны, так і чужыя вэксалі.

За адзінку вымеру ўчота прыняты ўчот, які ўтрымліваецца з 100 руб. за адзін год да тэрміну. За адзінку вымеру капітала, які дастаецца пасьля ўчота (рэалізаванага капітала) прыняты капітал, каторы дастаюць з валюты ў 100 руб.

За адзінку недатрыманага часу прыняты адзін год (12 мес. = 360 дням).

275. **Правілам дысконту вэксаляў** наз. спосаб разьвязваць такія задачы ў каторых дадзены тры (або пяць) лікі вышэйпамянёных лікаў, а знаходзіцца чацьвёрты (або шосты), ім прапрарцыянальныя.

276. Пры разьвязаньні задач на правіла дысконту вэксаляў, як пры разьвязаньні задач на працэнты, могуць быць чатыры выпадкі:

1) Калі знаходзіцца *учот* (або замест яго сума, якая выплачваецца па вэксалю).

2) Калі знаходзіцца *працэнт*, па якому зроблен учот.

3) Калі знаходзіцца *валют*а вэксаля.

4) Калі знахадзіцца *час*, які астаецца да тэрміну па вэксалю.

Задача 1. Знайсьці ўчот вэксаля ў 6800 руб., каторы быў праданы за 3 м. да тэрміну з учотам па $8^0/_0$.

Даведаемся спачатку, колькі $8^0/_0$ гадавых складуць працэнтаў за 3 месяцы:

$$\text{ў } 12 \text{ мес.} — 8^0/_0;$$
$$» \ 1 \ » — \frac{8}{12}\,^0/_0;$$
$$» \ 3 \ » — \frac{8.3}{12} = 2^0/_0.$$

Значыцца, маем:

З 100 руб. учытваецца 2 руб.
» 6800 » » X »

Адкуль маем:

з 100 руб. учытваецца 2 руб.;

» 1 » » $\frac{2}{100}$ »

» 6800 » » $\frac{2.6800}{100}=136$ руб.

Задача 2. На колькі *працэнтаў* быў зроблены ўчот вэксаля ў 6800 руб., калі ён быў прададзены за 3 мес. да тэрміну за 6664 руб.?

Даведаемся спачатку, што учот (вылік) складае

$$6800 \text{ р.} - 6664 \text{ р.} = 136 \text{ р.}$$

Потым разважаем:

з 6800 руб. вылічваецца 136 руб.

» 100 » » X »

$$X : 136 = 100 : 6800;$$

$$X = \frac{136.100}{6800} = 2 \text{ [прац.]}$$

Значыцца маем:

у 3 мес. — 2%;

» 12 » — X;

$$X : 2 = 12 : 3;$$

$$X = \frac{3.12}{3} = 8 \text{ [прац.]}$$

Задача 3. Даведацца, якая *валюта* вэксаля, прададзенага з адступкаю ў 136 руб. за тры месяцы да тэрміну, калі ўчот быў зроблены па 8%.

Даведаемся спачатку, колькі 8% гадавых складуць працэнтаў за 3 мес. [гл. зад. № 1].

Потым разважаем:

з 100 руб. — 2 руб.;

» X » — 136 »

Адкуль маем:

$$\begin{array}{lcl} 2 \text{ руб.} & — & 100 \text{ руб.} \\ 1 \quad » & & \frac{100}{2} \quad » \\ 136 \quad » & & \frac{100.136}{2} = 6800 \text{ руб.} \end{array}$$

Задача 4. За колькі месяцаў да тэрміну прададзены вэксаль у 6800 руб. з адступкаю ў 136 руб., калі ўчот быў зроблены па $8^0/_0$?

Развважаем гэтак:

$$\begin{array}{l} \text{З } 6800 \text{ руб учытв. } 136 \text{ руб.} \\ » \quad 100 \quad » \quad » \quad X \quad » \\ \hline \end{array}$$

Адсюль маем:

$$X : 136 = 100 : 6800;$$
$$X = \frac{136.100}{6800} = 2 \text{ [прац.]}$$

Далей развважаем:

$$\begin{array}{l} 12 \text{ мес.} — 8^0/_0; \\ X \quad » \quad — 2^0/_0; \\ \hline X = \frac{12.2}{8} = 3 \text{ [мес.]} \end{array}$$

277. Апісаны тут учот наз *камэрцыйным*, але ёсьць яшчэ асобнага роду учот (вылік), наз. *матэматычным*. Матэматычны ўчот розьніцца ад камэрцыйнага тым, што працэнт, які належыць за недадтрыманы час, учытваецца ня з рубля валюты, як гэта робіцца пры камэрцыйным учоце (выліку), а з сумы рубля з працэнтамі, якія належаць на яго за рэшту часу.

Матэматычны ўчот (вылік) меншы за камэрцыйны, а таму на практыцы робіцца ўчот (вылік) камэрцыйны, як больш выгодны для дыскантара. І сапраўды, камэрцыйны ўчот (вылік) з 1000 руб. за год па $5^0/_0 = \frac{5.1000}{100} = 50$ руб., а матэматычны вылік $\frac{5.1000}{105} = 47$ р. $61^{13}/_{21}$ к. $= 47$ р. 61 кап.

Задачы на правіла тэрміновых выплатаў.

Да задач на правіла тэрміновых выплатаў адносяцца такія, ў якіх патрэбна:

1) Замяніць адзін тэрмін выплаты некалькімі;

2) Замяніць некалькі тэрмінаў выплаты адным;

3) Замяніць некалькі дадзеных тэрмінаў выплаты доўгу некалькімі другімі.

Задача 1. Нехта, купіўшы тавар, умовіўся аддаць належныя за яго грошы ў 4 тэрміны: 2000 руб. цераз месяц, 2500 руб. цераз 10 месяцаў, 1000 руб. цераз 11 месяцаў і 500 руб. цераз год; але потым ён знайшоў магчымым у самы дзень прыняцьця тавару, 7 сакавіка 1919 году, аддаць палавіну ўсяе сумы, дакляруючы аддаць і рэшту сумы за адзін раз. Калі ён павінен аддаць яе?

Па умове задачы, даўжнік можа карыстацца даходамі з капіталаў у 2000 р. на працягу 1 мес.; ў 2500 руб.—на працягу 10 мес., або з капітала ў 25000 руб. (2500 . 10)—у працягу 1 мес. (бо 2500 руб. за 10 мес. прынясуць той-жа даход, што 25000 руб. за 1 мес.); з капіталу ў 1000 р. на працягу 11 мес., або з капіталу ў 11000 руб. (1000 . 11]—за 1 мес.; з капіталу ў 500 руб. на працягу 12 мес., або з капіталу ў 6000 руб. (500 . 12)--на працягу 1 мес.

Значыцца, даўжнік мае права карыстацца даходамі з капіталу ў 44000 руб. (2000+25000+11000+6000) на працягу 1 мес.

Выплачваючы зараз-жа 3000 руб., даўжнік, каб ня мець страты, павінен карыстацца даходамі ад рэшты 3000 руб. не адзін месяц, а ўстолькі разоў больш часу, ў колькі разоў 44000 руб. больш за 3000 руб.

Абазначваючы шуканае цераз X, маем:

$$X : 1 = 44000 : 3000;$$

$$\text{Адкуль} \quad X = \frac{1.44000}{3000} = 14\,^2/_3\,[\text{мес.}]$$

Значыць, даўжнік можа апошнюю частку доўгу выплаціць цераз 1 год 2 мес. 20 дзён, ці 27 траўня 1920 г.

Задача 2. Тры даўгавыя абавязкі: ў 3000 руб., 2500 р. і 5000 р., каторым тэрміны выплаты: 7 мес. для 1-га, 12 мес. для 2-га і 15 мес. для 3-га, хочуць замяніць адным абавязкам з адным тэрмінам выплаты. На які тэрмін павінен быць напісаны абавязак?

Разважаючы па вышэйшаму, знаходзім, што даўжнік можа карыстацца даходамі з капіталаў:

У 3000 р. на працягу 7 мес., або з капіталу ў 21000 р. за 1 м.
У 2500 р. на працягу 12 мес., або з капіталу ў 30000 р. за 1 м.
У 5000 р. на працягу 15 мес., або з капіталу ў 75000 р. за 1 м.

Значыцца, даўжнік мае права карыстацца даходамі з капіталу ў 126000 руб. (21000+30000+75000) на працягу 1 мес. Калі-ж даўжнік карыстае капіталам у 10500 руб. (3000+2500+5000), дык ён павінен карыстацца ім устолькі разоў больш за адзін месяц, у колькі разоў 126000 руб. больш за 10500 р.

Назваўшы шуканае X, маем:

$$X : 1 = 126000 : 10500.$$

$$\text{Адкуль } X = \frac{126000}{10500} = 12 \text{ [мес.]},$$

ці абавязак павінен быць напісаны на 1 год.

Ланцужнае правіла.

278. Ланцужным правілам наз способ разьвязваць такія задачы, ў каторых патрэбна перавесьці меры аднаго гасударства ў адпаведныя ім меры другога гасударства.

Для зручнасьці разьвязваньня, задачу раскладваюць так, што першы радок мае ў сабе шуканы лік, абазначаны цераз X, і з правага боку яго, посьле знака роўнасьці, лік каторы павінен быць яму роўны па умове задачы; кожны з рэшты радкоў пачынаецца такімі мерамі, каторымі канчаецца папярэдні, апошні радок павінен канчацца найменьнем меры, аб каторай гаворыцца ў пытаньні.

Разьвязваць задачы на ланцужнае правіла можна з падмогаю прапорцыі і спосабам прывядзеньня да адзінкі; найбольш зручнейшы спосаб—апошні.

Няхай, напрыкл., патрэбна даведацца, колькім рублём роўны 7500 франкаў, ведаючы, што па курсу 15 франкаў=11 шылінгам, 12 шылінгаў=7 гульдэнам, 55 гульдэнаў=12 чырвонцам, 10 чырвонцаў=27 рублём.

Раскладваем задачу:	X рублёў	= 7500	франкаў
	15 франкаў	= 11	шылінгам
	11 шыл.	= 7	гульдз.
	55 гульдз.	= 12	чырвон.
	10 чырвон.	= 27	рублём.

Адкуль маем:	10	чырвон.	$= 27$	рублём
	1	»	$= \frac{27}{10}$	»
	12	»	$= \frac{27.12}{10}$	»

$$1 \text{ гульдз.} = \frac{27.12}{10.55} \text{ руб.}$$
$$7 \quad » \quad = \frac{27.12.7}{10.55} \quad »$$
$$1 \text{ шыльл.} = \frac{27.12.7}{10.55.12} \quad »$$
$$11 \quad » \quad = \frac{27.12.7.11}{10.55.12} \quad »$$
$$1 \text{ франк.} = \frac{27.12.7.11}{10.55.12.15} \quad »$$
$$7500 \quad » \quad = \frac{27.12.7.11.7500}{10.55.12.15} = 1890 \text{ руб.}$$

На практыцы задачы на ланцужнае правіла разьвязваюцца мэханічна так: спачатку раскладваюць задачу радкамі ў паказаным вышэй парадку, потым шуканыя меры дастаюць, разьдзельваючы множыва правых частак усіх радкоў на множыва іх левых часьцей.

Прыложым гэта правіла да чарговае задачы. Колькім марскім мілям роўны 10000 вёрст, калі 200 вёрстаў=213,4 кілёмэтрам, 40 кілёмэтраў=5,4 географічным мілям, 1,5 географічнае мілі=6 марскім мілям?

Раскладваем задачу:

X марскіх міль	=	10000 вёрстаў.
200 вёрст	=	213,4 кілам.
40 кілам.	=	5,4 географ. міл.
1,5 географ. міл.	=	6 марскім міл.

Адкуль маем:

$$X = \frac{10000.213{,}4.5{,}4.6}{200.40.1{,}5} = 5761{,}8 \text{ марс. міл.}$$

Правіла прапарцыянальнага дзяленьня (таварыства).

279. **Правілам прапарцыянальнага дзяленьня (таварыства)** наз. спосаб разьвязываць такія задачы, у каторых дадзены лік прыходзіцца разьдзяліць на часткі, прапарцыянальна некалькім дадзеным лікам.

280. Той лік, каторы трэба разьдзяліць на часткі прапарцыянальна дадзеным лікам, наз. прапарцыянальным зьлічвом.

281. Тыя лікі, прапарцыянальна каторым дадзена разьдзяліць прапарцыянальнае зьлічво, наз. *паямі*.

282. Тыя лікі, каторыя дастаюцца пасьля разьдзяленьня прапарцыянальнага зьлічва, наз. *прапарцыянальнымі долямі.*

283. Пры разьвязваньні задач на правіла прапарцыянальнага дзяленьня могуць быць два выпадкі: 1) Калі адшуківаюцца *прапарцыянальныя долі*; 2) Калі адшуківаюцца *паі.*

Задача 1. Разьдзяліць 1304 на 4 часткі, якія адносяцца паміж сабою, як $^1/_2 : ^2/_3 : ^3/_4 : ^4/_5$.

Заменім сьпярша адносіны паміж дробязямі адносінамі цэлых лікаў. Для гэтага прывядзём усе дробязі да супольнага назоўніка і супольны назоўнік адкінем.

$^{30}/_{60} : ^{40}/_{60} : ^{45}/_{60} : ^{48}/_{60} = 30 : 40 : 45 : 48.$

Цяпер задачу можна выразіць так: лік 1304 разьдзяліць на 4 часьці прапарцыянальна лікам 30 : 40 : 45 : 48.

Назавем шуканыя часткі x, y, z, t. Калі x разьдзяліць на 30 роўных доляў, дык такіх доляў у *y* павінна быць 40, у z—45 і у t—48; значыцца, ў зьлічве $x+y+z+t$, г. зн. ў 1304, павінна быць $30+40+45+48=163$ часьці; разьдзяліўшы 1304 на 163, адтрымаем 8.

Астаецца 8 памножыць па чарзе на 30, 40, 45 і 48.

$x=8.30=240$; $y=8.40=320$; $z=8.45=360$; $t=8.48=384$.

Разьвяжым гэтую задачу способам прапорцыі:

Дзеля таго, што шуканыя часткі павінны адносіцца паміж сабою, як 30 : 40 : 45 : 48, дык, разважаючы па вышэйшаму, маем рад прапорцыяў:

$$x : 1304 = 30 : 163;$$
$$y : 1304 = 40 : 163;$$
$$z : 1304 = 45 : 163;$$
$$t : 1304 = 48 : 163;$$
$$x=240;\ y=320;\ z=360;\ t=384.$$

Задача 2. Тры гандляры ўлажылі для супольнага гандлю: першы—500 руб. на 4 месяцы, другі—1200 руб. на 5 месяцаў і трэйці—5000 руб. на 3 месяцы. Гандаль прынёс 2300 руб. прыбытку. Колькі з гэтага прыбытку павінен адтрымаць кожны гандляр?

У гэтае задачы патрабуецца разьдзяліць прыбытак прапарцыянальна капіталам і прапарцыянальна часу, г. зн. прапарцыянальна двом радкам лікаў—

$$500 : 1200 : 5000;$$
$$4 : 5 : 3.$$

Каб зрабіць гэта, трэба спачатку прывесьці час да адзінкі, разважаючы так: першы гандляр унёс 500 руб. на 4 мес. і адтрымаў некатары прыбытак; калі-б ён жадаў адтрымаць той-жа прыбытак за

1 мес., дык павінен быў-бы ўнесьці ў 4 разы больш грошаў, г. зн. 500 р. . 4=2000 руб.; гэтак-жа сама другі гандляр павінен быў-бы ўнесьці 1200 р. . 5=6000 руб., а трэйці—15000. Дзеля таго, што час абароту капіталаў цяпер аднолькавы, дык трэба 2300 руб. разьдзяліць на часткі прапарцыянальна толькі 2000 : 6000: 15000; або 2 : 6 : 15.

Разважаючы так, як паказана ў папярэдняе задачы, знойдзем:

2300 : [2+6+15]=100;
1] 100 р. . 2=200 руб.
2] 100 » . 6=600 »
3] 100 » . 15=1500 »

Задача 3. Тры суполкі работнікаў, з каторых у першае было 15 чалавек, у другой 20, а ў трэйцяе 24, адтрымалі за працу 694 р. 80 кап. Колькі павінна выдаць кожнае суполцы, калі першая працавала 11 дзён па 8 гадз. кожны дзень, другая—9 дзён па 10 гад. трэйцяя—7 дзён па 9 гадз. кожны дзень?

У гэтае задачы патрабуецца 694 руб. 80 кап. разьдзяліць на часткі прапарцыянальна: 1) ліку работнікаў кожнае суполкі, 2) ліку працоўных дзён і 3) ліку гадзін кожнаднеўнае працы. Такім чынам, 694 руб. 80 кап. трэба разьдзяліць на часткі прапарцыянальна лікам трох радкоў:

15 : 20 : 24;
11 : 9 : 7;
8 : 10 : 9.

Каб разьвязаць задачу, патрэбна тры дадзеныя радкі прапарцыянальных лікаў замяніць адным; для гэтага прывядзём умовы задачы, па пярэдняму, да адзінкі часу, г. зн. даведаемся, колькі работнікаў павінна быць у кожнае суполцы, каб адтрымаць тую-ж самую плату за 1 працоўны дзень і за 1 працоўную гадзіну. Каб першая суполка магла зрабіць тую-ж самую працу, а значыцца і адтрымаць тую-ж самую плату, папрацаваўшы толькі адну гадзіну ў працягу аднаго дня, замест 11 дзён па 8 гадзін кожны дзень, патрэбна, каб яна была не з пятнаццаці чалавек, а з 15.11.8; гэтак-жа сама другая суполка павінна была-б мець 20.9.10, а трэйцяя—24.7.9 чал. Так, першая суполка адтрымае такую-ж плату, якую адтрымала-б суполка з 15.11.8 работ., другая—як суполка з 20.9.10, а трэйцяя—як суполка з 24.7.9 работнікаў. Значыцца, каб даведацца, колькі адтрымае кожная суполка, трэба 694 руб. 80 кап. разьдзяліць на часткі прапарцыянальна лікам: (15.11.8) : (20.9.10) : (24.7.9)=1320^{24} : 1800^{24} : 1512^{24}=55 : 75 : 63.

Развіажаючы, як у папярэдняе задачы, знойдзем:

$$69480 \text{ к.} : [55+75+63]=360 \text{ кап.};$$
$$1]\ 360 \text{ кап.} \times 55=198 \text{ руб.};$$
$$2]\ 360\ \text{»} \times 75=270\ \text{»}$$
$$3]\ 360\ \text{»} \times 63=226 \text{ руб. } 80 \text{ кап.}$$

Задача 4. Лік 71 разьдзяліць на 4 часткі так. каб першая адносілася да другое, як 4 : 5, другая да трэйцяе, як 2 : 3 і трэйцяя да чацьвёртае, як 6 : 1. Назваўшы шуканыя часткі x, y, z і t, адтрымаем прапорцыі: $x : y=4 : 5$; $y : z=2 : 3$; $z : t=6 : 1$.

З першае прапорцыі бачым, што калі X разьдзяліць на 4 роўныя долі, дык такіх доляў у y павінна быць 5.

З другое прапорцыі бачым, што z складвае $^3/_2\ y$; але ў y зьмяшчаецца 5 роўных доляў, значыцца у z такіх доляў будзе $5\times{}^3/_2$, г. зн. $^{15}/_2$.

З трэйцяе прапорцыі бачым, што t складвае $^1/_6$ z, але у z ёсьць роўных доляў $^{15}/_2$, значыць у t такіх доляў будзе $^{15}/_2\times{}^1/_6$, г. зн. $^{15}/_{12}$.

З сказанага відаць, што для разьвязаньня задачы трэба лік 71 разьдзяліць на $4+5+{}^{15}/_2+{}^{15}/_{12}=17\ {}^3/_4$, і кожная частка=4; значыцца, першы лік$=4 . 4=16$; другі$=4 . 5=20$; трэцьці$=4 . {}^{15}/_2=30$, чацьвёрты$=4 . {}^{15}/_{12}=5$.

Задача 5. Капітал у 9400 руб. разьдзяліць паміж трома братамі адваротна прапарцыянальна іх веку. Колькі адтрымае кожны брат, калі старшаму было 30, сярэдняму 24, а малодшаму 18 гадоў?

Дзеля таго, што па умове задачы долі братоў павінны быць адваротна прапарцыянальны іх веку, дык 9400 руб. трэба разьдзяліць на тры часткі адваротна прапарцыянальна лікам 30 : 24 : 18, або проста прапарцыянальна лікам $^1/_{30} : {}^1/_{24} : {}^1/_{18}$.*) Прывёўшы дробязі да аднаго назоўніка і адкінуўшы апошні, адтрымаем цэлыя лікі 12 : 15 : 20, прапарцыянальна каторым трэба разьдзяліць 9400 руб.

*) Адваротным лікам па адносінах да дадзенага назыв. лік, дастаны ад дзяленьня адзінкі на гэты лік).

На аснове папярэдняга маем:

$$9400 : [12+15+20]=200;$$
$$1]\ 200\times12=2400;$$
$$2]\ 200\times15=3000;$$
$$3]\ 200\times20=4000.$$

Задачы на правіла таварыства, як мы бачылі вышэй, разьвязваюцца таксама падмогаю прапорцыі і спосабам прывядзеньня да адзінкі; але на практыцы задачы гэтыя разьвязваюцца механічна.

Для знаходжаньня прапарцыянальных *доляў*, прапарцыянальнае зьлічво дзеляць на зьлічво паёў і адтрымаиую дзель памнажаюць на кожны пай.

Для знаходжаньня *паёў*, зьлічво паёў дзеляць на прапарцыянальнае зьлічво і адтрымаиую дзель памнажаюць на кожны пай.

Калі трэба лік разьдзяліць на часткі прапарцыянальна лікам некалькіх радкоў, дык перамнажаюць адпаведныя лікі кожнага радку і дадзены лік разьдзяляюць прапарцыянальна дастаным множывам.

Калі трэба лік разьдзяліць на часткі адваротна прапарцыянальна даным лікам, яго дзеляць проста прапарцыянальна лікам, якія адваротны дадзеным.

Правіла зьмяшаньня.

284. **Правілам зьмяшаньня** назыв. спосаб разьвязываць, першае, такія задачы, ў каторых дадзены цана і колькасьць кожнага гатунку зьмешваемых рэчаў, а патрабуецца знайсьці цану адзінкі мешаніны, і, другое, такія задачы, ў каторых дадзены цэны адзінак зьмешваемых рэчаў, цана адзінкі мешаніны, а патрабуецца знайсьці колькасьць зьмешваемых рэчаў.

Задачы на правіла зьмяшаньня 1-га тыпу.

Задача 1. Зьмешана тры гатункі мукі: 5 хун. па 7 кап., 4 хун. па 10 кап. і 6 хун. па 15 кап. за хунт. Колькі каштуе адзін хунт мешаніны?

Прадставім ход разьвязаньня задачы радкамі:

5 хун.	па 7 кап.	кашт.	7 к. $\times 5 = 35$	кап.;
4 »	» 10 »	»	10 » $\times 4 = 40$	»
6 »	» 15 »	»	15 » $\times 6 = 90$	»

15 хун. усяе мешан. каштуюць 165 кап.

1 » мешаніны каштуе $^{165}/_{15} = 11$ кап.

Задача 2. Сярэбраных рэчаў майстар сплавіў 3,25 хунта серабра 84-й пробы, 2,75 хунт. серабра 72-й пробы і 4 хунты серабра 56-й пробы. Якое пробы дастанецца сплаў?

Пробаю назыв., як ведама, колькасьць залатнікоў чыстага золата або серабра ў адным хунце сплава (або колькасьць доляў ў адным залатніку сплава). А дзеля таго маем:

У 3,25 хун.	84 пр.	маецца	$83.3,25=273$	залат. сер.;
» 2,75 »	72 »	»	$72.2,75=198$	» »
» 4 »	56 »	»	$56.4=224$	» »
У 10 хун.		маецца	695	залат. серабра.
» 1 »		»	$^{695}/_{10}=69,5$,	г. зн.

сплаў будзе 69,5 пробы.

Задача 3. Зьмешана 76,8 вядра гарэлкі ў 50 градусаў і 51,2 вядра гарэлкі ў 45 град. Колькі мае градусаў адтрыманая мешаніна?

Градусам назыв. працэнтны зьмест чыстага сьпірту ў вядры гарэлкі. Дзеля таго, калі гаворыцца: „гарэлка ў 60 град.“ дык гэта трэба разумець, што ў кожных 100 частках гэтае гарэлкі маецца 60 частак чыстага сьпірту, а апошнія 40 частак складвае вада.

Ведаючы гэта, па выжэйшаму, маем:

У 76,8 вядра	50 град.	маецца сьпірту	$50.76,8=3840$	сотых вядра;
» 51,2 »	45 »	» »	$45.51,2=2304$	» »
У 128 в.		маецца сьпірту	6144	сотых вядра;
» 1 »		» »	$^{6144}/_{128}=48$	сот. вядра, г. зн.

мешаніна будзе 48 градусаў.

Задачы на правіла зьмяшаньня 2-га тыпу.

Задача 4. З двох гатункаў гарбаты, коштам у 16 руб. і 9 руб. за пуд, патрабуецца зрабіць 14 пудоў мешаніны па 11 руб. за пуд. Па колькі пудоў прыдзецца ўзяць з кожнага гатунку?

Разьвяжам задачу гэту трома спосабамі:

1-ы спосаб. Калі пуд першага гатунку будзем прадаваць па 11 руб., дык будзем мець на кожным пудзе па 5 руб. страты, значыцца, на $^1/_5$ пуда прыдзецца 1 руб. страты; калі другі гатунак прадаваць па 11 руб. за пуд, дык адтрымаем 2 руб. прыбытку; значыцца, на $^1/_2$ пуда—1 руб. прыбытку. Адсюль відаць, што калі зьмяшаем $^1/_5$ пуда першага гатунку і $^1/_2$ пуда другога гатунку, дык ня будзем мець страты і не дастанем прыбытку (бо 1 руб. страты пакрыецца 1 руб. прыбытку) г. зн. адтрымаем мешаніну *патрабуемага складу* ў колькасьці $^1/_5+^1/_2=^7/_{10}$ пуда.

Дзеля таго, што для адтрыманьня $^7/_{10}$ пуда мешаніны трэба ўзяць $^1/_5$ пуда першага гатунку, дык для адтрыманьня 14 пудоў трэба ўзяць больш за $^1/_5$ пуда ў столькі разоў, у колькі разоў 14 больш $^7/_{10}$, г. зн. $x:{}^1/_5=14:{}^7/_{10}$, адкуль $x=4$ пудам. Колькасьць пудоў другога гатунку, каторая абазначана цераз У, знойдзем таксама з прапорцыі— $У:{}^1/_2=14:{}^7/_{10}$, адкуль $y=10$ пуд.

Колькасьць пудоў другога гатунку можна знаходзіць таксама адыманьнем 4 пудоў ад ліку пудоў усяе мешаніны.

2-гі спосаб. Дзеля таго, што для складу мешаніны патрэбна на кожныя $^1/_5$ пуда 1-га гатунку ўзяць $^1/_2$ пуда 2-га гатунку, дык, абазначваючы шуканыя вялічыні X і У, будзем мець:

$$x : y = {}^1/_5 : {}^1/_2 = 2 : 5.$$

Значыцца, каб знайсьці x і y, трэба, на аснове правіла прапарцыянальнага дзяленьня, разьдзяліць 14 пудоў на 2 часткі, которыя адносіліся-б, як $^1/_5 : {}^1/_2 = 2 : 5$; зьлічво прапарцыянальных лікаў $2+5=7$.

$$\text{А таму: } x = \frac{14.2}{7} = 4 \text{ (пуд.)}, \; У = \frac{14.5}{7} = 10 \text{ (пуд.)}.$$

3-ці спосаб. 14 пудоў першага гатунку каштуюць $14 . 16 = 224$ р., 14 пуд. мешаніны каштуюць $14 . 11 = 154$ руб.; першы кошт перавыжае другі на 70 руб. Гэта розьніца дастаецца адтаго, што ў складаемую мешаніну ўваходзіць разам з першым гатункам і другі гатунак, пуд каторага каштуе на 7 руб. танeй за пуд першага гатунку; значыць, каб панізіць кошт першага гатунку на 70 руб., трэба замяніць столькі пудоў першага гатунку другім, колькі разоў ·7 паўтараецца ў 70, г. зн. 10 разоў. Затым лік пудоў першага гатунку знаходзім адлічаньнем 10 пудоў ад 14.

285. Калі ў задачах на мешаніну 2-га тыпу дадзена для зьмешваньня больш за два гатункі рэчаў, або калі няведама колькасьць тавару, каторы патрабуецца скласьці з двох гатункаў рэчаў, дык такія задачы наз. *неазначанымі*, (неабмяжованымі), дзеля таго, што дапушчаюць няскончанае мноства разьвязаньняў.

Задача 5. Патрабуецца зьмяшаць тры гатункі гарбаты: у 3 руб., у 2 руб. 90 коп. і ў 2 руб. 75 кап. хунт, такім чынам, каб было 33 хунты па 2 руб. 80 кап. за хунт. Колькі павінна ўзять гарбаты кожнага гатунку?

Калі гарбату 1-га гатунку будзем прадаваць па 2 руб. 80 кап. за хунт, дык будзем мець на кожным хунце 20 кап. страты; значыца на $^1/_{20}$ хунта прыдзецца 1 кап. страты; калі гарбату 2-га гатунцу будзем прадаваць па 2 руб. 80 кап. хунт, дык будзем мець на кожным хунце 10 кап. страты, значыцца, на $^1/_{10}$ хунта прыдзецца 1 кап. страты; калі-ж гарбату 3-га гатунку будзем прадаваць па 2 руб. 80 кап. за хунт; дык адтрымаем на кожным хунце 5 кап. прыбытку, значыцца на $^1/_5$ хунта адтрымаем 1 кап. прыбытку.

Такім чынам, каб знайсьці адносіны, у якіх можна мяшаць дадзеныя тры гатункі гарбаты, патрэбна параўняць прыбытак з стратаю.

Пакажам траякае разьвязаньне задачы:

1-е разьвязаньне. Калі зьмяшаць $^1/_{20}$ х. 1-га гатунку (—1 к.), $^1/_{10}$ хун. 2-га гатунку (—1 кап.) з $^2/_5$ хунта 3-га гатунку (+2 кап.), дык ня будзе ані прыбытку, ані страты. Значыцца, колькасьць гарбаты кожнага гатунку для складу 33 хунтаў мешаніны павінна быць ўзята ў адносінах $^1/_{20} : ^1/_{10} : ^2/_5 = 1 : 2 : 8$ (зьлічво прапарцыянальных лікаў—$1+2+8=11$).

А таму, абазначваючы шуканыя колькасьці x, y i z, будзем мець:

$$x=\frac{33.1}{11}=3 \text{ х.}; \; y=\frac{33.2}{11}=6 \text{ х.}; \; z=\frac{33.8}{11}=24 \text{ х.}$$

2-е разьвязаньне. Калі зьмяшаць $^1/_{20}$ хун. 1-га гатунку (—1 к.), $^1/_5$ хун. 2-га гатунку (—2 к.), з $^3/_5$ хунта 3-га гатунку (+3 к.), дык ня будзе ні прыбытку, ні страты. Значыцца, колькасьць гарбаты кожнага гатунку для складу 33 хунтаў мешаніны павінна быць узята ў адносінах $^1/_{20} : ^1/_5 : ^3/_5 = 1 : 4 : 12$ зьлічво прапарцыянальных лікаў$=17$).

А таму, абазначаючы шуканыя колькасьці праз X, У і Z будзем мець:

$$x=\frac{33.1}{17}=1\ ^{16}/_{17} \text{ х.}; \; y=\frac{33.4}{17}=7\ ^{13}/_{17} \text{ х}; \; z=\frac{33.12}{17}=23\ ^5/_{17} \text{ х.}$$

3-е разьвязаньне. Калі зьмяшаць $^1/_5$ х. 1-га гатунку (—4 к.), $^1/_{10}$ х. 2-га гатунку (—1 к.) з хунтам 3-га гатунку (+5 к.), дык ня будзе ні прыбытку, ні страты. Значыцца колькасьць гарбаты кожнага гатунку для складу 33 хунтаў мешаніны павінна быць узята ў адносінах $^1/_5 : ^1/_{10} : 1 = 2 : 1 : 10$ (зьлічво прапарцыянальных лікаў$=13$).

А таму, абазначваючы шуканыя колькасьці праз x, y і z будзем мець:

$$x=\frac{33.2}{13}=5\ ^1/_{13} \text{ х.}; \; y=\frac{33.1}{13}=2\ ^7/_{13} \text{ х.}; \; z=\frac{33.10}{13}=25\ ^5/_{13} \text{ х.}$$

286. Калі патрабуецца скласьці мешаніну, каторае адзінкавая цана выжэй за адзінкавую цану выжэйшага гатунку, або ніжэй за адзінкавую цану ніжэйшага гатунку, дык такая задача *немагчымая*; так, напрыклад, з золата 72 і 84 пробы нельга зрабіць сплава 90 або 56 пробы.

ДАДАТАК.

1. Розныя сыстэмы зьлічэньня.

Ведама, што ў дзесяцёрнае сыстэме зьлічаньня за аснову прыняты лік дзесяць, але за аснову можа быць прыняты і ўсякі другі лік, большы або меньшы за дзесяць. Значыцца, замест таго, каб ужываць дзесяць лічбін для напісаньня лікаў і дапушчаць, што адзінкі якога-небудзь парадку ў дзесяць разоў большыя за адзінку суседняга ніжэйшага парадку, можна ўзяць толькі дзьве, тры, чатыры і г. д. лічбіны і дапушчаць, што значэньне кожнае зьлева напісанае лічбіны павялічваецца ў 2, 3, 4 і г. д. разоў.

Сыстэма адтрымоўзае найменьне па ліку, прынятаму за аснову: яна наз. *двайчнаю, трайчнаю, чацьвярычнаю* і г. д., калі асновую ёе служаць лікі 2, 3, 4 і г. д.

Для напісаньня ўсіх лікаў пры двайчнае сыстэме трэба толькі 2 лічбіны—1 і 0, для трайчнае сыстэмы—1, 2, 0, для чацьвярычнае сыстэмы—1, 2, 3, 0 і г. д.; калі-ж аснова сыстэмы большая за 10, прыкладам 12, то лік істнуючых 10 знакаў, трэба павялічыць двома новымі (напр.: а і в) для напісаньня 10 і 11.

Ня цяжка паказаць, што пры якой хочаш сыстэме можна напісаць усемагчымыя лікі. Возьмем, напр., трайчную сыстэму, маючую толькі тры знакі: 1, 2, 0. Дзеля таго, што пры аснове 3 трэба значэньне кожнае зьлева напісанае лічбіны павялічыць утрое, дык на першым месцы павінны быць адзінкі першага парадку, на другім *тройкі*, або адзінкі 2-га парадку, на трэйцім *дзеяткі*, або адзінкі 3-га парадку, на чацьвёртым *двацацьсямёркі*, або адзінкі 4-га парадку і г. д. Такім чынам па гэтае сыстэме 10 азначае 3, 20—6, 100—9, 200—18, 1000—27 і г. д.

Першыя 20 лікаў пішуцца па трайчнае сыстэме гэтак:

1, 2, 10 [3], 11 [4], 12 [5], 20 [6], 21 [7], 22 [8], 100 [9], 101 [10], 102 [11], 110 [12], 111 [13], 112 [14], 120 [15], 121 [16], 122 [17], 200 [18], 201 [19], 202 [20].

Перавод ліку з дзесяцёрнае сыстэмы зьлічэньня у другую сыстэму.

Каб напісаць па другой сыстэме які-небудзь лік, напісаны па дзесяцёрнае сыстэме, павінна над дадзеным лікам зрабіць рад паступовых дзяленьня, на аснову жаданае сыстэмы да таго часу, пакуль у дзелі дастанецца лік меншы за дзельнік; тагды першая астача будзе лічбінаю адзінак першага парадку шуканага ліку, другая астача—лічбінаю адзінак другога парадку і г. д., а апошняя дзель—лічбінаю адзінак апошняга парадку.

Няхай, напрыклад патрабуецца лік 2783 напісаць па пяцёрнае сыстэме:

$$\begin{array}{rrrrr} 2783 & 5 & & & \\ 3 & 556 & 5 & & \\ & 1 & 111 & 5 & \\ & & 1 & 22 & 5 \\ & & & 2 & 4 \end{array}$$

Даведаемся, колькі ў ім ёсьць адзінак другога парадку, г. зн. пяцёрак. Разьдзяліўшы 2783 на 5, адрымаем у дзелі 556 і ў астачы 3. Дзель паказвае, што адзінак другога парадку ў шуканым ліку 556; астача 3 паказвае *лічбіну першага парадку*. Разьдзяліўшы 556 на 5, знаходзім, што ў дзелі, лік адзінак трэйцяга парадку і ў астачы *1—лічбіну другога парадку*. Разьдзяліўшы 111 на 5 знаходзім у дзелі 22 і ў астачы *1—лічбіну трэйцяга парадку*. Разьдзяліўшы 22 на 5 знаходзім у дзелі 4 і ў астачы *2—лічбіну чацьвёртага парадку*. Апошняя дзель 4, будучы меншая за 5, абазначыць *пятую* і апошнюю лічбіну шуканага ліку. Значыцца, лік 2783 па пяцёрнае сыстэме пішацца гэтак: 42113.

Няхай яшчэ патрабуецца напісаць 72347 па 12-рычнае сыстэме:

$$\begin{array}{rrrrr} 72347 & 12 & & & \\ 11 & 6028 & 12 & & \\ & 4 & 502 & 12 & \\ & & 10 & 41 & 12 \\ & & & 5 & 3 \end{array}$$

Абазначваючы 10 цераз *a*, а 11 цераз *в*, знаходзім, што дадзены лік трэба напісаць гэтак: 35 *a* 4 *в*.

Пераклад ліку, напісанага па другой сыстэме зьлічэньня ў дзесяцёрную.

Каб напісаць па дзесяцёрнае сыстэме які-небудзь лік, напісаны па другой сыстэме, павінна памножыць адзінкі найвыжэйшага парадку дадзенага ліку на аснову і да адтрыманага множыва дадаць адзінкі суседняга ніжэйшага парадку, знойдзенае зьлічво ізноў памножыць на аснову і да адтрыманага множыва дадаць адзінкі суседняга ніжэйшага парадку і г. д. Лік, адтрыманы ад дадаваньня лічбіны звычайных адзінак да знойдзенага ліку тых-жа адзінак, выразіць сабою дадзены лік па дзесяцёрнае сыстэме зьлічэньня.

Няхай, напрыклад патрабуецца перавесьці ў дзесяцёрную сыстэму лік 230432, напісаны па пяцярычнае сыстэме.

$$\begin{array}{r} 230432 \\ \times 5 \\ \hline 10 \\ +3 \\ \hline 13 \\ \times 5 \\ \hline 65 \\ \times 5 \\ \hline 325 \\ +4 \\ \hline 329 \\ \times 5 \\ \hline 1645 \\ +3 \\ \hline 1648 \\ \times 5 \\ \hline 8240 \\ +2 \\ \hline 8242 \end{array}$$

Дзеля таго, што ў гэтае сыстэме кожная адзінка вышэйшага парадку мае 5 адзінак бліжэйшага ніжэйшага парадку, дык памножыўшы на аснову лічбіну 2, которая стаіць у дадзеным ліку на шостым мейсцы, і дадаўшы да знойдзенага множыва лічбіну 3, которая стаіць на пятым мейсцы, адтрымаем 13 адзінак пятага парадку па пяцёрнае сыстэме; памножыўшы потым 13 на аснову адтрымаем 65 адзінак чацьвёртага парадку; памножыўшы затым 65 на аснову і дадаўшы да знойдзенага множыва 4, адтрымаем 329 адзінак трэйцяга парадку. Такім-жа чынам адтрымовываем 1648 адзінак другога парадку і, нарэшце, 8242 звычайныя адзінкі, г. зн. шуканы лік па дзесяцёрнае сыстэме.

II. Рымская нумэрацыя.

Лічбіны, каторыя ўжываюцца намі, наз. *арабскімі*; але ў некатарых выпадках ужываюцца таксама і рымскія лічбіны. Рымляне ўжывалі для абазначваньня лікаў толькі наступныя сем знакаў:

1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000.
I, V, X, L, C, D, M.

Пры абазначваньні лікаў падмогаю гэтых знакаў карыстаюцца наступнымі правіламі:

1) Калі лічбіна 1 пастаўлена пасьля V і X, дык значэньне апошніх павялічваецца на адзінку; калі-ж пастаўлена перад лічбінамі V і X, дык іх значэньне памяншаецца на адзінку. Так, VI абазначае 6, а IV—4; XI—11, а IX—9.

2) Гэтак-жа сама, калі лічбіна X пастаўлена пасьля лічбіны L і C, дык значэньне апошніх павялічваецца на дзесяць; калі-ж пастаўлена перад лічбінамі L і C, дык значэньне іх памяншаецца на дзесяць. Так, LX абазначае 60, а XL—40; CX—110, XC—90.

3) Роўным чынам, калі лічбіна C пастаўлена пасьля лічбіны D і M, дык значэньне апошніх павялічваецца на 100; калі-ж пастаўлена перад лічбінамі D і M, дык значэньне іх памяншаецца на 100. Так DC—600, а CD—400, MC—1100, CM—900

4) Знакі I, X і C могуць паўтарацца ня больш трох разоў зразу.

Пасьля гэтага нам будуць зразумелымі наступныя абазначэньні лікаў:

I=1, II=2, III=3, IV=4, V=5, VI=6, VII=7, VIII=8, IX=9, X=10. XI=11, XII=12, XIII=13, XIV=14, XV=15, XVI=16, XVII=17, XVIII=18, XIX=19, XX=20, XXI=21, XXIX=29, XXX=30; XL=40, XLII=42, LXXXIV=84, XC=90. XCVI=96, CCC=300, DC=600, DCCC=800, MDCCCXCIX=1899.

Лікі, складзеныя з некалькіх тысячаў, абазначваюцца як і лікі, складзеныя з некалькіх адзінак, толькі з правага боку, зьнізу ставяць літару «m» (mille); напрыклад IIm=3000, Lm=50000, CDVImCMXC=406990.

III. Прыклады і задачы для зразуменьня мэтрычнае сыстэмы мераў.

1. Колькі мэтраў у 37 мірыямэтрах? 11,5 кілёмэтра? у 12,4 гэктамэтра? у 25 гэктамэтрах?

2. Колькі дэцымэтраў у 15 мэтрах? у 3,7 дэкамэтра? у 4,85 гэктамэтра? у 57 кілёмэтрах? у 15 мірыямэтрах?

3. Колькі сантымэтраў і колькі мілімэтраў у 5 мэтрах? у 6,5 кілёмэтра? у 4.9 мэтра? у 15,04 дэкамэтра? у 3,75 гэктамэтра?

4. Зьвярнуць у мэтры: а) 50 дэцым., б) 700 сант., в) 8000 мілімэтра, г) 456 сантым., д) 5736 мілім.

5. Зьвярнуць у дэцымэтры і затым у сантымэтры: а) 357 мілімэтр., б) 5,36 мілімэтр., в) 345,03 мілімэтр.

6. Выразіць многа-іменным лікам: а) 20453 сантымэтры, б) 0,74 мэтра, в) 0,0534 мэтра.

7. 3657,0670 мілімэтр. зьвярнуць у меры вышэйшага найменьня.

8. Выразіць многа-іменным лікам: а) 5678,203 мэтра, б) 4032,120 сантым., в) 3405672 мілімэтры.

9. 5 дэкам. 3 мэтры 6 дэцымэтраў 7 мілім. прадставіць у выглядзе аднаіменнага ліку, выражанага: а) ў кілёмэтрах, б) ў дэкамэтрах, в) у мэтрах, г) ў дэцымэтрах, д) ў сантымэтрах, е) ў мілімэтрах.

10. Колькі квадр. сантымэтр. у 305 квадр. мэтрах? У 58 квадр. дэцымэтр?

11. Зьвярнуць у квадр. дэцымэтры 20 квадр. дэкамэтра, 7 квадр. мэтраў.

12. 506 квадр. сантымэтр. зьвярнуць: а) ў квадр. дэкамэтр, б) у квадр. мэтры.

13. Зьвярнуць квадр. мэтры: а) 5 гэктараў 6 араў, б) 15,14 ара, в) 4,467 ара.

14. Колькі араў і колькі гэктаара паўтараецца ў 58635,45 квадр. мэтра.

15. 35,65 куб. мэтра зьвярнуць у куб. дэцымэтры і ў куб. сантымэтры.

16. 56076896 куб. сантымэтраў зьвярнуць у куб. мэтры і куб. дэкамэтры.

17. 346250327 куб. мілімэтр. зьвярнуць у куб. дэцымэтры і ў куб. мэтры.

18. Перакласьці ў дэцылітры: а) 3,7 гэкталітры, б) 5 дэкалітраў, в) 6,07 літра.

19. 56740,8 сантылітра выразіць многа-іменным лікам.

20. Зьвярнуць у куб. дэцымэтры, а затым у куб. сантымэт.: а) 4 дэкалітры, б) 3 літры, в) 0,6 гэкталітра *).

21. 7,56 кілёграм. выразіць: а) ў дэкаграм., б) у грамах, в) у дэцыграмах, г) у сантыграм., д) ў мілiграм.

22. Зьвярнуць 57 дэцыграм.: а) ў грамы, б) у дэкаграм., в) у кілёграм.

23. 5076,128 грама выразіць многа-іменным лікам.

Адказ. 5 кілёграм. 7 дэкаграм. 6 грам. 1 дэцыграм 2 сантыгр. 8 мілiграм.

24. 4 кілёгрм. 15 дэкаграм. 6 грам. зьвярнуць: а) ў грамы, б) у дэкаграмы, в) у кілёграмы.

25. Знайсьці зьлічво: 6 мэтр. 36 сантымэт. 5 мілімэтр., 3 мэтры 8 дэцымэтраў 4 сантымэтр. 8 мілімэтр., 5 мэтр. 6 сантымэтраў.

Адказ. 1 дэкам. 5 мэтр. 2 дэцымэтр. 7 сантымэтр. 3 мілімэтр. =15,273 мэтра.

26. Выразіць у мэтрах і скласьці: 5608 кілёмэтр., 3705 гэктамэтр., 5600 дэкамэтр., 4735 дэцымэтр. 54304 сантымэтр., 250708 мілімэтр.

Адказ. 6035767,248 мэтр.

---

*) Літр—гэта зьмест, маючы 1000 куб. сантымэтраў.

27. Скласьці: 5 кілёграм. 43 дэкаграм., 4 грам. 8 дэцыграм, 12 кілёграм, 7 дэкаграм. 8 грам. 3 сантыграм., 15 кілёграм. 36 дэкаграм. 4 сантыграма.

Адказ. 32,87287 кілёграм.=32872,87 грама.

28. З 8 кілёмэтр. 3 дэкамэтр. 5 дэцымэтр. 6 сантымэтраў адлічыць 4 кілём. 7 дэкамэтр. 5 мэтр. 89 сантымэтр. і розьніцу выразіць у мэтрах.

Адказ. 3954,61 мэтра.

29. З 18 літраў адлічыць 5 літраў 7 дэцылітр. 6 сантыліт.

Адказ. 12 літр. 2 дэцылітр. 4 сантылітр.=12,24 літра.

30. Колькі трэба дадаць да зьлічва 5 дэкаграм. 7 дэцыгр. і 3,058 гэктаграм., каб адтрымаць 1 кілёграм?

Адказ: 0,6435 кілёграма.

31. Знайсьці множыва 5 кілёмэтраў, 6 дэкамэтр. 4 мэтр. 7 дэцымэтр. на 120.

Адказ: 607 кілёмэтр. 76 декамэтр. 4 мэтр.=607,764 км.

32. 6 кілёграм. 3 гэктар. 4 грам. 7 дэцыграм. павялічыць у 15 разоў.

Адказ: 94,5705 кілёграм.

33. 1 літр. сьпірту каштуе 5 франкаў 20 сантым. Колькі трэба заплаціць за 5 літраў 6 дэцылітр. сьпірту?

Адказ: 29 франкаў 12 сантым.

34. Знайсьці чацьвёртую частку 15 мэтраў 8 дэцымэтр. 5 сантымэтр. 6 мілім.

Адказ; 3,964 мэтра.

35. Калі на 13 франкаў можна купіць 2 мэтры сукна, дык колькі сукна можна купіць па 45 франкаў 50 сантым.?

Адказ: 7 мэтраў.

36. 58 кілёмэтр. 6 гэктамэтр. 4 мэтр. разьдзяліць на 25.

Адказ: 2 кілёмэтр. 34 дэкамэтр. 4 мэтр. 16 сантымэтр.

37. За 6 мэтр. 4 дэцымэтр. матэрыі заплачана 14 франкаў 40 сантым. Колькі каштуе 1 мэтр. матэрыі?

Адказ. 2 фран. 25 сантымаў.

38. У колькі разоў 27 кілёграм. 5 гэктагр. 8 дэкагр. 8 грам 6 дэцыгр. большыя за 3 кілёгр. 6 дэкагр 5 грам. 4 дэцыгр?

Адказ: У 9 разоў.

39. У колькі разоў 58 гэкталітр. 4 дэкалітр. 1 літр. 9 дэцылітр. 2 сантылітр. большыя за 7 гэкталітр. 3 дэкалітр. 2 дэцылітр. 4 сантылітр?

Адказ: У 8 разоў.

40. Адзін гандляр купіў у другога 35 мэтр. аксаміту па 28 франкаў 30 сантымаў за мэтр, у выплату грашыма даў 866 франкаў 75 сантымаў., а замест рэшты узяў—45 кілёграмаў кавы. У колькі цаніўся кілёграм кавы?

Адказ: У 2 фран. 75 сантымаў.

41. 3 кавалкі серабра у 34,56 кілёгр. майстар зрабіў лыжкі для гарбаты, вагаю кожная 57,6 дэкагр. і прадаў іх па 20 франк. 24 сантым. за кожны тузін. (12 шт.). Колькі ён адтрымаў грошаў?

Адказ: 101,2 франка.

42. 12 мэтраў матэрыі каштуюць 45 фран. Колькі матэрыі можна купіць за 101 фран. 25 сантым?

Адказ: 27 мэтраў.

43. За кавалак аксаміту ў 25,1 мэтра заплачана 552 фран. 20 сантымаў, а за другі кавалак такога-ж аксаміту заплачана 770 фран. Колькі мэтраў у 2-гім кавалку?

Адказ: 35 мэтраў.

44. Каб прайсьці дарогу паміж двома местамі за 3 гадз. 12 часін. падарожны павінен ісьці па 3 кілёмэтр. 7 гэктамэтр. 5 дэкамэтр. у адну гадзіну. Па колькі трэба яму ісьці ў 1 гадзіну, каб прайсьці гэтую дарогу ў 2,5 гадзіны?

Адказ: 4,8 кілёмэтра.

45. На абіўку падлогі патрабуецца 24 мэтры ліноляўму шырынёю ў 1,8 мэтра. Колькі трэба будзе ліноляўму шырынёю ў 1 мэтр. 5 дэцымэтраў?

Адказ: 28,8 мэтра.

46. Колькі патрабуецца цэглін для кладкі сьцяны, якая мае 15 мэтраў даўжыні, 3 мэтр. вышыні і 8 дэцымэтр, таўшчыні, калі кожная цэгліна мае 6 дэцымэтраў даўжыні, 4 дэцымэтр. шырыні і 2 дэцымэтр. таўшчыні?

Адказ: 750 цэглін.

47. Пасьля прадажы з склепа 3675 гэкталітр. віна выявілася, што астатняя колькасьць віна ў 6 разоў меншая прададзенага. Колькі віна было ў склепе да прадажы?

Адказ: 4287 гэкталітр. 5 дэкалітраў.

48. Зьмешана 3,5 кілёгр. тытуню па 18 фр. 40 сан. за кілёгр. з 6 кілёгр. 40 дэкагр. тытуню па 15 фр. 20 сант. за кілёгр. Па колькі трэба прадаваць адзін гэктагр. мешаніны, каб прадаўшы ўсю мешаніну, адтрымаць 36 фр. 32 сант. прыбытку?

Адказ: Па 2 франкі.

49. Колькі трэба даліць вады да 922,5 літр. сьпірту па 28 фр.

за дэкалітр, каб, прадаючы мешаніну па 25 фр. за дэкалітр., зарабіць па 25 сант. на кожны франк?

Адказ: 36,9 дэкалітра.

50. Клясны пакой мае ў даўжыню 9 мэтр., у шырыню 5 мэтр. і ў вышыню 6 мэтраў; у ім зьмяшчаецца 36 вучняў. Колькі куб. мэтр. паветра дастаецца на кожнага вучня?

Адказ: 7,5 куб. мэтр.

51 Выразіць звычайна ужыванымі ў нашым краі мерамі вагі: а) 12,5 кілёгр., б) 25 француск. цэнтнэраў, в) 28 франц. тон, г) 13,3 англ. цэнтнэра, д) 150 англ. тон., е) 7 нямец. центн.

52. Пераклясьці 15,25 расейск. хунта: а) ў кілёгр., б) у англ. хунты, в) у нямецк. хун.

53. Выразіць па мэтрычнае сыстэме вагу, роўную 1 пуду 4 хун. 48 зал.

Адказ. 18 кілёгр. 2 гэктагр. 4 дэк. 5 грам=18,245 кілёграма.

54. Зьвярнуць у мэтрычныя меры: а) 1 вярсту 100 саж. 4 стапы 5 цаляў; б) 350 саж. 2 арш. 6 вярш.

55. Выразіць мэтрычнымі мерамі паверхню, роўную 2 кв. саж. 4,3 кв. арш.

Адказ. 11,263 кв. мэтра.

56. 19,62 гэктаара зьвярнуць у дзесяціны.

Адказ. 18 дзесяцінаў.

57. Пераклясьці ў звычайныя меры зьмест, роўны 10,44 куб. мэтр.

Адказ. 5 куб. саж. 2 куб. арш.

58. Вядро=12,30 літра. Колькі літраў зьмяшчае ў сабе басэйн, зьмяшчаючы 480 вёдраў вады?

Адказ. 590,4 дэкалітра.

59. Грам.=вагі аднаго куб. сантымэтра чыстае вады. Выразіць у звычайных мерах вагу 2,3 літра вады, ведаючы, што, літр мае 1000 куб. сантымэтраў.

Адказ 5 хун. 14 лот. 24 залатнікі.

аб забяспечэньні ад псуты дарожных, тэлеграфных, тэлефонных устройствау.

1904-

Дзеля астатніх выпадкау злослівай псуты залезнадарожных і тэ-лефонных устройствау, на падставе „прыказу Глаунай Каманды … П. № 4601/III р. л. 1 лістападу 1919 г., прыказу Каманды фронт… Л.-Б. ад 16 ліпня 1919 г. № 30 і прыказу Начальніка Камандуючаго… апавешчанаго у прыказе № 9 Каманды фронту Л.-Б. ад 25 лютаг… 1920 г. **распараджаюся:**

1. Асобы, вінаўные у прычыненьні шкоды устройствам дарожным (залезным дарогам, мастам і т. п.), тэлеграфным і тэлефонным, — па… лягаюць ваенным палявым судам і **будуць караны кара… сьмерці.**

2. Усе вескі і гміны на абшары падлягаючых мне войск абав… вязваюцца **паставіць варту** дзеля пастаяннаго догляду выж… памененых устройствау, гэта значыцца, лінію і мастоу залезнадарож… ных і шасейных, каторые знаходзяцца на абшары гэтай гміны.

3. За целасць і ненарушальнасць выжэй памененых прылад адпа… вядаюць **войты або старосты і жыхары** прылягаючых гмін (весак).

4. У выпадку не абнаружэньня галоуных злачынцау будуць ка… раца вескі (мястэчкі) у акрузе каторых атрымалася псута, вызначэн… нем **кантрыбуцыі.**

5. Вескі і іншые мясцовасці, каторые дапусцяць **сумысьльна… скрыцьце** асоб, вінаўных у вышэйпамененых злачынствах, падпада… юць пад **найцяжэйшые кары,** прадвіджаные правам ваенным.

Шептыцкі.

Генерал Броні
і Камандір

Кватэра, 14/IV 1920 г.
№ 390/V.